UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS
Departamento de Algebra y Fundamentos

TESIS DOCTORAL

Figuras poligonales y poliédricas convexas en espacios normados

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR
PRESENTADA POR

Jesús Julián Gómez Sánchez

Madrid, 2015

Jesús Gómez Sánchez

FIGURAS POLIGONALES Y POLIEDRICAS CONVEXAS EN ESPACIOS NORMADOS

Departamento de Algebra y Fundamentos
Facultad de Ciencias Matemáticas
Universidad Complutense de Madrid
1981

Edita e imprime la Editorial de la Universidad
Complutense de Madrid. Servicio de Reprografía
Noviciado, 3 Madrid-8
Madrid, 1981
Xerox 9200 XB 480
Depósito Legal: M-18909-1981

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS

FIGURAS POLIGONALES Y POLIEDRICAS CONVEXAS EN ESPACIOS NORMADOS.

Memoria que para optar al grado
de doctor en Ciencias Matemáticas
presenta el licenciado

Jesús Gómez Sánchez

Director : Prof. Dr. Abellanas Cebollero

MADRID, CURSO 1979-80

Tesis Doctoral leída en la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid el día 17 de Diciembre de 1980 ante el Tribunal constituido por los siguientes profesores :

Presidente :

Dr. D. Francisco Botella Raduán, catedrático de Geometría de la Facultad de Ciencias Matemáticas, Universidad Complutense de Madrid.

Vocales :

Dr. D. Pedro Abellanas Cebollero, catedrático de Geometría de la Facultad de Ciencias Matemáticas, Universidad Complutense de Madrid.

Dr. D. Enrique Linés Escardó, catedrático de Analísis Matemático de la Facultad de Ciencias Matemáticas, Universidad Complutense de Madrid.

Dr. D. Norberto Cuesta Dutari, catedrático de Analísis Matemático de la Facultad de Ciencias de Salamanca.

Dr. D. José Javier Etayo Miqueo, catedrático de Geometría Diferencial de la Facultad de Ciencias Matemáticas, Universidad Complutense de Madrid.

A esta Tesis Doctoral le fue concedida la calificación de " Notable " .

I N D I C E   G E N E R A L

I N T R O D U C C I O N

La presente memoria pretende ser una exposición sistemática sobre el estudio de los poliedros y polígonos convexos.

Las figuras que en el espacio ,ordinario tri-dimensional son poliedros convexos, están dotadas de dos características geométricas,de las más simples y a la par fundamentales : El carácter poliédrico,consistente en el que tiene una figura espacial,definida por intersección de un conjunto de semiespacios; y el carácter convexo de una figura,que consiste en que dado un segmento rectilíneo arbitrario cuyos extremos pertenecen a la figura,hace que todo el segmento pertenezca por completo a dicha figura.

La coexistencia de las dos propiedades nos parece lo suficientemente importante como para hacer un estudio monográfico de la estructura mixta de poliedricidad-convexidad.

Se estudia esta estructura,en un principio geométricamente intuitiva,de un modo propio e intrínseco, lo que nos lleva a referirla a muy variados y distintos espacios,allí donde sea susceptible de definir o redefinir los conceptos de poliedro y convexidad.

Despues de un estudio detallado, de la citada estructura, en los espacios geométricos más intuitivos, el plano y el espacio tridimensional euclideanos, en donde se efectúa un estudio analítico de los poliedros convexos; se procede a la extensión del concepto a otros espacios,analizando estrictamente la estructura de poliedro convexo.

Puesto que para definir un poliedro,se requiere que existan semiespacios,en el espacio ambiente,y ello a su vez exige la existencia de planos o hiperplanos;por de pronto,el espacio circundante de las figuras poliédricas ha de ser un espacio lineal o vectorial.

Por otra parte,en tales espacios,distinguimos la posición de un punto con respecto a un hiperplano, si está situado en una u otra de las dos regiones (semiespacios) que debe determinar. Ello se puede lograr mediante la clasificación,por el siggno positivo o negativo que tome un funcional lineal del espacio.

De modo tal,que el espacio que se requiere para nuestro objeto, ha de ser un espacio,lineal real,como mínima exigencia de espacio ambiente. En él ya se puede,lícitamente,considerar los segmentos rectilíneos y la convexidad de las figuras,y,por ende,los poliedros convexos.

No se establece ninguna restricción para la dimensión del espacio, en lo que a la estructura de poliedricidad-convexidad se refiere; porque es independiente de la misma. Por tanto,se estudian los poliedros convexos en los espacios lineales reales de cualquier dimensión,incluida una dimensión transfinita arbitraria.

El problema de la determinación,representación analítica y criterio de convexidad para un poliedro,se resuelve en un espacio lineal general; empero,el estudio de los poliedros convexos,se realiza en otros espacios lineales reales,con particularidades destacables,lo cual permite llegar a conclusiones más concretas, pero también más perfectas y acabadas.

La representación de poliedros convexos y los criterios de convexidad,en los espacios euclídeos,de Hilbert y en ciertos espacios normados de sucesiones reales,han motivado cuestiones teóricas, cuya resolución previa,en los correspondientes espacios citados, ha sido necesaria,para poder proceder a la resolución de las cuestiones de la mera estructura de poliedricidad-convexidad,que en principio se presentaban.

Hemos concebido la definición de polígono alabeado "convexo" , en el espacio euclideano ordinario, y la hemos generalizado a los mismos espacios,en donde estudiamos los poliedros convexos,como espacios ambientales propios; porque el concepto de polígono alabeado "convexo" y sus fundamentos algébricos son duales del concepto de poliedro convexo. Dualidad que geométricamente se pone de manifiesto al tratar de determinar ambas figuras,en los espacios generales considerados : El poliedro convexo requiere la determinación del punto de intersección de un sistema infinito de hiperplanos, el polígono alabeado "convexo" necesita la determinación de un hiperplano por infinitos puntos del mismo.

Finalmente, vamos a dar una información sumaria del contenido de la presente memoria, aunque una lectura del índice puede servir para ese propósito,y más aún,de modo completo la lectura de las conclusiones,que presentamos agrupadas y resumidas, al comienzo de la exposición.

En el capítulo cero, hemos efectuado la representación analítica de un cuadrilátero plano y de un n-gono plano convexos, como figuras bidimensionales; estableciendo previamente un criterio de convexidad de cuadriláteros y de n-gonos planos.

A continuación representamos analíticamente,el tetraedro del espacio ordinario euclideano y la figura análoga del espacio euclídeo n-dimensional; la cual hemos llamado (n+1)-edro.

Las cuestiones más generales tratadas,en este primer capítulo, son la representación analítica de un poliedro convexo del espacio euclideano tridimensional y la representación de un poliedro convexo del espacio euclideano n-dimensional ; así como sendos criterios de convexidad de poliedros,en los respectivos espacios.

Los métodos empleados aquí han sido,hasta ahora,los de la geometría analítica típica y los del álgebra lineal correspondientes a la geometría del espacio euclideano n-dimensional.

En el capítulo primero,hemos determinado los poliedros convexos de los espacios de Hilbert,separables y no separables, deducido criterios de convexidad de los poliedros de estos espacios y obtenido las inecuaciones del poliedro convexo.

Estos problemas requerían la resolución previa de las cuestiones teóricas,de determinación explícita de la intersección de una suceción de hiperplanos,en un punto único,del espacio de hilbert separable y las condiciones de dicha intersección; así como la determinación del punto de intersección de un sistema infinito de hiperplanos,en el espacio de Hilbert no separable.

Se considera la figura particular del espacio de Hilbert general, que hemos denominado ortoedro del mismo,por clara motivación en el ortoedro del espacio ordinario.

En este capítulo segundo,se estudia el poliedro convexo de un espacio lineal general infinito-dimensional (real) ,lo cual supone la resolución previa,de la cuestión de la intersección de un sistema infinito de hiperplanos del espacio; resuelta la cual,se puede obtener un criterio de convexidad,para el poliedro definido por el citado sistema de hiperplanos y la representación de aquél por sus inecuaciones lineales.

Los métodos empleados en este capítulo son los de análisis funcional en los espacios hilbertianos y el álgebra lineal de un espacio lineal imfinito-dimensional y real.

En el capítulo segundo,se definen los polígonos "alabeados convexos" en el espacio euclideano tridimensional y en el espacio euclideano n-dimensional,en primer término; despues en los espacios de Hilbert separables e inseparables, y en los espacios lineales generales y reales.

Se establecen criterios de "convexidad" para los polígonos alabeados de estos espacios. Estos problemas,a su vez,generan y motivan la cuestión teórica de la determinación de un hiperplano, que contenga un sistema dado de puntos,cuyo número sea mínimo.

Para los espacios de Hilbert y para los espacios lineales infinito-dimensionales, se presenta la cuestión de la determinación de un hiperplano que contenga infinitos puntos; habiendo logrado la obtención de la ecuación explícita del hiperplano que pasa por infinitos puntos.

Los procedimentos empleados en el tercer capítulo, son los propios de la geometría analítica clásica y de la geometriá del espacio euclídeo n-dimensional; métodos de análisis funcional de los espacios de Hilbert y álgebra lineal de un espacio lineal infinito--dimensional.

Asimismo, en virtud de que los polígonos se definen por el conjunto bien-ordenado de sus vértices, se tiene que utilizar algún procedimiento de la aritmética transfinita.

En el capítulo tedcero se tratan los poliedros convexos y los polígonos "alabeados convexos" ; del espacio normado ℓ^1 , de sucesiones reales de serie absolutamente convergente y del espacio c_0 , de sucesiones reales infinitésimas.

Se establecen criterios de convexidad y "convexidad" , respectivamente, para los poliedros y polígonos alabeados, de los citados espacios ; lo cual supone la determinación del punto de intersección, en condiciones adecuadas, de una sucesión infinita de hiperplanos, y la determinación de la ecuación explícita de un hiperplano que contiene una cierta sucesión infinita de puntos.

La discusión de la última cuestión, en los espacios normados ℓ^1 y c_0 , nos ha conducido al estudio de matrices infinitas de $\aleph_0$ filas y $\aleph_0$ columnas, de números reales. En ciertas condiciones, que se analizan, las citadas matrices infinitas, permiten resolver las cuestiones teóricas motivadas, por los poliedros y polígonos de los mencionados espacios.

En toda la exposición, y siempre que nos ha sido posible, hemos expresado con la mayor brevedad y rigor, las conclusiones obtenidas; para ello, hemos utilizado la simbología propia de la Lógica Matemática, y, en particular, los cuantificadores universal y existencial.

A G R A D E C I M I E N T O S

Los debemos y manifestamos ;

Al prof. D. Pedro Abellanas; catedrático de la Facultad de Ciencias, de la Universidad Complutense de Madrid ; de quien fuí discípulo, por los años 60; y en quien pude admirar su magnífica labor docente y el estímulo con que acrecentaba las vocaciones matemáticas de sus discípulos

Al prof. D. Norberto Cuesta Dutari, catedrático de la Universidad de Salamanca, Facultad de Ciencias; a quien tuve el honor de conocer ya en edad muy temprana, al principio de mi bachillerato, en el año 50, en el Instituto N.E.M. "Fray Luis de León" de Salamanca, donde era catedrático; y desde entonces, a través de todo el bachillerato y hasta los cursos de doctorado, fuí discipulo suyo, como lo seré siempre. Su influencia, científica y humana, estimulante en mi carácter, es decisiva.

A María Victoria, mi esposa, por su comprensiva, callada y digna labor familiar; y su apoyo moral, sin los que no se hubiera concluido esta memoria.

BIBLIOGRAFIA

A) TRATADOS GENERALES

Abiam,A. The theory of sets and transfinite arithmetic. W.B. Saunders Company. Philadelphia, 1965.

Alexandroff-Hofp. Topologie. Springer. Berlin, 1935.

Barsov,A.S. ¿Qué es Programación Lineal?. Limusa. Mexico, 1976.

Berberian,S. Lectures in Functional Analysis and Operator Theory. Springer-Verlag. New York, 1974.

Borsuk,K. Multidimensional Analytic Theory. Polish Scientific Publishers. Warszawa, 1969.

Cuesta Dutari,N. Matemática del Orden. Revista de la Real Academia de Ciencias. Madrid, 1959.

Golstein,E ; Youdine,D. Problèmes particuliers de la Programmation linéaire. Mir. Moscou, 1973.

Grünbaum,B. Convex Polytopes. Interscience Publishers. London, 1967.

Kantorovich-Akilov. Functional Analysis in Normed Spaces. Pergamon Press. London, 1964.

Köthe,G. Topological Vector Spaces. Springer-Verlag. Berlin, 1969.

Riesz,F. Les systêmes d'équations linéaires à une infinité d'inconues. Paris, 1952.

Schreier-Sperner. Einführung in die analitische Geometrie und Algebra. Teubner. Leipzig, 1931.

Shilov,G. An introduction to the theory of linear spaces. Prentice-Hall. New Jersey, 1961.

Sierpiński,W. Cardinal and Ordinal Numbers. Polish Scientific Publishers. Warszawa, 1965.

Steinitz,E-Rademacher,H. Vorlesungen über die Theorie der Polyeder. Springer. Berlin, 1934.

Valentine,F.A. Convex sets. Mc Graw-Hill. New York, 1964.

Vulikh,B. Introduction to Functional Analysis. Pergamon Press. London, 1963.

B) MONOGRAFIAS Y ARTICULOS

Aberth,O. An inequality for convex polyhedra. J.London Math.Soc. 2. 6 (1973), 382-384.

Alexandrov,A.D. Convex Polyhedra. Mathematische Monographien, VIII. Akademie-Verlag, Berlin (1958). M R 12, 732 ; M R 19, 1192.

Altmat,E. Some theorems on convex polygons. Canadian Math. Bull. 15 (1972),329-340. Zblatt 252, 350.

Andreev,E.M. über konvexe Polyeder in Lobacheskischen Raümen. Mat.Sbornik.Ser. 81 ,123 (1970), 445-478. Zblatt 194, 232.

Bair,J. Une étude des sommands d'un polyèdre convexe. Bull.Soc. roy.Sci. Liège 45 (1976), 307-311. Zblatt 345 , 307.

Bair,J. ; Fourneau,R. Caractérisation de polyèdres convexes et systèmes d'inéquations linéaires. Bull.Soc.roy.Sci. Liège 45 (1976), 175-182. Zblatt 337, 309.

Balinski,M. On the graph structure of convex polyhedra in n-space. Pacific J.Math. 11 (1961), 431-434.

------- An algorithm for finding all vertices of convex polyhedral sets. J.Soc.Ind.Appl.Math. 9 (1961), 72-88.

Barnette,D. Dense sets of polytopes in P^3. Aequationes math. 7 (1971), 28-35. Zblatt 235, 335.

Bartos,P. Contribution to the geometry of convex polyhedra in n-dimensional euclidean space. Casopis Rest.Mat. 91 (1966), 337-343. M R 34, 623.

Bastiani,A. Cones convexes et pyramides convexes. Ann.Inst. Fourier. Grenoble 9 (1959), 249-292.

Berg,Ch. Abstrct Steiner points for convex polytopes. J. Londom Math.Soc. II Ser. 4 (1971), 176-180. Zblatt 222, 325.

Beynon,W.M. On rational subdivisons of polyhedra with rational vertices. Canadian J. Math. 29 (1977), 238-242. Zblatt 343, 309.

Blind,G. Zerlegung eines konvexes Polygons in konvexe Polygone. Elemente Math. 31 (1976), 129-135. Zblatt 343, 309.

Bonnensen,T. ; Fenchel,W. Theie der konvexen Körper. Ergeb. Math. Grenzg.Vol.3. No.1. Berlin, 1934.

Bonnice,W.E. On convex polygons determined by a planar finite set. Amer.Math.Monthly 81 (1974), 749-752. Zblatt 295, 300.

Burger,E. über homogene lineare Ungleichungssysteme. Z.Angew. Math.Mech. 36 (1956), 135-139. M R 18, 417.

Bolker,,E. Centrally symmetric polytopes. Proc. Twelth bien. Sem.Canadian math. Congr. (1969), 255-264. Zblatt 238, 353.

Cantwell,,J. Convexity in straight line spaces. Proc.Conf. Convexity combinator.Geometry Univ.Oklahoma (1971) 65-102. Zblatt 248, 320.

Chen,S. Convex polytopes in Riemmanian manifolds. Ravista Un. mat.Argentina 26 (1972) ,73-76. Zblatt 261, 293.

Cheng,M.C. Inequalities on a convex polytope. Nanta Math. 6 Nr. 1 (1973), 3-7. Zblatt 296

Chernikov,S.N. Algebraic theory of linear inequalities. Amer. Math.Soc.Trans. Series 2. Vol. 69. (1968), 147-203.

--------- Systems of linear inequalities. Amer.Math.Soc.Trans. Series 2. Vol.26 (1963), 11-86.

Cottle,R.; Veinott,A. Polyhedral sets having a least element. Math. Programming 3 (1972), 238-249. M R 51 No. 6 (1976), 1945.

Derry,D. The convex hulls of the vertices of a polygon of order n. Pacific J.Math. 38 (1971) ,583-596. M R 47 No. 4, 997.

Devidé,V. Über gewisse Klassen vom Simplexen. Rad.Juyoslav.Akad. Znanost 370.odj.mat.fiz.tehn.Nauke 14,21-37 (1975). Zblatt 318, 355.

Eckhoff,J. Radonpartitionen und konvexe Polyeder. J.Reine Angew. Math. 277, (1975), 120-129. M R 52 No. 6, 2136.

---------- On a class on convex polytopes. Israel J.Math. 23 (1976), 332-336. Zblatt 333, 284.

Ewald,G. ; Schulz,Ch. Kombinatorische Klassifikation symetrischer Polytope. Abh.math.Sem.Univ. Hamburg 45 (1976), 191-206.Zblatt 325, 325.

Ewald,G. ; Voss,K. Konvexe Polytope mit Symetriegruppe. Comentarii math.Helvet. 48 (1973), 137-150. Zblett 274, 313.

Farkas,J. Über die Theorie der einfachen Ungleichungen.J.Reine Angew. Math. 124 (1901), 1-24.

Fhilip,J. Plane sections of simplices. Math.Programming 3 (1972), 312-325. M R 47 No. 5, 1323.

Fisher,J.C. An existence theorem for simple convex polyhedra. Discrete Math. 7 (1974), 75-97. M R 48 No. 6 , 2119. Zblatt 271, 307.

Freeman,J.W. The numbers of regions determined by a convex polygon. Mat. Mag. 49 (1976), 23-25. Zblatt 325, 326.

Fulkerson,D.R. Blocking polyhedra. Graph Theory Appl.Proc. advanced Sem. Wisconsin, Madison 1969 (1970), 93-112. Zblett 217, 185.

Gale, D. On convex polyhedra. Abstract 794. Bull. Amer.Math. Soc. 61 (1955), 556.

Gale,D. ; Klee,V. Convex functions on convex polytopes.Proc. Amer.Math.Soc. 19 (1968), 867-873. M R 37 II , 1078.

Gallivan,S. ; Zaks,J. Replacing convex sets by polytopes. Proc. Amer.Math.Soc. 50 (1975), 351-357. Zblatt 317 I, 330.

Ger,R. n-Convex Functions in Linear Spaces. Aequat.Math. 10 (1974), 172-176.

Goldman,A.J. Resolution and separation theorems for polyhedral convex sets. In Linear inequalities and related systems, 41-51. M R 19, 621.

Goldman,A.J. ; Tucker,A.W. Polyhedral convex cones. In Linear inequalities and related systems. 19-40.

Gorelik,E.M. Über konvexe Strahlen im R^n. Uspehi.Mat.Nauk 29, Nr. 3 (1974), 193-194. Zblatt 299 , 332.

Gruber,P. über den Durchschnitt einer abnemende Folge von Parallelepipedem. Elemente Math. 32 (1977), 13-15. Zblatt 342, 288.

Gruber,P. Zur Charakterisierung konvexer Körper. Math. Ann. 181 (1969), 189-200. M R 39 II , 1122.

Grünbaum,B. Arrangements of hyperplanes. Proc. 2 nd Louisiana Conf. Combin. Baton Rouge (1971), 41-106. Zblatt 289, 333.

Guggenheimer,H. ; Lutwak,E. A characterization of the n-dimensional paralelotope. Amer.Math. Monthly 83 (1976), 475-478. Zblatt 331, 305.

Hadwiger,H. Notiz zur Eulerschen Charakteristik offener und abgescholosserner euklidischer Polyeder. Studia Sci. Math.Hungar. 4 (1969), 385-387. M R 40 I , 346.

Harazischvili,A.B Charakteritishe Eigenschften des Parallelepipeds. Soobsscenija Akad. Nauk Gruzin. SSR 72 (1973), 17-19. Zblatt 274, 312.

Hertel,E. Zur translativen Zerlegungsgleichheit m-dimensionaler Polyeder. Publ. math. Debrecen. 20 (1973), 133-139. Zblatt 277, 301.

Hoffman, A.J. On the convering of polyhedra by polyhedra. Proc. Amer.Math.Soc. 23 (1969), 123-126. MR 40 I, 157.

Höllein,H. Polytope im lokalconvexen Raümen. Math. Annalen 229 I (1977), 64-85.

Jessen,B. Zur Algebra der Polytope. Nachr.Akad.Wiss.Göttingen, II math.-phys. KI. (1972), 47-53. Zblatt 262, 319.

Jeroslow,R.G. On the defining sets of vertices of the hypercube by linear inequalities. Discrete Math. 11 (1975), 119-124. Zblatt 297, 321.

Jucovich,E. Zur kombinatosche Geometrie der Polyeder. Pokraki Mat.Fyz. Astron. (1972), 24-29. Zblatt 229, 347.

Klee,V. Some characterizations of convex polyhedra. Acta Math. 102 (1959), 79-107.

---------- Convex polytopes and linear programming. Proc. IBM Scientific Computing Symposium on Combinatorial Problems. (1966), 123-158.

---------- Polyhedral sections on convex bodies. Acta Math. 103 (1960), 244-267.

---------- Polytope pairs and their relationship to linear programming. Acta Math. 133 (1974), 1-25. MR 49 No. 5, 1788.

---------- Convex polyhedra and mathematical programming. Proc. int.Congr.Math. Vancouver 1974 vol, 1 (1975), 485-490. Zblatt 334, 315.

Kirsch, A. Konvexe Figuren als Durchschnitte abzählbar vieler Halbräume. Arch.Math. 18 (1967), 313-319. M R 36 I , 172.

Kömhoff,M. ; Shephard,G.C. Approximations problems for combinatorial isomorphism classes of convex popytopes. Geometriae dedicata 3 (1974), 139-153. Zblatt 287, 309.

Lyusternik, L.A. Convex figures and polyhedra. Dover Publications (1963). M R 28 , 862.

Manara, C.F. ; Nicola,P.C. Sui poliedri convessi. Accad. Naz. Sci. Arti Modena Atti Mem.(6) 8 (1966),89-100. M R 37 I, 393.

Manas, M. Methods for finding all vertices of a convex polyhedron. Ekonom.Mat. Obzor 5 (1969), 325-342. M R 40 I , 157.

Martinova, M.K. Über eine Verallgemeinerung des Begriffes "konvexe Figur". God.viss,teh.uchebn. Zaved.Mar. 6 (1970) Nr. 2, 165-180. Zblatt 319, 341.

Maserik, P.H. Convex polytopes in linear spaces. Illinois J.Math. 9 (1965), 623-635.

----------- Dual convex polytopes im Banach spaces. J.Math.Anal. Appl. 19 (1967), 263-273. M R 36 II , 1126.

McMullen, P. Representations of polytopes and polyhedral sets. Geometriae dedicata 2 (1973), 83-99. M R 48 No. 3, 855. Zblatt 273, 296.

----------- Metrical and combinatorial properties of convex polytopes. Proc.int.Math.Congr. Vancouver 1974. Vol. I (1975). Zblatt 334, 315.

Medjanik, A.I. Certain combinatorial properties of primitive convex polyhedra. Ukrain. Geometr. Sb. Vyp 12 (1972), 94-102. M R 48 No. 2 , 506. Zblatt 325, 326.

----------- Notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz eines primitiven konvexen Polyeders mit einer gegebenen Anzahl n-eckiger Grenzflächen. Ukrain.geom.Sbornik 11 (1971), 63-66. Zblatt 243, 344.

Meyer, W. Indecomposable polytopes. Calgary internat. Conf. comb. Struct. Appl. Calgary 1969 (1970), 271-272. Zblatt 248, 323.

Mitchell, B.F. ; Demjanov, V.F. Ermittlung des dem Koordinaten--Ursprung nächsten Punktes eines Polyeders. Vestnik Leningrad Univer. Nr. 19 (1971). Zblatt 231 , 310.

Sz- Nagy. Sur un problème pour les polyèdres convexes dans l'espace n-dimensionel. Bull. Soc. Math. France, 69 (1941), 3-4.

Naumann, H. Beliebige konvexe Polytope als Schnitte und Projektion höherdimensionaler Würfel, Simplices und Masspolytope. Mathematische Zeitschrift 65 (1956), 91-103.

Peterson, B. Convexity of polyhedra. Illinois J. Math. 11 (1967), 330-335. M R 35 , 167.

Phadke, B.B. Polyedron inequality and strict convexity. Pacific J. Math. 30 (1969). M R 40 II , 896.

Pogorelov, A.V. A general existence theorem for closed convex polyhedra. Dokl. Akad. Nauk SSSR 174 (1967), 526-528. M R 35 II , 1113.

Rademacher, H. On the number of certain types of polyhedra. Illinois J. Math. 9 (1965), 361-380.

Remez, E. ; Steinberg.A.S. On a theorem on convex polyhedra in connection with the question of finding the totality of solutions of systems of linear inequalities. Ukrain. Mat. Z. 19 (1967), nº 2, 74-89. M R 35, 650.

Rieger, G.J. Konvexe Polygone und rationale Fortsetzung von Funktionen. Math. Nachr. 53, (1972) , 13-31. M R 47 No. 6 , 1657.

Riives,K. Über die affine Klassifizierung und über Charakteristiken konvexer Polyeder im Euklidischen Raum R_n. Uchënye Zapiski Tartu.Univer. 305, Trudy Mat. Meh. 12, 116-126 (1972). Zblatt 323, 317.

Schneider, R. Über die Durchschnitte translationgleicher konvexen Körper und eine Klsse konvexer Polyeder. Abhanl. Mathe. 30 (1967), 118-128.

Schönwald, Kombinatorische und geometrische Darstellung von gewissen Verallgemeinerungen zykischer Polytope. Arch. der Math. 28 (1977), 312-317. Zblatt 352, 291.

Scott. P.R. On convex lattice polygons. Bull.Austral.Math.Soc. 15 (1976), 395-399. Zblatt 333, 284.

Senator, K. Freely solvable systems of linear inequalities. Studia Math. 57 (1976), 191-198. Zblatt 351 (1978), 306.

Shachtman, R. Generation of the admissible boundary of a convex polytope. Operations Res. 22 (1974), 151-159. Zblatt 277, 302.

Shephard, G.C. Sections and proyections of convex polytopes. Mathematika 19 (1972), 144-162. M R No.3 , 47 ; 725. Zblatt 258,308.

--------- Convex polytopes with convex nets. Math. Proc.Philos. Soc.Cambridge 78 (1975), No. 3, 389-403. M R 52 No. 5, 2136.

--------- Polyhedral diagrams for sections of the non-negative orthant. Mathematika, London 18 (1971), 255-263. Zblatt 231, 309.

Soltan, P.S. On the covering of polyhedra by homotetic polyhedra. Doklady Akad. Nauk SSSR 202 (1972), 541-544. Zblatt 248, 320.

Tucker,A.W. Linear inequalities and convex polyhedral sets. Proceedings of the Second Symposium in Linear Programming. Washington D.C. (1955) 569-602. National Bureau of Standards,Washington. MR 17, 778.

Walkup, D.W. ; Wets, J.B. A Lipschitziam characterization of convex polyhedra. Proc.Amer.Math.Soc. 23 (1969), 167-173. M R 39 II , 1355.

Weyl, H. Elementare Theorie der konvexen Polyeder. Comment.Math. Helvet. 7 (1935), 290-306.

Yaglom, I.M. ; Boltyanskii, V.G. Convex figures. Moscow 1951 ((German translation, Berlin 1956 ; English translation, New York, 1961).

Zamfirescu, T. Propriétés geométriques des ensembles simplicialment convexes. Atti Accad. Sci. Bologna Rend. XII. Ser. 10 (1972), Nr. 1 73-77. Zblatt 311, 321.

----------- Simplicial convexity in vector spaces. Bull. Math. Soc. Sci. Math.Phys. Roumaine 9 (57), (1965) 137-149. M R 35 I , 168.

----------- Two characterizations of simplexes. Gaz. Mat. Ser. A 71 (1968) , 422-424. M R 38 I , 302.

ADDENDA

Hadwiger. Altes und neues über konvex Körper. Birkhäuses. Suiza,1955.

Marti. Convexe Analysis. Birkhäuses. Suiza,1977.

Jameson,G.J.O. Topology and Normed Spaces. Chapman and Hall. London, 1974.

Pflaumann,E. - Unger,H. Análisis funcional. Alhambra. Madrid,1974.

Prenowitz - Jantosciak. Joint Geometries : A theory of convex sets and linear Geometry. Springer. New York, 1979.

= I N D I C E =

CAPITULO CERO

CAPITULO PRIMERO

ESTUDIO DE LOS POLIEDROS CONVEXOS EN LOS ESPACIOS DE HILBERT (SEPARABLES Y NO SEPARABLES) Y EN LOS ESPACIOS LINEALES REALES GENERALES INFINITO-DIMENSIONALES :
CRITERIOS DE CONVEXIDAD DE LOS POLIEDROS EN ESTOS ESPACIOS.

CAPITULO SEGUNDO

ESTUDIO DE LOS POLIGONOS ALABEADOS "CONVEXOS" EN EL ESPACIO EUCLIDEO , EN LOS ESPACIO EUCLIDEOS n-DIMENSIONALES , EN LOS ESPACIOS DE HILBERT (SEPARABLES O NO) Y EN LOS ESPACIOS LINEALES REALES INFINITO-DIMENSIONALES :
CRITERIOS DE "CONVEXIDAD" DE LOS POLIGONOS ALABEADOS DE ESTOS ESPACIOS.

CAPITULO TERCERO

C O N C L U S I O N E S

C O N C L U S I O N E S

CAPITULO CERO

1. Representación analítica del cuadrilátero convexo cuyos vértices tienen coordenadas cartesianas

(x_1, y_1) ; (x_2, y_2) ; (x_3, y_3) ; (x_4, y_4)

$$\begin{vmatrix} x_i & y_i & 1 \\ x_{i+1} & y_{i+1} & 1 \\ x_{i+2} & y_{i+2} & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_i & y_i & 1 \\ x_{i+1} & y_{i+1} & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} > 0 \quad , \quad i = 1,2,3,$$

donde los índices mayores que 4, se entienden reducidos a su resto, módulo 4.

2. Representación analítica de un n-gono plano convexo, de vértices con coordenadas cartesianas

(x_1, y_1) ; (x_2, y_2) ; ... ; (x_n, y_n)

$$\begin{vmatrix} x_i & y_i & 1 \\ x_{i+1} & y_{i+1} & 1 \\ x_{i+2} & y_{i+2} & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_i & y_i & 1 \\ x_{i+1} & y_{i+1} & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} > 0 \quad ; \quad i = 1,2,..,n$$

donde los índices mayores que n, han de entenderse como restos módulo n.

3 . Representación analítica de un tetraedro cuyos vértices tienen por coordenadas cartesianas

(x_1, y_1, z_1) ; (x_2, y_2, z_2) ; (x_3, y_3, z_3) ; (x_4, y_4, z_4)

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x & y & z & 1 \end{vmatrix} > 0$$

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} > 0$$

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x & y & z & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} > 0$$

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x & y & z & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} > 0$$

Representación analítica de un $(n+1)$-edro del espacio euclídeo n-dimensional, cuyos vértices son

$P_o = (p_{o1}, p_{o2}, \ldots, p_{on})$; $P_1 = (p_{11}, p_{12}, \ldots, p_{1n})$; .... ;

$P_n = (p_{n1}, p_{n2}, \ldots, p_{nn})$.

$$D(P_o, P_1, \ldots, P_{n-1}, P_n) \cdot D(P_o, P_1, \ldots, P_{n-1}, X) > 0$$

$$D(P_o, P_1, \ldots, P_{n-1}, P_n) \cdot D(P_o, P_1, \ldots, X , P_n) > 0$$

....

$$D(P_o, P_1, \ldots, P_{n-1}, P_n) \cdot D(P_o, X, \ldots, P_{n-1}, P_n) > 0$$

$$D(P_o, P_1, \ldots, P_{n-1}, P_n) \cdot D(X, P_1, \ldots, P_{n-1}, P_n) > 0$$

siendo aquí

$$D(X; P_1, P_2, \ldots, P_n) \equiv \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n & 1 \\ p_{11} & p_{12} & p_{13} & \cdots & p_{1n} & 1 \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & \cdots & p_{2n} & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ p_{n1} & p_{n2} & p_{n3} & \cdots & p_{nn} & 1 \end{vmatrix}$$

4. Representación analítica del tetraedro, en el espacio, cuyas caras (prolongadas) tienen por ecuaciones cartesianas

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0$$

$$a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0$$

$$a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3 = 0$$

$$a_4 x + b_4 y + c_4 z + d_4 = 0 \quad ,$$

$$\left(\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix} \right) (a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1) <$$

$$\left(\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix} \right) (a_2 x + b_2 y + c_2 z + c_2) > 0$$

$$\left(\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_4 & b_4 & c_4 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \right) (a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3) <$$

$$\left(\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \right) (a_4 x + b_4 y + c_4 z + d_4) <$$

5. Representación analítica de un poliedro, en el espacio, los planos de cuyas caras tienen por ecuaciones cartesiannas

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0$$

$$a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0$$

$$a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3 = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_m x + b_m y + c_m z + d_m = 0$$

$$a_{m+1} x + b_{m+1} y + c_{m+1} z + d_{m+1} = 0 \qquad , \qquad (m \geqslant 3)$$

$$\left(\begin{vmatrix} a_r & b_r & c_r & d_r \\ a_{r'} & b_{r'} & c_{r'} & d_{r'} \\ a_{r''} & b_{r''} & c_{r''} & d_{r''} \\ a_{r'''} & b_{r'''} & c_{r'''} & d_{r'''} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_{r'} & b_{r'} & c_{r'} \\ a_{r''} & b_{r''} & c_{r''} \\ a_{r'''} & b_{r'''} & c_{r'''} \end{vmatrix} \right) \left(a_r x + b_r y + c_r z + d_r \right) < 0$$

donde $r = 1,2,\ldots,m+1$, los índices r' , r'' , r''' se han elegido para que no hagan nulo el fector constante de la inecuación; por lo cual se pueden definir varios poliedros, en general, con planos prefijados para las caras.

6. Representación analítica de un poliedro convexo, del espacio euclídeo n-dimensional, definido por los $m+1$ hiperplanos $(m \geqslant n)$ de ecuaciones respectivas

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + \ldots + a_{1n} x_n + b_1 = 0$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 + \ldots + a_{2n} x_n + b_2 = 0$$

$$a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 + \ldots + a_{3n} x_n + b_3 = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n + b_m = 0$$

$$a_{m+1,1}x_1 + a_{m+1,2}x_2 + a_{m+1,3}x_3 + \dots + a_{m+1,n}x_n + b_{m+1} = 0 ,$$

$$(-1)^n \frac{D(A'_{i}, A'_{i_2}, \dots, A'_{i_n}, A'_{i_{n+1}})}{D(A_{i_2}, A_{i_3}, \dots, A_{i_n}, A_{i_{n+1}})} \cdot (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n + b_i) > 0$$

$$i = 1,2,\dots,m,m+1 ,$$

siendo aquí

$$D(A_1, A_2, A_3, \dots, A_n) \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$D(A'_1, A'_2, \dots, A'_n, A'_{n+1}) \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} & b_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} & b_n \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & a_{n+1,3} & \dots & a_{n+1,n} & b_{n+1} \end{vmatrix} .$$

CAPITULO PRIMERO

7. Determinación de un punto en el espacio de Hilbert separable, por intersección de la sucesión de hiperplanos

$$(y_1,y) = \gamma_1 \;,\; (y_2,y) = \gamma_2 \;,\; (y_3,y) = \gamma_3 \;,\ldots,\; (y_n,y) = \gamma_n \;,\ldots$$

cuyos vectores direccionales, son densos en el espacio.

1º En el caso particular, en que la sucesión de vedtores $\{y_n\}$ constituye una base del espacio de hilbert, el punto de intersección de la citada sucesión de hiperplanos, está dado por la serie de Fourier

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \, y_n$$

pero, simpre que las constantes γ_n, verifiquen la condición

$$\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^2 < +\infty .$$

2º En el caso general, la citada sucesión de hiperplanos, se corta en un solo punto del espacio de Hilbert, cuando se verifica la condición :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\begin{vmatrix} \lambda_1^1 & 0 & 0 & \cdots & \gamma_1 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & 0 & \cdots & \gamma_2 \\ \lambda_1^3 & \lambda_2^3 & \lambda_3^3 & \cdots & \gamma_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_1^n & \lambda_2^n & \lambda_3^n & \cdots & \gamma_n \end{vmatrix}^2}{(\lambda_1^1 \, \lambda_2^2 \, \lambda_3^3 \cdots \lambda_n^n)^2} < +\infty$$

siendo la sucesión infinita de vectores $\{y_n\}$, linealmente independiente; y las constantes λ_k^n, tienen los valores

$$\lambda_k^n = \frac{\begin{vmatrix} (y_1,y_1) & (y_1,y_2) & \cdots & (y_1,y_{k-1}) & (y_1,y_n) \\ (y_2,y_1) & (y_2,y_2) & \cdots & (y_2,y_{k-1}) & (y_2,y_n) \\ (y_3,y_1) & (y_3,y_2) & \cdots & (y_3,y_{k-1}) & (y_3,y_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (y_k,y_1) & (y_k,y_2) & \cdots & (y_k,y_{k-1}) & (y_k,y_n) \end{vmatrix}}{\sqrt{\Delta_k \Delta_{k-1}}} ;$$

$k = 1,2,\ldots,n$; $n = 1,2,3,\ldots$;

y Δ_k es el determinante de Gram, relativo al sistema de vedtores linealmente independientes $y_1, y_2, \ldots, y_k$ . .

El punto de intersección x de la sucesión infinita de hiperplanos dados, viene dado por la serie de Fourier

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\begin{vmatrix} \lambda_1^1 & 0 & 0 & \cdots & Y_1 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & 0 & \cdots & Y_2 \\ \lambda_1^3 & \lambda_2^3 & \lambda_3^3 & \cdots & Y_3 \\ - & - & - & - & - \\ \lambda_1^n & \lambda_2^n & \lambda_3^n & \cdots & Y_n \end{vmatrix}}{\lambda_1^1 \lambda_2^2 \lambda_3^3 \cdots \lambda_n^n} x_n ,$$

donde $\{x_n\}$ es la base completa del espacio de Hilbert, procedente de la Ortonormalización del sistema de vectores $\{y_n\}$.

8. Inecuaciones de un poliedro convexo, en el espacio de Hilbert separable, definido por el conjunto infinito de hiperplanos, de ecuaciones

$$(y_i, x) = \gamma_i \quad , \quad i \in I \quad , \quad |I| \geq \aleph_0 \quad ;$$

una vez verificado y definido, con el criterio expuesto, la convexidad del poliedro, las inecuaciones de éste son

$$\left[(y_k, x_k) - \gamma_k\right]\left[(y_k, y) - \gamma_k\right] > 0 \quad , \quad k \in I \; .$$

10. Determinación del punto de intersección de un sistema de hiperplanos, en el espacio de Hilbert general, cuyos vectores direccionales forman una base algébrica del espacio H, y cuyas ecuaciones sean

$$(a_i, x) = \gamma_i \quad , \quad i \in I \quad , \quad |I| = (\dim H)^{\aleph_0} \; .$$

Denotamos con $\{a_i\}$, $(i \in I)$ la base algébrica fija del espacio; y con $a_{ij} = (a_i, a_j)$.

Las condiciones necesarias y suficientes, para que el sistema infinito de planos dados, se corte en un punto único, son

$$\gamma_i = - \begin{vmatrix} 0 & a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{in} \\ \gamma_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ \gamma_2 & a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \gamma_3 & a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \gamma_n & a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad i \in I - \{1, 2, 3, \ldots, n\}$$

y el punto de intersección de la citada sucesión infinita de hiperplanos, es

$$x = - \begin{vmatrix} 0 & a_1 & a_2 & a_3 \cdots & a_n \\ \gamma_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \cdots & a_{1n} \\ \gamma_2 & a_{21} & a_{22} & a_{23} \cdots & a_{2n} \\ \gamma_3 & a_{31} & a_{32} & a_{33} \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \gamma_n & a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

11. Inecuaciones de un poliedro convexo, definido, en el espacio de Hilbert general H, por el sistema de hiperplanos, de ecuaciones

$$(a_i, x) = \gamma_i \quad , \quad i \in A \quad , \quad |A| \geqslant \dim (H)^{\aleph_0} .$$

Una vez verificado el criterio de convexidad del poliedro definido por el sistema citado de hiperplanos, cuya expresión simbólica y abreviada es

$$\bigwedge_{k \in A} \left((a_k, x_k) - \gamma_k \neq 0 \right) \quad ,$$

las inecuaciones del poliedro, son

$$\left[(a_k, x_k) - \gamma_k \right] \left[(a_k, x) - \gamma_k \right] > 0 \quad , \quad k \in A .$$

12. Determinación del punto de intersección, en un espacio lineal E real infinito-dimensional, de un sistema de hiperplanos, cuyas ecuaciones sean

$$f_i(x) = \gamma_i \quad , \quad i \in I \quad , \quad |I| = \dim (E) \geqslant \aleph_0 .$$

Denotando con $\{e_i\}$, $i \in I$, una base fija del espacio lineal, y con a_{ij} los valores que toman los funcionales lineales f_i en la base $\{e_j\}$:

$$f_i(e_j) = a_{ij} \ ; \ i \in I \ , \ j \in I \ ; \ |I| = \dim(E) \ ,$$

las condiciones precisas para que el sistema de hiperplanos dados, se corten en un punto único, son

$$-\begin{vmatrix} 0 & a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} \cdots a_{in} \\ \gamma_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \cdots a_{1n} \\ \gamma_2 & a_{21} & a_{22} & a_{23} \cdots a_{2n} \\ \gamma_3 & a_{31} & a_{32} & a_{33} \cdots a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \gamma_n & a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \cdots a_{nn} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \cdots a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \cdots a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$i \in I - \{1,2,3,\ldots,n\} \ ,$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \cdots a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \cdots a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \cdots a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0 \ ,$$

y el punto de intersección, de la citada familia de hiperplanos dados, del espacio lineal real general E , infinito-dimensional es, entonces

$$
- \begin{vmatrix} 0 & e_1 & e_2 & e_3 \cdots a_m \\ \gamma_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \cdots a_{1m} \\ \gamma_2 & a_{21} & a_{22} & a_{23} \cdots a_{2m} \\ \gamma_3 & a_{31} & a_{32} & a_{33} \cdots a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \gamma_m & a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \cdots a_{nn} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \cdots a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \cdots a_{2m} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \cdots a_{3m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{n2} & a_{n3} \cdots a_{nn} \end{vmatrix} ;
$$

13 . Inecuaciones de un poliedro convexo, en el espacio lineal real infinito-dimensional E , definido por el sistema de hiperplanos, de ecuaciones

$$f_i(x) = \gamma_i \quad , \quad i \in A \quad , \quad |A| \geqslant \dim(E) \quad .$$

Una vez verificado el criterio de convexidad, del poliedro definido por el citado sistema de hiperplanos, criterio que consiste en la condición, expresada abreviadamente

$$\bigwedge_{k \in A} (f_k(x_k) - \gamma_k \neq 0) \quad ;$$

las inecuaciones del poliedro convexo, así definido, son

$$\left[f_k(x_k) - \gamma_k \right] \left[f_k(x) - \gamma_k \right] \geqslant 0 \quad ; \quad k \in A ,$$

incluyendo el contorno del poliedro.

CAPITULO SEGUNDO

15 . Criterio de "convexidad" para un polígono alabeado, del espacio ordinario euclídeo, definido por el conjunto ordenado de sus vértices, cuyas coordenadas cartesianas son

(x_1, y_1, z_1) ; (x_2, y_2, z_2) ; (x_3, y_3, z_4) ; ... ; (x_n, y_n, z_n) , $n > 3$

Entendemos por polígono alabeado del espacio, cualquier polígono que no tenga todos sus vértices, en el mismo plano.

Entre los polígonos alabeados, distinguimos los alabeados "convexos", que son aquéllos tales que los planos que pasan por tres vértices consecutivos cualesquiera, dejan los restantes en el mismo semiespacio, con respecto al mencionado plano.

Un criterio analítico para recononer la "convexidad" de un polígono alabeado es el siguiente :

Las sucesiones finitas de números reales

$$\begin{vmatrix} x_i & y_i & z_i & 1 \\ x_{i+1} & y_{i+1} & z_{i+1} & 1 \\ x_{i+2} & y_{i+2} & z_{i+2} & 1 \\ x_{i+k} & y_{i+k} & z_{i+k} & 1 \end{vmatrix} \quad ; \quad i = 1, 2, \ldots, n \quad ; \quad k = 3, 4, \ldots, (n+1)$$

para cada i $(= 1, 2, \ldots, m)$ contienen un término no nulo, al menos; y todos lo s que no sean nulos, tienen signo constante.

Los números $i + k$ hay que interpretarlos como su resto módulo m, en cuanto exceden a $\underline{n}$, siendo $k = 1, 2, \ldots, (n-1)$.

16. Criterio de "convexidad" para un polígono alabeado, del espacio euclídeo n-dimensional, definido por la sucesión finita y ordenada de sus vértices

$A_1 = (a_{11}, a_{12}, a_{13}, \ldots, a_{1n})$; $A_2 = (a_{21}, a_{22}, a_{23}, \ldots, a_{2n})$

$A_3 = (a_{31}, a_{32}, a_{33}, \ldots, a_{3n})$; ... ; $A_m = (a_{m1}, a_{m2}, a_{m3}, \ldots, a_{mn})$; $m >$

El polígono $A_1\ A_2\ A_3\ \ldots\ A_m$ es alabeado convexo, cuando las sucesiones

$$D(A_i\ ,\ A_{i+1}\ ,\ A_{i+2}\ ,\ \ldots\ ,\ A_{i+n-1}\ ,\ A_{i+k}\ ) \quad ; \quad k = n, n+1, \ldots, m-1 \quad ;$$

son de signo constante, para dada fijado $i = 1, 2, \ldots, m$. Y siendo no todos los términos nulos, de cada una de dichas sucesiones, para i fijo.

Además, aquí es

$$D(A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n, X) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & 1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & 1 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n & 1 \end{vmatrix} .$$

<u>17</u>. Ecuación explícita del hiperplano, en el espacio de Hilbert separable, que pasa por el punto b , y es paralelo al subespacio maximal cerrado $\bar{L}\ (\ a_1\ ,\ a_2\ ,\ a_3\ , \ldots,\ a_n\ ,\ \ldots\ )$, que genera la sucesión de vectores linealmente independientes

$$a_1\ ,\ a_2\ ,\ a_3\ ,\ \ldots\ ,\ a_n\ ,\ \ldots$$

⟶

$$\left[e - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\begin{vmatrix} (a_1,a_1) & (a_1,a_2) & \cdots & (a_1,a_{n-1}) & (a_1,e) \\ (a_3,a_1) & (a_3,a_2) & \cdots & (a_2,a_{n-1}) & (a_2,e) \\ (a_3,a_1) & (a_3,a_2) & \cdots & (a_3,a_{n-1}) & (a_3,e) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (a_n,a_1) & (a_n,a_2) & \cdots & (a_n,a_{n-1}) & (a_n,e) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} (a_1,a_1) & (a_1,a_2) & \cdots & (a_1,a_{n-1}) & a_1 \\ (a_2,a_1) & (a_2,a_2) & \cdots & (a_2,a_{n-1}) & a_2 \\ (a_3,a_1) & (a_3,a_2) & \cdots & (a_3,a_{n-1}) & a_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (a_n,a_1) & (a_n,a_2) & \cdots & (a_n,a_{n-1}) & a_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (a_1,a_1) & (a_1,a_2) & \cdots & (a_1,a_{n-1}) & (a_1,a_n) \\ (a_2,a_1) & (a_2,a_2) & \cdots & (a_2,a_{n-1}) & (a_2,a_n) \\ (a_3,a_1) & (a_3,a_2) & \cdots & (a_3,a_{n-1}) & (a_3,a_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (a_n,a_1) & (a_n,a_2) & \cdots & (a_n,a_{n-1}) & (a_n,a_n) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} (a_1,a_1) & (a_1,a_2) & \cdots & (a_1,a_{n-1}) \\ (a_2,a_1) & (a_2,a_2) & \cdots & (a_2,a_{n-1}) \\ (a_3,a_1) & (a_3,a_2) & \cdots & (a_3,a_{n-1}) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (a_{n-1},a_1) & (a_{n-1},a_2) & \cdots & (a_{n-1},a_{n-1}) \end{vmatrix}} \right] \cdot (x-b)$$

en donde $\qquad e \notin \overline{L}\,(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$

18. Criterio para que un polígono sea alabeado "convexo", en el espacio de Hilbert separable, definido por el conjunto infinito y bien-ordenado de vértices, de tipo ordinal $\mu + 1$

$$\{a_i\} \quad , \quad 0 < i \leq \mu \; .$$

Con las hipótesis especificadas, en la exposición, la condición de polígono alabeado, es

$$\bigvee_{\omega < i \leq \mu} \left((e_0 , a_i - a_\omega) \neq 0 \right) \qquad ;$$

y la condición para que el polígono, ya alabeado, sea convexo, es

$$\bigwedge_{\xi \leq \mu} \left(\left[\bigwedge_{0<i\leq\mu} \left((e_{0\xi} , a_i - a_{\xi+\omega}) \geq 0 \right) \right] \vee \left[\bigwedge_{0<i\leq\mu} \left((e_{0\xi} , a_i - a_{\xi+\omega}) \leq 0 \right) \right] \right)$$

19. Ecuación del hiperplano, en el espacio de Hilbert general, que pasa por el origen y el sistema de vectores $\{e_i\}$, $i \in I$; que generan el subespacio lineal maximal cerrado $L(e_i)$, $i \in I$ y forman una base ortonormal del mismo

$$\left(e - \sum_{i \in I} (e, e_i)\, e_i \; , \; x \right) = 0 \quad .$$

Mientras que la ecuación del hiperplano que pasa por el punto b, y es paralelo al subespacio lineal maximal cerrado $L(e_i)$, $i \in I$ es, pues

$$\left(e - \sum_{i \in I} (e, e_i)\, e_i \; , \; x - b \right) = 0$$

20 . Criterio de "convexidad", en el espacio general de Hilbert E, para un polígono alabeado, definido por el conjunto infinito y bien-ordenado con último elemento, de vértices

$$\{a_i\} \quad , \quad 1 \leq i \leq \mu \quad , \quad |\mu + 1| > (\dim E)^{\aleph_0}.$$

Con las hipótesis especificadas en la exposición, la condición para que el polígono, así definido, sea alabeado, es

$$\bigvee_{\delta < i \leq \mu} \left((c^L, a_i - a_\delta) \neq 0 \right)$$

en donde δ es un ordinal transfinito, tal que

$$|\delta + 1| = (\dim E)^{\aleph_0}$$

El criterio de convexidad del polígono, supuesto y verificado ya alabeado, es simbólica y abreviadamente expresable por

$$\bigwedge_{\delta < \xi \leq \mu} \left(\left[\bigwedge_{0 < i \leq \mu} \left((c^L_\xi, a_i - a_{\xi+\delta}) \geq 0 \right) \right] \vee \left[\bigwedge_{0 < i \leq \mu} \left((c^L_\xi, a_i - a_{\xi+\delta}) \leq 0 \right) \right] \right).$$

21 . Ecuación explícita del hiperplano, en un espacio lineal general y real E, en que contine el sistema de puntos $\{a_i\}$, $i \in I$ linealmente independientes, que generan un subespacio maximal $L(a_i)$, $i \in I$, del espacio lineal E.
Tomamos una base fija $\{e_j\}$, $j \in I'$, $I' - I = \{o\}$ del espacio E y un punto

$$a_o \notin L(a_i) \quad , \quad i \in I$$

con lo cual $\{a_o ; a_i\}$, $i \in I$, es una base del espacio.

Se obtiene

$$e_i = a_{io}\, a_o + \sum_{j \in I} a_{ij}\, a_j \quad , \quad i \in I' ,$$

y el funcional $f(x)$ que define el hiperplano, en cuestión, verifica

$$f(e_i) = a_{io} \quad , \quad i \in I' \quad ;$$

así definido el funcional $f(x)$, la ecuación buscada del hiperplano por el origen y que contiene al sistema de puntos $\{a_i\}$, $i \in I$, es

$$f(x) = 0 .$$

Si el hiperplano pasa por el punto b , y es paralelo al subespacio maximal, determinado por el sistema de vectores linealmente independientes $\{a_i\}$, $i \in I$; la ecuación del hiperplano es

$$f(x - b) = 0 .$$

22. Criterio de "convexidad" de un polígono alabeado, del espacio E lineal general y real, definido por el conjunto infinito y bien-ordenado de vértices

$$\{a_i\} \quad , \quad 1 \leq i \leq \mu \quad , \quad |\mu + 1| > \dim(E).$$

Con las hipótesis especificadas, en la exposición detallada, el polígono definido es alabeado, cuando se verifica la condición

$$\bigvee_{\delta < i \leq \mu} \left(f(a_i - a_\delta) \neq 0 \right)$$

donde δ es un ordinal, tal que $|\delta + 1| = \dim(E)$. -
Y un criterio de "convexidad" para el polígono citado, ya alabeado, es

$$\bigwedge_{0 < \xi \leq \mu} \left(\left[\bigwedge_{0 < i \leq \mu} \left(f_\xi (a_i - a_{\xi + \delta}) \geq 0 \right) \right] \vee \left[\bigwedge_{0 < i \leq \mu} \left(f_\xi (a_i - a_{\xi + \delta}) \leq 0 \right) \right] \right)$$

CAPITULO TERCERO

23.- Determinación del punto de intersección de una sucesión de hiperplanos, en el espacio normado ℓ^1 de sucesiones reales de serie absolutamente convergente ; cuyas ecuaciones sean

$$u^1(x) = \gamma_1$$
$$u^2(x) = \gamma_2$$
$$u^3(x) = \gamma_3$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$u^m(x) = \gamma_m$$
$$\cdots\cdots\cdots \qquad m = 1,2,3,\ldots$$

donde $u^m(x)$ son funcionales lineales contínuos del espacio ℓ^1.

1º El caso particular en que los funcionales $u^m(x)$ son los canónicos, con respecto a la base natural de vectores unitarios $\{e_m\}$ del espacio ℓ^1, permite hallar el punto de intersección, de la citada sucesión infinita de hiperplanos, del siguiente modo

$$x = \sum_1^{\infty} \gamma_m e_m = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots \gamma_n, \ldots)$$

simepre que se verifique la condición

$$\sum_1^{\infty} |\gamma_m| < +\infty .$$

2º El caso general se puede resolver, cuando la sucesión infinita de funcionales $u^m(x)$ admite una base canónica $\{f_n\}$; es decir, si se verifica

$$u^m(f_p) = \delta_{np} \qquad ; \quad n, p = 1,2,3,\ldots$$

siendo las δ_{np}, las deltas de Kronecker.

La existencia de tal base canónica $\{f_n\}$, para la sucesión de funcionales lineales $u^m(x)$, se puede reconocer mediante las condiciones de-ducidas para la matriz infinita

$$\begin{array}{cccccc} v_{11} & v_{12} & v_{13} & \cdots & v_{1p} & \cdots \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} & \cdots & v_{2p} & \cdots \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} & \cdots & v_{3p} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ v_{m1} & v_{m2} & v_{m3} & \cdots & v_{mp} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \end{array}$$

que define la sucesión de funcionales lineales en la base canónica $\{e_m\}$ del espacio l^1: $u^m(e_p) = v_{mp}$.

Las condiciones características, para que dicha matriz infinita defina una base canónica para la sucesión de funcionales $u^n(x)$ son las siguientes :

La matriz infinita es linealmente independiente por filas y por columnas ; las filas son sucesiones acotadas y las columnas son sucesiones cuya serie es absolutamente convergente.

Y el punto único de intersección de la sucesión dada de hiperplanos es, en la base canónica $\{f_n\}$ de los funcionales lineales contínuos, asociados a las respectivas ecuaciones de los hiperplanos

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_m f_m \quad ;$$

con la hipótesis adicional

$$\sum_{m=1}^{\infty} |\gamma_m| < \infty .$$

24. Ecuación explícita del hiperplano, en el espacio ℓ^1 de sucesiones reales de serie absolutamente convergente, que pasa por el origen y contiene una sucesión

$$f_2 , f_3 , \ldots , f_n , \ldots$$

de puntos linealmente independientes y denda en un subespacio lineal maximal.

La ecuación del citado hiperplano, es

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{p=1}^{\infty} a_{np} \right) \xi_m = 0$$

en donde

$$\sum_{m=1}^{\infty} | \xi_m | < \infty \quad ;$$

la matriz infinita (a_{np}), $n, p = 1,2,3,\ldots$

es linealmente independiente por filas y por columnas, las filas son sucesiones de serie absolutamente convergente, las columnas son sucesiones acotadas y además se verifica

$$\sup_m \left| \sum_{p=1}^{\infty} a_{np} \right| < \infty .$$

En las mismas hipótesis, salvo que el hiperplano pase por el punto b, en vez del origen ; la ecuación del hiperplano, es

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{p=1}^{\infty} a_{np} \right) (\xi_m - \beta_m) = 0 ,$$

donde (β_m) son las componentes del vector b del espacio ℓ^1, en su base canónica $\{ e_n \}$.

25. Criterio de convexidad de un poliedro y representación del mismo; en el espacio normado ℓ^1 de sucesiones reales de serie absolutamente convergente; definido el poliedro por un sistema infinito de hiperplanos, de ecuaciones

$$u^i(x) = \gamma_i \quad , \quad i \in I \quad , \quad |I| \geq \aleph_0 .$$

Con las hipótesis específicas y la notación empleada, en la exposición, la condición de existencia y carácter convexo del poliedro, es

$$\bigwedge_{k \in I} \left(u^k \left(\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_{k_n} f_{k_n} \right) \neq \gamma_k \right) \quad ;$$

donde $\{ f_{k_n} \}$ es la base canónica de los funcionales u^{k_n}, $n = 1,2,3,\ldots$; y además se verifica $\sum_{n=1}^{\infty} |\gamma_{k_n}| < \infty$.

El poliedro convexo viene representado por el sistema de infinitas inecuaciones lineales, contorno incluido

$$\left[u^k \left(\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_{k_n} f_{k_n} \right) - \gamma_k \right] \left[u^k(x) - \gamma_k \right] \geq 0 \quad ; \quad k \in I .$$

26. Criterio de "convexidad" de un polígono alabeado, del espacio ℓ^1, definido por el conjunto infinito y bien-ordenado de sus vértices

$$\{ a_i \} \quad , \quad 0 < i \leq \mu .$$

Con las hipótesis impuestas, y detalladas en la exposición, el polígono es alabeado cunado verifica la condición

$$\bigvee_{\upsilon < i \leq \mu} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{\mu=1}^{\infty} c_{np} \right) (a_{in} - a_{\upsilon n}) \neq 0 \right] .$$

La condición de convexidad del polígono, supuesto ya alabeado, se puede expresar como

$$\bigvee_{k \leq \mu} \left[\left(\bigwedge_{i \leq \mu} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{\mu=1}^{\infty} c^{k}_{n\mu} \right) (a_{in} - a_{k+\upsilon, n}) \geq 0 \right] \right) \vee \right.$$

$$\left. \vee \left(\bigwedge_{i \leq \mu} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{\mu=1}^{\infty} c^{k}_{n\mu} \right) (a_{in} - a_{k+\upsilon, n}) \leq 0 \right] \right) \right]$$

27 . Determinación del punto de intersección de una sucesión de hiperplanos; del espacio c_0 de las sucesiones reales infinitésimas; cuyas ecuaciones sean

$$u^1 (x) = \gamma_1 , \; u^2 (x) = \gamma_2 , \; u^3 (x) = \gamma_3 , \ldots , u^n (x) = \gamma_n ,$$

$$m = 1 , 2 , 3 , \ldots$$

donde $u^n (x)$ son funcionales lineales contínuos del espacio c_0.

1º Suponemos que dichos funcionales son los canónicos en la base canónica $\{ e_n \}$ del espacio , es decir , definidos por

$$u^n (e_p) = \delta_{np} \quad , \quad n , p = 1,2,3,\ldots$$

donde los δ_{np} son las deltas de Kronecker. Entonces el punto de intersección, del citado sistema de hiperplanos, es

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \, e_n ,$$

con la hipótesis adicional $\gamma_n \rightarrow 0$.

2ª El caso general se puede reducir al particular, cuando la sucesión de funcionales $u^n(x)$ admite una base canónica $\{f_n\}$, lo cual se puede averiguar, mediante la matriz infinita

$$\begin{array}{cccccc}
v_{11} & v_{12} & v_{13} & \cdots & v_{1p} & \cdots \\
v_{21} & v_{22} & v_{23} & \cdots & v_{2p} & \cdots \\
v_{31} & v_{32} & v_{33} & \cdots & v_{3p} & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
v_{n1} & v_{n2} & v_{n3} & \cdots & v_{np} & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array} \quad ; \quad v_{np} = u^n(e_p) ,$$

que en tal circunstancia, satisface las siguientes condiciones :

La matriz infinita considerada es linealmente independiente por filas y por columnas ; las filas de la matriz son sucesiones de serie absolutamente convergentes y las columnas son sucesiones reales infinitésimas.

En tales circunstancias, el punto de intersección de la sucesión infinita de hiperplanos dados, es

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \, f_n ,$$

con la hipótesis adicional $\gamma_n \longrightarrow 0$.

28. Ecuación explícita del hiperplano φ en el espacio c_0 de sucesiones reales infinitésimas, que pasa por el origen y contiene a la sucesión de puntos

$$f_2 , f_3 , \dots , f_n , \dots$$

linealmente independientes y densos en un subespacio maximal del espacio c_0 .

La ecuación del citado hiperplano es

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{p=1}^{\infty} a_{np} \right) \xi_m = 0$$

en donde

$$\xi_m \longrightarrow 0 \quad ;$$

la matriz infinita (a_{np}) , $(n,p = 1,2,3,\dots)$ es linealmente independiente por filas y por columnas, sus filas son sucesiones infinitésimas y sus columnas son sucesiones de serie absolutamente convergente. Además se verifica la condición

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \sum_{p=1}^{\infty} a_{np} \right| < \infty .$$

Con las mismas hipótesis,salvo que el hiperplano pase por el punto b , en vez del origen , la ecuación del hiperplano,en cuestión, es

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{p=1}^{\infty} a_{np} \right) (\xi_n - \beta_m) = 0$$

donde (β_m) son las coordenadas del punto b en la base canónica $\{ e_n \}$, del espacio c_0.

29 y 30 . Las conclusiones de estas dos secciones son , formalmente, idénticas a las de las secciones 25 y 26 ,aunque sus fundamentos teóricos están en las secciones 27 y 28 . Y , naturalmente,su interpretación con el carácter semántico del espacio c .

C A P I T U L O C E R O

REPRESENTACION ANALITICA DE LOS POLIGONOS CONVEXOS DEL PLANO EUCLIDEO, DE LOS POLIEDROS CONVEXOS DEL ESPACIO EUCLIDEO Y DE LOS POLIEDROS CONVEXOS DEL ESPACIO EUCLIDEO n-DIMENSIONAL :

CRITERIOS DE CONVEXIDAD DE POLIEDROS Y POLIGONOS.

1. REPRESENTACION ANALITICA DEL CUADRILATERO CONVEXO : CRITERIO ANALITICO DE CONVEXIDAD DE UN CUADRILATERO PLANO.

Dado un cuadrilátero plano cualquiera $P_1P_2P_3P_4$ vamos a representar analíticamente esta figura bidimensional, en función de las coordenadas cartesianas de sus vértices :

$$P_1(x_1,y_1) \;;\; P_2(x_2,y_2) \;;\; P_3(x_3,y_3) \;;\; P_4(x_4,y_4) \,.$$

Los cuadriláteros que consideramos son los ordinarios de la Geometría, es decir, los cuadriláteros convexos.

En primer lugar, obtendremos un criterio analítico de convexidad de un cuadrilátero plano cualquiera. Para ello, debemos expresar, en coordenadas cartesianas, que los puntos P_3,P_4 yacen en el mismo semiplano, con respecto a la recta P_1P_2 ; respecto a la recta P_2P_3 , los puntos P_4,P_1 yacen en el mismo semiplano; respecto a la recta P_3P_4 los puntos P_1,P_2 ; respecto a la recta P_4P_1 los puntos P_2,P_3.

Así pues, los determinantes (no nulos)

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \;;\; \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix}$$

tienen el mismo signo. Análogamente, los otros tres pares de determinantes tienen signo constante, por par; por eso, podemos expresar, conjuntamente, la condición analítica de convexidad del cuadrilátero $P_1P_2P_3P_4$, en función de las coordenadas de sus vértices, del modo siguiente : Los determinantes

$$\begin{vmatrix} x_i & y_i & 1 \\ x_{i+1} & y_{i+1} & 1 \\ x_k & y_k & 1 \end{vmatrix} \quad ; \; k = i+2, i+3 \quad ; \; i = 1,2,3,4$$

son no nulos, y de signo constante para cada i dado; entendidos, los valores de los índices mayores que 4, reducidos a su resto, módulo 4, respectivamente.

Una vez que se sabe es convexo el cuadrilátero $P_1P_2P_3P_4$, la representación analítica de dicho cuadrilátero, viene expresada, por tanto, por la intersección de los 4 semiplanos de ~~las~~ inecuaciones siguientes

$$\begin{vmatrix} x_i & y_i & 1 \\ x_{i+1} & y_{i+1} & 1 \\ x_{i+2} & y_{i+2} & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_i & y_i & 1 \\ x_{i+1} & y_{i+1} & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} > 0 \quad , \quad i = 1,2,3,4$$

donde los índices mayores que 4,se entienden reducidos a su resto,módulo 4;como ya hemos advertido antes.

Observación análoga a la hecha,en cuanto al doble signo $\geqslant$, de las inecuaciones del triángulo,se puede hacer ahora : En las inecuaciones que representan al cuadrilátero convexo, son admisibles los signos $\geqslant$ en tales desigualdades,con tal de no tomar más de dos veces,simultáneamente,el signo =. La carencia de signo = ,en el sistema de inecuaciones,representa a los puntos interiores de l cuadrilátero convexo. La presencia de un solo signo = ,representa los puntos interiores de un lado del cuadrilátero. La presencia de dos signos = ,representa un vértice del ~~triángulo~~.cuadrilátero; o un punto diagonal interior. (inexistente,como intersección de un par de lados)

2. <u>REPRESENTACION ANALITICA DE UN n-GONO PLANO CONVEXO : CRITERIO ANALITICO DE CONVEXIDAD.</u>

Vamos a representar,analíticamente,el polígono plano convexo de n vértices cualesquiera,en función de las coordenadas cartesianas de los mismos.

En primer lugar,para que un n-gono plano $P_1P_2P_3\ldots P_{n-1}P_n$ cualquiera (fig.4) de coordenadas cartesianas en los vértices

$$P_1(x_1,y_1) \;;\; P_2(x_2,y_2) \;;\ldots;\; P_n(x_n,y_n) \quad ,$$

sea convexo,se requiere que,respecto a la recta P_1P_2, los puntos $P_3,P_4,\ldots,P_n$ yacen en el mismo semiplano;respecto de la recta P_2P_3 ,los puntos $P_4,P_5,\ldots,P_n,P_1$ yacen en el mismo semiplano;...; y respecto a la recta P_nP_1,los puntos $P_2,P_3,\ldots,P_{n-1}$.

Imponemos analíticamente estas condiciones,mediante el signo del polinomio correspondiente a la ecuación de la recta,determinada por dos vértices consecutivos expresando el polinomio en forma de determinante.

Los determinantes

$$\begin{vmatrix} x_i & y_i & 1 \\ x_{i+1} & y_{i+1} & 1 \\ x_k & y_k & 1 \end{vmatrix} \quad ; \quad k = i+2, i+3, \ldots, i+n-1 \ ; \ i = 1,2,\ldots,n$$

no son nulos y,para cada i dado,tienen el.mismo signo los $n-2$ determinantes correspondientes a un i fijado. Además,los índices mayores de n ,han de entenderse como restos módulo n respectivamente.

Una vez se sepa que el n-gono plano es convexo,éste vendrá dado por la intersección de n semiplanos,cuyas inecuaciones lineales son las siguientes

$$\begin{vmatrix} x_i & y_i & 1 \\ x_{i+1} & y_{i+1} & 1 \\ x_{i+2} & y_{i+2} & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_i & y_i & 1 \\ x_{i+1} & y_{i+1} & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} > 0 \quad ; \ i = 1,2,\ldots,n$$

Ahora bien,este sistema de inecuaciones lineales representa los puntos interiores del n-gono convexo.Por eso,si queremos incluir los puntos del contorno del n-gono,debemos utilizar las inecuaciones con el doble signo $\geqslant$.Así,pues, la representación analítica del n-gono plano comvexo $P_1P_2P_3\ldots P_n$,contorno incluido,es

$$\begin{vmatrix} x_i & y_i & 1 \\ x_{i+1} & y_{i+1} & 1 \\ x_{i+2} & y_{i+2} & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_i & y_i & 1 \\ x_{i+1} & y_{i+1} & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} \geqslant 0 \ ; \ i = 1,2,\ldots,n.$$

En este sistema de inecuaciones cabe la posibilidad de distinguir los puntos interiores,como ya hemos visto,con la ausencia de signo = . La presencia de un solo signo = daría lugar a los puntos interiores de un lado;la presencia de dos signos = representa un vértice,si las ecuaciones son consecutivas en el sistema,y si no lo son,un punto diagonal interior,cuando se satisfagan las restantes $n - 2$ inecuaciones estrictas.

3. REPRESENTACION ANALITICA DE UN TETRAEDRO EN EL ESPACIO EUCLIDEO TRIDIMENSIONAL Y DE UN (n+1)-edro EN EL ESPACIO EUCLIDEO n-DIMENSIONAL; MEDIANTE LAS COORDENADAS DE SUS VERTICES

El procedimiento empleado, en el plano, se puede extender al espacio para representar un tetraedro; y luego al espacio n-dimensional; de modo puramente algébrico.

Fijados tres ejes cartesianos, no necesariamente ortogonales, en el espacio, cuatro puntos cualesquiera del mismo, P_1, P_2, P_3, P_4, se pueden definir por sus respectivas coordenadas cartesianas :

$$P_1(x_1,y_1,z_1) \ ; \ P_2(x_2,y_2,z_2); \ P_3(x_3,y_3,z_3) \ ; \ P_4(x_4,y_4,z_4).$$

Consideremos los cuatro puntos en cuestión no coplanarios, por lo cual, la ecuación del plano $P_1P_2P_3$ es

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x & y & z & 1 \end{vmatrix} = 0 .$$

Como el punto P_4 no yace en el plano $P_1P_2P_3$, substituidas las coordenadas de P_4 en el determinante correspondiente a la ecuación de dicho plano, el valor del determinante, en ese punto, no es nulo. De donde resulta que la inecuación del semiespacio definido por el plano $P_1P_2P_3$ y el punto P_4, exterior al plano, es

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x & y & z & 1 \end{vmatrix} > 0 .$$

De manera completamente análoga de obtienen las ecuaciones de los planos $P_2P_3P_4$, $P_3P_4P_1$, $P_4P_1P_2$; y de los semiespacios defidos por estos planos y los puntos P_1, P_2, P_3, respectivamente, se hallan sus inecuaciones respectivas del mismo modo.

$P_1 \ P_2 \ P_3 \ P_4$

Finalmente, la representación análitica del tetraedro, viene dada por el sistema de 4 inecuaciones :

$$
\left.\begin{array}{l}
\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x & y & z & 1 \end{vmatrix} > 0 \\[2ex]
(-1) \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \\ x & y & z & 1 \end{vmatrix} > 0 \\[2ex]
\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x & y & z & 1 \end{vmatrix} > 0 \\[2ex]
(-1) \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_4 & y_4 & z_4 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x & y & z & 1 \end{vmatrix} > 0
\end{array}\right\}
$$

Si se quiere incl... r, en la representación analítica del tetraedro, su contorno, han de ...oneese en el sistema de inecuaciones los doblés signos $\geqslant$, ...n todas ellas; aunque, naturalmente, no coexisten cuatro signos = ...e modo más preciso: La ausencia de signos = , representa los pun... ...s interiores del tetraedro. Un solo signo = , representa los pun... ...s interiores de una cara; dos signos = , los puntos interiores ...e una arista; y tres signos = , un vértice.

Consideremos en e... espacio euclídeo n-dimensional, R^n, un sistema arbitrario de (n+1) ...untos linealmente independientes

$P_o = (p_{o1}, p_{o2}, \dots, p_{..})$; $P_1 = (p_{11}, p_{12}, \dots, p_{1n})$; ... ; $P_n = (p_{n1}, p_{n2}, \dots, p_{n..}$

Como cada sistema de n puntos cualesquiera, elegidos entre los (n+1) puntos dados, ...s "a fortiori", linealmente independiente, este sistema de puntos determina un hiperplano (n-1)-dimensional, cuya ecuación es de la forma

$$D(X;P_1,P_2,..,P_n) \equiv \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \cdots x_n & 1 \\ p_{11} & p_{12} & p_{13} \cdots p_{1n} & 1 \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \cdots p_{2n} & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ p_{n1} & p_{n2} & p_{n3} \cdots p_{nn} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

para el hiperplano determinado por los n puntos $P_1,P_2,...,P_n$; y análogamente para los otros sistemas de n puntos, elegidos entre los (n+1) puntos dados.

Los (n+1) sistemas de n puntos, determinan en total, de entre los (n+1) puntos dados $P_o,P_1,P_2,..,P_n$, (n+1) hiperplanos, de ecuaciones respectivas

$D(P_o,P_1,P_2,...,P_{n-1},X) = 0$; $D(P_n,P_o,P_1...,P_{n-2},X) = 0$;...;
$D(P_1,P_2,P_3,...,P_n,X) = 0$.

En virtud de que los puntos $P_o,P_1,P_2,...,P_n$ eran linealmente independientes, se verifica

$$D(P_o,P_1,P_2,...,P_n) \neq 0 \quad .$$

Por tanto, los semiespacios definidos por los hiperplanos $P_oP_1..P_{n-1}$ $P_nP_o...P_{n-2}$; $P_{n-1}P_n...P_{n-3}$; ...; $P_1P_2...P_n$ y los puntos P_n, P_{n-1}, P_{n-2},..., P_o , respectivamente tienen por inecuaciones

$$D(P_o,P_1...,P_{n-1},P_n) \, . \, D(P_o,P_1,...,P_{n-1},X) > 0$$

$$D(P_o,P_1,..,P_{n-1},P_n) \, . \, D(P_o,P_1,...,X,P_n) > 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$D(P_o,P_1,..,P_{n-1},P_n) \, . \, D(P_o,X,....,P_{n-1},P_n) > 0$$

$$D(P_o, P_1,..,P_{n-1},P_n) \, . \, D(X ,P_1,...,P_{n-1},P_n) > 0 \, ,$$

y este sistema de (n+1) inecuaciones lineales, constituye la representación analítica del (n+1)-edro en el espacio euclídeo n-dimensional.

Cuando se quiere incluir el contorno del (n+1)-edro, hay que poner en todas las inecuaciones, de su representación análitica, el doble signo $\geqslant$; advirtiendo que (n+1) signos =, son incompatibles; un solo signo = , representa una "cara" (puntos interiores); (n-1) signos = , representan una "arista" (puntos interiores) y n signos = , un vértice del (n+1)-edro del espacio n-dimensional.

4. REPRESENTACION ANALITICA DEL TETRAEDRO; EN EL ESPACIO, EN FUNCION DE LAS ECUACIONES DE LAS CARAS (PROLONGADAS).

Sea defidido un tetredro por las ecuaciones de los planos de sus cuatro caras

$$H_1) \qquad a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0$$
$$H_2) \qquad a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0$$
$$H_3) \qquad a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3 = 0$$
$$H_4) \qquad a_4 x + b_4 y + c_4 z + d_4 = 0 \quad ,$$

lo cual exige, naturalmente, que ni los cuatro planos pertenezcan a una radición de planos, ni tres de ellos a un haz de planos, ni tampoco tres de ellos sean paralelos a la misma recta; pero todas éstas restricciones se pueden englobar en sencillas condiciones analíticas, como veremos.

Las coordenadas del punto de intersección de los planos H_2, H_3, H_4 son, cuando existe

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} -d_2 & b_2 & c_2 \\ -d_3 & b_3 & c_3 \\ -d_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix}} ; \quad y_1 = \frac{\begin{vmatrix} a_2 & -d_2 & c_2 \\ a_3 & -d_3 & c_3 \\ a_4 & -d_4 & c_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix}} ; \quad z_1 = \frac{\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & -d_2 \\ a_3 & b_3 & -d_3 \\ a_4 & b_4 & -d_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix}} .$$

Y las coordenadas de este punto han de hacer el polinomio correspondiente al plano H_1, no nulo; es decir

$$[1] \quad a_1 x_1 + b_1 y_1 + c_1 z_1 + d_1 = - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix} \neq 0$$

Análogas expresiones obtenemos para las coordenadas de los puntos de intersección de los planos H_3, H_4, H_1 ; H_4, H_1, H_2 ; H_1, H_2, H_3 .
Con lo cual las condiciones analíticas,para que los planos H_1, H_2, H_3, H_4 formen tetraedro, consiste en que las cuatro expresiones

$$\frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix}} , \quad \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix}} , \quad \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_4 & b_4 & c_4 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}} , \quad \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$$

sean significativas,determinadas y no nulas.

Una vez verificadas las condiciones por las cuales forman un tetraedro los planos H_1, H_2, H_3, H_4 ,las inecuaciones de los semi-espacios,determinados por los planos H_1, H_2, H_3, H_4 y los puntos de intersección de los planos $H_2H_3H_4$, $H_3H_4H_1$, $H_4H_1H_2$, $H_1H_2H_3$,respectivamente;son,habida cuenta de condiciones como la [1],

$$\left(\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix} \right) (a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1) < 0$$

$$\left(\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix} \right) (a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2) > 0$$

$$\left(\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_4 & b_4 & c_4 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}\right)(a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3) > 0$$

$$\left(\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}\right)(a_4 x + b_4 y + c_4 z + d_4) > 0.$$

De lo dicho,se obtiene que la representación analítica de un tetraedro,viene dada por este sistema de cuatro inecuaciones lineales.

5. REPRESENTACION ANALITICA DE UN POLIEDRO CONVEXO,EN EL ESPACIO : CONDICION ANALITICA DE CONVEXIDAD DE UN POLIEDRO.

Vamos a representar analíticamente un poliedro del espacio cuando está definido por las ecuaciones cartesianas de los planos de sus caras.

Definidos $m+1$ planos en el espacio,por sus ecuaciones cartesianas,respectivas y siendo $m \geq 3$,y dada terna de estos planos linealmente independientes

$H_1)$ $\qquad a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0$

$H_2)$ $\qquad a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0$

$H_3)$ $\qquad a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3 = 0$

....

$H_m)$ $\qquad a_m x + b_m y + c_m z + d_m = 0$

$H_{m+1})$ $\qquad a_{m+1} x + b_{m+1} y + c_{m+1} z + d_{m+1} = 0$,

estos planos,en general,no formarán poliedro convexo,ni siquiera poliedro.Por ello,y para que el poliedro sea convexo,debe verificarse que los puntos de intersección de todas las ternas de planos $H_2,H_3,H_4,..,H_{m+1}$ yacen,con respecto al plano H_1,en el mismo semiespacio. Así,pues,eligiendo tres planos distintos arbitrarios, H_i,H_j,H_k ,entre los m planos $H_2,H_3,...,H_{m+1}$,según la condición analítica [1] del párrafo anterior, las $\binom{m}{3}$ expresiones (algunas)

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_i & b_i & c_i & d_i \\ a_j & b_j & c_j & d_j \\ a_k & b_k & c_k & d_k \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_i & b_i & c_i \\ a_j & b_j & c_j \\ a_k & b_k & c_k \end{vmatrix}$$

han de ser significativas y de signo constante, aunque alguna de ellas pude ser nula (pensemos, p.e., en el vértice de una pirámide), pero no todas.

Cuando se impongan estas condiciones a cada plano de los m+1 dados, nos resultan en total las condiciones siguientes : las expresiones

$$\begin{vmatrix} a_r & b_r & c_r & d_r \\ a_i & b_i & c_i & d_i \\ a_j & b_j & c_j & d_j \\ a_k & b_k & c_k & d_k \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_i & b_i & c_i \\ a_j & b_j & c_j \\ a_k & b_k & c_k \end{vmatrix} \qquad [1]$$

son significativas, y para un r dado, donde $r = 1,2,\ldots,m+1$, las $\binom{m}{3}$ cantidades correspondientes tienen signo constante y una de ellas, al menos, es significativa y no es nula. La terna de índices (i,j,k), fijado r, recorre las combinaciones ternarias de la sucesión finita $1,\ldots,r-1,r+1,\ldots,m+1$.

Asi que, para que m+1 planos dados formen un poliedro convexo, se requieren $(m+1)\binom{m}{3}$ condiciones., en general, salvo peculiaridades.

Ahora ya, habida cuenta de los resultados establecidos para el el tetraedro, en el apartado anterior, la representación analítica del poliedro convexo, cuando se ha verificado que lo es, viene dada por el sistema de las m+1 inecuaciones lineales siguientes

$$\left(\begin{vmatrix} a_r & b_r & c_r & d_r \\ a_{r'} & b_{r'} & c_{r'} & d_{r'} \\ a_{r''} & b_{r''} & c_{r''} & d_{r''} \\ a_{r'''} & b_{r'''} & c_{r'''} & d_{r'''} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_{r'} & b_{r'} & c_{r'} \\ a_{r''} & b_{r''} & c_{r''} \\ a_{r'''} & b_{r'''} & c_{r'''} \end{vmatrix} \right)(a_r x + b_r y + c_r z + d_r) < 0$$

donde $r = 1,2,\ldots,m+1$, y los índices r', r'', r''' se han elegido para que hagan no nulo el factor constante de la inecuación.

El signo de las expresiones [1] de esta sección, necesita una explicación e interpretación más precisa : Para un valor dado de r (= 1,2,..,m+1) ,las $\binom{m}{3}$ correspondientes pueden ser significativas o no, según sea distinto de cero o no el determinante del denominador. Entre las expresiones significativas, una al menos debe serlo; unas pueden ser positivas, otras nulas y otras negativas; según las ternas de planos, distintos del H_r, elegidos entre los planos dados, se corten en un semiespacio, en el plano H_r, o en el otro semiespacio, con respecto al plano H_r. Debe haber, naturalmente, al menos, una expresión significativa no nula, pues fuera de cada cara del poliedro ha de haber algún vértice.

.Ahora bien, cuando hay expresiones significativas [1] negativas y positivas, es preciso elegir uno de los dos semiespacios que determina el plano H_r , pués entonces, además de vértices fuera del plano H_r, tambien hay puntos-intersección de caras prolongadas. Consideremos, por ejemplo, una pirámide cortada por un plano paralelo a la base, el cual determina una pirámide menor y un tronco de pirámide.

Cuando hay expresiones significativas [1] positivas y negativas, se presenta la posibilidad doble de elección de semiespacio, lo cual significa que un poliedro convexo no está determinado, en general, por los planos de sus caras, como hemos aducido más arriba.

6. REPRESENTACION ANALITICA DE UN POLIEDRO CONVEXO EN EL ESPACIO EUCLIDEO n-DIMENSIONAL : CRITERIO ANALITICO DE CONVEXIDAD DE UN POLIEDRO DEL ESPACIO n-DIMENSIONAL.

El procedimiento analítico, de representación de un poliedro convexo, se puede transladar al espacio euclídeo n-dimensional, con tal de que hagamos una exposición puramente algébrica.

A tal fin, consideremos $m+1$ hiperplanos, donde $m \geqslant n$, del espacio euclídeo R^n definidos por sus ecuaciones lineales ; y siendo cada m de dichos hiperplanos, linealmente independientes

$H_1)$ $a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + a_{13}\, x_3 + \dots + a_{1n}\, x_n + b_1 = 0$

$H_2)$ $a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + a_{23}\, x_3 + \dots + a_{2n}\, x_n + b_2 = 0$

$H_3)$ $a_{31}\, x_1 + a_{32}\, x_2 + a_{33}\, x_3 + \dots + a_{3n}\, x_n + b_3 = 0$

....

$H_m)$ $a_{m1}\, x_1 + a_{m2}\, x_2 + a_{m3}\, x_3 + \dots + a_{mn}\, x_n + b_m = 0$

$H_{m+1})$ $a_{m+1,1} x_1 + a_{m+1,2} x_2 + a_{m+1,3} x_3 + \dots + a_{m+1,n} x_n + b_{m+1} = 0.$

Hallemos la intersección de los n hiperplanos $H_2, H_3, \dots, H_n, H_{n+1}$ por resolución del sistema de sus ecuaciones, en donde vamos a utilizar los determinantes de la forma siguiente

$$D(A_1, A_2, A_3, \dots, A_n) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$D(A'_1, A'_2, \dots, A'_n, A'_{n+1}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{1n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} & b_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} & b_n \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & a_{n+1,3} & \dots & a_{n+1,n} & b_{n+1} \end{vmatrix}$$

de orden m, y orden $(n+1)$, respectivamente. La solución del sistema

$$\left.\begin{aligned} a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + a_{23}\, x_3 + \dots + a_{2n}\, x_n + b_2 &= 0 \\ a_{31}\, x_1 + a_{32}\, x_2 + a_{33}\, x_3 + \dots + a_{3n}\, x_n + b_3 &= 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}\, x_1 + a_{n2}\, x_2 + a_{n3}\, x_3 + \dots + a_{nn}\, x_n + b_n &= 0 \\ a_{n+1,1}\, x_1 + a_{n+1,2}\, x_2 + a_{n+1,3}\, x_3 + \dots + a_{n+1,n} + b_{n+1} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad [1]$$

es, cuando existe

$$x_1^o = \frac{D_1(-B)}{D(A_2,A_3,\dots,A_{n+1})} \; ; \; x_2^o = \frac{D_2(-B)}{D(A_2,A_3,\dots,A_{n+1})} \; ; \; x_3^o = \frac{D_3(-B)}{D(A_2,A_3,\dots,A_{n+1})}$$

$$; \dots, \; x_n^o = \frac{D_n(-B)}{D(A_2,A_3,\dots,A_n)} \; ;$$

donde $D_1(-B)$, $D_2(-B)$, $D_3(-B)$, ..., $D_n(-B)$

designan,respectivamente,los determinantes que resultan de substituir,en el determinante $D(A_1,A_3,\dots,A_n)$ de los coeficientes del sistema [1],la 1ª columna por la columna de los opuestos de los terminos independientes del sistema nombrado,la 2ª columna,la 3ª columna,..., la nª columna,por dicha columna $-B$.

Ahora substituimos ,las coordenadas de este punto,en el polinomio de la ecuación correspondiente al hiperplano H_1

$$a_{11} x_1^o + a_{12} x_2^o + a_{13} x_3^o + \dots + a_{1n} x_n^o + b_1 =$$

$$= \Big[b_1 D(A_2,A_3,\dots,A_{n+1}) - a_{11} D_1(B) + a_{12} D_1(B) - a_{13} D_1(B) +$$

$$+ \dots + (-1)^{n+1} D_1(B) \Big] : D(A_2,A_3,\dots,A_{n+1}) =$$

$$= \frac{D(A'_{n+1},A'_1,A'_2,\dots,A'_n)}{D(A_2,A_3,\dots,A_{n+1})} = (-1)^n \frac{D(A'_1,A'_2,\dots,A'_n,A'_{n+1})}{D(A_2,A_3,\dots,A_{n+1})} .$$

El.signo de este número,cuando no es nulo,nos determina un semiespacio,mediante el hiperplano H_1 y el punto de intersección de los hiperplanos $H_2,H_3,\dots,H_{n+1}$.

Análogamente,la posición de las intersecciones de los sistemas posibles de n hiperplanos distintos entre sí y del hiperplano H_1,elegidos entre los $m+1$ dados respecto al hiperplano H_1, se reconoce por el signo de las $\binom{m}{n}$ expresiones

$$(-1)^n \frac{D(A'_1,A'_{i_2},\dots,A'_{i_n},A'_{i_{n+1}})}{D(A_{i_2},A_{i_3},\dots,A_{i_{n+1}})} \; , \qquad [2]$$

éstas pueden ser significativas o no,y lo son cuando el determinante del denominador no es nulo;las expresiones significativas pueden ser nulas o no,pero se requiera una expresión no nula, al menos,para que con el hiperplano H_1 y un punto exterior al mismo,se pueda definir un semiespacio donde haya puntos (vértices), uno al menos,del poliedro convexo definido por los hiperplanos dados inicialmente.

Si en la sucesión finita [2] hubiera números positivos y negativos,tenemos una posibilidad doble,en cuanto a la elección del semiespacio correspondiente,definido por el hiperplano H_1 y un vértice exterior y,por tanto,del poliedro convexo por definir.

Una vez hayamos verificado que alguna de las expresiones [2] es significativa y no nula;y,efectuada la elección mencionada,el semiespacio definido por el hiperplano H_1 y un vértice exterior al mismo,tiene por inecuación lineal

$$(-1)^n \frac{D(A_1',A_{i_2}',\ldots,A_{i_n}',A_{i_{n+1}}')}{D(A_{i_2},A_{i_3},\ldots,A_{i_{n+1}})}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + b_1) > 0$$

para una sola elección de los índices $i_2,i_3,\ldots,i_{n+1}$,posible entre las que den signo constante a las expresiones significativas [2] .

De manera completamente análoga,podemos determinar las condiciones para que, con respecto al hiperplano H_i $(i = 1,2,\ldots,m,m+1)$,algún sistema de n hiperplanos,elegidos entre los $H_1,H_2,\ldots,H_m,H_{m+1}$, distintos del H_i,se corten en el exterior de éste.Para ello han de considerarse las $\binom{m}{n}$ expresiones

$$(-1)^n \frac{D(A_i',A_{i_2}',\ldots,A_{i_{n+1}}')}{D(A_{i_2},A_{i_3},\ldots,A_{i_{n+1}})} \qquad , \qquad [3]$$

para cada i ,si son significativas o no, si hay alguna no nula, y entre las no nulas subclasificarlas por el signo;eligiendo despues,entre dos posibilidades de signo,una expresión [3] no nula. Ello nos lleva,verificadas primero las condiciones de existencia,a la determinación (entre dos posibles elecciones) del semiespacio de inecuación lineal

$$(-1)^n \frac{D(A_i',A_{i_2}',\ldots,A_{i_n}',A_{i_{n+1}}')}{D(A_{i_2},A_{i_3},\ldots,A_{i_{n+1}})}(a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n + b_i) >$$

De lo dicho,se infiere que ham de verificarse $(m+1)\binom{m}{n}$ condiciones analíticas,a lo más,para asegurar que los $m+1$ hiperplanos dados definan un poliedro convexo.

Una vez verificada la condición de convexidad de un poliedro, caben dos elecciones posibles de determinación de semiespacio,a lo más,por cada semiplano.

En situaciones extremas,aun cumplidas las condiciones de convexidad,puede ocurrir que la intersección de los $m+1$ semiespacios seleccionados correctamente,sea vacia.En tales circunstancias, y para evitar excepciones incomodas de lenguaje,meramente,diremos que se trata del Poliedro convexo vacio.

La representación analítica del poliedro convexo (sabido ya que lo es) viene dada,pues,por el sistema de $m+1$ inecuaciones lineales

$$(-1)^n \frac{D(A'_{i},\ A'_{i_2},\ \dots,\ A'_{i_n},\ A'_{i_{n+1}})}{D(A_{i_2},\ A_{i_3},\ \dots,\ A_{i_n},\ A_{i_{n+1}})} \cdot (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_m + b_i) > 0;$$

$$i = 1,2,\dots,m,m+1$$

donde el factor constante,para cada inecuación,del primer miembro, es,naturamente,no nulo.

Cuando se quiera incluir el contorno o frontera del poliedro convexo,en la representación analítica,debemos imponer el doble signo $\geqslant$ en todas las inecuaciones.

C A P I T U L O P R I M E R O

ESTUDIO DE LOS PIEDROS CONVEXOS EN LOS ESPACIOS DE HILBERT (SEPARABLES Y NO SEPARABLES) Y EN LOS ESPACIOS LINEALES REALES GENERALES INFINITO-DIMENSIONALES :

CRITERIOS DE CONVEXIDAD DE LOS POLIEDROS DE ESTOS ESPACIOS.

7. DETERMINACION DE UN PUNTO EN EL ESPACIO DE HILBERT SEPARABLE POR INTERSECCION DE UNA SUCESION DE HIPERPLANOS DE VECTORES DIRECCIONALES, DENSA EN EL ESPACIO.

Para poder determinar un punto, en el espacio euclídeo de finitas dimensiones, por intersección de hiperplanos, se requiere un número de ellos igual a la dimensión del espacio.

En el espacio de Hilbert real separable, H, para hacer una determinación similar de un punto por intersección de hiperplanos, se necesita, ateniéndose a la naturaleza especial de dicho espacio, una distribución apropiada de los hiperplanos. Más precisamente : Para determinar, de hecho, un punto por intersección de hiperplanos en el espacio de Hilbert separable, H, se requiere una sucesión de hiperplanos $\{H_n\}$, tales que en sus ecuaciones respectivas, escritas en forma de producto escalar

$$(y_1,y) = \gamma_1 \ , \ (y_2,y) = \gamma_2 \ , \ (y_3,y) = \gamma_3 \ , \ldots , \ (y_n,y) = \gamma_n \ , \ldots \qquad [1]$$

la sucesión de vectores direccionales $\{y_n\}$ constituya un conjunto denso en el espacio de Hilbert separable H, mientras que la sucesión numérica $\{\gamma_n\}$ sea un elemento del espacio de Hilbert l^2; es decir, que la sucesión dé lugar a una serie de cuadrados convergente.

Como es sabido, todos los espacios de Hilbert reales separables son isomorfos e isométricos al espacio de Hilbert concreto l^2 de las sucesiones numéricas reales, cuyas series de cuadrados son convergentes.

Volviendo a la intersección de los hiperplanos del espacio de Hilbert, si en particular la sucesión de vectores direccionales $\{y_n\}$ constituye una base ortonormal del espacio de Hilbert separable, H, y manteniendo la condición impuesta a la sucesión numérica $\{\gamma_n\}$ de ser un elemento del espacio de Hilbert l^2, en este caso particular, la sucesión de hiperplanos

$$(y_1,y) = \gamma_1 \ , \ (y_2,y) = \gamma_2 \ , \ (y_3,y) = \gamma_3 \ , \ldots , \ (y_n,y) = \gamma_n \ , \ldots$$

define un sólo vector y , en el espacio de Hilbert H , cuyo desarrollo de Fourier, en la base ortonormal $\{y_n\}$, viene dado por la serie

$$y = \sum_{1}^{\infty} \gamma_n \, y_n \ ,$$

puesto que la sucesión $\{\gamma_n\}$ es de cuadrado sumable,es decir

$$\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^2 < +\infty \; ;$$

lo cual está justificado en virtud de un teorema de Riesz-Fischer (Functional Analysis in Normed Spaces.Kantorovich.Cap.II,Hilbert Space.)

En la situación más general,donde la sucesión de vectores direccionales $\{y_n\}$,de la sucesión dada de hiperplanos,no constituye más que un conjunto denso en el espacio de Hilbert separable H, podemos limitarnos,sin pérdida de genralidad,por ello,a una sucesión de vectores $\{y_n\}$ linealmente independientes,porque si no lo fueran,podriamos extraer de dicha sucesión una sucesión linealmente independiente y que mantiene el carácter denso,respecto a todo el espacio H.

La siguiente etapa va a ser reducir el caso general planteado al particular,ya resuelto.De modo que al sistema numerable $\{y_n\}$ y denso de vectores linealmente independientes,vamos a aplicarle el proceso de Ortonormalización,para obtener una base ortonormal $\{x_n\}$ del espacio de Hilbert H. Con lo cual las ecuaciones de la sucesión de hiperplanos [1] son ahora,las siguientes

$$(\lambda_1^1 x_1, x) = \gamma_1 \; , (\lambda_1^2 x_1 + \lambda_2^2 x_2, x) = \gamma_2 \; , \; (\lambda_1^3 x_1 + \lambda_2^3 x_2 + \lambda_3^3 x_3, x) = \gamma_3 \; , \ldots, \; (\lambda_1^n x_1 + \lambda_2^n x_2 + \ldots + \lambda_n^n x_n \; , x) = \gamma_n \; , \ldots \qquad [2]$$

donde los λ_k^n son las componentes del vector y_n en la base ortonormal $\{x_n\}$,por ello,se tiene

$$\lambda_k^n = (y_n, x_k) \qquad k = 1,2,\ldots,n. \qquad n = 1,2,3,\ldots$$

Además,como muestran estas relaciones, el vector y_n está contenido en el subespacio finito-dimensional $L(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ generado por los n primeros vectores de la base ortonormal $\{x_n\}$.

La expresión explícita de la base ortonormal $\{x_n\}$,obtenida por ortonormalización de la sucesión $\{y_n\}$ de vectores linealmente independientes,está dada por las ecuaciones conocidas

$$x_n = \begin{vmatrix} (y_1,y_1) & (y_1,y_2) & \dots & (y_1,y_{n-1}) & y_1 \\ (y_2,y_1) & (y_2,y_2) & \dots & (y_2,y_{n-1}) & y_2 \\ (y_3,y_1) & (y_3,y_2) & \dots & (y_3,y_{n-1}) & y_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ (y_n,y_1) & (y_n,y_2) & \dots & (y_n,y_{n-1}) & y_n \end{vmatrix} : \sqrt{\Delta_n \Delta_{n-1}} \quad , \quad n = 1,2,\dots$$

donde los Δ_n son los determinantes de Gram,no nulos para los sistemas linealmente independientes de vectores,así pues

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} (y_1,y_1) & (y_1,y_2) & \dots & (y_1,y_n) \\ (y_2,y_1) & (y_2,y_2) & \dots & (y_2,y_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (y_n,y_1) & (y_n,y_2) & \dots & (y_n,y_n) \end{vmatrix} \quad ; \quad \Delta_0 = 1 \quad , \quad n = 1,2,\dots$$

Como los números λ_k^n , $k = 1,2,..,n$; $n = 1,2,3,\dots$ son esenciales en la determinación del punto del espacio de Hilbert, por intersección de una sucesión de hiperplanos,en las condiciodas,de dicho espacio,vamos a determinar explícitamente los valores de estos números.

Los números λ_k^n se han definido antes como las componentes de los vectores $\{y_n\}$ en la base $\{x_n\}$ obtenida por ortonormalización de la sucesión de vectores linealmente independientes $\{y_n\}$ y densa en el espacio de Hilbert.

Por ello,las expresiones de los vectores y_n son

$$y_1 = \lambda_1^1 x_1$$

$$y_2 = \lambda_1^2 x_1 + \lambda_2^2 x_2$$

$$y_3 = \lambda_1^3 x_1 + \lambda_2^3 x_2 + \lambda_3^3 x_3$$

$$\dots\dots\dots$$

$$y_n = \lambda_1^n x_1 + \lambda_2^n x_2 + \lambda_3^n x_3 + \dots + \lambda_n^n x_n \quad ; \quad n = 1,2,3,\dots \quad .$$

Así,pues se obtiene

$$\lambda_1^1 = (x_1,y_1) = \left(\frac{y_1}{\sqrt{(y_1,y_1)}} , y_1 \right) = \sqrt{(y_1,y_1)}$$

$$\lambda_1^2 = (x_1, y_2) = \frac{(y_1, y_2)}{(y_1, y_1)} \quad , \quad \lambda_2^2 = (x_2, y_2) = \frac{\begin{vmatrix} (y_1, y_1) & y_1 \\ (y_2, y_1) & y_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{\Delta_2 \Delta_1}} \cdot y_2 =$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} (y_1, y_1) & (y_1, y_2) \\ (y_2, y_1) & (y_2, y_2) \end{vmatrix}}{\sqrt{\Delta_2 \Delta_1}} .$$

De modo general, se tiene

$$\lambda_k^n = (x_k, y_n) = \frac{\begin{vmatrix} (y_1, y_1) & (y_1, y_2) & \cdots & (y_1, y_{k-1}) & y_1 \\ (y_2, y_1) & (y_2, y_2) & \cdots & (y_2, y_{k-1}) & y_2 \\ (y_3, y_1) & (y_3, y_2) & \cdots & (y_3, y_{k-1}) & y_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ (y_k, y_1) & (y_k, y_2) & \cdots & (y_k, y_{k-1}) & y_k \end{vmatrix}}{\sqrt{\Delta_k \Delta_{k-1}}} \cdot y_n$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} (y_1, y_1) & (y_1, y_2) & \cdots & (y_1, y_{k-1}) & (y_1, y_n) \\ (y_2, y_1) & (y_2, y_2) & \cdots & (y_2, y_{k-1}) & (y_2, y_n) \\ (y_3, y_1) & (y_3, y_2) & \cdots & (y_3, y_{k-1}) & (y_3, y_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (y_k, y_1) & (y_k, y_2) & \cdots & (y_k, y_{k-1}) & (y_k, y_n) \end{vmatrix}}{\sqrt{\Delta_k \Delta_{k-1}}} \; ; \; k = 1, 2, \ldots, n.$$

Una vez que hemos determinado los números λ_k^n, las ecuaciones [2] de la sucesión de hiperplanos dados tiene, con respecto a la base ortonormal $\{x_n\}$ del espacio de Hilbert H, la forma

$$
\begin{aligned}
&\lambda_1^1 \, (x_1,x) && = \gamma_1 \\
&\lambda_1^2 \, (x_1,x) + \lambda_2^2 \, (x_2,x) && = \gamma_2 \\
&\lambda_1^3 \, (x_1,x) + \lambda_2^3 \, (x_2,x) + \lambda_3^3 \, (x_3,x) && = \gamma_3 \qquad [3] \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&\lambda_1^n \, (x_1,x) + \lambda_2^n \, (x_2,x) + \lambda_3^n \, (x_3,x) + \dots + \lambda_n^n \, (x_n,x) && = \gamma_n
\end{aligned}
$$

$n = 1,2,3,\dots$,

sistema de n ecuaciones lineales en las n incognitas (x_1,x), (x_2,x), (x_3,x),...., (x_n,x) cuyas soluciones son

$$(x_1,x) = \frac{\gamma_1}{\lambda_1^1} \; ; \quad \begin{vmatrix} \lambda_1^1 & \gamma_1 \\ \lambda_1^2 & \gamma_2 \end{vmatrix} : \lambda_1^1 \lambda_2^2 = (x_2,x) \; ; \quad (x_3,x) = \frac{\begin{vmatrix} \lambda_1^1 & 0 & \gamma_1 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \gamma_2 \\ \lambda_1^3 & \lambda_2^3 & \gamma_3 \end{vmatrix}}{\lambda_1^1 \lambda_2^2 \lambda_3^3}$$

$$\frac{\begin{vmatrix} \lambda_1^1 & 0 & 0 & \dots & \gamma_1 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & 0 & \dots & \gamma_2 \\ \lambda_1^3 & \lambda_2^3 & \lambda_3^3 & \dots & \gamma_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^n & \lambda_2^n & \lambda_3^n & \dots & \gamma_n \end{vmatrix}}{\lambda_1^1 \lambda_2^2 \lambda_3^3 \dots \lambda_n^n} = (x_n,x) \; ; \quad n = 1,2,3,\dots$$

Con el procedimiento expuesto,hemos determinado una sucesión numérica infinita (x_n,x) lo cual no quiere decir que hayamos determinado un punto del espacio de Hilbert H,ya para ello se requiere que se cumplan condiciones adicionales.Más concretamente, la condición precisa,para que la sucesión de hiperplanos dados, defina un solo punto del espacio de Hibert H,por intesección de dichos hiperplanos,la sucesión infinita (x_n, x) ha de tener la serie de cuadrados convergente. De modo qeu se ha de verificar

$$(x_1,x)^2 + (x_2,x)^2 + (x_3,x)^2 + \dots + (x_n,x)^2 + \dots < +\infty .$$

De modo más explícito,podemos expresar la condición de punto único de intersección,de los semiplanos dados,de la manera siguiente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\begin{vmatrix} \lambda_1^1 & 0 & 0 & \dots & \gamma_1 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & 0 & \dots & \gamma_2 \\ \lambda_1^3 & \lambda_2^3 & \lambda_3^3 & \dots & \gamma_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^n & \lambda_2^n & \lambda_3^n & \dots & \gamma_n \end{vmatrix}^2}{\left(\lambda_1^1 \lambda_2^2 \lambda_3^3 \cdots \lambda_n^n\right)^2} < +\infty . \qquad [4]$$

Observemos,antes de continuar,que no se presentan excepciones en cuanto a la existencia de los términos de esta serie,pues los factores presentes en los denominadores jamás se anulan.En efecto,como los valores de los λ_n^n se pueden hallar de las expresiones generales,ya calculadas,de los λ_k^n ,cuando $k = n$, en este caso particular,se tiene finalmente

$$\lambda_n^n = \frac{\Delta_n}{\sqrt{\Delta_n \Delta_{n-1}}}$$

siendo todos los Δ_n no nulos,porque son los determinantes de Gram referidos a sistemas de vectores linealmente independientes.

Una vez que se ha verificado la condición de la determinación del punto de intersección de la sucesión de hiperplanos dados,las componentes de dicho punto,sobre la base ortonormal $\{x_n\}$,son los números calculados (x_n,x),en la resolución del sistema de ecuaciones lineales [3]. Y por tanto,el desarrollo en serie de Fourier del punto x de intersección de la sucesión de hiperplanos dados,en el espacio de Hilbert H y perteneciente a este mismo espacio(y no un elemento ajeno al mismo,como podía ser una mera sucesión numérica,si no se cumple la condición [4] de existencia) es,pues

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\begin{vmatrix} \lambda_1^1 & 0 & 0 & \cdots & \gamma_1 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & 0 & \cdots & \gamma_2 \\ \lambda_1^3 & \lambda_2^3 & \lambda_3^3 & \cdots & \gamma_3 \\ - & - & - & - & - \\ \lambda_1^n & \lambda_2^n & \lambda_3^n & \cdots & \gamma_n \end{vmatrix}}{\lambda_1^1 \lambda_2^2 \lambda_3^3 \cdots \lambda_n^n} x_n .$$

El análisis de la condición [4] del punto único de intersección de la sucesión de hiperplanos,en las condiciones impuestas,se puede desarrollar aún más.

En primer lugar,consideremos dos particularidades. Cuando la base $\{y_n\}$ sea ya ortonormal,entonces no se necesita el proceso de Ortonormalización para llegar a la base $\{x_n\}$,pues-to que $y_n = x_n$, $n = 1,2,3,\ldots$ y,por tanto,tambien se verifica

$$\lambda_n^n = 1 \quad ; \quad \lambda_k^n = 0 \quad , \quad k \neq n \quad ; \quad n = 1,2,3,\ldots$$

de aquí que

$$(x_n,x) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \gamma_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \gamma_2 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \gamma_3 \\ & 0 & 0 & \cdots & \gamma_n \end{vmatrix} = \gamma_n ,$$

como era natural esperar y sirve de comprobación de las expresiones obtenidas,para la sucesión (x_n,x) ,en función de la sucesión $\{y_n\}$ densa y linealmente independiente,dada inicialmente.

Otra de las condiciones supuesta era,recordémosla,que la sucesión numérica $\{\gamma_n\}$ tenía su serie de cuadrados convergente :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^2 < +\infty,$$

pero puede ser,en particular,esta sucesión la sucesión de ceros $\{0\}$ la cual evidentemente tiene serie de cuadrados sumable,pues es el punto origen del espacio de Hilbert l^2. Y en dicho caso particular se verifica

$$(x_n,x) = \frac{\begin{vmatrix} \lambda_1^1 & 0 & 0 \ldots & 0 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & 0 \ldots & 0 \\ \lambda_1^3 & \lambda_2^3 & \lambda_3^3 \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_1^n & \lambda_2^n & \lambda_3^n \ldots & 0 \end{vmatrix}}{\lambda_1^1 \lambda_2^2 \lambda_3^3 \ldots \lambda_n^n} = 0 \quad , \; n = 1,2,3,\ldots$$

con lo cual el elemento x viene dado por su desarrollo en serie de Fourier,en el espacio de Hilbert H

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} (x_n,x)\, x_n = \sum_{n=1}^{\infty} 0 \; x_n = 0 \;,$$

que es el punto origen del espacio de Hilbert H.

Finalmente,advertimos que la condición de existencia de punto único de intersección ,de la sucesión de hiplerplanos del espacio de Hilbert H,en lo que a la sucesión numérica $\{\gamma_n\}$ se refiere, constituye una efectiva generalización la relación [4] ,como ya hemos justificado,de la condición de que la serie de cuadrados de $\{\gamma_n\}$ sea sumable.

8. DETERMINACION DE UN POLIEDRO CONVEXO EN EL ESPACIO DE HILBERT SEPARABLE ~~$~~ CRITERIO DE CONVEXIDAD DE UN POLIEDRO DE~~L~~ ESTE ESPACIO ~~Y~~ E INECUACIONES DEL POLIEDRO.

Vamos a proceder ahora a la representación de un poliedro del espacio de Hilbert separable H. Para ello consideremos un conjunto infinito $\{H_i\}$, $i \in I$; de hiperplanos del espacio en cuestión. Siendo el cardinal del conjunto I tal que

$$|I| \geqslant \aleph_0 .$$

Y supongamos que las ecuaciones respectivas del conjunto de hiperplanos dados sean

$$(y_i, x) = \gamma_i \quad , i \in I \quad ;$$

Seleccionamos del conjunto infinito de hiperplanos las sucesiones infinitas de los mismos $\{H_n\}$,cuyas ecuaciones

$$(y_n, x) = \gamma_n \quad , n = 1,2,3,...$$

sean tales que la sucesión de vectores direccionales $\{y_n\}$ sea linealmente independiente y densa en el espacio.Además la sucesión numérica $\{\gamma_n\}$ ha de cumplir la condición(4) de la sección anterior) para que la sucesión de hiperplanos determine un punto único de intersección.

El conjunto de hiperplanos $\{H_i\}$, $i \in I$, desde luego,se le supone capaz de tales selecciones.

Con las hipotesis admitidas;aislamos un hiperplano H_k del conjunto dado de los hiperplanos $\{H_i\}$, $i \in I$;es decir tomamos un índice fijo $k \in I$ para el correspondiente hiperplano. Y a continuación elegimos sucesiones de hiperplanos $\{H_n\}$ del conjunto $\{H_i\}$, $i \in I$, $i \neq k$; con las condiciones impuestas. Determinamos el punto de intersección x de la sucesión de hiperplanos $\{H_n\}$,según sabemos; y ahora examinamos la posión relativa del punto x con respecto al hiperplano H_k ,lo cual se logra mediante el signo del funcional lineal (y_k, y) en el punto x.

El número $(y_k, x) - \gamma_k$ puede ser nulo,positivo o negativo.En los dos últimos casos el punto x es exterior al hiperplano H_k ,en el primero el punto yace en el hiperplano.

De las últimas consideraciones he~~c~~hchas podemos deducir el criterio de convexidad de un poliedro,en el espacio de Hilert, del siguiente modo :

Fijado un hiperplano H_k del conjunto de hiperplanos dados, determinemos el punto de intersección x de cada una de las sucesiones admisibles $\{H_n\}$ del conjunto $\{H_i\}$, $i \in I$, $i \neq k$. Así se construye un conjunto $\{x\}$ de puntos del espacio. La posición relativa,con respecto al hiperplano H_k ,se averigua por el signo de $(y_k,x) - \gamma_k$,de cada punto x del conjunto $\{x\}$.

Por tanto,para que se puede definir un poliedro convexo,mediante el conjunto inicial de hiperplanos,se requiere que uno,al menos de los números reales

$$(y_k,x) - \gamma_k \quad , \quad x \in \{x\}$$

no sea nulo. Entre estos números no nulos,puede haberlos de distinto signo.Lo cual nos permite una doble elección de semiespacio, determinado por el hiperplano H_k y uno de los puntos x_k tales que

$$(y_k,x_k) - \gamma_k \neq 0 \quad , \quad x_k \in \{x\}.$$

Una vez que se verifique esta condición,asignamos al hiperplano H_k uno de tales puntos x_k ;así podemos determinar el semiespacio de borde H_k y que contiene el punto exterior x_k a este hiperplano,por la inecuación

$$\left[(y_k,x_k) - \gamma_k\right] \left[(y_k,y) - \gamma_k\right] > 0.$$

Si ahora,para cada hiperplano H_k $(k \in I)$ podemos encontrar un punto x_k que sea exterior a dicho hiperplano e intersección de una sucesión admisible de hiperplanos $\{H_n\}$,distintos del H_k ,y del conjunto $\{H_i\}$ $(i \in I)$;lo cual se reconode por las condiciones

$$(y_k,x_k) - \gamma_k \neq 0; \; x_k = \bigcap_{n < \aleph_0} H_n \quad ; \quad \{H_n\}_{n<\aleph_0} \subset \{H_i\}_{i \in I}$$

que son las de convexidad del poliedro definido por el conjunto de hiperplanos $\{H_i\}$ $(i \in I)$.

Cuando se haya verificado que se puede definir un poliedro convexo, por el conjunto de hiperplanos dados $\{H_i\}$, $i \in I$, por aplicación del criterio de convexidad establecido, se obtiene una representación del mismo mediante un sistema de inecuaciones.

Para que sea posible una tal representación se requiere, como hemos visto, que los funcionales, no lineales, salvo $\gamma_k = 0$,

$$(y_k, y) - \gamma_k$$

no se anulen para un punto x_k , al menos, de la intersección de una sucesión admisible de hiperplanos $\{H_n\}$ distintos del hiperplano H_k y elegidos del conjunto inicial de hiperplanos $\{H_i\}$, $i \in I$.

Dichos funcionales lineales pueden, tambien a veces, asumir valores reales positivos y negativos, en los puntos señalados x_k . En este caso, se puede elegir uno u otro de los dos semiespacios que define el hiperplano H_k, para determinar el poliedro convexo. Por eso, el poliedro convexo no está definido, en general, por los hiperplanos H_k $(k \in I)$, sino que para cada uno de dichos hiperplanos hay una posibilidad doble (a veces), de elección de semiespacio por él y uno de los puntos x_k definido.

De lo expuesto se infiere que , verificado el criterio de convexidad del poliedro por definir, si a cada hiperplano H_k $(k \in I)$ de ecuación

$$(y_k, y) - \gamma_k = 0$$

le asignamos uno de los puntos x_k , intersección de una sucesión admisible de hiperplanos del conjunto total de hiperplanos dados y distintos del H_k ; y tal que verifique

$$(y_k, x_k) - \gamma_k \neq 0 \quad ,$$

se puede representar el poliedro convexo, ya determinado, mediante las eleciones hechas, por el siguiente sistema de inecuaciones

$$\left[(y_k, x_k) - \gamma_k\right] \left[(y_k, y) - \gamma_k\right] > 0 \quad , \quad k \in I ,$$

El conjunto de puntos $\{y\}$ que verifica este sistema de inecuaciones, estrictamente hablando, representa los puntos interiores del poliedro convexo; pero si deseamos incluir en la representación los puntos de su contorno,es decir,los puntos de las caras del poliedro,entonce la representación del poliedro,contorno incluido,viene dada por el sistema de inecuaciones siguientes

$$\left[(y_k , x_k) - \gamma_k \right] \left[(y_k , y) - \gamma_k \right] \geqslant 0 \quad , \quad k \in I .$$

9. LOS ORTOEDROS EN EL ESPACIO DE HILBERT GENERAL : DETERMINACION Y REPRESENTACION.

Vamos a definir y representar mediante inecuaciones funcionales las figuras,que como veremos,se podrían denominar "ortoedros" del espacio de Hilbert.

Para ello,las bases ortonormales utilizadas en esta discusión son sistemas maximales linealmente independientes de vectores ortonormales.

La existencia de base ortonormal,en un espacio de Hilbert infinito--dimensional cualquiera,se demuestra por aplicación del principio extremal de los conjuntos parcialmente ordenados,en forma conjuntista. En efecto,sea un espacio de Hilbert cualquiera H , de infinitas dimensiones. En primer lugar,existen en él sistemas linealmente independientes de vectores ortogonales,porque se pueden ortogonalizar las sucesiones,finitas o infinitas,de vectores linealmente independientes.

Consideremos el sistema de todos los conjuntos ortogonales y de vectores no nulos del espacio; y ordénense por inclusión. Elegido un sistema parcial del general,que esté ordenado totalmente por inclusión,la reunión de todos los conjuntos de dicho subsistema es, desde luego,un conjunto de vectores ortogonales y además constituye una cota superior del subsistema elegido,con respecto a la inclusión conjuntista. Por tanto,existe un conjunto maximal de vectores (no nulos) ortogonales y linealmente independientes,el cual es la base ortogonal que buscábamos. Y ahora se normalizan los vectores de esta base,dividiéndolos por sus respectivas normas y se consigue una base ortonormal del espacio.

Los hiperplanos de un espacio de Hilbert general H ,se pueden definir mediante el producto escalar,en la forma

$$(x_k,x) = \gamma_k$$

donde x_k es un vector determinado del espacio y γ_k una constante real.

Además,en un espacio de Hilbert general H ,todo funcional lineal $f(x)$ (y contínuo) admite la expresión (x_k,x) ,para un vector determinado y único x_k ,según el teorema de Fréchet-Riesz.

Veamos que un sistema de hiperplanos del espacio de Hilbert general H, en ciertas condiciones, determina un único punto de intersección.

Sea el sistema de hiperplanos $\{H_i\}$, $i \in I$, de ecuaciones

$$(x_i,x) = \gamma_i \quad , \quad i \in I$$

en donde el conjunto de vectores direccionales $\{x_i\}$ de los hiperplanos,constituye una base ortonormal del espacio, y la sucesión numérica real,transfinita, $\{\gamma_i\}$ $(i \in I)$, contine un conjunto numerable,a lo más,de valores no nulos.

En estas condiciones,las ecuaciones de los hiperplanos significan que la componente del vector x ,sobre cada vector x_i $(i \in I)$ de la base ortonormal , es γ_i. Por tanto,el único punto común al sistema dado de hiperplanos,es el punto x cuya expresión en la base ortonormal considerada es,pues

$$x = \sum_{i \in I} \gamma_i x_i \quad .$$

Para definir un "ortoedro" en el espacio de Hilbert general H , tomemos un conjunto de hiperplanos $\{H_i\}$, $i \in A$; donde el cardinal $|A|$ no es menor que la dimensión del espacio H

$$|A| \geq \dim (H) \; .$$

Se eligen despues,los subconjuntos $\{H_i\}$, $i \in I$, del sistema total de hiperplanos dados $(I \subset A)$, tales que sus vectores direccionales $\{x_i\}$, de las ecuaciones de aquéllos

$$(x_i,x) = \gamma_i \quad , \quad i \in I$$

constituyen una base ortonormal del espacio y la sucesión transfinita

$\{\gamma_i\}$, $i \in I$, de números reales consta de solo ceros, salvo un conjunto numerable (a lo más).

Se determina el punto x de intersección de estos hiperplanos y se localiza su posición respecto a cada hiperplano restante del sistema total $\{H_j\}$, $j \in A - I$ .Cosa que ya sabemos efectuar, mediante el signo del funcional correspondiente a la ecuación del hiperplano H_j.

Si con respecto a cada hiperplano H_k $(k \in A)$ podemos determinar un punto x_k ,exterior a aquél, de intersección de un sistema de hiperplanos $\{H_i\}$, $i \in I$, $i \neq k$; cuyos vectores direccionales $\{y_i\}$ $(i \in I)$ formen una base ortonormal del espacio ;el poliedro convexo, así definido, es plausible llamarlo "ortoedro" y viene dado por sistema de inecuaciones (con la notación usada)

$$\left[(y_k,x_k) - \gamma_k\right] \left[(y_k,y) - \gamma_k\right] > 0 \quad , \quad k \in A \ .$$

10. DETERMINACION DEL PUNTO DE INTERSECCION DE UN SISTEMA DE HIPERPLANOS, EN EL ESPACIO DE HILBERT GENERAL; CUYOS VECTORES DIRECCIONALES FORMAN UNA BASE ALGEBRICA DEL ESPACIO.

Sea un sistema de hiperplanos $\{H_i\}$, $i \in I$; del espacio de Hilbert general y real H , de ecuaciones

$$(a_i,x) = \gamma_i \quad , \quad i \in I \ ;$$

tales que el conjunto de sus vectores direccionales $\{a_i\}$, $i \in I$; forma una base algébrica del espacio, por tanto el cardinal del conjunto I de índices, infinito no mumerable, coincide con la dimensión algébrica del espacio H . Es decir

$$|I| = \text{dim. alg.}\ (H) = \text{dim}\ (H)^{\aleph_0}$$

Como el número de componentes de nulas de todo vector $x \in H$, en la base algébrica $\{a_i\}$, $i \in I$, es finita, dicho vector x se puede expresar del modo

$$x = \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \xi_3 a_3 + \dots + \xi_n a_n \ ,$$

siendo las componentes, no necesariamente nulas, las que corresponden a los vectores a_{i_1} , a_{i_2} , a_{i_3} , ... , a_{i_n} , de la base algébrica

$\{a_i\}$, aunque para facilitar la notación, sin perder la generalidad, hemos expresado más simplemente

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n.$$

Para resolver el sistema de ecuaciones

$$(a_i, x) = \gamma_i \quad , i \in I, \quad |I| = \dim (H)^{\aleph_0} \quad ,$$

cuyo número coincide con la dimensión algébrica del espacio H, las referimos a la base algébrica $\{a_j\}$ $(j \in I)$; de donde

$$(a_i, x) = (a_i, a_1)\xi_1 + (a_i, a_2)\xi_2 + (a_i, a_3)\xi_3 + \dots + (a_i, a_n)\xi_n = \gamma_i$$

$$i \in I.$$

Si la solución x de este sistema, cuando la haya, tiene las componentes no necesariamente nulas en los vectores $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$, la condición necesaria para que el sistema tenga solución es

$$a_{i1}\xi_1 + a_{i2}\xi_2 + a_{i3}\xi_3 + \dots + a_{in}\xi_n = \gamma_i \qquad (i \in I),$$

siendo $a_{ij} = (a_i, a_j)$, $i, j \in I$; por tanto, las n incógnitas $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$, se pueden determinar con sólo n de las ecuaciones de este sistema de infinitas ecuaciones lineales, de cardinal transfinito y no numerable.

Sirven como ecuaciones, por ejemplo, las correspondientes a los mismos índices $i_1, i_2, i_3, \dots, i_n$ que los vectores a_i, sobre los cuales las componentes del punto x no son nulas (con certeza) :

$$\begin{array}{l} a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 + a_{13}\xi_3 + \dots + a_{1n}\xi_n = \gamma_1 \\ a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + a_{23}\xi_3 + \dots + a_{2n}\xi_n = \gamma_2 \\ a_{31}\xi_1 + a_{32}\xi_2 + a_{33}\xi_3 + \dots + a_{3n}\xi_n = \gamma_3 \qquad [1] \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}\xi_1 + a_{n2}\xi_2 + a_{n3}\xi_3 + \dots + a_{nn}\xi_n = \gamma_n . \end{array}$$

La primera condición necesaria para que este sistema de n ecuaciones en n incógnitas tenga solución única es que el determinante de sus coeficientes D sea no nulo

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0 , \qquad [2]$$

pero aunque tambien esta condición es suficiente para la existencia de solución única del sistema [1] de n ecuaciones lineales con n incógnitas ;no es,por supuesto,condición precisa para que el sistema lineal de las infinitas ecuaciones lineales,dadas inicialmente, $(i \in I)$, tenga solución única. Es decir,que los infinitos hiperplanos

$$(a_i, x) = \gamma_i \qquad (i \in I)$$

se corten en un punto. único.

Condiciones necesarias son,todavía,las que resultan de la verificación de las ecuaciones restantes por la solución única de las n ecuaciones elegidas.

En primer lugar,la condición de solución única del sistema [1] de las n ecuaciones lineales,en n incógnitas es

$$D \neq 0 ,$$

cuya interpretación geométrica consiste en que :

El sistema de vectores a_1 , a_2 , a_3 , ... , a_n es linealmente independiente,como subsistema de la base algébrica $\{a_i\}$, $i \in I$,

al ser D el determinante de Gram de aquellos n vectores.

Cumplida ya esta condición,la solución del sistema de n ecuaciones en n incógnitas,está dada por la Regla de Cramer

$$\xi_1 = D_1 : D , \ \xi_2 = D_2 : D , \ \xi_3 = D_3 : D , \ \ldots , \ \xi_n = D_n : D$$

donde las determinantes $D_1, D_2, D_3, \ldots, D_n$ tienen el significado usual para la Regla de Cramer.

Pero para que el sistema lineal de las infinitas ecuaciones

$$a_{i1}\,{}_1 + a_{i2}\,{}_2 + a_{i3}\,{}_3 + \dots + a_{in}\,{}_n = \gamma_i \quad (i \in I)$$

tenga solución y única, han de verificarse, entre los coeficientes del sistema a_{ij} $(j = 1,2,\dots,n)$, $i \in I - \{1,2,3,\dots,n\}$ y los términos independientes γ_i, $i \in I - \{1,2,3,\dots,n\}$, las condiciones restrictivas siguientes

$$a_{i1}\,{}_1 + a_{i2}\,{}_2 + a_{i3}\,{}_3 + \dots + a_{in}\,{}_n = \gamma_i$$

$$i \in I - \{1,2,3,\dots,n\}$$

donde los números ${}_1, {}_2, {}_3, \dots, {}_n$ constituyen la solución del sistema finito de ecuaciones lineales [1].

Así pues, para la compatibilidad del sistema de infinitas ecuaciones lineales, se requiere que las constantes reales γ_i sean precisamente

$$\gamma_i = (a_{i1} D_1 + a_{i2} D_2 + a_{i3} D_3 + \dots + a_{in} D_n) : D \;;\; i \in I - \{1, 2,\dots,n\}.$$

De donde se deduce

$$= a_{i1}\begin{vmatrix} \gamma_1 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ \gamma_2 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \gamma_3 & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \gamma_n & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + a_{i2}\begin{vmatrix} a_{11} & \gamma_1 & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \gamma_2 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & \gamma_3 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \gamma_n & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} +$$

$$a_{i3}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \gamma_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \gamma_2 & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \gamma_3 & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \gamma_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \dots + a_{in}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & \gamma_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & \gamma_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & \gamma_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & \gamma_n \end{vmatrix} =$$

$$
= -\begin{vmatrix} 0 & a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{in} \\ \gamma_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ \gamma_2 & a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \gamma_3 & a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \gamma_n & a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} .
$$

Por ello las condiciones necesarias, y también suficientes, para que el sistema de hiperplanos

$$
(a_i, x) = \gamma_i \quad , \quad i \in I \quad , \quad |I| = \dim (H) \leq \aleph_0 \quad ,
$$

se corten en un solo punto, del espacio de Hilbert H, son

$$
\gamma_i = -\begin{vmatrix} 0 & a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{in} \\ \gamma_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ \gamma_2 & a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \gamma_3 & a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \gamma_n & a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nm} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nm} \end{vmatrix}
$$

$$
i \in I = \{1, 2, 3, \ldots, m\} \quad ,
$$

a la cual ha de agregarse la primera condición deducida

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0 . \qquad [2]
$$

Una vez verificadas las condiciones de existencia [2], [3] de punto de intersección del sistema de hiperplanos dados, este punto es

$$x = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 + \dots + \lambda_n a_n$$

$$= \frac{D_1}{D} a_1 + \frac{D_2}{D} a_2 + \frac{D_3}{D} a_3 + \dots + \frac{D_n}{D} a_n$$

por tanto, se obtiene finalmente

$$x = - \begin{vmatrix} 0 & a_1 & a_2 & a_3 \cdots & a_n \\ \lambda_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \cdots & a_{1n} \\ \lambda_2 & a_{21} & a_{22} & a_{23} \cdots & a_{2n} \\ \lambda_3 & a_{31} & a_{32} & a_{33} \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_n & a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$
= - \begin{vmatrix} 0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ \gamma_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ \gamma_2 & a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \gamma_3 & a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \gamma_n & a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} .
$$

11. DETERMINACION DE UN POLIEDRO CONVEXO EN EL ESPACIO DE HILBERT GENERAL : CONDICIONES DE CONVEXIDAD E INECUACIONES DEL POLIEDRO .

Consideremos cualquier espacio de Hilbert H ,y generalmente de dimensión infinita no numerable , $\dim (H) \geq \aleph_0$; y en este espacio un sistema de hiperplanos $\{H_i\}$ $, i \in A$, de ecuaciones

$$(a_i, x) = \gamma_i \ , \quad i \in A \quad , \quad |A| \geq \dim (H)^{\aleph_0}.$$

Seleccionamos un subsistema admisible del mencionado sistema ,en el sentido de que los vectores direccionales $\{a_i\}$, $i \in I$, constituyen una base del espacio y el subsistema $\{H_i\}$ $(i \in I)$ cumple las condiciones, [2] y [3] del apartado anterior,de existencia y unicidad del punto de intersección del sistema de hiperplanos $\{H_i\}$. Naturalmente,se admite tácitamente que el sistema total de hiperplanos $\{H_i\}$, $i \in A$,es susceptible de tales selecciones.

Ahora individuamos un hiperplano H_k $(k \in A)$ del sistema total de los dados. Y se construyen todos los sistemas admisibles de hiperplanos $\{H_i\}$, $i \in I \subset A$, $i \neq k$; así como su punto de intersección x.

Se averigua si este punto x es exterior al hiperplano H_k , mediante el signo de

$$(a_k, x) - \gamma_k \ .$$

Si hubiera al gún punto x_k ,intersección de algún sistema admisible de hiperplanos distintos al H_k ,este punto x_k se lo asignamos al hiperplano H_k cuando le es exterior,es decir

$$(a_k,x_k) - \gamma_k \neq 0.$$

Con lo cual queda determinado el semiespacio de borde el hiperplano H_k y contenlendo el punto x_k ,aunque es posible que haya diversos puntos x_k ,que den signo contrario al funcional $(a_k,x) - \gamma_k$,en cuyo caso poseemos una doble posibilidad de elección de semiespacio.

Cuando a <u>cada</u> hiperplano H_k $(k \in A)$,se le puede asignar un punto tal x_k ,que sea intersección de un sistema admisible de hiperplanos $\{H_i\}$, $i \in I \subset A$, $i \neq k$; y que verifique

$$\bigwedge_{k \in A} ((a_k,x_k) - \gamma_k \neq 0) ,$$

estas condiciones constituyen un criterio de convexidad del poliedro definido por intersección de los semiespacios $H_k\, x_k$, $k \in A$, y por ello el poliedro convexo,así definido se pueden representar por el sistema de inecuaciones

$$\left[(a_k,x_k) - \gamma_k\right] \left[(a_k,x) - \gamma_k\right] > 0 \quad ; \quad k \in A .$$

12. <u>DETERMINACION DEL PUNTO DE INTERSECCION DE UN SISTEMA DE HIPERPLANOS, CUYO NUMERO CARDINAL COINCIDE CON LA DIMENSION DEL ESPACIO;EN UN ESPACIO LINEAL GENERAL INFINITO-DIMENSIONAL.</u>

Sea un espacio lineal E ,general,es decir,con la estructural lineal meramente y carente,en general de estructura topológica o métrica, compatible con la lineal; sobre el cuerpo de los números reales. También consideramos su dimensión arbitraria,por lo cual será, cuando sea infinita,como lo es generalmente,

$$\dim (E) \geq \aleph_0 .$$

Consideremos un sistema de hiperplanos $\{H_i\}$, $i \in I$,cuyas ecuaciones son

$$f_i(x) = \gamma_i \quad , \quad i \in I \quad , \quad |I| = \dim (E) \quad ,$$

donde los f_i , $i \in I$, son funcionales lineales (no idénticamente nulos) del espacio lineal E.

Sea $\{e_i\}$, $i \in I$,una base fija del espacio lineal.

Los funcionales lineales f_i , $i \in I$, están determinados por los valores que toman en los vectores de la base $\{e_j\}$, $j \in I$, Además es lícito adoptar como conjunto de índices, I ,el mismo elegido para el sistema de funcionales f_i , $i \in I$; porque el cardinal de I es tal,por hipótesis, que $|I| = \dim(E)$.

Sean pues,los valores $f_i(e_j)$ definidos por las sucesiones transfinitas de números reales a_{ij} del modo siguiente

$$f_i(e_j) = a_{ij} \;;\; i \in I \;,\; j \in I \;;\; |I| = \dim(E).$$

Como un punto $x \in E$, se puede expresar así

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \xi_3 e_3 + \dots + \xi_n e_n$$

con respecto a la base $\{e_j\}$, $j \in I$; puesto que sólo un número finito de componentes de x pueden ser no nulas.

De donde,se obtiene

$$f_i(x) = \xi_1 f_i(e_1) + \xi_2 f_i(e_2) + \xi_3 f_i(e_3) + \dots + \xi_n f_i(e_n) = \gamma_i$$

$$= a_{i1}\xi_1 + a_{i2}\xi_2 + a_{i3}\xi_3 + \dots + a_{in}\xi_n = \gamma_i \;,\quad i \in I .$$

Para determinar la solución de este sistema de infinitas ecuaciones lineales,nos bastan n ecuaciones del sistema, cuando ya el sistema total se haya reconocido como compatible y con solución única.

Consideremos,en principio,el subsistema finito

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 + a_{13}\xi_3 + \dots + a_{1n}\xi_n = \gamma_1 \\ a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + a_{23}\xi_3 + \dots + a_{2n}\xi_n = \gamma_2 \\ a_{31}\xi_1 + a_{32}\xi_2 + a_{33}\xi_3 + \dots + a_{3n}\xi_n = \gamma_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}\xi_1 + a_{n2}\xi_2 + a_{n3}\xi_3 + \dots + a_{nn}\xi_n = \gamma_n \end{array}\right\} \quad [1]$$

el cual posee solución única,cuando satisface la condición característica

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0 . \qquad [2]$$

Supuesta ya verificada la última condición [2] , las condiciones necesarias y suficientes de existencia de solución única del sistema de infinitas ecuaciones lineales

$$f_i(x) = \gamma_i \quad , \quad i \in I \quad , \quad |I| = \dim(E)$$

son ,junto a la [2], las siguientes

3] $$\gamma_i = a_{i1}\xi_1 + a_{i2}\xi_2 + a_{i3}\xi_3 + \ldots + a_{in}\xi_n \, , \quad i \in I - 1,2,..n$$

donde ξ_1 , ξ_2 , ξ_3 , ... , ξ_n es la solución única del sistema de finitas ecuaciones e incógnitas [1] .

Observemos,con respecto al espacio de Hilbert real y general H, que allí las constantes

$$a_{ij} = (a_i, e_j) \qquad , \; j \in I$$

para cada i fijo , eran todas nulas excepto un número finito, porque eran las componentes del vector a_i en la base ortonormal $\{e_j\}$, $j \in I$. Mientras que aquí,en el espacio lineal real y general E , pueden ser las constantes

$$a_{ij} = f_i(e_j) \quad , \quad j \in I$$

no nulas en número infinito,incluso todas ellas,para un i fijo , porque se trata de los valores reales que toma el funcional lineal f_i , para los vectores de la base $\{e_j\}$ $(j \in I)$.

A partir de este momento,los cálculos que hicimos en el espacio de Hilbert general H ,para determinar el punto de intersección de un sistema de hiperplanos,se pueden repetir,una vez explicado el significado de las constantes, en un espacio lineal real y general infinito-dimensional.

En virtud de lo dicho, se obtienen las condiciones necesarias y suficientes para que el sistema de hiperplanos del espacio lineal E, cuyas ecuaciones son

$$a_{i1}\xi_1 + a_{i2}\xi_2 + a_{i3}\xi_3 + \dots + a_{in}\xi_n = \gamma_i \ , \quad i \in I$$

$$|\, I \,| = \dim(E)$$

se corten en un punto único :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0 \ ,$$

$$_{i} = - \begin{vmatrix} 0 & a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{in} \\ \gamma_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ \gamma_2 & a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \gamma_3 & a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \gamma_n & a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$i \in I - \{1,2,3,\dots,n\} .$$

El punto de intersección del sistema de hiperplanos es

$$- \begin{vmatrix} 0 & e_1 & e_2 & e_3 & \cdots & e_n \\ \gamma_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ \gamma_2 & a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \gamma_3 & a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \gamma_n & a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} .$$

13. DETERMINACION DE UN POLIEDRO CONVEXO EN EL ESPACIO LINEAL GENERAL, REAL E INFINITO-DIMENSIONAL : CONDICIONES DE CONVEXIDAD E INECUAciones DEL POLIEDRO.

Ahora podemos proceder, en un espacio lineal real E arbitrario, a la representación y determinación de un poliedro convexo.

Sea un sistema de hiperplanos $\{H_i\}$, $i \in A$, del espacio lineal general E, cuyas ecuaciones son

$$f_i(x) = \gamma_i \ , \quad i \in A \ , \quad |A| \geq \dim(E) \ .$$

Selccionemos todos los subsistemas admisibles del sistema de hiperplanos dados inicialmente; es decir, los sistemas de hiperplanos $\{H_i\}$, $i \in I \subseteq A$, $|I| = \dim(E)$, tales que se cortan en un solo punto x, lo cual ya sabemos decidir, mediante el criterio establecido en la sección precedente, y asimismo determinar dicho punto x.

Naturalmente suponemos que el sistema total de hiperplanos dados es susceptible de tales selecciones de subsistemas admisibles.

Fijemos un hiperplano H_k $(k \in A)$ y a él vamos a referir las intersecciones de cada subsistema admisible de hiperplanos $\{H_i\}$, $i \in I$, $i \neq k$; que no contienen el hiperplano fijado H_k.

Si uno, al menos, de los puntos de intersección de tales subsistemas admisibles, no yace en el hiperplano H_k, éste y ese punto x_k determinan un semiespacio que los contiene. Lo cual se reconoce por la simple condición

$$f_k(x_k) \neq \gamma_k \ .$$

Cuando para cada hiperplano H_k del sistema total de hiperplanos dados $\{H_i\}$, $i \in A$; se le pueda asociar un punto x_k, ajeno al dicho hiperplano y punto de intersección de un subsistema admisible de hiperplanos, distinto del hiperplano H_k; entonces en estas condiciones reside un criterio de definición de un poliedro convexo, a partir del sistema total de hiperplanos $\{H_i\}$, $i \in A$ y el sistema elegido de puntos $\{x_k\}$, $k \in A$. Pero los hiperplanos del sistema total no determinan un solo poliedro convexo, en general, cuando se verifica previamente la existencia de la convexidad del poliedro; la cual podemos expresar breve y simbo-

-licamente,en la forma

$$\bigwedge_{k \in A} (f_k (x_k) - \gamma_k \neq 0) .$$

Cuando se ha verificado la convexidad del poliedro definido por el sistema de hiperplanos $\{H_i\}$, $i \in A$, y el conjunto de puntos $\{x_k\}$, por aplicación del criterio deducido ; la representación de dicho poliedro ponvexo está dada por sistema de inecuaciones

$$\left[f_k (x_k) - \gamma_k\right] \left[f_k (x) - \gamma_k\right] > 0 \quad ; \quad k \in A \ ,$$

si bien,los puntos que verifican este sistema de inecuaciones son los puntos interiores del poliedro convexo; por ello,cuando se quiere incluir los puntos del contorno o frontera,es decir, los puntos de las caras del poliedro convexo,se han de utilizar las inecuaciones siguientes

$$\left[f_k (x_k) - \gamma_k\right] \left[f_k (x) - \gamma_k\right] \geqslant 0 \quad ; \quad k \in A \ .$$

14. DEFINICION Y DETERMINACION DE UN POLIGONO CONVEXO EN UN ESPACIO LINEAL REAL GENERAL : REPRESENTACION DEL POLIGONO CONVEXO.

Al tratar de definir un "polígono convexo" en un espacio lineal E arbitrario,ya disponemos de los elementos y criterios apropiados para hacerlo. Porque se podría definir como una "cara" de un poliedro convexo del mismo espacio lineal E ; es decir,determinado y definido un poliedro convexo en un espacio lineal general ; la figura lineal constituida por todos los puntos del poliedro convexo que están sobre uno sólo de los hiperplanos que lo definen es la que podemos llamar "polígono convexo"del espacio lineal E. Dicha denominación está justificada y fundada en la de polígono plano convexo ordinario del espacio lineal real tri-dimensional y en la de los espacios lineales euclídeos finito-dimensionales.
La definición adoptada de"polígono convexo" en un espacio lineal arbitrario E ,cuya dimensión puede ser cualquiera

$$\dim (E) \geqslant \aleph_0 \ ,$$

es válida,por lo expuesto,en un espacio lineal infinito-dimensional.

Así, pues, supuesto que el sistema de hiperplanos del espacio lineal E,

$$f_i(x) = \gamma_i \quad , \quad i \in A \quad , \quad |A| > \dim(E)$$

defina un poliedro convexo del espacio E, mediante los <u>sistemas admisibles</u> de hiperplanos del sistema total de ellos y la elección apropiada de semiespacios, según ya sabemos al aplicar el criterio de convexidad del poliedro; la representación del polígono convexo, que es la cara del poliedro convexo situada en el hiperplano

$$f_1(x) - \gamma_1 = 0$$

viene dada por el sistema de inecuaciones con una sola ecuación

$$f_1(x) - \gamma_1 = 0$$

$$\left[f_k(x_k) - \gamma_k\right]\left[f_k(x) - \gamma_k\right] \geq 0 \quad , \quad k \in A - \{1\}.$$

La determinación y representación del polígono convexo en el espacio lineal E, empero, se puede efectuar directamente, porque se trata de una figura yacente en un hiperplano H_1 del espacio E. Por lo cual, y sin pérdida de generalidad, podemos suponer que el hiperplano H_1 pasa por el origen del espacio E; y por tanto, la variedad lineal H_1 deviene un subespacio E_1, de co-dimensión 1, del espacio.

Tomemos un vector no nulo, e_1 que no pertenezca al subespacio E_1, del espacio E, es decir

$$e_1 \notin E_1 \quad , \quad e_1 \neq 0.$$

El vector e_1, por tanto, constituye una base del subespacio complementario del E_1 en espacio E. Elegimos una base $\{e_i\}$ del espacio total E, con tal de que uno de sus vectores sea el mismo vector e_1. De donde, se infiere

$$e_i \in E_1 \quad , \quad i \in I - \{1\}$$

y la ecuación del hiperplano E_1 adopta la forma

$$f(x) \equiv \xi_1 = 0 \quad ; \quad x = \xi_1 e_1 + \sum_{\substack{i \in I \\ i \neq 1}} \xi_i e_i .$$

C A P I T U L O S E G U N D O

ESTUDIO DE LOS POLIGONOS ALABEADOS "CONVEXOS" EN EL ESPACIO EUCLIDEO , EN LOS ESPACIOS EUCLIDEOS n-DIMENSIONALES , EN LOS ESPACIOS DE HIBERT (SEPARABLES O NO) Y EN LOS ESPACIOS LINEALES REALES INFINITO-DIMENSIONALES :

CRITERIOS DE "CONVEXIDAD" DE LOS POLIGONOS ALABEADOS DE ESTOS ESPACIOS.

Y ahora ya limitándonos al espacio lineal, E_1 ,con cuya ecuación sabemos individuar,en el espacio total; la determinación de un poliedro en el espacio E_1 y asimismo los criterios de convexidad, mediante los sistemas admisibles de hiperplanos, y los sistemas de inecuaciones que nos definen un poliedro convexo en el espacio E_1 ,subespacio lineal del espacio E ; nos conducen a los criterios de convexidad de un polígono y a la determinación y representación del mismo. En virtud de que :

Los polígonos convexos de un espacio lineal E son los poliedros convexos de sus subespacios (o variedades) lineales , E_1 , maximales.

15. POLIGONOS ALABEADOS CONVEXOS EN EL ESPACIO EUCLIDEO TRIDIMENSIONAL. CRITERIO DE CONVEXIDAD DE ESTOS POLIGONOS.

Consideramos en el espacio tridimensional ordinario un polígono, en general alabeado,definido por sus vértices ordenados :

$P_1\ P_2\ P_3 \ldots P_{n-1}\ P_n \quad , \qquad n > 3 \quad ,$

como figura uni-dimensional,es decir,dados los vértices y su orden , el polígono está constituido por la reunión de los segmentos rectilineos que unen los vértices consecutivos y el segmento que une el último vértice con el primero

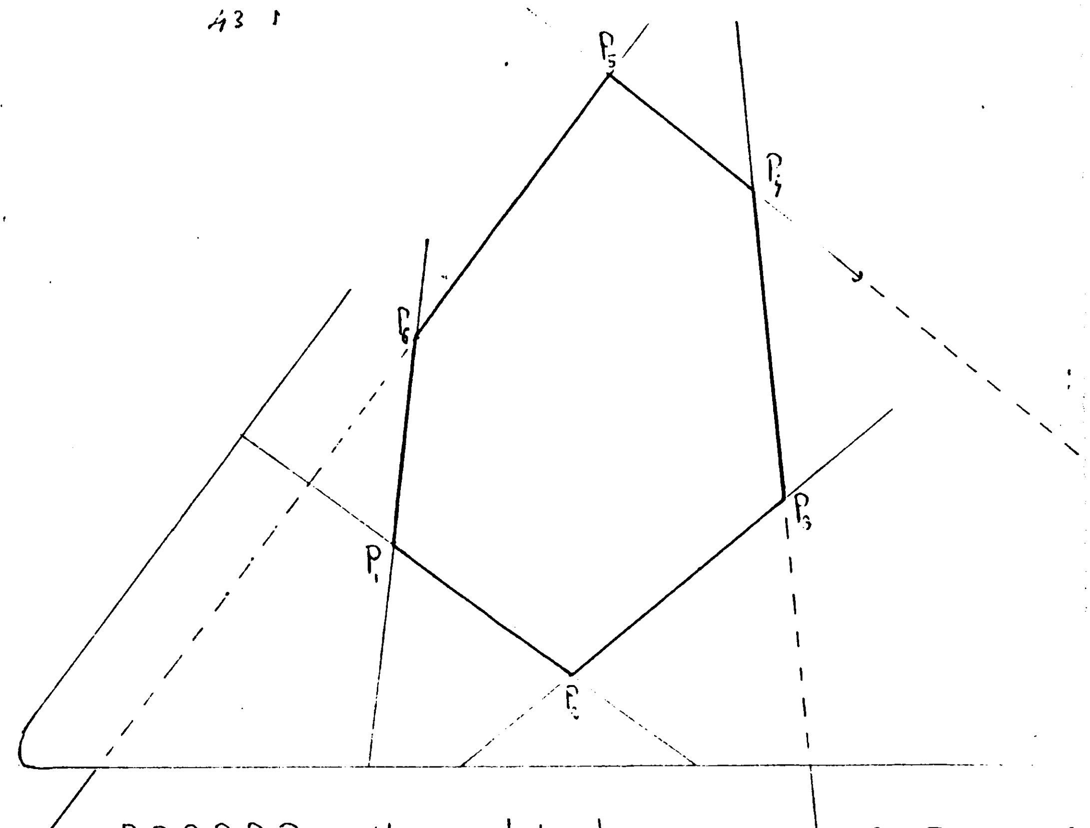
$$\left[P_1,P_2\right] \cup \left[P_2,P_3\right] \cup \left[P_3,P_4\right] \cup \ldots \cup \left[P_{n-1},P_n\right] \cup \left[P_n,P_1\right].$$

En esta definición general encaja como caso particular,la de polígono alabeado convexo,que vamos a adoptar aquí como extensión natural de la de polígono plano convexo.

LLamamos polígono alabeado convexo $P_1\ P_2\ P_3 \ldots P_n$ aquel polígono que no es plano y tal que

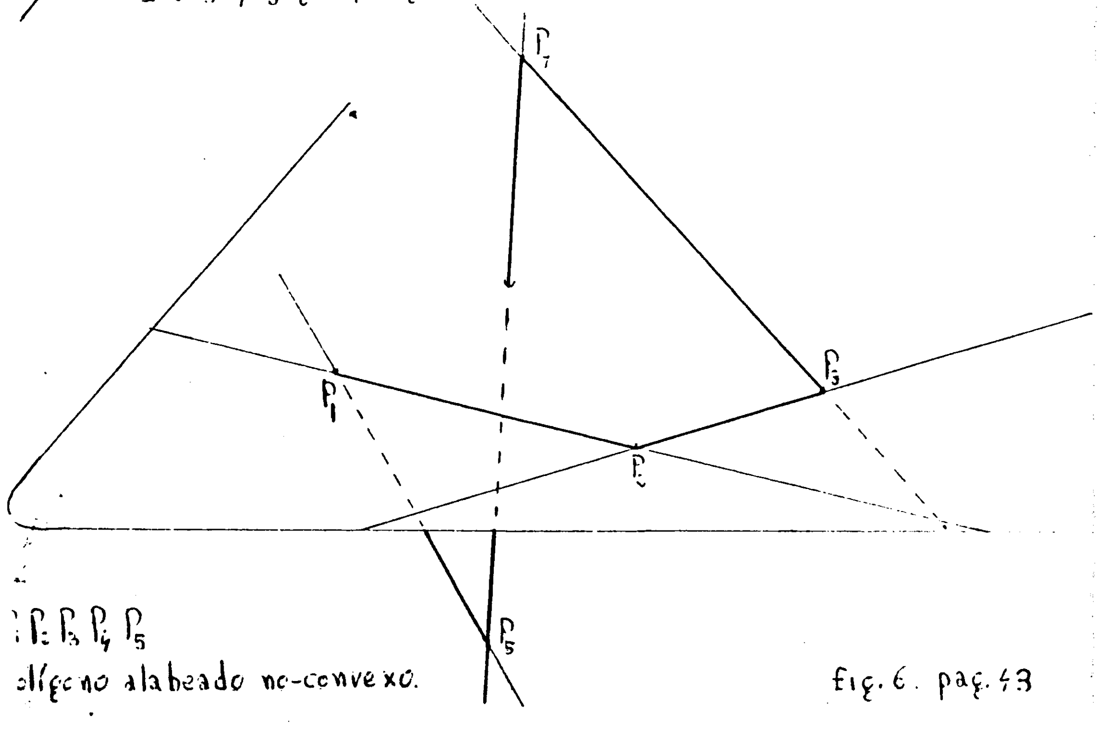
el plano de terminado por los vértices $P_1\ P_2\ P_3$ deje en el mismo semiespacio,borde incluido,los restantes vértices $P_4,P_5,\ldots,P_n$; el plano $P_2\ P_3\ P_4$,deje en el mismo semiespacio,borde incluido,los vértices $P_5,\ P_6,\ \ldots,\ P_n,\ P_1$; ... ; el plano $P_{n-2}\ P_{n-1}\ P_n$,en el mismo semiespacio los vértices $P_1,\ P_2,\ P_3\ ,\ldots,\ P_{n-3}$.

Véanse fig. 5 y fig. 6.



$P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 P_6$, polígono alabeado convexo

fig 5. pag. 43



: $P_2 P_3 P_4 P_5$

olígono alabeado no-convexo.

fig. 6. pag. 43

De la definición adoptada de polígono alabeado convexo, resulta que todos los cuadriláteros alabeados son convexos; porque fuera del plano, que determinan tres cualesquiera de sus vértices consecutivos, está el único vértice restante.

Si definimos los vértices P_i del polígono por sus coordenadas cartesianas en el espacio ordinario real

$P_1(x_1,y_1,z_1)$; $P_2(x_2,y_2,z_2)$; $P_3(x_3,y_3,z_3)$; ... ; $P_n(x_n,y_n,z_n)$

El plano determinado por los tres primeros tiene de ecuación

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x & y & z & 1 \end{vmatrix} = 0 \ ,$$

cuando los restantes vértices del polígono están situados en un mismo semiespacio, con respecto a este plano, entonces la sucesión finita

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_i & y_i & z_i & 1 \end{vmatrix} \ , \quad i = 4,5,\dots,n$$

es de signo constante para sus términos no nulos, que puede haberlos, pero no todos.

Precisamente la condición para que el polígono sea alabeado se reconoce por la existencia de un término, al menos, de la mencionada sucesión finita, que es no nulo.

Y finalmente, para establecer un criterio de convexidad para el polígono alabeado $P_1 P_2 P_3 \dots P_n$ basta imponer la misma condición al plano determinado por tres vértices genéricos $P_i\ P_{i+1}\ P_{i+2}$ y los restantes vértices del polígono, P_{i+k} , $k = 3, 4, \dots, (n-1)$ que hemos impuesto al plano $P_1 P_2 P_3$ y los vértices $P_4, P_5, \dots, P_n$.

Es decir, que el polígono definido por los vértices ordenados

$P_1(x_1,y_1,z_1)$; $P_2(x_2,y_2,z_2)$; $P_3(x_3,y_3,z_3)$; ... ; $P_n(x_n,y_n,z_n)$

es un polígono alabeado convexo, precisamente si se verifican las siguientes condiciones :

Las sucesiones finitas de números reales

$$\begin{vmatrix} x_i & y_i & z_i & 1 \\ x_{i+1} & y_{i+1} & z_{i+1} & 1 \\ x_{i+2} & y_{i+2} & z_{i+2} & 1 \\ x_{i+k} & y_{i+k} & z_{i+k} & 1 \end{vmatrix} \quad ; \ i = 1,2,\ldots,m \ ; \ k = 3,4,\ldots,(n-1)$$

para cada i $(= 1,2,\ldots,n)$ contienen un teérmino no nulo, al menos; y todos los que sean no nulos tienen signo constante.

Los números $i + k$ hay que interpretarlos como su resto módulo n, en cuanto exceden a n, siendo $k = 1,2,\ldots,(n-1)$.

Una vez verificado que el polígono $P_1 P_2 P_3 \ldots P_n$ es alabeado y convexo, según nuestros criterio y definición, si deseáramos una expresión analítica de dicha figura, concebida como uni-dimensional, en función estricta de los datos, las coordenadas cartesianas de los vértices P_i, no tenemos más que escribir que el punto genérico $P(x,y,z)$ satisface la ecuación

$$(x,y,z) = \underset{0 \leq t \leq 1}{\{(x_1,y_1,z_1)(1-t) + (x_2,y_2,z_2)t\}} \bigcup \underset{0 \leq t \leq 1}{\{(x_2,y_2,z_2)(1-t) + (x_3,y_3,z_3)t}$$

$$\bigcup \ldots \bigcup \underset{0 \leq t \leq 1}{\{(x_n,y_n,z_n)(1-t) + (x_1,y_1,z_1)t\}}$$

16. POLIGONOS ALABEADOS EN EL ESPACIO EUCLIDEO n-DIMENSIONAL; CRITERIO DE CONVEXIDAD DE ESTOS POLIGONOS. Y CONCEPTO DE CONVEXIDAD DE POLIGONOS ALABEADOS.

En el espacio euclídeo n-dimensional, R^n, consideremos una sucesión finita de m puntos A_1, A_2, A_3, ..., A_m, siendo $m > n$, y además con el orden establecido en su enumeración.

Vamos a entender aquí por polígono $A_1\ A_2\ A_3\ \ldots\ A_m$ la figura lineal constituida por la reunión de los segmentos rectilineos $[A_1,A_2] \cup [A_2,A_3] \cup [A_3,A_4] \cup \cdots \cup [A_{m-1},A_m] \cup [A_m,A_1]$.

Un polígono,de este tipo,lo llamaremos en particular,alabeado cuando no existe ningún hiperplano que contenga a todos sus vértices;para ello,se requiere que el número de sus vértices m sea mayor que la dimensión n del espacio ; aunque naturalmente hay polígonos cuyo número de vértices es mayor que la dimensión del espacio continente y polígonos son"hiperplanos"(contenidos en un hiperplano).

Un polígono $A_1\ A_2\ A_3\ \ldots\ A_m$ será denominado "convexo",y nos referimos a los polígonos alabeados,cuando el hiperplano que pasa por cada n vértices consecutivos,supuestos linealmente independientes, deja en un mismo semiespacio los restantes vértices. Aunque de éstos puede haber alguno en el mismo borde del semiespacio,pero no todos los vértices ,pues entonces sería un polígono hiperplano, al cual se le aplicaría la convexidad habitual.

Vamos a deducir un criterio de convexidad,para polígonos alabeados del espacio euclídeo n-dimensional, R^m , según el concepto adoptado aquí.

Sean los puntos dados A_i del espacio R^m los siguientes

$A_1 = (a_{11},a_{12},a_{13},\ldots,a_{1n})$; $A_2 = (a_{21},a_{22},a_{23},\ldots,a_{2n})$; $A_3 =$
$= (a_{31},a_{32},a_{33},\ldots,a_{3n})$; ... ; $A_m = (a_{m1},a_{m2},a_{m3},\ldots,a_{mn})$; $m > n$.

Suponiendo,asimismo,que cada n vértices consecutivos,del polígono definido por estos puntos,son linealmente independientes. En primer lugar el hiperplano definido por los n primeros vértices tiene por ecuación

$$D(A_1,A_2,A_3,\ldots,A_n;X) \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & 1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & 1 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & & x_n & 1 \end{vmatrix} = 0 .$$

Para que el polígono sea alabeado la condición característica es La sucesión de $(m-n)$ números reales

$$D(A_1,A_2,A_3,\ldots,A_n,A_{n+1}) \; ; \; D(A_1,A_2,A_3,\ldots,A_n,A_{n+2}) \; ;\ldots; \; D(A_1,A_2,A_3,\ldots,A_n,A_m)$$

ha de tener algún término no nulo, porque en caso contrario, los m vértices del polígono están sobre el hiperplano determinado por los n primero vértices.

Cuando ya se haya verificado que el polígono es alabeado, la convexidad del mismo exige que la sucesión numérica mencionada tenga signo constante, incluyendo eventuales términos nulos, que no son todos.

Esta condición analítica de convexidad se refiere a los n primeros vértices; pero la convexidad del polígono alabeado consiste en que dicha condición sea cierta para cada n vértices consecutivos del polígono.

De lo expuesto se deduce el criterio de convexidad de un polígono alabeado del espacio euclídeo n-dimensional, conservando el significado precedente de los determinantes $D(A_1,A_2,A_3,\ldots,A_n,X)$ %

El polígono $A_1\ A_2\ A_3 \ldots A_m$ es alabeado convexo, cuando las sucesiones

$$D(A_i\ ,\ A_{i+1}\ ,\ A_{i+2}\ ,\ldots,\ A_{i+n-1}\ ,\ A_{i+k}\ ) \quad ; \; k = n,n+1,\ldots,\ m-1 \quad ;$$

son de signo constante para cada fijado $i = 1,2,\ldots,m$. Y siendo no todos los términos nulos de cada una de dichas sucesiones, para i fijo.

Además los números naturales $i+k$ superiores a m, han de interpretarse como su respectivo resto, módulo m.

17. DETERMINACION DEL HIPERPLANO QUE PASA POR UN PUNTO Y ES PARALELO A UN SUBESPACIO LINEAL MAXIMAL , EL CUAL CONTIENE UNA SUCESION DADA INFINITA DE PUNTOS LINEALMENTE INDEPENDIENTES Y DENSA EN EL SUBESCIO ; EN EL ESPACIO DE HILBERT SEPARABLE : ECUACION EXPLICITA DEL HIPERPLANO=

En el espacio de Hilbert separable $\mathbb{H}$,sea dada una sucesión de puntos

$$a_1, a_2, a_3, \dots , a_n ,\dots$$

linealmente independientes y densa en el subespacio lineal hilbertiano que generan

$$E_1 = \bar{L} (a_1,a_2,a_3,\dots,a_n,\dots)$$

el cual suponemos maximal,es decir,el subespacio complementario $H - E_1$ uni-dimensional.

Deseamos determinar un hiperplano H_1 del espacio de Hilbert $\mathbb{H}$ que sea paralelo al subespacio maximal E_1 y pase por un punto dado b del espacio $\mathbb{H}$.

Naturalmente,por definición,el hiperplano H_1 tendrá una expresión abreviada de la forma

$$H_1 = b + E_1 \quad ,$$

pero ésta no es satisfactoria,en el sentido de no estar estrictamente dada,en función de sus únicos datos :

La sucesión $a_1,a_2,a_3,\dots,a_n,\dots$; del tipo mencionado y el punto b.

En primer lugar,resolvamos la cuestión en el caso particular de que la sucesión $\{a_n\} = \{e_n\}$ esté constituida por una base ortonormal, en el sentido de sistema ortonormal completo, a menos de un solo vector que falta para ser base de todo el espacio de Hilert $\mathbb{H}$, y por tanto base ortonormal del subespacio maximal que generan

$$E_1' = \bar{L} (e_1,e_2,e_3,\dots,e_n,\dots) .$$

Para proseguir,necesitamos un un vector

$$e_0 \in E - E_1$$

tal que el sistema de vectores

$$\{e_0 ; e_1 , e_2 , e_3 , \ldots , e_n , \ldots\}$$

constituya una base ortonormal de todo el espacio E.

Se verifican pues,las siguientes condiciones equivalentes

$$x \in H_1 \iff x - b \in E_1 \iff x - b = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n e_n$$

$$\iff \left(x - b = \xi_0 e_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n e_n\right) \wedge \left(\xi_0 = 0\right).$$

De donde se deduce la ecuación del hiperplano H_1

$$\left((e_0 , x - b) = \xi_0\right) \wedge \left(\xi_0 = 0\right) \iff (e_0 , x - b) = 0 \quad .$$

El vector e_0 se obtiene proyectando ortogonalmente sobre el subespacio

$$\bar{L}\,(e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n, \ldots)$$

un vector $e \notin E_1$, y separ'andole esta componente vectorial para darnos un vector no nulo,ortogonal al subespacio $\bar{L}\,(\{e_n\})$ y perteneciente al subespacio complementario,ortogonal y unidimensional $E - E_1$. Normalizando éste último vector se logra el vector e_0.

La proyección del vector e sobre el subespacio $\bar{L}\,(\{e_n\})$ es la suma de su serie de Fourier,con respecto al sistema de vectores $\{e_n\}$, $n \geq 1$. Así pues,por

$$Pr_{\bar{L}}\, e = \sum_{n=1}^{\infty} (e, e_n)\, e_n \, .$$

La componente vectorial del vector e sobre el subespacio unidimensional $E - E_1$ es,por tanto

$$e - \sum_{n=1}^{\infty} (e, e_n)\, e_n \, .$$

Ahora normalizamos este vector,no nulo;para ello calculamos

$$\left\| e - \sum_{n=1}^{\infty} (e,e_n)\, e_n \right\|^2 = \left(e - \sum_{n=1}^{\infty} (e,e_n)\, e_n \,,\, e - \sum_{n=1}^{\infty} (e,e_n)\, e_n \right)$$

$$= \|e\|^2 - 2\sum_{n=1}^{\infty} (e,e_n)^2 + \left(\sum_{n=1}^{\infty} (e,e_n) e_n \,,\, \sum_{n=1}^{\infty} (e,e_n)\, e_n \right) =$$

$$= \|e\|^2 - \sum_{n=1}^{\infty} (e,e_n)^2 .$$

La condición de que $e \notin E_1$ se puede caracterizar por la equivalente

$$\sum_{n=1}^{\infty} (e,e_n)^2 < \|e\|^2 .$$

Y finalmente,el vector e_0 ,normalizado de la componente vectorial ortogonal del vector e sobre el subespacio E_1, es

$$e_0 = \frac{e - \sum_{n=1}^{\infty} (e,e_n)\, e_n}{\sqrt{\|e\|^2 - \sum_{n=1}^{\infty} (e,e_n)^2}} .$$

La ecuación del hiperplano que pasa por el punto b y es paralelo al subespacio lineal E_1, determinado por el sistema ortonormal de vectores $\{e_n\}$, es

$$(e_0 \,,\, x - b) = 0$$

o bien,la ecuación equivalente más explícita

$$\left[\|e\|^2 - \sum_{n=1}^{\infty} (e,e_n)^2 \right] (e_0 \,,\, x - b) = 0 ,$$

$$\left(e - \sum_{n=1}^{\infty} (e,e_n)\, e_n \,,\, x - b \right) = 0 .$$

En el caso general,donde $\{a_n\}$ no es más que una sucesión de vectores linealmente independientes y densa en el subespacio maximal

$$E_1 = \bar{L}\, (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$$

la base ortonormal $\{e_n\}$, $n \geq 1$, que proviene de ortonormalizar la sucesión de vectores $\{a_n\}$, mediante el uso de los determinantes de Gram, nos conduce a la expresión del vector e_o ,del siguiente modo

$$e - \sum_{n=1}^{\infty} (e,e_n)\, e_n = e - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\begin{vmatrix} (a_1,a_1) & (a_1,a_2) & \dots & (a_1,a_{n-1}) & (a_1,e) \\ (a_2,a_1) & (a_2,a_2) & \dots & (a_2,a_{n-1}) & (a_2,e) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a_n,a_1) & (a_n,a_2) & \dots & (a_n,a_{n-1}) & (a_n,e) \end{vmatrix}}{\sqrt{\Delta_n \Delta_{n-1}}} \frac{\begin{vmatrix} (a_1,a_1) & (a_1,a_2) & \dots & (a_1,a_{n-1}) & a_1 \\ (a_2,a_1) & (a_2,a_2) & \dots & (a_2,a_{n-1}) & a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a_n,a_1) & (a_n,a_2) & \dots & (a_n,a_{n-1}) & a_n \end{vmatrix}}{\sqrt{\Delta_n \Delta_{n-1}}}$$

donde los Δ_n son los determinantes de Gram, relativos a los vectores linealmente independientes $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$;es decir

$$\Delta_m = \begin{vmatrix} (a_1,a_1) & (a_1,a_2) & (a_1,a_3) & \dots & (a_1,a_n) \\ (a_2,a_1) & (a_2,a_2) & (a_2,a_3) & \dots & (a_3,a_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a_n,a_1) & (a_n,a_2) & (a_n,a_3) & \dots & (a_n,a_n) \end{vmatrix} \quad , \quad n = 1,2,\dots$$

determinantes no nulos por la independencia lineal de los vectores $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$

La codición $e \notin E_1$, se traduce ahora en la equivalente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\begin{vmatrix} (a_1,a_1) & (a_1,a_2) & \dots & (a_1,a_{n-1}) & (a_1,e) \\ (a_2,a_1) & (a_2,a_2) & \dots & (a_2,a_{n-1}) & (a_2,e) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a_n,a_1) & (a_n,a_2) & \dots & (a_n,a_{n-1}) & (a_n,e) \end{vmatrix}^2}{\Delta_n \Delta_{n-1}} < \|e\|^2 \; .$$

$$
-\sum_{n=1}^{\infty}
\frac{\begin{vmatrix}
(a_1,a_1) & (a_1,a_2) & \cdots & (a_1,a_{n-1}) & (a_1,e) \\
(a_2,a_1) & (a_2,a_2) & \cdots & (a_2,a_{n-1}) & (a_2,e) \\
(a_3,a_1) & (a_3,a_2) & \cdots & (a_3,a_{n-1}) & (a_3,e) \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
(a_n,a_1) & (a_n,a_2) & \cdots & (a_n,a_{n-1}) & (a_n,e)
\end{vmatrix}}
{\begin{vmatrix}
(a_1,a_1) & (a_1,a_2) & (a_1,a_3) & \cdots & (a_1,a_n) \\
(a_2,a_1) & (a_2,a_2) & (a_2,a_3) & \cdots & (a_2,a_n) \\
(a_3,a_1) & (a_3,a_2) & (a_3,a_3) & \cdots & (a_3,a_n) \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
(a_n,a_1) & (a_n,a_2) & (a_n,a_3) & \cdots & (a_n,a_n)
\end{vmatrix}}
\;
\frac{\begin{vmatrix}
(a_1,a_1) & (a_1,a_2) & \cdots & (a_1,a_{n-1}) & a_1 \\
(a_2,a_1) & (a_2,a_2) & \cdots & (a_2,a_{n-1}) & a_2 \\
(a_3,a_1) & (a_3,a_2) & \cdots & (a_3,a_{n-1}) & a_3 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
(a_n,a_1) & (a_n,a_2) & \cdots & (a_n,a_{n-1}) & a_n
\end{vmatrix}}
{\begin{vmatrix}
(a_1,a_1) & (a_1,a_2) & \cdots & (a_1,a_{n-1}) \\
(a_2,a_1) & (a_2,a_2) & \cdots & (a_2,a_{n-1}) \\
(a_3,a_1) & (a_3,a_2) & \cdots & (a_3,a_{n-1}) \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
(a_{n-1},a_1) & (a_{n-1},a_2) & \cdots & (a_{n-1},a_{n-1})
\end{vmatrix}}
\cdot (x-b) = 0
$$

Esta es, pues, la ecuación explícita del hiperplano que pasa por el punto b y es paralelo al subespacio maximal $\overline{L}(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)$ que genera la sucesión de vectores linealmente independientes $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$.

18. POLIGONOS ALABEADOS CONVEXOS EN EL ESPACIO DE HILBERT SEPARABLE : CRITERIO DE CONVEXIDAD, SEGUN ESTE CONCEPTO, PARA LOS POLIGONOS ALABEADOS .

En los espacios lineales infinito-dimensionales, para definir un polígono mediante el conjunto ordenado de sus vértices $\{A_i\}$, $i \in I$ hay que exigir que este conjunto sea una sucesión transfinita bien-ordenada y tenga último elemento, A_μ ; pues el vértice A_i ha de tener vértice siguiente inmediato A_{i+1} ,como tiene siguiente inmediato cada elemento de un conjunto bien-ordenado, a excepción del último elemento, A_μ.

Impuestas estas hipótesis, podemos enlazar un punto A_i ,del conjunto bien-ordenado $\{A_i\}$, $i \in I$, a su sucesor inmediato A_{i+1}, mediante el segmento rectilineo con extremos en dicho puntos. Y el último elemento, A_μ , ha de enlazarse por el segmento rectilineo correspondiente al primer elemento del conjunto, el A_1.

Con estas condiciones, pues, es significativa la definición del polígono, como figura unidimensional, por el conjunto bien-ordenado de sus vértices $\{A_i\}$, $i \in I$; con último elemento A_μ , por reunión de los segmentos rectilineos que unen vértices consecutivos

$$[A_1,A_2] \cup [A_2,A_3] \cup [A_3,A_4] \cup \cdots \cup \underset{i \in I}{[A_i,A_{i+1}]} \cup \cdots \cup [A_\mu,A_1] .$$

Ahora, en particular, consideremos el espacio de Hilbert separable E , y en él una sucesión transfinita de puntos $\{a_i\}$, $i \in I$, y con último elemento a_μ .

Podemos emplear los números ordinales, como índices, para numerar los elementos del conjunto infinito dado . De modo que el conjunto I está constituido por los números ordinales i tales que

$$1 \leq i \leq \mu$$

de suerte que el conjunto bien ordenado $\{a_i\}$, $i \in I$, es de tipo ordinal $\mu + 1$.

Dado el conjunto de vértices,ordenados en las condiciones prescritas definimos por polígono de vértices $\{a_i\}$, $i \leq \mu$; la figura uni-dimensional,del espacio de Hilbert separable,de expresión

$$\{(1-t)a_1 + ta_2\} \cup \{(1-t)a_2 + ta_3\} \cup \{(1-t)a_3 + ta_4\} \cup \ldots \cup$$
$$\cup \{(1-t)a_i + ta_{i+1}\} \cup \ldots \cup \{(1-t)a_\mu + ta_1\} ,$$

siendo t ,real,tal que $0 \leq t \leq 1$; , i ,ordinal $1 \leq i$

En los polígonos del espacio de hilbert separble,vamos a distinguir entre aquéllos que tienen todos sus vértices en un mismo hiperplano del espacio; y los que no tienen esta particularidad,a los cuales llamaremos polígonos alabeados del espacio de hilbert,denominación que posee un claro antecedente intuitivo.

Pero de estos polígonos alabeados solo nos ocuparemos,salvo un criterio del carácter alabeado,de los que además de alabeados son convexos,en el sentido siguiente

Un polígono alabeado,del espacio de Hilbert separable,será llamado convexo, cuando toda sucesión ordinaria $\{a_n\}$, $0 < n < \omega$, de vértices consecutivos,que suponemos linealmente independientes,si determinan un hiperplano que los contenga,éste deja en un mismo semiespacio, con respecto a él,los restantes vértices del polígono,pudiento yacer alguno,pero no todos,de estos vértices,en el propio borde hiperplano del semiespacio.

Ha de advertirse que si la sucesión de puntos $\{a_n\}$ contiene al punto a_μ , último del conjunto total de vértices,los vértices que siguen al a_μ , van a ser ,comenzando desde a_1 ,los puntos $a_1, a_2, a_3, \ldots$;en el orden que tenían inicialmente,hasta completar la sucesión.

Para establecer un criterio de convexidad de un polígono alabeado, del espacio de Hilbert separable,seleccionemos la sucesión infinita ordinaria

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$$

de vértices consecutivos del polígono,tal que sea una sucesión de puntos linealmente independientes y densa en el subespacio cerrado que definen

$$L\ (a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots\ )$$

el cual, suponemos además maximal.

Suponemos, también, que la sucesión $\{a_n\}$, $0 < n < \omega$, no agota la sucesión transfinita $\{a_i\}$, $0 < i \leq \mu$, por ello

$$\underset{0<i\leq\mu}{\{a_i\}} - \underset{0<n<\omega}{\{a_n\}} \neq \emptyset .$$

Como el conjunto $\{a_i\}$, $0 < i \leq \mu$, está bien-ordenado, existe el primer elemento del conjunto

$$\{a_i\} - \{a_n\}$$
$$0 < i \leq \mu \qquad 0 < n < \omega ,$$

elemento que denotaremos por a_ω ; que es el sucesor inmediato de todos los elementos de la sucesión $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$ suponiendo que éstos forman los primeros elementos del conjunto bien-ordenado $\{a_i\}$, $0 < i \leq \mu$.

Para hallar el hiperplano que pasa por la sucesión de puntos $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots\ ;\ a_\omega$

de tipo $\omega + 1$, basta obtener el hiperplano que pasa por el punto a_ω, y es paralelo al hiperplano que pasa por origen (subespacio lineal maximal) y contiene la sucesión ordinaria de puntos

$$a_1 - a_\omega,\ a_2 - a_\omega,\ a_3 - a_\omega,\ \ldots,\ a_n - a_\omega,\ \ldots \qquad \text{(fig.7}$$

Esta sucesión de vectores es linealmente independiente, pues en caso contrario, existe un conjunto finito de números reales no nulos

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \ldots,\ \alpha_k$$

tales que se verifica la ecuación

$$\alpha_1(a_1 - a_\omega) + \alpha_2(a_2 - a_\omega) + \alpha_3(a_3 - a_\omega) + \ldots + \alpha_k(a_k - a_\omega) = 0$$

que admite la equivalente

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3\ a_3 + \ldots + \alpha_k\ a_k\ - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_k)\ a_\omega = 0$$

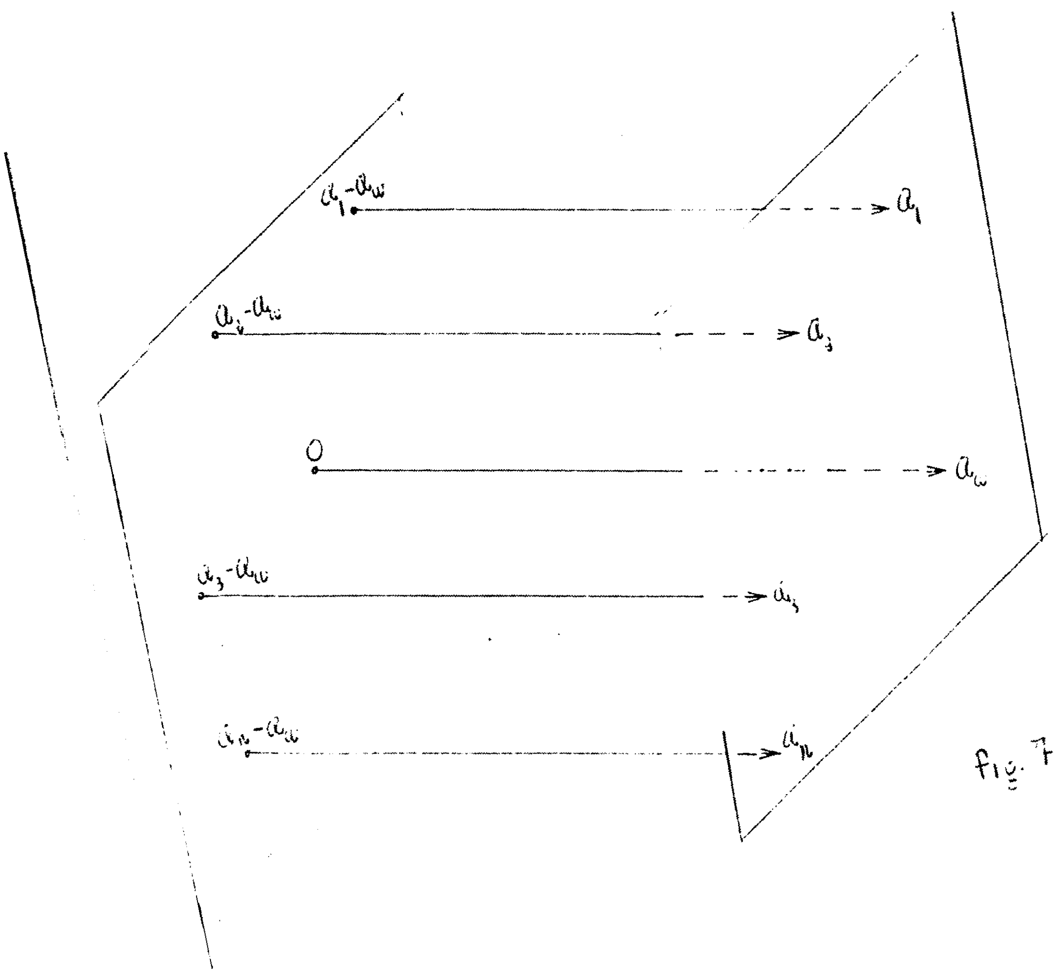


fig. 7 Pag 56

pero el coeficiente de a_{ω} , $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_k$, no puede anularse,porque entonces los vectores $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k$ serían linealmente independientes,lo cual es contra la hipótesis.

Al ser el mencionado coeficiente de a_{ω} no nulo,en la ecuación lineal donde figura,se concluye que el vector a_{ω} depende linealmente de la sucesión $\{a_n\}$, $0 \leq n < \omega$; y por tanto,para obtener el hiperplano que pasa por la sucesión,de tipo $\omega + 1$

$$a_1, a_2, a_3, \ldots , a_n, \ldots ; a_{\omega} \qquad [1]$$

no hace falta trasladar,el hiperplano mencionado por el origen, hasta que pase por el punto a_{ω} , pues,en este caso,el hiperplano buscado pasa por el origen y es el mismo determinado por la sucesión

$$a_1, a_2, a_3, \ldots , a_n, \ldots ; O .$$

En el caso general,en donde son linealmente independientes los vectores de la sucesión

$$a_1 - a_{\omega} , a_2 - a_{\omega} , a_3 - a_{\omega} , \ldots , a_n - a_{\omega} , \ldots \quad ; \quad [2]$$

también constituyen un sistema denso,en el subespacio maximal que generan; porqque la sucesión de vectores

$$a_1, a_2, a_3, \ldots , a_n, \ldots$$

ha sido transformada por la translación definida por el vector $- a_{\omega}$, la cual en un espacio de Hilbert es una transformación topológica (homeomorfismo),como en todos los espacios topológicos lineales. Incluso las translaciones del espacio de Hilbert son aún más : Isometrías.

Finalmente,para hallar la ecuación del hiperplano que pasa por la sucesión de puntos,de tipo $\omega + 1$, $[1]$ no hace falta más que hallar la del hiperplano que pasa por el punto a_{ω} y es paralelo al hiperplano que pasa por el origen (subespacio lineal maximal) y contiene a los puntos de la sucesión ordinaria $[2]$.

Este modo de determinar la ecuación de un hiperplano,ya lo conocemos,por la sección anterior. Por ello,la ecuación del hiperplano que contiene a la sucesión de puntos $[1]$ es,pues

$$
\left[e - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\begin{vmatrix} (a_1 - a_\omega, a_1 - a_\omega) \cdots (a_1 - a_\omega, a_{n-1} - a_\omega) & (a_1 - a_\omega, e) & (a_1 - a_\omega, a_1 - a_\omega) \cdots (a_1 - a_\omega, a_{n-1} - a_\omega) & a_1 - a_\omega \\ (a_2 - a_\omega, a_1 - a_\omega) \cdots (a_2 - a_\omega, a_{n-1} - a_\omega) & (a_2 - a_\omega, e) & (a_2 - a_\omega, a_1 - a_\omega) \cdots (a_2 - a_\omega, a_{n-1} - a_\omega) & a_2 - a_\omega \\ - - - - - - - & & - - - - - - - & \\ (a_n - a_\omega, a_1 - a_\omega) \cdots (a_n - a_\omega, a_{n-1} - a_\omega) & (a_n - a_\omega, e) & (a_n - a_\omega, a_1 - a_\omega) \cdots (a_n - a_\omega, a_{n-1} - a_\omega) & a_n - a_\omega \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (a_1 - a_\omega, a_1 - a_\omega) \cdots (a_1 - a_\omega, a_{n-1} - a_\omega) & (a_1 - a_\omega, a_n - a_\omega) \\ (a_2 - a_\omega, a_1 - a_\omega) \cdots (a_2 - a_\omega, a_{n-1} - a_\omega) & (a_2 - a_\omega, a_n - a_\omega) \\ - - - - - - - & \\ (a_n - a_\omega, a_1 - a_\omega) \cdots (a_n - a_\omega, a_{n-1} - a_\omega) & (a_n - a_\omega, a_n - a_\omega) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} (a_1 - a_\omega, a_1 - a_\omega) \cdots (a_1 - a_\omega, a_{n-1} - a_\omega) \\ (a_2 - a_\omega, a_1 - a_\omega) \cdots (a_2 - a_\omega, a_{n-1} - a_\omega) \\ - - - - - - - \\ (a_{n-1} - a_\omega, a_1 - a_\omega) \cdots (a_{n-1} - a_\omega, a_{n-1} - a_\omega) \end{vmatrix}} \right] \cdot (x - a_\omega)
$$

Ecuación del hiperplano, del espacio de Hilbert separable, que pasa por la sucesión de puntos $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$; a_ω linealmente independientes y tal que la sucesión $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ de puntos sea densa en subespacio cerrado definido $\overline{L}(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$, supuesto además maximal.

Observación. En las mismas condiciones, salvo que el punto a_ω dependa linealmente de la sucesión $\{a_n\}_{0<n<\omega}$, el hiperplano pasa por el origen y su ecuación se obtiene de la anterior, suprimiendo a_ω, aunque $a_\omega \neq 0$.

Una vez obtenida la ecuación del hiperplano que pasa por la sucesión de vértices consecutivos

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots ; a_\omega$$

del polígono definido por el conjunto total de vértices $\{a_i\}$, $0 < i$ con el orden establecido; la ecuación de dicho hiperplano la abreviaremos del siguiente modo

$$(e_0, x - a_\omega) = 0 \tag{3}$$

donde e_0 es el vector direccional del hiperplano, cuya expresión explícita ya conocemos.

Ahora vamos a reconocer, mediante un criterio análitico, si el polígono definido por el conjunto ordenado de sus vértices es alabeado convexo.

En primer lugar, para que el polígono sea alabeado precisa y basta, que la sucesión (en general) (transfinita de números reales

$$(e_0, a_i - a_\omega), \quad \omega < i \leq \mu$$

tenga algún término no nulo, lo cual expresa que algún vértice del polígono yace fuera del hiperplano [3], determinado por los $\omega + 1$ primeros.

Ahora bien, si el polígono, ya alabeado cuando cumple la condición característica lograda, ha de ser convexo, se tiene que verificar que la sucesión

$$(e_0, a_i - a_\omega), \quad \omega < i \leq \mu$$

ha de contener algún término no nulo, y todos los que lo sean tienen signo constante.

La convexidad del polígono alabeado, se reconoce eligiendo cual - quier sucesión infinita $a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}, \ldots, a_{i_n}, \ldots$ en las mismas condiciones que la sucesión $\{a_n\}$, $0 < n < \omega$, considerada antes. Así pues, una sucesión de vértices consecutivos del polígono dado, linealmente independientes y que generan un subespacio cerrado maximal.

Con mayor precisión :

Sea ξ el ordinal que nombra el primer término de la sucesión

$$a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}, \dots, a_{i_n}, \dots \quad , \quad 0 < n < \omega$$

siendo, pues,

$$0 < \xi \leq \mu .$$

Esta sucesión ordinaria, se puede entonces denotar mediante

$$a_{\xi}, a_{\xi+1}, a_{\xi+2}, \dots, a_{\xi+n}, \dots \qquad [4]$$

o bien

$$\{a_{\xi+n}\} \quad , \quad 0 \leq n < \omega \quad ,$$

advirtiendo, que cuando a_{μ}, último vértice del polígono, figura en esta sucesión, los términos sucesivos de la sucesión vuelven a ser $a_1, a_2, a_3, \dots$ los primeros de la sucesión transfinita de todos los vértices $\{a_i\}$, $0 < i \leq \mu$.

El vértice sucesor inmediato, a todos los vértices, de la sucesión ordinaria elegida [4] es, por tanto $a_{\xi+\omega}$.

El hiperplano determinado que pasa por los puntos de la sucesión

$$a_{\xi}, a_{\xi+1}, a_{\xi+2}, \dots, a_{\xi+n}, \dots ; a_{\xi+\omega}$$

cuya ecuación explícita sabemos, la abreviamos del modo siguiente

$$(e_{0\xi} , x - a_{\xi+\omega}) = 0 .$$

La condición de la existencia de vértices del polígono, exteriores a este hiperplano y en el mismo semiespacio con respecto a él, se expresa, diciendo que la sucesión de números reales

$$(e_{0\xi} , a_i - a_{\xi+\omega}) \; ; \; 0 < i \leq \mu \; , \; i \neq \xi + n \; , \; 0 \leq n \leq \omega$$

contiene términos no nulos y éstos son de signo constante.

Si, en virtud de lo expuesto, para todo ordinal ξ que nombra un vértice del polígono definido por el conjunto de puntos bien-ordenado $\{a_i\}$, $0 < i \leq \mu$; a partir del vértice a_{ξ}, $0 < \xi \leq \mu$, se puede construir una sucesión de vértices consecutivos, que genera un subespacio cerrado maximal ; hipótesis que ahora admitimos explícitamente; el criterio de convexidad para el polígono alabeado viene dado ,pero ahora para todo ξ , $0 < \xi \leq \mu$,por las condiciones que hemos dicho que satisfacían los vértices ~~/~~restantes del polígono,aparte de los vértices,

$$a_{\xi} , a_{\xi+1} , a_{\xi+2} ,\dots, a_{\xi+n} ,\dots; a_{\xi+\omega}$$

con respecto al ~~###~~hiperplano determinado por esta sucesión de tipo $\omega + 1$, cuya ecuación es

$$(e_{0\xi} , x - a_{\xi+\omega}) = 0 .$$

Podemos sintetizar las condiciones obtenidas,de polígono alabeado y polígono alabeado convexo,en el espacio de Hilbert separable, mediante el uso de símbolos lógicos,del modo siguiente,conservando naturalmente,el significado de la notación empleada,

La condición para que el polígono definido por el conjunto bienordenado de sus vértices $\{a_i\}$, $0 < i \leq \mu$, sea alabeado es

$$\bigvee_{\omega < i \leq \mu} ((e_0 , a_i - a_\omega) \neq 0) \quad ;$$

y la condición para que el polígono,ya alabeado,sea convexo es

$$\bigwedge_{0<\xi\leq\mu}\left(\left[\bigwedge_{0<i\leq\mu}\left((e_{0\xi}, a_i - a_{\xi+\omega}) \geq 0\right)\right] \vee \left[\bigwedge_{0<i\leq\mu}\left((e_{0\xi}, a_i - a_{\xi+\omega}) \leq 0\right)\right]\right) .$$

g. .DETERMINACION Y ECUACION;EN EL ESPACIO DE HILBERT GENERAL; DE UN HIPERPLANO QUE PASA POR UN PUNTO DADO Y ES PARALELO AL SUBESPACIO LINEAL MAXIMAL CERRADO, QUE CONTINE UN SISTEMA DADO DE VECTORES LINEALMENTE INDEPENDIENTES.

Comenzamos por el caso particular más sencillo,en donde el punto elegido es el origen O del espacio de Hilbert general E. Mientras que el sistema de vectores $\{e_i\}$, $i \in I$, que gene ra el subespacio maximal cerrado $L(e_i)$, $i \in I$; suponemos que constituyen un sistema ortonormal,el cual es una base ortonormal,pues,del subespacio generado por ellos.

La ecuación del hiperplano debe ser de la forma

$$(e_0 , x) = 0$$

donde el vector $e_0 \neq 0$ verifica las siguientes relaciones

$$(e_0 , e_i) = 0 \quad , \quad i \in I.$$

Por ello, e_0 es un vector ortogonal,no nulo,al subespacio ,lineal $L(e_i)$, $i \in I$; y,por tanto,está situado en el subespacio ortogonal y uni-dimensional $E - L(e_i)$, $i \in I$.

El vector e_0 se determina mediante un vector e del espacio E , tal que $e \notin L(e_i)$, $i \in I$.

El vector e tiene sobre $L(e_i)$, $i \in I$, la proyección

$$pr_L\, e = \sum_{i \in I} (e,e_i)\, e_i \quad ,$$

en donde sólo hay un conjunto numerable,a lo más,de términos no nulos.

La hipótesis de que $e \notin L(e_i)$, $i \in I$, se puede expresar por

$$e - \sum_{i \in I} (e,e_i)\, e_i \neq 0 \quad ;$$

O bien, mediante la norma, más sencillamente, en virtud de la continuidad del producto escalar :

$$\left\| e - \sum_{i \in I} (e,e_i)\, e_i \right\|^2 = \left(e - \sum_{i \in I} (e,e_i) e_i \; , \; e - \sum_{i \in I} (e,e_i) e_i \right) =$$

$$= \|e\|^2 - \sum_{i \in I} (e,e_i)^2 \neq 0 \; ; \quad \sum_{i \in I} (e,e_i)^2 < \|e\|^2 . \; [1]$$

El vector buscado e_0 es, pues

$$e_0 = e - \sum_{i \in I} (e,e_i)\, e_i$$

que satisface la condición anterior [1].
La ecuación del hiperplano $(e_0 , x) = 0$, es expresamente

$$\left(e - \sum_{i \in I} (e,e_i)\, e_i \; , \; x \right) = 0 \; .$$

Si queremos la ecuación del hiperplano que pasa por el punto b y es paralelo al subespacio maximal cerrado $L(e_i)$, $i \in I$, no tenemos más que escribir

$$\left(e - \sum_{i \in I} (e,e_i)\, e_i \; , \; x - b \right) = 0 \; .-$$

Sea, de modo más general, $\{a_i\}$, $i \in I$, un sistema de vectores linealmente independientes, que generan un subespacio lineal maximal cerrado (hiperplano cerrado por el origen) $L(a_i)$, $i \in I$; en el espacio de Hilbert general E.

Deseamos la ecuación de este hiperplano, de la forma

$$(c , x) = 0.$$

Para ello, elegimos una base ortonormal $\{ e_i^L \}$, $i \in I'$, del subespacio lineal maximal cerrado $L (a_i)$, $i \in I$; de modo que los vectores $e_i^L = e_i(L(a_j))$, $i \in I'$, $j \in I$, dependen del subespacio $L(a_i)$, $i \in I$.

De la misma manera que en la página anterior, fórmula [1], determinamos un vector $e^L = e (L(a_i))$, $i \in I$, el cual ahora depende del subpascio $L (a_i)$, $i \in I$, que satisfaga la relación :

$$\sum_{i \in I'} (e, e_i^L)^2 < \| e \|^2. \qquad [1']$$

Finalmente, hallamos el vector direccional c^L del hiperplano buscado, como hemos dicho en la página anterior, para el vector e_0 , es decir

$$c^L = e^L - \sum_{i \in I'} (e, e_i^L)\, e_i^L .$$

Así pues la ecuación del hiperplano cerrado que pasa por el origen 0 del espacio de Hilbert y contiene al sistema de vectores $\{ a_i \}$, $i \in I$, tiene por ecuación la siguiente

$$(c^L , x) = 0$$

o bien, de forma más detallada

$$(e^L - \sum_{i \in I'} (e, e_i^L)\, e_i^L , x) = 0 .$$

Análogamente, se obtiene la ecuación del hiperplano del espacio general de Hilbert E , y que es paralelo al hiperplano cerrado, por el origen que contiene al sistema de vectores $\{ a_i \}$, $i \in I$, generadores del citado hiperplano cerrado y linealmente independientes :

$$(c^L , x - b) = 0 ,$$

siendo la ecuación, en forma más detallada,

$$\left(e^L - \sum_{i \in I'} (e, e_i^L)\, e_i^L , x - b \right) = 0 .$$

20. . POLIGONOS ALABEADOS CONVEXOS EN EL ESPACIO DE HILBERT GENERAL INFINITO-DIMENSIONAL : CRITERIO DE CONVEXIDAD DE LOS POLIGONOS ALABEADOS DE ESTE ESPACIO.

Dado un conjunto de puntos bien-ordenado y con último elemento, del espacio general de Hilbert E, podemos emplear los números ordinales transfinitos, para enumerar los elementos del conjunto, en cuestión ; es decir

$$\{ a_i \} , \quad 1 \leq i \leq \mu ,$$

acerca de este conjunto introducimos hipótesis convenientes, para poder definir un polígono cuyos vértices, así ordenados, sean los puntos dados del conjunto.

En primer lugar, suponemos que el conjunto es infinito, y por ello de tipo ordinal $\mu + 1$; también admitimos que el número cardinal de puntos de este conjunto es superior a la dimensión algébrica del espacio

$$| \mu + 1 | > (\dim E)^{\aleph_0} .$$

Ahora comenzando con el primer elemento, a_1 , del conjunto dado vamos añadiéndole elementos consecutivos, uno a uno, del conjunto bien-ordenado $\{ a_i \}$, $1 \leq i \leq \mu$, siendo todos ellos linealmente independientes, por hipótesis; hasta alcanzar una sucesión transfinita de puntos que generen un subespacio lineal maximal y cerrado.

Por eso, la sucesión transfinita

$a_1 , a_2 , a_3 , \ldots , a_i , \ldots ; \quad i < \delta$

de tipo δ , está formada por vectores linealmente independientes; y además admitimos también, que el subespacio lineal generado por este sistema de vectores

$$L(a_i) \quad , \quad i < \delta$$

es maximal y cerrado en el espacio de Hilbert general E .

De estas hipótesis se desprende, puesto que sólo hace falta adjuntar al sistema de vectores $\{a_i\}$, $i < \delta$, un único vector para obtener una base de todo el espacio E ; que entre el cardinal del ordinal $\delta + 1$, y la dimensión del espacio E subsiste la relación

$$\left| \delta + 1 \right| = (\dim E)^{\aleph_0} .$$

Las hipótesis admitidas para la sucesión transfinita $\{a_i\}$, $i < \delta$ que, principia con el primer elemento del conjunto total bien-ordenado, las admitimos para toda sucesión transfinita que comience con cualquier elemento, a_ξ , del conjunto total, por lo cual $1 \leq \xi \leq \mu$. O sea, la sucesión trnasfinita

$$a_\xi , a_{\xi+1} , a_{\xi+2} , \ldots , a_{\xi+n} , \ldots , \qquad (n < \delta)$$

de tipo δ , está constituida por un sistema de vectores linealmente independientes, que generan un subepacio maximal cerrado.

El polígono definido por el conjunto de puntos $\{ a_i \}$, $1 \leq i \leq \mu$, es la figura uni-dimensional formada por la reunión de los segmentos rectilíneos que unen cada vértice con el siguiente y el último a_μ con el primero a_1 .

Entendemos, como hemos dicho para otros espacios, que el polígono de vértices a_i , $1 \leq i \leq \mu$, es alabeado cuando no todos los vértices pertenecen a un mismo hiperplano del espacio E.

Un criterio analítico para averiguar si un polígono del espacio del Hilbert E es alabeado, se establece del siguiente modo :

Se determina el vértice consecutivo a la sucesión transfinita

$$a_1 , a_2 , a_3 , \dots , a_i , \dots \qquad (i < \delta) \qquad [1]$$

en el conjunto total de vértices, vértice existente por estar el conjunto total de vértices bien-ordenado.

El vértce en cuestión, viene pues nombrado por el ordinal δ ; por tanto, se trata del punto a_δ .

Ahora se requiere el hiperplano que contiene a los puntos de la sucesión de tipo ordinal $\delta + 1$

$$a_1 , a_2 , a_3 , \dots , a_i , \dots ; a_\delta$$

cuya ecuación explícita se halla, como ecuación del hiperplano que pasa por el punto a_δ y es paralelo al hiperplano, por el origen, que contiene a la sucesión de puntos, de tipo δ

$$[2] \quad a_1 - a_\delta , a_2 - a_\delta , a_3 - a_\delta , \dots , a_i - a_\delta , \dots \qquad (i < \delta).$$

Si este sistema de vectores es linealmente independiente, el vector a_δ, necesariamente depende la sucesión [1] , porque ésta es lineamente independiente, por hipótesis. En tal caso el hiperplano pasa por el origen y contiene la sucesión de puntos [1] .

En el caso contrario, hemos de hallar la ecuación del hiperplano que pasa por el punto a_δ y, es paralelo al hiperplano, por el origen, que contiene al sistema de vectores linealmente independientes [2] , como ya sabemos hacer, según la sección anterior.

Sabiendo ya determinar el hiperplano que pasa por la sucesión de vértices consecutivos $\{a_i\}$, $1 \leq i \leq \delta$, del polígono ; abreviamos la ecuación de dicho hiperplano, en la forma

$$(c^L , x - a_\delta) = 0 .$$

Y de aquí, deducimos un criterio para averiguar si el polígono definido por el conjunto bien-ordenado de sus vértices $\{a_i\}$,

$1 \leq i \leq \mu$, es alabeado del siguiente modo,cuando la sucesión transfinita

$$(c^L , a_i - a_\delta) \quad ; \qquad \delta < i \leq \mu$$

tiene algún término no nulo.

Conservando la notación utilizada, la condición de polígono alabeado la podemos expresar más concisa y precisamente, así

$$\bigvee_{\delta < i \leq \mu} ((c^L , a_i - a_\delta) \neq 0) \quad .$$

El polígono definido por el conjunto bien-ordenado de sus vértices, diremos que es alabeado y convexo,cuando los hiperplanos determinados por las sucesiones transfinitas de vértices consecutivos, dejan en un mismo semiespacio, con respecto a dicho hiperplano, los restantes vértices,del polígono,borde incluido ;pero uno al menos, de los vértices no yace en el hiperplano referido.

En cuanto al hiperplano determinado por la sucesión $\{a_i\}$, $1 \leq i \leq$ la condición para que el polígono sea convexo alabeado,es que la sucesión transfinita de números reales

$$(c^L , a_i - a_\delta)$$

tenga algún término no nulo,y todos los que lo sean posean signo constante.

El polígono es efectivamente alabeado convexo,cuando esta misma condición la verifique toda sucesión trnasfinita,iniciada a partir de un vértice cualquiera a_ξ , $1 \leq \xi \leq \mu$, del polígono.

Con más detalle :

Sea a_ξ un vértice arbitrario del polígono; le añadimos,uno a uno, los vértices consecutivos hasta llegar a un sistema de vectores linealmente independientes y que generen un subespacio lineal maximal y cerrado,lo cual es posible,por hipótesis; siendo la sucesión

$$a_{\xi},\ a_{\xi+1},\ a_{\xi+2},\ \dots,\ a_{\xi+n},\ \dots \qquad (n < \delta)$$

determinamos también, el vértice sucesor inmediato a esta sucesión de tipo δ, vértice que ha de ser $a_{\xi+\delta}$.

El hiperplano que contiene a los puntos de la sucesión de tipo $\delta+1$

$$a_{\xi},\ a_{\xi+1},\ a_{\xi+2},\ \dots,\ a_{\xi+n},\ \dots;\ a_{\xi-\delta}$$

lo conocemos por su ecuación explícita, la cual condensamos en

$$(c^{L}_{\xi},\ x - a_{\xi+\delta}) = 0 .$$

Expresamos que los restantes vértices del polígono están en el mismo semiespacio, con respecto a este hiperplano, diciendo que la sucesión

$$(c^{L}_{\xi},\ a_i - a_{\xi+\delta}) \quad,\ 1 \leq i \leq \mu$$

posee términos no nulos, y los que lo sean tienen signo constante.

De manera más breve y precisa, vamos a expresar la condición para que un polígono, siendo alabeado, también sea convexo. Antes, empero, hacemos una observación necesaria. Si, al construir una sucesión de vértices consecutivos, encontramos el último vértice del polígono a_{μ}, el siguiente a éste se entiende el primero a_1 del polígono, y a partir de aquí, empleamos el orden inicial de vértices.

Con las notaciones utilizadas, el polígono alabeado es convexo, cuando se verifica la condición característica

$$\bigwedge_{0<\xi\leq\mu}\left(\left[\bigwedge_{0<i\leq\mu}\left((c^{L}_{\xi},\ a_i - a_{\xi+\delta}) \geq 0\right)\right] \vee \left[\bigwedge_{0<i\leq\mu}\left((c^{L}_{\xi},\ a_i - a_{\xi+\delta}) \leq 0\right)\right]\right)$$

21. DETERMINACION Y ECUACION EXPLICITA; EN UN ESPACIO LINEAL GENERAL ; DEL HIPERPLANO QUE PASA POR UN PUNTO DADO Y ES PARALELO A UN SUBESPACIO LINEAL MAXIMAL ,QUE CONTIENE UN SISTEMA DADO DE VECTORES LINEALMENTE INDEPENDIENTES .

En un espacio lineal general y real E , consideremos un sistema linealmente independiente de vectores $\{e_i\}$, $i \in I$, que genera un subespacio lineal maximal $L(e_i)$, $i \in I$, del espacio lineal E.

Sea

$$e_o \notin L(e_i) \quad , \quad i \in I \quad ,$$

entonces

$$\{e_o \, ; \, e_i\} \quad , \quad i \in I$$

es,pues,una base de todo el espacio E.

Como el funcional lineal $f(x)$, que determina el hiperplano ,por el origen, y contiene el sistema de puntos $\{e_i\}$, $i \in I$, está determinado,a menos de una constante de proporcionalidad, y $f(e_o) \neq 0$; dicho funcional lineal está definido completamente, por los valores que toma en la base $\{e_o \, ; \, e_i\}$ de E ,del modo siguiente

$$f(e_o) = 1 \quad , \quad f(e_i) = 0 \quad , \quad i \in I \, .$$

La ecuación del hiperplano,así definido, por f es

$$f(x) = 0.$$

Sea,ahora, $\{a_i\}$, $i \in I$, un sistema de vectores linealmente independientes, que genera un subespacio maximal $L(a_i)$, $i \in I$ del espacio lineal E .

Si queremos determinar la ecuación del hiperplano,por el origen, que definen, con respecto a una base fija del espacio , $\{e_j\}$, $j \in I'$, $I' - I = \{o\}$; expresamos cada vector e_i , $i \in I'$ con respecto a la base $\{a_o \, ; \, a_i\}$ del espacio E , $i \in I$; donde a_o es un vector elegido,tal que

$$a_o \notin L(a_i) \quad , \quad i \in I \, .$$

De modo que se obtiene

$$e_i = a_{io}\, a_o + \sum_{j \in I} a_{ij}\, a_j \quad , \quad i \in I' ,$$

donde a_{ij} sóla tiene un número finito de valores no nulos, para cada $i \in I'$.

El funcional $f(x)$ lineal, que define el hiperplano, en cuestión, verifica

$$f(a_j) = 0 \quad , \quad j \in I .$$

De donde

$$f(e_i) = a_{io}\, f(a_o) + \sum_{j \in I} a_{ij}\, f(a_j) = a_{io} \, , \; i \in I'$$

habiendo supuesto, como es lícito y ya justificado, $f(a_o) = 1$.

El funcional lineal f, definido por los valores en la base $\{e_i\}_{i \in I'}$

$$f(e_i) = a_{io} \quad , \quad i \in I'$$

permite representar el hiperplano (por el origen) definido por el sistema de vectores linealmente independientes $\{a_i\}$, $i \in I$, por la ecuación

$$f(x) = 0 .$$

Cuando se trata del hiperplano, que pasa por el punto b, y es paralelo al subespacio maximal determinado por el sistema de vectores linealmente independientes $\{a_i\}$, $i \in I$; la ecuación del hiperplano es

$$f(x - b) = 0 ,$$

siendo f el funcional lineal, determinado por los valores en la base $\{e_j\}$, $j \in I'$, como antes.

Observemos que la razón de definir el hiperplano que pasa por los puntos $\{a_i\}$, $i \in I$, mediante su ecuación referida a la base fija del espacio, $\{e_j\}$, $j \in I'$; se justifica por el hecho de que, a veces, han de utilizarse varios hiperplanos e incluso infinitos, simultáneamente; como veremos más adelante.

22. POLIGONOS ALABEADOS CONVEXOS; EN UN ESPACIO LINEAL GENERAL :
CRITERIO DE CONVEXIDAD PARA LOS POLIGONOS ALABEADOS DE ESTE ESPACIO.

Consideremos un conjunto infinito de puntos, en un espacio lineal general E, conjunto que dotamos de un buen-orden, y suponemos que tiene último elemento.

La enumeración del conjunto infinito la efectuamos por medio de ordinales transfinitos; por ello podemos expresar el conjunto bien-ordenado y con último elemento, así

$$\{a_i\}\ ,\quad 1 \leq i \leq \mu\ ,$$

y se trata, pues, de un conjunto bien-ordenado de tipo ordinal $\mu + 1$.

Definimos como polígono, del espacio lineal E, con el conjunto bien-ordenado de vértices $\{a_i\}$, $1 \leq i \leq \mu$, la figura lineal uni-dimensional, constituida por la reunión de segmentos rectilineos que unen cada vértice a_i al siguiente a_{i+1} y el último a_μ al primero a_1. De manera más desarrollada, el polígono definido por los vértices a_i $(1 \leq i \leq \mu)$ es la figura lineal

$$\{(1-t)\, a_1 + t\, a_2\} \cup \{(1-t)\, a_2 + t\, a_3\} \cup \{(1-t)\, a_3 + t\, a_4\} \cup \dots$$

$$\cup \{(1-t)\, a_i + t\, a_{i+1}\} \cup \dots \cup \{(1-t)\, a_\mu + t\, a_1\}\ ,\quad 1 \leq i \leq \mu,$$

donde t es un número real, tal que $0 \leq t \leq 1$.

Con esta definición de polígono, nos ocupamos de los polígonos alabeados, en particular. Llamamos polígonos alabeados aquéllos, cuyos vértices no pertenecen a un mismo hiperplano. Para ello, necesitamos que el cardinal del ordinal $\mu + 1$, usado para nombrar los vértices del polígono, satisfaga la siguiente limitación

$$|\mu + 1| > \dim(E)\ .$$

Supongamos también, que la sucesión transfinita de vértices consecutivos, que comienza por el primer vértice del polígono a_1,

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \dots,\ a_i\ ,\ \dots\qquad (i < \zeta)$$

de tipo δ , está formada de vectores linealmente independientes, que generan un subespacio lineal maximal del espacio lineal E.

y,por tanto, el cardinal del ordinal $\delta + 1$ debe coincidir con la dimensión del espacio E

$$|\delta + 1| = \dim(E).$$

Ahora determinamos el vértice sucesor inmediato a todos los vértices de la sucesión $\{a_i\}$, $0 < i < \delta$, el cual está determinado por tratarse de un conjunto bien-ordenado,el conjunto total de vértices; y,por hipótesis,ser no vacio el conjunto

$$\{a_i\}_{0 < i \leq \mu} - \{a_i\}_{0 < i < \delta} .$$

El vértice sucesor inmediato,a la mencionada sucesión,de tipo δ , es nombrado,pues,por el ordinal δ , y se trata,por ello,del vértice a_δ .

La sucesión transfinita

$$a_1, a_2, a_3, \ldots , a_i , \ldots ; a_\delta$$

de tipo ordinal $\delta + 1$,determina un hiperplano que pasa por todos ellos; cuya ecuación,puede hallarse como ecuación del hiperplano que pasa por el punto a_δ y es paralelo al hiperplano,por el origen, conteniendo a los puntos

$$a_1 - a_\delta , a_2 - a_\delta , a_3 - a_\delta , \ldots, a_i - a_\delta , \ldots \quad (i < \delta).$$

(fig.7)

En virtud de la sección anterior,sabemos ya determinar la ecuación del hiperplano,en dichas condiciones.

En primer lugar,si el sistema de vectores $\{a_i - a_\delta\}$, $0 < i < \delta$ es linealmente dependiente,el vector a_δ depende linealmente de la sucesión de vectores $\{a_i\}$, $0 < i < \delta$; porque éstos sí son linealmente independientes.

El hiperplano buscado es ,entonces,el hiperplano por el origen, que contiene a la sucesión de puntos $\{a_i\}$, $0 < i < \delta$.

La ecuación de este hiperplano,la podemos hallar,según hemos visto en la sección anterior,mediante el funcional lineal $f(x)$,definido con respecto a una base fija del espacio E

$$\{e_i\} \ , \quad i \in I'$$

por sus valores en ella

$$f(e_i) = a_{i\alpha} \quad , \quad i \in I' ,$$

siendo a_α un punto del espacio E , tal que $a_\alpha \notin L(a_i)$ $0 < i < \delta$,

$$e_i = a_{io} a_\alpha + \sum_{0<j<\delta} a_{ij} a_j \quad , \quad i \in I' .$$

Y,finalmente,la ecuación del hiperplano es

$$f(x) = 0.$$

Cuando el punto a_δ no depende linealmente del sistema de puntos (vectores) $\{a_i\}$, $0 < i < \delta$; el sistema de vectores $\{a_i - a_\delta\}$, $0 < i < \delta$, es linealmente independiente,porque si no lo fuera,el vector a_δ , dependería linealmente del sistema $\{a_i\}$, $0 < i < \delta$, contra hipótesis.

La justificación del teorema en que nos basamos aquí,para asegurar la validez del teorema contrarrecíproco,ha sido expuesta en otra sección (Polígonos alabeados convexos,en el espacio de Hilbert separable, pag. 54).

Para determinar la ecuación del hiperplano,en este caso general, que pasa por el punto a_δ , y es paralelo al hiperplano por el origen, que contiene el sistema de vectores

$$a_1 - a_\delta , a_2 - a_\delta , a_3 - a_\delta ,\ldots, a_i - a_\delta ,\ldots \quad (i < \delta)$$

vamos a referir la base fija $\{e_i\}$, $i \in I'$; del espacio E , a la base $\{a_\delta ; a_j\}$, $j < \delta$, del mismo.

Pero,incluso antes de este cambio de base,la ecuación del hiperplano que pasa por el sistema de puntos $\{a_\delta , a_i\}$, $0 < i < \delta$, es la siguiente

$$f(x - a_\delta) = 0$$

donde el funcional lineal $f(x)$,está determinado por los valores en la base $\{a_\delta, a_i\}$, $0 < i < \delta$, del espacio lineal E ,así

$$f(a_i) = f(a_\delta) = 1 \quad , 0 < i < \delta .$$

Ahora bien, como habíamos fijado la base $\{e_i\}$, $i \in I'$, en el espacio E ,para las consideraciones ulteriores; si deseamos determinar el funcional lineal $f(x)$, respecto a esta base fija del espacio , no tenemos más que expresar cada vector e_i de esta base, con respecto a la base $\{a_\delta , a_i - a_\delta\}$, $0 < i < \delta$, del espacio E ; la cual es ciertamente base,porque el vector a_δ no depende linealmente del sistema de vectores $\{a_i - a_\delta\}$, $0 < i < \delta$.

Efectivamente,si el vector a_δ dependiera linealmente de los vectores $a_i - a_\delta$, existiría un conjunto finito de constantes reales no nulas $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots\ldots, \alpha_k$, que verificarían la ecuación

$$a_\delta = \alpha_1 (a_1 - a_\delta) + \alpha_2(a_2 - a_\delta) + \ldots + \alpha_k(a_k - a_\delta)$$

de donde

$$(1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k)\, a_\delta = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_k a_k ,$$

y no puede ser nulo el coeficiente $(1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k)$ de a_δ porque siendo linealmente independientes los vectores a_i , $0 < i < \delta$, llegamos al absurdo

$$(1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k = 0) \wedge (\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0) ;$$

y también,cuando el mencionado coeficiente de a_δ , en la ecuación vectorial donde aparece no es nulo,llegamos a otra contradicción :
El vector a_δ depende linealmente del sistema de vectores $\{a_i\}$,$0 < i < \delta$ contra la hipótesis inicial.

Para definir el funcional lineal $f(x)$, en la base fija $\{e_i\}$, $i \in I'$ sólo se requiere la componente de e_i con repecto al vector básico a_δ de la base $\{a_\delta , a_i - a_\delta\}$, $0 < i < \delta$, puesto que se tiene

$$f(e_i) = f\Big(a_{i\delta} a_\delta + \sum_{0<j<\delta} a_{ij} (a_j - a_\delta) \Big) = a_{i\delta}.1 + 0$$
$$= a_{i\delta}$$
$$i \in I'$$

El polígono de vértices $\{a_i\}$, $0 < i \leq \mu$, se puede reconocer como polígono alabeado,si verifica la siguiente condición,expresada con la notación adoptada aquí :

El polígono considerade es alabeado,cuando la sucesión transfinita de números reales

$$f\,(a_i - a_\delta)\,,\quad \delta < i \leq \mu$$

tiene un término no nulo,al menos.

De manera más concisa y precisa : El polígono definido por el conjunto bien-ordenado de sus vértices $\{a_i\}$, $0 < i \leq \mu$,en un espacio lineal general,es convexo cuando verifica la siguiente condición

$$\bigvee_{\delta < i \leq \mu} \left(f\,(a_i - a_\delta) \neq 0 \right) .$$

A continuación,imponemos como hipótesis explícita que a partir de cualquier vértice a_ξ $(0 < \xi \leq \mu)$ del polígono dado,podemos agregarle vértices consecutivos,hasta obtener,con todos ellos, una sucesión transfinita

$$a_\xi\,,\ a_{\xi+1}\,,\ a_{\xi+2}\,,\ \ldots,\ a_{\xi+n}\,,\ \ldots \qquad (n < \delta)$$

de tipo ordinal δ; de vectores linealmente independientes,que generan un subespacio lineal maximal del espacio lineal E.

Determinamos el vértice sucesor inmediato de todos los términos de esta sucesión,de tipo δ; vértice que viene nombrado por el ordinal $\xi + \delta$,pues, y se trata del vértice $a_{\xi+\delta}$.

Ahora determinamos el hiperplano que contiene la sucesión de puntos

$$a_\xi\,,\ a_{\xi+1}\,,\ a_{\xi+2}\,,\ \ldots,\ a_{\xi+n}\,,\ \ldots\ ;\ a_{\xi+\delta}$$

de tipo ordinal $\delta + 1$; como hiperplano por el punto a_δ y paralelo al hiperplane por el origen,que contiene la sucesión de puntos

$$a_\xi - a_{\xi+\delta}\,,\ a_{\xi+1} - a_{\xi+\delta}\,,\ a_{\xi+2} - a_{\xi+\delta}\,,\ \ldots,\ a_{\xi+n} - a_{\xi+\delta}\,\ldots \quad (n < \delta)$$

hiperplano cuya ecuación explícita sabemos, y con la notación empleada, condensamos en la forma

$$f_{\xi}(x - a_{\xi+\delta}) = 0 .$$

El polígono definido por el conjunto bien-ordenado de sus vértices $\{a_i\}$, $0 < i \leq \mu$, se denominará alabeado convexo, cuando cada hiperplano que pasa por una sucesión trnasfinita de vértices consecutivos, deja en un mismo semiespacio, con respecto a dicho hiperplano, los restantes vértices del polígono, habiendo uno, al menos, de tales vértices, fuera de l hiperplano mencionado.

De esta definición de infiere un criterio analítico, para decidir si un pol´ígono de un espacio lineal general E, es alabeado convexo :

El polígono de vértices $\{a_i\}$, $0 < i \leq \mu$, es alabeado convexo, cuando para <u>cada vértice</u> a_{ξ} de este polígono, la sucesión real

$$f_{\xi}(a_i - a_{\xi+\delta}) \quad , \quad 0 < i \leq \mu$$

posee algún término no nulo, y todos los que lo sean tengan signo constante.

De manera más breve y precisa, conservando la notación, el polígono de vértices $\{a_i\}$, $0 < i \leq \mu$, cuando ya es alabeado, se reconoce su eventual convexidad, mediante la verificación de la condición característica siguiente

$$\bigwedge_{0<\xi\leq\mu}\left(\left[\bigwedge_{0<i\leq\mu}\left(f_{\xi}(a_i - a_{\xi+\delta}) \geq 0\right)\right] \vee \left[\bigwedge_{0<i\leq\mu}\left(f_{\xi}(a_i - a_{\xi+\delta}) \leq 0\right)\right]\right)$$

C A P I T U L O T E R C E R O

ESTUDIO DE LOS POLIEDROS CONVEXOS Y DE LOS POLIGONOS ALABEADOS "CONVEXOS" , EN LOS ESPACIOS NORMADOS ℓ^1 Y c_0 , DE SUCESIONES REALES DE SERIE ABSOLUTAMENTE CONVERGENTE, Y DE SUCESIONES REALES INFINITESIMAS :

CRITERIOS DE CONVEXIDAD DE LOS POLIEDROS Y POLIGONOS ALABEADOS , DE ESTOS ESPACIOS.

23. DETERMINACION DEL PUNTO DE INTERSECCION DE UNA SUCESION DE HIPERPLANOS EN EL ESPACIO NORMADO ℓ^1 DE SUCESIONES REALES CUYAS SERIES SON ABSOLUTAMENTE CONVERGENTES.

En virtud del hecho de que el espacio dual del espacio ℓ^1, de sucesiones reales, cuya serie respectiva es absolutamente convergente, es el espacio normado ℓ^∞, de sucecesiones reales acotadas (Topological Vector Spaces , G. Köthe) y de que un sistema total (o Base de Schauder) del espacio ℓ^1, está constituido por la sucesión de vectores unitarios $e_n = (0,0,\ldots,\underset{(n)}{1},0,\ldots)$, $n = 1,2,3,\ldots$; la representación general de un elemento $u \in (\ell^1)' = \ell^\infty$, es decir, un funcional lineal continuo del espacio ℓ^1, es, pues

$$u(x) = \mathcal{U}\, x = \sum_{n=1}^{\infty} v_n\, \xi_n$$

en donde

$$\mathcal{U} = (v_n) = \{u(e_n)\} \in \ell^\infty \quad ; \; x = (\xi_n) \in \ell^1 .$$

La sucesión particular de hiperplanos, del espacio ℓ^1,

$$\begin{aligned} u^1(x) &= \gamma_1 \\ u^2(x) &= \gamma_2 \\ u^3(x) &= \gamma_3 \\ &\ldots\ldots\ldots \\ u^n(x) &= \gamma_n \\ &\ldots\ldots\ldots \qquad n = 1,2,3,\ldots \end{aligned} \qquad [1]$$

donde los funcionales lineales contínuos $u^n(x)$, $n = 1,2,3,\ldots$ están definidos, mediante los vectores $\mathcal{U}^n$ correspondientes del espacio ℓ^∞, del modo siguiente

$u^1(x) = \mathcal{U}^1 x = \xi_1 \, , \; \mathcal{U}^1 = (1,0,0,\dots,0,\dots)$

$u^2(x) = \mathcal{U}^2 x = \xi_2 \, , \; \mathcal{U}^2 = (0,1,0,\dots,0,\dots)$

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$u^n(x) = \mathcal{U}^n x = \xi_n \, , \; \mathcal{U}^n = (0,0,0,\dots,\overset{n}{1},\dots) \; ; \quad n = 1,2,\dots$

Por ello,el único vector x que puede ser solución del sistema de ecuaciones [1] , es

$$x = \sum_1^\infty e_n \xi_n = \sum_1^\infty e_n \gamma_n \, ,$$

vector que tiene por componentes,en la base Schauder $\{e_n\}$, $0 < n <$ del espacio l^1 , $\{\gamma_n\}$, $n = 1,2,\dots$.

Pero como el vector $\{\gamma_n\}$ ha de ser un vector del espacio l^1 , la condición necesaria para que la sucesión dada de hiperplanos [1] ,se corten en un punto único es, por tanto,

$$\{\gamma_n\} \in l^1 \, ,$$

lo cual significa

$$\sum_1^\infty |\gamma_n| < +\infty \; ; \qquad [2]$$

y el punto de intersección de la sucesión de hiperplanos,del espacio l^1 ,

$$u^n(x) = \gamma_n \, , \quad n = 1,2,3,\dots$$

cumplida ya la condición [2] ,es el punto x de dicho espacio l^1, definido por

$$\hat{x} = \sum_1^\infty \gamma_n e_n = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots, \gamma_n, \dots$$

El caso general, de la determinación del punto de intersección de una sucesión de infinitos hiperplanos del espacio normado ℓ^1, se puede resolver si dicho caso general, se puede reducir al particular, ya resuelto.

Se trata de hallar el punto de intersección de la sucesión de hiperplanos del espacio ℓ^1, de ecuaciones respectivas

$$u^1(x) = \gamma_1 \ , \ u^2(x) = \gamma_2 \ , \ u^3(x) = \gamma_3 \ , \ldots , \ u^n(x) = \gamma_n \ , \ldots$$

$$n = 1, 2, 3, \ldots$$

siendo definidos los funcionales lineales contínuos u^n, por sus valores en la base de vectores unitarios $\{e_n\}$ del espacio ℓ^1

$$u^1(e_1) = v_{11} \ , \ u^1(e_2) = v_{12} \ , \ u^1(e_3) = v_{13} \ , \ldots , \ u^1(e_p) = v_{1p} , \ldots$$

$$u^2(e_1) = v_{21} \ , \ u^2(e_2) = v_{22} \ , \ u^2(e_3) = v_{23} \ , \ldots , \ u^2(e_p) = v_{2p} \ , \ldots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$u^n(e_1) = v_{n1} \ , \ u^n(e_2) = v_{n2} \ , \ u^n(e_3) = v_{n3} \ , \ldots , \ u^n(e_p) = v_{np} \ , \ldots$$

$$n = 1, 2, 3, \ldots$$

y como el espacio dual de ℓ^1 es ℓ^∞, se verifican las condiciones

$$(v_{1p}) \in \ell^\infty \quad , \text{ es decir} \quad \sup_p |v_{1p}| < \infty$$

$$(v_{2p}) \in \ell^\infty \qquad \sup_p |v_{2p}| < \infty$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(v_{np}) \in \ell^\infty \qquad \sup_p |v_{np}| < \infty$$

$$n = 1,2,3,\ldots \qquad p = 1,2,3,\ldots$$

La determinación del punto de intersección de esta sucesión de hiperplanos, se puede reducir al caso particular, ya resuelto, si podemos encontrar un sistema completo de vectores $\{f_n\}$, $0 < n < \omega$ en el cual los funcionales u^n, estén definidos por

$u^1(f_1) = 1$, $u^1(f_2) = 0$, $u^1(f_3) = 0$,...., $u^1(f_n) = 0$,...

$u^2(f_1) = 0$, $u^2(f_2) = 1$, $u^2(f_3) = 0$,...., $u^2(f_n) = 0$,...

$u^3(f_1) = 0$, $u^3(f_2) = 0$, $u^3(f_3) = 1$,...., $u^3(f_n) = 0$,...

....

$u^n(f_1) = 0$, $u^n(f_2) = 0$, $u^n(f_3) = 0$,...., $u^n(f_n) = 1$,...

$n = 1 , 2 , 3 , ...$

Así,pues,los vectores del sistema completo $\{e_n\}$ expresados mediante los vectores del sistema $\{f_n\}$, también completo,adoptan las expresiones siguientes

$$e_1 = \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{1p}\, f_p \;\; ; \;\; e_2 = \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{2p}\, f_p \;\; ; \;\; e_3 = \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{3p}\, f_p \;\; ; \; \dots \; ;$$

$$e_n = \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{np}\, f_p \quad ; \quad n = 1 , 2 , 3 , \dots$$

Hemos de determinar todas las constantes reales (α_{np}) $\begin{matrix} n = 1,2,3,.. \\ p = 1,2,3,.. \end{matrix}$ para poder considerar definidos los vectores f_p.

Lo cual se logra así :

$$u^1(e_1) = u^1\left(\sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{1p}\, f_p \right) = \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{1p}\, u^1(f_p) = \alpha_{11}$$

de donde

$$\alpha_{11} = v_{11} = u^1(e_1) .$$

Análogamente,se tiene

$$u^2(e_1) = u^2\left(\sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{1p}\, f_p \right) = \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{1p}\, u^2(f_p) = \alpha_{12} = v_{21}$$

$$u^3(e_1) = u^3\left(\sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{1p}\, f_p \right) = \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{1p}\, u^3(f_p) = \alpha_{13} = v_{31}$$

....

$$u^n(e_1) = u^n\left(\sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{1p}\, f_p \right) = \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{1p}\, u^n(f_p) = \alpha_{1n} = v_{n1}$$

$$m = 1, 2, 3, \ldots$$

Ahora bien, como el vector $e_1 \in \ell^1$ debe estar expresado en una base Schauder, $\{f_n\}$, del citado espacio ℓ^1, el vector de coordenadas $(\alpha_{1m}) = (v_{n1}) \in \ell^1$, y, por tanto, se vefifica

$$\sum_{n=1}^{\infty} |v_{n1}| < \infty .$$

Del mismo modo, se obtiene

$$u^1(e_2) = \alpha_{21} = v_{12}, \quad u^2(e_2) = \alpha_{22} = v_{22}, \quad u^3(e_2) = \alpha_{23} = v_{32}$$

$$u^n(e_2) = \alpha_{2n} = v_{n2} \quad ; \quad m = 1, 2, 3, \ldots$$

y también ha de ser, por lo dicho

$$(\alpha_{2m}) = (v_{n2}) \in \ell^1 , \quad \sum_{n=1}^{\infty} |v_{n2}| < \infty .$$

Finalmente, de modo más general, se verifica

$$u^1(e_m) = \alpha_{n1} = v_{1n}, \quad u^2(e_n) = \alpha_{n2} = v_{2m}, \quad u^3(e_n) = \alpha_{n3} = v_{3m}$$

$$u^p(e_n) = \alpha_{np} = v_{pm} \quad ; \quad p = 1,2,3,\ldots$$

y asimismo

$$(\alpha_{np})_p = (v_{pm})_p \in \ell^1 , \text{ es decir } \sum_{p=1}^{\infty} |v_{pm}| < \infty .$$

Resumimos las condiciones obtenidas, para que la sucesión de funcionales lineales contínuos $u^n(x)$, $n = 1,2,3,\ldots$, definidos en la base canónica $\{e_n\}$, de vectores unitarios del espacio ℓ^1, se puedan definir en un sistema completo $\{f_n\}$ del espacio ℓ^1 y que sea canónico para esta sucesión de funcionales $u^n(x)$; estableciendo que la matriz infinita

$$\begin{array}{cccccc} v_{11} & v_{12} & v_{13} & \cdots & v_{1p} & \cdots \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} & \cdots & v_{2p} & \cdots \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} & \cdots & v_{3p} & \cdots \\ \multicolumn{6}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ v_{n1} & v_{n2} & v_{n3} & \cdots & v_{np} & \cdots \\ \multicolumn{6}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \end{array}$$

tiene todas sus filas constituyendo vectores (v_{np}), $0 < p < \infty$ del espacio l^{∞}, dual del espacio l^1; mientras que todas sus columnas (v_{np}), $0 < n < \infty$, sean vectores del espacio l^1.

La mencionada matriz infinita,por suponer que es la matriz de trnasformación de una base Schauder del espacio l^1,en otra base Schauder de éste,verifica las condiciones siguientes :

Ninguna columna de la matriz está formada de ceros solamente, porque,en esr caso,un vector de la base $\{e_n\}$, sería nulo,lo que es absurdo.

Ninguna fila de la matriz está formada de sólo ceros,porque uno de los funcionales lineales sería idénticamente nulo; lo cual no es posible porque toma el valor $1 \neq 0$ una vez,al menos.

La matriz infinita en cuestión,es linealmente indepndiente por columnas,porque si hubiera varias columnas,en número finito, linealmente dependientes,entonces un número finito de vectores de la base Schauder $\{e_n\}$, del espacio l^1,serían linealmente dependientes; evidentemente imposible.

La matriz es linealmente independiente por filas,porque si hubiera varias filas,en número finito,linealmente dependientes,entonces varios funcionales de la sucesión $w^n(x)$,habrían también de ser linealmente depndientes,cosa imposible,puesdichos funcionales están representados por el sistema de vectores del espacio l^{∞}

(1,0,0,...,0,...) ; (0,1,0,...,0,...) ; (0,0,1,...,0,...) ; ... ;
(0,0,...,1,0,...) ; ...

Cumplidas las condiciones analizadas antes, por la matriz infinita (w_{np}), $n, p = 1,2,3,\dots$; que nos aseguran la existencia de una base Schauder, canónica para la sucesión de funcionales lineales contínuos $u^n(x)$ y linealmente independientes ; para que la sucesión de hiperplanos

$$u^1(x) = \gamma_1 \ , u^2(x) = \gamma_2 \ , u^3(x) = \gamma_3 \ , \dots , u^n(x) = \gamma_n \ , \dots$$

se corte en un solo punto, y como los números γ_n deben ser las coordenadas de un vector en la base Schauder $\{f_n\}$, pues

$$u^1\left(\sum_{p=1}^{\infty} \xi_p f_p\right) = \sum_{p=1}^{\infty} \xi_p u^1(f_p) = \xi_1 = \gamma_1$$

$$u^2\left(\sum_{p=1}^{\infty} \xi_p f_p\right) = \sum_{p=1}^{\infty} \xi_p u^2(f_p) = \xi_2 = \gamma_2$$

....

$$u^n\left(\sum_{p=1}^{\infty} \xi_p f_p\right) = \sum_{p=1}^{\infty} \xi_p u^n(f_p) = \xi_n = \gamma_n \ ; \quad n = 1,2,3,\dots$$

se requiere aun la condición

$$(\gamma_m) \in \ell^1 \ , \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\gamma_n| < \infty \ .$$

Y por tanto, el punto de intersección de la sucesión de hiperplanos $u^n(x) = \gamma_n$, $(n = 1,2,3,\dots)$ es

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n f_n \ .$$

24. DETERMINACION Y ECUACION EXPLICITA DEL HIPERPLANO, QUE PASA POR UNA SUCESION INFINITA DE PUNTOS LINEALMENTE INDEPENDIENTES Y EN AQUEL BASE ; DEL ESPACIO NORMADO ℓ^1 ; DE LAS SUCESIONES REALES DE SERIE ABSOLUTAMENTE CONVERGENTE.

Comenzamos con el caso más sencillo, en que la sucesión de puntos por donde ha de pasar el hiperplano es

$0 \; , e_2 \; , \; e_3 \; , \ldots , \; e_n \; , \ldots$

siendo los vectores e_n , los de la base Schauder canónica del espacio ℓ^1 , salvo el vector e_1 .

De modo tal que el hiperplano , al pasar por el origen , y por los puntos e_n , $n \geq 2$; ha de tener una ecuación de la forma

$$u(x) = 0 \quad ; \quad u \text{ , funcional lineal contínuo ,}$$

la cual es verificada por

$$u(e_2) = u(e_3) = \ldots = u(e_n) = \ldots = 0 \quad ; \quad n \geq 2$$

y además se tiene $u(e_1) = 1$.

Así pues, de estas hipótesis se deduce

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n e_n \quad ; \quad u(x) = u\left(\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n e_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n u(e_n) = \xi_1$$

$$\xi_1 = 0 \iff u(x) = 0.$$

Cuando la base ~~completa~~ del espacio ℓ^1 , sea $\{f_n\}$, $n \geq 1$ y no es la canónica $\{e_n\}$, $n \geq 1$; y el sistema $\{f_n\}$, $n \geq 2$ es el que determina el hiperplano por el origen, del siguiente modo

$$u(f_1) = 1 \quad , \quad u(f_2) = u(f_3) = \ldots = u(f_n) = 0 \; ; \; n \geq 2$$

$$u(x) = 0 \; ;$$

si deseamos hallar la ecuación del hiperplano mencionado,con con respecto a la base canónica ~~completa~~ $\{e_n\}$ del espacio ℓ^1, basta conocer las expresiones lineales de los vectores e_n en términos de los vectores f_n.

$$e_1 = \sum_{p=1}^{\infty} a_{1p} f_p \; , \quad e_2 = \sum_{p=1}^{\infty} a_{2p} f_p \; , \quad e_3 = \sum_{p=1}^{\infty} a_{3p} f_p \; ,$$

$$e_n = \sum_{p=1}^{\infty} a_{np} f_p \; ; \qquad n = 1 , 2 , 3 , \ldots$$

en donde,ahora, se consideran conocidos todos los números a_{np} $n , p = 1,2,3,\ldots$; y,también,por tanto,la matriz infinita

$$\begin{array}{ccccc}
a_{11} & a_{12} & a_{13} \cdots & a_{1p} & \cdots \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} \cdots & a_{2p} & \cdots \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} \cdots & a_{3p} & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \cdots & a_{np} & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

todas cuyas filas son sucesiones de serie absolutamente convergente, pues son vectores de coordenadas,pertenecientes al espacio ℓ^1. Las columnas todas son sucesiones acotadas,pues definen funcionales lineales contínuos del espacio ℓ^1.

La matriz infinita citada,es linealmente independiente por filas y por columnas,como ha sido justificado,en otra sección.

Hemos de calcular la componente del vector x sobre el vector f_1, en la base $\{f_n\}$, $n \geqslant 1$, expresados como funciones lineales de los vectores e_n, para anularla y obtener así la ecuación del hiperplano considerado,en la base $\{e_n\}$.

Para ello, se escribe

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n e_n = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \sum_{p=1}^{\infty} a_{np} f_p = \sum_{p=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{np} \xi_n \right) f_p$$

de donde se infiere la ecuación del hiperplano, en la base canónica

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{n1} \xi_n = 0$$

siendo $(\xi_n) \in l^1$, es decir $\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n| < \infty$,

$$\sup_n |a_{n1}| < \infty$$

porque los números (a_{n1}) definen el funcional $u(x)$ en la base $\{e_n\}$; el cual estaba antes definido así, en la base $\{f_n\}$:

$$u(f_1) = 1 , u(f_2) = u(f_3) = \ldots = u(f_n) = \ldots = 0 ;$$

de donde, se concluye

$$u(e_1) = u\left(\sum_{p=1}^{\infty} a_{1p} f_p\right) = a_{11} , u(e_2) = u\left(\sum_{p=1}^{\infty} a_{2p} f_p\right) = a_{21}$$

$$u(e_3) = u\left(\sum_{p=1}^{\infty} a_{3p} f_p\right) = a_{31} ; u(e_n) = u\left(\sum_{p=1}^{\infty} a_{np} f_p\right) = a_{n1}$$

$$n = 1 , 2 , 3 , \ldots$$

Si al hiperplano se le exige que pase por una sucesión $\{f_n\}$, $n \geq 2$, linealmente independiente y base en el hiperplano, y por el punto b ; basta reducir este caso al anterior, mediante la sucesión $\{f_n - b\}$, hallando el hiperplano por el origen que pasa por esta sucesión de puntos (vectores) y despues el hiperplano paralelo a éste, que pasa por el punto b.

Cuando el vector b depende linealmente de la sucesión de vectores $\{r_n\}$, $n \geqslant 2$, el hiperplano pasa por el origen y por esta sucesión ; la la ecuación de dicho hiperplano ya la sabemos dederminar.

Si el punto b no depende lineal topológicamente de la sucesión de vectores $\{r_n\}$, $n \geqslant 2$, entonces se verifica

$$b \notin \overline{L}\,(r_2, r_3, \ldots, r_n, \ldots) ,$$

y por eso, este vector b podemos considerarlo como el vector $r_1 = b$, tal que el sistema de vectores $\{r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n, \ldots\}$ constituya una base completa del espacio ℓ^1 .

El hiperplano que pasa por la sucesión de puntos (vectores) r_n , $m = 1,2,3,\ldots$ verifica, pues, las condiciones

$$u\,(r_2 - r_1) = 0 ,\ u\,(r_3 - r_1) = 0 ,\ \ldots,\ u\,(r_n - r_1) = 0 ,$$

$n = 1,2,3,\ldots$

donde u es el funcional lineal contínuo del espacio ℓ^1 , que precisamente, hay que determinar.

Debe ser $u\,(r_1) \neq 0$, porque en caso contrario, de las condiciones ya satisfechas por el funcional u , se deduce

$$u\,(r_2) = u\,(r_3) = \ldots = u\,(r_n) = \ldots = u\,(r_1) = 0$$

y el funcional u es el idénticamente nulo, evidentemente incapaz de determinar el hiperplano, en cuestión.

Por ello, podemos suponer $u\,(r_1) \neq 0$, e incluso $u\,(r_1) = 1$ sin pérdida de generalidad.

El sistema de vectores $\{r_1\} \cup \{r_n - r_1\}$, $n \geqslant 2$, constituye una una base completa del espacio ℓ^1 .

En primer lugar, este sistema de vectores es linealmente independiente, porque si un número finito de ellos, $(r_{n_1} - r_1)$, $(r_{n_2} - r_1)$, $(r_{n_k} - r_1)$, verifican una ecuación lineal con coficientes reales $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, del tipo

$$\alpha_1\,(r_{n_1} - r_1) + \alpha_2\,(r_{n_2} - r_1) + \ldots + \alpha_k\,(r_{n_k} - r_1) = 0$$

como el sistema de vectores $\{f_n\}$, es linealmente independiente, se concluye

$$(\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0) \wedge (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k = 0)$$

Si interviniera el vector f_1 en la ecuación lineal, ésta sería de la forma

$$\alpha_1 f_1 + \alpha_2 (f_{n_2} - f_1) + \dots + \alpha_k (f_{n_k} - f_1) = 0$$

de donde

$$\left[(\alpha_1 - \alpha_2 - \dots - \alpha_k = 0) \wedge (\alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0)\right] \Rightarrow$$
$$\Longrightarrow (\alpha_1 = 0).$$

De modo que la independencia lineal de los vectores $\{f_1\} \cup \{f_n - f_1\}_{n \geq 2}$ queda probada.

En segundo término, este sistema de vectores es base en el espacio ℓ^1. Para ello no hay más que expresar un vector genérico x del espacio, como combinación lineal de los infinitos vectores de la sucesión, es decir, como límite de las combinaciones lineales finitas de dicha sucesión infinita de vectores.

Sean las componentes del vector x, en la base completa $\{f_n\}$ del espacio, (ξ_n); y por eso, se tiene

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n f_n \quad , \quad (\xi_n) \in \ell^1 \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n| < \infty .$$

Vamos a expresar el vector x mediante todos los vectores del sistema $\{f_1\} \cup \{f_n - f_1\}$; así pues

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n f_n = \xi_1 f_1 + \sum_{n=2}^{\infty} \xi_n (f_n - f_1 + f_1) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n\right) f_1 + \sum_{n=2}^{\infty} \xi_n (f_n - f_1)$$

puesto que $(\xi_n) \in \ell^1$, se tiene:

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n\right| + \sum_{n=2}^{\infty} |\xi_n| \leq 2 \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n| < \infty ;$$

y, por tanto, el sistema de vectores $\{f_1\} \cup \{f_n - f_1\}_{n \geq 2}$ es base en el espacio ℓ^1.

El funcional lineal contínuo, definido por las condiciones

$$u(f_1) = 1, \quad u(f_2 - f_1) = u(f_3 - f_1) = \dots = u(f_n - f_1) = 0 \quad ; \quad n \geq 2$$

permite definir el hiperplano buscado, por su ecuación

$$u(x - f_1) = 0 .$$

Si se desea la ecuación de este hiperplano, en la base canónica $\{e_n\}$ del espacio ℓ^1, no hay más que expresar un vector genérico x del espacio en la base completa $\{f_1\} \cup \{f_n - f_1\}$, $n \geq 2$, partiendo de sus coordenadas (ξ_n), en la base canónica $\{e_n\}$ y anular su componente sobre f_1, referido a aquella base. Así, pues

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n e_n = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \left(\sum_{p=1}^{\infty} a_{np} f_p \right) = \sum_{p=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{np} \xi_n \right) f_p$$

$$= \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{n1} \xi_n \right) f_1 + \sum_{p=2}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{np} \xi_n \right) (f_p - f_1 + f_1)$$

siendo la componente sobre el vector f_1, en la base $\{f_1\} \cup \{f_n - f_1\}$, $n \geq 2$, la siguiente

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{n1} \xi_n + \sum_{p=2}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{np} \xi_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_{n1} + \sum_{p=2}^{\infty} a_{np} \right) \xi_n$$

de modo que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{p=1}^{\infty} a_{np} \right) \xi_n = 0$$

es la ecuación del hiperplano por el origen, paralelo al hiperplano que pasa por la sucesión de puntos $\{f_n\}$, $n \geq 1$.

Finalmente, para obtener la ecuación del hiperplano que pasa por los puntos $b\ (= f_1)$, f_2, f_3, ..., f_n, ... basta conocer las componentes del vector b del espacio ℓ^1, en su base canónica $\{e_n\}$. Sean éstas (β_n), se obtiene la ecuación del hiperplano pedido, en la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{p=1}^{\infty} a_{np} \right) (\xi_n - \beta_n) = 0 ,$$

siendo,pues, la matriz infinita (a_{np}) , n,p = 1,2,3,.... tal,que además de las condiciones analizadas ya,verifica esta otra

$$\sup_{m} \left| \sum_{p=1}^{\infty} a_{np} \right| < \infty$$

lo cual significa : Las sumas de las filas de la matriz infinita están acotadas, en conjunto.

25. DETERMINACION Y REPRESENTACION DE UN POLIEDRO CONVEXO EN EL ESPACIO NORMADO ℓ^1 ,DE SUCESIONES REALES DE SERIE ABSOLUTAMENTE CONVERGENTE : CRITERIO DE CONVEXIDAD DE POLIEDROS.

Consideremos en el espacio normado ℓ^1 (de Banach), un sistema infinito de hiperplanos,cuyas ecuaciones sean

$$u^i(x) = \gamma_i \quad , i \in I \quad , \quad |I| \geq \aleph_0$$

y seleccionemos de tal sistema de hiperplanos,las posibles sucesiones admisibles ,entendiendo por tales áquéllas para las cuales

$$u^n(x) = \gamma_n \quad , \quad 0 < n < \omega$$

los funcionales lineales u^n , admiten una base canónica $\{f_n\}$, es decir,que los funcionales u^n definidos en esta base ,son

$u^1(f_1) = 1$, $u^1(f_2) = 0$, $u^1(f_3) = 0$,...., $u^1(f_n) = 0$,....

$u^2(f_1) = 0$, $u^2(f_2) = 1$, $u^2(f_3) = 0$,...., $u^n(f_n) = 0$,....

....

$u^n(f_1) = 0$, $u^n(f_2) = 0$, $u^n(f_3) = 0$,...., $u^n(f_n) = 1$,....

....

La condición para que exista dicha base canónica para los funcionales u^n , ya sabemos que se reconoce mediante la matriz infinita (v_{np}) , n,p = 1,2,3,... de los valores de los funcionales,definidos en la base $\{e_n\}$, de vectores unitarios del espacio ℓ^1 ; matriz que ,como ya sabemos, está constituida por filas, que son vectores del espacio ℓ^∞ , mientras que las columnas son vectores del espacio ℓ^1 .

Además la matriz infinita $\{ v_{np} \}$, $n,p = 1,2,3,\ldots$; es linealmente independiente por filas y columnas,según se ha justificado ya.

Aestas condiciones condiciones,que se refieren exclusivamente a los funcionales u^n , $n = 1,2,.3,\ldots$, hemos de agregar la condición de que los términos indpendientes $\{ \gamma_n \}$ de las ecuaciones de los hiperplanos correspondientes,verifiquen

$$\sum_{n=1}^{\infty} | \gamma_n | < \infty \ .$$

Y,finalmente,el punto de intersección de la sucesión mendiomdda de hiperplanos,en la base canónica de los funcionales u^n , es

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n f_n \ .$$

Para definir el poliedro convexo,del espacio en cuestión,mediante el sistema infinito de hiperplanos

$$u^i (x) = \gamma_i \quad , i \in I \quad , \quad | I | \geq \aleph_0 \quad ,$$

elegimos un plano de este sistema

$$u^k (x) = \gamma_k \quad , \quad k \in I$$

y consideramos todas las sucesiones admisibles de hiperplanos del sistema, excluyendo este hiperplano $u^k(x) = \gamma_k$; y suponiendo expresamente,que tales sucesiones admisibles existen; admitiendo que una de ellas,al menos,tiene su punto de intersección, exterior al señalado hiperplano.

Si el punto de intersección ,de una sucesión admisible,que yace fuera del hiperplano $u^k(x) = \gamma_k$,se denota por x_k ; se puede expresar la condición de convexidad del ~~......~~ poliedro definido por el sistema total de hiperplanos dados,del siguiente modo :

Cuando a cada hiperplano $u^k (x) = \gamma_k$, se le puede asignar una sucesión admisible de hiperplanos del sistema total y distintos a él

$$u^{k_1}(x) = \gamma_{k_1} \ , \ u^{k_2}(x) = \gamma_{k_2} \ , \ u^{k_3}(x) = \gamma_{k_3} \ , \ldots , \ u^{k_n}(x) = \gamma_{k_n}$$

$$k_n \neq k \ , \quad 0 < n < \omega \ ; \qquad \sum_{n=1}^{\infty} | \gamma_{k_n} | < \infty$$

y la base canónica de los funcionales w^k, se denota por $\{r_{k_n}\}$ $n = 1,2,3,\ldots$; el punto x_k viene dado en la forma

$$x_k = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_{k_n} r_{k_n} ;$$

la condición de existencia y carácter convexo,del poliedro definible por el sistema total de hiperplanos dados,es pues,

$$\bigwedge_{k \in I} \left(w^k \left(\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_{k_n} r_{k_n} \right) \neq \gamma_k \right).$$

Cumplida la condición de convexidad del poliedro,éste se puede representar por el siguiente sistema de infinitas inecuaciones lineales,contorno incluido

$$\left[w^k \left(\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_{k_n} r_{k_n} \right) - \gamma_k \right] \left[w^k (x) - \gamma_k \right] \geq 0 \quad ; \quad k \in I .$$

26. POLIGONOS ALABEADOS CONVEXOS EN EL ESPACIO NORMADO ℓ^1 ;DE LAS SUCESIONES REALES DE SERIE ABSOLUTAMENTE CONVERGENTE : CRITERIO DE CONVEXIDAD;SEGUN ESTE CONCEPTO; DE LOS POLIGONOS .

Vamos,en primer lugar,a definir un polígono cualquiera del espacio normado ℓ^1 , mediante el conjunto bien-ordenado de sus vértices $\{a_i\}$, el cual podemos enumerar mediante un ordinal infinito.

Hacemos una primera hipótesis,sobre el conjunto de los vértices :
El conjunto bien-ordenado $\{a_i\}$,además de ser infinito, suponemos que tiene último elemento; con lo cual el conjunto puede ser enumerado por el ordinal infinito μ ,de la siguiente manera

$$\{a_i\} \quad , \quad 0 < i \leq \mu$$

tratándose,pues,de una sucesión transfinita,de tipo $\mu + 1$, Entenderemos por polígono definido por el conjunto de vértices $\{a_i\}$, la figura lineal uni-dimensional formada por la reunión de los segmentos que unen vértices consecutivos, y el último vértice con el primero

$$[a_1, a_2] \cup [a_2, a_3] \cup [a_3, a_4] \cup \cdots \cup [a_i, a_{i+1}] \cup \cdots \cup [a_\nu, a_1] \ .$$

A partir de esta definición, para analizar el eventual carácter convexo y alabeado de un polígono, hemos de hacer más suposiciones. La primera, que comenzando con el primer vértice a_1 del polígono, y añadiéndole, uno a uno, vértices consecutivos, llegamos a una sucesión infinita ordinaria

$$a_1\ ,\ a_2\ ,\ a_3\ ,\ \ldots\ ,\ a_n\ ,\ \ldots\ \qquad ;\ n < \omega$$

de puntos linealmente independientes, que generan un subespacio lineal cerrado $\overline{L}\ (a_n)$, $n < \omega$, y maximal en el espacio ℓ^1. A esta sucesión de puntos, en el conjunto bien-ordenado $\{a_i\}$, $0 < i \leq \nu$ le sigue un elemento inmediato, el cuál, pues, está nombrado por el ordinal ω, siendo el elemento a_ω.

Ahora bien, la sucesión de tipo $\omega + 1$

$$a_1\ ,\ a_2\ ,\ a_3\ ,\ \ldots\ ,\ a_n\ ,\ \ldots\ ;\ a_\omega \qquad [2]$$

determina un hiperplano que los contiene; cuya ecuación, como ya sabemos, es de la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{p=1}^{\infty} c_{np} \right) (\xi_n - a_{\omega n}) = 0 \ ,$$

donde las constantes (c_{np}), $n, p = 1, 2, 3, \ldots$, son las componentes de la base canónica del espacio ℓ^1, $\{e_n\}$, en la base canónica del funcional $u\ (x)$, que define el hiperplano que contiene la sucesión de puntos $[2]$; $(a_{\omega n})$ son las componentes del vértice a_ω, en la base canónica del espacio.

El carácter alabeado del polígono se puede reconocer, si algún vértice del mismo yace en el exterior del hiperplano determinado por los ω primeros vértices. De donde se deduce

$$\bigvee_{\omega < i \leq \mu} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{p=1}^{\infty} c_{np} \right) (a_{im} - a_{\omega m}) \neq 0 \right] .$$

La hipótesis, que también vamos a admitir, se refiere a que elegido cualquier vértice a_k, del polígono se pueden ir añadiendo vértices consecutivos, hasta obtener una sucesión infinita

$$a_k ; a_{k+1} , a_{k+2} , \dots , a_{k+n} , \dots \qquad n < \omega$$

la cual sea de vectores linealmente independientes y tal, que el subespacio cerrado que generan, es maximal en el espacio ℓ^1.

El vertice consecutivo inmediato a todos los vértices de esta sucesión es el $a_{k+\omega}$.

El hiperplano determinado por los puntos de la sucesión de tipo ordinal $\omega + 1$, que los contiene

$$a_k , a_{k+1} , a_{k+2} , \dots , a_{k+n} , \dots ; a_{k+\omega} ,$$

posee la ecuación, con el significado establedido para la notación,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{p=1}^{\infty} c^k_{np} \right) (\xi_n - a_{k+\omega, n}) = 0 .$$

El polígono es alabeado convexo, cuando los hiperplanos que pasan por las sucesiones citadas, de vértices consecutivos del mismo, dejan los restantes vértices, con respecto al hiperplano, en el mismo semiespacio, pudiendo haber alguno de ellos situado en el borde del semiespacio, pero no todos los vértices.

La condición de convexidad del polígono de vértices $\{a_i\}$, $0 \leq i \leq \mu$

supuesto que ya es alabeado, se puede formular del modo

$$\left[\left(\bigwedge_{\mu < i \leq \mu} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{p=1}^{\infty} c^k_{np} \right) (a_{in} - a_{k+\omega, n}) \geq 0 \right] \right) \vee \right.$$
$$\left. \vee \left(\bigwedge_{i \leq \mu} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{p=1}^{\infty} c^k_{np} \right) (a_{in} - a_{k+\omega, n}) \leq 0 \right] \right) \right]$$

27. <u>DETERMINACION DEL PUNTO DE INTERSECCION DE UNA SUCESION DE HIPERPLANOS; DEL ESPACIO NORMADO c_0 DE LAS SUCESIONES REALES INFINITESIMAS</u>.

Comenzamos por el caso más sencillo, en donde la sucesión infinita de hiperplanos del espacio c_0, de sucesiones reales infinitésimas, viene dada por los funcionales u^n lineales contínuos y las ecuaciones

$$u^1(x) = \gamma_1 , \; u^2(x) = \gamma_2 , \; u^3(x) = \gamma_3 , \ldots , u^n(x) = \gamma_n , \ldots$$

$$n = 1, 2, 3, \ldots$$

tales que los funcionales u^n, definidos en la base $\{e_n\}$ de vectores unitarios del espacio c_0, sean

$$u^1(e_1) = 1 , \; u^1(e_2) = 0 , \; u^1(e_3) = 0 , \ldots , u^1(e_n) = 0 , \ldots$$

$$u^2(e_1) = 0 , \; u^2(e_2) = 1 , \; u^2(e_3) = 0 , \ldots , u^2(e_n) = 0 , \ldots$$

....

$$u^n(e_1) = 0 , \; u^n(e_2) = 0 , \; u^n(e_3) = 0 , \ldots , u^n(e_n) = 1 , \ldots$$

$$n = 1, 2, 3, \ldots$$

De donde se concluye, en virtud de la linealidad y continuidad de los operadores u^n, que para cada vector x del espacio c_0

$$u^1(x) = u^1\left(\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n e_n\right) = \xi_1 , \; u^2(x) = u^2\left(\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n e_n\right) = \xi_2$$

$$u^3(x) = u^3\left(\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n e_n\right) = \xi_3 , \ldots , u^n(x) = u^n\left(\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n e_n\right) = \xi_n , \ldots$$

$n \geq 1$; y las ecuaciones de los hiperplanos devienen

$$\xi_1 = \gamma_1 , \; \xi_2 = \gamma_2 , \; \xi_3 = \gamma_3 , \ldots , \xi_n = \gamma_n ; \quad n \geq 1 .$$

Por ello el punto (único) de intersección de la sucesión de hiperplanos dados, es

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n e_n$$

; pero como este punto es del espacio c_0, se ha de cumplir previamente $(\gamma_n) \in c_0$; $\gamma_n \to 0$.

En el caso más general, en donde los funcionales lineales contínuos $u^n(x)$, $n = 1,2,\ldots$; son linealmente independientes y constituyen un sistema total, en el espacio de dual del espacio c_0, el cual es ℓ^1 (Topological Vector Spaces , G. Köthe) y como este espacio ℓ^1 es separable, podemos emplear una base Schauder $\{f_n\}$ $n \geq 1$, de c_0 y canónica para la sucesión de funcionales u^n.

$$u^1(e_1) = v_{11}, \; u^1(e_2) = v_{12}, \; u^1(e_3) = v_{13}, \ldots, u^1(e_p) = v_{1p}, \ldots$$

$$(v_{1p}) \in \ell^1, \text{ es decir } \sum_{p=1}^{\infty} |v_{1p}| < \infty$$

$$u^2(e_1) = v_{21}, \; u^2(e_2) = v_{22}, \; u^2(e_3) = v_{33}, \ldots, u^2(e_p) = v_{2p}, \ldots$$

$$(v_{2p}) \in \ell^1, \qquad \sum_{p=1}^{\infty} |v_{2p}| < \infty$$

....

$$u^n(e_1) = v_{n1}, \; u^n(e_2) = v_{n2}, \; u^n(e_3) = v_{n3}, \ldots, u^n(e_p) = v_{np}, \ldots$$

$$(v_{np})_p \in \ell^1, \quad \sum_{p=1}^{\infty} |v_{np}| < \infty \quad ; \quad n = 1,2,\ldots$$

Expresemos la base $\{e_n\}$, mediante los vectores de la base $\{f_n\}$, la cual ha de ser canónica para los funcionales u^n, $n \geq 1$

$$e_1 = \sum_{p=1}^{\infty} a_{1p} f_p, \quad e_2 = \sum_{p=1}^{\infty} a_{2p} f_p, \ldots, e_n = \sum_{p=1}^{\infty} a_{np} f_p$$

$$n = 1, 2, 3, \ldots$$

Por ser los funcionales u^n lineales y contínuos, y $\{f_n\}$ habiendo de ser una base can ónica para ellos, se obtiene

$$u^1(e_1) = u^1\left(\sum_{p=1}^{\infty} a_{1p} f_p\right) = a_{11} = v_{11}$$

$$u^2(e_1) = u^2\left(\sum_{p} a_{1p} f_p\right) = a_{12} = v_{21}$$

....

$$u^n(e_1) = u^n\left(\sum_{p=1}^{\infty} a_{1p} f_p\right) = a_{1n} = v_{n1} \quad ; \quad n = 1,2,\ldots$$

Análogamente resulta

$$u^1(e_2) = a_{21} = v_{12} \; ; \; u^2(e_2) = a_{22} = v_{22} \;,\ldots ; \; u^n(e_2) = a_{2n} = v_{n2}$$

$$u^1(e_n) = a_{n1} = v_{1n} \; ; \; u^2(e_n) = a_{n2} = v_{2n} \; ;\ldots, \; u^p(e_n) = a_{np} = v_{pn} \;,\ldots$$

Además, los vectores de coordenadas siguientes

$$(v_{n1}) = (a_{1n}) \in c_0 \text{ , es decir } \quad v_{n1} \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty)$$

$$(v_{n2}) = (a_{2n}) \in c_0 \text{ , } \quad v_{n2} \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty)$$

....

$$(v_{np})_n = (a_{pn}) \in c_0 \text{ , } \quad v_{np} \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty)$$

$$p = 1, 2, 3, \ldots$$

Reuniendo todas las conclusiones establecidas, se puede asegurar que la matriz infinita

$$\begin{matrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} & \cdots & v_{1p} & \cdots \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} & \cdots & v_{2p} & \cdots \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} & \cdots & v_{3p} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ v_{n1} & v_{n2} & v_{n3} & \cdots & v_{np} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{matrix}$$

para que sea la matriz del cambio de base canónica $\{e_n\}$ del espacio c_0

a la base canónica de los funcionales u^n , linealmente independientes , verifica las condiciones :

La matriz infinita considerada es linealmente independiente por columnas y por filas ; las filas de la matriz son vectores de ℓ^1 y las columnas del espacio c_0 .

Una vez verificadas las limitaciones señaladas a los funcionales u^n (n = 1,2,...) y su matriz en la base $\{e_n\}$, el punto de intersección de la sucesión de hiperplanos

$u^1(x) = \gamma_1$, $u^2(x) = \gamma_2$, $u^3(x) = \gamma_3$,..., $u^n(x) = \gamma_n$,...

en la base canónica de éstos,es

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n f_n$$

siempre que la sucesión real $(\gamma_n) \in c_0$, o sea $\gamma_n \to 0$.

28. DETERMINACION Y ECUACION EXPLICITA DEL HIPERPLANO;QUE PASA POR UNA SUCESION INFINITA DE PUNTOS LINEALMENTE INDEPENDIENTES Y BASE EN AQUEL; EN EL ESPACIO NORMADO c_0 ; DE LAS SUCESIONES REALES INFINITESIMAS.

Empezamos por el caso más simple ,en que la sucesión por donde ha de pasar el hiperplano es

0 , e_2 , e_3 , ... , e_n , ...

es decir,por el origen del espacio c_0 y la base de vectores unitarios e_n , $n \geq 2$; excepto el vector e_1 .

De modo que el hiperplano que contiene a los puntos citados,está definido por la ecuación

$$u(x) = 0 ,$$

donde u es el funcional lineal contínuo del espacio c_0' ,definido en la base canónica del espacio c_0 como

$u(e_1) = 1$, $u(e_2) = u(e_3) = \dots = u(e_n) = 0$; $n \geq 2$.

Si el hiperplano está definido por la sucesión de puntos f_n , $n \geq 2$, pasando por el origen ; para obtener su ecuación basta agregar el punto f_1 , al sistema dado de puntos, para que el sistema $\{ f_n \}$, $n \geqslant 1$, sea una base Schauder del espacio c_0 , lo cual es posible por la hipótesis de l sistema de puntos en el hiperplano que los contenga y su indpendencia lineal.

La ecuación del hiperplano es, pues

$$u (x) = 0 ,$$

donde el funcional lineal contínuo u del espacio c_0 está definido ~~por~~ en la base $\{ f_n \}$, $n \geqslant 1$, por

$$u (f_1) = 1 , u (f_2) = u (f_3) = \ldots = u (f_n) = 0 \quad ; \quad n \geqslant 2 .$$

Cuando se desea la ecuación de este hiperplano, en la base canónica $\{ e_n \}$, del espacio c_0 ; se requieren las expresiones lineales de los vectores de esta base ,mediante los vectores f_n .

De modo que

$$e_1 = \sum_{p=1}^{\infty} a_{1p} f_p , \quad e_2 = \sum_{p=1}^{\infty} a_{2p} f_p , \quad e_3 = \sum_{p=1}^{\infty} a_{3p} f_p ,$$

$$e_n = \sum_{p=1}^{\infty} a_{np} f_p \quad ; \quad n = 1 , 2 , 3 , \ldots$$

en donde todos los números reales a_{np} , $n,p = 1,2,3,\ldots$ se consideran conocidos.

Ahora bien, como los vectores de coordenadas (a_{1p}) , (a_{2p}) , (a_{3p}) ,..., $(a_{np})_p$; $n \geqslant 1$ son vectores del espacio c_0 , la matriz infinita

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1p} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2p} & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3p} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{np} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{matrix}$$

es tal que todas sus filas son sucesiones infinitésimas ; mientras que todas sus columnas son vectores del espacio l^1 ,pues definen funcionales lineales contínuos del espacio c_0. Y ,desde luego, según se sabe ya,dicha matriz infinita es linealmente independiente,por filas y por columnas.

La ecuación del hiperplano,en la base canónica $\{e_n\}$, se obtiene hallando la componente de un vector genérico x del espacio c_0 ,sobre el vector f_1 de la base $\{f_n\}$, $n \geqslant 1$; expresada en términos de la base $\{e_n\}$ y anulándola, como sigue

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n e_n = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \sum_{p=1}^{\infty} a_{np} f_p = \sum_{p=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{np} \xi_n \right) f_p$$

de donde se obtiene la ecuación del hiperplano,en la base canónica

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{n1} \xi_n = 0$$

siendo aquí $(\xi_n) \in c_0$, es decir $\xi_n \to 0$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_{n1}| < \infty$$

porque los números (a_{n1}) definen el funcional $u(x)$ en la base $\{e_n\}$; el cual estaba iniciamente definido en la base $\{f_n\}$, y ésta es canónica para el funcional $u(x)$. Y por ello

$$u(e_1) = a_{11} u(f_1) = a_{11}. 1 = a_{11} \quad ; u(e_2) = a_{21} u(f_1) = a_{21}. 1 = a_{21}$$

$$u(e_3) = a_{31} u(f_1) = a_{31}.1 = a_{31} \; ; u(e_n) = a_{n1}.u(f_1) = a_{n1}.1 = a_{n1}$$

$$n = 1 , 2 , 3 , \ldots$$

En el caso general,de que el hiperplano haya de pasar por una sucesión de puntos $\{f_n\}$, $n \geqslant 2$,linealmente independientes y base en el hiperplano, y por el punto b ; bastaría reducir este caso al anterior, por determinación del hiperplano por el origen y que contiene la sucesión de puntos $\{f_n - b\}$, $n \geqslant 2$.

Si el vector b depende lineal o topológicamente de la sucesión de puntos $\{f_n\}$, $n \geq 2$, no hay nada nuevo que hacer, porque el hiperplano pasa por el origen y contiene a la sucesión de puntos $\{f_n\}$, $n \geq 2$. Ya sabemos ,como hemos visto,determinar la ecuación de dicho hiperplano.

Por el contrario, si se vdrifica

$$b \notin \bar{L}(f_2, f_3, \ldots, f_n, \ldots)$$

El sistema de vectores $\{b = f_1 ; f_2, f_3, \ldots, f_n, \ldots\}$ constituye una base Schauder del espacio c_0. Pero entonces también el sistema de vectores $\{f_1\} \cup \{f_n - f_1\}$, $n \geq 2$, es una base Schauder del mismo espacio.

La independencia lineal del sistema,se prueba de la misma manera que en el espacio ℓ^1, según lo hemos justificado ya.

El sistema de vectores $\{f_n - f_1\}$, $n \geq 2$, es **total** en el hiperplano que los contiene a todos ellos y pasa por el origen, porque la translación de vector $-f_1$, es una transformación topológica del espacio normado c_0 ; y,por tanto,translada el hiperplano que pasa por la sucesión, total en él, $\{f_n\}$, $n \geq 2$, y por el punto $b = f_1$; en el hiperplano que contiene el origen y la sucesión $\{f_n - f_1\}$, $n \geq 2$, **total** en este último hiperplano.

El sistema $\{f_1\} \cup \{f_n - f_1\}$, $n \geq 2$, es **total** en todo el espacio c_0 ; porque como el sistema $\{f_n - f_1\}$, $n \geq 2$, es es **total** en un hiperplano por el origen, la única razón para que aquel sistema no sea **total** en el espacio c_0 ,es que $f_1 \in \bar{L}(f_n - f_1)$, $n \geq 2$, pero entonces,se tiene

$$f_1 = \sum_{n=2}^{\infty} \xi_n (f_n - f_1) \quad , \quad (\xi_n) \in c_0 \quad , \; n \geq 2$$

de donde

$$\left(1 + \sum_{n=2}^{\infty} \xi_n\right) f_1 = \sum_{n=2}^{\infty} \xi_n f_n \implies 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \xi_n = 0$$

pues $f_1 \notin \bar{L}(f_2, f_3, \ldots, f_n, \ldots)$.

De modo que llegamos a la conclusión

$$\sum_{n=2}^{\infty} \xi_n f_n = 0 ,$$

lo cual no es posible sino cuando

$$\xi_n = 0 , \quad n \geqslant 2 ,$$

porque los vectores f_n , $n \geqslant 2$, forman una base Schauder del hiperplano,por el origen,que los contiene.

Finalmente,hemos obtenido dos conclusiones incompatibles :

$$1 + \sum_{n=2}^{\infty} \xi_n = 0 \quad ; \quad \xi_n = 0 \quad (n \geqslant 2) .$$

Así que la hipótesis $f_1 \in \bar{L}(f_n - f_1)$, $n \geqslant 2$

es absurda; quedando demostrado,pues,que el sistema de vectores $\{f_1\} \cup \{f_n - f_1\}$, $n \geqslant 2$, constituye una base Schauder del espacio c_0.

OBSERVACION. En la demostración ,que acabamos de dar, del teorema de que el sistema de vectores $\{f_1\} \cup \{f_n - f_1\}$, $n \geqslant 2$, es una base de Schauder ,del espacio normado c_0 ,cuando $\{f_n\}$, $n \geqslant 2$, es un sistema linealmente independiente de vectores, que genera un hiperplano cerrado,donde dicho sistema es total ; y $f_1 \notin \bar{L}(f_n)$, $n \geqslant 2$; sólo hemos utilizado las siguientes características del espacio c_0 :

Es un espacio normado,con una base de Schauder, y ,por tanto numerable infinita.

Así,pues,el citado teorema es válido en <u>cualquier</u> espacio normado con una base numerable infinita, El hiperplano que buscamos, está definido por la ecuación

$$u\,(x - f_1) = 0 \quad ,$$

donde $u\,(x)$ es el funcional lineal contínuo, del espacio c_0, definido por

$$u\,(f_1) = 1 \;,\; u\,(f_2 - f_1) = u\,(f_3 - f_1) = \dots = u\,(f_m - f_1) = 0 \;;$$

$$m \geqslant 2 \,.$$

Ahora bien, la ecuación de este hiperplano, en la base canónica del espacio c_0, se puede hallar anulándo la componente sobre el vector f_1, en la base $\{f_1\} \cup \{f_m - f_1\}$, $m \geqslant 2$, de un vector gnérico x del espacio ; expresando los vectores e_n en funcion lineal de los vectores f_n. Así que

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n e_n = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \left(\sum_{p=1}^{\infty} a_{np} f_p \right) = \sum_{p=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{np} \xi_n \right) f_p$$

$$= \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{n1} \xi_n \right) f_1 + \sum_{p=2}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{np} \xi_n \right) (f_p - f_1 + f_1) \;;$$

y, por tanto, la componente sobre el vector f_1, en la base citada

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{n1} \xi_n + \sum_{p=2}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{np} \xi_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_{n1} + \sum_{p=2}^{\infty} a_{np} \right) \xi_n \,.$$

La ecuación del hiperplano por el origen y paralelo al que contiene a los puntos f_m, $m \geqslant 1$, es, pues

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{p=1}^{\infty} a_{np} \right) \xi_n = 0 \quad ,$$

y la ecuación del hiperplano buscado, por tanto,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{p=1}^{\infty} a_{np} \right) (\xi_n - \beta_n) = 0 \quad ,$$

donde (β_n) son las coordenadas del punto b en la base canónica $\{e_n\}$, del espacio c_0.

Aparte de las condiciones que sabemos que satisface la matriz infinita (a_{np}), verifica esta otra

$$_n\left(\sum_{p=1}^{\infty} a_{np} \right) \in \ell^1 \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left| \sum_{p=1}^{\infty} a_{np} \right| < \infty$$

lo cual significa : Las filas de la matriz infinita (a_{np}), $n,p = 1,2,3,\ldots$; tienen series tales que la suma de dichas series, es una serie absolutamente convergente.

29. DETERMINACION Y REPRESENTACION DE UN POLIEDRO CONVEXO EN EL ESPACIO NORMADO c_0 ,DE SUCESIONES REALES INFINITESIMAS : CRITERIO DE CONVEXIDAD DE ESTOS POLIEDROS.

Consideremos un conjunto infinito de hiperplanos del espacio normado y de Banach c_0 , de sucesiones reales infinitésimas, de ecuaciones

$$u^i(x) = \gamma_i \quad , i \in I \quad , |I| \geq \aleph_0 \ .$$

Elegimos las posibles sucesiones admisibles ,de este conjunto de hiperplanos ; las cuales son aquéllas

$$u^n(x) = \gamma_n \quad , 0 < n < \omega$$

para las que existe una base canónica $\{f_n\}$, $n \geq 1$, endonde se pueden definir los funcionales u^n ; es decir,por las condiciones

$$u^1(f_1) = 1 \ , u^1(f_2) = 0 \ , u^1(f_3) = 0 \ ,\ldots, u^1(f_n) = 0 \ ,\ldots$$
$$u^2(f_1) = 0 \ , u^2(f_2) = 1 \ , u^2(f_3) = 0 \ ,\ldots, u^2(f_n) = 0 \ ,\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$u^n(f_1) = 0 \ , u^n(f_2) = 0 \ , u^n(f_3) = 0,\ldots, u^n(f_n) = 1 \ ,\ldots$$
$$n = 1 , 2 , 3 , \ldots$$

El objeto primordial de la consideración de sucesiones admisibles, reside,precisamente,en el hecho,de que tales sucesiones se cortan en un punto único; y éste se expresa en la base canónica de los funcionales u^n ,del siguiente modo

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n f_n$$

ahora bien,como este punto x ha de ser del espacio c_0 ,aun se requiere una última condición para que la sucesión de hiperplanos sea admisible :

$$(\gamma_n) \in c_o \iff \gamma_n \to 0 .$$

La condición para que una sucesión de hiperplanos, de ecuaciones

$$u^n(x) = \gamma_n \quad , \quad n \geq 1 \quad ,$$

sea una <u>sucesión admisible</u>, cuando los funcionales u^n estén definidos en la base canónica $\{e_n\}$ del espacio c_o ; se puede reconocer mediante las condiciones que satisface la matriz infinita $(v_{np}) = (u^n(e_p))$, $n,p = 1,2,3,...$ Particularidades que han sido deducidas en una sección precedente, y consistentes en que la citada matriz infinita es linealmente independiente por filas y por columnas ; las columnas todas son sucesiones infinitésimas ; y las filas son sucesiones de serie absolutamente convergente.

Necesitamos hacer una hipótesis expresa, para poder definir mediante el conjunto de hiperplanos

$$u^i(x) = \gamma_i \quad , \quad i \in I \quad , \quad |I| \geq \aleph_o$$

un poliedro convexo.

Elegido un hiperplano cualquiera

$$u^k(x) = \gamma_k \quad , \quad (k \in I)$$

suponemos que existe una sucesión admisible, al menos, de hiperplanos del conjunto total y distintos de este último, cuyo punto de intersección yace en el exterior del hiperplano $u^k(x) = \gamma_k$; y si el punto de intersección es denotado por x_k , éste admite la expresión

$$x_k = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_{k_n} f_{k_n} \quad , \quad \gamma_{k_n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \; ,$$

donde $\{\gamma_{k_n}\}$, $n \geq 1$, es la sucesión real de términos independientes de las ecuaciones de los hiperplanos de la sucesión admisibl y $\{f_{k_n}\}$, $n \geq 1$, la base canónica de las ecuaciones de dichos hiperplanos .

Finalmente,se obtiene el criterio para la convexidad de un poliedro definible por el sistema de hiperplanos

$$u^i(x) = \gamma_i \;,\; i \in I \;,\; |I| \geq \aleph_0$$

que es,pues

$$\bigwedge_{k\in I}\left(u^k\left(\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_{k_n} f_{k_n}\right) \neq \gamma_k \right) .$$

Verificada la condición de convexidad del poliedro definido,por el conjunto infinito de hiperplanos dados,en principio; la representación de tal poliedro puede hacerse ,mediante el sistema de infinitas inecuaciones lineales,del espacio c_0

$$\left[u^k\left(\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_{k_n} f_{k_n}\right) - \gamma_k\right]\left[u^k(x) - \gamma_k\right] \geq 0 \;;\; k \in I .$$

-30.<u>POLIGONOS ALABEADOS CONVEXOS EN EL ESPACIO NORMADO</u> c_0 ; <u>DE LAS SUCESIONES REALES INFINITESIMAS : CRITERIO DE"CONVEXIDAD" DE LOS POLIGONOS DE ESTE ESPACIO</u>.

Ante todo,consideremos definido,como en otros espacios,un polígono del espacio c_0 de sucesiones reales infinitesimas, por una sucesión transfinita de puntos $\{a_i\}$, con último elemento ;puntos que van a ser los vértices del polígono ; los cuales vienen enumerados por la sucesión transfinita

$$\{a_i\} \;,\; 0 < i \leq \mu \;,$$

de tipo ordinal $\mu + 1$.

El polígono definido por la citada sucesión de vértices,es la figura unidimensional del espacio c_0 , constituida por la reunión de segmentos rectilíneos que unen vértices consecutivos,y el último a_μ , con el primero a_1. De modo más concreto

$$[a_1,a_2]\cup[a_2,a_3]\cup[a_3,a_4]\cup \cdots \cup[a_i,a_{i+1}]\cup \cdots \cup[a_\mu,a_1] .$$

El carácter alabeado del polígono, del espacio c_0, se puede reconocer, mediante la admisión de otra hipótesis. Es decir, el polígono no tiene todos sus vértices en un mismo hiperplano del espacio c_0; cuando supuesto que una sucesión ordinaria, de vértices consecutivos, que principia con el primer vértice a_1 del polígono

$$a_1\ ,\ a_2\ ,\ a_3\ ,\ \dots\ ,\ a_n\ ,\ \dots \qquad ;\quad n < \omega$$

es linealmente independiente y el subespacio lineal cerrado que genera, $\bar{L}\ (a_n)\ ,\ n < \omega$, es maximal en el espacio c_0; el hiperplano que contiene a esta sucesión de puntos y al vértice inmediato consecutivo, a todos los de dicha sucesión, vértice que es a_ω; y entonces el polígono es alabeado, cuando el hiperplano, así determinado, tiene en su exterior un vértice, al menos del polígono, cuyos vértices son $\{a_i\}\ ,\ 0 < i \leq \mu$.

Ahora bien, ya sabemos, en virtud de una sección anterior, determinar la ecuación del hiperplano que contiene la sucesión de puntos

$$a_1\ ,\ a_2\ ,\ a_3\ ,\ \dots\ ,\ a_n\ ,\ \dots\ ;\ a_\omega \qquad [1]$$

y que es

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{p=1}^{\infty} c_{np} \right) \left(\xi_n - a_{\omega n} \right) = 0 \ , \qquad [2]$$

en donde las constantes (c_{np}), $n,p = 1,2,3,\dots$, son las componentes de la base canónica $\{e_n\}$, del espacio c_0, en la base canónica $\{f_n\}$ del funcional $u(x)$ que define el hiperplano que pasa por la sucesión de puntos $[1]$, y $(a_{\omega n})$ son las componentes del vértice a_ω, en la base canónica del espacio.

En la ecuación del mencionado hiperplano, las constantes (c_{np}), $n,p = 1,2,3,\dots$; que concurren en ella, constituyen una matriz infinita, que es linealmente independiente por filas y por columnas, las filas son sucesiones infinitesimas, las columnas son sucesiones de serie absolutamente convergente ; y además, se verifica la condición

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \sum_{p=1}^{\infty} a_{np} \right| < \infty ,$$

condiciones todas, que habían sido deducidas, anteriormente.

El criterio, pues, para reconocer que el polígono de vértices $\{a_i\}$, $0 < i \leq \mu$, es alabeado, se obtiene expresando que uno, de los vértices del polígono, al menos, yace en el exterior del hiperplano cuya ecuación es la [2]. Así que el polígono es alabeado, cuando se verifique

$$\bigvee_{\omega < i \leq \mu} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{p=1}^{\infty} c_{np} \right) (a_{in} - a_{\omega n}) \neq 0 \right] .$$

Para establecer un criterio de "convexidad", referente a los polígonos del espacio normado c_0, vamos a suponer que la hipótesis admitida para la sucesión de vértices

$$a_1 , a_2 , a_3 , \ldots , a_n , \ldots \qquad ; \quad n < \omega ,$$

la verifica toda sucesión que comience por un vértice cualquiera a_k del polígono. Es decir, suponemos que la sucesión

$$a_k , a_{k+1} , a_{k+2} , \ldots , a_{k+n} , \ldots \qquad n < \omega$$

obtenida añadiendo vértices consecutivos al a_k, es linealmente independiente y tal, que el subespacio cerrado que genera es maximal en el espacio c_0, siendo a_k $(0 < k \leq \mu)$ un vértice arbitrario del polígono considerado.

Debemos advertir que si en la sucesión $\{ a_{k+n} \}$, $n < \omega$ concurre el último vértice a_μ del polígono, los vértices siguientes a éste, en la citada sucesión, son el a_1 y los que sigan, a su vez, al a_1 hasta donde sea menester.

El vértice consecutivo inmediato a todos los vértices de la sucesión ordinaria

$$a_k \, , \; a_{k+1} \, , \; a_{k+2} \, , \; \dots \, , \; a_{k+n} \, , \; \dots \qquad ; \qquad n < \omega$$

es el $a_{k+\omega}$.

El hiperplano determinado por la sucesión de tipo ordinal $\omega + 1$

$$a_k \, , \; a_{k+1} \, , \; a_{k+2} \, , \; \dots \, , \; a_{k+n} \, , \; \dots \; ; \; a_{k+\omega}$$

de modo que los contenga, a todos ellos; tiene la ecuación

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\sum_{p=1}^{\infty} c^k_{np} \Big) \big(\xi_n - a_{k+\omega,\, n} \big) = 0 \, ,$$

en donde la notación ha de interpretarse, con el significado establecido en el espacio normado c_0 .

El polígono se dice alabeado convexo, como en un espacio lineal cualquiera, cuando los hiperplanos que pasan por las citadas sucesiones de vértices consecutivos, dejan los restantes vértices, con respecto al hiperplano, en el mismo semiespacio; pudiendo estar situado alguno de ellos, pero no todos, en el mismo hiperplano borde del semiespacio.

Según este concepto de "convexidad" de un polígono, podemos establecer un criterio de "convexidad", para un polígono del espacio normado c_0 , una vez sabido que ya es alabeado, mediante la condición siguiente , para el polígono de vértices $\{a_i\}$; $0 \leq i \leq \mu$

$$\bigvee \Bigg[\Big(\bigwedge_{i=\mu} \Big[\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\sum_{p=1}^{\infty} c^k_{np} \Big) \big(a_{in} - a_{k+\omega,\, n} \big) \geq 0 \Big] \Big) \vee$$

$$\Big(\bigwedge_{i=\mu} \Big[\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\sum_{p=1}^{\infty} c^k_{np} \Big) \big(a_{in} - a_{k+\omega,\, n} \big) = 0 \Big] \Big) \Bigg]$$