

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS
Departamento de Estadística e Investigación Operativa I



**REDES SOCIALES Y DE COMUNICACIÓN: UN
ENFOQUE DESDE LA TEORÍA DE JUEGOS.**

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR
PRESENTADA POR

Mónica del Pozo Juan

Bajo la dirección de los doctores

Conrado M. Manuel García
Enrique González Arangüena

Madrid, 2011

ISBN: 978-84-694-2814-6

© Mónica del Pozo Juan, 2010

Universidad Complutense de Madrid

Facultad de Ciencias Matemáticas

Departamento de Estadística e Investigación Operativa I



Redes Sociales y de Comunicación. Un Enfoque desde la Teoría de Juegos.

Mónica del Pozo Juan.

*Memoria para optar al grado de Doctor en Ciencias Matemáticas,
realizada bajo la dirección de los doctores D. Conrado M. Manuel García y D. Enrique
González Arangüena.*

Madrid, Junio de 2010.

Agradecimientos

Como casi todas las tesis doctorales ésta es fruto del trabajo de un equipo. Son muchas las personas que, de algún modo, han participado en la realización de esta Memoria, y a las que no quiero olvidar en estos agradecimientos.

En primer lugar, quiero expresar mi gratitud a los Profesores Conrado M. Manuel García y Enrique González Arangüena por su dedicación en la dirección de este trabajo y por su continuo apoyo en la elaboración y redacción de esta Memoria. Y por su amistad.

A continuación, al Profesor Guillermo Owen, quien nos inició en el terreno de los juegos con restricciones en las comunicaciones y que en todas sus visitas nos ayudó y animó a continuar con nuestro trabajo.

Y a los restantes coautores de los diferentes trabajos en los que se basa esta Memoria, los Profesores Daniel Gómez, Martha Saboyá y Juan Tejada.

También me gustaría expresar mi gratitud a mis antiguos compañeros de la Escuela Universitaria de Estadística de la Universidad Complutense de Madrid. Muy especialmente, además de los ya citados, a Magdalena Ferrán y Javier Castro por su apoyo.

Y, como no, a mi familia, en especial a mis padres, Martín y Carmen, a quienes dedico esta Memoria, y sin cuyo apoyo en todos los aspectos de mi vida este trabajo no habría visto la luz.

Y a Roberto y Mario por el tiempo robado.

Índice general

1. Centralidad y cohesividad en redes sociales	1
1.1. La Centralidad como concepto sociológico	3
1.2. La cohesividad en redes sociales	7
2. Preliminares	10
2.1. Juegos cooperativos n personales	10
2.2. Juegos cooperativos generalizados	18
2.3. Redes sociales o económicas	22
2.4. Situaciones de comunicación	26
2.5. Reglas de asignación para situaciones de comunicación	27
2.6. Situaciones de comunicación dirigida	31
3. Medidas de centralidad en redes sociales. Una aproximación desde la Teoría de Juegos	36
3.1. Introducción	36
3.2. Una nueva familia de medidas de centralidad	36
3.3. Propiedades de las medidas definidas	39
3.4. Cálculo de la medida de centralidad	49
3.5. Ejemplos	52
3.6. Una descomposición de la medida de centralidad	60
3.7. Las medidas definidas versus las preexistentes	63
3.7.1. Sobre las trayectorias consideradas	63

3.7.2. Comparando propiedades	65
3.7.3. Un caso especial: los árboles	67
4. Ruptura de la red social para calcular centralidades	68
4.1. Fragmentando grafos para simplificar el cálculo de la centralidad	68
4.2. Ejemplo: Las familias florentinas de Padgett	73
5. Una familia de medidas de centralidad en redes sociales dirigidas	77
5.1. Introducción	77
5.2. Definición y propiedades	78
5.3. Una descomposición de las medidas de centralidad	92
5.4. Un ejemplo: Centralidad de los jugadores en un modelo de fútbol simplificado . .	99
6. Una familia de medidas de cohesividad basada en conceptos juego-teóricos	108
6.1. Cohesividad de grupos en una red social	109
6.2. Propiedades de la medida de cohesividad	112
6.3. Observaciones	117
6.4. Cohesividad de grupos en el ejemplo de las familias florentinas	120
7. Conclusiones y futuras líneas de investigación	125

Capítulo 1

Centralidad y cohesividad en redes sociales

Podemos definir genéricamente una red como un conjunto de actores (nodos) que mantienen ciertas conexiones entre ellos. Ejemplos de redes encontramos en muchas esferas de nuestra vida diaria: las redes sociales de última generación (tuenti, facebook,...), Internet, las relaciones entre los consejos de administración de diferentes empresas, las citas de los autores en revistas científicas, la red de difusión de virus como el VIH, las rutas aéreas, las redes neuronales o el sistema de proteínas de un organismo.

El estudio de las redes ha sido tradicionalmente un tópico relevante en múltiples disciplinas y específicamente dentro de las ciencias sociales. En la última década se ha convertido, sin duda, en uno de los temas que más investigadores ha atraído.

Es posible distinguir varios tipos de redes en función de la naturaleza de sus nodos y del tipo de relaciones entre ellos:

- Redes sociales. Una red social es un conjunto de personas o grupos con una estructura de relaciones o interacciones entre ellos. Desde los años treinta, los sociólogos tienen en cuenta este tipo de estructuras para comprender el funcionamiento de la sociedad. En el contexto sociológico los estudios típicos se dirigen a definir, analizar y medir variables como la **centralidad** de los individuos (quiénes son más importantes, están mejor conectados con otros o tienen mayor poder), la **centralización** (distribución de la centralidad), o la **cohesividad** de grupos (tendencia de sus miembros a mantenerse unidos persiguiendo ciertas metas o, también, resistencia del grupo a romperse).

- Redes de información. La red de información más importante hoy en día es la World Wide Web, que es la red de páginas web. Estas páginas contienen información de diferentes tipos y están unidas por enlaces. El traslado a este contexto de conceptos y soluciones de la teoría clásica de redes sociales ha dado lugar a uno de los mayores éxitos tecnológicos y empresariales: el buscador Google. Otro ejemplo, la red de citas entre artículos académicos. Aquí los arcos son dirigidos y no hay ciclos, ya que es imposible citar artículos aún no escritos.
- Redes tecnológicas. Son redes diseñadas para distribuir algún recurso: la red eléctrica, la telefónica, Internet, las rutas aéreas, etc.
- Redes biológicas. En este campo encontramos ejemplos de redes de neuronas, de proteínas, etc.

A pesar de tanta variabilidad en los diferentes tipos de redes, existen ciertas propiedades transversales a la mayoría de ellas. Newman (2003) hace referencia a algunas:

- El Efecto Pequeño Mundo. La trayectoria o trayectorias geodésicas que unen dos nodos en una red son, en general, de escasa longitud. Como consecuencia la transmisión de información es rápida, una persona puede conectarse con muchas sin necesidad de apoyarse en más de 5 ó 6 intermediarios en cada ocasión, y es factible llegar de una punta a otra del globo con a lo más 2 ó 3 escalas aéreas.
- Transitividad o formación de clusters o bloques. En la mayoría de redes se observa que si el nodo A está unido con el B y éste con el C, entonces existe una probabilidad alta de que A esté conectado con C. Es decir, los amigos de mis amigos son mis amigos.
- Distribuciones del grado. Si se considera la distribución del grado de los nodos puede comprobarse empíricamente que, en la mayor parte de las redes, dicha distribución tiene una larga cola derecha de valores que están muy por encima de la media.
- Resistencia de las redes a romperse. Si se eliminan nodos de una red la longitud de los caminos de conexión entre nodos aumenta, pudiendo llegar a desconectar nodos previamente conectados y crear nuevas componentes conexas. En algunos contextos el análisis de esta resistencia puede ser de vital importancia. Por ejemplo, en epidemiología, donde la eliminación de nodos se asocia con la vacunación de individuos contra una enfermedad.

- Diferentes tipos de nodos. Es frecuente la existencia de diferentes tipos de nodos en una red y las probabilidades de conexión entre ellos dependen a menudo de dichos tipos. Por ejemplo, en una red en la que se representa qué especies se alimentan de otras en un ecosistema, inmediatamente se distinguen plantas, herbívoros y carnívoros. Muchas aristas relacionan plantas y herbívoros y, también, herbívoros y carnívoros, pero pocas relacionan herbívoros con otros herbívoros y carnívoros con plantas. En Internet se distinguen los nodos correspondientes a los proveedores, los consumidores y los de las ISP que unen a unos con otros. En las redes sociales este tipo de comportamiento selectivo se conoce como homofilia conductual.

En esta Memoria nos proponemos llevar a cabo una aproximación a las medidas de centralidad de individuos y de cohesividad de grupos en redes sociales y de comunicación desde la Teoría de Juegos. Sin embargo, existe una extensa literatura sobre estos tópicos surgida, como ya se ha dicho, en la esfera de las ciencias sociales.

1.1. La Centralidad como concepto sociológico

La idea de centralidad aplicada a las redes de comunicación humana aparece inicialmente en un trabajo de Bavelas (1948), en el que se muestra el interés por la comunicación en grupos pequeños. Las primeras investigaciones empíricas fueron llevadas a cabo por el propio Bavelas en el M.I.T. a finales de los años 40. En estos trabajos se concluyó que la centralidad estaba relacionada con la eficiencia del grupo a la hora de resolver problemas, con la percepción del liderazgo y con la satisfacción personal de los miembros del grupo.

Desde entonces se ha escrito mucho sobre centralidad en redes sociales, pero sin llegar a una definición clara del concepto, y sin una formalización matemática unívoca para su cálculo. Todos los investigadores en redes sociales aceptan que la centralidad está fuertemente relacionada con otras propiedades de los nodos como, por ejemplo, el poder. Pero aquí acaba el consenso. No hay unanimidad sobre lo que es exactamente la centralidad o sobre cuáles son sus bases conceptuales, y existe muy poco acuerdo sobre el procedimiento más adecuado para medirla.

A lo largo del tiempo se han propuesto diferentes medidas de centralidad. El desarrollo de éstas debería haber ayudado a clarificar el concepto, especificando sus componentes y las relaciones entre los mismos. Sin embargo, parece haberse producido el efecto contrario.

Las diversas medidas están a menudo relacionadas sólo de una manera muy vaga con las ideas intuitivas que pretenden reflejar, y muchas de ellas son tan complejas que es difícil descubrir qué están midiendo realmente.

Con frecuencia, la centralidad se ha definido de una manera indirecta. Por ejemplo, diremos que un individuo es central en una red social si:

- (i) puede comunicarse directamente con muchos actores, ó
- (ii) está cerca de muchos de los otros nodos de esa red, ó
- (iii) hay muchas parejas de individuos que lo necesitan (o pueden necesitarlo) para establecer una comunicación entre ellos.

Estas ideas están reflejadas en las diferentes medidas de centralidad que se han introducido en la literatura sobre redes sociales.

Un ejemplo ilustrativo, en el que pueden valorarse las tres facetas de la centralidad mencionadas, es el centro de una estrella (Figura 1.1). Tal nodo posee tres propiedades estructurales distintas que sólo se encuentran (simultáneamente) en esta posición:

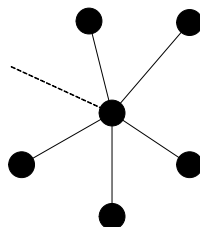


Figura 1.1: Estrella

- Máximo grado posible, i.e., el centro puede comunicarse directamente con todos los restantes actores.
- Estar lo más cerca posible de todos los demás nodos.
- Intermediar en la conexión de cualquier pareja de nodos.

Dado que éstas son propiedades estructurales del centro de una estrella, nodo al que se le atribuiría intuitivamente mucha centralidad, compiten entre ellas por ser la base sobre la que se sustenta la definición. Muchas de las medidas clásicas se apoyan directa

o indirectamente en una u otra de estas propiedades, así como en la idea de camino geodésico. Dentro de una red, un camino geodésico entre dos nodos es aquél que los conecta utilizando el menor número posible de aristas. En Freeman (1979) se resumen tales medidas:

(i) **Centralidad por grado** (*degree centrality*) (Shaw, 1954; Nieminen, 1974). Esta aproximación identifica la idea de centralidad con el grado de un nodo, es decir, el número de aristas incidentes en él. La centralidad por grado fija su atención en el nivel de actividad en la comunicación. Cuanta mayor capacidad para comunicarse directamente con otros nodos, mayor centralidad.

Por ejemplo, el centro de la estrella en la Figura 1.1 tendrá el mayor nivel de comunicación directa con el resto de nodos y, en consecuencia, será el nodo con mayor centralidad. Utilizando la propia notación de Freeman, se define la centralidad por grado de un nodo p_k como:

$$C_D(p_k) = \sum_{i=1}^n a(p_i, p_k),$$

donde

$$a(p_i, p_k) = \begin{cases} 1 & \text{si existe una arista entre } p_i \text{ y } p_k \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

(ii) **Centralidad por proximidad**, (*closeness centrality*) (Beauchamp, 1965; Sabidussi, 1966). Otra razón que hace que el centro de la estrella sea más central que otros nodos es el hecho de que es el que más cerca está de todos los restantes. Esta aproximación considera la suma de distancias geodésicas entre un nodo dado y el resto como medida de descentralidad, en el sentido de que, cuanto menor sea esa suma, mayor será la centralidad,

$$C_C(p_k)^{-1} = \sum_{i=1}^n d(p_i, p_k),$$

donde $d(p_i, p_k)$ cuenta el número de aristas de la geodésica o geodésicas que unen los nodos p_i y p_k .

La centralidad por proximidad es una medida de la independencia en las comunicaciones, de la posibilidad de comunicarse utilizando un menor número de intermediarios. En este sentido, la centralidad por grado podría considerarse como un caso particular de esta medida.

(iii) **Centralidad por intermediación**, (*betweenness centrality*) (Bavelas, 1948 y Freeman, 1977). Una tercera razón para considerar que el centro de la estrella tiene ventaja sobre el resto de nodos es que sus conexiones con los restantes nodos hacen que éstos puedan comunicarse entre ellos utilizándolo como intermediario. En la estrella, el nodo central es el único que tiene esta propiedad.

La medida de centralidad por intermediación de un nodo dado se obtiene a partir del número de trayectorias geodésicas en las que interviene:

$$C_B(p_k) = \sum_{i < j}^n I_{ij}(p_k),$$

donde $I_{ij}(p_k) = \frac{g_{ij}(p_k)}{g_{ij}}$, siendo $g_{ij}(p_k)$ el número de geodésicas entre los nodos i y j en las que interviene p_k , y g_{ij} el número total de caminos geodésicos entre i y j .

Borgatti y Everett (2006) hacen una revisión de otras medidas de centralidad clasificándolas en medidas de proximidad o de intermediación.

Una aproximación diferente al concepto de centralidad, que no hace uso sólo de caminos geodésicos, es la que introdujeron Stephenson y Zelen (1989). Proponen una medida basada en el concepto de información, tal y como se define en la teoría de la estimación estadística. Para cada nodo, la medida es una media ponderada de las longitudes de todos los caminos entre ese nodo y los restantes, en la que los pesos dependen de la información contenida en cada camino.

Otro concepto de centralidad se nos ofrece en el trabajo de Bonacich (1972). Éste propone como medida de centralidad el vector propio correspondiente al autovalor dominante de la matriz de adyacencia del grafo que representa la red social. En esta medida está basado el algoritmo PageRank que utiliza Google para ordenar las páginas Web.

Asociado al concepto de centralidad de un nodo en una red social aparece el de poder. Algunos autores identifican la idea de poder con la de centralidad. Otros consideran que, aún existiendo relaciones, los dos conceptos corresponden a ideas diferentes.

Diversos trabajos reflejan esta controversia:

All sociologists agree that power is a fundamental property of social structure but, there is much less agreement about what power is. (Hanneman, 1999)

Despite the once wide acceptance of the link between centrality and power, the extent to which both concepts are related is now an issue of intense controversy. (Mizruchi y Potts, 1998).

En 1987, Bonacich introdujo una modificación de su medida de centralidad en la que trata de tener en cuenta la relación entre poder y centralidad¹. La aproximación juego-teórica al concepto de centralidad que proponemos en esta Memoria relaciona también la centralidad con el poder.

Casi todas las medidas de centralidad en redes sociales se refieren a grafos no dirigidos. Wasserman y Faust (1994) hacen una revisión de las medidas de centralidad por grado, proximidad e intermediación adaptadas al caso dirigido.

1.2. La cohesividad en redes sociales

Otro aspecto relevante en el análisis de redes sociales es la identificación de subgrupos cohesivos dentro de una red. El concepto de cohesividad, de nuevo, es esquivo y con frecuencia se define de manera indirecta. Así, se dice que un grupo es cohesivo cuando sus miembros poseen contactos entre ellos que hacen que tienda a mantenerse unido. Desde este punto de vista, en un grupo cohesivo, los individuos tendrán relaciones fuertes, directas y frecuentes.

White y Harari (2001) distinguen dos aspectos en la forma de relacionarse los miembros de un grupo que pueden ayudar a mantenerlo unido. Llamamos cohesión a la “*contribution made by (adding or subtracting) individual members of a group, together with their ties, to holding it together*”, y llamamos adhesión a la “*contribution made to holding a group together -keeping membership constant- by (adding or subtracting) ties between its members*” (pp. 306-307).

Otros aspectos de la cohesividad están recogidos en la literatura como “*the resistance of a group to disruptive forces*” (Gross y Martin 1952; p. 553), o “*the tendency of a group*

¹Bonacich es el primero en plantearse que la diferencia entre poder y centralidad puede ser algo más que un matiz de interpretación. Para ilustrar las diferencias entre ambos conceptos, propone un ejemplo en el que centralidad y poder pueden llegar a ser antagónicos. Supongamos que dos individuos A y B tienen 5 amigos íntimos. Sin embargo, los amigos de A no tienen más amistades fuera del ámbito de A mientras que los de B, a su vez, tienen otros grupos de amigos. Para Bonacich es claro que el individuo B es más central que el A, pero se cuestiona la idea de si, en esta situación, deberían considerarse conceptos paralelos la centralidad y el poder. Argumenta que estar conectado a otros actores a su vez conectados con terceros actores hace que el individuo B pierda poder, en el sentido de que es menos necesario para la estabilidad de la red social; sin embargo, en la situación de A, éste será muy poderoso, ya que todos dependen de él.

to stick together and remain united in pursuit of its goals and objectives” (Carron 1982; p.124).

Con el objetivo de identificar subgrupos cohesivos en una red, los analistas de redes sociales han propuesto varios tipos de medidas de cohesión. Algunas de ellas hacen uso del concepto de conectividad de un grafo. White y Harary (2001) utilizan el concepto de *node-connectivity*, y Wasserman y Faust (1994) toman de Harary (1969) el concepto de *line-connectivity* o *edge-connectivity*. Ambas medidas describen la conectividad de un grafo basándose en la eliminación de nodos (la primera) o aristas (la última).

Otras medidas de cohesión utilizan el concepto de densidad de un grafo. Si una red social tiene n nodos y l aristas, su densidad es simplemente la proporción del número de aristas existentes respecto del número total posible. Estas aproximaciones utilizan entonces la densidad relativa de cada grupo de nodos para intentar identificar grupos sociales cohesivos.

Basándose en los conceptos de conectividad y densidad (condicional), White y Harary (2001) proponen su *Scalable Aggregate Measure of Cohesion*.

La redundancia en la comunicación es otro aspecto muy relacionado con la cohesividad. Internet es un ejemplo de un tipo de red en el que las redundancias facilitan la transmisión. La cohesión fue el objetivo de la transmisión por paquetes conmutados diseñada a través de múltiples caminos. Si el sistema hubiera sido diseñado alrededor de un *hub* central único, resultaría más vulnerable a posibles ataques.

A partir de esta idea de la relación entre cohesión y redundancia en las comunicaciones, Alba (1973) presenta un modelo probabilístico para su medida. Utiliza la función de probabilidad hipergeométrica para calcular la probabilidad de observar exactamente l' aristas en un subgrafo tomado de un grafo con n nodos y l aristas.

Todos estos conceptos previos aparecen en la aproximación que presentamos en esta Memoria que está basada en dos ideas principales:

(i) Parafraseando a Carron (1982), consideramos que el objetivo de un grupo (sus intereses) debe determinar su tendencia a permanecer unido. Por ejemplo, una particular especificación de los intereses u objetivos puede hacer al grupo en γ^1 más cohesivo que el grupo en γ^2 (Figura 1.2) o viceversa.

En nuestra aproximación, estos intereses comunes se reflejan utilizando un juego coalicional.

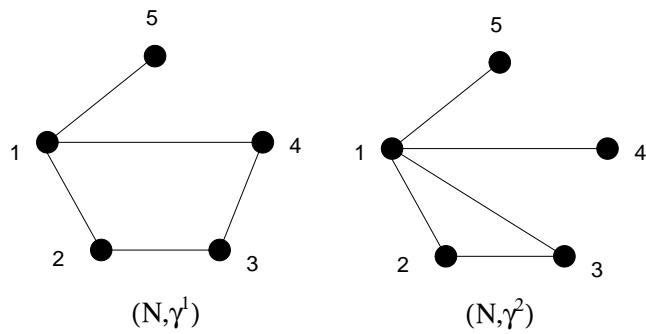


Figura 1.2: Cohesividad

(ii) Por otra parte, usaremos un marco probabilístico para considerar la contribución de la densidad de un grafo a su cohesión, involucrando el impacto esperado al eliminar un arco.

A partir de ambas ideas (el juego y el entorno probabilístico) definiremos una familia de medidas de cohesión. Dada una red social y un juego v , que refleja el interés de los individuos en permanecer unidos, definiremos la cohesividad de un grupo de nodos como la proporción de su riqueza que son capaces de conservar cuando sus relaciones pasan de determinísticas a aleatorias, pudiendo éstas mantenerse o desaparecer con igual probabilidad.

Como veremos, estas medidas tienen en cuenta también la redundancia en las comunicaciones, y satisfacen, para cierta clase de juegos, las propiedades más relevantes que debe cumplir una medida de cohesividad.

Capítulo 2

Preliminares

En este capítulo se presentan aquellas definiciones y resultados propios de la Teoría de Juegos o de la Teoría de Grafos que se utilizarán a lo largo de esta Memoria: juegos cooperativos en forma de función característica, índices de poder, grafos, grafos probabilísticos y digrafos, así como las situaciones de comunicación que sirven como modelo para los juegos cooperativos con restricciones en la comunicación. Además, se introducen algunas reglas de reparto para diferentes situaciones de comunicación: el valor de Myerson, el valor posicional y el valor probabilístico en el caso no dirigido, y el valor de Shapley o de Banzhaf para juegos con estructura de permisos, la β -medida o la accesibilidad en el caso dirigido.

2.1. Juegos cooperativos n personales

La teoría de juegos fue iniciada por John von Neumann en 1928. Sus aproximaciones a los problemas de cooperación y competición se redescubrieron en 1944 cuando von Neumann y el economista Oskar Morgenstern escriben un tratado titulado *Theory of Games and Economic Behaviour*. En él introdujeron el concepto de juego cooperativo n -personal y algunas ideas relacionadas con posibles conceptos de solución para tales juegos. En particular, un juego cooperativo fue definido como el modelo de un conflicto en el que los jugadores o actores que intervienen (personas, instituciones, empresas, etc.) persiguen alcanzar un determinado objetivo (ganar una votación, buscar mayores beneficios empresariales, mejorar una gestión, etc) mediante la colaboración entre ellos.

A diferencia de los denominados juegos competitivos o no cooperativos, en los que desempeñan un papel primordial las estrategias de las que disponen los jugadores así como la función de pago (que depende de las diferentes estrategias que se empleen), la aproximación introducida por los mencionados autores para el caso cooperativo ignora los aspectos relacionales de los jugadores y se centra en el resultado económico que cada posible coalición obtendrá en caso de formarse. Supusieron además que tal pago es completamente divisible y transferible de unos jugadores a otros. Esto motiva que los juegos cooperativos se denominen, también, juegos de utilidad transferible o juegos TU.

Formalmente podemos definir un juego cooperativo n-personal en forma de función característica como sigue.

Definición 2.1.1 *Un juego n-personal en forma de función característica, o juego TU, viene dado por un par (N, v) , siendo $N = \{1, \dots, n\}$ un conjunto finito de jugadores y v , la función característica, una función real definida sobre 2^N , que satisface $v(\emptyset) = 0$.*

Para cada subconjunto S (coalición) de N , $v(S)$ expresa la ganancia alcanzable por dicha coalición si sus miembros cooperan. Cuando no exista ambigüedad sobre N , identificaremos el juego (N, v) con su función característica v .

Si $v(N) = \sum_{i \in N} v(\{i\})$, el juego es, en la práctica, no cooperativo, dado que los jugadores no encuentran ningún incentivo en la cooperación. Este tipo de juegos se llama inesencial. En lo que sigue, esta Memoria se centrará en los juegos esenciales.

Ejemplo 2.1.1 *En un parlamento democrático constituido por 350 diputados con derecho a voto, las decisiones se adoptan mediante el voto favorable de la mayoría absoluta de sus miembros. En esta situación, el juego se representa por $N = \{1, 2, \dots, 350\}$ y su función característica $v : 2^N \rightarrow \mathbb{R}$ viene dada, para cada $S \subset N$ por:*

$$v(S) = \begin{cases} 1 & \text{si } |S| \geq 176 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Aquí, los valores 1 y 0 reflejan, respectivamente, si una coalición de jugadores es ganadora o perdedora.

Los juegos cooperativos n-personales con la suma y el producto por escalares como leyes de composición interna y externa respectivamente, tienen estructura de espacio vectorial real. Notaremos G^N dicho espacio. Su dimensión es $2^n - 1$. Una base que utilizaremos con frecuencia es la de unanimidad.

Definición 2.1.2 Para cada coalición no vacía dada $S \subset N$, definimos el juego de unanimidad (N, u_S) como aquél con función característica:

$$u_S(T) = \begin{cases} 1 & \text{si } S \subset T \\ 0 & \text{si } S \not\subset T. \end{cases}$$

Para escribir cualquier juego en términos de esta base necesitaremos conocer sus coordenadas en ella.

Definición 2.1.3 Dado un juego (N, v) , sus coordenadas en la base de unanimidad se conocen como dividendos, o coeficientes, de Harsanyi (Harsanyi, 1963). Serán notados $\{\Delta_v(S)\}_{\emptyset \neq S \subset N}$, con:

$$\Delta_v(S) = \sum_{T \subset S} (-1)^{s-t} v(T), \quad (2.1)$$

siendo s y t los cardinales de S y T respectivamente¹.

Los dividendos están relacionados con los valores de las coaliciones y recíprocamente. En particular, para cada $S \subset N$,

$$v(S) = \sum_{T \subset S} \Delta_v(T). \quad (2.2)$$

Nos serán útiles también la base canónica y la base de los juegos de los gastos generales (*pure overhead games*).

Definición 2.1.4 Dada una coalición no vacía $S \subset N$ se define el juego dual de (N, u_S) como aquél con función característica u_S^* definida por:

$$u_S^*(T) = \begin{cases} 1 & \text{para todo } T \subset N \text{ con } T \cap S \neq \emptyset \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Al juego u_S^* se le llama *juego de representación* de la coalición S . El juego $-u_S^*$ se suele interpretar como un juego de coste, donde $u_S^*(T)$ sería el coste en el que incurre la coalición T , que es unitario siempre que algún miembro de S pertenezca a T .

¹La notación $s = |S|$, que por otro lado es estándar, se mantendrá en el resto de esta Memoria.

Siguiendo a Owen (1986), para cada $S \subset N$ con $S \neq \emptyset$, llamaremos al juego $p_S = -u_S^*$ el *juego de los gastos generales* sobre S . Obviamente, la familia $\{p_S\}_{\emptyset \neq S \subset N}$ es también una base de G^N .

Si dado $(N, v) \in G^N$, nos centramos en el valor de las subcoaliciones de un conjunto de jugadores S de N , podemos definir el juego v restringido a S .

Definición 2.1.5 *Dada una coalición no vacía $S \subset N$ y un juego $(N, v) \in G^N$, se define el juego restringido a S , $(S, v|_S)$, como aquél cuya función característica satisface:*

$$v|_S(T) = v(T), \quad T \subset S.$$

Basándonos en propiedades particulares de la función característica de un juego cooperativo es posible considerar diferentes familias de juegos. Entre ellas, las que se definen a continuación.

Definición 2.1.6 *(N, v) es un juego simétrico si, para toda coalición $S \subset N$, $v(S)$ depende sólo de s . En tal caso, identificaremos $v(S)$ con $v(s)$.*

Así, (N, v) será un juego simétrico si asigna el mismo valor a todas las coaliciones con el mismo número de jugadores. Por tanto, todos los jugadores participan en el juego en igualdad de condiciones y son intercambiables. Notaremos \mathcal{S}^N el subespacio de G^N formado por los juegos simétricos. El juego del Ejemplo 2.1.1, además de simple es, obviamente, simétrico.

Si (N, v) es un juego simétrico, por (2.1) los dividendos de una coalición sólo dependen del tamaño de ésta. En tal caso, utilizaremos indistintamente $\Delta_v(S)$ ó $\Delta_v(s)$.

Definición 2.1.7 *(N, v) es un juego monótono si $v(S) \leq v(T)$ para todo $S \subset T \subset N$.*

Ejemplo 2.1.2 *El juego simétrico del ejemplo 2.1.1 es trivialmente monótono. Sin embargo, podemos definir un juego simétrico (N, v) que no satisfaga la condición de monotonía:*

$$v(S) = \begin{cases} 1 & \text{si } s \text{ impar} \\ 2 & \text{si } s \text{ par.} \end{cases}$$

En este caso todas las coaliciones de tamaño 2 incluidas en una coalición de tamaño 3 tienen un valor mayor que el de ésta.

Definición 2.1.8 (N, v) es un juego superaditivo si, para todo par de coaliciones disjuntas S y T de N , se tiene que:

$$v(S \cup T) \geq v(S) + v(T).$$

Es decir, un juego será superaditivo si al unirse dos coaliciones disjuntas consiguen al menos la suma de lo que obtendrían por separado. Por tanto, los juegos superaditivos incentivan la cooperación entre los jugadores.

Notaremos \mathcal{A}^N la clase de juegos superaditivos con conjunto de jugadores N .

Por otra parte, es trivial comprobar que, si un juego toma valores no negativos, la condición de superaditividad implica la de monotonía.

El juego del Ejemplo 2.1.1 es superaditivo y el del Ejemplo 2.1.2, que no era monótono, tampoco es superaditivo. Sin embargo, existen juegos como el del siguiente ejemplo que son monótonos pero no superaditivos.

Ejemplo 2.1.3 Sea (N, v) con $N = \{1, 2, 3, 4\}$ y función característica dada por

$$v(S) = \begin{cases} 0 & \text{si } |S| = 0, 1 \\ 1 & \text{si } |S| \geq 2. \end{cases}$$

(N, v) es trivialmente monótono y sin embargo, $v(N) = 1 < v(\{1, 2\}) + v(\{3, 4\})$. Por tanto (N, v) no es superaditivo.

Definición 2.1.9 (N, v) es un juego convexo si, para todo par de coaliciones S y T de N , se tiene que:

$$v(S \cup T) + v(S \cap T) \geq v(S) + v(T).$$

Notaremos \mathcal{C}^N la clase de los juegos convexos con conjunto de jugadores N . Todo juego convexo es superaditivo (para comprobarlo basta tomar $S \cap T = \emptyset$). El recíproco no es necesariamente cierto, como prueba el siguiente contraejemplo.

Ejemplo 2.1.4 Sea (N, v) un juego simétrico con $N = \{1, 2, 3\}$ y función característica v definida por:

$$v(S) = \begin{cases} 0 & \text{si } |S| = 0, 1 \\ 1 & \text{si } |S| = 2, 3. \end{cases}$$

Es sencillo comprobar que (N, v) es superaditivo. Sin embargo, no satisface la condición de convexidad.

Definición 2.1.10 (N, v) es un juego casi-positivo (almost positive), si $\Delta_v(S) \geq 0$ para todo $\emptyset \neq S \subset N$.

Notaremos \mathcal{AP}^N la clase de los juegos casi-positivos con conjunto de jugadores N . Todo juego casi-positivo es convexo. La prueba de este resultado es directa por (2.2). El recíproco, en general, no es cierto, como prueba el siguiente contraejemplo.

Ejemplo 2.1.5 Sea (N, v) el juego simétrico, con $N = \{1, 2, 3\}$ y función característica:

$$v(S) = \begin{cases} 0 & \text{si } s = 0, 1 \\ 1 & \text{si } s = 2 \\ 2 & \text{si } s = 3. \end{cases}$$

Es fácil comprobar que el juego es convexo. Sin embargo, por (2.1), $\Delta_v(N) = v(3) - 3v(2) + 3v(1) = -1$.

Definición 2.1.11 Un juego (N, v) es 0-normalizado si su función característica, v , satisface la condición:

$$v(\{i\}) = 0, \text{ para todo } i \in N.$$

Dado un juego cooperativo (N, v) , se define su versión 0-normalizada como el juego (N, v_0) con función característica:

$$v_0(S) = v(S) - \sum_{i \in S} v(\{i\}), \text{ para todo } S \subset N.$$

Definición 2.1.12 Un juego (N, v) es $(0, 1)$ -normalizado, si su función característica v , verifica:

$$v(\{i\}) = 0 \text{ para todo } i \in N \text{ y } v(N) = 1.$$

Asimismo, si $v \in G^N$ es un juego cooperativo con $v(N) > \sum_{i \in N} v(\{i\})$, es decir, si v es esencial, se define la $(0, 1)$ -normalización de v como el juego $v_{0,1}$ con función característica:

$$v_{0,1}(S) = \frac{v(S) - \sum_{i \in S} v(\{i\})}{v(N) - \sum_{i \in N} v(\{i\})}.$$

Se dice que dos juegos v y $w \in G^N$ son estratégicamente equivalentes si sus versiones $(0, 1)$ -normalizadas coinciden.

Definición 2.1.13 (N, v) es un juego simple si $v(S)$ toma los valores 0 ó 1 para toda coalición $S \subset N$. Diremos que una coalición $S \subset N$ es ganadora si $v(S) = 1$. En caso contrario diremos que es perdedora.

Un juego simple queda completamente determinado por su conjunto de coaliciones ganadoras. Llamaremos juego de votación a un juego simple, no trivial y monótono. Obsérvese que todo juego simple es $(0, 1)$ -normalizado, aunque el recíproco no es cierto.

Notaremos las clases de los juegos cooperativos simétricos, superaditivos, convexos y casi-positivos que además sean 0-normalizados, \mathcal{S}_0^N , \mathcal{A}_0^N , \mathcal{C}_0^N y \mathcal{AP}_0^N respectivamente.

Uno de los objetivos al analizar un juego cooperativo es determinar, supuesto que se forma la gran coalición N , cómo deberían repartirse los jugadores la cantidad $v(N)$. Puede hablarse de dos tipos de conceptos de solución: uno, de conjunto, que intenta seleccionar, de entre todos los repartos posibles, un subconjunto de ellos a partir de algún criterio de racionalidad, y otro, de punto, que selecciona uno de entre todos los repartos posibles. Entre los primeros resaltaremos el Core y entre los segundos destacaremos el valor de Shapley y el de Banzhaf-Coleman.

Definición 2.1.14 Dado un juego $(N, v) \in G^N$, diremos que un vector de pagos $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ es una imputación si es eficiente, i.e., si $\sum_{i \in N} x_i = v(N)$ e individualmente racional, i.e., si $x_i \geq v(\{i\})$. Notaremos $E(N, v)$ al conjunto de las imputaciones del juego v :

$$E(N, v) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \text{ tales que } x_i \geq v(\{i\}) \text{ para todo } i \in N \text{ y } \sum_{i \in N} x_i = v(N) \right\}.$$

El Core de un juego $(N, v) \in G^N$ (Shapley 1952) se define como el conjunto de las imputaciones que son colectivamente racionales para toda coalición. Es decir, una imputación está en el Core si ninguna coalición puede forzar un cambio en el reparto que incremente su ganancia.

Definición 2.1.15 Sea $(N, v) \in G^N$. Se define el Core de (N, v) , $C(N, v)$ como el conjunto de imputaciones:

$$C(N, v) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \text{ tales que } \sum_{i \in N} x_i = v(N) \text{ y } \sum_{i \in S} x_i \geq v(S) \text{ para toda } S \subset N \right\}.$$

A pesar de su importancia transversal en la teoría de los juegos cooperativos, no incluiremos aquí resultados relativos al core de los juegos que aparecen.

Entre las soluciones unipuntuales, sin duda la más relevante que, además, será utilizada ampliamente a lo largo de esta Memoria, es el valor de Shapley (Shapley 1953).

Definición 2.1.16 Sea $(N, v) \in G^N$. Su valor de Shapley, $\varphi(N, v)$, es el vector de \mathbb{R}^n cuya i -ésima componente se define como:

$$\varphi_i(N, v) = \sum_{S \subset N \setminus \{i\}} \frac{s!(n-s-1)!}{n!} (v(S \cup \{i\}) - v(S)), \quad \text{para todo } i \in N.$$

Shapley justificó su elección mediante una elegante caracterización basada en los siguientes axiomas:

- Axioma de aditividad: Si (N, v) y (N, w) son dos juegos cooperativos cualesquiera, entonces:

$$\varphi(N, v + w) = \varphi(N, v) + \varphi(N, w).$$

- Axioma de simetría: Para cada permutación π del conjunto de jugadores N ,

$$\varphi_{\pi(i)}(N, \pi v) = \varphi_i(N, v),$$

donde πv es el juego definido por $\pi v(\pi(S)) = v(S)$, para toda $S \subset N$.

- Axioma del jugador dummy (o jugador pasivo): Si $i \in N$ es un jugador pasivo en el juego v , es decir, si $v(S \cup \{i\}) - v(S) = v(\{i\})$ para todo $S \subset N \setminus \{i\}$, entonces:

$$\varphi_i(N, v) = v(\{i\}).$$

- Axioma de eficiencia: Para todo $(N, v) \in G^N$:

$$\sum_{i \in N} \varphi_i(N, v) = v(N).$$

Dada la influencia de este concepto de solución, diferentes autores han aportado interpretaciones alternativas a través de otras caracterizaciones. Entre ellos, Myerson (1980), Young (1985), Hart y Mas-Colell (1989), Chun (1989), Hamiache (2001), van den Brink (2002), o Kongo et al. (2007).

En 1954, Shapley y Shubik adaptaron el valor de Shapley para crear un índice de poder de los diferentes jugadores en un juego simple. Si el valor de Shapley de un jugador es una combinación convexa de sus contribuciones marginales, en el caso particular de los juegos de votación, admite la interpretación de ser una combinación convexa de su decisividad al incorporarse a las diferentes coaliciones.

Por la linealidad del valor de Shapley, el valor de cualquier jugador en un juego dado puede conocerse a partir de los correspondientes en los juegos de la base de unanimidad y de los dividendos de Harsanyi. Se comprueba sin dificultad que:

$$\varphi_i(N, u_S) = \begin{cases} \frac{1}{s} & i \in S \\ 0 & i \notin S, \end{cases}$$

y entonces, $\varphi_i(N, v) = \sum_{i \in S \subset N} \frac{\Delta_v(S)}{s}$.

Alternativamente, Banzhaf (1965) definió un índice de poder para juegos simples que dio lugar más adelante a un nuevo valor.

Definición 2.1.17 Sea $(N, v) \in G^N$. El valor de Banzhaf-Coleman, β , del juego v es el vector de \mathbb{R}^n cuya i -ésima componente se define como:

$$\beta_i(N, v) = \sum_{S \subset N \setminus \{i\}} \frac{1}{2^{n-1}} (v(S \cup \{i\}) - v(S)), \quad \text{para todo } i \in N.$$

2.2. Juegos cooperativos generalizados

La definición clásica de juego TU asume, como se ha visto, que el valor de una coalición no depende del orden en que sus miembros se incorporen a ella. Nowak y Radzik (1994) eliminaron esta restricción al introducir los llamados juegos TU en forma de función característica generalizada, o más sencillamente, juegos cooperativos generalizados.

Dado el conjunto de jugadores $N = \{1, \dots, n\}$, para cada coalición $S \in 2^N$, sea $\Pi(S)$ el conjunto de todas las permutaciones o coaliciones ordenadas de los miembros de S . En particular, haremos $\Pi(\emptyset) = \{\emptyset\}$. Asimismo, notaremos $\Omega(N) = \{T \in \Pi(S) | S \subset N\}$ el conjunto de todas las coaliciones ordenadas.

Definición 2.2.1 Un juego TU en forma de función característica generalizada es un par (N, w) , donde N es el conjunto de todos los jugadores y w (la función característica generalizada) es una función real definida en $\Omega(N)$ que satisface $w(\emptyset) = 0$.

Para cada $S \subset N$, y para cada coalición ordenada $T \in \Pi(S)$, $w(T)$ representa las posibilidades económicas de los jugadores de S cuando se incorporan a la coalición en el orden dado por T .

Cuando no exista ambigüedad respecto a los jugadores de N , identificaremos el juego generalizado (N, w) con su función característica generalizada w .

Notaremos \mathcal{G}^N el espacio vectorial (con dimensión $|\Omega(N)| - 1$) de los juegos cooperativos generalizados con conjunto de jugadores N .

Dada una coalición ordenada $T = (i_1, i_2, \dots, i_t) \in \Omega(N)$, existe un $S \subset N$ tal que $T \in \Pi(S)$. Notaremos $H(T) = S$ el conjunto de los jugadores de la coalición ordenada T , y $t = |H(T)|$. Además, para cada $i \in S = H(T)$, $T(i) = r$ si y sólo si $i_r = i$.

Observemos que existe un isomorfismo entre el espacio vectorial G^N y el subespacio de \mathcal{G}^N formado por los juegos tales que $w(T) = w(R)$ si $H(T) = H(R)$, es decir, el subespacio de los juegos generalizados en los que el orden en que se forman las coaliciones es irrelevante.

Teniendo en cuenta esta idea, en ocasiones identificaremos un juego $v \in G^N$ con su juego imagen por el isomorfismo anterior, $\hat{v} \in \mathcal{G}^N$. Entonces:

$$\hat{v}(T) = v(H(T)) \text{ para todo } T \in \Omega(N).$$

Dado $T = (i_1, \dots, i_t) \in \Omega(N)$ es posible definir una relación de orden, \prec_T , en $H(T)$ de la siguiente manera. Para todo $i, j \in H(T)$, diremos que i precede a j en T , y lo notaremos $i \prec_T j$, si y sólo si existen k y $l \in \{1, \dots, t\}$, tales que $k < l$ con $i = i_k$ y $j = i_l$.

Las relaciones de orden anteriores permiten definir, a su vez, una relación de inclusión en $\Omega(N)$.

Dadas dos coaliciones ordenadas $T, R \in \Omega(N)$ diremos que T está contenido en R , y notaremos $T \tilde{\subset} R$, si y sólo si:

- (a) $H(T) \subset H(R)$ y
- (b) para todo $i, j \in H(T)$, $i \prec_T j$ implica que $i \prec_R j$.

Ejemplo 2.2.1 *Dados $N = \{1, 2, 3, 4\}$, $T = (3, 1)$, $R = (2, 3, 4, 1)$ y $P = (4, 1, 2, 3)$, se tiene que $T \tilde{\subset} R$ pero no que $T \tilde{\subset} P$, ya que $3 \prec_T 1$ y $1 \prec_P 3$.*

Utilizaremos con frecuencia una base del espacio vectorial \mathcal{G}^N , denominada la base de unanimidad generalizada $\{w_T\}_{\emptyset \neq T \in \Omega(N)}$.

Definición 2.2.2 Para cada coalición no vacía $T \in \Omega(N)$, se define el juego de unanimidad generalizado w_T del modo siguiente:

$$w_T(R) = \begin{cases} 1 & \text{si } T \tilde{C} R \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad \text{para cada } R \in \Omega(N).$$

En particular, los juegos \hat{u}_S , $\emptyset \neq S \subset N$, transformados de los juegos de la base de unanimidad clásica $\{u_S\}_{\emptyset \neq S \subset N}$, pueden ser expresados en términos de la base $\{w_T\}_{\emptyset \neq T \in \Omega(N)}$ de la siguiente manera:

$$\hat{u}_S = \sum_{T \in \Pi(S)} w_T, \quad \text{para cada } S \in 2^N \setminus \{\emptyset\}.$$

Para cada juego $w \in \mathcal{G}^N$, $\{\Delta_w^*(T)\}_{\emptyset \neq T \in \Omega(N)}$ es el conjunto de los coeficientes de unanimidad generalizados (las coordenadas de w en la base de unanimidad generalizada). Sánchez y Bergantiños (1997) probaron que, para todo $T \in \Omega(N) \setminus \{\emptyset\}$:

$$\Delta_w^*(T) = \sum_{R \tilde{C} T} (-1)^{t-r} v(R).$$

En el caso de los juegos generalizados se han utilizado como soluciones unipuntuales diferentes extensiones del valor de Shapley. Nowak y Radzik (1994) caracterizan su valor, φ^{NR} , en términos de los siguientes axiomas:

- Axioma de aditividad: para todos $(N, w), (N, w') \in \mathcal{G}^N$, se tiene

$$\varphi^{NR}(N, w + w') = \varphi^{NR}(N, w) + \varphi^{NR}(N, w').$$

- Axioma del jugador dummy: Si i es un jugador dummy en el juego $(N, w) \in \mathcal{G}^N$, i.e., si $w(T, i) - w(T) = w(\{i\})$ para todo $T = (i_1, i_2, \dots, i_t) \in \Omega(N)$, siendo $(T, i) = (i_1, i_2, \dots, i_t, i)$, se tiene:

$$\varphi_i^{NR}(N, w) = w(\{i\}).$$

- Axioma de eficiencia: Para todo $(N, w) \in \mathcal{G}^N$,

$$\sum_{i \in N} \varphi_i^{NR}(N, w) = \sum_{T \in \Pi(N)} \frac{w(T)}{n!}.$$

Entonces, para todo $(N, w) \in \mathcal{G}^N$ y para todo $i \in N$ se tiene:

$$\varphi_i^{NR}(N, w) = \sum_{S \subset N \setminus i} \sum_{T \in \Pi(S)} \frac{(n-t-1)!}{n!} (w(T, i) - w(T)).$$

Es sencillo probar que para cada juego de unanimidad generalizado w_T , $T = (i_1, \dots, i_t) \in \Omega(N)$, se tiene que $\varphi_{i_t}^{NR}(N, w_T) = \frac{1}{t!}$ y $\varphi_j^{NR}(N, w_T) = 0$ para $j \in N$, $j \neq i_t$ y, por tanto, utilizando la linealidad, $\varphi_i^{NR}(N, w)$ admite la siguiente expresión alternativa:

$$\varphi_i^{NR}(N, w) = \sum_{T \in \Omega(N); T(i)=t} \frac{\Delta_w^*(T)}{t!}.$$

Por otra parte, Sánchez y Bergantiños (1997) caracterizan un valor alternativo, φ^{SB} , sustituyendo el segundo de los axiomas de Nowak y Radzik por el siguiente:

- Axioma del jugador dummy*: Si i es un jugador dummy* en el juego $(N, w) \in \mathcal{G}^N$, i.e., si $w(T, i^h) - w(T) = w(\{i\})$ para todo $T = (i_1, i_2, \dots, i_t) \in \Omega(N)$, siendo $(T, i^h) = (i_1, \dots, i^{h-1}, i, i^h, \dots, i_t)$, para todo $h = 1, \dots, t+1$ se tiene:

$$\varphi_i^{SB}(N, w) = w(\{i\}),$$

y añadiendo el siguiente axioma:

- Axioma de simetría. Si los jugadores i y j son simétricos en el juego $(N, w) \in \mathcal{G}^N$, i.e., si para todo $T = (i_1, \dots, i_t) \in \Omega(N \setminus \{i, j\})$,

$$w(T, i^h) - w(T) = w(T, j^h) - w(T), \quad h = 1, 2, \dots, t+1,$$

entonces:

$$\varphi_i^{SB}(N, w) = \varphi_j^{SB}(N, w).$$

Dicho valor, expresado en términos de las contribuciones marginales, es:

$$\varphi_i^{SB}(N, v) = \sum_{S \subset N \setminus i} \sum_{T \in H(S)} \frac{(n-t-1)!}{n!(t+1)} \sum_{l=1}^{t+1} (v(T, i^l) - v(T)),$$

y en términos de los coeficientes de unanimidad:

$$\varphi_i^{SB}(N, w) = \sum_{T \in \Omega(N)/i \in H(T)} \frac{\Delta_w^*(T)}{t \cdot t!}.$$

En esta Memoria utilizaremos, además, una familia uniparamétrica, Ψ^α , $\alpha \in [0, 1]$, de soluciones unipuntuales para juegos TU generalizados, que engloba a las dos anteriores y que viene dada, para todo $(N, w) \in \mathcal{G}^N$ por:

$$\Psi_i^\alpha(N, w) = \sum_{T \in \Omega(N), i \in H(T)} \frac{\Delta_w^*(T)}{t!} \cdot \frac{\alpha^{t-T(i)}}{\sum_{k=1}^t \alpha^{k-1}}, \quad \alpha \in [0, 1].$$

El valor de Nowak y Radzik extiende por linealidad a todos los juegos la solución que asigna todo el valor al último jugador de la coalición T en el juego de la base de unanimidad w_T . El de Sánchez y Bergantiños hace lo propio repartiendo igualitariamente todo el valor entre los miembros de T en el juego w_T . Ψ^α extiende por linealidad la solución que a los miembros de T en el juego w_T le reparte el valor geoméricamente de derecha a izquierda con proporcionalidad dada por α . Los miembros de fuera de T son ignorados en el reparto.

Es sencillo comprobar que $\Psi^0 = \varphi^{NR}$ y $\Psi^1 = \varphi^{SB}$. Además, para todo $\alpha \in [0, 1]$, si $(N, v) \in G^N$:

$$\Psi_i^\alpha(N, \hat{v}) = \varphi_i(N, v),$$

i.e., todas las soluciones Ψ^α , $\alpha \in [0, 1]$ extienden el valor de Shapley para juegos TU.

2.3. Redes sociales o económicas

Una red social o económica vendrá dada por un conjunto de actores entre los que se establecen ciertas relaciones. Si se asume que estas relaciones son dicotómicas (entre cada pareja de individuos pueden darse o no darse) y no dirigidas, se identificará la red social con un grafo. Algunas relaciones típicas que pueden modelarse a través de una red social son: estar casado con, vivir cerca de, ser amigo de, establecer una relación comercial con, pertenecer al mismo consejo de administración que, etc.

En un grafo, los nodos representarán a los actores y las aristas, las relaciones entre ellos. Formalmente se tiene la siguiente definición.

Definición 2.3.1 *Dado $N = \{1, \dots, n\}$, diremos que (N, γ) es una red social o grafo si $\gamma \subset K^N = \{\{i, j\} \text{ tales que } i, j \in N, i \neq j\}$.*

Llamaremos grafo completo con n nodos a (N, K^N) y Γ^N al conjunto formado por todos los grafos (N, γ) con conjunto de nodos N .

Cada par no ordenado $\{i, j\} \in \gamma$ recibe el nombre de arista. Si $\{i, j\} \in \gamma$ diremos que i y j están directamente conectados (en γ).

Llamaremos $L_i(\gamma)$ al conjunto de aristas incidentes en un nodo dado i , i.e., $L_i(\gamma) = \{l \in \gamma, \text{ tales que } i \in l\}$. Obsérvese que el grado de un nodo i en un grafo γ (definido en el capítulo anterior) puede escribirse también: $d_i(\gamma) = |L_i(\gamma)|$.

Si los actores-nodos i y j no están directamente conectados, en ocasiones podrán conectarse a través de otros que actuarán entonces como intermediarios.

Definición 2.3.2 *Dado un grafo $\gamma \in \Gamma^N$, diremos que $i, j \in N$ son conectables en γ si existe un camino en el grafo que los conecta, es decir, si existe una sucesión de nodos (i_1, \dots, i_t) tal que $i_1 = i$, $i_t = j$ e $\{i_k, i_{k+1}\} \in \gamma$ para todo $k \in \{1, \dots, t-1\}$.*

De los eventuales caminos existentes, llamaremos geodésico a cualquiera que sea minimal respecto al número de aristas.

La noción de conexión establece una relación de equivalencia entre los nodos de una red. A las clases definidas por esta relación las llamaremos componentes conexas y el conjunto cociente será notado N/γ . Si N/γ se reduce a una única clase diremos que (N, γ) es conexo.

Dado un grafo (N, γ) , para cada $i \in N$, $C_i(N, \gamma)$ será la clase de equivalencia a la que pertenece el nodo i . Por tanto:

$$C_i(N, \gamma) = \{j \in N, j = i \text{ ó } j \text{ es conectable en } \gamma \text{ con } i\}.$$

Si $C_i(N, \gamma) = \{i\}$, diremos que i es un nodo aislado en γ .

Para coordinar acciones dentro de un conjunto de actores S sin la contribución de otros externos, sólo serán relevantes las aristas entre miembros de S . El conjunto de tales aristas será notado $\gamma|_S = \{\{i, j\} \in \gamma : i, j \in S\}$. Entonces, $(S, \gamma|_S)$ es un subgrafo de (N, γ) .

El subgrafo $(S, \gamma|_S)$ induce una partición de S en componentes conexas, que será notada S/γ . Si la red $(S, \gamma|_S)$ consta de una única componente conexa, diremos que S es un conjunto conexo en (N, γ) .

Por otra parte, si S es un conjunto conectable en (N, γ) , i.e., si cada par de nodos de S lo es, podemos definir su envoltura conexas como sigue.

Definición 2.3.3 Sea (N, γ) un grafo y $S \subset N$. Si S es conectable en (N, γ) , se llama envoltura conexas de S a la intersección de los diferentes conjuntos conexos que contienen a S .

$$H(N, \gamma, S) = \cap \{S_i \text{ tal que } S \subset S_i \text{ y } S_i \text{ conexas en } (N, \gamma)\}.$$

En caso de que S no sea conectable, diremos que su envoltura conexas es vacía.

Las siguientes definiciones corresponden a redes sociales o grafos específicos que serán utilizados a lo largo de esta Memoria.

Definición 2.3.4 Un grafo (N, γ^T) diremos que es un árbol si es conexas y no contiene ningún ciclo, es decir, ningún camino $\{i_1, i_2, \dots, i_t\}$ con $i_t = i_1$.

Un grafo no conexas, en el que sus componentes conexas son árboles se denomina bosque.

Definición 2.3.5 Se dirá que un grafo (N, γ^S) es una estrella con centro en el nodo i (Fig. 2.1) si $\gamma^S = \{\{i, j\}, j \in N, j \neq i\}$. Los nodos $j \in N, j \neq i$ reciben el nombre de satélites.

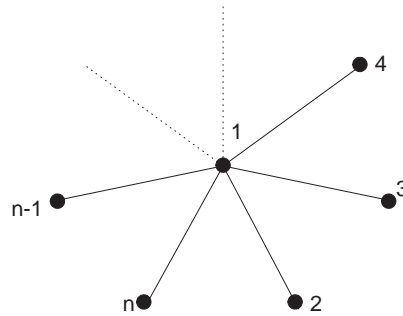


Figura 2.1: Estrella

Definición 2.3.6 Un grafo (N, γ^C) diremos que es una cadena si, salvo reetiquetaciones de los nodos, $\gamma = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \dots, \{n-1, n\}\}$, (Fig. 2.2).



Figura 2.2: Cadena

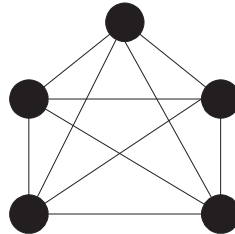


Figura 2.3: Grafo completo

Definición 2.3.7 Dado un grafo (N, γ) , diremos que es ciclo-completo si se satisface que: (i_1, \dots, i_t, i_1) es un ciclo en el grafo γ si y sólo si $(\{i_1, \dots, i_t\}, \gamma|_{\{i_1, \dots, i_t\}})$ es un grafo completo.

Trivialmente se satisface que los grafos sin ciclos (bosques) y los grafos completos son ciclo-completos.

Definición 2.3.8 Diremos que (N, γ^W) es una rueda si, salvo reetiquetaciones de los nodos, $\gamma^W = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \dots, \{n-1, n\}, \{n, 1\}\}$, (Fig. 2.4).

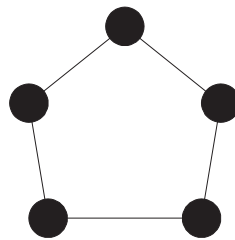


Figura 2.4: Rueda

2.4. Situaciones de comunicación

A lo largo de esta Memoria asumiremos que los actores de una red social tienen además intereses económicos que motivan sus interacciones. Llamaremos situación de comunicación al modelo para describir este escenario. Una situación de comunicación consta de un juego cooperativo, que representa los intereses económicos de los jugadores, y de un grafo que representa la red social, es decir, las posibilidades de comunicación. El trabajo seminal en juegos cooperativos con restricciones en la comunicación es debido a Myerson (1977). Con una perspectiva diferente (las restricciones en la formación de coaliciones vienen dadas por un conjunto de coaliciones factibles a priori), Aumann y Maschler (1964) ya habían abordado el tópico en los denominados juegos con estructuras de coalición.

Definición 2.4.1 *Llamaremos situación de comunicación a una terna (N, v, γ) , en la que (N, v) es un juego cooperativo y (N, γ) un grafo, tal que el conjunto de jugadores en el juego coincide con el de nodos en el grafo.*

Denotaremos \mathcal{CS}^N el conjunto de todas las situaciones de comunicación con conjunto de jugadores N .

En una situación de comunicación, las coaliciones factibles corresponden a los conjuntos de nodos-jugadores conexos en el grafo.

La siguiente definición, debida a Myerson (1977), introduce, para cada situación de comunicación, un nuevo juego TU, el llamado juego restringido al grafo, en el que el valor de cada coalición tiene en cuenta las restricciones en la comunicación que el grafo impone a sus miembros. Así, el valor de cada coalición es la suma de las cantidades que pueden obtener sus subcoaliciones conexas maximales.

Definición 2.4.2 *Dada una situación de comunicación (N, v, γ) , se define el juego restringido al grafo, $(N, v^\gamma) \in G^N$, del modo siguiente:*

$$v^\gamma(S) = \sum_{S_k \in S/\gamma} v(S_k), \quad S \subset N. \quad (2.3)$$

Nótese que, si la red de comunicación es el grafo completo (N, K^N) , entonces todas las coaliciones son conexas y v^γ coincide con v .

Es interesante resaltar qué tipo de redes sociales permiten que el juego restringido al grafo herede propiedades relevantes del juego original.

Proposición 2.4.1 (Owen (1986)). Dada una situación de comunicación $(N, v, \gamma) \in \mathcal{CS}^N$, si $(N, v) \in \mathcal{A}^N$, entonces $(N, v^\gamma) \in \mathcal{A}^N$.

Por otra parte, la convexidad sólo se hereda cuando el grafo es ciclo-completo.

Proposición 2.4.2 (Van den Nouweland y Borm (1991)). Dada una situación de comunicación $(N, v, \gamma) \in \mathcal{CS}^N$, si (N, γ) es un grafo ciclo-completo y (N, v) es convexo, entonces (N, v^γ) también lo es.

Proposición 2.4.3 (Van den Nouweland y Borm (1991)). Si (N, γ) es un grafo no ciclo-completo, existe un juego (N, v) convexo para el cual (N, v^γ) no lo es.

Messen (1988) utilizó una aproximación diferente para abordar el efecto de las restricciones en la comunicación impuestas por el grafo a los jugadores. Este trabajo fue difundido posteriormente por Borm et al. (1992). Definieron un juego restringido al grafo alternativo, el juego de las aristas, en el que los jugadores son las aristas del grafo.

Definición 2.4.3 Dada una situación de comunicación (N, v, γ) , con v un juego 0-normalizado, definimos el juego de las aristas $r_\gamma^v \in G^\gamma$ del modo siguiente:

$$r_\gamma^v(A) = v^A(N) = \sum_{C \in N/A} v(C), \quad \text{para todo } A \subset \gamma.$$

La restricción de que el juego v sea 0-normalizado es necesaria para que r_γ^v pueda ser realmente una función característica. En otro caso $r_\gamma^v(\emptyset)$ podría tomar un valor no nulo.

La definición de la función característica, r_γ^v , refleja el hecho de que si la gran coalición sólo dispusiera de las aristas de A , debería partirse en sus componentes conexas. Debido a que la coordinación entre los jugadores pertenecientes a diferentes componentes conexas no es posible, el valor alcanzable por la gran coalición será la suma de los valores alcanzables por sus componentes.

2.5. Reglas de asignación para situaciones de comunicación

En la sección anterior se han introducido las aproximaciones que diferentes autores utilizan para integrar las restricciones en la comunicación en un juego coalicional. En esta, nos centraremos en las reglas de asignación, que proporcionan una solución unipuntual para los jugadores que participan en una situación de comunicación.

Definición 2.5.1 Una regla de asignación para situaciones de comunicación es una función χ , definida en \mathcal{CS}^N , que a cada (N, v, γ) le asigna un vector de \mathbb{R}^n .

$\chi_i(N, v, \gamma)$ se interpreta como el resultado que el jugador i obtiene por participar en la situación de comunicación (N, v, γ) .

La regla de asignación más utilizada en la literatura es el valor de Myerson (Myerson, 1977), que a cada $(N, v, \gamma) \in \mathcal{CS}^N$ le asigna el valor de Shapley del juego restringido al grafo.

Definición 2.5.2 El valor de Myerson es la regla de asignación $\mu : \mathcal{CS}^N \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que, para todo $(N, v, \gamma) \in \mathcal{CS}^N$:

$$\mu(N, v, \gamma) = \varphi(N, v^\gamma).$$

Ejemplo 2.5.1 Consideremos la situación de comunicación (N, v, γ^1) , con conjunto de jugadores $N = \{1, 2, 3, 4\}$, conjunto de aristas $\gamma^1 = \{a = \{1, 2\}, b = \{2, 3\}, c = \{3, 4\}, d = \{1, 4\}\}$, representado en la Figura 2.5 (a), y función característica v dada por:

$$v(S) = \begin{cases} 0 & \text{si } |S| \leq 1 \\ 1 & \text{si } |S| = 2 \\ 3 & \text{si } |S| = 3 \\ 4 & \text{si } S = N. \end{cases}$$

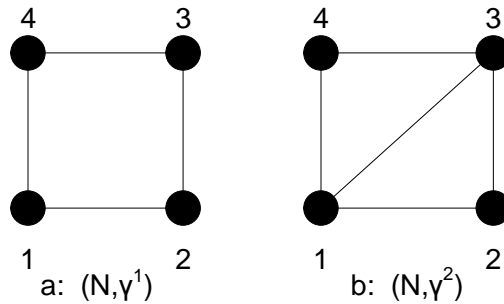


Figura 2.5: Redes (N, γ^1) y (N, γ^2)

El juego restringido al grafo, (N, v^{γ^1}) , incorpora la imposibilidad de comunicación directa entre los jugadores 1 y 3 y entre los jugadores 2 y 4. Su función característica es:

$$v^{\gamma^1}(S) = \begin{cases} v(S) & \text{si } S \neq \{1, 3\}, \{2, 4\} \\ 0 & \text{si } S = \{1, 3\}, \{2, 4\}. \end{cases}$$

Entonces, $\mu(N, v, \gamma^1) = (1, 1, 1, 1)$.

Supongamos, a continuación, que la situación de comunicación se transforma en (N, v, γ^2) siendo $\gamma^2 = \gamma^1 \cup \{1, 3\}$ (Fig. 2.5 (b)). Entonces la función característica del juego restringido al grafo (N, v^{γ^2}) es:

$$v^{\gamma^2}(S) = \begin{cases} v(S) & \text{si } S \neq \{2, 4\} \\ 0 & \text{si } S = \{2, 4\}. \end{cases}$$

Ahora, $\mu(N, v, \gamma^2) = (\frac{4}{3}, \frac{7}{6}, \frac{4}{3}, \frac{7}{6})$. La pérdida de simetría, que se produce al añadir al grafo γ^1 la arista $\{1, 3\}$, beneficia lógicamente a los jugadores 1 y 3 que dejan de necesitar a 2 o a 4 para comunicarse entre ellos.

Otra regla de asignación muy utilizada en la literatura y que se apoya en el juego de las aristas propuesto por Borm et al. (1992) es el valor posicional.

Definición 2.5.3 El valor posicional es la regla de asignación para situaciones de comunicación $\pi : \mathcal{CS}^N \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que, si $(N, v, \gamma) \in \mathcal{CS}^N$:

$$\pi_i(N, v, \gamma) = \sum_{l \in L_i(\gamma)} \frac{1}{2} \varphi_l(\gamma, r_\gamma^v), \text{ para todo } i \in N.$$

El valor posicional de cada actor se obtiene al sumar la mitad del valor de Shapley, en el juego r_γ^v , de cada una de las aristas incidentes en él. Implícitamente se está asumiendo que cada conexión es igualmente valiosa para los dos actores que la mantienen.

Ejemplo 2.5.2 Para las situaciones de comunicación del Ejemplo 2.5.1 se tiene:

$$r_{\gamma^1}^v(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } |A| = 1 \\ 2 & \text{si } A = \{a, c\} \text{ ó } \{b, d\} \\ 3 & \text{si } A = \{a, b\}, \{b, c\}, \{c, d\} \text{ ó } \{a, d\} \\ 4 & \text{si } |A| = 3, 4 \end{cases}$$

con lo que $\pi(N, v, \gamma^1) = (1, 1, 1, 1)$. Alternativamente, $(N, r_{\gamma^2}^v)$ tiene función característica dada por:

$$r_{\gamma^2}^v(A) = \begin{cases} r_{\gamma^1}^v(A) & \text{si } e \notin A \\ 1 & \text{si } A = \{e\} \\ 3 & \text{si } [e \in A \text{ y } |A| = 2] \text{ ó } A = \{a, b, e\} \text{ ó } \{c, d, e\} \\ 4 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

con lo que $\pi(N, v, \gamma^2) = \left(\frac{6}{5}, \frac{4}{5}, \frac{6}{5}, \frac{4}{5}\right)$.

Esta regla, al igual que el valor de Myerson, tiene en cuenta la situación asimétrica de los nodos en (N, γ^2) , asignando más valor a aquéllos con mayor presencia, tanto en la comunicación directa como en la intermediación.

Algunas propiedades relevantes de las reglas de asignación vienen dadas por las siguientes definiciones:

Definición 2.5.4 Diremos que una regla de asignación $\chi : \mathcal{CS}^N \rightarrow \mathbb{R}^n$ es eficiente en componentes conexas si, para toda situación de comunicación (N, v, γ) y para cada componente conexa $C \in N/\gamma$, se tiene:

$$\sum_{i \in C} \chi_i(N, v, \gamma) = v(C).$$

Definición 2.5.5 Una regla de asignación $\chi : \mathcal{CS}^N \rightarrow \mathbb{R}^n$ es equitativa (fair) si, para cualquier situación de comunicación (N, v, γ) y cualquier arista $\{i, j\} \in \gamma$, se tiene:

$$\chi_j(N, v, \gamma) - \chi_j(N, v, \gamma \setminus \{\{i, j\}\}) = \chi_i(N, v, \gamma) - \chi_i(N, v, \gamma \setminus \{\{i, j\}\}).$$

Definición 2.5.6 Una regla de asignación $\chi : \mathcal{CS}^N \rightarrow \mathbb{R}^n$ es estable si, para cualquier situación de comunicación (N, v, γ) y cualquier arista $\{i, j\} \in \gamma$, se tiene:

$$\chi_j(N, v, \gamma) \geq \chi_j(N, v, \gamma \setminus \{\{i, j\}\}), \quad \chi_i(N, v, \gamma) \geq \chi_i(N, v, \gamma \setminus \{\{i, j\}\}).$$

Las dos últimas propiedades conjuntamente consideradas hacen que, al eliminar una arista de un grafo (N, γ) , los actores incidentes en ella vean disminuida (o, al menos, no incrementada) su asignación en la misma cantidad.

Definición 2.5.7 Una regla de asignación $\chi : \mathcal{CS}^N \rightarrow \mathbb{R}^n$, satisface la propiedad de que las contribuciones son equilibradas (balanced contributions) si, para todo par de jugadores $i, j \in N$:

$$\chi_i(N, v, \gamma) - \chi_i(N, v, \gamma_{-j}) = \chi_j(N, v, \gamma) - \chi_j(N, v, \gamma_{-i}),$$

donde $\gamma_{-k} = \gamma \setminus L_k(\gamma)$ es el subgrafo que resulta de eliminar en γ todas las aristas incidentes en el nodo k .

Es decir, una regla de asignación cumple esta propiedad si, para cualesquiera dos jugadores i y j , el perjuicio que i puede causar a j aislándose de los demás (es decir, rompiendo todas sus relaciones directas en la red), es el mismo que el que j puede ocasionar a i si actúa de manera similar.

Definición 2.5.8 Una regla de asignación $\chi : \mathcal{CS}^N \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisface la propiedad de que sus contribuciones en las aristas son equilibradas (balanced links contributions) si, para toda $(N, v, \gamma) \in \mathcal{CS}^N$ y todo par $i, j \in N$:

$$\sum_{l \in L_j(\gamma)} (\chi_i(N, v, \gamma) - \chi_i(N, v, \gamma \setminus \{l\})) = \sum_{l \in L_i(\gamma)} (\chi_j(N, v, \gamma) - \chi_j(N, v, \gamma \setminus \{l\})).$$

Estas propiedades permiten caracterizar las reglas anteriores.

Myerson (1977) probó que el valor de Myerson es la única regla de asignación en \mathcal{CS}^N eficiente en componentes conexas y equitativa. Posteriormente, Myerson (1980) dio una segunda caracterización para su valor demostrando que es el único eficiente en componentes y que satisface la propiedad de contribuciones equilibradas.

Slikker (2005) caracterizó el valor posicional utilizando eficiencia en componentes conexas y contribuciones equilibradas de las aristas.

2.6. Situaciones de comunicación dirigida

En ciertas redes sociales las relaciones entre los actores no son simétricas. Tal vez uno de ellos puede iniciar la relación pero no el otro, o la relación se basa en un permiso que uno puede conceder pero no el otro, o la relación es un flujo de información o representa una cita en una publicación... Este tipo de redes sociales serán modeladas mediante grafos dirigidos o digrafos.

Definición 2.6.1 Dado $N = \{1, \dots, n\}$ un conjunto de nodos, diremos que (N, d) es un grafo dirigido o un digrafo si d es un subconjunto del conjunto de pares ordenados (i, j) , $i \neq j$, de elementos en N .

Nótese que la definición anterior excluye la presencia de lazos.

Llamaremos arco a cada par (i, j) y notaremos D^N al conjunto de todos los posibles grafos dirigidos con conjunto de nodos N . Un grafo $(N, \gamma) \in \Gamma^N$ induce un digrafo, $(N, d(\gamma))$, con $d(\gamma) = \{(i, j), (j, i), \text{ con } \{i, j\} \in \gamma\}$. La aplicación que asigna a cada grafo (N, γ) el digrafo $(N, d(\gamma))$ es una biyección entre Γ^N y su imagen en el conjunto de los digrafos. En este sentido $\Gamma^N \subset D^N$.

Análogamente, un digrafo $(N, d) \in D^N$ induce un grafo $(N, \gamma(d))$ donde $\gamma(d) = \{\{i, j\} \text{ tal que } (i, j) \text{ ó } (j, i) \in d\}$. Llamaremos componentes de (N, d) a los elementos de

$N/\gamma(d)$, es decir, a las componentes conexas de N en $\gamma(d)$. Notaremos N/d al conjunto de tales componentes.

Dados un digrafo (N, d) y $S \subset N$, notaremos $(N, d|_S)$ el correspondiente subdigrafo de (N, d) , donde:

$$d|_S = \{(i, j) \in d \text{ tales que } i, j \in S\}.$$

En este nuevo escenario, las definiciones de conexión dadas para los grafos deben ser reformuladas. Dado un digrafo (N, d) , diremos que i está directamente conectado con j si $(i, j) \in d$. Obviamente, aunque i esté directamente conectado con j , el recíproco no es necesariamente cierto.

Un camino orientado en (N, d) es una sucesión ordenada de nodos (i_1, \dots, i_s) tal que cada uno está directamente conectado con el siguiente, i.e., $(i_l, i_{l+1}) \in d$ para todo $l = 1, \dots, s - 1$.

No existe una definición unívoca de conexión en grafos dirigidos (véase Amer et al. (2007), Kim y Jun (2009)). En esta Memoria consideraremos, para conjuntos ordenados de nodos, la idea de conexión que aparece en la siguiente definición.

Definición 2.6.2 *Dado un digrafo (N, d) , diremos que un conjunto ordenado de nodos (i_1, \dots, i_s) con $i_j \in N$, $j = 1, \dots, s$, es conexo en (N, d) si y sólo si es un camino orientado.*

Notaremos C_d^N la clase de los conjuntos ordenados conexos en el digrafo (N, d) .

De manera análoga al caso no dirigido, el modelo para describir la interacción de los jugadores en un juego TU con restricciones en la comunicación dadas por un digrafo será el de situación de comunicación dirigida².

Definición 2.6.3 *Llamaremos situación de comunicación dirigida a una terna (N, v, d) , en la que (N, v) es un juego cooperativo y (N, d) un digrafo, tales que el conjunto de jugadores en el juego y el de nodos en el digrafo coinciden.*

²Slikker et al. (2005) utilizan la misma terminología para referirse a un modelo diferente. En este mismo apartado, más adelante, se matizará la diferencia entre ambas definiciones. A pesar de ello, hemos elegido esta terminología porque nos parece que es la que representa una mejor continuidad con los modelos que venimos utilizando.

Llamaremos \mathcal{DC}^N al conjunto de todas las situaciones de comunicación dirigida con conjunto de jugadores N .

Diferentes autores se han aproximado al problema de obtener reglas de asignación para situaciones de comunicación dirigida. Para ello, y dado que la idea de conexión no es obvia, se han planteado diferentes alternativas con distintos “juegos restringidos al digrafo” y valores para tales juegos.

Gilles et al. (1992, 1999) analizan situaciones de comunicación dirigida en las que el digrafo representa una estructura de organización jerárquica donde las resoluciones se toman a través de una cadena de decisores. Denominan a tales modelos juegos con estructuras de permisos y asumen para tales permisos dos aproximaciones alternativas: la conjuntiva y la disyuntiva, según que un actor al decidir deba contar con el beneplácito de todos sus superiores o sólo de alguno de ellos. Dado un juego TU, v , y una estructura de permisos, con un planteamiento similar al de Myerson (1977), introducen un juego modificado que tiene en cuenta las limitaciones en las posibilidades de cooperación. En particular, el juego modificado asigna a cada coalición el valor de su parte autónoma, es decir, lo que pueden obtener aquellos miembros de la coalición para los cuales todos los superiores pertenecen a la propia coalición. Obviamente, la aproximación conjuntiva y la disyuntiva conducen a juegos modificados diferentes (los superiores de cada coalición no coincidirán en general). Dichos autores proponen como reglas de reparto para estos juegos el valor de Shapley y también el de Banzhaf del juego modificado. En van den Brink (1997, 1999, 2003) se obtienen varias caracterizaciones del valor de Shapley y del de Banzhaf de los juegos con estructuras de permiso conjuntiva o disyuntiva.

Otra aproximación al problema de los juegos con restricciones dadas por un digrafo es debida a van den Brink y Borm (2002) en los así llamados digrafos de competición. En este escenario un digrafo está formado por nodos que representan equipos en una competición deportiva (aunque también admite interpretaciones alternativas en la teoría de la elección social) y arcos. La presencia del arco (i, j) es interpretada como la victoria del equipo i sobre el j en la competición. El empate equivale a dos victorias, una para cada equipo.

En esta situación, a cada digrafo $d \in D^N$ se le asocia el siguiente juego modificado o restringido $v_d \in G^N$:

$$v_d(T) = |\{j \in S_d(T) \text{ tal que } P_d(j) \subset T\}|$$

siendo, para todo $i \in N$:

$$S_d(i) = \{j \in N \text{ tal que } (i, j) \in d\}$$

$$P_d(i) = \{j \in N \text{ tal que } (j, i) \in d\}$$

i.e., los conjuntos formados por los equipos que han sido derrotados por $i \in N$ y por los que han vencido a i , respectivamente.

$$\text{Además, } S_d(T) = \cup_{i \in T} S_d(i).$$

Proponen el valor de Shapley de tal juego como una medida de la importancia o jerarquía de cada equipo en la competición. Dicho valor coincide además con la β -medida para grafos definida por van den Brink y Gilles (2000) como:

$$\beta_i(d) = \sum_{j \in S_d(i)} \frac{1}{|P_d(j)|}, \text{ para } i \in N.$$

Este valor de Shapley de v_d así como el Core son caracterizados en términos de los vectores $(S_{d'}(i))_{i \in N}$ para subdigrafos simples de d , i.e., aquellos subdigrafos d' tales que $|P_{d'}(i)| = 1$ para todo $i \in S_d(N)$.

En un marco similar al aquí propuesto, Amer et al. (2007) establecen una nueva regla, llamada de accesibilidad, que permite ordenar los nodos en una red dirigida a partir de dos premisas iniciales:

- (i) que sea función de las contribuciones marginales de cada nodo a las diferentes coaliciones según un juego fijado y
- (ii) que se base en las posibles sucesiones ordenadas de nodos, que dependen a su vez de la geometría de la red orientada.

Para ello definen, dada una situación de comunicación (N, v, d) , un nuevo juego restringido al digrafo v_d (que es un juego TU generalizado) con

$$v_d(T) = \sum_{R \in \mathcal{MC}_d^T} v(H(R)), \text{ para todo } T \in \Omega(N),$$

donde $\mathcal{MC}_d^T = \{R \tilde{C} T \text{ tal que } R \text{ es conexo maximal en } (N, d)\}$. La accesibilidad de cada nodo $i \in N$ se define como:

$$A_i(N, v, d) = \Psi^0(N, v_d).$$

Demuestran que esta regla satisface una serie de propiedades atractivas.

En un escenario más relacionado con el que presentamos en esta Memoria, Slikker et al. (2005) definen funciones $r : D^N \rightarrow \mathbb{R}$ tal que a cada digrafo $d \in D^N$ le asignan $r(d)$ que se interpreta como el beneficio que la red proporciona a los miembros de N . Restringen estas funciones asumiendo que deben ser aditivas en componentes, i.e.,

$$r(d) = \sum_{C \in N/d} r(d|_C),$$

y tal que $r(\emptyset) = 0$.

Entonces llaman situación de comunicación dirigida a cada (N, r, d) . Una regla de asignación, χ , para situaciones de comunicación dirigida asignará a cada (N, r, d) una n -upla en \mathbb{R}^n . Finalmente estudian reglas de asignación que posean dos propiedades atractivas: la eficiencia en componentes y el pago α -jerárquico. χ satisface el pago α -jerárquico si para toda situación de comunicación dirigida (N, r, d) y todo $(i, j) \in d$:

$$\chi_i(N, r, d) - \chi_i(N, r, d \setminus \{(i, j)\}) = \alpha [\chi_j(N, r, d) - \chi_j(N, r, d \setminus \{(i, j)\})].$$

Capítulo 3

Medidas de centralidad en redes sociales. Una aproximación desde la Teoría de Juegos

3.1. Introducción

En este capítulo se presenta una nueva familia de medidas de centralidad para redes sociales utilizando una aproximación desde la Teoría de Juegos. Probaremos que tales medidas satisfacen ciertas propiedades que se consideran atractivas, desde el punto de vista sociológico. Además, cada medida podrá ser descompuesta de forma aditiva en una de proximidad y otra de intermediación. Finalmente, se establece una comparativa con varias de las preexistentes, incidiendo en ventajas e inconvenientes.

3.2. Una nueva familia de medidas de centralidad

En las aproximaciones que desde la sociología se han dado al problema clásico de la centralidad, se asume exclusivamente la existencia de una red de interacciones entre los actores. En nuestra propuesta tendremos en cuenta, además, que las relaciones entre dichos actores presentan con frecuencia motivaciones de carácter económico (en sentido amplio), que se pueden modelar mediante un juego cooperativo. Las restricciones en la comunicación, como se ha dicho, transforman el juego original en el juego restringido al grafo.

La diferencia entre el valor de Myerson y el valor de Shapley del juego original puede atribuirse a la posición del jugador en la red. Si además existe simetría en el juego original (que elimina las diferencias a priori entre los jugadores), ésta sería la única razón.

Por tanto, cuanto mayor sea esa diferencia para un actor, mayor será la ventaja en la interacción y en el regateo que le proporciona su posición en la red. En este sentido, tal diferencia puede interpretarse como una medida de centralidad y ésta será nuestra propuesta.

El valor de Shapley se interpreta como un índice de poder¹ en juegos de votación. En tales situaciones, la diferencia entre el valor de Myerson y el valor de Shapley se corresponde con la variación del poder de los actores debida a su posición en la red. Se establece así una relación entre centralidad y poder. Esta relación es motivo de profunda controversia en el análisis de la centralidad (Hanemann, 1999; Mizruchi y Potts, 1998).

Con el fin de clarificar y motivar aún más esta medida de centralidad, consideremos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.2.1 *Supongamos un parlamento compuesto por miembros de tres partidos: 1, 2 y 3, cuyos porcentajes de escaños son respectivamente del 40, 20 y 40 %. Supongamos, también, que una ley será aprobada si cuenta con al menos la mitad más uno de votos favorables. Admitiremos que los miembros de cada partido están sujetos a disciplina de voto, que la respetan y que, por tanto, votan en bloque.*

Esta situación se puede modelar mediante un juego tripersonal (N, v) , simple y simétrico, en el que cada coalición con al menos dos jugadores es ganadora. Entonces, el poder se reparte equitativamente entre los tres partidos y el valor de Shapley, $\varphi(N, v)$, es igual a $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

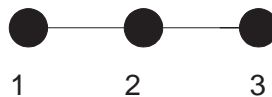


Figura 3.1: Espectro político (N, γ)

Este reparto de poder parece razonable cuando todas las coaliciones son igualmente posibles, pero en muchos casos algunas de las coaliciones son inverosímiles debido a las relaciones entre los partidos. Si, por ejemplo, los partidos 1, 2 y 3 están alineados en un

¹Un segundo índice de poder juego teórico fue propuesto por Banzhaf (1965). Dubey et al. (1981) introdujeron una familia de índices, los semivalores, que contiene a los dos anteriores.

espectro político izquierda-derecha o liberal-conservador, como en la Figura 3.1, parecería razonable conceder mayor verosimilitud a un acuerdo global que a una coalición entre los dos partidos extremos que excluyera al partido bisagra. En otras palabras, consideraremos la coalición $\{1, 3\}$ como la única no factible en el juego v restringido al grafo γ de la Figura 3.1. Entonces (N, v^γ) tiene función característica:

$$v^\gamma(S) = \begin{cases} 0 & \text{si } s \leq 1 \text{ ó } S = \{1, 3\} \\ 1 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

y su valor de Shapley es $(\frac{1}{6}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6})$.

La diferencia entre ambos valores, $(-\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{6})$ habla de que el partido 2 incrementa su poder como consecuencia de las relaciones entre partidos, mientras que los partidos 1 y 3 lo ven reducido.

Se podría pensar que este resultado es debido, en gran parte, al hecho de que el partido 2 es el centro de una estrella, por lo que, en principio, debería ser el más central independientemente del juego considerado. Sin embargo, en nuestra aproximación, el juego v desempeña un papel crucial. Para ilustrar este hecho, consideremos una pequeña modificación del juego propuesto. Supongamos ahora que los porcentajes de los partidos 1, 2 y 3 son de 24, 52 y 24 % respectivamente, manteniéndose el resto de condiciones como en el caso anterior. Entonces, si la red social es la de la Figura 3.1, todas las coaliciones ganadoras, $\{2\}$, $\{1, 2\}$, $\{2, 3\}$ y $\{1, 2, 3\}$, son factibles. Como consecuencia, el juego original y el juego de Myerson coinciden y ningún partido modifica su poder debido a su posición en el espectro político.

Dada entonces una situación de comunicación (N, v, γ) , en la que (N, v) representa los intereses económicos que motivan las interacciones entre los jugadores y (N, γ) la red social que refleja las restricciones en la comunicación existentes, definiremos la centralidad del actor i -ésimo como la diferencia entre su valor de Shapley en el juego restringido al grafo y en el juego original, i.e.:

$$\varphi_i(N, v^\gamma) - \varphi_i(N, v), \quad i \in N.$$

Si, como se ha dicho, se desea que la medida refleje la variación de poder ignorando diferencias a priori entre los jugadores, parece razonable imponer la simetría del juego (N, v) . En tal caso, $\varphi_i(N, v) = \frac{v(N)}{n}$ para todo $i = 1, \dots, n$ y podemos modificar la definición anterior mediante una traslación de valor $\frac{v(N)}{n}$.

Definición 3.2.1 Dada una situación de comunicación $(N, v, \gamma) \in \mathcal{CS}^N$ con $v \in \mathcal{S}^N$, se define la centralidad del i -ésimo actor, $\kappa_i(N, v, \gamma)$, como su valor de Myerson:

$$\kappa_i(N, v, \gamma) = \varphi_i(N, v^\gamma).$$

Fijado el grafo γ , la medida variará con el juego (N, v) elegido y, en ese sentido, se tiene realmente definida una familia de medidas.

3.3. Propiedades de las medidas definidas

En este apartado se introduce un conjunto de propiedades que satisface la familia de medidas propuestas, propiedades que las hacen atractivas desde el punto de vista de las interpretaciones sociológica, económica y política del concepto de centralidad.

La primera proposición establece que la centralidad es característica de la posición en la red, i.e., de las relaciones disponibles para los actores y no de la etiqueta de éstos. Formalmente, para grafos isomorfos las centralidades de los nodos coinciden salvo permutaciones.

Proposición 3.3.1 Sea $(N, v, \gamma) \in \mathcal{CS}^N$ con $v \in \mathcal{S}^N$. Si π es una permutación de N que preserva el grafo, entonces:

$$\kappa_i(N, v, \gamma) = \kappa_{\pi(i)}(N, v, \gamma).$$

Demostración: Como $v \in \mathcal{S}^N$, $\pi v = v$.

Por la simetría del valor de Shapley:

$$\kappa_i(N, v, \gamma) = \varphi_i(N, v^\gamma) = \varphi_{\pi(i)}(N, \pi v^\gamma) = \varphi_{\pi(i)}(N, v^\gamma) = \kappa_{\pi(i)}(N, v, \gamma).$$

■

Un aspecto crítico en el análisis de la centralidad en redes sociales es la comparabilidad entre nodos de diferentes grafos (Freeman 1979). Las medidas propuestas son eficientes en componentes, por serlo el valor de Myerson. En consecuencia, para un juego simétrico (N, v) la suma de las centralidades de los nodos de N es invariante bajo transformaciones del grafo que preserven el número de componentes conexas y sus cardinalidades. La siguiente proposición prueba este resultado.

Proposición 3.3.2 Sea $(N, v, \gamma) \in \mathcal{CS}^N$ con $v \in \mathcal{S}^N$. Entonces:

$$\sum_{i=1}^n \kappa_i(N, v, \gamma) = \sum_{T_k \in N/\gamma} v(T_k).$$

Demostración: Debido a la eficiencia del valor de Shapley y a la definición de juego restringido al grafo tenemos:

$$\sum_{i=1}^n \kappa_i(N, v, \gamma) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(N, v^\gamma) = v^\gamma(N) = \sum_{T_k \in N/\gamma} v(T_k).$$

■

En particular, para cualquier grafo conexo con n nodos, la suma de las centralidades es $v(N)$. Como consecuencia directa, podemos evitar cualquier normalización en el cálculo de las centralidades cuando el objetivo sea su comparación en grafos conexos con el mismo número de nodos.

Otra propiedad interesante de estas medidas es que la centralidad de cada actor en una red no conexa coincide con su centralidad en la red conexa a la que pertenece.

Proposición 3.3.3 Sea $\{N_1, N_2\}$ una partición de N . Supongamos que $(N_j, \gamma^j) \in \Gamma^{N_j}$, $j = 1, 2$, son dos grafos conexos. Sea $v \in \mathcal{S}^N$ y v_j la restricción de v a N_j , $j = 1, 2$. Entonces, para $i \in N_j$:

$$\kappa_i(N, v, \gamma^1 \cup \gamma^2) = \kappa_i(N_j, v_j, \gamma^j), \quad j = 1, 2.$$

Demostración: Escribiendo el juego v en términos de la base de unanimidad, tenemos:

$$v = \sum_{S \subset N} \Delta_v(S) u_S,$$

y por tanto:

$$\begin{aligned} v^{\gamma^1 \cup \gamma^2} &= \sum_{S \subset N} \Delta_v(S) u_S^{\gamma^1 \cup \gamma^2} = \\ &= \sum_{S \subset N_1} \Delta_v(S) u_S^{\gamma^1 \cup \gamma^2} + \sum_{S \subset N_2} \Delta_v(S) u_S^{\gamma^1 \cup \gamma^2} + \sum_{S \subset N, S \cap N_1 \neq \emptyset, S \cap N_2 \neq \emptyset} \Delta_v(S) u_S^{\gamma^1 \cup \gamma^2}. \end{aligned}$$

Por ser N_1 y N_2 disjuntos, $\gamma^1 \cup \gamma^2$ es no conexo con lo cual $u_S^{\gamma^1 \cup \gamma^2} = 0$ si $S \cap N_j \neq \emptyset$ para $j = 1, 2$. Además, para $j = 1, 2$, si $S \subset N_j$, para todo $T \subset N$,

$$u_S^{\gamma^1 \cup \gamma^2}(T) = \begin{cases} 1 & \text{si existe } C \in T/(\gamma^1 \cup \gamma^2) \text{ tal que } S \subset C \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

i.e.,

$$u_S^{\gamma^1 \cup \gamma^2}(T) = \begin{cases} 1 & \text{si existe } C \in (T \cap N_j)/\gamma^j \text{ tal que } S \subset C \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y, por tanto, $u_S^{\gamma^1 \cup \gamma^2}(T) = u_S^{\gamma^j}(T)$, de donde $u_S^{\gamma^1 \cup \gamma^2} = u_S^{\gamma^j}$.

Podemos concluir entonces que:

$$v^{\gamma^1 \cup \gamma^2} = \sum_{S \subset N_1} \Delta_v(S) u_S^{\gamma^1} + \sum_{S \subset N_2} \Delta_v(S) u_S^{\gamma^2}.$$

Sean $i \in N_j$ ($j = 1, 2$) y $S \subset N_k$, $k \neq j$. Entonces $\varphi_i(N, u_S^{\gamma^k}) = 0$. Esto es así puesto que en el juego de conectar S en γ^j , $u_S^{\gamma^j}$, i no puede actuar en ningún caso como intermediario y por tanto es un jugador pasivo (*dummy*). Así:

$$\kappa_i(N, v, \gamma^1 \cup \gamma^2) = \kappa_i(N_j, v_j, \gamma^j), \quad i \in N_j, \quad j = 1, 2.$$

■

En el contexto sociológico se asume, usualmente, que la centralidad de cada actor se incrementa si éste incorpora nuevas relaciones. Es razonable preguntarnos hasta qué punto las medidas introducidas satisfacen esta propiedad.

En la siguiente proposición debida a Myerson (1977), se establece que, si el juego subyacente es superaditivo, la eliminación de una arista no incrementa la centralidad de cada uno de los nodos incidentes.

Proposición 3.3.4 *Sea $(N, v, \gamma) \in \mathcal{CS}^N$ con $v \in \mathcal{S}^N \cap \mathcal{A}^N$. Entonces, para todo $\{i, j\} \in \gamma$, se tiene que:*

$$\kappa_h(N, v, \gamma) \geq \kappa_h(N, v, \gamma \setminus \{\{i, j\}\}), \quad \text{para } h = i, j.$$

Una medida aceptable asignará la mínima centralidad a los nodos aislados.

La siguiente proposición demuestra que esto es así si el juego, además de ser simétrico, es superaditivo.

Proposición 3.3.5 *Sean (N, v, γ) y $(N, v, \gamma^0) \in \mathcal{CS}^N$ con $v \in \mathcal{S}^N \cap \mathcal{A}^N$. Si $i \in N$ es un nodo aislado en γ^0 entonces, para todo $j \in N$, se tiene que:*

$$\kappa_i(N, v, \gamma^0) \leq \kappa_j(N, v, \gamma).$$

Demostración: Por la Proposición 3.3.3 y la eficiencia en componentes,

$$\kappa_i(N, v, \gamma^0) = v(\{i\}).$$

Sea $j \in N$ un nodo con grado k en γ . Si j no es aislado, entonces $1 \leq k \leq n - 1$. Supongamos, por reducción al absurdo, que $\kappa_j(N, v, \gamma) < v(\{j\})$. El nodo j se convertirá en aislado eliminando sucesivamente los k arcos incidentes en él. Por la proposición anterior, la sucesión de centralidades asociadas al nodo j es no creciente. En el último paso, j se habrá convertido en un nodo aislado y, por tanto, su centralidad será $v(\{j\})$, estrictamente menor que $v(\{i\})$. Como el juego es simétrico, esta contradicción prueba el resultado. ■

La siguiente proposición, cuya prueba aparece en Myerson (1977), establece que las medidas introducidas son equitativas (*fair*) en el sentido de que, si dos actores rompen la relación existente entre ellos, la centralidad de ambos se verá igualmente afectada.

Proposición 3.3.6 *Sea $(N, v, \gamma) \in \mathcal{CS}^N$ con $v \in \mathcal{S}^N$. Entonces, dada $l = \{i, j\} \in \gamma$ se tiene:*

$$\kappa_i(N, v, \gamma) - \kappa_i(N, v, \gamma \setminus \{l\}) = \kappa_j(N, v, \gamma) - \kappa_j(N, v, \gamma \setminus \{l\}).$$

De nuevo Myerson (1980) prueba que su valor y por tanto la medida introducida satisface la propiedad de contribuciones equilibradas. Si un jugador se aísla en la red, el perjuicio que causa a cualquier otro coincide con el daño que éste, en caso de aislarse, le causaría a él.

Proposición 3.3.7 *Sea $(N, v, \gamma) \in \mathcal{CS}^N$ con $v \in \mathcal{S}^N$. Entonces, para todo $i, j \in N$ se tiene que:*

$$\kappa_i(N, v, \gamma) - \kappa_i(N, v, \gamma_{-j}) = \kappa_j(N, v, \gamma) - \kappa_j(N, v, \gamma_{-i}).$$

La siguiente proposición y el lema previo que la acompaña permiten demostrar que, dado un juego superaditivo, la máxima centralidad de un actor se alcanza cuando mantiene conexiones con todos los demás y éstos sólo con él, lo que le convierte en el centro de una estrella.

Lema 3.3.1 *Sea $(N, v, \gamma) \in \mathcal{CS}^N$ con $v \in \mathcal{S}^N \cap \mathcal{A}^N$. Dados $i \in N$ y $S \subset N \setminus \{i\}$:*

$$(i) \ v^\gamma(S \cup \{i\}) \leq v(S \cup \{i\}),$$

$$(ii) \ v^\gamma(S) \geq s \ v(\{i\}),$$

$$(iii) \ v^\gamma(S \cup \{i\}) - v^\gamma(S) \leq v(S \cup \{i\}) - s v(\{i\}).$$

Demostración:

(i) $v^\gamma(S \cup \{i\}) = \sum_{T_k \in (S \cup \{i\})/\gamma} v(T_k) \leq v(S \cup \{i\})$ por la superaditividad de v , ya que el conjunto de las componentes conexas es una partición de la coalición.

(ii) Por ser v superaditivo, para cualquier coalición $T \subset N$, $v(T) \geq t v(\{i\})$. Entonces,

$$v^\gamma(S) = \sum_{T_k \in S/\gamma} v(T_k) \geq \sum_{T_k \in S/\gamma} t_k v(\{i\}) = \left(\sum_{T_k \in S/\gamma} t_k \right) v(\{i\}) = s v(\{i\}),$$

por ser los $T_k \in S/\gamma$ una partición de S .

(iii) Es consecuencia inmediata de (i) y (ii). ■

Proposición 3.3.8 *Sea $(N, v, \gamma^S) \in \mathcal{CS}^N$ con $v \in \mathcal{S}^N \cap \mathcal{A}^N$ y γ^S la estrella centrada en 1, i.e., $\gamma^S = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \dots, \{1, n\}\}$. Entonces, para toda $(N, v, \gamma) \in \mathcal{CS}^N$ y para todo $i \in N$:*

$$\kappa_i(N, v, \gamma) \leq \kappa_1(N, v, \gamma^S).$$

Demostración: Para toda $(N, v, \gamma) \in \mathcal{CS}^N$ y todo $i \in N$,

$$\kappa_i(N, v, \gamma) = \varphi_i(N, v^\gamma) = \sum_{S \subset N \setminus \{i\}} \frac{s!(n-1-s)!}{n!} (v^\gamma(S \cup \{i\}) - v^\gamma(S)), \quad (3.1)$$

y en el centro de la estrella:

$$\kappa_1(N, v, \gamma^S) = \sum_{S \subset N \setminus \{1\}} \frac{s!(n-1-s)!}{n!} (v(S \cup \{1\}) - s v(\{1\})). \quad (3.2)$$

Tomando $i = 1$ en (3.1), por el Lema 3.3.1 (iii) y la simetría de v , resulta:

$$\kappa_1(N, v, \gamma) \leq \kappa_1(N, v, \gamma^S). \quad \blacksquare$$

El siguiente contraejemplo prueba que, si se elimina la condición de superaditividad en el juego, la conclusión del resultado anterior puede dejar de ser cierta.

Ejemplo 3.3.1 Sean $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y v el juego simétrico y monótono, pero no superaditivo:

$$v(S) = \begin{cases} 1 & \text{si } s = 1, 2 \\ 3 & \text{si } s = 3 \\ 4 & \text{si } s = 4, 5 \end{cases}$$

y consideremos los grafos (N, γ^S) y (N, γ) representados en la Figura 3.2:

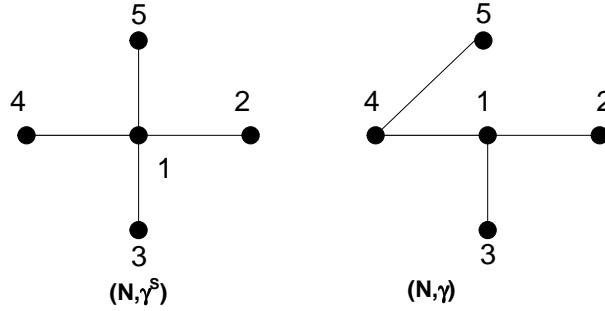


Figura 3.2: (N, γ^S) , (N, γ)

$$\kappa_1(N, v, \gamma^S) = \frac{0!(4-0)!}{5!} + \frac{2!(4-2)!}{5!}6 + \frac{3!(4-3)!}{5!}4 = \frac{3}{5},$$

mientras que:

$$\kappa_1(N, v, \gamma) = \frac{0!(4-0)!}{5!} + \frac{1!(4-1)!}{5!} + \frac{2!(4-2)!}{5!}5 + \frac{3!(4-3)!}{5!}6 + \frac{4!0!}{5!} = \frac{11}{12}.$$

En este ejemplo, la centralidad del nodo 1 en la situación de comunicación (N, v, γ) es mayor que la del centro de la estrella en (N, v, γ^S) . Incluso $\kappa_1(N, v, \gamma^S) \leq \kappa_j(N, v, \gamma^S)$ para todo $j \neq 1$ ya que, por eficiencia y simetría:

$$\kappa_j(N, v, \gamma^S) = \frac{v(N) - \kappa_1(N, v, \gamma^S)}{4} = \frac{17}{20}.$$

No obstante, el nodo central tendrá máxima centralidad en la estrella siempre y cuando el juego sea monótono y 0-normalizado.

Proposición 3.3.9 Sean $(N, v, \gamma^S) \in \mathcal{CS}^N$ con $v \in \mathcal{S}_0^N$ un juego monótono y $\gamma^S = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \dots, \{1, n\}\}$ la estrella con centro en el nodo 1. Entonces:

$$\kappa_1(N, v, \gamma^S) \geq \kappa_j(N, v, \gamma^S), \quad \text{para todo } j \in N.$$

Demostración: Para todo $j \in N$, $j \neq 1$

$$\begin{aligned} \kappa_j(N, v, \gamma^S) &= \sum_{T \subset N \setminus \{1, j\}} \frac{t!(n-1-t)!}{n!} (v^{\gamma^S}(T \cup \{j\}) - v^{\gamma^S}(T)) + \\ &+ \sum_{T \subset N \setminus \{1, j\}} \frac{(t+1)!(n-1-(t+1))!}{n!} (v^{\gamma^S}(T \cup \{1, j\}) - v^{\gamma^S}(T \cup \{1\})). \end{aligned}$$

Por ser γ^S una estrella, para cualquier coalición T que no contenga al nodo central 1, se tiene que $v^{\gamma^S}(T) = \sum_{i \in T} v(\{i\})$ y, por simetría, $v^{\gamma^S}(T) = tv(\{1\})$. Por otro lado, toda coalición T tal que $1 \in T$ cumple $v^{\gamma^S}(T) = v(T)$. Entonces, fijado $j \in N$, $j \neq 1$,

$$\begin{aligned} \kappa_j(N, v, \gamma^S) &= \sum_{T \subset N \setminus \{1, j\}} \frac{t!(n-1-t)!}{n!} ((t+1)v(\{1\}) - tv(\{1\})) + \\ &+ \sum_{T \subset N \setminus \{1, j\}} \frac{(t+1)!(n-1-(t+1))!}{n!} (v(T \cup \{1, j\}) - v(T \cup \{1\})), \end{aligned}$$

y para el nodo central se tiene:

$$\begin{aligned} \kappa_1(N, v, \gamma^S) &= \sum_{T \subset N \setminus \{1, j\}} \frac{t!(n-1-t)!}{n!} (v(T \cup \{1\}) - tv(\{1\})) + \\ &+ \sum_{T \subset N \setminus \{1, j\}} \frac{(t+1)!(n-1-(t+1))!}{n!} (v(T \cup \{1, j\}) - (t+1)v(\{1\})). \end{aligned}$$

Para comprobar que la centralidad en el centro de la estrella es mayor que en cada satélite es suficiente demostrar que la contribución marginal del nodo central a cada coalición $T \subset N \setminus \{1, j\}$ es mayor que la de cualquier satélite j . Ello es así dado que por ser v monótono y 0-normalizado, $v(T \cup \{1\}) \geq (t+1)v(\{1\})$ para todo $T \subset N \setminus \{1, j\}$. ■

En la siguiente proposición se prueba que, si el juego es convexo, la mínima centralidad de un actor en redes conexas se alcanza cuando ocupa uno cualquiera de los extremos de una cadena.

Proposición 3.3.10 Sean (N, v, γ) , $(N, v, \gamma^C) \in \mathcal{CS}^N$, con $v \in \mathcal{S}^N \cap \mathcal{C}^N$, γ conexo y $\gamma^C = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \dots, \{n-1, n\}\}$ una cadena con n nodos. Entonces, para todo $i \in N$:

$$\kappa_1(N, v, \gamma^C) \leq \kappa_i(N, v, \gamma).$$

Demostración: Dado el grafo (N, γ) , consideremos un nodo arbitrario i y reetiquetémoslo como 1. A continuación, reetiquetemos como 2 un nodo cualquiera adyacente a 1, y como 3 uno cualquiera adyacente a 1 ó a 2 (o posiblemente a ambos). Continuemos con este procedimiento reetiquetando como k cualquier nodo que sea adyacente al menos a uno del conjunto $\{1, \dots, k-1\}$. Dado que γ es conexo, podemos seguir con este proceso hasta que todos los nodos hayan sido reetiquetados. Observemos que, entonces, cada conjunto $\{1, \dots, k\}$, $k = 1, \dots, n$, se ha convertido en un conjunto conexo en γ .

Por otro lado,

$$\kappa_1(N, v, \gamma^C) = \sum_{S \subset N \setminus \{1\}} \frac{s!(n-1-s)!}{n!} (v^{\gamma^C}(S \cup \{1\}) - v^{\gamma^C}(S)), \quad (3.3)$$

mientras que,

$$\kappa_1(N, v, \gamma) = \sum_{S \subset N \setminus \{1\}} \frac{s!(n-1-s)!}{n!} (v^\gamma(S \cup \{1\}) - v^\gamma(S)). \quad (3.4)$$

Veamos ahora que cada sumando en (3.4) es, al menos, tan grande como el correspondiente en (3.3).

Sea $S \subset N \setminus \{1\}$ y sean $C_1(S \cup \{1\}, \gamma^C|_{S \cup \{1\}})$ y $C_1(S \cup \{1\}, \gamma|_{S \cup \{1\}})$ las componentes conexas a las que 1 pertenece en las respectivas restricciones de γ^C y γ a $S \cup \{1\}$. La primera de ellas será necesariamente de la forma $\{1, \dots, k\}$. Se tiene, entonces:

$$v^{\gamma^C}(S \cup \{1\}) - v^{\gamma^C}(S) = v(\{1, \dots, k\}) - v(\{2, 3, \dots, k\}).$$

Por ser $v \in S^N$:

$$v(\{1, \dots, k\}) - v(\{2, \dots, k\}) = v(k) - v(k-1).$$

Por otra parte,

$$v^\gamma(S \cup \{1\}) - v^\gamma(S) = v(C_1(S \cup \{1\}, \gamma|_{S \cup \{1\}})) - v^\gamma(C_1(S \cup \{1\}, \gamma|_{S \cup \{1\}}) \setminus \{1\})$$

y como v es superaditivo:

$$v^\gamma(C_1(S \cup \{1\}, \gamma|_{S \cup \{1\}}) \setminus \{1\}) \leq v(C_1(S \cup \{1\}, \gamma|_{S \cup \{1\}}) \setminus \{1\}).$$

Entonces:

$$v^\gamma(S \cup \{1\}) - v^\gamma(S) \geq v(C_1(S \cup \{1\}, \gamma|_{S \cup \{1\}})) - v(C_1(S \cup \{1\}, \gamma|_{S \cup \{1\}}) \setminus \{1\}).$$

Dado el método de reetiquetado utilizado para γ , tenemos que $\{1, \dots, k\}$ es conexo en γ . Así pues, $\{1, \dots, k\} \subset C_1(S \cup \{1\}, \gamma|_{S \cup \{1\}})$, lo que implica que $k \leq |C_1(S \cup \{1\}, \gamma|_{S \cup \{1\}})|$ y por ser v convexo se tiene que:

$v(C_1(S \cup \{1\}, \gamma|_{S \cup \{1\}})) - v(C_1(S \cup \{1\}, \gamma|_{S \cup \{1\}}) \setminus \{1\}) \geq v(k) - v(k - 1)$ para cada $S \subset N \setminus \{1\}$, lo que prueba el resultado. ■

El siguiente lema prueba que los nodos terminales de una cadena tienen menor centralidad cuanto más pequeña es la longitud de ésta.

Lema 3.3.2 Sean (N, v, γ^{C_1}) y $(N, v, \gamma^{C_2}) \in \mathcal{CS}^N$ con $v \in \mathcal{S}^N \cap \mathcal{C}^N$ y γ^{C_i} ($i = 1, 2$) cadenas con n_1 y n_2 nodos respectivamente, $n_1 < n_2$, y los nodos etiquetados, en ambas cadenas, en el orden natural. Entonces,

$$\kappa_1(N, v, \gamma^{C_1}) \leq \kappa_1(N, v, \gamma^{C_2}). \quad (3.5)$$

Demostración: Mostraremos que el resultado es cierto para $n_2 = n_1 + 1$. Se tiene que:

$$\kappa_1(N, v, \gamma_2^C) - \kappa_1(N, v, \gamma_1^C) = \sum_{S \subset N_2} \Delta_v(S) \varphi_1(N, u_S^{\gamma_2^C}) - \sum_{S \subset N_1} \Delta_v(S) \varphi_1(N, u_S^{\gamma_1^C}).$$

Por ser 1 un nodo terminal, $\varphi_1(N, u_S^{\gamma_1^C}) = \varphi_1(N, u_S^{\gamma_2^C}) = 0$ si $1 \notin S$, y entonces

$$\begin{aligned} \kappa_1(N, v, \gamma_2^C) - \kappa_1(N, v, \gamma_1^C) &= \sum_{1 \in S \subset N_2} \Delta_v(S) \varphi_1(N, u_S^{\gamma_2^C}) - \sum_{1 \in S \subset N_1} \Delta_v(S) \varphi_1(N, u_S^{\gamma_1^C}) = \\ &= \sum_{1, n_1+1 \in S \subset N_2} \Delta_v(S) \varphi_1(N, u_S^{\gamma_2^C}). \end{aligned}$$

Se tienen $\binom{n_1 - 1}{s - 2}$ coaliciones $S \subset N$ con cardinal s y tales que $\{1, n_1 + 1\} \subset S$.

Para cada una de ellas, $\varphi_1(N, u_S^{\gamma_2^C}) = \frac{1}{n_1 + 1}$. Entonces, el valor de la expresión anterior puede escribirse como:

$$\kappa_1(N, v, \gamma_2^C) - \kappa_1(N, v, \gamma_1^C) = \frac{1}{n_1 + 1} \sum_{s=2}^{n_1+1} \binom{n_1 - 1}{s - 2} \Delta_v(s).$$

Por la definición de dividendos de Harsanyi y la simetría de v

$$\sum_{s=2}^{n_1+1} \binom{n_1-1}{s-2} \Delta_v(S) = \sum_{s=2}^{n_1+1} \binom{n_1-1}{s-2} \sum_{t=1}^s \binom{s}{t} (-1)^{s-t} v(t),$$

que, tras algunas manipulaciones algebraicas, es igual a

$$v(n_1+1) - 2v(n_1) + v(n_1-1),$$

cantidad no negativa cuando v es convexo. ■

Con ayuda del lema anterior puede demostrarse que en una cadena con n nodos la centralidad de éstos aumenta desde los nodos terminales hacia el mediano, si utilizamos un juego simétrico y convexo.

Proposición 3.3.11 *Sea $(N, v, \gamma^C) \in \mathcal{CS}^N$ con $v \in \mathcal{S}^N \cap \mathcal{C}^N$ y γ^C una cadena con n nodos numerados de manera natural. Entonces, para $1 \leq i \leq n/2$*

$$\kappa_i(N, v, \gamma^C) \leq \kappa_{i+1}(N, v, \gamma^C). \quad (3.6)$$

Demostración: Para cada i , ($1 \leq i \leq n/2$), si eliminamos la arista $\{i, i+1\}$, obtenemos dos cadenas. La primera de ellas con i nodos, teniendo a los nodos 1 e i como terminales. La otra, de longitud $n-i$, tendrá por nodos terminales el $i+1$ y el n respectivamente. Notemos γ^{C_i} y $\gamma^{C_{n-i}}$ tales cadenas. Por el Lema 3.3.2, como $i \leq n-i$ se tiene que:

$$\kappa_i(N, v, \gamma^{C_i}) \leq \kappa_{i+1}(N, v, \gamma^{C_{n-i}}),$$

y por ser la medida equitativa:

$$\kappa_i(N, v, \gamma^C) \leq \kappa_{i+1}(N, v, \gamma^C).$$

■

Debido a la elección hecha de juegos simétricos, en redes como la rueda o el grafo completo la centralidad es igual para todos los nodos. Además, por la eficiencia en componentes conexas, las centralidades deben sumar $v(N)$. En consecuencia, tenemos el siguiente resultado.

Proposición 3.3.12 *Sean (N, v, K^N) y $(N, v, \gamma^W) \in \mathcal{CS}^N$ con K^N el grafo completo, γ^W una rueda con n nodos y $v \in \mathcal{S}^N$. Entonces:*

$$\kappa_i(N, v, K^N) = \kappa_i(N, v, \gamma^W) = \frac{v(N)}{n}, \quad \text{para todo } i \in N.$$

El último resultado pone de manifiesto una cierta miopía de las medidas propuestas en el sentido de que estructuras de relaciones muy diferentes pueden generar centralidades iguales en los actores. En el apartado 3.6. retomaremos esta debilidad para justificar una descomposición aditiva de cada medida en otras dos que recojan las componentes de la centralidad debidas a proximidad y a intermediación respectivamente.

3.4. Cálculo de la medida de centralidad

Dado un grafo (N, γ) , la aplicación que asigna a cada $v \in G^N$ el juego restringido al grafo, (N, v^γ) , es una proyección en el sentido de que satisface linealidad e idempotencia.

La linealidad se satisface trivialmente. La idempotencia se deduce de que, para todo $S \subset N$, $(v^\gamma)^\gamma(S) = \sum_{T_k \in S/\gamma} v^\gamma(T_k) = \sum_{T_k \in S/\gamma} v(T_k) = v^\gamma(S)$. Como consecuencia, para determinar la proyección de cualquier juego (el juego restringido) será suficiente conocer las imágenes de los juegos de una base del espacio G^N . Utilizaremos la base de unanimidad $\{u_S\}_{S \subset N}$.

Los siguientes resultados proporcionan, para cada $S \subset N$ y cada $\gamma \in \Gamma^N$, los juegos restringidos (N, u_S^γ) . Interpretaremos u_S^γ como el juego de conectar S en γ .

Proposición 3.4.1 *Sea $\gamma \in \Gamma^N$. Dado $S \subset N$, con $(S, \gamma|_S)$ conexo, se tiene que $u_S^\gamma = u_S$.*

Demostración: Por definición de juego restringido al grafo, para cada $T \subset N$:

$$u_S^\gamma(T) = \sum_{T_k \in T/\gamma} u_S(T_k).$$

Si $S \subset T$, por ser S conexo, existe una componente conexa de T , T_{k_0} , de manera que $S \subset T_{k_0}$ y $S \not\subset T_k$ para $k \neq k_0$. Por tanto, $u_S^\gamma(T) = u_S(T_{k_0}) = 1 = u_S(T)$.

Si, por el contrario, $S \not\subset T$ no puede haber ninguna componente conexa de T que lo contenga, con lo que $u_S^\gamma(T) = 0 = u_S(T)$. ■

En el caso de que $\gamma \in \Gamma^N$ y S sea no conexo en γ se tiene el siguiente resultado.

Proposición 3.4.2 *Sean $\gamma \in \Gamma^N$ y $S \subset N$ tal que $(S, \gamma|_S)$ es no conexo. Entonces para cada $T \subset N$:*

$$u_S^\gamma(T) = \begin{cases} 1 & \text{si existe algún subconjunto conexo de } T \text{ que contenga a } S \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (3.7)$$

Demostración: Por la definición de juego restringido al grafo, para cualquier coalición $T \subset N$:

$$u_S^\gamma(T) = \sum_{T_k \in T/\gamma} u_S(T_k) = \begin{cases} 1 & \text{si existe alguna componente conexa de } T, T_{k_0} \text{ tal que } S \subset T_{k_0} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

■

El segundo de los resultados anteriores, si bien resulta ilustrativo sobre el comportamiento de las proyecciones de los juegos de unanimidad, no es manejable desde el punto de vista del cálculo del valor de Myerson y, por tanto, de la centralidad. Las siguientes definiciones y resultados se dirigen a obtener una expresión de las proyecciones de los juegos de unanimidad en términos de la propia base.

Definición 3.4.1 *Dados un grafo (N, γ) y $S \subset N$, diremos que $S' \subset N$ es un conjunto de conexión de S en γ si es conexo y contiene a S .*

Notaremos $\mathcal{C}_\gamma(S)$ la familia de los conjuntos de conexión de S en γ y $\mathcal{M}_\gamma(S)$ la de los minimales.

Obsérvese que para un $S \subset N$ dado pueden existir diversos conjuntos minimales de conexión, sólomente uno o incluso ninguno.

El siguiente ejemplo ilustra la definición anterior:

Ejemplo 3.4.1 *Consideremos $N = \{1, 2, 3, 4\}$ y los grafos (N, γ_1) , (N, γ_2) y (N, γ_3) cuya representación aparece en la Figura 3.3.*

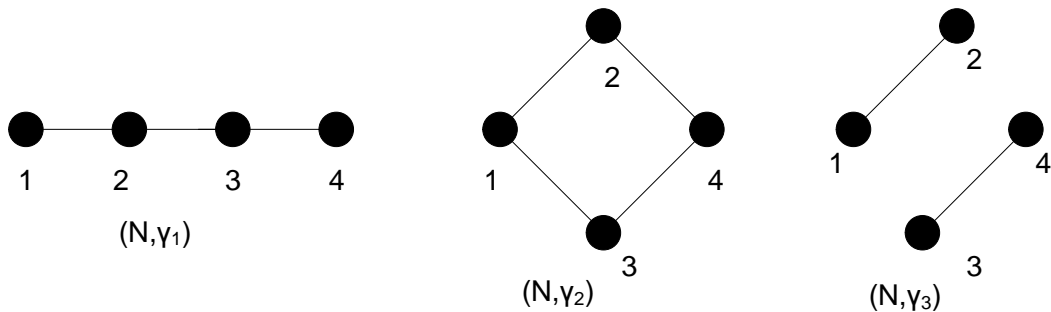


Figura 3.3: Cardinal de la familia de conjuntos minimales de conexión

Si $S = \{1, 4\}$ podemos observar que:

$$\mathcal{M}_{\gamma_1}(S) = \{\{1, 2, 3, 4\}\},$$

$$\mathcal{M}_{\gamma_2}(S) = \{\{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}\},$$

$$\mathcal{M}_{\gamma_3}(S) = \emptyset.$$

Dado $\gamma \in \Gamma^N$, si $\mathcal{M}_\gamma(S) = \emptyset$, i.e., si S no es conectable en γ entonces, por la Proposición 3.4.2, $u_S^\gamma \equiv \mathbf{0}$ (el vector nulo del espacio vectorial G^N), ya que para cualquier coalición $T \subset N$ no existe ninguna coalición T' conexa tal que $S \subset T' \subset T$. En el siguiente lema se dará una expresión para u_S^γ en los restantes casos.

Lema 3.4.1 *Dados $\gamma \in \Gamma^N$ y $S \subset N$, si $\mathcal{M}_\gamma(S) = \{S_i\}_{i=1}^r$, entonces:*

$$u_S^\gamma = \mathbf{1} - \prod_{i=1}^r (1 - u_{S_i}), \quad (3.8)$$

donde $\mathbf{1}$ es el juego con función característica dada por $\mathbf{1}(S) = 1$, para todo $S \neq \emptyset$, i.e., el elemento unidad del producto interno estándar en G^N .

Demostración: Sea $T \subset N$, entonces:

$$(1 - u_{S_i})(T) = \begin{cases} 0 & \text{si } S_i \subset T \\ 1 & \text{si } S_i \not\subset T \end{cases}$$

y por tanto:

$$\left(1 - \prod_{i=1}^r (1 - u_{S_i})\right)(T) = \begin{cases} 1 & \text{si existe } S_i \subset T \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (3.9)$$

Comparando (3.9) con (3.7) se tiene la igualdad (3.8). ■

Nótese que el resultado del lema anterior sigue siendo cierto si se sustituye $\mathcal{M}_\gamma(S)$ por $\mathcal{C}_\gamma(S)$.

En la siguiente proposición se determina el subespacio imagen por la proyección que asigna a cada $v \in G^N$, v^γ , con $\gamma \in \Gamma^N$. Dicho subespacio es la envoltura lineal de $\{u_S\}$ con S conexo en γ . Este resultado aparece en Owen (1986), pero aquí daremos una demostración constructiva diferente. Será útil para el cálculo posterior de las centralidades, pues expresa la proyección de los juegos de unanimidad en términos de ellos mismos.

Proposición 3.4.3 *Dados $\gamma \in \Gamma^N$ y $S \subset N$, con $\mathcal{M}_\gamma(S) = \{S_i\}_{i=1}^r$, se tiene:*

$$u_S^\gamma = \sum_{i=1}^r u_{S_i} - \sum_{i<j}^r u_{S_i \cup S_j} + \sum_{i<j<k}^r u_{S_i \cup S_j \cup S_k} + \cdots + (-1)^{r+1} u_{\cup_{i=1}^r S_i}.$$

Demostración: Por el lema anterior:

$$u_S^\gamma = \mathbf{1} - \prod_{i=1}^r (1 - u_{S_i}) = \sum_{i=1}^r u_{S_i} - \sum_{i<j}^r u_{S_i} \cdot u_{S_j} + \sum_{i<j<k}^r u_{S_i} \cdot u_{S_j} \cdot u_{S_k} + \cdots + (-1)^{r+1} u_{S_1} \cdot u_{S_2} \cdots u_{S_r}.$$

Además, si $\{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, r\}$, se tiene

$$u_{S_{i_1}} \cdot u_{S_{i_2}} \cdots u_{S_{i_k}} = u_{\cup_{j=1}^k S_{i_j}},$$

entonces,

$$u_S^\gamma = \sum_{i=1}^r u_{S_i} - \sum_{i<j}^r u_{S_i \cup S_j} + \sum_{i<j<k}^r u_{S_i \cup S_j \cup S_k} + \cdots + (-1)^{r+1} u_{\cup_{i=1}^r S_i}. \quad (3.10)$$

■

El siguiente corolario fue obtenido por Owen (1986).

Corolario 3.4.1 *Sea $\gamma \in \Gamma^N$ un árbol. Para todo $S \subset N$, el único conjunto minimal de conexión es la envoltura conexa de S . Entonces $u_S^\gamma = u_{H(N,\gamma,S)}$.*

3.5. Ejemplos

Uno de los objetivos de esta Memoria es asignar, de manera razonable, a los nodos de un grafo (N, γ) una centralidad. Se asume, además, que los nodos son actores en un contexto económico modelado a través de un juego TU. Es innegable, entonces, la influencia del juego así como la dificultad, en muchas situaciones, para elegir uno específico.

Para ilustrar nuestra propuesta y calcular las centralidades en diferentes grafos utilizaremos tres juegos simétricos de amplio uso en la literatura juego-teórica:

- *El juego de los mensajes.* Centra su interés en las posibilidades de comunicación directa. Si S es un subconjunto de N , los pagos a S serán proporcionales al número de parejas que pueden formarse en S , con lo que $v_1(S) = k \binom{s}{2}$. Se toma el valor dos

para la constante de proporcionalidad k con el fin de tener en cuenta que cualquiera de los dos actores en un par $\{i, j\}$ puede actuar como emisor o como receptor. De esta manera, tenemos $v_1(S) = s^2 - s$. Los dividendos de Harsanyi para este juego vienen dados por:

$$\Delta_{v_1}(S) = \begin{cases} 2 & \text{si } s = 2 \\ 0 & \text{si } s \neq 2. \end{cases}$$

- *El juego de los gastos generales con $S = N$ (pure overhead game).* Asume que cualquier coalición que se forme debe hacer frente a un coste unitario. Por tanto, su función característica satisface $p_N(S) = -1$, para todo $S \subset N$ con $S \neq \emptyset$. Los dividendos de Harsanyi para este juego vienen dados por:

$$\Delta_{p_N}(S) = (-1)^s, \quad s \geq 1.$$

Dado un grafo γ , la proyección del juego de los gastos generales asigna a cada coalición el opuesto del número de sus componentes conexas.

- Por último, el *juego de las conferencias*. Asigna a cada coalición un valor que mide las posibilidades de comunicación intragrupo. Para cada $S \subset N$, el pago a S será el número de subconjuntos de S con cardinal mayor que 1. Entonces, la función característica vendrá dada por $v_2(S) = 2^s - s - 1$. Los correspondientes dividendos de Harsanyi son:

$$\Delta_{v_2}(S) = \begin{cases} 0 & \text{si } s = 0, 1 \\ 1 & \text{si } s \geq 2. \end{cases}$$

A continuación se obtienen expresiones generales para las centralidades de los diferentes nodos de ciertos grafos conexos, así como su particularización para el caso de los tres juegos considerados.

- La estrella

Analicemos primero la centralidad de los nodos en el caso de la estrella (N, γ^S) (Figura 1.1), en la que el centro se ha etiquetado como 1. Por ser la estrella un árbol, para cada $T \subset N$ el único conjunto minimal de conexión será $H(N, \gamma^S, T)$. En particular, si $1 \in T$, $H(N, \gamma^S, T) = T$ ya que la coalición T será conexa, mientras que si $1 \notin T$, $H(N, \gamma^S, T) = T \cup \{1\}$. Con estos resultados podemos escribir para cualquier juego simétrico v y para cada $i \in N$:

$$\kappa_i(N, v, \gamma^S) = \sum_{T \subset N} \Delta_v(T) \varphi_i(N, u_{H(N, \gamma^S, T)}).$$

Recordando que para un juego de la base de unanimidad u_S se tiene:

$$\varphi_i(N, u_S) = \begin{cases} \frac{1}{s} & \text{si } i \in S \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

la centralidad del nodo 1 será:

$$\begin{aligned} \kappa_1(N, v, \gamma^S) &= \sum_{T \subset N \setminus \{1\}} \Delta_v(S) \varphi_1(N, u_{T \cup \{1\}}) + \sum_{T \subset N \setminus \{1\}} \Delta_v(T \cup \{1\}) \varphi_1(N, u_{T \cup \{1\}}) = \\ &= \sum_{t=0}^{n-1} \binom{n-1}{t} \Delta_v(t) \frac{1}{t+1} + \sum_{t=0}^{n-1} \binom{n-1}{t} \Delta_v(t+1) \frac{1}{t+1}. \end{aligned}$$

Por simetría los diferentes nodos satélites tendrán la misma centralidad; i.e., si $i \neq 1$:

$$\begin{aligned} \kappa_i(N, v, \gamma^S) &= \sum_{T \subset N \setminus \{i, 1\}} \Delta_v(T) \varphi_i(N, u_{T \cup \{1\}}) + \sum_{T \subset N \setminus \{1, i\}} \Delta_v(T \cup \{1\}) \varphi_i(N, u_{T \cup \{1\}}) + \\ &+ \sum_{T \subset N \setminus \{1, i\}} \Delta_v(T \cup \{i\}) \varphi_i(N, u_{T \cup \{1, i\}}) + \sum_{T \subset N \setminus \{1, i\}} \Delta_v(T \cup \{1, i\}) \varphi_i(N, u_{T \cup \{1, i\}}) = \\ &= \sum_{t=0}^{n-2} \binom{n-2}{t} \Delta_v(t+1) \frac{1}{t+2} + \sum_{t=0}^{n-2} \binom{n-2}{t} \Delta_v(t+2) \frac{1}{t+2}. \end{aligned}$$

Tras unas sencillas manipulaciones algebraicas las expresiones anteriores se pueden reescribir como:

$$\kappa_1(N, v, \gamma^S) = \Delta_v(1) + \frac{1}{n} \sum_{k=2}^n \binom{n+1}{k+1} \Delta_v(k), \quad (3.11)$$

y para $i \neq 1$:

$$\kappa_i(N, v, \gamma^S) = \Delta_v(1) + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k+1} \left[\binom{n-1}{k-1} + \frac{1}{k} \binom{n-2}{k-2} \right] \Delta_v(k). \quad (3.12)$$

Si particularizamos (3.11) y (3.12) al caso de los juegos v_1 , p_N y v_2 anteriormente considerados, se obtiene:

$$\begin{aligned} \kappa_1(N, v_1, \gamma^S) &= \frac{n^2 - 1}{3}, \\ \kappa_i(N, v_1, \gamma^S) &= \frac{2n - 1}{3}, \quad \text{para } i \neq 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\kappa_1(N, p_N, \gamma^S) &= \frac{n-3}{2}, \\ \kappa_i(N, p_N, \gamma^S) &= -\frac{1}{2}, \text{ para } i \neq 1, \\ \kappa_1(N, v_2, \gamma^S) &= \frac{1}{n} \left[2^{n+1} - \frac{n^2 + 3n + 4}{2} \right], \\ \kappa_i(N, v_2, \gamma^S) &= \frac{2}{n(n-1)} [(n-2)2^{n-1} + 1] - \frac{1}{2}, \text{ para } i \neq 1.\end{aligned}$$

Para v_1 , si se estandariza la centralidad dividiendo por $v_1(N) = n^2 - n$ (la suma de las centralidades de los n nodos), podemos analizar el comportamiento asintótico en el caso del centro de la estrella y en el de los nodos satélites. Notando

$$\kappa_i^*(N, v_1, \gamma^S) = \frac{\kappa_i(N, v_1, \gamma^S)}{n^2 - n}$$

esta estandarización de la centralidad, se tiene:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \kappa_1^*(N, v_1, \gamma^S) = \frac{1}{3}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \kappa_i^*(N, v_1, \gamma^S) = 0, \quad i \neq 1,$$

resultado que coincide con el obtenido en Grofman y Owen (1982, p.218) en un contexto ligeramente distinto al aquí propuesto.

- La cadena

Analicemos el caso particular de la cadena con seis nodos γ^C .



Figura 3.4: Cadena con 6 nodos (γ^C)

Para un juego general v , simétrico, se tiene que:

$$\begin{aligned}\kappa_1(N, v, \gamma^C) &= \kappa_6(N, v, \gamma^C) = \\ &= \Delta_v(1) + \frac{29}{20}\Delta_v(2) + \frac{21}{10}\Delta_v(3) + \frac{37}{20}\Delta_v(4) + \frac{13}{15}\Delta_v(5) + \frac{1}{6}\Delta_v(6).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\kappa_2(N, v, \gamma^C) &= \kappa_5(N, v, \gamma^C) = \\ &= \Delta_v(1) + \frac{82}{30}\Delta_v(2) + \frac{53}{15}\Delta_v(3) + \frac{27}{10}\Delta_v(4) + \frac{16}{15}\Delta_v(5) + \frac{1}{6}\Delta_v(6).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\kappa_3(N, v, \gamma^C) &= \kappa_4(N, v, \gamma^C) = \\ &= \Delta_v(1) + \frac{199}{60}\Delta_v(2) + \frac{131}{30}\Delta_v(3) + \frac{59}{20}\Delta_v(4) + \frac{16}{15}\Delta_v(5) + \frac{1}{6}\Delta_v(6).\end{aligned}$$

En particular para los juegos v_1 , p_N y v_2 obtenemos:

$$\kappa_1(N, v_1, \gamma^C) = 2.9 \quad \kappa_2(N, v_1, \gamma^C) = 5.47 \quad \kappa_3(N, v_1, \gamma^C) = 6.63.$$

$$\kappa_1(N, p_N, \gamma^C) = -0.5 \quad \kappa_2(N, p_N, \gamma^C) = 0 \quad \kappa_3(N, p_N, \gamma^C) = 0.$$

$$\kappa_1(N, v_2, \gamma^C) = 6.43 \quad \kappa_2(N, v_2, \gamma^C) = 10.2 \quad \kappa_3(N, v_2, \gamma^C) = 11.87.$$

Por ser los tres juegos simétricos y convexos, la centralidad es no decreciente hacia los nodos medianos como ha quedado probado en la Proposición 3.3.10.

- La cometa

Para ilustrar el cálculo de las centralidades en grafos con ciclos, consideremos la cometa γ^K (Figura 3.5) y el juego de los mensajes v_1 .

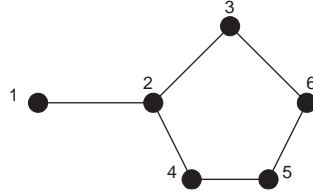


Figura 3.5: La cometa (γ^K)

Recordemos que, para el juego v_1 , sólo son distintos de cero los dividendos para coaliciones de tamaño 2. En la Tabla 3.1 se muestra, para cada una de tales coaliciones, sus conjuntos minimales de conexión así como el reparto del dividendo de dicha coalición entre todos los nodos que sirven para conectarla en γ^K . Detallaremos, a continuación, el cálculo de los valores obtenidos en dicha tabla para el caso $S = \{1, 6\}$. Para esta coalición, $S_1 = \{1, 2, 3, 6\}$ y $S_2 = \{1, 2, 4, 5, 6\}$ son los dos conjuntos minimales de conexión que contienen a S . Entonces, utilizando la ecuación (3.10), se tiene:

$$\begin{aligned}\varphi(N, u_S^{\gamma^K}) &= \varphi(N, u_{S_1}) + \varphi(N, u_{S_2}) - \varphi_i(u_{S_1 \cup S_2}) = \\ &= \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 0, 0, \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, 0, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right) - \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right).\end{aligned}$$

Coalición S	Elementos de $\mathcal{M}_{\gamma\kappa}(S)$	$\Delta_{v_1}(S)\varphi_i(N, u_S^{\gamma^K})$					
		$i = 1$	2	3	4	5	6
{1, 2}	{1, 2}	1	1	0	0	0	0
{1, 3}	{1, 2, 3}	0.666	0.666	0.666	0	0	0
{1, 4}	{1, 2, 4}	0.666	0.666	0	0.666	0	0
{1, 5}	{1, 2, 4, 5}, {1, 2, 3, 5, 6}	0.566	0.566	0.066	0.166	0.566	0.066
{1, 6}	{1, 2, 3, 6}, {1, 2, 4, 5, 6}	0.566	0.566	0.166	0.066	0.066	0.566
{2, 3}	{2, 3}	0	1	1	0	0	0
{2, 4}	{2, 4}	0	1	0	1	0	0
{2, 5}	{2, 4, 5}, {2, 3, 5, 6}	0	0.766	0.1	0.266	0.766	0.1
{2, 6}	{2, 3, 6}, {2, 4, 5, 6}	0	0.766	0.266	0.1	0.1	0.766
{3, 4}	{2, 3, 4}, {3, 4, 5, 6}	0	0.266	0.766	0.766	0.1	0.1
{3, 5}	{3, 5, 6}, {2, 3, 4, 5}	0	0.1	0.766	0.1	0.766	0.266
{3, 6}	{3, 6}	0	0	1	0	0	1
{4, 5}	{4, 5}	0	0	0	1	1	0
{4, 6}	{4, 5, 6}, {2, 3, 4, 6}	0	0.1	0.1	0.766	0.266	0.766
{5, 6}	{5, 6}	0	0	0	0	1	1

Tabla 3.1

Puede observarse que, si para conectar a un conjunto S no hay más que una alternativa, es decir, si la cardinalidad de $\mathcal{M}_{\gamma\kappa}(S)$ es uno, un intermediario (por ejemplo 2 en el camino 1-2-3) recibe un pago igual al de los nodos que envían o reciben el mensaje. Cuando hay más opciones (por ejemplo 2 y 6 pueden conectarse utilizando a 4 y 5 como intermediarios o a 3), estos intermediarios recibirán menos debido a que existen diferentes caminos alternativos (competición).

Si sumamos las diferentes filas $\Delta_{v_1}(S)\varphi_i(N, u_S^{\gamma^K})$ de la Tabla 3.1, obtendremos el vector de centralidades :

$$\kappa(N, v_1, \gamma^K) = (3.466, 7.466, 4.900, 4.900, 4.633, 4.633). \quad (3.13)$$

Como era de esperar, el nodo 2 tiene, con diferencia, la mayor centralidad, mientras que el nodo 1, que es el que más próximo está a ser un nodo aislado, obtiene la menor.

El ejemplo deja entrever la dificultad para calcular centralidades si el número de nodos de un grafo se hace (incluso moderadamente) grande y los conjuntos minimales

de conexión se multiplican. En la próxima sección trataremos de desarrollar técnicas para reducir la complejidad asociada a estos cálculos.

- Grafos con cuatro nodos

Finalmente, la Tabla 3.2 muestra las centralidades inducidas por los juegos simétricos v_1 , p_N y v_2 en todos los grafos conexos con 4 nodos.

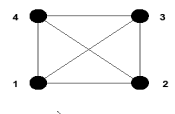
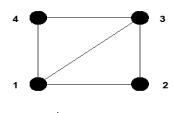
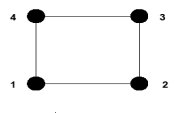
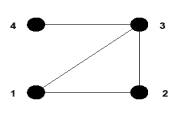
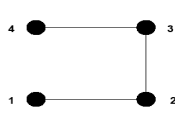
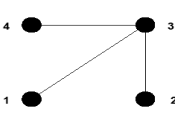
Grafos γ	Nodos	v_1	p_N	v_2
	1 2 3 4	3 3 3 3	-1/4 -1/4 -1/4 -1/4	11/4 11/4 11/4 11/4
	1 2 3 4	19/6 17/6 19/6 17/6	-1/6 -1/3 -1/6 -1/3	17/6 8/3 17/6 8/3
	1 2 3 4	3 3 3 3	-1/4 -1/4 -1/4 -1/4	11/4 11/4 11/4 11/4
	1 2 3 4	8/3 8/3 13/3 7/3	-1/3 -1/3 1/6 -1/2	5/2 5/2 11/3 7/3
	1 2 3 4	13/6 23/6 23/6 13/6	-1/2 0 0 -1/2	13/6 20/6 20/6 13/6
	1 2 3 4	7/3 7/3 5 7/3	-1/2 -1/2 1/2 -1/2	7/3 7/3 4 7/3

Tabla 3.2

3.6. Una descomposición de la medida de centralidad

En la última tabla de la sección anterior se observa que, el vector de centralidades para el grafo γ^1 coincide con el correspondiente al grafo γ^3 para cualquiera de los juegos considerados. En realidad, esto es así para cualquier juego simétrico, por la eficiencia en componentes conexas y la simetría de las medidas.

Esta situación pone de manifiesto un comportamiento miope de las medidas introducidas, que no aciertan del todo a valorar el grado de conexión de los diferentes nodos, ignorando parcialmente la densidad del grafo. Por este motivo, parece interesante plantearse una eventual descomposición en otras medidas, de manera que se matice el valor de la centralidad y se distinga en situaciones con conectividad diferente como las del ejemplo anterior. En definitiva, tratamos de dar a la centralidad un carácter vectorial en lugar de escalar.

Para motivar esta descomposición, consideremos de nuevo la situación de comunicación (N, v_1, γ^K) . Las restricciones en la comunicación permiten a cada nodo dos tipos de actuaciones esencialmente distintas: enviar-recibir mensajes o intermediar en las comunicaciones entre otros. De esta manera, podemos observar que, de la centralidad de 7.466 correspondiente al nodo 2 en la expresión (3.13), una parte, 4.533, la obtiene a partir de los juegos de unanimidad de las coaliciones $\{1, 2\}$, $\{2, 3\}$, $\{2, 4\}$, $\{2, 5\}$ y $\{2, 6\}$ a las que él pertenece (*proximidad*), mientras que el resto, 2.933, lo obtiene a partir de juegos de unanimidad de las coaliciones $\{1, 3\}$, $\{1, 4\}$, $\{1, 5\}$, $\{1, 6\}$, $\{3, 4\}$, $\{3, 5\}$ y $\{4, 6\}$, que lo necesitan como intermediario para conectarse (*intermediación*). Haciendo lo mismo con los restantes nodos, podemos expresar el vector $\kappa(N, v_1, \gamma^K)$ como la suma de los vectores:

$$\kappa^C(N, v_1, \gamma^K) = (3.466, 4.533, 4.200, 4.200, 4.100, 4.100), \text{ y}$$

$$\kappa^B(N, v_1, \gamma^K) = (0, 2.933, 0.700, 0.700, 0.533, 0.533),$$

donde $\kappa^C(N, v_1, \gamma^K)$ y $\kappa^B(N, v_1, \gamma^K)$ pueden interpretarse como medidas de centralidad por proximidad (*closeness*) y por intermediación (*betweenness*), respectivamente.

Más en general, para cada nodo i en una situación de comunicación (N, v, γ) , siendo v un juego simétrico, podemos definir la *centralidad por proximidad* del nodo i , $\kappa_i^C(N, v, \gamma)$, como la parte de la centralidad total del nodo i correspondiente a su pertenencia a las diferentes coaliciones S , y la *centralidad por intermediación* del nodo i , $\kappa_i^B(N, v, \gamma)$, como

la obtenida por su participación en la conexión de miembros de coaliciones a las que no pertenece.

Formalmente se tiene la siguiente definición.

Definición 3.6.1 Dada $(N, v, \gamma) \in \mathcal{CS}^N$, para cada nodo $i \in N$, definimos su centralidad por proximidad como:

$$\kappa_i^C(N, v, \gamma) = \sum_{i \in SCN} \Delta_v(S) \kappa_i(N, u_S, \gamma)$$

y su centralidad por intermediación como:

$$\kappa_i^B(N, v, \gamma) = \sum_{i \notin SCN} \Delta_v(S) \kappa_i(N, u_S, \gamma).$$

Claramente las dos medidas definidas suponen una descomposición aditiva de la centralidad propuesta.

Proposición 3.6.1 Sea $(N, v, \gamma) \in \mathcal{CS}^N$ con $v \in S^N$. Entonces:

$$\kappa(N, v, \gamma) = \kappa^C(N, v, \gamma) + \kappa^B(N, v, \gamma).$$

Ejemplo 3.6.1 Volviendo a la Tabla 3.2, la centralidad en (N, v_1, γ^1) puede descomponerse como:

$$\kappa_i^C(N, v_1, \gamma^1) = 3, \quad \kappa_i^B(N, v_1, \gamma^1) = 0, \quad \text{para } i = 1, 2, 3, 4,$$

mientras que para (N, v_1, γ^3) se tiene:

$$\kappa_i^C(N, v_1, \gamma^3) = \frac{17}{6}, \quad \kappa_i^B(N, v_1, \gamma^3) = \frac{1}{6}, \quad \text{para } i = 1, 2, 3, 4.$$

Y si bien la medida de centralidad inicialmente propuesta no distingue entre los nodos de γ^1 y γ^3 , la descomposición matiza que en γ^1 toda la centralidad de cada nodo es debida a proximidad, mientras que en γ^3 una parte nace la de intermediación.

Ejemplo 3.6.2 Para los grafos conexos con cuatro nodos y los juegos v_1 , p_N y v_2 que aparecen en la Tabla 3.2, los resultados de la descomposición se muestran en la siguiente tabla.

Grafos	Nodos	(N, v_1, γ)		(N, p_N, γ)		(N, v_2, γ)	
		κ_i^C	κ_i^B	κ_i^C	κ_i^B	κ_i^C	κ_i^B
γ^1	1, 2, 3, 4	3	0	-1/4	0	11/4	0
γ^2	1, 3	3	1/6	-1/4	1/12	11/4	1/12
	2, 4	17/6	0	-1/3	0	8/3	0
γ^3	1, 2, 3, 4	17/6	1/6	-1/3	1/12	8/3	1/12
γ^4	1, 2	8/3	0	-1/3	0	5/2	0
	3	3	4/3	-1/4	5/12	11/4	11/12
	4	7/3	0	-1/2	0	7/3	0
γ^5	1, 4	13/6	0	-1/2	0	13/6	0
	2, 3	8/3	7/6	-1/3	1/3	5/2	5/6
γ^6	1, 2, 4	7/3	0	-1/2	0	7/3	0
	3	3	2	-1/4	3/4	4	5/4

Tabla 3.3

Los resultados siguientes apoyan la denominación elegida para las dos componentes de la centralidad.

En primer lugar resulta natural que toda la centralidad de cada actor en el grafo completo sea debida a proximidad, ya que todos ellos carecen de posibilidades de intermediación por estar conectados directamente entre sí los actores de cualquier subconjunto que consideremos.

Proposición 3.6.2 *Dada $(N, v, K^N) \in \mathcal{CS}^N$ con $v \in \mathcal{S}^N$. Se tiene:*

$$\kappa_i^B(N, v, K^N) = 0, \quad \text{para todo } i \in N.$$

En segundo lugar también resulta intuitivo que los nodos de grado menor o igual que uno tengan centralidad por intermediación nula.

Proposición 3.6.3 *Sea $(N, v, \gamma) \in \mathcal{CS}^N$ con $v \in \mathcal{S}^N$. Si $i \in N$ es tal que $|L_i(\gamma)| \leq 1$, entonces:*

$$\kappa_i^B(N, v, \gamma) = 0.$$

Nótese que esta propiedad no es característica de los nodos con grado menor o igual que uno. Por ejemplo, los nodos 1 y 2 en las situaciones de comunicación (N, v_1, γ^4) , (N, p_N, γ^4) y (N, v_2, γ^4) también la presentan (cf. Tabla 3.2).

Ejemplo 3.6.3 Las centralidades calculadas para los n nodos de la estrella centrada en el nodo 1 con el juego de las comunicaciones v_1 se descomponen del siguiente modo:

$$\begin{aligned}\kappa_1^C(N, v_1, \gamma^S) &= n - 1, & \kappa_1^B(N, v_1, \gamma^S) &= \frac{(n-1)(n-2)}{3}, \\ \kappa_i^C(N, v_1, \gamma^S) &= \frac{2n-1}{3}, & \kappa_i^B(N, v_1, \gamma^S) &= 0, \quad i \neq 1.\end{aligned}$$

En todos los ejemplos vistos hasta ahora, las dos componentes de la centralidad ordenan de la misma manera los nodos de una red. Debe precisarse, sin embargo, que esto no es cierto en general.

Ejemplo 3.6.4 En el cometa (Figura 3.6) se tiene que:

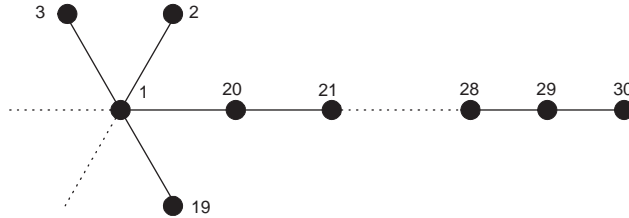


Figura 3.6: El cometa (γ^{CT})

$$\kappa_2^C(N, v_1, \gamma^{CT}) = \kappa_2(N, v_1, \gamma^{CT}) = 15.69, \quad \kappa_2^B(N, v_1, \gamma^{CT}) = 0,$$

mientras que:

$$\kappa_{29}^C(N, v_1, \gamma^{CT}) = 8.04, \quad \kappa_{29}^B(N, v_1, \gamma^{CT}) = 5.98.$$

Estas cantidades reflejan que el nodo 2 está en mejor posición en sus comunicaciones directas que el nodo 29, pero en peor situación que éste para intermediar en las de los otros.

3.7. Las medidas definidas versus las preexistentes

3.7.1. Sobre las trayectorias consideradas

Como ya se puso de manifiesto en la introducción, las medidas clásicas de centralidad de tipo grado (Shaw, 1954 y Nieminem, 1979), proximidad (Beauchamp, 1965 y Sabidussi, 1966) y de intermediación (Bavelas, 1948 y Freeman, 1977) están basadas en el mismo elemento estructural: los caminos geodésicos.

A diferencia de las anteriores, nuestra aproximación no utiliza exclusivamente las trayectorias geodésicas, pero tampoco todas como lo hacen Stephenson y Zelen (1989), sino sólo las minimales.

En los siguientes ejemplos aparecen situaciones que apoyan esta elección. Consideremos primero la idea de que la centralidad debe tener en cuenta sólo las trayectorias geodésicas entre cada pareja de nodos. En la Figura 3.7 hay dos posibles trayectorias entre los nodos 1 y 6. Una de ellas, 1-2-3-4-5-6, tiene longitud 5; la otra, 1-11-10-9-8-7-6, tiene longitud 6 y no parece natural descartar la posibilidad de utilizar la trayectoria más larga simplemente porque existe una ligeramente más corta. Sin embargo, es razonable descartar la trayectoria de 10 arcos del nodo 1 al nodo 2 existiendo una comunicación directa entre ellos.

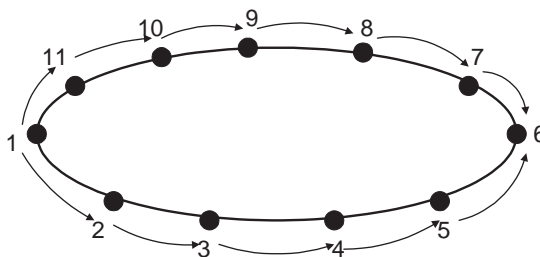


Figura 3.7: Rueda

Por lo que respecta a tener en cuenta todas las trayectorias entre dos nodos dados, consideremos la Figura 3.8 y los nodos 3 y 5. La trayectoria geodésica (3-2-5) tiene longitud 2, mientras que las otras (3-2-1-5, 3-4-1-5 y 3-4-1-2-5) son más largas. En nuestra aproximación, despreciaremos la 3-2-1-5 en favor de la más corta 3-2-5, y 3-4-1-2-5 en favor de 3-4-1-5, ya que en ambos casos imponemos un intermediario superfluo en la comunicación, lo que se puede percibir como problemático en ciertos contextos.

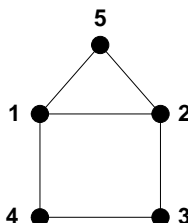


Figura 3.8: Casita

3.7.2. Comparando propiedades

Se ha probado en la Sección 3.3 de este capítulo que si (N, v) es un juego simétrico, estrictamente convexo (y por tanto estrictamente superaditivo), la medida de centralidad inducida por v en los nodos de un grafo γ satisface las siguientes propiedades:

- (a) Es equitativa (Proposición 3.3.6)
- (b) Contribuciones equilibradas (Proposición 3.3.7)
- (c) Estabilidad (Proposición 3.3.4)
- (d) Eficiencia en grafos conexos (Proposición 3.3.2)
- (e) Simetría (Proposición 3.3.1)
- (f) Independencia de las restantes componentes conexas (Proposición 3.3.3)
- (g) Mínima centralidad en nodos aislados (Proposición 3.3.5)
- (h) Máxima centralidad en el centro de la estrella (Proposición 3.3.8)
- (i) En grafos conexos, mínima centralidad en los nodos terminales de una cadena (Proposición 3.3.10)
- (j) En una cadena, centralidad creciente del nodo terminal al nodo mediano (Proposición 3.3.11)

En lo que sigue analizaremos hasta qué punto estas propiedades son satisfechas por las medidas de centralidad clásicas de Freeman (1979) y Bonacich (1987).

Las propiedades (a), (b), (c) y (d) son una consecuencia directa de la elección del valor de Shapley como índice de poder, y ninguna de las medidas anteriores satisface conjuntamente todas ellas.

Por otro lado, la mayor parte de las medidas clásicas de centralidad satisfacen las propiedades (e), (h) y (j) así como una versión más débil de la propiedad (i):

- (i') En una cadena, los nodos terminales tienen centralidad mínima (caso particular de (i) e incluso una consecuencia directa de (j)).

Pero la propiedad (i) es más fuerte que (i'). Las medidas de centralidad basadas en el grado y la medida de intermediación de Freeman (1977), satisfacen trivialmente la propiedad (i). El grado de un nodo terminal es 1, y su centralidad por intermediación debe ser cero, puesto que los nodos extremos de una cadena nunca pueden intermediar en las comunicaciones.

Sin embargo, la centralidad por proximidad (Freeman, 1977) no satisface la propiedad (i) si normalizamos con el objetivo de que la suma de las centralidades de los nodos de un grafo sea 1.

PROPIEDADES	C. grado	C. proximidad	C. intermediación	C. Bonacich
(a)	✓	No	No	No
(b)	✓	No	No	No
(c)	✓	✓	✓	✓
(d)	No	No	No	✓
(e)	✓	✓	✓	✓
(f)	✓	✓	✓	✓
(g)	✓	No definido	✓	✓
(h)	✓	✓	✓	✓
(i)	✓	No	✓	✓
(j)	✓	✓	✓	✓

Ejemplo 3.7.1 Consideremos los grafos γ^A y γ^C de la Figura 3.9. Los respectivos vectores de centralidad por proximidad de Freeman son:

$$(0.118, 0.165, 0.207, 0.151, 0.151),$$

$$(0.124, 0.169, 0.207, 0.169, 0.124).$$

Podemos observar que la centralidad de los nodos terminales en γ^C es mayor que la centralidad del nodo 1 en el grafo γ^A .

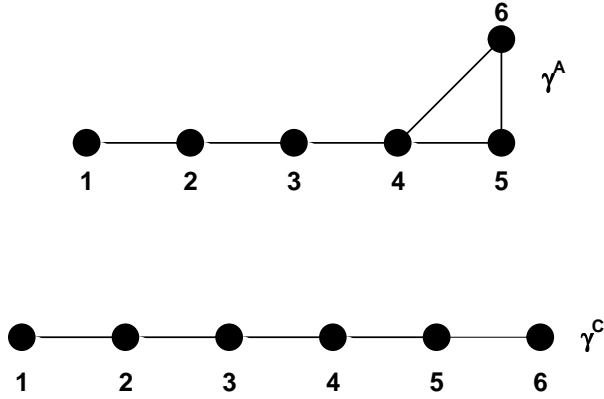


Figura 3.9: Cadenas

3.7.3. Un caso especial: los árboles

A pesar de las diferencias mencionadas anteriormente, para un tipo particular de grafos conexos, los árboles (e incluso los bosques), algunas de las medidas de centralidad que hemos introducido están muy relacionadas con ciertas medidas clásicas. Así, si γ es un árbol:

- (i) La centralidad inducida por el juego $p_N(S) = -1$ para todo $S \subset N$ es:

$$\kappa_i(N, p_N, \gamma) = \frac{1}{2} |L_i(\gamma)| - 1,$$

es decir, una función lineal de la centralidad por grado.

- (ii) Las dos componentes de la centralidad inducida por el juego $v_1(S) = s^2 - s$, son:

$$\kappa_i^C(N, v_1, \gamma) = \sum_{j \neq i} \frac{2}{d_\gamma(i, j) + 1},$$

donde $d_\gamma(i, j)$ es la distancia geodésica entre los nodos i y j en el grafo γ y

$$\kappa_i^B(N, v_1, \gamma) = \sum_{j, k \neq i, j < k} \frac{2\delta_{jk}^\gamma(i)}{d_\gamma(i, j) + 1},$$

donde $\delta_{jk}^\gamma(i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i \text{ está en la trayectoria geodésica que une } j \text{ con } k \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$

que son medidas clásicas de proximidad e intermediación respectivamente.

Capítulo 4

Ruptura de la red social para calcular centralidades

Los resultados relativos al cálculo de la centralidad obtenidos en el capítulo anterior ponen de manifiesto que el volumen de cómputo para obtener el juego restringido al grafo se incrementa muy rápidamente al aumentar tanto el tamaño como la densidad de la red. En este capítulo estudiaremos la posibilidad de fragmentar una red social en otras redes simples de manera que se haga más sencillo tal cómputo. En particular, se obtendrán resultados útiles para redes sociales en las que el juego subyacente sea un juego de representación¹.

Por último, aplicaremos los resultados obtenidos a dos situaciones de comunicación en las que la red social es ampliamente referenciada en la literatura. En concreto, las redes que, a partir de los datos recopilados por Kent (1978) y analizados por Padgett (1987) entre otros, representan las relaciones matrimoniales, en un caso, y las económicas, en el otro, de un conjunto de 16 familias florentinas del s. XV.

4.1. Fragmentando grafos para simplificar el cálculo de la centralidad

En lo que sigue, analizamos qué tipo de juegos cooperativos (N, v) y qué tipo de redes (N, γ) permiten calcular la centralidad $\kappa_i(N, v, \gamma)$ en función de las centralidades

¹Los resultados que aquí se presentan se basan en parte en los publicados en Gómez et al. (2004).

$\kappa_i(N_1, v_{|N_1}, \gamma_{|N_1})$ y $\kappa_i(N_2, v_{|N_2}, \gamma_{|N_2})$, siendo $(N_1, \gamma_{|N_1})$ y $(N_2, \gamma_{|N_2})$ una división del grafo (N, γ) .

En la siguiente proposición se obtienen condiciones suficientes sobre el grafo γ para que $\kappa_i(N, p_N, \gamma)$ pueda obtenerse en términos de las centralidades de dos subgrafos de γ . La demostración utiliza el hecho obvio de que, por definición de los juegos p_T , para todo $T \subset N$, se tiene que $p_{N|_T} = p_T$.

Proposición 4.1.1 *Dada una situación de comunicación (N, p_N, γ) , y dados N_1, N_2 dos subconjuntos no vacíos de N que satisfagan que $N_1 \cup N_2 = N$, $N_1 \cap N_2 \neq \emptyset$, $(N_1 \cap N_2, \gamma_{|N_1 \cap N_2})$ es un grafo completo y $\gamma_{|N_1} \cup \gamma_{|N_2} = \gamma$, entonces:*

- (i) si $i \in N_1 \setminus N_2$, $\kappa_i(N, p_N, \gamma) = \kappa_i(N_1, p_{N_1}, \gamma_{|N_1})$,
- (ii) si $i \in N_2 \setminus N_1$, $\kappa_i(N, p_N, \gamma) = \kappa_i(N_2, p_{N_2}, \gamma_{|N_2})$, y
- (iii) si $i \in N_1 \cap N_2$, $\kappa_i(N, p_N, \gamma) = \kappa_i(N_1, p_{N_1}, \gamma_{|N_1}) + \kappa_i(N_2, p_{N_2}, \gamma_{|N_2}) - \kappa_i(N_1 \cap N_2, p_{N_1 \cap N_2}, \gamma_{|N_1 \cap N_2})$.

Demostración: El juego restringido al grafo, p_N^γ , puede escribirse:

$$\begin{aligned}
p_N^\gamma &= \sum_{S \subset N} \Delta_{p_N}(S)(u_S^\gamma) = \\
&= \sum_{S \subset N_1} \Delta_{p_N}(S)(u_S^\gamma) + \sum_{S \subset N_2} \Delta_{p_N}(S)(u_S^\gamma) - \sum_{S \subset N_1 \cap N_2} \Delta_{p_N}(S)(u_S^\gamma) + \\
&+ \sum_{\emptyset \neq S_1 \subset N_1 \setminus N_2} \sum_{\emptyset \neq S_2 \subset N_2 \setminus N_1} \sum_{K \subset N_1 \cap N_2} \Delta_{p_N}(S_1 \cup S_2 \cup K)(u_{S_1 \cup S_2 \cup K}^\gamma) \quad (4.1)
\end{aligned}$$

El resultado queda probado si demostramos que este último (triple) sumatorio es nulo. Para cada par de conjuntos S_1 y S_2 con $\emptyset \neq S_1 \subset N_1 \setminus N_2$ y $\emptyset \neq S_2 \subset N_2 \setminus N_1$, sea $S^{12} = S_1 \cup S_2$ y sea $\mathcal{C}_\gamma(S^{12}) = \{R_i\}_{i=1}^{r(S^{12})}$ la familia de todos los conjuntos de conexión de S^{12} . Entonces, si $K \subset N_1 \cap N_2$, $\{R_i \cup K\}_{i=1}^{r(S^{12})}$ es una familia de conjuntos de conexión de S^{12} y de $S^{12} \cup K$ en (N, γ) , en la que puede haber elementos repetidos y que contiene a todos los elementos de $\mathcal{C}_\gamma(S^{12} \cup K)$ (por ser $\gamma_{|N_1 \cap N_2}$ es un grafo completo) y, en virtud de (3.10) y (3.8):

$$\begin{aligned}
&\sum_{K \subset N_1 \cap N_2} \Delta_{p_N}(S^{12} \cup K)(u_{S^{12} \cup K}^\gamma) = \\
&= \sum_{K \subset N_1 \cap N_2} \sum_{i=1}^{r(S^{12})} \Delta_{p_N}(S^{12} \cup K)u_{R_i \cup K} - \sum_{K \subset N_1 \cap N_2} \sum_{i < j}^{r(S^{12})} \Delta_{p_N}(S^{12} \cup K)u_{R_i \cup R_j \cup K} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \cdots + (-1)^{r(S^{12})+1} \sum_{K \subset N_1 \cap N_2} \Delta_{p_N}(S^{12} \cup K) u_{\cup_{i=1}^{r(S^{12})} R_i \cup K} = \\
= & \sum_{i=1}^{r(S^{12})} \sum_{K \subset N_1 \cap N_2} \Delta_{p_N}(S^{12} \cup K) u_{R_i \cup K} - \sum_{i < j}^{r(S^{12})} \sum_{K \subset N_1 \cap N_2} \Delta_{p_N}(S^{12} \cup K) u_{R_i \cup R_j \cup K} + \\
& + \cdots + (-1)^{r(S^{12})+1} \sum_{K \subset N_1 \cap N_2} \Delta_{p_N}(S^{12} \cup K) u_{\cup_{i=1}^{r(S^{12})} R_i \cup K}.
\end{aligned}$$

Así, para alcanzar nuestro objetivo, necesitamos probar que, para cualesquiera R_{l_1}, \dots, R_{l_t} con $1 \leq l_1 < \dots < l_t \leq r(S^{12})$, se tiene que:

$$\sum_{K \subset N_1 \cap N_2} \Delta_{p_N}(S^{12} \cup K) u_{R_{l_1} \cup \dots \cup R_{l_t} \cup K} = \mathbf{0}.$$

Nótese que $R_{l_1} \cup \dots \cup R_{l_t}$ es también un elemento de $\mathcal{C}_\gamma(S^{12})$. Por tanto, es suficiente demostrar que, para todo $R \in \mathcal{C}_\gamma(S^{12})$, se tiene:

$$\sum_{K \subset N_1 \cap N_2} \Delta_{p_N}(S^{12} \cup K) u_{R \cup K}(T) = 0, \text{ para todo } T \subset N. \quad (4.2)$$

Si $T \subset N$ y $R \not\subset T$, entonces (4.2) se satisface debido a la definición de juegos de unanimidad. Por otra parte, si $R \subset T$, entonces $u_{R \cup K}(T)$ es igual a uno si y sólo si $K \subset T$. Entonces:

$$\begin{aligned}
& \sum_{K \subset N_1 \cap N_2} \Delta_{p_N}(S^{12} \cup K) u_{R \cup K}(T) = \sum_{K \subset N_1 \cap N_2 \cap T} \Delta_{p_N}(S^{12} \cup K) = \\
= & \sum_{K \subset N_1 \cap N_2 \cap T} (-1)^{s^{12}+k} = (-1)^{s^{12}} \sum_{k=0}^{|N_1 \cap N_2 \cap T|} \binom{|N_1 \cap N_2 \cap T|}{k} (-1)^k = 0.
\end{aligned}$$

Por tanto:

$$p_N^\gamma = (p_{N_1}^\gamma) + (p_{N_2}^\gamma) - (p_{N_1 \cap N_2}^\gamma),$$

y teniendo en cuenta la linealidad del valor de Shapley, el resultado queda probado. ■

Ejemplo 4.1.1 Consideremos la situación de comunicación (N, p_N, γ) donde $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y la red (N, γ) está representada en la Figura 4.1. Calcularemos las centralidades de sus nodos utilizando el resultado de la proposición anterior. Podemos fragmentar

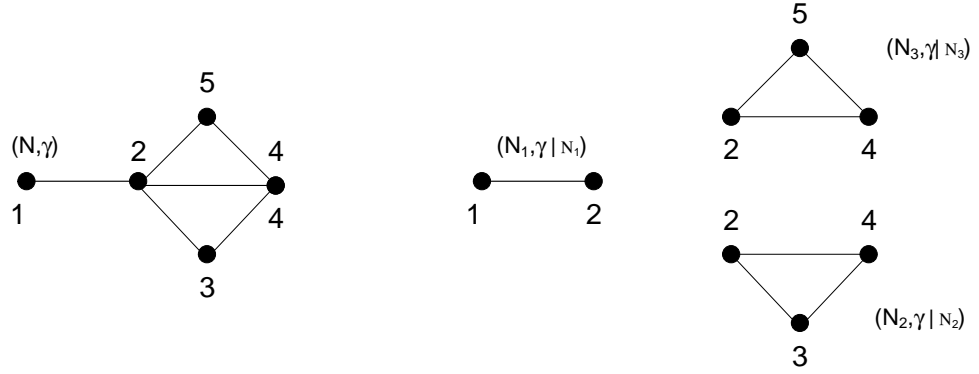


Figura 4.1: Fragmentando grafos

(N, γ) en tres grafos $(N_1, \gamma|_{N_1})$, $(N_2, \gamma|_{N_2})$ y $(N_3, \gamma|_{N_3})$, siendo $N_1 = \{1, 2\}$, $N_2 = \{2, 3, 4\}$ y $N_3 = \{2, 4, 5\}$.

Por la eficiencia y la simetría de la medida de centralidad:

$$\kappa(N_1, p_{N_1}, \gamma|_{N_1}) = (-0.5, -0.5),$$

$$\kappa(N_2, p_{N_2}, \gamma|_{N_2}) = (-0.333, -0.333, -0.333),$$

$$\kappa(N_3, p_{N_3}, \gamma|_{N_3}) = (-0.333, -0.333, -0.333).$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \kappa_1(N, p_N, \gamma) &= \kappa_1(N_1, p_{N_1}, \gamma|_{N_1}) = -0.5, \\ \kappa_2(N, p_N, \gamma) &= \kappa_2(N_1, p_{N_1}, \gamma|_{N_1}) + \kappa_2(N_2 \cup N_3, p_{N_2 \cup N_3}, \gamma|_{N_2 \cup N_3}) - \\ &\quad - \kappa_2(N_1 \cap (N_2 \cup N_3), p_{N_1 \cap (N_2 \cup N_3)}, \gamma|_{N_1 \cap (N_2 \cup N_3)}) = \\ &= \kappa_2(N_1, p_{N_1}, \gamma|_{N_1}) + [\kappa_2(N_2, p_{N_2}, \gamma|_{N_2}) + \kappa_2(N_3, p_{N_3}, \gamma|_{N_3})] - \\ &\quad - \kappa_2(N_2 \cap N_3, p_{N_2 \cap N_3}, \gamma|_{N_2 \cap N_3}) - \\ &\quad - \kappa_2(N_1 \cap (N_2 \cup N_3), p_{N_1 \cap (N_2 \cup N_3)}, \gamma|_{N_1 \cap (N_2 \cup N_3)}) = \\ &= -0.5 + [-0.333 - 0.333 + 0.5] + 1 = 0.333 \\ \kappa_3(N, p_N, \gamma) &= \kappa_3(N_2, p_{N_2}, \gamma|_{N_2}) = -0.333 = \kappa_5(N, p_N, \gamma), \\ \kappa_4(N, p_N, \gamma) &= \kappa_4(N_2, p_{N_2}, \gamma|_{N_2}) + \kappa_4(N_3, p_{N_3}, \gamma|_{N_3}) - \\ &\quad - \kappa_4(N_2 \cap N_3, p_{N_2 \cap N_3}, \gamma|_{N_2 \cap N_3}) = -0.333 - 0.333 + 0.5 = -0.166 \end{aligned}$$

Es claro que, para el cálculo de la centralidad, el resultado de la proposición anterior permite reducir considerablemente el volumen de cómputo si éste se compara con el asociado a obtener todos los conjuntos minimales de conexión. Parece, por tanto, razonable intentar extender el resultado obtenido a situaciones de comunicación en las que el juego v sea más general. Veremos, a continuación, que ello es posible para ciertos juegos de la familia $\{p_T\}_{\emptyset \neq T \subset N}$.

Proposición 4.1.2 *Dados (N, p_T, γ) una situación de comunicación y N_1, N_2 dos subconjuntos no vacíos de N que satisfacen $N_1 \cup N_2 = N$, $N_1 \cap N_2 \neq \emptyset$, $T \subset N_1 \cap N_2$ ó $N_1 \cap N_2 \subset T$, siendo $(N_1 \cap N_2, \gamma|_{N_1 \cap N_2})$ un grafo completo y $\gamma|_{N_1} \cup \gamma|_{N_2} = \gamma$, entonces: (i), (ii) y (iii) de la Proposición 4.1.1 se satisfacen.*

Demostración: Los dividendos de p_T son $\Delta_{p_T}(S) = (-1)^s$, si $\emptyset \neq S \subset T$ y 0 en otro caso (ver Owen, 1986).

La prueba de la Proposición 4.1.1 se basa en que, para un conjunto fijo $S^{12} = S_1 \cup S_2$ con $\emptyset \neq S_1 \subset N_1 \setminus N_2$ y $\emptyset \neq S_2 \subset N_2 \setminus N_1$ y para todo $R \in \mathcal{C}_\gamma(S^{12})$, se tiene que $\sum_{K \subset N_1 \cap N_2} \Delta_{p_T}(S^{12} \cup K) u_{R \cup K}$ es el juego nulo si $T = N$. Esto es también cierto cuando $v = p_T$ con $T \subset N_1 \cap N_2$ ya que, en este caso, $\Delta_{p_T}(S^{12} \cup K) = 0$ para todo $K \subset N_1 \cap N_2$ y para todo $S^{12} = S_1 \cup S_2$ con $\emptyset \neq S_1 \subset N_1 \setminus N_2$ y $\emptyset \neq S_2 \subset N_2 \setminus N_1$.

Cuando $N_1 \cap N_2 \subset T$, para todo $K \subset N_1 \cap N_2$, se tiene:

$$\Delta_{p_T}(S^{12} \cup K) = \begin{cases} 0 & \text{si } S^{12} \not\subset T \\ (-1)^{s^{12}+k} & \text{si } S^{12} \subset T \text{ (ó } S^{12} \cup K \subset T). \end{cases}$$

Entonces, si $S^{12} \not\subset T$, el resultado se cumple trivialmente. Y si $S^{12} \subset T$, como los coeficientes de unanimidad anteriores coinciden con los de $v = p_N$, podemos seguir las líneas de la Proposición 4.1.1 para obtener el resultado. ■

Si notamos $\mathcal{S}(N_1 \cap N_2, \gamma_{N_1 \cap N_2})$ el subespacio de G^N generado por los juegos p_T con $N_1 \cap N_2 \subset T$ ó $T \subset N_1 \cap N_2$, podemos extender los resultados de las dos proposiciones anteriores.

Proposición 4.1.3 *Si (N, v, γ) es una situación de comunicación, y N_1, N_2 son dos subconjuntos no vacíos de N , con $N_1 \cup N_2 = N$, $N_1 \cap N_2 \neq \emptyset$ y tales que $(N_1 \cap N_2, \gamma|_{N_1 \cap N_2})$ es un grafo completo y $\gamma|_{N_1} \cup \gamma|_{N_2} = \gamma$ para todo $v \in \mathcal{S}(N_1 \cap N_2, \gamma|_{N_1 \cap N_2})$, entonces (i), (ii) y (iii) de la Proposición 4.1.1 se satisfacen.*

Demostración: Es consecuencia directa de la Proposición 4.1.2 y de la linealidad del valor de Shapley. ■

4.2. Ejemplo: Las familias florentinas de Padgett

Las redes de las familias florentinas de Padgett se crearon a partir de las relaciones entre 16 familias de la Florencia del s. XV recopiladas por Kent (1978). Las 16 familias fueron elegidas, por su especial preeminencia, de entre un conjunto más amplio de 116 familias que lideraban la Florencia de ese período histórico. Padgett (1987), Padgett y Ansell (1989, 1993), y Breiger y Pattison (1986) han analizado de manera exhaustiva estos datos.

En esta época la familia era la unidad económica y política más importante, y en consecuencia, la historia del s. XV florentino puede entenderse mejor analizando a las familias que a sus integrantes. En los años 40 de dicho siglo se disputó una encarnizada batalla política por el control del gobierno, originalmente en manos de los Medici y los Strozzi, que marcó el devenir histórico de la Florencia de la época. Ambas familias están incluidas en el grupo de las 16 antes citado. Una de las redes representa la existencia de algún enlace matrimonial entre miembros de las correspondientes familias, mientras que en la otra se representan las relaciones económicas entre ellas.

Tanto las relaciones por matrimonio como las nacidas de los negocios son no direccionales, dicotómicas y transaccionales, dado que ambas fueron utilizadas para afianzar alianzas políticas y económicas.

La Figura 4.2 muestra ambas redes sociales. Para cada una de ellas calcularemos la centralidad de cada familia con ayuda de la Proposición 4.1.1, y suponiendo que el juego p_N es válido para modelar los intereses tanto matrimoniales como económicos.

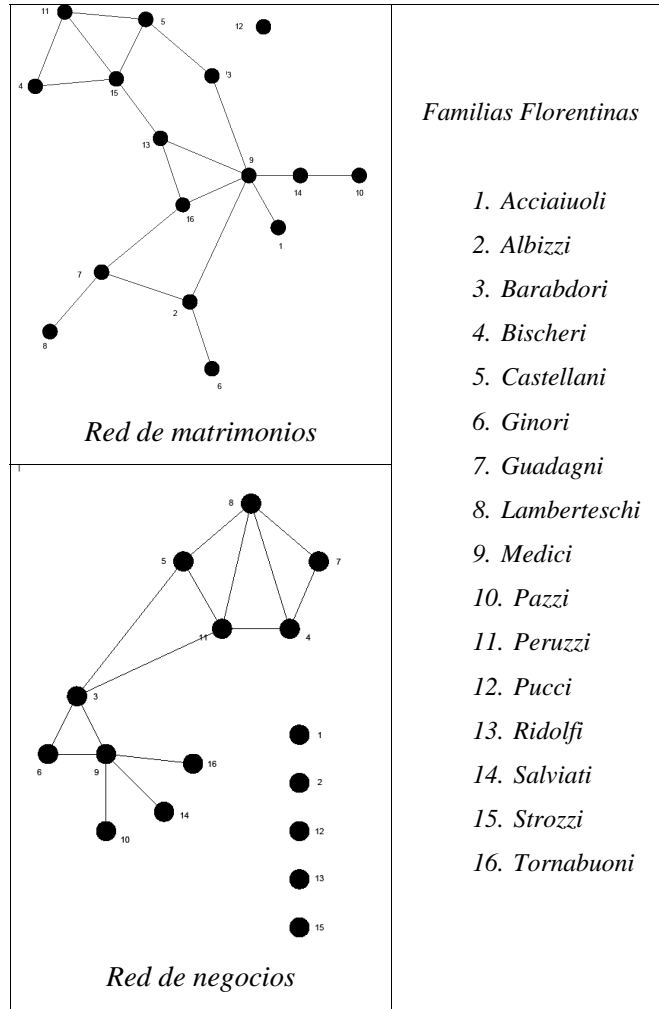


Figura 4.2: Familias florentinas de Padgett

En primer lugar, en la Figura 4.3, se muestran los resultados para la red de los negocios.

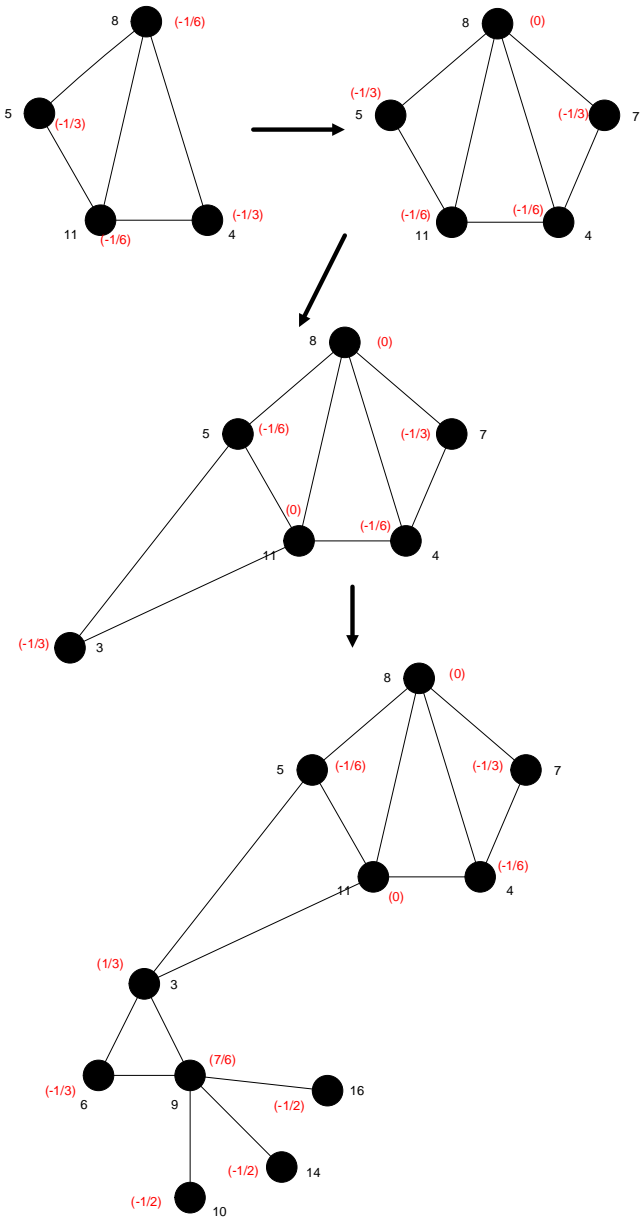


Figura 4.3: Desarrollo de la fragmentación para la red de los negocios

Por último, para la red de matrimonios se obtiene:

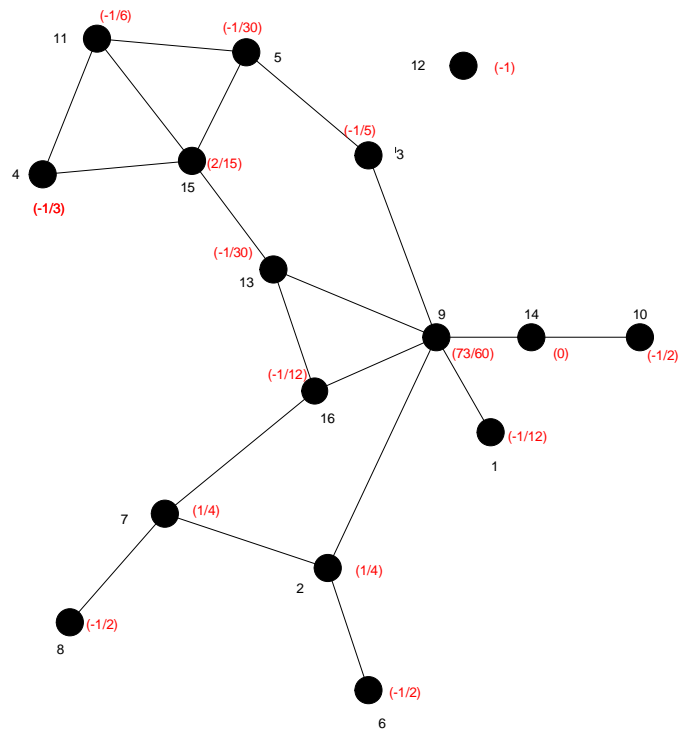


Figura 4.4: Centralidades para la red de matrimonios

Capítulo 5

Una familia de medidas de centralidad en redes sociales dirigidas

5.1. Introducción

Hemos supuesto hasta ahora que las relaciones entre actores en las redes sociales no estaban dirigidas. Sin embargo, es sencillo encontrar situaciones en las que las conexiones presentan una cierta dirección, como la red de citas de artículos científicos o la red cuyos nodos son las páginas en la world wide web. Parece entonces relevante definir medidas de centralidad (o adaptar las ya existentes) para estas situaciones especiales que pueden considerarse, y de hecho lo son, más generales que las correspondientes a grafos no dirigidos. Se pueden encontrar contribuciones en esta línea en White y Borgatti (1994), que generalizan la medida geodésica de intermediación introducida por Freeman (1977) para redes no dirigidas. En una aproximación diferente, Tutzauer (2007) introduce la entropía como medida de centralidad en redes que se caracterizan por transferencia de flujo. Por último, Pollner et al. (2008) desarrollan un algoritmo para calcular la centralidad de grupos cohesivos en redes dirigidas.

En este capítulo, continuando en la línea avanzada ya en los anteriores, proponemos una familia de medidas de centralidad para grafos dirigidos a partir de una perspectiva juego-teórica. Algunos trabajos previos en esta dirección son debidos a Amer et al. (2007), que definen una familia de medidas llamadas de accesibilidad en redes orientadas, van den

Brink y Borm (2002), que obtienen puntuaciones para nodos en digrafos donde los arcos representan victorias de un equipo sobre otro en competiciones deportivas, González-Arangüena et al. (2008b), que generalizan el valor de Myerson clásico al caso en el que la red social viene dada por un digrafo, o Kim y Jun (2009), que estudian, para diferentes conceptos de conexión, caracterizaciones de algunas reglas de asignación.

La aproximación que aquí se presenta calcula la centralidad de los nodos en una red dirigida asumiendo que tales nodos son simultáneamente jugadores en un juego TU que modela sus intereses económicos. Las restricciones en la comunicación generadas por el digrafo modifican el juego, transformándolo en uno generalizado (el juego restringido al digrafo). La centralidad de cada actor es, entonces, medida como la variación de su poder al pasar del juego original al juego restringido. De la misma manera que, para el caso no dirigido, usábamos como índice de poder el valor de Shapley, utilizaremos ahora, para los juegos generalizados, la familia paramétrica de valores Ψ^α , $\alpha \in [0, 1]$, que fue introducida en el Capítulo 2, y que incluye como casos particulares y especialmente relevantes el estudiado por Nowak y Radzik (1994) y el caracterizado por Sánchez y Bergantiños (1997).

Tenemos, de esta manera, una familia de medidas de centralidad que, dado el digrafo, varía en función del juego elegido y de la regla de asignación utilizada. En este capítulo caracterizaremos dicha familia en términos de dos propiedades que se consideran atractivas en la literatura: eficiencia en componentes y α -equidad (*α -directed fairness*).

Al sustituir las aristas de los grafos por los arcos como elementos básicos de relación, se introduce una eventual asimetría en las comunicaciones bilaterales que conlleva un poder de regateo diferente entre los actores involucrados. Este es el sentido de la α -equidad, una propiedad ligada con la de pago α -jerárquico (*α -hierarchical payoff property*) de Slikker et al. (2005).

5.2. Definición y propiedades

Con el fin de definir medidas de centralidad para digrafos desde un punto de vista juego-teórico, consideraremos la situación de comunicación dirigida (N, u_S, d) , en la que $S \subset N$ y u_S es un juego de la base de unanimidad. Las restricciones en la comunicación modeladas por un digrafo afectan al valor de las coaliciones, creándose un nuevo juego que tiene esto en cuenta. Esta es la aproximación clásica que utilizó Myerson (1977, 1980) para definir su juego restringido al grafo.

Dada la situación de comunicación dirigida (N, u_S, d) , el juego restringido al digrafo (N, u_S^d) puede interpretarse como el juego de conectar S en d . En nuestra aproximación, se tendrán en cuenta todas las posibles coaliciones ordenadas conexas $T \in \pi(S)$. En consecuencia, definimos el juego (N, u_S^d) como el juego TU-generalizado con función característica:

$$u_S^d = \sum_{T \in \pi(S) \cap \mathcal{C}_d^N} w_T.$$

Para extender esta definición a cualquier situación de comunicación dirigida con un juego (N, v) arbitrario, lo haremos por linealidad. Dada $(N, v, d) \in \mathcal{DC}^N$, definimos la función característica del juego restringido al digrafo, $(N, v^d) \in \mathcal{G}^N$, como:

$$v^d = \sum_{\emptyset \neq S \subset N} \Delta_v(S) u_S^d.$$

La siguiente proposición nos da una expresión de v^d en términos del juego original v .

Proposición 5.2.1 *Dada $(N, v, d) \in \mathcal{DC}^N$, la función característica generalizada del juego restringido al digrafo, v^d , puede expresarse como:*

$$v^d(T) = \sum_{\emptyset \neq R \tilde{C} T} \lambda_v^d(R) v(H(R)), \text{ para todo } T \in \Omega(N), T \neq \emptyset,$$

siendo:
$$\lambda_v^d(R) = \sum_{R \tilde{C} K \tilde{C} T, K \in \mathcal{C}_d^N} (-1)^{k-r}.$$

Demostración:

$$\begin{aligned} v^d(T) &= \sum_{\emptyset \neq S \subset N} \Delta_v(S) u_S^d(T) = \sum_{\emptyset \neq S \subset N} \Delta_v(S) \sum_{K \in \pi(S) \cap \mathcal{C}_d^N} w_K(T) = \\ &= \sum_{K \tilde{C} T, K \in \mathcal{C}_d^N} \Delta_v(H(K)) = \sum_{K \tilde{C} T, K \in \mathcal{C}_d^N} \sum_{\emptyset \neq L \subset H(K)} (-1)^{k-l} v(L) = \\ &= \sum_{\emptyset \neq R \tilde{C} T} \sum_{R \tilde{C} K \tilde{C} T, K \in \mathcal{C}_d^N} (-1)^{k-r} v(H(R)), \end{aligned}$$

donde la última igualdad se cumple porque, para cada $L \subset H(K)$, existe una única permutación R de los jugadores de L (para la que, obviamente será $L = H(R)$) tal que $R \tilde{C} K \tilde{C} T$. ■

La definición propuesta de juego restringido al digrafo nos permite introducir una familia paramétrica de medidas de centralidad.

Definición 5.2.1 Dada $(N, v, d) \in \mathcal{DC}^N$, para cada $\alpha \in [0, 1]$ notaremos $K_i^\alpha(N, v, d)$ a la centralidad del nodo i , que definimos:

$$K_i^\alpha(N, v, d) = \Psi_i^\alpha(N, v^d) - \varphi_i(N, v),$$

donde, para cada $\alpha \in [0, 1]$, Ψ^α es la regla de reparto para juegos generalizados definida en la Sección 2.2.

Por tanto, asumiremos que la centralidad de un actor en una situación de comunicación dirigida coincide con la diferencia entre lo que obtiene en el juego cuando existen restricciones en la comunicación dadas por el digrafo y lo que obtiene cuando tales restricciones desaparecen.

Interpretando el valor de Shapley y Ψ^α , $\alpha \in [0, 1]$, como índices de poder en G^N y \mathcal{G}^N respectivamente, la medida de centralidad definida puede verse como la variación de poder debida a la posición en la red dirigida.

Para eliminar eventuales diferencias existentes *a priori* entre los jugadores, que sin duda contaminarían la centralidad obtenida, proponemos utilizar juegos simétricos. Como consecuencia de ello, el término $\varphi_i(N, v)$ coincide para todos los jugadores y, entonces, eliminarlo sólo supone una traslación del origen. Otra traslación, que nos permite asignar centralidad nula a los nodos aislados, se obtiene reemplazando los juegos simétricos por su versión 0-normalizada. Podemos así matizar la definición previa, restringiéndonos a juegos simétricos 0-normalizados y esa será la que utilizaremos en adelante.

Definición 5.2.2 Dados $(N, v, d) \in \mathcal{DC}_{\mathcal{S}_0}^N$ y $\alpha \in [0, 1]$, la centralidad del nodo $i \in N$ se define:

$$\kappa_i^\alpha(N, v, d) = \Psi_i^\alpha(N, v^d),$$

siendo $\mathcal{DC}_{\mathcal{S}_0}^N = \{(N, v, \gamma) \in \mathcal{DC}^N \text{ tales que } v \in \mathcal{S}_0^N\}$.

El parámetro $\alpha \in [0, 1]$ evalúa el impacto de la asimetría que presentan los arcos y puede interpretarse como un factor de descuento que mide la importancia relativa del nodo iniciador versus el receptor en una comunicación dirigida. Es cierto, por otra parte, que la elección de α es un aspecto crítico de las medidas consideradas. Este valor puede ser obtenido, tal vez, de una manera empírica, o conociendo el poder relativo del nodo iniciador respecto al receptor. Es obvio que los resultados que se presentan admiten una dualidad al sustituir α por $\frac{1}{\alpha}$, asumiendo, en este último caso, que el nodo iniciador

está en una posición más favorable que el receptor, lo que en diferentes contextos resulta una suposición natural.

Como consecuencia, el caso particular $\alpha = 1$ puede interpretarse como aquél en que ambos nodos incidentes en un arco juegan papeles simétricos. En este caso, es natural asumir que, si se intercambiaran estos papeles, las respectivas centralidades no se verían afectadas. Dicho resultado se muestra en la siguiente proposición:

Proposición 5.2.2 *Dada $(N, v, d) \in \mathcal{DC}_{S_0}^N$, se tiene que $\kappa^1(N, v, d) = \kappa^1(N, v, \bar{d})$ donde $\bar{d} = \{(j, i), \text{ con } i, j \in N \text{ tales que } (i, j) \in d\}$.*

Demostración: Para cada $S \subset N$, tenemos $u_S^d = \sum_{T \in \pi(S) \cap \mathcal{C}_d^N} w_T$.

Para $T = (i_1, i_2, \dots, i_{r-1}, i_r)$, notemos $\bar{T} = (i_r, i_{r-1}, \dots, i_2, i_1)$.

Entonces, $T \in \mathcal{C}_d^N$ si y sólo si $\bar{T} \in \mathcal{C}_d^N$ y, de esta manera:

$$u_S^{\bar{d}} = \sum_{T \in \pi(S) \cap \mathcal{C}_d^N} w_{\bar{T}}.$$

Como, para todo $i \in T$, $\Psi_i^1(N, w_T)$ no depende de i (y es 0 si $i \notin T$), se tiene que $\Psi_i^1(N, w_T) = \Psi_i^1(N, w_{\bar{T}})$ para todo $i \in N$. Ψ^α es trivialmente lineal para todo $\alpha \in [0, 1]$ y, en consecuencia, las medidas de centralidad introducidas lo son. Por tanto, para todo $i \in N$:

$$\kappa_i^1(N, v, d) = \kappa_i^1(N, v, \bar{d}).$$

■

En el análisis de las redes desde un punto de vista sociológico se asume que, si dos actores crean una conexión entre ellos, sus respectivas centralidades aumentarán (o al menos no disminuirán). Esta propiedad, cuando se asocia con reglas de asignación para situaciones de comunicación, se conoce como *estabilidad*. Parece razonable explorar en qué medida la definición propuesta satisface dicha propiedad.

Desafortunadamente, para que se satisfaga estabilidad necesitamos restringir la familia de juegos que puede utilizarse. A diferencia de lo que ocurre en el caso no dirigido, la superaditividad, por sí misma, no garantiza la estabilidad de las medidas. El siguiente ejemplo ilustra este hecho.

Ejemplo 5.2.1 Consideremos la situación de comunicación dirigida (N, v, d) con $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, v el juego simétrico y superaditivo (e incluso convexo) $v(S) = \sum_{k=2}^7 \binom{s}{k} (-1)^k$, y $d = \{(2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (2, 7)\}$. Consideremos, también, (N, v, d') , con $d' = d \cup \{(1, 2)\}$.

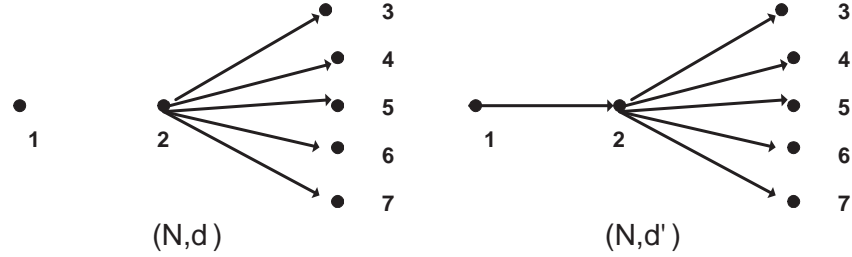


Figura 5.1: Dos digrafos

Como $v = \sum_{S \subset N, s \geq 2} (-1)^s u_S$, por la definición de juego restringido al digrafo, tenemos:

$$v^d = w_{(2,3)} + w_{(2,4)} + w_{(2,5)} + w_{(2,6)} + w_{(2,7)},$$

$$v^{d'} = w_{(1,2)} + w_{(2,3)} + w_{(2,4)} + w_{(2,5)} + w_{(2,6)} + w_{(2,7)} - w_{(1,2,3)} - w_{(1,2,4)} - w_{(1,2,5)} - w_{(1,2,6)} - w_{(1,2,7)},$$

y de esta manera, para $\alpha \in [0, 1]$,

$$\kappa_1^\alpha(N, v, d) = 0, \quad y \quad \kappa_1^\alpha(N, v, d') = \frac{\alpha}{2!(1+\alpha)} - \frac{5\alpha^2}{3!(1+\alpha+\alpha^2)}.$$

Es fácil comprobar que, para $\alpha > \frac{\sqrt{7}-1}{2}$, $\kappa_1^\alpha(N, v, d) > \kappa_1^\alpha(N, v, d')$.

Con el fin de evitar este comportamiento no deseable, nos restringiremos al caso de situaciones de comunicación en las que el juego sea casi positivo. A partir de ahora supondremos que los intereses económicos de los jugadores satisfacen esta tendencia a cooperar, mayor que la que generan los juegos superaditivos. Todo juego v casi positivo, simétrico y 0-normalizado en G^N puede escribirse de la siguiente manera:

$$v = \sum_{k=2}^n \mu_k v^k, \quad \text{con } \mu_k > 0, \quad i = 2, 3, \dots, n,$$

donde, para $k = 2, 3, \dots, n$, (N, v^k) es el juego con función característica:

$$v^k(S) = \begin{cases} k! \binom{s}{k} & k = 1, \dots, s \\ 0 & k = s + 1, \dots, n. \end{cases}$$

Estos juegos v^k admiten una interpretación intuitiva como juegos de comunicación, puesto que $v^k(S)$ representa el número de mensajes que involucran a k de los s individuos de S , actuando uno de ellos como emisor, otro como receptor y los $k - 2$ restantes como intermediarios. Llamaremos juego de las conferencias a la suma de todos los juegos anteriores:

$$v = \sum_{k=2}^n v^k.$$

En la siguiente proposición se demuestra que, efectivamente, al utilizar juegos casi-positivos, las medidas propuestas satisfacen la propiedad de estabilidad.

Por otra parte, para obtener un mayor grado de generalidad en las propiedades de las medidas propuestas, se escribirán los resultados de las siguientes proposiciones utilizando, en cada caso, el conjunto de hipótesis menos restrictivo entre los posibles.

Proposición 5.2.3 *Dados una situación de comunicación dirigida (N, v, d) con $v \in \mathcal{AP}^N \cap \mathcal{S}_0^N$ y un arco $(i, j) \in d$:*

$$\kappa_h^\alpha(N, v, d) \geq \kappa_h^\alpha(N, v, d \setminus \{(i, j)\}), \text{ para } h \in N \text{ y } \alpha \in [0, 1].$$

Demostración: Probemos primero el resultado para una situación de comunicación (N, u_S, d) , en la que u_S es un juego de unanimidad y $d \in D^N$. Obviamente, $u_S \in \mathcal{AP}^N \cap \mathcal{S}_0^N$. Entonces, para todo $h \in N$ y todo $\alpha \in [0, 1]$,

$$\kappa_h^\alpha(N, u_S, d) = \sum_{T \in \pi(S) \cap \mathcal{C}_d^N} \Psi_h^\alpha(N, w_T) \geq \sum_{T \in \pi(S) \cap \mathcal{C}_{d \setminus \{(i, j)\}}^N} \Psi_h^\alpha(N, w_T) = \kappa_h^\alpha(N, u_S, d \setminus \{(i, j)\}),$$

donde la desigualdad se cumple porque $\mathcal{C}_{d \setminus \{(i, j)\}}^N \subset \mathcal{C}_d^N$ y $\Psi_h^\alpha(N, w_T) \geq 0$ para $h \in N$. El resultado para una situación de comunicación más general (N, v, d) con $v \in \mathcal{AP}^N \cap \mathcal{S}_0^N$, se sigue a partir de la linealidad de la medida y del hecho de que los dividendos de v son no negativos. ■

Como consecuencias directas de la proposición, obtenemos primero la estabilidad de las medidas definidas y, en segundo lugar, que la centralidad de un nodo $i \in N$ es mínima cuando i es un nodo aislado.

Proposición 5.2.4 *Dadas $(N, v, d), (N, v, d') \in \mathcal{DC}^N$ con $v \in \mathcal{AP}^N \cap \mathcal{S}_0^N$ e $i \in N$ tal que $L_i(d) = \emptyset$ (i.e., i es un nodo aislado en (N, d)), se tiene que:*

$$\kappa_i^\alpha(N, v, d) \leq \kappa_j^\alpha(N, v, d'), \text{ para } j = 1, 2, \dots, n \text{ y todo } \alpha \in [0, 1].$$

(Dados $(N, d) \in D^N$ e $i \in N$, $L_i(d)$ es el conjunto de los arcos de d incidentes en el nodo i)

Demostración: Dadas $(N, v, d), (N, v, d') \in \mathcal{DC}^N$ con $v \in \mathcal{AP}^N \cap \mathcal{S}_0^N$, $i \in N$ con $L_i(d) = \emptyset$ y $\alpha \in [0, 1]$, utilizando la proposición anterior reiteradamente se tiene, para cada $j = 1, 2, \dots, n$:

$$\kappa_j^\alpha(N, v, d') \geq \kappa_j^\alpha(N, v, d' \setminus L_j(d')) = v(\{j\}) = 0 = \kappa_i^\alpha(N, v, d), \text{ para todo } \alpha \in [0, 1].$$

■

En la siguiente propiedad se establece que las medidas de centralidad propuestas sólo dependen, para cada nodo, de la componente a la que éste pertenece. Por tanto, pueden calcularse localmente, en cada componente.

Proposición 5.2.5 Sea $(N, v, d) \in \mathcal{DC}^N$ con $v \in \mathcal{AP}^N \cap \mathcal{S}_0^N$ y sean $N_1, N_2 \subset N$ con $N_1 \cup N_2 = N$ y $N_1 \cap N_2 = \emptyset$. Notemos $d_h = d_{N_h}$ para $h = 1, 2$, y supongamos que d satisface $d = d_1 \cup d_2$. Entonces, para $i \in N_h$, $h = 1, 2$ y $\alpha \in [0, 1]$:

$$\kappa_i^\alpha(N, v, d) = \kappa_i^\alpha(N_h, v|_{N_h}, d_h).$$

Demostración: La función característica generalizada v^d satisface, para todo $T \subset \Omega(N)$, que $v^d(T) = v^d(T|_{N_1}) + v^d(T|_{N_2}) = v^{d_1}(T|_{N_1}) + v^{d_2}(T|_{N_2}) = (v|_{N_1})^{d_1}(T) + (v|_{N_2})^{d_2}(T)$, siendo $T|_{N_h}$ el elemento de $\Omega(N_h)$ obtenido eliminando de T los elementos de $N \setminus N_h$. Por tanto:

$$v^d = (v|_{N_1})^{d_1} + (v|_{N_2})^{d_2}.$$

Sin pérdida de generalidad, si suponemos que $i \in N_1$, se tiene para $\alpha \in [0, 1]$:

$$\kappa_i^\alpha(N, v, d) = \Psi_i^\alpha(N, v^d) = \Psi_i^\alpha(N_1, (v|_{N_1})^{d_1}) = \kappa_i^\alpha(N_1, v|_{N_1}, d_1).$$

■

Con el fin de comparar centralidades de nodos pertenecientes a diferentes digrafos, sería interesante conocer la centralidad total en dichos digrafos, es decir, la suma de las centralidades de los diferentes actores en una red.

La siguiente proposición establece que las medidas definidas son eficientes en componentes.

Proposición 5.2.6 Para todo $\alpha \in [0, 1]$, κ^α es eficiente en digrafos conexos, i.e., dada $(N, v, d) \in \mathcal{DC}_{S_0}^N$ y con (N, d) conexo, se tiene:

$$\sum_{i \in N} \kappa_i^\alpha(N, v, d) = \sum_{T \in \pi(N)} \frac{v^d(T)}{n!}.$$

Demostración: Para $\alpha \in [0, 1]$, $\sum_{i \in N} \kappa_i^\alpha(N, v, d) = \sum_{i \in N} \Psi_i^\alpha(N, v^d)$.

De esta manera, sólo resta probar la eficiencia media de Ψ^α . En efecto, para todo juego $w \in \mathcal{G}^N$:

$$\begin{aligned} \sum_{i \in N} \Psi_i^\alpha(N, w) &= \sum_{i \in N} \Psi_i^\alpha(N, \sum_{\emptyset \neq T \in \Omega(N)} \Delta_w^*(T) w_T) = \\ &= \sum_{i \in N} \sum_{\emptyset \neq T \in \Omega(N)} \Delta_w^*(T) \Psi_i^\alpha(N, w_T) = \sum_{\emptyset \neq T \in \Omega(N)} \Delta_w^*(T) \sum_{i \in N} \Psi_i^\alpha(N, w_T) = \\ &= \sum_{\emptyset \neq T \in \Omega(N)} \Delta_w^*(T) \frac{1}{t!} = \sum_{\emptyset \neq T \in \Omega(N)} \frac{1}{t!} \sum_{\emptyset \neq R \tilde{C} T} (-1)^{t-r} w(R) = \sum_{\emptyset \neq T \in \Omega(N)} \left(\sum_{\emptyset \neq R \tilde{C} T} \frac{(-1)^{t-r}}{t!} \right) w(R). \end{aligned}$$

Si hacemos $l = t - r$ se tiene:

$$\begin{aligned} \sum_{\emptyset \neq R \tilde{C} T} \frac{(-1)^{t-r}}{t!} &= \sum_{l=0}^{n-r} \binom{r+l}{l} \binom{n-r}{l} l! \frac{(-1)^l}{(r+l)!} = \\ &= \frac{1}{r!} \sum_{l=0}^{n-r} \binom{n-r}{l} (-1)^l = \begin{cases} \frac{1}{n!} & \text{si } r = n \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases} \end{aligned}$$

y así,

$$\sum_{i \in N} \Psi_i^\alpha(N, w) = \sum_{R \in \pi(N)} \frac{w(R)}{n!}.$$

Tomando $w = v^d$, el resultado queda probado. ■

En el siguiente corolario, cuya demostración es directa a partir de las Proposiciones 5.2.5 y 5.2.6, se establece la eficiencia en componentes de las medidas definidas.

Corolario 5.2.1 Para todo $\alpha \in [0, 1]$, κ^α satisface eficiencia en componentes, i.e., dada $(N, v, d) \in \mathcal{DC}_{S_0}^N$, si $N/d = \{C_1, C_2, \dots, C_k\}$, entonces:

$$\sum_{i \in C_j} \kappa_i^\alpha(N, v, d) = \sum_{T \in \pi(C_j)} \frac{v^d(T)}{c_j!}, \quad j = 1, 2, \dots, k.$$

Ejemplo 5.2.2 Consideremos las situaciones de comunicación dirigida (N, v, d_1) , (N, v, d_2) y (N, v, d_3) con $N = \{1, 2, 3, 4\}$, donde $v = v^2 + v^3 + v^4$ es el juego de las conferencias y (N, d_1) , (N, d_2) y (N, d_3) son los digrafos: estrella con arcos saliendo del centro, estrella con arcos entrando en el centro y cadena orientada de izquierda a derecha respectivamente (Fig. 5.2). Es decir, $d_1 = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$, $d_2 = \{(2, 1), (3, 1), (4, 1)\}$ y $d_3 = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$. Entonces, como $v = \sum_{\emptyset \neq S \subset N} s!u_S$, se tiene que:

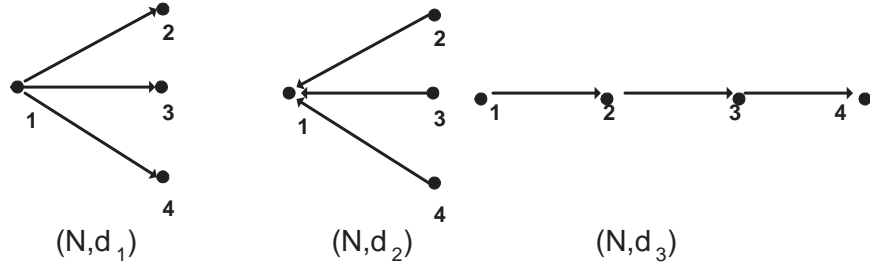


Figura 5.2: In-star, out-star y cadena orientada

$$v^{d_1} = 2!(w_{(1,2)} + w_{(1,3)} + w_{(1,4)}),$$

$$v^{d_2} = 2!(w_{(2,1)} + w_{(3,1)} + w_{(4,1)}),$$

$$v^{d_3} = 2!(w_{(1,2)} + w_{(2,3)} + w_{(3,4)}) + 3!(w_{(1,2,3)} + w_{(2,3,4)}) + 4!w_{(1,2,3,4)},$$

y para $\alpha \in [0, 1]$,

$$\kappa^\alpha(N, v, d_1) = \left(\frac{3\alpha}{1+\alpha}, \frac{1}{1+\alpha}, \frac{1}{1+\alpha}, \frac{1}{1+\alpha} \right),$$

$$\kappa^\alpha(N, v, d_2) = \left(\frac{3}{1+\alpha}, \frac{\alpha}{1+\alpha}, \frac{\alpha}{1+\alpha}, \frac{\alpha}{1+\alpha} \right),$$

$$\kappa^\alpha(N, v, d_3) = \left(\frac{\alpha}{1+\alpha} + \frac{\alpha^2}{1+\alpha+\alpha^2} + \frac{\alpha^3}{1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3}, 1 + \frac{\alpha^2+\alpha}{1+\alpha+\alpha^2} + \frac{\alpha^2}{1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3}, \right. \\ \left. 1 + \frac{1+\alpha}{1+\alpha+\alpha^2} + \frac{\alpha}{1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3}, \frac{1}{1+\alpha} + \frac{1}{1+\alpha+\alpha^2} + \frac{1}{1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3} \right).$$

La suma de las centralidades, que no depende de α como se prueba en el Corolario 5.2.1, es:

$$\sum_{i=1}^4 \kappa_i^\alpha(N, v, d_1) = \sum_{i=1}^4 \kappa_i^\alpha(N, v, d_2) = 3, \text{ y } \sum_{i=1}^4 \kappa_i^\alpha(N, v, d_3) = 6.$$

Como era de esperar dada la definición de estas medidas, la centralidad del centro de la estrella d_1 es mayor que la centralidad correspondiente al centro de d_2 , y al revés para los nodos satélites. En este caso, cualquier normalización (basada en la suma) puede obviarse porque dicha suma coincide en ambas estrellas.

En la cadena d_3 , y para todo $\alpha \in [0, 1]$, la centralidad aumenta desde el nodo 1 hasta el 3. Cuando comparamos los nodos 3 y 4, la ordenación depende del valor de α . Este último resultado, quizás antiintuitivo, se justificará cuando más adelante consideremos la descomposición de las medidas. Por otra parte, $\frac{1}{6}\kappa_i^\alpha(N, v, d_3) \leq \frac{1}{3}\kappa_1^\alpha(N, v, d_2)$, $i = 1, 2, 3, 4$ y entonces la centralidad normalizada (dividiendo entre la suma) de cada nodo de la cadena orientada es menor que la correspondiente al centro de la estrella d_2 .

Por último, cuando comparamos $\frac{1}{3}\kappa_1^\alpha(N, v, d_1)$ con $\frac{1}{6}\kappa_i^\alpha(N, v, d_3)$, la ordenación depende del valor de α .

Otra cuestión de interés, desde el punto de vista del análisis sociológico de redes, es el impacto que puede tener en un par de nodos la eliminación de una relación directa (y dirigida) entre ellos. Las medidas de la familia definida cubren la posibilidad de un impacto asimétrico en los nodos que rompen su relación directa. Ambos modifican su centralidad, pero el nodo iniciador sólo lo hace en una proporción α del cambio en el nodo receptor. Nos referiremos a esta propiedad como α -equidad.

Proposición 5.2.7 *Para todo $\alpha \in [0, 1]$, κ^α satisface la propiedad de α -equidad, i.e., dados $(N, v, d) \in \mathcal{DC}_{S_0}^N$ e $i, j \in N$ tales que $(i, j) \in d$:*

$$\kappa_i^\alpha(N, v, d) - \kappa_i^\alpha(N, v, d \setminus \{(i, j)\}) = \alpha[\kappa_j^\alpha(N, v, d) - \kappa_j^\alpha(N, v, d \setminus \{(i, j)\})].$$

Demostración: Consideremos primero el juego de unanimidad (N, u_S) , $S \subset N$, con $s \geq 2$. Entonces,

$$u_S^d - u_S^{d \setminus \{(i, j)\}} = \sum_{T \in \pi(S) \cap \mathcal{C}_d^N, T(j)=T(i)+1} w_T,$$

y por tanto,

$$\begin{aligned} \kappa_i^\alpha(N, u_S, d) - \kappa_i^\alpha(N, u_S, d \setminus \{(i, j)\}) &= \sum_{T \in \pi(S) \cap \mathcal{C}_d^N, T(j)=T(i)+1} \frac{\alpha^{t-T(i)}}{t! \sum_{r=0}^{t-1} \alpha^r} = \\ &= \alpha \sum_{T \in \pi(S) \cap \mathcal{C}_d^N, T(j)=T(i)+1} \frac{\alpha^{t-(T(i)+1)}}{t! \sum_{r=0}^{t-1} \alpha^r} = \alpha[\kappa_j^\alpha(N, u_S, d) - \kappa_j^\alpha(N, u_S, d \setminus \{(i, j)\})]. \end{aligned}$$

Como κ^α es lineal en v , el resultado queda probado. ■

De nuevo, para garantizar que al eliminar un arco la centralidad de los nodos incidentes en él deba decrecer, o al menos no incrementarse, tendremos que asumir que el juego sea

casi positivo. En este caso, el impacto sobre la centralidad de tal eliminación es negativo para ambos jugadores, pero menor para el que inicia la comunicación que para el que la recibe. Si el juego no fuera casi positivo, la centralidad de ambos podría aumentar, pero en tal caso el incremento sería mayor para el receptor.

El hecho de que las medidas propuestas satisfagan las propiedades anteriores es interesante en sí mismo, puesto que estas propiedades reflejan aspectos deseables para una medida de centralidad. Y, lo que es incluso más importante desde un punto de vista teórico, las dos últimas propiedades caracterizan (cuando $\alpha \neq 0$) la familia de medidas de centralidad definida, como se establece en el siguiente teorema.

Teorema 5.2.1 *Para cada $\alpha \in (0, 1]$, $\kappa^\alpha : \mathcal{DC}_{S_0}^N \rightarrow \mathbb{R}^n$ es la única función definida en $\mathcal{DC}_{S_0}^N$ que satisface eficiencia en componentes y α -equidad.*

Demostración: Ya se ha probado que cada κ^α es una medida eficiente en componentes y α -equitativa. Para probar la unicidad, sean $\alpha \in (0, 1]$ y $\xi^\alpha : \mathcal{DC}_{S_0}^N \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función que satisface ambas propiedades. Probaremos, por inducción sobre $|d|$, el número de arcos en (N, d) , que $\xi^\alpha(N, v, d) = \kappa^\alpha(N, v, d)$ para toda $(N, v, d) \in \mathcal{DC}_{S_0}^N$.

Si $|d| = 0$, tenemos $N/d = \{\{1\}, \dots, \{n\}\}$ y, por eficiencia en componentes, $\xi_i^\alpha(N, v, d) = v(\{i\}) = 0 = \kappa_i^\alpha(N, v, d)$ si $i \in N$.

Supongamos, entonces, que $\xi^\alpha = \kappa^\alpha$ para todo $\alpha \in (0, 1]$ y toda $(N, v, d) \in \mathcal{DC}_{S_0}^N$ con $|d| < m$, y consideremos $(N, v, d) \in \mathcal{DC}_{S_0}^N$ con $|d| = m$. Para $(h, k) \in d$, utilizando la hipótesis de inducción y el hecho de que ambas funciones ξ^α y κ^α satisfacen α -equidad, tenemos:

$$\begin{aligned} \xi_h^\alpha(N, v, d) - \alpha \xi_k^\alpha(N, v, d) &= \xi_h^\alpha(N, v, d \setminus \{h, k\}) - \alpha \xi_k^\alpha(N, v, d \setminus \{h, k\}) = \\ &= \kappa_h^\alpha(N, v, d \setminus \{h, k\}) - \alpha \kappa_k^\alpha(N, v, d \setminus \{h, k\}) = \kappa_h^\alpha(N, v, d) - \alpha \kappa_k^\alpha(N, v, d), \end{aligned}$$

y entonces:

$$\xi_h^\alpha(N, v, d) - \kappa_h^\alpha(N, v, d) = \alpha[\xi_k^\alpha(N, v, d) - \kappa_k^\alpha(N, v, d)]. \quad (5.1)$$

Sean $i \in N$ y $C \in N/d$ la componente a la que pertenece i . Es trivial, si $|C| = 1$, por eficiencia en componentes, que $\xi_i^\alpha(N, v, d) = \kappa_i^\alpha(N, v, d)$ para $\alpha \in (0, 1]$. En otro caso, existe necesariamente $j \neq i$, $j \in C$. Por la definición de componente, se tiene una sucesión de nodos (no necesariamente única) $i_0 = i, i_1, \dots, i_{l-1}, i_l = j$ tal que, para $t = 0, 1, \dots, l-1$, $(i_t, i_{t+1}) \in d$ ó $(i_{t+1}, i_t) \in d$, ó ambas posibilidades.

$$\text{Definamos } r_t(i, j) = \begin{cases} 1 & \text{si } (i_t, i_{t+1}) \in d \\ -1 & \text{en otro caso .} \end{cases}$$

Obviamente, $r_t(i, j)$ depende de la sucesión $i_0 = i, i_1, \dots, i_l = j$ considerada, pero este hecho será ignorado desde el punto de vista notacional. Entonces, aplicando reiteradamente (5.1):

$$\xi_i^\alpha(N, v, d) - \kappa_i^\alpha(N, v, d) = \alpha^{\sum_{t=0}^{l-1} r_t(i, j)} [\xi_j^\alpha(N, v, d) - \kappa_j^\alpha(N, v, d)].$$

Así pues,

$$\sum_{j \in C} [\xi_j^\alpha(N, v, d) - \kappa_j^\alpha(N, v, d)] = \left[1 + \left(\sum_{j \in C, j \neq i} \alpha^{-\sum_{k=0}^{l-1} r_t(i, j)} \right) \right] [\xi_i^\alpha(N, v, d) - \kappa_i^\alpha(N, v, d)]. \quad (5.2)$$

Por la eficiencia en componentes, el término de la izquierda en la igualdad (5.2) es nulo. Como $1 + \sum_{j \in C, j \neq i} \alpha^{-\sum_{k=0}^{l-1} r_t(i, j)} \neq 0$ para todo $\alpha \in (0, 1]$, concluimos que para todo $i \in N$:

$$\xi_i^\alpha(N, v, d) = \kappa_i^\alpha(N, v, d),$$

lo que completa la demostración. ■

Una prueba similar a la dada en el teorema anterior muestra que, para $(0, 1]$, la restricción de las medidas definidas a situaciones de comunicación con $v \in \mathcal{AP}^N \cap \mathcal{S}_0^N$ puede ser caracterizada en términos de las mismas propiedades: eficiencia en componentes y α -equidad. El siguiente ejemplo prueba que, sin embargo, ambas propiedades no son suficientes para garantizar la unicidad de κ^0 .

Ejemplo 5.2.3 Dada $(N, v, d) \in \mathcal{DC}_{\mathcal{S}_0}^N$, sea $N/d = \{C_1, \dots, C_r\}$. Consideremos los digrafos (C_k, d^{l_k}) , $l_k = 1, 2, \dots, c_k$, donde $d^{l_k} = \{(i_{l_k}, j), j \neq i_{l_k}, j \in C_k\}$ para cada $i_{l_k} \in C_k$.

Consideremos la siguiente función ξ definida en $\mathcal{DC}_{\mathcal{S}_0}^N$. Dada $(N, v, d) \in \mathcal{DC}_{\mathcal{S}_0}^N$, para $i \in N$, sea C_k la componente de (N, d) a la que pertenece i . Entonces, definimos:

$$\xi_i(N, v, d) = \kappa_i^0(N, v, d) + \sum_{d^{l_k} \subset d} [\xi_i(N, v, d^{l_k}) - \kappa_i^0(N, v, d^{l_k})],$$

donde:

$$\xi_i(N, v, d^{l_k}) = \begin{cases} 0 & \text{si } i = i_{l_k} \\ b_i & \text{si } i \neq i_{l_k}, \end{cases} \quad (5.3)$$

y los b_i son números reales arbitrarios que satisfacen la condición:

$$\sum_{i \neq i_k} b_i = \frac{1}{c_k!} \sum_{T \in \pi(C_k)} v^d(T).$$

Se verifica que $\kappa_i^0(N, v, d^i) = v(\{i\}) = 0$ para el centro de una estrella con arcos salientes. Esto es así porque, si se eliminan secuencialmente arcos, no se modifica la centralidad del nodo i (debido a la 0-equidad) y, entonces, $\kappa_i^0(N, v, d^i) = \kappa_i^0(N, v, \emptyset)$. Por la eficiencia en componentes, $\kappa_i^0(N, v, \emptyset) = v(\{i\}) = 0$.

Eligiendo los valores b_i , $i \neq i_k$ que aparecen en la igualdad (5.3) de una manera apropiada (lo que siempre es posible si existe al menos una componente C_k con cardinal $c_k \geq 3$), tenemos que ξ es una regla distinta de κ^0 .

Probemos que esta nueva función ξ satisface eficiencia en componentes y 0-equidad, como lo hace κ^0 .

La eficiencia se verifica porque:

$$\begin{aligned} \sum_{i \in C_k} \xi_i(N, v, d) &= \sum_{i \in C_k} \kappa_i^0(N, v, d) + \sum_{i \in C_k} \sum_{d^k \subset d} [\xi_i(N, v, d^k) - \kappa_i^0(N, v, d^k)] = \\ &= \sum_{i \in C_k} \kappa_i^0(N, v, d) + \sum_{d^k \subset d} \sum_{i \in C_k} [\xi_i(N, v, d^k) - \kappa_i^0(N, v, d^k)] = \frac{1}{c_k!} \sum_{T \in \pi(C_k)} v^d(T), \end{aligned}$$

donde la última igualdad se satisface ya que el doble sumatorio se anula por la eficiencia en componentes de las reglas κ^0 y ξ .

Con el fin de probar que ξ satisface 0-equidad, consideremos primero el caso $(i, j) \in d$, $i \in C_k$, $(i, j) \notin d^k$ para cada $d^k \subset d$. Entonces,

$$\begin{aligned} \xi_i(N, v, d) - \xi_i(N, v, d \setminus \{(i, j)\}) &= \kappa_i^0(N, v, d) + \sum_{d^k \subset d} [\xi_i(N, v, d^k) - \kappa_i^0(N, v, d^k)] - \\ &\quad - \kappa_i^0(N, v, d \setminus \{(i, j)\}) - \sum_{d^k \subset d \setminus \{(i, j)\}} [\xi_i(N, v, d^k) - \kappa_i^0(N, v, d^k)] = \\ &= \kappa_i^0(N, v, d) - \kappa_i^0(N, v, d \setminus \{(i, j)\}). \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $(i, j) \notin d^k$ para cada $d^k \subset d$, tenemos que $d^k \subset d \setminus \{(i, j)\}$ si y sólo si $d^k \subset d$. Finalmente, por la 0-equidad de κ^0 , $\kappa_i^0(N, v, d) - \kappa_i^0(N, v, d \setminus \{(i, j)\}) = 0$.

Consideremos, alternativamente, el caso en el que $(i, j) \in d$, $i \in C_k$ y existe un $d^i \subset d$ (que será necesariamente único) tal que $(i, j) \in d^i$. Entonces:

$$\xi_i(N, v, d) - \xi_i(N, v, d \setminus \{(i, j)\}) = \kappa_i^0(N, v, d) + \sum_{d^k \subset d} [\xi_i(N, v, d^k) - \kappa_i^0(N, v, d^k)] -$$

$$\begin{aligned}
& -\kappa_i^0(N, v, d \setminus \{(i, j)\}) - \sum_{d^k \subset d^{ij}} [\xi_i(N, v, d^k) - \kappa_i^0(N, v, d^k)] = \\
& = \kappa_i^0(N, v, d) - \kappa_i^0(N, v, d \setminus \{(i, j)\}) + \xi_i(N, v, d^i) - \kappa_i^0(N, v, d^i) = \\
& = 0 + v(\{i\}) - v(\{i\}) = 0.
\end{aligned}$$

Por tanto, ambas funciones ξ y κ^0 , siendo distintas, satisfacen eficiencia en componentes y 0-equidad. Se concluye que dichas propiedades no caracterizan κ^0 .

Sin embargo, en el contexto de medir las centralidades de los nodos de un digrafo, se ha enfatizado la conveniencia de considerar juegos simétricos. En la siguiente proposición se prueba que κ^0 puede ser caracterizada añadiendo a la eficiencia en componentes y la 0-equidad el axioma de simetría.

Definición 5.2.3 Diremos que dos nodos i y j son simétricos en el digrafo (N, d) si existe una permutación $\pi : N \rightarrow N$ tal que $\pi(i) = j$, $\pi(j) = i$ y $(k, l) \in d$ si y sólo si $(\pi(k), \pi(l)) \in d$.

Definición 5.2.4 Una función $\xi : \mathcal{DC}_{S_0}^N \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisface el axioma de simetría si, para toda $(N, v, d) \in \mathcal{DC}_{S_0}^N$ y todo par i, j de nodos simétricos en (N, d) , $\xi_i(N, v, d) = \xi_j(N, v, d)$.

Proposición 5.2.8 $\kappa^0 : \mathcal{DC}_{S_0}^N \rightarrow \mathbb{R}^n$ es la única función definida en $\mathcal{DC}_{S_0}^N$ que satisface eficiencia en componentes, 0-equidad y simetría.

Demostración: Es obvio que κ^0 satisface simetría y también se ha probado que satisface 0-equidad y eficiencia en componentes. Supongamos que $\xi : \mathcal{DC}_{S_0}^N \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función que satisface estas tres propiedades. Probaremos que $\xi(N, v, d) = \kappa^0(N, v, d)$, para toda $(N, v, d) \in \mathcal{DC}_{S_0}^N$, por inducción descendente sobre el cardinal de d .

Si $d = K^N$, siendo K^N el digrafo completo con n nodos, entonces, por simetría:

$$\xi_i(N, v, K^N) = \frac{v(N)}{n} = \kappa^0(N, v, K^N), \quad i = 1, \dots, n.$$

Supongamos que ξ coincide con κ^0 para todo (N, v, d) con $|d| \geq k$ y consideremos (N, v, d) con $|d| = k - 1$. Por tanto, para $i \in N$ y cualquier $(i, j) \in K^N \setminus d$:

$$\xi_i(N, v, d \cup \{(i, j)\}) - \xi_i(N, v, d) = 0,$$

ya que ξ satisface 0-equidad. Entonces,

$$\xi_i(N, v, d) = \xi_i(N, v, d \cup \{(i, j)\}) = \kappa_i^0(N, v, d \cup \{(i, j)\}).$$

La última igualdad se cumple por la hipótesis de inducción. Como κ^0 satisface 0-equidad, $\kappa_i^0(N, v, d \cup \{(i, j)\}) = \kappa_i^0(N, v, d)$ y el resultado queda probado. ■

Una demostración paralela a la anterior prueba que la restricción de κ^0 a la clase de las situaciones de comunicación dirigida con juegos simétricos, 0-normalizados y casi positivos, queda también caracterizada por las propiedades de eficiencia, 0-equidad y simetría.

5.3. Una descomposición de las medidas de centralidad

A pesar de que se ha demostrado que las medidas propuestas satisfacen las propiedades enunciadas en la sección anterior, propiedades que, de manera razonable pueden ser consideradas atractivas para una medida de centralidad, es justo plantear que tales medidas presentan también alguna debilidad. En el siguiente ejemplo se muestra que dos nodos pertenecientes a diferentes digrafos y con muy diferente conectividad pueden obtener la misma proporción de la centralidad total (manteniendo el mismo juego). Así, parece existir una cierta miopía en las medidas a la hora de cuantificar la conectividad.

Ejemplo 5.3.1 Consideremos las situaciones de comunicación dirigida (N, v, d) y (N, v, d') , donde $N = \{1, 2, 3, 4\}$, $v = v^2 + v^3$, $d = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 1)\}$ y $d' = d \cup \{(1, 3), (3, 1), (2, 4), (4, 2)\}$. Una representación de estos dos digrafos se da en la Figura 5.3:

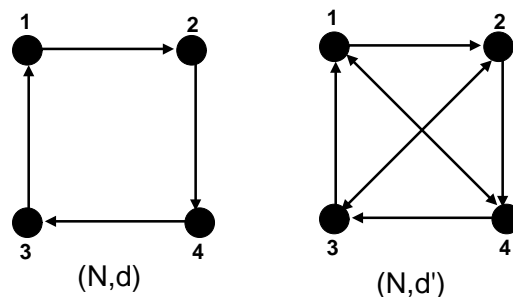


Figura 5.3: Dos digrafos con 4 nodos

Es fácil comprobar que para todo $\alpha \in [0, 1]$ se tiene $\kappa_i^\alpha(N, v^2 + v^3, d) = 2$ para cada $i = 1, 2, 3, 4$ y entonces,

$$\frac{\kappa_i^\alpha(N, v^2 + v^3, d)}{\sum_{j=1}^4 \kappa_j^\alpha(N, v^2 + v^3, d)} = \frac{1}{4}, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

De manera análoga, $\kappa_i^\alpha(N, v^2 + v^3, d') = 5$ para cada $i = 1, 2, 3, 4$ y entonces,

$$\frac{\kappa_i^\alpha(N, v^2 + v^3, d')}{\sum_{j=1}^4 \kappa_j^\alpha(N, v^2 + v^3, d')} = \frac{1}{4}, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

En consecuencia, la proporción de la centralidad total para cada nodo en $(N, v^2 + v^3, d)$ coincide con la correspondiente en $(N, v^2 + v^3, d')$. Es obvio, sin embargo, que existen diferencias entre estos dos digrafos (densidad, incidencia en cada nodo, etc). Este ejemplo inspira la idea de que, tal vez, la centralidad sea una medida vectorial y no sólo escalar. En otras palabras, utilizar un único valor para medir la centralidad de un nodo es excesiva (e innecesariamente) reduccionista. Teniendo esto en cuenta, intentaremos descomponer aditivamente cada una de las medidas definidas en otras tres, que podrán interpretarse, a su vez, como medidas de centralidad alternativas. La primera de ellas tendrá un carácter de medida de emisión, la segunda de intermediación y la tercera de recepción.

Este vector tridimensional de centralidades nos va a permitir ilustrar algunas diferencias entre nodos que la medida escalar no nos permitía percibir.

Definición 5.3.1 Dada una situación de comunicación dirigida $(N, v, d) \in \mathcal{DC}_{S_0}^N$, definimos, para cada $\alpha \in [0, 1]$, la centralidad por emisión del nodo i , $\epsilon_i^\alpha(N, v, d)$, como:

$$\begin{aligned} \epsilon_i^\alpha(N, v, d) &= \sum_{i \in S \subset N} \Delta_v(S) \sum_{T \in \pi(S) \cap \mathcal{C}_d(S), T(i)=1} \Psi_i^\alpha(N, w_T) = \\ &= \sum_{i \in S \subset N} \Delta_v(S) \sum_{T \in \pi(S) \cap \mathcal{C}_d(S), T(i)=1} \frac{\alpha^{t-1}}{t! \sum_{k=0}^{t-1} \alpha^k}, \end{aligned}$$

donde, recordemos, $T(i)$ representa la posición que ocupa el nodo i en la coalición ordenada T .

Definición 5.3.2 Dada una situación de comunicación dirigida $(N, v, d) \in \mathcal{DC}_{S_0}^N$, definimos para cada $\alpha \in [0, 1]$, la centralidad por intermediación del nodo i , $\beta_i^\alpha(N, v, d)$, como:

$$\begin{aligned} \beta_i^\alpha(N, v, d) &= \sum_{i \in S \subset N} \Delta_v(S) \sum_{T \in \pi(S) \cap \mathcal{C}_d(S), 1 < T(i) < t} \Psi_i^\alpha(N, w_T) = \\ &= \sum_{i \in S \subset N} \Delta_v(S) \sum_{T \in \pi(S) \cap \mathcal{C}_d^N(S), 1 < T(i) < t} \frac{\alpha^{t-T(i)}}{t! \sum_{k=0}^{t-1} \alpha^k}. \end{aligned}$$

Definición 5.3.3 Dada una situación de comunicación dirigida $(N, v, d) \in \mathcal{DC}_{S_0}^N$, para cada $\alpha \in [0, 1]$, la centralidad por recepción del nodo i , $\rho_i^\alpha(N, v, d)$, se define como:

$$\begin{aligned} \rho_i^\alpha(N, v, d) &= \sum_{i \in S \subset N} \Delta_v(S) \sum_{T \in \pi(S) \cap \mathcal{C}_d^N(S), T(i)=t} \Psi_i^\alpha(N, w_T) = \\ &= \sum_{i \in S \subset N} \Delta_v(S) \sum_{T \in \pi(S) \cap \mathcal{C}_d(S), T(i)=t} \frac{1}{t! \sum_{k=0}^{t-1} \alpha^k}. \end{aligned}$$

Las anteriores definiciones de $\epsilon_i^\alpha(N, v, d)$, $\beta_i^\alpha(N, v, d)$ y $\rho_i^\alpha(N, v, d)$ descomponen aditivamente la centralidad total del nodo i , $\kappa_i^\alpha(N, v, d)$, como se prueba en la siguiente proposición. Estas tres cantidades se obtienen asignando valor a i por su posición en los diferentes conjuntos ordenados conexos y distinguiendo que esta posición sea la inicial, una intermedia o la extrema, respectivamente. Estar situado al inicio de un conjunto ordenado conexo puede ser interpretado como una posición desde la cual es posible iniciar la comunicación; las posiciones intermedias están claramente asociadas con la intermediación, y estar al final de una cadena conexa convierte al nodo en un receptor. Estas ideas justifican las denominaciones elegidas.

Proposición 5.3.1 Para cada $(N, v, d) \in \mathcal{DC}_{S_0}^N$ y $\alpha \in [0, 1]$ tenemos:

$$\kappa_i^\alpha(N, v, d) = \epsilon_i^\alpha(N, v, d) + \beta_i^\alpha(N, v, d) + \rho_i^\alpha(N, v, d).$$

Demostración: Si $(N, v, d) \in \mathcal{DC}_{S_0}^N$, $\alpha \in [0, 1]$ e $i \in N$,

$$\kappa_i^\alpha(N, v, d) = \sum_{S \subset N} \Delta_v(S) \sum_{T \in \pi(S) \cap \mathcal{C}_d(S)} \Psi_i^\alpha(N, w_T).$$

Ahora, se tiene para cada $S \subset N$ tal que $i \in S$:

$$\begin{aligned} \sum_{T \in \pi(S) \cap \mathcal{C}_d(S)} \Psi_i^\alpha(N, w_T) &= \sum_{T \in \pi(S) \cap \mathcal{C}_d(S), T(i)=1} \Psi_i^\alpha(N, w_T) + \\ &+ \sum_{T \in \pi(S) \cap \mathcal{C}_d(S), 1 < T(i) < t} \Psi_i^\alpha(N, w_T) + \sum_{T \in \pi(S) \cap \mathcal{C}_d(S), T(i)=t} \Psi_i^\alpha(N, w_T), \end{aligned}$$

y entonces:

$$\kappa_i^\alpha(N, v, d) = \epsilon_i^\alpha(N, v, d) + \beta_i^\alpha(N, v, d) + \rho_i^\alpha(N, v, d).$$

■

Notemos que, para el caso $\alpha = 0$, todos los nodos en las situaciones de comunicación dirigida tienen centralidades por emisión y por intermediación nulas, y entonces la descomposición es inesencial.

Consideremos otra vez la situación de comunicación dirigida del Ejemplo 5.3.1. La descomposición previa nos permite ilustrar algunas diferencias entre los nodos de los diferentes digrafos que tenían igual proporción de la centralidad total.

Ejemplo 5.3.2 *Dadas las situaciones de comunicación dirigida $(N, v^2 + v^3, d)$ y $(N, v^2 + v^3, d')$ del Ejemplo 5.3.1, tenemos que, para $i = 1, 2, 3, 4$:*

$$\begin{aligned}\epsilon_i^\alpha(N, v^2 + v^3, d) &= \frac{\alpha}{1+\alpha} + \frac{\alpha^2}{1+\alpha+\alpha^2}, \\ \rho_i^\alpha(N, v^2 + v^3, d) &= \frac{1}{1+\alpha} + \frac{1}{1+\alpha+\alpha^2}, \\ \beta_i^\alpha(N, v^2 + v^3, d) &= \frac{\alpha}{1+\alpha+\alpha^2}, \\ \epsilon_i^\alpha(N, v^2 + v^3, d') &= \frac{2\alpha}{1+\alpha} + \frac{3\alpha^2}{1+\alpha+\alpha^2}, \\ \rho_i^\alpha(N, v^2 + v^3, d') &= \frac{2}{1+\alpha} + \frac{3}{1+\alpha+\alpha^2}, \\ \beta_i^\alpha(N, v^2 + v^3, d') &= \frac{3\alpha^2}{1+\alpha+\alpha^2}.\end{aligned}$$

Como todos los nodos tienen la misma centralidad en cada situación de comunicación y la misma proporción del total, cuando comparemos ambas situaciones de comunicación, con el fin de establecer las diferencias, utilizaremos las nuevas medidas definidas. Compararemos la proporción de centralidad de cada nodo debida a emisión, recepción e intermediación en ambos digrafos para explicar las diferencias existentes.

De esta manera, para $i = 1, 2, 3, 4$,

$$\frac{\epsilon_i^\alpha(N, v^2 + v^3, d)}{\kappa_i^\alpha(N, v^2 + v^3, d)} - \frac{\epsilon_i^\alpha(N, v^2 + v^3, d')}{\kappa_i^\alpha(N, v^2 + v^3, d')} = \frac{\alpha}{10(1+\alpha)(1+\alpha+\alpha^2)} \geq 0,$$

i.e., para $\alpha \in (0, 1]$, la proporción de la centralidad de cada nodo debida a la emisión es mayor en $(N, v^2 + v^3, d)$ que en $(N, v^2 + v^3, d')$. Para $\alpha = 0$, como la medida de centralidad κ^0 coincide con ρ^0 , la centralidad por emisión no cambia.

Si miramos la proporción de la centralidad total debida a la recepción, para $i = 1, 2, 3, 4$,

$$\frac{\rho_i^\alpha(N, v^2 + v^3, d)}{\kappa_i^\alpha(N, v^2 + v^3, d)} - \frac{\rho_i^\alpha(N, v^2 + v^3, d')}{\kappa_i^\alpha(N, v^2 + v^3, d')} = \frac{\alpha^2}{10(1+\alpha)(1+\alpha+\alpha^2)},$$

y así, se aprecia que la proporción de la centralidad total de cada nodo debida a recepción, es mayor también en $(N, v^2 + v^3, d)$ para $\alpha \in (0, 1]$, y no cambia para $\alpha = 0$. Finalmente,

como era de esperar, la medida por intermediación aumenta (excepto para el caso $\alpha = 0$), al pasar de $(N, v^2 + v^3, d)$ a $(N, v^2 + v^3, d')$:

$$\frac{\beta_i^\alpha(N, v^2 + v^3, d)}{\kappa_i^\alpha(N, v^2 + v^3, d)} - \frac{\beta_i^\alpha(N, v^2 + v^3, d')}{\kappa_i^\alpha(N, v^2 + v^3, d')} = \frac{-\alpha}{10(1 + \alpha + \alpha^2)} \leq 0.$$

Fijemos ahora nuestra atención en algunas propiedades deseables y sencillas de demostrar que satisfacen estas nuevas medidas.

En la primera proposición se prueba que, bajo ciertas hipótesis, en el centro de una estrella con arcos entrantes la proporción de centralidad por recepción (con respecto a la centralidad total de cada nodo) es máxima.

Proposición 5.3.2 Dada $(N, v, d^{IS}) \in \mathcal{DC}^N$ con $v \in \mathcal{S}_0^N \cap \mathcal{AP}^N$, siendo $d^{IS} = \{(i, 1), i \in N \setminus \{1\}\}$, para todo $(N, d) \in D^N$ y $\alpha \in [0, 1]$:

$$\frac{\rho_1^\alpha(N, v, d^{IS})}{\kappa_1^\alpha(N, v, d^{IS})} \geq \frac{\rho_i^\alpha(N, v, d)}{\kappa_i^\alpha(N, v, d)}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (5.4)$$

Demostración: Es obvio que para todo juego $(N, v) \in \mathcal{AP}^N \cap \mathcal{S}_0^N$: $\rho_1^\alpha(N, v, d^{IS}) = \kappa_1^\alpha(N, v, d^{IS})$ y el miembro izquierdo de la desigualdad (5.4) es igual a 1. Siendo el juego casi positivo $\rho_i^\alpha(N, v, d) \leq \kappa_i^\alpha(N, v, d)$ para todo $i \in N$ y el resultado queda probado. ■

Análogamente, tenemos el siguiente resultado para la centralidad por emisión.

Proposición 5.3.3 Dada $(N, v, d^{OS}) \in \mathcal{DC}^N$ con $v \in \mathcal{AP}^N \cap \mathcal{S}_0^N$ y siendo $d^{OS} = \{(1, i), i \in N \setminus \{1\}\}$, para todo $(N, d) \in D^N$ y $\alpha \in [0, 1]$:

$$\frac{\epsilon_1^\alpha(N, v, d^{OS})}{\kappa_1^\alpha(N, v, d^{OS})} \geq \frac{\epsilon_i^\alpha(N, v, d)}{\kappa_i^\alpha(N, v, d)}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (5.5)$$

En la siguiente proposición se prueba que, para una cadena orientada y para juegos casi positivos y simétricos, la centralidad por emisión es máxima en el nodo inicial de la cadena, mientras que la centralidad por recepción lo es para el nodo final. Por otra parte, la centralidad por intermediación aumenta desde el primer nodo hasta el nodo mediano. Supongamos, con el fin de simplificar la demostración, que la cadena tiene un número impar de nodos.

Proposición 5.3.4 Dadas $(N, v, d) \in \mathcal{DC}^N$ con $v \in \mathcal{AP}^N \cap \mathcal{S}_0^N$ y una cadena orientada $d = \{(1, 2), (2, 3), \dots, (n-1, n)\}$, con n impar, se tiene, para todo $\alpha \in [0, 1]$:

$$\epsilon_1^\alpha(N, v, d) \geq \epsilon_i^\alpha(N, v, d), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (5.6)$$

$$\rho_n^\alpha(N, v, d) \geq \rho_i^\alpha(N, v, d), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (5.7)$$

$$\beta_m^\alpha(N, v, d) \geq \beta_i^\alpha(N, v, d), \quad i = 1, 2, \dots, m-1, \quad \text{siendo } m \text{ el nodo mediano.} \quad (5.8)$$

Demostración: Para cada $(N, v) \in \mathcal{AP}^N \cap \mathcal{S}_0^N$, v es una combinación lineal de $\{v^2, \dots, v^n\}$ con coeficientes no negativos. Por tanto, es suficiente probar los resultados para cada v^k , $k = 2, \dots, n$, ya que las componentes de la centralidad también son lineales en el juego.

Entonces, las desigualdades (5.6) se cumplen debido a que, para $\alpha \in [0, 1]$ y $k = 2, 3, \dots, n$:

$$\epsilon_i^\alpha(N, v^k, d) = \begin{cases} \frac{\alpha^{k-1}}{\sum_{r=0}^{k-1} \alpha^r}, & \text{para } i = 1, 2, \dots, n-k+1 \\ 0, & i = n-k+2, \dots, n. \end{cases}$$

Análogamente, las desigualdades de (5.7) se satisfacen para $\alpha \in [0, 1]$ y $k = 2, \dots, n$, ya que,

$$\rho_i^\alpha(N, v^k, d) = \begin{cases} 0, & i = 1, 2, \dots, k-1 \\ \frac{1}{\sum_{r=0}^{k-1} \alpha^r}, & i = k, \dots, n. \end{cases}$$

Por último, con el fin de probar las desigualdades (5.8), consideremos $\alpha \in [0, 1]$ e $i \in N$, $i \leq m$. Un conjunto ordenado de tamaño k , con $3 \leq k \leq n$, conexo en (N, d) y que contenga al nodo i sin que éste sea extremo es:

$$T(i, r, k) = (i-r+1, i-r, \dots, i-1, i, i+1, \dots, i+k-r)$$

con $\max\{2, i+k-n\} \leq r \leq \min\{i, k-1\}$.

Entonces, para $3 \leq k \leq n$,

$$\begin{aligned} \beta_i^\alpha(N, v_k, d) &= \sum_{r=\max\{2, i+k-n\}}^{\min\{i, k-1\}} k! \Psi_i^\alpha(N, w_{T(i, r, k)}) = \\ &= \sum_{r=\max\{2, i+k-n\}}^{\min\{i, k-1, i+k-m-1\}} k! \Psi_i^\alpha(N, w_{T(i, r, k)}) + \sum_{r=i+k-m}^{\min\{i, k-1\}} k! \Psi_i^\alpha(N, w_{T(i, r, k)}) \leq \end{aligned}$$

$$\leq \sum_{r=\max\{2, i+k-n\}}^{\min\{i, k-1, i+k-m-1\}} k! \Psi_m^\alpha(N, w_{T(i,r,k)}) + \sum_{r=i+k-m}^{\min\{i, k-1\}} k! \Psi_i^\alpha(N, w_{T(i,r,k)}),$$

siendo cierta la última desigualdad debido a que $r \leq i+k-m-1$ implica $m \leq i+k-r-1$ y entonces $m \in H(T(i, r, k))$ y, además:

$$\Psi_i^\alpha(N, w_{T(i,r,k)}) = \frac{\alpha^{k-r}}{\sum_{l=0}^{k-1} \alpha^l} \leq \Psi_m^\alpha(N, w_{T(i,r,k)}),$$

ya que $m(T(i, r, k))$, la posición que ocupa m en $T(i, r, k)$, es mayor o igual que r .

Por otra parte, debido a que m es el nodo mediano, para cada $r = i+k-m, \dots, \min\{i, k-1\}$,

$$\Psi_i^\alpha(N, w_{T(i,r,k)}) = \frac{\alpha^{k-r}}{\sum_{l=0}^{k-1} \alpha^l},$$

y existe $T(m, r, k)$ tal que $\Psi_m^\alpha(N, w_{T(m,r,k)}) = \Psi_i^\alpha(N, w_{T(i,r,k)})$. Así pues,

$$\begin{aligned} \beta_i^\alpha(N, v^k, d) &\leq \sum_{r=\max\{2, i+k-n\}}^{\min\{i, k-1, i+k-m-1\}} k! \Psi_m^\alpha(N, w_{T(i,r,k)}) + \\ &+ \sum_{r=i+k-m}^{\min\{i, k-1\}} k! \Psi_m^\alpha(N, w_{T(m,r,k)}) \leq \beta_m^\alpha(N, v^k, d), \end{aligned}$$

cumpléndose la última desigualdad porque $\beta_m^\alpha(N, v^k, d)$ contiene al menos todos los términos de ambos sumatorios de la parte izquierda de la desigualdad y posiblemente algún término adicional no negativo. ■

La prueba de la última proposición sugiere algunas propiedades adicionales para el caso especial $\alpha = 1$, i.e., el caso en el que la medida no distingue los papeles de iniciador y de receptor en la comunicación.

Corolario 5.3.1 *Dadas $(N, v, d) \in \mathcal{DC}^N$ con $v \in \mathcal{AP}^N \cap \mathcal{S}_0^N$ y una cadena orientada $d = \{(1, 2), (2, 3), \dots, (n-1, n)\}$ con n impar, tenemos:*

$$\epsilon_i^1(N, v, d) = \rho_{n-i+1}^1(N, v, d), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$\beta_m^1(N, v, d) \geq \beta_i^1(N, v, d), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

5.4. Un ejemplo: Centralidad de los jugadores en un modelo de fútbol simplificado

Consideremos un modelo de fútbol simplificado con dos equipos de cinco jugadores cada uno: el portero, dos defensas, un centrocampista y un delantero. Podemos modelar con un arco (i, j) el hecho de que el jugador i pase el balón al jugador j dentro de una jugada concreta. Si éste es el último arco de una secuencia de pases, tenemos dos posibilidades abiertas: j dispara y mete gol o pierde el balón porque va fuera o es interceptado por un rival. De hecho, un partido consta de muchas jugadas (secuencias de pases), pero en el siguiente ejemplo, introduciendo otra simplificación, supondremos que dos equipos dados, A y B, sólo llevan a cabo en un partido tres jugadas cada uno, que están dadas por los digrafos d_1, d_2, d_3 y d'_1, d'_2, d'_3 respectivamente.

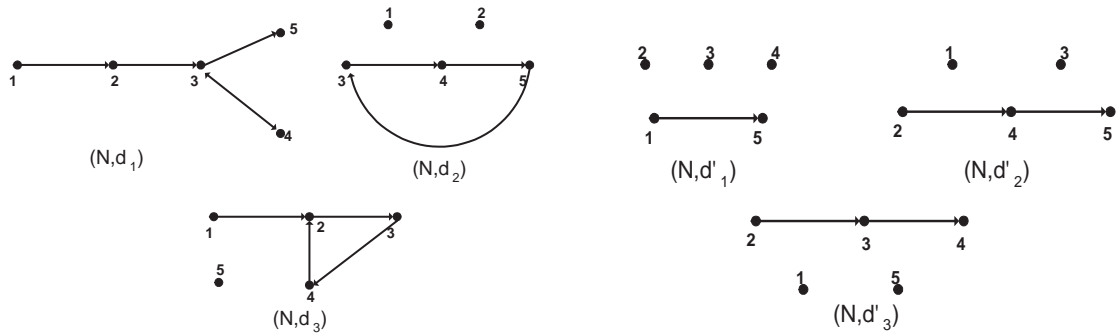


Figura 5.4: Jugadas de los equipos A y B.

Asumiremos que d_1 acaba en el único gol del partido marcado por el delantero (5). Obtendremos la centralidad (y su descomposición) de cada jugador en cada digrafo (jugada) y la centralidad media en el partido. Este valor esperado se calculará considerando para el equipo A un peso de 0.5 para la jugada del gol y pesos iguales para las otras dos jugadas, mientras que para el equipo B se supondrá igual peso para las tres jugadas. Notaremos $\overline{\kappa^{\alpha,A}} = \frac{1}{2}\kappa^{\alpha}(N, v, d_1) + \frac{1}{4}\kappa^{\alpha}(N, v, d_2) + \frac{1}{4}\kappa^{\alpha}(N, v, d_3)$, y $\overline{\kappa^{\alpha,B}} = \frac{1}{3}\kappa^{\alpha}(N, v, d'_1) + \frac{1}{3}\kappa^{\alpha}(N, v, d'_2) + \frac{1}{3}\kappa^{\alpha}(N, v, d'_3)$ a las centralidades medias de los jugadores en el partido entre los equipos A y B. Análogamente $\overline{\epsilon^{\alpha,A}}, \overline{\beta^{\alpha,A}}, \overline{\rho^{\alpha,A}}$, y $\overline{\epsilon^{\alpha,B}}, \overline{\beta^{\alpha,B}}, \overline{\rho^{\alpha,B}}$ representarán los valores medios de las tres componentes de la centralidad para los jugadores de los equipos A y B.

Como es obvio, la centralidad por emisión de cada jugador puede considerarse como un índice de su participación en el juego como iniciador de las jugadas (típicamente esta centralidad debe ser mayor para el portero y los defensas), mientras que su centralidad por intermediación medirá su habilidad para tejer el juego (generalmente mayor para los centrocampistas) y, finalmente, su centralidad por recepción nos informa sobre su capacidad para finalizar jugadas o perder el balón (habitualmente mayor en los delanteros).

Utilizaremos el juego de las conferencias, que mide la capacidad de asociarse los actores y algunos valores de α , en particular, 0, 0.5 y 1. El valor de α puede considerarse como una medida de la dificultad relativa entre pasar el balón y controlarlo al recibirlo.

Además, la centralidad total de cada equipo, al ser comparada con la de otros equipos, puede dar una idea sobre la diferencia en el estilo de juego o en la estrategia utilizada. Cuanto mayor sea la centralidad total de un equipo, más elaborado será su juego.

Los resultados para los jugadores del equipo A se muestran a continuación, y su particularización para $\alpha = 0$, $\alpha = 0.5$ y $\alpha = 1$ aparece en las Tablas 5.1, 5.2 y 5.3.

- Centralidades en las diferentes jugadas d_1 , d_2 y d_3 :

$$\kappa^\alpha(N, v, d_1) = \left(\frac{\alpha}{1+\alpha} + \frac{\alpha^2}{1+\alpha+\alpha^2} + \frac{2\alpha^3}{1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3}, 1 + \frac{\alpha+\alpha^2}{1+\alpha+\alpha^2} + \frac{2\alpha^2}{1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3}, \right. \\ \left. 2 + \frac{1+3\alpha}{1+\alpha+\alpha^2} + \frac{2\alpha}{1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3}, 1 + \frac{1+\alpha^2}{1+\alpha+\alpha^2} + \frac{1}{1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3}, \frac{1}{1+\alpha} + \frac{2}{1+\alpha+\alpha^2} + \frac{1}{1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3} \right),$$

$$\kappa^\alpha(N, v, d_2) = (0, 0, 2, 2, 2),$$

$$\kappa^\alpha(N, v, d_3) = \left(\frac{\alpha}{1+\alpha} + \frac{\alpha^2}{1+\alpha+\alpha^2} + \frac{\alpha^3}{1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3}, \right. \\ \left. \frac{2+\alpha}{1+\alpha} + \frac{1+2\alpha+\alpha^2}{1+\alpha+\alpha^2} + \frac{\alpha^2}{1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3}, 1 + \frac{2+\alpha+\alpha^2}{1+\alpha+\alpha^2} + \frac{\alpha}{1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3}, 2 + \frac{1}{1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3}, 0 \right).$$

$$\overline{\kappa^{\alpha, A}} = \frac{1}{2}\kappa(N, v, d_1) + \frac{1}{4}\kappa(N, v, d_2) + \frac{1}{4}\kappa(N, v, d_3)$$

- Centralidades por emisión

$$\epsilon^\alpha(N, v, d_1) = \left(\frac{\alpha}{1+\alpha} + \frac{\alpha^2}{1+\alpha+\alpha^2} + \frac{2\alpha^3}{1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3}, \frac{\alpha}{1+\alpha} + \frac{2\alpha^2}{1+\alpha+\alpha^2}, \frac{2\alpha}{1+\alpha}, \right. \\ \left. \frac{\alpha}{1+\alpha} + \frac{\alpha^2}{1+\alpha+\alpha^2}, 0 \right)$$

$$\epsilon^\alpha(N, v, d_2) = \left(0, 0, \frac{\alpha}{1+\alpha} + \frac{\alpha^2}{1+\alpha+\alpha^2}, \frac{\alpha}{1+\alpha} + \frac{\alpha^2}{1+\alpha+\alpha^2}, \frac{\alpha}{1+\alpha} + \frac{\alpha^2}{1+\alpha+\alpha^2} \right)$$

$$\epsilon^\alpha(N, v, d_3) = \left(\frac{\alpha}{1+\alpha} + \frac{\alpha^2}{1+\alpha+\alpha^2} + \frac{\alpha^3}{1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3}, \frac{\alpha}{1+\alpha} + \frac{\alpha^2}{1+\alpha+\alpha^2}, \right. \\ \left. \frac{\alpha}{1+\alpha} + \frac{\alpha^2}{1+\alpha+\alpha^2}, \frac{\alpha}{1+\alpha} + \frac{\alpha^2}{1+\alpha+\alpha^2}, 0 \right)$$

$$\overline{\epsilon^{\alpha, A}} = \frac{1}{2}\epsilon^\alpha(N, v, d_1) + \frac{1}{4}\epsilon^\alpha(N, v, d_2) + \frac{1}{4}\epsilon^\alpha(N, v, d_3)$$

- Centralidades por intermediación

$$\beta^\alpha(N, v, d_1) = \left(0, \frac{\alpha}{1+\alpha+\alpha^2} + \frac{2\alpha^2}{1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3}, \frac{3\alpha}{1+\alpha+\alpha^2} + \frac{2\alpha^2}{1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3}, 0, 0 \right)$$

$$\beta^\alpha(N, v, d_2) = \left(0, 0, \frac{\alpha}{1+\alpha+\alpha^2}, \frac{\alpha}{1+\alpha+\alpha^2}, \frac{\alpha}{1+\alpha+\alpha^2} \right)$$

$$\beta^\alpha(N, v, d_3) = \left(0, \frac{2\alpha}{1+\alpha+\alpha^2} + \frac{\alpha^2}{1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3}, \frac{\alpha}{1+\alpha+\alpha^2} + \frac{\alpha}{1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3}, \frac{\alpha}{1+\alpha+\alpha^2}, 0 \right)$$

$$\overline{\beta^{\alpha, A}} = \frac{1}{2}\beta^\alpha(N, v, d_1) + \frac{1}{4}\beta^\alpha(N, v, d_2) + \frac{1}{4}\beta^\alpha(N, v, d_3)$$

- Centralidades por recepción

$$\rho^\alpha(N, v, d_1) = \left(0, \frac{1}{1+\alpha}, \frac{2}{1+\alpha} + \frac{1}{1+\alpha+\alpha^2}, \frac{1}{1+\alpha} + \frac{1}{1+\alpha+\alpha^2} + \frac{1}{1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3}, \frac{1}{1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3} \right)$$

$$\rho^\alpha(N, v, d_2) = \left(0, 0, \frac{1}{1+\alpha} + \frac{1}{1+\alpha+\alpha^2}, \frac{1}{1+\alpha} + \frac{1}{1+\alpha+\alpha^2}, \frac{1}{1+\alpha} + \frac{1}{1+\alpha+\alpha^2} \right)$$

$$\rho^\alpha(N, v, d_3) = \left(0, \frac{2}{1+\alpha} + \frac{1}{1+\alpha+\alpha^2}, \frac{1}{1+\alpha} + \frac{2}{1+\alpha+\alpha^2}, \frac{1}{1+\alpha} + \frac{1}{1+\alpha+\alpha^2} + \frac{1}{1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3}, 0 \right)$$

$$\overline{\rho^{\alpha, A}} = \frac{1}{2}\rho^\alpha(N, v, d_1) + \frac{1}{4}\rho^\alpha(N, v, d_2) + \frac{1}{4}\rho^\alpha(N, v, d_3)$$

$\alpha = 0$	$\kappa_i^\alpha(N, v, d_1)$	$\epsilon_i^\alpha(N, v, d_1)$ $\beta_i^\alpha(N, v, d_1)$ $\rho_i^\alpha(N, v, d_1)$	$\kappa_i^\alpha(N, v, d_2)$	$\epsilon_i^\alpha(N, v, d_2)$ $\beta_i^\alpha(N, v, d_2)$ $\rho_i^\alpha(N, v, d_2)$	$\kappa_i^\alpha(N, v, d_3)$	$\epsilon_i^\alpha(N, v, d_3)$ $\beta_i^\alpha(N, v, d_3)$ $\rho_i^\alpha(N, v, d_3)$	$\overline{\kappa_i^\alpha}$	$\overline{\epsilon_i^\alpha}$ $\overline{\beta_i^\alpha}$ $\overline{\rho_i^\alpha}$
$i = 1$	0	0 0 0	0	0 0 0	0	0 0 0	0	0 0 0
$i = 2$	1	0 0 1	0	0 0 0	3	0 0 3	1.25	0 0 1.25
$i = 3$	3	0 0 3	2	0 0 2	3	0 0 3	2.75	0 0 2.75
$i = 4$	3	0 0 3	2	0 0 2	3	0 0 3	2.75	0 0 2.75
$i = 5$	4	0 0 4	2	0 0 2	0	0 0 0	2.5	0 0 2.5

Tabla 5.1

$\alpha = 1$	$\kappa_i^\alpha(N, v, d_1)$	$\epsilon_i^\alpha(N, v, d_1)$ $\beta_i^\alpha(N, v, d_1)$ $\rho_i^\alpha(N, v, d_1)$	$\kappa_i^\alpha(N, v, d_2)$	$\epsilon_i^\alpha(N, v, d_2)$ $\beta_i^\alpha(N, v, d_2)$ $\rho_i^\alpha(N, v, d_2)$	$\kappa_i^\alpha(N, v, d_3)$	$\epsilon_i^\alpha(N, v, d_3)$ $\beta_i^\alpha(N, v, d_3)$ $\rho_i^\alpha(N, v, d_3)$	$\overline{\kappa_i^\alpha}$	$\overline{\epsilon_i^\alpha}$ $\overline{\beta_i^\alpha}$ $\overline{\rho_i^\alpha}$
$i = 1$	1.333	1.333 0 0	0	0 0 0	1.083	1.083 0 0	0.937	0.937 0 0
$i = 2$	2.5	1.166 0.833 0.5	0	0 0 0	3.083	0.833 0.916 1.333	2.021	0.792 0.646 0.583
$i = 3$	3.833	1 1.5 1.333	2	0.833 0.333 0.833	2.583	0.833 0.583 1.166	3.062	0.916 0.979 1.166
$i = 4$	1.916	0.833 0 1.083	2	0.833 0.333 0.833	2.25	0.833 0.333 1.083	2.021	0.833 0.166 1.021
$i = 5$	1.416	0 0 1.146	2	0.833 0.333 0.833	0	0 0 0	1.208	0.025 0.083 0.916

Tabla 5.2

$\alpha = 0.5$	$\kappa_i^\alpha(N, v, d_1)$	$\begin{matrix} \epsilon_i^\alpha(N, v, d_1) \\ \beta_i^\alpha(N, v, d_1) \\ \rho_i^\alpha(N, v, d_1) \end{matrix}$	$\kappa_i^\alpha(N, v, d_2)$	$\begin{matrix} \epsilon_i^\alpha(N, v, d_2) \\ \beta_i^\alpha(N, v, d_2) \\ \rho_i^\alpha(N, v, d_2) \end{matrix}$	$\kappa_i^\alpha(N, v, d_3)$	$\begin{matrix} \epsilon_i^\alpha(N, v, d_3) \\ \beta_i^\alpha(N, v, d_3) \\ \rho_i^\alpha(N, v, d_3) \end{matrix}$	$\overline{\kappa_i^\alpha}$	$\begin{matrix} \overline{\epsilon_i^\alpha} \\ \overline{\beta_i^\alpha} \\ \overline{\rho_i^\alpha} \end{matrix}$
$i = 1$	0.609	0.609 0 0	0	0 0 0	0.543	0.543 0 0	0.440	0.440 0 0
$i = 2$	1.838	0.619 0.552 0.666	0	0 0 0	3.086	0.476 0.704 1.904	1.690	0.428 0.452 0.809
$i = 3$	3.962	0.666 1.390 1.905	2	0.476 0.285 1.238	2.838	0.476 0.552 1.809	3.190	0.571 0.904 1.714
$i = 4$	2.247	0.476 0 1.771	2	0.476 0.285 1.238	2.533	0.476 0.285 1.638	2.257	0.476 0.143 1.638
$i = 5$	2.343	0 0 2.343	2	0.476 0.285 1.238	0	0 0 0	1.671	0.119 0.071 1.481

Tabla 5.3

Análogamente, se muestran a continuación las expresiones de las centralidades y su descomposición, en función de α , para los jugadores del equipo B. La particularización para los casos $\alpha = 0$, $\alpha = 0.5$ y $\alpha = 1$ se encuentra en las Tablas 5.4, 5.5 y 5.6.

- Centralidad de los diferentes jugadores en d'_1 , d'_2 y d'_3

$$\kappa^\alpha(N, v, d'_1) = \left(\frac{\alpha}{1+\alpha}, 0, 0, 0, \frac{1}{1+\alpha} \right)$$

$$\kappa^\alpha(N, v, d'_2) = \left(0, \frac{\alpha}{1+\alpha}, 0, 1 + \frac{\alpha}{1+\alpha+\alpha^2}, \frac{\alpha}{1+\alpha} + \frac{\alpha}{1+\alpha+\alpha^2} \right)$$

$$\kappa^\alpha(N, v, d'_3) = \left(0, \frac{\alpha}{1+\alpha} + \frac{\alpha^2}{1+\alpha+\alpha^2}, 1 + \frac{\alpha}{1+\alpha+\alpha^2}, \frac{1}{1+\alpha} + \frac{1}{1+\alpha+\alpha^2}, 0 \right)$$

$$\overline{\kappa^{\alpha,B}} = \frac{1}{3} [\kappa^\alpha(N, v, d'_1) + \kappa^\alpha(N, v, d'_2) + \kappa^\alpha(N, v, d'_3)]$$

- Centralidad por emisión

$$\epsilon^\alpha(N, v, d'_1) = \left(\frac{\alpha}{1+\alpha}, 0, 0, 0, 0 \right)$$

$$\epsilon^\alpha(N, v, d'_2) = \left(0, \frac{\alpha}{1+\alpha} + \frac{\alpha^2}{1+\alpha+\alpha^2}, 0, \frac{\alpha}{1+\alpha}, 0 \right)$$

$$\epsilon^\alpha(N, v, d'_3) = \left(0, \frac{\alpha}{1+\alpha} + \frac{\alpha^2}{1+\alpha+\alpha^2}, \frac{\alpha}{1+\alpha}, 0, 0 \right)$$

$$\overline{\epsilon^{\alpha,B}} = \frac{1}{3} [\epsilon^\alpha(N, v, d'_1) + \epsilon^\alpha(N, v, d'_2) + \epsilon^\alpha(N, v, d'_3)]$$

- Centralidad por intermediación

$$\beta^\alpha(N, v, d'_1) = (0, 0, 0, 0, 0)$$

$$\beta^\alpha(N, v, d'_2) = (0, 0, 0, \frac{\alpha}{1+\alpha+\alpha^2}, 0)$$

$$\beta^\alpha(N, v, d'_3) = (0, 0, \frac{\alpha}{1+\alpha+\alpha^2}, 0, 0)$$

$$\overline{\beta^{\alpha, B}} = \frac{1}{3} [\beta^\alpha(N, v, d'_1) + \beta^\alpha(N, v, d'_2) + \beta^\alpha(N, v, d'_3)]$$

■ Centralidad por recepción

$$\rho^\alpha(N, v, d'_1) = (0, 0, 0, 0, \frac{1}{1+\alpha})$$

$$\rho^\alpha(N, v, d'_2) = (0, 0, 0, \frac{1}{1+\alpha}, \frac{1}{1+\alpha} + \frac{1}{1+\alpha+\alpha^2})$$

$$\rho^\alpha(N, v, d'_3) = (0, 0, \frac{1}{1+\alpha}, \frac{1}{1+\alpha} + \frac{1}{1+\alpha+\alpha^2}, 0)$$

$$\overline{\rho^{\alpha, B}} = \frac{1}{3} [\rho^\alpha(N, v, d'_1) + \rho^\alpha(N, v, d'_2) + \rho^\alpha(N, v, d'_3)]$$

$\alpha = 0$	$\kappa_i^\alpha(N, v, d'_1)$	$\epsilon_i^\alpha(N, v, d'_1)$ $\beta_i^\alpha(N, v, d'_1)$ $\rho_i^\alpha(N, v, d'_1)$	$\kappa_i^\alpha(N, v, d'_2)$	$\epsilon_i^\alpha(N, v, d'_2)$ $\beta_i^\alpha(N, v, d'_2)$ $\rho_i^\alpha(N, v, d'_2)$	$\kappa_i^\alpha(N, v, d'_3)$	$\epsilon_i^\alpha(N, v, d'_3)$ $\beta_i^\alpha(N, v, d'_3)$ $\rho_i^\alpha(N, v, d'_3)$	$\overline{\kappa_i^\alpha}$	$\frac{\overline{\epsilon_i^\alpha}}{\overline{\beta_i^\alpha}}$ $\frac{\overline{\rho_i^\alpha}}{\overline{\beta_i^\alpha}}$
$i = 1$	0	0 0 0	0	0 0 0	0	0 0 0	0	0 0 0
$i = 2$	0	0 0 0	0	0 0 0	0	0 0 0	0	0 0 0
$i = 3$	0	0 0 0	1	0 0 1	1	0 0 1	0.333	0 0 0.333
$i = 4$	0	0 0 0	2	0 0 2	2	0 0 2	1	0 0 1
$i = 5$	1	0 0 1	0	0 0 0	0	0 0 0	1	0 0 1

Tabla 5.4

$\alpha = 1$	$\kappa_i^\alpha(N, v, d'_1)$	$\epsilon_i^\alpha(N, v, d'_1)$ $\beta_i^\alpha(N, v, d'_1)$ $\rho_i^\alpha(N, v, d'_1)$	$\kappa_i^\alpha(N, v, d'_2)$	$\epsilon_i^\alpha(N, v, d'_2)$ $\beta_i^\alpha(N, v, d'_2)$ $\rho_i^\alpha(N, v, d'_2)$	$\kappa_i^\alpha(N, v, d'_3)$	$\epsilon_i^\alpha(N, v, d'_3)$ $\beta_i^\alpha(N, v, d'_3)$ $\rho_i^\alpha(N, v, d'_3)$	$\overline{\kappa_i^\alpha}$	$\overline{\frac{\epsilon_i^\alpha}{\beta_i^\alpha}}$ $\overline{\frac{\rho_i^\alpha}{\beta_i^\alpha}}$
$i = 1$	0.5	0.5 0 0	0	0 0 0	0	0 0 0	0.166	0.166 0 0
$i = 2$	0	0 0 0	0.833	0.833 0 0	0.833	0.833 0 0	0.555	0.555 0 0
$i = 3$	0	0 0 0	0	0 0 0	1.333	0.5 0.333 0.5	0.444	0.166 0.111 0.166
$i = 4$	0	0 0 0	1.333	0.5 0.333 0.5	0.833	0 0 0.833	0.722	0.166 0.111 0.444
$i = 5$	0.5	0 0 0.5	0.833	0 0 0.833	0	0 0 0	0.444	0 0 0.444

Tabla 5.5

$\alpha = 0.5$	$\kappa_i^\alpha(N, v, d'_1)$	$\epsilon_i^\alpha(N, v, d'_1)$ $\beta_i^\alpha(N, v, d'_1)$ $\rho_i^\alpha(N, v, d'_1)$	$\kappa_i^\alpha(N, v, d'_2)$	$\epsilon_i^\alpha(N, v, d'_2)$ $\beta_i^\alpha(N, v, d'_2)$ $\rho_i^\alpha(N, v, d'_2)$	$\kappa_i^\alpha(N, v, d'_3)$	$\epsilon_i^\alpha(N, v, d'_3)$ $\beta_i^\alpha(N, v, d'_3)$ $\rho_i^\alpha(N, v, d'_3)$	$\overline{\kappa_i^\alpha}$	$\overline{\frac{\epsilon_i^\alpha}{\beta_i^\alpha}}$ $\overline{\frac{\rho_i^\alpha}{\beta_i^\alpha}}$
$i = 1$	0.333	0.333 0 0	0	0 0 0	0	0 0 0	0.111	0.111 0 0
$i = 2$	0	0 0 0	0.476	0.476 0 0	0.476	0.476 0 0	0.317	0.317 0 0
$i = 3$	0	0 0 0	0	0 0 0	1.285	0.333 0.285 0.666	0.428	0.111 0.095 0.222
$i = 4$	0	0 0 0	1.285	0.333 0.285 0.666	1.238	0 0 1.238	0.828	0.111 0.095 0.635
$i = 5$	0.666	0 0 0.666	1.238	0 0 1.238	0	0 0 0	0.635	0 0 0.635

Tabla 5.6

Por último, compararemos algunas de las centralidades obtenidas en este ejemplo con los valores que proporcionan otras medidas existentes en la literatura.

Recordemos que Amer et al. (2007) definen, para una situación de comunicación dirigida (N, v, d) , un nuevo juego restringido al digrafo, (N, v_d) , que es también un juego TU generalizado, como $v_d(T) = \sum_{R \in \mathcal{MC}_d^T} v(H(R))$, para todo $T \in \Omega(N)$, donde $\mathcal{MC}_d^T = \{R \tilde{C} T \text{ tal que } R \text{ es conexo maximal en } (N, d)\}$. La accesibilidad de cada nodo $i \in N$ se define como:

$$\mathcal{A}_i(N, v, d) = \Psi_i^0(N, v_d).$$

Así, la accesibilidad normalizada de los jugadores del equipo A en las diferentes jugadas es:

$$\mathcal{A}(N, v, d_1) = (0, 0.082, 0.246, 0.294, 0.376),$$

$$\mathcal{A}(N, v, d_2) = (0, 0, 0.333, 0.333, 0.333),$$

$$\mathcal{A}(N, v, d_3) = (0, 0.313, 0.313, 0.373, 0).$$

Como se puede comprobar, estos vectores son bastante similares a los obtenidos normalizando, vía suma, $\kappa^0(N, v, d_1)$, $\kappa^0(N, v, d_2)$ y $\kappa^0(N, v, d_3)$ a pesar de que existen diferencias significativas entre los diferentes conceptos de conexión utilizados.

Evidentemente, por el tipo de valor elegido, si el parámetro α es diferente de 0, $\kappa^\alpha(N, v, d_j)$ difiere significativamente de $\mathcal{A}(N, v, d_j)$.

Las centralidades basadas en el vector propio dominante de la matriz de adyacencia (Bonacich 1987) son, para d_1 , d_2 , y d_3 respectivamente:

$$(0.25, 0.25, 0.25, 0.25, 0),$$

$$(0, 0, 0.333, 0.333, 0.333),$$

$$(0.25, 0.25, 0.25, 0.25, 0).$$

En este caso las diferencias respecto a las medidas aquí propuestas son obvias. Pensamos que, al menos para estos ejemplos, la medida del valor propio no recoge muchas de las diferencias existentes en la conectividad de los nodos.

En van den Brink y Borm (2002) se presenta un modelo en el que se resumen los resultados de los partidos entre varios equipos en una competición deportiva (fútbol)

por medio de un digrafo. En este trabajo, (i, j) es un arco del digrafo si y sólo si j no pierde contra i . El modelo que nosotros proponemos no es apropiado para este tipo de situaciones. El uso de juegos casi positivos implica la estabilidad de la regla de asignación asociada (para cada $\alpha \in [0, 1]$) y, entonces, si se modelan los empates como dos victorias (una para cada equipo), como hacen tales autores, los empates quedarían sobrevalorados, lo que no es razonable, ni acorde con la valoración real que, especialmente en el caso del fútbol, considera una victoria tan valiosa como dos empates y, desde hace años, como tres.

Capítulo 6

Una familia de medidas de cohesividad basada en conceptos juego-teóricos

En este capítulo, y continuando en la línea de obtener, desde una perspectiva juego-teórica, medidas relativas a variables sociológicas no observables, abordaremos el problema de medir la cohesividad de un grupo en una red social. Una vez más, asumiremos que la red social viene representada por un grafo y que entre los actores de dicha red existen unos intereses económicos que podemos modelar mediante un juego TU. En el análisis que desde la sociología se hace del concepto de cohesividad de grupos, se asume que está relacionado con la resistencia del grupo a sufrir rupturas, así como con el nivel de redundancia en las comunicaciones. Utilizando esta misma perspectiva, dada una red social (grafo) γ y un juego v , mediremos la cohesividad de un conjunto de jugadores-nodos, A , como la proporción de la riqueza que este grupo es capaz de mantener cuando las relaciones deterministas existentes entre ellos pueden dejar de existir con probabilidad $\frac{1}{2}$. La eventual ruptura de aristas motiva posibles desconexiones en el grupo. La importancia de estas desconexiones se mide por el efecto negativo que tiene en la riqueza del grupo. Si seleccionamos un juego v 0-normalizado y superaditivo, cuando se rompe un grupo su capital disminuye (o, al menos, no aumenta). Una gran cohesión en el grupo dificultará las desconexiones y, por ende, la pérdida de riqueza. En consecuencia, a mayor efecto negativo al pasar de la situación determinista a la aleatoria descrita, menor cohesividad en el grupo.

6.1. Cohesividad de grupos en una red social

Dada una situación de comunicación (N, v, γ) , notaremos

$$\aleph(N, v, \gamma) = \{A \subset N \text{ tal que existe } A_i \in A/\gamma \text{ con } v(A_i) > 0\}$$

el conjunto de coaliciones de N con alguna componente conexa (en γ) en la que v toma un valor estrictamente positivo.

Si $v \in \mathcal{A}_0^N$, este conjunto puede redefinirse como:

$$\aleph(N, v, \gamma) = \{A \subset N \text{ tal que } v^\gamma(A) > 0\}.$$

Sea $(N, v, \gamma) \in \mathcal{CS}^N$ con $v \in \mathcal{A}_0^N$. Dados $A \in \aleph(N, v, \gamma)$ y $\eta \subset \gamma|_A$, la fracción de su riqueza que mantienen los jugadores de A cuando pierden todas las relaciones directas entre ellos salvo las dadas por η es:

$$\frac{v^\eta(A)}{v^\gamma(A)} = \frac{\sum_{T \in A/\eta} v(T)}{\sum_{T \in A/\gamma} v(T)}. \quad (6.1)$$

La dificultad para desconectar las componentes de A en γ se incrementa con la redundancia en las comunicaciones. Cuando v es un juego superaditivo, cada ruptura de una componente conexa en A/γ implica una reducción potencial en el numerador de (6.1). La magnitud de esta reducción depende de los valores de las subcoaliciones de A .

Supongamos ahora que todos los subgrafos de $\gamma|_A$ son igualmente probables. Esto es equivalente a asumir que cada uno de los enlaces presentes en $\gamma|_A$ se rompe (independientemente de los demás) con una probabilidad de $\frac{1}{2}$.

Con este esquema de aleatoriedad, el valor esperado de las expresiones en (6.1) es:

$$\frac{1}{2^{|\gamma|_A}} \sum_{\eta \subset \gamma|_A} \frac{v^\eta(A)}{v^\gamma(A)}$$

que se puede ver como una medida de la cohesión entre los miembros del subgrupo A . Compara el pago colectivo de A cuando las comunicaciones son deterministas y dadas por $\gamma|_A$ con su pago esperado cuando cada enlace tiene probabilidad $\frac{1}{2}$ de romperse. Cuanto mayor es dicho valor, más resistente es A a sufrir potenciales desconexiones. De esta manera, proponemos la siguiente definición:

Definición 6.1.1 Sean $(N, v, \gamma) \in \mathcal{CS}^N$ con $v \in \mathcal{A}_0^N$ y $A \in \mathfrak{N}(N, v, \gamma)$. Definimos la cohesividad del grupo o clase A en la situación de comunicación (N, v, γ) , que notaremos $Ch_A(N, v, \gamma)$, como:

$$Ch_A(N, v, \gamma) = \frac{1}{2^{|\gamma|A|}} \sum_{\eta \subset \gamma|_A} \frac{\sum_{T \in A/\eta} v(T)}{\sum_{T \in A/\gamma} v(T)}. \quad (6.2)$$

Como consecuencia directa de la definición anterior, se tiene:

$$Ch_A(N, v, \gamma) = Ch_A(N, v, \gamma|_A) = Ch_A(A, v|_A, \gamma|_A).$$

Por tanto, la cohesividad de A es independiente de las relaciones que no están establecidas entre los miembros de A .

Con objeto de simplificar la notación, cuando A coincida con N , escribiremos:

$$Ch_N(N, v, \gamma) = Ch(N, v, \gamma).$$

Por ser la medida de cohesividad introducida el valor esperado de un conjunto de proporciones, se satisface trivialmente que su valor oscila entre 0 y 1.

Proposición 6.1.1 Dada $(N, v, \gamma) \in \mathcal{CS}^N$ con $v \in \mathcal{A}_0^N$, es $0 \leq Ch_A(N, v, \gamma) \leq 1$.

En la siguiente proposición se obtiene una expresión alternativa para la cohesividad de un grupo A .

Proposición 6.1.2 Sean $(N, v, \gamma) \in \mathcal{CS}^N$ con $v \in \mathcal{A}_0^N$ y $A \in \mathfrak{N}(N, v, \gamma)$. Entonces:

$$Ch_A(N, v, \gamma) = \frac{1}{v^\gamma(A)} \sum_{S \subset A} \Delta_v(S) c_S(A, \gamma|_A),$$

donde, para cada $S \subset N$,

$$c_S(N, \gamma) = \frac{|\eta \subset \gamma \text{ con } S \text{ conexo en } \eta|}{2^{|\gamma|}},$$

que puede verse como la probabilidad de que los miembros de S se conecten en γ , dado el esquema aleatorio descrito.

Demostración: Para todo $\eta \subset \gamma$, por la linealidad de la aplicación que asigna a cada juego el juego restringido al grafo,

$$v^\eta(A) = \left(\sum_{S \subset N} \Delta_v(S) u_S \right)^\eta (A) = \sum_{S \subset A} \Delta_v(S) u_S^\eta(A).$$

Entonces:

$$\sum_{\eta \subset \gamma|_A} v^\eta(A) = \sum_{\eta \subset \gamma|_A} \sum_{S \subset A} \Delta_v(S) u_S^\eta(A) = \sum_{S \subset A} \Delta_v(S) \sum_{\eta \subset \gamma|_A} u_S^\eta(A),$$

donde $u_S^\eta(A) = 1$ si S es conexo en η y 0 en otro caso, lo que prueba el resultado. ■

Las siguientes proposiciones nos ayudarán a calcular la cohesividad de un grupo cuando éste no sea conexo.

Proposición 6.1.3 *Sea $(N, v, \gamma) \in \mathcal{CS}^N$ con $v \in \mathcal{A}_0^N$. Dado $A \in \mathfrak{N}(N, v, \gamma)$ tal que $A/\gamma = \{A_j\}_{j=1, \dots, k}$ y $v(A_k) = 0$, si denotamos por $B = \cup_{j=1}^{k-1} A_j$, entonces:*

$$Ch_A(N, v, \gamma) = Ch_B(N, v, \gamma).$$

Demostración: Primero, observemos que, para todo $\eta \subset \gamma|_A$, $A/\eta = \cup_{j=1}^k (A_j/\eta)$, y entonces:

$$v^\eta(A) = \sum_{T \in A/\eta} v(T) = \sum_{j=1}^k \sum_{T \in A_j/\eta} v(T) = \sum_{j=1}^{k-1} v^\eta(A_j) + v(A_k) = v^\eta(B).$$

Como $A \in \mathfrak{N}(N, v, \gamma)$, $v^\gamma(B) = v^\gamma(A) > 0$. Teniendo en cuenta estas propiedades:

$$Ch_A(N, v, \gamma) = \frac{\sum_{\eta \subset \gamma|_A} v^\eta(A)}{2^{|\gamma|_A} v^\gamma(A)} = \frac{\sum_{\eta \subset \gamma|_A} v^\eta(B)}{2^{|\gamma|_B} 2^{|\gamma|_{A_k}} v^\gamma(B)} = \frac{\sum_{\eta \subset \gamma|_A} \sum_{T \in B/\eta} v(T)}{2^{|\gamma|_B} 2^{|\gamma|_{A_k}} v^\gamma(B)}.$$

Además,

$$\sum_{\eta \subset \gamma|_A} \sum_{T \in B/\eta} v(T) = \sum_{\eta = \eta|_B \cup \eta|_{A_k}} \sum_{T \in B/\eta|_B} v(T) = \sum_{\eta|_{A_k} \subset \gamma|_{A_k}} \sum_{\eta|_B \subset \gamma|_B} v^{\eta|_B}(B),$$

y $\eta_k = \eta|_{A_k} \subset \gamma|_{A_k}$ y, por tanto,

$$Ch_A(N, v, \gamma) = \frac{2^{|\gamma|_{A_k}}}{2^{|\gamma|_B} 2^{|\gamma|_{A_k}} v^\gamma(B)} \sum_{\eta|_B \subset \gamma|_B} v^{\eta|_B}(B) = Ch_B(N, v, \gamma). \quad \blacksquare$$

En la siguiente proposición se prueba que la cohesividad de un grupo A en una red es una combinación convexa de las correspondientes a sus componentes conexas.

Proposición 6.1.4 Sea $(N, v, \gamma) \in \mathcal{CS}^N$ con $v \in \mathcal{A}_0^N$. Dado $A \in \mathfrak{N}(N, v, \gamma)$ tal que $A/\gamma = \{A_j\}_{j=1, \dots, k}$, con $v(A_j) > 0$, para todo $j = 1, \dots, k$, entonces:

$$Ch_A(N, v, \gamma) = \sum_{j=1}^k \frac{v(A_j)}{v^\gamma(A)} Ch_{A_j}(N, v, \gamma).$$

Demostración: Si, para cada $j \in \{1, \dots, k\}$, denotamos por $B_j = A \setminus A_j$, obtendremos:

$$\begin{aligned} Ch_A(N, v, \gamma) &= \frac{\sum_{\eta \subset \gamma|_A} \sum_{T \in A/\eta} v(T)}{2^{|\gamma|_A} v^\gamma(A)} = \frac{\sum_{\eta \subset \gamma|_A} \sum_{j=1}^k \sum_{T \in A_j/\eta} v(T)}{\prod_{r=1}^k 2^{|\gamma|_{A_j}} v^\gamma(A)} = \\ &= \frac{\sum_{j=1}^k \sum_{\eta = \eta|_{A_j} \cup \eta|_{B_j} \subset \gamma|_A} \sum_{T \in A_j/\eta|_{A_j}} v(T)}{\prod_{r=1}^k 2^{|\gamma|_{A_r}} \sum_{r=1}^k v(A_r)} = \\ &= \frac{\sum_{j=1}^k \sum_{\eta|_{B_j} \subset \gamma|_{B_j}} \sum_{\eta|_{A_j} \subset \gamma|_{A_j}} v^{\eta|_{A_j}}(A_j)}{\prod_{r=1}^k 2^{|\gamma|_{A_r}} v^\gamma(A)} = \\ &= \frac{\sum_{j=1}^k \sum_{r=1, r \neq j}^k 2^{|\gamma|_{A_j}} \sum_{\eta_j \subset \gamma|_{A_j}} v^{\eta|_{A_j}}(A_j)}{\prod_{r=1}^k 2^{|\gamma|_{A_r}} v^\gamma(A)} = \\ &= \sum_{j=1}^k \frac{v(A_j)}{v^\gamma(A)} Ch_{A_j}(N, v, \gamma), \end{aligned}$$

lo que prueba el resultado. Nótese que, por ser $v^\gamma(A) = \sum_{j=1}^k v(A_j)$ y $v(A_j) \geq 0$ para todo $j = 1, 2, \dots, k$, la combinación lineal obtenida es, efectivamente, convexa. ■

Como consecuencia de los resultados anteriores, podemos centrar nuestro interés en el cálculo de las cohesividades de grupos A conexos en la red γ y tales que $v(A) > 0$. Para simplificar, notaremos, $\mathfrak{N}_C(N, v, \gamma) = \{A \subset N \text{ con } v(A) > 0, A \text{ conexo en } \gamma\}$.

6.2. Propiedades de la medida de cohesividad

Como se mencionó en la introducción, los analistas de redes sociales convienen en que una medida de cohesividad bien definida debe incrementar su valor cuando en el grupo

correspondiente se generan relaciones adicionales (White y Harari 2001). En primer lugar veremos que la medida aquí propuesta satisface este desiderátum si nos restringimos a una familia conveniente de juegos.

Proposición 6.2.1 Sean $(N, v, \gamma) \in \mathcal{CS}^N$, $A \in \mathfrak{N}_C(N, v, \gamma)$ y $l = \{i, j\}$ una arista de K^n . Si $v \in \mathcal{A}_0^N$, entonces:

$$Ch_A(N, v, \gamma) \leq Ch_A(N, v, \gamma \cup \{l\}).$$

Demostración: Consideremos el caso relevante en el que $i, j \in A$ y $l \notin \gamma$. En otro caso, la desigualdad anterior se satisface trivialmente.

Entonces, $(\gamma \cup \{l\})|_A = \gamma|_A \cup \{l\}$. Así pues, si notamos $r = |\gamma|_A$, será $|\gamma|_A \cup \{l\}| = r + 1$. Por tanto:

$$Ch_A(N, v, \gamma \cup \{l\}) = \frac{\sum_{\eta \subset \gamma|_A \cup l} v^\eta(A)}{2^{r+1}v(A)} = \frac{\sum_{\eta \subset \gamma|_A} [v^\eta(A) + v^{\eta \cup \{l\}}(A)]}{2^{r+1}v(A)}.$$

Como $v \in \mathcal{A}^N$, se tiene $v^{\eta \cup \{l\}}(A) \geq v^\eta(A)$ y, en consecuencia:

$$Ch_A(N, v, \gamma \cup \{l\}) = \sum_{\eta \subset \gamma|_A} \frac{(v^{\eta \cup \{l\}}(A) + v^\eta(A))}{2^{r+1}v(A)} \geq \sum_{\eta \subset \gamma|_A} \frac{v^\eta(A)}{2^r v(A)} = Ch_A(N, v, \gamma).$$

■

Una consecuencia directa del último resultado es que, si v es superaditivo y con $v(N) > 0$, entonces, de entre todas las situaciones de comunicación (N, v, γ) con $N \in \mathfrak{N}_C(N, v, \gamma)$, la cohesividad máxima de N se alcanza en el grafo completo con n nodos, K^n .

Corolario 6.2.1 Sean $(N, v, \gamma) \in \mathcal{CS}^N$, $N \in \mathfrak{N}_C(N, v, \gamma)$ y $v \in \mathcal{A}_0^N$. Entonces:

$$Ch(N, v, \gamma) \leq Ch(N, v, K^n).$$

La siguiente proposición establece que, de entre todas las situaciones de comunicación en las que el juego es simétrico, convexo y 0-normalizado y la red es un árbol, la cohesividad mínima se alcanza en la cadena y la máxima en la estrella.

Proposición 6.2.2 Sean $(N, v, \gamma^{T_n}), (N, v, \gamma^{C_n})$ y $(N, v, \gamma^{S_n}) \in \mathcal{CS}^N$, siendo γ^{T_n} un árbol, γ^{C_n} una cadena y γ^{S_n} una estrella con n nodos respectivamente. Si $v \in \mathcal{C}_0^N \cap \mathcal{S}^N$, entonces:

$$Ch(N, v, \gamma^{C_n}) \leq Ch(N, v, \gamma^{T_n}) \leq Ch(N, v, \gamma^{S_n}).$$

Demostración: Dado que el número de aristas en un árbol con n nodos es siempre $n - 1$, sólo es necesario probar que:

$$\sum_{\eta \subset \gamma^{C_n}} v^\eta(N) \leq \sum_{\eta \subset \gamma^{T_n}} v^\eta(N) \leq \sum_{\eta \subset \gamma^{S_n}} v^\eta(N).$$

Lo haremos por inducción sobre n .

Para $n = 2$, sólo hay un árbol posible (que es simultáneamente cadena y estrella) y las desigualdades anteriores se satisfacen trivialmente.

Supongamos, entonces, que el resultado es cierto para n , y probémoslo para el caso $n + 1$.

Para cada una de las tres redes, $\gamma^{T_{n+1}}, \gamma^{C_{n+1}}$ y $\gamma^{S_{n+1}}$ reetiquetemos, en su caso, las aristas como l_1, \dots, l_n , de manera que $l_1 = \{n, n + 1\}$, siendo $n + 1$ un nodo terminal (i.e., de grado 1), y, para todo $k = 1, \dots, n$, $\{l_1, \dots, l_k\}$ sea un subgrafo conexo.

Así, al eliminar la arista l_1 y el nodo $n + 1$ en $\gamma^{T_{n+1}}, \gamma^{C_{n+1}}$ y $\gamma^{S_{n+1}}$ se obtienen respectivamente $\gamma^{T_n}, \gamma^{C_n}$ y γ^{S_n} . Por tanto:

$$\begin{aligned} \sum_{\eta \subset \gamma^{T_{n+1}}} v^\eta(N \cup \{n + 1\}) &= \sum_{\eta \subset \gamma^{T_n}} v^\eta(N) + \sum_{\eta \subset \gamma^{T_n}} v^{\eta \cup \{l_1\}}(N \cup \{n + 1\}) = \\ &= 2 \sum_{\eta \subset \gamma^{T_n}} v^\eta(N) + \sum_{\eta \subset \gamma^{T_n}} [v^{\eta \cup \{l_1\}}(N \cup \{n + 1\}) - v^\eta(N)]. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Si, en la expresión anterior, se sustituyen $\gamma^{T_{n+1}}$ y γ^{T_n} por $\gamma^{S_{n+1}}$ y γ^{S_n} o por $\gamma^{C_{n+1}}$ y γ^{C_n} , se obtienen expresiones paralelas.

Por (6.3) y la hipótesis de inducción es suficiente probar que:

$$\begin{aligned} \sum_{\eta \subset \gamma^{C_n}} [v^{\eta \cup \{l_1\}}(N \cup \{n + 1\}) - v^\eta(N)] &\leq \sum_{\eta \subset \gamma^{T_n}} [v^{\eta \cup \{l_1\}}(N \cup \{n + 1\}) - v^\eta(N)] \leq \\ &\leq \sum_{\eta \subset \gamma^{S_n}} [v^{\eta \cup \{l_1\}}(N \cup \{n + 1\}) - v^\eta(N)]. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Por definición del juego de Myerson, se tiene:

$$\sum_{\eta \subset \gamma^{T_n}} [v^{\eta \cup \{l_1\}}(N \cup \{n+1\}) - v^\eta(N)] = \sum_{\eta \subset \gamma^{T_n}} [v(C_n^{\gamma^{T_{n+1}}}(\eta \cup \{l_1\})) - v(C_n^{\gamma^{T_n}}(\eta))],$$

siendo $C_n^{\gamma^{T_{n+1}}}(\eta \cup \{l_1\})$ la componente conexa de $\eta \cup \{l_1\}$ (como un subgrafo de $\gamma^{T_{n+1}}$) a la que pertenece el nodo n , y $C_n^{\gamma^{T_n}}(\eta)$ definida análogamente. Particularizando a $\gamma^{C_{n+1}}$ y γ^{C_n} ó $\gamma^{S_{n+1}}$ y γ^{S_n} , se obtienen expresiones equivalentes.

Sea $\eta = \{l_{i_1}, l_{i_2}, \dots, l_{i_k}\}$, y sea $h > 1$ el primer índice tal que $l_h \in \eta$ y $l_{h+1} \notin \eta$. Entonces:

$$v(C_n^{\gamma^{C_{n+1}}}(\eta \cup \{l_1\})) - v(C_n^{\gamma^{C_n}}(\eta)) = v(h+2) - v(h+1).$$

$$v(C_n^{\gamma^{S_{n+1}}}(\eta \cup \{l_1\})) - v(C_n^{\gamma^{S_n}}(\eta)) = v(k+2) - v(k+1).$$

y, para árboles cualesquiera γ^{T_n} y $\gamma^{T_{n+1}}$,

$$v(C_n^{\gamma^{T_{n+1}}}(\eta \cup \{l_1\})) - v(C_n^{\gamma^{T_n}}(\eta)) = v(|C_n^{\gamma^{T_n}}(\eta)| + 1) - v(|C_n^{\gamma^{T_n}}(\eta)|).$$

Teniendo en cuenta la convexidad de v y que $h+1 \leq |C_n^{\gamma^{T_n}}(\eta)| \leq k+1$, se comprueba fácilmente que se satisface (6.4) y por tanto el resultado. ■

Yendo un poco más allá, en la siguiente proposición se demuestra que, entre todas las situaciones de comunicación en las que el grafo es conexo y con un número fijo de nodos n , y el juego es simétrico, convexo y 0-normalizado, la cohesividad mínima se alcanza en aquéllas en las que el grafo es una cadena con n nodos.

Proposición 6.2.3 Sean $(N, v, \gamma) \in \mathcal{CS}^N$, $v \in \mathcal{S}_0^N \cap \mathcal{C}^N$, y $N \in \mathfrak{N}_C(N, v, \gamma)$. Entonces, si (N, γ^{C_n}) es una cadena con n nodos:

$$Ch(N, v, \gamma^{C_n}) \leq Ch(N, v, \gamma).$$

Demostración: Como N es conexo en γ , podemos eliminar sucesivamente $|\gamma| - (n-1)$ aristas de γ de modo que el grafo resultante, T_n^* sea un árbol. Por las Proposiciones 6.2.1 y 6.2.2:

$$Ch(N, v, \gamma^{C_n}) \leq Ch(N, v, \gamma^{T_n^*}) \leq Ch(N, v, \gamma),$$

y el resultado queda probado. ■

Por último, los analistas de redes sociales convienen también que los cliques (grafos completos K^n) deben ser estructuras cohesivas. En la siguiente proposición, cuya demostración se apoya en el lema que la precede, se establece que, si el juego v es superaditivo y simétrico, la cohesividad de (N, v, K^n) tiende a 1 cuando el número de nodos, n , crece indefinidamente.

Lema 6.2.1 Sean $n \geq 2$ y $a_n(K^n)$ el número de subgrafos conexos con n nodos del grafo completo K^n . Entonces:

$$a_n(K^n) \geq 2^{\binom{n}{2}-1}.$$

Demostración: Probaremos el resultado por inducción sobre n .

Para $n = 2$, $a_2(K^2) = 2^{\binom{2}{2}-1} = 1$. Supongamos, por hipótesis de inducción, que $a_n(K^n) \geq 2^{\binom{n}{2}-1}$, y probemos que $a_{n+1}(K^{n+1}) \geq 2^{\binom{n+1}{2}-1}$. Por cada subgrafo conexo con n nodos, η , de K^{n+1} podemos obtener $2^n - 2$ subgrafos conexos con $n + 1$ nodos, uniendo el nodo de K^{n+1} que no está en η con al menos uno de los nodos originales y, a lo más, con $n - 1$ de ellos. Por otra parte, hay $2^{\binom{n}{2}}$ subgrafos de K^{n+1} que tienen una arista entre cada uno de los n nodos de η y el de K^{n+1} que no es un nodo aislado en η . Entonces, $a_{n+1}(K^{n+1}) \geq a_n(K^n)(2^n - 1) + 2^{\binom{n}{2}}$ y utilizando la hipótesis de inducción:

$$a_{n+1}(K^{n+1}) \geq 2^{\binom{n}{2}-1}(2^n - 2) + 2^{\binom{n}{2}} = 2^{\binom{n+1}{2}-1}.$$

■

Proposición 6.2.4 Sea v un juego TU no nulo con conjunto de jugadores \mathbb{N} y tal que la restricción de v a $N = \{1, \dots, n\}$ está en $\mathcal{A}^N \cap \mathcal{S}_0^N$. Entonces:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Ch(N, v|_N, K^n) = 1.$$

Demostración: Primero, observemos que, para todos $N \subset \mathbb{N}$ y $S \subset N$, es $v|_N(S) = v(S)$. Entonces:

$$\begin{aligned} Ch(N, v|_N, K^n) &= \frac{1}{2^{\binom{n}{2}}v(N)} \sum_{\eta \subset K^n} v^\eta(N) = \\ &= \frac{1}{2^{\binom{n}{2}}v(N)} \left[\sum_{\eta \subset K^n, |N/\eta|=1} v(N) + \sum_{\eta \subset K^n, |N/\eta| \geq 2} v^\eta(N) \right] = \end{aligned}$$

$$= p_n + \frac{1}{2^{\binom{n}{2}} v(N)} \sum_{\eta \subset K^n, |N/\eta| \geq 2} v^\eta(N),$$

siendo p_n la probabilidad de que N sea conexo en un subgrafo aleatorio η de K^n . Pero $1 - p_n$, la probabilidad de que $|N/\eta| \geq 2$, es menor o igual que:

$$\frac{\binom{n}{1} 2^{\binom{2}{2}} + \binom{n}{2} 2^{\binom{2}{2}} 2^{\binom{2}{2}} + \dots + \binom{n}{n-1} 2^{\binom{n-1}{2}}}{2^{\binom{n}{2}}} = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} \frac{1}{2^{k(n-k)}}.$$

Por otro lado, para cada $n \in \mathbb{N}$, $h(k) = \binom{n}{k} \frac{1}{2^{k(n-k)}}$ satisface trivialmente que $h(k) = h(n-k)$ para todo $k = 1, 2, \dots, n-1$. Para probar que el máximo de $h(k)$ se alcanza para $k=1$ (ó $k=n-1$), notemos que, si $1 \leq k \leq \frac{n}{2} - 1$, $h(k) \geq h(k+1)$ equivale a:

$$\frac{k+1}{2^{k+1}} \geq \frac{n-k}{2^{n-k}}, \quad (6.5)$$

y, $1 \leq k \leq \frac{n}{2} - 1$ implica que $k+1 \leq \frac{n}{2} \leq n-k$. Por tanto (6.5) se satisface si $\{a_k = \frac{k}{2^k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ es una sucesión no creciente, lo que es trivialmente cierto. Entonces:

$$\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} \frac{1}{2^{k(n-k)}} \leq (n-1)h(1) = \frac{(n-1)n}{2^{n-1}},$$

y, por tanto:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - p_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)n}{2^{n-1}} = 0.$$

Finalmente, $\lim_{n \rightarrow \infty} Ch(N, v|_N, K^n) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} p_n = 1$. Como 1 es siempre una cota superior para la cohesividad, el resultado queda probado. ■

6.3. Observaciones

- En esta aproximación al concepto de cohesividad se ha enfatizado la importancia del juego v , que introduce las posibilidades económicas de los actores y por tanto la motivación de éstos para mantenerse unidos.

Consecuentemente, es de esperar que cada elección específica del juego v determine una medida de cohesividad particular, de manera que elecciones diferentes puedan dar lugar a ordenaciones diferentes de las cohesividades de los subgrupos en una red social dada.

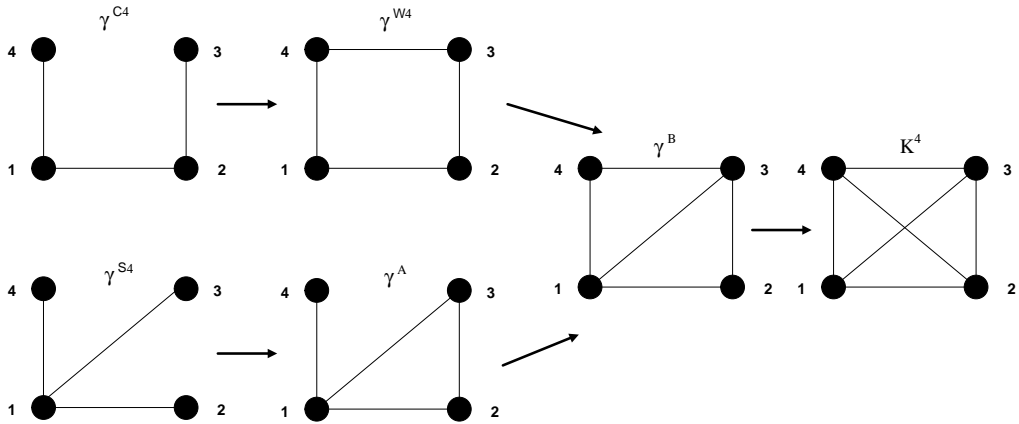


Figura 6.1: Los seis grafos conexos con cuatro nodos

Sin embargo, si consideramos el conjunto de las redes sociales (N, γ) en las que γ es uno de los seis grafos conexos diferentes con cuatro nodos (Figura 6.1) entonces, para todo juego simétrico, 0-normalizado y convexo v con $v(N) > 0$, las cohesividades del grupo N en las situaciones de comunicación respectivas están siempre ordenadas de la misma manera:

$$\begin{aligned} Ch(N, v, \gamma^{C_4}) &\leq Ch(N, v, \gamma^{S_4}) \leq Ch(N, v, \gamma^A) \leq \\ &\leq Ch(N, v, \gamma^{W_4}) \leq Ch(N, v, \gamma^B) \leq Ch(N, v, K^4), \end{aligned}$$

como en White y Harari (2001, pp. 338-339) en su "Scalable Aggregate Measure of Cohesion".

A partir de los resultados previos, para probar la última afirmación sólo necesitamos demostrar que:

$$Ch(N, v, \gamma^A) \leq Ch(N, v, \gamma^{W_4}). \quad (6.6)$$

Pero, por la definición de cohesividad, se tiene:

$$Ch(N, v, \gamma^A) = \frac{1}{2^4 v(4)} (4v(4) + 6v(3) + 6v(2)),$$

y

$$Ch(N, v, W_4) = \frac{1}{2^4 v(4)} (5v(4) + 4v(3) + 8v(2)).$$

De esta manera, la desigualdad (6.6) se cumple si y sólo si $v(4) - 2v(3) + 2v(2) \geq 0$.

Pero, como $v \in \mathcal{C}^N \cap \mathcal{S}_0^N$, se tiene que $v(4) - v(3) \geq v(3) - v(2)$ y así:

$$v(4) - 2v(3) + 2v(2) \geq v(4) - 2v(3) + v(2) \geq 0,$$

y la desigualdad (6.6) queda probada.

Afortunadamente, esta debilidad en el comportamiento de nuestra medida de cohesividad desaparece cuando la cardinalidad de los subgrupos conexos considerados aumenta.

Para ilustrar este hecho, consideremos el caso en el que $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y (N, γ^1) y (N, γ^2) sean los grafos conexos $\gamma^1 = \{\{1, 2\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}\}$ y $\gamma^2 = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}\}$ (Figura 6.2).

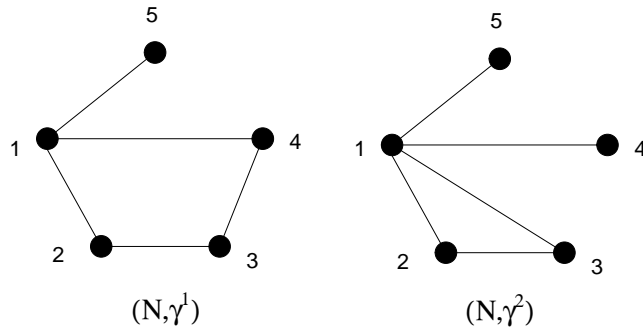


Figura 6.2: Cohesividad

Entonces, para cada juego $v \in \mathcal{C}^N \cap \mathcal{S}_0^N$ con $v(N) > 0$, tenemos:

$$Ch(N, v, \gamma^l) = \frac{1}{2^5 v(5)} B_l(v), \quad l = 1, 2,$$

donde

$$B_1(v) = 5v(5) + 8v(4) + 9v(3) + 16v(2),$$

$$B_2(v) = 4v(5) + 10v(4) + 10v(3) + 10v(2).$$

Por tanto:

$$B_1(v) - B_2(v) = v(5) - 2v(4) - v(3) + 6v(2),$$

y la convexidad de v no es suficiente para determinar su signo.

Si, por ejemplo, consideramos los juegos simétricos, 0-normalizados y convexos $v_1(s) = s - 1$, $v_2(s) = (s - 1)^2$ y $v_3(s) = s(s - 1)$, obtendremos:

$$B_1(v_1) - B_2(v_1) = 2 > 0, \text{ y } Ch(N, v_1, \gamma^1) > Ch(N, v_1, \gamma^2),$$

$$B_1(v_2) - B_2(v_2) = 0, \text{ y } Ch(N, v_2, \gamma^1) = Ch(N, v_2, \gamma^2),$$

$$B_1(v_3) - B_2(v_3) = -4 < 0, \text{ y } Ch(N, v_3, \gamma^1) < Ch(N, v_3, \gamma^2).$$

- Los analistas de redes sociales también han estudiado un problema estrechamente relacionado con el anterior, el de la detección de subgrupos cohesivos. Las medidas introducidas en esta Memoria pueden ser utilizadas con este objetivo.
- No se ha explorado suficientemente la relación entre los dos conceptos a los que está dedicada esta Memoria, centralidad y cohesividad, siendo éste un tema controvertido entre los analistas de redes sociales. En nuestra propuesta, la cohesividad de un grupo A en una situación de comunicación (N, v, γ) es el valor esperado de la proporción de centralidad de A (calculada como la suma de las centralidades de sus integrantes) que sus miembros mantienen bajo el esquema aleatorio en el que las aristas de la red social γ pueden desaparecer con probabilidad $\frac{1}{2}$.

6.4. Cohesividad de grupos en el ejemplo de las familias florentinas

Retomemos las redes sociales de Padgett basadas en las relaciones matrimoniales y económicas entre un grupo de familias florentinas del s. XV. Los grafos se incorporan de nuevo en el texto (Fig. 6.3) para facilitar la lectura.

En el análisis que hace la sociología de dichas redes se considera que los cliques, 2-cliques y 2-clanes son grupos cohesivos (Wasserman y Faust, 1994), donde:

- Clique: es un subgrafo maximal completo de tres o más nodos.
- 2-clique: es un subgrafo maximal en el que la distancia geodésica entre dos nodos siempre es menor o igual que 2.
- 2-clan: es un 2-clique en el que para cada par de nodos existe al menos una trayectoria geodésica en la que sólo participan individuos del grupo.

La definición de 2-clique incorpora la posibilidad de que las trayectorias geodésicas entre individuos de un grupo hagan intervenir actores extraños (externos) al grupo. Puesto que nuestra definición de cohesividad no comparte esta idea, excluirémos en nuestro análisis los 2-cliques que no sean 2-clanes.

En consecuencia, en la red matrimonial se consideran como grupos cohesivos los siguientes 2-clanes (Figura 6.4):

- Acciaiuoli, Albizzi, Barbadori, Medici, Ridolfi, Salviati, Tornabuoni
- Albizzi, Ginori, Guadagni, Medici
- Albizzi, Gaudagni, Medici, Ridolfi, Tornabuoni
- Barbadori, Castellani, Medici, Ridolfi, Strozzi
- Medici, Pazzi, Salviati

Para calcular las cohesividades de los anteriores grupos utilizaremos, en este caso, la versión 0-normalizada del juego p_N que se utilizó (sin 0-normalizar) para calcular las centralidades. Como se puede apreciar, el tercero de los grupos anteriores es el más cohesivo. En línea con los resultados obtenidos, la cadena Medici-Pazzi-Salviati es el menos cohesivo de los grupos considerados mientras que el otro rol, la estrella Albizzi-Ginori-Guadagni-Medici es el siguiente grupo menos cohesivo.

Análogamente, para el caso de la red de relaciones económicas los 2-clanes son:

- Barbadori, Bischeri, Castellani, Lamberteschi, Peruzzi
- Barbadori, Castellani, Ginori, Medici, Peruzzi
- Barbadori, Ginori, Medici, Pazzi, Salviati, Tornabuoni
- Bischeri, Castellani, Guadagni, Lamberteschi, Peruzzi

En este caso, como se observa en la Figura 6.5, el grupo más cohesivo es el formado por las familias Barbadori, Bischeri, Castellani, Lamberteschi y Peruzzi. En general, con los resultados obtenidos, los 2-clanes presentes en la red de relaciones económicas están más cohesionados que los correspondientes a la red matrimonial.

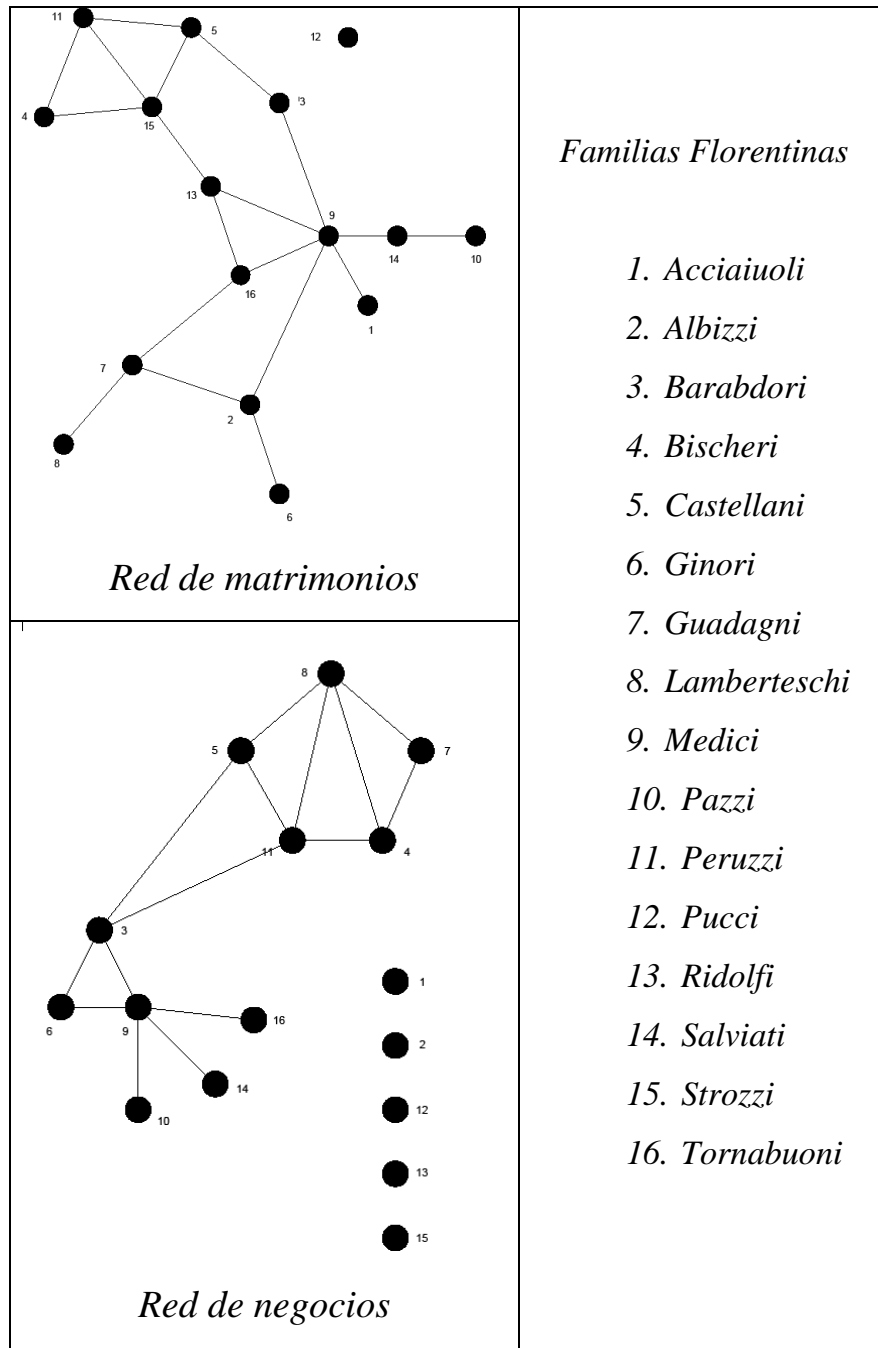


Figura 6.3: Familias florentinas de Padgett

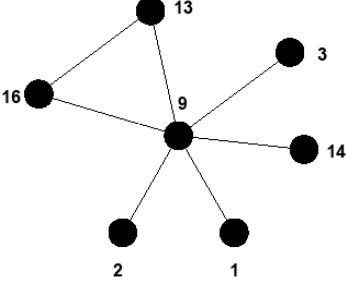
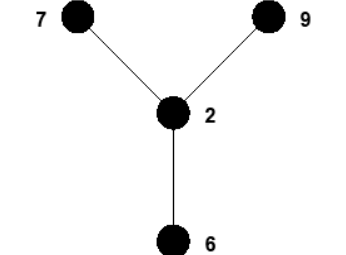
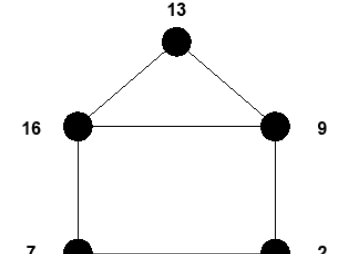
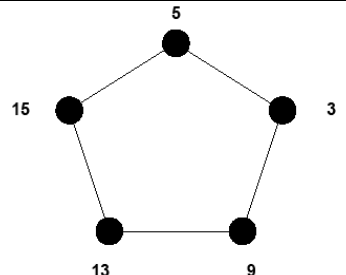
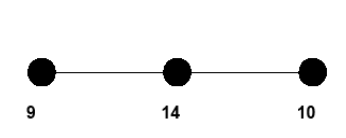
<i>Subgrafos. Red de matrimonios</i>	<i>Familias</i>	<i>Cohesividad</i>
	<p>1. Acciaiuoli 2. Albizzi 3. Barbadori 9. Medici 13. Ridolfi 14. Salviati 16. Tornabuoni</p>	0.562
	<p>2. Albizzi 6. Ginori 7. Guadagni 9. Medici</p>	0.5
	<p>2. Albizzi 7. Guadagni 9. Medici 13. Ridolfi 16. Tornabuoni</p>	0.703
	<p>3. Barbadori 5. Castellani 9. Médici 13. Ridolfi 15. Strozzi</p>	0.617
	<p>9. Medici 10. Pazzi 14. Salviati</p>	0.5

Figura 6.4: Cohesividades dentro de la red de matrimonios.

<i>Subgrafos. Red de negocios</i>	<i>Familias</i>	<i>Cohesividad</i>
	<i>3. Barbadori</i> <i>4. Bischeri</i> <i>5. Castellani</i> <i>8. Lamberteschi</i> <i>11. Peruzzi</i>	0.675
	<i>3. Barbadori</i> <i>5. Castellani</i> <i>6. Ginori</i> <i>9. Medici</i> <i>11. Peruzzi</i>	0.687
	<i>3. Barbadori</i> <i>6. Ginori</i> <i>9. Medici</i> <i>10. Pazzi</i> <i>14. Salviati</i> <i>16. Tornabuoni</i>	0.584
	<i>4. Bischeri</i> <i>5. Castellani</i> <i>7. Guadagni</i> <i>8. Lamberteschi</i> <i>11. Peruzzi</i>	0.7675

Figura 6.5: Cohesividades dentro de la red de negocios.

Capítulo 7

Conclusiones y futuras líneas de investigación

A lo largo de esta Memoria se ha desarrollado una aproximación juego-teórica a las medidas de la centralidad de individuos y la cohesividad de grupos en redes sociales y de comunicación. Ambos problemas son tópicos clásicos en el análisis sociológico de las redes de conexión entre individuos (en sentido amplio). Las contribuciones obtenidas en esta Memoria y en los artículos científicos a los que ha dado lugar suponen un avance, creemos que significativo, en el análisis de la centralidad desde un punto de vista juego-teórico, que fue iniciado por Grofman y Owen (1982). Hasta donde sabemos, no existían aproximaciones desde la Teoría de Juegos al análisis de la cohesividad de los diferentes grupos de una red social.

La aproximación que presentamos a ambos problemas se distingue de las clásicas precisamente porque, además de contemplar la red, introduce intereses económicos entre los actores que motivan su tendencia a interrelacionarse. Este nuevo elemento influye decisivamente en las medidas obtenidas.

Grosso modo y resumiendo, podemos decir que la centralidad, desde la perspectiva adoptada, y tanto para redes no dirigidas como dirigidas, mide las ventajas económicas de los actores como consecuencia de su situación en la red. Estas ventajas se han medido a través de índices ampliamente utilizados en la Teoría de Juegos. Además, para evitar aspectos indeseables de las medidas y conseguir que éstas maten la capacidad de los actores para rodearse de otros, así como para intermediar, las medidas han sido descompuestas en otras que recogen esos aspectos. Un capítulo más técnico nos ha permitido introducir

resultados que simplifican, para ciertos juegos y ciertas redes, los cálculos necesarios para obtener las medidas propuestas.

Finalmente, al analizar el problema de la cohesividad de grupos en una red social, las medidas obtenidas adoptan el principio de que la cohesividad está relacionada con la proporción de la riqueza que los grupos son capaces de mantener si las relaciones entre sus actores pueden desaparecer con probabilidad $\frac{1}{2}$. A mayor riqueza mantenida, mayor cohesión. Las medidas propuestas, al igual que en el caso de la centralidad, satisfacen propiedades consideradas atractivas en el entorno del análisis sociológico de la centralidad y la cohesividad en redes.

El trabajo realizado ha motivado nuestro interés en otras cuestiones relacionadas, a las que pretendemos dedicar nuestros esfuerzos en el futuro próximo.

En relación con las medidas de centralidad obtenidas, cabe plantearse diversas extensiones del problema:

- (a) Medidas basadas en el valor posicional en lugar del valor de Myerson.
- (b) Medidas en redes con pesos en los nodos y/o en las aristas.
- (c) Medidas para grupos o clases (no necesariamente para actores individuales).
- (d) Adaptaciones de los problemas anteriores al caso de redes dirigidas.

La aproximación juego-teórica al concepto de centralidad presentada asume que los intereses económicos entre los jugadores se pueden modelar mediante un juego simétrico. Así, desde esta perspectiva, se eliminan diferencias *a priori* entre los jugadores, con lo que las medidas recogen sólo diferencias debidas a la posición en la red. Ello es congruente con la idea de centralidad. Sin embargo, existe otro concepto sociológico que emerge al principio de esta década y que va alcanzando repercusión creciente. Es el de Capital Social. Se define, al igual que la centralidad, de una manera indirecta. Se hace referencia al capital social de un individuo como la red de relaciones que posee y que le dotan de habilidad para obtener ventajas y beneficios. Actualmente estamos progresando en la obtención de propiedades relevantes para una medida de capital social basada en una aproximación juego-teórica. Tal medida la definimos como la diferencia entre el resultado económico para los actores cuando están inmersos en una red social y cuando no. Asumiendo que el juego no es necesariamente simétrico, esta diferencia nos habla de las ventajas o desventajas

de las relaciones mantenidas por los individuos y, en ese sentido, se puede ver como una medida de capital social.

Asimismo, como se ha comentado en el capítulo correspondiente, sería deseable interesarse por el análisis de una metodología que permita, a través de las medidas de cohesividad introducidas, determinar cuándo un grupo particular puede considerarse cohesivo.

Por otro lado, es razonable pensar que los resultados obtenidos sobre cohesividad merecen ser explorados en el contexto de las redes dirigidas.

Finalmente, el análisis de la centralidad en digrafos nos ha llevado a utilizar juegos TU generalizados. Ello ha descubierto posibilidades en tales juegos desconocidas hasta ahora y que introducen un interés adicional en ellos. Estamos también trabajando en la posibilidad de extender conceptos de solución de la teoría clásica de los juegos TU a este nuevo escenario.

Bibliografía

Alba, R. D., 1973. A graph-theoretic definition of a sociometric clique. *Journal of Mathematical Sociology* 3, 113-126.

Amer, R., Giménez, J.M. y Magaña, A., 2007. Accessibility in oriented networks. *European Journal of Operational Research* 180, 700-712.

Aumann, R.J. y Maschler, M., 1964. The Bargaining set for cooperative games. En Dresher, M., Shapley, L.S. y Tucker, W. (eds.) *Advances in Game Theory*. *Annals of Mathematics Studies* 52. Princeton University Press, Princeton, NJ, 443-476.

Banzhaf, J., 1965. Wheighted voting does not work: a mathematical analysis. *Rutgers Law Review* 19, 317-343.

Bavelas, A., 1948. A mathematical model for small group structures. *Human Organization* 7, 16-30.

Beauchamp, M.A., 1965. An improved index of centrality. *Behavioral Science* 10, 161-163.

Bonacich, P., 1972. Factoring and weighting approaches to status scores and clique detection. *Journal of Mathematical Sociology* 2, 113-120.

Bonacich, P., 1987. Power and centrality: A family of measure. *American Journal of Sociology* 92, 1170-1182.

Borgatti, S.P., y Everett, M.G., 2006. A graph-theoretic framework for classifying centrality measures. *Social Networks* 28(4), 466-484.

- Breiger, R.L., y Pattinson, P., 1986. Cumulated Social roles: The duality of persons and their algebras. *Social Networks* 8, 215-256.
- Brin, S. y Page, L., 1998. The anatomy of a large-scale hypertextual web search engine. *Computer Networks and ISDN Systems* 30, 107-117.
- Brink, R. van den y Gilles, R.P., 2000. Measuring Domination in Directed Networks. *Social Networks* 22, 1141-1157.
- Brink, R. van den y Borm, P., 2002. Digraph competitions and cooperative games, *Theory and Decision* 53, 327-342.
- Carron, A. V., 1982. Cohesiveness in sport groups: Implications and considerations. *Journal of Sports Psychology* 4, 123-138.
- Chun, Y., 1989. A new axiomatization of the Shapley value. *Games and Economic Behavior* 1. 119-130.
- Dubey, P., Neyman, A. y Weber, R.J., 1981. Value theory without efficiency. *Mathematics of Operations Research* 6, 122-128.
- Freeman, L.C., 1977. A set of measures of centrality based on betweenness. *Sociometry* 40, 35-41.
- Freeman, L.C., Borgatti, S.P. y White, D.R., 1991. Centrality in valued graphs: A measure of betweenness based on network flow. *Social Networks* 13, 141-154.
- Gilles, R.P. y Owen, G., 1999. Cooperative Games and Disjunctive Permission Structures. CentER Discussion Paper 9920, Center for Economic Research, Tilburg University, Tilburg, the Netherlands.
- Gilles, R.P., Owen, G. y van den Brink, R., 1992. Games with permission structures: The conjunctive approach. *Int. J. Game Theory* 20, 277-293.
- Gómez, D., González-Arangüena, E., Manuel, C., Owen, G., del Pozo, M. y Tejada, J., 2003. Centrality and power in social networks: A game theoretic approach. *Mathematical Social Sciences* 46, 27-54.

Gómez, D., González-Arangüena, E., Manuel, C., Owen, G., del Pozo, M. y Tejada, J., 2004. Splitting graphs when calculating Myerson value for pure overhead games. *Mathematical Methods of Operations Research* 59, 479-489.

Gómez, D., González-Arangüena, E., Manuel, C., Owen, G., del Pozo, M. y Saboyá, M., 2008a. The cohesiveness of subgroups in social network: A view from game theory. *Annals of Operation Research* 158, 33-46.

Gómez, D., González-Arangüena, E., Manuel, C. y Owen, G., 2008b. A value for probabilistic communication situations. *European Journal of Operation Research* 190, 539-556.

González-Arangüena, E., Manuel, C., Owen, G. y del Pozo, M., 2009. Centrality in Directed Social Networks: A Game Theoretic Approach. *Social Networks*. En proceso de referee.

Grofman, B. y Owen, G., 1982. A game theoretic approach to measuring centrality in social networks. *Social Networks* 4, 213-224.

Gross, N. y Martin, W.E., 1952. On group cohesiveness. *American Journal of Sociology* 52, 546-554.

Hamiache, G. 1999. A value with incomplete communication. *Games and Economic Behaviour* 26, 59-78.

Hamiache, G. 2001. Associated consistency and the Shapley value. In. *J. Game Theory* 30, 279-289.

Hanneman, R.A., 1999. Introduction to social Network Methods. (On-line textbook)

Harary, F., 1969. *Graph Theory*. Reading: Addison-Wesley.

Harsanyi, J.C., 1963. A simplified bargaining model for the n-person cooperative game, *International Economic Review* 4, 194-220.

Hart, S. y Mas-Colell, A., 1989. Potential, value and consistency. *Econometrica* 57, 589-614.

- Kent, D., 1978. *The Rise of the Medici: Faction in Florence, 1426-1434*. Oxford: Oxford University Press.
- Kim, J.Y. y Jun, T., 2008. Connectivity and Allocation Rule in a Directed Network. *The B.E. Journal of Theoretical Economics*, Vol 8: Iss. 1 (Contributions), Article 19.
- Kongo, T., Funaki, Y. y Tijs, S., 2007. New axiomatization and implementation of the Shapley value. *Center Discussion Paper 2007-90*.
- Mizruchi, M.S. y Potts, B.B., 1998. Centrality and power revisited: actor success in group decision making. *Social Networks* 20, 353-387.
- Myerson, R.B., 1977. Graphs and cooperation in games. *Mathematics of Operation Research* 2, 225-229.
- Myerson, R.B., 1980. Conference structures and fair allocations rules. *International Journal of Game Theory* 9, 169-182.
- Newman, M.E.J., 2003. *The Structure and Function of Complex Networks*. *SIAM Review* 2, 167-256.
- Nieminen, J., 1973. On the centrality in a directed graph. *Social Science Research*, 2, 371-378.
- Neumann, J. von, 1928. *Zur Theory der Gesellschaftsspiele*. *Mathematische Annalen* 100, 295-300.
- Neumann, J. von y Morgenstern, O., 1944. *Theory of Games and Economic Behaviour*. Princeton, NJ: Princeton University Press.
- Nouweland, A. van den y Borm, P., 1991. On the convexity of communication games. *International Journal of Game Theory* 19, 421-430.
- Nowak, A., Radzik, T., 1994. The Shapley value for n-person games in generalized characteristic function form, *Games and Economic Behavior* 6, 150-161.
- Owen, G., 1986. Values of graph-restricted games. *Siam Journal on Algebraic and Discrete Methods* 7, 210-220.

Padgett, J.F., 1987. Social mobility in hieratic control systems. Unpublished manuscript.

Pollner, P., Palla, G., Ábel, D., Vicsek, A., Farkas, I.J., Derényi, I., Vicsek, T., 2008. Centrality properties of directed module members in social networks. *Physica A* 387, 4959-4966.

Sabidussi, G., 1966. The centrality index of a graph. *Psychometrika* 31, 581-603.

Sánchez, E. y Bergantiños, G., 1997. On values for generalized characteristic functions, *OR Spektrum* 19, 229-234.

Shapley, L.S., 1953. A value for n-person games. In: Kuhn, H.W., Tucker, A.W. (Eds) *Annals of Mathematics Studies*, vol. 28. Princeton University Press, Princeton, NJ, pp. 307-317.

Shapley, L.S. y Shubik, M., 1954. A method for evaluating the distribution of power in a committee system. *Am. Politic. Sci. Rev.* 48, 787-792.

Shaw, M., 1954. Communication networks. In L. Berkowitz (Ed.), *Advances in experimental social psychology* (pp. 111-147). New York: Academic Press.

Slikker, M. y Van den Nouweland, A., 2001. *Social and Economic Networks in cooperative game theory*. Kluwer Academic Publisher, Boston.

Slikker, M., Gilles, R.P., Norde, H. y Tijs, S., 2005. Directed networks, allocation properties and hierarchy formation. *Mathematical Social Sciences* 49, 55-80.

Stephenson, K. y Zelen, M., 1989. Rethinking centrality: Methods and applications. *Social Networks* 11, 1-37.

Tutzauer, F., 2007. Entropy as a measure of centrality in networks characterized by path-transfer flow. *Social Networks* 29, 249-265.

White, D.R. y Borgatti, S.P., 1994. Betweenness centrality measures for directed graphs. *Social Networks* 16, 335-346.

White, D.R. y Harary, F., 2001. The cohesiveness of blocks in Social Networks. Node connectivity and conditional density. *Social Metodology* 31, 305-359.

Wasserman, S. y Faust, K., 1994. Social networks analysis. Cambridge: Cambridge University Press.

Young, H.P., 1985. Monotonic solutions of Cooperative Games. *Int. J. Game Theory* 14, 65-72.