UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS
Departamento de Ecuaciones Funcionales

TESIS DOCTORAL

Un problema no-lineal con frontera libre

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR
PRESENTADA POR

José, Carrillo Menéndez

DIRECTOR:

Jesús Ildefonso Díaz Díaz

Madrid, 2015

José Carrillo Menéndez

UN PROBLEMA NO-LINEAL CON FRONTERA LIBRE

Departamento de Ecuaciones Funcionales
Facultad de Ciencias Matemáticas
Universidad Complutense de Madrid
1981

Edita e imprime la Editorial de la Universidad
Complutense de Madrid. Servicio de Reprografía
Noviciado, 3 Madrid-8
Madrid, 1981
Xerox 9200 XB 480
Depósito Legal: M-17698-1981

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE MATEMATICAS

UN PROBLEMA NO-LINEAL CON FRONTERA LIBRE

Memoria que presenta José Carrillo Menéndez para optar al grado de Doctor

Madrid, Noviembre 1980

JOSE CARRILLO MENENDEZ

UN PROBLEMA NO-LINEAL CON FRONTERA LIBRE

Director: D. Jesús Ildefonso Díaz Díaz
Prof. Agregado de la Universidad de Santander.

Ponente: D. Baldomero Rubio Segovia
Prof. Agregado de la Universidad Complutense de Madrid

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE MATEMATICAS
Dpt° De ECUACIONES FUNCIONALES

Madrid, Noviembre 1980

a mís padres
a Alicia

Demostración. Si en un punto (x_o,y) de Ω, con $y > y_o$ tuviésemos $p(x_o,y) > 0$, entonces por el lema I.2 anterior también tendríamos $p(x_o,y_o) > 0$ lo cual entra en contradicción con la hipótesis del corolario.

El siguiente teorema aporta más datos en cuanto a la continuidad de la solución:

Teorema I.3. *Sea* (p,g) *una solución de* (P), *entonces* $p \in C(\Omega \cup (S_2 \overset{\circ}{\cup} S_3))$.

Demostración. Sabemos ya que $p \in C(\Omega)$, tenemos, por lo tanto, que demostrar que p es continua hasta $(S_2 \overset{\circ}{\cup} S_3)$. Sea $(x_o,y_o) \in (S_2 \overset{\circ}{\cup} S_3)$, y sea ζ una función regular, igual a 1 en un entorno de (x_o,y_o) y de soporte K tal que $d(K,S_1) > 0$. Si Ω' es un abierto de borde lipschitziano contenido en Ω y tal que $\Omega \cap K \subset \Omega'$, entonces en Ω' tenemos:

$$\begin{aligned}\Delta(\zeta p) &= 2\nabla\zeta \cdot \nabla p + \Delta\zeta p + \zeta\Delta p \\ &= 2\nabla\zeta \cdot \nabla p + \Delta\zeta p - \zeta g_y \quad \text{(por el teorema I.2.(i))} \\ &= (-\zeta g)y + \zeta_y g + 2\ \nabla\zeta\nabla p + \Delta\zeta p\end{aligned}$$

Por otra parte en $\partial\Omega'$, borde Ω' tenemos:

$$\zeta p = 0 \quad \text{en} \quad \partial\Omega' \cap \Omega$$

$$\zeta p = \zeta\phi \quad \text{en} \quad \partial\Omega' \cap S$$

Entonces dado que $(p,g) \in H^1(\Omega) \times L^\infty(\Omega)$ (aplicando por ejemplo el teorema 8.30 p.196 de |40|), se deduce que $\zeta p \in C(\overline{\Omega}')$ luego como $\zeta = 1$ en un entorno de (x_o,y_o), $\zeta p = p$ en ese entorno y entonces p es continuo en (x_o,y_o). |28|.

El siguiente lema aporta más datos sobre el conjunto $|p > 0|$:

Lema I.3. *Sea* (p,g) *una solución de* (P); *para todo* $(x,y) \in \Omega$ *tal que* $(x,f^+(x)) \in S_3$ *tenemos* $p(x,y) > 0$.

Demostración. Por hipótesis S_3 es abierto y por lo tanto el teorema anterior asegura la continuidad de p hasta S_3; por otra parte en S_3 tenemos $p(x,f^+(x)) = h_i - f^+(x) > 0$, entonces p es mayor que 0 en un entorno de $(x,f^+(x))$ aplicando ahora el lema I.2 obtenemos la conclusión.

Veamos a continuación un resultado técnico que utilizaremos a menudo en lo sucesivo:

Lema I.4. *Sea* (p,g) *una solución de* (P); *sean* x_o, x_1 *y* h *tres números reales y sea*

$$Z_h = [x_o, x_1] \times [h, +\infty[\quad \text{un subconjunto de} \quad \mathbb{R}^2,$$

suponemos que $(\overline{Z_h \cap \Omega}) \cap S_3 = \emptyset$ *y que para* $i=0,1$, $p(x_i,y) = 0$ $\forall (x_i,y) \in Z_h \cap \Omega$. *Entonces tenemos:*

$$\int_{\Omega \cap Z_h} (gp_y + g^2) \leq \int_{\Omega \cap Z_h} (p_y + g) \leq 0$$

Demostración. La primera desigualdad es obvia ya que $gp_y = p_y$ para casi todo punto de Ω (dado que en $|p < 0|$, $g=1$ y que $p_y = 0$ en casi todo punto de $|p = 0|$) además $g^2 \leq g$ en casi todo punto de Ω (dado que $0 \leq g \leq 1$ en casi todo punto), por lo tanto, sólo queda por demostrar la segunda desigualdad. Vamos a suponer que $x_i \in \pi_x(\Omega)$ para $i=0,1$, siendo los casos alternativos (i.e. $x_i \notin \pi_x(\Omega)$ para $i=0$ ó 1)

INTRODUCCION

Como es conocido un gran número de problemas de la física pueden expresarse en forma matemática mediante problemas no-lineales. El objeto de esta memoria es el estudio de un problema de frontera libre que traduce el modo de filtración de un fluido a través de un medio poroso homogéneo. Más concretamente estudiaremos la filtración en régimen estacionario basándonos en una formulación reciente (1978) debida a H. Brezis, D. Kinderlehrer y G. Stampacchia |19| que plantea el problema en los siguientes términos:

$$(P)\quad \begin{cases} \text{Encontrar un par } (p,g) \in H^1(\Omega)\times L^\infty(\Omega) \text{ tal que} \\ p \geq 0 \text{ en casi todo punto de } \Omega \text{ y } p=\phi \text{ en } S_2\cup S_3 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (\phi\equiv 0 \text{ en } S_2) \\ g \in \operatorname{sig}^+ p \text{ en casi todo punto de } \Omega \\ \int_\Omega \nabla p.\nabla\xi + \int_\Omega g.\xi_y \leq 0 \quad \forall\xi\in H^1(\Omega) \quad \xi=0 \text{ en } S_3,\ \xi\geq 0 \text{ en } S_2; \end{cases}$$

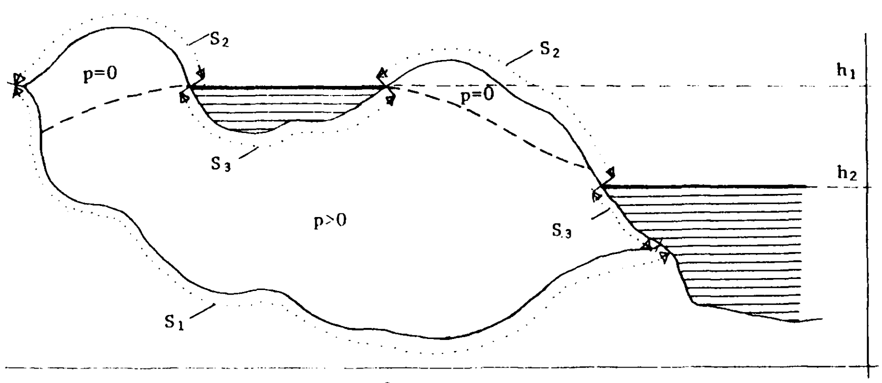

Fig.0

donde p representa la presión (normalizada) del fluido en el medio poroso Ω, g representa (aproximadamente) la función característica de la zona mojada, S_1 es una capa impermeable, S_2 la parte del borde que está al aire libre y S_3 la parte del borde cubierta por el fluido (S_3 representa el fondo de unos embalses que contienen el líquido) siendo ϕ la presión de este en $S_2 \cup S_3$.

Debido a sus aplicaciones prácticas, el problema de la filtración de un fluido en un medio poroso es, desde hace tiempo, objeto de estudio por parte de físicos e ingenieros (|42|, |48|, |50|, |52|). Sin embargo, los resultados teóricos que se utilizaban estaban, en general, basados en consideraciones heurísticas aunque en la práctica su utilización fuese satisfactoria.

En 1970 el Instituto de Hidráulica de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Pavia, dirigido por el Profesor U. Maione, propuso al Laboratorio de Análisis Numérico del Centro Nacional de Investigación (C.N.R.) de Pavia, dirigido por el Profesor C. Baiocchi, el estudio de algunos problemas en relación con el modo de filtración de los líquidos a través de medios porosos. Fruto de esta colaboración son los trabajos de C. Baiocchi y de V. Comuncioli, L. Guerri, E. Magenes, G.A. Pozzi y G. Volpi (de los que se encontrará una amplia referencia en la bibliografía de esta memoria). Estos trabajos resuelven varios casos particulares en los que la geometría (cuadrilátera en general) del medio poroso permite plantear el problema como la minimización de una funcional cuadrática.

Posteriormente, numerosos investigadores se han interesado a distintos aspectos del problema. Entre ellos destacaremos H.W. Alt, L.A. Caffareli, M. Chipot, A. Friedman, G. Gilardi, R. Jensen, G. Stampacchia,

A. Torelli y A. Visintin (se encontrarán las referencias de estos trabajos en la bibliografía de esta memoria).

Por fin, en 1978, H. Brezis, D. Kinderlehrer y G. Stampacchia |19| demuestran la existencia de soluciones para el problema estacionario introduciendo la nueva formulación expuesta más arriba, en el caso de un medio poroso de forma cualquiera y plantean como problema abierto el de la unicidad de la solución.

En esta memoria, estudiamos distintos aspectos del problema tomando como punto de partida este último resultado de existencia. Este trabajo se desarrolla a lo largo de 3 capítulos.

Las secciones 1 y 2 del primer capítulo estan dedicadas a la exposición del problema y de los resultados previos, así como a la demostración de resultados técnicos. En la tercera sección se pone en evidencia la necesidad de restringir la definición de solución del problema (P): se demuestra (Teorema I.4 y ejemplo I.1) que la actual definición de solución admite la existencia en el interior del medio poroso de masas de fluido en reposo desconectadas de los embalses representados por S_3 lo cual supone la no-unicidad de la solución (ejemplo I.1). Se restringe entonces el conjunto de soluciones a las que llamaremos soluciones S_3-conexas (definición I.1) que son las que no admiten zonas mojadas desconectadas de S_3, se demuestra entonces que existen soluciones S_3-conexas del problema (P) y que toda solución del problema (P) es suma de una solución S_3-conexa y de un par (π,γ) donde π representa la presión de una masa de fluido en reposo y γ la función característica de la zona mojada por este fluido (teorema I.5).

En el segundo capítulo estudiamos dos aspectos del problema: por una parte la regularidad de la frontera libre y por otra la unicidad de la solución S_3-conexa así como la comparación de soluciones S_3-conexas correspondientes a distintos datos ϕ. Con respecto a la frontera libre (de la zona mojada) demostramos en la primera sección que esta coincide con el grafo de una función continua (Teorema II.4) se demuestra también que la frontera libre está por debajo de la altura máxima del fluido en los embalses. (Teorema II.1). En la cuarta sección demostramos los siguientes resultados de monotonía para la frontera libre:

1) Si S_3 es conexo es decir si el fluido que se filtra en el medio poroso proviene de un único embalse y si las partes de S_1 que estan debajo del nivel de la superficie del líquido en ese embalse son grafos monótonos entonces la frontera libre es monótona creciente a la izquierda del embalse y monótona decreciente a la derecha de éste. (Teoremas II.10 y II.11).

2) Si S_3 tiene dos componentes conexas, es decir, si el fluido que se filtra en Ω "proviene" de dos embalses y si las partes de S_2 que estan debajo del nivel más alto del fluido en los embalses son grafos monótonos, entonces la frontera libre es monótona creciente a la izquierda del primer embalse, monótona decreciente a la derecha del segundo y entre los dos tendremos dos eventualidades: a) la frontera libre es monótona (creciente o decreciente), b) existe un punto x_0 tal que a la izquierda de x_0 la frontera libre sea monótona decreciente y a la derecha monótona creciente. La eventualidad a) correspondería al caso en que el fluido que se filtra en el medio poroso proviene del embalse más alto, el segundo jugando el papel de "salida" del líquido, mientras que la eventualidad b) corresponde al caso en que el líquido "entra" a la vez por los dos embalses, saliendo por algún sector de S_2. (Teorema II.12).

Las técnicas utilizadas en esta parte se pueden generalizar a n embalses. Estos resultados generalizan resultados anteriores de C. Baiocchi |7| y de L.A. Caffarelli y G. Gilardi |23|.

En la sección 2 demostramos la unicidad de la solución S_3-conexa del problema (P) (Teorema II.6) así como un Teorema de comparación de las soluciones-S_3-conexas de dos problemas del tipo de (P) con datos ϕ distintos. En la sección 3 se estudia la unicidad (en el sentido fuerte) de la solución del problema (P). En concreto se hallan unas condiciones suficientes para que toda solución del problema (P) sea una solución S_3-conexa y por lo tanto para que el problema (P) tenga una única solución (Teorema II.9, Corolario II.3). Estas dos secciones generalizan el resultado de unicidad de C. Baiocchi para medios porosos de forma rectangular | 7 | y el de C. Baiocchi, V. Comincioli, E. Magenes y G.A. Pozzi para diques con geometrías simples (cuadriláteros en general) |15|. Se resuelve así el problema de la unicidad para un abierto cualquiera. En este capítulo se demuestra también que si (p,g) es una solución de (P) entonces g es la función característica de la zona mojada (Teorema II.5).

En el tercer y último capítulo estudiamos una generalización del problema (P) propuesta por el Profesor H. Brezis. Más concretamente estudiamos en un abierto acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ el siguiente problema

$$
(P(\beta)) \quad \begin{cases} (p,g) \in H^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \\ p \geq 0 \quad \text{en casi todo punto de } \Omega, \quad p = \phi \quad \text{en } S_2 \cup S_3 \quad (\phi=0 \text{ en } S_2) \\ g \in \beta(p) \quad \text{en casi todo punto de } \Omega \\ \int_\Omega (\nabla p + G).\nabla\xi \leq 0 \quad \forall \xi \in H^1(\Omega) \quad \xi = 0 \text{ en } S_3, \quad \xi \geq 0 \text{ en } S_2 \end{cases}
$$

donde $G = (\alpha_1 g, \ldots, \alpha_N g)$ *siendo los* α_i *coeficientes constantes,* ϕ *una función lipschitziana no negativa de* $\mathbb{R}^N$ *en* $\mathbb{R}$ *y* S_1, S_2 *y* S_3 *una partición del borde de* Ω.

Operadores parecidos al del problema $(P(\beta))$ $(Ap = \Delta p + \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \frac{\partial}{\partial n_i} \beta(p))$ *intervienen en distintos problemas; en particular aparecen en |41| y |44| para* β *regulares.*

En esta memoria, tratamos dos aspectos del problema $(P(\beta))$: *la existencia de soluciones y la existencia de una frontera libre. En la primera sección se demuestra la existencia de soluciones para el problema* $(P(\beta))$ *cuando* β *es un operador maximal monótono de* $\mathbb{R}$ *que pasa por el origen* $(0 \in \beta(0))$ *y que está acotado superiormente por una recta (existen dos números reales* a *y* b *tales que* $ar + b \geq s$, $\forall s \in \beta(r)$, $\forall r \in \mathbb{R}^+$) *(Teorema III.1). Este resultado generaliza el teorema de existencia de |19|* $(N = 2,\ \alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = 1,\ \beta = \text{sign}^+)$ *a una amplia clase de* β *no acotados. Utilizando una técnica de |19| se demuestra también que si* β *es lipschitziana entonces la solución es única. En la segunda sección se pone en evidencia mediante un ejemplo que si* β *no está acotado superiormente por una recta entonces no existe, en general, solución del problema si no se imponen hipótesis restrictivas sobre* Ω *ó sobre el dato* ϕ. *En la tercera y última sección se estudia la existencia de una frontera libre. Se establece, para su existencia, una condición suficien* te que recuerda fuertemente las condiciones para la extinción en tiempo finito de ciertos problemas de evolución de |17| y de |31|: para Ω lo suficientemente grande y si:

$$\int_0^1 \frac{ds}{\beta^o(s)} < \infty,$$

entonces el problema $P(\beta)$ es un problema de frontera libre (Teorema III.4). Se demuestra complementariamente que si β es lipschitziana en un entorno de 0 entonces no existe frontera libre.

Para el desarrollo de esta memoria se han necesitado algunos resultados técnicos sobre operadores maximales monótonos; se encontrará una recopilación de estos en el apéndice final.

CAPITULO I: PRIMEROS RESULTADOS

I.1. Formulación del problema y resultados previos

1.1. Notaciones

Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^2$, acotado y conexo, y de frontera S lipschitziana. (Ω representa la sección de un medio poroso). Llamamos S_1, S_2 y S_3 a 3 subconjuntos de S que forman una partición de S; S_1 representa una capa impermeable y S_3 la parte de S cubierta por agua de distintos embalses; suponemos que S_3 es un abierto de S y designamos por $S_{3,1}$, $S_{3,2}, \ldots, S_{3,n}$ las componentes conexas de S_3. Por fin, designamos por S_2 la parte de S en contacto con el aire, y suponemos $S_2 \overset{\circ}{\cup} S_3$ no vacío.

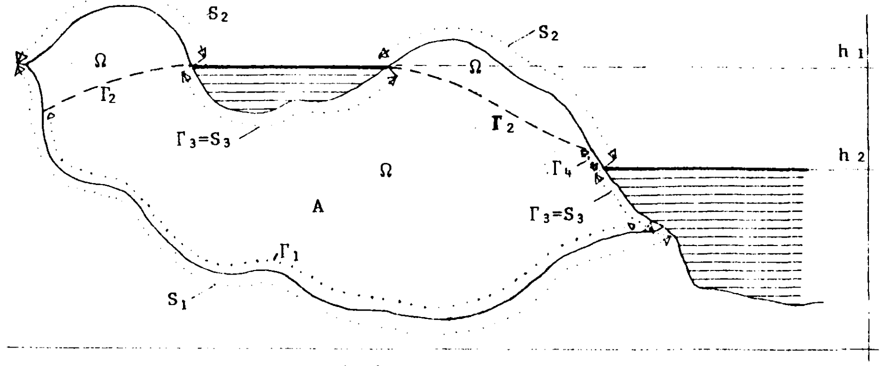

Fig.1

En este contexto utilizaremos las siguientes notaciones:

1.- Si p y q son 2 funciones definidas en Ω notaremos

$$|p > q| \text{ (resp. } |p \geq q|, \ |p = q|) = \{(x,y) \in \Omega \ / \ p(x,y) > q(x,y),$$

$$\text{(resp. } p(x,y) \geq q(x,y) \quad p(x,y) = q(x,y))\}$$

Ejemplos: 1) $q \equiv 0$

$$|p > 0| = \{(x,y) \in \Omega \ / \ p(x,y) > 0\}$$

2) $q = (h-y)^+$

$$|p > (h-y)^+| = \{(x,y) \in \Omega \ / \ p(x,y) > (h-y)^+\}.$$

2.- Sea A un subconjunto de Ω, notaremos

$$\gamma(A) = \text{función característica de } A$$

3.- $H^1(\Omega)$ representará el espacio de las funciones de $L^2(\Omega)$ cuyas derivadas primeras son también funciones de $L^2(\Omega)$.

$W^{1,s}(\Omega)$, (resp. $W^{1,s}_{Loc}(\Omega)$) representará el espacio de las funciones de $L^s(\Omega)$ $(s \geq 1)$ (resp. $L^s_{Loc}(\Omega)$) cuyas derivadas primeras son de $L^s(\Omega)$, (resp. $L^s_{Loc}(\Omega)$). $u \in L^s_{Loc}(\Omega) \iff \forall \Omega'$ tal que $\overline{\Omega}' \subset \Omega$ $u \in L^s(\Omega')$.

4.- Si q es una función de $H^1(\Omega)$, notaremos:

$$q_x = \frac{\partial}{\partial x} q, \qquad q_y = \frac{\partial}{\partial y} q$$

5.- Por fin, si $\xi \in H^1(\Omega)$, toda consideración hecha en esta memoria sobre los valores de ξ en S ó parte de S ha de entenderse en el sentido de las trazas; por ejemplo $\xi \geq 0$ en S_2 equivale a (traza de $\xi \geq 0$) en S_2.

1.2. Formulación fuerte.

El fluido se filtra a través de Ω planteandose el problema de determinar su presión $p = p(x,y)$, y la parte mojada de Ω : A.

La frontera de A se divide en cuatro partes (ver fig. 1): $\Gamma_1 \subset S_1$ es la parte impermeable, $\Gamma_2 \subset \Omega$ es la frontera libre de A, $\Gamma_3 = S_3$, y por fin $\Gamma_4 \subset S_2$ es la parte "mojada" de S_2. De estas cuatro partes, sólo Γ_3 está perfectamente determinada y constituye un dato del problema.

Experimentalmente, la velocidad del agua en A está relacionada con su presión mediante la ley de Darcy:

$$\vec{v} = -k \, \nabla(p + y)$$

(k es un coeficiente de permeabilidad). Si suponemos que el medio es homogéneo y k constante, la incomprensibilidad del fluido se traduce por:

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad \text{en} \quad \overset{\circ}{A}$$

i.e.

$$(1) \qquad \Delta p = 0 \quad \text{en} \quad \overset{\circ}{A}.$$

En lo sucesivo, supondremos normalizada la presión atmosférica es decir igual a 0 en S_2, y despreciaremos los posibles fenómenos capilares. En estas condiciones, si llamamos ϕ a la función que es igual a

0 en S_2 y es igual a la presión del agua en S_3 ($\phi(x,y) = h_i - y$ en $S_{3,i}$ si h_i representa el nivel de agua del embalse situado "sobre" $S_{3,i}$) las condiciones de frontera en p son las siguientes:

- condiciones de tipo Dirichlet:

(2) $$p = 0 \quad \text{en} \quad \Gamma_2 \cup \Gamma_4, \qquad p = \phi \quad \text{en} \quad \Gamma_3$$

- condiciones de tipo Neuman (llamamos $\vec{\nu}$ al vector normal exterior en el borde de A):

$$\vec{v} \,.\, \vec{\nu} = -k\, \nabla(p+y) \,.\, \vec{\nu} = 0 \qquad \text{en} \quad \Gamma_1 \cup \Gamma_2$$

lo que implica:

(3) $$\frac{\partial}{\partial \nu}(p + y) = 0 \qquad \text{en} \quad \Gamma_1 \cup \Gamma_2,$$

lo que traduce el hecho que el fluido no se difunde a través de Γ_1 y de Γ_2; por fin, tal como lo apuntan H. Brézis, D. Kinderlehrer y G. Stampacchia en |19|, podemos traducir la difusión del fluido a través de Γ_4 por

$$\vec{v} \,.\, \vec{\nu} = k\, \Gamma(p + y) \,.\, \vec{\nu} \geq 0 \qquad \text{en} \quad \Gamma_4$$

o sea

(4) $$\frac{\partial}{\partial \nu}(p + y) \leq 0 \qquad \text{en} \quad \Gamma_4.$$

El problema es entonces encontrar (p,A) satisfaciendo (1), (2), (3) y (4).

1.3. Formulación débil

Recogemos aquí la formulación de |19|. Supongamos encontrado un par (p,A) solución de (1), (2), (3) y (4) con p y el borde de A suficientemente regulares. Para $\xi \in C^1(\overline{\Omega})$, y siendo ν la normal exterior en el borde de A, tenemos mediante la fórmula de Green (ξ_y representa la derivada de ξ con respecto a y)

$$\int_A (\nabla p \,.\, \nabla\xi + \xi_y) = \int_A -\Delta p \; \xi + \int_{\partial A} \frac{\partial}{\partial\nu} (p+y) \,.\, \xi$$

$$= \int_{\Gamma_3 \cup \Gamma_4} \frac{\partial}{\partial\nu} (p+y)\xi \qquad \text{dados (1) y (3).}$$

Eligiendo ξ tal que $\xi = 0$ en S_3 y $\xi \geq 0$ en S_2 (bastaría $\xi \geq 0$ en Γ_4 pero Γ_4 no es conocido) obtenemos por (4):

$$\int_A (\nabla p \,.\, \nabla\xi + \xi_y) \leq 0 \qquad \forall\xi \in C^1(\overline{\Omega}) \text{ tal que } \xi = 0 \text{ en } S_3, \ \xi \geq 0 \text{ en } S_2$$

Siendo p igual a 0 en $\Omega \setminus A$, si $\gamma(A)$ se representa la función característica de A, esta desigualdad puede escribirse:

$$\int_\Omega (\nabla p \,.\, \nabla\xi + \gamma(A)\xi_y) \leq 0 \qquad \forall\xi \in C^1(\overline{\Omega}), \ \xi = 0 \text{ en } S_3, \ \xi \geq 0 \text{ en } S_2.$$

Estas consideraciones nos llevan a replantearnos la búsqueda de (p,A) (ó equivalentemente de $(p,\gamma(A))$ de forma más general:

$$
(P)\begin{cases}
\text{Encontrar un par } (p,g) \in H^1(\Omega) \times L^\infty(\Omega) \text{ tal que:} \\
\text{(i) } p \geq 0 \text{ en casi todo punto de } \Omega, \quad p = \phi \text{ en } S_2 \cup S_3 \quad (\phi=0 \text{ en } S_2) \\
\text{(ii) } g(x,y) \in \text{sign}^+ (p(x,y)) \text{ en casi todo punto de } \Omega \\
\text{(iii) } \int_\Omega (\nabla p \, \nabla \xi + g\, \xi_y) \leq 0 \quad \forall \xi \in H^1(\Omega), \ \xi = 0 \text{ en } S_3, \ \xi \geq 0 \text{ en } S_2
\end{cases}
$$

donde sig^+ es el siguiente grafo maximal monótono:

$$
\text{sig}^+ r = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad r < 0 \\ [0,1] & \text{si} \quad r = 0 \\ 1 & \text{si} \quad r > 0 \end{cases}
$$

Nos proponemos, en este capítulo, estudiar este problema (P).

1.4. <u>Un resultado previo: existencia de solución para el problema (P)</u>

Respecto a la existencia de soluciones, el problema (P) admite la siguiente respuesta:

<u>Teorema I.1</u>: |19| *Suponemos* ϕ *lipschitziana y* $\phi \geq 0$ *en* $S_2 \cup S_3$. *Entonces existe una solución* (p,g) *del problema* (P), *además* $p \in W^{1,s}_{Loc}(\Omega)$ $\forall s < \infty$.

Tal y como veremos en el capítulo III, el Teorema I.1 puede ser igualmente enunciado incluso para una clase amplia de problemas incluyendo (P).

I.2. Primeros resultados.

A fin de llevar a cabo nuestro estudio añadamos una hipótesis razonable sobre Ω; sea π_x la proyección sobre el eje O_x, paralelamente a O_y, entonces:

(H_1) $\quad \forall x \in \pi_x(\Omega), \quad \{x\} \times \mathbb{R} \cap \Omega$ es conexo.

Definamos entonces las funciones f^+ y f^- sobre $\pi_x(\Omega)$ por

$$f^+(x) = \mathrm{Sup}\,\{y \in \mathbb{R} \;/\; (x,y) \in \Omega\} \qquad \forall x \in \pi_x(\Omega)$$

$$f^-(x) = \mathrm{Inf}\,\{y \in \mathbb{R} \;/\; (x,y) \in \Omega\} \qquad \forall x \in \pi_x(\Omega)$$

y tenemos:

Lema I.1. *Con la hipótesis* (H_1), f^+ *y* f^- *son 2 funciones medibles de* $\pi_x(\Omega)$.

Demostración: Demostraremos el resultado para f^+ (para f^- la demostración es idéntica). Para que f^+ sea medible, es necesario y suficiente que para todo h, tengamos:

$$f^{+^{-1}}(]h,+\infty[) \quad \text{medible;}$$

ahora, es obvio comprobar que:

$$f^{+^{-1}}(]h,+\infty[) = \pi_x(\Omega \cap (\pi_x(\Omega) \times]h,+\infty[));$$

$f^{+^{-1}}(]h,+\infty[)$ es entonces un conjunto abierto y por lo tanto medible, lo que acaba la demostración.

Nota I.1. La hipótesis (H_1) no es estrictamente necesaria para la resolución de este problema, sin embargo, facilita tanto el enunciado como la demostración de los resultados; por otra parte, esta hipótesis es bastante natural en el problema que nos interesa.

En lo sucesivo, llamaremos h_i al nivel del agua sobre la componente conexa $S_{3,i}$ de S_3, para $i=1,2,\ldots,n$; y supondremos que estas componentes conexas están numeradas de forma que:

$$h_1 \geq h_2 \geq \ldots \geq h_n \ ;$$

supondremos también, que la función ϕ viene dada por:

$$\phi(x,y) = \begin{cases} h_i - y & \text{en} \quad S_{3,i} \qquad \forall i=1,2,\ldots,n \\ 0 & \text{en} \quad S_2 \end{cases}$$

Fijados estos puntos, vamos a exponer en el resto de esta sección unos resultados intermedios que nos serán de gran utilidad para establecer los resultados principales de este capítulo y del siguiente.

Teorema I.2. *Sea* (p,g) *una solución del problema* (P) *entonces:*

(i) $\Delta p + g_y = 0$ *en* $D'(\Omega)$, $(\Delta p = 0$ *en* $D'(|\overset{\circ}{g = 1}|))$

(ii) $\Delta p \geq 0$ *en* $D'(\Omega)$

(iii) $g_y \leq 0$ *en* $D'(\Omega)$

Demostración: (i) Consideremos $\xi \in \mathcal{D}(\Omega)$; al anularse ξ en $S_2 \cup S_3$ tenemos:

$$0 = \int_\Omega \nabla p \cdot \nabla \xi + \int_\Omega g\, \xi_y \qquad \text{de lo cual se deduce (i)}$$

(ii) Sea $\zeta \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\zeta \geq 0$. Para $\varepsilon > 0$ consideramos la función:

$$\xi = \min\,(p,\varepsilon\zeta),$$

$\xi = 0$ en S y $\xi = 0$ donde g es distinto de 1 (ya que entonces $p = 0$) entonces:

$$\int_\Omega g\,\xi_y = \int_\Omega \xi_y = 0$$

y

$$0 = \int_\Omega \nabla p\,.\,\nabla\xi + \int_\Omega g\,\xi_y = \int_\Omega \nabla p\,.\,\nabla(\min\,(p,\varepsilon\zeta))$$

$$= \int_{|p \leq \varepsilon\zeta|} |\nabla p|^2 + \varepsilon \int_{|p > \varepsilon\zeta|} \nabla p.\nabla\xi$$

de lo cual deducimos:

$$\int_\Omega \gamma(|p > \varepsilon\zeta|)\nabla p\,.\,\nabla\zeta \leq 0$$

Si hacemos tender ε hacia 0, la función $\gamma(|p > \varepsilon\zeta|)$ tiende en casi todo punto hacia $\gamma(|p > 0|)$; por lo tanto, aplicando el teorema de Lebesgue tenemos

$$\int_{|p>0|} \nabla p\,.\,\nabla\xi = \int_\Omega \nabla p\,.\,\nabla\xi \leq 0 \qquad \forall\zeta \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \zeta \geq 0$$

de lo cual deducimos (ii); (iii) es entonces consecuencia de (i) y (ii), (ver | 2 |).

<u>Corolario I.1</u>. *Sea* (p,g) *solución de* (P), *entonces* $p \in C(\Omega)$.

<u>Demostración</u>: Del teorema I.2.(i) se deduce que $p \in W^{1,s}_{Loc}(\Omega)$ $\forall s \in \,]1,\infty[$ por lo tanto gracias a los teoremas de inclusión de Sobolev, p es continua en Ω.

Nota I.2. En |2| W. Alt demuestra que $p \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ $\forall\alpha \in]0,1[$; aunque su formulación del problema es diferente, su resultado sigue siendo valido aquí. Sin embargo, sería interesante poder extender esta continuidad holderiana de p hasta el borde de Ω, lo que hasta el momento parece un problema abierto.

Antes de ocuparnos de otros resultados de continuidad, veamos unos resultados técnicos:

Lema I.2. *Sea* (p,g) *solución de* (P), *sea* (x_o,y_o) *un punto del conjunto* $|p > 0|$. *Entonces existe* $\varepsilon > 0$ *tal que el conjunto*

$$C_\varepsilon = \{(x,y) \in \Omega \;/\; |x-x_o| < \varepsilon\,, \quad y < y_o + \varepsilon\},$$

esté contenido en $|p > 0|$.

Demostración. Dado que p es continua en Ω, el conjunto $|p > 0|$ es abierto, luego si $(x_o,y_o) \in |p > 0|$ existe $\varepsilon > 0$ tal que el conjunto

$$Q_\varepsilon = \{(x,y) \in \Omega \;/\; |x-x_o| < \varepsilon, \quad |y-y_o| < \varepsilon\}$$

esté contenido en $|p > 0|$ y por lo tanto $g = 1$ en Q_ε; entonces la hipótesis (H_1) y el teorema I.2.(iii) hacen que $g = 1$ en C_ε y por consiguiente $g_y = 0$ en C_ε; Luego el teorema I.2.(i) nos permite afirmar que $\Delta p = 0$ en C_ε, por fin del principio del máximo se deduce entonces que al estar $Q_\varepsilon \subset |p > 0|$ también tenemos $C_\varepsilon \subset |p > 0|$.

Corolario I.2. *Sea* (p,g) *solución de* (p) *y sea* (x_o,y_o) *un punto de* Ω *tal que* $p(x_o,y_o) = 0$, *entonces* $p(x_o,y) = 0$ $\forall(x_o,y) \in \Omega$ *tal que* $y \geq y_o$.

Demostración. Si en un punto (x_0,y) de Ω, con $y > y_0$ tuviésemos $p(x_0,y) > 0$, entonces por el lema I.2 anterior también tendríamos $p(x_0,y_0) > 0$ lo cual entra en contradicción con la hipótesis del corolario.

El siguiente teorema aporta más datos en cuanto a la continuidad de la solución:

Teorema I.3. *Sea* (p,g) *una solución de* (P), *entonces* $p \in C(\Omega \cup (S_2 \overset{\circ}{\cup} S_3))$.

Demostración. Sabemos ya que $p \in C(\Omega)$, tenemos, por lo tanto, que demostrar que p es continua hasta $(S_2 \overset{\circ}{\cup} S_3)$. Sea $(x_0,y_0) \in (S_2 \overset{\circ}{\cup} S_3)$, y sea ζ una función regular, igual a 1 en un entorno de (x_0,y_0) y de soporte K tal que $d(K,S_1) > 0$. Si Ω' es un abierto de borde lipschitziano contenido en Ω y tal que $\Omega \cap K \subset \Omega'$, entonces en Ω' tenemos:

$$\begin{aligned}\Delta(\zeta p) &= 2\nabla\zeta \,.\, \nabla p + \Delta\zeta p + \zeta\Delta p \\ &= 2\nabla\zeta \,.\, \nabla p + \Delta\zeta p - \zeta g_y \quad \text{(por el teorema I.2.(i))} \\ &= (-\zeta g)y + \zeta_y g + 2\,\nabla\zeta\nabla p + \Delta\zeta p\end{aligned}$$

Por otra parte en $\partial\Omega'$, borde Ω' tenemos:

$$\zeta p = 0 \quad \text{en} \quad \partial\Omega' \cap \Omega$$

$$\zeta p = \zeta\phi \quad \text{en} \quad \partial\Omega' \cap S$$

Entonces dado que $(p,g) \in H^1(\Omega) \times L^\infty(\Omega)$ (aplicando por ejemplo el teorema 8.30 p.196 de |40|), se deduce que $\zeta p \in C(\overline{\Omega}')$ luego como $\zeta = 1$ en un entorno de (x_0,y_0), $\zeta p = p$ en ese entorno y entonces p es continuo en (x_0,y_0). |28|.

El siguiente lema aporta más datos sobre el conjunto $|p > 0|$:

Lema I.3. *Sea* (p,g) *una solución de* (P); *para todo* $(x,y) \in \Omega$ *tal que* $(x,f^+(x)) \in S_3$ *tenemos* $p(x,y) > 0$.

Demostración. Por hipótesis S_3 es abierto y por lo tanto el teorema anterior asegura la continuidad de p hasta S_3; por otra parte en S_3 tenemos $p(x,f^+(x)) = h_i - f^+(x) > 0$, entonces p es mayor que 0 en un entorno de $(x,f^+(x))$ aplicando ahora el lema I.2 obtenemos la conclusión.

Veamos a continuación un resultado técnico que utilizaremos a menudo en lo sucesivo:

Lema I.4. *Sea* (p,g) *una solución de* (P); *sean* x_o,x_1 *y* h *tres números reales y sea*

$$Z_h = [x_o,x_1] \times [h, +\infty[\quad \text{un subconjunto de} \quad \mathbb{R}^2,$$

suponemos que $(\overline{Z_h \cap \Omega}) \cap S_3 = \emptyset$ *y que para* $i=0,1$, $p(x_i,y) = 0$ $\forall (x_i,y) \in Z_h \cap \Omega$. *Entonces tenemos:*

$$\int_{\Omega \cap Z_h} (gp_y + g^2) \leq \int_{\Omega \cap Z_h} (p_y + g) \leq 0$$

Demostración. La primera desigualdad es obvia ya que $gp_y = p_y$ para casi todo punto de Ω (dado que en $|p < 0|$, $g=1$ y que $p_y = 0$ en casi todo punto de $|p = 0|$) además $g^2 \leq g$ en casi todo punto de Ω (dado que $0 \leq g \leq 1$ en casi todo punto), por lo tanto, sólo queda por demostrar la segunda desigualdad. Vamos a suponer que $x_i \in \pi_x(\Omega)$ para $i=0,1$, siendo los casos alternativos (i.e. $x_i \notin \pi_x(\Omega)$ para $i=0$ ó 1)

una simple variante de esta demostración.

Sea $\varepsilon > 0$ (lo suficientemente pequeño) definimos:

$$h_o^- = \sup_{x \in [x_o, x_o+\varepsilon]} f^-(x) , \qquad h_o^+ = \operatorname{Inf}_{x \in [x_o, x_o+\varepsilon]} f^+(x)$$

$$h_1^- = \sup_{x \in [x_1-\varepsilon, x_1]} f^-(x) , \qquad h_1^+ = \operatorname{Inf}_{x \in [x_1-\varepsilon, x_1]} f^+(x);$$

existen entonces $x_o^- \in [x_o, x_o+\varepsilon]$, $x_o^+ \in [x_o, x_o+\varepsilon]$, $x_1^- \in [x_1-\varepsilon, x_1]$, $x_1^+ \in [x_1-\varepsilon, x_1]$ tales que:

$$h_o^- = f^-(x_o^-), \quad h_o^+ = f^+(x_o^+), \quad h_1^- = f^-(x_1^-) \quad y \quad h_1^+ = f^+(x_1^+);$$

por otra parte, cogemos ε pequeño de tal forma que $h_i^- < h_i^+$ para $i=0,1$. Consideramos ahora los siguientes conjuntos:

$$B_o = [x_o, x_o+\varepsilon] \times [h_o^-, h_o^+], \qquad B_1 = [x_1-\varepsilon, x_1] \times [h_1^-, h_1^+]$$

$$Q_{o,1} = [x_o, x_o^-[\times [h_o^- -\varepsilon, h_o^-] \cap \Omega; \qquad Q_{0,2} = [x_o, x_o^+[\times [h_o^+, h_o^+ +\varepsilon] \cap \Omega$$

$$Q_{1,1} =]x_1^-, x_1] \times [h_1^- -\varepsilon, h_1^-] \cap \Omega; \qquad Q_{1,2} =]x_1^+, x_1] \times [h_1^+, h_1^+ +\varepsilon] \cap \Omega$$

$$J_{o,1} =]x_o^-, x_o+\varepsilon] \times [h_o^- -\varepsilon, h_o^-] \cap \Omega; \quad J_{o,2} =]x_o^+, x_o+\varepsilon] \times [h_o^+, h_o^+ +\varepsilon] \cap \Omega$$

$$J_{1,1} = [x_1-\varepsilon, x_1^-[\times [h_1^- - , h_1^-] \cap \Omega; \quad J_{1,2} = [x_1-\varepsilon, x_1^+[\times [h_1^+, h_1^+ +\varepsilon] \cap \Omega$$

y

$$\Gamma_{o,1} = (\{x_o\} \times [h_o^- -\varepsilon, h_o^-]) \cup ([x_o, x_o+\varepsilon] \times \{h_o^- -\varepsilon\})$$
$$\cup (\{x_o+\varepsilon\} \times [h_o^- -\varepsilon, h_o^-])$$

$$\Gamma_{o,2} = (\{x_o\} \times [h_o^+, h_o^+ + \varepsilon]) \cup ([x_o, x_o+\varepsilon] \times \{h_o^+ + \varepsilon\}) \cup$$

$$\cup (\{x_o+\varepsilon\} \times [h_o^+, h_o^+ + \varepsilon])$$

$$\Gamma_{1,1} = (\{x_1-\varepsilon\} \times [h_1^- - \varepsilon, h_1^-]) \cup ([x_1-\varepsilon, x_1] \times \{h_1^- - \varepsilon\})$$

$$\cup (\{x_1\} \times [h_1^- - \varepsilon, h_1^-])$$

$$\Gamma_{1,2} = (\{x_1-\varepsilon\} \times [h_1^+, h_1^+ + \varepsilon]) \cup ([x_1-\varepsilon, x_1] \times \{h_1^+ + \varepsilon\})$$

$$\cup (\{x_1\} \times [h_1^+, h_1^+ + \varepsilon]).$$

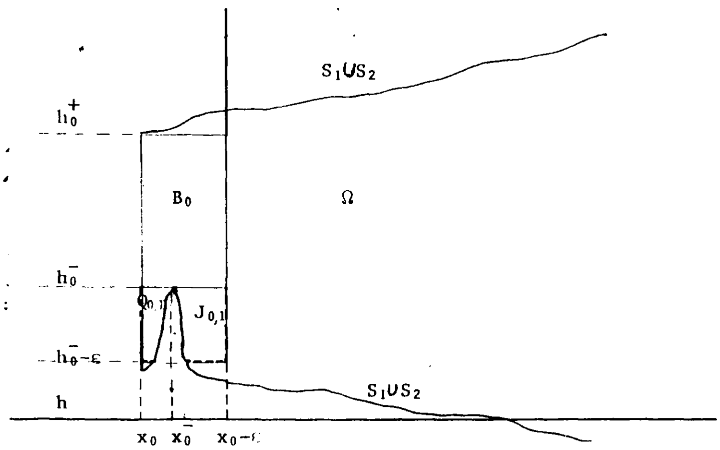

Fig.2

Sean entonces la función α_ε definida en $\Omega \cap ([x_o,x_1] \times \mathbb{R})$ por:

$$\alpha_\varepsilon(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon}(x - x_o) & \text{si } (x,y) \in B_o \\ -\frac{1}{\varepsilon}(x - x_1) & \text{si } (x,y) \in B_1 \\ 1 - \frac{1}{\varepsilon} d((x,y), \Gamma_{i,j} \cap J_{i,j}) & \text{si } (x,y) \in J_{i,j} \text{ para } i=0,1 \\ \quad y \ j=1,2 & \\ \frac{1}{\varepsilon} d((x,y), \Gamma_{i,j} \cap Q_{i,j}) & \text{si } (x,y) \in Q_{i,j} \text{ para } i=0,1 \\ & \quad y \ j=1,2 \\ 0 \quad \text{si} \quad (x,y) \in ([x_o,x_o^-]\times]-\infty, h_o^- -\varepsilon] \cup & \\ \qquad [x_o,x_o^+] \times [h_o^+ +\varepsilon, \infty[\cup [x_1^-,x_1] \times]-\infty, h_1^- - \varepsilon] \cup & \\ \qquad [x_1^+,x_1] \times [h_1^+ + \varepsilon, +\infty[) \cap \Omega & \\ 1 \quad \text{en el resto} & \end{cases}$$

y la función ξ definida en Ω por:

$$\xi(x,y) = \begin{cases} \alpha_\varepsilon(x,y)(y-h) & \text{en} \quad \Omega \cap Z_h \\ 0 & \text{en} \quad \Omega - Z_h \end{cases}$$

Es obvio ver que $\xi \in H^1(\Omega)$ (ξ es incluso lipschitziana), $\xi = 0$ en S_3 dado que $(\overline{Z_h \cap \Omega}) \cap S_3 = \emptyset$, y , $\xi \geq 0$ en S_2; lo que supone:

$$(5) \qquad 0 \geq \int_\Omega \nabla p \cdot \nabla \xi + \int_\Omega g\, \xi_y = \int_{\Omega \cap Z_h} \nabla p \cdot \nabla \xi + \int_{\Omega \cap Z_h} g\, \xi_y$$

$$= \int_{\Omega \cap Z_h} (p_y+g)\alpha_\varepsilon + \int_{\Omega \cap Z_h} (p_y+g)(y-h)(\alpha_\varepsilon)_y +$$

$$+ \int_{\Omega \cap Z_h} p_x(y-h)(\alpha_\varepsilon)_x;$$

pero

$$\int_{\Omega\cap Z_h}(p_y+g)(y-h)(\alpha_\varepsilon)_y+\int_{\Omega\cap Z_h}p_x(y-h)(\alpha_\varepsilon)_x=\int_{B_o\cap Z_h}p_x(y-h)(\alpha_\varepsilon)_x+$$

$$+\int_{B_1\cap Z_h}p_x(y-h)(\alpha_\varepsilon)_x+\sum_{i=o}^{1}\sum_{j=1}^{2}\int_{(Q_{i,j}\cup J_{i,j})\cap Z_h}|p_x(y-h)(\alpha_\varepsilon)_x+$$

$$+(p_y+g)(y-h)(\alpha_\varepsilon)_y|=\frac{1}{\varepsilon}\int_{B_o\cap Z_h}p_x(y-h)-\frac{1}{\varepsilon}\int_{B_1\cap Z_h}p_x(y-h)+$$

$$+\sum_{i=o}^{1}\sum_{j=1}^{2}\int_{(Q_{i,j}\cup J_{i,j})\cap Z_h}|p_x(y-h)(\alpha_\varepsilon)_x+(p_y+g)(y-h)(\alpha_\varepsilon)_y|$$

$$=\frac{1}{\varepsilon}\,|\int_{\partial(B_o\cap Z_h)}p.(y-h)\nu_x-\int_{\partial(B_1\cap Z_h)}|p.(y-h)\nu_x|+$$

$$+\sum_{i=o}^{1}\sum_{j=1}^{2}\int_{(Q_{i,j}\cup J_{i,j})\cap Z_h}|p_x(y-h)(\alpha_\varepsilon)_x+(p_y+g)(y-h)(\alpha_\varepsilon)_y|$$

$$\geq\sum_{i=o}^{1}\sum_{j=1}^{2}\int_{(Q_{i,j}\cup J_{i,j})\cap Z_h}|p_x(y-h)(\alpha_\varepsilon)_x+(p_y+g)(y-h)(\alpha_\varepsilon)_y|$$

dado que $p(x_i,y)=0$, para $y\geq h$, y $i=0,1$; siendo ν_x la componente horizontal del vector normal exterior de $\partial(B_i\cap Z_h)$ para $i=0,1$.

De (5) y de la anterior desigualdad deducimos entonces:

$$0\geq\int_{\Omega\cap Z_h}(p_y+g)\alpha_\varepsilon+\sum_{i=o}^{1}\sum_{j=1}^{2}\int_{(Q_{i,j}\cup J_{i,j})\cap Z_h}|p_x(y-h)(\alpha_\varepsilon)_x+(p_y+g)(y-h)(\alpha_\varepsilon)_y|$$

ó

(6) $$-\sum_{i=0}^{1}\sum_{j=1}^{2}\int_{(Q_{i,j}\cup J_{i,j})\cap Z_h} |p_x(y-h)(\alpha_\varepsilon)_x + (p_y+g)(y-h)(\alpha_\varepsilon)_y| \geq$$

$$\geq \int_{\Omega\cap Z_h} (p_y+g)\alpha_\varepsilon$$

Por otra parte tenemos:

$$|\nabla\alpha_\varepsilon| \leq \frac{1}{\varepsilon} \qquad y \qquad |Q_{i,j}\cup J_{i,j}| < \varepsilon^2$$

y si llamamos $\gamma_{i,j}$ a la función característica de $(Q_{i,j}\cup J_{i,j})\cap Z_h$ para $i=0,1$ y $j=1,2$, aplicando la desigualdad de Hölder tendremos:

$$-\sum_{i=0}^{1}\sum_{j=1}^{2}\int_{(Q_{i,j}\cup J_{i,j})\cap Z_h} |p_x(y-h)(\alpha_\varepsilon)_x + (p_y+g)(y-h)(\alpha_\varepsilon)_y| \leq$$
$$\leq \sum_{i=0}^{1}\sum_{j=1}^{2}\left|\int_\Omega \gamma_{i,j}\,|p_x^2 + (p_y+g)^2|\,(y-h)^2\right|^{1/2}$$

y de (6) y de la desigualdad anterior deducimos:

$$\int_{\Omega\cap Z_h}(p_y+g)\alpha_\varepsilon \leq \sum_{i=0}^{1}\sum_{j=1}^{2}\left|\int_\Omega \gamma_{i,j}\,|p_x^2 + (p_y+g)^2|(y-h)^2\right|^{1/2}$$

hacemos tender ε hacia 0, entonces $\alpha_\varepsilon \longrightarrow 1$ en casi todo punto de $\Omega\cap Z_h$ y $\gamma_{i,j}\longrightarrow 0$ en casi todo punto para $i=0,1$, $j=1,2$, aplicando entonces el teorema de convergencia de Lebesgue obtenemos el resultado:

$$\int_{\Omega\cap Z_h}(p_y + g) \leq 0$$

En el caso en que alguno de los x_i para $i=1$ ó 2 no pertenezca a $\pi_x(\Omega)$ por ejemplo $x_o \notin \pi_x(\Omega)$, definimos α_ε igual que anteriormente para $x\in[x_1-\varepsilon,x_1]$, y $\alpha_\varepsilon = 1$ en el resto; la demostración se desarrolla entonces de forma idéntica a la anterior.

Acabamos esta sección con un último resultado sobre $|p>0|$:

Lema I.5. *Sea* (p,g) *una solución de* (P), *sea* (x_o,y_o) *un punto de* Ω, *y supongamos que exista* $\delta>0$ *tal que*

$$Q_1 =]x_o, x_o+\delta[\times]y_o-\delta, y_o+\delta[\subset |p>0|,$$

ó

$$Q_2 =]x_o-\delta, x_o[\times]y_o-\delta, y_o+\delta[\subset |p>0|$$

entonces tenemos:

$$\{x_o\} \times]y_o-\delta, y_o+\delta[\subset |p>0|.$$

Demostración. Consideraremos cierta la primera eventualidad: $Q_1 \subset |p>0|$ (la demostración en el caso $Q_2 \subset |p>0|$ es idéntica, notemos también que las 2 eventualidades no son incompatibles). Supongamos que $p(x_o,y) = 0$ $\forall y \in]y_o-\delta, y_o+\delta[$. Sea entonces el conjunto:

$$Q =]x_o-\delta, x_o+\delta[\times]y_o-\delta, y_o+\delta[$$

y sea $\xi \in D(Q)$, $\xi \geq 0$ y sea también δ' tal que $0<\delta'<\frac{\delta}{2}$; definimos la función $\hat{\xi} \in D(Q)$ de la forma siguiente:

$$0 \leq \hat{\xi}(x,y) = \xi(x_o,y) \,.\, B(x) \qquad \forall (x,y) \in Q,$$

siendo B una función positiva de $D(]x_o-\delta, x_o-\delta[)$ tal que $B(x)=1$ $\forall x \in]x_o-\delta', x_o+\delta'[$. Tenemos entonces $\xi-\hat{\xi} \in H_o^1(Q_i)$ para $i=1,2$, por lo tanto $(\xi-\hat{\xi})\gamma(Q_i) \in H_o^1(\Omega)$ para $i=1,2$ con lo cual:

$$i=1,2: \quad 0 = \int_\Omega \nabla p \,.\, \nabla[(\xi-\hat{\xi})\gamma(Q_i)] + \int_\Omega g \,.\, [(\xi-\hat{\xi})\gamma(Q_i)]_y$$

$$= \int_{Q_i} \nabla p.\nabla(\xi-\hat{\xi}) + \int_{Q_i} g(\xi-\hat{\xi})_y$$

y por lo tanto:

$$(7) \qquad \int_{Q_i} \nabla p.\nabla\xi + \int_{Q_i} g\ \xi_y = \int_{Q_i} \nabla p.\nabla\hat{\xi} + \int_{Q_i} g\ \hat{\xi}_y$$

de lo cual deducimos, prolongando ξ por 0 fuera de Q

$$(8) \qquad 0 = \int_{\Omega} \nabla p.\nabla\xi + \int_{\Omega} g.\xi_y = \sum_{i=1,2} \left(\int_{Q_i} \nabla p.\nabla\xi + \int_{Q_i} g\ \xi_y\right) =$$

$$= \sum_{i=1,2} \left(\int_{Q_i} \nabla p.\nabla\hat{\xi} + \int_{Q_i} g\ \hat{\xi}_y\right)$$

Sea entonces la función α_ε definida por:

$$\alpha_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \leq x_o-\varepsilon \\ -\frac{1}{\varepsilon}(x-x_o) & \text{si} \quad x_o-\varepsilon < x \leq x_o \\ \frac{1}{\varepsilon}(x-x_o) & \text{si} \quad x_o < x \leq x_o+\varepsilon \\ 1 & \text{si} \quad x_o+\varepsilon < x \end{cases}$$

Tenemos: $\hat{\xi}.\alpha_\varepsilon \in H^1_o(Q_i)$ para $i=1,2$ por lo tanto $\hat{\xi}-\alpha_\varepsilon\ \gamma(Q_i) \in$ $\in H^1_o(\Omega)$ y:

$$0 = \int_{\Omega} \nabla p.\nabla(\hat{\xi}.\alpha_\varepsilon\gamma(Q_i)) + \int_{\Omega} g.(\hat{\xi}.\alpha_\varepsilon\gamma(Q_i))_y$$

$$= \int_{Q_i} \nabla p\ \nabla(\hat{\xi}.\alpha_\varepsilon) + \int_{Q_i} g(\hat{\xi}.\alpha_\varepsilon)_y$$

$$= \int_{Q_i} \nabla p.\nabla\hat{\xi}.\alpha_\varepsilon + \int_{Q_i} g.\hat{\xi}_y.\alpha_\varepsilon + \int_{Q_i} \nabla p.\nabla\alpha_\varepsilon.\hat{\xi} + \int_{Q_i} g(\alpha_\varepsilon)_y\ \hat{\xi}$$

$$(9) \qquad = \int_{Q_i} \nabla p.\nabla\hat{\xi}.\alpha_\varepsilon + \int_{Q_i} g\ \hat{\xi}_y.\alpha_\varepsilon + \int_{Q_i} p_x.(\alpha_\varepsilon)_x.\hat{\xi};$$

por otra parte, para $\varepsilon < \delta'$

$$\int_{Q_1} p_x\cdot(\alpha_\varepsilon)_x\cdot\hat{\xi} = \frac{1}{\varepsilon}\int_{Q_1\ \{(x,y)\in\Omega/x<x_o+\varepsilon\}=Q_{1,\varepsilon}} p_x\ \hat{\xi} = \frac{1}{\varepsilon}\int_{\partial Q_{1,\varepsilon}} p\ \hat{\xi}\ \nu_x \geq 0$$

y

$$\int_{Q_2} p_x(\alpha_\varepsilon)_x\ \hat{\xi} = -\frac{1}{\varepsilon}\int_{Q_2\ \{(x,y)\in\Omega/x>x_o-\varepsilon\}=Q_{2,\varepsilon}} p_x\ \hat{\xi} = \frac{1}{\varepsilon}\int_{\partial Q_{2,\varepsilon}} p\ \hat{\xi}\ \nu_x \geq 0$$

de (9) deducimos entonces:

$$0 \geq \int_{Q_i} \nabla p\ \nabla\hat{\xi}.\alpha_\varepsilon + \int_{Q_i} g\ \xi_y\ \alpha_\varepsilon$$

y haciendo tender ε hacia 0, por el teorema de Lebesgue obtenemos:

$$0 \geq \int_{Q_i} \nabla p\ \nabla\hat{\xi} + \int_{Q_i} g\ \hat{\xi}_y .$$

De (7), (8) y de la desigualdad anterior deducimos

$$\int_{Q_i} \nabla p.\nabla\xi + \int_{Q_i} g\ \xi_y = 0, \quad \forall\xi\in D(Q) \text{ tal que } \xi \geq 0$$

y por lo tanto $\forall\xi\in D(Q)$;

sea entonces $\bar{p} = \begin{cases} p & \text{en } Q_1 \\ 0 & \text{en } Q-Q_1 \end{cases}$, obviamente $\bar{p}\in H^1(Q)$ y

$\bar{g} = 1$ en Q deducimos:

$$\int_Q \nabla\bar{p}.\nabla\xi + \int_Q \bar{g}\ \xi_y = \int_{Q_1} \nabla p.\nabla\xi + \int_{Q_1} g.\xi_y = 0 \qquad \forall\xi\in D(Q)$$

y $\int_Q \bar{g}\ \xi_y = \int_Q \xi_y = 0$ por lo tanto $\int_Q \nabla\bar{p}.\nabla\xi = 0$ de lo cual

deducimos:

$$\Delta\bar{p} = 0 \quad \text{en} \quad Q$$

lo que implica, por el principio del máximo:

$$\overline{p} = 0 \quad \text{en} \quad Q$$

dado que $\overline{p} = 0$ en $Q-Q_1$, y:

$$p = 0 \quad \text{en} \quad Q_1$$

dado que $\overline{p} = p$ en Q_1; de esta contradicción deducimos entonces el resultado.

<u>Corolario I.3</u>. *Sea* (p,g) *una solución de* (P) *y sea* c_h *una componente conexa del conjunto:*

$$|p > 0| \cap |y > h|;$$

las 2 proposiciones siguientes son equivalentes:

i) $\overline{c_h} \cap S_3 = \emptyset$

ii) $\overline{(\pi_x(c_h) \times |h, +\infty|) \cap \Omega} \cap S_3 = \emptyset$

<u>Demostración</u>. Es consecuencia inmediata del lema I.5.

I.3. Soluciones S_3-conexas

3.1. Definición y motivaciones:

Definición I.1. Sea (p,g) una solución de (P) diremos que (p,g) es una solución S_3-conexa si y sólo si para toda componente conexa C del conjunto $|p > 0|$ tenemos $\overline{C} \cap S_3 \neq \emptyset$ ó lo que es equivalente $\overline{(\pi_x(C) \times \mathbb{R}) \cap \Omega} \cap S_3 = \emptyset$.

Nota I.3. Esta nueva definición parece ser la adecuada desde el punto de vista de la física, ya que si (p,g) no es S_3-conexa entonces existe una componente conexa C de $|p > 0|$ tal que $\overline{C} \cap S_3 = \emptyset$. Desde un punto de vista físico, esto significa que existe una masa de fluido, dentro del medio poroso, que no proviene de la filtración del fluido contenido en los embalses representados por S_3.

Nota I.4. Esta nueva definición supone (en el caso general) una restricción real del conjunto de soluciones; en efecto, en general, no toda solución de (P) es S_3-conexa como podemos ver en el siguiente ejemplo:

Ejemplo I.1

Sean $x_o < x_1 < x_2 < x_3$ y $y_o \leq y_1 < y_2 < y_3$ 8 números reales y sea Ω el siguiente abierto:

$$\Omega = (]x_o,x_1[\times]y_1,y_3[) \cup ([x_1,x_2] \times]y_2,y_3[) \cup$$
$$](x_2,x_3)[\times]y_1,y_3[)$$

sea h_1 tal que $y_1 < h_1 \leq y_2$, y sean:

$$S_3 = \{x_o\} \times]y_1, h_1[$$

$$S_2 = (\{x_o\} \times [h_1, y_3]) \cup (]x_o, x_3] \times \{y_3\})$$

$$S_1 = S - (S_2 \cup S_3)$$

y $$\phi(x,y) = \begin{cases} h_1 - y & \text{en } S_3 \\ 0 & \text{en } S_2 \end{cases}$$

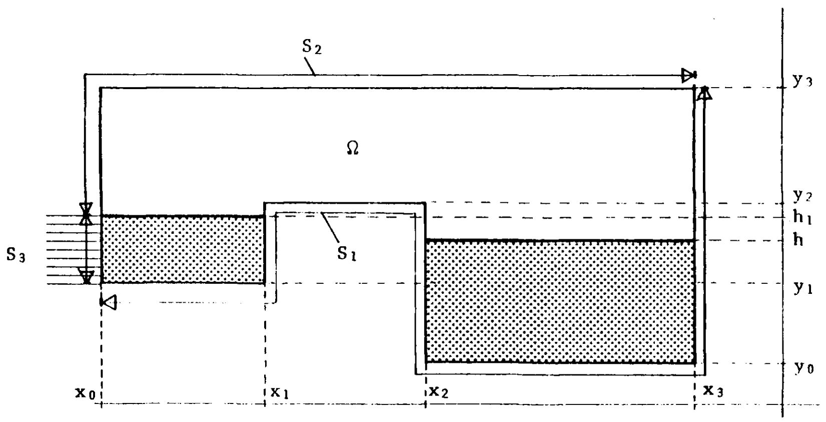

Fig.3

Entonces para todo $h \leq y_2$ el par (p_h, g_h) definido por:

$$g_h(x,y) = \begin{cases} 1 \quad \text{si} \quad (x,y) \in (]x_o, x_1[\times]y_1, h_1[) \cup (]x_2, x_3[\times]y_o, h[) \\ 0 \quad \text{en el resto de} \quad \Omega \end{cases}$$

$$p_h(x,y) = \int_y^{y_3} g_h(x,s)\,ds$$

es solución del problema (P) en el abierto Ω para los datos definidos anteriormente y para $h > y_o$ el conjunto $]x_2, x_3[\times]y_o, h[$ es una componente conexa de $|p > 0|$ cuyo cierre es disjunto de S_3, por lo tanto para $h > y_o$ (p_h, g_h) es una solución de (P) que no es S_3-conexa.

Nota I.5. El ejemplo anterior es a la vez un contra-ejemplo para la unicidad de solución en el problema (P) y por lo tanto una motivación más para introducir una nueva definición de solución.

Sin embargo la restricción que supone la definición I.1 no es "excesivamente drástica" en la medida en que cualquier solución de (P) está "explícitamente" relacionada con una solución S_3-conexa como mostraremos a continuación.

3.2. Existencia de solución S_3-conexa y relación entre solución y solución S_3 conexa de (P).

El siguiente teorema da una caracterización de p (siendo (p,g) una solución) sobre las componentes conexas de $|p > 0|$ cuyo cierre no contiene puntos de S_3:

Teorema I.4. *Sea* (p,g) *una solución de* (P) *y sea* C *una componente conexa de* $|p > 0|$ *tal que* $\overline{C} \cap S_3 = \emptyset$ *y sea* $h_c = \mathrm{Sup}\ \{y/(x,y) \in C\}$ *tenemos entonces:*

i) si $\overline{\pi_x(C)} = [x_o, x_1]$, $C = \{(x,y) \in \Omega \ / \ x \in]x_o, x_1[\text{ e } y < h_c\}$

ii) $p(x,y) = (h_c - y)^+ \quad \forall (x,y) \in \Omega$ tal que $x_o < x < x_1$

iii) $g(x,y) = \gamma(C) \quad \forall (x,y) \in \Omega$ tal que $x_o < x < x_1$.

Antes de demostrar este teorema, vamos a ver el siguiente lema, válido para un abierto Ω de $\mathbb{R}^n$:

Lema I.6. *Sea* u *una función de* $H^1(\Omega) \cap C(\Omega)$. *Si* C *es una componente conexa de* $|u > 0|$ *entonces* $u.\gamma(C) \in H^1(\Omega)$ *y se tiene la siguiente fórmula de derivación:*

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (u.\gamma(C)) = \gamma(C) \cdot \frac{\partial u}{\partial x_i} \qquad \forall i=1,\dots,n$$

Si además u *es nula en el sentido de las trazas sobre una parte* $\Gamma_o \subset \delta\Omega$ *de medida no nula entonces* $u.\gamma(C)$ *también se anula en ese sentido sobre* Γ_o. |28|

Demostración. Supongamos primero que $u \in H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ y sea C una componente conexa de $|u > 0|$. Para $\varepsilon > 0$ sea K_ε el conjunto definido por

$$K_\varepsilon = \{x \in C \ / \ u(x) \geq \varepsilon\}$$

Podemos entonces encontrar una función $\alpha_\varepsilon(x)$ regular tal que $\alpha_\varepsilon = 1$ sobre un entorno de K_ε y $\alpha_\varepsilon = 0$ en el complementario de C, (siendo $0 \leq \alpha_\varepsilon \leq 1$) y tenemos:

$$\gamma(K_\varepsilon).(u-\varepsilon) = \alpha_\varepsilon(u-\varepsilon)^+$$

de ahí que $\gamma(K_\varepsilon)(u-\varepsilon) \in H^1(\Omega)$ y

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (\gamma(K_\varepsilon).(u-\varepsilon)) = \alpha_\varepsilon \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} (u-\varepsilon)^+$$

$\gamma(K_\varepsilon)\ (u-\varepsilon)$ está, entonces, acotado en $H^1(\Omega)$ independientemente de ε y podemos extraer una sucesión $\gamma(K_{\varepsilon_n}).(u-\varepsilon_n)$ que converge hacia $w \in H^1(\Omega)$, debilmente en $H^1(\Omega)$ y fuertemente en $L^2(\Omega)$ cuando $\varepsilon_n \to 0$. Pero, por otra parte, es obvio que $\gamma(K_\varepsilon)(u-\varepsilon) \to \gamma(C)u$ en $L^2(\Omega)$, luego $w = \gamma(C).u \in H^1(\Omega)$. En la igualdad anterior pasamos al límite en $D'(\Omega)$ y tenemos:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (\gamma(C).u) = \gamma(C) \frac{\partial}{\partial x_i} u^+ = \gamma(C) \frac{\partial}{\partial x_i} u$$

Este resultado se extiende facilmente al caso $u \in H^1(\Omega) \cap C(\Omega)$ dado que entonces $u \in H^1(\Omega') \cap C(\bar{\Omega}')$ para todo Ω' relativamente compacto en Ω. La segunda parte se deduce de:

$$0 \leq \gamma(C).u \leq u^+;$$

lo que acaba la demostración del lema.

Demostración del Teorema I.4. Sea $h = \inf \{y/(x,y) \in C\}$ y sea

$$Z_h = [x_o, x_1] \times [h, +\infty[,$$

entonces, $p=0$ en $Z_h \cap (\Omega - C)$ (Lema I.2), luego $p(x_i,y) = 0$ $\forall (x_i,y) \in \Omega$ y para $i=0,1$; por otra parte $(\overline{Z_h \cap \Omega}) \cap S_3 = \emptyset$, entonces por el lema I.4 tenemos:

$$0 \geq \int_{\Omega \cap Z_h} (g\, p_y + g^2) \tag{10}$$

Por otra parte, aplicando el lema I.6, sabemos que $\gamma(C).p \in H^1(\Omega)$ y que $\gamma(C).p = 0$ en $S_2 \cup S_3$ con lo cual:

$$0 = \int_\Omega \nabla p \,.\, \nabla(\gamma(C)\,.\,p) + \int_\Omega g\, (\gamma(C)\,.\,p)_y$$

y aplicando la fórmula de derivación del lema I.6

(11) $$0 = \int_C |\nabla p|^2 + \int_C g\, p_y = \int_{\Omega \cap Z_h} |\nabla p|^2 + \int_{\Omega \cap Z_h} g\, p_y$$

Sumando (10) y (11) tenemos:

$$0 \geq \int_{Z_h \cap \Omega} |\nabla p|^2 + 2 \int_{Z_h \cap \Omega} g\, p_y + \int_{Z_h \cap \Omega} g^2 = \int_{Z_h \cap \Omega} p_x^2 +$$

$$+ \int_{Z_h \cap \Omega} (p_y + g)^2 + \int_{Z_h \cap (\Omega - C)} g^2$$

de lo cual deducimos:

$$p_x = 0 \quad \text{en} \quad \Omega \cap Z_h$$

$$p_y = -1 \quad \text{en} \quad C$$

$$g = 0 \quad \text{en} \quad Z_h \cap (\Omega \setminus C);$$

dado que $g=1$ en C, tenemos (iii): $g(x,y) = \gamma(C)$ $\forall (x,y) \in Z_h$ Ω; por otra parte $\nabla p = (0,-1)$ en C, luego $p=k-y$ en C y entonces para todo $x \in |x_0, x_1|$ tenemos: $\text{Sup}\,\{y/(x,y) \in C\} = k$, luego $k = h_c$ y (ii): $p = (h_c - y)^+$ en $\Omega \cap Z_h$; (i) es entonces obvio.

Nota I.6. Si C es una componente conexa de $|p > 0|$ tal que $\bar{C} \cap S_3 = \emptyset$ entonces la ley de Darcy supone en C una velocidad nula:

$$\vec{v} = -k\, \nabla(p+y) = -k\, \nabla(h_c) = 0,$$

luego, en C no hay filtración de agua sino una masa inmovil de fluido. Esto justifica la siguiente denominación:

Definición I.2. Llamamos "charco" en Ω a un par de funciones $(\pi, \gamma_h) \in H^1(\Omega) \times L^\infty(\Omega)$ donde:

i) γ_h *es la función característica de una componente conexa* C_h *del conjunto* $\{(x,y) \in \Omega \;/\; y < h\}$

ii) $\pi(x,y) = \int_y^h \gamma_h(x,s)\,ds$, *i.e* $\pi(x,y) = \begin{cases} h-y & \text{en } C_h \\ 0 & \text{en } \Omega \setminus C_h. \end{cases}$

<u>Definición I.3</u>. *Llamamos "sistema de charcos" en* Ω *a un par de funciones* $(\pi,\gamma) \in H^1(\Omega) \times L^\infty(\Omega)$ *donde:*

i) γ *es la función característica de* $\bigcup_{i \in I} C_i$, *con* $I \subset \mathbb{N}$, *siendo* C_i, *para cada* $i \in I$ *una componente conexa del conjunto* $\{(x,y) \in \Omega \;/\; y < h_{c_i}\}$

ii) $\pi(x,y) = \int_y^k \gamma(x,s)\,ds$, *siendo* k *un número real.*

Esto nos lleva al resultado principal de esta parte:

<u>Teorema I.5</u>. *Todo par* (p,g) *solución de* (P) *es suma de una solución* (p_o,g_o) S_3*-conexa y de un "sistema de charcos"* (π,γ).

<u>Demostración</u>. Llamamos $(C_i)_{i \in I}$ la familia de las componentes conexas de $|p > 0|$ tales que $\overline{C}_i \cap S_3 = \emptyset$ (está claro que $I \subset \mathbb{N}$); entonces para cada $i \in I$ existe $h_{c_i} \in \mathbb{R}$ tal que C_i sea una componente conexa del conjunto $\{(x,y) \in \Omega \;/\; y < h_{c_i}\}$ y $p.\gamma(C_i) = h_{c_i} - y$ en C_i y 0 en $\Omega - C_i$, llamamos

$$\gamma = \sum_{i \in I} \gamma(C_i) = \gamma(\bigcup_{i \in I} C_i) \quad \text{y} \quad \pi = p.\gamma;$$

es obvio entonces que (π,γ) es un "sistema de charcos" en Ω y tenemos $\forall \xi \in H^1(\Omega)$

(12) $$\int_\Omega \nabla\pi.\nabla\xi + \int_\Omega \gamma\ \xi_y = \int_{\underset{i\in I}{\cup} C_i} \nabla p.\nabla\xi + \int_{\underset{i\in I}{\cup} C_i} \xi_y = \int_{\underset{i\in I}{\cup} C_i} (-\xi_y) + $$

$$+ \int_{\underset{i\in I}{\cup} C_i} \xi_y = 0.$$

Sea entonces (p_o, g_o) definido por:

$p_o = p-\pi$, $g_o = g-\gamma$; es obvio que $p_o \in H^1(\Omega)$ (Lema I.6),

$p_o \geq 0$ y p_o satisface las condiciones de Dirichlet de p en $S_2 \cup S_3$, y por otra parte, $g_o(x,y) \in sig^+\ p_o(x,y)$ para casi todo $(x,y) \in \Omega$; además de (12) deducimos:

$$\int_\Omega \nabla p_o\ \nabla\xi + \int_\Omega g_o\ \xi_y = \int_\Omega \nabla(p_o+\pi)\nabla\xi + \int_\Omega (g_o+\gamma)\xi_y =$$

$$= \int_\Omega \nabla p\ \nabla\xi + \int_\Omega g\ \xi_y \leq 0$$

$\forall\xi \in H^1(\Omega)$ con $\xi = 0$ en S_3 y $\xi \geq 0$ en S_2; (p_o, g_o) es entonces solución del problema (P) y además (p_o, g_o) es S_3-conexa por construcción, lo que acaba la demostración.

CAPITULO II: UNICIDAD Y FRONTERA LIBRE

II.1. Continuidad de la frontera libre

Abordamos en esta sección el estudio de la frontera libre. Los resultados que demostramos aquí, aparte el interés intrínseco que puedan tener, son importantes de cara a la siguiente sección.

Teorema II.1. *Sea* (p,g) *una solución* S_3*-conexa de* (P)*; entonces tenemos:*

i) $p = g = 0$ *en* $\{(x,y) \in \Omega \ / \ y > h_1\} = |y > h_1|$

ii) $0 \leq p \leq (h_1-y)^+$ *en* Ω.

Demostración. Sea la función $\xi = (p-(h_1-y)^+)^+$; ξ es una función de $H^1(\Omega)$ y $\xi = 0$ en $S_2 \cup S_3$ dado que $(h_1-y)^+ \geq \phi$ en $S_2 \cup S_3$; tenemos entonces:

$$0 = \int_\Omega \nabla p \cdot \nabla \left[(p-(h_1-y)^+)^+\right] + \int_\Omega g \cdot \left[(p-(h_1-y)^+)^+\right]_y$$

$$= \int_\Omega \nabla(p-(h_1-y)^+) \cdot \nabla\left[(p-(h_1-y)^+)^+\right] + \int_\Omega \left[g+((h_1-y)^+)_y\right]\left[(p-(h_1-y)^+)^+\right]$$

$$= \int_\Omega |\nabla\left[(p-(h_1-y)^+)^+\right]|^2 + \int_{|y>h_1|} g\, p_y + \int_{|y\leq h_1|} (g-1) \left[(p-(h_1-y)^+)^+\right]_y;$$

ahora, en $|p > 0|$ tenemos $g = 1$, y en $|p = 0|$ tenemos $(p-(h_1-y)^+)^+ = 0$ por lo tanto, de lo anterior deducimos:

$$0 = \int_{\Omega} |\nabla[(p-(h_1-y)^+)^+]|^2 + \int_{|y>h_1|} g\, p_y$$

lo que equivale a:

$$0 = \int_{|y\leq h_1|} |\nabla[(p-(h_1-y)^+)^+]|^2 + \int_{|y>h_1|} |\nabla p|^2 + \int_{|y>h_1|} g\, p_y \ ,$$

del lema I.4 deducimos que:

$$0 \geq \int_{|y>h_1|} (g\, p_y + g^2);$$

sumando esta desigualdad con la igualdad anterior tenemos:

$$0 \geq \int_{|y\leq h_1|} |\nabla[(p-(h_1-y)^+)^+]|^2 + \int_{|y>h_1|} |\nabla p|^2 +$$

$$+ \int_{|y>h_1|} g\, p_y + \int_{|y>h_1|} (g\, p_y + g^2) =$$

$$= \int_{|y\leq h_1|} |\nabla[(p-(h_1-y)^+)^+]|^2 + \int_{|y\leq h_1|} (p_x^2 + (p_y + g)^2)$$

De la primera integral deducimos que en $|y \leq h_1|$:

$(p - (h_1-y)^+)^+ = \text{constante} = 0$ dado que $(p - (h_1-y)^+)^+ = 0$ en S_3, y que (p,g) es S_3-conexa (y que $(p - (h_1-y)^+)^+$ es continua hasta S_3 por el teorema I.3); y

$$p \leq h_1 - y \qquad \text{en} \qquad |y \leq h_1|$$

por lo tanto tenemos:

$$p(x,h_1) = 0 \qquad \forall (x,h_1) \in \Omega,$$

luego, si existe (x_o,y_o) con $y_o > h_1$ tal que $p(x_o,y_o) > 0$ esto implica la existencia de una componente conexa C de $|p > 0|$ tal que $C \subset |y > h_1|$ por lo tanto $\overline{C} \cap S_3 = \emptyset$ lo que entra en contradicción con (p,g) S_3-conexa, de lo cual se deduce:

$$p(x,y) \leq (h_1-y)^+ \qquad \forall (x,y) \in \Omega$$

la segunda integral se escribe entonces:

$$\int_{|y > h_1|} g^2 = 0$$ y por consiguiente:

$$g = 0 \quad \text{en} \quad |y > h_1|,$$

lo que concluye la demostración.

Nota II.1. En general tendremos incluso $p < h_1-y$ en $|y < h_1|$, en efecto: en $|y < h_1|$ $(h_1-y)^+$ es armónica y $\Delta p \geq 0$ (teorema I.2(ii)), luego $\Delta(p-(h_1-y)^+) = \Delta p \geq 0$ en $|y > h_1|$, entonces por el principio del máximo tendremos ó $p < h_1-y$ ó $p = h_1-y$ en $|y < h_1|$.

Nota II.2. La interpretación física de este teorema es simple: no hay filtraciones de agua por encima del nivel más alto de los embalses.

Teorema II.2. *Sea* (p,g) *una solución* S_3*-conexa del problema* (P). *Para todo* $k \in \mathbb{N}$ $1 \leq k \leq n$ *y para todo* h *tales que* $h_{k+1} \leq h < h_k$ *(siendo* $h_{n+1} = \operatorname*{Inf}_{x \in \pi_n(\Omega)} f^-(x))$, *el conjunto:*

$$K_h = \{(x,y) \in \Omega \;/\; p(x,y) > (h-y)^+\}$$

tiene un máximo de k *componentes conexas; más concretamente, si para* $i=1,\ldots,k$ *designamos por* $C_{h,i}$, *la componente conexa de* K_h *que verifica*

$$S_{3,i} \subset \overline{C_{h,i}}$$

Tenemos:

$$K_h = \bigcup_{i=1}^{k} C_{h,i}.$$

Demostración. Sea $C_h' = \Omega - \bigcup_{i=1}^{k} C_{h,i}$; por el lema I.6 la función

$$\xi = (p-(h-y)^+)^+ \,.\, \gamma(C_h') = (p-(h-y)^+)^+ \,(1-\gamma(\bigcup_{i=1}^{k} C_{h,i})$$

es una función de $H^1(\Omega)$ nula en $S_2 \cup S_3$ y tenemos:

$$0 = \int_\Omega \nabla p.\nabla|(p-(h-y)^+)^+ \,\gamma(C_h')| + \int_\Omega g|(p-(h-y)^+)^+ \,\gamma(C_h')|_y$$

lo que da, aplicando la fórmula de derivación del lema I.6:

$$0 = \int_{C_h'} \nabla p.\nabla[(p-(h-y)^+)^+] + \int_{C_h'} g[(p-(h-y)^+)^+]_y$$

$$= \int_{C_h'} |\nabla[(p-(h-y)^+)^+]|^2 + \int_{C_h'} (g+(h-y)^+)[(p-(h-y)^+)^+]_y$$

$$= \int_{C_h' \cap |y\leq h|} |\nabla[(p-(h-y)^+)^+]|^2 + \int_{C_h' \cap |y>h|} |\nabla p|^2 + \int_{C_h' \quad |y>h|} g\, p_y$$

dado que en $|p=0|$ $(p-(h-y)^+)^+ = 0$ y en $|p>0|$ $g=1$.

El conjunto $C_h' \cap |y>h| \cap |p>0|$ puede escribirse como

$C_h' \cap |y>h| \cap |p>0| = \bigcup_{j \in J} C_j$ donde C_j son componentes conexas de $|p>0| \cap |y>h|$ y J un conjunto numerable y además

$$\overline{C}_j \cap S_3 = \emptyset \ ;$$

tenemos entonces, por el lema I.4:

$$\int_{Z_{h,j}} (g\, p_y + g^2) \leq 0 \qquad \forall j \in J, \quad \text{siendo } Z_{h,j} = (\overline{\pi_x(C_j)} \times |h,+\infty|) \cap \Omega$$

Luego, sumando esta desigualdad a la igualdad anterior, tenemos:

$$0 \geq \int_{C_h' \quad |y\leq h|} |\nabla|(p-(h-y)^+)^+||^2 + \sum_{j \in J} \int_{Z_{h,j}} (p_x^2 + (p_y+g)^2) =$$

$$= \int_{C_h' \quad |p>o|} |\nabla|(p-(h-y))^+||^2$$

de lo cual deducimos:

$$|\nabla[(p-(h-y))^+]| = 0 \quad \text{en} \quad C_h' \cap |p>0|$$

y

$$(p-(h-y))^+ = c_i \geq 0 \quad \text{en cada componente conexa} \quad C_i' \quad \text{de} \quad \overset{\circ}{C}_h' \cap |p>0|$$

Vamos a demostrar que los c_i son nulos; en efecto, supongamos $c_i > 0$ entonces

$$(p-(h-y))^+ = p - (h-y) = c_i > 0 \quad \text{en} \quad C_i'$$

y

$$p = h + c_i - y = (h + c_i - y)^+ \quad \text{en} \quad C_i' \;;$$

sea C la componente conexa de $|p > 0|$ que contiene C_i'; entonces por el principio de prolongación analítica:

$$p = h + c_i - y > (h-y)^+ \quad \text{en} \quad C$$

pero, siendo (p,g) S_3-conexa, existe una componente conexa, $S_{3,j}$, de S_3 tal que $S_{3,j} \subset \overline{C}$ y por continuidad (ver Teorema I.3):

$$p = (h + c_i - y)^+ \quad \text{en} \quad S_{3,j}$$

y $h + c_i = h_j > h \geq h_{k+1}$, luego tenemos $j \leq k$ y $C = C_{h,j} \subset \Omega - C_h'$ por lo tanto $C_i' \cap C_h' = \emptyset$ lo que supone una contradicción; tenemos entonces $c_i = 0$ $\forall i$, y:

$$(p - (h-y))^+ = 0 \quad \text{en} \quad C_h' \cap |p > 0|$$

lo que implica:

$$p \leq h-y \quad \text{en} \quad C_h' \cap |p > 0|$$

y

$$p \leq (h-y)^+ \quad \text{en} \quad C_h',$$

con lo que finaliza la demostración.

Con las mismas notaciones e hipótesis que en el anterior teorema, tenemos:

<u>Teorema II.3</u>. *Sea* (p,g) *una solución* S_3*-conexa de* (P) *y sean* (x_1,h) *y* (x_2,h) *dos puntos de* Ω *tales que* $(|x_1,x_2| \times \{h\}) \cap S_2 = \emptyset$. *Si* (x_1,h) *y* (x_2,h) *pertenecen a la misma componente conexa* $C_{h,i}$ *de* K_h *tenemos:*

$$p(x,y) > 0 \qquad \forall (x,y) \in \Omega \cap ([x_1,x_2] \times]-\infty,h[).$$

<u>Demostración</u>. Por el lema 1.2 es obvio que $p(x_i,y) > 0$ $\forall y \leq h$ tal que $(x_i,y) \in \Omega$, para $i=1,2$. Supongamos entonces que $p(x_o,y_o) = 0$ para un $(x_o,y_o) \in (]x_1,x_2[\times]-\infty,h[) \cap \Omega$, tendremos también $p(x_o,y) = 0$ $\forall (x_o,y) \in \{(x_o,y) \in \Omega \ / \ y \geq y_o\}$. Dado que $C_{h,i}$ es conexo, es también conexo por arco y existe entonces una aplicación σ continua de $[0,1]$ en $C_{h,i}$ que verifique:

(i) $\sigma(0) = (x_1,h)$, $\sigma(1) = (x_2,h)$

(ii) $\exists t \in]0,1[$ tal que $\sigma(t) = (x_o,y_o^-)$ con $y_o^- < y_o$

(iii) σ divide $(\Omega \cap |y < h|) - \sigma([0,1])$ en varias componentes conexas, una de las cuales, ω_o, contiene (x_o,y_o).

Sea la función $(p-(h-y)^+)^- \in H^1(\Omega)$, es igual a 0 en el borde de ω_o, dado que en $|x_1,x_2| \times \{h\} \cap S_3$, $\phi(x,y) \geq (h-y)^+$. Sea entonces

$$\xi = -(p - (h-y))^- \, \gamma(\omega_o),$$

$\xi \in H^1(\Omega)$ y $\xi = 0$ en $\partial\omega_o$, luego $\xi = 0$ en $S_2 \cup S_3$ y tenemos:

$$0 = \int_\Omega \nabla p.\nabla[-(p-(h-y))^-\gamma(\omega_o)] + \int_\Omega g[-(p-(h-y))^-\gamma(\omega_o)]_y$$

$$= \int_{\omega_o} \nabla p.\nabla[-(p-(h-y))^-] + \int_{\omega_o} g[-(p-(h-y))^-]_y$$

$$= \int_{\omega_o} |\nabla[(p-(h-y))^-]|^2 + \int_{\omega_o} [g+(h-y)_y][-(p-(h-y))^-]_y$$

$$= \int_{\omega_o} |\nabla[(p-(h-y))^-]|^2 + \int_{\omega_o} (g-1)[-(p-(h-y))^-]_y$$

Dado que en $|p > 0|$ tenemos $g = 1$ la última integral ha de hallarse sobre $\omega_o \cap |p = 0|$; luego tenemos:

$$0 = \int_{\omega_o} |\nabla[(p-(h-y))^-]|^2 + \int_{\omega_o \cap |p=0|} (g-1)[-(h-y)]_y$$

$$= \int_{\omega_o \cap |p>0|} |\nabla[(p-(h-y))^-]|^2 + \int_{\omega_o \cap |p=0|} 1 + \int_{\omega_o \cap |p=0|} g-1$$

$$\geq \int_{\omega_o \cap |p>0|} |\nabla[(p-(h-y))^-]|^2;$$

de lo cual deducimos que en cada componente conexa de $\omega_o \cap |p > 0|$ tenemos $(p-(h-y)^+)^- =$ constante. Sea C una componente conexa de $\omega_o \cap |p > 0|$, tenemos $\bar{C} \cap \sigma([0,1]) \neq \emptyset$ (Lema I.2)

$$(p-(h-y))^- = 0 \qquad \text{en} \qquad \bar{C} \cap \sigma([0,1]),$$

por lo tanto

$$(p-(h-y))^- = 0 \qquad \text{en} \qquad \omega_o \cap |p > 0|$$

y tenemos:

$$p \geq h-y > 0 \qquad \text{en} \qquad \omega_o \cap \overline{|p > 0|}$$

dado que $\omega_o \cap |p > 0| \neq \emptyset$ (en efecto, tenemos $p > 0$ en $\sigma([0,1])$)

por lo tanto $p > 0$ en un entorno de $\sigma([0,1]))$, tenemos

$$p \geq h-y > 0 \qquad \text{en} \qquad \omega_o$$

y

$$p(x_o, y_o) > 0$$

lo que acaba la demostración.

<u>Corolario II.1</u>. *Sean* $(x_o,y_o) \in \Omega$, $\varepsilon > 0$ *y* $\alpha > 0$ *tales que* $Q_{\varepsilon,\alpha} =]x_o-\varepsilon,\ x_o+\varepsilon[\times]y_o-\alpha,\ y_o+\alpha[\subset \Omega$ *y sea* h *tal que* $y_o-\alpha < h < y_o+\alpha$. *Entonces los conjuntos:*

$$I_{h,1} = Q_{\varepsilon,\alpha} \cap |p > 0| \cap (\mathbb{R} \times \{h\})$$

y

$$I_{h,2} = Q_{\varepsilon,\alpha} \cap |p = 0| \cap (\mathbb{R} \times \{h\})$$

Tienen un número finito (resp $\leq n$ y $\leq n+1$) *de componentes conexas*

<u>Demostración</u>. Vamos a demostrar primero el resultado para $I_{h,1}$; supongamos que $I_{h,1}$ tenga más de n componentes conexas y sean C_i para $i \in J$ las componentes conexas de $I_{h,1}$ con card $J > n$ (es obvio por otra parte que $J \subset \mathbb{N}$). Para $i=1,\ldots,n+1$ cogemos $(x_i,h) \in C_i$ y $\varepsilon' > 0$ tal que $p(x_i,h+\varepsilon') > 0$ $\forall i=1,\ldots,n+1$, con $h+\varepsilon' < y_o+\alpha$; entonces $(x_i,h+\varepsilon') \in K_{h+\varepsilon'}$ y $K_{h+\varepsilon'}$ posee un máximo de n componentes conexas; luego existen, por lo menos, 2 puntos $(x_i,h+\varepsilon')$ y $(x_j,h+\varepsilon')$ $(i \neq j)$ en la misma componente conexa de $K_{h+\varepsilon'}$, y entonces por el teorema anterior sabemos que:

$$p(x,y) > 0 \qquad \forall (x,y) \in [x_i,x_j] \times]-\infty,\ h+\varepsilon'[\ ,$$

en particular $p(x,h) > 0$ $\forall x \in [x_i, x_j]$ y (x_i,h), (x_j,h) pertenecen a la misma componente conexa de $I_{h,1}$ lo que contradice la hipótesis hecha. Por lo tanto el número de componentes conexas de $I_{h,1}$ es $\leq n$. Como $I_{h,2} = [Q_{\varepsilon,\alpha} \cap (R \times \{h\})] - I_{h,1}$, deducimos de los anteior que $I_{h,2}$ tiene un número de componentes conexas $\leq n+1$, lo que finaliza la demostración.

Esto nos lleva a un primer resultado sobre la frontera libre:

Teorema II.4. *Sea* (p,g) *una solución de* (P) *y sea* F *la frontera libre ligada a esta solución* (*i.e.* $F = (\overline{|p > 0|} - |p > 0|) \cap \Omega)$; *sea* Φ *la función definida en* $\pi_x(\Omega)$ *por:*

$$\Phi(x) = \begin{cases} \text{Sup } \{y \;/\; (x,y) \in \Omega,\ p(x,y) > 0\} & \textit{si este conjunto no está vacío} \\ f^-(x) & \textit{en otro caso} \end{cases}$$

Entonces tenemos:

i) $F = \text{Grafo } (\Phi) \cap \Omega$

ii) $\forall x$ *tal que* $(x,\Phi(x)) \in \Omega$, Φ *es continua en* x; *y* Φ *es una función medible de* $\pi_x(\Omega)$

iii) F *es un conjunto de medida nula*

Demostración. El teorema I.5 nos permite limitarnos al caso en que (p,g) es una solución S_3-conexa de (P). i) Sea x tal que $(x,\Phi(x)) \in \Omega$, tenemos $p(x,\Phi(x)) = 0$ y existe una sucesión $(\varepsilon_n)_{n\in N}$ con $\varepsilon_n > 0$ y ε_n tiende a 0 cuando n tiende a ∞ tal que

$(x,\Phi(x)-\varepsilon_n) \in \Omega$ y $p(x,\Phi(x)-\varepsilon_n) > 0$; luego tenemos:

$$\text{Gráfo } (\Phi) \cap \Omega \subset F$$

Demostramos ahora la inclusión inversa: sea $(x_o,y_o) \in F$, y supongamos que $y_o \neq \Phi(x_o)$; entonces tenemos $y_o > \Phi(x_o)$ dado que:

1) $\Phi(x_o) = f^-(x_o)$ en cual caso obviamente $y_o > \Phi(x_o)$

ó

2) $\Phi(x_o) = \sup \{y \mid (x_o,y) \in \Omega$ y $p(x_o,y) > 0\}$ en cual caso, si y_o fuese $<\Phi(x_o)$ tendríamos (lema I.2) $p(x_o,y_o) > 0$ y por lo tanto $(x_o,y_o) \notin F$ lo que es contradictorio con la hipótesis.

Dado que $(x_o,y_o) \in F$ existe una sucesión $(x_i,y_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ con $(x_i,y_i) \in |p > 0|$ y $x_i \neq x_o$ $\forall i \in \mathbb{N}^*$, por definición de F que converge hacia (x_o,y_o). Podemos considerar ó bien que $x_i < x_o$ $\forall i$, ó bien que $x_i > x_o$ $\forall i$; siendo idéntico el tratamiento de ambos casos, nos limitaremos a estudiar el primero: $\underline{x_i < x_o \quad \forall i}$. Para todo $y \in \,]\Phi(x_o),y_o[$, la sucesión $(x_i,\min(y_i,y)) \in |p > 0|$ (por lo menos a partir de cierto i suficientemente grande) y converge hacia (x_o,y); por lo tanto $(x_o,y) \in F$ dado que además $p(x_o,y) = 0$ (por la definición de Φ), y tenemos:

$$\{x_o\} \times |\Phi(x_o),y_o| \subset F$$

Por otra parte, existe $\varepsilon_o > 0$ tal que $Q_{\varepsilon_o} = (]x_o-\varepsilon_o, x_o+\varepsilon_o[\times]y_o-\varepsilon_o,y_o+\varepsilon_o[) \subset \Omega$, y podemos escoger ε_o de forma que $y_o-\varepsilon_o \geq \Phi(x_o)$. Sea entonces y, tal que $y_o > y > y_o-\varepsilon_o$, tenemos:

a) $(x_o,y) \in F \quad ((x_i,\min(y_i,y)) \to (x_o,y)$ con x_i supuesto $<x_o)$,

b) el número de componentes conexas de $Q_{\varepsilon_o} \cap |p>0| \cap (\mathbb{R} \times \{y\})$ es $\leq n$;

de a) y b) deducimos que existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$]x_o-\varepsilon,\ x_o[\ \times \{y\} \subset |p>0|;$$

y por lo tanto,

$$(]x_o-\varepsilon,\ x_o[\ \times\ ]-\infty,y]) \cap \Omega \subset |p>0|$$

escogiendo entonces, ε suficientemente pequeños tenemos:

$$]x_o-\varepsilon,\ x_o[\ \times\ ]y_o-\varepsilon,\ y_o[\ \subset |p>0|$$

y

$\{x_o\} \times\ ]y_o-\varepsilon,\ y_o[\ \subset |p=0|$ lo que entra en contradicción con el lema I.5, de lo cual deducimos $y_o = \Phi(x_o)$ y:

$$F \subset \text{Gráfo } (\Phi) \quad \Omega,$$

lo que sumado a la primera inclusión da:

$$F = \text{Gráfo } (\Phi) \cap \Omega.$$

ii) Sea $x \in \pi_x(\Omega)$ tal que $(x,\Phi(x)) \in \Omega$ (por lo anterior $(x,\Phi(x)) \in F)$ y sea $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de puntos que podemos suponer de $\pi_x(\Omega)$, tal que $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ tienda a x, cuando i tiende a ∞; suponemos los x_i suficientemente próximos a x para que los $(x_i,\Phi(x_i)) \in \Omega$. Supongamos entonces que $\Phi(x_i)$ no tiende a $\Phi(x)$ cuando i tiende a ∞ i.e. $\exists\, \varepsilon>0$ tal que $\forall N \in \mathbb{N}$ $\exists$ $i > N$ tal que $|\Phi(x_i) - \Phi(x)| > \varepsilon$; esto implica la existencia de una subsucesión

$(x_{i_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de (x_i) tal que $|\Phi(x_{i_k}) - \Phi(x)| > \varepsilon$ $\forall k \in \mathbb{N}$ con $x_{i_k} \to x$ cuando $k \to \infty$; pero como $\Phi(x_{i_k})$ está acotado al ser Ω un abierto acotado, existe una subsucesión $(x_{i_{k_j}})_{j\in\mathbb{N}}$ tal que $(x_{i_{k_j}})_{j\in\mathbb{N}}$ tienda hacia x cuando $j \to \infty$ y $\Phi(x_{i_{k_j}})$ tienda hacia un límite ℓ cuando $j \to \infty$ con $|\ell-\Phi(x)| \geq \varepsilon$ i.e. $\ell \neq \Phi(x)$; se presentan entonces 2 casos:

1) $\ell < \Phi(x)$; en este caso podemos escoger y tal que $\ell < y < \Phi(x)$; por lo tanto $(x,y) \in |p > 0|$ y por el teorema 2.6 existe $\varepsilon' > 0$ tal que el conjunto

$$C_{\varepsilon'} =]x-\varepsilon', x+\varepsilon'[\times]-\infty, y+\varepsilon'[\cap \Omega \subset |p > 0|,$$

por lo tanto también

$$B((x,\ell), \varepsilon') \cap \Omega \subset C_{\varepsilon'} \subset |p > 0|$$

lo que es obviamente contradictorio con $(x_{i_{k_j}}, \Phi(x_{i_{k_j}})) \to (x,\ell)$ dado que $p(x_{i_{k_j}}, \Phi(x_{i_{k_j}})) \in |p = 0|$.

2) $\ell > \Phi(x)$; entonces para todo y tal que $\ell > y > \Phi(x)$ tendríamos $p(x,y) = 0$ y $(x_{i_{k_j}}, \min(\Phi(x_{i_{k_j}}) - \varepsilon_j, y)) \to (x,y)$ cuando $j \to \infty$ siendo ε_j una sucesión que tiende a 0 cuando $j \to \infty$; como $(x_{i_{k_j}}, \min(\Phi(x_{i_{k_j}}) - \varepsilon_j, y)) \in |p > 0|$ por lo menos a partir de cierta j, deducimos que $(x,y) \in F$ siendo $(x,y) \neq$ $\neq (x,\Phi(x))$ lo que es imposible como se ha demostrado en i).

Tenemos entonces $\Phi(x_i) \to \Phi(x)$ cuando $i \to \infty$ para toda sucesión $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ tal que $x_i \to x$ cuando $i \to \infty$; Φ es entonces continua en x para todo $x \in \pi_x(\Omega)$ tal que $(x,\Phi(x)) \in \Omega$. Por otra parte, Φ es medible como consecuencia del teorema I.2.iii) y del lema I.1.

Por fin iii) se deduce facilmente de i) y de ii), lo que acaba la demostración.

Nota II.3. Sería interesante estudiar la aplicabilidad de los resultados de Kinderlehrer y Niremberg |45| acerca de la analiticidad de la frontera libre F.

II.2.- Unicidad de la solución S_3-conexa - Comparación de soluciones

En este apartado vamos a demostrar la unicidad de la solución S_3-conexa; esa solución S_3-conexa será entonces la solución minimal del problema (P). Nos situamos en las hipótesis de los apartados (1) y (2) del primer capítulo.

Demostraremos primero un resultado concerniente a g:

Teorema II.5. *Sea* (p,g) *una solución de* (P), *entonces tenemos:*

$$g = \gamma(|p > 0|)$$

Demostración. Sabemos que $g = 1$ en $|p > 0|$, y que la frontera libre F de $|p > 0|$ es de medida nula, por lo tanto nos queda por demostrar que $g = 0$ en $\Omega - \overline{|p > 0|}$. Podemos recubrir $\Omega - \overline{|p > 0|}$ por una reunión numerable de cubos $Q_{i,j} \subset \Omega - \overline{|p > 0|}$ de la forma

$$Q_{i,j} = [x_i, x_i + \tfrac{1}{j}[\times [y_i, y_i + \tfrac{1}{j}[, \qquad j \in \mathbb{N}^*$$

siendo $(x_i, y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de puntos de $\Omega - \overline{|p > 0|}$; entonces obviamente

$$Q_{i,j} \subset Z_{i,j} = ([x_i, x_i + \tfrac{1}{j}] \times [y_i, +\infty[) \cap \Omega \subset |p = 0|$$

y $\quad ([x_i, x_i + \tfrac{1}{j}] \times [y_i, +\infty[) \cap S_3 = \emptyset$

por lo tanto, aplicando el lema I.4:

$$0 \geq \int_{Z_{i,j}} (p_y + g) = \int_{Z_{i,j}} g \geq 0 \quad \text{dado que} \quad g \geq 0$$

luego tenemos:

$$\int_{Z_{i,j}} g = 0, \quad \text{y entonces} \quad g = 0 \quad \text{en casi todo punto de } Z_{i,j},$$

por lo tanto

$$g = 0 \quad \text{en casi todo punto de} \quad \bigcup_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} Z_{i,j}$$

y

$$\Omega - \overline{|p > 0|} \subset \bigcup_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} Z_{i,j}$$

lo cual implica:

$$g = 0 \quad \text{en casi todo punto de} \quad \Omega - \overline{|p > 0|},$$

lo que acaba la demostración.

Vamos a considerar ahora dos problemas del tipo de (P), con datos en el borde distintos con el fin de comparar las soluciones S_3-conexas de ambos. Para $i=1,2$, tenemos:

$$(P_i) \begin{cases} \text{Encontrar un par } (p_i, g_i) \in H^1(\Omega) \times L^\infty(\Omega) \text{ tal que} \\ \text{(i) } p_i \geq 0 \text{ en casi todo punto de } \Omega, \; p_i = \phi_i \text{ en } S_2^i \cup S_3^i \; (\phi_i = 0 \text{ en } S_2^i) \\ \text{(ii) } g_i(x,y) \in \operatorname{sign}^+(p_i(x,y)) \text{ en casi todo punto de } \Omega \\ \text{(iii) } \int_\Omega (\nabla p_i \nabla \xi + g_i \xi_y) \leq 0 \quad \forall \xi \in H^1(\Omega), \; \xi = 0 \text{ en } S_3^i, \; \xi \geq 0 \text{ en } S_2^i; \end{cases}$$

siendo (S_1, S_2^1, S_3^1) y (S_1, S_2^2, S_3^2) dos particiones de S en las que el subconjunto S_1 es constante. Suponemos, además, que:

$$S_3^1 \supset S_3^2$$

y

$$\phi_1 \geq \phi_2$$

estando las ϕ_i definidas de la misma forma que lo era anteriormente la función ϕ, es decir:

$$\phi_i(x,y) = (h_{i,k} - y)^+ \quad \text{en cada componente conexa } S_{3,k}^i \text{ de } S_3^i.$$

También consideraremos que (p_1,g_1) y (p_2,g_2) son soluciones S_3-conexas respectivamente de (P_1) y de (P_2) y designamos por Φ_1 y Φ_2 las funciones medibles definidas en $\pi_x(\Omega)$ por:

$$\Phi_i(x) = \begin{cases} \operatorname{Sup} \{y \;/\; (x,y) \in \Omega \text{ y } p_i(x,y) > 0\} & \text{si este conjunto es no-vacio} \\ f^-(x) & \text{en otro caso} \end{cases}$$

para $i=1,2$ y por Φ_m la función medible definida por

$$\Phi_m(x) = \min (\Phi_1(x), \Phi_2(x))$$

Por fin, definimos el par $(p_m,g_m) \in H^1(\Omega) \times L^\infty(\Omega)$ por:

$$p_m = \min (p_1,p_2), \quad g_m = \min (g_1,g_2) = \gamma(|p_1 > 0| \cap |p_2 > 0|) \quad \text{en casi todo punto.}$$

Tenemos entonces el siguiente lema:

<u>Lema II.1</u>. *Con las notaciones anteriores, para todo* $\xi \in H^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ *tal que* $\xi \geq 0$, *tenemos:*

$$\int_\Omega \nabla(p_2-p_m)\,.\nabla\xi + \int_\Omega (g_2-g_m)\xi_y \leq \int_{D_2} \xi(x,\Phi_2(x))dx,$$

siendo $D_2 = \{x \in \pi_x(\Omega) \,/\, \Phi_2(x) > \Phi_m(x)\}$.

Demostración. Antes de entrar en la demostración notemos que dado que Φ_2 y Φ_m son funciones medibles, el conjunto D_2 es también medible y por tanto el segundo término de la desigualdad tiene sentido.

Sea, entonces, para $\varepsilon > 0$, la función

$$\zeta = \min\,(p_2-p_m,\ \varepsilon\,\xi);$$

tenemos $\zeta \in H^1(\Omega)$, $\zeta = 0$ en $S_2^i \cup S_3^i$ para $i=1,2$; por otra parte $\zeta \geq 0$ dado que $p_2-p_m \geq 0$ y que $\xi \geq 0$. Tenemos entonces:

$$0 = \int_\Omega \nabla p_i\ \nabla\zeta + \int_\Omega g_i\ \zeta_y \quad \text{para}\ \ i=1,2;$$

y por lo tanto

$$0 = \int_\Omega \nabla(p_2-p_1).\nabla(\min(p_2-p_m,\ \varepsilon\,\xi)) + \int_\Omega (g_2-g_1)\ (\min(p_2-p_m,\ \varepsilon\,\xi))_y$$

$\Longleftrightarrow$

$$0 = \int_{|p_2-p_m \leq \varepsilon\,\xi|} \nabla(p_2-p_1).\nabla(p_2-p_m) + (g_2-g_1)(p_2-p_m)_y) +$$

$$+\ \varepsilon \int_{|p_2-p_m > \varepsilon\,\xi|} (\nabla(p_2-p_1)\nabla\xi + (g_2-g_1)\xi_y).$$

$\Longrightarrow$

$$0 = \int_{|p_2-p_m \leq \varepsilon\,\xi|} (|\nabla(p_2-p_m)|^2 + (g_2-g_m)(p_2-p_m)_y) +$$

$$+\ \varepsilon \int_{|p_2-p_m > \varepsilon\,\xi|} (\nabla(p_2-p_m)\nabla\xi + (g_2-g_m)\xi_y)$$

dado que $|p_2-p_m > 0| \subset |p_1 = p_m|$ y $|p_2-p_m > \varepsilon\,\xi| \subset |p_2-p_m > 0|$ y que $g_1 = g_m$ en casi todo punto de $|p_1 = p_m|$. De esta última igualdad deducimos:

$$0 = \int_\Omega \nabla(p_2-p_m.\nabla(\min(p_2-p_m,\ \varepsilon\,\xi) + \int_\Omega (g_2-g_m)(\min(p_2-p_m,\ \varepsilon\,\xi))_y$$

$$= \int_{|p_2-p_m \le \varepsilon\,\xi|} |\nabla(p_2-p_m)|^2 - \int_\Omega (g_2-g_m)((p_2-p_m-\varepsilon\xi)^-)_y +$$

$$+ \varepsilon\int_{|p_2-p_m > \varepsilon\,\xi|} \nabla(p_2-p_m).\nabla\xi + \varepsilon\int_\Omega (g_2-g_m)\xi_y$$

lo cual implica:

$$\int_{|p_2-p_m > \varepsilon\,\xi|} \nabla(p_2-p_m)\,.\nabla\xi + \int_\Omega (g_2-g_m)\xi_y = -\frac{1}{\varepsilon}\int_{|p_2-p_m \le \varepsilon\,\xi|} |\nabla(p_2-p_m)|^2 +$$

$$+ \frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega (g_2-g_m)((\varepsilon\,\xi-(p_2-p_m))^+)_y$$

y por lo tanto:

$$\int_{|p_2-p_m > \varepsilon\xi|} \nabla(p_2-p_m).\nabla\xi + \int_\Omega (g_2-g_m)\xi_y \le \int_\Omega (g_2-g_m)((\xi - \frac{p_2-p_m}{\varepsilon})^+)_y .$$

Dado que

$$g_2 - g_m = \begin{cases} 0 & \text{en } |p_m > 0| \quad (\text{dado que entonces } p_2 > 0 \text{ y } g_2 = g_m = 1) \\ 1 & \text{en } |p_2 > 0| \cap |p_m = 0| \\ 0 & \text{en } |p_2 = 0| \end{cases}$$

la desigualdad anterior es equivalente a

$$(13)\qquad \int_{|p_2-p_m>\varepsilon\xi|} \nabla(p_2-p_m).\nabla\xi + \int_\Omega (g_2-g_m)\xi_y \leq \int_{|p_2>0|\cap|p_m=0|} ((\xi - \frac{p_2}{\varepsilon})^+)_y .$$

El segundo termino de esta desigualdad se puede acotar por:

$$\int_{|p_2>0|\cap|p_m=0|} ((\xi - \frac{p_2}{\varepsilon})^+)_y \leq \int_{D_2} (\xi(x,\ \Phi_2(x)) - \frac{p_2(x,\ \Phi_2(x))}{\varepsilon})^+ dx$$

$$\leq \int_{D_2} \xi(x,\ \Phi_2(x))dx$$

(Integrando primero en un conjunto más pequeño que $|p_2 > 0| \cap |p_m = 0|$ en el que $(\xi - \frac{p_2}{\varepsilon})^+$ es absolutamente continua).

De la anterior desigualdad y de (13) deducimos entonces:

$$\int_\Omega \nabla(p_2-p_m).\nabla\xi\ .\gamma(|p_2-p_m > \varepsilon\ \xi|) + \int_\Omega (g_2-g_m)\xi_y \leq$$

$$\leq \int_{D_2} \xi(x,\ \Phi_2(x))dx$$

y pasando al límite cuando ε tiende a 0 tenemos:

$$\int_\Omega \nabla(p_2-p_m).\nabla\xi.\gamma(|p_2-p_m > 0|) + \int_\Omega (g_2-g_m)\xi_y \leq \int_{D_2} \xi(x,\ \Phi_2(x))dx,$$

lo que es equivalente a:

$$\int_\Omega \nabla(p_2-p_m.\ \nabla\xi + \int_\Omega (g_2-g_m)\xi_y \leq \int_{D_2} \xi(x,\ \Phi_2(x))dx$$

dado que $\nabla(p_2-p_m) = 0$ en casi todo punto de $|p_2-p_m = 0|$, lo que acaba la demostración.

El lema siguiente nos aporta más datos sobre (p_m,g_m):

<u>Lema II.2</u>. *Con las notaciones anteriores,* (p_m, g_m) *es solución de* (P_2) *y* (p_M, g_M) *es solución de* (P_1), *siendo*

$$p_M = \mathrm{Max}(p_1, p_2), \qquad g_M = \mathrm{Max}(g_1, g_2);$$

además tenemos:

$$\int_\Omega \nabla p_2 \, \nabla\xi + \int_\Omega g_2 \, \xi_y = \int_\Omega \nabla p_m \, \nabla\xi + \int_\Omega g_m \, \xi_y \qquad \forall\xi \in H^1(\Omega)$$

y

$$\int_\Omega \nabla p_1 \, \nabla\xi + \int_\Omega g_1 \, \xi_y = \int \nabla p_M \, \nabla\xi + \int_\Omega g_M \, \xi_y \qquad \forall\xi \in H^1(\Omega)$$

<u>Demostración</u>. Supongamos primero, que $\xi \in C^\infty(\bar{\Omega})$ y que $\xi \geq 0$ y sean:

$$A = \overline{|p_1 > 0| \cap |p_2 > 0|} = \overline{|p_m > 0|}$$

y para todo $\delta > 0$

$$\alpha_\delta(x,y) = (1 - d((x,y), A) / \delta)^+$$

siendo $d((x,y, A)$ la distancia de (x,y) al conjunto A; α_δ es lipschitziana y por lo tanto $\alpha_\delta \in H^1(\Omega)$ y también $\xi . \alpha_\delta \in H^1(\Omega)$; sea entonces la función $(1 - \alpha_\delta)\xi \in H^1(\Omega)$, $(1 - \alpha_\delta)\xi = 0$ en S_3^2 dado que $S_3^2 \subset A$, y $(1 - \alpha_\delta)\xi \geq 0$ en S_2^2 dado que $(1 - \alpha_\delta)\xi \geq 0$ en Ω; tenemos entonces:

$$\int_\Omega \nabla(p_2 - p_m) \, . \nabla\left[(1 - \alpha_\delta)\xi\right] + \int_\Omega (g_2 - g_m)\left[(1 - \alpha_\delta)\xi\right]_y$$

$$= \int_\Omega \nabla p_2 \, . \nabla\left[(1 - \alpha_\delta)\xi\right] + \int_\Omega g_2 \left[(1 - \alpha_\delta)\xi\right]_y \leq 0$$

dado que $1 - \alpha_\delta = 0$ en $A \cap \Omega$ y $p_m = g_m = 0$ en Ω-A. Deducimos entonces que:

$$(14)\quad \int_\Omega \nabla(p_2-p_m)\nabla\xi + \int_\Omega (g_2-g_m)\xi_y$$

$$= \int_\Omega \nabla(p_2-p_m).\nabla(\alpha_\delta.\xi) + \int_\Omega (g_2-g_m)(\alpha_\delta.\xi)_y + \int_\Omega \nabla(p_2-p_m).\nabla((1-\alpha_\delta)\xi) +$$

$$+ \int (g_2-g_m)((1-\alpha_\delta)\xi)_y \leq \int_\Omega \nabla(p_2-p_m).\nabla(\alpha_\delta\ \xi) + \int_\Omega (g_2-g_m)(\alpha_\delta.\xi)_y$$

Dado que $\alpha_\delta\xi \in H^1(\Omega)$ $C(\bar{\Omega})$ y que $\alpha\ \xi \geq 0$, podemos aplicar el lema II.1 y tenemos:

$$\int_\Omega \nabla(p_2-p_m).\nabla(\alpha_\delta\ \xi) + \int_\Omega (g_2-g_m)(\alpha_\delta\ \xi)_y \leq \int_{D_2} \alpha\ (x,\Phi_2(x))\xi(x,\Phi_2(x))dx$$

De la igualdad anterior y de (14) deducimos:

$$\int_\Omega \nabla(p_2-p_m).\nabla\xi + \int_\Omega (g_2-g_m).\xi_y \leq \int_{D_2} \alpha_\delta(x,\Phi_2(x)).\xi(x,\Phi_2(x)).$$

Haciendo tender δ hacia 0 por el teorema de la convergencia de Lebesgue obtenemos:

$$(15)\quad \int_\Omega \nabla(p_2-p_m).\nabla\xi + \int_\Omega (g_2-g_m)\xi_y \leq 0 \qquad \forall\xi \in C^\infty(\bar{\Omega}), \quad \xi \geq 0$$

dado que $x \in D_2$ implica $\Phi_2(x) > \Phi_m(x)$ y por lo tanto $(x, \Phi_2(x)) \in$ $\in \Omega$-A y $\alpha_\delta(x, \Phi_2(x))$ tiende a 0 cuando δ tiende a 0.

Sea ahora, $\xi \in C^\infty(\bar{\Omega})$, (ya no suponemos que $\xi \geq 0$), y sean $M = \underset{\bar{\Omega}}{\mathrm{Max}}\ \xi$ y $m = \underset{\bar{\Omega}}{\min}\ \xi$; entonces tenemos $M-\xi \geq 0$ y $\xi-m \geq 0$ y por lo tanto aplicando (15):

$$0 \geq \int_\Omega \nabla(p_2-p_m).\nabla(M-\xi) + \int_\Omega (g_2-g_m)(M-\xi)_y = -\int_\Omega \nabla(p_2-p_m)\nabla\xi -$$

$$- \int_\Omega (g_2-g_m)\xi_y = -\int_\Omega \nabla(p_2-p_m)\nabla(\xi-m) - \int_\Omega (g_2-g_m)(\xi-m)_y \geq 0$$

de lo cual deducimos:

(16) $$\int_\Omega \nabla(p_2-p_m).\nabla\xi + \int_\Omega (g_2-g_m)\xi_y = 0 \qquad \forall\xi \in C^\infty(\bar{\Omega})$$ y por lo tanto, por densidad, $\forall\xi \in H^1(\Omega)$.

Tenemos entonces:

$$\int_\Omega \nabla p_2\ \nabla\xi + \int_\Omega g_2\ \xi_y = \int_\Omega \nabla p_m\ \nabla\xi + \int_\Omega g_m\ \xi_y \qquad \forall\xi \in H^1(\Omega),$$

en particular si $\xi \in H^1(\Omega)$ y $\xi = 0$ en S_3^2, $\xi \geq 0$ en S_2^2 tendremos

$$\int_\Omega \nabla p_m\ \nabla\xi + \int_\Omega g_m\ \xi_y = \int_\Omega \nabla p_2\ \nabla\xi + \int_\Omega g_2\ \xi_y \leq 0;$$

por otra parte, los otros requisitos para que (p_m,g_m) sea solución de (P_2) son obvios de comprobar y por lo tanto (p_m,g_m) es solución de (P_2).

Por otra parte, por definición de (p_M,g_M), tenemos:

$$p_M = p_1 + p_2 - p_m \qquad \text{y} \qquad g_M = g_1 + g_2 - g_m$$

y por lo tanto $\forall\xi \in H^1(\Omega)$ tenemos

$$\int_\Omega \nabla p_M\ \nabla\xi + \int_\Omega g_M\ \xi_y = \int_\Omega \nabla p_1\ \nabla\xi + \int_\Omega g_1\ \xi_y + \int_\Omega \nabla(p_2-p_m)\nabla\xi +$$
$$+ \int_\Omega (g_2-g_M)\xi_y$$

y aplicando (16) tenemos

$$\int_\Omega \nabla p_M\ \nabla\xi + \int_\Omega g_M\ \xi_y = \int_\Omega \nabla p_1\ \nabla\xi + \int_\Omega g_1\ \xi_y \qquad \forall\xi \in H^1(\Omega)$$

lo cual, de la misma forma que anteriormente para (p_m,g_m), nos permite concluir que (p_M,g_M) es solución de (P_1). (Los demás requisitos para ello son obvios de comprobar), lo que acaba la demostración.

Estamos ahora en medida de demostrar el siguiente resultado:

Teorema II.6. *Existe una única solución* S_3*-conexa de* (P).

Demostración. Sean (p_1,g_1) y (p_2,g_2) 2 soluciones S_3-conexas de (P), aplicamos el lema II.2 (aquí $S_2^1 = S_2^2 = S_2$, $S_3^1 = S_3^2 = S_3$, $\phi_1 = \phi_2 = \phi$); el par $(p_m,g_m) \in H^1(\Omega) \times L^\infty(\Omega)$, definido por:

$$p_m = \min (p_1,p_2), \qquad g_m = \min (g_1,g_2)$$

es entonces solución de (P). Designamos por (p_o,g_o) la solución S_3-conexa correspondiente a (p_m,g_m). Por el lema II.2 y el teorema I.5

$$\int_\Omega \nabla(p_i-p_o).\nabla\xi + \int_\Omega (g_i-g_o)\xi_y = \int_\Omega \nabla(p_i-p_m).\nabla\xi + \int_\Omega (g_i-g_m)\xi_y = 0 \qquad \forall\xi \in H^1(\Omega)$$

en particular, tenemos:

$$(17) \qquad \int_\Omega \nabla(p_i-p_o).\nabla p_o + \int_\Omega (g_i-g_o)(p_o)_y = 0$$

y por otra parte, dado que (p_o,g_o) es solución y que $p_i-p_o = 0$ en $S_2 \cup S_3$ tenemos:

$$(18) \qquad \int_\Omega \nabla p_o \ \nabla(p_i-p_o) + \int_\Omega g_o(p_i-p_o)_y = 0$$

Restando (17) de (18) obtenemos:

$$(19) \qquad \int_\Omega g_o(p_i-p_o)_y = 0$$

Sea entonces $\xi = p_i - p_o + y$, tenemos

$$0 = \int_\Omega \nabla(p_i-p_o)\ \nabla(p_i-p_o+y) + \int_\Omega (g_i-g_o)(p_i-p_o+y)_y$$

$\Longleftrightarrow$

$$0 = \int_\Omega |\nabla(p_i-p_o)|^2 + \int_\Omega (p_i-p_o)_y + \int_\Omega (g_i-g_o)(p_i-p_o)_y + \int_\Omega (g_i-g_o);$$

utilizando (19) y $g_i-g_o = (g_i-g_o)^2$ obtenemos:

$$0 = \int_\Omega |\nabla(p_i-p_o)|^2 + 2\int_\Omega (g_i-g_o)(p_i-p_o)_y + \int_\Omega (g_i-g_o)^2$$

$\Longleftrightarrow$

$$(20) \qquad 0 = \int_\Omega |\nabla(p_i-p_o) + (g_i-g_o).e|^2$$

donde $\underline{e}$ es el vector $(0,1)$. De (20) deducimos entonces que:

$$(21) \qquad \begin{array}{lll} \text{(i)} & (p_i-p_o)_x = 0 & \text{en } \Omega \\ \text{(ii)} & (p_i-p_o)_y = 0 & \text{en } |p_o > 0| \\ \text{(iii)} & (p_i-p_o)_y = (p_i)_y = -1 & \text{en } |p_i > 0| \cap |p_o = 0|. \end{array}$$

Dado que (p_o,g_o) es S_3-conexa, de (21) (i) y (21) (ii) deducimos que

$$p_i = p_o \quad \text{en} \quad |p_o > 0|$$

y dado que p_i es también S_3-conexa el conjunto $|p_i-p_o > 0|$ está vacío de lo contrario sería una componente conexa de $|p_i > 0|$ cuyo cierre obviamente no contiene puntos de S_3. Tenemos entonces:

$$(p_1,g_1) = (p_o,g_o) = (p_2,g_2)$$

lo que acaba la demostración.

Nota II.4. El teorema I.5 nos permite deducir entonces que la única solución S_3-conexa de (P) es a su vez solución minimal de (P) (en el sentido de que minimiza cualquier otra solución de (P)).

Nota II.5. Como lo muestra el ejemplo I.1 de la Nota I.4, no se puede pretender, en el caso general, mejorar el resultado del teorema II.6 sin embargo, con alguna hipótesis suplementaria sobre Ω y S se puede demostrar la S_3-conexidad de toda solución de (P), lo que equivale a la unicidad. (Este es el objeto de la sección II.3).

Para terminar con esta sección, vamos a ver a continuación un teorema de comparación entre la solución S_3-conexa de (P_1), y la de (P_2):

Teorema II.7. *Con las notaciones e hipótesis anteriores sobre* (P_1) *y* (P_2), *si* (p_i, g_i) *es la solución* S_3*-conexa de* (P_i) *para* $i=1,2$, *tenemos:*

$$p_1 \geq p_2, \quad g_1 \geq g_2 \quad \text{en} \quad \Omega .$$

Demostración. En efecto, dado el lema II.2, el par (p_m, g_m) definido por

$$p_m = \min(p_1, p_2) \quad \text{y} \quad g_m = \min(g_1, g_2)$$

es solución de (P_2); pero dado que (p_2, g_2) es la solución S_3-conexa, y por lo tanto minimal de (P_2) deducimos que $(p_2, g_2) = (p_m, g_m)$ con lo cual

$$p_1 \geq p_2 \quad \text{y} \quad g_1 \geq g_2$$

lo que acaba la demostración.

II.3. Estudio de la S_3-conexidad. Unicidad.

Nos limitaremos en esta sección al estudio de dos casos. Primero veremos el caso en que S_3 es conexo y luego el caso en que S_3 posee dos componentes conexas. Estos dos casos resultan los más interesantes en la medida en que son los casos contemplados por la mayoría de los autores, en particular |2|, |7|, |19|.

Para este estudio localizaremos S_1 (la parte impermeable del borde de Ω) en el "fondo" del dique, es decir, si $|x_1,x_2| = \pi_x(\Omega)$ y si (x_1,y_1) y (x_2,y_2) son 2 puntos de S, entonces:

$$(H_2) \quad S_1 = \{(x,y) \in S \,/\, \exists\, y' > y \text{ tal que } (x,y') \in \Omega\}$$
$$\cup \{(x_1,y) \in S \,/\, y \leq y_1\} \cup \{(x_2,y) \in S \,/\, y \leq y_2\}$$

3.1. Caso en que S_3 es conexo

Supondremos en toda esta parte que $S_3 = S_{3,1}$, llamamos h_1 la altura del agua "sobre" S_3, es decir: $\phi(x,y) = h_1 - y \quad \forall (x,y) \in S_3$, y sean a_1, b_1 2 reales tales que $a_1 \leq b_1$ y

$$[a_1,b_1] = \overline{\pi_x(S_3)}$$

Hacemos ahora las siguientes hipótesis:

(H_3) $(y-y').(x-x') \leq 0 \quad \forall (x,y) \in S_1, \ \forall (x',y') \in S_1$ tales que $x \leq a_1$ y $x' \leq a_1$; esto significa que $S_1 \cap]-\infty, a_1[\times \mathbb{R}$ es un grafo decreciente (ó eventualmente vacío).

(H_4) $\forall (x,y) \in S_1$, tenemos
$$\begin{cases} \text{ó } ([x_1,x] \times \{y\}) \cap \overline{S}_2 = \emptyset & (1) \\ \text{ó } S_1 \cap ([x,x_2] \times \mathbb{R}) \text{ es un grafo creciente} & (2) \end{cases}$$

Designamos entonces por t y x_t a los siguientes números reales:

$t = \text{Sup}\ \{y/(x,y) \in S_1$ siendo $x \geq b_1$ y (x,y) cumpliendo (H_4) -(1)$\}$

(22)

$x_t = \text{Inf}\ \{x\ /\ x \geq b_1$ y $(x,t) \in S_1\}$

Dado que S_1 es un conjunto cerrado tenemos:

(23) $$(x_t, t) \in S_1$$

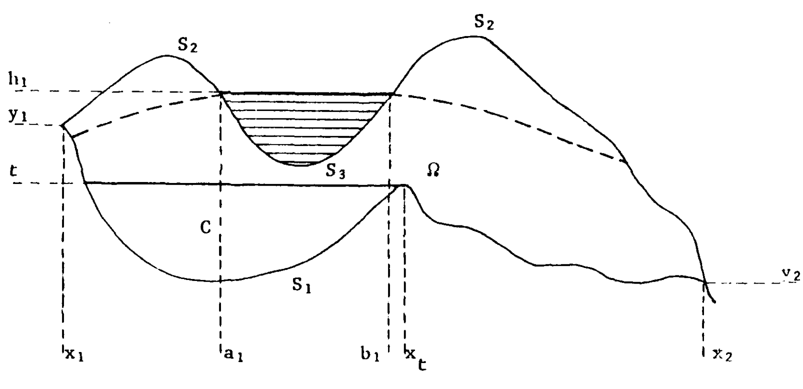

Fig.4

Tenemos entonces:

<u>Lema II.3</u>. *Si designamos por* C *al conjunto*

$$C = \{(x,y) \in \Omega\ /\ y < t,\ \ x < x_t\},$$

para toda solución (p,g) *del problema* (P) *tenemos:*

$$p \geq (t-y)\ .\ \gamma(C)$$

siendo $\gamma(C)$ *la función característica de* C.

Demostración. Si $C = \emptyset$ el resultado es obvio. Supondremos por lo tanto $C \neq \emptyset$. Podemos también suponer que (p,g) es la solución S_3-conexa dado que esta minora las otras. Sea entonces la función

$$\xi = -(p-(t-y))^- \gamma(C) \in H^1(\Omega);$$

(H_4) implica que $\xi = 0$ en S_3 (dado que $(b_1, h_1) \in S_2$ tenemos $t \leq h_1$) y que $\xi = 0$ en S_2; por consiguiente tenemos:

$$0 = \int_C \nabla p \, \nabla\left[-(p-(t-y))^-\right] + \int_C g\left[-p(-(t-y))^-\right]_y$$

$$= \int_C |\nabla\left[(p-(t-y))^-\right]|^2 + \int_C (g + (t-y)_y) \left[-(p-(t-y))^-\right]_y$$

$$= \int_C |\nabla\left[(p-(t-y))^-\right]|^2 + \int_C (g-1) \left[-(p-(t-y))^-\right]_y$$

y dado que $g = \gamma(|p > 0|)$ tenemos

$$0 = \int_C |\nabla\left[(p-(t-y))^-\right]|^2 - \int_{C \cap |p=0|} 1$$

$$= \int_{C \cap |p>0|} |\nabla\left[(p-(t-y))^-\right]|^2 + \int_{C \cap |p=0|} 1 - \int_{C \cap |p=0|} 1$$

$$= \int_{C \cap |p>0|} |\nabla\left[(p-(t-y))^-\right]|^2 = \int_{|p>0| \quad |x<x_t|} |\nabla\left[(p-(t-y))^-\right]|^2$$

dado que en $|p > 0| \cap (|x < x_t| - C)$ tenemos:

$$(p - (t-y))^- = 0 .$$

Dado que (p,g) es la solución S_3-conexa, el lema I.2 nos permite deducir que $|p > 0| \cap |x < x_t|$ es conexo y por lo tanto de lo anterior deducimos que

$$(p - (t-y))^- = \text{constante en } |p > 0| \cap |x < x_t|;$$

como $S_3 \subset \overline{|p > 0| \cap |x < x_t|}$, $(p - (t-y))^-$ es continuo hasta S_3 y $(p - (t-y))^- = 0$ en S_3 (dado que $t \leq h_1$), deducimos que

$$(p - (t-y))^- = 0 \quad \text{en} \quad |p > 0| \cap |x < x_t|$$

lo que implica:

$$p \geq (t-y)\ \gamma(C) \quad \text{en} \quad \Omega.$$

Nota II.6. Está claro que se puede debilitar la hipótesis (H_3) sustituyendola por:

(H_3') $\quad (y-y').(x-x') \leq 0 \quad \forall (x,y) \in S_1, \quad \forall (x',y') \in S_1$ tales que

$x \leq a_1, \quad x' \leq a_1, \quad y \geq t \quad$ e $\quad y' \geq t.$

Tenemos entonces el primer resultado de unicidad:

Corolario II.2. *Con las hipótesis anteriores y si además* $y_1 \geq h_1$, $y_2 \geq h_1$, *la solución del problema* (P) *es única. Si además* $t = h_1$ *entonces*

$$p(x,y) = (h_1-y)^+.$$

Demostración. Llamaremos (p,g) a la solución S_3-conexa de (P) y (p',g') a una solución cualquiera de (P). En $|p > 0|$ tenemos:

$$p = p' \quad \text{en} \quad |p > 0|;$$

por otra parte, utilizando la notación del lema anterior tenemos

$$C \subset |p > 0| \subset |p' > 0| \quad \text{lo que implica} \quad p = p' \quad \text{en} \quad C$$

Ahora, las hipótesis H_3 (ó H_3') y H_4 así como las hipótesis aditivas del corolario: $y_1 \geq h_1$ e $y_2 \geq h_1$ aseguran la monotonía de S_1 para $x > x_t$ e $y > t$ y por lo tanto la inexistencia de funciones charcos en Ω-C de lo cual deducimos que $p = p'$ en Ω-C y por lo tanto

$$p = p' \quad \text{en} \quad \Omega$$

de allí la unicidad. (Ver fig. 5).

Por otra parte, si $t = h_1$, tenemos:

$$(R \times]-\infty, t[) \cap S_2 = \emptyset;$$

es obvio entonces comprobar que $(h_1 - y)^+$ es solución, lo que acaba la demostración.

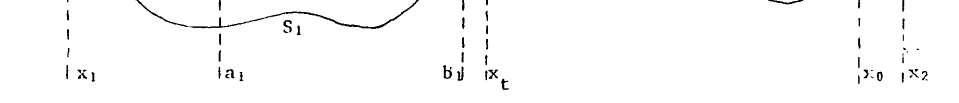

Fig.5

Teorema II.8. *Con las hipótesis del Lema II.3 y llamando* x_o *al número real:*

$$x_o = \text{Sup}\ \{x \ /\ \exists\ (x,y) \in S_1 \ \text{con} \ (]x_1, x[\times \{y\}) \cap \bar{S}_2 = \emptyset\};$$

entonces para todo $(x,y) \in S_1$, *siendo* $x_o > x \geq b_1$, *existe un punto* (x,y'') *de* Ω *tal que* $p(x,y') > 0$, *siendo* (p,g) *una solución de* (P) (*ver fig. 4 y 5*).

Demostración. Es suficiente demostrar el teorema para la solución S_3-conexa, supondremos, por lo tanto, que (p,g) es esa solución.

Designamos por $]z_1,z_2[$ a la proyección $\pi_x(|p>0|)$ y suponemos $z_2 < x_o$ (por otra parte el Lema I.5 asegura que $b_1 < z_2$). Llamamos $\overline{y}$ e $\underline{y}$ a los siguientes números:

$$\overline{y} = \text{Sup } \{y \;/\; (z_2,y) \in \Omega\}$$

$$\underline{y} = \text{Inf } \{y \;/\; (z_2,y) \in \Omega\}$$

tenemos en particular $(z_2,\overline{y}) \in S_2$, $(z_2,\underline{y}) \in S_1$ y $([x_1,z_2] \times \{\underline{y}\}) \cap \overline{S}_2 = \emptyset$ por lo tanto existe h tal que $\overline{y} > h > \underline{y}$ y que $([x_1,z_2] \times \{h\}) \cap \overline{S}_2 = \emptyset$; (basta con coger $h = \underline{y} + \frac{1}{2}\, d([x_1,z_2] \times \{\underline{y}\},\, \overline{S}_2)$. Sea, entonces α la función definida por:

$$\alpha(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \leq z_2 \\ \frac{1}{\varepsilon}\,(z_2-x) & \text{si} \quad z_2 \leq x \leq z_2 + \varepsilon \\ 0 & \text{si} \quad x \geq z_2 + \varepsilon \end{cases}$$

donde ε es tal que $B((z_2,h),\varepsilon) \subset \Omega$; consideramos la función $\xi = (p-(h-y))^{-}.\alpha \in H^1(\Omega)$; $\xi = 0$ en S_2 dada la definición de α y dado el hecho que $[x_1,z_2] \times \{h\} \quad \overline{z}_2 = \Phi$; y $\xi = 0$ en S_3 dado que $([x_1,z_2] \times \{h\}) \cap \overline{S}_2 = \emptyset$ implica $h < h_1$; por lo tanto tenemos:

$$0 = \int_\Omega \nabla p . \nabla[-(p-(h-y)^{+})^{-}.\alpha] + \int_\Omega g[-(p-(h-y)^{+})^{-}\alpha]_y$$

$$= \int_\Omega \nabla p . \nabla[-(p-(h-y)^{+})^{-}] + \int_\Omega g[-(g-(h-y)^{+})^{-}]_y \qquad \text{dado que} \quad p=g=0$$

para $x \geq z_2$. Luego tenemos:

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_{\Omega} \nabla p . \nabla \left[-(p-(h-y))^{-}\right] + \int_{\Omega} g \left[-(-(h-y))^{-}\right]_{y} \\
&= \int_{\Omega} \left|\nabla\left[(p-(h-y))^{-}\right]\right|^{2} + \int_{\Omega} (g+(h-y)_{y}) \left[-(p-(h-y))^{-}\right]_{y} \\
&= \int_{\Omega} \left|\nabla\left[(p-(h-y))^{-}\right]\right|^{2} + \int_{\Omega} (g-1) \left[-(p-(h-y))^{-}\right]_{y} \\
&= \int_{\Omega} \left|\nabla\left[(p-(h-y))^{-}\right]\right|^{2} + \int_{|p=0| \cap |y<h|} 1 \qquad \text{dado que} \quad g=1 \quad \text{en} \quad |p>0| \\
&= \int_{|p>0|} \left|\nabla\left[(p-(h-y))^{-}\right]\right|^{2} + \int_{|p=0| \cap |y<h|} (-1) + \int_{|p=0| \cap |y<h|} (1) \\
&= \int_{|p>0|} \left|\nabla\left[(p-(h-y))^{-}\right]\right|^{2} ;
\end{aligned}
$$

de lo cual deducimos que $(p(h-y))^{-}$ es constante en $|p > 0|$ (recordemos que $|p > 0|$ es conexo). Supongamos que $(p-(h-y))^{-} = c > 0$ en $|p > 0|$, entonces $p-(h-y) = -c$ en $|p > 0|$ es decir $p = h-c-y$ en $|p > 0|$, y por continuidad en S_3, lo cual es imposible dado que $h-c < h < h_1$, por lo tanto tenemos $(p-(h-y))^{-} = 0$ lo que implica:

$$p \geq (h-y)^{+} \qquad \text{en} \qquad |p > 0| ;$$

en particular, por continuidad tenemos:

$$p \geq (h-y)^{+} \qquad \text{en} \qquad (\{z_2\} \times \mathbb{R}) \cap \Omega ,$$

lo cual es imposible, lo que nos permite deducir que $z_2 \geq x_o$ y por lo tanto concluir esta demostración.

Corolario II.3. *Con las hipótesis del teorema* II.8 *el problema* (P) *tiene una única solución.*

Demostración. Este resultado es consecuencia inmediata del teorema II.8 y de las hipótesis (H_3) que prohibe la existencia de "charcos" en $\Omega \cap [x_1,a_1] \times \mathbb{R}$ y (H_4) que prohibe la existencia de "charcos" en $\Omega \cap [x_o,x_2] \times \mathbb{R}$.

Nota II.7. Al igual que en el lema II.3, podemos sustituir (H_3) por (H_3').

3.2. Caso en que S_3 posee 2 componentes conexas

Suponemos en esta parte que $S_3 = S_{3,1} \cup S_{3,2}$, llamamos h_1 (resp. h_2) la altura del agua "sobre" $S_{3,1}$ (resp. $S_{3,2}$) es decir $\phi(x,y) = h_1-y \quad \forall(x,y) \in S_{3,1}$, $\phi(x,y) = h_2-y \quad \forall(x,y) \in S_{3,2}$; siendo $h_1 \geq h_2$; y sean:

$$[a_1,b_1] = \overline{\pi_x(S_{3,1})} \qquad \text{y} \qquad [a_2,b_2] = \overline{\pi_x(S_{3,2})}.$$

con $x_1 \leq a_1 \leq b_1 \leq a_2 \leq b_2 \leq x_2$.

Además, suponemos, ciertas las hipótesis (H_i) para $i=1,2,3,4$. (Ver fig. 6).

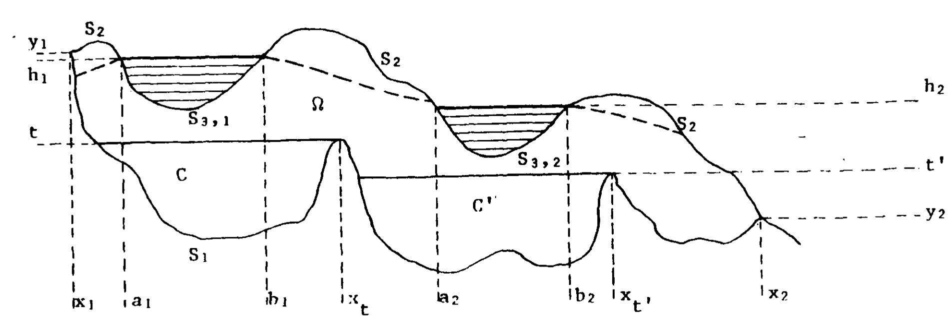

Fig.6

Por fin, si $x_t < b_2$, definimos t' y $x_{t'}$ por

$$(24)\quad \begin{cases} t' = \text{Sup}\,\{y \;/\; \exists\,(x,y) \in S_1, \text{ siendo } x \geq b_2 \text{ y } (x,y) \text{ cumpliendo } (H_4)(1)\} \\ x_{t'} = \text{Inf}\,\{x \;/\; x \geq b_2 \text{ y } (x,t') \in S_1\} \end{cases}$$

Dado que S_1 es cerrado tenemos $(x_{t'},t') \in S_1$ definimos entonces el conjunto

$$C' = \{(x,y) \in \Omega \;/\; y < t', \quad x' < x < x_{t'}\}$$

siendo $(x',t) \in S_1$ y $x' = \text{Sup}\,\{x \;/\; (x,t) \in S_1,\; x < x_{t'}\}$ (ver fig. 6).

Se tiene entonces:

Lema II.4. *Bajo las hipótesis anteriores (y siendo* C *el conjunto definido en el Lema II.3) tenemos:*

$$p \geq (t-y)^+\,\gamma(C), \quad y \quad p \geq (t'-y)^+\,\gamma(C') \quad si \;\; x_t < b_2$$

Demostración. Es idéntica a la del lema II.3 utilizando primero la función $\xi = -(p-(t-y))^-\,\gamma(C)$ (notando que si $t > h_2$ entonces la hipótesis (H_4) implica que $x_t < a_2$) y luego (en el caso en que $x_t < b_2$) la función $\xi = -(p-(t'-y))^-\,\gamma(C')$.

Teorema II.9. *En las hipótesis anteriores el problema* (P) *tiene solución única.*

Demostración. Un razonamiento análogo al del teorema II.8 y corolario II.3 permite deducir la inexistencia de "charcos" entre x_1 y a_2. El mismo razonamiento permite también demostrar la existencia de "charcos" entre a_2 y x_2 de lo cual se deduce la unicidad de la solución.

Nota II.8. Las hipótesis hechas aquí son razonables en la medida en que generalizan los resultados ya existentes y aportan una respuestas al problema de la unicidad en los modelos generalmente utilizados (|2| |19|).

Nota II.9. Es fácil ver que las mismas hipótesis permiten resolver el problema de la unicidad independientemente del número de componentes conexas de S_3. Podemos también utilizar a este fin el teorema de comparación (teorema II.7) para comparar soluciones del problema con más o menos componentes conexas de S_3.

II.4. Monotonía de la frontera libre

Generalizamos aquí, mediante técnicas desarrolladas en parte en II.1, los resultados de L.A. Caffarelli y G.Gilardi |23| sobre la monotonía de la frontera libre.

Utilizaremos aquí las mismas notaciones que en la Sección II.3 y consideraremos que Ω y S cumplen las hipótesis enunciadas en las secciones anteriores excepto las hipótesis (H_3), (H_3') y (H_4).

Estudiaremos en detalle dos casos: el caso en que S_3 es conexo y el caso en que S_3 posee 2 componentes conexas.

El teorema I.5 nos permite limitar este estudio a la solución S_3-conexa.

4.1. <u>Caso en que S_3 es conexo</u>

Estamos en el caso en que el agua que se filtra en Ω, proviene de un único embalse $S_{3,1} = S_3$; utilizando la notación anterior, llamamos h_1 la altura del agua "sobre" $S_{3,1} = S_3$ i.e. $\phi = h_1 - y$ en S_3. Llamamos a_1, b_1 a los extremos de $\pi_x(S_3)$ i.e.

$$[a_1, b_1] = \overline{\pi_x(S_3)} ;$$

y suponemos

$$(H_5) \quad \begin{cases} S_2 \cap (]-\infty, a_1] \times]-\infty, h_1[) & \text{es un grafo creciente ó es} = \emptyset \\ S_2 \cap ([b_1, +\infty[\times]-\infty, h_1[) & \text{es un grafo decreciente ó es} = \emptyset \end{cases}$$

(ver fig. 7)

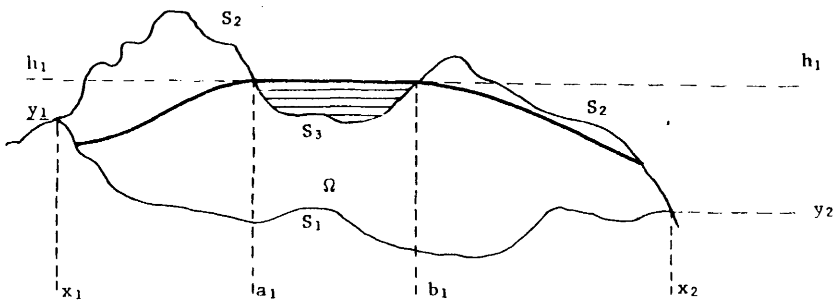

Fig.7

Tenemos entonces:

Teorema II.10. *Bajo las hipótesis anteriores, sea* (p,g) *la solución* S_3*-conexa de* (P) *y sea* Φ *definida como en el teorema* II.4, *entonces:*

i) Φ *es creciente en* $]-\infty,a_1[\cap \pi_x(|p > 0|)$

ii) Φ *es decreciente en* $]b_1,+\infty[\cap \pi_x(|p > 0|)$

Demostración. Sean x y x' 2 puntos de $]-\infty,a_1[\cap \pi_x(|p > 0|)$ tales que $x < x'$, y supongamos que $\Phi(x) > \Phi(x')$. Podemos coger h tal que $\Phi(x) > h > \Phi(x')$; dada la hipótesis (H_5) sabemos entonces que:

$$([x,a_1] \times \{h\}) \cap S_2 = \emptyset$$

y dado que (p,g) es S_3-conexa el conjunto $|p > 0|$ es conexo, y tenemos:

$$(]x',a_1] \times \{h\}) \cap |p > 0| \neq \emptyset \; .$$

Sea $x'' \in (]x',a_1] \times \{h\}) \cap |p > 0|$, entonces (x,h) y (x'',h) pertenecen a $C_{h,1}$, siendo $C_{h,1}$ la única (dado que S_3 es conexo) componente conexa de $|p > (h-y)^+|$; por otra parte,

$$([x,x''] \times \{h\}) \cap S_2 \subset ([x,a_1] \times \{h\}) \cap S_2 = \emptyset$$

aplicando el teorema (II.3) deducimos entonces:

$$([x,x''] \times]-\infty,h[) \cap \Omega \subset |p > 0|;$$

luego $(x',\Phi(x')) \in |p > 0|$ lo que es contradictorio, por lo tanto $\Phi(x') \geq h$ para todo $h < \Phi(x)$ de lo cual deducimos:

$\Phi(x') \geq \Phi(x)$ para todo x' y todo x de $]-\infty,a_1[\cap \pi_x(|p > 0|)$ tales que $x' > x$.

Un razonamiento simétrico nos permite establecer la segunda parte del teorema, lo que acaba la demostración.

Además, tenemos:

Teorema II.11. *En las hipótesis anteriores, sea* (p,g) *la solución* S_3*-conexa, tenemos:*

Grafo $(\Phi) \cap \Omega$ *es estrictamente monótono excepto si* $p(x,y) = (h_1-y)^+ \quad \forall (x,y) \in (\pi_x(|p>0|) \times \mathbb{R}) \cap \Omega$.

Demostración. Supongamos que el segmento $[x',x''] \times \{h\} \subset$ Grafo$(\Phi) \cap \Omega$ siendo $x' < x''$, y sea x tal que $x' < x < x''$; y sea $\varepsilon > 0$ tal que: $B_\varepsilon = B((x,h),\varepsilon) \subset \Omega$ y $B_\varepsilon \cap (\mathbb{R} \times \{h\}) \subset [x',x''] \times \{h\}$. Para toda $\xi \in D(B_\varepsilon)$ tenemos:

$$0 = \int_\Omega \nabla p.\nabla\xi + \int_\Omega g\ \xi_y = \int_\varepsilon \nabla p.\nabla\xi + \int_\varepsilon g\ \xi_y;$$

pero dado que en B_ε: $g = -((h-y)^+)_y$ (teorema II.5), tenemos

$$0 = \int_{B_\varepsilon} \nabla p.\nabla\xi - \int_{B_\varepsilon} \nabla((h-y)^+).\nabla\xi = \int_{B_\varepsilon} \nabla(p-(h-y)^+).\nabla\xi \qquad \forall\xi \in D(B_\varepsilon)$$

de lo cual deducimos:

$$\Delta(p-(h-y)^+) = 0 \quad \text{en} \quad B_\varepsilon;$$

y dado que $(p-(h-y)^+) = 0$ en $B_\varepsilon \cap |y>h|$ tenemos por el principio del máximo |51|:

$$p(x,y) = (h-y)^+ \quad \text{en} \quad B_\varepsilon$$

y por el principio de prolongación analítica:

$$p(x,y) = (h-y)^+ \quad \text{en} \quad |p>0|$$

lo que implica obviamente $h = h_1$ y

$$p(x,y) = (h_1 - y)^+ \quad \text{en} \quad \pi_x(|p > 0|) \times \mathbb{R} \cap \Omega$$

lo que acaba la demostración.

Nota II.10. El ejemplo de la figura 5 muestra claramente que en el caso general no se puede prescindir de (H_5) para el teorema II.10. Sin embargo el teorema II.3 nos permite concluir en todo caso, que si $(x,\Phi(x)) \in \Omega$ entonces Φ no alcanza un mínimo en x.

4.2. Caso en que S_3 tiene 2 componentes conexas

Utilizando las notaciones anteriores, $S_{3,1}$ y $S_{3,2}$ son las 2 componentes conexas de S_3 y $\phi(x,y) = h_i - y$ en $S_{3,i}$ para $i=1,2$, siendo $h_1 \geq h_2$; y sean

$$[a_1,b_1] = \overline{\pi_x(S_{3,1})}, \quad [a_2,b_2] = \overline{\pi_x(S_{3,2})}, \quad]x_1,x_2[= \pi_x(\Omega),$$

con

$$x_1 \leq a_1 \leq b_1 \leq a_2 \leq b_2 \leq x_2$$

(ver fig. 8).

Suponemos que se cumple (H_5); tenemos entonces:

Teorema II.12. *Bajo las hipótesis anteriores, sea* (p,g) *la solución* S_3*-conexa de* (P) *y sea* Φ *definida como en el Teorema II.4, entonces:*

i) Φ *es creciente en* $]-\infty,a_1[\cap \pi_x(|p > 0|)$

ii) Φ *es decreciente en* $]b_2,+\infty[\cap \pi_x(|p > 0|)$ —

iii) Si $|p > (h-y)^+|$ *es conexo* $\forall h < h_1$, Φ *es decreciente en* $]b_1, a_2[$

iv) Si $\exists\, h_o < h_2$ *tal que* $|p > (h_o-y)^+|$ *no sea conexo entonces existe* $x_o \in]b_1, a_2[$ *tal que:*

a) Φ *sea decreciente en* $]b_1, x_o[\cap \pi_x(|p > 0|)$

b) Φ *sea creciente en* $]x_o, a_2[\cap \pi_x(|p > 0|)$.

<u>Demostración</u>. i) Sean x y x' pertenecientes a $]-\infty, a_1[\cap \pi_x(|p > 0|)$ tales que $x < x'$, y supongamos que $\Phi(x) > \Phi(x')$. Sea h tal que $(x,h) \in \Omega$ y $\Phi(x) > h > \Phi(x')$; tenemos entonces: $p(x,h) > 0$ lo que implica $(x,h) \in |p > (h-y)^+|$, conjunto que posee un maximo de 2 componentes conexas, $C_{h,1}$ y $C_{h,2}$ (eventualmente tendremos $C_{h,2} = \emptyset$, en particular para $h \geq h_2$). Supongamos que $(x,h) \in C_{h,i}$; entonces $h_i > h$, y $\{(a_i,h_i)\} \cup C_{h,i}$ es conexo (dado que $S_{3,i} \subset \overline{C_{h,i}}$, tenemos también $(a_i,h_i) \in \overline{S_{3,i}} \subset \overline{C_{h,i}}$) y también conexo por arco, existe entonces una aplicación continua σ de $[0,1]$ en $\{(a_i,h_i)\} \cup C_{h,i}$ tal que

1) $\sigma(0) = (x,h)$, $\sigma(1) = (a_i,h_i)$

2) $\exists\, t \in]0,1[$ tal que $\sigma(t) = (x',h')$, siendo $h' < \Phi(x') < h$;

por la continuidad de σ, existe entonces $x'' \in]x', a_i]$ tal que: $(x'',h) \in \sigma([0,1])$ y por lo tanto $(x'',h) \in C_{h,i}$. Las hipótesis (H_2) y (H_5) nos aseguran entonces que:

$$([x,x''] \times \{h\}) \cap S_2 = \emptyset;$$

lo que nos permite aplicar el teorema II.3 de lo cual deducimos:

$$([x,x''] \times]-\infty, h[) \cap \Omega \subset |p > 0|$$

es decir $(x',\Phi(x')) \in |p > 0|$ lo que es contradictorio; por lo tanto $\Phi(x) \leq \Phi(x')$ lo que demuestra i).

ii) Obviamente para todo $x \in [b_2,+\infty[\cap \pi_x(|p > 0|)$ $\Phi(x) \leq h_2$, esto es debido al teorema II.1 si $h_2 = h_1$, y a la hipótesis H_5 si $h_2 < h_1$; un razonamiento "simétrico" al anterior nos da entonces el resultado.

iii) Si $|p > (h-y)^+|$ es conexa $\forall h < h_1$ entonces el conjunto $|p > 0|$ también será conexo (basta con tomar h lo suficientemente pequeño para que $(h-y)^+ = 0$ en Ω; esto es factible dado que Ω está acotado), por lo tanto $[b_1,a_2] \subset \pi_x(|p > 0|)$. Sean, entonces, x y x' 2 puntos de $]b_1,a_2[$ tales que $x > x'$, y supongamos que $\Phi(x') < \Phi(x)$ y sea h tal que $(x,h) \in |p > 0|$, con $\Phi(x') < h < \Phi(x)$; esto supone que $(x,h) \in C_{h,1} = |p > (h-y)^+|$ y $C_{h,1} \cup \{(b_1,h_1)\}$ es también conexo, por lo tanto existe una aplicación σ contínua de $[0,1]$ en $C_{h,1} \cup \{(b_1,h_1)\}$ tal que:

1) $\sigma(0) = (x,h)$, $\sigma(1) = (b_1,h_1)$

2) $\exists\, t \in]0,1[$ tal que $\sigma(t) = (x',h')$ siendo $h' < \Phi(x') < h$; lo mismo que en la demostración de i), debido a la continuidad de σ existe $x'' \in [b_1,x'[$ tal que $(x'',h) \in \sigma([0,1])$ y por lo tanto $(x'',h) \in C_{h,1}$ las hipótesis (H_2) y (H_5) nos aseguran que

$$([x'',x] \times \{h\}) \cap S_2 = \emptyset;$$

la conclusión viene entonces como en i), aplicando el teorema II.3.

iv) Veamos 2 casos:

1) Si $|p > 0|$ no es conexo; entonces existe

$x_o \in]b_1,a_2[$ tal que para todo $(x_o,y) \in \Omega$ tengamos $p(x_o,y) = 0$; entonces por un razonamiento simétrico al de i) obtenemos la conclusión en $]b_1,x_o] \cap \pi_x(|p > 0|)$ (bastará considerar aquí el caso i=1). Para la segunda parte del resultado basta con notar que $p(x,y) \leq (h_2-y)^+$ para $(x,y) \in \Omega$ con $x \geq x_o$, (dado que el conjunto $|p > (h_2-y)^+|$ es un conjunto: ó vacío (si $h_2=h_1$), ó conexo (si $h_2 < h_1$) y por lo tanto está incluido en $\{(x,y) \in \Omega \ / \ x \leq x_o\}$) y aplicar un razonamiento simétrico al de i) (considerando sólo el caso i=2).

2) Si $|p > 0|$ es conexo; entonces $[b_1,a_2] \subset \pi_x(|p > 0|)$; y existe $x \in]b_1,a_2[$ tal que $\Phi(x) \leq h_o$, de lo contrario se demostraría fácilmente que $|p > (h_o-y)^+|$ es conexo; sea entonces h tal que $h_o < h < h_2$, Φ es continua en $\{x \in]b_1,a_2[\ / \ \Phi(x) \leq h\}$ dado que entonces, por la hipótesis (H_5), $(x,\Phi(x)) \in \Omega$. Sea ahora la función Φ_h definida y continua* en $[b_1,a_2]$, dada por:

$$\Phi_h(x) = \begin{cases} h & \text{si} \quad x = b_1 \quad \text{ó} \quad x = a_2 \\ \min\,(h,\Phi(x)) & \text{si} \quad x \in]b_1,a_2[; \end{cases}$$

Φ_h alcanza su mínimo en un punto de $x_o \in]b_1,a_2[$ tal que

$$\Phi_h(x_o) = \Phi(x_o) \leq h_o$$

y tenemos: $\Phi(x_o) = \operatorname*{Inf}_{x \in]b_1,a_2[} \Phi(x) < h_2.$

* (En b_1 y a_2 podemos tener $\Phi(b_1) < h$ ó $\Phi(a_2) < h$ concretamente, en el caso en que S_3 es vertical en b_1 ó a_2 sin embargo existirá $\varepsilon > 0$ tal que en $]b_1,b_1+\varepsilon[$ y en $]a_2-\varepsilon,a_2[$ tengamos $\Phi > h$).

Sean, entonces x y x' 2 puntos de $]b_1, x_o]$ tales que $x > x'$ y $\Phi(x) > \Phi(x') \geq \Phi(x_o)$ y sea h' tal que $\Phi(x) > h' > \Phi(x')$ con $(x,h') \in \Omega$ utilizando un razonamiento idéntico al de i) deducimos que $(x,h') \in |p > (h'-y)^+|$ y $(x,h') \notin C_{h',2}$ (de lo contrario tendríamos $\Phi(x_o) \geq h'$), por lo tanto $(x,h') \in C_{h',1}$ y siguiendo el razonamiento de i) $\Phi(x') \geq h'$ $\forall h' < \Phi(x)$, luego $\Phi(x') \geq \Phi(x)$. Notando, luego, que $\Phi(x) \leq h_2$ en $[x_o, a_2[$, (de lo contrario tendríamos $x \in [x_o, a_2[$ y $h > h_2$ tales que $(x,h) \in |p > 0|$ y por lo tanto $(x,h) \in |p > (h_2 \cdot y)^+| = C_{h_2,1}$; argumentos idénticos a los utilizados en i) nos llevarían entonces a $\Phi(x_o) \geq h > h_2$) y aplicando un razonamiento idéntico al anterior deducimos la segunda parte de iv) lo que acaba la demostración.

Nota II.11. Es obvio que aplicando las técnicas del teorema II.11 podemos hallar resultados análogos; es decir, la frontera libre no puede tener tramos horizontales excepto si en la correspondiente componente conexa de $|p > 0|$, p es de la forma $(h-y)^+$, (siendo (p,g) S_3 conexa).

Nota II.12. La eventualidad contemplada en el teorema II.12 iv) no es ficticia; si consideramos por ejemplo un abierto Ω tal que:

$$h_1 = h_2, \qquad h < h_1 \quad \text{tal que} \quad S_1 \quad \mathbb{R} \times]-\infty, h[$$

$$x_2 = b_2 \geq a_2 > b_1 \quad y \quad S_2 \cap]b_1, a_2[\times \mathbb{R} \quad]b_1, a_2[\times]h_1, +\infty[$$

(ver fig. 9). Entonces obviamente p no es de la forma $(h_1-y)^+$ en $|p > 0|$, por lo tanto Φ no es constante en $]b_1, a_2[$ y dado que $p \leq (h_1-y)^+$, tendremos $\Phi < h_1$ en $]b_1, a_2[$ y $\lim_{x \to a_2} \Phi(x) = h_1$, por lo tanto existirá un mínimo de Φ en $]b_1, a_2[$.

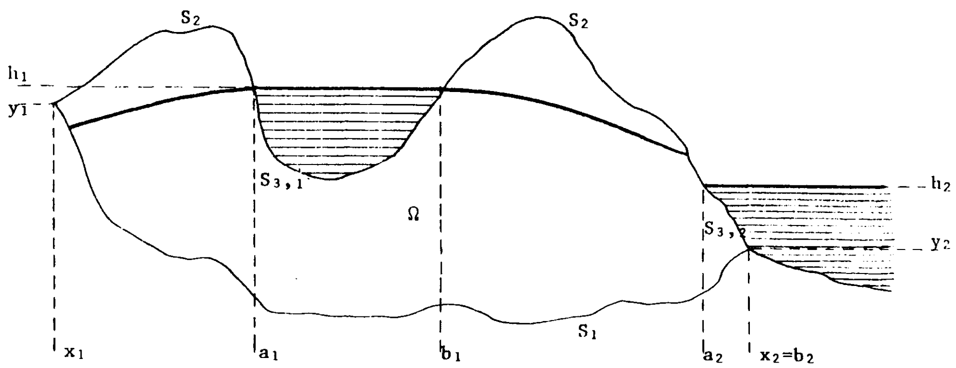
S2
S2
h1
y1
S3,1
Ω
h2
S3,2
y2
S1
x1
a1
b1
a2
x2=b2

Fig.8

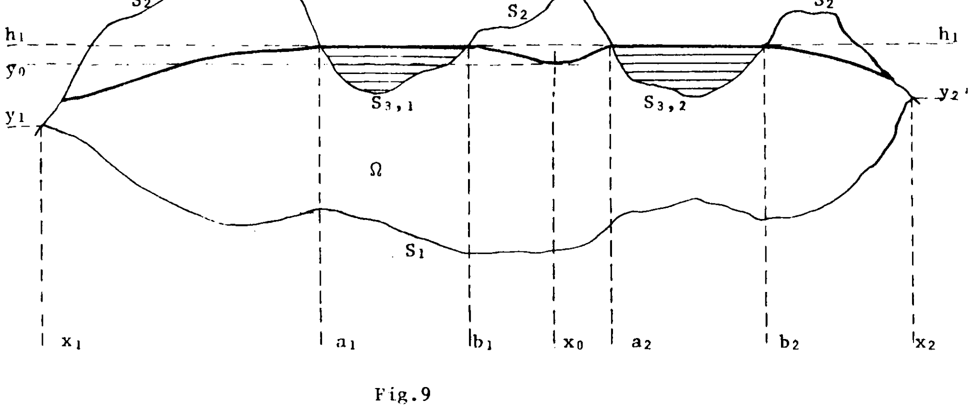
S2
S2
S2
h1
h1
y0
y1
S3,1
S3,2
y2
Ω
S1
x1
a1
b1
x0
a2
b2
x2

Fig.9

Nota II.13. Los resultados anteriores pueden generalizarse al caso en que S_3 tiene n componentes conexas dado que las técnicas anteriores están basadas en el teorema II.3 en el que no se contempla un número concreto de componentes conexas de S_3.

Nota II.14. En relación con la frontera libre, quedan abiertos algunos problemas interesantes. Aparte del ya citado en la nota II.3, apuntamos aquí como problema abierto, el generalizar los resultados de Baiocchi |7| y de Cryer |30| sobre la convexidad de la frontera libre.

71

CAPITULO III: EXISTENCIA DE SOLUCION Y DE LA FRONTERA LIBRE PARA UN PROBLEMA GENERALIZADO

El objeto de este capítulo es de generalizar algunos resultados del problema del dique. Nos centraremos en la consideración de dos aspectos del problema: por una parte la existencia de soluciones, y por otra parte la existencia de una frontera libre.

Consideremos un abierto conexo y acotado Ω de $\mathbb{R}^N$ $N \geq 2$, de frontera S lipschitziana. Definamos 3 subconjuntos de S : S_1, S_2, S_3 tales que $\bigcup_{i=1}^{3} S_i = S$, que $S_i \cap S_j = \emptyset$ si $i \neq j$ y que $S_2 \overset{\circ}{\cup} S_3 \neq \emptyset$.

Designemos por ϕ a una función lipschitziana de $\mathbb{R}^N$ en $\mathbb{R}$; tal que $\phi \geq 0$ en Ω y $\phi = 0$ en S_2, por β a un operador maximal monótono de $\mathbb{R}$ (ver definición a.1), por β_λ la aproximación Yosida de β $(\lambda > 0)$ (ver definición a.3) y por β° la sección principal de β (ver definición a.2).

Diremos que β verifica la hipótesis (H_1) si

$$(H_1) : \qquad 0 \in \beta(0)$$

y β verifica la hipótesis (H_2) si

$$(H_2) : \quad \exists\, (a,b) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } \forall r \geq 0 \text{ y } \forall s \in \beta(r) \text{ se tiene}$$
$$s \leq ar + b$$

Dados $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N) \in \mathbb{R}^N$ nos planteamos entonces el siguiente problema

$$(P(\beta)) \begin{cases} \text{Encontrar un par } (p,g) \in H^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \text{ tal que} \\ \text{i) } p \geq 0 \text{ en casi todo punto de } \Omega, \ p = \phi \text{ en } S_2 \cup S_3 \\ \text{ii) } g \in \beta(p) \text{ en casi todo punto de } \Omega \\ \text{iii) } \int (\nabla p + G).\nabla \xi \leq 0 \quad \forall \xi \in H^1(\Omega),\ \xi = 0 \text{ en } S_3,\ \xi \geq 0 \text{ en } S_2. \end{cases}$$

siendo $G = (\alpha_1 g, \alpha_2 g, \ldots, \alpha_n g) \in [L^2(\Omega)]^N$.

Nota III.1. Si β es continuo tendremos $g = \beta p$ y por lo tanto bastará con encontrar $p \in H^1(\Omega)$. Obsérvese también que $(P(\beta))$ contiene en particular la formulación del dique (véase Capítulos I y II) al hacer $N = 2$, $\alpha_1 = 0$ y $\alpha_2 = 1$.

En lo sucesivo utilizaremos las notaciones generales introducidas en I.1.

III.1. Existencia de soluciones para el problema $(P(\beta))$

En esta sección, nuestro propósito será de demostrar la existencia de soluciones para el problema $P(\beta)$, generalizando de este modo el teorema 1.1 enunciado en el capítulo primero. La dificultad principal radica en el hecho de no suponer β acotado. Cuando β está acotado (es el caso del problema estudiado en los 1° y 2° capítulos) se pueden generalizar sin gran dificultad las técnicas utilizadas por H. Brezis, D. Kinderlehrer y G. Stampacchia |19|. En el caso no acotado vamos a necesitar un estudio previo de las cotas de las soluciones de unos problemas aproximados para demostrar el siguiente teorema:

Teorema III.1. *Si β es un operador maximal monótono que verifica H_1 y H_2 entonces el problema $(P(\beta))$ tiene al menos una solución (p,g). Además existe una solución $(p,g) \in [L^\infty(\Omega) \cap W^{1,s}_{Loc}(\Omega)] \times L^\infty(\Omega)$, $\forall s \geq 1$*

Antes de demostrar el teorema III.1 veremos algunos resultados técnicos:

<u>Teorema III.2.</u> *Si* β *es una función no decreciente lipschitziana y acotada que satisface* H_1, *entonces el problema* $P(\beta)$ *tiene una única solución.*

<u>Demostración del teorema III.2.</u> Sea T la aplicación de $L^2(\Omega)$ en $L^2(\Omega)$ que a v hace corresponder u única solución (ver por ejemplo |46|) del problema:

$$(25)\quad \begin{cases} \int_\Omega (\nabla u + B(v)).\nabla\xi = 0 \quad \forall\xi \in H^1(\Omega), \quad \xi = 0 \text{ en } S_2 \cup S_3 \\ u = \phi \quad \text{en } S_2 \cup S_3 \qquad u \in H^1(\Omega) \end{cases}$$

Siendo $B(v) = (\alpha_1\beta(v), \alpha_2\beta(v), \ldots, \alpha_N\beta(v))$.

Cambiando ξ por $u-\phi$ en la ecuación anterior se tiene:

$$(26)\quad \int_\Omega \nabla u.\nabla(u-\phi) + \int_\Omega B(v).\nabla(u-\phi) = 0$$

y dado que β está acotado, de (26) se deduce que

$$\int_\Omega |\nabla(u-\phi)|^2 \leq C(\phi)$$

siendo $C(\phi)$ una constante. Por otra parte, dado que $u-\phi = 0$ en $S_2 \cup S_3$, aplicando la desigualdad de Poincaré |49| se tiene:

$$\int_\Omega |u-\phi|^2 \leq K \int_\Omega |\nabla(u-\phi)|^2 \leq K\, C(\phi),$$

de lo cual se deduce que $u-\phi$ está acotada en $H^1(\Omega)$ y en $L^2(\Omega)$ por una constante que sólo depende de ϕ y de Ω, y por lo tanto también u estará acotada en $H^1(\Omega)$ y en $L^2(\Omega)$ independientemente de v. La compacidad de la inyección de $H^1(\Omega)$ en $L^2(\Omega)$ permite entonces deducir que T es una aplicación <u>compacta</u> de $L^2(\Omega)$ en $L^2(\Omega)$. Por otra parte, dado que la acotación de u se hace independientemente de v, para R lo suficientemente grande se tiene:

$$Im_T\left(\{v \in L^2(\Omega) \,/\, \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq R\}\right) \subset \{v \in L^2(\Omega) \,/\, \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq R\}$$

El teorema del punto fijo de Schauder (|40|, |51|) permite entonces deducir la existencia de $p \in L^2(\Omega)$ tal que

$$(27) \qquad p = Tp$$

i.e.:

$$\begin{cases} \int_\Omega (\nabla p + B(p)).\nabla\xi = 0 & \forall\xi \in H^1(\Omega), \quad \xi = 0 \text{ en } S_2 \cup S_3 \\ p = \phi \quad \text{en } S_2 \cup S_3; & p \in H^1(\Omega) \end{cases}$$

Sea entonces la función f_δ definida para $\delta > 0$ por:

$$f_\delta(r) = \begin{cases} (1 - \frac{\delta}{r})^+ & \text{si} \quad r \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad r \leq 0 \end{cases} \qquad \text{(ver |19|)}$$

Dado que f_δ es lipschitziana, la función $\xi = f_\delta(-p)$ es una función de $H^1(\Omega)$, nula en $S_2 \cup S_3$ dado que $-p \leq 0$ en $S_2 \cup S_3$ y además se tiene (|40|):

$$\nabla\xi = f_\delta'(-p).\nabla(-p) = \begin{cases} -\dfrac{\nabla p}{p^2} & \text{en c.t.p. de } |-p \geq \delta| \\ 0 & \text{en c.t.p. de } |-p < \delta| \end{cases}$$

De (25) y (27) se deduce que

$$\int_\Omega \nabla p.\nabla\xi = -\int_\Omega B(p).\nabla\xi$$

i.e.

$$\int_{|-p \geq \delta|} \frac{|\nabla p|^2}{p^2} = -\int_{|-p \geq \delta|} \frac{B(p) \cdot \nabla p}{p^2} .$$

Llamando ℓ a la constante de Lipschitz de β y $L = \ell \max\limits_{1 \leq i \leq N} (|\alpha_i|)$ se tiene:

$$\int_{|-p \geq \delta|} \frac{|\nabla p|^2}{p^2} \leq L \int_{|-p \geq \delta|} \frac{|\nabla p|}{|p|} ;$$

aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwartz se tiene entonces:

$$\int_{|-p \geq \delta|} \frac{|\nabla p|^2}{p^2} \leq L^2 . |\Omega|$$

siendo $|\Omega|$ la medida de Ω. La anterior desigualdad se formula también como:

$$\int_\Omega |\nabla \operatorname{Log}(1 + \frac{(-p-\delta)^+}{\delta})|^2 \leq L^2 . |\Omega| ,$$

y aplicando la desigualdad de Poincaré |49| (esta función se anula en $S_2 \cup S_3$) se deduce que:

$$\int_\Omega |\operatorname{Log}(1 + \frac{(-p-\delta)^+}{\delta})|^2 \leq K . L^2 . |\Omega| ,$$

siendo K una constante independiente de δ. Si se hace tender δ hacia 0, se deduce entonces que $-p \leq 0$ i.e.:

$$(28) \qquad p \geq 0.$$

Se concluye la demostración de la existencia notando que (25) y (27) implican:

$$\Delta p + \operatorname{div} B(p) = 0 \quad \text{en} \quad D'(\Omega)$$

ó lo que es equivalente

$$\Delta p = -\operatorname{div} B(p)$$

y por lo tanto $\Delta p \in L^2(\Omega)$ dado que β es lipschitziana. Luego, aplicando la fórmula de Green "generalizada" (ver |13|) y teniendo en cuenta (27) se tiene

$$(29) \qquad \int_\Omega (\nabla p + B(p)).\nabla\xi = \int_{S_2} \frac{\partial p}{\partial \nu}.\xi \leq 0 \qquad \forall \xi \in H^1(\Omega), \quad \xi = 0 \text{ en } S_3 \text{ y } \xi \geq 0 \text{ en } S_2$$

(dado que $p \geq 0$ en Ω y $p = 0$ en S_2 implican $\frac{\partial p}{\partial \nu} = 0$ en S_2, siendo ν el vector normal exterior de S_2).

De (27), (28) y (29) se deduce entonces que p es solución de $(P(\beta))$.

Para demostrar la unicidad de la solución se puede suponer que p y p' son 2 soluciones de $(P(\beta))$. Se utiliza entonces la misma técnica que en la demostración de $\underline{p \geq 0}$ eligiendo sucesivamente las siguientes funciones test:

$$\xi = f_\delta(p-p') \qquad \text{y} \qquad \xi' = f_\delta(p'-p)$$

Se demuestra entonces que $p-p' \leq 0$ y $p'-p \leq 0$ con lo cual

$$p = p'$$

lo que acaba la demostración.

Aparece claramente en esta demostración que la dificultad cuando β lipschitziana no está acotada, reside en demostrar que la aplicación T de $L^2(\Omega)$ en $L^2(\Omega)$ definida mediante (25), tiene un punto fijo. Esta dificultad desaparecería si se pudiese <u>acotar "a priori"</u> la norma L^∞ de la posible solución del problema ya que en este caso se podría considerar a β como acotada.

A objeto de hallar estas estimaciones "a priori" vamos a introducir ciertas notaciones. Llamaremos θ a la siguiente función:

$$\theta : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}, \qquad x \to \theta(x) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i x_i ;$$

θ es entonces una función de $C^\infty(\mathbb{R}^N)$; en particular θ alcanzará un máximo θ_o sobre $\overline{\Omega}$. Designaremos por ϕ_o al máximo alcanzado por ϕ en $\overline{S_2 \cup S_3}$. Por fin, a una <u>función lipschitziana β</u> le haremos corresponder una función $\tau(\beta) \in C^1(\mathbb{R}^N)$ definida por:

$$\tau(\beta) = u_\beta \circ \phi,$$

siendo u_β la solución del problema de Cauchy

$$(30) \quad \begin{cases} \dfrac{dv}{dr} = -\beta(v) \\ v(\theta_o) = \phi_o \end{cases}$$

La función $\tau(\beta)$ satisface entonces las siguientes propiedades:

<u>LEMA III.1</u>. *Si* β *verifica* H_1, *la función* $\tau(\beta)$ *verifica:*

i) $\tau(\beta)(x) \geq \phi(x) \qquad \forall x \in S_2 \cup S_3$

ii) $\displaystyle\int_\Omega (\nabla(\tau(\beta)) + B(\tau(\beta))).\nabla\xi = 0 \qquad \forall \xi \in H^1(\Omega)$

<u>Demostración</u>. Dado que β es no-negativa en $\mathbb{R}^+$, la función u_β es decreciente. Sea entonces $x \in S_2 \cup S_3$, se tiene

$$\theta(x) \leq \theta_o$$

y por lo tanto

$$\tau(\beta)(x) = u_\beta(\theta(x)) \geq u_\beta(\theta_o) = \phi_o \geq \phi(x),$$

lo que demuestra i).

Por otra parte, se tiene:

$$\frac{\partial \tau(\beta)}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}(u_\beta \circ \theta) = (u'_\beta \circ \theta)\frac{\partial \theta}{\partial x_i} = -\alpha_i\ \beta(\tau(\beta)) \qquad \forall i=1,2,\dots,N$$

i.e.

$$\nabla(\tau(\beta)) = -B(\tau(\beta)) \quad \text{en} \quad \mathbb{R}^N \quad \text{y en particular en} \quad \Omega,$$

lo que demuestra ii).

Estamos en condiciones de demostrar el siguiente lema:

LEMA III.2. *Si* β *es lipschitziana y verifica* H_1 *y si* p *es solución del problema* $(P(\beta))$, *entonces se tiene:*

$$0 \le p \le \tau(\beta) \quad \text{en (casi todo punto de) } \Omega.$$

Demostración. La primera desigualdad se deduce obviamente del enunciado del problema $(P(\beta))$. En cuanto a la segunda desigualdad, del lema III.1.i) se deduce que la función $f_\delta(p-\tau(\beta))$ (definida para $\delta > 0$) es nula en $S_2 \cup S_3$. De $(P(\beta))$ y del lema III.1.ii) se deduce entonces que:

$$0 = \int_\Omega \left[\nabla(p-\tau(\beta)) + (B(p) - B(\tau(\beta)))\right] \cdot \nabla(f_\delta(p-\tau(\beta)))$$

$\Longrightarrow$

$$(31) \qquad \int_{|p-\tau(\beta)>\delta|} \frac{|\nabla(p-\tau(\beta))|^2}{(p-\tau(\beta))^2} = -\int_{|p-\tau(\beta)>\delta|} (B(p)-B(\tau(\beta))) \cdot \frac{\nabla(p-\tau(\beta))}{(p-\tau(\beta))^2}$$

utilizando la notación anterior $L = \max\limits_{1 \le i \le N} (|\alpha_i|) \cdot \|\beta'\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$ se tiene

$$(31) \Rightarrow \int_{|p-\tau(\beta)>\delta|} \frac{|\nabla(p-\tau(\beta))|^2}{(p-\tau(\beta))^2} \leq L \int_{|p-\tau(\beta)>\delta|} \frac{|\nabla(p-\tau(\beta))|}{p-\tau(\beta)}$$

$$\leq L \, . \, |\Omega|^{1/2} \left(\int_{|p-\tau(\beta)>\delta|} \frac{|\nabla(p-\tau(\beta))|^2}{(p-\tau(\beta))^2} \right)^{1/2}$$

$$\Longrightarrow \int_{|p-\tau(\beta)>\delta|} \frac{|\nabla(p-\tau(\beta))|^2}{(p-\tau(\beta))^2} \leq L^2 \, . \, |\Omega|$$

$$\Longleftrightarrow (32): \int_\Omega |\nabla \operatorname{Log} (1 + \frac{(p-\tau(\beta)-\delta)^+}{\delta})|^2 \leq L^2 \, . \, |\Omega|$$

y aplicando la desigualdad de Poincaré |49| se tiene:

$$(32) \Rightarrow (33): \int_\Omega |\operatorname{Log} (1 + \frac{(p-\tau(\beta)-\delta)^+}{\delta})|^2 \leq L^2 \, |\Omega|$$

Si se hace tender δ hacia 0 en (33) se deduce que

$$p-\tau(\beta) \leq 0 \quad \text{en} \quad \Omega$$

i.e.

$$p \leq \tau(\beta) \quad \text{en} \quad \Omega,$$

lo que concluye la demostración.

Antes de generalizar el teorema III.2, demostraremos un último resultado técnico que reformula en un caso concreto la proposición 1 de |32|.

<u>LEMA III.3</u>. *Sea* β *y* γ *2 funciones no decrecientes lipschitzianas tales que* $\beta \geq \gamma$ *en* $\mathbb{R}^+$, *entonces se tiene:*

$$\tau(\beta) \geq \tau(\gamma) \geq \phi_o \quad \text{en} \quad \overline{\Omega}$$

<u>Demostración</u>. Sean $u_{\beta,\varepsilon}$ y u_γ las soluciones respectivas de

$$(30a)\quad \begin{cases} \dfrac{dv}{dr} = -\beta(v) & \text{en } \mathbb{R} \\ v(\theta_o) = \phi_o+\varepsilon & \varepsilon > 0 \end{cases}$$

y de

$$(30b)\quad \begin{cases} \dfrac{dv}{dr} = -\gamma(v) & \text{en } \mathbb{R} \\ v(\theta_o) = \phi_o \end{cases}$$

Dado que $\phi_o > 0$ se tiene que $u_{\beta,\varepsilon}$ y u_γ son positivos y por lo tanto $\beta(u_{\beta,\varepsilon})$ y $\gamma(u_\gamma)$ son no-negativos y las funciones $u_{\beta,\varepsilon}$ y u_γ son no-crecientes. En θ_o se tiene:

$$u_{\beta,\varepsilon}(\theta_o) - u_\gamma(\theta_o) = \varepsilon > 0 .$$

Supongamos, entonces, que existe $r_o < \theta_o$ tal que

$$u_{\beta,\varepsilon}(r_o) - u_\gamma(r_o) = 0$$

y supongamos que este $r_o = \max\{r < \theta_o \;/\; u_{\beta,\varepsilon}(r) - u_\gamma(r) = 0\}$. Por el teorema del valor medio se deduce entonces la existencia de $r \in |r_o,\theta_o|$ tal que

$$\varepsilon = u_{\beta,\varepsilon}(\theta_o) - u_\gamma(\theta_o) = (u'_{\beta,\varepsilon}(r) - u'_\gamma(r))(\theta_o - r_o) > 0 ;$$

ahora, se tiene:

$$u'_{\beta,\varepsilon}(r) - u'_\gamma(r) = \gamma(u_\gamma(r)) - \beta(u_{\beta,\varepsilon}(r)) \leq 0$$

dado que $u_{\beta,\varepsilon}(r) > u_\gamma(r)$ lo cual es una contradicción y por lo tanto

$$u_{\beta,\varepsilon}(r) > u_\gamma(r) \qquad \forall r \leq \theta_o$$

Pasando al límite cuando ε tiende hacia 0 y teniendo en cuenta la dependencia continua de la solución de (30a) con respecto al dado inicial se tiene

$$u_\beta(r) \geq u_\gamma(r) \qquad \forall r \leq \theta_o$$

siendo u_β la solución de (30a) para $\varepsilon = 0$.

Sea entonces $x \in \overline{\Omega}$, por definición de θ_o, se tiene $\theta(x) \leq \theta_o$ y por lo tanto:

$$\tau(\beta)(x) = u_\beta(\theta(x)) \geq u_\gamma(\theta(x)) = \tau(\gamma)(x) \geq \phi_o \qquad \forall x \in \overline{\Omega}$$

lo que demuestra el lema.

Por fin podemos extender el teorema III.2. suprimiendo la acotación de β:

<u>Teorema III.3</u>. *Sea* β *una función no decreciente lipschitziana, entonces el problema* $(P(\beta))$ *tiene una única solución* p. *Además* $p \in L^\infty(\Omega) \cap W^{1,s}_{Loc}(\Omega)$, $\forall s \geq 1$.

<u>Demostración</u>. Sea $\tau_o = \max_{\overline{\Omega}} (\tau(\beta))$ y sea $\beta_o = \min(\beta, \tau_o)$. β_o es entonces una función no decreciente lipschitziana y acotada y por lo tanto el teorema III.2 asegura la existencia y la unicidad de la solución p de $P(\beta_o)$. Por otra parte los lemas III.2 y III.3 garantizan que:

$$p \leq \tau(\beta_o) \leq \tau(\beta) \leq \tau_o \qquad \text{en} \quad \Omega$$

de lo cual se deduce que:

$$\beta(p) = \beta_o(p) \quad \text{en} \quad \Omega$$

y por lo tanto p es también solución de $(P(\beta))$. Sea $\overline{p}$ otra solución de $(P(\beta))$, el lema III.2 implica que

$$\overline{p} \leq \tau(\beta) \leq \tau_o;$$

entonces también se tiene:

$$\beta(\overline{p}) = \beta_o(\overline{p})$$

es decir que $\overline{p}$ es solución de $(P(\beta_o))$. La unicidad de la solución de $(P(\beta_o))$ implica entonces la unicidad para $(P(\beta))$.

Por otra parte es obvio que $p \in L^\infty(\Omega)$, en concreto $p \leq \tau_o$ y por lo tanto $\beta(p) \leq \beta(\tau_o)$. Utilizando funciones $\xi \in D(\Omega)$ en la ecuación de $(P(\beta))$ se deduce que:

$$\Delta p + \operatorname{div} B(p) = 0 \quad \text{en} \quad \Omega$$

i.e.

$$\Delta p = -\operatorname{div} B(p) \quad \text{en} \quad \Omega$$

los Teoremas de inmersión de Sobolev |1|, |49| implican entonces que $p \in W^{1,s}_{Loc}(\Omega)$ $\forall s \geq 1$ lo que acaba la demostración.

A continuación, vamos a demostrar el teorema III.1:

<u>Demostración del teorema III.1</u>. Sea γ la función:

$$\gamma(r) = a\,r + b \qquad \forall r \in \mathbb{R}$$

y sean β_λ para $\lambda > 0$, las aproximaciones Yosida de β. Entonces, los problemas $(P(\beta_\lambda))$ tienen solución única p_λ para todo $\lambda > 0$ dado que los β_λ son lipschitzianas; además el lema III.2 asegura que

$$0 \leq p_\lambda \leq \tau(\beta_\lambda).$$

Por otra parte, para $r > 0$ la hipótesis H_2 (y la proposición a.5) asegura

$$\beta_\lambda(r) \leq \beta^\circ(r) \leq ar + b = \gamma(r); \qquad \forall\lambda > 0$$

aplicando entonces los lemas III.2 y III.3 se tiene:

$$0 \leq p_\lambda \leq \tau(\beta_\lambda) \leq \tau(\gamma) \qquad \forall\lambda > 0$$

y (34) $\quad \beta_\lambda(p_\lambda) \leq a.\tau(\gamma) + b.$

Sea entonces la función $\xi = p_\lambda - \phi$, se tiene:

(35) $$\int_\Omega \nabla p \,.\nabla(p_\lambda-\phi) = -\int_\Omega B_\lambda(p_\lambda).\nabla(p_\lambda-\phi)$$

siendo $B_\lambda(p_\lambda) = (\alpha_1\beta_\lambda(p_\lambda),\ldots,\alpha_N\beta_\lambda(p_\lambda))$. De (34 y de (35) se deduce que:

$$\int_\Omega |\nabla(p_\lambda-\phi)|^2 = -\int_\Omega (B_\lambda(p_\lambda)+\nabla\phi).\nabla(p_\lambda-\phi) \leq L\left(\int_\Omega |\nabla(p_\lambda-\phi)|^2\right)^{1/2} \leq L^2$$

donde L es independiente de λ. La desigualdad de Poincaré implica entonces

$$\int_\Omega (p_\lambda-\phi)^2 \leq K\int_\Omega |\nabla(p_\lambda-\phi)|^2 \leq K\,L^2$$

siendo K independiente de λ. Por lo tanto se tiene:

$$\|p_\lambda\|_{H^1(\Omega)} \leq C \quad \text{independiente de} \quad \lambda$$

Se puede entonces extraer de p_λ una subsucesión $p_{\lambda n}$ que verifique

$$p_{\lambda n} \longrightarrow p \quad \text{debilmente en} \quad H^1(\Omega)$$

$$p_{\lambda n} \longrightarrow p \quad \text{en} \quad L^2(\Omega)$$

$$\beta_{\lambda n}(p_{\lambda n}) \longrightarrow g \quad \text{en} \quad L^2(\Omega)$$

Llamando G a $(\alpha_1 g,\ldots,\alpha_N g)$ y pasando al límite en $(P(\beta_{\lambda n}))$ cuando n tiende a ∞ se tiene:

$$\int_\Omega (\nabla p+G).\nabla\xi \leq 0 \quad \forall \xi \in H^1(\Omega) \quad \xi = 0 \text{ en } S_3 \text{ y } \xi \geq 0 \text{ en } S_2$$

Por otra parte el convexo

$$K = \{v \in H^1(\Omega) \;/\; 0 \leq v \leq \tau(\gamma), \quad v = \phi \text{ en } S_2 \cup S_3\}$$

es debilmente cerrado en $H^1(\Omega)$, con lo cual $p \in K$.

Por otra parte, en casi todo punto $x \in \Omega$, $p_{\lambda n}(x)$ tiende a $p(x)$, y $\beta_\lambda(p(x))$ está acotado para casi todo x, se tiene entonces: (ver proposición a.6):

$$g(x) \in \beta(p(x)) \quad \text{para casi todo} \quad x \in \Omega,$$

(p,g) es entonces solución de $(P(\beta))$. Se demuestra que $p \in W^{1,s}_{Loc}(\Omega)$ $\forall s \geq 1$ notando que:

$$\Delta p + \operatorname{div} G = 0 \quad \text{en} \quad D'(\Omega)$$

y que $g \in L^\infty(\Omega)$ dado que $g \leq \gamma(p) \in L^\infty$ dado que $p \in K$. Esto acaba la demostración.

Nota III.2. Existe cierta relación entre la aproximación del problema $(P(\beta))$ por los problemas $(P(\beta_\lambda))$ (y la introducción del problema (1) para la resolución de éstos) y el método de penalización (ver Lions |47|). De hecho, si $\beta = \mathrm{sig}^+$, la introducción de β_λ corresponde a una penalización (ver H. Brezis, D. Kinderlehrer, G. Stampacchia |19|).

Nota III.3. La hipótesis H_2 no es estrictamente necesaria, sin embargo su supresión hace necesarias, en general, hipótesis restrictivas sobre el dato ϕ ó sobre Ω como es el caso en el siguiente contraejemplo.

III.2. Un contraejemplo a la existencia cuando β no verifica H_2.

Para simplificar el contraejemplo, nos situaremos en $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Un punto de Ω estará representado por sus 2 coordenadas (x,y). En concreto, fijando un número $\alpha > 0$, Ω será el siguiente rectángulo:

$$\Omega =]x_1,x_2[\times]y_1,y_2[$$

con $x_1 < x_2$ y $y_2 = y_1 + \frac{1}{\alpha}$. Fijemos S_1, S_2 y S_3 de la siguiente manera:

$$S_3 =]x_1,x_2[\times \{y_2\}$$

$$S_1 = S - S_3 \quad \text{y} \quad S_2 = \emptyset.$$

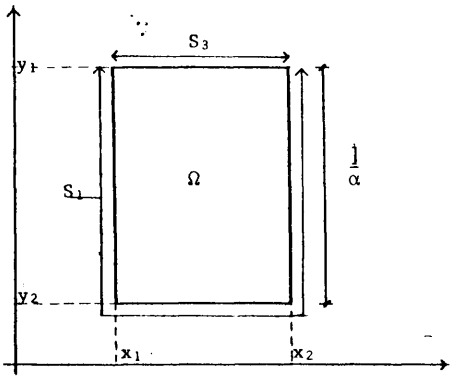

Fig.10

Nos damos también una función ϕ lipschitziana tal que $\phi \geq \alpha > 0$. Escogemos un operador β que no verifique H_2; en concreto escogemos:

$$\beta(r) = r^2 \qquad \forall r \geq 0, \quad r \in \mathbb{R}$$

y

$$\beta(r) = 0 \qquad \forall r \leq 0, \quad r \in \mathbb{R}$$

y fijamos $(\alpha_1,\alpha_2) = (0,1)$.

Nos planteamos entonces el siguiente problema:

$$(P_1) \begin{cases} \text{Encontrar } p \in H^1(\Omega) \text{ tal que} \\ \text{i) } p \geq 0 \text{ en casi todo punto de } \Omega \\ \text{ii) } \beta(p) = p^2 \in L^2(\Omega) \\ \text{iii) } \int_\Omega (\nabla p \nabla \xi + p^2 \xi_y) = 0 \quad \forall \xi \in H^1(\Omega), \ \xi = 0 \text{ en } S_3 \end{cases}$$

Las diferencias con anteriores enunciados del problema $(P(\beta))$ para un β general residen en que en este caso β es continuo y $S_2 = \emptyset$.

Se tiene entonces:

Proposición III.1. *El problema* (P_1) *no tiene solución.*

Demostración. Supongamos que p sea una solución de (P_1). Sean $(\alpha_n)_{n\in N}$ una sucesión creciente de puntos del intervalo $]0,\alpha[$, que converge a α y $(p_n)_{n\in N}$ la siguiente sucesión de funciones:

$$p_n(x,y) = \frac{1}{y-y_2+\frac{1}{\alpha_n}} \in C^\infty(]x_1,x_2[\times]y_1,y_2[)$$

dado que $\alpha_n < \alpha$. Además $p_n = \alpha_n$ en S_3 y p_n satisface la siguiente igualdad:

$$\int_\Omega \nabla p_n \cdot \nabla \xi + \int_\Omega p_n^2\, \xi_y = 0 \qquad \forall \xi \in H^1(\Omega).$$

Sea entonces para todo $\delta > 0$ la función $\xi = f_\delta(p_n - p)$ donde p es una hipotética solución de (P_1), $f_\delta(p_n-p) \in H^1(\Omega)$ y $f_\delta(p_n-p) = 0$ en S_3 lo que implica:

$$(36) \qquad \int_\Omega \nabla(p_n-p)\, \nabla(f_\delta(p_n-p)) + \int_\Omega (p_n^2-p^2)(f_\delta(p_n-p))_y = 0$$

teniendo en cuenta entonces que la integración se hace sobre el conjunto $|p_n > p+\delta|$ y dado que p_n está acotado en Ω por una constante M_n, deducimos de (36) que:

$$\int_{|p_n>p-\delta|} \frac{|\nabla(p_n-p)|^2}{(p_n-p)^2} \leq 2M_n \int_{|p_n>p-\delta|} \frac{|(p_n-p)_y|}{|p_n-p|}$$

$\Rightarrow$

$$(37) \qquad \int_{|p_n>p-\delta|} \frac{|\nabla(p_n-p)|^2}{(p_n-p)^2} \leq C_n$$

siendo C_n una constante independiente de δ. (37) a su vez se puede escribir como:

$$\int_\Omega |\nabla \operatorname{Log}(1 + \frac{(p_n-p-\delta)^+}{\delta})|^2 \leq C_n$$

y aplicando la desigualdad de Poincaré (teniendo en cuenta que $\operatorname{Log}(1 + \frac{(p_n-p-\delta)^+}{\delta}) = 0$ en S_3) tenemos:

$$\int |\operatorname{Log}(1 + \frac{(p_n-p-\delta)^+}{\delta})|^2 \leq K_n \tag{38}$$

donde K_n solo depende de C_n y del abierto Ω. Haciendo tender δ hacia 0 en (38), deducimos entonces que $p_n - p \leq 0$ en casi todo punto, es decir

$$p_n \leq p \quad \text{en casi todo punto de } \Omega \text{ y } \forall n \in \mathbb{N}$$

Hacemos entonces tender n hacia ∞; p_n converge entonces en todo punto de Ω hacia una función $\bar{p}$ definida por:

$$\bar{p}(x,y) = \frac{1}{y-y_2+\frac{1}{\alpha}}$$

y tenemos entonces:

$$\bar{p} \leq p \quad \text{en casi todo punto de } \Omega$$

ahora, obviamente $\bar{p}$ no pertenece a $L^2(\Omega)$ (ni a ningún $L^s(\Omega)$ para $s \geq 1$) de ahí la conclusión: p no pertenece a $L^2(\Omega)$ y por lo tanto p no puede ser solución de (P_1).

Nota III.4. El problema P_1 no tiene solución, sin embargo resulta obvio que se puede imponer algún tipo de condición sobre ϕ ó Ω para que este problema tenga solución. Una condición suficiente sería por ejemplo que $\sup_{S_2 \cup S_3} (\phi) < \alpha$.

III.3. Existencia de una frontera libre.

El objeto de esta sección es poner en evidencia una condición suficiente sobre β para que las soluciones de $(P(\beta))$ (ó por lo menos alguna solución de $(P(\beta))$) originen una frontera libre. El método consiste en acotar superiormente una solución de $(P(\beta))$ por un par $(u,\beta^\circ(u)) \in H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, y demostrar que si "$\Omega$ es suficientemente grande", se puede escoger una función u nula en una parte de Ω. Este método nos proporciona una primera estimación del conjunto $|p > 0|$, siendo (p,g) una solución de $(P(\beta))$.

Empezaremos por restringir el conjunto de soluciones con las que vamos a trabajar:

Definición III.1. *Sea* (p,g) *una solución del problema* $(P(\beta))$ *diremos que* (p,g) *es solución límite de* $(P(\beta))$ *si existe una sucesión de números reales* $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *que converge a* 0 *tal que si llamamos* p_{λ_k} *a la solución de* $(P(\beta_{\lambda_k}))$ *(para* β_{λ_k} *aproximación Yosida de* β*), tengamos*

$$p_{\lambda_k} \longrightarrow p \quad \textit{debilmente en} \quad H^1(\Omega)$$

$$\beta_{\lambda_k}(p_{\lambda_k}) \longrightarrow g \quad \textit{en} \quad L^2(\Omega).$$

Nota III.5. El teorema III.1 establece la existencia de soluciones para el problema $(P(\beta))$ cuando β verifica H_1 y H_2 además el método utilizado en la demostración pone en evidencia la existencia de "alguna" solución límite. En particular, si además β es lipschitziana, la única solución de $P(\beta)$ será solución-límite. Notemos también que las soluciones-límites $(p,g) \in [L^\infty(\Omega) \cap W^{1,s}_{Loc}(\Omega)] \times L^\infty_-(\Omega)$ $\forall s \geq 1$ (en particular p es continua si (p,g) es solución límite).

Nota III.6. El concepto aquí introducido de solución-límite es distinto de las soluciones límites introducidas en la resolución de los problemas de evolución ligados a generadores infinitesimales de semi-grupos |29|.

Nota III.7. Si el dato ϕ en $S_2 \cup S_3$ es tal que $\phi \equiv 0$ entonces la solución límite es única y identicamente nula dado que en este caso la única solución P_λ de $P(\beta_\lambda)$ es $P_\lambda \equiv 0$ en Ω.

Antes de demostrar la existencia de frontera libre, daremos un resultado negativo a este respecto:

Proposición III.2. *Si* β *verifica* H_1 *y* H_2 *y si* β *es lipschitziana en un entorno de* 0; *entonces si* (p,g) *es una solución-límite de* $(P(\beta))$ *se tiene:*

i) $p = g = 0$ *en* Ω *si* $\phi \equiv 0$ *en* $S_2 \cup S_3$

ii) $p > 0$ *en* Ω *si* $\phi \not\equiv 0$ *en* $S_2 \cup S_3$.

i.e. las soluciones-límites del problema $(P(\beta))$ *no originan una frontera libre.*

Demostración. i) es consecuencia inmediata de la nota III.7. Para demostrar ii) vamos a suponer que β es lipschitziana en $]-2\varepsilon_0, 2\varepsilon_0[$ para ε_0 lo suficientemente pequeño. Sea (p,g) una solución límite de $(P(\beta))$, utilizando funciones $\xi \in D(\Omega)$, se deduce de $(P(\beta))$ que:

$$\Delta p + \operatorname{div} G = 0 \quad \text{en} \quad D'(\Omega)$$

siendo $G = (\alpha_1 g, \alpha_2 g, \ldots, \alpha_N g)$; en particular se tiene también:

$$\Delta p + \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \, |\beta(P)|_{x_i} = 0 \qquad \text{en} \quad D'(]p < \varepsilon_o[)$$

(Notemos que el conjunto $|p < \varepsilon_o|$ es un abierto dado que al estar p en $W^{1,s}_{Loc}(\Omega)$ $\forall s \geq 1$, p es continua). Dado que β es lipschitziana en $|-2\varepsilon_o, 2\varepsilon_o|$ aplicamos la regla de la cadena generalizada |40|; se tiene entonces:

$$\Delta p + \beta'(p) \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \, P_{x_i} = 0 \qquad \text{en} \quad D'(|p < \varepsilon_o|)$$

siendo β' la derivada en el sentido de las distribuciones de β; y dado que $\beta'(p)$ está acotado en $|p < \varepsilon_o|$ se tiene que $\beta'(p) \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, P_{x_i} \in L^2(|p < \varepsilon_o|)$ y que:

$$\Delta p + \beta'(p) \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \, P_{x_i} = 0 \qquad \text{en} \quad |p < \varepsilon_o|$$

La conclusión viene entonces del principio fuerte del máximo |51|.

A continuación vamos a estudiar la existencia de una frontera libre en las soluciones-límites.

Recogiendo la notación introducida en la sección 1 de este capítulo llamaremos θ_1 a:

$$\theta_1 = \operatorname{Sup} \{\theta(x) \ / \ x \in S_3\} \qquad \text{si} \qquad S_3 \neq \emptyset$$

(Si $S_3 = \emptyset$ ver Nota III.1).

Se tiene entonces el siguiente teorema:

TEOREMA III.4. *Sea* β *un operador maximal monótono (que verifique* H_1 *y* H_2*) tal que:*

$$\int_0^{\phi_o} \frac{1}{\beta^\circ(s)}\, ds = \Gamma_c < \infty$$

Entonces si $\theta_o > \Gamma_o + \theta_1$, *todas las soluciones-límites de* $(P(\beta))$ *originan una frontera libre. En concreto si* (p,g) *es una solución límite tendremos:*

$$p = 0 \qquad \text{en} \qquad \Omega_o = \{x \in \Omega \;/\; \theta(x) \geq \Gamma_o + \theta_1\}.$$

Nota III.8. La primera condición impuesta a β para la existencia de la frontera libre recuerda la condición para la extinción en tiempo finito de las soluciones de ciertos problemas de evolución (ver por ejemplo |17| y |31|). De hecho, vamos a ver que existe cierta analogía entre los 2 problemas.

Nota III.9. La segunda condición es en realidad una condición sobre Ω que consiste en imponer que Ω sea lo suficientemente grande en una dirección (la dirección perpendicular a los hiperplanos de ecuación $\sum_{i=1}^{N} \alpha_i x_i$ = constante).

Antes de demostrar este teorema vamos a ver unos resultados previos de carácter técnico. Para β_λ definimos $\tau_o(\beta_\lambda) = v_\lambda \circ \theta$ siendo v_λ la solución del problema:

$$(39) \quad \begin{cases} \dfrac{dv}{dr} = -\beta_\lambda(v) & \text{en} \quad \mathbb{R} \\ v(\theta_1) = \phi_o \end{cases}$$

Es obvio que $\tau_o(\beta_\lambda) \in C^1(\mathbb{R}^N)$ y podemos enunciar Lemas análogos a los lemas III.1 y III.2.

Lema III.4. *Si* β *verifica* H_1, *la función* $\tau_o(\beta_\lambda)$ *verifica:*

i) $\tau_o(\beta_\lambda)(x) \geq \phi(x) \quad \forall x \in S_2 \cup S_3$

ii) $\int_\Omega (\nabla(\tau_o(\beta_\lambda)) + B_\lambda(\tau_o(\beta_\lambda))).\nabla\xi = 0 \quad \forall \xi \in H^1(\Omega)$

siendo $B_\lambda = (\alpha_1\beta_\lambda, \ldots, \alpha_N\beta_\lambda)$.

Demostración. Es idéntica a la demostración del lema III.1 notando previamente que si β verifica H_1 entonces β_λ también verifica H_1 (ver proposición a.5) y que $\tau_o(\beta_\lambda) > 0$ en $\overline{\Omega}$.

Lema III.5. *Si* β *verifica* H_1 *y si* p_λ *es la solución de* $(P(\beta_\lambda))$, *entonces se tiene:*

$$0 \leq p_\lambda \leq \tau_o(\beta_\lambda) \quad \text{en (casi todo punto de) } \Omega$$

Demostración. Es idéntica a la demostración del lema III.2.

Antes de demostrar el teorema, veremos un último lema:

Lema III.6. *Si* β *verifica* H_1 *y* H_2, *entonces existe* $(w, g_w) \in H^1(]\theta_1, \theta_o[) \times L^\infty(]\theta_1, \theta_o[)$ *tales que:*

i) $g_w \in \beta(w)$ *en casi todo punto de* $]\theta_1, \theta_o[$ *y:*

$$v_\lambda \longrightarrow w \quad \text{en } H^1(]\theta_1, \theta_o[)$$
$$\beta_\lambda(v_\lambda) \longrightarrow g_w \quad \text{en } L^2(]\theta_1, \theta_o[)$$

ii) $w' = -g_w$ *en casi todo punto de* $]\theta_1,\theta_o[$ *y* $w(\theta_1) = \phi_o$

iii) $\forall (p,g)$ *solución-límite de* $(P(\beta))$, *se tiene:*

$$p \leq w \circ \theta, \quad en \quad \{x \in \Omega / \ \theta(x) \geq \theta_1\}$$

Demostración. $\forall \lambda > 0$, v_λ verifica (39) i.e.

$$(39) \quad \begin{cases} v'_\lambda = -\beta_\lambda(v_\lambda) & \text{en } \mathbb{R} \text{ y en particular en }]\theta_1,\theta_o[\\ v_\lambda(\theta_1) = \phi_o > 0 \end{cases}$$

de lo que se deduce:

$$(40) \qquad \|v'_\lambda\|_{L^2(]\theta_1,\theta_o[)} = \|\beta_\lambda(v_\lambda)\|_{L^2(]\theta_1,\theta_o[)}.$$

Además v_λ es una función decreciente y por lo tanto se tiene:

$$0 \leq v_\lambda \leq \phi_o \quad \text{en} \quad]\theta_1,\theta_o[.$$

De esta desigualdad, de (40) y de la hipótesis H_2 (ver también apéndi ce proposición a.5) se deduce que:

$$\|v'_\lambda\|_{L^2(]\theta_1,\theta_o[)} = \|\beta_\lambda(v_\lambda)\|_{L^2(]\theta_1,\theta_o[)} \leq (a\phi_o + b)(\theta_o-\theta_1)^{1/2}$$

y aplicando la desigualdad de Poincaré se tiene

$$(41) \qquad \|v_\lambda-\phi_o\|_{L^2(]\theta_1,\theta_o[)} \leq c\,\|v'_\lambda\|_{L^2(]\theta_1,\theta_o[)} \leq c(a\phi_o+b)(\theta_o-\theta_1)^{1/2}$$

y por lo tanto v_λ está acotada en $H^1(]\theta_1,\theta_o[)$ independientemente de λ. Existe entonces una subsucesión $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ y existe un par $(w,g_w) \in H^1(]\theta_1,\theta_o[) \times L^2(]\theta_1,\theta_o[)$ tal que:

$$(42)\quad \begin{cases} v_{\lambda_k} \longrightarrow w \quad \text{debilmente en} \quad H^1(]\theta_1,\theta_o[) \\ v_{\lambda_k} \longrightarrow w \quad \text{en} \quad L^2(]\theta_1,\theta_o[) \\ \beta_{\lambda_k}(v_{\lambda_k}) \longrightarrow g_w \quad \text{debilmente en} \quad L^2(]\theta_1,\theta_o[) \end{cases}$$

de lo cual se deduce que $\beta_{\lambda_k}(v_{\lambda_k}) \longrightarrow g_w$ en casi todo punto, se puede entonces aplicar el teorema de Lebesgue dado que $|\beta_{\lambda_k}(v_{\lambda_k})| \leq$ $\leq a\,\phi_o + b$; y se tiene:

$$(43)\qquad \beta_{\lambda_k}(v_{\lambda_k}) \longrightarrow g_w \quad \text{en} \quad L^2(]\theta_1,\theta_o[)$$

por otra parte se deduce de (42) y de (39) que:

$$(44)\qquad w(\theta_1) = \phi_o \quad \text{y} \quad w' = -g_w \quad \text{en casi todo punto}$$

y por lo tanto

$$v'_{\lambda_k} \longrightarrow w' \quad \text{en} \quad L^2(]\theta_1,\theta_o[)$$

y entonces

$$(45)\qquad v_{\lambda_k} \longrightarrow w \quad \text{en} \quad H^1(]\theta_1,\theta_o[).$$

Además se tiene:

$$(46)\qquad g_w \in \beta(v) \quad \text{en casi todo punto de} \quad]\theta_1,\theta_o[.$$

Por otra parte, si $\alpha < \lambda$ entonces $v_\alpha \leq v_\lambda$ en $]\theta_1,\theta_o[$ dado que:

$$(v_\alpha - v_\lambda)' = \beta_\lambda(v_\lambda) - \beta_\alpha(v_\alpha) \leq \beta_\alpha(v_\lambda) - \beta_\alpha(v_\alpha) \quad \text{(ver apéndice)}$$

y

$$(v_\alpha - v_\lambda)'(v_\alpha - v_\lambda)^+ \leq (\beta_\alpha(v_\lambda) - \beta_\alpha(v_\alpha))(v_\alpha - v_\lambda)^+ \leq 0 \quad \text{dado que}$$

β_α es monótona creciente; dado por otra parte que $v_\alpha(\theta_1) = v_\beta(\theta_1)$ se deduce facilmente que $v_\alpha \leq v_\lambda$. De (41) y de (45) se deduce entonces que:

$$v_\lambda \longrightarrow w \quad \text{en} \quad H^1(]\theta_1,\theta_o[)$$

y también

$$\beta_\lambda(v_\lambda) \longrightarrow g_w \quad \text{en} \quad L^2(]\theta_1,\theta_o[)$$

esto sumado a (46) demuestra i) (notando que $0 < \beta_\lambda(v_\lambda) \leq a\,\phi_o + b$ por lo tanto $g_w \in L^\infty(]\theta_1,\theta_o[))$. Con (44) queda también demostrado ii). En cuanto a iii) es consecuencia del lema anterior y de i); en efecto, tenemos $\forall\lambda > 0$:

$$0 \leq p_\lambda \leq \tau_o(\beta_\lambda) = v_\lambda \circ \theta \quad \text{en} \quad \Omega$$

siendo p_λ la solución de $(P(\beta_\lambda))$. Sea, pues, (p,g) una solución límite de $(P(\beta))$, existe entonces $(\lambda_k)_{k\in N}$ tal que

$$p_{\lambda_k} \longrightarrow p \quad \text{debilmente en} \quad H^1(\Omega),$$

y por lo tanto en casi todo punto del conjunto $\{x \in \Omega \;/\; \theta(x) > \theta_1\}$ pasando al límite tendremos

$$p(x) \leq \lim v_{\lambda_k}(\theta(x)) = w(\theta(x));$$

la desigualdad es entonces válida en todo el conjunto $\{x \in \Omega \;/\; \theta(x) > \theta_1\}$ dado que p y $w\circ\theta$ son continuas (dado que $p \in W^{1,s}_{Loc}(\Omega)$ $\forall s \geq 1$, $w \in H^1(]\theta_1,\theta_o[)$ y $\theta \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$) lo que acaba la demostración.

Estamos ahora en condiciones de demostrar el teorema III.4.:

Demostración del teorema III.4. Sea Γ la función definida por:

$$\Gamma(r) = \int_r^{\phi_o} \frac{ds}{\beta°(s)} .$$

Con las hipótesis del teorema, Γ está definida en $[0,+\infty[$ y Γ es una biyección de $[0,+\infty[$ en $]-\infty, \Gamma_o]$ dado que $D(\beta°) = D(\beta) \supset \mathbb{R}^+$ por H_1 y H_2. Además:

$$\Gamma'(r) = -\frac{1}{\beta^o(r)} < 0 \quad \text{en casi todo punto de }]0,+\infty[$$

Sea entonces la función

$$h = \Gamma^{-1} ,$$

verificará

$$h'(r) = -\beta°(h(r)) \quad \text{en casi todo punto de }]-\infty, \Gamma_o[.$$

Definimos entonces la función u por:

$$u(r) = \begin{cases} h(r-\theta_1) & \text{si} \quad r \leq \Gamma_o + \theta_1 \\ 0 & \text{si} \quad r > \Gamma_o + \theta_1 \end{cases}$$

y tenemos

$$u(\theta_1) = h(0) = h(\Gamma(\phi_o)) = \phi_o$$

y

$$\begin{cases} u'(r) = -\beta°(u(r)) & \text{para casi todo } r \leq \Gamma_o + \theta_1 \\ u'(r) = -\beta°(u(r)) = 0 & \text{si} \quad r > \Gamma_o + \theta_1 . \end{cases}$$

Sea ahora w la función definida en el lema anterior, se tiene:

$$(w-u)' = \beta°(u) - g_w \quad \text{en casi todo punto de }]\theta_1,\theta_o[$$

se tiene entonces

$$(w-u)' \leq \beta°(u) - \beta°(w) \quad \text{en casi todo punto de }]\theta_1,\theta_o[$$

dado que $\beta^\circ(w) \leq g_w$ en casi todo punto. Se deduce:

$$(w-u)'(w-u)^+ \leq (\beta^\circ(u) - \beta^\circ(w))(w-u)^+ \leq 0$$

dado que β_o es creciente; $(w-u)^+$ es entonces decreciente en $]\theta_1,\theta_o[$, y puesto que $w(\theta_1) - u(\theta_1) = 0$ se tiene:

$$w \leq u \qquad \text{en} \qquad]\theta_1,\theta_o[.$$

Del lema anterior, se deduce entonces:

$$0 \leq p(x) \leq w(\theta(x)) \leq u(\theta(x)) \qquad \text{en} \qquad \{x \in \Omega \;/\; \theta(x) > \theta_1\}$$

y

$$p(x) = u(\theta(x)) = 0 \qquad \text{en} \qquad \{x \in \Omega \;/\; \theta(x) \geq \theta_1 + \Gamma_o\}$$

lo que acaba la demostración.

Nota III.10. Obsérvese que en el caso del dique, el grafo $\beta = \text{sign}^+$ satisface la hipótesis del teorema relativa a β. En este caso la segunda hipótesis $(\theta_o > \Gamma_o + \theta_1)$ se traduce por el hecho que el borde del dique se eleva por encima del nivel h_1 (ver capítulos I y II) del fluido.

Nota III.11. Unas técnicas parecidas a las que desarrollamos aquí nos permitirían demostrar acotaciones más finas teniendo en cuenta la especificidad del dato ϕ (ver por ejemplo el capítulo II).

Nota III.12. La hipótesis del teorema está verificada por una amplia familia de operadores incluyendo funciones continuas en 0 como es el caso de $\beta(r) = r^\alpha$ para $0 \leq \alpha < 1$.

Otros aspectos del problema como el estudio de la localización de la frontera libre (véase |27|) ó como la unicidad de la solución límite del problema (P(ß)) serán desarrollados en trabajos posteriores.

107

APENDICE

Apéndice: Operadores maximales monótonos (Brézis |18|).

Definición a.1. *Sea* β *un operador de* H *en* P(H) *con* H *espacio de Hilbert se dice que* β *es maximal monótono si verifica:*

i) β *es monótono i.e.* $\forall v_1 \in D(\beta)$, $\forall v_2 \in D(\beta)$, $\forall u_1 \in \beta(v_1)$ y $\forall u_2 \in \beta(v_2)$ *se tiene*

$$< u_1 - u_2, v_1 - v_2 >_H \geq 0$$

siendo $< , >_H$ *el producto escalar de* H *y siendo* $D(\beta)$ *el dominio de* $(D(\beta) = \{v \in H : \beta(v) \neq \emptyset\})$.

ii) Graf (β) *es maximal para la inclusión de los grafos*

Proposición a.1. *Sea* β *un operador de* H, *las tres propiedades siguientes son equivalentes:*

i) β *es maximal monótono*

ii) β *es monótono y* $R(I + \beta) = H$

iii) $\forall \lambda > 0$, $(I + \lambda\beta)^{-1}$ *es una contracción definida sobre todo* H.

Proposición a.2. *Sea* β *un operador maximal monótono de* H, *y sea* (v_n, u_n) *una sucesión de puntos de* Graf (β) *tal que* $v_n \to v$ *débilmente en* H *y* $u_n \to u$ *débilmente en* H *y tal que* $\underline{\text{Lim}}\ \text{sup}\ (v_n, u_n) \leq (v,u)$; *entonces* $u \in \beta(v)$ *y* $(v_n, u_n) \to (v,u)$ *en* $H \times H$.

Proposición a.3. *Sea* β *un operador maximal monótono, entonces* $\forall v \in D(\beta)$, $\beta(v)$ *es un convexo cerrado.*

Definición a.2. *Sea* β *un operador maximal monótono se llama sección principal (ó sección de norma mínima) al operador monótono y unívoco definido en* $D(\beta)$ *por*

$$v \longrightarrow \beta^\circ(v) = \mathrm{Proy}_{\beta(v)} 0$$

Definición a.3 | | *Sea* β *un operador maximal monótono, para todo* $\lambda > 0$ *se define la aproximación Yosida de* β *por:*

$$\beta_\lambda = \frac{I - (I + \lambda\beta)^{-1}}{\lambda} .$$

Proposición a.4. *Sea* β_λ *la aproximación Yosida de un operador* β *maximal monótono entonces:*

i) β_λ *es maximal monótono y lipschitziano de constante* $\frac{1}{\lambda}$

ii) $\forall v \in D(\beta)$ *se tiene:* $\|\beta_\lambda(v)\| \nearrow \|\beta^\circ(v)\|$ *y* $\beta_\lambda(v) \to \beta^\circ(v)$ *cuando* $\lambda \to 0$

Se demuestran a continuación 2 resultados concretos utilizados en esta memoria en el caso $H = \mathbb{R}$.

Proposición a.5. *Sea* β *un operador maximal monótono de* $\mathbb{R}$, *tal que* $0 \in \beta(0)$. *Se tiene entonces:*

i) $\beta_\lambda(0) = 0 \qquad \forall\lambda > 0$

ii) $\forall r > 0, \quad \forall\lambda > 0 \qquad \beta_\lambda(r) \leq \beta^\circ(r)$.

Demostración. $0 \in \beta(0)$ implica $0 \in (I + \lambda\beta)(0)$ $\forall\lambda > 0$ lo cual equivale a $(I + \lambda\beta)^{-1}(0) = 0$ y por lo tanto:

$$\beta_\lambda(0) = \frac{(I - (I + \lambda\beta)^{-1})}{\lambda}(0) = 0$$

lo que demuestra i).

Por otra parte, $\forall r > 0$ y $\forall\lambda > 0$ se tiene entonces $\beta_\lambda(r) \geq 0$ y $\beta^\circ(r) \geq 0$; además, $\beta_\lambda(r) \in \beta((I + \lambda\beta)^{-1})$ y por lo tanto:

$$(\beta^\circ(r) - \beta_\lambda(r))(r - (I + \lambda\beta)^{-1}(r)) \geq 0$$

de lo cual se deduce:

$$\beta^\circ(r)\ \beta_\lambda(r) \geq (\beta_\lambda(r))^2$$

lo que implica

$$\beta^\circ(r) \geq \beta_\lambda(r) \qquad \forall r > 0$$

lo que acaba la demostración.

Proposición 1.6. *Sea* β *un operador maximal monótono de* $\mathbb{R}$ *sean* $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de números reales positivos que converge hacia* 0 *y* $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión real que converge hacia* r. *Supongamos que* $|\beta_{\lambda_n}(r)| \leq M$ *siendo* M *una constante. Entonces si* $\beta_{\lambda_n}(r_n)$ *converge hacia* q *se tiene:*

$$q \in \beta(r).$$

Demostración. Demostraremos primero que $(I + \lambda_n\beta)^{-1}(r_n)$ converge hacia r. En efecto se tiene

$$|(I + \lambda_n\beta)^{-1}(r_n) - r| \leq |(I + \lambda_n\beta)^{-1}(r_n) - (I + \lambda_n\beta)^{-1}(r)| +$$
$$+ |(I + \lambda_n\beta)^{-1}(r) - r)|$$

y dado que $(I + \lambda_n\beta)^{-1}$ es una contracción, se deduce que:

$$|(I + \lambda_n\beta)^{-1}(r_n) - (I + \lambda_n\beta)^{-1}(r)| \leq |r_n - r|;$$

por otra parte se tiene:

$$|r - (I + \lambda_n\beta)^{-1}(r)| = |\lambda_n \; \beta_{\lambda_n}(r)| \leq \lambda_n \; M$$

y por lo tanto si $n \to \infty$ $\lambda_n \to 0$ y $|r_n - r| \to 0$ lo que implica

$$(I + \lambda_n\beta)^{-1}(r_n) \longrightarrow r .$$

Teniendo en cuenta que $\beta_{\lambda_n}(r_n) \in \beta((I + \lambda_n\beta)^{-1}(r_n))$ y aplicando la proposición a.3 se deduce que

$$q = \lim \beta_{\lambda n}(r_n) \in \beta(r),$$

lo que acaba la demostración.

BIBLIOGRAFIA

BIBLIOGRAFIA

|1| Adams R. "Sobolev Spaces", Academic Press, New York, 1975.

|2| Alt H.W. "A free boundary problem associated with the flow of groundwater". Arch. Rational Mech. Anal. 64 (1977), 111-126.

|3| Alt H.W. "The fluid flow through porous media. Regularity of free surface". Manuscripta Math. 21 (1977). 255-272.

|4| Alt H.W. "Stromungen durch inhomogene porose Medien mit freiem Rand". (aparecerá).

|5| Aravin V.I. - Numerov S.A. "Theory of fluid flow in undeformable porous media". Jerusalem: Israel program for scientific. Translations. 1965.

|6| Baiocchi C. "Sur un probleme à frontiere libre traduisant le filtrage de liquides a travers des milieux poreux". C.R.A.S. de Paris 273 (1215-1217) 1971.

|7| Baiocchi C. "Su un problema di frontiera libera conesso a questioni di idraulica". Ann. Mat. Pura Appl., (4) 92 (107-127) 1972.

|8| Baiocchi C. "Sur quelques problemes a frontiere libre". Colloques internationaux du C.N.R.S. n° 213 ("Les equations lineaires aux derivées partielles") Orsay 13-30 Sept. 1972. Editions C.N.R.S. 1973.

|9| Baiocchi C. "Problemes a frontiere libre en hydraulique". C.R.A.S. de Paris 278 (1201-1204) 1974.

|10| Baiocchi C. "Free boundary problems and variational inequalities" MRC Techn. Summary Report 1883 Univ. Wisconsin. 1978.

|11| Baiocchi C. "Free boundary problems in the theory of fluid flow through porous media". Proc. of The Int. Congress of Math. (Vancouver, 1974), Vol II (237-243), Vancouver, 1975.

|12| Baiocchi C. "Problemes a frontiere libre en hydraulique: milieux non homogenes" (aparecerá).

|13| Baiocchi C. - Capelo A. "Disequazioni variazionali e quasivariazionali. Applicazioni a problemi di frontiera libera". Vol. I, II. Pitagora editrice. Bologna 1978.

|14| Baiocchi C. - Comincioli V. - Guerri L. - Volpi G. "Free boundary problems in the theory of fluid flow through porous media: a numerical approach". Calcolo, 10 (1-86) 1973.

|15| Baiocchi C - Comincioli V. - Magenes E. - Pozzi G.A. "Free boundary problems in the theory of fluid flow through porous media: existence and uniqueness theorems". Ann. Pura Appl. (4) 97 (1973) 1-82.

|16| Baiocchi C. - Friedman A. "A filtracion problem in a porous medium with variable permeability". Ann. Math. Pura Appl. (4) 114 (1977), 377-393.

|17| Benilan P. - Crandall M.G. "The continuous dependence on ϕ of solution of $u_t-\Delta\phi(u) = 0$" T.S.R. Mathematics Research center. Univ. of Wisconsin - Madison.

|18| Brezis H. "Operateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert". North-Holland. 1973.

|19| Brezis H. - Kinderlehrer D. - Stampacchia G. "Sur une nouvelle formulation du probleme de l'écoulement a travers une digne". C.R.A.S. de Paris 287. Serie A, p. 711-714.

|20| Caffarelli L.A. "The local regularity of a phreatic surface". (aparecerá).

|21| Caffarelli L.A. - Friedman A. "The dam problem with two layers". (aparecerá).

|22| Caffarelli L.A. - Friedman A. "Asymptotic estimates for the dam problem with several layers". (aparecerá).

|23| Caffarelli L.A. - Gilardi G. "Monotonicity of the free boundary in the two dimensional dam problem". (aparecerá).

|24| Carbone L. - Valli A. "Filtrazione di un fluido en un mezzo non homogeneo tridimensionale". Rend. Ac. Naz. Lincei (8) 61 (1976) 161-164.

|25| Carrillo Menéndez J. "Sobre la unicidad de la solución en un problema de filtración". Com. II Congr. Ec. Dif. y Apl. Valldoreix, Mayo 1979. Publ. Mat. Univ. Aut. Barcelona. Abril 1980.

|26| Carrillo Menéndez, J. - Chipot M. "Sur le probleme de ladique" (en preparación).

|27| Carrillo Menéndez J. - Díaz Díaz J.I. "Estimaciones sobre la frontera libre de ciertos problemas" (en preparación).

|28| Chipot M. Entrevistas personales.

|29| Crandall M.G. - Ligget T. "Generation of semi-groups of non linear transformations on Banach spaces" Amer. J. Math. 93 (1971) 265-298.

|30| Cryer - "A proof of convexity of the free boundary for porous flow through a rectangular dam using the maximum principle". M.R.C. Tech. Summary Report 1953 Univ. Wisconsin 1979.

|31| Díaz Díaz J.I. "Propiedades cualitativas de ciertos problemas parabólicos no lineales: Una clasificación para los modelos de difusión del calor". Rev. Real. Acad. Ci. Exactas, Físicas y Nat. Madrid.

|32| Díaz Díaz J.I. "Resultados de comparación para ecuaciones de evolución no lineales". Conf. VII Jorn. Hispano-Lusas. San Feliu de Guixols. 1980.

|33| Friedman A. "A problem in hydraulics with non-monotone free boundary". Indiana University Math. Journ. 25 577-592. 1976.

|34| Friedman A. - Jensen R. "A parabolic quasi-variational inequality arising in hydraulics". Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa (4) 2 (1975) 421-468.

|35| Friedman A. - Jensen R. "Elliptic quasi-variational inequalities and applications to a non-stationary problem in hydraulics". Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa (4) 3 (1976) 47-88.

|36| Friedman A. - Jensen R. "Convexity of the Free boundary in the stefan problem and in the dam problem". Arch. rat. Mech. anal. 67 1-24. 1977.

|37| Friedman A. - Torreli A. "A free boundary problem connected with non-steady filtration in porous media". Non linear analysis 1 (1977) 503-545.

|38| Gilardi G. "Studio di una dizequazione quasi-variazionale relativa ad un problema di filtrazione in tre dimensioni". Ann. Mat. Pura Appl. (4) 113 (1977) 1-17.

|39| Gilardi G. "A new approach to evolution free boundary problems". Comm in partial diff. equat. 4 (10) 1099-1122 (1979).

|40| Gilbarg D. - Trudinger N.S. "Elliptic partial differential equations of second order". Springer-Verlag Berlin, Heidelberg New-York. 1977.

|41| Gilding B.H. - Peletier L.A. "The Cauchy problem for an equation in the theory of infiltation". Arch. Rat. Mech. Anal. 61 2. 127-140, 1976.

|42| Harr M.E. "Groundwater and see-page". New-York: M^c Graw-Hill. 1962.

|43| Jensen, R. "Structure of the non-monotone free boundary in a filtration problem". Indiana Univ. Math. J. 26, 1121-1135 (1977).

|44| Kershner R. "Sobre algunas propiedades de las soluciones generalizadas de ecuaciones parabólicas cuasi-lineales degeneradas". (en ruso). Tesis de doctorado. Univ. Lomonosov. Moscú 1976.

|45| Kinderlehrer D. - Niremberg L. "Regularity in free boundary problems". Annali Sc. Norm. Sup. di Pisa, Classe de Scienze (IV) 4, 373-391. 1977.

|46| Kinderlehrer D. - Stampacchia G. "An introduction to variational inequalities and their applications". Academic Press. 1980.

|47| Lions J.L. "Quelques methodes de resolution des problemes aux limites non-lineaires". Dunod, Gauthier-Villars. Paris 1969.

|48| Muskat, M. "The flow of homogeneous fluids through porous media". New-York. M^c Graw-Hill. 1937.

|49| Neças J. "Les méthodes directes en Theorie des equations elliptiques". Masson et Cie editeurs Paris - Academia, Editeurs Prague 1967.

|50| Polubarinova - Kochina P. Ya. "The Theory of groundwater movement". Princeton University Press, Princeton N.J., 1962.

|51| Protter M.H. - Weinberger H.F. "Maximum principles in Differential equations". Prentice-Hall. Partial differential equations series. 1967.

|52| Southwell R.V. "Relaxation methods in theorical phisics". Clarendon Press. Oxford. 1946.

|53| Stampacchia G. "On the filtracion of fluid through a porous medium with variable cross section". Russian Math. Survey (4) 29 (1974), 89-102.

|54| Torelli A. "Su un problema di filtrazione da un canale" Rend. Sem. Mat. Padova 52 (1974), 25-58.

|55| Torelli A. "On a free boundary value problem connected with a non-steady filtration phenomen". Ann. Soc. Norm. Sup. Pisa (4) 4 (1977) 33-59.

|56| Visintin A. "Study of free boundary filtration problem by a non-linear variational equation". Bolletino U.M.I. 5 (1979) 212-237.

|57| Visintin A. "Existence result for some free boundary filtration problems" (aparecerá).