

# Un modelo de intervención psicoeducativa para matemáticas (PEIM)

VICENTE BERMEJO

Universidad Complutense de Madrid



## Resumen

El PEIM (*Programa Evolutivo Instruccional para Matemáticas*) es un modelo de intervención que hunde sus raíces en el enfoque constructivista socio-cognitivo y tiene muy en cuenta el desarrollo matemático específico de cada uno de los alumnos. Interviene fundamentalmente sobre cuatro pilares que constituyen los ingredientes básicos del complejo proceso enseñanza-aprendizaje que se produce en el aula: alumnos, profesor, contenidos curriculares y dinámica del aula. En cuanto a los alumnos, la intervención persigue principalmente que todos los aprendices del aula presenten un perfil claramente constructivista, en el sentido de que se comporten de una manera activa, tanto física como mentalmente. Igualmente, se requiere que los alumnos sean autónomos en la construcción de sus conocimientos matemáticos. Con respecto al profesor, la intervención, si necesaria, buscará que se ajuste al perfil del profesor constructivista, siendo un buen conocedor de las ideas básicas de este enfoque y del desarrollo de los contenidos matemáticos concretos en el niño, presentando actitudes positivas ante las matemáticas. La intervención con respecto a los contenidos que se imparten en el aula se centrará en dos aspectos importantes: la selección y secuenciación de los mismos. La selección requiere que se priorice la realización de tareas en el aula como razonar, pensar, solucionar problemas, representar, tomar decisiones, operar, etc., y menos actividades memorísticas y mecánicas. Igualmente estas tareas deberían ser significativas, tanto desde el punto de vista psicológico como socio-cultural. La secuenciación se refiere a la necesidad de jerarquizar los contenidos matemáticos en función de la dificultad que presentan a los niños. Finalmente, la intervención en el aula busca que tanto el rol del alumno como el del profesor se ajusten al modelo constructivista, minusvalorando los recursos didácticos basados en la repetición y reforzando el aprendizaje cooperativo en el aula.

*Palabras clave:* Matemáticas, intervención, PEIM.

## A psychoeducational intervention model for mathematics (PEIM)

### Abstract

The PEIM (*Instructional Developmental Programme for Mathematics*) is an intervention model that has its roots in the socio-cognitive constructivist approach. In this model the specific mathematical development of each student bears great weight. Essentially, it has four intervention pillars that constitute the basic ingredients of the complex teaching-learning process taking place in the classroom: students, teacher, curricular contents, and classroom dynamics. Regarding students, the aim of intervention is mainly 1) that all learners in the classroom show a clearly constructivist profile, i.e., that they are both physically and mentally active, and 2) that students are autonomous in the construction of mathematical knowledge. With respect to the teacher, intervention, if necessary, will attempt to fit a constructivist teacher profile: to be proficient on the basics of this approach and on the development of specific mathematical content in the child, showing a positive attitude to mathematics. Intervention regarding contents taught in the classroom will focus on two important aspects: content selection and sequencing. In content selection it is necessary that, on the one hand, priority is given to accomplishing tasks in the class such as reasoning, thought, problem solving, representation, decision taking, carrying out operations, etc., and on the other, that there are fewer memory and mechanical activities. Likewise, these tasks should be significant, both from a psychological and a socio-cultural point of view. Sequencing refers to the need to organise mathematical contents depending on the difficulty that they present to the children. Finally, the aim of classroom intervention is that both students' and teachers' role fits the constructivist model, paying less attention educational resources based on repetition and reinforcing cooperative learning in the classroom.

*Keywords:* Mathematics, intervention, PEIM.

*Correspondencia con el autor:* Universidad Complutense de Madrid. Facultad de Psicología. Campus de Somosaguas. 28223 Pozuelo de Alarcón (Madrid). E-mail: bermejo@psi.ucm.es  
*Original recibido:* Julio, 2008. *Aceptado:* Septiembre, 2008.

## Introducción

Se acaban de publicar las tasas de abandono escolar al terminar la educación obligatoria en la Unión Europea, y España casi lidera el ranking de abandono escolar con un 30,8%, sólo nos supera Portugal con un 38,6%. La media europea es del 15,2% y otros muchos países presentan porcentajes notoriamente más bajos: Polonia (5,5%), Suecia (8,6%), Finlandia (9,3%), etcétera. Estas diferencias de porcentajes resultan cuando menos significativas, pero son aún más preocupantes las evaluaciones de los escolares españoles sobre su formación matemática. Efectivamente, tanto las evaluaciones regionales (Comunidad de Madrid, 2008), o nacionales (INCE, 2000, 2001, etcétera), como los estudios internacionales (IMO, 2008; PISA, 2005; TIMSS, 1996; etcétera) apuntan en esta dirección. Las evaluaciones realizadas por la Comunidad de Madrid muestran que el 69,2% de los escolares de tercero de la ESO no alcanzan la puntuación de suficiente en matemáticas, que llegaría a subir hasta un 80,4% si analizamos solamente los resultados obtenidos en los problemas matemáticos. En las evaluaciones nacionales encontramos en torno a un 50% de aciertos (o desaciertos) en las pruebas de matemáticas en los distintos niveles educativos, especialmente en los más avanzados. Y en los estudios internacionales los escolares españoles suelen situarse por debajo de la media de los demás países participantes. Esta posición no se ajusta ni al nivel económico de España, ni a su desarrollo socio-cultural. Por tanto, urge tomar medidas que aporten soluciones a este desdichado fenómeno que persiste en nuestro país desde hace demasiado tiempo.

El modelo que aquí presento (PEIM: Programa Evolutivo Instruccional para Matemáticas) pretende colaborar en la búsqueda de vías que mejoren la formación matemática de los alumnos españoles (ver Bermejo, 2004, 2005a, 2007). Se trata de un modelo que hunde sus raíces en el marco constructivista cognitivo-social, fundándose en ideas-base que atañen tanto a la concepción misma del aprendizaje escolar: “el alumno construye sus propios conocimientos matemáticos”, como al rol del profesor en el aula: “apoya y guía el aprendizaje de los alumnos”. Igualmente, entiende que el mejor medio para aprender matemáticas consiste en solucionar problemas reales, es decir, problemas que el niño se encuentra frecuentemente en su vida extraescolar, y no mediante la resolución de los algoritmos tradicionales como acontece frecuentemente en las aulas, incluso en nuestros días. Además, el mejor modo de motivar a los alumnos en el aula consiste en la realización de actividades que les interesen, como son las situaciones-reto que suelen afrontar cotidianamente fuera de la escuela. Es un programa que resalta especialmente la importancia del aprendiz, sobre todo su faceta evolutiva, en el sentido de que la instrucción debe ajustarse en cada momento al desarrollo matemático preciso del alumno. De aquí que se introduzca en el título del Programa el término “Evolutivo”.

Existen otros programas de intervención en matemáticas de desigual interés, desde mi punto de vista, aunque todos o una gran mayoría son de corte constructivista (véase, por ejemplo, Carpenter y Fennema, 1992; Carpenter y Lehrer, 1999; Cobb, 1988; Fuson *et al.*, 2000; Gravemeijer y Doorman, 1999; Simon, 1995; Yackel y Cobb, 1996; etcétera). Veamos brevemente algunos de estos modelos generales de intervención educativa en matemáticas, que pensamos más atractivos y conocidos (Para más detalles véase, por ejemplo, Bermejo, Lago, Rodríguez, Dopico y Lozano, 2002).

La “Instrucción Anclada” ha sido desarrollada por un equipo de investigadores del Centro de Tecnología del Aprendizaje de la Universidad de Vanderbilt, con el objetivo primordial de ayudar a los alumnos a adquirir un conocimiento matemático útil, es decir, resaltando el cuándo y cómo utilizarlo. Un ejemplo

claro de conocimiento “inerte” aparece en niños de cuatro o cinco años, que cuentan correctamente, pero no saben para que sirve el conteo ni cuando hay que aplicarlo (Bermejo y Lago, 1994). Los autores presentan entornos de aprendizaje denominados “macro-contextos” que proporcionan el anclaje común para que alumnos y profesor discutan y resuelvan los problemas. Estos macro-contextos consisten en situaciones complejas reales que requieren la formulación y solución de subproblemas interconectados entre sí, facilitando la discusión entre grupos y el aprendizaje cooperativo.

El programa “Educación Matemática Realista” surgió en los años 70 y está bastante generalizado en los Países Bajos (ver Gravemeijer y Doorman, 1999). Sostiene que el conocimiento matemático se desarrolla a partir del mundo real extraescolar, rechazando la idea de iniciar los aprendizajes por el sistema formal para aplicarlo después en situaciones elaboradas para este fin. En otras palabras, el punto de partida de la educación matemática no es el resultado final de los trabajos de los matemáticos, sino más bien serían las matemáticas como una actividad que conlleva el descubrimiento y reinención de los conocimientos matemáticos por parte de los alumnos. Esta actividad se concreta en la resolución de problemas contextuales, que consisten en situaciones de la vida real que se presentan como un juego, dentro de una historieta, en un dibujo, etcétera, de modo que el problema resulte familiar y motivante a los alumnos. Más tarde, se pasaría de este nivel concreto a un nivel más abstracto y formal de las matemáticas.

La “Instrucción Guiada Cognitivamente” es un programa de intervención propuesto por Carpenter y colaboradores en los años 80. Como los anteriores se basa en el enfoque constructivista y supone una formación adecuada por parte del profesorado según la perspectiva constructivista. Defiende que los niños construyen su conocimiento matemático mediante la solución de problemas, así como que el rendimiento matemático de los alumnos dependerá del grado de formación constructivista de los profesores. Insisten en la formación del profesorado a tenor de los avances que obtiene la psicología cognitiva en el ámbito de las matemáticas.

Finalmente, el proyecto de Cobb y colaboradores se centra fundamentalmente en la dinámica social del aula, resaltando que en el aprendizaje de las matemáticas se da un proceso de construcción individual y un proceso de enculturación en la práctica social de las matemáticas. La interacción y negociación entre alumnos y profesor constituyen la base que genera los aprendizajes. Igualmente, se propone que el conocimiento conceptual y de procedimiento se adquieren de modo paralelo, debido a la relación dialéctica que existiría entre ellos.

Concluyendo este apartado, los dos primeros modelos resaltan la importancia de presentar problemas reales a los alumnos, a través de historietas o juegos que motiven el trabajo matemático de los escolares. El programa de Carpenter y colaboradores insisten sobre todo en la formación del profesorado, que condicionaría el aprendizaje matemático de los alumnos. Finalmente, el último proyecto comentado subraya que el conocimiento matemático construido por los aprendices se realiza en un contexto socio-cultural peculiar del grupo escolar.

### Esquema general del PEIM

El PEIM se hace eco de muchas de las ideas recogidas en los modelos referidos anteriormente: marco constructivista, contextualidad y realismo de los problemas matemáticos planteados en el aula, dimensión socio-cultural del aprendizaje, relevancia de los avances de la investigación cognitiva, etcétera. Pero, además de integrar e insistir en alguna de estas características, como el dinamismo social

del aula, añade principalmente la dimensión evolutiva, que debería canalizar el proceso enseñanza-aprendizaje que se realiza en el aula.

El objetivo principal del PEIM consiste en mejorar el rendimiento matemático de los alumnos y, por tanto, facilitar la adquisición de una formación matemática adecuada para nuestros escolares. Para conseguir este objetivo resulta imprescindible que todo el proceso enseñanza-aprendizaje, que se lleva a cabo en el aula, se desarrolle en conformidad con los principios básicos educativos del marco constructivista. Si no fuera el caso, habría que intervenir pertinentemente sobre aquellos factores que dificulten la construcción del conocimiento matemático en la clase por parte de los alumnos. Para el PEIM, estos factores relevantes que garantizan el buen funcionamiento de la clase son cuatro: los alumnos, el profesor, los contenidos matemáticos y la dinámica del aula (ver esquema general del PEIM en Figura 1). Paso a describir con cierto detalle cada uno de estos cuatro pilares del modelo.

### *Los alumnos*

Es importante resaltar que los alumnos son los protagonistas del aula, de modo que la clase y la escuela en general se organiza en función de su aprendizaje. Desde esta perspectiva, resulta interesante resaltar algunos de los principios que la APA propuso para reformar las escuelas americanas (ver Lampert y McCombs, 1998):

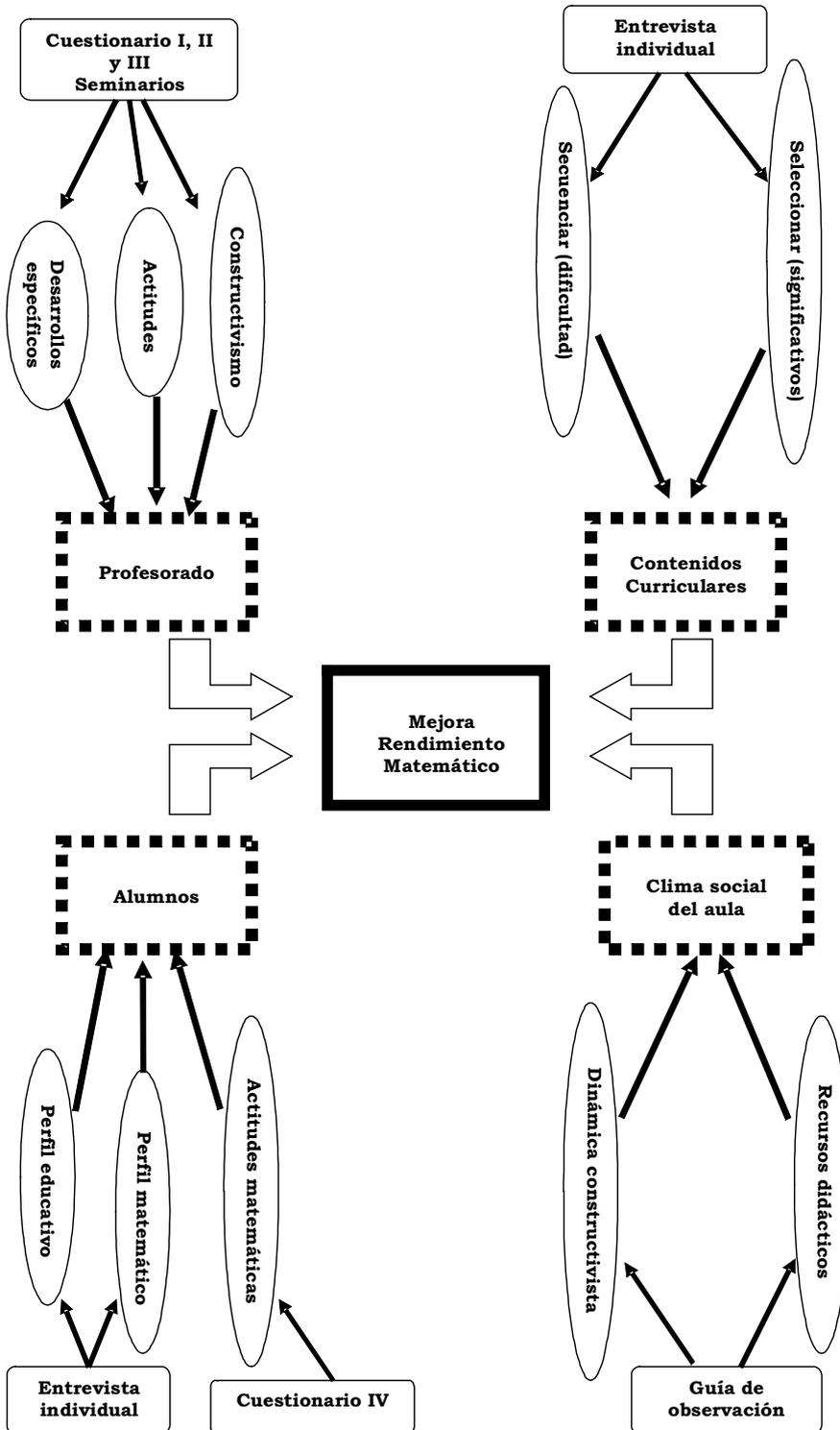
- a) Naturaleza del proceso de aprendizaje: descubrir y construir significados.
- b) Construcción del conocimiento: relacionando los nuevos conocimientos con los anteriores.
- c) Factores evolutivos: el aprendizaje resulta más eficaz cuando los contenidos se adaptan al desarrollo del niño.
- d) Filtros cognitivos: importancia de las creencias personales y concepciones sobre el aprendizaje.

El cometido principal del alumno en el aula consiste en construir sus conocimientos matemáticos a partir de sus experiencias extraescolares y sus conocimientos previos (Bermejo, 1996; Fennema y Romberg, 1999; NCTM, 2000). Esta construcción no se hace de modo pasivo repitiendo, copiando o replicando lo que el profesor dice o escribe en el encerado (recuérdese la recitación en alta voz de la tabla de multiplicar por todos los alumnos, por ejemplo). El aprendizaje se realiza más bien de una manera activa, tanto física como mentalmente, y autónoma. Ahora bien, el niño se comporta en el aula de una manera activa cuando:

- escucha, responde y pregunta al profesor y compañeros,
- emplea diferentes medios para razonar, relacionar, resolver problemas y comunicar,
- inicia los problemas y las preguntas,
- hace conjeturas y propone soluciones,
- determina la validez de sus conocimientos apoyándose en la evidencia y argumentos matemáticos, y no en el profesor (NCTM, 1991).

Con respecto a este último punto, resulta interesante resaltar el doble comportamiento que podemos observar en el desarrollo matemático del niño. Por ejemplo, si presentamos a un niño el problema:  $2 \times 2$ , y nos responde 4, que es correcto, y después le preguntamos “cómo lo sabes”, puede respondernos, por ejemplo, que “me lo ha dicho mi profesor” o, enseñando dos dedos en cada mano, nos dice dos por dos son dos veces dos, y yo tengo dos dedos en cada mano, si cuento todos me da cuatro. Este último comportamiento se ajusta al punto que estamos comentando.

FIGURA 1  
Esquema general del PEIM



Por otra parte, la construcción del conocimiento matemático en el aula debe realizarse de una manera autónoma, de modo que el niño descubra y cree significados con la ayuda del profesor. Un ejemplo que suelo presentar para ilustrar esta autonomía se refiere a la adquisición de la propiedad conmutativa de la adición:  $a + b = b + a$ . Si proponemos la siguiente situación:  $5 + 1 = 1 + 5$  a un niño que no tiene aún esta propiedad, negará la equivalencia entre ambas partes. Si a continuación le presentamos cinco dedos en una mano y un dedo en la otra, y le preguntamos cuantos son 5 y 1, probablemente cuente todos los dedos y nos diga "seis". Si después intercambiamos simplemente la posición de las manos (izquierda-derecha con respecto al niño) mostrando los mismos dedos en cada mano ( $1 + 5$ ) y le preguntamos cuantos son uno y cinco, contará de nuevo y responderá "seis". Quizá con esta sola ocasión, o repitiendo la situación, el niño llegue por sí mismo a descubrir que  $5 + 1 = 1 + 5$ , y por tanto adquiera la propiedad conmutativa de la adición.

Desde esta perspectiva resulta obvio que el PEIM proponga una educación matemática personalizada, de manera que el profesor conozca en todo momento el nivel de desarrollo matemático concreto de cada niño, así como su zona de desarrollo próximo. Ello supone que el profesorado de matemáticas adquiera en su formación no sólo conocimientos evolutivos sobre el desarrollo infantil en general (por ejemplo, los estadios de la teoría de Piaget), sino sobre todo debería adquirir una amplia formación sobre el desarrollo-aprendizaje de los contenidos matemáticos curriculares más importantes (adición, sustracción, multiplicación, división, etcétera). Para este objetivo resulta imprescindible la especialización de los profesores de matemáticas desde el primer curso de Educación Primaria, al menos, tal como venimos sosteniendo desde hace más de una década (Bermejo, 1990, 1993; Bermejo *et al.*, 2002). En esta misma línea, se pronunciaba Francis Fennell, Presidente del National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), cuando en noviembre de 2006 titulaba su "President's Message" del modo siguiente: "We Need Elementary School Mathematics Specialists NOW" ("Necesitamos especialistas en matemáticas para Educación Primaria YA").

Pero la educación personalizada requiere al menos tres condiciones. Por una parte, resulta difícil, si no imposible, llevar a cabo este tipo de educación matemática en aulas masivas, con más de quince-veinte alumnos, aunque esta cantidad depende en gran medida de cada profesor. Igualmente, sería muy conveniente el uso en el aula de perfiles matemáticos precisos de cada alumno por parte del profesor, de modo que tenga presente en todo momento el nivel de desarrollo matemático de cada escolar, a fin de adaptar y ajustar su enseñanza a este nivel de competencia. Un ejemplo de perfil matemático de los alumnos puede verse en Bermejo *et al.* (2002) y en la tabla I. En ella puede observarse el tipo de problemas verbales que los niños son capaces de resolver, las estrategias que suelen utilizar y el tipo de errores que cometen. Estos perfiles pueden obtenerse entrevistando a los niños individualmente (ver, por ejemplo, Bermejo y Díaz, 2007), o bien empleando algún test que permita definir detalladamente el nivel de competencia matemática de los niños, como, por ejemplo, los tests TEMA3 y TEDI-MATH.

Finalmente, hay que intervenir también sobre las creencias y actitudes de los escolares sobre las matemáticas y sobre sí mismos con respecto a las matemáticas (Bermejo, Lago y Rodríguez, 2000a; Randel, Stevenson y Witruk, 2000; Ruffell, Mason y Allen, 1998) (ver comportamiento de todos los cursos de Educación Primaria sobre un ejemplo de creencia sobre las matemáticas en Figura 2). Creencias como "las matemáticas son útiles, o difíciles", o "las matemáticas es cosa de chicos", pueden producir emociones positivas o negativas en los niños, que a su vez pueden llegar a desarrollar actitudes igualmente positivas o negativas ante

TABLA I  
Perfiles matemáticos de diez alumnos de 1º de EP

S U J E	CAMBIO				CB	COMPA RACIÓN		IGUALACIÓN				ALGORITMO			
	2	3	5	6		3	1	4	1	3	4	6	2	3	5
1	1 1	A 8	K K	8 2	A 8	1 1	1 1	1 1	1 8	1 1	1 1	14 8	A 12	13 13	13 1
2	1 1	1 1	1 1	1 1	A 11	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	13 13	13 13	13 13	13 13
3	G G	B B	H F	G E	C C	1 1	1 1	1 1	C C	1 1	5 E	8 14	C C	H 5	13 13
4	1 2	A 11	H 11	D 5	A A	1 1	1 1	3 1	8 1	2 1	1 2	5 8	B 8	5 2	3 11
5	K G	C C	K L	K L	K K	L F	K B	4 4	4 4	4 4	E E	K 3	K K	K F	E 5
6	G 11	A C	H 8	D 5	A A	8 8	8 8	4 4	C C	4 4	D 11	G 14	B 2	13 13	13 13
7	G 8	A 11	5 8	2 8	B 5	1 1	1 1	1 1	A A	1 1	4 8	K G	A 5	13 13	13 13
8	1 2	A 5	2 2	8 K	A 5	8 2	14 2	2 8	2 1	2 8	1 1	8 8	A 5	13 11	13 13
9	1 1	2 1	1 1	5 8	A 6	1 1	1 1	1 1	8 8	1 1	1 1	14 14	B 6	13 13	13 13
10	1 1	5 2	1 2	1 1	A 9	1 1	1 1	2 2	1 1	2 2	1 1	13 13	A 9	13 13	13 13

ESTRATEGIAS: A:contar todo; B:contar desde uno de los sumandos; D:quitar de; E:contar hacia atrás desde lo dado; F:contar hacia atrás; G:contar hasta; H:quitar a; I:juntar a; K:memorísticas; L:estrategias de cálculo mental.

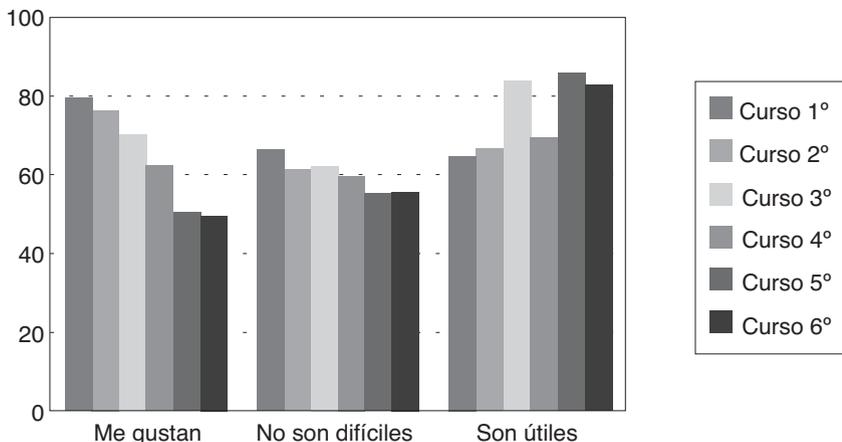
ERRORES:1:repetir una cantidad; 2:inventar la respuesta; 3:algoritmo incorrecto; 4:transforma el problema;5:error de conteo; 6: cálculo mental; 8:no sabe hacerlo; 9:suma unidades con decenas; 10:palabra clave; 11:no sabe con cantidades grandes; 12:confunde números; 13:no conoce los signos+/-; 14:no conoce la sentencia algorítmica.

las matemáticas. Los trabajos sobre esta temática suelen encontrar la existencia de una cierta correlación entre el rendimiento matemático de los alumnos y sus actitudes hacia las matemáticas (Bermejo *et al.*, 2000a). Por ello, resulta imprescindible que al menos en casos significativos los profesores (o el psicólogo orientador) intervengan para modificar algunas de estas creencias o actitudes sobre las matemáticas.

#### Los profesores

El segundo pilar de intervención del PEIM es el profesor. Su rol depende en gran medida de las funciones de los alumnos, ya que como decíamos anteriormente el alumno es el protagonista del aula. En parecidos términos se pronuncia

FIGURA 2  
 Actitudes de los seis cursos de E.P. sobre las matemáticas

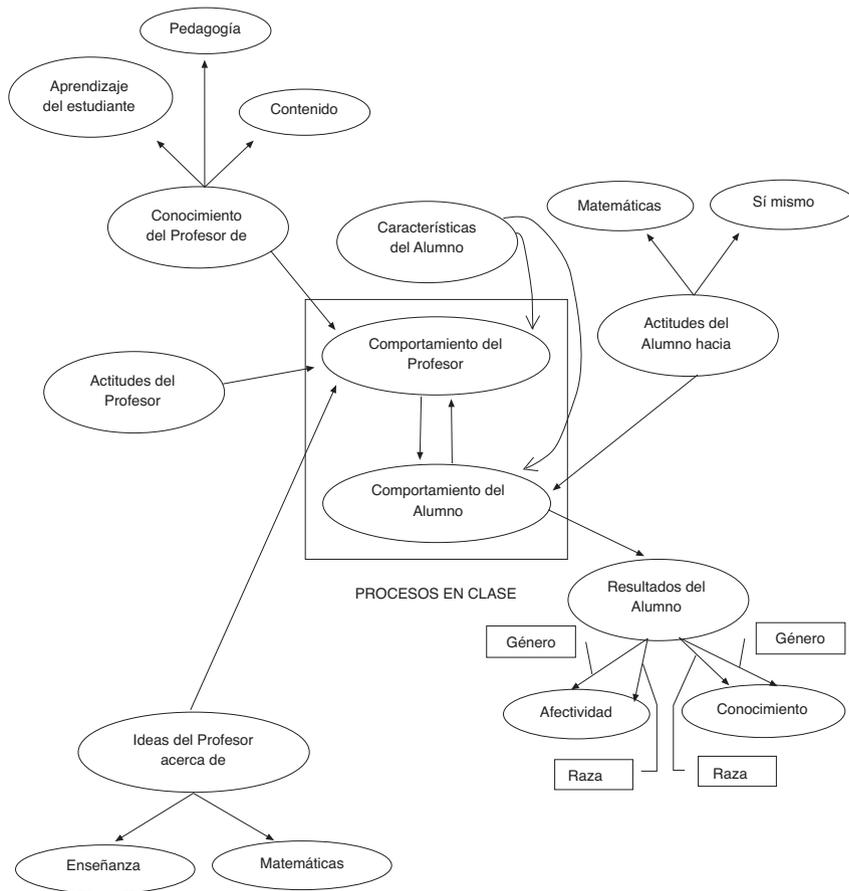


el NCTM (2000, p. 20) en su principio de enseñanza (“Teaching Principle”): “La enseñanza efectiva de la matemáticas requiere comprender lo que los estudiantes conocen y necesitan para aprender, así como retarlos y apoyarlos para que aprendan bien”. En otras palabras, el profesor debe conocer bien las matemáticas, los estudiantes y las estrategias didácticas adecuadas para facilitar el aprendizaje. Sin embargo, no estoy seguro de que el profesorado o la formación que ofrece, o ha ofrecido hasta no hace muchos años, el sistema educativo español al profesorado responda a estas exigencias. Al contrario, pienso que esta formación podría ser inadecuada e insuficiente. En el primer caso, me refiero a que en algunos planes de estudio, al menos, se insiste demasiado en ciertos contenidos, mientras que se olvidan otros realmente importantes. Por ejemplo, se dedica demasiado tiempo a la enseñanza de matemáticas avanzadas, cuando probablemente estos profesores van a dedicarse a enseñar matemáticas elementales a los niños (contar, sumar, restar, etcétera). Igualmente, la formación que reciben los futuros profesores puede resultar insuficiente en algunos contenidos, como por ejemplo, en el ámbito evolutivo. Me consta que en algunos planes de estudio la materia de desarrollo infantil es o era optativa, con lo que pudiera ocurrir que algunos alumnos no reciban enseñanza sobre esta temática. Pero en caso de que se imparta como materia el desarrollo infantil, sus contenidos podrían limitarse al desarrollo del niño en general, como acontece cuando se enseñan teorías generales del desarrollo (véase teoría de Piaget). Lo que realmente interesa para la formación de los futuros profesores de matemáticas, no es tanto conocer el desarrollo infantil en general, que sí es conveniente, sino sobre todo el desarrollo específico de los contenidos matemáticos, cuales son, por ejemplo, el aprendizaje de la suma, de la resta, etcétera. Es decir, sería muy conveniente que el profesorado de matemáticas conociera los pasos que suelen seguir los alumnos en la adquisición de los contenidos matemáticos curriculares, al menos de los contenidos principales.

Por otra parte, el comportamiento del profesor en el aula depende de múltiples factores, tal como puede observarse en el modelo propuesto por Koehler y Grouws (1992) (ver Figura 3). Efectivamente, la enseñanza del profesor viene motivada por sus ideas acerca de la enseñanza y aprendizaje, sobre las matemáticas, sobre la pedagogía, por sus actitudes, así como por las características y comportamiento del alumno. Coob y colaboradores (Cobb, 1996; McKlain, Cobb y Gravemeijer, 2000) sostienen que las funciones del profesor no se centran tanto

en ayudar a los alumnos a recibir y adquirir los conocimientos matemáticos, tal como defiende el modelo impositivo que se basa en la transmisión de conocimientos; sino más bien su cometido consiste fundamentalmente en estructurar y organizar las actividades que tienen que realizar para construir esos conocimientos matemáticos. Igualmente, para el modelo "Instrucción Guiada Cognitivamente" las decisiones del profesor en el aula se basan en sus propios conocimientos y creencias y en el comportamiento de los alumnos (Carpenter y Fennema, 1988; Fennema y Nelson, 1997).

FIGURA 3  
Modelo de Koebler y Grouws (1992)



El PEIM propone intervenir, si es necesario, para que la formación psicopedagógica de los profesores sea actual, que posean un conocimiento exhaustivo del desarrollo-aprendizaje de los contenidos matemáticos curriculares, así como para que tengan actitudes y creencias positivas sobre las matemáticas. Con respecto al primer punto, el constructivismo es hoy día el marco teórico más ampliamente aceptado para fundamentar el proceso enseñanza-aprendizaje (ver Fosnot, 1996), de modo que el profesorado debería conocer no sólo los principios básicos de este enfoque, sino además el modo de aplicar en el aula sus ideas fundamentales, como por ejemplo, que el niño construye sus propios conocimientos, no los recibe pasivamente, y que la función del profesor debe centrarse en facilitar y garan-

tizar esta construcción de la manera más eficaz y en las circunstancias más favorables. Las propuestas del NCTM (1991) con respecto a las funciones del profesor de matemáticas iban en esta dirección:

- Plantear cuestiones y tareas que provoquen, comprometan y desafíen el pensar de los alumnos;
- Escuchar diligentemente las ideas de los alumnos;
- Pedir a los alumnos que clarifiquen y justifiquen sus ideas;
- Decidir qué ideas hay que profundizar en la discusión con los estudiantes;
- Etcétera (NCTM, 1991, p. 35; ver también Kennedy, 1998).

Teniendo en cuenta estas funciones y las ideas nucleares del marco constructivista, podríamos proponer que el perfil del profesor constructivista debería reunir al menos los siguientes ítems:

- Los niños construyen sus propios conocimientos matemáticos.
- El desarrollo de los conocimientos infantiles ofrece los fundamentos para secuenciar la instrucción.
- La enseñanza facilita y apoya la construcción del conocimiento matemático por parte de los alumnos.
- Aprender matemáticas supone comprensión de los procedimientos y solución de problemas.
- El alumno posee unos conocimientos previos al aprendizaje.
- El profesor tiene una actitud activa, escuchando y preguntando a los alumnos, evaluando de manera continua e interviniendo siempre que sea conveniente.
- Intervención personalizada con los alumnos.

El PEIM propone intervenir en el profesorado, cuando sea necesario, mediante la realización de Cursos o Seminarios que ofrezcan información suficiente y fundamental sobre el marco constructivista y su aplicación en el aula, así como sobre el desarrollo de los contenidos matemáticos específicos. En estos Seminarios se debatirá y discutirá entre profesores y ponente todos los puntos constructivistas y evolutivos que lo requieran, sobre todo los aspectos prácticos y de aplicación en el aula, utilizando frecuentemente vídeos que permitan observar el comportamiento de los alumnos ante la resolución de diferentes problemas matemáticos. Para evaluar la eficacia de estos Seminarios, y por tanto la formación del profesorado, se pasan dos Cuestionarios (I y II) con el fin de determinar el nivel de formación de los profesores en ambos ámbitos. Estos Cuestionarios permitirán además observar si existe una cierta relación entre el rendimiento matemáticos de los alumnos en el aula y el grado de formación constructivista de los profesores, como han encontrado algunos autores (ver, por ejemplo, Fennema *et al.*, 1996).

Otro factor importante en el proceso enseñanza-aprendizaje se refiere a las creencias y actitudes de los profesores sobre las matemáticas (Bermejo *et al.*, 2000a; Ruffell *et al.*, 1998; Sowder, Philipp, Armstrong y Schapelle, 1998; Thompson, 1992). Parece clara la relación entre creencias e instrucción, aunque no sea una relación directa causa-efecto, sino más bien dialéctica (Thompson, 1992). Pero también parece estar relacionado el cambio de actitudes y el rendimiento de los alumnos (Bermejo *et al.*, 2002; Carpenter, Fennema, Peterson, Chiang y Loef, 1989). En todo caso, es conveniente modificar las actitudes negativas de los profesores con respecto a las matemáticas, tal como han mostrado Philippou y Christou (1998). El PEIM evalúa las actitudes y creencias del profesorado mediante la pasación del Cuestionario III, de modo que en caso de existir actitudes negativas hacia las matemáticas (“nunca me han gustado las matemáticas”, decía un profesor), sería bueno intervenir para modificar estas actitudes (para más información sobre la intervención en el profesorado, véase Bermejo *et al.*, 2002).

### Los contenidos

La importancia de los contenidos en el proceso enseñanza-aprendizaje ha sido puesto de relieve por no pocos autores (Carpenter, Fennema y Franke, 1996; Hiebert y Wearne, 1996; Hiebert, Wearne y Taber, 1991). La APA (1993) subraya el interés de los contenidos, de los procesos de cada dominio específico, así como de las estrategias de aprendizaje propias de los diferentes dominios específicos. Conviene resaltar aquí que las estrategias de aprendizaje de dominio específico son más eficaces que las de dominio general, debido sobre todo a que los alumnos tienen dificultades para relacionar las estrategias generales a las actividades cotidianas extraescolares, y además están más motivados para aprender estrategias vinculadas a tareas escolares (Montague, 1997).

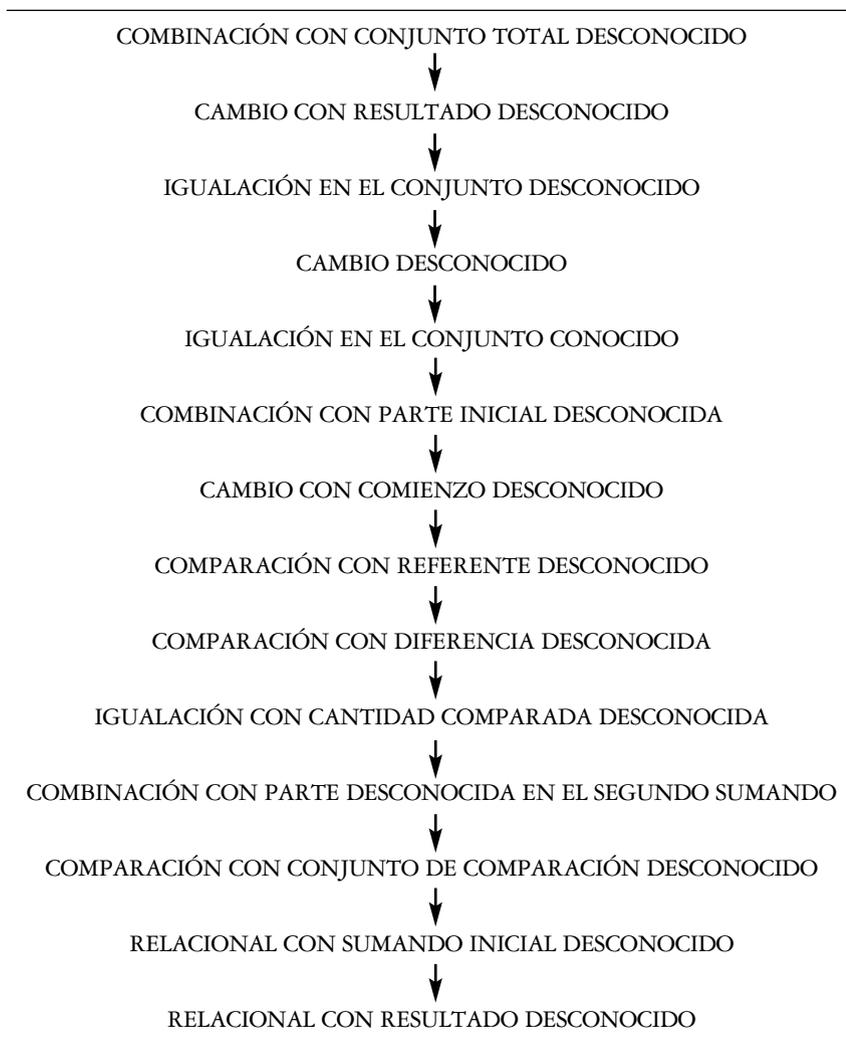
Para el PEIM los contenidos son igualmente importantes, de modo que la intervención se centra en la selección y secuenciación de los mismos. En cuanto a la selección, no me refiero aquí a los contenidos generales oficialmente fijados por los sistemas educativos, sino que se trata de seleccionar los contenidos matemáticos que se imparten cotidianamente en el aula. En este sentido, se proponen tareas que supongan pensar, comprender, razonar, plantear y solucionar problemas, operar, etcétera. Estas actividades son realmente importantes para promover el desarrollo matemático de los alumnos. Numerosos autores resaltan la relevancia de la comprensión, por ejemplo, en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas (Bermejo, 1996; Carpenter y Lehrer, 1999; Kennedy, 1998; Shafer y Romberg, 1999). Y en general, la resolución de problemas verbales por los alumnos sería un buen ejemplo del tipo de tarea ideal que debería realizarse en el aula (Bermejo, 1990; Bermejo, Lago y Rodríguez, 1998; Carpenter y Moser, 1982). En cambio, son menos deseables y deberían realizarse con menor frecuencia tareas mecánicas y memorísticas, tales como realizar cuentas, completar o rellenar los espacios dejados en blanco en los algoritmos recogidos en los textos, etcétera. Entiendo que este último tipo de actividad resulta menos gravosa para el profesor, sobre todo en aulas numerosas, pero también es menos importante para el desarrollo matemático de los niños.

Por otra parte, para que los alumnos se sientan motivados en el aula y aprovechen el máximo en su aprendizaje, conviene que los contenidos impartidos sean significativos para los alumnos. Ello implica:

- 1) que estos contenidos estén relacionados con los conocimientos previos de los escolares, como por ejemplo con los conocimientos matemáticos informales que poseen.
- 2) Que además las actividades que se llevan a cabo en el aula estén igualmente vinculadas con la vida cotidiana de los niños. En este sentido se entiende lo que establecía el NCTM cuando afirmaba que los niños aprenden explorando su mundo, de modo que sus intereses y actividades cotidianas son los vínculos naturales para el desarrollo de su pensamiento matemático (NCTM, 2000).

Otra intervención en el ámbito de los contenidos se refiere a la secuenciación adecuada de los mismos, en función de la dificultad que presenten a los alumnos, tal como, por ejemplo, hemos llevado a cabo con los problemas verbales de adición (ver Bermejo *et al.*, 1998) (ver Tabla II). Efectivamente, el protagonista del aula es el alumno y, por tanto, el proceso enseñanza-aprendizaje debe ajustarse al nivel de desarrollo matemático concreto que presentan en ese momento los escolares. En otras palabras, se trata primero de conocer detalladamente los pasos evolutivos que suelen seguir los niños en el aprendizaje de los contenidos matemáticos específicos y, después, de adecuar la instrucción al nivel de desarrollo de los alumnos (ver, por ejemplo, Bermejo, 2005b; Bermejo, Morales y García de

TABLA II  
*Jerarquización de los problemas verbales de adición según su dificultad*



Osuna, 2004) (para más información sobre intervención en el alumno, ver Bermejo *et al.*, 2002)..

#### *El contexto del aula*

El término “contexto” lo entiendo aquí como dinámica de la clase y la multiplicidad de factores que hacen posible el aprendizaje (para una definición de contexto ver Abreu, 1998; Nuñez, Edwards y Matos, 1999; van Oers, 1998). El PEIM propone que la dinámica del aula sea claramente constructivista, en el sentido de que el alumno se comporte de una manera activa, autónoma y con iniciativas, al tiempo que el profesor se centra, como hemos visto, en guiar, apoyar, proponer y motivar a los alumnos. Ahora bien, esta actividad no tiene por qué manifestarse siempre verbalmente (Inagaki, Hatano y Morita, 1998). Igualmente, las tareas que se realizan en el aula deben ser significativas y los recursos

didácticos utilizados evitarán en la medida de lo posible la metodología repetitiva y memorística. Todo ello facilita que la clase se desarrolle en un contexto real que promueve la motivación, el interés y la auto-confianza en los alumnos.

En este contexto, el aprendizaje cooperativo suele producir efectos positivos tanto en el aprendizaje en general (Cowie y Berdondini, 2001), como en las distintas áreas curriculares (ver en matemáticas: Webb y Farivar, 1994). Igualmente, desarrolla la habilidad para razonar y debatir, al igual que incide positivamente en el ámbito afectivo y en el cognitivo en general.

Para evaluar si la dinámica del aula se nutre del enfoque constructivista, el PEIM propone que se observe el desarrollo de la clase, cumplimentando una "Guía de observación" que refleje el comportamiento de los alumnos, así como el rol del profesor. En caso de que la evaluación no fuera positiva, habría que intervenir para modificar la dinámica del aula. (Para más información sobre la dinámica del aula, ver Bermejo *et al.*, 2002).

## Conclusión

La breve exposición que acabamos de hacer de los pilares del PEIM pone de relieve las peculiaridades de este modelo, así como las diferencias y semejanzas con otros programas de intervención en el ámbito de las matemáticas. Me gustaría resaltar tres características significativas de mi modelo. Por una parte, como no podría ser de otro modo, la importancia que se da al aprendiz o alumno, como protagonista del aula y del aprendizaje, fundamentalmente desde su vertiente evolutiva. Para que el aprendizaje sea eficaz resulta indispensable conocer con detalle la competencia matemática de cada alumno, para poder ajustar la enseñanza a este nivel de desarrollo. Sólo así evitamos "dar palos de ciego" para ver que ocurre, y garantizamos un aprendizaje eficaz. En este sentido decía Rousseau en el Prólogo de su Emilio: "Comenzad por estudiar a vuestros alumnos, porque seguro que no los conocéis".

En segundo lugar, quisiera subrayar también la relevancia y complejidad del rol del profesor en el proceso enseñanza-aprendizaje, en el sentido de que ya no basta con exponer con claridad los contenidos matemáticos, sino que requiere conocer con detalle el desarrollo de cada alumno, motivar el proceso de aprendizaje y apoyar la construcción de los conocimientos matemáticos en el aula.

Finalmente, quisiera también resaltar la importancia de lo social en el PEIM, en los términos que acabamos de hacer en el apartado anterior sobre la dinámica del aula. La actividad del alumno y del profesor no se limita al ámbito interior, sino que también se manifiesta en la comunicación exterior, en las interacciones, así como en la realización de trabajos comunes y cooperativos.

Concluyo señalando que los estudios de implementación del PEIM realizados (ver Bermejo, Lago, Rodríguez y Pérez, 2000b; Bermejo *et al.*, 2002) muestran que la buena aplicación del modelo produce efectos notorios, tanto en la mejora del rendimiento matemático de los alumnos, como en los cambios que se manifiestan en la enseñanza de los profesores.

## Referencias

- ABREU, G. DE (1998). The mathematics learning in sociocultural contexts: The mediating role of social valorisation. *Learning and Instruction*, 8, 567-572.
- AMERICAN PSYCHOLOGICAL ASSOCIATION PRESIDENTIAL TASK FORCE ON PSYCHOLOGY IN EDUCATION AND MID-CONTINENT REGIONAL EDUCATIONAL LABORATORY (1993). *Learner-centered psychological principles: Guidelines for school redesign and reform*. Washington, D.C.: A.P.A. and M.c.R.E.L.
- BERMEJO, V. (1990). *El niño y la aritmética*. Barcelona: Paidós.
- BERMEJO, V. (1993). Perspectivas innovadoras en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Investigación cognitiva y práctica educativa. En J. Beltran, V. Bermejo, M. D. Prieto & D. Vence (Coords.), *Intervención Psicopedagógica* (pp. 169-185). Madrid: Pirámide.

- BERMEJO, V. (1996). Enseñar a comprender las matemáticas. En J. Beltrán & C. Genovard (Eds.), *Psicología de la instrucción* (Vol. I, pp. 571-594). Madrid: Síntesis.
- BERMEJO, V. (Coord.) (2004). *Cómo enseñar matemáticas para aprender mejor*. Madrid: CCS.
- BERMEJO, V. (2004). El PEIM: Un programa de intervención. En V. Bermejo (Coord.), *Cómo enseñar matemáticas para aprender mejor* (pp. 239-256). Madrid: CCS.
- BERMEJO, V. (2005a). ¿Por qué fracasan nuestros alumnos en matemáticas? Programa de intervención para la mejora del rendimiento matemático (PEIM). En M. Pérez Solís (Ed.), *La orientación escolar en centros educativos* (pp. 359-378). Madrid: MEC.
- BERMEJO, V. (2005b). Microgénesis y cambio cognitivo: Adquisición del cardinal numérico. *Psicotema*, 17, 559-562.
- BERMEJO, V. (2007). Enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. En E. Fernández, F. Justicia & M. C. Pichardo (Eds.), *Enciclopedia de Psicología Evolutiva y de la Educación* (pp. 127-148). Málaga: Ediciones Aljibe.
- BERMEJO, V. & DÍAZ, J. J. (2007). The Degree of Abstraction in Solving Addition and Subtraction Problems. *The Spanish Journal of Psychology*, 10, 285-293.
- BERMEJO, V. & LAGO, M. O. (1994). The use of counting in numerical reasoning. En J. E. van Luit (Ed.), *Research on learning and instruction of mathematics in kindergarten and primary school* (202-219). Doetinchen: Graviant Publishing Company.
- BERMEJO, V., LAGO, M. O. & RODRÍGUEZ, P. (1998). Aprendizaje de la adición y sustracción. Secuenciación de los problemas verbales según su dificultad. *Revista de Psicología General y Aplicada*, 51 (3-4), 533-552.
- BERMEJO, V., LAGO, M. O. & RODRÍGUEZ, P. (2000a). Las creencias de alumnos y profesores sobre las matemáticas. En J. Beltrán et al. (Eds.), *Intervención psicopedagógica y currículum escolar* (pp. 129-152). Madrid: Pirámide.
- BERMEJO, V., LAGO, M. O., RODRÍGUEZ, P. & PÉREZ, M. (2000b). Fracaso escolar en matemáticas: cómo intervenir para mejorar los rendimientos infantiles. *Revista de Psicología General y Aplicada*, 53, 43-62.
- BERMEJO, V., LAGO, M. O., RODRÍGUEZ, P., DOPICO, C. & LOZANO, M. J. (2002). *PEI. Un programa de intervención para la mejora del rendimiento matemático*. Madrid: Ed. Complutense.
- BERMEJO, V., MORALES, S. & GARCÍA DE OSUNA, J. (2004). Supporting children's development of cardinality understanding. *Learning and Instruction*, 14, 381-398.
- CARPENTER, T. & FENNEMA, E. (1988). Research and cognitively guided instruction. En E. Fennema, T. Carpenter & J. Lamon (Eds.), *Integrating research on teaching and learning mathematics* (pp. 2-19). Madison: National Center for Research in Mathematical Sciences Education, University of Wisconsin.
- CARPENTER, T. & FENNEMA, E. (1992). Cognitively guided instruction: building on the knowledge of students and teachers. *International Journal of Research in Education*, 17, 457-470.
- CARPENTER, T., FENNEMA, E. & FRANKE, M. (1996). Cognitively guided instruction: A knowledge base for reform in primary mathematics instruction. *Elementary School Journal*, 97 (1), 3-20.
- CARPENTER, T., FENNEMA, E., PETERSON, P., CHIANG, CH. & LOEF, M. (1989). Using knowledge of children's mathematics thinking in classroom teaching: An experimental study. *American Educational Research Journal*, 26, 499-531.
- CARPENTER, T. & LEHRER, R. (1999). Teaching and learning mathematics with understanding. En E. Fennema & T. A. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 19-32). Mahwah, NJ: LEA.
- CARPENTER, T., & MOSER, J. (1982). The development of addition and subtraction problem solving skills. En T. Carpenter, J. Moser & T. Romberg (Eds.), *Addition and subtraction: A cognitive perspective* (pp. 9-24). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- COBB, P. (1988). The tension between theories of learning and instruction in mathematics education. *Educational Psychologist*, 23, 87-103.
- COBB, P. (1996). Where is the mind? A coordination of sociocultural and cognitive constructivist perspectives. En C. Fosnot (Ed.), *Constructivism: Theory, perspectives, and practice* (pp. 33-52). Nueva York: Teachers College Press.
- COMUNIDAD DE MADRID (2008). *Prueba de conocimientos de la Comunidad de Madrid de 3º ESO*. Madrid, junio de 2008.
- COWIE, H. & BERDONDINI, L. (2001). Children's reactions to cooperative group work: a strategy for enhancing peer relationships among bullies, victims and bystanders. *Learning and Instruction*, 11, 517-530.
- FENNELL, F. (2006). President's Message. *New Bulletin*, 43 (4) November, p. 3.
- FENNEMA, E. & NELSON, B. S. (Eds.) (1997). *Mathematics teachers in transition*. Mahwah, NJ: Erlbaum.
- FENNEMA, E. & ROMBERG, TH. (Eds.) (1999). *Mathematics classrooms that promote understanding*. Mahwah, NJ: LEA
- FENNEMA, E., CARPENTER, T., FRANKE, M., LEVI, L., JACOBS, V. & EMPSON, S. (1996). A longitudinal study of learning to use children's thinking in mathematics instruction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27 (4), 403-434.
- FOSNOT, C. (Ed.) (1996). *Constructivism: Theory, perspectives, and practice*. Nueva York: Teachers College Press.
- FUSON, K. C., DE LA CRUZ Y., SMITH, S. T., LO CICERO, A. M., HUDSON, K., RON, P. & STEEBY, R. (2000). Blending the best of the twentieth century to achieve a mathematics equity pedagogy in the twenty-first century. En M. J. Burke & F. R. Curcio (Eds.), *Learning mathematics for a new century* (pp. 197-212). Reston: NCTM.
- GRAVEMEIJER, K. G. & DOORMAN, M. (1999). Context problems in realistic mathematics education: A calculus course as an example. *Educational Studies in Mathematics*, 39, 111-129.
- HIEBERT, J. & WEARNE, D. (1996). Instruction, understanding, and skill in multidigit addition and subtraction. *Cognition and Instruction*, 14, 251-283.
- HIEBERT, J., WEARNE, D. & TABER, S. (1991). Fourth graders' gradual construction of decimal fractions during instruction using different physical representations. *Elementary School Journal*, 91, 321-341.
- INAGAKI, K., HATANO, G. & MORITA, E. (1998). Construction of mathematical knowledge through whole-class discussion. *Learning and Instruction*, 8, 503-526.
- INCE (2000). *Evaluación de la Educación Primaria*. Datos básicos 1999.
- INCE (2001). *Evaluación de la Educación Secundaria Obligatoria 2000*. Datos básicos.
- IMO (2008). *49ª International Mathematical Olympiad*. Madrid, Julio.
- KENNEDY, M. M. (1998). Education reform and subject matter knowledge. *Journal of Research in Science Teaching*, 35 (3), 249-262.
- KOEHLER, M. S. & GROUWS, D.A. (1992) Mathematics teaching practices and their effects. En D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 115-126). Nueva York: MacMillan.
- LAMPERT, M. & MCCOMBS, B. L. (Eds.) (1998). *How students learn. Reforming schools through learner-centered education*. Washington, D.C.: A.P.A.
- MCCLAIN, K., COBB, P. & GRAVEMEIJER, K. (2000). Supporting students' ways of reasoning about data. En M. J. Burke & F. R. Curcio (Eds.), *Learning mathematics for a new century* (pp. 174-187). Reston: NCTM.

- MONTAGUE, M. (1997). Cognitive strategy training in mathematics instruction for students with learning disabilities. *Journal of Learning Disabilities*, 30, 164-177.
- NCTM (1991). *Professional standards for teaching mathematics*.
- NCTM (2000). *Principles and Standards for School mathematics*.
- NUÑEZ, R. E., EDWARDS, L. D. & MATOS, J. F. (1999). Embodied cognition as grounding for situatedness and context in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 39, 45-65.
- PHILIPPOU, G. & CHRISTOU, C. (1998). The effects of a preparatory mathematics program in changing prospective teachers' attitudes towards mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 35, 189-206.
- PISA (2005). *Pruebas de Matemáticas y de Solución de Problemas*. Madrid: Instituto Nacional de Evaluación y Calidad del Sistema Educativo, MEC.
- RANDEL, B., STEVENSON, H. W. & WITRUK, E. (2000). Attitudes, beliefs, and mathematics achievement of German and Japanese high school students. *International Journal of Behavioral Development*, 24, 190-198.
- RUFFELL, M., MASON, J. & ALLEN, B. (1998). Studying attitude to mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 35, 1-18.
- SHAFER, M. C. & ROMBERG, T. A. (1999). Assessment in classrooms that promote understanding. En E. Fennema & T. A. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 159-184). Mahwah, NJ: LEA.
- SIMON, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26 (2), 114-145.
- SOWDER, J. T., PHILIPP, R. A., ARMSTRONG, B. E. & SCHAPPELLE, B. P. (1998). *Middle-Grade teachers' mathematical knowledge and its relationship to instruction*. Nueva York: State University of New York Press.
- THOMPSON, A. (1992). Teachers' beliefs and conceptions: A synthesis of the research. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. (pp. 127-1146). Nueva York: Macmillan Publishing Company.
- TIMSS (1996). *Highlights of results from TIMSS. Third International Mathematics and Science Study*. Bostón: Boston College.
- VAN OERS, B. (1998). From context to contextualizing. *Learning and Instruction*, 8, 473-488.
- WEBB, N. & FARIVAR, S. (1994). Promoting helping behavior in cooperative small groups in middle school mathematics. *American Educational Research Journal*, 31, 369-395.
- YACKEL, E. & COBB, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27, 458-477.