

**UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID**  
**FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS**  
**Departamento de Física Teórica II**  
**(Métodos matemáticos de la Física)**



**PROBLEMAS DE FACTORIZACION Y SISTEMAS  
INTEGRABLES**

**MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR  
PRESENTADA POR**

**Manuel Mañas Baena**

Bajo la dirección del doctor

Francisco José Guil Guerrero

**Madrid, 1991**



UNIVERSIDAD COMPLUTENSE



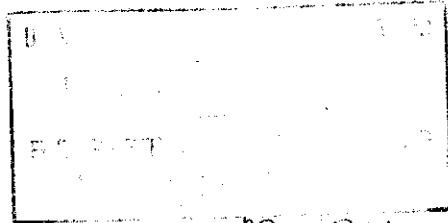
5314281764

T1-1991/2

# Problemas de Factorización

y

# Sistemas Integrables



N.º REGISTRO 23.634

Memoria presentada por Manuel Mañas Baena para optar al grado de Doctor en Ciencias Físicas. Dirigida por Francisco Guil Guerrero.

A mi padre del que aprendí a amar la ciencia  
A mi madre que me enseñó a amar la vida  
A Montse, con ella comprendí lo que era amar

Problemas de Factorización  
y  
Sistemas Integrables

Manuel Mañas Baena

# Índice

Agradecimientos	5
Capítulos	
Introducción	7
<b>I Grupos de lazos y álgebras afines</b>	<b>17</b>
I.1 Grupos de lazos	18
I.2 Álgebras afines	20
I.2.1 Teoría estructural	21
I.2.2 Realizaciones	24
<b>II Matriz-<math>r</math> clásica</b>	<b>27</b>
II.1 Definiciones	28
II.2 Resolución de un álgebra de Lie. Transformada de Cayley	30
II.3 Matriz- $r$ en un producto directo	33
II.4 El problema de factorización en el grupo	33
<b>III Soluciones de la ecuación de Yang-Baxter</b>	<b>37</b>
III.1 Soluciones de la ecuación de Yang-Baxter en $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$	37
III.2 Descomposiciones triangulares	40
III.3 Álgebras simples y descomposiciones parabólicas	41
III.4 Álgebras afines y graduaciones	42
III.5 La solución racional	42
III.6 La solución elíptica	45
<b>IV La condición de curvatura nula</b>	<b>51</b>
IV.1 Transformaciones de 'gauge' y curvatura nula	52
IV.2 La técnica de revestimiento	55

<b>V</b>	<b>Integrabilidad en <math>LSL_2</math>: subálgebra homogénea</b>	<b>63</b>
V.1	Parametrización de $\psi_-$ . . . . .	66
V.2	La jerarquía integrable . . . . .	69
V.3	Retículos integrables continuos . . . . .	71
V.4	Transformaciones de Miura . . . . .	72
<b>VI</b>	<b>Modificaciones de AKNS</b>	<b>75</b>
VI.1	AKNS y NLS . . . . .	75
VI.2	El modelo ferromagnético de Heisenberg . . . . .	77
VI.3	El sistema de Dodd-Fordy . . . . .	78
VI.4	Ecuaciones de Jaulent-Miodek y Burgers . . . . .	80
VI.5	Otros sistemas integrables . . . . .	82
VI.6	Los modelos de transparencia autoinducida y Thirring masivo . . . . .	83
<b>VII</b>	<b>La subálgebra homogénea en el caso elíptico y la ecuación de Landau-Lifshitz</b>	<b>87</b>
<b>VIII</b>	<b><math>LSL_2</math>, la subálgebra principal y KdV</b>	<b>91</b>
VIII.1	La factorización de Birkhoff y la forma potencial de KdV	92
VIII.2	La versión potencial de KdV modificada . . . . .	93
VIII.3	La ecuación de 'sine'-Gordon . . . . .	95
<b>IX</b>	<b>KdV, la ecuación de Schrödinger y modificaciones</b>	<b>97</b>
IX.1	La ecuación de Schrödinger y KdV . . . . .	98
IX.2	Subgrupos unidimensionales y modificaciones . . . . .	99
IX.3	La ecuación de Krichever-Novikov y su relación con KdV	104
<b>X</b>	<b>La factorización elíptica, la subálgebra principal de <math>LSL_2</math> y la ecuación de Krichever-Novikov</b>	<b>109</b>
<b>XI</b>	<b>Sistemas Integrables en Espacios Homogéneos</b>	<b>115</b>
XI.1	Esquema general para la subálgebra homogénea . . . . .	115
XI.2	Espacios homogéneos y simétricos . . . . .	121
XI.3	AKNS generalizado a espacios homogéneos . . . . .	123
<b>XII</b>	<b>Ecuaciones de N-ondas y modelos quirales principales</b>	<b>127</b>
XII.1	Ecuaciones de N-ondas . . . . .	127
XII.2	Los campos quirales principales . . . . .	129
XII.2.1	El modelo quiral principal isótropo . . . . .	130

<i>Indíce</i>	3
XII.2.2 Modelos quirales principales anisótropos . . . . .	134
<b>XIII Yang-Mills autodual e integrabilidad</b>	<b>137</b>
XIII.1 Los campos de 'gauge' o de Yang-Mills . . . . .	137
XIII.2 Yang-Mills autodual y sistemas integrables . . . . .	140
XIII.3 Jerarquías integrables y Yang-Mills autodual . . . . .	147
<b>Apéndices</b>	
<b>A Otros aspectos de la matriz-<math>r</math> clásica. Formalismo tradi-</b>	<b>149</b>
<b>cional</b>	
A.1 La ecuación de Yang-Baxter clásica . . . . .	149
A.2 Formalismo hamiltoniano . . . . .	151
<b>B Otros aspectos de la matriz-<math>r</math> clásica. Biálgebras de Lie</b>	<b>155</b>
<b>y grupos de Poisson-Lie</b>	
B.1 Triples de Manin . . . . .	156
B.2 Formalismo invariante . . . . .	157
B.3 Grupos de Poisson-Lie . . . . .	161
<b>Bibliografía</b>	<b>163</b>



## Agradecimientos

Quiero agradecer a Francisco Guil Guerrero el esfuerzo, la comprensión y la amistad que me ha brindado. No solo su brillante y riguroso espíritu científico se ven reflejados en este trabajo, sino también su honradez y bondad como persona han quedado marcados en esta tesis y en el autor. A los miembros de los departamentos de Física Teórica I y II les quiero hacer constar mi reconocimiento por su trabajo y por su cálida acogida. En particular quiero agradecer diferentes conversaciones con M.A.Rodríguez, A.Ibort, L.Martínez Alonso, E.Olmedilla, R.Hernández Heredero, M.González Romero y C.López Lacasta. Así mismo agradezco el asesoramiento bibliográfico de G.García Alcaine, M.A.Rodríguez y E.Olmedilla.

No puedo olvidar el entrañable recibimiento del 'soliton group' del 'Centre of Nonlinear Studies' de la Universidad de Leeds en mis estancias en dicha Universidad. Por ello y por las muchas conversaciones mantenidas doy las gracias a A.Crumey, A.Fordy, I.Marshall y Q.Ping. En particular debo resaltar la calidad humana de I.Marshall y la capacidad para beber cerveza de A.Crumey. También a S.Gudmunson del departamento de 'Pure Mathematics' de dicha Universidad por la amistad que me brindó durante este periodo. Debo reconocer y agradecer diferentes conversaciones con A.Reyman, A.V.Mikhailov, S.V.Manakov, D.Dubrovin, V.G.Makhankov, O.Pashaev, M.Mohov y R.Conte.

A mis compañeros y amigos de carrera les quiero dar las gracias por su compañía y amistad así como por sus estimulantes conversaciones. Me refiero entre otros a R.Brito, J.Cuesta, R.Hernández, M.Hernández, J.Olarrea y A.Sánchez. En particular quiero resaltar la capacidad científica de J.M.R.Parrondo; su rigor e ingenio me han venido impresionando durante los años que le conozco. M.A.Martín-Delgado ha demostrado su arte en la lidia de toros en el único diagrama que aparece en este trabajo, va por él.

Quiero dar las gracias a mi familia por haberme soportado durante el

periodo de elaboración y redacción de esta tesis. Sin la constancia y el tesón que ha demostrado Paco Guil al leer varias veces versiones preliminares, esta tesis sería aún más ilegible de lo que ya es. Por último quiero dar las gracias a Montse por iluminar mi vida, sin su constante apoyo esta tesis no existiría.

## Introducción

En las tres últimas décadas, el estudio de ciertas ecuaciones no lineales en derivadas parciales, conocidas como sistemas integrables, ha recibido gran atención por parte de los investigadores en Física-Matemática. El motivo de este interés son sin duda las propiedades sobresalientes que tales sistemas presentan tanto desde el punto de vista físico como del matemático. Podemos decir que los sistemas integrables tienen un doble carácter de universalidad. En Física son ecuaciones que aparecen de forma sistemática cuando se analizan límites asintóticos de diferentes modelos. Así fenómenos físicos en dinámica de fluidos, óptica no lineal, etc son ejemplos en donde aparecen dichas ecuaciones integrables. Desde el punto de vista matemático presentan rasgos notables, esto es, dichas ecuaciones poseen propiedades inesperadas que en general una ecuación no lineal en derivadas parciales no tiene.

El fenómeno solitón es algo característico de los sistemas integrables. Los solitones son soluciones de estas ecuaciones con la estructura de una onda que presentan comportamientos típicos de partículas. Supongamos que para  $t = -\infty$  se da el dato inicial siguiente: la función está localizada en pequeños entornos de  $\pm\infty$ . Este dato inicial evolucionará con la dinámica dada por la ecuación integrable. Dicha evolución es aproximadamente libre, esto es, las pequeñas ondulaciones se acercan la una a la otra sin influirse mutuamente, hasta que llegan a la región de interacción. En dicha zona la dinámica es considerablemente no lineal, pero curiosamente ambas ondulaciones emergen de la región de interacción sin modificación en su forma y tan solo hay un retraso con respecto a la evolución libre. Esta solución que hemos descrito someramente es el típico 2-solitón, pudiéndose extender estas consideraciones a soluciones tipo  $N$ -solitón. Debemos comentar que lo dicho es válido en  $1 + 1$  dimensiones y que la situación en  $2 + 1$  dimensiones es bastante más compleja.

Los solitones se pueden hallar al menos por tres métodos distintos. El primero de ellos, la transformada espectral inversa, se basa en la construcción

de un problema espectral que con la dinámica del sistema integrable evoluciona de forma sencilla. La resolución del problema inverso da la solución al sistema integrable. Este método fue usado por primera vez en Gardner, Greene, Kruskal y Miura(1967). El segundo método es el del formalismo bilineal y la función  $\tau$  expuesto en Hirota(1971) y desarrollado en profundidad por la escuela japonesa de Kyoto. Un tercer método es el introducido en Novikov(1974) y Krichever(1976), en estos trabajos se buscan soluciones cuasiperiódicas de KdV y para ello se estudian ciertas superficies de Riemann y se emplea la geometría algebraica.

Los sistemas integrables tienen propiedades matemáticas importantes. Se observa que existen un número infinito de leyes de conservación locales y no triviales. Estas leyes de conservación se encuentran ligadas a simetrías del sistema integrable reflejándose este hecho en la aparición de la jerarquía integrable. Esto es, un conjunto infinito de ecuaciones integrables que son cada una de ellas simetrías del resto. También estos sistemas integrables son a veces completamente integrables. El espacio de fases es el espacio de soluciones con las condiciones de contorno adecuadas y es en general un espacio de Sobolev. Con respecto al corchete de Poisson presente en el espacio de fases las cantidades conservadas están en involución y el sistema es completamente integrable en el sentido de la Mecánica Clásica. Las variables acción-ángulo se obtienen a partir de la transformada espectral inversa.

Muchos sistemas integrables se encuentran conectados entre sí mediante transformaciones no lineales. Esto es, dada una solución de un sistema integrable se pueden hallar soluciones de otro mediante una transformación no lineal. El ejemplo más sobresaliente es la transformación de Miura. Miura(1968).

Como se ha comentado, los sistemas integrables poseen un número infinito de simetrías y por tanto debe existir un grupo de Lie de dimensión infinita que genere dichas simetrías. En ecuaciones integrables en  $1+1$  dimensiones es un grupo de lazos y su álgebra de Lie es un álgebra de Kac-Moody de tipo afín. Cuando se estudian sistemas integrables en  $2+1$  dimensiones aparecen grupos de automorfismos sobre un espacio de Hilbert, las álgebras de Lie son álgebras de Kac-Moody de rango infinito.

Existen excelentes tratados sobre la teoría de los sistemas integrables, algunos de ellos son Drazin y Johnson(1989), Newell(1985), Faddeev y Takhtajan(1987) y Novikov, Manakov, Pitaevskii y Zakharov(1983).

La teoría de los sistemas integrables ha experimentado una larga evolución. En 1834 J.S.Russell descubrió el fenómeno de la propagación de ondas localizadas de gran longevidad, él las llamo 'great waves of translation', Russell (1844). A partir de ese momento se dedicó a perfeccionar diferentes técnicas para la producción de este tipo de ondas en su laboratorio. Ello le permitió el estudio experimental de dicho fenómeno, y concluyó empíricamente que la velocidad de la onda,  $v$ , obedece a la fórmula  $v^2 = g(h + a)$  donde  $a$  es la amplitud de la onda,  $h$  la altura del agua en el canal sin perturbar y  $g$  la aceleración de la gravedad. En los trabajos Boussinesq(1871,1872) y Rayleigh(1876) se demostraba esta fórmula a partir de las ecuaciones para un fluido incompresible y sin viscosidad y se obtenía la primera expresión explícita de un 1-soliton. Esto es, si  $x$  es la variable que parametriza la posición en el canal y  $t$  es el tiempo la perturbación es  $u = a \operatorname{sech}(\beta(x - vt))$  donde  $2h\beta = \sqrt{\frac{3a}{h+a}}$ . En Boussinesq(1872) se encontró la tercera ley de conservación que fue denominada tercer momento de inestabilidad. Hubo que esperar al trabajo Korteweg y de Vries, Korteweg y de Vries(1896), para tener una ecuación simple para  $u$ . Dicha ecuación fue hallada usando límites asintóticos en las ecuaciones iniciales y se conoce como ecuación de Korteweg-de Vries(KdV). Esta ecuación se puede escribir, tras renormalizar las variables, como

$$4u_t = u_{xxx} - 6uu_x.$$

El siguiente paso hacia la teoría de los sistemas integrables fue consecuencia de los estudios en teoría del sólido. Cuando se modela un sólido mediante una red unidimensional de muelles, con interacción lineal tipo Hooke entre ellos, la conductividad térmica efectiva es infinita. Esto se debe a que los diferentes modos normales no interactúan entre sí y por tanto la energía se transporta libremente en cada modo. En 1914 Debye apuntó que si la interacción es no lineal entonces los modos normales pueden interactuar mutuamente y de este modo dar una conductividad térmica efectiva finita. En el trabajo de Fermi, Pasta y Ulam(1955) se llevó a cabo el siguiente experimento numérico. Supusieron una red de muelles con la interacción tipo Hooke a la que se le añade un término cuadrático en el desplazamiento. Construyeron un esquema numérico para este modelo teórico esperando que si en el estado inicial la energía se encontraba en el modo fundamental o en los modos excitados más bajos, el sistema se relajaría a un estado de equilibrio estadístico debido a los acoplos no lineales. Por tanto, en el estado final del sistema la energía se encontraría equidistribuida por todos los modos y la conductividad sería proporcional al inverso del tiempo de relajación. Lo

que obtuvieron sin embargo fue totalmente diferente. La energía, después de visitar algunos modos excitados, retornaba aproximadamente al estado inicial tras un tiempo mucho menor que el tiempo de recurrencia de Poincaré, repitiendo este proceso periódicamente. En realidad, estaban observando la primera simulación en ordenador del fenómeno solitón.

Zabusky y Kruskal estudiaron en Zabusky y Kruskal(1965) plasmas sin colisión. Tras un análisis perturbativo llegaron a la ecuación de KdV usando un esquema numérico que preserva la energía. Aparecieron pulsos separados y cuando estos pulsos colisionaban la interacción era no lineal pero ambos emergían de esta zona de colisión sin cambio en la forma o velocidad. Tan solo había una desfasaje con respecto a un pulso que no hubiera interactuado. Tras un tiempo pequeño los pulsos reconstruían el dato inicial describiendo correctamente los resultados de Fermi, Pasta y Ulam. Fueron Kruskal y Zabusky los que acuñaron el nombre de solitón para este tipo de solución.

La ecuación de KdV posee dos leyes de conservación obvias, la propia ecuación y la asociada a la energía. Zabusky y Kruskal fueron capaces de hallar otras leyes de conservación adicionales y Miura algunas más. Kruskal y Miura tenían la convicción de que existían infinitas leyes de conservación para KdV. A su vez en Gardner, Greene, Kruskal y Miura(1967) se elaboró un método efectivo para la construcción de soluciones, la transformación espectral inversa. A la ecuación de KdV se le puede asociar una ecuación de Schrödinger cuyo potencial es la solución de KdV. La evolución de los datos de 'scattering' según la dinámica de KdV es fácilmente integrable y el problema inverso da soluciones de KdV a partir de estos datos de 'scattering' evolucionados. Este método está relacionado con la ecuación de KdV modificada (mKdV), hallada en Miura(1968), que se encuentra conectada con KdV a través de una transformación no lineal, la transformación de Miura. En dicho trabajo se demuestra que mKdV tiene un número infinito de leyes de conservación y por tanto la ecuación de KdV debe tener también una colección infinita de cantidades conservadas.

En Lax(1968) se introdujo una nueva formulación de KdV a través de ecuaciones de compatibilidad para operadores diferenciales. Se había hallado el par de Lax para KdV. El método introducido aclara los resultados de Gardner, Greene, Kruskal y Miura(1967) y es fundamental en el desarrollo de la teoría.

Después hubo un desarrollo rápido de la teoría de los sistemas inte-

grables. Apareció una formulación equivalente a la de los pares de Lax que se conoce como la condición de curvatura nula. Los trabajos pioneros en este sentido fueron Ablowitz, Kaup, Newell y Segur(1974), Zakharov y Shabat(1974,1979) y Novikov(1974); se puede consultar la exposición de Novikov, Manakov, Pitaevskii y Zakharov(1984) y Dubrovin, Krichever y Novikov(1990). En Zakharov y Shabat(1979) ya aparecen problemas de factorización del tipo Riemann-Hilbert. Con este método se integraron un gran número de ecuaciones, la primera de ellas fue una ecuación importante en óptica no lineal, la ecuación de Schrödinger no lineal, Zakharov y Shabat(1971).

Ya en Gardner, Greene, Kruskal y Miura(1967) se utilizaba una primera estructura hamiltoniana de KdV. La ecuación de KdV posee una segunda estructura hamiltoniana relacionada con la ecuación de mKdV, Magri(1978). Estos hechos dieron pie a la introducción en Gel'fand y Dikii(1976,1977) del álgebra de operadores pseudodiferenciales y la consecuente generalización de la ecuación de KdV. En Adler(1979) y en Lebedev y Manin(1979) se interpretaba esta construcción a través del corchete de Lie-Poisson en el álgebra de Lie de operadores pseudodiferenciales o álgebra de Volterra. En este sentido ver Manin(1979) y Wilson(1979).

Al mismo tiempo que se estudiaban estas estructuras hamiltonianas un trabajo de Novikov, Novikov(1974), dio lugar a una serie de artículos en los que se analizaban las soluciones cuasiperiódicas de KdV. El uso de curvas hiperelípticas y de la geometría algebraica fue fundamental, ver Krichever (1977) y Dubrovin(1981). Aparecieron así nuevos métodos procedentes de la geometría algebraica en la construcción de las soluciones cuasiperiódicas de KdV. La construcción de tales soluciones con la transformada espectral inversa es muy compleja, para ello ver Dubrovin, Krichever y Novikov(1990).

La matriz- $r$  apareció como consecuencia del desarrollo de la teoría cuántica de los sistemas integrables y de la transformada espectral inversa cuántica, ver Sklyanin, Takhtajan y Faddeev(1980), Takhtajan y Faddeev(1979) y Faddeev(1980). Estos trabajos se vieron influenciados por el trabajo Baxter(1972) y el límite clásico de esta ecuación fue encontrado en Sklyanin(1979). El papel de la matriz- $r$  clásica en la técnica de la transformación espectral inversa ha sido importante desde entonces, ver Kulish y Sklyanin(1980). Estas formulaciones permiten la introducción de corchetes de Lie-Poisson tensoriales en relación con los pares de Lax. La aproximación de Semenov-Tyan-Shanskii(1983) a estas construcciones ha sido muy fructífera, dando

lugar a toda una serie de aplicaciones de las que esta tesis constituye un ejemplo.

Las álgebras de Kac-Moody de tipo afín se usaron para la generalización de la ecuación de KdV en los trabajos Drinfel'd y Sokolov(1981,1985-1) y la teoría de Gel'fand-Dikii se encuentra como caso particular de estas construcciones. En los artículos de la escuela japonesa de Kyoto, Date, Jimbo, Kashiwara y Miwa(1982), se usaron las álgebras afines de rango infinito para la formalización de la teoría de Hirota en el caso de KdV bidimensional, esto es la ecuación de Kadomtsev-Petviashvili. Para ello emplearon un álgebra de Clifford, cuyos generadores eran los campos de una teoría cuántica de campos holónoma. También explicaban el papel de la grassmanniana de Sato y el de la función  $\tau$ . Por último en Wilson(1984,1985) y Segal y Wilson(1985) se da la relación de la teoría geométrica de los grupos de lazos y las grassmannianas con la función  $\tau$  y la técnica geometro-algebráica dada en Krichever(1976).

En esta tesis estudiamos algunas propiedades geométricas de los sistemas integrables. La condición de curvatura nula y los problemas de factorización en grupos de Lie son esenciales en el desarrollo de la misma. Veremos que muchos sistemas integrables aparecen como descripción de la siguiente construcción. Dado un grupo de Lie  $G$  y un subgrupo  $G_+$  los flujos conmutativos por la izquierda en  $G$  se proyectan en el espacio homogéneo  $G/G_+$ . Cuando existe un subgrupo  $G_-$  de  $G$ , difeomorfo al espacio homogéneo  $G/G_+$  podemos analizar dicha proyección en el álgebra de Lie  $\mathfrak{g}_-$  de  $G_-$ . Este esquema se resume en el diagrama

$$G \rightarrow G/G_+ \rightarrow G_- \xrightarrow{\ln} \mathfrak{g}_-,$$

donde  $\ln$  es la función inversa de la aplicación exponencial. Una forma sistemática para conseguir estas construcciones se obtiene mediante el formalismo de la matriz  $R$ . En concreto, dado un endomorfismo del álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  de  $G$  que satisfaga la ecuación denominada de Yang-Baxter clásica modificada se pueden plantear problemas de factorización en el grupo de Lie  $G$ . Tales problemas generalizan el conocido problema de Riemann-Hilbert. Ciertas matrices  $R$  generan subálgebras  $\mathfrak{g}_\pm \subset \mathfrak{g}$  tales que

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_+ + \mathfrak{g}_-.$$

Todo  $X \in \mathfrak{g}$  se puede escribir entonces como  $X = X_+ - X_-$  con  $X_\pm \in \mathfrak{g}_\pm$ . Esto induce el siguiente problema de factorización para  $\psi \in G$ , encontrar  $\psi_+, \psi_-$  en  $G_+$  y  $G_-$  respectivamente tales que

$$\psi = \psi_-^{-1} \cdot \psi_+.$$

Con esta construcción el 'coset' derecho  $\psi \cdot G_+$  está, al menos localmente, en correspondencia biunívoca con  $\psi_- \in G_-$ . Como veremos estas construcciones enlazan de modo natural con la técnica de revestimiento de 1-formas de curvatura nula.

Estas ideas se desarrollan en los primeros capítulos. Así, en el primer capítulo se introducen los grupos de lazos y las álgebras afines. Estos serán los grupos de Lie de dimensión infinita que servirán de soporte a futuras construcciones. Debemos comentar que generalizaciones a grupos de Lie-Banach de automorfismos sobre un espacio de Hilbert se pueden encontrar en Guil (1989,1990-2), donde se obtuvieron los problemas de factorización para las ecuaciones de Kadomtsev-Petviashvili y Davey-Stewartson así como para sus modificaciones. A continuación, en el segundo capítulo examinamos la teoría de la matriz- $r$  clásica en el espíritu de Semenov-Tyan-Shanskii(1983), analizando descomposiciones en el álgebra de Lie y problemas de factorización asociados. Pasamos en el capítulo III a un estudio de algunas matrices- $r$  clásicas relevantes en la teoría de los sistemas integrables. Debemos comentar que en los apéndices A y B se encuentra información adicional sobre la matriz- $r$  clásica.

La técnica del revestimiento, esto es, la construcción de 1-formas de curvatura nula a partir de 1-formas de curvatura nula ya conocidas se presenta en el cuarto capítulo. La matriz- $r$  y los problemas de factorización asociados son fundamentales en estas construcciones.

Los siguientes capítulos nos sirven para demostrar que la mayoría de los sistemas integrables aparecen en el marco esbozado en los primeros capítulos de esta tesis. Escogemos en el grupo de lazos  $LSL(2, \mathbb{C})$  flujos conmutativos generados por dos subálgebras de Heisenberg del álgebra de lazos las subálgebras homogénea y principal. Obtenemos de esta forma sistemas integrables modificados del tipo AKNS y KdV en cada caso. Variando el problema de factorización, pero no la pareja de flujos, se obtiene un conjunto amplio de sistemas integrables. En los capítulos quinto y sexto se presenta la teoría de los sistemas integrables del tipo AKNS y modificados, también aparecen los modelos de Thirring masivo y de transparencia autoinducida, todos ellos asociados a flujos homogéneos. En el capítulo VII la matriz- $r$  elíptica se usa para factorizar los flujos conmutativos homogéneos, el sistema integrable que describe esta factorización es la ecuación de Landau-Lifshitz. En el capítulo octavo se analizan los flujos conmutativos generados por la subálgebra principal. Aparecen las versiones potenciales de KdV y

mKdV, también encontramos la ecuación de 'sine'-Gordon. Aprovechamos el capítulo IX para dar una aproximación completa a la teoría de la modificación de la ecuación de KdV. Estas modificaciones de la ecuación de KdV son las ecuaciones mKdV, las dos ecuaciones integrables de Calogero y Degasperis(1981) y dos degeneraciones de la ecuación de Krichever y Novikov. Se presentan explícitamente transformaciones de Miura directas e inversas así como problemas de factorización asociados. En el décimo capítulo la matriz- $r$  elíptica vuelve a ser utilizada para factorizar los flujos principales, obteniéndose la ecuación de Krichever-Novikov.

Los dos capítulos siguientes se dedican, abandonando el álgebra  $LSL(2, \mathbb{C})$ , a estudiar las oportunas generalizaciones a álgebras de lazos arbitrarias del tipo  $L\mathfrak{g}$  con  $\mathfrak{g}$  un álgebra simple. En particular en el capítulo XI extendemos las construcciones del capítulo V obteniendo AKNS generalizado a espacios homogéneos. En el capítulo XII las ecuaciones de N-ondas y los modelos quirales principales aparecen como consecuencia de diferentes factorizaciones de flujos conmutativos.

Por tanto, a lo largo de estos capítulos demostramos que el método de construcción de sistemas integrables propuesto en esta tesis abarca a una gama amplia de ecuaciones integrables. Es llamativo que baste factorizar los flujos generados por el subgrupo homogéneo por un lado y principal por otro para obtener, asociados a  $LSL(2, \mathbb{C})$ , todos los sistemas integrables presentados en los capítulos V, VI, VII, VIII, IX y X. También queremos subrayar que la teoría expuesta en esta tesis da una explicación completa de las ecuaciones del tipo

$$u_t = u_{xxx} + f(u_{xx}, u_x, u)$$

con un número infinito de simetrías, Svinolupov, Sokolov y Yamilov(1983).

Para finalizar estudiamos la relación de la teoría de los sistemas integrables con las ecuaciones de autodualidad para los campos de Yang-Mills. Demostramos que las construcciones de muchos sistemas integrables dadas a lo largo de esta tesis son soluciones de las ecuaciones de autodualidad. Por tanto, el marco grupo-teórico dado en la tesis nos da una explicación del porqué muchos sistemas integrables son reducciones de Yang-Mills autodual. Este hecho nos lleva a pensar que existen casos intermedios entre las ecuaciones de autodualidad y por ejemplo la ecuación de KdV, los modelos quirales se pueden entender en este sentido. Un campo abierto es la investigación de los posibles sistemas integrables de este tipo.

Es necesario comentar que no hemos considerado aspectos simplécticos o hamiltonianos de los sistemas integrables. No hacerlo así amplía el número de posibles sistemas integrables a considerar. A medida que se modifica un sistema integrable las estructuras hamiltonianas se hacen más pobres. Por ejemplo KdV posee dos estructuras hamiltonianas locales compatibles, mKdV tan solo posee una y la ecuación de Calogero-Degasperis tiene una estructura hamiltonian no local. Esto mismo ocurre con Krichever-Novikov que su estructura hamiltoniana es no local. Tampoco analizamos las consecuencias de las técnicas de revestimiento en el grupo de operadores pseudodiferenciales, los métodos asociados a la función  $\tau$  o los procedentes de la geometría algebraica. Los sistemas asociados a ecuaciones con potenciales dependientes de la energía son un problema aparte. Tan sólo el caso de Jaulent-Miodek parece acoplarse bien al esquema grupo-teórico seguido aquí.

Finalizamos esta introducción con un breve resumen, a modo de conclusiones, de los resultados originales obtenidos

1. La consideración de matrices- $r$  clásicas que no son diferencias de proyectores nos ha llevado a la construcción de una serie de sistemas integrables de los que no se conocía su estructura grupo-teórica, en este sentido ver Guil y Mañas(1990).
2. Para las ecuaciones con un número infinito de simetrías del tipo

$$u_t = u_{xxx} + f(u_{xx}, u_x, u)$$

se han obtenido los problemas de factorización asociados en grupos de lazos, la relación con la ecuación de KdV y las transformaciones de Miura directas e inversa en términos de soluciones del mencionado problema de factorización, consultar Guil y Mañas(1991-2) y Mañas(1991).

3. La factorización elíptica introducida en Sklyanin(1979) nos ha permitido estudiar las analogías de la ecuación de Krichever-Novikov y Landau-Lifshitz. Este análisis nos ha llevado a escribir un nuevo par de Lax para la ecuación de Krichever-Novikov. Este nuevo par de Lax enlaza con el par de Lax hallado en Sklyanin(1979) para Landau-Lifshitz, ver Guil y Mañas(1991-1).
4. Por último, la relación de las ecuaciones de autodualidad para los campos de Yang-Mills con los sistemas integrables. Obtenemos la es-

estructura algebraica que liga las mencionadas ecuaciones de autodualidad con sistemas integrables asociados a problemas de factorización de Birkhoff modificados. De este modo es sencillo demostrar que muchos sistemas integrables son reducciones de las ecuaciones de autodualidad.

## Capítulo I

### Grupos de lazos y álgebras afines

En este capítulo se introducen los conceptos y resultados de interés, para el desarrollo de esta tesis doctoral, sobre lo que se conoce en la literatura como grupos de lazos. Los grupos de lazos son grupos de Lie de dimensión infinita, cuyas álgebras de Lie, las álgebras de lazos, aparecieron en Física como álgebras de corrientes, y que hoy en día juegan un papel relevante no solo en la teoría de los sistemas integrables sino también en las teorías de cuerdas y campos conformes, y como se verá en la realización de las álgebras de Kac-Moody tipo afin.

Las álgebras afines son álgebras de Lie de dimensión infinita y poseen una teoría estructural profunda que generaliza la bien conocida teoría de Cartan-Killing, ver Humphreys(1972), Jacobson(1961) y Serre(1987), de las álgebras simples. Además, cuando se buscan realizaciones explícitas de estos objetos abstractos se encuentran las álgebras de lazos.

Las álgebras afines junto con las álgebras afines de rango infinito, cuyas realizaciones son las álgebras de Lie-Banach clásicas asociadas a un espacio de Hilbert, son las únicas álgebras de Kac-Moody para las que se conocen realizaciones del grupo de Lie adjunto, Tits(1988).

La teoría geométrica de los grupos de lazos se puede encontrar desarrollada ampliamente en el libro Pressley y Segal(1986), también en los artículos Segal(1981), Segal y Wilson(1985), Wilson(1985) y Freed(1988) se detalla información de interés sobre estos grupos de lazos, pudiéndose encontrar en este último un estudio completo de aspectos puramente geométricos como pueden ser clases características de Chern, curvatura, etc.

La teoría estructural, así como la teoría de representaciones de las álgebras

afines, se encuentra expuesta con detalle en Kac(1985) y Helgason(1978); también es interesante consultar Frenkel y Kac(1980) y Drinfel'd y Sokolov-(1985-1). Sobre las aplicaciones en Física se puede acudir a las monografías Dolan(1984), Goddard y Olive(1986), Cornwell(1990).

Se supone al lector familiarizado con la teoría de grupos y álgebras de Lie de dimensión finita, por ejemplo en el espíritu de Cornwell(1988), Helgason(1978), Humphreys(1972), Jacobson(1961) y Serre(1987).

Este capítulo se divide en dos secciones. En la primera se presentan los grupos de lazos, haciendo especial énfasis en el caso  $LSL(2, \mathbb{C})$ .

En la sección segunda se introduce la teoría estructural de las álgebras de Lie afines: matriz de Cartan, sistemas de raíces, graduaciones, automorfismos, etc; se verá después como estas álgebras son isomorfas a las álgebras de lazos de la sección primera, permitiendo esto dar una teoría algebraica para las álgebras de lazos. De nuevo el caso  $L\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  sirve de guía.

## I.1 Grupos de lazos

Dado el grupo de Lie  $SL(2, \mathbb{C})$ , que es el conjunto de matrices complejas  $2 \times 2$  de determinante unidad, se puede considerar el conjunto  $LSL(2, \mathbb{C})$  de aplicaciones suaves del círculo unidad  $S^1$  a valores en el grupo  $SL(2, \mathbb{C})$ . La estructura de grupo es la heredada de  $SL(2, \mathbb{C})$ , es decir el producto de dos funciones será la función que en cada punto de  $S^1$  tiene como valor el producto de dichas matrices evaluadas en el punto del círculo en consideración. Esta familia de funciones  $LSL(2, \mathbb{C})$  es lo que se conoce como grupo de lazos asociado a  $SL(2, \mathbb{C})$ . Si  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  es el álgebra de Lie de  $SL(2, \mathbb{C})$ , el conjunto de matrices complejas  $2 \times 2$  de traza nula, el álgebra de lazos  $L\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  se define de forma análoga. Obviamente estas definiciones se extienden a otros grupos de Lie simples  $G$  distintos de  $SL(2, \mathbb{C})$ , con álgebras de Lie  $\mathfrak{g}$ .

Se puede demostrar que  $L\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  es un espacio vectorial topológico completo y separable, pero no es un espacio de Banach. Cuando se requiere tan solo diferenciabilidad hasta cierto orden finito  $r$  el álgebra que se obtiene es de Lie-Banach, y cuando se consideran compleciones de Sobolev adecuadas, Freed(1988), un álgebra de Lie-Hilbert.

La aplicación exponencial

$$\exp : L\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \rightarrow LSL(2, \mathbb{C}),$$

es un homomorfismo en un entorno de la identidad. Cuando se considera la forma compacta  $SU(2)$  de  $SL(2, \mathbb{C})$  la imagen de la aplicación exponencial es densa en la componente conexa con la identidad  $L_0SU(2)$  del grupo de lazos  $LSU(2)$ .

El grupo de automorfismos de  $L_0SL(2, \mathbb{C})$  es el producto semidirecto

$$\text{Diff}(S^1) \ltimes L \text{Aut}(SL(2, \mathbb{C})).$$

Existen subgrupos de  $LSL(2, \mathbb{C})$  que serán utilizados más adelante. Por ejemplo los lazos analíticos  $L_{\text{an}}SL(2, \mathbb{C})$ ; sus elementos son lazos cuyos coeficientes matriciales son funciones analíticas en  $\lambda \in S^1$ , esto es, admiten desarrollos de Laurent convergentes en alguna corona entorno a  $S^1$ . Denotando por  $\mathbb{C}[[\lambda, \lambda^{-1}]$  dicho espacio de funciones se puede escribir  $L_{\text{an}}SL(2, \mathbb{C}) \cong SL(2, \mathbb{C}[[\lambda, \lambda^{-1}]])$ . Cuando se pide que estos coeficientes sean cocientes de polinomios en  $\lambda$ , esto es funciones racionales, entonces el subgrupo se denota por  $L_{\text{rat}}SL(2, \mathbb{C})$ , y sus elementos son los llamados lazos racionales. Ambos subgrupos son densos en el grupo de lazos. Un subgrupo de interés es el subgrupo de lazos polinómicos  $L_{\text{pol}}SL(2, \mathbb{C})$ , si  $g \in L_{\text{pol}}SL(2, \mathbb{C})$  entonces las componentes tanto de  $g$  como de  $g^{-1}$  son polinomios de Laurent finitos en la variable  $\lambda$ ; son pues lazos analíticos con sólo un número finito de coeficientes no nulos en el desarrollo de Fourier. Se tiene la identificación, en el sentido de la geometría algebraica,  $L_{\text{pol}}SL(2, \mathbb{C}) = SL(2, \mathbb{C}[\lambda, \lambda^{-1}])$ . Los lazos polinómicos forman un subconjunto denso en el grupo de lazos. Todas estas propiedades son también ciertas cuando se sustituye el grupo  $SL(2, \mathbb{C})$  por otro grupo simple.

Debemos citar también otros subgrupos importantes como son  $L^\pm SL(2, \mathbb{C})$ . Estos están formados por los lazos que son valores frontera de funciones holomorfas en el interior (caso +) o en el exterior (caso -) de la circunferencia  $S^1$ , considerada como subconjunto de la esfera de Riemann. Los subgrupos  $L^\pm SL(2, \mathbb{C})$  son lazos de  $L^\pm SL(2, \mathbb{C})$  tales que sus extensiones holomorfas se anulan en el 0 (caso +) o en el  $\infty$  (caso -).

Además de los grupos de lazos se pueden considerar los grupos de lazos girados ('twisted loop groups'), que son necesarios entre otras cosas para la realización de los grupos adjuntos a las álgebras de Lie afines. Sea pues un automorfismo  $\sigma$  de  $G$ , grupo de Lie simple, y defínase

$$L_{(\sigma)}G = \{g : \mathbb{R} \rightarrow G, g(\theta + 2\pi) = \sigma g(\theta), \forall \theta \in \mathbb{R}\},$$

se puede demostrar que sólo aparecen grupos nuevos cuando  $\sigma$  es un automorfismo externo. Si  $G$  es simple serán los automorfismos generados por

los automorfismos del diagrama de Dynkin, y por tanto de orden finito, 1, 2 ó 3. Estos grupos de lazos girados se pueden interpretar como fibrados principales no triviales sobre  $S^1$  con grupo estructural  $G$ , en tanto que en el caso no girado son triviales. En  $SL(2, \mathbb{C})$  no existen automorfismos externos y en consecuencia no aparecen grupos de lazos girados.

Denotemos por  $\mathcal{H}^{(2)} := L^2(S^1, \mathbb{C}^2)$  el conjunto de clases de equivalencia de funciones de cuadrado integrable sobre  $S^1$  con valores a  $\mathbb{C}^2$ . Dado un  $g \in LSL(2, \mathbb{C})$  se obtiene el operador de multiplicación  $M_g \in GL(\mathcal{H}^{(2)})$ , perteneciente al grupo de Lie-Banach de automorfismos en  $\mathcal{H}^{(2)}$  de la forma que sigue. Representando por  $g(\lambda)$  la matriz

$$g(\lambda) = \begin{pmatrix} a(\lambda) & b(\lambda) \\ c(\lambda) & d(\lambda) \end{pmatrix},$$

con  $a(\lambda)d(\lambda) - b(\lambda)c(\lambda) = 1, \forall \lambda \in S^1$ , y por  $\psi(\lambda)$  un vector en  $\mathcal{H}^{(2)}$

$$\psi(\lambda) = \begin{pmatrix} \varphi_1(\lambda) \\ \varphi_2(\lambda) \end{pmatrix},$$

se tendrá

$$M_g[\psi(\lambda)] = g(\lambda)\psi(\lambda) = \begin{pmatrix} a(\lambda) & b(\lambda) \\ c(\lambda) & d(\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1(\lambda) \\ \varphi_2(\lambda) \end{pmatrix}.$$

De esta forma  $LSL(2, \mathbb{C})$  se puede considerar como un subgrupo de  $GL(\mathcal{H}^{(2)})$ , el subgrupo de operadores de multiplicación. Esta inclusión es importante a la hora de estudiar la geometría de los grupos de lazos en consideración, Pressley y Segal(1986).

## I.2 Álgebras afines

Para dar una teoría estructural de las álgebras de Kac-Moody es necesario introducir generalizaciones de los conceptos usados en la teoría de las álgebras simples, Jacobson(1961), Humphreys(1972), Serre(1987). Trataremos aquí dos aspectos diferentes de la teoría; en I.2.1 se desarrolla la teoría estructural y en I.2.2 nos ocuparemos de las realizaciones de las álgebras afines.

## I.2.1 Teoría estructural

Recuérdese que en el álgebra  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  la base de Cartan-Weyl está formada por los vectores

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

cuando se representa  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  por el álgebra de matrices complejas  $2 \times 2$  de traza nula. Dichos generadores satisfacen las relaciones de conmutación

$$[h, e] = 2e, \quad [h, f] = -2f, \quad [e, f] = h.$$

Definamos ahora los vectores

$$e_0 = \lambda f, \quad e_1 = e, \quad -h_0 = h_1 = h, \quad f_0 = \lambda^{-1} e, \quad f_1 = f,$$

donde  $\lambda \in S^1$ . Dichos vectores verifican las reglas de conmutación y relaciones

$$\begin{aligned} [e_i, f_j] &= \delta_{ij} h_i, & [h_i, h_j] &= 0, \\ [h_i, e_j] &= a_{ij} e_j, & [h_i, f_j] &= -a_{ij} f_j, \\ \text{ad}^3 e_i(e_j) &= 0, & \text{ad}^3 f_i(f_j) &= 0, \end{aligned}$$

en las que los números  $a_{ij}$  son los coeficientes de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix},$$

que es por definición la matriz de Cartan de  $L\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ . El conjunto  $\{e_i, f_i\}_{i=0,1}$  forma un conjunto de generadores de Chevalley de  $L_{\text{pol}}\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ , y la matriz de Cartan  $A$  define de forma unívoca la estructura del álgebra de lazos, con la restricción de que  $h_0 + h_1 = 0$ . La matriz de Cartan de  $L\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  es una extensión de la de  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ .

A partir de esta construcción podemos definir lo que se conoce como matriz de Cartan generalizada. Una matriz cuadrada  $A = (a_{ij})_{i,j=0}^{\ell} \in M_{\ell+1}(\mathbb{Z})$  será de este tipo siempre que se satisfagan las dos condiciones siguientes:

1.  $a_{ii} = 2$  y  $a_{ij} \in \mathbb{Z}_- \cup \{0\}$  cuando  $i \neq j$
2.  $a_{ij} = 0$  si y sólo si  $a_{ji} = 0$ .

La matriz será indescomponible siempre que para cualquier permutación de las columnas la matriz no se descomponga en suma directa de submatrices.

Por ejemplo, las matrices de Cartan generalizadas indescomponibles con todos los menores principales positivos son las matrices de Cartan asociadas a las álgebras de Lie simples, Humphreys(1972), Jacobson(1961) y Serre(1987). Las de tipo afín son aquellas con todos los menores principales propios positivos y  $\det A = 0$ . El rango de una matriz de Cartan generalizada de tipo afín, que a partir de ahora se llamará matriz de Cartan afín, es  $\ell$ ; las matrices de Cartan afines de rango infinito son aquellas con  $\ell = \text{card } \mathbf{Z}$ .

Las matrices de Cartan simples se clasifican mediante la teoría de Cartan-Killing, en los tipos  $A_\ell, B_\ell, C_\ell, D_\ell, E_6, E_7, E_8, F_4, G_2$ . Las cuatro primeras se denominan clásicas y las cinco últimas excepcionales. Las de tipo afín han sido clasificadas por Kac en los tipos  $X_N^{(1)}, A_{2\ell}^{(2)}, A_{2\ell+1}^{(2)}, D_{\ell-1}^{(2)}, E_6^{(2)}, D_4^{(3)}$ , aquí  $X_N$  representa una matriz de Cartan del tipo simple. Por último, las afines de rango infinito son  $A_\infty, A_{+\infty}, B_\infty, C_\infty, D_\infty$ .

Buena parte de la teoría de los sistemas integrables, en un álgebra de Kac-Moody de tipo afín, está ligada a la teoría estructural del álgebra en cuestión. Recordaremos brevemente los aspectos esenciales de esta teoría estructural.

Para construir el álgebra afín derivada correspondiente a la matriz de Cartan afín  $A$ , consideremos un espacio vectorial complejo  $V$  de dimensión  $3(\ell + 1)$  con una base  $\{e_i, h_i, f_i\}_{i=0}^\ell$ . Esta base genera un álgebra de Lie  $\tilde{\mathfrak{g}}$  con los conmutadores y relaciones siguientes

$$\begin{aligned} [e_i, f_j] &= \delta_{ij} h_i, & [h_i, h_j] &= 0, \\ [h_i, e_j] &= a_{ij} e_j, & [h_i, f_j] &= -a_{ij} f_j, \\ \text{ad}^{1-a_{ij}} e_i(e_j) &= 0, & \text{ad}^{1-a_{ij}} f_i(f_j) &= 0. \end{aligned}$$

La subálgebra abeliana  $\tilde{\mathfrak{h}} = \{h_j\}_{j=0}^\ell \subset \tilde{\mathfrak{g}}$  es lo que se conoce como subálgebra de Cartan. En su dual  $\tilde{\mathfrak{h}}^*$  existe un subconjunto discreto  $\tilde{\Pi} = \{\alpha_i\}_{i=0}^\ell$ , el conjunto de raíces simples, tales que

$$\alpha_j(h_i) = a_{ij}.$$

Este conjunto genera la red de raíces  $\tilde{Q} = \mathbf{Z}\tilde{\Pi}$  en cuyo seno se encuentra el sistema de raíces  $\tilde{\Delta}$ . Así  $\alpha \in \tilde{\mathfrak{h}}^*$  es una raíz si el subespacio de  $\tilde{\mathfrak{g}}$ ,

$$\tilde{\mathfrak{g}}_\alpha = \{X \in \tilde{\mathfrak{g}} : [h, X] = \alpha(h)X, \forall h \in \tilde{\mathfrak{h}}\}$$

es distinto de  $\{0\}$ . La multiplicidad de  $\alpha$  es por definición la dimensión de  $\tilde{\mathfrak{g}}_\alpha$ . El sistema de raíces se descompone en la unión de los conjuntos de raíces positivas y negativas,  $\tilde{\Delta} = \tilde{\Delta}_+ \cup \tilde{\Delta}_-$ , con  $\tilde{\Delta}_+ = \tilde{\Delta} \cap \mathbf{N}\tilde{\Pi} = -\tilde{\Delta}_-$ . En el caso  $LS(2, \mathbb{C})$  resulta ser  $\tilde{\Pi} = \{\alpha_0, \alpha_1\}$  y  $\tilde{\Delta} = \{n\alpha_0 + (n \pm 1)\alpha_1, n(\alpha_0 + \alpha_1)\}$

La red de raíces  $\tilde{Q}$  es un grupo abeliano que induce una graduación del álgebra  $\tilde{\mathfrak{g}}$  en subespacios  $\tilde{\mathfrak{g}}_\alpha$

$$\tilde{\mathfrak{g}} = \bigoplus_{\alpha \in \tilde{Q}} \tilde{\mathfrak{g}}_\alpha, \quad [\tilde{\mathfrak{g}}_\alpha, \tilde{\mathfrak{g}}_\beta] \subset \tilde{\mathfrak{g}}_{\alpha+\beta}.$$

Discutiremos a continuación otras posibles graduaciones de  $\tilde{\mathfrak{g}}$ , las graduaciones de tipo  $s$ , Kac(1985). Sea  $s$  un homomorfismo algebraico entre grupos abelianos,  $s : \tilde{Q} \rightarrow \mathbf{Z}$ , con los  $s(\alpha_i) = s_i$  números enteros. Se tendrá entonces

$$s\left(\pm \sum_{i=0}^{\ell} k_i \alpha_i\right) = \pm \sum_{i=0}^{\ell} k_i s_i.$$

Las  $\mathbf{Z}$ -graduaciones del álgebra  $\tilde{\mathfrak{g}}$  en subespacios de dimensión finita están asociadas a los homomorfismos  $s = (s_0, \dots, s_\ell)$  para los que  $s_i \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ , y dan lugar a las relaciones

$$\tilde{\mathfrak{g}} = \bigoplus_{j \in \mathbf{Z}} \tilde{\mathfrak{g}}_j(s), \quad \tilde{\mathfrak{g}}_j(s) = \bigoplus_{s(\alpha)=j} \tilde{\mathfrak{g}}_\alpha, \quad [\tilde{\mathfrak{g}}_i(s), \tilde{\mathfrak{g}}_j(s)] \subset \tilde{\mathfrak{g}}_{i+j}(s).$$

Por ejemplo, en la graduación principal  $s = \mathbf{1} = (1, \dots, 1)$  se obtiene  $\tilde{\mathfrak{g}}_0(\mathbf{1}) = \tilde{\mathfrak{h}}$ ,  $\tilde{\mathfrak{g}}_1(\mathbf{1}) = \mathbb{C}\{e_i\}_{i=0}^{\ell}$ ,  $\tilde{\mathfrak{g}}_{-1} = \mathbb{C}\{f_i\}_{i=0}^{\ell}$ . Cuando  $s_i = 0$  si  $i \neq n$  y  $s_n = 1$  se dice que la graduación es estandar. En general,  $\tilde{\mathfrak{g}}_0(s)$  se descompone en la suma directa de un álgebra semisimple y un centro de dimensión  $\ell - r$ , donde  $r$  es el número de elementos  $s_i$  nulos; cuando la graduación es estandar  $\tilde{\mathfrak{g}}_0(s)$  es una subálgebra regular maximal de  $\tilde{\mathfrak{g}}$ , un álgebra simple de tipo  $X_N$ , cuando  $\tilde{\mathfrak{g}}$  es de tipo  $X_N^{(k)}$ . La descomposición triangular inducida por una graduación de tipo  $s$ , de gran importancia en la teoría de la matriz- $r$  clásica objeto del próximo capítulo, está definida por

$$\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{n}_+(s) \oplus \mathfrak{n}_0(s) \oplus \mathfrak{n}_-(s), \quad [\mathfrak{n}_\pm(s), \mathfrak{n}_0(s)] \subset \mathfrak{n}_\pm(s)$$

donde

$$\mathfrak{n}_\pm(s) := \bigoplus_{j>0} \tilde{\mathfrak{g}}_{\pm j}(s), \quad \mathfrak{n}_0(s) := \tilde{\mathfrak{g}}_0(s).$$

Dos graduaciones  $s, \bar{s}$  generan la misma descomposición triangular cuando  $s_i = 0$  si y sólo si  $\bar{s}_i = 0$ . Por tanto, para considerar descomposiciones triangulares tan sólo son necesarias las graduaciones binarias,  $s_i \in \mathbb{Z}_2$ .

El rango de  $A^t$  es  $\ell$  y por tanto existe un único vector  $(a_0^t, \dots, a_\ell^t)$  que genera su núcleo, cuyas componentes son números naturales primos entre sí. Pues bien, el centro de  $\tilde{\mathfrak{g}}$  es unidimensional y esta generado por  $c = \sum_{i=0}^{\ell} a_i^t h_i \in \tilde{\mathfrak{h}}$ . Por tanto en el álgebra  $\bar{\mathfrak{g}} = \tilde{\mathfrak{g}}/Cc$  se tiene la ligadura  $\sum_{i=0}^{\ell} a_i^t h_i = 0$ , de donde se concluye que la subálgebra de Cartan, como subálgebra del álgebra cociente, tiene dimensión  $\ell$ . En el caso  $A_1^{(1)}$  se obtiene  $L\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ .

### I.2.2 Realizaciones

En I.1 se definieron los grupos de lazos  $L_{(\sigma)}G$  asociados a un automorfismo  $\sigma$  del grupo  $G$ . Denotando también por  $\sigma$  el automorfismo inducido en el álgebra  $\mathfrak{g}$  podemos definir el álgebra de lazos  $L_{(\sigma)}\mathfrak{g}$  análogamente, y resulta ser el álgebra de Lie del grupo de lazos en cuestión. Veremos a continuación que  $L_{(\sigma)}\mathfrak{g}$  tiene la estructura de un álgebra de Kac-Moody afín mediante una elección conveniente de los generadores. Si  $\mathfrak{g}$  es simple basta considerar automorfismos de orden finito  $n$ , esto es  $\sigma^n = \text{id}$ . El álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  se descompone en suma directa de subespacios propios  $\mathfrak{g}_j$  de  $\sigma$ , asociados a los valores propios  $\epsilon^j$  ( $\epsilon$  raíz  $n$ -ésima de la unidad) de  $\sigma$ , y esta descomposición da lugar a la  $\mathbb{Z}_n$ -graduación de  $\mathfrak{g}$  siguiente

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}_n} \mathfrak{g}_j, \quad [\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] \subset \mathfrak{g}_{i+j \bmod n}.$$

Para  $L_{(\sigma)}\mathfrak{g}$  tendremos la  $\mathbb{Z}$ -graduación

$$L_{(\sigma)}\mathfrak{g} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \lambda^j \mathfrak{g}_{j \bmod n}.$$

De esta forma se puede demostrar que el álgebra de lazos  $L\mathfrak{g}$ , donde  $\mathfrak{g}$  es de tipo  $X_N$ , es isomorfa al álgebra  $\bar{\mathfrak{g}}$  de tipo  $X_N^{(1)}$ . Como ya se comentó, para las álgebras simples  $\mathfrak{g}$ , los únicos automorfismos  $\mu$  que generan álgebras de lazos no isomorfas a las  $L\mathfrak{g}$  son externos, esto es, asociados a una simetría del diagrama de Dynkin de  $\mathfrak{g}$ . Basta considerar por tanto  $\mu$  de orden 2 cuando  $\mathfrak{g}$  es del tipo  $A_N, D_N, E_6$ . En este caso  $L_{(\mu)}\mathfrak{g}$  tiene la estructura de un álgebra  $\bar{\mathfrak{g}}$  de tipo  $X_N^{(2)}$ , según  $\mathfrak{g}$  sea uno de los tres tipos anteriores. Por

otra parte  $\mu$  es de orden 3 cuando  $\mathfrak{g}$  es de tipo  $D_4$ ,  $L_{(\mu)}\mathfrak{g}$  da lugar entonces a una  $\overline{\mathfrak{g}}$  de tipo  $D_4^{(3)}$ .

Sea  $\mathfrak{g}_0$  la subálgebra de  $\mathfrak{g}$  invariante bajo el automorfismo  $\mu$  y  $\{E_i, F_i\}_{i \in I}$  un conjunto de generadores de Chevalley de  $\mathfrak{g}_0$ , donde  $I$  es un subconjunto de  $\ell$  elementos de  $\{0, \dots, \ell\}$ . Podemos definir una pareja de vectores en  $\mathfrak{g}_1$ ,  $E_a, F_a$ , con  $a \in \{0, \dots, \ell\} \setminus I$  tales que  $[E_a, F_a] \in \mathfrak{h}$ , la subálgebra de Cartan de  $\mathfrak{g}$ , y además  $\{E_i\}_{i=0}^{\ell}$  es un sistema de generadores de  $\mathfrak{g}$ . El automorfismo  $\sigma$  de  $\mathfrak{g}$  asociado a estos datos se construye como sigue. Si  $m = k \sum_{i=0}^{\ell} a_i s_i$  definamos el automorfismo  $\sigma_{s,k}$  sobre este conjunto de generadores como

$$\sigma_{s,k} E_i = e^{\frac{2\pi s_i}{m}} E_i.$$

Con esta definición el álgebra de lazos  $L_{(\sigma_{s,k})\text{pol}}\mathfrak{g}$  contiene el sistema de generadores de Chevalley

$$\{\lambda^{s_i} E_i, \lambda^{-s_i} F_i\}_{i=0}^{\ell}$$

y su cierre es isomorfo al álgebra  $\overline{\mathfrak{g}}$  de tipo  $X_N^{(k)}$  por lo que este isomorfismo da lugar a una  $\mathbf{Z}$ -graduación de tipo  $s$ . Los automorfismos asociados a dos graduaciones  $s, \bar{s}$  son conjugados bajo la acción del grupo de automorfismos de  $\mathfrak{g}$  si y sólo si  $s$  y  $\bar{s}$  lo son bajo la acción de la simetrías del diagrama de Dynkin, y de ahí la equivalencia de las descomposiciones triangulares asociadas. Por ejemplo en el caso  $L\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$  se obtiene la realización

$$e_0 = \lambda^{s_0} f, e_1 = \lambda^{s_1} e, -h_0 = h_1 = h, f_0 = \lambda^{-s_0} e, f_1 = \lambda^{-s_1} f,$$

para la graduación tipo  $(s_0, s_1)$ . El caso considerado al comienzo de la subsección es la graduación básica  $(1, 0)$  en tanto que la principal es  $(1, 1)$ .

El último de los objetos de interés para nuestros propósitos en un álgebra de lazos son las álgebras de Heisenberg. Estudiaremos dos subálgebras de Heisenberg (módulo extensión central) de  $L\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$ , la homogénea y la principal.

La subálgebra homogénea  $\mathfrak{h}$  se define como

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_+ \oplus \mathfrak{h}_-$$

con

$$\mathfrak{h}_{\pm} = L_1^{\pm} \mathfrak{h}$$

donde  $\mathfrak{g}_\pm$  son sendas subálgebras de  $\mathfrak{g}$ ; si  $P_+, P_-$  son los proyectores asociados a esta descomposición, el endomorfismo  $R = P_+ - P_-$  es solución de la ecuación. La demostración de este hecho es un sencillo cálculo. Se tiene  $[X, Y]_R = [P_+X, P_+Y] - [P_-X, P_-Y]$ , y por tanto  $B_R(X, Y) = [P_+X - P_-X, P_+Y - P_-Y] - 2([P_+X, P_+Y] + [P_-X, P_-Y])$ , esto es  $B_R(X, Y) = -([P_+X + P_-X, P_+Y + P_-Y]) = -[X, Y]$  por lo que este endomorfismo satisface la ecuación de Yang-Baxter clásica modificada.

## II.2 Resolución de un álgebra de Lie. Transformada de Cayley

Pasaremos ahora a un estudio detallado de aquellas matrices- $r$  clásicas  $R$  que satisfacen la ecuación de Yang-Baxter clásica modificada. Es claro que  $R_\pm := \frac{1}{2}(R \pm \text{id})$  son homomorfismos entre las álgebras de Lie  $\mathfrak{g}_R$  y  $\mathfrak{g}$ ,  $R_\pm[X, Y]_R = [R_\pm X, R_\pm Y]$ . De aquí que sea interesante estudiar tanto sus núcleos como sus imágenes.

**Definición II.2.1** Dada  $R$  solución de la ecuación de Yang-Baxter clásica modificada se definen los espacios, núcleos e imágenes de  $R_\pm = \frac{1}{2}(R \pm \text{id})$ ,

$$\mathfrak{k}_\pm := \ker R_\mp, \quad \mathfrak{g}_\pm := \text{im } R_\pm.$$

Obviamente los núcleos  $\mathfrak{k}_\pm$  son ideales de  $\mathfrak{g}_R$  y las imágenes  $\mathfrak{g}_\pm$  subálgebras de  $\mathfrak{g}$ . Es evidente, de la definición, que  $R|_{\mathfrak{k}_\pm} = R_\pm|_{\mathfrak{k}_\pm} = \pm \text{id}$ , de donde es inmediato que  $\mathfrak{k}_\pm \subset \mathfrak{g}_\pm$ ,  $\mathfrak{k}_+ \cap \mathfrak{k}_- = \{0\}$ ; también  $[\mathfrak{k}_\pm, \mathfrak{g}_\pm] = R_\pm[\mathfrak{k}_\pm, \mathfrak{g}]_R \subset \mathfrak{k}_\pm$  y por ello  $\mathfrak{k}_\pm$  es un ideal de  $\mathfrak{g}_\pm$ . Así pues los subespacios  $\mathfrak{m}_\pm := \mathfrak{g}_\pm/\mathfrak{k}_\pm$  son álgebras de Lie. Estos resultados se resumen en la

**Proposición II.2.1** Los núcleos  $\mathfrak{k}_\pm$  son ideales de  $\mathfrak{g}_R$  y los subespacios  $\mathfrak{g}_\pm$  son subálgebras de  $\mathfrak{g}$ . Además  $\mathfrak{k}_\pm \subset \mathfrak{g}_\pm$ , siendo  $\mathfrak{k}_\pm$  ideales de  $\mathfrak{g}_\pm$ , y por tanto  $\mathfrak{m}_\pm := \mathfrak{g}_\pm/\mathfrak{k}_\pm$  son álgebras de Lie.

## Capítulo II

### Matriz- $r$ clásica

Se analiza en este capítulo el concepto de matriz- $r$  clásica, que tan importante papel juega en la teoría de los sistemas integrables, Jimbo(1989), tal y como aparece en los trabajos Semenov-Tyan-Shanskii(1983,1985,1987,1989). Trataremos primero en detalle la idea de matriz- $r$  clásica como endomorfismo en un álgebra de Lie para desarrollar después la relación con el problema de factorización en grupos de Lie y la ecuación de Yang-Baxter clásica modificada. Esta elección se debe a la mayor versatilidad de la noción de matriz- $r$  clásica dada en Semenov-Tyan-Shanskii(1983) con respecto al modo tradicional de entender estas ideas, ver Faddeev y Takhtajan(1987) y Jimbo(1989), y la amplitud de su rango de aplicabilidad en la teoría de los sistemas integrables.

En II.1 se presenta la definición de matriz- $r$  clásica, la ecuación de Yang-Baxter clásica y se muestra el ejemplo más sencillo y fundamental de matriz- $r$ . En la siguiente sección se pasa a describir la estructura asociada a toda solución de la ecuación de Yang-Baxter clásica modificada, es decir la resolución del álgebra de Lie en la que actúa una matriz- $r$ . En la tercera sección se estudian estas soluciones en el cuadrado del álgebra de Lie donde están definidas; esto es, la suma directa de dos copias del álgebra.

En los apéndices finales hemos recogido otros aspectos de la teoría de la matriz- $r$  clásica, que no están directamente relacionados con los resultados de esta tesis, pero son de interés en sí mismos.

## II.1 Definiciones

Comenzemos con la definición de matriz- $r$  clásica en el espíritu de Semenov-Tyan-Shanskii(1983). Para mayor motivación se puede considerar el caso  $L\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  donde se tiene la descomposición

$$L\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) = L^+\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \oplus L_1^-\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}),$$

que induce para toda matriz  $X$  en  $L\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  la descomposición

$$X = X_+ - X_-, \quad X_+ \in L^+\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}), \quad X_- \in L_1^-\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}).$$

De esta forma se puede introducir un nuevo corchete de Lie en  $L\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  dado por

$$[X, Y]' = [X_+, Y_+] - [X_-, Y_-].$$

La identidad de Jacobi resulta de un simple cálculo. Existen pues dos estructuras de álgebra de Lie sobre  $L\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ , por tanto es lógico plantearse la posibilidad de generalizar estos argumentos y analizar sus consecuencias.

**Definición II.1.1** Dada un álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ , con corchete de Lie  $[\cdot, \cdot]$ , y un endomorfismo lineal  $R$  del espacio vectorial  $\mathfrak{g}$  se define la aplicación bilineal y antisimétrica  $[\cdot, \cdot]_R : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  como

$$[X, Y]_R := \frac{1}{2}([RX, Y] + [X, RY]).$$

Cuando  $[\cdot, \cdot]_R$  sea un corchete de Lie para el espacio vectorial  $\mathfrak{g}$  entonces  $R$  se llamará matriz- $r$  clásica, y se denotará por  $\mathfrak{g}_R$  el álgebra de Lie asociada,  $(\mathfrak{g}, R)$  se dice que es un álgebra de Lie doble.

Para que  $R$  sea una matriz- $r$  clásica es necesario y suficiente que se verifique la propiedad de Jacobi  $J_R = 0$ , donde la aplicación trilineal de Jacobi  $J_R : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  asociada a  $[\cdot, \cdot]_R$  viene definida como

$$J_R(X, Y, Z) := [[X, Y]_R, Z]_R + [[Z, X]_R, Y]_R + [[Y, Z]_R, X]_R.$$

Si además tenemos en cuenta que

$$J_R(X, Y, Z) = [B_R(X, Y), Z] + [B_R(Z, X), Y] + [B_R(Y, Z), X] \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}$$

donde

$$B_R(X, Y) := [RX, RY] - 2R[X, Y]_R,$$

y que se cumple la propiedad de Jacobi para  $[\cdot, \cdot]_R$  se concluye la

**Proposición II.1.1** *Una condición suficiente para que  $R$  sea una matriz- $r$  clásica es que se satisfaga la ecuación, que llamaremos de Yang-Baxter clásica  $t$ -modificada,*

$$B_R(X, Y) = -t^2[X, Y] \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Esta ecuación contiene esencialmente dos casos, el primero es  $t = 0$ , obteniéndose lo que se conoce como ecuación de Yang-Baxter clásica

$$R([RX, Y] + [X, RY]) = [RX, RY] \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

El segundo es cuando  $t \neq 0$ ; ahora es posible construir el endomorfismo dilatado  $R_t = \frac{1}{t}R$ , que cumple la ecuación  $B_{R_t}(X, Y) = -[X, Y] \forall X, Y \in \mathfrak{g}$ , y continúa por tanto siendo una matriz- $r$  clásica. Por consiguiente, basta considerar la ecuación de Yang-Baxter clásica modificada, esto es el caso  $t = 1$ ,

$$R([RX, Y] + [X, RY]) = [RX, RY] + [X, Y] \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Si  $\sigma \in \text{Aut } \mathfrak{g}$  se define entonces  $R_\sigma := \sigma \circ R \circ \sigma^{-1}$ . Es fácil comprobar que  $J_{R_\sigma} = \sigma \circ J_R \circ \sigma^{-1}$  y también que  $B_{R_\sigma} = \sigma \circ B_R \circ \sigma^{-1}$ . Por tanto, si  $R$  es una matriz- $r$  clásica y satisface la ecuación de Yang-Baxter clásica  $t$ -modificada así lo hará  $R_\sigma$ .

Habitualmente las matrices- $r$  clásicas que verifican las ecuaciones de Yang-Baxter clásica o bien su modificada son las que se prestan a un mayor número de aplicaciones. Por ejemplo, el caso modificado es el marco natural para la generalización del problema de factorización de Riemann-Hilbert, pero no son las únicas matrices- $r$  de interés. De hecho en los artículos Reyman y Semenov-Tyan-Shansky(1988) y Reyman y Semenov-Tyan-Shanskii (1989-2) se presentan matrices- $r$  clásicas de la forma  $R_A = R \circ A$  donde  $R$  es una matriz- $r$  clásica y  $A$  es un endomorfismo lineal que conmuta con las derivaciones del álgebra  $\mathfrak{g}$ . En concreto, si  $R$  cumple la ecuación de Yang-Baxter clásica  $t$ -modificada se verificará entonces  $B_{R_A}(X, Y) = -t^2[AX, AY] \forall X, Y \in \mathfrak{g}$ . Estas matrices- $r$  clásicas aparecen ligadas por ejemplo a ciertos problemas espectrales asociados a KdV dependiente de la energía y generalizaciones de la ecuación de Harry-Dym,(Fordy, Reyman y Semenov-Tyan-Shansky(1989) y Marshall(1990)).

Un ejemplo sencillo de solución de la ecuación de Yang-Baxter clásica modificada lo da toda descomposición

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_+ \oplus \mathfrak{g}_-,$$

donde  $\mathfrak{g}_\pm$  son sendas subálgebras de  $\mathfrak{g}$ ; si  $P_+, P_-$  son los proyectores asociados a esta descomposición, el endomorfismo  $R = P_+ - P_-$  es solución de la ecuación. La demostración de este hecho es un sencillo cálculo. Se tiene  $[X, Y]_R = [P_+X, P_+Y] - [P_-X, P_-Y]$ , y por tanto  $B_R(X, Y) = [P_+X - P_-X, P_+Y - P_-Y] - 2([P_+X, P_+Y] + [P_-X, P_-Y])$ , esto es  $B_R(X, Y) = -([P_+X + P_-X, P_+Y + P_-Y]) = -[X, Y]$  por lo que este endomorfismo satisface la ecuación de Yang-Baxter clásica modificada.

## II.2 Resolución de un álgebra de Lie. Transformada de Cayley

Pasaremos ahora a un estudio detallado de aquellas matrices- $r$  clásicas  $R$  que satisfacen la ecuación de Yang-Baxter clásica modificada. Es claro que  $R_\pm := \frac{1}{2}(R \pm \text{id})$  son homomorfismos entre las álgebras de Lie  $\mathfrak{g}_R$  y  $\mathfrak{g}$ ,  $R_\pm[X, Y]_R = [R_\pm X, R_\pm Y]$ . De aquí que sea interesante estudiar tanto sus núcleos como sus imágenes.

**Definición II.2.1** Dada  $R$  solución de la ecuación de Yang-Baxter clásica modificada se definen los espacios, núcleos e imágenes de  $R_\pm = \frac{1}{2}(R \pm \text{id})$ ,

$$\mathfrak{k}_\pm := \ker R_\mp, \quad \mathfrak{g}_\pm := \text{im } R_\pm.$$

Obviamente los núcleos  $\mathfrak{k}_\pm$  son ideales de  $\mathfrak{g}_R$  y las imágenes  $\mathfrak{g}_\pm$  subálgebras de  $\mathfrak{g}$ . Es evidente, de la definición, que  $R|_{\mathfrak{k}_\pm} = R_\pm|_{\mathfrak{k}_\pm} = \pm \text{id}$ , de donde es inmediato que  $\mathfrak{k}_\pm \subset \mathfrak{g}_\pm$ ,  $\mathfrak{k}_+ \cap \mathfrak{k}_- = \{0\}$ ; también  $[\mathfrak{k}_\pm, \mathfrak{g}_\pm] = R_\pm[\mathfrak{k}_\pm, \mathfrak{g}]_R \subset \mathfrak{k}_\pm$  y por ello  $\mathfrak{k}_\pm$  es un ideal de  $\mathfrak{g}_\pm$ . Así pues los subespacios  $\mathfrak{m}_\pm := \mathfrak{g}_\pm / \mathfrak{k}_\pm$  son álgebras de Lie. Estos resultados se resumen en la

**Proposición II.2.1** Los núcleos  $\mathfrak{k}_\pm$  son ideales de  $\mathfrak{g}_R$  y los subespacios  $\mathfrak{g}_\pm$  son subálgebras de  $\mathfrak{g}$ . Además  $\mathfrak{k}_\pm \subset \mathfrak{g}_\pm$ , siendo  $\mathfrak{k}_\pm$  ideales de  $\mathfrak{g}_\pm$ , y por tanto  $\mathfrak{m}_\pm := \mathfrak{g}_\pm / \mathfrak{k}_\pm$  son álgebras de Lie.

Ello permite la

**Definición II.2.2** El homomorfismo  $\Theta$  entre las álgebras de Lie  $\mathfrak{m}_+$  y  $\mathfrak{m}_-$  dado por

$$\Theta : \begin{array}{ccc} \mathfrak{m}_+ & \rightarrow & \mathfrak{m}_- \\ R_+X + \mathfrak{k}_+ & \mapsto & R_-X + \mathfrak{k}_-, \end{array}$$

se llamará transformación de Cayley asociada a  $R$ .

Que es un homomorfismo se deduce de  $\Theta([R_+X + \mathfrak{k}_+, R_+Y + \mathfrak{k}_+]) = \Theta([R_+X, R_+Y] + \mathfrak{k}_+) = \Theta(R_+[X, Y]_R + \mathfrak{k}_+) = R_-[X, Y]_R + \mathfrak{k}_- = [R_-X, R_-Y] + \mathfrak{k}_- = [\Theta(R_+X + \mathfrak{k}_+), \Theta(R_+Y + \mathfrak{k}_+)]$ . La transformación de Cayley es inyectiva ya que  $\ker \Theta$  es el conjunto de aquellas clases de equivalencia  $R_+X + \mathfrak{k}_+$  tales que  $X \in \mathfrak{k}_+$  (si  $R_-X \in \mathfrak{k}_-$  siempre se puede escoger algún  $X$  tal que  $R_+X$  sea un representante de la misma clase de equivalencia en  $\mathfrak{m}_+$  pero con  $R_-X = 0$ ) y por tanto este núcleo tan solo contiene al 0, como evidentemente es suprayectivo es un isomorfismo,  $\mathfrak{m}_+ \cong \mathfrak{m}_-$ .

Dados  $X_{\pm} \in \mathfrak{g}_{\pm}$  la ecuación  $\Theta(X_+ + \mathfrak{k}_+) = X_- + \mathfrak{k}_-$  es equivalente a la existencia de un único vector  $X = X_+ - X_- \in \mathfrak{g}$ , tal que  $X_{\pm} = R_{\pm}X$ . La unicidad es evidente a partir de la relación  $R_+ - R_- = \text{id}$ . La existencia se deduce del siguiente modo: puesto que  $X_+ \in \text{im } R_+$  existe un  $\hat{X}$  tal que  $X_+ = R_+\hat{X}$ , y la propiedad con respecto a la transformación de Cayley asegura que  $R_-\hat{X} - X_- \in \mathfrak{k}_-$ , luego el vector  $X = \hat{X} + (R_-\hat{X} - X_-) = R_+\hat{X} - X_- = X_+ - X_-$  cumple las propiedades deseadas. Todo ello permite enunciar el

**Teorema II.2.1** *La transformación de Cayley es un isomorfismo entre las álgebras de Lie  $\mathfrak{m}_+$  y  $\mathfrak{m}_-$ . Para cada  $X \in \mathfrak{g}$  existe una única descomposición de la forma*

$$X = X_+ - X_-, \quad X_{\pm} \in \mathfrak{g}_{\pm}, \quad \Theta(X_+ + \mathfrak{k}_+) = X_- + \mathfrak{k}_-$$

Dadas subálgebras  $\mathfrak{g}_{\pm} \subset \mathfrak{g}$  e ideales suyos  $\mathfrak{k}_{\pm} \subset \mathfrak{g}_{\pm}$  es interesante conocer todos los posibles endomorfismos lineales  $R \in \text{End } \mathfrak{g}$  que satisfacen la ecuación de Yang-Baxter clásica modificada con  $\text{im } R_{\pm} = \mathfrak{g}_{\pm}$  y  $\ker R_{\mp} = \mathfrak{k}_{\pm}$ . Es claro que se deberá tener  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_+ + \mathfrak{g}_-$ ,  $\mathfrak{k}_+ \cap \mathfrak{k}_- = \{0\}$  así como el isomorfismo  $\mathfrak{g}_+/\mathfrak{k}_+ \cong \mathfrak{g}_-/\mathfrak{k}_-$ . Supóngase que existen subálgebras isomorfas  $\mathfrak{m}_{\pm} \cong \mathfrak{g}_{\pm}/\mathfrak{k}_{\pm}$  tales que es posible escribir

$$\mathfrak{g}_{\pm} = \mathfrak{k}_{\pm} \oplus \mathfrak{m}_{\pm}.$$

Sea

$$\theta : \mathfrak{m}_+ \rightarrow \mathfrak{m}_-$$

un isomorfismo lineal entre ambos subespacios vectoriales, que es regular, lo que significa que  $\text{im } (\text{id} - \theta)$  complementa a  $\mathfrak{k}_+ \oplus \mathfrak{k}_-$  en  $\mathfrak{g}$ . Estos isomorfismos regulares permiten escribir todo  $X \in \mathfrak{g}$  como

$$X = X_+ - X_- + (\text{id} - \theta)X_0$$

con  $X_{\pm} \in \mathfrak{k}_{\pm}$  y  $X_0 \in \mathfrak{m}_+$ . En tal caso es posible definir el endomorfismo  $R_{\theta}$  asociado a este isomorfismo regular  $\theta$  como

$$R_{\theta}X = X_+ + X_- + (\text{id} + \theta)X_0.$$

Además, estos endomorfismos son los únicos tales que  $\mathfrak{g}_{\pm} = \text{im}(R_{\theta})_{\pm}$  y  $\mathfrak{k}_{\pm} = \ker(R_{\theta})_{\mp}$ . La transformada de Cayley, en el supuesto que  $R_{\theta}$  cumpla la ecuación de Yang-Baxter clásica modificada, será  $\Theta((R_{\theta})_+X + \mathfrak{k}_+) = (R_{\theta})_-X + \mathfrak{k}_-$ . Ahora bien,  $(R_{\theta})_+X = X_+ + X_0$  y  $(R_{\theta})_-X = X_- + \theta X_0$ , y como  $X_{\pm} \in \mathfrak{k}_{\pm}$  entonces la transformada de Cayley se puede escribir  $\Theta(X_0 + \mathfrak{k}_+) = \theta X_0 + \mathfrak{k}_-$ , donde los representantes de las clases de equivalencia se escogen en  $\mathfrak{m}_{\pm}$ . De ahí se deduce que la transformación de Cayley  $\Theta$  es identificable con  $\theta$ , y como además  $\Theta$  es un homomorfismo entre álgebras de Lie se deberá cumplir

$$[\theta X_0, \theta Y_0] + \mathfrak{k}_- = \theta[X_0, Y_0] + \mathfrak{k}_-.$$

Esta condición de homomorfismo algebraico módulo  $\mathfrak{k}_-$  es la única ecuación a satisfacer por  $\theta$  para que  $R_{\theta}$  verifique la ecuación de Yang-Baxter clásica modificada. De aquí se concluye el

**Teorema II.2.2** Sean  $\mathfrak{g}_{\pm}$  subálgebras de  $\mathfrak{g}$  con  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_+ + \mathfrak{g}_-$ , y  $\mathfrak{k}_{\pm} \subset \mathfrak{g}_{\pm}$  ideales suyos con  $\mathfrak{k}_+ \cap \mathfrak{k}_- = \{0\}$ , tal que es posible la descomposición

$$\mathfrak{g}_{\pm} = \mathfrak{k}_{\pm} \oplus \mathfrak{m}_{\pm},$$

donde  $\mathfrak{m}_+, \mathfrak{m}_-$  son subálgebras isomorfas. Sea  $\theta : \mathfrak{m}_+ \rightarrow \mathfrak{m}_-$  un isomorfismo regular, esto es  $\text{im}(\text{id} - \theta) + (\mathfrak{k}_+ \oplus \mathfrak{k}_-) = \mathfrak{g}$ , entonces todo vector  $X \in \mathfrak{g}$  es expresable como

$$X = X_+ - X_- + (\text{id} - \theta)X_0,$$

con  $X_{\pm} \in \mathfrak{k}_{\pm}, X_0 \in \mathfrak{m}_+$ . Además cualquier endomorfismo  $R$  de  $\mathfrak{g}$  que satisfaga la ecuación de Yang-Baxter clásica modificada, con  $\mathfrak{k}_{\pm} = \ker(R \mp \text{id})$  y  $\mathfrak{g}_{\pm} = \text{im}(R \pm \text{id})$  está asociado a algún isomorfismo regular  $\theta$ , que verifique  $[\theta X_0, \theta Y_0] = \theta[X_0, Y_0] \text{ mod } \mathfrak{k}_-$ , con

$$RX = X_+ + X_- + (\text{id} + \theta)X_0.$$

Cuando  $\mathfrak{m}_+ \cong \mathfrak{m}_- \cong \mathfrak{m}$ , la situación se simplifica ya que en este caso se tiene la descomposición triangular

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k}_+ \oplus \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{k}_-,$$

y la matriz- $r$  será

$$R_\theta = P_+ - P_- + (\text{id} + \theta)(\text{id} - \theta)^{-1}P_0,$$

donde  $P_+, P_0, P_-$  son los proyectores asociados a la descomposición triangular. Se debe subrayar aquí que  $\theta$  es un isomorfismo lineal en  $\mathfrak{m}$ , y además  $(\text{id} + \theta)(\text{id} - \theta)^{-1}$  es la transformada de Cayley usual, Postnikov(1986), de  $\theta$ .

### II.3 Matriz- $r$ en un producto directo

A toda álgebra de Lie doble  $(\mathfrak{g}, R)$  se le puede asociar su cuadrado  $\mathfrak{d} = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$ . Se tendrá la inclusión  $i_R : \mathfrak{g}_R \hookrightarrow \mathfrak{d}$  definida por  $i_RX := (R_+X, R_-X) \in \mathfrak{g}_+ \oplus \mathfrak{g}_-$ . Sea el álgebra de Lie

$$\widehat{\mathfrak{g}}_R = \text{im } i_R = \{(X_+, X_-) \in \mathfrak{d} : X_\pm \in \mathfrak{g}_\pm, \Theta(X_+ + \mathfrak{k}_+) = X_- + \mathfrak{k}_-\}.$$

Argumentos análogos a los utilizados a lo largo de esta sección permiten concluir que  $i_R : \mathfrak{g}_R \rightarrow \widehat{\mathfrak{g}}_R$  es un isomorfismo entre álgebras de Lie. La identidad

$$(X, Y) = (R_+Y - R_-X, R_+Y - R_-X) + (R_+(X - Y), R_-(X - Y))$$

da lugar a la descomposición del álgebra  $\mathfrak{d}$  como

$$\mathfrak{d} = {}^\delta\mathfrak{g} \oplus \widehat{\mathfrak{g}}_R,$$

con  ${}^\delta\mathfrak{g} = \{(X, X) \in \mathfrak{d}, X \in \mathfrak{g}\}$ , la subálgebra diagonal. En términos de esta descomposición podemos definir el endomorfismo

$$R_\mathfrak{d} = P_{{}^\delta\mathfrak{g}} - P_{\widehat{\mathfrak{g}}_R},$$

que está ligado a los proyectores asociados a la descomposición del álgebra de Lie  $\mathfrak{d}$ . El operador  $R_\mathfrak{d}$  que verifica la ecuación de Yang-Baxter clásica modificada y es por tanto una matriz- $r$  clásica. De esta forma vemos que el cuadrado de  $(\mathfrak{g}, R)$  es el álgebra de Lie doble  $(\mathfrak{d}, R_\mathfrak{d})$  y el estudio de este cuadrado es equivalente a estudiar  $R$ .

### II.4 El problema de factorización en el grupo

Se vera aquí como la descomposición de un álgebra de Lie doble, asociada a un endomorfismo  $R$  que cumple Yang-Baxter clásica modificada genera

problemas de factorización en grupos de Lie. Sean  $G_{\text{loc}}$  y  $(G_R)_{\text{loc}}$  gérmenes de grupos de Lie locales con álgebras de Lie  $\mathfrak{g}$  y  $\mathfrak{g}_R$  respectivamente, Li y Parmentier(1989).

**Definición II.4.1** Se definen  $R_{\pm} : (G_R)_{\text{loc}} \rightarrow G_{\text{loc}}$  como los homomorfismos, entre grupos de Lie locales, tales que  $T_e R_{\pm} = R_{\pm}$ . Denotamos por  $G_{\pm} = R_{\pm}(G_R)_{\text{loc}}$  los gérmenes de grupos de Lie locales con álgebras de Lie  $\mathfrak{g}_{\pm}$  y por  $K_{\pm}$  a los subgrupos normales de  $G_{\pm}$  con álgebras de Lie los ideales  $\mathfrak{k}_{\pm}$ ,  $K_{\pm} = \{g \in G_{\text{loc}} : R_{\pm}g = e\}$ .

La transformación de Cayley  $\Theta$  también se puede exponenciar a un homomorfismo  $\Theta$  entre grupos de Lie,

$$\begin{aligned} \Theta : G_+/K_+ &\rightarrow G_-/K_- \\ R_+g \cdot K_+ &\mapsto R_-g \cdot K_- \end{aligned}$$

**Definición II.4.2** Dado  $G_{\text{loc}}$ , definimos  $D = G_{\text{loc}} \times G_{\text{loc}}$ , el cuadrado de  $G_{\text{loc}}$ , y la inclusión  $i_R : (G_R)_{\text{loc}} \hookrightarrow D$  con  $i_Rg = (R_+g, R_-g)$ .

La imagen de  $i_R$ , que es un homomorfismo de grupos de Lie, resulta ser

$$(\widehat{G_R})_{\text{loc}} := \text{im } i_R = \{(g_+, g_-) : g_{\pm} \in G_{\pm}, \Theta(g_+ \cdot K_+) = g_- \cdot K_-\},$$

y es isomorfa al grupo  $(G_R)_{\text{loc}}$ . La transformación

$$\begin{aligned} \varphi : (\widehat{G_R})_{\text{loc}} &\rightarrow G_{\text{loc}} \\ (g_+, g_-) &\mapsto g_-^{-1}g_+, \end{aligned}$$

compuesta con  $i_R$  se denota por  $\sigma = \varphi \circ i_R : (G_R)_{\text{loc}} \rightarrow G_{\text{loc}}$  con  $\sigma g = (R_-g)^{-1} \cdot (R_+g)$ .

En el caso en que sea posible la extensión de estos gérmenes de grupos de Lie locales a grupos de Lie conexos y simplemente conexos  $G, G_R$  con álgebras de Lie  $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_R$  respectivamente, se puede demostrar que  $R_{\pm}$  son extendibles. Por ello, tanto  $i_R$  como  $\varphi$  son a su vez extendibles y resulta posible definir la extensión  $\sigma : G_R \rightarrow G$  que tiene como imagen una célula abierta en  $G$ , ver Semenov-Tyan-Shansky(1985). Por tanto, siempre que  $g \in \text{im } \sigma$  la solución al problema de factorización

$$g = g_-^{-1} \cdot g_+, \quad g_{\pm} \in G_{\pm}, \Theta(g_+ \cdot K_+) = g_- \cdot K_-$$

existe y es única. Dados  $h, g \in G_R$  su producto en  $G_R$  viene dado por  $h \star g = \sigma(\sigma^{-1}g \cdot \sigma^{-1}h) = g_-^{-1} \cdot h \cdot g_+$ .

En el cuadrado  $D$  de  $G$  se encuentra el subgrupo diagonal  ${}^\delta G = \{(g, g) \in D\}$ . Es inmediato comprobar igualmente que existe una única solución al problema de factorización

$$(g, h) = (\xi_+, \xi_-) \cdot (\zeta, \zeta), \quad (\zeta, \zeta) \in {}^\delta G, (\xi_+, \xi_-) \in \widehat{G}_R.$$

Todas estas propiedades de factorización en grupos de Lie y de descomposición en sus respectivas álgebras de Lie están asociadas a matrices- $r$  clásicas que satisfacen la ecuación de Yang-Baxter clásica modificada. Para este caso se tiene garantizada la existencia los homomorfismos  $R_\pm$ . Cuando el endomorfismo  $R$  cumple la ecuación de Yang-Baxter clásica no se tiene esta pareja de homomorfismos, aparece ahora sólo un homomorfismo  $\frac{1}{2}R$  entre las álgebras de Lie  $\mathfrak{g}_R$  y  $\mathfrak{g}$ . Todas las propiedades de descomposición y factorización desaparecen, convirtiéndose este caso  $t = 0$  en una degeneración del caso modificado.

El teorema de factorización de Birkhoff en  $LSL(2, \mathbb{C})$  corresponde a la matriz- $r$   $R = P_+ - P_-$  en el esquema anterior.

**Teorema II.4.1** *Existe un subconjunto abierto y denso de  $L_0SL(2, \mathbb{C})$  tal que todo elemento suyo  $g$  es factorizable como*

$$g = g_-^{-1} \cdot g_+, \quad g_- \in L_1^- SL(2, \mathbb{C}), g_+ \in L^+ SL(2, \mathbb{C}).$$

El espacio homogéneo  $X = LSL(2, \mathbb{C})/L^+SL(2, \mathbb{C})$  es localmente homeomorfo a la variedad  $L_1^- SL(2, \mathbb{C})$ . Más aún, se puede demostrar que este espacio homogéneo es isomorfo a cierta grassmanniana  $Gr_\infty^{(2)}$ , Porteous(1981), de subespacios del Hilbert  $\mathcal{H}^{(2)}$ , ver Pressley y Segal(1986).

Terminaremos escribiendo la expresión de la acción coadjunta en  $G_R$ . Claramente si  $g = g_-^{-1} \cdot g_+, g_\pm \in G_\pm, \Theta(g_+ \cdot K_+) = g_- \cdot K_-$  y  $X = X_+ - X_-, X_\pm \in \mathfrak{g}_\pm, \Theta(X_+ + \mathfrak{k}_+) = X_- + \mathfrak{k}_-$  se tendrá la acción adjunta de  $G_R$  sobre  $\mathfrak{g}_R$

$$Ad_R g(X) = Ad_{g_+}(X_+) - Ad_{g_-}(X_-).$$

De aquí se concluye de forma inmediata que la acción coadjunta será

$$Ad_R^* g(\alpha) = (R_+)^* Ad^* g_+(\alpha) - (R_-)^* Ad^* g_-(\alpha),$$

donde se ha utilizado el operador  $R^* \in \text{End } \mathfrak{g}^*$  dual de  $R, R^* \alpha(X) = \alpha(RX)$ .



## Capítulo III

### Soluciones de la ecuación de Yang-Baxter

En este capítulo se presentan diferentes tipos de soluciones de la ecuación de Yang-Baxter clásica modificada. En III.1 se estudia la ecuación en el álgebra simple  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ . En la siguiente sección se construyen soluciones asociadas a descomposiciones triangulares del álgebra. En la tercera sección se emplea la teoría de Cartan-Killing para las álgebras simples, Humphreys(1972) y Serre(1987), para la construcción de soluciones asociadas a descomposiciones parabólicas del álgebra. En III.4 estudiamos algunas posibilidades en álgebras afines. Por último, en las dos secciones siguientes analizaremos las soluciones racionales y elípticas en un álgebra de lazos. En relación con estas soluciones ver Belavin(1980,1981) y Belavin y Drinfel'd(1982,1984).

#### III.1 Soluciones de la ecuación de Yang-Baxter en $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$

La clasificación de todas las posibles soluciones en  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  se llevo a cabo en Guil y Mañas(1990) módulo el grupo de automorfismos  $\text{Aut } \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  que en este caso sólo contiene automorfismos internos; esto es, sus elementos serán conjugaciones por puntos  $g$  del grupo simple  $SL(2, \mathbb{C})$ . También se tuvo en cuenta en el trabajo citado que si  $R$  es solución  $-R$  también lo es, donde la transición  $R \rightarrow -R$  es equivalente a  $\mathfrak{g}_\pm, \mathfrak{k}_\pm \rightarrow \mathfrak{g}_\mp, \mathfrak{k}_\mp$ . Empleando estas simetrías aparecen las siguientes posibilidades.

1. Si  $\dim \mathfrak{g}_+ = 3$  entonces  $\mathfrak{g}_+ = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  y por ello sus únicos ideales serán  $\mathfrak{k}_+ = \{0\}$  ó  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ , de aquí que  $\mathfrak{m}_+ = \mathfrak{g}_+/\mathfrak{k}_+$  sea  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  ó  $\{0\}$  respectivamente. La primera opción obliga a que  $\mathfrak{m}_- = \mathfrak{g}_-/\mathfrak{k}_- = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  y por ello  $\mathfrak{g}_- = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  y  $\mathfrak{k}_- = \{0\}$ . Luego  $\mathfrak{m}_+ = \mathfrak{m}_- = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  y por ello la solución asociada será  $R_\theta = (\text{id} + \theta)(\text{id} - \theta)^{-1}$  con

$\theta$  un automorfismo regular. Debe recordarse que  $\mathfrak{k}_- = \{0\}$ , y por ello  $\theta$  no ha de tener puntos fijos, pero tales automorfismos sin puntos fijos no existen cuando el álgebra es simple como es el caso, Belavin(1984). La segunda opción es  $\mathfrak{k}_+ = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  de donde la solución asociada es  $R = \text{id}$ .

2. El caso  $\dim \mathfrak{g}_+ = 2$  no es tan sencillo. Denotemos mediante  $\{e, h, f\}$  la base de Cartan-Weyl de  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ . Pues bien, no es difícil comprobar que todo vector  $X \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  pertenece a la órbita adjunta bien de  $e$  o bien de  $h$ , según su determinante sea nulo o no. De este modo las subálgebras bidimensionales serán conjugadas a una de las dos siguientes:  $\mathbb{C}\{h, X\}$  ó  $\mathbb{C}\{e, X\}$  respectivamente; aplicando la calidad de subálgebra de estos subespacios se concluye que todas las subálgebras bidimensionales de  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  son conjugadas a la subálgebra de Borel  $\mathbb{C}\{e, h\}$ . Por tanto, en este caso se podrá escoger  $\mathfrak{g}_+ = \mathbb{C}\{e, h\}$ , pues la clasificación se realiza módulo automorfismos. El uso de la transformación  $R \rightarrow -R$  permite restringir los casos posibles a  $\dim \mathfrak{g}_- = 2, 1$ .

Si  $\mathfrak{k}_+ = \mathfrak{g}_+$  entonces  $\mathfrak{k}_- = \mathfrak{g}_-$ , como  $\mathfrak{k}_+ \cap \mathfrak{k}_- = \{0\}$  es necesario que  $\dim \mathfrak{g}_- = 1$  esto es  $\mathfrak{g}_- = \mathbb{C}\{f + \mu h + \nu e\}$ ; como  $\mathfrak{m}_+ = \mathfrak{m}_- = \{0\}$  la solución será la diferencia  $R = \pi_+ - \pi_-$  de los proyectores  $\pi_{\pm}$  asociadas a la descomposición  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) = \mathfrak{g}_+ \oplus \mathfrak{g}_-$ .

Como  $\dim \mathfrak{k}_+ = 1$  implica que  $\mathfrak{k}_+ = \mathbb{C}e$ , ya que es este el único ideal unidimensional del álgebra de Borel, se tiene a  $\mathfrak{m}_+ = \mathbb{C}h$  y por ello  $\mathfrak{m}_-$  es unidimensional lo que con el uso de la fórmula  $\dim \mathfrak{k}_+ + \dim \mathfrak{k}_- + \dim \mathfrak{m}_- = 3$ , lleva a la conclusión de que  $\dim \mathfrak{k}_- = 1$  y  $\dim \mathfrak{g}_- = 2$ . Así pues existirá  $g \in \text{SL}(2, \mathbb{C})$  tal que  $\mathfrak{g}_- = \mathbb{C}\{f_g, h_g\}$  con  $f_g := \text{Ad}g(f)$ ,  $h_g := \text{Ad}g(h)$ . La subálgebra bidimensional  $\mathbb{C}\{f, h\}$  es invariante bajo la acción adjunta del subgrupo bidimensional adjunto; como  $\mathfrak{g}_-$  complementa a la subálgebra de Borel  $g$  se puede escoger de la forma  $g = e^{\nu e}$ . Así pues  $f_g = f + \nu h - \nu^2 e$ ,  $h_g = h - 2\nu e$  y  $\mathfrak{k}_- = \mathbb{C}f_g$ . Por tanto se debe construir la solución asociada a los datos

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_+ &= \mathbb{C}\{e, h\}, & \mathfrak{k}_+ &= \mathbb{C}e, & \mathfrak{m}_+ &= \mathbb{C}h \\ \mathfrak{g}_- &= \mathbb{C}\{f_g, h_g\}, & \mathfrak{k}_- &= \mathbb{C}f_g, & \mathfrak{m}_- &= \mathbb{C}h_g. \end{aligned}$$

Sea pues  $\theta : \mathfrak{m}_+ \rightarrow \mathfrak{m}_-$  definido por  $\theta H = zH_g$ ,  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Supongamos un vector arbitrario  $X = w_+e + w_0h + w_-f$ , con coordenadas

complejas  $w_{\pm}, w_0 \in \mathbb{C}$ . Que  $\theta$  sea regular significa que este vector  $X$  se pueda expresar como  $X = v_+e + v_0h_g + v_-f_g$ . Esto es siempre posible si  $z \neq 1$ . También concluimos las relaciones

$$\begin{aligned} v_+ &= w_+ - 2\nu \frac{z}{1+z} w_0 + \nu^2 \frac{1+z}{1-z} w_- \\ v_0 &= \frac{1}{1-z} w_0 - \nu \frac{1}{1-z} w_- \\ v_- &= w_- \end{aligned}$$

Por tanto la solución se escribe como

$$\begin{aligned} R_{\theta}(w_+e + w_0h + w_-f) &= (w_+ - 4\nu \frac{z}{1-z} w_0 + 2\nu^2 \frac{1+z}{1-z} w_-)e + \\ &\quad (\frac{1+z}{1-z} w_0 - 2\nu \frac{1}{1-z} w_-)h - w_-f. \end{aligned}$$

Por último si  $\mathfrak{k}_+ = \{0\}$  entonces  $\dim \mathfrak{m}_- = 2$ , de donde se desprende que  $\mathfrak{k}_- = \{0\}$  lo que es una contradicción, ya que  $\dim \mathfrak{k}_+ + \dim \mathfrak{k}_- + \dim \mathfrak{m}_- = 3$ .

3. El caso restante  $\dim \mathfrak{g}_+ = 1$  como es obvio de la discusión previa no da nada nuevo. (Sólo que  $\dim \mathfrak{g}_- = 1$  sería novedoso y esto es imposible.)

Todas estas conclusiones se resumen en el

**Teorema III.1.1** *Las únicas soluciones de la ecuación de Yang-Baxter clásica modificada en el álgebra de Lie simple  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  serán  $\pm R_r$ , donde  $r$  es una conjugación por algún  $g \in \text{SL}(2, \mathbb{C})$  y  $R$  puede ser, usando la notación  $X = w_+e + w_0h + w_-f$ :*

- i)  $R = \text{id}$ ,  
ii)

$$R(w_+e + w_0h + w_-f) = (w_+ - 2\mu w_-)e + (w_0 - 2\nu w_-)h - w_-f$$

con  $\mu, \nu \in \mathbb{C}$ ,

- iii)

$$\begin{aligned} R(w_+e + w_0h + w_-f) &= (w_+ - 4\nu \frac{z}{1-z} w_0 + 2\nu^2 \frac{1+z}{1-z} w_-)e + \\ &\quad (\frac{1+z}{1-z} w_0 - 2\nu \frac{1}{1-z} w_-)h - w_-f, \end{aligned}$$

donde  $\nu \in \mathbb{C}$  y  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ .

### III.2 Descomposiciones triangulares

Por lo que acabamos de ver la búsqueda de soluciones de la ecuación de Yang-Baxter clásica modificada no es tarea fácil en el caso de un álgebra de Lie arbitraria  $\mathfrak{g}$ . Presentaremos a continuación dos métodos particulares para generar nuevas soluciones a partir de soluciones ya conocidas.

**Teorema III.2.1** *Dada la descomposición triangular*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_+ \oplus \mathfrak{n}_0 \oplus \mathfrak{n}_-,$$

y la solución  $\rho$  de la ecuación de Yang-Baxter clásica modificada en la subálgebra  $\mathfrak{n}_0$ , entonces

$$R = P_+ + \rho \circ P_0 - P_-,$$

es solución en  $\mathfrak{g}$ , donde  $P_{\pm}, P_0$  son los proyectores asociados a la descomposición triangular.

De aquí que  $P_+ + P_0 - P_-$  sea solución, las demás soluciones con  $\rho \neq \text{id}$  son modificaciones de esta. El segundo método necesita de un homomorfismo

$$\varphi \in \text{Hom}(\mathfrak{n}_+ \oplus \mathfrak{n}_0, \mathfrak{n}_0),$$

para obtener la solución

$$R = (\text{id} + 2\rho_- \circ \varphi) \circ P_+ - P_0 - P_-,$$

denominándose esta solución deformación de la solución  $P_+ - P_0 - P_-$ . Aunque en esta tesis las soluciones deformadas no se utilizan es importante subrayar que con su uso es posible la construcción de la ecuación conocida como de Calogero-Degasperis que es una modificación de mKdV, ver Guil(1984). La demostración de estos hechos es elemental, Guil(1989,1990-1), y en Guil y Mañas(1990) se da su aplicación a la construcción de sistemas integrables de tipo AKNS modificado. Ambos tipos de soluciones contienen el caso analizado al final de II.1. Si el álgebra  $\mathfrak{g}$  se descompone en suma directa de dos subálgebras

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_+ \oplus \mathfrak{g}_-,$$

y  $P_{\pm}$  son los proyectores asociados, entonces su diferencia

$$R = P_+ - P_-,$$

es solución de la ecuación de Yang-Baxter clásica modificada. Si existe una forma bilineal, Ad-invariante y no degenerada tal que las subálgebras  $\mathfrak{g}_{\pm}$  son isotropas, esta solución es antisimétrica. De hecho, en el cuadrado  $\mathfrak{d}$  de  $\mathfrak{g}$  la solución  $R_{\mathfrak{d}}$  asociada a una solución arbitraria en  $\mathfrak{g}$  es de este tipo.

### III.3 Álgebras simples y descomposiciones parabólicas

Sea  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie simple y  $\mathfrak{h}$  una subálgebra de Cartan de  $\mathfrak{g}$ . Denotemos por  $\Delta, \Pi = \{\alpha_i\}_{i=1}^l$  y  $\Delta_+$  las raíces, raíces simples y las raíces positivas, respectivamente, del par  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ . Se puede escribir entonces

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \left( \bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_\alpha \right),$$

con  $\mathfrak{g}_\alpha = \mathbb{C}E_\alpha$ , subespacios unidimensionales, tales que  $B(E_\alpha, E_\beta) = B_\alpha \delta_{\alpha, -\beta}$ ,  $B(E_\alpha, \mathfrak{h}) = 0$  para toda raíz  $\alpha$  y  $B|_{\mathfrak{h}}$  es no degenerada. Aquí  $B$  es la forma de Cartan-Killing.

Si  $\Pi_0 \subset \Pi$  es un subsistema de raíces simples y se denota por  $\Delta_0 = \mathbb{Z}\Pi_0 \cap \Delta$  y su componente positiva por  $\Delta_{0,+} = \mathbb{N}\Pi_0 \cap \Delta_+$ , obtenemos la descomposición triangular asociada

$$\mathfrak{n}_\pm = \bigoplus_{\pm\alpha \in \Delta_+ \setminus \Delta_{0,+}} \mathfrak{g}_\alpha, \quad \mathfrak{n}_0 = \mathfrak{h} \oplus \left( \bigoplus_{\alpha \in \Delta_0} \mathfrak{g}_\alpha \right),$$

donde  $\mathfrak{n}_0$  es una subálgebra regular ( $\mathfrak{h}$ -invariante) reductiva,  $\mathfrak{n}_0 = [\mathfrak{n}_0, \mathfrak{n}_0] \oplus \mathfrak{z}$  aquí  $[\mathfrak{n}_0, \mathfrak{n}_0]$  es un álgebra semisimple y  $\mathfrak{z} \subset \mathfrak{h}$  es el centro de  $\mathfrak{n}_0$  con dimensión el cardinal de  $\Pi \setminus \Pi_0$ . Por construcción es claro que  $\mathfrak{n}_\pm$  son ideales nilpotentes de  $\mathfrak{n}_\pm \oplus \mathfrak{n}_0$  y por tanto la descomposición es triangular.

La subálgebra  $\mathfrak{p} = \mathfrak{n}_+ \oplus \mathfrak{n}_0$  es una subálgebra parabólica estandar y esta descomposición como suma directa de  $\mathfrak{n}_+$  y  $\mathfrak{n}_0$  es de Levi, Postnikov(1986). Aquí  $\mathfrak{n}_+$  es el radical (ideal soluble maximal) y  $\mathfrak{n}_0$  es un álgebra semisimple. Si  $G, P$  son los subgrupos adjuntos de  $\mathfrak{g}$  y  $\mathfrak{p}$  el espacio homogéneo  $X = G/P$  es una 'flag manifold' generalizada, Baston y Eastwood(1990). Por tanto, si  $\rho$  es solución de la ecuación de Yang-Baxter clásica modificada en  $\mathfrak{n}_0$  y  $\pi_\pm, \pi_0$  los proyectores asociados a la descomposición triangular, entonces

$$R = \pi_+ + \rho \circ \pi_0 - \pi_-$$

es solución en  $\mathfrak{g}$ . Cuando  $\rho = \text{id}$  los problemas de factorización en el grupo  $G$  inducidos por esta descomposición se describen mediante el espacio homogéneo  $X = G/P$ .

En el caso de que el álgebra parabólica  $\mathfrak{p}$  coincida con la subálgebra de Borel estandar, esto es  $\Pi_0 = \emptyset$ , tendremos  $\mathfrak{n}_0 = \mathfrak{h}$  y basta que  $\rho \in \text{End } \mathfrak{h}$  sea un endomorfismo arbitrario de la subálgebra de Cartan para que  $R$  sea solución.

Las soluciones antisimétricas más generales, se pueden encontrar en Belavin y Drinfel'd(1982,1984). También en Semenov-Tyan-Shanskii(1983) se introducen soluciones no ya antisimétricas sino graduadas en un cierto sentido. Esto extiende los resultados de A.A.Belavin y V.G.Drinfel'd.

### III.4 Álgebras afines y graduaciones

Recordemos que en I.2 construimos descomposiciones triangulares de las álgebras de Kac-Moody  $\tilde{\mathfrak{g}}$  tipo afin  $X_N^{(k)}$

$$\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{n}_+(s) \oplus \mathfrak{n}_0(s) \oplus \mathfrak{n}_-(s)$$

asociadas a graduaciones tipo  $s = (s_0, \dots, s_\ell)$  y que basta considerar aquellas con  $s_i = 0, 1$ .

Si  $\rho$  es solución de la ecuación de Yang-Baxter clásica modificada en el álgebra semisimple  $\mathfrak{n}_0(s)$  es fácil construir una solución en el álgebra afin con el método de modificación descrito anteriormente.

Las graduaciones estandar binarias contienen todas las posibles soluciones generadas de este modo. Si  $\bar{s}$  es una graduación binaria no estandar siempre existirá una estandar  $s$  tal que  $\mathfrak{n}_0(\bar{s})$  se obtenga como una descomposición triangular, asociada a un álgebra parabólica, del álgebra semisimple  $\mathfrak{n}_0(s)$ ; se concluye que a cada una de estas subálgebras maximales regulares está asociada una familia de soluciones.

### III.5 La solución racional

Dada la descomposición triangular del álgebra de lazos  $L\mathfrak{g}$

$$L\mathfrak{g} = L_1^+ \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g} \oplus L_1^- \mathfrak{g},$$

y la solución  $\rho$  de la ecuación de Yang-Baxter clásica modificada en el álgebra simple  $\mathfrak{g}$ , entonces  $R = P_+ + \rho \circ P_0 - P_-$  es solución en  $L\mathfrak{g}$ , aquí  $\text{id} = P_+ + P_0 + P_-$  es la resolución de la identidad asociada a la descomposición triangular. Cuando  $\rho = \text{id}$  llegamos a la conocida solución racional de Yang, ver Faddeev y Takhtajan(1987) y Semenov-Tyan-Shanskii (1983),  $R = P_+ + P_0 - P_-$  dada por la descomposición de Birkhoff  $L\mathfrak{g} = L^+ \mathfrak{g} \oplus L_1^- \mathfrak{g}$ .

Es interesante describir con un poco más de detalle la solución de Yang, para ello introducimos la forma bilineal  $\tilde{B}$ , simétrica Ad-invariante y no

degenerada, en el álgebra de lazos  $L\mathfrak{g}$ ,

$$\tilde{B}(X, Y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{S^1} d\lambda B(X(\lambda), Y(\lambda)),$$

donde  $B$  es la forma de Cartan-Killing en  $\mathfrak{g}$ . Con la parametrización  $\lambda = e^{i\theta}$ ,  $\theta \in [0, 2\pi)$   $\tilde{B}$  se reescribe como

$$\tilde{B}(X, Y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta e^{i\theta} B(X(\theta), Y(\theta)).$$

Con respecto a esta forma en el álgebra de lazos la solución de Yang es antisimétrica, ya que  $(P_+ + P_0)^t = P_-$ . Por tanto, la solución racional dota a  $L\mathfrak{g}$  de una estructura de álgebra de Baxter y de de biálgebra de Lie, ver Apéndice B.

Además,  $R \in \text{End } L\mathfrak{g}$  se puede interpretar, en el sentido de distribuciones, Vladimirov(1979), como

$$(RX)(\theta) = \int_0^{2\pi} d\varphi R(\theta, \varphi) X(\varphi),$$

donde el núcleo integral  $R(\theta, \varphi) \in \text{End } \mathfrak{g}$  es, en general, una distribución. En Reyman y Semenov-Tyan-Shanskii(1989-2) se introduce la notación equivalente  $RX(\lambda) = \int_{S^1} d\mu r(\lambda, \mu) X(\mu)$ . Es evidente que

$$R^t(\theta, \varphi) = e^{-i(\theta-\varphi)} R(\varphi, \theta)^t.$$

Los desarrollos de Fourier permiten escribir los núcleos integrales

$$P_{\pm}(\theta, \varphi) = \sum_{n>0} e^{\pm in(\theta-\varphi)}, \quad P_0(\theta, \varphi) = 1,$$

de donde se obtiene

$$\begin{aligned} (P_+ + P_0)(\theta, \varphi) &= \frac{1}{2}(\delta(\theta - \varphi) + R(\theta, \varphi)) \\ P_-(\theta, \varphi) &= \frac{1}{2}(\delta(\theta - \varphi) - R(\theta, \varphi)), \end{aligned}$$

con, Pressley y Segal(1986),

$$R(\theta, \varphi) = \text{VP}\left(1 + i \cotg\left(\frac{\theta - \varphi}{2}\right)\right)$$

que es el núcleo integral singular de la matriz- $r$  clásica de Yang y VP denota el valor principal de Cauchy.

Veremos ahora la relación de la teoría de Sochocki para integrales tipo Cauchy y la solución racional de Yang. Introducimos la integral de tipo Cauchy, Markusevich(1970),

$$\widehat{X}(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{S^1} d\mu \frac{X(\mu)}{\mu - \lambda},$$

donde  $X \in L\mathfrak{g}$ . La función  $\widehat{X} : \mathbb{C} \setminus S^1 \rightarrow \mathfrak{g}$  es holomorfa en su dominio de definición y se anula en  $\infty$ . Yu W. Sochocki demostró que existían los límites  $\widehat{X}_+(\lambda_0), \widehat{X}_-(\lambda_0)$  de  $\widehat{X}(\lambda)$  cuando  $\lambda \rightarrow \lambda_0 \in S^1$  desde el interior del disco unitario  $D(0; 1)$  o desde el exterior de este, respectivamente. También es cierta la relación  $X(\lambda_0) = \widehat{X}_+(\lambda_0) - \widehat{X}_-(\lambda_0)$ . Como  $\widehat{X}$  es holomorfa se tendrá  $\widehat{X}_+ \in L^+\mathfrak{g}$  y  $\widehat{X}_- \in L_1^-\mathfrak{g}$  de donde  $\widehat{X}_+ = (P_+ + P_0)X$  y  $\widehat{X}_- = -P_-X$ . Así pues la teoría de valores frontera de integrales tipo Cauchy de Sochocki está en íntima relación con el teorema de factorización de Birkhoff y la matriz- $r$  clásica de Yang. De las fórmulas de Sochocki

$$\begin{aligned} \widehat{X}_+(\lambda) &= \frac{1}{2\pi i} \text{VP} \int_{S^1} d\mu \frac{X(\mu)}{\mu - \lambda} + \frac{1}{2} X(\lambda), \\ \widehat{X}_-(\lambda) &= \frac{1}{2\pi i} \text{VP} \int_{S^1} d\mu \frac{X(\mu)}{\mu - \lambda} - \frac{1}{2} X(\lambda), \end{aligned}$$

obtenemos

$$RX(\lambda) = \frac{1}{\pi i} \text{VP} \int_{S^1} d\mu \frac{X(\mu)}{\mu - \lambda},$$

ver Novikov, Manakov, Pitaevskii y Zakharov(1984) y Faddeev y Takhtajan(1987). Con ello se justifica la aparición de las fórmulas de Sochocki con distribuciones, Vladimirov(1979), para los núcleos integrales  $(P_+ + P_0)(\theta, \varphi)$  y  $P_-(\theta, \varphi)$ .

Cuando se consideran la subálgebras de lazos polinómicos  $L_{\text{pol}}\mathfrak{g}$  es fácil observar la validez de las relaciones, Reyman y Semenov-Tyan-Shanskii(1989-1),

$$\begin{aligned} \widetilde{B}(X, Y) &= \text{Res}_0 d\mu B(X(\mu), Y(\mu)) \\ (P_+ + P_0)X(\lambda) &= \text{Res}_\infty d\mu \frac{X(\mu)}{\mu - \lambda} \\ P_-X(\lambda) &= \text{Res}_0 d\mu \frac{X(\mu)}{\mu - \lambda}, \end{aligned}$$

donde la notación  $\text{Res}_z$  indica el residuo en el punto  $z \in \mathbb{C}$ .

### III.6 La solución elíptica

Nos ocuparemos ahora de la solución elíptica de Baxter-Sklyanin-Belavin o solución XYZ. Esta fue la primera matriz- $r$  clásica que se consideró, Sklyanin(1979), y como veremos se encuentra relacionada con el álgebra  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  y la integrabilidad del modelo ferromagnético de Landau-Lifshitz. Sklyanin demostró que este es el límite clásico del modelo continuo de la red cuántica XYZ (como se sabe es un modelo estadístico cuántico integrado en Baxter(1972)). Con posterioridad, Belavin(1980,1981), se extendió esta solución elíptica a las álgebras  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ , demostrándose en Belavin y Drinfel'd(1982,1984) que son este tipo de álgebras las únicas que admiten soluciones elípticas. P.I.Holod construyó un álgebra de Lie a base de relaciones y generadores que daba la estructura de esta solución, Holod(1987-1,2). Finalmente en Semenov-Tyan-Shanskii(1987) y Reyman y Semenov-Tyan-Shanskii(1989-1) se escribe esta solución como la diferencia de los proyectores asociados a una descomposición elíptica del álgebra de lazos analíticos  $L_{\text{an}} \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ . De esta forma se generalizan los resultados de Holod. Las soluciones elípticas no admiten modificaciones mediante una matriz  $\rho$  pues no presentan de modo natural descomposiciones triangulares asociadas.

Sea la curva elíptica  $E = \mathbb{C}/(\mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2)$  de periodos fundamentales  $\omega_1, \omega_2$ . A cada par  $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{Z}_n^2$  le asociamos una única función elíptica  $w_a$  meromorfa en  $E$ , con sus polos, que son simples, situados en los puntos  $E_n$  de orden  $n$  del toro  $E_n = \{\frac{1}{n}(b_1\omega_1 + b_2\omega_2) : b_i \in \mathbb{Z}_n\}$ , normalizada de modo que su residuo en el origen,  $\lambda = 0$ , es la unidad y verificando la propiedad de automorfía

$$w_a(\lambda + \frac{1}{n}(b_1\omega_1 + b_2\omega_2)) = e^{\frac{2\pi i}{n}(a_2b_1 - a_1b_2)} w_a(\lambda).$$

Si  $\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1}$ , para cada pareja  $(r_1, r_2)$  introducimos la función  $\Theta_{[r_1, r_2]}$ , que se llamará función theta de características  $(r_1, r_2)$  asociada al toro  $E$ , ver Cherednik(1987) y Dubrovin(1981), definida por

$$\Theta_{[r_1, r_2]}(\lambda) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp(\pi i(n + r_2)^2 \tau + 2\pi i(n + r_2)(\lambda + r_1)).$$

Las funciones theta de Jacobi, Markusevich(1970),  $\theta_j$  se definen en términos de las anteriores como

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \Theta_{[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} & \theta_2 &= -i\Theta_{[1, \frac{1}{2}]} \\ \theta_3 &= -\Theta_{[1, 1]} & \theta_4 &= i\Theta_{[\frac{1}{2}, 1]}. \end{aligned}$$

Utilizando estas funciones theta es posible dar una expresión explícita de las funciones automorfas, con  $a \neq 0$ , Cherednik(1987),

$$w_a(\lambda) = \frac{n\pi\theta_2(0)\theta_3(0)\theta_4(0)}{\omega_1\Theta_{[\frac{a_1}{n}+\frac{1}{2}, \frac{a_2}{n}+\frac{1}{2}]}(0)} \frac{\Theta_{[\frac{a_1}{n}+\frac{1}{2}, \frac{a_2}{n}+\frac{1}{2}]}(\frac{n}{\omega_1}\lambda)}{\theta_1(\frac{n}{\omega_1}\lambda)}.$$

Por ejemplo cuando  $n = 2$ , si  $\wp$  denota la función de Weierstrass en la curva elíptica  $E$ , Markusevich(1970) y Jones y Singerman(1987), y  $e_1 = \wp(\frac{\omega_1}{2})$ ,  $e_2 = \wp(\frac{\omega_2}{2})$ ,  $e_3 = \wp(\frac{\omega_1+\omega_2}{2})$  se llega a

$$\begin{aligned} w_{(1,0)}(\lambda) &= 2\sqrt{\wp(2\lambda) - e_1} \\ w_{(1,1)}(\lambda) &= 2\sqrt{\wp(2\lambda) - e_2} \\ w_{(0,1)}(\lambda) &= 2\sqrt{\wp(2\lambda) - e_3}. \end{aligned}$$

Recordemos la representación proyectiva irreducible del grupo  $\mathbf{Z}_n^2$  sobre  $\mathbf{C}^n$ . Se definen las matrices

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \epsilon & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \epsilon^{n-1} \end{pmatrix}, \quad T_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

donde  $\epsilon$  es un raíz  $n$ -ésima de la unidad, y la acción de  $\mathbf{Z}_n^2$  sobre el espacio vectorial  $\mathbf{C}^n$  viene dada a través de  $a = (a_1, a_2) \rightarrow T_a := T_1^{a_1} \cdot T_2^{a_2}$  con

$$T_a \cdot T_b = e^{\frac{2\pi i}{n}(a_2 b_1 - a_1 b_2)} T_b \cdot T_a.$$

Esta representación se extiende a  $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{C})$  por medio de la acción adjunta  $a \rightarrow \text{Ad}T_a$ ; además, admite la reducción a la subálgebra  $\mathfrak{sl}(n, \mathbf{C})$  donde  $\{T_a\}_{a \neq 0}$  es una base.

El teorema de Mittag-Leffler en curvas elípticas tiene como consecuencia el

**Teorema III.6.1** *Los lazos analíticos  $L_{\text{an}}\mathfrak{sl}(n, \mathbf{C})$  se descomponen en*

$$L_{\text{an}}\mathfrak{sl}(n, \mathbf{C}) = L^+\mathfrak{sl}(n, \mathbf{C}) \oplus L_{\text{el}}\mathfrak{sl}(n, \mathbf{C}),$$

donde  $L_{\text{el}}\mathfrak{sl}(n, \mathbf{C})$  denota la restricción a  $S^1$  de funciones elípticas  $X$  cuyos polos yacen en  $E_n$  y que satisfacen la condición de automorfía

$$X(\lambda + a) = \text{Ad}T_a(X(\lambda)).$$

Con respecto a la estructura algebraica de  $L_{el}\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$  puede consultarse Sklyanin(1983) y Odesskii y Feigin(1990).

**Proposición III.6.1** Con la notación  $w_a^{(k)} = \frac{(-1)^k}{k!} \frac{d^k}{d\lambda^k} w_a$  se puede escribir

$$L_{el}\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) = \mathbb{C}\{w_a^{(k)}T_a : k \geq 0, a \in \mathbb{Z}_n^2\}.$$

Por tanto la solución elíptica a la ecuación de Yang-Baxter clásica modificada es  $R = P_+ - P_E$ , donde  $P_+, P_E$  son los proyectores asociados a la descomposición del álgebra de lazos. Esta solución es antisimétrica con respecto a  $\tilde{B}$  y por tanto los lazos analíticos forman de nuevo un álgebra de Baxter y son una biálgebra de Lie, ver apéndice B.

El operador  $P_E$  se puede describir de forma explícita. Para ello se define el núcleo integral

**Definición III.6.1**

$$r_{el}(\lambda) := \sum_{a \neq 0} \epsilon_{a_1 a_2} w_a(\lambda) T_{-a} \otimes {}^b T_a,$$

donde la forma de Cartan-Killing en  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$  está dada por  $B(X, Y) = \frac{1}{n} \text{Tr}(X \cdot Y)$ ,  ${}^b T_a \in \mathfrak{g}^*$  con  ${}^b T_a(X) = B(T_a, X)$ , ver apéndice A, y  $\epsilon_{a_1 a_2}$  es el símbolo de Levi-Civita.

El proyector  $P_E$  se podrá escribir como

$$P_E X(\lambda) = \text{Res}_{0 \neq \mu} r_{el}(\lambda - \mu) X(\mu),$$

en particular

$$P_E \left( \sum_{k,a} c_{ka} \lambda^{-k-1} T_a \right) = \sum_{k \geq 0, a} c_{ka} w_a^{(k)}(\lambda) T_a.$$

En el caso  $n = 2$  se puede poner

$$T_{(0,0)} = \text{id}, \quad T_{(0,1)} = \sigma_1, \quad T_{(1,0)} = \sigma_3, \quad T_{(1,1)} = i\sigma_2,$$

donde  $\sigma_i$  son las matrices de Pauli. Introduciendo la notación

$$\begin{aligned} w_{(0,1)} &= w_1, & w_{(1,0)} &= w_3, & w_{(1,1)} &= w_2 \\ e_3 &= A_1 & e_1 &= A_3 & e_2 &= A_2. \end{aligned}$$

tendremos las variables  $w_j$  en la cuádrica dada por las ecuaciones

$$w_j^2 - w_i^2 = 4(A_i - A_j)$$

que no es más que una parametrización de la curva elíptica de partida. También será  $w^2(\lambda) := \frac{1}{3}(w_1^2 + w_2^2 + w_3^2)(\lambda) = 4\wp(2\lambda)$  y  $w_1 w_2 w_3(\lambda) = -4\frac{d}{d\lambda}\wp(2\lambda)$  y por tanto  $w_j^{(0)} = w_j$ ,  $w_j^{(1)} = w_j^{-1} w_1 w_2 w_3$ ,  $w_j^{(2)} = w^2 w_j + 2A_j w_j$ , etc. De aquí que el álgebra elíptica  $L_{el}\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  tenga como generadores a

$$\{w_j \sigma_j, w_j^{-1} w_1 w_2 w_3 \sigma_j, w^2 w_j \sigma_j, \dots\}$$

que es precisamente la construcción dada en Holod(1987-1).

Daremos ahora una versión más geométrica de la descomposición elíptica que nos permitirá plantear problemas de factorización asociados en el grupo de lazos.

Sea  $f$  una función meromorfa sobre  $\mathbb{C}$  y denotemos por  $\mathcal{P}_f$  el conjunto de sus polos. Escogemos  $f$  de modo que sus polos son simples, y el origen,  $\lambda = 0$ , es un polo simple con residuo la unidad. Sea  $\gamma \subset \mathbb{C}$  una curva de Jordan, cerrada y rectificable, tal que está contenida en un entorno suficientemente pequeño del origen y rodea una vez a este punto en el sentido horario. Dada  $X \in C(\gamma)$  definimos la integral de tipo Cauchy generalizada

$$\hat{X}(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} d\mu f(\mu - \lambda) X(\mu).$$

Pues bien,  $\hat{X}$  está definida en  $\mathbb{C} \setminus \gamma + \mathcal{P}_f$  donde es una función holomorfa. La línea de argumentación de Markusevich(1970) cuando trata la teoría de Sochocki se extiende a este caso tras la sustitución  $\frac{1}{\lambda} \rightarrow f(\lambda)$ . Tan sólo es necesario la modificación de los razonamientos que incluyen argumentos tipo  $\varepsilon$ - $\delta$ . Como en la sección anterior es posible demostrar que existen los límites  $\hat{X}_I(\lambda_0)$ ,  $\hat{X}_D(\lambda_0)$  de  $\hat{X}$  en el punto  $\lambda_0 \in \gamma$  por la derecha e izquierda de  $\gamma$

$$\begin{aligned} \hat{X}_I(\lambda_0) &= \frac{1}{2\pi i} \text{VP} \int_{\gamma} d\mu f(\mu - \lambda_0) X(\mu) + \frac{1}{2} X(\lambda_0) \\ \hat{X}_D(\lambda_0) &= \frac{1}{2\pi i} \text{VP} \int_{\gamma} d\mu f(\mu - \lambda_0) X(\mu) - \frac{1}{2} X(\lambda_0), \end{aligned}$$

respectivamente.

Sea  $\gamma$  una pequeña circunferencia centrada en el origen y contenida en la curva elíptica  $E$ . Obviamente  $C^\infty(\gamma, \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})) \cong L\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ ; tomemos  $X \in L\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$  y definamos la integral de tipo Cauchy siguiente

$$\hat{X}(\lambda) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} d\mu r_{el}(\mu - \lambda) X(\mu),$$

donde  $r_{el}$  esta definido en la **Definición III.6.1**. Por construcción  $\widehat{X}$  es una función definida en  $E \setminus E_n + \gamma$ , holomorfa y con la propiedad de automorfía

$$\widehat{X}(\lambda + a) = \text{Ad}T_a(X(\lambda)), \quad \forall a \in \mathbf{Z}_n^2.$$

Con el uso de la base  $\{T_a\}_{a \neq 0}$  se podra expresar  $\widehat{X} = \sum_{a \neq 0} \widehat{X}_a T_a$  con  $\widehat{X}_a = \frac{1}{n} \text{Tr}(T_a \widehat{X})$ , esto es,

$$\widehat{X}_a(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} d\mu \epsilon_{a_1 a_2} w_a(\mu - \lambda) X_a(\mu).$$

Cuando  $\lambda \rightarrow \lambda_0 \in \gamma$  las fórmulas de Sochoki generalizadas, en el sentido expresado anteriormente, serán

$$\begin{aligned} \widehat{X}_+(\lambda_0) &= \frac{1}{2\pi i} \text{VP} \int_{\gamma} d\mu r_{el}(\mu - \lambda_0) X(\mu) + \frac{1}{2} X(\lambda_0) \\ \widehat{X}_{el}(\lambda_0) &= \frac{1}{2\pi i} \text{VP} \int_{\gamma} d\mu r_{el}(\mu - \lambda_0) X(\mu) - \frac{1}{2} X(\lambda_0). \end{aligned}$$

Estas dos fórmulas sirven para descomponer  $X \in L\mathfrak{sl}(n, \mathbf{C})$  de forma elíptica

$$X(\lambda) = \widehat{X}_+(\lambda) - \widehat{X}_{el}(\lambda).$$

La función  $\widehat{X}_+ \in L^+ \mathfrak{sl}(n, \mathbf{C})$ . Esto se debe a la localidad entorno al origen del circuito de integración  $\gamma$ , ya que  $\widehat{X}_+$  es el valor frontera de una función holomorfa en el disco  $D$  con borde  $\gamma$ . Sin embargo la función  $\widehat{X}_{el}$  es el valor frontera de una función holomorfa en el exterior de la región no conexa  $E_n + D$  (no existiendo argumentos de localidad en este caso), elíptica y con las propiedades de automorfía descritas; el conjunto de dichas funciones forma una subálgebra que denotará por  $L_{el} \mathfrak{sl}(n, \mathbf{C}) \subset L\mathfrak{sl}(n, \mathbf{C})$ . Ahora bien,  $L^+ \mathfrak{sl}(n, \mathbf{C}) \cap L_{el} \mathfrak{sl}(n, \mathbf{C}) \subset \mathfrak{sl}(n, \mathbf{C})$  ya que las únicas funciones holomorfas en una superficie de Riemann compacta son las constantes. La propiedad de automorfía obliga a que esa constante se anule, esto se debe a que  $\mathfrak{sl}(n, \mathbf{C})$  es simple. Obtenemos el teorema de descomposición siguiente

**Teorema III.6.2** *Sea  $L_{el} \mathfrak{sl}(n, \mathbf{C})$  el conjunto de los valores frontera en  $S^1 = \partial D \subset E$  de las funciones holomorfas  $X$  en el exterior de  $E_n + D$  a valores en  $\mathfrak{sl}(n, \mathbf{C})$  y que satisfacen la propiedad de automorfía  $X(\lambda + a) = \text{Ad}T_a(X(\lambda))$ ,  $a \in E_n$ . Entonces*

$$L\mathfrak{sl}(n, \mathbf{C}) = L^+ \mathfrak{sl}(n, \mathbf{C}) \oplus L_{el} \mathfrak{sl}(n, \mathbf{C}),$$

Esta es la extensión natural al álgebra de lazos de la descomposición que aparece en Reyman y Semenov-Tyan-Shanskii(1989-1) para los lazos analíticos. Además, esta interpretación, en términos geométricos, de la descomposición elíptica permite plantear problemas de factorización asociados a la matriz- $r$  elíptica, con  $g = g_+^{-1} \cdot g_E$  donde  $g_E \in L_{el}SL(n, \mathbb{C})$ . Este grupo se define de modo análogo a como se definía el álgebra elíptica  $L_{el}\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ . La propiedad de automorfía será ahora  $g_E(\lambda + a) = T_a \cdot g_E(\lambda) \cdot T_a^{-1}$ ,  $a \in E_n$ . Los proyectores  $P_+$  y  $P_E$  los dan las fórmulas

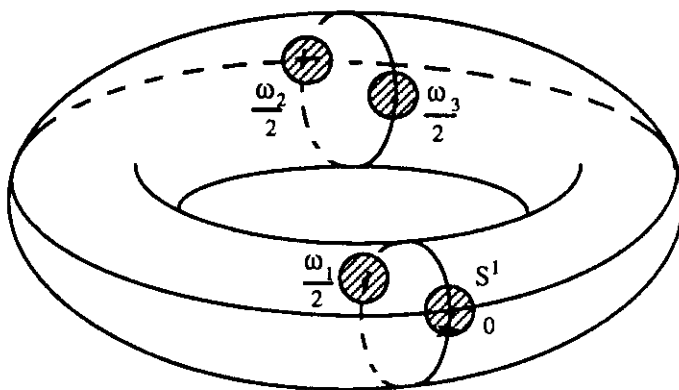
$$P_+X(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \text{VP} \int_{\gamma} d\mu r_{el}(\mu - \lambda)X(\mu) + \frac{1}{2}X(\lambda)$$

$$P_EX(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \text{VP} \int_{\gamma} d\mu r_{el}(\mu - \lambda)X(\mu) - \frac{1}{2}X(\lambda).$$

De aquí deducimos que

$$RX(\lambda) = \frac{1}{\pi i} \text{VP} \int_{\gamma} d\mu r_{el}(\mu - \lambda)X(\mu).$$

En el siguiente gráfico se ilustra la geometría asociada a la subálgebra  $L_{el}\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ .



Tenemos un toro de periodos  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  y  $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ . Las funciones de  $L_{el}\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  serán valores frontera sobre  $S^1$  de funciones holomorfas fuera de la región sombreada y con las propiedades de automorfía descritas anteriormente. La subálgebra  $L^+\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  es en este caso el conjunto de los valores frontera sobre  $S^1$  de las funciones holomorfas en el disco centrado en el punto 0 del toro y con borde  $S^1$ .

## Capítulo IV

### La condición de curvatura nula

En este capítulo se introduce la formulación de curvatura nula para los sistemas integrables en relación con los problemas de factorización en grupos de Lie. La aparición de los pares de Lax en esta construcción es decisiva en la integración de dichos sistemas con el método de la transformada espectral inversa. El ejemplo más conocido es sin duda la ecuación de Korteweg-de Vries (KdV), una ecuación no lineal en derivadas parciales para el campo escalar  $u$  dependiente de las variables  $x, t$ ,

$$4u_t = u_{xxx} + 6uu_x.$$

Usaremos la notación  $\frac{\partial u}{\partial x} = u_x = \partial_x u$ . El operador de Schrödinger  $\mathcal{L} = \partial_x^2 - u$  guarda una estrecha relación con esta ecuación de evolución. Consideremos que  $u(\cdot, t)$  es un potencial que depende del parámetro  $t$  y sea  $\varphi(x, t)$  tal que  $\mathcal{L}\varphi = 0$  y que con respecto de  $t$  satisface  $\mathcal{A}\varphi = \varphi_t$ , donde  $\mathcal{A} = \partial_x^3 + \frac{3}{2}u\partial_x + \frac{3}{4}u_x$ . Pues bien, la condición de compatibilidad de este sistema no es más que  $\mathcal{L}_t = [\mathcal{A}, \mathcal{L}]$ , formulación equivalente de la ecuación de KdV. Esta es la construcción presentada en Lax(1968) aclarando el método de la transformada espectral inversa introducido en Gardner, Greene, Kruskal y Miura(1967) para la integración de la ecuación de KdV, y de ahí que el par  $\mathcal{L}$ - $\mathcal{A}$  sea conocido como par de Lax. En Novikov(1974) se reformula esta idea de par de Lax para KdV; el problema de autovalores  $\mathcal{L}\varphi = \lambda\varphi$  es equivalente a  $\psi_x = L\psi$  con

$$\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi_x \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \lambda - u & 0 \end{pmatrix},$$

y el sistema

$$\begin{aligned} \psi_x &= L\psi \\ \psi_t &= A\psi, \end{aligned}$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}u_x & \lambda + \frac{1}{2}u \\ \lambda^2 - \frac{1}{2}u\lambda - \frac{1}{4}(u_{xx} - 2u^2) & \frac{1}{4}u_x \end{pmatrix},$$

tiene como condición de compatibilidad o integrabilidad

$$L_t = A_x + [A, L]$$

que no es más que la ecuación de KdV para  $u$ . Esta reformulación del par de Lax es la que permite interpretar la ecuación de KdV como una condición de curvatura nula sobre la 1-forma diferencial  $Ldx + Adt$ , y por tanto usar las técnicas presentadas en Zakharov y Shabat(1974,1979).

Para una descripción correcta de la condición de curvatura nula es necesario introducir ciertos conceptos geométricos. Así en IV.1 se estudian el espacio de formas diferenciales con valores en un álgebra de Lie, las transformaciones de 'gauge' y las condiciones de curvatura nula. En IV.2 presentamos la técnica de revestimiento, que es fundamental en la teoría de sistemas integrables.

#### IV.1 Transformaciones de 'gauge' y curvatura nula

Se comienza esta sección con la

**Definición IV.1.1** Sea  $H$  una variedad diferenciable y  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie, definimos

$$\bigwedge(H, \mathfrak{g}) := \bigoplus_{n \geq 0} \bigwedge^n(H, \mathfrak{g}),$$

donde  $\bigwedge^n(H, \mathfrak{g})$  es el conjunto de  $n$ -formas diferenciales sobre  $H$  con valores en el álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ .

Debido a la estructura de álgebra no asociativa de  $\mathfrak{g}$  dada por el corchete de Lie consideramos en  $\bigwedge(H, \mathfrak{g})$  una multiplicación del siguiente tipo

**Definición IV.1.2** Dadas las formas  $\alpha \in \bigwedge^p(H, \mathfrak{g})$  y  $\beta \in \bigwedge^q(H, \mathfrak{g})$  se define el producto  $[\alpha, \beta] \in \bigwedge^{p+q}(H, \mathfrak{g})$  como

$$[\alpha, \beta](h)(X_1, \dots, X_p, X_{p+1}, \dots, X_{p+q}) := \sum_{\pi \in S'_{p+q}} \text{sgn} \pi [\alpha(h)(X_{\pi_1}, \dots, X_{\pi_p}), \beta(h)(X_{\pi_{p+1}}, \dots, X_{\pi_{p+q}})],$$

donde  $h \in H, X_i \in T_h H, S'_{p+q}$  es el conjunto de permutaciones de  $p+q$  elementos que mezclan los  $p$ -primeros con los  $q$ -últimos y  $\text{sgn}$  es la signatura de la permutación sobre la que se evalúa.

Este producto verifica la propiedad de anticonmutatividad graduada

$$[\alpha, \beta] = (-1)^{pq+1} [\beta, \alpha].$$

Si  $\gamma \in \wedge^r(H, \mathfrak{g})$  se cumple la propiedad de Jacobi graduada

$$(-1)^{pq} [[\alpha, \beta], \gamma] + (-1)^{pr} [[\gamma, \alpha], \beta] + (-1)^{qr} [[\beta, \gamma], \alpha] = 0.$$

Con esta operación  $\wedge(H, \mathfrak{g})$  es un álgebra de Lie  $\mathbb{Z}_2$ -graduada, esto es, una superálgebra de Lie, con

$$\wedge(H, \mathfrak{g})_i = \bigoplus_{n \geq 0} \wedge^{2n+i}(H, \mathfrak{g}) \quad i = 0, 1$$

que da lugar a la descomposición

$$\wedge(H, \mathfrak{g}) = \wedge(H, \mathfrak{g})_0 \oplus \wedge(H, \mathfrak{g})_1$$

y se verifica

$$[\wedge(H, \mathfrak{g})_i, \wedge(H, \mathfrak{g})_j] \subset \wedge(H, \mathfrak{g})_{i+j, \text{mod} 2}.$$

La derivada exterior  $d : \wedge^r H \rightarrow \wedge^{r+1} H$  se extiende a  $\wedge(H, \mathfrak{g}) \cong \wedge H \otimes \mathfrak{g}$  así como cualquier endomorfismo del álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ .

A continuación introducimos el importante concepto de curvatura de una 1-forma.

**Definición IV.1.3** Dada  $\omega \in \wedge^1(H, \mathfrak{g})$  se introduce su curvatura

$$\Omega_\omega := d\omega - \frac{1}{2}[\omega, \omega] \in \wedge^2(H, \mathfrak{g}),$$

y se dice que  $\omega$  es de curvatura nula si  $\Omega_\omega = 0$ , esto es

$$d\omega = \frac{1}{2}[\omega, \omega].$$

El espacio de las funciones de onda  $C^\infty(H, G)$ , en donde se ha supuesto que  $G$  es el grupo de Lie adjunto al álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ , genera transformaciones llamadas de 'gauge' en el espacio  $\wedge^1(H, \mathfrak{g})$ ,

**Definición IV.1.4** Si  $\psi \in C^\infty(H, G)$  la transformada ‘gauge’ de

$$\omega \in \bigwedge^1(H, \mathfrak{g})$$

se define por

$$\omega^\psi := d\psi \cdot \psi^{-1} + \text{Ad}\psi(\omega),$$

donde  $d\psi \cdot \psi^{-1}$  es la diferencial derecha de  $\psi : H \rightarrow G$ .

La diferencial derecha, ver Dieudonné(1970-1975), se define como

$$d\psi \cdot \psi^{-1}(h) := T_h(R_\psi^{-1} \circ \psi) = T_{\psi(h)}R_\psi^{-1} \circ T_h\psi : T_hH \rightarrow \mathfrak{g}.$$

Aquí  $T_h$  indica la derivada de la función a la que se aplica en el punto  $h$ , esto es la aplicación tangente. La diferencial derecha posee las siguientes propiedades

- $\psi = \psi_1 \cdot \psi_2 \Rightarrow d\psi \cdot \psi^{-1} = d\psi_1 \cdot \psi_1^{-1} + \text{Ad}\psi_1(d\psi_2 \cdot \psi_2^{-1})$ ,
- $\psi = \phi^{-1} \Rightarrow d\psi \cdot \psi^{-1} = -(\text{Ad}\phi)^{-1}(d\phi \cdot \phi^{-1})$ ,
- si  $\ln \psi = X \in C^\infty(H, \mathfrak{g})$  entonces

$$d\psi \cdot \psi^{-1} = \sum_{n \geq 0} \frac{(\text{ad}X)^n}{(n+1)!} dX.$$

Además, la forma de Maurer-Cartan  $\theta \in \bigwedge^1(G, \mathfrak{g})$ , Dieudonné(1970-1975), definida por la relación

$$\theta(g)(X) = T_g R_g^{-1} X,$$

con  $g \in G, X \in T_g G$ , permite escribir la diferencial derecha  $d\psi \cdot \psi^{-1}(h) = \theta(\psi(h)) \circ T_h \psi$  por lo que esta resulta ser una extensión de la forma de Maurer-Cartan, y de aquí que se utilice la notación  $\theta = dg \cdot g^{-1}$ .

La curvatura de una 1-forma se comporta frente a transformaciones de ‘gauge’ de la siguiente manera

**Proposición IV.1.1** Si  $\omega^\psi := d\psi \cdot \psi^{-1} + \text{Ad}\psi(\omega)$ , entonces

$$\Omega_{\omega^\psi} = \text{Ad}\psi(\Omega_\omega),$$

luego si  $\omega$  es de curvatura nula también lo es cualquier transformada ‘gauge’ suya.

La diferencial derecha  $d\psi \cdot \psi^{-1}$  de cualquier función de onda es de curvatura nula. El teorema de Frobenius, Flanders(1963), permite asegurar que dada  $\omega$  de curvatura nula existe un entorno  $\mathcal{U}_h$  para todo  $h \in H$  tal que se puede hallar una función de onda local  $\psi \in C^\infty(\mathcal{U}_h, G)$  con  $\omega = d\psi \cdot \psi^{-1}$ . Obviamente  $\omega$  no distingue entre elementos en el mismo 'coset'  $\psi \cdot G$ , si  $\psi$  es solución también lo es  $\psi \cdot g$  para todo  $g$  en  $G$ .

Todas estas construcciones se generalizan de forma natural a fibrados principales, Dieudonné(1970-1975) y Husemoller(1974). Sin embargo al ser los intereses de esta tesis puramente locales, los aspectos globales asociados a fibrados, en relación con condiciones de contorno y soluciones de sistemas integrables, no serán tratados aquí. Así pues las ideas de la técnica de revestimiento que se introducirán más adelante serán puramente locales.

## IV.2 La técnica de revestimiento

La 1-forma  $\omega_{KdV} := Ldx + Adt$  del comienzo del capítulo es de curvatura nula. En dicha expresión se puede considerar  $\lambda \in S^1$ , y como  $\text{Tr}L = \text{Tr}A = 0$  concluimos que esta 1-forma toma sus valores en el álgebra de lazos  $L^+ \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ . En la teoría de los sistemas integrables tanto la formulación de curvatura nula como la técnica de revestimiento, para la generación de soluciones, se utilizan de forma exhaustiva en Zakharov y Shabat(1974,1979). Así la solución  $u = 0$  de KdV, que se conoce como solución desnuda o vacío, tiene asociada la 1-forma desnuda  $\omega_{KdV}^{(0)} = \Lambda dx + \Lambda^2 dt$ , con  $\Lambda = e + \lambda f$ . Esta 1-forma puede ser revestida mediante transformaciones de 'gauge'. Esto es, buscaremos funciones de onda  $\psi$  tales que  $\omega = d\psi \cdot \psi^{-1} + \text{Ad}\psi(\omega_{KdV}^{(0)})$  sea del tipo  $\omega_{KdV}$ . De esta manera conseguimos generar nuevas soluciones a partir de soluciones conocidas y triviales.

En Guil(1987) se presentó la siguiente extensión del método de revestimiento anterior. Sea  $\chi \in \Lambda^1(H, \mathfrak{g})$ , 1-forma de curvatura nula,

$$d\chi = \frac{1}{2}[\chi, \chi],$$

y  $R$  solución de la ecuación de Yang-Baxter clásica modificada en  $\mathfrak{g}$  (ver capítulo II). Si la función de onda  $\psi_- \in C^\infty(H, G_-)$  es solución de la ecuación

$$d\psi_- \cdot \psi_-^{-1} = R_- \text{Ad}\psi_-(\chi), \quad (\text{IV.2.1})$$

entonces la 1-forma revestida

$$\omega := \text{Ad}\psi_-(\chi) \quad (\text{IV.2.2})$$

satisface

$$d\omega = \frac{1}{2}[\omega, \omega]_R = \frac{1}{2}[R\omega, \omega].$$

Este resultado es inmediato pues  $d\omega = [d\psi_- \cdot \psi_-^{-1}, \omega] + \frac{1}{2}[\omega, \omega]$ , aquí se ha utilizado (IV.2.2) y que  $\chi$  es de curvatura nula, y usando (IV.2.1) se obtiene la conclusión buscada. Así pues, revistiendo  $\chi \in \Lambda^1(H, \mathfrak{g})$  de curvatura nula se obtiene  $\omega \in \Lambda^1(H, \mathfrak{g}_R)$  que también es de curvatura nula.

Recordando que  $R_{\pm} : \mathfrak{g}_R \rightarrow \mathfrak{g}$  son homomorfismos entre álgebras de Lie y representando por  $\omega_{\pm} = R_{\pm}\omega \in \Lambda^1(H, \mathfrak{g}_{\pm})$  concluimos que

$$d\omega = \frac{1}{2}[\omega, \omega]_R \iff d\omega_{\pm} = \frac{1}{2}[\omega_{\pm}, \omega_{\pm}].$$

Luego  $\omega_+ = R_+ \text{Ad}\psi_-(\chi) = d\psi_- \cdot \psi_-^{-1} + \text{Ad}\psi_-(\chi)$  es una 1-forma de curvatura nula que toma valores en  $\mathfrak{g}_+$ , obtenida a partir de  $\chi$ , 1-forma de curvatura nula, a través de la transformación de 'gauge' generada por  $\psi_-$ .

Localmente siempre existirá la función de onda  $\psi$  tal que  $\chi$  sea su diferencial derecha

$$\chi = d\psi \cdot \psi^{-1},$$

donde debemos tener en cuenta que todos los elementos en el 'coset' derecho  $\psi \cdot G$  también son solución a este problema diferencial. Consideremos el problema de factorización

$$\psi \cdot g = \psi_-^{-1} \cdot \psi_+, \quad \text{im}\psi_{\pm} \subset G_{\pm}, \quad \Theta(\psi_+ \cdot K_+) = \psi_- \cdot K_-,$$

generado por la solución  $R$  de la ecuación de Yang-Baxter clásica modificada. Calculando la diferencial derecha se obtiene

$$d\psi_- \cdot \psi_-^{-1} + \text{Ad}\psi_-(\chi) = d\psi_+ \cdot \psi_+^{-1},$$

y por tanto

$$d\psi_{\pm} \cdot \psi_{\pm}^{-1} = R_{\pm} \text{Ad}\psi_-(\chi),$$

luego la solución  $\psi_-$  del problema de factorización es a su vez solución de (IV.2.1) y  $\psi_+$  resuelve el problema de encontrar la función de onda tal que su diferencial derecha sea la 1-forma de curvatura nula revestida  $\omega_+$ . Parte de estas ideas se perfilan también en Cherednik(1985,1990). Todos estos resultados se resumen en el

**Teorema IV.2.1** Sea  $\chi \in \Lambda^1(H, \mathfrak{g})$  una 1-forma de curvatura nula,  $d\chi = \frac{1}{2}[\chi, \chi]$ , y  $\psi_- \in C^\infty(H, G_-)$  una función de onda solución de

$$d\psi_- \cdot \psi_-^{-1} = R_- \text{Ad}\psi_-(\chi),$$

entonces

$$\omega = \text{Ad}\psi_-(\chi) \in \Lambda^1(H, \mathfrak{g}_R)$$

es una 1-forma de curvatura nula,  $d\omega = \frac{1}{2}[\omega, \omega]_R$ . Si  $\psi$  permite expresar localmente  $\chi$  como  $\chi = d\psi \cdot \psi^{-1}$  entonces las soluciones al problema de factorización  $\psi \cdot g = \psi_-^{-1} \cdot \psi_+$ , con  $g \in G$ , dan soluciones  $\psi_-$  al problema diferencial inicial.

En el cuadrado  $\mathfrak{d} = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$  de  $\mathfrak{g}$  se tiene la solución, construida a partir de  $R$ ,  $R_\mathfrak{d} = P_{\mathfrak{d}} - P_{\widehat{\mathfrak{g}_R}}$  de la ecuación de Yang-Baxter clásica modificada, vease el capítulo II. La técnica de revestimiento presentada más arriba se puede desarrollar en este cuadrado.

Sea  $\bar{\chi} = (\chi_1, \chi_2) \in \Lambda^1(H, \mathfrak{d})$ , donde  $\chi_i \in \Lambda^1(H, \mathfrak{g})$  son de curvatura nula, una 1-forma de curvatura nula con valores en  $\mathfrak{d}$ . Se plantea la ecuación

$$d\bar{\psi} \cdot \bar{\psi}^{-1} = R_{\mathfrak{d}} \text{Ad}\bar{\psi}(\bar{\chi}), \quad (\text{IV.2.3})$$

con  $\bar{\psi} \in C^\infty(H, \widehat{G_R})$  y  $R_{\mathfrak{d}} = -P_{\widehat{\mathfrak{g}_R}}$ , luego  $\bar{\psi} = (\psi_+, \psi_-)$  con  $\psi_\pm \in C^\infty(H, G_\pm)$  y  $\Theta(\psi_+ \cdot K_+) = \psi_- \cdot K_-$ , además  $\psi := \varphi \bar{\psi} = \psi_-^{-1} \cdot \psi_+$ , donde  $\varphi$  se definió en II.2; así pues la 1-forma

$$\bar{\omega} = \text{Ad}\bar{\psi}(\bar{\chi})$$

es de curvatura  $R_{\mathfrak{d}}$ -nula. Es fácil concluir que la ecuación (IV.2.3) en el cuadrado se traduce en

$$d\psi_\pm \cdot \psi_\pm^{-1} = R_\pm (\text{Ad}\psi_-(\chi_2) - \text{Ad}\psi_+(\chi_1)). \quad (\text{IV.2.4})$$

Tendremos también las identidades

$$\alpha := \bar{\omega}_+ = P_{\mathfrak{d}} \bar{\omega} = R_+ \text{Ad}\psi_-(\chi_2) - R_- \text{Ad}\psi_+(\chi_1),$$

y si  $\omega := \text{Ad}\psi_-(\chi_2) - \text{Ad}\psi_+(\chi_1)$  entonces

$$\bar{\omega}_- = P_{\widehat{\mathfrak{g}_R}} \bar{\omega} = (\omega_+, \omega_-) = i_R \omega,$$

donde  $\omega_\pm = R_\pm \omega$ . Por tanto  $\alpha \in \Lambda^1(H, \delta \mathfrak{g})$  y  $\bar{\omega}_- \in \Lambda^1(H, \widehat{\mathfrak{g}_R})$  son ambas de curvatura nula,  $d\alpha = \frac{1}{2}[\alpha, \alpha]$  y por tanto  $\omega$  verifica  $d\omega = \frac{1}{2}[\omega, \omega]_R$ .

La relación con los problemas de factorización de esta extensión de la técnica del revestimiento es la que se explica a continuación. Localmente existirá  $\bar{\phi} = (\phi_1, \phi_2)$  con valores en el grupo  $D = G \times G$  tal que  $\bar{\chi}$  es su diferencial derecha y por tanto  $\chi_i = d\phi_i \cdot \phi_i^{-1}$ . El problema de factorización será

$$\bar{\phi} \cdot \bar{g} = \bar{\psi}^{-1} \cdot a,$$

donde  $\bar{g} = (g_1, g_2) \in D$ ,  $a$  toma sus valores en el subgrupo diagonal  ${}^{\delta}G$  y  $\bar{\psi}$  lo hace en  $\widehat{G}_R$ . Se llega pues a los problemas de factorización

$$\begin{aligned}\phi_1 \cdot g_1 &= \psi_+^{-1} \cdot a, \\ \phi_2 \cdot g_2 &= \psi_-^{-1} \cdot a,\end{aligned}$$

y por tanto  $\psi_{\pm}$  serán solución de

$$\phi_2 \cdot g \cdot \phi_1^{-1} = \psi_-^{-1} \cdot \psi_+,$$

donde  $g = g_2 \cdot g_1^{-1}$ , así pues las soluciones a este problema de factorización son soluciones a (IV.2.3, IV.2.4).

Señalemos por último que  $a = \psi_+ \cdot \phi_1 \cdot g_1 = \psi_- \cdot \phi_2 \cdot g_2$  y por tanto

$$\alpha = d\psi_+ \cdot \psi_+^{-1} + \text{Ad}\psi_+(\chi_1) = d\psi_- \cdot \psi_-^{-1} + \text{Ad}\psi_-(\chi_2),$$

luego  $\alpha$  es transformada 'gauge' de  $\chi_1$  y  $\chi_2$  simultáneamente.

Estos resultados se resumen en el

**Teorema IV.2.2** Sean  $\chi_1, \chi_2 \in \wedge^1(H, \mathfrak{g})$  sendas 1-formas de curvatura nula,  $d\chi_i = \frac{1}{2}[\chi_i, \chi_i]$ ,  $i = 1, 2$ , y  $\psi_{\pm} \in C^{\infty}(H, G_{\pm})$  funciones de onda soluciones de

$$d\psi_{\pm} \cdot \psi_{\pm}^{-1} = R_{\pm}(\text{Ad}\psi_{\pm}(\chi_2) - \text{Ad}\psi_{\pm}(\chi_1)).$$

Entonces

$$\omega := \text{Ad}\psi_-(\chi_2) - \text{Ad}\psi_+(\chi_1) \in \wedge^1(H, \mathfrak{g}_R)$$

y

$$\alpha := R_+ \text{Ad}\psi_-(\chi_2) - R_- \text{Ad}\psi_+(\chi_1) \in \wedge^1(H, \mathfrak{g})$$

son de curvatura nula,

$$d\omega = \frac{1}{2}[\omega, \omega]_R, \quad d\alpha = \frac{1}{2}[\alpha, \alpha].$$

Si las funciones de onda  $\phi_1, \phi_2$  permiten expresar localmente las 1-formas  $\chi_1$  y  $\chi_2$  como

$$\chi_1 = d\phi_1 \cdot \phi_1^{-1}, \chi_2 = d\phi_2 \cdot \phi_2^{-1},$$

entonces la solución al problema de factorización

$$\phi_2 \cdot g \cdot \phi_1^{-1} = \psi^{-1} \cdot \psi_+$$

donde  $g \in G$ , da lugar a las soluciones  $\psi_{\pm}$  del sistema diferencial planteado.

Si  $H \subset G$  es un subgrupo abeliano y  $\chi$  es la 1-forma de Maurer-Cartan en  $H$ ,  $\chi = dh \cdot h^{-1} = d \ln h$ , entonces  $\psi(h) = h \cdot g$  son traslaciones por multiplicación a la izquierda por elementos de grupo abeliano  $H$ , definiendo por tanto una familia de flujos conmutativos, Wilson(1984), ya que  $\psi(h_1 \cdot h_2) = \psi(h_2 \cdot h_1)$ . La construcción de la 1-forma revestida  $\omega = \text{Ad}\psi_-(\chi)$  a través de la resolución de  $d\psi_- \cdot \psi_-^{-1} = R_- \text{Ad}\psi_-(\chi)$  no es más que la descripción diferencial del problema de factorización  $\psi = \psi_-^{-1} \cdot \psi_+$ . La obtención de  $\omega_+$ , revestir la forma de Maurer-Cartan en  $H$ , sirve para describir infinitesimalmente, en términos del álgebra de Lie  $\mathfrak{g}_-$ , la proyección de los flujos conmutativos en  $G$ , generados por el subgrupo abeliano  $H$ , en el espacio homogéneo  $G/G_+$ , variedad difeomorfa a  $G_-$ .

En el cuadrado  $D$  se escoge  $H = H_1 \times H_2$  donde  $H_i$  son subgrupos abelianos de  $G$ . La forma de Maurer-Cartan en  $H$  será  $\bar{\chi} = (dh_1 \cdot h_1^{-1}, dh_2 \cdot h_2^{-1})$ , con  $h_i \in H_i$ . Se tienen los flujos conmutativos  $\bar{\psi} = (h_1 \cdot g_1, h_2 \cdot g_2)$  generados por multiplicación a la izquierda por elementos de  $H$ , y las 1-formas  $\omega_{\pm}, \alpha$ , con  $\bar{\omega} = (\alpha, \alpha) - (\omega_+, \omega_-) = \text{Ad}\bar{\psi}(\bar{\chi})$ , que describen diferencialmente la proyección de los flujos conmutativos generados por  $H$  en la variedad homogénea  $D/\widehat{G}_R$  localmente difeomorfa a  ${}^{\delta}G$ . Las órbitas de los flujos  $\psi = h_2 \cdot g \cdot h_1^{-1}$  son puntos en el espacio de dobles 'cosets'  $H_2 \setminus G/H_1$ . Si  $X_1 := G/H_1$  y  $X_2 := H_2 \setminus G$  se introduce el  $G$ -espacio  $X := X_2 \times X_1$ , Dieudonné(1970-1975), la acción derecha de  $G$  viene dada por

$$g \circ (H_2 \cdot g_2, g_1 \cdot H_1) = (H_2 \cdot g_2 \cdot g, g^{-1} \cdot g_1 \cdot H_1),$$

en donde se tiene la fibración  $\pi : X \rightarrow M$ , con la base  $M := X_2 \times X_1 \text{ mod } G$  el conjunto de órbitas de  $G$  en  $X$ ,  $(H_2 \cdot g_2, g_1 \cdot H_1) \sim (H_2 \cdot \tilde{g}_2, \tilde{g}_1 \cdot H_1)$  si y sólo si  $g_2 \cdot g_1 = \tilde{g}_2 \cdot \tilde{g}_1$ , fácilmente se concluye la identidad  $M = H_2 \setminus G/H_1$  (a la clase de equivalencia  $(H_2 \cdot g_2, g_1 \cdot H_1) \text{ mod } G$  le corresponde el doble 'coset'  $H_2 \cdot g_2 \cdot g_1 \cdot H_1$ ).

Cuando  $H_1 \cap H_2 = \{e\}$  entonces  $\chi_2(X_1) = \chi_1(X_2) = 0$  donde  $X_i \in \mathfrak{X}(H_i)$  son campos vectoriales. Por tanto si  $X_2, Y_2 \in \mathfrak{X}_I(H_2)$  (donde  $\mathfrak{X}_I$  denota el

conjunto de campos vectoriales invariantes izquierda)  $[X_2, Y_2] = 0$  ya que  $H_2$  es abeliano, la condición de curvatura nula de  $\omega$ ,  $\Omega_\omega = 0$ , implica la ecuación  $X_2\omega(Y_2) - Y_2\omega(X_2) - [\omega(X_2), \omega(Y_2)]_R = 0$ . Esta es la ecuación que se hubiera obtenido fijando los flujos generados por  $H_1$  y permitiendo tan sólo evolucionar con  $H_2$ , las variaciones infinitesimales serán las dadas por elementos de  $\mathfrak{X}(H_2)$ . El cuadrado desaparece y se obtiene la descripción de los flujos conmutativos generados por  $H_2$  en  $G$  y su proyección en el espacio homogéneo  $G/G_+$ .

En los próximos capítulos se verá que la técnica del revestimiento aquí introducida tiene como consecuencia (en los grupos de lazos) la aparición de jerarquías integrables (en 1+1 dimensiones) asociadas a  $\omega$ , y de retículos integrables continuos (en 1+1) dados por  $\alpha$ . Los pares de Lax los dan los coeficientes de estas 1-formas, las familias infinitas de leyes de conservación de estos sistemas aparecen en relación a ciertos subgrupos de isotropía. Además, la teoría de la modificación y la generalización de las transformaciones de Miura recibe un tratamiento grupo-teórico. Cuando se estudie  $\omega$  se permitirá la restricción a  $\mathfrak{X}(H_2)$  sin embargo la 1-forma  $\alpha$  involucra a todo el grupo  $H$ . Los subgrupos utilizados serán los asociados a las subálgebras de Heisenberg (módulo extensión central) homogéneo y principal, ver Guil(1989).

Las construcciones de revestimiento dadas en este capítulo enlazan con las que aparecen en la literatura como se explica a continuación. En Zakharov y Shabat(1974,1979), como ya se mencionó, se introdujo la técnica del revestimiento en relación con las transformaciones de 'gauge'. La escuela japonesa de Kyoto dirigida por M.Sato generaliza estas ideas en los trabajos Date, Jimbo, Kashiwara y Miwa(1982) construyendo grupos de transformaciones de revestimiento. En Segal y Wilson(1985) y Wilson(1985) se da una interpretación de estos grupos en el marco de las álgebras de lazos. Finalmente en Semenov-Tyan-Shanskii(1985,1987) se presenta un tratamiento completo con el uso de la matriz- $r$  clásica (ver también Lu y Weinstein(1990)). Lo interesante es que estas transformaciones de revestimiento son acciones de los grupos de Lie presentes en la teoría sobre el espacio de funciones de onda. En particular, en Semenov-Tyan-Shanskii(1985) se da una acción de  $G_R$  sobre el espacio de funciones de onda con la propiedad de que  $G_R \times G \rightarrow G$  es una aplicación de Poisson, donde  $G$  es un grupo de Poisson-Lie. La dada en Segal y Wilson(1985) difiere de esta acción tan sólo en un factor de normalización. Así la acción de Segal y Wilson(1985) de  $G$  sobre  $C^\infty(H, G)$  es

$$g \circ \psi := (\psi \cdot g \cdot \psi^{-1})_- \cdot \psi,$$

que recordando que  $\psi \cdot g \cdot \psi^{-1} = (\psi \cdot g \cdot \psi^{-1})_-^{-1} \cdot (\psi \cdot g \cdot \psi^{-1})_+$  se reescribe como

$$g \circ \psi = (\psi \cdot g \cdot \psi^{-1})_+ \cdot \psi \cdot g^{-1}.$$

Que esto es una acción se deduce del siguiente cálculo

$$\begin{aligned} g_2 \circ g_1 \circ \psi &= ((g_1 \circ \psi) \cdot g_2 \cdot (g_1 \circ \psi)^{-1})_+ \cdot (g_1 \circ \psi) \cdot g_2^{-1} = \\ &= ((\psi \cdot g_1 \cdot \psi^{-1})_- \cdot \psi \cdot g_1 \cdot g_2 \cdot \psi^{-1} (\psi \cdot g_1 \cdot \psi^{-1})_+^{-1})_+ \cdot \\ &= (\psi \cdot g_1 \cdot \psi^{-1})_+ \cdot \psi \cdot (g_2 \cdot g_1)^{-1}. \end{aligned}$$

Ahora bien, si  $a_- \in G_- \Rightarrow (a_- \cdot b)_+ = b_+$  para todo  $b \in G$ , luego se obtiene

$$g_2 \circ g_1 \circ \psi = (g_2 \cdot g_1) \circ \psi.$$

En el caso de que la función de onda  $\psi$  tome sus valores en  $G_-$  entonces la acción de revestimiento de Segal-Wilson es

$$g \circ \psi = (\psi \cdot g)_- \cdot \psi = (\psi \cdot g)_+ \cdot g^{-1},$$

y de aquí la relación con el método presentado en Guil(1987), una vez que se considera la acción derecha análoga a de Segal-Wilson. La acción de  $G_R$  sobre  $C^\infty(H, G)$  de Semenov-Tyan-Shanskii es como sigue,

$$g \circ \psi := (\psi \cdot g \cdot \psi^{-1})_- \cdot \psi \cdot g_-^{-1} = (\psi \cdot g \cdot \psi^{-1})_+ \cdot \psi \cdot g_+^{-1}.$$

El que es una acción izquierda de  $G_R$

$$g_2 \circ g_1 \circ \psi = (g_2 \star g_1) \circ \psi,$$

se deduce del mismo modo que en el caso de la acción de Segal-Wilson, de la que tan sólo difiere en un factor de normalización.



## Capítulo V

### Integrabilidad en $LSL_2$ : subálgebra homogénea

En los capítulos que siguen se entrelazan las ideas expuestas anteriormente. Debemos recordar que la formulación de los sistemas diferenciales del capítulo anterior se basa en los siguientes datos: un grupo de Lie, un endomorfismo del álgebra de Lie del grupo que satisfaga la ecuación de Yang-Baxter clásica modificada y por último 1-formas de curvatura nula.

Es interesante investigar las consecuencias de dichas construcciones en grupos de Lie de dimensión infinita. Necesitaremos que los grupos sean tales que se pueda definir la diferencial derecha, que exista un teorema de la función implícita para poder construir la aplicación exponencial, etc. En definitiva el grupo de Lie debe ser el soporte para un cálculo diferencial habitual, y por tanto será de Lie-Banach o que una completación adecuada lo sea. En Guil(1989,1990-2) se presentó el estudio de los sistemas diferenciales exteriores en el grupo de Lie-Banach de automorfismos de un espacio de Hilbert, detallándose allí las jerarquías integrables obtenidas, problemas de factorización, función  $\tau$ , etc. En esta tesis se analizarán dichos sistemas diferenciales exteriores sobre grupos de lazos, grupos que poseen completaciones de Sobolev que les convierten no sólo en variedades de Banach sino también de Hilbert.

Entre los grupos de lazos el más asequible es, sin duda alguna,  $LSL(2, \mathbb{C})$ . Por ello los capítulos V, VI, VII, VIII, IX y X se dedicarán al estudio del sistema diferencial exterior en este grupo de lazos. Del capítulo V hasta el VII los flujos conmutativos serán los generados por la subálgebra de Heisenberg (módulo extensión central) homogénea. Las soluciones de la ecuación de Yang-Baxter clásica modificada serán las modificaciones de la solución racional de Yang particularizada al álgebra de lazos. Cuando la

modificación sea antisimétrica con respecto a alguna forma bilineal simétrica Ad-invariante y no degenerada, se tendrá una biálgebra de Lie, ver Apéndice B, y por ello parece posible la cuantificación del sistema integrable asociado. Se obtendrán diversas jerarquías integrables, sus familias de leyes de conservación locales y no triviales, transformaciones de Miura generalizadas entre sistemas modificados y no modificados, pares de Lax y los problemas de factorización relacionados. Todo ello, por supuesto, dentro del espíritu marcado por los capítulos anteriores.

La subálgebra homogénea  $\mathfrak{h}$  está asociada a la subálgebra de Cartan  $\mathfrak{h}$  de  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ , si  $\{e, h, f\}$  es la base de Cartan-Weyl de  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  entonces  $\mathfrak{h} = \mathbb{C}h$ . Así

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_+ \oplus \mathfrak{h}_-,$$

con

$$\mathfrak{h}_\pm = \mathbb{C}\{\lambda^{\pm n} h\}_{n>0} = L_1^\pm \mathfrak{h}.$$

Sean  $H_\pm$  los grupos de Lie adjuntos a  $\mathfrak{h}_\pm$ , y  $H = H_- \times H_+$ . Los flujos conmutativos seran

$$\psi = h_-^{-1} \cdot g \cdot h_+, \quad h_\pm \in H_\pm$$

donde  $g \in LSL(2, \mathbb{C})$  es la condición inicial. Como  $H_1 = H_-$  y  $H_2 = H_+$  las 1-formas  $\chi_1, \chi_2$  son las formas de Maurer-Cartan en  $H_-, H_+$ , respectivamente.

Las matrices- $r$  clásicas  $R$  que consideraremos aquí están asociadas a la descomposición triangular de Birkhoff

$$LSL(2, \mathbb{C}) = L_1^+ \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \oplus L_1^- \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}),$$

ya que si  $id = P_+ + P_0 + P_-$  es la resolución de la identidad asociada a la descomposición triangular, entonces  $R = P_+ - P_- + \rho P_0$  donde  $\rho$  es solución de la ecuación de Yang-Baxter clásica modificada en  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ .

En la primera sección estudiaremos la contracción de la ecuación (IV.2.4) con el campo vectorial invariante izquierda  $\partial_1 \in \mathfrak{X}_I(H_+)$ .  $\partial_1(e) = \lambda h$ . Parametrizaremos la función de onda  $\psi_-$  en función de variables  $S, V_+$  y de sus  $\partial_1$ -derivadas.

En V.2 contraeremos la ecuación (IV.2.4) con el campo  $\partial_2 \in \mathfrak{X}_I(H_+)$ ,  $\partial_2(e) = \lambda^2 h$ , y utilizando la parametrización obtenida en la subsección anterior se llega a una ligadura diferencial del tipo de un sistema de evolución

para  $S, V_+$ , que es un sistema de ecuaciones no lineales en derivadas parciales,  $(\partial_1, \partial_2)$ , para los campos  $S, V_+$ . Este sistema es integrable, se puede construir un par de Lax que depende de  $S, V_+$  y existe una colección infinita de leyes de conservación locales y no triviales en las variables  $S, V_+$  y sus  $\partial_1$ -derivadas. La consideración de campos vectoriales  $\partial_n \in \mathfrak{X}_I(H_+)$ ,  $\partial_n(e) = \lambda^n h$ , lleva consigo la construcción de la jerarquía integrable asociada. Existen reducciones reales de estos sistemas, esto es, las formas reales de  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  dan nuevas álgebras de lazos reales que permiten el estudio de nuevos problemas de factorización y por tanto nuevas jerarquías integrables. Este proceso se puede realizar mediante lo que se llama una reducción del sistema inicial.

En V.3 estudiamos la 1-forma  $\alpha$ . Así se parametriza  $\psi_+$  en las variables  $T, W_-$  contrayendo la ecuación (IV.2.4) con el campo vectorial  $\partial_{-1} \in \mathfrak{X}_I(H_-)$ ,  $\partial_{-1}(e) = \lambda^{-1}h$ . La ecuación de curvatura nula que debe cumplir  $\alpha$ , una vez evaluada sobre  $\partial_1, \partial_{-1}$ , implica unas ecuaciones diferenciales sobre  $S, V_+, T, W_-$ , con variables independientes  $t_1, t_{-1}$ . Aquí  $t_1, t_{-1}$  son las coordenadas de los flujos exponenciales  $\exp((t_1\lambda + t_{-1}\lambda^{-1})h)$  de los campos  $\partial_1, \partial_{-1}$ . Es un sistema con una doble familia de infinitas leyes de conservación locales y no triviales. Las formas reales se estudian igualmente. De la construcción se concluye que estas ecuaciones son simetrías de las ecuaciones de evolución halladas en V.2 para  $S, V_+$ , por un lado, y de  $T, W_-$ , por otra parte.

En la cuarta sección damos una aproximación grupo-teórica a las transformaciones de Miura generalizadas. Así la solución del caso no modificado ( $\rho = \text{id}$ ) se expresa en términos de las soluciones  $S, V_+$  de un sistema modificado  $\rho \neq \text{id}$ .

Comentemos por último que en los trabajos Mikhailov y Shabat(1985-1,2) y Mikhailov, Shabat y Yamilov(1987) se llega a una clasificación completa de los sistemas integrables con infinitas leyes de conservación del tipo

$$\begin{aligned} p_t &= p_{xx} + f(p, q, p_x, q_x) \\ q_t &= q_{xx} + g(p, q, p_x, q_x), \end{aligned}$$

y que en Mikhailov, Shabat y Yamilov(1987) se da una lista completa de tales sistemas. A pesar de ser dicha lista extraordinariamente extensa, estamos convencidos de que la mayoría de los sistemas integrables de este tipo se pueden explicar con los métodos aquí expuestos.

### V.1 Parametrización de $\psi_-$

Queremos resolver la ecuación (IV.2.4) para  $\psi_-$ , con la matriz- $r$  clásica  $R = P_+ - P_- + \rho P_0$ , donde  $\text{id} = P_+ + P_0 + P_-$  es la resolución de la identidad asociada a la descomposición triangular de Birkhoff

$$L\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) = L_1^+ \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \oplus L_1^- \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}),$$

y  $\chi_1, \chi_2$  las formas de Maurer-Cartan en los subgrupos homogéneos  $H_-, H_+$ .

La descomposición

$$L\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_- = L_1^- \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_-,$$

con  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_- = \text{im } \rho_-$ , permite proponer la factorización

$$\psi_- = \vartheta \cdot a$$

donde  $\vartheta$  y  $a$  toman sus valores en  $L_1^- SL(2, \mathbb{C})$  y  $SL(2, \mathbb{C})_-$  respectivamente. En particular  $a = \psi_-(\infty)$ , aquí se entiende por  $\psi_-(\infty)$  el valor de la extensión holomorfa de  $\psi_-$  al exterior de  $S^1$  calculado en  $\infty$ .

La descomposición simétrica de  $L\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  inducida por  $h$

$$L\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m},$$

con

$$\mathfrak{k} = \ker \text{adh}, \quad \mathfrak{m} = \text{im } \text{adh},$$

lleva consigo la descomposición

$$C^\infty(H, L\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})) = \mathfrak{k}_S \oplus \mathfrak{m}_S,$$

donde

$$\mathfrak{k}_S = \text{Ada}(C^\infty(H, \mathfrak{k})), \quad \mathfrak{m}_S = \text{Ada}(C^\infty(H, \mathfrak{m})).$$

Si

$$S = \text{Ada}(h)$$

entonces

$$\mathfrak{k}_S = \ker \text{ad}S, \quad \mathfrak{m}_S = \text{im } \text{ad}S.$$

Se llega así a la factorización

$$\vartheta = u \cdot a \cdot \phi \cdot a^{-1}$$

donde  $U := \ln u \in \mathfrak{m}_S$  y  $\phi \in C^\infty(H, H_-)$ . Por tanto

$$\psi_- = u \cdot a \cdot \phi.$$

Contraigamos ahora la ecuación (IV.2.4) con el campo  $\partial_1 \in \mathfrak{X}_I(H_+)$ ,  $\partial_1(e) = \lambda h$ . Con la factorización del párrafo anterior obtenemos

$$\partial_1 u \cdot u^{-1} + \text{Adu}(\partial_1 a \cdot a^{-1} + \sum_{n>0} \lambda^{-n} \partial_1 \Phi_n S) = (-P_- + \rho_- P_0) \text{Adu}(\lambda S) \quad (\text{V.1.1})$$

donde se ha expresado  $\phi(\lambda) := \exp(\sum_{n>0} \lambda^{-n} \Phi_n h)$  y las  $\Phi_n$  son funciones sobre  $H$  a valores en  $\mathbb{C}$ .

Insertando el desarrollo de Fourier

$$U(\lambda) := \sum_{n>0} \lambda^{-n} U_n,$$

donde los coeficientes de Fourier  $U_n$  pertenecen a  $\mathfrak{m}_S \cap C^\infty(H, \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}))$ , en la ecuación (V.1.1) se llega a un conjunto infinito de ecuaciones entre estos coeficientes. Las dos primeras son

$$\partial_1 a \cdot a^{-1} - \rho_- [U_1, S] = 0 \quad (\text{V.1.2})$$

y

$$\partial_1 U_1 + [U_1, \partial_1 a \cdot a^{-1}] + \partial_1 \Phi_1 S + [U_2, S] + \frac{1}{2} [U_1, [U_1, S]] = 0 \quad (\text{V.1.3})$$

De la definición de  $S$  se concluyen las fórmulas

$$\begin{aligned} \partial_1 S &= [\partial_1 a \cdot a^{-1}, S] \\ \frac{1}{4} (\text{ad} S)^2 \Big|_{\mathfrak{m}_S} &= \text{id}. \end{aligned}$$

Ambos hechos se usarán en lo que sigue.

Se introduce la notación

$$V := [U_1, S].$$

Por tanto (V.1.2) implica que  $\partial_1 S = [V_-, S] = [V_+, S] - [V, S]$ . Como  $V \in \mathfrak{m}_S$ , entonces  $V$  se puede expresar en función de  $S, \partial_1 S, V_+$  como sigue

$$V = \frac{1}{4} ([S, \partial_1 S] + [S, [S, V_+]]),$$

y de aquí la ligadura

$$V_+ = \frac{1}{4}\rho_+([S, \partial_1 S] + [S, [S, V_+]]). \quad (\text{V.1.4})$$

Debe notarse que  $U_1$  es expresable en términos de  $S, V_+$  ya que  $U_1 = \frac{1}{4}[V, S]$  y por ello

$$U_1 = \frac{1}{4}(-\partial_1 S + [V_+, S]).$$

El corchete de Lie de  $S$  con (V.1.3) da lugar la siguiente expresión para  $U_2$

$$U_2 = -\frac{1}{4}(\partial_1 V + [V_+, V]).$$

Recordemos que la forma de Cartan-Killing en  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  es  $B(X, Y) = \frac{1}{2}\text{Tr}XY$  y que con respecto a ella  $\ker \text{ad}S \perp \text{im} \text{ad}S$  (es una forma Ad-invariante). Por ello, contrayendo (V.1.3) con  $S$  a través de  $B$ , se obtiene

$$\partial_1 \Phi_1 = -\frac{1}{8}B([V, S], [V, S]),$$

en donde se ha tenido en cuenta la normalización  $B(S, S) = 1$ .

Si hubiéramos considerado más ecuaciones hubiéramos llegado a expresiones análogas para  $U_3, U_4, \dots$  y  $\partial_1 \Phi_2, \partial_1 \Phi_3, \dots$  en función de  $S, V_+$  y sus  $\partial_1$ -derivadas. Por tanto, hemos construido una parametrización no local de  $\psi_-$ .

**Teorema V.1.1** *El campo invariante izquierda  $\partial_1 \in \mathfrak{X}_I(H_+)$ ,  $\partial_1(e) = \lambda h$ , induce una parametrización de la solución  $\psi_-$  de (IV.2.4). Así si*

$$\psi_- = u \cdot a \cdot \phi,$$

donde  $a$  esta evaluada en  $SL(2, \mathbb{C})_-$ ,  $\ln u(\lambda) := \sum_{n>0} \lambda^{-n} U_n$  toma sus valores en  $\text{Ada}(\text{im} \text{adh}) \cap L_1^- \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  y  $\phi(\lambda) := \exp(\sum_{n>0} \lambda^{-n} \Phi_n)$  en  $H_-$ , entonces las variables  $S = \text{Ada}(h)$  y  $V_+$  permiten expresar los elementos de  $\{U_n, \partial_1 \Phi_n\}_{n>0}$  como polinomios en  $\{\partial_1^m S, \partial_1^m V_+\}_{m \geq 0}$ .

Las primeras relaciones son

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{1}{4}(-\partial_1 S + [V_+, S]) \\ U_2 &= -\frac{1}{4}(\partial_1 V + [V_+, V]) \\ \partial_1 \Phi_1 &= -\frac{1}{8}B([V, S], [V, S]). \end{aligned}$$

## V.2 La jerarquía integrable

En la anterior sección se parametrizó la solución  $\psi_-$  en las variables  $S, V_+$  y sus  $\partial_1$ -derivadas, donde los campos  $S, V_+$  satisfacen la ligadura diferencial (V.1.4). Veremos en esta sección qué condiciones deben cumplirse entre  $S$  y  $V_+$  cuando la ecuación (IV.2.4) se contrae con otro campo vectorial. Sea  $\partial_2 \in \mathfrak{X}_I(H_+)$ ,  $\partial_2(e) = \lambda^2 h$ . La contracción de la ecuación (IV.2.4) para  $\psi_-$  con este campo da lugar a un número infinito de ecuaciones en los coeficientes de Fourier. Las dos primeras son

$$\begin{aligned} \partial_2 a \cdot a^{-1} - \rho_-([U_2, S] + \frac{1}{2}[U_1, [U_1, S]]) &= 0 \\ \partial_2 U_1 + [U_1, \partial_2 a \cdot a^{-1}] + \partial_2 \Phi_1 + \\ [U_3, S] + \frac{1}{2}([U_1, [U_2, S]] + [U_2, [U_1, S]]) + \frac{1}{6}[U_1, [U_1, [U_1, S]]) &= 0 \end{aligned}$$

Introduciendo en estas ecuaciones las expresiones obtenidas anteriormente para los elementos de  $\{U_n\}_{n>0}$  en función de  $S, V_+$  y sus  $\partial_1$ -derivadas se llega a nuevas ligaduras entre estas dos variables, pero ahora con la presencia de  $\partial_2$ -derivadas. También se consiguen expresiones para  $\partial_2 \Phi_n$  como polinómios en  $S, V_+$  y sus  $\partial_1$ -derivadas. Dada la equivalencia de la ecuación (IV.2.4) para  $\psi_-$  con la condición de curvatura nula para  $\omega_+$ , la restricción de esta 1-forma al subespacio generado por  $\partial_1, \partial_2$  se expresará en las variables  $S, V_+$ . Así

$$\omega_+ = Ldt_1 + Adt_2,$$

donde  $t_1, t_2$  son las coordenadas generadas por el flujo exponencial de  $\lambda h, \lambda^2 h$ , respectivamente, y  $L, A$  son

$$\begin{aligned} L &= (P_+ + \rho_+ P_0) \text{Adu}(\lambda S) \\ A &= (P_+ + \rho_+ P_0) \text{Adu}(\lambda^2 S). \end{aligned}$$

Introduciendo en estas expresiones la parametrización de  $\ln u$  se llega a la

**Proposición V.2.1** *La restricción de  $\omega_+$  al subgrupo de  $H_+$  con álgebra de Lie  $\mathbb{C}\{\lambda h, \lambda^2 h\}$  es*

$$\omega_+ = Ldt_1 + Adt_2.$$

*Tanto  $L$  como  $A$  se expresan en función de  $S, V_+$  como*

$$\begin{aligned} L &= \lambda S + V_+ \\ A &= \lambda^2 S + \lambda V + Q_+, \end{aligned}$$

donde  $V = \frac{1}{4}([S, \partial_1 S] + [S, [S, V_+]])$  y  $Q_+ = \rho_+ Q$  con

$$Q = [-\partial_1 V + [V, V_+], S] - \frac{1}{8}[V, [V, S]].$$

La condición de curvatura nula que verifica  $\omega_+$  es la única ecuación a satisfacer por  $S, V_+$  para que  $\psi_-$  parametrizada en el **Teorema V.1.1** sea solución de la ecuación (IV.2.4) cuando se contrae con  $\partial_2$ . Por ello se concluye el

**Teorema V.2.1** *La única condición que pesa sobre  $S$  y  $V_+$  para que  $\psi_-$ , parametrizada en el Teorema V.1.1, cumpla la ecuación (IV.2.4) contraída con  $\partial_2$  es el sistema*

$$\begin{aligned}\partial_2 S &= \partial_1 V + [V, V_+] + [Q_+, S] \\ \partial_2 V_+ &= \partial_1 Q_+ + [Q_+, V_+]\end{aligned}$$

donde  $V$  y  $Q_+$  están definidos en **Proposición V.2.1**.

El sistema diferencial que aparece en este último teorema es de hecho un sistema integrable, posee el par de Lax  $L$ - $A$ , y una familia infinita de leyes de conservación locales y no triviales. Como se ha visto las densidades  $l_n := \partial_1 \Phi_n$  y  $m_n := \partial_2 \Phi_n$  se expresan como polinomios en  $S, V_+$  y sus  $\partial_1$ -derivadas, aplicando la regla de Schwartz sobre las derivadas cruzadas (los campos son suaves) se obtienen las infinitas leyes de conservación  $\partial_2 l_n = \partial_1 m_n$  para todo  $n > 0$ .

La consideración de campos  $\partial_n \in \mathfrak{X}_I(H_+)$  con  $\partial_n(e) = \lambda^n h$ ,  $n \geq 3$  llevaría a la construcción de la jerarquía integrable con tiempos  $\{t_n\}_{n>0}$ .

En vez de considerar en estas dos primeras secciones el álgebra  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  se podrían haber utilizado formas reales suyas, Helgason(1978) y Cornwell (1988-1990), la compacta  $\mathfrak{su}(2)$  y las no compactas  $\mathfrak{su}(1, 1)$  y  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ . Las formas reales son subálgebras de  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})^{\mathbb{R}}$ , en concreto son el conjunto de puntos fijos de ciertos antiautomorfismos involutivos. Por ello cuando  $\rho$  deje invariante esta subálgebra se podrán reducir los resultados obtenidos para el caso complejo a la forma real.

### V.3 Retículos integrables continuos

La parametrización de  $\psi_-$  inducida por  $\partial_1$  en las variables  $S, V_+$  expuesta en Teorema V.1.1 se puede extender a  $\psi_+$ , siendo en este caso el campo  $\partial_{-1} \in \mathfrak{X}_I(H_-)$ ,  $\partial_{-1}(e) = \lambda^{-1}h$ , el que induce la parametrización en las variables  $T, W_-$ . Introducimos la factorización  $\psi_+ = v \cdot b \cdot \varphi$  donde  $b$  está evaluada en  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_+$ ,  $\ln v(\lambda) := \sum_{n>0} \lambda^n V_n$  en  $\text{Adb}(\text{im ad } h) \cap L_1^+ \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  y  $\varphi(\lambda) := \exp(\sum_{n>0} \lambda^n \varphi_n)$  en  $H_+$ . Entonces las variables  $T, W_-$ , donde  $T = \text{Adb}(h)$  y  $W_-$  tiene su recorrido en  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_-$ , permiten expresar  $V_n$  y  $\partial_{-1}\varphi_n$  como polinomios en estas variables y sus  $\partial_{-1}$ -derivadas. Estas expresiones son las mismas que las obtenidas para  $U_n, \partial_1\Phi_n$  sustituyendo  $S$  por  $T$  y  $V_+$  por  $-W_-$ . Concretamente  $W = \frac{1}{4}([T, \partial_{-1}T] - [T, [T, W_-]])$  y  $W_- = \frac{1}{4}\rho_-([T, \partial_{-1}T] - [T, [T, W_-]])$ . Las jerarquías integrables a las que conduce este  $\psi_+$ , cuando se estudian las consecuencias sobre campos vectoriales tipo  $\partial_{-n} \in \mathfrak{X}_I(H_-)$ ,  $\partial_{-n}(e) = \lambda^{-n}h$ , son las mismas que las dadas en Teorema V.2.1 con  $-\rho$  en vez de  $\rho$ .

La 1-forma  $\alpha$  es de curvatura nula, por tanto  $\Omega_\alpha(\partial_1, \partial_{-1}) = 0$  da nuevas ligaduras entre  $S, V_+, T$  y  $W_-$

$$\begin{aligned} \partial_{-1}S - [S, W_-] &= 0 \\ \partial_{-1}V_+ + \partial_1W_- - [V_+, W_-] + [S, T] &= 0 \\ \partial_1T + [T, V_+] &= 0. \end{aligned}$$

El par de Lax de este sistema es  $L = \lambda S + V_+$  y  $A = \lambda^{-1}T - W_-$ . Se conocen expresiones polinómicas para  $I_n = \partial_1\Phi_n$  y  $\bar{I}_n = \partial_{-1}\varphi_n$  en función de  $S, V_+$  y sus  $\partial_1$ -derivadas y de  $T, W_-$  y sus  $\partial_{-1}$ -derivadas respectivamente. Pero  $\partial_{-1}\Phi_n$  y  $\partial_1\varphi_n$  no se han parametrizado todavía. Para ello contraemos la ecuación (IV.2.4) para  $\psi_-$  con el campo  $\partial_{-1}$ , obteniendo

$$\partial_{-1}u \cdot u^{-1} + \text{Adu}(\partial_{-1}a \cdot a^{-1} + \sum_{n>0} \lambda^{-n} \partial_{-1}\Phi_n S) = \lambda^{-1}T - \underline{W_-},$$

que se desacopla en un número infinito de ecuaciones, siendo las tres primeras

$$\begin{aligned} \partial_{-1}a \cdot a^{-1} &= -W_- \\ \partial_{-1}U_1 + [U_1, \partial_{-1}a \cdot a^{-1}] + \partial_{-1}\Phi_1 S &= T \\ \partial_{-1}U_2 + \frac{1}{2}[U_1, \partial_{-1}U_1] + [U_2, \partial_{-1}a \cdot a^{-1}] + \frac{1}{2}[U_1, [U_1, \partial_{-1}a \cdot a^{-1}]] &+ \\ \partial_{-1}\Phi_2 S + [U_1, \partial_{-1}\Phi_1] &= 0. \end{aligned}$$

Introduciendo en estas ecuaciones la parametrización de los elementos de  $\{U_n\}_{n>0}$  en función de  $S, V_+$  y sus  $\partial_1$ -derivadas se obtienen expresiones polinómicas para  $f_n := \partial_{-1}\Phi_n$  en las variables  $S, V_+$  y sus  $\partial_1, \partial_{-1}$ -derivadas y en  $T$  y  $W_-$ . El mismo argumento es cierto para  $\bar{f}_n := \partial_1\varphi_n$ , permutando  $\partial_1$  por  $\partial_{-1}$  y  $S, V_+$  por  $T, -W_-$ . Se llega pues a una doble familia infinita de leyes de conservación locales  $\partial_{-1}l_n = \partial_1f_n$  y  $\partial_{-1}\bar{f}_n = \partial_1\bar{l}_n$ .

Debemos comentar que este sistema integrable no es más que una de las condiciones de compatibilidad para la proyección de los flujos conmutativos. Así cuando sólo se estudia la descripción de esta proyección con flujos generados por  $H_+$  ó  $H_-$  (siendo  $(t_1, t_2, \dots)$  ó  $(t_{-1}, t_{-2}, \dots)$  las etiquetas de las evoluciones respectivas) se obtienen sendas jerarquías integrables para  $S, V_+$  ó  $T, W_-$  con  $\rho$  en el primer caso y  $-\rho$  en el segundo. Sin embargo  $S, V_+$  también dependen de las variables  $t_{-1}, t_{-2}, \dots$  y  $T, W_-$  de  $t_1, t_2, \dots$ . Las ecuaciones halladas en esta subsección son sólo una parte de las ligaduras que existen entre  $S, V_+, T$  y  $W_-$  como variables dependientes de  $\{t_{\pm n}\}_{n>0}$ . Si se considera la dependencia de  $S, V_+$  en la variable  $t_{-1}$  se concluye que son solución de la jerarquía integrable para todo  $t_{-1}$ , luego las ecuaciones recién obtenidas son simetrías de las jerarquías integrables. El argumento inverso también es verdadero.

#### V.4 Transformaciones de Miura

Entre las elecciones posibles de  $\rho$  se encuentra  $\rho = \text{id}$ . Este caso se conoce como no modificado, y se cumple  $S = h$  y  $V_+ = pe + qf$  donde  $p, q$  son funciones sobre  $H$  a valores en  $\mathbb{C}$ . Denotando  $\psi_-^{(\text{id})} = a^{-1} \cdot \vartheta \cdot a$  se llega a  $\psi_- = a \cdot \psi_-^{(\text{id})}$ . Luego  $\psi_-^{(\text{id})}$  es solución de la ecuación (IV.2.4) para  $\psi_-$  en el caso no modificado,  $\rho = \text{id}$ . Por tanto si  $\bar{a} := a^{-1}$  se tendrá

$$\bar{a} \cdot \psi_{\pm} = \psi_{\pm}^{(\text{id})},$$

factorización que conecta la versión modificada con la no modificada. Tomando la diferencial derecha de esta ecuación se llega a

$$d\bar{a} \cdot \bar{a}^{-1} + \text{Ad}\bar{a}(\omega_{\pm}) = \omega_{\pm}^{(\text{id})},$$

generando pues  $\bar{a}$  una transformación de 'gauge' entre la 1-forma de curvatura nula modificada  $\omega_+$  y la no modificada  $\omega_+^{(\text{id})}$ . La ecuación  $\partial_1 a \cdot a^{-1} = V_- = V_+ - \frac{1}{4}([S, \partial_1 S] + [S, [S, V_+]])$  se puede integrar y obtener una expresión

no local de  $a$  en las variables  $S, V_+$ , invirtiendo esta matriz se llega a una expresión similar para  $\bar{a}$ . Por tanto la ecuación

$$\partial_1 \bar{a} \cdot \bar{a}^{-1} + \text{Ad} \bar{a}(V_+) = p e + q f,$$

constituye una transformación tipo Miura, pues expresa soluciones de la jerarquía integrable no modificada en función de soluciones de la modificada.



## Capítulo VI

### Modificaciones de AKNS

Trataremos en este capítulo una serie de ejemplos que ilustran las construcciones del anterior. En VI.1 se describe la jerarquía integrable de AKNS, Ablowitz, Kaup, Newell y Segur(1974), para después, en las siguientes secciones, ir modificandola y llegar, entre otros, a los diversos sistemas integrables conocidos en la literatura. Construimos explícitamente las transformaciones de Miura, primera densidad conservada y pares de Lax. Todo ello es consecuencia de la condición de curvatura nula que pesa sobre  $\omega_+$ . La consideración de la 1-forma  $\alpha$  lleva, por ejemplo, los modelos de transparencia autoinducida, Gibbon(1985), y de Thirring masivo, Gerdzikov, Ivanov y Kulish(1980).

Todas las jerarquías integrables calculadas se pueden interpretar como la descripción diferencial de la proyección de los flujos conmutativos en los espacios homogéneos dados por el problema de factorización. Como se sabe en el caso de la factorización de Birkhoff este espacio homogéneo se modela mediante una grassmanniana, la jerarquía de AKNS se enmarca dentro de esta variedad.

Para enlazar con la notación estandar de la literatura se define  $x = t_1, t = t_2$ .

#### VI.1 AKNS y NLS

El primer ejemplo ya se ha comentado en el capítulo anterior, es el caso no modificado,  $\rho = \text{id}$ . Por tanto  $\rho_+ = \text{id}$  y  $\rho_- = 0$ . Luego, como ya se adelantó en V.4, se tendrá  $S = h$  y  $V = V_+ = p e + q f$  donde  $p, q$  son campos

escalares suaves. También es fácil obtener  $Q = Q_+ = \frac{1}{2}(-pqh + p_xe - q_xf)$ . El sistema integrable es pues

$$\begin{aligned} p_t &= \frac{1}{2}p_{xx} - 2p^2q \\ q_t &= -\frac{1}{2}q_{xx} + 2q^2p. \end{aligned}$$

Esta es la primera de las ecuaciones de la jerarquía de AKNS que es el conjunto de todos los posibles flujos  $t_n$ . Esta jerarquía fue hallada en Ablowitz, Kaup, Newell y Segur(1974), trabajo que generaliza el método de la transformada espectral inversa usado en Zakharov y Shabat(1971). Sin embargo en Zakharov y Shabat(1974,1979) la técnica fue depurada y es en estos artículos donde más claramente se expuso el papel predominante que tiene la condición de curvatura nula en la teoría de los sistemas integrables. De estos trabajos emergió lo que se conoce como esquema AKNS-ZS. El papel del álgebra de lazos se expuso con claridad en Flasckha, Newell y Ratiu(1983).

El par de Lax del sistema es  $L = \lambda h + pe + qf$  y  $A = \lambda^2 h + \lambda(pe + qf) + \frac{1}{2}(-pqh + p_xe - q_xf)$ , y la primera densidad conservada  $pq$ ,  $(pq)_t \in \text{im } \partial_x$ , se denomina en la literatura el número de pseudo-partículas.

Por tanto, la jerarquía de AKNS es interpretable como la proyección de los flujos conmutativos, generados por traslaciones por multiplicación a la izquierda por elementos del subgrupo de Heisenberg homogéneo  $H_+$ , en la grassmanniana  $Gr_\infty^{(2)}$ .

Claramente el sistema admite todas las reducciones reales, entre estas las más interesantes son la forma compacta  $\mathfrak{su}(2)$  y la forma no compacta  $\mathfrak{su}(1, 1)$ . Los sistemas que se obtienen así son equivalentes a sustituir  $h$  por  $ih$ , esto es  $t \rightarrow it$ ,  $x \rightarrow ix$ , y  $q = -p^*$  ó  $q = p^*$  según sea el caso compacto o no. La primera de las ecuaciones de la jerarquía de AKNS se transforma, con estas reducciones, en la conocida ecuación de Schrödinger no lineal(NLS)

$$ip_t = \frac{1}{2}p_{xx} \pm 2|p|^2p,$$

donde el signo  $+$  corresponde a la reducción compacta y el  $-$  a la no compacta, denotandose cada caso por  $NLS^\pm$ .

La ecuación de NLS fue resuelta en Zakharov y Shabat(1971) generalizando el método de la transformada espectral inversa de Gardner, Greene,

Kruskal y Miura(1967). Es una ecuación universal en Física: describe la amplitud,  $|p|$ , de un paquete de onda debilmente no lineal en un referencial movil con la onda.  $NLS^+$  es la ecuación que rige el autoenfoque, por efecto Kerr, de la onda envolvente en un medio óptico, generando solitones ópticos.  $NLS^-$  da el autodesenfoque, efecto Kerr negativo, y por tanto aparecen los 'dark solitons' (que modelan la ausencia de pulso luminoso). También Hasegawa y Tappert demostraron la relevancia de ambas ecuaciones en el estudio de fibras (dieléctricas) ópticas, ver Hasegawa(1990) y Mollenauer(1985). Es importante esta ecuación en el estudio de ondas de Langmuir en plasmas, Zakharov(1972), en la teoría de ondas profundas en el agua, Lake, Yuen, Runglader y Ferguson(1977) y en la descripción del transporte de energía en proteínas del tipo 'alpha-helix', Davydov(1981), Hyman, McLaughlin y Scott(1981) y Scott(1985). En la teoría de la superconductividad la ecuación de Gizburg-Landau es NLS con un término lineal añadido. Para mayor información consultar Scott, Chu y McLaughlin(1973).

## VI.2 El modelo ferromagnético de Heisenberg

El siguiente ejemplo es  $\rho = -id$ , por tanto  $\rho_+ = 0$  y  $\rho_- = -id$ . Luego  $V_+ = Q_+ = 0$  y  $V = \frac{1}{4}[S, S_x]$ . El sistema integrable que obtenemos es

$$S_t = \frac{1}{4}[S, S_{xx}],$$

con la ligadura adicional  $S^2 = id$ ,  $S = Ada(h)$  con  $a$  tomando valores en  $SL(2, \mathbb{C})$ . Esta ligadura lleva a la igualdad  $[S, S_x] = 2S \cdot S_x$ . Una primera densidad conservada es  $\Phi_{1,x} = -\frac{1}{8}B(S_x, S_x)$ , y el par de Lax es  $L = \lambda S$  y  $A = \lambda^2 S + \lambda \frac{1}{2}[S, S_x]$ .

Ciertamente la construcción admite reducciones a formas reales. En el caso compacto se llega al modelo ferromagnético de Heisenberg,  $S$  es un 'spin' en una cadena lineal continua. En cada punto de la cadena (que se parametriza mediante  $x$ ) se encuentra un momento magnético unitario  $S$ , siendo la interacción entre diferentes momentos de vecinos próximos e isotropa, ver Chikazumi(1964). La evolución de la cadena la da el sistema integrable obtenido. El modelo fue integrado en Takhtajan(1973) y en Eicheherr(1982) se mostraba su relación con el álgebra de lazos, considerándose conjuntamente con la ecuación de NLS.

La transformación de Miura con AKNS se sigue de  $a_x \cdot a^{-1} = -\frac{1}{4}[S, S_x]$ . Integrando esta ecuación se llega a una expresión no local de  $a$  en  $S, S_x$ ,

invirtiéndola obtenemos  $\bar{a}$ , de donde se concluye  $\bar{a}_x \cdot \bar{a}^{-1} = p e + q f$  con  $p, q$  soluciones de AKNS. Por tanto se expresan soluciones de AKNS en términos de soluciones del modelo ferromagnético de Heisenberg. La relación contraria es también cierta, la ecuación diferencial para  $\bar{a}$  permite hallar  $a$  en función de  $p, q$  y por tanto  $S = \text{Ada}(h)$  será solución del modelo ferromagnético de Heisenberg. La equivalencia 'gauge' de NLS con el modelo ferromagnético de Heisenberg fue puesta de manifiesto en Zakharov y Takhtajan(1979) aunque ya en Lakshamanan(1977) aparece la relación existente entre ambos sistemas. Para un estudio detallado ver Faddeev y Takhtajan(1987).

### VI.3 El sistema de Dodd-Fordy

En el ejemplo que se expone a continuación la solución de la ecuación de Yang-Baxter clásica modificada es  $\rho(w_+ e + w_0 h + w_- f) = w_+ e + c w_0 h - w_- f$ ,  $c \in \mathbb{C}$ . Se llega a  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_+ = \mathbb{C}\{e, (c+1)h\}$  y  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_- = \mathbb{C}\{f, (c-1)h\}$ . Por tanto  $S = h + 2v f$  y  $V_+ = 2u e - (c+1)uv h$ . De donde  $V = 2v e - 2uv h - (2(c-1)uv^2 - v_x)f$  y  $Q_+ = (u_x + 2(c-1)u^2 v)e + (\frac{1}{2}(c+1)(uv_x - vu_x) + (c+1)(2c-1)u^2 v^2)h$ . El sistema integrable es

$$\begin{aligned} u_t &= \frac{1}{2}u_{xx} + 2(c-1)vuu_x + 2cu^2v_x - 2c(c+1)u^3v^2 \\ v_t &= -\frac{1}{2}v_{xx} + 2(c-1)uvv_x + 2cv^2u_x + 2c(c+1)v^3u^2. \end{aligned}$$

Una primera densidad conservada es  $(c+1)uv$  y el par de Lax adopta la forma  $L = \lambda(h - 2v f) + 2u e - (c+1)uv h$  y  $A = \lambda^2(h - 2v f) + \lambda(2u e - 2uv h + (2(c-1)uv^2 - v_x)f + (2(c-1)u^2 v + u_x)e + (\frac{1}{2}(c+1)(uv_x - vu_x) - (c+1)(2c-1)u^2 v^2)h$ . La jeraquía integrable, de las que este sistema constituye tan solo la primera pareja de ecuaciones, se puede interpretar como la descripción de los flujos conmutativos generados por el subgrupo homogéneo en la variedad homogénea  $LSL(2, \mathbb{C})/(L_1^+ SL(2, \mathbb{C}) \times SL(2, \mathbb{C})_+)$ . Considerar  $-\rho$  es equivalente al estudio realizado y supone sustituir  $c$  por  $-c$ .

Las formas reales,  $c \in \mathbb{R}$ , tienen asociada la ecuación

$$iu_t = \frac{1}{2}u_{xx} \mp 2i(c-1)|u|^2 u_x \mp 2icu^2 u_x^* + 2c(c+1)|u|^4 u,$$

aquí el signo  $-$  se toma en el caso compacto  $\mathfrak{su}(2)$  y el signo  $+$  en el no compacto  $\mathfrak{su}(1, 1)$ . Esta ecuación fue encontrada en Dodd y Fordy(1984), junto con el par de Lax en su forma real, por el método de prolongación

de Wahlquist-Eastabrook. En la ecuación de Dodd y Fordy(1984) aparecen dos parametros reales, en tanto que en el sistema integrable que hemos obtenido aquí tan solo hay uno. Sin embargo la equivalencia entre ambas ecuaciones es completa una vez que las coordenadas  $x, t$  se someten a dilataciones. La ecuación se particulariza fijando el valor de  $c$ . Cuando  $c = -1$ , en el caso compacto, se llega a la ecuación de Schrödinger no lineal derivada (DNLS), que fue integrada en Kaup y Newell(1978); cuando  $c = 0$  se obtiene la ecuación que aparece en Chen, Lee y Liu(1979) cuyas soluciones multisolitónicas se hallaron en Nakamura y Chen(1980).

Como en casos anteriores este sistema integrable se conecta con AKNS mediante una transformación de Miura generalizada. Insertando

$$a = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ a_2 & a_1^{-1} \end{pmatrix}$$

en la ecuación diferencial

$$a_x \cdot a^{-1} = -(c-1)uvh + (-2(c-1)uv^2 + v_x)f$$

se llega a la solución no local

$$\begin{aligned} a_1(x, t) &= \exp\left(- (c-1) \int^x dy uv(y, t)\right) \\ a_2(x, t) &= v \exp\left(- (c-1) \int^x dy uv(y, t)\right). \end{aligned}$$

Como

$$\bar{a}_x \cdot \bar{a}^{-1} + A d\bar{a}(2ue - (c+1)uvh) = pe + qf,$$

donde  $\bar{a} = a^{-1}$ , se obtiene la transformación de Miura generalizada

$$\begin{aligned} p(x, t) &= 2u(x, t) \exp\left(2(c-1) \int^x dy uv(y, t)\right) \\ q(x, t) &= (-v_x(x, t) + 2(2c-1)uv^2) \exp\left(-2(c-1) \int^x dy uv(y, t)\right). \end{aligned}$$

La transformación de Miura generalizada nos permite asegurar que  $uv_x - 2(2c-1)u^2v^2$  es una densidad conservada del sistema modificado ya que es proporcional a la primera densidad conservada  $pq$  de AKNS. Obsérvese que las formas reales,  $u = \pm v^*$ , del sistema modificado, no se hallan relacionadas mediante una transformación de Miura con NLS. Sin embargo estas ecuaciones se conectan entre si para diferentes valores de  $c$ , ver Mañas(1988).

#### VI.4 Ecuaciones de Jaulent-Miodek y Burgers

El ejemplo dado ahora enlaza con el problema del operador de Schrödinger dependiente de la energía así como con la ecuación de Burgers. La solución  $\rho$  de la ecuación de Yang-Baxter clásica modificada está asociada a la descomposición

$$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_+ \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_-,$$

con

$$\begin{aligned}\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_+ &= \mathbb{C}\{e + \frac{1}{2}h, f - \frac{1}{2}h\} \\ \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_- &= \mathbb{C}\{h\}.\end{aligned}$$

Ahora serán  $S = h$ ,  $V_+ = u(e + \frac{1}{2}h) + v(f - \frac{1}{2}h)$ . También  $V = ue + vf$  y  $Q_+ = \frac{1}{2}(u_x - u(u - v))(e + \frac{1}{2}h) - \frac{1}{2}(v_x + v(u - v))(f - \frac{1}{2}h)$ . El sistema integrable asociado es

$$\begin{aligned}u_t &= \frac{1}{2}u_{xx} + \frac{1}{2}(2uv - u^2)_x \\ v_t &= -\frac{1}{2}v_{xx} - \frac{1}{2}(2uv - v^2)_x.\end{aligned}$$

El sistema fue estudiado en Nijhoff, Quispel, van der Lienden y Capel(1982), y aparece como la ecuación  $z_8$  en Mikhailov, Shabat y Yamilov(1987). Una primera densidad conservada es  $uv$ . Admite la reducción real no compacta  $\mathfrak{su}(1, 1)$ ,  $u = v^*$ , con la ecuación integrable

$$iu_t = \frac{1}{2}u_{xx} + \frac{i}{2}(2|u|^2 - u^2)_x.$$

La transformación de Miura generalizada con AKNS se halla como en casos anteriores

$$\begin{aligned}p(x, t) &= u(x, t) \exp\left(-\int^x dy(u - v)(y, t)\right) \\ q(x, t) &= v(x, t) \exp\left(\int^x dy(u - v)(y, t)\right),\end{aligned}$$

que en el caso de la reducción no compacta conecta la ecuación con NLS<sup>-</sup> a través de la relación

$$p(x, t) = u(x, t) \exp\left(-2i \int^x dy \operatorname{Im} u(y, t)\right),$$

donde  $\text{Im}$  denota la parte imaginaria. Las ecuaciones se pueden conectar con el modelo ferromagnético de Heisenberg teniendo en cuenta que la solución,  $S$ , de dicho modelo se expresa en función de soluciones de AKNS (NLS en formas reales) y por tanto en términos de soluciones del sistema aquí construido.

El par de Lax del sistema es  $L = \lambda h + u(e + \frac{1}{2}h) + v(f - \frac{1}{2}h)$  y  $A = \lambda^2 h + \lambda(u e + v f) + \frac{1}{2}(u_x - u(u - v))(e + \frac{1}{2}h) - \frac{1}{2}(v_x + v(u - v))(f - \frac{1}{2}h)$ . Si  $L$  se conjuga con el elemento

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in \text{GL}(2, \mathbb{C}),$$

se obtiene  $L^g := \text{Ad}_g(L)$  con  $L^g = -\lambda(e + f) - \frac{1}{2}(u + v)h + (u - v)f$ . El problema de encontrar  $\psi_+$  se puede plantear, en su dependencia en  $x$ , como  $L = \psi_{+,x} \cdot \psi_+^{-1}$ ; o bien,  $L^g = \psi_{+,x}^g \cdot \psi_+^{g^{-1}}$ , con  $\psi_+^g = g \cdot \psi_+ \cdot g^{-1}$ . Sea pues

$$\psi_+^g = \begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \bar{\varphi}_1 & \bar{\varphi}_2 \end{pmatrix},$$

entonces se concluye

$$\varphi_{i,xx} - (\lambda^2 + \lambda w_1 + w_0)\varphi_i = 0,$$

donde

$$w_1 = u - v, \quad w_0 = \frac{1}{2}((u + v)_x + \frac{1}{2}(u + v)^2).$$

Luego las  $\varphi_i$  son soluciones de la ecuación de Schrödinger con un potencial dependiente de la energía, los campos  $w_1, w_0$  son soluciones del sistema de Jaulent-Miodek, y las variables  $u - v, \frac{1}{2}(u + v)$  lo son del problema dependiente de la energía modificado, en esta dirección vease Martínez Alonso y Guil(1981) en donde se trata también la relación con AKNS. Con la reducción real no compacta las variables modificadas del problema de Jaulent-Miodek son  $2i \text{Im } u, \text{Re } u$ .

Se puede considerar la reducción  $v = 0$ , esto es equivalente a trabajar con el álgebra resoluble  $B = \mathbb{C}\{e, h\}$  de  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ , es decir con el álgebra de lazos  $LB$ . La ecuación que se obtiene es

$$u_t = \frac{1}{2}u_{xx} - uu_x,$$

que es la ecuación de Burgers, que se usa como modelo de fluidos turbulentos en un canal, Burgers(1948), también aparece en la teoría estructural de las ondas de choque, Lighthill(1956). Comentemos que la misma reducción en la jerarquía AKNS,  $q = 0$  conduce a la ecuación del calor, y por tanto la transformación de Miura generalizada hallada con AKNS, con esta reducción, conecta la ecuación del calor con la ecuación de Burgers, linealizándola. La ecuación del calor será  $p_t = \frac{1}{2}p_{xx}$ , y si  $p$  es solución entonces  $\bar{p}(x, t) = \int^x dy p(y, t)$  también lo es. Reduciendo la transformación de Miura generalizada se obtiene  $p(x, t) = -(\exp(\int^x dy u(y, t)))_x$  que implica  $u = (\ln \bar{p})_x$ . Esta transformación es conocida desde principios de siglo, ver Forsyth(1906), pero habitualmente se la conoce como transformación de Hopf-Cole, Hopf(1950) y Cole(1951). La ecuación de Burgers no posee un número infinito de leyes de conservación, la estructura del problema de factorización impone que  $\phi$  no dependa de  $x, t$ . Sin embargo si posee un número infinito de simetrías, las dadas por flujos de orden mayor,  $u_{t_n} = 2^{-n} \partial_x (\partial_x - u)^n u$  (ver Guil(1989)), flujos que en conjunto forman la jerarquía de Burgers. (El flujo asociado a  $\lambda^n h$  se linealiza a una ecuación del tipo  $2^n p_{t_n} = \partial_x^n p$ .) La ecuación de Burgers tiene un par de Lax:  $L = \lambda h + u(e + \frac{1}{2}h)$  y  $A = \lambda^2 h + \lambda u e + \frac{1}{2}(u_x - u^2)(e + \frac{1}{2}h)$ .

## VI.5 Otros sistemas integrables

En Guil y Mañas(1990) se consideraron dos ejemplos más. El primero de ellos es el dado por  $\rho(w_+ e + w_0 h + w_- f) = (w_+ - 2\mu w_-)e + w_0 h - w_- f$ ,  $\mu \in \mathbb{C}$ . La ligadura entre  $S$  y  $V_+$  se resuelve con  $S = h + 2\mu \phi f$ ,  $\phi := \frac{1}{2\mu}(1 - \exp(-2\mu q))$ , y  $V_+ = 2p e + (\mu q_x - 2p\phi)h$ . El sistema de evolución es

$$\begin{aligned} p_t &= \frac{1}{2}p_{xx} - 2\mu p q_{xx} + 2(1 - 4\mu^2 \phi^2)p^2 q_x + 4\mu \phi^2 p p_x - \\ &\quad 4(1 - 2\mu \phi)\phi^2 p^3 \\ q_t &= -\frac{1}{2}q_{xx} - \mu q_x^2 - 4\mu \phi^2 p q_x + 4\phi^3 p^2. \end{aligned}$$

También se presentó el caso  $\rho(w_+ e + w_0 h + w_- f) = (2\mu w_- - w_+)e + (2\nu w_- w_0)h + w_- f$ ,  $\mu, \nu \in \mathbb{C}$ . Ahora la parametrización es  $S = h + 2q f$  y  $V_+ = 2p(e + \mu h + \nu f)$ , y el sistema integrable asociado es

$$\begin{aligned} p_t &= \frac{1}{2}p_{xx} - 2(p^2(q + \mu))_x \\ q_t &= -\frac{1}{2}q_{xx} - 2(pq(q + 2\mu))_x + \nu(p_x + 4p^2(q + \mu)). \end{aligned}$$

### VI.6 Los modelos de transparencia autoinducida y Thirring masivo

Para finalizar este capítulo presentaremos dos reticulos continuos integrables asociados a la 1-forma  $\alpha$ . Por ejemplo cuando  $\rho = \text{id}$ , se tiene  $S = h, V_+ = pe + qf, T = T_+ e + T_0 h + T_- f (T_0^2 + T_+ T_- = -1), W_- = 0$ , obviamente  $p, q$  son soluciones de la jerarquía AKNS en los tiempos  $t_1 = x, t_2 = t, \dots$  en tanto que  $T$  es un momento magnético unitario que satisface el modelo ferromagnético de Heisenberg en las variables  $t_{-1} = y, t_{-2} = s, \dots$

Las ecuaciones serán

$$\begin{aligned} p_y + 2T_+ &= 0, & q_y - 2T_- &= 0 \\ T_{+,x} + 2T_0 p &= 0, & T_{-,x} - 2T_0 q &= 0 \\ T_{0,x} &= pT_- - qT_+. \end{aligned}$$

Se observa que  $-\frac{1}{2}p, \frac{1}{2}q$  son potenciales, en la variable  $y$ , para las componentes  $T_+, T_-$  del momento magnético  $T$ , será

$$T_+ = -\frac{1}{2}p_y, \quad T_- = \frac{1}{2}q_y.$$

Teniendo esto en cuenta, y fijándonos en que la última ecuación es consecuencia de las primeras (en realidad es una ley de conservación  $T_{0,x} = (\frac{1}{2}pq)_y$ ) y de la ligadura,  $T^2 = \text{id}$ , que pesa sobre  $T$ , las ecuaciones se convierten en

$$\begin{aligned} p_{xy} - 4T_0 p &= 0, & q_{xy} - 4T_0 q &= 0 \\ 4(T_0^2 + 1) &= p_y q_y, \end{aligned}$$

y por tanto se cumple la ecuación

$$p_{xy}q = pq_{xy}.$$

Este sistema es integrable con par de Lax, infinitas leyes de conservación locales en  $p, q, T$  y además es simetría de AKNS (en los campos  $p, q$ ) y del modelo ferromagnético de Heisenberg (para  $T$ ).

Las formas reales de las ecuaciones las dan las reducciones  $q = \mp p^*, T_0 = i\beta (\beta : H \rightarrow \mathbb{R}), T_- = \mp T_+^*$ , según la forma real escogida sea compacta o no. Las ecuaciones serán

$$\begin{aligned} p_{xy} + 4\beta p &= 0, \\ 4(1 - \beta^2) &= \mp |p_y|^2. \end{aligned}$$

Este sistema aparece en la teoría de la transparencia autoinducida, ver Gibbon(1985) y McCall y Hahm(1967). Las soluciones de estas ecuaciones son simetrías de NLS y del modelo ferromagnético de Heisenberg. El sistema obtenido se puede considerar como una extensión de la ecuación integrable conocida por 'sine'-Gordon. Si se supone  $p$  real, y por tanto  $T_+$  real, parametrizamos  $\beta = \cosh \varphi$ ,  $\cos \varphi$  según sea el caso compacto o no y obtenemos la ecuación, p.e. en el caso no compacto,

$$\varphi_{xy} + 2\text{sen}\varphi = 0.$$

Supóngase, por último, que  $\rho$  es como en VI.3, entonces

$$\begin{aligned} S &= h + 2vf, \quad V_+ = 2ue + (1+c)uvh \\ T &= h + 2ne, \quad W_- = 2mf + (1-c)mnh. \end{aligned}$$

Los campos  $u, v$  satisfacen la forma compleja de las ecuaciones de Dodd-Fordy en las variables  $x, t$  en tanto que  $m, n$  lo hacen en las variables  $y, s$  con la sustitución  $c \rightarrow -c$ . Las ecuaciones que ligán estos campos en las variables  $x, y$  son

$$\begin{aligned} u_y + 2(1-c)umn + 2n &= 0, \quad v_y - 2(1-c)vmn + 2m = 0 \\ m_x + 2(1+c)muv + 2v &= 0, \quad n_x - 2(1+c)nuv + 2u = 0, \end{aligned}$$

siendo este un sistema integrable, con par de Lax, infinitas leyes de conservación locales en los campos  $u, v, m, n$  y además son simetrías de las ecuaciones de Dodd-Fordy.

Las reducciones reales dan

$$\begin{aligned} iu_y \mp 2(1-c)u|n|^2 + 2n &= 0, \\ in_x \pm 2(1+c)n|u|^2 + 2u &= 0, \end{aligned}$$

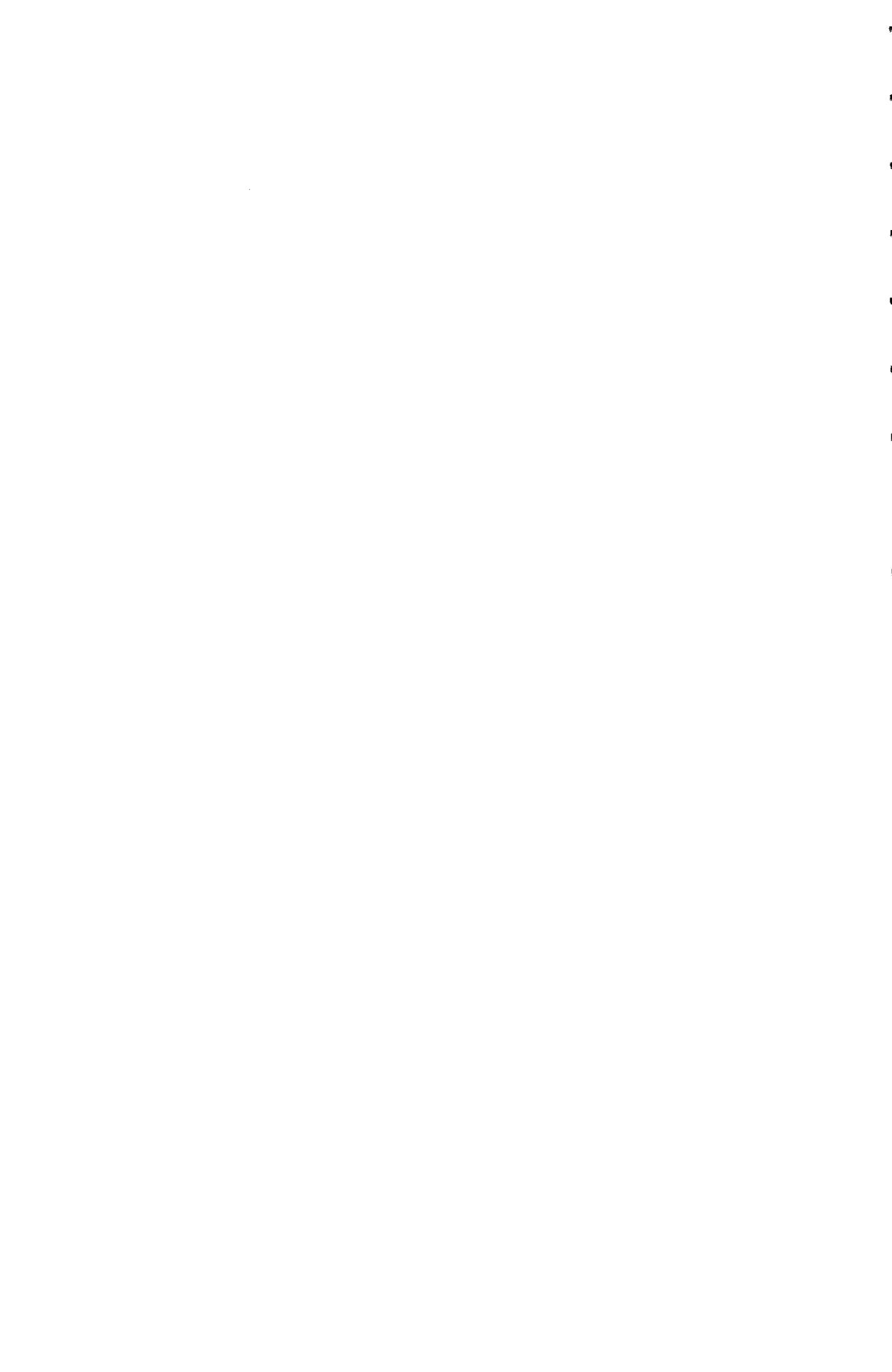
donde  $-$  corresponde a la reducción compacta y el signo  $+$  a la no compacta. Este sistema que es una generalización del modelo de Thirring masivo, caso que se recupera cuando  $c = 0$ .

Dicho modelo fue propuesto por W. Thirring en 1958 como una teoría de campos relativista y en Coleman(1975) se puso de manifiesto su relación con la ecuación de 'sine'-Gordon. Fue integrado en Mikhailov(1976), Kuznesov y Mikhailov(1977) y en Kaup y Newell(1977), en este último trabajo se subrayó que la conjetura de Coleman es tan solo válida para las soluciones de 1-soliton. En las demás soluciones la relación con la ecuación de 'sine'-Gordon

desaparece. Sin embargo la dinámica de los solitones de ambos sistemas esta relacionada como se demuestra en Martínez Alonso(1984) y Martínez Alonso y Olmedilla(1985). En el trabajo Kuznesov y Mikhailov(1977) se encontró una doble familia de leyes de conservación locales, debe recordarse que en la sección V.3 se dio un método efectivo para su construcción.

Del análisis realizado se concluye que el modelo de Thirring masivo ( $c = 0$ ) es una simetría de la ecuación integrada en Chen, Lee y Liu(1979). Si  $u$  y  $n$  son solución del modelo de Thirring masivo en las variables  $x, y$ , entonces son solución de la ecuación de Chen-Lee-Liu en las variables  $x, t$  e  $y, s$  respectivamente. Aunque en Kaup y Newell(1977) se hace algún comentario sobre la utilidad del par de Lax del modelo de Thirring masivo en ciertas ecuaciones NLS derivadas, no se encontró allí este papel de simetría de dicho modelo.

Digamos que la conjetura de Coleman es cierta en el siguiente contexto. Si no se consideran reducciones reales, las soluciones de AKNS, y por tanto las del modelo ferromagnético, se expresan en función de las soluciones del sistema considerado en VI.3, cuyos campos son precisamente los que aparecen en la extensión compleja del modelo de Thirring masivo. Por tanto las soluciones del primer retículo, que contiene la generalización de 'sine'-Gordon, se pueden escribir en función de las del segundo, que es una generalización del modelo de Thirring masivo.



## Capítulo VII

### La subálgebra homogénea en el caso elíptico y la ecuación de Landau-Lifshitz

En este capítulo consideraremos los mismos flujos que en el capítulo V, pero ahora la matriz- $r$  clásica ya no es una modificación de la solución racional de Yang, sino que en este caso se trabaja con la matriz- $r$  elíptica de Baxter-Belavin-Sklyanin,  $R = P_+ - P_E$  (consultar III.6). Para parametrizar la solución  $\psi_+$  contraemos la ecuación (V.2.4) con el campo  $\partial_{-1}$ . Para ello utilizamos la factorización de  $\psi_+$  introducida en V.3

$$\psi_+ = v \cdot b \cdot \varphi,$$

así como la descomposición de Fourier

$$\ln v(\lambda) = \sum_{n>0} \lambda^n V_n, \quad \varphi(\lambda) = \sum_{n>0} \lambda^n \varphi_n.$$

De esta forma obtenemos una familia infinita de ecuaciones para estos coeficientes de Fourier, las dos primeras son

$$\begin{aligned} \partial_{-1} b \cdot b^{-1} + [V_1, S] &= 0, \\ \partial_{-1} V_1 + [V_1, \partial_{-1} b \cdot b^{-1}] + \partial_{-1} \varphi_1 T + [V_2, T] + \frac{1}{2} [V_1, [V_1, T]] &= \\ -2 \sum_j A_j T_j \sigma_j. \end{aligned}$$

Aquí se ha tenido en cuenta que

$$P_E \text{Adv}(\lambda^{-1} T) = \sum_j w_j(\lambda) T_j \sigma_j,$$

siendo  $T := \sum_{j=1}^3 T_j \sigma_j$  el vector definido en V.3, y  $A_j$  las constantes definidas en III.6.

Introduciendo el operador de anisotropía  $J \in \text{End } \mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$  definido como  $J\sigma_j := 2A_j\sigma_j$  se llega a las expresiones

$$\begin{aligned} V_1 &= -\frac{1}{4}\partial_{-1}T, & \partial_{-1}\varphi_1 &= -\frac{1}{8}B(\partial_{-1}T, \partial_{-1}T) - B(JT, T), \\ V_2 &= \frac{1}{16}[\partial_{-1}^2T, T] + \frac{1}{4}[T, JT]. \end{aligned}$$

La consideración de más ecuaciones hubiera llevado, como en anteriores capítulos, a expresiones polinómicas para  $V_n, \partial_{-1}\varphi_n$  en  $T$  y sus  $\partial_{-1}$ -derivadas. En resumen, se ha obtenido una parametrización para  $\psi_+$ .

En el espíritu de V.2 contraemos la ecuación (IV.2.4) para  $\psi_+$  con  $\partial_{-2}$ . Para que la parametrización recién obtenida sea válida en la subvariedad con las variables  $t_{-1} = y, t_{-2} = s$  como coordenadas  $T$  ha de satisfacer la ecuación de Landau-Lifshitz

$$T_s = \frac{1}{4}[T, T_{yy}] + 2[JT, T].$$

También se consiguen expresiones polinómicas para  $\varphi_{n,s}$  en  $T, T_y, \dots$ , por lo que se puede construir una colección infinita de leyes de conservación locales y no triviales  $(\varphi_{n,y})_s = (\varphi_{n,s})_y$ .

El par de Lax es el obtenido en Sklyanin(1979)

$$\begin{aligned} L &= \sum_{j=1}^3 w_j(\lambda) T_j \sigma_j \\ A &= \sum_{j=1}^3 (w_j^{(1)}(\lambda) T_j \sigma_j + \frac{1}{2} \varepsilon_{jkl} w_j(\lambda) T_k T_{l,x}) \sigma_j. \end{aligned}$$

Si hubieramos considerado los campos  $\partial_{-n}$  habríamos llegado a la jerarquía de Landau-Lifshitz, Holod(1987-1).

La ecuación de Landau-Lifshitz describe, como en el modelo ferromagnético de Heisenberg una cadena lineal continua, etiquetada por la variable  $y$ , de momentos magnéticos unitarios,  $T$ , pero con un término de interacción anisótropo. La anisotropía de dicha interacción aparece ligada al operador  $J$ , pues el hamiltoniano es proporcional a  $\varphi_{1,y}$ , ver Chikazumi(1964) y Roberts y Thompson(1988). La ecuación fue integrada en Borovik(1978) y

Sklyanin(1979); en Mikhailov(1982) y Rodin(1983) se resolvía el problema de Riemann-Hilbert sobre el toro, ver también Date, Jimbo, Kashiwara y Miwa(1983).



## Capítulo VIII

### $LSL_2$ , la subálgebra principal y KdV

Analizamos en este capítulo el revestimiento de los flujos conmutativos generados por el subgrupo de Heisenberg principal. La ecuación de KdV y su modificación, en sus versiones potenciales, son los sistemas integrables que emergen dentro de este marco. En I.2.2 se estudió la estructura de la subálgebra principal de  $LSl(2, \mathbb{C})$ . Recordemos que

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_+ \oplus \mathfrak{P}_-,$$

donde

$$\mathfrak{P}_+ = \mathbb{C}\{\Lambda^{2n+1}\}_{n \geq 0}, \quad \mathfrak{P}_- = \mathbb{C}\{\Lambda^{2n+1}\}_{n < 0},$$

con  $\Lambda = e + \lambda f$  el elemento cíclico del álgebra de lazos. Dicho elemento cumple que  $\Lambda^{2n+1} = \lambda^n \Lambda$  con  $n \in \mathbb{Z}$ .

Usaremos los flujos conmutativos de Wilson(1984). El subgrupo abeliano  $H = H_1 \times H_2 \subset LSL(2, \mathbb{C}) \times LSL(2, \mathbb{C})$  que aparecía en el capítulo IV y que generaba los flujos conmutativos será en este caso  $H = H_- \times H_+$  con  $H_{\pm}$  los grupos de Lie adjuntos a  $\mathfrak{P}_{\pm}$ . Los flujos son

$$\psi = h_+ \cdot g \cdot h_-^{-1}, \quad h_{\pm} \in H_{\pm},$$

donde  $g \in LSL(2, \mathbb{C})$ . Asimismo  $\chi_1, \chi_2$  serán las 1-formas de Maurer-Cartan en  $H_1 := H_-, H_2 := H_+$  respectivamente. Las matrices- $r$  clásicas serán como sigue: en la primera sección se emplea la solución racional de Yang, y en la segunda se trabaja con una modificación suya asociada a  $\rho(w_+e + w_0h + w_-f) = w_+e + cw_0h - w_-f, c \in \mathbb{C}$ .

En la primera sección repetimos el análisis realizado en V.1 y V.2 que en este nuevo contexto da lugar a la forma potencial de la ecuación de KdV

(pKdV), al par de Lax e infinitas leyes de conservación locales y no triviales. En la segunda sección se estudia la forma potencial de la ecuación de KdV modificada, que se denotará por pmKdV. La transformación de Miura entre estas versiones potenciales se hace explícita en esta segunda subsección. Estos resultados son desarrollos de los ya expuestos en Guil(1987), en donde se trataba de dar una explicación sistemática de los trabajos Drinfel'd y Sokolov(1981,1985-1). En la tercera sección se analizan las consecuencias de la condición de curvatura nula que pesa sobre  $\alpha$ . En el caso particular de pmKdV se obtiene la ecuación de 'sine'-Gordon.

### VIII.1 La factorización de Birkhoff y la forma potencial de KdV

La ecuación (IV.2.4) para  $\psi_-$ , siendo  $R$  la solución de Yang, se contrae con el campo vectorial  $\partial_1 \in \mathfrak{X}_I(H_+)$ , con  $\partial_1(e) = \Lambda$ . Esto nos servirá para parametrizar  $\psi_-$ . Recordemos la descomposición

$$L\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) = \mathfrak{P} \oplus \mathfrak{m},$$

con  $\mathfrak{m} = \text{im ad}\Lambda = \mathbb{C}\{\lambda^n h, \lambda^n e - \lambda^{n+1} f\}_{n \in \mathbb{Z}}$ . Esta descomposición induce

$$L_1^- \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) = \mathfrak{P}^- \oplus \mathfrak{m}^-,$$

con  $\mathfrak{P}^- = L_1^- \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \cap \mathfrak{P}$  y  $\mathfrak{m}^- = (L_1^- \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \cap \mathfrak{m}) \oplus \mathbb{C}\{\lambda^{-1}e\}$ . Factorizamos  $\psi_-$  como sigue

$$\psi_- = u \cdot \phi,$$

donde  $\ln u$  toma valores en  $\mathfrak{m}^-$  y  $\phi$  en  $H_-$ . La ecuación (IV.2.4) para  $\psi_-$  contraída con  $\partial_1$  en términos de la factorización recién introducida es

$$\partial_1 u \cdot u^{-1} + \text{Adu}(\partial_1 \ln \phi) = -P_- \text{Adu}(\Lambda).$$

Introduciendo los desarrollos de Fourier

$$\begin{aligned} \ln u(\lambda) &= p\lambda^{-1}e + \sum_{n>0} (u_{2n}\lambda^{-n}h + u_{2n+1}(\lambda^{-n-1}e - \lambda^{-n}f)), \\ \ln \phi &= \sum_{n>0} \Phi_{2n+1}\Lambda^{-2n-1}, \end{aligned}$$

se obtiene una serie infinita de ecuaciones que ligán estos coeficientes de Fourier, las primeras son

$$\partial_1 p + 2u_2 - p^2 = 0$$

$$\begin{aligned} \partial_1 u_2 + 2u_3 - u_2 p &= 0 \\ \frac{1}{2}(u_2 \partial_1 p - p \partial_1 u_2) + \partial_1 \Phi_3 - 2u_3 p + 2u_2^2 &= 0 \\ \partial_1 u_3 + \frac{1}{2}(u_2 \partial_1 p - p \partial_1 u_2) - u_3 p + 2u_4 &= 0. \end{aligned}$$

El análisis de este conjunto infinito de ecuaciones nos permite expresar los elementos de  $\{u_n, \partial_1 \Phi_{2n-1}\}_{n>0}$  como polinomios en  $p$  y sus  $\partial_1$ -derivadas, parametrizando  $\psi_-$  en función de  $p$ . Por ejemplo, obtenemos las expresiones

$$\begin{aligned} u_2 &= -\frac{1}{2}(\partial_1 p - p^2) \\ u_3 &= \frac{1}{4}(\partial_1^2 p - 3p \partial_1 p + p^3) \\ \partial_1 \Phi_3 &= \frac{1}{4}(p \partial_1^2 p - p \partial_1 p - (\partial_1 p)^2). \end{aligned}$$

Como en V.2 se contrae la ecuación (IV.2.4) para  $\psi_-$  con el campo  $\partial_3 \in \mathfrak{X}_I(H_+)$ ,  $\partial_3(e) = \Lambda^3$ . Introduciendo la parametrización obtenida aparecen una serie de ligaduras. Si  $t_{2n+1}$  son las coordenadas asociadas a los flujos de  $\partial_{2n+1} \in \mathfrak{X}_I(H_+)$ ,  $\partial_{2n+1}(e) = \Lambda^{2n+1}$ , denotaremos  $t_1 = x, t_3 = t$ . La primera ligadura es

$$4p_t = p_{xxx} - 6p_x^2,$$

que es la versión potencial de la ecuación de KdV. Se llega también a expresiones locales para  $\partial_3 \Phi_{2n+1}$  en  $p, p_x, \dots$ , lo que da lugar a una colección de infinitas leyes de conservación de pKdV. La consideración de los campos  $\partial_{2n+1}$  nos llevaría a la forma potencial de la jerarquía de KdV. El par de Lax es  $L = e + p h + (\lambda + p_x - p^2) f$  y  $A = (\lambda - p_x) e + (p \lambda + \frac{1}{2} p_{xx} - p p_x) h + (\lambda^2 + (p_x - p^2) \lambda + \frac{1}{4} p_{xxx} - \frac{1}{2} p_x^2 - p p_{xx} + p^2 p_x) f$ . La condición de curvatura nula sobre  $L dx + A dt$  asegura que la ecuación pKdV es la única condición sobre  $p$  para que la parametrización de  $\psi_-$  en función suya sea válida en la subvariedad de coordenadas  $x, t$ .

Por tanto, la versión potencial de la jerarquía de KdV describe diferencialmente la proyección de los flujos conmutativos en  $LSL(2, \mathbb{C})$ , generados por el subgrupo principal,  $H_+$ , en la grassmanniana  $Gr_\infty^{(2)}$ .

## VIII.2 La versión potencial de KdV modificada

Se escoge la matriz- $r$  clásica usada en VI.3, esto es,  $R = P_+ - P_- + p P_0$ , con  $\rho(w_+ e + w_0 h + w_- f) = w_+ e + c w_0 h - w_- f$ ,  $c \in \mathbb{C}$ . Sea  $\psi_-$  solución de

(IV.2.4) con esta  $R$ , y factoricemos  $\psi_-$ ,

$$\psi_- = a \cdot \psi_-^{(id)},$$

con  $a = \psi_-(\infty)$ , donde se entiende que lo que se calcula en  $\infty$  es la extensión holomorfa de  $\psi_-$  al exterior de  $S^1$  en la esfera de Riemann. Fijémonos en que  $\psi_-^{(id)}$  es la solución al problema de factorización de Birkhoff de la anterior sección. Es decir,  $\psi_-^{(id)}$  se parametriza a través de  $p$ , solución de la jerarquía de KdV en su forma potencial. Observando que

$$\partial_1 a \cdot a^{-1} = \rho_- Ada(e + ph + (\partial_1 p - p^2)f)$$

y

$$a = \begin{pmatrix} \exp(\frac{1}{2}(c-1)r) & 0 \\ b \exp(-\frac{1}{2}(c-1)r) & \exp(-\frac{1}{2}(c-1)r) \end{pmatrix},$$

se obtiene  $2\partial_1 b = -\partial_1^2 r + (\partial_1 r)^2$  y

$$\partial_1 p = \frac{1}{2}(\partial_1^2 r + (\partial_1 r)^2),$$

luego  $\psi_-^{(id)}$  se puede expresar en la variable  $r$ .

Como

$$\rho_+ Ada(P_0(L^{(id)} dx + A^{(id)} dt)) =: L_0 dx + A_0 dt$$

con  $L_0 := \frac{1}{2}(c+1)r_x h + \exp((c-1)r)e$  y  $A_0 := \frac{1}{4}(\frac{1}{2}r_{xxx} - r_x^3)h - \frac{1}{2}(r_{xx} + r_x^2) \exp((c-1)r)e$  es de curvatura nula, obtenemos la ligadura

$$4r_t = r_{xxx} - 2r_x^3,$$

que es la versión potencial de mKdV. Cálculos análogos con los campos  $\partial_{2n+1}$  nos llevarían a la versión potencial de la jerarquía de mKdV.

Tengamos en cuenta ahora la factorización

$$\psi_- = \exp(rh) \cdot u \cdot \phi,$$

donde

$$\ln u(\lambda) = \sum_{n \geq 0} u_{2n+1}(\lambda^{-n-1}e - \lambda^{-n}f) + u_{2n}\lambda^{-n}h$$

y

$$\ln \phi(\lambda) = \sum_{n \geq 0} \Phi_{2n+1} \Lambda^{-2n-1}.$$

Introduciendo la factorización anterior en la ecuación (IV.2.4) se obtienen expresiones para

$$u_n, l_{2n+1} := \Phi_{2n+1,x}, m_{2n+1} := \Phi_{2n+1,t}$$

en función de  $r, r_x, r_{xx} \dots$ , así como la ecuación de pmKdV para  $r$ . Esta ecuación tiene infinitas leyes de conservación locales y no triviales,  $l_{2n+1,t} = m_{2n+1,x}$ . La componente  $L$  del par de Lax, es  $L = \lambda \exp(-(c-1)r)f + \frac{1}{2}(c+1)r_x h + \exp((c-1)r)e$ .

### VIII.3 La ecuación de 'sine'-Gordon

Cuando se considera la 1-forma  $\alpha$  asociada a la ecuación pmKdV, se concluye que la 1-forma  $Ldx + A dy$  es de de curvatura nula, donde

$$L = \exp((c-1)r)e + \frac{1}{2}(c+1)r_x h + \lambda \exp(-(c-1)r)f$$

$$A = \lambda^{-1} \exp(-(c+1)q)e - \frac{1}{2}(c-1)q_x h + \exp((c+1)q)f,$$

con  $r, q$  son soluciones de pmKdV en las variables independientes  $x, t$  y  $y, s$  respectivamente. La condición de curvatura nula impone  $(r+q)_x = (r+q)_y = 0$ , por tanto se puede escoger  $q = -r$ , llegándose

$$r_{xy} = 2 \sinh 2r,$$

tras la sustitución  $r = \frac{i}{2}w$  obtenemos la ecuación de 'sine'-Gordon

$$w_{xy} = 4 \sin w.$$

Se deduce que la ecuación de 'sine'-Gordon es una simetría de pmKdV. Las leyes de conservación se obtienen como en V.3. Esto es, se conocen expresiones locales para  $l_{2n+1} = \Phi_{2n+1,x}$  en las variables  $r, r_x, \dots$ ; introduciendo la factorización  $\psi_- = \exp(rh) \cdot u \cdot \phi$  en la ecuación (IV.2.4) contraída con el campo  $\partial_y$  se obtiene

$$u_y \cdot u^{-1} + Adu \left( \sum_{n \geq 0} \Phi_{2n+1,y} \Lambda^{-2n-1} \right) = A,$$

donde  $A = \alpha(\partial_y)$ . De aquí se construyen expresiones polinómicas para  $\bar{l}_{2n+1} := \Phi_{2n+1,y}$  en  $r$  y sus  $\partial_x, \partial_y$ -derivadas, y por tanto se llega a las leyes de conservación locales  $l_{2n+1,y} = \bar{l}_{2n+1,x}$ .

La ecuación de 'sine'-Gordon (cuyo nombre fue acuñado por Kruskal, ver Rubinstein(1970)) fue resuelta en Ablowitz, Kaup, Newell y Segur(1973) y Lamb(1970,1971), su formulación de curvatura nula se puede encontrar en Takhtajan y Faddeev(1974) y Zakharov, Takhtajan y Faddeev(1975). La ecuación de 'sine'-Gordon apareció en la literatura científica en 1870, en estudios de geometría diferencial sobre superficies de curvatura constante negativa, Eneper(1870). A.V.Bäcklund encontró las conocidas transformaciones que llevan su nombre, al buscar nuevas soluciones de la ecuación en función de otras conocidas.

Esta ecuación posee infinidad de aplicaciones. En Frenkel y Kontorova (1939) se puso de manifiesto que 'sine'-Gordon es la ecuación que rige la propagación de dislocaciones en un cristal cuya periodicidad se representa por  $\sin w$ . En teoría de campos modela el esquema presentado en Perring y Skyrme(1962) para una teoría de partículas elementales, y en Coleman(1975) se relacionan algunas de sus soluciones con las de el modelo de Thirring (ver VI.6). También se interpreta  $\sin w$  como la corriente Josephson, a través de un aislante entre dos superconductores, donde  $w$  es la diferencia de potencial, ver Scott, Chu y McLaughlin(1973). En un fluido bilaminar, estructurado en dos capas diferenciadas, la ecuación de 'sine'-Gordon gobierna la dinámica de un paquete de ondas baroclínico y débilmente inestable, Gibbon, James y Moroz(1979); también es útil en el estudio de fronteras de Bloch en cristales magnéticos. En el artículo McCall y Hahm(1967) se describe el fenómeno de transparencia autoinducida mediante el uso de esta ecuación.

## Capítulo IX

### KdV, la ecuación de Schrödinger y modificaciones

Este capítulo está dedicado a la teoría de la modificación de la ecuación KdV. En la sección IX.1 estudiamos la relación de KdV con la ecuación de Schrödinger lo que da lugar a la teoría general de la modificación en KdV. La segunda sección contiene un tratamiento grupo-teórico de una cadena de tres modificaciones de KdV. Finalmente en IX.3 se presentan dos degeneraciones de la ecuación de Krichever-Novikov (KN) que son modificaciones de KdV. Las transformaciones de Miura generalizadas, directa e inversa, entre KdV y estas modificaciones se calculan explícitamente, así como los problemas de factorización asociados. En relación a este capítulo ver Drinfel'd y Sokolov(1985-2), Guil y Mañas(1991-2) y Mañas(1991).

De los resultados de Svinolupov y Sokolov(1983) y Svinolupov, Sokolov y Yamilov(1983) se sigue que los únicos sistemas integrables módulo introducción de un potencial  $h(v_x)$ , con un número infinito de cantidades conservadas, del tipo

$$v_t = v_{xxx} + f(v, v_x, v_{xx}),$$

son precisamente KdV, la cadena de tres modificaciones comentada y la ecuación de Krichever-Novikov (esta ecuación será motivo de estudio en el capítulo X). De estos resultados se sigue igualmente que las únicas modificaciones de KdV son la cadena de tres modificaciones y las dos degeneraciones de KN.

### IX.1 La ecuación de Schrödinger y KdV

La transformación de 'gauge' generada por  $g = \exp(pf)$ , donde  $p$  es solución de pKdV, convierte el par de Lax de pKdV en

$$\begin{aligned} U &= (\lambda - u)f + e \\ V &= (\lambda + \frac{1}{2}u)e - \frac{1}{4}u_x h + (\lambda^2 - \frac{1}{2}u\lambda - \frac{1}{4}(u_{xx} + 2u^2))f, \end{aligned}$$

donde  $u := -2p_x$ . Recordemos que  $\{e, h, f\}$  es la base usual de  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ . La ecuación de KdV para  $u$

$$4u_t = u_{xxx} + 6uu_x.$$

es consecuencia de la condición de curvatura nula para

$$\chi := U dx + V dt.$$

Este par de Lax se introdujo en Novikov(1974).

Sea  $\psi$  una función de onda con valores en  $L^+SL(2, \mathbb{C})$  tal que

$$\chi = d\psi \cdot \psi^{-1}.$$

La estructura de  $\psi$  la determina el sistema lineal

$$\psi_x = U \cdot \psi,$$

que impone

$$\psi = \begin{pmatrix} \varphi & \tilde{\varphi} \\ \varphi_x & \tilde{\varphi}_x \end{pmatrix}$$

donde  $\varphi$  y  $\tilde{\varphi}$  son dos soluciones linealmente independientes de la ecuación de Schrödinger

$$\varphi_{xx} = (\lambda - u)\varphi, \quad \tilde{\varphi}_{xx} = (\lambda - u)\tilde{\varphi}$$

con  $\det \psi = 1$ , esto es con wronskiano la unidad  $W(\varphi, \tilde{\varphi}) = \varphi\tilde{\varphi}_x - \tilde{\varphi}\varphi_x = 1$ . Se observa aquí como aparece el problema espectral que fue utilizado en Gardner, Greene, Kruskal y Miura(1967) para la integración de KdV.

Si  $\omega_+^{(+)}$  es la reducción de  $\omega_+$  a la subvariedad  $H_+$ , la transformación de 'gauge' generada por  $\exp(pf)$  transforma la jerarquía de pKdV en la de KdV. Esta jerarquía describe por tanto la proyección de los flujos conmutativos

generados por el subgrupo principal en la grassmanniana  $\text{Gr}_\infty^{(2)}$ . La función  $\psi$  representa la familia de flujos conmutativos de KdV, en el grupo  $L^+\text{SL}(2, \mathbb{C})$ .

Este es el marco adecuado para aplicar el **Teorema IV.2.1**, con  $G = L^+\text{SL}(2, \mathbb{C})$ , los flujos desnudos  $\psi$  esta vez serán los de KdV, y las matrices- $r$  clásicas son las que a continuación se detallan. Las soluciones de la ecuación de Yang-Baxter clásica modificada serán  $R = P_+ - P_-$ , donde  $\text{id} = P_+ + P_-$  es la resolución de la identidad dada por la descomposición en subálgebras

$$L^+\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) = L^+\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_+ \oplus L^+\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_-.$$

El problema de factorización asociado es  $\psi = \psi_-^{-1} \cdot \psi_+$ , con  $\psi_\pm$  a valores en  $L^+\text{SL}(2, \mathbb{C})_\pm$ , y  $\psi_-$  deberá satisfacer

$$\partial_x \psi_- \cdot \psi_-^{-1} + P_- \text{Ad} \psi_-(U) = 0 \quad (\text{IX.1.1})$$

$$\partial_t \psi_- \cdot \psi_-^{-1} + P_- \text{Ad} \psi_-(V) = 0. \quad (\text{IX.1.2})$$

La ecuación (IX.1.1) representa una transformación de Miura generalizada con KdV. Cuando  $u$  se exprese explícitamente en términos de  $\psi_-$  (lo que no es siempre posible), introduciremos esta información en (IX.1.2), llegando a una ecuación de evolución para  $\psi_-$ ; será la correspondiente versión modificada de KdV. Que  $U$  y  $V$  se parametricen mediante las funciones  $u$  y sus  $\partial_x$ -derivadas es crucial en esta construcción. Más aún, la solución al problema de factorización del que (IX.1.1) y (IX.1.2) son consecuencia, determina una solución  $\psi_-$  a la ecuación modificada en función de  $\psi$ , y de aquí la inversión de la transformación de Miura generalizada.

Los flujos conmutativos  $\psi_+$  con valores en  $L^+\text{SL}(2, \mathbb{C})$  y

$$\bar{\chi} = P_+ \text{Ad} \psi_-(\chi)$$

sirven de punto de partida para la repetición del proceso y obtener una modificación de la modificación ya obtenida de KdV. Como se verá en próximas secciones todas las modificaciones de KdV y transformaciones de Miura se obtienen de este modo.

## IX.2 Subgrupos unidimensionales y modificaciones

Algunas modificaciones de KdV admiten una descripción a través de descomposiciones del álgebra  $L^+\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  en las que la subálgebra  $L^+\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_-$  es unidimensional. La descomposiciones que se utilizarán en esta sección y

la próxima se deben entender como sigue. Como los lazos de  $L^+ \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  se extienden de modo único y holomorfo al interior de  $S^1$ , cuando se exija que un determinado lazo satisfaga cierta propiedad en un punto interior al círculo unidad, en realidad se pide que su extensión analítica cumpla tal propiedad en dicho punto.

Tomemos en primer lugar  $\chi = d\psi \cdot \psi^{-1} = Udx + Vdt$ . Si  $\lambda_1 \in D(0, 1)$  escogemos

$$L^+ \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) = L^+ \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_+ \oplus L^+ \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_-,$$

con

$$\begin{aligned} L^+ \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_- &= \mathbb{C}\{f\} \\ L^+ \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_+ &= \{X \in \mathfrak{g} : X(\lambda_1) \in \mathbb{C}\{e, h\}\}. \end{aligned} \quad (\text{IX.2.3})$$

El problema de factorización para  $\psi$ ,  $\psi = \psi_-^{-1} \cdot \psi_+$ , con

$$\psi_- = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & 1 \end{pmatrix}$$

impone la transformación de Miura clásica

$$u = v_x - v^2 + \lambda_1$$

que se sigue de (IX.1.1). De  $\psi_- \cdot \psi = \psi_+$  se llega a

$$v = -\frac{\varphi_{1x}}{\varphi_1}, \quad \varphi_1 := \varphi(\lambda_1). \quad (\text{IX.2.4})$$

Se concluye la fórmula

$$\psi_+ = \begin{pmatrix} \varphi & \tilde{\varphi} \\ \varphi_x + v\varphi & \tilde{\varphi}_x + v\tilde{\varphi} \end{pmatrix}$$

y la correspondiente 1-forma  $\omega_+ = d\psi_+ \cdot \psi_+^{-1} = P_+ \text{Ad}\psi_-(\chi)$  está parametrizada por  $v$ , y sus  $\partial_x$ -derivadas; contrayendo con  $\partial_x$  se obtiene

$$\omega_+(\partial_x) = e - v h + (\lambda - \lambda_1) f.$$

La ecuación (IX.1.2) implica para  $v$  la ecuación mKdV

$$4v_t = v_{xxx} - 6v^2 v_x + 6\lambda_1 v_x.$$

Esta ecuación fue encontrada en Miura(1968), donde se demostró que era una ecuación ligada por una transformación no lineal con KdV, la conocida hoy en día como transformación de Miura clásica, y que poseía un número infinito de leyes de conservación locales en  $v$  y no triviales. En Zabusky(1967) se demostró que esta ecuación modela el comportamiento de los fonones en una red anarmónica y en Kakutani y Ono(1969) se dió su relación con las ondas Alfvén en plasmas fríos no colisionantes.

Comentemos que la transformación de Miura convierte soluciones de la ecuación de mKdV en soluciones de KdV. La transformación inversa se obtiene de (IX.2.4) una vez conocidas las soluciones de la ecuación de Schrödinger con potencial la solución de KdV  $u$  y energía  $\lambda_1$ , es decir una vez resuelto el problema espectral directo. Se introduce entonces esta información en (IX.2.4), y el resultado es solución de mKdV. La transformación (IX.2.4) es la que se emplea para linealizar la ecuación tipo Ricatti que es la transformación de Miura.

Consideremos ahora la 1-forma con valores a  $L^+ \mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$ ,  $\chi = d\psi \cdot \psi^{-1} = U dx + V dt$  para la que

$$U = e - v h + (\lambda - \lambda_1) f$$

y

$$\psi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi & \tilde{\varphi} \\ \varphi_x & \tilde{\varphi}_x \end{pmatrix}.$$

Esto es,  $\chi$  denota aquí la 1-forma de curvatura nula de mKdV. Tómese  $\lambda_2 \in D(0, 1)$ ,  $\lambda_2 \neq \lambda_1$  y defínase la descomposición de  $L^+ \mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$  utilizada en la construcción de mKdV con  $\lambda_2$  en vez de  $\lambda_1$ . Se escoge  $\psi_-$  de la forma

$$\psi_- = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ w & 1 \end{pmatrix}$$

La ecuación (IX.1.1) se reduce a

$$2v = \frac{w_x}{w} - w + \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)}{w}. \quad (\text{IX.2.5})$$

Que  $\psi(\lambda_2)$  sea triangular superior significa que  $\psi_+$  adopta la expresión

$$\psi_+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ w & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi & \tilde{\varphi} \\ \varphi_x & \tilde{\varphi}_x \end{pmatrix}.$$

donde

$$w = \frac{\varphi_{1x}}{\varphi_1} - \frac{\varphi_{2x}}{\varphi_2}, \quad \varphi_j := \varphi(\lambda_j), j = 1, 2 \quad (\text{IX.2.6})$$

determina  $w$  como función de  $\psi$ .

La ecuación (IX.1.2) da en este caso

$$4w_t = w_{xxx} - 3\frac{w_x w_{xx}}{w} + \frac{3}{2}\frac{w_x^3}{w^2} - \frac{3}{2}w_x w^2 - \frac{3}{2}(\lambda_1 - \lambda_2)^2 \frac{w_x}{w^2} + 3(\lambda_1 + \lambda_2)w_x.$$

Esta ecuación es conocida en la literatura como de Calogero-Degasperis, pues fue resuelta, con ayuda de la transformada espectral inversa, en Calogero y Degasperis(1981). Sin embargo en Nakamura y Hirota(1980) también fue resuelta con ayuda del formalismo bilineal. La fórmula (IX.2.5) convierte soluciones de la ecuación de Calogero-Degasperis en soluciones de mKdV, y estas se pueden transformar a su vez en soluciones de KdV a través de la transformación de Miura clásica. El proceso inverso lo da (IX.2.6), una vez resuelto el problema espectral de KdV con energías  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ , como ya se ha explicado en la primera modificación.

Cuando se pretende repetir esta construcción para  $\lambda_3$ , aparecen relaciones diferenciales no solubles a diferencia de lo que ocurría en (IX.2.5). Para evitar esto consideremos la descomposición

$$L^+ \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_+ = L^+ \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_+ \oplus L^+ \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_-$$

con

$$\begin{aligned} L^+ \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_- &= \mathbb{C}\{h\} \\ L^+ \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_+ &= \left\{ X \in \mathfrak{g} : X(\lambda_2) \in \mathbb{C}\left\{e + \frac{1}{2}h, f - \frac{1}{2}h\right\} \right\} \end{aligned} \quad (\text{IX.2.7})$$

Como 1-forma  $\chi$  se toma la correspondiente a mKdV. El problema de factorización para  $\psi$  implica para  $f$  en

$$\psi_- = \begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & f^{-1} \end{pmatrix},$$

la transformación

$$v = \frac{f_x}{f} - \frac{1}{2} \left( f^2 - (\lambda_2 - \lambda_1) f^{-2} \right).$$

El subgrupo  $L^+SL(2, \mathbb{C})_+$  consiste en aquellas funciones  $\psi_+$

$$\psi_+ = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$$

con  $\det \psi_+ = 1$  y tal que en  $\lambda = \lambda_2$  se cumple  $p - s = q - r$ . Que  $\psi_- \cdot \psi = \psi_+$  pertenezca a  $L^+SL(2, \mathbb{C})_+$  determina  $f^2$  en términos de  $\psi$ ,

$$f^2 = \frac{\varphi_{1x}}{\varphi_1} - \frac{\varphi_{2x} - \tilde{\varphi}_{2x}}{\varphi_2 - \tilde{\varphi}_2}.$$

La función  $\tilde{w} = f^2$  es solución de la ecuación para  $w$ , y está igualmente conectada con  $v$  a través de (IX.2.5) como lo estaba  $w$  en (IX.2.5). La correspondiente 1-forma de curvatura nula  $\chi = d\psi \cdot \psi^{-1} = U dx + V dt$  es

$$U = \tilde{w}(e + \frac{1}{2}h) + (\lambda - \lambda_1)\tilde{w}^{-1}(f - \frac{1}{2}h)$$

y

$$\psi = \begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & f^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi & \tilde{\varphi} \\ \varphi_x & \tilde{\varphi}_x \end{pmatrix}.$$

Para  $\lambda_3$  en  $D(0; 1)$  la descomposición triangular (IX.2.3) con este  $\lambda_3$  en vez de  $\lambda_1$  implica para  $\psi_-$ ,

$$\psi_- = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{pmatrix}.$$

Introduciendo esta expresión en la ecuación (IX.1.1) obtenemos

$$z(z-1)\tilde{w}^2 - z_x\tilde{w} + (\lambda_2 - \lambda_1)z - (\lambda_3 - \lambda_1) = 0.$$

La condición de que  $\psi_- \cdot \psi$  sea triangular superior en el punto  $\lambda_3$  determina  $z$  como

$$z = \frac{\varphi_{1x}/\varphi_1 - \varphi_{3x}/\varphi_3}{\varphi_{1x}/\varphi_1 - \tilde{\varphi}_{2x}/\tilde{\varphi}_2}, \quad \tilde{\varphi}_2 := \varphi_2 - \tilde{\varphi}_2$$

y (IX.1.2) da

$$4z_t = z_{xxx} - \frac{3z_x(z_{xx} + 1/2P'(z))^2}{z_x^2 + P(z)} + 12(\lambda_1 - \lambda_2)zz_x + 6(\lambda_3 + \lambda_2 - \lambda_1)z_x$$

con

$$P(z) = 4z(z-1)((\lambda_1 - \lambda_2)z + (\lambda_3 - \lambda_1))$$

y  $P'(z) = \frac{dP}{dz}(z)$ . Esta ecuación fue resuelta en Calogero y Degasperis(1981) y en Nakamura(1981) se construye la cadena de modificaciones presentada en esta sección con ayuda del formalismo bilineal de Hirota.

Factorizaciones adicionales dan lugar a relaciones diferenciales que no pueden ser resueltas explícitamente como en casos previos.

La cadena de tres factorizaciones podría haber sido calculada en cada eslabón con descomposiciones del tipo

$$L^+ \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) = L^+ \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_+ \oplus L^+ \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_-$$

donde  $L^+ \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_-$  es una subálgebra unidimensional de  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ . La subálgebra  $L^+ \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_-$  es siempre conjugada a través de  $g \in \text{SL}(2, \mathbb{C})$  a una de las subálgebras consideradas en (IX.2.3) y (IX.2.7). En cada eslabón de esta cadena de modificaciones la solución  $v_g$  a la ecuación de evolución que se obtendría con esta nueva descomposición se conecta con la solución  $v$  a la ecuación de evolución obtenida con la descomposición primitiva a través de una transformación homográfica, o de Möbius, ver Maurin(1980) y Jones y Singerman(1987). Más explícitamente

$$v_g = \frac{c + dv}{a + bv},$$

donde

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

### IX.3 La ecuación de Krichever-Novikov y su relación con KdV

Existen dos casos particulares de la ecuación de KN que se encuentran conectados con KdV a través de una transformación de Miura generalizada. Se analizarán estos dos casos por separado.

i) Con  $\lambda_0 \in D(0, 1)$  se tiene la descomposición

$$L^+ \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) = L^+ \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_+ \oplus L^+ \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_-$$

con

$$L^+ \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_+ = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}), \quad L^+ \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_- = \{X \in L^+ \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) : X(\lambda_0) = 0\}.$$

Sea  $\chi$  la 1-forma de curvatura nula de KdV, entonces (IX.1.1) en este caso es

$$\partial_x \psi_- + \psi_- \cdot U(\lambda) - U(\lambda_0) \cdot \psi_- = 0, \quad \psi_-(\lambda_0) = \text{id}. \quad (\text{IX.3.8})$$

Es una transformación que conecta  $U(\lambda)$  con  $U(\lambda_0)$ . El problema de factorización  $\psi = \psi_-^{-1} \cdot \psi_+$ , con  $\psi$  la función de onda de KdV, se resuelve en términos de  $\psi$ . Se tiene

$$\psi_+ = \psi(\lambda_0), \quad \psi_-(\lambda) = \psi(\lambda_0) \cdot \psi(\lambda)^{-1}.$$

Se empleará la notación

$$\psi_-(\lambda) = \begin{pmatrix} p(\lambda) & q(\lambda) \\ r(\lambda) & s(\lambda) \end{pmatrix},$$

con la que (IX.3.8) se convierte en

$$\begin{aligned} p_x - r + (\lambda - u)q &= 0 \\ q_x + p - s &= 0 \\ r_x + (\lambda - u)s - (\lambda_0 - u)p &= 0 \\ s_x + r - (\lambda_0 - u)q &= 0. \end{aligned}$$

Si  $v := p + s$ , el sistema se escribe como

$$\begin{aligned} 2p &= v + (\lambda - \lambda_0)^{-1} v_{xx} \\ 2s &= v - (\lambda - \lambda_0)^{-1} v_{xx} \\ q &= -(\lambda - \lambda_0)^{-1} v_x \\ r &= -\frac{(\lambda - \lambda_0)}{v_x} \left( \frac{1}{4} v^2 - \frac{1}{4} (\lambda - \lambda_0)^{-2} v_{xx}^2 - 1 \right) \end{aligned}$$

y la solución  $u$  de KdV es, en función de  $v$ ,

$$u = -\frac{1}{2} \frac{v_{xxx}}{v_x} + \frac{1}{4} \frac{v_{xx}^2}{v_x^2} + (\lambda - \lambda_0)^2 \frac{4 - v^2}{v_x^2} + \frac{1}{2} (\lambda + \lambda_0).$$

La variable dependiente  $v$  se puede expresar en términos de  $\psi$ . Como  $v = \text{Tr} \psi_-$  se encuentra

$$v = \text{Tr} \left( \psi(\lambda_0) \cdot \psi(\lambda)^{-1} \right).$$

La ecuación de evolución para  $v$ , que se deriva de (IX.1.2), es

$$4v_t = v_{xxx} - \frac{3}{2} \frac{v_{xx}^2}{v_x} + \frac{3}{2} (\lambda - \lambda_0)^2 \frac{v^2 - 4}{v_x} + 3(\lambda + \lambda_0)v_x.$$

Es un caso particular de KN. Nótese que  $v$  depende aquí de  $\lambda$  y  $\lambda_0$ .

ii) El segundo caso se trata a continuación. Se introduce el cociente del álgebra de Lie  $L^+ \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  con el ideal

$$\{(\lambda - \lambda_0)^2 X(\lambda), X \in L^+ \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})\}, \quad \lambda_0 \in D(0, 1).$$

En esta nueva álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  la ecuación de KdV es consecuencia de la condición de curvatura nula sobre la 1-forma

$$\bar{\chi} = \bar{U} dx + \bar{V} dt, \quad (\text{IX.3.9})$$

con

$$\begin{aligned} \bar{U} &= U = e + (\lambda - u)f \\ \bar{V} &= (\lambda + \frac{1}{2}u)e - \frac{1}{4}u_x h + \left( \lambda_0^2 + 2\lambda_0(\lambda - \lambda_0) - \frac{1}{2}u\lambda - \frac{1}{4}(u_{xx} + 2u^2) \right) f, \end{aligned}$$

inducida por la 1-forma  $\chi$  de KdV. El álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ , donde  $\bar{\chi}$  toma sus valores, es el espacio de polinomios

$$\mathfrak{g} = \{M + (\lambda - \lambda_0)N, M, N \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})\}$$

con corchete de Lie

$$[M_1 + (\lambda - \lambda_0)N_1, M_2 + (\lambda - \lambda_0)N_2] = [M_1, M_2] + (\lambda - \lambda_0)([M_1, N_2] + [N_1, M_2]).$$

El álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  es isomorfa al producto semidirecto de  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  con el álgebra de Lie abeliana  $\mathbb{C}^3$ ,

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \ltimes \mathbb{C}^3.$$

Se definen las subálgebras  $\mathfrak{g}_+$ ,  $\mathfrak{g}_-$  con  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_+ \oplus \mathfrak{g}_-$  y

$$\mathfrak{g}_+ = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}), \quad \mathfrak{g}_- = \{(\lambda - \lambda_0)A, A \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})\}.$$

El problema de factorización asociado a (IX.3.9) implica para  $\bar{\psi}$  la representación  $\bar{\psi} = \psi_-^{-1} \cdot \psi_+$  donde  $\bar{\chi} = d\bar{\psi} \cdot \bar{\psi}^{-1}$  y

$$\bar{\psi}(\lambda) = \psi(\lambda_0) + (\lambda - \lambda_0)\psi'(\lambda_0).$$

Aquí  $\psi(\lambda_0)$  es el valor de la función de onda de KdV  $\psi$  en el punto  $\lambda_0$  y

$$\psi'(\lambda_0) = \left. \frac{d}{d\lambda} \right|_{\lambda=\lambda_0} \psi(\lambda).$$

Las funciones  $\psi_-$  y  $\psi_+$  se expresan en la variable  $\psi$  de acuerdo a las fórmulas

$$\begin{aligned}\psi_- &= \text{id} - (\lambda - \lambda_0)\psi'(\lambda_0) \cdot \psi(\lambda_0)^{-1} \\ \psi_+ &= \psi(\lambda_0).\end{aligned}$$

Si

$$\psi_- = \text{id} + (\lambda - \lambda_0)A,$$

con  $A$  in  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  entonces (IX.1.1) implica

$$\partial_x A + A \cdot U(\lambda_0) - U(\lambda_0) \cdot A + U'(\lambda_0) = 0.$$

Recordando que

$$U(\lambda_0) = e + (\lambda_0 - u)f, \quad U'(\lambda_0) = \left. \frac{d}{d\lambda} \right|_{\lambda=\lambda_0} U(\lambda)$$

donde  $u$  satisface KdV, se obtiene la expresión de  $A$  siguiente

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}v_{xx} & v_x \\ -v_x^{-1}(\frac{1}{4}v_{xx}^2 + v) & \frac{1}{2}v_{xx} \end{pmatrix}$$

en donde  $v = \det A$ , que se conecta con la solución  $u$  de KdV a través de la transformación

$$\lambda_0 - u = v_x^{-1} \left( \frac{1}{2}v_{xxx} - v_x^{-1} \left( \frac{1}{4}v_{xx}^2 + v \right) \right).$$

Finalmente, la ecuación de evolución de  $v$  es

$$4v_t = v_{xxx} - \frac{3}{2} \frac{v_{xx}^2}{v_x} - 6 \frac{v}{v_x} + 6\lambda_0 v_x$$

como se sigue de (IX.1.2) particularizada al presente caso. Es esta otra degeneración de Krichever-Novikov.



## Capítulo X

### La factorización elíptica, la subálgebra principal de $LSL_2$ y la ecuación de Krichever-Novikov

Estudiamos en este capítulo el caso elíptico y construimos la ecuación de Krichever-Novikov. Se da una familia de infinitas leyes de conservación locales y se halla un nuevo par de Lax, ver Guil y Mañas(1991-1), que contrasta por su sencillez con el que se encuentra en Dubrovin, Krichever y Novikov(1990).

Utilizaremos la matriz- $r$  clásica elíptica,  $R = P_+ - P_E$ , para obtener la ecuación de Krichever-Novikov. La ecuación (IV.2.4) para  $\psi_+$  se contrae con el campo  $\partial_{-1} \in \mathfrak{X}_I(H_-)$ ,  $\partial_{-1}(e) = \Lambda^{-1}$ . Introducimos la factorización

$$\psi_+ = b \cdot v \cdot \varphi,$$

donde  $b$ ,  $\ln v$  y  $\varphi$  toman sus valores en  $SL(2, \mathbb{C})$ ,  $\mathfrak{m} \cap L_1^+ \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  y  $H_+$ , respectivamente, donde  $\mathfrak{m}$  y  $H_+$  los definimos en el capítulo VIII. La ecuación a la que se llega es

$$\partial_{-1} b \cdot b^{-1} + \text{Add}(\partial_{-1} v \cdot v^{-1} + \text{Adv}((\partial_{-1} \ln \varphi) + \Lambda^{-1})) = P_E \text{Adv}(\Lambda^{-1}).$$

Fácilmente concluimos

$$P_E \text{Adv}(\Lambda^{-1}) = \sum_j w_j(\lambda) L_j \sigma_j,$$

con  $L_j$  definido por  $\text{Add}(e) = \sum L_j \sigma_j$ .

La introducción de los desarrollos de Fourier

$$\ln v(\lambda) = \sum_{n>0} (v_{2n} \lambda^n h + v_{2n+1} (\lambda^n e - \lambda^{n+1} f))$$

$$\ln \varphi = \sum_{n \geq 0} \varphi_{2n+1} \Lambda^{2n+1},$$

permite obtener una serie infinita de ecuaciones entre estos coeficientes

$$b^{-1} \cdot \partial_{-1} b + (\partial_{-1} \varphi_1 + 2v_2) e + f = 0,$$

$$(2v_3 + \partial_{-1} v_2) h + (\partial_{-1} v_3 + \partial_{-1} \varphi_3 + 2v_2 \partial_{-1} \varphi_1 + 2v_4 + v_2^2) e +$$

$$(\partial_{-1} \varphi_1 - 2v_2) f = -2 \sum_{j=1}^3 A_j (Adb)^{-1} (\sigma_j).$$

Cuando  $b$  se escribe explícitamente como

$$b = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}, \quad ps - qr = 1,$$

la ecuación para  $b$  impone  $q = -\partial_{-1} p$ ,  $s = -\partial_{-1} r$ , y las ecuaciones de Schrödinger para  $p$  y  $r$

$$\partial_{-1}^2 p = (2v_2 + \partial_{-1} \varphi_1) p,$$

$$\partial_{-1}^2 r = (2v_2 + \partial_{-1} \varphi_1) r.$$

De  $\det a = 1$  se concluye

$$r \partial_{-1} p - p \partial_{-1} r = 1$$

que convierte las ecuaciones tipo Schrödinger para  $p$  y  $q$  en ecuaciones equivalentes. La introducción de la función

$$v = \frac{p}{r},$$

permite expresar los elementos de  $\{v_{n+1}, \partial_{-1} \varphi_{2n-1}\}_{n>0}$  en términos de  $v$ ,  $v_x$ , etc.

Para  $v_2$  y  $\partial_{-1} \varphi_1$  se obtienen las fórmulas

$$v_2 = -\frac{1}{8} \{v; y\} + \frac{1}{4} \frac{(A_1 - A_2)(v^4 + 1) - 6(A_1 + A_2)v^2}{v_y^2},$$

$$\partial_{-1} \varphi_1 = -\frac{1}{4} \{v; y\} - \frac{1}{2} \frac{(A_1 - A_2)(v^4 + 1) - 6(A_1 + A_2)v^2}{v_y^2},$$

donde se ha introducido la notación  $t_{-1} = y$ , y  $\{v; y\}$  es la derivada schwarziana de  $v$  con respecto a  $y$ , Alhfors(1979) y Maurin(1980)

$$\{v; y\} = \frac{v_{yyy}}{v_y} - \frac{3}{2} \frac{v_{yy}^2}{v_y^2}.$$

Debe recordarse que la derivada schwarziana ya era conocida en Lagrange(1779) y que conecta aspectos geométricos clásicos con el cálculo diferencial, ver Klein(1884). Es el único invariante bajo los automorfismos de la esfera de Riemann y esencialmente es el único cociclo del grupo de difeomorfismos  $\text{Diff } S^1$ . Recordemos que  $p$  y  $r$  son soluciones de una ecuación de Schrödinger con potencial  $(2v_2 + \partial_{-1}\varphi_1)$ . Por tanto la teoría estandar para los operadores de Sturm-Liouville nos asegura que podemos expresar dicho potencial en función del cociente  $v$  y de la derivada schwarziana de este. Por tanto no es extraño que la derivada schwarziana aparezca en este contexto.

Por lo visto anteriormente tenemos una parametrización de  $\psi_+$  como función de  $v$  y sus  $\partial_y$ -derivadas.

Contraeremos ahora el campo  $\partial_{-3} \in \mathfrak{X}_I(H_-)$ ,  $\partial_{-3}(e) = \Lambda^{-3}$ , (se usará la notación  $t_{-3} = s$ ), con la ecuación (IV.2.4) para  $\psi_+$ . Utilizando la parametrización obtenida más arriba se llega a la ecuación

$$v_s = \frac{1}{4} v_{yyy} - \frac{3}{8} \frac{v_{yy}^2}{v_y} - \frac{3(A_1 - A_2)(v^4 + 1) - 6(A_1 + A_2)v^2}{2v_y}.$$

Debe notarse la simetría  $v \rightarrow 1/v$ .

También se encuentran expresiones polinómicas para  $\{\varphi_{2n+1,s}\}_{n \geq 0}$  en función de las variables  $v$  y sus  $\partial_y$ -derivadas. Por tanto, el conjunto

$$\{\varphi_{2n+1,y}\}_{n \geq 0}$$

en una familia infinita de densidades, locales en  $v$ , que se conservan en la evolución.

La ecuación KN, Krichever y Novikov(1980,1981),

$$v_s = \frac{1}{4} v_{yyy} - \frac{3}{8} \frac{v_{yy}^2}{v_y} - c \frac{4v^3 - g_2v - g_3}{v_y},$$

se transforma en la ecuación de evolución escrita antes una vez que al campo  $v$  se le aplica una transformación homográfica del tipo

$$v \rightarrow f(v) = \frac{av + b}{cv + d},$$

donde  $ad-bc \neq 0$ . Debe recordarse que el conjunto de estas transformaciones forma el grupo de Möbius  $SL(2, \mathbf{C})/\mathbf{Z}_2$  que es el grupo de automorfismos de la esfera de Riemann y por tanto sus elementos dejan invariante a la derivada schwarziana. (Ver Jones y Singerman(1987) y Maurin(1980).)

La consideración de campos  $\partial_{-2n-1} \in \mathfrak{X}_I(H_-)$ ,  $\partial_{-2n-1}(e) = \Lambda^{-2n-1}$  llevaría a la jerarquía de KN. El par de Lax de la nueva ecuación de KN es

$$L = \sum_j w_j(\lambda) L_j \sigma_j$$

$$A = \sum_j \left( w_j^{(1)}(\lambda) L_j + w_j(\lambda) (Q L_j + P_j) \right) \sigma_j,$$

donde

$$L_1 = \frac{v^2 - 1}{2v_y}, \quad L_2 = i \frac{v^2 + 1}{2v_y}, \quad L_3 = -\frac{v}{v_y},$$

$$Q = \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{2} \frac{v_{yyy}}{v_y} - \frac{1}{4} \frac{v_{yy}^2}{v_y^2} + \frac{(A_1 - A_2)(v^4 + 1) - 6(A_1 + A_2)v^2}{v_y^2} \right)$$

$$P_1 = \frac{v_{yy}v}{v_y} - v_y, \quad P_2 = -i \left( \frac{v_{yy}v}{v_y} + v_y \right), \quad P_3 = -\frac{v_{yy}}{2v_y^2}.$$

Este es un nuevo par de Lax para la ecuación de Krichever-Novikov.

La ecuación de KN aparece en Krichever y Novikov(1980,1981), en relación con la ecuación de Kadomtsev-Petviashvili. El par de Lax que se presenta en estos trabajos o en Dubrovin, Krichever y Novikov(1990) es de una enorme complejidad. Tenemos la esperanza que este nuevo par de Lax, Guil y Mañas(1991-1), sirva para una mejor comprensión de la ecuación.

La ecuación de Krichever-Novikov es un sistema completamente integrable. Los hamiltonianos de las respectivas evoluciones son las densidades conservadas antes mencionadas, y además posee una estructura cuasi-hamiltoniana tal que su forma simpléctica es no local, pero su inversa es local, ver Sokolov(1984). En Dorfman(1987) se presentó un estudio hamiltoniano del caso  $A_1 = A_2 = A_3 = 0$ . Este mismo caso se analizó en Wilson(1988) en relación con la teoría hamiltoniana de KdV, en donde la ecuación recibió el nombre de Ur-KdV. La ecuación de Ur-KdV

$$v_s = \frac{1}{4} v_{yyy} - \frac{3}{8} \frac{v_{yy}^2}{v_y},$$

tiene la misma relación con KdV en forma potencial que AKNS con el modelo ferromagnético de Heisenberg, siendo su deformación elíptica la ecuación KN, ecuación análoga a la existente en el marco AKNS, Landau-Lifshitz.

Como se sigue de Svinolupov, Sokolov y Yamilov(1983), KN es la única ecuación integrable en el marco de las ecuaciones de evolución de tercer orden, (con infinitas leyes de conservación no triviales), que no admite una transformación de Miura con KdV.

La 1-forma  $\alpha$  asociada a  $\rho = \text{id}$ , esto es a pKdV y Ur-KdV es, cuando se restringe a las coordenadas  $x, y$ ,

$$\alpha = Ldx + Ady,$$

con

$$L = e + ph + (\lambda + p_x - p^2)f, \quad A = \lambda^{-1} \frac{1}{v_y} (v^2 e - v h - f).$$

La condición de curvatura nula para  $Ldx + Adt$  da una serie de cinco ecuaciones no lineales en derivadas parciales para  $v$  y  $p$ . Se puede demostrar que el sistema es equivalente a las ecuaciones

$$\begin{aligned} v_{xy} + v_y + (p_x - p^2)v^2 v_y &= 0 \\ p_y v_y &= v^2. \end{aligned}$$

Al ser también posible expresar  $v$  en función de  $p$  y de sus  $\partial_x, \partial_y$ -derivadas se puede llegar a una ecuación diferencial para  $p$  en las variables independientes  $x, y$ . La función  $p$  es solución de pKdV en  $x, t$  y  $v$  de Ur-KdV en  $y, s$  luego este sistema es una simetría de ambas ecuaciones.



## Capítulo XI

### Sistemas Integrables en Espacios Homogéneos

Este capítulo lo dedicamos al estudio de las posibles generalizaciones de los sistemas integrables hallados en los capítulos V, VI y VII. En muchos casos damos tan sólo las ideas fundamentales de como serian estas generalizaciones que se deducen sin mayores problemas. Por otro lado, en Drinfel'd y Sokolov(1980,1985-1) se presentan generalizaciones para el caso de la subálgebra principal de Heisenberg que no consideraremos aquí, ver Guil(1987).

En la primera sección se presenta la generalización del caso homogéneo estudiado en V.1. Construimos sistemas integrables asociados a soluciones de la ecuación de Yang-Baxter clásica modificada en un álgebra de Lie simple. La segunda sección se dedica a la teoría de los espacios homogéneos. En la siguiente sección analizamos ejemplos concretos, por ejemplo la generalización de la jerarquía AKNS y del modelo ferromagnético de Heisenberg a espacios homogéneos reductivos. También apuntamos las diferentes posibilidades de modificación en dichos sistemas. Las ecuaciones, que en el capítulo V fueron denominadas retículos integrables continuos, admiten también estas extensiones a espacios homogéneos. La generalización de Landau-Lifshitz es asimismo posible como se comenta al final de la sección.

#### XI.1 Esquema general para la subálgebra homogénea

Generalizamos en esta sección los resultados de V.1 y V.2 a álgebras de lazos  $Lg$ , donde  $g$  es un álgebra de Lie simple. Los flujos conmutativos son los generados por la subálgebra homogénea. La subálgebra homogénea  $\mathfrak{h}$  está

asociada a la subálgebra de Cartan  $\mathfrak{h}$  de  $\mathfrak{g}$ , así

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_+ \oplus \mathfrak{h}_-,$$

con

$$\mathfrak{h}_\pm = L_1^\pm \mathfrak{h}.$$

El subgrupo abeliano  $H = H_1 \times H_2 \subset LG \times LG$ , donde  $G$  es el grupo de Lie simple adjunto a  $\mathfrak{g}$ , que en IV.2 se utilizaba para generar flujos conmutativos es en este caso  $H_1 = H_-$ ,  $H_2 = H_+$  donde  $H_\pm$  son los grupos de Lie adjuntos a  $\mathfrak{h}_\pm$ . Por tanto  $\chi_1, \chi_2$  son las 1-formas de Maurer-Cartan en estos subgrupos. Los flujos conmutativos serán

$$\psi = h_-^{-1} \cdot g \cdot h_+, \quad h_\pm \in H_\pm$$

donde  $g \in LG$  es la condición inicial.

Las matriz- $r$  clásica  $R$  estará asociada a la descomposición triangular de Birkhoff

$$L\mathfrak{g} = L_1^+ \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g} \oplus L_1^- \mathfrak{g}.$$

Si  $\text{id} = P_+ + P_0 + P_-$  es la resolución de la identidad dada por la descomposición triangular, entonces  $R = P_+ - P_- + \rho P_0$  donde  $\rho$  es solución de la ecuación de Yang-Baxter clásica modificada en  $\mathfrak{g}$ .

La descomposición

$$L\mathfrak{g}_- = L_1^- \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}_-,$$

con  $\mathfrak{g}_- = \text{im } \rho_-$ , nos permite proponer la factorización de  $\psi_-$  como

$$\psi_- = \vartheta \cdot a$$

donde  $\vartheta$  y  $a$  toman sus valores en  $L_1^- G$  y  $G_-$  respectivamente. En particular  $a = \psi_-(\infty)$ .

Fijando un  $A \in \mathfrak{h}$ , vector de la subálgebra de Cartan, tendremos la descomposición simétrica de  $L\mathfrak{g}$

$$L\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m},$$

con

$$\mathfrak{k} = \ker \text{ad} A, \quad \mathfrak{m} = \text{im } \text{ad} A.$$

Los subespacios  $\mathfrak{k}$  y  $\mathfrak{m}$  se describen con el uso del sistema de raíces  $\Delta$  asociado a la subálgebra de Cartan  $\mathfrak{h}$ . Así se define el subconjunto de  $\Delta$

$$A^\perp := \{\alpha \in \Delta : \alpha(A) = 0\},$$

que es un subsistema de raíces. Si  $\mathfrak{g}_\alpha$  es el subespacio propio de la raíz  $\alpha$ , se construye la subálgebra regular reductiva, esto es invariante bajo la acción adjunta de  $\mathfrak{h}$  y que se descompone en suma directa de un álgebra semisimple y un centro, como sigue

$$\mathfrak{k}^{(0)} = \mathfrak{h} \oplus \left( \bigoplus_{\alpha \in A^\perp} \mathfrak{g}_\alpha \right)$$

y el subespacio lineal

$$\mathfrak{m}^{(0)} = \bigoplus_{\alpha \in \varphi} \mathfrak{g}_\alpha$$

donde  $\varphi = \Delta \setminus A^\perp$ . Es fácil comprobar las identidades

$$\mathfrak{k} = L\mathfrak{k}^{(0)}, \quad \mathfrak{m} = L\mathfrak{m}^{(0)}.$$

La reductividad de  $\mathfrak{k}^{(0)}$  la implica  $\mathfrak{k}^{(0)} = \bar{\mathfrak{k}}^{(0)} \oplus \mathfrak{z}$ , donde  $\bar{\mathfrak{k}}^{(0)}$  es un álgebra semisimple regular y  $\mathfrak{z}$  es el centro de  $\mathfrak{k}^{(0)}$ .

Estas consideraciones nos llevan a la descomposición

$$C^\infty(H, L\mathfrak{g}) = \mathfrak{k}_S \oplus \mathfrak{m}_S,$$

donde

$$\mathfrak{k}_S = \text{Ada}(C^\infty(H, \mathfrak{k})), \quad \mathfrak{m}_S = \text{Ada}(C^\infty(H, \mathfrak{m})).$$

Si

$$S := \text{Ada}(A) \tag{XI.1.1}$$

tendremos también

$$\mathfrak{k}_S = \ker \text{ad}S, \quad \mathfrak{m}_S = \text{im ad}S.$$

Factorizamos  $\vartheta$  como sigue

$$\vartheta = u \cdot a \cdot \phi \cdot a^{-1}$$

donde  $U := \ln u \in \mathfrak{m}_S$  y  $\ln \phi \in C^\infty(H, \mathfrak{k})$ . Por tanto

$$\psi_- = u \cdot a \cdot \phi.$$

La ecuación (IV.2.4) se contrae con el campo vectorial invariante izquierda  $\partial_1 \in \mathfrak{X}_I(H_+)$ ,  $\partial_1(e) = \lambda A$  y se introduce la factorización del párrafo anterior, obteniéndose

$$\partial_1 u \cdot u^{-1} + \text{Adu}(\partial_1 a \cdot a^{-1} + \sum_{n>0} \lambda^{-n} k_{1n}) = (-P_- + \rho_- P_0) \text{Adu}(\lambda S). \quad (\text{XI.1.2})$$

Aquí se ha expresado

$$\partial_1 \phi \cdot \phi^{-1}(\lambda) := k_1(\lambda) := \sum_{n>0} \lambda^{-n} k_{1n} \quad (\text{XI.1.3})$$

donde los coeficientes  $k_{1n}$  son funciones sobre  $H$  a valores en  $\mathfrak{k}^{(0)}$ .

Introduciendo el desarrollo de Fourier

$$U(\lambda) := \sum_{n>0} \lambda^{-n} U_n,$$

donde los coeficientes de Fourier  $U_n$  toman sus valores en  $\mathfrak{m}^{(0)}$ , en la ecuación (XI.1.2) se llega a un conjunto infinito de ecuaciones entre estos coeficientes de Fourier. Las dos primeras son

$$\partial_1 a \cdot a^{-1} - \rho_- [U_1, S] = 0 \quad (\text{XI.1.4})$$

y

$$\partial_1 U_1 + [U_1, \partial_1 a \cdot a^{-1}] + k_{11} + [U_2, S] + \frac{1}{2} [U_1, [U_1, S]] = 0 \quad (\text{XI.1.5})$$

De la definición de  $S$  se concluye

$$\partial_1 S = [\partial_1 a \cdot a^{-1}, S].$$

Para hallar

$$(\text{ad}S)|_{\mathfrak{m}_s}^{-1}$$

procedemos como se explica a continuación. El operador  $\text{ad}A$  sobre  $\mathfrak{g}$  satisface

$$\text{ad}A|_{\mathfrak{g}_\alpha} = \alpha(A)\text{id},$$

Luego es un operador invertible en  $\mathfrak{m}^{(0)}$ . La intención es expresar este inverso,  $J^{(0)-1}$ , como una función de  $J^{(0)}$  que es la restricción de  $\text{ad}A$  a  $\mathfrak{m}^{(0)}$ . El polinomio mínimo de  $J^{(0)}$  es

$$p(x) = \prod_{\alpha \in \varphi_+} (x^2 - \alpha(A)^2),$$

donde  $\varphi_+ = \varphi \cap \Delta_+$ . Aquí  $p$  es un polinomio par, sólo depende de  $x^2$ , y su término independiente es  $p(0) = \prod_{\alpha \in \varphi_+} (-\alpha(A)^2) \neq 0$ . Se definen los polinomios

$$q(x) := \frac{1}{x} \left(1 - \frac{p(x)}{p(0)}\right), \quad \bar{q}(x) := \frac{1}{x^2} \left(1 - \frac{p(x)}{p(0)}\right).$$

Por construcción  $q$  es un polinomio impar en  $x$  de un grado menor que  $p$ , en tanto que  $\bar{q}$  es par y de dos grados menor que el grado de  $p$ . De  $p(J^{(0)}) = 0$  se concluye  $q(J^{(0)})J^{(0)} = J^{(0)}q(J^{(0)}) = \text{id}$  así como  $\bar{q}(J^{(0)})J^{(0)^2} = J^{(0)^2}\bar{q}(J^{(0)}) = \text{id}$ . Se deducen las expresiones

$$J^{(0)^{-1}} = q(J^{(0)}), \quad J^{(0)^{-2}} = \bar{q}(J^{(0)}),$$

que son invariantes bajo la acción adjunta, por tanto

$$J_S^{(0)^{-1}} = q(J_S^{(0)}), \quad J_S^{(0)^{-2}} = \bar{q}(J_S^{(0)}),$$

donde

$$J_S^{(0)} := \text{Ada} \circ J^{(0)} \circ \text{Ada}^{-1} = (\text{ad}S)|_{\mathfrak{m}_s}.$$

En el caso  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  se tiene  $p(x) = x^2 - 4$ ,  $q(x) = \frac{1}{4}x$  y  $\bar{q}(x) = \frac{1}{4}$ .

Utilizaremos la notación

$$V := [U_1, S].$$

Por tanto (XI.1.4) implica que  $\partial_1 S = [V_-, S] = [V_+, S] - [V, S]$ . De  $V \in \mathfrak{m}_S$  se deduce que  $V$  es expresable en función de  $S, \partial_1 S, V_+$  como sigue

$$V = q(J_S^{(0)})(\partial_1 S + [S, V_+]),$$

y de aquí la ligadura

$$V_+ = \rho_+ q(J_S^{(0)})(\partial_1 S + [S, V_+]). \quad (\text{XI.1.6})$$

Debe notarse que  $U_1$  se expresa en términos de  $S, V_+$  ya que  $U_1 = \frac{1}{4}[V, S]$  y por ello

$$U_1 = \bar{q}(J_S^{(0)})(-\partial_1 S + [V_+, S]).$$

La ecuación (XI.1.5) implica la siguiente expresión para  $U_2$

$$U_2 = \bar{q}(J^{(0)})(-\partial_1 V + [V_+, V] + \frac{1}{2}[S, [U_1, V]]).$$

También se obtiene para  $k_{11}$  en (XI.1.3) la expresión siguiente

$$2\text{Ada}(k_{11}) = P_{t_2}[U_1, V].$$

De esta forma podemos parametrizar  $\ln u$  y  $\text{Ada}(k_1)$  en función de  $S, V_+$  y sus  $\partial_1$ -derivadas. Para ello basta considerar todas las ecuaciones que ligan los coeficientes de Fourier.

Sea  $\partial_2 \in \mathfrak{X}_I(H_+)$ ,  $\partial_2(e) = \lambda^2 B$ , donde  $B \in \mathfrak{h}$ . La contracción de la ecuación (IV.2.4) para  $\psi_-$  con este campo da

$$\partial_2 u \cdot u^{-1} + \text{Adu}(\partial_2 a \cdot a^{-1} + \sum_{n>0} \lambda^{-n} k_{2n}) = (-P_- + \rho_- P_0) \text{Adua} \phi(\lambda^2 B).$$

Para que no aparezcan términos no locales en los sistemas de evolución que se van a obtener es necesario exigir que  $B \in \mathfrak{z}$  y por tanto que  $B$  pertenezca al centro del centralizador de  $A$ . En tal caso se llega a

$$\partial_2 u \cdot u^{-1} + \text{Adu}(\partial_2 a \cdot a^{-1} + \sum_{n>0} \lambda^{-n} k_{2n}) = (-P_- + \rho_- P_0) \text{Adua}(\lambda^2 B),$$

donde todos los términos son locales. El caso  $A \neq B \in \mathfrak{z}$  seguiría las líneas expuestas en Crumey(1987), por simplicidad se hace  $A = B$ . Se podrá expresar entonces  $\text{Ada}(k_2)$  en las variables  $S, V_+$  y sus  $\partial_1$ -derivadas y se obtiene una ligadura sobre  $S$  y  $V_+$ . El sistema de evolución es

$$\begin{aligned} \partial_2 S &= \partial_1 V + [V, V_+] + [Q_+, S] \\ \partial_2 V_+ &= \partial_1 Q_+ + [Q_+, V_+] \end{aligned}$$

donde  $Q_+ = \rho_+ Q$ , con

$$Q = q(J_S^{(0)})(-\partial_1 V + [V, V_+] + \frac{1}{2}[S, [U_1, V]]) - \frac{1}{2}[U_1, V].$$

El sistema tiene como par de Lax a  $L = \lambda S + V_+$  y  $A = \lambda^2 S + \lambda V + Q_+$ . También existen infinitas leyes de conservación. Puesto que  $k_1 dt_1 + k_2 dt_2$  es de curvatura nula y si  $k_i^{(z)}$  es la proyección en el centro  $L\mathfrak{z}$  paralela a  $L\bar{\mathfrak{k}}^{(0)}$  de  $k_i$ , se tendrá  $\partial_2 k_{1n}^{(z)} = \partial_1 k_{2n}^{(z)}$ . Estas ecuaciones son un conjunto infinito de leyes de conservación. Como  $\text{Ada}(k_i)$  se expresa localmente en  $S, V_+$ , si  $H \in \mathfrak{z}$  y  $T = \text{Ada}(H)$  se tendrán las densidades conservadas  $B(\text{Ada}(k_{1n}^{(z)}), T) = B(k_{1n}^{(z)}, H)$ , donde  $B$  es la forma de Cartan-Killing de  $\mathfrak{g}$ . Por tanto, si se expresa  $T$  en función de  $S$  se llega a una familia infinita

de leyes de conservación locales y no triviales. El vector  $S = \text{Ada}(A)$  evoluciona en el espacio homogéneo  $G_-/K_-^{(0)}$ , donde  $K^{(0)}$  es el grupo de isotropía de  $A$ , y tiene como álgebra de Lie a  $\mathfrak{k}^{(0)}$ , el vector  $T$ , al pertenecer a  $\mathfrak{z}$ , evoluciona en el mismo espacio y por tanto es posible parametrizar  $S$  por coordenadas de  $G_-/K_-^{(0)}$  de forma biunívoca, y con estas mismas coordenadas parametrizar a  $T$ . Un caso particular es  $H = A$  esto es  $T = S$ .

Las consideraciones de la sección V.3 sobre la forma  $\alpha$  se trasladan a este contexto generalizado de forma sencilla. Los pares de Lax y las ecuaciones de evolución son las mismas que antes. Respecto a las leyes de conservación del sistema se obtienen del mismo modo que en V.3 con las modificaciones que se desprenden del párrafo anterior.

## XI.2 Espacios homogéneos y simétricos

En la siguiente sección se construyen sistemas integrables cuyos campos toman valores en espacios homogéneos. Recordaremos brevemente conceptos básicos concernientes a dichas variedades. Para mayor información consúltese Helgason(1978).

Sea una variedad suave  $M$  sobre la cual existe una acción del grupo de Lie simple  $G$ , que se supone transitiva, y por tanto el espacio de órbitas es trivial, tan sólo contiene un punto. Si  $m \in M$  es un punto de la variedad, su grupo de isotropía o estabilizador, bajo dicha acción, es  $K_m = \{g \in G : g \cdot m = m\}$ . Debido a la transitividad de la acción dicho subgrupo no depende de  $m$ , denotándose por  $K$  el grupo al cual todos ellos son isomorfos. Se tiene la identidad  $M \cong G/K$ , luego  $M$  es isomorfa a la variedad de 'cosets' derechos  $G/K$ .

Sean  $\mathfrak{g}$  y  $\mathfrak{k}$  las álgebras de Lie de  $G$  y  $K$  respectivamente. Tenemos entonces la descomposición

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m},$$

donde  $\mathfrak{m}$  modela los espacios tangentes a  $M$ ,  $\mathfrak{m} \cong T_m M$ . Cuando la descomposición es reductiva, esto es  $[\mathfrak{k}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$ , se dice que  $M$  es un espacio homogéneo reductivo.

Sean  $P_{\mathfrak{k}}$  y  $P_{\mathfrak{m}}$  los proyectores generados por la descomposición reductiva antes expuesta. Al ser  $G$  un grupo de Lie simple su forma de Cartan-Killing es definida negativa cuando se restringe a la forma real compacta de  $G$ . Por tanto existe una única conexión lineal tal que el transporte paralelo asociado

es una isometría con respecto a la forma de Cartan-Killing y el tensor de torsión es nulo. Tal conexión se denomina de Levi-Civita. La reducción de esta conexión al espacio homogéneo reductivo  $G/K$  da lugar a un transporte paralelo con los tensores de curvatura y de torsión siguientes

$$\begin{aligned} R(m)(X, Y)(Z) &= -[P_t[X, Y], Z] \\ T(m)(X, Y) &= -P_m[X, Y] \end{aligned}$$

donde  $X, Y, Z \in T_m M \cong \mathfrak{m}$ .

Se dice que  $M$  es simétrica si la descomposición  $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$  es simétrica, esto es,  $[\mathfrak{k}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$  y  $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{k}$ . En este caso se tendrá torsión nula y la curvatura será

$$R(m)(X, Y)(Z) = -[[X, Y], Z].$$

Si  $M$  es una variedad hermítica entonces existe  $J \in \text{End } \mathfrak{m}$ , con  $J^2 = -\text{id}$ , esto es,  $J$  es una estructura compleja. En este caso tenemos las siguientes propiedades

- $\exists A \in \mathfrak{h}$ , con  $\mathfrak{h}$  una subálgebra de Cartan de  $\mathfrak{g}$  de modo tal que  $J = \text{iad}A$ , y

$$\mathfrak{k} = \ker \text{ad}A, \quad \mathfrak{m} = \text{im ad}A.$$

- Si  $\Delta_+$  es el subsistema de raíces positivas generado por  $\mathfrak{h}$  entonces existe  $\varphi_+ \subset \Delta_+$  tal que

$$\mathfrak{m} = \bigoplus_{\alpha \in \varphi_+} \mathfrak{g}_\alpha,$$

con  $\alpha(A) = c, \forall \alpha \in \varphi_+$ , y  $\pm(\alpha + \beta) \notin \Delta$  siempre que  $\alpha, \beta \in \varphi_+$ .

Debe observarse en este caso hermítico que si se normaliza  $A$  de modo tal que  $c = \frac{1}{2}$  entonces las fórmulas de la sección anterior se transforman en las dadas en V.1 y V.2. Sin embargo, cuando  $A$  no es de este tipo la subálgebra  $\mathfrak{k}^{(0)}$  y el subespacio  $\mathfrak{m}^{(0)}$  construidos en XI.1, están asociados a un espacio homogéneo reductivo no hermítico  $G/K^{(0)}$ .

Si  $\bar{\Delta}$  es un subsistema de raíces semisimple de  $\Delta$  es fácil construir descomposiciones del tipo anterior con

$$\mathfrak{k} = \mathfrak{h} \oplus \left( \bigoplus_{\alpha \in \bar{\Delta}} \mathfrak{g}_\alpha \right)$$

y

$$\mathfrak{m} = \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha,$$

con  $\Phi = \Delta \setminus \bar{\Delta}$ . Sin embargo, a diferencia del caso  $\bar{\Delta} \neq A^\perp$  la descomposición no tiene por qué ser reductiva.

La clasificación de subálgebras regulares semisimples se llevó a cabo en Tits(1955) y Dynkin(1957). Un  $\Pi$ -sistema  $\pi$  es un subconjunto de raíces de  $\Delta$  linealmente independientes, tal que si  $\alpha, \beta \in \pi$  entonces  $\alpha - \beta \notin \pi$ . Todo  $\Pi$ -sistema es una base de raíces simples de un subsistema de raíces semisimple  $\bar{\Delta}_\pi$  de  $\Delta$ . Cualquier subsistema semisimple  $\bar{\Delta}$  es conjugado a través de una transformación de Weyl con algún  $\bar{\Delta}_\pi$ . Los  $\Pi$ -sistemas de  $n$  raíces se obtienen de los de  $\ell$  raíces (donde  $\ell$  es el rango de  $\mathfrak{g}$ ) tras la supresión de  $\ell - n$  raíces. Los  $\Pi$ -sistemas de  $\ell$  raíces se obtienen de una base de raíces simples de  $\Delta$  tras un número finito de operaciones elementales. Entendemos por operación elemental la acción de extender una parte conexa del diagrama de Dynkin mediante la raíz mínima, Humphreys(1972), para después suprimir de este diagrama una raíz. Una vez construido el  $\Pi$ -sistema  $\pi$  se debe buscar  $A \in \mathfrak{h}$  con  $\pi(A) = \{0\}$ , esto es  $A \in \pi^\perp$ , donde  $\pi^\perp$  es un subespacio de dimensión  $\ell - n$  pues  $\pi$  es un conjunto de  $n$  raíces linealmente independientes. Tan sólo queda encontrar  $A \in \pi^\perp$  tal que  $(\Delta \setminus \bar{\Delta}_\pi) \cap A^\perp = \emptyset$ . Comentemos que en el caso de  $\Pi$ -sistemas de  $\ell$ -raíces se obtienen subálgebras regulares maximales, que están en relación con las graduaciones y descomposiciones triangulares vistas en I.2.2. Para el análisis del caso  $A_\ell$  consultar Mañas(1988).

### XI.3 AKNS generalizado a espacios homogéneos

Cuando  $\rho = \text{id}$ , y el problema de factorización es el de Birkhoff, podemos conseguir expresiones explícitas para los sistemas integrables construidos en la sección anterior. Sea  $\{E_\alpha, H_i\}_{\alpha \in \Delta, i=1, \dots, \ell}$  la base de Cartan-Weyl de  $\mathfrak{g}$  asociada a  $\mathfrak{h}$ . Como  $\rho_- = 0$  se tiene para el vector  $S$  definido en (XI.1.1) la expresión  $S = A$  y

$$V = V_+ = \sum_{\alpha \in \varphi_+} (p_\alpha E_\alpha + q_\alpha E_{-\alpha}).$$

También llegamos a la expresión  $Q = Q_+$  con

$$Q_+ = \sum_{\alpha \in \varphi_+} \frac{1}{\alpha(A)} (\partial_1 p_\alpha E_\alpha - \partial_1 q_\alpha E_{-\alpha}) + \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta \in \varphi_+} \frac{1}{\alpha(A)} (p_\alpha p_\beta [E_\alpha, E_\beta] + 2p_\alpha q_\beta [E_\alpha, E_{-\beta}] - q_\alpha q_\beta [E_{-\alpha}, E_{-\beta}]).$$

El sistema de ecuaciones de evolución que se obtiene en este caso se puede expresar de forma conveniente con el uso de los tensores de curvatura y torsión del espacio homogéneo  $G/K^{(0)}$ , el espacio donde evolucionan los campos  $\{p_\alpha, q_\alpha\}_{\alpha \in \varphi_+}$ . Utilizamos la notación

$$R(E_\alpha, E_\beta)(E_\gamma) = -R_{\alpha\beta\gamma}^\delta E_\delta,$$

y

$$T(E_\alpha, E_\beta) = -T_{\alpha\beta}^\delta E_\delta.$$

Si  $t_1 = x, t_2 = t$ , se obtiene el sistema integrable

$$\begin{aligned} p_{\alpha,t} &= \frac{1}{\alpha(A)} p_{\alpha,xx} + \sum_{\substack{\beta, \gamma, \delta \in \varphi_+ \\ \gamma - \delta \in A^\perp}} \frac{1}{\gamma(A)} R_{\beta\gamma-\delta}^\alpha p_\beta p_\gamma q_\delta + \\ &\quad \sum_{\substack{\beta, \gamma \in \varphi_+ \\ \alpha = \beta + \gamma}} \frac{1}{\gamma(A)} \left( T_{\beta\gamma}^\alpha p_\beta p_{\gamma,x} - T_{\beta-\gamma}^\alpha p_\beta q_{\gamma,x} + T_{-\gamma\beta}^\alpha q_\beta p_{\gamma,x} \right) \\ q_{\alpha,t} &= -\frac{1}{\alpha(A)} q_{\alpha,xx} - \sum_{\substack{\beta, \gamma, \delta \in \varphi_+ \\ \gamma - \delta \in A^\perp}} \frac{1}{\gamma(A)} R_{-\beta-\gamma\delta}^{-\alpha} q_\beta q_\gamma p_\delta + \\ &\quad \sum_{\substack{\beta, \gamma \in \varphi_+ \\ \alpha = \beta + \gamma}} \frac{1}{\gamma(A)} \left( T_{\beta\gamma}^\alpha q_\beta q_{\gamma,x} - T_{\beta-\gamma}^\alpha q_\beta p_{\gamma,x} + T_{-\gamma\beta}^\alpha p_\beta q_{\gamma,x} \right), \end{aligned}$$

para cada  $\alpha \in \varphi_+$ . Este sistema constituye la generalización a espacios homogéneos de la primera pareja de ecuaciones de la jerarquía AKNS. Apareció en la literatura en Fordy y Kulish(1983). El par de Lax y sus infinitas leyes de conservación se hallan de forma elemental siguiendo los pasos ya marcados en XI.1. Cuando la variedad homogénea es simétrica y se normaliza  $c = 1$  se llega al sistema

$$\begin{aligned} p_{\alpha,t} &= p_{\alpha,xx} + \sum_{\beta, \gamma, \delta \in \varphi_+} R_{\beta\gamma-\delta}^\alpha p_\beta p_\gamma q_\delta \\ q_{\alpha,t} &= -q_{\alpha,xx} + \sum_{\beta, \gamma, \delta \in \varphi_+} R_{-\beta-\gamma\delta}^{-\alpha} q_\beta q_\gamma p_\delta. \end{aligned}$$

Este sistema admite la reducción real compacta, donde la subálgebra real compacta la generan los vectores  $\{E_\alpha - E_{-\alpha}, i(E_\alpha + E_{-\alpha}), iH_j\}_{\alpha \in \Delta_+, i=1, \dots, \ell}$ . Esto es equivalente a exigir  $q_\alpha = -p_\alpha^*$  y el sistema reducido es entonces

$$i p_{\alpha,t} = p_{\alpha,xx} - \sum_{\beta, \gamma, \delta \in \varphi_+} R_{\beta\gamma-\delta}^\alpha p_\beta p_\gamma p_\delta^*,$$

que es una generalización de NLS, conociéndose en la literatura como GNLS. La particularización al caso vectorial se estudió en Kulish y Sklyanin(1981). Sistemas de este tipo pero con  $A \neq B$  se presentan en Crumey(1987).

Cuando  $\rho = -id$  se tiene  $V_+ = 0$ ,  $V = (adS)^{-1}S_x$  y  $Q_+ = 0$ , luego la ecuación de evolución es

$$S_t = (\bar{q}(adS)S_x)_x,$$

donde  $S$  es un vector que evoluciona en el espacio homogéneo  $G/K^{(0)}$ , y se puede parametrizar de forma unívoca por coordenadas de esta variedad homogénea. En el caso simétrico, las ecuaciones se simplifican ( $c = 1$ )

$$S_t = [S, S_{xx}].$$

Hemos obtenido una extensión del modelo ferromagnético a espacios simétricos. Se puede considerar por tanto la ecuación de evolución obtenida en el caso homogéneo reductivo como una generalización del modelo ferromagnético de Heisenberg a espacios homogéneos reductivos. En Fordy y Kulish(1983) se afirma que la generalización del modelo ferromagnético de Heisenberg siempre tiene el mismo aspecto, como en el caso simétrico, lo que no es cierto, para ello ver Crumey(1988) y Makhankov y Pasheev(1983).

Existen modificaciones de AKNS generalizado a espacios homogéneos. Por ejemplo, en Fordy(1984) se propone una generalización de la ecuación de Schrödinger no lineal derivada, ver VI.3 a espacios hermíticos. Es fácil concluir que dicho sistema corresponde al caso simétrico con la solución de la ecuación de Yang-Baxter clásica modificada en  $\mathfrak{g}$  dada por la descomposición generada por  $A$

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{m}_+^{(0)} \oplus \mathfrak{k}^{(0)} \oplus \mathfrak{m}_-^{(0)},$$

donde  $\mathfrak{m}_\pm^{(0)}$  es el subespacio de  $\mathfrak{m}^{(0)}$  generado por las raíces pertenecientes a  $\pm\Delta_+$ , esto es si  $\pi_+ + \pi_0 + \pi_- = id$  es la resolución de la identidad de esta descomposición entonces  $\rho = \pi_+ + \pi_0 - \pi_-$ .

En Fordy(1984) se dice que no parece posible la extensión a espacios homogéneos de las ecuaciones de Dodd-Fordy que fueron discutidas en VI.3. Consideramos la solución asociada a la descomposición

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_+ \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}_-,$$

dada por el sistema de raíces generado por  $\mathfrak{h}$ , con  $\rho = \pi_+ + L\pi_0 - \pi_-$ , donde  $\pi_+ + \pi_0 + \pi_- = id$  es la resolución de la identidad de esta descomposición y

$L$  es un endomorfismo arbitrario de la subálgebra de Cartan  $\mathfrak{h}$ . Sin embargo dentro del marco de esta tesis es fácil advertir que esta descomposición genera un sistema integrable que se puede considerar como la extensión buscada a espacios hermíticos. Tan sólo es necesario resolver la parametrización de  $S$  y  $V_+$  de modo tal que se cumpla la ligadura entre ambos. Una parametrización es

$$\begin{aligned} S &= A + \sum p_\alpha E_{-\alpha} \\ V_+ &= \sum q_\alpha E_\alpha + \sum p_\gamma q_\beta [E_\beta, E_{-\gamma}] + \\ &\quad \sum_{\delta-\beta>0} p_\alpha p_\beta p_\rho q_\gamma R_{\gamma-\alpha-\rho}^\delta E_{-\alpha} [E_{-\beta}, E_\delta] + \\ &\quad L_+ (-\sum p_\alpha q_\alpha [E_\alpha, E_{-\alpha}] + \sum p_\alpha p_\delta p_\rho q_\gamma R_{\gamma-\alpha-\rho}^\delta [E_\delta, E_{-\delta}]). \end{aligned}$$

El sistema de evolución asociado, que no hemos calculado debido al volumen de las operaciones a realizar, se podría hallar con ayuda del cálculo simbólico. Basta usar las fórmulas para  $V, Q$  halladas en la primera subsección. Se obtiene de este modo una generalización del sistema de Dodd-Fordy en el caso de una reducción compacta.

Comentemos finalmente que los retículos integrables continuos estudiados en VI.6, se extienden a este contexto generalizado de forma inmediata. El modelo de Thirring masivo en espacios homogéneos se construiría con ayuda de las ideas dadas en el párrafo anterior. También hubiera sido factible estudiar en el álgebra de lazos  $L\mathfrak{sl}(n, \mathbf{C})$  la solución elíptica de Baxter-Belavin-Sklyanin. Se construirían modelos de Landau-Lifshitz generalizados en estos espacios homogéneos. Resultarían así deformaciones elípticas de las ecuaciones ferromagnéticas de Heisenberg generalizadas a estos espacios homogéneos.

## Capítulo XII

### Ecuaciones de N-ondas y modelos quirales principales

En este capítulo estudiaremos las ecuaciones de N-ondas y los modelos quirales principales, o transformaciones armónicas, en relación al esquema grupo-teórico presentado en esta tesis. En la primera sección analizamos las ecuaciones de N-ondas y en la sección XII.2 los modelos quirales principales.

#### XII.1 Ecuaciones de N-ondas

Trataremos aquí las ecuaciones de N-ondas en  $1 + 1$  dimensiones. Dichas ecuaciones se formulan dentro del marco de esta tesis como se explica a continuación.

Sean  $A, B \in \mathfrak{h}$  una pareja de vectores de la subálgebra de Cartan  $\mathfrak{h}$  del álgebra de Lie simple  $\mathfrak{g}$ . Como en XI.1 escogemos la matriz- $r$

$$R = P_+ - P_- + \rho P_0$$

donde  $\text{id} = P_+ + P_0 + P_-$  es la resolución de la identidad dada por la descomposición de Birkhoff

$$L\mathfrak{g} = L_1^+ \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g} \oplus L_1^- \mathfrak{g},$$

y  $\rho$  es una solución de la ecuación de Yang-Baxter clásica modificada en  $\mathfrak{g}$ .

Dada la 1-forma de curvatura nula

$$\chi = \lambda(Adx + Bdt)$$

y  $\psi_-$  con valores en  $LG_-$  solución de

$$d\psi_- \cdot \psi_-^{-1} = R_- \text{Ad}\psi_-(\chi)$$

construimos la 1-forma de curvatura nula

$$\omega_+ = R_+ \text{Ad}\psi_-(\chi).$$

Si  $a$  es el valor en el  $\infty$  de la extensión holomorfa de  $\psi_-$  al exterior de círculo unidad definimos

$$S = \text{Ada}(A), \quad T = \text{Ada}(B).$$

Repitiendo lo dicho en XI.1 obtenemos para  $\omega_+$  la expresión

$$\omega_+ = (\lambda S + V_+)dx + (\lambda T + W_+)dy.$$

Aquí  $V_+ = \rho_+ V$  y  $W_+ = \rho_+ W$  toman sus valores en  $\mathfrak{g}_+$ ,  $S$  y  $V_+$  cumplen la ligadura (XI.1.6). Esta misma ligadura es cierta una vez sustituidos  $S$  por  $T$  y  $V_+$  por  $W_+$ .

La condición de curvatura nula que satisface  $\omega_+$  impone las ecuaciones no lineales

$$S_y - T_x + [S, W_+] + [V_+, T] = 0$$

$$V_{+,y} - W_{+,x} + [V_+, W_+] = 0,$$

y la condición  $[S, T] = 0$ . Esta última restricción se cumple de forma inmediata debido a la definición de  $S$  y  $T$ . Un caso particular es  $\rho = -\text{id}$ , ahora  $V_+ = W_+ = 0$  y por tanto se llega a

$$S_y - T_x = 0.$$

Cuando  $\rho = \text{id}$  obtenemos  $V = V_+$ ,  $W = W_+$ ,  $S = A$  y  $T = B$ . Por tanto tendremos

$$[A, W] = [B, V] = 0$$

$$V_y - W_x + [V, W] = 0.$$

Supongamos ahora que  $B$  es un vector del centro del centralizador de  $A$ . Entonces, la factorización introducida en XI.1

$$\psi_- = u \cdot a \cdot \phi$$

nos da  $V = [U_1, S]$  y  $W = [U_1, T]$ , aquí  $U_1$  es el primer coeficiente de Fourier de  $\ln u$ . En XI.1 demostramos que los coeficientes de Fourier  $U_n$  y  $\text{Ada}(k_{xn})$  de  $\ln u$  y  $\text{Ada}(k_x)$ , con  $k_x = \phi_x \cdot \phi^{-1}$ , se parametrizan en las variables  $S, V_+$  y sus  $\partial_x$ -derivadas. En este caso tenemos la ecuación

$$u_y \cdot u^{-1} + \text{Adu}(a_y \cdot a^{-1} + \text{Ada}(k_y)) = (-P_- + \rho_- P_0) \text{Adu}(\lambda T)$$

donde  $k_y = \phi_y \cdot \phi^{-1}$ . Luego se pueden parametrizar los coeficientes de Fourier  $\text{Ada}(k_{yn})$  de  $\text{Ada}(k_y)$  en las variables  $S, V_+, T$  y sus  $\partial_x, \partial_y$ -derivadas. El análisis realizado en XI.1 nos permite asegurar que  $(\text{Ada}(k_{xn}))_y = (\text{Ada}(k_{yn}))_x$  da lugar a una colección infinita de leyes de conservación locales y no triviales.

En este caso cuando  $\rho = \text{id}$  tendremos

$$V = [U_1, A], \quad W = [U_1, B].$$

Por tanto, usando el campo  $U_1$  como variable, la ecuación  $[A, V] = [B, W]$  es inmediata pues  $[A, B] = 0$ . La ecuación para  $U_1$  es

$$[U_{1,y}, A] - [U_{1,x}, B] + [[U_1, A], [U_1, B]] = 0.$$

Esta ecuación generaliza la ecuación de N-ondas y tiene aplicaciones en Física, ver Zakharov y Shabat(1979) y Novikov, Manakov, Pitaevskii y Zakharov (1983).

## XII.2 Los campos quirales principales

En esta sección presentamos los campos quirales principales.

Si  $A, B : I \rightarrow \mathfrak{h}$  son funciones suaves sobre el intervalo  $I \subset \mathbf{R}$  con valores en la subálgebra de Cartan  $\mathfrak{h}$ , la 1-forma de curvatura nula a considerar será

$$\chi = \frac{a-b}{2} \left( -\frac{1}{\lambda-a} A(x) dx + \frac{1}{\lambda-b} B(y) dy \right),$$

donde  $a, b \in D(0; 1)$  son puntos arbitrarios en el disco unidad. Claramente  $\chi = d\psi \cdot \psi^{-1}$  con

$$\psi(x, y) = \exp \left( \frac{a-b}{2} \left[ -\frac{1}{\lambda-a} \int^x ds A(s) + \frac{1}{\lambda-b} \int^y ds B(s) \right] \right) \cdot g,$$

donde  $g \in LG$  es la condición inicial. Además,  $\psi$  se puede interpretar como una familia de flujos conmutativos en el grupo de lazos  $LG$ .

A continuación analizamos la proyección de estos flujos en diferentes espacios homogéneos. En la primera subsección se utiliza una modificación del problema de factorización de Birkhoff mientras que en la segunda usamos el problema de factorización asociado a la matriz- $r$  elíptica.

**XII.2.1 El modelo quiral principal isótropo**

En el álgebra de lazos  $L\mathfrak{g}$  se escoge la matriz- $r$  clásica,  $R$ , siguiente. La descomposición es

$$L\mathfrak{g} = L^+\mathfrak{g} \oplus L_1^-\mathfrak{g},$$

y  $R = P_- - P_+$ .

La solución al problema de factorización

$$\psi = \psi_+^{-1} \cdot \psi_-,$$

con  $\psi_+$  a valores en  $L^+G$  y  $\psi_-$  en  $L_1^-G$ , permite construir  $\omega_-$ , 1-forma de curvatura nula, como

$$\omega_- = P_- \text{Ad}\psi_+(\chi).$$

Podemos calcular los valores de las extensiones holomorfas de  $\psi_+$  a  $D(0; 1)$  en los puntos  $a, b \in D(0; 1)$ . Denotaremos estos valores por  $\psi_+(a)$  y  $\psi_+(b)$  respectivamente. Escribamos

$$U = \text{Ad}\psi_+(a)(A), \quad V = \text{Ad}\psi_+(b)(B).$$

Entonces

$$\omega_- = \frac{a-b}{2} \left( -\frac{1}{\lambda-a} U dx + \frac{1}{\lambda-b} V dy \right).$$

La identidad algebraica

$$\frac{1}{\lambda-a} \frac{1}{\lambda-b} = \frac{1}{a-b} \left( \frac{1}{\lambda-a} - \frac{1}{\lambda-b} \right),$$

permite expresar la condición de curvatura nula de  $\omega_-$  como el sistema

$$\begin{aligned} U_y + \frac{1}{2}[U, V] &= 0 \\ V_x - \frac{1}{2}[U, V] &= 0. \end{aligned}$$

Este sistema lo reescribimos como

$$U_y - V_x + [U, V] = 0, \quad U_y + V_x = 0.$$

Estas son las ecuaciones de los campos quirales principales introducidas por Faddeev y resueltas en Zakharov y Mikhailov(1978,1980). Son una generalización de la construcción dada en Pohlmeyer(1974), ver también Cherednik(1983,1987). En Zakharov y Mikhailov(1978) se resolvió completamente el modelo quiral principal hallándose soluciones multi-solitónicas por el método de la transformada espectral inversa. En Zakharov y Mikhailov (1980) se demostró que el modelo de Gross-Neveu, ver Gross y Neveu(1974), era un caso particular de campo quiral principal. También son las ecuaciones para las transformaciones armónicas, Uhlenbeck(1989,1990). De la primera ecuación del sistema se deduce que 1-forma  $A = Udx + Vdy$  es de curvatura nula, y por tanto existe  $s$  con valores en  $G$  tal que  $A = ds \cdot s^{-1}$ . La función  $s$  es una transformación armónica

$$(s_x \cdot s^{-1})_y + (s_y \cdot s^{-1})_x = 0.$$

Si las variables  $x, y$  pertenecen al conjunto  $U \subset \mathbb{C}$ , dado  $s : U \rightarrow G$  se define su energía

$$E(s) = \frac{1}{2} \int_U dx dy |A|^2 = \frac{1}{2} \int_U dx dy \left( B(s_x \cdot s^{-1}, s_x \cdot s^{-1}) + B(s_y \cdot s^{-1}, s_y \cdot s^{-1}) \right),$$

donde  $B$  es la forma de Cartan-Killing en  $\mathfrak{g}$ . Pues bien,  $E$  alcanza sus puntos críticos precisamente cuando  $s$  es una transformación armónica.

La 1-forma  $\omega_-$  se puede extender de forma meromorfa al plano complejo, esta extensión tendrá dos polos simples en los puntos  $a$  y  $b$ . De la igualdad

$$\omega_-|_{\lambda=\frac{a+b}{2}} = A,$$

se concluye que  $s$  pertenece al 'coset'  $\psi_-|_{\lambda=\frac{a+b}{2}} \cdot G$ .

La transformación homográfica

$$\lambda' = \frac{\lambda - b}{\lambda - a},$$

transforma los puntos de la esfera de Riemann  $\infty, \frac{a+b}{2}, a, b$  en los puntos  $1, -1, \infty, 0$  respectivamente. La 1-forma  $\omega_-$  se expresa en la variable  $\lambda'$  como

$$\omega_- = \frac{1}{2} \left( (1 - \lambda')Udx + (1 - \lambda'^{-1})Vdy \right).$$

Con la notación  $E_{\lambda'} = \psi_-(\lambda)$  se recuperan los resultados del teorema 2.2 de Uhlenbeck(1989). Es importante señalar que estos resultados ya aparecen en Zakharov y Mikhailov(1978,1980). Sin embargo en Uhlenbeck(1989) se construyen en el caso  $G = U_n$  las soluciones llamadas unitones, que están relacionadas con problemas de factorización en el grupo, ver Segal(1990). Sería interesante conocer la relación de las soluciones de  $n$ -unitones y de  $n$ -solitones, dadas estas últimas en Zakharov y Mikhailov(1978). Es llamativo que el número unitónico  $n$  tenga una cota superior finita. Tanto en Zakharov y Mikhailov(1978) como en los trabajos sobre transformaciones armónicas, por ejemplo Uhlenbeck(1989) se consideran reducciones a variedades grassmannianas, variedades de Stiefel y variedades proyectivas. Para ello basta imponer que  $s$  sea idempotente,  $s^2 = \text{id}$ , esto es  $s = \text{id} - 2P$ , donde  $P$  es un proyectador.

Los retículos continuos que fueron estudiados en V.3 cuando  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ , y sus generalizaciones a un álgebra simple arbitraria  $\mathfrak{g}$ , ver XI.1, se convierten en modelos quirales principales mediante una transformación de 'gauge'.

La forma de curvatura nula es

$$\xi = (-\lambda' S + V_+) dx - (\lambda'^{-1} T + W_-) dy,$$

donde  $S, V_+$  verifican una ligadura diferencial en la variable  $x$ , y  $T, W_-$  en la variable  $y$ . Las ecuaciones son

$$\begin{aligned} S_y - [S, W_-] &= 0 \\ V_{+,y} + W_{-,x} - [V_+, W_-] + [S, T] &= 0 \\ T_x + [T, V_+] &= 0. \end{aligned}$$

Aplicando la transformación homográfica antes definida se obtiene la 1-forma de curvatura nula

$$\xi = \left( V_+ - S - (a-b) \frac{S}{\lambda-a} \right) dx - \left( W_- + T - (a-b) \frac{T}{\lambda-b} \right) dy.$$

Por tanto existirá  $g \in C^\infty(\mathcal{U}, G)$  tal que

$$V_+ - S = g_x \cdot g^{-1}, \quad W_- + T = -g_y \cdot g^{-1}.$$

Sea  $\bar{g}$  el inverso de  $g$ , entonces la transformada 'gauge' de  $\xi$  es

$$\xi^{\bar{g}} = \frac{1}{2} \left( (1 - \lambda') U dx + (1 - \lambda'^{-1}) V dy \right),$$

con

$$U = 2\text{Ad}\bar{g}(S), \quad V = 2\text{Ad}\bar{g}(T).$$

De aquí la conexión, via transformación de gauge, de los retículos integrables con los modelos quirales. Por tanto soluciones del modelo de Thirring masivo, o de los modelos de autotransparencia inducida, que contienen en particular a la ecuación de 'sine'-Gordon, son tras una transformación de 'gauge' soluciones de modelos quirales principales. Con respecto a la relación de 'sine'-Gordon con las transformaciones armónicas ver Uhlenbeck(1990).

Debemos comentar que dentro del espíritu de esta tesis los modelos quirales son análogos a las ecuaciones de evolución integrables tipo AKNS o KdV, ya que emergen asociados a la 1-forma  $\omega_-$ , esto es, son la descripción diferencial de la proyección de ciertos flujos conmutativos, que se construyen multiplicando a la izquierda cierta condición inicial, en un espacio homogéneo. Recordemos que la 1-forma  $\alpha$  aparece cuando se consideran multiplicaciones a derecha e izquierda de dicha condición inicial. Pero ahora no podemos repetir ciertas construcciones realizadas en anteriores capítulos. Por ejemplo se obtienen densidades conservadas  $l_x = m_y$ , pero ahora,  $l$  depende de  $U$  y sus  $\partial_x$ -derivadas hasta cierto orden finito, en tanto que  $m$  depende de un número infinito. Aparecen series geométricas, de  $\partial_x, \partial_y$ -derivadas de  $U$  y  $V$ . Por tanto, aunque sean leyes de conservación locales no parecen interesantes.

En relación a las leyes de conservación locales en modelos quirales comentemos que en Pohlmeyer(1976) se obtienen para el caso particular estudiado allí. Posteriormente en Cherednik(1978) se obtiene para los modelos quirales principales una familia infinita de leyes de conservación locales en  $s$ . También en Ogielski, Prasad, Sinha y Chau(1980) se relacionan ciertas transformaciones de Bäcklund con leyes de conservación locales de modelos quirales principales, ver también Chau(1982). Sin embargo en estos dos últimos trabajos no son capaces de resolver cierto sistema algebraico y por tanto de dar expresiones explícitas de las densidades conservadas. Ver también Cherednik(1983,1987) y Ueno y Nakamura(1983). En Dickey(1983) se considera una formulación equivalente de los campos quirales principales. Dicha formulación se consigue tras aplicar una transformación de 'gauge' al modelo quiral, obteniéndose el retículo integrable continuo con  $\rho = \text{id}$ , esto es  $S = A, V_+ = V, W_- = 0$ , que fue estudiado en los capítulos V, VI y XI y que hemos demostrado en esta sección que es equivalente 'gauge' al campo quiral principal. En Dickey(1983) se construyen explícitamente las

leyes de conservación de esta formulación equivalente ‘gauge’ de los modelos quirales principales. Recordemos que dimos en los mencionados capítulos un esquema para construir dos familias infinitas de leyes de conservación locales y no triviales para este retículo.

**XII.2.2 Modelos quirales principales anisótropos**

Para finalizar este capítulo introducimos los modelos quirales principales anisótropos. Dichos modelos aparecen ligados a la matriz- $r$  clásica elíptica de Baxter-Belavin-Sklyanin,  $R = P_E - P_+$ . Suponemos  $a, b \notin E_n$ , donde  $E_n$  es el grupo de orden  $n$  de la curva elíptica  $E$ , ver III.6. Tenemos la descomposición

$$L\mathfrak{g} = L^+ \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) \oplus L_{el} \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}),$$

que induce el problema de factorización

$$\psi = \psi_+^{-1} \cdot \psi_E,$$

con  $\psi_+$  a valores en  $L^+SL(n, \mathbb{C})$  y  $\psi_E$  en  $L_{el}SL(n, \mathbb{C})$ . Si  $\psi_+$  es solución de este problema entonces la 1-forma  $\omega_E = P_E Ad\psi_+(\chi)$  es de curvatura nula. Emplearemos la notación

$$U = \sum_{c \in \mathbb{Z}_n^2} u_c T_c,$$

$$V = \sum_{c \in \mathbb{Z}_n^2} v_c T_c,$$

donde  $\{T_c\}_{c \in \mathbb{Z}_n^2}$  es la base de  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$  introducida en III.6. La 1-forma  $\omega_-$  se expresa en función de estas variables como

$$\omega_E = \frac{a-b}{2} \sum_{c \in \mathbb{Z}_n^2} (-w_c(\lambda - a)u_c dx + w_c(\lambda - b)v_c dy) T_c.$$

La condición de curvatura nula de esta 1-forma nos da las ecuaciones diferenciales del modelo. Soluciones, leyes de conservación y transformaciones de Bäcklund de este modelo quiral principal anisótropo se estudiaron en Cherednik(1987). En Holod(1987-1) se analizaron las leyes de conservación y la estructura del álgebra de simetrías de esta ecuación. En el caso  $n = 2$ , esto es,  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ , se obtienen las ecuaciones

$$U_y + \frac{1}{2}[U, V] = \frac{a(b-a)}{2}[JU, V]$$

$$V_x - \frac{1}{2}[U, V] = \frac{b(b-a)}{2}[U, JV],$$

donde  $J \in \text{End } \mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$  se define como  $J\sigma_i = 2A_i\sigma_i$ , con las constantes  $A_i$  introducidas en III.6 y las  $\sigma_i$  son las matrices de Pauli.



## Capítulo XIII

### Yang-Mills autodual e integrabilidad

Nos ocuparemos aquí de las relaciones existentes entre las ecuaciones de Yang-Mills autoduales y los sistemas integrables analizados a lo largo de esta tesis.

En la primera sección damos una breve introducción a la teoría de los campos de Yang-Mills. A continuación, en XIII.2, se estudia la conexión entre las ecuaciones de Yang-Mills autoduales y la teoría de los sistemas integrables. Finalmente en la tercera sección se generalizan estos argumentos, para obtener jerarquías de Yang-Mills autoduales así como su relación con las jerarquías integrables.

#### XIII.1 Los campos de 'gauge' o de Yang-Mills

Esta sección se dedica a recordar brevemente la teoría de los campos de Yang-Mills. La exposición sigue a Ward y Wells(1990), ver también Atiyah(1979).

Sea  $E$  un espacio lineal tetradimensional y  $g$  una métrica en dicho espacio vectorial. Dada la actuación del operador estrella de Hodge  $\star : \Lambda^p(E) \rightarrow \Lambda^{4-p}(E)$  el espacio de 2-formas es invariante bajo  $\star$ . El operador estrella de Hodge se extiende a  $\Lambda(E, \mathfrak{g})$  donde  $\mathfrak{g}$  es un álgebra de Lie. La generalización Yang-Mills de la teoría electromagnética de Maxwell es como sigue. El potencial vector se convierte en el potencial de 'gauge'  $\mathbf{A} \in \Lambda^1(E, \mathfrak{g})$  siendo su curvatura  $\mathbf{F} = d\mathbf{A} - \frac{1}{2}[\mathbf{A}, \mathbf{A}] \in \Lambda^2(E, \mathfrak{g})$  el campo de 'gauge' asociado. Esta curvatura es la generalización del tensor electromagnético de Faraday. La generalización consiste en sustituir el grupo  $U(1)$  por un grupo de Lie simple  $G$  con  $\mathfrak{g}$  su álgebra de Lie.

Debido a que  $\mathbf{F}$  es una curvatura se cumple la identidad de Bianchi

$$d\mathbf{F} = [\mathbf{A}, \mathbf{F}].$$

Como  $\mathfrak{g}$  es simple usamos la forma de Cartan-Killing para construir la acción de Yang-Mills

$$\mathcal{A}[\mathbf{A}] = \frac{1}{2} \int_E d\mu B(\mathbf{F}, \mathbf{F}),$$

donde  $d\mu$  es la forma de volumen asociada a la métrica  $g$ . Debido a que en la forma real compacta del álgebra  $\mathfrak{g}$  la forma de Cartan-Killing es definida negativa esta acción tendrá esta misma propiedad cuando se restringe a dicha forma real. Los puntos críticos de esta acción son aquellos potenciales de 'gauge'  $\mathbf{A}$  que satisfacen las ecuaciones de Yang-Mills

$$d * \mathbf{F} = [\mathbf{A}, \mathbf{F}].$$

Estas son las ecuaciones dinámicas para los potenciales de 'gauge'. Cuando  $(E, g)$  es un espacio euclídeo el operador estrella de Hodge es involutivo:  $*^2 = \text{id}$ . Por tanto, el espacio  $\wedge^2(E, \mathfrak{g})$  se descompone en una parte autodual y otra antiautodual. Los campos de 'gauge' autoduales satisfacen

$$* \mathbf{F} = \mathbf{F},$$

en tanto que los antiautoduales cumplen

$$* \mathbf{F} = -\mathbf{F}.$$

Si  $\mathbf{F}$  es autodual o antiautodual entonces la identidad de Bianchi obliga a que este campo de 'gauge' verifique las ecuaciones de Yang-Mills. Las ecuaciones de Yang-Mills y las de autodualidad son invariantes bajo transformaciones de 'gauge', además el grupo conforme es un grupo de simetrías del sistema.

La cuantificación de estas teorías clásicas se puede realizar por el método de integración a lo largo de caminos de Feynman. Para dar sentido a la integral es necesario realizar la rotación de Wick. Por tanto el espacio base será euclídeo. Un análisis perturbativo de la función de partición se basa en el estudio de los puntos críticos de la acción, y por tanto debemos considerar las soluciones clásicas de las ecuaciones de Yang-Mills. Debido a que la acción cambiada de signo es el argumento de la función exponencial en la función de partición, las únicas soluciones de interés son aquellas de acción finita. Estas soluciones se conocen como instantones. Toda solución sobre

la esfera tetradimensional  $S^4$  genera una solución de acción finita sobre  $E$  y todo instantón en  $E$  genera una solución sobre  $S^4$ , Uhlenbeck(1982). El estudio de los instantones lleva al análisis de fibrados principales con base  $S^4$  y grupo estructural  $G$ . La teoría pierde aquí el aspecto local que tenía hasta ahora. La segunda clase característica de Chern nos sirve para etiquetar a los instantones. El número entero asociado a esta clase es la denominada carga topológica del instantón o número instantónico. Los  $n$ -instantones autoduales o antiautoduales corresponden a mínimos absolutos de la acción.

La geometría de los 'twistors', ver Penrose(1975) o Ward y Wells(1990), es esencial en la construcción de las soluciones tipo instantón autodual o antiautodual. Como se observó en Ward(1977) existe una correspondencia biunívoca, cuando  $G = GL(n, \mathbb{C}), SL(n, \mathbb{C}), U(n)$ , entre los campos de 'gauge' autoduales sobre la complexificación de  $E$  y los fibrados vectoriales holomorfos de rango  $n$  sobre el espacio de 'twistors' proyectivos  $\mathbb{C}P^3$ . Dicha correspondencia se realiza a través de la transformación de Penrose, ver por ejemplo Baston y Eastwood(1990).

Se pueden obtener instantones a partir de instantones ya conocidos, esto se traduce según la correspondencia de Ward en la extensión de fibrados vectoriales a otros con fibras de mayor dimensión. Tal técnica necesita de la geometría algebraica, ver Atiyah y Ward(1977), y genera los 'ansätze' tipo  $A_i$ . La geometría 'twistor' y la transformación de Penrose se utilizó junto con el método de las mónadas en los trabajos Atiyah, Drinfel'd, Hitchin y Manin(1978) y Drinfel'd y Manin(1978) para construir todos los instantones autoduales, ver Ward y Wells(1990) y Atiyah(1979). Por otro lado en Belavin y Zakharov(1978) y Belavin(1979) se utilizó la técnica del revestimiento, ya usada en la teoría de los sistemas integrables, en la construcción de los instantones. En Cherednick(1983) se hallaron soluciones cuasiperiódicas en el espíritu de Krichever(1976).

Escribiremos a continuación las ecuaciones de autodualidad explícitamente. Si  $x^1, x^2, x^3, x^4$  son las coordenadas cartesianas de la complexificación del espacio euclídeo  $E$ , definimos

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x^0 + ix^1), & \bar{t}_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x^2 - ix^3), \\ t_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x^2 + ix^3), & \bar{t}_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x^0 - ix^1). \end{aligned}$$

En estas coordenadas el potencial de 'gauge' se escribe

$$\mathbf{A} = A_1 dt_1 + A_2 dt_2 + A_{\bar{1}} d\bar{t}_1 + A_{\bar{2}} d\bar{t}_2,$$

y el campo de 'gauge'  $\mathbf{F} = d\mathbf{A} - \frac{1}{2}[\mathbf{A}, \mathbf{A}]$  resulta ser

$$\begin{aligned} \mathbf{F} = & F_{12} dt_1 \wedge dt_2 + F_{1\bar{1}} dt_1 \wedge d\bar{t}_1 + F_{1\bar{2}} dt_1 \wedge d\bar{t}_2 + \\ & F_{2\bar{1}} dt_2 \wedge d\bar{t}_1 + F_{2\bar{2}} dt_2 \wedge d\bar{t}_2 + F_{\bar{1}\bar{2}} d\bar{t}_1 \wedge d\bar{t}_2. \end{aligned}$$

Las ecuaciones de autodualidad se reducen a

$$F_{1\bar{1}} = F_{2\bar{2}} = F_{1\bar{2}} + F_{\bar{1}2} = 0.$$

De  $F_{1\bar{1}} = F_{2\bar{2}} = 0$  deducimos la existencia local de funciones  $D, \bar{D}$  con valores en  $G$  tales que

$$A_i = \partial_i D \cdot D^{-1}, \quad A_{\bar{i}} = \partial_{\bar{i}} \bar{D} \cdot \bar{D}^{-1}.$$

Aquí empleamos la notación

$$\partial_i = \frac{\partial}{\partial t_i}, \quad \partial_{\bar{i}} = \frac{\partial}{\partial \bar{t}_i}.$$

Entonces de  $F_{1\bar{2}} + F_{\bar{1}2} = 0$  deducimos que  $J := D^{-1} \cdot \bar{D}$  cumple

$$\partial_1(\partial_{\bar{2}} J \cdot J^{-1}) - \partial_{\bar{2}}(\partial_1 J \cdot J^{-1}) = 0,$$

una relación que guarda cierta similitud con la de los modelos quirales. Esta ecuación se conoce como la formulación  $J$  de Yang de las ecuaciones de autodualidad.

### XIII.2 Yang-Mills autodual y sistemas integrables

Las ecuaciones de autodualidad o antiautodualidad para los campos de 'gauge' de Yang-Mills están ligadas a los grupos de lazos y a los sistemas integrables. En los últimos años esta relación se ha puesto de manifiesto en la literatura. Así en Chau(1981,1982), Chau, Ge, Sinha y Wu(1983) y Dolan(1982,1984) se estudian las ecuaciones de autodualidad en la formulación  $J$  de Yang en el contexto de las álgebras de Kac-Moody de tipo afín. Por otra parte en Mason, Chakravarty y Newman(1988) se construyen transformaciones de Bäcklund de dichas ecuaciones y su relación con los grupos de lazos, en este sentido ver también Ueno y Nakamura(1983).

Por otro lado, en Ward(1985,1987,1990) se ha analizado la relación de ciertos sistemas integrables con las ecuaciones de autodualidad. Así la ecuación de 'sine'-Gordon, la red de Toda continua, modelos quirales y las ecuaciones de Bogolmony para los monopolos magnéticos son algunos de los sistemas que son reducción de las ecuaciones de autodualidad. Esta reducción se consigue imponiendo simetrías sobre dichas ecuaciones de autodualidad. En estos trabajos también se incluyen a las ecuaciones de NLS y KdV como reducciones de Yang-Mills autodual sobre espacios de dimensión 8. Recientemente en los trabajos Mason y Sparling(1989) y Sparling y Mason(1989) se ha demostrado que las ecuaciones de NLS y KdV son reducciones de las ecuaciones de autodualidad sobre un espacio de dimensión 4.

Veremos a continuación como el esquema grupo-teórico presentado en esta tesis da explicación a todos estos fenómenos.

**Definición XIII.2.1** Definimos los campos vectoriales  $X, \bar{X} : S^1 \rightarrow \mathfrak{X}(\mathcal{U})$ , donde  $\mathcal{U}$  es un abierto de  $\mathbb{C}^4$ , como

$$X = \partial_2 - \lambda \partial_1, \quad \bar{X} = \partial_2 - \lambda \partial_{\bar{1}}.$$

Decimos que  $\chi \in \wedge^1(\mathcal{U}, L\mathfrak{g})$  está asociada a un potencial de 'gauge' si existe  $\mathbf{A} \in \wedge^1(\mathcal{U}, \mathfrak{g})$  tal que

$$\chi(X) = \mathbf{A}(X), \quad \chi(\bar{X}) = \mathbf{A}(\bar{X}).$$

Obsérvese que  $\chi$  toma valores en  $L\mathfrak{g}$  a diferencia de  $\mathbf{A}$  que lo hace en  $\mathfrak{g}$ . La curvatura de la 1-forma  $\chi$  es  $\Omega_\chi = d\chi - \frac{1}{2}[\chi, \chi]$  y contraída con los campos  $X, \bar{X}$  da

$$\Omega_\chi(X, \bar{X}) = X(\chi(\bar{X})) - \bar{X}(\chi(X)) - [\chi(X), \chi(\bar{X})].$$

Cuando  $\chi$  está asociada a un potencial de 'gauge'  $\mathbf{A}$ , con curvatura el campo de 'gauge'  $\mathbf{F}$ , se llega a

$$\Omega_\chi(X, \bar{X}) = F_{2\bar{2}} - \lambda(F_{1\bar{2}} + F_{\bar{2}1}) + \lambda^2 F_{1\bar{1}},$$

de donde se deduce el

**Teorema XIII.2.1** Para que la 1-forma  $\chi \in \wedge^1(\mathcal{U}, L\mathfrak{g})$  asociada al potencial de 'gauge'  $\mathbf{A} \in \wedge^1(\mathcal{U}, \mathfrak{g})$  cumpla  $\Omega_\chi(X, \bar{X}) = 0$  es necesario y suficiente que el campo de 'gauge'  $\mathbf{F} = d\mathbf{A} - \frac{1}{2}[\mathbf{A}, \mathbf{A}]$  sea autodual.

Debemos observar que este teorema sigue el espíritu de Belavin y Zakharov(1978) en la formulación de las ecuaciones de autodualidad con pares de Lax, ver también Zakharov y Shabat(1979) y Cherednik(1983).

Cualquier 1-forma  $\chi \in \wedge^1(\mathcal{U}, L\mathfrak{g})$  asociada al potencial de 'gauge'  $\mathbf{A} \in \wedge^1(\mathcal{U}, \mathfrak{g})$  se puede escribir como

$$\chi = \mathbf{A} + \xi + \bar{\xi},$$

con  $\xi(\partial_i) = \bar{\xi}(\partial_i) = 0$  para  $i, \bar{i} = 1, 2$  y

$$\xi(X) = \bar{\xi}(\bar{X}) = 0.$$

Escribiendo  $\xi = Mdt_1 + Ndt_2$  y  $\bar{\xi} = \bar{M}d\bar{t}_1 + \bar{N}d\bar{t}_2$  las ecuaciones anteriores sobre  $\xi$  imponen que  $N = \lambda M$  y  $\bar{N} = \lambda \bar{M}$ . Por tanto se deduce la

**Proposición XIII.2.1** *Las 1-formas  $\chi \in \wedge^1(\mathcal{U}, L\mathfrak{g})$  asociadas al potencial de 'gauge'  $\mathbf{A} \in \wedge^1(\mathcal{U}, \mathfrak{g})$  tienen la expresión*

$$\chi(\lambda) = \mathbf{A} + M(\lambda)(dt_1 + \lambda dt_2) + \bar{M}(\lambda)(d\bar{t}_1 + \lambda d\bar{t}_2),$$

donde  $M, \bar{M} \in C^\infty(\mathcal{U}, L\mathfrak{g})$ . Si  $\chi$  está asociada a los potenciales de 'gauge'  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{A}'$  entonces  $\mathbf{A} = \mathbf{A}'$ .

De las construcciones efectuadas hasta ahora se puede observar que las álgebras de lazos juegan un papel importante en la formulación de las ecuaciones de autodualidad. Veremos a continuación como los problemas de factorización en grupos de lazos inducen nuevas soluciones a las ecuaciones de Yang-Mills autoduales a partir de soluciones conocidas. Como nos interesamos por la conexión de estas ecuaciones de autodualidad con los sistemas integrables consideraremos en lo que queda de capítulo que  $\chi$  es 1-forma de curvatura nula,  $\Omega_\chi = 0$ . Por tanto se cumple en particular que  $\Omega_\chi(X, \bar{X}) = 0$ . Esto es en principio una restricción sobre la familia de soluciones de Yang-Mills autodual. Sin embargo, esta suposición nos permite una mejor comprensión de la relación de estas ecuaciones con los sistemas integrables.

La descomposición triangular de Birkhoff de  $L\mathfrak{g}$  es

$$L\mathfrak{g} = L_1^+ \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g} \oplus L_1^- \mathfrak{g}.$$

Si  $\text{id} = P_+ + P_0 + P_-$  es la resolución de la identidad dada por esta descomposición triangular y  $\rho$  verifica la ecuación de Yang-Baxter clásica modificada en  $\mathfrak{g}$  entonces  $R = P_+ + \rho P_0 - P_-$  es solución de dicha ecuación en  $L\mathfrak{g}$ .

Como siempre, tenemos las subálgebras  $L\mathfrak{g}_\pm = L_1^\pm \mathfrak{g} \oplus \rho_\pm \mathfrak{g}$  y sus grupos de Lie adjuntos  $LG_\pm$ .

Sea  $\psi_- \in C^\infty(\mathcal{U}, LG_-)$  una función de onda que es solución de

$$d\psi_- \cdot \psi_-^{-1} = R_- \text{Ad}\psi_-(\chi),$$

donde  $\chi$  es una 1-forma de curvatura nula que está asociada al potencial de 'gauge'  $\mathbf{A}$ . Como se demostro en el capítulo IV la 1-forma

$$\omega_+ = R_+ \text{Ad}\psi_-(\chi)$$

es de curvatura nula. Obviamente  $\omega_+(X)$  y  $\omega_+(\bar{X})$  tienen series de Fourier de la forma  $\sum_{i \geq 0} a_n \lambda^n$ . De la relación

$$\omega_+ = d\psi_- \cdot \psi_-^{-1} + \text{Ad}\psi_-(\chi)$$

concluimos que  $\omega_+(X)$  y  $\omega_+(\bar{X})$  tienen series de Fourier del tipo  $b_1 \lambda + b_0 + b_{-1} \lambda^{-1} + \dots$ . Por tanto  $\omega_+$  está asociada a un potencial de 'gauge'. Luego deducimos el

**Teorema XIII.2.2** *Si la 1-forma  $\chi \in \Lambda^1(\mathcal{U}, L\mathfrak{g})$  de curvatura nula está asociada al potencial de 'gauge'  $\mathbf{A} \in \Lambda^1(\mathcal{U}, \mathfrak{g})$  y si  $\psi_- \in C^\infty(\mathcal{U}, LG_-)$  es una solución de*

$$d\psi_- \cdot \psi_-^{-1} = R_- \text{Ad}\psi_-(\chi),$$

*entonces la 1-forma*

$$\omega_+ = R_+ \text{Ad}\psi_-(\chi)$$

*es de curvatura nula y está asociada al potencial 'gauge'  $\mathbf{A}' \in \Lambda^1(\mathcal{U}, \mathfrak{g})$ .*

Este teorema da un método de construcción de nuevos campos 'gauge' autoduales a partir de soluciones ya conocidas. Si  $\mathbf{F} = d\mathbf{A} - \frac{1}{2}[\mathbf{A}, \mathbf{A}]$  es el campo de 'gauge' autodual de partida entonces  $\mathbf{F}' = d\mathbf{A}' - \frac{1}{2}[\mathbf{A}', \mathbf{A}']$  es un nuevo campo de 'gauge' autodual.

Como  $\Omega_\chi = 0$  existe localmente una función de onda  $\psi$  tal que  $\chi = d\psi \cdot \psi^{-1}$ . El problema de factorización de Birkhoff modificado  $\psi = \psi_-^{-1} \cdot \psi_+$ , con  $\psi_\pm$  a valores en  $LG_\pm$ , nos ofrece soluciones  $\psi_-$  al problema diferencial planteado. Ya en Ward(1977) se consideraba esta construcción, allí  $\psi$  recibía la interpretación de matriz de transición en un fibrado.

La invariancia de 'gauge' de las ecuaciones de autodualidad nos permite restringirnos al caso  $\rho = -\text{id}$ . Se tiene  $\bar{a} \cdot \psi_- = \psi_-^{(\text{id})}$ , donde  $\bar{a}$  toma sus valores

en  $G_-$  y  $\psi_-^{(\text{id})}$  en  $L_1^- G$ . Aquí  $\psi_-^{(\text{id})}$  es solución del problema diferencial en el caso no modificado, ver V.4. Por tanto

$$d\bar{a} \cdot \bar{a}^{-1} + \text{Ad}\bar{a}(\omega_+) = \omega_+^{(\text{id})},$$

donde  $\omega_+^{(\text{id})}$  es la 1-forma construida con la descomposición de Birkhoff no modificada; así pues se llega a la equivalencia 'gauge'

$$d\bar{a} \cdot \bar{a}^{-1} + \text{Ad}\bar{a}(\mathbf{A}') = \mathbf{A}'^{(\text{id})}.$$

La construcción dada en **Teorema XIII.2.2** se puede extender al cuadrado  $L\mathfrak{g} \oplus L\mathfrak{g}$ . Consideramos dos 1-formas  $\chi_i \in \Lambda^1(\mathcal{U}, L\mathfrak{g})$ ,  $i = 1, 2$ , de curvatura nula y asociadas a los potenciales de 'gauge'  $\mathbf{A}_i \in \Lambda^1(\mathcal{U}, \mathfrak{g})$  respectivamente. Sean  $\psi_{\pm}$  funciones de onda a valores en  $LG_{\pm}$  que cumplen las ecuaciones

$$d\psi_{\pm} \cdot \psi_{\pm}^{-1} = R_{\pm}(\text{Ad}\psi_{-}(\chi_2) - \text{Ad}\psi_{+}(\chi_1))$$

y definamos la 1-forma

$$\alpha = R_+ \text{Ad}\psi_{-}(\chi_2) - R_- \text{Ad}\psi_{+}(\chi_1),$$

que como vimos en el cuarto capítulo es de curvatura nula. Ahora bien, de

$$\alpha = d\psi_{+} \cdot \psi_{+}^{-1} + \text{Ad}\psi_{+}(\chi_1)$$

deducimos que las series de Fourier de  $\alpha(X)$  y  $\alpha(\bar{X})$  son del tipo  $\sum_{n \geq 0} a_n \lambda^n$ . Por otro lado tenemos la igualdad

$$\alpha = d\psi_{-} \cdot \psi_{-}^{-1} + \text{Ad}\psi_{-}(\chi_2)$$

que obliga a que dichas series de Fourier tengan la forma  $b_1 \lambda + b_0 + b_{-1} \lambda^{-1} + \dots$ . Por tanto se deduce el teorema

**Teorema XIII.2.3** *Si las 1-formas  $\chi_i \in \Lambda^1(\mathcal{U}, L\mathfrak{g})$ ,  $i = 1, 2$  de curvatura nula están asociadas a los potenciales de 'gauge'  $\mathbf{A}_i \in \Lambda^1(\mathcal{U}, \mathfrak{g})$  respectivamente, y si  $\psi_{\pm} \in C^{\infty}(\mathcal{U}, LG_{\pm})$  son soluciones de*

$$d\psi_{\pm} \cdot \psi_{\pm}^{-1} = R_{\pm}(\text{Ad}\psi_{-}(\chi_2) - \text{Ad}\psi_{+}(\chi_1)),$$

entonces la 1-forma

$$\alpha = R_+ \text{Ad}\psi_{-}(\chi_2) - R_- \text{Ad}\psi_{+}(\chi_1)$$

es de curvatura nula y está asociada al potencial 'gauge'  $\mathbf{A}' \in \Lambda^1(\mathcal{U}, \mathfrak{g})$ .

A continuación veremos como muchos de los sistemas integrables que han ido apareciendo a lo largo de esta tesis están asociados a las ecuaciones de Yang-Mills autoduales. Para ello usaremos el Teorema XIII.2.1, el Teorema XIII.2.3 y la Proposición XIII.2.1. En los capítulos V, VI y XI se aplicó la técnica del revestimiento a 1-formas de partida del tipo  $\chi_2 = \lambda A(dt_1 + \lambda dt_2)$ ,  $\chi_1 = 0$  donde  $A \in \mathfrak{h}$  era un vector de la subálgebra de Cartan de  $\mathfrak{g}$ . De aquí se sigue que las 1-formas de curvatura nula de los sistemas integrables construidos en dichos capítulos están asociadas a potenciales de 'gauge' con campos de 'gauge' autoduales. Estos sistemas integrables se pueden considerar en consecuencia como reducciones de las ecuaciones de Yang-Mills autoduales. Recordemos que entre estos sistemas integrables se encuentran AKNS y sus modificaciones, así como su generalización a espacios homogéneos reductivos. También se estudiaron en estos capítulos ciertos retículos integrables continuos. Estos se obtienen al aplicar la técnica del revestimiento a 1-formas del tipo  $\chi_2 = \lambda A dt_2$  y  $\chi_1 = \lambda^{-1} A dt_1$  que las podemos reescribir, por ejemplo, como  $\chi_2 = -A dt_1 + A(dt_1 + \lambda dt_2)$  y  $\chi_1 = -A dt_2 + \lambda^{-1} A(dt_1 + \lambda dt_2)$ . La condición de curvatura nula sobre la 1-forma revestida  $\alpha$  para los retículos continuos da lugar igualmente a potenciales 'gauge' con sus campos 'gauge' autoduales. Podemos citar los modelos de Thirring masivo y de transparencia autoinducida. Como ya se ha demostrado son reducciones de Yang-Mills autodual. Debemos comentar que en el caso  $\mathfrak{g}$  simple podemos escoger  $\chi_1 = \lambda A dx + \lambda^2 B dt$  con  $B$  en el centro del centralizador de  $A$ . Ahora bien, basándonos en la identidad  $\chi_1 = -(A - B)dt_1 + (A - B)(dt_1 + \lambda dx) + \lambda B(dx + \lambda dt)$ , podemos imponer la restricción  $t_2 = \bar{t}_1 = x$  por lo que este caso es de nuevo una reducción de Yang-Mills autodual.

En el capítulo VIII se revistió la 1-forma  $\Lambda(dx + \lambda dt)$  para obtener las versiones potenciales de las ecuaciones de KdV y mKdV. Por tanto estas ecuaciones dan lugar a soluciones de Yang-Mills autodual. En el capítulo IX se introdujo una modificación de 'gauge' que transformaba dichas versiones potenciales en KdV y mKdV respectivamente con lo que KdV y mKdV generan soluciones de Yang-Mills autodual. Las modificaciones de KdV dadas en IX.2 dan también soluciones de las ecuaciones de autodualidad. También consideramos en VII.3 la ecuación de 'sine'-Gordon. Las 1-formas de partida eran  $\chi_1 = \Lambda dx$  y  $\chi_2 = \Lambda^{-1} dy$  que las podemos reescribir como  $\chi_1 = (edx - f dt_1) + f(dt_1 + \lambda dt_2)$  y  $\chi_2 = (f dy - e d\bar{t}_2) + \lambda^{-1} e(dy + \lambda d\bar{t}_2)$ . Por tanto la 1-forma de curvatura nula de la ecuación de 'sine'-Gordon esta asociada a un potencial de 'gauge' con campo de 'gauge' autodual. La ecuación

de Ur-KdV y el retículo integrable asociado que se construyeron en el capítulo X dan también soluciones de las ecuaciones de autodualidad.

Las ecuaciones de N-ondas son también reducción de las ecuaciones de autodualidad. Veremos ahora como los modelos quirales principales generan soluciones de estas ecuaciones de autodualidad. En el capítulo anterior demostramos que dichas transformaciones armónicas se obtienen al aplicar la técnica de revestimiento a la 1-forma

$$\chi_1 = \frac{A(x)}{\lambda - a} dx + \frac{B(y)}{\lambda - b},$$

donde  $A, B \in C^\infty(I, \mathfrak{h})$ . Aquí  $\mathfrak{h}$  es una subálgebra de Cartan del álgebra simple  $\mathfrak{g}$ . Esta 1-forma se reescribe como

$$\chi_1 = -(A dt_2 + B d\bar{t}_2) + \frac{A(x)}{\lambda - a} (dt_1 + \lambda dt_2) + \frac{B(y)}{\lambda - b} (d\bar{t}_1 + \lambda d\bar{t}_2),$$

donde hemos empleado la notación  $x = t_1 + at_2$  y  $y = \bar{t}_1 + b\bar{t}_2$ . De esta expresión se deduce la afirmación sobre la relación entre modelos quirales y autodualidad con la que iniciabamos este párrafo. En esta dirección ver Uhlenbeck(1990).

Tanto las ecuaciones de autodualidad como los sistemas integrables que generan soluciones de dichas ecuaciones de autodualidad están asociados a modificaciones del problema de factorización de Birkhoff. Las factorizaciones elípticas tratadas en los capítulos VII y X no entran dentro de este contexto. Por tanto no parece claro que las ecuaciones de Landau-Lifshitz o de Krichever-Novikov estén ligadas a las ecuaciones de autodualidad de Yang-Mills.

Por último debemos comentar que en Ward(1983) se demuestra que las ecuaciones de Einstein en el vacío en el caso axisimétrico y estacionario son reducciones de Yang-Mills autodual. Se aplica en dicho trabajo y en Woodhouse y Mason(1988) y Fletcher y Woodhouse(1990) la geometría de los 'twistors'. Recordemos que este sistema es integrable y es esencialmente la ecuación de Ernst. La literatura sobre transformaciones de Bäcklund y simetrías de dicha ecuación es abundante. Resaltemos el trabajo Belinskii y Zakharov(1978) en el que se obtienen pares de Lax, problemas de factorización asociados y se resuelve la ecuación con la técnica de la transformada espectral inversa. Un tema abierto es como enlaza la ecuación de Ernst con el esquema grupo-teórico desarrollado en esta tesis.

### XIII.3 Jerarquías integrables y Yang-Mills autodual

Los sistemas integrables forman parte de jerarquías integrables; esto es, un número infinito de ecuaciones que son simetrías unas de otras. Hemos visto que muchos sistemas integrables generan soluciones de Yang-Mills autodual.

La cuestión es si existen jerarquías de ecuaciones no lineales que contengan a las ecuaciones de autodualidad. Además, queremos que las jerarquías integrables asociadas a las ecuaciones de Yang-Mills autodual sean reducciones de estas extensiones. En esta dirección se encuentran los trabajos Mason y Sparling(1989) y Sparling y Mason(1989). En dichos trabajos se demuestra que las ecuaciones de KdV y NLS son reducciones de las ecuaciones de Bogolmony, dichas ecuaciones aparecen en el estudio de monopolos magnéticos, en Atiyah y Hitchin(1988) se presenta un análisis detallado de estos monopolos. Después extienden las ecuaciones de Bogolmony obteniendo una jerarquía de ecuaciones, que ellos denominan jerarquía de Bogolmony, y de la cual las jerarquías de KdV y NLS son reducciones. Esta jerarquía de Bogolmony se puede analizar con ayuda de la geometría 'twistor'. Por otro lado en Ward(1984) se propusieron generalizaciones de las ecuaciones de autodualidad a un mayor número de variables independientes, ver también Ward(1987,1990).

Una posible extensión de las ecuaciones de autodualidad es la que explicamos a continuación. En el abierto  $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}^{2n}$  tenemos las coordenadas  $\{t_i, \bar{t}_i\}_{i=1}^n$ . Definimos los campos vectoriales

$$X := \sum_{j=1}^n (-\lambda)^{n-j} \partial_j$$

$$\bar{X} := \sum_{j=1}^n (-\lambda)^{n-j} \partial_{\bar{j}},$$

donde hemos utilizado la notación

$$\frac{\partial}{\partial t_i} = \partial_i, \quad \frac{\partial}{\partial \bar{t}_i} = \partial_{\bar{i}}.$$

De nuevo diremos que la 1-forma  $\chi \in \wedge^1(\mathcal{U}, L\mathfrak{g})$  está asociada al potencial de 'gauge'  $\mathbf{A} \in \wedge^1(\mathcal{U}, \mathfrak{g})$  si se cumple

$$\chi(X) = \mathbf{A}(X), \quad \chi(\bar{X}) = \mathbf{A}(\bar{X}).$$

Si  $\Omega_\chi$  es la curvatura de  $\chi$  y  $\mathbf{F} = d\mathbf{A} - \frac{1}{2}[\mathbf{A}, \mathbf{A}]$  es el campo de 'gauge' asociado al potencial de 'gauge'  $\mathbf{A}$  llegamos a

$$\Omega_\chi(X, \bar{X}) = \sum_{N=2}^{2n} (-\lambda)^{2n-N} \left( \sum_{p+\bar{p}=N} F_{p\bar{p}} \right),$$

donde  $\mathbf{A} = \sum_{p,\bar{p}=1}^n A_p dt_p + A_{\bar{p}} d\bar{t}_p$  y  $F_{p\bar{p}} = \partial_p A_{\bar{p}} - \partial_{\bar{p}} A_p - [A_p, A_{\bar{p}}]$ . Por tanto hemos demostrado la

**Proposición XIII.3.1** *Sea  $\chi \in \wedge^1(\mathcal{U}, L\mathfrak{g})$  una 1-forma asociada al potencial de 'gauge'  $\mathbf{A} \in \wedge^1(\mathcal{U}, \mathfrak{g})$ , con campo de 'gauge'  $\mathbf{F} = d\mathbf{A} - \frac{1}{2}[\mathbf{A}, \mathbf{A}]$ . Para que  $\chi$  cumpla  $\Omega_\chi(X, \bar{X}) = 0$  es necesario y suficiente que se satisfagan las ecuaciones*

$$\sum_{p+\bar{p}=N} F_{p\bar{p}} = 0, \quad N = 2, \dots, 2n. \quad (\text{XIII.3.1})$$

Las ecuaciones (XIII.3.1) son una extensión natural de las ecuaciones de autodualidad de la sección anterior. En el caso  $n = 2$  se recupera Yang-Mills autodual. Las denominaremos por tanto la jerarquía de Yang-Mills autodual de orden  $n$ . Dicha jerarquía contiene el caso  $A_\ell$  dado en Ward(1984) y la jerarquía de Bogolmony ya citada, ver Ward(1990). Los teoremas de la sección anterior siguen siendo válidos para la nueva jerarquía pero la **Proposición XIII.2.1** se ve modificada. Si escribimos

$$\chi = \mathbf{A} + \sum_{i=1}^n (M_i dt_i + \bar{M}_i d\bar{t}_i),$$

con  $M_i, \bar{M}_i \in C^\infty(\mathcal{U}, L\mathfrak{g})$ , las ecuaciones que ligan estos coeficientes son

$$\sum_{j=1}^n (-\lambda)^{n-j} M_j(\lambda) = 0$$

$$\sum_{j=1}^n (-\lambda)^{n-j} \bar{M}_j(\lambda) = 0.$$

Las jerarquías de KdV y AKNS aparecen dentro de esta formulación como reducciones de esta jerarquía de Yang-Mills autodual.

## Apéndice A

### Otros aspectos de la matriz- $r$ clásica. Formalismo tradicional

En este apéndice analizamos la relación de los conceptos introducidos en el capítulo II con la forma tradicional de estudiar la matriz- $r$  como un homomorfismo entre un álgebra y su dual, Sklyanin(1979), Faddeev y Takhtajan(1987) y Jimbo(1989). También analizamos el formalismo hamiltoniano a través de los corchetes de Lie-Poisson tensoriales.

#### A.1 La ecuación de Yang-Baxter clásica

Supóngase que en el álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  existe una forma bilineal  $B(\cdot, \cdot)$  que es simétrica, Ad-invariante y no degenerada; existe por tanto un isomorfismo entre el álgebra y su dual:  $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}^*$ . Explícitamente estos isomorfismos son como sigue

$${}^b : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}^*,$$

donde  ${}^bX(Y) = B(X, Y)$ . Su inverso es

$${}^{\sharp} : \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g},$$

con  $B({}^{\sharp}\alpha, X) = \alpha(X)$ .

A continuación se introduce el objeto matemático  $r$  que tradicionalmente ha jugado el papel de matriz- $r$  clásica

**Definición A.1.1** *Dado el endomorfismo  $R \in \text{End } \mathfrak{g}$  se define su traspuesto  $R^t$  con respecto a la forma bilineal  $B$  a través de la relación*

$$B(R^tX, Y) := B(X, RY) \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Se define  $r \in \text{Hom}(\mathfrak{g}^*, \mathfrak{g})$  como

$$r := R \circ \#.$$

El dual  $r^* \in \text{Hom}(\mathfrak{g}^*, \mathfrak{g})$  de  $r$ , definido por la relación  $\alpha(r^*\beta) = \beta(r\alpha)$ , será  $r^* = R^t \circ \#$ .

Para analizar el homomorfismo lineal  $r$  necesitamos la

**Definición A.1.2** Definimos la aplicación  $B_r := B_{R \circ \#} : \mathfrak{g}^* \wedge \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}$ , que sobre las formas lineales  $\alpha$  y  $\beta$  vale  $B_r(\alpha, \beta) = [r\alpha, r\beta] - r(\text{ad}^* r\alpha(\beta) - \text{ad}^* r\beta(\alpha))$ , y asociada a ella la aplicación trilineal  $b_r$  definida sobre el dual como  $b_r(\alpha, \beta, \gamma) := \alpha(B_r(\beta, \gamma))$ .

La aplicación  $b_r$  se puede reescribir como

$$b_r(\alpha, \beta, \gamma) = \alpha([r\beta, r\gamma]) + \beta([r^*\alpha, r\gamma]) + \gamma[r\beta, r^*\alpha].$$

Si  $R$  es una matriz- $r$  clásica entonces  $J_R = 0$ , ver capítulo II. Con la forma bilineal  $B$  esta condición se reformula como

$$B(A, J_R(X, Y, Z)) = 0 \quad \forall A, X, Y, Z \in \mathfrak{g}.$$

La Ad-invariancia de  $B$  da

$$b_r(\text{ad}^* A(\alpha), \beta, \gamma) + b_r(\alpha, \text{ad}^* A(\beta), \gamma) + b_r(\alpha, \beta, \text{ad}^* A(\gamma)) = 0,$$

para todo  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathfrak{g}^*$  y  $A \in \mathfrak{g}$ . Esta ecuación es la versión diferencial de la Ad\*-invariancia de la aplicación trilineal  $b_r$ . Obtenemos la

**Proposición A.1.1**  $R$  es una matriz- $r$  clásica si y solo si la aplicación  $b_r$ , con  $r = R \circ \#$  es Ad\*-invariante. Si  $R$  satisface la ecuación de Yang-Baxter clásica  $t$ -modificada, ver Definición II.1.2, entonces  $b_r(\alpha, \beta, \gamma) = -t^2 \alpha([\# \beta, \# \gamma]), \forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathfrak{g}^*$ .

Cuando  $R$  es antisimétrica,  $R + R^t = 0$ , la expresión para  $b_r$  se simplifica

$$b_r(\alpha, \beta, \gamma) = \gamma([r\alpha, r\beta]) + \beta([r\gamma, r\alpha]) + \alpha([r\beta, r\gamma]),$$

donde hemos utilizado que  $r + r^* = 0$ ; cuando además  $R$  es una solución de la ecuación de Yang-Baxter clásica modificada el álgebra doble  $(\mathfrak{g}, R)$  recibe el nombre de álgebra de Baxter.

Aprovechando la existencia de la forma bilineal  $B$  introducimos la forma explícita de la acciones adjunta y coadjunta del grupo  $G_R$ . El cuadrado  $\mathfrak{d}$  de  $\mathfrak{g}$ , donde existe  $R$  solución de la ecuación de Yang-Baxter clásica modificada, es un álgebra de Lie doble con la matriz- $r$  clásica  $R_0$ . La forma bilineal  $B$  se extiende a  $B_0$  definida sobre  $\mathfrak{d}$  como

$$B_0((X_1, Y_1), (X_2, Y_2)) := B(X_1, X_2) - B(Y_1, Y_2),$$

que es claramente no degenerada e invariante con respecto a la acción adjunta del grupo  $D$ , grupo de Lie adjunto a  $\mathfrak{d}$ . Cuando  $R$  es antisimétrica,  $R + R^t = 0$ , las subálgebras  ${}^\delta \mathfrak{g}$ ,  $\widehat{\mathfrak{g}}_R$  son ambas isótropas con respecto a esta forma bilineal en  $\mathfrak{d}$ , luego  $B_0$  genera los isomorfismos

$$\begin{aligned} \sharp & : {}^\delta \mathfrak{g}^* \rightarrow \widehat{\mathfrak{g}}_R \\ \sharp & : \widehat{\mathfrak{g}}_R^* \rightarrow {}^\delta \mathfrak{g}, \end{aligned}$$

y  $(\mathfrak{d}, R_0)$  es un álgebra de Baxter con respecto a  $B_0$ . Ahora bien, se cumple  $\sharp \circ (R_\pm)^* = \mp R_\mp \circ \sharp$ , luego en el caso de un álgebra de Baxter se llega a la fórmula

$$\sharp \text{Ad}_R^* g(\alpha) = R_+ \text{Ad} g_- (\sharp \alpha) - R_- \text{Ad} g_+ (\sharp \alpha).$$

## A.2 Formalismo hamiltoniano

Examinamos en esta sección la relación entre el tratamiento tradicional de los conceptos hamiltonianos y la matriz- $r$  clásica, Reshetikhin y Faddeev(1983) y Faddeev y Takhtajan(1987). Suponemos que  $\mathfrak{g}$  es un espacio vectorial reflexivo y por tanto  $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}^{**}$ , luego si  $f \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$  entonces  $df(\alpha) \in \mathfrak{g}^{**} \cong \mathfrak{g}$ . Definimos los corchetes de Lie-Poisson en  $\mathfrak{g}^*$ .

**Definición A.2.1** Dadas  $f, g \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$  se define el corchete de de Lie-Poisson asociado a  $R$

$$\{f, g\}_R(\alpha) = \alpha([df(\alpha), dg(\alpha)]_R).$$

Una extensión tensorial de este corchete de Poisson es como sigue

**Definición A.2.2** Si  $V$  y  $W$  son sendos espacios vectoriales se define

$$\begin{aligned} \{\cdot \otimes \cdot\}_R & : C^\infty(\mathfrak{g}^*, V) \times C^\infty(\mathfrak{g}^*, W) \rightarrow C^\infty(\mathfrak{g}^*, V \otimes W) \\ (f, g) & \quad \quad \quad \mapsto \{f \otimes g\}_R, \end{aligned}$$

donde

$$\{f \otimes g\}_R(L)(v \otimes w) = \{f(v), g(w)\}_R(L).$$

Nótese que si  $v \in V^*$ ,  $w \in W^*$  entonces  $f(v)$  y  $g(w)$  pertenecen a  $C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ .

Supongamos  $\mathfrak{g}, V$  y  $W$  de dimensión finita y  $\{e_i\}, \{v_i\}$  y  $\{w_j\}$  bases de  $\mathfrak{g}, V$  y  $W$  respectivamente. Usaremos la notación  $\mathbf{f} = \sum_i f_i v_i, \mathbf{g} = \sum_j g_j w_j, f_i, g_j \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ , con la que escribimos  $\{\mathbf{f} \otimes \mathbf{g}\}_R = \sum_{i,j} \{f_i, g_j\}_R v_i \otimes w_j$ . Se tiene la importante propiedad

$$\mathbf{f} \in \text{Hom}(\mathfrak{g}^*, V), \mathbf{g} \in \text{Hom}(\mathfrak{g}^*, W) \implies \{\mathbf{f} \otimes \mathbf{g}\}_R \in \text{Hom}(\mathfrak{g}^*, V \otimes W).$$

**Definición A.2.3** Cuando  $V = W = \mathfrak{g}^*$  y  $\mathbf{f} = \mathbf{g} = \text{id}$  definimos

$$\{L_1 \otimes L_2\}_R := \{\text{id} \otimes \text{id}\}_R(L) \in (\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g})^*.$$

Donde  $L_1 = L \otimes \text{id}$  y  $L_2 = \text{id} \otimes L$ . Por tanto, si  $X, Y \in \mathfrak{g}$

$$\{L_1 \otimes L_2\}_R(X \otimes Y) = L([X, Y]_R).$$

Es inmediato obtener

$$\{L_1 \otimes L_2\}_R(\# \alpha \otimes \# \beta) = \alpha([r\beta, \#L]) - \beta([r\alpha, \#L]).$$

En el caso de dimensión finita se pueden definir las expresiones  $[r, X \otimes \text{id} + \text{id} \otimes X] = \sum_{i,j,k} r^{ij} X^k [e_i \otimes e_j, e_k \otimes \text{id} + \text{id} \otimes e_k] = \sum_{i,j,k} X^k (r^{il} C_{kl}^j + r^{lj} C_{lk}^i) e_i \otimes e_j$ , donde se han utilizado las notaciones  $r = \sum_{ij} r^{ij} e_i \otimes e_j, X = \sum_k X^k e_k, [e_i, e_j] = \sum_m C_{ij}^m e_m$  en el marco del álgebra envolvente universal  $\mathcal{U}\mathfrak{g}$ . La idea es que esta operación se puede definir de modo general con  $[r, X \otimes \text{id}], [r, \text{id} \otimes X] \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$  como

$$\begin{aligned} [r, X \otimes \text{id}](\alpha \otimes \beta) &:= \alpha([r\beta, X]) \\ [r, \text{id} \otimes X](\alpha \otimes \beta) &:= \beta([r^* \alpha, X]) \end{aligned}$$

donde  $\alpha, \beta \in \mathfrak{g}^*$  y  $X \in \mathfrak{g}$ . Por tanto se llega a la

**Proposición A.2.1** Se cumple la identidad

$$\{L_1 \otimes L_2\}_R = [r, \#L \otimes \text{id}] - [r^*, \text{id} \otimes \#L],$$

que en el caso antisimétrico es

$$\{L_1 \otimes L_2\}_R = [r, \#L \otimes \text{id} + \text{id} \otimes \#L].$$

Esta proposición se enunció en Sklyanin(1979) y es el punto central de todo los desarrollos posteriores, Reshetikhin y Faddeev(1983) y Faddeev y Takhtajan(1987). Se definen  $r_{12} = \sum_{ij} r^{ij} e_i \otimes e_j \otimes \text{id}$ ,  $r_{13} = \sum_{ij} r^{ij} e_i \otimes \text{id} \otimes e_j$ ,  $r_{23} = \sum_{ij} r^{ij} \text{id} \otimes e_i \otimes e_j$ , expresándose  $b_r$  en términos de ellos

$$b_r = [r_{12}, r_{13}] - [r_{13}, (r^*)_{23}] + [r_{12}, r_{23}] = [r_{12}, r_{13}] + [r_{32}, r_{13}] + [r_{12}, r_{23}].$$

De nuevo en el caso antisimétrico se simplifica, adoptando la conocida forma triangular

$$b_r' = [r_{12}, r_{13}] + [r_{13}, r_{23}] + [r_{12}, r_{23}],$$

y de aquí las habituales formulaciones de la condición de matriz- $r$  clásica, o bien de las ecuaciones triangulares de Yang-Baxter clásica,  $b_r = 0$ , y su modificada en el caso antisimétrico.



## Apéndice B

### Otros aspectos de la matriz- $r$ clásica. Biálgebras de Lie y grupos de Poisson-Lie

Introducimos en este apéndice los conceptos de biálgebra de Lie y grupo de Poisson-Lie, Drinfel'd(1983), que están en íntimo contacto con la teoría de la matriz- $r$  clásica y que constituyen una primera aproximación a los grupos cuánticos, Drinfel'd(1988).

Estudiamos ciertas clases de álgebras de Lie  $\mathfrak{g}$  para las que su dual  $\mathfrak{g}^*$  posee una estructura de álgebra de Lie con corchete de Lie  $[\cdot, \cdot]_* : \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}^*$ . En concreto, cuando las estructuras de álgebra de Lie de  $\mathfrak{g}$  y  $\mathfrak{g}^*$  son compatibles, esto es

$$[\alpha, \beta]_*([X, Y]) = -[\alpha, \text{ad}^* X(\beta)]_*(Y) - [\text{ad}^* X(\alpha), \beta]_*(Y) \\ + [\alpha, \text{ad}^* Y(\beta)]_*(X) + [\text{ad}^* Y(\alpha), \beta]_*(X),$$

donde  $\alpha, \beta \in \mathfrak{g}^*$ ,  $X, Y \in \mathfrak{g}$ , decimos que  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^*)$  es una biálgebra de Lie, Drinfel'd(1983). Estos conceptos son relevantes no solo en sí mismos sino también por su relación con los grupos cuánticos, Drinfel'd(1988), que parecen de cierta relevancia en Física, y que dan pistas de como la integrabilidad de los sistemas clásicos se relaciona con la de sus modelos cuantificados.

En la primera sección se introducen los triples de Manin, en tanto que en B.2 se da un formalismo invariante en términos cohomológicos que permite la construcción de biálgebras y enlaza con la matriz- $r$  clásica en el caso de cobordismo. Por último, en la sección tercera, se desvela la geometría de las construcciones anteriores, apareciendo los grupos de Poisson-Lie.

### B.1 Triples de Manin

Dada  $\mathfrak{g}$  biálgebra de Lie, Yu I. Manin demostró el siguiente teorema, ver Lu y Weinstein(1990),

**Teorema B.1.1** *Es posible dotar a  $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*$  de un corchete de Lie dado por*

$$[(X, \alpha), (Y, \beta)] = ([X, Y] + \text{ad}_*^* \alpha(Y) - \text{ad}_*^* \beta(X), [\alpha, \beta]_* - \text{ad}^* Y(\alpha) + \text{ad}^* X(\beta)),$$

donde  $\text{ad}_*$  es la acción adjunta en  $\mathfrak{g}^*$ , con la propiedad de que la forma bilineal  $B$ , simétrica, no degenerada definida por

$$B((X, \alpha), (Y, \beta)) = \alpha(Y) + \beta(X)$$

es  $\text{Ad}^*$ -invariante con respecto a la acción adjunta definida por este corchete.

Es interesante notar que las subálgebras  $\mathfrak{g}$  y  $\mathfrak{g}^*$  son subespacios isótropos con respecto a  $B$ . Es precisamente esta estructura lo que se conoce como triple de Manin. En general a todo triple de Manin se le puede asociar una biálgebra de Lie y viceversa, siendo pues ambos conceptos equivalentes.

**Definición B.1.1** *Un triple  $(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}_+, \mathfrak{M}_-)$  es de Manin si  $\mathfrak{M}$  es un álgebra de Lie en la que existe una forma bilineal  $B$ , simétrica,  $\text{Ad}$ -invariante no degenerada, con  $\mathfrak{M}_\pm \subset \mathfrak{M}$  subálgebras de Lie, isótropas con respecto a  $B$ , tales que  $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_+ \oplus \mathfrak{M}_-$ .*

Es claro, debido a la comentada isotropía, que el isomorfismo  $\sharp$  asociado a  $B$  genera a su vez los isomorfismos  $\sharp : \mathfrak{M}_\pm^* \rightarrow \mathfrak{M}_\mp$ . Por tanto, el corchete de Lie en  $\mathfrak{M}_\pm^*$  es el inducido a través de  $\sharp$  de  $\mathfrak{M}_\mp$ ,  $[\alpha_+, \beta_+]_* = \sharp[\sharp\alpha_+, \sharp\beta_+]_-$  donde  $\alpha_+, \beta_+$  son vectores arbitrarios de  $\mathfrak{M}_+^*$  y  $[\cdot, \cdot]_\pm$  es el corchete de Lie en la subálgebra  $\mathfrak{M}_\pm$ . Este corchete de Lie es compatible con  $[\cdot, \cdot]_+$  una vez que se recuerda la  $\text{Ad}$ -invariancia de  $B$ . Luego

**Teorema B.1.2** *A todo triple de Manin se le puede asociar de manera canónica y biunívoca una biálgebra de Lie.*

Si  $(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}_+, \mathfrak{M}_-)$  es un triple de Manin también lo es  $(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}_-, \mathfrak{M}_+)$ , por ello si  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^*)$  es una biálgebra de Lie también lo será  $(\mathfrak{g}^*, \mathfrak{g})$ , por lo que el concepto de biálgebra es autodual. Un ejemplo de biálgebra de Lie lo dan las álgebras de Baxter  $(\mathfrak{g}, R)$ , ya que  $(\mathfrak{D}, \widehat{\mathfrak{g}}_R, \delta \mathfrak{g})$  es un triple de Manin. Por tanto, las álgebras de Baxter son un ejemplo de álgebra doble y biálgebra de Lie.

## B.2 Formalismo invariante

Introducimos ahora ciertos conceptos sobre cohomología de álgebras de Lie con valores a un cierto módulo suyo, Postnikov(1986). Esto nos permitirá un análisis detallado de ciertas biálgebras de Lie. El espacio vectorial  $\text{Hom}(\mathfrak{g}^*, \mathfrak{g})$  es un  $\mathfrak{g}$ -módulo, ya que la acción izquierda dada por

$$X \cdot r := \text{ad}X \circ r - r \circ \text{ad}^*X, \quad X \in \mathfrak{g}, r \in \text{Hom}(\mathfrak{g}^*, \mathfrak{g})$$

es una representación (pues  $\text{ad}$  y  $\text{ad}^*$  lo son).

**Definición B.2.1** Se define el espacio de cocadenas

$$\mathcal{C}(\mathfrak{g}, \text{Hom}(\mathfrak{g}^*, \mathfrak{g})) := \bigoplus_m \mathcal{C}^m(\mathfrak{g}, \text{Hom}(\mathfrak{g}^*, \mathfrak{g})),$$

donde las cocadenas de orden  $m$

$$\mathcal{C}^m(\mathfrak{g}, \text{Hom}(\mathfrak{g}^*, \mathfrak{g})) := \bigwedge^m(\mathfrak{g}, \text{Hom}(\mathfrak{g}^*, \mathfrak{g})),$$

son las aplicaciones  $m$ -lineales alternadas sobre  $\mathfrak{g}$  con valores en  $\text{Hom}(\mathfrak{g}^*, \mathfrak{g})$ . Se introduce el operador  $\delta := \bigoplus_m \delta_m$  con  $\delta_m$  definido sobre las cocadenas de orden  $m$ , y con recorrido en las cocadenas de orden  $m+1$ , como

$$\begin{aligned} \delta_m u(X_0, \dots, X_m) &:= \sum_{i=0}^m (-1)^i X_i \cdot u(X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_m) + \\ &\quad \sum_{i < j}^m (-1)^{i+j} u([X_i, X_j], X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_m), \end{aligned}$$

donde  $X_i \in \mathfrak{g}$ ,  $u$  es una  $m$ -cocadena y  $\hat{X}$  significa que el vector  $X$  ha sido suprimido de la expresión. El operador  $\delta$  se dice de coborde ya que  $\delta^2 = 0$ .

Por ejemplo, si  $r$  es una 0-cocadena se tiene

$$\delta r(X) = X \cdot r = \text{ad}X \circ r - r \circ \text{ad}^*X,$$

y si  $\varphi$  es una 1-cocadena

$$\delta \varphi(X, Y) = X \cdot \varphi(Y) - Y \cdot \varphi(X) - \varphi([X, Y]).$$

El conjunto de cociclos de orden  $m$ ,  $Z^m := \ker \delta_m$ , y el de cobordes de orden  $m$ ,  $B^m := \text{im } \delta_{m-1} \subset Z^m$  son subespacios importantes pues

$H = \bigoplus_m H^m$ , suma directa de los cocientes  $H^m := Z^m/B^m$ , es el grupo de cohomología de  $\mathfrak{g}$  con valores en el  $\mathfrak{g}$ -módulo  $\text{Hom}(\mathfrak{g}^*, \mathfrak{g})$ . Los lemas de Whitehead, Postnikov(1986), aseguran en el caso semisimple las identidades  $H^1 = H^2 = \{0\}$ , luego los cociclos de orden 1 y 2 son todos triviales, esto es cobordes de orden 1 y 2 respectivamente.

Relacionamos ahora la teoría cohomológica que acabamos de exponer con las biálgebras de Lie.

**Definición B.2.2** *En el caso de las biálgebras de Lie se puede introducir la 1-cocadena  $\varphi$  definida a través de la relación*

$$\beta(\varphi(X)(\alpha)) := [\alpha, \beta]_*(X).$$

Obviamente se concluye la

**Proposición B.2.1** *La condición de compatibilidad no es mas que la exigencia de que  $\varphi$  sea un 1-cociclo, además la antisimetría del corchete de Lie  $[\cdot, \cdot]_*$  obliga a que se cumpla  $\varphi(X) + \varphi(X)^* = 0$  para todo vector  $X$  en  $\mathfrak{g}$ .*

En el caso trivial de cobordismo se presenta la

**Definición B.2.3** *Cuando el cociclo  $\varphi$  sea trivial, un 1-coborde, y exista, por tanto  $r \in \text{Hom}(\mathfrak{g}^*, \mathfrak{g})$  tal que  $\varphi = \frac{1}{2}\delta r$  decimos que la biálgebra de Lie es de coborde*

Como  $\varphi = \frac{1}{2}(\text{ad}X \circ r - r \circ \text{ad}^*X)$  el corchete de Lie en el dual se puede expresar como

$$[\alpha, \beta]_* = \frac{1}{2}(\text{ad}^*r\alpha(\beta) + \text{ad}^*r^*\beta(\alpha)).$$

Cuando el álgebra es semisimple, por el primer lema de Whitehead, ésta es la única posibilidad. Las componentes simétrica  $r_s$  y antisimétrica  $r_a$  de  $r = r_s + r_a$  serán

$$\begin{aligned} r_s &= \frac{1}{2}(r + r^*), \\ r_a &= \frac{1}{2}(r - r^*). \end{aligned}$$

**Proposición B.2.2** *La condición de antisimetría,  $\varphi(X) + \varphi(X)^* = 0$ , se traduce, en el caso de coborde, en la Ad-invariancia de la componente simétrica  $r_s$ ,*

$$\text{ad}X \circ r_s = r_s \circ \text{ad}^*X, \quad \forall X \in \mathfrak{g}.$$

El corchete de Lie  $[\cdot, \cdot]_*$  se puede escribir como

$$[\alpha, \beta]_* = \frac{1}{2}(\text{ad}^*r_a\alpha(\beta) - \text{ad}^*r_a\beta(\alpha)).$$

Si  $J_*$  es la aplicación trilineal de Jacobi sobre  $\mathfrak{g}^*$  asociada al corchete de Lie  $[\cdot, \cdot]_*$ , se deberá verificar  $J_* = 0$ .

**Definición B.2.4** *Se define  $\widetilde{B}_r$  como*

$$\widetilde{B}_r(\alpha, \beta) := [r\alpha, r\beta] - 2r[\alpha, \beta]_*.$$

Cuando  $r_s = 0$  la aplicación  $\widetilde{B}_r$  coincide con la aplicación  $B_r$  dada en el apéndice A. Con esta aplicación es posible escribir  $J_*$  en la forma

$$J_*(\alpha, \beta, \gamma) = -\text{ad}^*B_{r_a}(\alpha, \beta)(\gamma) - \text{ad}^*B_{r_a}(\gamma, \beta)(\alpha) - \text{ad}^*B_{r_a}(\beta, \gamma)(\alpha).$$

**Definición B.2.5** *Se construye  $\widetilde{b}_r$  como  $\widetilde{b}_r(\alpha, \beta, \gamma) := \alpha(\widetilde{B}_r(\beta, \gamma))$  o más explícitamente*

$$\widetilde{b}_r(\alpha, \beta, \gamma) := \alpha([r\beta, r\gamma]) + \beta([r^*\alpha, r\gamma]) + \gamma([r^*\alpha, r^*\beta]).$$

Es fácil darse cuenta de que esta aplicación trilineal adopta para todo  $r$  la forma triangular

$$\widetilde{b}_r = [r_{12}, r_{13}] + [r_{13}, r_{23}] + [r_{12}, r_{23}],$$

de nuevo en el caso antisimétrico,  $r_s = 0$ , se llega a  $\widetilde{b}_r = b_r$ . La condición de Jacobi es equivalente a  $J_*(\alpha, \beta, \gamma)(X) = 0$  para todo  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathfrak{g}^*$  y para todo  $X \in \mathfrak{g}$ . Concluimos por tanto que la condición de Jacobi es equivalente a la Ad\*-invariancia de  $b_{r_a}$ . Se llega pues a la

**Proposición B.2.3** *La condición de biálgebra de Lie de coborde para el par  $(\mathfrak{g}, r)$  se traduce en las invariancias de  $r_s, b_{r_a}$ .*

Como es claro de la discusión previa, el concepto de biálgebra debe estar ligado al de matriz- $r$  clásica. Esto ocurre cuando existe la forma bilineal  $B$  del apéndice anterior y los isomorfismos asociados entre el álgebra y su dual. Se usará pues la misma notación que en el apéndice A. Sea  $R$  con  $r = R \circ \sharp$ , si  $R_s \circ \sharp := r_s$  y  $R_a \circ \sharp := r_a$ , se llega a  $R_s = \frac{1}{2}(R + R^t)$  y  $R_a = \frac{1}{2}(R - R^t)$ . La condición de invariancia de  $r_s$  será  $\text{ad}X \circ R_s = R_s \circ \text{ad}X$  para todo vector  $X$  en  $\mathfrak{g}$ , esto es,  $R_s$  deberá ser un operador de entrelazado. En el caso en que  $\mathfrak{g}$  sea simple es fácil ver que  $R_s \propto \text{id}$  ya que sus subespacios propios, debido a la propiedad de entrelazado, serán ideales y por tanto deben ser triviales: o toda el álgebra o el vector nulo. En el caso del álgebra de lazos de un álgebra simple los operadores de entrelazado son los operadores de multiplicación por funciones escalares sobre  $S^1$ , Reyman y Semenov-Tyan-Shanskii(1989-2). Así pues se concluye la

**Proposición B.2.4** *El endomorfismo  $R$  de  $\mathfrak{g}$  genera una biálgebra de Lie de coborde,  $(\mathfrak{g}, r = R \circ \sharp)$ , si y sólo si su parte simétrica  $R_s$  es un operador de entrelazado y su componente antisimétrica una matriz- $r$  clásica. En el caso de que el álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  sea simple las biálgebras siempre serán de coborde con  $r = r_a + \alpha \sharp$  donde  $\alpha \in \mathbb{C}$ .*

En este párrafo se supondrá  $R$  tal que su componente simétrica verifique la propiedad de entrelazado. Si  $\widetilde{b}_r = 0$  se dice que  $R$  es solución de la ecuación triangular. Que  $R$  cumpla la ecuación de Yang-Baxter clásica  $B_R = 0$ , en el sentido del capítulo II, no implica que  $R$  sea solución de la ecuación triangular y viceversa. Ambos conceptos solamente coinciden en el caso antisimétrico,  $R_s = 0$ , en el que se dirá que  $R$  genera una biálgebra de Lie de coborde triangular; cuando  $R_s \neq 0$  dicha biálgebra se dirá cuasitriangular. A pesar de este hecho es sencillo comprobar las siguientes relaciones

$$\begin{aligned}\widetilde{B}_r(\alpha, \beta) &= B_{r_a}(\alpha, \beta) + [r_s \alpha, r_s \beta] \\ B_r(\alpha, \beta) &= B_{r_a}(\alpha, \beta) - [r_s \alpha, r_s \beta] - r_a(\text{ad}^* r_s \alpha(\beta) - \text{ad}^* r_s \beta(\alpha)),\end{aligned}$$

de donde se obtiene trivialmente la ecuación

$$B_r(\alpha, \beta) = \widetilde{B}_r(\alpha, \beta) - r(\text{ad}^* r_s \alpha(\beta) - \text{ad}^* r_s \beta(\alpha)).$$

Luego se llega a la

**Proposición B.2.5** *Si  $R$  es solución de la ecuación triangular,  $\widetilde{B}_r = 0$ , su componente antisimétrica  $R_a$  satisfará la ecuación*

$$B_{R_a}(X, Y) = -[R_s X, R_s Y]$$

y por tanto  $R_a$  será una matriz- $r$  clásica. También en este caso  $R$  cumplirá

$$B_R(X, Y) = -R([R_s X, Y] + [X, R_s Y]).$$

Si  $R_s = \frac{1}{2}\text{id}$  entonces es claro que  $2R_a$  es solución de la ecuación de Yang-Baxter clásica modificada y por tanto el operador  $R$  no es más que  $R = (2R_a)_+$ , donde se ha empleado la notación introducida en II.1. Esto es reinterpretable en la siguiente forma.

**Proposición B.2.6** *Sea  $R$  una solución antisimétrica de la ecuación de Yang-Baxter clásica modificada, entonces  $R_+$  satisface*

$$B_{R_+}(X, Y) = -R_+[X, Y]$$

y por ello verifica la ecuación triangular, generando pues una estructura de biálgebra de Lie de coborde cuasitriangular, en tanto que  $R$  está asociada a una triangular.

### B.3 Grupos de Poisson-Lie

Como es conocido una variedad de Poisson, Weinstein(1983,1985) y Libermann y Marle(1987), es una variedad  $M$  tal que en  $C^\infty(M)$  se ha definido un corchete de Lie  $\{\cdot, \cdot\}$  que es una derivación con respecto de la estructura multiplicativa del álgebra abeliana  $C^\infty(M)$ , en este caso se dice que  $\{\cdot, \cdot\}$  es un corchete de Poisson. Si  $(M, \{\cdot, \cdot\}_M)$  y  $(N, \{\cdot, \cdot\}_N)$  son sendas variedades de Poisson y  $f$  una aplicación suave entre ambas,  $f: M \rightarrow N$ , se dirá que  $f$  es de Poisson si  $f^*: C^\infty(N) \rightarrow C^\infty(M)$  es un homomorfismo entre álgebras de Lie. El producto  $M \times N$  de dos variedades de Poisson vuelve a ser una variedad de Poisson con

$$\{\phi, \psi\}_{M \times N}(m, n) = \{\phi(\cdot, n), \psi(\cdot, n)\}_M(m) + \{\phi(m, \cdot), \psi(m, \cdot)\}_N(n).$$

Definiremos a continuación los grupos de Poisson-Lie, ver Semenov-Tyan-Shanskii(1989) y Lu y Weinstein(1990). Debemos recordar que  $L_g, R_g$  son los operadores de multiplicación por  $g$  a la izquierda y derecha en el grupo  $G$ , respectivamente.

**Definición B.3.1** *Un grupo de Lie  $G$  que posee una estructura de variedad de Poisson se dice de Poisson-Lie siempre que la multiplicación en el grupo sea una aplicación de Poisson entre  $G \times G$  y  $G$*

$$\{\phi, \psi\}(g \cdot h) = \{L_g^* \phi, L_g^* \psi\}(h) + \{R_h^* \phi, R_h^* \psi\}(g),$$

y que el operador de inversión cambie el signo del corchete de Poisson.

Se introducen las diferenciales exteriores izquierda y derecha por las fórmulas

$$\begin{aligned} d^{(l)}\phi(g)(X) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi(e^{tX}g) \\ d^{(r)}\phi(g)(X) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi(ge^{tX}), \end{aligned}$$

donde  $\phi \in C^\infty(G)$ ,  $X \in \mathfrak{g}$ . Las 1-cocadenas en el grupo  $G$ ,  $\eta^{(l)}, \eta^{(r)} : G \rightarrow \text{Hom}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^*)$  tales que

$$\{\phi, \psi\}(g) = d^{(l)}\phi(g)(\eta^{(l)}(g)d^{(l)}\psi(g)) = d^{(r)}\phi(g)(\eta^{(r)}(g)d^{(r)}\psi(g))$$

reflejan que el grupo es de Poisson-Lie en su estructura de cociclo

$$\begin{aligned} \eta^{(l)}(g \cdot h) &= \text{Ad}g \circ \eta^{(l)}(h) \circ \text{Ad}^*g^{-1} + \eta^{(l)}(g) \\ \eta^{(r)}(g \cdot h) &= \text{Ad}h^{-1} \circ \eta^{(r)}(g) \circ \text{Ad}^*h + \eta^{(r)}(h). \end{aligned}$$

El corchete de Poisson en la identidad es degenerado ya que  $\eta^{(l)}(e) = \eta^{(r)}(e) = 0$ , la linearización de dicho corchete de Poisson da una estructura de biálgebra de Lie. Si  $\alpha, \beta \in \mathfrak{g}^*$  se buscan  $\phi, \psi \in C^\infty(G)$  tal que  $\alpha = d^{(l)}\phi(e)$  y  $\beta = d^{(r)}\psi(e)$  definiéndose el corchete de Lie como

$$[\alpha, \beta]_* = d^{(l)}\{\phi, \psi\}(e) = \beta(d\eta^{(l)}(e)\alpha).$$

Se puede demostrar que es una estructura de biálgebra de Lie. Además el recíproco es cierto,

**Proposición B.3.1** *Toda biálgebra de Lie esta asociada a un grupo de Poisson-Lie.*

Cuando la biálgebra de Lie sea de coborde,  $(\mathfrak{g}, r)$ , se tendrá  $\eta^{(l)}(g) = \text{Ad}g \circ r \circ \text{Ad}^*g^{-1} - r$ . Si además existe una forma bilineal  $B$  que crea un isomorfismo entre el álgebra y su dual, definiendo los gradientes izquierdo y derecho  $\text{grad}^{(l)}\phi = \sharp d^{(l)}\phi$ ,  $\text{grad}^{(r)}\phi = \sharp d^{(r)}\phi$  se puede construir, en el caso de un álgebra de Baxter, el corchete de Poisson, que se llamará de Poisson-Sklyanin, dado por

$$\{\phi, \psi\} = \frac{1}{2}(B(R\text{grad}^{(l)}\phi, \text{grad}^{(l)}\psi) - B(\text{grad}^{(r)}\phi, R\text{grad}^{(r)}\psi)),$$

con respecto al cual  $G$  es un grupo de Poisson-Lie.

## Bibliografía

1. M.J.Ablowitz, D.J.Kaup, A.C.Newell y H.Segur, "Method for Solving the Sine-Gordon Equation" Phys.Rev.Lett. 30, 1262-1264 (1973)
2. M.J.Ablowitz, D.J.Kaup, A.C.Newell y H.Segur, "The Inverse Scattering Transform-Fourier Analysis for Nonlinear Problems" Stud.Appl.Math. 53, 249-315 (1974)
3. M.Adler, "On a Trace Functional for Formal Pseudodifferential Operators and the Symplectic Structure of the Korteweg-de Vries Equation" Inven.Math. 50, 219-248 (1979)
4. M.F.Atiyah, "Geometry of Yang-Mills Fields" (Pisa: Accademia Nazionale dei Lincei Scuola Normale Superiore 1979)
5. M.F.Atiyah y N.J.Hitchin "The Geometry and Dynamics of Magnetic Monopoles" (Princeton: Princeton University Press 1988)
6. M.F.Atiyah, N.J.Hitchin, V.G.Drinfel'd y Yu I.Manin, "Construction of Instantons" Phys.Lett.65A,3, 185-187 (1978)
7. M.F.Atiyah y R.S.Ward, "Instantons and Algebraic Geometry" Commun.Math.Phys. 55, 117-124 (1977)
8. R.J.Baston y M.G.Eastwood, "The Penrose Transform. Its Interaction with Representation Theory" (Oxford: Oxford University Press 1990)
9. R.J.Baxter, "Partition Function of the Eight-Vertex Lattice Model" Ann.Appl.Math 70, 193-228 (1972)
10. A.A.Belavin, "The Inverse Scattering Problem and Instanton Construction by Algebraic Geometry" Sov.Sci.Rev.Math.Phys.A, 1-22 (1979)
11. A.A.Belavin, "Discrete Groups and the Integrability of Quantum Systems" Func.Anal.Appl. 14,4, 260-267(1980)

12. A.A.Belavin, "*Dynamical Symmetry of Integrable Quantum Systems*" Nucl.Phys.B 180, 189-200 (1981)
13. A.A.Belavin y V.G.Drinfel'd, "*Solutions of the Classical Yang-Baxter Equation for Simple Lie Algebras*" Func.Anal.Appl. 16,3, 159-180 (1982)
14. A.A.Belavin y V.G.Drinfel'd, "*Triangle Equations and Simple Lie Algebras*" Sov.Sci.Rev.Math.Phys.C4, 93-165 (1984)
15. A.A.Belavin y V.E.Zakharov, "*Yang-Mills Equations as Inverse Scattering Problem*" Phys.Lett.73B,1, 53-57 (1978)
16. V.A.Belinskii y V.E.Zakharov, "*Integration of the Einstein Equations by means of the Inverse Scattering Problem Technique and Construction of Exact Solutions*" Sov.Phys.JETP 48,6, 985-994 (1978)
17. A.E.Borovik, "*N-Soliton Solutions of the Nonlinear Landau-Lifshitz Equation*" JETP Lett.28, 581-584 (1978)
18. J.Boussinesq, "*Théorie de l'Intumescence Liquid Appelée Onde Solitaire ou de Translation, se Propageant dans un Canal Rectangulaire*" C.R.Acad.Sci.Paris 72, 755-759 (1871)
19. J.Boussinesq, "*Théorie des Ondes et des Remous qui se Propagent le Long d'un Canal Rectangulaire Horizontal, en Communiquant au Liquide Contenu dans ce Canal des Vitesses Sensiblement Pareilles de la Surface au Fond*" J.Math. Pures Appl. 17,2, 422-443 (1872)
20. J.M.Burgers, "*A Mathematical Model illustrating the Theory of Turbulence*" Adv.Appl.Mech. 1, 171-199 (1948)
21. F.Calogero y A.Degasperis, "*Reduction Technique for Matrix Nonlinear Evolution Equations Solvable by the Spectral Transform*" J.Math.Phys. 22,1, 23-31 (1981)
22. L.L.Chau, "*Comments on the Linear System for Self-Dual Yang-Mills Fields*" Lecciones impartidas en '8<sup>th</sup> Winter School of Theoretical Physics', Karpaz, Polonia (1981)
23. L.L.Chau, "*Chiral Fields, Self-Dual Yang-Mills Fields as Integrable Systems and the Role of the Kac-Moody Algebra*" en "*Nonlinear Phenomena*" editado por K.B.Wolf, Lec.Not.Phys.189 (Berlin: Springer-Verlag 1982)

24. L.L.Chau, M.L.Ge, A.Sinha y Y.S.Wu, "*Hidden-Symmetry Algebra for the Self-Dual Yang-Mills Equations*" Phys.Lett.121B, 6, 91-396 (1983)
25. H.H.Chen, Y.C. Lee y C.S.Liu, "*Integrability of Nonlinear Hamiltonian Systems by Inverse Scattering Method*" Phys.Scr. 20, 490-492 (1979)
26. I.V.Cherednik, "*Local Conservation Laws of Principal Chiral Fields ( $d=1$ )*" Theor.Math.Phys. 38,2, 120-124 (1978)
27. I.V.Cherednik, "*Algebraic Aspects of Two-Dimensional Chiral Fields*" J.Sov.Math.21, 601-636 (1983)
28. I.V.Cherednik, "*Functional Realizations of Basis Representations of Factoring Lie Groups and Algebras*" Func.Anal.Appl. 19,3, 193-206 (1985)
29. I.V.Cherednik, "*Elliptic Curves and Soliton Matrix Differential Equations*" J.Sov.Math. 38,3, 1989-2027 (1987)
30. I.V.Cherednik, "*The Main Soliton Theorem*" en "*Integrable and Super-integrable Systems*" (Singapur: World Scientific 1990)
31. S.Chikazumi, "*Physics of Magnetism*" (Nueva York: John Wiley 1964)
32. J.D.Cole, "*On Quasi-Linear Parabolic Equation occurring in Aerodynamics*" Quart.Appl.Math. 9, 225-236 (1951)
33. S.Coleman, "*Quantum Sine-Gordon Equation as the Massive Thirring Model*" Phys.Rev.D 11, 2088-2097 (1975)
34. J.C.Cornwell, "*Group Theory in Physics, 1,2,3*" (Londres: Academic Press 1988-1990)
35. A.D.W.B.Crumey, "*Local and Non-Local Conserved Quantities for Generalized Non-Linear Schrödinger Equations*" Commun.Math.Phys. 108, 631-646 (1987), "*Kac-Moody Symmetry of Generalized Non-Linear Schrödinger Equations*" Commun.Math.Phys. 111, 167-179 (1987)
36. A.D.W.B.Crumey, "*Integrable Dynamical Systems and Kac-Moody Algebras*" Preprint Imperial/TP/87-88/2
37. E.Date, M.Jimbo, M.Kashiwara y T.Miwa, "*Transformation Groups for Soliton Equations*" Proc.Japan.Acad. 57A, 3086-3818 (1982), Physica 4D, 343-365 (1982), Publ.RIMS Kyoto Univ. 18, 1077-1119 (1982) y en "*Non-linear Integrable Systems - Classical Theory and Quantum Theory*" editado por M.Jimbo y T.Miwa (Singapur: World Scientific 1983)

38. E.Date, M.Jimbo, M.Kashiwara y T.Miwa, "*Landau-Lifshitz Equation: Solitons, Quasi-Periodic Solutions and Infinite Dimensional Lie Algebras*" J.Phys.A: Math.Gen.16, 221-236 (1983)
39. D.S.Davydov, "*The Role of Solitons in the Energy and Electron Transfer in One-Dimensional Molecular Systems*" Physica 3D, 1-22 (1981)
40. L.A.Dickey, "*Symplectic Structure, Lagrangian and Involutiveness of First Integrals of the Principal Chiral Field*" Commun.Math.Phys. 87, 505-513 (1983)
41. J.Dieudonné, "*Éléments d'Analyse III,IV,V*" (Paris: Gauthier-Villars 1970-1975)
42. R.Dodd y A.P.Fordy, "*Prolongation Structures of Complex Quasi-Polynomial Evolution Equations*" J.Phys.A: Math. Gen. 17, 3249-3266 (1984)
43. L.Dolan, "*A New Symmetry Group of Real Sel-Dual Yang-Mills Theory*" Phys.Lett.113B,5, 387-390 (1982)
44. L.Dolan, "*Kac-Moody Algebras and Exact Solvability in Hadronic Physics*" Physics Reports 109,1, 1-94(1984)
45. I.Ya.Dorfman, "*Dirac Structures of Integrable Evolution Equations*" Phys.Lett.125A, 5, 241-246 (1987)
46. P.G.Drazin y R.S.Johnson, "*Solitons: a Introduction*" (Cambridge: Cambridge University Press 1989)
47. V.G.Drinfel'd, "*Hamiltonian Structures on Lie Groups, Lie Bialgebras and Geometric Meaning of the Classical Yang-Baxter Equation*" Sov.Math.Dokl. 27,1, 68-71 (1983)
48. V.G.Drinfel'd, "*Quantum Groups*" J.Sov.Math. 41,2, 898-915 (1988)
49. V.G.Drinfel'd y Yu I.Manin, "*Self-Dual Yang-Mills over the Sphere*" Func. Annal. Appl. 12,2, 140-142 (1978)
50. V.G.Drinfel'd y V.V.Sokolov, "*Equations of Korteweg-de Vries Type and Simple Lie Algebras*" Sov.Math.Dokl. 23,3, 457-462 (1981)
51. V.G.Drinfel'd y V.V.Sokolov, "*Lie Algebras and Equations of Korteweg-de Vries Type*" J. Sov.Math. 30,2, 1975-2036 (1985-1)

52. V.G.Drinfel'd y V.V.Sokolov, "On Equations Related to the Korteweg-de Vries Equation" *Sov.Math.Dokl.* 32,2, 361-365 (1985-2)
53. B.A.Dubrovin, "Theta Functions and Non-Linear Equations" *Russ.Math.Surv.* 36,2, 11-92 (1981)
54. B.A.Dubrovin, I.M.Krichever y S.P.Novikov, "Integrable Systems I" en "Encyclopaedia of Mathematical Science 4 (Dynamical Systems IV)" editado por V.I.Arnold y S.P.Novikov (Nueva York: Springer-Verlag 1990)
55. E.B.Dynkin, "Maximal Subgroups of Classical Groups" *Am.Math.Soc.Trans.* 2, 6, 111-244 (1957)
56. H.Eichenherr, "Symmetry Algebras of the Heisenberg Model and the Nonlinear Schrödinger Equation" *Phys.Lett.* 115B,5, 385-388 (1982)
57. A.Eneper, "Über Asymptotische Linien" *Nacnr.Königl.Ges.Wiss. Göttigen* 493-511 (1870)
58. L.D.Faddeev, "Quantum Completely Integrable Models in Field Theory" *Sov.Sci.Rev.Math.Phys.C* 1, 107-155
59. L.D.Faddeev y L.A.Takhtajan, "Hamiltonian Methods in the Theory of Solitons" (Berlin: Springer-Verlag 1987)
60. E.Fermi, J.Pasta y S.Ulam, "Studies of Nonlinear Problems I, Los Alamos Reports 1940 (1955)" en "Nonlinear Wave Motion" editado por A.C.Newell, *Lec.Not.Appl.Math.* 15 (Providence: American Mathematical Society 1974)
61. H.Flanders, "Differential Forms" (Nueva York: Academic Press 1963)
62. H.Flaschka, A.C.Newell y T.Ratiu, "Kac-Moody Algebras and Soliton Equations II" *Physica* 9D, 300-323 (1983)
63. J.Fletcher y N.M.J.Woodhouse, "Twistor Characterization of Stationary Axisymmetric Solutions of Einstein Equations" en "Twistors in Mathematics and Physics" editado por T.N.Bayley y R.J.Baston, *L.M.S.Lec.Not.Ser.* 156 (Cambridge: Cambridge University Press 1990)
64. A.P.Fordy, "Derivative Nonlinear Schrödinger Equations and Hermitian Symmetric Spaces" *J.Phys.A: Math.Gen.* 17, 1235-1245 (1984)

65. A.P.Fordy y P.P.Kulish, "*Nonlinear Schrödinger Equations and Simple Lie Algebras*" Commun.Math.Phys. 89, 427-443 (1983)
66. A.P.Fordy, A.G.Reyman y M.A.Semenov-Tyan-Shansky, "*Classical r-matrices and Compatible Poisson Brackets for Coupled KdV Systems*" Lett.Math.Phys. 17, 25-29 (1989)
67. A.R.Forsyth, "*Theory of Differential Equations, IV: Partial Differential Equations VI*" (Cambridge: Cambridge University Press 1906)
68. D.S.Freed, "*The Geometry of Loop Groups*" J.Diff.Geom.28, 233-276 (1988)
69. I.B.Frenkel y V.G.Kac, "*Basic Representation of Affine Lie Algebras and Dual Resonance Models*", Invent.Math.23-66(1980)
70. J.Frenkel y T.Kontorova, "*On the Theory of Plastic Deformation and Twinning*" J.Phys.Sovj. 1, 137-149 (1939)
71. C.S.Gardner, J.Greene, M.Kruskal y R.Miura, "*Method for Solving the Korteweg-de Vries Equation*" Phys.Rev.Lett. 19, 1095-1097 (1967)
72. I.M.Gel'fand y L.A.Dikii, "*Fractional Powers of Operators and Hamiltonian Systems*" Func.Annal.Appl.10,4, 259-273 (1976)
73. I.M.Gel'fand y L.A.Dikii, "*The Resolvent and Hamiltonian Systems*" Func.Annal.Appl.11,2, 93-104 (1977)
74. V.S.Gerdzhikov, M.I. Ivanov y P.P.Kulish, "*Quadratic Bundles and Non-linear Equations*" Theor.Math.Phys. 3, 784-795 (1980)
75. J.D.Gibbon, "*A Survey of the Origins and Physical Importance of Soliton Equations*" Phil.Trans.R.Soc.Lon.A 315, 335-365 (1985)
76. J.D.Gibbon, I.N.James y I.M.Moroz, "*An Example of Soliton Behaviour in a Rotating Baroclinic Fluid*" Proc.Roy.Soc.A 367, 219-237 (1979)
77. P.Goddard y D.Olive, "*Kac-Moody and Virasoro Algebras in Relation to Quantum Physics*" Int.J.Mod.Phys.A 1,2,303-414 (1986)
78. D.J.Gross y A.Neveu, "*Dynamical Symmetry Breaking in Asymptotically Free Field Theories*" Phys.Rev.D 10,10, 3235-3253 (1974)

79. F.Guil, "Specializations of Integrable Systems and Affine Lie Algebras" J.Math.Phys. 25,3, 445-450 (1984)
80. F.Guil, "The Classical  $r$ -Matrix, Zero Curvature Forms and equations of KdV Type" preprint del Dep. Métodos Matemáticos de la Física UCM, (1987)
81. F.Guil, "Banach-Lie Groups and Integrable Systems" Inverse Problems 5, 559-571 (1989)
82. F.Guil, "Integrable Systems and Lie Groups" en "Métodos en la Teoría de Cuerdas y Sistemas Integrables" (Madrid: Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Químicas, 1990-1)
83. F.Guil, "Commuting Differential Operators over Integrable Hierarchies" en "Integrable and Superintegrable Systems" editado por B.A.Kupershmidt (Singapur: World Scientific 1990-2)
84. F.Guil y M.Mañas, "The Homogeneous Heisenberg Subalgebra and Equations of AKNS Type" Lett.Math.Phys. 19, 89-95 (1990)
85. F.Guil y M.Mañas, "Loop Algebras and the Krichever-Novikov Equation" Phys.Lett.153A,2,3, 90-94 (1991)
86. F.Guil y M.Mañas, "Homogeneous Manifolds and Modified KdV Equations", J.Math.Phys. en prensa
87. A.Hasegawa, "Optical Solitons in Fibers" (segunda edición) (Berlin: Springer-Verlag 1990)
88. R.Hirota, "Exact Solution of the Korteweg-de Vries Equation for Multiple Collisions of Solitons" Phys.Rev.Lett. 27, 1192-1194 (1971)
89. P.I.Holod, "Hidden Symmetry of the Landau-Lifshitz Equation, Hierarchy of Higher Equations and the Dual Equation for an Asymmetric Chiral Field" Theor.Math.Phys. 70,1, 11-19 (1987-1)
90. P.I.Holod, "Two Dimensional Generalization of Steklov's Integrable Equation applied to the Motion of a Solid in a Fluid" Sov.Phys.Dokl. 32,2, 107-109 (1987-2)
91. E.Hopf, "The Partial Differential Equation  $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$ " Comm.Pure & Appl.Math.3, 201-230 (1950)

92. J.E.Humphreys, "*Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*" (Nueva York: Springer-Verlag 1972)
93. D.Husemoller, "*Fiber Bundles*" (Nueva York: Springer-Verlag 1974)
94. J.M.Hyman, D.W.McLaughlin y A.C.Scott, "*On Davydov's Alpha-Helix Solitons*" *Physica 3D*, 23-44 (1981)
95. N.Jacobson, "*Lie Algebras*" (Nueva York: Dover Publications, Inc. 1961)
96. M.Jimbo (editor), "*Yang-Baxter Equation in Integrable Systems*" (Singapur: World Scientific 1989)
97. G.A.Jones y D.Singerman, "*Complex Functions, an Algebraic and Geometric viewpoint*" (Cambridge: Cambridge University Press 1987)
98. V.G.Kac, "*Infinite Dimensional Lie Algebras*" (second edition) (Cambridge: Cambridge University Press 1985)
99. T.Kakutani y H.Ono, "*Weak Nonlinear Hydromagnetic Waves in a Cold Collision-Free Plasma*" *J.Phys.Soc.Jpn.* 26, 1305-1318 (1969)
100. D.J.Kaup y A.C.Newell, "*On the Coleman Correspondence and the Solution of the Massive Thirring Model*" *Lett.Nuovo Cimento* 20, 325-331 (1977)
101. D.J.Kaup y A.C.Newell, "*An Exact Solution for a Derivative Nonlinear Schrödinger Equation*" *J.Math.Phys.* 19, 798-801 (1978)
102. F.Klein "*Vorlesungen Über das Ikosaeder und die Auflosung der Gleichungen vom Funfen Grade*" Leipzig, (1884)
103. D.J.Korteweg y G.de Vries, "*On the Change of Form of Long Waves Advancing in a Rectangular Canal, and a New Type of Long Stationary Waves*" *Phil.Mag.* 39,5, 422-443 (1895)
104. I.M.Krichever, "*Methods of Algebraic Geometry in the Theory of Non-Linear Equations*" *Russ.Math.Surv.* 32,6, 185-213 (1977)
105. I.M.Krichever y S.P.Novikov, "*Holomorphic Bundles over Algebraic Curves and Nonlinear Equations*" *Russ.Math.Surv.* 35,6, 53-79 (1980)
106. I.M.Krichever y S.P.Novikov, "*Holomorphic Bundles and Nonlinear Equations*" *Physica 3D*,1,2, 267-293 (1981)

107. P.P.Kulish y E.K.Sklyanin, "*Solutions of the Yang-Baxter Equation*" J.Sov.Math. 19,5, 1596-1620 (1980)
108. P.P.Kulish y E.K.Sklyanin, "*O(N)-Invariant Nonlinear Schrödinger Equation- A New Completely Integrable System*" Phys.Lett.84A,7, 349-352 (1981)
109. E.A.Kuznesov y A.V.Mikhailov, "*On the Complete Integrability of the Two-Dimensional Classical Thirring Model*" Theor.Math.Phys. 30,193-200 (1977)
110. J.L.Lagrange, "*Sur la Construction des Cartes Géographiques*" Noveaux Mémoires de l'Académie de Berlin (1779)
111. B.M.Lake, H.C.Yuen, H.Rungaldler y W.E.Ferguson, "*Nonlinear Deep Water Waves: Theory and Experiment II*" J.Fluid Mech. 83, 49-74 (1977)
112. G.L.Lamb Jr, "*Higher Conservation Laws in Ultra-Short Optical Pulse Propagation*" Phys.Lett.32A, 251-252 (1970)
113. G.L.Lamb Jr, "*Analytical Descriptions of Ultra-Short Optical Pulse in Resonant Medium*" Rev.Mod.Phys. 43, 99-129 (1971)
114. M.Lakshmanan, "*Continuum Spin Systems as an Exactly Solvable Dynamical System*" Phys.Lett.61A, 53-54 (1977)
115. P.D.Lax, "*Integrals of Nonlinear Equations of Evolution and Solitary Waves*" Commu.Pure & Appl.Math. 21,467-490 (1968)
116. D.R.Lebedev y Yu I.Manin, "*Gel'fand-Dikii Hamiltonian Operator and the Coadjoint Representation of the Volterra Group*" Func. Annal. Appl. 13,4, 268-273, (1979)
117. L.C. Li y S.Parmentier, "*Nonlinear Poisson Structures and r-Matrices*" Commun.Math.Phys. 125, 545-563 (1989)
118. P.Libermann y C.M.Marle, "*Symplectic Geometry and Analytical Mechanics*" (Dordrecht: D.Reidel Publishing Company 1987)
119. M.J.Lighthill, "*Viscosity Effects in Sound Waves of Finite Amplitude*" en "*Surveys of Mechanics*" editado por G.K.Batchelor y R.M.Davies (Cambridge: Cambridge University Press 1956)

120. J.H.Lu y A.Weinstein, "*Poisson-Lie Groups, Dressing Transformations and Bruhat Decompositions*" J.Diff.Geom. 31, 501-526 (1990)
121. F.Magri, "*A Simple Model of a Integrable Hamiltonian Equation*" J.Math.Phys. 19, 1156-1162 (1978)
122. V.G.Makhankov y O.A.Pashaev, "*On the Gauge Equivalence of the Landau-Lifshitz and the Non-Linear Schrödinger Equations on Symmetric Spaces*" Phys.Lett.95A,2, 95-100 (1983)
123. Yu I.Manin, "*Algebraic Aspects of Non-Linear Differential Equations*" J.Sov.Math. 11, 1-22 (1979)
124. M.Mañas, "*Aspectos Algebraicos y Geométricos de la Teoría de los Sistemas Integrables*" Memoria de Investigación (Madrid: UCM,1988)
125. M.Mañas, "*Homogeneous Manifolds, Factorisation Problems and Modified KdV Equations*" en "*NEED'S 90*" editado por V.G.Makhankov (Berlin: Springer-Verlag 1991)
126. A.I.Marksusevich, "*Teoría de las Funciones Analíticas I y II*" (Moscu: Editorial Mir 1970)
127. I.Marshall, "*A Lie Algebraic Setting for Miura Maps Related to an Energy Dependent Linear Problem*" Commun.Math.Phys. 133, 509-520 (1990)
128. L.Martínez Alonso, "*Soliton Classical Dynamics in the Sine-Gordon Equation in terms of the Massive Thirring Model*" Phys.Rev.D 30,12, 2595-2601 (1983)
129. L.Martínez Alonso y F.Guil, "*Modified Hamiltonian Systems and Canonical Transformations arising from the Relationship between Zakharov-Shabat and Energy-Dependent Schrödinger Operators*" J.Math.Phys,22,11, 2497-2503 (1981)
130. L.Martínez Alonso y E.Olmedilla, "*Connections between the Soliton Dynamics Provided by some Integrable Relativistic Theories*" Phys.Rev.D 31,12, 3293-3294 (1985)
131. L.J.Mason, S.Chakravarty y E.T.Newman, "*Bäcklund Transformations for the Anti-Self-Dual Yang-Mills Equations*" J.Math.Phys. 29,4, 1005-1013 (1988)

132. L.J.Mason y G.A.J.Sparling, "Nonlinear Schrödinger and Korteweg-de Vries are Reductions of Self-Dual Yang-Mills" *Phys.Lett.*137A, 1,2, 29-33 (1989)
133. K.Maurin, "Analysis II: Integration, Distributions, Holomorphic Functions, Tensor and Harmonic Analysis" (Varsovia: D.Reidel Publishing Company 1980)
134. L.McCall y E.L.Hahn, "Self-Induced Transparency by Pulsed Coherent Light" *Phys.Rev.Lett* 18, 908-911 (1967)
135. A.V.Mikhailov, "Integrability of the Two-Dimensional Thirring Model" *JETP Lett.*23,6, 320-323 (1976)
136. A.V.Mikhailov, "The Landau-Lifshitz Equation and the Riemann Boundary Problem in a Torus" *Phys.Lett.*92A, 51-55 (1982)
137. A.V.Mikhailov y A.B.Shabat, "Integrability Conditions For Systems of Two Equations of the Form  $u_t = A(u)u_{xx} + F(u, u_x)$  I" *Theor.Math.Phys.* 62,2,107-122 (1985)
138. A.V.Mikhailov y A.B.Shabat, "Integrability Conditions For Systems of Two Equations of the Form  $u_t = A(u)u_{xx} + F(u, u_x)$  II" *Theor.Math.Phys.* 66,1,31-44 (1985)
139. A.V.Mikhailov, A.B.Shabat y R.I.Yamilov, "The Symmetry Approach to the Classification of Non-Linear Equations. Complete List of Integrable Systems" *Russ.Math.Surv.* 42,4, 1-63 (1987)
140. R.M.Miura, "Korteweg-de Vries Equation and Generalizations I, a Remarkable Explicit Nonlinear Transformation" *J.Math.Phys.* 9, 1202-1204 (1968)
141. L.F.Mollenauer, "Solitons in Optical Fibres and the Soliton Laser" *Phil.Trans.R.Soc.Lon.A* 315, 437-450 (1985)
142. A.Nakamura, "Chain of Bäcklund Transformations for the KdV Equation" *J.Math.Phys.* 22,8, 1608-1613 (1981)
143. A.Nakamura y H.H.Chen, "Multi-Soliton Solutions of a Derivative Nonlinear Schrödinger Equation" *J.Phys.Soc.Jpn.* 49,2, 813-816 (1980)
144. A.Nakamura y R.Hirota, "Second Modified KdV Equation and its Exact Multi-Soliton Solution" *J.Phys.Soc.Jpn.* 48,1755-1762 (1980)

145. A.C.Newell, "*Solitons in Mathematics and Physics*" (Philadelphia: SIAM 1985)
146. F.W.Nijhoff, G.R.Quispel, J. van der Linden y H.W.Capel, "*On Some Linear Integrable Equations generating Soliton Solutions of Non-linear Partial Differential Equations*" Preprint, Lorenz vov Theorestische Naturkunde Institute, Leiden (1982)
147. S.P.Novikov, "*The Periodic Problem for the Korteweg-de Vries Equation*" *Func.Anal.Appl.* 8, 236-246 (1974)
148. S.P.Novikov, S.V.Manakov, L.P.Pitaevskii y V.E.Zakharov, "*Theory of Solitons: The Inverse Scattering Method*" (Nueva York: Plenum Press 1984)
149. A.V.Odesskii y B.L.Feigin, "*Sklyanin Elliptic Algebras*" *Func.Anal.Appl.* 23,3, 207-214 (1990)
150. A.T.Ogielski, M.K.Prasad, A.Sinha y L.L.Chau, "*Bäcklund Transformations and Local Conservation Laws for Principal Chiral Fields*" *Phys.Lett.*91B,3,4, 387-391 (1980)
151. R.Penrose, "*Nonlinear Gravitons and Curved Twistor Theory*" *Gen.Rel.Grav.* 7,1, 31-52 (1976)
152. J.K.Perring y T.H.R.Skyrme, "*A Model Unified Field Theory*" *Nuc.Phys.* 31, 550-555 (1962)
153. K.Pohlmeyer, "*Integrable Hamiltonian Systems and Interactions through Quadratic Constrains*" *Commun.Math.Phys.* 48, 207-221 (1976)
154. I.R.Porteous, "*Topological Geometry*"(second edition) (Cambridge: Cambridge University Press 1981)
155. M.Postnikov, "*Lectures in Geometry, Semester V: Lie Groups and Lie Algebras*" (Moscú: Mir Publishers 1986)
156. A.Pressley y G.Segal, "*Loop Groups*" (Oxford: Oxford University Press 1986)
157. Lord Rayleigh, "*On Waves*" *Phil.Mag.*1,5, 257-279 (1876)
158. N.Yu Reshetikhin y L.D.Faddeev, "*Hamiltonian Structures for Integrable Models of Field Theory*" *Theor.Math.Phys.* 56,3, 847-862 (1983)

159. A.G.Reyman y M.A.Semenov-Tyan-Shansky, "*Compatible Poisson Structures for Lax Equations: an r-matrix Approach*" Phys.Lett.130A,8,9, 456-485 (1988)
160. A.G.Reyman y M.A.Semenov-Tyan-Shanskii, "*Lie Algebras and Lax Equations with Spectral Parameter in a Elliptic Curve*" J.Sov.Math. 46,1, 1631-1640 (1989-1)
161. A.G.Reyman y M.A.Semenov-Tyan-Shanskii, "*Compatible Poisson Brackets for Lax Equations and Classical r-matrices*" J.Sov.Math. 47,2, 2493-2502 (1989-2)
162. J.A.G.Roberts y C.J.Thompson, "*Dynamics of the Classical Heisenberg Spin Chain*" J.Phys.A: Math.Gen. 21, 1769-1780 (1988)
163. Yu L.Rodin, "*The Riemann Boundary Problem in a Torus and the Inverse Scattering Problem for the Landau-Lifshitz Equation*" Lett.Math.Phys. 7, 3-8, (1983)
164. J.Rubinstein, "*Sine-Gordon Equations*" 11,1, 258-266 (1970)
165. J.S.Rusell, "*Report on Waves*" en "*Reports of the 14th Meeting of the British Association for the Advance of Science, York*" (Londres: John Murray 1844)
166. A.C.Scott, "*Davydov Solitons in Polypeptides*" Phil.Trans.R.Soc.Lon.A 315 423-436 (1985)
167. A.C.Scott, F.Y.Chu y D.McLaughlin, "*The Soliton: A New Concept in Applied Science*" Proceedings of the IEEE, 61,10, 1413-1483 (1973)
168. G.Segal, "*Unitary Representations of some Infinite Dimensional Groups*" Commun.Math.Phys.80, 301-342(1981)
169. G.Segal, "*Loop Groups and Harmonic Maps*" preprint Oxford University (1989)
170. G.Segal y G.Wilson, "*Loop Groups and Equations of KdV Type*" Publ.Math.I.H.E.S. 5-65 (1985)
171. M.A.Semenov-Tyan-Shanskii, "*What is a Classical r-matrix?*" Func.Anal.Appl. 17,4, 259-272 (1983)

172. M.A.Semenov-Tyan-Shansky, "*Dressing Transformations and Poisson Group Actions*" Publ.RIMS Kyoto Univ. 21,46, 1237-1260 (1985)
173. M.A.Semenov-Tyan-Shansky, "*Classical  $r$ -matrices, Lax Equations, Poisson-Lie Groups and Dressing Transformations*" en "*Field Theory, Quantum Gravity and Strings I*" editado por H.J. de Vega y N.Sánchez, Lec.Not.Phys. 280 (Berlin: Springer-Verlag 1987)
174. M.A.Semenov-Tyan-Shanskii, "*Poisson Groups and Dressing Transformations*" J.Sov.Math. 46,1, 1641-1657 (1989)
175. J.P.Serre, "*Complex Semisimple Lie Algebras*" (Nueva York: Springer-Verlag 1987)
176. E.K.Sklyanin, "*On Complete Integrability of the Landau-Lifshitz Equation*" LOMI preprints E-3-79 (1979)
177. E.K.Sklyanin, "*Some Algebraic Structures connected with the Yang-Baxter Equation*" Func.Anal.Appl.16,4, 263-270 (1983)
178. E.K.Sklyanin, L.A.Takhtajan y L.D.Faddeev "*The Quantum Method of the Inverse problem*" Theor.Math.Phys. 40,2, 688-706 (1980)
179. V.V.Sokolov, "*On the Hamiltonian Property of the Krichever-Novikov Equation*" Sov.Math.Dokl. 30,1, 44-46 (1984)
180. G.A.J.Sparling y L.J.Mason, "*Twistor Correspondence for Nonlinear Schrödinger and Korteweg-de Vries Hierarchies*" preprint Oxford University (1989)
181. S.I.Svinolupov y V.V.Sokolov, "*Evolution Equations with Non-Trivial Conservative Laws*" Func.Anal.Appl. 16,4, 317-319 (1983)
182. S.I.Svinolupov, V.V.Sokolov y R.I.Yamilov, "*On Bäcklund Transformations for Integrable Evolution Equations*" Sov.Math.Dokl. 28,1,165-168 (1983)
183. L.A.Takhtajan, "*Integration of the Continuous Heisenberg Spin-Chain through the Inverse Scattering Method*" Phys.Lett.64A, 235-237 (1977)
184. L.A.Takhtajan y L.D.Faddeev, "*The Quantum Inverse Problem Method and the XYZ Heisenberg Model*" Russ.Math.Surv. 34,5, 11-68 (1979) (1974)

185. L.A.Takhtajan y L.D.Faddeev, "*Essentially Nonlinear One-Dimensional Model of Classical Field Theory*" *Theor.Math.Phys.* 21, 1046-1057
186. J.Tits, "*Sous-Algèbres des Algèbres de Lie Semi-Simples*" Séminaire Bourbaki (Mai 1955)
187. J.Tits, "*Groupes associés aux Algèbres de Kac-Moody*", *Astérisque* 177-178, 7-31(1988)
188. K.Ueno y Y.Nakamura, "*Infinite Dimensional Lie Algebras and Transformation Theories for Nonlinear Field Equations*" en "*Non-linear Integrable Systems - Classical Theory and Quantum Theory*" editado por M.Jimbo y T.Miwa (Singapur: World Scientific 1983)
189. K.Uhlenbeck, "*Removable Singularities in Yang-Mills Fields*" *Commun.Math.Phys.* 83,11-29 (1982)
190. K.Uhlenbeck, "*Harmonic Maps into Lie Groups (Classical Solutions of the Chiral Model)*" *J.Diff.Geom.* 30, 1-50 (1989)
191. K.Uhlenbeck, "*On the Connection between Harmonic Maps and the Self-Dual Yang-Mills and the Sine-Gordon Equations*" preprint Austin, Texas University (1989)
192. R.S.Ward, "*On Self-Dual Gauge Fields*" *Phys.Lett.*61A,2, 81-82 (1977)
193. R.S.Ward, "*Stationary Space-Times: a New Approach*" *Gen.Rel.Grav.* 15,2, 105-109 (1983)
194. R.S.Ward, "*Completely Solvable Gauge-Field Equations in Dimension greater than Four*" *Nuc.Phys.B* 236, 381-396 (1984)
195. R.S.Ward, "*Integrable and Solvable Systems, and Relations among them*" *Phil.Trans.R.Soc.Lond.A* 315, 451-457 (1985)
196. R.S.Ward, "*Multidimensional Integrable Systems*" en "*Field Theory, Quantum Gravity and Strings II*" editado por H.J.de Vega y N.Sánchez, *Lec.Not.Phys.*280 (Berlin: Springer-Verlag 1987)
197. R.S.Ward, "*Integrable Systems in Twistor Theory*" en "*Twistors in Mathematics and Physics*" editado por T.N.Bayley y R.J.Baston, *L.M.S.Lec.Not.Ser.*156 (Cambridge: Cambridge University Press 1990)

198. R.S.Ward y R.O.Wells Jr., "*Twistor Geometry and Field Theory*" (Cambridge: Cambridge University Press 1990)
199. V.S.Vladimirov, "*Generalized Functions in Mathematical-Physics*" (Moscú: Mir Publishers 1979)
200. A.Weinstein, "*The Local Structure of Poisson Manifolds*" J.Diff.Geom. 18, 523-557 (1983) y "*Errata and Addenda*" J.Diff.Geom. 22, 255 (1985)
201. G.Wilson, "*Commuting Flows and Conservation Laws for Lax Equations*" Math.Proc.Camb.Soc. 86, 131-143 (1979)
202. G.Wilson, "*Habillage et Fonctions  $\tau$* " C.R.Acad.Sc.Paris 299,I,13, 587-590 (1984)
203. G.Wilson, "*Infinite-Dimensional Lie Groups and Algebraic Geometry in Soliton Theory*" Phil.Trans.R.Soc.Lond.A 315, 393-404 (1985)
204. G.Wilson, "*On the Quasi-Hamiltonian Formalism of the KdV Equation*" Phys.Lett.132A,8,9,445-450 (1988)
205. N.M.J.Woodhouse y L.J.Mason, "*The Geroch Group and non-Hausdorff Twistor Spaces*" Nonlinearity 1, 73-114 (1988)
206. N.J.Zabusky, "*A Synergetic Approach to Problems of Nonlinear Propagation and Interaction*" en "*Nonlinear Partial Differential Equations*" editado por W.F.James (Nueva York: Academic Press 1967)
207. N.J.Zabusky y M.D.Kruskal, "*Interactions of 'Solitons' in a Collisionless Plasma and the Recurrence of Initial States*" Phys.Rev.Lett. 15, 240-243 (1965)
208. V.E.Zakharov, "*Collapse of Langmuir Waves*" Sov.Phys.JETP 35, 908-914(1972)
209. V.E.Zakharov y A.V.Mikhailov, "*Relativistically Invariant Two-Dimensional Model of Field Theory wich is Integrable by means of the Inverse Scattering Problem Method*" Sov.Phys.JETP 47,6,1017-1027 (1978)
210. V.E.Zakharov y A.V.Mikhailov, "*On the Integrability of Classical Spinor Models in Two-Dimensional Space-Time*" Commun.Math.Phys. 74, 21-40 (1980)

211. V.E.Zakharov y A.B.Shabat, "*Exact Theory of Two-Dimensional Self-Focusing and One-Dimensional Self-Modulation of Waves in Nonlinear Media*" Sov.Phys.JETP 34, 62-69 (1971)
212. V.E.Zakharov y A.B.Shabat, "*A Scheme for Integrating the Nonlinear Equations of Mathematical-Physics by the Method of the Inverse Scattering Problem I*" Func.Anal.Appl. 8,3, 43-53 (1974)
213. V.E.Zakharov y A.B.Shabat, "*Integration of Nonlinear Equations of Mathematical-Physics by Inverse Scattering II*" Func.Anal.Appl. 13, 166-174 (1979)
214. V.E.Zakharov y L.A.Takhtajan, "*Equivalence of the Nonlinear Schrödinger Equation and the Heisenberg Ferromagnet*" Theor.Math.Phys. 38, 17-23 (1979)
215. V.E.Zakharov, L.A.Takhtajan y L.D.Faddeev, "*A Complete Description of the Solution of the "Sine-Gordon" Equation*" Sov.Phys.Dokl.19, 824-826 (1975)