

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS
Departamento de Física Teórica



TESIS DOCTORAL

**Aplicaciones de la teoría de funciones de Green en sistemas
de muchas partículas : transiciones nucleares con
[incremento de] B [distinto de] 0 , efectos de superficie**

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR
PRESENTADA POR

Luis Antonio Fernández Pérez

Madrid, 2015

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

Facultad de Ciencias Físicas

Departamento de Física Teórica

TP
1978
096



* 5 3 0 9 8 7 4 6 2 5 *
UNIVERSIDAD COMPLUTENSE

x - 53 - 031002 - 2

**APLICACIONES DE LA TEORIA DE FUNCIONES
DE GREEN EN SISTEMAS DE MUCHAS
PARTICULAS: TRANSICIONES NUCLEARES
CON $\Delta B \neq 0$, EFECTOS DE SUPERFICIE**



Luis Antonio Fernández Pérez

Madrid, 1988

Colección Tesis Doctorales. N.º 96 / 88

• **Luis Antonio Fernández Pérez**

**Edita e imprime la Editorial de la Universidad
Complutense de Madrid. Servicio de Reprografía
Noviciado, 3 - 28015 Madrid
Madrid, 1988
Ricoh 3700
Depósito Legal: M-4067-1988**

036

7

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS

DEPARTAMENTO DE FISICA TEORICA

APLICACIONES DE LA TEORIA DE FUNCIONES DE GREEN EN SISTEMAS DE MUCHAS
PARTICULAS: TRANSICIONES NUCLEARES CON $\Delta B \neq 0$, EFECTOS DE SUPERFICIE.

Memoria que para optar al grado
de doctor en Ciencias Físicas pres
senta:

Luis Antonio FERNANDEZ PEREZ

Madrid, Mayo 1985

En primer lugar quiero manifestar mi agradecimiento al Profesor R. F. Alvarez-Estrada, director de esta tesis, por su constante dedicación e inestimable ayuda, así como al Profesor J. L. Sánchez-Gómez, quien ha colaborado en la realización de estas investigaciones.

También quiero agradecer a los miembros de los departamentos de Física Teórica y Métodos Matemáticos su cooperación y apoyo moral.

Asimismo, debo dar las gracias al Centro de Proceso de Datos de la Universidad Complutense de Madrid por los medios informáticos puestos a mi disposición.

Este trabajo se ha llevado a cabo con la ayuda económica de una Beca de Plan de Formación de Personal Investigador del Ministerio de Educación y Ciencia.

PREAMBULO:

Hay al menos dos importantes razones para que la materia sea inestable. En primer lugar, el hecho experimental de la existencia en el Universo de un número mucho mayor de bariones que de antibariones. En segundo lugar, una razón teórica profunda basada en la inexistencia de ninguna simetría que imponga la conservación del número bariónico. Si este número no es una constante del movimiento, procesos como la desintegración de un protón libre en un leptón y mesones, podrían producirse. En definitiva, la materia, constituida fundamentalmente por bariones, tendería a desaparecer. El razonamiento inverso, por otra parte, permitiría explicar la razón de la propia existencia de la materia: la asimetría materia-antimateria pudo aparecer en las primeras etapas de la Vida del Universo, cuando las condiciones reinantes favorecían las reacciones que no conservan el número bariónico.

La idea de la posible inestabilidad de la materia no es nueva; sin embargo, la evidencia experimental mostraba que la vida media del protón debía ser de al menos 10^{28} años, sin haber razones claras que permitieran suponer que el valor exacto estuviese próximo a esta cifra. El panorama cambió radicalmente cuando en 1974 se formuló la primera teoría de Gran Unificación, que predecía un valor para este periodo de 10^{28} - 10^{30} años^(1,2). La posibilidad de una inminente detección de desintegraciones ha hecho trabajar muy intensamente en este campo, tanto a nivel teórico como experimental.

En esta tesis, nos ocupamos de ciertos aspectos teóricos

de gran interés a la hora de interpretar eventuales resultados experimentales sobre procesos en los que el número bariónico no se conserva. Concretamente, trataremos de los efectos que la presencia de nucleones vecinos en un núcleo atómico, pueden producir sobre este tipo de fenómenos^[3,4]. No se estudiarán desde el punto de vista de las teorías de Gran Unificación (o de Gran Unificación Supersimétricas), cuya elección particular está hoy día sujeta a grandes controversias, sino que se evitará este problema partiendo de lagrangianos efectivos en los que sólo aparecen campos de hadrones. No se intentará, por consiguiente, encontrar valores absolutos de vidas medias sino calcular los efectos nucleares relacionando los resultados con los libres, de modo que mantengan su validez independientemente de la teoría de Gran Unificación que finalmente resulte "correcta".

Tras un breve resumen de las predicciones teóricas y situación experimental actual (capítulo I), se analizan los efectos nucleares sobre la desintegración del protón en un núcleo infinito (capítulo II). A continuación, se generaliza el formalismo para tratar otro tipo de fenómenos que tampoco conservan el número bariónico, como son las oscilaciones neutrón-antineutrón (capítulo III). Finalmente, se hace un estudio de los efectos superficiales sobre la desintegración de nucleones en núcleos (capítulo IV).

INDICE:

CAPITULO I. Desintegración del protón libre: situación teórica y experimental.

1. Teorías de Gran Unificación.....1
2. Predicciones teóricas sobre la desintegración del protón libre.....7
3. Situación experimental.....10

CAPITULO II. Efectos nucleares sobre la desintegración del protón en un núcleo infinito.

1. Reducción del lagrangiano efectivo a términos de campos de hadrones.....14
2. Probabilidad de desintegración y funciones de Green.....21
3. Estudio del límite libre.....31
4. Parte real de la autoenergía.....35
5. Cálculo de la parte imaginaria de la autoenergía.....38
6. Polarización del pión.....44
7. Resultados numéricos.....47
8. Inclusión de la anchura de la delta.....49
9. Efecto Lorenz-Lorentz.....54
10. Términos espectador y de interferencia.....58
11. Resultados numéricos para el término espectador.....67
12. Resultados numéricos para el término de interferencia...69
13. Sobre los estados finales hadrónicos.....71

CAPITULO III. Oscilaciones neutrón-antineutrón en núcleos

1. Teorías de Gran Unificación y oscilaciones $n-\bar{n}$73

2. Fenomenología de las oscilaciones $n-\bar{n}$	79
3. Oscilaciones $n-\bar{n}$ en núcleos.....	84
4. Estudio de las oscilaciones $n-\bar{n}$ en núcleos en términos de funciones de Green.....	86
5. Estudio de la función \tilde{G} . Diagrama de autoenergías.....	89
6. Correlaciones \bar{n} -hueco.....	93
7. Discusión sobre otras posibles correcciones.....	98

CAPITULO IV. Desintegración del protón en núcleos: correcciones superficiales.

1. Introducción.....	102
2. Reglas de Feynman para sistemas con simetría plana.....	106
3. Relación entre la probabilidad de desintegración y la función de Green del protón.....	113
4. Parte real de la autoenergía.....	118
5. Cálculo de la parte imaginaria de la autoenergía.....	120
6. El propagador del pión.....	127
7. Efecto Lorenz-Lorentz.....	131
8. Términos espectador y de interferencia.....	134
9. Efectos de superficie.....	136
10. Método numérico.....	141
11. Resultados numéricos.....	143

APENDICE A. Relación entre valores medios de conmutadores y funciones de Green.....154

APENDICE B. Cálculo numérico de integrales singulares.....158

APENDICE C. Cálculo numérico de las constantes λ para las correlaciones \bar{n} -hueco.....160

APENDICE D. Tratamiento perturbativo del potencial de confinamiento.....	162
APENDICE E. Cálculo de las funciones U^N y U^A	165
APENDICE F. Método numérico para el estudio de los efectos superficiales.....	172
APENDICE G. Listado de programas.....	189
CONCLUSIONES.....	211
BIBLIOGRAFIA.....	215

CAPITULO I:

Desintegración del protón libre: situación teórica y experimental.

1. Teorías de Gran Unificación.

Es un hecho suficientemente establecido que las interacciones fuertes y electrodébiles pueden describirse mediante teorías gauge locales cuyos grupos de simetría son respectivamente $SU(3)$ y $SU(2) \times U(1)$.

Sin embargo, en el modelo standard ($SU(3) \times SU(2) \times U(1)$), los tres tipos de interacciones son prácticamente independientes. No se explica el porqué de la cuantificación de la carga eléctrica o la razón de las relaciones observadas entre las cargas de las diversas partículas y, en definitiva, presenta una total arbitrariedad en cantidades como las constantes de acoplamiento, masas de los fermiones, ángulos de mezcla etc.

Resulta evidente el interés de unificar todas las interacciones (en principio las no gravitacionales) en una teoría gauge cuyo grupo G contenga a $G' = SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ como subgrupo, de modo que se fijen características que de otra forma serían arbitrarias. Para que la unificación sea completa es necesario que G sea simple. Por supuesto existen infinitos grupos en los que G' puede estar inmerso. Esta libertad de elección desaparece en el momento que se exige que este grupo sea mínimo. Sólo $SU(5)$ contiene a G' como subgrupo maximal [1,2].

Resumiremos brevemente las principales características del modelo basado en este grupo e indicaremos algunas de las diferencias que aparecen al considerar otros modelos. (Una descrip-

ción detallada puede encontrarse en la referencia [5])

El grupo $SU(5)$ tiene 24 generadores que se corresponden con otros tantos bosones vectoriales de gauge, cuyos campos se transforman con la representación adjunta. Atendiendo a sus propiedades bajo $SU(3)$, $SU(2)$ y $U(1)$, 8 de ellos pertenecen a un octete de color y singlete de isospín débil (los ocho gluones), 3 a un singlete de color y triplete de isospín débil (esencialmente los W^\pm y Z^0) y un singlete de color e isospín débil (esencialmente el fotón [6]). El modelo predice además la existencia de 12 nuevos bosones: 6 y sus correspondientes antipartículas. Estos 6 bosones se transforman como tripletes de color y antidobletes de isospín débil; son, por tanto, partículas con color y sabor. Suelen denotarse por X_α e Y_α ($\alpha=1,2,3$ es el índice de color).

En cuanto a los fermiones, para cada generación existen 15 campos que corresponden a una representación 5^* y a una 10 :

$$\begin{aligned}
 5^* &: \begin{pmatrix} d_1^* \\ \nu_2 \\ e^*_{-L} \end{pmatrix} \\
 10 &: \begin{pmatrix} u_1^* \\ u_2^* \\ d_1^* \\ e^*_{-L} \end{pmatrix}
 \end{aligned}
 \tag{1.1}$$

Estas representaciones son complejas, de modo que las antipartículas (dextrógiras) se transformarían según 5 y 10^* .

Una vez conocidas las propiedades de transformación de los diversos campos, es inmediato construir la densidad Lagrangiana

La parte que acopla los bosones X e Y con los fermiones es

$$\frac{g_2}{\sqrt{2}} \left\{ \bar{X}_\mu \left[\bar{d}_{R\alpha} \gamma^\mu e_R^\alpha + \bar{d}_{L\alpha} \gamma^\mu e_L^\alpha + \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \bar{u}_L^\alpha \gamma^\mu u_L^\beta \right] + \bar{Y}_\mu \left[\bar{d}_{R\alpha} \gamma^\mu d_R^\alpha - \bar{u}_{L\alpha} \gamma^\mu e_L^\alpha + \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \bar{u}_L^\alpha \gamma^\mu d_L^\beta \right] \right\} + h. c. \quad (1.2)$$

Estos acoplamientos son responsables de procesos como los representados en la figura 1.

La presencia de estas interacciones hace que los números bariónico y leptónico no se conserven. Efectivamente, existe la posibilidad de procesos de segundo orden como los que aparecen en la figura 2, que suponen la desintegración de un protón en un positrón y un mesón neutro.

La evidente gran estabilidad del protón ($\tau_p > 10^{30}$ años) impone que la simetría SU(5) esté rota de modo que los bosones X e Y hayan adquirido una masa muy grande. Un cálculo elemental muestra que la vida media del protón es

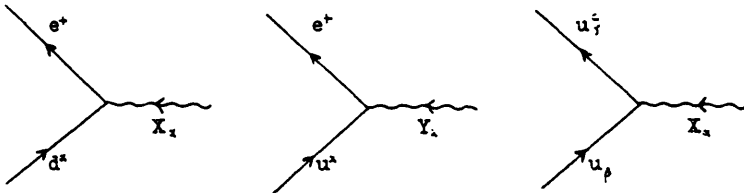


Fig. 1. Algunos vértices de interacción entre fermiones y bosones X e Y.

$$\tau_p \sim \alpha_s^{-2} \frac{m_X^4}{m_p^5} \quad (1.3)$$

donde $\alpha_s \sim \alpha \sim 10^{-2}$. Si $\tau_p > 10^{30}$ años m_X debe ser mayor que unos 10^{14} GeV. Esta enorme masa, próxima a la de Planck (10^{19} GeV) hace que los efectos de estas nuevas interacciones sólo puedan observarse en procesos como desintegración de partículas de otro modo estables, u oscilaciones partícula-antipartícula.

Afortunadamente no sólo es posible dar cotas para m_X ($\approx m_Y$). El estudio de las ecuaciones del grupo de renormalización para las constantes de acoplamiento fuerte, débil y electromagnética, permite la extrapolación a altas energías. La energía de unificación, para la que las tres constantes coincidirían, es aproximadamente m_X . Al ser la dependencia en energía logarítmica, es difícil obtener un resultado preciso. En cualquier caso los cálculos dan valores de esta masa también del orden de 10^{15} GeV.

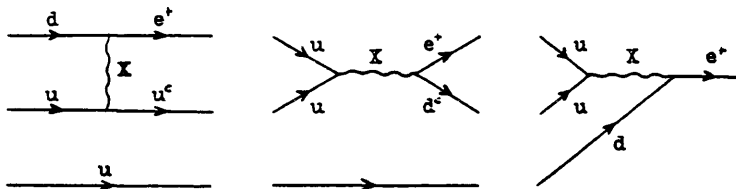


Fig. 2. Diagramas que contribuyen a la desintegración de un protón en un positrón y un mesón neutro.

Vemos que es necesario una diferencia de más de una decena de órdenes de magnitud entre las masas de las partículas ordinarias y las nuevas partículas X e Y , que habría que explicar en principio mediante un mecanismo de ruptura espontánea de simetría. Nos limitaremos aquí a indicar la estructura de campos de Higgs del modelo mínimo^[1,2]. En primer lugar se introduce una representación 24 (adjunta) de bosones de Higgs. De ellos 12 son "comidos" por los bosones X e Y dotándoles de masas idénticas, y otros 12 adquieren masa pero quedan desacoplados de los fermiones.

Se requiere además otro conjunto de bosones de Higgs para la ruptura de $SU(2) \times U(1)$. En el modelo de Weinberg-Salam aparece un doblete de Higgs, que deben estar incluidos en una representación irreducible de $SU(5)$. La representación fundamental contiene un doblete de isospín débil, pero también un triplete de color, que en principio supone la existencia de Higgs sin masa tras la ruptura de la simetría, que podrían provocar desintegración de protones a un ritmo inaceptable. Este problema puede evitarse añadiendo términos cruzados al potencial de los Higgs. Sin embargo, para obtener los valores adecuados de las masas, es necesario un ajuste extremadamente preciso de los parámetros (de una parte en 10^{24}), lo que constituye un serio inconveniente de la teoría.

Para explicar las masas de los fermiones es necesaria la inclusión de nuevos campos de Higgs. Se ha trabajado mucho en esta dirección, aunque con resultados parciales. No nos detendremos en estas consideraciones, simplemente diremos, a modo de resumen, que entre los éxitos del modelo mínimo están sus predicciones sobre el número de fermiones en cada generación.

ración, un valor aceptable del ángulo de Weinberg, la necesidad de una cuantificación de la carga eléctrica, etc.

Defectos importantes son los problemas en la explicación de las relaciones de masa entre fermiones, el que no todos los fermiones se transforman con una única representación irreducible, que no hay relación entre las diversas generaciones, y lo que es probablemente mucho más serio: a) la teoría tiene, en cualquier caso, un gran número de parámetros (¡ 23 frente a los 19 del modelo standard !); b) la explicación de las diferencias de masas entre las distintas partículas requiere una elección enormemente precisa de los parámetros de los potenciales que actúan sobre los campos de Higgs, lo que presenta además graves problemas cuando se consideran correcciones radiativas; y c) sus predicciones sobre la vida media del protón parecen haberse visto superadas por las cotas experimentales.

Se ha trabajado mucho en el análisis de otros modelos, como aquellos que toman $SU(5)$ como grupo de gauge pero que consideran estructuras de Higgs más complicadas; los que suponen grupos mayores como $SO(10)$, con 45 generadores y en el que todos los fermiones están asignados a una única representación irreducible de dimensión 16 o, sobre todo, los que incluyen supersimetrías.

Afortunadamente, el tratamiento de las interacciones que no conservan el número bariónico en cuanto al estudio de efectos nucleares, no necesita un conocimiento preciso de la teoría de Gran Unificación o de Gran Unificación Supersimétrica que finalmente esté de acuerdo con la experiencia, sino que éstas sólo van a aparecer a través de unas constantes de acoplamiento en lagrangianos efectivos, de modo que los resultados podrán

expresarse en función de estas constantes. En el capítulo siguiente se obtendrán estas interacciones efectivas. Particularizaremos en algunos casos para el modelo mínimo, lo cual en la práctica no supondrá ninguna restricción.

2. Predicciones teóricas sobre la desintegración del protón libre.

Comentaremos en este apartado las predicciones de los estudios sobre la vida media del protón libre^[1-14].

El cálculo de la probabilidad de desintegración del protón consta esencialmente de dos partes. En primer lugar es necesario un lagrangiano que no conserve el número bariónico. Considerando que las energías de todas las partículas que aparecen en este proceso son muchísimo menores que m_c , es posible trabajar con una aproximación de tipo Fermi para la densidad lagrangiana. En el caso de SU(5), la parte que sólo contiene quarks u, d y s es, en ausencia de mezclas de Cabibbo

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{eff}} = \frac{g_c^2}{2m_c^2} \bar{\psi}^{\alpha\beta} & \left\{ \bar{u}_L^c \gamma_\mu u_L \left[\bar{d}_L^{\alpha\beta} \gamma^\mu d_L - \bar{e}_R^{\alpha\beta} \gamma^\mu d_R + \bar{\mu}_L^{\alpha\beta} \gamma^\mu s_L \right. \right. \\ & \left. \left. - \bar{\mu}_R^{\alpha\beta} \gamma^\mu s_R \right] + \bar{u}_L^c \gamma^\mu \bar{d}_L \left[- \bar{e}_L^{\alpha\beta} \gamma_\mu u_L \right] \right. \\ & \left. + \bar{u}_L^c \gamma^\mu \bar{d}_L \left[\bar{d}_R^{\alpha\beta} \gamma_\mu d_R + \bar{s}_R^{\alpha\beta} \gamma_\mu s_R \right] \right\} + h. c. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Sin embargo, aún disponiendo de este lagrangiano o de cualquier otro procedente de un modelo diferente, al no existir los quarks como partículas libres, el cálculo de la probabilidad de desintegración es considerablemente complicado. Para

ello es preciso conocer la estructura interna del protón, así como la de los eventuales mesones producidos. Desgraciadamente, para el tratamiento riguroso del proceso, sería necesario un análisis en el marco de la QCD a bajas energías, lo cual no es nada fácil. Normalmente se toma un modelo simplificado para los hadrones de tipo oscilador armónico o saco, y se incluyen correcciones debidas a las interacciones fuertes a través de un factor de "enhancement" que multiplica al lagrangiano.

Los resultados obtenidos pueden dividirse en los referentes a las intensidades relativas de los diversos canales, y los correspondientes a la intensidad total. Por suerte, en cuanto a las intensidades relativas, es posible encontrar un gran número de relaciones utilizando propiedades de simetría. Así, mediante el simple uso de la invariancia bajo $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ se obtienen (a nivel de operadores de 4 campos fermiónicos) ^[15] algunas como

$$\Gamma(p \rightarrow \bar{u}_R \pi^+) = \frac{1}{2} \Gamma(n \rightarrow \bar{u}_R \pi^0) = \frac{1}{2} \Gamma(p \rightarrow \bar{u}_R \pi^0)$$

Nuevas relaciones pueden encontrarse particularizando para $SU(5)$, aunque un cálculo completo requiere especificar la estructura hadrónica. Por ejemplo, para un modelo de quarks no relativistas, ^[4,10] se deducen para los distintos canales de 2 partículas, las siguientes proporciones:

$p \rightarrow e^+ \pi^+$	37.5	$n \rightarrow e^+ \pi^+$	74.5	
$\rightarrow e^+ \eta$	7	$\rightarrow e^+ \eta'$	4	
$\rightarrow e^+ \zeta^+$	2	$\rightarrow \bar{\nu}_e \pi^+$	7.5	
$\rightarrow e^+ \omega$	15	$\rightarrow \bar{\nu}_e \eta$	1.5	(2.2)
$\rightarrow \bar{\nu}_e \pi^+$	15	$\rightarrow \bar{\nu}_e \omega$	3.5	
$\rightarrow \bar{\nu}_e \eta'$	1	$\rightarrow \bar{\nu}_e \eta'$	3.5	
$\rightarrow \bar{\nu}_e \zeta^+$	1	$\rightarrow \bar{\nu}_e \zeta^+$	0.5	
$\rightarrow \bar{\nu}_e \eta$	0			
$\rightarrow \bar{\nu}_e \omega$	0			

Estas cantidades son, en cualquier caso, muy dependientes del modelo (tanto del de las interacciones que no conservan el número bariónico como del de la estructura de los hadrones)

En cuanto a la vida media total, los resultados son incluso más discordantes. Para el modelo mínimo, las primeras estimaciones de Georgi, Quinn y Weinberg [2] en 1974 eran de $6 \cdot 10^{31}$ años. Estudios posteriores de dispersión profundamente inelástica dieron un valor de la escala de masas del grupo de renormalización de las interacciones fuertes, mucho menor, lo que produjo una reducción de unos dos órdenes de magnitud en las predicciones de la vida media. Los resultados son, no obstante, muy variables incluso en el marco del modelo mínimo, oscilando entre $2 \cdot 10^{20 \pm 2}$ años. Estas cantidades, como veremos en el apartado siguiente, parecen tener serios problemas para explicar los resultados experimentales incluso en el límite superior. [16]

En otros modelos de Gran Unificación los valores de τ_p podrían ser mucho mayores. Así, por ejemplo, en el modelo $SU(3)$ multigeneracional, [14] la masa de las partículas X está entre 1.6 y 20 veces la del modelo mínimo, con lo que τ_p aumenta en un factor entre 7 y $2 \cdot 10^5$. En extensiones Supersimétricas de $SU(5)$, las interacciones representadas en la figura 1 parecen verse fuertemente suprimidas a causa de un aumento en un factor 100 de m_X y, consecuentemente, de 10^3 en la vida media. [13]

Predicen, sin embargo, otros tipos de interacciones, mediadas por nuevas partículas (quarks escalares, gauginos, etc.), que podrían producir desintegraciones de protón a un ritmo observable.

3. Situación experimental.

Los dispositivos experimentales actualmente en funcionamiento consisten en el almacenamiento de una gran cantidad de materia adecuada en un lugar lo más protegido posible de la radiación cósmica, con sistemas muy sensibles de detección. El problema fundamental que aparece en estos experimentos es el del aislamiento de los eventuales candidatos frente a los sucesos producidos por rayos cósmicos. Para paliar en parte esta dificultad, se sitúan los detectores en túneles o minas profundas. A pesar de ello, el número de muones que atraviesan diariamente el detector es grande (entre 1 y 10^5 según el caso). Bastante más graves son las interacciones de los neutrinos atmosféricos (producidos en la desintegración de piones, kaones y muones de rayos cósmicos), imposibles de aventallar y muy difíciles de identificar.

Si excluimos aquellas que por su tamaño sólo pueden considerarse como pruebas para mejorar posteriores equipos, 5 experiencias se encuentran hoy día en funcionamiento [19, 20].

La primera comenzó en 1930 en la mina de oro de Kolar en la India, llevada a cabo por una colaboración indio-japonesa. Este experimento tiene la particularidad de su gran profundidad efectiva, debida además de a su profundidad real, a la naturaleza de la roca (profundidad equivalente a 7000 metros de agua). El detector es de tipo calorímetro, con una masa total de 140 toneladas de hierro. Según datos de hace algo más de un año, se han encontrado 3 candidatos respectivamente en los modos e^+n^+ , $\bar{\nu}_\mu^+$ y μ^+K^0 . Sin embargo, estos sucesos podrían deberse igualmente a interacciones con neutrinos atmosféricos, por lo

que no pueden considerarse definitivamente como desintegraciones de protón.

El segundo experimento, montado en el túnel del Mont Blanc (NUSEX) en una colaboración entre Italia y el CERN, tiene una profundidad algo menor que la de Kolar (5000m de agua) y es también de tipo calorímetro, con un núcleo de hierro de unas 150 toneladas. Sólo un candidato parece cumplir todos los requisitos para poder ser interpretado como una desintegración de protón, concretamente en el canal μ^+K^0 .

Muy diferente es el experimento IMB que se realiza en la mina de sal de Morton (USA) (colaboración de Irvina, Michigan y Brookhaven). El detector es un tanque de agua de 3000 toneladas que funciona como Cerenkov. Debido a su gran masa y relativa poca profundidad (1600m de agua), el sistema está expuesto a un gran número de muones. Según datos publicados recientemente [24] se han detectado 159 eventos de características compatibles con un origen en interacciones con neutrinos atmosféricos, de los cuales 9 también podrían ser debidos a desintegración de nucleones en canales sin neutrinos. Aunque no es posible deducir conclusiones seguras, pueden darse cotas a los diversos modos de desintegración. Entre ellas podemos citar:

$$\begin{array}{ll} p \rightarrow e^+ \pi^+ & 1.2 \cdot 10^{32} \text{ años} \\ n \rightarrow e^+ \pi^+ & 2.5 \cdot 10^{31} \text{ años} \\ p \rightarrow \mu^+ K^0 & 2.9 \cdot 10^{31} \text{ años} \end{array}$$

con un 90% de nivel de confianza según los autores. Con algo menos de seguridad podrían aumentarse sensiblemente estas cotas a base de hacer estimaciones sobre el fondo de neutrinos.

Otro experimento del mismo tipo que el anterior es el KAMIOKANDE situado en la mina de Kamioka en Japón, con un tamaño de aproximadamente la mitad que el IMB pero con una profundidad superior (2700m de agua). Quizá una de sus características más sobresalientes es la gran superficie cubierta por sus fotomultiplicadores. Se han encontrado al menos 4 firmes candidatos según datos del año pasado [20].

También de tipo Cerenkov es el experimento llevado a cabo en la mina de Silver King en Utah (USA) (Colaboración Harvard-Purdue-Wisconsin), con un tamaño algo menor (700 toneladas), y del que aún no hay datos publicados.

Finalmente otro experimento de tipo calorímetro puesto en funcionamiento en 1984 por una colaboración franco-alemana, con 200 toneladas de hierro y 4400 metros de agua equivalente de profundidad, está situado en el túnel de Frejus entre Francia e Italia.

Existen además varios en construcción o proyecto, aparte de previstas mejoras en los actualmente en funcionamiento.

Como conclusiones podemos decir:

1. Aunque no hay resultados definitivos, las intensidades previstas en el modelo mínimo parecen discrepar de los datos experimentales.
2. Las interacciones con los neutrinos atmosféricos son muy importantes para sensibilidades de $\sim 10^{31}$ años, y podrían hacer imposible la detección fiable de desintegraciones (en experimentos terrestres) si la vida media del protón fuera $\sim 10^{33}$ años (la relación entre el número de sucesos interpretables como candidatos y el de inducidos por neu-

trinos parece ser de $1:20^{[19,26]}$).

En cualquier caso, una conclusión definitiva aún no es posible.

Si efectivamente la relación entre sucesos de desintegración de nucleones y de interacciones con neutrinos es muy pequeña, un aumento del tamaño de los detectores probablemente no supondría una gran mejora. Sí puede ser, en cambio, muy importante el aumento de la precisión en la determinación de las características de las partículas procedentes de la desintegración. Pero para que este desarrollo sea eficiente, considerando que la gran mayoría de los nucleones de los detectores (90% en agua y 100% en hierro) se encuentran ligados en núcleos, es absolutamente necesario un estudio detallado de los efectos nucleares sobre la desintegración.

CAPITULO II:

Efectos nucleares sobre la desintegración del protón en un núcleo infinito.

1. Reducción del lagrangiano efectivo a términos de campos de hadrones.

Para realizar un estudio de efectos nucleares sobre la desintegración de nucleones ligados es necesario en primer lugar disponer de un modelo efectivo en el que no aparezcan campos de quarks, ya que de otro modo, los efectos no perturbativos de la QCD prácticamente imposibilitarían el cálculo.

Particularizaremos al caso de la desintegración de un nucleón en un positrón más hadrones^[2,3]. Posteriormente se tratará la generalización a otros canales.

La densidad lagrangiana efectiva capaz de producir este tipo de desintegración se deduce (para el modelo mínimo) de (2.1):

$$\mathcal{L}_{\text{eff}}^{\text{int}}(x) = \frac{g^2 G_V}{2M_N^2} \bar{e}^+(x) p(x) \quad (1.1)$$

donde $p(x)$ es un operador compuesto producto de campos de quarks, que en términos de éstos toma la forma

$$p(x) = \epsilon_{ijk} [\bar{u}_k^c(x) \gamma^\mu \left(\frac{1+\gamma_5}{2} \right) u_j(x)] \gamma_\mu \left(\frac{3+\gamma_5}{2} \right) d_i(x) \quad (1.2)$$

(en la notación de Bjorken-Drell^[24], con $\gamma_5 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$)

Debemos a continuación relacionar el operador $p(x)$ con el campo del protón. Es un problema conocido el del tratamiento de estados ligados en la teoría cuántica de campos convencional^[24], que dista mucho de estar resuelto, por lo que es imposible por el momento encontrar una relación rigurosa, ni siquiera formal, entre el campo definido en (1.2) y el campo del protón. Una posibilidad es seguir un tratamiento que ha dado interesantes resultados en el cálculo de masas de hadrones mediante reglas de suma en Cromodinámica Cuántica^[25,26,11,14], en el que se introducen corrientes de quarks que de alguna forma representen a los hadrones. En particular, para el caso de protón, Ioffe^[26] toma

$$\eta(x) = [\bar{v}_i^c(x) \gamma_\mu u_j(x)] \gamma_5 \gamma^\mu d_k(x) \epsilon_{ijk} \quad (1.3)$$

calculando su elemento de matriz entre el vacío y un estado de protón $|\tilde{p}(\vec{k}, s)\rangle$, de momento \vec{k} y helicidad s , obtiene:

$$\langle 0 | \eta(0) | \tilde{p}(\vec{k}, s) \rangle = \frac{\lambda'}{\sqrt{V}} u_s(\vec{k}) \quad (1.4)$$

donde $u_s(\vec{k})$ es un espinor de Dirac y λ' una constante que calcula a partir de reglas de suma. Esta constante también puede evaluarse mediante un modelo de partículas independientes en cuyo caso $\lambda' = 6\sqrt{2} \Psi(0,0)$, donde $\Psi(0,0)$ es la función de onda espacial cuando los tres quarks están en el mismo punto^[27,12,13].

Por otra parte, de la definición del campo interpolador del protón $\Psi(x)$, se deduce

$$\langle 0 | \psi(0) | \tilde{p}(\bar{k}, s) \rangle = \frac{1}{\sqrt{V}} u_s(\bar{k}) \quad (1.5)$$

y por lo tanto en algún sentido se verifica

$$\eta(x) \approx \lambda' \psi(x) \quad (1.6)$$

El operador $p(x)$ puede escribirse de una forma muy simple en términos de $\eta(x)$, gracias a la antisimetría en índices de color:

$$p(x) = -\frac{1}{4} (3\gamma_5 - 1) \eta(x) \quad (1.7)$$

con lo que el lagrangiano efectivo (1.1) quedaría:

$$\mathcal{L}_{\text{eff}}^{(1)} \approx \frac{g_V^2}{2M_i^2} \bar{e}^+(x) F^{(1)} \psi(x) \quad (1.8)$$

donde

$$F^{(1)} = -\lambda (3\gamma_5 - 1) \quad (1.9)$$

$$(\lambda \approx \lambda'/4)$$

Una interpretación en estos términos de un proceso de desintegración de un protón en un positrón sería el indicado en forma diagramática en la figura 1 : Los 3 quarks se fusionan dando lugar a un positrón. Es lo que suele llamarse término polo.

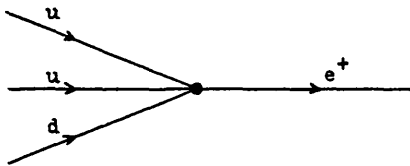


Fig. 1. Diagrama de fusión de tres quarks.

En este punto surge la duda de si efectivamente la densidad lagrangiana (1.3) da lugar a los mismos procesos que (1.1). Más concretamente: ¿está incluido en este tratamiento un diagrama como el de la figura 2, de fusión de 2 quarks?. Desgraciadamente no es posible dar una respuesta definitiva a esta pregunta (que en realidad tampoco está bien definida). Para ello sería necesario un tratamiento adecuado a la dinámica altamente no perturbativa que mantiene a los quarks formando el nucleón.

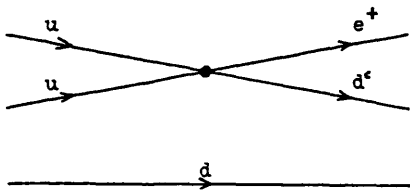


Fig. 2. Diagrama de fusión de dos quarks.

En cualquier caso, los diagramas de las figuras 1 y 2 no son tan diferentes si se consideran las interacciones fuertes entre quarks, así como la necesidad de que en el caso del diagrama de fusión de tres quarks, se haya producido la emisión previa de una partícula para que el cuadrimomento se conserve.

Parece claro que desde un punto de vista relativista, no deberían sumarse a (1.8) términos que den lugar a diagramas de fusión de 2 quarks, ya que esto representaría una doble cuenta. Lo que se pretende; sin embargo, es trabajar en el límite no relativista, en cuyo caso sí puede ser necesaria su inclusión explícita. Es lo que se llama término espectador (ver fig. 4).

Para el caso particular del canal $p \rightarrow e^+ \pi^0$, habría que añadir al 2º miembro de (1.7), un término del tipo

$$F^{(2)} \psi(x) \phi(x) \quad (1.10)$$

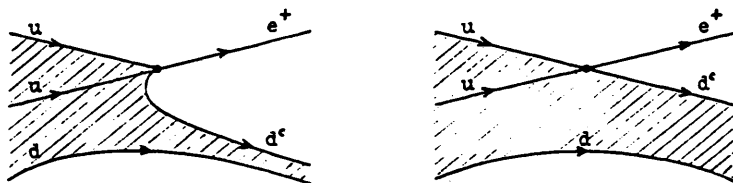


Fig. 3. Comparación del diagrama de fusión de 3 quarks (previa emisión de un mesón) con el de fusión de 2 quarks. Las zonas rayadas representan interacciones fuertes no perturbativas.

donde ϕ es el campo del pión y la matriz $F^{(a)}$ puede calcularse a partir de un modelo para el nucleón y mesón [9,10,13]. En el caso de SU(5)

$$F^{(a)} = i\chi(-3 + \gamma_5) \quad (1.11)$$

χ es una constante que depende del modelo y que en definitiva va a regular la importancia relativa entre los dos procesos. (1.11) puede generalizarse sin dificultad para incluir el proceso $n \rightarrow e^+ \pi^-$, de la forma

$$\sum_{j=1}^3 \sum_{t=1}^2 F^{(a)} \Psi_t^{(a)} \phi^{jt} \tau_{tt}^j \quad (1.11')$$

donde $\{\tau^j\}$ son las matrices de Pauli, y t el índice de isospín para nucleones ($t=1$ protón, $t=2$ neutrón). ϕ^3 es el campo del π^0 y $\phi^{1,2}$ son combinaciones lineales de los del π^+ y π^- .

En rigor, un tratamiento inclusivo del proceso e^+ + hadrones requeriría añadir además términos correspondientes a cada uno de los mesones. Aunque esto podría hacerse sin dificultad, sólo

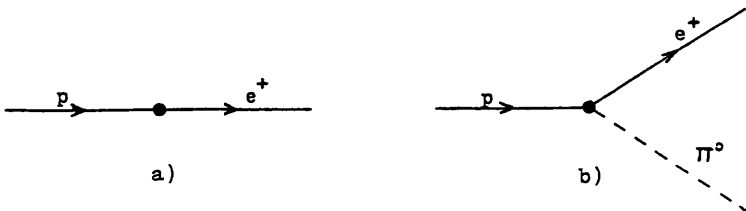


Fig. 4. Diagramas tipo polo (a) y espectador (b), en términos de campos de leptones y hadrones.

detallaremos el análisis de los canales con piones (ver discusión al final de este apartado).

Resumiendo: en una aproximación no relativista para bariones, un lagrangiano efectivo para el estudio de la desintegración del protón en el canal considerado es

$$\mathcal{L}_{\text{eff}}^{\text{int}}(x) \approx \frac{g_{\text{eff}}^2}{2M_p^2} \xi \left\{ \bar{e} F^{(1)} \psi(x) + \bar{e} F^{(2)} \psi(x) \phi(x) \right\} \quad (1.12)$$

Donde ξ es un factor de "enhancement" que se introduce para tener en cuenta efectos de renormalización debidos a interacciones fuertes y electrodébiles. (Esta cantidad, que depende del número de sabores, suele representarse en función de su cuadrado: $A_g(f) = \xi^2$).

Aunque se ha particularizado para SU(5), por razones de invariancia, no hay mucha libertad en la elección de una densidad lagrangiana efectiva del tipo (1.12). Para el acoplamiento de un leptón (l) y un barión (b) de spin 1/2, la única posibilidad (para acoplamientos no derivativos) es

$$\bar{l}(x) F b(x) \quad (1.13)$$

donde F podría ser cualquier matriz combinación lineal de la identidad y de γ_5 .

Para términos de tipo espectador con un campo mesónico (ϕ) sin spin:

$$\bar{l}(x) F b(x) \phi(x) \quad (1.14)$$

donde F nuevamente es del tipo $\alpha + \beta \gamma_5$.

Análogamente, para bosones vectoriales (V), el acoplamiento sería

$$\bar{l}(x) F \gamma_\mu b(x) V^\mu(x) \quad (1.15)$$

(F con las mismas características).

En los apartados siguientes se tomará (1.12) como punto de partida, aunque en los resultados finales, los modelos concretos de Gran Unificación y de estructura de los hadrones sólo influirán a través de unas constantes multiplicativas, que desaparecerán al estudiar los efectos nucleares relativos.

2. Probabilidad de desintegración y funciones de Green.

Estudiaremos a continuación el proceso inclusivo de desintegración de un nucleón (protón o neutrón) ligado en un núcleo, en un positrón y cualquier tipo de estados finales hadrónicos.

Sea un núcleo con A nucleones en un estado de cuadrimento p_A , que se desintegra en un positrón de cuadrimento k y helicidad s , y restos hadrónicos F , de número bariónico $A-1$ y cuadrimento total p_F . Denotando respectivamente los estados inicial y final por $|A\rangle$ y $|e_s, \vec{k}\rangle \times |F\rangle$, la probabilidad de desintegración por unidad de tiempo es

$$\Gamma(A \rightarrow e_s, \vec{k}, F) = 2\pi \delta(p_A^0 - k^0 - p_F^0) \prod_{\vec{p}_h, \vec{k}_h, \vec{p}_F} \delta_{\vec{p}_h, \vec{k}_h, \vec{p}_F} |K e_s, \vec{k}, F | \hat{L}_{\text{eff}}^{\text{int}} | A \rangle|^2 \quad (2.1)$$

(Para normalizar los estados hemos cuantificado en una caja cúbica de volumen V con condiciones de contorno periódicas, de modo que $\vec{p} = 2\pi\vec{n}V^{-1/3}$, $\vec{n} \in \mathbb{Z}^3$).

La interacción (electromagnética) del positrón con el núcleo es completamente despreciable, por lo que puede reducirse este campo:

$$\langle e_{\vec{s}, \vec{k}}^+ F | \bar{e}^+(0) P(0) | A \rangle = \frac{1}{\sqrt{V}} \sqrt{\frac{m_e}{E_{\vec{k}}}} \bar{u}_s(\vec{k}) \langle F | P(0) | A \rangle \quad (2.2)$$

(espinores normalizados a la unidad).

Sumando en las polarizaciones del positrón :

$$\sum_s |\langle e_{\vec{s}, \vec{k}}^+ F | \bar{e}^+(0) P(0) | A \rangle|^2 = \sum_{\alpha\beta} \frac{m_e}{E_{\vec{k}} V} \left(\frac{\gamma^0 (\not{k} + m_e)}{m_e} \right)_{\alpha\beta} \langle A | P_{\alpha}^+(0) | F \rangle \langle F | P_{\beta}(0) | A \rangle \quad (2.3)$$

donde α y β son índices de Dirac. La energía del positrón ($k^0 = \sqrt{\vec{k}^2 + m_e^2} \approx \vec{k}$ por estar en la cara de masas) es mucho mayor que su masa por lo que ésta puede despreciarse.

Para calcular la probabilidad del proceso inclusivo, debemos también sumar en el momento del positrón y sobre todos los estados finales hadrónicos con número bariónico $A-1$. La anchura total correspondiente es

$$\Gamma_A = \sum_{F, \vec{k}, S} \Gamma(A \rightarrow e_{\vec{k}, S}^+ F) \approx \left(\frac{g_{e\gamma}^2}{2M_N^2} \right)^2 A_s(1) V \sum_{\vec{k}} \sum_{\alpha\beta} \left(\frac{\gamma^0 \not{k}}{2k^0} \right)_{\alpha\beta} \Lambda_{\alpha\beta} \quad (2.4)$$

donde

$$\Lambda_{\alpha\beta} = \sum_F 2\pi \delta(k^0 - k^0 - p_F^0) \delta_{\vec{k}, \vec{k} + \vec{p}_F} \langle A | P_{\alpha}^+(0) | F \rangle \langle F | P_{\beta}(0) | A \rangle \quad (2.5)$$

El siguiente paso es efectuar explícitamente la suma sobre estados hadrónicos finales, para lo cual es necesario eliminar la dependencia en p_F que aparece en las δ 's:

$$\sum_F 2\pi \delta(k^0 - k^0_F) \delta_{\vec{p}_A, \vec{p}_F} \langle A | p_{\vec{p}_F}(0) | F \rangle \langle F | R(0) | A \rangle = \int_{\vec{x} \in V} d^3x e^{i\vec{k}\vec{x}} \langle A | e^{-i\vec{k}\vec{x}} p_{\vec{p}_F}(0) e^{i\vec{k}\vec{x}} | F \rangle \langle F | e^{i\vec{k}\vec{x}} R(0) e^{-i\vec{k}\vec{x}} | A \rangle$$

$$= \frac{1}{V} \int_{\vec{x} \in V} d^3x e^{i\vec{k}\vec{x}} \langle A | p_{\vec{p}_F}(\vec{x}) R(\vec{x}) | A \rangle \quad (2.6)$$

donde se ha usado la completitud de estados finales. (Nótese que aunque inicialmente sólo se suma sobre aquellos con $B=A-1$, el operador $p(\vec{x})$ conecta $|A\rangle$ únicamente con estos estados, por lo que la suma puede extenderse para los de cualquier número bariónico sin cambiar el resultado).

Como veremos después, interesa relacionar la probabilidad de desintegración no con un producto de operadores p , sino con un conmutador. Para ello consideremos un término del tipo

$$\tilde{\Lambda}_{\alpha\beta} = \sum_F 2\pi \delta(k^0 - k^0_F) \delta_{\vec{p}_A, \vec{p}_F} \langle A | R(0) | F \rangle \langle F | p_{\vec{p}_F}(0) | A \rangle \quad (2.7)$$

Para poder usar completitud, la suma debe extenderse a todo estado final, pero ahora sólo los estados con $B=A-1$ pueden contribuir. Supongamos que el estado inicial está en reposo con energía m_A . La energía de un estado $|F\rangle$ que no anula (2.7) debe ser mayor que la correspondiente al estado fundamental de un núcleo con número másico $A+1$, luego (2.7) sólo puede ser no nula si $k^0 < m_{A+1} - m_A$. Por otra parte, un razonamiento análogo para $\tilde{\Lambda}_{\alpha\beta}$ muestra que es no nula sólo para $k^0 < m_A - m_{A-1}$. Como $m_{A+1} - m_A \approx m_{A-1} - m_A \approx \frac{m_1}{A}$, podemos añadir $\tilde{\Lambda}_{\alpha\beta}$ con tal de

restringir la suma del trimomento del positrón a $|\vec{k}| \approx k^0 < \frac{m_A}{A}$. El error cometido en este proceso es muy pequeño, ya que la diferencia entre $m_{A+1} - m_A$ y $m_A - m_{A-1}$ es de unos pocos MeV frente a los 10^3 MeV de la masa del protón. Además, como se verá después, la contribución de la zona con k^0 próximo a $\frac{m_A}{A}$ es irrelevante. En cualquier caso, en el límite $A \rightarrow \infty$ el error tiende a cero. Podemos por tanto escribir:

$$\mathcal{L}_{\alpha\beta} \approx \Theta\left(\frac{m_A}{A} - |\vec{k}|\right) \int d^4x e^{ikx} \langle A | [P_\beta^0(-\frac{x}{2}), P_\alpha^0(\frac{x}{2})] | A \rangle \quad (2.3)$$

El cálculo de este elemento de matriz requiere expresar p en términos de campos de hadrones. Tomemos en primer lugar el término polo (1.5):

$$\sum_{\alpha\beta} (\mathcal{J}^\alpha K)_{\beta\alpha} [P_\beta^0(-\frac{x}{2}), P_\alpha^0(\frac{x}{2})] = \sum_{\alpha\beta} \lambda^\alpha (10K + 6\mathcal{J}^\alpha K)_{\beta\alpha} [\bar{\psi}_\beta(-\frac{x}{2}), \psi_\alpha(\frac{x}{2})] \quad (2.4)$$

En la aproximación no relativista para nucleones, la suma en α y β puede restringirse a los valores 1 y 2, con lo que sustituyendo en (2.4):

$$\Gamma_A^{\text{pole}} \approx \left(\frac{g_{\sigma\pi\pi}^2}{2M_A^2}\right)^2 A_N(s) V \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{2k^0} \Theta\left(\frac{m_A}{A} - |\vec{k}|\right) \sum_{\alpha\beta=1}^2 (10K + 6\mathcal{J}^\alpha K)_{\beta\alpha} \lambda^\alpha I_{\beta\alpha}(k) \quad (2.10)$$

$$I_{\beta\alpha}(k) = \int d^4x e^{ikx} \langle A | [\bar{\psi}_\beta^0(-\frac{x}{2}), \psi_\alpha^0(\frac{x}{2})] | A \rangle \quad (2.11)$$

donde se ha usado $\sum_{\alpha\beta=1}^2 \rightarrow \int \frac{d^2z}{(2\pi)^2}$.

Se trata de calcular el valor medio del conmutador de los dos operadores de campo del protón en el estado fundamental

del núcleo. Los campos y estados están definidos en una imagen de interacción donde la perturbación se limita a las fuerzas que no conservan el n° bariónico, mientras que en H^0 se incluye el resto de la dinámica, lo que hace imposible el cálculo exacto (una vez eliminadas las interacciones de Gran Unificación, podemos considerar que trabajamos en una imagen de Heisenberg para las interacciones fuertes). Para un análisis perturbativo, conviene expresar este conmutador en términos de un producto ordenado.

Definamos la función de Green del protón en materia nuclear con cuadrimomento k , como^[23]

$$\tilde{G}_{xp}(k) = -i \int d^4x e^{ikx} \langle \Psi_0 | T[\psi_{nx}(\frac{x}{2}) \psi_p^+(\frac{x}{2})] | \Psi_0 \rangle \quad (2.12)$$

donde $|\Psi_0\rangle$ es el vacío de Heisenberg de materia nuclear, ψ_n es el campo del protón en esta imagen y T es el operador de ordenación temporal.

Desarrollando el producto T se obtiene

$$\int d^4x e^{ikx} \langle \Psi_0 | [\psi_p^+(\frac{x}{2}) \psi_n(\frac{x}{2})] | \Psi_0 \rangle = -i [\tilde{G}_{xp}(k) - \tilde{G}_{pn}^*(k)] \quad (2.14)$$

luego en el límite de materia nuclear homogénea y simétrica ($A \rightarrow \infty$, con spin e isospin totales nulos)

$$I_{xp}(k) = 2 \text{Im} \tilde{G}(k) \delta_{xp} \quad (2.15)$$

para lo que se ha usado la propiedad $\tilde{G}_{xp}(k) = \delta_{xp} \tilde{G}(k)$.^[23]

En este límite además

$$\frac{A}{V} = \frac{2}{3\pi^2} k_F^3 \quad (2.16)$$

donde k_F es el momento de Fermi. En definitiva, la anchura por nucleón para el término polo es

$$\frac{\Gamma_A^{\text{polo}}}{A} = \left[\frac{9G_{\text{WT}}}{4M_\pi^2} A_s(t) 20\lambda^2 \right] \frac{3\pi^2}{2k_F^2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \varphi\left(\frac{m_A}{A} - |\bar{k}|\right) \Gamma_m \tilde{G}(k) \quad (2.17)$$

Por supuesto, podría haberse hecho el cálculo en general para una matriz $F^{ij} = \lambda (a + b \gamma_5)$ con lo que el resultado habría sido idéntico a (2.17) salvo el cambio $10 \rightarrow a^2 + b^2$.

Consideremos a continuación la contribución del otro término de (1.12), así como la interferencia entre ambos.

Un desarrollo análogo da lugar para el término espectador:

$$\Gamma_A^S \approx \left(\frac{9G_{\text{WT}}}{2M_\pi^2} \right)^2 A_s(t) V \int \frac{d^3\bar{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2k_0} \varphi\left(\frac{m_A}{A} - |\bar{k}|\right) \sum_{\alpha, \beta} (10k_\alpha + 6\bar{\sigma}\bar{k})_{\alpha\beta} |k|^2 I_{\rho\alpha}^S(k) \quad (2.18)$$

$$I_{\rho\alpha}^S(k) = \int d^4x e^{ikx} \sum_{i,j=1}^2 \sum_{\lambda,\lambda'=1}^3 \tau_{i\lambda}^j \tau_{\lambda'j}^{i\rho} \langle N | [\mathcal{P}_{\rho\lambda}(t) \phi_\mu^j(t)] [\mathcal{P}_{\lambda'\lambda}(t) \phi_\nu^i(t)] | A \rangle \quad (2.19)$$

Definiendo

$$\tilde{G}_{\rho\alpha}^S(k) = -i \int d^4x e^{ikx} \sum_{i,j=1}^2 \tau_{i\lambda}^j \tau_{\lambda'j}^{i\rho} \langle \Psi | T [\mathcal{P}_{\rho\lambda}(t) \phi_\mu^j(t)] [\mathcal{P}_{\lambda'\lambda}(t) \phi_\nu^i(t)] | \Psi \rangle \quad (2.20)$$

se obtiene en el límite de materia nuclear

$$I_{\rho\sigma}^s(k) = -i [\tilde{G}_{\rho\sigma}^s(k) - \tilde{G}_{\rho\sigma}^{s*}(k)] \quad (2.21)$$

Para probar que la función \tilde{G}^s también es diagonal en spin, puede seguirse el mismo razonamiento que para una función de Green usual^[28]: en materia nuclear homogénea e isótropa, la única dirección privilegiada es la definida por \vec{k} , luego \tilde{G}^s en el espacio de spin, sólo puede ser una combinación lineal de la identidad y de $\vec{\sigma} \cdot \vec{k}$. Si además suponemos que tanto el vacío como el hamiltoniano son invariantes bajo paridad (nótese que las interacciones débiles no juegan ningún papel), de la definición (2.20) se deduce que \tilde{G}^s es un escalar bajo paridad y, por lo tanto, múltiplo de la identidad en espacio de spin.

Finalmente el término de interferencia da lugar a un nuevo sumando para la anchura total:

$$I_A^{int} \approx \left(\frac{g_{int}}{2M_A}\right)^2 \frac{1}{V} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2k} \Theta\left(\frac{E_A - |k|}{2k}\right) \sum_{\lambda} \left\{ (E_A + i0\epsilon)^{-1} \chi^{\lambda}(k) \right\} I_{\rho\sigma}^{int}(k) \quad (2.22)$$

$$I_{\rho\sigma}^{int}(k) = \int d^4x e^{ikx} \sum_i \sum_j \tau_{ij}^{\rho\sigma} \langle A | [\psi_{\rho\sigma}(x) \psi_{\rho\sigma}^\dagger(x) \psi_{\rho\sigma}(x) \psi_{\rho\sigma}^\dagger(x)] | A \rangle \quad (2.23)$$

No conviene ahora definir una función de Green simplemente como producto ordenado de los tres campos, ya que por aparecer un único campo de pion sería un pseudoescalar. Para que la función sea diagonal en espacio de spin, incluiremos un factor $\vec{\sigma} \cdot \vec{k}$ en la definición:

$$\tilde{G}_{\rho\sigma}^{int}(k) = -i \int d^4x e^{ikx} \sum_{ij} \tau_{ij}^{\rho\sigma} \langle A | T [\psi_{\rho\sigma}(x) (\vec{\sigma} \cdot \vec{k}) \psi_{\rho\sigma}^\dagger(x) \psi_{\rho\sigma}(x) \psi_{\rho\sigma}^\dagger(x)] | A \rangle \quad (2.24)$$

con lo que en el límite de materia nuclear

$$\sum_{\beta\pi} i \frac{\bar{\sigma}_{\alpha\beta} \bar{k}}{k^0} I_{\rho\sigma}^{int} = 2 \text{Im} \tilde{G}^{int}(k) \delta_{\alpha\beta} \quad (2.25)$$

En resumen, la anchura total por partícula para el canal considerado será

$$\frac{\Gamma_A}{A} = \left(\frac{3G_T}{4M^2} \right) A_8(H) 2G \frac{3\pi^2}{2M^2} \left(\frac{2\pi}{M} \right)^3 \left(\frac{m_A}{M} - 1 \right) \left[\lambda^2 \text{Im} \tilde{G}(k) + M^2 \text{Im} \tilde{G}^2(k) + 2\lambda^2 \text{Im} \tilde{G}^2(k) \right] \quad (2.26)$$

Aunque en la deducción de (2.25) se ha particularizado para el modelo mínimo, puede generalizarse sin dificultad a otros modelos en los cuales únicamente cambiarían las matrices F . No nos detendremos en este punto ya que no va a tener ninguna relevancia por no influir en el efecto nuclear relativo.

Destaquemos que, si bien para llegar a la relación (2.25) se han hecho diversas aproximaciones, ninguna de ellas se refiere directamente a las interacciones fuertes entre hadrones, en principio incluidas a todo orden a través de la evolución temporal de los operadores de campo que aparecen en las definiciones de las funciones de Green. Aunque en la práctica sólo será posible un cálculo perturbativo de estas funciones, en muchos casos se podrán sumar conjuntos infinitos de diagramas, o incluso utilizar resultados exactos de la Teoría de Muchos Cuernos. Esto contrasta con tratamientos como los de Dover et al. [30] o Kurthy y Jaffe [31], esencialmente de primer orden. Como veremos en el capítulo siguiente, los efectos nucleares son lo suficientemente intensos como para que términos de

orden superior sean importantes.

Con objeto de simplificar la presentación, detallaremos el desarrollo principalmente para el término polo, que según muchos autores [25, 26, 27, 28] es el más importante. Veremos después que la generalización al resto es inmediata.

Aunque siempre se hablará del positrón final, todo el cálculo se mantiene para canales con neutrinos, que según la tabla (I.2.2) suponen un 10% del total y que son los dominantes en algunos modelos supersimétricos [19, 20], con un simple cambio de una constante multiplicativa. En cuanto a canales con muones, la única variación necesaria será no despreciar su masa frente a la energía total. No obstante, en el caso concreto de un canal $N \rightarrow \mu^+ \pi$, la energía del muón es lo suficientemente grande como para que el término de masa sea muy poco importante, especialmente en cuanto al efecto nuclear relativo.

Para la generalización a canales con otros mesones, en primer lugar sería necesario incluir otros acoplamientos, que para términos de tipo espectador tendrían la forma (1.13) o (1.14) en los que cada uno de los mesones aparece explícitamente. En cuanto a los de tipo polo, en algunos casos también habría que añadir acoplamientos de la forma (1.12) con campos de bariones extraños. En definitiva bastaría con sumar a la expresión (2.25) cada una de las nuevas contribuciones. Muy diferente sería, en cambio, el cálculo de las funciones de Green, por serlo la interacción de cada mesón con el núcleo. Además del pión, hay esencialmente dos clases de mesones de interés. Por una parte el ω , que interacciona fuertemente con el núcleo y es muy masivo (783 MeV) lo que hace que los efectos nucleares sobre los canales con estas partícu

las puedan ser importantes y sobre todo muy distintos a los del caso con piones. Aunque un análisis de estos efectos podría llevarse a cabo perfectamente con nuestro formalismo, debido a su limitada importancia en la mayoría de los modelos, no lo consideraremos.

Por el contrario las desintegraciones con kaones, aunque están favorecidas en algunos modelos supersimétricos, apenas se ven modificadas por la presencia del núcleo, ya que la propagación de los eventuales kaones producidos (K^+ y K^0) es prácticamente libre, pues no pueden interactuar con nucleones dando lugar a hiperones de 3 quarks (recuérdese que la composición de quarks del K^+ y K^0 es respectivamente $(u\bar{s})$ y $(d\bar{s})$). En definitiva, los efectos nucleares se limitarían esencialmente a la dispersión debida al movimiento de Fermi.

Estudiaremos en los apartados siguientes los efectos nucleares sobre la desintegración de nucleones en el canal $e^+ + \pi^0$ (π^+). Restringiéndonos al análisis de estos canales, no será necesario considerar interacciones con otros mesones, que sólo influirían de forma indirecta. Es importante hacer notar que en los cálculos expuestos a continuación, van a aparecer en muchos casos funciones de Green con energías y momentos muy diferentes de los habituales no ya en la Física Nuclear más clásica, sino incluso en la mayoría de los cálculos de piones en núcleos. Efectivamente, los momentos típicos serán del orden de $m_p/2$, y las energías correspondientes frecuentemente estarán muy alejadas de la capa de masas. Por esta razón, es difícil extrapolar resultados hallados en otros contextos.

En la mayoría de los cálculos usaremos el modelo del "Cloudy Bag" (CB) para las interacciones pión-nucleón.

3. Estudio del límite libre.

En primer lugar, con objeto de aislar los efectos nucleares, estudiaremos el límite libre para el término polo. Este caso puede tratarse perfectamente con el formalismo de funciones de Green en sistemas de muchos cuerpos, haciendo tender a cero el momento de Fermi. En este límite, las diversas partículas del mar estarán infinitamente separadas y se comportarán como libres.

La función de Green del protón, sumando la serie de Dyson correspondiente, puede escribirse en términos de la autoenergía propia como ^[28,29]

$$\tilde{G}(k) = \frac{1}{\tilde{G}^{(0)}(k) - \Sigma^+(k)} \quad (3.1)$$

Si $k_F \rightarrow 0$, la probabilidad de excitación de pares partícula-hueco tiende a cero, de modo que los únicos diagramas que contribuyen a Σ^+ son del tipo de los representados en la figura 5 (nótese que se considera una aproximación no relativista

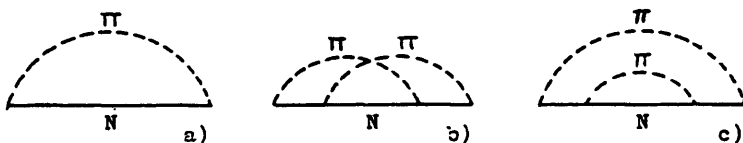


Fig. 5. Diagramas de autoenergías para un nucleón en el límite libre.

para los nucleones). Los de orden superior (b,c,..) corresponden a efectos como renormalización de vértices o a desintegraciones multipiónicas que no consideraremos. Limitándonos al diagrama a), su contribución a la autoenergía es

$$\Sigma(k) = \frac{3j_1^2}{\mu^2} \frac{1}{2\pi^2} \tilde{D}^{(0)}(q) \left[\tilde{G}^{(0)}(k-q) + \left(\frac{2j_1^2}{3f} \right) \tilde{\Delta}^{(0)}(k-q) \right] \tilde{u}^2(\bar{q}) \quad (3.2)$$

donde $\tilde{D}^{(0)}$, $\tilde{G}^{(0)}$ y $\tilde{\Delta}^{(0)}$ son respectivamente los propagadores libres del pión, nucleón e hiperón delta:

$$\tilde{D}^{(0)}(q) = \frac{1}{q^2 - \bar{q}^2 - \mu^2 + i\epsilon} \quad (3.3)$$

$$\tilde{G}^{(0)}(q) = \frac{1}{q^2 - m_p^2 - \frac{\bar{q}^2}{2m_p} + i\epsilon + i\eta(1-\bar{q}^2-k^2)} \quad (3.4)$$

$$\tilde{\Delta}^{(0)}(q) = \frac{1}{q^2 - m_\Delta^2 - \frac{\bar{q}^2}{2m_\Delta} + i\epsilon} \quad (3.5)$$

(μ , m_p y m_Δ son respect. las masas del pión, nucleón y delta (en general supondremos que éstas no dependen de la tercera componente de isospín))

$u(\bar{q})$ es el factor de forma de CEM:

$$u(\bar{q}) = \frac{3j_1(R_0 \bar{q})}{4\bar{q} R_0} \quad , \quad R_0 = 0.92 F \quad (3.6)$$

con $j_1(x)$ la función de Bessel esférica de orden 1, y f y f^* son las constantes de acoplamiento $N\pi\pi$ y $N\Delta\pi$. El factor 3 proviene de la suma sobre isospín.

La integral en energía puede calcularse por residuos:

$$\sum_{(k)} \frac{3}{4\pi} \left(\frac{4\sqrt{q}}{k^2} \right) u^2(q) \frac{q^2}{2\omega_q} \left[\frac{\Phi(k_0 - \bar{p})}{k^2 - \omega_q - m_p - \frac{p^2}{2m_p}} + \frac{\Phi(|\bar{p}| - k_0)}{k^2 - \omega_q - m_p - \frac{p^2}{2m_p}} + \left(\frac{q^2}{k^2} \right) \frac{1}{k^2 - \omega_q - m_p - \frac{p^2}{2m_p}} \right] \quad (3.7)$$

donde $\bar{p} \equiv \bar{k} - \bar{q}$ y $\omega_q \equiv \sqrt{\bar{q}^2 + \mu^2}$.

Consideremos en primer lugar la parte imaginaria de Σ :

$$\text{Im} \Sigma(k) = \frac{3}{4\pi} \left(\frac{4\sqrt{q}}{k^2} \right) u^2(q) \frac{q^2}{2\omega_q} \Phi(k_0 - |\bar{p}|) \pi \delta(k^2 - m_p^2 + \omega_q - \frac{p^2}{2m_p}) \quad (3.8)$$

en el límite $k_p \rightarrow 0$

$$\text{Im} \Sigma(k) = \frac{3}{4\pi} \frac{u^2(q)}{k^2 m_p} \delta(k^2 - \bar{q}) k_p^3, \quad \bar{q} = \frac{m_p^2 - \mu^2}{2m_p} \quad (3.9)$$

En cuanto a la parte real, en este límite, tras efectuar las integrales angulares

$$\text{Re} \Sigma(k) = \frac{3}{4\pi} \frac{1}{k^2} \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\infty} u^2(q) \frac{q^2}{2\omega_q} \left\{ -\frac{m_p}{|\bar{q}|} \log \left[\frac{k^2 - \omega_q - m_p - \frac{(\bar{p} \cdot \bar{q})^2}{2m_p}}{k^2 - \omega_q - m_p - \frac{(\bar{p} \cdot \bar{q})^2}{2m_p}} \right] - \frac{m_p}{|\bar{q}|} \log \left[\frac{k^2 - \omega_q - m_p - \frac{(\bar{p} \cdot \bar{q})^2}{2m_p}}{k^2 - \omega_q - m_p - \frac{(\bar{p} \cdot \bar{q})^2}{2m_p}} \right] \right\} - \delta m \quad (3.10)$$

donde δm es el contratérmino (finito gracias a la presencia del factor de forma) que hace que la autoenergía en la capa de masas sea cero:

$$\delta m = \text{Re} \sum_{k=0}^{\infty} \left(m_p + \frac{k}{2m_p} \bar{x} \right) \quad (3.11)$$

La presencia de una parte real no nula incluso cuando $k_p \rightarrow 0$ es, por tanto, debida a que el cuadrinomento k corresponde a un protón fuera de la capa de masas.

Despreciando $\text{Im} \Sigma$ (de orden k_p^2) frente a $\tilde{G}^{(0)}(k) - \text{Re} \Sigma(k)$

$$\text{Im} \tilde{G}(k) = \frac{1}{(\tilde{G}^{(0)}(k) - \text{Re} \Sigma(k))^2} \text{Im} \Sigma(k) \quad (3.12)$$

sustituyendo en 2.17, obtenemos para la anchura del proceso $p \rightarrow e^+ \pi^0$ (promediado con el $n \rightarrow e^+ \pi^+$)

$$\frac{\Gamma_A(k=0)}{A} = \left[\frac{(\tilde{G}^{(0)}(k))}{2M_A^2} \right]^2 A_3(W) 20\lambda^2 \left[\frac{3}{4} \frac{1}{\pi} \frac{x^2(\tilde{q}) \tilde{q}^2}{m_p p^2} \frac{1}{(k^2 - m_p^2 - \frac{k^2}{2m_p} - \text{Re} \Sigma(k))^2} \right] \quad (3.13)$$

$(k^2 = |k| = \tilde{q}^2 + \frac{m_p^2 - m^2}{2m_p})$

La cantidad de interés es la relación entre la anchura en el núcleo y la anchura libre:

$$R = \frac{\frac{\Gamma_A}{A}}{\frac{\Gamma_A}{A} (k=0)} = \int_0^{\frac{m_A}{2}} dk r(k) \quad (3.14)$$

donde:

$$r(k) = N \left(\frac{2k}{m_A} \right)^{-1} 4\pi k^2 \text{Im} \tilde{G}(k) \quad (3.15)$$

$$N = \frac{3 \left[\tilde{q}^2 - m_p^2 - \frac{\tilde{q}^2}{2m_p} - \text{Re} \Sigma(\tilde{q}) \right]^2 m_p}{4 \tilde{q}^2 x^2(\tilde{q})} \quad (3.16)$$

Nótese que la expresión (3.15) ya es independiente del modelo de Gran Unificación, así como de la estructura interna de los hadrones (salvo a través de los factores de forma y constantes de acoplamiento de las interacciones fuertes).

En vez de la expresión original del factor de forma (3.6), usaremos un ajuste exponencial que prácticamente coincide con él en la zona de interés^[31]:

$$u(\bar{q}) = \exp(-0.106 \bar{R}_3^2 \bar{q}^2), \quad \bar{R}_3 = 0.82F \quad (3.17)$$

con el que, tras la integración numérica de (3.10), se obtiene

$$\text{Re} \sum_{k=0}^{\infty} (\tilde{k}) = 146. \text{ MeV} \quad (\tilde{k} = 459. \text{ MeV}) \quad (3.13)$$

y finalmente

$$\mathcal{N} = 3.337 \cdot 10^{-9} \text{ MeV}^{-4} \quad (k_F = 269. \text{ MeV}) \quad (3.19)$$

4. Parte real de la autoenergía.

Como se ha visto en el apartado anterior, hay una contribución importante a la parte real de la autoenergía, a causa de que el protón está muy lejos de la capa de masas. En el caso nuclear, existe otra contribución debida a las interacciones con el resto de los nucleones. Sin embargo, la influencia de la parte real sobre la vida media sólo se produce de una forma

secundaria, a través de diagramas de orden superior, como veremos a continuación.

Escribamos la parte imaginaria de la función de Green del protón de la forma:

$$\text{Im } \tilde{G}(k) = \frac{\text{Im } \Sigma^*(k)}{[\tilde{G}^{(0)}(k) - \text{Re } \Sigma^*(k)]^2 + [\text{Im } \Sigma^*]^2} \quad (4.1)$$

Puede verse con cálculos explícitos que $[\text{Im } \Sigma^*]^2$ es despreciable frente a $[\tilde{G}^{(0)} - \text{Re } \Sigma^*]^2$, con lo que

$$\text{Im } \tilde{G}(k) = \frac{1}{[1 - \text{Re } \Sigma^*(k) \cdot \tilde{G}^{(0)}(k)]^2} \left\{ \tilde{G}^{(0)}(k) \text{Im } \Sigma^*(k) \tilde{G}^{(0)}(k) \right\} \quad (4.2)$$

El término entre llaves es exactamente la contribución del diagrama a) de la figura 6, de modo que la parte real, en definitiva, sólo tiene en cuenta correcciones debidas a los diagramas b, c, Por esta razón centraremos la atención en el estudio de la parte imaginaria de la autoenergía.

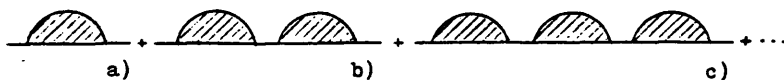


Fig. 6. Serie de Dyson para la función de Green del protón. La zona rayada representa la autoenergía propia.

Por no ser necesario un cálculo muy preciso para $\text{Re}\bar{\Sigma}^+$, haremos una estimación basada en el diagrama de primer orden (fig 5a) y en el potencial medio nuclear.

Del análisis numérico de la ecuación 3.7, se deduce que $\text{Re}\bar{\Sigma}$ para el diagrama 5a apenas depende de la densidad nuclear por lo que podemos tomar el límite $k_F \rightarrow 0$. Además, su dependencia en el momento es muy suave. En efecto, en el intervalo $[300, 700 \text{ MeV}]$ sólo oscila un 2% alrededor del valor (3.3). Supondremos que la contribución a $\text{Re}\bar{\Sigma}$ debida a la salida de la capa de masas es una cantidad constante igual a la correspondiente al caso $k_F = 0$. (Nótese que además de ser pequeña la influencia de $\text{Re}\bar{\Sigma}$ sobre $\bar{\Lambda}$ en términos absolutos, aún lo es menos en cuanto a los efectos nucleares relativos, pues la contribución principal, debida a la salida de la capa de masas, se da igualmente en el nucleón libre. Esto es importante, ya que un cálculo preciso de $\text{Re}\bar{\Sigma}$ requeriría un análisis mucho más detallado, incluyendo contribuciones de los diversos mesones, así como correcciones relativistas.)

El otro efecto a considerar es el del potencial medio que sí tiene un origen puramente nuclear. No obstante, su importancia es limitada debido a que la energía potencial de un nucleón en un núcleo es de sólo unas decenas de MeV, frente a los centenares de MeV de las energías del pión y positrón. Esta energía potencial es dependiente del momento. Aunque en el caso de estados ligados es posible tratar esta dependencia como una variación de la masa efectiva, mediante una aproximación cuadrática en el momento (del potencial), esto no parece posible en nuestro caso ($|\bar{k}| = \frac{m\omega}{\hbar}$ y $k_F^2(k_F)$). Tomaremos como energía potencial media -50 MeV , que es aproximadamente la de los nucleones en la superficie de la esfera de Fermi. En cualquier

caso, insistimos, posibles variaciones no tendrán consecuencias importantes.

Resumiendo: supondremos una parte real constante $\text{Re}\Sigma = (146.-50.)\text{MeV} = \Sigma_1$, con lo que la parte imaginaria de la función de Green será

$$\text{Im}\tilde{G}(k) \approx \left(\frac{1}{\mu - m_p - \frac{1}{i\eta} - \Sigma_1} \right)^2 \text{Im}\Sigma(k) \quad (4.3)$$

5. Cálculo de la parte imaginaria de la autoenergía.

A partir de este momento, concentraremos nuestros esfuerzos en el estudio de la parte imaginaria de la autoenergía. Más concretamente, nos limitaremos al análisis de diagramas como el representado genéricamente en la figura 7; es decir, diagramas de autoenergía con un pión renormalizado por el medio.

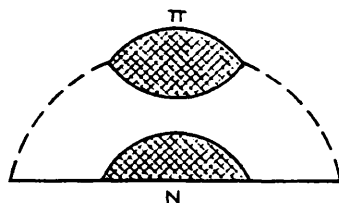


Fig. 7. Diagramas de autoenergía con el pión renormalizado por el medio. Las zonas rayadas representan inserciones de polarización y autoenergía.

En el propagador del nucleón pueden incluirse sin dificultad los efectos del potencial nuclear medio. Estos diagramas constituyen la generalización del diagrama 5a para el caso nuclear.

La autoenergía correspondiente es

$$\Sigma^*(k) = \frac{3i^2}{\mu^2} \left(\frac{d^4q}{(2\pi)^4} \right) \tilde{D}(q) \left[\tilde{G}(k-q) + \left(\frac{d^4l}{(2\pi)^4} \right) \tilde{\Delta}(k-l) \right] \tilde{q}^2 u^2(q) \quad (5.1)$$

donde $\tilde{D}(q)$, $\tilde{G}(q)$ y $\tilde{\Delta}(q)$ son los propagadores "exactos" del pión nucleón y delta respectivamente. (5.1) en principio es muy difícil de evaluar ya que la integral en energía se extiende de $-\infty$ a $+\infty$, cubriendo la zona de piones acústicos ($|q^0|$ pequeño) lo que presenta serios problemas de cálculo. Una integral por residuos no es posible debido a que el propagador del pión tiene cortes de analiticidad en los dos semiplanos (ver figura 3).

Supondremos que el propagador del nucleón (interno) es de la forma:

$$\tilde{G}(q; \bar{q}) = \frac{1}{q^2 - m_p^2 - \frac{q^2}{2m_p} - \Sigma^V(\bar{q}) - i\epsilon} \quad (5.2)$$

donde $\Sigma^V(\bar{q})$ es la autoenergía debida al potencial nuclear medio (estático). Cuando $|\bar{q}| > k_F$, q^0 tiene un polo en el semiplano inferior (en $m_p + \frac{q^2}{2m_p} + \Sigma^V(\bar{q}) - i\epsilon$), mientras que si $|\bar{q}| < k_F$, el polo se encuentra en el semiplano superior. In cuanto al propagador de la delta, presumiremos un comportamiento de quasipartícula; es decir, tiene un único polo con

$\text{Re } q^0 \sim m_A$, $\text{Im } q^0 < 0$ ($\text{Im } q^0$ puede ser una cantidad finita).

En el caso de la función $\tilde{G}(k-q)$, los polos estarían en

$$\text{Re } q^0 = k^0 - \left(m_p + \frac{q^2}{2m_p} + \Sigma(\bar{q}) \right)$$

que es en general negativo (recuérdese que $k^0 < m_A/A$). Análogamente, los polos de $\tilde{\Delta}(k-q)$ se situarían en $\text{Re } q^0 \sim k^0 - m_A < 0$.

Para el propagador del pión conviene no hacer aproximaciones por el momento, ya que va a ser el responsable de los efectos nucleares más importantes. Tomaremos \tilde{D} como el propagador exacto, y estudiaremos sus propiedades de analiticidad mediante la representación de Lehmann. Se demuestra que la función de Green de un pión (exacta) en materia nuclear puede escribirse como [29]

$$\tilde{D}(q^0, \bar{q}) = \int_0^\infty dE P(E, \bar{q}) \left\{ \frac{1}{q^0 - E - i\epsilon} - \frac{1}{q^0 + E - i\epsilon} \right\} \quad (5.3)$$

donde $P(E, \bar{q}) \geq 0$. Supondremos además que no existe condensación de piones, para lo que $P(E, \bar{q})$ debe anularse en un entorno de $E=0$. (La aparición de un polo en el propagador del pión a energía cero daría lugar a un fenómeno de creación de piones sin coste energético, de modo que se produciría una condensación de Bose [42]. Esto requeriría una modificación del formalismo para poder tratar el estado condensado [29]. En cualquier caso, el fenómeno de condensación de piones sólo puede ocurrir a densidades mayores que la nuclear [43-45], por lo que no lo consideraremos). De la expresión (5.3) se deduce que $\tilde{D}(q^0)$ es analítica en todo el plano salvo dos cortes en el 2º y 4º cuadrante

tes, paralelos al eje real a una distancia ϵ (ver fig. 8).

Para calcular la integral en energía haremos una rotación de Wick, de modo que se transforme en una integral en el eje imaginario, más (eventualmente) la contribución del polo de \tilde{G} :

$$\begin{aligned} \sum^* (k) = & \frac{3f^2}{\mu^2} \left(\frac{d\tilde{t}}{i2\pi} \right) \int_0^{\infty} dt \tilde{D}(t, \tilde{q}) \left[\tilde{G}(k^2 - t, \tilde{k} - \tilde{q}) + \left(\frac{t}{\tilde{q}^2} \right) \tilde{\Delta}(k^2 - t, \tilde{k} - \tilde{q}) \right] \tilde{q}^2 u(t, \tilde{q}) \\ & - \frac{3f^2}{\mu^2} \left(\frac{d\tilde{t}}{i2\pi} \right) \tilde{D}(\tilde{q}^2, \tilde{q}) \tilde{q}^2 u(\tilde{q}^2) \Theta(k_0 - |\tilde{k} - \tilde{q}|) \Big|_{\tilde{q}^2 = k^2 - m_\pi^2 - \frac{(E_0)^2}{2m_p} - \sum^*(\tilde{k} - \tilde{q})} \end{aligned} \quad (5.4)$$

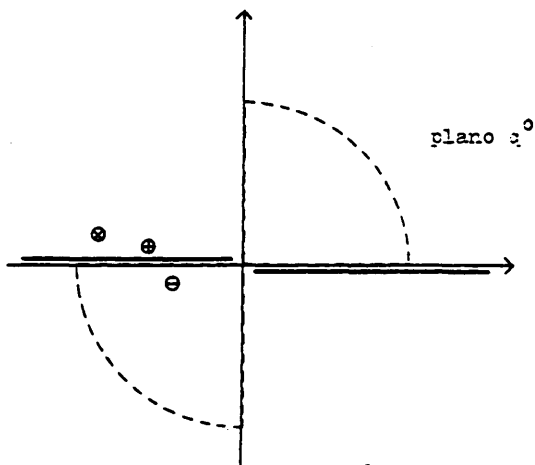


Fig. 8. Polología del integrando en q^0 de la ec. (5.1). Para los propagadores del nucleón y delta, se ha supuesto un comportamiento de cuasipartícula. \bullet es el polo de $\tilde{\Delta}(k-q)$, \circ es el de \tilde{G} cuando $|\tilde{k}-\tilde{q}|=k$, y \ominus es cuando $|\tilde{k}-\tilde{q}|=k_0$. Las líneas gruesas son los cortes del propagador del pión y la línea discontinua el contorno de integración.

Aunque la integral en el eje imaginario es más fácil de tratar numéricamente gracias a la ausencia de polos y cortes próximos, aún presenta serios problemas debidos por una parte a que la longitud del intervalo de integración es infinita (también lo es para las integrales en q_1), y por otra a que incluye zonas con $|q^0| \ll 1$, lo que en definitiva supondría un resultado muy sensible al modelo elegido para estudiar la física de piones acústicos. Afortunadamente, el problema no es en realidad tal, ya que, como veremos seguidamente, la integral sobre el eje imaginario sólo contribuye a la parte real de la autoenergía y, por tanto, su importancia es muy limitada.

Para $q^0 = -it$

$$\tilde{D}(q, \bar{q}) = \int_0^{\infty} dE \rho(E, \bar{q}) \frac{1-E}{-t^2 - E^2} \in \mathbb{R} \quad (5.5)$$

Por otro lado, de la representación de Lehmann para \tilde{G} , se deduce

$$\tilde{G}(q, \bar{q}) = \int_0^{\infty} dE \left[\frac{A(E, \bar{q})}{q^0 - E - \mu_a - i\epsilon} + \frac{B(E, \bar{q})}{q^0 - E - \mu_a + i\epsilon} \right] \quad (5.6)$$

donde μ_a es el potencial químico (a orden 0: $\mu_a = \epsilon_F^a + \epsilon_p$), y A y B son funciones positivas. Para una energía $k^0 = -it$,

$$\tilde{G}(k^0 = -it, \bar{k} = \bar{q}) = \int_0^{\infty} dE \left[\frac{A(E, \bar{k})}{k^0 - i\epsilon - \mu_a - E} + \frac{B(E, \bar{k})}{k^0 - i\epsilon - \mu_a + E} \right] \quad (5.7)$$

de lo que se deduce inmediatamente que $\text{Im } \tilde{G}(k^0 = -it, \bar{k} = \bar{q})$ es impar bajo $t \rightarrow -t$. Como \tilde{D} es par bajo el mismo cambio, la

parte imaginaria de la integral en t es nula. (Nótese que para llegar a esta conclusión no se ha hecho la aproximación (5.2)). De forma análoga se anula el término en \tilde{A} .

Escribiendo \tilde{D} en función de la polarización propia mediante la suma de la correspondiente serie de Dyson, la parte imaginaria de la autoenergía del diagrama considerado es

$$\text{Im} \Sigma(k) = -\frac{3i}{\lambda^2} \int_0^{\tilde{k}} \Theta(k, \tilde{k}-\tilde{q}) \tilde{q}^3 \tilde{u}(\tilde{q}) \text{Im} \frac{1}{\tilde{q}^2 \tilde{q}^2 - \tilde{\Pi}^2(\tilde{q}, \tilde{q}) - i\epsilon} \Big|_{\tilde{q}^2 = k^2 - m_p^2 - \frac{(\tilde{k})^2}{2m_p} - \sum_{\tilde{q}} \tilde{q}^2} \quad (5.8)$$

Aún aparecen en la ecuación (5.8) 3 integrales. Una de ellas (en el ángulo azimutal) es trivial. La integral en el ángulo $\hat{k}\hat{q}$, en principio, no puede calcularse analíticamente debido a la dependencia a través de \tilde{q}^0 . Al ser $|\tilde{k}-\tilde{q}|k$, el término $(\tilde{k}-\tilde{q})^2/(2m_p) - \sum'(\tilde{k}-\tilde{q})$ representa la energía de un estado del mar de Fermi. Como esta cantidad es muy pequeña frente a $k^0 - m_p$, puede sustituirse con gran aproximación por su valor medio sobre todos los estados del mar. De este modo, ya es posible integrar explícitamente en $\hat{k}\hat{q}$ con lo que resulta finalmente:

$$\text{Im} \Sigma(k) = -\frac{3i}{\lambda^2} \int_0^{\tilde{k}} \tilde{q}^3 \tilde{u}(\tilde{q}) \Theta(|\tilde{k}-\tilde{q}|) \text{Im} \frac{1}{\tilde{q}^2 \tilde{q}^2 - \tilde{\Pi}^2(\tilde{q}, \tilde{q}) - i\epsilon} \quad (5.9)$$

donde:

$$\begin{aligned} \tilde{q}^0 &\equiv k^0 - \tilde{m} \\ \tilde{m} &= \langle m_p - \frac{(\tilde{k}-\tilde{q})^2}{2m_p} - \sum'(\tilde{k}-\tilde{q}) \rangle \end{aligned} \quad (5.10)$$

$$\Theta(k_1, P_1) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-1}^1 d(\cos(\hat{n}\hat{q})) \Theta(k_F - |\vec{k} - \vec{q}|) = \frac{1}{4\pi^2} \begin{cases} 2 & \text{si } |\vec{n} + \vec{q}| \leq k_F \\ 0 & \text{si } |\vec{n} - \vec{q}| > k_F \\ \frac{k_F^2 - (|\vec{n} + \vec{q}|)^2}{2|\vec{n}\vec{q}|} & \text{caso } \end{cases} \quad (5.11)$$

(Nótese que por la presencia de la función Θ el integrando se anula para $q > |\vec{k}| + k_F$).

6. Polarización del pión.

Consideraremos en primer lugar la contribución a la polarización del diagrama de creación de un par nucleón-hueco (fig. 5). Aplicando las reglas de Feynman ^[29, 47]

$$\Pi_{\mu}^{ij}(q) = (-i) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \sum_{\alpha, \beta} (\vec{q}, \vec{k})_{\alpha} (\vec{k}, \vec{q})_{\beta} \chi_{\alpha}^i \chi_{\beta}^j \int \frac{d^4k'}{(2\pi)^4} \mathcal{G}^{\mu}(i, q) \quad (6.1)$$

donde j y j' son los índices de isospin del pión entrante y saliente respectivamente, y $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, $\beta = (\beta_1, \beta_2)$ son los índices de spin e isospin de los nucleones.

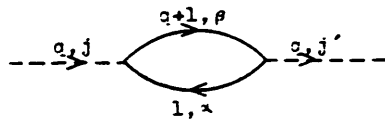


Fig. 5. Diagrama de creación de un par nucleón-hueco.

Efectuando las sumas en spin e isospín:

$$\Pi_N^{jj}(q) = \delta_{jj} \int_{\mathcal{F}} u^j(q) \bar{U}_N(q) \quad (6.2)$$

donde $U_N(q)$ es la llamada función de Lindhard^[45]

$$U_N(q) \equiv -4i \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \bar{G}^{jj}(i) \bar{G}^{jj}(i, q) \quad (6.3)$$

La integral en energía de (6.3) puede efectuarse usando el teorema de Cauchy. Incluso las integrales en \vec{l} pueden calcularse analíticamente dando como resultado (para q^0 real)^[28]:

$$\text{Re } U_N(q) = \frac{m_e k_F}{\pi^2} \left\{ -1 + \frac{1}{2\bar{q}} \left[1 - \left(\frac{\nu}{\bar{q}} - \frac{\bar{q}}{2} \right)^2 \right] \ln_3 \left| \frac{\nu - \frac{\bar{q}}{2} + 1}{\frac{\nu}{\bar{q}} - \frac{\bar{q}}{2} - 1} \right| \right. \\ \left. + \frac{1}{2\bar{q}} \left[1 - \left(\frac{\nu}{\bar{q}} - \frac{\bar{q}}{2} \right)^2 \right] \ln_3 \left| \frac{-\frac{\nu}{\bar{q}} - \frac{\bar{q}}{2} - 1}{-\frac{\nu}{\bar{q}} - \frac{\bar{q}}{2} - 1} \right| \right] \quad (5.4)$$

$$\text{Im } U_N(q) = \begin{cases} -\frac{m_e k_F}{2\pi\bar{q}} \left[1 - \left(\frac{\nu}{\bar{q}} - \frac{\bar{q}}{2} \right)^2 \right] & \text{si } \bar{q} > 2, 1\nu \in \left[\frac{\bar{q}}{2} - \bar{q}, \frac{\bar{q}}{2} + \bar{q} \right] \\ & \text{o } \bar{q} < 2, 1\nu \in \left[\bar{q} - \frac{\bar{q}}{2}, \frac{\bar{q}}{2} - \bar{q} \right] \\ -\frac{m_e k_F}{2\pi\bar{q}} & \text{si } \bar{q} < 2, 1\nu \leq \bar{q} - \frac{\bar{q}}{2} \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \quad (6.5)$$

donde:

$$\bar{q} = \frac{|\vec{q}|}{k_F} \quad \nu = \frac{q^0 m_e}{k_F^2}$$

De una forma análoga puede calcularse la polarización debida a la creación de pares delta-hueco (fig. 10):

$$\Pi_{\Delta}^{ij}(\eta) = \delta_{ij} \frac{e^2}{\mu^2} \mathcal{U}^i(\eta) \mathcal{U}_{\Delta}(\eta) \quad (6.6)$$

$$\mathcal{U}_{\Delta}(\eta) = -4i \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{e^2}{\mu^2}\right) \left[\tilde{G}^{(1)}(\eta) \tilde{D}^{(0)}(\eta+i) + \tilde{G}^{(1)}(\eta+i) \tilde{D}^{(0)}(\eta) \right] \quad (6.7)$$

Por el momento tomaremos la forma (3.5) para el propagador de la delta y, por tanto, la consideraremos como una partícula estable a orden \mathcal{O} . El cálculo de las integrales de (6.7) es similar al anterior, y el resultado:

$$\text{Re } \mathcal{U}_{\Delta}(\eta) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \frac{m_{\Delta} e^2}{\mu^2} \left\{ -1 - \frac{2\omega_{\Delta} m_{\Delta}}{4\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right] \frac{\sqrt{1 - \frac{3}{4}n + 1}}{\sqrt{1 - \frac{3}{4}n - 1}} \right\} \quad (6.8)$$

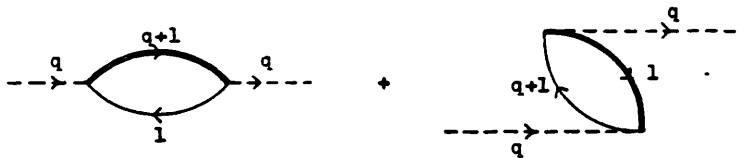


Fig. 10. Diagramas de polarización Δ -hueco. La línea doble representa a la Δ .

$$\operatorname{Im} U_A^{-1}(q) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \frac{m_A k_i}{2\pi^2 q} [X_1, X_2] \quad (6.3)$$

$$X_i = \begin{cases} [i - (\frac{v_i}{q} - \frac{q}{i})^2] & \text{si } v_i \in [\frac{q}{2} - \tilde{q}, \frac{q}{2} + \tilde{q}] \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

donde:

$$\omega_A = m_A - m_p, \quad v_{1,2} = (\pm q - \omega_A) \frac{m_A}{k_i} \quad (q^0 \text{ real})$$

7. Resultados numéricos.

Aunque en los apartados 8 y 9 se estudiarán correcciones de orden superior, es ilustrativo presentar los resultados numéricos para los valores de la polarización hallados hasta ahora. Esto es particularmente útil debido a que gran parte de los procesos que pueden ocurrir en el núcleo se conocen con poca precisión, y conviene analizar la estabilidad de los resultados frente a los diversos efectos.

Una vez calculada la polarización, podemos sustituirla en la ecuación (5.3) y, en definitiva, calcular la función $r(z)$; es decir, el espectro normalizado del positrón:

$$r(k)z \sqrt{4\pi k^2} \left(\frac{z}{k^2 - m_p^2 - \frac{m_A^2}{z}} \right)^2 \left[- \int_0^{\infty} d|\tilde{q}| \tilde{q}^2 W(\tilde{q}) G(\omega_A, \tilde{q}) \operatorname{Im} \frac{1}{q^2 - \tilde{q}^2 - \Pi(\tilde{q}, \tilde{q}) + i\epsilon} \right] \quad (7.1)$$

$$(q^0 = k^0 - \tilde{q}^0, \quad k: |\vec{k}| = k')$$

La evaluación numérica de esta integral presenta ciertas dificultades relacionadas con el hecho de que el integrando puede hacerse singular cuando $\text{Im}\Pi=0$. La solución adoptada consiste en el uso de una aproximación racional basada en la propiedad de que $D(q)^{-1}$ sí es una función suave de q (ver apéndice B).

El resultado del cálculo está representado en la figura 11. Si comparamos con el límite $k_F \rightarrow 0$, en cuyo caso: $r(k) \rightarrow \delta(k-\bar{k})$, vemos que se produce una fuerte dispersión del espectro del positrón, que ahora se extiende desde unos 300 MeV hasta 350 MeV. Esto en parte es debido al movimiento de Fermi de los nucleones,

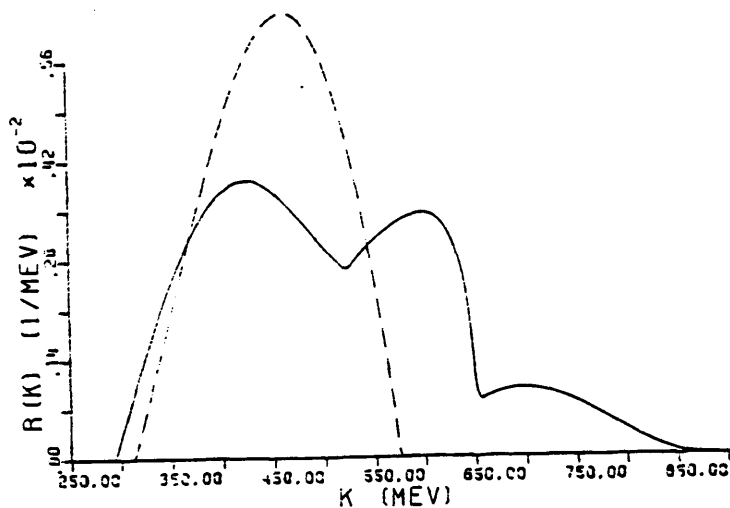


Fig. 11. Espectro normalizado del positrón $r(k)$. La curva a trozos es el espectro cuando sólo se tiene en cuenta el movimiento de Fermi.

cuyo efecto puede calcularse evaluando (7.1) para $T=0$. Las correcciones nucleares sobre la propagación del pión influyen también, considerablemente, en la forma del espectro. Por un lado, producen una fuerte reducción en su intensidad en la zona próxima a $m_\pi/2$, debido a un aumento de la masa efectiva del pión. Para momentos algo mayores hay, por el contrario, un incremento a causa de la absorción por parte de un nucleón del mar, dando lugar a una delta. Finalmente, en la zona de 700 MeV, aparece otro pico debido a la excitación de nucleones que permanecen en estado de nucleón.

Aunque la forma del espectro es muy diferente, no ya del caso libre, sino incluso tras tener en cuenta el movimiento de Fermi, el efecto sobre la vida media total es pequeño. En concreto $R=1.17$; es decir, en la aproximación considerada los efectos nucleares producen un aumento de un 17% en la probabilidad de desintegración.

Antes de discutir más en profundidad estos resultados, estudiaremos algunas correcciones de orden superior sobre el propagador del pión.

3. Inclusión de la anchura de la delta.

Hasta ahora se ha tomado a la delta como una partícula estable. Estudiaremos a continuación los efectos de su inestabilidad sobre el espectro del positrón.

La anchura de la delta puede calcularse a través de diagramas de autoenergía como el de la figura 12. En principio podrían incluirse correcciones nucleares a la anchura; sin

embargo, parece ser que éstas no son muy importantes comparadas con el valor del caso libre^[47,48], por lo que no las consideraremos. Nos limitaremos a estudiar la contribución del diagrama de la figura 12, de donde se obtiene una autoenergía dependiente del momento y la energía. Aunque la anchura podría calcularse siguiendo las técnicas habituales, utilizaremos una forma comúnmente usada^[44] que incluye además algunas correcciones cinemáticas, y que se ajusta muy bien a datos experimentales:

$$\Gamma_{\Delta}^{\pi}(q, \bar{q}) = -2L_m \sum (q, \bar{q}) = (0.367) \frac{p^3}{\mu^3} \frac{m_{\pi}}{\sqrt{s}} \frac{2m_{\Delta}}{m_{\Delta} + \sqrt{s}} \phi(\sqrt{s} - (m_{\pi} + m_p)) \quad (8.1)$$

(para q^0 real)

donde p es el momento del pión en el sistema del centro de masas del pión y nucleón procedentes de la desintegración de la delta, y \sqrt{s} la energía total en este sistema; es decir:

$$\sqrt{s} = \sqrt{q^0 + \bar{q}^0} \quad (8.2)$$

$$p = \sqrt{\frac{s^2 - m_{\pi}^2 - m_p^2}{2\sqrt{s}}} - \mu \quad (8.3)$$

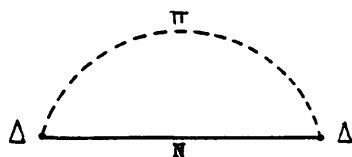


Fig. 12. Diagrama de autoenergía para la delta.

Para incluir esta corrección sustituimos, en el propagador $\tilde{\Delta}$, m_A por $m_A - i \int_{\Delta} (q^0, \bar{q})/2$. En la función de Lindhard correspondiente, la integral en energía se calcula igualmente, obteniéndose:

$$U_A(q) = 4 \left(\frac{2f}{3\gamma} \right)^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[\frac{\mathcal{E}(k_p - i\bar{q})}{q^2 - m_p^2 - m_A^2 - i \frac{\int_{\Delta} (\mathcal{E}^2(k_p - i\bar{q})}{2} + \mathcal{E}_A(i\bar{q}) - \mathcal{E}_A(i\bar{q})) + i\epsilon} \Big|_{\substack{k^0 = m_p + \mathcal{E}_A(i\bar{q}) \\ k^0 = m_p + \mathcal{E}_A(i\bar{q})}} \right. \\ \left. + \frac{\mathcal{E}(k_p - i\bar{q})}{-q^2 + m_p^2 - m_A^2 + i \frac{\int_{\Delta} (\mathcal{E}^2(k_p - i\bar{q})}{2} + \mathcal{E}_A(i\bar{q}) - \mathcal{E}_A(i\bar{q})) + i\epsilon} \Big|_{\substack{k^0 = -m_p + \mathcal{E}_A(i\bar{q}) \\ k^0 = -m_p + \mathcal{E}_A(i\bar{q})}} \right] \quad (8.4)$$

y tras un cambio de variable:

$$U_A(q, \bar{q}) = 4 \left(\frac{2f}{3\gamma} \right)^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \mathcal{E}(k_p - i\bar{q}) \left[\frac{1}{q^2 - m_p^2 - m_A^2 - i \frac{\int_{\Delta} (\mathcal{E}^2(k_p - i\bar{q})}{2} + \mathcal{E}_A(i\bar{q}) - \mathcal{E}_A(i\bar{q})) + i\epsilon} \Big|_{k^0 = m_p + \mathcal{E}_A(i\bar{q})} \right] \quad (8.5)$$

Esta integral, por supuesto, no puede efectuarse analíticamente (podría únicamente integrarse un ángulo). Normalmente se puede despreciar la dependencia de \int_{Δ} en el momento, con lo que la integral se calcula del mismo modo que en el caso $\int_{\Delta} = 0$; sin embargo, esto no es posible ahora, ya que \bar{q} va a ser muy grande. Una solución es evaluar (8.5) numéricamente. Aunque este procedimiento es viable, convendrá, principalmente con vistas a su utilización en el caso no homogéneo, promediar \int_{Δ} de tal manera que el resultado, en cuanto al espectro del positrón, se ajuste lo más posible al precedente de la integración numérica de (8.5).

La variable de energía $1^0 + q^0$ oscila entre

$$q^2 + m_p^2 \leq (1^0 + q^0)^2 \leq q^2 + m_p^2 + \frac{4f^2}{3\gamma^2} \quad (8.6)$$

mientras que el momento verifica

$$|\bar{q}_1 - \bar{q}_2| \leq |\bar{q}_1 - \bar{q}| \leq |\bar{q}_1 + k_F| \quad (8.7)$$

Tomaremos

$$\Gamma_\delta(q_1, \bar{q}, \bar{q}_1) \approx \Gamma_\delta(q_1 - \lambda_1 \frac{q_1}{k_F}, \sqrt{\bar{q}_1^2 + \lambda_2 k_F^2}) \quad (8.8)$$

con λ_1 y λ_2 constantes.

Con la aproximación (8.8) la función de Lindhard ya puede calcularse de forma explícita:

$$U_1(q) = \frac{(2\pi)^{-1/2}}{\pi} \frac{m_0}{k_F} \left[1 - \frac{[2\lambda_1 - \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)] m_0}{k_F^2 \bar{q}} \frac{1}{\bar{q}} \left[\left(\frac{\lambda_1}{\bar{q}} - \frac{\bar{q}_1}{\bar{q}} \right)^2 \frac{\lambda_1 - \bar{q}_1}{\bar{q}} \right] \right] \quad (8.9)$$

donde: $\Gamma_\delta = \Gamma_\delta(q_1 - \lambda_1 \frac{q_1}{k_F}, \sqrt{\bar{q}_1^2 + \lambda_2 k_F^2})$, $\lambda_{1,2} = (\pm \bar{q} - \bar{q}_1 + \frac{1}{2} \Gamma_\delta) \frac{m_0}{k_F}$

y el corte del logaritmo se toma en π .

Comparando los resultados antes y después de hacer la aproximación (8.8), se obtienen como valores óptimos de las constantes:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0.9 \\ \lambda_2 &= 0.6 \end{aligned} \quad (8.10)$$

y el error cometido lo suficientemente pequeño como para que, en lo sucesivo, lo despreciemos.

El espectro del positrón con esta corrección se muestra en la figura 13. Vemos que la influencia de la anchura de la delta

es considerable. Su efecto más notable es la desaparición de la separación entre los dos picos principales. Es de destacar su influencia nula a partir de energías superiores a 650 MeV. La razón es que en esta zona, la energía del pión es muy pequeña y, consiguientemente, la delta creada no puede desintegrarse en un pión y un nucleón reales.

El efecto en cuanto a la probabilidad total es de un incremento de un 8% frente al cálculo anterior.

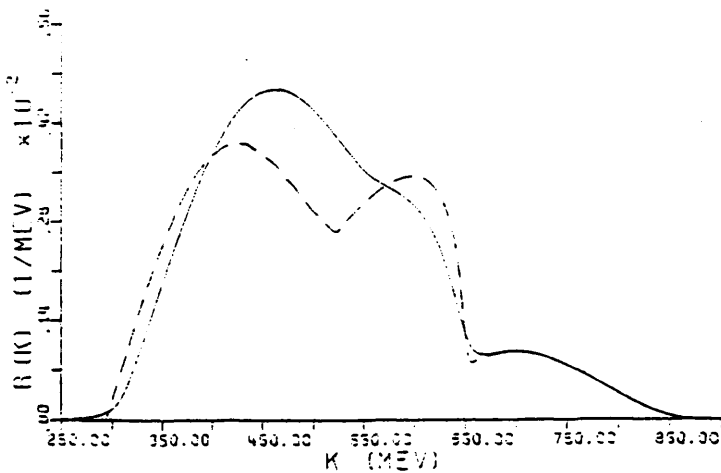


Fig. 13. Espectro del positrón cuando se tiene en cuenta la anchura de la delta (término polo). (La línea discontinua corresponde al caso con $\Gamma_{\Delta} = 0$).

9. Efecto Lorenz-Lorentz.

El propagador del pión calculado en la aproximación de las figuras 9 y 10, tiene graves dificultades a la hora de explicar el comportamiento en la zona de q^0 pequeños y \vec{q} intermedios (piones acústicos). De hecho, el propagador así calculado presenta polos a energía cero; es decir, predice condensación de piones incluso a la densidad nuclear, lo cual, como ya se comentó, no ocurre en la realidad^[43]. La razón de esta discrepancia es no haber considerado la repulsión entre nucleones a cortas distancias. Una forma simple de tener en cuenta este efecto es incluyendo un término:

$$g' \int \frac{d^3r}{m^2} \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 \bar{\tau}_1 \cdot \bar{\tau}_2 \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \quad (9.1)$$

en el potencial de interacción entre nucleones, que da cuenta del llamado efecto Lorenz-Lorentz (L-L)^[49]. La constante g' en principio debe tener un valor de 1/3 para cancelar un término negativo del mismo tipo que aparece en el potencial de intercambio de un pión (OPE). No obstante, los estudios experimentales muestran que g' debe ser algo mayor (entre 0.5 y 0.7). La explicación teórica de este término puede encontrarse en los efectos de solapamiento de los sacos hadrónicos. La inclusión de esta corrección eleva la densidad crítica para la condensación de piones a unas 3 veces la densidad nuclear. En la región de piones ópticos, en cambio, la influencia de este efecto es mucho menos dramática como veremos a continuación.

Cuando se suma la serie de Dyson para el propagador del pión, con la polarización calculada a primer orden, se están

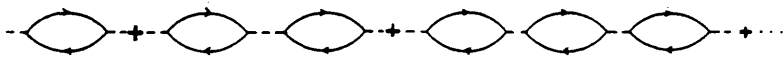


Fig. 14. Serie de Dyson para el propagador del pi6n.

sumando los diagramas de la figura 14. En los diagramas con dos o m6s bucles aparece un intercambio de un pi6n entre dos nucleones , por tanto, impl6citamente, se est6 considerando el t6rmino atractivo de la forma $\delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$ de la interacci6n OPE , que puede considerarse esp6reo. Para eliminarlo, se suman las contribuciones de los diagramas de la figura 15, en los que se incluye el potencial (9.1). Esta suma puede efectuarse expl6citamente (v6ase, por ejemplo, la referencia [44] o el cap6tulo IV donde se hace el c6lculo en el caso inhomog6neo), con lo que la funci6n de Green del pi6n resulta:

$$D(q) = \frac{1}{q^2 - m_\pi^2 - \Pi(q) / (2 - g \Pi(q) / q^2)} \quad (9.2)$$

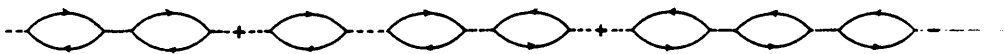


Fig. 15. Correcci6n L-L para el propagador del pi6n.

donde se ha supuesto que este efecto actúa de la misma forma sobre nucleones y deltas^[44].

En nuestro caso, \bar{q}^2 va a ser muy grande y, en consecuencia, la corrección, pequeña. Esto justifica el que no tengamos que preocuparnos excesivamente en la elección del g' concreto. Estudios detallados^[45] muestran que g' debería considerarse como una función del momento y la energía, aunque con una dependencia muy suave. En particular, parece decrecer ligeramente para momentos grandes, por lo que tomaremos un valor más bien pequeño: $g'=0.55$.

De la expresión (9.2) puede deducirse, en parte, cual será la influencia de este efecto sobre el espectro del positrón.

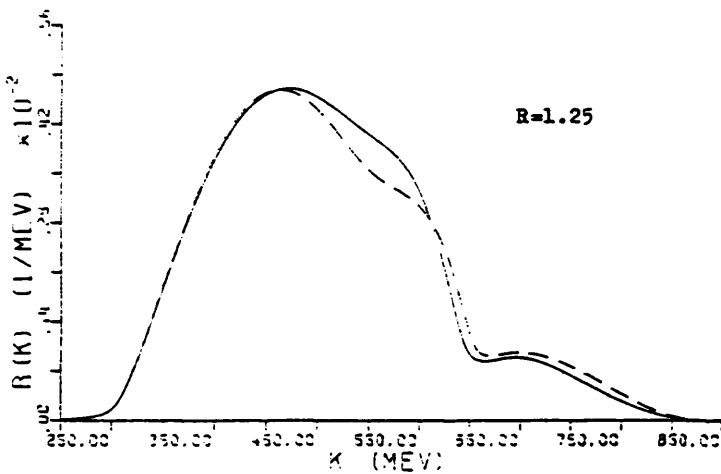


Fig. 16. Espectro del positrón para $g'=0.55$ con $\bar{q}^2 \neq 0$.
La línea discontinua es la función correspondiente para $g'=0$.

La polarización $\Pi(q^0, \vec{q})$ es esencialmente positiva (su parte real) para momentos inferiores a unos 500MeV, por lo que se producirá un aumento en la polarización efectiva y, consiguientemente, una reducción de $r(k)$ en esta zona. Por el contrario, para momentos algo mayores, $\text{Re}\Pi < 0$ y $r(k)$ aumentará. El resultado numérico está representado en la figura 16.

Aparentemente el efecto de esta corrección es muy reducido. De hecho, el espectro del positrón apenas varía, y la anchura total aún menos. No obstante, la contribución para los diferentes valores de $|\vec{q}|$ en la integral (7.1) sí cambia de forma sensible. Una de las razones de este enmascaramiento es la inestabilidad de la delta, por lo que resulta ilustrativo

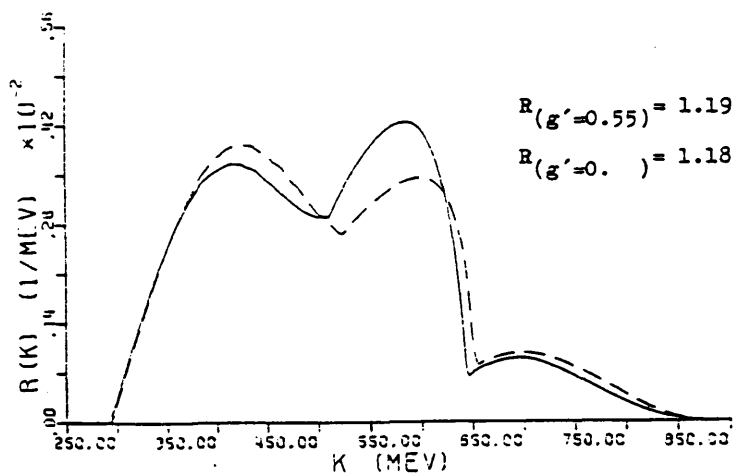


Fig. 17. Comparación del espectro para $\vec{q}_1=0$ en los casos $g'=0.55$ (línea continua) y $g'=0$ (línea a trazos).

hacer el cálculo en el caso de $\Gamma_A = 0$ (fig. 17) en el que se aprecia un claro aumento del 2º pico y disminución del primero.

10. Términos espectador y de interferencia.

Estudiaremos a continuación los efectos nucleares sobre las funciones de Green correspondientes a los términos espectador y de interferencia polo-espectador.

El estudio perturbativo de la función G^j (2.20) puede llevarse a cabo del mismo modo que para una función de Green usual, mediante la aplicación del teorema de Wick y un análisis diagramático. Las reglas de Feynman para el cálculo de $G_{\pi p}^j(k)$ son (en espacio de momentos):

- Construir todos los diagramas topológicamente diferentes que empiecen y terminen con un par de líneas pión-nucleón en el mismo punto.
- Asignar a cada línea una dirección y un cuadrimomento, así como un estado interno (spin y/o isospín). Se tomarán los cuadrimomentos de modo que haya conservación en los vértices internos, y su suma sea k en el externo inicial y $-k$ en el externo final.
- Seguir las reglas de Feynman usuales para todas las líneas, así como los vértices internos ^[4].
- Para cada vértice externo incluir una función $V^j(\vec{p})$ dependiente del momento del pión, así como las matrices de isospín τ_{ij} , donde i y j son respectivamente los índices del nucleón y pión.
- Integrar sobre todos los cuadrimomentos y sumar sobre los índices de spin e isospín, salvo en los de spin de los

nucleones que llegan a los vértices externos que deberán ser α y β respectivamente.

La función de vértice $V^S(\vec{k})$ aparece como consecuencia de las estructuras internas del nucleón y pión, e incluye dos efectos. En primer lugar un factor de forma debido al solapamiento de las bolsas de quarks. Tomaremos el calculado por Gavela et al. [10] (para quarks no relativistas):

$$V(\vec{k}) = \frac{\left(\frac{3}{4} R_M^2 R_N^2\right)^{3/4}}{\left[\frac{1}{2}(R_M^2 + \frac{3}{4} R_N^2)\right]^{3/2}} \exp\left(-\frac{3\vec{k}^2 R_M^2 R_N^2}{12R_M^2 + 16R_N^2}\right) \quad (10.1)$$

donde R_M y R_N son parámetros asociados a las funciones de onda de los quarks en el nucleón y mesón respectivamente. Supondremos que $R_M^2 = \frac{3}{4} R_N^2$ [10] con lo que

$$V(\vec{k}) = \exp(-0.094 \vec{k}^2 R_N^2) \quad (10.2)$$

Hay cierta controversia en cuanto a la elección del valor concreto de R_N [13]. Las cantidades oscilan, dependiendo del tipo de datos que se quieran ajustar, entre $R = 0.35F$ y $R = 0.87F$. Calcularemos en algunos casos con estos valores extremos, aunque nos centraremos en el valor intermedio $R = 0.56F$.

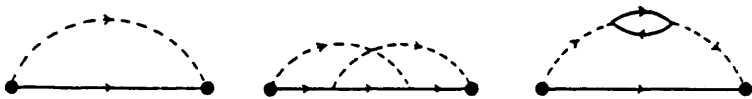


Fig. 18. Diagramas de Feynman para G^S .

Es necesario además incluir un factor $(2\omega_k)^{1/2}$, donde \bar{k} es el momento del pión, debido a que, en la aproximación no relativista para los quarks, se pasa de 3 campos fermiónicos (quarks) a un campo fermiónico (nucleón) y uno bosónico (mesón); y en la descomposición en ondas planas aparece en los primeros $\sqrt{\frac{m}{E_k}} \approx 1$, mientras que en el último $\frac{1}{(2\omega_k)^{1/2}}$, que es el factor que debemos cancelar. Para mantener la adimensionalidad de $V^S(k)$, multiplicaremos por $\left(\frac{\omega_k}{\mu}\right)^{1/2}$ (los términos constantes pueden englobarse en la κ (ver 1.11) que no precisamos).

Para el cálculo de $\tilde{G}_{\Delta}^S(k)$ las reglas de Feynman son análogas a las anteriores, salvo que sólo aparece un vértice externo, y hay que multiplicar por $i\bar{v}_p \cdot \hat{k}$ y sumar en δ , donde δ es el spin del nucleón que llega al vértice externo y Δ el de la línea externa.

Realizaremos a continuación cálculos análogos a los efectuados para el término polo.

- Límite libre:

Calculemos en primer lugar G^S en el límite $k_p \rightarrow 0$. La contribución del diagrama a) de la figura 18 es

$$\tilde{G}^S(k) = 3i \left(\frac{d^{4q}}{(2\pi)^4} \tilde{G}^{(0)}(k-q) \tilde{D}^{(0)}(q) v^i(q) \frac{\omega_q}{\mu} \right) \quad (10.3)$$

Integrando en energía:

$$\tilde{G}^S(k) = 3 \left(\frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3} v^i(\vec{q}) \frac{1}{2A} \left[\frac{\tilde{D}(\vec{k} - \vec{q})}{k^2 \omega_q - m_p - \frac{E_q^2}{2m_p} + i\epsilon} + \frac{\tilde{D}(\vec{q})}{q^2 \omega_q - m_p - \frac{E_q^2}{2m_p} + i\epsilon} \right] \right) \quad (10.4)$$

$$(\vec{k} = \vec{k} - \vec{q})$$

La parte imaginaria es (tomando el límite $k_r \rightarrow 0$)

$$\text{Im} \tilde{G}^S(k) = \frac{3}{4\pi} \frac{\omega \tilde{v}}{\mu m_p} v^2(\tilde{q}) \delta(k^2 - \tilde{q}^2) k_r^2, \quad \tilde{q} = \frac{m_p^2 - m^2}{2m_p} \quad (10.5)$$

expresión parecida a la de la autoenergía de un protón aunque con una diferencia importante: ahora no aparece el término \bar{q}^2 proveniente del acoplamiento pseudoescalar πN , sino el factor cinemático ω .

Nótese que hemos relacionado la función de G^S con la autoenergía del protón y no con su función de Green. Para calcular las correcciones de orden superior, que antes aparecían a través de la parte real de la autoenergía del protón, habría que evaluar las contribuciones de los diagramas de la figura 19, cuya suma es

$$\bar{G}^S(k) \equiv \bar{H}(k) \tilde{G}(k) \bar{H}(k) \quad (10.6)$$



Fig. 19. Diagramas de orden superior cuya influencia equivale a la de la parte real de la autoenergía del protón en el caso del término polo.

$$\operatorname{Re} H(k) = \frac{3}{8\pi^2} \int_0^{\infty} d\eta \frac{\eta}{\sqrt{\eta^2 - \mu^2}} u(\eta) \left[\frac{\mu^2}{k} - \frac{\eta^2}{k^2} (k^2 - \mu^2 - \frac{\eta^2}{2\mu^2}) \eta \right] - \frac{143}{k^2 \omega_p - \mu^2 \frac{\eta^2}{2\mu^2}} \quad (10.11)$$

La evaluación numérica de esta integral da como resultado
(para $k = 459 \text{ MeV}$):

$$\begin{aligned} R_N &= 0.87F, & H(k) &= -3.25 \text{ MeV} \\ R_N &= 0.56F, & H(k) &= -5.57 \text{ MeV} \\ R_N &= 0.35F, & H(k) &= -7.48 \text{ MeV} \end{aligned} \quad (10.12)$$

y sustituyendo en (10.10) (para $\Sigma = 146 \text{ MeV}$):

$$\begin{aligned} R_N &= 0.87F, & \mathcal{R} &= 0.0156 + 0.0001 \\ R_N &= 0.56F, & \mathcal{R} &= 0.0213 + 0.0001 \\ R_N &= 0.35F, & \mathcal{R} &= 0.0259 + 0.0002 \end{aligned} \quad (10.13)$$

que corresponden respectivamente a cada uno de los dos sumandos del lado derecho de (10.10). Si comparamos con la cantidad equivalente para el término polo ($\mathcal{R} = 0.5$), vemos que efectivamente la contribución de estos diagramas es muy pequeña. (Es de destacar además que el potencial medio nuclear no aparece de forma directa en la generalización de $\operatorname{Re}H(k)$).

Limitándonos pues al diagrama de la figura 19, el espectro normalizado es

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(k) &= \sqrt{\frac{4\pi}{3}} k^2 \mathcal{G}^s(k) \\ &= \frac{3 \mu^2}{k^2 \sqrt{1 - \frac{\mu^2}{k^2}}} \quad \mathcal{G}^s(k) = \frac{\mu^2}{k^2} \end{aligned} \quad (10.14)$$

y el efecto sobre la anchura total para este canal:

$$R^s = \int_0^{MNA} dk r^s(k) \quad (10.15)$$

Los valores de χ^s para los 3 radios son:

$$\begin{aligned} R_N = 0.87F & \quad , \quad \chi^s = 4.27 \times 10^{-10} \text{ MeV}^{-4} \\ R_N = 0.56F & \quad , \quad \chi^s = 2.72 \times 10^{-10} \text{ MeV}^{-4} \\ R_N = 0.35F & \quad , \quad \chi^s = 2.24 \times 10^{-10} \text{ MeV}^{-4} \end{aligned} \quad (10.16)$$

En cuanto al término de interferencia, de la aplicación de las reglas de Feynman y tras sumar la serie de Dyson para el propagador del protón de la línea externa, se obtiene, para los diagramas de la figura 20,

$$\tilde{G}^F(k) = H(k) \frac{1}{k^2 - m_p^2 - \frac{\Sigma}{i\epsilon} - \Sigma^0} \quad (10.17)$$

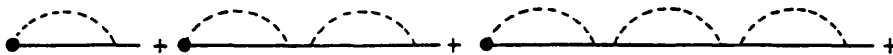


Fig.20. Serie de Dyson para G^F .

Por la misma razón que antes, la contribución del término en que aparece la parte real de $H(k)$ es despreciable, por lo que aproximaremos:

$$\text{Im } \tilde{G}^I(k) \approx \text{Im } H(k) \text{ Re } \frac{1}{k^2 - m_p^2 - \frac{k^2}{i m_p} - \Sigma^0} \quad (10.18)$$

y en el límite $k_p \rightarrow 0$:

$$\text{Im } \tilde{G}^I(k) = \frac{3}{4\pi} \frac{f}{\mu} \left(\frac{\mu}{\mu'}\right)^{1/2} \frac{2(\mu')^{1/2} \delta(k^2 - \Sigma^0)}{m_p} \frac{k_p^3}{k^2 - m_p^2 - \frac{k^2}{i m_p} - \Sigma^0} \quad (10.19)$$

con lo que el espectro normalizado será

$$r^I(k) = N^I \left(\frac{3f}{\mu}\right)^{-1} 4\pi k^2 \text{Im } \tilde{G}^I(k) \quad (10.20)$$

$$N^I = \frac{3m_p [k^2 - m_p^2 - \frac{k^2}{i m_p} - \Sigma^0]}{k^2 \frac{f}{\mu} \frac{2(\mu')^{1/2}}{m_p} \left(\frac{\mu}{\mu'}\right)^{1/2}}$$

y

$$R^I = \int_0^{\infty} dk r^I(k) \quad (10.21)$$

Los valores numéricos de N^I son:

$$\begin{aligned} R_N &= 0.87F & , & & N^I &= -1.28 \times 10^{-9} \text{ MeV}^{-4} \\ R_N &= 0.56F & , & & N^I &= -1.02 \times 10^{-9} \text{ MeV}^{-4} \\ R_Y &= 0.35F & , & & N^I &= -9.26 \times 10^{-10} \text{ MeV}^{-4} \end{aligned} \quad (10.22)$$

- Correcciones nucleares.

Consideraremos al igual que para el término polo, las correcciones nucleares a través de los diagramas representados en la figura 21. Utilizando nuevamente las propiedades de analiticidad de los propagadores, se puede efectuar la integral en energía, resultando:

$$\text{Im } \tilde{G}^S(k) \approx -\frac{3}{(2\pi)^4} \int_0^{\tilde{q}} d|\tilde{q}| \tilde{q}^2 \tilde{q}^2 \frac{1}{\tilde{q}} \Theta(|\tilde{q}|, |\tilde{q}|) \text{Im} \frac{1}{q^0 \pm \tilde{q}^2 - \Pi^*(q^0, \tilde{q}) + i\epsilon} \quad (10.23)$$

$$\text{Im } \tilde{G}^I(k) \approx -\frac{3}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2 - \frac{1}{\tilde{q}} - \Gamma} \int_0^{\tilde{q}} d|\tilde{q}| \tilde{q}^2 \tilde{q}^2 \tilde{q}^2 \left(\frac{\tilde{q}}{\tilde{q}}\right)^4 \Theta(|\tilde{q}|, |\tilde{q}|) \text{Im} \frac{1}{q^0 \pm \tilde{q}^2 - \Pi^*(q^0, \tilde{q}) + i\epsilon} \quad (10.24)$$

donde $q^0 = k^0 - \tilde{m}$, y

$$\Theta(|\tilde{q}|, |\tilde{q}|) = \int_{-1}^1 dx \frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{1}{2} \frac{1 - x^2 - 2|\tilde{q}|^2}{\sqrt{1 - x^2 - 2|\tilde{q}|^2}} \right) = \begin{cases} 0 & \text{si } |\tilde{q}| + |\tilde{q}| \leq k_F \\ 0 & \text{si } |\tilde{q}| - |\tilde{q}| \geq k_F \\ \frac{1}{2} \left[1 - \frac{k_F^2 - k^2 - \tilde{q}^2}{2k_F} \right] & \text{resto} \end{cases} \quad (10.25)$$

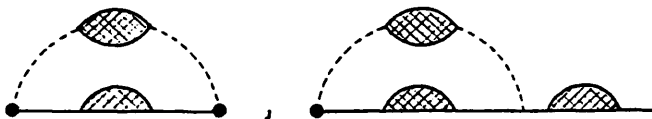


Fig. 21. Diagramas para las funciones G^S y G^I en materia nuclear, con inserciones de polarización y autoenergía.

11. Resultados numéricos para el término espectador.

Reproducimos en este apartado los resultados numéricos obtenidos para el término espectador. En primer lugar (fig 22) se ha efectuado el cálculo en la aproximación $\bar{\Gamma}_A = 0$, $g' = 0$, para los tres valores de R_N indicados antes. La forma del espectro del positrón es cualitativamente muy parecida a la del término polo. Las diferencias más sobresalientes son una disminución del segundo y tercer pico, especialmente para R_N grandes, debido fundamentalmente a la ausencia del factor $\bar{\sigma} \cdot \bar{k}$ en los vértices exteriores, que favorecía en el caso del

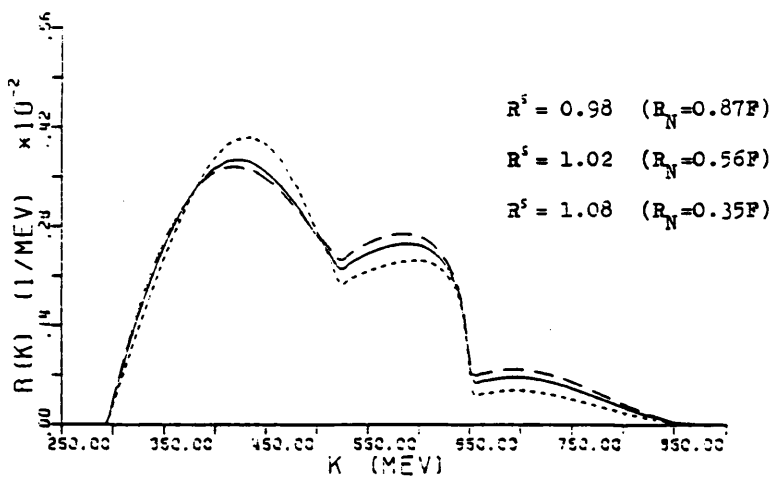


Fig.22. Resultados numéricos para el término espectador en la aproximación $\bar{\Gamma}_A = 0$, $g' = 0$, para $R_N = 0.35F$ (trazos largos), $R_N = 0.56F$ (línea continua) y $R_N = 0.37F$ (trazos cortos).

término polo las zonas de momento mayor; y una disminución global (nótese que ahora la influencia nuclear sobre el espectro integrado es prácticamente nula), a causa de no aparecer la autoenergía correspondiente al potencial medio nuclear.

Del mismo modo pueden tenerse en cuenta las correcciones debidas a la anchura de la delta y al efecto L-L. Los resultados incluyendo ambas correcciones se muestran en la figura 23.

Es de destacar la débil dependencia de estos resultados en el parámetro R_N , salvo en la zona de $k \geq 700 \text{ MeV}$, donde la función $\mathcal{V}(k)$ se hace muy pequeña para R_N grande.

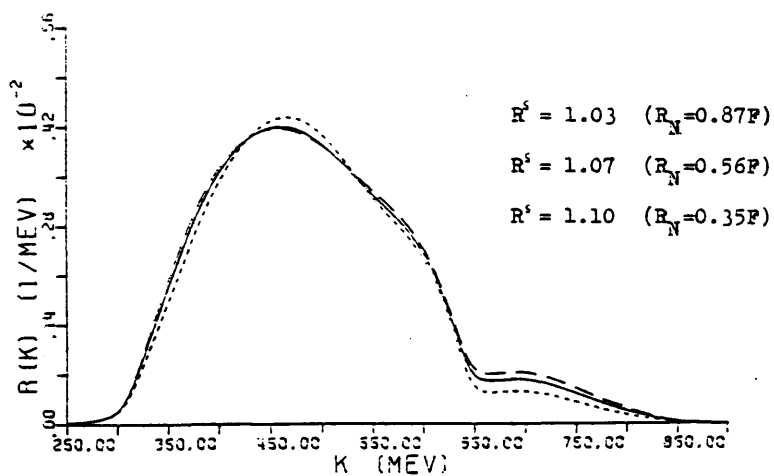


Fig. 23. Espectro del positrón para el término espectador incluyendo la anchura de la delta y el efecto L-L, para $R_N = 0.35F$ (trazos largos), $R_N = 0.56F$ (línea continua) y $R_N = 0.87F$ (trazos cortos).

12. Resultados numéricos para el término de interferencia.

El comportamiento del espectro para el término de interferencia debería ser, en principio, intermedio entre el del polo y espectador. Hay, no obstante, una diferencia importante en cuanto a la correlación entre los momentos del pión y positrón a través del factor $\vec{q} \cdot \hat{k}$, aunque al estar restringida la integral en \vec{q} a la zona con $|\vec{q} - \vec{k}| < k_p$, en general $\vec{q} \cdot \hat{k}$ será próximo a $|\vec{q}|$. Efectivamente (ver fig. 24), el espectro en este caso es intermedio para $k \geq 500 \text{ MeV}$, y algo menor para momentos más pequeños, a causa de la presencia del coseno del ángulo $\hat{q}\hat{k}$.

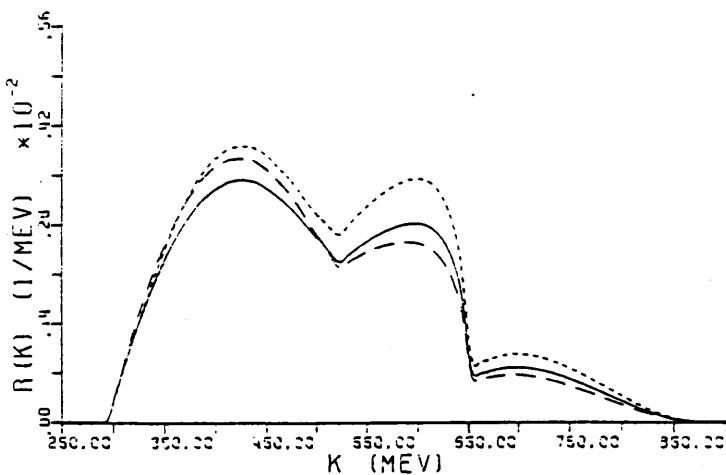


Fig 24. Espectro correspondiente al término de interferencia ($R_1=0.56F$, $\xi'=0$, $\bar{I}_1=0$) (línea continua), comparado con el del término polo (línea de trazos cortos) y espectador (línea de trazos largos).

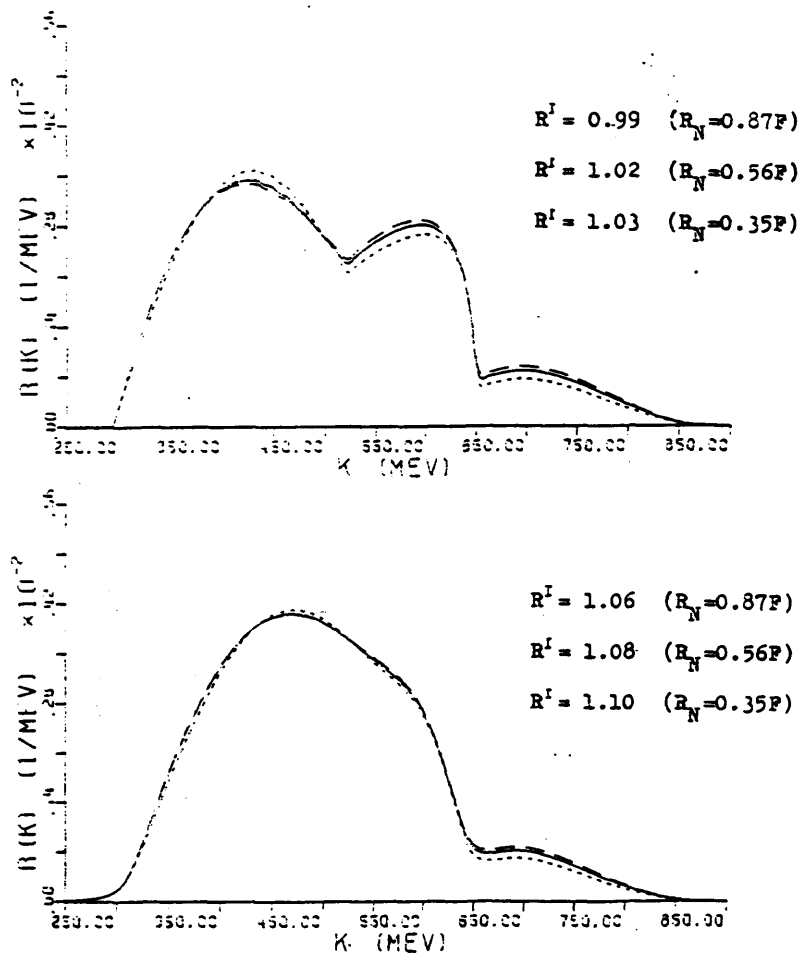


Fig. 25. Espectro del positrón para el término de interferencia para $R_N = 0.87F$ (línea de trazos largos), $R_N = 0.56$ (línea continua) y $R_N = 0.35F$ (línea de trazos cortos), en los casos $g' = 0$ y $\Gamma_0 = 0$ (figura superior) y $g' = 0.55$ con la Γ_0 de (8.1) (figura inferior).

Digamos para finalizar que en el caso, muy poco probable, de que hubiera una interferencia destructiva y los términos polo y espectador fueran aproximadamente iguales, la probabilidad de desintegración en el límite libre sería muy pequeña, pero los efectos nucleares la aumentarían fuertemente. Se ha hecho el cálculo para el caso en el que la cancelación es total (con $R_N = 0.56F$). Normalizando a la unidad la anchura total de los términos polo y espectador (para $k_p \rightarrow 0$), el resultado es de una anchura de 0.16, y un espectro con un pico en 400MeV que se extiende desde 270 a 600MeV. Es de destacar la fuerte cancelación para momentos mayores que unos 500MeV, debido a que el espectro del término de interferencia es en esta zona prácticamente el valor medio de los correspondientes al polo y espectador, no así en la zona de pequeños momentos.

13. Sobre los estados finales hadrónicos.

Hasta ahora nos hemos limitado a estudiar el espectro del positrón sin decir apenas nada de los estados hadrónicos finales. En rigor, el método utilizado (cálculo inclusivo) no nos puede dar información sobre estos estados. Sin embargo, en la práctica sólo se ha analizado una familia muy concreta de diagramas, que son los correspondientes a una emisión, por parte de un nucleón del mar, de un pión renormalizado por el medio. En este sentido, podríamos interpretar el integrando de la ecuación (7.1) como la contribución a la probabilidad de desintegración total, de un proceso con un estado final de un positrón de cuadrimomento $(k^0 = |\vec{k}|, \vec{k})$ y un pión renormalizado con cuadrimomento $(k^0 - \tilde{m}, \vec{q})$. El estudio de la propagación de

este pión a través del núcleo, nos puede ilustrar sobre cuáles serán los estados finales hadrónicos. Para ello supongamos que el pión tiene un comportamiento de cuasipartícula, es decir, su propagador es de la forma

$$D(q) = \frac{L}{q^2 - \bar{q}^2 - \mu^2 - \Pi} \quad (13.1)$$

donde $\bar{\Pi}$ es una constante compleja con $\text{Im}\bar{\Pi} < 0$. La parte imaginaria de $D(q)$ es muy pequeña salvo que la parte real del denominador sea próxima a cero, de modo que la única región de la integral de (7.1) que contribuye será aquella en la que esto se verifica. Podemos tomar, por lo tanto, como "constante" $\bar{\Pi}$ el valor de la función $\Pi(q)$ en cada punto de la integral. El comportamiento temporal del propagador (13.1) es

$$D(t, \bar{q}) = \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\omega t} \frac{1}{q^2 - \bar{q}^2 - \mu^2 - \Pi} = \frac{-i}{2\Omega} e^{-i\Omega t} \sim e^{(\text{Im}\bar{\Pi})t} \quad (13.2)$$

donde $\Omega = \sqrt{\bar{q}^2 + \mu^2 + \bar{\Pi}}$

Como la velocidad del pión es próxima a la de la luz, su recorrido medio antes de ser absorbido sería del orden de

$$L \equiv \frac{L}{|\text{Im}\bar{\Pi}|} \quad (13.3)$$

Si restringimos la integral de (7.1) a la zona en la cual la cantidad L sea mayor que un determinado valor, podemos estimar la probabilidad, para cada momento del positrón, de que el pión se propague una distancia L sin ser absorbido. Estudia-

remos, por consiguiente, la función (para el término polo)

$$r^l(k) \approx 4\pi k^2 \left(\frac{1}{k^2 - m_\pi^2 - \frac{k^2}{2m_\pi} - \Sigma_l} \right)^2 \left[\frac{2\sqrt{1-\eta^2} u^2(\eta) \otimes (i\vec{q}_1, i\vec{q}_2) L_m}{(L_m \sqrt{1-\eta^2} - \eta^2 - \pi(\eta^2, \eta) < \frac{1}{2})} \right] \quad (13.4)$$

Consideremos en primer lugar el caso $\Gamma_4=0$, $g'=0$. Los resultados (ver fig. 26) muestran varias regiones claramente diferenciadas. Una primera zona, que representa sobre el 40% del total, para momentos del positrón de unos 400MeV (entre 300 y 500MeV) y que corresponde a la emisión de un pión con una masa efectiva

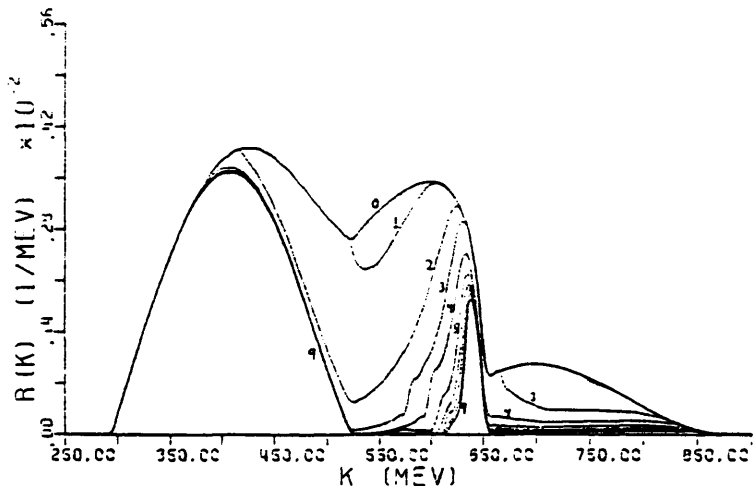


Fig. 26. Representación gráfica de las funciones $r^l(k)$ (para el término polo con $\Gamma_4=0$, $g'=0$) para varios valores de l . Junto a cada curva aparece el valor de l (en Fermi).

$k^* = \sqrt{k^2 + \pi^2}$ que se mueve por el interior del núcleo prácticamente sin absorción hasta llegar a la superficie, saliendo finalmente en la dirección opuesta a la del positrón, con una dispersión de unos 130° debido al movimiento de Fermi, y con una energía de unos 500MeV. Apenas habría cesión de energía al resto del núcleo (unas decenas de MeV) que quedaría en un estado excitado (eventualmente con la emisión de algún nucleón de baja energía).

Una segunda zona, que se extiende desde 400 a 600MeV (40% del total), corresponde por el contrario a procesos fuertemente absorptivos ($l \lesssim 2F$). Representa los casos en los que el pión se absorbe rápidamente dando lugar a un par delta-hueco. La delta, que adquiere un momento de unos 500MeV, se desintegra en un pión y un nucleón.

Una tercera zona centrada en 700MeV (entre 600 y 850MeV) correspondiente a procesos de absorción del pión, excitando un nucleón del mar que permanece en estado de nucleón con un momento de unos 600MeV, representa un 15% del total.

Finalmente, alrededor de los 640MeV aparece una cuarta zona poco absorptiva, a causa de un cambio de signo en la parte real de la polarización. Esta región sólo significa un 5% del total, y aunque es debida a la formación de pares delta-hueco, no corresponde a la creación de deltas reales, pues la energía del pión es demasiado pequeña (~ 300 MeV con un momento de unos 600MeV)

Sin embargo, la discusión anterior tiene un interés relativo, ya que la forma del espectro varía sensiblemente en el caso más realista en el que se considera la anchura de la delta

(ver fig.27), pero puede ayudar a su interpretación. Ahora las diversas zonas aparecen mucho menos diferenciadas, aunque en cierta medida las conclusiones se mantienen. Por ejemplo, para el núcleo de hierro de radio $\sim 4F$, puede suponerse que el pión no es absorbido con tal de que el parámetro δ supere esa cantidad.

En este punto, es ilustrativo hacer unos breves comentarios sobre los métodos utilizados por otros autores en relación con los efectos nucleares sobre la desintegración del protón. Dover et al.^[30] utilizan (para el He^4) una aproximación de partículas independientes con funciones de onda de oscilador armónico, y estudian 3 procesos distintos: la desintegración cuasilibre (efecto del movimiento de Fermi), el "rescattering" de piones

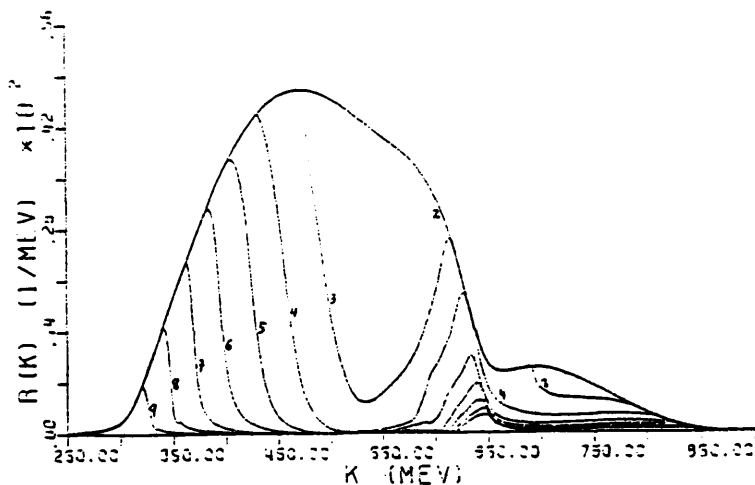


Fig. 27. Diagrama análogo al de la figura 26 en el caso $g'=0.55$ y teniendo en cuenta la anchura de la delta.

virtuales, y la absorción de piones. El segundo, interfiere destructivamente con el primero, disminuyendo ligeramente ($\sim 5\%$) la intensidad del espectro en la zona de $\sim 450\text{MeV}$, mientras que el tercero es el responsable de la aparición de un pequeño pico para $k \sim 700\text{MeV}$. Un cálculo del mismo tipo, pero para un núcleo homogéneo, es el de Murthy y Sarma^[3], en el que obtienen unos efectos nucleares cualitativamente iguales a los de Dover et al., aunque con una intensidad notablemente superior. En ambos casos estudian la propagación de un pión por el núcleo, calculando en primer orden las interacciones con el resto de los nucleones. En nuestro formalismo, sin embargo, a través de la suma de la serie de Dyson para el propagador del pión, se están considerando correcciones de orden superior, cuya importancia es clara si se piensa que en algunas zonas $\propto \sqrt{\frac{m_p}{2}}$. Así, aparecen de una forma muy natural efectos combinados de la parte real e imaginaria de la polarización, difícilmente tratables con las otras técnicas. Otras peculiaridades que trascienden completamente estos estudios, son la dependencia en energía-momento de la anchura de la delta, cuyos efectos en la región del espectro de $\sim 650\text{MeV}$ son muy importantes, o las correcciones que aquí aparecen a través de la parte real de la autoenergía del protón.

Otro tipo de análisis es el de Gabriel y Goodman^[4] consistente en el estudio de la propagación en el núcleo del pión (real) producido en la desintegración con un método de Montecarlo. Este procedimiento adolece de un grave defecto: no considera la posibilidad de emisión de piones virtuales, que como se ha visto pueden ser responsables de una fuerte modificación del espectro del positrón. Al tener en cuenta únicamente la emisión de piones reales, que no afectan a las características de los estados finales del positrón, éstas sólo están determinadas por el movimiento de Fermi (ver fig. 11). Es interesante señalar que, en cierto modo, este método es complementario al de un cálculo

inclusivo respecto a los hadrones, y podría permitir, conocido el espectro del positrón, hacer un estudio detallado de los estados finales hadrónicos.

En cuanto a nuestros resultados, aunque se ha conseguido un tratamiento satisfactorio de algunos efectos de orden superior, la compleja naturaleza de las interacciones fuertes entre hadrones hace que no pueda descartarse la posibilidad de modificaciones sensibles producidas por correcciones aquí no consideradas. Afortunadamente, la comparación con resultados obtenidos en otros contextos^[45] indica que los diagramas estudiados son, con diferencia, los más relevantes. Probablemente, las eventuales modificaciones más importantes procedan de dos direcciones. En primer lugar las relacionadas con las características de las interacciones pión-barión, especialmente el factor de forma adoptado, cuya elección concreta suele variar dependiendo del tipo de procesos que se pretenden estudiar. Es de destacar, en cualquier caso, que los resultados expuestos en los apartados precedentes para los diferentes términos o, incluso, para los distintos valores del parámetro R_N , son notablemente parecidos, cuando en la práctica, todas estas variaciones equivalen a cambios en el factor de forma. Pero, sin duda, las mayores modificaciones estarán debidas a efectos de finitud del núcleo, ya que los resultados obtenidos en este capítulo sólo pueden describir el comportamiento de la zona central del núcleo, la cual, en los casos de mayor interés, es relativamente reducida. Por consiguiente, es de gran importancia la generalización de estos resultados a la región superficial del núcleo, lo que será el tema del capítulo IV.

CAPITULO III:

Oscilaciones neutrón-antineutrón en núcleos.

1. Teorías de Gran Unificación y oscilaciones $n-\bar{n}$.

Se puede probar^[15] que un operador efectivo de cuatro campos fermiónicos, local y no derivativo que sea invariante bajo $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$, automáticamente conserva la diferencia entre los números bariónico y leptónico ($B-L$). Si no existe ninguna energía umbral entre M_X y M_X' , como ocurre en el modelo mínimo de Gran Unificación,^[16] los procesos que requieran seis o más campos fermiónicos están suprimidos por potencias superiores de M_X ; es decir, el teorema anterior garantiza la conservación de $B-L$ en el orden dominante.

Se han estudiado, sin embargo, multitud de modelos con estructuras de Higgs más complejas, que predicen partículas de masas intermedias, y en los cuales la violación de $B-L$ sí es importante. La no imposición de $\Delta B = \Delta L$, abre la posibilidad de que se produzcan procesos muy diferentes a las desintegraciones como son las oscilaciones partícula-antipartícula ($n-\bar{n}$, $\gamma-\bar{\gamma}$, $H-\bar{H}$, etc.). Limitándonos a las oscilaciones neutrón-antineutrón,

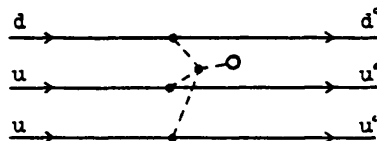


Fig. 1. Diagrama con $\Delta B=2$, $\Delta L=0$. Proceso mediado por partículas de Higgs (líneas discontinuas). Su amplitud es de orden M_X^{-2} . En el modelo de Mohapatra y Marshak^[17], $M_X \sim 10^4$ GeV.

digamos que su intensidad varía enormemente con el modelo. Así las predicciones para el periodo de oscilación se mueven entre los 10^{30} años del modelo de Chang y Chang^[50] y los 10^5 segundos del de Mohapatra y Marshak^[51]. Sólo si la cifra correcta es próxima a este segundo valor, el proceso podría ser observado a corto plazo.

2. Fenomenología de las oscilaciones $n-\bar{n}$.

De una forma análoga al caso de la desintegración del protón, pueden parametrizarse los efectos de oscilación $n-\bar{n}$ mediante un lagrangiano efectivo de interacción en términos del campo (de Dirac) ψ del neutrón^[5,50].

$$\mathcal{L}_{\text{eff}}^{\text{int}} = \delta m \bar{\psi}^c \psi + \text{h. c.} \quad (2.1)$$

donde ψ^c es el campo transformado por conjugación de carga, y δm es una constante. La expresión (2.1) es independiente del modelo concreto, éste sólo influye a través de δm . Compárese esta situación con la que se produce en el estudio de la desintegración del protón al calcular el correspondiente lagrangiano efectivo. en el que aparecen una serie de términos responsables de cada uno de diversos canales de desintegración con sus respectivas constantes de acoplamiento, y en algunos una dependencia de la estructura de los hadrones a través de factores de forma que ahora no existe.

La posibilidad de una transición de un estado de neutrón al de su antipartícula, recuerda al caso del sistema $K^0-\bar{K}^0$. Una forma de estudiar las oscilaciones libres es partir de una matriz de masa:

$$M = \begin{pmatrix} m & \delta m \\ \delta m & m \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

que actúa sobre estados $\psi = \begin{pmatrix} n \\ \bar{n} \end{pmatrix}$. Los autoestados de la matriz M ya no son n y \bar{n} sino las combinaciones lineales:

$$\begin{aligned} |n_1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|n\rangle + |\bar{n}\rangle) \\ |n_2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|n\rangle - |\bar{n}\rangle) \end{aligned} \quad (2.3)$$

con masas $m_1 = m + \delta m$ y $m_2 = m - \delta m$, respectivamente.

Si en $t=0$ partimos de un estado de neutrón, su evolución temporal será

$$|n(t)\rangle = \frac{|n(0)\rangle e^{-im_1 t} + |n(0)\rangle e^{-im_2 t}}{\sqrt{2}} \quad (2.4)$$

y la probabilidad de que el neutrón haya oscilado en un tiempo t :

$$P_{\bar{n}}(t) = |\langle \bar{n} | n(t) \rangle|^2 \quad (2.5)$$

es decir,

$$P_{\bar{n}}(t) = \text{sen}^2(\delta m t) \quad (2.6)$$

se producen oscilaciones con un periodo de $\sim \frac{1}{\delta m}$.

Es muy importante el hecho de que el inverso de este periodo no depende cuadráticamente de la constante de acoplamiento (δm) sino linealmente, lo que constituye una notable diferencia frente a una desintegración. Efectivamente, para un modelo como el de Mchapatra y Marshak^[52] con una masa de los Higgs de unos 10^4 GeV,

resulta $\delta m \sim 10^{-30} \text{ GeV}$ y el periodo de oscilación

$$t_{n\bar{n}} \sim 10^5 \text{ segundos} \quad (2.7)$$

a comparar con los 10^{30} años $\left(\sim \frac{m_p}{(\delta m)^2} \right)$ de la vida media del protón en el modelo mínimo.

Un periodo de 10^5 s es unas mil veces la vida media del neutrón (bajo β -decay), lo que hace en principio posible la observación experimental de estos fenómenos (la probabilidad de que un neutrón libre oscile antes de su desintegración es 10^{-6} para este valor de $t_{n\bar{n}}$). Sin embargo, en la práctica no es fácil trabajar con neutrones libres, principalmente debido a las interacciones electromagnéticas; en particular la causada por el campo magnético terrestre, que actúa de diferente forma sobre un neutrón o un antineutrón. La influencia de un campo magnético externo, puede tenerse en cuenta de una manera muy simple en términos de la matriz de masa, que ahora sería de la forma

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & \delta m \\ \delta m & A_2 \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

donde $A_1 = m + \mu_n B$, $A_2 = m - \mu_n B$; y los autoestados de M :

$$\begin{aligned} |n_1\rangle &= \cos\theta |n\rangle + \sin\theta |\bar{n}\rangle \\ |n_2\rangle &= -\sin\theta |n\rangle + \cos\theta |\bar{n}\rangle \end{aligned} \quad (2.9)$$

con

$$\theta = \frac{1}{2} \arctg \frac{2\delta m}{A_1 - A_2} \quad (2.10)$$

En general $|A_1 - A_2\rangle\rangle \delta m$ de modo que llamando $\Delta M \equiv A_1 - A_2$:
 $\varphi \approx \delta m / \Delta M$. En este caso la probabilidad de transición sería

$$P_{\bar{n}}(t) = \left(\frac{\delta m}{\Delta M} \right)^2 \text{sen}^2(\Delta M \cdot t) \quad (2.11)$$

ΔM para el campo magnético terrestre es $\sim 4 \times 10^{-12} \text{ eV}$. de modo que el periodo de oscilación disminuye hasta

$$t_{AA} = \frac{1}{\Delta M} \sim 10^{-4} \text{ s} \quad (2.12)$$

Para $t \gg \frac{1}{\Delta M}$, promediando en tiempos

$$\langle P_{\bar{n}}(t) \rangle \sim \frac{1}{2} \left(\frac{\delta m}{\Delta M} \right)^2 \sim 10^{-20} \quad (2.13)$$

mientras que para $t \ll \frac{1}{\Delta M}$

$$P_{\bar{n}}(t) \sim (\delta m \cdot t)^2 \quad (2.14)$$

que es un comportamiento análogo al del caso con $\Delta M=0$.

Para un flujo de unos 10^{-4} neutrones térmicos por segundo, si $t_{AA} \sim 10^5 \text{ s}$, la probabilidad de que se produzca una transición durante el tiempo de recorrido libre ($\sim 10^{-2} \text{ s}$) es de 10^{-6} cada segundo, cantidad perfectamente medible. Por otra parte, un apantallamiento del campo magnético terrestre en un factor 10^3 , aumentaría en 10^6 el número de sucesos.

Los experimentos sobre oscilaciones $n-\bar{n}$ en neutrones libres son por tanto posibles. En efecto, ya en 1981 se realizó en Grenoble ^[5,57] una experiencia de este tipo cuyo resultado fue

$$t_{AA} > 10^6 \text{ s} \quad (2.15)$$

Este experimento en realidad estaba destinado al diseño de otro más sensible, también en Grenoble, con el cual se pretende elevar la cota hasta $10^3 - 10^9$ [55].

Es, no obstante, evidente la ventaja práctica de trabajar no con neutrones libres, sino ligados en núcleos. Pero basta hacer una analogía con el caso del potencial exterior, para ver que ahora $\Delta M \sim 1 \text{ GeV}$, con lo cual $P_{\bar{n}}(t) \sim 10^{-60}$!! (esto representaría que en todo el Sistema Solar, probablemente no encontraríamos ningún antineutrón procedente de la oscilación de un neutrón ligado). Sin embargo, la situación es completamente diferente ya que un antineutrón en un núcleo es altamente inestable. Efectivamente un cálculo más cuidadoso muestra que la probabilidad de oscilación y posterior aniquilación del antineutrón es aproximadamente:

$$P \sim \frac{(\delta m)^2}{M} t \quad (2.16)$$

donde M es una masa típica nuclear. Usando la relación anterior, se obtiene para la vida media

$$\tau_n \sim \frac{1}{P} \sim 10^{50} \text{ GeV}^{-1} \sim 10^{28} \text{ años} \quad (2.17)$$

es decir, del mismo orden que la correspondiente a la desintegración del protón. Como los mismos sistemas de detección de desintegración de nucleones pueden ser utilizados para estudiar las oscilaciones de neutrones ligados en núcleos, el mayor esfuerzo experimental va actualmente en esta dirección. En concreto, de un análisis de datos del experimento IMB recientemente publicado [56] se ha obtenido una cota para la vida media de este proceso de:

$$\tau_n > 10^{31} \text{ años} \quad (2.18)$$

Es, por consiguiente, de gran interés un estudio detallado de los efectos nucleares sobre las oscilaciones $n-\bar{n}$ con objeto de relacionar esta vida media con el período de oscilación libre.

3. Oscilaciones $n-\bar{n}$ en núcleos.

En general, los cálculos de efectos nucleares que aparecen en la literatura ^[57-60] se basan en el uso de potenciales ópticos. El potencial que actúa sobre un antineutrón en un núcleo puede obtenerse a través de transformaciones de G-paridad: ^[61] dado un potencial NN proveniente del intercambio de n piones (un mesón ω equivaldría en cuanto a G-paridad a 3 piones, un ρ a 2, etc.) el potencial $N\bar{N}$ correspondiente es

$$V_{N\bar{N}} = (-1)^n V_{NN} \quad (3.1)$$

Evidentemente estos potenciales no pueden tener en cuenta la inestabilidad del antinucleón en presencia de nucleones. Para incluir este efecto, se introduce un potencial complejo empírico ^[62] del tipo

$$V_c(r) = - \frac{V_0 + iW_0}{1 + \exp\{(r-R)/a\}} \quad (3.2)$$

que se toma de modo que, junto con los deducidos a partir de la interacción NN, ajuste datos experimentales de dispersión $N\bar{N}$. (Nótese que V_c no sólo tiene en cuenta los efectos de aniquilación, sino que incluye una parte real que tendrá gran importancia). Usando estos potenciales hay varios tipos de tratamiento. Por una parte Chetyrkin et al. ^[57] tras hacer un promedio de los potenciales NN y $N\bar{N}$ sobre los estados nucleares obtienen:

$$\frac{\Gamma_A}{N} = (\delta m)^2 \frac{\Gamma_{\bar{n}}}{(\Delta m)^2 + \Gamma_{\bar{n}}^2/4} \quad (3.3)$$

donde:

$$\Delta m = \langle V_n \rangle - \text{Re} \langle V_{\bar{n}} \rangle \quad (3.4)$$

$$\Gamma_{\bar{n}} = -2 \text{Im} \langle V_{\bar{n}} \rangle \quad (3.5)$$

(V_n y $V_{\bar{n}}$ son respectivamente los potenciales nucleares medios sobre el neutrón y antineutrón. A es el número másico del núcleo y N el número de neutrones).

La cantidad relevante en cuanto a efectos nucleares es

$$T_R = \frac{\Gamma_A/N}{(\delta m)^2} \quad (3.6)$$

Aunque los resultados son variables, los cálculos más recientes [59] dan un valor de

$$T_R \approx 3 \times 10^{23} \text{s}^{-1} \quad (3.7)$$

es decir, para un tiempo de desintegración nuclear mayor que 10^{31} años, $\frac{1}{\delta m} \sim 3 \times 10^7 \text{s} \sim 1$ año.

Otro tipo de análisis es el de Dover et al. [60] en el que no promedian los potenciales, sino que estudian el sistema en términos de las funciones de onda individuales. Este tratamiento es particularmente más apropiado para núcleos pequeños, ya que en las proximidades de la superficie, al reducirse la densidad nuclear, la asimetría $n-\bar{n}$ es menos fuerte, y la probabilidad de oscilación aumenta. Los resultados obtenidos para el caso del

hierro son:

$$T_R \approx 1.1 \times 10^{23} \text{ s}^{-1} \text{ ó } 1.7 \times 10^{23} \text{ s}^{-1} \quad (3.8)$$

(para dos elecciones de los parámetros del potencial V_c)

Veremos en el apartado siguiente cómo mediante técnicas similares a las usadas en el capítulo anterior, se puede llegar a una expresión de la cual (3.3) puede obtenerse como caso simplificado, pero que abre la posibilidad de estudiar una serie de nuevos efectos ^[4].

4. Estudio de las oscilaciones $n-\bar{n}$ en núcleos en términos de funciones de Green.

Relacionaremos en este apartado la probabilidad de oscilación de un neutrón en un núcleo infinito con una función de Green en materia nuclear.

Tomando una aproximación no relativista del lagrangiano (2.1), la parte responsable de la no conservación del número bariónico tiene la forma:

$$\mathcal{L}_{\text{eff}}^{\text{int}}(x) = \delta m [\psi_n^\dagger(x) \psi_{\bar{n}}(x) + \psi_{\bar{n}}^\dagger(x) \psi_n(x)] \quad (4.1)$$

donde ψ_n y $\psi_{\bar{n}}$ son respectivamente los operadores de campo no relativistas (bispinores) para el neutrón y el antineutrón.

El elemento de la matriz S para el paso de un estado de un nucleón $|A\rangle$ con A nucleones a un estado $|F\rangle$ de número bariónico $A-2$ es

$$S(A \rightarrow F) = i (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_F - P_A) \langle F | \mathcal{L}_{\text{eff}}^{\text{int}}(0) | A \rangle \quad (4.2)$$

(se ha supuesto que los estados $|A\rangle$ y $|F\rangle$ son autoestados del cuadrimento total).

Normalizando en un volumen V , la probabilidad de transición por unidad de tiempo resulta ser

$$\Gamma(A \rightarrow F) = V (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A - p_F) |\langle F | \mathcal{L}_{\text{eff}}^{int}(0) | A \rangle|^2 \quad (4.3)$$

es decir,

$$\Gamma(A \rightarrow F) = V (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A - p_F) (\delta m)^2 \langle A | \psi_A^\dagger(0) \psi_A(0) | F \rangle \langle F | \psi_A^\dagger(0) \psi_A(0) | A \rangle \quad (4.4)$$

Transformando la $\delta^{(4)}$ en una integral e introduciendo las exponenciales en los elementos de matriz:

$$\Gamma(A \rightarrow F) = V (\delta m)^2 \int d^4x \langle A | (\psi_A^\dagger(-\frac{x}{2}) \psi_A(-\frac{x}{2}))^\dagger | F \rangle \langle F | \psi_A^\dagger(\frac{x}{2}) \psi_A(\frac{x}{2}) | A \rangle \quad (4.5)$$

Sumando sobre todos los estados $|F\rangle$ (nótese que los de n^2 bariónico distinto de $A-2$ no contribuyen):

$$\Gamma_A = \sum_{F \neq A} \Gamma(A \rightarrow F) = V (\delta m)^2 \int d^4x \langle A | (\psi_A^\dagger(\frac{x}{2}) \psi_A(\frac{x}{2}))^\dagger (\psi_A^\dagger(\frac{x}{2}) \psi_A(\frac{x}{2})) | A \rangle \quad (4.5)$$

El operador $\psi_A^\dagger(\frac{x}{2}) \psi_A(\frac{x}{2})$ disminuye en dos unidades el número bariónico, de modo que

$$\delta^{(4)}(p_A - p_F) \langle A | (\psi_A^\dagger(0) \psi_A(0) | F \rangle \langle F | (\psi_A^\dagger(0) \psi_A(0))^\dagger | A \rangle = 0 \quad (4.7)$$

ya que los productos escalares sólo son no nulos para $B_F = A-2$, y en ese caso, p_A nunca puede ser igual a p_F . Podemos por tanto escribir

$$\Gamma_A = V (\delta m)^2 \frac{1}{\langle A|A \rangle} \int d^4x \langle A | \left\{ (\psi_A^\dagger \psi_A)_{\frac{x}{2}}^\dagger, (\psi_A^\dagger \psi_A)_{\frac{x}{2}} \right\} | A \rangle \quad (4.3)$$

(se ha dividido por $\| |A\rangle \|^2$ para incluir el caso en que el estado no esté normalizado). Nótese que a diferencia del caso de la desintegración del protón ahora es necesario escribir Γ_A en términos de un anticonmutador, ya que los campos fermiónicos aparecen a pares.

Definamos la siguiente función de Green de 4 campos:

$$G(x_1, x_2) = i \frac{\langle A | T \{ (\psi_1^\dagger(x_1) \psi_2(x_1) (\psi_3^\dagger(x_2) \psi_4(x_2)))^\dagger | A \rangle}{\langle A | A \rangle} \quad (4.9)$$

desarrollando el producto T, es inmediato comprobar que se verifica

$$\langle A | A \rangle^{-1} \langle A | \{ (\psi_1^\dagger(x_1) \psi_2(x_1))^\dagger (\psi_3^\dagger(x_2) \psi_4(x_2)) \} | A \rangle = 2 \text{Im } G(x_1, x_2) \quad (4.10)$$

con lo que la anchura por neutrón es (tomando $A=2N$)

$$\frac{\Gamma_A}{N} = \frac{2V}{N} (\delta m)^2 2 \int dx \text{Im } G(-\frac{x}{2}, \frac{x}{2}) \quad (4.11)$$

Finalmente, escribiendo V/A en función del momento de Fermi, y G en términos de su transformada de Fourier \tilde{G} :

$$\tau_R = 6\pi^2 k_F^{-3} \text{Im } \tilde{G}(0) \quad (4.12)$$

Esta expresión (en el límite no relativista, y a primer orden en (2.1)) es formalmente exacta, en el sentido de que incluye todo tipo de interacciones (salvo las que no conservan \mathcal{B}) a todos los órdenes.

5. Estudio de la función \tilde{G} . Diagrama de autoenergías.

El conjunto de todos los diagramas que aparecen en el cálculo de la cantidad $\tilde{G}^{(0)}$, puede esquematizarse a través del diagrama de la figura 2, donde la zona rayada representa la suma de todo tipo de interacciones entre el antineutrón, el hueco del neutrón creado por la oscilación, y el mar de Fermi. Las reglas de Feynman que permiten calcular la contribución de cualquier diagrama, son las usuales en materia nuclear más las correspondientes a la propagación e interacciones de los antinucleones. El propagador libre del antinucleón es idéntico al del nucleón para $K_F=0$, ya que no existe mar de Fermi de antinucleones. En cuanto a las interacciones, podrían tomarse potenciales ópticos como los discutidos en el apartado anterior, o bien vértices con mesones, eventualmente también de tipo $NN\bar{N}$.

Aunque en la deducción de la expresión (4.12) se ha hecho una aproximación no relativista, podrían incluirse correcciones con un tratamiento relativista de las líneas internas de los diagramas, ya que las externas corresponden a partículas con momento menor que el de Fermi. Un estudio relativista sería necesario si se hiciera un cálculo dinámico de la aniquilación $N-\bar{N}$, ya que los 2 GeV de energía producidos podrían acelerar nucleones a velocidades muy altas (recuérdese que habitualmente,

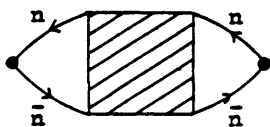


Fig. 2. Representación formal de todos los diagramas que contribuyen a la función \tilde{G} .

para los mesones se hace un tratamiento relativista). Al no disponer de un modelo dinámico fiable para la aniquilación y tener que recurrir a potenciales ópticos, el problema no va a aparecer.

Estudiaremos en primer lugar el diagrama de autoenergías de la figura 3, en el que no aparecen interacciones entre los propagadores del antinucleón y hueco. La función \tilde{G}_α correspondiente es

$$i\tilde{G}_\alpha(0) = \sum_{\alpha,1} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} i\tilde{G}_\alpha(p) i\tilde{G}_\alpha(p) \quad (5.1)$$

donde α es el índice de spin y:

$$\tilde{G}_\alpha(p) = \frac{1}{p^0 - m_N - \frac{p^2}{2m_N} - \sum_i (\vec{p}, \vec{p}) + i\epsilon \text{sign}(|\vec{p}| - k)} \quad (5.2)$$

$$\tilde{G}_\alpha(p) = \frac{1}{p^0 - m_N - \frac{p^2}{2m_N} - \sum_i (\vec{p}, \vec{p}) + i\epsilon} \quad (5.3)$$

De la teoría general^[28,29] se sabe que los polos del propagador del antineutrón son tales que $\text{Imp}^0 < 0$, mientras que los del

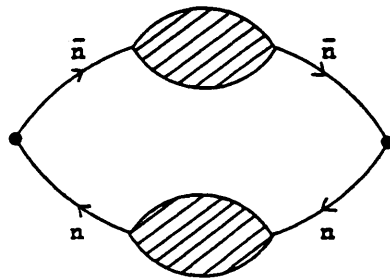


Fig. 3. Diagrama con inserciones de autoenergías en los propagadores del antineutrón y neutrón (hueco).

neutrón verifican esta propiedad si $|\vec{p}| > k_F$, mientras que en caso contrario los polos se sitúan en el semiplano superior. Esto permite escribir \tilde{G}_α de la forma:

$$\tilde{G}_\alpha(\omega) = 2i \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{p^2 - m_N - \frac{p^2}{2m_N} - \sum_n \langle f_n \rangle - \epsilon} \frac{1}{p^2 - m_N - \frac{p^2}{2m_N} - \sum_n \langle f_n \rangle + \epsilon} \Phi(k_F - |\vec{p}|) \quad (5.4)$$

A partir de este momento es necesario precisar más la forma de las autoenergías \sum_n^+ y \sum_n^- . Veamos cómo, tras una serie de aproximaciones, podemos obtener la ecuación básica de las refs. [51-59]

Si suponemos un comportamiento de cuasipartícula para el propagador del hueco (tiene un único polo para cada momento), la integral en energía puede calcularse inmediatamente:

$$\tilde{G}_\alpha(\omega) \approx -2 \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{\Phi(k_F - |\vec{p}|)}{\sum_n^+(p^0, \vec{p}) - \sum_n^-(p^0, \vec{p})} \left(\frac{1}{1 - \frac{\partial \sum_n^+(p^0, \vec{p})}{\partial p^0}} \right) \Bigg|_{p^0 = p_n^0} \quad (5.5)$$

con p_n^0 tal que

$$p_n^0 - m_N - \frac{p_n^2}{2m_N} - \sum_n^+(p_n^0, \vec{p}) = 0$$

Si $\sum_n^+(p^0, \vec{p})$ y $\sum_n^-(p^0, \vec{p})$ son aproximadamente constantes en p^0 en las proximidades de p_n^0 (lo son exactamente en el caso de potenciales estáticos a primer orden):

$$\tilde{G}_\alpha(\omega) \approx -2 \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{\Phi(k_F - |\vec{p}|)}{\sum_n^+(p^0) - \sum_n^-(p^0)} \quad (5.6)$$

Finalmente si la variación de $\sum_n^+(p^0)$ y $\sum_n^-(p^0)$ es pequeña para $|\vec{p}| < k_F$:

$$\tilde{G}_\alpha(\omega) \approx -2 \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \Phi(k_F - |\vec{p}|) \frac{1}{\sum_n^+ - \sum_n^-} \quad (5.7)$$

donde:

$$\sum_n = \left\langle \sum_n^* (\bar{p}) \right\rangle_{|\bar{p}| < K_F} \quad (5.3)$$

$$\sum_{\bar{n}} = \left\langle \sum_{\bar{n}}^* (\bar{p}) \right\rangle_{|\bar{p}| < K_F} \quad (5.9)$$

La parte imaginaria de \sum_n es perfectamente despreciable frente a la de $\sum_{\bar{n}}$, de modo que sustituyendo en (4.12):

$$\frac{\Gamma_A}{N} \approx (\delta m)^2 2 \operatorname{Im} \frac{1}{\sum_n - \sum_{\bar{n}}} \approx (\delta m)^2 \frac{-2 \operatorname{Im} \sum_{\bar{n}}}{(\sum_n - \operatorname{Re} \sum_{\bar{n}})^2 + (\operatorname{Im} \sum_{\bar{n}})^2} \quad (5.10)$$

que es precisamente la ecuación (3.3) si identificamos las autoenergías con las energías potenciales.

Correcciones a este resultado, a nivel del diagrama de la fig. 3 pueden calcularse de la expresión (5.6); es decir, antes de hacer hipótesis sobre la forma de la dependencia de las autoenergías en \bar{p} . Estas correcciones estarían en la línea del cálculo de Dover et al. [60], aunque ahora, por haber tomado el límite de materia nuclear, los efectos más interesantes que ellos encuentran (mayor probabilidad de oscilación para los neutrones más externos) aquí no pueden aparecer.

Otra posibilidad sería hacer cálculos dinámicos (considerar dependencia en energía), al menos parcialmente, usando directamente la ecuación (5.5). En los cálculos a primer orden (aproximación de Hartree-Fock), puede verse fácilmente que estas correcciones son muy pequeñas, mientras que cálculos de orden superior, que implican un comportamiento dinámico, son dudosos habida cuenta de las discrepancias existentes en la elección del potencial V_c .

Acuí nos limitaremos al estudio de otro tipo de diagramas sobre los que se puede calcular con mayor seguridad, y cuyo efecto es considerable.

6. Correlaciones \bar{n} -hueco

Un efecto muy interesante, que no ha sido tenido en cuenta por otros autores y que aparece naturalmente en nuestro formalismo, es el de las correlaciones antineutrón-hueco.

Estas correlaciones son efectos muy específicos de las teorías de muchos cuerpos. En nuestro caso su importancia puede ponerse de manifiesto si se piensa que la anchura de un antinucleón es unos 300MeV, de modo que su recorrido medio en el núcleo es de 0.2F; es decir, el antinucleón prácticamente se aniquila "encima" del hueco.

Una contribución a este efecto (probablemente la principal) puede calcularse mediante la suma de los diagramas de "escalera" de la figura 5.

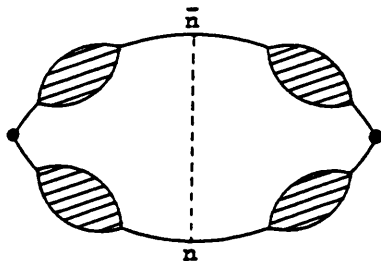


Fig. 4. Diagrama de correlación \bar{n} -hueco. La línea discontinua representa un potencial de interacción $\bar{n}n$.

Las contribuciones de cada uno de los diagramas son:

$$\tilde{G}_a(\omega) = 2i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} G_a(p) G_a(p) \quad (6.1)$$

$$\tilde{G}_b(\omega) = 2i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} G_a(p) G_a(p) \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \tilde{V}(q) G_a(p+q) G_a(p-q) \quad (6.2)$$

$$\tilde{G}_c(\omega) = 2i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} G_a(p) G_a(p) \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \tilde{V}(q) G_a(p+q) G_a(p-q) \int \frac{d^4r}{(2\pi)^4} \tilde{V}(r) G_a(p+r) G_a(p-r) \quad (6.3)$$

donde

$$\tilde{V}(q) = \int d^4x e^{iqx} V_{NN}(x)$$

Si consideramos un potencial de interacción NN estático, y unas autoenergías Σ_1 y Σ_2 aproximadamente constantes para momentos en el interior de la esfera de Fermi, tras integrar en energías se obtiene:

$$\tilde{G}_a(\omega) = \frac{2}{\Sigma_1 - \Sigma_2} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \Theta(k_F - |\vec{p}|) \quad (6.4)$$

$$\tilde{G}_b(\omega) = \frac{1}{(\Sigma_1 - \Sigma_2)^2} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \Theta(k_F - |\vec{p}|) \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \Theta(k_F - |\vec{q}|) \tilde{V}(\vec{q}) \quad (6.5)$$

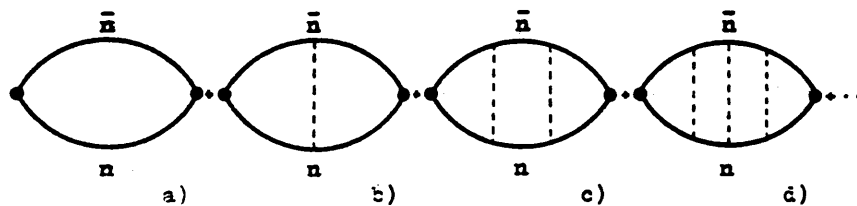


Fig. 5. Diagramas de escalera que contribuyen a las correlaciones \bar{n} -hueco. Las líneas continuas gruesas representan a los propagadores del n y \bar{n} renormalizados por el medio, y las líneas a trazos al potencial (estático) NN .

$$\begin{aligned} \tilde{G}_c^{(0)} &= \frac{2}{(\Sigma_n - \Sigma_n)} \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \Phi(k_F - |\vec{p}|) \int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3} \Phi(k_F - |\vec{q}|) \tilde{V}(\vec{q}) \int \frac{d^3\vec{r}}{(2\pi)^3} \Phi(k_F - |\vec{r} + \vec{q}|) \tilde{V}(\vec{r}) \\ &\vdots \end{aligned} \quad (5.6)$$

Conocido el potencial $V(\vec{r})$, las integrales anteriores pueden calcularse numéricamente. No obstante, considerando que hay una notable arbitrariedad en la elección de este potencial (en concreto el término V_c), trataremos de expresar los resultados de una forma que no sea muy sensible a la elección particular.

En la aproximación de Hartree-Fock (usada en la ref [59]), la autoenergía propia del antineutrón es

$$\Sigma_n = \tilde{V}^{(0)} \cdot 4 \int d^3\vec{p} \Phi(k_F - |\vec{p}|) = 4 \cdot \frac{4}{3} \pi k_F^3 \tilde{V}^{(0)} \quad (5.7)$$

(el término de cambio no aparece debido a que no existe mar de Fermi de antineutrones y el potencial es estático). Sea

$$\lambda_b = \frac{\int d^3\vec{p} \int d^3\vec{r} \tilde{V}(\vec{r}) \Phi(k_F - |\vec{p} + \vec{r}|) \Phi(k_F - |\vec{p}|)}{\tilde{V}^{(0)} \cdot \int d^3\vec{p} \int d^3\vec{r} \Phi(k_F - |\vec{p} + \vec{r}|) \Phi(k_F - |\vec{p}|)} \quad (5.8)$$

que es un parámetro que sólo depende de la forma del potencial y no de su intensidad. En función de λ_b , \tilde{G}_b toma la forma:

$$\tilde{G}_b^{(0)} = \frac{k_F^3}{3\pi^2} \frac{1}{(\Sigma_n - \Sigma_n)} \frac{\Sigma_n}{4} \lambda_b \quad (5.9)$$

o en términos de $\tilde{G}_a^{(0)}$:

$$\tilde{G}_b^{(0)} = \tilde{G}_a^{(0)} \cdot \frac{\lambda_b}{4} \frac{\Sigma_n}{\Sigma_n - \Sigma_n} \quad (5.10)$$

Para conocer la sensibilidad de λ_b frente a la forma del potencial, se ha evaluado la expresión (6.8) para cada una de las piezas del potencial $\bar{N}\bar{N}$ correspondientes al intercambio de los diferentes mesones ^[59]. Los resultados muestran que las variaciones de λ_b son mínimas para cada uno de ellos de modo que

$$\lambda_b^M = 0.37-0.89 \quad (6.11)$$

Sin embargo, el término más importante en cuanto a la autoenergía es el potencial V_c , para el que:

$$\lambda_{b,1}^c = 0.72 \quad (R=0.3F, a=0.2F) \quad (6.12)$$

$$\lambda_{b,2}^c = 0.83 \quad (R=0, a=0.2F) \quad (6.13)$$

que corresponden respectivamente a las dos elecciones de parámetros que aparecen en la referencia [6].

Teniendo en cuenta la importancia relativa de cada una de las contribuciones a λ_b obtenemos para el potencial total:

$$\lambda_{b,1} = 0.76 \quad (6.14)$$

$$\lambda_{b,2} = 0.84 \quad (6.15)$$

Del mismo modo pueden calcularse los términos de orden superior:

$$\tilde{G}_c^{(2)} = \tilde{G}_c^{(0)} \lambda_c \left(\frac{1}{4} \frac{\sum \bar{\pi}}{\sum \bar{\pi} - \sum \pi} \right)^2 \quad (6.16)$$

Los cálculos explícitos muestran que salvo errores menores que el 1%, λ_c coincide con $(\lambda_w)^2$. Este comportamiento resulta análogo

para diagramas de orden superior: $\lambda_2 = (\lambda_1)^2$, etc. (ver apéndice C). (Nótese que en cualquier caso la importancia relativa decrece rápidamente debido al factor 1/4). La suma de todas las contribuciones sería:

$$\tilde{G}^{(0)} \approx \tilde{G}_a^{(0)} + \tilde{G}_v^{(0)} + \tilde{G}_c^{(0)} + \dots \quad (6.17)$$

$$\tilde{G}^{(0)} \approx \tilde{G}_a^{(0)} \left[1 + \left(\frac{\lambda_1}{4} \frac{\Sigma_{\bar{n}}}{\Sigma_{\bar{n}} - \Sigma_n} \right) + \left(\frac{\lambda_1}{4} \frac{\Sigma_{\bar{n}}}{\Sigma_{\bar{n}} - \Sigma_n} \right)^2 + \dots \right] \quad (6.18)$$

$$\tilde{G}^{(0)} \approx \tilde{G}_a^{(0)} \frac{1}{1 - \frac{\lambda_1}{4} \frac{\Sigma_{\bar{n}}}{\Sigma_{\bar{n}} - \Sigma_n}} \quad (6.19)$$

Como $|\Sigma_n| \sim 50 \text{ MeV} \ll |\Sigma_{\bar{n}}|$, puede tomarse

$$\frac{\Sigma_{\bar{n}}}{\Sigma_{\bar{n}} - \Sigma_n} \approx 1 \quad (6.20)$$

Obteniendo finalmente:

$$\tilde{G}^{(0)} \approx \tilde{G}_a^{(0)} \frac{1}{1 - \frac{\lambda_1}{4}} \quad (6.21)$$

Es decir, los efectos de correlación \bar{n} -hueco producen un aumento de la probabilidad del proceso de:

$$\text{Caso 1 : } 23\% \quad (6.22)$$

$$\text{Caso 2 : } 27\% \quad (6.23)$$

Es interesante remarcar que estos efectos son muy poco sensibles a las características concretas de los potenciales.

Fodría no haberse hecho la aproximación (6.20) con lo cual

el resultado sería dependiente de la intensidad de los potenciales. El cálculo explícito muestra, sin embargo, que esta dependencia es muy ligera; en particular, usando los valores de la referencia [59] se obtiene en vez de (6.22) y (6.23) un 21 y 25% respectivamente.

La interpretación física del aumento de la probabilidad producido por la presencia del hueco es clara: éste produce una disminución de la densidad en las proximidades del antineutrón, y consiguientemente una reducción de la asimetría $n-\bar{n}$. La importancia del efecto, que se ve muy reducida a causa de los cuatro grados de libertad internos del nucleón, aumentaría considerablemente en el caso de la materia neutrónica con dos únicos grados.

Resumiendo: vemos como un efecto muy específico de los sistemas de muchos cuerpos produce una variación de la probabilidad total nada despreciable, sobre todo teniendo en cuenta la precisión con la que otros autores que lo ignoran pretenden trabajar [59,60].

7. Discusión sobre otras posibles correcciones.

Por supuesto, la generalidad de la ecuación (4.12) no se agota con los diagramas estudiados hasta ahora. Veremos a continuación como existen otra serie de diagramas cuya verdadera importancia es por el momento difícil de estimar, por ser muy sensible a la forma del potencial V_C , y que hacen poco razonable la posibilidad de realizar cálculos precisos mientras no se disponga de un modelo más fiable para las interacciones $N\bar{N}$.

Consideremos en primer lugar un diagrama con líneas cruzadas como el de la figura 6, cuya contribución es

$$\tilde{G}_k^{(0)} = 2i^3 \int \frac{d^3x}{(2\pi)^3} G_n(p) G_{n+1}(p) \int \frac{d^3y}{(2\pi)^3} \frac{d^3z}{(2\pi)^3} G_{n+1}(p+q) G_n(p+q) G_n(p+q) \tilde{V}(y) \tilde{V}(z) \quad (7.1)$$

efectuando las integrales de energía y aproximando las autoenergías por constantes llegamos a

$$\tilde{G}_k^{(0)} \approx \frac{2}{\Sigma_n - \Sigma_{n+1}} \left[\frac{1}{(\Sigma_n - \Sigma_{n+1})^2} \int \frac{d^3x}{(2\pi)^3} \frac{d^3y}{(2\pi)^3} \frac{d^3z}{(2\pi)^3} \tilde{V}(y) \tilde{V}(z) \mathcal{E}(k-n) \mathcal{E}(k-p+q) \mathcal{E}(p+q-k) \right] \quad (7.2)$$

Vemos que aparece una línea de nucleón (con momento $\bar{p}+\bar{q}$) en el exterior de la esfera de Fermi (ver fig. 7). Esta característica hace que el resultado sea muy dependiente del comportamiento del potencial V_c a cortas distancias, lo cual, desgraciadamente es difícil de precisar [57-62], a diferencia de lo que ocurría en los diagramas anteriores en los que las integra

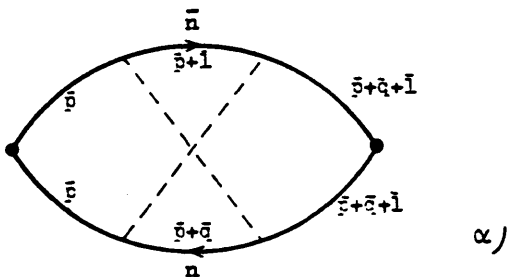


Fig. 6. Diagrama de correlación \bar{n} -nucleon con líneas cruzadas. (Potencial estático).

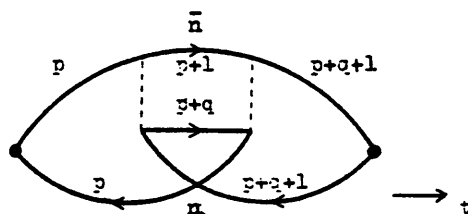


Fig. 7. Diagrama \mathcal{G} ordenado temporalmente. La línea de nucleón que va hacia delante en el tiempo representa un estado de partícula ($|p\rangle k_f$).

les sólo se entendían a momentos menores que k_f . No obstante, si comparamos el diagrama de la figura 7 con un diagrama de autoenergía como el de la figura 8, es razonable suponer que su efecto es similar al del diagrama b), sobre el de Hartree (de tipo "tadpole"). Aunque un cálculo cuantitativo requeriría un conocimiento del potencial V_c más preciso, concluimos que, por argumentos cualitativos y con ciertas reservas, los efectos

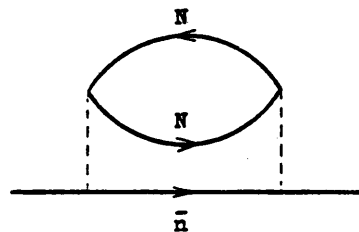


Fig. 8. Diagrama de autoenergía de segundo orden con creación de un par partícula-hueco.

de diagramas de correlación con líneas cruzadas son con gran probabilidad análogos a los diagramas de escalera; es decir: todos los diagramas de correlación \bar{n} -hueco, con potenciales estáticos, producen un aumento de la probabilidad de desintegración calculada considerando movimientos independientes, de entre un 20 y un 25%.

Finalmente digamos que los diagramas de correlación a través de interacciones dinámicas (intercambio de mesones o potenciales dependientes de la energía), en los cuales pueden aparecer fermiones en el exterior de la esfera de Fermi incluso a primer orden, podrían ser de gran importancia. Se ha analizado el diagrama de intercambio de un pión en el cual, en la función de Green correspondiente, aparecen denominadores del tipo $\Delta i - \omega - E$ (donde ω y E son respectivamente las energías del pión y el fermión en el exterior de la esfera de Fermi), cuya parte real es muy pequeña, haciendo que la contribución final sea grande. Es, sin embargo, poco consecuente hacer estudios dinámicos si la interacción más importante como es la de aniquilación $N\bar{N}$ sólo puede tratarse de forma estática.

CAPITULO IV:

Desintegración del protón en núcleos: correcciones superficiales.

1. Introducción.

En los capítulos anteriores, se ha supuesto el núcleo infinito y homogéneo; sin embargo, los núcleos de mayor interés experimental son el de oxígeno ($A=16$) y el de hierro ($A=56$), en los cuales los efectos superficiales pueden ser determinantes.

Desgraciadamente, la no homogeneidad espacial complica extraordinariamente los cálculos. Un estudio en términos de las funciones de onda monoparticulares para un núcleo finito, tiene la dificultad de que la mayor parte de los estados que aparecen en el problema que nos ocupa, corresponden al continuo, ya que la energía puesta en juego es del orden de la masa del protón. Esto imposibilitaría la utilización de técnicas de sumación de diagramas que como se ha visto son de gran importancia debido a la intensidad de la interacción. De cualquier modo, cálculos a primer orden sí son posibles en este marco, como es el caso del trabajo de Dover et al.^[30], que por otra parte, a causa de la complejidad del formalismo (incluso habiendo usado funciones de onda de oscilador armónico), sólo presenta resultados concretos para el caso del helio, de interés puramente académico. Otra posibilidad es un tratamiento a base de una aproximación de densidad local; es decir, considerar un momento de Fermi dependiente de la posición, y usar técnicas análogas a las de materia nuclear. Sin embargo, el efecto del movimiento de Fermi es muy importante, y es difícil estimar el error cometido con una aproximación de este tipo (nótese

que equivaldría a suponer que en ciertas zonas del núcleo, éste actúa como si su momento de Fermi fuera muy pequeño con lo que el espectro del positrón correspondiente presentaría un pico muy pronunciado para $k \sim \frac{m}{2}r$, lo que no tendría significado físico). Tampoco parece fácil describir adecuadamente con este formalismo la propagación de los piones en el núcleo, ya que pueden recorrer una distancia mucho mayor que el espesor de la región superficial ($\sim 2F$).

Aquí se optará por una técnica bastante distinta, consistente en suponer que el núcleo es, efectivamente, infinito pero con superficie. En concreto, se considerará que el sistema es homogéneo en dos direcciones espaciales, pero no en la tercera (aproximación plana), lo que permitirá en muchos casos utilizar métodos propios de estudios en materia nuclear, abriendo la posibilidad de efectuar sumas de conjuntos infinitos de diagramas.

En este punto, es interesante recordar algunos resultados obtenidos en otros contextos, referentes al estudio de correcciones superficiales. Por ejemplo, para la distribución de autovalores de la ecuación $\Delta\psi + E\psi = 0$ en un volumen V limitado por una superficie S en donde se imponen condiciones de contorno de Dirichlet (lo que describe un sistema de partículas sin interacción mutua confinadas en esa región), Balian y Bloch^[64] obtienen ($E=k^2$):

$$\beta(E) = \frac{V}{4\pi^2} \left[\lambda V - \frac{\pi}{2} S - \frac{1}{3\lambda} \int_S \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) + \dots \right] \quad (1.1)$$

donde R_1 y R_2 son los radios principales de curvatura en cada punto de la superficie. Cuando el volumen tiende a infinito, el primer término es el dominante; el segundo correspondería a correcciones de orden $\frac{S}{V}$; el siguiente de $\left(\frac{S}{V}\right)^2$ etc. Si los términos de curvatura son despreciables, la corrección superficial resulta proporcional a la superficie e independiente de la forma de ésta.

Una situación similar es la que aparece en la "fórmula de masas" en Física Nuclear^[63]. En efecto, las dos principales contribuciones a la energía de enlace de un núcleo atómico de número másico A (con $Z \approx A/2$) son

$$a_1 A - a_2 A^{2/3} \quad (1.2)$$

que representan respectivamente la contribución de volumen ($A \sim V$) y de superficie ($A^{2/3} \sim S$). Teniendo en cuenta que los valores de las constantes a_1 y a_2 son próximos, podemos estimar la importancia de las correcciones superficiales mediante la relación entre ambos: $A^{1/3} \sim \frac{S}{V}$. Los efectos de curvatura serían del orden de $\left(\frac{S}{V}\right)^2 \sim A^{-2/3}$.

En principio, podemos suponer que los efectos nucleares sobre la desintegración del protón se comportan de forma análoga, de modo que las correcciones superficiales serán pequeñas si $A^{-1/3}$ lo es. En los dos casos citados antes los valores son

$$O^{16} : A^{-1/3} = 0.40$$

$$Fe^{56} : A^{-1/3} = 0.26$$

por lo que es de esperar que los efectos de superficie sean muy importantes en el hierro, y determinantes en el oxígeno. En cuanto a efectos de curvatura:

$$\begin{aligned} O^{16} : A^{-2/3} &= 0.16 \\ Fe^{56} : A^{-2/3} &= 0.07 \end{aligned}$$

de modo que una aproximación plana para el caso del hierro es bastante aceptable. Para el oxígeno, los efectos de curvatura pueden no ser despreciables, aunque es de esperar que el término en $A^{-1/3}$ sea el dominante.

En la hipótesis de que sólo el tamaño y no la forma de la superficie es el responsable de las principales correcciones debidas a la finitud del núcleo, podemos limitarnos a estudiar el sistema en la aproximación de superficie plana, con las ventajas ya comentadas.

Debemos, por consiguiente, generalizar todo lo dicho en el capítulo II a esta nueva situación. En primer lugar, comentaremos las reglas de Feynman correspondientes, posteriormente se generalizará la relación entre el espectro del positrón y las funciones de Green, y finalmente se estudiarán éstas.

2. Reglas de Feynman para sistemas con simetría plana.

En un sistema inhomogéneo ya no es posible trabajar en espacio de momentos. No obstante, cuando existe invariancia traslacional en dos direcciones espaciales (x e y), puede usarse una representación mixta bimomentos-coordenada z , con lo que los cálculos se simplifican notablemente frente a los necesarios en una representación puramente posicional. Aún así, una dependencia explícita en una coordenada espacial, no permite efectuar sumas de conjuntos infinitos de diagramas, ya que esto equivaldría a la solución de complicadas ecuaciones integrales. Para salvar este problema, se utilizará una representación en términos de las autofunciones de un hamiltoniano H^0 que se precisará a continuación.

En ausencia de potenciales exteriores, el hamiltoniano total puede descomponerse en un término puramente cinético y otro de interacción. Pretendemos estudiar un sistema que genera una no homogeneidad espacial a través de la interacción mutua entre sus partículas, por lo que una descomposición como la indicada nos llevaría a tratar la creación de la inhomogeneidad de una forma perturbativa, lo que aparentemente resulta inviable (ver apéndice D). La solución consiste en incluir en el hamiltoniano libre, no sólo los términos cinéticos sino también el potencial medio creado por las partículas del mar de Fermi.

Sea $\{\phi_i(\vec{r})\}$ una base ortonormal del espacio de Hilbert de una partícula (por simplicidad ignoraremos por el momento los estados internos), con hamiltoniano H^0 . El operador correspondiente en el formalismo de la 2ª cuantificación ^[29] puede

escribirse como

$$\hat{H}^0 = \sum_{\alpha\beta} \langle \alpha | H^0 | \beta \rangle c_\alpha^\dagger c_\beta \quad (2.1)$$

Si elegimos la base $\{\phi_\alpha\}$ de forma que diagonalice H^0 :

$$\hat{H}_0 = \sum_{\alpha} (m_\alpha + \epsilon_\alpha) c_\alpha^\dagger c_\alpha \quad (2.2)$$

donde ϵ_α es la autoenergía para el estado α . Del mismo modo los campos en imagen de Schrödinger sería

$$\hat{\psi}_s(\vec{r}) = \sum_{\alpha} \phi_\alpha(\vec{r}) c_\alpha \quad (2.3)$$

y en imagen de interacción (usando (2.2)):

$$\hat{\psi}_s(\vec{r}, t) = \sum_{\alpha} e^{-i\epsilon_\alpha t} \phi_\alpha(\vec{r}) c_\alpha \quad (2.4)$$

con lo que la función de Green "libre" correspondiente, si todos los estados con energía menor que $\epsilon_\alpha + m_\alpha$ están ocupados sería

$$G^{(0)}(\vec{r}, \vec{r}', \omega) = \sum_{\alpha} \frac{\phi_\alpha(\vec{r}) \phi_\alpha^*(\vec{r}')}{\omega - \epsilon_\alpha - m_\alpha - i\epsilon \chi_\alpha(\epsilon_\alpha - \epsilon_\alpha')} \quad (2.5)$$

Si el sistema es invariante bajo traslaciones en las direcciones x e y , el potencial medio sólo puede depender de z , con lo que las autofunciones de $H^0 = T + V(z)$, pueden tomarse de la forma (discretizando en una caja de volumen $L_x \times L_y \times L_z$):

$$\phi_n(\vec{r}) = \frac{e^{ik_x x}}{L_x^{1/2}} \frac{e^{ik_y y}}{L_y^{1/2}} \psi_{2n}(z) \quad (2.6)$$

donde debe verificarse:

$$\left(\frac{1}{2m_0} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + V(z) \right) \psi_{2n}(z) = \epsilon_{2n} \psi_{2n}(z) \quad (2.7)$$

con lo que la función de Green libre (tomando $L_{x,y} \rightarrow \infty$) resulta:

$$G^{(0)}(\vec{r}, \vec{r}', \omega) = \sum_n \frac{i^2 \psi_{2n}(z) \psi_{2n}^*(z') e^{i\mathbf{p}(\vec{r}-\vec{r}')}}{\omega - \frac{p^2}{2m_0} - \epsilon_{2n} - m_0 v + i\eta \log(\epsilon_{2n} - \frac{p^2}{2m_0} - \epsilon_{2n}')} \quad (2.8)$$

($\underline{p}=(p_x, p_y)$, $\underline{r}=(x, y)$ y se ha suprimido el subíndice z en las ψ_n)
Para posterior uso definiremos

$$G_{\underline{z}}^{(0)}(z, z', \underline{p}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dz'' e^{-i\mathbf{p}(\underline{r}-\underline{r}')} G^{(0)}(\vec{r}, \vec{r}', \omega) = \sum_n \frac{\psi_{2n}(z) \psi_{2n}^*(z')}{\omega - \frac{p^2}{2m_0} - \epsilon_{2n} - m_0 v + i\eta \log(\epsilon_{2n} - \frac{p^2}{2m_0} - \epsilon_{2n}')} \quad (2.9)$$

$$\tilde{G}_{\underline{z}}^{(0)}(\underline{p}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dz \psi_{2n}^*(z) \psi_{2n}(z) G_{\underline{z}}^{(0)}(z, z, \underline{p}, \omega) = \frac{\delta_{2n,2}}{\omega - \frac{p^2}{2m_0} - \epsilon_{2n} - m_0 v + i\eta \log(\epsilon_{2n} - \frac{p^2}{2m_0} - \epsilon_{2n}')} \quad (2.10)$$

En cuanto al propagador de la delta, puede procederse de forma análoga. Si la base de autofunciones correspondientes para la dirección z es $\{\psi_n\}$, y los autovalores $\{m_n + \epsilon_n\}$, obtendríamos para la función de Green libre:

$$\Delta^{(0)}(\vec{r}, \vec{r}', \omega) = \sum_n \int_{-\infty}^{\infty} dz \psi_n^*(z) \psi_n(z') e^{i\mathbf{p}(\vec{r}-\vec{r}')} \Delta_{m_n}^{(0)}(\underline{p}, \omega) \quad (2.11)$$

$$\Delta^{(\omega)}(z, z', p, \omega) = \sum_{\mu, \nu} \varphi_{\mu}(z) \varphi_{\nu}^*(z') \tilde{\Delta}_{\mu\nu}^{(\omega)}(p, \omega) \quad (2.12)$$

$$\tilde{\Delta}_{\mu\nu}^{(\omega)}(p, \omega) = \frac{L}{\omega - \frac{p^2}{2m_{\Delta}} - \epsilon_{\mu} - m_{\Delta} + i\epsilon} \delta_{\mu\nu} \quad (2.13)$$

(Nótese que el potencial medio que actúa sobre la delta no tiene porqué ser el mismo que para nucleones).

En cuanto a los piones, supondremos que a orden cero, no actúa sobre ellos ningún tipo de potencial, luego las funciones (para la dirección z) que diagonalizan los propagadores serán ondas planas que denotaremos por $\{\varphi_i\}$:

$$D^{(\omega)}(\vec{r}, \vec{r}', \omega) = \sum_j \frac{L^3}{(2\pi)^3} \varphi_j(z) \varphi_j^*(z') e^{i(p(\vec{r}-\vec{r}'))} \tilde{D}_{ij}^{(\omega)}(p, \omega) \quad (2.14)$$

$$D^{(\omega)}(z, z', p, \omega) = \sum_j \varphi_j(z) \varphi_j^*(z') \tilde{D}_{ij}^{(\omega)}(p, \omega) \quad (2.15)$$

$$\tilde{D}_{ij}^{(\omega)}(p, \omega) = \frac{\delta_{ij}}{\omega^2 - (p^2 + p_z^2 + \pi^2) + i\epsilon} \quad (2.16)$$

donde $\varphi_i(z) = (L_z)^{-1/2} \exp(ip_z z)$. (Otra posibilidad es usar una base real de senos y cosenos con la cual la forma de las ecs. (2.14-16) permanece invariante).

Aparecen, por tanto, tres conjuntos de funciones distintos. (Nótese que denotamos los subíndices de las autofunciones de nucleones con las letras: α, β, \dots ; para las deltas: μ, ν, \dots ; y para los piones: i, j, \dots). Podría haberse usado la misma base para los tres propagadores, aunque en ese caso no serían diagonales. En general tampoco lo serán en cuanto se consideren interacciones.

Estudiaremos a continuación la forma de los vértices pión-barión para estos sistemas. En espacio de momentos, particularizando para el caso πNN , el vértice es

$$V_{s_1 t_1, s_2 t_2}^j(\vec{p}) = \frac{f}{\mu} u(\vec{p}) (\vec{\sigma} \cdot \vec{p})_{s_1 s_2} \tau_{t_1 t_2}^j \quad (2.17)$$

donde (s_1, t_1) y (s_2, t_2) son respectivamente el spin e isospín de los nucleones entrante y saliente, j es el isospín del pión y \vec{p} su momento. La expresión de este vértice en espacio de posiciones es

$$V_{s_1 t_1, s_2 t_2}^j(\vec{r} - \vec{r}') = \frac{f}{\mu} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) e^{-i\vec{p}(\vec{r} - \vec{r}')} u(\vec{p}) (\vec{\sigma} \cdot \vec{p})_{s_1 s_2} \tau_{t_1 t_2}^j \quad (2.18)$$

nótese que a causa del factor de forma, la interacción será no local. En efecto, éste aparece debido a la extensión finita del nucleón.

La contribución de un diagrama como el de la figura 1 sería

$$\int d\vec{x}_1 d\vec{x}_2 G^{(+)}(x_1, \vec{x}_1, E_1) G^{(+)}(x_2, \vec{x}_2, E_2) D^{(+)}(x_1, x_2, E_1) V_{s_1 t_1, s_2 t_2}^j(\vec{r} - \vec{r}') \delta(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) \delta(E_1 - E_2) \quad (2.19)$$

y en representación de bimotores-z

$$\int d\vec{x}_1 d\vec{x}_2 G^{(+)}(x_1, \vec{x}_1, E_1) G^{(+)}(x_2, \vec{x}_2, E_2) D^{(+)}(x_1, x_2, E_1) V_{s_1 t_1, s_2 t_2}^j(\vec{r} - \vec{r}') \delta(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) \delta(E_1 - E_2) \quad (2.20)$$

donde

$$V_{s_1 t_1, s_2 t_2}^j(\vec{r} - \vec{r}') = \frac{f}{\mu} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) e^{-i\vec{p}(\vec{r} - \vec{r}')} u(\vec{p}) (\vec{\sigma} \cdot \vec{p})_{s_1 s_2} \tau_{t_1 t_2}^j \quad (2.21)$$

En definitiva las reglas de Feynman para la construcción de la función de Green del nucleón en esta representación

$\tilde{G}_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(n)}(k)$ (s y t son resp. los índices de spin e isospín, y $k \equiv (k^0, \underline{k})$), considerando únicamente interacciones con piones son:

1. Dibujar todos los diagramas conexos, topológicamente diferentes con n líneas de pión y $2n+1$ líneas de nucleón, que comiencen y terminen por líneas de nucleón.
2. Asignar una dirección, bimoto y energía a cada línea de forma que se conserven en los vértices. A las líneas de nucleón asignar además un estado de spin e isospín y una función de onda de la base $\{|\psi_i\rangle\}$, y a las de pión un estado de isospín y una función de onda de la base $\{|\varphi_j\rangle\}$. Las líneas externas deben tener una energía bimoto de \underline{k} y un spin e isospín (s, t) y (s', t') respectivamente.
3. A cada línea de nucleón y pión se le asocia una función de Green libre (2.10) ó (2.16). (en el caso de bucles cerrados fermiónicos hay que añadir el factor de convergencia $\exp(i\omega t)$ ($\epsilon \rightarrow 0^+$) donde ω es la energía del fermión).
4. A cada interacción le corresponde un factor $\int \bar{\alpha}_{s_1 t_1} \bar{V}_{x_1, i_1}(\underline{q}) \tau_{t_1, t_2}^j$ donde s_1, t_1 y x_1 y s_2, t_2 y x_2 son los estados de spin, isospín y elemento de la base $\{|\psi_i\rangle\}$ de las líneas de nucleón entrante y saliente, y j e i son el isospín y elemento de la base $\{|\varphi_j\rangle\}$ del pión (de bimoto \underline{q} entrante. (Si el pión es saliente, deberá tomarse $\bar{V}_{x_2, i_2}(\underline{q})$).
5. Sumar e integrar sobre índices de spin e isospín, bimoto, energías y estados de las bases $\{|\psi_i\rangle, |\varphi_j\rangle\}$ de todas las líneas internas.
6. Añadir un factor $i^n (2\pi)^{-4n} (-1)^F$, donde F es el número de bucles fermiónicos cerrados.

En el caso de diagramas con deltas, el procedimiento es análogo, basta tomar la función de Green y la base correspondientes ((2.13) y $\{\varphi_\lambda\}$), y como operador de spin e isospín así como constante de acoplamiento, los de la interacción $N\bar{A}\pi$ y $\Delta\bar{A}\pi$. Del mismo modo se enunciarían las reglas para el propagador del pión o de la delta.

3. Relación entre la probabilidad de desintegración y la función de Green del protón.

Generalizaremos a continuación el tratamiento seguido en la sección (II.2), sin suponer la invariancia bajo traslaciones espaciales. Para fijar ideas, nos referiremos siempre a canales con un positrón en el estado final aunque, como antes, el caso del neutrino o incluso el muón podría tratarse de forma análoga. También particularizaremos, por el momento, para el término polo.

Se trata ahora de calcular la probabilidad de transición de un núcleo con A nucleones, en su estado fundamental $|A\rangle$, a un estado final de un positrón con cuadrimomento k , y restos hadrónicos $|F\rangle$ de número bariónico total $A-1$. Supondremos que A es lo suficientemente grande como para considerarlo fijo en el espacio. Esta aproximación será razonable, si el retroceso del núcleo tras la emisión del positrón es despreciable. Un tratamiento adecuado del movimiento del centro de masas es un problema delicado en Física Nuclear^[41]. En cualquier caso, nosotros finalmente supondremos que $A \rightarrow \infty$ (la curvatura de la superficie tiende a cero).

Asumiremos, por consiguiente, que tanto $|A\rangle$ como $|F\rangle$ son

autoestados de la energía pero no del trimomento. La probabilidad de transición será

$$\Gamma(A \rightarrow e^+_{k,s} F) = 2\pi \delta(k^0 - E_F - E_s) |\langle e^+ F | \int d^3x \mathcal{L}_{int}(0, \vec{x} | A) \rangle|^2 \quad (3.1)$$

Reduciendo el campo del positrón y promediando sobre helicidades,

$$\Gamma(A \rightarrow e^+ F) = \left[\frac{q_{GUT}}{2M_1} \right]^2 A_s(0) \cdot 2\pi \delta(k^0 - E_F - E_s) \int \frac{d^3x d^3x'}{V} \left(\frac{e^{-i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')}}{2k^0} \right) \langle A | \mathcal{L}_{int}(0, \vec{x}, \vec{x}' | F) \langle F | \mathcal{L}_{int}(0, \vec{x}, \vec{x}' | A) \rangle e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')} \quad (3.2)$$

(se ha normalizado en una caja cúbica de volumen V).

Despreciando m_e frente a k , transformando la δ en una integral e introduciendo las exponenciales en los elementos de matriz, llegamos a

$$\Gamma(A \rightarrow e^+ F) = \left[\frac{q_{GUT}}{2M_1} \right]^2 A_s(0) \frac{1}{V} \int d^3x d^3x' \frac{e^{-i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')}}{2k^0} \langle A | \mathcal{L}_{int}(0, \vec{x}, \vec{x}' | F) \langle F | \mathcal{L}_{int}(0, \vec{x}, \vec{x}' | A) \rangle e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \vec{k} \cdot \vec{x}')} \quad (3.3)$$

Finalmente, sumando sobre todos los posibles estados finales hadrónicos (nótese que sólo contribuyen aquellos con número bariónico $A-1$) y trimomentos del positrón, la anchura total toma la forma

$$\Gamma_A = \left[\frac{q_{GUT}}{2M_1} \right]^2 A_s(0) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int d^3x d^3x' e^{-i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')} \sum_{s,p} \langle A | \mathcal{L}_{int}(0, \vec{x}, \vec{x}' | F) \langle F | \mathcal{L}_{int}(0, \vec{x}, \vec{x}' | A) \rangle \quad (3.4)$$

donde x'_0 es arbitrario gracias a la invariancia bajo trasla-

ciones temporales:

$$\langle A | \rho_2^+(x) \rho_2(x) | A \rangle = e^{iE_A(x_1^0 - x_2^0)} \langle A | \rho_2^+(0, \vec{x}_1) e^{-iH(x_1^0 - x_2^0)} \rho_2(0, \vec{x}_2) | A \rangle$$

y se ha hecho tender a infinito el volumen de discretización del momento del positrón.

Del mismo modo que en el capítulo II, podemos añadir un término proporcional a $\langle A | \rho_2(x) \rho_2^+(x) | A \rangle$ siempre que restrinjamos la integral en \vec{k} a momentos menores que $\frac{m_A}{\Lambda}$; es decir,

$$\Gamma_A \approx \left[\frac{2\pi\omega}{2\pi V} \right]^2 A_2(t) \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \int d\vec{x}_1 d\vec{x}_2 e^{-i\vec{k}(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)} \sum_{\vec{k}} (\vec{k}) \langle A | [\rho_2^+(x_1) \rho_2(x_2)] | A \rangle \Phi(\frac{m_A}{\Lambda} - k) \quad (3.5)$$

Particularizando para el término polo y tomando el límite no relativista para los campos de protón, obtenemos finalmente:

$$\Gamma_A \approx \left[\frac{2\pi\omega}{2\pi V} \right]^2 A_2(t) \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \int d\vec{x}_1 d\vec{x}_2 e^{-i\vec{k}(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)} \Phi(\frac{m_A}{\Lambda} - k) \sum_{\vec{k}} (\vec{k}) \langle A | [\psi_2^+(x_1) \psi_2(x_2)] | A \rangle \quad (3.6)$$

No es inmediato que el término en $\vec{\sigma} \hat{k}$ no contribuya, ya que el elemento de matriz $\langle A | [\psi_2^+(x_1) \psi_2(x_2)] | A \rangle$ en principio no tiene porqué ser proporcional a $\delta_{\vec{k}0}$, pues ahora sí hay direcciones privilegiadas. Sin embargo, es posible eliminarlo por consideraciones de simetría. Efectivamente, suponiendo que el estado $|A\rangle$ tiene paridad definida, el valor medio del conmutador es invariante bajo una transformación de paridad (si sólo se incluyen las interacciones fuertes y electromagnéticas), al igual que el exponente $\vec{k}(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)$ y los intervalos de integración, pero no así el término $\vec{\sigma} \hat{k}$ que es un pseudoescalar y desaparece al integrar.

Conviene remarcar que este argumento es aplicable sólo a la integral y no al integrando, por lo que a partir de ahora, cuando consideremos la dependencia en el momento del positrón, en realidad estaremos promediando las contribuciones de los casos \bar{k} y $-\bar{k}$. De cualquier modo, esta pérdida de información no tendrá ninguna relevancia desde el punto de vista experimental.

Definamos la función de Green

$$G_{\alpha\beta}(x_1, x_2) \equiv -i \langle A | T [\psi_\alpha(x_1) \psi_\beta^\dagger(x_2)] | A \rangle \quad (3.7)$$

que en general no será múltiplo de $\delta_{\alpha\beta}$. Tras eliminar el término en $\vec{v} \cdot \hat{k}$, la cantidad de interés será su traza, por lo que nos limitaremos al estudio de los elementos diagonales.

Desarrollando el producto T y haciendo uso de la invariancia bajo traslaciones temporales, se llega a (ver apéndice A):

$$\int d^3x_1 d^3x_2 e^{i\mathbf{k}(x_2-x_1)} \langle A | T [\psi_\alpha(x_1) \psi_\alpha^\dagger(x_2)] | A \rangle = 2 \text{Im} \int d^3x_1 d^3x_2 e^{i\mathbf{k}(x_2-x_1)} G_{\alpha\alpha}(x_1, x_2) \quad (3.8)$$

con lo que, sustituyendo en (2.9):

$$\Gamma_A \approx \left[\frac{e^2}{4\pi^2} \right]^2 A_1(t) \cdot \frac{10\lambda^2}{2} \int \frac{d^3\bar{k}}{(2\pi)^3} \phi(\frac{m_0}{\bar{k}} - i\epsilon) \sum_{k=1}^2 \text{Im} \left\{ \int d^3x_1 d^3x_2 e^{-i\bar{k}(x_2-x_1)} G_{\alpha\alpha}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, k^0) \right\} \quad (3.9)$$

en donde se ha hecho la transformada de Fourier en tiempos.

La expresión (3.9) es general para cualquier forma y tamaño del núcleo (siempre que sea un autoestado del operador paridad).

Estudiaremos aquí sólo la primera corrección superficial; es decir, se trata de desarrollar Γ_A en serie de $\frac{S}{V}$ y considerar el término lineal. Despreciando efectos de curvatura, la forma más conveniente para el núcleo será una que mantenga la simetría traslacional en dos direcciones espaciales (x e y). Restringiéndonos a este tipo de sistemas, la ecuación (3.9) se simplifica notablemente. En primer lugar, la función de Green sólo dependerá, en las direcciones x e y, de la diferencia de argumentos por lo que puede efectuarse la transformada de Fourier, desapareciendo estas variables espaciales. Tomaremos una superficie de regularización S de modo que $S = \int d^2 \underline{x}$. Supondremos además que el sistema es simétrico en spin, de donde se deduce que $G_{ii} = G_{jj} = G$. Llamando $(\underline{k}_1, k_2) = \underline{k}$, obtenemos:

$$\Gamma_A = \left[\frac{\partial \epsilon_{\alpha\beta}}{\partial M_i} \right] A_{ij}(z_0) \int_{\frac{d^2 \underline{k}}{(2\pi)^2} \theta(\frac{m_0}{\lambda} - |\underline{k}|)} S \int_m d^2 z d z_1 e^{-ik_1(z_1 - z_2)} G(z_1, z_2, k, k) \quad (3.10)$$

(Si el sistema fuera también homogéneo en la dirección de z,

$$S \int_m d^2 z d z_1 e^{-ik_1(z_1 - z_2)} G(z_1, z_2, k, k) = S \int d z_1 \int_m d^2 k \tilde{G}(k) = V \int_m d^2 k \tilde{G}(k) \quad (3.11)$$

que es la expresión hallada en el capítulo II.)

(La parte imaginaria de la exponencial de (3.10) es impar en k_1 , por lo que promediando para $\pm k_1$ puede eliminarse (nótese que $G(z_1, z_2, k, \underline{k})$ no depende de k_1) y (3.10) se escribiría:

$$\Gamma_A = \left[\frac{\partial \epsilon_{\alpha\beta}}{\partial M_i} \right] A_{ij}(z_0) \int_{\frac{d^2 \underline{k}}{(2\pi)^2} \theta(\frac{m_0}{\lambda} - |\underline{k}|)} S \int_m d z_1 d z_2 \cos(k_1(z_1 - z_2)) \int_m d^2 k \tilde{G}(z_1, z_2, k, \underline{k}) \quad (3.12)$$

No repetiremos este desarrollo para los términos espectador y de interferencia, que se tratarían de una forma análoga.

4. Parte real de la autoenergía.

Por las mismas razones que en el caso homogéneo, la influencia de la parte real de la autoenergía del protón sobre la anchura Γ_A sólo aparece como una corrección de orden superior. Consideraremos aquí su contribución en la misma aproximación que antes; es decir, supondremos que existen dos efectos fundamentales: el de salida de la capa de masas, y el debido al potencial nuclear medio. Este último se incluirá ya a orden cero a través del potencial de ligadura (ver ec. (2.7)). Nos ocuparemos a continuación del estudio del primero.

La ecuación de Dyson para la función de Green en el caso de un sistema inhomogéneo puede escribirse:

$$G(\bar{x}, \bar{x}'; k) = G^{(0)}(\bar{x}, \bar{x}'; k) + \int d\bar{x}_1 d\bar{x}_2 G^{(0)}(\bar{x}, \bar{x}_1; k) \Sigma(\bar{x}_1, \bar{x}_2; k) G(\bar{x}_2, \bar{x}'; k) \quad (4.1)$$

Descompongamos la autoenergía propia de la forma:

$$\Sigma^i = \Sigma_0 + \Sigma' \quad (4.2)$$

donde Σ_0 es la autoenergía en el límite libre y Σ' la correspondiente a los efectos nucleares (excluido el del potencial medio ya considerado en $G^{(0)}$). Σ_0 es puramente real (ya que $k_F \rightarrow 0$) mientras que Σ' es, en principio, mucho menor que Σ_0 de modo

que sólo será importante su parte imaginaria.

Iterando la ecuación (4.1) obtenemos (omitiendo las variables por claridad de escritura):

$$G = G^{(0)} + \int G^{(0)} \Sigma_0 G^{(0)} + \int G^{(0)} \Sigma_0 G^{(0)} \Sigma_0 G^{(0)} + \dots + \int G^{(0)} \Sigma_0 G^{(0)} \Sigma_0 G^{(0)} \Sigma_0 G^{(0)} + \dots + \int G^{(0)} \Sigma_0 G^{(0)} \Sigma_0 G^{(0)} \Sigma_0 G^{(0)} \Sigma_0 G^{(0)} + \dots \quad (4.3)$$

Para $k < \frac{m_A}{\Lambda}$, $G^{(0)}$ es real, con lo que la parte imaginaria de G sería

$$\text{Im} G = [G^{(0)} + \int G^{(0)} \Sigma_0 G^{(0)} + \int G^{(0)} \Sigma_0 G^{(0)} \Sigma_0 G^{(0)} + \dots] \text{Im} \Sigma' [G^{(0)} + \int G^{(0)} \Sigma_0 G^{(0)} + \dots] + O(\Sigma^2) \quad (4.4)$$

Los términos entre corchetes no son más que la serie de Dyson para Σ_0 . Si suponemos que la contribución dominante es la calculada en el capítulo II, prácticamente constante para los momentos relevantes,

$$\Sigma_0(\vec{x}_1, \vec{x}_2, k) \approx \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)} \Sigma_0 = \delta^{(3)}(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) \Sigma_0 \quad (4.5)$$

Usando la forma (2.5) de $G^{(0)}$, esta serie puede sumarse explícitamente:

$$\begin{aligned} G^{(0)}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, k) &\equiv G^{(0)}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, k) + \int d\vec{x}_1 d\vec{x}_2 G^{(0)}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, k) \Sigma_0(\vec{x}_1, \vec{x}_2, k) G^{(0)}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, k) + \dots \\ &\approx \sum_{\vec{x}} \frac{\phi_{\vec{x}}(\vec{x}) \phi_{\vec{x}}^*(\vec{x}')}{k^2 - \epsilon_{\vec{x}} - m_{\vec{x}} + i\epsilon} + \int d\vec{x}_1 \sum_{\vec{x}_2} \frac{\phi_{\vec{x}_1}(\vec{x}_1) \phi_{\vec{x}_2}^*(\vec{x}_2)}{k^2 - \epsilon_{\vec{x}_1} - m_{\vec{x}_1} + i\epsilon} \Sigma_0 \frac{\phi_{\vec{x}_1}(\vec{x}_1) \phi_{\vec{x}_2}^*(\vec{x}_2)}{k^2 - \epsilon_{\vec{x}_1} - m_{\vec{x}_1} + i\epsilon} + \dots \\ &\approx \sum_{\vec{x}} \frac{\phi_{\vec{x}}(\vec{x}) \phi_{\vec{x}}^*(\vec{x}')}{k^2 - \epsilon_{\vec{x}} - m_{\vec{x}} - \sum_{\vec{y} \neq \vec{x}} i\epsilon_{\vec{y}} (\epsilon_{\vec{x}} - \epsilon_{\vec{y}})} \end{aligned} \quad (4.5)$$

En resumen, escribiremos la parte imaginaria de la función de Green de la forma

$$\text{Im } G(\bar{x}, \bar{x}', k) = \int d\bar{x}_1 d\bar{x}_2 G^{(0)}(\bar{x}, \bar{x}_1, k_0) \text{Im} [\Sigma'(\bar{x}_1, \bar{x}_2, k_0)] G^{(0)}(\bar{x}_2, \bar{x}', k) \quad (4.7)$$

y el problema quedará reducido nuevamente al estudio de la parte imaginaria de una autoenergía.

La ecuación (4.7) se ha obtenido para el caso general. Si el sistema sólo es inhomogéneo en la dirección z , puede usarse

$$\text{Im } G(z, z', k) = \int dz_1 dz_2 G^{(0)}(z, z_1, k) \text{Im} [\Sigma'(z_1, z_2, k)] G^{(0)}(z_2, z', k) \quad (4.8)$$

con

$$G^{(0)}(z, z', k) = \sum_x \frac{\varphi_x(z) \varphi_x^*(z')}{k^0 m_x - \epsilon_x - \frac{k^2}{2m_x} - \sum_{\alpha} c_{\alpha} \epsilon_{\alpha} \sin(\epsilon_{\alpha} \cdot \frac{k}{2m_x} - \epsilon_{\alpha})} \quad (4.9)$$

donde $\underline{k} \equiv (k^0, \underline{k})$.

5. Cálculo de la parte imaginaria de la autoenergía.

Estudiaremos el equivalente, para un sistema inhomogéneo, del diagrama de la figura II.3. Entonces, considerábamos una renormalización del propagador del barión que únicamente tenía en cuenta el efecto del potencial medio nuclear. En el caso actual, esto ya se tiene en cuenta a través del hamiltoniano "libre" (ver apartado 2). Seguiremos un camino paralelo al del capítulo II, aunque ahora aparecerán peculiaridades asociadas a la pérdida de la simetría espacial, que será necesari-

rio tratar con cuidado.

Aunque, por el momento, no impondremos ninguna forma concreta para el núcleo, sí supondremos que su spin e isospín totales son cero (de modo que las funciones de Green serán múltiplos de la identidad en espacio de spin e isospín), así como que los estados con la misma energía, o bien están todos ocupados, o bien no lo está ninguno.

Se trata de estudiar

$$\sum_{\alpha} \int d^3\bar{x}_i d^3\bar{x}_i \cos \bar{k}(\bar{x}_i - \bar{x}_i) \text{Im} G_{\alpha\alpha}(\bar{x}, \bar{x}_i, k') \quad (5.1)$$

por las razones ya indicadas en el apartado anterior, el problema se reduce al cálculo de la parte imaginaria de la autoenergía propia, que para el diagrama en cuestión (fig. 2) es

$$\sum_{\alpha} (\bar{x}, \bar{x}', k') = i \int_{s_1}^{s_2} d\bar{x}_1 d\bar{x}_2 \mathcal{V}_{s_1, s_2}^j(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \mathcal{V}_{s_1, s_2}^j(\bar{x}_1, \bar{x}') \int \frac{d\omega}{2\pi} D(\bar{x}, \bar{x}', \omega) \left[G(\bar{x}, \bar{x}', k, \omega) \left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}} \right)^j D(\bar{x}', k, \omega) \right] \quad (5.2)$$

Analicemos en primer lugar las propiedades de analiticidad del propagador del pión, para lo que usaremos la representación de Lehmann^[29]. En el caso de un sistema no homogéneo, la función D puede escribirse, usando la hermiticidad del campo del pión, como:

$$D(\bar{x}, \bar{x}', \omega) = \sum_{\alpha} \left[\frac{\langle \psi_{\alpha} | \psi(\bar{x}) \psi(\bar{x}') | \psi_{\alpha} \rangle \langle \psi_{\alpha} | \psi(\bar{x}') \psi(\bar{x}) | \psi_{\alpha} \rangle}{\omega - (E_{\alpha} - E_0) + i\epsilon} + \frac{\langle \psi_{\alpha} | \psi(\bar{x}') \psi(\bar{x}) | \psi_{\alpha} \rangle \langle \psi_{\alpha} | \psi(\bar{x}) \psi(\bar{x}') | \psi_{\alpha} \rangle}{-\omega - (E_{\alpha} - E_0) + i\epsilon} \right] \quad (5.3)$$

donde $\{|\psi_{\alpha}\rangle\}$ es una base de autoestados del hamiltoniano total. (Por

simetría bajo isospín $D_{j_1 j_2} = D_{j_2 j_1}$, por lo que podemos prescindir de los índices).

Para ω imaginaria pura, el término en ϵ puede despreciarse (de nuevo suponemos que no hay polos a energía cero (véase pag.40)), como $\omega^* = -\omega$ el 2º sumando del lado derecho de (5.3) coincide con el complejo conjugado del 1º luego

$$D(\bar{x}, \bar{x}', i\epsilon) \in \mathbb{R} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad (5.4)$$

Como $E_n - E_0 > 0$, los polos de $D(\omega)$ están en el semiplano inferior si $\text{Re}\omega > 0$ y en el superior si $\text{Re}\omega < 0$. Otra propiedad evidente de (5.3) que se usará después es

$$D(\bar{x}, \bar{x}', \omega) = D(\bar{x}', \bar{x}, \omega) \quad (5.5)$$

También conviene ahora hacer una rotación de Wick para evaluar la integral en energía de (5.2) (ver fig II.8):

$$\int \frac{d\omega}{2\pi} D(\bar{x}, \bar{x}_i, \omega) G^{(0)}(\bar{x}, \bar{x}', k-\omega) = i \sum_n \delta(E_n - E_0) \phi_n(\bar{x}) \phi_n^*(\bar{x}') D(\bar{x}, \bar{x}_i, k^0 - E_n) + i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} G^{(0)}(\bar{x}, \bar{x}', k^0 - \omega) D(\bar{x}, \bar{x}_i, \omega) \quad (5.6)$$

donde se ha usado la expresión (2.5) para la función de Green del nucleón.

Probaremos que la integral sobre el eje imaginario de (5.6) tampoco contribuye a la parte imaginaria de la función de Green del protón; es decir,

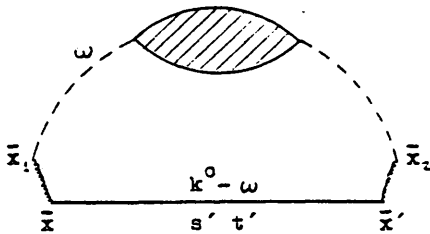


Fig. 2. Diagrama de autoenergía con el pión renormalizado para un sistema inhomogéneo.

$$\int_S d\bar{x} d\bar{x}' \cos \bar{k}(\bar{x}-\bar{x}') d\bar{x}_1 d\bar{x}_2 G^{(0)}(\bar{x}, \bar{x}_1, k^0) \cdot \text{Im} \left\{ \sum_{s't'} d\bar{y}_1 d\bar{y}_2 \cdot \bar{U}_{s_1 s_1', s_2 s_2'}^{(j)}(\bar{x}_1, \bar{y}_1) \bar{U}_{s_2 s_2', s_1 s_1'}^{(j)}(\bar{y}_2, \bar{x}_2) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{2\pi} D(\bar{y}_1, \bar{y}_2, it) G^{(0)}(k^0-t, \bar{x}, \bar{x}_2) \right\} = 0 \quad (5.7)$$

Efectivamente:

- $G^{(0)}(\bar{x}, \bar{x}', k^0)$ es real, ya que $k^0 < \frac{\pi}{A}$ (nótese que esto se deduce de la primera igualdad de (4.6) al tomar $\sum_0(\bar{x}, \bar{x})$ real).

- $D(\bar{x}, \bar{x}', it)$ es real.

- $\Lambda \equiv \sum_{s_1 s_1', s_2 s_2'} \bar{U}_{s_1 s_1', s_2 s_2'}^{(j)}(\bar{x}_1, \bar{y}_1) \bar{U}_{s_2 s_2', s_1 s_1'}^{(j)}(\bar{y}_2, \bar{x}_2)$ es real:

$$\Lambda = \sum_{s_1 s_1'} \left(\frac{t}{\lambda} \right)^2 \int \frac{d^3 \bar{p}}{(2\pi)^3} \frac{d^3 \bar{q}}{(2\pi)^3} e^{i\bar{p}(\bar{x}_1 - \bar{y}_1)} u_{(1)\bar{p}}(\bar{\sigma} \cdot \bar{p})_{s_1} e^{i\bar{q}(\bar{y}_2 - \bar{x}_2)} u_{(1)\bar{q}}(\bar{\sigma} \cdot \bar{q})_{s_2} c_{s_1}^j c_{s_2}^j \quad (5.8)$$

sumando en s' y t'

$$\Lambda = \sum_{s_j} \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p}(\vec{x}_1 - \vec{y}_1)} u_{(p)} e^{i\vec{q}(\vec{y}_1 - \vec{x}_1)} u_{(q)} \left[\vec{p} \vec{q} + i[\vec{\sigma}(\vec{p} \times \vec{q})]_{ss} \right] \quad (5.9)$$

En un sistema homogéneo, la conservación del momento impone que $\vec{p} = \vec{q}$ y, consiguientemente, el producto vectorial se anula. Ahora esto no es cierto, aunque el término tampoco contribuirá por ser \vec{q} de traza nula. (Es importante remarcar esta propiedad relacionada íntimamente con el hecho de que se supone que a orden cero no existen niveles energéticos semi llenos, y no con la invariancia bajo rotaciones. Gracias a ella, el cálculo se simplificará notablemente, y hará que gran parte de las expresiones mantengan un considerable parecido con las del caso homogéneo).

$$\Lambda = 2.3 \cdot \frac{1}{r} \left[\int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p}(\vec{x}_1 - \vec{y}_1)} \vec{p} u_{(p)} \right] \left[\int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3} e^{i\vec{q}(\vec{y}_1 - \vec{x}_1)} \vec{q} u_{(q)} \right] \quad (5.10)$$

las cantidades entre corchetes son imaginarias puras por ser la parte real del integrando impar en \vec{p} (\vec{q}), y por tanto Λ es real.

- $G^{(a)}(\vec{x}, \vec{x}; \omega) = G^{(a)}(\vec{x}', \vec{x}', \omega)$ lo que se deduce de (2.5) al tomar autofunciones reales. Esta relación también es cierta para $G^{(a)}$ por ser Σ_0 la autoenergía en el límite libre.

- $\sum_{s_1, s_2} \vec{U}_{s_1, s_2}^j(\vec{x}_1, \vec{y}_1) \vec{U}_{s_1, s_2}^j(\vec{y}_1, \vec{x}_1) = \sum_{s_1} \vec{U}_{s_1, s_1}^j(\vec{x}_1, \vec{y}_1) \vec{U}_{s_1, s_1}^j(\vec{y}_1, \vec{x}_1)$ lo que es evidente de (5.10).

finalmente:

- $\text{Im}G(\vec{x}, \vec{x}_1, k^0 - it) = -\text{Im}G(\vec{x}_1, \vec{x}, k^0 - it)$ lo que se sigue de

(2.5) tomando autofunciones reales.

Con estas propiedades es inmediato que el integrando de (4.7) en $\bar{x}, \bar{x}', \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{y}_1, \bar{y}_2$ y t es impar bajo el cambio: $\bar{x}, \bar{x}', \bar{y}_1, \bar{y}_2, t \leftrightarrow \bar{x}', \bar{x}_1, \bar{y}_2, -t$ y por tanto queda probada la ecuación (5.7).

De igual forma puede probarse la relación correspondiente para el caso de la delta.

Resumiendo, el cálculo de la parte imaginaria de la autoenergía de reduce al estudio de

$$\text{Im} \int_{\mu} \bar{\psi}(\bar{x}, \bar{y}) \psi(\bar{x}', \bar{y}') \bar{V}(\bar{x}, \bar{y}) \bar{V}(\bar{x}', \bar{y}') \int_{\alpha} \mathcal{G}(\epsilon_x) \phi_1(\bar{x}) \phi_2^*(\bar{x}') \text{Im} D(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \epsilon_x - \epsilon_x) \quad (5.11)$$

donde

$$\bar{V}(\bar{x}, \bar{y}) = \int d^3 \bar{r} e^{i \bar{q}(\bar{x} - \bar{y})} \bar{\psi}(\bar{r}) \psi(\bar{r}) \quad (5.12)$$

(Nótese que en realidad no es necesario tomar autofunciones reales ya que $\sum_{\epsilon_x, \epsilon_x'} \phi_1(\bar{x}) \phi_2^*(\bar{x}')$ es siempre real, pues suponemos que todos los estados con una determinada energía, o están todos llenos, o todos vacíos).

Particularizaremos desde este momento a sistemas con simetría plana, en cuyo caso la ecuación (5.1) se escribe:

$$\text{Im} \sum(z, z', k) = \int_{\mu} \int_{\mu'} \int_{\alpha} \bar{\psi}(q, z, z') \bar{V}(z, z') \sum_{\alpha} \mathcal{G}(\epsilon_x - \frac{(k-q)^2}{2m_q} - \epsilon_x) \cdot \psi_2(z) \psi_1^*(z') \text{Im} D(z, z', q, k^2 - m_q - \frac{(k-q)^2}{2m_q} - \epsilon_x) \quad (5.13)$$

donde

$$\bar{V}(\underline{q}, z-z') \equiv \int \frac{d\underline{p}}{i\pi} e^{i\underline{p}(z-z')} (\underline{q}, \underline{p}) u(\underline{q}, \underline{p}) \quad (5.14)$$

El problema se reduce, por tanto, al estudio del propagador del pión. No obstante, la dependencia espacial que aún permanece en (5.13) dificultaría extraordinariamente el cálculo numérico, debido a que aparecen funciones que oscilan con una frecuencia muy alta. Eliminaremos esta dependencia mediante el uso de las bases de autofunciones introducidas en el apartado 2. Definiendo $\tilde{G}_p(\underline{k})$ a través de (2.23):

$$G(\underline{k}, z, z') = \sum_{\alpha, \beta} \tilde{G}_{\alpha\beta}(\underline{k}) \varphi_{\alpha}(z) \varphi_{\beta}'(z') \quad (5.15)$$

y la ecuación (2.12) puede escribirse:

$$\Gamma_A = \left[\frac{3\cos}{2M_1^2} \right] \lambda_2(z) \int \frac{d\underline{k}}{(2\pi)^3} \varphi(\frac{m_0 - i\epsilon}{k}) S \int_{\underline{x}_1} \left[\int_{\underline{x}_2} \lambda_2(z) \cos(k(z_2 - z_1)) \varphi_{\alpha}(z_2) \varphi_{\beta}'(z_1) \right] \text{Im} \tilde{G}_{\alpha\beta}(\underline{k}) \quad (5.16)$$

Por otra parte, de la relación (4.7):

$$\text{Im} \tilde{G}_{\alpha\beta}(\underline{k}) = \tilde{G}_{\alpha\alpha}'^{(0)}(\underline{k}) \left\{ \text{Im} \tilde{\Sigma}_{\alpha\beta}(\underline{k}) \right\} \tilde{G}_{\beta\beta}'^{(0)}(\underline{k}) \quad (5.17)$$

Y con un desarrollo análogo para la función D en términos de la base $\{\varphi_i\}$, la parte imaginaria de la autocenergía en la aproximación discutida antes sería

$$\text{Im} \tilde{\Sigma}_{\alpha\beta}(\underline{k}) = \frac{1}{2} \int \frac{d\underline{q}}{(2\pi)^3} \int \frac{d\underline{p}}{(2\pi)^3} \varphi(\frac{m_0 - i\epsilon}{q}) \varphi(\frac{m_0 - i\epsilon}{p}) \tilde{V}(\underline{q}, z, z') \tilde{V}(\underline{p}, z, z') \text{Im} D_{\alpha\beta}(\underline{q}, \underline{p}, m_0 - \frac{(\underline{k}-\underline{q})^2}{2m_0} - i\epsilon) \quad (5.18)$$

Una vez efectuadas las integrales que aparecen en (5.16), lo que no supondrá una grave dificultad, se ha eliminado toda la dependencia espacial. Aún así, el problema es muy complicado, ya que aparecen por una parte 5 sumas en autofunciones que, en principio, son conjuntos infinitos (en rigor deberían incluso ser continuos), además permanece una integral doble en \underline{q} , y otra esencialmente doble en \bar{k} . Por añadidura, el integrando de (5.18) es fuertemente singular debido a los polos de D_{ij} . Volveremos a este punto en el apartado 8, pero previamente, analizaremos la estructura de la función de Green del pión para un sistema no homogéneo en la dirección de z .

6. El propagador del pión.

Generalizaremos al caso de sistemas con simetría plana el cálculo del capítulo II sobre la función de Green del pión.

Del mismo modo que para nucleones, la ecuación de Dyson para el propagador del pión puede escribirse en términos de la polarización propia como:

$$D(z, z'; \underline{q}) = D^0(z, z'; \underline{q}) + \int d\underline{z} d\underline{z}' D^0(z, \underline{z}; \underline{q}) \Pi^F(\underline{z}, \underline{z}'; \underline{q}) D(\underline{z}, \underline{z}'; \underline{q}) \quad (6.1)$$

Una posibilidad sería calcular D a los primeros órdenes en $\overline{\Pi}^F$, lo cual supondría una enorme complicación debido a la aparición de polos múltiples. Afortunadamente, mediante el uso de una base de funciones de onda espaciales, la ecuación anterior puede resolverse. En efecto, tomando la base ortonormal de funciones que diagonalizan D ($\{\varphi_i\}$), la ecuación (6.1) quedaría:

$$D_{ij}(z) = D_j^{(0)}(z) + \sum_{k, k'} D_{ik}^{(0)}(z) \Pi_{k, k'}^*(z) D_{k'j}(z) \quad (6.2)$$

o en notación matricial

$$\mathbb{D}(z) = \mathbb{D}^{(0)}(z) + \mathbb{D}^{(0)}(z) \Pi^*(z) \mathbb{D}(z) \quad (6.3)$$

cuya solución es

$$\mathbb{D} = [\mathbb{D}^{(0)-1} - \Pi]^{\dagger} \quad (6.4)$$

Aunque $\mathbb{D}^{(0)}$ es diagonal en esta base, en principio \mathbb{D} no tiene porqué serlo.

Estudiaremos ahora la polarización para la correspondiente generalización de los diagramas considerados en el caso homogéneo. Aplicando las reglas enunciadas en el apartado 2, la contribución a la polarización del diagrama de excitación nucleón-hueco (fig 3) es

$$\Pi_{i, i'}^{j, j'}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi i}} \sum_{\substack{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta \\ \alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta}} G_{\alpha\beta}(z) G_{\gamma\delta}(z) \int_{\alpha}^{\beta} \tau_{\delta\epsilon}^{j, j'} \tau_{\zeta\alpha}^{j, j'} \bar{\sigma}_{\alpha\beta}^{\dagger}(z) \bar{\sigma}_{\gamma\delta}^{\dagger}(-z) \quad (6.5)$$

efectuando las sumas en spin e isospín:

$$\sum_{i, i'} \tau_{i, i'}^{j, j'} \tau_{i, i'}^{j, j'} = 2\delta_{j, j'} \quad (6.6)$$

$$\sum_{\substack{\alpha, \beta \\ \gamma, \delta}} (\bar{\sigma}_{\alpha\beta}^{\dagger} \bar{V}_{\alpha\beta}^{\dagger}(z)) (\bar{\sigma}_{\gamma\delta}^{\dagger} \bar{V}_{\gamma\delta}^{\dagger}(z)) = \sum_{\substack{\alpha, \beta \\ \gamma, \delta}} \left[\bar{V}_{\alpha\beta}^{\dagger}(z) \bar{V}_{\alpha\beta}^{\dagger}(-z) + \bar{V}_{\alpha\beta}^{\dagger}(z) \bar{V}_{\alpha\beta}^{\dagger}(-z) \right] \quad (6.7)$$

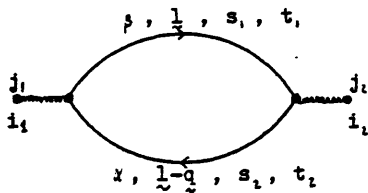


Fig. 3. Diagrama de excitación N-hueco para la polarización del pión.

El término con el producto vectorial, al igual que en la ecuación (5.9), se anula no por ser los vectores paralelos, sino por tener traza nula \bar{V} . Omitiremos desde ahora los índices de isospín j_1 y j_2 (por simetría, la polarización es diagonal en isospín a todo orden).

En definitiva:

$$\Pi_{i_1 i_2}^{\mu}(\mathbf{q}) = (4i \frac{f^2}{\mu}) \cdot \sum_{\alpha \rho} \bar{V}_{\alpha \rho i_1}(\mathbf{q}) \bar{V}_{\rho i_2}(-\mathbf{q}) \int \frac{d^4 \eta}{(2\pi)^4} G_{\alpha \alpha}^{\prime\prime}(\eta) G_{\rho \rho}^{\prime\prime}(\mathbf{q}-\eta) \quad (6.7)$$

Del mismo modo pueden evaluarse los dos diagramas de excitación delta-hueco (fig. 4) con el resultado

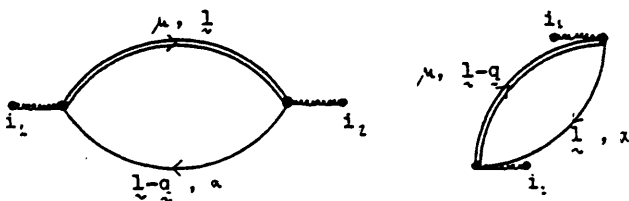


Fig. 4. Diagramas de excitación Δ -hueco.

$$\bar{\Pi}_{i,i}^A(\underline{q}) = \left(\frac{16}{\pi}\right) \left(\frac{f^2}{r^2}\right) \sum_{\gamma} \bar{V}_{\gamma\rho i}(\underline{q}) \bar{V}_{\gamma\rho i}^*(\underline{q}) \left(\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\right) \left[G_{\alpha\alpha}^{(i)}(\underline{k}) \Delta_{\gamma\rho}^{(i)}(\underline{k}) + G_{\alpha\alpha}^{(i)}(\underline{k}) \Delta_{\gamma\rho}^{(i)}(\underline{k}-\underline{q}) \right] \quad (6.8)$$

Definamos las funciones:

$$U_{\alpha\rho}^N(\underline{q}) = -4i \left(\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\right) G_{\alpha\alpha}^{(i)}(\underline{k}) G_{\rho\rho}^{(i)}(\underline{k}-\underline{q}) \quad (6.9)$$

$$U_{\alpha\rho}^A(\underline{q}) = -4i \left(\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\right) \left[G_{\alpha\alpha}^{(i)}(\underline{k}) \Delta_{\gamma\rho}^{(i)}(\underline{k}-\underline{q}) + G_{\alpha\alpha}^{(i)}(\underline{k}-\underline{q}) \Delta_{\gamma\rho}^{(i)}(\underline{k}) \right] \cdot \left(\frac{f^2}{\pi}\right)^2 \quad (6.10)$$

que son el análogo a las funciones de Lindhard para el caso homogéneo, y que también pueden calcularse explícitamente de forma analítica (ver apéndice E).

Es útil hacer una transformación en las ecuaciones (6.7) y (6.8) con objeto de eliminar las cantidades \bar{V} que son funciones de \underline{q} , vectoriales y con 3 índices. Para ello usaremos la propiedad

$$\int d^3z d^3z' f(z, z') \varphi_a^*(z) \varphi_b(z) \varphi_c^*(z') = \int d^3z d^3z' d^3z'' f(z, z') \varphi_a^*(z) \varphi_b(z) \varphi_c^*(z') \delta(z-z'') \quad (6.11)$$

$$= \sum_j \left[\int d^3z d^3z' f(z, z') \varphi_a^*(z) \varphi_j(z) \right] \left[\int d^3z'' \varphi_a^*(z'') \varphi_b(z'') \varphi_j^*(z'') \right]$$

que aplicada a las $\bar{V}_{\alpha\rho i}$ resulta

$$\bar{V}_{\alpha\rho i}(\underline{q}) = \sum_j \bar{v}_{ij}(\underline{q}) W_{\alpha\rho j} \quad (6.12)$$

donde

$$\bar{v}_{ij}(\underline{q}) = \int d^3z d^3z' \bar{v}(z, z, z') \varphi_i^*(z) \varphi_j(z') \quad (6.13)$$

y

$$W_{\alpha\beta i} = \int dz \varphi_{\alpha}^*(z) \varphi_{\beta}(z) \varphi_i^*(z) \quad (6.14)$$

Definiendo:

$$\Omega_{i_1 i_2}^N \equiv \sum_{\alpha\beta} W_{\alpha\beta i_1} W_{\alpha\beta i_2}^* U_{\alpha\beta}^N \quad (6.15)$$

$$\Omega_{i_1 i_2}^A \equiv \sum_{\alpha\beta\gamma} W_{\alpha\beta i_1} W_{\alpha\beta\gamma i_2}^* U_{\alpha\beta\gamma}^A \quad (6.16)$$

$$\Omega_{i_1 i_2}^T \equiv \Omega_{i_1 i_2}^N + \Omega_{i_1 i_2}^A \quad (6.17)$$

la polarización total se escribiría

$$\Pi_{i_1 i_2}^T(\mathbf{q}) = \Pi_{i_1 i_2}^N(\mathbf{q}) + \Pi_{i_1 i_2}^A(\mathbf{q}) = \sum_{i_1' i_2'} \bar{V}_{i_1 i_1'}(\mathbf{q}) \Omega_{i_1' i_2'}^T(\mathbf{q}) (-\bar{V}_{i_2' i_2}^T(-\mathbf{q})) \quad (6.18)$$

7. Efecto Lorenz-Lorentz.

Generalizaremos a continuación la ecuación (II.9.2) para el caso inhomogéneo en la dirección z . Consideremos la serie para la polarización representada en la figura 5. Particularizaremos, para simplificar la notación, a diagramas en los que no aparecen deltas. También ignoraremos, por el momento, los factores de forma. Se trata de sumar el conjunto de las contribuciones de todos los diagramas, de modo que la polarización final se escriba de forma simple en términos de canti-

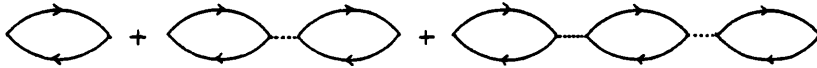


Fig. 5. Serie para la polarización incluyendo el efecto L-L.

dades conocidas. A pesar de que la dependencia en spin y en el momento del pi3n de los v3rtices hace que esto no pueda hacerse a partir de la polarizaci3n definida en (6.7), s3 es posible mediante las Ω .

La interacci3n L-L, escribiendo de forma expl3cita los 3ndices de isosp3n y spin, en el espacio de bimotores-z es

$$W(z, z_2) = g' \int_{\mathcal{F}_2}^1 (\bar{\sigma}_{s_1 s_1'} \cdot \bar{\sigma}_{s_2 s_2'}) (\bar{\tau}_{t_1 t_1'} \cdot \bar{\tau}_{t_2 t_2'}) \delta(z_1 - z_2) \quad (7.1)$$

y en la representaci3n de las funciones $\{\psi_i\}$,

$$w_{ij} = \int d^3z_1 d^3z_2 \psi_i^*(z_1) \psi_j(z_2) W(z_1, z_2) = g' \int_{\mathcal{F}_2}^1 (\bar{\sigma}_{s_1 s_1'} \cdot \bar{\sigma}_{s_2 s_2'}) (\bar{\tau}_{t_1 t_1'} \cdot \bar{\tau}_{t_2 t_2'}) \delta_{ij} \quad (7.2)$$

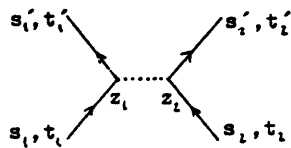


Fig. 6. Interacci3n L-L entre dos nucleones.

con lo que la serie para la polarización sería (omitiendo la dependencia en q)

$$\begin{aligned}
 -\Pi_{ii'}(q) = & \sum_{\mu} \frac{1}{\mu} (\bar{v}_{i,i'} \cdot \bar{\sigma}_{s_i s_{i'}}) \tau_{i,i'}^j \frac{1}{\mu} \Omega_{i,i'} \frac{1}{\mu} \bar{v}_{i,i'} \cdot \bar{\sigma}_{s_i s_{i'}} \tau_{i,i'}^j + \\
 & + \sum_{\mu} \frac{1}{\mu} (\bar{v}_{i,i'} \cdot \bar{\sigma}_{s_i s_{i'}}) \tau_{i,i'}^j \frac{1}{\mu} \Omega_{i,i'} \frac{1}{\mu} \delta_{i,i'} (\bar{\sigma}_{s_i s_{i'}} \cdot \bar{\sigma}_{s_i s_{i'}}) (\bar{v}_{i,i'} \cdot \bar{v}_{i,i'}) \frac{1}{\mu} \Omega_{i,i'} \frac{1}{\mu} (\bar{v}_{i,i'} \cdot \bar{\sigma}_{s_i s_{i'}}) \tau_{i,i'}^j + \dots
 \end{aligned} \quad (7.3)$$

y efectuando las sumas en spin:

$$\sum_{s_i, s_{i'}} \sigma_{s_i s_{i'}}^i (\sigma_{s_i s_{i'}}^k \cdot \sigma_{s_i s_{i'}}^k) (\sigma_{s_i s_{i'}}^k \cdot \sigma_{s_i s_{i'}}^k) \dots (\sigma_{s_i s_{i'}}^k \cdot \sigma_{s_i s_{i'}}^k) \sigma_{s_i s_{i'}}^j = \delta^{ij} 2^{n-1} \quad (7.4)$$

y análogamente en isospín, obtenemos

$$-\Pi_{ii'} = \frac{1}{\mu^2} (\bar{v}_{i,i'} \cdot \Omega_{i,i'} \bar{v}_{i,i}') \left[\delta_{i,i'} + q \frac{1}{\mu^2} \Omega_{i,i'} + q^2 \frac{1}{\mu^2} \Omega_{i,i'} q \frac{1}{\mu^2} \Omega_{i,i'} + \dots \right] \quad (7.5)$$

El término entre corchetes es una serie matricial que puede sumarse, dando como resultado

$$-\Pi_{ii'} = \frac{1}{\mu^2} \bar{v}_{i,i'} \cdot \Omega'_{i,i'} \bar{v}_{i,i}' \quad (7.6)$$

donde

$$\Omega' \equiv \Omega \left[1 - q \frac{1}{\mu^2} \Omega \right]^{-1} \quad (7.7)$$

De una forma similar se calcularía la corrección L-L para los diagramas con deltas, con lo que la ecuación (7.6) se verifica para la polarización total (sustituyendo Ω por Ω^T).

Si se consideran factores de forma, sería necesaria una modificación en las matrices Ω que aparecen entre corchetes en (7.5):

$$\Omega_{ij}(q) \rightarrow \sum_{i',j'} \Omega_{i'j'} u_{i'j'}(q) u_{ij}(q) \quad (7.8)$$

donde

$$u_{ij}(q) = \int d^4z d^4z' \varphi_i^*(z) \varphi_j(z') u(z, z', q) \quad (7.9)$$

(Si las funciones de onda φ_i tienen el cuadrado del momento definido: $u_{ij}(q) = \delta_{ij} u(|k_i|, q)$)

Como se vió antes, Ω es una matriz simétrica ($\Omega^t = \Omega$). Ω' lo sigue siendo ya que $A \equiv [1 - g' \frac{\partial}{\partial \lambda} \Omega]^{-1}$ lo es y $[A, \Omega] = 0$.

8. Términos espectador y de interferencia.

Para el estudio del término espectador y la interferencia entre el polo y el espectador se procedería de una forma análoga. Es de destacar que todo lo dicho a propósito del propagador del pión se mantiene en los dos casos, pues la única diferencia aparece en los vértices externos.

Las expresiones equivalentes a (5.15-17) para el término espectador serían (tomando autofunciones reales):

$$\Gamma_A^S = \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} \right] A_S(t) \exp \left[i \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} \Phi \left(\frac{m_0}{A} - \hat{u} \right) \right] \int_{x_p} \left[d_2 d_3 \cos(k_2 k_3 - \omega) \psi_2(\mathbf{u}) \psi_3(\mathbf{u}) \right] \text{Im } G_{x_p}^S(k) \quad (8.1)$$

$$\text{Im } G_{x_p}^S(k) = -3 \int_{\Omega} \sum_{i,j} \Phi(\epsilon_i - \frac{k_i \omega}{\omega_0} - \epsilon_j) V_{x_{pi}}^S(\mathcal{Q}) V_{x_{pj}}^S(\mathcal{Q}) \text{Im } D_{ij}(\mathcal{Q}, k_0 - m_0 - \frac{k_0 \omega}{\omega_0} - \epsilon_i) \quad (8.2)$$

donde

$$V_{x_{pi}}^S(\mathcal{Q}) = \int d_2 d_3 \int \frac{d\mathcal{Q}}{2\pi} e^{-i\mathcal{Q}(\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_1)} \mathcal{V}(\mathcal{Q}, \mathcal{P}) \left(\frac{\omega \mathcal{Q}}{\omega_0} \right)^{1/2} \psi_2(\mathbf{z}_i) \psi_p(\mathbf{z}_j) \psi_i(\mathbf{z}_j) \quad (8.3)$$

(V^S es real y escalar)

En cuanto al término de interferencia, hay una diferencia relacionada con el hecho de haber incluido en la definición de G^I una dependencia en \hat{k} . Sea

$$\bar{V}_{x_{pi}}^I(\mathcal{Q}) = (V_{x_{pi}}^I(\mathcal{Q}), V_{x_{pi}}^I(\mathcal{Q})) \quad (8.4)$$

donde V^I y V^I son respectivamente las componentes paralela (bidimensional) y perpendicular a la superficie (si las funciones de onda son reales, V^I es real y V^I imaginaria (ver (2.25)). La anchura correspondiente es

$$\Gamma_A^I = \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} \right] A_S(t) \left[\psi_2(\mathbf{u}) \psi_3(\mathbf{u}) \right] \int_{\Omega} \Phi \left(\frac{m_0}{A} - \hat{u} \right) S \left[\int d_2 d_3 \cos(k_2 k_3 - \omega) \psi_2(\mathbf{u}) \psi_3(\mathbf{u}) \right] \chi_1 \left[\int d_2 d_3 \cos(k_2 k_3 - \omega) \psi_2(\mathbf{u}) \psi_3(\mathbf{u}) \right] \chi_2 \quad (8.5)$$

con

$$\chi_1 = \frac{-3}{k^2 m_0 - \epsilon_1(1) - \epsilon_2} \int_{\Omega} \sum_{i,j} \Phi(\epsilon_i - \epsilon_j - \frac{k_i \omega}{\omega_0}) \left(\frac{\omega \mathcal{Q}}{\omega_0} \right)^{1/2} V_{x_{pi}}^I(\mathcal{Q}) V_{x_{pj}}^I(\mathcal{Q}) \text{Im } D_{ij}(\mathcal{Q}, k_0 - m_0 - \epsilon_i(\mathbf{k} - \mathbf{z}_i)) \quad (8.6)$$

$$\chi_2 = \frac{-3}{k^2 m_0 - \epsilon_1(1) - \epsilon_2} \int_{\Omega} \sum_{i,j} \Phi(\epsilon_i - \epsilon_j - \frac{k_i \omega}{\omega_0}) \left(\frac{\omega \mathcal{Q}}{\omega_0} \right)^{1/2} V_{x_{pi}}^I(\mathcal{Q}) V_{x_{pj}}^I(\mathcal{Q}) \text{Im } D_{ij}(\mathcal{Q}, k_0 - m_0 - \epsilon_i(\mathbf{k} - \mathbf{z}_i)) \quad (3.7)$$

9. Efectos de superficie.

En primer lugar, como ya hicieramos en el límite de materia nuclear, eliminaremos las constantes que también aparecen en la desintegración del protón libre, dividiendo por la anchura para este caso.

Llamando:

$$t^r(k^0, z) \equiv N \left(\frac{3b^2}{\mu^2} \right)^{-1} \bar{k}^{-2} \int d\hat{k} \int d\hat{z}' \cos(k_3(b-z')) \text{Im} G^p(k, z, z') \quad (9.1)$$

$$t^s(k^0, z) \equiv N^s \frac{1}{3} \bar{k}^2 \int d\hat{k} \int d\hat{z}' \cos(k_3(z-z')) \text{Im} G^s(k, z, z') \quad (9.2)$$

$$t^z(k^0, z) \equiv N^z \left(\frac{3b^2}{\mu^2} \right)^{-1} \bar{k}^{-2} \int d\hat{k} \left[\int d\hat{z}' \cos(k_3(z-z')) \chi_1 + \int d\hat{z}' \sin(k_3(z-z')) \chi_2 \right] \quad (9.3)$$

donde N , N^s y N^z son las mismas constantes que aparecían en el capítulo II:

$$R^a \equiv \frac{\frac{\hbar}{\lambda}}{\left| \frac{\hbar}{\lambda} \right|_{k=0}} = \left(\frac{2k^3}{3\pi^2} \right) \int_0^\infty dk \int dt \tilde{t}^a(k, z) \quad (9.4)$$

Se trata ahora de aislar la corrección superficial. Para ello concretaremos algo más la forma del sistema. Aunque en rigor la aproximación plana, en el sentido de que (en ausencia de interacción entre partículas) no existen reflexiones múltiples en la superficie, requeriría que el sistema fuese "semi-infinito" (llenase un semiespacio), por razones prácticas consideraremos una extensión finita en la dirección z . Esta longitud debe ser tal que exista una zona suficientemente alejada de la superficie como para que el sistema se comporte en esta

región como si fuera homogéneo. Esto además garantiza la independencia de los efectos superficiales en ambas caras.

La densidad de partículas para un sistema de estas características es, en términos de la función de Green,

$$\rho''(\bar{r}) = 4 \operatorname{Im} G^{(0)}(\bar{r}, t; \bar{r}, t') \quad (9.5)$$

$(t' = t + 0^+)$

y usando la forma (2.8) para $G^{(0)}$ tras integrar en energía:

$$\rho''(z) = 4 \left(\frac{d^2 \rho}{dz^2} \right) \sum_{\alpha} |\varphi_{\alpha}(z)|^2 \Theta(\epsilon_{\alpha} - \epsilon_{\alpha}(z)) \quad (9.6)$$

o bien

$$\rho''(z) = \frac{1}{\pi} \sum_{\alpha} z m_{\alpha} (\epsilon_i - \epsilon_{\alpha}) \Theta(\epsilon_i - \epsilon_{\alpha}) |\varphi_{\alpha}(z)|^2 \quad (9.7)$$

Por hipótesis $\rho''(z)$ deberá ser aproximadamente constante en la zona central, y anularse para z alejado de la superficie (en la zona exterior) (ver fig. 7).

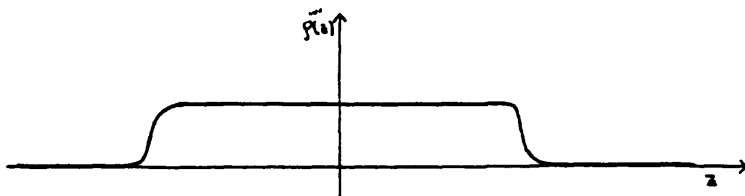


Fig. 7. Función densidad en la dirección z . Debe existir una zona central prácticamente constante, y una zona exterior prácticamente nula.

Integrando (9.7) en z obtenemos

$$\frac{N}{S} = \frac{1}{\pi} \sum_{\epsilon_n < \epsilon_F} 2m_n (\epsilon_F - \epsilon_n) \quad (9.8)$$

Es útil comparar este número de partículas por unidad de superficie con el de un sistema homogéneo de momento de Fermi k_F . El número de partículas en este caso, en un volumen $S \cdot l$, es

$$N = \frac{2k_F^3}{3\pi^2} S \cdot l \quad (9.9)$$

Definamos l_0 como la longitud tal que un sistema homogéneo de volumen $S \cdot l_0$ tenga el mismo número de partículas que el descrito por la función densidad (9.7). De (9.8) y (9.9) se deduce inmediatamente:

$$l_0 = \frac{3\pi}{2k_F^3} \sum_{\epsilon_n} 2m_n (\epsilon_F - \epsilon_n) \quad (9.10)$$

Esta cantidad será de gran interés a la hora de aislar los efectos superficiales.

Otras propiedades como la densidad de energía no pueden tratarse con este formalismo simplificado, ya que la naturaleza de las fuerzas nucleares hace que sea necesaria la inclusión de correcciones debidas a las correlaciones a cortas distancias para garantizar la estabilidad del núcleo (teoría de Brueckner^[2,4,11]). Afortunadamente, las características de nuestro problema hacen que, en realidad, sea poco importante el conocimiento preciso de las interacciones nucleares responsables de la propia exis-

tencia del núcleo. Lo que sí será de gran importancia es la distribución espacial de la densidad nuclear, que se deducirá a partir de un potencial exterior $V(z)$. Es de esperar que la forma de este potencial no sea demasiado determinante si se piensa que en gran parte de los estudios nucleares se trabaja con funciones de onda de oscilador armónico.

Volviendo a la función $t(k, z)$, en el límite $l_0 \rightarrow \infty$, $t(k, z)$ tiende a una constante (en z) que llamaremos $t_V(k)$. Consideraremos además que el sistema está centrado en $z=0$ (nótese que por exigencias de la invariancia bajo paridad, $\rho(z)$ así como $t(k, z)$ deben ser pares en z). Sea

$$t_s(k, z) \equiv t(k, z) - t_V(k) \vartheta\left(\frac{l_0}{2} - |z|\right) \quad (9.11)$$

y:

$$\Gamma(k) \equiv \frac{1}{l_0} \int dz t(k, z) \quad (9.12)$$

$$\Gamma_s(k) \equiv \frac{1}{l_0} \int dz t_s(k, z) \quad (9.13)$$

$$\Gamma_V(k) \equiv \frac{1}{l_0} \int dz t_V(k) \vartheta\left(\frac{l_0}{2} - |z|\right) \quad (9.14)$$

luego $\left(l_0 = \frac{V}{S}\right)$,

$$\Gamma_s(k) = \frac{S}{V} \left[\int dz t(k, z) - l_0 \Gamma_V(k) \right] \quad (9.15)$$

El término entre corchetes, cuando $l_0 \rightarrow \infty$ debe tender (para cada k) a una constante; es decir, debe ser independiente de

$\frac{S}{V}$ y, por lo tanto, sólo dependerá de las características del sistema en las proximidades de la superficie. En resumen, $r_s(k)$ será lineal en $\frac{S}{V}$. Para calcular la primera corrección superficial en un núcleo físico con simetría esférica, basta encontrar la relación entre la superficie y el volumen. Para un sistema esférico de A partículas con densidad constante en el interior de la esfera (de radio R) y nula en el exterior:

$$V = \frac{3\pi^2 A}{2k_F^3} = \frac{4}{3} \pi R^3 \quad (9.16)$$

$$S = 4\pi R^2$$

(nótese que se supone que la densidad en el interior es la de un sistema homogéneo con momento de Fermi k_F y con 4 grados de libertad internos). Luego

$$\frac{S}{V} = \frac{3}{R_0} A^{-\frac{1}{3}} \quad \text{con} \quad k_F R_0 = \frac{(9\pi)^{-\frac{1}{3}}}{2}. \quad (9.17)$$

En nuestro sistema con simetría plana la superficie real es $S' = 2S$, con lo que finalmente

$$r(k) = r_V(k) + \tilde{r}_s(k) A^{-\frac{1}{3}} \quad (9.18)$$

donde

$$\tilde{r}_s(k) \equiv \frac{3}{2R_0} \left[\int_0^k t(k, \omega) - \omega r_V(k) \right] \quad (9.19)$$

que es la cantidad que debemos calcular. Remarquemos que esta función es independiente del número másico, de modo que una vez conocida, podemos calcular los efectos nucleares (en la aproximación considerada) para cualquier núcleo usando (9.13).

10. Método numérico.

Consideraremos finalmente los métodos aplicados para evaluar numéricamente las expresiones deducidas. Comentaremos en este apartado algunas ideas generales, remitiéndonos a los apéndices F y G para los detalles del cálculo.

Para determinar la forma del sistema, basta disponer de la función potencial $V(z)$ que fije las autofunciones y autoenergías. Discutiremos a continuación qué características debe tener esta función. En primer lugar debe ser par en z ya que, además de ser lo más simple, es necesario para que el estado fundamental sea un autoestado de paridad. Constará de tres partes diferenciadas: una zona interna aproximadamente constante y nega-

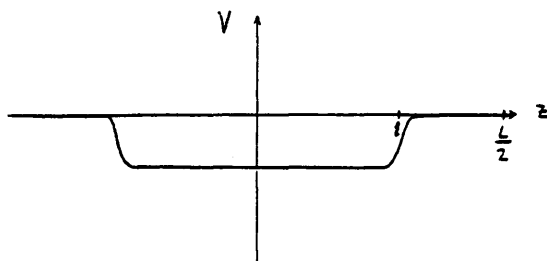


Fig. 8. Forma esquemática del potencial $V(z)$.

tiva, otra externa en donde prácticamente será nula, y una región de transición que deberá ser tal que la densidad de partículas que determine, se aproxime lo más posible a la observada experimentalmente (ver fig. 8).

Tomaremos en concreto una función de tipo Woods-Saxon:

$$V(z) = \frac{-V_0}{1 + \exp\left\{\frac{z-R}{a}\right\}} \quad (10.1)$$

para las constantes V_0 y a , elegiremos los valores de la referencia [65] :

$$\begin{aligned} V_0 &\approx 50 \text{ MeV} \\ a &\approx 0.5 F \end{aligned} \quad (10.2)$$

con los que se obtiene una forma correcta para la densidad nuclear en las proximidades de la superficie. Queda aún por fijar la constante l ($l \sim \frac{1}{2} R_0$). Esta cantidad debe ser mucho mayor que cualquier longitud típica del problema como:

$$\begin{aligned} \frac{l}{R} &\sim 0.8F \\ \frac{l}{a} &\sim 1.4F \\ a &\sim 0.6F \\ R_0 &\sim 0.8F \end{aligned} \quad (10.3)$$

todas ellas muy pequeñas. Debe además ser lo bastante grande como para que el número (N_p) de autofunciones $\psi_\alpha(z)$ distintas correspondientes a estados ligados sea tal que la densidad en

el interior sea aproximadamente constante.

$$\frac{2\pi}{\ell} N_2 \sim k_2 \quad (10.4)$$

si imponemos $N_2 \sim 10$:

$$\ell \sim 10F \sim 0.05 \text{ MeV}^{-1} \quad (10.5)$$

Es necesario también discretizar el espectro continuo. Para ello consideraremos una caja de longitud L en la que el sistema estará inmerso, con condiciones de contorno periódicas. (No debe confundirse la superficie donde se imponen las condiciones de contorno, que sólo aparece por necesidades del cálculo y no tiene ningún significado físico, y la superficie del sistema, que puede definirse como la región en la que la densidad se hace la mitad que en el interior). Para que esta longitud no afecte a los resultados, debe cumplirse que $\frac{L}{2} - \ell$ sea mucho mayor que cualquiera de las cantidades (10.3), lo que no supondrá ningún problema. También tiene que ocurrir que las funciones de onda correspondientes a estados ligados se anulen prácticamente antes de alcanzar el punto $\frac{L}{2}$. El comportamiento de la amplitud del estado ligado más energético (que aún tiene una energía total de $\sim -10 \text{ MeV}$)^[63] es, si $z \gg \ell$,

$$e^{-|z-\ell| \sqrt{2m|E|}} \quad (10.6)$$

que para $|z - \ell| \sim 10F$ se reduce a $\sim 2 \cdot 10^{-4}$. El efecto de la discretización es mucho más difícil de estimar, y hay que hacerlo

a posteriori. Tomaremos

$$L \sim 40F \sim 0.2 \text{ MeV}^{-1} \quad (10.7)$$

Por último, es necesario trabajar con un número finito de funciones ψ . Nos limitaremos a los N primeros estados, donde N debe ser lo suficientemente grande como para que los de energía mayor que ϵ_N apenas tengan influencia. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} N \sim 60 & \quad P_N \sim 900 \text{ MeV}, \quad \epsilon_N \sim 750 \text{ MeV} \\ N \sim 101 & \quad P_N \sim 1571 \text{ MeV}, \quad \epsilon_N \sim 1317 \text{ MeV} \end{aligned} \quad (10.8)$$

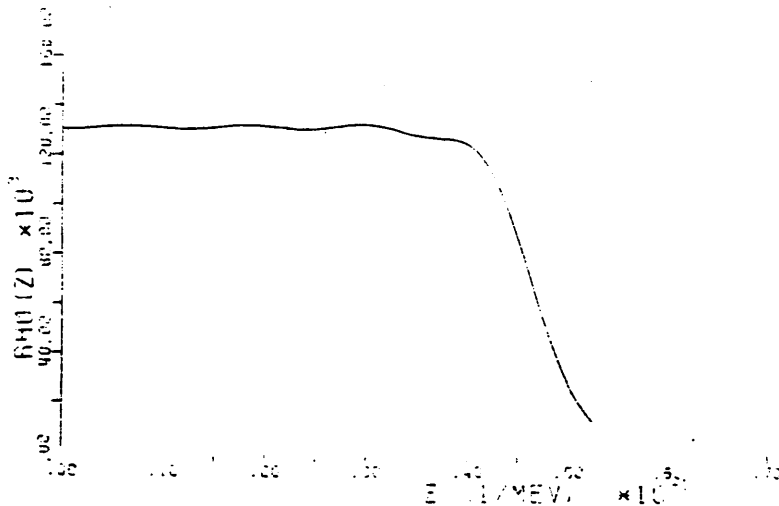


Fig. 9. Función $q'(z)$ para: $a=0.003$, $V_0=50.$, $l=0.05$, $L=0.2$, $N=61$ ($N_F=9$) (todas las unidades en MeV^2). El espesor de la capa superficial (zona en la cual la densidad pasa del 90 al 10% del valor en el interior) es $2.2F$.

En la figura 9. se muestra la función densidad $\psi''(z)$ para una elección de constantes de los órdenes indicados. Puede observarse como $\psi''(z)$ se hace prácticamente constante en la zona de $|z| \lesssim 0.03 \text{ MeV}^{-1}$.

Para las autofunciones de la delta, se tomará el mismo potencial (lo que no supondrá, debido a las distintas masas, que las funciones de onda sean iguales).

Una vez que disponemos de las funciones de onda y autoenergías, podemos calcular la función $t(k, z)$, que salvo constantes es

$$t(k, z) \sim \int_0^1 \left(\frac{k_0}{k} \right) k^{-2} \sum_{a, b, c, d, 1} \left[\frac{(k_0 \cos(k_0 z))^{(a)} Q_{a, b, c, d}(z)}{[k^2 - m_a^2 - i\epsilon] [k^2 - m_b^2 - i\epsilon] [k^2 - m_c^2 - i\epsilon] [k^2 - m_d^2 - i\epsilon]} \right] \left(\frac{k_0}{k} \right) \bar{V}_{a, b, c, d} \left(\frac{k_0}{k} \right) \left(\frac{k_0}{k} \right) \bar{D}(q; z) \quad (10.9)$$

$$(q^2 = k^2 - m_a^2 - \frac{k^2 - k_0^2}{2m_a} - i\epsilon)$$

Al igual que en el caso homogéneo, gracias a la pequeñez de las variaciones de $\frac{(k-k_0)}{2m_a} + \epsilon$ frente a $k^2 - m_a^2$, es posible tomar con gran aproximación $q^2 \approx k^2 - m_a^2$ (ver (II.5.10)) con lo que la única dependencia en el ángulo $\hat{q}\hat{k}$ aparece a través de la función paso, y la integral correspondiente puede efectuarse explícitamente.

Aún así, en la expresión (10.9) permanece una integral sobre k_0/k_0 de comportamiento presumiblemente suave, una integral en z que no ofrece dificultad ya que sólo depende de k_0 y por último una integral en $|q|$ que es necesario tratar con cuidado, ya que el integrando es altamente singular. Además hay una suma quintuple. Afortunadamente al depender cada factor únicamente de algunas variables y/o índices, puede reducirse en gran medida el número de operaciones necesarias con un tratamiento adecuado. Detalles de estos cálculos pueden encontrarse

en los apéndices F y G. Comentaremos aquí sólo la forma en que se ha resuelto el problema de las singularidades en $|q|$.

Efectuando las sumas en los índices α , α_1 y α_2 , la relación (10.9) se escribiría

$$t(k, \epsilon) \sim \int_0^1 d(\frac{q}{k}) \bar{k} \sum_j \int d\Omega_1 M_{ij}(\Omega_1, k, \epsilon) I_m D_j(\vec{r}(k'), \vec{q}) \quad (10.10)$$

donde M es una matriz real que puede tomarse simétrica por serlo D . La matriz D^{-1} en términos de la polarización es

$$(D^{-1})_{ij} = [(\epsilon^2 - q^2 - k^2 - \mu^2 + i\epsilon)\delta_{ij} - \Pi_{ij}^*] \quad (10.11)$$

En principio, el determinante de esta matriz puede tener del orden de N (~ 100) ceros (o más propiamente ceros en la parte real) en el intervalo de integración (suponiendo un comportamiento suave de Π). Aunque en algunas zonas, gracias a que Π es compleja, cuando se anula la parte real, la imaginaria es lo suficientemente grande como para suavizar las singularidades, este comportamiento no es general, especialmente cuando no se considera la anchura de la delta. Aún en el caso de que la función no fuera demasiado singular, teniendo en cuenta que para calcular cada valor del integrando es necesario un número muy elevado de operaciones, es conveniente un método de integración que sea más estable frente a las eventuales singularidades que el que consistiría en invertir la matriz D^{-1} , calcular la traza de $M D$ e integrar con una aproximación polinómica.

Una solución sería la generalización del método utilizado

en el capítulo II (ver apéndice B). Aunque ahora la situación es muy distinta, ya que en el denominador no aparece un número sino una matriz. El problema se debe a la presencia de elementos no diagonales. La dependencia en $|q|$ de la matriz D^{-1} aparece a través de la polarización y, sobre todo, de un término múltiplo de la identidad; por tanto, al diagonalizar D^{-1} con una matriz de rotación, este último término se mantendrá invariante, por lo que, presumiblemente, cada uno de los elementos de la matriz diagonalizada sólo se anulará una vez (o a lo sumo un número muy pequeño de veces), lo que en efecto ocurre.

Concretando, debe encontrarse una matriz \mathcal{R} tal que

$$\mathcal{R} D^{-1} \mathcal{R}^{-1} = \tilde{D}^{-1} \quad (10.12)$$

donde \tilde{D}^{-1} es diagonal. Nótese que debido a que D es compleja pero simétrica (en el sentido de que $D^c = D$), la matriz no será unitaria sino ortogonal compleja ($\mathcal{R}^c = \mathcal{R}^{-1}$).

Mediante esta transformación (10.10) se escribiría

$$t(k, z) \sim \int_0^1 d\left(\frac{q}{\omega}\right) \int_0^1 d|q| \int_{\mathcal{R}^c} \frac{(\mathcal{R}^c M \mathcal{R})_{ii}}{D_{ii}} \quad (10.13)$$

es decir, el problema queda reducido al estudio de N integrales para las que ya puede usarse una aproximación racional como la discutida en el apéndice 3.

La dependencia en la variable z de la función $t(k, z)$, en realidad carece de significado físico. No obstante, es muy útil a la hora de controlar errores, tanto de programación como

los debidos a la limitada precisión del cálculo. En particular, pueden evaluarse las cantidades de interés para z pequeño, y compararse con las calculadas en el límite homogéneo, con lo que se comprueba que las aproximaciones realizadas mantienen los resultados salvo desviaciones menores que el 1%. Aún así, debido a la naturaleza del cálculo, el error aumenta cuando se aísla la corrección superficial, pero el estudio de la dependencia en z , permite reducir sensiblemente este error.

11. Resultados numéricos.

En primer lugar se han efectuado los cálculos para el término polo con $g' = 0$ y $\Gamma_A = 0$. Los resultados se han particularizado para los valores de A de los núcleos de mayor interés experimental: oxígeno y hierro. Los espectros del positrón, junto con el correspondiente al límite de materia nuclear, aparecen en la figura 10. Vemos que los efectos superficiales son de gran importancia incluso para el hierro. Aunque es de mayor relevancia el caso en el que se incluye la inestabilidad de la delta (y la corrección L-L), al igual que en el límite homogéneo, en esta aproximación aparecen de forma más clara cada uno de los efectos. Del análisis de los resultados, se deduce que las correcciones superficiales producen un fuerte aumento del espectro en la zona de 450 MeV, pero una reducción muy considerable para momentos mayores que unos 600 MeV. Concretando para el caso del hierro, vemos que la zona que en materia nuclear correspondía a la desintegración con un pión que se transmitía por el núcleo con muy poca absorción y que suponía del orden del 40% del total del espectro, ahora

puede llegar a ser del orden del 55%. En cambio, la que significaba la emisión de un pión con un recorrido medio muy corto dando lugar, con gran probabilidad, a la creación de un par delta-hueco, se ve reducida del 40 a un 25%, mientras que la 3ª zona de absorción formando un par nucleón-hueco pasa de un 15 a un 10%. La cuarta región que antes se situaba alrededor de los 640MeV (5% del total) ahora prácticamente desaparece. En cuanto a la anchura total, se reduce ligeramente, pasando de un aumento del 18% para materia nuclear a sólo un incremento

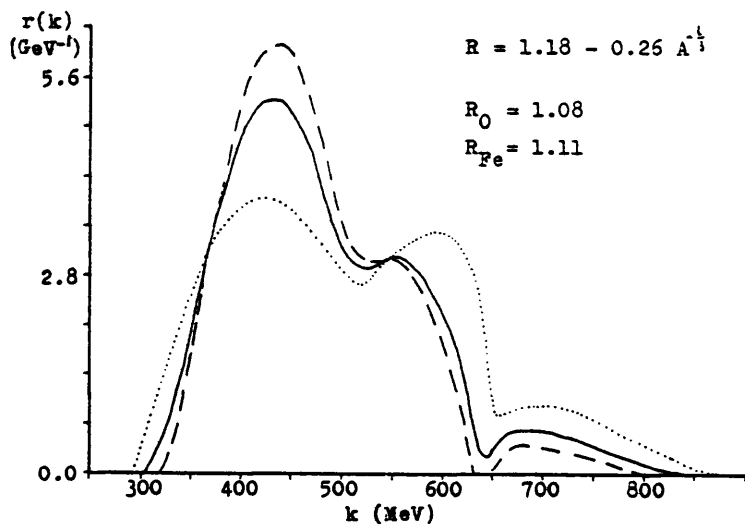


Fig. 10. Espectro del positrón para el término polo con $g' = 0$ y $\bar{A} = 0$, para los núcleos de oxígeno (línea discontinua), hierro (línea continua) y materia nuclear (línea de puntos).

del 11% . En el caso más realista en el que se incluye la inestabilidad de la delta (y la corrección L-L), al igual que ocurría en el límite homogéneo, las peculiaridades del espectro de difuminan en gran medida, aunque las conclusiones se mantienen esencialmente. Es de destacar que a causa de la dispersión producida por la "masa" compleja de la delta, el espectro (fig 11) guarda cierto parecido con el que se deduce de la mera inclusión del movimiento de Fermi; sin embargo, este parecido es puramente accidental, ya que los estados finales

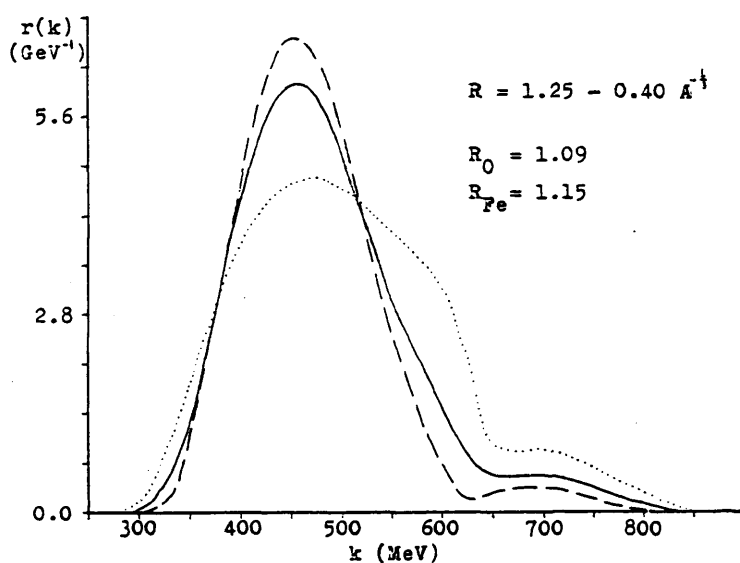


Fig 11. Espectro del positrón para el término polo con $g' = 0.55$ y considerando la inestabilidad de la delta, en los casos: oxígeno (---), hierro (—) y materia nuclear (.....).

hadrónicos para $k^0 \leq 500 \text{ MeV}$ ó $k^0 \geq 500 \text{ MeV}$ son radicalmente diferentes. Aunque en el capítulo II vimos que los términos espectador y de interferencia tenían un comportamiento muy próximo al del término polo, esta conclusión no es inmediatamente extensible al caso actual, ya que algunos efectos como las reflexiones en la superficie podrían tener consecuencias diferentes sobre cada término, pues para el espectador no aparece el producto escalar del pión entrante y saliente, lo que podría suponer para el término polo una reducción en la probabilidad de desintegración con positrones muy perpendiculares a la superficie. Sin embargo, esto no se observa (fig. 12).

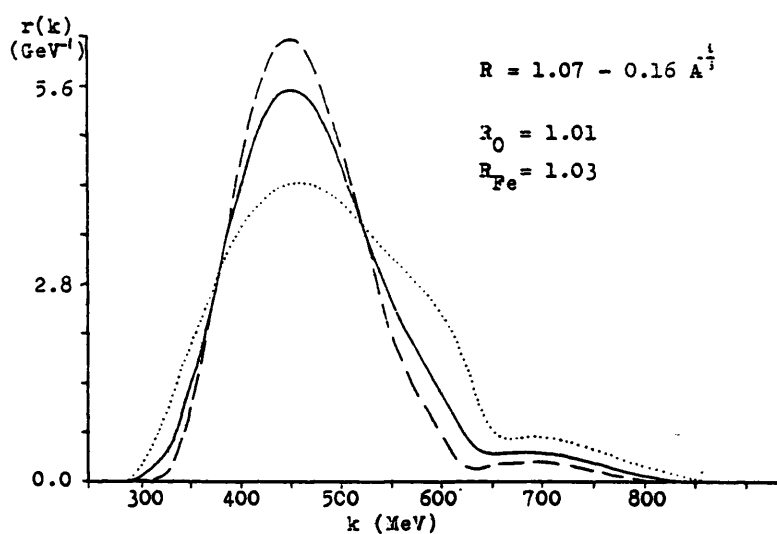


Fig. 12. Gráfico análogo al de la figura 11, para el término espectador con $R_\gamma = 0.567$.

Del mismo modo, es necesario saber hasta qué punto la correlación entre los momentos del positrón y pión que aparece en el término de interferencia, puede significar variaciones en el espectro en presencia de la superficie. Los cálculos realizados (véase la figura 13) muestran que el el espectro de este término, tiene un comportamiento similar, respecto a los dos anteriores, al ya observado en el límite de materia nuclear.

En resumen, vemos que los efectos superficiales, incluso en el caso del hierro, son de gran importancia, particularmente en lo que se refiere al espectro del positrón. En cuanto a la fiabilidad de los resultados, gracias a la naturaleza del

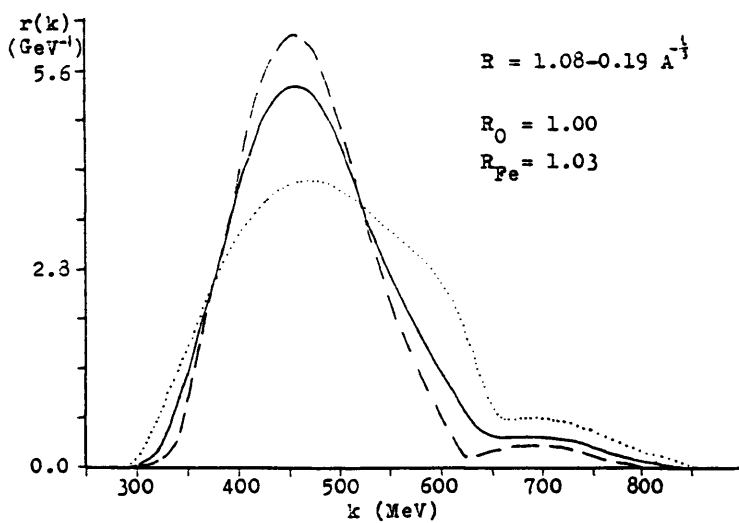


Fig. 13. Gráfico análogo al de la figura 11, para el término de interferencia con $R_N = 0.56F$.

cálculo, las posibles correcciones a los resultados podrían proceder de dos direcciones. En primer lugar, las que se derivarían de un más preciso tratamiento de las interacciones fuertes (especialmente pión-barión) lo que ya se comentó en el límite homogéneo. En segundo lugar están las relacionadas directamente con las inhomogeneidades espaciales. Entre ellas hay que destacar las causadas por no ser la distribución espacial completamente describible a través de la aproximación plana, que podrían tener una influencia sensible, especialmente en el caso del oxígeno, pero cuyo tratamiento sería inviable con el mismo grado de aproximación que el aquí considerado, debiéndose recurrir a cálculos de primer orden, incluso con funciones de onda de oscilador armónico (ver ref.[30]) lo que, en definitiva, supondría, con gran probabilidad, una pérdida neta de precisión.

APENDICE A:

Relación entre valores medios de conmutadores y funciones de Green.

Probaremos en este apéndice algunas de las relaciones utilizadas entre los valores medios sobre el estado fundamental de conmutadores de operadores de campo, y valores medios de productos ordenados. Consideraremos el caso general de no invariancia bajo traslaciones, aunque sí bajo paridad.

$$\int d^3x_1 d^3x_2 e^{ik(x_1-x_2)} \langle A | [\psi(x_1), \psi(x_2)] | A \rangle = 2 \int d^3x_1 d^3x_2 e^{ik(x_1-x_2)} [i \langle A | T \psi(x_1) \psi(x_2) | A \rangle] \quad (A.1)$$

(todos los campos están en imagen de Heisenberg (para las interacciones fuertes)).

Suprimiendo los índices de spin y desarrollando, el lado derecho de (A.1) se escribiría

$$\begin{aligned} \int d^3x_1 d^3x_2 e^{ik(x_1-x_2)} \langle A | [\psi(x_1), \psi(x_2)] | A \rangle &= \int d^3x_1 d^3x_2 e^{ik(x_1-x_2)} \left\{ \theta(x_1^0-x_2^0) \langle \psi(x_1) \psi(x_2) \rangle \right. \\ &\quad \left. + \theta(x_2^0-x_1^0) \langle \psi(x_2) \psi(x_1) \rangle - \theta(x_1^0-x_2^0) \langle \psi(x_1) \psi(x_2) \rangle - \theta(x_2^0-x_1^0) \langle \psi(x_2) \psi(x_1) \rangle \right\} \\ &= -i \int d^3x_1 d^3x_2 e^{ik(x_1-x_2)} \left\{ \langle T \psi(x_1) \psi(x_2) \rangle - \langle T \psi(x_2) \psi(x_1) \rangle \right\} \quad (A.2) \end{aligned}$$

pero

$$\begin{aligned} \chi &\equiv \left(\int d^3x_1 d^3x_2 e^{ik(x_1-x_2)} \left[\theta(x_1^0-x_2^0) \langle \psi(x_1) \psi(x_2) \rangle - \theta(x_2^0-x_1^0) \langle \psi(x_2) \psi(x_1) \rangle \right] \right) \\ &= \int d^3x_1 d^3x_2 d_4^0 e^{-ik(x_1-x_2)} \left\{ \theta(x_1^0-x_2^0) \langle \psi(x_1, \vec{x}_1) \psi(x_2, \vec{x}_2) \rangle - \theta(x_2^0-x_1^0) \langle \psi(x_2, \vec{x}_2) \psi(x_1, \vec{x}_1) \rangle \right\} \quad (A.3) \end{aligned}$$

en donde se ha hecho el cambio $\bar{x}_1 \leftrightarrow \bar{x}_2$. Llamando $x_2' = 2x_1^0 - x_1^1$:

$$\chi = \int d^3\bar{x}_1 d^3\bar{x}_2 d^4x_1^0 e^{-ik(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)} e^{ik(x_1^0 - x_2^0)} \left\{ \langle \psi(x_1^0, \bar{x}_1) \psi^\dagger(x_2^0, \bar{x}_2) \rangle \langle \psi(x_2^0, \bar{x}_2) \psi^\dagger(x_1^0, \bar{x}_1) \rangle \right\} \quad (A.4)$$

Por invariancia bajo traslaciones temporales

$$\langle \psi(x_1^0, \bar{x}_1) \psi^\dagger(x_2^0, \bar{x}_2) \rangle = \langle \psi(x_1^0, \bar{x}_1) \psi^\dagger(x_1^0, \bar{x}_1) \rangle \quad (A.5)$$

luego

$$\chi = -i \int d^3\bar{x}_1 d^4x_1^0 e^{ik(x_1^0 - x_1^0)} \left\{ -i \langle T \psi(x_1) \psi^\dagger(x_1) \rangle \right\} \quad (A.6)$$

y sustituyendo en (A.2) queda probada (A.1).

Para el conmutador que aparece en el estudio del término espectador, la demostración sería idéntica (basta sustituir $\psi(x) \rightarrow \psi(x)\phi(x)$). En el caso de las oscilaciones $n-\bar{n}$, hay que sustituir $\psi \rightarrow \psi\psi$, y variar algunos signos por ser un operador bosónico.

Mención aparte merece el término de interferencia, en el que aparecen productos de tres campos. Es necesario probar que

$$\sum_{j_1 j_2} \frac{1}{k^0} \int d^3\bar{x}_1 d^3\bar{x}_2 \sum_{j_1 j_2} e^{ik(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)} \langle \psi(x_1^0, \bar{x}_1) \psi(x_2^0, \bar{x}_2) \psi(x_3^0, \bar{x}_3) \rangle = \sum_{j_1 j_2} \frac{1}{k^0} \int d^3\bar{x}_1 d^3\bar{x}_2 \sum_{j_1 j_2} e^{ik(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)} \langle T \psi(x_1) \psi(x_2) \psi(x_3) \rangle \quad (A.7)$$

Con un desarrollo análogo al considerado antes, llegamos a que el lado izquierdo de (A.7) es

$$\frac{1}{i} \left\{ \int d^3\bar{x}_1 d^4x_1^0 \sum_{j_1 j_2} e^{ik(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)} \langle T \psi(x_1) \psi(x_2) \psi(x_3) \rangle \right\} - \frac{1}{i} \left\{ \int d^3\bar{x}_1 d^4x_1^0 \sum_{j_1 j_2} e^{ik(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)} \langle T \psi(x_1) \psi(x_2) \psi(x_3) \rangle \right\} \quad (A.8)$$

se trata de ver que los dos términos entre llaves son idénticos. Para ello basta demostrar que sus trazas coinciden, ya que en el caso homogéneo, por razones de invariancia, ambos son múltiplos de la identidad en el espacio de spin, y en el caso inhomogéneo, tras promediar en $\pm \bar{k}$, el problema se reduce al cálculo de la traza:

$$\int d\vec{x}_1 d\vec{x}_2 \sum_{\alpha\beta} \bar{\psi}_{\alpha} \hat{k} \langle \Gamma \psi_{\alpha}(x) \phi_{\beta}^{\dagger}(x) \rangle e^{i k \cdot x} = \int d\vec{x}_1 d\vec{x}_2 \sum_{\alpha\beta} \bar{\psi}_{\alpha} \hat{k} \langle \Gamma \psi_{\alpha}(x) (\gamma_{\alpha\beta}(x) \phi_{\beta}^{\dagger}(x)) \rangle e^{i k \cdot x} \quad (\text{A.9})$$

Por invariancia bajo inversión temporal:

$$\begin{aligned} \text{I} &= \langle A | \psi_{\alpha}(x) (\psi_{\beta}(x) \phi_{\beta}^{\dagger}(x)) | A \rangle = \langle A | \mathcal{U}_T^{-1} \psi_{\alpha}(x) \psi_{\beta}^{\dagger}(x) \phi_{\beta}^{\dagger}(x) \mathcal{U}_T | A \rangle \\ &= \langle A | (\sigma^2 \psi_{\alpha}(-x, \bar{x})) (\sigma^2 \psi_{\beta}(-x, \bar{x})) \phi_{\beta}^{\dagger}(-x, \bar{x}) | A \rangle S_i \\ &= \langle A | (\sigma^2 \psi_{\alpha}(-x, \bar{x})) \phi_{\beta}^{\dagger}(-x, \bar{x}) (\sigma^2 \psi_{\beta}(-x, \bar{x})) | A \rangle S_i, \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

donde \mathcal{U}_T es el operador de inversión temporal^[66,24], y se ha usado:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_T \psi_{\alpha}(x) \mathcal{U}_T^{-1} &= \sum_{\rho} \sigma_{\alpha\rho}^2 \psi_{\rho}(-x, \bar{x}) \\ \mathcal{U}_T \phi_{\beta}^{\dagger}(x) \mathcal{U}_T^{-1} &= \phi_{\beta}^{\dagger}(-x, \bar{x}) S_i \quad (S_{i3} = 1, S_i = -1) \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

y por invariancia bajo paridad

$$\bar{\text{I}} = \langle A | (\sigma^2 \psi_{\alpha}(-x)) \phi_{\beta}^{\dagger}(-x) (\sigma^2 \psi_{\beta}(-x)) | A \rangle S_i \quad (\text{A.12})$$

Finalmente, haciendo el cambio $\bar{x}_1 \leftrightarrow -\bar{x}_1$, y usando la invariancia bajo traslaciones temporales, el lado derecho de (A.9) se escribe

$$\int_{\mathbb{R}^d} d\bar{x}_1 d\bar{x}_2 \sum_{\mathbb{Z}^d} \tau_{i_1}^{\nu} (-\tau_{i_2}^{\nu}) \hat{K}(\Gamma_{i_1}(\omega) \phi(\omega) \psi_{i_1}(\omega)) e^{i(\omega, \bar{x}_1)} = \int_{\mathbb{R}^d} d\bar{x}_1 d\bar{x}_2 \sum_{\mathbb{Z}^d} \tau_{i_1}^{\nu} (\bar{\tau}_{i_2}^{\nu}) \hat{K}(\Gamma_{i_1}(\omega) \phi(\omega) \psi_{i_1}(\omega)) e^{i(\omega, \bar{x}_1)} \quad (\text{A.13})$$

(Otra forma de probar (A.9) sería a través de un desarrollo perturbativo de ambos miembros).

APENDICE B:

Cálculo numérico de integrales singulares.

La presencia de polos en los propagadores hace que en muchas integrales que deben evaluarse numéricamente, aparezcan singularidades. Una forma de regularizar sería añadiendo una pequeña parte imaginaria a los denominadores que se anulan (p. ej. con $i\epsilon$ finito). Pero un tratamiento en estos términos requeriría tomar pasos de integración muy pequeños, lo cual supondría un tiempo de computación prohibitivo en muchos casos.

Una posibilidad alternativa es utilizar el hecho de que si bien los integrandos son muy singulares, esto sólo es debido a que un denominador se anula, pero el comportamiento de éste es relativamente suave. En concreto, la solución adoptada consiste en una aproximación racional:

$$\int_a^b \frac{g(x)}{f(x)} dx \approx \int_a^b \frac{\sum_{i=0}^{n_1} \alpha_i x^i}{\sum_{j=0}^{n_2} \beta_j x^j} dx \quad (\text{B.1})$$

Aunque las funciones $f(x)$ y $g(x)$ son, en general, suaves, no así sus derivadas (téngase presente además que, a veces, estas funciones deben calcularse con un largo proceso numérico y, por consiguiente, sin demasiada precisión) por lo que no es conveniente utilizar polinomios de grado alto, sino que es preferible subdividir el intervalo cuantas veces sea necesario.

La elección más conveniente ha resultado ser la de primer grado para numerador y denominador, con la cual la integral se aproxima por:

$$\int_a^b \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{b-a}{f(b)-f(a)} \left[g(b)-g(a) + \frac{g(b)f(b)-g(a)f(a)}{f(b)-f(a)} \log \frac{f(b)}{f(a)} \right] \quad (B.2)$$

válida también para funciones complejas situando adecuadamente el corte del logaritmo. (En nuestro caso siempre ocurre que $\text{Im}f(x) > 0$, de modo de puede tomarse el corte en $\pm i\pi$).

APENDICE C:

Cálculo numérico de las constantes λ para las correlaciones \bar{n} -hueco.

Se trata de calcular (ver capítulo III)

$$\lambda_n \equiv \frac{\int d^3\vec{p}_1 \dots d^3\vec{p}_n \tilde{V}(\vec{p}_1) \dots \tilde{V}(\vec{p}_n) \Theta(\sum_{i=1}^n \vec{p}_i) \Theta(\sum_{i=1}^n \vec{p}_i) \dots \Theta(\sum_{i=1}^n \vec{p}_i)}{\tilde{V}(0)^n \int d^3\vec{p}_1 \Theta(\sum_{i=1}^n \vec{p}_i) \Theta(\sum_{i=1}^n \vec{p}_i)} \quad (\text{C.1})$$

donde

$$\tilde{V}(\vec{p}) = \int d^3\vec{x} e^{i\vec{p}\vec{x}} V_{NN}(\vec{x}) \quad (\text{C.2})$$

Las integrales del denominador de (C.1) son inmediatas.

Definiendo $\hat{V}(\vec{l}) \equiv \tilde{V}(\vec{l})/\tilde{V}(0)$ y $\hat{l} \equiv \vec{p}/k_F$,

$$\lambda_n = \frac{\int d^3\vec{p}_1 \dots d^3\vec{p}_n \hat{V}(\vec{p}_1) \dots \hat{V}(\vec{p}_n) \Theta(\sum_{i=1}^n \vec{p}_i) \dots \Theta(\sum_{i=1}^n \vec{p}_i)}{\left(\frac{4}{3}\pi\right)^n} \quad (\text{C.3})$$

Suponiendo que $V(\vec{x})$ es invariante bajo rotaciones:

$$\tilde{V}(\vec{l}) = 4\pi \int_0^\infty dr r^2 \frac{\sin(lr)}{lr} V_{NN}(r) \quad (\text{C.4})$$

Esta integral, en general, no puede resolverse de forma analítica. Sin embargo, por la forma de la ecuación (C.3), es necesario poder evaluar $V(\vec{l})$ en un número muy pequeño de operaciones.

Esto puede solucionarse calculando la integral de (C.4) para una cantidad suficiente de valores e interpolando. Aún así, es necesario, en principio, calcular un número muy elevado de integrales no factorizables. Tres de ellas pueden efectuarse inmediatamente gracias a la invariancia bajo rotaciones. De las $3(n-1)$ restantes, es posible efectuar explícitamente alguna más, aunque el procedimiento, debido a las funciones paso, es muy complicado y sólo resulta útil para $n=2$. Existe, no obstante, una solución muy simple aplicable prácticamente a cualquier n , consistente en un método de Montecarlo. En efecto, (C.3) tras unos cambios de variable puede escribirse:

$$\lambda_n = \left(\frac{4}{3}\pi\right)^n \int_{|\hat{q}_1| < 1} d^3\hat{q}_1 \dots \int_{|\hat{q}_n| < 1} d^3\hat{q}_n \hat{V}(\hat{q}_n - \hat{q}_{n-1}) \hat{V}(\hat{q}_{n-1} - \hat{q}_{n-2}) \dots \hat{V}(\hat{q}_2 - \hat{q}_1) \quad (C.5)$$

basta generar puntos aleatoriamente distribuidos dentro de los intervalos de integración y promediar los valores del integrando. Como la dispersión cuadrática media es pequeña (~ 0.1), sólo es necesario un número muy reducido de puntos (~ 1000) para obtener un resultado con 2 cifras significativas.

APENDICE D:

Tratamiento perturbativo del potencial de confinamiento.

Aunque en el apartado IV.2 se dijo que aparentemente no es posible tratar el confinamiento de una forma perturbativa, en realidad, eso es cierto sólo si se considera un conjunto finito de diagramas. Veamos como mediante sumas infinitas podemos llegar al mismo resultado. Sea $G^{(0)}(z, z', \underline{k})$ la función de Green del nucleón libre, donde por libre ahora entendemos que no existe ningún potencial exterior (ni interacciones entre partículas). Las funciones de onda que diagonalizan $G^{(0)}$ (supuesta una cuantificación en una caja de longitud L) son ondas planas que denotaremos por $\phi_i^{(0)}(z) (\propto \exp(ik_i z))$. La serie de Dyson para la función de Green del nucleón considerando únicamente la interacción con el potencial exterior es

$$G(z, z', \underline{k}) = G^{(0)}(z, z', \underline{k}) + \int dz_1 G^{(0)}(z, z_1, \underline{k}) V(z_1) G^{(0)}(z_1, z', \underline{k}) + \int dz_1 dz_2 G^{(0)}(z, z_1, \underline{k}) V(z_1) G^{(0)}(z_1, z_2, \underline{k}) V(z_2) G^{(0)}(z_2, z', \underline{k}) + \dots \quad (D.1)$$

que en la representación de las funciones $\phi_i^{(0)}$ sería

$$G_{ij}(k) = \delta_{ij} G_{ii}^{(0)}(k) + \sum_{i'} G_{ii'}^{(0)} V_{i'i} G_{i'j}^{(0)} + \dots \quad (D.2)$$

donde

$$G_{ii}^{(0)} = \frac{1}{\hbar^2 \frac{\epsilon_i^2}{2m} - \epsilon_i - i\eta} = \frac{1}{\hbar^2 \frac{\epsilon_i^2}{2m} - \epsilon_i - i\eta} \quad (\epsilon_i^{(0)} \equiv \frac{\hbar^2 k_i^2}{2m}) \quad (D.3)$$

$$V_{ij} = \int dz \phi_i^{(0)*}(z) V(z) \phi_j^{(0)}(z) \quad (D.4)$$

La serie de (D.2) puede sumarse formalmente con el resultado:

$$G = [G^{(0)}(k) - V]^{-1}, \quad (A \equiv (A_{ij})) \quad (D.5)$$

La parte del denominador de (D.5) que no es múltiplo de la identidad, es de la forma

$$H_{ij} = \epsilon_i^{(v)} + V_{ij} \quad (D.6)$$

Sea R la matriz de rotación (unitaria ya que $V_{ij} = V_{ji}^*$) que diagonaliza (D.6) y

$$E_{ij} \equiv \sum_{\alpha} R_{\alpha i} H_{ij} (R^{-1})_{\alpha j} \quad (D.7)$$

sustituyendo en (D.5) y expresando G en la representación de z

$$\begin{aligned} G(z, z', k) &= \sum_{ij} \phi_i^{(0)}(z) \phi_j^{(0)*}(z') G_{ij}(k) = \sum_{ij} \phi_i^{(0)}(z) \phi_j^{(0)*}(z') [R^{-1}]_{i\alpha} G_{\alpha\beta}(k) R_{\beta j} \\ &= \sum_{\alpha\beta} G_{\alpha\beta}(k) \varphi_{\alpha}(z) \varphi_{\beta}^*(z') \end{aligned} \quad (D.8)$$

donde

$$G_{\alpha\beta}(k) \equiv \frac{\delta_{\alpha\beta}}{k^2 - \frac{\epsilon_{\alpha}^2}{2m_{\alpha}} - m_{\alpha}^2 - \epsilon_{\alpha} + i\epsilon \Delta_{\alpha\beta} \left(\frac{\epsilon_{\alpha}^2}{2m_{\alpha}} - \epsilon_{\alpha} - \epsilon_{\beta}^2 \right)} \quad (D.9)$$

$$\varphi_{\alpha}(z) \equiv \sum_{\lambda} R_{\lambda\alpha} \phi_{\lambda}^{(0)}(z) \quad (D.10)$$

que es un resultado equivalente al del apartado IV.2 . (Nótese que por definición $\{\epsilon_{\alpha}\}$ y $\{\varphi_{\alpha}\}$ son los autovalores y autofunciones

del hamiltoniano $H_0^{(3)} + V(z)$).

Del mismo modo podría haberse procedido para el caso de la delta. Por el contrario, para el caso del pi6n, el efecto nuclear no puede simularse con un potencial est6tico, sino que es necesario considerar expl6citamente las interacciones con cada nucle6n.

Resumiendo: aunque siempre se supondr6 que en el hamiltoniano H_0 esta incluido el potencial de confinamiento (para nucleones y deltas), podr6a igualmente haberse considerado 6ste como una perturbaci6n con tal de efectuar la correspondiente inserci6n de autoenerg6a cada vez que aparezca un propagador de bari6n.

APENDICE E:Cálculo de las funciones U^N y U^A .Comencemos por la función $U^N(q)$.

$$U_{\alpha\beta}^N(q) = -4i \int \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4} \frac{1}{\ell^2 - m_\alpha^2 - \epsilon_\alpha(\ell) - i\epsilon} \frac{1}{\ell^2 - m_\beta^2 - \epsilon_\beta(\ell) - i\epsilon} \quad (\text{E.1})$$

donde $\epsilon_\alpha(\ell) \equiv \epsilon_\alpha + \frac{\ell^2}{2m_\alpha}$

Efectuando la integral en energía:

$$U_{\alpha\beta}^N(q) = 4 \int \frac{d^3\ell}{(2\pi)^3} \left\{ \frac{\theta(\epsilon_\alpha - \epsilon_\beta(\ell)) \theta(\epsilon_\beta(\ell) - \epsilon_\alpha)}{q^0 + \epsilon_\alpha(\ell) - \epsilon_\beta(\ell) + i\epsilon} + \frac{\theta(\epsilon_\beta(\ell) - \epsilon_\alpha) \theta(\epsilon_\alpha - \epsilon_\beta(\ell) + i\epsilon)}{-q^0 - \epsilon_\beta(\ell) + \epsilon_\alpha(\ell) + i\epsilon} \right\} \quad (\text{E.2})$$

Si elegimos una base de autofunciones reales: $w_{\alpha p i} = w_{\beta \alpha i}$ (ver IV.6.15), y podemos simetrizar $U_{\alpha\beta}^N$ en los índices α y β (la parte antisimétrica se anula al calcular $\overline{1}_i$, y no tendrá interés), con lo que, tras hacer el cambio $-\underline{1} \leftrightarrow (\underline{1} + \underline{q})$ en el 2º sumando de (E.2) se obtiene:

$$U_{\alpha\beta}^{N,S}(q) \equiv \frac{1}{2} [U_{\alpha\beta}^N + U_{\beta\alpha}^N] \quad (\text{E.3})$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ 4 \int \frac{d^3\ell}{(2\pi)^3} \left[\frac{1}{q^0 + \epsilon_\alpha(\ell) - \epsilon_\beta(\ell) + i\epsilon} + \frac{1}{-q^0 - \epsilon_\beta(\ell) + \epsilon_\alpha(\ell) + i\epsilon} \right] \theta(\epsilon_\alpha - \epsilon_\beta(\ell)) \theta(\epsilon_\beta(\ell) - \epsilon_\alpha) \right. \\ \left. + (\alpha \leftrightarrow \beta) \right\}$$

Sea

$$\hat{I} \equiv \int d^2z \Theta(\epsilon_p - \epsilon_\alpha(l)) \Theta(\epsilon_p(l, \eta) - \epsilon_p) \left\{ \frac{1}{\gamma^2 (\epsilon_\alpha(l) - \epsilon_p(l, \eta) + i\epsilon)} + (\gamma^2 \rightarrow -\gamma^2) \right\} \quad (\text{E.4})$$

Consideremos en primer lugar la parte real. Escribiendo la 2ª función paso de la forma $\Theta(x) = 1 - \Theta(-x)$ y desarrollando, el término con dos funciones paso es impar bajo el cambio $\underline{l} \leftrightarrow -(\underline{l} + \underline{q})$, $\alpha \leftrightarrow \beta$, anulándose tras integrar y sumar a la parte correspondiente a la permutación de α por β , con lo que el único término que contribuye es

$$\hat{I} = \mathcal{P} \int d^2z \Theta(\epsilon_p - \epsilon_\alpha(l)) \left\{ \frac{1}{\gamma^2 (\epsilon_\alpha(l) - \epsilon_p(l, \eta))} + (\gamma^2 \rightarrow -\gamma^2) \right\} \quad (\text{E.5})$$

Efectuando la integral en l_y (tomando el eje x en la dirección de \underline{q}):

$$\hat{I} = \Theta(\epsilon_p - \epsilon_\alpha) \mathcal{P} \int_{-\sqrt{(\epsilon_p - \epsilon_\alpha)2m}}^{\sqrt{(\epsilon_p - \epsilon_\alpha)2m}} dl_x \frac{1}{2\sqrt{(\epsilon_p - \epsilon_\alpha)2m - l_x^2}} \left\{ \frac{1}{\gamma^2 (\epsilon_\alpha - \epsilon_p - \frac{dl_x \eta}{2m} - \frac{q^2}{2m})} + (\gamma^2 \rightarrow -\gamma^2) \right\} \quad (\text{E.6})$$

Finalmente denotando:

$$\begin{aligned} a &= 2m_N(\epsilon_p - \epsilon_\alpha) \\ b &= 2m_N(\epsilon_\alpha - \epsilon_p) - \underline{q}^2 \\ c &= 2m_N q^0 \\ d &= 2|\underline{q}| \\ t &= \frac{1}{\sqrt{a}} \\ A &= \frac{c+d}{d\sqrt{a}} \end{aligned} \quad (\text{E.7})$$

llegamos a

$$\hat{I} = \frac{4m_N \sqrt{a} \Theta(a)}{d} \left[f(A) + (\vartheta \rightarrow -\vartheta) \right] \quad (\text{E.8})$$

donde

$$f(x) = \int_{-1}^1 dt \frac{\sqrt{1-t^2}}{x-t} = \pi x - \pi \sqrt{x^2-1} \Theta(x^2-1) \operatorname{sign} x \quad (\text{E.9})$$

es decir,

$$\operatorname{Re} U_{\alpha\beta}^{M,S} = \frac{1}{2\pi^2} \left\{ \hat{I} + (x \leftrightarrow \rho) \right\} \quad (\text{E.10})$$

En cuanto a la parte imaginaria,

$$\operatorname{Im} \hat{I} = \int_{-1}^1 dt \frac{\Theta(\varepsilon_r - \varepsilon_p(t)) \Theta(\varepsilon_p(t) + a)}{\varepsilon_p(t) + a} \left\{ -\pi i \delta(\vartheta + \varepsilon_a(t) - \varepsilon_p(t) + (\vartheta \rightarrow -\vartheta)) \right\} \quad (\text{E.11})$$

Efectuando la integral en 1.:

$$\operatorname{Im} \hat{I} = -\frac{\pi m_N}{|q|} \int dt \left[\Theta(a - \tilde{b} - t) \Theta(\tilde{b} + t - \vartheta^2 - \alpha - 2q\tilde{b}) + (\vartheta \rightarrow -\vartheta) \right] \quad (\text{E.12})$$

donde

$$\begin{aligned} a' &= 2m_N(\varepsilon_r - \varepsilon_p) \\ \tilde{b} &= \frac{c+b}{d} \end{aligned} \quad (\text{E.13})$$

Y finalmente integrando en l_y :

$$\int_m I = -\frac{\pi^{m_y}}{i\hbar} g(\alpha - \tilde{b}^2, \alpha' - d\tilde{b} - \tilde{b}^2 - i\epsilon^2) \quad (\text{E.14})$$

donde

$$g(x, y) \equiv \int dt \theta(t-i) \theta(t^2-y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \text{ ó } y \gg x \gg 0 \\ 2\sqrt{x-y} & \text{si } x > y > 0 \\ i\sqrt{x} & \text{si } x \gg 0 > y \end{cases} \quad (\text{E.15})$$

y por tanto

$$\int_m U_{x\rho}^{m,s} = \frac{1}{2\pi^2} \left\{ \int_m I + (x \leftrightarrow \rho) \right\} \quad (\text{E.16})$$

Calcularemos a continuación la función U^Δ . Consideraremos el caso general en el cual la delta tiene una anchura dependiente de su cuadrimomento. Supondremos, como en el límite homogéneo, que esta anchura es aproximadamente la de la delta libre. Surge el problema de que las funciones de onda en la dirección z que diagonalizan la función $\tilde{\Delta}$, no son autoestados de P_z ; sin embargo, como ya se discutió antes, la dependencia en el momento es pequeña, y sólo tiene cierta importancia cuando los momentos son muy grandes. Pero los estados ψ_p muy excitados (estados de colisión), prácticamente sí tienen un momento definido. Tomaremos como anchura de la delta con energía-bimomento $\frac{1}{2}$ en el estado ψ_p :

$$\Gamma_\Delta(l^0, \sqrt{l_z^2 + p_z^2}) \quad (\text{E.17})$$

donde p_n^2 es el valor medio de P_z^2 en el estado ψ_n .

Definiendo:

$$E_n(\underline{\ell}) = m_N + E_n(\underline{\ell}) \quad (\text{E.18})$$

$$E_n(\underline{\ell}) = m_\Delta - \frac{1}{2} \Gamma_\Delta(\ell_0, \sqrt{\ell^2 + p_n^2}) \quad (\text{E.19})$$

tras integrar en energía obtenemos:

$$U_{\lambda, \mu}^\Delta(q^0, q) = 4 \int \frac{d\underline{\ell}}{(2\pi)^3} \left\{ \frac{\Phi(E_F - E_n(\underline{\ell}))}{E_n(\underline{\ell}) + q^0 - E_n(\underline{\ell}) + \Gamma_\Delta(\ell_0, \sqrt{\ell^2 + p_n^2})} + \frac{\Phi(E_F - E_n(\underline{\ell} + \underline{3}))}{-q^0 - E_n(\underline{\ell} + \underline{3}) - E_n(\underline{\ell} + \underline{3}) + \Gamma_\Delta(\ell_0, \sqrt{(\underline{\ell} + \underline{3})^2 + p_n^2})} \right\} \left(\frac{\underline{\ell} \cdot \underline{q}}{q^0} \right)^2 \quad (\text{E.20})$$

y con un cambio de variable:

$$U_{\lambda, \mu}^\Delta(q^0, q) = 4 \int \frac{d\underline{\ell}}{(2\pi)^3} \Phi(E_F - E_n(\underline{\ell})) \left\{ \frac{1}{(q^0 + E_n(\underline{\ell}) - E_n(\underline{\ell} + \underline{3})) + \Gamma_\Delta(\ell_0, \sqrt{\underline{\ell}^2 + p_n^2})} + (q^0 - -q^0) \right\} \left(\frac{\underline{\ell} \cdot \underline{q}}{q^0} \right)^2 \quad (\text{E.21})$$

(Nótese que para llegar a esta expresión no ha sido necesario simetrizar).

$$E_n(\underline{\ell}) - E_n(E_n(\underline{\ell}), \underline{\ell}) = m_N - m_\Delta + E_n(\underline{\ell}) - E_n(\underline{\ell} + \underline{3}) + \frac{1}{2} \Gamma_\Delta^2(m_N + q^0 + E_n(\underline{\ell}), (\underline{\ell} + \underline{3}), p_n) \quad (\text{E.22})$$

donde E_{kin} es la energía cinética del estado $(x, \underline{1})$ (suponemos que las energías potenciales del nucleón y delta son aproximadamente iguales. En cualquier caso, esto no es muy determinante ya que ξ^c aparece sustrado a q^0 , mucho mayor)

Tomando el eje x en la dirección de \underline{q} y despreciando, como es habitual, un término de diferencia de energías cinéticas de nucleón y delta con momento inferior al de Fermi:

$$\epsilon_n(\underline{l}) - \epsilon_p(\underline{l}, \underline{q}) \approx \frac{q^2}{2m_\Delta} + \frac{2q^2}{m_\Delta} - \epsilon_n - \epsilon_p \quad (\text{E.23})$$

Para hacer viable el cálculo es necesario aproximar Γ_Δ por una cantidad que no dependa de las variables de integración \underline{l} . Siguiendo el mismo razonamiento que en capítulo II,

$$\Gamma_\Delta(m_N + \epsilon_n(\underline{l}) + q^2/2m_\Delta, \underline{l}, \underline{q}) \approx \Gamma_\Delta(m_N + q^2/2m_\Delta + 1.5 \frac{q^2}{m_\Delta}, \sqrt{p_n^2 + q^2 + \frac{1}{2}k_F^2}) \approx \tilde{\Gamma}_\Delta(\underline{q}, \underline{q}) \quad (\text{E.24})$$

Llamando:

$$\tilde{\omega}_\Delta \equiv m_\Delta - m_N - \frac{1}{2} \tilde{\Gamma}_\Delta(\underline{q}, \underline{q}) \quad (\text{E.25})$$

(E.21) se escribiría:

$$U_{np}^\Delta(\underline{q}, \underline{q}) = 4 \int \frac{d^3l}{(2\pi)^3} \Theta(\epsilon_F - \epsilon_n(\underline{l})) \left\{ \frac{1}{q^2 - \omega_\Delta - (\epsilon_n - \epsilon_n) - \frac{2q^2}{m_\Delta} - \frac{q^2}{2m_\Delta} + i\eta} \right\} \left(\frac{q}{2l} \right)^2 \quad (\text{E.26})$$

Denotemos:

$$\begin{aligned} a &= 2m_N(\epsilon_F - \epsilon_n) \\ b_\Delta &= 2m_N(\epsilon_F - \epsilon_p) - \frac{q^2}{2} \\ c_\Delta &= 2m_\Delta(q^0 - \tilde{\omega}_\Delta) \\ d &= 2|q| \\ A_\Delta &= \frac{c_\Delta + b_\Delta}{dV_\Delta} \end{aligned} \quad (\text{E.27})$$

Las integrales de (E.26) pueden efectuarse analíticamente, con el resultado:

$$U_{x,\mu}^{-\Delta}(\varphi, \eta) = \frac{4 m_{\Delta} \varphi(a) \sqrt{a}}{\pi^2 \Delta} \left[(A_{\Delta}) + (\varphi^{\circ} \rightarrow -\varphi^{\circ}) \right] \left(\frac{i}{3} \right) \quad (\text{E.28})$$

donde

$$f(z) = \int_{-1}^1 dt \frac{\sqrt{1-t^2}}{z-t} = \pi z - i\pi \sqrt{1-z^2} \quad (\text{E.29})$$

y el corte de analiticidad de la raíz cuadrada se toma en $\vartheta = \pi$. (La función $f(z)$ es analítica en todo el plano salvo en el intervalo $[1, \infty)$ del eje real). Siempre se verifica que $\text{Im} A_{\Delta} > 0$, luego $\text{Im} U^{\Delta} < 0$.

El caso $\Gamma_{\Delta} = 0$ está incluido en este tratamiento con tal de tomar una anchura infinitesimal, en cuyo caso también puede usarse:

$$f(x+ie) = \pi x - \pi \sqrt{x^2-1} \operatorname{sign} x \mathcal{G}(x^2-1) - i\pi \sqrt{1-x^2} \mathcal{G}(1-x^2) \quad (\text{E.29})$$

APENDICE F:

Método numérico para el estudio de los efectos superficiales.

Mostraremos en este apéndice los métodos numéricos utilizados para el cálculo del espectro del positrón en un núcleo finito. Consideraremos una serie de apartados que se corresponden con otras tantas rutinas de programas escritos en FORTRAN, cuyos listados aparecen en el apéndice siguiente.

La ejecución de estos programas se ha llevado a cabo en el ordenador IBM 370 del Centro de Proceso de Datos de la Universidad Complutense. (Como referencia sobre el consumo de tiempo de cada rutina, digamos que su velocidad de proceso es de unas 10^6 operaciones por segundo de CPU).

Se trata de calcular (ver capítulo IV):

$$\sum_{ij} \int d\Omega M_{ij}(q_1, k_1, z) L_{ij}(z, k_1, q_1)$$

para una serie de valores de $\frac{k_1}{k_0}$ y z . Como ya se comentó en el apartado IV.10, el cálculo directo de esta función, a través de las expresiones que aparecen a lo largo del capítulo IV, supondría un número enorme de operaciones. Afortunadamente, gran cantidad de los cálculos necesarios pueden efectuarse una sola vez, ya que implican cantidades independientes de los momentos del positrón y pión. Son los considerados en los apartados 1 y 2. Otras cantidades como la propia matriz $D_{ij}(q^0, \underline{q})$, de cuyo cálculo trata el apartado 3, son independientes de z ó $\frac{k_1}{k_0}$ (k_0 fijo), mientras que otras, aunque dependientes de estas variables, no varían con \underline{q} (apartado 4). Todo ello permite

realizar el cálculo final en un tiempo aceptable.

1. Cálculo de las autofunciones y autoenergías.

Se trata de resolver la ecuación de Schrödinger en la dirección z :

$$\left(-\frac{1}{2m\omega} \frac{d^2}{dz^2} + V(z)\right) \phi(z) = \epsilon \phi(z) \quad (1.1)$$

Interesa calcular las autofunciones y autoenergías no sólo de los estados ligados sino también de los del continuo, por lo que es necesario discretizar el problema. Para ello, consideraremos una caja de longitud L , e imponemos condiciones de contorno periódicas (ver apartado IV.10). En vez de resolver directamente la ecuación diferencial (1.1), utilizaremos un método variacional.

Una base del espacio de Hilbert sería

$$\hat{\phi}_j^{(0)}(z) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{i \frac{2\pi j}{L} z}, \quad \forall j \in \mathbb{Z} \quad (1.2)$$

Por razones de velocidad en el cálculo numérico, así como por conveniencia en algunos desarrollos analíticos, es preferible la utilización de una base real. Tomaremos en concreto:

$$\begin{aligned} \phi_1^{(0)}(z) &= \frac{1}{\sqrt{L}}, & \epsilon_1^{(0)} &= 0 \\ \phi_{2n}^{(0)}(z) &= \sqrt{\frac{2}{L}} \cos \frac{2\pi n}{L} z, & \epsilon_{2n}^{(0)} &= \frac{1}{2m\omega} \left(\frac{2\pi n}{L}\right)^2 \\ \phi_{2n+1}^{(0)}(z) &= \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{2\pi n}{L} z, & \epsilon_{2n+1}^{(0)} &= \epsilon_{2n}^{(0)} \end{aligned} \quad (1.3)$$

que es una base ortonormal de autofunciones del hamiltoniano

$$H_0 = -\frac{1}{2m_N} \frac{d^2}{dz^2} \quad (1.4)$$

con autoenergías $\varepsilon_i^{(0)}$.

Consideremos el subespacio \mathcal{H}^N generado por las N primeras funciones de la forma (1.3) (tomaremos N impar). Si N es lo suficientemente grande, el error cometido en los resultados finales será despreciable. Sea \hat{H} la restricción del hamiltoniano total

$$H = \frac{1}{2m_N} \frac{d^2}{dz^2} + V(z) \quad (1.5)$$

al subespacio \mathcal{H}^N .

$$\hat{H}_{ij} \equiv (\phi_i^{(0)}, H \phi_j^{(0)}) \quad (1.6)$$

Se trata pues de resolver el problema espectral de \hat{H} :

$$\hat{H} \phi_i = \varepsilon_i \phi_i \quad (1.7)$$

Por ser $\{\phi_i^{(0)}\}$ y $\{\phi_i^{(0)}\}$ bases ortonormales de \mathcal{H}^N , existe una matriz unitaria U (ortogonal si las bases son reales) tal que

$$\phi_i = \sum_{j=1}^N u_{ij} \phi_j^{(0)} \quad (1.8)$$

luego

$$\sum_k U_{ik} \hat{H}_{nk} (U^{-1})_{kj} = \epsilon_i \delta_{ij} \quad (1.9)$$

Basta, por consiguiente, calcular la matriz \hat{H}_{ij} (real y simétrica) y diagonalizarla, encontrando sus autovalores y autovectores.

$$\hat{H}_{ij} = \epsilon_i^{(a)} \delta_{ij} + V_{ij} \quad (1.10)$$

donde

$$V_{ij} = \int_{-L/2}^{L/2} dt V(t) \phi_i^{(a)}(t) \phi_j^{(a)}(t) = V_{ji} \quad (1.11)$$

Es necesario evaluar $\frac{N(N-1)}{2}$ elementos. Se puede reducir drásticamente el número de operaciones utilizando la forma explícita de las funciones $\{\phi_i^{(a)}\}$. Efectivamente, es inmediato comprobar que:

$$\begin{aligned} V_{ij} &= 0 && \text{si } i+j \text{ es par} \\ V_{ii} &= I_n \\ V_{i,2n-i} &= \sqrt{2} I_n \\ V_{i,2n-i'} &= \{ I_{i,2n-i'} - I_{i,2n-i} \} \\ V_{i,2n-i,2n-i'} &= \{ I_{i,2n-i'} + I_{i,2n-i} \} \end{aligned} \quad (1.12)$$

con

$$I_n \equiv \frac{1}{L} \int_0^{L/2} dt \cos \frac{2\pi n t}{L} V(t) \quad (1.13)$$

El problema queda así limitado al cálculo de $2N$ integrales numéricas.

Para diagonalizar \hat{H} se ha utilizado un programa general de la biblioteca SSP de diagonalización de matrices reales simétricas.

Debemos hacer notar, que aunque los estados del continuo tendrían que ser doblemente degenerados, por efecto de la discretización, presentan energías ligeramente diferentes. Este desdoblamiento, si bien no tiene ninguna trascendencia en cuanto a los resultados, hace que al ordenar los estados por energías, en algunos casos no se alternen pares e impares, lo cual es indeseable para el cálculo posterior. Como el orden de los estados del "continuo" no tiene la menor importancia, para solucionar este problema, basta permutar algunos estados.

De una forma completamente análoga se calcularían las autofunciones y autoenergías de la delta.

Estos cálculos, aunque sin un costo de tiempo excesivo (varios minutos de CPU), sólo es necesario llevarlos a cabo una vez. Los resultados (matrices de rotación y autoenergías) se generan en el programa PGA y se almacenan en un fichero de disco para posterior uso.

2. Cálculo de las funciones de vértice.

Otras cantidades que no dependen de los momentos del positrón o pión, ni de la variable s y ,por tanto, pueden ser calculadas una sola vez, están relacionadas con las funciones de vértice $V_{1a}(q)$. Estas funciones, limitando el espacio a la caja de

longitud L , se escribirían:

$$\bar{V}_{\alpha\beta}(\mathbf{z}) = \int_{\frac{z}{2}}^{\frac{z+L}{2}} d\mathbf{z}' \int_{\frac{z}{2}}^{\frac{z+L}{2}} d\mathbf{z}'' e^{i\mathbf{q}(\mathbf{z}-\mathbf{z}')} (\mathbf{z}, \mathbf{z}') \cdot u(\mathbf{q}, \mathbf{z}') \varphi_{\alpha}(\mathbf{z}) \varphi_{\beta}(\mathbf{z}'') \varphi(\mathbf{z}'') \quad (2.1)$$

(recuérdese que por definición, las φ_i coinciden con las ϕ_i^m del apartado anterior si las tomamos reales).

Destaquemos en este punto un hecho muy importante que, en definitiva, hace viable la discretización. Consiste en que en la totalidad de los vértices, aparece una función que corresponde a un estado ligado. La transformada de Fourier del factor de forma es

$$\tilde{u}(\mathbf{q}, \mathbf{z}) \equiv \int_{\frac{z}{2}}^{\frac{z+L}{2}} d\mathbf{p} e^{i\mathbf{p}\mathbf{z}} u(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \sim e^{-\frac{\lambda^2}{2}} \quad (2.2)$$

(si $u(\mathbf{p}) \sim e^{-\lambda^2}$)

Para $\lambda \sim 2 \cdot 10^{-6} \text{ MeV}^{-2}$ (vértice del CBM), $\frac{\lambda^2}{2} \sim \frac{1}{65F}$, es decir, $\tilde{u}(\mathbf{q}, \mathbf{z}-\mathbf{z}')$ es muy pequeño salvo que \mathbf{z}' sea muy próximo a \mathbf{z} . Si $|\mathbf{z}' - \mathbf{z}| \sim \frac{L}{2}$, el integrando es prácticamente nulo; luego la influencia de la zona próxima a $\frac{L}{2}$ que podría haber presentado problemas, no tiene ninguna relevancia. Esto permite además simplificar notablemente (2.1), ya que es posible extender la integral en \mathbf{z}' a toda la recta, con lo cual las integrales en \mathbf{y} y \mathbf{z}' pueden efectuarse inmediatamente:

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{z}' \int_{\frac{z}{2}}^{\frac{z+L}{2}} d\mathbf{p} e^{i\mathbf{p}(\mathbf{z}-\mathbf{z}')} u(\mathbf{q}, \mathbf{p}) (\mathbf{q}, \mathbf{p}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{z}'} = (\mathbf{z}, \mathbf{k}) u(\mathbf{z}, \mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{z}} \quad (2.3)$$

Desarrollando las funciones de onda $\{\psi_a\}$ y $\{\psi_i\}$ en ondas planas (lo que es inmediato conocido el desarrollo en senos y cosenos):

$$\varphi_a(z) = \sum_{n=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} \hat{u}_{a,n} \frac{1}{\sqrt{L}} e^{ik_n z} \quad (2.4)$$

$$\varphi_i(z) = \sum_{n=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} \hat{u}_{i,n} \frac{1}{\sqrt{L}} e^{ik_n z} \quad (2.5)$$

obtenemos

$$\bar{V}_{\alpha\beta i}(z) = \frac{1}{\sqrt{L}} u(z, k_i) (\sum W_{\alpha\beta i}, i |k_i| W'_{\alpha\beta i}) \quad (2.6)$$

donde:

$$W_{\alpha\beta i} = \int_{-\frac{z}{2}}^{\frac{z}{2}} \varphi_a(z) \varphi_b(z) \varphi_i(z) = \sum_{n_1, n_2, n_3} \hat{u}_{a, n_1} \hat{u}_{b, n_2} \hat{u}_{i, n_3} \delta_{n_1, n_2, n_3, 0} \quad (2.7)$$

$$W'_{\alpha\beta i} = \int_{-\frac{z}{2}}^{\frac{z}{2}} \varphi_a(z) \varphi_b(z) \left(-i \frac{\partial}{\partial z} \varphi_i(z) \right) \frac{1}{|k_i|} = \sum_{n_1, n_2, n_3} \hat{u}_{a, n_1} \hat{u}_{b, n_2} \hat{u}'_{i, n_3} \delta_{n_1, n_2, n_3, 0} (-i \operatorname{sgn}(n_3)) \quad (2.8)$$

Estas cantidades (siempre reales) sólo dependen de las funciones de onda por lo que pueden calcularse una única vez. Si $\alpha+\beta+i$ es par $W_{\alpha\beta i} = 0$ mientras que si es impar $W'_{\alpha\beta i} = 0$, lo que se puede utilizar tanto para ahorrar memoria como para aumentar la velocidad.

Del mismo modo se calcularían las constantes correspondientes a la delta. En cuanto a los vértices del término espectador:

$$V_{\alpha\beta i}^s = \frac{1}{\sqrt{L}} v(z, k_i) (2\sqrt{z^2 + k_i^2} r^s)^{1/2} W_{\alpha\beta i} \quad (2.9)$$

El programa que genera estas constantes (PGD) puede ejecutarse inmediatamente después que PGA. Al ser siempre $\ll N_p$, sólo es necesario el cálculo de $\sim N_p \cdot N \cdot N$ elementos. El tiempo de CPU requerido es de algo más de un minuto.

3. Cálculo de $D_i(q)$

Fijado k^0 es necesario calcular $\int dq M \cdot \text{Im}D$ para una serie de valores de \hat{k} y z . Comoquiera que el cálculo de $\text{Im}D$, así como su diagonalización, es mucho más lento que el de M (unos 2 órdenes de magnitud), conviene en primer lugar evaluar $\text{Im}D_i(q, q^0(k^0))$ para un número suficiente de valores de $|q|$ y posteriormente utilizarlos no sólo para los diversos valores de \hat{k} y z sino incluso para los diferentes términos (polo, espectador e interferencia) ya que en todos los casos D coincide.

Describimos a continuación el método seguido (programa PGPI). Fijado un valor de $|q|$, en primer lugar (subrutina SBF) se evalúan las funciones U_{α}^u y U_{α}^A que aparecen en el apéndice E. Debido a que uno de los dos índices corresponde a un estado ligado, el número de operaciones necesario es $\sim N_p \cdot N$. Aunque el cálculo de cada uno de los elementos es relativamente largo, el tiempo total es despreciable.

Seguidamente, se efectúa el cálculo de la polarización (subrutina SBG). Detallaremos este proceso ya que es uno de los más lentos y, consecuentemente, uno de los más delicados. En concreto, el mayor número de operaciones ($\sim N^3 N_p$) se necesita para el cálculo de Ω (ver apartado IV.7):

$$\Omega_{ij}^N = \sum_{\alpha\beta} W_{\alpha p_i} W_{\alpha p_j} U_{\alpha\beta}^N \quad (3.1)$$

$$\Omega_{ij}^A = \sum_{\alpha\beta} W_{\alpha p_i} W_{\alpha p_j} U_{\alpha\beta}^A$$

El tiempo mínimo necesario para ello es de unos 20 segundos de CPU . La corrección Lorenz-Lorentz requiere además una inversión y un producto de matrices, pero el costo en tiempo es de sólo unos 5 segundos. El paso de Ω a $\overline{\Omega}$ es inmediato si, con el mismo razonamiento que en el apartado 2, se extiende una integral espacial a toda la recta en la definición de \overline{v}_{ij} :

$$\overline{v}_{ij}(\mathbf{q}) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{v}(\mathbf{q}, z, z') \varphi_i(z) \varphi_j(z') \quad (3.2)$$

(esto puede hacerse gracias a que las \overline{v}_{ij} siempre aparecen junto a las $W_{\alpha p_i}$ de la forma $\sum \overline{v}_{ij} W_{\alpha p_i}$). Usando la forma explícita de las $\{\varphi_i\}$:

$$\begin{aligned} \overline{v}_{ii} &= (\mathbf{q}, 0) \mathcal{U}(\mathbf{q}, 0) \delta_{ij} = \overline{v}_{ii} \\ \overline{v}_{2n, 2n'} &= \overline{v}_{2n+1, 2n'+1} = (\mathbf{q}, 0) \mathcal{U}(\mathbf{q}, \hat{n}_n) \delta_{nn'} \\ \overline{v}_{2n, 2n'+1} &= \overline{v}_{2n+1, 2n'} = i (0, 1K_n) \mathcal{U}(\mathbf{q}, K_n) \delta_{nn'} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Nótese que en todo momento puede conseguirse en gran ahorro de operaciones utilizando la simetría de Ω y $\overline{\Omega}$, así como que Ω_{ij} (ó $\overline{\Omega}_{ij}$) es nula salvo que $i+j$ sea par.

Una vez calculada $\overline{\Omega}^{-1}$ a través de $\overline{\Omega}$ (SBH) resta diagonalizar esta matriz. Llamando \mathcal{R} a la matriz (ortogonal compleja) de rotación, se pretende calcular cada uno de los elementos

$(\mathcal{R}' D' \mathcal{R}')$; para, junto a los correspondientes a la diagonal de $\mathcal{R} M \mathcal{R}^{-1}$, calcular la integral en $|q|$. No obstante, el proceso de diagonalización no garantiza que $(\mathcal{R}' D' \mathcal{R}')$ sea una función continua de $|q|$, ya que podría producirse una permutación de filas. Para evitar este problema, se diagonaliza no la matriz D' sino $\mathcal{R}' D' \mathcal{R}'^{-1}$ donde \mathcal{R}' es la matriz de rotación correspondiente al valor de $|q|$ inmediatamente anterior, con lo cual cuando la longitud del intervalo de integración tiende a cero, la matriz de rotación necesaria será próxima a la identidad y no se producirán discontinuidades. Para efectuar esta diagonalización, se ha usado una adaptación de un programa de cálculo de autovectores y autovalores de matrices reales simétricas, utilizando nuevamente la propiedad de que gran parte de sus elementos son nulos (subrutina SBJ). El tiempo consumido por esta rutina es también de unos 20 segundos.

El tiempo total para el cálculo de D y de las matrices de rotación, para 40 valores de $|q|$ es de unos 30 minutos de CPU.

4. Cálculo de M_{ij}

Se trata de evaluar:

$$M_{ij}(k_1, k_2) = \frac{1}{L} u(k_1, k_2) \sum_{\alpha, \beta} \left[\frac{\cos(k_1 \alpha - k_2 \beta) \sin(\omega \alpha)}{L^2 \alpha^2 - \frac{1}{2} \alpha^2 \beta^2 - \frac{1}{2} \alpha^2 \beta^2} \right] \left[\begin{matrix} N_{\alpha, \beta} & N_{\alpha, \beta} \\ N_{\alpha, \beta} & N_{\alpha, \beta} \end{matrix} \right] \quad (4.1)$$

$$\left(\sum_{\alpha} (1) \right) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} d\varphi \left(\frac{1}{L} \frac{\cos(k_1 \alpha - k_2 \beta) \sin(\omega \alpha)}{L^2 \alpha^2 - \frac{1}{2} \alpha^2 \beta^2 - \frac{1}{2} \alpha^2 \beta^2} \right) = \frac{1}{\pi} \begin{cases} 0 & c < 1 \\ 2\pi c \cos(c) & |c| < 1 \\ 2\pi & c \geq 1 \end{cases} \quad (4.2)$$

$$c = \frac{c_2 - \frac{1}{2} \beta^2}{L^2 \alpha^2 - \frac{1}{2} \alpha^2 \beta^2 - \frac{1}{2} \alpha^2 \beta^2}$$

Como M depende de $|q|$, \hat{k} y z , es necesario evaluarla una cantidad muy elevada de veces. Un cálculo directo supondría un número de operaciones del orden de $N^4 N_p$. Afortunadamente es posible reducirlo sustancialmente mediante el cómputo de cantidades intermedias que sólo dependen de $|q|$.

En primer lugar consideremos la integral en z' (subrutina SBB)

$$\int dz' \frac{\cos(k_1 z' - z') \varphi_{\alpha_1}(z') \varphi_{\alpha_2}(z')}{[k^2 - m_{\alpha_1}^2 - \frac{k_1^2}{z_{\alpha_1}^2} - \epsilon_{\alpha_1} - \Sigma_{\alpha_1}][k^2 - m_{\alpha_2}^2 - \frac{k_2^2}{z_{\alpha_2}^2} - \epsilon_{\alpha_2} - \Sigma_{\alpha_2}]} = R_{\alpha} \left[\int_{\alpha_1}(k_1, z) q_{\alpha_2}(k_2) \right] \quad (4.3)$$

donde:

$$\int_{\alpha}(k_1, z) = \left[\frac{\varphi_{\alpha}(z) e^{-i k_1 z}}{k^2 - m_{\alpha}^2 - \frac{k_1^2}{z_{\alpha}^2} - \epsilon_{\alpha} - \Sigma_{\alpha}} \right] \sqrt{L} \quad (4.4)$$

$$q_{\alpha}(k_2) = \left[\int_{\frac{z}{2}}^{\frac{z}{2}} dz' e^{i k_2 z'} \varphi_{\alpha}(z') \frac{1}{\sqrt{L}} \right] \frac{1}{k^2 - m_{\alpha}^2 - \frac{k_2^2}{z_{\alpha}^2} - \epsilon_{\alpha} - \Sigma_{\alpha}} \quad (4.5)$$

La integral de (4.5) puede efectuarse expresando φ_{α} en la base de senos y cosenos:

$$q_{\alpha}(k_2) = \sum_{i=1}^N u_{k_i} \int_{\frac{z}{2}}^{\frac{z}{2}} \varphi_{\alpha}(z) \quad (4.6)$$

con

$$\int_{\frac{z}{2}}^{\frac{z}{2}} \varphi_{\alpha}(z) = \frac{1}{\sqrt{L}} \int_a^b dz e^{i k_2 z} \phi_{\alpha}^{(i)}(z) \quad (4.7)$$

Como se discutirá en el apartado siguiente, conviene efectuar la integral en z en un determinado intervalo $[a, b]$. Como la

dependencia en z sólo aparece a través de $f_x(k, z)$, basta sustituir esta cantidad por

$$f_x^{[a,b]}(k) = \int_a^b f_x(k, z) dz = L \sum_{i=1}^N U_{xi} I_i^{[a,b]}(k) \quad (4.8)$$

La forma explícita de las $I_i^{[a,b]}$ es:

$$I_1^{[a,b]}(k) = \frac{b-a}{L} e^{ik_1 \frac{b+a}{2}} \text{sinc} \left[k_1 \frac{b-a}{L} \right] \quad (4.9)$$

$$I_{2n}^{[a,b]}(k) = \frac{b-a}{L} \frac{1}{\sqrt{2}} [C_{n+} - C_{n-}] \quad (4.10)$$

$$I_{2n+1}^{[a,b]}(k) = \frac{b-a}{L} \frac{1}{\sqrt{2}} [C_{n+} + C_{n-}] \quad (4.11)$$

donde

$$C_{n\pm} = e^{i \left[k_1 \pm \frac{2\pi n}{L} \right] \frac{b+a}{2}} \text{sinc} \left[\left(k_1 \pm \frac{2\pi n}{L} \right) \frac{b-a}{L} \right] \quad (4.12)$$

(sinc $x \equiv \frac{\sin x}{x}$)

Estas expresiones se simplifican notablemente en el caso $b-a = \frac{L}{2}$. Más aún se reducirían si se toma $k_1 = \frac{2\pi}{L} n$, como, en principio, debería hacerse por consistencia; aunque en la práctica conviene mantener la generalidad para controlar el error de discretización.

En los casos de los términos espectador y de interferencia, al no aparecer funciones de Green externas, la expresión correspondiente para M es diferente. No obstante, es posible llegar a una forma muy parecida mediante la sustitución:

$$G(z_1, z_2) = \sum_x \frac{\varphi_x(z_1) \varphi_x(z_2)}{k^2 m_N - \epsilon_x(z) - \Sigma_0} \rightarrow \delta(z_1 - z_2) = \sum_x \varphi_x(z_1) \varphi_x(z_2) \quad (4.13)$$

es decir, basta la eliminación del denominador $k^2 - m_N - \epsilon_x(z) - \Sigma_0$ en la función f (para el término de interferencia) o en f y g (para el término espectador).

La factorización (4.2) permite efectuar inmediatamente las sumas en x , y x_i (SBE1). Definamos:

$$B_{x_i}^{[a,b]}(k_j) = \sum_{x_i} \int_{x_i}^{[a,b]} (k_j) W_{x_i, x_i} \quad (x_i + x + i \text{ impar}) \quad (4.14)$$

$$B_{x_i}^{[a,b]'}(k_j) = \sum_{x_i} \int_{x_i}^{[a,b]'} (k_j) W'_{x_i, x_i} \quad (x_i + x + i \text{ par}) \quad (4.15)$$

$$C_{x_i}^{[a,b]}(k_j) = \sum_{x_i} \alpha_{x_i}(k_j) W_{x_i, x_i} \quad (x_i + x + i \text{ impar}) \quad (4.16)$$

$$C_{x_i}^{[a,b]'}(k_j) = \sum_{x_i} \alpha_{x_i}(k_j) W'_{x_i, x_i} \quad (x_i + x + i \text{ par}) \quad (4.17)$$

El número de operaciones necesario para calcular estas cantidades (complejas) es $\sim N^2 \times N_F$, además son independientes de $|q|$. Esto permite reducir aún más el número de operaciones necesarias para cada $|q|$, calculando las cantidades (reales):

$$BC_{x_i j} = \text{Re} [B_{x_i} C_{x_i j}] \quad (4.18)$$

$$BC'_{x_i j} = \text{Re} [B'_{x_i} C'_{x_i j}] \quad (4.19)$$

De este modo, resta hacer para cada $|q|$ sólo $\sim N^2 \times N_F$ operaciones con números reales para calcular M :

$$M_{ij}^{[a,b]}(\mathcal{P}, k') = \frac{1}{L} u(\mathcal{P}, k_i) u(\mathcal{P}, k_j) \sum_x \Theta_x(\mathcal{P}, |k|) \left[\mathcal{B}_{x,ij}^a + |k_i||k_j| \mathcal{B}'_{x,ij} \right] \quad (4.20)$$

El tiempo de CPU necesario es de 0.5 segundos.

De una forma análoga se definirían las correspondientes matrices para el término espectador y de interferencia:

$$M_{ij}^{[a,b]}(\mathcal{P}, k') = \frac{1}{L} \mathcal{V}(\mathcal{P}, k_i) \mathcal{V}(\mathcal{P}, k_j) \sqrt{2\omega_i k_i} \sqrt{2\omega_j k_j} \sum_x \Theta_x(\mathcal{P}, |k|) \mathcal{B}^S_{x,ij} \quad (4.21)$$

donde $\omega_k = \sqrt{q^2 + k^2}$ y \mathcal{B}^S se define del mismo modo que \mathcal{B} suprimiendo los denominadores $[k^0 - \pi_\nu - \epsilon_x(k) - \Sigma_0]$

$$M_{ij}^{[a,b]}(\mathcal{P}, k') = \frac{1}{L} \mathcal{V}(\mathcal{P}, k_i) u(\mathcal{P}, k_j) \sqrt{2\omega_j k_j} \sum_x \left[\Theta'_x(\mathcal{P}, |k|) \mathcal{B}^I_{x,ij} + \Theta_x(\mathcal{P}, |k|) |k_j| \mathcal{B}^{I'}_{x,ij} \right] \quad (4.22)$$

con

$$\Theta'_x(\mathcal{P}, |k|) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \cos \varphi \Theta(\tau - \cos \varphi) = \frac{1}{4\pi^2} \begin{cases} 0 & \tau \leq -1 \\ e^{\frac{\tau-1}{2}} & -1 < \tau < 1 \\ 0 & \tau \geq 1 \end{cases} \quad (4.23)$$

$$\left(\tau = \frac{\epsilon_i - \frac{\epsilon_i^2 - k_i^2}{2m_i} - \epsilon_j}{\frac{\epsilon_i \epsilon_j}{2m_i m_j}} \right)$$

$$\mathcal{B}^I_{x,ij} = \text{Re} [\mathcal{B}^I_{x,i} C_{x,j}] \quad (4.24)$$

$$\mathcal{B}^{I'}_{x,ij} = \text{Im} [\mathcal{B}^I_{x,i} C'_{x,j}]$$

(\mathcal{B}^I se define como \mathcal{B} suprimiendo el denominador en la f)

Finalmente hay que calcular

$$(\mathcal{R} M \mathcal{R}^{-1})_{ii} = \sum_{jj} M_{jj} R_{jzi} R_{iz} \quad (4.25)$$

que en principio son N^3 operaciones (para cada $|q\rangle$), aunque este número puede reducirse sensiblemente utilizando propiedades de \mathcal{R} y M , con lo que el tiempo necesario es del orden de 0.5 segundos.

5. Dependencia en \hat{k} y z

Como ya se dijo en el capítulo IV, la dependencia en k y z es irrelevante por no ser observable, de modo que lo que realmente interesa es integrar en estas variables.

Una vez fijado k^0 , y calculadas \mathbb{D} y M , el tiempo necesario para efectuar la integral en $|q\rangle$, con un z y k_3 determinado, es de unos 20 segundos (para $N_q=40$). Pero este proceso hay que repetirlo para diferentes valores de k_3 y z . La dependencia en k_3 es, en principio, suave; sin embargo, debido a la discretización puede aparecer un ruido que obliga a tomar al menos entre 10 y 20 valores diferentes.

Muy distinta es la dependencia en z . Una posibilidad sería calcular la integral en $|q\rangle$ para una serie de valores de z . Este procedimiento, de interés a la hora de hacer comprobaciones, es inviable para el cálculo final, ya que sería necesario un conjunto de al menos 40 valores de z , lo que multiplicado por los 10 mínimos de k_3 supondrían 400 integrales en q para cada k^0 y, por tanto, unas 5 horas de CPU en cada caso. Otra posibilidad más viable sería efectuar la integral en z analí-

ticamente (en la función $f_r(k, z)$) y usar los resultados del límite homogéneo para extraer la corrección superficial. Este proceso es, sin embargo, muy sensible a los errores inherentes al cálculo numérico (también a los eventuales errores de programación!) ya que requiere restar dos cantidades muy próximas.

La solución adoptada, intermedia entre las dos anteriores, consiste en efectuar la integral en z en dos intervalos significativos. Por una parte, entre $z=0$ y $z=z_1=0.02372\text{MeV}^{-1}$ (para los parámetros del potencial que aparecen en IV.10) la función $t(k, z)$ es aproximadamente constante (con una pequeña oscilación sinusoidal (véase la figura 9 para la función densidad)), de modo que la integral en este intervalo, debe coincidir esencialmente con el resultado en el límite homogéneo. Por otra parte, el intervalo $[z_1, z_2] = [0.02372, 0.06523\text{MeV}^{-1}]$ es fundamentalmente el responsable de los efectos superficiales.

Llamemos:

$$t'(\bar{k}, z) \equiv \mathcal{N} \left(\frac{z}{\bar{k}} \right)^{1/2} \int_0^z dz' \cos(k_1(z-z')) \Gamma_{\text{in}} G(k, z, z')$$

$$\Gamma_V'(\bar{k}) \equiv \Gamma_V(\bar{k}) \quad (5.1)$$

$$\Gamma_S'(\bar{k}) \equiv \frac{1}{\epsilon_0} \left[\int_{z_1}^{z_2} dz t'(\bar{k}, z) - \epsilon_0 \Gamma_V'(\bar{k}) \right]$$

(nótese que las funciones t , r_V y r_S definidas en IV.9 no son más que las integrales entre 0 y 1 sobre $\frac{k_1}{k_0}$ de t' , r_V' y r_S' respectivamente)

$$S_1(\bar{k}) = \frac{1}{\epsilon_1} \int_{z_1}^{z_2} dz t'(\bar{k}, z) \quad (5.2)$$

$$S_1(\bar{k}) = \frac{1}{z_1 z_2} \int_{z_1}^{z_2} dt t'(k, z) \quad (5.2)$$

$s_1(k)$ puede tomarse como la mejor aproximación a la función $r'_v(k)$, mientras que para $r'_s(k)$:

$$\begin{aligned} r'_s(\bar{k}) &= \frac{z}{z_0} \left[\int_0^{z_1} dt t'(\bar{k}, z) + \int_{z_1}^{z_2} dt t'(\bar{k}, z) - \frac{z_0}{z_1} \int_0^{z_1} dt t'(\bar{k}, z) \right] \\ &= z \left[\frac{z_1 - z_0}{z_0} S_2(\bar{k}) - \left(1 - \frac{z_0}{z_1} \right) S_1(\bar{k}) \right] \end{aligned} \quad (5.4)$$

Este procedimiento, además de reducir considerablemente el error, permite, a través de la comparación de $s_1(k)$ con la función $r_v(k)$ obtenida en el límite homogéneo, controlar la precisión del cálculo.

Salvo para algunos pocos casos en los que fue necesario un número mayor, ha sido suficiente tomar 40 puntos para la integral en $|q|$. El número de valores diferentes de $\frac{k_1}{k_0}$ ha sido (dependiendo del valor de k^0) de unos 20. Se han hecho los cálculos en los casos $\Gamma_A=0$, $g'=0$ y $g'=0.55$ con la Γ_A discutida en el capítulo IV, y para cada uno de los términos (polo, espectador y de interferencia) aunque sólo para $R = 0.56F$. El tiempo total necesario para el cálculo de los $r_s^{p,s,i}(k^0)$ para cada k^0 , tras fijar g' y la forma de Γ_A , es de unas dos horas de CPU, y el número de valores de k^0 para los que se han calculado estas funciones de algo más de 20.

APENDICE G:

Listado de programas.

A continuación aparece un listado de algunos de los programas utilizados para el cálculo del espectro del positrón en presencia de la superficie nuclear. Concretamente los correspondientes al término polo (con $g' = 0.55$ y considerando la inestabilidad de la delta). Por brevedad omitimos otros programas que procesan los resultados, así como los necesarios para comprobar cada una de las rutinas, los cuales son de gran importancia ya que, con objeto de aumentar la velocidad, se han escrito algunos fragmentos de una forma muy susceptible a errores.

Los listados muestran una elección concreta de los parámetros N , l y L (ver apartado IV.9) que parece la más equilibrada teniendo en cuenta la precisión necesaria y el tiempo de ordenador requerido.

Los resultados finales que generan estos programas son las funciones $s_1(\bar{k})$ y $s_2(\bar{k})$ definidas en el apéndice F, para una serie de valores de k_3 (con un k_0 fijo).

```

C*****
C
C          CALCULO DE AUTOFUNCIONES Y AUTOENERGIAS
C
C*****
PROGRAM PGA
COMMON /CBA/C3,L
REAL IV( 51),H( 51 , 51 ),U( 51, 51 ),E0( 51),E( 51 ),A(1891)
REAL HD( 51 , 51 ),V( 51, 51 ),ED0( 51),ED( 51 )
REAL L,M,X( 51, 51),ID( 51, 51),KF
REAL*8 S,SS
DATA M,V0/939.,50./
PI=2*ASIN(1.)
R2=SQRT(2.)
N= 51
NM=(N-1)/2
KF=258.9
EF=-11.5
L=.2
DO 5 I=1,N
DO 5 J=1,N
H(I,J)=0.
5 HD(I,J)=0.
C          CALCULO DE LAS IV(I) POR INTEGRACION NUMERICA
DO 10 I=1,N
C3=PI*(I-1)
NF=MAX0((I-1)*30.,1500)
HI=1./FLOAT(NF)
S=0.
DO 9 J=1,NF.2
T=HI*J
9 S=S+4.*F(T)+2.*F(T+HI)
S=(S+F(0.)-F(1.))*HI/3.
10 IV(I)=S*(-V0)
C          CALCULO DE LOS ELEMENTOS DE MATRIZ DEL HAMILTONIANO
C          DEL NUCLEON Y DELTA EN LA BASE DE SENOS Y COSENOS
H(1,1)=IV(1)
HD(1,1)=IV(1)
E0(1)=0.
ED0(1)=0.
DO 30 I=1,NM
I2=2*I
E0(I2)=(PI*I2/L)**2/2./M
E0(I2+1)=E0(I2)
ED0(I2)=(PI*I2/L)**2/2./1232.
ED0(I2+1)=ED0(I2)
H(1,I2+1)=R2*IV(I+1)
30 HD(1,I2+1)=R2*IV(I+1)
DO 40 I=1,NM
DO 40 J=1,I
H(2*J,2*I)=IV(I-J+1)-IV(I+J+1)
HD(2*J,2*I)=IV(I-J+1)-IV(I+J+1)
H(2*J+1,2*I+1)=IV(I-J+1)+IV(I+J+1)
40 HD(2*J+1,2*I+1)=IV(I-J+1)+IV(I+J+1)

```

```

47      DO 50 I=1,N
48      DO 50 J=1,I
49      H(I,J)=H(J,I)
50      HD(I,J)=HD(J,I)
51      DO 60 I=1,N
52      H(I,I)=H(I,I)+E0(I)
53      HD(I,I)=HD(I,I)+ED0(I)
54      200 FORMAT(1I5,E20.8)
C
C          PROCESO DE DIAGONALIZACION DE H
C          (SE USAN RUTINAS DE LA BIBLIOTECA SSP)
55      CALL MSTR(H,A,N,0,1)
56      CALL SMPY(A,-1.,A,N,N,1)
57      CALL EIGEN(A,U,N,0)
58      CALL SMPY(A,-1.,A,N,N,1)
59      CALL MSTR(A,E,N,1,2)
C
C          REORDENACION DE LOS ESTADOS PARA QUE SE ALTERNEN LAS
C          FUNCIONES PARES E IMPARES
60      DO 100 I=2,N,2
61      IF (U(I,I).EQ.0.) GOTO 100
62      HOLD=E(I)
63      E(I)=E(I+1)
64      E(I+1)=HOLD
65      DO 95 J=1,N
66      HOLD=U(J,I)
67      U(J,I)=U(J,I+1)
68      95 U(J,I+1)=HOLD
69      100 CONTINUE
70      DO 80 I=1,N
71      80 WRITE (6,70) I,E(I)
72      70 FORMAT(I4,F15.8)
C
C          CALCULO DE LA FUNCION DENSIDAD Y LONGITUD EQUIVALENTE
73      DO 90 I=0,100
74      T=I*L/2./1000.
75      RHO=0.
76      XL0=0.
77      IA=1
78      88 S=U(1,IA)/R2
79      DO 89 J=1,NH
80      89 S=S+U(J*2,IA)*SIN(2*PI*J/L*T)+U(2*J+1,IA)*COS(2*PI*J/L*T)
81      RHO=RHO+S*S*2*M*(EF-E(IA))/PI*(2./L)
82      XL0=XL0+2*M*(EF-E(IA))
83      IA=IA+1
84      87 IF (E(IA).LT.EF) GOTO 88
85      WRITE(8,91) I,T,RHO
86      90 WRITE(6,91) I,I,RHO
87      91 FORMAT(I4,2F15.6)
88      XL0=XL0*3.*PI/2./KF**3
89      WRITE(6,92) XL0
90      WRITE(8,92) XL0
91      92 FORMAT('      L0 = ',F10.4)

```

```

C                                     PROCESO DE DIAGONALIZACION DE HD
92  CALL MSTR(HD,A,N,0,1)
93  CALL SMPY(A,-1.,A,N,N,1)
94  CALL EIGEN(A,V,N,0)
95  CALL SMPY(A,-1.,A,N,N,1)
96  CALL MSTR(A,ED,N,1,2)
C                                     REORDENACION DE LOS ESTADOS DE LA DELTA
97  DO 1100 I=2,N,2
98  IF (V(I,I).EQ.0.) GOTO 1100
99  WRITE(6,70) I,ED(I),I+1,ED(I+1)
100  HOLD=ED(I)
101  ED(I)=ED(I+1)
102  ED(I+1)=HOLD
103  DO 1095 J=1,N
104  HOLD=V(J,I)
105  V(J,I)=V(J,I+1)
106  1095 V(J,I+1)=HOLD
107  1100 CONTINUE
C                                     ALMACENAMIENTO EN DISCO DE LAS MATRICES U Y V
C                                     Y ENERGIAS E Y ED PARA POSTERIOR USO
C
108  WRITE (10) ((U(J,I),I=1,N),J=1,N),((V(J,I),I=1,N),J=1,N)
109  WRITE (11) (E(I),ED(I),I=1,N)
110  STOP
111  END
C                                     FUNCION POTENCIAL
1  FUNCTION F(X)
2  COMMON /CBA/C3,L
3  REAL L,LM
4  DATA AU,LM,C2/0.003040746,.05,-16.44333/
5  C1=L/2./AU
6  F=COS(C3*X)/(1+EXP(C1*X+C2))
7  RETURN
8  END

```

```

C*****
C
C          CALCULO DE LAS CANTIDADES W Y WP
C
C*****
1  PROGRAM PGD
2  COMMON /CBU/A
3  REAL U( 61, 61),T1( 61, 61),T2( 61, 61),V( 61, 61)
4  COMPLEX A( 61,2)
5  INTEGER AG
6  N= 61
7  NF=9
C
C          LECTURA DE LAS MATRICES U Y V
8  READ(10) U,V
C
C          COMIENZO DEL CALCULO DE W
9  DO 1000 AG=1,NF
10 WRITE(5,2) AG
11 DO 100 I=1,N
12   N1=I/2
13   2 FORMAT(I5)
14   DO 100 J=1,N
15   N2=J/2
16   S=0.
17   NA=N1+N2
18   NB=N1-N2
19   IF (NA) 11,11,12
20   11 S=S+U(AG,I)*XI(I,J,1)
21   GO TO 100
22   12 K=2*NA
23   IF (K.GT.60) GO TO 20
24   S=S+U(AG,K)*XI(I,K,J)+U(AG,K+1)*XI(I,K+1,J)
25   IF (IABS(NB).EQ.NA) GO TO 100
26   20 IF (NB) 15,14,15
27   14 S=S+U(AG,I)*XI(I,I,J)
28   GO TO 100
29   15 K=2*IABS(NB)
30   IF (K.GT.60) GO TO 100
31   S=S+U(AG,K)*XI(I,K,J)+U(AG,K+1)*XI(I,K+1,J)
32   100 T1(I,J)=S
33   DO 250 I=1,N
34   DO 250 J=1,N
35   S=0.
36   DO 200 K=1,N
37   200 S=S+V(I,K)*T1(K,J)
38   250 T2(I,J)=S
C
C          ALMACENAMIENTO DE W PARA LA DELTA (ALFA3=AG)
39   WRITE(12) T2
40   DO 400 I=1,N
41   DO 400 J=1,N
42   S=0.
43   DO 300 K=1,N
44   300 S=S+U(I,K)*T1(K,J)
45   400 T2(I,J)=S

```

```

C          ALMACENAMIENTO DE W PARA EL NUCLEON (ALFA3=AG)
46      WRITE(13) T2
47      1000 CONTINUE
48      2000 FORMAT(4I4,E14.6)
49      STOP
50      END

```

```

C          FUNCION AUXILIAR
1      FUNCTION XI(AL1,AL2,AL3)
2      COMMON /CBU/A
3      COMPLEX A( 61,2),S
4      INTEGER AL1,AL2,AL3,SG(2)
5      DATA SG(1),SG(2)/1,-1/
6      N= 61
7      N1=AL1/2
8      N2=AL2/2
9      N3=-AL3/2
10     S=0.
11     DO 100 I=1,2
12     DO 100 J=1,2
13     IF (N1*SG(I)+N2*SG(J).NE.N3) GO TO 100
14     S=S+A(AL1,I)*A(AL2,J)
15     100 CONTINUE
16     199 FORMAT(3I4,3F15.10)
17     XI=REAL(S*A(AL3,1)*2.)-AIMAG(S*A(AL3,1)*2.)
18     200 RETURN
19     END

```

```

C          COEFICIENTES PARA EL PASO DE LA BASE DE
C          SENOS Y COSENOS A LA DE EXPONENCIALES
1      BLOCK DATA SEU
2      COMMON /CBU/A
3      COMPLEX A( 61,2)
4      DATA A(1,1),A(1,2)/2*(.5,0.)/
5      DATA (A(I,1),I=2, 60,2)/30*(0.,-.7071068)/
6      DATA (A(I,2),I=2, 60,2)/30*(0.,.7071068)/
7      DATA (A(I,1),A(I,2),I=3, 61,2)/ 60*(.7071068,0.)/
8      END

```

```

C*****
C
C          PROGRAMA GENERADOR DEL PROPAGADOR DEL PION
C          Y MATRICES DE ROTACION
C*****
1  PROGRAM PGP1
2  COMMON /CBE/K8,EXK
3  COMMON /CBK/K,K3,Z,Q
4  COMMON /CBM/U,V,EN,ED
5  COMMON /CBR1/BC,BCP
6  COMMON /CBR2/AF,AG
7  REAL K,K3,K0,KF
8  REAL U( 61, 61),EN( 61),ED( 61),V( 61, 61)
9  REAL KB( 61),TH( 9),LA
10 REAL MAT( 61, 61),M,L,EXK( 61)
11 COMPLEX UN(9, 61),UD(9, 61),PT( 61, 61)
12 COMPLEX DINV( 61, 61),PTP( 61, 61)
13 COMPLEX AF( 61),AG( 61),BC(33489),BCP(33489)
14 COMPLEX R( 61, 61),MATD( 61),ALF,BET,GAM,MAIDO( 61),DINVO( 61)
15 COMPLEX DINVT( 1891),CIN,DINVN( 61),SP,RO( 61, 61)
16 INTEGER BE
17 LA=1.8305911E-6
18 MU=138.
19 M=939.
20 KF=268.9
21 PI=2*ASIN(1.)
22 L=.2
23 N= 61
C          LECTURA DE LOS VALORES DE LA ENERGIA DEL POSITRON (K0)
C          Y NUMERO DE PUNTOS PARA LA INTEGRACION EN EL MOMENTO
C          DEL PION (NQ)
24 READ(6,1) K0,NQ
25 1 FORMAT(F5.1,I3)
C          LECTURA DE AUTOENERGIAS Y FUNCIONES DE GND
26 READ (10) U,V
27 READ (11) (EN(I),ED(I),I=1,N)
28 KB(I)=0.
29 DO 10 I=2,N,2
30 KB(I)=I*PI/L
31 10 KB(I+1)=I*PI/L
32 DO 110 I=1,N
33 DO 100 J=1,N
34 100 R(I,J)=0.
35 110 R(I,I)=1.
36 S=0.
37 SS=0.
38 Q0=K0-(M-26.9)
39 K3=0.
40 K=K0
41 AQ=1.
42 BQ=(K+KF)
43 Z= 0.

```

```

C                                     COMIENZO DEL BUCLE PRINCIPAL
C                                     (CALCULO DE D PARA CADA Q)
44      DO 1000 IQ=0,NQ
45      Q=AQ+(BQ-AQ)*IQ/FLOAT(NQ)
46      Q2=Q*Q
47      DO 24 I=1,N
48      24 EXK(I)=EXP(-LA*(Q2+KB(I)**2))
49      CALL SBF(Q0,UN,UD)
50      CALL SBG(UN,UD,PT)
51      CALL SBH(Q0,PT,DINV)
C                                     ROTACION PREVIA DEL INVERSO DEL PROPAGADOR
52      DO 35 I=1,N
53      DO 30 J=1,N
54      SP=0.
55      DO 25 I1=2-MOD(I,2),N,2
56      25 SP=SP+R(I1,I)*DINV(I1,J)
57      30 DINVN(J)=SP
58      DO 35 J=I,N
59      SP=0.
60      DO 33 I1=2-MOD(J,2),N,2
61      33 SP=SP+DINVN(I1)*R(I1,J)
62      35 DINV(I+(J*J-J)/2)=SP
C                                     DIAGONALIZACION
63      CALL SBJ(DINVT,R,N)
64      DO 50 I=1,N
65      50 DINVN(I)=DINV(I+(I*I-I)/2)
C                                     ALMACENAMIENTO DE LA MATRIZ DE ROTACION
C                                     Y DEL PROPAGADOR DIAGONALIZADO
66      WRITE(14) R,DINVN
67      WRITE(6,300) IQ,NQ
68      300 FORMAT(2I6)
69      1000 CONTINUE
70      STOP
71      END

```

```

C*****
C
C      PROGRAMA PRINCIPAL
C      (CALCULO DE S1(K) Y S2(K))
C*****
1  PROGRAM PGP2
2  COMMON /CBE/KB,EXK
3  COMMON /CHK/K,K3,IZ,Q
4  COMMON /CRM/U,V,EN,ED
5  COMMON /CBR1/BC,BCP
6  COMMON /CBR2/AF,AG
7  REAL K,K3,K0,KF
8  REAL U( 61, 61),EN( 61),ED( 61),V( 61, 61)
9  REAL KB( 61),TH( 9),LA
10 REAL MAT( 61, 61),M,L,EXK( 61)
11 COMPLEX AF( 61),AG( 61)
12 REAL BC(33489),BCP(33489)
13 COMPLEX R( 3721),MATD( 61),ALF,BET,GAM,MATDO( 61),DINV0( 61)
14 COMPLEX CIN,DINVN( 61),JP
15 COMPLEX DS,DSP,DSS
16 INTEGER BE
17 MU=138.
18 M=939.
19 PI=2*ASIN(1.)
20 KF=268.9
21 LA=1.8305911E-6
22 L=.2
23 N= 61
24 NM=(N-1)/2
C      LECTURA DE LA ENERGIA DEL POSITRON (K0), NUMERO DE
C      VALORES DEL MOMENTO DEL POSITRON PARA LOS QUE SE HA
C      CALCULADO EL PROPAGADOR DEL PION (NQ) Y ESPACIADO
C      DE LOS VALORES DE TERCERA COMPONENTE DEL MOMENTO
C      DEL POSITRON (KD)
25 READ(6,1) K0,NQ,KD
26 1 FORMAT(F5.1,2I3)
27 WRITE (6,88) K0,NQ,0.,KD
28 WRITE (7,88) K0,NQ,0.,KD
29 88 FORMAT(F20.10,I5,F20.10,I5)
C      LECTURA DE AUTOFUNCIONES Y AUTOENERGIAS
30 READ (10) U,V
31 READ (11) (EN(I),ED(I),I=1,N)
32 CTP=2*PI/L
33 CT=CTP*CTP
34 KB(1)=0.
35 DO 11 I=1,NM
36 KB(2*I)=CTP*I
37 11 KB(2*I+1)=CTP*I
38 S=0.
39 Q0=K0-(M-26.9)

```

```

C                                     COMIENZO DEL BUCLE PARA LOS DISTINTOS
C                                     VALORES DE (K3/K0)
40 DO 2000 IN3=0,300,KD
41 N3=IN3
42 K3=N3*2.*PI/L/10.
43 IF (K0.LT.K3) GOTO 2000
C                                     COMIENZO DEL BUCLE PARA LOS DOS INTERVALOS DE Z
44 DO 2000 IZ= 0,1
45 SS=0.
46 REWIND 14
47 K=SQRT(K0**2-K3**2)
48 AQ=1.
49 BQ=(K0+KF)
50 HQ=(BQ-AQ)/FLOAT(NQ)
51 CALL SBB
52 CALL SBE1
53 S=0.
54 DO 20 I=1,N
55 20 MATD(I)=0.
56 IQ=-1
C                                     COMIENZO DEL BUCLE EN Q
57 25 IQ=IQ+1
58 X=0.
59 Q=AQ+HQ*IQ
60 Q2=Q*Q
61 DO 12 I=1,N
62 12 EXK(I)=EXP(-LA*(Q*Q+KB(1)**2))
C                                     LECTURA DE LAS MATRICES DE ROTACION E INVERSO
C                                     DEL PROPAGADOR DIAGONALIZADO
C                                     (R SE TOMA UNIDIMENSIONAL PARA AUMENTAR LA VELOCIDAD)
63 READ(14) R,DINVN
C                                     SI EL VALOR DE Q ES TAL QUE LA FUNCION THETA SE ANULA
C                                     NO SE EFECTUA EL CALCULO
C
64 IF ((Q.LT.K-KF).OR.(IQ.EQ.0)) GOTO 800
65 IF (Q.GE.(K+KF)+HQ) GOTO 1010
66 CALL SBE2(MAT)
67 DO 130 I=1,N
68 NI=N*(I-1)
69 DS=0.
70 DO 120 I1=2-MOD(I,2),N,2
71 DSP=MAT(I1,I1)*R(NI+I1)/2.
72 DSR=REAL(DSP)
73 DSI=AIMAG(DSP)
74 DO 115 I2=I1+2,N,2
75 DSS=R(NI+I2)
76 XM2=MAT(I2,I1)
77 DSR=DSR+XM2*REAL(DSS)
78 115 DSI=DSI+XM2*AIMAG(DSS)
79 120 DS=DS+R(NI+I1)*CMPLX(DSR,DSI)
80 130 MATD(I)=DS*2.*(2.*Q)

```

CALCULO DE LAS INTEGRALES EN G

```

C
81 DO 190 I=1,N
82 ALF=(DINVN(I)-DINVO(I))/(Q-Q0)
83 BET=(MATDO(I)*DINVN(I)-MATD(I)*DINVO(I))/(DINVN(I)-DINVO(I))
84 GAM=MATD(I)-MATDO(I)
85 CIN=1./ALF*(GAM+BET*CLOG(DINVN(I)/DINVO(I)))
86 190 X=X+ALMAG(CIN)*(-.5)
87 WRITE(6,300) Q,X
88 DO 900 I=1,N
89 MATDO(I)=MATD(I)
90 MATD(I)=0.
91 900 DINVO(I)=DINVN(I)
92 Q0=Q
93 S=S+X
94 1000 IF (IQ.LT.NQ) GOTO 25
95 1010 RDI=3.83733E-9*4*K0*K0*S*PI
C
96 WRITE(6,10) K,K3,Z,RDI/4./0.00593,RDI
97 WRITE(7,10) K,K3,Z,RDI/4./0.00593,RDI
98 2000 CONTINUE
99 10 FORMAT(' K=',F10.5,' K3=',F10.5,' Z=',F8.5,' RG =',F11.8
100 @,' RDI=',F13.10)
101 300 FORMAT(2F20.10)
102 STOP
END

```

```

C*****
C
C      CALCULO DE LAS FUNCIONES F Y G PARA EL TERMINO POLO      *
C
C*****
1  SUBROUTINE SBB
2  COMMON /CBK/K,K3,IZ,M
3  COMMON /CSH/U,V,EN,ED
4  COMMON /CBR2/AF,AG
5  INTEGER N,NM
6  REAL Z,K1,K2,K3,R2,X,Y,L,M,PI,LL(2)
7  REAL K,U( 61, 61),V( 61, 61),EN( 61),K0,ED( 61)
8  COMPLEX EKZ,AF( 61),AG( 61),S,IKZ( 61),SM,SP,SIM,S1P
9  PI=3.14159265
10 M=939.
11 N= 61
12 NM=(N-1)/2
13 L=.2
14 LL(1)= 0.09593*4.
15 LL(2)= 0.020755*2.
16 C=PI/L
17 R2=SQRT(2.)
18 K0=SQRT(K*K+K3*K3)
19 CT=K0-M-K*K/2./M-146.
20 EKZ=CEXP(CMPLX(0.,-K3*Z))
21 IKZ(1)=SINC(K3*L/2.)
22 DO 6 I=2,N,2
23 IKZ(I)=CMPLX(0.,-(SINC((K3+C*I)*L/2.)-SINC((K3-C*I)*L/2.))/R2)
24 6 IKZ(I+1)=CMPLX((SINC((K3+C*I)*L/2.)+SINC((K3-C*I)*L/2.))/R2,0.)
25 DO 15 I=1,N
26 S=0.
27 DO 10 J=1,N
28 10 S=S+U(I,J)*IKZ(J)
29 15 AG(I)=S/(CT-EN(I))
30 XL=LL(IZ)
31 IKZ(1)=SINC(K3*XL/2.)*XL/L*CEXP(CMPLX(0.,K3*Z))
32 DO 26 I=2,N,2
33 CP=K3+C*I
34 CM=K3-C*I
35 SP=XL/L*CEXP(CMPLX(0.,CP*Z))
36 SM=XL/L*CEXP(CMPLX(0.,CM*Z))
37 S1P=SINC(CP*XL/2.)
38 SIM=SINC(CM*XL/2.)
39 IKZ(I)=(S1P*SP-SIM*SM)/CMPLX(0.,R2)
40 26 IKZ(I+1)=(S1P*SP+SIM*SM)/R2
41 DO 35 I=1,N
42 S=0.
43 DO 30 J=1,N
44 30 S=S+U(I,J)*IKZ(J)
45 35 AF(I)=CONJG(S)/(CT-EN(I))*L
46 RETURN
47 END

```

```

C*****
C
C      CALCULO DE THETA(K,Q,ALFA)
C
C*****
1  SUBROUTINE SBC(TH)
2  COMMON /CBM/ U,V,EN,ED
3  COMMON /CBK/ K,K3,Z,Q
4  REAL K,EN( 61),ED( 61),U( 61, 61),TH(9),M
5  REAL K3,V( 61, 61)
6  DATA M,PI/939.,3.14159265/
7  DATA NF,EF/9,-11.5/
8  N= 61
9  C1=EF-(K*K+Q*Q)/2./M
10 C2=K*Q/M
11 C3=1/(2*PI)**2
12 DO 100 I=1,NF
13 TAU=(C1-EN(I))/C2
14 IF (TAU.GE.1.) GOTO 50
15 S=0.
16 IF (TAU.LE.-1.) GOTO 100
17 S=2.*C3*ACOS(-TAU)
18 GOTO 100
19 50 S=C3*2.*PI
20 100 TH(I)=S
21 RETURN
22 END

```

```

C*****
C
C          CALCULO DE LAS FUNCIONES B Y C
C
C*****
1      SUBROUTINE SBE1
2      COMMON /CBM/U,V,EN,ED
3      COMMON /CBK/K,K3,Z,Q
4      COMMON /CBR1/BC,BCP
5      COMMON /CBR2/AF,AG
6      COMMON /CBE/KB,EXK
7      REAL U( 61, 61),EN( 61),ED( 61),V( 61, 61)
8      REAL K,K3,K0,L,W( 61, 61)
9      INTEGER AL1,AL2,AL3,BE1,BE2,IP( 61)
10     COMPLEX AF( 61),AG( 61),B( 9, 61),BP( 9, 61),C( 9, 61),CP( 9, 61)
11     REAL BC(33489),BCP(33489),KB( 61),EXK( 61)
12     COMPLEX S1,S2,S3,S4
13     DATA L,PI/.2,3.14159265/
14     DATA NF/9/
15     N= 61
16     REWIND(13)
17     DO 300 AL3=1,NF
18     READ(13) W
19     DO 300 BE1=1,N
20     S1=0.
21     S2=0.
22     S3=0.
23     S4=0.
24     DO 100 AL1=1,N
25     IF (MOD(AL1+AL3+BE1,2)) 90,90,95
26     90 S2=S2+AF(AL1)*W(AL1,BE1)
27     S4=S4+AG(AL1)*W(AL1,BE1)
28     GOTO 100
29     95 S1=S1+AF(AL1)*W(AL1,BE1)
30     S3=S3+AG(AL1)*W(AL1,BE1)
31     100 CONTINUE
32     B(AL3,BE1)=S1
33     BP(AL3,BE1)=S2
34     C(AL3,BE1)=S3
35     300 CP(AL3,BE1)=S4
C
C          EL RESULTADO SE COLOCA EN UN ARREGLO UNIDIMENSIONAL
C          REAL PARA AUMENTAR LA VELOCIDAD DE LA RUTINA SBE2
36     I=0
37     DO 400 BE1=1,N
38     DO 400 BE2=1,N
39     DO 400 AL3=1,NF
40     I=I+1
41     BC(I)=REAL(B(AL3,BE1))*C(AL3,BE2)
42     400 BCP(I)=REAL(BP(AL3,BE1))*CP(AL3,BE2))*KB(BE1)*KB(BE2)
43     RETURN
44     END

```

```

C*****
C
C   CALCULO DE LA MATRIZ M
C   (USANDO LOS VECTORES BC Y BCP)
C*****
1  SUBROUTINE SBE2(MAT)
2  COMMON /CBM/U,V,EN,ED
3  COMMON /CBK/K,K3,Z,Q
4  COMMON /CBE/KB,EXK
5  COMMON /CBR1/BC,BCP
6  REAL EN( 61),ED( 61),U( 61, 61),TH(9),V( 61, 61)
7  REAL K,K3
8  REAL KB( 61),LA,MAT( 61, 61),L,EXK( 61)
9  INTEGER AL3,BE1,BE2
10 REAL BC(33489),BCP(33489)
11 DATA PI,L/3.14159265,.2/
12 DATA NF/9/
13 DATA LA/1.8305911E-6/
14 N= 61
15 NM=(N-1)/2
16 CALL SBC(TH)
17 CT=2.*PI/L
18 DO 5 I=1,N
19 DO 5 J=1,N
20 5 MAT(I,J)=0.
C
C                                     COMIENZO DEL BUCLE PRINCIPAL
21 I=0
22 DO 210 BE1=1,N
23 DO 210 BE2=1,N
24 C1=0.
25 DO 200 AL3=1,NF
26 I=I+1
27 200 C1=C1+TH(AL3)*(Q*Q*BC(I)+BCP(I))
28 210 MAT(BE1,BE2)=C1
29 DO 400 I=1,N
30 DO 400 J=1,I
31 400 MAT(I,J)=(MAT(I,J)+MAT(J,I))/2.*EXK(I)*EXK(J)/L
32 RETURN
33 END

```

```

C*****
C
C          CALCULO DE LAS FUNCIONES UN Y UD
C
C*****
1  SUBROUTINE JBF(Q0,UN,UD)
2  COMMON /CBE/KB,EXK
3  COMMON /CBM/U,V,EN,ED
4  COMMON /CBK/K,K3,Z,Q
5  COMPLEX UN(9, 61),UD(9, 61),CP,CF,CALP
6  REAL M,MD,U( 61, 61),EN( 61),ED( 61),K3,V( 61, 61)
7  REAL MU,KB( 61),EXK( 61)
8  DATA M,MD,MU/939.,1232.,138./
9  PI=2*ASIN(1.)
10 EF=-11.5
11 OD=MD-M
12 N= 61
13 NF=9
14 CT1=PI*M/Q
15 CT2=1./2./PI**2
16 DO 100 I=1,NF
17 DO 100 J=1,N
18 UN(I,J)=0.
19 UD(I,J)=0.
C
C          CALCULO DE UN
20 C=2*M*Q0
21 D=2*Q
22 DO 200 IA=1,NF
23 A=2*M*(EF-EN(IA))
24 R=SQRT(A)
25 DO 200 IB=1,N
26 B=2*M*(EN(IA)-EN(IB))-Q*Q
27 AL=(C+B)/D/R
28 F=PI*AL
29 IF (AL*AL.GT.1.) F=F-SQRT(AL*AL-1.)*SIGN(PI,AL)
31 ALP=(-C+B)/D/R
32 F=F+PI*ALP
33 IF (ALP*ALP.GT.1.) F=F-SQRT(ALP*ALP-1.)*SIGN(PI,ALP)
35 RU=4.*M*R/F/D
36 AP=2*M*(EF-EN(IB))
37 BG=(C+B)/D
38 BGP=(-C+B)/D
39 C1=A-BG*BG
40 CP1=A-BGP*BGP
41 C2=-BG*BG+AP-D*BG-Q*Q
42 CP2=-BGP*BGP+AP-D*BGP-Q*Q
43 AIU=0.
44 AIUP=0.
45 IF ((C1.GT.0.).AND.(C2.LT.0.)) AIU=2*SQRT(C1)
47 IF ((CP1.GT.0.).AND.(CP2.LT.0.)) AIUP=2*SQRT(CP1)
49 IF ((C1.GT.C2).AND.(C2.GT.0.)) AIU=2*(SQRT(C1)-SQRT(C2))
51 IF ((CP1.GT.CP2).AND.(CP2.GT.0.)) AIUP=2*(SQRT(CP1)-SQRT(CP2))
53 200 UN(IA,IB)=CT2*CMPLX(RU,-FI*M/Q*(AIUP+AIU))

```

```

54      DO 300 I=1,NF
55      DO 300 J=I,NF
56      300 UN(I,J)=UN(I,J)+UN(J,I)
C
57      C=2.*MD*(Q0-OD)
58      DO 500 IA=1,NF
59      XQ0=-Q0+.4*1.5*38.5+EN(IA)+50.
60      A=2.*M*(EF-EN(IA))
61      R=SQRT(A)
62      DO 500 IB=1,N
63      XQ=SQRT(Q*Q+268.9**2*.4+KB(IB)**2)
64      Q2=XQ*XQ
65      GDM=2.E-5
66      RS=SQRT(ABS((XQ0+M)**2-Q2))
67      P2=((RS*RS-M**2+MU*MU)/2./RS)**2-MU*MU
68      IF ((P2.LT.0).OR.(RS.LT.M+MU)) GOTO 10
69      FST=0.367
70      GDM=2./3.*FST*2.*MD/(MD+RS)*P2**1.5/MU**2*M/RS
71      10 B=2.*MD*(EN(IA)-ED(IB))-Q*Q
72      CP=2.*MD*CMPLX(-Q0-OD,GDM/2.)
73      AL=(C+B)/D/R
74      F=PI*AL
75      IF (AL*AL.GT.1.) F=F-SQRT(AL*AL-1.)*SIGN(P1,AL)
76      CALP=(CP+B)/D/R
77      CF=PI*CALP-CSQRT(1.-CALP*CALP)*CMPLX(0.,PI)
78      AIF=0.
79      IF (AL*AL.LT.1.) AIF=-PI*SQRT(1-AL*AL)
80      500 UD(IA,IB)=CT2*8.*MD*R/D*(CF+CMPLX(F,AIF))
81      600 FORMAT(2I4,4F17.8)
82      RETURN
83      END

```

CALCULO DE UD

```

C*****
C
C      CALCULO DE LA POLARIZACION
C
C*****
1  SUBROUTINE CBG(UN,UD,PT)
2  COMMON /CBE/ KB,EXK
3  COMMON /CBK/ K,K3,TS,G
4  COMMON /CBM/ U,V,EN,ED
5  INTEGER IP( 61)
6  REAL UC( 61, 61),EN( 61),ED( 61),EXK( 61),V( 61, 61)
7  REAL RN( 61),RD( 61),K3
8  REAL AN( 61),AD( 61)
9  COMPLEX UN(9, 61),UD(9, 61),PT( 61, 61)
10 COMPLEX *16 Z
11 LOGICAL LG(303)
12 REAL KB( 61),W1( 61, 61),W2( 61, 61),LAM
13 COMPLEX U1( 61, 61),U2( 61, 61),U3( 61, 61)
14 DATA PI/3.14159265/
15 N= 61
16 FPMU=5.1469E-5
17 GP=.55
18 DO 45 I=1,303
19 45 LG(I)=(MOD(I,2).EQ.1)
20 DO 50 I=1,N
21 DO 50 J=1,N
22 PT(I,J)=0.
23 U1(I,J)=0.
24 U2(I,J)=0.
25 50 U3(I,J)=0.
26 REWIND 12
27 REWIND 13
28 DO 200 IB=1,9
C
C      LECTURA DE LAS W (ALFA3=IB)
29 READ(13) W1
30 READ(12) W2
C
C      DISTRIBUCION EN ARREGLOS UNIDIMENSIONALES
C      REALES DE LAS MATRICES UN Y UD
31 DO 60 I=1,N
32 RN(I)=REAL(UN(IB,I))
33 AN(I)=AIMAG(UN(IB,I))
34 RD(I)=REAL(UD(IB,I))
35 60 AD(I)=AIMAG(UD(IB,I))
C
C      CALCULO DE LA MATRIZ OMEGA
36 DO 200 I=1,N
37 IC = IB + I
38 DO 200 J=I,N,2
39 RB=0.
40 AB=0.
41 RBP=0.
42 ABP=0.
43 IF (LG(IB+IC+1)) GOTO 80
44 LAM=W1(IB,I)+W1(IC,J)-2.

```

```

45     RB=LAM*RN(IB)
46     AB=LAM*AN(IB)
47     80 DO 100 IA=IB+1+MOD(IC+IB,2),N,2
48     LAM=W1(IA,I)*W1(IA,J)
49     RB=RB+LAM*RN(IA)
50     100 AB=AB+LAM*AN(IA)
51     DO 150 IA =1+MOD(IC,2),N,2
52     LAM=W2(IA,I)*W2(IA,J)
53     RBP=RBP+LAM*RD(IA)
54     150 ABP=ABP+LAM*AD(IA)
55     U1(I,J)=(2.*CMPLX(RB,AB)+CMPLX(RBP,ABP)*32./25.)/.2+U1(I,J)
56     200 U1(J,I)=U1(I,J)
C
C           CALCULO DE LA CORRECCION L-L
57     DO 250 I=1,N
58     U2(I,I)=1.-GP*FFMU*U1(I,I)*EXK(I)**2
59     DO 250 J=I+2,N,2
60     U2(I,J)=-GP*FFMU*U1(I,J)*EXK(I)*EXK(J)
61     250 U2(J,I)=U2(I,J)
C
C           INVERSION DE U2
C           (SBI ES UNA RUTINA DE INVERSION DE MATRICES COMPLEJAS)
62     CALL SBI(U2)
63     DO 260 I=1,N
64     DO 260 J=I,N,2
65     S=0.
66     DO 255 I1=2-MOD(I,2),N
67     255 S=S+U1(I,I1)*U2(I1,J)
68     250 U3(I,J)=S
C
C           CALCULO DE LA POLARIZACION
69     DO 300 I=1,N,2
70     300 PT(I,I)=EXK(I)*EXK(I)*Q*Q*U3(I,I)*FFMU
71     DO 350 I=2,N,2
72     DO 350 J=I,N,2
73     C1=EXK(I)*EXK(J)*FFMU
74     PT(I,J)=C1*(Q*Q*U3(I,J)+KB(I)*KB(J)*U3(I+1,J+1))
75     350 PT(I+1,J+1)=C1*(Q*Q*U3(I+1,J+1)+KB(I)*KB(J)*U3(I,J))
76     RETURN
77     END

```

```

C*****
C
C      CALCULO DEL INVERSO DEL PROPAGADOR DEL PION
C
C*****
1      SUBROUTINE SBH(Q0,PT,DINV)
2      COMMON /CBM/U,V,EN,ED
3      COMMON /CBK/K,K3,Z,Q
4      REAL U( 61, 61),EN( 61),ED( 61),K3,V( 61, 61),MU
5      COMPLEX PT( 61, 61),DINV( 61, 61)
6      MU=138.
7      N= 61
8      EPS=1.E-5
9      CT=(4*ASIN(1.)/.2)**2
10     DO 200 I=1, N
11     IN=I/2
12     DINV(I, I)=CMPLX(Q0*Q0-Q*Q-MU*MU-CT*IN*IN, EPS)-PT(I, I)
13     DO 200 J=I+1, N
14     DINV(I, J)=-PT(I, J)
15     200 DINV(J, I)=DINV(I, J)
16     RETURN
17     END

```

```

C*****
C
C      PROGRAMA PARA LA DIAGONALIZACION DEL INVERSO DEL
C      PROPAGADOR DEL PION
C      (ESTE PROGRAMA ES UNA ADAPTACION DE LA SUBROUTINA EIGEN
C      DE DIAGONALIZACION DE MATRICES REALES SIMETRICAS (YA
C      USADA EN EL PROGRAMA PGA) AL CASO DE MATRICES COMPLEJAS,
C      UTILIZANDO LA PROPIEDAD DE QUE  $DINV(I,J)=0$  SI  $I+J$  ES IMPAR
C
C*****
1  SUBROUTINE SBJ(A,R,N)
2  DIMENSION A(1891),R( 3721)
3  COMPLEX A,R
4  COMPLEX X,SINX,SINX2,COSX,COSX2,SINCS,IU
5  COMPLEX Y,ALM
6  IU=(0.,1.)
7  25 AN=0.0
8  DO 35 I=1,N
9  DO 35 J=I+2,N,2
10 30 IA=I+(J*J-J)/2
11  AN=AN+A(IA)*CONJG(A(IA))
12 35 CONTINUE
13  IF(AN) 165,165,40
14 40 AN=1.414*SQRT(AN)
15  AX=0.1
16  IND=0
17  THR=AN
18 45 THR=THR/FLOAT(N)
19 50 WRITE(6,1) THR,AX,NUM
20 1 FORMAT(2F15.7,I6)
21  L=1
22  NUM=0
23 55 M=L+2
24 60 MQ=(M*M-M)/2
25  LQ=(L*L-L)/2
26  LM=L+MQ
27 62 IF(REAL(A(LM)*CONJG(A(LM)))-THR*THR) 130,65,65
28 65 IND=1
29  NUM=NUM+1
30  LL=L+LQ
31  MM=M+MQ
32  X=0.5*(A(LL)-A(MM))
33  ALM=A(LM)
34  Y=CSQRT(CSQRT((X-ALM*IU)/(X+ALM*IU)))
35  COSX=(Y+1/Y)/2.
36  SINX=-ALM/(2.*COSX*Y*(X+ALM*IU))
37  SINX2=SINX*SINX
38  COSX2=COSX*COSX
39  SINCS =SINX*COSX
40  ILQ=N*(L-1)
41  IMQ=N*(M-1)
42  DO 125 I=2-MOD(L,2),N,2
43  IQ=(I*I-I)/2

```

```

44      IF(I-L) 80,120,80
45      80 IF(I-M) 85,120,90
46      85 IM=I+MQ
47      GO TO 95
48      90 IM=M+IQ
49      95 IF(I-L) 100,105,105
50      100 IL=I+LQ
51      GO TO 110
52      105 IL=L+IQ
53      110 X=A(IL)*COSX-A(IM)*SINX
54      A(IM)=A(IL)*SINX+A(IM)*COSX
55      A(IL)=X
56      120 ILR=ILQ+I
57      IMR=IMQ+I
58      X=R(ILR)*COSX-R(IMR)*SINX
59      R(IMR)=R(ILR)*SINX+R(IMR)*COSX
60      R(ILR)=X
61      125 CONTINUE
62      X=2.0*A(LM)*SINCS
63      Y=A(LL)*COSX2+A(MM)*SINX2-X
64      X=A(LL)*SINX2+A(MM)*COSX2+X
65      Z=(A(LL)-A(MM))*SINCS+A(LM)*(COSX2-SINX2)
66      A(LM)=Z
67      A(LL)=Y
68      A(MM)=X
69      130 IF(M+1-N) 135,140,140
70      135 M=M+2
71      GO TO 60
72      140 IF(L-(N-2)) 145,150,145
73      145 L=L+1
74      GO TO 55
75      150 IF(IND-1) 160,155,160
76      155 IND=0
77      GO TO 50
78      160 IF(THR-AX) 165,165,45
79      165 RETURN
80      END

```

CONCLUSIONES:

En el CAPITULO II se ha desarrollado un método general para el proceso inclusivo de desintegración de un nucleón en un leptón más hadrones en el interior de un núcleo infinito. Este método permite analizar el proceso en el marco de la Teoría de Muchas Partículas, lo que posibilita la utilización de las poderosas técnicas de sumación de diagramas, así como de ciertos resultados exactos. En particular, se han estudiado una familia de diagramas, presumiblemente la más importante, cuyo comportamiento está esencialmente determinado por la propagación de un pión en el núcleo, gracias a lo cual pueden considerarse un gran número de efectos, relativamente bien conocidos, con notable seguridad. Se han llevado a cabo una serie de cálculos, con variaciones de diversos parámetros, que muestran que los efectos nucleares sobre la vida media del nucleón en canales de tipo leptón más pión, pueden suponer una reducción de un 20%, aunque la predicción más importante se refiere a los productos de la desintegración. En efecto, la influencia de los nucleones vecinos, hace que productos sean muy diferentes a los correspondientes de un nucleón libre. Del total de la probabilidad de desintegración, sólo algo menos de la mitad puede interpretarse como devida a la desintegración cuasilibre en un pión y un leptón, es decir, con una dispersión causada únicamente por el movimiento de Fermi, si bien con un desplazamiento del espectro del leptón hacia la zona de pequeños momentos, por un aumento de la masa efectiva del pión. Aparece, por el contrario, una región de gran importancia (también algo menos de la mitad del total), direc-

tamente relacionada con la posibilidad de creación de pares delta-hueco (o absorción en el canal $(3,3)$), la cual da lugar a unos estados finales muy diferentes a los que corresponderían a un nucleón libre. Finalmente, un efecto muy interesante por suponer unos estados finales drásticamente diferentes a todos los anteriores, aunque con una importancia numérica limitada a sólo un 15% del total, es la absorción del pión por parte de un nucleón que abandona el núcleo, y que significaría un estado final de un leptón de unos 700MeV, y un nucleón con un momento de centenares de MeV, probablemente sin mesones.

Estos resultados, mantienen una notable estabilidad bajo el cambio de algunos parámetros, entre los que habría que destacar los que determinan la importancia relativa entre los términos polo (fusión de tres quarks) y espectador (fusión de dos quarks), en principio muy diferentes.

En el CAPITULO III el formalismo utilizado en el estudio de los efectos nucleares sobre la desintegración de nucleones en núcleos, se ha generalizado al caso de las oscilaciones neutrón-antineutrón. Las características muy peculiares de este proceso hacen que ahora, los efectos nucleares, si supongan una variación importante en la vida media (¡30 órdenes de magnitud!). Con este formalismo pueden tratarse de una forma muy eficaz los efectos nucleares sobre las oscilaciones en el límite de materia nuclear. Por desgracia, el actual conocimiento de las interacciones antinucleón-nucleón, no permite cálculos muy precisos, aunque estas técnicas posibilitan el estudio de ciertos efectos que trascienden el marco de los cálculos de otros autores y que, incluso a pesar de los problemas relacionados con la interacción $N-\bar{N}$, pueden llevarse a cabo con aceptable seguridad. En concreto,

se ha considerado un efecto muy específico de las Teorías de Muchas Partículas como es el de las correlaciones antinucleón-hueco, que supone un aumento de la probabilidad del proceso frente a la obtenida en un cálculo a base de potenciales medios de casi un 25% y, lo que es muy importante, es prácticamente independiente de la forma de los potenciales de interacción.

De cualquier modo, este método permite plantear el estudio de estos procesos de una forma compacta, a partir del cual, cálculos de otros autores pueden obtenerse como casos particulares, y abriría la posibilidad de realizar estudios más precisos, especialmente cuando las interacciones NN se conocieran mejor.

Finalmente, en el CAPITULO IV se analizan los efectos nucleares sobre la desintegración de nucleones en núcleos finitos. Los estudios realizados en el capítulo II están limitados fundamentalmente por el hecho de que en los núcleos de interés experimental, la región en la que es previsible un comportamiento de materia nuclear, es realmente muy reducida. A causa de la gran complicación y, en definitiva, inviabilidad de un estudio en los mismos términos que los del capítulo II para un núcleo finito, se ha trabajado en la aproximación de suponer una superficie plana, mediante un formalismo que permite tratar satisfactoriamente conjuntos infinitos de diagramas. Con ello, aunque el desarrollo analítico y, sobre todo, numérico es mucho más difícil, se ha conseguido trabajar con un grado de precisión comparable al correspondiente a materia nuclear.

Los resultados obtenidos muestran que los efectos de superficie son muy importantes. Para el núcleo de hierro, de gran interés experimental, las correcciones superficiales hacen que

los efectos nucleares sólo aumenten la probabilidad de desintegración en un 10% respecto al caso libre, mientras que la forma del espectro difiere sensiblemente de la obtenida en el límite de materia nuclear. La variación más importante es una fuerte disminución de la intensidad del espectro del leptón en la zona de 500MeV y, en menor medida, en la de 700MeV, frente a un notable aumento en la de 400MeV. Aún así, los efectos de absorción del pión por el núcleo, pueden ser responsables del orden de la mitad del total del espectro.

BIBLIOGRAFIA:

1. H. Georgi and S. L. Glashow, Phys. Rev. Lett. 32 438 (1974).
2. H. Georgi, H. R. Quinn, and S. Weinberg, Phys. Rev. Lett 33 451 (1974).
3. L. A. Fernández, R. P. Alvarez-Estrada, and J. L. Sánchez-Gómez, Phys. Rev. D27 2656 (1983).
4. R. P. Alvarez-Estrada, L. A. Fernández, and J. L. Sánchez-Gómez, Z. Phys. C-Particles and Fields 26 615 (1985).
5. P. Langacker, Phys. Rep. 72 185 (1981).
6. E. S. Abers and B. W. Lee, Phys. Rep. 9 1 (1973).
7. A. J. Buras, J. Ellis, M. K. Gaillard and D. V. Nanopoulos, Nucl. Phys. 3135 66 (1978).
8. C. Jarkskog and F. J. Ynduráin, Nucl. Phys. B149 29 (1979).
9. M. B. Gavela, A. le Yaouanc, L. Oliver, O. Pène, and J.-C. Raynal. Phys. Lett. 398 51 (1981).
10. M. B. Gavela, A. Le Yaouanc, L. Oliver, O. Pène, and J.-C. Raynal, Phys. Rev. D23 1580 (1981).
11. V. S. Berezinsky, B. L. Ioffe and Ya. I. Kogan. Phys. Lett. B105 33 (1981)
12. F. J. Donoghe and E. Golowich, Phys. Rev. D26 3092 (1982)
13. A. W. Thomas and B. H. J. McKellar, Nucl. Phys. B227 206 (1983).
14. N. V. Krasnikov, A. A. Pivovarov, and N. N. Tavkhelidze, Ref. TH 3422. CERN (1982).

15. S. Weinberg. Phys. Rev. Lett. 43 1566 (1979).
16. W. J. Marciano, BNL Report No. 31036 (unpublished) (1982).
17. S. K. Yun, Phys. Rev. D30 1598 (1984).
18. H. E. Haber and G. L. Kane, Phys. Rep. 117 75 (1985).
19. E. Fiorini. Journal de Physique 45 C3-151 (1984). (Proceedings of the Workshop on Reactor Based Fundamental Physics. Grenoble 1983)
20. M. Koshiya, Proceedings of the X int. Conf. on Particles and Nuclei. Heilderberg 1984.
21. E. S. Park et al. , Phys. Rev. Lett. 54 22 (1985).
22. R. F. Alvarez-Estrada and J. L. Sánchez-Gómez, Phys. Rev. D26 175 (1982).
23. J. D. Bjorken and S. D. Drell, "Relativistic Quantum Fields". (McGraw-Hill 1965).
24. W. Zimmermann, Nuovo Cimento 10 597 (1958).
25. M. A. Shifman, A. I. Vainshtein, and V. I. Zakharov, Nucl. Phys. B145 345 (1979); B147 448 (1979).
26. B. Ioffe, Nucl. Phys. B138 317 (1981).
27. J. M. F. de Labastida and P. J. Ynduráin, Phys. Rev. Lett. 47 110 (1981).
28. A. L. Fetter and J. D. Walecka, "Quantum Theory of Many-Particle Systems (McGraw-Hill 1971).
29. A. A. Abrikosov, L. P. Gor'kov and I. Ye Dzyaloshinskii, "Quantum Field Theoretical Methods in Statistical Physics" (Pergamon Press 1965)

30. C. B. Dover, M. Goldhaber, T. L. Trueman, and Ling-Lie Chau, Phys. Rev. D24 2886 (1981).
31. M. V. N. Murthy and K. V. L. Sarma, preprint 1983.
32. T. A. Gabriel, M. S. Goodman, Phys. Rev. D25 2463 (1982).
33. R. Arnowitt, A. H. Chamseddine, and Pran Nath, preprint HUTP-84/A094 NUB 2641.
34. C. B. Dover and G. E. Walker. Phys. Rep. 89 1 (1982)
35. S. Th  berge, A. W. Thomas, and G. A. Miller, Phys. Rev. D22 2838 (1980).
36. A. W. Thomas, S. Th  berge and G. A. Miller, Phys. Rev. D24 216 (1981).
37. L. R. Dodd, A. W. Thomas, and R. F. Alvarez-Estrada, Phys. Rev. D24 1961 (1981).
38. S. Th  berge and A. W. Thomas. CERN preprint TH3290 (1982).
39. J. P. Jeukenne, A. Lejeune, C. Mahaux, Phys Rep. 25 70 (1976).
40. A. E. S. Green, T. Sawada, and D. S. Saxon, "The Nuclear Independent Particle Model". (Academic Press).
41. R. C. Barrett and D. F. Jackson, "Nuclear Sizes and Structure (Clarendon Press 1977).
42. G. E. Brown and W. Weise, Phys. Rep. 27 1 (1976).
43. E. Oset and A. Palanques-Mestre, Nucl. Phys. A359 289 (1981).
44. E. Oset, Proceedings of the Fifth Topical School "Quarks, Mesons and Isobars in Nuclei", Motril 1982. (World Scientific Publishing Co.)
45. E. Oset, H. Toki, and W. Weise, Phys. Rep. 83 281 (1982).

46. K. Holinde Phys. Rep. 68 120 (1981).
47. G. E. Brown and W. Weise, Phys. Rep. 22 279 (1975).
48. M. Ericson and T. E. O. Ericson, Ann. of Phys. 36 383 (1966).
49. F. Wilczek and A. Zee, Phys. Rev. Lett. 43 1571 (1979).
50. L. N. Chang and N. P. Chang, Phys. Lett. 92B 103 (1980).
51. R. N. Mohapatra and R. E. Marshak, Phys. Rev. Lett. 44
1316 (1980).
52. R. N. Mohapatra and R. E. Marshak, Phys. Lett. 94B 184 (1980).
53. G. Puglierin, Proceedings of "EPS-International Conference
1983", Brighton.
54. M. B. Prosper. Journal de Physique 45 C3-185 (1984).
(Proceedings of the Workshop on Reactor Based Fundamental
Physics. Grenoble 1983)
55. M. Baldo-Ceolin. Journal de Physique 45 C3-173 (1984).
56. T. W. Jones et al. , Phys. Rev. Lett. 52 720 (1984).
57. K. G. Chetyrkin, M. V. Kazarnovsky, V. A. Kuzmin and M. E.
Shaposhnikov. Phys. Lett. 99B 358 (1981).
58. P. G. H. Sandars, J. Phys. G. Nucl. Phys. 6 L161 (1980).
59. W. M. Alberico, A. Bottino, and A. Molinari, Phys Lett.
114B 266 (1982).
60. C. B. Dover, A. Gal, and J. M. Richard. Phys. Rev. D27
1090 (1983).
61. A. M. Green, Proceedings of the International Summer School
on the Nucleon-Nucleon Interaction and Nuclear Many Body
Problems. Jilin University, Changchun (China) 1983. (World

Scientific Publishing Co.)

62. J. M. Richard, M. E. Sanio, Phys. Lett. 110B 349 (1982).
63. A. de Shalit and H. Feshbach, "Teoretical Nuclear Physics".
(John Wiley & Sons 1974).
64. R. Balian and C. Bloch, Ann. of Phys. 60 401 (1970).
65. S. A. Moszkowski, Phys. Rev. G2 402 (1970).
66. A. Galindo y P. Pascual, "Mecanica Cuantica". (Alhambra 1978).

