

Tema 6. Variable aleatoria bidimensional discreta

Antes de definir una variable aleatoria bidimensional discreta, es necesario definir de forma genérica lo que es una variable aleatoria bidimensional.

Definición de variable aleatoria bidimensional

Sea un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ donde Ω es el conjunto de resultados posibles de un experimento aleatorio, también denominado espacio muestral, $\mathcal{P}(\Omega)$ es el conjunto formado por todos los posibles subconjuntos del espacio muestral Ω y $P: \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0,1]$ es la función de probabilidad. Sean X e Y dos variables aleatorias unidimensionales definidas sobre los espacios muestrales Ω_1 y Ω_2 , es decir:

$$X: \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{e} \quad Y: \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}$$

El objetivo del estudio de las variables bidimensionales es definir una función que asigne a cada posible resultado A del experimento un par de valores de \mathbb{R}^2 , tal que:

$$\begin{aligned} (X, Y): (\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P) &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ A &\rightarrow (X(A), Y(A)) \end{aligned}$$

Por consiguiente, se define una variable aleatoria bidimensional como:

Sea $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espacio de probabilidad. Se define la función $(X, Y): \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ como una variable aleatoria bidimensional si $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ se verifica que:

$$B_{XY} = \{w \in \Omega: X(w_1) \leq x, Y(w_2) \leq y\} = X^{-1}((-\infty, x]), Y^{-1}((-\infty, y]) \in \mathcal{P}(\Omega)$$

Se considere el experimento que consiste en lanzar dos dados. Sea X la variable aleatoria que representa el resultado obtenido al lanzar el primer dado, e Y la variable aleatoria definida como el módulo de la diferencia de los resultados obtenidos con los dos dados.

Se puede demostrar que (X, Y) es variable aleatoria bidimensional de la siguiente manera:

El espacio muestral de X viene dado por $\Omega_1 = \{1, \dots, 6\}$, el espacio muestral de Y es $\Omega_2 = \{0, \dots, 5\}$, y el de la variable bidimensional (X, Y) viene dado por $\Omega = \{(x, y) \text{ indicado en la Tabla 3.1}\}$ donde $\text{Card}(\mathcal{P}(\Omega)) = 2^\Omega$.

Tabla 3.1. Experimento de lanzamiento de dos dados

X\Y	0	1	2	3	4	5
1	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗
2	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	
3	⊗	⊗	⊗	⊗		
4	⊗	⊗	⊗	⊗		
5	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	
6	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗

Para demostrar que (X, Y) es variable aleatoria bidimensional, hay que comprobar que:

$\forall x, y \in \mathbb{R}$ se verifica que:

$$B_{XY} = \{w \in \Omega : X(w_1) \leq x, Y(w_2) \leq y\} = X^{-1}((-\infty, x]), Y^{-1}((-\infty, y]) \in \mathcal{P}(\Omega)$$

Entonces,

$$B_{XY} = \{w \in \Omega : X(w_1) \leq 1, Y(w_2) \leq 0\} = (1, 0) \in \mathcal{P}(\Omega)$$

$$B_{XY} = \{w \in \Omega : X(w_1) \leq 1, Y(w_2) \leq 1\} = \{(1, 0), (1, 1)\} \in \mathcal{P}(\Omega)$$

$$B_{XY} = \{w \in \Omega : X(w_1) \leq 1, Y(w_2) \leq 2\} = \{(1, 0), (1, 1), (1, 2)\} \in \mathcal{P}(\Omega)$$

...

$$B_{XY} = \{w \in \Omega : X(w_1) \leq 6, Y(w_2) \leq 4\} = \Omega - \{(6, 5)\} \in \mathcal{P}(\Omega)$$

$$B_{XY} = \{w \in \Omega : X(w_1) \leq 6, Y(w_2) \leq 5\} = \Omega \in \mathcal{P}(\Omega)$$

Queda demostrado que (X, Y) es una variable aleatoria bidimensional.

En este contexto, una variable aleatoria bidimensional (X, Y) es discreta cuando toma una cantidad finita o infinita numerable de posibles valores.

6.1. Concepto y función de masa

Se define la *función de masa* o *función de probabilidad* de una variable aleatoria bidimensional discreta como la función que proporciona la probabilidad de cada uno de los diferentes valores que puede tomar la variable aleatoria bidimensional. Así, la función de masa (o la función de probabilidad conjunta) viene dada por:

$$P(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij} \quad \forall i = 1, \dots, I \quad \forall j = 1, \dots, J$$

donde I son todos los posibles valores de la variable X , y J todos los posibles valores de la variable Y . Por lo tanto, $I \times J$ es el conjunto de valores alcanzados por la variable aleatoria bidimensional (X, Y) .

La función de masa verifica las siguientes propiedades:

- $p_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j \in I \times J$
- $\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J p_{ij} = 1$

La función de masa se puede expresar como una tabla de doble entrada. La Tabla 3.2. representa los pares de valores (x, y) que toma la variable (X, Y) , junto con sus respectivas probabilidades.

Tabla 3.2. Función de probabilidades conjuntas de una variable aleatoria bidimensional discreta

$X \setminus Y$	y_1	y_2	...	y_j
x_1	p_{11}	p_{12}	...	p_{1j}
x_2	p_{21}	p_{22}	...	p_{2j}
\vdots	\vdots	\vdots	...	\vdots
x_i	p_{i1}	p_{i2}	...	p_{ij}

Ejemplo 6.1

Sea la variable aleatoria bidimensional discreta (X, Y) cuya función de masa viene dada en la siguiente tabla:

$X \setminus Y$	-1	1
1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$

Se pide: Calcular las probabilidades: $P(X = 2, Y = 1)$, $P(Y < 0)$, y $P(X \leq 2, Y > 0)$.

$$P(X = 2, Y = 1) = \frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} P(Y < 0) &= P(X = 1, Y = -1) + P(X = 2, Y = -1) + P(X = 3, Y = -1) \\ &= \frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$P(X \leq 2, Y > 0) = P(X = 1, Y = 1) + P(X = 2, Y = 1) = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$$

6.2. Distribuciones marginales discretas

Si (X, Y) es una variable aleatoria bidimensional discreta, entonces tanto la variable X , como la variable Y , serán variables aleatorias unidimensionales discretas a las que denominamos variables aleatorias marginales.

Sea $P(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij} \quad \forall i = 1, \dots, I \quad \forall j = 1, \dots, J$ la función de probabilidad conjunta o función de masa de la variable aleatoria (X, Y) . A partir de esta función de probabilidad conjunta se puede obtener la *función de probabilidad marginal* de cada una de las variables aleatorias que componen la variable aleatoria (X, Y) se expresa como:

- Función de probabilidad marginal de la variable aleatoria X :

$$p_{i\cdot} = P(X = x_i) = \sum_{j=1}^J p_{ij} \quad \forall i = 1, \dots, I$$

- Función de probabilidad marginal de la variable aleatoria Y :

$$p_{\cdot j} = P(Y = y_j) = \sum_{i=1}^I p_{ij} \quad \forall j = 1, \dots, J$$

La Tabla 3.3. demuestra cómo se calculan las probabilidades marginales de cada variable aleatoria discreta.

**Tabla 3.3. Función de probabilidad marginal
(variable aleatoria discreta)**

$X \setminus Y$	y_1	y_2	...	y_j	
x_1	p_{11}	p_{12}	...	p_{1j}	$p_{1\cdot}$
x_2	p_{21}	p_{22}	...	p_{2j}	$p_{2\cdot}$
\vdots	\vdots	\vdots	...	\vdots	\vdots
x_i	p_{i1}	p_{i2}	...	p_{ij}	$p_{i\cdot}$
	$p_{\cdot 1}$	$p_{\cdot 2}$...	$p_{\cdot j}$	1

Las Tablas 3.4. y 3.5. muestran las distribuciones marginales de las variables X e Y respectivamente.

**Tabla 3.4. Distribución marginal
de la variable aleatoria discreta X**

	y_1
x_1	$p_{1\cdot}$
x_2	$p_{2\cdot}$
\vdots	\vdots
x_i	$p_{i\cdot}$
	1

**Tabla 3.5. Distribución marginal
de la variable aleatoria discreta Y**

	y_1
y_1	$p_{\cdot 1}$
y_2	$p_{\cdot 2}$
\vdots	\vdots
y_j	$p_{\cdot j}$
	1

Una vez se obtienen las funciones de probabilidad marginales de las variables aleatorias X e Y , se podrán calcular sus momentos de la siguiente manera:

- **Momentos respecto al origen:**

$$\alpha_{rs} = \sum_i \sum_j x_i^r \cdot y_j^s \cdot p_{ij}$$

- 1) La esperanza matemática de la variable aleatoria X se calcula cuando $r = 1$ y $s = 0$, $E[X] = \alpha_{10} = \sum_i \sum_j x_i^1 \cdot y_j^0 \cdot p_{ij} = \sum_{i=1}^I x_i \cdot p_i$.
- 2) La esperanza matemática de la variable aleatoria Y se calcula cuando $r = 0$ y $s = 1$, $E[Y] = \alpha_{01} = \sum_i \sum_j x_i^0 \cdot y_j^1 \cdot p_{ij} = \sum_{j=1}^J y_j \cdot p_j$.
- 3) Cuando $r = 1$ y $s = 1$, $E[XY] = \alpha_{11} = \sum_i \sum_j x_i^1 \cdot y_j^1 \cdot p_{ij} = \sum_i \sum_j x_i \cdot y_j \cdot p_{ij}$.

- **Momentos respecto a la media:**

$$\mu_{rs} = \sum_i \sum_j (x_i - \mu_X)^r \cdot (y_j - \mu_Y)^s$$

- 1) La varianza de la variable aleatoria X se calcula cuando $r = 2$ y $s = 0$, $V(X) = \mu_{20} = \sum_i \sum_j (x_i - \mu_X)^2 \cdot (y_j - \mu_Y)^0 = E[X^2] - (E[X])^2 = \alpha_{20} - \alpha_{10}^2$.
- 2) La varianza de la variable aleatoria Y se calcula cuando $r = 0$ y $s = 2$, $V(Y) = \mu_{02} = \sum_i \sum_j (x_i - \mu_X)^0 \cdot (y_j - \mu_Y)^2 = E[Y^2] - (E[Y])^2 = \alpha_{02} - \alpha_{01}^2$.
- 3) Cuando $r = 1$ y $s = 1$, se calcula la covarianza $\mu_{11} = S(X, Y) = \alpha_{11} - \alpha_{10} \cdot \alpha_{01}$. La covarianza mide el grado de *dependencia lineal* entre las variables aleatorias X e Y . Si $S(X, Y) > 0$, indica que existe una relación directa entre X e Y . Si $S(X, Y) < 0$, indica que existe una relación inversa entre X e Y . Si $S(X, Y) = 0$, indica que no hay relación lineal entre X e Y .

Ejemplo 6.2

Considere la variable aleatoria bidimensional discreta (X, Y) del Ejemplo 6.1 y calcule las funciones de probabilidad marginales de X e Y , así como sus esperanzas matemáticas, varianzas y covarianza.

Para la variable X :

x_i	$p_{i\cdot}$	$x_i \cdot p_{i\cdot}$	$x_i^2 \cdot p_{i\cdot}$
1	$\frac{1}{12} + \frac{1}{3} = \frac{5}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{12}$
2	$\frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{3}$
3	$\frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
	1	$\frac{7}{4}$	$\frac{43}{12}$

$$E[X] = \frac{7}{4}, \quad V(X) = \frac{43}{12} - \left(\frac{7}{4}\right)^2 = \frac{25}{48}$$

Para la variable Y :

y_j	$p_{\cdot j}$	$y_j \cdot p_{\cdot j}$	$y_j^2 \cdot p_{\cdot j}$
-1	$\frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
1	$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
	1	$\frac{1}{3}$	1

$$E[Y] = \frac{1}{3}, \quad V(Y) = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}$$

La covarianza se calcula como:

$$S(X, Y) = \alpha_{11} - \alpha_{10} \cdot \alpha_{01} = E[XY] - E[X] \cdot E[Y]$$

$$E[XY] = \sum_i \sum_j x_i \cdot y_j \cdot p_{ij} =$$

$$= 1 \cdot (-1) \cdot \frac{1}{12} + 2 \cdot (-1) \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot (-1) \cdot \frac{1}{12} + 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot 1 \cdot \frac{1}{12} = \frac{5}{12}$$

$$S(X, Y) = \frac{5}{12} - \frac{7}{4} \cdot \frac{1}{3} = -\frac{1}{6} \approx -0.1667 < 0 \text{ (relación inversa)}$$

6.3. Distribuciones condicionadas discretas

En la sección 1.5, se define la probabilidad del suceso B condicionada al suceso A de la siguiente forma:

$$P(B / A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \text{ siempre que } P(A) \neq 0$$

Este concepto puede extenderse al caso de variables aleatorias bidimensionales. Dada una variable aleatoria bidimensional (X, Y) , se desea analizar el comportamiento de cada una de las variables aleatorias conocido el valor de la otra variable aleatoria. Es decir, obtener la distribución de la variable aleatoria X cuando se conoce el valor de la variable aleatoria Y , $Y = y$. A esta distribución se le denomina distribución condicionada de X por $Y = y$ y se denota como $X|Y = y$.

Similarmente, se obtiene la distribución de la variable aleatoria Y cuando se conoce el valor de la variable aleatoria X , $X = x$. A esta distribución se le denomina distribución condicionada de Y por $X = x$ y se denota como $Y|X = x$. De este modo, quedan definidas dos nuevas variables aleatorias unidimensionales.

Sea una variable aleatoria bidimensional discreta (X, Y) con función de probabilidad conjunta $p_{ij} \quad \forall i = 1, \dots, I; \forall j = 1, \dots, J$ y funciones de probabilidad marginales $p_{i.} \quad \forall i = 1, \dots, I$ y $p_{.j} \quad \forall j = 1, \dots, J$. La función de probabilidad de la variable X sabiendo que la variable Y ha tomado el valor y_j viene dada por la siguiente expresión:

$$P(X = x_i | Y = y_j) = \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(Y = y_j)} = \frac{p_{ij}}{p_{.j}} \quad \forall i = 1, 2, \dots, \in I$$

siendo y_j uno de los posibles valores de la variable aleatoria Y .

Análogamente, se define la función de probabilidad de la variable Y sabiendo que la variable X ha tomado el valor x_i :

$$P(Y = y_j | X = x_i) = \frac{P(Y = y_j, X = x_i)}{P(X = x_i)} = \frac{p_{ij}}{p_{i.}} \quad \forall j = 1, 2, \dots, \in J$$

siendo x_i uno de los posibles valores de la variable aleatoria X .

Ejemplo 6.3

Considere la variable aleatoria bidimensional discreta (X, Y) del Ejemplo 6.1 y calcule $P(X = 3|Y = 1)$, $P(X \leq 2|Y > 0)$, y $P(Y = -1|X > 1)$.

$$P(X = 3|Y = 1) = \frac{P(X=3, Y=1)}{P(Y=1)} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{8}$$

$$P(X \leq 2|Y > 0) = \frac{P(X \leq 2, Y > 0)}{P(Y > 0)} = \frac{P(X \leq 2, Y=1)}{P(Y=1)} = \frac{P(X=1, Y=1) + P(X=2, Y=1)}{P(Y=1)} = \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}{\frac{2}{3}} = \frac{7}{8}$$

$$P(Y = -1|X > 1) = \frac{P(Y=-1, X>1)}{P(X>1)} = \frac{P(X=2, Y=-1) + P(X=3, Y=-1)}{P(X=2) + P(X=3)} = \frac{\frac{1}{6} + \frac{1}{12}}{\frac{5}{12} + \frac{1}{6}} = \frac{\frac{2}{12}}{\frac{7}{12}} = \frac{2}{7}$$

6.4. Independencia de variables aleatorias discretas

Dada una variable aleatoria bidimensional (X, Y) se dice que las variables aleatorias que lo componen, X e Y , son independientes si $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega_1), \forall B \in \mathcal{P}(\Omega_2)$ $P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A) \cdot P(Y \in B)$, es decir, las variables aleatorias X e Y son independientes cuando lo son los sucesos $\{X \in A\}, \{Y \in B\} \forall (A, B) \in \mathcal{P}(\Omega)$.

Sea (X, Y) una variable aleatoria bidimensional discreta con función de probabilidad conjunta $p_{ij} \forall i = 1, \dots, I \forall j = 1, \dots, J$ y funciones de probabilidad marginales $p_i. \forall i = 1, \dots, I$ y $p_.j \forall j = 1, \dots, J$, entonces las variables aleatorias X e Y son independientes si y solo si:

$$p_{ij} = p_i. \cdot p_.j \quad \forall i = 1, \dots, I \text{ y } \forall j = 1, \dots, J$$

Ejemplo 6.4

Considere la variable aleatoria bidimensional discreta (X, Y) del Ejemplo 6.1 y verifique si las variables aleatorias X e Y son independientes.

Se puede observar que $p_{11} = \frac{1}{12} \neq p_{1.} \cdot p_{.1} = \frac{5}{12} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{36}$. Por tanto, se puede concluir que X e Y no son independientes.

6.5. Transformación de variables aleatorias discretas

En ocasiones, dada una variable aleatoria bidimensional (X, Y) , puede interesar conocer la función de probabilidad de una función de la variable aleatoria bidimensional (X, Y) .

Sea (X_1, X_2) una variable aleatoria bidimensional discreta y sea $Z = g(X_1, X_2)$ una transformación de (X_1, X_2) donde Z es una variable aleatoria unidimensional. Entonces, la función de probabilidad de Z vendrá dada por:

$$P(Z = z) = \sum_{x_1, x_2 / g(x_1, x_2) = z} P(X_1 = x_1, X_2 = x_2)$$

Ejemplo 6.5

Considere la variable aleatoria bidimensional discreta (X, Y) del Ejemplo 6.1 y calcule la función de probabilidad de la variable aleatoria $Z = X + Y$.

Los posibles valores que toma Z son: 0, 1, 2, 3, 4

$$P(Z = 0) = P(X = 1, Y = -1) = \frac{1}{12}$$

$$P(Z = 1) = P(X = 2, Y = -1) = \frac{1}{6}$$

$$P(Z = 2) = P(X = 1, Y = 1) + P(X = 3, Y = -1) = \frac{1}{3} + \frac{1}{12} = \frac{5}{12}$$

$$P(Z = 3) = P(X = 2, Y = 1) = \frac{1}{4}$$

$$P(Z = 4) = P(X = 3, Y = 1) = \frac{1}{12}$$

Por lo tanto, la función de probabilidad de la variable Z es:

Z	0	1	2	3	4
$P(Z = z)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$

6.6. Ejercicios

Ejercicios resueltos

Ejercicio R. 6.1

Para salir del aparcamiento de la facultad, se puede elegir entre tres salidas disponibles. Dos profesores van a salir del aparcamiento y eligen de forma aleatoria una de las tres salidas. Se define la variable aleatoria X como el número de profesores que eligen la salida 1 e Y como el número de profesores que eligen la salida 2. Se pide:

1. Calcular las probabilidades $P(X = 0, Y = 2)$ y $P(Y \leq 1)$.
2. Calcular las esperanzas matemáticas de X e Y .
3. Verificar si las variables aleatorias X e Y son independientes.

Solución:

1. X puede tomar los valores 0, 1, 2, e Y puede tomar los valores 0, 1, 2. Si ambos profesores eligen la salida 3, entonces $P(X = 0, Y = 0) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$. Si un profesor elige la salida 2 y el otro la salida 3, entonces, $P(X = 0, Y = 1) = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$. Así, sucesivamente se obtiene la función de probabilidad conjunta para la variable aleatoria bidimensional (X, Y) como se indica en la tabla siguiente:

$X \setminus Y$	0	1	2
0	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$
1	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	0
2	$\frac{1}{9}$	0	0

$$P(X = 0, Y = 2) = \frac{1}{9}$$

$$P(Y \leq 1) = 1 - P(Y > 1) = 1 - P(Y = 2) = 1 - \left(\frac{1}{9} + 0 + 0\right) = \frac{8}{9}$$

2. Para la variable X :

x_i	p_i	$x_i \cdot p_i$
0	$\frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{4}{9}$	0
1	$\frac{2}{9} + \frac{2}{9} + 0 = \frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$
2	$\frac{1}{9} + 0 + 0 = \frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$
	1	$\frac{2}{3}$

$$E[X] = \frac{2}{3}$$

Para la variable Y :

y_j	p_j	$y_j \cdot p_j$
0	$\frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{4}{9}$	0
1	$\frac{2}{9} + \frac{2}{9} + 0 = \frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$
2	$\frac{1}{9} + 0 + 0 = \frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$
	1	$\frac{2}{3}$

$$E[Y] = \frac{2}{3}$$

3. Se puede observar que $p_{11} = \frac{1}{9} \neq p_{1\cdot} \cdot p_{\cdot 1} = \frac{4}{9} \cdot \frac{4}{9} = \frac{16}{81}$. Por tanto, se puede concluir que X e Y no son independientes.

Ejercicio R. 6.2

Sea X el número de asignaturas en las que se ha obtenido matrícula de honor en el primer curso del grado, e Y el número de veces que se ha acudido a la biblioteca de la facultad. La función de probabilidad conjunta para la variable aleatoria bidimensional (X, Y) es la siguiente:

X\Y	0	1	> 1
1	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{8}{25}$
2	$\frac{1}{50}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{4}{25}$
> 2	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{50}$	$\frac{29}{100}$

Se pide:

1. Calcular la probabilidad de que un alumno haya obtenido más de 2 matrículas de honor en el primer curso del grado, dado que ha asistido más de una vez a la biblioteca.
2. Determinar la distribución de asistencia a la biblioteca entre los alumnos que han obtenido exactamente una matrícula de honor en una asignatura durante el primer curso del grado.

Solución:

1. La distribución marginal de a variable X es:

x_i	p_i
1	$\frac{1}{25} + \frac{1}{10} + \frac{8}{25} = \frac{23}{50}$
2	$\frac{1}{50} + \frac{1}{25} + \frac{4}{25} = \frac{11}{50}$
> 2	$\frac{1}{100} + \frac{1}{50} + \frac{29}{100} = \frac{8}{25}$
	1

La distribución marginal de a variable Y es:

y_j	p_j
0	$\frac{1}{25} + \frac{1}{50} + \frac{1}{100} = \frac{7}{100}$
1	$\frac{1}{10} + \frac{1}{25} + \frac{1}{50} = \frac{4}{25}$
> 1	$\frac{8}{25} + \frac{4}{25} + \frac{29}{100} = \frac{77}{100}$
	1

$$P(X > 2 | Y > 1) = \frac{P(X > 2, Y > 1)}{P(Y > 1)} = \frac{\frac{29}{100}}{\frac{77}{100}} = \frac{29}{77}$$

Esto significa que, de cada 77 alumnos que han asistido a la biblioteca más de una vez, 29 han obtenido más de 2 matrículas de honor en el primer curso del grado.

2. La distribución que se pide es la siguiente:

$Y X = 1$	0	1	> 1
$P(Y = y_j X = 1)$	$\frac{\frac{1}{25}}{\frac{23}{50}} = \frac{2}{23}$	$\frac{\frac{1}{10}}{\frac{23}{50}} = \frac{5}{23}$	$\frac{\frac{8}{25}}{\frac{23}{50}} = \frac{16}{23}$

Esto significa que, de cada 23 alumnos que han obtenido exactamente una matrícula de honor en una asignatura durante el primer curso del grado, 2 nunca han asistido a la biblioteca, 5 han asistido una vez y 16 han asistido más de una vez.

Ejercicio R. 6.3

Un experimento consiste en lanzar dos dados. Sea X el resultado del primer dado, e Y la diferencia en valor absoluto de los resultados de ambos dados. La función de probabilidad conjunta de la variable aleatoria bidimensional (X, Y) es la siguiente:

$X \setminus Y$	0	1	2	3	4	5
1	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
2	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	0
3	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	0	0
4	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	0	0
5	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	0
6	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$

Se pide:

1. Comprobar si las variables son independientes.
2. Calcular la función de probabilidad de la variable aleatoria $Z = X^2 - Y^2$.

Solución:

1. Se puede observar que $p_{26} = 0 \neq p_{2\cdot} \cdot p_{\cdot 6} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{18} = \frac{1}{108}$. Por tanto, se puede concluir que X e Y no son independientes.
2. Los posibles valores que toma Z son: -24, -15, -12, -8, -5, -3, 0, 1, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 15, 16, 20, 21, 24, 25, 27, 32, 35, 36

Para calcular las probabilidades de Z se trabaja con:

$$P(Z = -24) = P(X = 1, Y = 5) = \frac{1}{36}$$

$$P(Z = -15) = P(X = 1, Y = 4) = \frac{1}{36}$$

$$P(Z = -12) = P(X = 2, Y = 4) = \frac{1}{36}$$

$$P(Z = -8) = P(X = 1, Y = 3) = \frac{1}{36}$$

$$P(Z = -5) = P(X = 2, Y = 3) = \frac{1}{36}$$

$$P(Z = -3) = P(X = 1, Y = 2) = \frac{1}{36}$$

$$P(Z = 0) = P(X = 1, Y = 1) + P(X = 2, Y = 2) + P(X = 3, Y = 3) + P(X = 4, Y = 4) + P(X = 5, Y = 5) = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + 0 + 0 = \frac{3}{36}$$

$$P(Z = 1) = P(X = 1, Y = 0) = \frac{1}{36}$$

$$P(Z = 3) = P(X = 3, Y = 1) = \frac{2}{36}$$

$$P(Z = 4) = P(X = 2, Y = 0) = \frac{1}{36}$$

...

Por lo tanto, la función de probabilidad de la variable Z es:

Z	-24	-15	-12	-8	-5	-3	0	1	3	4	5	7	8
$P(Z = z)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$
Z	9	11	12	15	16	20	21	24	25	27	32	35	36
$P(Z = z)$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$

Ejercicios propuestos

Ejercicio P. 6.1

Sea (X, Y) una variable aleatoria bidimensional discreta con función de probabilidad conjunta:

$$P(X = 0, Y = j) = e^{-3} \cdot \frac{2^j}{j!} \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

$$P(X = 1, Y = j) = e^{-2} \cdot (1 - e^{-1}) \cdot \frac{2^j}{j!} \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

Se pide:

1. Calcular las funciones de probabilidad marginales para las variables X e Y .
2. Comprobar si son independientes X e Y .

Ejercicio P. 6.2

Sea la variable aleatoria bidimensional discreta (X, Y) cuya función de masa viene dada en la siguiente tabla:

$X \setminus Y$	0	1	2
0	$\frac{3}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{10}$
1	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{20}$
2	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{20}$

Se pide:

1. Calcular la esperanza matemática y desviación típica de las variables X e Y .
2. Calcular la esperanza matemática y desviación típica de la variable $Z = X - Y$.

Ejercicio P. 6.3

Un experimento consiste en lanzar tres veces una moneda. Sea X el número de caras en las tres tiradas, e Y la diferencia en valor absoluto entre el número de caras y el de escudos en las tres tiradas. Se pide:

1. Calcular las probabilidades $P(X \leq 1, Y > 0)$ y $P(Y < 3)$.
2. Calcular las esperanzas matemáticas y desviaciones típicas de X e Y .

3. Verificar si las variables aleatorias X e Y son independientes.
4. Calcular la covarianza de X e Y , y comentar el resultado.
5. Calcular la probabilidad $P(X|Y = 3)$.

Ejercicio P. 6.4

Sea la variable aleatoria bidimensional discreta (X, Y) cuya función de masa viene dada en la siguiente tabla:

XY	2	4	5
0	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$
3	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	0
6	$\frac{1}{9}$	0	0

Se pide:

1. Calcular $P(Y = 2|X < 4)$.
2. Calcular la esperanza matemática de XY .
3. ¿Son independientes las variables?

Ejercicio P. 6.5

Una urna contiene 3 bolas numeradas del 1 al 3. Se eligen al azar 2 bolas sin reemplazamiento teniendo en cuenta el orden de salida. Se pide:

1. Construir el espacio probabilístico asociado a este experimento.
2. Si definimos sobre él la variable aleatoria bidimensional (X, Y) donde X es el número que muestra la primera bola, e Y es el máximo encontrado a lo largo de las dos extracciones, encontrar:
 - a) El espacio de probabilidad inducido por la transformación (X, Y) .
 - b) La función de distribución asociada a (X, Y) .
 - c) Las distribuciones marginales de (X, Y) .
 - d) La distribución de Y dado que $X = 2$.

Ejercicio P. 6.6

Supóngase que se realiza el experimento consistente en lanzar una moneda de manera consecutiva 5 veces, y que sobre este experimento original se define la variable

bidimensional (X, Y) donde X = número de caras a lo largo de los 5 lanzamientos, Y = número de caras en los 2 primeros lanzamientos. Se pide:

1. ¿Cuántos elementos hay en el rango de (X, Y) ?
2. Si te proponen una apuesta con la que ganas si y solo si $Y < X + 2$ ¿jugarías? Justifica tu respuesta.
3. Obtener las funciones de distribución marginales.
4. Si te dicen que $X = 0$ ¿cambiarías tu respuesta del apartado 2?

Ejercicio P. 6.7

Se lanza un dado dos veces. Sea X la variable aleatoria que representa el resultado del primer lanzamiento e Y la variable aleatoria que representa el máximo de los dos lanzamientos. Se pide:

1. Construir la función de probabilidad conjunta de X e Y .
2. Calcular la probabilidad de que X sea igual a Y .
3. Calcular la probabilidad de que X sea menor que Y .

Ejercicio P. 6.8

Una empresa produce dos tipos de productos, A y B. La probabilidad de que un producto de tipo A sea defectuoso es 0.15 y la probabilidad de que un producto de tipo B sea defectuoso es 0.25. Se seleccionan al azar cinco productos de la producción de la empresa. Sea X la variable aleatoria que representa el número de productos defectuosos de tipo A e Y la variable aleatoria que representa el número de productos defectuosos de tipo B. Se pide:

1. Construir la función de probabilidad conjunta de X e Y .
2. Calcular la función de probabilidad de X sabiendo que $Y=2$.
3. Calcular la probabilidad de que $X + Y$ sea menor que 2.

Ejercicio P. 6.9

Dos impresoras, A y B, imprimen documentos de forma independiente. El número de errores por página que comete la impresora A sigue una distribución de Poisson con media 1, mientras que el número de errores por página que comete la impresora B sigue una distribución de Poisson con media 2. Se imprime una página con cada impresora. Sea X la variable aleatoria que representa el número de errores en la

página impresa por la impresora A e Y la variable aleatoria que representa el número de errores en la página impresa por la impresora B. Se pide:

1. Construir la función de probabilidad conjunta de X e Y .
2. Calcular la probabilidad de que $X + Y$ sea mayor que 2.

Ejercicio P. 6.10

Un jugador lanza un dado hasta obtener un 4. Sea X la variable aleatoria que representa el número de lanzamientos necesarios para obtener el primer 4. El jugador lanza otro hasta que la suma sea mayor 7. Sea Y la variable aleatoria que representa el número de lanzamientos necesarios para obtener el resultado requerido. Se pide:

1. Construir la función de probabilidad conjunta de X e Y .
2. Calcular la esperanza matemática de (X, Y) .

6.7. Evaluación

Todos los estudiantes del Grado en Estadística Aplicada y del Grado en Ciencia de los Datos Aplicada de la UCM, matriculados en la asignatura de Azar y Probabilidad, tienen acceso al Campus Virtual para responder una serie de preguntas seleccionadas aleatoriamente del banco de preguntas, con el fin de obtener la calificación de la evaluación continua.

Este manual está disponible en el repositorio de la UCM, por lo que se ha dispuesto una autoevaluación para cualquier persona interesada en la asignatura, utilizando el mismo banco de preguntas del Campus Virtual, accesible en Google Forms a través del siguiente enlace: <https://forms.gle/QaNFEXUjieFhpSNM7>.