UNA EXTENSION DE LOS ESPACIOS SECUENCIALES

F. Bombal Gordón y L. Rodríguez Marín

Recibido: 5-X-77

PRESENTADO POR EL ACADÉMICO NUMERARIO D. BALTASAR RODRÍGUEZ-SALINAS

In this note we introduce a class of topological spaces which extend the notion of sequential space. The topological vector spaces of this type were introduced in [4] in connection with the differential calculus in non-normed locally convex spaces. We prove that these topological vector spaces are, under very general conditions, sequential spaces.

Introducción

La noción de espacio secuencial aparece en la literatura en relación con la extensión del cálculo diferencial fuera del marco de los espacios normados (véase, por ej., [1] y [5]). En [4] se establece una nueva teoría de diferenciación sobre espacios vectoriales topológicos y, como extensión en este contexto del concepto de espacio secuencial, se introduce la noción de espacio vectorial topológico de tipo Δ ([4], Def. 4.1). En el presente trabajo se introduce, en primer lugar, el concepto general de espacio topológico de tipo $\Delta(\tau, \beta)$, estudiando algunas de sus propiedades, para pasar después a considerar especialmente los espacios vectoriales topológicos de tipo $\Delta(\tau, \beta)$. El resultado más importante es que, en condiciones muy generales, estos espacios coinciden con los secuenciales.

§ 1. Espacios topológicos de tipo $\Delta(\tau, \beta)$

Una topología sobre un conjunto E se llama secuencial, si todo punto adherente a una parte cualquiera A de E es límite de una

τ_β-*abierta* si para todo punto $x \in G$ y toda red acotada $(x_i)_{i \in I}$ convergente a x, existe un $j \in I$ tal que $x_k \in G$ siempre que $k \geqslant j$.

Es inmediato comprobar que los conjuntos τ_β-abiertos forman una topología, τ_β, más fina que τ. La proposición siguiente prueba que esta topología es la adecuada para estudiar la β-continuidad.

8. PROPOSICIÓN.—*Una aplicación* f *de E en un espacio topológico F es τ-continua en los acotados de β si y sólo si es τ_β-continua.*

DEMOSTRACIÓN.—Supongamos que f es τ-continua en los acotados de β. Sea $G \subset F$ un abierto, $x \in f^{-1}(G)$ y $(x_i)_{i \in I}$ una red acotada convergente a x. Por la β-continuidad, existe un $j \in I$ tal que si $k \geqslant j$ se tiene $x_k \in f^{-1}(G)$, lo que prueba que $f^{-1}(G) \in \tau_\beta$. Recíprocamente, sea f τ_β-continua, $x \in E$ y $B \in \beta$ tal que $x \in B$. Supongamos que $(x_i)_{i \in I}$ es una red de puntos de B convergente a x y que G es un entorno abierto de $f(x)$. Por hipótesis,

$$x \in f^{-1}(G) \in \tau_\beta,$$

luego existe un $j \in I$ tal que $f(x_k) \in G$ si $k \geqslant j$. Esto prueba que $\{f(x_i)\}_{i \in I}$ converge a $f(x)$ y, por tanto, f es continua en acotados.

9. COROLARIO.—τ_β *es la topología final en E para las inclusiones de los espacios $(B, \tau \mid B)$ en E, cuando $B \in \beta$.*

DEMOSTRACIÓN.—Consecuencia inmediata de la proposición 8.

10. PROPOSICIÓN.—*Una condición necesaria para que E sea de tipo $\Delta(\tau, \beta)$ es que $\tau = \tau_\beta$.*

DEMOSTRACIÓN.—Si $G \in \tau_\beta$ y no pertenece a τ, existe un $x \in G$ adherente al complementario de G. Si E es de tipo $\Delta(\tau, \beta)$, existe entonces una red acotada $\{(x_i)_{i \in I}\} \subset \complement G$ convergente a x y, por tanto, un $j \in I$ tal que $x_k \in G$ si $k \geqslant j$, lo que es absurdo.

Como veremos más adelante, la igualdad $\tau = \tau_\beta$ no es, en general, suficiente para que E sea un espacio de tipo $\Delta(\tau, \beta)$.

§ 2. Espacios vectoriales topológicos de tipo $\Delta(\tau\beta)$

Si E es un espacio vectorial (1) y τ es una topología vectorial sobre E, es natural considerar en especial los espacios de tipo $\Delta(\tau, \beta)$ en los que β es una bornología vectorial compatible con τ

(1) Consideraremos siempre espacios vectoriales sobre R ó C.

(véase [2] para las notaciones). Esto nos lleva a la siguiente definición:

11. Definición. — Llamaremos *espacio vectorial topológico* (e. v. t.) *de tipo* $\Delta(\tau, \beta)$ a todo espacio vectorial E de tipo $\Delta(\tau, \beta)$, tal que τ sea una topología vectorial y β una bornología vectorial compatible con τ.

De la definición y la invariancia por traslaciones de las topologías vectoriales, resulta inmediatamente la equivalencia de las siguientes afirmaciones:

a) E es un e. v. t. de tipo $\Delta(\tau, \beta)$.

b) Si O es adherente a una parte A de E, existe un red acotada de puntos de A, convergente a O.

c) Toda función de E en otro espacio topológico, continua en acotados en O, es continua en O.

d) Toda función real sobre E continua en acotados en O, es continua en O.

Sea ahora E un e. v. t. y $\mathcal{V}$ una base de entornos de O formada por conjuntos equilibrados, contenidos todos ellos en un entorno fijo $V_0 \neq E$. Consideremos $\mathcal{V}$ como conjunto dirigido, ordenado por inclusión. Para cada $V \in \mathcal{V}$, sea

$$r_V = \sup\{r > 0 : r\, V \subset V_0\}.$$

De la relación $V \subset V_0 \neq E$ resulta que $1 \leqslant r_V < \infty$. Además, si $k > 0$, existe un $W \in \mathcal{V}$ tal que $k\, W \subset V_0$, luego $r_V \geqslant r_W \geqslant k$ para todo $V \in \mathcal{V}$ contenido en W. Esto prueba que la red $(r_V)_{V \in \mathcal{V}}$ tiende a $+\infty$. Supongamos que $(x_V)_{V \in \mathcal{V}}$ es una red en E tal que $x_V \in V$ para todo $V \in \mathcal{V}$. Para cada $V \in \mathcal{V}$ existe $\sigma(V) \in \mathcal{V}$ tal que

$$\sigma(V) \subset r_V\, \sigma(V) \subset V.$$

Es evidente que $(x_{\sigma(V)})_{V \in \mathcal{V}}$ es una subred de $(x_V)_{V \in \mathcal{V}}$, con la propiedad de que $r_V\, x_{\sigma(V)} \in V$ para todo $V \in \mathcal{V}$ y, por tanto, la red $(r_V\, x_{\sigma(V)})_{V \in \mathcal{V}}$ converge a 0.

El siguiente lema prueba que si E es un e. v. t. de tipo $\Delta(\tau, \beta)$, se puede conseguir que la red $(r_V\, x_{\sigma(V)})_{V \in \mathcal{V}}$ sea acotada.

12. Lema.—*Sea E un e. v. t. de tipo* $\Delta(\tau, \beta)$ *y* $(x_i)_{i \in I}$ *una red convergente a 0. Existe entonces una red* $(z_j)_{j \in J}$ *convergente a 0 y*

una red de números reales positivos $(t_j)_{j \in J}$ *que tiende a* $+\infty$, *tales que:*

12.1. $z_j \in \{x_i : i \in I\}$, *para todo* $j \in J$.

12.2. $(t_j z_j)_{j \in J}$ *es una red acotada convergente a 0.*

DEMOSTRACIÓN.—Sea $\mathcal{V}$ una base de entornos equilibrados de 0 en E, contenidos en un entorno fijo $V_0 \neq E$ y construyamos una red $(x_V)_{V \in \mathcal{V}}$ tal que $x_V \in V$ para cada $V \in \mathcal{V}$ y

$$x_V \in \}x_i : i \in I\{$$

(basta tomar un $x_{i(V)} \in V$ para cada V de $\mathcal{V}$). Por la discusión precedente, existe una subred $(y_V)_{V \in \mathcal{V}}$ de la anterior, y una red $(r_V)_{V \in \mathcal{V}}$ de escalares positivos tendiendo a $+\infty$ de modo que $r_V y_V \in V$ para cada $V \in \mathcal{V}$. Sea

$$A = \}r_V y_V : V \in \mathcal{V}\{.$$

Como $O \in \bar{A}$ y E es un espacio de tipo $\Delta(\tau, \beta)$, existe un acotado $B \subset A$ tal que $O \in \bar{B}$. Por tanto, para cada $V \in \mathcal{V}$ existe un $\gamma(V) \subset V$ tal que

$$r_{\gamma(V)} y_{\gamma(V)} \in V \cap B.$$

Es inmediato comprobar que las subredes

$$(y_{\gamma(V)})_{V \in \mathcal{V}} \quad y \quad (r_{\gamma(V)})_{V \in \mathcal{V}}$$

verifican las condiciones requeridas.

13. TEOREMA.—*Si E es un e. v. t. de tipo* $\Delta(\tau, \beta)$, *todo conjunto bornívoro es un entorno de 0.*

DEMOSTRACIÓN.—Sea G un conjunto bornívoro (que podemos suponer equilibrado) y $\mathcal{V}$ una base de entornos equilibrados de O en E, contenidos en un entorno fijo $V_0 \neq E$. Si G no es entorno de O, para cada $V \in \mathcal{V}$ existirá un $x_V \in V$ tal que $x_V \notin G$. Por el lema anterior, existirá entonces una red de escalares positivos $(t_j)_{j \in J}$ tendiendo a $+\infty$ y otra de vectores $(z_j)_{j \in J}$ verificando 12.1 y 12.2. En particular, por ser $(t_j z_j)_{j \in J}$ acotada, existirá $r > 0$ tal que

$r\, t_j\, z_j \in G$ para todo $j \in J$. Pero si j es tal que $r\, t_j > 1$, resultará entonces que $z_j \in G$, lo que es absurdo por 12.1 y la hipótesis de que $x_V \notin G$.

La condición del teorema anterior caracteriza de hecho a los e. v. t. de tipo $\Delta(\tau, \beta)$ en condiciones muy generales, como veremos a continuación.

Recordemos que se llama topología del M-cierre sobre un espacio vectorial bornológico la constituida por los conjuntos G tales que $G - \{a\}$ es bornívoro para todo punto a de G ([2], pág. 13). Designaremos por τ_M esta topología (que, en general, no es vectorial).

14. PROPOSICIÓN.—*Sea (E, τ) un e. v. t. y β una bornología vectorial sobre E, compatible con τ. Se verifica:*

14.1. *La topología τ_β es menos fina que la τ_M.*

14.2. *Si todo bornívoro de E es un entorno de O, entonces $\tau = \tau_\beta = \tau_M$.*

DEMOSTRACIÓN.—14.1: Si $G \notin \tau_M$, existe $x \in G$ tal que $G - \{x\}$ no es bornívoro. Por tanto, existe un acotado equilibrado $B \in \beta$ tal que para cada $n \in N$ se puede encontrar un $b_n \in B$ de modo que $b_n \notin n\,(G - \{x\})$. La sucesión $\left(\dfrac{b_n}{n} + x\right)_{n \in N}$ es acotada, converge a x y está contenida en el complementario de G, lo que prueba que $G \notin \tau_\beta$.

14.2: Si $G \in \tau_M$, de la hipótesis resulta que G es entorno de todos sus puntos, es decir, $G \in \tau$. El resto se deduce de 14.1 y la relación $\tau \leqslant \tau_\beta$.

Si β es una bornología convexa y para cada acotado absolutamente convexo B designamos por E_B al subespacio de E engendrado por B, normado con el funcional de Minkowski de B, se sabe que τ_M es la topología más fina sobre E para la cual las inclusiones de E_B en E son continuas ([2], II.8, prop. 1). En particular, τ_M es más fina que la topología localmente convexa final para las mismas inclusiones, que designaremos por τ_b. Si ahora E es un e. v. t. localmente convexo de tipo $\Delta(\tau, \beta)$, el teorema 13 y la proposición 14.2 prueban que $\tau = \tau_b = \tau_M$. En particular, (E, τ) es límite inductivo de los espacios E_B, tanto en la categoría de espacios topológicos y aplicaciones continuas, como en la de espacios localmente convexos y aplicaciones lineales continuas, y en consecuencia es un espacio localmente convexo bornológico (lo que, por otra parte, es consecuencia inmediata del teorema 13).

Podemos probar ahora el siguiente teorema de caracterización:

15. TEOREMA.—*Sea (E, τ) un e. v. t. separado y β una bornología vectorial sobre E, compatible con τ y que contiene a las sucesiones convergentes. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

15.1. *τ es una topología secuencial.*

15.2. *E es un e. v. t. de tipo $\Delta(\tau, \beta)$.*

15.3. *Todo bornívoro es un entorno de 0.*

DEMOSTRACIÓN.—15.1 $\Longrightarrow$ 15.2 es consecuencia inmediata de la definición, y 15.2 $\Longrightarrow$ 15.3 resulta del teorema 13. Si se supone 15.3, la proposición 14.2 prueba que $\tau = \tau_M$ y de [2] II.7, prop. 1 y 2 resulta que τ_M es secuencial.

16. OBSERVACIÓN.—La coincidencia de las topologías τ, τ_β y τ_M no es suficiente para que E sea un e. v. t. de tipo $\Delta(\tau, \beta)$, como prueba el siguiente ejemplo: Sea E un espacio de Fréchet-Schwartz de dimensión infinita, $(V_n)_{n \in N}$ una base de entornos de O absolutamente convexos y

$$B_n = V^0_n = \{x' \in E' : | x'(x) | \leq 1 \quad \forall x \in V_n\}.$$

La familia $(B_n)_{n \in N}$ es un sistema fundamental de acotados para la bornología de Von Neumann del dual fuerte E′ de E, y además E′ es el límite inductivo de los espacios E'_{B_n}, tanto en la categoría de espacios topológicos y aplicaciones continuas como en la de espacios localmente convexos y aplicaciones lineales continuas ([3], th. 18 y 6′). Por tanto, si designamos por τ la topología fuerte $\beta(E', E)$, se tiene $\tau = \tau_\beta = \tau_M$. Sin embargo, E′ no es un e. v. t. secuencial. En efecto, podemos suponer que los E_{B_n} forman una sucesión estrictamente creciente. Sea

$$x_1 \in E_{B_1} \setminus \{0\}, x_n \in E_{B_n} \setminus E_{B_{n-1}} \quad (n \geq 2),$$

y definamos

$$A = \left\{x_{n,k} = \frac{x_1}{n} + \frac{x_n}{k}, n, k \in N\right\}.$$

Se tiene que $O \in \bar{A} \setminus A$. Si existiera una sucesión de puntos de A convergente a O, el conjunto de puntos de la sucesión sería acotado y, por tanto, contenido en algún $B_n \subset E_{B_n}$. En consecuencia, existiría una red convergente a O de la forma $(x_{m,k_s})_{s \in J}$, es decir,

$$(x_m/k_s) \xrightarrow[s \in J]{} -x_1/m,$$

lo que es absurdo.

En algunos casos, sin embargo, la igualdad $\tau = \tau_M$ es suficiente para que E sea un e. v. t. de tipo $\Delta(\tau, \beta)$, como prueba la siguiente proposición:

17. Proposición.—*Sea (E, τ) un e. v. t. separado y β una bornología vectorial sobre E, compatible con τ, que contiene a las sucesiones convergentes. Supongamos que para todo bornívoro B, existe otro C tal que $C + C \subset B$. Entonces, una condición necesaria y suficiente para que E sea un e. v. t. de tipo $\Delta(\tau, \beta)$ es que $\tau = \tau_M$.*

Demostración.—De la hipótesis resulta que existe una única topología vectorial sobre E para la que la familia

$$\mathcal{V} = \{B \subset E : B \text{ es bornívoro}\}$$

es una base de entornos de O. Es inmediato comprobar que esta topología coincide con τ_M. La proposición resulta entonces del teorema 15.

Bibliografía

[1] Averbuck, V. I. and Smolyanov, O. G.: *The various definitions of the derivative in linear topological spaces.* «Rus. Math. Surveys», vol. 23, 4 (1968), 67-114.

[2] Hogbe-Nlend, H.: *Théorie des Bornologies et Applications.* «Lecture Notes in Math.», n.º 213, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1971.

[3] Komatsu, H.: *Projective and injective limits of weakly compact sequences of locally convex spaces.* «J. Math. Soc. Japan», vol. 19, 3 (1967), 365-383.

[4] Rodríguez Marín, L.: *Cálculo diferencial en espacios vectoriales topológicos.* Tesis Doctoral, 1976.

[5] Yamamuro, S.: *Differential calculus in topological linear spaces.* «Lecture Notes in Math.», n.º 374, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1974.

Departamento de Teoría de Funciones
Facultad de Matemáticas
Universidad Complutense, Madrid