

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS



TESIS DOCTORAL

**Resolución de singularidades de variedades algebroides
sobre un cuerpo de característica cualquiera**

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR
PRESENTADA POR

María de la Concepción Romo Santos

Madrid, 2015

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE

MADRID



UNIVERSIDAD COMPLUTENSE



5324960704

T 1
UCM
1970

"RESOLUCION DE SINGULARIDADES DE VARIEDADES ALGEBROIDES
SOBRE UN CUERPO DE CARACTERISTICA CUALQUIERA"

Memoria presentada para optar
al grado de Doctor en Ciencias
Matemáticas por

María de la Concepción Romo
Santos

b 26797483

i 31799268

A mis padres

Esta memoria ha sido dirigida por D. Pedro Abellanas Cebollero, catedrático de la Facultad de Matemáticas, a quien quiero expresar mi más profundo agradecimiento por el interés con que ha seguido mi trabajo y por su entusiasta, constante y valiosa ayuda que me ha dispensado.

También quiero manifestar mi gratitud a D. José Manuel Aroca Hernandez-Ros, profesor agregado de la Facultad de Matemáticas, por su valiosa orientación y eficaz colaboración prestadas..

INDICE

Páginas

Introducción.....I

CAPITULO I

Generalidades

§ 1-1.-	Notaciones.....	1
§ 1-2.-	Teorema preparatorio de Weirsstrass- Hironaka-Aroca para series formales.....	11
§ 1-3.-	Filtraciones y graduaciones usuales de $K[[Z_1, \dots, Z_c, W_1, \dots, W_d]]$	18
§ 1-4.-	Ideales en $K[[Z_1, \dots, Z_c, W_1, \dots, W_d]]$	26

CAPITULO II

Transformaciones monoidales y cuadráticas

§ 2-1.-	Variedades algebroides intrínsecas.....	49
§ 2-2.-	Explosiones de variedades algebroides.....	53
§ 2-3.-	Propiedades de $Bl_p(\square)$	57
§ 2-4.-	Transformado monoidal de una variedad algebroide.....	72
§ 2-5.-	Transformados monoidales formales.....	80
§ 2-6.-	Ecuaciones del transformado cuadrático.....	81
§ 2-7.-	Ecuaciones del transformado monoidal.....	90
§ 2-8.-	Transformaciones admisibles.....	97

CAPITULO III

Hipersuperficies algebroides

§ 3-1.-	Generalidades sobre hipersuperficies.....	100
§ 3-2.-	Efecto de las transformaciones cuadrá- ticas formales sobre la multiplicidad. (Caso en que la multiplicidad no es múltiplo de la característica del cuerpo).....	112

§ 3-3.- Efecto de las transformaciones cuadráticas formales sobre la multiplicidad. (Caso en que la multiplicidad es múltiplo de la característica del cuerpo).....122

CAPITULO IV

Variedades algebroides

§ 4-1.- Función de Hilbert-Samuel.....138
 § 4-2.- Contacto maximal. (Caso hipersuperficies)...144
 § 4-3.- Existencia del contacto maximal en variedades algebroides.....168

INTRODUCCION

El problema de resolución de singularidades planteado en el lenguaje actual consiste en demostrar, o probar la falsedad, del resultado siguiente:

Teorema 1.- Para toda variedad algebraica X sobre un cuerpo algebraicamente cerrado K , existe un morfismo $\pi : Y \dots \rightarrow X$ tal que:

- i) Y es no singular
- ii) π es propio
- iii) $\pi \Big|_{\pi^{-1}(U)} : \pi^{-1}(U) \rightarrow U$ es un isomorfismo para un cierto abierto U denso en X .

Una variante del problema de resolución consiste en considerar la variedad algebraica X sumergida en una variedad no singular Z y demostrar el teorema siguiente:

Teorema 2 .- (Resolución sumergida). Sea X una subvariedad algebraica de una variedad no singular Z definidas ambas sobre un cuerpo algebraicamente cerrado K . Existe un morfismo $\pi : Z' \dots \rightarrow Z$ tal que:

- i) Z' es no singular
- ii) π es propio
- iii) $\pi \Big|_{\pi^{-1}(Z-X)} : \pi^{-1}(Z-X) \rightarrow Z-X$ es un isomorfismo
- iv) Las singularidades de $\pi^{-1}(X)$ son cruzamientos normales

El primer intento de resolución del problema en el caso general es de Jung y en lenguaje moderno es el siguiente:

Teorema 3.- Teorema de resolución local.- Sea X una variedad algebraica sobre un cuerpo algebraicamente cerrado K . Existe una familia de aplicaciones $\{ f_x : Y_x \dots \rightarrow U_x \}_{x \in X}$

tal que:

- i) Y_x es liso, f_x es propio y f_x induce un isomorfismo sobre algún abierto de U_x
- ii) U_x es un entorno abierto de x en X
- iii) $f_x \Big|_{Y_x - f_x^{-1}(x)} : Y_x - f_x^{-1}(x) \rightarrow U_x - \{x\}$ es la normalización de $U_x - \{x\}$

iv) $\forall x \in X-S$ con $\dim S=0$, f_x es la normalización de U_x .

Walker [45], basándose en éste resultado llega fácilmente a un teorema de resolución de singularidades de superficies complejas sin más que suponer $\{U_x \cap S = x, \forall x \in S\}$, cubrir x por la familia $\{U_x\}_{x \in S} \cup (X-S)$ y pegar, vía la unicidad de la normalización, todas las resoluciones locales. La idea de pegar resoluciones locales es la base del trabajo general de Hironaka para espacios analíticos.

La otra vía de aproximación del problema fue la seguida por Zariski [48], [49], [50], que resuelve las singularidades de variedades algebraicas tridimensionales por medio de explosiones centradas en curvas o puntos singulares que en cada etapa sean los de máxima multiplicidad, su herramienta fundamental es el teorema de uniformización local descrito en [47]. Todos los trabajos de Zariski son siempre sobre un cuerpo K , algebraicamente cerrado y de característica cero.

El avance siguiente al resultado de Zariski es el trabajo de Hironaka [18]. En éste trabajo, Hironaka, prueba el teorema general 1 sobre un cuerpo K de característica cero. Sus métodos de trabajo son los de Zariski, su idea la de Jung y su herramienta fundamental la teoría de esquemas elaborada por Grothendieck.

En el proceso de resolución de singularidades de Hironaka, hay que separar dos ideas distintas:

- 1) Proceso de resolución local
- 2) Proceso de inducción y globalización

El proceso local de Hironaka se basa en un estudio detallado del comportamiento de las bases de ideales por explosiones y la posibilidad de encontrar una base, base standard normalizada, con una cierta estabilidad respecto a dichas explosiones. A la vez se desarrolla un método de control del estado de la singularidad compuesto por dos series de funciones, la función de Hilbert-Samuel y los caracteres \check{v}^* . La base del proceso de resolución local es el teorema siguiente:

Teorema 4.- Teorema de estabilidad de Hironaka.- Sea X una variedad algebraica sobre un cuerpo de característica cero, sea Y una subvariedad regular y cerrada de X y $x \in X$. Localicemos la situación en torno a x y llamemos \underline{m} al ideal maximal

de $\Theta_{X,x}$ y \mathfrak{p} al ideal de Y en $\Theta_{X,x}$. Si consideramos el ideal I de X , y para cada $n \geq 0$ tomamos los elementos homogéneos de grado n de I , podemos definir una familia de conos $C_{X,x}(n)$ en x , y para cada uno de estos conos podemos construir su directriz $T_{X,x}(n)$ (máximo subespacio del cono respecto al cual éste es invariante por traslación). Por otra parte diremos que la explosión de X con centro Y en x es admisible si X es normalmente plano a lo largo de Y en x , entonces se verifica que:

i) Existe un sistema regular de parámetros Z_1, \dots, Z_m de \underline{m} tal que $\forall n \geq 1, Z_1, \dots, Z_{r(n)} [r(n) = \dim \Theta_{X,x} - \dim T_{X,x}(n)]$ inducen una base de $T_{X,x}(n)$.

ii) Y es un centro de explosión admisible para X en x si y solo si existe una base f_1, \dots, f_m de I (ideal de X en x) tal que:

$$\nu_x(f_i) = \nu_{\mathfrak{p}}(f_i) \quad (\nu_x = \text{orden respecto a } \underline{m}, \nu_{\mathfrak{p}} = \text{orden respecto a } \mathfrak{p})$$

iii) Si $\pi: X' \dashrightarrow X$ es la explosión de X con centro Y , si es admisible y si x' es un punto cerrado de $\pi^{-1}(x)$ tal que $H_{X,x} = H_{X',x'}$ (función de Samuel). entonces las transformadas $\{z'_1, \dots, z'_{r(1)}\} \{f'_1, \dots, f'_m\}$ de $\{z_1, \dots, z_{r(1)}\}$ y f_1, \dots, f_m respectivamente cumplen las condiciones i) ii) en X' respecto de x' .

Este teorema es básico para resolver el problema planteado en los puntos infinitamente próximos, es decir, en los que se estabiliza la función de Hilbert-Samuel. En el caso de ser X analítico, el obtener este teorema es la finalidad de la teoría del contacto maximal y este teorema es precisamente el punto en que falla el traslado del proceso de Hironaka a la característica positiva, y es el que superamos en este trabajo.

La segunda parte del proceso de Hironaka es un razonamiento inductivo (sobre las dimensiones de X y el espacio ambiente) completado con un proceso simultaneo de globalización de los resultados.

El trabajo de Hironaka completa entonces el problema en el caso de ser X una variedad algebraica sobre un cuerpo de característica cero, no obstante los resultados obtenidos por él en el campo del álgebra local han dado lugar a numerosos problemas y resultados (Bennett [8], Giraud [11])

Sobrevive aún el problema de desingularización en los casos en que X no es una variedad algebraica sobre un cuerpo de característica cero, veremos brevemente qué hay hecho por el momento según las distintas posibilidades:

X variedad algebraica sobre un cuerpo de característica positiva

Hay multitud de resultados parciales entre los que destacaremos los siguientes:

1) Caso de dim $X=1$.- El problema está totalmente resuelto por multitud de matemáticos clásicos como Noether y Walker.

2) Caso de dim $X=2$.- Abhyankar en su tesis de Harvard de 1954 demuestra el teorema de resolución sumergida. Posteriormente Artin en 1963 modifica y completa la demostración de Albanese para dim $X=2$ (no publicado) y Abhyankar independientemente llega al mismo resultado en el mismo año (no publicado). Lo que sí ha publicado Abhyankar [1] es el teorema de resolución en el caso de ser dim $X=2$ y X un K -esquema siendo K un dominio de integridad excelente con cuerpo de fracciones perfecto.

En éste mismo caso Hironaka (curso en el Bowdoin College 1967) aplicando métodos derivados de una generalización del polígono de Newton [19], encuentra también una demostración que debido a la existencia de pasos incompletos tampoco ha sido publicada.

Caso de dim $X=3$.- El resultado más importante es el de Abhyankar [2] que prueba el teorema de resolución para X variedad algebraica de dimensión 3 sobre un cuerpo de característica distinta de 2, 3 y 5.

4) Caso general.- Se han conseguido algunos resultados parciales entre los que destacaremos los siguientes:

a) Trabajo de Ekloff.- Ekloff [12] utilizando los teoremas de Hironaka y las técnicas de ultraproductos consigue demostrar un teorema que permite resolver las singularidades de las variedades algebraicas sobre cuerpos de característica prima. La resolución es para todos los primos excepto un número finito que depende de ciertos parámetros numéricos de las variedades.

El teorema fundamental de Hironaka en el que se basa Ekloff está demostrado para esquemas algebraicos reducidos e irreducibles pero Ekloff ha creído más conveniente considerar tales esquemas como variedades abstractas en el sentido de Weil, es decir como una colección $[V_j; \Phi_{jk}]$ ($j, k \in J$) de variedades afines V_j y un conjunto consistente de morfismos coherentes birracionales $\Phi_{jk}: V_j \rightarrow V_k$

El teorema demostrado por Ekloff es el siguiente:

Teorema 5.- Teorema de resolución de singularidades en característica p para casi todo p

Para todo entero positivo M , existe un conjunto finito de números primos $P_0(M)$ y un par de enteros positivos t', M' tal que si X es una K -variedad abstracta sumergida que satisface:

- 1) La característica de K no pertenece a $P_0(M)$
- 2) X es de tipo acotado M

Entonces existe una sucesión finita de transformaciones monoidales de K -variedades $\pi_l: X_{l+1} \rightarrow X_l$, $0 \leq l < t$, tal que $t \leq t'$, $X_0 = X$, X_t es no singular y para todo $l \leq t$ se verifica que X_l es de tipo acotado M' .

Para poder demostrar éste teorema basandose en el de Hironaka de característica cero, Ekloff usa las dos propiedades siguientes de ultraproductos:

Propiedad 1.- Sea $P = \{ p \mid p \text{ es número primo} \}$, K_p un cuerpo de característica p para cada primo p y D un ultrafiltro no principal en el conjunto de todos los primos. Entonces el ultraproducto de los K_p con respecto al ultrafiltro D es un cuerpo de característica 0.

Propiedad 2.- El ultraproducto de los transformados monoidales de varias variedades algebraicas coincide con el transformado monoidal del ultraproducto de dichas variedades.

b) Trabajos de Hironaka.- Hironaka en su artículo [18] se ocupa del estudio de una generalización de la directriz de un cono, de importancia esencial para la teoría de bases standard normalizadas (contacto maximal) en característica positiva. Dicho trabajo ha sido completado despues por los de T. Oda [36] y H. Mizutani [32] que han clasificado los grupos de Hironaka proporcionando una base a J. Giraud para su teoría del contacto maximal en característica positiva.

c) Trabajos de Giraud.- Giraud es el encargado en 1.966 del comentario para el Seminario Bourbaki del trabajo de Hironaka sobre resolución de singularidades. A partir de éste momento se lanza al estudio del caso de característica positiva, su trabajo en este campo está contenido en los artículos [14], [15], [16].

En ellos llega a establecer una teoría del contacto maximal en el caso de característica positiva pero con una dificultad esencial, en el caso de característica 0 el contacto maximal se obtiene vía una variedad lisa (regular) mientras que en característica positiva resulta vía un recubrimiento ramificado y subsiste el problema de trasladar el índice de ramificación por el proceso inductivo de resolución de singularidades.

Giraud en [16] introduce el concepto de "probabilidad de simplificación". Se dirá que $D = (Z, f_1, \dots, f_m, n(1), \dots, n(m))$ es una probabilidad de simplificación cuando Z sea un esquema noetheriano regular, los f_i ideales inversibles de \mathcal{O}_Z y los $n(i)$ enteros.

Un centro de explosión admisible es un subesquema cerrado regular Y de Z tal que, para todo $y \in Y$, $f_i \mathcal{O}_{Z,y} \subset P^{n(i)}$ siendo P el ideal de Y en el anillo local $\mathcal{O}_{Z,y}$.

Un punto x de Z es singular si $f_i \mathcal{O}_{Z,x} \subset \mathfrak{m}_{Z,x}^{n(i)}$. La transformación de D por explosión de centro admisible Y es:

$D^0 = (Z^0, f_1^0, \dots, f_m^0, n(1), \dots, n(m))$ donde Z^0 es el estallado de Z de centro Y , f_i^0 es igual a $f_i / (P \mathcal{O}_{Z^0})^{n(i)}$ siendo P el haz de ideales de Y en Z .

Resolver D respecto a un punto singular x de Z es encontrar una sucesión de explosiones admisibles $Z \leftarrow Z^0 \leftarrow Z^1 \leftarrow \dots \leftarrow Z^n$ tal que ningún punto de Z^n que se proyecte sobre x sea singular para D^m .

Para resolver D , Giraud introduce el concepto de presentación de un anillo local.

Resolución de singularidades en el caso algebroides.

En este caso el problema de resolución de singularidades, se puede enfocar de la manera siguiente:

Sea X una variedad algebroides, entonces resolver las singularidades de X será lo mismo que conseguir que disminuya su función de Hilbert-Samuel.

El objetivo de esta memoria será el estudio de este problema.

Diremos que X es una variedad algebroides cuando $X = \text{Spec} (K [[Z_1, \dots, Z_c, W_1, \dots, W_d]] / I)$ con I radical y K un cuerpo algebraicamente cerrado de característica cualquiera.

El resultado del trabajo ha sido la demostración del siguiente teorema:

Teorema 6.- Sea X una variedad algebroides. Existe un número finito de transformaciones monoidales $\pi^{(i)}: X^{(i)} \dots \rightarrow X^{(i-1)}$, con $X^{(0)} = X$, $0 < i \leq p$ tal que

$$H_{X^{(p)}} < H_X$$

donde H_X es la función de Hilbert-Samuel de X .

Previamente se demuestran los dos resultados siguientes básicos para la demostración del teorema.

Teorema 7.- Si X es una variedad algebroides, el ideal de X posee una base standard normalizada.

Teorema 8.- Si H es una hipersuperficie algebroides. Existe un número finito de transformaciones cuadráticas

$\pi^{(i)}: H^{(i)} \dots \rightarrow H^{(i-1)}$ con $H^{(0)} = H$, $0 < i \leq p$ tal que

$$\nu_{\mathcal{O}}(H^{(p)}) < \nu_{\mathcal{O}}(H)$$

siendo $\nu_{\mathcal{O}}(H)$ la multiplicidad de H .

La memoria consta de cuatro capítulos. El objeto del primer capítulo es el describir las propiedades del anillo $K [[Z_1, \dots, Z_c, W_1, \dots, W_d]]$, $c+d=n$, anillo de series de potencias formales en n indeterminadas sobre un cuerpo K algebraicamente cerrado y de característica arbitraria. Dicho capítulo se encuentra dividido en cuatro secciones.

La sección 1-1 está dedicada a introducir las notaciones que se utilizarán en el resto de la memoria.

En la sección 1-2 se demuestra el teorema preparatorio de Weiersstrass-Hironaka-Aroca, de interés esencial a la hora de elegir bases estables respecto de explosiones.

En la sección 1-3 se detallan las contrucciones de las filtraciones y graduaciones pesadas de $K[[Z_1, \dots, Z_c, W_1, \dots, W_d]] = K[[Z, W]]$, estudiandose como caso particular las filtraciones P-ádicas, para P ideal generado por una parte (Y_1, \dots, Y_r) de un sistema de parámetros de $K[[Z, W]]$. Por último en esta sección se detalla el polígono de Newton de una hipersuperficie algebroide. Sea $f \in K[[Z, W]]$ podemos escribir:

$$f = \sum_{A \in \mathbb{Z}_0^c} f_A \tilde{Z}^A = \sum_{A \in \mathbb{Z}_0^c, B \in \mathbb{Z}_0^d} f_{AB} \tilde{Z}^A \tilde{W}^B$$

donde $f_A \in K[[W]]$, $f_{AB} \in K$ y donde, como es usual, \mathbb{Z}_0 designa el conjunto de los enteros no negativos.

Escribiremos

$$\Sigma_{\tilde{Z}, \tilde{W}}(f) = \{ (A, B) \in \mathbb{Z}_0^c \times \mathbb{Z}_0^d = \mathbb{Z}_0^{c+d} \mid f_{AB} \neq 0 \}$$

Representaremos $\Sigma_{\tilde{Z}, \tilde{W}}(f)$ en \mathbb{R}^2 , asignando a cada $(A, B) \in \Sigma_{\tilde{Z}, \tilde{W}}(f)$ el punto $(|B|, |A|) \in \mathbb{R}^2$. Al cierre convexo de $\Sigma_{\tilde{Z}, \tilde{W}}(f)$ se le llama clasicamente polígono de Newton de f respecto del sistema de parámetros (\tilde{Z}, \tilde{W}) . En la sección 1-3 se formaliza el concepto de diagrama de Newton y se establece una notación que se utiliza esencialmente en el capítulo III. La formalización del concepto de diagrama de Newton sigue el proceso de Hirónaka [19], en un caso mucho más simple porque no nos preocupan las posibles direcciones sino solamente los bloques $(\tilde{Z}), (\tilde{W})$.

También prepararemos la forma f de manera que en el diagrama de Newton de f exista siempre un punto en el eje de ordenadas. Para ello demostramos la siguiente proposición

Proposición 9.- Podemos conseguir un cambio de coordenadas del tipo

$$W'_i = W_i + \lambda_{1i} Z_1 + \dots + \lambda_{ci} Z_c, \quad i = 1 \dots d, \quad \lambda_{ri} \in K$$
$$Z'_j = Z_j, \quad j = 1 \dots c$$

de modo que $\text{in}_0(f) \notin (\bar{w}'_1, \dots, \bar{w}'_d)K[\bar{z}', \bar{w}']$

En la sección 1-4 se caracterizan las variedades algebroides. Los resultados esenciales son:

- a) Caracterización de las variedades algebroides regulares
- b) Caracterización de la transversalidad
- c) Platitud normal de una variedad a lo largo de una subvariedad
- d) Existencia de las bases standard normalizadas para ideales de $K[[\bar{z}, \bar{w}]]$

Teorema 10.- Teorema de existencia de las bases standard normalizadas

Sea $V = V(I)$ una variedad algebroides, W la variedad algebroides regular, $W = \text{Spec}(R/(z_1, \dots, z_c)_R)$ y Γ una variedad contenida en la intersección de V y W . Supongamos que V es normalmente plana a lo largo de Γ y que W es transversal a V . Entonces existe una base $\{f_1, \dots, f_p\}$ del ideal I tal que

i) Las formas iniciales $(\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_p)$ forman una base minimal del ideal $\text{in}_M(I)$ del cono tangente a V .

ii) $\nu_0(f_i) \leq \nu_0(f_{i+1}) \quad 1 \leq i \leq p$

iii) $\nu_\Gamma(f_i) = \nu_0(f_i)$, $1 \leq i \leq p$, siendo $\nu_\Gamma(f_i)$ el orden de f_i en la filtración de R determinada por el ideal que define la variedad Γ .

iv) $\bar{f}_i \notin (\bar{w})K[\bar{z}, \bar{w}]$ es decir W es transversal a cada hipersuperficie $S_i = \text{Spec}(R/(f_i)_R)$.

v) Para cada $i = 1, \dots, p$, f_i está normalizada por $(f_1, \dots, \dots, f_{i-1})$ con respecto a las variables \bar{z}, \bar{w} . (Se supone que f_1 está normalizada por la familia vacía).

En la demostración del teorema juega un papel preponderante el teorema preparatorio de Weierstrass-Hironaka-Aroca demostrado en la sección 1-2.

El objetivo esencial del capítulo II es el describir las explosiones (blowing-ups) de ideales de funciones algebroides en n indeterminadas con coeficientes en un cuerpo algebraicamente cerrado. El capítulo se divide en ocho secciones.

La sección 2-1 está dedicada a caracterizar el anillo de coordenadas de una variedad algebroide. Llamaremos variedad algebroide intrínseca o simplemente variedad algebroide a $\text{Spec}(\square)$ siendo \square un anillo local noetheriano, completo, equicaracterístico y reducido, de dimensión de inmersión finita y cuerpo de coeficientes algebraicamente cerrado. Aplicando el teorema de estructura de los anillos locales completos se demuestra que ésta definición coincide con la definición de variedad algebroide sumergida del capítulo I.

En las secciones 2-2 y 2-3 se definen y caracterizan las transformaciones monoidales y cuadráticas de variedades algebroides.

Sean \square el anillo de coordenadas de una variedad algebroide, P un ideal primo de \square y $\text{Bl}_P(\square) = \text{Proj}(\bigoplus_{n \geq 0} P^n)$.

Demostramos que $\text{Bl}_P(\square)$ es un $\text{Spec}(\square)$ -esquema proyectivo de tipo finito, para ello construimos mediante un proceso de recollement al estilo de Grothendieck [17], la proyección $\pi: \text{Bl}_P(\square) \dashrightarrow \text{Spec}(\square)$. Al morfismo π le llamamos explosión global de \square con centro P . Si P es un ideal primo de \square diremos que π es una transformación monoidal de \square con centro P y si $P=M$ a la transformación π la llamaremos transformación cuadrática.

Sean f_1, \dots, f_r un sistema de generadores de P , $\bar{f}_i = \text{in}_{MP}(f_i)$, $i=1 \dots r$ y N el anillo graduado $K[\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_r]$ supuestos los \bar{f}_i de grado 1, entonces la fibra de π en M es

$$\pi^{-1}(M) \approx \text{Proj}(\bigoplus_{n \geq 0} P^n / MP^n) \approx \text{Proj}(N)$$

Se llama divisor excepcional de una transformación cuadrática o monoidal π al esquema proyectivo $\pi^{-1}(M)$.

Se verifica que el conjunto de puntos cerrados de $\bar{\pi}^{-1}(M)$ está en correspondencia biunívoca con las direcciones $(\alpha_1, \dots, \alpha_r), \alpha_i \in K$.

La sección 2-4 está dedicada al estudio de los transformados monoidales del anillo de coordenadas de una variedad algebroide. En ésta sección también se define y caracteriza el transformado estricto de un ideal de \square .

Demostramos que si \square' es un transformado monoidal de una variedad algebroide \square , entonces \square' es equicaracterístico y reducido pero en general no es completo. Debido a ello definimos los transformados formales en la sección 2-5.

Definición 11.- Sea \square el anillo de una variedad algebroide,

\square' un transformado monoidal de \square con centro P. Llamaremos transformado monoidal formal de \square con centro P a $\hat{\square}'$ completación de \square' respecto de la topología M'-ádica, con M' ideal maximal de \square' . En el caso de que P=M diremos que $\hat{\square}'$ es un transformado cuadrático formal de \square .

Así de ésta manera $\hat{\square}'$ será el anillo de coordenadas de una variedad algebroide.

Los objetivos principales de las secciones 2-6 y 2-7 son:

- a) Cálculo de las ecuaciones de un transformado monoidal (respectivamente cuadrático) formal de una variedad algebroide.
- b) Demostración de la equivalencia entre los transformados monoidales (respectivamente cuadráticos) formales intrínsecos y los transformados por ecuaciones.

En la sección 2-6 construimos el transformado cuadrático de una variedad algebroide. Para ello demostramos la siguiente proposición:

Proposición 12.- Sea J un ideal radical de $\bar{\square} = K[[X_1, \dots, X_n]]$,

J' su transformado estricto en $\bar{\square}'$. Consideremos una base standard normalizada del ideal J formada por los elementos f_1, \dots, f_s , ésta base verificará, entre otras propiedades,

que $Gr_{\bar{M}}(J, \bar{\square}) = (In_{\bar{M}}(f_1), \dots, In_{\bar{M}}(f_s))Gr_{\bar{M}}(\bar{\square})$, con \bar{M} ideal

maximal de $\bar{\square}$. Sea $v_i = v_{\bar{M}}(f_i)$.

En estas condiciones tendremos que:

$$J' = (f'_1 = f_1 / x_i^{u_1}, \dots, f'_s = f_s / x_i^{u_s}) \bar{\square}'$$

Esta proposición justifica la importancia de las bases standard normalizadas cuya existencia demostramos en el capítulo I.

Siguiendo un proceso análogo construimos también el transformado monoidal de una variedad algebroide.

En el capítulo III desingularizamos mediante transformaciones cuadráticas formales una hipersuperficie algebroide de K^n . Entendemos por desingularización en el caso algebroide el proceso siguiente:

Si H es una hipersuperficie algebroide de ecuación $f(Z, W_1, \dots, W_{n-1}) = 0$ con $v_M(f) = v$. Probamos que mediante un número finito de transformaciones cuadráticas formales se llega a una hipersuperficie algebroide $H^{(n)}$ de K^n de ecuación $f^{(n)} = 0$ y $v_M(f^{(n)}) < v$.

Sea $H = \text{Spec}(\square)$ una hipersuperficie algebroide,
$$\square = K[[Z, W_1, \dots, W_{n-1}]] / f(Z, W_1, \dots, W_{n-1}) K[[Z, W_1, \dots, W_{n-1}]]$$

El teorema preparatorio de Weierstrass permite escribir la ecuación de la hipersuperficie H en la forma

$$f(Z, W_1, \dots, W_{n-1}) = Z^v + \varphi_1(W_1, \dots, W_{n-1}) Z^{v-1} + \dots + \varphi_{v-1}(W_1, \dots, W_{n-1}) Z + \varphi_v(W_1, \dots, W_{n-1}) = 0$$

$\varphi_i(W_1, \dots, W_{n-1}) \in K[[W_1, \dots, W_{n-1}]]$, $v_0(\varphi_i) \geq i$.

Si la característica del cuerpo K no divide a v siendo v la multiplicidad de la hipersuperficie entonces con la transformación

$$Z = Z' + (\varphi_1(W_1, \dots, W_{n-1}) / v)$$

se puede considerar que la ecuación de la hipersuperficie es de la forma

$$f(Z', W_1, \dots, W_{n-1}) = Z'^v + \varphi'_2(W_1, \dots, W_{n-1}) Z'^{v-2} + \dots + \varphi'_{v-1}(W_1, \dots, W_{n-1}) Z' + \varphi'_v(W_1, \dots, W_{n-1}) = 0$$

Así en el estudio que hacemos de hipersuperficies distinguiremos dos casos:

1^{er} caso.- La característica del cuerpo K no es divisor de la multiplicidad de la hipersuperficie.

2^o caso.- La característica del cuerpo K es divisor de la multiplicidad de la hipersuperficie.

En el primer caso podemos suponer que en la ecuación de H no existe término en Z^{v-1} .

En la sección 3-1 estudiamos con todo detalle el diagrama de Newton de una hipersuperficie siendo nuestro primer objetivo el estudio de la variación de dicho diagrama mediante una transformación cuadrática formal.

En la sección 3-2 se demuestran los dos teoremas de desingularización en el caso en que la multiplicidad de la hipersuperficie H no es múltiplo de la característica del cuerpo K .

Teorema 13.- Sea $f(Z, W_1, \dots, W_{n-1}) = 0$ la ecuación de la hipersuperficie H cuya forma inicial $f_v(Z, W_1, \dots, W_{n-1})$ no es la potencia v -ésima de una forma lineal. Se verifica entonces que la multiplicidad de H decrece mediante una transformación cuadrática.

Teorema 14.- Sea $f(Z, W_1, \dots, W_{n-1}) = 0$ la ecuación de la hipersuperficie H cuya forma inicial $f_v(Z, W_1, \dots, W_{n-1})$ sea la potencia v -ésima de una forma lineal. Se verifica entonces que la multiplicidad de la hipersuperficie H decrece en un número finito de transformaciones cuadráticas.

Para la demostración del teorema 14 utilizamos el diagrama de Newton de H referido al sistema de coordenadas (Z, W_1, \dots, W_{n-1}) , comprobando previamente que se puede conseguir mediante un cambio de variables el que en el diagrama de Newton de la hipersuperficie exista un punto situado en el eje x .

En la sección 3-3 se demuestran los dos teoremas de desingularización anteriores en el caso en que la multiplicidad de la hipersuperficie H es múltiplo de la característica del cuerpo K .

Luego en éste caso también demostramos que la multiplicidad de la hipersuperficie de ecuación $f(Z, W_1, \dots, W_{n-1})$ decrece mediante una transformación cuadrática cuando la forma inicial $f_v(Z, W_1, \dots, W_{n-1})$ no es la potencia v -ésima de una forma lineal y mediante un número finito de transformaciones cuadráticas cuando si lo es. Hacemos la demostración primero en el caso de que $v = p^m$, $m \geq 1$ y segundo cuando $v = l \cdot p^m$, $m \geq 1$ siendo p la característica del cuerpo.

El capítulo cuarto está dedicado a la resolución de singularidades de las variedades algebroides en general, vía contacto maximal.

Sea X una variedad algebroides de anillo de coordenadas \square . Utilizaremos entonces la siguiente notación

$$H_X = H_{\square}$$

siendo H_{\square} la función de Hilbert-Samuel del anillo local \square .

La sección 4-1 está dedicada a demostrar el teorema de Bennett, que establece el comportamiento de la función de Hilbert-Samuel vía explosiones.

Hemos visto que en la resolución de singularidades de hipersuperficies, la multiplicidad juega un papel esencial ya que mejorar la singularidad consiste en bajar la multiplicidad de la hipersuperficie después de varias transformaciones monoidales o cuadráticas. Hemos definido la función de Hilbert-Samuel que jugará en el caso general el mismo papel de la multiplicidad.

Si X es una variedad algebroides de dimensión d , se demuestra fácilmente que

$$H_X(n) \geq \binom{n+d-1}{d-1}$$

$$\text{y } H_X(n) = \binom{n+d-1}{d-1} \forall n \iff X \text{ es regular}$$

Luego nuestro problema queda reducido a conseguir bajar el valor de H_X mediante transformaciones monoidales o cuadráticas. En virtud del teorema de Bennett sabemos que H_X no crece mediante una transformación monoidal de centro Y , con X normalmente plana a lo largo de Y .

El problema se presenta cuando H_X se mantenga constante, para resolverlo introduciremos el contacto maximal, pues sabemos que si X posee contacto maximal, la función de Hilbert-Samuel baja en un número finito de transformaciones monoidales.

En la sección 4-2 se define el contacto maximal para variedades algebroides en general y se caracteriza para el caso de hipersuperficies.

Consideramos K un cuerpo algebraicamente cerrado de característica p y H una hipersuperficie algebroides sumergida en K^n de multiplicidad v , con $v = p^m$, $m \geq 1$. En estas condiciones no existe siempre contacto maximal, es decir, se puede encontrar una hipersuperficie H de manera que para cualquier hipersuperficie regular \bar{W} , se verifica que \bar{W} no tiene contacto maximal con H .

Mostraremos sin embargo un teorema que nos dará la existencia del contacto maximal en el caso de que $v \neq p^m$, $m \geq 1$.

Las siguientes proposiciones nos dirán en qué condiciones existe contacto maximal cuando $v = p^m$.

Proposición 15. - Sean K un cuerpo de característica p y H una hipersuperficie algebroides sumergida en K^n de ecuación

$$f(Z, W_1, \dots, W_{n-1}) = Z^v + \varphi_1(W_1, \dots, W_{n-1})Z^{v-1} + \dots$$

$$\dots + \varphi_v(W_1, \dots, W_{n-1}) = 0, \quad v_0(\varphi_i(W_1, \dots, W_{n-1})) \geq i.$$

La hipersuperficie H no tiene contacto maximal si y solo si se verifican las dos condiciones siguientes:

i) $v = p^m$

ii) Existe h una función de prueba de W , siendo W la hipersuperficie de ecuación $Z = 0$, tal que el primer segmento del polígono de Newton de H_h tiene solo dos puntos y en los ejes,

puntos de coordenadas $(0, v)$ y $(1v, 0)$, $1 \geq 1$.

Proposición 16.- Sea K un cuerpo de característica p . Sea H la hipersuperficie algebroide sumergida en K^n de ecuación

$$z^v + \varphi_1(w_1, \dots, w_{n-1})z^{v-1} + \dots + \varphi_{v-1}(w_1, \dots, w_{n-1})z + \varphi_v(w_1, \dots, w_{n-1}) = 0$$

con :

i) $v = p^m$

ii) el primer segmento del polígono de Newton de H tiene solo dos puntos y en los ejes.

Entonces la hipersuperficie algebroide H no tiene contacto maximal.

Se prueba en la memoria que el recíproco de la proposición 16 no es cierto.

En la sección 4-3 estudiamos el contacto maximal para variedades algebroides en general. El método que seguiremos será considerar la variedad como una intersección tangencial adecuada de hipersuperficies o lo que es lo mismo trabajar con bases standard normalizadas.

Sabemos que si X es una variedad algebroide sumergida en K^n , f_1, \dots, f_p una base standard normalizada de la variedad

y H_1, \dots, H_p las hipersuperficies algebroides de ecuaciones

$f_1=0, \dots, f_p=0$. Entonces si las hipersuperficies H_1, \dots, H_p

tienen contacto maximal, es posible encontrar una variedad algebroide regular que tenga contacto maximal con la variedad X . (Vease Aroca-Hironaka-Vicente [6]). Luego el problema del contacto maximal en variedades algebroides queda resuelto con la proposición siguiente demostrada en la memoria.

Proposición 17.- Sea X una variedad algebroide y $\{f_1, \dots, f_p\}$

una base standard normalizada de la variedad. Supongamos que las hipersuperficies H_i de ecuaciones $f_i=0$, $1 \leq i \leq t$, $t < p$

tienen contacto maximal y sin embargo las hipersuperficies de ecuaciones $f_i=0$, $t+1 \leq i \leq p$ no lo tienen. En éstas condi-

ciones se verifica que existe un número finito de transfor-

maciones cuadráticas que transforman la base $\{f_1, \dots, f_p\}$
en $\{f'_1, \dots, f'_p\}$ de manera que todas las hipersuperficies
 H'_i de ecuación $f'_i=0$, $i=1, \dots, p$ tienen contacto maximal.

CAPITULO I

Introducción

El objeto de este capítulo es el describir las propiedades del anillo de series de potencias formales en n indeterminadas sobre un cuerpo K algebraicamente cerrado y de característica arbitraria.

§ 1-1.- Sección dedicada a introducir las notaciones que se utilizarán en el resto de la memoria.

1-1-1.- En lo que sigue K será un cuerpo algebraicamente cerrado de característica arbitraria, Z_1, \dots, Z_c ,

W_1, \dots, W_d indeterminadas sobre K con $c+d=n$ y

$K[[Z_1, \dots, Z_c, W_1, \dots, W_d]]$ el anillo de series de potencias formales en las indeterminadas $Z_1, \dots, Z_c, W_1, \dots, W_d$ con coeficientes en K .

Se sabe que $F=K[[Z_1, \dots, Z_c, W_1, \dots, W_d]]$ verifica las siguientes propiedades [46]:

- i) es un anillo local y el ideal generado por $Z_1, \dots, Z_c, W_1, \dots, W_d$ es su ideal maximal.
- ii) es un anillo noetheriano.
- iii) es un anillo local regular de dimensión n .
- iv) es un anillo completo para la topología M -ádica, siendo M el ideal maximal.
- v) es un anillo de igual característica.
- vi) es un dominio de factorización única.

1-1-2.- Sea $Z=(Z_1, \dots, Z_c)$, $W=(W_1, \dots, W_d)$. Todo elemento $f \in K[[Z, W]]$ será usualmente escrito en la forma

$$f = \sum_{A \in Z_0^c} f_A Z^A \quad Z^A = \sum_{A \in Z_0^c, B \in Z_0^d} f_{AB} Z^A W^B$$

donde $f_A \in K[[W]]$, $f_{AB} \in K$ y donde, como es usual, Z_0 designa al conjunto de los enteros no negativos.

Si $f \in R$ se escribirá

$$\Sigma_Z(f) = \{A \in Z_0^c \mid f_A \neq 0\}$$

$$\Sigma_{Z,W}(f) = \{(A, B) \in Z_0^c \times Z_0^d = Z_0^{c+d} \mid f_{AB} \neq 0\}$$

Nota 1-1-3.- Sea R_0 (resp. R_+) el conjunto de los números reales no negativos (resp. positivos) y sea Δ un subconjunto cerrado de $R_0^c \times R_0^d = R_0^{c+d}$ tal que $\Delta + R_0^{c+d} = \Delta$, donde

$$\Delta + R_0^{c+d} = \{(a_1, \dots, a_{c+d}) + (b_1, \dots, b_{c+d}) \mid (a_1, \dots, a_{c+d}) \in \Delta,$$

$$(b_1, \dots, b_{c+d}) \in R_0^{c+d}\}$$

Si $v \in R_+$ se escribirá

$$v\Delta = \{(va_1, \dots, va_{c+d}) \mid (a_1, \dots, a_{c+d}) \in \Delta\}$$

Observense los hechos siguientes:

(i) Si $v \in R_+$, $v\Delta$ es un subconjunto cerrado de R_0^{c+d} tal que

$$v\Delta + R_0^{c+d} = v\Delta$$

(ii) Si $v \in R_+$, es $v\Delta \supset \Delta$ si $v < 1$ y $v\Delta \subset \Delta$ si $v > 1$.

(iii) Si $v, v' \in R_+$ y $v < v'$, entonces $v'\Delta \subset v\Delta$.

1-1-4.- En lo sucesivo no se considerarán regiones Δ tan ge

nerales sino que nos limitaremos a un tipo particular que vamos a reseñar ahora.

Sea L una forma lineal real definida en \mathbb{R}_0^{c+d} ,

$$L = \sum_{i=1}^c a_i X_i + \sum_{j=1}^d b_j X'_j$$

donde $a_i, b_j \in \mathbb{R}_0$, $i=1, \dots, c$, $j=1, \dots, d$ y no todas las a_i son cero.

Si $A = (\alpha_1, \dots, \alpha_c) \in \mathbb{R}_0^c$ y $B = (\beta_1, \dots, \beta_d) \in \mathbb{R}_0^d$, se escribirá

$$L(A, B) = \sum_{i=1}^c a_i \alpha_i + \sum_{j=1}^d b_j \beta_j$$

Se definirá el subconjunto $\Delta_L \subset \mathbb{R}_0^{c+d}$ asociado a L en la forma siguiente

$$\Delta_L = \{(A, B) \in \mathbb{R}_0^c \times \mathbb{R}_0^d \mid L(A, B) \geq 1\}$$

Nótese que Δ_L es un subconjunto cerrado de \mathbb{R}_0^{c+d} y que $\Delta_L + \mathbb{R}_0^{c+d} = \Delta_L$.

Nota 1-1-5. - Se tiene que, para todo $v \in \mathbb{R}_+$

$$v\Delta_L = \{(A, B) \in \mathbb{R}_0^c \times \mathbb{R}_0^d \mid L(A, B) \geq v\}$$

Demostración. -

Si $(A, B) \in \Delta_L$, es $L(A, B) \geq 1$ y así $L(vA, vB) = vL(A, B) \geq v$. Recíprocamente, si (A, B) es tal que $L(A, B) \geq v$ y si $(A', B') = (-\frac{1}{v}A, -\frac{1}{v}B)$, es $L(A', B') = -\frac{1}{v}L(A, B) \geq -1$, de donde $(A', B') \in \Delta_L$ y $(A, B) \in v\Delta_L$.

Definición 1-1-6. - Sea $L: \mathbb{R}_0^{c+d} \rightarrow \mathbb{R}$ una forma lineal, llamaremos filtración L -ádica de $R = K[[X, Y]]$ a la familia $\{R_v\}_{v \in \mathbb{R}_+}$ definida por:

$$\forall v \in \mathbb{R}_+ \quad , \quad R_v = (\{Z^A W^B \mid L(A, B) \geq v\})R.$$

Si

$$\forall v \in \mathbb{R}_+ \quad , \quad R_v^+ = (\{Z^A W^B \mid L(A, B) > v\})R,$$

llamaremos

$$gr_L(R) = \bigoplus_{v \in \mathbb{R}_+} R_v / R_v^+.$$

Definición 1-1-7.- Para todo $f \in R$, se escribirá:

$$v_L(f) = \sup \{v \mid f \in R_v\}$$

y $v_L(f)$ será llamado orden de f respecto de L u orden de f respecto de la filtración L -ádica.

Proposición 1-1-8.- Sea Γ un subconjunto de Z_0^{c+d} tal que $\Gamma + Z_0^{c+d} = \Gamma$. Existe entonces un número finito $\{A_1, \dots, A_n\}$ de elementos de Γ tales que :

$$\Gamma = \bigcup_{i=1}^n (A_i + Z_0^{c+d})$$

Demostración.- Sean Z_1, \dots, Z_{c+d} variables independientes sobre K y consideremos el anillo de polinomios $S = K[Z_1, \dots, Z_{c+d}]$. Puesto que Z_0^{c+d} es un conjunto numerable, Γ lo será también. Numeremos pues los elementos de Γ y designemos por $M_i = Z^{A_i}$ al monomio de S tal que $A_i \in \Gamma$ ocupa el lugar i -ésimo en esta numeración. Designando por q_i al ideal de S definido por

$$q_i = (M_{11}, \dots, M_i) S$$

se tiene una cadena ascendente de ideales de S

$$q_1 \subset q_2 \subset \dots \subset q_i \subset \dots$$

que, por ser S un anillo noetheriano, debe ser estacionaria. Sea n un entero positivo tal que $q_n = q_{n+i}$, $\forall i \in \mathbb{Z}_0$ y consi-

deremos los monomios M_1, \dots, M_n que engendran el ideal q_n ; obviamente es

$$\bigcup_{i=1}^n (A_i + \mathbb{Z}_0^{c+d}) \subset \Gamma$$

Recíprocamente, si $A \in \Gamma$, entonces $\mathbb{Z}_0^A \in \bigcup_{i=1}^{\infty} q_i = q_n$ y así se puede escribir

$$\mathbb{Z}_0^A = \sum_{i=1}^n f_i(\mathbb{Z}_0) \mathbb{Z}_0^{A_i}, \quad f_i(\mathbb{Z}_0) \in S$$

lo que prueba que $A \in \bigcup_{i=1}^n (A_i + \mathbb{Z}_0^{c+d})$. Así

$$\Gamma = \bigcup_{i=1}^n (A_i + \mathbb{Z}_0^{c+d})$$

Corolario 1-1-9. - Sea Λ un subconjunto de \mathbb{Z}_0^{c+d} . Existe un número finito de elementos $A_1, \dots, A_n \in \Lambda$ tales que

$$\Lambda \subset \bigcup_{i=1}^n (A_i + \mathbb{Z}_0^{c+d})$$

Demostración. - Pongamos $\Gamma = \Lambda + \mathbb{Z}_0^{c+d}$; es obvio que $\Gamma \subset \mathbb{Z}_0^{c+d}$ y que $\Gamma + \mathbb{Z}_0^{c+d} = \Gamma$. Por la proposición anterior existen unos elementos $A_1, \dots, A_n \in \Gamma$ tales que

$$\Gamma = \bigcup_{i=1}^n (A_i + \mathbb{Z}_0^{c+d})$$

Siempre se puede suponer que esta unión es irredundante, es decir, que no sobra ningún término, y vamos a probar en este caso que todos los $A_i \in \Lambda$, lo que concluirá nuestra demostración.

Supongamos que exista un entero i , $1 \leq i \leq n$ tal que $A_i \notin \Lambda$; entonces se podrá escribir $A_i = A + A'$, $A \in \Lambda$, $A' \in \mathbb{Z}_0^{c+d}$, $A' \neq 0$. Como $A \in \Gamma$ existen un entero j , $1 \leq j \leq n$ y un $A'' \in \mathbb{Z}_0^{c+d}$ tales que $A = A_j + A''$. Así $A_i = A_j + A' + A''$ con $A' + A'' \neq 0$, lo que implica que $A_i \neq A_j$ y $A_i + \mathbb{Z}_0^{c+d} \subset A_j + \mathbb{Z}_0^{c+d}$,

que contradice la hipótesis de irredundancia. Esto prueba el corolario.

Corolario 1-1-10.- Se verifica que todo subconjunto $\Lambda \subset \mathbb{Z}_0^{c+d}$ posee un elemento mínimo en el orden lexicográfico.

Demostración.- Por el corolario anterior es

$$\Lambda \subset \bigcup_{i=1}^n (A_i + \mathbb{Z}_0^{c+d}), \quad A_i \in \Lambda$$

y así el mínimo en el orden lexicográfico de los $\{A_1, \dots, A_n\}$ es el mínimo de Λ para el orden lexicográfico.

Nota 1-1-11.- Con la proposición anterior se tiene una descripción gráfica muy sencilla de los monomios que pertenecen a un ideal dado $R_v, v \in \mathbb{R}_+$, o del mismo ideal. Si se pone

$$N_v = v\Delta_L \cap \mathbb{Z}_0^{c+d}$$

es $N_v + \mathbb{Z}_0^{c+d} = N_v$ y existen $(A_1, B_1), \dots, (A_n, B_n) \in N_v, A_i \in \mathbb{Z}_0^c, B_i \in \mathbb{Z}_0^d$ tales que

$$N_v = \bigcup_{i=1}^n [(A_i, B_i) + \mathbb{Z}_0^{c+d}]$$

de donde

$$R_v = \sum_{i=1}^n (\mathbb{Z}^{A_i} \mathbb{Z}^{B_i}) R$$

Lema 1-1-12.- Sea $f \in R$, para todo $v \in \mathbb{R}_+$ las condiciones siguientes son equivalentes:

(i) $f \in R_v$

(ii) $\sum_{\mathbb{Z}, \mathbb{N}} (f) \subset v\Delta_L$

(iii) $\forall (A, B) \in \sum_{\mathbb{Z}, \mathbb{N}} (f)$ es $L(A, B) \geq v$.

Demostración.- Que (ii) y (iii) son equivalentes es claro por la nota 1-1-5 . (i) \implies (ii) :

Existe un subconjunto finito $\Delta' \subset v\Delta_L \cap \mathbb{Z}_0^{c+d}$ tal que

$$f = \sum_{\substack{A \in \mathbb{Z}_0^c, B \in \mathbb{Z}_0^d, \\ (A,B) \in \Delta'}} h_{A,B} \mathbb{Z}^A \mathbb{W}^B, \quad h_{A,B} \in R$$

Entonces, si $(A', B') \in \mathbb{E}_{\mathbb{Z}, \mathbb{W}}(f)$, existen un $(A, B) \in \Delta'$ y un $(A'', B'') \in \mathbb{Z}_0^{c+d}$ tales que $(A', B') = (A, B) + (A'', B'')$. Como $(A, B) \in v\Delta_L$, es $(A', B') \in v\Delta_L$, como se quería probar .

(ii) \implies (i) .

Para probar esta implicación obsérvese que, como todo ideal I de R es cerrado en la topología de Krull, dada una serie cualquiera $h \in R$ tal que todas sus formas pertenezcan a I , se verifica que $h \in I$. De la relación (ii) se deduce que, descompuesta f en suma de formas, todas ellas pertenecen a R_v , luego $f \in R_v$.

Corolario 1-1-13.- Para todo $f \in R$ se verifica que

$$v_L(f) = \min \{L(A, B) \mid (A, B) \in \mathbb{E}_{\mathbb{Z}, \mathbb{W}}(f)\}$$

Demostración.- Sea $(A, B) \in \mathbb{E}_{\mathbb{Z}, \mathbb{W}}(f)$ y sea $L(A, B) = \mu$.

Si $v \in R_+$ es tal que $f \in R_v$, entonces $\mathbb{E}_{\mathbb{Z}, \mathbb{W}}(f) \subset v\Delta_L$ y así $\mu > v$; por tanto, $\mu > v_L(f)$. Sea ahora $\mu \in R_+$ tal que

$\mu < L(A, B)$, $\forall (A, B) \in \mathbb{E}_{\mathbb{Z}, \mathbb{W}}(f)$; entonces es $f \in R_\mu$ y por tanto $v_L(f) > \mu$, lo que prueba el corolario.

Nota 1-1-14.- Como consecuencia de este corolario se tienen los siguientes hechos:

(i) Si $f \in R$, $f \neq 0$, entonces $v_L(f) < +\infty$.

(ii) Si $L' = \sum_{i=1}^c X_i + \sum_{j=1}^d X_j'$ entonces es $v_{L'}(f) = v_{\mathbb{Z}, \mathbb{W}}(f)$,

el orden usual de f .

Corolario 1-1-15. - Si $f, g \in R$, es $v_L(f+g) \geq \min\{v_L(f), v_L(g)\}$.

La demostración es evidente a la vista del corolario 1-1-13 y del hecho que $\sum_{\mathcal{K}, \mathcal{W}} (f+g) \subset \sum_{\mathcal{K}, \mathcal{W}} (f) \cup \sum_{\mathcal{K}, \mathcal{W}} (g)$.

Proposición 1-1-16. - Si $f, g \in R$, es $v_L(f \cdot g) = v_L(f) + v_L(g)$.

Demostración. - Siempre se puede suponer $f \neq 0$ y $g \neq 0$. Sea

$$\sum_{\mathcal{K}, \mathcal{W}} (f) \subset \bigcup_{i=1}^n [(A_i, B_i) + \mathbb{Z}_0^{c+d}], \quad (A_i, B_i) \in \sum_{\mathcal{K}, \mathcal{W}} (f)$$

$$\sum_{\mathcal{K}, \mathcal{W}} (g) \subset \bigcup_{j=1}^m [(A'_j, B'_j) + \mathbb{Z}_0^{c+d}], \quad (A'_j, B'_j) \in \sum_{\mathcal{K}, \mathcal{W}} (g)$$

y obsérvese que $\sum_{\mathcal{K}, \mathcal{W}} (fg) \subset \sum_{\mathcal{K}, \mathcal{W}} (f) + \sum_{\mathcal{K}, \mathcal{W}} (g)$.

Por (1-1-13) siempre se puede suponer que

$$v_L(f) = L(A_1, B_1) \quad , \quad v_L(g) = L(A'_1, B'_1)$$

Sea $(A, B) \in \sum_{\mathcal{K}, \mathcal{W}} (fg)$, $(A', B') \in \sum_{\mathcal{K}, \mathcal{W}} (f)$, $(A'', B'') \in \sum_{\mathcal{K}, \mathcal{W}} (g)$ tales que $(A, B) = (A', B') + (A'', B'')$. Se tiene que

$$\begin{aligned} L(A, B) &= L(A', B') + L(A'', B'') \geq L(A_1, B_1) + L(A'_1, B'_1) = \\ &= v_L(f) + v_L(g) \end{aligned}$$

y por tanto $v_L(fg) \geq v_L(f) + v_L(g)$.

Sean ahora $\{(\bar{A}_\lambda, \bar{B}_\lambda)\}_{\lambda \in \mathcal{L}}$, $\{(\bar{A}'_{\lambda'}, \bar{B}'_{\lambda'})\}_{\lambda' \in \mathcal{L}'}$, los elementos de $\sum_{\mathcal{K}, \mathcal{W}} (f)$ y $\sum_{\mathcal{K}, \mathcal{W}} (g)$, respectivamente, tales que $L(\bar{A}_\lambda, \bar{B}_\lambda) = L(A_1, B_1)$ y $L(\bar{A}'_{\lambda'}, \bar{B}'_{\lambda'}) =$

$= L(A'_1, B'_1)$, $\lambda \in \mathcal{L}$, $\lambda' \in \mathcal{L}'$, y supongamos que $(\bar{A}_{\lambda_0}, \bar{B}_{\lambda_0})$

(resp. $(\bar{A}'_{\lambda'_0}, \bar{B}'_{\lambda'_0})$) es el mínimo para el orden lexicográfico entre los $(\bar{A}_\lambda, \bar{B}_\lambda)$ (resp. $(\bar{A}'_{\lambda'}, \bar{B}'_{\lambda'})$) (véase 1-1-10).

Vamos a probar que $(\bar{A}_\lambda, \bar{B}_\lambda) + (\bar{A}'_{\lambda'}, \bar{B}'_{\lambda'}) \in \sum_{\mathcal{K}, \mathcal{W}} (f \cdot g)$, lo que probará que $v_L(f) + v_L(g) \geq v_L(fg)$ y por tanto la igualdad.

Sean $(A, B) \in \sum_{\mathbb{Z}, \mathbb{N}}(f)$, $(A', B') \in \sum_{\mathbb{Z}, \mathbb{N}}(g)$ tales que $(A, B) + (A', B') = (\bar{A}_{\lambda_0}, \bar{B}_{\lambda_0}) + (\bar{A}'_{\lambda'_0}, \bar{B}'_{\lambda'_0})$, se tiene que

$$L(A, B) + L(A', B') = L(\bar{A}_{\lambda_0}, \bar{B}_{\lambda_0}) + L(\bar{A}'_{\lambda'_0}, \bar{B}'_{\lambda'_0})$$

y como $L(A, B) \geq L(\bar{A}_{\lambda_0}, \bar{B}_{\lambda_0})$, $L(A', B') \geq L(\bar{A}'_{\lambda'_0}, \bar{B}'_{\lambda'_0})$, es

$L(A, B) = L(\bar{A}_{\lambda_0}, \bar{B}_{\lambda_0})$, $L(A', B') = L(\bar{A}'_{\lambda'_0}, \bar{B}'_{\lambda'_0})$, luego existen

$\lambda \in \Lambda$, $\lambda' \in \Lambda'$ tales que $(A, B) = (\bar{A}_\lambda, \bar{B}_\lambda)$, $(A', B') = (\bar{A}'_{\lambda'}, \bar{B}'_{\lambda'})$, si fuese $\lambda \neq \lambda_0$ ó $\lambda' \neq \lambda'_0$ sería

$$(\bar{A}_{\lambda_0}, \bar{B}_{\lambda_0}) < (\bar{A}_\lambda, \bar{B}_\lambda) \text{ ó } (\bar{A}'_{\lambda'_0}, \bar{B}'_{\lambda'_0}) < (\bar{A}'_{\lambda'}, \bar{B}'_{\lambda'})$$

en el orden lexicográfico y así sería $(\bar{A}_{\lambda_0}, \bar{B}_{\lambda_0}) +$

$(\bar{A}'_{\lambda'_0}, \bar{B}'_{\lambda'_0}) < (\bar{A}_\lambda, \bar{B}_\lambda) + (\bar{A}'_{\lambda'}, \bar{B}'_{\lambda'})$ lo que no es posible.

Esto prueba que $\lambda = \lambda_0$, $\lambda' = \lambda'_0$ y la proposición.

Observación 1-1-17. - Puesto que \mathbb{Z}_0^{c+d} es un conjunto numerable

el conjunto M , $M = \{v \in \mathbb{R}_+ \mid R_v \neq R_v^+\} = \{v \in \mathbb{R}_+ \mid \exists (A, B) \in \mathbb{Z}_0^{c+d}$,

$(A, B) \in \sum_{\mathbb{Z}, \mathbb{N}}(f)$, $L(A, B) = v\}$ es también un conjunto numerable

y por tanto la filtración L-ádica de R tiene solo una familia numerable de componentes distintas y $\text{gr}_L^v(R)$ es cero salvo para una familia numerable de índices v .

Este resultado nos capacita para aplicar procesos de inducción tanto sobre la filtración $\{R_v\}$ como sobre la graduación $\{\text{gr}_L^v(R)\}$.

Lema 1-1-18. -

Sea $L: \mathbb{R}_0^{c+d} \rightarrow \mathbb{R}$ una forma lineal, se verifica que :

$\forall \mu \in \mathbb{R}_0, \exists \delta \in \mathbb{R}_0$ tal que $\forall f \in R \ [v_L(f) > \delta \implies v_{\underline{0}}(f) > \mu]$,

en donde $v_{\underline{0}}(f)$ es el orden de f en el sentido usual.

Demostración.- Sean

$$V(L, \delta) = \{(A, B) \in \mathbb{R}_0^{c+d} \mid L(A, B) \leq \delta\}$$

$$V(\mu) = \{(A, B) \in \mathbb{R}_0^{c+d} \mid |A| + |B| \leq \mu\}$$

entonces la condición del lema se puede expresar de la manera siguiente:

$$\forall f \in R, \sum_{\mathbb{Z}, \mathbb{N}} (f) \cap V(L, \delta) = \emptyset \implies \sum_{\mathbb{Z}, \mathbb{N}} (f) \cap V(\mu) = \emptyset$$

Entonces, el lema quedará probado demostrando que:

$$\forall \mu \in \mathbb{R}_0, \exists \delta \in \mathbb{R}_0 \text{ con } V(\mu) \subset V(L, \delta).$$

Ahora bien, puesto que $V(\mu)$ es compacto en \mathbb{R}_0^{c+d} y L es una forma lineal, existe un δ tal que

$$\forall (A, B) \in V(\mu) \quad L(A, B) < \delta ;$$

como δ siempre se puede tomar de modo que verifique también que $\delta \in \mathbb{R}_0$, es

$$V(\mu) \subset V(L, \delta) \quad \delta \in \mathbb{R}_0 \text{ y queda probado el lema.}$$

§ 1-2.- Teorema preparatorio de Weiersstrass-Hironaka-Aroca para series formales.

Introducción.- Sección dedicada a demostrar el teorema preparatorio de Weiersstrass-Hironaka-Aroca (1-2-3), de interés esencial a la hora de elegir bases estables respecto de explosiones en los ideales de $K[[Z_1, \dots, Z_c, W_1, \dots, W_d]]$. La demostración del teorema, sigue, desarrollándolas completamente, las ideas del teorema demostrado por J.M. Aroca [4] para series algebraicas.

Definición 1-2-1.- Sea $\mathcal{F}=(f_1, \dots, f_r)$ un conjunto finito de elementos de R y sea $\mathcal{A}=(A_1, \dots, A_r)$ un conjunto de elementos de \mathbb{Z}_0^c . Llamaremos $\mathcal{L}(\mathcal{F}, \mathcal{A})$ al conjunto compuesto por todas las formas lineales

$$L: \mathbb{R}_0^{c+d} \rightarrow \mathbb{R}, L(X_1, \dots, X_c, X'_1, \dots, X'_d) = \sum_{i=1}^c a_i X_i + \sum_{j=1}^d b_j X'_j$$

tales que:

i) $\forall i, 1 \leq i \leq c, \forall j, 1 \leq j \leq d, a_i, b_j \in \mathbb{R}_0$

ii) $\exists i, 1 \leq i \leq c, a_i \neq 0$

iii) $\forall i, 1 \leq i \leq c, \exists c_i \in K$ con $v_L(\mathbb{Z}^{A_i}) < v_L(f_i - c_i \mathbb{Z}^{A_i})$

En las mismas condiciones iniciales, llamaremos $\mathcal{L}'(\mathcal{F}, \mathcal{A})$ al conjunto de todas las formas lineales

$$L: \mathbb{R}_0^c \rightarrow \mathbb{R}, L(X_1, \dots, X_c) = \sum_{i=1}^c a_i X_i$$

tales que:

i) $\forall i, 1 \leq i \leq c, a_i \in \mathbb{R}_0$

$$\text{ii) } \exists i, 1 \leq i \leq c, a_i > 0$$

$$\text{iii) } \forall i, 1 \leq i \leq c, (A_i, 0) \in \Sigma_{\mathbb{Z}^c} (f_i) \text{ y } \forall A \in \mathbb{Z}_0^c \text{ con } (A, 0) \in \Sigma_{\mathbb{Z}, \mathbb{K}} (f_i)$$

$$v_L(\mathbb{Z}^{A_i}) < v_L(\mathbb{Z}^A) .$$

Lema 1-2-2.-

$$\mathcal{L}(\mathbb{F}, \mathbb{A}) \neq \emptyset \iff \mathcal{L}'(\mathbb{F}, \mathbb{A}) \neq \emptyset$$

Resulta inmediatamente de las definiciones.

Teorema 1-2-3.- Teorema preparatorio de Weierstrass-Hironaka-Aroca para series formales

Sean: a) $\mathbb{F} = (f_1, \dots, f_r)$ elementos de R , $\mathbb{A} = (A_1, \dots, A_r)$ elementos de \mathbb{Z}_0^c tales que $\mathcal{L}(\mathbb{F}, \mathbb{A}) \neq \emptyset$

b) $\{\square_i\}_{0 \leq i \leq r}$ una partición de \mathbb{Z}_0^c tal que:

$$\text{i) } \square_i \subset A_i + \mathbb{Z}_0^c, \forall i, 0 \leq i \leq r, (A_0 = (0, \dots, 0) \in \mathbb{Z}_0^c)$$

$$\text{ii) } A_i \in \square_i \text{ ó } \square_i = \emptyset, \forall i, 1 \leq i \leq r$$

Entonces para toda función $g \in R$ existen funciones $h_i \in R$ $0 \leq i \leq r$ únicas tales que :

$$1) g = h_0 + \sum_{i=1}^r h_i f_i$$

$$2) \sum_{\mathbb{Z}} (h_i \mathbb{Z}^{A_i}) \subset \square_i$$

$$3) \forall L \in \mathcal{L}(\mathbb{F}, \mathbb{A}), v_L(h_i) \geq v_L(g) - v_L(f_i), 1 \leq i \leq r$$

Demostración.-

(i) Existencia.- Construiremos inductivamente para cada i , $0 \leq i \leq r$ las series $\{h_i^{(j)}\}_{j \geq 0}$ de la manera siguiente:

a) $j=0$. Hacemos

$$\forall i, 0 \leq i \leq r, \quad h_i^{(0)} = \sum_{A \in \mathbb{Z}_0^c} h_{iA}^{(0)} \mathbb{Z}^A$$

siendo $h_{iA}^{(0)} = g_{A+A_i}$ si y solo si $A+A_i \in \square_i$

$h_{iA}^{(0)} = 0$ si y solo si $A+A_i \notin \square_i$

en donde $g = \sum g_A \mathbb{Z}^A$ y $A_0 = (0, \dots, 0)$.

Esta construcción siempre es posible y con ella se verifica que :

$$a-1.- \quad g = \sum_0^r h_i^{(0)} \mathbb{Z}^{A_i}$$

$$a-2.- \quad \sum_{\mathbb{Z}} (h_i^{(0)} \mathbb{Z}^{A_i}) \subset \square_{ii}$$

$$a-3.- \quad v_L(g) = \min_{0 \leq i \leq r} [(v_L(h_i^{(0)})) + L(A_i, 0)], \quad \forall L \in \mathcal{L}(\mathbb{F}, \mathbb{A})$$

$$a-4.- \quad v_{\underline{0}}(g) = \min_{0 \leq i \leq r} [(v_{\underline{0}}(h_{ii}^{(0)})) + |A_i|]$$

b) $j > 0$.- Supongamos construidas las $h_i^{(j-1)}$, $0 \leq i \leq r$ y vamos a construir las $h_i^{(jj)}$, para ello haremos lo siguiente.

Sea $L \in \mathcal{L}(\mathbb{F}, \mathbb{A})$ y sean $c_{ii} \in K$ $1 \leq ii \leq r$, tales que

$$v_L(f_i - c_{ii} \mathbb{Z}^{A_i}) < v_L(f_i). \quad \text{Las } c_{ii} \text{ existen por la condición}$$

(iii) de la definición de $\mathcal{L}(\mathbb{F}, \mathbb{A})$, llamemos ahora

$$p_i = f_i - c_{ii} \mathbb{Z}^{A_i}, \quad \forall i, \quad 1 \leq ii \leq r$$

$$g_j = \sum_{i=1}^r h_i^{(j-1)} p_i, \quad g_{jj} = \sum g_{jA} \mathbb{Z}^A$$

y construyamos $h_i^{(j)}$ por ::

$$h_i^{(j)} = \sum h_{iA}^{(j)} \mathbb{Z}^A,$$

$$h_{iA}^{(j)} = g_{j_{A+A_i}} \quad \text{si } A+A_i \in \square_i ,$$

$$h_{iA}^{(j)} = 0 \quad \text{si } A+A_i \notin \square_i .$$

Esta construcción siempre es posible por las propiedades de $\{\square_i\}$ y se deduce de allí que:

$$\underline{b-1.} \quad g_j = \sum_{i=0}^r h_i^{(j)} \mathbb{Z}^{A_i} .$$

$$\underline{b-2.} \quad \sum \mathbb{Z} (h_i^{(j)} \mathbb{Z}^{A_i}) \subset \square_i .$$

$$\underline{b-3.} \quad v_L(g_j) = \min_{0 \leq i \leq r} [(v_L(h_i^{(j)})) + L(A_i, 0)] , \quad \forall L \in \mathcal{L}(F, A) .$$

$$\underline{b-4.} \quad v_{\underline{0}}(g_j) = \min_{0 \leq i \leq r} [(v_{\underline{0}}(h_i^{(j)})) + |A_i|] .$$

De este modo podemos construir todas las $\{h_i^{(j)}\}_{0 \leq i \leq r, j=0}$ y a consecuencia del proceso de construcción,

estas funciones verifican que:

(1) Por construcción de g_{jj} aplicando 1-1-15 ,

$$v_L(g_{j+1}) \geq \min_{1 \leq i \leq r} (v_L(h_i^{(j)} p_i)) \quad \forall L \in \mathcal{L}(F, A) .$$

(2) Por la condición (iii) de la definición de $\mathcal{L}(F, A)$

y por la definición de v_L

$$v_L(\mathbb{Z}^{A_i}) < v_L(p_i) \quad 1 \leq i \leq r \quad \text{luego}$$

$$v_L(h_i^{(j)} p_i) > v_L(h_i^{(j)} \mathbb{Z}^{A_i}) \quad 1 \leq i \leq r \quad \forall j \geq 0$$

de donde

$$\min_{1 \leq i \leq r} v_L(h_i^{(j)} p_i) > \min_{1 \leq i \leq r} (v_L(h_i^{(j)} \mathbb{Z}^{A_i}))$$

(3) A consecuencia de (1), (2) · b-3 es:

$$v_L(g_{j+1}) > v_L(g_j)$$

Aplicando entonces el lema ((1-1-18 $\forall j \geq 0, \exists k \geq 0$ con

$$v_o(g_k) > v_o(g_j).$$

Luego las series $(g_j)_{j \geq 0}$ son de órdenes crecientes, ahora bien por b-4 esto lleva consigo que

$\{ \min_{1 \leq i \leq r} (v_o(h_i^{(j)} + |A_i|)) \}_{j \geq 0}$ es también creciente, luego

$\{v_o(h_i^{(j)})\}_{j \geq 0}$ es creciente $\forall i$ y, por tanto, si formamos

$h_i = \sum_{j \geq 0} h_i^{(j)}$ será $h_i \in R$, $0 \leq i \leq r$. Veamos que estos h_i son

los que verifican el teorema. En efecto

$$\begin{aligned}
1.) \quad h_0 + \sum_{i=1}^r h_i f_i &= \sum_{j \geq 0} (h_0^{(j)} + \sum_{i=1}^r h_i^{(j)} (\zeta^{A_i + p_i})) = \\
&= \sum_{j \geq 0} (h_0^{(j)} + \sum_{i=1}^r h_i^{(j)} \zeta^{A_i - g_{j+1}}) = \sum_{j \geq 0} (g_j - g_{j+1}) = g
\end{aligned}$$

2.) Se verifica trivialmente como consecuencia de la construcción de los h_i .

3.) Puesto que $v_L(f_i) = L(A_i, 0)$ y se verifica que:

$$a). \quad v_L(g) = v_L(g_0) = \min_{0 \leq i \leq r} (v_L(h_i^{(0)} + L(A_i, 0)))$$

$$b). \quad v_L(g_j) = \min_{0 \leq i \leq r} (v_L(h_i^{(j)} + L(A_i, 0)))$$

$$c). \quad v_L(g_{j+1}) > v_L(g_j)$$

$$\text{resulta que } v_L(h_i) \geq \min_j v_L(h_i^{(j)}) \geq v_L(g) - L(A_i, 0) =$$

$$= v_L(g) - v_L(f_i), \quad \forall L \in \mathcal{L}(F, A)..$$

Luego los $\{h_i\}$ así construidos son los requeridos por el teorema.

ii) Unicidad. - Supongamos que h_i y \bar{h}_i , verifiquen, respecto a g , A y F , las condiciones del teorema, entonces,

llamando $h_i^* = h_i - \bar{h}_i$ $0 \leq i \leq r$, se verifica que:

$$[1] \quad 0 = h_0^* + \sum_{i=1}^r h_i^* f_i.$$

$$[2] \quad \sum_{\mathbb{Z}} (h_i^* \mathbb{Z}^{A_i}) \subset \square_i.$$

$$[3] \quad v_L(h_i^*) \geq v_L(g) - v_L(f_i), \quad \forall L \in \mathcal{L}(\mathbb{K}, A).$$

Entonces, para probar la unicidad de las h_i , basta demostrar que bajo las condiciones anteriores $h_i^* = 0$, $\forall i$ $0 \leq i \leq r$. Sin pérdida de generalidad, y con las condiciones anteriores, se puede escribir:

$$f_i = p_i + \mathbb{Z}^{A_i}, \quad 1 \leq i \leq r;$$

entonces:

$$[1] \quad \sum_{i=1}^r h_i^* \mathbb{Z}^{A_i} + h_0^* = - \sum_{i=1}^r h_i^* p_i$$

Tomemos ahora cocientes respecto al ideal $(\mathbb{W})R$ y llamemos $\forall \ell \in R$, $\bar{\ell} = \ell \pmod{(\mathbb{W})R}$; entonces [1] se transforma en:

$$\sum_{i=1}^r \bar{h}_i^* \mathbb{Z}^{A_i} + \bar{h}_0^* = - \sum_{i=1}^r \bar{h}_i^* \bar{p}_i,$$

verificandose que $\forall A \in \sum_{\mathbb{Z}} (\bar{p}_i)$, $L(A, 0) > L(A_i, 0)$.

Si $\bar{h}_i^* \neq 0$ podemos encontrar un $A_i' \in \sum_{\mathbb{Z}} (\bar{h}_i^*)$ tal que

$$\forall B \in \sum_{\mathbb{Z}} (\bar{h}_i^*) \quad L(B, 0) \geq L(A_i', 0),$$

entonces

$$A_i + A_i' \in \sum_{\mathbb{Z}} (-\bar{h}_i^* \bar{p}_i)$$

lo cual es imposible, luego $\bar{h}_i^* = 0 \quad \forall i$, $0 \leq i \leq r$. Tomando

a continuación cocientes respecto al ideal $(W)^2R$ y así sucesivamente, se llega por el mismo razonamiento a que

$$h_i^* \in (W)^n R, \quad \forall i, \quad 0 \leq i \leq r, \quad \forall n \geq 0; \quad \text{luego } h_i^* = 0$$

q.e.d.

Consecuencia 1-2-4. - Si en el teorema anterior hacemos $r=1$, $c=1$, la condición $\mathcal{L}(f_1, A_1) \neq \emptyset$ es equivalente a decir que f_1 es regular en Z de orden A_1 , es decir $f(Z, 0) = Z^{A_1} u(Z)$ con $u(0) \neq 0$. En este caso el teorema 1-2-3 es el teorema clásico de Weiersstrass cuyo enunciado es el siguiente:

Teorema preparatorio clásico de Weiersstrass.

Sea $f_1 \in K[[Z, W]]$ una serie regular de potencias en Z de orden $A_1 > 0$. Entonces para toda función $g \in K[[Z, W]]$ existen h_0, h_1 funciones pertenecientes a $K[[Z, W]]$ unívocamente determinadas tales que:

$$1) \quad g = h_0 + h_1 f_1$$

$$2) \quad h_0 = \sum_{i=0}^{A_1-1} h_{0,i} Z^i \quad \text{donde } h_{0,i} \in K[[W]].$$

§ 1-3. Filtraciones y graduaciones usuales de

$$\underline{K[[Z_1 \dots Z_c, W_1 \dots W_d]]} .$$

Introducción.- En esta sección se detallan las construcciones de las filtraciones y graduaciones pesadas de $K[[Z_1 \dots Z_c, W_1 \dots W_d]]$, estudiándose como caso particular las filtraciones P-ádicas, para F ideal generado por una parte $(Y_1 \dots Y_r)$ de un sistema de parámetros de

$$K[[Z_1 \dots Z_c, W_1 \dots W_d]] .$$

Por último, en esta sección se detalla el polígono de Newton de una hipersuperficie algebroide en K^n , respecto a un sistema de coordenadas $(Z_1 \dots Z_c, W_1 \dots W_d)$, $c+d=n$, transversal a la hipersuperficie.

Definición 1-3-1.- Sea, como siempre, $R=K[[Z, W]]$ y $\delta \in \mathbb{R}_+$, $\delta \geq 1$. Llamaremos filtración pesada de peso δ de $R=K[[Z, W]]$ a la familia $\{F_\delta^{(\nu)}(R)\}_{\nu \in \mathbb{R}_+}$ definida por:

$$\begin{aligned} \forall \nu \in \mathbb{R}_+ \quad F_\delta^{(\nu)}(R) &= \sum_{\alpha + \frac{\beta}{\delta} > \nu; \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_0} (Z)^\alpha (W)^\beta R \\ &= \sum_{A \in \mathbb{Z}_0^c, B \in \mathbb{Z}_0^d, |A| + \frac{|B|}{\delta} > \nu} Z^A W^B R . \end{aligned}$$

con $|A| = a_1 + \dots + a_c$ si $A = (a_1, \dots, a_c)$, $a_i \in \mathbb{Z}_0$, $1 \leq i \leq c$,

donde $(Z)^\alpha = (\{Z^A\} | A| = \alpha)$, $(W)^\beta = (\{W^B\} | B| = \beta)$

Si llamamos

$$\begin{aligned} \forall \nu \in \mathbb{R}_+ , \quad F_\delta^{(\nu+)}(R) &= \sum_{\alpha + \frac{\beta}{\delta} > \nu; \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_0} (Z)^\alpha (W)^\beta R \\ &= \sum_{A \in \mathbb{Z}_0^c, B \in \mathbb{Z}_0^d, |A| + \frac{|B|}{\delta} > \nu} Z^A W^B R \end{aligned}$$

llamaremos

$$gr_{\delta}^{(\nu)}(R) = F_{\delta}^{(\nu)}(R) \quad \text{---} \quad F_{\delta}^{(\nu+)}(R)$$

$$gr_{\delta}(R) = \bigoplus_{\nu \in \mathbb{R}_+} gr_{\delta}^{(\nu)}(R)$$

Definición 1-3-2.- Sea $R = K[[Z, W]]$, se escribirá, para todo $f \in R$.

$$v_{\delta}(f) = \sup \{ \nu \mid f \in F_{\delta}^{(\nu)}(R) \}$$

y $v_{\delta}(f)$ será llamado orden de f respecto de la filtración pesada de peso δ .

Observación 1-3-3.- Con las notaciones de 1-3-1 y 1-3-2 si $\delta = \infty$ entonces $v_{\infty}(f) = v_{\mathbb{Z}}(f)$, $\forall f \in R$, siendo $v_{\mathbb{Z}}(f)$ el orden de f , considerada como serie de potencias en \mathbb{Z} con coeficientes en $K[[W]]$.

Nota 1-3-4.- Se verifica que $\forall f \in R$ $v_{\delta}(f) = v_L(f)$ siendo $v_L(f)$ el orden de f en la filtración L-ádica definida por la forma lineal $L: \mathbb{R}_0^{c+d} \rightarrow \mathbb{R}$, siguiente:

Si $A = (\alpha_1 \dots \alpha_c) \in \mathbb{R}_0^c$, $B = (\beta_1 \dots \beta_d) \in \mathbb{R}_0^d$,

$$L(A, B) = \sum_{i=1}^c \alpha_i + \sum_{j=1}^d (1/\delta) \beta_j$$

Demostración.

Trivial pues las filtraciones coinciden ya que

$$F_{\delta}^{(\nu)}(R) = (\{ Z^A W^B \mid |A| + \frac{|B|}{\delta} \geq \nu \})R =$$

$$= (\{ Z^A W^B \mid L(A, B) \geq \nu \})R = R_{\nu}$$

Definición 1-3-5.- En R se puede considerar la filtración

M-ádica, inducida por el ideal maximal $M=(\mathbb{Z}, \mathcal{N})R$, entonces $\forall f \in R$ llamaremos

$$v_{\underline{0}}(f) = v_M(f) = \max \{ n \in \mathbb{Z}_0 \mid f \in M^n \} \iff$$

$$\iff f \in M^{\frac{v_{\underline{0}}(f)}{1}}, f \notin M^{\frac{v_{\underline{0}}(f)+1}{1}}$$

Consecuencia 1-3-6.- i). Se verifica que $\forall f \in R, v_{\underline{0}}(f) = v_L(f)$

siendo $v_L(f)$ el orden de f en la filtración L-ádica definida por la forma lineal $L: \mathbb{R}_0^{c+d} \rightarrow \mathbb{R}$, siguiente:

Si $A = (\alpha_1 \dots \alpha_c) \in \mathbb{R}_0^c$, $B = (\beta_1 \dots \beta_d) \in \mathbb{R}_0^d$

$$L(A, B) = \sum_{i=1}^c \alpha_i + \sum_{j=1}^d \beta_j$$

ii) Se verifica que $\forall f \in R, v_{\underline{0}}(f) = v_{\delta}(f)$ siendo $v_{\delta}(f)$ el orden de f en la filtración pesada de peso $\delta = 1$.

Definición 1-3-7.- Sea P un ideal regular de R , sabemos que una base de P forma parte de un sistema regular de parámetros de R y podemos suponer sin pérdida de generalidad que $P = (\mathbb{Z}_1, \dots, \mathbb{Z}_c)R = (\mathbb{Z})R$. Entonces $\forall f \in R$ llamaremos

$$v_P(f) = \max \{ n \in \mathbb{Z}_0 \mid f \in P^n \} \iff f \in P^{\frac{v_P(f)}{1}}, f \notin P^{\frac{v_P(f)+1}{1}}$$

Consecuencia 1-3-8.-

i) Se verifica que $\forall f \in R, v_{pp}(f) = v_L(f)$ siendo $v_L(f)$ el orden de f en la filtración L-ádica definida por la forma lineal $L: \mathbb{R}_0^{c+d} \rightarrow \mathbb{R}$ siguiente:

Si $A = (\alpha_1 \dots \alpha_c) \in \mathbb{R}_0^c$, $B = (\beta_1 \dots \beta_d) \in \mathbb{R}_0^d$

$$L(A, B) = \sum_{i=1}^c \alpha_i$$

ii) Se verifica que $\forall f \in R, v_{pp}(f) = v_{\delta}(f)$ siendo $v_{\delta}(f)$ el orden de f en la filtración pesada de peso $\delta = \infty$.

Nota 1-3-9.- Con las notaciones de 1-3-1. Si consideramos la componente homogénea de grado v , $gr_{\delta}^{(v)}(R)$ del anillo graduado $gr_{\delta}(R)$, esta componente será distinta de cero si y solo si existen $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_0$ de manera que $v = \alpha + \frac{\beta}{\delta}$.

En este caso

$$gr_{\delta}^{(v)}(R) = \left(\sum_{\alpha + \frac{\beta}{\delta} = v} (Z_i)^{\alpha} (W_j)^{\beta} \right) + F_{\delta}^{(v+)}(R)$$

y además el semigrupo de graduados de $gr_{\delta}(R)$ es $\mathbb{Z}_0 + \frac{1}{\delta} \mathbb{Z}_0$, que es numerable.

Nota 1-3-10.- Con las notaciones de 1-3-1. Sean

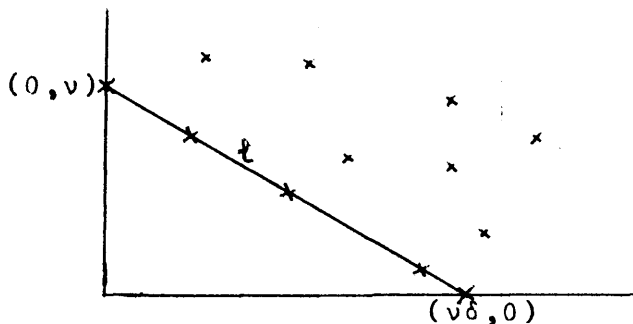
$$\tilde{Z}_i = Z_i + F_{\delta}^{(1+)}(R), \quad 1 \leq i \leq c, \quad \tilde{W}_j = W_j + F_{\delta}^{(1/\delta, +)}(R), \quad 1 \leq j \leq d.$$

Existe un isomorfismo de K -álgebras, no graduado,

$$gr_{\delta}(R) \cong K[\tilde{Z}, \tilde{W}]$$

Este isomorfismo puede ser considerado como un isomorfismo de anillos graduados asignando a $K[\tilde{Z}, \tilde{W}]$ la graduación correspondiente a escoger como semigrupo de graduados $\mathbb{Z}_0 + \frac{1}{\delta} \mathbb{Z}_0$ y hacer corresponder a cada \tilde{Z}_i el grado 1 y a cada \tilde{W}_j el grado $1/\delta$.

Nota 1-3-11.- Consideremos un sistema de coordenadas cartesianas en \mathbb{R}^2 ; representaremos en él los monomios de $K[[Z, W]]$ de manera que al monomio $Z^A W^B$, $A \in \mathbb{Z}_0^c$, $B \in \mathbb{Z}_0^d$ le corresponde el punto $(|B|, |A|)$. Sea ℓ la recta de pendiente $-1/\delta$ y que pasa por el punto $(0, v)$



En estas condiciones se verifica que:

i) $F_{\delta}^{(v)}$ (R) está generado por los monomios correspondientes a puntos que se encuentran en la recta ℓ o por encima de ella.

ii) $F_{\delta}^{(v+)}(R)$ está generado por los monomios correspondientes a puntos que se encuentran por encima de la recta ℓ .

Definición 1-3-12.- Sea $f \in R$, habíamos definido

$v_{\delta}(f) = \sup\{v \in \mathbb{R}_+ \mid f \in F_{\delta}^{(v)}(R)\}$. Se escribirá entonces

$$\text{in}_{\delta}(f) = f + F_{\delta}^{(v_{\delta}(f)+)}(R), \quad v_0 = v_{\delta}(f)$$

y $\text{in}_{\delta}(f)$ será llamada forma inicial de f respecto de la filtración pesada de peso δ .

Por 1-3-6- (ii) se verifica que $\text{in}_0(f) = \text{in}_M(f) = \text{in}_1(f)$

Nota 1-3-13.- Sea $\text{gr}_1(R) = \{\text{gr}_M(R) \cong K[\bar{Z}, \bar{W}] = K[\bar{Z}_1 \dots \bar{Z}_c, \bar{W}_1 \dots \bar{W}_d]$

con $\bar{Z}_i = Z_i + M^2$, $1 \leq i \leq c$, $\bar{W}_j = W_j + M^2$, $1 \leq j \leq d$. Sea

$$\text{gr}_{\delta}(R) \cong K[\bar{Z}', \bar{W}']$$

Se construye un isomorfismo θ :

$$K[\bar{Z}, \bar{W}] \xrightarrow{\theta} K[\bar{Z}', \bar{W}']$$

$$\bar{Z}_i, 1 \leq i \leq c \xrightarrow{\theta} \theta(\bar{Z}_i) = \bar{Z}'_i$$

$$\bar{W}_j, 1 \leq j \leq d \xrightarrow{\theta} \theta(\bar{W}_j) = \bar{W}'_j$$

Si $\delta=1$ entonces θ es la identidad pero si δ es mayor que 1 se verifica que el isomorfismo θ no es canónico pues no se conserva en un cambio de coordenadas, es decir si

$K[[\bar{Z}, \bar{W}]] = K[[\bar{Z}', \bar{W}']]$ el diagrama siguiente no es conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 K[\bar{z}, \bar{w}] & \cong & K[\bar{z}', \bar{w}'] \\
 \Downarrow & & \Downarrow \\
 K[\underline{z}, \underline{w}] & \cong & K[\underline{z}', \underline{w}']
 \end{array}$$

Teissier ha demostrado en [40] que existe un isomorfismo canónico $K[\bar{z}, \bar{w}] \xrightarrow{\theta} K[\bar{z}', \bar{w}']$.

Nota 1-3-14. - (Polígono de Newton)

En lo que sigue $f \in K[[Z, W]]$. Representaremos

$$\Sigma_{Z, W}(f) = \{(A, B) \in \mathbb{Z}_0^{c+d} \mid f_{AB} \neq 0\} \text{ en } \mathbb{R}^2, \text{ asignando a cada}$$

$$(A, B) \in \Sigma_{Z, W}(f) \text{ el punto } (|B|, |A|) \in \mathbb{R}^2.$$

Al cierre convexo de $\Sigma_{Z, W}(f)$ se le llama clasicamente polígono de Newton de f respecto del sistema de parámetros (Z, W) . La idea de los puntos siguientes es formalizar el concepto de diagrama de Newton y establecer una notación que se utilizará esencialmente en el capítulo III. La formalización del concepto de diagrama de Newton sigue el proceso de Hironaka [19], en un caso mucho más simple porque no nos preocupan las posibles direcciones sino solamente los bloques $(Z), (W)$.

Prepararemos f de manera que en el diagrama de Newton exista siempre un punto en el eje de ordenadas.

Definición 1-3-5. - Diremos que f está preparada respecto al sistema de parámetros (Z, W) si:

$$\text{in}_1(f) \notin (\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_d) K[\bar{z}, \bar{w}]$$

Proposición 1-3-16. - Podemos conseguir un cambio de coordenadas del tipo

$$W'_i = W_i + \lambda_{1i} Z_1 + \dots + \lambda_{ci} Z_c \quad i=1, \dots, d, \quad \lambda_{ri} \in K$$

$$Z'_j = Z_j \quad j=1, \dots, c$$

de modo que $\text{in}_1(f) \notin (\bar{w}'_1, \dots, \bar{w}'_d) K[\bar{z}', \bar{w}']$ es decir podemos con

seguir que la forma f está preparada.

Demostración.-

$$\text{Consideremos } In_1(f) = \sum_{|A|+|B|=v_1(f)} f_{AB} z^A w^B$$

Al aplicar el cambio de coordenadas se tiene

$$\sum f_{AB} z'^A (w' - \lambda z')^B = \sum f'_{AB}(\lambda) z'^A w'^B$$

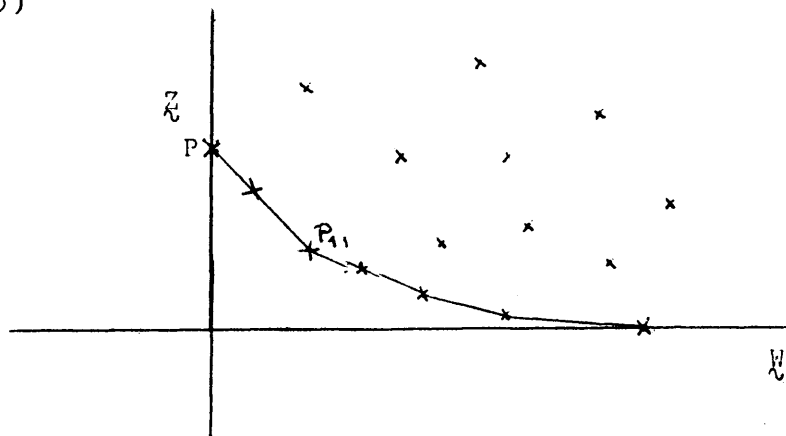
$$f'_{AB}(\lambda) \in K[\lambda_{11} \dots \lambda_{1d}, \dots, \lambda_{c1} \dots \lambda_{ct}]$$

Existen $\lambda_{ij} \in K$ tales que algún $f'_{A',0}(\lambda) \neq 0$ ya que el conjunto $\{\lambda_{ij} \mid f'_{A',0}(\lambda) = 0\} \forall A'$ es una variedad algebraica propia en el espacio afín $K^r \times s$ y por tanto es distinta de $K^r \times s$, debido a que K es un cuerpo infinito por ser algebraicamente cerrado.

Notaciones 1-3-17.- Sea $f \in K[[z, w]]$ preparada respecto al sistema coordenado (z, w) . Sea $\delta \in \mathbb{R}_0$, llamamos $r_\delta(f)$ a la recta de ecuación $-\frac{1}{\delta}x + y = v_\delta(f)$ en \mathbb{R}^2 y

$$S_\delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}_0^2 \mid -\frac{1}{\delta}x + y \geq v_\delta(f)\}$$

Nota 1-3-18.- Consideramos nuevamente $\Sigma_{z, w}(f) = \{(A, B) \in \mathbb{Z}_0^{c+d} \mid f_{AB} \neq 0\}$ y representaremos en \mathbb{R}^2 el diagrama de Newton de f que estará formado por todos los puntos de coordenadas $(|B|, |A|)$ con $(A, B) \in \Sigma_{z, w}(f)$. Como hemos preparado la forma f sabemos que en el diagrama de Newton existe un punto P de coordenadas $(0, v)$



Si consideramos las rectas de ecuaciones $-\frac{1}{\delta} x + y = v$, $\delta > 1$, estas rectas unen el punto P con otros puntos del diagrama, de entre ellas escogemos la recta cuyo δ sea menor, sea por ejemplo δ_1 este número y sea P_1 el punto del diagrama de Newton perteneciente a la recta r_{δ_1} de ecuación $-\frac{1}{\delta_1} x + y = v$ cuya segunda coordenada sea menor que la segunda coordenada de los restantes puntos del diagrama de Newton situados en r_{δ_1} . Entonces el segmento PP_1 es el primer segmento de la poligonal de Newton. Con P_1 hacemos lo mismo que hemos hecho con P , es decir si consideramos las rectas de ecuación $-\frac{1}{\delta} x + y = v_{\delta}(f)$, $\delta > 1$ que pasan por P_1 y otros puntos del diagrama, entre ellas elegimos la recta cuyo δ es menor, sea r_{δ_2} esta recta, la ecuación de r_{δ_2} será $-\frac{1}{\delta_2} x + y = v_{\delta_2}(f)$ y $\delta_2 > \delta_1$. Si P_2 es el punto de r_{δ_2} cuya segunda coordenada es mínima respecto de todos los puntos del diagrama, hemos construido P_1P_2 el segundo segmento de la poligonal de Newton.

Continuando así, en un número finito de pasos llegamos a un punto P_n situado en el eje de las W ó a una recta r_{δ_n} paralela al eje de las W .

Se ve trivialmente que la poligonal de Newton construida mediante las graduaciones pesadas coincide con la poligonal de Newton clásica ya que $\delta_i = \frac{-1}{\text{pendiente recta } r_{\delta_i}}$.

A la vista de este diagrama se verifica:

$$1 < \delta < \delta_1, \text{ in}_{\delta}(f) \text{ no varía}$$

$$\delta_i < \delta < \delta_{i+1}, \text{ in}_{\delta}(f) \text{ no varía}$$

Luego los valores δ_i se pueden obtener viendo la variación de $\text{in}_{\delta}(f)$, Lejeune-Teissier [27].

§ 1-4. Ideales en $K[[Z_1, \dots, Z_c, W_1, \dots, W_d]]$

Introducción.- En esta sección se definen y caracterizan las variedades algebroides. Los resultados esenciales son:

- a) Caracterización de las variedades algebroides regulares (1-4-2)...(1-4-7).
- b) Caracterización de la transversalidad (1-4-8)...(1-4-14).
- c) Platitud normal de una variedad a lo largo de una subvariedad (1-4-15), (1-4-16), (1-4-7).
- d) Existencia de las bases estándar normalizadas para ideales de $K[[Z_1, \dots, Z_c, W_1, \dots, W_d]]$. (Teorema 1-4-21).

Definición 1-4-1.- Llamaremos variedad algebroides sumergida en K^{c+d} a $V(I) = \text{Spec}(K[[Z_1, \dots, Z_c, W_1, \dots, W_d]] / I)$ siendo

I un radical cualquiera de $K[[Z, W]]$.

Definición 1-4-2.- Sea I un ideal de $R = K[[Z, W]]$. Diremos que el ideal I es un ideal regular cuando se verifique que el anillo R/I sea un anillo local regular.

Proposición 1-4-3.- Serre ([39], capítulo IV, § 2).

Si I es un ideal del anillo local regular R , las condiciones siguientes son equivalentes:

- i) I está generado por los elementos (X_1, \dots, X_i) , $i \leq c+d$ que forman parte de un sistema regular de parámetros de R .
- ii) El ideal I es un ideal regular es decir R/I es un anillo local regular y su dimensión

$$\dim R/I = \dim R // (X_1, \dots, X_i)_R = \dim R - i$$

iii) Las imágenes $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_i$ de x_1, \dots, x_i en M/M^2 son linealmente independientes sobre K .

Consecuencia 1-4-4.- El ideal $I=(x_1, \dots, x_i)R$ de la proposición anterior es un ideal primo.

Definición 1-4-5.- Si I es un ideal regular de R , diremos que la variedad algebraíde correspondiente $V(I)$ es una variedad algebraíde regular.

Nota 1-4-6.- Sea $V=V(I)=\text{Spec}(K[[Z, W]]/I)$ una variedad algebraíde. Si M es el ideal maximal de $K[[Z, W]]$ podemos identificar $\text{gr}_M(K[[Z, W]])$ con $K[\bar{Z}, \bar{W}]$ siendo

$\bar{z}_i = z_i + M^2$, $1 \leq i \leq c$, $\bar{w}_j = w_j + M^2$, $1 \leq j \leq d$. Llamaremos $\text{in}_M(I)$ al ideal inicial de I en $\text{gr}_M(K[[Z, W]])$. En estas condiciones escribiremos

$$C_V = \text{Spec}(K[\bar{Z}, \bar{W}]/\text{in}_M(I))$$

y diremos que C_V es el cono tangente a la variedad V . Trivialmente el conjunto de puntos con valores en K de C_V es un cono en el espacio afín K^{c+d} .

Sea \mathbb{A}^n el espacio numérico $\mathbb{A}^n = \text{Spec}(K[\bar{Z}, \bar{W}])$.

Consideramos el functor de la categoría de K -esquemas en la de conjuntos F dado por ::

$$F(K') = \{v \in [Z \times_K K']_K \mid L_v([C_V \times_K K']_K) \subset [C_V \times_K K']_K\}$$

donde para cada K -esquema X , $[X]_K$ indica el conjunto de puntos de X con valores en K y si $v \in [X]_K$, L_v es la traslación

$$L_v : [X]_K \rightarrow [X]_K \quad L_v(v') = v + v'$$

Entonces, vease Giraud [13], [14], $F(-)$ es un subconjunto (1) del functor de la categoría (de K -esquemas en la de conjuntos representado por \mathbb{Z} y $F(-)$ es representable por un subesquema cerrado de \mathbb{Z} , T_V . Es decir, existe un K -esquema T_V tal que el conjunto de puntos de T_V con valores en K considerados como traslaciones de K^{c+d} , es el conjunto de traslaciones que dejan invariante el cono $[C_V]_K$. T_V recibe el nombre de espacio tangente estricto de V o es espacio tangente de Hironaka de V . Giraud [13], [14] da a T_V el nombre de faîte del cono C_V .

Proposición 1-4-7.- Con las notaciones anteriores, se verifica:

- i) $T_V \subset C_V$
- ii) $T_V = C_V$, si la variedad algebroide V es regular, pero el recíproco no es cierto.

Demostración.-

- i) Trivial.
- ii) Sea V una variedad algebroide regular correspondiente a un ideal I , sin pérdida de generalidad podemos suponer que $I = (Z_1, \dots, Z_c)R$. Luego

$$V = \text{Spec}(K[[Z, W]] // (Z_1, \dots, Z_c)R)$$

$$C_V = \text{Spec}(K[[\bar{Z}, \bar{W}] // \text{in}_M[(Z_1, \dots, Z_c)R]]) = \text{Spec}(K[[\bar{W}]])$$

y el conjunto de puntos que deja invariante $[\text{Spec}(K[[W]])]_K$

- (1) Si $F: C \rightarrow (\text{Sets})$ es un functor con valores en la categoría de conjuntos se llama subconjunto de F a todo functor $G: C \rightarrow (\text{Sets})$ tal que \exists una traslación natural $T: F \rightarrow G$ ($T_x: F(x) \rightarrow G(x)$) inyectiva $\forall x$.

coincide con el conjunto de puntos cerrados K^d por tanto

$$[T_V]_{K=K^d} \implies T_V = \text{Spec}(K[\bar{W}]) = C_V$$

El recíproco no es cierto (Ejemplo: $V=V((y^2-x^3)K[[x,y]])$)

$$C_V = T_V = (\{y=0\})$$

Definición 1-4-8.- Sea $V=V(I)$ una variedad algebroide, sea W una variedad algebroide regular, $W = \text{Spec}(K[[\bar{Z}, \bar{W}]] / (z_1, \dots, z_c)R)$

Se dirá que la variedad algebroide regular W es transversal a la variedad algebroide V si y solo si el morfismo canónico

$$C_V \xrightarrow{\omega} C_W = T_W$$

es plano.

Nota 1-4-9.- Al morfismo ω entre los conos tangentes corresponde el homomorfismo de anillos $K[[\bar{W}]] \xrightarrow{\gamma} K[[\bar{Z}, \bar{W}]] / \text{in}_M(I)$

que es la composición de la inclusión $K[[\bar{W}]] \hookrightarrow K[[\bar{Z}, \bar{W}]]$

con el homomorfismo natural $K[[\bar{Z}, \bar{W}]] \twoheadrightarrow K[[\bar{Z}, \bar{W}]] / \text{in}_M(I)$.

Entonces la variedad algebroide regular W es transversal a la variedad algebroide V si y solo si el homomorfismo

$\gamma: K[[\bar{W}]] \twoheadrightarrow K[[\bar{Z}, \bar{W}]] / \text{in}_M(I)$ es un homomorfismo plano de anillos.

Proposición 1-4-10.- Las condiciones siguientes son equivalentes:

- i) La variedad W es transversal a la variedad V .
- ii) Los elementos $\{\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_d\}$ forman una sucesión regular del $K[[\bar{W}]]$ -módulo $K[[\bar{Z}, \bar{W}]] / \text{in}_M(I)$

Demostración.-

i) \implies ii)

Demostraremos esta implicación por inducción. Veremos en primer lugar que \bar{w}_1 no es un divisor de cero respecto de

$$K[\bar{z}, \bar{w}] / \text{in}_M(I)$$

Sea $f(\bar{z}, \bar{w}) + \text{in}_M(I) \in K[\bar{z}, \bar{w}] / \text{in}_M(I)$ tal que

$$\bar{w}_1 \cdot f(\bar{z}, \bar{w}) + \text{in}_M(I) = 0$$

En esta situación la platitud implica que existe un entero r y dos familias de elementos $\{g_j(\bar{w})\}_{j=1 \dots r}$,

$$\{f_j(\bar{z}, \bar{w}) + \text{in}_M(I)\}_{j=1 \dots r}, \quad g_j(\bar{w}) \in K[\bar{w}]$$

y $f_j(\bar{z}, \bar{w}) + \text{in}_M(I) \in K[\bar{z}, \bar{w}] / \text{in}_M(I)$ tales que

$$\bar{w}_1 g_1(\bar{w}) = \dots = \bar{w}_1 g_r(\bar{w}) = 0$$

$$y \quad f(\bar{z}, \bar{w}) + \text{in}_M(I) = \sum_{j=1}^r [g_j(\bar{w}) f_j(\bar{z}, \bar{w}) + \text{in}_M(I)]$$

de donde se deduce que $g_j(\bar{w}) = 0$, $j=1, \dots, r$ y así

$$f(\bar{z}, \bar{w}) + \text{in}_M(I) = 0$$

Sea ahora i un entero, $1 \leq i < d$ y supongamos probado que

$\{\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_i\}$ es una sucesión regular del $K[\bar{w}]$ -módulo

$K[\bar{z}, \bar{w}] / \text{in}_M(I)$. Vamos a probar que $\{\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_i, \bar{w}_{i+1}\}$ es

también una sucesión regular.

Consideremos una relación del tipo:

$$\bar{w}_{i+1} f(\bar{z}, \bar{w}) + \text{in}_M(I) = \sum_{\ell=1}^i (f_\ell(\bar{z}, \bar{w}) + \text{in}_M(I)) (\bar{w}_\ell + \text{in}_M(I))$$

Se tiene, pues, que

$$\bar{w}_1 (f_1(\bar{z}, \bar{w}) + \text{in}_M(I)) + \dots + \bar{w}_i (f_i(\bar{z}, \bar{w}) + \text{in}_M(I)) - \bar{w}_{i+1} (f(\bar{z}, \bar{w}) + \text{in}_M(I)) = 0$$

Por la hipótesis de platitud sabemos que existe un entero r

y dos familias $\{g_{\ell j}(\bar{w})\}_{\ell=1, \dots, i+1, j=1, \dots, r}$, $g_{\ell j} \in K[\bar{w}]$,

$$\{h_j(\bar{z}, \bar{w}) + \text{in}_M(I)\}_{j=1, \dots, r}, \quad h_j(\bar{z}, \bar{w}) + \text{in}_M(I) \in K[\bar{z}, \bar{w}] / \text{in}_M(I)$$

tales que:

$$[1] \begin{cases} \bar{w}_1 g_{11}(\bar{w}) + \dots + \bar{w}_i g_{i1}(\bar{w}) + \bar{w}_{i+1} g_{i+1,1}(\bar{w}) = 0 \\ \dots \\ \bar{w}_1 g_{1r}(\bar{w}) + \dots + \bar{w}_i g_{ir}(\bar{w}) + \bar{w}_{i+1} g_{i+1,r}(\bar{w}) = 0 \end{cases}$$

y

$$[2] \begin{cases} f_\ell(\bar{z}, \bar{w}) + \text{in}_M(I) = \sum_{j=1}^r g_{\ell j}(\bar{w})(h_j(\bar{z}, \bar{w}) + \text{in}_M(I)) \\ \ell = 1, \dots, i \\ -f(\bar{z}, \bar{w}) + \text{in}_M(I) = \sum_{j=1}^r g_{i+1, j}(\bar{w})(h_j(\bar{z}, \bar{w}) + \text{in}_M(I)) \end{cases}$$

De [1] se deduce que $g_{i+1, j}(\bar{w}) \in (\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_i)K[\bar{z}, \bar{w}]$ para todo $j=1, \dots, r$ y por tanto de [2] se deduce que

$$f(\bar{z}, \bar{w}) + \text{in}_M(I) \in (\bar{w}_1 + \text{in}_M(I), \dots, \bar{w}_i + \text{in}_M(I)) K[\bar{z}, \bar{w}] / \text{in}_M(I)$$

q.e.d.

(ii) \Rightarrow i

$$\begin{aligned} \text{Tenemos que } K[\bar{z}, \bar{w}] / \text{in}_M(I) &= K[\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_c, \bar{w}_1, \dots, \bar{w}_d] / \text{in}_M(I) = \\ &= K[\delta_1, \dots, \delta_c, \delta_{c+1}, \dots, \delta_{c+d}] \quad \text{con } \delta_i = \bar{z}_i + \text{in}_M(I), i \leq c, \end{aligned}$$

$\delta_j = \bar{w}_j + \text{in}_M(I), c+1 \leq j \leq c+d$. Se verifica que

$\mathfrak{M} = (\delta_1, \dots, \delta_c, \delta_{c+1}, \dots, \delta_{c+d})$ es un ideal maximal de

$$K[\bar{z}, \bar{w}] / \text{in}_M(I).$$

Puesto que un morfismo de conos es plano si y solo si es plano en el origen, bastará demostrar que $(K[\bar{z}, \bar{w}] / \text{in}_M(I))_{\mathfrak{M}}$

es $K[\bar{w}]$ -plano. Por la hipótesis sabemos que los elementos $\{\delta_{c+1}, \dots, \delta_{c+d}\}$ forman una sucesión regular de

$K[\delta_1, \dots, \delta_c, \delta_{c+1}, \dots, \delta_{c+d}]$, luego los elementos

$\{-\frac{\delta_{c+1}}{1}, \dots, -\frac{\delta_{c+d}}{1}\}$ forman una sucesión $(K[\delta_1, \dots, \delta_c, \delta_{c+1}, \dots, \delta_{c+d}])_M$, regular..

De aquí se deduce que el subanillo $K[-\frac{\delta_{c+1}}{1}, \dots, -\frac{\delta_{c+d}}{1}]$ de $(K[\delta_1, \dots, \delta_c, \delta_{c+1}, \dots, \delta_{c+d}])_M$, es isomorfo al anillo de polinomios $K[\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_d]$ bajo un isomorfismo que transforma \bar{w}_i en δ_i , $i=1, \dots, d$ y que $(K[\delta_1, \dots, \delta_c, \delta_{c+1}, \dots, \delta_{c+d}])_M$ es $K[-\frac{\delta_{c+1}}{1}, \dots, -\frac{\delta_{c+d}}{1}]$ -plano, q.e.d.

Nota 1-4-11.- Vamos ahora a estudiar el significado de la noción de transversalidad en el caso en que V sea una hiper superficie, esto es, que Π sea un ideal principal. Sea

$I = (f(\bar{z}, \bar{w}))K[[\bar{z}, \bar{w}]]$, $f(\bar{z}, \bar{w}) \in K[[\bar{z}, \bar{w}]]$ y sea $\bar{F}(\bar{z}, \bar{w})$ la forma inicial de $f(\bar{z}, \bar{w})$, luego $\text{in}_t(I) = (\bar{F}(\bar{z}, \bar{w}))K[[\bar{z}, \bar{w}]]$.

Proposición 1-4-12.- Con las notaciones de 1-4-11, las condiciones siguientes son equivalentes:

- i) W es transversal a V ..
- ii) $\bar{F}(\bar{z}, \bar{w}) \notin (\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_d)K[[\bar{z}, \bar{w}]]$, es decir, $f(\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_c, 0, \dots, 0) \neq 0$.

Demostración.-

Se verifica que $\bar{F}(\bar{z}, \bar{w}) \notin (\bar{w}_1)K[[\bar{z}, \bar{w}]]$ pues si perteneciera sería $\bar{F}(\bar{z}, \bar{w}) = g(\bar{z}, \bar{w})\bar{w}_1$ y por hipótesis de transversalidad, debería ser $g(\bar{z}, \bar{w}) \in (\bar{F}(\bar{z}, \bar{w}))K[[\bar{z}, \bar{w}]]$ lo que no es posible por ser de menor grado.

Sea ahora i un entero $1 \leq i \leq s$ y supongamos probado que

$$\bar{F}(\bar{z}, \bar{w}) \notin (\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_i)K[[\bar{z}, \bar{w}]]$$

Si $\bar{F}(\bar{z}, \bar{w}) \in (\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_i, \bar{w}_{i+1}^{-1})K[[\bar{z}, \bar{w}]]$, sería

$$\bar{F}(\bar{z}, \bar{w}) = f_1(\bar{z}, \bar{w})\bar{w}_1 + \dots + f_i(\bar{z}, \bar{w})\bar{w}_i + f_{i+1}(\bar{z}, \bar{w})\bar{w}_{i+1}$$

v por hipótesis de transversalidad se podría escribir

$$f_{i+1}(\bar{z}, \bar{w}) = h(\bar{z}, \bar{w})\bar{f}(\bar{z}, \bar{w}) + h_1(\bar{z}, \bar{w})\bar{w}_1 + \dots + h_i(\bar{z}, \bar{w})\bar{w}_i$$

Así

$$\begin{aligned} \bar{f}(\bar{z}, \bar{w}) [1 - h(\bar{z}, \bar{w})\bar{w}_{i+1}] &= [f_1(\bar{z}, \bar{w}) + \bar{w}_{i+1} h_1(\bar{z}, \bar{w})] \bar{w}_1 + \dots \\ &\dots + [f_i(\bar{z}, \bar{w}) + \bar{w}_{i+1} h_i(\bar{z}, \bar{w})] \bar{w}_i \end{aligned}$$

y como $\bar{f}(\bar{z}, \bar{w}) \notin (\bar{w}_1 \dots \bar{w}_i)K[\bar{z}, \bar{w}]$ debe ser

$$1 - \bar{w}_{i+1} h(\bar{z}, \bar{w}) \in (\bar{w}_1 \dots \bar{w}_i)K[\bar{z}, \bar{w}] \text{ que es imposible.}$$

Esto prueba que $\bar{f}(\bar{z}, \bar{w}) \notin (\bar{w}_1 \dots \bar{w}_d)K[\bar{z}, \bar{w}]$

ii) => i)

Probaremos que W es transversal a V demostrando que

$\{\bar{w}_1 \dots \bar{w}_d\}$ es una sucesión regular del $K[\bar{w}]$ -módulo

$$K[\bar{z}, \bar{w}] / (\bar{f}(\bar{z}, \bar{w})) K[\bar{z}, \bar{w}] .$$

Si fuese $\bar{w}_1 \cdot g(\bar{z}, \bar{w}) = h(\bar{z}, \bar{w}) \cdot \bar{f}(\bar{z}, \bar{w})$, como

$\bar{f}(\bar{z}, \bar{w}) \notin (\bar{w}_1)K[\bar{z}, \bar{w}]$ debe ser $h(\bar{z}, \bar{w}) \in (\bar{w}_1)K[\bar{z}, \bar{w}]$ y así:

$$g(\bar{z}, \bar{w}) = \frac{h(\bar{z}, \bar{w})}{\bar{w}_1} \bar{f}(\bar{z}, \bar{w}) , \text{ lo que prueba que } \bar{w}_1 \text{ no es divi-}$$

sor de cero.

Sea ahora i un entero, $1 \leq i \leq d$ y supongamos probado que

$\{\bar{w}_1 \dots \bar{w}_i\}$ es una sucesión regular. Sea una relación

$$\bar{w}_{i+1} g(\bar{z}, \bar{w}) = h(\bar{z}, \bar{w}) \bar{f}(\bar{z}, \bar{w}) + h_1(\bar{z}, \bar{w}) \bar{w}_1 + \dots + h_i(\bar{z}, \bar{w}) \bar{w}_i$$

Se debe verificar que $h(\bar{z}, \bar{w}) \in ((\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_i, \bar{w}_{i+1}))K[\bar{z}, \bar{w}]$

y así $h(\bar{z}, \bar{w}) = \lambda_1(\bar{z}, \bar{w})\bar{w}_1 + \dots + \lambda_i(\bar{z}, \bar{w})\bar{w}_i + \lambda_{i+1}(\bar{z}, \bar{w})\bar{w}_{i+1}$ con lo que

$$\bar{w}_{i+1}^{-1} [g(\bar{z}, \bar{w}) - \lambda_{i+1}(\bar{z}, \bar{w}) \bar{f}(\bar{z}, \bar{w})] \in (\bar{w}_1 \dots \bar{w}_i) K[\bar{z}, \bar{w}]$$

lo que implica que

$$g(\bar{z}, \bar{w}) - \lambda_{i+1}(\bar{z}, \bar{w}) \bar{f}(\bar{z}, \bar{w}) \in (\bar{w}_1 \dots \bar{w}_i) K[\bar{z}, \bar{w}]$$

y así $g(\bar{z}, \bar{w}) + (\bar{w}_1 \dots \bar{w}_i) K[\bar{z}, \bar{w}] \in (\bar{f}(\bar{z}, \bar{w})) K[\bar{z}, \bar{w}]$ q.e.d.

Nota 1-4-13.- Si $R = K[[Z, W]]$ y V es la hipersuperficie de ecuación $f(Z, W) = 0$ con $v_M(f) = v$.

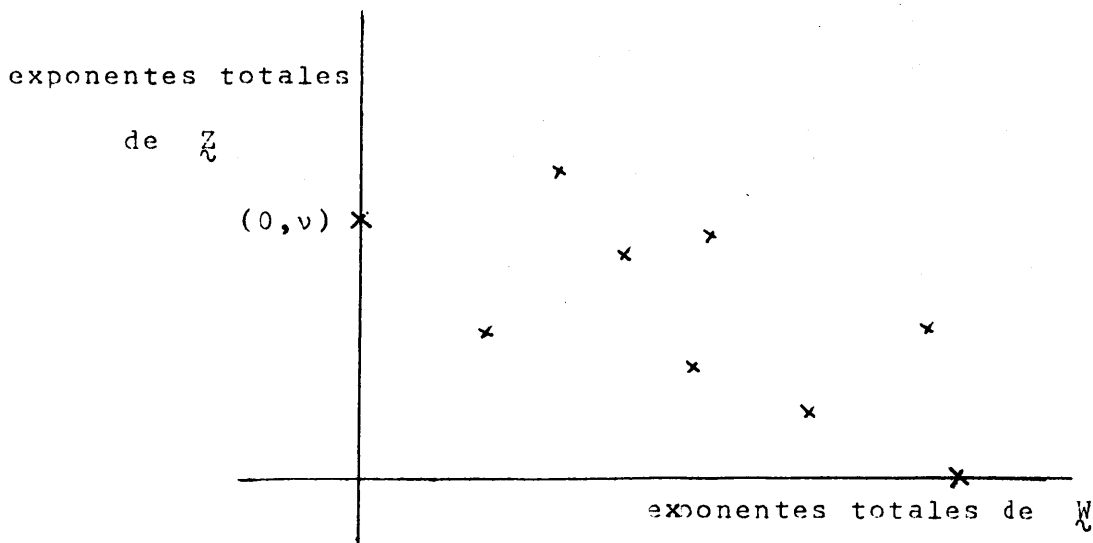
Entonces, el que la variedad algebraica regular

$$W = \text{Spec} (K[[Z, W]] / (Z_1 \dots Z_c)_{\mathbb{R}})$$

sea transversal a la hipersuperficie V es lo mismo que decir por 1-4-12 que la forma inicial de f , $\bar{f}(\bar{z}, \bar{w})$ verifica que $\bar{f}(\bar{z}, 0) \neq 0$, que es equivalente a decir que f está preparada.

Si representamos al diagrama de Newton de $f(Z, W)$, que será el conjunto de puntos $(|EB|, |A|)$ tal que $(A, B) \in \mathcal{E}_{Z, W}(f)$,

tendremos que en este diagrama de Newton existirá el punto $(0, v)$.



Es decir

W es transversal a $f \iff f$ está preparada respecto al sis

tema de parámetros (\mathbb{Z}, \mathbb{W}) .

Proposición 1-4-14.- Con las notaciones anteriores. Supongamos que $I=(f_1 \dots f_m)$, donde las formas iniciales $\bar{f}_1 \dots \bar{f}_m$ de $f_1 \dots f_m$ forman una base minimal de $\text{in}_M(I)$ y sea S_i la hipersuperficie

$$S_i = \text{Spec}(K[[\mathbb{Z}, \mathbb{W}]]_{(f_i)} \otimes K[[\mathbb{Z}, \mathbb{W}]])$$

Si W es transversal a V , entonces W es transversal a S_i , $\forall i=1 \dots m$.

Demostración.- En virtud de la proposición anterior el resultado quedará probado si demostramos que todas las \bar{f}_i deben tener necesariamente un término independiente de \bar{W} .

Supongamos por ejemplo que \bar{f}_1 no posee término independiente de \bar{W} , entonces $\bar{f}_1 \in \text{in}_M(I) \cap (\bar{W}_1 \dots \bar{W}_d)K[[\bar{Z}, \bar{W}]] = \text{in}_M(I) \cdot (\bar{W}_1 \dots \bar{W}_d)K[[\bar{Z}, \bar{W}]]$ y así se podrá escribir

$$\bar{f}_1 = \bar{W}_1 g_1 + \dots + \bar{W}_d g_d, \quad g_i \in \text{in}_M(I)$$

donde los g_i son homogéneos de grado una unidad inferior al de \bar{f}_1 .

Pero también se tiene que

$$g_i = \sum_{j=1}^m g_{ij} \bar{f}_j, \quad i=1, \dots, d,$$

donde los g_{ij} son, bien cero, bien homogéneos y tales que $\text{grado } g_i = \text{grado}(g_{ij}) + \text{grado}(\bar{f}_j)$. Por tanto se puede escribir

$$\bar{f}_1 = (\bar{W}_1 g_{11} + \dots + \bar{W}_d g_{d1}) \bar{f}_1 + \dots + (\bar{W}_1 g_{1m} + \dots + \bar{W}_d g_{dm}) \bar{f}_m$$

Pero como, para cada $i=1, \dots, d$ debe ser

$\text{grado } g_i = \text{grado}(\bar{f}_1) - 1 = \text{grado}(g_{i1}) + \text{grado}(\bar{f}_1)$, es necesariamente $g_{11} = \dots = g_{d1} = 0$; lo que contradice la hipótesis de

que $(\bar{f}_1 \dots \bar{f}_m)$ sea una base minimal de $\text{in}_M(I)$.

Definición 1-4-15.- Sea $V = \text{Spec}(K[[Z, W]]/I)$ una variedad algebroide. Sea J un ideal primo regular de $K[[Z, W]]$ tal que $J \supset I$. Sea Γ la subvariedad de V dada por

$$\Gamma = \text{Spec}(K[[Z, W]]/J) = \text{Spec}(R^*/J^*)$$

con $R^* = R/I = K[[Z, W]]/I$ y $J^* = J/I$

Se dirá que V es normalmente plana a lo largo de Γ si R^*/J^* es regular y si $\text{Gr}_{J^*}(R^*)$ es libre sobre R^*/J^* .

Proposición 1-4-16.- Bennett [8], § 2

Con las notaciones de 1-4-15, si M es el ideal maximal de R , entonces se verifica que V es normalmente plana a lo largo de Γ si y solo si se tiene:

- 1) R/J es regular.
- 2) Existe una base $f_1 \dots f_p$ del ideal I de R que verifica:
 - i) Las formas iniciales $\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_p$ de las series f_1, \dots, f_p forman una base minimal del ideal $\text{in}_M(I)$ del cono tangente a V .
 - ii) $v_M(f_1) \leq v_M(f_2) \leq \dots \leq v_M(f_p)$
 - iii) $v_J(f_i) = v_M(f_i)$, $i=1 \dots p$, donde $v_J(f_i)$ es el orden de f_i en la filtración $\{J^i\}_{i \in \mathbb{Z}_0}$

Nota 1-4-17.- Bennett [8]

Si θ es un anillo local y \mathfrak{p} un ideal primo en θ , diremos que \mathfrak{p} es admisible en θ si θ/\mathfrak{p} es regular y $\text{Gr}_{\mathfrak{p}}(\theta)$ es libre sobre θ/\mathfrak{p} .

Sea ahora R un anillo local regular y J un ideal primo

regular de R . Si I es un ideal de R tal que $J \supset I$ se dirá que I es admisible para J cuando J/I sea admisible en R/I .

De estas dos definiciones y de la platitud normal se deduce que: La condición necesaria y suficiente para que la variedad algebraíde $V = \text{Spec}(K[[Z, W]]/I)$ sea normalmente plana a lo largo de la variedad algebraíde regular $V = \text{Spec}(K[[Z, W]]/J)$ es que el ideal I sea un ideal admisible para J .

Enunciaremos el criterio numérico de platitud normal de Bennett ([B], § 4), para ello tendremos que definir la función de Hilbert:

Sea θ un anillo local de ideal maximal m . Definiremos la función de Hilbert de θ y la llamaremos $H_{\theta}^{(0)}$ de la manera siguiente:

$$H_{\theta}^{(0)}(n) = \dim_K (m^n / m^{n+1}), \quad n \in \mathbb{Z}_0 \quad \text{y} \quad K = \theta/m$$

Para $i \geq 0$ se define la función $H_{\theta}^{(i)}$: $H_{\theta}^{(i)}(n) = \sum_{j=0}^n H_{\theta}^{(i-1)}(j)$ pues podemos suponer definida la $H_{\theta}^{(i-1)}$.

Entonces el criterio numérico de platitud normal dice lo siguiente: Sea θ un anillo local y p un ideal primo de θ tal que θ/p sea regular de dimensión d y $H_{\theta}^{(1)} = \binom{d+1}{0}$.

En estas condiciones se verifica que p es admisible en θ .

Nota 1-4-18.- Sea $\{f_i\}_{1 \leq i \leq p}$ una familia de no unidades de R ; para cada $i=1 \dots p$ se escribirá la forma inicial \bar{f}_i de f_i de la siguiente manera:

$$\bar{f}_i = \gamma_i(\bar{Z}) + \psi_i(\bar{Z}, \bar{W}),$$

donde $\psi_i(\bar{Z}, \bar{W}) \in (\bar{W})K[[\bar{Z}, \bar{W}]]$. Obsérvese que la variedad algebraíde regular

$$W = \text{Spec}(R/(Z_1, \dots, Z_c)R)$$

es transversal a la hipersuperficie

$$H^{(i)} = \text{Spec } (R / (f_{ii})R)$$

si y solo si $\mathcal{F}_i(\bar{K}) \neq 0$.

Recordamos que $\mathcal{E}_{\bar{K}}(\mathcal{F}_i)$ es el conjunto de los multiíndices

$A \in \mathbb{Z}_0^C$ tales que el coeficiente (que es una constante) del monomio \bar{K}^A en $\mathcal{F}_i(\bar{K})$ sea distinto de cero. Obviamente

$\mathcal{E}_{\bar{K}}(\mathcal{F}_i)$ es un conjunto finito y se designará por $\text{lex}_{\bar{K}}(\mathcal{F}_i)$ al mayor elemento, para el orden lexicográfico de $\mathcal{E}_{\bar{K}}(\mathcal{F}_i)$.

Se designará por

$$\text{Exp}_{\bar{K}}(\mathcal{F}_1 \dots \mathcal{F}_p) = \{ \text{lex}_{\bar{K}}(\psi) \mid \psi \in (\mathcal{F}_1 \dots \mathcal{F}_p)K \subset \bar{K} \}$$

Se verifican trivialmente las siguientes propiedades:

i) $\text{Exp}_{\bar{K}}(\mathcal{F}_1 \dots \mathcal{F}_p) = \{ \text{lex}_{\bar{K}}(\psi) \mid \psi \in (\mathcal{F}_1 \dots \mathcal{F}_p)K \subset \bar{K}, \psi \text{ homogéneo} \}$

ii) $\text{Exp}_{\bar{K}}(\mathcal{F}_1 \dots \mathcal{F}_p) + \mathbb{Z}_0^r = \text{Exp}_{\bar{K}}(\mathcal{F}_1 \dots \mathcal{F}_p)$, luego existen por 1-1-8,

unos $A_1 \dots A_q \in \text{Exp}_{\bar{K}}(\mathcal{F}_1 \dots \mathcal{F}_p)$, $A_i = \text{lex}_{\bar{K}}(\gamma_i)$, $i=1 \dots q$,

$\gamma_i \in (\mathcal{F}_1 \dots \mathcal{F}_p)K \subset \bar{K}$, γ_i homogéneo de tal manera que

$$\text{Exp}_{\bar{K}}(\mathcal{F}_1 \dots \mathcal{F}_p) = \bigcup_{i=1}^q [A_i + \mathbb{Z}_0^r] = \text{Exp}_{\bar{K}}(\gamma_1 \dots \gamma_q)$$

Definición 1-4-19. - Con las notaciones de 1-4-18. Sea

$\{f_i\}_{1 \leq i \leq p}$ una familia de no unidades $f_i \in R$ tales que,

escribiendo la forma inicial \bar{f}_i como

$$\bar{f}_i = \mathcal{F}_i(\bar{K}) + \psi_i(\bar{K}, \bar{K}), \quad i=1 \dots p, \quad \psi_i(\bar{K}, \bar{K}) \in (\bar{K})K \subset \bar{K}$$

de manera que $\mathcal{F}_i(\bar{K}) \neq 0$, $i=1 \dots p$.

Se dirá que un elemento $g \in RR$ está normalizado por $(f_1 \dots f_p)$

con respecto a las variables \bar{z}_i, \bar{w}_i si y solo si se verifica que

$$[1] \sum_{\bar{z}} (g) \cap \text{Exp}_{\bar{z}} (f_1 \dots f_p) = \emptyset$$

Nota 1-4-20.-

Nótese que la condición [1] es independiente de la elección de las \bar{w}_i en tanto que no cambie el anillo $K[[\bar{w}]]$. Es decir, si se consideran unas nuevas variables $\bar{w}' = (w'_1 \dots w'_d)$ y un K -isomorfismo local $K[[\bar{w}]] \cong K[[\bar{w}']]$ la condición [1] se sigue verificando para los transformados en ese isomorfismo.

Teorema 1-4-21.- Teorema de existencia de las bases standard normalizadas.

Sea $V=V(I)$ una variedad algebraica, W la variedad algebraica de regular $W = \text{Spec} (R/(z_1, \dots, z_c)R)$ y Γ una variedad contenida en la intersección de V y W . Supongamos que V es normalmente plana a lo largo de Γ y que W es transversal a V . Entonces existe una base $\{f_1, \dots, f_p\}$ del ideal I tal que :

i) Las formas iniciales $(\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_p)$ forman una base minimal del ideal $\text{in}_1(I)$ del cono tangente a V .

ii) $v_0(f_i) \leq v_0(f_{i+1})$, $1 \leq i \leq p$

iii) $v_\Gamma(f_i) = v_0(f_i)$, $1 \leq i \leq p$ " siendo $v_\Gamma(f_i)$ el orden de f_i en la filtración de RR determinada por el ideal que define la variedad Γ .

iv) $\bar{f}_i \notin (\bar{w})K[[\bar{z}, \bar{w}]]$, es decir, W es transversal a cada hiper superficie $S_i = \text{Spec} ((R/(f_i))R)$.

v) Para cada $i=1, \dots, p$, f_i está normalizada por (f_1, \dots, f_{i-1})

con respecto a las variables \mathbb{Z}, \mathbb{W} . (Se supone que f_1 esta normalizada por la familia vacía).

Una tal base del ideal I será llamada una base standard \mathbb{V} -normalizada.

Demostración.- Para la demostración del teorema nos apoyaremos en unos lemas que demostraremos a continuación

Notaciones 1-4-22.-

Consideremos las formas lineales siguientes:

$$i) L: \mathbb{R}_0^d \rightarrow \mathbb{R} \quad L(Y_1 \dots Y_d) = \sum_{j=1}^d \beta_j Y_j, \quad \beta_j \in \mathbb{R}_0$$

$$ii) L': \mathbb{R}_0^{c+d} \rightarrow \mathbb{R} \quad L'(X_1 \dots X_c, Y_1 \dots Y_d) = \sum_{i=1}^c X_i + \sum_{j=1}^d \beta_j Y_j, \quad \beta_j \in \mathbb{R}_0$$

$$iii) \text{ Si } \gamma \in \mathbb{R}, \gamma > 1 : L_\gamma: \mathbb{R}_0^{c+d} \rightarrow \mathbb{R} \quad L_\gamma(X_1 \dots X_c, Y_1 \dots Y_d) = \\ = \sum_{i=1}^c (1 - \frac{1}{2^i \gamma}) X_i + \sum_{j=1}^d ((\beta_j + \frac{1}{\gamma})) Y_j$$

Lema 1-4-23.- Con las notaciones de 1-4-18, 1-4-22.

Sea $\{f_i\}_{1 \leq i \leq p}$ una familia de no unidades de R , tales

que $\mathcal{V}_i(\bar{\mathbb{Z}}) \neq \emptyset \quad \forall i=1 \dots p$. Sea $A_i = \text{lex}_{\bar{\mathbb{Z}}}(\mathcal{V}_i)$, L y L'

formas lineales como en 1-4-22 tal que $\forall i=1 \dots p$ y $\forall (A, B) \in$

$\in \mathcal{E}_{\mathbb{Z}, \mathbb{W}}(f_i)$ sea

$$v_{L'}(\mathbb{Z}^A \mathbb{W}^B) \geq v_L(\mathbb{Z}^A) = |A_i|$$

En esta situación se verifica que existe $\gamma_0 \in \mathbb{R}_0$ tal que pa-

ra todo $\gamma \geq \gamma_0$ es $L_\gamma \in \mathcal{L}(\mathbb{F}, \mathbb{A})$ con $\mathbb{F} = (f_1 \dots f_p)$,

$\mathbb{A} = (A_1 \dots A_p)$ y $\mathcal{L}(\mathbb{F}, \mathbb{A})$ definido como en 1-2-1. En particular

$$\mathcal{L}(\mathbb{F}, \mathbb{A}) \neq \emptyset.$$

Demostración.-

En virtud de la definición de $\mathcal{L}(\mathbb{F}, \mathbb{A})$ nos bastará demostrar

que existe un $\gamma_0 \in \mathbb{R}_0$ tal que $\forall \gamma > \gamma_0, \forall i=1 \dots p$ y

$\forall (A,B) \in \sum_{\mathbb{Z}, \mathbb{W}} (f_i), (A,B) \neq (A_i, 0)$ es

$$L_\gamma(A,B) > L_\gamma(A_i, 0)$$

De otro lado, observese que, por la hipótesis hecha, para todo $i=1, \dots, p$ y todo $(A,B) \in \sum_{\mathbb{Z}, \mathbb{W}} (f_i)$ es

$$|A| + L(B) \geq |A_i|$$

Sea i_0 un entero cualquiera pero fijo, $1 \leq i_0 \leq p$ y sea

$(A,B) \in \sum_{\mathbb{Z}, \mathbb{W}} (f_{i_0}), (A,B) \neq (A_{i_0}, 0)$, entonces si

$A=(a_1, \dots, a_c), B=(b_1, \dots, b_d), A_{i_0}=(a_{i_01}, \dots, a_{i_0c})$ tendremos

$$L_\gamma(A,B) - L_\gamma(A_{i_0}, 0) = \sum_{i=1}^c (1 - \frac{1}{2^i \gamma}) a_i +$$

$$+ \sum_{j=1}^d (\beta_j + \frac{1}{\gamma}) b_j - \sum_{i=1}^c (1 - \frac{1}{2^i \gamma}) a_{i_0} = \sum_{i=1}^c a_i +$$

$$+ \sum_{j=1}^d \beta_j b_j - \sum_{i=1}^c a_{i_0} - \sum_{i=1}^c \frac{1}{2^i \gamma} a_i + \frac{1}{\gamma} \sum_{j=1}^d b_j + \sum_{i=1}^c \frac{1}{2^i \gamma} a_{i_0} =$$

$$= |A| + L(B) - |A_{i_0}| + \sum_{i=1}^c \frac{1}{2^i \gamma} (a_{i_0} - a_i) + \frac{1}{\gamma} \sum_{j=1}^d b_j$$

Teniendo en cuenta $|A| + L(B) \geq |A_{i_0}|$ puede suceder:

i) $|A| = |A_{i_0}|, B=0$

En este caso $A_{i_0} > A$ para el orden lexicográfico por construc

ción de A_{i_0} . Existe por tanto un entero $q, 1 \leq q \leq c$ tal

que $a_i = a_{i_0i}$ para $i < q$ y $a_q < a_{i_0q}$. Así $a_{i_0q} - a_q \geq 1$

y se tiene

$$L_Y(A,0) - L_Y(A_i,0) = \frac{a_{i_0} - a_i}{Y} - \sum_{i=q+1}^c \frac{a_i - a_{i_0}}{2i} >$$

$$> \frac{a_{i_0} - a_i}{Y} - \frac{1}{Y} \sum_{i=q+1}^c a_i > \frac{1}{Y} - \frac{v_{i_0}}{2q+1} = \frac{Y - v_{i_0}}{2q+1}$$

por tanto si $Y > v_{i_0}$ es $L_Y(A,0) > L_Y(A_i,0)$

ii) $|A| < |A_{i_0}|$, $B \neq 0$

En este caso

$$L_Y(A,B) - L_Y(A_i,0) = |A| + L(B) - |A_{i_0}| + \sum_{i=1}^c \frac{1}{2i} (a_{i_0} - a_i) +$$

$$+ \frac{1}{Y} \sum_{j=1}^d b_j > - \sum_{i=1}^c \frac{a_i}{2i} + \frac{1}{Y} \sum_{j=1}^d b_j > \frac{|B|}{Y} - \frac{1}{Y} \sum_{i=1}^c a_i =$$

$$= \frac{|B|}{Y} - \frac{|A|}{2} > \frac{|B|}{Y} - \frac{v_{i_0}}{2} = \frac{Y|B| - v_{i_0}}{2}$$

Luego si $Y > v_{i_0}$ al ser $|B| > 1$ tendremos también en este caso que $L_Y(A,B) > L_Y(A_{i_0},0)$.

iii) $|A| > |A_{i_0}|$ ($B=0$ ó $B \neq 0$) **indiferentemente, se tiene**

que $|A| > |A_{i_0}| + 1$ y para todo $Y > v_{i_0} + 1$

$$L_Y(A,B) = \sum_{i=1}^c (1 - \frac{1}{2i}) a_i + \sum_{j=1}^d (b_j + \frac{1}{Y}) b_j >$$

$$> \sum_{i=1}^c a_i - \sum_{i=1}^c \frac{a_i}{2i} > |A| - \frac{1}{Y} \sum_{i=1}^c a_i = |A| (1 - \frac{1}{Y}) =$$

$$= |A| \left(\frac{Y-1}{Y} \right) > (v_{i_0} + 1) \left(\frac{Y-1}{Y} \right) = v_{i_0} + \frac{1}{Y} (Y - (v_{i_0} + 1)) >$$

$$> v_{i_0} > v_{i_0} - \sum_{i=1}^c \frac{a_{i_0}}{2i} = L_Y(A_i, \infty)$$

De la consideración de estos tres casos se deduce que, si se pone $\gamma_0 = 1 + \max_{1 \leq i \leq p} \{v_i\}$

entonces, para todo $\gamma \geq \gamma_0$ es $L_\gamma \in \mathcal{L}(F, A)$

Lema 1-4-24. - Con las notaciones de 1-4-22, 1-4-23 .

Sean: a) $\{f_i\}_{1 \leq i \leq p}$ una familia de no unidades de R tales que $\tau_i(\bar{z}) \neq 0 \forall i=1 \dots p$, y $A_i = \text{lex}_{\bar{z}}(f_i)$. $i=1 \dots p$.

b) L' una forma lineal como en 1-4-22 tal que $\forall i=1 \dots p$ y $\forall (A, B) \in \mathcal{E}_{\mathbb{Z}, \mathbb{W}}(f_i)$ se verifique:

$$v_{L'}(\mathbb{Z}^A \mathbb{W}^B) \geq v_{L'}(\mathbb{Z}^A) = |A_i|$$

c) $\{\square_i\}_{0 \leq i \leq p}$ una partición de \mathbb{Z}_0^C tal que:

i) $\square_i \subset A_i + \mathbb{Z}_0^C$, $\forall i, 0 \leq i \leq p$ ($A_0 = (0 \dots 0) \in \mathbb{Z}_0^C$)

ii) $A_i \in \square_i$ ó $\square_i = \emptyset$, $\forall i, 1 \leq i \leq p$.

Entonces para toda función $g \in R$ existen funciones $h_i \in R$, $0 \leq i \leq p$ tal que:

$$1) g = h_0 + \sum_{i=1}^p h_i f_i$$

$$2) \mathcal{E}_{\bar{z}}(h_i \mathbb{Z}^{A_i}) \subset \square_i$$

$$3) v_{L'}(h_i) \geq v_{L'}(g) - v_{L'}(f_i) \quad i=1 \dots p$$

Demostración. - Como hemos demostrado en el lema 1-4-23 que

$L_\gamma \in \mathcal{L}(F, A) \forall \gamma \geq 1 + \max \{v_i\}$, $1 \leq i \leq p$ el teorema preparatorio de Weierstrass-Hironaka-Aroca (teorema 1-2-3) nos permite deducir la existencia de una familia $\{h_i\}_{0 \leq i \leq p}$ de series

de R que verifican 1), 2) . Además esa familia verifica que

$\forall L_\gamma \in \mathcal{L}(F, A)$,

$$v_{L_\gamma}(h_i) \geq v_{L_\gamma}(g) - v_{L_\gamma}(f_i) \quad i=1 \dots p$$

Pero como, para todo $f \in R$, es

$$v_L(f) = \lim_{\gamma \rightarrow \infty} v_{L_\gamma}(f)$$

y puesto que $L_\gamma \in \mathcal{L}(K, A)$ para todo $\gamma \geq \gamma_0$, es

$$v_L(h_i) \geq v_L(g) - v_L(f_i) \quad i=1 \dots p$$

Esto concluye la demostración del lema.

Notaciones 1-4-25.- Sea W la variedad algebraíde regular

$W = \text{Spec}(R/(Z_1, \dots, Z_c)R)$ y consideremos una variedad algebraíde regular $\Gamma \subset W$.

$$\Gamma = \text{Spec}(R/I')$$

donde I' es un ideal regular de R , $I' \supset (Z_1, \dots, Z_c)R$.

Para cada $f \in R$ designaremos por $v_{\Gamma}(f)$ el orden de f en la filtración de R determinada por el ideal I' .

Lema 1-4-26.- Sea $\{f_i\}_{1 \leq i \leq p}$ una familia de no unidades

de R tales que $\nabla_i(\bar{z}_i) \neq 0$, $i=1, \dots, p$, y tales que $v_{\Gamma}(f_i) = v_{\underline{0}}(f_i)$ $i=1 \dots p$. Entonces para todo $g \in R$ existe

una familia $\{h_i\}_{1 \leq i \leq p}$ de series $h_i \in R$ tales que

i) $v_{\Gamma}(h_i) \geq v_{\Gamma}(g) - v_{\Gamma}(f_i)$ „ $1 \leq i \leq p$

ii) $g - \sum_{i=1}^p h_i f_i$ está normalizada por (f_1, \dots, f_p) respecto de las variedades (Z, W) .

Demostración.- Puesto que (ii) es independiente de W se puede suponer que $I' = (Z, W_1, \dots, W_r)$ $r \leq d$ (también por ser primo

regular el ideal $I' \gamma I \supset (Z_1 \dots Z_c)R$.

De otro lado, por la nota 1-4-18, existen unos polinomios homogéneos $\gamma_1 \dots \gamma_q \in K[\bar{Z}, \bar{W}] = \text{gr}_M(R)$ tales que si $A_i = \text{lex}_{\bar{Z}}(\gamma_i)$

se tiene que

$$\text{Exp}_{\bar{Z}}(\gamma_1 \dots \gamma_p) = \bigcup_{i=1}^q (A_i + Z_0^c) = \text{Exp}_{\bar{Z}}(\gamma_1 \dots \gamma_q)$$

En este caso se puede escribir

$$\gamma_j = \sum_{i=1}^p \lambda_{ji}(\bar{Z}) \gamma_i, \quad j=1 \dots q$$

donde los $\lambda_{ji}(\bar{Z})$ son, bien cero, bien polinomios homogéneos tales que

$$\text{grado}(\lambda_{ji}) = \text{grado}(\gamma_j) - \text{grado}(\gamma_i)$$

Pongamos, para cada $j=1 \dots q$,

$$h_j^!(Z, W) = \sum_{i=1}^p \lambda_{ji}(Z) f_i$$

Se tiene entonces que la forma inicial $\bar{h}_j^!$ de $h_j^!$ es

$$\bar{h}_j^!(\bar{Z}, \bar{W}) = \gamma_j + \sum_{i=1}^p \lambda_{ji}(\bar{Z}) \psi_i(\bar{Z}, \bar{W})$$

donde

$$\sum_{i=1}^p \lambda_{ji}(\bar{Z}) \cdot \psi_i(\bar{Z}, \bar{W}) \in (\bar{W})K[\bar{Z}, \bar{W}], \quad 1 \leq j \leq q$$

De otro lado se tiene obviamente que

$$v_{\Gamma}(\bar{h}_j^!) = v_{\underline{0}}(\bar{h}_j^!) = \text{gr}(\gamma_j)$$

pues $I' = (Z, W_1, \dots, W_r)$ y $v_{\Gamma}(f_i) = \underline{0}(f_i)$

Estamos en condiciones de aplicar el lema 1-4-24 pues disponemos de : a) $\{h_j^!\}_{1 \leq j \leq q}$ una familia de no unidades de R

tales que $\gamma_j \neq 0 \quad \forall j=1 \dots q$, $A_j = \text{lex}_{\bar{Z}}(\gamma_j)$

b) L' forma lineal $\mathbb{R}_0^{c+d} \rightarrow \mathbb{R}$, $L(X_1 \dots X_c, Y_1 \dots Y_d) = \sum_{i=1}^c X_i + \sum_{j=1}^d Y_j$, tal que $\forall j=1 \dots q$ y $\forall (A, B) \in \mathcal{E}_{\mathbb{Z}, \mathbb{W}}(h_j^!)$ se veri-

fica

$$v_L(\mathbb{Z}_{\mathbb{W}}^{A \cup B}) \geq v_L(\mathbb{Z}_{\mathbb{W}}^A)$$

c) $\{\square_j\}_{0 \leq j < q}$ una partici3n de \mathbb{Z}_0^c tal que:

i) $\square_j \subset A_j + \mathbb{Z}_0^c$, $\forall j$, $0 \leq j < q$ ($A_0 = (0 \dots 0) \in \mathbb{Z}_0^c$)

ii) $A_j \in \square_j$ o $\square_j = \emptyset$, $\forall j$, $1 \leq j < q$

Luego para toda funci3n $g \in \mathbb{R}$ existe una familia

$\{h_j''\}_{0 \leq j < q}$ de series $h_j'' \in \mathbb{R}$ tales que:

1) $g = h_0'' + \sum_{j=1}^q h_j'' h_j^!$

2) $\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}(h_j'' \mathbb{Z}_{\mathbb{W}}^{A_j}) \subset \square_j$

3) $v_L(h_j'') \geq v_L(g) - v_L(h_j^!)$ $1 \leq j < q$

Pongamos ahora

$$h_i = \sum_{j=1}^q \lambda_{ji}(\mathbb{Z}) h_j''(\mathbb{Z}_{\mathbb{W}}^{\mathbb{W}}), \quad 1 \leq i \leq p$$

se tiene entonces que

$$\sum_{i=1}^p h_i f_i = \sum_{i=1}^p \left(\sum_{j=1}^q \lambda_{ji}(\mathbb{Z}) h_j''(\mathbb{Z}_{\mathbb{W}}^{\mathbb{W}}) \right) f_i = \sum_{j=1}^q h_j^! h_j''$$

Luego $g - \sum_{i=1}^p h_i f_i = g - \sum_{j=1}^q h_j^! h_j'' = 1''$ y entonces

$$\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}(h_0'' \mathbb{Z}_{\mathbb{W}}^{A_0}) \cap \left[\bigcup_{i=1}^q (A_i + \mathbb{Z}_0^r) \right] = \mathcal{E}_{\mathbb{Z}}(h_0'') \cap \left[\bigcup_{i=1}^q (A_i + \mathbb{Z}_0^r) \right] = \emptyset$$

pues es-

cogemos la partici3n

$$\square_1 = A_1 + Z_0^c$$

$$\square_2 = A_2 + Z_0^c - [\square_1 \cap A_2 + Z_0^c]$$

.....

$$\square_i = A_i + Z_0^c - [\square_{i-1} \cap A_i + Z_0^c] \dots \dots \dots \vee$$

$$\square_0 = Z_0^c - \bigcup_{i=1}^q \square_i$$

con lo que queda demostrada la condición ii) del enunciado.

De otro lado se tiene que

$$v_{L'}(h_i) \geq \min_{1 \leq j \leq q} \{v_{L'}(\lambda_{ji}(\bar{z})) + v_{L'}(h_j^u)\}$$

pero

$$\begin{aligned} v_{L'}(\lambda_{ji}(\bar{z})) + v_{L'}(h_j^u) &\geq \text{grado}(\lambda_{ji}(\bar{z})) + v_{L'}(g) - \\ -v_{L'}(h_j^l) &= \text{grado}(\lambda_{ji}(\bar{z})) + w_{L'}(g) - \text{grado}(f_j) = \\ &= v_{L'}(g) - \text{grado}(f_j) = v_{L'}(g) - v_{L'}(f_j) \end{aligned}$$

de donde $v_{L'}(h_i) \geq v_{L'}(g) - w_{L'}(f_i)$

y como $v_{L'} = v_{\Gamma}$, se tiene la proposición.

Una vez concluida la demostración de estos lemas previos podemos ya construir las bases standard normalizadas.

Nuevamente sea I un ideal de R , $V = \text{Spec}(R/I)$

$$W = \text{Spec}(R/(z_1, \dots, z_c)_R) \quad \cdot \quad J = (z_i)R + I \quad \text{luego}$$

$$W \cap V = \text{Spec}(R/J)$$

Sea $I' \in \text{Spec}(R)$, $I' \supset J$, $\Gamma = \text{Spec}(R/I')$, Γ una subvariedad algebroide regular de $W \cap V$.

Entonces la existencia de una base (f_1, \dots, f_p) del ideal I que verifique las condiciones (i), (ii), (iii) del enunciado del teorema 1-4-21 es consecuencia de ser V normalmente plana a lo largo de \mathcal{V} . Que se verifique (iv) es consecuencia de la proposición (1-4-14) pues al formar las $\{f_1, \dots, f_p\}$ una base del ideal I de manera que sus formas iniciales son una base minimal de $\text{in}_M(I)$ y ser W transversal a V tendremos que W será transversal a cada una de las hipersuperficies:

$$S_i = \text{Spec} (K[[Z, W]] / (f_i)_R) \quad ,$$

luego $\bar{F}_i^{-1}(\bar{U}) \subset K[[\bar{Z}, \bar{W}]]$

La técnica a seguir ahora será modificar la familia $\{f_1, \dots, f_p\}$ de tal manera que se verifique (v) sin afectar a las otras condiciones.

Sea q el mínimo entero, $1 \leq q \leq p$ tal que (f_1, \dots, f_q) verifique (v) (nótese que siempre es $q \geq 1$). Si $q=p$, no hay nada que probar, supongamos que $q < p$. Por el lema (1-4-26) aplicado a f_{q+1} y $\{f_1, \dots, f_q\}$ existe una familia $\{h_i\}_{1 \leq i \leq q}$

de elementos $h_i \in R$ tales que

$$i) \quad v_{\mathcal{V}}(h_i) \geq v_{\mathcal{V}}(f_{q+1}) - v_{\mathcal{V}}(f_i) \quad , \quad 1 \leq i \leq q$$

$$ii) \quad (f_{q+1} - \sum_{i=1}^q h_i f_i) \text{ está normalizada por } (f_1, \dots, f_q)$$

con respecto a las variables (Z, W) .

Pongamos $f'_{q+1} = f_{q+1} - \sum_{i=1}^q h_i f_i$; se tiene que la familia

$\{f_1, \dots, f_q, f'_{q+1}, f_{q+2}, \dots, f_p\}$ verifica las condiciones (i)

a (iv) y (v) se cumple para $\{f_1, \dots, f_q, f'_{q+1}\}$ al menos.

Por repetición conveniente de este proceso se llega a nuestro resultado, quedando completa la demostración del teorema 1-4-21.

CAPITULO II

Transformaciones monoidales y cuadráticas

Introducción

El objetivo esencial de este capítulo es el describir las explosiones (blowing-ups) de ideales de funciones algebroides en n indeterminadas con coeficientes en un cuerpo algebraicamente cerrado. Las notaciones serán esencialmente las de Bennett [8] y Lipman [29].

§ 2-1.- Variedades algebroides intrínsecas.

Introducción.- Sección dedicada a caracterizar el anillo de coordenadas de una variedad algebroides.

Nota 2-1-1 .- Sea \mathfrak{A} un anillo local noetheriano de ideal maximal M , sea $K = \mathfrak{A}/M$. Llamaremos $x(-)$ =característica $(-)$.

Se pueden presentar dos casos:

i) $x(K)=0$ entonces $x(\mathfrak{A})=0$.

ii) $x(K)=p>0$ entonces $x(\mathfrak{A})=0$ ó $x(\mathfrak{A})=p^n$,

$n \geq 1$. En efecto si $x(\mathfrak{A}) \neq 0$ es $x(\mathfrak{A})=mp^n$, $n > 0$ con m primo con p . Ahora si 1 es el elemento unidad de \mathfrak{A} , al ser $x(K)=p$, $p.1 \in M$. Entonces $\exists n'$ tal que $(p.1)^{n'} = p^{n'}.1 = 0$ y $x(\mathfrak{A})$ divide a $p^{n'}$, luego $x(\mathfrak{A})=p^n$, con $n \geq 1$. Por tanto en este caso puede ser $x(\mathfrak{A}) \neq x(K)$.

Definición 2-1-2.- Con las notaciones de 2-1-1, diremos que el anillo local noetheriano \mathfrak{A} es equicaracterístico si y solo si $x(\mathfrak{A}) = x(\mathfrak{A}/\mathfrak{M})$.

Teorema 2-1-3.- (Cohen).- Sea \mathfrak{A} un anillo local noetheriano, completo, equicaracterístico, de ideal maximal \mathfrak{M} y $K = \mathfrak{A}/\mathfrak{M}$. En estas condiciones se verifica que \mathfrak{A} admite un subcuerpo isomorfo a K .

Demostración.- Zariski-Samuel [46], capítulo VIII, § 12, Nagata [34], capítulo V, § 31.

Definición 2-1-4.- Si \mathfrak{A} es un anillo local noetheriano, completo, equicaracterístico y $K = \mathfrak{A}/\mathfrak{M}$, a K se le llama cuerpo de coeficientes de \mathfrak{A} . En lo sucesivo consideraremos a K sumergido en \mathfrak{A} .

Definición 2-1-5.- Sea \mathfrak{A} un anillo local noetheriano. Llamaremos dimensión de inmersión de \mathfrak{A} a la dimensión de $\mathfrak{A}/\mathfrak{M}^2$ considerado como K -espacio vectorial.

Teorema 2-1-6.- Si \mathfrak{A} es un anillo local noetheriano completo, equicaracterístico de dimensión de inmersión n y cuerpo de coeficientes $K \subset \mathfrak{A}$, existe un epimorfismo $K[[X_1 \dots X_n]] \twoheadrightarrow \mathfrak{A}$.

Demostración.- Para la demostración del teorema nos apoyaremos en los dos lemas siguientes.

Lema 2-1-7.- Sea \mathfrak{A} un anillo local noetheriano, completo, equicaracterístico, $K \subset \mathfrak{A}$ su cuerpo de coeficientes y x_1, \dots, x_n un sistema de generadores del ideal maximal \mathfrak{M} de \mathfrak{A} , entonces $\forall a \in \mathfrak{A}$

$$a = \sum_{A \in \mathbb{Z}_0^n} r_A \mathfrak{X}^A, \quad r_A \in K, \quad \mathfrak{X}^A = x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}$$

Lema 2-1-8.- Sea $f: B \twoheadrightarrow \mathfrak{A}$ un homomorfismo de un anillo cualquiera B en un anillo local, completo, equicaracterístico \mathfrak{A} y sean x_1, \dots, x_n elementos del ideal maximal \mathfrak{M} de \mathfrak{A} . Existe una única prolongación g de f al anillo de series

de potencias formales $B[[X_1 \dots X_n]]$, tal que $g(X_i) = x_i$, $1 \leq i \leq n$.

Con el auxilio de estos dos lemas demostraremos el teorema 2-1-6.

Demostración del teorema 2-1-6.- Si tomamos un sistema de generadores minimal x_1, \dots, x_n de M por el lema 2-1-8 la inclusión $K \hookrightarrow \square$ se puede ampliar de forma única a un homomorfismo $g: K[[X_1, \dots, X_n]] \rightarrow \square$ de modo que $g(X_i) = x_i$, $1 \leq i \leq n$ y por el lema 2-1-7 g es suprayectivo.

Demostraremos ahora únicamente el lema 2-1-8, pues el lema 2-1-7 ya es conocido.

Demostración del lema 2-1-8.-

Existe una única prolongación h de f al anillo de polinomios $B[X_1 \dots X_n]$ tal que $h(X_i) = x_i$. Sea \mathfrak{a} el ideal engendrado por las X_i en el anillo de polinomios. Completamos este anillo en la topología \mathfrak{a} -ádica y obtenemos el anillo de series de potencias formales $B[[X_1 \dots X_n]]$. Por ser $h(\mathfrak{a}) \subset M$, h es uniformemente continua y admite por tanto una única extensión a un homomorfismo g del anillo de series de potencias en el anillo \square .

Definición 2-1-9.- Llamaremos variedad algebroide intrínseca o simplemente variedad algebroide a $\text{Spec}(\square)$ siendo \square un anillo local noetheriano, completo, equicaracterístico y reducido, de dimensión de inmersión finita y cuerpo de coeficientes algebraicamente cerrado.

Proposición 2-1-10.- Si $\text{Spec}(\square)$ es una variedad algebroide y dimensión de inmersión de \square es n , entonces $\text{Spec}(\square)$ es una variedad algebroide sumergida en K^n siendo K el cuerpo de coeficientes de \square .

Demostración.- Aplicando el teorema 2-1-6 existe un epimorfismo γ de $K[[X_1 \dots X_n]]$ en \square , si $I = \text{Ker } \gamma$ tendremos

$$\square \cong K[[X_1 \dots X_n]]/I.$$

Por otra parte \square reducido implica I radical lo cual completa la demostración y podemos afirmar que las variedades algebroides intrínsecas coinciden con las variedades algebroides sumergidas definidas en el capítulo I.

§ 2-2.- Explosiones de variedades algebroides.

Introducción.- Sección dedicada a definir las transformaciones monoidales y cuadráticas de variedades algebroides.

2-2-1.- En esta sección \square representa el anillo de coordenadas de una variedad algebroides. Utilizando 2-1-10 escribamos $\square = K[[X_1, \dots, X_n]]/I$ con $\sqrt{I}=I$ y n =dimensión inmersión de \square . Podemos escribir $\square = K[[x_1, \dots, x_n]]$, $x_i = X_i + I$. Si llamamos M al ideal maximal de \square , $M = (x_1, \dots, x_n)\square$ y si P es un ideal primo de \square , escribiremos $H = \bigoplus_{n=0}^{\infty} P^n$ con el convenio usual $P^0 = \square$.

Proposición 2-2-2.- H es, de forma natural, una \square -álgebra graduada de tipo finito.

Demostración.- H tiene estructura natural de anillo, inducida por las operaciones de \square , se verifica que $\forall n, m \quad P^n \cdot P^m \subset P^{n+m}$ luego es anillo graduado.

H es una \square -álgebra de homomorfismo estructural

$$\square \hookrightarrow H := \square \oplus P \oplus P^2 \oplus \dots \oplus P^n \oplus \dots$$

$$r \longmapsto r$$

que también es de tipo finito por ser \square noetheriano.

Definición 2-2-3.- Llamaremos $B\ell_P(\square) = \text{Proj} \left(\bigoplus_{n=0}^{\infty} P^n \right)$

Proposición 2-2-4.- Si f_1, \dots, f_r es un sistema de generadores de P y si $\square[P/f_i]$ es la \square -subálgebra de \square_{f_i} generada por $\{-\frac{a}{f_i}\}_{a \in P}$, se verifica que:

i) $D_+(f_i) \cong \text{Spec } \square[P/f_i]$

- ii) $\{D_+(f_i)\}_{1 \leq i \leq r}$ es un recubrimiento abierto de $B\mathbb{A}_P(\square)$
- iii) $B\mathbb{A}_P(\square)$ es un S-esquema proyectivo de tipo finito, con $S = \text{Spec}(\square)$.

Demostración.-

i) Al ser los f_1, \dots, f_r un sistema de generadores de P podemos definir un homomorfismo graduado de grado cero

$$\square[Y_1, \dots, Y_r] \xrightarrow{0} H$$

$$Y_i \xrightarrow{0} f_i$$

0 así definido es un homomorfismo suprayectivo y $\text{Ker } 0$ es homogéneo luego

$$H \cong \theta' \square[Y_1, \dots, Y_r] / \text{Ker } 0$$

y θ' es isomorfismo de grado cero.

Podemos llamar $Y_i + \text{Ker } 0 = f'_i$ e identificar H con

$\square[f'_1, \dots, f'_r]$ como \square -álgebras graduadas, identificando f_i con $f'_i \quad \forall i$.

Recordando que $D_+(f'_i) \cong \text{Spec}(H_{(f'_i)})$ [Grothendieck [17], capítulo II, 2-3-6] con $H_{(f'_i)}$ el subanillo de $H_{f'_i}$ formado por los elementos de grado cero, es decir

$$H_{(f'_i)} = \square \left[\frac{f'_1}{f'_i}, \dots, \frac{\widehat{f'_i}}{f'_i}, \dots, \frac{f'_r}{f'_i} \right]$$

Luego

$$D_+(f_i) \cong \text{Spec} \left(\square \left[\frac{f_1}{f_i}, \dots, \frac{\widehat{f_i}}{f_i}, \dots, \frac{f_r}{f_i} \right] \right)$$

ii) Aplicando (Grothendieck [17], capítulo II, 2-1-5) sabemos que el anillo H es noetheriano pues \square es noetheriano y H una \square -álgebra de tipo finito. Luego por (Grothen

dieck [17], capítulo II, 2-7-1-i) $B\mathbb{Z}_p(\square)$ es un esquema noetheriano y los $D_+(f_i)_{1 \leq i \leq r}$ forman un recubrimiento abierto de $B\mathbb{Z}_p(\square)$.

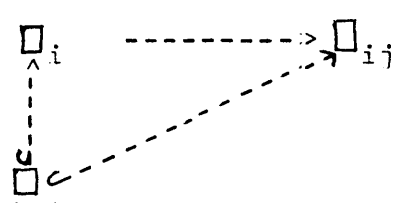
iii) Si llamamos $\square_{ij} = (\square_i)_{\frac{f_j}{f_i}}$. Se tendrá:

$$D_+(f_i) = \text{Spec} \left(\square \left[\frac{f_1}{f_i}, \dots, \frac{f_i}{f_i}, \dots, \frac{f_r}{f_i} \right] \right) = \text{Spec} (\square_i)$$

$$D_+(f_j) = \text{Spec} \left(\square \left[\frac{f_1}{f_j}, \dots, \frac{f_j}{f_j}, \dots, \frac{f_r}{f_j} \right] \right) = \text{Spec} (\square_j)$$

$$D_+(f_i \cdot f_j) = D_+(f_i) \cap D_+(f_j) = \text{Spec} (\square_i)_{\left(\frac{f_j}{f_i}\right)} = \text{Spec} (\square_{ij})$$

Tanto \square_i como \square_{ij} son \square -álgebras. Al ser conmutativo el diagrama



Se puede definir la proyección $\pi: B\mathbb{Z}_p(\square) \rightarrow S$ que es un morfismo de esquemas.

La proyección π se construye sobre cada abierto $D_+(f_i)$ como asociada a la inclusión $i: \square \rightarrow \square_i$

$$\square \xrightarrow{i} \square_i$$

$$D_+(f_i) = \text{Spec}(\square_i) \xrightarrow{\pi_i = a_i} \text{Spec}(\square), \quad a_i \text{ notación de}$$

Grothendieck [17].

La conmutatividad del diagrama anterior nos permite afirmar

$$\pi_i \Big|_{D_+(f_i) \cap D_+(f_j)} = \pi_j \Big|_{D_+(f_i) \cap D_+(f_j)} \text{ luego podemos}$$

aplicar un proceso de recollement y definir la proyección

$$\pi: B\mathbb{Z}_p(\square) \rightarrow S.$$

$B_{\mathcal{P}}(\square)$ será un S -esquema proyectivo de morfismo estructural π (Grothendieck [17], capítulo II, 5-5-1). $B_{\mathcal{P}}(\square)$ será también un S -esquema de tipo finito pues H es una \square -álgebra graduada de tipo finito (Grothendieck [17], capítulo II, 2-7-1-ii)

Definición 2-2-5.- Al morfismo π de (iii) de 2-2-4 le llamamos explosión global de \square con centro P . Si P es un ideal primo de \square diremos que π es una transformación monoidal de \square con centro P y si $P=M$ a la transformación π la llamaremos transformación cuadrática.

§ 2-3.- Propiedades de $B\mathbb{L}_P(\square)$.

Introducción.- En esta sección se describirán en primer lugar, las propiedades de las transformaciones monoidales y cuadráticas de variedades algebroides. A continuación se definirá y caracterizará el divisor excepcional de una transformación de este tipo.

Notaciones 2-3-1.- En lo que sigue, si (X, θ_X) es un esquema y si \mathfrak{J} es un ideal de θ_X llamaremos $V(\mathfrak{J})$ al subesquema de θ_X definido por \mathfrak{J} . Si X es un esquema afín, es decir $X = (\text{Spec } A, \tilde{A})$ e I un ideal del anillo A , $V(I)$ indicará al subesquema cerrado de X definido por \tilde{I} , coincidente con $\text{Spec}(A/I)$. Cuando escribamos $V(I) - V(P)$ entenderemos el subesquema de $V(I)$ cuyo espacio base es la diferencia de los espacios bases de $V(I)$ y $V(P)$ y cuyo haz de funciones es la restricción del de $V(I)$.

Nota 2-3-2.- Si I es un ideal de \square y $\pi: B\mathbb{L}_P(\square) \rightarrow \text{Spec}(\square)$ es el morfismo estructural definido en (2-2-4-iii), entonces definiremos como es usual $\pi^{-1}(V(I))$ como el subesquema de $B\mathbb{L}_P(\square)$ tal que el cuadrado

$$\begin{array}{ccc}
 B\mathbb{L}_P(\square) & \xleftarrow{\quad\quad\quad} & \pi^{-1}(V(I)) \\
 \downarrow \pi & & \downarrow \\
 \text{Spec}(\square) & \xleftarrow{\quad\quad\quad} & V(I)
 \end{array}$$

sea cartesiano.

Proposición 2-3-3.- Si π es la explosión global de \square con centro P se verifica que:

i) $\pi^{-1}(\text{Spec}(\square/P))$ es un divisor de $B\mathbb{L}_P(\square)$

ii) Si $G_{n,P}(\square) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} P^n/P^{n+1}$, $\pi^{-1}(\text{Spec}(\square/P))$ es iso-

morfo, como \mathbb{A}^1/\mathbb{P} -esquema, a $\text{Proj}(\text{Gr}_p(\mathbb{A}^1))$

Demostración.-

i) Consideraremos la proyección π restringida al abierto

$$D_+(f_i) = \text{Spec} \left(\mathbb{A}^1 \left[\frac{f_1}{f_i}, \dots, \frac{\widehat{f_i}}{f_i}, \dots, \frac{f_r}{f_i} \right] \right); \pi|_{D_+(f_i)}$$

es el morfismo asociado a la inmersión

$$i: \mathbb{A}^1 \hookrightarrow \mathbb{A}^1 = \mathbb{A}^1 \left[\frac{f_1}{f_i}, \dots, \frac{\widehat{f_i}}{f_i}, \dots, \frac{f_r}{f_i} \right]. \text{ Entonces}$$

π está definida de la manera siguiente (Grothendieck [7] capítulo I, 1-2):

$$\text{Si } j_x \in D_+(f_i) = \text{Spec} \left(\mathbb{A}^1 \left[\frac{f_1}{f_i}, \dots, \frac{\widehat{f_i}}{f_i}, \dots, \frac{f_r}{f_i} \right] \right),$$

$$\pi(j_x) = i^{-1}(j_x) = j_x \cap \mathbb{A}^1.$$

Así si $j_y \in \text{Spec}(\mathbb{A}^1)$, $\pi^{-1}(j_y) =$

$$= \{ j_x \in \text{Spec} \left(\mathbb{A}^1 \left[\frac{f_1}{f_i}, \dots, \frac{\widehat{f_i}}{f_i}, \dots, \frac{f_r}{f_i} \right] \right) \mid j_x \cap \mathbb{A}^1 = j_y \}.$$

Luego

$$\begin{aligned} \pi^{-1}(\text{Spec}(\mathbb{A}^1/\mathbb{P})) &= \text{Spec} \left(\mathbb{A}^1 \left[\frac{f_1}{f_i}, \dots, \frac{\widehat{f_i}}{f_i}, \dots, \frac{f_r}{f_i} \right] \otimes_{\mathbb{A}^1} \mathbb{A}^1/\mathbb{P} \right) = \\ &= \text{Spec} \left(\mathbb{A}^1 \left[\frac{f_1}{f_i}, \dots, \frac{\widehat{f_i}}{f_i}, \dots, \frac{f_r}{f_i} \right] / \mathbb{P} \cdot \mathbb{A}^1 \left[\frac{f_1}{f_i}, \dots, \frac{\widehat{f_i}}{f_i}, \dots, \frac{f_r}{f_i} \right] \right) = \\ &= \text{Spec} \left(\mathbb{A}^1 \left[\frac{f_1}{f_i}, \dots, \frac{\widehat{f_i}}{f_i}, \dots, \frac{f_r}{f_i} \right] / f_i \cdot \mathbb{A}^1 \left[\frac{f_1}{f_i}, \dots, \frac{\widehat{f_i}}{f_i}, \dots, \frac{f_r}{f_i} \right] \right) \end{aligned}$$

puesto que al ser f_1, \dots, f_r un sistema de generadores de \mathbb{P}

$$\text{es } \mathbb{P} \cdot \mathbb{A}^1 \left[\frac{f_1}{f_i}, \dots, \frac{\widehat{f_i}}{f_i}, \dots, \frac{f_r}{f_i} \right] = f_i \cdot \mathbb{A}^1 \left[\frac{f_1}{f_i}, \dots, \frac{\widehat{f_i}}{f_i}, \dots, \frac{f_r}{f_i} \right]$$

Entonces la inclusión

$$\pi^{-1}(\text{Spec}(\mathbb{A}^1/\mathbb{P})) \hookrightarrow \text{Spec} \left(\mathbb{A}^1 \left[\frac{f_1}{f_i}, \dots, \frac{\widehat{f_i}}{f_i}, \dots, \frac{f_r}{f_i} \right] \right)$$

corresponde al epimorfismo

$$\square \left[\frac{f_1}{\bar{f}_i}, \dots, \frac{\widehat{f}_i}{\bar{f}_i}, \dots, \frac{f_r}{\bar{f}_i} \right] \dashrightarrow \square \left[\frac{f_1}{\bar{f}_i}, \dots, \frac{\widehat{f}_i}{\bar{f}_i}, \dots, \frac{f_r}{\bar{f}_i} \right] /_{f_i} \square \left[\frac{f_1}{\bar{f}_i}, \dots, \frac{\widehat{f}_i}{\bar{f}_i}, \dots, \frac{f_r}{\bar{f}_i} \right]$$

cuyo núcleo trivialmente está generado por f_i .

Por tanto la ecuación local en $D_+(f_i)$ de $\pi^{-1}(\text{Spec}(\square/P))$ es f_i y $\pi^{-1}(\text{Spec}(\square/P))$ es un divisor.

ii) Si f_1, \dots, f_r son un sistema de generadores de P y si $\bar{f}_i^- = f_i + P^2 = \text{in}_P(f) \in \text{Gr}_P(\square)$, entonces $\text{Gr}_P(\square) = \square/P \left[\bar{f}_1^-, \dots, \bar{f}_r^- \right]$ (Matsumura [31], capítulo IV, proposición 10-D).

Además por 2-2-4 los $D_+(\bar{f}_i^-)$ forman un recubrimiento abierto de $\text{Proj}(\text{Gr}_P(\square))$ y $D_+(\bar{f}_i^-) = \text{Spec} \left[(\text{Gr}_P(\square))_{(\bar{f}_i^-)} \right] = \text{Spec} \left(\square/P \left[\frac{\bar{f}_1^-}{\bar{f}_i^-}, \dots, \frac{\widehat{\bar{f}_i^-}}{\bar{f}_i^-}, \dots, \frac{\bar{f}_r^-}{\bar{f}_i^-} \right] \right)$

(ii) quedará entonces probado si demostramos que :

a) $\forall i, 1 \leq i \leq r, \exists$ los isomorfismos:

$$\varphi_i : D_+(\bar{f}_i^-) \dashrightarrow \pi^{-1}(\text{Spec}(\square/P)) \Big|_{D_+(\bar{f}_i^-)}$$

b) $\forall i, j, 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq r$ $\varphi_i \Big|_{D_+(\bar{f}_i^-) \cap D_+(\bar{f}_j^-)} = \varphi_j \Big|_{D_+(\bar{f}_i^-) \cap D_+(\bar{f}_j^-)}$

puesto que en este caso la familia $\{\varphi_i\}$ induce globalmente el isomorfismo de (ii)

$$a) \pi^{-1}(\text{Spec}(\square/P)) \Big|_{D_+(f_i)} = \text{Spec} \left(\square \left[\frac{f_1}{\bar{f}_i}, \dots, \frac{\widehat{f}_i}{\bar{f}_i}, \dots, \frac{f_r}{\bar{f}_i} \right] /_{f_i} \square \left[\frac{f_1}{\bar{f}_i}, \dots, \frac{\widehat{f}_i}{\bar{f}_i}, \dots, \frac{f_r}{\bar{f}_i} \right] \right)$$

por i)

Luego a) quedará probado construyendo un isomorfismo

$$\phi_i: \mathbb{Q}/P \left[\frac{\widehat{f_1^-}}{f_1^-}, \dots, \frac{\widehat{f_i^-}}{f_i^-}, \dots, \frac{\widehat{f_r^-}}{f_i^-} \right] \cong \mathbb{Q} \left[\frac{f_1}{f_i}, \dots, \frac{\widehat{f_i}}{f_i}, \dots, \frac{f_r}{f_i} \right] / P \mathbb{Q} \left[\frac{f_1}{f_i}, \dots, \frac{\widehat{f_i}}{f_i}, \dots, \frac{f_r}{f_i} \right]$$

y haciendo $\tau_i = \alpha \phi_i$,

ϕ_i se construye así:

$$\phi_i \left(\frac{\widehat{f_j^-}}{f_i^-} \right) = \frac{f_j}{f_i} + P \mathbb{Q} \left[\frac{f_1}{f_i}, \dots, \frac{\widehat{f_i}}{f_i}, \dots, \frac{f_r}{f_i} \right], \quad 1 \leq j \leq r, \quad j \neq i$$

$$\phi_i(\lambda) = \lambda + P \mathbb{Q} \left[\frac{f_1}{f_i}, \dots, \frac{\widehat{f_i}}{f_i}, \dots, \frac{f_r}{f_i} \right], \quad \forall \lambda \in \mathbb{Q}/P$$

ϕ_i es isomorfismo. En efecto, basta ver que $\text{Ker } \phi_i = 0$.

$$\text{Ker } \phi_i = \left\{ \begin{array}{l} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right. a_i \left(\frac{\widehat{f_1^-}}{f_i^-} \right)^{s_1} \dots \left(\frac{\widehat{f_r^-}}{f_i^-} \right)^{s_r}, \text{ polinomios}$$

en las indeterminadas $\frac{\widehat{f_1^-}}{f_i^-}, \dots, \frac{\widehat{f_i^-}}{f_i^-}, \dots, \frac{\widehat{f_r^-}}{f_i^-}$ con coeficientes

$a_i \in \mathbb{Q}/P$ tales que

$$\phi_i \left(\begin{array}{l} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} a_i \left(\frac{\widehat{f_1^-}}{f_i^-} \right)^{s_1} \dots \left(\frac{\widehat{f_r^-}}{f_i^-} \right)^{s_r} \right) = \left(\begin{array}{l} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} a_i \left(\frac{f_1}{f_i} \right)^{s_1} \dots \left(\frac{f_r}{f_i} \right)^{s_r} \right)$$

$$\dots \left(\frac{f_r}{f_i} \right)^{s_r} + P \mathbb{Q} \left[\frac{f_1}{f_i}, \dots, \frac{\widehat{f_i}}{f_i}, \dots, \frac{f_r}{f_i} \right] = 0 \iff$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} a_i \left(\frac{\widehat{f_1^-}}{f_i^-} \right)^{s_1} \dots \left(\frac{\widehat{f_r^-}}{f_i^-} \right)^{s_r} \mid \begin{array}{l} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} a_i \left(\frac{f_1}{f_i} \right)^{s_1} \dots \left(\frac{f_r}{f_i} \right)^{s_r} \right\}$$

$$\dots \left(\frac{f_r}{f_i} \right)^{s_r} \in P \mathbb{Q} \left[\frac{f_1}{f_i}, \dots, \frac{\widehat{f_i}}{f_i}, \dots, \frac{f_r}{f_i} \right] \iff \left\{ \begin{array}{l} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} a_i \left(\frac{\widehat{f_1^-}}{f_i^-} \right)^{s_1} \dots \left(\frac{\widehat{f_r^-}}{f_i^-} \right)^{s_r} \right\}$$

$$a, cP\} \Leftrightarrow \text{Ker } \phi_i = 0 + \square/P \left[\begin{array}{c} \bar{f}_1^- \\ \vdots \\ \bar{f}_i^- \\ \vdots \\ \bar{f}_r^- \\ \bar{f}_i^- \end{array} \right]$$

luego es inyectiva.

Para probar b) tendremos que demostrar que los isomorfismos ϕ_i coinciden en las intersecciones, es decir

$$\phi_i \left| \square/P \left[\begin{array}{c} \bar{f}_1^- \\ \vdots \\ \bar{f}_i^- \\ \vdots \\ \bar{f}_r^- \\ \bar{f}_i^- \end{array} \right] \cap \square/P \left[\begin{array}{c} \bar{f}_1^- \\ \vdots \\ \bar{f}_j^- \\ \vdots \\ \bar{f}_r^- \\ \bar{f}_j^- \end{array} \right] \right. =$$

$$= \phi_j \left| \square/P \left[\begin{array}{c} \bar{f}_1^- \\ \vdots \\ \bar{f}_i^- \\ \vdots \\ \bar{f}_r^- \\ \bar{f}_i^- \end{array} \right] \cap \square/P \left[\begin{array}{c} \bar{f}_1^- \\ \vdots \\ \bar{f}_j^- \\ \vdots \\ \bar{f}_r^- \\ \bar{f}_j^- \end{array} \right] \right.$$

lo que se deduce trivialmente de la definición.

Proposición 2-3-4. - Sea J un ideal de \square , sean f_1, \dots, f_r como en 2-2-4 y sea $\forall i, 1 \leq i \leq r$ \mathcal{J}_{f_i} el haz sobre $D_+(f_i)$ asociado al ideal $\left\{ \frac{a}{f_i} \mid a \in J, v_p(a) \geq v \right\}$ de $\square[P/f_i]$.

entonces:

i) Mediante un proceso de recollement los haces \mathcal{J}_{f_i} inducen

un haz coherente \mathcal{J} de ideales de $B_{l_p}(\square)$

ii) Si V es el subesquema cerrado de $B_{l_p}(\square)$ definido por

\mathcal{J} se verifica que:

ii-1) V es el mínimo subesquema cerrado de $B_{l_p}(\square)$ que contiene $\pi^{-1}(V(J) - V(P))$. ($V(J)$ y $V(P)$ son los subesquemas de $\text{Spec}(\square)$ definidos por J y P respectivamente).

ii-2) V es isomorfo como $\text{Spec}(\square/J)$ -esquema a $B_{l_{J+P/J}}(\square/J)$.

de manera que se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{B}\ell_{J+P/J}(\square/J) & \xleftarrow{\quad\quad\quad} & \mathcal{B}\ell(\square) \\
 \downarrow \pi' & & \downarrow \pi \\
 \text{Spec}(\square/J) & \xleftarrow{\quad\quad\quad} & \text{Spec}(\square)
 \end{array}$$

iii) π induce un isomorfismo $\mathcal{B}\ell_P(\square) - \pi^{-1}(V(P)) \xrightarrow{\sim} \text{Spec}(\square) - V(P)$.

Demostración.-

i) Si queremos aplicar un proceso de recollement de haces y construir el haz \mathcal{J} tendremos que demostrar que

$$\mathcal{J}_{f_i} \Big|_{D_+(f_i) \cap D_+(f_j)} = \mathcal{J}_{f_j} \Big|_{D_+(f_i) \cap D_+(f_j)}$$

es decir que $J_{f_i} \cdot \square_{ij} = J_{f_j} \square_{ij}$, lo cual trivialmente es

$$\text{cierto ya que } \square_{ij} = \binom{(\square_i)}{(\bar{f}_i^j)} f_j = \binom{(\square_j)}{(\bar{f}_j^i)} f_i$$

El haz \mathcal{J} es coherente al ser cuasicoherente y de tipo finito. Es cuasicoherente pues $\mathcal{J} \Big|_{D_+(f_i)}$ es de la forma \mathcal{J}_{f_i} ,

con $J_{f_i} = \left\{ -\frac{a}{f_i} \mid a \in J, v(a) \geq v \right\}$ (Grothendieck [7], capítulo I,

1-4-1).

Además \mathcal{J} es de tipo finito al ser \square noetheriano.

ii) Demostraremos en primer lugar que si V es el subesquema cerrado de $\mathcal{B}\ell_P(\square)$ definido por $\tilde{\mathcal{J}}$ se verifica que

$$V \supset \pi^{-1}(V(J) - V(P))$$

Tendremos que comprobar que

$$\forall j_x \in \pi^{-1}(V(J) - V(P)), j_x \in V \quad [1]$$

Consideremos un abierto $D_+(f_i)$ del recubrimiento y operemos localmente en él. Entonces [1] se traduce en anillos a:

$$\forall j_x \in \text{Spec}(\hat{\square} \left[\frac{f_1}{f_i}, \dots, \frac{f_i}{f_i}, \dots, \frac{f_r}{f_i} \right]) \text{ tal que}$$

$$\left. \begin{array}{l} J_{\square_i} \subset j_x \\ P_{\square_i} \not\subset j_x \iff f_i \notin j_x \end{array} \right\} \text{ entonces } j_x \supset J_{f_i}$$

Se pueden dar dos casos

a) $f_i \in J$, entonces $J_{\square_i} \subset j_x$ lo que implica que $f_i \in j_x$

$$\text{luego } \pi_i^{-1}(V(J)-V(P))|_{D_+(f_i)} = \pi_i^{-1}(V(J)-V(P)) = \emptyset$$

$$\text{y además } V \cap D_+(f_i) = V(J_{f_i}) = \emptyset$$

b) $f_i \notin J$ entonces $\forall b \in J_{f_i}$, $b = \frac{a}{f_i^v}$, $a \in J$, $v \leq v_P(a) \implies$

$$\implies a = f_i^v \cdot b \in J_{\square_i} \subset j_x \implies f_i^v \cdot b \in j_x, \text{ como } j_x \text{ es primo}$$

$$\text{y } f_i \notin j_x \implies b \in j_x \implies J_{f_i} \subset j_x$$

Una vez demostrado que $V \supset \pi_i^{-1}(V(J)-V(P))$ tendremos que comprobar que V es el mínimo subesquema cerrado de $B_{\mathbb{P}^1}(\square)$ que contiene a $\pi_i^{-1}(V(J)-V(P))$. Sabemos que V es un subesquema cerrado pues $V = V(\mathfrak{J})$, siendo \mathfrak{J} un ideal coherente, luego únicamente comprobaremos que V es el mínimo. Para ello nos restringimos a $D_+(f_i)$, $1 \leq i \leq r$. Sea I un ideal de \square_i ,

$V(I)$ un subesquema cerrado de $\text{Spec}(\square_i)$ tal que

$$\pi_i^{-1}(V(J)-V(P)) \subset V(I). \text{ Hemos de probar que entonces}$$

$V(J_{f_i}) \subset V(I)$, o lo que es lo mismo traducido a ideales: Si

I es un ideal que verifica

$$\forall j_x \left. \begin{array}{l} J_{\square_i} \subset j_x \\ f_i \notin j_x \end{array} \right\} \implies j_x \supset I$$

entonces $I \subset J_{f_i}$,

Decir que $\pi_i^{-1}(V(J)-V(P)) \subset V(I)$ significa que $(I/J_{f_i})_{f_i} = 0$,

luego:

$$\forall a \in I, \exists n \geq 0, \text{ tal que } \frac{1}{f_i^n} (a + J_{f_i}) = 0 \implies$$

$$\implies \frac{1}{f_i^n} \cdot a \in J_{f_i} \subset J_{f_i} \implies \frac{1}{f_i^n} \cdot a = \frac{c}{f_i^v} , c \in J, v_P(c) \geq v \implies$$

$$\implies a = \frac{c}{f_i^{v-n}} , c \in J , v_P(c) \geq v-n \implies a \in J_{f_i}$$

con lo que $I \subset J_{f_i}$ q. e. d.

ii-2) Sabemos que $\text{Bl}_{J+P/J} (\mathbb{A}/J) = \bigcup_{i=1}^r \text{Spec} (\mathbb{A}/J \left[\frac{J+P/J}{\bar{f}_i} \right])$

siendo $\bar{f}_i = f_i + J$ puesto que al ser $\{f_i\} \ i=1, \dots, r$ un sistema de generadores de P , $\{\bar{f}_i\} \ i=1, \dots, r$ es un sistema de generadores de $J+P/J$.

Mostraremos que V es isomorfo como $\text{Spec} (\mathbb{A}/J)$ -esquema a $\text{Bl}_{J+P/J} (\mathbb{A}/J)$ comprobando:

a) $\text{Spec} (\mathbb{A}/J \left[\frac{J+P/J}{\bar{f}_i} \right]) \cong V \cap D_+(f_i)$

b) Si llamamos $\mathbb{A}_i^* = \mathbb{A}/J \left[\frac{J+P/J}{\bar{f}_i} \right]$, entonces

$$\forall i, j, \ i=1 \dots r, \ j=1 \dots r$$

$$\text{Spec } \mathbb{A}_i^* \cap \text{Spec } \mathbb{A}_j^* \cong V \cap D_+(f_i) \cap D_+(f_j)$$

Como $V \cap D_+(f_i) = V(J_{f_i}) = \text{Spec} (\mathbb{A} \left[\frac{P}{f_i} \right] / J_{f_i})$ para probar a)

Bastará demostrar que

$$\mathbb{Q}/J \left[\begin{array}{c} J+P/J \\ \hline \bar{f}_i \end{array} \right] \xrightarrow{\cong} \mathbb{Q} \left[\begin{array}{c} P \\ \hline \bar{f}_i \end{array} \right] / J_{f_i} \quad \text{es decir}$$

$$\mathbb{Q}/J \left[\begin{array}{c} \bar{f}_1 \\ \hline \bar{f}_i \end{array}, \dots, \widehat{\bar{f}_i}, \dots, \begin{array}{c} \bar{f}_r \\ \hline \bar{f}_i \end{array} \right] \xrightarrow{\cong} \mathbb{Q} \left[\begin{array}{c} \bar{f}_1 \\ \hline \bar{f}_i \end{array}, \dots, \widehat{\bar{f}_i}, \dots, \begin{array}{c} \bar{f}_r \\ \hline \bar{f}_i \end{array} \right] / J_{f_i}$$

siendo ya el isomorfismo ϕ facil de construir. Tampoco presenta dificultad construir el isomorfismo necesario para demostrar b. Por último comprobaremos que el cuadrado

$$\begin{array}{ccc} B_{J+P/J}(\mathbb{Q}/J) \xrightarrow{\cong} B_P(\mathbb{Q}) & & \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ \text{Spec}(\mathbb{Q}/J) & \xrightarrow{\quad} & \text{Spec}(\mathbb{Q}) \end{array}$$

es conmutativo. Para ello veremos que sobre cada abierto $D_+(f_i)$ es conmutativo el cuadrado siguiente

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec} \mathbb{Q}/J \left[\begin{array}{c} J+P/J \\ \hline \bar{f}_i \end{array} \right] \xrightarrow{\cong} \mathbb{V} \cap D_+(f_i) & \xrightarrow{\quad} & D_+(f_i) \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ \text{Spec} \mathbb{Q}/J & \xrightarrow{\quad} & \text{Spec}(\mathbb{Q}) \end{array}$$

Demostrar que este cuadrado es conmutativo es facil, pues se traduce a anillos en donde se ve la conmutatividad. El diagrama anterior da lugar al siguiente entre anillos:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Q}/J \left[\begin{array}{c} \bar{f}_1 \\ \hline \bar{f}_i \end{array}, \dots, \widehat{\bar{f}_i}, \dots, \begin{array}{c} \bar{f}_r \\ \hline \bar{f}_i \end{array} \right] & \xleftarrow{\quad} & \mathbb{Q} \left[\begin{array}{c} \bar{f}_1 \\ \hline \bar{f}_i \end{array}, \dots, \widehat{\bar{f}_i}, \dots, \begin{array}{c} \bar{f}_r \\ \hline \bar{f}_i \end{array} \right] \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathbb{Q}/J & \xleftarrow{\quad} & \mathbb{Q} \end{array}$$

donde las flechas verticales son las inmersiones y las hori-

centales los epimorfismos naturales.

iii) De la construcción de $\pi^{-1}(V(P))$ (véase (2-3-2) y localizando en cada $D_+(f_i)$ deducimos lo siguiente:

Si llamamos $\pi_i = \pi|_{D_+(f_i)}$, resulta, teniendo en cuenta que $D_+(f_i) = \text{Spec}(\mathbb{Q}_i)$, el diagrama cartesiano

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Spec}(\mathbb{Q}_i) & \xleftarrow{\quad\quad\quad} & \pi^{-1}(V(P))|_{D_+(f_i)} \\
 \downarrow \pi_i & & \downarrow \\
 \text{Spec}(\mathbb{Q}) & \xleftarrow{\quad\quad\quad} & V(P)
 \end{array}$$

al que corresponde el diagrama cocartesiano de anillos y homomorfismos

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{Q}_i & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & \mathbb{Q}_i / f_i \mathbb{Q}_i \\
 \uparrow i & & \uparrow \\
 \mathbb{Q} & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & \mathbb{Q} / \mathfrak{p}
 \end{array}$$

donde las flechas verticales son las inclusiones y las flechas horizontales los morfismos naturales.

Para demostrar el isomorfismo entre $\text{Bl}_P(\mathbb{Q}) - \pi^{-1}(V(P))$ y $\text{Spec}(\mathbb{Q}) - V(P)$ tendremos que comprobar las cuatro condiciones siguientes:

- a) Cada π_i es inyectiva sobre $\text{Spec}(\mathbb{Q}_i) - \pi^{-1}(V(P))|_{D_+(f_i)}$
- b) Si llamamos π_i^* a π_i restringida a $\text{Spec}(\mathbb{Q}_i) - \pi^{-1}(V(P))$, y si y es un punto $y \in \text{Imagen } \pi_i^* \cap \text{Imagen } \pi_j^*$, es decir $y = \pi_i^*(x)$, $x \in D_+(f_i)$; $y = \pi_j^*(x')$, $x' \in D_+(f_j)$. Entonces, nece-

variamente, $x=x' \in D_+(f_i) \cap D_+(f_j)$

c) $\bigcup_{i=1}^r \text{Imag } \pi_i^* = \text{Spec } (\square) - V(P)$

d) Si $x \in \text{Spec } \square_i - \pi^{-1}(V(P))$, $y = \pi_i(x)$, tendremos entonces el isomorfismo $(\square_i)_{j_x} \cong (\square)_{j_y}$ inducido por i .

a) Se tiene que $x \in \text{Spec } \square_i - \pi^{-1}(V(P)) \iff f_i \notin j_x$.

En efecto el que $x \in \text{Spec } \square_i - \pi^{-1}(V(P))$ significa que j_x no proviene via el homomorfismo natural de un ideal de

$\square_i / f_i \square_i$ ya que los ideales que se obtienen de esta forma

contienen todos a f_i y son todos los que lo contienen.

Sean ahora $j_x \neq j_y$ ideales de \square_i tales que $f_i \notin j_x$,

$f_i \notin j_y$, entonces $j_x \cap \square \neq j_y \cap \square$. En efecto al ser $j_x \neq j_y$

existe un $\alpha \in j_x$, $\alpha \notin j_y$. Podemos encontrar $t > 0$ tal que

$f_i^t \cdot \alpha \in \square$, como j_y es primo, $\alpha \notin j_y$ y $f_i \notin j_y$ entonces

$f_i^t \cdot \alpha \notin j_y$ pero $f_i^t \cdot \alpha \in j_x \cap \square$ luego $j_x \cap \square \neq j_y \cap \square$.

Obsérvese que utilizamos la notación de Grothendieck y así cuando escribimos x nos referimos al punto y cuando escribimos j_x al ideal.

b) $y \in \text{Imag } \pi_i^* \cap \text{Imag } \pi_j^* \implies \pi_i(x) = \pi_j(x') = y \implies$

$\implies x=x' \in D_+(f_i) \cap D_+(f_j)$

$\text{Imag } \pi_i^* = \{j_x \cap \square \mid j_x \in \text{Spec } (\square_i), f_i \notin j_x\}$

$\text{Imag } \pi_j^* = \{j_y \cap \square \mid j_y \in \text{Spec } (\square_j), f_j \notin j_y\}$

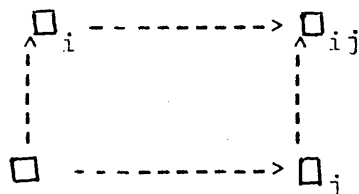
si

$j_x \cap \square = j_y \cap \square \in \text{Imag } \pi_i^* \cap \text{Imag } \pi_j^*$

$$j_x \subset \square \left[\frac{f_1}{f_i}, \dots, \widehat{\frac{f_i}{f_i}}, \dots, \frac{f_j}{f_i}, \dots, \frac{f_r}{f_i} \right]$$

$$j_y \subset \square \left[\frac{f_1}{f_j}, \dots, \frac{f_i}{f_j}, \dots, \widehat{\frac{f_j}{f_j}}, \dots, \frac{f_r}{f_j} \right]$$

Al ser $D_+(f_i) \cap D_+(f_j) = D_+(f_i \cdot f_j) = \text{Spec } (\square_{ij})$, el cuadrado siguiente es conmutativo



y $j_x \cap \square = j_y \cap \square$ y tendremos que $j_x \cdot \square_{ij} = j_y \cdot \square_{ij}$ quedando

b) demostrado.

c) Se verifica que $D(f_i) = \text{Imag } \pi_i^*$ ya que $D(f_i) = \text{Spec } (\square) - V(f_i)$ [Grothendieck [7], capítulo I, § 1]. Debido a ello

$$\bigcup_{i=1}^r \text{Imag } \pi_i^* = \bigcup_{i=1}^r D(f_i) = \bigcup_{i=1}^r (\text{Spec } (\square) - V(f_i)) = \text{Spec } (\square) - \bigcap_{i=1}^r V(f_i) =$$

$= \text{Spec } (\square) - V(P)$ pues los f_i , $i=1, \dots, r$ son un sistema de generadores de P .

d) Si $f_i \notin j_x$ se verifica que $\square_{j_x \cap \square} \cong (\square_i)_{j_x}$. El isomorfismo se construye así:

$$\square_{j_x \cap \square} \xrightarrow{\quad \phi \quad} (\square_i)_{j_x}$$

$$\frac{a}{b} \xrightarrow{\quad\quad\quad} \frac{a}{b}$$

$$a \in \square, b \in j_x \cap \square$$

La única dificultad para comprobar que ϕ es isomorfismo

es demostrar que ϕ es suprayectivo.

$$\text{Sea } -\frac{a'}{b'} \in \square_i = \square \left[\frac{f_1}{f_i}, \dots, \frac{\widehat{f_i}}{f_i}, \dots, \frac{f_r}{f_i} \right],$$

$f_i \notin j_x$

$$a' = \sum a'_i \left(\frac{f_1}{f_i}\right)^{r_1} \dots \left(\frac{f_r}{f_i}\right)^{r_r}, \quad a'_i \in \square, \text{ luego}$$

$$\frac{a'}{b'} = \frac{\sum a'_i f_1^{s_1} \dots f_i^{s_i} \dots f_r^{s_r}}{f_i^{v_i} \cdot b'} \in \square, \quad \sum a'_i f_1^{s_1} \dots f_i^{s_i} \dots f_r^{s_r} \in \square,$$

$f_i^v \notin j_x, b' \notin j_x$, al ser j_x primo $f_i^v \cdot b' \notin j_x$ luego

$$f_i^v \cdot b' \notin j_x \cap \square.$$

$$\text{Entonces } \phi \left(\frac{\sum a'_i f_1^{s_1} \dots f_i^{s_i} \dots f_r^{s_r}}{f_i^v \cdot b'} \right) = -\frac{a'}{b'} \text{ a.e.d.}$$

Proposición 2-3-5. - Sean f_1, \dots, f_r como en 2-2-4, sean $\bar{f}_i^- = \text{in}_{\mathcal{M}P}(f_i)$ y N el anillo graduado $K[\bar{f}_1^-, \dots, \bar{f}_r^-]$ supuestos los \bar{f}_i^- de grado 1, entonces la fibra de π en M es

$$\pi^{-1}(M) \cong \text{Proj} \left(\bigoplus_{n=0}^{\infty} P^n / \mathcal{M}P^n \right) \cong \text{Proj}(N)$$

Demostración. -

$$N \cong K \oplus P / \mathcal{M}P \oplus P^2 / \mathcal{M}P^2 \oplus \dots \oplus P^n / \mathcal{M}P^n \oplus \dots, \text{ con } K = \square / \mathcal{M}$$

es una K -álgebra graduada finitamente generada. Por otra parte dado $H = \square \oplus P \oplus \dots \oplus P^m \oplus \dots$, podemos construir un homomorfismo Ψ de anillos de H en N de la forma siguiente:

$$H \cong \square[f_1^!, \dots, f_r^!] \quad \gamma \quad H \cong K[\bar{f}_1^-, \dots, \bar{f}_r^-], \quad \Psi \text{ estará definido por:}$$

$$\Psi(f_i^!) = \bar{f}_i^- \quad i=1, \dots, r$$

$$\Psi(\lambda) = \lambda + \mathcal{M} \quad \lambda \in \square$$

Se tiene por tanto el diagrama cocartesiano de anillos siguiente:

$$\begin{array}{ccc}
 H & \xleftarrow{\varphi} & H \\
 \uparrow i & & \uparrow i \\
 K & \xleftarrow{\quad} & \square
 \end{array}$$

luego $K \otimes_{\square} H = N$, en esquemas resulta entonces el diagrama cartesiano.

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Proj}(N) & \xrightarrow{\quad} & \text{Proj}(H) \\
 \downarrow \pi' & & \downarrow \pi \\
 \text{Spec}(K) & \xrightarrow{\varphi'} & \text{Spec}(\square)
 \end{array}$$

Se verifica que φ' transforma el único punto de $\text{Spec}(K)$ en el ideal M de $\text{Spec}(\square)$ luego $\pi^{-1}(M) = \text{Proj}(N)$, es decir $\pi^{-1}(M)$ es el K -esquema proyectivo definido por el anillo graduado $K[\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_r]$ con $\bar{f}_i = \text{in}_{MP}(f_i)$ y grado de \bar{f}_i igual a 1, $\forall i$. Como espacio topológico $\pi^{-1}(M)$ es un subespacio cerrado de $\text{Bl}_p(\square)$ puesto que M es cerrado y π es continua.

Definición 2-3-6.- Se llamará divisor excepcional de una transformación cuadrática ó monoidal π al esquema proyectivo $\pi^{-1}(M)$.

Observación 2-3-7.- El conjunto de puntos cerrados de $\pi^{-1}(M)$ está en correspondencia biunívoca con las direcciones

$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r)$ $\alpha_i \in K$. En el caso particular en el que

$\square = K[[X_1, X_2, X_3]]$, si $P = (X_1, X_2) \square$, $\pi^{-1}(M)$ está definido por

un anillo de polinomios $K[\bar{X}_1, \bar{X}_2]$, es decir $\pi^{-1}(M)$ es la

recta proyectiva sobre K , igualmente si $P = (X_1, X_2, X_3) \square$

entonces $\pi^{-1}(M)$ es el plano proyectivo sobre K . Entonces el conjunto de puntos cerrados de $\pi^{-1}(M)$ está en correspondencia biunívoca con las direcciones (α_1, α_2) ó $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ $\alpha_i \in K$

§ 2-4.- Transformado monoidal de una variedad algebroide

Introducción.- En esta sección se definen y caracterizan los transformados monoidales del anillo de coordenadas \square de una variedad algebroide.

Definición 2-4-1.- Sea \square el anillo de coordenadas de una variedad algebroide, M el ideal maximal de \square y P un ideal primo de \square . Diremos que una \square -álgebra local \square' es un transformado monoidal de \square con centro P si y solo si $\square' = A_N$ donde

i) $A = \square \left[\frac{P}{f_1} \right]$ con $f_1 \in P$ „

ii) N es un ideal primo de A que contiene a MA .

Si $P=M$ diremos que \square' es un transformado cuadrático de \square .

Proposición 2-4-2.- \square' es un transformado monoidal de \square con centro P si y solo si \square' es el anillo local de un punto de $Bl_p(\square)$ que yace sobre el punto cerrado M de $Spec(\square)$.

Demostración.-

Sea $P = (f_1, \dots, f_r)\square$, $Bl_p(\square)$ será la unión de los esquemas afines $D_+(f_i) = Spec(\square \left[\frac{f_1}{f_i}, \dots, \frac{f_r}{f_i} \right])$. Si

ξ es un punto de $Bl_p(\square)$ con $\pi(\xi) = M$ entonces existe i tal que $\xi \in D_+(f_i)$, podemos suponer $i=1$ y el anillo local de ξ en $Bl_p(\square)$ es $\square \left[\frac{f_2}{f_1}, \dots, \frac{f_i}{f_1}, \dots, \frac{f_r}{f_1} \right]_N$ siendo N

un ideal primo de $\square \left[\frac{f_2}{f_1}, \dots, \frac{f_i}{f_1}, \dots, \frac{f_r}{f_1} \right]$ que contiene a MA pues por hipótesis $\pi(\xi) = M$ y $N = j_\xi$. Luego todo anillo local de un punto de $Bl_p(\square)$ que yace sobre M es un transformado monoidal de \square con centro P .

Recíprocamente.- Si $\square' = \square \left[\frac{P}{f} \right]_N$, $f \in P$, existe una base

de P que contiene a f , entonces N define un punto en $\mathbb{B}\ell_P(\square)$ contenido en $D_+(f)$ y que yace sobre M ($\pi(\xi)=M$ con $j_\xi=N$).

Teorema 2-4-3.- Sea \square el anillo de coordenadas de una variedad algebroide regular y P un ideal regular de \square . Sea \square' un transformado monoidal de \square con centro P de manera que $\square' = \square \left[\frac{P}{f} \right]_N$ siendo f un elemento perteneciente a un sistema regular de parámetros de \square ($f \neq 0$ (módulo M^2)) y N un ideal maximal de A . Entonces \square' es un anillo regular y $\dim \square = \dim \square'$.

Demostración.- Sea $\dim \square = n$. Como P es un ideal regular se puede elegir un sistema regular de parámetros de \square (Y_1, \dots, Y_n) tal que $P = (Y_1, \dots, Y_r) \square$ con $Y_1 = f$. Sea

\square' un transformado monoidal de \square con centro P , es decir $\square' = A_N$, $A = \square \left[\frac{Y_2}{Y_1}, \dots, \frac{Y_r}{Y_1} \right]$, con N un ideal primo

de A tal que $MA \subset N$. Llamaremos M' al ideal maximal de \square' .

Demostraremos el teorema ayudándonos de los resultados siguientes:

$$a) \square' / P \square' = A_N / P A_N \xrightarrow{\varphi} (A/P A)_{N/P A}$$

siendo φ el isomorfismo

$$A_N / P A_N \xrightarrow{\varphi} (A/P A)_{N/P A}$$

$$\left(-\frac{g}{h} \right) + P A_N \xrightarrow{\varphi} g + P A / h + P A \quad g, h \in A, h \notin N$$

b) El homomorfismo $\square' / P \xrightarrow{\psi} A / P A$ es inyectivo

$$g + P \xrightarrow{\psi} g + P A$$

$g \in \square$

pues si $g \in PA$ y $g \in \square \implies g \in PA \cap \square \implies g \in P$ ya que $PA \cap \square = P$

c) A/P_A se puede considerar como un anillo de polinomios sobre \square/P .

$$A = \square \left[\frac{Y_2}{Y_1}, \dots, \frac{Y_r}{Y_1} \right]. \text{ Poniendo } Y'_2 = \frac{Y_2}{Y_1}, \dots, Y'_r = \frac{Y_r}{Y_1}, \text{ se verifica}$$

$$\sum_{i=(i_2, \dots, i_r), a_i \in \square} a_i Y_2^{i_2} \dots Y_r^{i_r} + PA =$$

$$= \sum (a_i + PA) (Y_2^{i_2} \dots Y_r^{i_r} + PA) = \sum (a_i + P) (Y'_2 + PA)^{i_2} \dots (Y'_r + PA)^{i_r} = \sum (a_i + P) Y''^i$$

$$\text{con } Y''^i = Y_2^{i_2} \dots Y_r^{i_r} \quad i = (i_2, \dots, i_r)$$

$$Y''_j = Y'_j + PA \quad \text{y} \quad Y''^i = Y_2^{i_2} \dots Y_r^{i_r} \quad \text{con lo que}$$

$$A/P_A = \square/P [Y''] = \square/P [Y''_2, \dots, Y''_r].$$

Basándonos en los resultados a, b, c demostrados anteriormente podemos concluir la demostración del teorema.

Sea $\eta = N/P_A$, entonces:

$$(A/P_A)_{N/P_A} = (\square/P [Y''])_{\eta} = \square'/P \square'$$

Igualmente

$$\square'/M \square' = (\square/M [\bar{Y}'])_{\bar{\eta}}, \quad \square/M = K \quad \text{con} \quad \bar{Y}'_i = Y'_i + MA \quad \text{y} \\ \bar{\eta} = N/MA.$$

Como $P \square' = Y_1 \square'$ y $M \square' = (Y_1, Y_{r+1}, \dots, Y_n) \square'$ tendremos que

$$\dim \square'/M \square' = \dim \square' / (Y_1, Y_{r+1}, \dots, Y_n) \square' = \dim \square' - (n-r+1)$$

$$\dim \square' = \dim \square'/M \square' + (n-r+1).$$

Ahora bien $\dim \square' / \mathcal{M} \square' = \dim (K [\bar{Y}'])_{\bar{\eta}} = h(\bar{\eta})$, sabemos que $h(\bar{\eta}) \leq n - (n - r + 1) = r - 1$. Si el ideal N es maximal en A , $\bar{\eta}$ será un ideal maximal en $K [\bar{Y}']$ debido a lo cual $h(\bar{\eta}) = r - 1$, entonces $\dim \square' = r - 1 + (n - r + 1) = n$ q.e.d.

Construiremos un sistema de parámetros en \square' . Al ser $(K [\bar{Y}'])_{\bar{\eta}}$ regular existirán $r - 1$ elementos $\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_{r-1}$ de $\square' / \mathcal{M} \square'$ generadores de $\bar{\eta}$. Sean $\bar{z}_1 = z_1 + \mathcal{M}A, \dots, \bar{z}_{r-1} = z_{r-1} + \mathcal{M}A$. Entonces un sistema de parámetros del anillo \square' es $(Y_1, z_1, \dots, z_{r-1}, Y_{r+1}, \dots, Y_n)$.

Diremos que \square' es residualmente racional (resp. residualmente algebraico) sobre \square si $\square \dashrightarrow \square'$ induce un isomorfismo (resp. una extensión algebraica) de los cuerpos residuales. Hemos demostrado que $\dim \square = \dim \square'$ si y solo si $\bar{\eta}$ es un ideal maximal, lo cual es equivalente a que \square' sea residualmente algebraico sobre \square .

Si \square' es residualmente racional sobre \square , entonces $K [\bar{Y}'] / \bar{\eta} = K$ luego existen $\alpha_1, \dots, \alpha_{r-1} \in K$ de manera que

$$\bar{\eta} = (\bar{Y}'_2 - \alpha_1, \dots, \bar{Y}'_r - \alpha_{r-1}) K [\bar{Y}'].$$

Un sistema regular de parámetros de \square' será

$$(Y_1, \frac{Y_2}{\bar{Y}'_1} - \alpha_1, \dots, \frac{Y_r}{\bar{Y}'_1} - \alpha_{r-1}, Y_{r+1}, \dots, Y_n)$$

ya que $\bar{Y}'_i = Y'_i + \mathcal{M}A = \frac{Y_i}{\bar{Y}'_1} + \mathcal{M}A$.

Nota 2-4-4.- Si \square' es un transformado monoidal de una variedad algebroide \square , entonces \square' es equicaracterístico y reducido pero en general no es completo, en efecto:

- i) \square' es equicaracterístico, pues si consideramos el cuerpo de coeficientes de \square , $K = \square / \mathcal{M}$ sabemos que $K \subset \square$ luego $K \subset \square'$ y por lo tanto \square' es equicaracterístico ya que un anillo local es equicaracterístico si y solo si contiene

a un cuerpo (Zariski-Samuel [46], capítulo VIII, § 12) .

ii) \square' es reducido .

Demostraremos que si \square es reducido entonces \square_{f_1} es reducido y por lo tanto \square' también lo será pues $\square' \subset \square_{f_1}$

\square_{f_1} es reducido pues si $-\frac{a}{f_1^n} \in \square_{f_1}$ fuera un elemento nilpotente existirá un n tal que $(-\frac{a}{f_1^n})^n = 0$, se tendría

$\frac{a^n}{f_1^{rn}} = 0$, $a^n = 0$ luego $a = 0$ al ser \square reducido.

iii) \square' en general no es completo. Como se comprueba inmediatamente en el caso $\square = K[[X_1, X_2, X_3]]$, $P = (X_1, X_2, X_3) \square$

$$f_1 = X_1 .$$

Proposición 2-4-5.- Sea \square el anillo de coordenadas de una variedad algebroide y P un ideal primo de \square . sea J un ideal de \square tal que $J \subset P$ y sea \mathcal{J} el haz coherente de ideales definido en 2-3-4 . Si J' es el ideal de \square' generado por todos los cocientes $\{-\frac{j}{f_1^v} \mid j \in J, v \leq v_p(j)\}$ se

verifica que :

i) Si $x \in \pi^{-1}(M)$ es el punto de $Bl_p(\square)$ cuya fibra es \square' , entonces $J' = \mathcal{J}_x$.

ii) \square'/J' es un transformado monoidal de \square/J con centro P/J ó $\square'/J' = 0$.

iii) Si J es primo , $J' = \square'$ ó J' es un ideal primo de \square' con $J' \cap \square = J$.

Demostración.-

i) En virtud de la construcción de 2-4-1 , si $x \in \pi^{-1}(M)$ es el punto de $Bl_p(\square)$ cuya fibra es \square' entonces $x \in D_+(f_1)$, de donde $\square' = \square \left[\frac{P}{f_1} \right]_N$ siendo N el ideal del punto x

en $D_+(f_1)$. La fibra de γ en x es entonces:

$$\gamma_x = (\gamma|_{D_+(f_1)}) = (J_{f_1})_N \subset \square' \quad \text{y} \quad \gamma_x = J'$$

ii) Se pueden presentar dos casos:

a) $f_1 \in J$; entonces $J' = \gamma_x = \square'$ y $\square'/J' = 0$

b) $f_1 \notin J$; entonces $J' \neq \square'$ y $\square'/J' \neq 0$

$$\begin{aligned} \square'/J' &= \left[\square \left[P/f_1 \right] \right]_N / J' = \left[\square \left[P/f_1 \right] / J_{f_1} \right]_N = \\ &= \left[\square/J \left[P/J / f_1 \right] \right]_{N/J} \quad \text{y por definici3n de transformado} \end{aligned}$$

monoidal resulta ii) .

iii) Si J es primo $J' = \square'$ 6 $J' \neq \square'$, J' es primo en \square' . En efecto como J es primo \square/J es dominio de integridad y \square'/J' por ii) es dominio de integridad pues el transformado monoidal de un dominio de integridad es un dominio de integridad luego J' es primo. Trivialmente $J' \cap \square = J$.

Definici3n 2-4-6.- J' se llama transformado estricto de J en \square' .

Consecuencia 2-4-7.- En las condiciones de (2-4-5) el homomorfismo local natural $\square \dashrightarrow \square'$ induce un isomorfismo

$$\square_q \overset{\sim}{\cong} \square'_q, \quad \text{para todo par } (q, q'), \quad q \text{ ideal primo de } \square$$

tal que su transformado estricto $q' \neq \square'$.

Demostraci3n.- Aplicando 2-4-5, (ii), (iii) tendremos que $f_1 \notin q$ y $q' \cap \square = q$ luego $f_1 \notin q'$. Se verifica entonces que existe un isomorfismo $\phi: \square_{q' \cap \square} \overset{\sim}{\cong} \square'_q$

Dicho isomorfismo se construye as3:

$$\begin{array}{ccc} \square_{q' \cap \square} & \xrightarrow{\phi} & \square'_q \\ \frac{a}{b} & \xrightarrow{\quad} & \frac{a}{b} \end{array}$$

$a \in \square$

$b \notin q' \wedge \square$

y se comprueba que es realmente isomorfismo mediante un proceso análogo al de 2-3-4 - (iii) - d .

Consecuencia 2-4-8. - Sea \square el anillo de una variedad algebroide , sea \square' un transformado monoideal de \square con centro P , tal que $\square' = \square \left[\frac{P}{f_1} \right]_{\bar{N}}$ siendo $f_1 \neq 0$ (módulo M^2), entonces $\dim \square = \dim \square'$.

Demostración. -

i) \square es el anillo de una variedad algebroide luego $\square = \bar{\square} / J$ con $\bar{\square} = K[[X]]$ y J ideal radical de $\bar{\square}$.

ii) En las condiciones de 2-4-5, si $f_1 = x_1 + J$, $x_1 \in \bar{P}$, $\bar{P} = n^{-1}(P)$ siendo $n: \bar{\square} \rightarrow \square$ el epimorfismo natural. Como $f_1 + M_{\square}^2 \neq 0$ se tiene que $x_1 + M_{\bar{\square}}^2 \neq 0$ y si $\bar{\square}'$ es el transformado de $\bar{\square}$ dado por $\bar{\square}' = \bar{\square} \left[\frac{\bar{P}}{x_1} \right]_{\bar{N}}$, $\bar{N} = n^{-1}(N)$, entonces $\bar{\square}' / J' = \square'$.

iii) Por el teorema 2-4-3 , $\dim \bar{\square} = \dim \bar{\square}'$. Demostraremos que $\dim \bar{\square} / J = \dim \bar{\square}' / J'$.

Tenemos que

$$\begin{aligned} \dim \bar{\square} / J &= \sup \{ \text{ht}(p) \mid p \in \text{Spec}(\bar{\square} / J) \} = \\ &= \sup \{ \text{ht}(p) \mid p \text{ ideal primo de } \bar{\square} \text{ que contiene a } J \} = \\ &= \sup \{ \dim \bar{\square}_p , p \text{ ideal primo de } \bar{\square} \text{ que contiene a } J \} . \end{aligned}$$

Supongamos que un sistema de parámetros del anillo $\bar{\square}$ lo forman los elementos (x_1, x_2, \dots, x_n) , pues x_1 pertenece a un sistema de parámetros ya que $x_1 + M_{\bar{\square}}^2 \neq 0$. Entonces una cadena maximal de ideales primos en $\bar{\square}$ es la siguiente

$$0 \subset (x_2)\bar{\mathfrak{Q}} \subset (x_2, x_3)\bar{\mathfrak{Q}} \subset \dots \subset (x_2, x_3, \dots, x_n)\bar{\mathfrak{Q}} \subset (x_1, x_2, \dots, x_n)\bar{\mathfrak{Q}}$$

$x_1 \notin J$ pues si perteneciera sería $J' = \bar{\mathfrak{Q}}'$, luego J se puede introducir en un eslabón de esta cadena

$$(x_2, x_3, \dots, x_i)\bar{\mathfrak{Q}} \subset J \subset (x_2, x_3, \dots, x_i, x_{i+1})\bar{\mathfrak{Q}}$$

Llamando $\bar{\mathfrak{Q}}'_i$ al transformado estricto de $(x_2, x_3, \dots, x_i)\bar{\mathfrak{Q}}$, tendremos en $\bar{\mathfrak{Q}}'$ la cadena siguiente

$$0 \subset \bar{\mathfrak{Q}}'_2 \subset \bar{\mathfrak{Q}}'_3 \subset \dots \subset \bar{\mathfrak{Q}}'_i \subset J' \subset \bar{\mathfrak{Q}}'_{i+1} \subset \dots \subset \bar{\mathfrak{Q}}'_1$$

debido a lo cual $\dim \bar{\mathfrak{Q}}/J \leq \dim \bar{\mathfrak{Q}}'/J'$

Recíprocamente si p'' es un ideal primo de $\bar{\mathfrak{Q}}'$ tal que $p'' \supset J'$, $p = p'' \cap \bar{\mathfrak{Q}}$ es un ideal primo que contiene a J , sea p' el transformado estricto de p , tendremos entonces $p'' \cap \bar{\mathfrak{Q}} = p' \cap \bar{\mathfrak{Q}} = p$.

Se verifica que $x_1 \notin p$ pues si perteneciera sería $p' = \bar{\mathfrak{Q}}'$, entonces al ser $p'' \cap \bar{\mathfrak{Q}} = p$, $f_1 \notin p''$ luego $\bar{\mathfrak{Q}}_{p'' \cap \bar{\mathfrak{Q}}} \cong \bar{\mathfrak{Q}}'_{p''}$ con lo que $ht(p) = ht(p'')$ y sería $\dim \bar{\mathfrak{Q}}'/J' \leq \dim \bar{\mathfrak{Q}}/J$.

§ 2-5.- Transformados monoidales formales.

Nota 2-5-1.- Sea \square el anillo de coordenadas de una variedad algebroide y sea \square' un transformado monoidal de \square . \square' no es el anillo de coordenadas de una variedad algebroide pues no es completo (véase nota 2-4-4).

Definición.2-5-2.- Sea \square el anillo de una variedad algebroide, $\square' = \square(P/f_1)_N$ un transformado monoidal de \square con centro P . Llamaremos transformado monoidal formal de \square con centro P a $\hat{\square}'$ complección de \square' respecto de la topología M' -ádica con M' ideal maximal de \square' . En el caso de que $P = M$ con M ideal maximal de \square diremos que $\hat{\square}'$ es un transformado cuadrático formal de \square .

Proposición 2-5-3.- Sea \square el anillo de coordenadas de una variedad algebroide y $\hat{\square}'$ un transformado monoidal formal de \square . Entonces $\hat{\square}'$ es también el anillo de una variedad algebroide.

Demostración.- Por 2-4-4 y 2-5-2 es $\hat{\square}'$ un anillo local, completo, equicaracterístico y reducido. Se verifica también que la dimensión de inmersión es finita aunque no tiene que coincidir con la de \square y el cuerpo de coeficientes es algebraicamente cerrado al ser el mismo que el de \square .

§ 2-6.- Ecuaciones del transformado cuadrático.-

Introducción.- Los objetivos principales de esta sección son los siguientes:

- 1) Cálculo de las ecuaciones de un transformado cuadrático formal de una variedad algebroide.
- 2) Demostración de la equivalencia entre los transformados cuadráticos formales intrínsecos y los transformados por ecuaciones.

Nota 2-6-1.- Sea $\bar{\square} = K[[X_1, \dots, X_n]]$, \bar{M} el ideal maximal de $\bar{\square}$. Entonces $B\ell_{\bar{M}}(\bar{\square}) = \bigcup_{i=1}^n \text{Spec } \bar{\square} \left[\frac{X_1}{\bar{X}_i}, \dots, \frac{\widehat{X}_i}{\bar{X}_i}, \dots, \frac{X_n}{\bar{X}_i} \right]$.

En virtud de 2-3-5, $\pi^{-1}(\bar{M}) = \text{Proj } K[\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_n]$, $\bar{X}_i = X_i + \bar{M}^2$ y la inmersión $\pi^{-1}(\bar{M}) \hookrightarrow B\ell_{\bar{M}}(\bar{\square})$ viene dada por el homomorfismo graduado $H = \bigoplus_{i=0}^{\infty} \bar{M}^i \dashrightarrow N = \bigoplus_{i=0}^{\infty} \bar{M}^i / \bar{M}^{i+1} \cong K[\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_n]$.

Por tanto $\pi^{-1}(\bar{M}) \cap D_+(X_i) = D_+(\bar{X}_i)$ en $\text{Proj}(K[\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_n])$.

Por construcción, el punto cerrado $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ de $\pi^{-1}(\bar{M})$ pertenece entonces a $D_+(X_i)$ si y solo si $\alpha_i \neq 0$.

Por otra parte si $\eta = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in D_+(X_i)$, el anillo local

de η en $B\ell_{\bar{M}}(\bar{\square})$, $\bar{\square}'$ es $\bar{\square}' = \bar{\square} \left[\frac{X_1}{\bar{X}_i}, \dots, \frac{\widehat{X}_i}{\bar{X}_i}, \dots, \frac{X_n}{\bar{X}_i} \right]_{\bar{M}'}$,

siendo \bar{M}' un ideal maximal en $\bar{\square} \left[\frac{X_1}{\bar{X}_i}, \dots, \frac{\widehat{X}_i}{\bar{X}_i}, \dots, \frac{X_n}{\bar{X}_i} \right]$

que contiene a $\bar{M} \bar{\square} \left[\frac{X_1}{\bar{X}_i}, \dots, \frac{\widehat{X}_i}{\bar{X}_i}, \dots, \frac{X_n}{\bar{X}_i} \right]$.

El anillo local de η en la fibra $\pi^{-1}(\bar{M})$ es $\bar{\square}' / \bar{M}' \bar{\square}' = \bar{\square}' / X_i \bar{\square}'$

que es un anillo local regular de dimensión $n-1$.

De aquí y de 2-4-3 $\bar{\square}'$ es un anillo local regular n -dimensional y $\left(\frac{X_1}{\bar{X}_i} - \frac{\alpha_1}{\alpha_i}, \dots, \frac{X_{i-1}}{\bar{X}_i} - \frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i}, X_i, \frac{X_{i+1}}{\bar{X}_i} - \frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i}, \dots \right)$

$$\dots, \frac{X_n}{X_i} - \frac{\alpha_n}{\alpha_i}$$

es un sistema de parámetros.

Nota 2-6-2.- En lo que sigue $n=(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_i \neq 0$ será

un punto cerrado de $\pi^{-1}(\bar{M})$, $\bar{\square}'$ será el transformado cuadrático con centro \bar{M} de $\bar{\square}$ obtenido como fibra de $B\ell_{\bar{M}}(\bar{\square})$ en η .

Proposición 2-6-3.- Con las notaciones de 2-6-1 y 2-6-2.

Sea $f \in \bar{M}$. Se verifica que el transformado estricto de $(f) \bar{\square}$ en $\bar{\square}'$ por la transformación cuadrática es el ideal $(f') \bar{\square}'$

donde $f' = \frac{-f}{X_i^s} - \frac{s}{\bar{M}}$, $s = v_{\bar{M}}(f)$.

Demostración.- De 2-3-4 tenemos que si $J = (f) \bar{\square}$, entonces el ideal transformado estricto de J en $\bar{\square}'$ que llamaremos J' será el ideal de $\bar{\square}'$ generado por todos los cocientes

$\left\{ \frac{-f}{X_i^v} - \frac{v}{\bar{M}}, v < s = v_{\bar{M}}(f) \right\}$, luego J' será el ideal $(f') \bar{\square}'$

con $f' = \frac{-f}{X_i^s} - \frac{s}{\bar{M}}$, $s = v_{\bar{M}}(f)$ ya que cualquier $\frac{-f}{X_i^v} - \frac{v}{\bar{M}}$ con $v < s$

se podrá expresar como $\frac{-f}{X_i^v} - \frac{v}{\bar{M}} = X_i^{s-v} \cdot \left(\frac{-f}{X_i^s} - \frac{s}{\bar{M}} \right)$.

Nota 2-6-4.- Ecuación de f' .

$$\text{Sea } X'_1 = \frac{X_1}{X_i} - \frac{\alpha_1}{\alpha_i}, \dots, X'_{i-1} = \frac{X_{i-1}}{X_i} - \frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i}, X'_i = X_i,$$

$$X'_{i+1} = \frac{X_{i+1}}{X_i} - \frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i}, \dots, X'_n = \frac{X_n}{X_i} - \frac{\alpha_n}{\alpha_i}, \text{ un sistema regu-}$$

lar de parámetros de $\bar{\square}'$.

$$\text{Sea } \alpha'_1 = \frac{\alpha_1}{\alpha_i}, \dots, \alpha'_n = \frac{\alpha_n}{\alpha_i}.$$

Si f es de la forma

$$f = f_s(X_1, \dots, X_n) + f_{s+1}(X_1, \dots, X_n) + \dots, s > 0 \text{ donde las } f_i$$

son formas homogéneas de grado i , entonces como

$$X_1 = X'_1 (X'_1 + \alpha'_1), \dots, X_{i-1} = X'_{i-1} (X'_{i-1} + \alpha'_{i-1}), X_i = X'_i,$$

$$X_{i+1} = X'_i (X'_{i+1} + \alpha'_{i+1}), \dots, X_n = X'_i (X'_n + \alpha'_n)$$

$$f = f_s [X'_1 (X'_1 + \alpha'_1), \dots, X'_{i-1} (X'_{i-1} + \alpha'_{i-1}), X'_i, X'_i (X'_{i+1} + \alpha'_{i+1}), \dots, X'_i (X'_n + \alpha'_n)] + f_{s+1} [X'_1 (X'_1 + \alpha'_1), \dots, X'_{i-1} (X'_{i-1} + \alpha'_{i-1}), X'_i,$$

$$X'_i (X'_{i+1} + \alpha'_{i+1}), \dots, X'_i (X'_n + \alpha'_n)] + \dots$$

$$f' = \frac{f}{X'_i} = f_s (X'_1 + \alpha'_1, \dots, X'_{i-1} + \alpha'_{i-1}, 1, X'_{i+1} + \alpha'_{i+1}, \dots, X'_n + \alpha'_n) +$$

$$+ X'_i f_{s+1} (X'_1 + \alpha'_1, \dots, X'_{i-1} + \alpha'_{i-1}, 1, X'_{i+1} + \alpha'_{i+1}, \dots, X'_n + \alpha'_n) + \dots$$

Consecuencia 2-6-5.- A la vista de la ecuación de f' obtenida en 2-6-4 podemos deducir que f' es una no unidad en $\bar{\mathbb{Q}}$ si y solo si $f_s(\alpha'_1, \dots, \alpha'_{i-1}, 1, \alpha'_{i+1}, \dots, \alpha'_n) = 0$, es decir si y solo si $f_s(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n) = 0$ pues f_s es homogéneo.

Nota 2-6-6.-

i) El homomorfismo natural de $\bar{\mathbb{Q}} \rightarrow \bar{\mathbb{Q}} / (f)\bar{\mathbb{Q}}$ se extiende de a un homomorfismo de anillos de cocientes $\bar{\mathbb{Q}}_{X_i} \rightarrow (\bar{\mathbb{Q}} / (f)\bar{\mathbb{Q}})_{X_i + f\bar{1}}$

el cual se restringe a un homomorfismo de

$$\bar{\mathbb{Q}} \left[\begin{array}{c} X_1 \\ \vdots \\ X_i \\ \vdots \\ X_n \end{array} \right] \rightarrow (\bar{\mathbb{Q}} / (f)\bar{\mathbb{Q}})_{X_i + f\bar{1}}, \text{ la imagen } \tilde{\mathbb{Q}} \text{ de}$$

este último homomorfismo es el anillo de coordenadas del esquema afín

$$D_+(X_i) \cap \text{Proj} \left[\bigoplus_{n=0}^{\infty} (M / (f)\bar{\mathbb{Q}})^n \right]. \text{ El núcleo del homomorfismo}$$

$$\bar{\mathbb{Q}} \left[\begin{array}{c} X_1 \\ \vdots \\ X_i \\ \vdots \\ X_n \end{array} \right] \rightarrow \tilde{\mathbb{Q}} \text{ es el ideal}$$

$f \bar{\square}_{X_i} \cap \bar{\square} \left[\frac{X_1}{\bar{X}_i}, \dots, \frac{\widehat{X_i}}{\bar{X}_i}, \dots, \frac{X_n}{\bar{X}_i} \right]$ que coincide con el ideal

principal generado por $\frac{-f}{\bar{X}_i^s}$ donde $s = v_M(f)$ ya que los elementos de $\bar{\square} \left[\frac{X_1}{\bar{X}_i}, \dots, \frac{\widehat{X_i}}{\bar{X}_i}, \dots, \frac{X_n}{\bar{X}_i} \right]$ son homogéneos de grado

cero. Entonces el núcleo del epimorfismo $\bar{\square}' \rightarrow \widehat{\square}'$ ($\widehat{\square}'$ es la localización de $\bar{\square}$ con respecto a la imagen de \bar{M}') está generado por f' , la imagen de $\frac{-f}{\bar{X}_i^s}$ en $\bar{\square}'$.

ii) Sea Υ el epimorfismo natural $\bigoplus_{n=0} \bar{M}^n \xrightarrow{\Upsilon} \bigoplus_{n=0} (\bar{M}/(f)\bar{\square})^n$ y Υ^* la inmersión cerrada inducida por Υ

$\text{Proj} \left[\bigoplus_{n=0} (\bar{M}/(f)\bar{\square})^n \right] \xrightarrow{\Upsilon^*} \text{Proj} \left(\bigoplus_{n=0} \bar{M}^n \right)$. Entonces f' es una no unidad de $\bar{\square}'$ si y solo si el punto $\eta \in \text{Imag } \Upsilon^*$.

En efecto $\text{Proj} \left[\bigoplus_{n=0} (\bar{M}/(f)\bar{\square})^n \right] = \bigcup_{i=1}^n \text{Spec} \left(\bar{\square}/(f)\bar{\square} \left[\frac{X_1 + (f)\bar{\square}}{X_i + (f)\bar{\square}}, \dots, \frac{\widehat{X_i + (f)\bar{\square}}}{X_i + (f)\bar{\square}}, \dots, \frac{X_n + (f)\bar{\square}}{X_i + (f)\bar{\square}} \right] \right) = \bigcup_{i=1}^n D_+(\bar{X}_i)$ con $\bar{X}_i = X_i + (f)\bar{\square}$,

luego $\Upsilon^*|_{D_+(\bar{X}_i)}$ es la inmersión $\text{Spec} \left(\bar{\square}/(f)\bar{\square} \left[\frac{\bar{X}_1}{\bar{X}_i}, \dots, \frac{\widehat{\bar{X}_i}}{\bar{X}_i}, \dots, \frac{\bar{X}_n}{\bar{X}_i} \right] \right) \hookrightarrow \text{Proj} \left(\bigoplus_{n=0} \bar{M}^n \right)$. Entonces $\eta \in \text{Imag } \Upsilon^*$ si y

solo si $\exists i$ tal que $\eta \in D_+(\bar{X}_i) = \text{Spec} \left(\bar{\square}/(f)\bar{\square} \left[\frac{X_1}{\bar{X}_i}, \dots, \frac{\widehat{X_i}}{\bar{X}_i}, \dots, \frac{X_n}{\bar{X}_i} \right] \right)$

o lo que es lo mismo si y solo si $f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0$ con $\eta = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Aplicando 2-6-5 queda demostrado nuestro aserto.

Nota 2-6-7. - $\bar{\square} = \bar{\square}/(f)\bar{\square}$ será el anillo de coordenadas de una hipersuperficie algebroide. Si f' es una no unidad en $\bar{\square}'$, tendremos que $\bar{\square}' = \widehat{\square}' / (f')\widehat{\square}'$ y un transformado cuadrático formal de $\bar{\square}$ será $\widehat{\square}' / (f')\widehat{\square}'$, en donde $\widehat{\square}'$ es la complec

ción de $\bar{\square}'$ en la topología \bar{M}' -ádica (\bar{M}' ideal maximal de $\bar{\square}'$).

Se verifica que $\dim \widehat{\bar{\square}}' /_{(f)} \widehat{\bar{\square}}' = \dim \bar{\square}' /_{(f')} \bar{\square}' =$
 $= \dim \bar{\square}' /_{(f)} \bar{\square}' = n-1$ luego $\widehat{\bar{\square}}' /_{(f')} \widehat{\bar{\square}}'$ es el anillo de coordenadas de una hipersuperficie algebroide

$\widehat{\bar{\square}}'$ es un anillo local, completo, equicaracterístico con cuerpo de coeficientes K y de dimensión la de $\bar{\square}'$ luego $\widehat{\bar{\square}}' =$

$$= K[[X'_1, \dots, X'_n]] \quad \text{con} \quad X'_1 = \frac{X_1}{X_i} - \frac{\alpha_1}{\alpha_i}, \dots, X'_{i-1} = \frac{X_{i-1}}{X_i} - \frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i},$$

$$X'_i = X_i, X'_{i+1} = \frac{X_{i+1}}{X_i} - \frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i}, \dots, X'_n = \frac{X_n}{X_i} - \frac{\alpha_n}{\alpha_i}.$$

Por tanto la forma efectiva de construir un transformado cuadrático de la hipersuperficie $V(f)$ dada por $f(X_1, \dots, X_n)$ en el punto $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ del divisor excepcional es sustituir en la ecuación $f(X_1, \dots, X_n)$ las variables X_i por:

$$X_1 = X'_1 \left(X'_i + \frac{\alpha_1}{\alpha_i} \right)$$

.....

$$X_i = X'_i$$

.....

$$X_n = X'_n \left(X'_i + \frac{\alpha_n}{\alpha_i} \right)$$

y dividir el resultado por $X_i'^s$, $s = v_{\bar{M}}(f)$ y así obtendremos

$$f'(X'_1, \dots, X'_n) = \frac{f\left(X'_1 \left(X'_i + \frac{\alpha_1}{\alpha_i}\right), \dots, X'_i, \dots, X'_n \left(X'_i + \frac{\alpha_n}{\alpha_i}\right)\right)}{X_i'^s}$$

Nota 2-6-8.- Transformados cuadráticos formales direccionales.

Sea $f \in \bar{M}$, $f = f_s(X_1, \dots, X_m) + f_{s+1}(X_1, \dots, X_n) + \dots$. Sea

$(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq (0, \dots, 0), \alpha_i \in K$ tales que $f_s(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0$.

Si $\alpha_1 \neq 0$ pondremos

$$f'_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n} = f_s \left(1, X'_2 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1}, \dots, X'_n + \frac{\alpha_n}{\alpha_1} \right) +$$

$$+ X'_1 f_{s+1} \left(1, X'_2 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1}, \dots, X'_n + \frac{\alpha_n}{\alpha_1} \right) + \dots$$

Si $\alpha_2 \neq 0$ pondremos

$$f'_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n} = f_s \left(X'_1 + \frac{\alpha_1}{\alpha_2}, 1, \dots, X'_n + \frac{\alpha_n}{\alpha_2} \right) +$$

$$+ X'_2 f_{s+1} \left(X'_1 + \frac{\alpha_1}{\alpha_2}, 1, \dots, X'_n + \frac{\alpha_n}{\alpha_2} \right) + \dots$$

.....

Si $\alpha_n \neq 0$ pondremos

$$f'_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n} = f_s \left(X'_1 + \frac{\alpha_1}{\alpha_n}, X'_2 + \frac{\alpha_2}{\alpha_n}, \dots, 1 \right) +$$

$$+ X'_n f_{s+1} \left(X'_1 + \frac{\alpha_1}{\alpha_n}, X'_2 + \frac{\alpha_2}{\alpha_n}, \dots, 1 \right) + \dots$$

Con estas notaciones se verifica:

i) Los $f'_{\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n} \forall i, 1 \leq i \leq n$ son no unidades en $\bar{\square}'$.

ii) Todos los $\bar{\square}' / (f'_{\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n}) \bar{\square}'$ son isomorfos. Luego

llamaremos transformado cuadrático formal direccional de

$\bar{\square}' / (f) \bar{\square}$ en la dirección $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ a cada uno de los anillos

$\hat{\square}' / (f'_{\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n}) \hat{\square}' \quad 1 \leq i \leq n$

iii) La colección de transformados cuadráticos formales direccionales de $\bar{\square}' / (f) \bar{\square}$ definidos en ii) depende solo de $\bar{\square}$ y f .

Proposición 2-6-9.- Sea J un ideal radical de $\bar{\square}$, J' su transformado estricto en $\bar{\square}'$. Consideremos una base stan-

dard normalizada del ideal J formada por los elementos f_1, \dots, f_s , esta base verificará, entre otras propiedades, que $\text{Gr}_{\bar{M}}(J, \bar{\Omega}) = (\text{In}_{\bar{M}}(f_1), \dots, \text{In}_{\bar{M}}(f_s)) \text{Gr}_{\bar{M}}(\bar{\Omega})$.

Sea $v_i = v_{\bar{M}}(f_i)$. En estas condiciones tendremos que

$$J' = (f'_1 = -\frac{f_1}{x_i^{v_1}}, \dots, f'_s = -\frac{f_s}{x_i^{v_s}}) \bar{\Omega}'$$

Demostración.

Teníamos que $x_i \bar{\Omega}' = \bar{M} \bar{\Omega}'$. Entonces el transformado estricto J' de J en $\bar{\Omega}'$ es la unión de la sucesión creciente de los ideales

$$x_i^{-v}(J \cap \bar{M}^v) \bar{\Omega}', \quad v \in \mathbb{Z}_0$$

Pero al ser $\bar{\Omega}'$ noetheriano esta sucesión es estacionaria luego $\exists v_0 \in \mathbb{Z}_0$ tal que $J' = x_i^{-v}(J \cap \bar{M}^v) \bar{\Omega}', \quad \forall v \geq v_0$.

Para demostrar la proposición tendremos que probar que $\forall v, v \geq v_0$

$$x_i^{-v}(J \cap \bar{M}^v)A \subseteq (x_i^{-v_1} f_1, \dots, x_i^{-v_s} f_s)A \quad \text{con}$$

$$A = \bar{\Omega} \left[\frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{\widehat{x_{ii}}}{x_{ii}}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right]$$

Sea $I_v = \sum_{i=1}^s \bar{M}^{v-v_i} f_i, \quad \forall v \geq v_i$. Para probar la inclusión

anterior bastará ver que

$$J \cap \bar{M}^v \subseteq I_v \quad \forall v \geq \max\{v_i\}$$

Para ello demostraremos en primer lugar que

$$J \cap \bar{M}^v \subseteq I_v + \bar{M}^{v+1}$$

Sea f un elemento tal que $f \in J \cap \bar{M}^v, f \notin \bar{M}^{v+1}$. Se tendrá

que $In_{\bar{M}}(f) = \sum_i \psi_i In_{\bar{M}}(f_i)$, $\psi_i \in Gr_{\bar{M}}^{v-v_i}(R)$,

$\psi_i = In_{\bar{M}}(h_i)$, $h_i \in \bar{\square}$. Entonces $h_i \in \bar{M}^{v-v_i}$ y

$f = \sum_i h_i f_i \in \bar{M}^{v+1}$. Luego $f \in I_{v+\bar{M}}^{v+1}$.

Tenemos que $J \cap \bar{M}^v \subseteq I_{v+\bar{M}}^{v+1}$, $\forall v \geq \max\{v_i\}$.

Al verificarse que $I_{v+n} = \bar{M}^n I_v \subseteq I_v \subseteq J$, $v \geq \max\{v_i\}$ y $n \in \mathbb{Z}_0$, se tendrá que

$$J \cap \bar{M}^v \subseteq I_{v+\bar{M}}^{v+n} , \forall v \geq \max\{v_i\} \text{ y } \forall n \geq 0.$$

Luego $J \cap \bar{M}^v \subseteq I_v$, q.e.d.

Esta demostración justifica la importancia de las bases standard normalizadas cuya existencia demostramos en el capítulo I.

Nota 2-6-10.- Con las notaciones anteriores $\bar{\square} = \bar{\square} / J \bar{\square}$ es el anillo de coordenadas de una variedad algebroide , las ecuaciones de dicha variedad son $\{f_1(X_1, \dots, X_n) = 0, \dots, f_s(X_1, \dots, X_n) = 0\}$. Por 2-5-2 $\hat{\square}' = \hat{\square}' / J \hat{\square}'$ es un transformado cuadrático formal de $\bar{\square}$, $\hat{\square}'$ será el anillo de una variedad algebroide de ecuaciones $\{f'_1(X'_1, \dots, X'_n) = 0, \dots, f'_s(X'_1, \dots, X'_n) = 0\}$.

Se verifica que $dim \hat{\square}' / J \hat{\square}' = dim \bar{\square}' / J \bar{\square}' = dim \bar{\square} / J \bar{\square}$.

Por tanto la forma efectiva de construir un transformado cuadrático de la variedad $V(f_1, \dots, f_s)$ dada por $f_1(X_1, \dots, X_n), \dots, \dots, f_s(X_1, \dots, X_n)$ en el punto $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ del divisor excepcional es sustituir en la ecuación $f_i(X_1, \dots, X_n)$, $1 \leq i \leq s$ las variables X_i por

$$\begin{aligned} X_1 &= X'_1 \left(X'_1 + \frac{\alpha_1}{\alpha'_1} \right) \\ &\dots \dots \dots \\ X_i &= X'_i \\ &\dots \dots \dots \\ X_n &= X'_n \left(X'_n + \frac{\alpha_n}{\alpha'_n} \right) \end{aligned}$$

y dividir el resultado por $X_i^{v_i}$, $v_i = v_{\bar{M}}(f_i)$, $1 \leq i \leq s$
 y así obtendremos

$$f_i'(X_1', \dots, X_n') = \frac{f_i(X_1'(X_1' + \frac{a_1}{\alpha_i}), \dots, X_i', \dots, X_n'(X_n' + \frac{a_n}{\alpha_i}))}{X_i^{v_i}}$$

$1 \leq i \leq s$.

§ 2-7.- Ecuaciones del transformado monoidal.

Introducción.- Los objetivos principales de esta sección son los siguientes:

- 1) Cálculo de las ecuaciones de un transformado monoidal formal de una variedad algebroide.
- 2) Demostración de la equivalencia entre los transformados monoidales formales intrínsecos y los transformados por ecuaciones.

Nota 2-7-1.-

Sea $\bar{\square} = K[[X_1, \dots, X_n]]$ \bar{M} su ideal maximal y P ideal regular de $\bar{\square}$; eligiendo un sistema adecuado de parámetros, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $P = (X_1, \dots, X_r) \bar{\square}$.

En virtud de 2-3-5, $\pi^{-1}(\bar{M}) = \text{Proj } K[\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_r]$, $\bar{X}_i = X_i + \bar{M}P$ y la inmersión $\pi^{-1}(\bar{M}) \hookrightarrow \text{Bl}_P(\bar{\square})$ viene dada por el morfismo graduado $H = \bigoplus_{i=0}^{\infty} P^i \dashrightarrow N = \bigoplus_{i=0}^{\infty} P^i / \bar{M}P^i \cong K[\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_r]$.

Por tanto $\pi^{-1}(\bar{M}) \cap D_+(X_i) = D_+(\bar{X}_i)$ en $\text{Proj}(K[\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_r])$.

Por construcción el punto cerrado $(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ de $\pi^{-1}(\bar{M})$ pertenece entonces a $D_+(X_i)$ si y solo si $\alpha_i \neq 0$, $i=1, \dots, r$.

Por otra parte si $\eta = (\alpha_1, \dots, \alpha_r) \in D_+(X_i)$, el anillo local de η en $\text{Bl}_P(\bar{\square})$, $\bar{\square}''$ es $\bar{\square}'' = \bar{\square} \left[\frac{X_1}{\bar{X}_i}, \dots, \frac{\widehat{X}_i}{\bar{X}_i}, \dots, \frac{X_r}{\bar{X}_i} \right]_{\bar{M}''}$ siendo

\bar{M}'' un ideal maximal de

$$\bar{\square} \left[\frac{X_1}{\bar{X}_i}, \dots, \frac{\widehat{X}_i}{\bar{X}_i}, \dots, \frac{X_r}{\bar{X}_i} \right]$$

que contiene a $\bar{M} \bar{\square} \left[\frac{X_1}{\bar{X}_i}, \dots, \frac{\widehat{X}_i}{\bar{X}_i}, \dots, \frac{X_r}{\bar{X}_i} \right]$.

De aquí y de 2-4-3, $\bar{\square}''$ es un anillo local regular n -dimensional y $\left(\frac{X_1}{\bar{X}_i} - \frac{\alpha_1}{\alpha_i}, \dots, \frac{X_{i-1}}{\bar{X}_i} - \frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i}, X_i, \frac{X_{i+1}}{\bar{X}_i} - \frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i}, \dots \right)$

....., $\frac{X_r}{X_i} - \frac{\alpha_r}{\alpha_i}$, X_{r+1}, \dots, X_n) es un sistema de parámetros.

Nota 2-7-2.- En lo que sigue $\eta = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ $\alpha_i \neq 0$ será un punto cerrado de $\pi^{-1}(\bar{M})$, $\bar{\square}''$ será el transformado monoidal con centro P de $\bar{\square}$ obtenido como fibra de $B\&_P(\bar{\square})$ en n.

Proposición 2-7-3.-

Sea $f \in P$, $f \neq 0$, $f = f_s(X_1, \dots, X_n) + f_{s+1}(X_1, \dots, X_n) + \dots$

en donde f_j es una forma con coeficientes en $K[[X_{r+1}, \dots$

....., $X_n]]$, de grado j en X_1, \dots, X_r . Las condiciones siguientes son equivalentes:

i) $v_{\bar{M}}(f) = v_P(f) = s$

ii) $f \in \bar{M}^t \implies f \in P^t$

iii) Los anillos locales $\bar{\square}/(f)\bar{\square}$ y $(\bar{\square}/(f)\bar{\square})_{P/(f)\bar{\square}}$ tienen

la misma multiplicidad.

iv) $f_s(X_1, \dots, X_r, 0, \dots, 0) \neq 0$

Demostración.-

i \iff ii \iff iv trivial

i \iff iii ya que al ser $\bar{\square}$ un anillo local regular y $f \neq 0$ un elemento del ideal maximal \bar{M} se verifica que la multiplicidad de $\bar{\square}/(f)\bar{\square}$ es el grado de f con respecto a \bar{M} . Luego multiplicidad $(\bar{\square}/(f)\bar{\square}) = \text{mult}(\bar{\square}/(f)\bar{\square})_{P/(f)\bar{\square}} = s$

pues $f \in P$.

Proposición 2-7-4.- Con las notaciones de 2-7-1 y 2-7-2.

Sea $f \in P$, $f \neq 0$, tal que $v_P(f) = v_{\bar{M}}(f) = s$, se verifica que

el transformado estricto de $(f)\bar{\square}$ en $\bar{\square}''$ por la transformación monoidal es el ideal $(f'')\bar{\square}''$ donde $f'' = -\frac{f}{X_i^s}$,

Demostración.- Análoga a la de 2-6-3.

Nota 2-7-5.- Ecuación de f'' .-

Sea $f = f_s(X_1, \dots, X_n) + f_{s+1}(X_1, \dots, X_n) + \dots$ donde f_j es una forma con coeficientes en $K[[X_{r+1}, \dots, X_n]]$ de grado j en X_1, \dots, X_r , con $f_s(X_1, \dots, X_r, 0, \dots, 0) \neq 0$.

Sea $(X_1'' = \frac{X_1}{X_i} - \frac{\alpha_1}{\alpha_i}, \dots, X_{i-1}'' = \frac{X_{i-1}}{X_i} - \frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i}, X_i'' = X_i, X_{i+1}'' = \frac{X_{i+1}}{X_i} - \frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i}, \dots, X_r'' = \frac{X_r}{X_i} - \frac{\alpha_r}{\alpha_i}, X_{r+1}'' = X_{r+1}, \dots, X_n'' = X_n)$ un sistema regular de parámetros de $\bar{\square}''$.

$$X_1 = X_i''(X_1'' + \alpha_1''), \dots, X_{i-1} = X_i''(X_{i-1}'' + \alpha_{i-1}''), \quad X_i = X_i''$$

$$X_{i+1} = X_i''(X_{i+1}'' + \alpha_{i+1}''), \dots, X_r = X_i''(X_r'' + \alpha_r''), \quad X_{r+1} = X_{r+1}'' \dots \dots$$

$$\dots \dots X_n = X_n'' \quad \text{con} \quad \alpha_1'' = \frac{\alpha_1}{\alpha_i}, \dots, \alpha_r'' = \frac{\alpha_r}{\alpha_i}.$$

$$f = f_s [X_i''(X_1'' + \alpha_1''), \dots, X_i''(X_{i-1}'' + \alpha_{i-1}''), X_i'', X_i''(X_{i+1}'' + \alpha_{i+1}''), \dots$$

$$\dots, X_i''(X_r'' + \alpha_r''), X_{r+1}'', \dots, X_n''] + f_{s+1} [X_i''(X_1'' + \alpha_1''), \dots,$$

$$X_i''(X_{i-1}'' + \alpha_{i-1}''), X_i'', X_i''(X_{i+1}'' + \alpha_{i+1}''), \dots, X_i''(X_r'' + \alpha_r''), X_{r+1}'', \dots, X_n''] + \dots$$

al ser f_s de grado s en X_1, \dots, X_r se tendrá

$$f'' = -\frac{f}{X_i^s} = f_s (X_1'' + \alpha_1'', \dots, X_{i-1}'' + \alpha_{i-1}'', 1, X_{i+1}'' + \alpha_{i+1}'', \dots,$$

$$X_r'' + \alpha_r'', X_{r+1}'', \dots, X_n'') + X_i'' f_{s+1} (X_1'' + \alpha_1'', \dots, X_{i-1}'' + \alpha_{i-1}'',$$

$$1, X_{i+1}'' + \alpha_{i+1}'', \dots, X_r'' + \alpha_r'', X_{r+1}'', \dots, X_n'' + \dots$$

Consecuencia 2-7-6.-A la vista de la ecuación de f'' obtenida en 2-7-5 podemos deducir que f'' es una no unidad en

$$\bar{\square}'' \text{ si y solo si } f_s(\alpha_1'', \dots, \alpha_{i-1}'', 1, \alpha_{i+1}'', \dots, \alpha_r'', 0, \dots, 0) = 0$$

es decir si y solo si $f_s(\alpha_1, \dots, \alpha_r, 0, \dots, 0) = 0$ al ser la forma inicial de f , f_s , un polinomio homogéneo.

Nota 2-7-7.- $\bar{\square} = \bar{\square} / (f)\bar{\square}$ será el anillo de coordenadas de una hipersuperficie algebroide. Si f'' es una no unidad en $\bar{\square}''$, tendremos por (2-4-5-ii) $\bar{\square}'' = \bar{\square}'' / (f'')\bar{\square}''$ y un transformado monoidal formal de $\bar{\square}$ será $\hat{\square}'' / (f'')\hat{\square}''$ donde $\hat{\square}''$ es la compleción de $\bar{\square}''$ en la topología \bar{M}'' -ádica (con \bar{M}'' ideal maximal de $\bar{\square}''$).

Se verifica aplicando 2-4-8 que $\dim \hat{\square}'' / (f'')\hat{\square}'' = \dim \bar{\square}'' / (f'')\bar{\square}'' = \dim \bar{\square} / (f)\bar{\square} = n-1$ luego $\hat{\square}'' / (f'')\hat{\square}''$ es el anillo de coordenadas de una hipersuperficie algebroide.

$\hat{\square}''$ es un anillo local completo equicaracterístico con cuerpo de coeficientes K y de dimensión la de $\bar{\square}$ luego $\hat{\square}'' =$

$$= K[[X_1'', \dots, X_n'']] \text{ con } X_1'' = \frac{X_1}{X_i} - \frac{\alpha_1}{\alpha_i}, \dots, X_{i-1}'' = \frac{X_{i-1}}{X_i} - \frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i},$$

$$X_i'' = X_i, X_{i+1}'' = \frac{X_{i+1}}{X_i} - \frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i}, \dots, X_r'' = \frac{X_r}{X_i} - \frac{\alpha_r}{\alpha_i}, X_{r+1}'' = X_{r+1}, \dots, X_n'' = X_n.$$

Por tanto la forma efectiva de construir un transformado monoidal de la hipersuperficie $V(f)$ dada por $f(X_1, \dots, X_n)$ en el punto $(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ del divisor excepcional es sustituir en

la ecuación $f(X_1, \dots, X_n)$ las variables X_i por

$$X_1 = X_i'' \left(X_1'' + \frac{\alpha_1}{\alpha_i} \right) \\ \dots \dots \dots$$

$$X_i = X_i'' \\ \dots \dots \dots$$

$$X_r = X_i'' \left(X_r'' + \frac{\alpha_r}{\alpha_i} \right) \\ \dots \dots \dots$$

$$X_{r+1} = X_{r+1}'' \\ \dots \dots \dots$$

$$X = X''$$

y dividir el resultado por $X_i''^s$, $s=v_{\bar{M}}(f)=v_p(f)$ y así obtendremos

$$f''(X_1'', \dots, X_n'') = \frac{f(X_1''(X_1'' + \frac{\alpha_1}{X_1''}), \dots, X_i'', \dots, X_i''(X_r'' + \frac{\alpha_r}{X_i''}), X_{r+1}'', \dots, X_n'')}{X_i''^s}$$

Nota 2-7-8.-Transformados monoidales formales direccionales.

Sea $f \in P$, $f = f_s(X_1, \dots, X_n) + f_{s+1}(X_1, \dots, X_n) + \dots$, con $f_s(X_1, \dots, X_r, 0, \dots, 0) \neq 0$. Sea $(\alpha_1, \dots, \alpha_r) \neq (0, \dots, 0)$, $\alpha_i \in K$ tales que $f_s(\alpha_1, \dots, \alpha_r, 0, \dots, 0) = 0$.

Si $\alpha_1 \neq 0$ llamamos

$$\begin{aligned} f''_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r} &= f_s(1, X_2'' + \frac{\alpha_2}{\alpha_1}, \dots, X_r'' + \frac{\alpha_r}{\alpha_1}, X_{r+1}'', \dots, X_n'') + \\ &+ X_1'' f_{s+1}(1, X_2'' + \frac{\alpha_2}{\alpha_1}, \dots, X_r'' + \frac{\alpha_r}{\alpha_1}, X_{r+1}'', \dots, X_n'') + \dots \end{aligned}$$

Si $\alpha_r \neq 0$ llamamos

$$\begin{aligned} f''_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r} &= f_s(X_1'' + \frac{\alpha_1}{\alpha_r}, \dots, X_{r-1}'' + \frac{\alpha_{r-1}}{\alpha_r}, 1, X_{r+1}'', \dots, X_n'') + \\ &+ X_r'' f_{s+1}(X_1'' + \frac{\alpha_1}{\alpha_r}, \dots, X_{r-1}'' + \frac{\alpha_{r-1}}{\alpha_r}, 1, X_{r+1}'', \dots, X_n'') + \dots \end{aligned}$$

Con estas notaciones se verifica:

i) los $f''_{\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_r} \forall i, 1 \leq i \leq r$ son no unidades en \bar{Q}'' .

ii) Todos los $\bar{Q}'' / (f''_{\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_r}) \bar{Q}''$ son isomorfos. Lue

go llamaremos transformado monoidal formal direccional de

$\bar{\square}/(f)\bar{\square}$ en la dirección $(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ a cada uno de los anillos $\hat{\square}''/(f''_{\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_r})\hat{\square}''$ $1 \leq i \leq r$

iii) La colección de transformados monoidales formales direccionales de $\bar{\square}/(f)\bar{\square}$ definidos en ii) depende solo de $\bar{\square}$ y f .

Proposición 2-7-9.- Sea J un ideal radical de $\bar{\square}$, $J \subset P$, J'' su transformado estricto en $\hat{\square}''$. Sea f_1, \dots, f_s una base standard normalizada del ideal J adecuada al sistema de parámetros $(X_1, \dots, X_r, X_{r+1}, \dots, X_n)$, con $P=(X_1, \dots, X_r)\bar{\square}$, Luego f_1, \dots, f_s verificará que $Gr_P(J, \bar{\square}) = (In_P(f_1), \dots, In_P(f_s)) Gr_P(\bar{\square})$ y además $v_P(f_i) = v_{\bar{M}}(f_i) = v_i$ o lo que es lo mismo $f_{is}(X_1, \dots, X_r, 0, \dots, 0) \neq 0$ con f_{is} la forma inicial de f_i , $1 \leq i \leq s$. En estas condiciones tendremos que

$$J'' = \left(\frac{f_1}{X_i^{v_1}}, \dots, \frac{f_s}{X_i^{v_s}} \right) \hat{\square}''$$

Demostración.- Análoga a la de 2-6-9.

Nota 2-7-10.- Con las notaciones anteriores $\square = \bar{\square}/J\bar{\square}$ es el anillo de coordenadas de una variedad algebroide, las ecuaciones de dicha variedad son $\{f_1(X_1, \dots, X_n) = 0, \dots, f_s(X_1, \dots, X_n) = 0\}$.

Por 2-5-2 $\hat{\square}'' = \hat{\square}''/J''\hat{\square}''$ es un transformado monoidal formal de \square , $\hat{\square}''$ será el anillo de una variedad algebroide de ecuaciones $\{f_1''(X_1'', \dots, X_n'') = \frac{f_1}{X_i^{v_1}} = 0, \dots,$

$$f_s''(X_1'', \dots, X_n'') = \frac{f_s}{X_i^{v_s}} = 0 \}$$

Se verifica que $\dim \widehat{\bar{Q}}'' / \widehat{J}'' \widehat{\bar{Q}}'' = \dim \bar{Q}'' / J'' \bar{Q}'' = \dim \bar{Q} / J \bar{Q}$.

Por tanto la forma efectiva de construir un transformado monoidal de la variedad $V(f_1, \dots, f_s)$ dada por $f_1(X_1, \dots, X_n), \dots$

$\dots, f_s(X_1, \dots, X_n)$ en el punto $(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ del divisor excepcional es sustituir en la ecuación $f_i(X_1, \dots, X_n)$, $1 \leq i \leq s$

las variables X_i por

$$X_1 = X_i'' \left(X_1'' + \frac{\alpha_1}{\alpha_i} \right)$$

.....

$$X_i = X_i''$$

.....

$$X_r = X_i'' \left(X_r'' + \frac{\alpha_r}{\alpha_i} \right)$$

$$X_{r+1} = X_{r+1}''$$

.....

$$X_n = X_n''$$

y dividir el resultado por $X_i''^{v_i}$, $v_i = v_{\bar{M}}(f_i) = v_P(f_i)$, $1 \leq i \leq s$

y así obtendremos

$$f_i''(X_1'', \dots, X_n'') = \frac{f_i(X_i''(X_1'' + \frac{\alpha_1}{\alpha_i}), \dots, X_i'', \dots, X_i''(X_r'' + \frac{\alpha_r}{\alpha_i}), X_{r+1}'', \dots, X_n'')}{X_i''^{v_i}}$$

$1 \leq i \leq s$.

§ 2-8.- Transformaciones admisibles.

Definición 2-8-1.- Diremos que el ideal P de \bar{A} es admisible en \bar{A} cuando se verifiquen las dos condiciones siguientes:

- i) \bar{A}/P es regular .
- ii) $Gr_P(\bar{A})$ es libre sobre \bar{A}/P .

Consecuencia 2-8-2.- El ideal maximal M de \bar{A} es un ideal admisible en \bar{A} .

Definición 2-8-3.- Sea K un cuerpo y $G = \bigoplus_{i=0}^{\infty} G_i$ una K -álgebra graduada finitamente generada . Sea J^* un ideal homogéneo de G . Diremos que los (ξ_1, \dots, ξ_r) son una base standard de J^* si son un conjunto de elementos homogéneos de G que verifican:

- i) Los (ξ_1, \dots, ξ_r) forman un conjunto generador minimal de J^* .
- ii) Si $v_i = \text{grado } \xi_i$, entonces $v_1 \leq v_2 \leq \dots \leq v_r$.

Definición 2-8-4.- Sea \bar{A} un anillo local de ideal maximal \bar{M} . Sea J un ideal de \bar{A} , $G = Gr_{\bar{M}}(\bar{A})$ y $J^* = Gr_{\bar{M}}(J, \bar{A})$. Diremos que los elementos (f_1, \dots, f_r) pertenecientes a J son una base \bar{M} -standard de J si se verifica que los (ξ_1, \dots, ξ_r) , $\xi_i = In_{\bar{M}}(f_i)$ son una base standard de J^* .

Nota 2-8-5.- Daremos una lista de resultados para las transformaciones admisibles.

- i) (Hironaka [18], capítulo II, prop. 1 y teor. 2)

Sea A un anillo local de ideal maximal M y cuerpo residual K . Sea q un ideal primo de A tal que A/q es regular.

Las siguientes condiciones son equivalentes:

a) q es admisible en \square , es decir $Gr_q(\square)$ es libre sobre \square/q .

b) Existe un isomorfismo ψ de K -álgebras graduadas

$$\psi: Gr_M^0(Gr_q(\square)) \otimes_K Gr_{M/q}(\square/q) \rightarrow Gr_M(\square)$$

c) Si suponemos que $\square = \bar{\square}/J$, $M = \bar{M}/J$, $q = P/J$ siendo $\bar{\square}$ un anillo local regular de ideal maximal \bar{M} , P un ideal primo regular de $\bar{\square}$ tal que $J \subset P$. En estas condiciones se verifica que existe una base \bar{M} -standard (f_1, \dots, f_r) de J con $v_{\bar{M}}(f_i) = v_P(f_i)$, $1 \leq i \leq r$.

ii) (Hironaka [18], capítulo II, lema 9).

Sea $\bar{\square}$ un anillo local, P un ideal de $\bar{\square}$. Sea $\bar{\square}^{\sim}$ una $\bar{\square}$ -álgebra local plana y $\bar{P} = P \bar{\square}^{\sim}$. Si suponemos que $\bar{\square}/P$ y $\bar{\square}^{\sim}/\bar{P}$ son anillos locales regulares, entonces P es admisible en $\bar{\square}$ si y solo si \bar{P} es admisible en $\bar{\square}^{\sim}$.

(iii) (Hironaka [18], capítulo II, teorema 3).

Sea $\bar{\square}$ un anillo local. Sean P y P' ideales primos de $\bar{\square}$ tal que $P \subset P'$ y los anillos $\bar{\square}/P$ y $\bar{\square}/P'$ son regulares.

Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

a) P es admisible en $\bar{\square}$.

b) P' es admisible en $\bar{\square}$ y $P \bar{\square}_{P'}$ es admisible en $\bar{\square}_{P'}$.

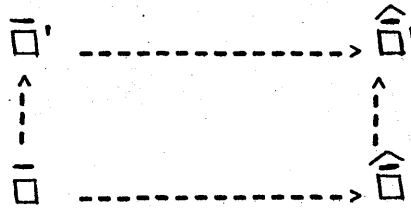
Definición 2-8-6.- Diremos que una transformación monoidal del anillo local $\bar{\square}$ es admisible cuando su centro P sea un ideal primo admisible en $\bar{\square}$.

Nota 2-8-7.- Una transformación cuadrática es siempre admisible.

Proposición 2-8-8.-

Si $\bar{\square} \rightarrow \bar{\square}'$ es una transformación monoidal admisible con centro P , entonces el único transformado monoidal $\bar{\square}'$ de

$\widehat{\square}$ con centro $\widehat{P} = P\widehat{\square}$ que hace conmutativo al diagrama siguiente también es admisible.



Demostración.-

Consecuencia inmediata de 2-8-5 - (ii).

CAPITULO III

Hipersuperficies algebroides

Introducción

En este capítulo pretendemos desingularizar mediante transformaciones cuadráticas formales una hipersuperficie algebroides de K^n . Entendemos por desingularización en el caso algebroides el proceso siguiente:

Si \square es el anillo local de una hipersuperficie algebroides,

$$\square = K[[Z, W_1, \dots, W_{n-1}]] / f \cdot K[[Z, W_1, \dots, W_{n-1}]]$$

y $v_M(f) = v$. Probaremos que mediante un número finito de transformaciones cuadráticas formales se llega a una hipersuperficie algebroides \square' de K^n tal que

$$\square' = K[[Z, W_1, \dots, W_{n-1}]] / f^{(n)} \cdot K[[Z, W_1, \dots, W_{n-1}]]$$

y $v_M(f^{(n)}) < v$.

§ 3-1.-Generalidades sobre hipersuperficies.

Introducción.- En esta sección nos proponemos estudiar con todo detalle el diagrama de Newton de una hipersuperficie siendo nuestro primer objetivo el estudio de la variación de dicho diagrama mediante una transformación cuadrática formal.

Definición 3-1-1.- Llamamos hipersuperficie algebroides a toda variedad algebroides de dimensión $n-1$ y dimensión de inmersión n .

Nota 3-1-2.-

i) Si $H = \text{Spec}(\square)$ es una hipersuperficie algebroides,

$\square = K[[W_0, W_1, \dots, W_{n-1}]]/I$ con I principal.

En efecto, si \square es el anillo de una hipersuperficie algebroide $\dim \square = \dim K[[W_0, W_1, \dots, W_{n-1}]]/I = n-1$, es decir $\text{depth}(I) = n-1$ y como $\text{ht}(I) + \text{depth}(I) = n$, tendremos que $\text{ht}(I) = 1$, es decir I es principal. Entonces $I = f(W_0, \dots, W_{n-1})K[[W_0, \dots, W_{n-1}]]$ y f recibirá el nombre de ecuación de \square . Al diagrama de Newton de f le llamaremos diagrama de Newton de la hipersuperficie H .

ii) El teorema preparatorio de Weiersstrass permite escribir la ecuación de la hipersuperficie H en la forma

$$f(W_0, \dots, W_{n-1}) = W_0^v + \varphi_1(W_1, \dots, W_{n-1})W_0^{v-1} + \dots + \varphi_{v-1}(W_1, \dots, W_{n-1})W_0 + \varphi_v(W_1, \dots, W_{n-1}) = 0$$

$\varphi_i(W_1, \dots, W_{n-1}) \in K[[W_1, \dots, W_{n-1}]]$,
 $v_0(\varphi_i) \geq i$.

En general, supondremos siempre la hipersuperficie preparada de esta forma y llamaremos Z a la variable W_0 elegida en la preparación.

Si la característica del cuerpo K no divide a v siendo v la multiplicidad de la hipersuperficie entonces con la transformación

$$Z = Z' + \frac{\varphi_1(W_1, \dots, W_{n-1})}{v}$$

se puede considerar que la ecuación de la hipersuperficie es de la forma

$$f(Z', W_1, \dots, W_{n-1}) = Z'^v + \varphi'_2(W_1, \dots, W_{n-1})Z'^{v-2} + \dots + \varphi'_{v-1}(W_1, \dots, W_{n-1})Z' + \varphi'_v(W_1, \dots, W_{n-1}) = 0$$

expresión que usaremos en lo sucesivo. Así en el estudio que vamos a hacer de hipersuperficies distinguiremos dos casos:

1^{er} caso.- La característica del cuerpo K no es divisor de la multiplicidad de la hipersuperficie

2^o caso.- La característica del cuerpo K es divisor de la multiplicidad de la hipersuperficie.

En el primer caso podemos suponer que la ecuación de la hipersuperficie es de la forma

$$f(Z, W_1, \dots, W_{n-1}) = Z^v + \varphi_2(W_1, \dots, W_{n-1})Z^{v-2} + \dots + \varphi_{v-1}(W_1, \dots, W_{n-1})Z +$$

$$+ \varphi_v(W_1, \dots, W_{n-1}) = 0 \quad , \quad \varphi_i \in K[[W_1, \dots, W_{n-1}]] \quad , \quad v_{\underline{0}}(\varphi_i) \geq i \quad \text{y en}$$

el segundo caso

$$f(Z, W_1, \dots, W_{n-1}) = Z^v + \varphi_1(W_1, \dots, W_{n-1})Z^{v-1} + \dots + \varphi_{v-1}(W_1, \dots, W_{n-1})Z +$$

$$+ \varphi_v(W_1, \dots, W_{n-1}) = 0 \quad , \quad \varphi_i \in K[[W_1, \dots, W_{n-1}]] \quad , \quad v_{\underline{0}}(\varphi_i) \geq i \quad .$$

Nota 3-1-3.- Según hemos visto en el capítulo I el cono tan gente a H tiene por ecuación $\text{Inf} = 0$. Pueden suceder dos ca sos:

- i) Inf es potencia de una forma lineal.
- ii) Inf no es potencia de una forma lineal.

En el caso i) la ecuación de la hipersuperficie se podrá escribir de la manera siguiente

$$Z^v + \varphi_1(W_1, \dots, W_{n-1})Z^{v-1} + \dots + \varphi_{v-1}(W_1, \dots, W_{n-1})Z + \varphi_v(W_1, \dots, W_{n-1}) = 0$$

$$\varphi_i(W_1, \dots, W_{n-1}) \in K[[W_1, \dots, W_{n-1}]] \quad , \quad v_{\underline{0}}(\varphi_i) > i$$

debido a que:

- a) $\text{Inf} = Z^v + \dots$ ya que consideramos f preparada
- b) $\text{Inf} = (Z + f_2(W_1, \dots, W_{n-1}))^v$ con $f_2(W_1, \dots, W_{n-1})$ forma li neal.
- c) Por último mediante el cambio de variable $Z' = Z + f_2(W_1, \dots, W_{n-1})$

se obtiene el resultado deseado.

En el caso ii) la ecuación de la hipersuperficie será de la forma

$$Z^v + \gamma_1(W_1, \dots, W_{n-1})Z^{v-1} + \dots + \gamma_{v-1}(W_1, \dots, W_{n-1})Z + \gamma_v(W_1, \dots, W_{n-1}) = 0$$

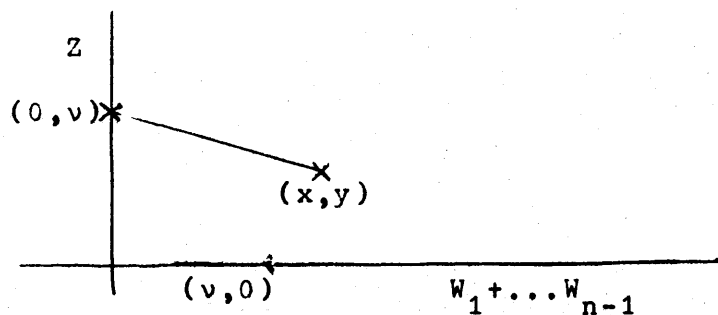
$\gamma_i \in K[[W_1, \dots, W_{n-1}]]$ con $v_0(\gamma_i) \geq i$ y $\exists j, 1 \leq j \leq v$ tal que $v_0(\gamma_j) = j$, no pudiendo simplificarse más.

Entonces en el caso i) el cono tangente a H es un plano y en el caso ii) el cono tangente a H no es un plano.

Si consideramos el diagrama de Newton de f referido al sistema de coordenadas (Z, W_1, \dots, W_{n-1}) se verificará que en el caso i) en el diagrama de Newton existe el punto $(0, v)$ y todos los demás puntos del diagrama son de la forma (x, y) con $x+y > v$.

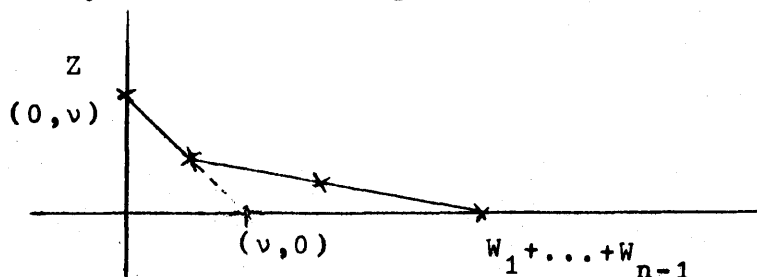
Por tanto el primer segmento del diagrama tiene pendiente negativa menor que -1 con lo que si $\delta_1 = \frac{-1}{\text{pendiente 1er segmento}}$

$\delta_1 > 1, \delta_1$ recibe el nombre de primer exponente característico.



En el caso ii) se verificará que en el diagrama de Newton de la hipersuperficie existen dos puntos en la recta de ecuación $x+y=v$ siendo uno de ellos el punto $(0, v)$ luego en es

te caso $\delta_1 = \frac{-1}{\text{pendiente 1er segmento}} = 1$ y recíprocamente.



Por tanto mirando el primer segmento del diagrama de Newton de f (exceptuando el caso trivial $f=Z$) se tendrá:

a) $\delta_1 > 1$ si y solo si el cono tangente es un plano.

b) $\delta_1 = 1$ si y solo si el cono tangente no es un plano .

Nota 3-1-4.-

Sea H la hipersuperficie algebroide sumergida en K^n de ecuación $f(Z, W_1, \dots, W_{n-1})=0$. En el capítulo I demostramos las siguientes equivalencias

$$f \text{ preparada} \iff \text{Inf}_{(W_1, \dots, W_{n-1}) \in K} [Z, W] \iff \text{Inf} = Z^v + \dots \iff$$

\iff En el diagrama de Newton de f referido al sistema de coordenadas (Z, W_1, \dots, W_{n-1}) existe el punto $(0, v)$, (véase 1-3-15, 1-3-16)

i) Supondremos en primer lugar que la ecuación f no está preparada, f será de la forma

$$f = \sum_{(a, b_1, \dots, b_{n-1}) \in \mathbb{Z}_0^n} c(a, b_1, \dots, b_{n-1}) Z^a W_1^{b_1} \dots W_{n-1}^{b_{n-1}}, \quad c(a, b_1, \dots, b_{n-1}) \in K$$

Si v es la multiplicidad de f , se verifica que

$$c(a, b_1, \dots, b_{n-1}) = 0 \quad \text{si} \quad a + b_1 + \dots + b_{n-1} < v \quad \text{y} \quad \exists (a_0, b_{10}, \dots,$$

$$\dots, b_{n-1,0}) \mid a_0 + b_{10} + \dots + b_{n-1,0} = v \quad \text{y} \quad c(a_0, b_{10}, \dots, b_{n-1,0}) \neq 0,$$

Si llamamos $\Delta(f)$ al diagrama de Newton de $f(Z, W_1, \dots, W_{n-1})$ referido al sistema de coordenadas (Z, W_1, \dots, W_{n-1}) , $\Delta(f)$ será el conjunto de puntos

$$\Delta(f) = \{(b_1 + \dots + b_{n-1}, a) \mid c(a, b_1, \dots, b_{n-1}) \neq 0\}.$$

Si aplicamos a la hipersuperficie de ecuación $f(Z, W_1, \dots, W_{n-1})$ la transformación cuadrática formal en el punto $(1, 0, \dots, 0)$, de ecuaciones:

$$Z = Z'$$

$$W_i = W'_i Z' \quad , \quad i=1, \dots, n-1$$

La ecuación de la hipersuperficie transformada será

$$f'(Z', W'_1, \dots, W'_{n-1}) = \sum_{(a, b_1, \dots, b_{n-1}) \in \mathbb{Z}_0^n} C(a, b_1, \dots, b_{n-1}) Z'^{a+b_1+\dots}$$

$$\dots + b_{n-1} - v W'_1{}^{b_1} \dots W'_{n-1}{}^{b_{n-1}}$$

siendo su diagrama de Newton $\Delta(f') = \{(b_1 + \dots + b_{n-1}, a + b_1 + \dots$

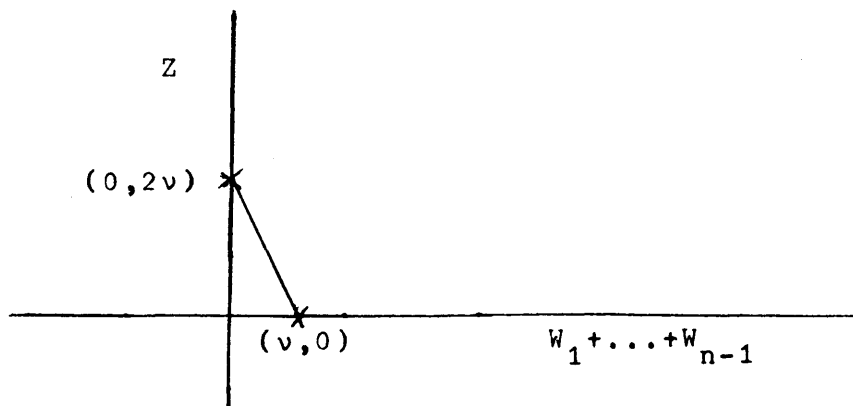
$\dots + b_{n-1} - v) \mid C(a, b_1, \dots, b_{n-1}) \neq 0\}$ luego cualquier punto de $\Delta(f)$ se ha transformado en un punto de $\Delta(f')$ con la misma abscisa y ha variado la ordenada.

Si llamamos v' a la multiplicidad de la hipersuperficie de ecuación $f'(Z', W'_1, \dots, W'_{n-1})$, se verificará que $v' < v$

cuando exista un término en $f(Z, W_1, \dots, W_{n-1})$ de la forma $C(a, b_1, \dots, b_{n-1}) Z^a W_1^{b_1} \dots W_{n-1}^{b_{n-1}}$ con $C(a, b_1, \dots, b_{n-1}) \neq 0$ y

$$a + 2b_1 + \dots + 2b_{n-1} - v < v \quad , \quad \text{es decir} \quad a + 2(b_1 + \dots + b_{n-1}) < 2v$$

o lo que es lo mismo cuando exista en el diagrama de Newton de $f(Z, W_1, \dots, W_{n-1})$ un punto situado debajo de la recta de ecuación $2x + y = 2v$.



Intentaremos ver ahora si es posible encontrar un punto si tuado debajo de dicha recta. Al ser la multiplicidad v , $\exists (a_0, b_{10}, \dots, b_{n-1,0})$ tal que en $f(Z, W_1, \dots, W_{n-1})$ existe el término $c(a_0, b_{10}, \dots, b_{n-1,0}) Z^{a_0} W_1^{b_{10}} \dots W_{n-1}^{b_{n-1,0}}$

con $c(a_0, b_{10}, \dots, b_{n-1,0}) \neq 0$ y $a_0 + b_{10} + \dots + b_{n-1,0} = v$ luego $a_0 + (b_{10} + \dots + b_{n-1,0}) + (b_{10} + \dots + b_{n-1,0}) = v + (v - a_0) = 2v - a_0$.

Puede ocurrir:

1) $a_0 \neq 0$, entonces $a_0 + (b_{10} + \dots + b_{n-1,0}) + (b_{10} + \dots + b_{n-1,0}) < 2v$

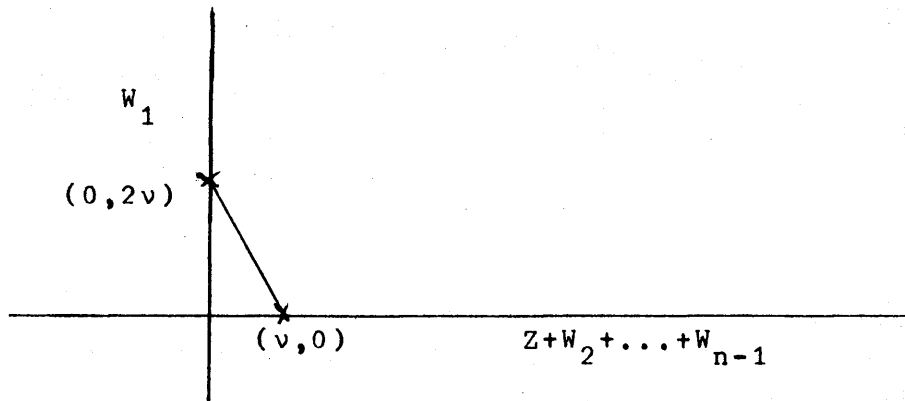
y existe un punto debajo de la recta. Observese que $a_0 \neq v$ ya que si $a_0 = v$ la hipersuperficie estaría preparada.

2) $a_0 = 0$, entonces $a_0 + (b_{10} + \dots + b_{n-1,0}) + (b_{10} + \dots + b_{n-1,0}) = 2v$ luego la multiplicidad no varía al aplicar la transformación de ecuaciones

$$Z = Z'$$

$$W_i = W'_i Z' \quad i=1, \dots, n-1$$

Ahora si $a_0 = 0$, algún $b_{10}, \dots, b_{n-1,0}$ tendrá que ser distinto de cero, sea por ejemplo $b_{10} \neq 0$. En este caso si $b_{10} \neq v$ consideraremos el diagrama de Newton de f asociado al sistema de coordenadas $(W_1, Z, W_2, \dots, W_{n-1})$



en este diagrama si existe un punto situado debajo de la recta de ecuaciones $2x + y = 2v$ va que $b_{10} + (a_0 + b_{20} + \dots + b_{n-1,0}) +$

$+(a_0 + b_{20} + \dots + b_{n-1,0}) = v + (v - b_{10}) = 2v - b_{10} < 2v$ debido a lo cual aplicando la transformación cuadrática formal en el punto $(0, 1, 0 \dots 0)$ de ecuaciones

$$Z = W'_1 Z'$$

$$W_1 = W'_1$$

$$W_i = W'_i Z' \quad i = 2, \dots, n-1$$

se verifica que la multiplicidad de la hipersuperficie transformada es menor que v .

Si $b_{10} = v$ no podríamos aplicar esta transformación cuadrática ya que $\text{inf} = W_1^v + \dots$ con lo que $\text{inf}(0, 1, 0 \dots 0) \neq 0$ y la transformada de f mediante la transformación cuadrática sería una unidad (véase 2-6-5).

ii) Sea H la hipersuperficie algebroide sumergida en K^n de ecuación $f(Z, W_1, \dots, W_{n-1}) = 0$. Supondremos que la ecuación f está preparada, f será de la forma

$$f(Z, W_1, \dots, W_{n-1}) = Z^v + \varphi_1(W_1, \dots, W_{n-1})Z^{v-1} + \dots + \varphi_{v-1}(W_1, \dots, W_{n-1})Z + \varphi_v(W_1, \dots, W_{n-1}) = 0, \quad \varphi_i(W_1, \dots, W_{n-1}) \in K[[W_1, \dots, W_{n-1}]]$$

$\underline{v}_0(\varphi_i) \geq i$. En este caso no podremos aplicar la transformación cuadrática formal en el punto $(1, 0 \dots 0)$ de ecuaciones

$$Z = Z'$$

$$W_i = W'_i Z' \quad i = 1, \dots, n-1$$

ya que $\text{inf} = Z^v + \dots$ luego $\text{inf}(1, 0, \dots, 0) \neq 0$ y por (2-6-5) la transformada sería una unidad.

Aplicaremos entonces a la hipersuperficie una transformación cuadrática formal en un punto $(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1})$, con

$\text{Inf}(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}) = 0$. Distinguiremos dos casos:

1) $\text{Inf} = Z^v$, es decir

$$f(Z, W_1, \dots, W_{n-1}) = Z^v + \varphi_1(W_1, \dots, W_{n-1})Z^{v-1} + \dots + \varphi_{v-1}(W_1, \dots, W_{n-1})Z + \varphi_v(W_1, \dots, W_{n-1}) = 0$$

$$+ \mathcal{V}_v(W_1, \dots, W_{n-1}) = 0, \quad \mathcal{V}_i(W_1, \dots, W_{n-1}) \in K[[W_1, \dots, W_{n-1}]]$$

$$v_0(\mathcal{V}_i) > i$$

ó también

$$f(Z, W_1, \dots, W_{n-1}) = Z^v + \sum_{(a, b_1, \dots, b_{n-1}) \in \mathbb{Z}_0^n} C(a, b_1, \dots, b_{n-1}) Z^a W_1^{b_1} \dots$$

$$\dots W_{n-1}^{b_{n-1}} = 0, \text{ con } a + b_1 + \dots + b_{n-1} > v$$

Entonces la única condición necesaria para que el punto $(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1})$ verifique $\text{Inf}(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}) = 0$ es que $\alpha_0 = 0$,

luego podremos aplicar a la hipersuperficie una transformación cuadrática formal en un punto de la forma $(0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$,

$\alpha_i \neq 0, i=1, \dots, n-1$; dicha transformación cuadrática tendrá por ecuaciones:

$$\begin{aligned} Z &= W'_1 Z' \\ W_1 &= W'_1 \\ W_2 &= W'_1 \left(W'_2 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right) \\ &\dots \\ W_{n-1} &= W'_1 \left(W'_{n-1} + \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_1} \right) \end{aligned}$$

Siendo la ecuación de la hipersuperficie transformada la siguiente:

$$f'(Z', W'_1, \dots, W'_{n-1}) = Z'^v + \sum_{(a, b_1, \dots, b_{n-1}) \in \mathbb{Z}_0^n} C(a, b_1, \dots, b_{n-1}) Z'^a$$

$$W'_1^{a+b_1+\dots+b_{n-1}-v} \left(W'_2 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right)^{b_2} \dots \left(W'_{n-1} + \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_1} \right)^{b_{n-1}} = 0$$

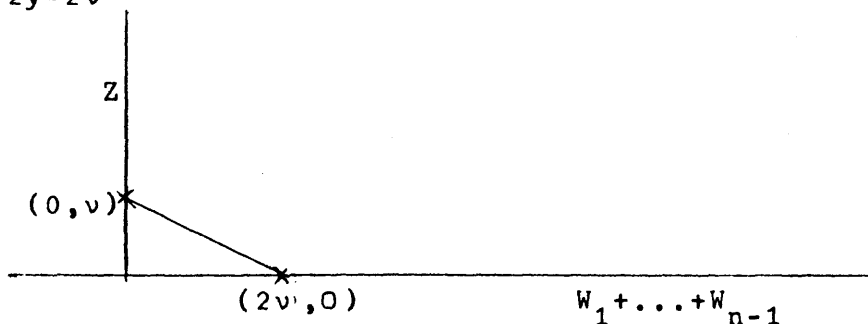
Si llamamos v' a la multiplicidad de la hipersuperficie de ecuación $f'(Z', W'_1, \dots, W'_{n-1})$; se verificará que $v' < v$

cuando exista un término en $f(Z, W_1, \dots, W_{n-1})$ de la forma

$$C(a, b_1, \dots, b_{n-1}) Z^a W_1^{b_1} \dots W_{n-1}^{b_{n-1}}, \text{ con } C(a, b_1, \dots, b_{n-1}) \neq 0$$

y $2a+b_1+\dots+b_{n-1} -v < v$, es decir $2a+(b_1+\dots+b_{n-1}) < 2v$,

ó lo que es lo mismo cuando exista en el diagrama de Newton de $f(Z,W_1,\dots,W_{n-1})$ un punto situado debajo de la recta de ecuación $x+2y=2v$



2) $\text{Inf} \neq Z^v$, es decir $f(Z,W_1,\dots,W_{n-1}) = Z^v + \varphi_1(W_1,\dots,W_{n-1})Z^{v-1} + \dots + \varphi_{v-1}(W_1,\dots,W_{n-1})Z + \varphi_v(W_1,\dots,W_{n-1}) = Z^v +$

~~$+ \dots + \varphi_{v-1}(W_1,\dots,W_{n-1})Z + \varphi_v(W_1,\dots,W_{n-1}) = Z^v +$~~
 $C(a,b_1,\dots,b_{n-1}) \in \mathbb{Z}_0^n \quad C(a,b_1,\dots,b_{n-1}) Z^a W_1^{b_1} \dots W_{n-1}^{b_{n-1}} = 0$

con $\varphi_i \in K[[W_1,\dots,W_{n-1}]]$, $v_{\infty}(\varphi_i) \geq i$ y $\exists j$, tal que $v_{\infty}(\varphi_j) = j$ ó lo que es lo mismo existe por lo menos un término $C(a',b'_1,\dots,b'_{n-1}) Z^{a'} W_1^{b'_1} \dots W_{n-1}^{b'_{n-1}}$ con $a'+b'_1+\dots+b'_{n-1} = v$.

Si $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$ es un punto que anula la forma inicial puede ocurrir :

2-1) $\alpha_0 \neq 0$ y algún $\alpha_i \neq 0$, $i=1,\dots,n-1$, por ejemplo

$\alpha_1 \neq 0$. Aplicamos entonces la transformación cuadrática

de ecuaciones

$$\begin{aligned} Z &= W'_1 \left(Z' + \frac{\alpha_0}{\alpha_1} \right) \\ W_1 &= W'_1 \\ W_2 &= W'_1 \left(W'_2 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right) \\ &\dots \dots \dots \\ W_{n-1} &= W'_1 \left(W'_{n-1} + \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_1} \right) \end{aligned}$$

La ecuación de la hipersuperficie transformada será

$$f'(Z', W'_1, \dots, W'_{n-1}) = (Z' + \frac{\alpha_0}{\alpha_1})^\nu + C(a', b'_1, \dots, b'_{n-1}) (Z' + \frac{\alpha_0}{\alpha_1})^{a'} \cdot \\ \cdot W'_1{}^{a'+b'_1+\dots+b'_{n-1}-\nu} \cdot (W'_2 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1})^{b'_2} \dots (W'_{n-1} + \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_1})^{b'_{n-1}} + \dots + \\ + C(a, b_1, \dots, b_{n-1}) (Z' + \frac{\alpha_0}{\alpha_1})^a W'_1{}^{a+b_1+\dots+b_{n-1}-\nu} (W'_2 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1})^{b_2} \dots \\ \dots (W'_{n-1} + \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_1})^{b_{n-1}} + \dots = 0$$

Entonces si:

2-1-a) Si ν no es múltiplo de la característica del cuerpo, la multiplicidad de la hipersuperficie de ecuación

$$f'(Z', W'_1, \dots, W'_{n-1}) = 0 \text{ es } 1 \text{ ya que en } f'(Z', W'_1, \dots, W'_{n-1}) \\ \text{ existe el término } \nu (\frac{\alpha_0}{\alpha_1})^{\nu-1} Z'.$$

2-1-b)

Si $\nu = p^m \cdot \ell$, siendo p la característica del cuerpo

$$((Z' + \frac{\alpha_0}{\alpha_1})^\ell)^{p^m} = ((\binom{\ell}{0} Z'^\ell + \dots + \binom{\ell}{i} Z'^{\ell-i} (\frac{\alpha_0}{\alpha_1})^i + \dots + \binom{\ell}{\ell} (\frac{\alpha_0}{\alpha_1})^\ell)^{p^m} = \\ = (\binom{\ell}{0} Z'^{\ell p^m} + \dots + \binom{\ell}{i} Z'^{(\ell-i)p^m} (\frac{\alpha_0}{\alpha_1})^i + \dots + \binom{\ell}{\ell} (\frac{\alpha_0}{\alpha_1})^{\ell p^m})$$

y entonces la multiplicidad de la hipersuperficie de ecuación $f'(Z', W'_1, \dots, W'_{n-1}) = 0$ es $\nu - p^m < \nu$ ya que al no ser

ℓ múltiplo de p tendremos

$$\left[\binom{\ell}{1} Z'^{\ell-1} (\frac{\alpha_0}{\alpha_1}) \right]^{p^m} = \ell^{p^m} (\frac{\alpha_0}{\alpha_1})^{p^m} \cdot Z'^{\nu-p^m} \neq 0.$$

2-1-c) Si $\nu = p^m$, puede ocurrir:

2-1-c₁) $\nu = p^m$ y $\alpha_2 = \dots = \alpha_{n-1} = 0$, entonces en la ecuación

$f'(Z', W'_1, \dots, W'_{n-1})$ tenemos el término
 $C(a', b'_1, \dots, b'_{n-1}) \left(\frac{\alpha_0}{\alpha_1}\right)^{a'} W_2^{b'_2} \dots W'_{n-1}^{b'_{n-1}}$ luego si

$b'_2 + \dots + b'_{n-1} < v$ habría bajado la multiplicidad

2-1-c₂) $v = p^m$ y $\alpha_2 = \dots = \alpha_i = 0$, $\alpha_{i+1} \neq 0, \dots, \alpha_{n-1} \neq 0$,

entonces en la ecuación $f'(Z', W'_1, \dots, W'_{n-1})$ tenemos el término

$$C(a', b'_1, \dots, b'_{n-1}) \left(\frac{\alpha_0}{\alpha_1}\right)^{a'} \cdot \left(-\frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_1}\right)^{b'_{i+1}} \dots \left(-\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_1}\right)^{b'_{n-1}} W_2^{b'_2} \dots W'_i{}^{b'_i}$$

luego si $b'_2 + \dots + b'_i < v$ habría bajado la multiplicidad.

2-2) Si $\alpha_0 = 0$ y algún $\alpha_i \neq 0$, $i=1, \dots, n-1$, por ejemplo $\alpha_1 \neq 0$. Aplicamos la transformación cuadrática de ecuaciones

$$\begin{aligned} Z &= W'_1 Z' \\ W_1 &= W'_1 \\ W_2 &= W'_1 \left(W'_2 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) \\ &\dots \\ W_{n-1} &= W'_1 \left(W'_{n-1} + \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_1}\right) \end{aligned}$$

la ecuación de la hipersuperficie transformada será

$$\begin{aligned} f'(Z', W'_1, \dots, W'_{n-1}) &= Z'^v + \\ + C(a', b'_1, \dots, b'_{n-1}) & Z'^{a'} W_1^{b'_1 + \dots + b'_{n-1} - v} \left(W'_2 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^{b'_2} \dots \\ \dots \left(W'_{n-1} + \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_1}\right)^{b'_{n-1}} & + \dots + C(a, b_1, \dots, b_{n-1}) Z'^a W_1^{a+b_1+\dots} \\ \dots + b_{n-1} - v & \left(W'_2 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^{b_2} \dots \left(W'_{n-1} + \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_1}\right)^{b_{n-1}} + \dots = 0 \end{aligned}$$

Puede ocurrir:

2-2-a) $\alpha_i \neq 0$, $i=1, \dots, n-1$ entonces si v' es la multiplicidad de f' , $v' = a' < v$.

2-2-b) Si $\alpha_2 = \dots = \alpha_i = 0$, $\alpha_{i+1} \neq 0, \dots, \alpha_{n-1} \neq 0$ y $a' + b'_2 + \dots + b'_i < v$ también habría bajado la multiplicidad.

§ 3-2.- Efecto de las transformaciones cuadráticas formales sobre la multiplicidad. (Caso en que la multiplicidad no es múltiplo de la característica del cuerpo).

Introducción.- El objetivo de esta sección es demostrar el siguiente teorema: Sea H una hipersuperficie algebroide sumergida en K^n de multiplicidad v , tal que v no sea múltiplo de la característica del cuerpo. Se verifica entonces que la multiplicidad de la hipersuperficie H decrece en un número finito de transformaciones cuadráticas formales.

Notaciones 3-2-1.- Sabemos por (3-1-2-ii) que si

$f \in K[[Z, W_1, \dots, W_{n-1}]]$ y $v_0(f) = v$ se pueden presentar dos casos:

1^{er} caso.- La característica del cuerpo K no es divisor de v .

2^o caso.- La característica del cuerpo K si es divisor de v .

En esta sección supondremos que la característica de K no es divisor de v , entonces la ecuación de la hipersuperficie se podrá escribir

$$f(Z, W_1, \dots, W_{n-1}) = Z^v + \varphi_2(W_1, \dots, W_{n-1})Z^{v-2} + \dots + \varphi_v(W_1, \dots, W_{n-1}) = 0,$$

$$\varphi_i(W_1, \dots, W_{n-1}) \in K[[W_1, \dots, W_{n-1}]], \quad v_0(\varphi_i) \geq i$$

ó también

$$f(Z, W_1, \dots, W_{n-1}) = f_v(Z, W_1, \dots, W_{n-1}) + f_{v+1}(Z, W_1, \dots, W_{n-1}) + \dots$$

donde $f_i(Z, W_1, \dots, W_{n-1})$ es ó bien cero ó una forma de grado i .

A su vez en este primer caso distinguiremos dos subcasos según la forma inicial $f_v(Z, W_1, \dots, W_{n-1})$ sea ó no sea poten-

cia de una forma lineal.

Lema 3-2-2.- Sea $f_v(Z, W_1, \dots, W_{n-1}) = Z^v + \varphi_1(W_1, \dots, W_{n-1})Z^{v-1} + \dots$
 $\dots + \varphi_v(W_1, \dots, W_{n-1})$ una forma de grado v en las variables
 Z, W_1, \dots, W_{n-1} , con coeficientes en un cuerpo K de caracte-
 rística p , donde v no es múltiplo de p y tal que
 $\forall (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \in K^{n-1}$, la ecuación $Z^v + \varphi_1(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})Z^{v-1} + \dots$
 $\dots + \varphi_v(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) = 0$ posee una única raíz (múltiple de
 orden v). Entonces $f_v(Z, W_1, \dots, W_{n-1})$ es necesariamente
 la potencia v -ésima de una forma lineal.

Demostración.- Definimos la aplicación:

$$h: K^{n-1} \longrightarrow K$$

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \longmapsto h(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}), \text{ con}$$

$\forall (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \in K^{n-1}$, $h(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$ es la única raíz de

la ecuación $Z^v + \varphi_1(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})Z^{v-1} + \dots + \varphi_v(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) = 0$.

Se tendrá $\forall (W_1, \dots, W_{n-1}) \in K^{n-1}$, $f_v(Z, W_1, \dots, W_{n-1}) = (Z - h(W_1, \dots,$

$\dots, W_{n-1}))^v = Z^v - \binom{v}{1} h(W_1, \dots, W_{n-1})Z^{v-1} + \dots + (-1)^{v-1} \binom{v}{v-1} h(W_1, \dots,$

$\dots, W_{n-1})^{v-1} Z + (-1)^v h(W_1, \dots, W_{n-1})^v = Z^v + \varphi_1(W_1, \dots, \dots,$

$\dots, W_{n-1})Z^{v-1} + \dots + \varphi_{v-1}(W_1, \dots, W_{n-1})Z + \varphi_v(W_1, \dots, W_{n-1})$.

La última igualdad puede ser considerada como una igualdad de polinomios de $A[Z]$ siendo A el anillo de todas las aplicaciones de K^{n-1} en K ; así

$$-\binom{v}{1}h(W_1, \dots, W_{n-1}) = \varphi_1(W_1, \dots, W_{n-1})$$

de donde

$$h(W_1, \dots, W_{n-1}) = -\frac{\varphi_1(W_1, \dots, W_{n-1})}{v}$$

y como $\varphi_1(W_1, \dots, W_{n-1})$ es una forma lineal se tiene el resultado.

Teorema 3-2-3.- En las condiciones de 3-2-1 . Sea f la ecuación de la hipersuperficie H cuya forma inicial

$f_v(Z, W_1, \dots, W_{n-1})$ no es la potencia v-ésima de una forma lineal. Se verifica entonces que la multiplicidad de f decrece mediante una transformación cuadrática.

Demostración.- Por el lema (3-2-2) sabemos que existen los números $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ pertenecientes a K , $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \neq (0, \dots, 0)$ tales que $f_v(Z, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})=0$ tiene al menos dos raíces; sea γ una de ellas, podemos suponer que $\gamma \neq 0$. Alguno de los $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ será distinto de cero, supongamos que sea α_1 .

Al no ser $f_v(Z, W_1, \dots, W_{n-1})$ potencia v-ésima de una forma lineal, existe un término en $f_v(Z, W_1, \dots, W_{n-1})$ de la forma

$$C_i Z^{v-i} W_1^{a_1} \dots W_{n-1}^{a_{n-1}} , C_i \in K , C_i \neq 0 , a_1 + \dots + a_{n-1} = i , i \neq 0$$

con lo cual

$$f(Z, W_1, \dots, W_{n-1}) = Z^v + C_i Z^{v-i} W_1^{a_1} \dots W_{n-1}^{a_{n-1}} + \dots + f_{v+1}(Z, W_1, \dots, W_{n-1}) + \dots = 0$$

Si aplicamos la transformación cuadrática formal de ecuaciones:

$$\begin{aligned} Z &= W'_1 \left(Z' + \frac{\gamma}{\alpha_1} \right) \\ W_1 &= W'_1 \\ W_2 &= W'_1 \left(W'_2 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right) \\ &\dots \dots \dots \\ W_{n-1} &= W'_1 \left(W'_{n-1} + \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_1} \right) \end{aligned}$$

La ecuación de la hipersuperficie transformada será:

$$f'(Z', W'_1, \dots, W'_{n-1}) = (Z' + \frac{-Y}{\alpha_1})^v + \\ + C_i W'_1^{a_1 + \dots + a_{n-1} - i} (Z' + \frac{-Y}{\alpha_1})^{v-i} (W'_2 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1})^{a_2} \dots (W'_{n-1} + \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_1})^{a_{n-1}} + \dots$$

siendo su multiplicidad igual a 1, ya que el término independiente es nulo al ser $f_v(\gamma, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) = 0$ y existe en $f(Z', W'_1, \dots, W'_{n-1})$ el término $v(\frac{-Y}{\alpha_1})^{v-1} Z'$ de grado 1.

Lema 3-2-4. - Sea H una hipersuperficie algebroide sumergida en K^n . Se puede conseguir mediante un cambio de variables el que en el diagrama de Newton de la hipersuperficie exista un punto situado en el eje x .

Demostración. - Sea la hipersuperficie H de ecuación

$$Z^v + \gamma_1(W_1, \dots, W_{n-1})Z^{v-1} + \dots + \gamma_{v-1}(W_1, \dots, W_{n-1})Z + \gamma_v(W_1, \dots, W_{n-1}) = 0$$

Si hacemos el cambio

$$Z = Z' + t W_1^2, \quad t \in K \\ W_i = W'_i, \quad 1 \leq i \leq n-1$$

tendremos

$$(Z' + t W_1^2)^v + \gamma_1(W'_1, \dots, W'_{n-1})(Z' + t W_1^2)^{v-1} + \dots + \\ + \gamma_{v-1}(W'_1, \dots, W'_{n-1})(Z' + t W_1^2) + \gamma_v(W'_1, \dots, W'_{n-1}) = 0$$

Si sumamos los términos en W_1^{2v}

$$t^v W_1^{2v} + S_1 W_1^{2v-2} t^{v-1} + \dots + S_{v-1} W_1^{2v-2} t + S_v W_1^{2v} = (t^v + S_1 t^{v-1} + \dots + S_{v-1} t + S_v) W_1^{2v}; \quad t, S_i \in K$$

teniendo en cuenta que algún S_i , $i=1, \dots, v$ puede ser nulo.

Si consideramos la ecuación

$$t^v + S_1 t^{v-1} + \dots + S_{v-1} t + S_v = 0$$

los S_i son conocidos y al ser K un cuerpo algebraicamente cerrado existirán v valores de t iguales ó distintos que verifiquen la ecuación, luego al ser el cuerpo K infinito siempre podemos elegir $t_0 \in K$ tal que $t_0^v + S_1 t_0^{v-1} + \dots + S_{v-1} t_0 + S_v \neq 0$, es decir podemos conseguir que exista en el diagrama de Newton de la hipersuperficie el punto $(2v, 0)$.

Teorema 3-2-5.- En las condiciones de 3-2-1 .

Sea $f(Z, W_1, \dots, W_{n-1})$ la ecuación de la hipersuperficie H cuya forma inicial $f_v(Z, W_1, \dots, W_{n-1})$ sea la potencia v -ésima de una forma lineal. Se verifica entonces que la multiplicidad de la hipersuperficie H decrece en un número finito de transformaciones cuadráticas.

Demostración.- Al ser $f_v(Z, W_1, \dots, W_{n-1})$ la potencia v -ésima de una forma lineal, la hipersuperficie se podrá escribir de las dos formas siguientes

$$f = Z^v + \varphi_2(W_1, \dots, W_{n-1})Z^{v-2} + \dots + \varphi_{v-1}(W_1, \dots, W_{n-1})Z + \varphi_v(W_1, \dots, W_{n-1})$$

$v(\varphi_i) > i$

$$f = Z^v + f_{v+1}(W_1, \dots, W_{n-1}, Z) + \dots$$

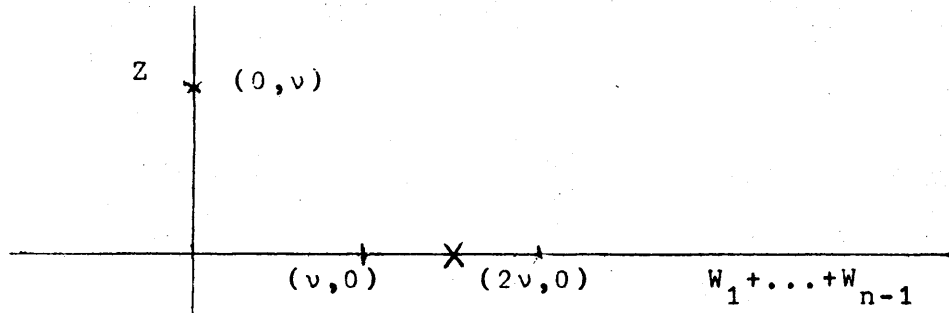
Los puntos que anulan la forma inicial son los de coordenadas $(0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$ luego las transformaciones cuadráticas formales que aplicaremos a la hipersuperficie serán las de ecuaciones

$$\begin{aligned} Z &= W'_1 Z' \\ W_1 &= W'_1 \\ W_2 &= W'_1 \left(W'_2 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right) \\ &\dots\dots\dots \\ W_{n-1} &= W'_1 \left(W'_{n-1} + \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_1} \right) \end{aligned}$$

pudiendo elegir todos los $\alpha_i \neq 0$, $i=1, \dots, n-1$

Para la demostración del teorema utilizaremos el diagrama de Newton referido al sistema de coordenadas (Z, W_1, \dots, W_{n-1}) . Aplicando (3-2-4) se puede suponer que en éste diagrama de Newton existe un punto situado en el eje x . Distinguiremos cuatro casos:

i) Existe un punto del diagrama de Newton situado en el eje de abscisas y comprendido entre los puntos $(v, 0)$ y $(2v, 0)$



La ecuación de la hipersuperficie sería entonces de la forma $f(Z, W_1, \dots, W_{n-1}) = Z^v + \varphi_2(W_1, \dots, W_{n-1})Z^{v-2} + \dots + C_1 W_1^{r_1} \dots W_{n-1}^{r_{n-1}} + \dots = 0$, $v(\varphi_i) > i$, $C_1 \neq 0$, $v < r_1 + \dots + r_{n-1} < 2v$

Se considera una transformación cuadrática formal respecto de un punto de la forma $(0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$ con todos los $\alpha_i \neq 0$. Dicha transformación cuadrática tendrá por ecuaciones

$$\begin{aligned} Z &= W'_1 Z' \\ W_1 &= W'_1 \\ W_2 &= W'_1 \left(W'_2 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right) \\ &\dots \dots \dots \\ W_{n-1} &= W'_1 \left(W'_{n-1} + \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_1} \right) \end{aligned}$$

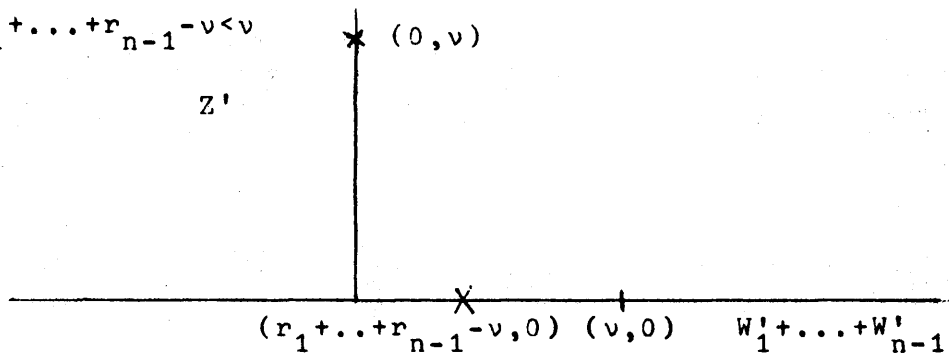
La ecuación de la hipersuperficie transformada será una no unidad $f'(Z', W'_1, \dots, W'_{n-1}) = Z'^v + \varphi_2(W'_1, \dots, W'_{n-1} + \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_1}) Z'^{v-2} + \dots + C_1 W_1^{r_1+r_2+\dots+r_{n-1}-v} (W'_2 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1})^{r_2} \dots (W'_{n-1} + \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_1})^{r_{n-1}} + \dots =$
 $= Z'^v + \varphi_2(W'_1, \dots, W'_{n-1} + \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_1}) Z'^{v-2} + \dots + C_1 W_1^{r_1+r_2+\dots+r_{n-1}-v} + \dots =$

$$= 0 \quad , \quad \text{con} \quad C_1' = C_1 \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^{r_2} \dots \left(-\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_1}\right)^{r_{n-1}} \quad , \quad C_1' \neq 0 \quad .$$

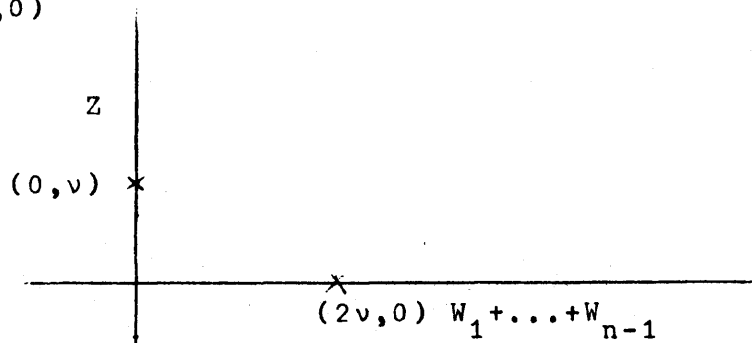
Si llamamos v' a la multiplicidad de la hipersuperficie de ecuación $f'(Z', W_1', \dots, W_{n-1}') = 0$, tendremos

$$v' \leq r_1 + \dots + r_{n-1} - v < 2v - v = v \quad , \quad \text{luego la multiplicidad ha bajado en una transformación cuadrática . Así en el diagrama de Newton de } f'(Z', W_1', \dots, W_{n-1}') \text{ existe el punto } (r_1 + \dots + r_{n-1} - v, 0)$$

con $r_1 + \dots + r_{n-1} - v < v$



ii) Se verifica que en el diagrama de Newton de $f(Z, W_1, \dots, \dots, W_{n-1})$ existe el punto $(2v, 0)$ y no exista ninguno situado en el eje de abscisas, comprendido entre los puntos $(v, 0)$ y $(2v, 0)$



Con esta condición la ecuación de la hipersuperficie será de la forma $f(Z, W_1, \dots, W_{n-1}) = Z^v + \varphi_2(W_1, \dots, W_{n-1})Z^{v-2} + \dots + C_1 W_1^{r_1} \dots W_{n-1}^{r_{n-1}} + \dots = 0$

$$v(\varphi_i(W_1, \dots, W_{n-1})) > i \quad , \quad C_1 \in K \quad , \quad C_1 \neq 0 \quad , \quad r_1 + \dots + r_{n-1} = 2v$$

Si consideramos una transformación cuadrática formal en el punto $(0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$, $\alpha_i \neq 0$, $1 \leq i \leq n-1$, de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 Z &= W'_1 Z' \\
 W_1 &= W'_1 \\
 W_2 &= W'_1 \left(W'_2 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right) \\
 &\dots\dots\dots \\
 W_{n-1} &= W'_1 \left(W'_{n-1} + \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_1} \right)
 \end{aligned}$$

La ecuación de la hipersuperficie transformada mediante esta transformación cuadrática será:

$$\begin{aligned}
 f'(Z', W'_1, \dots, W'_{n-1}) &= Z'^{\nu} + \varphi_2(W'_1, \dots, W'_{n-1} + \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_1}) Z'^{\nu-2} + \dots + \\
 &+ C'_1 W'^{r_1+r_2+\dots+r_{n-1}-\nu}_1 \left(W'_2 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right)^{r_2} \dots \left(W'_{n-1} + \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_1} \right)^{r_{n-1}} + \dots = \\
 &= Z'^{\nu} + \varphi_2(W'_1, \dots, W'_{n-1} + \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_1}) Z'^{\nu-2} + \dots + C'_1 W'^{r_1+r_2+\dots+r_{n-1}-\nu}_1 + \dots = 0
 \end{aligned}$$

con $C'_1 = C_1 \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^{r_2} \dots \left(\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_1}\right)^{r_{n-1}}$, $C'_1 \neq 0$

Si llamamos ν' a la multiplicidad de esta nueva hipersuperficie , $\nu' - r_1 + \dots + r_{n-1} - \nu = \nu$. Puede ocurrir:

1) $\nu' < \nu$, entonces ya hemos conseguido bajar la multiplicidad de la hipersuperficie.

2) $\nu' = \nu$, entonces la forma inicial de $f'(Z', W'_1, \dots, W'_{n-1})$ ya no es potencia de una forma lineal luego por (3-2-3) aplicando una nueva transformación cuadrática a la hipersuperficie de ecuación $f'(Z', W'_1, \dots, W'_{n-1}) = 0$ se consigue el bajar la multiplicidad .

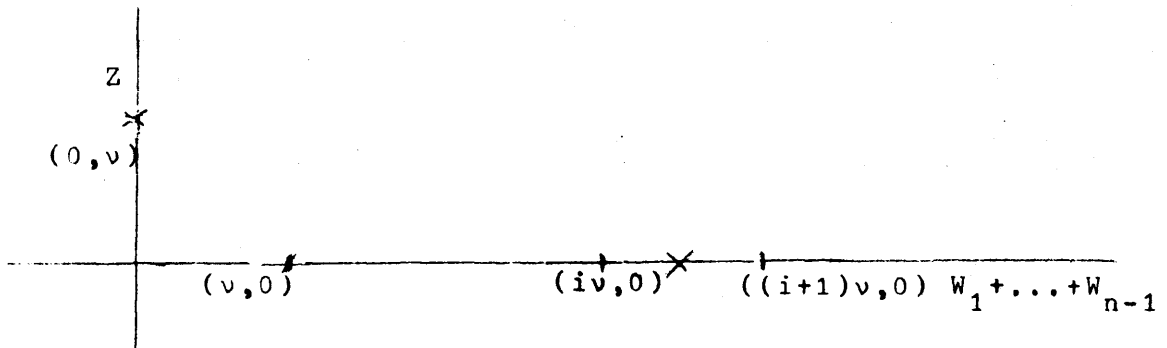
Demostraremos ahora que si $\nu' = \nu$, la forma inicial de $f'(Z', W'_1, \dots, W'_{n-1})$ no es potencia de una forma lineal.

Si fuera potencia de una forma lineal tendríamos

$$\begin{aligned}
 f'(Z', W'_1, \dots, W'_{n-1}) &= Z'^{\nu} + \varphi_2(W'_1, \dots, W'_{n-1} + \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_1}) Z'^{\nu-2} + \dots \\
 &\dots = (Z' + h(W_1, \dots, W_{n-1}))^{\nu} + \varphi_2(W'_1, \dots, W'_{n-1} + \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_1}) Z'^{\nu-2} + \dots = 0,
 \end{aligned}$$

con $h(W_1, \dots, W_{n-1})$ forma lineal, y no podría ser pues en el desarrollo de $(Z'+h(W_1, \dots, W_{n-1}))^v$ existiría un término en Z'^{v-1} lo cual es imposible ya que en $f(Z, W_1, \dots, W_{n-1})$ no existe ningún término en Z^{v-1} .

iii) En el diagrama de Newton existe un punto de coordenadas $(q, 0)$ con $iv < q < (i+1)v$, $i \geq 2$ y no existe ningún punto de coordenadas $(q', 0)$ con $q' < q$.



Con esta condición la ecuación de la hipersuperficie será de la forma

$$f(Z, W_1, \dots, W_{n-1}) = Z^v + \varphi_1(W_1, \dots, W_{n-1})Z^{v-1} + \dots + C_1 W_1^{r_1} \dots W_{n-1}^{r_{n-1}} + \dots = 0$$

$$v(\varphi_i) > i \quad C_1 \in K, \quad C_1 \neq 0 \quad iv < r_1 + \dots + r_{n-1} < (i+1)v \quad i \geq 2$$

$$q = r_1 + \dots + r_{n-1}$$

Si consideramos una transformación cuadrática formal en el punto $(0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$ con todas las α_i distintas de cero.

Dicha transformación cuadrática tendrá por ecuaciones

$$Z = W'_1 Z'$$

$$W_1 = W'_1$$

$$W_2 = W'_1 \left(W'_2 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right)$$

.....

$$W_{n-1} = W'_1 \left(W'_{n-1} + \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_1} \right)$$

La ecuación de la hipersuperficie transformada será

$$\begin{aligned}
 f'(Z', W'_1, \dots, W'_{n-1}) &= Z'^v + \gamma_1(W'_1, \dots, W'_{n-1} + \frac{\alpha}{\alpha_1} Z') Z'^{v-1} + \dots + \\
 &+ C_1 W'_1{}^{r_1} \dots W'_{n-1}{}^{-v} (W'_2 + \frac{\alpha}{\alpha_1} Z')^{r_2} \dots (W'_{n-1} + \frac{\alpha}{\alpha_1} Z')^{r_{n-1}} + \dots = \\
 &= Z'^v + \gamma_1(W'_1, \dots, W'_{n-1} + \frac{\alpha}{\alpha_1} Z') Z'^{v-1} + \dots + C_1 W'_1{}^{r_1} \dots W'_{n-1}{}^{-v} + \dots = 0 \\
 C'_1 &= C_1 (\frac{\alpha}{\alpha_1})^{r_2} \dots (\frac{\alpha}{\alpha_1})^{r_{n-1}} \quad , \quad C'_1 \neq 0
 \end{aligned}$$

Luego en el diagrama de Newton de la hipersuperficie de ecuación f' asociado al sistema de parámetros (Z', W') existe el punto $(r_1 + \dots + r_{n-1} - v, 0) = (q - v, 0)$.

Entonces aplicando un número finito de transformaciones cuadráticas la hipersuperficie de partida se nos transforma en una hipersuperficie correspondiente al caso i) .

iv) En el diagrama de Newton existe un punto de coordenadas $(q, 0)$ con $q = iv$, $i > 2$.

En este caso aplicando un número finito de transformaciones cuadráticas la hipersuperficie de partida se nos transforma en una hipersuperficie correspondiente al caso ii).

§ 3-3.- Efecto de las transformaciones cuadráticas formales sobre la multiplicidad. (Caso en que la multiplicidad es múltiplo de la característica del cuerpo).

Introducción.- El objetivo de esta sección es demostrar el siguiente teorema: Sea H una hipersuperficie algebraica de sumergida en K^n de multiplicidad v , tal que v sea múltiplo de la característica del cuerpo. Se verifica entonces que la multiplicidad de la hipersuperficie H decrece en un número finito de transformaciones cuadráticas.

Notaciones 3-3-1.- Sea ahora H una hipersuperficie algebraica de sumergida en K^n siendo K un cuerpo algebraicamente cerrado cuya característica es divisor de la multiplicidad de la hipersuperficie. La ecuación de la hipersuperficie H se podrá escribir

$$f(Z, W_1, \dots, W_{n-1}) = Z^v + \varphi_1(W_1, \dots, W_{n-1})Z^{v-1} + \dots + \varphi_v(W_1, \dots, W_{n-1}) = 0$$

$$\varphi_i(W_1, \dots, W_{n-1}) \in K[[W_1, \dots, W_{n-1}]], \quad v_0(\varphi_i) \geq i$$

ó también

$$f(Z, W_1, \dots, W_{n-1}) = f_v(Z, W_1, \dots, W_{n-1}) + f_{v+1}(Z, W_1, \dots, W_{n-1}) + \dots$$

donde $f_i(Z, W_1, \dots, W_{n-1})$ es ó bien cero ó una forma de grado i . A su vez en este caso distinguiremos dos subcasos según la forma inicial $f_v(Z, W_1, \dots, W_{n-1})$ sea ó no sea potencia de una forma lineal.

Lema 3-3-2.- Sea $f_v(Z, W_1, \dots, W_{n-1}) = Z^v + \varphi_1(W_1, \dots, W_{n-1})Z^{v-1} +$

$+ \dots + \varphi_v(W_1, \dots, W_{n-1})$ una forma de grado v en las variables

Z, W_1, \dots, W_{n-1} y con coeficientes en un cuerpo K de carac

terística p siendo p divisor de v y tal que

$\forall (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \in K^{n-1}$ la ecuación

$$Z^v + \varphi_1(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})Z^{v-1} + \dots + \varphi_v(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) = 0$$

posee una única raíz (múltiple de orden v). Entonces

$f_v(Z, W_1, \dots, W_{n-1})$ es necesariamente la potencia v -ésima de una forma lineal.

Demostración.- Se define la aplicación

$$h: K^{n-1} \longrightarrow K$$

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \longmapsto h(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$$

siendo $\forall (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \in K^{n-1}$, $h(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$ la única

raíz de la ecuación $Z^v + \varphi_1(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})Z^{v-1} + \dots + \varphi_v(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) = 0$

Se tendrá:

i) Si $v = p^m$, $m \geq 1$

$$\forall (W_1, \dots, W_{n-1}) \in K^{n-1}, f_v(Z, W_1, \dots, W_{n-1}) =$$

$$= (Z - h(W_1, \dots, W_{n-1}))^v = Z^v - h(W_1, \dots, W_{n-1})^v = Z^v +$$

$$+ \varphi_1(W_1, \dots, W_{n-1})Z^{v-1} + \dots + \varphi_v(W_1, \dots, W_{n-1})$$

$$\text{luego } \varphi_1(W_1, \dots, W_{n-1}) = \dots = \varphi_{v-1}(W_1, \dots, W_{n-1}) = 0$$

$$\varphi_v(W_1, \dots, W_{n-1}) = -h(W_1, \dots, W_{n-1})^v$$

y $h(W_1, \dots, W_{n-1})$ es una forma lineal, q.e.d.

ii) Si $v = p \cdot \ell$, $m \geq 1$

$$(Z - h(W_1, \dots, W_{n-1}))^{p \cdot \ell} = ((Z - h(W_1, \dots, W_{n-1}))^\ell)^{p^m} =$$

$$\begin{aligned}
 &= (Z^\ell - \binom{\ell}{1} Z^{\ell-1} h(W_1, \dots, W_{n-1}) + \dots + (-1)^{\ell-1} \binom{\ell}{\ell-1} Z \cdot h(W_1, \dots, W_{n-1})^{\ell-1} + \\
 &+ (-1)^\ell h(W_1, \dots, W_{n-1})^\ell) P^m = Z^\ell \cdot P^m + (-1) \binom{\ell}{1} Z^{\ell-1} \cdot h(W_1, \dots, W_{n-1}) P^m + \dots \\
 &+ ((-1)^{\ell-1} \binom{\ell}{\ell-1} Z \cdot h(W_1, \dots, W_{n-1})^{\ell-1}) P^m + ((-1)^\ell \cdot h(W_1, \dots, W_{n-1})^\ell) P^m = \\
 &= Z^\nu + (-\binom{\ell}{1} h(W_1, \dots, W_{n-1})) P^m Z^{\nu-P^m} + \dots + ((-1)^{\ell-1} \binom{\ell}{\ell-1} h(W_1, \dots, \\
 &\dots, W_{n-1})^{\ell-1}) P^m \cdot Z^{\nu-P^m} + (-1)^\nu h(W_1, \dots, W_{n-1})^\nu = Z^\nu + \gamma_1(W_1, \dots, W_{n-1}) Z^{\nu-1} \\
 &\dots + \gamma_\nu(W_1, \dots, W_{n-1})
 \end{aligned}$$

$$\gamma_\nu(W_1, \dots, W_{n-1}) = (-1)^\nu h(W_1, \dots, W_{n-1})^\nu = (-h(W_1, \dots, W_{n-1}))^\nu$$

q.e.d.

Teorema 3-3-3.- Sea H una hipersuperficie en las condiciones de 3-3-1. Sea $f = f_\nu(Z, W_1, \dots, W_{n-1}) + f_{\nu+1}(Z, W_1, \dots, W_{n-1}) + \dots = 0$

la ecuación de H tal que $f_\nu(Z, W_1, \dots, W_{n-1})$ no es la potencia ν -ésima de una forma lineal. Entonces se verifica que la multiplicidad de f decrece mediante una transformación cuadrática.

Demostración.- Al no ser $f_\nu(Z, W_1, \dots, W_{n-1})$ potencia ν -ésima de una forma lineal la ecuación de la hipersuperficie H será

$$\begin{aligned}
 f(Z, W_1, \dots, W_{n-1}) &= Z^\nu + C_i Z^{\nu-1} W_1^{a_1} \dots W_{n-1}^{a_{n-1}} + \dots + \\
 &+ f_{\nu+1}(Z, W_1, \dots, W_{n-1}) + \dots
 \end{aligned}$$

con $C_i \in K$, $C_i \neq 0$, $a_1 + \dots + a_{n-1} = i$, $i \neq 0$.

Por el lema 3-3-2 sabemos que existe $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \neq (0, \dots, 0)$ tal que la ecuación $f_\nu(Z, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) = 0$ tiene al menos dos raíces, sea γ una de ellas que podemos suponer distinta de cero. Supondremos también que α_1 es distinto de cero.

Si consideramos la transformación cuadrática formal en el pun-

to $(\gamma, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$, de ecuaciones

$$\begin{aligned} Z &= W'_1 \left(Z' + \frac{\gamma}{\alpha_1} \right) \\ W_1 &= W'_1 \\ W_2 &= W'_1 \left(W'_2 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right) \\ &\dots\dots\dots \\ W_{n-1} &= W'_1 \left(W'_{n-1} + \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_1} \right) \end{aligned}$$

Distinguiremos dos casos:

i) $v = p^m$, $m \geq 1$

Se verificará que la hipersuperficie transformada de H mediante esta transformación cuadrática tendrá por ecuación

$$f'(Z', W'_1, \dots, W'_{n-1}) = \left(Z' + \frac{\gamma}{\alpha_1} \right)^v + C_i W'_1{}^{a_1 + \dots + a_{n-1} - i} \left(Z' + \frac{\gamma}{\alpha_1} \right)^{v-i}.$$

$$\left(W'_2 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right)^{a_2} \dots \left(W'_{n-1} + \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_1} \right)^{a_{n-1}} + \dots = Z'^v + \left(\frac{\gamma}{\alpha_1} \right)^v + C_i W'_1{}^{a_1 + \dots + a_{n-1} - i}.$$

$$\left(Z' + \frac{\gamma}{\alpha_1} \right)^{v-i} \cdot \left(W'_2 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right)^{a_2} \dots \left(W'_{n-1} + \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_1} \right)^{a_{n-1}} + \dots = 0$$

Se verifica que el término independiente de $f'(Z', W'_1, \dots, W'_{n-1})$ es cero pues $f_v(\gamma, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) = 0$ y entonces si llamamos v' a la multiplicidad de $f'(Z', W'_1, \dots, W'_{n-1})$ tendremos

$$v' \leq a_1 + \dots + a_{n-1} - i + a_2 + \dots + a_{n-1} = a_2 + \dots + a_{n-1}$$

puede ocurrir:

i-1) $i < v$, entonces $v' \leq a_2 + \dots + a_{n-1} - i < v$ y ha bajado la multiplicidad.

i-2) $i = v$ y no existe en la forma inicial ningún término

$$C_i Z^{v-i} W_1^{a_1} \dots W_{n-1}^{a_{n-1}} \quad \text{con} \quad a_1 + \dots + a_{n-1} = i < v. \quad \text{Entonces la}$$

forma inicial de f será $Z^v + C_i W_1^{a_1} \dots W_{n-1}^{a_{n-1}}$, $a_1 + \dots + a_{n-1} = v$,

al menos dos de los a'_1, \dots, a'_{n-1} tienen que ser distintos de cero pues si $a'_1 = v$, $a'_2 = \dots = a'_{n-1} = 0$, $Z^v + C'_i W'_1^v =$

$= (Z + C''_i W'_1)^v$ la forma inicial será potencia de una forma lineal contra la hipótesis.

Supongamos entonces que $a'_1 \neq 0$, $a'_2 \neq 0$, entonces $\alpha_1 \neq 0$, $\alpha_2 \neq 0$ al tener $f_v(Z, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) = 0$ por lo menos dos raíces.

La ecuación de la hipersuperficie transformada será de la forma

$$f'(Z', W'_1, \dots, W'_{n-1}) = Z'^{p^m} + \left(-\frac{\gamma}{\alpha_1}\right)^{p^m} + C'_i W'_1^{a'_1 + \dots + a'_{n-1} - i} \left(Z' + \frac{\gamma}{\alpha_1}\right)^{p^m - i} \cdot \left(W'_2 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^{a'_2} \dots \left(W'_{n-1} + \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_1}\right)^{a'_{n-1}} + \dots = 0$$

y $v' < a'_1 + \dots + a'_{n-1} - i + a'_3 + \dots + a'_{n-1} = a'_3 + \dots + a'_{n-1}$ y al ser $a'_1 \neq 0$, $a'_2 \neq 0$, $a'_3 + \dots + a'_{n-1} < a'_1 + a'_2 + a'_3 + \dots + a'_{n-1} = v$ luego en este caso también $v' < v$.

ii) $v = p^m \cdot \ell$, $m \geq 1$

En este caso la ecuación de la transformada de $f(Z, W_1, \dots, W_{n-1})$ mediante la transformación cuadrática formal será

$$f'(Z', W'_1, \dots, W'_{n-1}) = \left(Z' + \frac{\gamma}{\alpha_1}\right)^v + C'_i W'_1^{a'_1 + \dots + a'_{n-1} - i} \left(Z' + \frac{\gamma}{\alpha_1}\right)^{v-i} \cdot \left(W'_2 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^{a'_2} \dots \left(W'_{n-1} + \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_1}\right)^{a'_{n-1}} + \dots = Z'^v + \binom{\ell}{1} \left(-\frac{\gamma}{\alpha_1}\right)^{p^m} Z'^{v-p^m} + \dots + \binom{\ell}{\ell-1} \left(-\frac{\gamma}{\alpha_1}\right)^{(\ell-1)p^m} Z'^{p^m} + \left(-\frac{\gamma}{\alpha_1}\right)^v + C'_i W'_1^{a'_1 + \dots + a'_{n-1} - i} \left(Z' + \frac{\gamma}{\alpha_1}\right)^{v-i} \cdot \left(W'_2 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^{a'_2} \dots \left(W'_{n-1} + \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_1}\right)^{a'_{n-1}} + \dots$$

luego si v' es la multiplicidad de $f'(Z', W'_1, \dots, W'_{n-1})$ tendremos que $v' < v$ ya que ℓ no es múltiplo de p luego

$$\binom{\ell}{1}^{p^m} \left(-\frac{\gamma}{\alpha_1}\right)^{p^m} Z'^{v-p^m} \neq 0 \quad \text{y} \quad v - p^m < v$$

Teorema 3-3-4.- Sea H una hipersuperficie algebroide sumergida en K^n siendo K un cuerpo algebraicamente cerrado y de característica p , p divisor de v . Sea $f(Z, W_1, \dots$

$$\dots, W_{n-1}) = f_v(Z, W_1, \dots, W_{n-1}) + f_{v+1}(Z, W_1, \dots, W_{n-1}) + \dots = 0$$

la ecuación de H tal que $f_v(Z, W_1, \dots, W_{n-1})$ es la potencia v -ésima de una forma lineal. En estas condiciones se verifica que mediante un número finito de transformaciones cuadráticas es posible bajar la multiplicidad de f .

Demostración.-

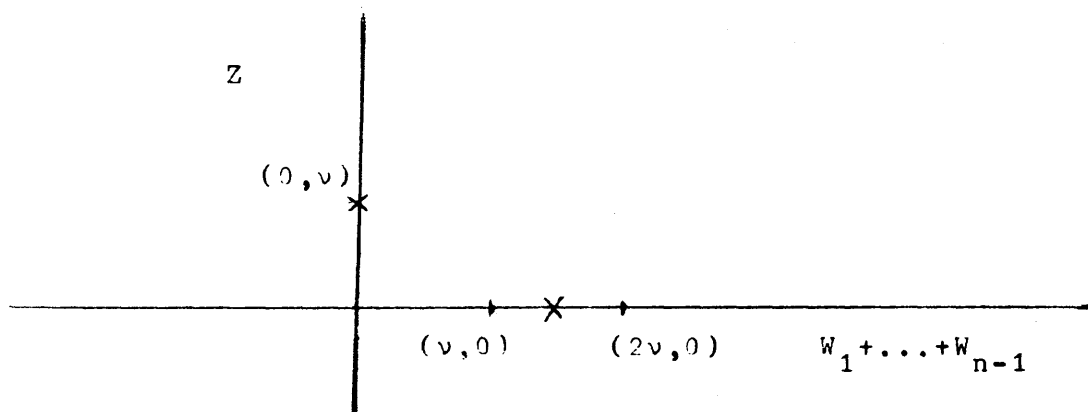
Al ser $f_v(Z, W_1, \dots, W_{n-1})$ la potencia v -ésima de una forma lineal la ecuación de la hipersuperficie H se podrá escribir de las dos formas siguientes:

$$f(Z, W_1, \dots, W_{n-1}) = Z^v + \varphi_1(W_1, \dots, W_{n-1})Z^{v-1} + \dots + \varphi_{v-1}(W_1, \dots, W_{n-1})Z + \varphi_v(W_1, \dots, W_{n-1}) = 0, \quad v_{\underline{0}}(\varphi_i) > i$$

$$f(Z, W_1, \dots, W_{n-1}) = Z^v + f_{v+1}(Z, W_1, \dots, W_{n-1}) + \dots$$

Para demostrar el teorema utilizaremos el diagrama de Newton de la hipersuperficie asociado al sistema de parámetros $(Z, \underline{W}) = (Z, W_1, \dots, W_{n-1})$. Aplicando (3-2-4) se puede suponer que en este diagrama de Newton existe un punto situado en el eje x . Distinguiremos cuatro casos:

i) Existe en el diagrama de Newton un punto de coordenadas $(q, 0)$ tal que $v < q < 2v$.



Con esta condición la ecuación de la hipersuperficie será de la forma

$$f(Z, W_1, \dots, W_{n-1}) = Z^v + \varphi_1(W_1, \dots, W_{n-1})Z^{v-1} + \dots + C_1 W_1^{r_1} \dots W_{n-1}^{r_{n-1}} + \dots = 0, \quad v_{\underline{0}}(\varphi_i) > i, \quad C_1 \in K, \quad C_1 \neq 0, \quad v < r_1 + \dots + r_{n-1} < 2v$$

Como cualquier punto de la forma $(0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$, $\alpha_i \neq 0$, $1 \leq i \leq n-1$ verifica que $f_v(0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) = 0$ podemos aplicar a la hipersuperficie H la transformación cuadrática formal de ecuaciones:

$$\begin{aligned} Z &= W'_1 Z' \\ W_1 &= W'_1 \\ W_2 &= W'_1 \left(W'_2 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right) \\ &\dots \dots \dots \\ W_{n-1} &= W'_1 \left(W'_{n-1} + \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_1} \right) \end{aligned}$$

La ecuación de la hipersuperficie transformada será

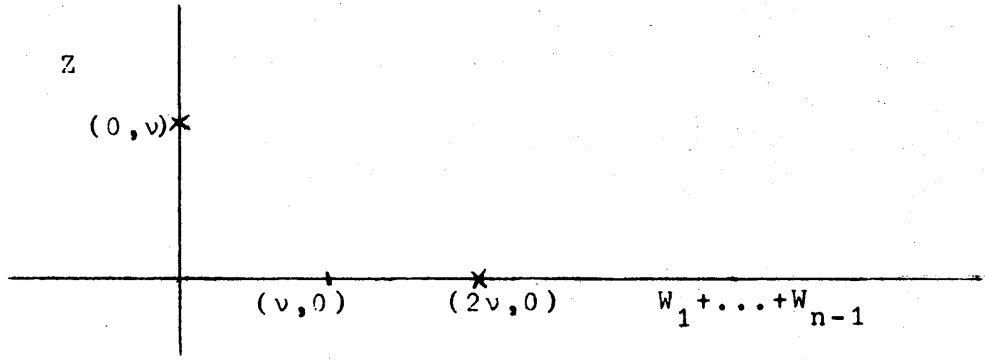
$$f'(Z', W'_1, \dots, W'_{n-1}) = Z'^v + \varphi_1 \left(W'_1, W'_2 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1}, \dots, W'_{n-1} + \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_1} \right) Z'^{v-1} + \dots + W'_1^{r_1+r_2+\dots+r_{n-1}-v} \left(W'_2 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right)^{r_2} \dots \left(W'_{n-1} + \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_1} \right)^{r_{n-1}} + \dots = 0$$

Si llamamos v' a la multiplicidad de la hipersuperficie de ecuación $f'(Z', W'_1, \dots, W'_{n-1}) = 0$ se tendrá

$$v' \leq r_1 + \dots + r_{n-1} - v < 2v - v = v$$

luego $v' < v$ y la multiplicidad ha bajado en una transformación cuadrática.

ii) Se verifica que en el diagrama de Newton de $f(Z, W_1, \dots, W_{n-1})$ existe el punto $(2v, 0)$ y no existe ninguno situado en el eje de abscisas comprendido entre los puntos $(v, 0)$ y $(2v, 0)$



Con esta condición la ecuación de la hipersuperficie será de la forma

$$f(Z, W_1, \dots, W_{n-1}) = Z^v + \varphi_1(W_1, \dots, W_{n-1})Z^{v-1} + \dots + C_1 W_1^{r_1} \dots W_{n-1}^{r_{n-1}} + \dots = 0, \quad v_0(\varphi_i) > i, \quad r_1 + \dots + r_{n-1} = 2v$$

Si consideramos una transformación cuadrática formal en el punto $(0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}), \alpha_i \neq 0, 1 \leq i \leq n-1$, dicha transformación cuadrática tendrá por ecuaciones:

$$\begin{aligned} Z &= W'_1 Z' \\ W_1 &= W'_1 \\ W_2 &= W'_1 \left(W'_2 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right) \\ &\dots \dots \dots \\ W_{n-1} &= W'_1 \left(W'_{n-1} + \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_1} \right) \end{aligned}$$

La ecuación de la hipersuperficie transformada será

$$f'(Z', W'_1, \dots, W'_{n-1}) = Z'^v + \varphi'_1(W'_1, \dots, W'_{n-1} + \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_1}) Z'^{v-1} + \dots + W_1^{r_1 + \dots + r_{n-1} - v} (W'_2 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1})^{r_2} \dots (W'_{n-1} + \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_1})^{r_{n-1}} + \dots = 0$$

Si llamamos v' a la multiplicidad de la hipersuperficie transformada, estudiaremos que pasa con v' .

Veremos en primer lugar la trayectoria de los términos de la ecuación $f(Z, W_1, \dots, W_{n-1}) = 0$ que son de la forma

$$d_i Z^{v-i} W_1^{a_1} \dots W_{n-1}^{a_{n-1}}, \quad d_i \in K, d_i \neq 0, a_1 + \dots + a_{n-1} > i, i \neq 0.$$

$$d_i Z^{v-i} W_1^{a_1} \dots W_{n-1}^{a_{n-1}} \longrightarrow d_i Z^{v-i} W_1^{a_1 + \dots + a_{n-1} + v - i - v} (W_2' + \dots + \dots)$$

$$+ \frac{\alpha_2}{\alpha_1} a_2 \dots (W_{n-1}' + \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_1} a_{n-1})^{a_{n-1}} = d_i' Z^{v-i} W_1^{a_1 + \dots + a_{n-1} + v - i - v} + \dots ,$$

con $d_i' = d_i \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^{a_2} \dots \left(\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_1}\right)^{a_{n-1}}$, $d_i' \neq 0$.

Se tiene que $v' - a_1 + \dots + a_{n-1} + v - i - v + v - i = a_1 + \dots + a_{n-1} + v - 2i > i + v - 2i = v - i$.

Puede ocurrir:

1) Existe en la ecuación $f(Z, W_1, \dots, W_{n-1}) = 0$ un término de la forma $d_i Z^{v-i} W_1^{a_1} \dots W_{n-1}^{a_{n-1}}$, $d_i \in K$, $d_i \neq 0$ tal que $a_1 + \dots + a_{n-1} + v - 2i < v$, entonces la multiplicidad bajaría en la primera transformación cuadrática.

2) Existe en la ecuación $f(Z, W_1, \dots, W_{n-1}) = 0$ un término de la forma $d_i Z^{v-i} W_1^{a_1} \dots W_{n-1}^{a_{n-1}}$, $d_i \in K$, $d_i \neq 0$ tal que $a_1 + \dots + a_{n-1} + v - 2i = v$, entonces demostraremos que tanto en el caso de que $v = p^m$ ó $v = l \cdot p^m$ la forma inicial de

$f'(Z', W_1', \dots, W_{n-1}')$ ya no es potencia de una forma lineal luego por (3-3-3) aplicando una nueva transformación cuadrática a la hipersuperficie de ecuación $f'(Z', W_1', \dots, \dots, W_{n-1}') = 0$ se consigue el bajar la multiplicidad.

2-1). Si $v = p^m$, trivialmente se demuestra que la forma inicial de $f'(Z, W_1, \dots, W_{n-1})$ no es potencia de una forma lineal ya que $(Z' + \varphi(W_1, \dots, W_{n-1}))^v = Z'^v + \varphi(W_1, \dots, W_{n-1})^v$.

2-2). Si $v = l \cdot p^m$, se tendría

$$(Z + t W_1')^{l \cdot p^m} = ((Z + t W_1')^l)^{p^m} = \binom{l}{0} Z^l + \binom{l}{1} Z^{l-1} t W_1' + \dots +$$

$$\begin{aligned}
 & + \binom{\ell}{i} Z^{\ell-i} t^i W_1^i + \dots + \binom{\ell}{\ell-1} Z t^{\ell-1} W_1^{\ell-1} + \binom{\ell}{\ell} t^\ell W_1^\ell)^{p^m} = \\
 & = Z^{\ell \cdot p^m} + \ell^{p^m} t^{p^m} Z^{(\ell-1)p^m} W_1^{p^m} + \dots + \binom{\ell}{i}^{p^m} t^{ip^m} Z^{(\ell-i)p^m} \cdot W_1^{ip^m} + \dots \\
 & + \dots + \ell^{p^m} t^{(\ell-1)p^m} Z^{p^m} W_1^{(\ell-1)p^m} + t^{\ell p^m} W_1^{\ell p^m} = Z^\nu + \\
 & + \ell^{p^m} t^{p^m} Z^{\nu-p^m} W_1^{p^m} + \dots + \binom{\ell}{i}^{p^m} t^{ip^m} Z^{\nu-ip^m} \cdot W_1^{ip^m} + \dots + \\
 & + \ell^{p^m} t^{(\ell-1)p^m} Z^{p^m} W_1^{\nu-p^m} + t^{\ell p^m} W_1^\nu ; t \in K
 \end{aligned}$$

y aunque la forma inicial de la ecuación $f'(Z', W_1', \dots, W_{n-1}') = 0$

sea de la forma

$$\sum_{0 \leq i \leq \ell} d_i' Z'^{\nu-ip^m} W_1'^{a_{i1}} + \dots + a_{i,n-1}^{-ip^m} ,$$

$$\begin{aligned}
 & \text{con } \nu - ip^m + a_{i1} + \dots + a_{i,n-1} - ip^m = \nu, d_i' = d_i \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^{a_{i2}} \dots \\
 & \dots \left(\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_1}\right)^{a_{i,n-1}}
 \end{aligned}$$

para que fuera potencia de una forma lineal se tendrían que verificar las siguientes igualdades

$$\binom{\ell}{i}^{p^m} t^{ip^m} = d_i \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^{a_{i2}} \dots \left(\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_1}\right)^{a_{i,n-1}} = d_i'$$

$0 \leq i \leq \ell$

y como los números $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$ unicamente tienen que cumplir la condición de ser distintos de cero, siempre podremos escogerlos de manera que no se verifiquen las igualdades anteriores, es decir incompatibles con que la forma inicial sea potencia de una forma lineal.

3) Todos los términos de la ecuación de la hipersuperficie $f(Z, W_1, \dots, W_{n-1}) = 0$ de la forma $d_i Z^{\nu-i} W_1^{a_1} \dots W_{n-1}^{a_{n-1}}$, $i \neq 0$,

$d_i \in K$, $d_i \neq 0$ verifican que $a_1 + \dots + a_{n-1} + v - 2i > v$. En este caso consideremos nuevamente la ecuación de la hipersuperficie transformada

$$f(Z', W'_1, \dots, W'_{n-1}) = Z'^v + \gamma_1 (W'_1, \dots, W'_{n-1} + \frac{\alpha}{\alpha_1} Z') Z'^{v-1} + \dots + \\ + C_1 W_1^{r_1} + \dots + r_{n-1}^{-v} (W'_2 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1})^{r_2} \dots (W'_{n-1} + \frac{\alpha}{\alpha_1} Z')^{r_{n-1}} + \dots = 0$$

Entonces v será la multiplicidad de $f'(Z', W'_1, \dots, W'_{n-1})$.

Puede ocurrir:

3-1) Si $v = \ell \cdot p^m$ la forma inicial de $f'(Z', W'_1, \dots, W'_{n-1})$ no es potencia de una forma lineal, luego por (3-3-3) aplicando una nueva transformación cuadrática a la hipersuperficie de ecuación $f'(Z', W'_1, \dots, W'_{n-1}) = 0$ se consigue el bajar la multiplicidad.

3-2) Si $v = p^m$, la forma inicial es de la forma $(Z' + tW'_1)^v$, luego es potencia de una forma lineal. Podemos distinguir varios subcasos.

3-2-a) Si alguno de los números r_2, \dots, r_{n-1} no es de la forma $p^{m'}$, entonces existe en el diagrama de Newton de $f'(Z', W'_1, \dots, W'_{n-1})$ un punto situado en el eje de abscisas y comprendido entre los puntos $(v, 0)$ y $(2v, 0)$ luego la hipersuperficie de ecuación $f'(Z', W'_1, \dots, W'_{n-1}) = 0$ pertenece al caso i) y es posible bajar su multiplicidad mediante una transformación cuadrática.

Supongamos que r_2 no es de la forma $p^{m'}$. Demostraremos la afirmación anterior en dos pasos:

3-2-a₁) Si r_2 no es de la forma $p^{m'}$, ni tampoco es múltiplo de p , en la ecuación $f(Z', W'_1, \dots, W'_{n-1})$ existe el

término $r_2 \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^{r_2-1} W_1^{r_1+\dots+r_{n-1}-v} \cdot W_2'$, luego en el diagrama de Newton de $f'(Z', W_1', \dots, W_{n-1}')$ tendremos el punto $(v+1, 0)$.

3-2-a₂) Si $r_2 = p^{m'} \cdot \ell$, ℓ no es múltiplo de p . La ecuación de la hipersuperficie transformada será:

$$f'(Z', W_1', \dots, W_{n-1}') = Z'^v + P_1(W_1', \dots, W_{n-1}') + \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_1} Z'^{v-1} + \dots + C_1 W_1^{r_1+\dots+r_{n-1}-v} \left((W_2' + \frac{\alpha_2}{\alpha_1})^\ell \right)^{p^{m'}} \dots (W_{n-1}' + \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_1})^{r_{n-1}} = 0$$

en $f'(Z', W_1', \dots, W_{n-1}')$ se encuentra el término

$$C_1 \left(\ell \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^{\ell-1} W_2'\right)^{p^{m'}} \cdot W_1^{r_1+\dots+r_{n-1}-v} \cdot \left(\frac{\alpha_3}{\alpha_1}\right)^{r_3} \dots \left(\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_1}\right)^{r_{n-1}} =$$

$$= C_1 \ell \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^{\ell-1} \left(\frac{\alpha_3}{\alpha_1}\right)^{r_3} \dots \left(\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_1}\right)^{r_{n-1}} \cdot W_1^{r_1+\dots+r_{n-1}-v} W_2^{p^{m'}}$$

con $r_1+\dots+r_{n-1}-v+p^{m'} = v+p^{m'} < 2v$, ya que $p^{m'} < r_2 \leq v$, luego en el diagrama de Newton de $f'(Z', W_1', \dots, W_{n-1}')$ se encuentra el punto de coordenadas $(v+p^{m'}, 0)$,

$$v < v+p^{m'} < 2v$$

3-2-b) Si todos los números r_2, \dots, r_{n-1} son de la forma $p^{m'}$, la ecuación de la hipersuperficie transformada será

$$f'(Z', W_1', \dots, W_{n-1}') = Z'^v + \dots + C_v W_1^v (W_2'^{r_2} + \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^{r_2}) \dots$$

$$\cdot (W_{n-1}'^{r_{n-1}} + \left(\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_1}\right)^{r_{n-1}}) = Z'^v + \dots + C_v W_1^v W_2'^{r_2} \left(\frac{\alpha_3}{\alpha_1}\right)^{r_3} \dots \left(\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_1}\right)^{r_{n-1}} + \dots$$

luego en el diagrama de Newton de $f'(Z', W_1', \dots, W_{n-1}')$ se encuentra el punto $(v+r_2, 0)$. Puede suceder:

3-2-b₁) $r_2 < v$, entonces en el diagrama de Newton de

$f'(Z', W'_1, \dots, W'_{n-1})$ existe un punto de la forma $(q, 0)$,
situado entre los puntos $(v, 0)$ y $(2v, 0)$.

3-2-b₂) $r_2 > v$, $r_2 \neq 2v$, $r_1 < v$.

Consideramos entonces la transformación cuadrática formal de ecuaciones:

$$\begin{aligned} Z &= W'_2 Z' \\ W_1 &= W'_2 \left(W'_1 + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \right) \\ W_2 &= W'_2 \\ &\dots\dots\dots \\ W_{n-1} &= W'_2 \left(W'_{n-1} + \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_2} \right) \end{aligned}$$

y en el diagrama de Newton de la hipersuperficie transformada se encuentra el punto $(v+r_1, 0)$.

3-2-b₃) $r_2 = v$, $r_1 < v$.

En esta situación algún r_i , $i=3, \dots, n-1$, será menor que v , sea por ejemplo r_3 , entonces en el diagrama de Newton de $f'(Z', W'_1, \dots, W'_{n-1})$ se encuentra el punto $(v+r_3, 0)$

3-2-b₄) $r_2 = v$, $r_1 = v$.

En este caso la ecuación de la hipersuperficie transformada será

$$\begin{aligned} f'(Z', W'_1, \dots, W'_{n-1}) &= Z'^v + \dots + C_i W'_1^{a_1 + \dots + a_{n-1} + v - i - v} \\ &\left(W'_2 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right)^{a_2} \dots \left(W'_{n-1} + \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_1} \right)^{a_{n-1}} Z'^{v-i} + \dots + \\ &+ C_v W'_1^v \left(W'_2 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right)^v + \dots = Z'^v + \dots + \\ &+ C'_i W'_1^{a_1 + \dots + a_{n-1} + v - i - v} Z'^{v-i} + \dots = 0 \end{aligned}$$

y si aplicamos una nueva transformación cuadrática formal

a la hipersuperficie de ecuación $f'(Z', W'_1, \dots, W'_{n-1}) = 0$

tendremos otra nueva de ecuación

$$f''(Z'', W''_1, \dots, W''_{n-1}) = Z''^v + \dots + C''_i W''_i^{a_1 + \dots + a_{n-1} + v - i - v + v - i - v}$$

$$Z''^{v-i} + \dots = 0$$

de multiplicidad $v'' = a_1 + \dots + a_{n-1} + v - i - v + v - i - v + v - i =$

$= a_1 + \dots + a_{n-1} + v - 3i$ y así en un número finito de transformaciones cuadráticas decrece la multiplicidad.

En esta situación el problema se presentaría cuando la ecuación de la hipersuperficie fuera de la forma

$$Z^v + C_v W_1^v W_2^v = 0$$

pero en este caso $Z^v + C_v W_1^v W_2^v = (Z + C'_v W_1 W_2)^v = 0$,

y la hipersuperficie no sería reducida

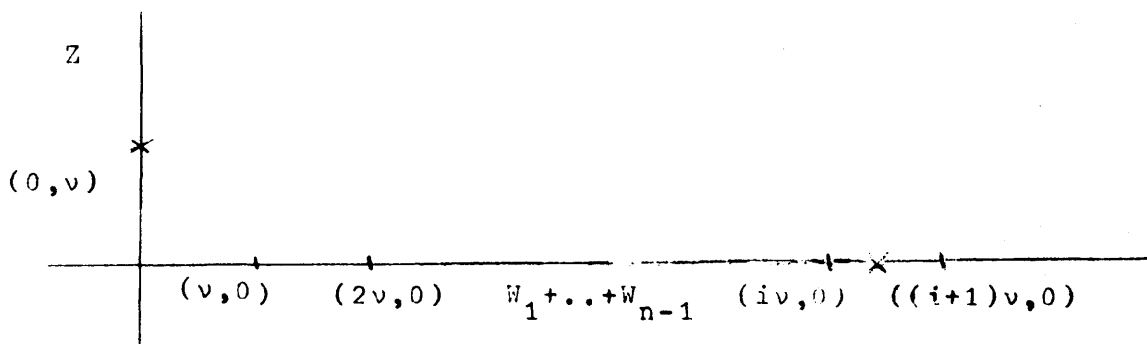
3-3) $r_1 = 2v$

El problema se soluciona como en (3-2-b₄), salvo cuando la hipersuperficie tiene por ecuación

$$Z^v + C_v W_1^{2v} = (Z + C'_v W_1^2)^v = 0$$

pero este caso no se puede presentar pues no sería reducida.

iii) En el diagrama de Newton existe un punto de coordenadas $(q, 0)$ con $iv < q < (i+1)v$, $i \geq 2$ y no existe ningún punto de coordenadas $(q', 0)$ con $q' < q$



Con esta condición la ecuación de la hipersuperficie será de la forma

$$f(Z, W_1, \dots, W_{n-1}) = Z^v + \varphi_1(W_1, \dots, W_{n-1})Z^{v-1} + \dots + C_1 W_1^{r_1} \dots W_{n-1}^{r_{n-1}} + \dots = 0$$

$$v_0(\varphi_i) > i, \quad C_1 \in K, \quad C_1 \neq 0, \quad iv < r_1 + \dots + r_{n-1} < (i+1)v, \quad i \geq 2.$$

Si consideramos una transformación cuadrática en el punto $(0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$, $\alpha_i \neq 0$, $1 \leq i \leq n-1$, dicha transformación cuadrática tendrá por ecuaciones

$$\begin{aligned} Z &= W'_1 Z' \\ W_1 &= W'_1 \\ W_2 &= W'_1 \left(W'_2 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right) \\ &\dots \dots \dots \\ W_{n-1} &= W'_1 \left(W'_{n-1} + \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_1} \right) \end{aligned}$$

La ecuación de la hipersuperficie transformada será

$$\begin{aligned} f'(Z', W'_1, \dots, W'_{n-1}) &= Z'^v + \varphi_1(W'_1, \dots, W'_{n-1} + \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_1}) Z'^{v-1} + \dots + \\ &+ C_1 W'_1{}^{r_1} \dots W'_{n-1}{}^{-v} \left(W'_2 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right)^{r_2} \dots \left(W'_{n-1} + \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_1} \right)^{r_{n-1}} = 0 \end{aligned}$$

Luego en el diagrama de Newton de la hipersuperficie de ecuaciones $f'(Z', W'_1, \dots, W'_{n-1}) = 0$ asociado al sistema de parámetros (Z', W'_i) existe el punto $(r_1 + \dots + r_{n-1} - v, 0) = (q - v, 0)$

correspondiente al término de la ecuación

$$C_1 \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right)^{r_2} \dots \left(\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_1} \right)^{r_{n-1}} \cdot W'_1{}^{r_1 + \dots + r_{n-1} - v}, \text{ entonces aplicando}$$

un número finito de transformaciones cuadráticas la hipersuperficie de partida se nos transforma en una hipersuperficie correspondiente al caso i).

iv) En el diagrama de Newton de $f(Z, W_1, \dots, W_{n-1})$ existe un punto de coordenadas $(q, 0)$ con $q=iv$, $i > 2$.

En este caso aplicando un número finito de transformaciones cuadráticas la hipersuperficie de partida se nos transforma en una hipersuperficie correspondiente al caso ii).

CAPITULO IV

Variedades algebroides

Introducción

Este capítulo está dedicado a la resolución de singularidades de las variedades algebroides en general vía contacto maximal. Utilizaremos para ello las bases standard normalizadas cuya existencia quedó probada en el capítulo I .

§ 4-1.- Función de Hilbert-Samuel.

Introducción.- Sección dedicada a demostrar el teorema de Bennett, que establece el comportamiento de la función de Hilbert-Samuel vía explosiones.

Nota 4-1-1.-

i) Sea θ un anillo local de ideal maximal \mathfrak{m} y cuerpo residual K . Sea H_θ la función de Hilbert-Samuel de θ , es decir H_θ es una aplicación $H_\theta: \mathbb{Z}_0 \rightarrow \mathbb{Z}$ definida por:

$$H_\theta(n) = \sum_{j=0}^n \dim_K (\mathfrak{m}^j / \mathfrak{m}^{j+1}) = \text{long}_\theta (\theta / \mathfrak{m}^n)$$

Se escribirá entonces

$$H^{(-1)}(n) = H(n) - H(n-1) = \Delta H(n)$$

$$H^{(+1)}(n) = \sum_{i=0}^n H(i)$$

$$H^{(+\ell)}(\underline{+1}) = H^{+(\ell+1)}$$

y así se puede definir $H^{(d)}$, \forall entero d .

ii) Sea X una variedad algebroide de anillo de coordenadas

$$\square, \square = K[[Z_1, \dots, Z_c, W_1, \dots, W_d]]/J. \text{ Podemos escribir } \square = \\ = K[[Z'_1, \dots, Z'_c, W'_1, \dots, W'_d]], \quad Z'_i = Z_i + J, \quad i=1, \dots, c;$$

$W'_j = W_j + J, \quad j=1, \dots, d$. Utilizaremos entonces la siguiente

notación

$$H_X = H_K[[Z'_1, \dots, Z'_c, W'_1, \dots, W'_d]].$$

iii) Sea $R = K[[Z_1, \dots, Z_c, W_1, \dots, W_d]]$ con $c+d=n$. Sean Y, X

dos variedades algebroides sumergidas en K^n , de ideales de definición P, J con $J \subset P$ y $P = (W_1, \dots, W_d)R$.

Consideremos la explosión $B\ell_{P/J}(R/J)$ y la proyección

$$\pi: B\ell_{P/J}(R/J) \dashrightarrow \text{Spec}(R/J) \quad (\text{véase 2-2}).$$

En estas condiciones escribiremos:

$$C_{X,Y} = \text{Spec}(\text{gr}_Y(X)) = \text{Spec}(\text{gr}_{P/J}(R/J))$$

y diremos que $C_{X,Y}$ es el cono normal de X a lo largo de Y .

Sea ahora M el ideal maximal de R/J y 0 el punto cerrado correspondiente a este ideal maximal, entonces la fibra de $C_{X,Y}$ en este punto será:

$$C_{X,Y}(0) = \text{Spec} \left(\frac{\bigoplus_{n=0}^{\infty} (P/J)^n}{M(P/J)^n} \right) =$$

$$= \text{Spec}(K[\bar{W}_1, \dots, \bar{W}_d])$$

con $\bar{W}_i = \text{in}_{M(P/J)}(W_i+J)$ (véase 2-3-5)

iv) En las condiciones de iii) se verifica que:

iv-a) El fibrado proyectivo asociado a $C_{X,Y}$ es

$$\text{Proj}(\text{gr}_{P/J}(R/J)) = \pi^{-1}(Y) \quad (\text{véase } 2-3-3)$$

iv-b) El fibrado proyectivo asociado a $C_{X,Y}(0)$ es

$$\text{Proj}(K[\bar{W}_1, \dots, \bar{W}_d]) = \pi^{-1}(0) \quad (\text{véase } 2-3-5)$$

$$\bar{W}_i = \text{in}_{M(P/J)}(W_i+J)$$

v) Dado \square' transformado monoïdal de $\square = R/J$ con centro P/J , $\pi^{-1}(0)$ está definido en \square' por el ideal

$$(W_1+J, Z_1+J, \dots, Z_c+J)\square' \quad (\text{véase } 2-4-3)$$

Teorema 4-1-2.- Teorema de Bennett.-

Con las notaciones anteriores. Si X es una variedad normalmente plana a lo largo de Y e Y es una variedad regular, se verifica que:

$$H_{X'} \leq H_X$$

con X' la variedad transformada de X mediante una transformación monoïdal de centro P .

Demostración.-

Sabemos que si A es un anillo local, H_A es la función de Hilbert-Samuel de A con respecto a su ideal maximal, entonces para todo entero positivo ℓ

$$H_A^{(\ell)} = H_{A'}$$

donde $A' = A[[t_1, \dots, t_\ell]]$ y $\{t_1, \dots, t_\ell\}$ son variables independientes.

Luego en nuestro caso

$$H_X^{(\ell)} = H_X \times K^\ell \quad \text{donde } K^\ell = \text{Spec}(K[[t_1, \dots, t_\ell]])$$

y $X \times K^\ell$ indica el producto fibrado. (véase Lejeune-Teissier [27], cap I, 5-3-1)

Demostraremos el teorema si comprobamos:

$$i) H_X = H_{C_{X,Y}(0)}^{(+c)} \quad \text{con } c = \dim Y$$

$$ii) H_{C_{X,Y}(0)} \geq H_{\pi^{-1}(0)}^{(+1)}$$

$$iii) H_{\pi^{-1}(0)}^{(+c+1)} \geq H_X$$

Demostración de i.- Al ser la variedad X normalmente plana a lo largo de Y la sucesión siguiente es exacta

$$T_Y \longrightarrow C_X \longrightarrow C_{X,Y}(0) \quad (\text{véase Giraud [13], cap. II, 2-2})$$

y como T_Y es un espacio vectorial se tiene el isomorfismo

$$C_X \cong T_Y \times C_{X,Y}(0)$$

y por lo tanto

$$H_X = H_{C_{X,Y}(0)}^{(+c)} \quad \text{con } c = \dim Y$$

Demostración de ii.-

Al ser $\pi^{-1}(0)$ el fibrado proyectivo asociado a $C_{X,Y}(0)$,

ii) será consecuencia inmediata del siguiente lema.

Lema 4-1-3.- Sean $G=K[t_1, \dots, t_n]$, $I \subset G$ un ideal homogéneo, $u_i = t_i / t_1$, $i=2, \dots, n$, $A=K[u_2, \dots, u_n]$. Sea I' el ideal

$$I' = \left\{ \frac{f}{t_1^d} \mid f \in I_d \right\}$$

donde I_d es la parte homogénea de grado d de I .

Entonces se verifica

$$H_{G/I}^{(-1)}(1, 0, \dots, 0) \geq H_{A/I'}(u_2 = \dots = u_n = 0)$$

donde

$$H_{G/I}^{(-1)}(1, 0, \dots, 0)^{(m)} = \text{long}_K(G/I)_m$$

$$H_{A/I'}(u_2 = \dots = u_n = 0)^{(m)} = \text{long}_K(A^{(m)}/I', A^{(m)})$$

$$A^{(m)} = A / (u_2, \dots, u_n)^{m+1} A$$

Véase demostración del lema en Hironaka [20], lema 4-8.

Demostración de iii).- Sabemos que $\pi^{-1}(0)$ está definido por un ideal generado por $c+1$ elementos, luego para demostrar iii) bastará con aplicar $c+1$ veces el lema siguiente

Lema 4-1-4.- Sea A un anillo local noetheriano, M su ideal maximal, $K=A/M$, $Z \in M$. Si $B = A/ZA$

se verifica que

$$H_B^{(+1)} \geq H_A$$

Véase demostración del lema en Hironaka [20], lema 4-7 .

Nota 4-1-5.-

En la resolución de singularidades de hipersuperficies, la multiplicidad juega un papel esencial ya que mejorar la singularidad consiste en bajar la multiplicidad de la hipersuperficie después de varias transformaciones monoidales o cuadráticas. Hemos definido la función de Hilbert-Samuel que jugará en el caso general el mismo papel de la multiplicidad.

Si X es una variedad algebroide de dimensión d , se demuestra fácilmente que

$$H_X(n) \geq \binom{n+d-1}{d-1}$$

$$y \quad H_X(n) = \binom{n+d-1}{d-1} \quad \forall n \iff X \text{ es regular}$$

Luego nuestro problema queda reducido a conseguir bajar el valor de H_X mediante transformaciones monoidales o cuadráticas. En virtud del teorema (4-1-2) sabemos que H_X no crece mediante una transformación monoidal de centro Y , con X normalmente plana a lo largo de Y .

El problema se presenta cuando H_X se mantenga constante, para resolverlo introducimos el contacto maximal, pues es conocido el hecho de que si W es una variedad regular que tiene contacto maximal con la variedad X , la función de Hilbert-Samuel decrece mediante la aplicación de un número finito de transformaciones monoidales. Véase Aroca-Hironaka-Vicente [6]

[7] y Lejeune-Teissier [27].

§ 4-2.- Contacto maximal. (Caso hipersuperficies)

Introducción.-

En esta sección se define el contacto maximal para variedades algebroides en general y se caracteriza para el caso de hipersuperficies.

Nota 4-2-1.- Sea $R = K[[Z_1, \dots, Z_c, W_1, \dots, W_d]] = K[[Z, W]]$

con $c+d=n$, el anillo de series de potencias formales en las indeterminadas $Z_1, \dots, Z_c, W_1, \dots, W_d$ sobre un cuerpo K algebraicamente cerrado de característica cualquiera. Sea V una variedad algebroides sumergida en K^n , es decir $V = V(I) = \text{Spec}(K[[Z, W]]/I)$ con I ideal radical. Sean W y W' las variedades algebroides regulares sumergidas en K^n , definidas por

$$W = \text{Spec}(K[[Z, W]] / (Z_1, \dots, Z_c)K[[Z, W]]) ,$$

$$W' = \text{Spec}(K[[Z, W]] / (W_1, \dots, W_d)K[[Z, W]]) .$$

En estas condiciones definiremos:

1) Diremos que la variedad algebroides regular W es perpendicular a la variedad algebroides V si y solo si se verifican las dos condiciones siguientes:

i) W es transversal a V

ii) $T_{V \cap W'} = \{0\}$

2) Escribiremos

$$C_V^\delta = \text{Spec} (\text{gr}_\delta(R) / \text{in}_\delta(I)) = \text{Spec} (K [\bar{z}, \bar{w}] / \text{in}_\delta(I))$$

ya que $\text{gr}_\delta(R) \cong K [\bar{z}, \bar{w}]$ (véase 1-3-10).

Diremos que C_V^δ es el cono tangente pesado de peso δ a la variedad V .

3) Llamaremos exponente de contacto de las variedades W y V , al máximo número real $\delta(W, V)$ (ó infinito) tal que, $\forall \delta \in \mathbb{R}$, $1 \leq \delta < \delta(W, V)$ el isomorfismo $K [\bar{z}, \bar{w}] \cong K [\bar{z}, \bar{w}]$ (véase 1-3-13) induce un isomorfismo entre los conos

$$C_V \cong C_V^\delta$$

4) Llamaremos primer exponente característico de la variedad algebroide V , al número

$$\delta(V) = \sup \{ \delta(V, W') \}$$

W' curva algebroide regular

5) Sea W' una curva algebroide regular. Diremos que W' tiene contacto numérico maximal con V si y solo si

$$\delta(V, W') = \delta(V)$$

6) Diremos que h es una función de prueba de la variedad algebroide W si h es una aplicación

$$K [[\bar{z}, \bar{w}]] / (z_1, \dots, z_c) K [[\bar{z}, \bar{w}]] = K [[w_1, \dots, w_d]] \xrightarrow{h} K [[t]]$$

con $h(w_1) = w_1(t), \dots, h(w_d) = w_d(t)$ y $w_1(0) = \dots = w_d(0) = 0$.

Si h es una función de prueba de W , llamaremos V_h a

la variedad algebroide sumergida en K^{c+1} ,

$V_h = \text{Spec} (K[[Z_1, \dots, Z_c, t]] / I_h)$ siendo I_h el ideal

$I_h = (f(Z, W_1(t), \dots, W_d(t)))K[[Z, t]]$. Llamaremos $f \in I$

W_h a la variedad algebroide regular sumergida en K^{c+1} ,

$W_h = \text{Spec} (K[[Z, t]] / (Z_1, \dots, Z_c)K[[Z, t]])$

Definición 4-2-2.- Diremos que la variedad algebroide regular W tiene contacto maximal con la variedad algebroide V si y solo si:

i) W es perpendicular a V .

ii) Para toda función de prueba h de W , se verifica que, la curva algebroide regular W_h tiene contacto numérico maximal con la variedad algebroide V_h .

Nota 4-2-3.- Estudiaremos ahora el contacto maximal en el caso de hipersuperficies. Consideraremos $c=1$, $d=n-1$, es decir $R = K[[Z, W_1, \dots, W_{n-1}]] = K[[Z, W]]$.

Sea H una hipersuperficie algebroide sumergida en K^n , definida por el ideal $J = (f(Z, W))K[[Z, W]]$.

En este caso W será la hipersuperficie algebroide regular sumergida en K^n , $W = \text{Spec} (K[[Z, W]] / (Z)K[[Z, W]])$ y W' la

variedad algebroide regular igualmente sumergida en K^n ,

$W' = \text{Spec} (K[[Z, W]] / (W_1, \dots, W_{n-1})K[[Z, W]])$.

Se verificará:

1) Si h es una función de prueba de W y $K[[Z, t]]$ es el anillo de series de potencias formales en las indeterminadas Z, t sobre el cuerpo K , entonces llamaremos H_h y W_h a las hipersuperficies algebroides sumergidas en K^2 ,

$H_h = \text{Spec} (K[[Z, t]] / (f(Z, W_1(t), \dots, W_{n-1}(t)))K[[Z, t]])$,

$$W_h = \text{Spec} (K[[Z, t]] / (Z)K[[Z, t]])'$$

Si escribimos

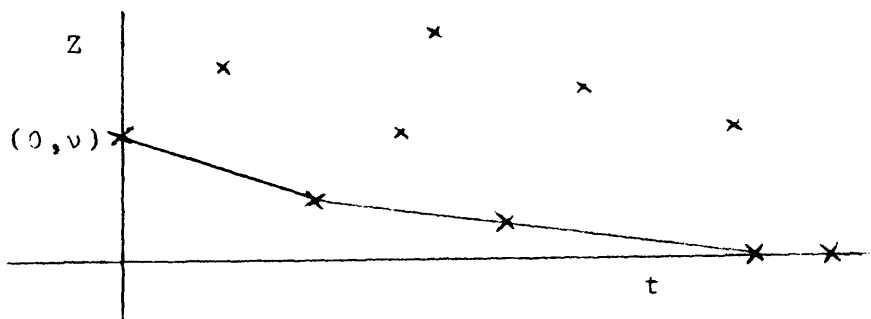
$$f(Z, W) = Z^v + \varphi_1(W) Z^{v-1} + \dots + \varphi_{v-1}(W) Z + \varphi_v(W) \quad \varphi_i(W) \in K[[W]]^{\geq i}$$

la ecuación de H_h será

$$f(Z, W_1(t), \dots, W_{n-1}(t)) = Z^v + \varphi_1(W_1(t), \dots, W_{n-1}(t)) Z^{v-1} + \dots + \varphi_{v-1}(W_1(t), \dots, W_{n-1}(t)) Z + \varphi_v(W_1(t), \dots, W_{n-1}(t)) = 0$$

Se utilizarán las siguientes notaciones:

1-a) Si se representa el diagrama de Newton de H_h respecto del sistema de parámetros (Z, t)



Se llamará exponente numérico de contacto de H_h con W_h y se representará por $\delta_{\underline{0}}(H_h, W_h)$ a $\frac{-1}{\delta}$ siendo δ la pendiente del primer segmento del polígono de Newton de H_h . Evidentemente $\delta_{\underline{0}}(H_h, W_h) \geq -1$.

Se llamará polinomio característico de $f(Z, W_1(t), \dots, W_{n-1}(t))$ al formado por los términos de $f(Z, W_1(t), \dots, W_{n-1}(t))$ correspondientes a los puntos del diagrama de Newton situados en el primer segmento del polígono de Newton de H_h .

1-b) Sea Γ una curva algebroide regular sumergida en K^2 de ecuación $Z=K(t)$, se llamará entonces exponente numérico de

contacto de H_h con Γ y se representará por $\delta_0(H_h, \Gamma)$

a $\frac{-1}{\delta_1}$ donde δ_1 es la pendiente del primer segmento del polígono de Newton respecto de los parámetros (Z, t) de la curva de ecuación

$$(Z - R(t))^v + P_1(W_1(t), \dots, W_{n-1}(t))(Z - R(t))^{v-1} + \dots + P_v(W_1(t), \dots, W_{n-1}(t)) = 0$$

2) Teniendo en cuenta las notaciones anteriores, la definición de contacto maximal para hipersuperficies será la siguiente:

Diremos que la variedad algebroide regular W tiene contacto maximal con la hipersuperficie algebroide H si y solo si se verifican las dos condiciones siguientes:

- i) W es perpendicular a H .
- ii) Para toda h función de prueba de W y para toda Γ hipersuperficie algebroide regular sumergida en K^2 se cumple

$$\delta_0(H_h, \Gamma) \leq \delta_0(H_h, W_h)$$

3) Vamos a analizar el significado de la perpendicularidad de las hipersuperficies algebroides H y W . En 1-4-13 demostramos la equivalencia siguiente: W es transversal a H es lo mismo que decir que la forma f está preparada. Además en el caso de hipersuperficies la perpendicularidad no añade nada a la transversalidad ya que si W es transversal a H se verifica que

$$C_H \cap W' = C_H \cap T_{W'}$$

ahora $C_H \cap T_{W'} = \{0\}$ al ser distinto de cero el coeficiente de Z^v en $f(Z, W_1, \dots, W_{n-1})$, entonces $C_H \cap W' = \{0\}$ y por lo tanto $T_H \cap W' = \{0\}$.

4) Como consecuencia de 3) la definición de contacto maximal nos quedará en la forma siguiente :La variedad algebroide regular W tendrá contacto maximal con la hipersuperficie algebroide H si y solo si se verifican las dos condiciones siguientes:

i) f es regular en Z de orden v .

ii) Para toda h función de prueba de W y para toda hipersuperficie algebroide regular sumergida en K^2 se cumple

$$\delta_{\underline{o}}(H_h, \nabla) \leq \delta_{\underline{o}}(H_h, W_h)$$

Nota 4-2-4.- Sean K un cuerpo algebraicamente cerrado de característica p y H una hipersuperficie algebroide sumergida en K^n de multiplicidad v , con $v=p^m$, $m \geq 1$. En estas condiciones no existe siempre contacto maximal, es decir, se puede encontrar una hipersuperficie H de manera que para cualquier hipersuperficie regular \bar{W} , se verifica que \bar{W} no tiene contacto maximal con H .

Sea por ejemplo K un cuerpo de característica 5, H la hipersuperficie algebroide sumergida en K^3 de ecuación

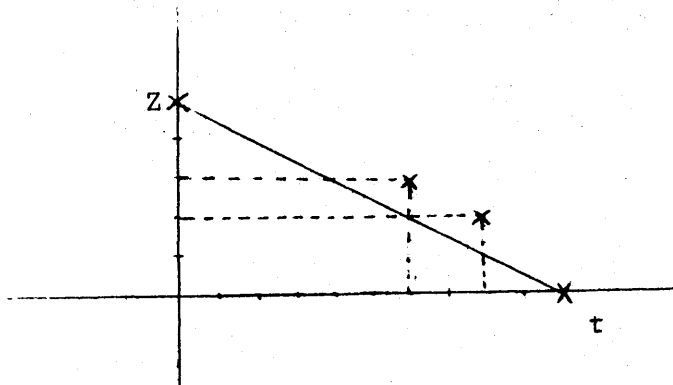
$$Z^5 + W_1^3 W_2^3 Z^3 + W_1^6 W_2^2 Z^2 + W_2^{10} = 0$$

Si h es la función de prueba de la hipersuperficie W de ecuación $Z=0$ definida por

$$\begin{aligned} K[[W_1, W_2]] &\xrightarrow{h} K[[t]] \\ W_1 &\xrightarrow{\quad\quad\quad} W_1(t) = t \\ W_2 &\xrightarrow{\quad\quad\quad} W_2(t) = t \end{aligned}$$

H_h tendrá por ecuación

$$Z^5 + t^6 Z^3 + t^8 Z^2 + t^{10} = 0 = (Z+t^2)^5 + t^6 Z^3 + t^8 Z^2$$



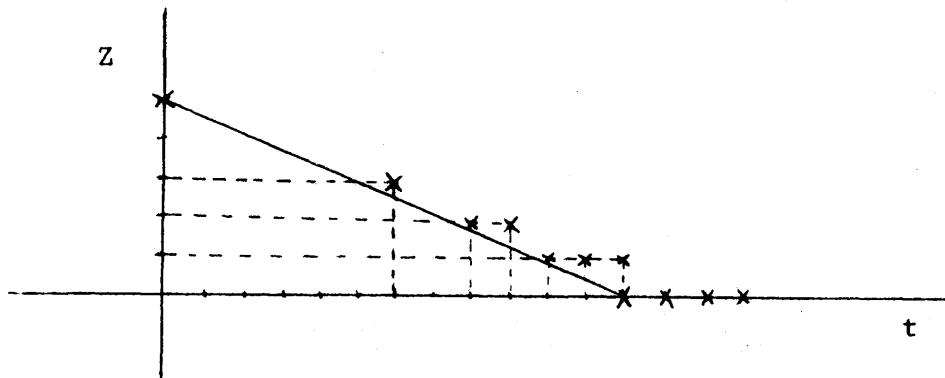
luego $\delta_{\underline{0}}(H_h, W_h) = \frac{-1}{-\frac{1}{2}} = 2$.

Sea Γ la hipersuperficie algebroide regular sumergida en K^2 de ecuación $Z = K(t) = t^2 + t^3$, $v_{\underline{0}}(K(t)) = 2$.

$$(Z - t^2 - t^3)^5 + (Z - t^2 - t^3)^3 t^6 + (Z - t^2 - t^3)^2 t^8 + t^{10} = 0$$

$$Z^5 - t^{10} - t^{15} + t^6(Z^3 - \binom{3}{1}Z^2(t^2 + t^3) + \binom{3}{2}Z(t^2 + t^3)^2 -$$

$$-(t^2 + t^3)^3) + t^8(Z^2 - Z(t^2 + t^3) + (t^2 + t^3)^2) + t^{10} = 0.$$



luego $\delta_{\underline{0}}(H_h, \Gamma) = -\frac{12}{5} > \delta_{\underline{0}}(H_h, W_h)$ con lo que queda demostrado que $Z=0$ no tiene contacto maximal con la hipersuperficie.

Probaremos también que para toda hipersuperficie algebroide regular \bar{W} , existen una función de prueba h y una curva algebroide regular tal que

$$\delta_{\underline{0}}(H_h, \bar{W}_h) < \delta_{\underline{0}}(H_h, \Gamma)$$

Sea $Z = \bar{\mathcal{P}}(W_1, W_2)$ la ecuación de \bar{W} , entonces consideramos el siguiente cambio de coordenadas

$$Z' = Z - \varphi(W'_1, W'_2)$$

$$W'_1 = W_1$$

$$W'_2 = W_2$$

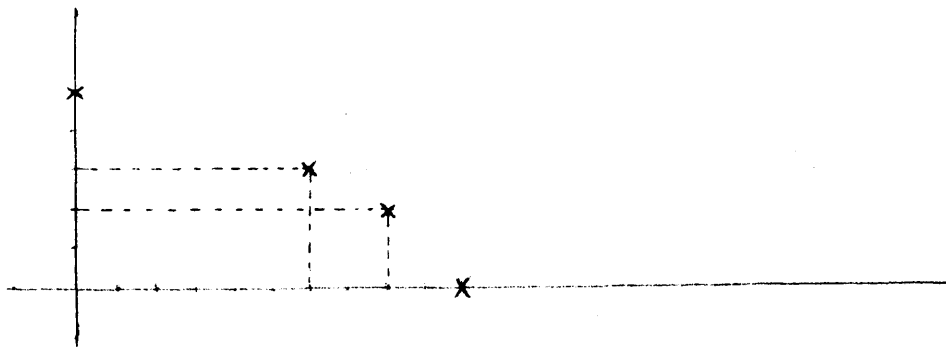
La ecuación de H en el nuevo sistema de coordenadas será:

$$(Z' + \varphi(W'_1, W'_2))^5 + W_1^3 W_2^3 (Z' + \varphi(W'_1, W'_2))^3 + \\ + W_1^6 W_2^2 (Z' + \varphi(W'_1, W'_2))^2 + W_2^{10} = 0$$

y si elegimos la función de prueba definida por $W'_1(t) = t$, $W'_2(t) = t$, entonces H_h tendrá por ecuación

$$Z'^5 + (\varphi(t, t))^5 + t^6 (Z' + \varphi(t, t))^3 + t^8 (Z' + \varphi(t, t))^2 + t^{10} = 0$$

$$Z'^5 + (\varphi(t, t))^5 + t^6 \left[\binom{3}{0} Z'^3 + \binom{3}{1} Z'^2 \varphi(t, t) + \binom{3}{2} Z' (\varphi(t, t))^2 + \right. \\ \left. + \binom{3}{3} (\varphi(t, t))^3 \right] + t^8 [Z'^2 + (\varphi(t, t))^2 + 2Z' \varphi(t, t)] + t^{10} = 0$$



Luego $\delta_{\underline{0}}(H_h, \bar{W}_h) \leq 2$, ya que depende de la posición de los nuevos puntos que se introducen en el diagrama de Newton correspondientes a los términos en $\varphi(t, t)$, si estos puntos se encuentran todos por encima de la recta que pasa por los puntos $(0, 5)$ y $(10, 0)$, entonces $\delta_{\underline{0}}(H_h, \bar{W}_h) = 2$, pero si alguno se encuentra situado debajo de ésta recta $\delta_{\underline{0}}(H_h, \bar{W}_h)$ será < 2 .

Sea Γ la hipersuperficie algebroide regular sumergida en K^2 , de ecuación

$$Z' = t^2 + \varphi(t, t)$$

$$(Z' - t^2 - \varphi(t, t))^5 + (\varphi(t, t))^5 + t^6 (Z' - t^2 - \varphi(t, t) + \varphi(t, t))^3 +$$

$$+ t^8 (Z' - t^2 - \varphi(t, t) + \varphi(t, t))^2 + t^{10} = 0$$

$$Z'^5 - t^{10} + t^6 (Z' - t^2)^3 + t^8 (Z' - t^2)^2 + t^{10} = 0$$

entonces $\delta_{\underline{o}}(H_h, \Gamma) > 2 \delta_{\underline{o}}(H_h, \bar{W}_h)$ que es lo que queríamos probar

Proposición 4-2-5.- Teorema de existencia del contacto maximal en el caso de que $v \neq p^m$, $m > 1$.

Sea K un cuerpo algebraicamente cerrado de característica p y sea H una hipersuperficie algebroide sumergida en K^n de multiplicidad $v \neq p^m$, $m > 1$. En estas condiciones se verifica que la hipersuperficie algebroide regular W tiene contacto maximal con la hipersuperficie H .

Demostración.-

Sea H la hipersuperficie de ecuación $f(Z, W_1, \dots, W_{n-1})$, podemos suponer que $f(Z, W_1, \dots, W_{n-1})$ es regular de orden v , luego para que las dos hipersuperficies tengan contacto maximal unicamente se tendrá que verificar que para toda h , función de prueba de W , la curva algebroide H_h de ecuación

$$f(Z, W_1(t), \dots, W_{n-1}(t)) = 0$$

cumpla que $\delta_{\underline{o}}(H_h, \Gamma) \leq \delta_{\underline{o}}(H_h, W_h)$ para toda Γ curva algebroide regular sumergida en K^2 .

Para estudiar este problema consideraremos dos casos:

Caso 1.- $T_{H_h} = \{0\}$

En este caso se verifica que el exponente de contacto de cualquier curva algebroide regular con H_h es 1 y por lo tanto

W tiene contacto maximal con H .

Caso 2.- $T_{H_h} \neq \{0\}$

Observemos que si Γ es una curva algebroide con $T_\Gamma \neq T_{H_h}$,

entonces $\delta_{\underline{o}}(H_h, \Gamma) = 1$, luego unicamente es necesario consi
derar las curvas algebroides tales que $T_\Gamma = T_{H_h}$.

Sea Γ una curva algebroide tal que $T_\Gamma = T_{H_h}$, debido a ello

T_Γ no puede ser $t=0$, luego la ecuación de Γ será del tipo $Z = \mathcal{K}(t)$. Se tienen entonces cuatro posibilidades:

1) $v_{\underline{o}}(\mathcal{K}(t)) < \delta_{\underline{o}}(H_h, W_h)$, entonces $\delta_{\underline{o}}(H_h, W_h) = v_{\underline{o}}(\mathcal{K}(t))$

2) $v_{\underline{o}}(\mathcal{K}(t)) > \delta_{\underline{o}}(H_h, W_h)$, entonces $\delta_{\underline{o}}(H_h, \Gamma) = \delta_{\underline{o}}(H_h, W_h)$

3) $v_{\underline{o}}(\mathcal{K}(t)) = \delta_{\underline{o}}(H_h, W_h)$ y el polinomio característico de

$f(Z, W_1(t), \dots, W_{n-1}(t))$ no es de la forma $(Z + i_{\underline{o}}(\mathcal{K}(t)))^v$,

entonces $\delta_{\underline{o}}(H_h, \Gamma) = \delta_{\underline{o}}(H_h, W_h)$. (Véase Aroca-Hironaka-Vicente [6],

cap. I, teor. 2-5-7).

Entonces en estas tres primeras posibilidades las hipersuperficies W y V tienen contacto maximal.

4) $v_{\underline{o}}(\mathcal{K}(t)) = \delta_{\underline{o}}(H_h, W_h)$ y el polinomio característico de

$f(Z, W_1(t), \dots, W_{n-1}(t))$ es de la forma $(Z + i_{\underline{o}}(\mathcal{K}(t)))^v$.

Esta cuarta posibilidad la dividiremos en dos según la característica del cuerpo.

4-i) La multiplicidad de la hipersuperficie H no es múltiplo de la característica del cuerpo.

En este caso podemos aplicar la transformación

$$Z = Z' + \frac{\varphi_1(W_1, \dots, W_{n-1})}{v}$$

y así en la ecuación de H desaparece el término en Z'^{v-1} , quedandonos

$$f(Z', W_1, \dots, W_{n-1}) = Z'^v + \varphi_2'(W_1, \dots, W_{n-1})Z'^{v-2} + \dots + \varphi_{v-1}'(W_1, \dots, \dots, W_{n-1})Z' + \varphi_v'(W_1, \dots, W_{n-1}) = 0$$

y

$$f(Z', W_1(t), \dots, W_{n-1}(t)) = Z'^v + \varphi_2'(W_1(t), \dots, W_{n-1}(t))Z'^{v-2} + \dots + \varphi_{v-1}'(W_1(t), \dots, W_{n-1}(t))Z' + \varphi_v'(W_1(t), \dots, W_{n-1}(t)) = 0$$

con lo que el polinomio característico de $f(Z', W_1(t), \dots, \dots, W_{n-1}(t))$ no puede ser de la forma $(Z' + i \in_{\underline{0}}(\mathcal{K}(t)))^v$ ya que no tiene término en Z'^{v-1} .

4-ii) $v = p^m \cdot \ell$, $m \geq 1$, $\ell \neq 1$

Sea H la hipersuperficie algebroide sumergida en K^n de ecuación

$$f(Z, W_1, \dots, W_{n-1}) = Z^v + \varphi_1(W_1, \dots, W_{n-1})Z^{v-1} + \dots + \varphi_v(W_1, \dots, W_{n-1}) = 0$$

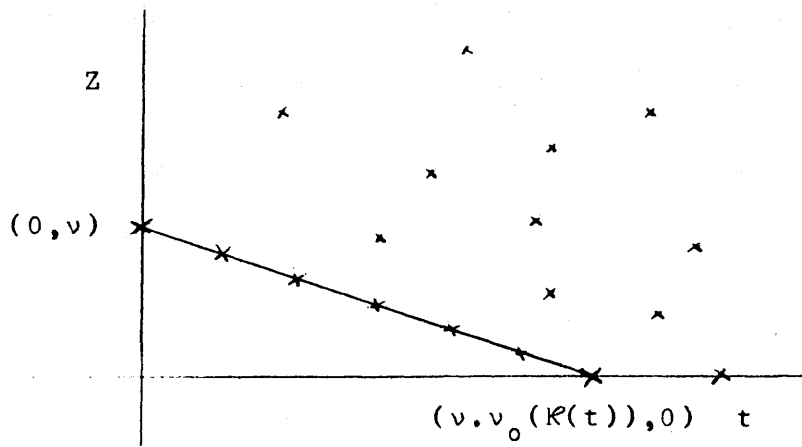
con $v_{\underline{0}}(\varphi_i(W_1, \dots, W_{n-1})) \geq i$.

Sea h una función de prueba de W , entonces la ecuación de la curva algebroide H_h sumergida en K^2 será

$$\begin{aligned} f(Z, W_1(t), \dots, W_{n-1}(t)) &= Z^v + \varphi_1(W_1(t), \dots, W_{n-1}(t))Z^{v-1} + \dots + \\ &+ \varphi_v(W_1(t), \dots, W_{n-1}(t)) = (Z + i \in_{\underline{0}}(\mathcal{K}(t)))^{\ell \cdot p^m} + \varphi(t, Z) = \\ &= (Z^{\ell} + \binom{\ell}{1} Z^{\ell-1} i \in_{\underline{0}}(\mathcal{K}(t)) + \dots + \binom{\ell}{\ell-1} Z \cdot (i \in_{\underline{0}}(\mathcal{K}(t)))^{\ell-1} + (i \in_{\underline{0}}(\mathcal{K}(t)))^{\ell})^{p^m} + \\ &+ \varphi(t, Z) = Z^v + \binom{\ell}{1}^{p^m} Z^{v-p^m} (i \in_{\underline{0}}(\mathcal{K}(t)))^{p^m} + \dots + \binom{\ell}{\ell-1}^{p^m} Z^{p^m} (i \in_{\underline{0}}(\mathcal{K}(t)))^{v-p^m} + \end{aligned}$$

$$+\dots+(in_{\underline{o}}\mathcal{K}(t))^v+\Psi(t,Z)=0.$$

Al ser $(Z+in_{\underline{o}}\mathcal{K}(t))^v$ el polinomio característico de $f(Z,W_1(t),\dots,W_{n-1}(t))$, su diagrama de Newton será de la forma



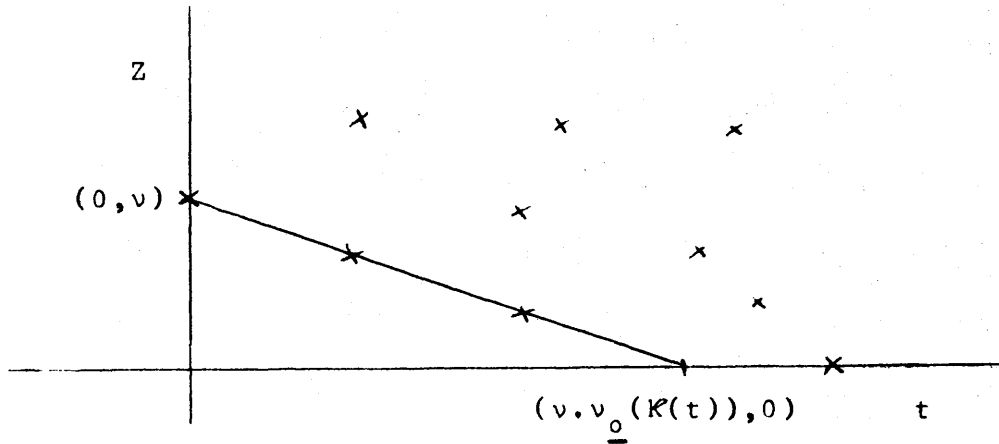
Luego $\delta_{\underline{o}}(H_h, W_h) = v_{\underline{o}}(\mathcal{K}(t))$

Sea \mathcal{V} la curva algebroide regular de ecuación

$$Z = \mathcal{K}(t) = in_{\underline{o}}(\mathcal{K}(t)) + (\mathcal{K}(t) - in_{\underline{o}}\mathcal{K}(t))$$

Consideremos ahora el diagrama de Newton de la curva de ecuación:

$$\begin{aligned} & (Z - \mathcal{K}(t))^v + \binom{\ell}{1} p^m (Z - \mathcal{K}(t))^{v-p^m} (in_{\underline{o}}(\mathcal{K}(t)))^{p^m} + \dots + \\ & + \binom{\ell}{\ell-1} p^m (Z - \mathcal{K}(t))^{p^m} \cdot (in_{\underline{o}}(\mathcal{K}(t)))^{v-p^m} + (in_{\underline{o}}(\mathcal{K}(t)))^v + \Psi(t, Z - \mathcal{K}(t)) = \\ & = Z^v - \binom{\ell}{1} p^m Z^{v-p^m} (\mathcal{K}(t))^{p^m} + \dots + (-1)^i \binom{\ell}{i} Z^{(\ell-i)p^m} (\mathcal{K}(t))^{p^m \cdot i} + \dots + \\ & + (-1)^{\ell-1} \binom{\ell}{\ell-1} p^m Z^{p^m} (\mathcal{K}(t))^{v-p^m} + (-1)^\ell (\mathcal{K}(t))^v + \binom{\ell}{1} p^m (Z - \mathcal{K}(t))^{v-p^m} \cdot \\ & \cdot (in_{\underline{o}}(\mathcal{K}(t)))^{p^m} + \dots + \binom{\ell}{\ell-1} p^m (Z - \mathcal{K}(t))^{p^m} (in_{\underline{o}}(\mathcal{K}(t)))^{v-p^m} + (in_{\underline{o}}(\mathcal{K}(t)))^v + \\ & + \Psi(t, Z - \mathcal{K}(t)) = 0 \end{aligned}$$



En este diagrama de Newton los puntos correspondientes a los términos de $\Psi(t, Z - \mathcal{K}(t))$ se encuentran situados por encima de la recta de ecuación $x + v_{\underline{0}}(\mathcal{K}(t)) \cdot y - v \cdot v_{\underline{0}}(\mathcal{K}(t)) = 0$

Efectivamente si consideramos $\Psi(t, Z) = \sum_{r,s} a_{rs} t^r Z^s$,

$a_{rs} \in K$, se tendrá que $r + s \cdot v_{\underline{0}}(\mathcal{K}(t)) - v \cdot v_{\underline{0}}(\mathcal{K}(t)) > 0$ ya que $\Psi(t, Z)$

no forma parte del polinomio característico de $f(Z, W_1(t), \dots$

$\dots, W_{n-1}(t))$. Luego $\Psi(t, Z - \mathcal{K}(t)) = \sum_{r,s} a_{rs} t^r (Z - \mathcal{K}(t))^s =$

$$= \sum_{r,s} a_{rs} t^r (Z^{s - \binom{s}{1} \mathcal{K}(t) + \binom{s}{2} \mathcal{K}(t)^2 + \dots +$$

$$+ \binom{s}{s-1} Z(\mathcal{K}(t))^{s-1} + (\mathcal{K}(t))^s)$$
, entonces cualquier punto del

diagrama de Newton correspondiente a un término de

$\Psi(t, Z - \mathcal{K}(t))$ será de la forma $(r + (s-i)v_{\underline{0}}(\mathcal{K}(t)), i)$ luego

$$r + (s-i)v_{\underline{0}}(\mathcal{K}(t)) + i v_{\underline{0}}(\mathcal{K}(t)) - v \cdot v_{\underline{0}}(\mathcal{K}(t)) =$$

$$= r + (s-v)v_{\underline{0}}(\mathcal{K}(t)) = r + s \cdot v_{\underline{0}}(\mathcal{K}(t)) - v \cdot v_{\underline{0}}(\mathcal{K}(t)) > 0$$

También podemos asegurar que en éste diagrama de Newton

existe un punto en la recta de ecuación $x + v_{\underline{0}}(\mathcal{K}(t)) \cdot y -$

$-v \cdot v_{\underline{0}}(\mathcal{K}(t)) = 0$ ya que si $(-1)^i$ es un número positivo en el

diagrama se encuentra el punto $(p^m \cdot i \cdot v_{\underline{0}}(\mathcal{K}(t)), (l-i)p^m)$,

luego como uno de los dos números $(-1)^{l-1}, (-1)^l$ es posi

tivo y como $\binom{l}{l-1} \neq 0$ ya que l no es múltiplo de p ,

en el diagrama de Newton existe uno de los puntos siguientes: $(v \cdot v_{\underline{o}}(\mathcal{K}(t)), 0)$, $[(v-p^m)v_{\underline{o}}(\mathcal{K}(t)), p^m]$.

Entonces $\delta_{\underline{o}}(H_h, \nabla) = \delta_{\underline{o}}(H_h, W_h)$, es decir las hipersuperficies W y H tienen contacto maximal.

Nota 4-2-6. - Si $v = p^m$, $m > 1$ se observa que W tiene contacto maximal con la hipersuperficie H salvo cuando se verifican las condiciones de la cuarta posibilidad del caso 2 de la proposición anterior.

Sea H la hipersuperficie algebroide sumergida en K^n de ecuación $f(Z, W_1, \dots, W_{n-1}) = Z^v + \varphi_1(W_1, \dots, W_{n-1})Z^{v-1} + \dots$

$$\dots + \varphi_v(W_1, \dots, W_{n-1}) = 0 \text{ , } v_{\underline{o}}(\varphi_i(W_1, \dots, W_{n-1})) \geq i \text{ .}$$

Suponemos entonces que existen: a) h función de prueba de W .

b) ∇ curva algebroide de ecuación $Z = \mathcal{K}(t)$ de manera que

$$v_{\underline{o}}(\mathcal{K}(t)) = \delta_{\underline{o}}(H_h, W_h) \text{ y el polinomio característico de}$$

$$f(Z, W_1(t), \dots, W_{n-1}(t)) \text{ es de la forma } (Z + in_{\underline{o}}(\mathcal{K}(t)))^v \text{ .}$$

Luego

$$f(Z, W_1(t), \dots, W_{n-1}(t)) = Z^v + \varphi_1(W_1(t), \dots, W_{n-1}(t))Z^{v-1} + \dots +$$

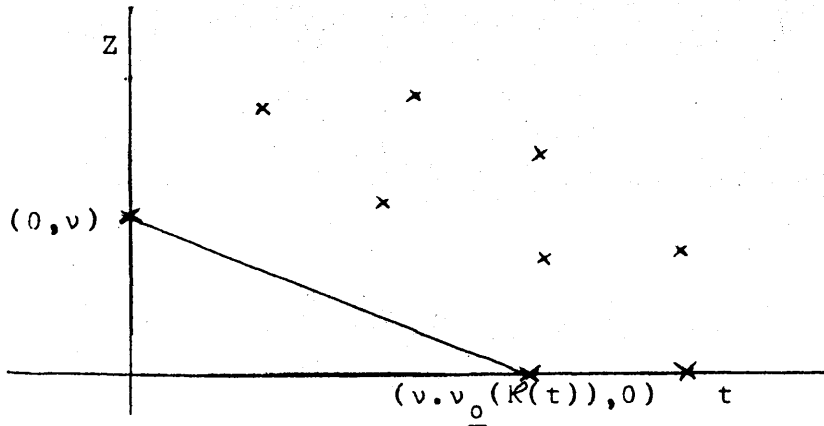
$$+ \varphi_v(W_1(t), \dots, W_{n-1}(t)) = (Z + in_{\underline{o}}(\mathcal{K}(t)))^v + \varphi(t, Z) =$$

$$= Z^v + (in_{\underline{o}}(\mathcal{K}(t)))^v + \varphi(t, Z) = 0$$

Al ser $(Z + in_{\underline{o}}(\mathcal{K}(t)))^v$ el polinomio característico de

$f(Z, W_1(t), \dots, W_{n-1}(t))$ el diagrama de Newton será de la

forma



Luego $\delta_{\underline{0}}(H_h, W_h) = v_{\underline{0}}(K(t))$

Sea Γ la curva algebroide regular de ecuación

$$Z = K(t) = \text{in}_{\underline{0}} K(t) + (K(t) - \text{in}_{\underline{0}} K(t))$$

Tendremos entonces la curva de ecuación:

$$\begin{aligned} & [Z - \text{in}_{\underline{0}} K(t) - (K(t) - \text{in}_{\underline{0}} K(t))]^v + \text{in}_{\underline{0}}(K(t))^v + \Upsilon(t, Z - K(t)) = \\ & = Z^v - (\text{in}_{\underline{0}} K(t))^v - (K(t) - \text{in}_{\underline{0}} K(t))^v + \text{in}_{\underline{0}}(K(t))^v + \Upsilon(t, Z - K(t)) = 0 \end{aligned}$$

En el diagrama de Newton de esta nueva curva no está el punto $(v.v_{\underline{0}}(K(t)), 0)$ y los puntos correspondientes a los términos de $(K(t) - \text{in}_{\underline{0}} K(t))^v$ se encuentran en el eje de abscisas pero a la derecha del $(v.v_{\underline{0}}(K(t)), 0)$. Los demás puntos del diagrama correspondientes a los términos de $\Upsilon(t, Z - K(t)) = \sum_{r,s} a_{rs} t^r (Z - K(t))^s = \sum_{r,s} a_{rs} t^r (Z^s - \binom{s}{1} Z^{s-1} K(t) + \binom{s}{2} Z^{s-2} (K(t))^2 + \dots + \binom{s}{s-1} Z (K(t))^{s-1} + (K(t))^s)$ se encuentran por encima de la recta de ecuación $*v_{\underline{0}}(K(t))y - v.v_{\underline{0}}(K(t)) = 0$, ya que si consideramos en general el punto $(r+(s-i)v_{\underline{0}}(K(t)), i)$, $i=0, \dots, s$, tendremos

$$r+(s-i)v_{\underline{0}}(K(t))+i v_{\underline{0}}(K(t))-v.v_{\underline{0}}(K(t))=$$

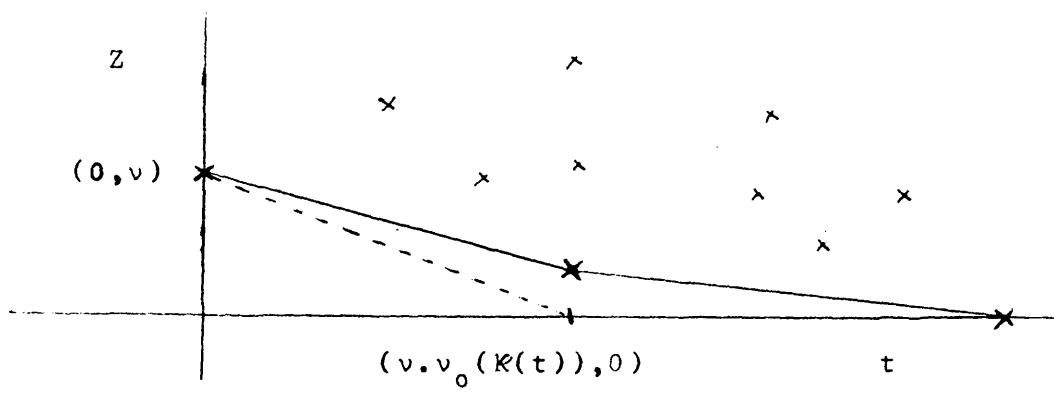
$$=r+(s-v)v_{\underline{0}}(K(t))=r+s.v_{\underline{0}}(K(t))-v.v_{\underline{0}}(K(t))>0$$

Entonces todos los puntos del diagrama de Newton de la curva $Z^v - (K(t) - i n_{\underline{0}}(K(t)))^v + f(t, Z - K(t)) = 0$ excepto el $(0, v)$

se encuentran por encima de la recta de ecuación

$$x + v_{\underline{0}}(K(t))y - v.v_{\underline{0}}(K(t)) = 0, \text{ luego } \delta_{\underline{0}}(H_h, \Gamma) > \delta_{\underline{0}}(H_h, W_h),$$

es decir H y W no tienen contacto maximal



Si H es una hipersuperficie en estas condiciones se verifica también que si \bar{W} es una hipersuperficie regular transversal a H de ecuación $Z = f(W_1, \dots, W_{n-1})$, \bar{W} no tiene contacto maximal con H .

Sea H la hipersuperficie anterior, de ecuación

$$f(Z, W_1, \dots, W_{n-1}) = Z^v + f_1(W_1, \dots, W_{n-1})Z^{v-1} + \dots + f_v(W_1, \dots, W_{n-1}) = 0$$

$$v_{\underline{0}}(f_i(W_1, \dots, W_{n-1})) > i.$$

Si consideramos el cambio de coordenadas

$$Z' = Z - f(W'_1, \dots, W'_{n-1})$$

$$W'_1 = W_1$$

.....

$$W'_{n-1} = W_{n-1}$$

la ecuación de H en el nuevo sistema de coordenadas será

$$f(Z', W'_1, \dots, W'_{n-1}) = (Z' + \varphi(W'_1, \dots, W'_{n-1}))^v + \\ + \varphi_1(W'_1, \dots, W'_{n-1})(Z' + \varphi(W'_1, \dots, W'_{n-1}))^{v-1} + \dots + \varphi_v(W'_1, \dots, W'_{n-1}) = 0$$

Si elegimos la misma función de prueba h utilizada anteriormente tendremos

$$f(Z', W'_1(t), \dots, W'_{n-1}(t)) = Z'^v + (\varphi(W'_1(t), \dots, W'_{n-1}(t)))^v + \\ + \varphi_1(W'_1(t), \dots, W'_{n-1}(t))(Z' + \varphi(W'_1(t), \dots, W'_{n-1}(t)))^{v-1} + \dots + \\ + \varphi_v(W'_1(t), \dots, W'_{n-1}(t)) = 0$$

Puede ocurrir:

$$1) \ v \cdot \nu_{\underline{0}}(\varphi(W'_1(t), \dots, W'_{n-1}(t))) \geq \nu_{\underline{0}}(\varphi_v(W'_1(t), \dots, W'_{n-1}(t))) = \\ = \nu \cdot \nu_{\underline{0}}(K(t)).$$

En este caso el primer segmento del diagrama de Newton de H_h tiene solo dos puntos situados en los ejes, los puntos $(0, v)$ y $(\nu \cdot \nu_{\underline{0}}(K(t)), 0)$ ya que si consideramos para $i=1, \dots, v-1$

$$\varphi_i(W'_1(t), \dots, W'_{n-1}(t))(Z' + \varphi(W'_1(t), \dots, W'_{n-1}(t)))^{v-i} = \\ = \sum_{l=0}^{v-i} \varphi_i(W'_1(t), \dots, W'_{n-1}(t)) \binom{v-i}{l} Z'^l \cdot (\varphi(W'_1(t), \dots, W'_{n-1}(t)))^{v-i-l}$$

los puntos del diagrama de Newton de H_h correspondientes a éstos términos tienen por coordenadas

$$(\nu_{\underline{0}}(\varphi_i(W'_1(t), \dots, W'_{n-1}(t))) + (v-i-l) \cdot \nu_{\underline{0}}(\varphi(W'_1(t), \dots, W'_{n-1}(t))), l)$$

y como $v-i-l \geq 0$ el punto

$$(\nu_{\underline{0}}(\varphi_i(W'_1(t), \dots, W'_{n-1}(t))) + (v-i-l) \nu_{\underline{0}}(\varphi(W'_1(t), \dots, W'_{n-1}(t))), l)$$

se encuentra por encima de la recta que pasa por los puntos $(0, \nu)$ y $(\nu \cdot \nu_{\underline{0}}(\mathcal{K}(t)), 0)$ pues sabemos por lo anterior que el punto $(\nu_{\underline{0}}(\varphi_i(W'_1(t), \dots, W'_{n-1}(t))), \ell)$ ya se encontraba encima de dicha recta.

Luego en este caso el polinomio característico de $f(Z', W'_1(t), \dots, W'_{n-1}(t))$ es de la forma $(Z' + i\nu_{\underline{0}}(\mathcal{K}(t)))^\nu$ y por lo tanto \bar{W} no tiene contacto maximal con H .

$$2) \quad \nu \cdot \nu_{\underline{0}}(\varphi(W'_1(t), \dots, W'_{n-1}(t))) < \nu_{\underline{0}}(\varphi_\nu(W'_1(t), \dots, W'_{n-1}(t))).$$

En este caso el primer segmento del diagrama de Newton de H_h tiene solo dos puntos situados en los ejes, los puntos $(0, \nu)$ y $(\nu \cdot \nu_{\underline{0}}(\varphi(W'_1(t), \dots, W'_{n-1}(t))), 0)$, ya que si

$$(\nu_{\underline{0}}(\varphi_i(W'_1(t), \dots, W'_{n-1}(t))) + (\nu - i - \ell) \nu_{\underline{0}}(\varphi(W'_1(t), \dots, W'_{n-1}(t))), \ell)$$

es un punto del diagrama se verifica que

$$\begin{aligned} & \nu_{\underline{0}}(\varphi_i(W'_1(t), \dots, W'_{n-1}(t))) + (\nu - i - \ell) (\nu_{\underline{0}}(\varphi(W'_1(t), \dots, W'_{n-1}(t))) + \\ & + \nu_{\underline{0}}(\varphi(W'_1(t), \dots, W'_{n-1}(t))) \ell) > \nu_{\underline{0}}(\varphi(W'_1(t), \dots, W'_{n-1}(t))) \end{aligned}$$

luego se encuentra situado por encima de la recta que pasa por los puntos $(0, \nu)$ y $(\nu \cdot \nu_{\underline{0}}(\varphi(W'_1(t), \dots, W'_{n-1}(t))), 0)$.

En este caso el polinomio característico de $f(Z', W'_1(t), \dots, W'_{n-1}(t))$ es de la forma $(Z' + \nu_{\underline{0}}(\varphi(W'_1(t), \dots, W'_{n-1}(t))))^\nu$ y \bar{W} tampoco tiene contacto maximal con H .

De lo anterior se deduce que la hipersuperficie algebroide H no tiene contacto maximal con ninguna hipersuperficie, cuando esto ocurra diremos que H no tiene contacto maximal.

Consecuencia 4-2-7.- Sean K un cuerpo de característica p y H una hipersuperficie algebroide sumergida en K^n de ecuación $f(Z, W_1, \dots, W_{n-1}) = Z^v + \varphi_1(W_1, \dots, W_{n-1})Z^{v-1} + \dots + \varphi_v(W_1, \dots, W_{n-1}) = 0$, $v \leq \varphi_i(W_1, \dots, W_{n-1}) \leq i$. La hipersuperficie H no tiene contacto maximal si y solo si se verifican las dos condiciones siguientes:

- i) $v = p^m$
- ii) Existe h una función de prueba de W tal que el primer segmento del polígono de Newton de H_h tiene solo dos puntos y en los ejes, puntos de coordenadas $(0, v)$ y $(lv, 0)$, $l \geq 1$.

Demostración.-

De 4-2-6 se deduce que la condición necesaria y suficiente para que la hipersuperficie H no tenga contacto maximal es que se verifiquen las dos condiciones siguientes:

- a) $v = p^m$
- b) El polinomio característico de la ecuación de H_h sea de la forma $(Z + \text{in}_{\underline{0}} K(t))^v = Z^v + (\text{in}_{\underline{0}} K(t))^v$, es decir el primer segmento del polígono de Newton de H_h tiene solo dos puntos y en los ejes, los puntos $(0, v)$, $(v \cdot v_{\underline{0}} K(t), 0)$

Proposición 4-2-8.- Sea K un cuerpo de característica p . Sea H la hipersuperficie algebroide sumergida en K^n de ecuación

$$Z^v + \varphi_1(W_1, \dots, W_{n-1})Z^{v-1} + \dots + \varphi_{v-1}(W_1, \dots, W_{n-1})Z + \varphi_v(W_1, \dots, W_{n-1}) = 0$$

con:

- i) $v = p^m$
- ii) el primer segmento del polígono de Newton de H tiene solo dos puntos y en los ejes.

Entonces la hipersuperficie algebroide H no tiene contacto maximal .

Demostración.-

Sea H una hipersuperficie algebroide que cumple las dos condiciones del enunciado. Entonces H tendrá por ecuación

$$Z^v + \varphi_1(W_1, \dots, W_{n-1})Z^{v-1} + \dots + \varphi_{v-1}(W_1, \dots, W_{n-1})Z + W_1^{r_1} \dots W_{n-1}^{r_{n-1}} + \varphi'_v(W_1, \dots, W_{n-1}) = 0$$

con $v = p^m$, $r_1 + \dots + r_{n-1} = \alpha > v$, $v_0(\varphi'_v(W_1, \dots, W_{n-1})) > \alpha$ y

si $\varphi_i(W_1, \dots, W_{n-1})Z^{v-i} \leq b_i W_1^{a_1} \dots W_{n-1}^{a_{n-1}} Z^{v-i}$ entonces

$v(a_1 + \dots + a_{n-1}) + \alpha(v-i) > v\alpha$, es decir $v(a_1 + \dots + a_{n-1}) - \alpha \cdot i > 0$.

Si el m.c.m. $(v, \alpha) = \beta$, entonces $\beta = v \cdot v', \beta = \alpha \cdot \alpha'$.

Sean $h_1, \dots, h_{n-1} \in \mathbb{Z}_0$ tales que $h_1 r_1 + \dots + h_{n-1} r_{n-1} = \beta$, por ejemplo $h_1 = \dots = h_{n-1} = \alpha'$. Consideramos la función de prueba siguiente

$$\begin{array}{ccc} K[[W_1, \dots, W_{n-1}]] & \xrightarrow{h} & K[[t]] \\ W_1 & \xrightarrow{\quad} & W_1(t) = t^{\alpha'} \\ \dots & & \dots \\ W_{n-1} & \xrightarrow{\quad} & W_{n-1}(t) = t^{\alpha'} \end{array}$$

La ecuación de H_h para esta función de prueba será

$$Z^v + \varphi_1(t^{\alpha'}, \dots, t^{\alpha'})Z^{v-1} + \dots + \varphi_{v-1}(t^{\alpha'}, \dots, t^{\alpha'})Z + t^{\beta} + \varphi'_v(t^{\alpha'}, \dots, t^{\alpha'}) = 0$$

Si consideramos el diagrama de Newton de H_h , se verifica que el primer segmento de este diagrama tiene solo dos puntos y en los ejes, estos puntos son: $(0, v)$ y $(\beta, 0)$. Todos los demás puntos del diagrama se encuentran situados por encima de la recta de ecuación $vX + \beta y = v\beta$, ya que si consideramos por

ejemplo el punto de coordenadas $(a_1\alpha'+\dots+a_{n-1}\alpha',\nu-i)$,
tendremos

$$\nu(a_1\alpha'+\dots+a_{n-1}\alpha')+\beta(\nu-i)=\alpha'\nu(a_1+\dots+a_{n-1})+\alpha'\alpha(\nu-i)$$

$$\alpha'\nu\alpha=\nu\beta$$

Luego aplicando 4-2-7 queda demostrada la proposición.

Nota 4-2-9.- El recíproco de la proposición 4-2-8 no es cierto, ya que si H es una hipersuperficie tal que existe una función de prueba h de manera que el primer segmento del diagrama de Newton de H_h tiene solo dos puntos y en los ejes, de esta hipótesis no se puede deducir el que el primer segmento del diagrama de Newton de H tiene solo dos puntos y en los ejes.

Comprobemos ésta afirmación. Sea la hipersuperficie H de ecuación:

$$Z^\nu + \varphi_1(W_1, \dots, W_{n-1})Z^{\nu-1} + \dots + \varphi_{\nu-1}(W_1, \dots, W_{n-1})Z +$$

$$+ \varphi_\nu(W_1, \dots, W_{n-1}) = 0 \quad , \quad \nu \varphi_i(W_1, \dots, W_{n-1}) \geq i \quad , \quad \nu = p^m$$

Suponemos que la hipersuperficie H no tiene contacto maximal, luego existe h función de prueba de W de manera que el polinomio característico de la ecuación de H_h :

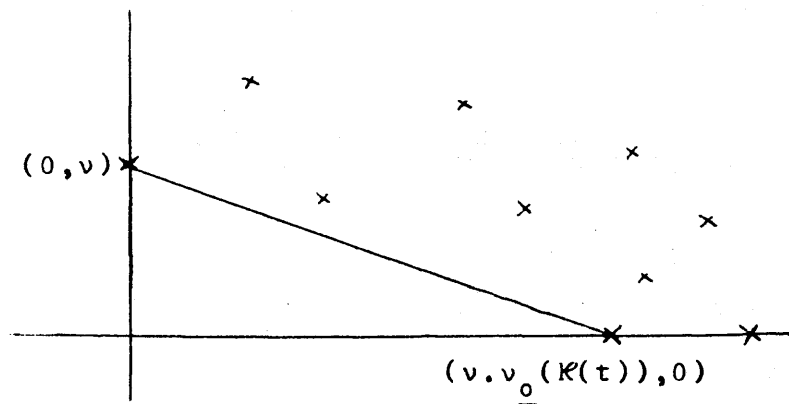
$$Z^\nu + \varphi_1(W_1(t), \dots, W_{n-1}(t))Z^{\nu-1} + \dots + \varphi_{\nu-1}(W_1(t), \dots, W_{n-1}(t))Z +$$

$$+ \varphi_\nu(W_1(t), \dots, W_{n-1}(t)) = 0$$

sea de la forma

$$(Z + i n \varphi_0(K(t)))^\nu = (Z + t \varphi_0(K(t)))^\nu = Z^\nu + t \varphi_0(K(t))^\nu$$

Es decir si representamos el diagrama de Newton de H_h ,

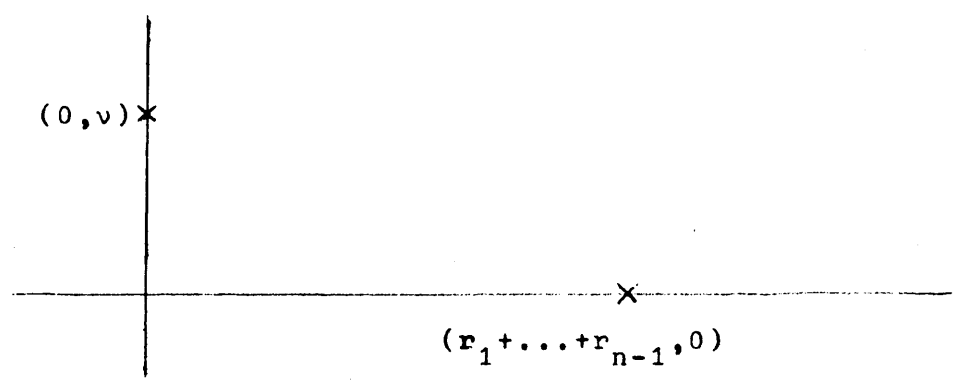


el primer segmento de dicho diagrama tendrá solo dos puntos y en los ejes.

Representemos ahora el diagrama de Newton de la hipersuperficie H

$$Z^v + \gamma_1(W_1, \dots, W_{n-1})Z^{v-1} + \dots + \gamma_{v-1}(W_1, \dots, W_{n-1})Z + \gamma_v(W_1, \dots, W_{n-1}) = 0$$

$$= Z^v + \sum a_i W_1^{a_1} \dots W_{n-1}^{a_{n-1}} Z^{v-i} + W_1^{r_1} \dots W_{n-1}^{r_{n-1}} + \dots = 0$$



Consideremos ahora un punto cualquiera de este diagrama $(a_1 + \dots + a_{n-1}, v-i)$, para que el primer segmento tuviera solo dos puntos y en los ejes se tendría que verificar:

$$v(a_1 + \dots + a_{n-1}) + (r_1 + \dots + r_{n-1})(v-i) > v(r_1 + \dots + r_{n-1})$$

es decir $v(a_1 + \dots + a_{n-1}) - i(r_1 + \dots + r_{n-1}) > 0$

El punto $(a_1 + \dots + a_{n-1}, v-i)$ se nos transforma al pasar al

diagrama de H_h en el punto $(v_{\underline{0}}(W_1(t)).a_1 + \dots + v_{\underline{0}}(W_{n-1}(t)).$

$.a_{n-1}, v-i)$, y como el primer segmento del diagrama de Newton de H_h tiene solo dos puntos y en los ejes se cumplirá

$$v(v_{\underline{0}}(W_1(t)).a_1 + \dots + v_{\underline{0}}(W_{n-1}(t)).a_{n-1}) + v.v_{\underline{0}}(K(t))(v-i) > > v^2.v_{\underline{0}}(K(t)).$$

como $v.v_{\underline{0}}(K(t)) = v_{\underline{0}}(W_1(t)).r_1 + \dots + v_{\underline{0}}(W_{n-1}(t)).r_{n-1}$

se tendrá

$$v(v_{\underline{0}}(W_1(t)).a_1 + \dots + v_{\underline{0}}(W_{n-1}(t)).a_{n-1}) - i(v_{\underline{0}}(W_1(t)).r_1 + \dots + v_{\underline{0}}(W_{n-1}(t)).r_{n-1}) > 0$$

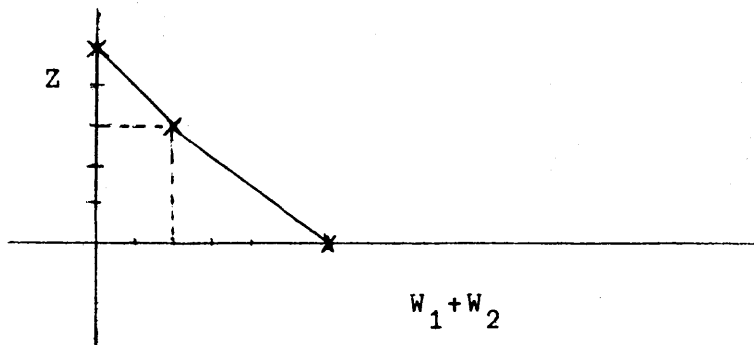
Se ve claramente

$$v(v_{\underline{0}}(W_1(t)).a_1 + \dots + v_{\underline{0}}(W_{n-1}(t)).a_{n-1}) - i(v_{\underline{0}}(W_1(t)).r_1 + \dots + v_{\underline{0}}(W_{n-1}(t)).r_{n-1}) > 0 \Rightarrow v(a_1 + \dots + a_{n-1}) - i(r_1 + \dots + r_{n-1}) > 0$$

q.e.d.

Ejemplo.- Sea K un cuerpo de característica 5 y H la hipersuperficie algebroide sumergida en K^3 de ecuación:

$$Z^5 + W_2^2 Z^3 + W_1^2 W_2^4 = 0$$



El primer segmento del diagrama de Newton de la hipersuperficie H no tiene dos puntos situados en los ejes y sin

embargo la hipersuperficie H no tiene contacto maximal, ya que si consideramos la función de prueba h

$$K[[W_1, W_2]] \xrightarrow{h} K[[t]]$$

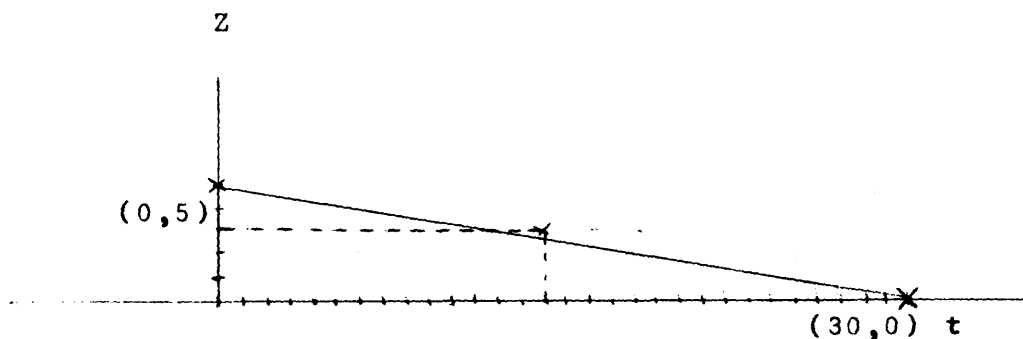
$$W_1 \xrightarrow{\quad} W_1(t) = t$$

$$W_2 \xrightarrow{\quad} W_2(t) = t^7$$

La ecuación de H_h será

$$Z^5 + t^{30} + t^{14} Z^3 = 0, \quad (Z + t^6)^5 + t^{14} Z^3 = 0$$

Si representamos el diagrama de Newton de H_h , vemos que su primer segmento tiene solo dos puntos y en los ejes, es decir H no tiene contacto maximal.



§ 4-3.- Existencia del contacto maximal en variedades algebroides.

Introducción.-

En esta sección nos proponemos estudiar el contacto maximal para variedades algebroides en general. El método que seguiremos será considerar la variedad como una intersección tangencial adecuada de hipersuperficies o lo que es lo mismo trabajar con bases standard normalizadas.

Nota 4-3-1.-

i) Sea X una variedad algebroides sumergida en K^n de ideal de definición J . Por 1-4-21 sabemos que podemos encontrar una base $\{f_1, \dots, f_p\}$ del ideal J tal que:

a) Las formas iniciales $\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_p$ formen una base minimal del ideal $\text{in}_M(J)$ del cono tangente a X .

b) $v_0(f_i) \leq v_0(f_{i+1})$, $1 \leq i \leq p$

c) $\bar{f}_i \notin (\bar{W})K[\bar{Z}, \bar{W}]$, $1 \leq i \leq p$

d) f_i está normalizada con respecto a (f_1, \dots, f_{i-1})

ii) Sabemos por (2-6-9) que si los elementos $\{f_1, \dots, f_p\}$ forman una base standard normalizada del ideal J , entonces si J' es el transformado estricto de J mediante una transformación cuadrática formal, se verifica que $V(J') =$

$= \bigcap_{i=1}^p H_i^!$ donde $H_i^!$ es la hipersuperficie transformada de la

hipersuperficie de ecuación $f_i = 0$.

Por tanto la forma efectiva de construir un transformado cuadrático de la variedad $V(f_1, \dots, f_p)$ dada por

$f_1(Z, W_1, \dots, W_{n-1}), \dots, f_p(Z, W_1, \dots, W_{n-1})$ en el punto

$(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-1})$ del divisor excepcional es sustituir en la ecuación $f_i(Z, W_1, \dots, W_{n-1})$, $1 \leq i \leq p$ las variables por

$$Z = W'_1 \left(Z' + \frac{\alpha}{\beta_1} \right)$$

$$W_1 = W'_1$$

$$W_2 = W'_1 \left(W'_2 + \frac{\beta_2}{\beta_1} \right)$$

.....

$$W_{n-1} = W'_1 \left(W'_{n-1} + \frac{\beta_{n-1}}{\beta_1} \right)$$

y dividir el resultado por $W_1^{v_i}$, $v_i = v_o(f_i)$, $1 \leq i \leq p$

y así obtendremos

$$f'_i(Z', W'_1, \dots, W'_{n-1}) = \frac{f_i \left(W'_1 \left(Z' + \frac{\alpha}{\beta_1} \right), W'_1, W'_1 \left(W'_2 + \frac{\beta_2}{\beta_1} \right), \dots, W'_1 \left(W'_{n-1} + \frac{\beta_{n-1}}{\beta_1} \right) \right)}{W_1^{v_i}}$$

$1 \leq i \leq p$.

Nota 4-3-2.- Sean X una variedad algebroide sumergida en K^n y f_1, \dots, f_p una base standard normalizada de la variedad X . Sean H_1, \dots, H_p las hipersuperficies algebroides de ecuaciones $f_1=0, \dots, f_p=0$. Si las hipersuperficies H_1, \dots, H_p tienen contacto maximal, es posible encontrar una variedad algebroide regular que tenga contacto maximal con la variedad X .

(Véase Aroca-Hironaka-Vicente [6], cap. II, teorema 1-3-1).

Proposición 4-3-3.- Sea X una variedad algebroide y $\{f_1, \dots, f_p\}$ una base standard normalizada de la variedad. Supongamos que las hipersuperficies H_i de ecuaciones $f_i=0$, $1 \leq i \leq t$, $t < p$ tienen contacto maximal y sin embargo

las hipersuperficies de ecuaciones $f_i=0$, $t+1 \leq i \leq p$ no lo tienen . En estas condiciones se verifica que existe un número finito de transformaciones cuadráticas que transforman la base $\{f_1, \dots, f_p\}$ en $\{f'_1, \dots, f'_p\}$ de manera que todas las hipersuperficies H'_i de ecuaciones $f'_i=0$, $i=1, \dots, p$ tienen contacto maximal.

Demostración.-

Sean f_1, \dots, f_p de ecuaciones

$$f_1 = f_{v_1}(Z, W_1, \dots, W_{n-1}) + f_{v_1+1}(Z, W_1, \dots, W_{n-1}) + \dots$$

.....

$$f_p = f_{v_p}(Z, W_1, \dots, W_{n-1}) + f_{v_p+1}(Z, W_1, \dots, W_{n-1}) + \dots$$

con v_i , $i=1, \dots, p$ las multiplicidades de f_i y $v_1 \leq \dots$

$\dots \leq v_p$. Por (4-3-1-i-a) sabemos que el sistema siguiente tiene solución

$$f_{v_1}(Z, W_1, \dots, W_{n-1}) = 0$$

.....

$$f_{v_p}(Z, W_1, \dots, W_{n-1}) = 0$$

luego siempre es posible encontrar un punto en el divisor excepcional y poder aplicar a la variedad X una transformación cuadrática formal.

Si las hipersuperficies de ecuaciones f_{t+1}, \dots, f_p no tienen contacto maximal, entonces v_{t+1}, \dots, v_p serán de la forma p^m , con $p = \text{caract. de } K$ (véase 4-1-7) . Luego trataremos de encontrar una serie de transformaciones cuadráticas formales mediante las cuales disminuyan las multiplicidades v_{t+1}, \dots, v_p y así poder conseguir que no sean de la forma

p^m , de esta manera las hipersuperficies transformadas H'_{t+1}, \dots, H'_p tendrán contacto maximal.

Si no se soluciona el problema en la primera transformación cuadrática, querrá decir que la función de Hilbert-Samuel permanece constante luego dicha transformación cuadrática conserva las bases standard normalizadas (véase Lejeune-Teissier [27], cap. II , teor. 3-2-1) y aplicando otra vez (4-3-1-i-a) nos es posible encontrar un punto en el divisor excepcional y poder aplicar a la variedad una nueva transformación cuadrática formal.

Distinguiremos dos casos:

1^{er} caso.- Todas las formas iniciales f_{v_1}, \dots, f_{v_p} son potencia de una forma lineal , es decir

$$f_1 = Z^{v_1} + f_{v_1+1}(Z, W_1, \dots, W_{n-1}) + \dots$$

$$\dots$$

$$f_p = Z^{v_p} + f_{v_p+1}(Z, W_1, \dots, W_{n-1}) + \dots$$

luego cualquier punto de la forma $(0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$, $\alpha_i \neq 0$, $1 \leq i \leq n-1$ anula todas las formas iniciales. Si aplicamos la transformación cuadrática formal de ecuaciones

$$Z = W'_1 Z'$$

$$W_1 = W'_1$$

$$W_2 = W'_1 \left(W'_2 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right)$$

$$\dots$$

$$W_{n-1} = W'_1 \left(W'_{n-1} + \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_1} \right)$$

Se verificará (véase 3-3-4):

i) Si en ninguno de los diagramas de Newton de f_1, \dots, f_p existe el punto $(2v_i, 0)$, $i=1, \dots, p$, con la transformación cuadrática anterior baja la multiplicidad de todas las

hipersuperficies H_i de ecuación $f_i=0, i=1, \dots, p$.

ii) Si por ejemplo, en el diagrama de Newton de f_i , existe el punto $(2v_i, 0)$, entonces puede ocurrir que baje la multiplicidad de f_i ó que la forma inicial de f_i se convierta en una forma inicial que ya no sea potencia de una forma lineal.

2º caso.- Las formas iniciales f_{v_1}, \dots, f_{v_p} no son todas potencia de una forma lineal. Tendremos

$$f_1 = Z^{v_1} + \sum Z^{v_1-i} W_1^{a_{11}} \dots W_{n-1}^{a_{n-1,1}} + \dots$$

$$\dots \dots \dots$$

$$f_p = Z^{v_p} + \sum Z^{v_p-i} W_1^{a_{1p}} \dots W_{n-1}^{a_{n-1,p}} + \dots$$

Antes de aplicar una transformación cuadrática haremos el siguiente cambio de variables.

$$Z = Z'$$

$$W_1 = W'_1$$

$$W_2 = W'_1 + W'_2$$

$$\dots \dots \dots$$

$$W_{n-1} = W'_1 + W'_{n-1}$$

Sabemos que el contacto maximal se mantiene en un cambio de variables (véase Lejeune-Teissier [27], cap. II, 4-2). También mediante un cambio de variables una base standard normalizada se transforma en otra base standard normalizada. (Véase Lejeune-Teissier [27], cap. II, 4-4). Mediante este cambio las hipersuperficies se transforman en

$$f_1 = Z'^{v_1} + \sum Z'^{v_1-i} W_1'^{a_{11}} (W'_1 + W'_2)^{a_{21}} \dots (W'_1 + W'_{n-1})^{a_{n-1,1}} + \dots =$$

$$= Z'^{v_1} + \sum Z'^{v_1-i} W_1'^{a_{11} + a_{21} + \dots + a_{n-1,1}} + \dots, \quad i \neq 0$$

$$\dots \dots \dots$$

$$f_p = Z'^{v_p} + \sum Z'^{v_p-i} W_1'^{a_{1p}} (W'_1 + W'_2)^{a_{2p}} \dots (W'_1 + W'_{n-1})^{a_{n-1,p}} + \dots =$$

$$= Z'^{\nu} P + Z'^{\nu} P^{-i} W_1' a_{1p} + a_{2p} + \dots + a_{n-1,p} + \dots, i \neq 0$$

Sea $(\gamma, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$ un punto que anula todas las formas iniciales. Si consideramos la transformación cuadrática formal de ecuaciones

$$Z' = W_1'' (Z'' + \frac{\gamma}{\alpha_1})$$

$$W_1' = W_1''$$

$$W_2' = W_1'' (W_2'' + \frac{\alpha_2}{\alpha_1})$$

.....

$$W_{n-1}' = W_1'' (W_{n-1}'' + \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_1})$$

la hipersuperficie de ecuación $f_j = 0$, $j = 1 \dots p$, se transforma en

$$f_j' = (Z'' + \frac{\gamma}{\alpha_1})^{\nu_j} + (Z'' + \frac{\gamma}{\alpha_1})^{\nu_j - i} W_1''^i a_{1j} + a_{2j} + \dots + a_{n-1,j}^{-\nu_j} + \dots =$$

$$= Z''^{\nu_j - i} W_1''^i a_{1j} + a_{2j} + \dots + a_{n-1,j}^{-i} + \dots$$

Si ν_j' es la multiplicidad de f_j' se tendrá

$$\nu_j' \leq \nu_j^{-i + a_{1j} + a_{2j} + \dots + a_{n-1,j}^{-i} < \nu_j^{-i + a_{1j} + \dots + a_{n-1,j}}$$

luego en un número finito de transformaciones cuadráticas formales conseguimos que baje la multiplicidad de f_j .

En el caso de que la forma inicial de f_j no sea potencia de una forma lineal únicamente nos es necesaria una transformación cuadrática formal para que baje la multiplicidad, ya que $\nu_j^{-i + a_{1j} + a_{2j} + \dots + a_{n-1,j}^{-i} = \nu_j^{-i} < \nu_j^{-i + a_{1j} + a_{2j} + \dots + a_{n-1,j}^{-i} = \nu_j^{-i} < \nu_j$.

174

BIBLIOGRAFIA

- 1 ABHYANKAR, S. "Resolution of singularities of arithmetical surfaces". Arithmetical Algebraic Geometry, Harper 1965.
- 2 ABHYANKAR, S. "Resolution of singularities of embedded algebraic surfaces". Academic Press, New-York, London 1966.
- 3 ABHYANKAR, S. "On the problem of resolution of singularities". Proc. Int. Congress of Mathematicians, Moscú 1966
- 4 AROCA, J.M. "Teorema preparatorio de Weiersstrass para series algebraicas". Sin publicar.
- 5 AROCA, J.M. "Notas sobre resolución de singularidades". Curso C.S.I.C. Madrid 1974. Sin publicar.
- 6 AROCA, J.M., HIRONAKA, H., VICENTE, J.L. "The theory of the maximal contact". Memorias de Matemática del Instituto Jorge Juan. C.S.I.C. Madrid 1975
- 7 AROCA, J.M., HIRONAKA, H., VICENTE, J.L. "Desingularization theorems". A publicar en las memorias de Matemática del Instituto Jorge Juan. C.S.I.C. Madrid.
- 8 BENNETT, B.M. "On the characteristic functions of a local ring". Ann. Math. 91 (1970).
- 9 BEPPO LEVI "Sulla riduzione dei singolaritati puntuali dei superficie algebriche per trasformazione quadratiche". Annali di Mat. Pura e Appl. 1897.
- 10 BEPPO LEVI "In torno a la composizione dei punti generichi delle linee singolare delle superficie algebriche". Annali di Mat. Pura e Appl. 1899.
- 11 DEL' PEZZO "In torno a i punti singelari delle superficie algebriche". Rendiconti del Circolo de Palermo, 1892
- 12 EKLOF P.C. "Resolutions of singularities in prime characteristic for almost all primes". Trans. of the Amer. Math. Soc. volume 146 (1969).

- 13 GIRAUD, J. "Etude locale des singularités". Cours de 3^{ème} cycle. 1971-72. Université Paris
- 14 GIRAUD, J. "Etude locale des singularités". Memorias de Matemática del Instituto Jorge Juan. C.S.I.C. Madrid 1974.
- 15 GIRAUD, J. "Sur la théorie du contact maximal". Math. Z. 137 (1974).
- 16 GIRAUD, J. "Sur le contact maximal en caractéristique p ". Preprint Ecole Normale Super. St Cloud 1974.
- 17 GROTHENDIECK, A. "Elements de Geometrie Algebrique". I.H.E.S. Paris.
- 18 HIRONAKA, H. "Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero". Annals of Math. 79 (1964).
- 19 HIRONAKA, H. "Characteristic polyedra of singularities". Journal of Math. of Kyoto University, vol. 7, n°3, 1968.
- 20 HIRONAKA, H. "Introduction to the theory of infinitely near singular points". Memorias de Matemática del Instituto Jorge Juan. C.S.I.C. Madrid 1974.
- 21 HIRONAKA, H. "Additive groups associated with points of a projective space". Ann. of Math. 1970.
- 22 HIRONAKA, H. "Bimeromorphic smoothing of a complex analytic spaces". Notas Mimeografiadas de Warwick.
- 23 HIRONAKA, H. "Coordinating of infinitely near singularities". Quinta Escuela Nórdica de verano, Oslo 1970.
- 24 HIRONAKA, H. "Subanalytic sets". Volumen homenaje a Akizuki en su setenta cumpleaños.
- 25 HIRZEBRUCH "Über vierdimensionale Riemannsche Flächen mehrdeutiger Analytischer Funktionen von zwei Komplexen Veränderlichen". Math. Ann. 1953.
- 26 Kronecker, Noether, M "Jahresbericht der Deutschen Math. Verein 3 1892-93.
- 27 LEJEUNE-JALABERT M., TEISSIER B. "Quelques calculs utiles pour la resolution des singularités". Ecole Polytechnique. Paris 1972.

- 28 LEJEUNE-JALABERT, M. "Thèse". Université de Paris VII 1973.
- 29 LIPMAN, J. "Quasi-Ordinary singularities of embedded surfaces". Tesis de Harvard. Sin publicar.
- 30 LIPMAN, J. "Introduction to resolution of singularities". XXIV Summer Institute A.M.S. Arcata 1974.
- 31 MATSUMURA, H. "Commutative Algebra". Benjamin, New-York 1970.
- 32 MIZUTANI, H. "Hironakas additive group schemas". Nagoya Math. J. 1973.
- 33 Moiszczohn "Resolution theorems for compact complex spaces with a sufficiently large fields of meromorphic functions". Izv. Acad. N. SSSR 31, 1967.
- 34 NAGATA, M. "Local rings". Interscience. 1960.
- 35 NASTOLD, H.J. "Nuevos métodos de álgebra local". Traducción de Aroca J.M. y Vicente J.L. Publicaciones del Instituto Jorge Juan. C.S.I.C. Madrid 1967.
- 36 ODA, T. "Hironakas additive group schemas". Homenaje a Akizuki en su setenta cumpleaños.
- 37 SANCHEZ GIRALDA, T. "Teoría de singularidades de superficies algebroides sumergidas". Tesis. Madrid 1976.
- 38 SEGRE C. "Sulla decomposizione dei punti singolari delle superficie algebriche". Annali di Mat. pure e appl. 1897.
- 39 SERRE, J.P. "Algebre Local-Multiplicités". Springer Verlag n°11, 1965.
- 40 TEISSIER, B. "Notes sur le contact maximal". Sin publicar.
- 41 TEISSIER, B. "Thèse". Université de Paris. 1973
- 42 THOM "Singularities in Spaces de Sullivan". Liverpool Symposium on singularities II, Springer (209). 1971.
- 43 VICENTE, J.L. "Notas sobre variedades algebroides". Curso. C.S.I.C. Madrid 1974. Sin publicar.
- 44 WALKER, R.J. "Algebraic curves". Dover Public. Inc. New-York 1962

- 177
- 45 WALKER, R.J. "Reduction of the singularities of an algebraic surface". Ann. of Math. 1935.
- 46 ZARISKI-SAMUEL "Commutative Algebra". Volume II. Van Nostrand.
- 47 ZARISKI, O. "Local uniformization on algebraic varieties". Ann. of Math. 1940.
- 48 ZARISKI, O. "The reduction of the singularities of an algebraic surface". Ann. of Math. 1939
- 49 ZARISKI, O. "A simplified proof for the resolution of the singularities of an algebraic surface". Ann. of Math. 1942.
- 50 ZARISKI, O. "Reduction of the singularities of algebraic three-dimensional varieties". Ann. of Math. 1944.