

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS

DEPARTAMENTO DE ESTRUCTURA DE LA MATERIA, FÍSICA TÉRMICA Y
ELECTRÓNICA



TRABAJO DE FIN DE GRADO

Código de TFG: ETE45

La física de los instrumentos musicales de cuerda

The physics of string musical instruments

Supervisores: Rodrigo García Hernansanz y Germán González Díaz

Iván Martínez Barba

Grado en Física

Curso académico 2024-25

Convocatoria Ordinaria

Calificación: 9.4

LA FÍSICA DE LOS INSTRUMENTOS MUSICALES DE CUERDA

Resumen:

En este Trabajo de Fin de Grado he estudiado la física de los instrumentos musicales de cuerda, con especial atención al fenómeno de la inarmonicidad, es decir, la desviación de los armónicos con respecto a los múltiplos exactos de la frecuencia fundamental. He partido del análisis teórico del movimiento de una cuerda vibrante, derivando su ecuación de onda y mostrando la formación de ondas estacionarias y modos normales de vibración. He analizado los instrumentos de cuerda según su clasificación en pulsados, percutidos y frotados, con ejemplos como la guitarra, el piano y el violín, valorando sus particularidades físicas.

El fenómeno de la inarmonicidad se modela matemáticamente mediante una corrección a la ecuación de onda que incorpora la rigidez del material, introduciendo un parámetro B que cuantifica el efecto. Experimentalmente, he realizado una serie de mediciones con osciloscopio y transformada de Fourier (FFT) sobre cuerdas de diversos materiales y grosores (nylon, acero y níquel), montadas en distintos instrumentos: monocordio, guitarra clásica, bajo, piano y guitarra eléctrica. Se han comparado los valores experimentales del coeficiente B con los teóricos, revelando discrepancias atribuibles a incertidumbres en el módulo de Young y el tratamiento del material por los fabricantes. He conseguido concluir que, pese a estas diferencias, los resultados son razonablemente compatibles en orden de magnitud, destacando el primer cálculo experimental de B para una cuerda de bajo.

Abstract:

In this Bachelor's Thesis, I have studied the physics of stringed musical instruments, with special attention to the phenomenon of inharmonicity, that is, the deviation of the harmonics from the exact multiples of the fundamental frequency. I started with a theoretical analysis of the motion of a vibrating string, deriving its wave equation and showing the formation of standing waves and normal modes of vibration. I have analyzed string instruments based on their classification into plucked, struck, and bowed, using examples such as the guitar, piano, and violin, and evaluating their physical particularities.

The phenomenon of inharmonicity is mathematically modeled through a correction to the wave equation that incorporates the material's stiffness, introducing a parameter B that quantifies the effect. Experimentally, I have performed a series of measurements with an oscilloscope and Fourier transform (FFT) on strings made of various materials and thicknesses (nylon, steel, and nickel), mounted on different instruments: monochord, classical guitar, bass, piano, and electric guitar. The experimental values of the coefficient B have been compared with the theoretical ones, revealing discrepancies attributable to uncertainties in Young's modulus and the treatment of the material by the manufacturers. I have concluded that, despite these differences, the results are reasonably compatible in order of magnitude, highlighting the first experimental calculation of B for a bass string.

Índice

Introducción	7
La matemática tras una cuerda	8
Deducción y solución de la ecuación general de una cuerda	9
Ondas estacionarias	10
Tipos de instrumentos de cuerda	11
Cuerda pulsada	11
Cuerda percutida	12
Cuerda frotada	13
La inarmonicidad	14
Modelado matemático	15
Proceso experimental	17
Monocordio y guitarra clásica	18
Bajo	20
Piano	21
Guitarra eléctrica	22
Discusión	23
Conclusiones	24
Bibliografía	25

Introducción

La física y la música son dos disciplinas que en el día a día no guardan una relación común a la vista. Es evidente que cada una de ellas tiene un foco de trabajo muy diferenciado pero, al igual que cualquier fenómeno tangible, la propia música puede ser estudiada desde un punto de vista físico. Ese es el objetivo de este Trabajo, fusionar ambas materias tratando en específico el problema de los instrumentos musicales de cuerda, con un especial hincapié en el concepto de la inarmonicidad.

Estos esfuerzos de estudio científico sobre música parecen vanos y son frecuentemente vistos como de menor calibre e importancia. Nada más lejos de la realidad, comenzando por uno de los más antiguos y célebres experimentos de la física, al propio Pitágoras (*c.* 570 *a.C.*- *c.* 490 *a.C.*) se le atribuye el descubrimiento de la relación proporcional que guardan los sonidos consonantes en una cuerda de un monocordio [1]. En base a esta razón se construyó la afinación pitagórica, que asentaría la base de la afinación desde entonces hasta la actualidad, eso sí, sufriendo perfilaciones en tiempos de Johann Sebastian Bach (1685-1750), en los que se desarrolló la afinación temperada de la escala de doce semitonos para permitir trasposiciones de tonalidad.

Hasta esta época barroca y durante un siglo más, nadie del mundo científico pareció interesarse en esta rama de estudio hasta que muchos físicos y matemáticos de primera línea vertieron su intelecto en tratar el problema de la cuerda en los siglos XVIII y XIX. La primera piedra la puso Jean le Rond d'Alembert (1717-1783), quien formuló una de las primeras expresiones de la ecuación de la cuerda ideal [2], contribuyendo decisivamente al desarrollo de las ecuaciones diferenciales parciales. Décadas más tarde, Joseph Fourier (1768-1830) retomó esta nueva matemática en el contexto del estudio de la propagación del calor [3], y fue en ese marco donde desarrolló su teoría del análisis armónico, al descubrir que las soluciones a la ecuación del calor podían expresarse como sumas de funciones seno y coseno. Este enfoque, inicialmente concebido para describir fenómenos térmicos, resultó ser igualmente aplicable a la ecuación de onda y, en particular, al estudio de las vibraciones de las cuerdas. Así nació la idea de representar una señal compleja como una superposición de ondas simples —los llamados armónicos—, fundamento del análisis espectral moderno. La herramienta matemática que permite este paso es la transformada de Fourier, cuyo uso será fundamental en la parte experimental de este trabajo.

Ya en siglo XIX, Alfred Clebsch (1833-1872), el mismo científico que aportó junto a Paul Gordan (1837-1912) los coeficientes de armónicos esféricos empleados a diario en Mecánica Cuántica, matizó esta ecuación diferencial de una cuerda ideal teniendo en consideración su rigidez y sección [4]. Un año después, el galardonado con el premio Nobel por sus estudios sobre gases y el descubrimiento del Argón, John William Strutt (1842-1919), más conocido como Lord Rayleigh, citó esta ecuación en su libro [5], escrito desde un punto de vista menos matemático y más musical, aportando una piedra clave que auspiciaría el estudio de la inarmonicidad.

Este concepto no es habitual al orden diario ni dentro de la física ni de la música, pero es clave a la hora de tratar la afinación de instrumentos. Su definición consiste en que los armónicos se desplazan unas décimas o unos pocos hercios por encima de su posición teórica como múltiplos de

la frecuencia fundamental. Aparece en instrumentos de cuerda debido a su rigidez y su tensión, por lo que estos estudios de Clebsch y Rayleigh fueron imprescindibles para poder tratar este fenómeno musical desde un punto de vista físico.

Por el lado de la música, y en paralelo a este estudio, habían aparecido en el mismo siglo XVIII las primeras versiones de un gran instrumento de cuerda que sufría problemas de afinación. No se conseguiría una solución definitiva para ellos hasta la imposición del temperamento igual a comienzos del siglo XX, acabando con siglos de discordancias entre músicos de distintas naciones en ese icónico instrumento que es el piano.

El trabajo matemático siguió su curso, con una pequeña disputa [6] sobre acústica fisiológica entre los propios Thomas Johann Seebeck (1770-1831), autor de los estudios sobre el efecto termodinámico que lleva su nombre, y Georg Simon Ohm (1789-1854), cuya célebre Ley de la Electrónica no requiere presentación. Pero no va a ser con estos dos científicos alemanes sino con la figura de otro físico y también médico de renombre con la que va a dar comienzo este TFG.

La matemática tras una cuerda

Hermann von Helmholtz (1821-1894) aseguraba en [7], que pocas eran las personas, tanto músicos como físicos, que acertaban la respuesta a la sencilla pregunta: ¿Cómo se mueve una cuerda cuando se pulsa?. La respuesta lógica parece ser con movimientos sinusoidales, pero esto no es lo que sucede en realidad, al menos, para una señal rica en armónicos.

Helmholtz recurre al análisis de Fourier para explicar cómo la suma de los armónicos da lugar a una forma triangular con vértices en los extremos de la cuerda y el punto de pulsación. Tal como se puede observar en 1 —ilustración tomada del libro de Neville H. Fletcher (1930–2017), citado en [8]—, la cuerda parte de esta forma triangular y se aplanan gradualmente desde el vértice central hasta alcanzar una posición casi recta. Luego, invierte el proceso desde los extremos, repitiendo el ciclo de oscilación dentro del plano de vibración.

Este movimiento periódico continuaría indefinidamente si no existieran pérdidas de energía, propias de cualquier sistema real. En este caso, se deben a pequeñas fugas en los puntos de sujeción o a la transferencia de energía al aire o al cuerpo del instrumento. Como señala Helmholtz, estas pérdidas no afectan por igual a todos los armónicos: los de orden superior se atenúan más rápido, haciendo que, con el tiempo, predomine la frecuencia fundamental. En esa fase, la cuerda puede describirse como una onda sinusoidal con nodos y antinodos bien definidos, lo que simplifica su análisis.

Pero, ¿a qué se debe este movimiento triangular? Fletcher explica en [8] que se parte de la simple idea de que cada armónico cuenta con su frecuencia propia. Como cada una de ellas es distinta, la suma de los modos normales en un instante de tiempo particular otorga el resultado geométrico previamente explicado sólo para desfases de 0° o 180° de los armónicos respecto al fundamental, tal y como se ve experimentalmente.

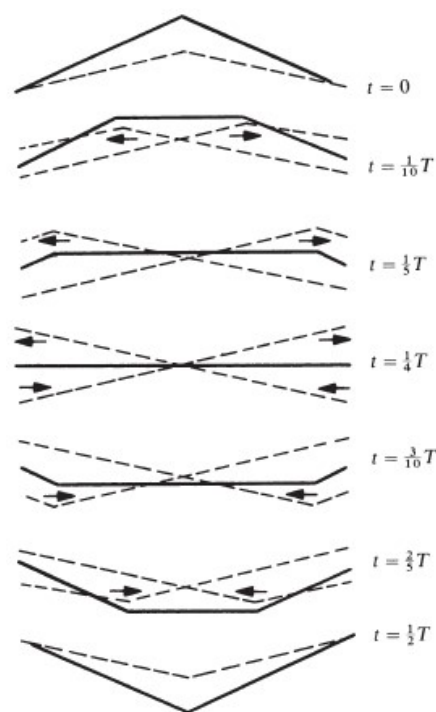


Figura 1: Evolución temporal de una cuerda

Dedución y solución de la ecuación general de una cuerda

Fletcher ([8]) deduce la ecuación general de una cuerda considerando a esta coincidente con el eje de abscisas con densidad lineal μ y que sufre una tensión T que la desvía de su posición de equilibrio. La fuerza neta dF , que trata de restaurar el arco infinitesimal ds de la cuerda a esta posición, se describe con la diferencia en la componente y de la tensión en los extremos de ese arco:

$$dF_y = (T \operatorname{sen}\theta)_{x+dx} - (T \operatorname{sen}\theta)_x \quad (1)$$

Desarrollando con la definición de la expansión de Taylor $f(x + dx) = f(x) + \frac{\partial f}{\partial x} dx + \dots$ obtenemos:

$$dF_y = \frac{\partial(T \operatorname{sen}\theta)}{\partial x} dx \quad (2)$$

Al considerar desplazamientos pequeños, podemos tomar la aproximación $\operatorname{sen}\theta = \tan\theta = \partial y / \partial x$. Además, si hacemos T constante:

$$dF_y = T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx \quad (3)$$

Podemos igualar entonces a la segunda Ley de Newton:

$$T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx = (\mu ds) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (4)$$

Simplificamos ds con dx ya que son similares al ser dy pequeño. Con ello obtenemos la ecuación diferencial general para una cuerda, una ecuación de ondas, con velocidad $c = \sqrt{T/\mu}$:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (5)$$

Esta ecuación admite un número infinito de soluciones particulares de tipo armónico. Como se trata de una ecuación lineal, su solución general puede expresarse como una combinación lineal de esas soluciones particulares. Para determinar cuál es la solución específica del problema físico, es necesario que esta combinación cumpla con las condiciones iniciales: es decir, la forma y la velocidad de la cuerda en el instante inicial.

La propuesta de D'Alembert [2] estableció que esa solución general puede describirse en el dominio temporal como la suma de dos ondas f_1 y f_2 viajando en sentidos opuestos. Su suma en $t = 0$ reproduce la forma inicial de la cuerda, que en nuestro caso es un triángulo.

$$y(x, t) = f_1(ct - x) + f_2(ct + x) \quad (6)$$

El siguiente paso a dar consiste en definir estas funciones tales que su suma cumpla las condiciones iniciales $y(x, 0)$ e $\dot{y}(x, 0)$. Podemos estudiar los casos sencillos de extremo fijo y libre en función de estas condiciones. Si fijamos los extremos en $x=0$, tenemos lo siguiente:

- 1.- Extremo fijo: en él se da que $y(0) = y(L) = 0$, luego se cumple que $f_1(ct) = -f_2(ct)$.
- 2.- Extremo libre: aquí se tiene que $\partial y / \partial x(0) = \partial y / \partial x(L) = 0$, entonces $f_1'(ct) = f_2'(ct)$.

Más adelante, la aportación de Fourier [3] —que D'Alembert aún desconocía— demostró que dicha forma triangular puede descomponerse en una suma infinita de funciones armónicas, cada una correspondiente a un modo de vibración de la cuerda. Este escribió las soluciones armónicas

simples a la ecuación introduciendo la relación de dispersión $k = \frac{\omega}{c}$, y definió cada onda viajera en función de un seno y de un coseno para deducir que:

$$y(x, t) = A \sin(\omega t - kx) + B \cos(\omega t - kx) + C \sin(\omega t + kx) + D \cos(\omega t + kx) \quad (7)$$

Ondas estacionarias

Considerando ahora una cuerda de longitud L y fija en $x = 0$ y en $x = L$, deducimos de la condición $y(0, t) = 0$ para la solución armónica que $A = -C$ y que $B = -D$.

$$y + A[\sin(\omega t - kx) - \sin(\omega t + kx)] + B[\cos(\omega t - kx) - \cos(\omega t + kx)] = 0 \quad (8)$$

Haciendo uso de la trigonometría en el problema en cuestión acabamos deduciendo que:

$$y = 2[A \cos \omega t - B \sin \omega t] \sin kx \quad (9)$$

La otra condición brinda la descomposición armónica de la solución, ya que desde $y(L, t) = 0$ se tiene que $\sin kL = 0$, y de esto que $\omega L/c = n\pi$. Esta igualdad implica una restricción en las frecuencias de vibración de la cuerda, a saber:

$$f_n = n(c/2L) = n \cdot f_0 \quad (10)$$

donde

$$f_0 = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad (11)$$

es la frecuencia fundamental. Con esto se pueden escribir los armónicos, también llamados modos normales de vibración, definiendo antes $\omega_n = n\pi c/L$:

$$y_n(x, t) = (A_n \sin \omega_n t + B_n \cos \omega_n t) \sin \frac{\omega_n x}{c} \quad (12)$$

Estos armónicos siguen la norma de que su frecuencia es múltiplo exacto de f_0 . La solución general al problema es la suma de todos ellos sobre n , es decir, que el desplazamiento vertical de la cuerda viene dado por:

$$y(x, t) = \sum_n y_n(x, t) \quad (13)$$

Es en esta suma donde aparecen los triángulos predichos por Helmholtz. En el momento en el que se pierden armónicos, la cuerda adapta su desplazamiento hacia formas sinusoidales. Por otro lado, la energía puede describirse a partir de la máxima energía cinética de la cuerda:

$$dE_n = \frac{\omega_n^2 \mu}{2} (A_n^2 + B_n^2) \sin^2 \frac{n\pi x}{L} dx \quad (14)$$

Integrando en toda la longitud de la cuerda conseguimos la energía del armónico n -ésimo:

$$E_n = \frac{\omega_n^2 \mu L}{4} (A_n^2 + B_n^2) = \frac{\omega_n^2 \mu L}{4} C_n^2 \quad (15)$$

De idéntica manera a la expresión para el desplazamiento, la energía total se consigue a partir de la suma de todas las energías. Por tanto, vemos aquí que la aportación energética de cada armónico es directamente proporcional a su frecuencia $f = \omega/2\pi$, entonces se podría pensar que mayores armónicos tienen más energía, y por tanto suenan más. La falsedad de este argumento se

encuentra en la disminución de C_n con cada armónico, que se estima en un orden de $1/n^2$, luego la dependencia energética de cada armónico disminuye en:

$$E_n \propto \omega_n^2 \cdot C_n^2 \propto n^2 \cdot \frac{1}{n^4} = \frac{1}{n^2} \quad (16)$$

Aún así, este estudio energético no es frecuentemente cubierto en investigaciones acústicas, ya que en la práctica, es muy difícil sacar una señal controlada en este aspecto de una cuerda debido a la influencia del punto de pulsación, temperatura del ambiente, tensión de la cuerda, y demás factores que alteran el resultado. Como se verá más adelante en la sección experimental del Trabajo, los espectrogramas hallados responden ocasionalmente a esta lógica, mostrando armónicos de casi mayor duración e intensidad que el propio fundamental, así como otros que no aparecen. Vemos en este ejemplo para una señal de guitarra clásica esa dependencia, aunque en otros casos esta no se cumple:

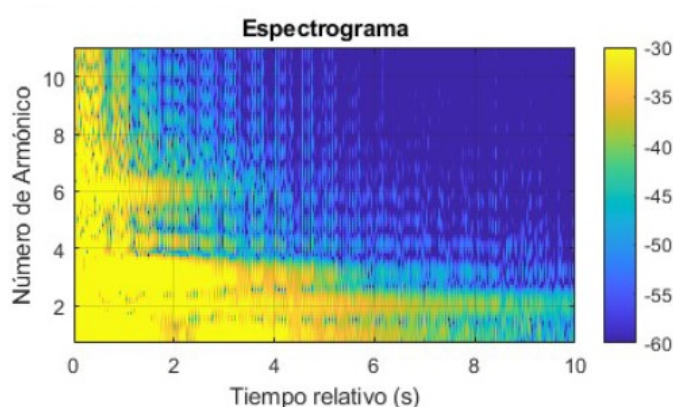


Figura 2: Espectrograma de una señal de guitarra clásica

Tipos de instrumentos de cuerda

El desarrollo histórico del arte musical ha aportado hasta la actualidad una amplia gama de instrumentos que emplean el sonido de cuerdas para hacer su música. Ya en las primeras lecciones elementales de conservatorio se enseña a subdividir este gran grupo en tres casos dependiendo de la forma en la que se hace sonar la cuerda que compone el instrumento [1]. Veamos cada una de ellos.

Cuerda pulsada

El problema de la cuerda pulsada en cierto punto de su longitud plantea dos estudios posibles. Por un lado, contamos con el análisis de Fourier descomponiendo el espectro frecuencial de la cuerda en cierto instante de tiempo. No obstante, como la cuerda se halla sufriendo una constante pérdida de energía tras su pulsación, debemos hacer un análisis temporal para estudiar cómo cambia este espectro a lo largo del tiempo. Lo que se dibuja al fin y al cabo es el recorrido cíclico visto en 1 de dos pulsos que siguen sentidos opuestos en torno a un paralelogramo cuyos vértices se hallan en los extremos de la cuerda, y el punto de pulsación y su lugar opuesto. Cada uno de ellos se describe con un término de la ecuación de D'Alembert (6), mientras que cada uno de los armónicos va perdiendo energía, lo que acaba por disipar la forma triangular en otras sinusoidales que se dibujan a partir de los armónicos restantes.

Volviendo al análisis de Fourier, este nos puede indicar una expresión para los coeficientes A_n y B_n mostrados en (12) en función de las condiciones iniciales. Se multiplica cada lado de (13) y su derivada temporal por $\sin(n\pi x/L)$ y se integra para conseguir:

$$A_n = \frac{2}{\omega_n L} \int_0^L \dot{y}(x, 0) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad (17)$$

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L y(x, 0) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad (18)$$

De aquí se deduce que cuando se pulsa una cuerda a una distancia $\beta = 1/N$, con N natural, del extremo fijado en $x = 0$, se anulará siempre el armónico n -ésimo y sus múltiplos al anularse A_n y B_n . Esto se debe a que este punto representa un nodo de estos armónicos y al pulsarse en ese punto no se les está permitiendo vibrar.

Con esto sabido, bajo esa pulsación de la cuerda en β con una amplitud h , las condiciones iniciales quedan determinadas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \dot{y}(x, 0) &= 0 \\ y(x, 0) &= \frac{Nh}{L}x, \quad 0 \leq x \leq L/N \\ y(x, 0) &= \frac{Nh}{N-1} \left(1 - \frac{x}{L}\right), \quad L/N \leq x \leq L \end{aligned}$$

De la primera condición deducimos que para toda cuerda pulsada, los coeficientes A_n se anulan, mientras que de la segunda podemos calcular los B_n implementándola en la integral (18):

$$B_n = \frac{N^2 h}{2n^2 \pi^2} \cdot \sin \frac{n\pi}{N} \quad (19)$$

Aquí también se ve la dependencia de C_n (en este caso, B_n) como $1/n^2$ comentada en (16).

Cuerda percutida

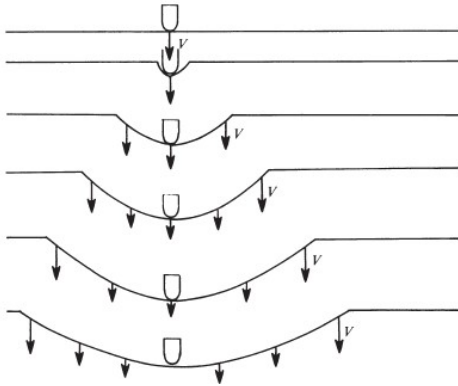


Figura 3: Evolución temporal de una cuerda percutida

El estudio de la cuerda percutida plantea condiciones iniciales distintas respecto a la cuerda pulsada, ya que se impone una velocidad inicial no nula con desplazamiento nulo. Tal y como discute Donald E. Hall en [9], físico británico de finales del siglo XX, este tipo de excitación se asocia a instrumentos donde un martillo de masa M impacta contra la cuerda. En el instante inicial $t = 0$, el sistema puede describirse mediante la ecuación:

$$M \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T \Delta \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) \quad (20)$$

Aquí, el término $\Delta \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)$ representa la diferencia de pendiente en el punto de contacto, y es responsable de la deceleración del martillo. Este proceso genera una velocidad de contacto y un desplazamiento asociado:

$$v(t) = V e^{-t/\tau}, \quad y(t) = V \tau (1 - e^{-t/\tau}), \quad \text{con} \quad \tau = \frac{Mc}{2T} \quad (21)$$

Este tipo de excitación genera ondas que, si la cuerda es lo suficientemente larga o el martillo lo bastante ligero, se reflejan en los extremos y expulsan al martillo dejando vibrar a la cuerda en sus modos normales de vibración.

En este contexto, si la cuerda tiene masa M_c y el impacto se produce en una fracción $\beta = 1/N$ de su longitud, el espectro modal se anula para los múltiplos de N en el límite $M \ll M_c$, al igual que ocurría con la cuerda pulsada. Para masas no despreciables, pero aún menores que M_c , se observa una pérdida de 6 dB por octava a partir del modo $n_m = 0,73M_c/M$.

El piano es el instrumento paradigmático donde este fenómeno se manifiesta. Hall [9] deduce que su mecanismo de acción transforma la fuerza aplicada sobre una tecla en la velocidad del martillo mediante una relación no lineal:

$$v_0 = 5,5a_pT = 0,817(F - 0,44)^{3/2} \quad (22)$$

donde a_p es la aceleración en el punto de contacto y T el tiempo de recorrido de la tecla. Este comportamiento subraya la gran sensibilidad dinámica del piano: pequeñas variaciones de fuerza producen cambios significativos en la intensidad sonora.

Las cuerdas graves, entorchadas con cobre para reducir su rigidez, minimizan la inarmonicidad —una desviación del espectro armónico ideal—, el fenómeno que se tratará más adelante en la sección experimental. Esta construcción, junto con la geometría del instrumento, explica por qué las amplitudes de las frecuencias fundamentales en las notas graves pueden ser hasta 25 dB menores que las de algunos armónicos superiores, generando una riqueza tímbrica característica incluso sin un espectro perfectamente armónico.

La tabla armónica, usualmente de abeto, convierte las vibraciones de las cuerdas en sonido audible. Su impedancia acústica afecta la duración del sonido: frecuencias agudas, con menor acoplamiento, se extinguen más rápido (hasta 80 dB/s), mientras que las graves pueden decaer lentamente (menos de 4 dB/s). Este comportamiento justifica que las últimas dos octavas del piano no tengan apagadores, permitiendo que suenen libremente sin necesidad del pedal.

Cuerda frotada

El análisis temporal realizado por Helmholtz en 1877 de la cuerda frotada [7] muestra cómo la cuerda realiza un movimiento cíclico en forma de triángulo en torno a dos curvas que se juntan en los extremos de la cuerda. El punto de contacto con el arco es irrelevante de cara a la vibración, si bien para la descomposición espectral tiene su influencia de manera idéntica a los otros dos casos. Es decir, si la posición del arco coincide con una fracción entera de la longitud de la cuerda, los armónicos con nodos en dicha posición no se excitan al igual que sucedía en las cuerdas pulsada y percutida.

El movimiento se describe mediante una acción de apoyo y arrastre: el músico coloca su arco sobre la cuerda y desencadena el deslizamiento. Durante este proceso, la velocidad que recorre la cuerda es la misma que la de una cuerda ideal, $v = \sqrt{T/\mu}$. Cuando la cuerda se excita, crea una elipse con dos picos en el eje mayor cuya amplitud es proporcional a la velocidad del arco y crece cuando el arco se acerca a uno de los extremos de la cuerda. Fletcher aportó en [8] la imagen expuesta en 4 para explicar este desplazamiento.

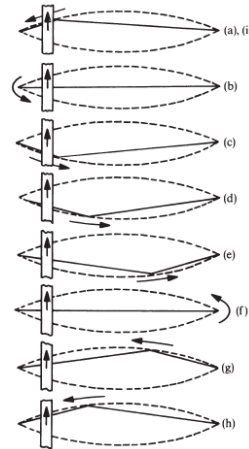


Figura 4: Evolución temporal de una cuerda frotada

La inarmonicidad

La inarmonicidad es un fenómeno físico presente en las cuerdas musicales que puede llegar a afectar a la percepción del sonido. Se produce cuando los armónicos de una cuerda vibrante no son múltiplos exactos de la frecuencia fundamental, lo que genera desajustes en la afinación y resonancia. Nos apoyaremos durante el estudio de este concepto en el breve pero completo artículo realizado por Chris Murray y el doctor Scott Whitfield de la Universidad de Wisconsin en [10].

Los lutiers, o fabricantes de instrumentos, han aprendido a lo largo de los siglos a lidiar con el fenómeno de la inarmonicidad, desarrollando soluciones tanto estructurales como materiales para minimizar sus efectos y optimizar la resonancia de las cuerdas. Este fenómeno varía según la longitud, el grosor, la tensión y el material de las cuerdas. Como respuesta, se ha experimentado con una amplia gama de componentes —desde aleaciones metálicas como el acero niquelado o el bronce fosforado, hasta compuestos sintéticos como el nailon—, cada uno con propiedades distintas de rigidez y elasticidad, que influyen directamente en la calidad sonora y el grado de desviación armónica generado.

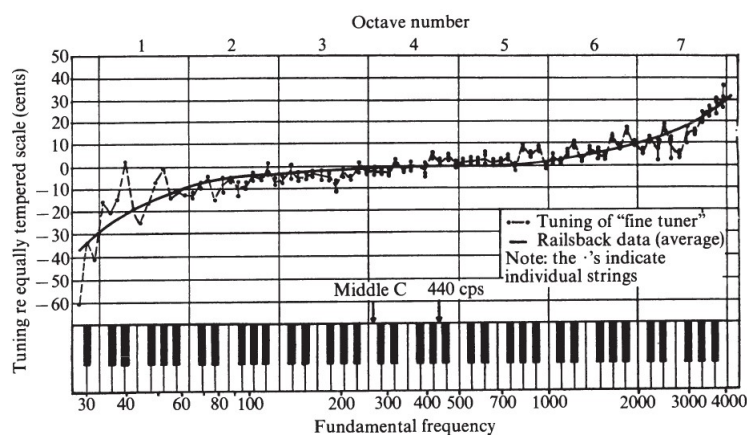


Figura 5: Método de afinación del piano

relación entre armónicos, compensando así las desviaciones provocadas por la inarmonicidad. Asimismo, los pianos de cola suelen ofrecer una calidad sonora superior a la de los pianos verticales no solo por su construcción o respuesta acústica, sino también porque admiten cuerdas más largas y tensas, lo que reduce significativamente la desviación armónica.

En los instrumentos de cuerda pulsada, aunque la tensión es generalmente menor, la inarmonicidad sigue siendo un factor a tener en cuenta. En la guitarra, por ejemplo, es notoria la tendencia a la inestabilidad de la tercera cuerda, afinada en G4 en la configuración estándar. Esta cuerda, al ser la más gruesa de las cuerdas sin entorchado, presenta una rigidez mayor que facilita el desplazamiento de sus armónicos. Por esta razón, muchos guitarristas ajustan la afinación de forma personalizada, en función del estilo musical, el tipo de cuerdas y la respuesta particular de su instrumento.

El caso del bajo eléctrico ofrece un enfoque distinto pero complementario. Para alcanzar frecuencias tan graves sin comprometer la claridad del sonido, las cuerdas deben ser especialmente largas y gruesas. Esto obliga a buscar un equilibrio muy preciso entre la longitud, el diámetro y la tensión de las cuerdas, de modo que la inarmonicidad no afecte negativamente la percepción de las notas fundamentales ni la riqueza de los armónicos.

En los pianos, la inarmonicidad representa un desafío particularmente significativo debido a la rigidez de las cuerdas, sobre todo en los registros más agudos y graves. Para contrarrestar este efecto, los afinadores profesionales emplean la técnica conocida como *stretch tuning*, o afinación extendida, que consiste en ajustar las notas agudas ligeramente por encima de su frecuencia teórica, y las graves por debajo tal y como se ve en 5, con el fin de lograr que las octavas resulten más consonantes al oído humano. Este tipo de afinación aprovecha la manera en que percibimos la

Modelado Matemático

El modelo compilado por Fletcher en la década de 1960 en artículos como [11], que emplea la deducción que hizo Lord Rayleigh en su libro citado en [5], parte de la ecuación de ondas modificada siguiente para estudiar la vibración de una cuerda con rigidez:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{T}{\mu} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{ES\kappa^2}{\mu} \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \quad (23)$$

que añade a la ecuación (5) el módulo de Young E , la sección S y el radio de giro κ , que proviene del momento de inercia de la teoría de vigas, y dependerá de la estructura de la cuerda. Si contamos con la sección circular típica de cuerdas de guitarra, se cumple que κ es la mitad del radio. Para cuerdas con un núcleo hexagonal, como las cuerdas del bajo, κ valdrá lo mismo multiplicado por un factor de corrección $\sqrt{5/6}$, tal y como explica Jonathan A. Kemp en su artículo de 2020 [12]. La diferencia con la ecuación de ondas de una cuerda ideal es el término adicional dependiente de la cuarta derivada espacial, el cual introduce la rigidez del material en la ecuación de movimiento y es el causante de la aparición de la inarmonicidad. Este aparece por la interpretación de la teoría de vigas de Euler - Bernoulli para cuerdas [13].

La solución a esta ecuación se puede realizar de varias maneras. Lord Rayleigh empleó el método variacional para encontrar una frecuencia angular $\omega_n \approx E_c/V$ que respondiese a las energías cinética (E_c) y potencial (V) con las que vibraba la cuerda minimizadas con la función prueba $y(x, t) = A \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos(\omega_n t)$. Antes que él, Clebsch encontró la misma solución tratando el problema con separación de variables [4]. Ambos llegaron a la siguiente conclusión:

$$f_n = f_0 \sqrt{n^2 + Bn^4}, \quad (24)$$

donde B es el parámetro de inarmonicidad, que es adimensional y queda definido como:

$$B = \frac{\pi^2 ES\kappa^2}{TL^2}. \quad (25)$$

Este parámetro es crucial porque determina la magnitud del desplazamiento de los armónicos con respecto a los valores ideales. Cuanto mayor sea B , mayor será la inarmonicidad y más perceptible será el efecto en el sonido.

Para simplificar la fórmula superior en función del radio, se introduce una magnitud adimensional, K , que valdrá 1 o $\sqrt{5/6}$ siguiendo la definición de κ , de tal forma que se consigue $\kappa = K \cdot R/2$, siendo R el radio. Conseguimos con la definición de la sección $S = \pi R^2$ el coeficiente final:

$$B = \frac{\pi^3}{4} \cdot \frac{EK^2 R^4}{TL^2} \quad (26)$$

Estudiando los componentes de este factor B , se ve que la inarmonicidad es influenciada por distintos agentes asociados únicamente a la cuerda. Si su tensión o longitud es mayor, el valor de B disminuye, mientras que un incremento en el diámetro o en el módulo de Young, que da cuenta de la rigidez de la cuerda y su resistencia frente a deformaciones, aumenta el valor de B , intensificando la desviación de los armónicos.

Cabe notar que si el factor B se anula, la solución retorna a aquella del problema clásico de una cuerda ideal, con el carácter de las frecuencias de los armónicos como múltiplos de la frecuencia fundamental.

Ahora bien, comencemos por deducir la ecuación a resolver partiendo de la teoría de vigas de Euler - Bernoulli para incluir de rigidez de la cuerda. Esta define el concepto de momento flector de la cuerda como:

$$M(x) = -EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (27)$$

donde I es el momento de inercia de la cuerda. Este $M(x)$ induce una distribución de fuerza a lo largo de la cuerda en función de su rigidez, por lo que para encontrar la fuerza por unidad de longitud asociada a él tomamos su derivada con respecto a x dos veces:

$$F(x) = -\frac{d^2 M}{dx^2} = EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \quad (28)$$

Esta es la fuerza elástica que se opone a la deformación de la cuerda y que se debe a la rigidez del material. Con este término añadido a la ecuación de movimiento, esta combina la inercia (término de aceleración) con las fuerzas de restauración debidas a la tensión y a la rigidez, tal y como se observa en (23).

Si ahora resolvemos la ecuación por separación de variables tal y como hizo Clebsch [4], primero debemos proponer una solución del tipo $y(x, t) = X(x)T(t)$ y sustituirla en la ecuación:

$$X(x)T''(t) = \frac{T}{\mu} X''(x)T(t) - \frac{ES\kappa^2}{\mu} X^{(4)}(x)T(t) \quad (29)$$

Dividiendo ambos lados entre $X(x)T(t)$, se obtiene:

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{T}{\mu} \frac{X''(x)}{X(x)} - \frac{ES\kappa^2}{\mu} \frac{X^{(4)}(x)}{X(x)} = -\lambda \quad (30)$$

donde λ es una constante que nos relaciona las funciones de la solución al estar igualados dos miembros dependientes de diferentes variables. Con esto, podemos escribir dos ecuaciones:

- Temporal: $T''(t) + \lambda T(t) = 0 \Rightarrow T(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$, con $\omega = \sqrt{\lambda}$.
- Espacial:

$$\frac{T}{\mu} X''(x) - \frac{ES\kappa^2}{\mu} X^{(4)}(x) = -\lambda X(x) \Rightarrow X^{(4)}(x) - \frac{T}{ES\kappa^2} X''(x) + \frac{\mu\lambda}{ES\kappa^2} X(x) = 0 \quad (31)$$

Proponemos una solución sinusoidal, acorde a las condiciones de contorno (cuerda fija en ambos extremos):

$$X(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (32)$$

Calculamos las derivadas necesarias:

$$X''(x) = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad X^{(4)}(x) = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (33)$$

Sustituyendo en la ecuación espacial:

$$-\lambda \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = \frac{T}{\mu} \cdot \left[-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right] - \frac{ES\kappa^2}{\mu} \cdot \left[\left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right] \quad (34)$$

Agrupando términos:

$$\lambda = \frac{T}{\mu} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \frac{ES\kappa^2}{\mu} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 \quad (35)$$

Recordando que $\omega_n^2 = \lambda$, obtenemos:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{T}{\mu} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \frac{ES\kappa^2}{\mu} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^4} \quad (36)$$

Ajustando los factores para poder sacar factor común la frecuencia fundamental f_0 , tenemos con $\omega_n = 2\pi f_n$:

$$f_n = f_0 \cdot n \cdot \sqrt{1 + \frac{\pi^2 ES\kappa^2}{TL^2} \cdot n^2} \quad (37)$$

Definimos el coeficiente de inarmonicidad B como el término que acompaña a n^2 dentro de la raíz en la expresión de f_n . De esta manera, la frecuencia f_n queda como:

$$f_n = f_0 \sqrt{n^2 + Bn^4}, \quad (24)$$

donde B está dado por:

$$B = \frac{\pi^2 ES\kappa^2}{TL^2} \quad (25)$$

Sustituyendo κ tal y como se ha definido con anterioridad, obtenemos el resultado final para el coeficiente de inarmonicidad tal y como se refleja en (26):

$$B = \frac{\pi^2 E \cdot \pi R^2 \cdot \frac{K^2 R^2}{4}}{TL^2} = \frac{\pi^3}{4} \cdot \frac{EK^2 R^4}{TL^2} \quad (38)$$

Proceso experimental

El objetivo experimental de este Trabajo ha sido conseguir observar la inarmonicidad en cuerdas de diferente material y grosor. Se estudiaron distintas cuerdas: una de nailon con recubrimiento de plata para guitarras clásicas, una de níquel para bajo, una de acero para pianos y otra de acero con recubrimiento de níquel para guitarras eléctricas. Para el cálculo experimental del coeficiente B , se llevaron a cabo grabaciones directas sobre los instrumentos utilizando el osciloscopio de señal mixta *Tektronix MSO44*. Aunque en apariencia el procedimiento podría parecer sencillo, la obtención de datos con la precisión necesaria ha resultado considerablemente más compleja. La medición exacta de las frecuencias fundamentales y sus armónicos exige no solo una excitación controlada de las cuerdas, sino también una capacidad instrumental capaz de registrar señales con alta fidelidad durante tiempos prolongados.

Para ello, fue fundamental contar con un osciloscopio digital de altas prestaciones. El *Tektronix MSO44* ofrece una velocidad de muestreo de hasta 6,25 GS/s, con una capacidad de almacenamiento de hasta 31,25 megapuntos y una resolución de 12 bits en su convertidor analógico-digital (ADC), ampliable a 16 bits en su modo de alta resolución. Estas características, superiores a las de la mayoría de osciloscopios digitales estándar, han permitido realizar grabaciones prolongadas de varios minutos, a partir de las cuales se ha podido obtener un análisis espectral detallado mediante transformadas de Fourier, con una precisión en frecuencia que alcanza el orden del milihercio.

Durante la toma de datos, se registró la señal acústica producida por la cuerda tras ser pulsada cuidadosamente. Se buscó excitar la cuerda en una zona próxima a uno de sus extremos, con el objetivo de suprimir el menor número posible de armónicos. En el caso del piano, la excitación se realizó a través del mecanismo habitual del instrumento, que golpea la cuerda aproximadamente a 1/7 de su longitud total, una elección constructiva que elimina el primer armónico disonante con la nota fundamental. Debido a la imposibilidad de trasladar el instrumento al laboratorio, se recurrió a una grabación externa utilizando un dispositivo móvil, que, sorprendentemente, ha conseguido

ofrecer resultados suficientemente precisos para el análisis que se pretendía realizar. En el resto de casos, se empleó el micrófono *Yamaha POCKETRAK PR7*.

Para poder comparar las distintas cuerdas a una misma frecuencia, se empleó la nota dada por la quinta cuerda de la guitarra clásica, la cual encuentra su afinación natural en la nota musical A2, en los 110 Hz. El resto de instrumentos se hicieron sonar pulsando la cuerda o la tecla asociada a esta frecuencia.

El análisis óptimo de la inarmonicidad requiere un gráfico clave en el que se representan las diferencias entre las frecuencias de los armónicos conseguidos con la transformada de Fourier de la señal y los armónicos teóricos, los múltiplos de la frecuencia fundamental. Desarrollando la idea sobre el papel y a partir de las expresiones (10) y (24), tenemos que la diferencia entre los armónicos enésimos experimentales y teóricos es:

$$\Delta f = f_{exp,n} - f_{teo,n} = f_0 \cdot \left(\sqrt{n^2 + Bn^4} - n \right) \quad (39)$$

Cabe destacar que las frecuencias de los armónicos experimentales siempre han tomado valores mayores que los teóricos, tal y como predice el concepto de la inarmonicidad, permitiendo hacer la resta en ese orden y que esta dé un número positivo. A partir de un ajuste, se consigue un valor experimental del coeficiente de inarmonicidad, al que denominaremos B_{exp} . Compararemos este dato con aquel conseguido a partir de la ficha técnica de las cuerdas con cuya información podemos tabular la expresión (26).

Podríamos entonces representar tres diferencias de frecuencia sobre la misma gráfica: la anotada experimentalmente (Exp), aquella asociada al B_{exp} calculado (Ajuste) y la esperada con B_{teo} (Teo). Ahora bien, la tabulación de este último valor representa un problema clave, ubicándose ocasionalmente por encima de B_{exp} , cuando lo esperable es lo contrario por el aumento de la inarmonicidad de la cuerda con el paso del tiempo. Aunque se conocen los materiales y su módulo de Young, en el cálculo de B_{teo} se han usado directamente estos valores tabulados de E aportados en [14], sin considerar los efectos que tienen los entorchados o recubrimientos sobre ellos. Esto hace que B_{teo} difiera notablemente del valor experimental, ya que dichos tratamientos reducen el módulo de Young para minimizar la inarmonicidad. Por ello, en los diagramas donde (Teo) queda fuera de escala, solo se muestra (Exp) y (Ajuste).

Con el fin de esclarecer esta incoherencia, para algunos de nuestros instrumentos podremos comparar los valores hallados con aquellos otorgados por Murray [10], el cual muestra tanto el ajustado como el tabulado. Así podremos discernir cuál de nuestros dos valores, teórico o experimental, es compatible con los suyos.

Monocordio y guitarra clásica

Pasando ya a observar nuestros resultados, estudiemos primeramente la cuerda del monocordio y la guitarra clásica. Tuve la suerte de contar con el monocordio fabricado personalmente por mi tutor, don Germán González, al que agradezco el esfuerzo. El objetivo de su construcción y uso fue la eliminación de resonancias que otorga la caja de la guitarra clásica, pudiendo comparar la inarmonicidad con y sin resonancias en la misma cuerda. Vemos en la figura 6 el monocordio junto al osciloscopio y el micrófono empleados en este experimento.

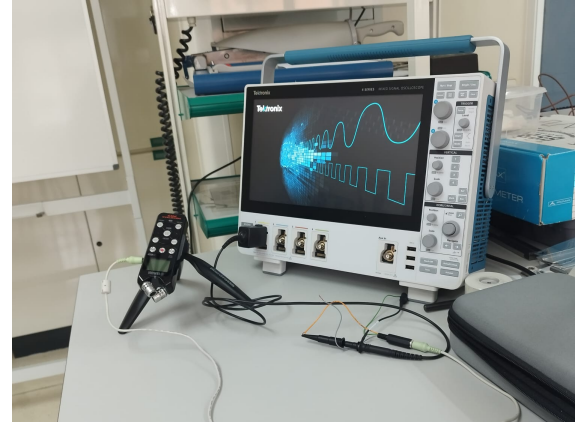


Figura 6: Monocordio, osciloscopio y micrófono empleados en el experimento

La medida empleada para el cálculo de B dio como resultado la siguiente FFT y el espectrograma, que expone la intensidad de cada armónico en función del tiempo con un código de color:

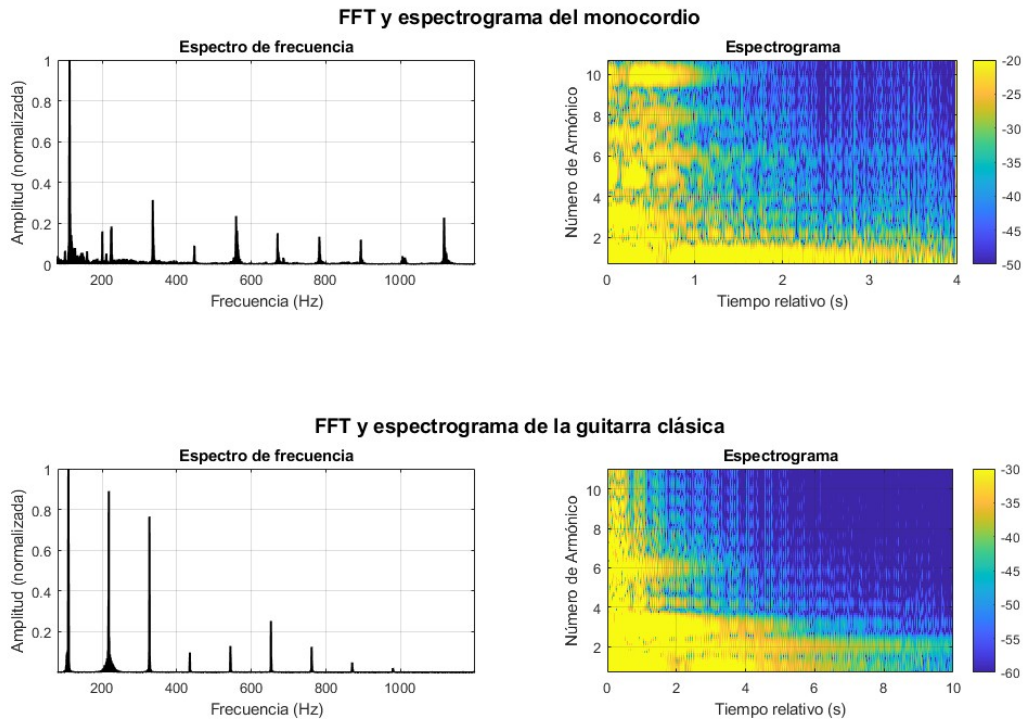


Figura 7: FFT y espectrograma de las medidas tomadas sobre el monocordio y la guitarra clásica

Comparando ambas FFT podemos ver que es más limpia aquella de la guitarra clásica, lo que se debe a la mayor amplitud de los armónicos ya que la medida se ha tomado con el mismo ruido para ambas al estar realizadas sobre las mismas condiciones. En el caso del espectrograma, la guitarra clásica responde mejor a esa caída de intensidad de $1/n^2$ sobre cada armónico, mientras que en el monocordio sus armónicos parecen dejar de sonar a partir del primer segundo. Podemos interpretar aquí la influencia que tiene una caja de resonancia en la evolución temporal de los armónicos, preservando mejor los armónicos intermedios.

Como se cuenta con la misma cuerda, el valor teórico de B es el mismo para los dos casos, $B_{\text{teo}} = (1,846 \pm 0,902) \cdot 10^{-5}$, si usamos como módulo de Young el del nailon, $E \approx 2,5$ GPa. Para

ambos casos se consigue alcanzar el orden de magnitud del valor ajustado, que toma el valor de $B_{\text{exp}} = (9,276 \pm 3,152) \cdot 10^{-5}$ para el monocordio y $B_{\text{exp}} = (5,298 \pm 1,305) \cdot 10^{-5}$ para la guitarra clásica. Podemos comparar estos valores con los que otorga Murray, $B_{\text{teo}} = (3,61 \pm 0,13) \cdot 10^{-5}$ y $B_{\text{exp}} = (4,23 \pm 0,03) \cdot 10^{-5}$, pudiendo afirmar con una certeza sólida la cercanía de nuestros resultados. En este caso sí cobra sentido físico representar los tres pares de datos, otorgando el siguiente gráfico:

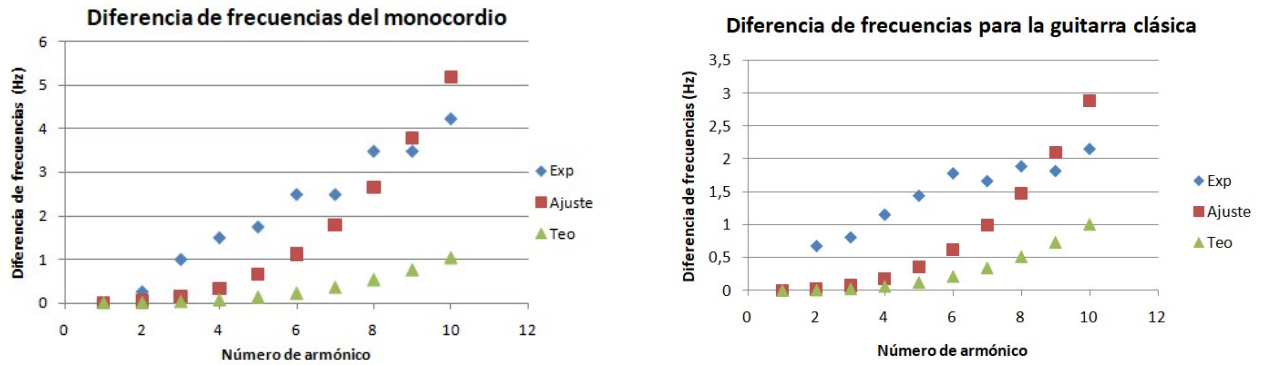


Figura 8: Diferencia de armónicos para la misma cuerda en el monocordio y en la guitarra clásica

Lo que nos puede llegar a decir este gráfico y la incompatibilidad de los dos valores es que la cuerda ha ido ganando inarmonicidad con su antigüedad. Ambas cuerdas se colocaron en sus instrumentos en la misma fecha del mes de noviembre de 2024, tomándose estas medidas en abril de 2025, por lo que posiblemente una medida con un cordaje a estrenar se acercaría más a B_{teo} . Hay que tener en cuenta que los guitarristas cambian su juego de cuerdas como máximo a los tres meses de antigüedad para ensayos, mientras que para espectáculos siempre emplean cordajes nuevos. Es curioso cómo ambos sufren la misma caída frecuencial en los armónicos 6-9, dejando de seguir la línea inicial.

Bajo

La FFT y el espectrograma para este caso han tomado la siguiente forma:

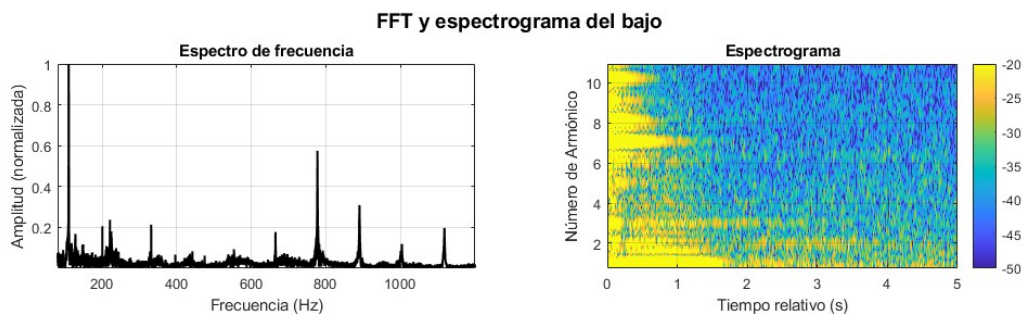


Figura 9: FFT y espectrograma de las medidas tomadas sobre el bajo

En este caso volvemos a contar con una FFT algo más distorsionada por el escaso volumen del bajo, que se hizo sonar sin amplificación, apareciendo un pico cerca del segundo armónico por un ruido propio de la sala. No aparecen con intensidad el cuarto y quinto armónico por lo que en el espectrograma no podemos observar la regla de caída de armónicos.

Las cuerdas del bajo poseen un núcleo hexagonal, cambiando el factor K , pero es la determinación del módulo de Young la que causa complicaciones. El valor tabulado se ha hallado con el E asociado al material de la cuerda, el níquel, pero sin tener en cuenta el entorchado. Este, de alguna manera, debería reducir E de tal forma que el coeficiente B satisfaga lo observado experimentalmente, al menos hasta cierto punto. En nuestro caso, se ha fijado su valor en un orden por encima del del ajuste, exactamente en $B_{\text{teo}} = (3, 512 \pm 1, 766) \cdot 10^{-3}$, teniendo $B_{\text{exp}} = (4, 138 \pm 0, 646) \cdot 10^{-4}$. La representación gráfica es la siguiente:

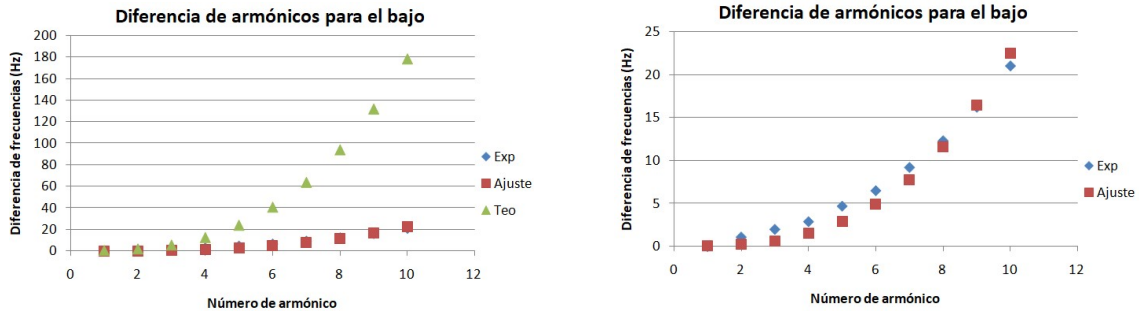


Figura 10: Diferencia de armónicos para el bajo con y sin la predicción teórica

Para completar este estudio deberíamos conseguir un valor del módulo de Young de la cuerda de manera directa, lo que no se ha podido realizar. Esto corregiría la única magnitud de la expresión de B_{teo} que puede alterar el resultado final, ya que el resto no tienen margen de cambio posible. Ahora bien, este valor del coeficiente B es el primero que se calcula para una cuerda de bajo, ya que Murray solo trabaja con cuerdas de guitarras y piano, mientras que Kemp no llega a calcularlo en su artículo.

Piano

En la FFT del piano podemos estudiar lo que afirma Fletcher acerca de la caída de intensidad de la frecuencia fundamental respecto de sus armónicos superiores. Efectivamente, observando nuestros datos uno se percata de su escasa amplitud en comparación con algunos de los armónicos. La FFT y el espectrograma son los siguientes:

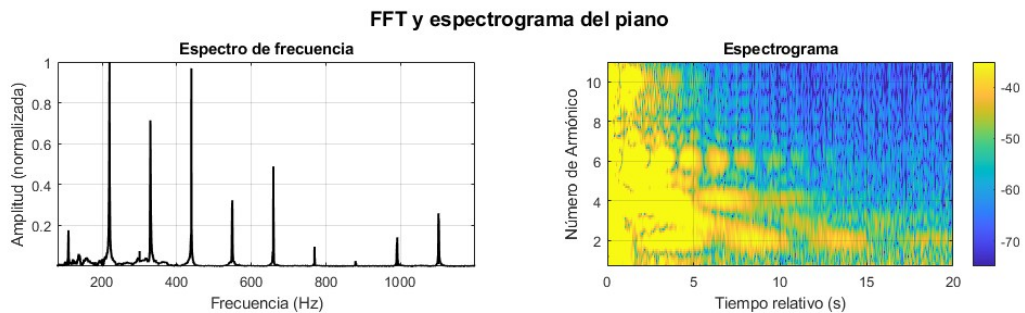


Figura 11: FFT y espectrograma de las medidas tomadas sobre el piano

Se observa una intensidad inusual para los primeros armónicos sin contar la frecuencia fundamental, la cual no se muestra con la misma presencia. Tal y como se ha explicado previamente, la complicada estructura del piano brinda unas resonancias tales que permite ofrecer esta riqueza armónica para el registro grave. Este fenómeno otorga al músico un timbre más ajustado entre

graves y agudos, los cuales cohesionan sus intensidades sonoras a la perfección al conjuntar sonidos graves, medios y agudos en una obra musical.

Pasando al estudio de B , en este caso se contaba con una cuerda de una antigüedad de afinación de un año, que es justo el tiempo recomendado para reafinar el cordaje de pianos de ensayo. Con esta premisa en mano, se consiguieron valores de $B_{\text{exp}} = (2,170 \pm 0,649) \cdot 10^{-4}$ y $B_{\text{teo}} = (5,950 \pm 2,106) \cdot 10^{-4}$. Nos vuelve a aparecer por tanto esta diferencia creciente al igual que en el bajo, pero en un menor rango. Aparte de la posible inexactitud en el valor de E del acero, esta diferencia debería ser incluso mayor si contásemos con una cuerda recién afinada. Por su parte, Murray tabula estos valores en $B_{\text{exp}} = (3,66 \pm 0,03) \cdot 10^{-4}$ y $B_{\text{teo}} = (3,54 \pm 0,07) \cdot 10^{-4}$ para una cuerda sin entorchado, lo que supone también una influencia en su valor a pesar de la cercanía a nuestros resultados. Para esta nota musical, el piano que hemos empleado golpea en realidad a dos cuerdas con entorchado de cobre, sistema para el cual no existe un desarrollo matemático que trate la inarmonicidad, por lo que desconocemos su efecto exacto. Las diferencias de frecuencia son las siguientes:

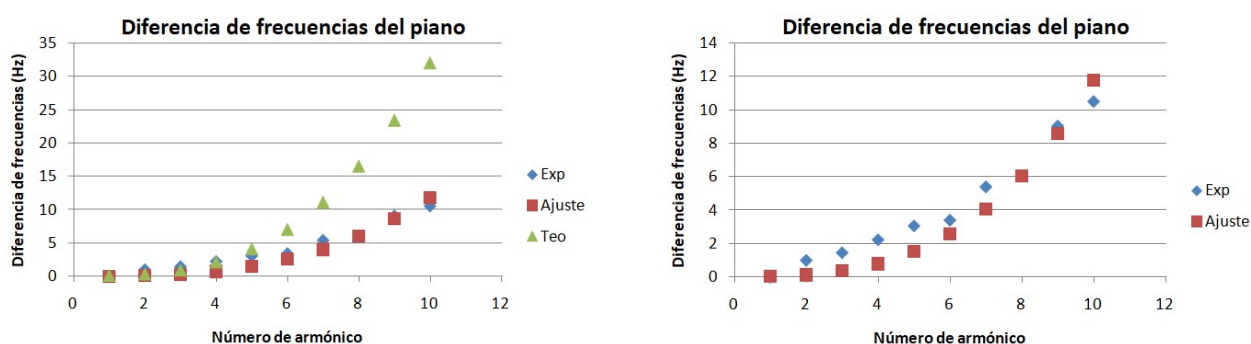


Figura 12: Diferencia de armónicos para el piano con y sin la predicción teórica

De nuevo nos encontramos con el problema del módulo de Young, cuyo valor exacto nos colocaría en otra situación para poder realizar un análisis adecuado comparando teoría y experimento. No obstante, sí es cierto que los valores hallados se encuentran en el mismo orden de magnitud de aquellos de Murray, por lo que la desafinación, el entorchado y el módulo de Young incorrecto pueden darnos una explicación de esta diferencia.

Guitarra eléctrica

Por último, la FFT y el espectrograma de la guitarra eléctrica tomaron la siguiente forma:

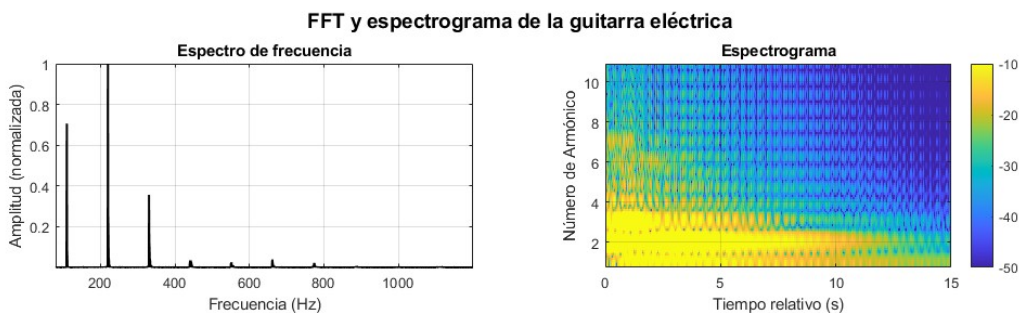


Figura 13: FFT y espectrograma de las medidas tomadas sobre la guitarra eléctrica

En este caso se decidió tomar la medida con amplificación para observar un cambio esperable

para la FFT: que fuese más limpia que sin amplificación, como el caso del bajo. Efectivamente esto se puede comprobar, además de ver que los armónicos apenas cobran intensidad más allá del tercero. Cabe decir que la cuerda empleada también posee una antigüedad mayor de seis meses.

Contando ahora con una cuerda de acero recubierta de níquel, nos enfrentamos nuevamente al problema del módulo de Young que no se ajusta a la realidad. Los coeficientes calculados son $B_{\text{exp}} = (2,149 \pm 0,643) \cdot 10^{-5}$ y $B_{\text{teo}} = (5,325 \pm 2,668) \cdot 10^{-4}$, mientras que las gráficas ahora muestran lo siguiente:

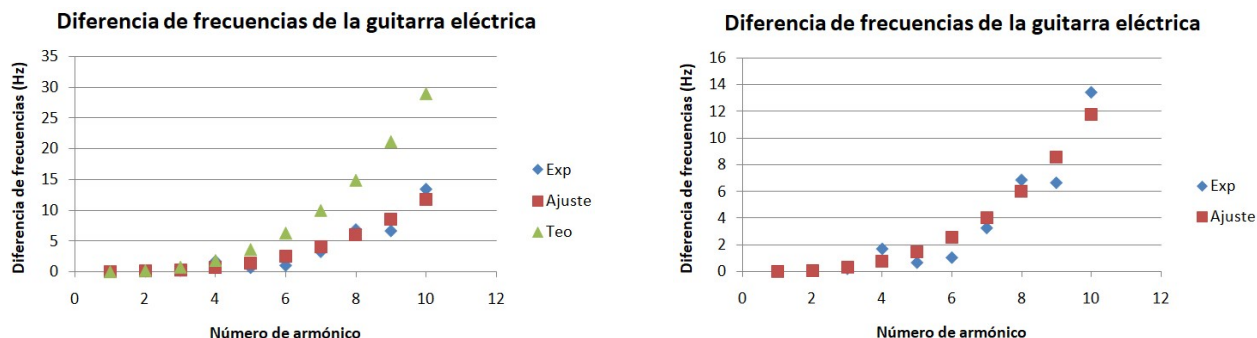


Figura 14: Diferencia de armónicos para la guitarra eléctrica con y sin la predicción teórica

Vemos aquí cómo la predicción apunta de nuevo a una diferencia de frecuencias teórica mayor, de manera que ese recubrimiento en níquel debe disminuir E para poder explicar lo observado experimentalmente. Eso sí, los valores se acercan sin compatibilidad al orden de magnitud de aquellos recabados por Murray. Estos son $B_{\text{exp}} = (1,10 \pm 0,01) \cdot 10^{-5}$ y $B_{\text{teo}} = (1,14 \pm 0,04) \cdot 10^{-5}$.

Discusión

La sección práctica de este Trabajo ha ofrecido unos valores experimentales del coeficiente de inarmonicidad satisfactorios en contraste con una predicción teórica deficiente. El principal problema subyace en que no disponemos del valor tabulado del módulo de Young para las cuerdas de estudio, tal y como se ha ido comentando a lo largo del ensayo y como se ha podido ver en la influencia que este defecto tiene en los resultados. El análisis sería completo si se contase con unos valores precisos de esta magnitud que, al incorporarlos a nuestra teoría, complaciesen las observaciones. No obstante, se ha conseguido cumplir con los objetivos dentro de cierto margen de certeza además de haber podido tabular el valor del coeficiente B para una cuerda de un bajo, lo que ha sido realizado por primera vez aquí en la comunidad científica. Los resultados obtenidos, comparados con aquellos esperados según Murray en su artículo [10] en los casos disponibles, han sido los siguientes:

Instrumento	Valor experimental		Valor teórico	
	Obtenido	Esperado	Obtenido	Esperado
Monocordio	$(9,276 \pm 3,152) \cdot 10^{-5}$	$(4,23 \pm 0,03) \cdot 10^{-5}$	$(1,846 \pm 0,902) \cdot 10^{-5}$	$(3,61 \pm 0,13) \cdot 10^{-5}$
Guitarra clásica	$(5,298 \pm 1,305) \cdot 10^{-5}$	$(4,23 \pm 0,03) \cdot 10^{-5}$	$(1,846 \pm 0,902) \cdot 10^{-5}$	$(3,61 \pm 0,13) \cdot 10^{-5}$
Bajo	$(4,138 \pm 0,646) \cdot 10^{-4}$	-	$(3,512 \pm 1,766) \cdot 10^{-3}$	-
Piano	$(2,170 \pm 0,649) \cdot 10^{-4}$	$(3,66 \pm 0,03) \cdot 10^{-4}$	$(5,950 \pm 2,106) \cdot 10^{-4}$	$(3,54 \pm 0,07) \cdot 10^{-4}$
Guitarra eléctrica	$(2,149 \pm 0,643) \cdot 10^{-5}$	$(1,10 \pm 0,01) \cdot 10^{-5}$	$(5,325 \pm 2,668) \cdot 10^{-4}$	$(1,14 \pm 0,04) \cdot 10^{-5}$

Como vemos, cuesta encontrar compatibilidad entre estos datos pero todos ellos se encuentran dentro del orden de magnitud esperado. Estas diferencias pueden explicarse por la antigüedad de la cuerda y la influencia del ambiente, tanto temperatura como ruido, para los valores experimentales mientras que para los teóricos el fallo reside en ese incorrecto módulo de Young.

Conclusiones

En cualquier caso, más allá de las diferencias entre valores teóricos y experimentales, el proceso de análisis ha sido especialmente significativo para mí. No solo por haber obtenido por primera vez un valor experimental del coeficiente de inarmonicidad B para un bajo eléctrico, sino porque este trabajo me ha permitido acercarme desde un punto de vista científico a un fenómeno que, aunque poco tratado en el ámbito musical, tiene una influencia real en cómo suenan y se comportan los instrumentos de cuerda.

La inarmonicidad rara vez forma parte de la formación de un músico. Es un concepto técnico, casi exclusivo de luthiers y afinadores, y que sin embargo afecta directamente al timbre, a la afinación y a la interpretación. Estudiarla me ha ofrecido una perspectiva más completa sobre un elemento esencial de muchos instrumentos que llevo años tocando y escuchando, y me ha permitido conectar mi formación científica con una trayectoria musical que ha estado siempre muy presente en mi vida.

Desde que empecé a tocar el piano con tres años, la música ha sido una constante. Aunque dejé el grado profesional en tercero para centrarme en mis estudios universitarios, nunca me alejé del todo: continué en el Coro de Jóvenes de Madrid, una de las agrupaciones vocales más galardonadas tanto a nivel nacional como internacional de los últimos años, y también me he podido subir al escenario en pequeños eventos como guitarrista y bajista. Todos estos instrumentos, en los que la cuerda es protagonista, me han acompañado durante años desde el plano artístico, y ahora este trabajo me ha ayudado a comprenderlos desde otra perspectiva, para conocer los aspectos físicos detrás del sonido y valorar aún más el equilibrio entre intuición musical y conocimiento técnico.

Bibliografía

- [1] Randel, D. M. (Ed.). (1986). *Diccionario Harvard de música*. Cambridge, MA: Harvard College.
- [2] d'Alembert, J. L. R. (1747). *Recherches sur les cordes vibrantes*. Berlín: Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres.
- [3] Fourier, J. (1822). *Théorie analytique de la chaleur*. Paris: Firmin Didot.
- [4] Clebsch, A. (1862). *Theorie der Elasticität fester Körper*. Leipzig: B. G. Teubner.
- [5] Strutt, J. W. (1877). *The Theory of Sound*. Londres: Macmillan.
- [6] Kromhout, M. J. (2020b). *The Unmusical Ear: Georg Simon Ohm and the Mathematical Analysis of Sound*. *Isis*, 111(3), 471-492. <https://doi.org/10.1086/710318>
- [7] Helmholtz, H. (1877). *Die Lehre von den Tonempfindungen als physiologische Grundlage für die Theorie der Musik*. Braunschweig: Vieweg.
- [8] Fletcher, N. H.; Rossing, T. D. (1991). *The physics of musical instruments*. Nueva York: Springer-Verlag.
- [9] Hall, D. (1992). Piano string excitation. VI: Nonlinear modeling. *Journal of The Acoustical Society of America - J ACOUST SOC AMER.* 92. 95-105. 10.1121/1.404027.
- [10] Murray, C. (2021). *Musical String Inharmonicity*. *ASTRA - The McNair Scholars' Journal*.
- [11] Fletcher, N. H. (1964). *Normal vibration frequencies of a stiff piano string*. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 36(1), 203-209.
- [12] Kemp, J.A. (2020). *On inharmonicity in bass guitar strings with application to tapered and lumped constructions*. *SN Appl. Sci.* 2, 636. <https://doi.org/10.1007/s42452-020-2391-2>
- [13] Gere, J. M.; Timoshenko, S. P. (1997). *Mechanics of Materials*. Boston: PWS.
- [14] Brady, G. S., Clauser, H. H., Vaccari, J. A. (2002). *Materials Handbook: An Encyclopedia for Managers, Technical Professionals, Purchasing and Production Managers, Technicians, and Supervisors*. Nueva York: McGraw-Hill.

