

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS

Departamento de Física Teórica II



TESIS DOCTORAL

Perturbaciones y dinámica efectiva en cosmología cuántica de lazos inhomogénea

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR

PRESENTADA POR

Mikel Fernández Méndez

Director

Guillermo A. Mena Marugán

Madrid, 2014

DEPARTAMENTO DE FÍSICA TEÓRICA II
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS
UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID



TESIS DOCTORAL

**PERTURBACIONES Y DINÁMICA EFECTIVA EN
COSMOLOGÍA CUÁNTICA DE LAZOS INHOMOGENEA**

Mikel Fernández Méndez

Instituto de Estructura de la Materia
Consejo Superior de Investigaciones Científicas



Director de Tesis: Dr. Guillermo A. Mena Marugán
Instituto de Estructura de la Materia
Consejo Superior de Investigaciones Científicas

Madrid, 2014

A mi abuelo Daniel.

Agradecimientos

Gracias quiero dar al divino
Laberinto de los efectos y de las causas

Jorge Luis Borges, *Otro poema de los dones*

Son tantas las personas a las que debo haber llegado hasta aquí que, por desgracia, no puedo aspirar a ser exhaustivo. Aun así, quiero intentarlo.

Muchas gracias, Guillermo, por tu paciencia y tu guía, sin las que esta tesis habría sido imposible. Gracias por encontrar siempre tiempo, aun cuando otras obligaciones apremiaban, para arrojar luz donde había duda, así como, también, por los buenos ratos después del trabajo.

No puedo continuar sin agradecer muy especialmente a mi madre, a quien espero poder parecerme algún día, y a mi padre, que me enseñó la curiosidad y la ciencia antes de que yo pudiera saberlo. Gracias a los dos por vuestra abnegación y vuestro apoyo incondicional. Quiero expresar también mi gratitud por mi hermana Celia, con cuya complicidad siempre he contado, incluso cuando no la he merecido. Muchas gracias, además, a toda mi familia y, muy en especial, a mi abuelo Daniel, siempre pendiente de los últimos avances de la Física. No me cabe ninguna duda de lo mucho que habría disfrutado teniendo esta tesis entre sus manos, a pesar lo críptico de su contenido. Por eso es justo que se la dedique.

En mis tribulaciones y en mis alegrías como estudiante de licenciatura, de máster y —al fin— de doctorado, he contado con la valiosa ayuda de muchos investigadores experimentados. Entre ellos, quiero mencionar a Miguel Ángel, Álvaro, Luis, Jerónimo, Zé, Carlos, Tomek, Hanno, Mariam y Gianluca. Gracias. No menos agradecimiento guardo a mis compañeros de estos últimos años: a Ana, que tanto me ha enseñado en tan poco tiempo; a Laura y su originalidad siempre refrescante; a Dani, capaz de ayudar hasta cuando no puede; a Javi, cuya fortaleza admiro; a Prado, por su franqueza y su alegría; a Merce, siempre un ejemplo a seguir; a Salva, maestro, y a Bea, el último fichaje. Compartiéndolos, hemos hecho soportables los malos momentos e inmejorables los buenos. No olvido tampoco a los demás colegas del

JARRAMPLAS; especialmente, a los habituales: Raúl y Luis.

También estoy agradecido a los otros compañeros del Instituto y a los de TeatrIEM, con los que he disfrutado tanto en los ensayos y representaciones. En particular, quiero dar las gracias a José Vicente por haberme permitido ser, por un rato, Severo Ochoa.

He dejado para el final, porque sé que me excusarán, a algunas personas a las que debo muchísimo. Me refiero a Irene, Eva, Elena y Esther, a las que conocí en los pasillos de la facultad y me permiten guardar buen recuerdo de ellos (aunque sin duda lo hayamos pasado todavía mejor en otros muchos sitios); a Nacho y Ferni, que me han acompañado por toda Europa hasta sus confines; a Amanda, Alejandro y Edu, con los que he sido feliz en los alrededores de Arenas de San Pedro; a Ander y Andrés, del remoto Tiempo de los Sueños; a Fernando, Diego y Unai, del foro y otros lugares, más físicos, desperdigados por la geografía española; a Vir y Jesús, compañeros de lucha.

Los últimos meses han sido especialmente duros para mí. Por alumbrar con fuegos artificiales uno de los periodos más difíciles de mi vida, estoy enormemente agradecido a Oswaldo. Muchas gracias. Lo has sufrido de cerca porque lo has aguantado a mi lado. No tengo palabras para expresar mi gratitud.

Gracias a todos, los que menciono y los que omito.

La financiación de la investigación recogida en esta memoria y la realización de la misma bajo la beca JAEPre_2010_01544, del programa *Junta para la ampliación de Estudios* del CSIC, cofinanciado por el Fondo Social Europeo.

Índice general

Summary	3
1. Introducción	9
1.1. Contexto y motivación	9
1.2. Introducción a la Cosmología Cuántica de Lazos	15
1.2.1. El espacio de fases de la gravedad cuántica de lazos	15
1.2.2. Cosmología Cuántica de Lazos homogénea e isotrópica	19
1.2.3. Cuantización de lazos del modelo de Bianchi I	33
1.2.4. Cuantización híbrida de un modelo de Gowdy	38
1.3. Estructura de la memoria y objetivos	44
2. Tratamiento clásico de perturbaciones	49
2.1. Caracterización del sistema	50
2.2. Fijación de <i>gauge</i> . Variables adaptadas	54
2.3. Invariantes <i>gauge</i>	60
2.3.1. Variable de Mukhanov-Sasaki	61
2.3.2. Invariantes de energía y velocidad	65
2.4. Discusión	66
3. Cuantización de Fock de perturbaciones	69
3.1. Cuantización de las perturbaciones tensoriales	71
3.2. Cuantización de las perturbaciones escalares	72
3.2.1. Unicidad de la representación	76
3.2.2. Unicidad de la descripción del campo	80
3.2.3. Invariantes <i>gauge</i>	83
3.3. Discusión	87
4. Cuantización híbrida de perturbaciones	89
4.1. Espacio de Hilbert cinemático	91
4.2. Representación de la ligadura	92
4.2.1. Caso plano	94

4.2.2. Caso cerrado	95
4.3. Caracterización recursiva de los estados físicos	97
4.4. Caracterización alternativa de los estados físicos	99
4.5. Cuantización con invariantes <i>gauge</i>	101
4.6. Discusión	104
5. Dinámica efectiva de perturbaciones	111
5.1. Ecuaciones efectivas	112
5.2. Resultados numéricos	117
5.2.1. Universos muy cercanos a la homogeneidad	117
5.2.2. Universos con mayores inhomogeneidades	123
5.3. Discusión	124
6. Dinámica efectiva del modelo de Gowdy	127
6.1. Ecuaciones efectivas	128
6.1.1. Ausencia de singularidades	130
6.1.2. Posibilidad de un rebote	135
6.2. Discusión	139
7. Conclusiones	143
A. Armónicos	151
A.1. Descripción genérica	151
A.1.1. Armónicos escalares	151
A.1.2. Armónicos vectoriales	152
A.1.3. Armónicos tensoriales	152
A.2. Tres-toro	153
A.3. Tres-esfera	154
B. Lagrangiano de las perturbaciones cosmológicas	157
C. Fijación de <i>gauge</i> alternativa	159
C.1. Fijación de <i>gauge</i> . Escalado del campo	159
C.2. Invariante de densidad de energía	163
C.3. Cuantización híbrida. Operador ligadura	163
Publicaciones	167
Bibliografía	169

Perturbations and Inhomogeneities in Loop Quantum Cosmology

Summary

Despite the success of General Relativity, the search for a quantum theory of gravity has been active for more than half a century. One of the most promising candidates is Loop Quantum Gravity, a nonperturbative and background-independent canonical quantization of General Relativity. The techniques developed by this approach have been employed to quantize cosmological systems obtained by symmetry reduction from the complete theory, thus giving birth to Loop Quantum Cosmology. In particular, their application to the homogeneous and isotropic Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) spacetime has resulted in a quantum model in which the classical big-bang singularity is removed and replaced by a bounce that smoothly connects a contracting branch of the universe with an expanding one. This happens even in the classical effective theory that approximates the quantum behaviour of a certain type of semiclassical states.

The main difference between Loop Quantum Gravity and previous approaches to canonical quantum cosmology is that the polymer representation that the former adopts (by mimicking the procedure followed in the complete theory) is discontinuous. As a result, the Hamiltonian constraint must be regularized in order to represent it in the kinematical Hilbert space. We recall that, General Relativity being a totally constrained theory, their physical quantum states must be annihilated by the corresponding constraint operators, which are represented in the aforementioned auxiliary Hilbert space, according to the Dirac programme.

The loop quantization of several other homogeneous cosmologies, such as the anisotropic Bianchi I spacetime, has been completed, leading to similar conclusions to that of the FLRW case. Recently, also a inhomogeneous

Gowdy model was addressed successfully from a hybrid approach—explicitly, the homogeneous degrees of freedom were quantized with loop techniques, while a Fock representation was adopted for the inhomogeneities. This method paves the way for developing more realistic models whose predictions can be confronted with the increasingly precise cosmological observations. An example of these models is an approximately homogeneous and isotropic spacetime with small inhomogeneities, specially interesting if its matter content is provided by a minimally coupled massive scalar field, so that it can host cosmological inflation.

The paradigm of inflation, which assumes an early period of accelerated expansion of the universe, suitably complements the Standard Model of Cosmology, also known as Λ CDM model. Apart from solving some theoretical problems of this framework, it provides a natural (but astonishing) explanation for the origin of the primordial inhomogeneities that gave rise to the large-scale structure that is observed in the universe: allegedly, they arose from quantum fluctuations stretched by the expansion. This is the case, for instance, if the expansion is driven by a massive scalar field.

The main goal of this thesis is to broaden the treatment of inhomogeneous cosmological models in the realm of Loop Quantum Cosmology. Specifically, we consider two models. On the one hand, we analyse the effective dynamics of the pre-existing quantization of a Gowdy model, to elucidate whether the classical singularities are removed by the quantum corrections. On the other hand, we apply the hybrid approach to completely quantize a FLRW model with a minimally coupled massive scalar field and scalar perturbations. We study explicitly the cases of flat and three-spherical spatial sections. Since we want to adopt a Fock representation for the perturbations, we first need to remove the infinite ambiguity related to its choice. We then quantize the model in the hybrid scheme and extract the effective equations for the perturbations, directly related to the physics of the cosmic microwave radiation spectrum.

In the case of the quantum Gowdy model, our analytic study of the effective equations proves that the homogeneous background is free of singularities. Indeed, neither the directional Hubble parameters, nor the scalars associated to a timelike congruence, nor the curvature invariants can diverge in a finite time lapse if the energy contribution of the inhomogeneities is initially finite. What is more, the volume cannot vanish either. Although we do not show that the classical singularities of this model are generically replaced by bounces in the homogeneous volume, we delimit the regions of the phase space where such bounces can happen.

As for the perturbed FLRW model, before attempting its quantization, we formulate the theory in a convenient way. The truncation scheme that

we adopt, in which terms up to quadratic order in the inhomogeneities are kept in the action, allows us to maintain a symplectic structure and constraints. Then, the local perturbative constraints are solved by fixing almost completely the gauge freedom. This procedure removes also the vector perturbations, which are pure gauge, in contrast to the tensor ones, which are gauge invariant. In the reduced system, the scalar perturbations can be identified with the perturbation of the scalar field and its canonically conjugate momentum. However, after such a reduction, these are no longer canonical coordinates. A new set of canonical variables is introduced by correcting the homogeneous variables with terms quadratic in the perturbations. Then, a scaling of the perturbations by the background scale factor is introduced as part of a canonical transformation that includes a redefinition of their momenta and additional quadratic corrections to the homogeneous variables. The scaled perturbations admit a privileged Fock quantization with unitary dynamics.

Actually, as an intermediate step before proceeding to the complete quantization of the model, we consider the ambiguity in the choice of a Fock representation for the perturbations in the classical background. Thanks to the fact that the scaled tensor perturbations obey a Klein-Gordon equation with a mass term that depends on the homogeneous variables, we can apply in their quantization uniqueness results available in the literature. Specifically, the requirements of i) a vacuum state invariant under the spatial isometries of the background spacetime and ii) unitarily implementable field dynamics select a unique privileged class of equivalent Fock quantizations for them. As for the scaled matter-field perturbation, its evolution is governed by a similar equation with additional terms that depend on the mode through its frequency and decay when this frequency tends to infinity. As we prove, and according to previous comments, these terms do not prevent the existence of an analogous privileged class of equivalent quantizations for the scalar perturbations in the classical background. In contrast, any other scaling of the perturbations would have spoiled these results. If the spatial sections have the topology of the three-sphere or the three-torus, a redefinition of the momenta is not acceptable either.

There exist field descriptions in terms of gauge-invariant variables that obey Klein-Gordon-like equations with a mass term that depends on the homogeneous variables. If their momenta are chosen suitably, they admit privileged quantizations that could be, in principle, unitarily inequivalent to the ones constructed for the scaled matter-field perturbation, since the canonical transformations of the inhomogeneous sector that relate the two field descriptions are non-local. Nonetheless, we show that these transformations can be implemented unitarily in the considered representations. Moreover,

we extend the transformation that relates the matter-field perturbation to one of these gauge invariants—the one in terms of the Mukhanov-Sasaki variable—to the complete reduced phase space by correcting the homogeneous variables with new quadratic terms.

As mentioned above, the quantization of the perturbed FLRW model is addressed within the hybrid approach. Thus, we construct the kinematical Hilbert space as the product of the one associated to the unperturbed model, which we identify with the homogeneous sector of the theory, and one of the privileged Fock representations for the scaled matter perturbation. The Hamiltonian constraint—the only one left—is to be represented in the resulting Hilbert space. The aforementioned identification of the homogeneous sector provides us with a natural regularization of its homogeneous part. However, since its part quadratic in the perturbations mixes both sectors, it is necessary to regularize it as well. To do this, we propose a prescription based in the systematic regularization of the homogeneous models. This prescription respects the superselection sectors of the unperturbed theory, which consists of states with support in semilattices in the volume. In each superselection sector, the Hamiltonian constraint imposes recurrence relations on its solutions that completely determine their value in terms of their initial data at the minimum-volume section. Thus, we can identify the physical Hilbert space with the space of initial data.

The constraint equation can also be read as a second-order differential equation in the internal time provided by the zeroth mode of the scalar field. Adopting a Born-Oppenheimer-like factorization of the physical states and a series of further approximations, we show that the evolution of the inhomogeneities is given in a certain regime by a Schrödinger equation, in which the effective Hamiltonian depends on the state of the background geometry. In particular, for highly peaked background states, the perturbations dynamics is described by a quantum field theory in an effective spacetime.

The treatment described above is also performed in the alternative parametrization of the system that describes the field in terms of the Mukhanov-Sasaki variable. By construction, the expression of the Hamiltonian constraint in this parametrization is independent of the gauge choice.

The effective dynamics of the hybrid quantization of the perturbed FLRW model exhibit interesting features, as the numerical integration of the dynamical equations shows. Remarkably, the perturbations evolving through the bouncing regime exhibit a strong tendency to amplification. There is a related exchange of energy between the perturbations and the background, which results also in a faster expansion of the universe if the inhomogeneities are important (but small enough to justify the perturbative treatment) once the bounce is over.

Thus, we have succeeded in quantizing completely the perturbed FLRW model. The system is now ready for extracting physical predictions. For instance, since the perturbations obey a quantum field theory in an effective spacetime in a certain regime, standard techniques of theoretical cosmology can be employed to obtain the spectrum of primordial inhomogeneities.

Capítulo 1

Introducción

1.1. Contexto y motivación

La Teoría General de la Relatividad [1, 2] describe de forma clásica la interacción gravitatoria. A pesar de su gran éxito en la explicación y predicción de diversos fenómenos observados en la naturaleza [3], este formalismo señala sus propios límites al predecir la aparición de singularidades en condiciones bastante genéricas [2, 4]. Por otro lado, si la teoría de A. Einstein codifica clásicamente la interrelación entre el espaciotiempo y su contenido material, parece inevitable que entre en tensión con la descripción fundamental de este, que es cuántica. Estos dos problemas han servido de motivación para la búsqueda de una teoría cuántica de la gravedad, la cual, pese al continuado esfuerzo de tantos investigadores, todavía no se ha completado con éxito. Con todo, existen algunas propuestas prometedoras. Una de ellas es la Gravedad Cuántica de Lazos [5–7]. Se trata de una cuantización de la Relatividad General no perturbativa e independiente de las estructuras de fondo, que, en su versión canónica, aplica el programa ideado por P. A. M. Dirac [8, 9] para la cuantización de sistemas hamiltonianos con ligaduras.

La Relatividad General admite una formulación hamiltoniana [2], que parte de la foliación del espaciotiempo en secciones espaciales. En contra de lo que pueda parecer, esa descomposición no rompe la covariancia general de la teoría —una de sus características esenciales—; en cambio, dicha simetría se traduce en la arbitrariedad de la foliación. Como resultado, el correspondiente hamiltoniano no es más que una combinación de ligaduras que deben anularse sobre las soluciones de la teoría. En términos generales, el programa de cuantización canónica empieza tomando un conjunto (sobre-)completo de variables del espacio de fases cerrado bajo corchetes de Poisson y representa la correspondiente álgebra de Poisson con operadores lineales sobre

un espacio de Hilbert auxiliar, denominado *cinemático*. A continuación, se han de promover también las ligaduras a operadores; en el núcleo de estos se encontrarán los estados físicos de la teoría, que (tras la compleción con un producto interno adecuado) constituyen el *espacio de Hilbert físico*. En cada paso de este algoritmo existen ambigüedades, que en general conducen a cuantizaciones inequivalentes, si bien en ocasiones esto puede evitarse recurriendo a consideraciones físicas referentes, por ejemplo, a las simetrías de la teoría. Como tendremos ocasión de comprobar, este es un problema recurrente. En el caso de la Gravedad Cuántica de Lazos, la invariancia bajo difeomorfismos desempeña un papel fundamental [10].

La teoría clásica que sirve de base a la Gravedad Cuántica de Lazos es muy particular, pues reformula la Relatividad General en términos de una conexión *gauge* y un «campo eléctrico» canónicamente conjugado —en realidad, una tríada densitizada—, introducidos en su forma original por A. Ashtekar [11] (y generalizadas más tarde por J. F. Barbero G. [12]). Su motivación era, por un lado, simplificar la expresión de la más complicada de las ligaduras, la hamiltoniana, pero también abrir la puerta a la aplicación de técnicas desarrolladas en la cuantización no perturbativa de otras teorías *gauge*. Así, en particular, no se toma como variable fundamental la conexión, sino sus holonomías a lo largo de curvas. Como veremos, también la tríada densitizada se suaviza espacialmente, calculando su flujo a través de superficies.

Aunque se ha avanzado considerablemente en el programa de la Gravedad Cuántica de Lazos, todavía no disponemos de una teoría completa. No obstante, el deseo de poner a prueba la teoría llevó a M. Bojowald [13–15] a considerar situaciones con un alto grado de simetría, dando origen a la disciplina conocida como Cosmología Cuántica de Lazos [16–18]. En este campo, tal y como lo entendemos hoy, se aplican las técnicas de cuantización de la Gravedad Cuántica de Lazos a modelos cosmológicos obtenidos mediante reducción por simetría de la Relatividad General, denominados habitualmente *minisuperespacios* en el ámbito de la cosmología cuántica. Dado que, en general, el resultado de cuantizar una teoría reducida difiere del de reducir la cuantización de la teoría original, no está del todo clara la relación entre la Cosmología Cuántica de Lazos y el formalismo general.

El modelo cosmológico más sencillo, un universo homogéneo e isótropo, descrito por la métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW), ha sido cuidadosamente analizado desde esta perspectiva, con interesantes resultados. No olvidemos que, de acuerdo con el principio cosmológico, el Universo debe ser aproximadamente homogéneo e isótropo a escalas lo suficientemente grandes, lo que parecen confirmar las observaciones [19]. Como es bien sabido, en el marco de la Relatividad General, el modelo FLRW

exhibe una singularidad inicial inevitable, que recibe el nombre de *gran explosión* y marca el comienzo de la expansión del universo. En la Cosmología Cuántica de Lazos no se produce el análogo de esa singularidad: en su lugar, los estados semiclásicos atraviesan un *rebote* que conecta de forma suave una rama en la que el universo se expande con otra en la que está en contracción [20–22]. Suficientemente lejos de ese rebote, esos estados siguen las trayectorias predichas por la teoría clásica. En este sentido, puede decirse que la Cosmología Cuántica de Lazos consigue alcanzar el compromiso que se exige a cualquier teoría cosmológica cuántica (o, más en general, a cualquier teoría cuántica de la gravedad): evitar las singularidades y, al mismo tiempo, reproducir a bajas densidades de energía los resultados de la Relatividad General. De hecho, este equilibrio se alcanza ya al nivel de la teoría clásica efectiva que puede derivarse del modelo cuántico [23–26].

Un correcto comportamiento semiclásico es fundamental en este contexto porque, a pesar de la presencia de singularidades, la aplicación de la Relatividad General a la descripción del Universo en su conjunto ha resultado en un marco teórico, el modelo Λ CDM, que ha resistido el desafío de las cada vez más precisas observaciones cosmológicas [27], si bien incorporando diversas hipótesis adicionales. En particular, la mayor parte del contenido del Universo es de naturaleza desconocida: además de la materia ordinaria o bariónica, que constituye menos del 5% de la densidad de energía del cosmos, hoy se admite la existencia de alrededor de un 26% de materia oscura fría (CDM, por sus siglas en inglés) y un 69% de energía oscura [28], atribuida en este modelo a una constante cosmológica (que se denota habitualmente con Λ). El valor de esta constante cosmológica no se ha podido explicar teóricamente de forma satisfactoria, pero es tal que domina la expansión del Universo (aun siendo su densidad comparable todavía con la del contenido material), acelerándola.

Otra hipótesis añadida —aunque, como veremos, muy económica— es el paradigma inflacionario [29], planteado de forma independiente y casi simultánea por A. A. Starobinskii [30], A. Guth [31], K. Sato [32] y D. Kazanas [33], quienes, por distintos motivos, estudiaron las consecuencias que tendría una etapa de expansión acelerada en la historia temprana del Universo. Este escenario soluciona algunos problemas teóricos del modelo Λ CDM (como los de la planitud y el horizonte [29]) y, lo que es quizá más importante, permite explicar el origen de las inhomogeneidades primordiales que, posteriormente —amplificadas por la interacción gravitatoria—, dieron lugar a la estructura a gran escala del Universo (conviene aclarar que la homogeneidad anteriormente mencionada emerge únicamente al observar a escalas superiores al centenar de megaparsecs). La extraordinaria idea detrás de esta explicación es que esas inhomogeneidades provienen de las fluctuaciones

cuánticas. Mediante este mecanismo se ha explicado el espectro de inhomogeneidades observado en la radiación de fondo de microondas, vestigio de una etapa remota del Universo, la época de recombinación [34].

Su influencia directa en la radiación de fondo de microondas hacen de la inflación un marco excelente para poner a prueba la Cosmología Cuántica de Lazos. Muchos modelos inflacionarios conjeturan la existencia de un campo escalar, el *inflatón*, que, sometido a un cierto potencial, conduce el espaciotiempo a una expansión acelerada a través de su acoplo a la métrica. De estos modelos, el más sencillo es probablemente el de un universo homogéneo e isótropo con un campo escalar con masa mínimamente acoplado. La aplicación de la dinámica efectiva de la Cosmología Cuántica de Lazos a ese modelo —asignando a la masa un valor fenomenológico— permitió concluir que, durante el régimen en el que se produce el rebote, el campo es canalizado de forma natural hacia unas condiciones que permiten el comienzo de una etapa inflacionaria compatible con las observaciones cosmológicas [35]. Esto hace aún más atractiva la inflación para el formalismo de lazos.

Ahora bien, estudiar la formación de estructura en cosmología requiere abandonar la hipótesis de homogeneidad y tratar con un número infinito de grados de libertad. En Cosmología Cuántica de Lazos, este problema se ha abordado fundamentalmente desde dos aproximaciones. Por una parte, a través de la dinámica efectiva, tratando de deducir las correcciones a las que daría lugar una cuantización de lazos sin construir la correspondiente teoría cuántica (véanse, por ejemplo, los artículos de revisión [36] y [37]). Por otro lado, desde el enfoque conocido como *híbrido* [38], que aplica las técnicas de cuantización de lazos únicamente al sector homogéneo de la teoría y cuantiza las inhomogeneidades siguiendo las directrices de la Teoría Cuántica de Campos estándar [39]. Esta estrategia se fundamenta en la hipótesis de que, en los regímenes de interés, los efectos más importantes de la cuantización de la geometría son los que afectan al sector homogéneo. A cambio, ha permitido completar la cuantización de un modelo de Gowdy [38, 40–42]. Este tipo de modelos [43, 44] describe espaciotiempos clásicos sin contenido material en los que se propagan ondas gravitacionales según un patrón regular¹ (técnicamente, se trata de espaciotiempos vacíos con dos vectores de Killing espaciales que conmutan). Son, por tanto, ejemplos de midisuperespacios, es decir, modelos derivados de la Relatividad General mediante reducción por simetría, pero que, a diferencia los minisuperespacios, conservan un número infinito de grados de libertad.

En particular, el espaciotiempo de Gowdy que se ha cuantizado siguien-

¹El propio R. H. Gowdy realizó una aproximación divulgativa a los modelos que llevan su nombre en la referencia [45].

do el enfoque híbrido está caracterizado por la topología tres-toroidal de sus secciones espaciales y por la polarización lineal de las ondas gravitacionales que alberga. Su sector homogéneo puede identificarse con un espacio-tiempo de Bianchi I [46], un modelo anisótropo cuya cuantización ha sido minuciosamente analizada en el ámbito de la Cosmología Cuántica de Lazos [47–50, 41, 42]. Por otra parte, el tratamiento de su sector inhomogéneo se fundamentó en una cuantización de Fock previa del modelo [51, 52]. Este tipo de cuantización [39], que se sirve de un espacio de Fock para representar el álgebra de observables, puede aplicarse a teorías de campo lineal y, en particular, a este modelo, ya que, una vez deparametrizado, adquiere la forma de una teoría de campo lineal sobre la circunferencia (\mathbb{S}^1). No obstante, no hay que olvidar que la cuantización de Fock está sujeta a una enorme ambigüedad, que proviene esencialmente de dos fuentes. Por una parte, es necesario fijar la descripción del campo, ya que existe la libertad de realizar transformaciones canónicas del mismo que respeten la linealidad de la teoría. Si estos simplectomorfismos dependen del tiempo, lo que puede considerarse natural en espaciotiempos no estacionarios, afectan a la dinámica del sistema, y en general no hay garantías de que exista un operador unitario que las implemente en la teoría cuántica, debido al número infinito de grados de libertad. Por lo tanto, distintas descripciones conducen, en principio, a cuantizaciones inequivalentes, es decir, cuantizaciones que no pueden relacionarse mediante una transformación unitaria y, en consecuencia, difieren en sus predicciones físicas.

Por otra parte, incluso fijada una descripción específica, todavía hay que elegir una representación concreta del álgebra de variables fundamentales. En los sistemas con un número finito de grados de libertad tratados por la Mecánica Cuántica ordinaria, esto no supone un problema gracias al teorema de Stone-von Neumann [53], que garantiza que todas las representaciones irreducibles, fuertemente continuas y unitarias del álgebra de Weyl generada por las exponenciales imaginarias de la posición y el momento son unitariamente equivalentes². En Teoría Cuántica de Campos, sin embargo, no existe un resultado parecido. En consecuencia, es necesario recurrir a otros criterios para seleccionar una representación de Fock entre las infinitas disponibles. En esta tarea, la simetría puede ser de gran utilidad, como ocurre habitualmente en física. Las distintas representaciones posibles pueden identificarse con sus estados de vacío; en el espacio de Minkowski, exigir la invariancia Poincaré del vacío selecciona (salvo equivalencia unitaria) una representación privilegiada [39], dado un campo de Klein-Gordon.

²Como veremos, la Cosmología Cuántica de Lazos elude este resultado renunciando a las hipótesis del teorema (concretamente, a la de continuidad).

Sin embargo, esa estrategia no basta para resolver la indeterminación en espaciotiempos con un menor grado de simetría, lo que hace necesarias consideraciones adicionales [54–57] para fijar una representación y obtener predicciones físicas robustas.

En el caso del modelo de Gowdy en el tres-toro, se encontró que la ambigüedad puede solventarse apelando a la unitariedad de la dinámica. En efecto, la exigencia de una dinámica unitariamente implementable en la teoría cuántica selecciona, junto con el requisito de un estado de vacío compatible con la simetría del sistema deparametrizado (rotaciones en la circunferencia), un escalado preferido del campo y una clase de representaciones unitariamente equivalentes para el mismo [58, 59]. Además, esta condición posibilita la aplicación de las interpretaciones habituales de la Mecánica Cuántica.

El resultado de unicidad descrito ha podido generalizarse enormemente. En una primera etapa, se amplió a las otras topologías espaciales que admiten los modelos de Gowdy: la tres-esfera (S^3) y la tres-asa ($S^1 \times S^2$) [60, 61]. En estos casos, la deparametrización conduce a sendas teorías de campos axisimétricos en la (dos-)esfera (S^2). Independientemente de la topología espacial del modelo de Gowdy, las inhomogeneidades obedecen, con el escalado adecuado, las ecuaciones de un campo Klein-Gordon en las variedades auxiliares correspondientes (S^1 o S^2) sometido a un potencial cuadrático dependiente del tiempo; la petición de un vacío simétrico y una dinámica unitariamente implementable consigue diferenciar tanto una descripción del campo como una representación de Fock (más exactamente, una clase de representaciones) privilegiadas. Notablemente, la dependencia específica de ese potencial no es importante mientras satisfaga ciertas condiciones de suavidad poco restrictivas [62]. Estos resultados de unicidad se han logrado extender a campos escalares con un potencial cuadrático dependiente del tiempo en la tres-esfera [63–65], el tres-toro [66], o, de hecho, cualquier variedad riemanniana compacta de dimensión menor o igual que tres [67, 68]. Los criterios referidos pueden ser de gran utilidad en el tratamiento de cosmologías inhomogéneas, como evidencian los ejemplos ya mencionados y otros que se describirán en esta memoria.

1.2. Introducción a la Cosmología Cuántica de Lazos

En la presente sección, se introducen algunos modelos reducidos por simetría de la Relatividad General y su cuantización de lazos. Como paso previo se realizará, no obstante, un resumen del formalismo hamiltoniano clásico que sirve de partida a la Gravedad Cuántica de Lazos. En su presentación, nos ayudaremos de la conocida formulación ADM de la Relatividad General, introducida por R. Arnowitt, S. Deser y C. W. Misner [69], que también repasaremos. A continuación, se tratarán los modelos cosmológicos siguiendo un orden de complejidad creciente; en concreto, nos ocuparemos de los espaciotiempos FLRW, Bianchi I y Gowdy. Por último, al final del capítulo, se expondrán los objetivos de la investigación recogida en esta memoria y la estructura de esta.

1.2.1. El espacio de fases de la gravedad cuántica de lazos

Sea³ $(M, g_{\alpha\beta})$ un espaciotiempo globalmente hiperbólico [2]. Mediante la introducción de una función global de tiempo t , que adoptaremos como coordenada temporal, puede foliarse este espaciotiempo en superficies de Cauchy homeomorfas a una tres-variedad Σ . Denotaremos por n^α la normal a estas hipersuperficies, sobre las que se induce una métrica $h_{\alpha\beta} := g_{\alpha\beta} + n_\alpha n_\beta$. Puede establecerse una identificación entre dichas hipersuperficies mediante las curvas integrales de un vector t^α tal que $t^\alpha \nabla_\alpha t = 1$, donde ∇ denota la derivada covariante compatible con la métrica $g_{\alpha\beta}$. Este vector puede descomponerse en la forma $t^\alpha = N n^\alpha + N^\alpha$; N recibe el nombre de *función lapso* y N^α , el de *vector desplazamiento*. En adelante, trabajaremos con el *pullback* de estas cantidades en Σ , lo que haremos explícito con el uso de índices latinos del comienzo del alfabeto, $a, b, \dots = 1, 2, 3$. En este formalismo, conocido como *descomposición 3+1*, el elemento de línea del espaciotiempo puede escribirse de la siguiente manera:

$$ds^2 = -(N^2 - N_a N^a) dt^2 + 2N_a dt dx^a + h_{ab} dx^a dx^b. \quad (1.1)$$

Estas variables pueden utilizarse para expresar la acción de Einstein-Hilbert para la Relatividad General, a saber

$$S_{\text{EH}} = \frac{1}{2\kappa} \int_M d^4x \sqrt{-g} R, \quad (1.2)$$

³Se representan los tensores cuatridimensionales con índices griegos $\alpha, \beta, \dots = 0, 1, 2, 3$.

donde g el determinante de la métrica $g_{\alpha\beta}$; R , el escalar de Ricci y $\kappa = 8\pi G$, siendo G la constante de Newton (se han elegido unidades en las que la velocidad de la luz es igual a la unidad). El resultado se expresa de forma sencilla en términos de la curvatura extrínseca, que es la derivada de Lie de la métrica inducida $h_{\alpha\beta}$ en la dirección normal a las hipersuperficies espaciales, $K_{\alpha\beta} = \mathcal{L}_n h_{\alpha\beta}/2$. Su *pullback* en Σ es

$$K_{ab} = \frac{1}{2N} \left(-\frac{dh_{ab}}{dt} + \nabla_a N_b + \nabla_b N_a \right). \quad (1.3)$$

Usando este tensor y el escalar de Ricci de la tres-métrica, 3R , la acción se escribe

$$S_{\text{EH}} = \frac{1}{2\kappa} \int_{\mathbb{R}} dt \int_{\Sigma} d^3x N \sqrt{h} \left(\frac{1}{2} (h^{ac} h^{bd} + h^{ad} h^{bc} - 2h^{ab} h^{cd}) K_{ab} K_{cd} + {}^3R \right). \quad (1.4)$$

Si se realiza ahora la transformada de Legendre de la correspondiente densidad lagrangiana respecto a las velocidades generalizadas $\partial h_{ab}/\partial t$, se obtiene una densidad hamiltoniana que es una combinación lineal de ligaduras en la que la función lapso y el vector desplazamiento actúan como multiplicadores de Lagrange (reflejando la arbitrariedad de la foliación que caracterizan). Asociadas a ellos aparecen, respectivamente, la ligadura hamiltoniana y la ligadura de difeomorfismos espaciales. Este es en esencia el formalismo desarrollado por R. Arnowitt, S. Deser y C. W. Misner [69]. Desgraciadamente, la cuantización canónica de este formalismo (comúnmente conocida como geometrodinámica) plantea numerosos problemas que hasta la fecha no han podido resolverse. Esto propició la búsqueda de una nueva formulación que hiciera el problema más abordable. Con esa intención, A. Ashtekar [11] introdujo las nuevas variables que hoy llevan su nombre.

La idea clave del nuevo formalismo es reescribir la Teoría General de la Relatividad utilizando una conexión *gauge* y su momento canónicamente conjugado. Para construir esas variables, comencemos introduciendo una base del espacio cotangente en cada punto de Σ , es decir, una cotriada e^i_a , que permite escribir la tres-métrica en la forma

$$h_{ab} = \delta_{ij} e^i_a e^j_b, \quad (1.5)$$

donde $i, j = 1, 2, 3$ no deben entenderse como índices espaciales, sino internos (utilizaremos para este tipo de índices las letras latinas i, j, k, \dots). La anterior expresión es invariante bajo rotaciones respecto a estos índices internos. Por lo tanto, se ha introducido una simetría local $\text{SO}(3)$ en la teoría —recordemos que la métrica euclídea δ_{ij} que aparece arriba es la métrica de Cartan-Killing de $\text{SO}(3)$ —. No obstante, para permitir el acoplo de fermiones

al campo gravitatorio, suele tomarse $SU(2)$ —que es el recubridor universal de $SO(3)$ — como grupo *gauge*.

Una cotriada define una base del espacio tangente, o tríada e_i^a , cuya expresión se obtiene simplemente invirtiendo aquella:

$$e_i^a e_b^i = \delta_b^a \quad \text{y} \quad e_i^a e_a^j = \delta_i^j. \quad (1.6)$$

En vez de utilizar la tríada, utilizaremos su versión densitizada obtenida multiplicándola por la raíz cuadrada del determinante de la métrica, $E_i^a := \sqrt{h} e_i^a$.

Conviene generalizar la conexión de Levi-Civita para incorporar los índices $SU(2)$ de forma compatible con tríada, en el sentido de que la nueva derivada covariante produzca un resultado nulo al actuar sobre la tríada. Explícitamente,

$$0 = \nabla_a e_i^b - \epsilon_{ijk} \Gamma_a^k e^{bj}, \quad (1.7)$$

donde ϵ_{ijk} es el símbolo de Levi-Civita. Esta ecuación determina la conexión de espín Γ_a^i .

La variable canónicamente conjugada de la triada densitizada está relacionada de forma directa con la curvatura extrínseca. En efecto, definiendo $K_a^i := e^{bi} K_{ab}$, se tiene el siguiente corchete de Poisson:

$$\{K_a^i(x), E_j^b(y)\} = \kappa \delta_a^b \delta_j^i \delta(x-y), \quad (1.8)$$

donde δ denota la delta de Dirac (tridimensional en este caso). Para construir una conexión canónicamente conjugada a la tríada densitizada, basta constatar que K_a^i se transforma como un vector en su índice interno y que $\{\Gamma_a^i(x), E_j^b(y)\} = 0$. Por lo tanto, la siguiente cantidad es una conexión, canónicamente conjugada (salvo un factor) a la tríada densitizada:

$$A_a^i := \Gamma_a^i + \gamma K_a^i, \quad (1.9)$$

siendo $\gamma \in \mathbb{R} - \{0\}$ el llamado parámetro de Immirzi, que queda libre en esta teoría⁴. De la ecuación (1.8) se obtiene de corchete de Poisson de esta nueva variable, llamada *conexión de Ashtekar-Barbero*, con la tríada:

$$\{A_a^i(x), E_j^b(y)\} = \gamma \kappa \delta_a^b \delta_j^i \delta(x-y). \quad (1.10)$$

En la nueva parametrización, la ligadura de difeomorfismo y la hamiltoniana se escriben, respectivamente,

$$\mathcal{C}_a^{\text{gra}} = F_{ab}^i E_i^b, \quad (1.11)$$

⁴Sin embargo, suele argumentarse que hay que fijar el valor $\gamma = 0,23753296\dots$ para recuperar la ley de Bekenstein-Hawking en la teoría cuántica [6].

$$\mathcal{C}^{\text{gra}} = \frac{1}{\sqrt{|\det E_i^a|}} \left[F_{ab}^i - (1 + \gamma^2) \epsilon^i{}_{jk} K_a^j K_b^k \right] \epsilon_i{}^{lm} E_l^a E_m^b, \quad (1.12)$$

donde se ha incluido la curvatura de la conexión A_a^i ,

$$F_{ab}^i = \partial_a A_b^i - \partial_b A_a^i + \epsilon^i{}_{jk} A_a^j A_b^k. \quad (1.13)$$

Evidentemente, se requiere una ligadura adicional que elimine la nueva libertad *gauge*. Se trata de la ligadura de Gauss,

$$\mathcal{G}_i^{\text{gra}} = \partial_a E_i^a + \epsilon_{ij}{}^k A_a^j E_k^a; \quad (1.14)$$

denotaremos el multiplicador de Lagrange asociado por Λ^i . Juntando todas las piezas, la acción del sistema viene dada por

$$S_{\text{gra}} = \frac{1}{2\kappa} \int_{\mathbb{R}} dt \int_{\Sigma} d^3x \left(2E_i^a \frac{d}{dt} A_a^i - (N \mathcal{C}^{\text{gra}} + N^a \mathcal{G}_a^{\text{gra}} + \Lambda^i \mathcal{G}_i^{\text{gra}}) \right). \quad (1.15)$$

Hasta el momento, no se han tenido en cuenta las contribuciones provenientes del contenido material; por supuesto, de existir este, habría que añadir dichos términos a la anterior acción.

Los pares canónicos (A_a^i, E_i^a) no son las variables fundamentales que se utilizan en Gravedad Cuántica de Lazos. Puesto que el corchete de Poisson (1.10) solo tiene sentido como distribución, es conveniente realizar un suavizado espacial de las mismas. En el caso de la conexión, esto puede hacerse de forma natural considerando sus holonomías a lo largo de curvas. Formalmente, dada una curva e , la holonomía asociada está dada por

$$h_e = \mathcal{P} e^{\int_e dx^a A_a^i \tau_i}, \quad (1.16)$$

donde \mathcal{P} es el operador de ordenación de camino y $\{\tau_i : i = 1, 2, 3\}$ es una base del álgebra $\mathfrak{su}(2)$; sus elementos satisfacen, por tanto, $[\tau_i, \tau_j] = \epsilon_{ijk} \tau^k$. La integración a lo largo de una curva puede hacerse sin recurrir a estructuras de fondo gracias a que $A_a^i \tau_i$ es una uno-forma. Las holonomías tienen la particularidad de cambiar de forma sencilla bajo transformaciones de $\text{SU}(2)$ [6]. En particular, la traza de una holonomía a lo largo de una curva cerrada (o *loop*, ‘lazo’) es un invariante *gauge*, conocido como lazo de Wilson.

Para regularizar por completo el corchete de Poisson (1.8), la tríada densitizada ha de suavizarse al menos en dos dimensiones. Por ello, se toma su flujo a través de superficies. Si S es una superficie cualquiera y f^i es una función de prueba con recorrido en $\mathfrak{su}(2)$, definimos el flujo de la tríada densitizada de la siguiente manera:

$$E_f(S) = \int_S dx^b dx^c f^i \epsilon_{abc} E_i^a. \quad (1.17)$$

Esta integración sobre dos-superficies es natural desde el punto de vista geométrico, ya que $\epsilon_{abc}E_i^a$ es una dos-forma.

Para la definición de estas variables suavizadas no es necesario hacer uso de una estructura métrica de fondo. Desde el punto de vista conceptual, esto es muy importante, porque la Gravedad Cuántica de Lazos busca cuantizar la propia geometría del espaciotiempo sin tener que suponer ninguna estructura de fondo.

1.2.2. Cosmología Cuántica de Lazos homogénea e isotropa

La consideración de situaciones con un alto grado de simetría permite construir modelos manejables que, si han realizado las aproximaciones correctas, pueden capturar mucha información de situaciones más complicadas. En el caso de la gravedad cuántica, estos modelos sencillos podrían además servir para establecer contacto con las observaciones.

Con estas ideas en mente, puede realizarse una reducción por simetría del formalismo hamiltoniano que se acaba de presentar, y aplicar técnicas de cuantización de la Gravedad Cuántica de Lazos para obtener modelos cuánticos manejables. Empezaremos asumiendo la inhomogeneidad y la isotropía del espaciotiempo. Bajo estas hipótesis, sus secciones espaciales deben estar recubiertas por alguno de los espacios tridimensionales elíptico, euclídeo o hiperbólico, caracterizados por tener una curvatura constante positiva, nula o negativa, respectivamente. El primer caso suele denominarse *cerrado*, porque las secciones espaciales son necesariamente compactas; el segundo se llama habitualmente *plano* (por razones obvias) y el tercero, *abierto*. Adoptaremos esta terminología, si bien hay que aclarar que las tres situaciones admiten topologías espaciales compactas, que son de hecho las que trataremos. Por ejemplo, en el caso plano, asumiremos que las secciones espaciales son homeomorfas al tres-toro. Cabe destacar que, según las observaciones cosmológicas, la curvatura de nuestro universo es compatible con la topología plana [28], aunque esto puede explicarse como una mera consecuencia de la inflación. En todo caso, cualquier universo parecerá espacialmente plano si se observa a escalas muy inferiores a su radio de curvatura. De forma parecida, si la escala de compactificación es mucho mayor que la del universo observable, los efectos de la finitud espacial no deberían ser apreciables⁵.

Como se ha mencionado, los primeros intentos de obtener modelos cos-

⁵En cualquier caso, las escalas mayores que las regiones causalmente conectadas del universo se ignoran frecuentemente en el tratamiento de cosmologías con secciones espaciales infinitas.

mológicos a partir de las ideas de la Gravedad Cuántica de Lazos pueden atribuirse a M. Bojowald [13–15]. Posteriormente se refinó el tratamiento, lo que permitió cuantizar completamente el modelo FLRW plano con un campo escalar sin masa mínimamente acoplado [70, 20–22]. Veremos en seguida que esta cuantización resuelve la singularidad de la Gran Explosión.

La casuística del modelo FLRW no se ha dejado de lado en la bibliografía: tanto el caso cerrado [71, 72] como el abierto [73] han sido abordados desde la Cosmología Cuántica de Lazos. También se ha considerado la presencia de una constante cosmológica negativa [74] y positiva [75].

A continuación, se resume sucintamente la cuantización de lazos del modelo FLRW en los casos plano y cerrado, con un campo escalar sin masa mínimamente acoplado. La construcción del espacio de Hilbert cinemático puede hacerse en común, si bien será necesario particularizar a cada caso para progresar en la cuantización.

Planteamiento clásico

Bajo las hipótesis de homogeneidad e isotropía, las variables de Ashtekar-Barbero pueden escribirse de una forma especialmente sencilla anclando una tríada fiducial ${}^0e_i^a$ en la variedad Σ (naturalmente, esto selecciona también la correspondiente cotrípada ortogonal ${}^0e_a^i$ y una métrica fiducial ${}^0h_{ab}$). En concreto,

$$A_a^i = \frac{c}{l_0} {}^0e_a^i, \quad E_i^a = \frac{p}{l_0^2} \sqrt{{}^0h} {}^0e_i^a, \quad (1.18)$$

donde las variables c y p dependen únicamente de t . La longitud l_0 , tal que $V_0 := l_0^3$ es el volumen fiducial de la variedad (o el de una celda fiducial, en caso de que la variedad no sea compacta⁶), se ha introducido en las anteriores expresiones con el fin de evitar la dependencia de la estructura simpléctica en V_0 . Así, en efecto,

$$\{c, p\} = \frac{\gamma\kappa}{3}. \quad (1.19)$$

Es muy frecuente escribir el elemento de línea de un espaciotiempo FLRW en la forma

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + a^2 {}^0h_{ab} dx^a dx^b, \quad (1.20)$$

donde, debido a la homogeneidad, la función lapso depende únicamente del tiempo, al igual que el factor de escala a . Comparando la anterior ecuación con la cotrípada, es fácil constatar que $l_0^2 a^2 = |p|$ (el signo de p , por su parte, determina la orientación de la tríada). En cuanto a la variable c , está relacionada con el parámetro de Hubble $H := N^{-1} da/dt$. En efecto, sobre soluciones de la teoría, $H = \text{sgn}(p)|p|^{-1/2} c/\gamma$.

⁶Como ya se ha advertido, nos centraremos en el caso de variedades compactas.

La elección (1.18) fija por completo la libertad asociada a las transformaciones *gauge* SU(2) y los difeomorfismos espaciales, por lo que la única ligadura del sistema que no se anula idénticamente en esta parametrización es la hamiltoniana. Antes de la cuantización, es necesario expresarla en términos de las variables suavizadas anteriormente introducidas. Debido a la elevada simetría del modelo, es suficiente considerar holonomías de la conexión a lo largo de aristas tangentes a los vectores de la tríada fiducial⁷. Dada una de estas aristas, de longitud fiducial orientada $\mu_0 l_0$ en la dirección del i -ésimo vector de la tríada, la correspondiente holonomía está dada por

$$h_i^{\mu_0}(c) = e^{\mu_0 c \tau_i} = \cos(\mu_0 c/2)I + 2\text{sen}(\mu_0 c/2)\tau_i, \quad (1.21)$$

siendo I la identidad de SU(2).

Por otra parte, el flujo de la tríada densitizada a través de cualquier superficie es simplemente igual a la variable p multiplicada por un factor geométrico. Por lo tanto, podemos tomar como variables fundamentales las exponenciales complejas $\mathcal{N}_{\mu_0}(c) := \exp(i\mu_0 c/2)$ y el momento p , que satisfacen el álgebra

$$\{\mathcal{N}_{\mu_0}, p\} = \frac{i\gamma\kappa\mu_0}{6}\mathcal{N}_{\mu_0}. \quad (1.22)$$

El primer paso hacia la cuantización del sistema es representar esta álgebra promoviendo las variables fundamentales a operadores lineales que actúen sobre un determinado espacio de Hilbert cinemático. En la teoría cuántica, los conmutadores toman el papel de los corchetes de Poisson clásicos, de acuerdo con la conocida regla de Dirac. Explícitamente, si q y p son dos variables fundamentales, e indicamos los operadores asociados a una cantidad clásica con un acento circunflejo sobre la expresión correspondiente, lo que se pide es que

$$[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar\widehat{\{q, p\}}, \quad (1.23)$$

donde \hbar es la constante de Planck reducida.

Espacio de Hilbert cinemático

El conjunto $\{\mathcal{N}_{\mu_0} : \mu_0 \in \mathbb{R}\}$ expande una *-álgebra que llamaremos Cil , en la que la involución está dada por la conjugación compleja. Su completación con respecto a la norma del supremo es una C^* -álgebra conmutativa, el álgebra de Bohr de funciones cuasiperiódicas, $\overline{\text{Cil}}$. Utilizando la teoría de representación de Gel'fand [76], Cil puede representarse por funciones continuas en su espectro, que es la compactificación de Bohr de la recta real,

⁷De hecho, incluso este conjunto es sobrecompleto.

\mathbb{R}_B . Este conjunto tiene estructura de grupo y, por ser compacto, admite una medida de Haar, $d\mu_H$.

El álgebra de configuración también puede representarse por operadores de multiplicación en el espacio de Hilbert de funciones de cuadrado integrable en su espectro con respecto a la medida de Haar, es decir, en el espacio $\mathcal{H}_{\text{cin}}^{\text{gra}} = L^2(\mathbb{R}_B, d\mu_H)$. Es de destacar que el espacio de configuración cuántico es pues \mathbb{R}_B , y no la recta real, aunque esta es un subconjunto denso en \mathbb{R}_B . La construcción de esta representación está en estrecha analogía con el procedimiento seguido en Gravedad Cuántica de Lazos. Este tipo de cuantización se distingue con el apelativo de *polimérica*.

Finalmente, la variable p puede representarse en el espacio $\mathcal{H}_{\text{cin}}^{\text{gra}}$ por el operador derivada. Así, dada una función de onda ψ ,

$$\hat{\mathcal{N}}_{\mu_0} \psi(c) = \mathcal{N}_{\mu_0}(c) \psi(c), \quad \hat{p} \psi(c) = -\frac{8\pi i \gamma l_{\text{Pl}}^2}{3} \frac{d\psi}{dc}(c), \quad (1.24)$$

donde $l_{\text{Pl}}^2 = G\hbar$ es la longitud de Planck al cuadrado. Es más frecuente trabajar en la representación de momentos, en la que el operador \hat{p} actúa de forma diagonal. Por lo tanto, introducimos una base ortonormal de autoestados⁸ del mismo, $\{|\mu\rangle\}_{\mu \in \mathbb{R}}$, sobre la cual los operadores fundamentales actúan de la forma

$$\hat{\mathcal{N}}_{\mu_0} |\mu\rangle = |\mu + \mu_0\rangle, \quad \hat{p} |\mu\rangle = \frac{4\pi \gamma l_{\text{Pl}}^2}{3} \mu |\mu\rangle. \quad (1.25)$$

Como indica el rango continuo de la etiqueta μ , el espacio de Hilbert utilizado no es separable. Conviene enfatizar que los vectores $|\mu\rangle$ son autoestados en sentido estricto y, por tanto, $\langle \mu' | \mu \rangle = \delta_{\mu' \mu}$, con una delta de Kronecker, y no una de Dirac. En consecuencia, la representación es discontinua, lo que impide definir mediante derivación un operador correspondiente a la variable clásica c . En seguida veremos que esto genera la necesidad de regularizar la ligadura hamiltoniana para representarla cuánticamente. En ella se utilizan holonomías a lo largo de aristas de longitud variable $l_0 \bar{\mu}(p)$. Como se explicará, la forma funcional de $\bar{\mu}$ se determina exigiendo que el área física de un cuadrado formado por este tipo de aristas tenga área Δ —que desempeña aquí heurísticamente el papel de un área mínima—. Así,

$$\bar{\mu}(p) = \sqrt{\frac{\Delta}{|p|}}. \quad (1.26)$$

Debido a esta dependencia en p , la representación de este tipo de holonomías en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}_{\text{cin}}^{\text{gra}}$ no es inmediata, aunque puede inferirse mediante razonamientos geométricos de la actuación de $\hat{\mathcal{N}}_{\mu_0}$. Puesto que este

⁸En la representación de «posiciones», la función de onda asociada al *ket* $|\mu\rangle$ es \mathcal{N}_{μ} , extendida a \mathbb{R}_B .

operador genera un desplazamiento de la etiqueta μ en una unidad del parámetro afín en la dirección dada por $\mu_0 \partial_\mu$, $\hat{\mathcal{N}}_{\bar{\mu}}$ debe actuar de forma análoga en la dirección que marca $\bar{\mu} \partial_\mu$. Su acción es más sencilla si se reetiqueta la base usando el parámetro

$$v := \text{sgn}(\mu) \frac{2}{3} \sqrt{\frac{4\pi\gamma l_{\text{Pl}}^2}{3\Delta}} |\mu|^{3/2}, \quad (1.27)$$

que satisface $\partial_v = \bar{\mu} \partial_\mu$. Tenemos, entonces, que

$$\hat{\mathcal{N}}_{\bar{\mu}} |v\rangle = |v+1\rangle. \quad (1.28)$$

Análogamente, los operadores $\hat{\mathcal{N}}_{n\bar{\mu}}$, con $n \in \mathbb{Z}$, desplazan la etiqueta v en n unidades. Puesto que la etiqueta v es proporcional al volumen físico del estado, $V = |p|^{3/2}$, el operador $\hat{\mathcal{N}}_{\bar{\mu}}$ produce saltos constantes en el volumen, lo que contrasta con la acción de $\hat{\mathcal{N}}_{\mu_0}$, que provoca saltos en el área. Por otro lado,

$$\hat{p}|v\rangle = \text{sgn} v (2\pi\gamma l_{\text{Pl}}^2 \sqrt{\Delta} |v|)^{2/3} |v\rangle. \quad (1.29)$$

En cuando al contenido material, tomaremos, por simplicidad, un campo escalar ϕ homogéneo y sin masa y denotaremos su momento canónicamente conjugado por π_ϕ . Para estas variables puede utilizarse una representación de Schrödinger ordinaria en $\mathcal{H}_{\text{cin}}^{\text{mat}} = L^2(\mathbb{R}, d\phi)$, con $\hat{\phi}$ actuando por multiplicación y $\hat{\pi}_\phi = -i\hbar \partial_\phi$. Hacerlo de este modo nos permitirá interpretar el campo ϕ como un tiempo emergente, aunque estos grados de libertad podrían cuantizarse también de forma polimérica.

El espacio de Hilbert cinemático del sistema completo es el producto $\mathcal{H}_{\text{cin}}^{\text{mat}} \otimes \mathcal{H}_{\text{cin}}^{\text{gra}}$, entendiendo que los operadores definidos en cada factor actúan como la identidad en el otro. Así, por ejemplo, el operador correspondiente a p en el espacio de Hilbert total no es otro que $\mathbb{1} \otimes \hat{p}$, aunque evitaremos hacer explícitos este tipo de productos.

Representación de la ligadura

A la hora de representar la ligadura hamiltoniana en el espacio de Hilbert cinemático, hay importantes diferencias entre los distintas topologías admisibles para las secciones espaciales. El caso plano es sin duda el más sencillo, debido a la anulación de la curvatura intrínseca. En los otros casos, la curvatura origina ya a nivel clásico términos adicionales en la ligadura y complica su cuantización. A continuación, se consideran dos de las tres situaciones posibles: secciones planas y con la topología la tres-esfera.

Caso plano En un espaciotiempo homogéneo cuyas secciones espaciales son planas, la conexión de espín Γ_a^i se anula, lo que simplifica el cálculo de la parte gravitatoria de la ligadura hamiltoniana:

$$C^{\text{gra}} := \int_{\Sigma} d^3x \mathcal{C}^{\text{gra}} = -\frac{1}{\gamma^2} \int_{\Sigma} d^3x \frac{1}{\sqrt{h}} \epsilon_i^{jk} E_j^a E_k^b F_{ab}^i. \quad (1.30)$$

Por supuesto, la ligadura total es la suma de esta y la contribución del contenido material, en este caso, un campo escalar sin masa. Estos dos términos se escriben

$$C_0^{\text{gra}} = -\frac{6}{\gamma^2} \sqrt{|p|} c^2, \quad C_0^{\text{mat}} = \kappa \frac{\pi^2 \phi}{|p|^{3/2}}. \quad (1.31)$$

Representar la ligadura en el espacio de Hilbert cinemático no es inmediato, por dos motivos esencialmente. Por una parte, hay que regularizar las potencias negativas de la variable p , de lo que nos ocuparemos más adelante. Por otra parte, como ya hemos mencionado, la variable clásica c no tiene contrapartida cuántica, debido a la discontinuidad de la representación polimérica. Es necesario pues expresar la curvatura de la conexión A_a^i en función de holonomías. Esto puede hacerse clásicamente tomando holonomías en torno a cuadrados de lado μl_0 en el límite $\mu \rightarrow 0$:

$$F_{ab}^i = -2 \lim_{\mu \rightarrow 0} \text{tr} \left(\frac{h_{\square_{jk}}^{\mu} - I}{(\mu l_0)^2} \tau^i \right)^0 e_a^j e_b^k, \quad (1.32)$$

donde \square_{jk} denota un cuadrado en el plano j - k y, por tanto,

$$h_{\square_{jk}}^{\mu} := h_j^{\mu} h_k^{\mu} (h_j^{\mu})^{-1} (h_k^{\mu})^{-1}. \quad (1.33)$$

Desarrollando las expresiones anteriores con ayuda de la ecuación (1.21), se concluye que

$$F_{ab}^i = \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{\text{sen}^2(\mu c)}{(\mu l_0)^2} e_{jk}^i e_a^j e_b^k. \quad (1.34)$$

Evidentemente, esta forma de expresar la curvatura de la conexión no soluciona el problema, puesto que requiere tomar el límite $\mu \rightarrow 0$, el cual, debido precisamente a la discontinuidad de la representación, no está bien definido en la teoría cuántica. En Gravedad Cuántica de Lazos, donde la regularización de la ligadura hamiltoniana se realiza de manera análoga, este obstáculo se evita apelando a la invariancia bajo difeomorfismos [6]. Sin embargo, este procedimiento no puede adaptarse al caso que nos ocupa porque la ligadura de difeomorfismos ya ha sido fijada. La salida que se encontró a esta situación es evaluar la expresión (1.32) no en el límite $\mu \rightarrow 0$, sino cuando el

área física del cuadrado iguala al menor autovalor no nulo del operador área en Gravedad Cuántica de Lazos, Δ . En otras palabras, se trata de evaluar la expresión (1.32) cuando $\mu = \bar{\mu}$, con $\bar{\mu}^2 p = \Delta$. Las holonomías a lo largo de las aristas de este cuadrado pueden reconstruirse con la función $\mathcal{N}_{\bar{\mu}}$, que en la teoría cuántica está representada por el operador de la ecuación (1.28). En este punto, merece añadir un apunte histórico. Inicialmente, se intentó regularizar la ligadura hamiltoniana utilizando solo operadores del tipo $\hat{\mathcal{N}}_{\mu_0}$, con μ_0 constante, lo que producía resultados físicamente insatisfactorios. En concreto, las correcciones cuánticas podían ser dominantes incluso en regímenes de baja curvatura y densidad de energía, en los que era de esperar un comportamiento clásico [21]. La nueva prescripción, que se conoce como *dinámica mejorada* [22], no presenta ese inconveniente.

El factor restante del hamiltoniano del campo gravitatorio (1.30) puede escribirse en términos de corchetes de Poisson de holonomías con el volumen, en estrecha analogía con el procedimiento ideado por T. Thiemann [77, 78] para regularizar la ligadura hamiltoniana en Gravedad Cuántica de Lazos:

$$\epsilon_i^{jk} \frac{1}{\sqrt{0}\hbar} E_j^a E_k^b = \frac{4 \operatorname{sgn} p}{\gamma \kappa \mu l_0} \sum_k \operatorname{tr} (h_k^\mu \{ (h_k^\mu)^{-1}, V \}_{\tau_i})^0 \epsilon^{abc0} e_c^k. \quad (1.35)$$

Esta ecuación es válida para cualquier μ y, en particular, para $\bar{\mu}$, que, por simplicidad, es el valor que se emplea en los trabajos que adoptan la dinámica mejorada [22]. Esta expresión se promueve a la teoría cuántica de acuerdo con el algoritmo de cuantización canónica, sustituyendo las variables fundamentales por sus operadores correspondientes y los corchetes por conmutadores (divididos por el factor $i\hbar$).

El tercer obstáculo en la cuantización es la aparición de potencias negativas de p en la contribución material a la ligadura hamiltoniana. Puesto que el operador \hat{p} tiene al cero en su espectro discreto, su operador inverso no está bien definido. Para regularizar dichas cantidades, se sigue el procedimiento anterior, expresándolas clásicamente a partir de corchetes de Poisson de las variables fundamentales. En el caso que nos ocupa, es fácil comprobar que

$$\frac{1}{\sqrt{|p|}} = \frac{4 \operatorname{sgn} p}{\gamma \kappa \mu} \sum_k \operatorname{tr} (h_k^\mu \{ [h_k^\mu]^{-1}, \sqrt{|p|} \}_{\tau^k}), \quad (1.36)$$

donde, de nuevo, puede tomarse $\mu = \bar{\mu}$. A continuación, se promueve esta expresión a la teoría cuántica de la forma ya explicada. El resultado es

$$\widehat{\left(\frac{1}{\sqrt{|p|}} \right)} := \frac{3 \widehat{\operatorname{sgn} p}}{4\pi\gamma l_{\text{Pl}}^2 \sqrt{\Delta}} \widehat{\sqrt{|p|}} (\widehat{\mathcal{N}}_{-\bar{\mu}} \widehat{\sqrt{|p|}} \widehat{\mathcal{N}}_{\bar{\mu}} - \widehat{\mathcal{N}}_{\bar{\mu}} \widehat{\sqrt{|p|}} \widehat{\mathcal{N}}_{-\bar{\mu}}). \quad (1.37)$$

Sorprendentemente, este operador es acotado; además, es diagonal en la base $\{|v\rangle\}$, y su núcleo es el subespacio unidimensional generado por $\{|v=0\rangle\}$. Otras potencias negativas de p pueden construirse a partir de esta usando su descomposición espectral.

Aun habiendo fijado una regularización para las potencias negativas de p , existe una ambigüedad debida al hecho de que se ha definido implícitamente una representación no trivial de la identidad. Efectivamente, la composición del operador (1.37) con $|\hat{p}|^{1/2}$ no resulta en el operador identidad. Adicionalmente, existen todavía ambigüedades asociadas al orden de factores en la representación de la ligadura hamiltoniana. Para resolverlas, existen diversas prescripciones en la literatura [22, 79–81]. Por ejemplo, la conocida como APS (por las iniciales de sus proponentes [20]) resulta en un operador de ligadura de la forma

$${}^{\text{APS}}\hat{C}_0 := \frac{\hat{\mathcal{N}}_{\bar{\mu}} - \hat{\mathcal{N}}_{-\bar{\mu}}}{2i} \hat{A} \frac{\hat{\mathcal{N}}_{\bar{\mu}} - \hat{\mathcal{N}}_{-\bar{\mu}}}{2i} + \kappa \widehat{\left(\frac{1}{V}\right)} \hat{\pi}_\phi^2, \quad (1.38)$$

donde se han introducido los operadores

$$\hat{A} := \frac{3\widehat{\text{sgn}v}}{2\pi\gamma^3 l_{\text{Pl}}^2 \Delta^{3/2}} \hat{V} (\hat{\mathcal{N}}_{-\bar{\mu}} \hat{V} \hat{\mathcal{N}}_{\bar{\mu}} - \hat{\mathcal{N}}_{\bar{\mu}} \hat{V} \hat{\mathcal{N}}_{-\bar{\mu}}), \quad (1.39)$$

$$\widehat{\left[\frac{1}{V}\right]} := \left[\frac{1}{\sqrt{|p|}} \right]^3, \quad (1.40)$$

que actúan de forma diagonal en la base $\{|v\rangle\}$. Por supuesto, $\hat{V} = |\hat{p}|^{3/2}$. Un análisis pormenorizado de esta ligadura puede encontrarse en la referencia [22].

En esta exposición, sin embargo, adoptaremos una prescripción diferente. La anterior se ha presentado para facilitar la comparación con el modelo cerrado, que se tratará en la sección 1.2.2. A continuación, se presenta la propuesta que preferiremos, que es, en esencia, la conocida como *MMO simplificada* [80, 81], excepto por el peso de la ligadura como densidad tensorial, que se tomará igual al usado en Gravedad Cuántica de Lazos—es decir, el de la ecuación (1.30), como se ha hecho hasta ahora—. En esta prescripción, se prescinde de las correcciones que proceden de cuantizar el miembro derecho de la ecuación (1.35) antes de evaluar los corchetes de Poisson, y los términos que contienen potencias del volumen se simetrizan repartiendo dichas potencias a izquierda y derecha de la expresión. Concretamente, el operador de ligadura resultante es

$$\hat{C}_0 := \widehat{\left(\frac{1}{V}\right)}^{1/2} \left(-\frac{6}{\gamma^2} \hat{\Omega}_0^2 + \kappa \hat{\pi}_\phi^2 \right) \widehat{\left(\frac{1}{V}\right)}^{1/2}, \quad (1.41)$$

siendo

$$\hat{\Omega}_0 := \frac{1}{4i\sqrt{\Delta}} \hat{V}^{1/2} [\widehat{\text{sgn}v}, \hat{\mathcal{N}}_{2\bar{\mu}} - \hat{\mathcal{N}}_{-2\bar{\mu}}]_+ \hat{V}^{1/2}, \quad (1.42)$$

donde $[\bullet, \bullet]_+$ representa el anticonmutador de sus entradas. La inclusión del operador $\widehat{\text{sgn}v}$ en $\hat{\Omega}_0$, con la simetrización adecuada, es propia de la prescripción MMO (tanto en su versión original [80] como en la simplificada [81]), y fue inspirada por la cuantización de lazos del modelo anisótropo de Bianchi I [49], en el que cada dirección espacial tiene asociado un coeficiente de la tríada, análogo a p , como se explicará con algo más de detalle en la sección 1.2.3. En ese sistema, los signos de dichos coeficientes desempeñan un papel importante, puesto que el producto de dos cualesquiera de ellos no es necesariamente positivo. Identificando las tres direcciones espaciales, se ideó esta prescripción para representar la ligadura en el caso isótropo, que, como veremos, tiene la ventaja de conducir a un operador que desacopla los distintas orientaciones de la tríada.

La ligadura (1.41) aniquila el estado de volumen nulo, $|v=0\rangle$, que de hecho está completamente desacoplado, por lo que a efectos prácticos se puede eliminar del espacio de Hilbert y considerar solo su complemento ortogonal $\tilde{\mathcal{H}}_{\text{cin}}^{\text{gra}}$. En este espacio, existe una biyección entre los estados que se anulan bajo la ligadura (1.41) y los aniquilados por la ligadura densitizada

$$\hat{\mathcal{E}}_0 := \left(\frac{1}{V}\right)^{-1/2} \hat{C}_0 \left(\frac{1}{V}\right)^{-1/2} = -\frac{6}{\gamma^2} \hat{\Omega}_0^2 + \kappa \hat{\pi}_\phi^2, \quad (1.43)$$

de estructura más sencilla⁹. Para imponer esta, es útil conocer algunas características del operador $\hat{\Omega}_0^2$. Primeramente, su actuación sobre un estado de la base es de la forma

$$\begin{aligned} \hat{\Omega}_0^2 |v\rangle &= -f_0^+(v) f_0^+(v+2) |v+4\rangle + \{[f_0^+(v)]^2 + [f_0^-(v)]^2\} |v\rangle \\ &\quad - f_0^-(v) f_0^-(v-2) |v-4\rangle, \end{aligned} \quad (1.44)$$

con los coeficientes

$$f_0^\pm(v) := \frac{\pi \gamma l_{\text{Pl}}^2}{2} [\text{sgn}v + \text{sgn}(v \pm 2)] \sqrt{|v|} \sqrt{|v \pm 2|}. \quad (1.45)$$

Así, $\hat{\Omega}_0^2$ es un operador en diferencias de segundo orden. Además, de la última expresión, se desprende que f_0^+ y f_0^- se anulan en los intervalos $[-2, 0]$

⁹Más exactamente, puesto que, en general, los estados aniquilados por la ligadura no son normalizables en $\tilde{\mathcal{H}}_{\text{cin}}^{\text{gra}}$, sus soluciones habrían de buscarse en el dual algebraico de un subespacio denso adecuado, y sería en ese espacio donde la biyección se establecería.

y $[0, +2]$, respectivamente. Por lo tanto, como adelantamos, la ligadura des-acopla las distintos signos de v . Lo que es más, definiendo las semirredes de paso cuatro $\mathcal{L}_\varepsilon^\pm := \{v = \pm(\varepsilon + 4p) : p \in \mathbb{N}\}$, con $\varepsilon \in (0, 4]$, resulta evidente que la ligadura preserva los subespacios $\mathcal{H}_\varepsilon^\pm$, obtenidos por la completación de $\text{span}(\{|v\rangle : v \in \mathcal{L}_\varepsilon^\pm\})$, y, en consecuencia, los subespacios $\mathcal{H}_\varepsilon^\pm \otimes \mathcal{H}_{\text{cin}}^{\text{mat}}$ son sectores de superselección de la teoría. Sin pérdida de generalidad, podemos fijar un cierto ε y estudiar el sector $\mathcal{H}_\varepsilon^+ \otimes \mathcal{H}_{\text{cin}}^{\text{mat}}$. Es de destacar que, pese a que el espacio de Hilbert $\mathcal{H}_{\text{cin}}^{\text{gra}}$ no es separable, cada $\mathcal{H}_\varepsilon^\pm$ sí lo es.

Puede probarse [80] que el operador $\hat{\Omega}_0^2$ (1.44), eligiendo como dominio $\text{span}(\{|v\rangle : v \in \mathcal{L}_\varepsilon^+\})$, es esencialmente autoadjunto, y que sus espectros esencial y absolutamente continuo coinciden con la semirrecta real $\mathbb{R}^+ := [0, \infty)$. Sus autoestados generalizados

$$|e_\lambda^\varepsilon\rangle := \sum_{v \in \mathcal{L}_\varepsilon^+} e_\lambda^\varepsilon(v)|v\rangle, \quad (1.46)$$

para cada autovalor generalizado $\lambda \in \mathbb{R}^+$, pueden determinarse a partir del dato inicial $e_\lambda^\varepsilon(\varepsilon)$ mediante las relaciones de recurrencia que resultan de la ecuación de autovalores.

Por otra parte, el operador $\hat{\pi}_\phi^2 = -\hbar^2 \partial_\phi^2$, que constituye la segunda pieza de la ligadura densitizada, es también esencialmente autoadjunto (tomando como dominio el espacio de Schwartz de funciones de decrecimiento rápido), y su espectro absolutamente continuo es, asimismo, \mathbb{R}^+ . Sus autofunciones generalizadas están dadas por las exponenciales $\exp(i\omega\phi)$, con $\omega \in \mathbb{R}$, siendo $(\hbar\omega)^2$ el autovalor correspondiente, doblemente degenerado. Los estados aniquilados por (el adjunto de) la ligadura hamiltoniana densitizada (en el dual algebraico de un subconjunto denso de $\mathcal{H}_\varepsilon^\pm \otimes \mathcal{H}_{\text{cin}}^{\text{mat}}$, que puede tomarse como el producto de los dominios asignados a $\hat{\Omega}_0^2$ y $-\partial_\phi^2$), pueden construirse de la siguiente manera:

$$\Psi(\phi, v) = \int_0^\infty d\lambda e_\lambda^\varepsilon(v) [\psi_+(\lambda)e^{i\omega(\lambda)\phi} + \psi_-(\lambda)e^{-i\omega(\lambda)\phi}], \quad (1.47)$$

donde $\omega(\lambda) = [6\lambda/(\gamma^2\kappa\hbar^2)]^{1/2}$ y $\psi_\pm \in L^2(\mathbb{R}^+, d\lambda)$. Identificando ϕ como un tiempo interno¹⁰, los términos asociados a ψ_+ y ψ_- se interpretan, respectivamente, como las componentes de frecuencia positiva y negativa de las soluciones, y están completamente determinadas por su valor a un «tiempo» dado, ϕ_0 , mediante evolución unitaria. Un conjunto completo de observables está constituido por la constante de movimiento $\hat{\pi}_\phi$ y el volumen en ϕ_0 , $\hat{V}|_{\phi_0}$.

¹⁰Clásicamente, ya que π_ϕ es una constante de movimiento, ϕ es una función monótona en cada trayectoria, lo que permite tomarla como un tiempo interno de forma global.

Puesto que estos operadores no mezclan las componentes de frecuencia positiva y negativa, existe en el sistema una superselección adicional, lo que permite restringir el estudio, por ejemplo, al sector de frecuencia positiva. Puede tomarse entonces $L^2(\mathbb{R}^+, d\lambda)$ como espacio de Hilbert físico; en él, los observables mencionados son autoadjuntos.

Algunas características interesantes de los estados físicos pueden deducirse estudiando el límite continuo del operador $\hat{\Omega}_0^2$ cuando v es grande, régimen correspondiente a la cuantización estándar de la geometrodinámica, habitualmente denominado *Wheeler-DeWitt* en la literatura de la Cosmología Cuántica de Lazos. En este límite, $\hat{\Omega}_0^2$ se aproxima por un operador diferencial de segundo orden, cuyo espectro \mathbb{R}^+ es ahora doblemente degenerado. Para cada λ en el espectro, el correspondiente par de autofunciones generalizados da lugar, a través de la ligadura de la teoría de Wheeler-DeWitt, a soluciones que describen un universo en expansión y otro en contracción. Notablemente, del hecho de que los coeficientes del operador $\hat{\Omega}_0^2$ en la ecuación (1.44) sean reales, se sigue que las autofunciones e_λ^ε tienden en este límite a una combinación lineal de la dos soluciones en la que ambas participan con la misma amplitud. Como la frontera correspondiente a la singularidad clásica está excluida en la prescripción utilizada, las componentes en contracción y en expansión deben representar dos ramas del mismo universo conectadas por un rebote [80]. Por lo tanto, el rebote es genérico en este modelo, pues no depende del perfil ψ_+ . Este resultado generaliza las conclusiones de los tempranos análisis numéricos de la teoría, realizados en la prescripción APS, que encontraron que la gran explosión se ve sustituida por un rebote en un cierto tipo de estados semiclásicos muy concentrados [20–22].

Caso cerrado La cuantización de lazos del modelo FLRW cerrado se llevó a cabo en las referencias [71, 72]. En este caso, las secciones espaciales tienen la topología de la tres-esfera. Puesto que el grupo de simetría $SU(2)$ actúa sobre ella de forma simplemente transitiva, pueden identificarse ambas variedades, y aprovechar esta identificación para fijar una cotriada fiducial en S^3 utilizando la uno-forma de Maurer-Cartan ω_{MC} . En efecto, la ecuación¹¹ $2^0 e^i \tau_i := \omega_{MC}$ define una cotriada ${}^0 e_i^a$ (y la tríada inversa ${}^0 e_i^a$), que adoptaremos en la parametrización de las variables de Ashtekar-Barbero en la forma (1.18). El uso de este marco simplifica los cálculos, pues, en virtud

¹¹Aunque la definición ${}^0 \omega^i \tau_i := \omega_{MC}$ es más natural, la correspondiente métrica resulta ser la de la tres-esfera de radio dos [71]. Preferimos reescalar la cotriada para trabajar en la tres-esfera de radio unidad.

de la ecuación de Maurer-Cartan,

$$\partial_a {}^0 e_b^i - \partial_b {}^0 e_a^i + \epsilon^i{}_{jk} {}^0 e_a^j {}^0 e_b^k = 0, \quad (1.48)$$

lo que permite obtener fácilmente la conexión de espín, $\Gamma_a^i = {}^0 e_a^i$, y la parte gravitatoria de la ligadura hamiltoniana clásica,

$$C_{0,+}^{\text{gra}} = -\frac{6}{\gamma^2} \sqrt{|p|} [(c - l_0)^2 + \gamma^2 l_0^2]. \quad (1.49)$$

Por otra parte, si se toma el mismo contenido material, su contribución a la ligadura es la misma que en caso plano.

La representación de las variables fundamentales se realiza como en el caso plano y para promover la ligadura al espacio de Hilbert cinemático $\mathcal{H}_{\text{cin}}^{\text{mat}} \otimes \mathcal{H}_{\text{cin}}^{\text{gra}}$ pueden utilizarse las ecuaciones (1.35) y (1.36), puesto que son independientes de la topología de las secciones espaciales. También la ecuación (1.32) es válida, a condición de escoger adecuadamente el lazo de la holonomía [71]. En este caso, debido a que los vectores e_i^a no conmutan entre sí, hay que alternar sus curvas integrales con las de vectores invariantes por la derecha (que sí conmutan con la tríada, invariante por la izquierda) para conseguir que el lazo cierre. Siguiendo estas directrices, se obtiene

$$F_{ab}^i = \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{1}{(\mu l_0)^2} [\text{sen}^2(\mu(c - l_0)) - \text{sen}^2(\mu l_0)] \epsilon^i{}_{jk} {}^0 e_a^j {}^0 e_b^k. \quad (1.50)$$

Sustituyendo el límite $\mu \rightarrow 0$ por una evaluación en $\bar{\mu} = |\Delta/p|^{1/2}$ (correspondiente a una holonomía en torno a un lazo que encierra el área física Δ), obtenemos una regularización de la curvatura que puede promoverse fácilmente a un operador cuántico en $\mathcal{H}_{\text{cin}}^{\text{gra}}$. Todavía quedan algunas ambigüedades en la representación de la ligadura hamiltoniana; siguiendo la prescripción de la referencia [71], análogo directo de la prescripción APS, se obtiene

$$\begin{aligned} \text{APSV } \hat{C}_{0,+}^{\text{gra}} := & e^{i\hat{\mu}l_0} \frac{\hat{\mathcal{N}}_{\bar{\mu}} - \hat{\mathcal{N}}_{-\bar{\mu}}}{2i} \hat{A} \frac{\hat{\mathcal{N}}_{\bar{\mu}} - \hat{\mathcal{N}}_{-\bar{\mu}}}{2i} e^{-i\hat{\mu}l_0} \\ & - [\text{sen}^2(\hat{\mu}l_0) - (1 + \gamma^2)\Delta l_0^2 \hat{p}^{-1}] \hat{A}, \end{aligned} \quad (1.51)$$

donde \hat{A} es el operador definido en la ecuación (1.39) para el caso con secciones espaciales planas. En las funciones de $\hat{\mu}$, ha de entenderse $\bar{\mu}$ a su vez como una función de p ; su actuación se define entonces por descomposición espectral. Es fácil ver que los factores $\exp(\pm i\hat{\mu}l_0)$ en el primer término del miembro derecho de la ecuación pueden eliminarse con una transformación unitaria en el espacio de Hilbert cinemático, con la que se recuperaría la ligadura del caso plano (1.38), más una contribución adicional debida a la

topología y dada por el segundo término (que no se ve afectado por la transformación al ser diagonal en la base de autestados del volumen).

En muchos sentidos, la prescripción adoptada es mucho menos ventajosa que la MMO. Por ejemplo, la ligadura (1.51) no desacopla el estado de volumen cero, ni tampoco las semirredes $\mathcal{L}_\varepsilon^\pm$, si bien es un operador en diferencias de segundo orden. Sus sectores de superselección se componen en este caso de estados con soporte en las redes $\mathcal{L}_\varepsilon^+ \cup \mathcal{L}_{4-\varepsilon}^-$. Esto complica la construcción formal de sus autoestados, que ahora dependen de dos datos iniciales, en vez de uno. Estos problemas pueden solucionarse adaptando la prescripción MMO a la nueva situación, como se explica en la sección 4.2.2.

En cualquier caso, la búsqueda de las soluciones de la ligadura (1.51) puede llevarse a cabo de forma parecida a como en el caso plano. Sin embargo, no reproduciremos aquí ese análisis, para no dilatar innecesariamente esta introducción. Un análisis analítico y numérico de dichas soluciones puede consultarse en la referencia [71].

Dinámica efectiva

Las características esenciales de cierto tipo de estados físicos de especial interés en estos modelos cuánticos pueden capturarse en una teoría clásica corregida [23–26]. Esta *dinámica efectiva* fue deducida en el marco de la formulación geométrica de la Mecánica Cuántica [82], y permite aproximar las trayectorias de los valores esperados de operadores relevantes en estados semiclásicos muy concentrados. Este formalismo goza de una gran popularidad en la Cosmología Cuántica de Lazos debido a su simplicidad, aunque conviene recordar que solo en el caso de ciertos espaciotiempos homogéneos la dinámica efectiva se ha derivado de forma rigurosa desde una teoría cuántica subyacente o se ha comprobado su validez comparando numéricamente sus resultados con los de dicha teoría [22, 71, 74, 83]. En estos modelos se ha encontrado que la dinámica efectiva sigue siendo una aproximación excelente incluso en los regímenes en los que las correcciones cuánticas dominan.

La experiencia acumulada en modelos sencillos puede resumirse en el siguiente algoritmo para obtener la ligadura hamiltoniana efectiva a partir del operador de ligadura: basta con sustituir los operadores fundamentales por las correspondientes variables clásicas. Al mismo tiempo, se asume que la estructura simpléctica permanece inalterada. Aparecen así dos tipos de correcciones cuánticas a la dinámica clásica: las provenientes de la regularización de las potencias negativas de la variable p y las que tienen su origen en la expresión de la curvatura de la conexión de Ashtekar-Barbero en términos de holonomías.

La dinámica efectiva permite estudiar en un formalismo más manejable

la posible existencia de singularidades en Cosmología Cuántica de Lazos. De hecho, se ha podido demostrar con generalidad que las singularidades cosmológicas físicamente relevantes desaparecen en el modelo FLRW plano cuando se introducen las correcciones cuánticas provenientes de la cuantización polimérica [84, 85].

A modo ilustrativo, se describen a continuación algunas características destacadas de la dinámica efectiva de la cuantización del modelo FLRW que se ha presentado. Por simplicidad, se expone tan solo el caso en el que la curvatura espacial es cero; un estudio del caso cerrado puede encontrarse en la referencia [71]. Ignorando las correcciones provenientes de la regularización de las potencias negativas de p , que solo son importantes para volúmenes pequeños, la ligadura efectiva del modelo es

$$C_0^{\text{eff}} = \frac{1}{V} \left(-\frac{6}{\gamma^2} \Omega_0^2 + \kappa \pi_\phi^2 \right), \quad (1.52)$$

con $\Omega_0 = p \text{sen}(\bar{\mu}c)/\bar{\mu}$ —siendo $\bar{\mu}$ la función de p dada en la ecuación (1.26)—. Sorprendentemente, esta ligadura implica una cota superior para la densidad de energía. En efecto, teniendo en cuenta que esta magnitud está dada por $\rho = \pi_\phi^2/(2V^2)$ para un campo escalar sin masa, es fácil inferir de la ecuación de ligadura que no puede superar el valor crítico $\rho_c = 3/(\gamma^2 \kappa \Delta)$. Este extremo se alcanza solo cuando el seno que contiene la función Ω_0 toma su valor máximo, es decir, para $\bar{\mu}c = \pi/2$. En ese momento, el volumen físico también alcanza un extremo V_r —concretamente, un mínimo—, como puede verse de la ecuación

$$\frac{dV}{dt} = \frac{N}{2\kappa} \{V, C_0^{\text{eff}}\} = \frac{3}{\gamma} N p \frac{\text{sen}(2\bar{\mu}c)}{2\bar{\mu}}. \quad (1.53)$$

Este rebote en el volumen sustituye a la singularidad de la gran explosión, inevitable en Relatividad General. El valor de V_r depende de π_ϕ —que, como en la teoría clásica, es una constante del movimiento—, y puede ser arbitrariamente grande; sin embargo, ρ_c es universal. Así, es la densidad de energía la que marca la entrada en el régimen en el que las correcciones cuánticas conducen al universo a un rebote. Esta es una característica del esquema de dinámica mejorada [22].

En la figura 1.1 se ha representado la evolución de la densidad y el volumen sobre una trayectoria efectiva. Se aprecia nítidamente el rebote, que permite una transición suave entre una rama del universo en contracción y otra en expansión, bien aproximadas por la teoría clásica a volúmenes suficientemente grandes.

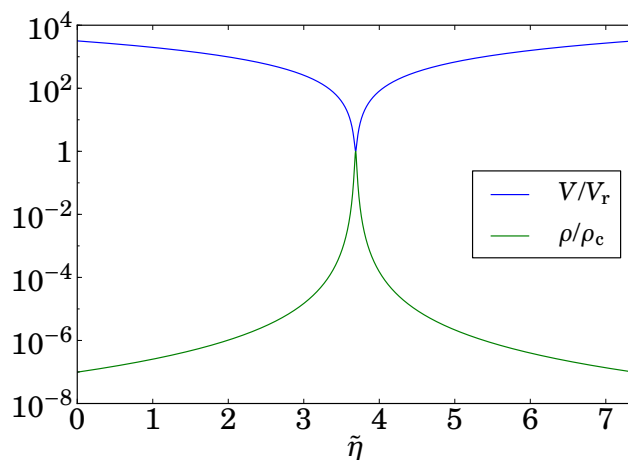


Figura 1.1: Evolución del volumen físico y la densidad de energía, normalizados a sus valores extremos, en la dinámica efectiva de la cuantización de lazos de un universo homogéneo e isotrópico con secciones espaciales planas. El tiempo $\tilde{\eta}$ se corresponde con la elección del lapso $N = V^{1/3}$.

1.2.3. Cuantización de lazos del modelo de Bianchi I

Tras el modelo FLRW, el siguiente paso en complejidad es dejar de lado la hipótesis de isotropía, manteniendo la de homogeneidad (puesto que, si la primera se da en cada punto, la segunda se cumple automáticamente [86]). Los más sencillos espaciotiempos homogéneos pero anisótropos son los que poseen un grupo tridimensional de isometrías de tipo I en la clasificación de Bianchi [46]. La topología de sus secciones espaciales es la del espacio euclídeo y pueden entenderse como una generalización del modelo FLRW plano en la que cada dirección espacial tiene asociado un factor de escala diferente. Estos modelos no están exentos de singularidades; por el contrario, a causa de la anisotropía, exhiben una mayor variedad de ellas [87, 88].

La cuantización de lazos del modelo de Bianchi I en vacío fue abordada en las referencias [47–50, 41, 42], siguiendo distintas prescripciones. La validez de la dinámica efectiva que puede deducirse para su cuantización se ha comprobado numéricamente en la referencia [83] (en la que se estudia la posibilidad de definir una evolución dinámica sin necesidad de introducir en el modelo un campo escalar que sirva de reloj). Además, las correcciones cuánticas evitan todas las singularidades físicamente indeseables, como ha demostrado un análisis cuidadoso de las ecuaciones efectivas [89, 90]. La diversidad de singularidades de la teoría clásica se ve sustituida en Cosmo-

logía Cuántica de Lazos por una mayor riqueza en la fenomenología de los rebotes [91].

A continuación, se resume la cuantización del modelo de Bianchi I en el vacío siguiendo la prescripción introducida en la referencia [41]. Asumiremos que las secciones espaciales son homeomorfas al tres-toro, y, por ende, compactas. El interés de este modelo dentro de la presente exposición radica en que sirve de paso intermedio para la cuantización híbrida del modelo inhomogéneo de Gowdy, que se revisará en la sección 1.2.4.

Planteamiento clásico

Tomando coordenadas axiales $\{\theta, \sigma, \delta\}$ con recorrido $[0, l_0)$ en las secciones espaciales tres-toroidales, el elemento de línea del modelo de Bianchi I toma la forma

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + a_\theta^2 d\theta^2 + a_\sigma^2 d\sigma^2 + a_\delta^2 d\delta^2, \quad (1.54)$$

donde a_θ , a_σ y a_δ son factores de escala direccionales que dependen del tiempo. Por supuesto, con vistas a la cuantización de lazos, es preferible parametrizar el sistema en términos de las variables de Ashtekar-Barbero. Fijando la tríada fiducial $e_i^a = \delta_i^a$, la conexión y la tríada densitizada pueden escribirse como

$$A_i^a = \frac{c_i}{l_0} \delta_i^a, \quad E_a^i = \frac{p_i}{l_0^2} \delta_a^i. \quad (1.55)$$

Es importante resaltar que los índices de c_i y p_i , con valores en $\{\theta, \sigma, \delta\}$, no son tensoriales: simplemente etiquetan las direcciones espaciales. Por lo tanto, no se aplica a ellos el convenio de suma de Einstein. El parámetro l_0 representa, como antes, la raíz cúbica del volumen fiducial de la variedad espacial de referencia (en este caso, el tres-toro) y ha sido introducido para evitar la dependencia de la estructura simpléctica en ese parámetro. Esta queda caracterizada por el corchete de Poisson

$$\{c_i, p_j\} = \gamma \kappa \delta_{ij}, \quad (1.56)$$

teniendo en cuenta además que $\{c_i, c_j\} = 0 = \{p_i, p_j\}$. Puesto que la tres-variedad espacial ha sido fijada, podemos tomar $l_0 = 2\pi$.

Calculando la tres-métrica a partir de la tríada y comparando con la ecuación (1.54), se infiere fácilmente la relación entre las variables p^i y los factores de escala a_i :

$$2\pi a_i = \sqrt{\left| \frac{p_j p_k}{p_i} \right|}, \quad \text{con } i \neq j \neq k, \quad (1.57)$$

lo que generaliza la relación encontrada en el modelo FLRW.

Las holonomías de la conexión A_α^i a lo largo de aristas en las direcciones fiduciales pueden reconstruirse con las funciones $\mathcal{N}_{\mu_i}(c_i) := \exp(i\mu_i c_i/2)$, que se toman como variables elementales, junto con los momentos p_i , proporcionales a los flujos de la tríada densitizada a través de superficies perpendiculares a la dirección i .

Espacio de Hilbert cinemático

Puesto que el espacio de fases de este modelo puede entenderse como tres copias del sector gravitatorio del modelo isótropo, para construir el espacio de Hilbert cinemático asociado basta con tomar el producto de tres copias del análogo isótropo; así $\mathcal{H}_{\text{cin}}^{\text{BI}} = \otimes_i \mathcal{H}_{\text{cin}}^{\text{gra}}$. Una base ortonormal del mismo es, pues, $\{|\mu_\theta, \mu_\sigma, \mu_\delta\rangle := |\mu_\theta\rangle \otimes |\mu_\sigma\rangle \otimes |\mu_\delta\rangle : \mu_i \in \mathbb{R}\}$, en la que cada operador fundamental actúa de forma no trivial únicamente sobre un factor del producto:

$$\hat{\mathcal{N}}_{\mu'_i} |\mu_i\rangle = |\mu_i + \mu'_i\rangle, \quad \hat{p}_i |\mu_i\rangle = 4\pi\gamma l_{\text{Pl}}^2 \mu_i |\mu_i\rangle. \quad (1.58)$$

De nuevo, la discontinuidad de esta representación impide definir operadores correspondientes a las variables clásicas c_i . Representar la ligadura hamiltoniana exige por tanto una regularización previa, que, como en el caso isótropo, se realiza expresándola en términos de holonomías a lo largo de lazos cuadrangulares perpendiculares a las direcciones fiduciales. Existen en la literatura dos enfoques diferentes para definir dichos circuitos [48, 50]; adoptamos aquí el más reciente, introducido en la referencia [50], ya que no presenta inconsistencias cuando las secciones espaciales no son compactas. Debido a la anisotropía, parece justificado tomar aristas de diferente longitud en cada dirección; del requisito de que el rectángulo de aristas de longitud $\bar{\mu}_i l_0$ y $\bar{\mu}_j l_0$ en el plano perpendicular a la dirección k encierre un área física igual a Δ se deduce la condición¹²

$$\bar{\mu}_i = \sqrt{\Delta \left| \frac{p_i}{p_j p_k} \right|}, \quad \text{con } i \neq j \neq k. \quad (1.59)$$

Las holonomías a lo largo de este tipo de aristas son combinaciones de las funciones $\mathcal{N}_{\bar{\mu}_i}$. En consecuencia, es necesario definir la acción de los operadores cuánticos correspondientes, ya que no se infiere inmediatamente de la ecuación (1.58), debido a la dependencia de $\bar{\mu}_i$ en los momentos. Esto puede hacerse, no obstante, usando los argumentos geométricos del caso isótropo.

¹²En comparación, el esquema alternativo de dinámica mejorada [48] toma $\bar{\mu}_i = \sqrt{\Delta/p_i}$, cantidad que varía únicamente con p_i ; como consecuencia, la actuación del operador de ligadura resultante es más sencilla en este esquema.

Llegados a este punto, conviene reetiquetar la base utilizando los parámetros

$$\lambda_i = \text{sgn}(\mu_i) \left(\frac{4\pi\gamma l_{\text{Pl}}^2}{\Delta} \right)^{1/6} |\mu_i|^{1/2}, \quad (1.60)$$

determinados por la ecuación $\bar{\mu}_i \partial_{\mu_i} = (2|\lambda_j \lambda_k|)^{-1} \partial_{\lambda_i}$ (con $i \neq j \neq k$). Sobre un estado caracterizado por estos números, el operador $\hat{\mathcal{N}}_{\pm\bar{\mu}_\theta}$ actúa de la forma

$$\hat{\mathcal{N}}_{\pm\bar{\mu}_\theta} |\lambda_\theta, \lambda_\sigma, \lambda_\delta\rangle = \left| \lambda_\theta \pm \frac{1}{2|\lambda_\sigma \lambda_\delta|}, \lambda_\sigma, \lambda_\delta \right\rangle; \quad (1.61)$$

la acción de $\hat{\mathcal{N}}_{\pm\bar{\mu}_\sigma}$ y $\hat{\mathcal{N}}_{\pm\bar{\mu}_\delta}$ es completamente análoga. Por tanto, estos operadores no conmutan entre sí, además de no hacerlo con los operadores \hat{p}_i , lo que evidentemente supone una complicación adicional. En cuanto a estos últimos, es fácil ver que su acción en la base reetiquetada se reduce a

$$\hat{p}_i |\lambda_\theta, \lambda_\sigma, \lambda_\delta\rangle = \text{sgn}(\lambda_i) (4\pi\gamma l_{\text{Pl}}^2 \sqrt{\Delta})^{2/3} \lambda_i^2 |\lambda_\theta, \lambda_\sigma, \lambda_\delta\rangle. \quad (1.62)$$

Representación de la ligadura

En la parametrización (1.55) en términos de los pares (c_i, p_i) , las ligaduras de difeomorfismos y de Gauss se anulan idénticamente, por lo que solo queda la ligadura hamiltoniana; dado que la conexión de espín se anula, esta puede calcularse mediante la ecuación (1.30). El resultado es

$$C_{\text{BI}} = \frac{\mathcal{C}_{\text{BI}}}{V}, \quad \mathcal{C}_{\text{BI}} = -\frac{1}{\gamma^2} \sum_i \sum_{i \neq j} p_i c_i p_j c_j, \quad (1.63)$$

donde los índices i y j toman valores en $\{\theta, \sigma, \delta\}$ y V es de nuevo el volumen físico del sistema, dado en este caso por $V = \sqrt{|p_\theta p_\sigma p_\delta|}$. Llamaremos *ligadura densitizada* a la cantidad \mathcal{C}_{BI} .

Como quiera que la representación adoptada es discontinua, para promover la ligadura hamiltoniana a un operador cuántico es necesario escribirla en términos de holonomías. Al igual que en el caso isótropo, esto se consigue expresando la curvatura de la conexión de Ashtekar-Barbero como el límite de una holonomía alrededor de un lazo que —en principio— habría que encoger indefinidamente, pero, en vez de eso, se evalúa la holonomía cuando el área física comprendida por el lazo coincide con el mínimo autovalor no nulo permitido para el operador área en Gravedad Cuántica de Lazos, introduciendo así heurísticamente en el modelo la discretización de la geometría que aparece en la teoría completa. Como se mencionó, se han planteado dos diferentes realizaciones de esta idea, conocidas como *esquemas de dinámica mejorada* [48, 50]; nos adherimos aquí al propuesto por A. Ashtekar y

E. Wilson-Ewing [50], en el que las holonomías se toman en torno a rectángulos tangenciales a las direcciones fiduciales, elegidos de forma que la arista en la dirección i tenga longitud fiducial $\bar{\mu}_i l_0$, con $\bar{\mu}_i$ dado por la ecuación (1.59). La curvatura de la conexión se reemplaza finalmente por¹³

$$F_{ab}^i \rightarrow -2 \operatorname{tr} \left(\frac{1}{4\pi^2 \bar{\mu}_j \bar{\mu}_k} [h_j^{\bar{\mu}_j} h_k^{\bar{\mu}_k} (h_j^{\bar{\mu}_j})^{-1} (h_k^{\bar{\mu}_k})^{-1} - I] \tau^i \right) \delta_a^j \delta_b^k, \quad (1.64)$$

donde $h_i^{\bar{\mu}_i} = \cos(\bar{\mu}_i c_i/2)I + 2 \operatorname{sen}(\bar{\mu}_i c_i/2)\tau_i$ son las holonomías a lo largo de las aristas del correspondiente rectángulo. Introduciendo esta expresión en la ligadura hamiltoniana (1.30), se comprueba que el resultado es equivalente a reemplazar en la ecuación (1.63) las variables c_i por las funciones $\sin(\bar{\mu}_i c_i)/\bar{\mu}_i$, con las que coinciden en el límite $\bar{\mu}_i \rightarrow 0$.

A continuación, es necesario regularizar el inverso del volumen, puesto que los operadores \hat{p}_i no son invertibles, al tener al cero en su espectro discreto. Para hacerlo, no basta con usar el análogo directo de la ecuación (1.36) en este modelo, debido a la dependencia específica de cada $\bar{\mu}_i$ en el correspondiente p_i . En su lugar, puede emplearse una expresión similar, como

$$|p_i|^{-3/4} = \frac{\operatorname{sgn} p_i}{\pi \gamma G \bar{\mu}_i} \sum_k \operatorname{tr} (h_k^{\mu_k} \{ [h_k^{\mu_k}]^{-1}, |p_i|^{1/4} \} \tau^k), \quad (1.65)$$

cuya traslación a la teoría cuántica resulta en la siguiente regularización de una potencia negativa de p_i :

$$\left(\frac{1}{|p_i|^{1/4}} \right) := \frac{\widehat{\operatorname{sgn} p_i}}{2\pi \gamma l_{\text{Pl}}^2 \sqrt{\Delta}} |\hat{p}_j|^{1/2} |\hat{p}_k|^{1/2} (\hat{\mathcal{N}}_{-\bar{\mu}_i} |\hat{p}_i|^{1/4} \hat{\mathcal{N}}_{\bar{\mu}_i} - \hat{\mathcal{N}}_{\bar{\mu}_i} |\hat{p}_i|^{1/4} \hat{\mathcal{N}}_{-\bar{\mu}_i}). \quad (1.66)$$

Con estos operadores, el operador inverso del volumen se define de la forma

$$\left(\frac{1}{V} \right) := \left(\frac{1}{|p_\theta|^{1/4}} \right)^2 \otimes \left(\frac{1}{|p_\sigma|^{1/4}} \right)^2 \otimes \left(\frac{1}{|p_\delta|^{1/4}} \right)^2 \quad (1.67)$$

Siguiendo la referencia [41], definimos la ligadura hamiltoniana

$$\hat{C}_{\text{BI}} := \left(\frac{1}{V} \right)^{1/2} \hat{\mathcal{C}}_{\text{BI}} \left(\frac{1}{V} \right)^{1/2}, \quad \hat{\mathcal{C}}_{\text{BI}} = -\frac{1}{\gamma^2} \sum_i \sum_{i \neq j} \hat{\Omega}_i \hat{\Omega}_j, \quad (1.68)$$

donde

$$\hat{\Omega}_i := \frac{1}{4i\sqrt{\Delta}} \hat{V}^{1/2} [\widehat{\operatorname{sgn} p_i}, \hat{\mathcal{N}}_{2\bar{\mu}_i} - \hat{\mathcal{N}}_{-2\bar{\mu}_i}]_+ \hat{V}^{1/2} \quad (1.69)$$

¹³Cf. ecuación (1.34).

Identificando las tres direcciones espaciales, se recupera el operador de ligadura del modelo FLRW plano dado por la ecuación (1.41). Resulta pues clara la relación entre la prescripción MMO simplificada para el caso isótropo y la adoptada ahora en el modelo de Bianchi I, que fue su inspiradora. En esta, como en aquella, el subespacio de estados con volumen nulo se ve desacoplado del resto.

La analogía con el caso isótropo continúa, puesto que, también como en ese modelo, el espacio de Hilbert cinemático, no separable, resulta ser la suma directa de sectores de superselección separables. La caracterización de los mismos, sin embargo, es más complicada en el modelo de Bianchi I, especialmente en el esquema de dinámica mejorada adoptado. La determinación de los estados aniquilados por la ligadura presenta también mayores dificultades en este caso, aunque puede realizarse resolviendo las ecuaciones de recurrencia que resultan de la imposición de la ligadura. No abordaremos aquí esos problemas, ya que ni el conocimiento de los sectores de superselección ni el de los estados físicos de este modelo son necesarios para la comprensión de los trabajos que se exponen en la presente memoria. No obstante, puede encontrarse un tratamiento completo de los mismos en la referencia [41].

1.2.4. Cuantización híbrida del modelo de Gowdy en el tres-toro con contenido material

Para tratar modelos más sofisticados que permitan abordar problemas como la formación de estructura en el Universo, es necesario abandonar la hipótesis de homogeneidad, de la que partían los modelos cosmológicos expuestos. Naturalmente, esto plantea grandes dificultades técnicas, pues requiere lidiar con un número infinito de grados de libertad. Parece lógico, por tanto, empezar con sistemas que mantengan un alto grado de simetría. Tal es el caso de los modelos de Gowdy [43, 44], que, como ya se ha mencionado, describen espaciotiempos globalmente hiperbólicos con secciones espaciales compactas y dos vectores de Killing espaciales que (necesariamente) conmutan entre sí. Las secciones espaciales pueden tener la topología del tres-toro, la tres-esfera o la tres-asa, o variedades recubiertas por ellas. Nos centraremos en el primer caso, por ser el que se ha tratado en Cosmología Cuántica de Lazos. Además, pediremos que las ondas gravitacionales que se propagan en el universo tengan polarización lineal, lo que se traduce en que los dos vectores de Killing sean ortogonales a hipersuperficies.

La cuantización del modelo de Gowdy con polarización lineal en el tres toro se ha abordado desde diversos enfoques (véanse, por ejemplo, las referencias [92–94]). En particular, cabe destacar que el sistema admite una

cuantización de Fock con dinámica unitaria [51, 52]. Notablemente, exigir esta característica (además de la simetría espacial inherente al problema) resuelve no solo la ambigüedad inherente a la elección de representación de Fock [58, 95], sino también la asociada a la descripción del campo [59]. Estos resultados sirvieron de base a la cuantización híbrida del modelo [38, 40–42]. Recordemos que este enfoque renuncia a cuantizar poliméricamente el sistema completo; en cambio, aplica esa técnica únicamente al sector homogéneo de la teoría, que en este caso puede identificarse con un espaciotiempo de Bianchi I. Mientras tanto, se reservan para las inhomogeneidades técnicas de la Teoría Cuántica de Campos ordinaria; en concreto, se utiliza la cuantización de Fock con dinámica unitaria mencionada. Por supuesto, este tipo de tratamiento no pretende agotar la problemática de la cuantización del modelo, pero sí permite completar el programa de Dirac de forma rigurosa. De esta forma, pueden aprovecharse los resultados de las técnicas más tradicionales manteniendo, al mismo tiempo, la aspiración de eludir con la cuantización de lazos las singularidades asociadas a los modos homogéneos. Si aceptamos la hipótesis de que, al menos en cierto régimen, los efectos de la discretización de la geometría pesan más sobre los grados de libertad globales que sobre las inhomogeneidades, podemos esperar que la teoría resultante sea físicamente significativa.

Estudios analíticos y numéricos [96, 97] de la dinámica efectiva que puede extrapolarse de los modelos homogéneos a la cuantización híbrida del modelo de Gowdy han permitido comprobar que las singularidades cosmológicas que presenta la teoría clásica se sortean con un rebote. Además, evidenciaron una interesante tendencia en la propagación de las inhomogeneidades a través del rebote. En promedio, estas se ven amplificadas si originalmente son lo suficientemente pequeñas (es decir, si el universo en contracción está próximo a la homogeneidad); en caso contrario, su amplitud no cambia significativamente. Este es un posible mecanismo de formación de estructura en estos modelos.

Más recientemente, el espaciotiempo de Gowdy con ondas gravitacionales linealmente polarizadas y secciones espaciales tres-toroidales también se ha cuantizado en presencia de un campo escalar sin masa mínimamente acoplado, con las mismas simetrías que el espaciotiempo [98]. A continuación, se resume la construcción de este modelo cuántico. El propósito de este resumen es doble: servir, por una parte, de introducción a la cuantización híbrida de perturbaciones cosmológicas que se realiza en la sección 4 y, por otro lado, justificar la dinámica efectiva que se analiza en la sección 6 para demostrar que no da lugar a singularidades.

Planteamiento clásico

Como se ha explicado, los modelos de Gowdy presentan dos vectores de Killing espaciales. La condición adicional de que sean ortogonales a hipersuperficies permite escoger coordenadas $\{t, \theta, \sigma, \delta\}$ tales que dichos vectores están dados por ∂_σ y ∂_δ . El rango de las coordenadas axiales θ , σ y δ será $[0, 2\pi)$. La función lapso, el vector desplazamiento y las componentes de la tres-métrica en estas coordenadas, así como el campo escalar Φ , dependen únicamente del tiempo y de la coordenada periódica θ , en la que pueden expandirse en serie de Fourier de la forma habitual; por ejemplo, dada una función χ ,

$$\chi(t, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \chi_n(t) e^{in\theta}. \quad (1.70)$$

Es posible fijar las componentes θ y δ de la ligadura de difeomorfismos espaciales para escribir la tres-métrica en forma diagonal, de modo que esté completamente determinada por tres funciones de t y de θ . En realidad, puede eliminarse la dependencia espacial de dos de estas funciones fijando los modos inhomogéneos de las ligaduras restantes. Estas dos funciones y el modo cero de la función restante —función que denotaremos por ξ y elegimos de forma que sea proporcional a la norma de uno de los vectores de Killing— parametrizan la métrica en el límite homogéneo. Junto con la parte homogénea del campo escalar, $\phi := \Phi_0$, y los momentos conjugados de todas estas variables, constituyen el sector homogéneo del espacio de fases. El sector inhomogéneo está formado entonces por los restantes modos de Fourier de los campos ξ y Φ , además de sus momentos canónicamente conjugados. Anticipándonos a la cuantización de Fock, describiremos este sector inhomogéneo mediante variables de creación y destrucción. Conviene destacar, no obstante, que la elección de las mismas no es en absoluto inocente, pues determina una representación de Fock de entre las infinitas inequivalentes.

Existe, además de la anterior, una ambigüedad adicional, que concierne a la separación entre los sectores homogéneo e inhomogéneo. Podríamos pensar, por ejemplo, en escalar Φ con una función de las variables homogéneas. Debido a la dependencia temporal de las mismas, como ya habíamos comentado, una transformación de este tipo altera la dinámica del campo material. Esta libertad puede usarse para garantizar la implementación unitaria de la evolución en la teoría cuántica del campo sobre el fondo clásico. Restringiéndonos a representaciones cuyo estado de vacío sea invariante bajo la simetría espacial del sistema reducido —rotaciones en la coordenada θ —, para alcanzar una dinámica unitariamente implementable debe escalarse Φ con el área de las órbitas de los vectores de Killing [98, 51, 52]; llamaremos $\bar{\Phi}$ al campo escalado de esta manera. Este cambio puede extenderse a

una transformación canónica que involucre también al momento del campo y al sector homogéneo, de forma que se mantenga la forma diagonal de la estructura simpléctica. Evidentemente, esta transformación debe incluir el escalado inverso del momento, al que, además, puede añadirse una contribución lineal en Φ (con un factor que dependerá, en general, de las variables homogéneas). Este tipo de transformación respeta la linealidad del sector inhomogéneo (como veremos, las ligaduras son cuadráticas en las inhomogeneidades, por lo que sus ecuaciones de movimiento son, en efecto, lineales).

Por otro lado, el campo ξ ya admite una representación de Fock en la que su dinámica es unitariamente implementable sobre el fondo clásico, por lo que no hay necesidad de realizar escalado alguno. De hecho, si se desea también una implementación natural de las simetrías espaciales, cualquier escalado no trivial (es decir, no constante) estropearía la propiedad mencionada [59]. Del mismo modo ocurriría con cualquier otro escalado de $\bar{\Phi}$. En otras palabras, exigir que la dinámica admita una implementación unitaria en el fondo clásico señala como privilegiada la descripción del sistema en términos de ξ y $\bar{\Phi}$, que servirán de partida a la cuantización. Cuando sea necesario, denotaremos genéricamente estos campos por χ . Así, por ejemplo, las variables de destrucción que adoptaremos pueden escribirse en la forma¹⁴

$$a_{\chi_n} := \frac{1}{\sqrt{2|n|}} (|n|\chi_n + i\pi_{\chi_n}); \quad (1.71)$$

mientras que las variables de construcción asociadas serán, como es habitual, sus complejas conjugadas. Así, $\{a_{\chi_n}, a_{\chi_{n'}}^*\} = -i\delta_{nn'}$. Estas variables, que serían las naturales si ξ y $\bar{\Phi}$ fueran campos libres sin masa, determinan una representación de Fock en la que la dinámica del campo sobre el fondo clásico puede ser implementada mediante un operador unitario. Además, dicha representación es invariante bajo rotaciones en la coordenada θ . Toda cuantización de Fock con estas características debe ser unitariamente equivalente a la considerada [58, 95].

En cuanto al sector homogéneo, como ya se ha mencionado, puede identificarse con un espaciotiempo de Bianchi I con un contenido material constituido por un campo escalar sin masa homogéneo. Explotando esta asociación, lo parametrizaremos en términos de las variables (c_i, p_i) , con $i \in \{\theta, \sigma, \delta\}$, que coinciden en ausencia de inhomogeneidades con las introducidas en la ecuación (1.55) para el modelo de Bianchi I, junto con el par canónico (ϕ, π_ϕ) . Recordemos que $\{c_i, p_j\} = \gamma\kappa\delta_{ij}$.

La ligadura hamiltoniana del sistema consta de dos contribuciones. Una

¹⁴Dado que los modos cero se tratarán por separado como parte del sector homogéneo, no debe preocuparnos que esta definición carezca de sentido para $n = 0$.

depende únicamente de las variables homogéneas, y puede identificarse con la ligadura hamiltoniana del modelo de Bianchi I con un campo escalar homogéneo mínimamente acoplado; la otra, en cambio, mezcla las variables de uno y otro sector y es cuadrática en los campos ξ , $\bar{\Phi}$ y sus momentos. A continuación se muestra la forma explícita de la ligadura, que densitizamos usando el volumen del espaciotiempo de Bianchi de fondo, $V = \sqrt{p_\theta p_\sigma p_\delta}$; así, $C_G = \mathcal{C}_G/V$, y

$$\mathcal{C}_G = \mathcal{C}_{\text{BI}} + \kappa \pi_\phi^2 + 4\pi\kappa |p_\theta| H_{\text{lib}} + \kappa \frac{(p_\sigma c_\sigma + p_\delta c_\delta)^2}{8\pi\gamma^2 |p_\theta|} H_{\text{int}}, \quad (1.72)$$

siendo \mathcal{C}_{BI} la versión densitizada de la ligadura del modelo de Bianchi I, dada en la ecuación (1.63). Toda la dependencia en las variables inhomogéneas está codificada en los dos últimos términos del miembro de la derecha; concretamente, en los factores H_{lib} y H_{int} . Cada una de estas cantidades se descompone, a su vez, en la suma de dos contribuciones análogas, provenientes de los campos ξ y $\bar{\Phi}$ y dadas por

$$H_{\text{lib}}^\chi = \sum_{n \neq 0} n (a_{\chi_n} a_{\chi_n}^* + a_{\chi_{-n}} a_{\chi_{-n}}^*), \quad (1.73a)$$

$$H_{\text{int}}^\chi = \sum_{n \neq 1} \frac{1}{n} (a_{\chi_n} a_{\chi_n}^* + a_{\chi_n}^* a_{\chi_{-n}}^* + a_{\chi_n} a_{\chi_{-n}} + a_{\chi_{-n}} a_{\chi_{-n}}^*). \quad (1.73b)$$

Como puede verse, H_{lib}^χ tiene la forma del hamiltoniano de un campo escalar libre y sin masa, mientras que H_{int}^χ se interpreta como una autointeracción.

Además de la ligadura hamiltoniana, queda la componente θ de la ligadura de difeomorfismos, cuya parte homogénea sobrevivió a la fijación de *gauge*. Esta ligadura genera rotaciones en la coordenada espacial θ . También consta de dos contribuciones de idéntica forma, una para cada campo, dadas por

$$C_\theta^\chi = \sum_{n=1}^{\infty} (|a_{\chi_n}|^2 - |a_{\chi_{-n}}|^2). \quad (1.74)$$

Cuantización

Ya hemos adelantado que la estrategia seguida para cuantizar este modelo en el marco de la Cosmología Cuántica de Lazos es la denominada *híbrida*, consistente en utilizar representaciones de distinta naturaleza para cada sector de la teoría. En el caso del sector homogéneo, aprovecharemos la representación construida para el modelo de Bianchi I sobre el espacio $\mathcal{H}_{\text{cin}}^{\text{BI}}$ (en la sección 1.2.3 se dio la definición de ese espacio y la actuación sobre él de los operadores fundamentales \hat{p}_i y $\hat{\mathcal{N}}_{\hat{\mu}_i}$), añadiéndole sencillamente el

contenido material que constituye el modo cero del campo escalar, ϕ . Como en el caso isótropo, trataremos este valiéndonos de técnicas estándar, de forma que el operador $\hat{\phi}$ actúe simplemente por multiplicación en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}_{\text{cin}}^{\text{mat}} = L^2(\mathbb{R}, d\phi)$.

En cuanto al espacio de Hilbert para el sector inhomogéneo, constará de dos copias —una por cada uno de los campos ξ y $\bar{\Phi}$ — del espacio de Fock \mathcal{F}_χ , que podemos caracterizar a partir de la base ortogonal

$$\left\{ |\mathfrak{N}_\chi\rangle = |\dots, N_{\chi-2}, N_{\chi-1}, N_{\chi_1}, N_{\chi_2}, \dots\rangle : N_{\chi_n} \in \mathbb{Z}^+, \sum_{n=-\infty}^{\infty} N_{\chi_n} < \infty \right\}, \quad (1.75)$$

caracterizada por los números de ocupación (así, por ejemplo, N_{χ_n} es el número de ocupación del modo n -ésimo). Sobre los estados de esta base, los operadores de destrucción y creación (análogos cuánticos de las variables clásicas) operan de la forma habitual, aumentando o disminuyendo en una unidad los números de ocupación del modo correspondiente:

$$\hat{a}_{\chi_n} |\dots, N_{\chi_n}, \dots\rangle = \hbar \sqrt{N_{\chi_n}} |\dots, N_{\chi_n} - 1, \dots\rangle, \quad (1.76)$$

$$\hat{a}_{\chi_n}^\dagger |\dots, N_{\chi_n}, \dots\rangle = \hbar \sqrt{N_{\chi_n} + 1} |\dots, N_{\chi_n} + 1, \dots\rangle, \quad (1.77)$$

Se tiene por tanto que $[\hat{a}_{\chi_n}, \hat{a}_{\chi_{n'}}^\dagger] = \hbar \delta_{nn'}$.

El espacio de Hilbert cinemático del modelo cuántico completo se construye tomando el producto tensorial de los espacios que hemos asignado a cada parte. Así, $\mathcal{H}_{\text{cin}}^{\text{G}} := \mathcal{H}_{\text{cin}}^{\text{BI}} \otimes \mathcal{H}_{\text{cin}}^{\text{mat}} \otimes \mathcal{F}_\xi \otimes \mathcal{F}_{\bar{\Phi}}$. Al igual que en el modelo FLRW, en este espacio producto se entiende que los operadores fundamentales definidos en cada factor actúan en los restantes de forma trivial como la identidad. Sin embargo, resulta evidente que la ligadura hamiltoniana cuántica no respetará esta estructura de producto, puesto que contiene términos que mezclan los sectores homogéneo e inhomogéneo. Los términos en los interviene únicamente las variables homogéneas pueden representarse fácilmente en la teoría cuántica aprovechando la identificación con el espaciotiempo de Bianchi I. El procedimiento no es tan evidente en el caso de los términos restantes, que deben ser regularizados previamente, ya que contienen potencias negativas de p_i y variables c_i (que carecen de análogo cuántico). Lo haremos siguiendo el ejemplo del modelo homogéneo; así, utilizaremos la regularización (1.66) para representar dichas potencias negativas, mientras que promoveremos los productos $p_i c_i$ a los operadores $\hat{\Omega}_i$, definidos en la ecuación (1.69).

Por otro lado, las cantidades clásicas H_{lib} y H_{int} , como la ligadura de difeomorfismos C_θ , dependen únicamente de las variables inhomogéneas, por

lo que podemos promoverlos a operadores simplemente sustituyendo las variables de destrucción y creación por los correspondientes operadores cuánticos, cuidando de adoptar el orden normal. Así, en términos de los operadores número $\hat{N}_{\chi_n} := \hat{a}_{\chi_n}^\dagger \hat{a}_{\chi_n}$, obtendríamos

$$\hat{H}_{\text{lib}}^\chi = \sum_{n \neq 0}^{\infty} n (\hat{N}_{\chi_n} + \hat{N}_{\chi_{-n}}), \quad (1.78a)$$

$$\hat{H}_{\text{int}}^\chi = \sum_{n \neq 1}^{\infty} \frac{1}{n} (\hat{N}_{\chi_n} + \hat{a}_{\chi_n}^\dagger \hat{a}_{\chi_{-n}}^\dagger + \hat{a}_{\chi_n} \hat{a}_{\chi_{-n}} + \hat{N}_{\chi_{-n}}) \quad (1.78b)$$

y, para las contribuciones a la ligadura de difeomorfismos,

$$\hat{C}_\theta^\chi = \sum_{n=1}^{\infty} (\hat{N}_{\chi_n} - \hat{N}_{\chi_{-n}}). \quad (1.79)$$

Es fácil ver que los estados aniquilados por esta ligadura constituyen un subespacio propio, que llamaremos \mathcal{F}_p , del espacio de Hilbert cinemático $\mathcal{F}_\xi \otimes \mathcal{F}_\bar{\phi}$ asociado al sector inhomogéneo [98]. Como puede verse, imponer cuánticamente la ligadura de difeomorfismos no es una tarea difícil, a diferencia de lo que ocurre con la hamiltoniana. Esta, conforme a las directrices indicadas, y adoptando un orden de factores coherente con el del modelo homogéneo, toma la forma

$$\hat{C}_G = \left(\frac{1}{V} \right)^{1/2} \hat{\mathcal{C}}_G \left(\frac{1}{V} \right)^{1/2}, \quad (1.80)$$

$$\hat{\mathcal{C}}_G = \hat{\mathcal{C}}_{\text{BI}} + \kappa \hat{\pi}_\phi^2 + 4\pi\kappa |\hat{\pi}_\theta| \hat{H}_{\text{lib}} + \frac{\kappa}{8\pi\gamma^2} \left(\frac{1}{\sqrt{|p_\theta|}} \right) (\hat{\Omega}_\sigma + \hat{\Omega}_\delta)^2 \left(\frac{1}{\sqrt{|p_\theta|}} \right) \hat{H}_{\text{int}}, \quad (1.81)$$

siendo $\hat{\mathcal{C}}_{\text{BI}}$ el operador definido en la ecuación (1.68). Como anticipamos, la ligadura no respeta la estructura de producto de $\mathcal{H}_{\text{cin}}^G$, lo que impide aprovechar directamente las soluciones del modelo de Bianchi I. No obstante, los estados físicos pueden caracterizarse, al menos formalmente, y el espacio de Hilbert físico resultante también posee estructura de producto; de hecho, se recupera el espacio \mathcal{F}_p como su sector inhomogéneo [98].

1.3. Estructura de la memoria y objetivos

El objetivo principal del trabajo expuesto en esta memoria es profundizar en el tratamiento de modelos cosmológicos inhomogéneos en el marco provisto por la Cosmología Cuántica de Lazos y caracterizar en ellos algunos efectos de la discretización de la geometría. Por su particular relevancia

observacional, se presta especial atención al modelo FLRW con perturbaciones cosmológicas, cuya cuantización no se había completado previamente utilizando técnicas de lazos. Abordamos la misma mediante un enfoque híbrido, es decir, combinando técnicas de la cuantización de lazos y de la Teoría Cuántica de Campos ordinaria, de forma parecida a la cuantización híbrida del modelo de Gowdy con polarización lineal en el tres-toro. La dinámica efectiva de los dos modelos mencionados será también objeto de estudio.

Tras este capítulo introductorio, el cuerpo de la memoria se divide en dos partes, que comprenden un total de cinco capítulos:

- Cuantización de perturbaciones cosmológicas:
 - En el capítulo 2, se introduce en un nivel clásico el modelo FLRW con perturbaciones cosmológicas y un contenido material constituido por un campo escalar con masa mínimamente acoplado. Truncaremos la acción a orden cuadrático en las inhomogeneidades. A continuación, en el formalismo hamiltoniano, la libertad *gauge* asociada a las ligaduras locales se eliminará imponiendo condiciones de fijación apropiadas. Una transformación en el espacio de fases reducido permitirá devolver la estructura simpléctica a la forma canónica y, además, conducirá a una parametrización del sistema adaptada a la discusión del siguiente capítulo. Por último, estudiaremos algunos invariantes *gauge* del modelo.
 - El capítulo 3 aborda la cuantización de las perturbaciones cosmológicas —tanto escalares como tensoriales— sobre el espacio-tiempo de fondo, que de momento se supone clásico. En particular, comprobaremos que la ambigüedad en la elección de una representación de Fock puede evitarse si se exige, además de un vacío invariante bajo las isometrías espaciales del fondo, la implementabilidad unitaria de la dinámica del campo. También se ofrecen cuantizaciones con estas características en términos de invariantes *gauge*, que resultan ser unitariamente equivalentes a las cuantizaciones privilegiadas en términos de las variables dependientes del *gauge*.
 - Seleccionada una cuantización de Fock de las inhomogeneidades, la cuantización híbrida del modelo completo se acomete finalmente en el capítulo 4. Esta explota la identificación que puede establecerse de forma natural entre el sector homogéneo de la teoría y el modelo sin perturbaciones para construir el espacio de Hilbert cinemático de la teoría cuántica. Para representar en él la

ligadura, proponemos una prescripción inspirada en el caso homogéneo. El resultado es un operador que establece relaciones de recurrencia entre los valores de los estados físicos en las diferentes secciones de volumen fijo. Alternativamente, puede tomarse el modo cero del campo escalar como un tiempo interno y caracterizar las soluciones de la ligadura a partir de las correspondientes ecuaciones de evolución, que, en cierto régimen, se aproximan a las de una teoría de campo sobre un espaciotiempo efectivo de fondo.

- Dinámica efectiva en cosmologías inhomogéneas:
 - El capítulo 5 sirve de transición entre las dos partes, puesto que en él se investiga la dinámica efectiva extrapolada para la cuantización híbrida del modelo FLRW con perturbaciones. En concreto, un análisis estadístico sobre trayectorias efectivas del sistema — integradas numéricamente— muestra una clara tendencia a la amplificación de las inhomogeneidades a través del régimen en el que se produce el rebote del universo. También se estudian los efectos de la reacción de las inhomogeneidades sobre el fondo en la prescripción específica adoptada.
 - El objetivo primordial del capítulo 6 es demostrar que la dinámica efectiva del modelo de Gowdy en el tres-toro con polarización lineal y un campo escalar sin masa como contenido material no da origen a singularidades cosmológicas. Para complementar este resultado, se analiza, principalmente de forma analítica, la posibilidad de que tenga lugar un rebote.

Finalmente, las conclusiones más destacadas del trabajo expuesto se recopilan en el capítulo 7.

Para aligerar la primera parte de la memoria, algunos detalles de la misma se han relegado a los apéndices. El apéndice A repasa algunas características de las autofunciones del operador de Laplace-Beltrami, utilizadas para expandir las inhomogeneidades en la construcción del modelo FLRW perturbado. La extensa expresión de la acción en ese modelo previa a la fijación de *gauge* se recoge en el apéndice B. Por último, el apéndice C explora una elección de *gauge* alternativa a la adoptada en la cuerpo de la memoria.

Cuantización de perturbaciones cosmológicas

Capítulo 2

Tratamiento clásico de perturbaciones cosmológicas

La teoría de perturbaciones cosmológicas, que describe la evolución de pequeñas perturbaciones —tanto métricas como materiales— sobre un espaciotiempo de fondo (habitualmente homogéneo e isotrópico), desempeña un papel fundamental en la explicación de la formación de estructura en el Universo. El origen de este enfoque puede atribuirse a E. M. Lifschitz [99], quien estudió por primera vez perturbaciones del tensor métrico en el modelo FLRW. En este formalismo, la interpretación física de los resultados se ve obstaculizada por la libertad en la elección de la correspondencia entre el espaciotiempo inhomogéneo y el ficticio que se utiliza de fondo. Distintas elecciones están relacionadas mediante *transformaciones gauge*, que en este contexto podemos entender como cambios perturbativos de coordenadas que no alteran el espaciotiempo de fondo. Las perturbaciones métricas y materiales pueden combinarse para construir cantidades invariantes *gauge*, como demostró J. M. Bardeen [100]. En particular, una de esas cantidades invariantes, la variable de Mukhanov-Sasaki [101, 102], es muy útil en la cuantización de perturbaciones durante la inflación cosmológica en un fondo clásico con secciones espaciales planas —entre otros motivos, por la sencillez de sus ecuaciones dinámicas y su relación directa con las perturbaciones comóviles de la curvatura—. Esta estrategia de construir invariantes *gauge* perturbativos goza de gran popularidad y ha sido extensamente utilizada (al respecto puede consultarse, por ejemplo, la revisión ya clásica [103]. Cabe mencionar, por otra parte, que también existe un formalismo explícitamente covariante para enfrentarse al problema de la libertad *gauge*, desarrollado por G. F. R. Ellis y M. Bruni [104]) a partir de trabajos previos de S. W. Hawking [105] y D. W. Olson [106].

La teoría de perturbaciones cosmológicas, aplicada a la Relatividad Ge-

neral, permite explicar la evolución de las inhomogeneidades hasta que abandonan el régimen lineal. Sin embargo, no aclara el origen de las mismas. Como se mencionó en la Introducción, una hipótesis económica que permite dar cuenta de ese origen y, al mismo tiempo, resolver algunos problemas del modelo cosmológico estándar es la inflación cosmológica [30, 29].

El modelo inflacionario que adoptaremos como partida del tratamiento perturbativo es un espaciotiempo FLRW con un campo escalar con masa mínimamente acoplado. Con vistas a la ulterior cuantización del sistema, adoptaremos el formalismo hamiltoniano, siguiendo el enfoque que desarrollaron J. J. Halliwell y S. W. Hawking para el caso concreto en el que las secciones espaciales de la geometría de fondo son homeomorfas a la tres-esfera [107]. No obstante, el estudio que presentamos aquí es más general, pues incluye en principio cualquier topología admisible para las secciones espaciales.

2.1. Caracterización del sistema

Como se ha mencionado, las secciones espaciales de un espaciotiempo exactamente homogéneo e isótropo están recubiertas por uno de los tres espacios tridimensionales de curvatura constante: elíptico, euclídeo o hiperbólico. Distinguiremos estas tres situaciones con un parámetro de curvatura, k , que tome en cada caso los valores $+1$, 0 y -1 . Esta notación permitirá un tratamiento muy general, aunque, en realidad, solo estudiaremos con detalle dos casos particulares, a saber, aquellos con secciones espaciales homeomorfas a la tres-esfera (con $k = +1$) y al tres-toro ($k = 0$), que son las variedades compactas más sencillas de esta clase.

Admitiendo la existencia de una foliación global del espaciotiempo, partimos de una descomposición $3 + 1$ de la métrica en la forma (1.1). A continuación, expresamos la función lapso N , el vector desplazamiento N_a y la tres-métrica h_{ab} en serie de armónicos, como llamaremos a las autofunciones del operador de Laplace-Beltrami asociado a una métrica fiducial ${}^0h_{ab}$ en Σ . Denotando la correspondiente conexión de Levi-Civita por ${}^0\nabla$, la ecuación de autovalores del operador de Laplace-Beltrami toma la forma

$${}^0h^{ab}{}^0\nabla_a{}^0\nabla_b Q_{n,l} = -\omega_n^2 Q_{n,l}. \quad (2.1)$$

Aquí, el número $n \in \mathbb{Z}^+$ etiqueta los autovalores, mientras que $l \in \{1, 2, \dots, g_n\}$ da cuenta de su degeneración, que depende de la variedad espacial concreta. Para aligerar la notación, representaremos el par (n, l) simplemente con \mathbf{n} siempre que esta notación no se preste a la ambigüedad. Los valores admisibles de ω_n^2 dependen de la variedad concreta, pero son en todo caso no

negativos. Asumiremos que están ordenados de forma que si $n_2 > n_1$, entonces $\omega_{n_2} > \omega_{n_1}$ (tomando $\omega_n \geq 0$). En particular, $\omega_0 = 0$, y las autofunciones asociadas —los *modos cero*— son constantes en Σ . Tomamos los armónicos escalares \tilde{Q}_n reales; puesto que esta no es la elección más frecuente en la literatura, los distinguimos con una tilde.

A partir de los armónicos escalares pueden construirse cantidades vectoriales $(\tilde{P}_a)_n$ mediante derivación covariante. Existen otras soluciones vectoriales a la ecuación (2.1), transversas, que denotaremos por $(\tilde{S}_a)_n$. Análogamente, derivando los armónicos escalares y vectoriales pueden obtenerse tensores simétricos $(\tilde{P}_{ab})_n$ y $(\tilde{S}_{ab})_n$ (respectivamente), a los que hay que añadir las soluciones trasversas y sin traza de la ecuación (2.1), $(\tilde{G}_{ab})_n$. Estas funciones constituyen bases ortogonales que permiten expandir en serie cualquier escalar, vector o tensor simétrico de cuadrado integrable (con respecto a la medida $\sqrt{^0h}d^3x$) en Σ . Una descripción más detallada de las mismas puede encontrarse en el apéndice A.

Así pues, desarrollamos las variables N , N_a y h_{ab} y el campo escalar Φ en las bases proporcionadas por los armónicos. Aunque la descomposición es exacta, resulta interesante conveniente los modos de autovalor cero con las variables del modelo homogéneo e isótropo, y asumir que el resto de modos supone una corrección perturbativa. Introduciremos un parámetro adimensional, ϵ , para facilitar la determinación del orden perturbativo de cada término. Así,

$$h_{ab}(t, x) = (\sigma e^{\alpha(t)})^2 \left[{}^0h_{ab}(x) \left(1 + 2\epsilon \sum_n a_n(t) \tilde{Q}_n(x) \right) + 6\epsilon \sum_n b_n(t) (\tilde{P}_{ab})_n(x) \right] \\ + 2\sqrt{3}\epsilon (\sigma e^{\alpha(t)})^2 \sum_n \left[c_n(t) (\tilde{S}_{ab})_n(x) + \sqrt{2}d_n(t) (\tilde{G}_{ab})_n(x) \right], \quad (2.2a)$$

$$N(t, x) = \sigma N_0(t) \left(1 + \epsilon \sum_n g_n(t) \tilde{Q}_n(x) \right), \quad (2.2b)$$

$$N_a(t, x) = \epsilon \sigma^2 e^{\alpha(t)} \sum_n \left[k_n(t) (\tilde{P}_a)_n(x) + 2\sqrt{3}l_n(t) (\tilde{S}_{ab})_n(x) \right], \quad (2.2c)$$

$$\Phi(t, x) = \frac{1}{l_0^{3/2}\sigma} \left(\varphi(t) + \epsilon \sum_n f_n(t) \tilde{Q}_n(x) \right), \quad (2.2d)$$

con $l_0^3 = \int_\Sigma d^3x \sqrt{^0h}$ y $\sigma^2 = \kappa/(6l_0^3)$. Estos factores se han introducido aquí para simplificar posteriormente la expresión de la acción. Cuando las inhomogeneidades, señaladas por el parámetro ϵ , se anulan, se recupera el modelo FLRW. Por ello, llamaremos a α , N_0 y φ *variables homogéneas*¹. Comparando

¹Conviene destacar, sin embargo, que N_0 no es una variable dinámica, puesto que, como veremos, desempeña el papel de multiplicador de Lagrange en la formulación hamiltoniana del sistema. Lo mismo puede decirse de los coeficientes N_0g_n , l_n y k_n .

con el elemento de línea dado en la ecuación (1.20), es fácil ver que el factor de escala es $a = \sigma e^\alpha$, mientras que el lapso homogéneo N_0 ha sido escalado por un factor σ . En cuanto a las inhomogeneidades, están completamente parametrizadas por los coeficientes de las series (de las que hemos excluido el modo cero): $a_n, b_n, c_n, d_n, f_n, g_n$ y k_n . Por contraposición, nos referiremos a ellos como las *variables inhomogéneas* o *perturbaciones*. En concreto, a_n, b_n, f_n, g_n y k_n son *perturbaciones escalares*, puesto que aparecen asociadas a los modos escalares del operador de Laplace-Beltrami. Siguiendo esta lógica, c_n y l_n se denominarán *perturbaciones vectoriales* y llamaremos *perturbaciones tensoriales* a las variables d_n .

El sector gravitatorio contribuye a la acción con el término dado por la ecuación (1.4). Por otra parte, la contribución del campo material, de masa m , es la integral sobre tiempo y espacio de la densidad lagrangiana

$$\mathcal{L}_{\text{mat}} = \frac{1}{2} N \sqrt{h} \left[\frac{1}{N^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)^2 - 2 \frac{N^a}{N^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \frac{\partial \Phi}{\partial x^a} - \left(h^{ab} - \frac{N^a N^b}{N^2} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial x^a} \frac{\partial \Phi}{\partial x^b} - m^2 \Phi^2 \right]. \quad (2.3)$$

Por hipótesis, al escribir en la acción las variables tal y como han sido parametrizadas en las ecuaciones (2.2), podemos desprestigiar los términos de orden elevado en ϵ . Dado que los términos lineales se anulan al integrarlos espacialmente, es necesario conservar al menos los términos cuadráticos. La acción resultante puede encontrarse en el apéndice B. Realizando la transformada de Legendre del lagrangiano correspondiente con respecto a las derivadas temporales de las variables homogéneas e inhomogéneas, obtenemos el hamiltoniano del sistema, que, por supuesto, es una combinación lineal de ligaduras:

$$H = N_0 \left[H_{|0} + \epsilon^2 \sum_{\mathbf{n}} \left({}^E H_{|2}^{\mathbf{n}} + {}^V H_{|2}^{\mathbf{n}} + {}^T H_{|2}^{\mathbf{n}} + g_{\mathbf{n}} {}^E H_{|1}^{\mathbf{n}} \right) \right] + \epsilon^2 \sum_{\mathbf{n}} \left(k_{\mathbf{n}} {}^E H_{-1}^{\mathbf{n}} + l_{\mathbf{n}} {}^V H_{-1}^{\mathbf{n}} \right) + O(\epsilon^3), \quad (2.4)$$

en las que $N_0, N_0 g_{\mathbf{n}}, k_{\mathbf{n}}$ y $l_{\mathbf{n}}$ aparecen como multiplicadores de Lagrange. Los subíndices de los términos de la expresión anterior indican su relación con la función lapso (raya horizontal) o el vector desplazamiento (raya vertical); además, dan cuenta de su orden como polinomio de las perturbaciones. En cuanto a las etiquetas E, V y T, informan de la naturaleza de las perturbaciones que contribuyen a cada término: escalares, vectoriales o tensoriales, respectivamente. De la estructura del hamiltoniano, se infiere que los diferentes tipos de modos están dinámicamente desacoplados a primer orden; no podía ser de otra manera, habida cuenta de la ortogonalidad de los armónicos.

Como puede verse en el desglose dado en la última ecuación, el modo cero de la ligadura hamiltoniana (asociado a N_0) consta de términos cuadráticos en las perturbaciones, que corrigen lo que en ausencia de inhomogeneidades sería la ligadura de un espaciotiempo FLRW. Por otro lado, aparecen ligaduras lineales en las variables inhomogéneas, que están asociadas a las perturbaciones de la función lapso y el vector desplazamiento y generan, respectivamente, los difeomorfismos infinitesimales temporales y espaciales (respectivamente). Estas transformaciones *gauge* del sistema truncado se estudiarán con algo más de detalle en la sección 2.3.

Llamando π_{q_0} al momento canónicamente conjugado a la variable homogénea genérica q_0 , y $\epsilon\pi_{q_n}$, al de la variable inhomogénea ϵq_n , las expresiones explícitas de los términos que intervienen en la ligadura son

$$H_{|0} = \frac{1}{2}e^{-3\alpha}(-\pi_\alpha^2 + \pi_\varphi^2 + e^{6\alpha}\tilde{m}^2\varphi^2 - ke^{4\alpha}), \quad (2.5a)$$

$$\begin{aligned} {}^E H_{|2}^n = \frac{1}{2}e^{-3\alpha} & \left\{ -\pi_{a_n}^2 + \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2 - 3k}\pi_{b_n}^2 + \pi_{f_n}^2 + 2\pi_\alpha a_n \pi_{a_n} + 8\pi_\alpha b_n \pi_{b_n} - 6\pi_\varphi a_n \pi_{f_n} \right. \\ & + \frac{1}{6} \left[3\pi_\alpha^2 + 45\pi_\varphi^2 + 9e^{6\alpha}\tilde{m}^2\varphi^2 - 2\left(\omega_n^2 - \frac{3k}{2}\right)e^{4\alpha} \right] a_n^2 \\ & + \frac{\omega_n^2 - 3k}{3\omega_n^2} \left(30\pi_\alpha^2 + 18\pi_\varphi^2 - 18e^{6\alpha}\tilde{m}^2\varphi^2 - [\omega_n^2 - 6(3-2k)]e^{4\alpha} \right) b_n^2 \\ & \left. + e^{4\alpha}(\omega_n^2 + e^{2\alpha}\tilde{m}^2)f_n^2 - \frac{2}{3}(\omega_n^2 - 3k)e^{4\alpha}a_n b_n + 6e^{6\alpha}\tilde{m}^2\varphi a_n f_n \right\}, \end{aligned} \quad (2.5b)$$

$$\begin{aligned} {}^V H_{|2}^n = \frac{1}{2}e^{-3\alpha} & \left\{ \frac{1}{V\omega_n^2 - 2k}\pi_{c_n}^2 + 8\pi_\alpha c_n \pi_{c_n} + 2(V\omega_n^2 - 2k)(5\pi_\alpha^2 + 3\pi_\varphi^2)c_n^2 \right. \\ & \left. + 2(V\omega_n^2 - 2k)[-3e^{6\alpha}\tilde{m}^2\varphi^2 + (3-2k)e^{4\alpha}]c_n^2 \right\}, \end{aligned} \quad (2.5c)$$

$$\begin{aligned} {}^T H_{|2}^n = \frac{1}{2}e^{-3\alpha} & \left\{ \pi_{d_n}^2 + 8\pi_\alpha d_n \pi_{d_n} + 2(5\pi_\alpha^2 + 3\pi_\varphi^2 - 3e^{6\alpha}\tilde{m}^2\varphi^2)d_n^2 \right. \\ & \left. + ({}^T\omega_n^2 + 6 - 2k)e^{4\alpha}d_n^2 \right\}, \end{aligned} \quad (2.5d)$$

$$\begin{aligned} {}^E H_{|1}^n = \frac{1}{2}e^{-3\alpha} & \left\{ -2\pi_\alpha \pi_{a_n} + 2\pi_\varphi \pi_{f_n} - (\pi_\alpha^2 + 3\pi_\varphi^2 - 3e^{6\alpha}\tilde{m}^2\varphi^2)a_n \right. \\ & \left. - \frac{2}{3}e^{4\alpha} \left[\left(\omega_n^2 + \frac{3k}{2}\right)a_n + (\omega_n^2 - 3k)b_n \right] + 2e^{6\alpha}\tilde{m}^2\varphi^2 f_n \right\}, \end{aligned} \quad (2.5e)$$

$${}^E H_{-1}^n = \frac{1}{3}e^{-\alpha} \left[-\pi_{a_n} + \pi_{b_n} + 3\pi_\varphi f_n + \pi_\alpha \left(a_n + 4\frac{\omega_n^2 - 3k}{\omega_n^2} b_n \right) \right], \quad (2.5f)$$

$${}^V H_{-1}^n = e^{-\alpha} \left[\pi_{c_n} + 4({}^V \omega_n^2 - 2k) \pi_\alpha c_n \right], \quad (2.5g)$$

con $\tilde{m} = \sigma m$. Hemos distinguido los autovalores de los modos vectoriales y tensoriales con etiquetas V y T.

2.2. Fijación de *gauge*. Variables adaptadas

Como es bien sabido, la presencia de ligaduras en un sistema indica la existencia de grados de libertad no físicos. Debido a su carácter lineal en las perturbaciones, resulta fácil fijar las ligaduras locales ${}^E H_{|1}^n$, ${}^E H_{-1}^n$ y ${}^V H_{-1}^n$. Esto deja solamente cuatro grados de libertad para cada modo (n, l) : un par escalar y otro tensorial. Las perturbaciones vectoriales son puro *gauge*², y podemos imponer su anulación. Por el contrario, las perturbaciones tensoriales son invariantes *gauge*, ya que no están sometidas a ninguna ligadura lineal. Para las perturbaciones escalares, elegimos el *gauge* conocido como *longitudinal*, en el que b_n y k_n se anulan. Sin embargo, la anulación de k_n no puede imponerse directamente porque conmuta con las ligaduras. En consecuencia, utilizamos las siguientes condiciones de fijación de *gauge*:

$$0 = \pi_{a_n} - \pi_\alpha a_n - 3\pi_\phi f_n := K_n, \quad (2.6a)$$

$$0 = b_n, \quad (2.6b)$$

$$0 = c_n, \quad (2.6c)$$

para cada modo. Para ser admisibles, estas ligaduras adicionales deben ser de segunda clase (en la clasificación de P. A. M. Dirac [8]) con respecto a las ligaduras que se busca fijar. Lo comprobamos calculando el determinante

$$\epsilon^6 \det \begin{pmatrix} \{K_n, {}^E H_{|1}^n\} & \{b_n, {}^E H_{|1}^n\} & \{c_n, {}^E H_{|1}^n\} \\ \{K_n, {}^E H_{-1}^n\} & \{b_n, {}^E H_{-1}^n\} & \{c_n, {}^E H_{-1}^n\} \\ \{K_n, {}^V H_{-1}^n\} & \{b_n, {}^V H_{-1}^n\} & \{c_n, {}^V H_{-1}^n\} \end{pmatrix} \approx \frac{1}{9} e^{-\alpha} (\omega_n^2 - 3k), \quad (2.7)$$

donde el signo \approx denota la evaluación en la hipersuperficie en la que tanto las ligaduras como las condiciones de fijación de *gauge* se satisfacen. Puesto que este determinante es distinto de cero (salvo en el límite $\alpha \rightarrow -\infty$), las condiciones son de segunda clase e independientes. Por consiguiente, el requisito de su consistencia dinámica produce ligaduras secundarias (de nuevo en la terminología de P. A. M. Dirac),

$$0 = \{\epsilon K_n, H\} \approx \frac{1}{3} (\omega_n^2 - 3k) N_0 e^\alpha (a_n + g_n) + O(\epsilon), \quad (2.8a)$$

²Sin embargo, no sería así si el contenido material aportara grados de libertad vectoriales adicionales, como ocurriría, por ejemplo, con un fluido perfecto perturbado.

$$0 = \{\epsilon b_{\mathbf{n}}, H\} \approx \frac{\omega_{\mathbf{n}}^2}{\omega_{\mathbf{n}}^2 - 3k} N_0 e^{-3\alpha} \pi_{b_{\mathbf{n}}} + \frac{1}{3} e^{-\alpha} k_{\mathbf{n}} + O(\epsilon), \quad (2.8b)$$

$$0 = \{\epsilon c_{\mathbf{n}}, H\} = e^{-\alpha} l_{\mathbf{n}} + O(\epsilon), \quad (2.8c)$$

que fijan el valor de los multiplicadores de Lagrange asociados a la libertad *gauge* que estamos fijando. Así, en el sistema reducido, y hasta el orden perturbativo considerado, $g_{\mathbf{n}} = -a_{\mathbf{n}}$, $k_{\mathbf{n}}$ depende linealmente de $\pi_{b_{\mathbf{n}}}$ y $l_{\mathbf{n}} = 0$. Ahora bien, de la anulación de ${}^E H_{-1}^{\mathbf{n}}$ y $K_{\mathbf{n}}$, se sigue que $\pi_{b_{\mathbf{n}}} \approx 0$, por lo que las variables $k_{\mathbf{n}}$, y con ellas, el vector desplazamiento, deben ser cero en este *gauge*, como esperábamos. Por otra parte, imponiendo la ligadura ${}^E H_{|1}^{\mathbf{n}}$, se tiene que

$$a_{\mathbf{n}} \approx 3 \frac{\pi_{\varphi} \pi_{f_{\mathbf{n}}} + (e^{6\alpha} \tilde{m}^2 \varphi - 3\pi_{\alpha} \pi_{\varphi}) f_{\mathbf{n}}}{9\pi_{\varphi}^2 + (\omega_{\mathbf{n}}^2 - 3k)e^{4\alpha}} + O(\epsilon^2), \quad (2.9)$$

lo que, junto con la expresión para $\pi_{a_{\mathbf{n}}}$ que se obtiene de la condición $K_{\mathbf{n}} \approx 0$, permite escribir la ligadura hamiltoniana —la única restante— en términos de las variables homogéneas, las perturbaciones del campo escalar, $f_{\mathbf{n}}$, las perturbaciones tensoriales $d_{\mathbf{n}}$ y sus momentos. Hay que tener en cuenta, no obstante, que tras la reducción, y a consecuencia de ella, estas variables no son coordenadas canónicas, lo que puede remediarse reemplazando α , φ y $\pi_{f_{\mathbf{n}}}$ por las nuevas variables

$$\tilde{\alpha} := \alpha + \frac{\epsilon^2}{2} \sum_{\mathbf{n}} a_{\mathbf{n}}^2, \quad (2.10a)$$

$$\tilde{\varphi} := \varphi + 3\epsilon^2 \sum_{\mathbf{n}} a_{\mathbf{n}} f_{\mathbf{n}}, \quad (2.10b)$$

$$\tilde{\pi}_{f_{\mathbf{n}}} := \pi_{f_{\mathbf{n}}} - 3\pi_{\varphi} a_{\mathbf{n}}, \quad (2.10c)$$

con $a_{\mathbf{n}}$ dado por la ecuación (2.9). La comprobación de que estas variables son canónicas en el sistema reducido puede hacerse a partir de la acción, escrita en términos del hamiltoniano de la forma

$$S = \int_{\mathbb{R}} dt \left(\sum_{q_0} \frac{dq_0}{dt} \pi_{q_0} + \epsilon^2 \sum_{q_{\mathbf{n}}} \frac{dq_{\mathbf{n}}}{dt} \pi_{q_{\mathbf{n}}} - H \right), \quad (2.11)$$

Como anteriormente, q_0 denota genéricamente cualquier variable de configuración homogénea, mientras que $q_{\mathbf{n}}$ representa las inhomogéneas. Los sumatorios de la ecuación anterior se extienden a todas las variables de configuración del modelo; esos términos caracterizan por tanto la estructura simpléctica del modelo. Pues bien, sobre la superficie de fijación de *gauge*, se satisface

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}\pi_\alpha + \dot{\varphi}\pi_\varphi + \epsilon^2 \sum_{\mathbf{n}} (\dot{a}_{\mathbf{n}}\pi_{a_{\mathbf{n}}} + \dot{f}_{\mathbf{n}}\pi_{f_{\mathbf{n}}} + \dot{d}_{\mathbf{n}}\pi_{d_{\mathbf{n}}}) \\ \approx \dot{\tilde{\alpha}}\pi_\alpha + \dot{\tilde{\varphi}}\pi_\varphi + \epsilon^2 \sum_{\mathbf{n}} (\dot{f}_{\mathbf{n}}\tilde{\pi}_{f_{\mathbf{n}}} + \dot{d}_{\mathbf{n}}\pi_{d_{\mathbf{n}}}) + \dot{f}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

siendo f una función de las variables del espacio de fases cuya aparición en la acción es irrelevante, al aparecer derivada con respecto al tiempo. Esto basta para probar que las nuevas variables son coordenadas canónicas. Es de destacar que $\tilde{\alpha}$ y $\tilde{\varphi}$ difieren de α y φ tan solo en términos subdominantes, cuadráticos en las inhomogeneidades. No obstante, sin ellos no habría sido posible diagonalizar la estructura simpléctica en el sistema reducido.

La única ligadura superviviente, la hamiltoniana, adopta la estructura

$$H = N_0 \left[\tilde{H}_{|0} + \epsilon^2 \sum_{\mathbf{n}} \left({}^E\tilde{H}_{|2}^{\mathbf{n}} + {}^T\tilde{H}_{|2}^{\mathbf{n}} \right) \right] + O(\epsilon^3). \quad (2.13)$$

El término de orden cero $\tilde{H}_{|0}$ tiene la misma forma que antes de la reducción —dada por la ecuación (2.5a)—, sustituyendo α y φ por sus homólogas con tilde. Del mismo modo puede obtenerse la expresión de ${}^T\tilde{H}_{|2}^{\mathbf{n}}$ a partir de la ecuación (2.5d); la reescribiremos de la forma

$${}^T\tilde{H}_{|2}^{\mathbf{n}} = \frac{1}{2} e^{-\tilde{\alpha}} \left({}^T\tilde{E}_{\pi\pi}^{\mathbf{n}} \tilde{\pi}_{d_{\mathbf{n}}}^2 + 2 {}^T\tilde{E}_{q\pi}^{\mathbf{n}} d_{\mathbf{n}} \tilde{\pi}_{d_{\mathbf{n}}} + {}^T\tilde{E}_{qq}^{\mathbf{n}} d_{\mathbf{n}}^2 \right), \quad (2.14)$$

donde

$${}^T\tilde{E}_{\pi\pi}^{\mathbf{n}} = e^{-2\tilde{\alpha}}, \quad (2.15a)$$

$${}^T\tilde{E}_{q\pi}^{\mathbf{n}} = 4e^{-2\tilde{\alpha}} \pi_\alpha, \quad (2.15b)$$

$${}^T\tilde{E}_{qq}^{\mathbf{n}} = \left(\omega_{\mathbf{n}}^2 + 6 \right) e^{2\tilde{\alpha}} + 2e^{-2\tilde{\alpha}} \left(5\pi_\alpha^2 + 3\pi_\varphi^2 - 3e^{6\tilde{\alpha}} \tilde{m}^2 \tilde{\varphi}^2 - k e^{4\tilde{\alpha}} \right). \quad (2.15c)$$

La obtención del término de la ligadura cuadrático en las perturbaciones escalares no es tan directa, pues hay que tener en cuenta las contribuciones que producen las correcciones cuadráticas de las variables homogéneas en el término de orden cero. Con esta precaución, el resultado puede escribirse como

$${}^E\tilde{H}_{|2}^{\mathbf{n}} = \frac{1}{2} e^{-\tilde{\alpha}} \left({}^E\tilde{E}_{\pi\pi}^{\mathbf{n}} \tilde{\pi}_{f_{\mathbf{n}}}^2 + 2 {}^E\tilde{E}_{q\pi}^{\mathbf{n}} f_{\mathbf{n}} \tilde{\pi}_{f_{\mathbf{n}}} + {}^E\tilde{E}_{qq}^{\mathbf{n}} f_{\mathbf{n}}^2 \right), \quad (2.16)$$

con los coeficientes

$${}^E\tilde{E}_{\pi\pi}^{\mathbf{n}} = e^{-2\tilde{\alpha}} \left(1 - \frac{3e^{-4\tilde{\alpha}}}{\omega_{\mathbf{n}}^2 - 3k} \pi_\varphi^2 \right), \quad (2.17a)$$

$${}^E\tilde{E}_{q\pi}^{\mathbf{n}} = -\frac{3e^{-6\tilde{\alpha}}}{\omega_{\mathbf{n}}^2 - 3k} \pi_\varphi \left(e^{6\tilde{\alpha}} \tilde{m}^2 \tilde{\varphi} - 3\pi_\alpha \pi_\varphi \right), \quad (2.17b)$$

$${}^E\tilde{E}_{qq}^n = \omega_n^2 e^{2\tilde{\alpha}} + \tilde{m}^2 e^{4\tilde{\alpha}} - 9e^{-2\tilde{\alpha}} \pi_\varphi^2 - \frac{3e^{-6\tilde{\alpha}}}{\omega_n^2 - 3k} (e^{6\tilde{\alpha}} \tilde{m}^2 \tilde{\varphi} - 3\pi_\alpha \pi_\varphi)^2. \quad (2.17c)$$

Es muy frecuente en los trabajos sobre perturbaciones cosmológicas realizar un escalado de las perturbaciones (tanto escalares como tensoriales) por el factor de escala del fondo, lo que simplifica considerablemente las ecuaciones de movimiento de las mismas. Nosotros hemos efectuado este escalado como parte de una transformación canónica del sistema completo, incluyendo el sector homogéneo. Existe una libertad para elegir los nuevos momentos de las perturbaciones que aprovechamos para eliminar los términos cruzados que acoplan configuración y momento de las inhomogeneidades en la ligadura, o al menos garantizar su carácter subdominante en el límite ultravioleta, en el que $\omega_n \rightarrow \infty$. Comprobaremos la importancia de este cambio en la sección 3, donde se explica cómo gracias a él puede construirse una cuantización de Fock privilegiada de las perturbaciones que es esencialmente única bajo ciertos requisitos de simetría y unitariedad que detallaremos. Las expresiones de las nuevas variables, que distinguimos con una raya horizontal sobre ellas, son estas:

$$\bar{\alpha} := \tilde{\alpha} + \frac{\epsilon^2}{2} \sum_{\mathbf{n}} (f_{\mathbf{n}}^2 - 3d_{\mathbf{n}}^2) = \alpha + \frac{\epsilon^2}{2} \sum_{\mathbf{n}} (a_{\mathbf{n}}^2 + f_{\mathbf{n}}^2 - 3d_{\mathbf{n}}^2), \quad (2.18a)$$

$$\begin{aligned} \pi_{\bar{\alpha}} &:= \pi_\alpha - \epsilon^2 \sum_{\mathbf{n}} (f_{\mathbf{n}} \tilde{\pi}_{f_{\mathbf{n}}} - \pi_\alpha f_{\mathbf{n}}^2 + d_{\mathbf{n}} \pi_{d_{\mathbf{n}}} - 3\pi_\alpha d_{\mathbf{n}}^2) \\ &= \pi_\alpha - \epsilon^2 \sum_{\mathbf{n}} (f_{\mathbf{n}} \pi_{f_{\mathbf{n}}} - 3\pi_\varphi a_{\mathbf{n}} f_{\mathbf{n}} - \pi_\alpha f_{\mathbf{n}}^2 + d_{\mathbf{n}} \pi_{d_{\mathbf{n}}} - 3\pi_\alpha d_{\mathbf{n}}^2), \end{aligned} \quad (2.18b)$$

$$\bar{\varphi} := \tilde{\varphi} = \varphi + 3\epsilon^2 \sum_{\mathbf{n}} a_{\mathbf{n}} f_{\mathbf{n}}, \quad (2.18c)$$

$$\pi_{\bar{\varphi}} := \pi_\varphi, \quad (2.18d)$$

$$\bar{f}_{\mathbf{n}} := e^\alpha f_{\mathbf{n}}, \quad (2.18e)$$

$$\pi_{\bar{f}_{\mathbf{n}}} := e^{-\alpha} (\tilde{\pi}_{f_{\mathbf{n}}} - \pi_\alpha f_{\mathbf{n}}) = e^{-\alpha} (\pi_{f_{\mathbf{n}}} - 3\pi_\varphi a_{\mathbf{n}} - \pi_\alpha f_{\mathbf{n}}), \quad (2.18f)$$

$$\bar{d}_{\mathbf{n}} := e^\alpha d_{\mathbf{n}}, \quad (2.18g)$$

$$\pi_{\bar{d}_{\mathbf{n}}} := e^{-\alpha} (\pi_{d_{\mathbf{n}}} + 3\pi_\alpha d_{\mathbf{n}}). \quad (2.18h)$$

Recordemos que $a_{\mathbf{n}}$ está dada por la ecuación (2.9), o, en términos de las nuevas variables con raya,

$$a_{\mathbf{n}} \approx \frac{3e^{-4\tilde{\alpha}}}{\omega_n^2 - 3k} [e^{\tilde{\alpha}} \pi_{\bar{\varphi}} \pi_{\bar{f}_{\mathbf{n}}} + e^{-\tilde{\alpha}} (e^{6\tilde{\alpha}} \tilde{m}^2 \tilde{\varphi} - 2\pi_{\tilde{\alpha}} \pi_{\bar{\varphi}}) \bar{f}_{\mathbf{n}}] + O(\epsilon^2). \quad (2.19)$$

De nuevo, encontramos que las variables homogéneas originales necesitan ser corregidas con términos cuadráticos en las perturbaciones para garantizar que la transformación sea canónica hasta el orden perturbativo

relevante (a pesar de eso, continuaremos refiriéndonos a $\bar{\alpha}$, $\bar{\varphi}$ y sus momentos como *variables homogéneas*). Es evidente que este cambio no altera la estructura (2.13) del hamiltoniano, que sigue constando de un término dominante $\bar{H}_{|0}$ y correcciones de segundo orden en las perturbaciones escalares y tensoriales, suma de las contribuciones de cada modo, que denotamos por ${}^E\bar{H}_{|2}^n$ y ${}^T\bar{H}_{|2}^n$. Para obtener $\bar{H}_{|0}$, basta con sustituir en la ecuación (2.5a) las variables homogéneas originales por las correspondientes variables con raya. En cuanto a ${}^E\bar{H}_{|2}^n$ y ${}^T\bar{H}_{|2}^n$, pueden descomponerse con la estructura que presentan las ecuaciones (2.14) y (2.16), con los coeficientes

$${}^T\bar{E}_{\pi\pi}^n = 1, \quad (2.20a)$$

$${}^T\bar{E}_{q\pi}^n = 0, \quad (2.20b)$$

$${}^T\bar{E}_{qq}^n = {}^T\omega_n^2 + 6 + \frac{1}{2}e^{-4\bar{\alpha}}(-\pi_{\bar{\alpha}}^2 + 3\pi_{\bar{\varphi}}^2 - 3e^{6\bar{\alpha}}\tilde{m}^2\bar{\varphi}^2 - 7ke^{4\bar{\alpha}}), \quad (2.20c)$$

para las perturbaciones tensoriales, y

$${}^E\bar{E}_{\pi\pi}^n = 1 - \frac{3e^{-4\bar{\alpha}}}{\omega_n^2 - 3k}\pi_{\bar{\varphi}}^2, \quad (2.21a)$$

$${}^E\bar{E}_{q\pi}^n = -\frac{3e^{-6\bar{\alpha}}}{\omega_n^2 - 3k}\pi_{\bar{\varphi}}(e^{6\bar{\alpha}}\tilde{m}^2\bar{\varphi} - 2\pi_{\bar{\alpha}}\pi_{\bar{\varphi}}), \quad (2.21b)$$

$$\begin{aligned} {}^E\bar{E}_{qq}^n &= \omega_n^2 + \tilde{m}^2e^{2\bar{\alpha}} - \frac{1}{2}e^{-4\bar{\alpha}}(\pi_{\bar{\alpha}}^2 + 15\pi_{\bar{\varphi}}^2 + 3e^{6\bar{\alpha}}\tilde{m}^2\bar{\varphi}^2 - ke^{4\bar{\alpha}}) \\ &\quad - \frac{3e^{-8\bar{\alpha}}}{\omega_n^2 - 3k}(e^{6\bar{\alpha}}\tilde{m}^2\bar{\varphi} - 2\pi_{\bar{\alpha}}\pi_{\bar{\varphi}})^2, \end{aligned} \quad (2.21c)$$

para las escalares.

Llegados a este punto, es sencillo calcular las ecuaciones de movimiento de las nuevas variables tomando sus corchetes de Dirac con la ligadura hamiltoniana. Por ejemplo,

$$\dot{\bar{\alpha}} = -e^{-2\bar{\alpha}}\pi_{\bar{\alpha}} + O(\epsilon^2), \quad \dot{\pi}_{\bar{\alpha}} = \frac{e^{-2\bar{\alpha}}}{2}(-3\pi_{\bar{\alpha}}^2 + 3\pi_{\bar{\varphi}}^2 - 3e^{6\bar{\alpha}}\tilde{m}^2\bar{\varphi}^2 + ke^{4\bar{\alpha}}) + O(\epsilon^2), \quad (2.22a)$$

$$\dot{\bar{\varphi}} = e^{-2\bar{\alpha}}\pi_{\bar{\varphi}} + O(\epsilon^2), \quad \dot{\pi}_{\bar{\varphi}} = -e^{-4\bar{\alpha}}\tilde{m}^2\bar{\varphi} + O(\epsilon^2), \quad (2.22b)$$

donde el punto sobre las variables denota la derivada con respecto al tiempo conforme η , definido por $d\eta = N_0e^{-\alpha}dt$. Para las perturbaciones tensoriales escaladas tenemos

$$\dot{\bar{d}}_n = \pi_{\bar{d}_n} + O(\epsilon), \quad (2.23a)$$

$$\dot{\pi}_{\bar{d}_n} = -{}^T\bar{E}_{qq}^n \bar{d}_n + O(\epsilon), \quad (2.23b)$$

que, usando también las ecuaciones de Hamilton de las variables homogéneas (2.22), se combinan en la igualdad

$$\ddot{\bar{d}}_n + {}^T\bar{E}_{qq}^n \bar{d}_n = O(\epsilon). \quad (2.24)$$

Dada la forma (2.20c) de ${}^T\bar{E}_{qq}^n$, esta expresión puede interpretarse como una ecuación de Klein-Gordon con una masa que depende del tiempo a través de las variables homogéneas. La sencillez de esta ecuación justifica el escalado (2.18g) del campo por el factor de escala de la geometría de fondo, mientras que su momento conjugado (2.18h) fue escogido para satisfacer la relación (2.23a).

La evolución de las perturbaciones escaladas del campo material, por otra parte, está gobernada por

$$\dot{\bar{f}}_n = {}^E\bar{E}_{\pi\pi}^n \pi_{\bar{f}_n} + {}^E\bar{E}_{q\pi}^n \bar{f}_n + O(\epsilon), \quad (2.25a)$$

$$\dot{\pi}_{\bar{f}_n} = -{}^E\bar{E}_{q\pi}^n \pi_{\bar{f}_n} - {}^E\bar{E}_{qq}^n \bar{f}_n + O(\epsilon). \quad (2.25b)$$

Como puede verse, en este caso el momento $\pi_{\bar{f}_n}$ no coincide con la derivada temporal de su correspondiente variable de configuración, aunque sí en el límite ultravioleta. En efecto, la ecuación (2.25a) puede recomponerse en la forma

$$\pi_{\bar{f}_n} = (1 + p_n) \dot{\bar{f}}_n + q_n \bar{f}_n, \quad (2.26)$$

donde p_n y q_n son funciones de las variables homogéneas cuyo valor puede inferirse de inmediato al comparar las ecuaciones anteriores, aunque, a efectos prácticos, sólo necesitaremos saber que decaen al menos como ω_n^{-2} al crecer ω_n y son, por ende, despreciables para ω_n suficientemente grande. Por supuesto, esto es consecuencia de la elección del momento (2.18f). Las correcciones subdominantes podrían haberse eliminado completamente con una transformación canónica dependiente del modo, es decir, no local, lo que en principio preferimos evitar para no enturbiar la interpretación física de las variables.

Las ecuaciones de Hamilton (2.25) pueden combinarse en una sola ecuación de segundo orden para \bar{f}_n ,

$$\ddot{\bar{f}}_n - \frac{{}^E\dot{\bar{E}}_{\pi\pi}^n}{{}^E\bar{E}_{\pi\pi}^n} \dot{\bar{f}}_n + \left({}^E\bar{E}_{qq}^n {}^E\bar{E}_{\pi\pi}^n - ({}^E\bar{E}_{q\pi}^n)^2 - {}^E\dot{\bar{E}}_{q\pi}^n + \frac{{}^E\dot{\bar{E}}_{\pi\pi}^n}{{}^E\bar{E}_{\pi\pi}^n} {}^E\bar{E}_{q\pi}^n \right) \bar{f}_n = O(\epsilon), \quad (2.27)$$

que escribiremos de la forma más clara

$$\ddot{\bar{f}}_n + r_n \dot{\bar{f}}_n + (\omega_n^2 + s + s_n) \bar{f}_n = O(\epsilon). \quad (2.28)$$

Las funciones r_n , s y s_n , combinaciones de las variables homogéneas, se infieren identificando los coeficientes de una y otra expresión, teniendo en cuenta que el factor que multiplica a \bar{f}_n en la ecuación (2.27) se ha separado en tres sumandos: el valor absoluto del autovalor del operador de Laplace-Beltrami, ω_n^2 ; un término independiente de la frecuencia, s , y contribuciones subdominantes en el ultravioleta, que son del orden de ω_n^{-2} y han sido agrupadas bajo el símbolo s_n . En particular,

$$s = \tilde{m}^2 e^{2\bar{\alpha}} - \frac{1}{2} e^{-4\bar{\alpha}} (\pi_{\bar{\alpha}}^2 + 21\pi_{\bar{\varphi}}^2 + 3e^{6\bar{\alpha}} \tilde{m}^2 \bar{\varphi}^2 - k e^{4\bar{\alpha}}). \quad (2.29)$$

No necesitaremos conocer la expresión explícita de r_n y s_n . Bastará con saber que, gracias al escalado del campo (2.18e), r_n es también subdominante en el ultravioleta (concretamente, del orden de ω_n^{-2}). Por tanto, en el límite $\omega_n \rightarrow \infty$, la ecuación de movimiento (2.28) es de tipo Klein-Gordon con una masa que depende del tiempo a través de las variables homogéneas. Esta característica tendrá un papel fundamental en la cuantización de Fock de las perturbaciones escalares, como se justificará en la sección 3.

La expresión de la métrica en términos de las variables con raya puede no resultar evidente después de la fijación de *gauge* y la transformación canónica. Por eso se incluye a continuación, hasta orden lineal en las perturbaciones:

$$h_{ab} \approx (\sigma e^{\bar{\alpha}})^2 \left[{}^0h_{ab} \left(1 + 2\epsilon \sum_{\mathbf{n}} a_{\mathbf{n}} \tilde{Q}_{\mathbf{n}} \right) + 2\sqrt{6}\epsilon \sum_{\mathbf{n}} d_{\mathbf{n}} (\tilde{G}_{ab})_{\mathbf{n}} \right] + O(\epsilon^2), \quad (2.30a)$$

$$N \approx \sigma N_0 \left(1 - \epsilon \sum_{\mathbf{n}} a_{\mathbf{n}} \tilde{Q}_{\mathbf{n}} \right) + O(\epsilon^2), \quad (2.30b)$$

$$N_a \approx O(\epsilon^2), \quad (2.30c)$$

$$\Phi = \frac{1}{l_0^{3/2} \sigma} \left(\bar{\varphi} + \epsilon e^{-\bar{\alpha}} \sum_{\mathbf{n}} \bar{f}_{\mathbf{n}} \tilde{Q}_{\mathbf{n}} \right) + O(\epsilon^2). \quad (2.30d)$$

Conviene recordar que $a_{\mathbf{n}}$ está dada en función de las demás variables por la ecuación (2.19). Como vemos, el vector desplazamiento se anula hasta el orden perturbativo considerado, como corresponde al *gauge* longitudinal.

2.3. Invariantes *gauge*

Incluso en el análisis de perturbaciones cosmológicas dentro del marco de la física clásica, la elección de *gauge* presenta el inconveniente de oscurecer la interpretación de los resultados, dado que es difícil discernir en qué medida están condicionados por dicha elección concreta. Como se ha comentado, J. M. Bardeen propuso resolver este problema considerando solamente cantidades independientes de ella [100].

En este contexto, se entiende una transformación *gauge* como un desplazamiento perturbativo de las coordenadas, $\xi^\alpha \mapsto x^\alpha + \epsilon \xi^\alpha$, que deja fijo el espaciotiempo de fondo del que parte el análisis perturbativo. Usando, como antes, la base de armónicos en Σ , podemos escribir las componentes del covector ξ_α en la forma

$$\xi_0 = \sigma^2 N_0 \sum_{\mathbf{n}} t_{\mathbf{n}} \tilde{Q}_{\mathbf{n}}, \quad (2.31a)$$

$$\xi_a = \sigma^2 e^\alpha \sum_{\mathbf{n}} [y_{\mathbf{n}} (\tilde{P}_a)_{\mathbf{n}} + 2\sqrt{3} z_{\mathbf{n}} (\tilde{S}_a)_{\mathbf{n}}], \quad (2.31b)$$

donde los coeficientes de la expansión, $t_{\mathbf{n}}$, $y_{\mathbf{n}}$ y $z_{\mathbf{n}}$ dependen únicamente del tiempo. Por supuesto, bajo una transformación de este tipo, la función lapso, el vector desplazamiento y la tres-métrica cambian, lo que se refleja en los coeficientes de sus respectivas expansiones en armónicos, dadas en las ecuaciones (2.2). Concretamente, a primer orden perturbativo, el efecto es el siguiente:

$$a_{\mathbf{n}} \mapsto a_{\mathbf{n}} + e^{-\alpha} (\dot{\alpha} t_{\mathbf{n}} + \frac{1}{3} \dot{y}_{\mathbf{n}}), \quad (2.32a)$$

$$b_{\mathbf{n}} \mapsto b_{\mathbf{n}} - \frac{1}{3} e^{-\alpha} \dot{y}_{\mathbf{n}}, \quad (2.32b)$$

$$c_{\mathbf{n}} \mapsto c_{\mathbf{n}} - e^{-\alpha} \dot{z}_{\mathbf{n}}, \quad (2.32c)$$

$$d_{\mathbf{n}} \mapsto d_{\mathbf{n}}, \quad (2.32d)$$

$$f_{\mathbf{n}} \mapsto f_{\mathbf{n}} + e^{-\alpha} \dot{\varphi} t_{\mathbf{n}}, \quad (2.32e)$$

$$g_{\mathbf{n}} \mapsto g_{\mathbf{n}} + e^{-\alpha} \dot{t}_{\mathbf{n}}, \quad (2.32f)$$

$$k_{\mathbf{n}} \mapsto k_{\mathbf{n}} - N_0 e^{-\alpha} (\omega_{\mathbf{n}}^2 t_{\mathbf{n}} + \dot{y}_{\mathbf{n}} - \dot{\alpha} y_{\mathbf{n}}). \quad (2.32g)$$

$$l_{\mathbf{n}} \mapsto l_{\mathbf{n}} - N_0 e^{-\alpha} (\dot{z}_{\mathbf{n}} - \dot{\alpha} z_{\mathbf{n}}). \quad (2.32h)$$

Al primer golpe de vista, los modos tensoriales $d_{\mathbf{n}}$ destacan por ser invariantes *gauge* (recordemos que no están sometidos a ninguna ligadura lineal). Las restantes variables se transforman de forma no trivial, pero pueden combinarse para construir cantidades invariantes hasta el orden perturbativo considerado. A continuación se presentan algunos ejemplos de especial interés. Puesto que los modos vectoriales son puro *gauge*, nos ocuparemos únicamente de los escalares.

2.3.1. Variable de Mukhanov-Sasaki

Mientras trabajaban en la cuantización de perturbaciones cosmológicas en un universo con secciones espaciales planas, M. Sasaki y V. F. Mukhanov [101, 102] introdujeron el invariante *gauge* que hoy se conoce por sus

nombres. Esta variable combina las perturbaciones del campo escalar y de la métrica de la forma

$$\mathbf{v}_n := e^\alpha \left(\mathbf{f}_n + \frac{\pi_\varphi}{\pi_\alpha} (\mathbf{a}_n + \mathbf{b}_n) \right). \quad (2.33)$$

En el *gauge* longitudinal, \mathbf{b}_n se anula y \mathbf{a}_n adopta la expresión (2.19), por lo que la variable de Mukhanov-Sasaki se reduce a

$$\mathbf{v}_n \approx A_n \bar{\mathbf{f}}_n + B_n \pi_{\bar{\mathbf{f}}_n} + O(\epsilon), \quad (2.34)$$

donde

$$A_n = 1 + \frac{3}{\omega_n^2 - 3k} e^{-4\bar{\alpha}} \frac{\pi_{\bar{\varphi}}}{\pi_{\bar{\alpha}}} \left(e^{6\bar{\alpha}} \tilde{m}^2 \bar{\varphi} - 2\pi_{\bar{\alpha}} \pi_{\bar{\varphi}} \right), \quad (2.35a)$$

$$B_n = \frac{3}{\omega_n^2 - 3k} e^{-2\bar{\alpha}} \frac{\pi_{\bar{\varphi}}^2}{\pi_{\bar{\alpha}}}, \quad (2.35b)$$

Como variable canónicamente conjugada, escogemos

$$\pi_{\mathbf{v}_n} := C_n \bar{\mathbf{f}}_n + D_n \pi_{\bar{\mathbf{f}}_n}, \quad (2.36)$$

con los coeficientes

$$C_n = -3e^{-2\bar{\alpha}} \frac{\pi_{\bar{\varphi}}^2}{\pi_{\bar{\alpha}}} - \frac{3}{\omega_n^2 - 3k} e^{-6\bar{\alpha}} \frac{1}{\pi_{\bar{\alpha}}} \left(e^{12\bar{\alpha}} \tilde{m}^4 \bar{\varphi}^2 + 2\pi_{\bar{\varphi}}^2 (2\pi_{\bar{\alpha}}^2 - 3\pi_{\bar{\varphi}}^2 + ke^{4\bar{\alpha}}) \right) \\ + \frac{3}{\omega_n^2 - 3k} \tilde{m}^2 \bar{\varphi} \frac{\pi_{\bar{\varphi}}}{\pi_{\bar{\alpha}}} (4\pi_{\bar{\alpha}}^2 - 3\pi_{\bar{\varphi}}^2 + ke^{4\bar{\alpha}}), \quad (2.37a)$$

$$D_n = 1 - \frac{3}{\omega_n^2 - 3k} e^{-4\bar{\alpha}} \frac{\pi_{\bar{\varphi}}}{\pi_{\bar{\alpha}}} \left(e^{6\bar{\alpha}} \tilde{m}^2 \bar{\varphi} - \frac{\pi_{\bar{\varphi}}}{\pi_{\bar{\alpha}}} (2\pi_{\bar{\alpha}}^2 - 3\pi_{\bar{\varphi}}^2 + ke^{4\bar{\alpha}}) \right). \quad (2.37b)$$

Un cálculo tedioso, si bien directo, permite comprobar que

$$\pi_{\mathbf{v}_n} \approx \dot{\mathbf{v}}_n + O(\epsilon), \quad (2.38)$$

lo que justifica la elección del momento. No obstante, la identificación no es directa porque los coeficientes (2.37) contienen términos adicionales proporcionales a la ligadura homogénea $H_{|0}$ (irrelevantes sobre soluciones de la teoría hasta el orden perturbativo considerado) que garantizan que la transformación que conecta los pares $(\bar{\mathbf{f}}_n, \pi_{\bar{\mathbf{f}}_n})$ y $(\mathbf{v}_n, \pi_{\mathbf{v}_n})$ sea canónica en el sector inhomogéneo (es decir, considerando las variables homogéneas como funciones del tiempo) en el caso plano y, además, unitariamente implementable en

la cuantización de Fock que se introducirá en la sección 3. Así, se tiene que, en efecto,

$$\{v_n, \pi_{v_n}\} = A_n D_n - B_n C_n + O(\epsilon) = 1 + \frac{3k}{\omega_n^2 - 3k} \frac{\pi_{\dot{\varphi}}^2}{\pi_{\dot{\alpha}}^2} + O(\epsilon); \quad (2.39)$$

por lo tanto, el par (v_n, π_{v_n}) es canónico si $k = 0$, esto es, cuando las secciones del espaciotiempo de fondo son planas. En adelante, asumiremos que este es el caso.

La transformación de las perturbaciones puede extenderse, hasta el orden perturbativo en que trabajamos, a una transformación canónica en el espacio de fases completo del sistema reducido. En la línea de lo expuesto al diagonalizar la estructura simpléctica del sistema reducido, eso supone encontrar nuevas variables homogéneas $\check{\alpha}$, $\pi_{\check{\alpha}}$, $\check{\varphi}$ y $\pi_{\check{\varphi}}$ tales que

$$\check{\alpha} \pi_{\check{\alpha}} + \check{\varphi} \pi_{\check{\varphi}} + \epsilon^2 \sum_{\mathbf{n}} \dot{\check{f}}_{\mathbf{n}} \pi_{\check{f}_{\mathbf{n}}} = \check{\alpha} \pi_{\check{\alpha}} + \check{\varphi} \pi_{\check{\varphi}} + \epsilon^2 \sum_{\mathbf{n}} \dot{v}_{\mathbf{n}} \pi_{v_{\mathbf{n}}} + \dot{f} + O(\epsilon^3), \quad (2.40)$$

siendo \dot{f} una derivada total con respecto al tiempo. Es fácil conseguir esto corrigiendo las variables homogéneas con términos cuadráticos en las perturbaciones; así, podemos escribir $\check{q}_0 = \bar{q}_0 + \epsilon^2 \sum_{\mathbf{n}} (\delta \bar{q}_0)_{\mathbf{n}} + O(\epsilon^3)$ y, análogamente para los momentos, $\pi_{\check{q}_0} = \pi_{\bar{q}_0} + \epsilon^2 \sum_{\mathbf{n}} (\delta \pi_{\bar{q}_0})_{\mathbf{n}} + O(\epsilon^3)$. Las correcciones pueden escribirse de forma compacta como

$$(\delta \bar{q}_0)_{\mathbf{n}} = \frac{1}{2} (\{\bar{q}_0, v_{\mathbf{n}}\} \pi_{v_{\mathbf{n}}} - v_{\mathbf{n}} \{\bar{q}_0, \pi_{v_{\mathbf{n}}}\}), \quad (2.41a)$$

$$(\delta \pi_{\bar{q}_0})_{\mathbf{n}} = \frac{1}{2} (\{\pi_{\bar{q}_0}, v_{\mathbf{n}}\} \pi_{v_{\mathbf{n}}} - v_{\mathbf{n}} \{\pi_{\bar{q}_0}, \pi_{v_{\mathbf{n}}}\}). \quad (2.41b)$$

Para desarrollar los corchetes, hay que utilizar las ecuaciones (2.34) y (2.36), con los coeficientes (2.35) y (2.37); teniendo eso en cuenta, no resultará sorprendente que las expresiones resultantes sean complicadas. También lo es el cálculo de la ligadura hamiltoniana en las nuevas variables, aunque, evidentemente, su estructura perturbativa no cambia cualitativamente. La ligadura hamiltoniana de orden cero, $\check{H}_{|0}$, se escribe como $H_{|0}$ (o $\bar{H}_{|0}$), con la única precaución de sustituir las antiguas variables homogéneas por las nuevas. Es el término cuadrático en las perturbaciones escalares el que adopta una forma más complicada. Por un lado, hay que escribir en ${}^E \bar{H}_{|2}^n$ las variables con raya en términos de las nuevas, invirtiendo las relaciones (2.34) y (2.36):

$$\bar{f}_{\mathbf{n}} := D_n v_{\mathbf{n}} - B_n \pi_{v_{\mathbf{n}}}, \quad (2.42a)$$

$$\pi_{\bar{f}_{\mathbf{n}}} := -C_n v_{\mathbf{n}} + A_n \pi_{v_{\mathbf{n}}}. \quad (2.42b)$$

Evaluar A_n , B_n , C_n y D_n en uno u otro conjunto de variables homogéneas es irrelevante al orden de truncación, al igual que ocurre en los coeficientes ${}^E\bar{E}_{\pi\pi}^n$, ${}^E\bar{E}_{q\pi}^n$ y ${}^E\bar{E}_{qq}^n$ de ${}^E\bar{H}_{|2}^n$. Con todo, las correcciones cuadráticas de las variables homogéneas sí dan lugar a términos adicionales, a través de la ligadura de orden cero. Estas contribuciones, que hay que sumar a ${}^E\bar{H}_{|2}^n$, son

$$-\sum_{q_0} \left(\frac{d\check{H}_{|0}}{d\check{q}_0} (\delta\check{q}_0)_n + \frac{d\check{H}_{|0}}{d\check{\pi}_{q_0}} (\delta\pi_{\check{q}_0})_n \right) = \frac{1}{2} (\bar{f}_n \{ \pi_{\bar{f}_n}, \check{H}_{|0} \} - \{ \bar{f}_n, \check{H}_{|0} \} \pi_{\bar{f}_n}). \quad (2.43)$$

Como función cuadrática de las perturbaciones escalares, el hamiltoniano resultante ${}^E\check{H}_{|2}^n$ puede escribirse a la manera de la ecuación (2.16), con coeficientes que adoptan expresiones muy sencillas si se simplifican usando la ligadura hamiltoniana adecuadamente —recordemos que $\check{H}_{|0} \approx O(\epsilon^2)$ sobre soluciones—; en concreto,

$${}^E\check{E}_{\pi\pi}^n \approx 1, \quad (2.44a)$$

$${}^E\check{E}_{q\pi}^n \approx 0, \quad (2.44b)$$

$${}^E\check{E}_{qq}^n \approx \omega_n^2 + \tilde{m}^2 e^{2\check{\alpha}} - 12e^{2\check{\alpha}} \tilde{m}^2 \check{\varphi} \frac{\pi_{\check{\varphi}}}{\pi_{\check{\alpha}}} - e^{-4\check{\alpha}} \left(2\pi_{\check{\alpha}}^2 - 21\pi_{\check{\varphi}}^2 + 18 \frac{\pi_{\check{\varphi}}^4}{\pi_{\check{\alpha}}^2} \right). \quad (2.44c)$$

Resulta interesante comprobar que esta descripción del campo es invariante *gauge* comparando esta ligadura con la obtenida en el *gauge* alternativo que se considera en el apéndice C.

A la vista de las anteriores expresiones, es inmediato constatar que la ecuación dinámica de v_n en tiempo conforme es, como la ecuación análoga (2.24) para las perturbaciones tensoriales, de tipo Klein-Gordon con masa dependiente del tiempo a través de las variables homogéneas. De hecho, con algo más de trabajo, puede escribirse de la forma

$$\ddot{v}_n + \left(\omega_n^2 - \frac{\ddot{z}}{z} \right) v_n = O(\epsilon), \quad (2.45)$$

donde $z := -e^\alpha \pi_\varphi / \pi_\alpha$ (nótese que, hasta el orden perturbativo considerado, es irrelevante evaluar la función z en las variables homogéneas originales o en sus nuevas homólogas). Esta expresión es muy conocida en la literatura cosmológica con el nombre de *ecuación de Mukhanov-Sasaki*.

Las características expuestas —invariancia *gauge*, simplicidad del hamiltoniano y de las ecuaciones dinámicas— explican la utilidad de la variable de Mukhanov-Sasaki para el tratamiento de perturbaciones cosmológicas. Sin embargo, esta variable no es la idónea cuando la curvatura de las secciones del espaciotiempo de fondo es distinta de cero. Para englobar esos casos en nuestro estudio, hemos considerado otro par canónico de invariantes, que se presenta a continuación.

2.3.2. Invariantes de energía y velocidad

J. M. Bardeen [100] realizó un análisis pormenorizado de las perturbaciones cosmológicas en un universo cuyo contenido material está constituido por un fluido perfecto perturbado. Entre los diversos invariantes *gauge* que definió, se cuentan las amplitudes invariantes de la perturbación de la densidad de energía y de la velocidad material, que en el sistema que estamos estudiando adoptan las expresiones

$$\mathcal{E}_n^m = \frac{e^{-2\alpha}}{E_0} [-\dot{\varphi}^2 g_n + \dot{\varphi} \dot{f}_n + (e^{2\alpha} \tilde{m}^2 \varphi + 3\dot{\alpha}\dot{\varphi}) f_n], \quad (2.46a)$$

$$v_n^s = \frac{1}{\omega_n} \left[\frac{\omega_n^2}{\dot{\varphi}} f_n + \left(\frac{k_n}{N_0} - 3\dot{b}_n \right) \right], \quad (2.46b)$$

con $E_0 = (e^{-2\alpha} \dot{\varphi}^2 + \tilde{m}^2 \varphi^2)/2$. En la referencia citada se explica la interpretación física de estas cantidades: \mathcal{E}_n^m coincide con la perturbación de la densidad de energía del fluido en cualquier *gauge* en el que las líneas de universo de la materia sean perpendiculares a las secciones espaciales³, mientras que v_n^s está relacionado con la cizalladura del fluido.

Evidentemente, cualquier combinación de \mathcal{E}_n^m , v_n^s y las variables homogéneas es también invariante *gauge*. Nosotros estamos particularmente interesados en

$$\Psi_n := \frac{1}{\sqrt{\omega_n^2 - 3k}} \frac{e^{5\alpha}}{\pi_\varphi} E_0 \mathcal{E}_n^m \quad (2.47a)$$

y su variable canónicamente conjugada (hasta el orden perturbativo considerado)

$$\pi_{\Psi_n} := -\frac{\sqrt{\omega_n^2 - 3k}}{\omega_n} e^{-\alpha} \pi_\varphi v_n^s + \frac{e^{-2\alpha}}{\pi_\varphi} (e^{6\alpha} \tilde{m}^2 \varphi - 2\pi_\alpha \pi_\varphi) \Psi_n. \quad (2.47b)$$

La elección de este momento se debe a que, como puede comprobarse usando las ecuaciones de movimiento e imponiendo las ligaduras, $\pi_{\Psi_n} \approx \dot{\Psi}_n + O(\epsilon)$. Esta relación de conjugación sobrevive incluso a la reducción del sistema descrita en la sección 2.2, como puede verse de la expresión que adquieren estas variables tras esa reducción:

$$\Psi_n = \frac{1}{\sqrt{\omega_n^2 - 3k}} (\pi_{\bar{f}_n} + \chi \bar{f}_n) + O(\epsilon), \quad (2.48a)$$

³No es, por cierto, el caso del *gauge* longitudinal.

$$\pi_{\Psi_n} = \frac{\chi}{\sqrt{\omega_n^2 - 3k}} (\pi_{\bar{r}_n} + \chi \bar{r}_n) - \sqrt{\omega_n^2 - 3k} \bar{r}_n + O(\epsilon), \quad (2.48b)$$

donde χ es la combinación

$$\chi = \frac{e^{-2\bar{\alpha}}}{\pi_{\bar{\varphi}}} (e^{6\bar{\alpha}} \tilde{m}^2 \bar{\varphi} - 2\pi_{\bar{\alpha}} \pi_{\bar{\varphi}}). \quad (2.49)$$

El interés de este par canónico radica en la sencillez de sus ecuaciones dinámicas; en concreto, Ψ_n satisface una ecuación de Klein-Gordon en la que la masa es una función del fondo:

$$\ddot{\Psi}_n + (\omega_n^2 - 3k - 3e^{-4\bar{\alpha}} \pi_{\bar{\varphi}}^2 - \chi + \chi^2) \Psi_n = O(\epsilon). \quad (2.50)$$

Como vemos, a diferencia del invariante de Mukhanov-Sasaki, Ψ_n satisface este tipo de ecuación con independencia de la topología de las secciones espaciales.

Por supuesto, la transformación canónica del sector inhomogéneo (2.48) puede ampliarse a una del espacio de fases completo siguiendo la misma estrategia que en el caso de la variable de Mukhanov-Sasaki, aunque no realizaremos aquí ese tratamiento.

2.4. Discusión

En este capítulo, hemos presentado el modelo FLRW clásico con perturbaciones y lo hemos dejado preparado para su cuantización, que abordaremos en los próximos. Las inhomogeneidades se han introducido expandiendo las variables ADM y el campo escalar, que sirve de contenido material, en serie de autofunciones del operador de Laplace-Beltrami en una variedad espacial de referencia, e identificado los modos cero con las correspondientes variables del modelo homogéneo. Separando estos modos (que tratamos exactamente), hemos truncado la acción a orden cuadrático en los restantes. La ligadura hamiltoniana del modelo FLRW recibe entonces correcciones cuadráticas, y aparecen además nuevas ligaduras lineales asociadas a los grados de libertad *gauge* locales. El análisis realizado generaliza el de J. J. Halliwell y S. W. Hawking [107] a universos con secciones espaciales planas o con curvatura negativa.

Las ligaduras lineales, precisamente en virtud de su linealidad, pueden eliminarse de forma muy sencilla imponiendo condiciones de fijación de *gauge* adecuadas. Esta reducción del sistema puede no resultar inofensiva, puesto que, en general, fijar el *gauge* clásicamente y cuantizar la teoría resultante

conduce a un resultado que puede ser diferente del de cuantizar en primer lugar e imponer después las ligaduras, promovidas a operadores. La estrategia que hemos decidido seguir es la primera. No obstante, para discutir el tema de la invariancia *gauge*, también hemos presentado variables invariantes bajo las transformaciones generadas por las ligaduras lineales.

Las perturbaciones tensoriales son directamente invariantes *gauge* (recordemos que con *escalares*, *vectoriales* y *tensoriales* nos referimos aquí exclusivamente a su comportamiento bajo difeomorfismos espaciales). Las vectoriales pueden eliminarse mediante una fijación de *gauge*, debido a que el contenido material elegido —un campo escalar con masa— carece de grados de libertad vectoriales. En cuanto a los grados de libertad escalares, tras adoptar el *gauge* longitudinal, pueden identificarse con la perturbación del campo material y su momento canónicamente conjugado. Combinando linealmente sus modos (con coeficientes que dependen de las variables homogéneas y el autovalor del armónico correspondiente), pueden construirse cantidades que coinciden en este *gauge* con los modos de los invariantes.

Con el propósito de dejar el sistema listo para la cuantización del campo, hemos introducido en el espacio de fases reducido coordenadas canónicas adaptadas a la estrategia que seguiremos en la misma. El cambio consiste esencialmente en escalar los modos de las perturbaciones tensoriales y del campo material con el factor de escala de la geometría homogénea de fondo y elegir sus variables conjugadas de forma que configuración y momento se desacoplen en la ligadura, al menos a orden dominante en el límite ultravioleta. Por supuesto, para que los corchetes de Dirac con las variables homogéneas sean canónicos, es necesario redefinir también estas con correcciones cuadráticas en las perturbaciones.

Las ecuaciones de Hamilton de las nuevas variables inhomogéneas recuerdan a las de un campo de Klein-Gordon, con una función de las variables homogéneas desempeñando el papel de la masa; aunque en el caso de las perturbaciones escalares aparecen términos adicionales, son subdominantes a frecuencias altas ($\omega_n \gg 1$). Gracias a esta particular dependencia temporal, en el próximo capítulo seremos capaces de encontrar representaciones de Fock para las perturbaciones que admitan una implementación unitaria de la dinámica.

Capítulo 3

Cuantización de Fock de perturbaciones cosmológicas sobre un fondo clásico

En este capítulo, se estudia la cuantización de Fock de las perturbaciones en un espaciotiempo homogéneo de fondo que supondremos descrito de forma clásica. Por lo tanto, a efectos prácticos, trataremos las variables homogéneas como meras funciones del tiempo. En otras palabras, en el presente capítulo se consideran tan solo las fluctuaciones cuánticas de los grados de libertad locales, pero no las que puedan afectar a las variables homogéneas de la parametrización adoptada. Además de servir como paso previo a la cuantización completa del modelo, este enfoque semiclásico debería proporcionar una buena aproximación al comportamiento del sistema mientras las correcciones cuánticas que afectan fondo, así como la reacción de las inhomogeneidades sobre él (denominada habitualmente *backreaction*), sean despreciables.

Antes de seguir, conviene introducir un formalismo que será de gran utilidad para el análisis [39]. La ambigüedad en la elección de una representación de Fock para una teoría de campo es equivalente a la libertad de elegir en el espacio de fases de la teoría, Γ , una estructura compleja compatible con la simpléctica. Una estructura compleja J es una aplicación lineal cuyo cuadrado coincide con menos la identidad. La petición de que sea compatible con la estructura simpléctica, que denotaremos por Ω , significa que debe ser un simplectomorfismo y que la composición $\Omega(J\bullet, \bullet)$ (para entradas cualesquiera) tiene que ser una forma lineal definida positiva. De este modo, $[\Omega(J\bullet^*, \bullet) - i\Omega(\bullet^*, \bullet)]/2$ es un producto interno en la complejificación del espacio de fases, $\Gamma_{\mathbb{C}}$, mediante el que puede dotarse a esta de estructura de espacio de Hilbert, el espacio de Hilbert de una partícula \mathcal{H}_{par} . A partir de

él, se construye el espacio de Fock simétrico, sobre el que se representa el álgebra de observables, de la siguiente manera:

$$\mathcal{F} := \bigoplus_{n=0}^{\infty} \bigotimes_{\mathbb{S}}^n \mathcal{H}_{\text{par}}, \quad (3.1)$$

donde $\bigotimes_{\mathbb{S}}$ denota el producto tensorial simetrizado, que es el indicado para el caso de un campo bosónico. Las variables de destrucción y creación en términos de las cuales se construye habitualmente la teoría de campo (como se hizo, por ejemplo, en la sección 1.2.4) diagonalizan la estructura compleja. De las propiedades de J , se infiere fácilmente que este operador descompone $\Gamma_{\mathbb{C}}$ en dos autoespacios ortogonales con autovalores $\pm i$, lo que permite generalizar el concepto de frecuencias positivas y negativas natural en espaciotiempos estacionarios.

La ambigüedad en la representación de Fock queda, por tanto, resuelta si se dispone de criterios para seleccionar una estructura compleja. En el espacio de Minkowski, por ejemplo, es natural exigir una implementación unitaria de las transformaciones del grupo de Poincaré, lo que inmediatamente se garantiza si se exige la condición (más restrictiva) de que la estructura compleja (o, equivalentemente, el estado de vacío) sea invariante bajo ellas. Esto basta (esencialmente) para fijar —salvo equivalencia unitaria— una cuantización de Fock para una teoría de campo lineal dada. Ya hemos mencionado que en espaciotiempos genéricos, es necesario encontrar otros requisitos para superar la ambigüedad. Si existe un vector de Killing temporal, pueden recurrirse a la energía [54–56]. Cuando ni siquiera se dispone de esta simetría, la petición de una dinámica unitaria ha demostrado ser de gran utilidad. En efecto, dado un campo escalar sujeto a un potencial cuadrático dependiente del tiempo (en particular, puede pensarse en una masa variable) propagándose en un espaciotiempo ultraestático con secciones espaciales compactas de no más de tres dimensiones, existe una única clase de representaciones de Fock equivalentes cuya estructura compleja es invariante bajo el grupo de isometrías espaciales y en la que la dinámica del campo puede implementarse con un operador unitario [67]. Dado que en el próximo capítulo particularizaremos a los casos de secciones espaciales homeomorfas a la tres-esfera y al tres-toro, pueden resultar de interés los trabajos que particularizan estos resultados a dichas variedades, que se encuentran en las referencias [63] y [66].

Sorprendentemente, los criterios mencionados no solo fijan una representación del campo, sino también una parametrización privilegiada del mismo. En más detalle: si se escala el campo con una función del tiempo, alterando su dinámica, resulta imposible encontrar una representación de Fock con vacío invariante bajo las simetrías espaciales en la que la nueva dinámica

sea unitariamente implementable [68]. Además, la elección de su momento canónico también queda determinada.

Por supuesto, los anteriores resultados pueden aplicarse también a teorías de campo en espaciotiempos no ultraestáticos cuya formulación pueda reducirse a una forma equivalente. Ejemplos de este tipo son el modelo de Gowdy (que se presentó, muy brevemente, en la sección 1.2.4) y las perturbaciones tensoriales sobre un universo FLRW, como acabamos de ver en el capítulo anterior y recordaremos en la sección 3.1. Aunque no es el caso de las perturbaciones escalares del mismo modelo, debido a la presencia de términos adicionales en las ecuaciones de movimiento, en la sección 3.2 comprobaremos que los criterios en que se basan permiten también fijar una representación para ellas, gracias a que dichos términos decaen rápidamente en el ultravioleta.

El interés por resolver la ambigüedad de la cuantización de las perturbaciones sobre el fondo clásico es doble, ya que la representación de Fock que obtengamos servirá de ingrediente para la cuantización híbrida del modelo completo —incluyendo el sector homogéneo— que describiremos en la sección 4.

3.1. Cuantización de las perturbaciones tensoriales

Como vimos en el capítulo 2, si el fondo homogéneo del modelo perturbado puede tratarse de forma clásica, las variables escaladas \bar{d}_n satisfacen las ecuaciones de los modos de un campo de Klein-Gordon (2.24), con la salvedad de que la cantidad que desempeña el papel de la masa al cuadrado es una función que depende del tiempo a través de las variables homogéneas. Como además hemos elegido los momentos $\pi_{\bar{d}_n}$ de tal forma que coincidan con las derivadas temporales de sus variables canónicamente conjugadas, podemos aplicar directamente los resultados de unicidad de la referencias [67, 68] a las perturbaciones tensoriales. Así, sabemos que existe una clase de representaciones de Fock unitariamente equivalentes para los modos escalados \bar{d}_n que no solo poseen un vacío invariante bajo las isometrías espaciales del espaciotiempo de fondo, sino que además permiten una implementación unitaria de la dinámica del campo si dicho fondo puede tratarse de forma clásica. El escalado del campo por el factor de escala de la geometría de fondo, que realizamos como parte de la transformación canónica (2.18), ha sido esencial para alcanzar este resultado, puesto que cualquier otro escalado global (es decir, igual para todos los modos) que dependiera del tiempo habría impedido

construir una representación con esas dos características.

Una de las representaciones privilegiadas equivalentes es la caracterizada por una estructura compleja J_0 que actúa diagonalmente en la base formada por las variables de destrucción

$$a_{\bar{d}_n} = \frac{1}{\sqrt{2}{}^T\omega_n} ({}^T\omega_n \bar{d}_n + i\pi_{\bar{d}_n}). \quad (3.2)$$

y las correspondientes variables de creación conjugadas. Estas variables serían las naturales si los modos \bar{d}_n pertenecieran a un campo sin masa. La acción de la estructura compleja J_0 sobre ellas es, por definición,

$$J_0 \begin{pmatrix} a_{\bar{d}_n} \\ a_{\bar{d}_n}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{\bar{d}_n} \\ a_{\bar{d}_n}^* \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

En adelante, llamaremos j_0 a la matriz 2×2 que aparece en el miembro de la derecha de la anterior ecuación.

Por construcción, la estructura compleja de la representación del caso sin masa y, en consecuencia, el vacío asociado, son invariantes bajo el grupo de isometrías de la variedad Σ , que denotaremos por \mathcal{G} . Notemos primeramente que estas transformaciones no mezclan distintos autoespacios del operador de Laplace-Beltrami, ya que conmutan con él. Fijado el autovalor, los subespacios del espacio de fases $\{\bar{d}_{nl} : n \text{ fijo}\}$ y $\{\pi_{\bar{d}_{nl}} : n \text{ fijo}\}$ se transforman con la misma representación del grupo de isometrías, luego los autoespacios de la estructura compleja son invariantes.

Además, esta representación permite implementar la dinámica clásica con un operador unitario en el correspondiente espacio de Fock. La demostración de este hecho requiere algo más de trabajo [67]. La dejaremos para la siguiente sección, en la que daremos una versión generalizada de la misma que abarca también el caso de las perturbaciones escalares.

3.2. Cuantización de las perturbaciones escalares

A diferencia de las perturbaciones tensoriales, las del campo escalar no satisfacen las hipótesis de los resultados de unicidad mencionados [67, 68]. En efecto, el hamiltoniano cuadrático asociado ${}^E\bar{H}_{|2}^n$ no es de tipo Klein-Gordon, ya que contiene términos adicionales, aunque estos decaen al menos como ω_n^{-2} en el límite $\omega_n \rightarrow \infty$. Estas contribuciones añadidas también se manifiestan en las ecuaciones de movimiento de los modos \bar{f}_n (2.28), y

enmarañan la relación entre sus derivadas y sus momentos canónicamente conjugados, como muestra la ecuación (2.26). Sin embargo, cabe esperar que estas correcciones no alteren los resultados de unitariedad y unicidad, que descansan en el comportamiento ultravioleta de los modos. Puesto que, en cualquier caso, la representación que sería natural en el caso sin masa continúa siendo invariante bajo las isometrías del fondo, podemos adoptarla tentativamente y comprobar si admite una dinámica unitaria. Así, definimos las variables de destrucción y construcción

$$\begin{pmatrix} \alpha_{\bar{f}_n} \\ \alpha_{\bar{f}_n}^* \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2\omega_n}} \begin{pmatrix} \omega_n & +i \\ \omega_n & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{f}_n \\ \pi_{\bar{f}_n} \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Clásicamente, su evolución entre un tiempo inicial η_0 y uno final η está dada por el simplectomorfismo $U(\eta, \eta_0)$, que actúa de forma independiente sobre cada modo, lo que permite escribir

$$\begin{pmatrix} \alpha_{\bar{f}_n}(\eta) \\ \alpha_{\bar{f}_n}^*(\eta) \end{pmatrix} = u_n(\eta, \eta_0) \begin{pmatrix} \alpha_{\bar{f}_n}(\eta_0) \\ \alpha_{\bar{f}_n}^*(\eta_0) \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

La matriz 2×2 u_n depende del modo únicamente a través del autovalor asociado, como se desprende de las ecuaciones dinámicas. Dado que representa una transformación real, puede escribirse en la forma genérica

$$u_n(\eta, \eta_0) = \begin{pmatrix} \alpha_n(\eta, \eta_0) & \beta_n(\eta, \eta_0) \\ \beta_n^*(\eta, \eta_0) & \alpha_n^*(\eta, \eta_0) \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

Ahora bien, para que preserve los corchetes de Poisson, debe satisfacerse la condición $|\alpha_n|^2 - |\beta_n|^2 = 1$.

En la teoría cuántica, las variables de creación y destrucción se ven promovidas a operadores, con lo que la ecuación (3.5) se convierte en

$$\begin{pmatrix} \hat{\alpha}_{\bar{f}_n}(\eta) \\ \hat{\alpha}_{\bar{f}_n}^\dagger(\eta) \end{pmatrix} = u_n(\eta, \eta_0) \begin{pmatrix} \hat{\alpha}_{\bar{f}_n}(\eta_0) \\ \hat{\alpha}_{\bar{f}_n}^\dagger(\eta_0) \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

Para que esta transformación sea unitariamente implementable, debe existir un operador unitario \hat{U}_n tal que

$$\hat{\alpha}_{\bar{f}_n}(\eta) = \hat{U}_n(\eta, \eta_0) \hat{\alpha}_{\bar{f}_n}(\eta_0) \hat{U}_n^\dagger(\eta, \eta_0) \quad (3.8)$$

La condición necesaria y suficiente para esto ocurra es que la diferencia $J_0 - U(\eta, \eta_0)J_0U(\eta, \eta_0)$ sea un operador de Hilbert-Schmidt¹. Esto es equivalente a pedir que la serie $\sum_{nl} |\beta_n|^2 = \sum_n g_n |\beta_n|^2$ converja, lo que depende

¹Recordemos que un operador T es de Hilbert-Schmidt si la traza $\text{tr}(T^\dagger T)$ es finita.

de la relación entre el comportamiento asintótico de los coeficientes β_n y el de la degeneración de los autovalores correspondientes, g_n , en el límite $n \rightarrow \infty$. En cuanto a lo segundo, se sabe que en cualquier variedad riemanniana d -dimensional compacta el número de modos con $\omega_n \leq \omega$, que podemos escribir como $\sum_{\omega_n \leq \omega} g_n$, crece asintóticamente a lo sumo como ω^d [108]. En el caso que nos ocupa, dicho número no crece, por tanto, más rápido que ω^3 , de lo que puede deducirse que g_n es, como mucho, del orden de ω_n^2 .

Queda encontrar el comportamiento asintótico de las soluciones de la ecuación de tipo Klein-Gordon (2.28). Para estudiarlo, escribimos estas en la forma

$$\bar{f}_n(\eta) = Z_n e^{\Theta_n(\eta)} + Z_n^* e^{\Theta_n^*(\eta)}, \quad (3.9)$$

donde Z_n es un parámetro complejo y Θ_n , una función del tiempo. Como se han introducido grados de libertad adicionales, pueden fijarse (sin pérdida de generalidad) las condiciones iniciales $\Theta_n(\eta_0) = 0$ y $\dot{\Theta}_n(\eta_0) = -i\omega_n$. Se tienen entonces las relaciones

$$\bar{f}_n(\eta_0) = 2\Re(Z_n), \quad \dot{\bar{f}}_n(\eta_0) = 2\omega_n \Im(Z_n). \quad (3.10)$$

De hecho, es conveniente extraer de Θ_n su límite ultravioleta. Así,

$$\Theta_n(\eta) =: -i\omega_n(\eta - \eta_0) + \int_{\eta_0}^{\eta} d\tilde{\eta} W_n(\tilde{\eta}). \quad (3.11)$$

siendo W_n una nueva función del tiempo que debe satisfacer $W_n(\eta_0) = 0$. Se ha introducido esta función para transformar la ecuación de movimiento del campo (2.28) en la ecuación de Riccati equivalente

$$\dot{W}_n = -s + i\omega_n r_n - s_n + (2i\omega_n - r_n)W_n - W_n^2, \quad (3.12)$$

que se obtiene de ella al emplear las ecuaciones (3.9) y (3.11), y teniendo en cuenta que las partes real e imaginaria de W_n (o Θ_n) son independientes. Para nuestros propósitos, no es necesario resolver de forma exacta la ecuación anterior; basta con estudiar el comportamiento asintótico de sus soluciones en el ultravioleta. Para ello, comenzamos descartando los términos subdominantes de la ecuación de Riccati, que se identifican fácilmente recordando que tanto r_n como s_n decaen al crecer n como ω_n^{-2} (y que $\lim_{n \rightarrow \infty} W_n = 0$). Se llega así a la ecuación

$$\dot{\tilde{W}}_n = -s + 2i\omega_n \tilde{W}_n, \quad (3.13)$$

cuya solución con valor inicial $\tilde{W}_n(\eta_0) = 0$ puede obtenerse de forma inmediata, y resulta ser

$$\tilde{W}_n = -e^{2i\omega_n \eta} \int_{\eta_0}^{\eta} d\tilde{\eta} e^{-2i\omega_n \tilde{\eta}} s(\tilde{\eta}), \quad (3.14)$$

o, integrando por partes,

$$\tilde{W}_n = \frac{i}{2\omega_n} \left(e^{2i\omega_n(\eta-\eta_0)} s(\eta_0) - s(\eta) + e^{2i\omega_n\eta} \int_{\eta_0}^{\eta} d\tilde{\eta} e^{-2i\omega_n\tilde{\eta}} \dot{s}(\tilde{\eta}) \right). \quad (3.15)$$

Si la función s es diferenciable y posee una derivada integrable en cada subintervalo de un cierto dominio temporal (no necesariamente infinito), la integral del miembro derecho de la anterior igualdad siempre converge en dicho dominio, luego \tilde{W}_n decae asintóticamente como ω_n^{-1} . En consecuencia, \tilde{W}_n debe ser el término dominante de las soluciones de la ecuación de Riccati (3.12), en la que \tilde{W}_n^2 es claramente despreciable. Por tanto, podemos escribir $W_n = \tilde{W}_n + O(\omega_n^{-2})$.

Utilizando las ecuaciones (3.9), (3.10) —que conecta el parámetro Z_n con los valores iniciales del campo—, (3.4) —que expresa las variables de destrucción y creación adoptadas en función de los modos del campo escalado y sus momentos— y (2.26) —que relaciona la derivada temporal de los modos \bar{f}_n y sus momentos—, un cálculo tedioso, aunque directo, permite obtener las expresiones de los coeficientes de Bogoliubov α_n y β_n , que dictan la evolución del campo de acuerdo con las ecuaciones (3.5) y (3.6). En concreto, el resultado es

$$\alpha_n(\eta, \eta_0) = \frac{e^{\Theta_n(\eta)} [1 + Y_n(\eta)] [1 + X_n^*(\eta_0)] - e^{\Theta_n^*(\eta)} Y_n^*(\eta) X_n(\eta_0)}{1 + p_n(\eta_0)}, \quad (3.16a)$$

$$\beta_n(\eta, \eta_0) = \frac{e^{\Theta_n(\eta)} [1 + Y_n(\eta)] X_n^*(\eta_0) - e^{\Theta_n^*(\eta)} Y_n^*(\eta) [1 + X_n(\eta_0)]}{1 + p_n(\eta_0)}, \quad (3.16b)$$

donde se han introducido las funciones auxiliares

$$X_n = \frac{1}{2\omega_n} (\omega_n p_n + iq_n), \quad (3.17a)$$

$$Y_n = X_n + \frac{i}{2\omega_n} (1 + p_n) W_n. \quad (3.17b)$$

Las ecuaciones (3.16) son exactas. En el régimen ultravioleta, X_n decae como ω_n^{-2} , porque también lo hacen p_n y q_n . El mismo comportamiento asintótico exhibe Y_n , ya que W_n es del orden de ω_n^{-1} . En consecuencia, los coeficientes β_n tienden a cero como ω_n^{-2} cuando $\omega_n \rightarrow \infty$. Por lo tanto, la dinámica puede implementarse unitariamente, ya que la serie $\sum g_n |\beta_n|^2$ converge independientemente de la topología de las secciones espaciales (mientras la dimensión de estas no exceda de tres), a pesar de los términos subdominantes que impiden identificar el hamiltoniano con el de un campo escalar en Σ sometido a un potencial cuadrático dependiente del tiempo.

Por otra parte, el comportamiento asintótico de α_n es muy diferente. En concreto, $\alpha_n = \exp \Theta_n + O(\omega_n^{-2})$. Hay que destacar que este comportamiento es independiente, hasta el orden considerado, de los términos adicionales del hamiltoniano. Esto indica que los resultados de unicidad encontrados en esa otra situación pueden generalizarse a esta sin obstrucciones considerables, como se detallará a continuación. Empezaremos probando que cualquier otra representación de Fock que comparta las simetrías del fondo y admita una dinámica unitaria debe ser unitariamente equivalente a la presentada, lo que extiende los resultados de la referencia [67] a este sistema.

3.2.1. Unicidad de la representación

Como se ha demostrado, en la representación del caso sin masa, la estructura compleja es invariante bajo el grupo de isometrías de las secciones espaciales, lo que abreviaremos calificándola simplemente de *invariante*. Evidentemente, existen otras estructuras complejas invariantes (su número es, de hecho, infinito). Todas actúan de forma diagonal por bloques en la base del espacio de fases compuesta por modos del operador de Laplace-Beltrami. En efecto, puesto que este operador conmuta, por construcción, con las transformaciones de \mathcal{G} , cualquier estructura compleja invariante tiene que respetar sus autoespacios. En realidad, la descomposición se puede afinar todavía más. Puesto que las isometrías conservan la métrica, su actuación sobre cada autoespacio es unitaria, lo que permite separarlos como una suma finita de representaciones irreducibles de \mathcal{G} . Supondremos que estas representaciones irreducibles son diferentes (así sucede, por ejemplo, el caso en la tres-esfera o el tres-toro). Para ser invariante, una estructura compleja no puede mezclar distintas representaciones irreducibles, como establece el lema de Schur [109].

En otras palabras, hemos descompuesto el espacio de fases primero en autoespacios del operador de Laplace-Beltrami, y a continuación en representaciones irreducibles de \mathcal{G} , que supondremos diferentes. Centrándonos primeramente en el espacio de configuración \mathcal{Q} , se tiene que $\mathcal{Q} = \bigoplus_n \mathcal{Q}_n$, con

$$\mathcal{Q}^n := \{\bar{f}_{nl} : n \text{ fijo}\}, \quad (3.18)$$

y a su vez $\mathcal{Q}^n = \bigoplus_m \mathcal{Q}_m^n$, donde hemos denotado por \mathcal{Q}_m^n las distintas representaciones irreducibles. El espacio de momentos \mathcal{P} puede tratarse de manera análoga: así, $\mathcal{P} = \bigoplus_n \mathcal{P}^n$ y $\mathcal{P}^n = \bigoplus_m \mathcal{P}_m^n$. Es importante destacar que el grupo \mathcal{G} actúa de la misma forma sobre \mathcal{Q} y sobre \mathcal{P} , por lo que sus descomposiciones en representaciones irreducibles del mismo son completamente análogas. El espacio de fases completo es, por tanto, $\bigoplus_{n,m} \mathcal{Q}_m^n \oplus \mathcal{P}_m^n$.

Pues bien, bajo la hipótesis mencionada, una estructura invariante J tiene que ser de la forma $J = \bigoplus_{n,m} J_m^n$, entendiéndose que cada J_m^n actúa en el correspondiente $\mathcal{Q}_m^n \oplus \mathcal{P}_m^n$.

Aprovechando la estructura bipartita de $\mathcal{Q}_m^n \oplus \mathcal{P}_m^n$, podemos descomponer J_m^n en cuatro componentes que conectan los dos espacios \mathcal{Q}_m^n y \mathcal{P}_m^n consigo mismos y entre sí: por ejemplo, si denotamos por $P_{\mathcal{Q}_m^n}$ el proyector sobre \mathcal{Q}_m^n (y análogamente con \mathcal{P}_m^n), $P_{\mathcal{Q}_m^n} J_m^n P_{\mathcal{Q}_m^n}$ es la componente que conecta \mathcal{Q}_m^n con \mathcal{Q}_m^n . Por ser J invariante, cada J_m^n conmuta con todas las transformaciones de \mathcal{G} . Dado que estas actúan de forma completamente idéntica sobre \mathcal{Q}_m^n y \mathcal{P}_m^n , en realidad deben conmutar no solo con J_m^n , sino también con cada una de sus cuatro componentes. No hace falta más que aplicar de nuevo el lema de Schur para concluir que las cuatro componentes tienen que ser múltiplos de la identidad.

En resumen, una estructura compleja invariante J no puede mezclar los modos del operador de Laplace-Beltrami y actúa de la misma forma sobre los modos que pertenecen a la misma representación irreducible del grupo de isometrías. Es preciso hacer una puntualización antes de continuar. El lema de Schur requiere que las representaciones involucradas sean complejas, mientras que aquí hemos elegido tratar con armónicos reales. Por supuesto, los armónicos reales pueden recuperarse mediante combinaciones lineales de los complejos (más concretamente, de un modo y su complejo conjugado); gracias a la linealidad de la teoría de campo, pasar de unos a otros no supone un obstáculo, si bien puede hacer necesarias consideraciones adicionales. Por su especial interés, merece la pena detenerse en el ejemplo del tres-toro. Las isometrías de este espacio —traslaciones espaciales— forman el grupo $U(1) \times U(1) \times U(1)$, cuyas representaciones irreducibles son necesariamente unidimensionales por ser abeliano. En consecuencia, un modo y su complejo conjugado se transforman según diferentes representaciones, por lo que en principio pueden comportarse de forma diferente bajo la acción de la estructura compleja (aunque no independiente, por ser J real). De ser así, la estructura compleja mezclaría, en la base real, las partes real e imaginaria provenientes de un mismo modo complejo. En realidad, el requisito de que la composición de la estructura simpléctica y la compleja sea definida positiva implica que J transforma de la misma forma los modos conjugados [66], y por extensión sus partes real e imaginaria, que no se mezclan entre sí. Estas consideraciones son innecesarias cuando los modos complejos conjugados se transforman con la misma representación irreducible del grupo de isometrías, como ocurre, por ejemplo, en el caso de la tres-esfera. En este, cada autoespacio se asocia a una representación irreducible de $SO(4)$, por lo que el análisis es más sencillo, al poder prescindir de la etiqueta m .

Ya que una estructura compleja invariante J no mezcla modos diferentes

del operador de Laplace-Beltrami, podemos elegir una nueva base de variables de destrucción y creación que diagonalicen J y no mezclen distintos modos. Evidentemente, el simplectomorfismo K que la relacione con la base asociada a J_0 será diagonal por bloques. Dado que se trata de una transformación real, podemos parametrizar los bloques de forma análoga a como se hizo en la ecuación (3.6) para la evolución:

$$k_{n,m} = \begin{pmatrix} \kappa_{n,m} & \lambda_{n,m} \\ \lambda_{n,m}^* & \kappa_{n,m}^* \end{pmatrix}, \quad (3.19)$$

con $|\kappa_{n,m}|^2 - |\lambda_{n,m}|^2 = 1$ para que la estructura simpléctica se preserve. La transformación K relaciona la nueva estructura compleja invariante con la del caso sin masa mediante $J = KJ_0K^{-1}$ o, lo que es lo mismo, bloque a bloque, $j_{n,m} = k_{n,m}j_0k_{n,m}^{-1}$.

Supongamos ahora que J admite una implementación unitaria de la dinámica. La condición necesaria y suficiente para que U sea unitariamente implementable con respecto a la nueva estructura compleja es que la transformación $K^{-1}UK$, obtenida con el cambio de base que se ha descrito, sea unitariamente implementable con respecto a J_0 [58]. Naturalmente, la representación de $K^{-1}UK$ también consta de bloques, que podemos escribir como

$$k_{n,m}^{-1}u_nk_{n,m} = \begin{pmatrix} {}^J\alpha_{n,m} & {}^J\beta_{n,m} \\ {}^J\beta_{n,m}^* & {}^J\alpha_{n,m}^* \end{pmatrix}, \quad (3.20)$$

donde

$${}^J\alpha_{n,m} := |\kappa_{n,m}|^2\alpha_n - |\lambda_{n,m}|^2\alpha_n^* + 2i\Im(\kappa_{n,m}^*\lambda_{n,m}\beta_n), \quad (3.21a)$$

$${}^J\beta_{n,m} := (\kappa_{n,m}^*)^2\beta_n - \lambda_{n,m}^2\beta_n^* + 2i\kappa_{n,m}^*\lambda_{n,m}\Im(\alpha_n). \quad (3.21b)$$

En realidad, solo necesitaremos la segunda de estas dos expresiones, ya que la implementabilidad unitaria de $K^{-1}UK$ descansa únicamente en la convergencia de la serie $\sum_n |{}^J\beta_{n,m}|^2 = \sum_{n,m} g_{n,m} |{}^J\beta_{n,m}|^2$, siendo $g_{n,m}$ la dimensión de la representación irreducible correspondiente (luego $g_n = \sum_m g_{n,m}$ y, en consecuencia, $g_{n,m} \leq g_n$). En otras palabras, será U unitariamente implementable en la cuantización determinada por J si y solo si la sucesión² $\{\sqrt{g_{n,m}} {}^J\beta_{n,m}(\eta, \eta_0)\}_{n,m}$ es de cuadrado sumable (para cualquier η en un cierto dominio temporal). Ahora bien, como $|\kappa_{n,m}|^2 = 1 + |\lambda_{n,m}|^2 \geq 1$, si ese es el caso, también la sucesión $\{\sqrt{g_{n,m}} {}^J\beta_{n,m}/(\kappa_{n,m}^*)^2\}_{n,m}$ debe ser de cuadrado sumable. Dividiendo por $(\kappa_{n,m}^*)^2$ la ecuación (3.21b), encontramos que esta segunda sucesión es la suma de otras tres, dos de las cuales son ya de cuadrado

²La doble etiqueta de la sucesión no debe llamar a la confusión. Puesto que el rango de m es finito para cada n , la sumabilidad de la sucesión depende únicamente del comportamiento asintótico del término general para n grande.

sumable (para verlo, téngase en cuenta que $|\lambda_{n,m}/\kappa_{n,m}| < 1$). En consecuencia, podemos abstraerlas y centrarnos en la tercera, que por hipótesis también debe ser de cuadrado sumable; en concreto, nos referimos a la sucesión $\{\sqrt{g_{n,m}}\lambda_{n,m}\mathfrak{S}(\alpha_n)/\kappa_{n,m}^*\}_{n,m}$ (nótese que se ha dividido por el factor irrelevante $2i$). Recordando que $g_{n,m} \leq g_n$, y por tanto $\sqrt{g_{n,m}}$ crece asintóticamente a lo sumo como ω_n , podemos introducir en la expresión del término general de la sucesión el comportamiento asintótico encontrado para α_n y abstraer las contribuciones cuyo cuadrado es sumable, para concluir que la condición necesaria y suficiente para que se cumpla la unitariedad es que la sucesión formada por los términos de la forma

$$\sqrt{g_{n,m}} \frac{\lambda_{n,m}}{\kappa_{n,m}^*} \exp\left(\int_{\eta_0}^{\eta} d\tilde{\eta} \Re(\tilde{W}_n(\tilde{\eta}))\right) \operatorname{sen}\left(\omega_n(\eta - \eta_0) - \int_{\eta_0}^{\eta} d\tilde{\eta} \Im(\tilde{W}_n(\tilde{\eta}))\right) \quad (3.22)$$

sea también de cuadrado sumable. Puesto que la exponencial que aparece en la anterior expresión tiende a uno en el límite ultravioleta —como se desprende de la ecuación (3.15)—, podemos ignorarla en el análisis. Por otro lado, realizando por partes la integral del miembro derecho de la ecuación (3.15), puede comprobarse que, si la segunda derivada temporal de la función s existe y es integrable en cada subintervalo del dominio temporal considerado, su contribución a \tilde{W}_n es del orden de ω_n^{-2} , luego puede abstraerse. Consideremos, por tanto, la sucesión con término general

$$\sqrt{g_{n,m}} \frac{\lambda_{n,m}}{\kappa_{n,m}^*} \operatorname{sen}\left(\omega_n(\eta - \eta_0) + \frac{1}{2\omega_n} \int_{\eta_0}^{\eta} d\tilde{\eta} s(\tilde{\eta})\right), \quad (3.23)$$

que es de cuadrado sumable si es cierta la hipótesis de implementabilidad unitaria. Su suma es, por tanto, una cantidad finita, que denotaremos por $Z(\eta)$. Es tentador concluir que también la sucesión $\{\sqrt{g_{n,m}}\lambda_{n,m}/\kappa_{n,m}^*\}_{n,m}$ ha de ser de cuadrado sumable, pero, para asegurarnos de ello, hay que eliminar la dependencia en η . Lo haremos integrando sobre el dominio temporal I . Aunque Z podría no ser continua, es medible (dado que es el límite de una sucesión de sumas parciales de funciones medibles). El teorema de Luzin [110] garantiza entonces que, para todo $\delta > 0$, existe un conjunto $I_\delta \subset I$ tal que la medida de la diferencia $I \setminus I_\delta$ es menor que δ y la restricción de Z a I_δ es continua. Con esta garantía, Z puede integrarse en I_δ , y se tiene que

$$\begin{aligned} & \int_{I_\delta} d\eta Z(\eta) \\ & \geq \sum_{n_0}^{\infty} \sum_m g_{n,m} \left| \frac{\lambda_{n,m}}{\kappa_{n,m}} \right|^2 \int_{I_\delta} d\eta \operatorname{sen}^2\left(\omega_n(\eta - \eta_0) + \frac{1}{2\omega_n} \int_{\eta_0}^{\eta} d\tilde{\eta} s(\tilde{\eta})\right), \end{aligned} \quad (3.24)$$

donde n_0 se ha escogido de forma que la integral sobre I_δ en el miembro de la derecha está acotada inferiormente por una cantidad positiva. Esto siempre puede hacerse, ya que en el límite ultravioleta la integral toma un valor positivo, si δ es lo suficientemente pequeño [64]. La existencia de esta cota permite inferir que la sucesión $\{\sqrt{g_{n,m}}\lambda_{n,m}/\kappa_{n,m}\}_{n,m}$ es de cuadrado sumable, luego tiende a cero. Teniendo en mente que $|\kappa_{n,m}|^2 - |\lambda_{n,m}|^2 = 1$, es fácil ver entonces que $\lambda_{n,m} \rightarrow 0$ y $\kappa_{n,m} \rightarrow 1$ cuando $n \rightarrow \infty$. En consecuencia, $1/\kappa_{n,m}$ está acotado inferiormente, de lo que se sigue que también $\{\sqrt{g_{n,m}}\lambda_{n,m}\}_{n,m}$ es de cuadrado sumable. Ahora bien, esa es precisamente la condición suficiente para que la transformación canónica K , que relaciona las dos estructuras complejas invariantes, sea unitariamente implementable en las teorías cuánticas asociadas.

En resumen, todas las estructuras complejas invariantes que permiten una implementación unitaria de la dinámica del campo en la descripción adoptada conducen a cuantizaciones unitariamente equivalentes. Todavía podría alegarse, no obstante, que existe la posibilidad de que un cambio de descripción conduzca a cuantizaciones inequivalentes con las mismas propiedades. Estudiaremos esta otra fuente de ambigüedad a continuación.

3.2.2. Unicidad de la descripción del campo

Hasta el momento, para la cuantización de Fock de las perturbaciones escalares se ha partido de los modos \bar{f}_n y sus momentos canónicamente conjugados $\pi_{\bar{f}_n}$. No olvidemos que esta descripción del campo se alcanzó tras una transformación canónica que incluía el escalado del campo por el factor de escala del fondo homogéneo. Para mantener la condición diagonal de la estructura simpléctica, se realizó el escalado inverso del momento, y se le añadió, además, un término lineal en el propio campo, con el objetivo de llevar la parte de la ligadura cuadrática en las perturbaciones a la forma deseada; concretamente, la del hamiltoniano de un campo de Klein-Gordon sometido a un potencial cuadrático dependiente de las variables homogéneas con correcciones que se anulan en el límite ultravioleta. En ese momento, se alegó que esta parametrización concreta permitiría construir una representación de Fock privilegiada. Ahora podemos justificar esa afirmación.

Imaginemos que realizamos un escalado global de los modos \bar{f}_n por una función del tiempo (o de las variables homogéneas, ya que estas pueden verse como meras funciones del tiempo en el presente tratamiento). Es muy fácil convertir este cambio en una transformación canónica de la teoría de campo. Pediremos que esta transformación sea local y respete la linealidad de la

teoría, es decir, que sea de la forma

$$\tilde{f}_n(\eta) := F(\eta)\bar{f}_n(\eta), \quad (3.25a)$$

$$\pi_{\tilde{f}_n}(\eta) := \frac{1}{F(\eta)}\pi_{\bar{f}_n}(\eta) + G(\eta)\bar{f}_n, \quad (3.25b)$$

siendo F y G funciones del tiempo reales y dos veces diferenciables (de forma que la transformación no estropee la estructura diferencial de la teoría). Además, supondremos que F es distinta de cero en todo momento, pues de otro modo se introducirían singularidades artificiales. Como pedíamos, la transformación es local porque no mezcla distintos modos y las funciones F y G son las mismas para todos ellos. Hay que notar que si F y G fueran constantes, las nuevas variables serían simplemente los modos de una combinación lineal constante del campo escalado y su momento y podría adoptarse la misma representación para ellas; esto, por lo demás, permite fijar las condiciones iniciales $F(\eta_0) = 1$ y $G(\eta_0) = 0$ sin pérdida de generalidad.

Al depender del tiempo, la transformación (3.25) afecta a la dinámica del campo. En efecto, si se introducen variables de destrucción y creación como en la ecuación (3.4) (sustituyendo rayas por tildes), su evolución todavía puede expresarse de la forma (3.5), solo que con los nuevos coeficientes de Bogoliubov

$$\tilde{\alpha}_n = F_+ \alpha_n + F_- \beta_n^* + \frac{iG}{2\omega_n} (\alpha_n + \beta_n^*), \quad (3.26a)$$

$$\tilde{\beta}_n = F_+ \beta_n + F_- \alpha_n^* + \frac{iG}{2\omega_n} (\beta_n + \alpha_n^*), \quad (3.26b)$$

con $2F_{\pm} := F \pm 1/F$. Pues bien, el correspondiente simplectomorfismo \tilde{U} no es unitariamente implementable respecto a la estructura compleja J_0 (que en el instante η_0 diagonalizan las nuevas variables de destrucción y creación), ni de hecho respecto a ninguna estructura compleja invariante, a menos que el escalado sea trivial, es decir, que $F(\eta) = 1 \forall \eta$. A continuación se ofrece un esbozo de la prueba.

Supongamos que en la cuantización determinada por una estructura compleja invariante J la nueva evolución \tilde{U} puede implementarse de forma unitaria. Como se ha argumentado, dicha estructura compleja tiene que estar relacionada con J_0 por medio de un simplectomorfismo K diagonal por bloques. Entonces, si \tilde{U} es unitariamente implementable con respecto a J , la composición $K^{-1}\tilde{U}K$ es unitariamente implementable con respecto a J_0 . Eso significa que los coeficientes β de la transformación de Bogoliubov $K^{-1}\tilde{U}K$,

$${}^J\tilde{\beta}_{n,m} = (\kappa_{n,m}^*)^2 \tilde{\beta}_n - \lambda_{n,m}^2 \tilde{\beta}_n^* + 2i\kappa_{n,m}^* \lambda_{n,m} \Im(\tilde{\alpha}_n), \quad (3.27)$$

forman, multiplicados por el factor de degeneración correspondiente, una sucesión de cuadrado sumable, $\{\sqrt{g_{n,m}}^J \tilde{\beta}_{n,m}\}_{n,m}$. Si este es el caso, también la sucesión $\{\sqrt{g_{n,m}}^J \tilde{\beta}_{n,m}/(\kappa_{n,m}^*)^2\}_{n,m}$ ha de ser de cuadrado sumable (recordemos que $\kappa_{n,m} \geq 1$), por lo que, en particular, debe tender a cero en el límite $n \rightarrow \infty$. Entonces, teniendo en cuenta las ecuaciones (3.26) y el comportamiento ultravioleta de los coeficientes α_n y β_n , se llega a la conclusión de que la siguiente cantidad debe anularse asintóticamente al tender n a infinito:

$$\left[e^{i\omega_n(\eta-\eta_0)} - \left(\frac{\lambda_n}{\kappa_n^*} \right)^2 e^{-i\omega_n(\eta-\eta_0)} \right] F_-(\eta) - 2i \frac{\lambda_n}{\kappa_n^*} \text{sen}(\omega_n(\eta-\eta_0)) F_+(\eta). \quad (3.28)$$

Pero esta es precisamente la condición que se utiliza en la referencia [68] para probar tras un estudio minucioso que esto solo es posible si F_- y, en consecuencia, F toma un valor constante. Entonces, por continuidad, $F(\eta) = 1$ en todo el dominio temporal considerado: cualquier otro escalado dependiente del tiempo conduce a una descripción del campo para la que es imposible construir una representación de Fock con las características deseadas.

Haciendo $F = 1$ en las ecuaciones (3.26), y combinándolas de acuerdo con la ecuación (3.27), se obtiene una expresión para los coeficientes $^J \tilde{\beta}_{n,m}$. Puesto que, como argumentamos, la sucesión $\{(\sqrt{g_{n,m}}^J \tilde{\beta}_{n,m}/(\kappa_{n,m}^*)^2)\}_{n,m}$ es de cuadrado sumable, podemos abstraer de esa expresión las contribuciones que ya lo son (y dividir por el factor irrelevante i) para concluir que también debe ser de cuadrado sumable la sucesión de término general

$$\sqrt{g_{n,m}} \left\{ 2 \frac{\lambda_{n,m}}{\kappa_{n,m}^*} \Im(\alpha_n) + \frac{G}{2\omega_n} \left[\alpha_n^* + 2 \frac{\lambda_{n,m}}{\kappa_{n,m}^*} \Re(\alpha_n) + \left(\frac{\lambda_{n,m}}{\kappa_{n,m}^*} \right)^2 \alpha_n \right] \right\}. \quad (3.29)$$

En la referencia [68], se demuestra que esa condición conduce a dos situaciones. Si la serie $\sum_{n,m} g_{n,m}/\omega_n^2$ no converge (como ocurre en el tres-toro y en la tres-esfera), entonces, necesariamente, G debe anularse idénticamente. En este caso, no es admisible ninguna redefinición del momento que dependa del tiempo de forma no trivial. Si, por el contrario, dicha serie converge, es admisible que G sea distinto de cero, pero entonces también ha de converger la serie $\sum_{n,m} g_{n,m} |\lambda_n|^2$ para garantizar que la sucesión considerada sea de cuadrado sumable. Por lo tanto, en este caso el momento puede redefinirse añadiéndole una contribución lineal en el propio campo sin frustrar la pretensión de encontrar representaciones de Fock del tipo deseado, pero estas nuevas representaciones serán unitariamente equivalentes a la obtenida en la descripción original.

En consecuencia, el conjunto de transformaciones canónicas dependientes del tiempo del tipo (3.25), lineales y locales, no permiten alcanzar una

descripción alternativa de las perturbaciones escalares en la que puedan construirse nuevas representaciones de Fock con las características buscadas, a menos que sean equivalentes a la representación del caso sin masa. De hecho, incluso esta posibilidad queda descartada si se realiza un escalado del campo que dependa del tiempo de forma no trivial. A la luz de estos resultados, se justifica la transformación canónica del sistema completo introducida en las ecuaciones (2.18), que incluía el escalado de las perturbaciones, escalares y tensoriales, y la redefinición de sus momentos que garantizan la existencia de sendas cuantizaciones privilegiadas sobre el fondo clásico, privilegiadas no solo por poseer las características deseadas, sino también por ser únicas salvo equivalencia unitaria, en el sentido que acabamos de detallar. A continuación, ahondaremos aún más en la unicidad de la cuantización de las perturbaciones escalares admitiendo redefiniciones más generales del campo y su momento con un claro interés físico.

3.2.3. Invariantes *gauge*

Cuando, en el capítulo dedicado al tratamiento clásico del sistema, implementamos la transformación canónica (2.18), buscábamos introducir una parametrización de las perturbaciones escalares en la que la parte de la ligadura cuadrática en ellas se identificara con el hamiltoniano de un campo escalar sometido a un potencial cuadrático dependiente de las variables homogéneas, lo que habría permitido aplicar directamente los resultados de unicidad de las referencias [67, 68]. No obstante, hacerlo de forma exacta habría requerido una transformación no local, en el sentido de involucrar al inverso del operador de Laplace-Beltrami. En vez de eso, preferimos mantener la localidad de la transformación y, con ella, la interpretación física del campo escalar, a pesar de los términos adicionales, explícitamente dependientes en ω_n pero subdominantes en el ultravioleta, que aparecían en la ligadura.

Sin embargo, al definir los invariantes *gauge*, consideramos ese tipo de transformaciones no locales, en las que cada modo cambia de forma diferente. Gracias a esta mayor libertad, conseguimos construir variables cuya evolución está dictada por ecuaciones de tipo Klein-Gordon (con una masa dependiente del fondo), sin ningún tipo de correcciones infrarrojas. Así ocurre, si la topología de las secciones espaciales es plana, con el invariante de Mukhanov-Sasaki, introducido en la ecuación (2.33). Al fijar el *gauge*, sus modos v_n resultaban ser combinaciones lineales de los del campo escalado y su momento, \bar{f}_n y $\pi_{\bar{f}_n}$, como muestra la ecuación (2.34), con coeficientes (2.35) dependientes de la frecuencia ω_n . Por supuesto, análogamente ocurría con sus momentos π_{v_n} , dados en la ecuación (2.36) utilizando los coe-

ficientes (2.37).

También se presentó una descripción alternativa en términos de los pares canónicos de invariantes *gauge* (Ψ_n, π_{Ψ_n}) , definidos en las ecuaciones (2.47) y dados tras la fijación de *gauge* por las ecuaciones (2.48). Recordemos que Ψ_n era esencialmente el invariante de densidad de energía de Bardeen, convenientemente escalado. De nuevo, encontramos que la transformación canónica que relaciona esta descripción del campo con la de la perturbación escalada es lineal, pero afecta de forma diferente a cada modo.

Puesto que las ecuaciones de movimiento que obedecen el invariante de Mukhanov-Sasaki en el caso plano y el invariante de densidad de energía Ψ_n son del tipo estudiado en las referencias [67, 68], pueden aplicarse los resultados de esos trabajos para construir representaciones de Fock para estas descripciones del campo en las que tanto las isometrías espaciales como la evolución del mismo admiten una implementación unitaria, representaciones que dichas propiedades señalan como únicas salvo equivalencia unitaria. Más aún, puede descartarse cualquier escalado de dichos invariantes por una función que dependa del tiempo (de forma no trivial) completado a una transformación canónica lineal del sector inhomogéneo. Esto no contradice los resultados de la sección 3.2.2, ya que las transformaciones con la que se han alcanzado las nuevas descripciones no son de este tipo, en particular, por su dependencia en el modo. Cabe entonces preguntarse si dichas transformaciones son unitariamente implementables, pues, de otro modo, las nuevas cuantizaciones serían inequivalentes a la dada con anterioridad en términos del campo escalado.

Empecemos con el invariante de Mukhanov-Sasaki. Un representante de la clase de equivalencia de sus representaciones privilegiadas puede caracterizarse a partir de las variables de destrucción

$$a_{\nu_n} = \frac{1}{\sqrt{2\omega_n}}(\omega_n \nu_n + i\pi_{\bar{\nu}_n}) \quad (3.30)$$

y las variables de creación conjugadas —*cf.* ecuaciones (3.2) y (3.4)—. Es evidente que, clásicamente, estas variables pueden relacionarse con sus homólogas $a_{\bar{\nu}_n}$ y $a_{\bar{\nu}_n}^*$ a través de una transformación de Bogoliubov de la forma

$$a_{\nu_n} = \lambda_n^+ a_{\bar{\nu}_n} + \lambda_n^- a_{\bar{\nu}_n}^*. \quad (3.31)$$

Es fácil ver que, en particular,

$$\lambda_n^\pm = \frac{1}{2}(A_n \pm D_n) + \frac{i}{2\omega_n}(C_n \mp \omega_n^2 B_n). \quad (3.32)$$

Esta transformación será unitariamente implementable con respecto a la estructura compleja J_0 si la serie $\sum_n g_n \lambda_n^-$ converge. Ahora bien, introduciendo

en la última igualdad las expresiones de los coeficientes A_n, B_n, C_n y D_n , dadas en las ecuaciones (2.35) y (2.37), es fácil constatar que λ_n^- es del orden de ω_n^{-2} , por lo que de hecho la serie converge y la transformación admite una implementación unitaria en la teoría cuántica. Aparte de aumentar nuestra confianza en la cuantización escogida, esto permite relacionar la cuantización en diferentes *gauges*, como el adoptado en el apéndice 1.2.3.

Con la descripción del campo en términos del invariante de densidad de energía y su momento puede procederse del mismo modo, definiendo variables de destrucción a_{Ψ_n} como en la ecuación (3.30), reemplazando v_n por Ψ_n (y los respectivos momentos) y calculando la transformación de Bogoliubov que las relacionan con las variables de creación y destrucción introducidas para el campo escalado. También esta transformación resulta ser unitariamente implementable, ya que sus coeficientes beta (es decir, los asociados a su parte antilineal) resultan ser del orden de ω_n^{-2} ; concretamente,

$$\tilde{\lambda}_n^- = \frac{i}{2\omega_n^2} \chi, \quad (3.33)$$

donde χ es la función (2.49).

En resumen, las cuantizaciones privilegiadas que pueden construirse para las dos descripciones del campo en términos de pares canónicos de invariantes *gauge* presentadas en la sección 2.3 son unitariamente equivalentes a la estudiada para la descripción en términos del campo escalado y su momento. Estos resultados no deberían sorprendernos a la luz de un reciente trabajo sobre este tipo de transformaciones lineales y no locales que no mezclan modos [111]. Partiendo de la descripción de un campo en la este obedece una ecuación de Klein-Gordon con masa dependiente del tiempo (y tomando su derivada, adecuadamente densitizada, como momento canónicamente conjugado), pueden realizarse transformaciones de la clase mencionada para alcanzar otras descripciones en las que las ecuaciones de movimiento tomen la misma forma (excepto, tal vez, correcciones infrarrojas a la masa). Pues bien, dichas transformaciones admiten necesariamente una implementación unitaria en la cuantización privilegiada del campo (con vacío invariante bajo el grupo de isometrías espaciales y dinámica unitariamente implementable). Aunque, en el caso en consideración, la ecuación de campo original (2.28) contiene correcciones infrarrojas no solo en la masa, sino también en el término $r_n \dot{f}_n$, del análisis realizado anteriormente se desprende que dichas correcciones no afectan al comportamiento ultravioleta de las soluciones. En consecuencia, el resultado enunciado puede aplicarse también en este sistema; en particular, a las transformaciones que relacionan el campo escalado y su momento con los pares canónicos de invariantes *gauge*. Como vemos, el

criterio de la unitariedad de la dinámica, junto con el de la simetría, es de enorme utilidad para despejar la ambigüedad en la cuantización de Fock.

3.3. Discusión

Los resultados expuestos en este capítulo han permitido eliminar la ambigüedad en la selección de una descripción de las inhomogeneidades y su representación de Fock mediante el recurso a criterios profundos y elegantes: la simetría (en particular, el grupo de isometrías de las secciones espaciales del espaciotiempo de fondo) y la unitariedad de la dinámica (ingrediente clave en la interpretación probabilística habitual de la Mecánica Cuántica). Lo hacen generalizando los teoremas de unicidad de las referencias [67, 68], que establecen que, para un campo de Klein-Gordon con masa dependiente del tiempo (o cualquier campo cuyas ecuaciones dinámicas puedan reducirse a la misma forma), las condiciones de que el estado de vacío sea invariante bajo las isometrías espaciales y la dinámica del campo pueda implementarse en la teoría cuántica con un operador unitario seleccionan una única clase de representaciones de Fock unitariamente equivalentes. Más aun, esos requisitos fijan también la descripción del campo, pues prohíben escalados globales del mismo que dependan del tiempo de forma no trivial. Así sucede con las perturbaciones tensoriales en el modelo considerado, ya que, tras ser escaladas con el factor de escala de la geometría de fondo, satisfacen ecuaciones dinámicas del tipo mencionado (en las que la dependencia temporal viene dada a través de las variables homogéneas). Finalmente, retomando la discusión general, dependiendo de la variedad espacial, podría ser admisible una redefinición del momento del campo añadiéndole un término lineal en él (con un coeficiente dependiente del tiempo), pero este cambio no es fuente de ambigüedad, en el sentido de que las cuantizaciones con las propiedades buscadas para la nueva descripción son, de existir, unitariamente equivalentes a las encontradas para la descripción original.

En las ecuaciones dinámicas de las perturbaciones escalares, sin embargo, aparecen términos adicionales, que son, no obstante, subdominantes en el ultravioleta. Esos términos no pueden eliminarse con una transformación canónica lineal y local del sector inhomogéneo en el sistema reducido. Aun así, como la demostración de los resultados de las referencias [67, 68] descansa tan solo en el comportamiento ultravioleta del campo, han podido extenderse a casos con el tipo de correcciones infrarrojas que muestran las ecuaciones (2.26) y (2.28).

De especial importancia es la conclusión de que el escalado de las perturbaciones por el factor de escala de la geometría de fondo, realizado como parte de la transformación canónica (2.18), es imprescindible, a menos que se esté dispuesto a renunciar a la unitariedad de la dinámica cuántica del campo sobre el fondo clásico. Ya señalamos en la sección 2.2 que ese escalado se adopta con frecuencia en el tratamiento de las perturbaciones cosmoló-

gicas; este resultado respalda de forma contundente su implementación con vistas a la ulterior cuantización.

También es interesante mencionar que existen cuantizaciones con las propiedades buscadas en términos de los invariantes *gauge* definidos en la sección 2.3. Lo garantiza el hecho de que sus ecuaciones dinámicas son de tipo Klein-Gordon (en el caso de la variable de Mukhanov-Sasaki, solo si el parámetro de curvatura k se anula), con una función de las variables homogéneas en el papel de masa. Esto es posible porque las transformaciones canónicas del sector inhomogéneo que relacionan los distintos pares de invariantes con el campo escalado y sus momento no son locales (porque dependen del modo), luego no forman parte de la clase de transformaciones anteriormente aludida. A pesar de ello, son unitariamente implementables. Conclusiones análogas pueden obtenerse en el *gauge* alternativo considerado en el apéndice C. Los resultados anteriores apuntan a la independencia de la teoría respecto a la fijación de *gauge*, al menos al nivel tratado en este capítulo: el de la Teoría Cuántica de Campos en espaciotiempos curvos.

Por último, cabe preguntarse por qué comenzamos la cuantización a partir del campo escalado, en vez de adoptar una descripción de la teoría en términos de invariantes *gauge*. Sabíamos que requerir una representación de Fock con vacío simétrico y dinámica unitaria permite fijar la descripción del campo frente a transformaciones canónicas lineales y locales del sector inhomogéneo. Si desde el principio hubiéramos dado cabida a transformaciones no locales, este criterio habría resultado insuficiente para fijar la descripción. En vez de eso, preferimos partir del campo escalado y después asegurarnos de que la correspondiente cuantización privilegiada es unitariamente equivalente a las que pueden construirse en términos de los invariantes *gauge*. Ahora sabemos que, si dos descripciones del campo gobernadas por ecuaciones de tipo Klein-Gordon están relacionadas mediante una transformación canónica lineal que depende del modo pero no los entremezcla, dicha descripción es necesariamente implementable de forma unitaria en las representaciones privilegiadas de cualquiera de las dos descripciones [111]. Las transformaciones que, en el sistema estudiado, llevan del campo escalado y su momento a los pares de invariantes *gauge* pueden considerarse casos particulares de la situación anterior. La presencia de términos subdominantes adicionales en las ecuaciones no debería preocuparnos después del análisis realizado en este capítulo.

Una vez resuelto el problema de la ambigüedad en la representación de Fock del sector inhomogéneo, podemos abordar ya la cuantización del sistema completo.

Capítulo 4

Cuantización híbrida de perturbaciones cosmológicas

Después de los resultados expuestos en el capítulo anterior, disponemos de criterios que permiten fijar una representación de Fock para las inhomogeneidades. Estamos ya en condiciones de completar la cuantización híbrida del modelo, combinando dicha representación con una polimérica del sector homogéneo.

El tratamiento de perturbaciones cosmológicas en el marco ofrecido por la Gravedad y la Cosmología Cuántica de lazos ha sido un campo de estudio muy activo en el último decenio. Los primeros trabajos sobre este tema estaban motivados por la constatación de que la dinámica efectiva de la cuantización de lazos del modelo FLRW da origen a un periodo de superinflación [112], o inflación acelerada, y se limitaban a estudiar la evolución de perturbaciones escalares sobre un fondo homogéneo e isótropo descrito por dicha dinámica efectiva [113–116]. Conviene aclarar que ese periodo de superinflación no produce la suficiente expansión como para hacer superflua una fase inflacionaria posterior gobernada por alguno de los mecanismos habituales, como un campo de inflatón sometido a un determinado potencial. No obstante, en el caso de un potencial cuadrático asociado a una masa (a la que se asigna un valor fenomenológico), se ha demostrado que, durante el régimen de superinflación, las correcciones cuánticas canalizan el campo hacia una ulterior etapa de inflación de *rodamiento lento*¹ que sí produce —con gran probabilidad— una expansión compatible con las observaciones [35].

Una de las líneas principales de investigación en este campo busca deducir ecuaciones efectivas para las perturbaciones introduciendo en las liga-

¹La inflación de *rodamiento lento* o de *slow roll* está caracterizada por la lenta variación temporal del inflatón. Esta particularidad permite introducir algunas aproximaciones que simplifican considerablemente el tratamiento del proceso.

duras correcciones del tipo esperable en Cosmología Cuántica de Lazos; la condición de que el álgebra de ligaduras corregidas cierre permite constreñir las modificaciones aceptables. Dos recientes resúmenes de este enfoque y sus principales resultados pueden encontrarse en las referencias [117, 36]. A menudo, los diferentes tipos de correcciones se han estudiado por separado: así, mientras algunos trabajos se centran en las provenientes de la regularización del inverso del volumen [118–123], otros se ocupan de las originadas por la introducción de holonomías [124–128]; naturalmente, también se han abordado ambos tipos de forma conjunta [37, 129, 117].

Existe en la literatura otra corriente que persigue la cuantización completa del sistema compuesto por las perturbaciones y el fondo homogéneo sobre el que se propagan, cuantización que, dadas las actuales limitaciones de las técnicas poliméricas, se realiza en un esquema híbrido. Esta línea de acción fue iniciada y desarrollada en algunos de los trabajos recogidos en esta memoria y, paralelamente, en los de los investigadores I. Agullo, A. Ashtekar y W. Nelson [130–132]. No obstante, existen importantes diferencias entre los dos tratamientos. En particular, I. Agullo *et al.* renuncian a incorporar en su análisis la reacción de las perturbaciones sobre el fondo y, con ella, a la estructura simpléctica del sistema. Con todo, utilizando el campo material como un tiempo relacional, consiguen obtener una ecuación de evolución para las perturbaciones que permite interpretar su propagación como una teoría cuántica de campo sobre un fondo efectivo *vestido*. En la discusión que cierra este capítulo se ofrecerá una comparación más detallada.

Por otra parte, es de esperar que la derivación de ligaduras efectivas y la cuantización de la teoría sean perspectivas complementarias, en cuanto a que esta debería justificar las correcciones que introduce aquella, y aquella entonces ofrecería un marco manejable en el que explorar las consecuencias físicas de esta. Sin embargo, es difícil establecer comparaciones entre los resultados de ambas estrategias en el estadio actual.

Sin más preámbulo, en el siguiente apartado se presenta la cuantización híbrida del modelo FLRW con perturbaciones que se introdujo a nivel clásico en el capítulo 2. Trataremos únicamente perturbaciones escalares en el sistema reducido; aunque no nos ocuparemos aquí, por tanto, de las tensoriales, evidentemente, su tratamiento no presenta mayores dificultades. En cuanto a la topología de las secciones espaciales, se cubrirán solo los dos casos que hemos estudiado en el modelo homogéneo, es decir, el tres-toro y la tres-esfera, con $k = 0$ y $k = +1$, respectivamente. No consideraremos por tanto ningún ejemplo con $k = -1$, a pesar de que su cuantización polimérica también ha sido estudiada [73].

4.1. Espacio de Hilbert cinemático

En el capítulo 2, parametrizamos el sector homogéneo del espacio de fases reducido del modelo FLRW perturbado utilizando las variables $\bar{\alpha}$, $\bar{\varphi}$ y sus momentos conjugados, que fueron introducidas en las ecuaciones (2.18). Con vistas a la cuantización de lazos del fondo, es preferible, sin embargo, utilizar una descripción del sector homogéneo adaptada a ella. Emplearemos las variables c y p , introducidas en la ecuación (1.18) para un universo homogéneo e isótropo, modelo en el que parametrizan, respectivamente, la conexión de Ashtekar-Barbero y la tríada densitizada. En el límite homogéneo del modelo FLRW perturbado, es decir, cuando las inhomogeneidades se anulan, c y p están relacionadas con las variables con raya a través de las expresiones

$$|p| = l_0^2 \sigma^2 e^{2\bar{\alpha}}, \quad p(c - kl_0) = -\gamma l_0^3 \sigma^2 \pi_{\bar{\alpha}}. \quad (4.1)$$

El signo de p , que estas igualdades no fijan, queda determinado por la orientación de la tríada (véase la sección 1.2.2). Recordemos que el corchete de Poisson de estas variables es $\{c, p\} = \gamma\kappa/3$. Aceptaremos estas expresiones también en presencia de inhomogeneidades; es decir, identificaremos las variables definidas por las ecuaciones (4.1) como los grados de libertad homogéneos que cuantizaremos con técnicas de cosmología de lazos.

Por otro lado, con el fin de evitar la aparición de factores innecesarios (y para facilitar la comparación con la sección 1.2.2), es conveniente escalar los modos del campo escalar y de su momento con determinados factores constantes; en concreto, para el modo cero elegimos

$$\phi = \frac{\bar{\varphi}}{l_0^{3/2} \sigma}, \quad \pi_\phi = l_0^{3/2} \sigma \pi_{\bar{\varphi}}; \quad (4.2)$$

mientras que, para el resto de modos,

$$\check{f}_{\mathbf{n}} := \frac{\bar{f}_{\mathbf{n}}}{l_0^{1/2}}, \quad \pi_{\check{f}_{\mathbf{n}}} := l_0^{1/2} \pi_{\bar{f}_{\mathbf{n}}}. \quad (4.3)$$

Evidentemente, $\{\phi, \pi_\phi\} = 1$ y $\{\check{f}_{\mathbf{n}'}, \pi_{\check{f}_{\mathbf{n}'}}\} = \delta_{\mathbf{n}'\mathbf{n}}$. Esta transformación de los modos no afecta a las variables de destrucción y creación introducidas en la ecuación (3.4) si se acompaña del escalado de la frecuencia $\tilde{\omega}_n = l_0 \omega_n$.

La identificación del sector homogéneo con el modelo FLRW provee de forma directa una cuantización de lazos de aquel. De esta forma, asignamos a dicho sector el espacio de Hilbert cinemático $\mathcal{H}_{\text{cin}}^{\text{mat}} \otimes \mathcal{H}_{\text{cin}}^{\text{gra}}$, sobre el que los operadores fundamentales $-\hat{p}$, \hat{N}_μ y su análogo $\hat{N}_{\bar{\mu}}$ en la dinámica mejorada— actúan como se explicó en la sección 1.2.2.

Para representar el sector inhomogéneo, recurrimos a la cuantización de Fock que ya hemos estudiado en este capítulo; en particular, escogeremos, entre las representaciones privilegiadas equivalentes, la representación que sería natural en el caso sin masa y denotaremos el correspondiente espacio de Fock por $\mathcal{F}_{\check{f}}$. Esta representación puede definirse en términos de la estructura compleja que diagonalizan las variables de destrucción y creación (3.4). Así, podemos esperar que, en el límite en el que los grados de libertad homogéneos se comporten clásicamente de forma efectiva, se recupere una teoría cuántica del campo en la que tanto las isometrías espaciales como la dinámica del campo se implementen unitariamente. Al mismo tiempo, evitamos la ambigüedad inherente a la cuantización de Fock.

Como espacio de Hilbert cinemático del sistema completo, tomaremos simplemente el producto $\mathcal{H}_{\text{cin}}^{\text{mat}} \otimes \mathcal{H}_{\text{cin}}^{\text{gra}} \otimes \mathcal{F}_{\check{f}}$. Al igual que en la cuantización híbrida de Gowdy, se entiende que, en este producto, los operadores fundamentales definidos en cada uno de los factores actúan como la identidad sobre los demás factores. Aun así, la acción de la ligadura hamiltoniana no respetará la estructura de producto del espacio cinemático, pues, ya en el nivel clásico, su parte cuadrática en las perturbaciones las combina con variables homogéneas.

4.2. Representación de la ligadura

Antes de proseguir, veamos qué expresión toma la ligadura clásica en las nuevas variables. Recordemos primero su estructura perturbativa:

$$N_0 H =: \frac{\sigma N_0}{2\kappa} C = \frac{\sigma N_0}{2\kappa} \left(C_0 + \epsilon^2 \sum_{\mathbf{n}} C_2^{\mathbf{n}} \right) + O(\epsilon^3). \quad (4.4)$$

El escalado por el factor $2\kappa/\sigma$ se ha introducido con el único objetivo de facilitar la comparación con buena parte de la literatura de Cosmología Cuántica de Lazos y, en particular, con el tratamiento de la sección 1.2. Los términos del miembro de la derecha de la segunda igualdad se escriben —recordando la ecuación (2.5a) y la forma (2.16) adoptada para las contribuciones cuadráticas— como

$$C_0 = \frac{1}{|p|^{3/2}} \left(-\frac{1}{\gamma^2} p^2 [(c - kl_0)^2 + k\gamma^2 l_0^2] + \kappa(\pi_\phi^2 + m^2 |p|^3 \phi^2) \right), \quad (4.5a)$$

$$C_2^{\mathbf{n}} = \frac{\kappa}{\sqrt{|p|}} \left(\mathbb{E} \check{E}_{\pi\pi}^{\mathbf{n}} \pi_{\check{f}_n}^2 + 2 \mathbb{E} \check{E}_{q\pi}^{\mathbf{n}} \check{f}_n \pi_{\check{f}_n} + \mathbb{E} \check{E}_{qq}^{\mathbf{n}} \check{f}_n^2 \right); \quad (4.5b)$$

a su vez, los coeficientes del término cuadrático en las perturbaciones se obtienen de las ecuaciones (2.21):

$${}^E\check{E}_{\pi\pi}^n = 1 - \frac{\kappa}{2(\tilde{\omega}_n^2 - 3kl_0^2)} p^{-2} \pi_\phi^2, \quad (4.6a)$$

$${}^E\check{E}_{q\pi}^n = -\frac{\kappa}{2(\tilde{\omega}_n^2 - 3kl_0^2)} |p|^{-3} \pi_\phi \left(\frac{2}{\gamma} p(c - kl_0) \pi_\phi + m^2 |p|^3 \phi \right), \quad (4.6b)$$

$${}^E\check{E}_{qq}^n = \tilde{\omega}_n^2 + m^2 |p| - \frac{1}{4} p^{-2} \left(\frac{2}{\gamma^2} p^2 [(c - kl_0)^2 - k\gamma^2 l_0^2] + \kappa (5\pi_\phi^2 + m^2 |p|^3 \phi^2) \right) - \frac{\kappa}{2(\tilde{\omega}_n^2 - 3kl_0^2)} p^{-4} \left(\frac{2}{\gamma} p(c - kl_0) \pi_\phi + m^2 |p|^3 \phi \right)^2. \quad (4.6c)$$

Como no podía ser de otra manera, el término de orden cero de la ligadura coincide con la ligadura del modelo sin perturbar. Gracias a ello, su representación es inmediata si explotamos la identificación entre el sector homogéneo de esta teoría y el espaciotiempo FLRW.

En cuanto a las variables inhomogéneas, su promoción a operadores se realizará a partir de las variables de destrucción y creación definidas en la ecuación (3.4). Los correspondientes operadores de creación y destrucción actúan de forma muy sencilla en la base de estados caracterizados por sus números de ocupación,

$$\left\{ |\mathfrak{N}_{\bar{f}}\rangle = |N_{\bar{f}_{1,1}}, N_{\bar{f}_{1,2}}, \dots, N_{\bar{f}_{1,g_1}}, N_{\bar{f}_{2,1}}, \dots\rangle : N_{\bar{f}_{n,l}} \in \mathbb{Z}^+, \sum_{n,l} N_{\bar{f}_{n,l}} < \infty \right\}. \quad (4.7)$$

En ella,

$$\hat{a}_{\bar{f}_n} | \dots, N_{\bar{f}_n}, \dots \rangle = \hbar \sqrt{N_{\bar{f}_n}} | \dots, N_{\bar{f}_n} - 1, \dots \rangle, \quad (4.8a)$$

$$\hat{a}_{\bar{f}_n}^\dagger | \dots, N_{\bar{f}_n}, \dots \rangle = \hbar \sqrt{N_{\bar{f}_n} + 1} | \dots, N_{\bar{f}_n} + 1, \dots \rangle. \quad (4.8b)$$

Por otra parte, el término cuadrático en las perturbaciones las entremezcla con las variables homogéneas. Por supuesto, estas requieren una regularización, especialmente debido a la ausencia de un operador cuántico que represente la variable clásica c . Sin embargo, a diferencia de lo que ocurría en los modelos homogéneos, no contamos con un procedimiento general para regularizarlas. Solventaremos este problema siguiendo una prescripción basada precisamente en la experiencia acumulada en esos modelos. La idea básica es promover las potencias de la combinación $p(c - kl_0)$ a productos de $\hat{\Omega}_k$ y operadores análogos. Explicaremos este procedimiento en mayor detalle cuando particularicemos a los casos con topología espacial concreta.

En cuanto a las potencias inversas de p , utilizaremos para ellas la misma regularización que en el modelo FLRW. Así, por ejemplo, invirtiendo el operador $(|p|^{-1/2})$ definido en la ecuación (1.37), podemos densitizar el operador de ligadura \hat{C} , asumiendo de momento que el estado de volumen nulo $|v=0\rangle$ se desacopla del resto, como sucede en el modelo homogéneo plano (en seguida veremos que esta suposición puede justificarse en presencia de inhomogeneidades y también en el modelo cerrado adoptando la prescripción adecuada):

$$\left(\frac{1}{V}\right)^{-1/2} \hat{C} \left(\frac{1}{V}\right)^{-1/2} = \hat{\mathcal{C}} = \hat{\mathcal{C}}_0 + \epsilon^2 \sum_{\mathbf{n}} \hat{\mathcal{C}}_2^{\mathbf{n}} + O(\epsilon^3). \quad (4.9)$$

Las expresiones de $\hat{\mathcal{C}}_0$ y $\hat{\mathcal{C}}_0^{\mathbf{n}}$ dependen, claro está, del tipo de secciones espaciales en consideración. Como hemos indicado, aquí solo trataremos los casos en los que tienen la topología del tres-toro y de la tres-esfera.

4.2.1. Caso plano

En la prescripción presentada en la Introducción para el modelo FLRW plano, la regularización de la ligadura homogénea equivale, desde el punto de vista operacional, a reemplazar la combinación $(pc)^2$ por el operador cuántico $\hat{\Omega}_0^2$, definido a partir de la ecuación (1.42). Así, la parte homogénea de la ligadura, que hemos identificado con la del modelo sin perturbaciones, es

$$\hat{\mathcal{C}}_0 := -\frac{6}{\gamma^2} \hat{\Omega}_0^2 + \kappa (\hat{\pi}_\phi^2 + m^2 \hat{V}^2 \hat{\phi}^2). \quad (4.10)$$

Admitiremos que este procedimiento para regularizar la combinación $(cp)^2$ es también válido cuando esta aparece en los términos de la ligadura cuadráticos en las perturbaciones. Ahora bien, en ellos no solo se encuentra el producto pc al cuadrado, sino también tal cual. Aunque podría parecer razonable promover sin más esta otra combinación al operador $\hat{\Omega}_0$, hay una razón por la que esto es desaconsejable. Tal y como aparece definido en la ecuación (1.42), $\hat{\Omega}_0$ es un operador en diferencias de paso dos en el parámetro v , por lo que su actuación no respeta los sectores de superselección \mathcal{H}_ϵ^\pm de la teoría sin perturbar. Para solucionar esto, seguimos una estrategia similar a la que se emplea en el caso homogéneo para representar el parámetro de Hubble. En concreto, representamos los productos pc con el operador en diferencias de paso cuatro

$$\hat{\Lambda}_0 := \frac{1}{8i\sqrt{\Delta}} \hat{V}^{1/2} [\widehat{\text{sgn}} v, \hat{\mathcal{N}}_{4\bar{\mu}} - \hat{\mathcal{N}}_{-4\bar{\mu}}]_+ \hat{V}^{1/2}. \quad (4.11)$$

Comparando esta expresión con la ecuación (1.42), se constata que la diferencia de este operador con $\hat{\Omega}_0$, aparte de un factor dos, es la longitud de las aristas sobre las que se calculan las holonomías, que es el doble en este caso.

Por lo demás, quedan todavía algunas ambigüedades de orden de factores para representar cuánticamente la ligadura. Para resolverlas, nos atenderemos a la siguiente prescripción. Como en el modelo homogéneo, dividiremos las potencias del volumen en factores iguales a izquierda y a derecha; así, un término como $V^r f(pc)$, donde f es una función genérica, se promueve al operador $\hat{V}^{r/2} \hat{f} \hat{V}^{r/2}$. Por otra parte, representaremos el producto $\phi \pi_\phi$ con el operador simétrico $[\hat{\phi}, \hat{\pi}_\phi]_+/2$. Por último, en las expresiones cuadráticas en las perturbaciones, adoptaremos el orden normal de los operadores de creación y destrucción (que es precisamente el orden en el que se acaban de enumerar). Siguiendo estas instrucciones, se obtienen los siguientes operadores regularizados:

$$\hat{\mathcal{C}}_2^n = \frac{\kappa}{\tilde{\omega}_n} \left(\frac{1}{V} \right)^{-1/2} \left[(2\tilde{\omega}_n^2 + \hat{F}_n^-) \hat{N}_{\hat{f}_n} + \frac{1}{2} \left(\hat{F}_n^+ \hat{X}_{\hat{f}_n}^+ + \frac{i\kappa}{2\tilde{\omega}_n} \hat{G} \hat{X}_{\hat{f}_n}^- \right) \right] \left(\frac{1}{V} \right)^{-1/2}, \quad (4.12)$$

donde $\hat{N}_{\hat{f}_n} = \hat{a}_{\hat{f}_n}^\dagger \hat{a}_{\hat{f}_n}$ son los operadores número, $\hat{X}_{\hat{f}_n}^\pm = (\hat{a}_{\hat{f}_n}^\dagger)^2 \pm (\hat{a}_{\hat{f}_n})^2$ y

$$\begin{aligned} \hat{F}_n^\pm &= m^2 \hat{V}^{1/3} - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{V} \right)^{5/6} \left(\frac{2}{\gamma^2} \hat{\Omega}_0^2 + \kappa [(5 \mp 2) \hat{\pi}_\phi^2 + m^2 \hat{V}^2 \hat{\phi}^2] \right) \left(\frac{1}{V} \right)^{5/6} \\ &\quad - \frac{\kappa}{2\tilde{\omega}_n^2} \left(\frac{1}{V} \right)^{3/2} \left(\frac{2}{\gamma} \hat{\Lambda}_0 \hat{\pi}_\phi + m^2 \hat{V}^2 \hat{\phi} \right) \left(\frac{1}{V} \right)^{3/2}, \end{aligned} \quad (4.13a)$$

$$\hat{G} = - \left(\frac{1}{V} \right)^{7/6} \left(\frac{4}{\gamma} \hat{\Lambda}_0 \hat{\pi}_\phi^2 + m^2 \hat{V}^2 [\hat{\phi}, \hat{\pi}_\phi]_+ \right) \left(\frac{1}{V} \right)^{7/6}. \quad (4.13b)$$

Nótese que, en esta forma, la expresión final de la ligadura no depende explícitamente de la escala arbitraria l_0 .

4.2.2. Caso cerrado

En el caso de que el espaciotiempo tenga secciones espaciales homeomorfas a la tres-esfera, se procede de forma análoga. Primeramente, se identifica el término de orden cero de la ligadura con la ligadura del sistema homogéneo. Sin embargo, no utilizaremos directamente la ligadura dada en la ecuación (1.51), sino una obtenida adaptando a este caso la prescripción MMO simplificada, que presentamos en el modelo plano. Recordemos que la prescripción MMO se caracteriza por adoptar una simetrización en la que desempeña un papel fundamental el operador correspondiente a la función

clásica $\text{sgn } v$. Además, la simetrización de las potencias del volumen se realiza repartiéndolas equilibradamente a izquierda y a derecha del operador de ligadura. En su versión simplificada, esta prescripción prescinde de las correcciones provenientes de la regularización (1.35), lo que resulta en un operador más compacto en el que, con la densitización adecuada y si el campo carece de masa, pueden desacoplarse las partes geométrica y material. Siguiendo las anteriores directrices, la ligadura hamiltoniana densitizada del modelo FLRW cerrado toma la forma

$$\hat{\mathcal{C}}_0 = -\frac{6}{\gamma^2} \left(\hat{\Omega}_+^2 + (1 + \gamma^2) l_0^2 \hat{V}^{4/3} - \frac{1}{\Delta} \hat{V}^2 \text{sen}^2(\hat{\mu} l_0) \right) + \kappa (\hat{\pi}_\phi^2 + m^2 \hat{V}^2 \hat{\phi}^2), \quad (4.14)$$

donde

$$\hat{\Omega}_+ = \frac{1}{4i\sqrt{\Delta}} \hat{V}^{1/2} \left[\widehat{\text{sgn } v}, e^{-i\hat{\mu} l_0/2} \hat{\mathcal{N}}_{2\bar{\mu}} e^{-i\hat{\mu} l_0/2} - e^{i\hat{\mu} l_0/2} \hat{\mathcal{N}}_{-2\bar{\mu}} e^{i\hat{\mu} l_0/2} \right]_+ \hat{V}^{1/2} \quad (4.15)$$

es el análogo de $\hat{\Omega}_0$ en este modelo con curvatura espacial. El origen de las fases $\exp(\pm i\hat{\mu} l_0/2)$ está claro a la vista de la ecuación (1.50), en la que se basa la regularización de la curvatura de la conexión.

En esta prescripción, el estado de volumen nulo, $|v = 0\rangle$ está desacoplado y puede eliminarse, como en el caso $k = 0$, lo que de hecho permite justificar la densitización introducida. No se trata de la única ventaja de la prescripción MMO que se extiende a la nueva topología espacial, pues los sectores de superselección que deja invariantes la ligadura densitizada $\hat{\mathcal{C}}_0$ son los mismos que en el caso plano: los subespacios $\mathcal{H}_\varepsilon^\pm$ formados por estados con soporte en semirredes de paso cuatro en la etiqueta v , con extremo $|v| = \varepsilon \in (0, 4]$. En particular, los estados con distinto signo de v están desacoplados.

En realidad, las fases $\exp(\pm i\hat{\mu} l_0/2)$ que diferencian $\hat{\Omega}_+$ y $\hat{\Omega}_0$ pueden eliminarse, al menos en el caso homogéneo, mediante una transformación unitaria (similar a la realizada en la referencia [71]) de la forma $\hat{W} = \exp(i l_0 \hat{\vartheta}(v))$, siendo ϑ una función determinada en cada semirred por la relación de recurrencia

$$\vartheta(v + 4) - \vartheta(v) = \frac{1}{2} \bar{\mu}(v + 4) + \bar{\mu}(v + 2) + \frac{1}{2} \bar{\mu}(v) \quad (4.16)$$

a partir de un valor inicial. Por ejemplo, tomando $\vartheta(\varepsilon) = \bar{\mu}(\varepsilon)/2$ se tiene que

$$\vartheta(\varepsilon + 4p) = \frac{1}{2} \bar{\mu}(\varepsilon + 4p) + \sum_{q=0}^{2p-1} \bar{\mu}(\varepsilon + 2q), \quad (4.17)$$

con $p \in \mathbb{N}$. Para v asintóticamente grande, puede comprobarse, aproximando la suma por una integral, que $\vartheta(v) \sim v^{2/3}$. Este operador unitario \hat{W} transforma Ω_+^2 en su homólogo del caso plano, $\hat{\Omega}_0^2 = \hat{W} \hat{\Omega}_+^2 \hat{W}^{-1}$, mientras que deja

invariantes los restantes términos de la ligadura densitizada $\hat{\mathcal{E}}_0$, con los que conmuta.

En analogía con el caso previo, representaremos los términos de la ligadura cuadráticos en las perturbaciones promoviendo la combinación de variables clásicas $p^2(c-l_0)^2$ al operador $\hat{\Omega}_+^2$. En cuanto al producto $p(c-l_0)$, ya que $\hat{\Omega}_+$ no respeta los sectores de superselección, lo representaremos por

$$\hat{\Lambda}_+ = \frac{1}{8i\sqrt{\Delta}} \hat{V}^{1/2} \left[\widehat{\text{sgn}v}, e^{-i\hat{\mu}l_0} \hat{\mathcal{N}}_{4\bar{\mu}} e^{-i\hat{\mu}l_0} - e^{i\hat{\mu}l_0} \hat{\mathcal{N}}_{-4\bar{\mu}} e^{i\hat{\mu}l_0} \right]_+ \hat{V}^{1/2}, \quad (4.18)$$

construido con paso cuatro como $\hat{\Lambda}_0$. Nótese que la transformación unitaria \hat{W} no sirve para eliminar las fases $\exp(\pm i\hat{\mu}l_0)$ presentes en este operador. Por último, en lo que al orden de factores se refiere, adoptaremos el mismo que en el caso plano. La estructura del término de segundo orden es muy parecida a la que desglosa la ecuación (4.12); en concreto,

$$\hat{\mathcal{E}}_2^n = \frac{\kappa}{\tilde{\omega}_n} \left(\frac{1}{V} \right)^{-1/2} \left[(2\tilde{\omega}_n^2 + \hat{F}_n^-) \hat{N}_{\bar{f}_n} + \frac{1}{2} \left(\hat{F}_n^+ \hat{X}_{\bar{f}_n}^+ + \frac{i\kappa\tilde{\omega}_n}{2(\tilde{\omega}_n^2 - 3l_0^2)} \hat{G} \hat{X}_{\bar{f}_n}^- \right) \right] \left(\frac{1}{V} \right)^{-1/2}, \quad (4.19)$$

donde los operadores $\hat{N}_{\bar{f}_n}$ y $\hat{X}_{\bar{f}_n}^\pm$ tienen la misma forma que antes, así como \hat{G} , dado en la ecuación (4.13b); por otra parte,

$$\begin{aligned} \hat{F}_n^\pm = & m^2 \hat{V}^{1/3} - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{V} \right)^{5/6} \left[\frac{2}{\gamma^2} \hat{\Omega}_+^2 + \kappa \left(\frac{(5 \mp 2)\tilde{\omega}_n^2 - 15l_0^2}{\tilde{\omega}_n^2 - 3l_0^2} \hat{\pi}_\phi^2 + m^2 \hat{V}^2 \hat{\phi}^2 \right) \right] \left(\frac{1}{V} \right)^{5/6} \\ & - \frac{\kappa}{2(\tilde{\omega}_n^2 - 3l_0^2)} \left(\frac{1}{V} \right)^{3/2} \left(\frac{2}{\gamma} \hat{\Lambda}_+ \hat{\pi}_\phi + m^2 \hat{V}^2 \hat{\phi} \right)^2 \left(\frac{1}{V} \right)^{3/2} + \frac{1}{2} l_0^2 \left(\frac{1}{V} \right)^{1/3}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Como la curvatura de este modelo lo dota de una escala adicional, en este caso no puede eliminarse la dependencia explícita en el parámetro l_0 .

4.3. Caracterización recursiva de los estados físicos

Para completar la cuantización, es necesario caracterizar el espacio formado por las soluciones del operador de ligadura hamiltoniana; es decir, por los estados que aniquila. Esto puede hacerse aprovechando que la ligadura es un operador en diferencias en v y que el valor absoluto de esta etiqueta está acotado inferiormente en cada una de las semirredes $\mathcal{L}_\varepsilon^\pm$, que sirven de soporte a los sectores de superselección $\mathcal{H}_\varepsilon^\pm$. Por concreción, trabajaremos

en $\mathcal{H}_\varepsilon^+$, aunque esto no supone ninguna pérdida de generalidad. Además, en consonancia con el tratamiento perturbativo realizado hasta el momento, asumimos que las soluciones (que buscamos en el dual algebraico de un subconjunto denso del espacio de Hilbert cinemático) pueden expandirse en serie perturbativa de la forma

$$(\Psi| = (\Psi_0| + \varepsilon^2(\Psi_2| + O(\varepsilon^2)). \quad (4.21)$$

A su vez, cada término de la anterior expresión puede escribirse empleando la base producto del espacio de Hilbert cinemático. Así, por ejemplo,

$$(\Psi| = \sum_{\mathfrak{N}} \sum_{v \in \mathcal{L}_\varepsilon^+} \int d\phi \langle \mathfrak{N} | \otimes \langle v | \otimes \langle \phi | \Psi(\mathfrak{N}, v, \phi). \quad (4.22)$$

Por consistencia, la ecuación de ligadura, $(\Psi| \hat{C}^\dagger = 0$, debe anularse orden por orden hasta el de truncación. Naturalmente, a orden cero se recupera la ecuación de ligadura para el sistema homogéneo, $(\Psi_0| \hat{C}_0 = 0$; en otras palabras, $(\Psi_0|$ es una solución de la ligadura sin perturbar. Prosiguiendo hasta el orden cuadrático en ε , se encuentra que $(\Psi_2|$ satisface una ecuación similar, excepto por la presencia de un término de fuente que tiene su origen en las inhomogeneidades contenidas en el estado de orden cero $(\Psi_0|$:

$$(\Psi_2| \hat{C}_0 + (\Psi_0| \left(\sum_{\mathfrak{n}} \hat{C}_2^{\mathfrak{n}} \right)^\dagger = 0. \quad (4.23)$$

Los órdenes superiores se desprecian, en coherencia con la truncación. Las dos igualdades anteriores son ecuaciones en diferencias de segundo orden, pero, debido a los operadores $\hat{\Omega}_k^2$ y $\hat{\Lambda}_k$ desacoplan los diferentes signos de v , las soluciones pueden ser determinadas formalmente a partir, simplemente, de sus valores en la sección de volumen mínimo $v = \varepsilon$. Así, dado $\Psi_0|_{v=\varepsilon}$, $\Psi_0|_{v=\varepsilon+4}$ puede calcularse de inmediato, e, iterando, se obtienen los valores de Ψ_0 en el resto de la semirred $\mathcal{L}_\varepsilon^+$. De forma análoga, fijando $\Psi_2|_{v=0}$, y conocido Ψ_0 , puede calcularse Ψ_2 en toda la semirred.

Ya que los estados físicos están —al menos formalmente— caracterizados por sus valores «iniciales» en la sección de volumen mínimo, si dotamos a estos de un producto interno apropiado, habremos determinado el espacio de Hilbert físico. Esto puede lograrse imponiendo condiciones de realidad sobre un conjunto completo de observables [133, 134]. Como resultado, se obtiene el espacio de Hilbert físico $\mathcal{H}_{\text{cin}}^{\text{mat}} \otimes \mathcal{F}_{\text{f}}$.

Una ventaja del anterior análisis es que no precisa de un contenido material que sirva de tiempo interno, recurso habitual en Cosmología Cuántica de Lazos. Sin embargo, es interesante adoptar también esta estrategia alternativa y comprobar a qué resultados lleva. Este es el objeto de la siguiente sección.

4.4. Caracterización alternativa de los estados físicos

En un universo homogéneo e isótropo mínimamente acoplado a un campo sin masa, el valor del campo crece de forma monótona sobre cada trayectoria clásica. Así, puede utilizarse como tiempo global emergente. Así lo hicimos, de hecho, en la sección (1.2.2), para construir las soluciones del operador de ligadura en la cuantización de lazos del modelo. Si el campo tiene masa, la situación se complica, ya que su crecimiento no es monótono; no obstante, aún puede emplearse como un tiempo emergente de forma local. Trasladando este enfoque al modelo perturbado, la ecuación de ligadura puede interpretarse como una ecuación de evolución en ϕ . Por simplicidad, estudiaremos el caso de secciones espaciales planas. Entonces, expandiendo un estado físico genérico en la base producto del espacio de Hilbert cinemático como en la ecuación (4.22), la ecuación $(\Psi|\mathcal{C}^\dagger = 0$ se transforma en la ecuación de onda

$$-\hbar^2 \partial_\phi^2 \Psi = (\hat{\mathcal{H}}_0^{(2)} + \epsilon^2 \hat{\Theta}_2) \Psi + O(\epsilon^3), \quad (4.24)$$

donde

$$\hat{\mathcal{H}}_0^{(2)} := \frac{1}{\kappa} \hat{\mathcal{C}}_0 - \hat{\pi}_\phi^2 \quad (4.25a)$$

$$\hat{\Theta}_2 := -\frac{1}{\kappa} \left(\sum_{\mathbf{n}} \hat{\mathcal{C}}_2^{\mathbf{n}} \right)^\dagger \Big|_{\hat{\pi}_\phi^2 = \hat{\mathcal{H}}_0^{(2)}}. \quad (4.25b)$$

Nótese que, en el término $\hat{\Theta}_2$, se ha utilizado que $\hat{\pi}_\phi^2 = \hat{\mathcal{H}}_0^{(2)} + O(\epsilon^2)$ sobre soluciones de la ligadura para eliminar las derivadas segundas con respecto a ϕ que contienen los términos cuadráticos de la ligadura, sustituyendo el operador $\hat{\pi}_\phi^2$ por $\hat{\mathcal{H}}_0^{(2)}$. Este toma una expresión distinta dependiendo de la curvatura de las secciones espaciales:

$$\hat{\mathcal{H}}_0^{(2)} = \begin{cases} \frac{6}{\kappa\gamma^2} \hat{\Omega}_0^2 - m^2 \hat{V}^2 \hat{\phi}^2, & k = 0; \\ \frac{6}{\kappa\gamma^2} [\hat{\Omega}_+^2 + (1 + \gamma^2) l_0^2 \hat{V}^{4/3} - \frac{1}{\Delta} \hat{V}^2 \text{sen}^2(\hat{\mu} l_0)] - m^2 \hat{V}^2 \hat{\phi}^2, & k = 1. \end{cases} \quad (4.26)$$

Parece claro que, si la masa del campo es distinta de cero, $\hat{\mathcal{H}}_0^{(2)}$ no es en general un operador positivo; no obstante, dado que $\hat{\pi}_\phi^2$ sí lo es, está justificado reemplazar $\hat{\mathcal{H}}_0^{(2)}$ por su parte positiva, que denotaremos por $\hat{\mathcal{H}}_0^2$.

El operador $\hat{\Theta}_2$ también contiene derivadas primeras con respecto a ϕ ; haremos esto explícito mediante la notación

$$\hat{\Theta}_2 =: {}^0\hat{\Theta}_2 + [{}^1\hat{\Theta}_2, \hat{\pi}_\phi]_+, \quad (4.27)$$

donde debe entenderse que ${}^0\hat{\Theta}_2$ no contiene el operador $\hat{\pi}_\phi$. Teniendo esto en cuenta, es fácil obtener las expresiones explícitas de estos operadores a partir de la ecuaciones (4.12) y (4.13), en el caso plano, o (4.19), (4.20) y (4.13b), si las secciones espaciales tienen curvatura positiva.

Para obtener soluciones de la ecuación (4.24), que reexpresa la ecuación de ligadura como una ecuación diferencial en ϕ , adoptaremos una aproximación del tipo Born-Oppenheimer. En concreto, supondremos que la función de onda puede factorizarse de la forma:

$$\Psi(\mathfrak{N}, v, \phi) = \chi(v, \phi)\psi(\mathfrak{N}, \phi). \quad (4.28)$$

Además, asumiremos que χ tiene la forma de un estado de frecuencia positiva del modelo FLRW. Esto significa que, conocido su valor inicial $\chi_0(v)$ en un «tiempo» ϕ_0 dado, su valor en ϕ se obtiene mediante la evolución generada por el hamiltoniano $\hat{\mathcal{H}}_0$, que supondremos autoadjunto. De manera explícita:

$$\chi(v, \phi) = \left[\mathcal{P} \exp \left(\frac{i}{\hbar} \int_{\phi_0}^{\phi} d\tilde{\phi} \hat{\mathcal{H}}_0(\tilde{\phi}) \right) \right] \chi_0(v). \quad (4.29)$$

Aquí, \mathcal{P} denota ordenación con respecto a ϕ , necesaria porque $\hat{\mathcal{H}}_0$ depende de ese parámetro (a menos que la masa m se anule). Elegiremos χ_0 normalizado a la unidad con respecto al producto escalar del espacio $\mathcal{H}_{\text{cin}}^{\text{gra}}$. Introduciendo este *ansatz* en la ecuación de onda y tomando el producto interno con χ en el espacio citado (denotaremos con $\langle \bullet \rangle_\chi$ los valores esperados así obtenidos), se llega a la igualdad

$$\begin{aligned} & -\hbar^2 \partial_\phi^2 \psi - i\hbar \langle 2\hat{\mathcal{H}}_0 - \epsilon^2 {}^1\hat{\Theta}_2 \rangle_\chi \partial_\phi \psi \\ & = \epsilon^2 \langle {}^0\hat{\Theta}_2 + [{}^1\hat{\Theta}_2, \hat{\mathcal{H}}_0]_+ \rangle_\chi \psi + i\hbar \left\langle d_\phi \hat{\mathcal{H}}_0 - \frac{\epsilon^2}{2} d_\phi {}^1\hat{\Theta}_2 \right\rangle_\chi \psi + O(\epsilon^3). \end{aligned} \quad (4.30)$$

La derivada d_ϕ que aparece en la anterior expresión actúa sobre un operador arbitrario \hat{O} de la forma

$$d_\phi \hat{O} = \partial_\phi \hat{O} - i\hbar [\hat{\mathcal{H}}_0, \hat{O}], \quad (4.31)$$

análogamente a la derivada total en la imagen de Heisenberg. Si despreciamos las contribuciones no diagonales de los operadores involucrados, es decir, si aceptamos que estos no mezclan de forma significativa distintos estados (ortogonales) de la geometría homogénea de fondo, la evolución estaría dictada por la ecuación de segundo grado (4.30) para los estados físicos que admiten la factorización (4.28). Podemos ir todavía más allá y aceptar una

serie de simplificaciones que permiten dar una interpretación física distinta a la ecuación de evolución. Primeramente, admitiremos que $\epsilon^2 {}^1\hat{\Theta}_2$ puede ignorarse frente a $\hat{\mathcal{H}}_0$ en el factor que multiplica a la derivada primera de ψ , lo que sería coherente con la truncación perturbativa efectuada. Además, consideraremos que la derivada segunda de ψ es despreciable, algo que, si bien puede justificarse en el marco de nuestra aproximación de Born-Oppenheimer si el «tiempo» característico del sector homogéneo es mucho menor que el del inhomogéneo, supone evidentemente una restricción considerable. En tercer lugar, supondremos, por conveniencia, que también podemos dejar de lado el último valor esperado en el segundo miembro de la ecuación. En realidad, esta condición puede relajarse, como aclararemos en seguida; no obstante, si la aceptamos junto a las otras dos, conduce a la ecuación de Schrödinger

$$-i\hbar\partial_\phi\psi = \frac{\langle {}^0\hat{\Theta}_2 + [{}^1\hat{\Theta}_2, \hat{\mathcal{H}}_0]_+ \rangle_\chi}{\langle \hat{\mathcal{H}}_0 \rangle_\chi} \psi. \quad (4.32)$$

Aquí, el operador que actúa sobre ψ en el miembro de la derecha puede interpretarse como un hamiltoniano efectivo —dependiente del estado del fondo, χ —, que genera la dinámica de las perturbaciones en el tiempo interno ϕ . Sin embargo, no hay que olvidar la serie de aproximaciones que han permitido llegar a esta ecuación. En particular, la última de ellas, la condición de despreciar el término de la ecuación (4.30) que contiene la derivada total del operador $\hat{\mathcal{H}}_0 - \epsilon^2 {}^1\hat{\Theta}_2/2$, es necesaria para obtener un hamiltoniano efectivo autoadjunto. Alternativamente, es posible despreciar únicamente su parte de segundo orden perturbativo y mantener el término de orden cero, $i\hbar\langle d_\phi \hat{\mathcal{H}}_0 \rangle_\chi \psi$, que a continuación puede absorberse con un escalado de la función de onda por el factor dependiente del «tiempo» $\langle \hat{\mathcal{H}}_0 \rangle_\chi^{1/2}$.

Para estados χ muy concentrados cuyos picos siguen trayectorias de la dinámica efectiva de la Cosmología Cuántica de Lazos homogénea e isotrópica, el resultado de tomar valores esperados como los de la ecuación (4.32) puede aproximarse por el de evaluar las correspondientes expresiones clásicas en los valores esperados de las variables homogéneas. Esto permite interpretar que la ecuación de Schrödinger obtenida es la de una teoría de campo sobre un espaciotiempo de fondo efectivo que, en ese régimen, gobierna los estados físicos.

4.5. Cuantización con invariantes *gauge*

Para aclarar algunas cuestiones referentes a la invariancia *gauge* de la cuantización, conviene aclarar que el procedimiento seguido puede adaptar-

se sin grandes impedimentos a otras descripciones del sistema, incluidas las que parametrizan el sector inhomogéneo mediante invariantes *gauge* perturbativos. En particular, consideramos aquí por su interés físico la descripción introducida para el caso plano (fijamos, pues, $k = 0$) en la sección 2.3.1 mediante una transformación canónica en el espacio de fases completo. Recordemos que esta transformación lleva de la descripción del campo adoptada —hasta ahora— en el presente capítulo a otra en términos del invariante de Mukhanov-Sasaki (2.34) y un momento privilegiado (2.36) que coincide con su derivada temporal sobre la superficie de ligadura, al tiempo que corrige las variables homogéneas con términos cuadráticos en las perturbaciones, dados en las ecuaciones (2.41), para preservar una estructura simpléctica diagonal hasta el orden perturbativo considerado. Las nuevas variables homogéneas, $\check{\alpha}$, $\pi_{\check{\alpha}}$, $\check{\phi}$ y $\pi_{\check{\phi}}$, redefinen el sector homogéneo y su identificación con el modelo no perturbado, lo que sugiere introducir

$$|p| = l_0^2 \sigma^2 e^{2\check{\alpha}}, \quad pc = -\gamma l_0^3 \sigma^2 \pi_{\check{\alpha}}; \quad (4.33)$$

$$\phi = \frac{\check{\phi}}{l_0^{3/2} \sigma}, \quad \pi_{\phi} = l_0^{3/2} \sigma \pi_{\check{\phi}}. \quad (4.34)$$

Estas definiciones difieren de las dadas en las ecuaciones (4.1) y (4.2) tan solo por términos de segundo orden perturbativo, y por consiguiente coinciden con ellas cuando desaparecen las inhomogeneidades.

Como vimos en la sección 2.3.1, la transformación canónica, a pesar de su complejidad, simplifica considerablemente la ligadura hamiltoniana. Por supuesto, la estructura perturbativa de la ecuación (4.4) se mantiene. Como en ocasiones anteriores, la expresión del término homogéneo C_0 no cambia su forma, dada por la ecuación (4.5a) particularizada al caso $k = 0$, al que se restringe ahora la discusión. En cuanto al término cuadrático, de acuerdo con las ecuaciones (2.44), toma sobre la superficie de ligadura la expresión

$$C_2^n = \frac{\kappa}{\sqrt{|p|}} \left(\pi_{\check{v}_n}^2 + l_0^{2E} \check{E}_{qq}^n \check{v}_n^2 \right), \quad (4.35)$$

donde, por conveniencia, se han escalado los modos del invariante de Mukhanov-Sasaki y su momento, en analogía con las ecuaciones (4.3):

$$\check{v}_n := \frac{v_n}{l_0^{1/2}}, \quad \pi_{\check{v}_n} := l_0^{1/2} \pi_{v_n}. \quad (4.36)$$

La expresión del coeficiente ${}^E \check{E}_{qq}^n$ en la parametrización adoptada se obtiene fácilmente a partir de la ecuación (2.44c):

$$l_0^{2E} \check{E}_{qq}^n = \tilde{\omega}_n^2 + m^2 |p| + 2\gamma\kappa \frac{|p|}{pc} \phi \pi_{\phi} - \frac{1}{p^2} \left(\frac{2}{\gamma^2} (pc)^2 - \frac{7\kappa}{2} \pi_{\phi}^2 + \frac{\gamma^2 \kappa^2}{2} \frac{\pi_{\phi}^4}{(pc)^2} \right). \quad (4.37)$$

La cuantización del sistema en esta nueva descripción puede hacerse siguiendo el mismo procedimiento explicado en las secciones anteriores. Sin embargo, la representación de la ligadura hamiltoniana en el espacio de Hilbert cinemático $\mathcal{H}_{\text{cin}}^{\text{mat}} \otimes \mathcal{H}_{\text{cin}}^{\text{gra}} \otimes \mathcal{F}_{\nu}$ se ve obstaculizada porque contiene potencias negativas del producto cp . Para regularizar ese tipo de combinaciones de las variables clásicas, sin análogo cuántico directo, es necesario generalizar la prescripción empleada en la sección 4.2.1. En el caso de potencias pares —positivas o negativas— del tipo $(cp)^{2r}$ (con $r \in \mathbb{Z}$), la extensión parece obvia: promoverlas a potencias $\hat{\Omega}_0^{2r}$ del operador $\hat{\Omega}_0$, dado en la ecuación (1.42). Para respetar los sectores de superselección del modelo no perturbado, las potencias impares, es decir, de la forma $(cp)^{2r+1}$, deben tratarse aparte. En concreto, las representaremos como $|\hat{\Omega}_0|^r \hat{\Lambda}_0 |\hat{\Omega}_0|^r$, siendo $\hat{\Lambda}_0$ el operador definido en la ecuación (4.11) y $|\hat{\Omega}_0|$, la raíz cuadrada de $\hat{\Omega}_0^2$ (definida por descomposición espectral).

El resultado es una ligadura que, en su versión densitizada, puede expandirse perturbativamente como en la ecuación (4.9), con un término de orden cero dado por la ecuación (4.10) y términos cuadráticos que pueden escribirse, en analogía con la ecuación (4.12), de la forma

$$\hat{\mathcal{C}}_2^n = \frac{\kappa}{\tilde{\omega}_n} \left(\frac{1}{V} \right)^{-1/3} \left[(2\tilde{\omega}_n^2 + \hat{F}_n) \hat{N}_{\nu_n} + \frac{1}{2} \hat{F}_n \hat{X}_{\nu_n}^+ \right] \left(\frac{1}{V} \right)^{-1/3}, \quad (4.38)$$

con $\hat{N}_{\nu_n} = \hat{a}_{\nu_n}^\dagger \hat{a}_{\nu_n}$ y $\hat{X}_{\nu_n}^\pm = (\hat{a}_{\nu_n}^\dagger)^2 \pm (\hat{a}_{\nu_n})^2$, mientras que

$$\hat{F}_n = {}^0\hat{F}_n + [{}^1\hat{F}_n, \hat{\pi}_\phi]_+, \quad (4.39)$$

donde, a su vez,

$${}^0\hat{F}_n = m^2 \hat{V}^{2/3} - \left(\frac{1}{V} \right)^{2/3} \left(\frac{2}{\gamma^2} \hat{\Omega}_0^2 - \frac{7\kappa}{2} \hat{\pi}_\phi^2 + \frac{\gamma^2 \kappa^2}{2} \hat{\Omega}_0^{-2} \hat{\pi}_\phi^4 \right) \left(\frac{1}{V} \right)^{2/3}, \quad (4.40a)$$

$${}^1\hat{F}_n = \gamma \kappa \hat{V}^{1/3} |\hat{\Omega}_0|^{-1} \hat{\Lambda}_0 |\hat{\Omega}_0|^{-1} \hat{V}^{1/3} \hat{\phi}. \quad (4.40b)$$

La búsqueda de soluciones de la ligadura hamiltoniana puede realizarse por cualquiera de los métodos seguidos en las secciones 4.3 y 4.4; de hecho, la discusión realizada en ellas es lo suficientemente general como para aplicarse también a esta cuantización. En concreto, si se sigue el tratamiento de la sección 4.4 y se asume la validez de las aproximaciones allí detalladas, la ecuación de ligadura se convierte en la ecuación diferencial (4.32), de primer orden en ϕ (una ecuación de Schrödinger, interpretando el modo cero del campo como un tiempo interno). Por supuesto, aunque la ecuación es formalmente idéntica, los operadores ${}^0\hat{\Theta}_2$ y ${}^1\hat{\Theta}_2$ actúan de forma diferente.

En este caso, es especialmente fácil obtener sus expresiones a partir de la ecuación (4.38) gracias a la descomposición (4.39) adoptada para el operador \hat{F}_n .

En esta cuantización en términos de la variable de Mukhanov-Sasaki, la ecuación de Schrödinger obtenida puede compararse directamente a la derivada por I. Agullo *et al.* [131, 132], aunque su descripción del campo difiere de la adoptada aquí en un escalado por el factor de escala de la geometría de fondo. Esto no es baladí: aunque en ambas descripciones se llega a la conclusión de que la dinámica de las inhomogeneidades está gobernada (en un cierto régimen) por una teoría cuántica de campo, solo en la que nosotros proponemos puede implementarse de forma unitaria esa dinámica (si además se exige que el vacío sea invariante bajo traslaciones espaciales, de acuerdo con lo argumentado en la sección 4.5). Por lo demás, los hamiltonianos efectivos de uno y otro tratamiento se distinguen por el orden en el que se toman productos y valores esperados. Esta diferencia puede atribuirse a ambigüedades en la cuantización concernientes al orden de factores y, en cualquier caso, sus efectos no deberían de ser importantes sobre estados del fondo con muy poca dispersión, sobre los que se espera que las inhomogeneidades se propaguen como en un espaciotiempo efectivo. Este es, en particular, el régimen que se estudia numéricamente en las referencias [130, 132].

4.6. Discusión

Combinando una representación de lazos del sector homogéneo con una representación de Fock privilegiada de la perturbación del campo material (convenientemente escalada, de acuerdo con los resultados del capítulo 3) y tomando el producto tensorial de los espacios de Hilbert cinemáticos asociados, hemos sido capaces de construir uno para el sistema completo, en el que representar el álgebra de las variables fundamentales. La representación polimérica de las variables homogéneas se ha introducido mediante una identificación natural entre el sector homogéneo del espacio de fases y el del modelo propiamente homogéneo. Esta identificación nos provee al mismo tiempo de una representación del término homogéneo de la ligadura hamiltoniana, convenientemente regularizado. Los términos de segundo orden perturbativo combinan variables de uno y otro sector, por lo que no respetarán, una vez promovidos a operadores, la estructura de producto del espacio de Hilbert cinemático. Para llevar a cabo esa promoción, no obstante, es necesario regularizar de alguna forma ciertas combinaciones de las variables homogéneas involucradas, que, como ocurría en el modelo FLRW, carecen de un análogo cuántico directo. Hemos salvado este obstáculo extrapolando las

soluciones encontradas en el tratamiento de modelos homogéneos, para los que pueden seguirse procedimientos sistemáticos. Al hacerlo, se ha tomado la precaución de garantizar que el operador de ligadura resultante respete los sectores de superselección del modelo sin perturbar, ya que de otro modo sería difícil justificar la coherencia del tratamiento perturbativo.

La ligadura cuántica así construida es un operador en diferencias finitas en la etiqueta v , cuyo valor absoluto es proporcional al volumen homogéneo del sistema. Las relaciones de recurrencia que impone este operador en sus soluciones permiten determinarlas completamente en cada sector de superselección a partir sus valores iniciales en la sección de volumen mínimo correspondiente. De esta forma, puede identificarse el espacio de Hilbert físico con un espacio de datos iniciales. En consecuencia, el espacio de Fock utilizado como parte integrante del espacio de Hilbert cinemático reaparece, a pesar de la acción no factorizable de la ligadura, como un factor del físico, en producto tensorial con el espacio asignado al modo cero del campo escalar (cuantizado de manera estándar).

Alternativamente, pueden caracterizarse los estados físicos como soluciones de una ecuación diferencial de segundo orden en el modo cero del campo escalar, ϕ , que podemos entender como un tiempo interno. Esta identificación da pie a introducir una aproximación del tipo Born-Oppenheimer habitual en física atómica y molecular: expresamente, factorizar la función de onda como el producto de un estado de la geometría de fondo y el «tiempo» ϕ y otra función que dependa exclusivamente de ϕ y las inhomogeneidades. Tomando valores esperados en el primero, se obtiene una ecuación de evolución para la función de onda de las inhomogeneidades, a la que puede restringirse la discusión si se ignoran las contribuciones no diagonales en el fondo de los operadores geométricos homogéneos involucrados. Admitiremos que, en cierto régimen, la variación «temporal» de la función de onda es lo suficientemente suave como para permitir despreciar su derivada segunda, así como algunos términos de la ecuación que involucran derivadas de operadores. Asumiendo, por último, que los operadores de segundo orden perturbativo pueden despreciarse frente a los de orden cero, se obtiene una ecuación de Schrödinger para la función de onda de las inhomogeneidades similar a la obtenida por I. Agullo *et al.* [130–132], si bien el rango de validez de la misma está severamente restringido por las aproximaciones necesarias para llegar hasta ella. El rigor de esta limitación no debe entenderse como un inconveniente de nuestro formalismo; al contrario, se debe a que este es, precisamente, más riguroso. En efecto, la truncación a orden cuadrático en la acción nos permite conservar una estructura simpléctica y ligaduras², por

²Una reciente discusión sobre la aplicación del formalismo hamiltoniano al tratamiento

lo que hemos podido seguir escrupulosamente el algoritmo de cuantización canónica, algo que no permite su esquema de truncación a primer orden en las variables de Ashtekar-Barbero y el campo escalar [131].

Existe, además, otra diferencia importante entre el enfoque adoptado en las referencias [130–132] y el nuestro. Sobre estados del fondo muy concentrados —en los que el valor esperado de una combinación de operadores fundamentales coincida en buena aproximación con la combinación de valores esperados de dichos operadores— la ecuación de Schrödinger obtenida permite interpretar que la propagación de las inhomogeneidades está regida por una teoría cuántica de campo sobre un espaciotiempo de fondo efectivo. De hecho, I. Agullo *et al.* arguyen que esta interpretación puede hacerse con independencia del estado del fondo, a condición de *vestir* el espaciotiempo incluyendo ciertos momentos de orden superior. Como se argumentó en la sección 3, para que en la representación de Fock asociada puedan implementarse las simetrías del fondo de forma natural y la dinámica unitariamente, es imprescindible elegir la descripción del campo correcta (y, en particular, su escalado), lo que tuvimos en cuenta para fijar la parametrización del sistema.

En realidad, hemos aplicado el procedimiento de cuantización explicado a dos parametrizaciones distintas del modelo, más una tercera en la fijación de *gauge* alternativa que se aborda en el apéndice C. La primera de ellas describe las perturbaciones usando el campo escalado y su momento conjugado. Para facilitar la discusión sobre la dependencia de los resultados en el *gauge*, fijado clásicamente, en la sección 4.5 planteamos también una cuantización en términos de invariantes *gauge* perturbativos; concretamente, la variable de Mukhanov-Sasaki (con el escalado adecuado) y su derivada con respecto al tiempo conforme. Las variables homogéneas de una y otra parametrización difieren únicamente en términos cuadráticos en las perturbaciones, necesarios para diagonalizar la estructura simpléctica hasta el orden considerado. En el caso plano, la expresión de la ligadura hamiltoniana como función de las variables homogéneas corregidas, el invariante de Mukhanov-Sasaki y su momento es, hasta orden cuadrático en estos, formalmente independiente del *gauge* adoptado. En este sentido, la cuantización del modelo en dicha parametrización es universal. No obstante, las correcciones de las variables homogéneas no son las mismas si, como se hace en el apéndice C, se eligen otras condiciones de fijación de *gauge*.

Por supuesto, una demostración definitiva de que la cuantización propuesta no depende esencialmente de la fijación de *gauge* requeriría cuantizar el sistema antes de la reducción, una tarea complicada, pero factible a

de perturbaciones cosmológicas puede encontrarse en la referencia [117].

la luz del trabajo ya realizado. Una posible forma de atacar el problema es realizar una transformación canónica a un conjunto de nuevas variables que incluyan el invariante de Mukhanov-Sasaki y las propias ligaduras lineales [135]. Imponer estas en la teoría cuántica sería entonces muy sencillo. La cuantización del sistema sin fijar ningún *gauge* permitiría además discutir las modificaciones del álgebra de ligaduras que los métodos efectivos proponen (véase, por ejemplo, la referencia [117]).

Dinámica efectiva en cosmologías inhomogéneas

Capítulo 5

Estudio de la dinámica efectiva de la cuantización híbrida de perturbaciones cosmológicas

En el capítulo anterior se ha presentado la cuantización híbrida del modelo FLRW con perturbaciones escalares para dos de las posibles topologías espaciales. Aunque se han podido caracterizar los correspondientes espacios de Hilbert físicos, la complejidad de la ligadura nos ha impedido obtener sus soluciones de forma explícita. Evidentemente, esa dificultad constituye un serio obstáculo para nuestras pretensiones de extraer información de los modelos construidos. Por eso, como primera aproximación al problema, decidimos investigar la dinámica efectiva que, a tenor de lo encontrado en los modelos homogéneos, cabe esperar que sigan ciertos estados semiclásicos en estos sistemas. A diferencia de otros trabajos sobre la dinámica efectiva de perturbaciones cosmológicas en Cosmología Cuántica de Lazos, nosotros contamos con un modelo cuántico del que derivar esa dinámica, lo que permitiría, llegado el momento, comprobar la validez de esta.

El estudio analítico y numérico que presentaremos a continuación tiene como referencia el realizado en las referencias [96, 97] para la cuantización híbrida del modelo de Gowdy en el tres-toro con polarización lineal. Recordemos que en este modelo, que se presentó brevemente en la sección 1.2.4, el tratamiento de las inhomogeneidades no es perturbativo, por lo que cabía temer que las singularidades que la cuantización de lazos evitaba en el caso homogéneo reaparecieran al introducir un número infinito de grados de libertad adicionales. Un análisis cuidadoso de las ligaduras y de las ecuaciones efectivas demostró, junto a su integración numérica, que ese no era el caso [96, 97], ya que los rebotes persisten en presencia de inhomogeneidades (salvo quizá realizando un ajuste fino de las condiciones iniciales). También

se encontró un fenómeno notable en el comportamiento estadístico de las inhomogeneidades [97]: si la amplitud de estas es originariamente pequeña, aumenta durante el régimen en el que se produce el rebote; por contra, se mantiene constante si era importante en un principio (es decir, con suficiente anterioridad al rebote).

Estudiamos solo el caso de secciones espaciales planas, por su mayor simplicidad y por ser el más tratado en cosmología. Supondremos además que el campo escalar que llena el espaciotiempo carece de masa. Aunque esto excluye directamente la posibilidad de que el modelo albergue (suficiente) inflación, facilita notablemente la integración numérica de las ecuaciones efectivas, que se vuelven inestables precisamente al comienzo de la inflación.

Otra simplificación, difícilmente evitable cuando se pretende realizar un tratamiento numérico, ha sido la truncación del sistema a un número finito de grados de libertad, realizada tomando tan solo modos inhomogéneos cuya frecuencia se encuentre por debajo de un cierto umbral variable.

Para derivar la dinámica efectiva, hemos partido de la cuantización en términos del campo escalado en el *gauge* longitudinal. Aunque podríamos haber utilizado la cuantización en términos de la variable de Mukhanov-Sasaki (o, equivalentemente, del campo escalado en el *gauge* alternativo que se explora en el apéndice C), esta parametrización tiene el inconveniente de que en la ligadura y , y por ende, en las ecuaciones de movimiento aparece el inverso del producto pc , que, a nivel clásico, divergiría en un rebote. Aunque en la dinámica efectiva dicha cantidad se ve corregida, si las correcciones de holonomía se introducen como se explica en la próxima sección, no evitan la divergencia en el rebote. Evidentemente, esto también supondría un obstáculo para la integración numérica de las ecuaciones efectivas.

5.1. Ecuaciones efectivas

Recordemos que, debido a la discontinuidad de la representación polimérica adoptada para los grados de libertad homogéneos de la geometría, la variable clásica c , que en el modelo homogéneo e isótropo determina la conexión de Ashtekar-Barbero a través de la ecuación (1.18), carece de representación en la teoría cuántica, lo que solucionamos regularizándola en términos de holonomías de la conexión que resultaban ser combinaciones lineales de las exponenciales complejas $N_{\bar{\mu}} = \exp(i\bar{\mu}c/2)$. Ahora bien, debido a la dependencia del parámetro $\bar{\mu}$ en la variable p en el marco de la dinámica mejorada, las correcciones de holonomía resultan más sencillas de manejar si se introducen las nuevas variables $b := |p|^{-1/2}c$, y $\text{sgn}(p)V$, canónicas salvo

un factor, pues $\{b, \text{sgn}(p)V\} = \gamma\kappa/2$. Recordemos que $V = |p|^{3/2}$ es el volumen físico del espaciotiempo de fondo. En la práctica, podemos ignorar el signo de p (suponiendo, por ejemplo, su positividad), ya que no cambia sobre las trayectorias de la dinámica efectiva.

Por lo demás, emplearemos, como en la sección 4, la parametrización del campo escalar en términos de los pares canónicos (ϕ, π_ϕ) —para el modo cero— y $(\check{f}_n, \pi_{\check{f}_n})$ —para los modos inhomogéneos—, que solo difieren en factores constantes de las correspondientes variables con raya empleadas en la sección 2. En esencia, las variables \check{f}_n son los modos de la perturbación del campo material escalados por el factor de escala de la geometría FLRW de fondo, mientras que sus momentos coinciden con sus derivadas en el límite ultravioleta.

Como se argumentó en la sección 4, motivados por la Cosmología Cuántica de Lazos homogénea, las potencias pares $(pb)^{2r} = (Vb)^{2r}$ ($r \in \mathbb{Z}$) en la ligadura clásica puede promocionarse en la teoría cuántica a los operadores $\hat{\Omega}_0^{2r}$ construidos a partir de la definición (1.42) de $\hat{\Omega}_0$. Para obtener la ligadura efectiva a partir de su versión cuántica, basta con reemplazar los operadores fundamentales por sus análogos clásicos. El proceso completo es equivalente a realizar la siguiente sustitución en la ligadura de partida:

$$(Vb)^{2r} \mapsto \Omega_0^{2r}, \text{ con } \Omega_0 := V \frac{\text{sen}(\sqrt{\Delta}b)}{\sqrt{\Delta}}. \quad (5.1)$$

Las potencias impares $(Vb)^{2r+1}$ se trataron de forma diferente en la cuantización, para preservar los sectores de superselección del modelo no perturbado. En concreto, se representaron por $|\hat{\Omega}_0|^r \hat{\Lambda}_0 |\hat{\Omega}_0|^r$, con el operador $\hat{\Lambda}_0$ definido en la ecuación (4.11). Por consiguiente, podemos esperar las siguientes correcciones de holonomía para estas potencias impares:

$$(Vb)^{2r+1} \mapsto \Omega_0^{2r} \Lambda_0, \text{ con } \Lambda_0 := V \frac{\text{sen}(2\sqrt{\Delta}b)}{2\sqrt{\Delta}}. \quad (5.2)$$

Se trata ahora de aplicar las anteriores sustituciones a la ligadura clásica, desglosada en las ecuaciones (4.4), (4.5) y (4.6), particularizando además al caso en el que las secciones espaciales son homeomorfas al tres-toro ($k = 0$) y el campo material carece de masa ($m = 0$). Como resultado, el término homogéneo C_0 se convierte en

$$C_0 = \frac{1}{V} \left(-\frac{6}{\gamma^2} \Omega_0^2 + \kappa \pi_\phi^2 \right), \quad (5.3)$$

mientras que los coeficientes ${}^E\check{E}_{\pi\pi}^n$, ${}^E\check{E}_{q\pi}^n$ y ${}^E\check{E}_{qq}^n$ de los términos cuadráticos

C_2^n se transforman en

$${}^E\check{E}_{\pi\pi}^n = 1 - \frac{\kappa}{2\tilde{\omega}_n^2} \frac{\pi_\phi^2}{V^{4/3}}, \quad (5.4a)$$

$${}^E\check{E}_{q\pi}^n = -\frac{\kappa}{\tilde{\omega}_n^2 \gamma} \frac{\pi_\phi^2 \Lambda_0}{V^2}, \quad (5.4b)$$

$${}^E\check{E}_{qq}^n = \tilde{\omega}_n^2 - \frac{1}{2V^{4/3}} \left(\frac{\Omega_0^2}{\gamma^2} + \frac{5\kappa}{2} \pi_\phi^2 \right) - \frac{2\kappa}{\tilde{\omega}_n^2 \gamma^2} \left(\frac{\pi_\phi \Lambda_0}{V^{4/3}} \right)^2. \quad (5.4c)$$

Para no sobrecargar aun más la notación, no distinguiremos explícitamente estas funciones efectivas de las clásicas. Siempre que aparezcan en esta sección, debe entenderse que se trata de las primeras.

La primera ecuación que deben satisfacer las nuevas variables es, por supuesto, la propia ligadura, $C = 0$. De esta se derivan además las ecuaciones dinámicas efectivas, tomando corchetes de Dirac. Si elegimos el lapso $\sigma N_0 = V^{1/3}$ y denotamos por $\tilde{\eta}$ el tiempo asociado (relacionado con el tiempo conforme η por un factor constante, $d\eta = l_0 d\tilde{\eta}$), las ecuaciones de Hamilton de las variables homogéneas se escriben

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{d\tilde{\eta}} &= \frac{\pi_\phi}{V^{2/3}} + \frac{\epsilon^2}{2} \sum_{\mathbf{n}} \left(\{\phi, {}^E\check{E}_{\pi\pi}^n\} \pi_{\check{f}_n}^2 + 2\{\phi, {}^E\check{E}_{q\pi}^n\} \check{f}_n \pi_{\check{f}_n} + \{\phi, {}^E\check{E}_{qq}^n\} \check{f}_n^2 \right) \\ &\quad + O(\epsilon^3), \end{aligned} \quad (5.5a)$$

$$\frac{d\pi_\phi}{d\tilde{\eta}} = O(\epsilon^3), \quad (5.5b)$$

$$\begin{aligned} \frac{db}{d\tilde{\eta}} &= -\frac{\gamma}{4V^{5/3}} \left(\frac{6}{\gamma^2} \Omega_0^2 + \kappa \pi_\phi^2 \right) - \epsilon^2 \frac{\gamma}{12V^{2/3}} \sum_{\mathbf{n}} C_2^n \\ &\quad + \frac{\epsilon^2}{2} \sum_{\mathbf{n}} \left(\{b, {}^E\check{E}_{\pi\pi}^n\} \pi_{\check{f}_n}^2 + 2\{b, {}^E\check{E}_{q\pi}^n\} \check{f}_n \pi_{\check{f}_n} + \{b, {}^E\check{E}_{qq}^n\} \check{f}_n^2 \right) + O(\epsilon^3), \end{aligned} \quad (5.5c)$$

$$\frac{dV}{d\tilde{\eta}} = \frac{3}{\gamma} V^{1/3} \Lambda_0 + \frac{\epsilon^2}{2} \sum_{\mathbf{n}} \left(2\{V, {}^E\check{E}_{q\pi}^n\} \check{f}_n \pi_{\check{f}_n} + \{V, {}^E\check{E}_{qq}^n\} \check{f}_n^2 \right) + O(\epsilon^3), \quad (5.5d)$$

donde los corchetes no nulos de las variables homogéneas con los coeficientes del término cuadrático de la ligadura hamiltoniana son

$$\{\phi, {}^E\check{E}_{\pi\pi}^n\} = -\frac{\kappa}{\tilde{\omega}_n^2} \frac{\pi_\phi}{V^{4/3}}, \quad (5.6a)$$

$$\{\phi, {}^E\check{E}_{q\pi}^n\} = -\frac{2\kappa}{\gamma \tilde{\omega}_n^2} \frac{\pi_\phi \Lambda_0}{V^2}, \quad (5.6b)$$

$$\{\phi, {}^E\check{E}_{qq}^n\} = -\frac{\kappa}{2V^{4/3}} \left(5\pi_\phi + \frac{8}{\gamma^2 \tilde{\omega}_n^2} \frac{\pi_\phi \Lambda_0^2}{V^{4/3}} \right), \quad (5.6c)$$

$$\{b, {}^E\check{E}_{\pi\pi}^n\} = \frac{\gamma \kappa^2}{3\tilde{\omega}_n^2} \frac{\pi_\phi^2}{V^{7/3}}, \quad (5.6d)$$

$$\{b, {}^E\check{E}_{q\pi}^n\} = \frac{\kappa^2}{2\tilde{\omega}_n^2} \frac{\pi_\phi^2 \Lambda_0}{V^3}, \quad (5.6e)$$

$$\{b, {}^E\check{E}_{qq}^n\} = \frac{\gamma \kappa}{6} \frac{1}{V^{7/3}} \left(-\frac{\Omega_0^2}{\gamma^2} + 5\kappa \pi_\phi^2 + \frac{4\kappa}{\gamma^2 \tilde{\omega}_n^2} \frac{\pi_\phi^2 \Lambda_0^2}{V^{4/3}} \right), \quad (5.6f)$$

$$\{V, {}^E\check{E}_{q\pi}^n\} = \frac{\kappa^2}{2\tilde{\omega}_n^2} \frac{\pi_\phi^2}{V} \cos(2\sqrt{\Delta}b), \quad (5.6g)$$

$$\{V, {}^E\check{E}_{qq}^n\} = \frac{\kappa}{2\gamma} \frac{\Lambda_0}{V^{1/3}} \left(1 + \frac{4\kappa}{\tilde{\omega}_n^2} \frac{\pi_\phi^2}{V^{4/3}} \cos(2\sqrt{\Delta}b) \right). \quad (5.6h)$$

Como puede verse, el momento del modo cero del campo escalar es una constante de movimiento en este modelo (hasta el orden de truncación), como ocurre en el modelo homogéneo e isótropo. Esta es una de las características que simplifican considerablemente el análisis cuando la masa del campo material se anula.

En cuanto a las perturbaciones, su evolución en el sistema efectivo está gobernada por las ecuaciones diferenciales (lineales en virtud de la truncación efectuada)

$$\frac{d\check{f}_n}{d\tilde{\eta}} = {}^E\check{E}_{\pi\pi}^n \pi_{\check{f}_n} + {}^E\check{E}_{q\pi}^n \check{f}_n + O(\epsilon), \quad (5.7a)$$

$$\frac{d\pi_{\check{f}_n}}{d\tilde{\eta}} = -{}^E\check{E}_{q\pi}^n \pi_{\check{f}_n} - {}^E\check{E}_{qq}^n \check{f}_n + O(\epsilon). \quad (5.7b)$$

Como ya hemos expuesto, estas ecuaciones no mezclan modos y pueden combinarse en una ecuación de segundo orden para \check{f}_n que, despreciando términos subdominantes en el ultravioleta, es de tipo Klein-Gordon con una masa dada por una función de las variables homogéneas. Esta ecuación es la análoga de (2.27) —o (2.28)—, pero con la inclusión de las correcciones de holonomía, los factores l_0 que provienen del escalado constante del campo (4.3) y del tiempo y la particularización al caso en el que k y m se anulan. Así,

$$\begin{aligned} O(\epsilon) = & \frac{d^2 \check{f}_n}{d\tilde{\eta}^2} - \frac{1}{{}^E\check{E}_{\pi\pi}^n} \frac{d{}^E\check{E}_{\pi\pi}^n}{d\tilde{\eta}} \frac{d\check{f}_n}{d\tilde{\eta}} \\ & + \left({}^E\check{E}_{qq}^n {}^E\check{E}_{\pi\pi}^n - ({}^E\check{E}_{q\pi}^n)^2 - \frac{d{}^E\check{E}_{q\pi}^n}{d\tilde{\eta}} + \frac{{}^E\check{E}_{q\pi}^n}{{}^E\check{E}_{\pi\pi}^n} \frac{d{}^E\check{E}_{\pi\pi}^n}{d\tilde{\eta}} \right) \check{f}_n. \end{aligned} \quad (5.8)$$

El factor que multiplica a \check{f}_n puede descomponerse, como en la ecuación (2.28), en la suma de un término dominante en el ultravioleta, $\tilde{\omega}_n^2$, y otro término análogo al cuadrado de la masa efectiva, o, ya que puede tomar valores negativos, al coeficiente de un potencial cuadrático, cuya parte dominante en el límite ultravioleta es

$$\check{s} = -\frac{1}{2V^{4/3}} \left(\frac{\Omega_0^2}{\gamma^2} + \frac{7\kappa}{2} \pi_\phi^2 \right) \approx -\frac{11\kappa}{6} \frac{\pi_\phi^2}{V^{4/3}} + O(\epsilon^2). \quad (5.9)$$

La última igualdad hace uso de la ligadura, despreciando términos perturbativos. Como puede verse, la magnitud de \check{s} disminuye al crecer el volumen homogéneo; de hecho, tiende a cero asintóticamente. A frecuencias bajas, \check{s} presenta correcciones \check{s}_n , que decaen con ω_n^{-2} .

Por otra parte, el factor que multiplica a la derivada primera de \check{f}_n en la ecuación (5.8) es subdominante en el ultravioleta. Además, tiende también a cero al crecer V . En consecuencia, concluimos que la ecuación (5.8) se aproxima a la de los modos de un campo libre tanto en el límite ultravioleta como a volúmenes suficientemente grandes.

Debido a la presencia de inhomogeneidades, la densidad de energía obtenida del tensor de energía-momento varía espacialmente en cada sección de t constante. No obstante, tomando la ligadura hamiltoniana, podemos definir una densidad promedio efectiva que no solo incluya la contribución de las perturbaciones materiales, sino también de las métricas. Explícitamente,

$$\rho_{\text{eff}} := \rho_0 + \epsilon^2 \rho_2, \quad (5.10)$$

donde cada componente vale

$$\rho_0 = \frac{\pi_\phi^2}{2V^2}, \quad \rho_2 = \frac{1}{2\kappa V} \sum_{\mathbf{n}} C_2^{\mathbf{n}}. \quad (5.11)$$

De la anulación de la ligadura sobre soluciones, se desprende de inmediato que la densidad efectiva ρ_{eff} alcanza su máximo $\rho_c = 3/(\gamma^2 \kappa \Delta)$ cuando $\sqrt{\Delta} b = \pi/2$. En el límite homogéneo, este evento coincide con el mínimo del volumen, ya que la derivada de V se anula, de acuerdo con la ecuación (5.5d). Sin embargo, al incorporar la reacción del fondo en dicha ecuación dinámica, los dos sucesos dejan de coincidir (como veremos en la sección siguiente), ya que el corchete dado por la ecuación (5.6g) no se anula al hacer $\sqrt{\Delta} b = \pi/2$. Un análisis cuidadoso revela que esta pérdida de sincronización puede achacarse a la prescripción (5.2) adoptada para sustituir el producto Vb en el paso de la ligadura clásica a la efectiva. De haber tratado este producto igual que $(Vb)^2$, reemplazándolo simplemente por Ω_0 (lo que no supone ninguna

diferencia a primer orden en b), el máximo de la densidad efectiva y el mínimo del volumen homogéneo se alcanzarían simultáneamente, como en el modelo homogéneo.

5.2. Resultados numéricos

En esta sección se exponen los resultados de nuestro estudio numérico de la dinámica efectiva, que consistió en la integración de las ecuaciones de Hamilton (5.5) y (5.7) utilizando un método adaptativo de Runge-Kutta [136] de órdenes 8 y 9. Con él propagamos diferentes condiciones iniciales desde la rama del universo en contracción a través del rebote hasta la rama en expansión. En realidad, inicialmente utilizamos un método adaptativo de órdenes 4 y 5, variando en ambos casos el parámetro de tolerancia que controla el tamaño de los pasos de integración. Al comprobar que se reproducían cualitativamente los resultados, ganamos confianza en la estabilidad de la integración. Los valores numéricos que asignamos a las constantes del modelo son $\kappa = 1$, $\hbar = 1$ y $\gamma = 0,23753296$.

En el planteamiento de nuestro estudio, hemos distinguido dos tipos de universos, en función de si la importancia de las inhomogeneidades que albergan permite o no despreciar su reacción sobre el fondo. A continuación, se trata cada caso por separado.

5.2.1. Universos muy cercanos a la homogeneidad

Empecemos considerando soluciones en las que la reacción de las perturbaciones sobre el fondo es lo suficientemente pequeña como para poder despreciarla. Las variables homogéneas siguen entonces las trayectorias de la dinámica efectiva del modelo homogéneo, que describimos en la sección 1.2.2 (véase por ejemplo la figura 1.1). En ellas, el universo se contrae mientras la densidad de energía aumenta hasta alcanzar un máximo ρ_c , que coincide con el mínimo del volumen del sistema; tras el rebote, el universo comienza a expandirse.

Las inhomogeneidades se propagan sobre ese fondo, que en esta aproximación es insensible a ellas. La propagación está regida por la ecuación de tipo Klein-Gordon con correcciones (5.8), y, por tanto, por el de las diferentes funciones del fondo que aparecen en ella. En particular, la figura 5.1 ilustra la evolución sobre una trayectoria efectiva de la cantidad que hemos identificado como el coeficiente de un potencial efectivo: como puede verse, su magnitud es pequeña a volúmenes grandes, pero en un entorno del rebote puede llegar a ser dominante frente al término $\tilde{\omega}_n^2$ (especialmente para

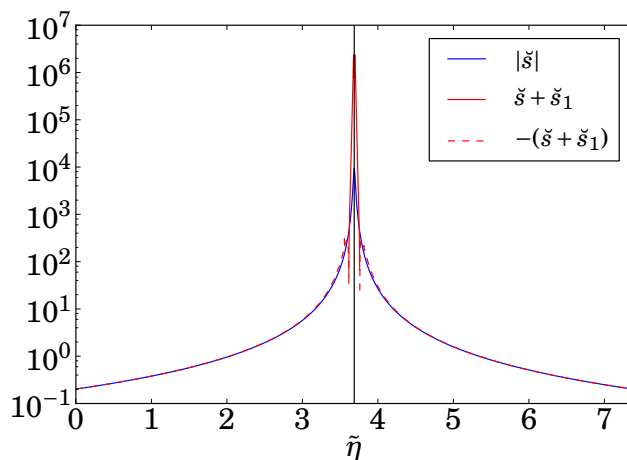


Figura 5.1: Evolución del coeficiente del potencial cuadrático que aparece en la ecuación de tipo Klein-Gordon (5.8). Se han dibujado tanto su límite ultravioleta \check{s} como el coeficiente $\check{s} + \check{s}_1$ correspondiente al primer modo no cero (con $\tilde{\omega}_1^2 = 4\pi^2$). El rebote se produce en el centro de la imagen, señalado con una recta vertical. La trayectoria del fondo homogéneo está caracterizada por los valores iniciales $V(\tilde{\eta}_0) = 10^5$ y $\sqrt{\Delta}b(\tilde{\eta}_0) = 0,9999\pi$ (π_ϕ queda determinado por la ligadura), como en la figura 1.1.

modos bajos). Sumando esto a las consideraciones sobre el término disipativo de la ecuación, llegamos a la conclusión de que es en la proximidad del rebote cuando pueden producirse fenómenos de interés, lo que confirma la figura 5.2. En ella se aprecia que la amplitud de las variables de destrucción (3.4) con las que puede parametrizarse el campo se mantiene constante muy aproximadamente a volúmenes grandes, pero comienza a oscilar de forma brusca al acercarse al rebote. Después de este régimen transitorio, la amplitud se estabiliza en un valor nuevo, que puede ser mucho mayor que la inicial; de hecho, hemos constatado que en promedio se ve muy amplificada para frecuencias bajas. Para comprobarlo, hemos realizado un análisis estadístico, basado en el tratamiento que se hace en la referencia [96] de la dinámica efectiva derivada la cuantización híbrida del modelo de Gowdy.

La estrategia es la siguiente. Primeramente, en un cierto instante $\tilde{\eta}_0$ suficientemente alejado del rebote hacia el pasado, fijamos unas determinadas condiciones iniciales para las variables homogéneas, mientras que asignamos valores aleatorios a las inhomogeneidades partiendo de la suposición de que las perturbaciones se encontraban originariamente en el estado de vacío asociado a la representación de Fock adoptada. Así, elegimos una distribu-

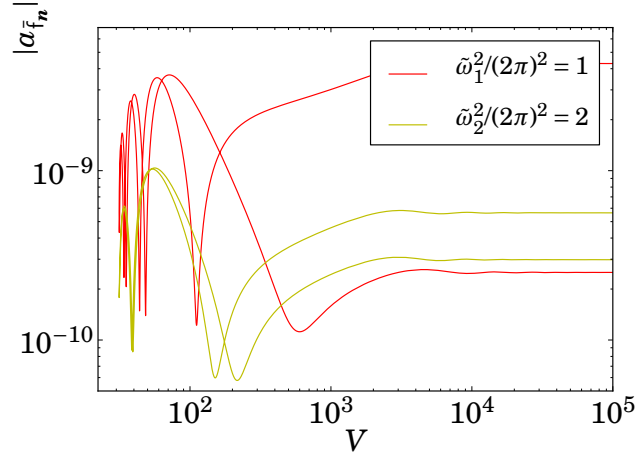


Figura 5.2: Variación de la amplitud de dos modos perturbativos con el volumen V sobre la trayectoria del fondo de la figura 5.1. El modo más bajo sufre una amplificación considerable a través del rebote, mientras que el de frecuencia $\tilde{\omega}_2$ no cambia significativamente su amplitud.

ción de probabilidad que imite las fluctuaciones cuánticas de dicho estado; en concreto, escribimos las variables de aniquilación asociadas en la forma

$$a_{\tilde{f}_n}(\tilde{\eta}_0) = A_n(\tilde{\eta}_0)e^{i\delta_{\tilde{f}_n}(\tilde{\eta}_0)}, \quad (5.12)$$

y elegimos los valores de $A_n(\tilde{\eta}_0)$ y $\delta_{\tilde{f}_n}(\tilde{\eta}_0)$ siguiendo, respectivamente, una distribución gaussiana de media cero y dispersión σ y una distribución uniforme en el intervalo $(0, 2\pi]$. Debido a la linealidad de las ecuaciones de movimiento de las perturbaciones, la elección del parámetro σ es irrelevante, siempre y cuando sea lo suficientemente pequeño como para justificar el despreciar la reacción de las inhomogeneidades sobre el fondo. Fijadas estas distribuciones, se efectuó un gran número de simulaciones integrando las ecuaciones de Hamilton hasta un tiempo final $\tilde{\eta}_f$, que elegimos simétrico al inicial respecto del rebote, en el sentido de que $V(\tilde{\eta}_f) = V(\tilde{\eta}_0)$. Dado que la dinámica de los modos se distingue tan solo por el valor de ω_n^2 , puede promediarse sobre cada autoespacio del operador de Laplace-Beltrami. Cuando dispusimos de una muestra lo suficientemente grande (de al menos un centenar de trayectorias para cada modo), realizamos un análisis estadístico de los datos.

Los resultados se recogen en la figura 5.3, en la que se muestra, en función de la frecuencia $\tilde{\omega}_n$ y para tres trayectorias diferentes del fondo homo-

géneo, la media y la dispersión típica de la cantidad

$$\Delta|a_{\bar{f}_n}| := \frac{|a_{\bar{f}_n}(\tilde{\eta}_f)| - |a_{\bar{f}_n}(\tilde{\eta}_0)|}{|a_{\bar{f}_n}(\tilde{\eta}_0)|}, \quad (5.13)$$

que da cuenta del incremento relativo de la amplitud de las inhomogeneidades, así como de la fase final $\delta_{\bar{f}_n}(\tilde{\eta}_f)$ de las variables de aniquilación. La primera conclusión que puede extraerse es que, como adelantamos, la amplitud de las perturbaciones aumenta en promedio durante el régimen dominado por las correcciones cuánticas del fondo. El factor de amplificación es tanto mayor cuanto mayor es el tamaño del universo en el momento del rebote, y decae con la frecuencia, de forma que los modos ultravioleta no se ven prácticamente amplificados. Superpuesta a esta tendencia hay una modulación oscilatoria, cuyo periodo también crece con $\tilde{\omega}_n$. Este patrón oscilatorio es una novedad de este modelo, pues no se encontró nada parecido en el de Gowdy. Para descartar que este fenómeno sea una consecuencia artificial de la fijación de *gauge*, la figura 5.4 muestra que los resultados se reproducen cualitativamente si el sistema se parametriza en términos del invariante de Mukhanov-Sasaki. Cuando el contenido material del universo es un campo escalar sin masa y las secciones espaciales son planas, la transformación canónica entre los pares $(\bar{f}_n, \pi_{\bar{f}_n})$ y (v_n, π_{v_n}) , dada en general por las ecuaciones (2.34) y (2.36), está determinada por los coeficientes

$$A_n = 1 - \frac{\kappa}{\tilde{\omega}_n^2} \frac{\pi_\phi^2}{V^{4/3}}, \quad (5.14a)$$

$$\frac{B_n}{l_0} = -\frac{\gamma\kappa}{2\tilde{\omega}_n^2} \frac{\pi_\phi^2}{V^{5/3}b}, \quad (5.14b)$$

$$l_0 C_n = \frac{\gamma\kappa}{2} \frac{\pi_\phi^2}{V^{5/3}b} \left[1 + \frac{2}{\tilde{\omega}_n^2 V^{4/3}} \left(\frac{2}{\gamma^2} V^2 b^2 - \frac{\kappa}{2} \pi_\phi^2 \right) \right], \quad (5.14c)$$

$$D_n = 1 + \frac{\gamma^2 \kappa}{2\tilde{\omega}_n^2} \frac{\pi_\phi^2}{V^{10/3}b^2} \left(\frac{2}{\gamma^2} V^2 b^2 - \frac{\kappa}{2} \pi_\phi^2 \right). \quad (5.14d)$$

A su vez, la relación entre las variables de aniquilación asociadas a una y otra parametrización viene dada por la ecuación (3.31).

La asimetría encontrada en la distribución de las amplitudes en los instantes $\tilde{\eta}_0$ y $\tilde{\eta}_f$ tiene como contrapartida una asimetría en la distribución de las fases. No podía ser de otra manera, ya que la dinámica efectiva es invariante bajo la inversión temporal. Mientras que las fases iniciales $\delta_{\bar{f}_n}(\tilde{\eta}_0)$ se encontraban uniformemente distribuidas, las fases finales $\delta_{\bar{f}_n}(\tilde{\eta}_f)$ tienden a alinearse en torno a dos ángulos opuestos, es decir, que difieren en π radianes. Los ángulos atractores dependen del modo de una forma que, si bien

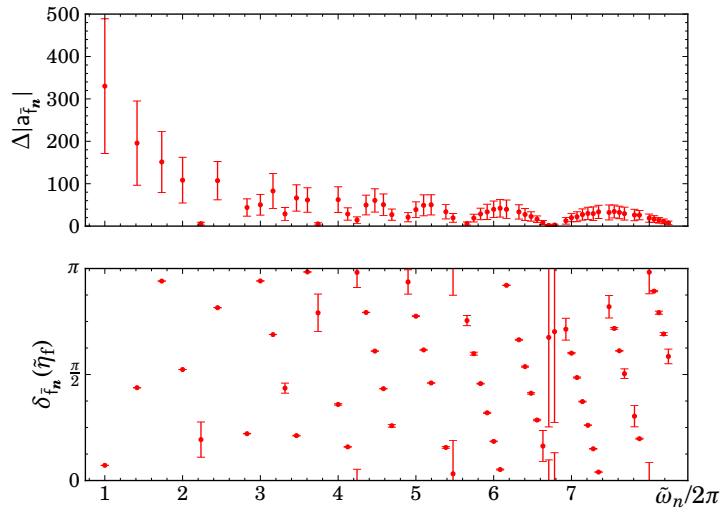
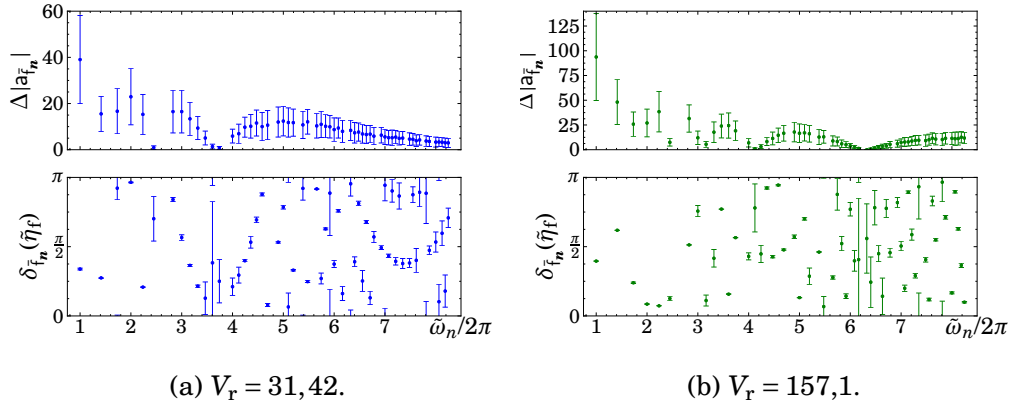
(c) $V_r = 3142$.

Figura 5.3: Amplificación de los modos y alineamiento de sus fases tras el rebote sobre tres trayectorias del fondo, distinguidas por el valor mínimo del volumen, V_r . Los puntos muestran el promedio sobre simulaciones y las barras, la desviación estándar. Por convenio, $\delta_{f_n}(\tilde{\eta}_f) \in (0, \pi]$. Se eligieron como condiciones iniciales $\sqrt{\Delta}b(\tilde{\eta}_0) = 0,9999\pi$ y diferentes valores de $V(\tilde{\eta}_0)$ y determinado π_ϕ por medio de la ligadura; en concreto a) $V(\tilde{\eta}_0) = 10^5$, b) $V(\tilde{\eta}_0) = 5 \cdot 10^5$ y c) $V(\tilde{\eta}_0) = 10^7$. Los valores iniciales de las inhomogeneidades se tomaron aleatoriamente siguiendo las distribuciones descritas en el texto, con $\sigma = 10^{-10}$.

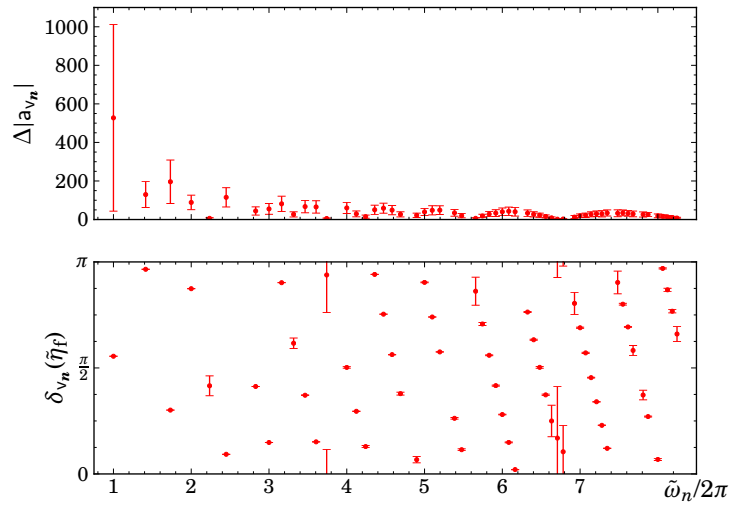
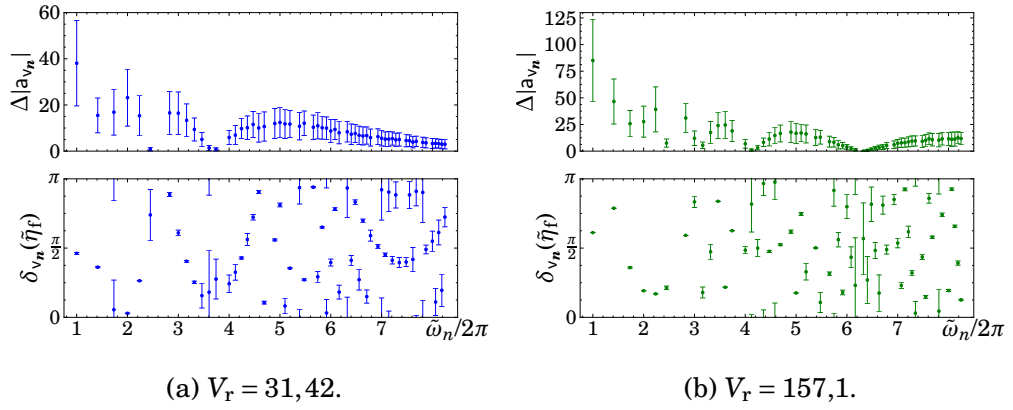


Figura 5.4: Amplificación de los modos y alineamiento de sus fases tras el rebote sobre tres trayectorias del fondo, en la parametrización adaptada a la variable de Mukhanov-Sasaki. Las gráficas son análogas a las de la figura 5.3, y las condiciones iniciales fueron elegidas como en ellas.

queda oscurecida por la periodicidad, parece ser aproximadamente lineal en $\tilde{\omega}_n$, como se aprecia especialmente en la figura 5.3c. La dispersión en torno a dichos ángulos también varía de un modo a otro y, en particular, es considerable en los modos que menos amplificación sufren. Aplicando la simetría bajo inversión temporal del sistema, podemos argumentar que solo los modos con una fase inicial muy concreta se atenúan en el régimen cuántico, y por eso la amplitud se amplifica en promedio (habida cuenta de la distribución de fases iniciales uniforme que hemos escogido).

5.2.2. Universos con mayores inhomogeneidades

Si las inhomogeneidades son mayores, aunque todavía lo suficientemente pequeñas como para que el tratamiento perturbativo esté justificado, no puede despreciarse la reacción de las mismas sobre el fondo, y hay que tener en cuenta los términos cuadráticos en las perturbaciones que corrigen las ecuaciones de movimiento de las variables homogéneas (5.5). Ya hemos discutido un efecto de los mismos en este sistema: el mínimo del volumen homogéneo V y el máximo de la densidad efectiva ρ_{eff} no coinciden, si bien esto puede entenderse como una consecuencia de haber adoptado dos pasos distintos multiplicando a b en el argumento de los senos que aparecen al implementar las correcciones de holonomía (5.1) y (5.2).

Para estudiar qué otros efectos de las inhomogeneidades aparecen en esta propuesta de dinámica efectiva, integramos las ecuaciones de movimiento tomando una dispersión mayor en la distribución de las amplitudes iniciales de las perturbaciones. Por otra parte, continuamos eligiendo sus fases uniformemente distribuidas, aunque esto no es esencial para los resultados.

Sobre una trayectoria típica de este tipo, la expansión del universo se ve acelerada por la amplificación de las inhomogeneidades. Además, durante el régimen en el que se produce el rebote, se produce un intercambio de energía entre el fondo y las inhomogeneidades, que puede analizarse en términos de la densidad de energía efectiva introducida en la ecuaciones (5.10) y (5.11). En concreto, la contribución de las inhomogeneidades a la densidad efectiva, ρ_2 , puede verse aumentada en un orden de magnitud tras el rebote. Este incremento que se ve compensado por una disminución de ρ_0 , de forma que la densidad de energía efectiva total ρ_{eff} dada por la ecuación (5.10) no siente la presencia de perturbaciones.

5.3. Discusión

La propuesta de una dinámica efectiva para la cuantización híbrida de perturbaciones cosmológicas escalares sobre un fondo homogéneo e isótropo descrita en la sección 4 nos ha ofrecido una primera aproximación a la física del modelo. Incluso en el caso más sencillo —con secciones espaciales planas y masa nula para el campo material—, la integración numérica de las ecuaciones dinámicas del sistema ha expuesto algunas características interesantes del mismo.

Para derivar la dinámica efectiva, hemos introducido en la ligadura hamiltoniana las correcciones de holonomía a las que da lugar la regularización de la misma propuesta en la sección 4. A partir de la ligadura efectiva así obtenida, las ecuaciones dinámicas del sistema pueden deducirse de la forma habitual. La evolución del fondo homogéneo evita la singularidad de la gran explosión, que se ve sustituida por un rebote en el volumen, como ya se explicó en la sección 1.2.2. Sobre este fondo, las inhomogeneidades obedecen una ecuación que, salvo correcciones subdominantes en el ultravioleta, es la de un campo de Klein-Gordon sujeto a un potencial cuadrático que depende de las variables homogéneas. Un estudio de ese potencial revela que, mientras el universo tiene un tamaño suficientemente grande, las perturbaciones se propagan como un campo libre. Por el contrario, en las proximidades del rebote, el potencial alcanza su máximo.

En primer lugar, nos interesamos por la dinámica de las inhomogeneidades cuando son lo suficientemente pequeñas como para despreciar su reacción sobre el fondo. Para explorarla, fijamos distintas condiciones iniciales para las variables homogéneas en la rama del universo en contracción y, tomando aleatoriamente (pero lo suficientemente pequeñas) las de las inhomogeneidades, integramos numéricamente las ecuaciones efectivas a través del rebote hasta la rama en expansión. Elegimos una distribución inicial de las perturbaciones que simula las fluctuaciones de un estado de vacío de la cuantización de Fock adoptada en las secciones 3 y 4. Un estudio estadístico de un gran número de simulaciones sobre la misma trayectoria del fondo reveló que, en promedio, la amplitud de las inhomogeneidades aumenta durante el régimen dominado por las correcciones cuánticas. Aparte de en el modelo de Gowdy híbrido [97], ya mencionado, la amplificación de inhomogeneidades a través de un rebote cosmológico se ha encontrado en otros trabajos (véase, por ejemplo, la referencia [128] o, fuera del ámbito de la Gravedad Cuántica de Lazos, la referencia [137]). En nuestro modelo, el incremento puede ser significativo, —incluso de varios órdenes de magnitud— para los modos de baja frecuencia (es decir, cuyo autovalor del operador de Laplace-Beltrami es pequeño en valor absoluto), pero decae hacia el ultravioleta. Además, he-

mos encontrado una modulación oscilatoria con la frecuencia en el factor de amplificación, que podría ser una traza distintiva de este modelo.

La contrapartida de la amplificación en la distribución de las fases de las perturbaciones (o, más exactamente, de las variables de aniquilación adoptadas para su descripción) es una alineación de las mismas: independientemente de sus fases iniciales, los modos con la misma frecuencia exhiben una fuerte tendencia a sincronizarse tras del rebote.

Cálculos preliminares parecen confirmar que estos efectos también aparecen en el caso de que el campo escalar tenga masa no nula, en el que puede producirse inflación, por lo que existe la posibilidad de que dejen una huella observacional en el espectro de la radiación de fondo de microondas. Esto debe comprobarse cuidadosamente.

También hemos estudiado la reacción de las perturbaciones sobre el fondo cuando aquellas son apreciables (si bien lo suficientemente pequeñas para que la truncación perturbativa sea válida). Hay que advertir que la estrategia que hemos seguido para introducir correcciones de holonomía en el término de la ligadura cuadrático en las inhomogeneidades, respetando los dos diferentes tipos de pasos que introdujimos en el modelo cuántico para preservar los sectores de superselección del modelo FLRW, tiene consecuencias no solo cuantitativas, sino también cualitativas. En particular, en la dinámica efectiva propuesta, el mínimo del volumen no coincide con el máximo de la densidad promedio efectiva. Cabe esperar que otros efectos sean de carácter más fundamental y no dependan de la prescripción concreta, como el traspase de energía entre el fondo y las perturbaciones, que en las simulaciones efectuadas permite relacionar la amplificación de las inhomogeneidades con una aceleración en la expansión de la geometría de fondo.

Nuestra confianza en los resultados se basa en su estabilidad frente al cambio del método de integración (como se ha mencionado, hemos utilizado dos métodos de Runge-Kutta adaptativos distintos, uno de pasos 4 y 5 y otro de pasos 8 y 9) y de los parámetros de la integración. Además, se ha comprobado que, en todo momento, la ligadura hamiltoniana se mantenía dentro del margen de error admisible.

Capítulo 6

Estudio de la dinámica efectiva del modelo de Gowdy híbrido

La presencia de singularidades en Relatividad General es uno de los principales motivos que impulsan la búsqueda de una teoría cuántica de la gravedad. No es de extrañar, por tanto, que la resolución de la Gran Explosión se considere uno de los grandes éxitos de la Cosmología Cuántica de Lazos. En efecto, este marco teórico permite evitar muchas de las singularidades cosmológicas que aparecen en la teoría clásica ya al nivel de la dinámica efectiva que emerge de los modelos cuánticos correspondientes. Puesto que las singularidades espaciotemporales están generalmente asociadas a divergencias en los invariantes de curvatura, sería deseable que dichas divergencias desaparecieran al introducir correcciones cuánticas.

Hay que aclarar que existen singularidades, denominadas *débiles*, que permitirían el paso a un observador con una constitución física lo suficientemente resistente (ya que las geodésicas pueden extenderse a través de estas singularidades) y no suponen, por tanto, un verdadero problema. Las singularidades que una teoría cuántica de la gravedad debería evitar genéricamente son las llamadas *fuertes* [138, 139], que provocan la destrucción de cualquier observador que las alcanzara. La dinámica efectiva de la Cosmología Cuántica de Lazos se ha utilizado para demostrar que las singularidades se resuelven con suficiente generalidad, tanto en el caso homogéneo e isótropo [84, 85] como en el modelo de Bianchi I [89, 90]. Incluso cuando dichas singularidades persisten, resultan ser débiles, como demuestra el estudio de las ecuaciones efectivas.

En el modelo de Gowdy en el tres toro con polarización lineal, se ha comprobado analítica y numéricamente que, incluso en presencia de inhomogeneidades, las singularidades se sortean con rebotes [96, 97] en la dinámica efectiva correspondiente al primer esquema de dinámica mejorada propues-

to para el modelo de Bianchi I (al que, recordemos, se reduce el modelo de Gowdy considerado cuando las inhomogeneidades se desvanecen). Los resultados que se exponen a continuación generalizan los anteriores utilizando una prescripción más reciente para la implementación de la dinámica mejorada [50], concretamente la adoptada en la sección 1.2.

6.1. Ecuaciones efectivas

El modelo de Gowdy linealmente polarizado en el tres-toro con un campo escalar como contenido material fue presentado en la sección 1.2.4, junto con los fundamentos de su cuantización híbrida. Como vimos, el espacio de fases del sistema reducido puede dividirse en dos sectores, que denominamos *homogéneo* e *inhomogéneo*. Parametrizamos el sector homogéneo con los pares canónicos —salvo un factor— (c_i, p_i) , con $i \in \{\theta, \sigma, \delta\}$, y el asociado al modo cero del campo escalar, (ϕ, π_ϕ) . Por otro lado, el sector inhomogéneo incluye dos campos, ξ y $\tilde{\Phi}$ y sus momentos canónicamente conjugados, todos ellos desprovistos por construcción de sus modos cero. Estos campos, que denotamos genéricamente por χ , dependen únicamente del tiempo y de una coordenada angular en la que son periódicos; para describirlos, utilizamos las variables de destrucción y creación a_{χ_n} y $a_{\chi_n}^*$, con $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$, construidas a partir de sus modos de Fourier χ_n según la ecuación (1.71). En Relatividad General, estas variables están sujetas a dos ligaduras: la ligadura hamiltoniana densitizada \mathcal{C}_G , dada en la ecuación (1.72), y el generador de traslaciones en el círculo, C_θ , cuya expresión aparece en la ecuación (1.74).

Siguiendo el procedimiento habitual, las ligaduras efectivas pueden obtenerse incluyendo en las ligaduras clásicas las correcciones cuánticas provenientes de la regularización de las mismas. En particular, estamos interesados en las correcciones de holonomía. Para implementarlas, basta con hacer en la ligadura \mathcal{C}_G la sustitución $c_i \mapsto \text{sen}(\bar{\mu}_i c_i)/\bar{\mu}_i$, donde $\bar{\mu}_i$ es la función dada en la ecuación (1.59). El resultado es más claro si se escribe en términos de las variables

$$b_i := \bar{\mu}_i c_i, \quad \tilde{\lambda}_i := 4\sqrt{\pi p_i}. \quad (6.1)$$

Evidentemente, b_i es el análogo en este modelo de la variable b utilizada en el capítulo 5 (salvo un factor $\sqrt{\Delta}$). Por otra parte, $\tilde{\lambda}_i$ está relacionado con el parámetro λ_i definido en la cuantización del modelo de Bianchi I, como puede apreciarse comparando con la ecuación (1.60). También utilizaremos el volumen físico del universo en dicho modelo, que, como vimos, está dado por $V = \sqrt{p_\theta p_\sigma p_\delta}$. Los corchetes de Dirac de todas estas variables pueden

calcularse fácilmente a partir de la ecuación (1.56); los únicos no nulos son

$$\{b_i, \lambda_j\} = Y \frac{\lambda_i}{V} \delta_{ij}, \quad \{b_i, V\} = Y, \quad \{b_i, b_j\} = Y \frac{b_i - b_j}{V}, \quad (6.2)$$

con $Y = \gamma\kappa\sqrt{\Delta}/2$.

Implementando en la expresión clásica de \mathcal{C}_G —ecuación (1.72)— las correcciones de holonomía y el cambio de variables, se obtiene la ligadura densitizada efectiva

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_G^{\text{efe}} = & -\frac{V^2}{\gamma^2\Delta} \sum_i \sum_{j \neq i} \text{sen } b_i \text{sen } b_j + \kappa\pi_\phi^2 + \frac{\kappa}{4} \tilde{\lambda}_\theta^2 H_{\text{lib}} \\ & + \frac{2\kappa V^2}{\gamma^2\Delta \tilde{\lambda}_\theta^2} (\text{sen } b_\delta + \text{sen } b_\sigma)^2 H_{\text{int}}, \end{aligned} \quad (6.3)$$

donde $H_{\text{lib}} = H_{\text{lib}}^\xi + H_{\text{lib}}^\Phi$ y $H_{\text{int}} = H_{\text{int}}^\xi + H_{\text{int}}^\Phi$; las expresiones de estos términos están recogidas en las ecuaciones (1.73). Esta ligadura codifica la dinámica efectiva que puede esperarse del modelo cuántico. A partir de ella, pueden obtenerse las ecuaciones de movimiento de las variables tomando corchetes de Poisson. El momento π_ϕ puede tratarse aparte porque es una constante del movimiento, ya que la ligadura no depende de ϕ . A consecuencia, la evolución de ϕ es trivial, pues $d\phi/d\tau = \pi_\phi$. El tiempo τ corresponde a la elección de lapso $N = 2V$. En cuanto al resto de las variables,

$$\frac{d\tilde{\lambda}_\theta}{d\tau} = \frac{V\tilde{\lambda}_\theta}{2\gamma\sqrt{\Delta}} \cos b_\theta (\sin b_\sigma + \sin b_\delta), \quad (6.4a)$$

$$\frac{d\tilde{\lambda}_\sigma}{d\tau} = \frac{V\tilde{\lambda}_\sigma \cos b_\sigma}{2\gamma\sqrt{\Delta}} \left(\text{sen } b_\delta + \text{sen } b_\theta - \frac{4Y}{\gamma\sqrt{\Delta}\tilde{\lambda}_\theta^2} (\text{sen } b_\sigma + \text{sen } b_\delta) H_{\text{int}} \right), \quad (6.4b)$$

$$\begin{aligned} \frac{dV}{d\tau} = & \frac{V^2}{4\gamma\sqrt{\Delta}} \sum_i \sum_{j \neq i} \sum_{k \neq i, j} \text{sen } b_i (\cos b_j + \cos b_k) \\ & - \frac{2YV^2}{\gamma^2\Delta \tilde{\lambda}_\theta^2} (\text{sen } b_\sigma + \text{sen } b_\delta) (\cos b_\sigma + \cos b_\delta) H_{\text{int}}, \end{aligned} \quad (6.4c)$$

$$\begin{aligned} \frac{db_\theta}{d\tau} = & -\frac{V}{2\gamma\sqrt{\Delta}} \left(\sum_{i \neq \theta} \sum_{j \neq i, \theta} (b_\theta - b_i) \cos b_i (\text{sen } b_\theta + \text{sen } b_j) + \sum_i \sum_{j \neq i} \text{sen } b_i \text{sen } b_j \right) \\ & + \frac{2YV}{\gamma^2\Delta \tilde{\lambda}_\theta^2} (\text{sen } b_\sigma + \text{sen } b_\delta) [(b_\theta - b_\sigma) \cos b_\sigma + (b_\theta - b_\delta) \cos b_\delta] H_{\text{int}} \\ & + \frac{Y\tilde{\lambda}_\theta^2}{4V} H_{\text{lib}}, \end{aligned} \quad (6.4d)$$

$$\frac{db_\sigma}{d\tau} = -\frac{V}{2\gamma\sqrt{\Delta}} \left(\sum_{i \neq \sigma} \sum_{j \neq i, \sigma} (b_\sigma - b_i) \cos b_i (\text{sen } b_\sigma + \text{sen } b_j) + \sum_i \sum_{j \neq i} \text{sen } b_i \text{sen } b_j \right)$$

$$+ \frac{2YVH_{\text{int}}}{\gamma^2 \Delta \tilde{\lambda}_\theta^2} (\text{sen } b_\sigma + \text{sen } b_\delta) [\text{sen } b_\sigma + \text{sen } b_\delta + (b_\sigma - b_\delta) \cos b_\delta], \quad (6.4e)$$

$$\frac{da_{\chi_n}}{d\tau} = -i \frac{V^2}{\gamma^2 \Delta \tilde{\lambda}_\theta^2 |n|} (\text{sen } b_\sigma + \text{sen } b_\delta)^2 (a_{\chi_n} + a_{\chi_{-n}}^*) - i \frac{|n|}{8} \tilde{\lambda}_\theta^2 a_{\chi_n}. \quad (6.4f)$$

Las expresiones de las derivadas de $\tilde{\lambda}_\delta$ y b_δ se obtienen de las de $\tilde{\lambda}_\sigma$ y b_σ intercambiando σ y δ , mientras que la de $a_{\chi_n}^*$ es simplemente la compleja conjugada de la de a_{χ_n} . A partir de estas ecuaciones, se comprueba de forma directa que las cantidades $V(b_\sigma - b_\delta)$ y $a_{\chi_n} a_{\chi_n}^* - a_{\chi_{-n}} a_{\chi_{-n}}^*$ son también constantes del movimiento.

6.1.1. Ausencia de singularidades

Llegados a este punto, es interesante preguntarse si la dinámica efectiva propuesta para el modelo híbrido de Gowdy sorteja las singularidades espaciotemporales, como ocurre en modelos más sencillos. Para abordar este problema, presentamos a continuación el análisis de las posibles divergencias en los invariantes de curvatura (o sus derivadas) para el sector homogéneo, un modelo de Bianchi I, tratando las inhomogeneidades como parte del contenido de dicho espaciotiempo de fondo. Supondremos que la contribución de estas a la ligadura efectiva permanece finita en todo momento. De hecho, basta con suponer que lo hace H_{lib} , ya que $0 < H_{\text{int}} < 2H_{\text{lib}}$.

Antes de abordar los invariantes de curvatura, estudiemos algunas cantidades cuya divergencia también está asociada a la aparición de singularidades. Por conveniencia, utilizaremos en los cálculos el tiempo T tal que $dT = 2Vd\tau$ (equivalente a tomar el lapso $N = 1$). Denotaremos con una prima las derivadas con respecto a este tiempo. Empecemos por los parámetros de Hubble direccionales, definidos como $H_i := a'_i/a_i$ en términos de los correspondientes factores de escala direccionales. Con la ecuación (1.57) y la segunda de las ecuaciones (6.1), se obtiene de inmediato que

$$H_i = \frac{\tilde{\lambda}'_j}{\tilde{\lambda}_j} + \frac{\tilde{\lambda}'_k}{\tilde{\lambda}_k} - \frac{\tilde{\lambda}'_i}{\tilde{\lambda}_i}, \quad (6.5)$$

donde se asume que $i \neq j \neq k$. Utilizando las ecuaciones de movimiento, es evidente que

$$\frac{\tilde{\lambda}'_\theta}{\tilde{\lambda}_\theta} \leq \frac{1}{2\gamma\sqrt{\Delta}}. \quad (6.6)$$

Esta acotación de la derivada logarítmica implica que, partiendo de un valor finito de $\tilde{\lambda}_\theta$ distinto de cero, $\tilde{\lambda}_\theta$ no puede anularse o divergir a infinito en

tiempo T finito. Algo parecido ocurre con $\tilde{\lambda}_\sigma$, pues

$$\frac{\tilde{\lambda}'_\sigma}{\tilde{\lambda}_\sigma} \leq \frac{1}{2\gamma\sqrt{\Delta}} + \frac{2Y}{\gamma^2\Delta\tilde{\lambda}_\theta^2} H_{\text{int}}. \quad (6.7)$$

Puesto que $\tilde{\lambda}_\theta$ no puede anularse más que asintóticamente, y H_{int} es finito por hipótesis, se concluye que tampoco $\tilde{\lambda}_\sigma$ puede divergir en un intervalo finito de tiempo. Lo mismo sucede con $\tilde{\lambda}_\delta$. En consecuencia, los factores de Hubble direccionales están acotados localmente sobre las trayectorias efectivas.

Centremos ahora nuestra atención en los escalares que aparecen en la descomposición cinemática de las congruencias de geodésicas temporales. Denotando por v^α la tangente unitaria a las geodésicas, el tensor de expansión $\theta_{\alpha\beta}$ se define como la parte simétrica del tensor $\nabla_\beta v_\alpha$; puesto que en el modelo de Bianchi I la vorticidad se anula, ambos tensores coinciden. El escalar de expansión θ es simplemente la traza $g^{\alpha\beta}\theta_{\alpha\beta}$, mientras que el tensor de cizalladura es su parte sin traza,

$$\sigma_{\alpha\beta} := \theta_{\alpha\beta} - \frac{1}{3}\theta(g_{\alpha\beta} + v_\alpha v_\beta). \quad (6.8)$$

A partir de él, se define el escalar de cizalladura como $\sigma^2 := \sigma^{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta}/2$. Particularicemos ahora estas cantidades al modelo de Bianchi I [89]. En él, la expansión está dada por

$$\theta = \frac{V'}{V} = \sum_i H_i \quad (6.9)$$

y no puede divergir, puesto que, como hemos constatado, los parámetros de Hubble están localmente acotados. Además, el volumen homogéneo V no puede divergir ni anularse en un tiempo finito (y, de hecho, ni siquiera puede anularse asintóticamente, como argumentaremos más adelante). También la cizalladura es finita a tiempo finito, dado que su expresión se reduce a

$$\sigma^2 = \frac{1}{12} \sum_i \sum_{j \neq i} (H_i - H_j)^2. \quad (6.10)$$

Otra cantidad de interés es la densidad de energía. Puesto que hemos elegido tratar las inhomogeneidades como contenido del espaciotiempo, hay que incluir su contribución en la misma. Así, aislando en la ligadura hamiltoniana los términos correspondientes, definimos:

$$\rho := \frac{\pi_\phi^2}{2V^2} + \frac{\tilde{\lambda}_\theta^2}{8V^2} H_{\text{lib}} + \frac{(\text{sen } b_\delta + \text{sen } b_\sigma)^2}{\gamma^2\Delta\tilde{\lambda}_\theta^2} H_{\text{int}}. \quad (6.11)$$

Sobre soluciones de la dinámica efectiva, esta cantidad no puede superar la cota $3/(\kappa\gamma^2\Delta)$, como se deduce de la ecuación de ligadura, que se obtiene al igualar a cero la ecuación (6.3).

De la ecuación de ligadura también se deduce que el volumen homogéneo no puede anularse sobre soluciones de la misma, pues, de hacerlo, debería cumplirse

$$\kappa\pi_\phi^2 + \frac{\kappa}{4}\tilde{\lambda}_\theta^2 H_{\text{lib}} = 0. \quad (6.12)$$

Ahora bien, si $\pi_\phi \neq 0$ o mientras haya inhomogeneidades presentes (de forma que $H_{\text{lib}} > 0$), el miembro de la izquierda en la anterior ecuación será estrictamente positivo. La contradicción es evidente, e implica que la anulación de V no puede realizarse: la dinámica efectiva de este modelo no admite singularidades cosmológicas de volumen nulo. Aunque este resultado pueda parecer independiente de las correcciones cuánticas, hay que notar que sin ellas los términos proporcionales a V^2 en la ligadura no están necesariamente acotados.

Finalmente, analicemos las posibles divergencias del escalar de Ricci R , el escalar de Kretschmann —que es el cuadrado del tensor de Riemann $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ — y el cuadrado del tensor de Weyl $C_{\alpha\beta\gamma\delta}$, cuyas expresiones están dadas en el modelo de Bianchi por [89]

$$R = \sum_i \sum_{j \neq i} H_i H_j + 2 \sum_i \frac{a_i''}{a_i}, \quad (6.13a)$$

$$R^{\alpha\beta\gamma\delta} R_{\alpha\beta\gamma\delta} = 2 \sum_i \sum_{j \neq i} H_i^2 H_j^2 + 4 \sum_i \left(\frac{a_i''}{a_i} \right)^2, \quad (6.13b)$$

$$C_{\alpha\beta\gamma\delta} C^{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{3} \sum_i \sum_{j \neq i} \sum_{k \neq i, j} H_i^2 (H_j - H_k)^2 + \frac{2}{3} \sum_i \sum_{j \neq i} \sum_{k \neq i, j} \frac{a_i''}{a_i} \left(\frac{a_i''}{a_i} - H_i (H_j + H_k) + 2H_j H_k - 1 \right). \quad (6.13c)$$

Puesto que los parámetros de Hubble están localmente acotados en cada trayectoria del sistema efectivo, la divergencia de estos invariantes solo podría proceder de las combinaciones a_i''/a_i . Teniendo en cuenta de nuevo las ecuaciones (1.57) y (6.1), es fácil comprobar que

$$\frac{a_i''}{a_i} = \frac{\tilde{\lambda}_j''}{\tilde{\lambda}_j} + \frac{\tilde{\lambda}_k''}{\tilde{\lambda}_k} - \frac{\tilde{\lambda}_i''}{\tilde{\lambda}_i} + \frac{1}{2}(H_i - H_j)(H_i - H_k), \quad \text{con } i \neq j \neq k, \quad (6.14)$$

por lo que, en realidad, la acotación de los invariantes de curvatura considerados descansa en la de los términos $\tilde{\lambda}_i''/\tilde{\lambda}_i$. Derivando las ecuaciones (6.4a)

y (6.4b),

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{\lambda}_\theta''}{\tilde{\lambda}_\theta} &= \frac{1}{8\gamma\sqrt{\Delta}} [-b'_\theta \text{sen } b_\theta (\text{sen } b_\sigma + \text{sen } b_\delta) + \cos b_\theta (b'_\sigma \cos b_\sigma + b'_\delta \cos b_\delta)] \\ &\quad + \frac{1}{16\gamma^2\Delta} \cos^2 b_\theta (\text{sen } b_\sigma + \text{sen } b_\delta)^2, \end{aligned} \quad (6.15a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{\lambda}_\sigma''}{\tilde{\lambda}_\sigma} &= \frac{1}{8\gamma\sqrt{\Delta}} [-b'_\sigma \text{sen } b_\sigma (\text{sen } b_\delta + \text{sen } b_\theta) + \cos b_\sigma (b'_\delta \cos b_\delta + b'_\theta \cos b_\theta)] \\ &\quad - \frac{\Upsilon}{2\gamma^2\Delta\tilde{\lambda}_\theta^2} \cos b_\sigma (\text{sen } b_\sigma + \text{sen } b_\delta) H'_{\text{int}} \\ &\quad + \frac{\Upsilon H_{\text{int}}}{2\gamma^2\Delta\tilde{\lambda}_\theta^2} \left(2 \frac{\tilde{\lambda}'_\theta}{\tilde{\lambda}_\theta} \cos b_\sigma (\text{sen } b_\sigma + \text{sen } b_\delta) + b'_\sigma \text{sen } b_\sigma (\text{sen } b_\sigma + \text{sen } b_\delta) \right. \\ &\quad \left. - \cos b_\sigma (b'_\sigma \cos b_\sigma + b'_\delta \cos b_\delta) \right) \\ &\quad + \frac{\cos^2 b_\sigma}{16\gamma^2\Delta} \left(\text{sen } b_\delta + \text{sen } b_\theta - \frac{4\Upsilon}{\gamma\sqrt{\Delta}\tilde{\lambda}_\theta^2} (\text{sen } b_\sigma + \text{sen } b_\delta) H_{\text{int}} \right)^2. \end{aligned} \quad (6.15b)$$

Por supuesto, de la última ecuación puede obtenerse la de $\tilde{\lambda}'_\delta/\tilde{\lambda}_\delta$ intercambiando los índices σ y δ . A pesar de la intimidante apariencia de estas fórmulas, la mayor parte de los factores que intervienen en ellas están bajo control. Ya hemos argumentado que la variable $\tilde{\lambda}_\theta$, que aparece en algunos denominadores, no puede anularse a un tiempo finito, y tampoco puede divergir $\tilde{\lambda}'_\delta/\tilde{\lambda}_\delta$. Por hipótesis, $H_{\text{int}} < 2H_{\text{lib}}$ es finito, y su derivada también debe serlo, dado que satisface la cota

$$|H'_{\text{int}}| \leq \left(\frac{2V}{\gamma^2\Delta\tilde{\lambda}_\theta^2} + \frac{\tilde{\lambda}_\theta^2}{8V} \right) H_{\text{lib}}, \quad (6.16)$$

donde V no puede anularse, como hemos visto, ni divergir en un intervalo de tiempo finito¹. Por consiguiente, las divergencias de las ecuaciones (6.15), de existir, provendrían de las derivadas de las variables b_i , cuyos valores están dados por las ecuaciones (6.4d) y (6.4e) (dividiendo por el factor $2V$ que relaciona $d\tau$ y dT). De esas expresiones, y recordando los resultados anteriores, se concluye que, a su vez, las derivadas b'_i solo pueden divergir si lo hacen las propias b_i . En resumen, los invariantes de curvatura (6.13) pueden tender a infinito a tiempo finito únicamente si lo hacen también las variables b_i .

¹Análogamente, $|H'_{\text{lib}}| \leq V H_{\text{lib}} / (4\pi\gamma^2\Delta\tilde{\lambda}_\theta^2)$, lo que refuerza nuestra suposición de que H_{lib} no diverge a T finito.

Sin embargo, ninguna de las b_i puede divergir. Para probarlo, asumamos lo contrario, es decir, supongamos que existe una trayectoria dinámica, solución de las ecuaciones de movimiento, que encuentra una singularidad por divergir alguna de las b_i en un cierto instante de tiempo T_S . Vamos a probar que el teorema de existencia de Picard [140] garantiza que las b_i están acotadas en un cierto intervalo de tiempo que puede extenderse más allá de T_S , en contradicción con la hipótesis de partida.

Llamemos $\vec{b} = (b_\theta, b_\sigma, b_\delta)$ y escojamos un instante cualquiera $T_0 \neq T_S$, en el que \vec{b} toma el valor \vec{b}_0 sobre la trayectoria considerada. Las ecuaciones de movimiento expresan las derivadas \vec{b}'_i como funciones de T y de \vec{b} . Desde este punto de vista, consideraremos que $\tilde{\lambda}_i$ y H_{int} son meras funciones del tiempo que, debido a la acotación de sus derivadas sobre trayectorias dinámicas, pueden extenderse de forma continua más allá de T_S . En consecuencia, pueden tomarse dos números reales L y b , con la restricción de que $|T_S - T_0| < L$, tales que las funciones \vec{b}' satisfagan la condición de Lipschitz en \vec{b} en el conjunto

$$B = \{(T, \vec{b}) : |T - T_0| < L, \|\vec{b} - \vec{b}_0\| < b\}. \quad (6.17)$$

De hecho, dadas las ecuaciones dinámicas del sistema, puede tomarse b tan grande como se quiera². El teorema de Picard garantiza la existencia de una solución $\vec{b}(T)$ en el intervalo $|T - T_0| < \min(L, b/M)$, donde $M := \sup_B \|\vec{b}' - \vec{b}'_0\|$, tal que $\vec{b}(T_0) = \vec{b}_0$. Si dicho intervalo temporal contiene a T_S , la hipótesis de que \vec{b} diverge en T_S no se cumple. Si no lo hace, basta con tomar nuevos valores de L y T_0 para que lo contenga. Esto siempre puede hacerse porque el cociente b/M tiene un límite distinto de cero en el límite $b \rightarrow \infty$. Elíjase L menor que ese límite, y T_0 , de forma que $|T_S - T_0| < L$. La regularidad de \vec{b} en T_S está entonces garantizada por el teorema, para cualquier valor de \vec{b}_0 .

Así, ni el escalar de Ricci, ni el de Kretschmann, ni el cuadrado del tensor de Weyl pueden divergir a tiempo T finito, al igual que ocurre con las otras cantidades que hemos analizado: el volumen homogéneo, la densidad de energía, los escalares de expansión y cizalladura y los parámetros de Hubble direccionales. De hecho, el volumen homogéneo ni siquiera puede anularse asintóticamente cuando $T \rightarrow \pm\infty$. Es tentador suponer que, como ocurre en otros modelos más sencillos, las singularidades de volumen nulo que aparecen en la teoría clásica se evitan con un rebote en el mismo. En el siguiente epígrafe se estudia si tal rebote es posible.

²Esto puede verse constatando que las derivadas parciales $\partial b'_i / \partial b_j$ existen y están acotadas en B , por grande que sea b .

6.1.2. Posibilidad de un rebote

Suponiendo que efectivamente se da un rebote en el volumen homogéneo, podemos delimitar las regiones del espacio de fases donde es posible que ocurra. Para hacerlo, impondremos la condición $V' = 0$, que caracterizaría un punto extremo de V . Resultará útil cambiar a las variables

$$b_{\pm} := \frac{b_{\sigma} \pm b_{\delta}}{2}, \quad (6.18)$$

en las que la ligadura hamiltoniana efectiva, ecuación (6.3), se escribe

$$\mathcal{E}_G^{\text{efe}} = -\frac{2V^2}{\gamma^2\Delta} (2\text{sen } b_{\theta} \sin b_{+} \cos b_{-} + \cos^2 b_{-} - \cos^2 b_{+}) \quad (6.19)$$

$$+ \kappa\pi_{\phi}^2 + \frac{\kappa}{4}\tilde{\lambda}_{\theta}^2 H_{\text{lib}} + \frac{8\kappa V^2}{\gamma^2\Delta\tilde{\lambda}_{\theta}^2} \text{sen}^2 b_{+} \cos^2 b_{-} - H_{\text{int}}. \quad (6.20)$$

Teniendo en cuenta que $\{b_{+}, V\} = \Upsilon$ y $\{b_{-}, V\} = 0$ —o bien realizando directamente el cambio de variables en la ecuación (6.4c)—, la ecuación dinámica del volumen homogéneo adopta la expresión

$$\begin{aligned} \frac{dV}{d\tau} &= \frac{V^2}{2\gamma\sqrt{\Delta}} [2\text{sen}(b_{+} + b_{\theta})\cos b_{-} + \text{sen}(2b_{+})] \\ &\quad - \frac{4\Upsilon V^2}{\gamma^2\Delta\tilde{\lambda}_{\theta}^2} \text{sen}(2b_{+})\cos^2 b_{-} - H_{\text{int}}. \end{aligned} \quad (6.21)$$

Igualando esta derivada a cero, y suponiendo que $\text{sen } b_{+}$ no se anula (el caso $\text{sen } b_{+}$ puede analizarse como un límite), se obtiene la siguiente ecuación cuadrática en $x := \cos b_{-}$:

$$x^2 - 2\beta Sx - \beta = 0, \quad (6.22)$$

donde

$$\beta = \frac{\gamma}{4\kappa} \frac{\tilde{\lambda}_{\theta}^2}{H_{\text{int}}}, \quad S = \frac{\text{sen}(b_{+} + b_{\theta})}{\text{sen}(2b_{+})}. \quad (6.23)$$

Puesto que el discriminante de la ecuación es positivo (suponemos de momento que $\beta \neq 0$), esta admite dos soluciones reales,

$$x = \beta S \pm \sqrt{\beta^2 S^2 + \beta}; \quad (6.24)$$

además, una de las soluciones es positiva (la correspondiente al signo positivo de la raíz cuadrada) y la otra, negativa (asociada al signo negativo de la raíz). De ahora en adelante, nos referiremos a las dos ramas de soluciones como p y m , respectivamente. Ahora bien, x es un coseno, por lo que

solo son admisibles soluciones con valor absoluto menor que la unidad. Esta restricción se traduce en la desigualdad

$$1 \geq \sqrt{\beta^2 S^2 + \beta} \pm \beta S, \quad (6.25)$$

o, lo que es lo mismo,

$$\frac{1}{\beta} \geq 1 \pm 2S. \quad (6.26)$$

Las regiones del plano S - $1/\beta$ donde esta condición se cumple se han representado en la figura 6.1a.

Si $\beta = 0$, la ecuación (6.22) tiene una única solución, $x = 0$. Lo mismo sucede en el caso $S \rightarrow \pm\infty$, si $\text{sen}(b_+ + b_\theta) \neq 0$ (pues, de otro modo, la derivada de V se anula independientemente de x). Por último, en el límite homogéneo $\beta \rightarrow \infty$ (es decir, $H_{\text{int}} \rightarrow 0$), la única solución es $x = -1/(2S)$, que solo es admisible si $|S| > 1/2$.

La condición de que la ligadura $\mathcal{C}_G^{\text{efe}}$ se anule sobre soluciones dinámicas reduce aún más la región del espacio de parámetros en la que un rebote es posible. En efecto, sustituyendo las soluciones (6.24) en la ligadura (6.19), e igualando a cero, se obtiene una ecuación lineal para V^2 cuya solución es

$$V^2 = \frac{\kappa \gamma^2 \Delta P}{\beta - 1 + 2(\beta S + z)(\beta S \pm \sqrt{\beta^2 S^2 + \beta})}, \quad (6.27)$$

siendo

$$P = \frac{1}{8} \tilde{\lambda}_\theta^2 H_{\text{lib}} + \frac{1}{2} \pi_\phi^2, \quad z = \frac{1}{2} \text{sen}(b_\theta - b_+) \text{tg} b_+. \quad (6.28)$$

Por supuesto, V^2 debe ser positivo, pero, si bien el numerador en el miembro derecho de la ecuación (6.27) es mayor que cero (al menos mientras haya inhomogeneidades, o si $\pi_\phi \neq 0$), el denominador no tiene un signo definido. Por lo tanto, hay que imponer que este sea también positivo, es decir, que

$$\beta - 1 + 2\beta S(\beta S + z) > \mp 2(\beta S + z)\sqrt{\beta^2 S^2 + \beta}. \quad (6.29)$$

Aunque la igualdad no puede darse, ya que entonces la ligadura hamiltoniana densitizada coincidiría con $2\kappa P$ (cantidad estrictamente mayor que cero), es útil estudiarla; se daría cuando se cumpliera cualquiera de las siguientes dos ecuaciones:

$$\frac{1}{\beta} = 1 + 2 \left(z + \sqrt{z^2 + 1} \right) (S + z), \quad (6.30a)$$

$$\frac{1}{\beta} = 1 + 2 \left(z - \sqrt{z^2 + 1} \right) (S + z). \quad (6.30b)$$

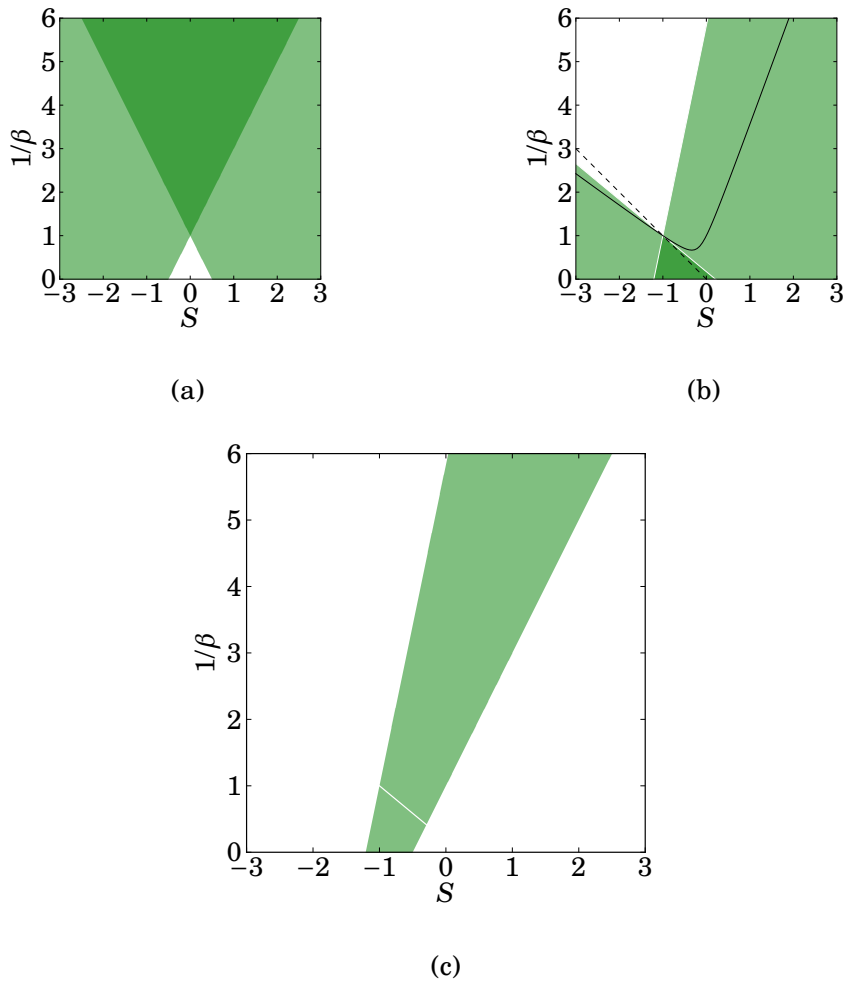


Figura 6.1: Regiones del plano $S-1/\beta$ donde se satisfacen las condiciones mencionadas en el texto. (a) Región donde la ecuación (6.22) admite soluciones con $|x| \leq 1$. La cuña de la izquierda (respectivamente, de la derecha) se corresponde con la rama p (rama m). Ambas ramas coexisten en el área oscura. (b) Región compatible con la positividad de V^2 para $z = 1$. La cuña de la izquierda (de la derecha) se corresponde con la rama m (rama p). En la cuña inferior, ambas soluciones son válidas. Aparecen también dibujadas la recta $\beta S = -z$ y la hipérbola $\beta - 1 + 2\beta S(\beta S + z) = 0$. (c) Región donde las dos condiciones anteriores se satisfacen simultáneamente.

Estas rectas dividen el plano $S-1/\beta$ en cuatro cuñas, como muestra la figura 6.1b. En las cuñas izquierda y derecha,

$$|\beta - 1 + 2\beta S(\beta S + z)| < 2|\beta S + z|\sqrt{\beta^2 S^2 + \beta}, \quad (6.31)$$

por lo que la condición (6.29) se cumple si el miembro de la derecha es negativo, es decir, si

$$\mp(\beta S + z) < 0. \quad (6.32)$$

Evidentemente, en cada punto, solamente una rama de soluciones de la ecuación (6.22) puede satisfacer la última desigualdad. En concreto, la rama m lo hace en la cuña izquierda y la p , en la derecha.

En las cuñas superior e inferior, la desigualdad (6.31) se invierte. Para que la condición (6.29) se dé, ahora hay que imponer la positividad del miembro de la izquierda. Esta restricción adicional descarta la cuña superior, que está por encima de la hipérbola $\beta - 1 + 2\beta S(\beta S + z) = 0$ (ver figura 6.1b). En la cuña inferior, ambas ramas de soluciones son admisibles, puesto que el signo de x no interviene en este caso.

En síntesis, los valores de S y β que permiten un rebote en el volumen están constreñidos por los requisitos (6.26) y (6.29), que juntos se resumen en las condiciones

$$\frac{1}{\beta} < 1 + 2\left(z + \operatorname{sgn}(z)\sqrt{z^2 + 1}\right)(S + z), \quad (6.33a)$$

$$\frac{1}{\beta} \geq 1 + 2\operatorname{sgn}(z)S, \quad (6.33b)$$

$$\frac{1}{\beta} \neq 1 + 2\left(z - \operatorname{sgn}(z)\sqrt{z^2 + 1}\right)(S + z). \quad (6.33c)$$

En la figura (6.1c) se ilustra un ejemplo de región caracterizada por este tipo de condiciones. Salta a la vista que hay amplias regiones del espacio de parámetros donde un rebote es imposible. Es de destacar que, además, solo una rama de las soluciones para x sobrevive: la que coincide en signo con z . Si z se anula, no hay soluciones admisibles.

Aunque no hemos demostrado que en las regiones donde un rebote es factible este ocurra necesariamente, hemos comprobado que puede darse integrando numéricamente las ecuaciones de movimiento en algunas situaciones sencillas con solo unos pocos modos inhomogéneos presentes, eligiendo las condiciones iniciales adecuadamente.

Para concluir, la ecuación (6.27) también permite estudiar el efecto de las inhomogeneidades en el valor mínimo del volumen homogéneo. Por una parte, el numerador en el miembro derecho de la ecuación es claramente mayor

en el caso inhomogéneo, en el que $H_{\text{lib}} \neq 0$. El denominador es más complejo, aunque escrito en términos de x adopta la forma sencilla $y(x) := x^2 + 2zx - 1$. Esta función alcanza su mínimo en $x = -z$. Supongamos, por concretar, que z y, por tanto, x son positivos (recordemos que para $z > 0$, solo la rama p es admisible). De la ecuación (6.24),

$$x = \frac{1}{\sqrt{S^2 + 1/\beta} - S}. \quad (6.34)$$

Consecuentemente, cuando las inhomogeneidades ganan importancia, es decir, cuando β disminuye, x también decrece. Puesto que la función y crece de forma monótona en el semieje positivo, disminuye al crecer las inhomogeneidades.

En resumen, las inhomogeneidades aumentan el numerador del miembro derecho de la ecuación (6.27) y disminuyen el denominador: por lo tanto, de producirse un rebote, el valor del volumen homogéneo en el mismo será mayor cuanto más importantes sean las inhomogeneidades, y, en particular, mayor que en el modelo homogéneo. Heurísticamente, podría argumentarse que, siendo positiva la contribución de las inhomogeneidades a la densidad de energía, la entrada en el régimen en el que las correcciones cuánticas que producen el rebote son dominantes se produce a volúmenes mayores.

6.2. Discusión

En este capítulo, se ha estudiado una propuesta de dinámica efectiva para la cuantización híbrida del modelo del Gowdy con polarización lineal, secciones espaciales homeomorfas tres-toro y un campo escalar sin masa de contenido material. Este modelo puede interpretarse como un espaciotiempo de Bianchi I de fondo, con la misma topología de las secciones espaciales, sobre el que se propagan, además del campo escalar, ondas gravitacionales. Tanto el modelo clásico como su cuantización, introducida en las referencias [38, 40–42], han sido descritos brevemente en la sección 1.2.4. La teoría efectiva se ha obtenido trasladando al marco clásico las regularizaciones implementadas para la construcción del operador de ligadura en el modelo cuántico.

Utilizando las ecuaciones dinámicas obtenidas de la ligadura efectiva, hemos investigado la posibilidad de que conduzcan a singularidades cosmológicas, extendiendo así el análisis de la dinámica efectiva del modelo de Bianchi I [89] a este otro con inhomogeneidades. Concretamente, se han estudiado distintos invariantes de curvatura (el escalar de Ricci, el de Kretschmann y el cuadrado del tensor de Weyl) asociados a la geometría homogénea

de fondo, así como otros escalares de interés (en particular, el volumen, la densidad de energía, la cizalladura, la expansión y los parámetros de Hubble direccionales). La conclusión es que ninguna de estas cantidades puede divergir en un intervalo de tiempo finito mientras la contribución energética de las inhomogeneidades permanezca acotada. De hecho, si esta contribución es finita en determinado momento, las ecuaciones de movimiento también garantizan que no diverge en un tiempo finito. Además, el volumen homogéneo no puede anularse sobre soluciones de la ligadura efectiva. Por consiguiente, estos resultados son incluso más fuertes que los encontrados en la referencia [89] para el modelo de Bianchi I, en el que pueden darse singularidades, si bien son débiles (en la clasificación de Królak [139]) y permiten la extensión de las geodésicas.

Puesto que en los modelos homogéneos e isótropos la cuantización de lazos —y la dinámica efectiva que se deriva de ella— reemplaza la singularidad de la gran explosión por rebotes en el volumen del universo, cabe preguntarse si en la dinámica efectiva del modelo de Gowdy híbrido se dan fenómenos parecidos. Hemos delimitado la región del espacio de fases en la que podría ocurrir un rebote utilizando la ligadura hamiltoniana y la ecuación dinámica de dicha variable. También hemos demostrado que, de producirse el rebote, el volumen homogéneo mínimo que alcanza el universo crece con la importancia relativa de las inhomogeneidades.

Capítulo 7

Conclusiones

El principal objetivo de esta tesis ha sido ahondar en el tratamiento de inhomogeneidades en el marco provisto por la Cosmología Cuántica de Lazos. Con este fin, se han estudiado dos modelos cosmológicos inhomogéneos. Uno de ellos es el modelo de Gowdy en el tres-toro con polarización lineal, para el que ya se disponía de una cuantización híbrida que utiliza una representación de lazos para los grados de libertad homogéneos, mientras que aplica a las inhomogeneidades técnicas convencionales de la Teoría Cuántica de Campos. El segundo modelo es el espaciotiempo FLRW provisto de un campo escalar masivo mínimamente acoplado y perturbaciones, que hemos tratado en mucha mayor extensión, ya que no había sido cuantizado anteriormente utilizando técnicas de lazos. Hemos abordado esta tarea empleando también técnicas híbridas.

Resultados

- Primeramente, hemos formulado clásicamente el modelo FLRW perturbado de un modo adecuado para su cuantización. En particular, hemos truncado la acción del sistema a orden cuadrático en las perturbaciones, para conservar una estructura simpléctica y ligaduras. A continuación, hemos eliminado todas las ligaduras locales perturbativas mediante una fijación de *gauge*. Tras fijarlo, hemos introducido coordenadas canónicas en el sistema de fases reducido. Para ello, se han corregido las variables homogéneas con términos cuadráticos en las perturbaciones. Sin estos términos, habría sido imposible diagonalizar la estructura simpléctica reducida.
- En el sistema de fases reducido, hemos introducido una transformación canónica (hasta el orden perturbativo considerado) que incluye el

escalado de las perturbaciones escalares y tensoriales por el factor de escala de la geometría de fondo, y una redefinición de sus momentos canónicamente conjugados. Por otro lado, las variables homogéneas se han corregido de nuevo con términos cuadráticos.

- En la nueva descripción, las perturbaciones tensoriales obedecen la ecuación de un campo de Klein-Gordon sometido a un potencial cuadrático dependiente de las variables homogéneas. Esto garantiza la existencia de una clase privilegiada de representaciones de Fock unitariamente equivalentes para las perturbaciones tensoriales sobre el fondo clásico. Lo que distingue a las cuantizaciones de esta clase es poseer un estado de vacío invariante bajo las isometrías del fondo y permitir la implementación unitaria de la dinámica del campo.
- La ecuación de movimiento de la perturbación escalada del campo material es similar, aunque incluye términos adicionales, dependientes del modo (en su expansión en autofunciones del operador de Laplace-Beltrami del espacio de fondo), que decaen en el límite ultravioleta como el inverso del autovalor del modo. Gracias a que estos términos no afectan al comportamiento asintótico del campo en el límite ultravioleta, con un decaimiento suficientemente pronunciado, hemos podido comprobar que también existe una clase privilegiada de cuantizaciones de Fock unitariamente equivalentes para las perturbaciones escalares sobre el fondo clásico.
- Cualquier otro escalado de las perturbaciones por una función del tiempo (o de las variables homogéneas) habría hecho imposible satisfacer simultáneamente los requisitos exigidos a sus representaciones de Fock. Aunque la posibilidad de redefinir sus momentos canónicamente conjugados añadiéndoles una contribución lineal en el campo no puede descartarse de forma genérica con estos criterios en casos unidimensionales para la dependencia espacial, de ser admisible, no conduce a cuantizaciones privilegiadas inequivalentes. En la tres-esfera y en el tres-toro, no obstante, el momento queda completamente determinado y coincide con la derivada del campo (salvo por términos subdominantes en el ultravioleta en el caso de las perturbaciones escalares).
- Existen invariantes *gauge* perturbativos que satisfacen ecuaciones de Klein-Gordon en las que el término que se identifica con la masa depende del fondo homogéneo. Es, por ejemplo, el caso de la variable de Mukhanov-Sasaki cuando las secciones espaciales del espaciotiempo

de fondo son planas. Eligiendo adecuadamente los momentos conjugados de estos invariantes, se alcanzan descripciones de las perturbaciones escalares que también admiten clases privilegiadas de cuantizaciones de Fock equivalentes sobre el fondo clásico. Las transformaciones canónicas del sector inhomogéneo que relacionan estas nuevas descripciones con la original, en términos de las perturbaciones escaladas, no son locales, ya que dependen del modo. No obstante, pueden implementarse unitariamente en las correspondientes cuantizaciones privilegiadas.

- Hemos extendido la transformación canónica del sector inhomogéneo que relaciona la variable de Mukhanov-Sasaki con la perturbación escalada del campo material (y sus respectivos momentos) al espacio de fases completo del sistema reducido, corrigiendo las variables homogéneas con términos de orden perturbativo cuadrático. Esta caracterización del sistema permite discutir la invariancia *gauge* del formalismo en más profundidad.
- Como resultado principal, hemos conseguido cuantizar completamente el modelo FLRW con perturbaciones escalares en el tres-toro y en la tres-esfera. Para ello, hemos establecido una identificación entre el sector homogéneo del espacio de fases y el modelo no perturbado. El espacio de Hilbert cinemático se ha construido como el producto tensorial del espacio cinemático de este y una de las representaciones de Fock privilegiadas del campo escalado.
- La representación de la ligadura hamiltoniana como un operador en el espacio de Hilbert cinemático se ve obstaculizada por el hecho de que su parte cuadrática en las perturbaciones mezcla los sectores homogéneo e inhomogéneo. Hemos resuelto este problema proponiendo una prescripción específica basada en la regularización sistemática que se realiza en la cuantización de lazos de modelos cosmológicos homogéneos. Esta prescripción respeta los sectores de superselección del modelo sin perturbar, formados por estados con soporte en semirredes del volumen homogéneo.
- En cada sector de superselección, hemos caracterizado formalmente los estados físicos aniquilados por el operador de ligadura mediante relaciones de recurrencia a partir de sus valores en la sección de volumen mínimo de cada semirred. El espacio de Hilbert físico se identifica entonces con el espacio de valores iniciales en dicha sección.

- También pueden estudiarse los estados físicos leyendo la ecuación de ligadura como una ecuación diferencial de segundo orden en el tiempo interno provisto por el modo homogéneo del campo escalar. Hemos adoptado para las soluciones un *ansatz* de tipo Born-Oppenheimer, que separa en dos factores la dependencia: en el fondo, por un lado, y en las inhomogeneidades, por el otro. Fijando un estado del fondo que evolucione como un estado de frecuencia positiva en el modelo homogéneo, y despreciando transiciones entre diferentes estados del fondo inducidas por la ligadura, se obtiene una ecuación para la función de onda de las inhomogeneidades. Bajo ciertas aproximaciones, esa ecuación se convierte en una de Schrödinger, con un hamiltoniano efectivo que depende del estado de fondo. Más aun, si se toma un estado del fondo con muy poca dispersión, puede interpretarse que la dinámica de las inhomogeneidades está regida por una teoría cuántica de campo sobre el espaciotiempo efectivo que emerge de la cuantización de lazos del modelo FLRW.
- El procedimiento anterior para construir un espacio de Hilbert cinemático, representar en él la ligadura hamiltoniana y caracterizar los estados que aniquila, puede realizarse de forma análoga en la parametrización en términos del invariante de Mukhanov-Sasaki. La nueva cuantización puede considerarse universal, ya que la ligadura en esta parametrización toma la misma forma en cualquier *gauge*.
- Como primera aproximación a la física de la cuantización híbrida del modelo FLRW perturbado, hemos estudiado, de forma analítica y, principalmente, numérica, la dinámica efectiva que cabe esperar para él. El resultado más notable concierne al comportamiento de las inhomogeneidades a través del rebote que sustituye la gran explosión. Un estudio estadístico sobre un gran número de trayectorias ha permitido demostrar que las perturbaciones sufren en promedio una amplificación, que decae en el límite ultravioleta y presenta una modulación con la frecuencia.
- En nuestro estudio numérico de la dinámica efectiva, hemos encontrado, además, un trasvase de energía entre el fondo y las inhomogeneidades en el régimen dominado por las correcciones cuánticas. Este intercambio tiene como efecto acelerar la expansión del universo con respecto al caso homogéneo.
- También hemos estudiado la dinámica efectiva esperable para la cuantización híbrida del modelo de Gowdy. En este modelo, las inhomoge-

neidades se propagan sobre un espaciotiempo de Bianchi I de fondo. por lo que podrían introducir singularidades. Dado que las inhomogeneidades no son perturbativas, podrían causar la aparición de singularidades en dicho fondo. Un análisis cuidadoso de las ecuaciones efectivas ha demostrado que ese no es el caso.

- Por último, se han determinado las regiones del espacio de fases en las que las ecuaciones efectivas del modelo de Gowdy permiten que se produzca un rebote en el volumen homogéneo. Si se produce, el rebote tiene lugar a un volumen mayor que en el sistema homogéneo.

Como se ha mencionado, el principal resultado de la tesis ha sido la cuantización híbrida completa del espaciotiempo FLRW con un campo escalar masivo y perturbaciones escalares. El modelo cuántico construido está listo para extraer de él predicciones físicas, lo que puede hacerse, por ejemplo, aplicando técnicas estándar de la cosmología teórica a la teoría de campo efectiva que obedecen, en un cierto régimen, las perturbaciones.

Apéndices

Apéndice A

Armónicos

Recordemos que un espaciotiempo globalmente hiperbólico puede foliarse en hipersuperficies espaciales homeomorfas a una cierta variedad Σ . La métrica espaciotemporal induce una métrica riemanniana en cada una de estas superficies. Bajo las hipótesis de homogeneidad e isotropía, las secciones espaciales son espacios de curvatura constante y sus métricas difieren a lo sumo en un factor global, lo que sugiere dotar a la variedad Σ de una métrica fiducial ${}^0h_{ab}$, que define una derivada covariante compatible ${}^0\nabla_a$. El operador de Laplace-Beltrami en Σ se define entonces como ${}^0h^{ab}{}^0\nabla_a{}^0\nabla_b$ y es autoadjunto en $L^2(\Sigma, \sqrt{{}^0h}d^3x)$ [108]. Por ende, sus autofunciones sirven de base para las funciones de dicho espacio, lo que utilizamos en la sección 2 para expandir las variables métricas. En este apéndice se ofrecen más detalles sobre las características de esta base y de las convenciones adoptadas en su definición. Primeramente, describiremos las autofunciones del operador de Laplace-Beltrami de forma general, sin especificar la variedad riemanniana de fondo. A continuación, particularizaremos a los casos que han recibido más atención en la memoria: el tres-toro y la tres-esfera.

A.1. Descripción genérica

A.1.1. Armónicos escalares

Los armónicos escalares satisfacen la ecuación de autovalores (2.1). Para ellos hemos escogido la normalización

$$\int_{\Sigma} d^3x \sqrt{{}^0h} \tilde{Q}_{nl}(x) \tilde{Q}_{n'l'}(x) = l_0^3 \delta_{nn'} \delta_{ll'}. \quad (\text{A.1})$$

Recordemos que l_0^3 es el volumen de Σ .

A.1.2. Armónicos vectoriales

Definimos los armónicos $(\tilde{S}_a)_n$ como las autofunciones vectoriales transversas de la ecuación

$${}^0h^{ab}{}^0\nabla_a{}^0\nabla_b(\tilde{S}_c)_{n,l} = -{}^V\omega_n^2(\tilde{S}_c)_{n,l}, \quad (\text{A.2})$$

donde los posibles autovalores $-{}^V\omega_n^2$ dependen de la variedad considerada. De nuevo, $\mathbf{n} = (n, l)$, y l es el índice de degeneración en el subespacio de armónicos de autovalor $-{}^V\omega_n^2$. La condición de transversalidad significa que ${}^0\nabla_a(\tilde{S}_n)^a = 0$. Normalizamos estos armónicos de forma que

$$\int_{\Sigma} d^3x \sqrt{{}^0h} (\tilde{S}_a)_{nl}(x) (\tilde{S}^a)_{n'l'}(x) = l_0^3 \delta_{nn'} \delta_{ll'} \quad (\text{A.3})$$

Por otro lado, mediante derivación covariante de los armónicos escalares, pueden definirse los campos vectoriales

$$(\tilde{P}_a)_n := \frac{1}{\omega_n^2} {}^0\nabla_a \tilde{Q}_n, \quad (\text{A.4})$$

que también son autofunciones del operador de Laplace-Beltrami:

$${}^0h^{ab}{}^0\nabla_a{}^0\nabla_b(\tilde{P}_c)_n = -(\omega_n^2 - 2k)(\tilde{P}_c)_n. \quad (\text{A.5})$$

A diferencia de los otros armónicos vectoriales, estos no son transversos, pues

$${}^0\nabla_a(\tilde{P}^a)_n = -\tilde{Q}_n. \quad (\text{A.6})$$

Su norma está determinada por la de los armónicos escalares:

$$\int_{\Sigma} d^3x \sqrt{{}^0h} (\tilde{P}_{nl})_a(x) (\tilde{P}_{n'l'})^a(x) = \frac{1}{\omega_n^2} l_0^3 \delta_{nn'} \delta_{ll'}. \quad (\text{A.7})$$

A.1.3. Armónicos tensoriales

Los armónicos $(\tilde{G}_{ab})_n$ son autofunciones tensoriales del operador de Laplace-Beltrami simétricas, transversas y sin traza. Satisfacen por tanto una ecuación de autovalores análoga a las ecuaciones (2.1) o (A.2). Denotaremos los correspondientes autovalores por $-{}^T\omega_n^2$. Por ser transversos, ${}^0\nabla_a(\tilde{G}^a_b)_n = 0$, y, además, su traza es nula, es decir, $(\tilde{G}^a_a)_n = 0$. Adoptamos para ellos una normalización semejante a la de los armónicos escalares o de los vectoriales transversos:

$$\int_{\Sigma} d^3x \sqrt{{}^0h} (\tilde{G}_{ab})_{nl}(x) (\tilde{G}^{ab})_{n'l'}(x) = l_0^3 \delta_{nn'} \delta_{ll'}. \quad (\text{A.8})$$

Pueden obtenerse otros armónicos tensoriales a partir de los armónicos escalares, bien multiplicándolos por la métrica, o bien tomando derivadas covariantes. Así, podemos definir

$$(\tilde{P}_{ab})_{\mathbf{n}} := \frac{1}{\omega_n^2} {}^0\nabla_a {}^0\nabla_b \tilde{Q}_{\mathbf{n}} + \frac{1}{3} {}^0h_{ab} \tilde{Q}_{\mathbf{n}}. \quad (\text{A.9})$$

Estos tensores también son autofunciones del operador de Laplace-Beltrami, con autovalor $-(\omega_n^2 - 6k)$. Su traza se anula, pero no son transversos, ya que

$${}^0\nabla_a (\tilde{P}^a_b)_{\mathbf{n}} = -\frac{2}{3} (\omega_n^2 - 3k) (\tilde{P}_b)_{\mathbf{n}}. \quad (\text{A.10})$$

Además,

$${}^0\nabla_a {}^0\nabla_b (\tilde{P}^{ab})_{\mathbf{n}} = \frac{2}{3} (\omega_n^2 - 3k) \tilde{Q}_{\mathbf{n}}. \quad (\text{A.11})$$

Es fácil comprobar que

$$\int_{\Sigma} d^3x \sqrt{{}^0h} (\tilde{P}_{ab})_{nl}(x) (\tilde{P}^{ab})_{n'l'}(x) = \frac{2}{3} l_0^3 \frac{\omega_n^2 - 3k}{\omega_n^2} \delta_{nn'} \delta_{ll'}. \quad (\text{A.12})$$

Por supuesto, también pueden construirse tensores simétricos derivando los armónicos vectoriales transversos:

$$(\tilde{S}_{ab})_{\mathbf{n}} := {}^0\nabla_a (\tilde{S}_b)_{\mathbf{n}} + {}^0\nabla_b (\tilde{S}_a)_{\mathbf{n}}. \quad (\text{A.13})$$

Estas cantidades también son autofunciones del operador de Laplace-Beltrami, con autovalor $-(\nabla \omega_n^2 - 4k)$. Además, es inmediato comprobar que su traza es nula. Requiere algo más de trabajo, aunque no demasiado, ver que

$${}^0\nabla_a (\tilde{S}^a_b)_{\mathbf{n}} = -\frac{2}{3} (\nabla \omega_n^2 - 2k) (\tilde{S}_b)_{\mathbf{n}}, \quad (\text{A.14})$$

$${}^0\nabla_a {}^0\nabla_b (\tilde{S}^{ab})_{\mathbf{n}} = 0. \quad (\text{A.15})$$

Por último,

$$\int_{\Sigma} d^3x \sqrt{{}^0h} (\tilde{S}_{ab})_{nl}(x) (\tilde{S}^{ab})_{n'l'}(x) = 2l_0^3 (\nabla \omega_n^2 - 2k) \delta_{nn'} \delta_{ll'}. \quad (\text{A.16})$$

A.2. Tres-toro

Eligiendo las coordenadas axiales $\{\theta, \sigma, \delta\}$, con recorrido $[0, l_0)$, el elemento de línea del tres-toro toma la forma cartesiana

$$ds^2 = d\theta^2 + d\sigma^2 + d\delta^2. \quad (\text{A.17})$$

Las autofunciones escalares del operador de Laplace-Beltrami asociado a esta métrica euclídea son simplemente exponenciales complejas,

$$Q_{\vec{n}}(\vec{x}) = e^{2\pi i \vec{n} \cdot \vec{x} / l_0}, \quad (\text{A.18})$$

donde $\vec{x} = (\theta, \sigma, \delta)$ y $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{Z}^3$. Los correspondientes autovalores pueden obtenerse sabiendo que $\omega_n = 2\pi \|\vec{n}\| / l_0$. No existe una fórmula cerrada para calcular la degeneración g_n de cada autovalor; no obstante, visualizando los vectores \vec{n} como los puntos de una red tridimensional de paso 1, es fácil constatar que el número de modos con $\omega_n \leq \omega$ crece asintóticamente como el volumen de la esfera de radio ω , es decir, como ω^3 (en concordancia con el resultado general). De esto se sigue que $g_n = O(\omega_n^2)$ en el régimen ultravioleta.

Puesto que hemos preferido usar armónicos reales, podemos tomar simplemente las partes real e imaginaria (convenientemente normalizadas) de las exponenciales:

$$\tilde{Q}_{\vec{n},+} = \sqrt{2} \cos\left(\frac{2\pi}{l_0} \vec{n} \cdot \vec{x}\right), \quad \tilde{Q}_{\vec{n},-} = \sqrt{2} \sin\left(\frac{2\pi}{l_0} \vec{n} \cdot \vec{x}\right). \quad (\text{A.19})$$

Como estas funciones combinan las autofunciones asociadas a \vec{n} y $-\vec{n}$, para evitar repeticiones es necesario imponer alguna restricción en las tuplas \vec{n} admisibles. Por ejemplo, pueden tomarse solo aquellas en las que la primera componente no nula es estrictamente mayor que cero.

La dependencia espacial de las autofunciones vectoriales y tensoriales es del mismo tipo y, en consecuencia, sus autovalores son iguales. Los armónicos vectoriales transversos $(\tilde{S}_a)_{\vec{n}}$ pueden construirse usando vectores de polarización ortogonales a \vec{n} . Dado que existen dos vectores independientes, hay cuatro grados de libertad vectoriales asociados a cada vector \vec{n} , el doble que en caso de las autofunciones escalares. Si los vectores de polarización se escogen ortogonales, es fácil combinarlos para obtener una matriz de polarización para los armónicos tensoriales simétricos, transversos y sin traza $(\tilde{G}_{ab})_{\vec{n}}$; existe además otra matriz independiente de este tipo. Así, también resultan cuatro grados de libertad tensoriales para cada \vec{n} .

A.3. Tres-esfera

Para la tres-esfera, elegimos las coordenadas hiperesféricas usuales, que denotaremos por $\{\chi, \theta, \sigma\}$, con $\chi, \theta \in [0, \pi)$ y $\sigma \in [0, 2\pi)$. La métrica está entonces dada por

$$ds^2 = \frac{l_0^2}{(2\pi^2)^{2/3}} [d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\sigma^2)]. \quad (\text{A.20})$$

Los armónicos hiperesféricos, autofunciones escalares del operador de Laplace-Beltrami, están etiquetados por tres enteros, n , ℓ y m , en los rangos $n > 0$, $\ell \in [0, n-1]$ y $m \in [-\ell, +\ell]$. La degeneración de cada autoespacio es por tanto $g_n = n^2$. La forma explícita de los armónicos escalares es [141, 142, 107]

$$\tilde{Q}_{n\ell m}(\chi, \theta, \sigma) = l_0^{3/2} 2^{\ell+1/2} \sqrt{\frac{(n-\ell)!(n+1)}{\pi(n+\ell+1)!}} \operatorname{sen}^\ell(\chi) C_{n-\ell}^{(\ell+1)}(\cos \chi) \tilde{Y}_{\ell m}(\theta, \sigma), \quad (\text{A.21})$$

donde $C_n^{(a)}$ son los polinomios de Gegenbauer e $\tilde{Y}_{\ell m}$ son los armónicos esféricos reales, normalizados a la unidad [143]. Los correspondientes autovalores dependen solo de n ; en concreto, $\omega_n^2 = n^2 - 1$.

Las autofunciones vectoriales transversas $(\tilde{S}_a)_n$ y tensoriales transversas y sin traza $(\tilde{G}_{ab})_n$ son menos conocidas, pero pueden encontrarse en la referencia [142]. Sus autovalores están dados por ${}^V\omega_n^2 = n^2 - 2$ y ${}^T\omega_n^2 = n^2 - 3$, con las restricciones $n \geq 2$ y $n \geq 3$, respectivamente. El conteo de grados de libertad es parecido al del caso plano: por cada grado de libertad escalar, hay dos estrictamente vectoriales y dos estrictamente tensoriales.

Apéndice B

Lagrangiano de las perturbaciones cosmológicas

La acción del modelo FLRW con un campo escalar mínimamente acoplado es la suma de la acción de Einstein-Hilbert, dada en la ecuación (1.4) y la del campo escalar, ecuación (2.3). Su expresión puede desarrollarse utilizando las expansiones en armónicos de la tres-métrica, la función lapso, el vector desplazamiento y el campo escalar dadas en las ecuaciones (2.2). Truncando a segundo orden en los coeficientes de la expansión, se obtiene la acción del modelo FLRW perturbado que se trata en el capítulo 2. Gracias a las propiedades de los armónicos (detalladas en el apéndice A), las integrales espaciales pueden evaluarse explícitamente; al hacerlo, los términos lineales en las perturbaciones se anulan y queda

$$S_{\text{EH}} + S_{\text{mat}} = \int_{\mathbb{R}} dt \left[L_0 + \epsilon^2 \sum_{\mathbf{n}} \left({}^{\text{E}}L_2^{\mathbf{n}} + {}^{\text{V}}L_2^{\mathbf{n}} + {}^{\text{T}}L_2^{\mathbf{n}} \right) \right] + O(\epsilon^3). \quad (\text{B.1})$$

Aquí, L_0 es el lagrangiano del modelo homogéneo e isótropo,

$$L_0 = \frac{1}{2} N_0 e^\alpha \left(-\dot{\alpha}^2 + \dot{\varphi}^2 - e^{2\alpha} \tilde{m}^2 \varphi^2 + k \right), \quad (\text{B.2a})$$

con $\tilde{m} = \sigma m$, mientras que los términos ${}^{\text{E}}L_2^{\mathbf{n}}$, ${}^{\text{V}}L_2^{\mathbf{n}}$ y ${}^{\text{T}}L_2^{\mathbf{n}}$ reúnen las contribuciones al lagrangiano cuadráticas en las perturbaciones escalares, vectoriales y tensoriales, respectivamente. Sus expresiones explícitas son

$$\begin{aligned}
{}^E L_2^{\mathbf{n}} = \frac{1}{2} N_0 e^\alpha \left\{ -\dot{a}_{\mathbf{n}}^2 + \frac{\omega_{\mathbf{n}}^2 - 3k}{\omega_{\mathbf{n}}^2} \dot{b}_{\mathbf{n}}^2 + \dot{f}_{\mathbf{n}}^2 - 2\dot{\alpha} \left(a_{\mathbf{n}} \dot{a}_{\mathbf{n}} - 4 \frac{\omega_{\mathbf{n}}^2 - 3k}{\omega_{\mathbf{n}}^2} b_{\mathbf{n}} \dot{b}_{\mathbf{n}} - g_{\mathbf{n}} \dot{a}_{\mathbf{n}} \right) \right. \\
+ 2\dot{\varphi} (3a_{\mathbf{n}} - g_{\mathbf{n}}) \dot{f}_{\mathbf{n}} - (\dot{\alpha}^2 - \dot{\varphi}^2) \left(\frac{3}{2} a_{\mathbf{n}}^2 - 6 \frac{\omega_{\mathbf{n}}^2 - 3k}{\omega_{\mathbf{n}}^2} b_{\mathbf{n}}^2 - (3a_{\mathbf{n}} - g_{\mathbf{n}}) g_{\mathbf{n}} \right) \\
- \frac{2}{3} \left(\dot{a}_{\mathbf{n}} + \frac{\omega_{\mathbf{n}}^2 - 3k}{\omega_{\mathbf{n}}^2} \dot{b}_{\mathbf{n}} \right) k_{\mathbf{n}} + \frac{2}{3} \dot{\alpha} g_{\mathbf{n}} k_{\mathbf{n}} - \frac{2}{N_0} \dot{\varphi} f_{\mathbf{n}} k_{\mathbf{n}} \\
+ \frac{1}{2} \left(\omega_{\mathbf{n}}^2 - \frac{3k}{2} \right) a_{\mathbf{n}}^2 + \frac{1}{3} \left[\omega_{\mathbf{n}}^2 - 6(3 - 2k) \right] \frac{\omega_{\mathbf{n}}^2 - 3k}{\omega_{\mathbf{n}}^2} b_{\mathbf{n}}^2 - \omega_{\mathbf{n}}^2 f_{\mathbf{n}}^2 \\
+ \frac{2}{3} (\omega_{\mathbf{n}}^2 - 3k) a_{\mathbf{n}} b_{\mathbf{n}} - e^{2\alpha} \tilde{m}^2 (f_{\mathbf{n}}^2 + 2\varphi(3a_{\mathbf{n}} + g_{\mathbf{n}}) f_{\mathbf{n}}) \\
- e^{2\alpha} \tilde{m}^2 \varphi^2 \left(\frac{3}{2} a_{\mathbf{n}}^2 - 6 \frac{\omega_{\mathbf{n}}^2 - 3k}{\omega_{\mathbf{n}}^2} b_{\mathbf{n}}^2 + 3a_{\mathbf{n}} g_{\mathbf{n}} \right) \\
\left. + \frac{2}{3} \left[\left(\omega_{\mathbf{n}}^2 + \frac{3k}{2} \right) a_{\mathbf{n}} + (\omega_{\mathbf{n}}^2 - 3k) b_{\mathbf{n}} \right] g_{\mathbf{n}} - \frac{k}{3\omega_{\mathbf{n}}^2} \frac{1}{N_0^2} k_{\mathbf{n}}^2 \right\}, \quad (\text{B.2b})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}^V L_2^{\mathbf{n}} = \frac{1}{2} N_0 e^\alpha (\omega_{\mathbf{n}}^2 - 2k) \left[\dot{c}_{\mathbf{n}}^2 + 8\dot{\alpha} c_{\mathbf{n}} \dot{c}_{\mathbf{n}} + 6(\dot{\alpha}^2 - \dot{\varphi}^2) c_{\mathbf{n}}^2 - 2l_{\mathbf{n}} \dot{c}_{\mathbf{n}} - 2(3 - 2k) c_{\mathbf{n}}^2 \right. \\
\left. + 6e^{2\alpha} \tilde{m}^2 \varphi^2 c_{\mathbf{n}}^2 + \frac{1}{N_0^2} l_{\mathbf{n}}^2 \right], \quad (\text{B.2c})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}^T L_2^{\mathbf{n}} = \frac{1}{2} N_0 e^\alpha \left\{ \dot{d}_{\mathbf{n}}^2 + 8\dot{\alpha} d_{\mathbf{n}} \dot{d}_{\mathbf{n}} + 6(\dot{\alpha}^2 - \dot{\varphi}^2) d_{\mathbf{n}}^2 - [\omega_{\mathbf{n}}^2 + 2(3 - k)] d_{\mathbf{n}}^2 \right. \\
\left. + 6e^{2\alpha} \tilde{m}^2 \varphi^2 d_{\mathbf{n}}^2 \right\}. \quad (\text{B.2d})
\end{aligned}$$

Como en el cuerpo de la memoria, el punto indica la derivada con respecto al tiempo conforme η , tal que $e^\alpha d\eta = N_0 dt$. La transformada de Legendre de este Lagrangiano proporciona el hamiltoniano (2.4).

Apéndice C

Fijación de *gauge* alternativa

En la sección 2, se introdujeron inhomogeneidades en un universo de FLRW añadiendo perturbaciones a las variables que describen ese modelo en la descomposición $3 + 1$. Como resultado de la perturbación de la función lapso y el vector desplazamiento, aparecen en el sistema ligaduras lineales en las variables inhomogéneas, que llamamos ${}^E H_{|1}^n$, ${}^E H_{-1}^n$ y ${}^V H_{-1}^n$. Estas ligaduras pueden eliminarse imponiendo condiciones de fijación de *gauge*, como se hizo en la sección 2.2, donde las perturbaciones vectoriales se fijaron a cero y se adoptó el llamado *gauge* longitudinal para las perturbaciones escalares. En este apéndice se presenta una fijación de *gauge* alternativa para las perturbaciones escalares. Aunque, como veremos, esta elección presenta algunas ventajas, tiene el inconveniente de no poder extenderse a la totalidad del espacio de fases. Además, encontramos que las ecuaciones dinámicas en este *gauge* son más inestables de cara a su integración numérica. Por estos motivos, se prefirió adoptar el *gauge* longitudinal en el cuerpo de la memoria.

C.1. Fijación de *gauge*. Escalado del campo

La nueva fijación de *gauge* está caracterizada por la anulación de los coeficientes a_n y b_n de la ecuación (2.2a). El tratamiento de las perturbaciones vectoriales y tensoriales es completamente análogo al de la sección 2.2. Por ello, supondremos que las perturbaciones vectoriales se han eliminado ya fijando la ligadura ${}^V H_{-1}^n$ e ignoraremos las tensoriales (si fuera preciso, estas pueden incorporarse fácilmente por estar desacopladas a orden dominante). Entonces, la curvatura de las secciones espaciales es constante en este *gauge*.

Las nuevas condiciones de fijación de *gauge* son de segunda clase (e independientes) con respecto a las ligaduras ${}^E H_{|1}^n$ y ${}^E H_{-1}^n$, salvo en la sección del

espacio de fases donde $\pi_\alpha = 0$, ya que

$$\epsilon^4 \det \begin{pmatrix} \{a_n, {}^E H_{|1}^n\} & \{b_n, {}^E H_{|1}^n\} \\ \{a_n, {}^E H_{-1}^n\} & \{b_n, {}^E H_{-1}^n\} \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} e^{-4\alpha} \pi_\alpha. \quad (\text{C.1})$$

Por consiguiente, la reducción puede realizarse fuera de esa región.

Las ligaduras secundarias que surgen de imponer la consistencia dinámica de las condiciones de fijación de *gauge* son

$$0 = \epsilon \{a_n, H\} \approx -N_0 e^{-3\alpha} (\pi_{a_n} + \pi_\alpha g_n) - \frac{1}{3} e^{-\alpha} k_n + O(\epsilon), \quad (\text{C.2})$$

y la propia ecuación (2.8b). Estas restricciones adicionales permiten fijar el valor de los multiplicadores de Lagrange g_n y k_n en función de las variables homogéneas y los momentos asociados a las variables fijadas, π_{a_n} y π_{b_n} . Estos, sobre la superficie de fijación de *gauge*, toman los valores

$$\pi_{a_n} \approx \frac{1}{\pi_\alpha} (\pi_\varphi \pi_{f_n} + e^{6\alpha} \tilde{m}^2 \varphi f_n), \quad (\text{C.3a})$$

$$\pi_{b_n} \approx \frac{1}{\pi_\alpha} [\pi_\varphi \pi_{f_n} + (e^{6\alpha} \tilde{m}^2 \varphi - 3\pi_\alpha \pi_\varphi) f_n], \quad (\text{C.3b})$$

lo que permite escribir la ligadura hamiltoniana en términos de las variables homogéneas, la perturbación del campo escalar y su momento. Hay que notar que estas variables, a diferencia de lo que ocurría en el *gauge* longitudinal, son también canónicas con respecto a la estructura simpléctica reducida.

La única ligadura que queda en el sistema es, pues,

$$H = N_0 \left(H_{|0} + \epsilon^2 \sum_n {}^E H_{|2}^n \right) + O(\epsilon^3), \quad (\text{C.4})$$

donde $H_{|0}$ está dado por la ecuación (2.5a), mientras que el término cuadrático en las ligaduras escalares puede escribirse de forma análoga a la adoptada en la ecuación (2.16), con coeficientes

$${}^E E_{\pi\pi}^n = e^{-2\alpha} \left(1 + \frac{3k}{\omega_n^2 - 3k} \frac{\pi_\varphi^2}{\pi_\alpha^2} \right), \quad (\text{C.5a})$$

$${}^E E_{q\pi}^n = -3e^{-2\alpha} \frac{\pi_\varphi}{\pi_\alpha} \left(\pi_\varphi - \frac{k}{\omega_n^2 - 3k} \frac{1}{\pi_\alpha} (e^{6\alpha} \tilde{m}^2 \tilde{\varphi} - 3\pi_\alpha \pi_\varphi) \right), \quad (\text{C.5b})$$

$$\begin{aligned} {}^E E_{qq}^n &= \omega_n^2 e^{2\alpha} + \tilde{m}^2 e^{4\alpha} - 3e^{-2\alpha} \frac{\pi_\varphi}{\pi_\alpha} (2e^{6\alpha} m^2 \varphi - 3\pi_\alpha \pi_\varphi) \\ &\quad + \frac{3k}{\omega_n^2 - 3k} \frac{e^{-2\alpha}}{\pi_\alpha^2} (e^{6\alpha} \tilde{m}^2 \varphi - 3\pi_\alpha \pi_\varphi)^2. \end{aligned} \quad (\text{C.5c})$$

Cabe destacar que los términos subdominantes en el ultravioleta (del orden de ω_n^{-2} o superior) se anulan si las secciones espaciales son planas ($k = 0$). Esto está estrechamente relacionado con el hecho de que en este *gauge* la perturbación del campo material, escalada con el factor de escala de la geometría de fondo, coincide con la variable de Mukhanov-Sasaki tal y como aparece definida en la ecuación (2.33). Esto sugiere implementar ese escalado como una transformación canónica en el espacio de fases, lo que puede hacerse cambiando a las variables

$$\bar{\alpha} := \alpha - \frac{\epsilon^2}{2} \left(3 \frac{\pi_\varphi^2}{\pi_\alpha^2} - 1 \right) \sum_{\mathbf{n}} f_{\mathbf{n}}^2, \quad (\text{C.6a})$$

$$\pi_{\bar{\alpha}} := \pi_\alpha - \epsilon^2 \sum_{\mathbf{n}} \left[f_{\mathbf{n}} \pi_{f_{\mathbf{n}}} - \left(3 \frac{\pi_\varphi^2}{\pi_\alpha} + \pi_\alpha \right) f_{\mathbf{n}}^2 \right], \quad (\text{C.6b})$$

$$\bar{\varphi} := \varphi + 3\epsilon^2 \frac{\pi_\varphi}{\pi_\alpha} \sum_{\mathbf{n}} f_{\mathbf{n}}^2, \quad (\text{C.6c})$$

$$\pi_{\bar{\varphi}} := \pi_\varphi, \quad (\text{C.6d})$$

$$\bar{f}_{\mathbf{n}} := e^\alpha f_{\mathbf{n}}, \quad (\text{C.6e})$$

$$\pi_{\bar{f}_{\mathbf{n}}} := e^{-\alpha} \left[\pi_{f_{\mathbf{n}}} - \left(3 \frac{\pi_\varphi^2}{\pi_\alpha} + \pi_\alpha \right) f_{\mathbf{n}} \right], \quad (\text{C.6f})$$

que son canónicas hasta el orden de truncación en el que trabajamos. Mientras que el término homogéneo de la ligadura se escribe igual en las variables con raya que en las originales, los coeficientes del término cuadrático cambian con la transformación, convirtiéndose en

$$\mathbb{E} \bar{E}_{\pi\pi}^n = 1 + \frac{3k}{\omega_n^2 - 3k} \frac{\pi_{\bar{\varphi}}^2}{\pi_{\bar{\alpha}}^2}, \quad (\text{C.7a})$$

$$\mathbb{E} \bar{E}_{q\pi}^n = \frac{3k}{\omega_n^2 - 3k} e^{-2\bar{\alpha}} \frac{\pi_{\bar{\varphi}}}{\pi_{\bar{\alpha}}} \left(3 \frac{\pi_{\bar{\varphi}}^3}{\pi_{\bar{\alpha}}} + e^{6\bar{\alpha}} \tilde{m}^2 \bar{\varphi} - 2\pi_{\bar{\alpha}} \pi_{\bar{\varphi}} \right), \quad (\text{C.7b})$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \bar{E}_{qq}^n &= \omega_n^2 + \tilde{m}^2 e^{2\bar{\alpha}} + \frac{1}{2} e^{-4\bar{\alpha}} \left(-\pi_{\bar{\alpha}}^2 + 30\pi_{\bar{\varphi}}^2 - 3e^{-6\bar{\alpha}} \tilde{m}^2 \bar{\varphi}^2 + k e^{4\bar{\alpha}} \right) \\ &\quad - 12e^{2\bar{\alpha}} \tilde{m}^2 \bar{\varphi} \frac{\pi_{\bar{\varphi}}}{\pi_{\bar{\alpha}}} + \frac{3}{2} e^{-4\bar{\alpha}} \frac{\pi_{\bar{\varphi}}^2}{\pi_{\bar{\alpha}}} \left(-9\pi_{\bar{\varphi}}^2 + 3e^{6\bar{\alpha}} \tilde{m}^2 \bar{\varphi}^2 - k e^{4\bar{\alpha}} \right) \\ &\quad + \frac{3k}{\omega_n^2 - 3k} \frac{e^{-4\bar{\alpha}}}{\pi_{\bar{\alpha}}^2} \left(3 \frac{\pi_{\bar{\varphi}}^3}{\pi_{\bar{\alpha}}} + e^{6\bar{\alpha}} \tilde{m}^2 \bar{\varphi} - 2\pi_{\bar{\alpha}} \pi_{\bar{\varphi}} \right)^2. \end{aligned} \quad (\text{C.7c})$$

Estas funciones y sus derivadas temporales se combinan en la ecuación dinámica de $\bar{f}_{\mathbf{n}}$, que es formalmente idéntica a la ecuación (2.27), aunque las

expresiones concretas de los coeficientes son distintas. En el caso plano, esta ecuación es de tipo Klein-Gordon con una masa dependiente de las variables homogéneas y, por supuesto, coincide hasta el orden perturbativo de interés con la de Mukhanov-Sasaki (2.45), como puede comprobarse utilizando las ecuaciones dinámicas del fondo e imponiendo la ligadura¹. Incluso si $k \neq 0$, la ecuación dinámica puede interpretarse como una ecuación de tipo Klein-Gordon con masa dependiente del fondo y términos correctivos que decaen al menos como ω_n^2 en el ultravioleta (es decir, cuando $\omega_n \rightarrow \infty$); es decir, una ecuación de la forma (2.28). Además, el momento $\pi_{\bar{f}_n}$ coincide con la derivada de \bar{f}_n respecto al tiempo conforme salvo por términos subdominantes en el ultravioleta, como en la ecuación (2.26); de hecho, dichas contribuciones se anulan si las secciones espaciales son planas. Por tanto, con independencia de la curvatura espacial, esta parametrización del campo admite una única familia de representaciones de Fock equivalentes sobre el fondo clásico que respetan la simetría de las secciones espaciales y en las que la dinámica del campo es unitariamente implementable, de acuerdo con la discusión del capítulo 3.

Para terminar esta sección, a continuación se escriben las expresiones de la tres-métrica de las secciones espaciales, la función lapso, el vector desplazamiento y el campo escalar en términos de las nuevas variables con raya, hasta primer orden perturbativo (e ignorando, como hasta ahora, las perturbaciones tensoriales):

$$h_{ij} \approx (\sigma e^{\bar{\alpha}})^{2_0} h_{ab} + O(\epsilon^2), \quad (\text{C.8a})$$

$$N \approx \sigma N_0 \left\{ 1 + \epsilon \frac{e^{\bar{\alpha}}}{\pi_{\bar{\alpha}}^2} \sum_{\mathbf{n}} \frac{3k}{\omega_n^2 - 3k} \left[\pi_{\bar{\varphi}} \pi_{\bar{f}_n} + e^{-2\bar{\alpha}} \left(3 \frac{\pi_{\bar{\varphi}}^3}{\pi_{\bar{\alpha}}} + e^{6\bar{\alpha}} \tilde{m}^2 \varphi + \pi_{\bar{\alpha}} \pi_{\bar{\varphi}} \right) \bar{f}_n \right] \tilde{Q}_n \right\} - 3\epsilon\sigma N_0 e^{-\bar{\alpha}} \frac{\pi_{\bar{\varphi}}}{\pi_{\bar{\alpha}}} \sum_{\mathbf{n}} \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2 - 3k} \bar{f}_n \tilde{Q}_n + O(\epsilon^2), \quad (\text{C.8b})$$

$$N_a \approx -3\epsilon\sigma^2 \frac{N_0}{\pi_{\bar{\alpha}}} \sum_{\mathbf{n}} \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2 - 3k} \left[\pi_{\bar{\varphi}} \pi_{\bar{f}_n} + e^{-2\bar{\alpha}} \left(3 \frac{\pi_{\bar{\varphi}}^3}{\pi_{\bar{\alpha}}} + e^{6\bar{\alpha}} \tilde{m}^2 \bar{\varphi} - 2\pi_{\bar{\alpha}} \pi_{\bar{\varphi}} \right) \bar{f}_n \right] (\tilde{P}_a)_n + O(\epsilon^2), \quad (\text{C.8c})$$

$$\Phi = \frac{1}{l_0^{3/2} \sigma} \left(\bar{\varphi} + \epsilon e^{-\bar{\alpha}} \sum_{\mathbf{n}} \bar{f}_n \tilde{Q}_n \right) + O(\epsilon^2). \quad (\text{C.8d})$$

¹De hecho, si $k = 0$, puede verse que, sobre la superficie de ligadura (y hasta el orden perturbativo considerado), el coeficiente ${}^E \bar{E}_{\pi\pi}^n$ coincide con el dado en la ecuación (2.44c), que también rige la dinámica del invariante de Mukhanov-Sasaki, pero que fue obtenido en el *gauge* longitudinal. Volveremos sobre este hecho, por otra parte nada sorprendente, en la sección C.3.

En particular, la tres-métrica coincide con la métrica fiducial, característica propia de este *gauge*.

C.2. Invariante de densidad de energía

El par canónico de invariantes *gauge* (Ψ_n, π_{Ψ_n}) , que fue introducido en las ecuaciones (2.47), también adopta en este *gauge* expresiones de la forma (2.48), con la particularidad de que la función χ se ve sustituida por

$$\tilde{\chi} = \frac{e^{-2\bar{\alpha}}}{\pi_{\bar{\varphi}}} \left(3 \frac{\pi_{\bar{\varphi}}^3}{\pi_{\bar{\alpha}}} + e^{6\bar{\alpha}} \tilde{m}^2 \bar{\varphi} - 2\pi_{\bar{\alpha}} \pi_{\bar{\varphi}} \right). \quad (\text{C.9})$$

La transformación que relaciona los pares (Ψ_n, π_{Ψ_n}) y $(\bar{f}_n, \pi_{\bar{f}_n})$ es canónica en el sector inhomogéneo. Además, si parametrizamos el campo en términos de estos invariantes *gauge* y adoptamos una representación de Fock, para la teoría de campo sobre el fondo descrito clásicamente, con un vacío invariante bajo las isometrías espaciales y con dinámica unitariamente implementable, dicha transformación canónica resulta ser implementable mediante un operador unitario en la teoría cuántica. Esto puede demostrarse como se hizo en la sección 3.2.3 para el *gauge* longitudinal; de hecho, definiendo variables de destrucción y creación análogamente, los coeficientes beta de la correspondiente transformación de Bogoliubov tienen la misma expresión que allí, dada en la ecuación (3.33), excepto que la función χ se ve sustituida por su homóloga $\tilde{\chi}$.

C.3. Cuantización híbrida. Operador ligadura

La cuantización híbrida del modelo en la parametrización introducida en la sección C.1 se acomete, para el caso plano, en la sección 4.5. Aunque en ella se adopta el *gauge* longitudinal, como los modos escalados del campo material coinciden en este otro *gauge* con el invariante de Mukhanov-Sasaki, la expresión de la ligadura hamiltoniana es formalmente idéntica hasta el orden perturbativo considerado si se utiliza el término homogéneo de la ligadura para simplificar su parte cuadrática. Por tanto, la cuantización descrita en la sección 4.5 se adapta también a este *gauge*, con tal de identificar las variables homogéneas de forma adecuada. Bastaría, entonces, con abordar aquí el caso de secciones espaciales con curvatura positiva. En vez de eso, a continuación se ofrece una exposición genérica en función del parámetro k , porque, para facilitar la comparación con las representaciones propuestas

en los primeros artículos sobre estos temas [144, 145], se sigue un procedimiento ligeramente diferente. Concretamente, cuantizaremos directamente la expresión clásica de la ligadura determinada por los coeficientes (C.7), en vez de sus expresiones simplificadas sobre la superficie de ligadura. Debido a ello, obtendremos una representación cuántica que no coincide exactamente con la de la sección 4.5 al hacer $k = 0$.

Las variables p , c , ϕ y π_ϕ , que sirven de partida para la cuantización del sector homogéneo, se introducen formalmente como en las ecuaciones (4.1), (4.2), pero entendiendo que las variables con barra son ahora las adoptadas para el nuevo *gauge* con la transformación (C.6). Estas variables —o, en el caso de c , sus exponenciales $N_{\bar{\mu}}$ — se representan en el espacio $\mathcal{H}_{\text{cin}}^{\text{mat}} \otimes \mathcal{H}_{\text{cin}}^{\text{gra}}$ como en la sección 1.2.2. En cuanto a las inhomogeneidades, adoptaremos para ellas la representación de Fock del caso sin masa, $\mathcal{F}_{\bar{f}}$, caracterizada por las variables de destrucción y creación (3.4), entendiendo, como anteriormente con las variables homogéneas, que \bar{f}_n y $\pi_{\bar{f}_n}$ son las dadas por las ecuaciones (C.6).

La ligadura hamiltoniana se ha de representar en el espacio de Hilbert cinemático $\mathcal{H}_{\text{cin}}^{\text{mat}} \otimes \mathcal{H}_{\text{cin}}^{\text{gra}} \otimes \mathcal{F}_{\bar{f}}$ siguiendo las directrices detalladas en la sección 4. El operador resultante puede densitizarse como en la ecuación (4.9) y, naturalmente, tiene la misma estructura perturbativa. Su término homogéneo se regulariza, identificándolo con la ligadura del modelo sin perturbar. Siguiendo la prescripción MMO, el resultado es

$$\hat{\mathcal{C}}_0 = \begin{cases} -\frac{6}{\gamma^2} \hat{\Omega}_0^2 + \hat{\mathcal{C}}_0^{\text{mat}}, & k = 0; \\ -\frac{6}{\gamma^2} [\hat{\Omega}_+^2 + (1 + \gamma^2) l_0^2 \hat{V}^{4/3} - \frac{1}{\Delta} \hat{V}^2 \text{sen}^2(\hat{\mu} l_0)] + \hat{\mathcal{C}}_0^{\text{mat}}, & k = 1, \end{cases} \quad (\text{C.10})$$

con $\hat{\mathcal{C}}_0^{\text{mat}} = \kappa(\hat{\pi}_\phi^2 + m^2 \hat{V}^2 \hat{\phi}^2)$. En cuanto a los términos cuadráticos en las perturbaciones, guiándose por el algoritmo detallado en la sección (4), se obtiene un operador de la forma

$$\hat{\mathcal{C}}_2^n = \frac{\kappa}{\tilde{\omega}_n} \left(\frac{1}{V} \right)^{-1/2} \left[(2\tilde{\omega}_n^2 + \hat{F}_n^-) \hat{N}_{\bar{f}_n} + \frac{1}{2} \left(\hat{F}_n^+ \hat{X}_{\bar{f}_n}^+ + \frac{i\kappa \tilde{\omega}_n}{2(\tilde{\omega}_n^2 - 3kl_0^2)} \hat{G} \hat{X}_{\bar{f}_n}^- \right) \right] \left(\frac{1}{V} \right)^{-1/2}; \quad (\text{C.11})$$

como allí, $\tilde{\omega}_n = l_0 \omega_n$, $\hat{N}_{\bar{f}_n} = \hat{a}_{\bar{f}_n}^\dagger \hat{a}_{\bar{f}_n}$ y $\hat{X}_{\bar{f}_n}^\pm = (\hat{a}_{\bar{f}_n}^\dagger)^2 \pm (\hat{a}_{\bar{f}_n})^2$, mientras que, ahora,

$$\hat{G} = \frac{kl_0^2}{2} \left(\frac{1}{V} \right)^{5/6} \left(-\gamma^3 \kappa |\hat{\Omega}_k|^{-2} \hat{\Lambda}_k |\hat{\Omega}_k|^{-2} \hat{\pi}_\phi^4 + \gamma^2 m^2 \hat{V} \hat{\Omega}_k^{-2} \hat{V} [\hat{\phi}, \hat{\pi}_\phi^3]_+ \right. \\ \left. + 4\gamma |\hat{\Omega}_k|^{-1} \hat{\Lambda}_k |\hat{\Omega}_k|^{-1} \hat{\pi}_\phi^2 \right) \left(\frac{1}{V} \right)^{5/6}, \quad (\text{C.12a})$$

$$\begin{aligned}
 \hat{F}_{\pm}^n &= m^2 \hat{V}^{1/3} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{V} \right)^{5/6} \left(-\frac{2}{\gamma^2} \hat{\Omega}_k^2 + \kappa (10 \hat{\pi}_{\phi}^2 - m^2 \hat{V}^2 \hat{\phi}^2) + 2kl_0^2 \hat{V}^{4/3} \right) \left(\frac{1}{V} \right)^{5/6} \\
 &\quad + \gamma \kappa m^2 \hat{V}^{1/6} |\hat{\Omega}_k|^{-1} \hat{\Lambda}_k |\hat{\Omega}_k|^{-1} \hat{V}^{1/6} [\hat{\phi}, \hat{\pi}_{\phi}]_+ \\
 &\quad - \frac{1}{32} \gamma^2 \kappa^2 \left(\frac{1}{V} \right)^{5/6} \left[4\kappa \hat{\Omega}_k^{-2} \hat{\pi}_{\phi}^4 - \kappa m^2 |\hat{V}|^{1/3} \hat{\Omega}_k^{-2} |\hat{V}|^{1/3} [\hat{\phi}, \hat{\pi}_{\phi}]_+^2 \right. \\
 &\quad \quad \left. + 4kl_0^2 \hat{V}^{2/3} \hat{\Omega}_k^{-2} \hat{V}^{2/3} \hat{\pi}_{\phi}^2 \right] \left(\frac{1}{V} \right)^{5/6} \\
 &\quad + \frac{kl_0^2 \kappa}{8(\tilde{\omega}_n^2 - 3kl_0^2)} \left(\frac{1}{V} \right)^{3/2} \left(\gamma^2 \kappa \hat{\Omega}_k^{-2} \hat{\pi}_{\phi}^3 - 2\gamma m^2 \hat{V} |\hat{\Omega}_k|^{-1} \hat{\Lambda}_k |\hat{\Omega}_k|^{-1} |\hat{V} \hat{\phi} \right. \\
 &\quad \quad \left. - 4\hat{\pi}_{\phi}^2 \right)^2 \left(\frac{1}{V} \right)^{3/2} \\
 &\quad \mp \frac{kl_0^2 \gamma^2 \kappa}{2} \frac{\tilde{\omega}_n^2}{\tilde{\omega}_n^2 - 3kl_0^2} \left(\frac{1}{V} \right)^{1/6} \hat{\Omega}_k^{-2} \left(\frac{1}{V} \right)^{1/6} \hat{\pi}_{\phi}^2, \tag{C.12b}
 \end{aligned}$$

Haciendo $k = 0$ en las anteriores expresiones, se recupera una ligadura cuadrática con la estructura (4.38), aunque \hat{F}_{\pm}^n no se reduce a la forma (4.39). Como anticipamos, no obstante, la diferencia se anula clásicamente en la superficie de ligadura, pero, debido a la regularización, existe una discrepancia en la representación cuántica.

Publicaciones

El trabajo recogido en esta memoria ha dado lugar a diez publicaciones y una más que espera su próxima publicación:

- J. Olmedo, M. Fernández-Méndez y G. A. Mena Marugán, *Inflation and Inhomogeneities: A Hybrid Quantization*, J. Phys. Conf. Ser. **360**, 012033 (2012).
- M. Fernández-Méndez, G. A. Mena Marugán, J. Olmedo y J. M. Velhinho, *Unique Fock Quantization of Scalar Cosmological Perturbations*, Phys. Rev. D **85**, 103525 (2012).
- M. Fernández-Méndez, G. A. Mena Marugán y J. Olmedo, *Hybrid Quantization of an Inflationary Universe*, Phys. Rev. D **86**, 024003 (2012).
- J. Olmedo, M. Fernández-Méndez y G. A. Mena Marugán, *A Complete Hybrid Quantization in Inhomogeneous Cosmology*, AIP Conf. Proc. **1458**, 507 (2012).
- M. Fernández-Méndez, G. A. Mena Marugán y J. Olmedo, *Hybrid Quantization of an Inflationary Model: The Flat Case*, Phys. Rev. D **88**, 044013 (2013).
- P. Tarrío, M. Fernández-Méndez y G. A. Mena Marugán, *Singularity Avoidance in the Hybrid Quantization of the Gowdy Model*, Phys. Rev. D **88**, 084050 (2013).
- M. Fernández-Méndez, G. A. Mena Marugán y J. Olmedo, *Complete Quantization of Scalar Cosmological Perturbations*, Springer Proc. Math. Stat. **60**, 261 (2014).
- M. Fernández-Méndez, G. A. Mena Marugán y J. Olmedo, *Effective Dynamics of Scalar Perturbations in a Flat Friedmann-Robertson-Walker Spacetime in Loop Quantum Cosmology*, Phys. Rev. D **89**, 044041 (2014).

- M. Fernández-Méndez, J. Olmedo y G. A. Mena Marugán, *Loop Quantum Cosmological Perturbations*, J. Phys. Conf. Ser. **490**, 012152 (2014).
- L. Castelló Gomar, M. Fernández-Méndez, G. A. Mena Marugán y J. Olmedo, *Cosmological Perturbations in Hybrid Loop Quantum Cosmology: Mukhanov-Sasaki Variables*, Phys. Rev. D **90**, 064015 (2014).
- M. Fernández-Méndez, G. A. Mena Marugán y J. Olmedo, *Hybrid Quantization of an Inhomogeneous Inflationary Scenario*, Proc. of the Thirteenth Marcel Grossman Meeting on General Relativity (en imprenta).

Bibliography

- [1] C. W. Misner, K. S. Thorne y J. A. Wheeler, *Gravitation* (W. H. Freeman and Company, Nueva York, EE. UU., 1973).
- [2] R. M. Wald, *General Relativity* (University of Chicago Press, Chicago, EE. UU., 1984).
- [3] C. M. Mill, *The Confrontation between General Relativity and Experiment*, Living. Rev. Relativity **17**, 4 (2014).
- [4] S. W. Hawking y G. F. R. Ellis, *The Large Scale Structure of Space-Time* (Cambridge University Press, Cambridge, Reino Unido, 1973).
- [5] C. Rovelli, *Quantum Gravity* (Cambridge University Press, Cambridge, Reino Unido, 2004).
- [6] T. Thiemann, *Modern Canonical Quantum General Relativity* (Cambridge University Press, Cambridge, Reino Unido, 2007).
- [7] K. Giesel y H. Sahlmann, *From Classical To Quantum Gravity: Introduction to Loop Quantum Gravity*, Proc. Sci. **QGQS**, 02 (2011).
- [8] P. A. M. Dirac, *Lectures on Quantum Mechanics* (Belfer Graduate School of Science, Yeshiva University, Nueva York, EE. UU., 1964).
- [9] A. Ashtekar y R. S. Tate, *An Algebraic Extension of Dirac Quantization: Examples*, J. Math. Phys. **35**, 6434 (1994).
- [10] J. Lewandowski, A. Okołów, H. Sahlmann y T. Thiemann, *Uniqueness of Diffeomorphism Invariant States on Holonomy–Flux Algebras*, Commun. Math. Phys. **267**, 703 (2006).
- [11] A. Ashtekar, *New Variables for Classical and Quantum Gravity*, Phys. Rev. Lett. **57**, 2244 (1986).

-
- [12] J. F. Barbero G., *Real Ashtekar Variables for Lorentzian Signature Space-Times*, Phys. Rev. D **51**, 5507 (1995).
- [13] M. Bojowald, *Loop Quantum Cosmology: I. Kinematics*, Class. Quantum Grav. **17**, 1489 (2000).
- [14] M. Bojowald, *Loop Quantum Cosmology: II. Volume Operators*, Class. Quantum Grav. **17**, 1509 (2000).
- [15] M. Bojowald, *Loop Quantum Cosmology: III. Wheeler-DeWitt Operators*, Class. Quantum Grav. **18**, 1055 (2001).
- [16] M. Bojowald, *Loop Quantum Cosmology*, Living. Rev. Relativity **11**, 4 (2008).
- [17] A. Ashtekar y P. Singh, *Loop Quantum Cosmology: A Status Report*, Class. Quantum Grav. **28**, 213001 (2011).
- [18] K. Banerjee, G. Calcagni y M. Martín-Benito, *Introduction to Loop Quantum Cosmology*, SIGMA **8**, 016 (2012).
- [19] D. W. Hogg, D. J. Eisenstein, M. R. Blanton, N. A. Bahcall, J. Brinkmann, J. E. Gunn y D. P. Schneider, *Cosmic Homogeneity Demonstrated with Luminous Red Galaxies*, Astrophys. J. **624**, 54 (2005).
- [20] A. Ashtekar, T. Pawłowski y P. Singh, *Quantum Nature of the Big Bang*, Phys. Rev. Lett. **96**, 141301 (2006).
- [21] A. Ashtekar, T. Pawłowski y P. Singh, *Quantum Nature of The Big Bang: An Analytical and Numerical Investigation*, Phys. Rev. D **73**, 124038 (2006).
- [22] A. Ashtekar, T. Pawłowski y P. Singh, *Quantum Nature of The Big Bang: Improved Dynamics*, Phys. Rev. D **74**, 084003 (2006).
- [23] J. L. Willis, *On the Low-Energy Ramifications and a Mathematical Extension of Loop Quantum Gravity*, tesis doctoral, The Pennsylvania State University (2004).
- [24] V. Taveras, *Corrections to the Friedmann Equations from Loop Quantum Gravity for a Universe with a Free Scalar Field*, Phys. Rev. D **78**, 064072 (2008).

- [25] M. Bojowald y A. Skirzewski, *Effective Equations of Motion for Quantum Systems*, Rev. Math. Phys. **18**, 713 (2006).
- [26] M. Bojowald, B. Sandhoefer, A. Skirzewski y A. Tsobanjan, *Effective Constraints for Quantum Systems*, Rev. Math. Phys. **21**, 111 (2009).
- [27] A. Liddle, *An Introduction to Modern Cosmology* (John Wiley & Sons, Nueva York, EE.UU., 2003).
- [28] P. A. R. Ade *et al.* (Planck Collaboration), *Planck 2013 Results. I. Overview of Products and Scientific results*, A&A (2014).
- [29] A. R. Liddle y D. H. Lyth, *Cosmological Inflation and Large-Scale Structure* (Cambridge University Press, Cambridge, Reino Unido, 2000).
- [30] A. A. Starobinskii, *Spectrum of Relict Gravitational Radiation and the Early State of the Universe*, JETP Lett. **30**, 682 (1979).
- [31] A. H. Guth, *Inflationary Universe: A Possible Solution to the Horizon and Flatness Problems*, Phys. Rev. D **23**, 347 (1981).
- [32] K. Sato, *Cosmological Baryon-Number Domain Structure and the First Order Phase Transition of a Vacuum*, Phys. Lett. B **99**, 66 (1981).
- [33] D. Kazanas, *Dynamics of the Universe and Spontaneous Symmetry Breaking*, Astrophys. J. **241**, L59 (1980).
- [34] E. W. Kolb y M. S. Turner, *The Early Universe* (Addison-Wesley, Nueva York, EE. UU., 1990).
- [35] A. Ashtekar y D. Sloan, *Loop Quantum Cosmology and Slow Roll Inflation*, Phys. Lett. B **694**, 108 (2010).
- [36] G. Calcagni, *Observational Effects from Quantum Cosmology*, Ann. Phys. (Berlin) **525**, 323 (2013).
- [37] A. Barrau, T. Cailleteau, J. Grain y J. Mielczarek, *Observational Issues in Loop Quantum Cosmology*, Class. Quantum Grav. **31**, 053001 (2014).
- [38] M. Martín-Benito, L. J. Garay y G. A. Mena Marugán, *Hybrid Quantum Gowdy Cosmology: Combining Loop and Fock Quantizations*, Phys. Rev. D **78**, 083516 (2008).

- [39] R. M. Wald, *Quantum Field Theory in Curved Spacetime and Black Hole Thermodynamics* (University of Chicago Press, Chicago, EE.UU., 1994).
- [40] G. A. Mena Marugán y M. Martín-Benito, *Hybrid Quantum Cosmology: Combining Loop and Fock Quantizations*, Int. J. Mod. Phys. **A24**, 2820 (2009).
- [41] L. J. Garay, M. Martín-Benito y G. A. Mena Marugán, *Inhomogeneous Loop Quantum Cosmology: Hybrid Quantization of the Gowdy Model*, Phys. Rev. D **82**, 044048 (2010).
- [42] M. Martín-Benito, G. A. Mena Marugán y E. Wilson-Ewing, *Hybrid Quantization: From Bianchi I to the Gowdy Model*, Phys. Rev. D **82**, 084012 (2010).
- [43] R. H. Gowdy, *Gravitational Waves in Closed Universes*, Phys. Rev. Lett. **27**, 826 (1971).
- [44] R. H. Gowdy, *Vacuum Spacetimes with Two-Parameter and Compact Topologies Invariant Spacelike Isometry Groups Hypersurfaces: Topologies and Boundary Conditions*, Ann. Phys. (Nueva York) **83**, 203 (1974).
- [45] R. H. Gowdy, *Of Gravitational Waves and Spherical Chickens*, Einstein Online **03**, 1008 (2007).
- [46] H. Stephani, D. Kramer, M. MacCallum y E. Herlt, *Exact Solutions of Einstein's Field Equations*, 2^a. ed. (Cambridge University Press, Cambridge, Reino Unido, 1980).
- [47] M. Bojowald, *Homogeneous Loop Quantum Cosmology*, Class. Quantum Grav. **20**, 2595 (2003).
- [48] D. W. Chiou, *Effective Dynamics, Big Bounces, and Scaling Symmetry in Bianchi Type I Loop Quantum Cosmology*, Phys. Rev. D **76**, 124037 (2007).
- [49] M. Martín-Benito, G. A. Mena Marugán y T. Pawłowski, *Loop Quantization of Vacuum Bianchi I Cosmology*, Phys. Rev. D **78**, 064008 (2008).
- [50] A. Ashtekar y E. Wilson-Ewing, *Loop Quantum Cosmology of Bianchi Type I Models*, Phys. Rev. D **79**, 083535 (2009).

- [51] A. Corichi, J. Cortez y G. A. Mena Marugán, *Unitary Evolution in Gowdy Cosmology*, Phys. Rev. D **73**, 041502(R) (2006).
- [52] A. Corichi, J. Cortez y G. A. Mena Marugán, *Quantum Gowdy T^3 Model: A Unitary Description*, Phys. Rev. D **73**, 084020 (2006).
- [53] M. Reed y B. Simon, *Topics in Functional Analysis*, Vol. I: *Functional Analysis* (Academic Press, Londres, Reino Unido, 1981).
- [54] A. Ashtekar y A. Magnon, *Quantum Fields in Curved Space-Times*, Proc. R. Soc. A **346**, 375 (1975).
- [55] B. S. Kay, *Linear Spin-Zero Quantum Fields in External Gravitational and Scalar Fields*, Commun. Math. Phys. **62**, 55 (1978).
- [56] A. Ashtekar y A. Magnon-Ashtekar, *A Curiosity Concerning the Role of Coherent States in Quantum Field Theory*, Pramana **15**, 107 (1980).
- [57] R. Floreanini, C. T. Hill y R. Jackiw, *Functional Representation for the Isometries of de Sitter Space*, Ann. Phys. (Nueva York) **175**, 345 (1987).
- [58] A. Corichi, J. Cortez, G. A. Mena Marugán y J. M. Velhinho, *Quantum Gowdy T^3 Model: A Uniqueness Result*, Class. Quantum Grav. **23**, 6301 (2006).
- [59] J. Cortez, G. A. Mena Marugán y J. M. Velhinho, *Uniqueness of the Fock Quantization of the Gowdy T^3 Model*, Phys. Rev. D **75**, 084027 (2007).
- [60] F. Barbero, D. Gómez Vergel y E. J. S. Villaseñor, *Quantum Unitary Evolution of Linearly Polarized $S^1 \times S^2$ and S^3 Gowdy Models Coupled to Massless Scalar Fields*, Class. Quantum Grav. **25**, 085002 (2008).
- [61] J. Cortez, G. A. Mena Marugán y J. M. Velhinho, *Uniqueness of the Fock Representation of the Gowdy $S^1 \times S^2$ and S^3 Models*, Class. Quantum Grav. **26**, 105005 (2008).
- [62] J. Cortez, G. A. Mena Marugán, R. Serodio y J. M. Velhinho, *Uniqueness of the Fock Quantization of a Free Scalar Field on S^1 with Time Dependent Mass*, Phys. Rev. D **79**, 084040 (2009).
- [63] J. Cortez, G. A. Mena Marugán y J. M. Velhinho, *Fock Quantization of a Scalar Field with Time Dependent Mass on the Three-Sphere: Unitarity and Uniqueness*, Phys. Rev. D **81**, 044037 (2010).

- [64] J. Cortez, G. A. Mena Marugán, J. Olmedo y J. M. Velhinho, *A Unique Fock Quantization for Fields in Non-Stationary Spacetimes*, JCAP **10**, 030 (2010).
- [65] J. Cortez, G. A. Mena Marugán, J. Olmedo y J. M. Velhinho, *Uniqueness of the Fock Quantization of Fields with Unitary Dynamics in Non-stationary Spacetimes*, Phys. Rev. D **83**, 025002 (2011).
- [66] L. Castelló Gomar, J. Cortez, D. Martín-de Blas, G. A. Mena Marugán y J. M. Velhinho, *Uniqueness of the Fock Quantization of Scalar Fields in Spatially Flat Cosmological Spacetimes*, JCAP **11**, 001 (2012).
- [67] J. Cortez, G. A. Mena Marugán, J. Olmedo y J. M. Velhinho, *A Uniqueness Criterion for the Fock Quantization of Scalar Fields with Time-Dependent Mass*, Class. Quantum Grav. **28**, 172001 (2011).
- [68] J. Cortez, G. A. Mena Marugán, J. Olmedo y J. M. Velhinho, *Criteria for the Determination of Time Dependent Scalings in the Fock Quantization of Scalar Fields*, Phys. Rev. D **86**, 104003 (2012).
- [69] R. Arnowitt, S. Deser y C. W. Misner, *Dynamical Structure and Definition of Energy in General Relativity*, Phys. Rev. **116**, 1322 (1959).
- [70] A. Ashtekar, M. Bojowald y J. Lewandowski, *Mathematical Structure of Loop Quantum Cosmology*, Adv. Theor. Math. Phys. **7**, 233 (2003).
- [71] A. Ashtekar, T. Pawłowski, P. Singh y K. Vandersloot, *Loop Quantum Cosmology of $k = 1$ FRW Models*, Phys. Rev. D **75**, 024035 (2007).
- [72] L. Szulc, W. Kamiński y J. Lewandowski, *Closed Friedmann-Robertson-Walker Model in Loop Quantum Cosmology*, Class. Quantum Grav. **24**, 2621 (2007).
- [73] K. Vandersloot, *Loop Quantum Cosmology and the $k = -1$ Robertson-Walker Model*, Phys. Rev. D **75**, 23523 (2007).
- [74] E. Bentivegna y T. Pawłowski, *Anti-De Sitter Universe Dynamics in Loop Quantum Cosmology*, Phys. Rev. D **77**, 124025 (2008).
- [75] W. Kamiński y T. Pawłowski, *Loop Quantum Cosmology Evolution Operator of an FRW Universe with a Positive Cosmological Constant*, Phys. Rev. D **81**, 024014 (2010).
- [76] J. M. Velhinho, *The Quantum Configuration Space of Loop Quantum Cosmology*, Class. Quantum Grav. **24**, 3745 (2007).

- [77] T. Thiemann, *Anomaly-Free Formulation of Non-Perturbative, Four-Dimensional Lorentzian Quantum Gravity*, Phys. Lett. B **380**, 257 (1996).
- [78] T. Thiemann, *Quantum Spin Dynamics (QSD)*, Class. Quantum Grav. **15**, 839 (1998).
- [79] A. Ashtekar, A. Corichi y P. Singh, *Robustness of Key Features of Loop Quantum Cosmology*, Phys. Rev. D **77**, 024046 (2008).
- [80] M. Martín-Benito, G. A. Mena Marugán y J. Olmedo, *Further Improvements in the Understanding of Isotropic Loop Quantum Cosmology*, Phys. Rev. D **80**, 104015 (2009).
- [81] G. A. Mena Marugán, J. Olmedo y T. Pawłowski, *Prescriptions in Loop Quantum Cosmology: A Comparative Analysis*, Phys. Rev. D **86**, 064012 (2011).
- [82] T. Schilling, *Geometry of Quantum Mechanics*, tesis doctoral, The Pennsylvania State University (1996).
- [83] M. Martín-Benito, G. A. Mena Marugán y T. Pawłowski, *Physical Evolution in Loop Quantum Cosmology: The Example of the Vacuum Bianchi I Model*, Phys. Rev. D **80**, 084038 (2009).
- [84] P. Singh, *Are Loop Quantum Cosmos Never Singular?*, Class. Quantum Grav. **26**, 125005 (2009).
- [85] P. Singh y F. Vidotto, *Exotic Singularities and Spatially Curved Loop Quantum Cosmology*, Phys. Rev. D **83**, 064027 (2011).
- [86] J. A. Peacock, *Cosmological Physics* (Cambridge University Press, Cambridge, Reino Unido, 1999).
- [87] K. C. Jacobs, *Spatially Homogeneous and Euclidean Cosmological Models with Shear*, Astrophys. J. **153**, 661 (1968).
- [88] M. A. H. MacCallum, *A Class of Homogeneous Cosmological Models III: Asymptotic Behaviour*, Commun. Math. Phys. **20**, 57 (1971).
- [89] P. Singh, *Curvature Invariants, Geodesics, and the Strength of Singularities in Bianchi-I Loop Quantum Cosmology*, Phys. Rev. D **85**, 104011 (2012).

- [90] B. Gupt y P. Singh, *A Quantum Gravitational Inflationary Scenario in Bianchi-I Spacetime*, *Class. Quantum Grav.* **30**, 145013 (2013).
- [91] B. Gupt y P. Singh, *Quantum Gravitational Kasner Transitions in Bianchi-I Spacetime*, *Phys. Rev. D* **86**, 024034 (2012).
- [92] C. W. Misner, *A Minisuperspace Example: The Gowdy T^3 Cosmology*, *Phys. Rev. D* **8**, 3271 (1973).
- [93] B. K. Berger, *Quantum Graviton Creation in a Model Universe*, *Ann. Phys. (Nueva York)* **83**, 458 (1974).
- [94] M. Pierri, *Probing Quantum General Relativity through Exactly Soluble Midi-Superspaces II: Polarized Gowdy Models*, *Int. J. Mod. Phys. D* **11**, 135 (2002).
- [95] A. Corichi, J. Cortez, G. A. Mena Marugán y J. M. Velhinho, *Quantum Gowdy T^3 Model: Schrödinger Representation with Unitary Dynamics*, *Phys. Rev. D* **76**, 124031 (2007).
- [96] D. Brizuela, G. A. Mena Marugán y T. Pawłowski, *Big Bounce and Inhomogeneities*, *Class. Quantum Grav.* **27**, 052001 (2010).
- [97] D. Brizuela, G. A. Mena Marugán y T. Pawłowski, *Effective Dynamics of the Hybrid Quantization of the Gowdy T^3 Universe*, *Phys. Rev. D* **84**, 124017 (2011).
- [98] M. Martín-Benito, D. Martín-de Blas y G. A. Mena Marugán, *Matter in Inhomogeneous Loop Quantum Cosmology: The Gowdy T^3 Model*, *Phys. Rev. D* **83**, 084050 (2011).
- [99] E. M. Lifschitz, *On the Gravitational Stability of the Expanding Universe*, *J. Phys. (Moscu)* **10**, 116 (1946).
- [100] J. M. Bardeen, *Gauge-Invariant Cosmological Perturbations*, *Phys. Rev. D* **22**, 1882 (1980).
- [101] M. Sasaki, *Large Scale Quantum Fluctuations in the Inflationary Universe*, *Prog. Theor. Phys.* **76**, 1036 (1986).
- [102] V. F. Mukhanov, *Quantum Theory of Gauge-Invariant Cosmological Perturbations*, *Sov. Phys. JETP* **67**, 1297 (1988).
- [103] V. F. Mukhanov, H. A. Feldman y R. H. Brandenberger, *Theory of Cosmological Perturbations*, *Phys. Rep.* **215**, 203 (1992).

-
- [104] G. F. R. Ellis y M. Bruni, *Covariant and Gauge-Invariant Approach to Cosmological Density Fluctuations*, Phys. Rev. D **40**, 1084 (1989).
- [105] S. W. Hawking, *Perturbations of an Expanding Universe*, Astrophys. J. **145**, 544 (1966).
- [106] D. W. Olson, *Density Perturbations in Cosmological Models*, Phys. Rev. D **14**, 327 (1976).
- [107] J. J. Halliwell y S. W. Hawking, *Origin of Structure in the Universe*, Phys. Rev. D **31**, 1777 (1985).
- [108] M. E. Taylor, *Partial Differential Equations*, Vol. II (Springer-Verlag, Nueva York, EE.UU., 2003).
- [109] A. A. Kirillov, *Elements of the Theory of Representations* (Springer-Verlag, Nueva York, EE. UU., 1976).
- [110] A. N. Kolmogorov y S. V. Fomin, *Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis* (Dover, Nueva York, EE. UU., 1999).
- [111] J. Cortez, L. Fonseca, D. Martín-de Blas y G. A. Mena Marugán, *Uniqueness of the Fock Quantization of Scalar Fields under Mode Preserving Canonical Transformations Varying in Time*, Phys. Rev. D **87**, 044013 (2013).
- [112] M. Bojowald, *Inflation from Quantum Geometry*, Phys. Rev. Lett. **89**, 261301 (2002).
- [113] S. Tsujikawa, P. Singh y R. Maartens, *Loop Quantum Gravity Effects on Inflation and the CMB*, Class. Quantum Grav. **21**, 5767 (2004).
- [114] G. M. Hossain, *Primordial Density Perturbation in Effective Loop Quantum Cosmology*, Class. Quantum Grav. **22**, 2511 (2005).
- [115] D. J. Mulryne y N. J. Nunes, *Constraints on a Scale Invariant Power Spectrum from Superinflation in Loop Quantum Cosmology*, Phys. Rev. D **74**, 083507 (2006).
- [116] G. Calcagni y M. Cortês, *Inflationary Scalar Spectrum in Loop Quantum Cosmology*, Class. Quantum Grav. **24**, 829 (2007).
- [117] A. Barrau, M. Bojowald, G. Calcagni, J. Grain y M. Kagan, *Anomaly-Free Cosmological Perturbations in Effective Canonical Quantum Gravity*, arXiv:1303.5062.

- [118] M. Bojowald, G. M. Hossain, M. Kagan y S. Shankaranarayanan, *Anomaly Freedom in Perturbative Loop Quantum Gravity*, Phys. Rev. D **78**, 063547 (2008).
- [119] M. Bojowald, G. M. Hossain, M. Kagan y S. Shankaranarayanan, *Gauge Invariant Cosmological Perturbation Equations with Corrections from Loop Quantum Gravity*, Phys. Rev. D **79**, 043505 (2009).
- [120] M. Bojowald, G. M. Hossain, M. Kagan y S. Shankaranarayanan, *Erratum: Gauge Invariant Cosmological Perturbation Equations with Corrections from Loop Quantum Gravity [Phys. Rev. D 79, 043505 (2009)]*, Phys. Rev. D **82**, 109903(E) (2010).
- [121] M. Bojowald y G. Calcagni, *Inflationary Observables in Loop Quantum Cosmology*, JCAP **03**, 032 (2011).
- [122] M. Bojowald, G. Calcagni y S. Tsujikawa, *Observational Constraints on Loop Quantum Cosmology*, Phys. Rev. Lett. **107**, 211302 (2011).
- [123] M. Bojowald, G. Calcagni y S. Tsujikawa, *Observational Test of Inflation in Loop Quantum Cosmology*, JCAP **11**, 046 (2011).
- [124] J. Mielczarek, T. Cailleteau, A. Barrau y J. Grain, *Anomaly-Free Vector Perturbations with Holonomy Corrections in Loop Quantum Cosmology*, Class. Quantum Grav. **29**, 085009 (2012).
- [125] T. Cailleteau, J. Mielczarek, A. Barrau y J. Grain, *Anomaly-Free Scalar Perturbations with Holonomy Corrections in Loop Quantum Cosmology*, Class. Quantum Grav. **29**, 095010 (2012).
- [126] T. Cailleteau y A. Barrau, *Gauge Invariance in Loop Quantum Cosmology: Hamilton-Jacobi and Mukhanov-Sasaki Equations for Scalar Perturbations*, Phys. Rev. D **85**, 123534 (2012).
- [127] T. Cailleteau, A. Barrau, F. Vidotto y J. Grain, *Consistency of Holonomy-Corrected Scalar, Vector, and Tensor Perturbations in Loop Quantum Cosmology*, Phys. Rev. D **86**, 087301 (2012).
- [128] L. Linsefors, T. Cailleteau, A. Barrau y J. Grain, *Primordial Tensor Power Spectrum in Holonomy Corrected Omega-LQC*, Phys. Rev. D **87**, 107503 (2013).
- [129] T. Cailleteau, L. Linsefors y A. Barrau, *Anomaly-Free Perturbations with Inverse-Volume and Holonomy Corrections in Loop Quantum Cosmology*, Class. Quantum Grav. **31**, 125011 (2014).

- [130] I. Agullo, A. Ashtekar y W. Nelson, *Quantum Gravity Extension of the Inflationary Scenario*, Phys. Rev. Lett. **109**, 251301 (2012).
- [131] I. Agullo, A. Ashtekar y W. Nelson, *Extension of the Quantum Theory of Cosmological Perturbations to the Planck Era*, Phys. Rev. D **87**, 043507 (2013).
- [132] I. Agullo, A. Ashtekar y W. Nelson, *The Pre-Inflationary Dynamics of Loop Quantum Cosmology: Confronting Quantum Gravity with Observations*, Class. Quantum Grav. **30**, 085014 (2013).
- [133] A. D. Rendall, *Unique Determination of an Inner Product by Adjointness Relations in the Algebra of Quantum Observables*, Class. Quantum Grav. **10**, 2261 (1993).
- [134] A. D. Rendall, *Adjointness Relations as a Criterion for Choosing an Inner Product*, Lect. Notes Phys. **434**, 319 (1994).
- [135] D. Langlois, *Hamiltonian Formalism and Gauge Invariance for Linear Perturbations in Inflation*, Class. Quantum Grav. **11**, 389 (1994).
- [136] J. H. Verner, *Explicit Runge–Kutta Methods with Estimates of the Local Truncation Error*, SIAM J. Numer. Anal. **15**, 772 (1978).
- [137] Y. F. Cai, D. A. Easson y R. Brandenberger, *Towards a Nonsingular Bouncing Cosmology*, JCAP **08**, 020 (2012).
- [138] F. J. Tipler, *Singularities in Conformally Flat Spacetimes*, Phys. Lett. A **64**, 8 (1977).
- [139] A. Królak, *Towards the Proof of the Cosmic Censorship Hypothesis*, Class. Quantum Grav. **30**, 267 (1986).
- [140] P. Hartman, *Ordinary Differential Equations* (Society for Industrial and Applied Mathematics, Filadelfia, EE. UU., 2002).
- [141] R. T. Jantzen, *Tensor Harmonics on the 3-Sphere*, J. Math. Phys. **19**, 1163 (1978).
- [142] U. H. Gerlach y U. K. Sengupta, *Homogeneous Collapsing Star: Tensor and Vector Harmonics for Matter and Field Asymmetries*, Phys. Rev. D **18**, 1773 (1978).
- [143] M. Abramowitz y I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions: with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables* (Dover Publications, Nueva York, EE. UU., 1972).

-
- [144] M. Fernández-Méndez, G. A. Mena Marugán y J. Olmedo, *Hybrid Quantization of an Inflationary Universe*, Phys. Rev. D **86**, 024003 (2012).
- [145] M. Fernández-Méndez, G. A. Mena Marugán y J. Olmedo, *Hybrid Quantization of an Inflationary Model: The Flat Case*, Phys. Rev. D **88**, 044013 (2013).