DEPARTAMENTO DE GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

CARACTERIZACIONES INTERNAS EN TEORÍA DE LA FORMA Y MULTIFIBRACIONES

Memoria presentada por D.Antonio Giraldo Carbajo
para optar al grado de Doctor en Ciencias Matemáticas

Dirigida por D. José Manuel Rodríguez Sanjurjo
Catedrático del Departamento de Geometría y Topología
Facultad de Ciencias Matemáticas
Universidad Complutense de Madrid

Madrid, Febrero de 1995

A mi padre

Agradecimientos

La elaboración de esta memoria no hubiera sido posible sin la orientación científica de José M. R. Sanjurjo, tanto en la busqueda de los temas de investigación, como en el enfoque dado a este trabajo. Le agradezco especialmente las reuniones periódicas mantenidas a lo largo de estos últimos años. También quiero agradecer a J. Arregui el apoyo prestado al comienzo de mis estudios de Doctorado, durante mi estancia como becario del Departamento, y a todos aquellos profesores que me iniciaron en el estudio de la Topología.

De entre mis compañeros del Departamento de Matemática Aplicada de la Facultad de Informática, quisiera dar las gracias a aquellos que de alguna forma me han ayudado, destacando a Emilio Torrano por su constante disposición a resolver los problemas planteados por LaTeX.

Quiero expresar mi gratitud a mis amigos por su paciencia a lo largo de estos años, especialmente a Héctor, el más paciente.

Finalmente quiero dar las gracias a toda mi familia, a mi padre, el principal aliento de mis estudios de Licenciatura, a mi madre y a mis hermanas, por su apoyo continuado, a Manolo, que hace de cada uno de mis pequeños avances un gran salto para la humanidad, y a todos los demás.

Mi agradecimiento más profundo a Tania por su comprensión y a Sonia por su ánimo y aliento constantes.

Introducción

La teoría de la forma fue introducida por K.Borsuk en 1968 para el estudio de las propiedades homotópicas globales de los espacios métricos compactos, aunque las raices de esta teoría se remontan a la obra de P.Alexandroff, S.Lefschetz y E.Čech, entre otros. En los trabajos de estos autores aparece la idea – fundamental para la génesis de la teoría de la forma y para la anterior evolución de la homología simplicial a la homología de Čech – de aproximar los espacios topológicos por espacios particularmente simples, como los poliedros.

En las categorías de la forma y de la forma fuerte para espacios métricos compactos, para evitar las posibles complicaciones locales, se permite a las aplicaciones continuas entre dos espacios tomar valores en entornos del segundo espacio en un retracto absoluto que lo contenga, en general el cubo de Hilbert. Tomando entornos cada vez menores y estableciendo ciertas relaciones de homotopía entre aplicaciones se obtienen los morfismos de las categorías. De esta forma se consiguen clasificaciones homotópicas de los espacios métricos compactos que tienen en cuenta sus propiedades globales y no toman en consideración las locales, y que coinciden con la clasificación de la teoría de homotopía clásica en el caso de los poliedros.

El contenido de esta memoria se divide en cuatro capítulos, cuyo contenido presentamos ahora muy generalmente, remitiendo a la introducción de cada capítulo para una exposición detallada de los antecedentes del tema y del contenido del capítulo.

En el primer capítulo de la memoria presentamos una nueva caracterización interna, de tipo discreto y de gran sencillez formal, de la categoría de la forma. Nuestro enfoque, que supone la aparición de técnicas discretas en el estudio de la teoría de la forma, se basa en la idea de reemplazar las aplicaciones continuas, que necesariamente dependen fuertemente de la estructura local de los espacios, por aplicaciones localmente constantes con saltos cada vez menores. Utilizando estas técnicas, damos también caracterizaciones en términos discretos de los poliedros aproximativos, de los espacios movibles y de los internamente movibles.

En el segundo capítulo damos la primera descripción totalmente intrínseca de la categoría de la forma fuerte. Nuestra caracterización se basa en la teoría de aplicaciones multivaluadas. Consideramos también una topología en el espacio de las aplicaciones multivaluadas finas entre dos espacios métricos compactos que nos permite caracterizar los morfismos en la categoría de la forma como las componentes conexas de ese espacio topológico, y los morfismos en la categoría de la forma fuerte como las componentes conexas por caminos, siendo además todo morfismo en la categoría de la forma la adherencia de un morfismo en la categoría de la forma fuerte. Finalmente mostramos como reducir el cálculo de grupos 'shape' fuerte al cálculo de grupos de homotopía usuales de un cierto espacio de lazos.

En el tercer capítulo presentamos un nuevo enfoque de las fibraciones 'shape', basado en la teoría de aplicaciones multivaluadas. De este modo, podemos definir el concepto, más restrictivo que el de fibración de Hurewicz con elevación única de caminos, de fibración 'shape' con elevación cercana de caminos multivaluados cercanos, siendo estas últimas equivalentes a fibraciones 'shape' con fibras totalmente desconectadas. Demostramos también resultados relativos a propiedades de elevación de aplicaciones ligadas a los morfismos 'shape'.

En el cuarto y último capítulo retomamos las caracterizaciones de la forma y de la forma fuerte de espacios métricos compactos por aplicaciones aproximativas para establecer nuevas conexiones entre la teoría de la forma y la teoría de sistemas dinámicos. La razón de utilizar esta caracterización es que el flujo de un sistema dinámico en un ANR induce una aplicación aproximativa de cualquier compacto del espacio de fases en cualquier otro compacto que contenga al primero en su región de atracción. Esto nos permite estudiar propiedades referentes a la forma de compactos positivamente invariantes y de compactos estables de sistemas dinámicos con atractores compactos asintoticamente estables.

Siguiendo, en cierto modo, un camino inverso, definimos un sistema semidinámico de Bebutov en el espacio $A(X,Y)$ de las aplicaciones aproximativas de X a Y, con una métrica adecuada, y estudiamos sus propiedades dinámicas.

En todo el trabajo, siempre que tengamos un espacio métrico, denotaremos por d la correspondiente distancia. Cuando estemos considerando varios espacios métricos simultaneamente, denotaremos con la misma letra d a todas las métricas, siempre que quede claro por el contexto a cual de ellas nos referimos en cada caso.

Contenidos

Capítulo 1

CARACTERIZACIÓN DISCRETA DE LA CATEGORÍA DE LA FORMA DE BORSUK

La teoría de homotopía clásica se utiliza para el estudio de propiedades globales de los espacios topológicos. Tiene el inconveniente, sin embargo, al estar basada en propiedades de las aplicaciones continuas de un espacio en otro, de ser sensible a las complicaciones locales de éstos. Por tanto solo es satisfactoria cuando se aplica a espacios con un buen comportamiento local, como los poliedros o, más generalmente, los espacios ANR.

La categoría de la forma fue introducida en 1968 por K.Borsuk [12] y [13], como un medio de estudiar propiedades globales, especialmente de tipo homotópico, de los espacios métricos compactos, ignorando complicaciones locales en su estructura topológica. En la categoría de la forma de Borsuk, para definir los morfismos entre dos espacios métricos compactos se sumergen en espacios retractos absolutos (en general, el cubo de Hilbert), y se reemplazan las aplicaciones continuas entre ellos por aplicaciones aproximativas, ésto es, sucesiones de aplicaciones continuas del primer espacio métrico compacto en entornos, cada vez menores, del segundo espacio en el AR que lo contiene. Se exige además que cada par de aplicaciones consecutivas sean homótopas, también en entornos cada vez menores.

De esta forma se obtiene una clasificación homotópica de los espacios métricos compactos que tiene en cuenta sus propiedades globales y no toma en consideración las locales, y que coincide con la clasificación de la teoría de homotopía clásica para los espacios ANR.

En 1971, W.Holsztyński [55] y [56] da una base axiomática a la teoría de la forma basandose en los conceptos de la teoría de categorías y mostrando una profunda conexión entre el concepto de forma y el de límite inverso. Poco después, también en 1971, S.Mardešić y J.Segal extienden en [80] y [81] la teoría de la forma a espacios Hausdorff compactos arbitrarios caracterizando los espacios como límites inversos de ANRs y definiendo aplicaciones entre los sistemas y no directamente entre los compactos. Borsuk ([15], [17]) y R.H.Fox ([40], [41]) introducen y estudian en 1972 la teoría de la forma para espacios métricos arbitrarios. Posteriormente, en 1973, Mardešić [75] extiende la teoría de la forma a espacios topológicos arbitrarios. Todas estas caracterizaciones tienen el inconveniente de precisar de elementos externos, como espacios AR ambientes o sucesiones de espacios ANR.

J.E.Felt [38] establece en 1974 una relación entre los conceptos de forma y ε-continuidad y en 1989 J.M.R.Sanjurjo [98] da la primera descripción completa de tipo interno de la teoría de la forma, usando aplicaciones no continuas, extendiendo algunas ideas de Felt. Hasta entonces, todas las descripciones existentes de la categoría de la forma para espacios métricos compactos usaban elementos externos para introducir las nociones básicas.

En 1990, Sanjurjo [100] da una descripción de los morfismos en la categoría de la forma usando aplicaciones multivaluadas finas, y en 1992, empleando esta descripción, introduce una nueva caracterización completa de la teoría de la forma para los espacios métricos compactos que no hace uso de elementos externos [102]. En esta caracterización los morfismos entre espacios métricos compactos son sucesiones de aplicaciones multivaluadas semicontinuas superiormente con diámetros cada vez menores. En [101] y [103] se investigan nuevas propiedades usando esta caracterización.

La caracterización multivaluada de la teoría de la forma ha sido extendida a espacios paracompactos por M.A.Morón y F.R.Ruiz del Portal [87] utilizando recubrimientos abiertos normales. Por otra parte, K.W.Kieboom [60] ha obtenido recientemente una nueva descripción intrínseca de la forma de los espacios paracompactos, combinando la caracterización no continua de [98] con algunas técnicas de [87].

Para información general sobre teoría de la forma recomendamos los libros de K.Borsuk [18], J.M.Cordier y T.Porter [30], J.Dydak y J.Segal [33], y S.Mardešić y J.Segal [82]. También recomendamos la colección de problemas abiertos [36] de J.Dydak and J.Segal.

En este capítulo presentamos una nueva descripción interna de la categoría de la forma de espacios métricos compactos utilizando unicamente aplicaciones univaluadas continuas. Para evitar las complicaciones locales del segundo espacio, en lugar de ocultarlas tomando entornos del mismo en un espacio AR determinado, lo que hacemos es aproximar las funciones continuas entre dos espacios por aplicaciones localmente constantes definidas en partes densas del primer espacio y cuyas imágenes van tomando una cantidad finita (cada vez mayor si es necesario) de puntos, de tal forma que los saltos entre esos puntos permiten esquivar las posibles complicaciones locales del segundo espacio. En concreto, los morfismos de la categoría son clases de homotopía de sucesiones de aplicaciones univaluadas continuas definidas en subconjuntos abiertos densos del primer espacio y que toman solo una cantidad finita de valores distintos, de tal forma que la oscilación de cada aplicación y la distancia entre aplicaciones sucesivas tiende a cero. De esta forma obtenemos una caracterización interna de la teoría de la forma, de gran sencillez formal y que utiliza solamente aplicaciones continuas. Este nuevo enfoque supone la aparición de técnicas discretas en el estudio de la teoría de la forma.

En la sección 1.1 estudiamos propiedades de las aplicaciones continuas definidas en conjuntos densos y definimos las homotopías entre ellas. Introducimos el concepto de aplicación discreta entre espacios métricos compactos (toda aplicación continua definida en un subconjunto denso del primer espacio y con imagen finita), y el de aplicaciones discretas encadenables.

En la sección 1.2 introducimos el concepto de sucesión densa discreta. Definimos una relación de homotopía entre sucesiones densas discretas y mostramos como componer clases de homotopía, solventando el problema de que la imagen de una aplicación discreta de X a Y no tiene porque estar contenida en el dominio de una aplicación discreta de Y a Z. Finalmente demostramos que si consideramos la clase de los espacios métricos compactos y las clases de homotopía de sucesiones densas discretas con la composición mencionada anteriormente obtenemos una categoría.

En la sección 1.3 demostramos la equivalencia con la categoría de la forma de Borsuk.

En la sección 1.4 presentamos nuevas caracterizaciones de espacios importantes en teoría de la forma y en teoría de retractos utilizando aplicaciones discretas. En particular, probamos que los espacios AANR de Clapp [28] tienen propiedades de extensión aproximada de aplicaciones definidas en conjuntos densos, y que estas propiedades son características. Asimismo probamos que los espacios internamente movibles se caracterizan por la propiedad de que aplicaciones definidas en conjuntos densos son aproximadamente homótopas a aplicaciones continuas definidas en todo el espacio. Finalmente damos una caracterización en la misma linea de los espacios movibles.

Para información general sobre teoría de retractos recomendamos los libros de K.Borsuk [11] y S.T.Hu [57]. Para un enfoque más moderno se puede consultar el libro de J.Van Mill [110]. También recomendamos la colección de problemas abiertos [113] de J.E.West.

1.1 APLICACIONES DISCRETAS

Sean X e Y espacios métricos y sea $f : D \longrightarrow Y$ una aplicación (no necesariamente continua) definida en un subconjunto denso D de X. Dado $x \in X$ denotamos por $V(x)$ a la familia de entornos abiertos de x en X y definimos la oscilación de f en x como el valor

$$O(f,x) = \inf\{\operatorname{diam}(f(U \cap D)) \mid U \in V(x)\}.^{1}$$

Obsérvese que si f es continua en D, entonces $O(f,x) = 0$ para todo $x \in D$.[2]

Definimos $O(f,X) = \sup\{O(f,x) \mid x \in X\}$.[3]

Ejemplo 1.1.1 Sean $X = Y = [0,1]$ y $f : [0,1] - \{0\} \longrightarrow [0,1]$ definida por $f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$. Entonces:

$$O(f,x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ 2 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Dados D y E subconjuntos densos de X y dadas $f : D \longrightarrow Y$ y $g : E \longrightarrow Y$ aplicaciones continuas, definimos para cada $x \in X$,

$$\varrho(f,g,x) = \inf\{\operatorname{diam}(f(U \cap D) \cup g(U \cap E)) \mid U \in V(x)\}.$$

Es claro que $\varrho(f,g,x) = d(f(x),g(x))$ para todo $x \in D \cap E$. Definimos

$$\varrho(f,g,X) = \sup\{\varrho(f,g,x) \mid x \in X\}.$$

Obsérvese que $\varrho(f,f,X) = O(f,X)$, $\varrho(f,g,X) = \varrho(g,f,X)$ y que

$$\varrho(f,h,X) \leq \varrho(f,g,X) + \varrho(g,h,X),$$

para cualesquiera $f : D \longrightarrow Y$, $g : E \longrightarrow Y$ y $h : F \longrightarrow Y$ aplicaciones continuas definidas en subconjuntos densos de X. Además, si $\varrho(f,g,X) = 0$, entonces $f|_{D\cap E} = g|_{D\cap E}$.

Por otra parte, podemos asociar al par (f,g) el siguiente valor

$$d(f|_{D\cap E}, g|_{D\cap E}) = \sup\{d(f(x),g(x)) \mid x \in D \cap E\}.$$

[1]Si Y es acotado, se tiene $O(f,x) \leq \operatorname{diam}(Y)$ para todo $x \in X$, y si Y no es acotado puede ocurrir que $O(f,x) = \infty$.

[2]Por otra parte, si f es maximal, en el sentido de que no existe $g : E \longrightarrow Y$ extensión continua de f a $E \subset X$, entonces $O(f,x) > 0$, para todo $x \notin D$.

[3]Si Y es acotado, se tiene $O(f,X) \leq \operatorname{diam}(Y)$, y si Y no es acotado puede ocurrir que $O(f,X) = \infty$.

Este valor solamente tendrá importancia si $D \cap E$ es denso en X e Y es compacto, en cuyo caso es un número real bien definido. En particular, si D o E es subconjunto abierto de X, entonces $D \cap E$ es denso. Si ambos son abiertos entonces su intersección es abierta y densa en X.

Es fácil ver que si D, E y F son subconjuntos densos de X, con intersecciones densas dos a dos, y $f : D \longrightarrow Y$, $g : E \longrightarrow Y$ y $h : F \longrightarrow Y$ son aplicaciones continuas, entonces

$$d(f|_{D\cap F}, h|_{D\cap F}) \leq d(f|_{D\cap E}, g|_{D\cap E}) + O(g, Y) + d(g|_{E\cap F}, h|_{E\cap F}).$$

Diremos que f y g son ε-homótopas si existe $C \subset X \times [0,1]$ denso tal que

$$C \cap (X \times \{0\}) = D \times \{0\}, C \cap (X \times \{1\}) = E \times \{1\},$$

y existe $H : C \longrightarrow Y$ aplicación continua con $O(H, X \times [0,1]) < \varepsilon$ tal que $H(x,0) = f(x)$ para todo $x \in D$ y $H(x,1) = g(x)$ para todo $x \in E$.

Es fácil ver que si D, E y F son subconjuntos densos de X, y $f : D \longrightarrow Y$, $g : E \longrightarrow Y$ y $h : F \longrightarrow Y$ son aplicaciones continuas tales que f y g son ε-homótopas y g y h son ε-homótopas, entonces f y h son ε-homótopas.

Proposición 1.1.2 *Sean X e Y espacios métricos con X compacto, sean D y E subconjuntos abiertos densos de X y sean $f : D \longrightarrow Y$ continua con $O(f, X) < \varepsilon$ y $g : E \longrightarrow Y$ continua con $O(g, X) < \varepsilon$. Son equivalentes:*
i) f y g son ε-homótopas.
ii) Existe $F \subset D \cap E$ subconjunto abierto y denso de X, existe una partición $\{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1\}$ de $[0,1]$ y existe

$$H : F \times ([t_0, t_1) \cup (t_1, t_2) \cup \ldots \cup (t_{n-1}, t_n]) \longrightarrow Y$$

ε-homotopía de $f|_F$ a $g|_F$.
iii) Existe una ε-homotopía de f a g definida en un subconjunto abierto y denso de $X \times [0,1]$.

Dem. Vamos a ver que i) implica ii). Supongamos que

$$f : D \longrightarrow Y \text{ y } g : E \longrightarrow Y$$

son ε-homótopas. Entonces existe $C \subset X \times [0,1]$ denso tal que

$$C \cap (X \times \{0\}) = D \times \{0\}, C \cap (X \times \{1\}) = E \times \{1\},$$

y existe $H : C \longrightarrow Y$ tal que $O(H, X \times [0,1]) < \varepsilon$ y tal que $H(x,0) = f(x)$ para todo $x \in D$ y $H(x,1) = g(x)$ para todo $x \in E$.

Como $O(H, X \times [0,1]) < \varepsilon$, para todo $(x,t) \in X \times [0,1]$ existe $U^{(x,t)}$ entorno abierto de (x,t) en $X \times [0,1]$ tal que $\mathrm{diam}(H(U^{(x,t)} \cap C)) < \varepsilon$. Por la compacidad de $X \times [0,1]$ existe $\{U_1, \ldots, U_p\}$ recubrimiento abierto de $X \times [0,1]$ tal que $\mathrm{diam}(H(U_i \cap C)) < \varepsilon$ para todo $i \in \{1, \ldots, p\}$.

Sea $\delta > 0$ el número de Lebesgue de este recubrimiento y sea $\{V_1, \ldots, V_q\}$ recubrimiento abierto de X tal que $\mathrm{diam}(V_i) < \frac{\delta}{6}$ para todo $i \in \{1, \ldots, q\}$. A partir de este recubrimiento definimos

$$F_1 = V_1 \cap D \cap E, F_2 = (V_2 - \overline{V_1}) \cap D \cap E, \ldots, F_q = (V_q - (\overline{V_1} \cup \ldots \cup \overline{V_{q-1}})) \cap D \cap E,$$

familia de subconjuntos abiertos (que podemos suponer no vacíos) de X disjuntos dos a dos tal que $F = F_1 \cup \ldots \cup F_q$ es abierto y denso en X.

Consideramos $\{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1\}$ partición de $[0,1]$ tal que la distancia entre dos términos consecutivos es menor que $\frac{\delta}{6}$. Entonces

$$\{F_i \times (t_{j-1}, t_j) \mid 1 \leq i \leq q, 1 \leq j \leq n\}$$

es una familia de subconjuntos abiertos no vacíos de $X \times [0,1]$ disjuntos dos a dos tal que $\mathrm{diam}(F_i \times (t_{j-1}, t_j)) < \frac{\delta}{3}$ para todo $i \in \{1, \ldots, q\}$ y para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$, y tal que $\cup\{F_i \times (t_{j-1}, t_j) \mid 1 \leq i \leq q, 1 \leq j \leq n\}$ es abierto y denso en $X \times [0,1]$. Elegimos puntos $x_{ij} \in (F_i \times (t_{j-1}, t_j)) \cap C$, y definimos $H' : F \times ([t_0, t_1) \cup (t_1, t_2) \cup \ldots \cup (t_{n-1}, t_n]) \longrightarrow Y$ tal que

$$H'(x,t) = \begin{cases} H(x,0) = f(x) & \text{si } t \in [0, t_1) \\ H(x,1) = g(x) & \text{si } t \in (t_{n-1}, 1] \\ H(x_{ij}) & \text{si } x \in F_i, t_1 \leq t_{j-1} < t < t_j \leq t_{n-1}. \end{cases}$$

Entonces H' es continua y para todo $(x,t) \in F \times ([t_0, t_1) \cup (t_1, t_2) \cup \ldots \cup (t_{n-1}, t_n])$ existe $(x', t') \in C$ con $d((x,t), (x',t') < \frac{\delta}{3}$ tal que $H'(x,t) = H(x',t')$. Esto garantiza que $O(H', X \times [0,1]) < \varepsilon$ pues dado $(x,t) \in X \times [0,1]$, si consideramos un entorno U cualquiera de (x,t) con $\text{diam}(U) < \frac{\delta}{3}$ se tiene que para cualesquiera $(y,s),(z,r) \in U \cap F \times ([t_0,t_1) \cup (t_1,t_2) \cup \ldots \cup (t_{n-1},t_n])$ existen $(y',s'),(z',r') \in C$ con $d((y,s),(y',s')) < \frac{\delta}{3}$ y $d((z,r),(z',r')) < \frac{\delta}{3}$ tal que $H'(y,s) = H(y',s')$ y $H'(z,r) = H(z',r')$. Entonces

$$d(H'(y,s),H'(z,r)) = d(H(y',s'),H(z',r')) < \varepsilon,$$

pues $d((y',s'),(z',r') < \delta$ y por tanto están en un mismo elemento del recubrimiento $\{U_1,\ldots,U_p\}$. Luego $O(H', X \times [0,1]) < \varepsilon$.

Esto prueba que i) implica ii). Vamos a ver que ii) implica iii).

Supongamos que existe $F \subset D \cap E$ subconjunto abierto y denso de X, que existe $\{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1\}$ partición de $[0,1]$ y que existe

$$H : F \times ([t_0,t_1) \cup (t_1,t_2) \cup \ldots \cup (t_{n-1},t_n]) \longrightarrow Y$$

ε-homotopía de $f|_F$ a $g|_F$. Definimos

$$C = D \times \left[0,\frac{1}{3}\right) \cup F \times \left(\left(\frac{t_0}{3}+\frac{1}{3},\frac{t_1}{3}+\frac{1}{3}\right) \cup \ldots \cup \left(\frac{t_{n-1}}{3}+\frac{1}{3},\frac{t_n}{3}+\frac{1}{3}\right)\right) \cup E \times \left(\frac{2}{3},1\right].$$

Entonces la aplicación $H' : C \longrightarrow Y$ dada por

$$H'(x,t) = \begin{cases} f(x) & \text{si } t \in [0,\frac{1}{3}) \\ H(x,3t-1) & \text{si } t \in (\frac{1}{3},\frac{2}{3}) \\ g(x) & \text{si } t \in (\frac{2}{3},1] \end{cases}$$

es una ε-homotopía de f a g definida en un conjunto abierto y denso de $X \times [0,1]$.

El resto de la demostración es trivial.

Introducimos a continuación una subfamilia de la familia de las aplicaciones continuas definidas en subconjuntos densos de un espacio métrico compacto.

Sean X e Y espacios métricos compactos. Sea D subconjunto denso de X y sea $f : D \longrightarrow Y$ continua. Decimos que f es discreta si $f(D)$ es finito.

Si D es denso en X y $f : D \longrightarrow \{y_1,\ldots,y_n\} \subset Y$ es discreta, entonces $\{f^{-1}(y_1),\ldots,f^{-1}(y_n)\}$ es una familia finita de conjuntos, abiertos y cerrados en D, disjuntos dos a dos, tal que $D = f^{-1}(y_1) \cup \ldots \cup f^{-1}(y_n)$. Si además D es abierto, los conjuntos $\{f^{-1}(y_1),\ldots,f^{-1}(y_n)\}$ son abiertos en X.

Si $D_1, \ldots, D_n$ son conjuntos disjuntos dos a dos, abiertos (y por tanto cerrados) en $D = D_1 \cup \ldots \cup D_n$ y D es denso en X, y f es una aplicación constante en cada uno de esos abiertos, entonces f es continua y por tanto discreta.

Proposición 1.1.3 (Aproximación por aplicaciones discretas). *Sean X e Y espacios métricos compactos, sea D subconjunto denso de X y sea $f : D \longrightarrow Y$ una aplicación (no necesariamente continua) con $O(f,X) < \varepsilon$. Entonces existe E subconjunto abierto y denso de X y existe $g : E \longrightarrow Y$ aplicación discreta con $O(g,X) < \varepsilon$ tal que $d(f|_{D\cap E}, g|_{D\cap E}) < \varepsilon$.*

Dem. Como $O(f,X) < \varepsilon$, para todo $x \in X$ existe U_x entorno abierto de x en X tal que $\mathrm{diam}(f(U^x \cap D)) < \varepsilon$. Por la compacidad de X existe $\{U_1, \ldots, U_p\}$ recubrimiento abierto de X tal que $\mathrm{diam}(f(U_i)) < \varepsilon$ para todo $i \in \{1, \ldots, p\}$. Sea $\delta > 0$ el número de Lebesgue de este recubrimiento y sea $\{V_1, \ldots, V_q\}$ recubrimiento abierto de X tal que $\mathrm{diam}(V_i) < \frac{\delta}{2}$ para todo $i \in \{1, \ldots, q\}$. A partir de este recubrimiento definimos

$$E_1 = V_1, E_2 = V_2 - \overline{V_1}, \ldots, E_n = V_n - (\overline{V_1} \cup \ldots \cup \overline{V_{n-1}}).$$

familia de subconjuntos abiertos (que podemos suponer no vacíos) de X disjuntos dos a dos tal que $E = E_1 \cup \ldots \cup E_n$ es abierto y denso en X. Elegimos puntos $x_i \in E_i \cap D$, y definimos $g : E \longrightarrow Y$ tal que $g(E_i) = f(x_i)$. Entonces g es continua, por ser cada E_i abierto, y por tanto discreta. Además, $O(g,X) < \varepsilon$ pues si $\overline{E_i} \cap \overline{E_j} \neq \emptyset$, entonces $\mathrm{diam}(E_i \cup E_j) < \delta$ y por tanto x_i y x_j están en un mismo elemento del recubrimiento $\{U_1, \ldots, U_p\}$ y se tiene

$$d(g(E_i), g(E_j)) = d(f(x_i), f(x_j)) < \varepsilon.$$

Finalmente se tiene que $d(f|_{D\cap E}, g|_{D\cap E}) < \varepsilon$, pues dado $x \in D \cap E_i$ se tiene que

$$d(f(x), g(x)) = d(f(x), f(x_i)) < \varepsilon$$

pues $d(x_i, x) < \frac{\delta}{2}$ y por tanto x_i y x están en un mismo elemento del recubrimiento $\{U_1, \ldots, U_p\}$. Esto completa la demostración de la proposición.

Si $f : D \longrightarrow \{y_1, \ldots, y_n\} \subset Y$ es discreta se tiene

$$\begin{aligned} O(f, X) &= \max_{1 \leq i,j \leq n} \{d(y_i, y_j) \mid \overline{f^{-1}(y_i)} \cap \overline{f^{-1}(y_j)} \neq \emptyset\} \\ &= \max_{y,y' \in Y} \{d(y, y') \mid \overline{f^{-1}(y)} \cap \overline{f^{-1}(y')} \neq \emptyset\}. \end{aligned}$$

Definimos la elongación de f en X como

$$\begin{aligned} e(f, X) &= \min_{1 \leq i,j \leq n} \{d(f^{-1}(y_i), f^{-1}(y_j)) \mid d(f^{-1}(y_i), f^{-1}(y_j)) > 0\} \\ &= \min_{y,y' \in Y} \{d(f^{-1}(y), f^{-1}(y')) \mid d(f^{-1}(y), f^{-1}(y')) > 0\} > 0, \end{aligned}$$

donde la distancia entre un conjunto cualquiera y el conjunto vacío es 0 y donde definimos $e(f, X) = \operatorname{diam}(X)$ si el conjunto anterior es vacío, ésto es, si para cualesquiera $y, y' \in Y$ se tiene $d(f^{-1}(y), f^{-1}(y')) = 0$.

Obsérvese que si $U \subset X$ verifica $\operatorname{diam}(U) < e(f, X)$, entonces

$$\operatorname{diam}(f(U \cap D)) \leq O(f, X).$$

Por otra parte, dados D y E subconjuntos densos de X y dadas

$$f : D \longrightarrow \{y_1, \ldots, y_n\} \subset Y \text{ y } g : E \longrightarrow \{y'_1, \ldots, y'_m\} \subset Y$$

aplicaciones discretas se tiene que, si definimos

$$\begin{aligned} \varrho^*(f, g, X) &= \max_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} \{d(y_i, y'_j) \mid \overline{f^{-1}(y_i)} \cap \overline{g^{-1}(y'_j)} \neq \emptyset\} \\ &= \max_{y,y' \in Y} \{d(y, y') \mid \overline{f^{-1}(y)} \cap \overline{g^{-1}(y')} \neq \emptyset\}, \end{aligned}$$

entonces

$$\varrho(f, g, X) = \max\{O(f, X), O(g, X), \varrho^*(f, g, X)\}.$$

Por otra parte, definimos la elongación de f y g en X como

$$e(f, g, X) = \min\{e(f, X), e(g, X), e^*(f, g, X)\} > 0,$$

donde

$$\begin{aligned} e^*(f, g, X) &= \min_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} \{d(f^{-1}(y_i), g^{-1}(y'_j)) \mid d(f^{-1}(y_i), g^{-1}(y'_j)) > 0\} \\ &= \min_{y,y' \in Y} \{d(f^{-1}(y), g^{-1}(y')) \mid d(f^{-1}(y), g^{-1}(y')) > 0\} > 0, \end{aligned}$$

donde, si el conjunto anterior es vacío, definimos $e^*(f,g,X) = \mathrm{diam}(X)$.

Si $D \cap E$ es denso en X, se tiene que

$$\begin{aligned} d(f|_{D\cap E}, g|_{D\cap E}) &= \max_{1\le i\le n, 1\le j\le m} \{d(y_i, y_j') \mid f^{-1}(y_i) \cap g^{-1}(y_j') \neq \emptyset\} \\ &= \max_{y,y'\in Y} \{d(y,y') \mid f^{-1}(y) \cap g^{-1}(y') \neq \emptyset\}. \end{aligned}$$

Dadas $f : D \longrightarrow Y$ y $g : E \longrightarrow Y$ aplicaciones discretas, decimos que f y g son ε-encadenables, si existen

$$f_0 : D_0 \longrightarrow Y, f_1 : D_1 \longrightarrow Y, f_2 : D_2 \longrightarrow Y, \ldots, f_n : D_n \longrightarrow Y$$

aplicaciones discretas tales que $f_0 = f$, $f_n = g$ y

$$\varrho(f_0, f_1, X) < \varepsilon, \varrho(f_1, f_2, X) < \varepsilon, \ldots, \varrho(f_{n-1}, f_n, X) < \varepsilon.$$

Decimos entonces que $\{f_0, f_1, \ldots, f_n\}$ es una ε-cadena de f a g.

Proposición 1.1.4 *Sean X e Y espacios métricos compactos y $f : D \longrightarrow Y$ y $g : E \longrightarrow Y$ aplicaciones discretas con $O(f,X) < \varepsilon$ y $O(g,X) < \varepsilon$. Entonces son equivalentes:*
i) f y g son ε-encadenables.
ii) f y g son ε-homótopas (como aplicaciones continuas definidas en subconjuntos densos de X).
iii) Existe F subconjunto abierto y denso de X y existen $f_1, \ldots, f_{n-1} : F \longrightarrow Y$ aplicaciones discretas tales que $\{f, f_1, \ldots, f_{n-1}, g\}$ es una ε-cadena de f a g.

Dem. Vamos a ver que i) implica ii). Supongamos que f y g son ε-encadenables. Entonces existen

$$f_1 : D_1 \longrightarrow Y, \ldots, f_n : D_n \longrightarrow Y$$

aplicaciones discretas tales que $f_1 = f$, $f_n = g$, y

$$\varrho(f_1, f_2, X) < \varepsilon, \ldots, \varrho(f_{n-1}, f_n, X) < \varepsilon.$$

Consideramos

$$C = D_1 \times \left[0, \frac{1}{n}\right) \cup D_2 \times \left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right) \cup \ldots \cup D_{n-1} \times \left(\frac{n-2}{n}, \frac{n-1}{n}\right) \cup D_n \times \left(\frac{n-1}{n}, 1\right]$$

denso en $X \times [0,1]$ tal que

$$C \cap (X \times \{0\}) = D \times \{0\}, C \cap (X \times \{1\}) = E \times \{1\},$$

y definimos $H : C \longrightarrow Y$ aplicación continua tal que

$$H(x,t) = \begin{cases} f(x) & \text{si } (x,t) \in D \times [0, \frac{1}{n}) \\ f_k(x) & \text{si } (x,t) \in D_k \times (\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}), 1 < k < n \\ g(x) & \text{si } (x,t) \in E \times (\frac{n-1}{n}, 1], \end{cases}$$

Entonces $H(x,0) = f(x)$ para todo $x \in D$ y $H(x,1) = g(x)$ para todo $x \in E$, y se tiene que

$$O(H, X \times [0,1]) \leq \max_{2 \leq k \leq n} \{\varrho(f_{k-1}, f_k, X)\} < \varepsilon.$$

Luego f y g son ε-homótopas (como aplicaciones definidas en subconjuntos densos de X).

Vamos a ver que ii) implica iii). Supongamos que $f : D \longrightarrow Y$ y $g : E \longrightarrow Y$ son ε-homótopas (como aplicaciones definidas en subconjuntos densos de X). Entonces existe $C \subset X \times [0,1]$ denso tal que

$$C \cap (X \times \{0\}) = D \times \{0\}, C \cap (X \times \{1\}) = E \times \{1\},$$

y existe una aplicación continua $H : C \longrightarrow Y$ tal que $O(H, X \times [0,1]) < \varepsilon$ y tal que $H(x,0) = f(x)$ para todo $x \in D$ y $H(x,1) = g(x)$ para todo $x \in E$.

Como $O(H, X \times [0,1]) < \varepsilon$, para todo $(x,t) \in X \times [0,1]$ existe $U^{(x,t)}$ entorno abierto de $(x,t) \in X \times [0,1]$ tal que $\operatorname{diam}(H(U^{(x,t)} \cap C)) < \varepsilon$. Por la compacidad de $X \times [0,1]$ existe $\{U_1, \ldots, U_p\}$ recubrimiento abierto de $X \times [0,1]$ tal que $\operatorname{diam}(H(U_i \cap C)) < \varepsilon$ para todo $i \in \{1, \ldots, p\}$.

Sea $\delta > 0$ el número de Lebesgue de este recubrimiento y sea $\{V_1, \ldots, V_q\}$ recubrimiento abierto de X tal que $\operatorname{diam}(V_i) < \frac{\delta}{4}$ para todo $i \in \{1, \ldots, q\}$. A partir de este recubrimiento definimos

$$F_1 = V_1, F_2 = V_2 - \overline{V_1}, \ldots, F_q = V_q - (\overline{V_1} \cup \ldots \cup \overline{V_{q-1}}).$$

familia de subconjuntos abiertos (que podemos suponer no vacíos) de X disjuntos dos a dos tal que $F = F_1 \cup \ldots \cup F_q$ es abierto y denso en X.

Consideramos $\{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_r = 1\}$ partición de $[0,1]$ tal que la distancia entre dos términos consecutivos es menor que $\frac{\delta}{4}$.

Entonces $\{F_i \times (t_{j-1}, t_j) \mid 1 \leq i \leq q, 1 \leq j \leq r\}$ es una familia de subconjuntos abiertos de $X \times [0,1]$ disjuntos dos a dos tal que $\operatorname{diam}(F_i \times (t_{j-1}, t_j)) < \frac{\delta}{2}$ para todo $i \in \{1, \ldots, q\}$ y todo $j \in \{1, \ldots, r\}$. Elegimos puntos $x_{ij} \in (F_i \times (t_{j-1}, t_j)) \cap C$, y definimos para todo $j \in \{1, \ldots, r\}$ una aplicación

$$f_j : F = F_1 \cup \ldots \cup F_q \longrightarrow Y$$

tal que $f_j(F_i) = H(x_{ij})$ para todo $i \in \{1, \ldots, q\}$. Entonces f_j es discreta para todo $j \in \{1, \ldots, r\}$ y $O(f_j, X) < \varepsilon$ pues si $\overline{F_i} \cap \overline{F_{i'}} \neq \emptyset$, se tiene que

$$\operatorname{diam}(F_i \times (t_{j-1}, t_j) \cup F_{i'} \times (t_{j-1}, t_j)) < \delta,$$

por tanto x_{ij} y $x_{i'j}$ están en un mismo elemento del recubrimiento $\{U_1, \ldots, U_p\}$ y

$$d(f_j(F_i), f_j(F_{i'})) = d(H(x_{ij}), H(x_{i'j})) < \varepsilon.$$

Por otra parte, si $\overline{F_i} \cap \overline{F_{i'}} \neq \emptyset$, entonces

$$\operatorname{diam}(F_i \times (t_{j-1}, t_j) \cup F_{i'} \times (t_j, t_{j+1})) < \delta,$$

por tanto x_{ij} y $x_{i',j+1}$ están en un mismo elemento del recubrimiento $\{U_1, \ldots, U_p\}$ y se tiene

$$d(f_j(F_i), f_{j+1}(F_{i'})) = d(H(x_{ij}), H(x_{i',j+1})) < \varepsilon.$$

Luego $\varrho(f_j, f_{j+1}, X) < \varepsilon$ para todo $j \in \{1, \ldots, r-1\}$. Finalmente $\varrho(f, f_1, X) < \varepsilon$ pues $O(f, X) < \varepsilon$, $O(f_1, X) < \varepsilon$ y si $\overline{f^{-1}(y)} \cap \overline{F_i} \neq \emptyset$, entonces existe $x \in f^{-1}(y)$ tal que $d((x,0), x_{i1}) < \delta$ y por tanto $(x,0)$ y x_{i1} están en un mismo elemento del recubrimiento $\{U_1, \ldots, U_p\}$ y se tiene

$$d(y, f_1(F_i)) = d(H(x,0), H(x_{i1})) < \varepsilon.$$

Y de forma análoga se ve que $\varrho(f_r, g, X) < \varepsilon$. Luego $\{f, f_1, \ldots, f_{n-1}, g\}$ es una ε-cadena de f a g.

El resto de la demostración es trivial.

1.2 LA CATEGORÍA DISCRETA SD DE LOS ESPACIOS MÉTRICOS COMPACTOS

Definición 1.2.1 Sean X e Y espacios métricos compactos. Una sucesión densa de X a Y es una sucesión de aplicaciones continuas $\{f_n : D_n \longrightarrow Y\}$ donde $\{D_n\}$ es una sucesión de subconjuntos abiertos y densos de X y para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $O(f_n, X) < \varepsilon$ y f_n es ε–homótopa a f_{n+1} para todo $n \geq n_0$.

Decimos que $\{f_n : D_n \longrightarrow Y\}$ y $\{g_n : E_n \longrightarrow Y\}$ sucesiones densas de X a Y son homótopas si para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que f_n y g_n son ε–homótopas para todo $n \geq n_0$.

Obsérvese que, por la proposición 1.1.2, dos aplicaciones definidas en subconjuntos abiertos y densos de X son homótopas si y solo si existe una ε–homótopía definida en un subconjunto abierto y denso de $X \times [0,1]$.

Observación 1.2.2 La intersección finita o numerable de conjuntos abiertos densos es también un conjunto denso (aunque en el segundo caso puede tener interior vacío).

Dem. Sea $\{D_n\}$ una sucesión de subconjuntos abiertos y densos de X. Entonces, dado G abierto de X, como D_1 es abierto y denso, entonces $D_1 \cap G$ es abierto y existen G_1 abierto y C_1 cerrado tales que $G_1 \subset C_1 \subset D_1 \cap G$. Como D_2 es abierto y denso, existen G_2 abierto y C_2 cerrado tales que $G_2 \subset C_2 \subset D_2 \cap G_1$. En general, como D_n es abierto y denso, existen G_n abierto y C_n cerrado tales que $G_n \subset C_n \subset D_n \cap G_{n-1}$. Así, existen $C_1 \supset C_2 \supset C_3 \supset \cdots$ compactos tales que $G \cap (\cap_{n=1}^{\infty} D_n) \supset \cap_{n=1}^{\infty} C_n \neq \emptyset$. Luego $\cap_{n=1}^{\infty} D_n$ es denso.

Para ver que puede tener interior vacío, consideramos para todo $q \in \mathbb{Q}$, $D_q = [0,1] - \{q\}$ tal que $\cap_{q \in \mathbb{Q}}([0,1] - \{q\}) = [0,1] - \mathbb{Q}$.

Observación 1.2.3 En la definición anterior, los conjuntos D_n se podrían haber tomado solamente densos y no necesariamente abiertos.

Definición 1.2.4 Sean X e Y espacios métricos compactos. Decimos que dos sucesiones densas $\{f_n : D_n \longrightarrow Y\}$ y $\{g_n : E_n \longrightarrow Y\}$ de X a Y son asintóticas si para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\varrho(f_n, g_n, X) < \varepsilon$, para todo $n \geq n_0$. Decimos que $\{f_n\}$ y $\{g_n\}$ son casi asintóticas si para todo $\varepsilon > 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, existen $n', n'' \geq n$ tal que $\varrho(f_{n'}, g_{n''}, X) < \varepsilon$.

Observación 1.2.5 Sean $\{f_n : D_n \longrightarrow Y\}$ y $\{g_n : E_n \longrightarrow Y\}$ sucesiones densas de X a Y. Entonces, como D_n y E_n son abiertos, para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $\{f_n\}$ y $\{g_n\}$ son asintóticas si y solo si para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(f_n|_{D_n \cap E_n}, g_n|_{D_n \cap E_n}) < \varepsilon$, para todo $n \geq n_0$. Analogamente, $\{f_n\}$ y $\{g_n\}$ son casi asintóticas si y solo si para todo $\varepsilon > 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $n', n'' \geq n$ tal que $d(f_{n'}|_{D_{n'} \cap E_{n''}}, g_{n''}|_{D_{n'} \cap E_{n''}}) < \varepsilon$.

Dem. Basta observar que si D y E son subconjuntos densos de X con intersección no vacía, y $f : D \longrightarrow Y$ y $g : E \longrightarrow Y$ son continuas, entonces $\varrho(f, g, X) \geq d(f|_{D \cap E}, g|_{D \cap E})$. Si además $D \cap E$ es denso en X, entonces

$$\varrho(f, g, X) \leq \max\{O(f, X), O(g, X), \min\{O(f, X), O(g, X)\} + d(f|_{D \cap E}, g|_{D \cap E})\}.$$

La primera desigualdad es inmediata. Para probar la segunda desigualdad consideramos $x \in X$ y $\delta > 0$. Existe U entorno de x en X tal que

$$\operatorname{diam}(f(U \cap D)) < O(f, X) + \delta \text{ y } \operatorname{diam}(g(U \cap E)) < O(g, X) + \delta.$$

Y si $x' \in U \cap D$ y $x'' \in U \cap E$, entonces existen $y', y'' \in D \cap E \cap U$ tales que $d(f(x'), f(y')) < \delta$ y $d(g(x''), g(y'')) < \delta$. Por tanto

$$\begin{aligned} d(f(x'), g(x'')) &\leq d(f(x'), f(y')) + d(f(y'), g(y')) + d(g(y'), g(y'')) \\ &\quad + d(g(y''), g(x'')) \\ &< d(f|_{D \cap E}, g|_{D \cap E}) + O(g, X) + 3\delta \end{aligned}$$

y también

$$\begin{aligned} d(f(x'), g(x'')) &\leq d(f(x'), f(y')) + d(f(y'), f(y'')) + d(f(y''), g(y'')) \\ &\quad + d(g(y''), g(x'')) \\ &< O(f, X) + d(f|_{D \cap E}, g|_{D \cap E}) + 3\delta. \end{aligned}$$

Luego

$$\varrho(f, g, X) \leq \max\{O(f, X), O(g, X), \min\{O(f, X), O(g, X)\} + d(f|_{D \cap E}, g|_{D \cap E})\}.$$

Proposición 1.2.6 *Sean X e Y espacios métricos compactos, y sean $\{f_n\}$ y $\{g_n\}$ sucesiones densas de X a Y casi asintóticas. Entonces $\{f_n\}$ y $\{g_n\}$ son homótopas.*

Dem. Sea $\varepsilon > 0$. Existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que f_n y f_{n+1} son ε–homótopas y también lo son g_n y g_{n+1}, para todo $n \geq n_0$. Existen $n_1, n_2 \geq n_0$ tales que

$$\varrho(f_{n_1}, g_{n_2}, X) < \varepsilon.$$

Entonces f_{n_1} y g_{n_2} son ε–homótopas y por tanto, f_n y g_n son ε–homótopas, para todo $n \geq n_0$.

Definición 1.2.7 Sean X e Y espacios métricos compactos. Una sucesión densa discreta de X a Y es una sucesión de aplicaciones continuas $\{f_n : D_n \longrightarrow Y\}$ tal que:

a) Para todo $n \in \mathbb{N}$, D_n es un subconjunto abierto y denso de X y $f_n(D_n)$ es finito.

b) Para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\varrho(f_n, f_{n+1}, X) < \varepsilon$, para todo $n \geq n_0$.

Obsérvese que las sucesiones densas discretas son un caso particular de las sucesiones densas.

Observación 1.2.8 En la condición a) se puede tomar $\{D_n\}$ tal que $D_{n+1} \subset D_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

La condición b) es equivalente a que para todo $\varepsilon > 0$ exista $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ se verifique:

b1) $O(f_n, X) < \varepsilon$.

b2) $d(f_n|_{D_n \cap D_{n+1}}, f_{n+1}|_{D_n \cap D_{n+1}}) < \varepsilon$.

Proposición 1.2.9 *Sean $\{f_n : D_n \longrightarrow Y\}$ y $\{g_n : E_n \longrightarrow Y\}$ sucesiones densas discretas de X a Y. Entonces $\{f_n\}$ y $\{g_n\}$ son homótopas si y solo si para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$, f_n y g_n son ε-encadenables (de tal forma que la cadena de f_n a g_n está formada por aplicaciones discretas definidas en subconjuntos abiertos y densos de X).*

Dem. Es consecuencia inmediata de la proposición 1.1.4.

Vamos a estudiar a continuación de que forma se pueden componer sucesiones densas discretas.

Definición 1.2.10 Sean X, Y, Z espacios métricos compactos, sean D y E subconjuntos densos de X e Y respectivamente y sean

$$f : D \longrightarrow \{y_1, \ldots, y_m\} \subset Y \text{ y } g : E \longrightarrow \{z_1, \ldots, z_n\} \subset Z$$

aplicaciones discretas.

Entonces, como $f(D)$ no tiene porque estar contenido en E, la composición de f y g no estará en general definida.

Diremos que $h : D \longrightarrow \{z_1, \ldots, z_n\} \subset Z$ es una composición de f y g si para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$, existe $j \in \{1, \ldots, n\}$, tal que $h(f^{-1}(y_i)) = z_j$ con $y_i \in \overline{g^{-1}(z_j)}$. Obsérvese que entonces todo el conjunto $f^{-1}(y_i)$ se va al mismo elemento z_j, y como cada uno de estos conjuntos es abierto en D, ésto garantiza que h es continua en D, y por tanto h es discreta.

Es inmediato que dadas $f : D \longrightarrow Y$ y $g : E \longrightarrow Z$ aplicaciones discretas, existe $h : D \longrightarrow Z$ composición de f y g. Basta tomar para cada $y \in f(D)$ (conjunto finito) un punto $z_y \in Z$ tal que $y \in \overline{g^{-1}(z_y)}$ y definir $h(f^{-1}(y)) = z_y$.

Definición 1.2.11 Sea $\{f_n : D_n \longrightarrow Y\}$ sucesión densa discreta de X a Y y sea $\{g_n : E_n \longrightarrow Z\}$ sucesión densa discreta de Y a Z. Decimos que una sucesión no acotada de números naturales (k_n) es una sucesión retardante asociada al par $(\{f_n\}, \{g_n\})$ si

i) $k_n \leq k_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$,

ii) $k_{n+1} - k_n \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$,

iii) existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\varrho(f_n, f_{n+1}, X) < e(g_m, g_{m+1}, Y)$, para todo $n \geq n_0$, para todo $m \leq k_n$.

Entonces se tiene que

$$O(f_n, X) \leq \varrho(f_n, f_{n+1}, X) < e(g_m, g_{m+1}, Y) \leq e(g_m, Y)$$

para todo $n \geq n_0$, para todo $m \leq k_n$.

En particular,

$$\varrho(f_n, f_{n+1}, X) < e(g_{k_n}, g_{k_n+1}, Y),$$

para todo $n \geq n_0$, y como (k_n) es creciente, se tiene que

$$\varrho(f_n, f_{n+1}, X) < e(g_{k_{n'}}, g_{k_{n'}+1}, Y),$$

para todo $n' \leq n$, para todo $n \geq n_0$.

Obsérvese que si (k_n) es una sucesión retardante asociada al par $(\{f_n\}, \{g_n\})$ y (k'_n) es una sucesión creciente divergente de números naturales verificando que $0 \leq k'_{n+1} - k'_n \leq 1$ y que $k'_n \leq k_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces (k'_n) es también una sucesión retardante asociada al par $(\{f_n\}, \{g_n\})$.

Proposición 1.2.12 *Dadas $\{f_n : D_n \longrightarrow Y\}$ sucesión densa discreta de X a Y y $\{g_n : E_n \longrightarrow Z\}$ sucesión densa discreta de Y a Z, existe (k_n) sucesión retardante asociada al par $(\{f_n\}, \{g_n\})$.*

Dem. Existe $m_1 < m_2 < m_3 < \ldots$, tal que

$$\varrho(f_n, f_{n+1}, X) < e(g_k, g_{k+1}, Y),$$

para todo $n \geq m_k$. Basta definir $k_n = k$ si $n \in [m_k, m_{k+1})$ y $k_n = 1$ si $n \in [1, m_1)$.

Proposición 1.2.13 *Sea $\{f_n : D_n \longrightarrow Y\}$ sucesión densa discreta de X a Y y sea $\{g_n : E_n \longrightarrow Z\}$ sucesión densa discreta de Y a Z. Sea (k_n) sucesión retardante asociada al par $(\{f_n\}, \{g_n\})$. Sea $\{h_n : D_n \longrightarrow Z\}$ tal que h_n es una composición de f_n y g_{k_n} para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces $\{h_n\}$ es una sucesión densa discreta y la clase $[\{h_n\}]$ no depende de los representantes de las clases $[\{f_n\}]$ y $[\{g_n\}]$, de las composiciones escogidas, ni de la sucesión retardante (k_n) elegida.*

Dem. Como (k_n) es una sucesión retardante asociada al par $(\{f_n\}, \{g_n\})$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\varrho(f_n, f_{n+1}, X) < e(g_m, g_{m+1}, Y),$$

para todo $n \geq n_0$ y todo $m \leq k_n$. Sea $\{h_n : D_n \longrightarrow Z\}$ tal que h_n es una composición de f_n y g_{k_n} para todo $n \in \mathbb{N}$. Vamos a ver que para todo $n \geq n_0$, se tiene

$$\varrho(h_n, h_{n+1}, X) \leq \varrho(g_{k_n}, g_{k_{n+1}}, Y) \leq \varrho(g_{k_n}, g_{k_n+1}, Y).$$

Si $n \geq n_0$ y $k_n = k_{n+1}$, se tiene que h_n es una composición de f_n y g_{k_n}, y h_{n+1} es una composición de f_{n+1} y g_{k_n}, con

$$\varrho(f_n, f_{n+1}, X) < e(g_{k_n}, g_{k_n+1}, Y) \leq e(g_{k_n}, Y) = e(g_{k_n}, g_{k_n}, Y) = e(g_{k_n}, g_{k_{n+1}}, Y).$$

Por otra parte, si $n \geq n_0$ y $k_{n+1} = k_n + 1$, se tiene que h_n es una composición de f_n y g_{k_n}, y h_{n+1} es una composición de f_{n+1} y $g_{k_{n+1}}$, con

$$\varrho(f_n, f_{n+1}, X) < e(g_{k_n}, g_{k_n+1}, Y) = e(g_{k_n}, g_{k_{n+1}}, Y).$$

Vamos a ver que en el primer caso se tiene

$$\varrho(h_n, h_{n+1}, X) \leq \varrho(g_{k_n}, g_{k_n}, Y) = \varrho(g_{k_n}, g_{k_{n+1}}, Y) \leq \varrho(g_{k_n}, g_{k_n+1}, Y),$$

y en el segundo

$$\varrho(h_n, h_{n+1}, X) \leq \varrho(g_{k_n}, g_{k_{n+1}}, Y) = \varrho(g_{k_n}, g_{k_n+1}, Y),$$

Para ello basta ver que dadas $f : D \longrightarrow Y$, $f' : D' \longrightarrow Y$, $g : E \longrightarrow Z$ y $g' : E' \longrightarrow Z$ aplicaciones discretas tales que $\varrho(f, f', X) < e(g, g', Y)$ y dadas $h : D \longrightarrow Z$ composición de f y g, y $h' : D' \longrightarrow Z$ composición de f' y g', entonces

$$\varrho(h, h', X) \leq \varrho(g, g', Y).$$

Consideramos un punto $x \in X$. Como $\varrho(f, f', X) < e(g, g', Y)$, existe U^x entorno de x en X tal que si $x', x'' \in U^x \cap D$ y $x''', x'''' \in U^x \cap D'$ se tiene que

$$d(f(x'), f(x'')) < e(g, g', Y), \ d(f'(x'''), f'(x'''')) < e(g, g', Y),$$

$$d(f(x'), f'(x''')) < e(g, g', Y).$$

Si $h(x') = z'$ con $f(x') \in \overline{g^{-1}(z')}$ y $h(x'') = z''$ con $f(x'') \in \overline{g^{-1}(z'')}$, entonces

$$d(g^{-1}(z'), g^{-1}(z'')) = d(\overline{g^{-1}(z')}, \overline{g^{-1}(z'')}) \leq d(f(x'), f(x'')) < e(g, g', Y),$$

y por la definición de $e(g, g', Y)$ se tiene que

$$d(g^{-1}(z'), g^{-1}(z'')) = 0.$$

Luego $\overline{g^{-1}(z')} \cap \overline{g^{-1}(z'')} \neq \emptyset$ y por tanto

$$d(h(x'), h(x'')) = d(z', z'') \leq O(g, Y) \leq \varrho(g, g', Y).$$

Analogamente, si $h'(x''') = z'''$ con $f'(x''') \in \overline{(g')^{-1}(z''')}$ y $h'(x'''') = z''''$ con $f'(x'''') \in \overline{(g')^{-1}(z'''')}$, entonces

$$\begin{aligned} d((g')^{-1}(z'''), (g')^{-1}(z'''')) &= d(\overline{(g')^{-1}(z''')}, \overline{(g')^{-1}(z'''')}) \leq d(f'(x'''), f'(x'''')) \\ &< e(g, g', Y), \end{aligned}$$

y por la definición de $e(g, g', Y)$ se tiene que

$$d((g')^{-1}(z'''), (g')^{-1}(z'''')) = 0.$$

Luego $\overline{(g')^{-1}(z''')} \cap \overline{(g')^{-1}(z'''')} \neq \emptyset$ y por tanto

$$d(h'(x'''), h'(x'''')) = d(z''', z'''') \leq O(g', Y) \leq \varrho(g, g', Y).$$

Finalmente se tiene que si $h(x') = z'$ con $f(x') \in \overline{g^{-1}(z')}$ y $h'(x''') = z'''$ con $f'(x''') \in \overline{(g')^{-1}(z''')}$, entonces

$$d(g^{-1}(z'), (g')^{-1}(z''')) = d(\overline{g^{-1}(z')}, \overline{(g')^{-1}(z''')}) \leq d(f(x'), f'(x''')) < e(g, g', Y),$$

y por la definición de $e(g, g', Y)$ se tiene que

$$d(g^{-1}(z'), (g')^{-1}(z''')) = 0.$$

Luego $\overline{g^{-1}(z')} \cap \overline{(g')^{-1}(z''')} \neq \emptyset$ y por tanto

$$d(h(x'), h'(x''')) = d(z', z''') \leq \varrho(g, g', Y).$$

Hemos probado que para todo $x \in X$ existe U^x entorno de x en X tal que

$$\operatorname{diam}(h(U^x \cap D) \cup h'(U^x \cap D')) \leq \varrho(g, g', Y).$$

Por tanto $\varrho(h, h', X) \leq \varrho(g, g', Y)$.

Así, para todo $n \geq n_0$, se tiene

$$\varrho(h_n, h_{n+1}, X) \leq \varrho(g_{k_n}, g_{k_{n+1}}, Y) \leq \varrho(g_{k_n}, g_{k_n+1}, Y).$$

Por tanto, $\{h_n\}$ es una sucesión densa discreta por serlo $\{g_n\}$.

Vamos a ver ahora que su clase es independiente de las elecciones hechas. Sea $\{f'_n : D'_n \longrightarrow Y\}$ sucesión densa discreta de X a Y homótopa a $\{f_n\}$ y sea $\{g'_n : E'_n \longrightarrow Z\}$ sucesión densa discreta de Y a Z homótopa a $\{g_n\}$. Sea (k'_n) una sucesión retardante asociada al par $(\{f'_n\}, \{g'_n\})$ y sea $n'_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\varrho(f'_n, f'_{n+1}, X) < e(g'_m, g'_{m+1}, Y),$$

para todo $n \geq n'_0$ y todo $m \leq k'_n$. Sea $\{h'_n : D'_n \longrightarrow Z\}$ tal que h'_n es una composición de f'_n y $g'_{k'_n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces $\{h'_n\}$ es sucesión densa discreta y vamos a ver que $\{h_n\}$ y $\{h'_n\}$ son homótopas.

Sea $\varepsilon > 0$, existe $n_1 \geq \max\{n_0, n'_0\}$ tal que

$$\varrho(g_{k_n}, g_{k_{n+1}}, Y) < \varepsilon, \varrho(g'_{k'_n}, g'_{k'_{n+1}}, Y) < \varepsilon,$$

para todo $n \geq n_1$. Entonces $\varrho(h_n, h_{n+1}, X) < \varepsilon, \varrho(h'_n, h'_{n+1}, X) < \varepsilon$, para todo $n \geq n_1$.

Como $\{g_n\}$ y $\{g'_n\}$ son homótopas, existe $n_2 \geq n_1$ tal que $g_{k_{n_2}}$ y $g'_{k'_{n_2}}$ son ε–encadenables, esto es, existen

$$g''_0 = g_{k_{n_2}} : E''_0 \longrightarrow Z, g''_1 : E''_1 \longrightarrow Z, \ldots, g''_{r-1} : E''_{r-1} \longrightarrow Z, g''_r = g'_{k'_{n_2}} : E''_r \longrightarrow Z,$$

aplicaciones discretas tales que

$$\varrho(g''_0, g''_1, Y) < \varepsilon, \varrho(g''_1, g''_2, Y) < \varepsilon, \ldots, \varrho(g''_{r-1}, g''_r, Y) < \varepsilon.$$

Sea $e = \min\{e(g''_0, g''_1, Y), e(g''_1, g''_2, Y), \ldots, e(g''_{r-1}, g''_r, Y)\}$. Existe $n_3 > n_2$ tal que f_{n_3} y f'_{n_3} son e–encadenables, esto es, existen

$$f''_0 = f_{n_3} : D''_0 \longrightarrow Z, f''_1 : D''_1 \longrightarrow Z, \ldots, f''_{r-1} : D''_{r-1} \longrightarrow Z, f''_r = f'_{n_3} : D''_r \longrightarrow Z,$$

aplicaciones discretas tales que

$$\varrho(f''_0, f''_1, X) < e, \varrho(f''_1, f''_2, X) < e, \ldots, \varrho(f''_{r-1}, f''_r, X) < e.$$

(Podemos suponer, por simplicidad, que esta cadena y la anterior tienen el mismo número de funciones. Si no fuera así, repetimos alguna función en la cadena menor).

Vamos a ver que h_{n_2} y h'_{n_2} son ε–encadenables. Como

$$\varrho(f_n, f_{n+1}, X) < e(g_m, g_{m+1}, Y) < e(g_m),$$

para todo $n \geq n_0$ y todo $m \leq k_n$, se tiene en particular, por ser $n_2 \geq n_0$ y ser (k_n) creciente, que

$$\varrho(f_{n_2}, f_{n_2+1}, X) < e(g_{k_{n_2}}, Y), \varrho(f_{n_2+1}, f_{n_2+2}, X) < e(g_{k_{n_2}}, Y), \ldots$$

$$\ldots, \varrho(f_{n_3-1}, f_{n_3}, X) < e(g_{k_{n_2}}, Y),$$

y entonces, si consideramos, para todo $l \in \{n_2, \ldots, n_3\}$, h''_l composición de f_l y $g_{k_{n_2}}$, donde tomamos $h''_{n_2} = h_{n_2}$, se tiene que

$$\varrho(h''_{n_2}, h''_{n_2+1}, X) \leq O(g_{k_{n_2}}, Y) < \varepsilon, \varrho(h''_{n_2+1}, h''_{n_2+2}, X) \leq O(g_{k_{n_2}}, Y) < \varepsilon, \ldots$$

$$\ldots, \varrho(h''_{n_3-1}, h''_{n_3}, X) \leq O(g_{k_{n_2}}, Y) < \varepsilon.$$

Por tanto, h_{n_2} y h''_{n_3} son ε–encadenables. Por otra parte

$$\varrho(f''_0, f''_1, X) < e < e(g''_0, g''_1, Y), \varrho(f''_1, f''_2, X) < e < e(g''_1, g''_2, Y), \ldots$$

$$\ldots, \varrho(f''_{r-1}, f''_r, X) < e < e(g''_{r-1}, g''_r, Y),$$

luego si consideramos, para todo $l \in \{0, \ldots, r\}$, h'''_l composición de f''_l y g''_l, con $h'''_0 = h''_{n_3}$ (recordemos que $f''_0 = f_{n_3}$, $f''_r = f'_{n_3}$, $g''_0 = g_{k_{n_2}}$ y $g''_r = g'_{k'_{n_2}}$), se tiene que

$$\varrho(h'''_0, h'''_1, X) \leq \varrho(g''_0, g''_1, Y) < \varepsilon, \varrho(h'''_1, h'''_2, X) \leq \varrho(g''_1, g''_2, Y) < \varepsilon, \ldots$$

$$\ldots, \varrho(h'''_{r-1}, h'''_r, X) \leq \varrho(g''_{r-1}, g''_r, Y) < \varepsilon.$$

Luego h''_{n_3} y h'''_r son ε–encadenables. Finalmente, como

$$\varrho(f'_n, f'_{n+1}, X) < e(g'_m, g'_{m+1}, Y) < e(g'_m),$$

para todo $n \geq n'_0$ y todo $m \leq k'_n$, se tiene en particular, por ser $n_2 \geq n'_0$ y ser (k'_n) creciente, que

$$\varrho(f'_{n_2}, f'_{n_2+1}, X) < e(g'_{k'_{n_2}}, Y), \varrho(f'_{n_2+1}, f'_{n_2+2}, X) < e(g'_{k'_{n_2}}, Y), \ldots$$

$$\ldots, \varrho(f'_{n_3-1}, f'_{n_3}, X) < e(g'_{k'_{n_2}}, Y),$$

y entonces, si consideramos, para todo $l \in \{n_2, \ldots, n_3\}$, h''''_l composición de f'_l y $g'_{k'_{n_2}}$, donde tomamos $h''''_{n_3} = h'''_r$ y $h''''_{n_2} = h'_{n_2}$, se tiene que

$$\varrho(h''''_{n_2}, h''''_{n_2+1}, X) \leq O(g'_{k'_{n_2}}, Y) < \varepsilon, \varrho(h''''_{n_2+1}, h''''_{n_2+2}, X) \leq O(g'_{k'_{n_2}}, Y) < \varepsilon, \ldots$$

$$\ldots, \varrho(h''''_{n_3-1}, h''''_{n_3}, X) \leq O(g'_{k'_{n_2}}, Y) < \varepsilon.$$

Por tanto, h'''_r y h'_{n_2} son ε–encadenables.

Así, una ε–cadena de h_{n_2} a h'_{n_2} viene dada por las funciones

$$\{h_{n_2} = h''_{n_2}, h''_{n_2+1}, \ldots, h''_{n_3} = h'''_0, h'''_1, \ldots, h'''_r = h''''_{n_3}, h''''_{n_3-1}, \ldots, h''''_{n_2} = h'_{n_2}\}.$$

Finalmente, como $\varrho(h_n, h_{n+1}, X) < \varepsilon$ y $\varrho(h'_n, h'_{n+1}, X) < \varepsilon$ para todo $n \geq n_2$, se tiene que h_n y h'_n son ε–encadenables, para todo $n \geq n_2$.

Corolario 1.2.14 *Dada $\{f_n : D_n \longrightarrow Y\}$ sucesión densa discreta de X a Y, y dada $\{g_n : E_n \longrightarrow Z\}$ sucesión densa discreta de Y a Z, podemos definir la composición de clases como $[\{g_n\}][\{f_n\}] = [\{h_n\}]$ donde $\{h_n : D_n \longrightarrow Z\}$ es una sucesión densa discreta de X a Z tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, h_n es una composición de f_n y g_{k_n}, con (k_n) sucesión retardante asociada al par $(\{f_n\}, \{g_n\})$.*

Observación 1.2.15 Dadas $\{f_n : D_n \longrightarrow Y\}$ sucesión densa discreta de X a Y y $\{g_n : E_n \longrightarrow Z\}$ sucesión densa discreta de Y a Z, la composición de $\{f_n\}$ y $\{g_n\}$ no está definida de forma única (lo está salvo homotopía). Sin embargo sí se puede escoger (k_n) sucesión retardante asociada al par $(\{f_n\}, \{g_n\})$ de forma unívoca por la siguiente construcción. Sean

$$\begin{aligned}
m_1 &= \min\{n \in \mathbb{N} \mid \varrho(f_m, f_{m+1}, X) < e(g_1, g_2, Y) \text{ para todo } m \geq n\}, \\
m_2 &= \min\{n > m_1 \mid \varrho(f_m, f_{m+1}, X) < e(g_2, g_3, Y) \text{ para todo } m \geq n\}, \\
m_3 &= \min\{n > m_2 \mid \varrho(f_m, f_{m+1}, X) < e(g_3, g_4, Y) \text{ para todo } m \geq n\}, \ldots
\end{aligned}$$

y así sucesivamente. Definimos $k_n = k$ si $n \in [m_k, m_{k+1})$ y $k_n = 1$ si $n \in [1, m_1)$. Entonces (k_n) es una sucesión retardante asociada al par $(\{f_n\}, \{g_n\})$ definida unívocamente. Definimos $\{h_n : D_n \longrightarrow Z\}$ sucesión densa discreta de X a Z

tal que h_n es una composición de f_n y g_{k_n}. Entonces $\{h_n\}$ está definida salvo asintoticidad, ésto es, si $\{h'_n : D_n \longrightarrow Z\}$ es otra sucesión densa discreta de X a Z tal que h'_n es una composición de f_n y g_{k_n}, entonces $\{h_n\}$ y $\{h'_n\}$ son asintóticas.[4]

Teorema 1.2.16 *Si consideramos la clase de los espacios métricos compactos y las clases de homotopía de sucesiones densas discretas entre ellos con la composición definida anteriormente obtenemos una categoría que llamaremos SD.*

Dem. Vamos a ver primero cual es el morfismo identidad de la categoría. Sea X espacio métrico compacto. Vamos a definir $\{r_n : R_n \longrightarrow X\}$ sucesión densa discreta tal que si Y es espacio métrico compacto y $\{f_n : D_n \longrightarrow Y\}$ es sucesión densa discreta de X a Y y $\{g_n : E_n \longrightarrow X\}$ es sucesión densa discreta de Y a X, se tiene que

$$[\{f_n\}][\{r_n\}] = [\{f_n\}], [\{r_n\}][\{g_n\}] = [\{g_n\}].$$

Sea $\{\varepsilon_n\}$ sucesión nula (ésto es, positiva, decreciente y convergente a 0). Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $\{R_{n1}, \ldots, R_{ns_n}\}$ familia de subconjuntos disjuntos abiertos en X tal que $R_n = R_{n1} \cup \ldots \cup R_{ns_n}$ es un subconjunto abierto y denso de X, y tal que $\operatorname{diam}(R_{ni}) < \varepsilon_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, para todo $i \in \{1, \ldots, s_n\}$. Escogemos, para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $i \in \{1, \ldots, s_n\}$ un punto $r_{ni} \in R_{ni}$ y definimos

$$r_n : R_n \longrightarrow X$$

tal que $r_n(R_{ni}) = r_{ni}$. Evidentemente r_n es aplicación discreta para todo $n \in \mathbb{N}$, y para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $2\varepsilon_{n_0} < \varepsilon$. Entonces, para todo $n \geq n_0$ se verifica que $\varrho(r_n, r_{n+1}, X) < 2\varepsilon_n < \varepsilon$ y $d(x, r_n(x)) < \varepsilon_n < \varepsilon$ para todo $x \in R_n$. Por tanto,

$$\{r_n : R_n = R_{n1} \cup \ldots \cup R_{ns_n} \longrightarrow X\}$$

es una sucesión densa discreta y vamos a ver que su clase es la clase identidad.

[4]En la demostración de la proposición anterior se ve que si h_n y h'_n son dos composiciones de f_n y g_{k_n} con $O(f_n, X) < e(g_{k_n}, Y)$, entonces $\varrho(h_n, h'_n, X) \leq O(g_{k_n}, Y)$.

Sea $\{f_n : D_n \longrightarrow Y\}$ una sucesión densa discreta de X en un espacio métrico compacto Y. Tenemos que comprobar que $[\{f_n\}][\{r_n\}] = [\{f_n\}]$. Sea (k_n) una sucesión retardante asociada al par $(\{r_n\}, \{f_n\})$ que por tanto verifica que

$$\varrho(r_n, r_{n+1}, X) < e(f_{k_n}, f_{k_n+1}, Y)$$

para todo $n \geq n_0'$ para cierto $n_0' \in \mathbb{N}$. Podemos suponer que (k_n) verifica también que

$$d(r_n(x), x) < e(f_{k_n}, X),$$

para todo $x \in R_n$, para todo $n \geq n_0$ para cierto $n_0 \geq n_0'$. Para ver ésto consideramos $m_1 < m_2 < m_3 < \ldots$, tal que $d(r_n(x), x) < e(f_k, X)$, para todo $n \geq m_k$ y definimos $k_n' = k$ si $n \in [m_k, m_{k+1})$ y $k_n' = 1$ si $n \in [1, m_1)$. Consideraríamos entonces (k_n'') sucesión creciente divergente de números naturales tal que $0 \leq k_{n+1}'' - k_n'' \leq 1$ y tal que $k_n'' \leq \min\{k_n, k_n'\}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces (k_n'') es también una sucesión retardante asociada al par $(\{r_n\}, \{f_n\})$ con las condiciones deseadas.

Entonces $[\{f_n\}][\{r_n\}] = [\{h_n\}]$ donde $\{h_n : R_n \longrightarrow Y\}$ es una sucesión densa discreta de X a Y tal que h_n es una composición de r_n y f_{k_n} para todo $n \in \mathbb{N}$. Vamos a ver que $[\{h_n\}] = [\{f_n\}]$.

Sea $\varepsilon > 0$ y sea $n_1 \geq n_0$ tal que $O(f_{k_n}, X) < \varepsilon$, para todo $n \geq n_1$.

Sea $x \in R_n \cap D_{k_n}$, con $n \geq n_1$. Entonces $h_n(x) = y$ con $r_n(x) \in \overline{f_{k_n}^{-1}(y)}$. Por otra parte $f_{k_n}(x) = y'$ con $x \in f_{k_n}^{-1}(y')$. Pero $d(x, r_n(x)) < e(f_{k_n}, Y)$. Entonces

$$d\left(\overline{f_{k_n}^{-1}(y)}, \overline{f_{k_n}^{-1}(y')}\right) < e(f_{k_n}, X)$$

y por tanto $\overline{f_{k_n}^{-1}(y)} \cap \overline{f_{k_n}^{-1}(y')} \neq \emptyset$. Luego

$$d(h_n(x), f_{k_n}(x)) = d(y, y') \leq O(f_{k_n}, X) < \varepsilon.$$

Por tanto, para todo $\varepsilon > 0$ y para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $n' \geq n$ con $k_{n'} \geq n$ tal que

$$d(h_{n'}|_{R_{n'} \cap D_{k_{n'}}}, f_{k_{n'}}|_{R_{n'} \cap D_{k_{n'}}}) < \varepsilon.$$

Luego $\{h_n\}$ y $\{f_n\}$ son casi asintóticas y por tanto homótopas.

Por otra parte, si $\{g_n : E_n \longrightarrow X\}$ es una sucesión densa discreta de Y a X, vamos a ver que $[\{r_n\}][\{g_n\}] = [\{g_n\}]$.

Sea (k_n) una sucesión retardante asociada al par $(\{g_n\}, \{r_n\})$, que por tanto verifica que $\varrho(g_n, g_{n+1}, X) < e(r_{k_n}, r_{k_n+1}, Y)$ para todo $n \geq n_0$ para cierto $n_0 \in \mathbb{N}$. Entonces $[\{r_n\}][\{g_n\}] = [\{h_n\}]$ donde $\{h_n : E_n \longrightarrow X\}$ es una sucesión densa discreta de Y a X tal que h_n es una composición de g_n y r_{k_n} para todo $n \in \mathbb{N}$. Vamos a ver que $[\{h_n\}] = [\{g_n\}]$.

Sea $\varepsilon > 0$ y sea $n_1 \geq n_0$ tal que $d(r_{k_n}(x), x) < \frac{\varepsilon}{3}$, para todo $x \in R_{k_n}$, para todo $n \geq n_1$. Sea $x \in E_n$ con $n \geq n_1$. Entonces $h_n(x) = y$ con $g_n(x) \in \overline{r_{k_n}^{-1}(y)}$, y ésto implica que

$$d(g_n(x), h_n(x)) = d(g_n(x), y) \leq \operatorname{diam}(\overline{r_{k_n}^{-1}(y)}).$$

Por otra parte, para todo $x \in r_{k_n}^{-1}(y)$ se tiene que $d(x, y) = d(x, r_{k_n}(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$. Luego $\operatorname{diam}(\overline{r_{k_n}^{-1}(y)}) \leq \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$. Por tanto, $d(g_n(x), h_n(x)) < \varepsilon$. Luego para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_1$ se tiene $d(g_n, h_n) < \varepsilon$. Luego $\{g_n\}$ y $\{h_n\}$ son asintóticas y por tanto homótopas.

Para probar que SD es una categoría solamente nos queda ver que si X, Y, Z y W son espacios métricos compactos, y $\{f_n : D_n \longrightarrow Y\}$, $\{g_n : E_n \longrightarrow Z\}$ y $\{h_n : F_n \longrightarrow W\}$ son sucesiones densas discretas de X a Y, de Y a Z y de Z a W, respectivamente, entonces

$$[\{h_n\}]([\{g_n\}][\{f_n\}]) = ([\{h_n\}][\{g_n\}])[\{f_n\}].$$

Sea (k_n) una sucesión retardante asociada al par $(\{g_n\}, \{h_n\})$ verificando que

$$\varrho(g_n, g_{n+1}, Y) < e(h_{k_n}, h_{k_n+1}, Z)$$

para todo $n \geq n_0$, para cierto $n_0 \in \mathbb{N}$. Sea $\{s_n : E_n \longrightarrow W\}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, s_n es una composición de g_n y h_{k_n}. Sea (k'_n) una sucesión retardante asociada simultaneamente a los pares $(\{f_n\}, \{g_n\})$ y $(\{f_n\}, \{s_n\})$, ésto es, se verifica que

$$\varrho(f_n, f_{n+1}, X) < e(g_{k'_n}, g_{k'_n+1}, Y), \varrho(f_n, f_{n+1}, X) < e(s_{k'_n}, s_{k'_n+1}, Y)$$

para todo $n \geq n'_0$, para cierto $n'_0 \in \mathbb{N}$. Entonces

$$([\{h_n\}][\{g_n\}])[\{f_n\}] = [\{t_n\}],$$

donde $\{t_n : D_n \longrightarrow W\}$ es una sucesión densa discreta tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, t_n es una composición de f_n y $s_{k'_n}$, donde $s_{k'_n}$ es una composición de $g_{k'_n}$ y $h_{k_{k'_n}}$.

Sea $\{r_n : D_n \longrightarrow Z\}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, r_n es una composición de f_n y $g_{k'_n}$. Como

$$\varrho(f_n, f_{n+1}, X) < e(g_{k'_n}, g_{k'_n+1}, Y),$$

para todo $n \geq n'_0$, entonces

$$\varrho(r_n, r_{n+1}, X) \leq \varrho(g_{k'_n}, g_{k'_n+1}, Y),$$

y por tanto

$$\varrho(r_n, r_{n+1}, X) \leq \varrho(g_{k'_n}, g_{k'_n+1}, Y) < e(h_{k_{k'_n}}, h_{k_{k'_n}+1}, Z),$$

si $n \geq n'_0$ y $k'_n \geq n_0$. Entonces, como evidentemente $\{k_{k'_n}\}$ es creciente y recorre todos los números naturales, se tiene que $\{k_{k'_n}\}$ es una sucesión retardante asociada al par $(\{r_n\}, \{h_n\})$. Luego

$$[\{h_n\}]([\{g_n\}][\{f_n\}]) = [\{t'_n\}],$$

donde $\{t'_n : D_n \longrightarrow W\}$ es una sucesión densa discreta tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, t'_n es una composición de r_n y $h_{k_{k'_n}}$, donde r_n es una composición de f_n y $g_{k'_n}$.

Vamos a ver que se verifica que

$$\varrho(t_n, t'_n, X) < O(h_{k_{k'_n}}, Z)$$

para todo $n \geq n'_0$ con $k'_n \geq n_0$. Entonces tendremos que $\{t_n\}$ y $\{t'_n\}$ son asintóticas, y por tanto

$$[\{h_n\}]([\{g_n\}][\{f_n\}]) = ([\{h_n\}][\{g_n\}])[\{f_n\}].$$

Para ello vamos a ver que, en general, dadas

$$f : D \longrightarrow \{y_1, \ldots, y_m\} \subset Y, g : E \longrightarrow \{z_1, \ldots, z_n\} \subset Z,$$

$$h : F \longrightarrow \{w_1, \dots, w_p\} \subset W,$$

aplicaciones discretas tales que $O(f, X) < e(g, Y)$ y $O(g, Y) < e(h, Z)$, y dadas $r : D \longrightarrow \{z_1, \dots, z_n\} \subset Z$ composición de f y g, $s : E \longrightarrow \{w_1, \dots, w_p\} \subset W$ composición de g y h, $t : D \longrightarrow \{w_1, \dots, w_p\} \subset W$ composición de f y s, y $t' : D \longrightarrow \{w_1, \dots, w_p\} \subset W$ composición de r y h, entonces se tiene que

$$\varrho(t, t', X) \leq O(h, Z).$$

Como $s : E \longrightarrow \{w_1, \dots, w_p\} \subset W$ es una composición de g y h, existen

$$\{k_1, \dots, k_n\} \subset \{1, \dots, p\}$$

(posiblemente repetidos) tales que $s(g^{-1}(z_j)) = w_{k_j}$, con $z_j \in \overline{h^{-1}(w_{k_j})}$, para todo $j \in \{1, \dots, n\}$. Obsérvese que $g^{-1}(z_j) \subset s^{-1}(w_{k_j})$ para todo $j \in \{1, \dots, n\}$, y que $s^{-1}(w_k) = \cup\{g^{-1}(z_j) \mid k_j = k\}$ para todo $k \in \{1, \dots, p\}$.

Como $t : D \longrightarrow \{w_1, \dots, w_p\} \subset W$ es una composición de f y s, existe

$$\{l_1, \dots, l_m\} \subset \{1, \dots, p\}$$

(posiblemente repetidos) tal que $t(f^{-1}(y_i)) = w_{l_i}$, con $y_i \in \overline{s^{-1}(w_{l_i})}$.

Entonces para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, como $y_i \in \overline{s^{-1}(w_{l_i})}$, existe $j_i \in \{1, \dots, n\}$, tal que $y_i \in \overline{g^{-1}(z_{j_i})}$, con $k_{j_i} = l_i$. Por tanto la aplicación

$$r' : D \longrightarrow \{z_1, \dots, z_n\} \subset Z$$

dada por $r'(f^{-1}(y_i)) = z_{j_i}$ es una composición de f y g. Además, t es una composición de r' y h pues si $(r')^{-1}(z_j) \neq \emptyset$ se tiene que

$$(r')^{-1}(z_j) = \cup\{f^{-1}(y_i) \mid j_i = j\},$$

donde para todo $i \in \{1, \dots, m\}$ tal que $j_i = j$ se tiene que

$$t(f^{-1}(y_i)) = w_{l_i} = w_{k_{j_i}} = w_{k_j}.$$

Luego $t((r')^{-1}(z_j)) = w_{k_j}$ con $z_j \in \overline{h^{-1}(w_{k_j})}$.

Hemos probado que dada $s : E \longrightarrow \{w_1, \dots, w_p\} \subset W$ composición de g y h y dada $t : D \longrightarrow \{w_1, \dots, w_p\} \subset W$ composición de f y s existe una composición

$r' : D \longrightarrow \{z_1, \ldots, z_n\} \subset Z$ de f y g tal que $t : D \longrightarrow \{w_1, \ldots, w_p\} \subset W$ es una composición de r' y h.

Supongamos ahora que $O(f, X) < e(g, Y)$. Sea $r : D \longrightarrow \{z_1, \ldots, z_n\} \subset Z$ una composición cualquiera de f y g. Vimos en la demostración de la proposición anterior, que si h es una composición de f y g, y h' es una composición de f' y g' con $\varrho(f, f', X) < e(g, g', Y)$, entonces

$$\varrho(h, h', X) \leq \varrho(g, g', Y).$$

En este caso tenemos $r, r' : D \longrightarrow \{z_1, \ldots, z_n\} \subset Z$ composiciones de f y g con $\varrho(f, f, X) < e(g, g, Y)$. Entonces $\varrho(r, r', X) \leq \varrho(g, g, Y) = O(g, Y)$. Si además $O(g, Y) < e(h, Z)$, tenemos $r, r' : D \longrightarrow \{z_1, \ldots, z_n\} \subset Z$ tales que

$$\varrho(r, r', X) \leq O(g, Y) < e(h, Z).$$

Entonces, si $t' : D \longrightarrow \{w_1, \ldots, w_p\} \subset W$ es una composición de r y h se tiene que

$$\varrho(t, t', X) \leq O(h, Z).$$

Volviendo a la demostración del teorema, como

$$O(f_n, X) < e(g_{k'_n}, Y), O(g_{k'_n}, Y) < e(h_{k_{k'_n}}, Z),$$

para todo $n \geq n'_0$ tal que $k'_n \geq n_0$, entonces

$$\varrho(t_n, t'_n, X) \leq O(h_{k_{k'_n}}, Z),$$

para todo $n \geq n'_0$ tal que $k'_n \geq n_0$. Luego $\{t_n\}$ y $\{t'_n\}$ son asintóticas, y por tanto,

$$[\{h_n\}]([\{g_n\}][\{f_n\}]) = ([\{h_n\}][\{g_n\}])[\{f_n\}].$$

Esto concluye la demostración del teorema.

1.3 SD ES ISOMORFA A LA CATEGORÍA DE LA FORMA DE BORSUK

A continuación recordamos brevemente algunas nociones básicas de la teoría de la forma introducidas por K.Borsuk en [12].

Definición 1.3.1 Sean X e Y espacios métricos compactos con Y contenido en el cubo de Hilbert Q. Una sucesión aproximativa de X a Y es una sucesión de aplicaciones continuas $\{f_n : X \longrightarrow Q\}$ tal que para todo entorno V de Y en Q existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que f_n y f_{n+1} son homótopas en V para todo $n \geq n_0$.

Dos sucesiones aproximativas $\{f_n : X \longrightarrow Q\}$ y $\{g_n : X \longrightarrow Q\}$ de X a Y son homótopas si para todo entorno V de Y en Q existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que f_n y g_n son homótopas en V, para todo $n \geq n_0$.

Denotamos por $[\{f_n\}]$ a la clase de homotopía formada por todas las sucesiones aproximativas homótopas a $\{f_n\}$.

Dados X, Y, Z espacios métricos compactos, dadas $\{f_n : X \longrightarrow Q\}$ sucesión aproximativa de X a Y y $\{g_n : Y \longrightarrow Q\}$ sucesión aproximativa de Y a Z, se define la composición $[\{g_n\}][\{f_n\}]$ como la clase $[\{g'_n f_n\}]$ donde $\{g'_n : Q \longrightarrow Q\}$ es una aplicación fundamental de X a Y tal que cada g'_n es extensión de g_n.

Dadas $\{f_n : X \longrightarrow Q\}$ y $\{g_n : X \longrightarrow Q\}$ sucesiones aproximativas de X a Y, decimos que $\{f_n\}$ y $\{g_n\}$ son asintóticas si para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(f_n, g_n) < \varepsilon$, para todo $n \geq n_0$. Decimos que $\{f_n\}$ y $\{g_n\}$ son casi asintóticas si para todo $\varepsilon > 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, existen $n', n'' \geq n$ tales que $d(f_{n'}, g_{n''}) < \varepsilon$.

Teorema 1.3.2 (Borsuk [12]) *Si consideramos la clase de los espacios métricos compactos y las clases de homotopía de sucesiones aproximativas entre ellos con la composición de clases definida anteriormente obtenemos una categoría que llamaremos SH (categoría de la forma).*

Teorema 1.3.3 *SH y SD son categorías isomorfas.*

Dem Sean X e Y espacios métricos compactos, donde podemos suponer que Y está contenido en el cubo de Hilbert Q. Sea $\{f_n : X \longrightarrow Q\}$ sucesión aproximativa de X a Y. Vamos a ver que existe $\{f'_n : D_n \longrightarrow Y\}$ sucesión densa discreta de X a Y casi asintótica a $\{f_n\}$, ésto es, tal que para todo $\varepsilon > 0$ y todo $n \in \mathbb{N}$, existen $n', n'' \geq n$ tal que

$$d(f_{n'}|_{D_{n''}}, f'_{n''}) < \varepsilon,$$

para todo $n \geq n_0$.

Sea $\{\varepsilon_n\}$ sucesión nula tal que f_n y f_{n+1} son homótopas en $B_{\varepsilon_n}(Y)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Vamos a ver que para todo $n \in \mathbb{N}$, por ser $f_n(X) \subset B_{\varepsilon_n}(Y)$, existe D_n subconjunto abierto y denso de X y existe $f'_n : D_n \longrightarrow Y$ aplicación discreta con $O(f'_n, X) < 2\varepsilon_n$ tal que $d(f_n|_{D_n}, f'_n) < \varepsilon_n$.

Vamos a ver que, en general, para toda aplicación continua $f : X \longrightarrow B_\varepsilon(Y)$, existe D subconjunto abierto y denso de X y existe $f' : D \longrightarrow Y$ aplicación discreta con $O(f', X) < 2\varepsilon$ tal que $d(f|_D, f') < \varepsilon$.

Como X es compacto, existe $0 < \varepsilon' < \varepsilon$ tal que $f(X) \subset B_{\varepsilon'}(Y)$. Para cada $x \in X$, existe $y_x \in Y$ tal que $d(f(x), y_x) < \varepsilon'$ y existe $\delta_x > 0$ tal que $d(f(x'), y_x) < \varepsilon'$ para todo $x' \in B_{\delta_x}(x)$. Entonces, por la compacidad de X, existen $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset X$ tales que

$$X \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_{\delta_{x_i}}(x_i).$$

Sean $D_1 = B_{\delta_{x_1}}(x_1), D_2 = B_{\delta_{x_2}}(x_2) - \overline{B_{\delta_{x_1}}(x_1)}, \ldots$

$$\ldots, D_n = B_{\delta_{x_n}}(x_n) - (\overline{B_{\delta_{x_1}}(x_1)} \cup \ldots \cup \overline{B_{\delta_{x_{n-1}}}(x_{n-1})}).$$

Entonces $D = \{D_1, D_2, \ldots, D_n\}$ es una familia de subconjuntos abiertos de X disjuntos dos a dos tal que $D = D_1 \cup \ldots \cup D_n$ es abierto y denso en X. Definimos

$$f' : D \longrightarrow \{y_{x_1}, \ldots, y_{x_n}\},$$

tal que $f'(x) = y_{x_i}$ para todo $x \in D_i$. Entonces, si $x \in D_i \subset B_{\delta_{x_i}}(x_i)$, se cumple $d(f(x), f'(x)) = d(f(x), y_{x_i}) < \varepsilon'$. Luego $d(f|_D, f') \leq \varepsilon' < \varepsilon$ y como f es continua, es inmediato que $O(f', X) < 2\varepsilon$.

Luego para todo $n \in \mathbb{N}$ existe una aplicación discreta $f'_n : D_n \longrightarrow Y$ con $O(f'_n, X) < 2\varepsilon_n$ tal que $d(f_n|_{D_n}, f'_n) < \varepsilon_n$. Vamos a ver ahora que para todo $n \in \mathbb{N}$, como f_n y f_{n+1} son homótopas en $B_{\varepsilon_n}(Y)$, entonces f'_n y f'_{n+1} son $2\varepsilon_n$-encadenables.

Vamos a ver que, en general, si $f, g : X \longrightarrow B_\varepsilon(Y)$ son aplicaciones continuas homótopas en $B_\varepsilon(Y)$, y $f' : D \longrightarrow Y$ y $g' : E \longrightarrow Y$ son aplicaciones discretas tales que $O(f', X) < 2\varepsilon$, $O(g', X) < 2\varepsilon$, $d(f|_D, f') < \varepsilon$ y $d(g|_E, g') < \varepsilon$, entonces f' y g' son 2ε-encadenables.

Sea $0 < \varepsilon' < \varepsilon$ tal que f y g son homótopas en $B_{\varepsilon'}(Y)$, y tal que

$$O(f', X) < 2\varepsilon', O(g', X) < 2\varepsilon', d(f|_D, f') < \varepsilon' \text{ y } d(g|_E, g') < \varepsilon'.$$

Como f y g son homótopas en $B_{\varepsilon'}(Y)$, existe $H : X \times [0,1] \longrightarrow B_{\varepsilon'}(Y)$ continua tal que

$$H(x,0) = f(x), H(x,1) = g(x),$$

para todo $x \in X$. Sabemos que entonces existe C subconjunto abierto y denso de $X \times [0,1]$ y existe $H' : C \longrightarrow Y$ aplicación discreta con $O(H', X \times [0,1]) < 2\varepsilon'$ tal que $d(H|_C, H') < \varepsilon'$.

Ahora, para todo $(x,t) \in X \times [0,1]$ existe $U^{(x,t)}$ entorno abierto de (x,t) en $X \times [0,1]$ tal que $\operatorname{diam}(H'(U^{(x,t)} \cap C)) < 2\varepsilon'$ y tal que $\operatorname{diam}(H(U^{(x,t)})) < \varepsilon - \varepsilon'$. Por la compacidad de $X \times [0,1]$ existe $\{U_1, \ldots, U_p\}$ recubrimiento abierto de $X \times [0,1]$ tal que $\operatorname{diam}(H'(U_i \cap C)) < 2\varepsilon'$ y tal que $\operatorname{diam}(H(U_i)) < \varepsilon - \varepsilon'$ para todo $i \in \{1, \ldots, p\}$.

Sea $\delta > 0$ el número de Lebesgue de este recubrimiento y sea $\{V_1, \ldots, V_q\}$ recubrimiento abierto de X tal que $\operatorname{diam}(V_i) < \frac{\delta}{4}$ para todo $i \in \{1, \ldots, q\}$. A partir de este recubrimiento definimos

$$F_1 = V_1, F_2 = V_2 - \overline{V_1}, \ldots, F_q = V_q - (\overline{V_1} \cup \ldots \cup \overline{V_{q-1}}).$$

familia de subconjuntos abiertos (que podemos suponer no vacíos) de X disjuntos dos a dos tal que $F = F_1 \cup \ldots \cup F_q$ es abierto y denso en X. Consideramos

$$\{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_r = 1\}$$

partición de $[0,1]$ tal que la distancia entre dos términos consecutivos es menor que $\frac{\delta}{4}$. Entonces

$$\{F_i \times (t_{j-1}, t_j) \mid 1 \leq i \leq q, 1 \leq j \leq r\}$$

es una familia de subconjuntos abiertos de $X \times [0,1]$ disjuntos dos a dos tal que $\operatorname{diam}(F_i \times (t_{j-1}, t_j)) < \frac{\delta}{2}$ para todo $i \in \{1, \ldots, q\}$ y todo $j \in \{1, \ldots, r\}$. Elegimos puntos $x_{ij} \in (F_i \times (t_{j-1}, t_j)) \cap C$, y definimos, para todo $j \in \{1, \ldots, r\}$ una aplicación

$$h'_j : F_1 \cup \ldots \cup F_q \longrightarrow Y$$

tal que $h'_j(F_i) = H'(x_{ij})$ para todo $i \in \{1,\dots,q\}$. Entonces h'_j es discreta y $O(h'_j, X) < 2\varepsilon$ para todo $j \in \{1,\dots,r\}$ pues si $\overline{F_i} \cap \overline{F_{i'}} \neq \emptyset$, entonces

$$\mathrm{diam}(F_i \times (t_{j-1}, t_j) \cup F_{i'} \times (t_{j-1}, t_j)) < \delta,$$

por tanto x_{ij} y $x_{i'j}$ están en un mismo elemento del recubrimiento $\{U_1,\dots,U_p\}$ y se tiene

$$d(h'_j(F_i), h'_j(F_{i'})) = d(H'(x_{ij}), H'(x_{i'j})) < 2\varepsilon'.$$

Analogamente, si $\overline{F_i} \cap \overline{F_{i'}} \neq \emptyset$, entonces

$$\mathrm{diam}(F_i \times (t_{j-1}, t_j) \cup F_{i'} \times (t_j, t_{j+1})) < \delta,$$

por tanto x_{ij} y $x_{i',j+1}$ están en un mismo elemento del recubrimiento $\{U_1,\dots,U_p\}$ y se tiene

$$d(h'_j(F_i), h'_{j+1}(F_{i'})) = d(H'(x_{ij}), H'(x_{i',j+1})) < 2\varepsilon'.$$

Luego $\varrho(h'_j, h'_{j+1}, X) < 2\varepsilon$ para todo $j \in \{1,\dots,r-1\}$. También $\varrho(f', h'_1, X) < 2\varepsilon$ pues $O(f', X) < 2\varepsilon$, $O(h'_1, X) < \varepsilon$, y si $\overline{(f')^{-1}(y)} \cap \overline{F_i} \neq \emptyset$, entonces existe $x \in (f')^{-1}(y)$ tal que $d((x,0), x_{i1}) < \delta$ y por tanto $(x,0)$ y x_{i1} están en un mismo elemento del recubrimiento $\{U_1,\dots,U_p\}$ y se tiene

$$\begin{aligned}
d(y, h'_1(F_i)) &= d(f'(x), h'_1(F_i)) \\
&\leq d(f'(x), f(x)) + d(H(x,0), H(x_{i1})) + d(H(x_{i1}), H'(x_{i1})) \\
&< \varepsilon' + (\varepsilon - \varepsilon') + \varepsilon' < 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

De forma análoga se ve que $\varrho(h'_r, g', X) < 2\varepsilon$. Luego f' y g' son 2ε-encadenables.

Así, para todo $n \in \mathbb{N}$, f'_n y f'_{n+1} son $2\varepsilon_n$-encadenables. Por tanto, para todo $n \in \mathbb{N}$ existen

$$f'_{n0} = f'_n : D_{n0} = D_n \longrightarrow Y,\ f'_{n1} : D_{n1} \longrightarrow Y, \dots$$

$$\dots, f'_{nk_n} = f'_{n+1} : D_{nk_n} = D_{n+1} \longrightarrow Y$$

aplicaciones discretas (con dominio abierto) tales que

$$\varrho(f'_{n0}, f'_{n1}, X) < 2\varepsilon_n, \dots, \varrho(f'_{nk_n-1}, f'_{nk_n}, X) < 2\varepsilon_n.$$

Luego la sucesión

$$\{f_1' = f_{10}', f_{11}', \ldots, f_{1k_1}' = f_2' = f_{20}', f_{21}', \ldots, f_{(n-1)k_{n-1}}' = f_n' = f_{n0}', f_{n1}', \ldots\}$$

es una sucesión densa discreta. Y como $d(f_n', f_n|_{D_n}) < \varepsilon_n$, es casi asintótica a $\{f_n\}$.

Supongamos ahora que $\{g_n : X \longrightarrow Q\}$ es otra sucesión aproximativa de X a Y tal que $\{f_n\}$ y $\{g_n\}$ son homótopas. Sea $\{g_n' : E_n \longrightarrow Y\}$ sucesión densa discreta de X a Y casi asintótica a $\{g_n\}$. Vamos a ver que entonces $\{f_n'\}$ y $\{g_n'\}$ son homótopas.

Sea $\varepsilon > 0$. Sea $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\varrho(f_n', f_{n+1}', X) < \varepsilon$, $\varrho(g_n', g_{n+1}', X) < \varepsilon$ y tal que f_n y f_{n+1} son homótopas en $B_{\frac{\varepsilon}{2}}(Y)$, g_n y g_{n+1} son homótopas en $B_{\frac{\varepsilon}{2}}(Y)$ y f_n y g_n son homótopas en $B_{\frac{\varepsilon}{2}}(Y)$, para todo $n \geq n_0$, Existen $n', n'', n''', n'''' \geq n_0$ tales que $d(f_{n'}|_{D_{n''}}, f_{n''}') < \varepsilon$ y $d(g_{n'''}|_{E_{n''''}}, g_{n''''}') < \varepsilon$. Entonces como $f_{n'}$ y $g_{n'''}$ son homótopas en $B_{\frac{\varepsilon}{2}}(Y)$ se tiene, por el resultado general demostrado antes, que $f_{n''}'$ y $g_{n''''}'$ son ε-encadenables. Por tanto para todo $n \geq n_0$ se tiene que f_n' y g_n' son ε-encadenables.

Hemos probado que existe una correspondencia

$$\Omega_{(X,Y)} : SH(X,Y) \longrightarrow SD(X,Y)$$

bien definida tal que $\Omega_{(X,Y)}([\{f_n\}]) = [\{f_n'\}]$ con $\{f_n'\}$ casi asintótica a $\{f_n\}$.

Para ver que es suprayectiva consideremos $\{f_n' : D_n \longrightarrow Y\}$ sucesión densa discreta de X a Y y vamos a ver que existe $\{f_n : X \longrightarrow Q\}$ sucesión aproximativa de X a Y asintótica a $\{f_n'\}$.

Sea $\{\varepsilon_n\}$ sucesión nula tal que $\varrho(f_n', f_{n+1}', X) < \varepsilon_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Vamos a ver que para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $f_n : X \longrightarrow B_{\varepsilon_n}(Y)$ aplicación continua, tal que $d(f_n', f_n|_{D_n}) < \varepsilon_n$.

Vamos a ver que, en general, si $f' : D \longrightarrow Y$ es una aplicación discreta con $O(f', X) < \varepsilon$, entonces existe $f : X \longrightarrow B_\varepsilon(Y)$ continua tal que $d(f', f|_D) < \varepsilon$.

Para cada $x \in X$, como $O(f', x) < \varepsilon$, existe U^x entorno abierto de x en X tal que $\mathrm{diam}(f'(U^x \cap D)) < \varepsilon$. Como X es espacio métrico compacto existe $\{U_1, \ldots, U_n\}$ recubrimiento abierto finito de X tal que $\mathrm{diam}(f'(U_i \cap D)) < \varepsilon$

para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, definimos $\lambda_i : X \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\lambda_i(x) = \frac{d(x, X - U_i)}{\sum_{j=1}^n d(x, X - U_j)}.$$

que verifica que $\lambda_i(x) \neq 0$ si y solamente si $x \in U_i$. Además para todo $x \in X$,

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i(x) = 1$$

y por tanto, para todo $x \in X$ se tiene

$$f'(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(x) f'(x).$$

Escogemos, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, $x_i \in U_i \cap D$ y definimos $f : X \longrightarrow Q$ como

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(x) f'(x_i).$$

Como $\sum \lambda_i(x) = 1$ y Q es convexo, se tiene que f es una aplicación continua bien definida. Por otra parte, si consideramos

$$\varepsilon' = \sup_{i \in \{1, \dots, n\}} \operatorname{diam}(f'(U_i \cap D)) < \varepsilon,$$

se tiene que dado $x \in D$,

$$\begin{aligned} d(f(x), f'(x)) &= \| \sum_{i=1}^n \lambda_i(x) f'(x_i) - \sum_{i=1}^n \lambda_i(x) f'(x) \| \\ &= \| \sum_{i=1}^n \lambda_i(x)(f'(x_i) - f'(x)) \| \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i(x) \| f'(x_i) - f'(x) \| \leq \varepsilon' (\sum_{i=1}^n \lambda_i(x)) = \varepsilon', \end{aligned}$$

pues si $\lambda_i(x) \neq 0$ se tiene que $x \in U_i$ y por tanto

$$d(f'(x), f'(x_i)) \leq \operatorname{diam}(f'(U_i \cap D)) \leq \varepsilon'.$$

Luego $d(f(x), f'(x)) \leq \varepsilon' < \varepsilon$ para todo $x \in D$. (En las expresiones anteriores hemos usado la norma $\| \ \|$ de Q). Finalmente, como f es continua en X y $f(D) \subset \overline{B_{\varepsilon'}(Y)}$ con D denso en X, entonces $f(X) \subset \overline{B_{\varepsilon'}(Y)} \subset B_\varepsilon(Y)$.

Así, para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $f_n : X \longrightarrow B_{\varepsilon_n}(Y)$ aplicación continua, tal que $d(f'_n, f_n|_{D_n}) < \varepsilon_n$. Además, como $\varrho(f'_n, f'_{n+1}, X) < \varepsilon_n$, se tiene $d(f_n, f_{n+1}) \leq 3\varepsilon_n$, luego f_n y f_{n+1} son homótopas en $B_{4\varepsilon_n}(Y)$. (Basta considerar

$$H_n : X \times [0,1] \longrightarrow B_{4\varepsilon_n}(Y)$$

definida por $H_n(x,t) = (1-t)f_n(x)+tf_{n+1}(x)$, para todo $x \in X$ y todo $t \in [0,1]$).

Luego $\{f_n\}$ es una sucesión aproximativa y es claramente asintótica a $\{f'_n\}$. Por tanto $\Omega_{(X,Y)}$ es suprayectiva.

Vamos a ver que es inyectiva. Sean $\{f_n : X \longrightarrow Q\}$ y $\{g_n : X \longrightarrow Q\}$ aplicaciones aproximativas de X a Y. Sean $\{f'_n : D_n \longrightarrow Y\}$ y $\{g'_n : E_n \longrightarrow Y\}$ sucesiones densas discretas de X a Y casi asintóticas a $\{f_n\}$ y $\{g_n\}$ respectivamente. Supongamos que $\{f'_n\}$ y $\{g'_n\}$ son homótopas. Vamos a ver que entonces $\{f_n\}$ y $\{g_n\}$ son homótopas.

Sea $\varepsilon > 0$. Sea $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\varrho(f'_n, f'_{n+1}, X) < \frac{\varepsilon}{2}, \varrho(g'_n, g'_{n+1}, X) < \frac{\varepsilon}{2},$$

y tal que f'_n y g'_n son $\frac{\varepsilon}{4}$-encadenables, f_n y f_{n+1} son homótopas en $B_{\frac{\varepsilon}{4}}(Y)$ y g_n y g_{n+1} son homótopas en $B_{\frac{\varepsilon}{4}}(Y)$, para todo $n \geq n_0$. Existen $n', n'', n''', n'''' \geq n_0$ tales que $d(f_{n'}|_{D_{n''}}, f'_{n''}) < \frac{\varepsilon}{4}$ y $d(g_{n'''}|_{D_{n''''}}, g'_{n''''}) < \frac{\varepsilon}{4}$. Como $f'_{n''}$ y $g'_{n''''}$ son $\frac{\varepsilon}{4}$-encadenables, existen

$$f'_{n''} = h'_0 : F_0 \longrightarrow Y, h'_1 : F_1 \longrightarrow Y, \ldots, h'_r = g'_{n''''} : F_n \longrightarrow Y$$

aplicaciones discretas tales que

$$\varrho(h'_0, h'_1, X) < \frac{\varepsilon}{4}, \ldots, \varrho(h'_{r-1}, h'_r, X) < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Para todo $i \in \{0, 1, \ldots, r\}$ existe $h_i : X \longrightarrow B_{\frac{\varepsilon}{4}}(Y)$ aplicación continua tal que $d(h'_i, h_i|_{F_i}) < \frac{\varepsilon}{4}$, y podemos tomar $h_0 = f_{n'}$ y $h_r = g_{n'''}$. Además, como $\varrho(h'_i, h'_{i+1}, X) < \frac{\varepsilon}{4}$, se tiene $d(h_i, h_{i+1}) \leq \frac{3\varepsilon}{4}$, luego h_i y h_{i+1} son homótopas en $B_\varepsilon(Y)$. En particular, $f_{n'}$ y $g_{n'''}$ son homótopas en $B_\varepsilon(Y)$. Entonces tendremos que f_n y g_n son homótopas en $B_\varepsilon(Y)$, para todo $n \geq n_0$.

Luego $\Omega_{(X,Y)}$ es una biyección entre $SH(X,Y)$ y $SD(X,Y)$. Por otra parte, la aplicación $\{r_n\}$ que da la clase identidad de $SD(X,X)$ es asintótica a la aplicación aproximativa generada por la inclusión de X en Q. Luego $\Omega_{(X,X)}$ manda la clase identidad en la clase identidad. Entonces, para probar que SH y SD son categorías isomorfas, solamente queda comprobar que Ω conserva la composición, ésto es, que

$$\Omega_{(X,Z)}([\{g_n\}][\{f_n\}]) = \Omega_{(Y,Z)}([\{g_n\}])\Omega_{(X,Y)}([\{f_n\}]),$$

para cualesquiera $\{f_n\}$ y $\{g_n\}$ aplicaciones aproximativas de X a Y.

Sean $\{f_n : X \longrightarrow Q\}$ y $\{g_n : X \longrightarrow Q\}$ aplicaciones aproximativas de X a Y. Sean $\{f'_n : D_n \longrightarrow Y\}$ y $\{g'_n : E_n \longrightarrow Y\}$ sucesiones densas discretas de X a Y casi asintóticas a $\{f_n\}$ y $\{g_n\}$ respectivamente. Entonces $\Omega_{(X,Y)}([\{f_n\}]) = [\{f'_n\}]$ y $\Omega_{(Y,Z)}([\{g_n\}]) = [\{g'_n\}]$.

Sea $\{\varepsilon_n\}$ sucesión nula, entonces existen (m_n), (m'_n), (m''_n) y (m'''_n) sucesiones divergentes tales que

$$d(f_{m_n}|_{D_{m'_n}}, f'_{m'_n}) < \varepsilon_n, d(g_{m''_n}|_{E_{m'''_n}}, g'_{m'''_n}) < \varepsilon_n.$$

Entonces cambiando los representantes de $[\{f_n\}]$ y $[\{g_n\}]$, podemos suponer que $m_n = m'_n$ y $m''_n = m'''_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Esto es, podemos suponer que para todo $\varepsilon > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ existen $n', n'' > n$ tales que

$$d(f_{n'}|_{D_{n'}}, f'_{n'}) < \varepsilon, d(g_{n''}|_{E_{n''}}, g'_{n''}) < \varepsilon.$$

Consideraremos $\{\tilde{g}_n : Q \longrightarrow Q\}$ aplicación fundamental extensión de $\{g_n\}$ que nos hará falta para componer $[\{f_n\}]$ y $[\{g_n\}]$.

Vamos a construir, en primer lugar, un representante adecuado de la composición

$$\Omega_{(Y,Z)}([\{g_n\}])\Omega_{(X,Y)}([\{f_n\}]) = [\{g'_n\}][\{f'_n\}].$$

Para ello vamos a definir una sucesión retardante asociada al par $(\{f'_n\}, \{g'_n\})$. Sea $\{\varepsilon_n\}$ sucesión nula. Entonces existe otra sucesión nula $\{\delta_n\}$ tal que $\delta_n \leq \varepsilon_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y tal que

$$d(\tilde{g}_n(y), \tilde{g}_n(y')) < \varepsilon_n,$$

para cualesquiera $y, y' \in Q$ con $d(y,y') < \delta_n$. Sean $r_1 < r_2 < r_3 < \cdots$, tales que para todo $s \in \mathbb{N}$

$$d(g_{r_s}|_{E_{r_s}}, g'_{r_s}) < \varepsilon_s.$$

Existe (m_n), que se construye inductivamente, tal que

$$\varrho(f'_m, f'_{m+1}, X) < e(g'_n, g'_{n+1}, Y),$$

para todo $m \geq m_n$. En dicha construcción, se puede conseguir que si n es de la forma r_s, entonces existe $l_s \in (m_{r_s}, m_{r_s+1})$ tal que $d(f_{l_s}|_{D_{l_s}}, f'_{l_s}) < \delta_{r_s}$, y por tanto

$$d(\tilde{g}_{r_s} f_{l_s}|_{D_{l_s}}, \tilde{g}_{r_s} f'_{l_s}) < \varepsilon_{r_s}.$$

Definimos $k_n = k$ si $n \in [m_k, m_{k+1})$ y $k_n = 1$ si $n \in [1, m_1)$. Entonces (k_n) es una sucesión retardante asociada al par $(\{f'_n\}, \{g'_n\})$ y verifica además, por ser $k_{l_s} = r_s$, que para todo $\varepsilon > 0$ y para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $n' > n$ tal que

$$d(f_{n'}|_{D_{n'}}, f'_{n'}) < \varepsilon, \; d(g_{k_{n'}}|_{E_{k_{n'}}}, g'_{k_{n'}}) < \varepsilon, \; d(\tilde{g}_{k_{n'}} f_{n'}|_{D_{n'}}, \tilde{g}_{k_{n'}} f'_{n'}) < \varepsilon.$$

Por tanto,

$$\Omega_{(Y,Z)}([\{g_n\}])\Omega_{(X,Y)}([\{f_n\}]) = [\{g'_n\}][\{f'_n\}] = [\{h'_n\}],$$

donde, para todo $n \in \mathbb{N}$, $h'_n : D_n \longrightarrow Z$ es una composición de f'_n y g'_{k_n}.

Por otra parte, si consideramos $\{\bar{g}_n : Y \longrightarrow Q\}$ tal que $\bar{g}_n = g_{k_n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $\{\bar{g}_n\}$ y $\{g_n\}$ son homótopas y por tanto

$$\Omega_{(X,Z)}([\{g_n\}][\{f_n\}]) = \Omega_{(X,Z)}([\{\bar{g}_n\}][\{f_n\}] = \Omega_{(X,Z)}([\{\tilde{g}_{k_n} f_n\}]).$$

Vamos a ver que $\Omega_{(X,Z)}([\{\tilde{g}_{k_n} f_n\}]) = [\{h'_n\}]$. Para ello basta ver que $\{h'_n\}$ y $\{\tilde{g}_{k_n} f_n\}$ son casi asintóticas.

Sea $\varepsilon > 0$ y sea $n \in \mathbb{N}$. Existe $n' \geq n$ tal que

$$d(f_{n'}|_{D_{n'}}, f'_{n'}) < \frac{\varepsilon}{3}, d(g_{k_{n'}}|_{E_{k_{n'}}}, g'_{k_{n'}}) < \frac{\varepsilon}{3}, d(\tilde{g}_{k_{n'}} f_{n'}|_{D_{n'}}, \tilde{g}_{k_{n'}} f'_{n'}) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Vamos a ver que

$$d(\tilde{g}_{k_{n'}} f_{n'}|_{D_{n'}}, h'_{n'}) < \varepsilon.$$

Sea $x \in D_{n'}$. Entonces $h'_{n'}(x) = z \in Z$ con $f'_{n'}(x) \in \overline{(g'_{k_{n'}})^{-1}(z)}$. Existe entonces $y \in E_{k_{n'}}$, tan próximo a $f'_{n'}(x)$ como se quiera, tal que $h'_{n'}(x) = g'_{k_{n'}}(y)$, y por tanto

$$d(\tilde{g}_{k_{n'}}(y), h'_{n'}(x)) = d(g_{k_{n'}}(y), g'_{k_{n'}}(y)) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Además, podemos escoger y suficientemente próximo a $f'_{n'}(x)$ de forma que se tenga

$$d(\tilde{g}_{k_{n'}} f'_{n'}(x), \tilde{g}_{k_{n'}}(y)) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Finalmente, por la construcción de la sucesión retardante (k_n) se tiene que

$$d(\tilde{g}_{k_{n'}} f_{n'}(x), \tilde{g}_{k_{n'}} f'_{n'}(x)) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Por tanto

$$\begin{aligned} d(\tilde{g}_{k_{n'}} f_{n'}(x), h'_{n'}(x)) &\leq d(\tilde{g}_{k_{n'}} f_{n'}(x), \tilde{g}_{k_{n'}} f'_{n'}(x)) + d(\tilde{g}_{k_{n'}} f'_{n'}(x), \tilde{g}_{k_{n'}}(y)) \\ &\qquad + d(\tilde{g}_{k_{n'}}(y), h'_{n'}(x)) \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Por tanto $\Omega_{(X,Z)}([\{g_n\}][\{f_n\}]) = [\{h'_n\}] = \Omega_{(Y,Z)}([\{g_n\}])\Omega_{(X,Y)}([\{f_n\}])$. Luego SH y SD son categorías isomorfas. Esto completa la demostración del teorema.

1.4 CARACTERIZACIONES DISCRETAS Y DENSAS DE LOS POLIEDROS APROXIMATIVOS Y DE LOS ESPACIOS MOVIBLES E INTERNAMENTE MOVIBLES

En esta sección se utilizan las técnicas de densidad para dar nuevas caracterizaciones, en cierto modo intrínsecas, de espacios importantes en teoría de la forma y teoría de retractos.

Lema 1.4.1 *Sean X y Z espacios métricos y sea $Y \subset Z$. Sea $f : X \longrightarrow B_\varepsilon(Y)$ una aplicación continua. Entonces existe D subconjunto abierto denso de X y existe una aplicación localmente constante $g : D \longrightarrow Y$ tal que $O(g, X) \leq 2\varepsilon$ y $d(f(x), g(x)) < \varepsilon$ para todo $x \in D$.*

Dem. Consideramos el conjunto G de todas las aplicaciones $g : G_g \longrightarrow Y$ localmente constantes definidas en subconjuntos abiertos G_g de X y tales que $d(f(x), g(x)) < \varepsilon$ para todo $x \in G_g$.

G es no vacío, pues dado $x_0 \in X$ existe $y_0 \in Y$ tal que $d(f(x_0), y_0) < \varepsilon$ y por la continuidad de f existe U entorno abierto de x_0 en X tal que para todo $x \in U$ se tiene $d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon - d(f(x_0), y_0)$ y por tanto $d(f(x), y_0) < \varepsilon$. Entonces la aplicación $h : U \longrightarrow Y$ dada por $h(x) = y_0$, para todo $x \in U$, es un elemento de G.

Consideramos en G la relación de orden:

$$g \leq h \Leftrightarrow G_g \subset G_h \text{ y } h|_{G_g} = g.$$

Entonces $(G, \leq)$ es un conjunto ordenado y todo subconjunto de G totalmente ordenado tiene una cota superior (si $A \subset G$ está totalmente ordenado, entonces $G_h = \cup_{g \in A} G_g$ es un subconjunto abierto de X y la aplicación $h : G_h \longrightarrow Y$ dada por $h(x) = g(x)$ para cualquier $g \in A$ con $x \in G_g$ es una aplicación localmente constante bien definida y es una cota superior para A). Entonces estamos en condiciones de aplicar el Lema de Zorn y deducimos, por tanto, la existencia de elementos maximales.

Sea $g : D \longrightarrow Y$ uno de esos elementos maximales y supongamos que D no es denso. Existe entonces B subconjunto abierto de X tal que $B \cap D = \emptyset$.

Sea $x_0 \in B$, existe $y_0 \in Y$ tal que $d(f(x_0), y_0) < \varepsilon$ y por la continuidad de f existe $U \subset B$ entorno abierto de x_0 en X tal que para todo $x \in U$ se tiene $d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon - d(f(x_0), y_0)$ y por tanto $d(f(x), y_0) < \varepsilon$.

Pero entonces la aplicación $h : D \cup U \longrightarrow Y$ dada por

$$h(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \in D \\ y_0 & \text{si } x \in U \end{cases}$$

es localmente constante, está definida en un subconjunto abierto de X y verifica que $d(f(x), h(x)) < \varepsilon$ para todo $x \in D \cap U$, pero esto contradice la maximalidad de g. Luego D ha de ser denso.

Finalmente, como $d(f(x), g(x)) < \varepsilon$, para todo $x \in \dot{D}$ y f es continua en X, entonces $O(g, x) \leq 2\varepsilon$ para todo $x \in X$.

Lema 1.4.2 *Sea Z un espacio vectorial normado o, más generalmente, un subconjunto convexo de un espacio vectorial normado. Sea X un espacio métrico e Y un subconjunto de Z. Sea D subconjunto denso de X y sea $f : D \longrightarrow Y$ una aplicación, no necesariamente continua, con $O(f, x) < \varepsilon$ para todo $x \in X$.*[5] *Entonces existe $g : X \longrightarrow \overline{B_\varepsilon(Y)}$ continua tal que $d(f(x), g(x)) < \varepsilon$ para todo $x \in D$.*

Dem. Para cada $x \in X$, como $O(f, x) < \varepsilon$, existe U^x entorno abierto de x en X tal que $\operatorname{diam}(f(U^x \cap D)) < \varepsilon$. Como X es espacio métrico, es paracompacto y por tanto existe $\{U_i \mid i \in I\}$ recubrimiento abierto localmente finito de X tal que $\operatorname{diam}(f(U_i \cap D)) < \varepsilon$ para todo $i \in I$.

Para cada $i \in I$, definimos $\lambda_i : X \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\lambda_i(x) = \frac{d(x, X - U_i)}{\sum_{j\in I} d(x, X - U_j)}.$$

La suma en el denominador es finita pues $d(x, X - U_j) \neq 0$ si y solo si $x \in U_j$. Por la misma razón, $\lambda_i(x) \neq 0$ si y solamente si $x \in U_i$. Además para todo $x \in X$,

$$\sum_{i\in I} \lambda_i(x) = 1$$

y por tanto, para todo $x \in X$ se tiene

$$f(x) = \sum_{i\in I} \lambda_i(x) f(x).$$

Escogemos ahora, para cada $i \in I$, $x_i \in U_i \cap D$ y definimos $g : X \longrightarrow Z$ como

$$g(x) = \sum_{i\in I} \lambda_i(x) f(x_i).$$

La suma vuelve a ser finita, y como $\sum \lambda_i(x) = 1$ y Z es convexo, se tiene que g es una aplicación continua bien definida. Por otra parte, dado $x \in D$, si $U_{j_1}, \ldots, U_{j_k}$ son los únicos abiertos del recubrimiento que contienen a x, se tiene

$$d(f(x), g(x)) \; = \; \| \sum_{i=1}^{n} \lambda_{j_i}(x) f(x) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_{j_i}(x) f(x_{j_i}) \|$$

[5] Para definir la oscilación de una aplicación definida en un subconjunto denso de un espacio métrico, no es necesario que ésta sea continua en dicho subconjunto.

$$= \| \sum_{i=1}^{n} \lambda_{j_i}(x)(f(x) - f(x_{j_i})) \|$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_{j_i}(x) \| f(x) - f(x_{j_i}) \| < \varepsilon(\sum_{i=1}^{n} \lambda_{j_i}(x)) = \varepsilon,$$

pues si $\lambda_i(x) \neq 0$ se tiene que $x \in U_i$ y por tanto $d(f(x), f(x_i)) < \varepsilon$. Luego $d(f(x), g(x)) < \varepsilon$ para todo $x \in D$. (En las expresiones anteriores hemos usado la norma $\| \ \|$ del espacio vectorial normado que contiene a Y).

Finalmente, como g es continua en X y $g(D) \subset B_\varepsilon(Y)$ con D denso en X, entonces $g(X) \subset \overline{B_\varepsilon(Y)}$.

Observación 1.4.3 Si D no es denso, el resultado no sería cierto. Para verlo, basta considerar $X = [0,1]$, $D = Y = \{0,1\}$, f la identidad y $\varepsilon = \frac{1}{3}$.

En la siguiente definición introducimos el concepto de AANR$_C$ (M.H.Clapp [28]), que junto con el de AANR$_N$ (H.Noguchi [89]), ha sido extensamente estudiado en la literatura de Teoría de Retractos. Estos espacios tienen importantes propiedades relacionadas con el teorema del punto fijo de Lefschetz's ([28] y [46]) y, como J.Dydak y J.Segal destacan en [35], los AANR's de Clapp (AANR$_C$) forman una clase natural en el sentido de que equivalen a límites de poliedros en la métrica de continuidad de Borsuk [10]. También son importantes en teoría de la forma, en particular en conexión con las propiedades de movilidad y movilidad regular ([8], [35]). En [96], J.M.R.Sanjurjo introduce la clase de los espacios FAANR, que contiene a los espacios FANR y a los AANR$_C$ como subclases propias.

Definición 1.4.4 Sea X espacio métrico compacto. Se dice que $X \in$ AANR$_C$ si y solo si cuando X se sumerge en el cubo de Hilbert Q, entonces para todo $\varepsilon > 0$, existe U entorno de X en Q, existe $r_\varepsilon : U \longrightarrow X$ continua, tal que $d(r_\varepsilon(x), x) < \varepsilon$ para todo $x \in X$.

En la siguiente definición introducimos el concepto de poliedro aproximativo. Por un resultado de S.Mardešić [77], los poliedros aproximativos coinciden con los espacios AANR$_C$ en la categoría de los espacios métricos compactos. También son equivalentes en dicha categoría a los conjuntos NE de K.Borsuk [19].

Definición 1.4.5 Un espacio métrico compacto X es un poliedro aproximativo si para cada $\varepsilon > 0$ existe un poliedro P y existen $f : X \longrightarrow P$, $g : P \longrightarrow X$ aplicaciones continuas tales que $d(gf(x), x) < \varepsilon$ para todo $x \in X$.

El siguiente teorema muestra que los espacios $\mathrm{AANR_C}$ tienen propiedades de extensión aproximada para aplicaciones definidas en subconjuntos densos. Estas propiedades son características.

Teorema 1.4.6 *Sea Y espacio métrico compacto. Son equivalentes:*
i) $Y \in \mathrm{AANR_C}$.
ii) Para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ verificando que para todo espacio métrico X, todo subconjunto denso D de X y toda aplicación $f : D \longrightarrow Y$ (no necesariamente continua) con $O(f, X) < \delta$, existe $f' : X \longrightarrow Y$ continua tal que $d(f'|_D, f) < \varepsilon$.
iii) Para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ verificando que para todo espacio métrico compacto X, para todo subconjunto abierto y denso D de X y para toda aplicación discreta $f : D \longrightarrow Y$ con $O(f, X) < \delta$, existe $f' : X \longrightarrow Y$ continua tal que $d(f'|_D, f) < \varepsilon$.

Dem. Vamos a ver primero que i) implica ii). Sea Y espacio métrico compacto. Podemos suponer que Y está contenido en el cubo de Hilbert Q. Supongamos que $Y \in \mathrm{AANR_C}$. Entonces para todo $\varepsilon > 0$, existe U entorno compacto de Y en Q y existe $r_\varepsilon : U \longrightarrow Y$ continua, tal que $d(r_\varepsilon(y), y) < \frac{\varepsilon}{3}$ para todo $y \in Y$.

Como U es compacto y r_ε es continua, existe $\delta > 0$ tal que

$$d(r_\varepsilon(y), r_\varepsilon(y')) < \frac{\varepsilon}{3}$$

para todo $y, y' \in U$ con $d(y, y') < \delta$. Podemos suponer que δ verifica también que $\overline{B_\delta(Y)} \subset U$. Vamos a ver que este δ verifica la condición del enunciado.

Sea X espacio métrico y sea D subconjunto denso de X. Sea $f : D \longrightarrow Y$ una aplicación con $O(f, X) < \delta$. Entonces $O(f, x) < \delta$ para todo $x \in X$, y por el Lema anterior, existe $f'' : X \longrightarrow \overline{B_\delta(Y)} \subset U$ aplicación continua tal que $d(f''(x), f(x)) < \delta$ para todo $x \in D$. Sea $f' = r_\varepsilon f'' : X \longrightarrow Y$. Entonces f' es una aplicación continua tal que

$$d(f'(x), f(x)) \leq d(r_\varepsilon f''(x), r_\varepsilon f(x)) + d(r_\varepsilon f(x), f(x)) < \frac{2\varepsilon}{3},$$

para todo $x \in D$. Por tanto $d(f'|_D, f) < \varepsilon$.

Evidentemente ii) implica iii). Para probar que iii) implica i), suponemos de nuevo que $Y \subset Q$. Dado $\varepsilon > 0$ consideramos $0 < \delta < \varepsilon$ con la propiedad del enunciado para $\frac{\varepsilon}{3}$. Consideramos $\overline{B_{\frac{\delta}{4}}(Y)}$ entorno compacto de Y en Q. Como Y es compacto, existe un subconjunto finito F de Y tal que $\overline{B_{\frac{\delta}{4}}(Y)} \subset B_{\frac{\delta}{3}}(F)$. Consideramos la inclusión

$$i : \overline{B_{\frac{\delta}{4}}(Y)} \longrightarrow B_{\frac{\delta}{3}}(F).$$

Entonces existe un subconjunto abierto denso D de $\overline{B_{\frac{\delta}{4}}(Y)}$ y existe una aplicación localmente constante, y por tanto discreta $f : D \longrightarrow F \subset Y$ tal que $d(f(x), x) \leq \frac{\delta}{3}$ para todo $x \in D$ y tal que $O(f, x) \leq \frac{2\delta}{3}$ para todo $x \in \overline{B_{\frac{\delta}{4}}(Y)}$. Por tanto

$$O(f, \overline{B_{\frac{\delta}{4}}(Y)}) < \delta.$$

Por la hipótesis del teorema, existe

$$r_\varepsilon : \overline{B_{\frac{\delta}{4}}(Y)} \longrightarrow Y$$

continua tal que $d(r_\varepsilon|_D, f) < \frac{\varepsilon}{3}$. Por tanto para todo $x \in D$ se tiene

$$d(r_\varepsilon(x), x) \leq d(r_\varepsilon(x), f(x)) + d(f(x), x) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\delta}{3} < \frac{2\varepsilon}{3}.$$

Finalmente, como r_ε es continua en $\overline{B_{\frac{\delta}{4}}(Y)}$ y D es denso en $\overline{B_{\frac{\delta}{4}}(Y)}$ se tiene que

$$d(r_\varepsilon(x), x) \leq \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$$

para todo $x \in \overline{B_{\frac{\delta}{4}}(Y)}$. Esto completa la demostración del teorema.

Vamos a definir a continuación el concepto de espacio métrico compacto internamente movible, introducido por S.Bogatyi [8] en 1974, como un caso particular de los espacios movibles definidos por K.Borsuk en [14]. En [31] J.Dydak demuestra que todo compacto movible tiene la forma de un compacto internamente movible. V.F.Laguna y J.M.R.Sanjurjo [71] introducen en 1984 una teoría interna de la forma que coincide con la teoría de la forma de Borsuk para espacios internamente movibles y M.A.Morón [85] extiende la teoría interna de la forma y el concepto de movilidad interna a espacios métricos arbitrarios. Por otra parte, Morón prueba en [84] que un resultado de la teoría de la forma para espacios métricos compactos, referente a movilidad y retracciones mutacionales, no puede ser transferido al caso de espacios métricos arbitrarios. En [70] se prueba que un espacio compacto es movible si y solo si es límite de poliedros en la métrica 'shape'. M.A.Morón y F.R.Ruiz del Portal demuestran en [86] la existencia de un compacto internamente movible que es espacio universal en la categoría de la forma para la clase de los espacios FANR.

Definición 1.4.7 Sea X espacio métrico compacto. Se dice que X es internamente movible si y solo si cuando X se sumerge en el cubo de Hilbert Q, entonces para todo entorno U de X en Q existe U_0 entorno de X en Q y existe $\phi : U_0 \times [0,1] \longrightarrow U$ continua tal que $\phi(x,0) = x, \phi(x,1) \in X$, para todo $x \in U_0$.

Teorema 1.4.8 *Sea Y espacio métrico compacto. Son equivalentes:*
i) Y es internamente movible.
ii) Para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ verificando que para todo espacio métrico X, para todo subconjunto denso D de X y para toda aplicación continua $f : D \longrightarrow Y$ con $O(f,X) < \delta$ existe $g : X \longrightarrow Y$ continua, tal que f y g son ε-homótopas.
iii) Para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ verificando que para todo espacio métrico compacto X, para todo subconjunto abierto y denso D de X y para toda aplicación discreta $f : D \longrightarrow Y$ con $O(f,X) < \delta$ existe $g : X \longrightarrow Y$ continua, tal que f y g son ε-homótopas.

Dem. Vamos a ver que i) implica ii). Sea Y espacio métrico compacto. Podemos suponer que Y está contenido en el cubo de Hilbert Q. Supongamos que Y es internamente movible. Sea $\varepsilon > 0$ y sea U entorno de Y en Q tal que $U \subset B_{\frac{\varepsilon}{3}}(Y)$. Existe U_0 entorno de Y en Q y existe $\phi : U_0 \times [0,1] \longrightarrow U$ continua tal que $\phi(y,t) = y$ para todo $y \in U_0$ y todo $t \in [0, \frac{1}{3}]$, y $\phi(y,s) = \phi(y,1) \in Y$, para todo $y \in U_0$ y todo $s \in [\frac{2}{3}, 1]$. Sea $0 < \delta < \frac{\varepsilon}{3}$ tal que $\overline{B_\delta(Y)} \subset U_0$.

Vamos a ver que este δ verifica la condición del enunciado.

Sea X espacio métrico y sea D subconjunto denso de X. Sea $f : D \longrightarrow Y$ con $O(f,X) < \delta$. Entonces existe $f' : X \longrightarrow \overline{B_\delta(Y)} \subset U_0$ continua tal que

$d(f'(x), f(x)) < \delta$ para todo $x \in D$. Sea $i_{[0,1]} : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ la identidad en $[0,1]$ y consideremos

$$H = \phi(f' \times i_{[0,1]}) : X \times [0,1] \longrightarrow U \subset B_{\frac{\varepsilon}{3}}(Y)$$

continua tal que $H(x,t) = f'(x)$ para todo $x \in X$ y todo $t \in [0, \frac{1}{3}]$. Vamos a ver que f es ε-homótopa a $H_1 = \phi_1 f' : X \longrightarrow Y$.

Existe C denso en $X \times [0,1]$, existe $H' : C \longrightarrow Y$ aplicación continua con $O(H', X \times [0,1]) \leq \frac{2\varepsilon}{3}$ tal que $d(H(x,t), H'(x,t)) < \frac{\varepsilon}{3}$ para todo $(x,t) \in C$. Sea

$$C' = \left(D \times \left[0, \frac{1}{3}\right)\right) \cup \left(C \cap \left(X \times \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)\right)\right) \cup \left(X \times \left(\frac{2}{3}, 1\right]\right)$$

y definimos $H'' : C' \longrightarrow Y$ tal que

$$H''(x,t) = \begin{cases} f(x) & \text{si } (x,t) \in D \times [0, \frac{1}{3}) \\ H'(x,t) & \text{si } (x,t) \in C \cap (X \times (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})) \\ H_1(x) & \text{si } (x,t) \in E \times (\frac{2}{3}, 1] \end{cases}$$

Se tiene que H'' es continua en C' denso en $X \times [0,1]$, que $H''(x,0) = f(x)$ para todo $x \in D$ y que $H''(x,1) = H_1(x)$ para todo $x \in X$.

Finalmente, como $d(H(x,t), H''(x,t)) < \frac{\varepsilon}{3}$ para todo $(x,t) \in C'$, se tiene que $O(H'', X \times [0,1]) \leq \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$. Por tanto f es ε-homótopa a $H_1 = \phi_1 f' : X \longrightarrow Y$.

Evidentemente ii) implica iii). Para ver que iii) implica i) suponemos de nuevo que $Y \subset Q$. Supongamos que Y verifica la condición de iii) y vamos a ver que es internamente movible. Sea U entorno de Y en Q y sea $\varepsilon > 0$ tal que $B_{3\varepsilon}(Y) \subset U$. Sea $0 < \delta < \varepsilon$ con la propiedad del enunciado y sea U_0 entorno de Y en Q tal que $U_0 \subset B_{\frac{\delta}{4}}(Y)$. Vamos a ver que existe $\phi : U_0 \times [0,1] \longrightarrow U$ continua tal que $\phi(x,0) = x, \phi(x,1) \in X$, para todo $x \in U_0$.

Consideramos $\overline{B_{\frac{\delta}{4}}(Y)}$ entorno compacto de Y en Q. Se demuestra como en el Teorema 1.4.6 que existe un subconjunto abierto y denso D de $\overline{B_{\frac{\delta}{4}}(Y)}$ y existe una aplicación discreta $f : D \longrightarrow Y$ tal que $d(f(x), x) \leq \frac{\delta}{3}$ para todo $x \in D$ y tal que

$$O(f, \overline{B_{\frac{\delta}{4}}(Y)}) < \delta.$$

Por la hipótesis del teorema, existe $g : \overline{B_{\frac{\delta}{4}}(Y)} \longrightarrow Y$ continua ε-homótopa a f. Entonces existe $C \subset \overline{B_{\frac{\delta}{4}}(Y)} \times [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ denso tal que

$$C \cap \left(\overline{B_{\frac{\delta}{4}}(Y)} \times \left\{\frac{1}{3}\right\}\right) = D \times \left\{\frac{1}{3}\right\}, C \cap \left(\overline{B_{\frac{\delta}{4}}(Y)} \times \left\{\frac{2}{3}\right\}\right) = \overline{B_{\frac{\delta}{4}}(Y)} \times \left\{\frac{2}{3}\right\},$$

y existe $H : C \longrightarrow Y$ tal que $O(H, \overline{B_{\frac{\delta}{4}}(Y)} \times [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]) < \varepsilon$ y tal que $H(x, \frac{1}{3}) = f(x)$ para todo $x \in D$ y $H(x, \frac{2}{3}) = g(x)$ para todo $x \in \overline{B_{\frac{\delta}{4}}(Y)}$.

Existe $H' : \overline{B_{\frac{\delta}{4}}(Y)} \times [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \longrightarrow \overline{B_{\varepsilon}(Y)}$ continua tal que $d(H(x,t), H'(x,t)) < \varepsilon$ para todo $(x,t) \in C$. Por otra parte, como i y $H'_{\frac{1}{3}} : \overline{B_{\frac{\delta}{4}}(Y)} \longrightarrow B_{\varepsilon}(Y)$ son continuas, Q es convexo, y

$$d(i, H'_{\frac{1}{3}}) = d(i|_D, H'_{\frac{1}{3}}|_D) \leq d(i|_D, f) + d(f, H'_{\frac{1}{3}}|_D) < 2\varepsilon,$$

entonces i y $H'_{\frac{1}{3}}$ son homótopas en $B_{3\varepsilon}(Y)$. Analogamente

$$d(g, H'_{\frac{2}{3}}) < \varepsilon,$$

y por tanto g y $H'_{\frac{2}{3}}$ son homótopas en $B_{2\varepsilon}(Y)$. Por tanto existe

$$\phi : U_0 \times [0,1] \subset \overline{B_{\frac{\delta}{4}}(Y)} \times [0,1] \longrightarrow B_{3\varepsilon}(Y) \subset U$$

continua tal que $\phi(x,0) = x, \phi(x,1) = g(x) \in Y$, para todo $x \in U_0$. Esto completa la demostración del teorema.

Definición 1.4.9 Sea X espacio métrico compacto. Se dice que X es movible si y solo si cuando X se sumerge en el cubo de Hilbert Q, entonces para todo entorno U de X en Q existe U_0 entorno de X en Q tal que, para todo V entorno de X en Q, existe $\phi : U_0 \times [0,1] \longrightarrow U$ continua tal que $\phi(x,0) = x, \phi(x,1) \in V$, para todo $x \in U_0$.

A continuación enunciamos sin demostración una nueva caracterización, en términos de densidad, de los compactos movibles. La prueba es análoga a la del teorema 1.4.8.

Teorema 1.4.10 *Sea Y espacio métrico compacto. Son equivalentes:*
i) Y es movible.
ii) Para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ verificando que para todo espacio métrico X, dado D subconjunto denso de X y dada $f : D \longrightarrow Y$ continua con $O(f, X) < \delta$, dado $\eta > 0$, existe E subconjunto abierto y denso de X y existe $g : E \longrightarrow Y$ aplicación continua (con imagen finita) con $O(g, X) < \eta$, tal que f y g son ε-homótopas.

iii) Para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ verificando que para todo espacio métrico compacto X, dado D subconjunto abierto y denso de X y dada $f : D \longrightarrow Y$ discreta con $O(f,X) < \delta$, dado $\eta > 0$, existe E subconjunto denso de X y existe $g : E \longrightarrow Y$ continua con $O(g,X) < \eta$, tal que f y g son ε-homótopas.

Utilizando la equivalencia de ε-homotopías y ε-cadenas para aplicaciones ε-discretas que se prueba en la sección primera, se tiene el siguiente corolario.

Corolario 1.4.11 *Sea Y espacio métrico compacto. Son equivalentes:*
i) Y es movible.
ii) Para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ verificando que para todo espacio métrico compacto X, dado D subconjunto denso de X y dada $f : D \longrightarrow Y$ aplicación discreta con $O(f,X) < \delta$, dado $\eta > 0$, existe E subconjunto abierto y denso de X y existe $g : E \longrightarrow Y$ aplicación discreta con $O(g,X) < \eta$, tal que f y g son ε-encadenables.
iii) Para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ verificando que para todo espacio métrico compacto X, dado D subconjunto abierto y denso de X y dada $f : D \longrightarrow Y$ aplicación discreta con $O(f,X) < \delta$, dado $\eta > 0$, existe E subconjunto denso de X y existe $g : E \longrightarrow Y$ aplicación discreta con $O(g,X) < \eta$, tal que f y g son ε-encadenables.

Capítulo 2

CARACTERIZACIÓN MULTIVALUADA DE LA CATEGORÍA DE LA FORMA FUERTE

La categoría de la forma fuerte para espacios métricos compactos fue introducida en 1973 por J.B.Quigley [92], aunque algunas nociones relacionadas con la teoría de la forma fuerte habían sido consideradas anteriormente por D.Christie [27] y T.Porter [90], [91]. En particular, Christie definió los grupos 'shape' fuerte. En 1976 D.A.Edwards y H.M.Hastings [37], motivados por trabajos de T.A.Chapman [25], obtuvieron un isomorfismo de categorías entre la categoría de la forma fuerte para espacios métricos compactos en el pseudo-interior del cubo de Hilbert, Q, y la categoría propia de homotopía de sus complementos en Q. La teoría de la forma fuerte fue extendida a espacios topologicos arbitrarios por F.W.Bauer [1] y Edwards y Hastings [37].

Para información general sobre la categoría de la forma fuerte para espacios métricos compactos se pueden consultar los artículos [34] de J.Dydak y J.Segal y [20] de F.W.Cathey. El primero de ellos presenta un estudio geométrico basado en la noción de telescopio contractible. El segundo analiza diferentes caracterizaciones. Nosotros usaremos el enfoque dado por J.B.Quigley [92] o, en forma más general, el dado por Y.Kodama y J.Ono [62], [63]. Contribuciones más recientes a la teoría de la forma fuerte aparecen en los artículos [32] de J.Dydak y S.Nowak, [43] de R.Geoghegan y J.Krasinkiewicz y [47] de B.Günther.

Todas las descripciones existentes de la categoría de la forma fuerte para espacios métricos compactos usan elementos externos para introducir las nociones básicas. Generalmente se supone que los compactos están contenidos en el cubo de Hilbert o en un espacio ambiente conveniente, como una variedad o un poliedro, y las aplicaciones toman valores en entornos del compacto en el espacio ambiente. En otra descripciones, los compactos se presentan como límites inversos de sistemas de ANR y las aplicaciones se definen entre los sistemas y no directamente entre los compactos.

En este capítulo presentamos una nueva descripción de la categoría de la forma fuerte para espacios métricos compactos, eliminando todos los elementos externos para obtener una caracterización intrínseca. Usamos en nuestro acercamiento la teoría de las aplicaciones multivaluadas, siguiendo el programa iniciado en [101], [102] y [103] para la categoría de la forma de Borsuk.

En la primera sección de este capítulo damos una descripción completa de la categoría, cuyos morfismos se caracterizan como clases de homotopía de aplicaciones multivaluadas finas.

En la segunda sección probamos el isomorfismo con la categoría de la forma fuerte.

En la tercera sección introducimos una topología en el conjunto $M(X,Y)$ de las aplicaciones multivaluadas finas entre dos espacios métricos compactos X e Y. Esto nos permite identificar los morfismos de X a Y en la categoría de la forma con las componentes conexas de $M(X,Y)$ y los morfismos de X a Y en la categoría de la forma fuerte con las componentes conexas por caminos de $M(X,Y)$. Usando esta representación, probamos que todo morfismo de X a Y en la categoría de la forma es la adherencia de un morfismo de X a Y en la categoría de la forma fuerte. De esta forma mejoramos los resultados dados por V.F.Laguna y J.M.R.Sanjurjo en [72] y [73] para el espacio de aplicaciones aproximativas y por J.M.R.Sanjurjo en [103] para el espacio de 'multinets'. En estos artículos se prueba que los morfismos en la categoría de la forma se pueden identificar con las componentes conexas por caminos del espacio correspondiente con una topología adecuada, aunque con otras topologías naturales este resultado no es siempre cierto.

En la cuarta sección, dado (X, x_0) espacio métrico compacto punteado, definimos el espacio de lazos de Steenrod $\Omega^s(X, x_0)$ como una herramienta útil en el estudio de los grupos 'shape' fuerte $\Pi_n^s(X, x_0)$. Hemos adoptado esta terminología porque el nombre de Steenrod ha sido asociado a menudo con la teoría de la forma fuerte (véase [50]). Probamos que $\Pi_n^s(X, x_0) = \Pi_{n-1}(\Omega^s(X, x_0), *)$ y, por tanto, el cálculo de los grupos 'shape' fuerte se reduce al de los grupos de homotopía usuales del espacio de lazos de Steenrod.

Para resultados anteriores sobre la relación entre la teoría de la forma y las aplicaciones multivaluadas, pueden consultarse los artículos [22], [24], [61], [64], [74], [99] y [108] de Z.Čerin, Z.Čerin y T.Watanabe, Y.Kodama, A.Koyama, J.T.Lisica, J.M.R.Sanjurjo y A.Suszycki respectivamente.

2.1 LA CATEGORÍA *MSH* DE LOS ESPACIOS MÉTRICOS COMPACTOS Y LAS CLASES DE HOMOTOPÍA DE APLICACIONES MULTIVALUADAS FINAS

Definición 2.1.1 Sean X e Y espacios topológicos. Una aplicación multivaluada semicontinua superiormente de X a Y es una función $F : X \longrightarrow Y$ tal que para todo $x \in X$ se tiene que $F(x)$ es un subconjunto cerrado no vacío de Y y para todo entorno V de $F(x)$ en Y existe U entorno de x en X tal que

$$F(U) = \bigcup_{y \in U} F(y) \subset V.$$

Si Y es espacio métrico, decimos que F es ε-fina si $\operatorname{diam}(F(x)) < \varepsilon$ para todo $x \in X$.

Sean $F, G : X \longrightarrow Y$ aplicaciones multivaluadas semicontinuas superiormente. Se dice que F y G son ε-homótopas si existe una aplicación multivaluada ε-fina semicontinua superiormente $H : X \times I \longrightarrow Y$ tal que $H(x, 0) = F(x)$ y $H(x, 1) = G(x)$ para todo $x \in X$.

Definición 2.1.2 Sean X e Y espacios métricos compactos. Se dice que una aplicación multivaluada $F : X \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow Y$ es una aplicación multivaluada fina si es semicontinua superiormente y para todo $\varepsilon > 0$ existe $t_0 \in \mathbb{R}_+$ tal que $\mathrm{diam}(F(x,t)) < \varepsilon$, para todo $x \in X$ y para todo $t \geq t_0$.

Se dice que dos aplicaciones multivaluadas finas $F, G : X \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow Y$ son homótopas, si existe $H : X \times [0,1] \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow Y$ aplicación multivaluada fina tal que para todo $(x,t) \in X \times \mathbb{R}_+$

$$H(x,0,t) = F(x,t), H(x,1,t) = G(x,t).$$

Se dice que F y G son debilmente homótopas si para todo $\varepsilon > 0$ existe $t_0 \in \mathbb{R}_+$ tal que $F|_{X\times[t_0,\infty)}$ y $G|_{X\times[t_0,\infty)}$ son ε-homótopas.

La homotopía y la homotopía débil de aplicaciones multivaluadas finas son relaciones de equivalencia. Las correspondientes clases de equivalencia de F se denotarán por $[F]$ y $[F]_w$ respectivamente. (Obsérvese que $[F] \subset [F]_w$).

Lema 2.1.3 *Sean $F, G : X \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow Y$ dos aplicaciones multivaluadas finas asintóticas, ésto es, tales que para todo $\varepsilon > 0$ existe $t_0 \in \mathbb{R}_+$ tal que $d(F(x,t), G(x,t)) < \varepsilon$, para todo $x \in X$ y para todo $t \geq t_0$.*

Entonces F y G son homótopas.

Dem. Basta definir $H : X \times [0,1] \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow Y$, tal que:

$$H(x,s,t) = \begin{cases} F(x,t) & \text{si } 0 \leq s < \frac{1}{2} \\ F(x,t) \cup G(x,t) & \text{si } s = \frac{1}{2} \\ G(x,t) & \text{si } \frac{1}{2} < s \leq 1 \end{cases}$$

Definición 2.1.4 Sean $F : X \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow Y$ y $G : Y \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow Z$ aplicaciones multivaluadas finas. Decimos que $\alpha : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ es una aplicación dilatadora asociada al par (F, G) si es continua, creciente y existen $\{\varepsilon_n\}$ y $\{\eta_n\}$, sucesiones nulas tales que:
a) $\mathrm{diam}(G(K \times \{t\})) < \varepsilon_n$, para todo $K \subset Y$ con $\mathrm{diam}(K) < \eta_n$ y para todo $t \in [n, n+1]$.
b) $\mathrm{diam}(F(x,t)) < \eta_n$, para todo $x \in X$, para todo $t \geq \alpha(n)$.

La siguiente proposición muestra que siempre existen aplicaciones dilatadoras.

Proposición 2.1.5 *Sean $F : X \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow Y$ y $G : Y \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow Z$ aplicaciones multivaluadas finas.*

Entonces existe $\alpha : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ aplicación dilatadora asociada al par (F, G).

Dem. Dada G consideramos $\{\varepsilon_n\}$ sucesión nula tal que

$$\operatorname{diam}(G(y,t)) < \varepsilon_n$$

para todo $y \in Y$ y todo $t \geq n$. Entonces, como $\operatorname{diam}(G(y,t)) < \varepsilon_1$ para todo $y \in Y$ y todo $t \in [1,2]$, existe η_1 tal que para todo $K \subset Y$ con $\operatorname{diam}(K) < \eta_1$ y para todo $t \in [1,2]$, se tiene que $\operatorname{diam}(G(K \times \{t\})) < \varepsilon_1$. En general, para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $\eta_n < \eta_{n-1}$ tal que $\operatorname{diam}(G(K \times \{t\})) < \varepsilon_n$, para todo $K \subset Y$ con $\operatorname{diam}(K) < \eta_n$ y para todo $t \in [n, n+1]$. Así, obtenemos por inducción una sucesión nula $\eta_1 > \eta_2 > \eta_3 > \cdots$ tal que

$$\operatorname{diam}(G(K \times \{t\})) < \varepsilon_n,$$

para todo $K \subset Y$ con $\operatorname{diam}(K) < \eta_n$, para todo $t \in [n, n+1]$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ahora, por ser F multivaluada fina, existe $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots$ sucesión no acotada tal que $\operatorname{diam}(F(x,t)) < \eta_n$, para todo $x \in X$ y todo $t \geq t_n$ con $n \geq 1$.

Consideramos, para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, el homeomorfismo lineal

$$\alpha_n : [n, n+1] \longrightarrow [t_n, t_{n+1}]$$

definido por $\alpha_n(t) = t_n + (t-n)(t_{n+1} - t_n)$, para todo $t \in [n, n+1]$. Entonces el homeomorfimo $\alpha : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ definido por $\alpha(t) = \alpha_n(t)$, para todo $t \in [n, n+1]$, es una aplicación dilatadora asociada al par (F, G).

Como se demuestra en la proposición siguiente, las aplicaciones dilatadoras se pueden utilizar para definir una composición de clases de homotopía.

Proposición 2.1.6 *Sean $F : X \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow Y$ y $G : Y \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow Z$ aplicaciones multivaluadas finas. Sea $\alpha : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ aplicación dilatadora asociada al par (F, G). Sea $H : X \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow Z$ dada por $H(x,t) = G(F(x, \alpha(t)), t)$.*

Entonces H es multivaluada fina y su clase de homotopía $[H]$ no depende de la elección de α ni de los representantes de las clases $[F]$ y $[G]$ escogidos.

Dem. Es claro que H es semicontinua superiormente. Para ver que es multivaluada fina consideremos las sucesiones nulas $\{\varepsilon_n\}, \{\eta_n\}$ asociadas a α. Entonces dado $\varepsilon > 0$ tomamos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\varepsilon_{n_0} < \varepsilon$ y, como $\operatorname{diam}(F(x, \alpha(t))) < \eta_{n_0}$ para todo $x \in X$ y todo $t \geq n_0$, entonces $\operatorname{diam}(G(F(x, \alpha(t)), t)) < \varepsilon_{n_0} < \varepsilon$ para todo $x \in X$ y todo $t \geq n_0$.

Para demostrar la segunda parte de la proposición tenemos que ver que si $F' : X \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow Y$ y $G' : Y \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow Z$ son aplicaciones multivaluadas finas homótopas a F y G respectivamente, y si $\alpha' : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ es una aplicación dilatadora asociada al par (F', G') entonces la aplicación $H' : X \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow Z$ definida por

$$H'(x,t) = G'(F'(x, \alpha'(t)), t)$$

es homótopa a H.

Obsérvese primero que si $\beta : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ es una aplicación continua creciente tal que $\beta(t) \geq \alpha(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}_+$, entonces β es también una aplicación dilatadora asociada al par (F, G). Además, la aplicación $J : X \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow Z$ dada por

$$J(x,t) = G(F(x, \beta(t)), t)$$

es una aplicación multivaluada fina homótopa a H y la homotopía viene dada por la aplicación multivaluada fina $K : X \times [0,1] \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow Z$ definida por

$$K(x,s,t) = G(F(x, \alpha(t)(1-s) + \beta(t)s), t).$$

Ahora, como F y F' son homótopas, existe $F^* : X \times [0,1] \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow Y$ tal que para todo $(x,t) \in X \times \mathbb{R}_+$

$$F^*(x,0,t) = F(x,t), F^*(x,1,t) = F'(x,t),$$

y como G y G' son homótopas, existe $G^* : Y \times [0,1] \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow Z$ tal que

$$G^*(y,0,t) = G(y,t), G^*(y,1,t) = G'(y,t),$$

para todo $(y,t) \in Y \times \mathbb{R}_+$. Consideramos $\tilde{F} : X \times [0,1] \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow Y \times [0,1]$ dada por

$$\tilde{F}(x,s,t) = (F^*(x,s,t),s)$$

y sea $\alpha'' : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ aplicación dilatadora asociada al par $(\tilde{F},G^*)$ tal que $\alpha''(t) \geq \max\{\alpha(t),\alpha'(t)\}$ para todo $t \in \mathbb{R}_+$. Entonces $H^* : X \times [0,1] \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow Z$ definida por

$$H^*(x,s,t) = G^*(F^*(x,s,\alpha''(t)),s,t),$$

es una aplicación multivaluada fina tal que para todo $(x,t) \in X \times \mathbb{R}_+$:

$$H_0^*(x,t) = H^*(x,0,t) = G^*(F^*(x,0,\alpha''(t)),0,t) = G(F(x,\alpha''(t)),t)$$

$$H_1^*(x,t) = H^*(x,1,t) = G^*(F^*(x,1,\alpha''(t)),1,t) = G'(F'(x,\alpha''(t)),t),$$

donde H_0^* es homótopa a H y H_1^* es homótopa a H'. Luego H y H' son homótopas y esto concluye la demostración de la proposición.

Corolario 2.1.7 *Dadas $F : X \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow Y$ y $G : Y \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow Z$ aplicaciones multivaluadas finas, podemos definir la composición de clases como $[G][F] = [H]$ donde $H : X \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow Z$ viene dada por*

$$H(x,t) = G(F(x,\alpha(t)),t)$$

con $\alpha : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ aplicación dilatadora asociada al par (F,G).

Teorema 2.1.8 *Si consideramos la clase de los espacios métricos compactos y las clases de homotopía de aplicaciones multivaluadas finas entre ellos con la composición definida anteriormente obtenemos una categoría que llamaremos MSh.*

Dem. Dado X espacio métrico compacto, el morfismo identidad en $MSh(X,X)$ viene dado por la clase de homotopía de la aplicación $I_X : X \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow X$ definida por $I_X(x,t) = x$, para todo $(x,t) \in X \times \mathbb{R}_+$. En efecto, si Y es un espacio métrico compacto, $F : X \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow Y$ es una aplicación multivaluada fina y $\alpha : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ es una aplicación dilatadora asociada al par (I_X, F), entonces $[F][I_X] = [J]$ donde

$$J(x,t) = F(I_X(x,\alpha(t)),t) = F(x,t),$$

y dada $G : Y \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow X$ aplicación multivaluada fina y $\alpha' : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ aplicación dilatadora asociada al par (G, I_X), entonces $[I_X][G] = [K]$ donde $K(x,t) = I_X(G(x,\alpha'(t)),t) = G(x,\alpha'(t))$ y por tanto K es homótopa a G.

Para ver que MSh es una categoría solo falta comprobar que dados X, Y, Z y W espacios métricos compactos y dadas $F : X \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow Y$, $G : Y \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow Z$ y $H : Z \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow W$ aplicaciones multivaluadas finas, se tiene

$$[H]([G][F]) = ([H][G])[F].$$

Pero $[H]([G][F]) = [R]$ donde

$$R(x,t) = H(G(F(x,\alpha_1(\alpha_2(t))),\alpha_2(t)),t)$$

y $([H][G])[F] = [S]$ donde

$$S(x,t) = H(G(F(x,\beta_2(t)),\beta_1(t)),t),$$

donde $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ son aplicaciones dilatadoras asociadas a los correspondientes pares de aplicaciones. Vamos a ver que, escogiendo adecuadamente los representantes de $[F]$ y $[G]$, podemos tomar todas las aplicaciones dilatadoras como la identidad.

Sea $\{\varepsilon_n\}$ sucesión nula tal que $\mathrm{diam}(H(z,t)) < \varepsilon_n$ para todo $z \in Z$ y todo $t \geq n$. Existe $\{\eta_n\}$ sucesión nula tal que

$$\mathrm{diam}(H(K \times \{t\})) < \varepsilon_n$$

para todo $K \subset Z$ con $\mathrm{diam}(K) < \eta_n$ y todo $t \in [n, n+1]$. Sea G' homótopa a G tal que $\mathrm{diam}(G'(y,t)) < \eta_n$ para todo $y \in Y$ y todo $t \geq n$. Existe $\{\delta_n\}$ sucesión nula tal que

$$\mathrm{diam}(G'(K \times \{t\})) < \eta_n$$

para todo $K \subset Y$ con $\mathrm{diam}(K) < \delta_n$ y todo $t \in [n, n+1]$. Sea F' homótopa a F tal que $\mathrm{diam}(F'(x,t)) < \delta_n$ para todo $x \in X$ y todo $t \geq n$.

Entonces $[G][F] = [G'][F'] = [R_1]$ donde

$$R_1(x,t) = G'(F'(x,t),t)$$

y $[H]([G][F]) = [R]$ donde

$$R(x,t) = H(G'(F'(x,t),t),t).$$

Por otra parte, $[H][G] = [H][G'] = [S_1]$ donde

$$S_1(y,t) = H(G'(y,t),t)$$

y $([H][G])[F] = ([H][G'])[F'] = [S]$ donde

$$S(x,t) = H(G'(F'(x,t),t),t).$$

2.2 MSH ES ISOMORFA A LA CATEGORÍA DE LA FORMA FUERTE

Definición 2.2.1 Sean X e Y espacios métricos compactos contenidos en el cubo de Hilbert Q. Una aplicación fundamental de X a Y es una aplicación continua $f : Q \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow Q$ tal que para cada entorno V de Y en Q existe U entorno de X en Q y existe $t_0 \in \mathbb{R}_+$ tal que $f(U \times [t_0, \infty)) \subset V$.

Dos aplicaciones fundamentales $f, g : Q \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow Q$ de X a Y son homótopas si existe $h : Q \times [0,1] \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow Q$ aplicación fundamental de $X \times [0,1]$ a Y tal que

$$h(x,0,t) = f(x,t), h(x,1,t) = g(x,t)$$

para todo $(x,t) \in Q \times \mathbb{R}_+$.

Teorema 2.2.2 *Si consideramos la clase de los espacios métricos compactos y las clases de homotopía de aplicaciones fundamentales entre ellos con la composición usual se obtiene una categoría que se denota SSh.*

Teorema 2.2.3 *SSh y MSh son categorías isomorfas.*

Dem. Sea $f : Q \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow Q$ aplicación fundamental de X a Y. Vamos a ver que existe una aplicación multivaluada fina $F : X \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow Y$ asintótica a f, ésto es, tal que para todo $\varepsilon > 0$ existe $t_0 \in \mathbb{R}_+$ tal que $d(F(x,t), f(x,t)) < \varepsilon$ para todo $x \in X$ y todo $t \geq t_0$.

Sea $\varepsilon_0 > \varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \cdots$ sucesión nula tal que $f(x,t) \in \bar{B}_{\varepsilon_n}(Y)$ (la bola cerrada en Q) para todo $x \in X$, para todo $t \geq n$, para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Definimos entonces $F : X \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow Y$ dada por

$$F(x,t) = \begin{cases} \bar{B}_{\varepsilon_0}(f(x,t)) \cap Y & \text{si } t \in [0,1] \\ \bar{B}_{\varepsilon_n}(f(x,t)) \cap Y & \text{si } t \in (n, n+1]. \end{cases}$$

Es fácil ver que F es una aplicación multivaluada fina y como

$$d(F(x,t), f(x,t)) \leq \varepsilon_n$$

para todo $x \in X$ y todo $t > n$, se tiene que f es asintótica a F.

Supongamos ahora que $g : Q \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow Q$ es una aplicación fundamental de X a Y homótopa a f. Sea $G : X \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow Y$ una aplicación multivaluada fina asintótica a g. Vamos a ver que F y G son homótopas.

Como f y g son homótopas, existe $h : Q \times [0,1] \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow Q$ aplicación fundamental de $X \times [0,1]$ a Y tal que para todo $(x,t) \in Q \times \mathbb{R}_+$

$$h(x,0,t) = f(x,t), h(x,1,t) = g(x,t).$$

Sea $H : X \times [0,1] \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow Y$ aplicación multivaluada fina asintótica a h y sean

$$H_0 = H|_{X \times \{0\} \times \mathbb{R}_+}, H_1 = H|_{X \times \{1\} \times \mathbb{R}_+}$$

tales que H_0 y H_1 son homótopas. Por otra parte,

$$d(F(x,t), H_0(x,t)) \leq d(F(x,t), f(x,t)) + d(f(x,t), H_0(x,t))$$

para todo $(x,t) \in X \times \mathbb{R}_+$, y como F y f son asintóticas y h y H también, entonces F y H_0 son asintóticas y por tanto, por el Lema 2.1.3, son homótopas. De forma análoga se ve que H_1 y G son homótopas. Por tanto F es homótopa a G.

Hemos probado que existe una aplicación bien definida

$$\Omega_{(X,Y)} : SSh(X,Y) \longrightarrow MSh(X,Y)$$

tal que $\Omega_{(X,Y)}([f]) = [F]$ con f asintótica a F.

Para ver que $\Omega_{(X,Y)}$ es suprayectiva, consideramos una aplicación multivaluada fina $F : X \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow Y$ y escogemos $\varepsilon_0 > \varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \cdots$ sucesión nula tal que $\operatorname{diam}(F(x,t)) < \varepsilon_n$ para todo $x \in X$, para todo $t \geq n$, para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Entonces para cada $x \in X$ y cada $t \in [n, n+1]$, $n \in \mathbb{N}$, existe $U^{(x,t)}$ entorno abierto de (x,t) contenido en $X \times (n-1, n+2)$ tal que

$$F(U^{(x,t)}) \subset B_{\delta_{(x,t)}}(F(x,t))$$

donde

$$\delta_{(x,t)} = \frac{\varepsilon_n - \operatorname{diam}(F(x,t))}{2}.$$

Luego $\operatorname{diam}(F(U^{(x,t)})) < \varepsilon_n$. Ahora, por la compacidad de $X \times [n, n+1]$ para todo $n \in \mathbb{N}$, podemos definir una sucesión de conjuntos abiertos $U_2, U_3, U_4, \ldots$ y una sucesión creciente $k_1 = 1 < k_2 < k_3 < k_4 < \cdots$ de números enteros tal que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$X \times [n, n+1] \subset U_{k_n+1} \cup U_{k_n+2} \cup \cdots \cup U_{k_{n+1}} \subset X \times (n-1, n+2)$$

y tal que $\operatorname{diam}(F(U_k)) < \varepsilon_n$ para todo $k > k_n$.

Consideramos $U_1 = X \times [0,1)$ y definimos para cada $n \in \mathbb{N}$ una aplicación $\delta_n : X \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\delta_n(x,t) = \frac{d((x,t),(X \times \mathbb{R}_+) - U_n)}{\sum_k d((x,t),(X \times \mathbb{R}_+) - U_k)}.$$

La suma en el denominador es finita, pues $d((x,t),(X \times \mathbb{R}_+) - U_k) \neq 0$ si y solo si $(x,t) \in U_k$.

Escogemos ahora para cada $n \in \mathbb{N}$ un punto $y_n \in F(U_n)$ y definimos una aplicación $f_0 : X \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow Q$ tal que

$$f_0(x,t) = \sum \delta_n(x,t) y_n.$$

La suma vuelve a ser finita y como $\sum \delta_n(x,t) = 1$ y Q es convexo, f_0 es una función continua bien definida. Además, para cada $(x,t) \in X \times [n, n+1]$ con $n \geq 2$, si consideramos la familia de abiertos

$$\{U_{i_1}, \ldots, U_{i_r}\} \subset \{U_{k_{n-1}+1}, \ldots, U_{k_n}, U_{k_n+1}, \ldots, U_{k_{n+1}}, U_{k_{n+1}+1}, \ldots, U_{k_{n+2}}\}$$

a los que (x,t) pertenece, se tiene

$$f_0(x,t) = \delta_{i_1}(x,t)y_{i_1} + \cdots + \delta_{i_r}(x,t)y_{i_r} \text{ con } \delta_{i_1}(x,t) + \cdots + \delta_{i_r}(x,t) = 1$$

y si $y \in F(x,t)$ se tiene

$$\begin{aligned} d(f_0(x,t), y) &= \| \sum_{k=1}^{r} \delta_{i_k}(x,t)y_{i_k} - \sum_{k=1}^{r} \delta_{i_k}(x,t)y \| = \| \sum_{k=1}^{r} \delta_{i_k}(x,t)(y_{i_k} - y) \| \\ &= \sum_{k=1}^{r} \delta_{i_k}(x,t) \| y_{i_k} - y \| \leq \max\{\| y_{i_k} - y \|\} \\ &\leq \max\{\mathrm{diam}(F(U_{i_k}))\} < \varepsilon_{n-1}. \end{aligned}$$

En las expresiones anteriores hemos utilizado la norma $\| \ \|$ del espacio de Hilbert l_2 que contiene a Q.

Así, hemos probado que para todo $\varepsilon > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que para todo $x \in X$ y todo $t \geq n$ se tiene $d(f_0(x,t), F(x,t)) < \varepsilon$. Finalmente, esta última condición implica que para todo entorno V de Y en Q existe $t_0 \in \mathbb{R}_+$ tal que $f_0(X \times [t_0, \infty)) \subset V$. En efecto, dado V entorno de Y en Q, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(Y) \subset V$, y dado este ε, existe $t_0 \in \mathbb{R}_+$ tal que $d(F(x,t), f_0(x,t)) < \varepsilon$, para todo $x \in X$ y todo $t \geq t_0$. Entonces $f_0(x,t) \subset B_\varepsilon(Y) \subset V$, para todo $x \in X$ y todo $t \geq t_0$.

Finalmente vamos a ver, aplicando repetidamente el teorema de extensión de homotopía (ver [57]), que f_0 se puede extender a una aplicación fundamental $f : Q \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow Q$ de X a Y que por lo anterior sera asintótica a F.

Consideremos $Q = V_0 \supset V_1 \supset V_2 \supset \cdots$ sucesión básica de entornos ANR de Y en Q (ésto es, tal que para todo entorno V de Y en Q existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $V_n \subset V$) y consideremos $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots$ tal que $f_0(X \times [t_n, \infty)) \subset V_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Tenemos entonces

$$f_0|_{X \times [0,t_1]} : X \times [0, t_1] \longrightarrow Q$$

que, por ser Q $\in$AR, se extiende a

$$f_1 : Q \times [0, t_1] \longrightarrow Q.$$

Ahora, $f_1(X \times \{t_1\}) = f_0(X \times \{t_1\}) \subset V_1$, luego existe U_1 entorno cerrado de X en Q tal que $f_1(U_1 \times \{t_1\}) \subset V_1$. Pero entonces tenemos

$$f_0|_{X\times[t_1,t_2]} : X \times [t_1, t_2] \longrightarrow V_1 \text{ y } f_1|_{U_1\times\{t_1\}} : U_1 \times \{t_1\} \longrightarrow V_1$$

que coinciden en la intersección, y como V_1 $\in$ANR, por el teorema de extensión de homotopía, existe $f_{2,1} : U_1 \times [t_1, t_2] \longrightarrow V_1$, extensión común de ambas. Además, de

$$f_{2,1} : U_1 \times [t_1, t_2] \longrightarrow V_1 \subset Q \text{ y } f_1 : Q \times \{t_1\} \longrightarrow Q$$

obtenemos, por ser Q $\in$AR, $f_{2,2} : Q\times[t_1, t_2] \longrightarrow Q$, extensión de ambas. Pegando f_1 y $f_{2,2}$ obtenemos $f_2 : Q \times [0, t_2] \longrightarrow Q$ extensión de $f_0|_{X\times[0,t_2]}$ tal que

$$f_2(U_1 \times [t_1, t_2]) \subset V_1.$$

Supongamos que hemos obtenido $f_n : Q \times [0, t_n] \longrightarrow Q$, extensión de $f_0|_{X\times[0,t_n]}$ y una familia $U_1 \supset U_2 \supset \ldots \supset U_{n-1}$ de entornos cerrados de X en Q tal que

$$f_n(U_1 \times [t_1, t_n]) \subset V_1, f_n(U_2 \times [t_2, t_n]) \subset V_2, \ldots, f_n(U_{n-1} \times [t_{n-1}, t_n]) \subset V_{n-1}.$$

Entonces, como $f_n(X \times \{t_n\}) = f_0(X \times \{t_n\}) \subset V_n$, existe $U_n \subset U_{n-1}$ entorno cerrado de X tal que $f_n(U_n \times \{t_n\}) \subset V_n$. Tenemos entonces

$$f_0|_{X\times[t_n,t_{n+1}]} : X \times [t_n, t_{n+1}] \longrightarrow V_n \text{ y } f_n|_{U_n\times\{t_n\}} : U_n \times \{t_n\} \longrightarrow V_n,$$

con V_n $\in$ANR. Luego por el teorema de extensión de homotopía, existe

$$f_{n+1,1} : U_n \times [t_n, t_{n+1}] \longrightarrow V_n,$$

extensión de ambas. Ahora, de

$$f_{n+1,1} : U_n \times [t_n, t_{n+1}] \longrightarrow V_n \subset V_{n-1} \text{ y } f_n|_{U_{n-1}\times\{t_n\}} : U_{n-1} \times \{t_n\} \longrightarrow V_{n-1},$$

como $V_{n-1} \in$ANR, obtenemos por el teorema de extensión de homotopía

$$f_{n+1,2} : U_{n-1} \times [t_n, t_{n+1}] \longrightarrow V_{n-1},$$

extensión de ambas. De forma análoga obtenemos

$$f_{n+1,3} : U_{n-2} \times [t_n, t_{n+1}] \longrightarrow V_{n-2}.$$

Continuando este proceso, obtenemos $f_{n+1,n+1} : Q \times [t_n, t_{n+1}] \longrightarrow Q$ tal que

$$f_{n+1,n+1}|_{Q\times\{t_n\}} = f_n|_{Q\times\{t_n\}}.$$

Pegando f_n y $f_{n+1,n+1}$, obtenemos $f_{n+1} : Q \times [0, t_{n+1}] \longrightarrow Q$, extensión de $f_0|_{X\times[0,t_{n+1}]}$ tal que

$$f_{n+1}(U_1 \times [t_1, t_{n+1}]) \subset V_1, f_{n+1}(U_2 \times [t_2, t_{n+1}]) \subset V_2, \ldots, f_{n+1}(U_n \times [t_n, t_{n+1}]) \subset V_n.$$

Así, tenemos definida por inducción $f : Q \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow Q$ extensión continua de f_0 dada por $f(x,t) = f_n(x,t)$ si $t \leq t_n$, que es aplicación fundamental pues para cada entorno V de Y en Q existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $V_n \subset V$ y, por tanto, existe U_n entorno de X en Q y existe $t_n \in \mathbb{R}_+$ tal que $f(U_n \times [t_n, \infty)) \subset V_n \subset V$. Además, es asintótica a F por serlo f_0. Esto prueba que $\Omega_{(X,Y)}$ es suprayectiva. Vamos a ver que también es inyectiva.

Sean $F, G : X \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow Y$ aplicaciones multivaluadas finas homótopas y sean $f, g : Q \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow Q$ aplicaciones fundamentales de X a Y asintóticas a F y G respectivamente. Como F y G son homótopas, existe $H : X \times [0,1] \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow Y$ aplicación multivaluada fina tal que para todo $(x,t) \in X \times \mathbb{R}_+$

$$H(x,0,t) = F(x,t), H(x,1,t) = G(x,t).$$

Existe $h' : Q \times [0,1] \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow Q$ aplicación fundamental asintótica a H y si definimos $h'_0 = h'|_{Q\times\{0\}\times\mathbb{R}_+}$ y $h'_1 = h'|_{Q\times\{1\}\times\mathbb{R}_+}$, entonces

$$d(f(x,t), h'_0(x,t)) \leq d(f(x,t), F(x,t)) + \mathrm{diam}(F(x,t)) + d(F(x,t), h'_0(x,t))$$

para todo $(x,t) \in X \times \mathbb{R}_+$, y como f y F son asintóticas, H y h' también y F es multivaluada fina, entonces f y h'_0 son asintóticas en X. De forma análoga se ve que h'_1 y g son asintóticas en X.

Como f y h'_0 son asintóticas en X y Q es convexo, existe una aplicación continua $h'' : X \times [0,1] \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow Q$ tal que

$$h''(x,0,t) = f(x,t), h''(x,1,t) = h'_0(x,t)$$

para todo $(x,t) \in X \times \mathbb{R}_+$ y tal que para todo entorno V de Y en Q existe $t_0 \in \mathbb{R}_+$ tal que $h''(X \times [t_0, \infty)) \subset V$ y, como h'_1 y g son también asintóticas, existe $h''' : X \times [0,1] \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow Q$ aplicación continua tal que

$$h'''(x,0,t) = h'_1(x,t), h'''(x,1,t) = g(x,t)$$

para todo $(x,t) \in X \times \mathbb{R}_+$ y tal que para todo entorno V de Y en Q existe $t_0 \in \mathbb{R}_+$ tal que $h'''(X \times [t_0, \infty)) \subset V$. Luego existe una aplicación continua $h : X \times [0,1] \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow Q$ tal que

$$h(x,0,t) = f(x,t), h(x,1,t) = g(x,t)$$

para todo $(x,t) \in X \times \mathbb{R}_+$ y tal que para todo entorno V de Y en Q existe $t_0 \in \mathbb{R}_+$ tal que $h(X \times [t_0, \infty)) \subset V$.

Finalmente vamos a ver, aplicando repetidamente el teorema de extensión de homotopía, que h se puede extender a una aplicación fundamental

$$\tilde{h} : Q \times [0,1] \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow Q$$

de $X \times [0,1]$ a Y tal que

$$\tilde{h}(x,0,t) = f(x,t), \tilde{h}(x,1,t) = g(x,t),$$

para todo $(x,t) \in Q \times \mathbb{R}_+$.

Pegando f, g y h, obtenemos

$$h_0 : (Q \times \{0,1\} \cup X \times [0,1]) \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow Q.$$

Consideremos $Q = V_0 \supset V_1 \supset V_2 \supset \cdots$ sucesión básica de entornos ANR de Y en Q, y consideremos $Q = U_0 \supset U'_1 \supset U'_2 \supset \cdots$ familia de entornos cerrados de X en Q y $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots$ sucesión creciente, tales que $h_0((U'_n \times \{0,1\} \cup X \times [0,1]) \times [t_n, \infty)) \subset V_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Tenemos entonces

$$h_0|_{(Q\times\{0,1\}\cup X\times[0,1])\times[0,t_1]} : (Q \times \{0,1\} \cup X \times [0,1]) \times [0,t_1] \longrightarrow Q$$

y como $Q \in$AR, se extiende a

$$h_1 : Q \times [0,1] \times [0,t_1] \longrightarrow Q$$

tal que $h_1|_{(Q\times\{0,1\}\cup X\times[0,1])\times[0,t_1]} = h_0$.

Ahora, $h_1(X\times[0,1]\times\{t_1\}) = h_0(X\times[0,1]\times\{t_1\}) \subset V_1$, luego existe U_1 entorno cerrado de X contenido en U_1' tal que $h_1(U_1 \times [0,1] \times \{t_1\}) \subset V_1$. Por otra parte tenemos $h_0((U_1 \times \{0,1\} \cup X \times [0,1]) \times [t_1,t_2]) \subset V_1$. Como ambas coinciden en la intersección, podemos pegarlas y obtenemos una aplicación continua

$$U_1 \times [0,1] \times \{t_1\} \cup (U_1 \times \{0,1\} \cup X \times [0,1]) \times [t_1,t_2] \longrightarrow V_1$$

donde $U_1 \times \{0,1\} \cup X \times [0,1]$ es cerrado de $U_1 \times [0,1]$ y $V_1 \in$ANR, y por tanto, por el teorema de extensión de homotopía se extiende a

$$h_{21} : U_1 \times [0,1] \times [t_1,t_2] \longrightarrow V_1.$$

Como $h_0|_{(Q\times\{0,1\}\cup X\times[0,1])\times[t_1,t_2]}$, $h_1|_{Q\times[0,1]\times\{t_1\}}$ y h_{21} coinciden en todas las intersecciones, podemos pegarlas y obtenemos una aplicación continua

$$U_1 \times [0,1] \times [t_1,t_2] \cup Q \times \{0,1\} \times [t_1,t_2] \cup Q \times [0,1] \times \{t_1\} \longrightarrow Q$$

que, como $Q \in$AR, podemos extender a

$$h_2 : Q \times [0,1] \times [t_1,t_2] \longrightarrow Q,$$

tal que

$$h_2|_{(Q\times\{0,1\}\cup X\times[0,1])\times[t_1,t_2]} = h_0|_{(Q\times\{0,1\}\cup X\times[0,1])\times[t_1,t_2]}$$
$$h_2|_{Q\times[0,1]\times\{t_1\}} = h_1|_{Q\times[0,1]\times\{t_1\}}$$
$$h_2(U_1 \times [0,1] \times [t_1,t_2]) \subset V_1.$$

Supongamos que para todo $k \in \{1,\ldots,n\}$ tenemos

$$h_k : Q \times [0,1] \times [t_{k-1},t_k] \longrightarrow Q$$

y tenemos $U_0 = Q \supset U_1 \supset U_2 \supset \ldots \supset U_{n-1}$ entornos cerrados de X en Q tales que $U_k \subset U_k'$ para todo $k \in \{1,\ldots,n-1\}$ y tales que

$$h_k|_{(Q\times\{0,1\}\cup X\times[0,1])\times[t_{k-1},t_k]} = h_0|_{(Q\times\{0,1\}\cup X\times[0,1])\times[t_{k-1},t_k]},$$

$$h_k|_{Q\times[0,1]\times\{t_{k-1}\}} = h_{k-1}|_{Q\times[0,1]\times\{t_{k-1}\}},$$

$$h_k(U_1 \times [0,1] \times [t_{k-1}, t_k]) \subset V_1, \ldots, h_k(U_{k-1} \times [0,1] \times [t_{k-1}, t_k]) \subset V_{k-1}.$$

Entonces, $h_n(X \times [0,1] \times \{t_n\}) = h_0(X \times [0,1] \times \{t_n\}) \subset V_n$, luego existe U_n entorno cerrado de X en $U_{n-1} \cap U'_n$ tal que $h_n(U_n \times [0,1] \times \{t_n\}) \subset V_n$. Por otra parte $h_0((U_n \times \{0,1\} \cup X \times [0,1]) \times [t_n, t_{n+1}]) \subset V_n$. Como ambas aplicaciones coinciden en la intersección, podemos pegarlas y obtenemos una aplicación continua

$$U_n \times [0,1] \times \{t_n\} \cup (U_n \times \{0,1\} \cup X \times [0,1]) \times [t_n, t_{n+1}] \longrightarrow V_n$$

donde $U_n \times \{0,1\} \cup X \times [0,1]$ es cerrado de $U_n \times [0,1]$ y $V_n \in$ANR y por tanto, por el teorema de extensión de homotopía, se extiende a

$$h_{n+1,1} : U_n \times [0,1] \times [t_n, t_{n+1}] \longrightarrow V_n.$$

Como $h_0|_{(U_{n-1}\times\{0,1\}\cup X\times[0,1])\times[t_n,t_{n+1}]}$, $h_n|_{U_{n-1}\times[0,1]\times\{t_n\}}$ y $h_{n+1,1}$ coinciden en todas las intersecciones, podemos pegarlas y obtenemos una aplicación continua

$$U_n \times [0,1] \times [t_n, t_{n+1}] \cup U_{n-1} \times \{0,1\} \times [t_n, t_{n+1}] \cup U_{n-1} \times [0,1] \times \{t_n\} \longrightarrow V_{n-1}$$

donde $U_n \times [0,1] \cup U_{n-1} \times \{0,1\}$ es cerrado en $U_{n-1} \times [0,1]$ y $V_{n-1} \in$ANR y por tanto, por el teorema de extensión de homotopía, se extiende a

$$h_{n+1,2} : U_{n-1} \times [0,1] \times [t_n, t_{n+1}] \longrightarrow V_{n-1}.$$

Continuando este proceso, llegamos hasta

$$h_{n+1,n} : U_1 \times [0,1] \times [t_n, t_{n+1}] \longrightarrow V_1.$$

Como $h_0|_{Q\times\{0,1\}\times[t_n,t_{n+1}]\cup X\times[0,1]\times\{t_n\}}$, $h_n|_{Q\times[0,1]\times\{t_n\}}$ y $h_{n+1,n}$ coinciden en todas las intersecciones, podemos pegarlas y obtenemos una aplicación continua

$$U_1 \times [0,1] \times [t_n, t_{n+1}] \cup Q \times \{0,1\} \times [t_n, t_{n+1}] \cup Q \times [0,1] \times \{t_n\} \longrightarrow Q$$

que, como $Q \in$AR, podemos extender a

$$h_{n+1} : Q \times [0,1] \times [t_n, t_{n+1}] \longrightarrow Q$$

tal que

$$h_{n+1}|_{(Q\times\{0,1\}\cup X\times[0,1])\times[t_n,t_{n+1}]} = h_0|_{(Q\times\{0,1\}\cup X\times[0,1])\times[t_n,t_{n+1}]}$$

$$h_{n+1}|_{Q\times[0,1]\times\{t_n\}} = h_n|_{Q\times[0,1]\times\{t_n\}}$$

$$h_{n+1}(U_1 \times [0,1] \times [t_n, t_{n+1}]) \subset V_1, \dots, h_{n+1}(U_n \times [0,1] \times [t_n, t_{n+1}]) \subset V_n.$$

Finalmente, como $h_{n+1}|_{Q\times[0,1]\times\{t_n\}} = h_n|_{Q\times[0,1]\times\{t_n\}}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, la función

$$\tilde{h} : Q \times [0,1] \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow Q$$

dada por $\tilde{h}(x,s,t) = h_n(x,s,t)$, si $t \in [t_{n-1}, t_n]$ es una aplicación continua bien definida tal que

$$\tilde{h}(x,0,t) = f(x,t), \tilde{h}(x,1,t) = g(x,t)$$

para todo $(x,t) \in Q \times \mathbb{R}_+$ y tal que para todo entorno V de Y en Q existe U entorno de X en Q y existe $t \in \mathbb{R}_+$ tal que $\tilde{h}(U \times [t,\infty) \times [0,1]) \subset V$. Por tanto f y g son homótopas. Esto prueba la inyectividad de $\Omega_{(X,Y)}$.

Luego $\Omega_{(X,Y)}$ es una biyección entre $SSh(X,Y)$ y $MSh(X,Y)$. Por otra parte, es evidente que $\Omega_{(X,X)}$ manda la clase de la identidad en la clase de la identidad para todo espacio métrico compacto X. Entonces para probar que SSh y MSh son categorías isomorfas solo falta ver que para todo par X, Y de espacios métricos compactos, $\Omega_{(X,Y)}$ conserva la composición, ésto es

$$\Omega_{(X,Z)}([g][f]) = \Omega_{(Y,Z)}([g])\Omega_{(X,Y)}([f]),$$

para todo par de aplicaciones fundamentales $f : Q \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow Q$ de X a Y y $g : Q \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow Q$ de Y a Z.

Sean $F : X \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow Y$ y $G : Y \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow Z$ aplicaciones multivaluadas finas asintóticas a f y g respectivamente. Sea $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \cdots > \varepsilon_n > \cdots$ sucesión nula tal que

$$d(g(y,t), G(y,t)) < \varepsilon_n,$$

para todo $y \in Y$ y todo $t \geq n$. Sea $\eta_1 > \eta_2 > \cdots > \eta_n > \cdots$ tal que

$$d(g(y,t), g(y',t)) < \varepsilon_n,$$

para todo par de puntos $y, y' \in Q$ con $d(y, y') < \eta_n$ y todo $t \in [n, n+1]$. Sea $\alpha : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ aplicación dilatadora asociada al par (F, G) verificando que $\mathrm{diam}(F(x, \alpha(t))) < \eta_n$ para todo $t \geq n$.

Por el argumento dado al principio de la demostración, existe una aplicación fundamental f' tal que $d(F(x, \alpha(t)), f'(x, t)) < \eta_n$ para todo $x \in X$ y todo $t \geq n$. Es fácil ver que $\Omega_{(X,Y)}([f']) = [F]$ y por tanto $[f] = [f']$. Vamos a ver que $\Omega_{(X,Z)}([g][f']) = [G][F]$.

Para todo $(x, t) \in X \times [n, n+1]$, como $d(F(x, \alpha(t)), f'(x, t)) < \eta_n$, existe $y \in F(x, \alpha(t))$ con $d(y, f'(x, t)) < \eta_n$ y por tanto $d(g(y, t), g(f'(x, t), t)) < \varepsilon_n$. Por otra parte, $d(G(y, t), g(y, t)) < \varepsilon_n$ y como $y \in F(x, \alpha(t))$ entonces se tiene que $d(g(y, t), G(F(x, \alpha(t)), t)) < \varepsilon_n$. Luego

$$d(g(f'(x, t), t), G(F(x, \alpha(t)), t)) < 2\varepsilon_n,$$

para todo $t \geq n$. Como consecuencia,

$$\Omega_{(X,Z)}([g][f]) = \Omega_{(X,Z)}([g][f']) = [G][F] = \Omega_{(Y,Z)}[g]\Omega_{(X,Y)}[f].$$

Esto completa la demostración del teorema.

Si $f : X \longrightarrow Y$ es una aplicación continua de un subconjunto cerrado X de un espacio métrico compacto X' en un espacio métrico compacto Y, decimos que f es ε-extendible a X' si existe una aplicación multivaluada $F : X' \longrightarrow Y$ ε-fina tal que $F|_X = f$. El siguiente resultado da una caracterización de las inclusiones que inducen isomorfismos en la categoría MSh. La demostración es aplicación de las técnicas desarrolladas en esta sección.

Teorema 2.2.4 *Sea X un subconjunto cerrado de un espacio métrico compacto X'. Entonces la inclusión $i : X \longrightarrow X'$ induce un isomorfismo en la categoría MSh si y solo si para todo $\varepsilon > 0$ y para todo espacio métrico compacto Y, se verifica que para toda aplicación continua $f : X \longrightarrow Y$ existe una ε-extensión $F : X' \longrightarrow Y$ y para toda aplicación continua $g : X' \times \{0,1\} \cup X \times [0,1] \longrightarrow Y$ existe una ε-extensión $G : X' \times [0,1] \longrightarrow Y$.*

2.3 UNA TOPOLOGÍA EN EL CONJUNTO DE APLICACIONES MULTIVALUADAS FINAS ENTRE DOS ESPACIOS MÉTRICOS COMPACTOS

Definición 2.3.1 Sean X e Y espacios métricos compactos y denotemos por $M(X,Y)$ al conjunto de aplicaciones multivaluadas finas de X a Y. Dadas $F,G \in M(X,Y)$ y dado $\varepsilon > 0$, decimos que $G \in B_\varepsilon(F)$ si existe una sucesión $\{\varepsilon_n\}$ tal que $\sum \frac{\varepsilon_k}{2^k} < \varepsilon$, verificando:
a) Para todo $k \in \mathbb{N}$ y para todo $(x,t) \in X \times [0,k]$ existe $(x',t') \in X \times [0,k]$ con $d((x,t),(x',t')) < \varepsilon_k$ tal que $G(x,t) \subset B_{\varepsilon_k}(F(x',t'))$.
b) Para todo $(x,t) \in X \times \mathbb{R}_+$ existe $(x',t') \in X \times \mathbb{R}_+$ con $d((x,t),(x',t')) < \varepsilon$ tal que $\operatorname{diam}(G(x,t)) < \operatorname{diam}(F(x',t')) + \varepsilon$.

Obsérvese que si $G \in B_\varepsilon(F)$, entonces dado $k \in \mathbb{N}$, si $(x,t) \in X \times [0,k]$ existe $(x',t') \in X \times [0,k]$ tal que $d((x,t),(x',t')) < 2^k\varepsilon$ y $G(x,t) \subset B_{2^k\varepsilon}(F(x',t'))$.

En la siguiente proposición vamos a ver como definir una topología en el conjunto $M(X,Y)$. Si $F \in M(X,Y)$ introducimos la notación

$$\mathcal{B}(F) = \{B_\varepsilon(F) \mid \varepsilon > 0\}.$$

Proposición 2.3.2 *La familia $\{\mathcal{B}(F) \mid F \in M(X,Y)\}$ es un sistema de entornos para el conjunto $M(X,Y)$. El correspondiente espacio topológico, que denotaremos también por $M(X,Y)$, es un invariante topológico.*

Dem. Es evidente que $\mathcal{B}(F) \neq \emptyset$ para todo $F \in M(X,Y)$ y que $F \in B_\varepsilon(F)$ para todo $\varepsilon > 0$. También es inmediato que dados $B_\varepsilon(F), B_{\varepsilon'}(F)$ si tomamos $\delta = \min\{\varepsilon, \varepsilon'\} > 0$ se tiene que $B_\delta(F) \subset B_\varepsilon(F) \cap B_{\varepsilon'}(F)$. Para probar la primera afirmación solo falta ver que si $G \in B_\varepsilon(F)$, entonces existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(G) \subset B_\varepsilon(F)$.

Pero si $G \in B_\varepsilon(F)$ existe $\{\varepsilon_n\}$ tal que $\sum \frac{\varepsilon_k}{2^k} < \varepsilon$ verificando:
a) Para todo $k \in \mathbb{N}$ y para todo $(x,t) \in X \times [0,k]$ existe $(x',t') \in X \times [0,k]$ con $d((x,t),(x',t')) < \varepsilon_k$ tal que $G(x,t) \subset B_{\varepsilon_k}(F(x',t'))$.

b) Para todo $(x,t) \in X \times \mathbb{R}_+$ existe $(x',t') \in X \times \mathbb{R}_+$ con $d((x,t),(x',t')) < \varepsilon$ tal que $\operatorname{diam}(G(x,t)) < \operatorname{diam}(F(x',t')) + \varepsilon$.

Sea $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\operatorname{diam}(G(x,t)) < \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $x \in X$ y todo $t \geq k_0$, y sea $0 < \delta < \min\{\frac{\varepsilon}{2}, \varepsilon - \sum \frac{\varepsilon_k}{2^k}\}$ tal que para todo $(x,t) \in X \times [0,k_0]$ existe $(x',t') \in X \times \mathbb{R}_+$ con $d((x,t),(x',t')) < \varepsilon - \delta$ tal que

$$\operatorname{diam}(G(x,t)) < \operatorname{diam}(F(x',t')) + \varepsilon - \delta.$$

Sea $H \in B_\delta(G)$, entonces existe $\{\delta_n\}$ tal que $\sum \frac{\delta_k}{2^k} < \delta$, verificando:
a) Para todo $k \in \mathbb{N}$ y para todo $(x,t) \in X \times [0,k]$ existe $(x',t') \in X \times [0,k]$ con $d((x,t),(x',t')) < \delta_k$ tal que $H(x,t) \subset B_{\delta_k}(G(x',t'))$.
b) Para todo $(x,t) \in X \times \mathbb{R}_+$ existe $(x',t') \in X \times \mathbb{R}_+$ con $d((x,t),(x',t')) < \delta$ tal que $\operatorname{diam}(H(x,t)) < \operatorname{diam}(G(x',t')) + \delta$.

Pero entonces $\{\varepsilon_n + \delta_n\}$ verifica $\sum \frac{\varepsilon_k + \delta_k}{2^k} < \varepsilon$ y además:
a) Para todo $k \in \mathbb{N}$ y para todo $(x,t) \in X \times [0,k]$ existe $(x',t') \in X \times [0,k]$ con $d((x,t),(x',t')) < \delta_k$ tal que

$$H(x,t) \subset B_{\delta_k}(G(x',t'))$$

Por otra parte existe $(x'',t'') \in X \times [0,k]$ tal que $d((x',t'),(x'',t'')) < \varepsilon_k$ y $G(x',t') \subset B_{\varepsilon_k}(F(x'',t''))$. Por tanto $d((x,t),(x'',t'')) < \varepsilon_k + \delta_k$ y

$$H(x,t) \subset B_{\varepsilon_k + \delta_k}(F(x'',t'')).$$

b) Dado $(x,t) \in X \times \mathbb{R}_+$ existe $(x',t') \in X \times \mathbb{R}_+$ con $d((x,t),(x',t')) < \delta$ tal que

$$\operatorname{diam}(H(x,t)) < \operatorname{diam}(G(x',t')) + \delta.$$

Pero si $(x',t') \in [0,k_0]$ existe $(x'',t'') \in X \times \mathbb{R}_+$ con $d((x',t'),(x'',t'')) < \varepsilon - \delta$ y $\operatorname{diam}(G(x',t')) < \operatorname{diam}(F(x'',t'')) + \varepsilon - \delta$. Por tanto $d((x,t),(x'',t'')) < \varepsilon$ y

$$\operatorname{diam}(H(x,t)) < \operatorname{diam}(G(x',t')) + \delta < \operatorname{diam}(F(x'',t'')) + \varepsilon.$$

Y si $(x',t') \in [k_0, \infty)$, $\operatorname{diam}(H(x,t)) < \operatorname{diam}(G(x',t')) + \delta < \frac{\varepsilon}{2} + \delta < \varepsilon$. Esto prueba que $\{\mathcal{B}(F) \mid F \in M(X,Y)\}$ es un sistema de entornos para el conjunto $M(X,Y)$.

Para probar la segunda afirmación, supongamos primero que X' es otro espacio métrico compacto y que $f : X \longrightarrow X'$ es una aplicación continua. Existe una aplicación inducida

$$\gamma_f : M(X', Y) \longrightarrow M(X, Y)$$

definida por $\gamma_f(F)(x,t) = F(f(x),t)$ para todo $(x,t) \in X \times \mathbb{R}_+$. Vamos a ver que si f es un homeomorfismo, entonces γ_f es continua.

Sea $F \in M(X', Y)$ y sea $\varepsilon > 0$. Sea $\Delta > \operatorname{diam}(Y)$ y sea $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{k=k_0+1}^{\infty} \frac{\Delta}{2^k} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Como f^{-1} es continua e Y es compacto, dado ε existe $\delta_1 > 0$ tal que para todo par de puntos $x', y' \in X'$ con $d(x', y') < \delta_1$ se tiene que

$$d(f^{-1}(x'), f^{-1}(y')) < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Sea $\delta > 0$ tal que $2^{k_0}\delta < \min\{\frac{\varepsilon}{4}, \delta_1\}$ y vamos a ver que si $G \in M(X', Y)$ verifica $G \in B_\delta(F)$ entonces $\gamma_f(G) \in B_\varepsilon(\gamma_f(F))$.

Definimos $\{\varepsilon_k\}$, verificando $\sum \frac{\varepsilon_k}{2^k} < \varepsilon$, como

$$\varepsilon_k = \begin{cases} \frac{\varepsilon}{2} & \text{si } 1 \leq k \leq k_0 \\ \Delta & \text{si } k_0 < k. \end{cases}$$

Sea $(x,t) \in X \times [0,k]$ con $k \leq k_0$, entonces $(f(x),t) \in X' \times [0,k]$ y como $G \in B_\delta(F)$, existe $(x'', t') \in X' \times [0,k]$ con $d((f(x),t),(x'',t')) < 2^k\delta$ tal que

$$G(f(x),t) \subset B_{2^k\delta}(F(x'',t')).$$

Además, como $d(f(x), x'')) < 2^k\delta < \delta_1$, si tomamos $x' = f^{-1}(x'') \in X$ se tiene que $d(x,x') < \frac{\varepsilon}{4}$. Por tanto, para todo $(x,t) \in X \times [0,k]$ con $k \leq k_0$, existe $(x',t') \in X \times [0,k]$ con $d((x,t),(x',t')) < d(x,x') + d(t,t') < \frac{\varepsilon}{4} + 2^{k_0}\delta < \frac{\varepsilon}{2}$ tal que

$$\gamma_f G(x,t) = G(f(x),t) \subset B_{2^{k_0}\delta}(F(f(x'),t')) \subset B_{\frac{\varepsilon}{2}}(\gamma_f(F(x',t')).$$

Y si $t > k_0$, entonces $\gamma_f G(x,t) \subset B_\Delta(\gamma_f(F(x,t))$.

Por otra parte, para todo $(x,t) \in X \times \mathbb{R}_+$ existe $(x'',t') \in X' \times \mathbb{R}_+$ tal que $d((f(x),t),(x'',t')) < \delta$ y

$$\operatorname{diam}(G(f(x),t)) < \operatorname{diam}(F(x'',t')) + \delta.$$

Sea $x' = f^{-1}(x'')$. Como $d(f(x),x'') < \delta < \delta_1$, se tiene que $d(x,x') < \frac{\varepsilon}{4}$. Luego $d((x,t),(x',t')) < \frac{\varepsilon}{4} + \delta < \varepsilon$ y

$$\begin{aligned} \operatorname{diam}(\gamma_f G(x,t)) &= \operatorname{diam}(G(f(x),t)) < \operatorname{diam}(F(f(x'),t')) + \delta \\ &< \operatorname{diam}(\gamma_f(F(x',t'))) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Luego $\gamma_f(G) \in B_\varepsilon(\gamma_f(F))$ y γ_f es continua.

Además, $\gamma_f\gamma_{f^{-1}} = \gamma_{f^{-1}}\gamma_f = 1_{M(X,Y)}$ y ésto implica que γ_f es un homeomorfismo. Luego si X, X' e Y son espacios métricos compactos tales que X y X' son homeomorfos, entonces $M(X,Y)$ es homeomorfo a $M(X',Y)$.

De forma análoga, si Y' es otro espacio métrico compacto y $g : Y \longrightarrow Y'$ es una aplicación continua, existe una aplicación inducida

$$\gamma^g : M(X,Y) \longrightarrow M(X,Y')$$

definida por $\gamma^g(F)(x,t) = gF(x,t)$ para todo $(x,t) \in X \times \mathbb{R}_+$. Vamos a ver que γ^g es continua.

Sea $F \in M(X,Y)$ y sea $\varepsilon > 0$. Sea $\Delta > \operatorname{diam}(Y)$ y sea $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{k=k_0+1}^{\infty} \frac{\Delta}{2^k} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Como g es continua e Y es compacto, existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$d(g(y),g(y')) < \frac{\varepsilon}{2}$$

para cualesquiera $y,y' \in Y$ tales que $d(y,y') < \delta_1$.

Sea $\delta > 0$ tal que $2^{k_0}\delta < \min\{\frac{\varepsilon}{2},\delta_1\}$. Vamos a ver que si $G \in B_\delta(F)$ entonces $\gamma^g(G) \in B_\varepsilon(\gamma^g(F))$.

Definimos $\{\varepsilon_k\}$, verificando $\sum \frac{\varepsilon_k}{2^k} < \varepsilon$, como

$$\varepsilon_k = \begin{cases} \frac{\varepsilon}{2} & \text{si } 1 \leq k \leq k_0 \\ \Delta & \text{si } k_0 < k. \end{cases}$$

Sea $(x,t) \in X \times [0,k]$ con $k \leq k_0$, entonces existe $(x',t') \in X \times [0,k]$ con $d((x,t),(x',t')) < 2^{k_0}\delta$ tal que

$$G(x,t) \subset B_{2^k\delta}(F(x',t')).$$

Entonces para todo $y \in G(x,t)$ existe $y' \in F(x',t')$ tal que $d(y,y') < 2^k\delta$ y por tanto $d(g(y),g(y')) < \frac{\varepsilon}{2}$. Luego

$$\gamma^g G(x,t) = g(G(x,t)) \subset B_{\frac{\varepsilon}{2}}(g(F(x',t'))) \subset B_{\frac{\varepsilon}{2}}(\gamma^g F(x',t')).$$

Y si $t > k_0$, entonces $\gamma^g G(x,t) \subset B_\Delta(\gamma^g(F(x,t))$.

Por otra parte, para todo $(x,t) \in X \times [0,k_0]$ existe $(x',t') \in X \times \mathbb{R}_+$ con $d((x,t),(x',t')) < \frac{\varepsilon}{2}$ tal que $\gamma^g G(x,t) \subset B_{\frac{\varepsilon}{2}}(\gamma^g F(x',t'))$ y por tanto

$$\mathrm{diam}(\gamma^g G(x,t)) < \mathrm{diam}(\gamma^g F(x',t')) + \varepsilon.$$

Y si $t \geq k_0$, $\mathrm{diam}(G(x,t)) < \mathrm{diam}((F(x,t))) + \delta < \frac{\delta_1}{2} + \delta < \delta_1$ y por tanto

$$\mathrm{diam}(gG(x,t)) < \varepsilon \leq \mathrm{diam}(gF(x,t)) + \varepsilon.$$

Luego $\gamma^g(G) \in B_\varepsilon(\gamma^g(F))$ y γ^g es continua.

Además, si g es un homeomorfismo, entonces $\gamma^{g^{-1}}\gamma^g = \gamma^g\gamma^{g^{-1}} = 1_{M(X,Y)}$ y ésto implica que γ^g es un homeomorfismo. Luego si X, Y e Y' son espacios métricos compactos tales que Y e Y' son homeomorfos, entonces $M(X,Y)$ es homeomorfo a $M(X,Y')$.

Finalmente, si X, X', Y e Y' son espacios métricos compactos tales que X es homeomorfo a X' e Y es homeomorfo a Y', entonces $M(X,Y)$ es homeomorfo a $M(X',Y')$.

Observación 2.3.3 La condición b) en la definición de los entornos de la topología para $M(X,Y)$ refleja el hecho de que aplicaciones multivaluadas finas cercanas tengan diámetros comparables. La condición a) es una reminiscencia de la topología compacto-abierta en espacios de aplicaciones multivaluadas semicontinuas superiormente entre compactos. Esto puede precisarse del modo siguiente.

Proposición 2.3.4 *Sean X e Y espacios métricos compactos y consideremos el conjunto $\Gamma(X,Y)$ de las aplicaciones multivaluadas semicontinuas superiormente de X a Y. Dadas $F,G \in \Gamma(X,Y)$ y $\varepsilon > 0$, decimos que $G \in B_\varepsilon(F)$ si para todo $x \in X$ existe $x' \in X$ con $d(x,x') < \varepsilon$ tal que $G(x) \subset B_\varepsilon(F(x'))$. Entonces la familia $\{B_\varepsilon(F) \mid F \in \Gamma(X,Y), \varepsilon > 0\}$ define un sistema de entornos que induce exactamente la topología compacto-abierta en $\Gamma(X,Y)$.*

Dem. La demostración de que la familia $\{B_\varepsilon(F) \mid F \in \Gamma(X,Y)$ y $\varepsilon > 0\}$ define un sistema de entornos es más sencilla que en el caso de $M(X,Y)$.

Para probar la equivalencia con la topología compacto-abierta consideramos $F \in \Gamma(X,Y)$ y sea $\langle K_1, V_1\rangle \cap \ldots \cap \langle K_n, V_n\rangle$ entorno de F en la topología compacto-abierta. Entonces, como K_i es compacto, para todo $i \in \{1,\ldots,n\}$, se tiene que $F(K_i)$ es un compacto y como está contenido en V_i existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$B_{2\varepsilon}(F(K_i)) \subset V_i,$$

para todo $i \in \{1,\ldots,n\}$ y existe $0 < \varepsilon' < \varepsilon$ tal que

$$F(B_{\varepsilon'}(K_i)) \subset B_\varepsilon(F(K_i)).$$

Entonces $F \in B_{\varepsilon'}(F) \subset \langle K_1, V_1\rangle \cap \ldots \cap \langle K_n, V_n\rangle$ pues si $G \in B_{\varepsilon'}(F)$, entonces para todo $x \in X$ existe $x' \in X$ con $d(x,x') < \varepsilon'$ tal que $G(x) \subset B_{\varepsilon'}(F(x'))$ y por tanto

$$G(K_i) \subset B_{\varepsilon'}(F(B_{\varepsilon'}(K_i))) \subset B_{\varepsilon'}(B_\varepsilon(F(K_i))) \subset B_{2\varepsilon}(F(K_i)) \subset V_i,$$

para todo $i \in \{1,\ldots,n\}$.

Reciprocamente, dada $F \in \Gamma(X,Y)$ y dado $\varepsilon > 0$, entonces para todo $x \in X$ existe $0 < \varepsilon_x < \varepsilon$ tal que

$$F(\overline{B_{\varepsilon_x}(x)}) \subset B_\varepsilon(F(x)).$$

Sea $\{x_1,\ldots,x_n\}$ tal que $X \subset B_{\varepsilon_{x_1}}(x_1) \cup \ldots \cup B_{\varepsilon_{x_n}}(x_n)$ y consideremos para todo $i \in \{1,\ldots,n\}$

$$K_i = \overline{B_{\varepsilon_{x_i}}(x_i)}, V_i = B_\varepsilon(F(x_i)).$$

Entonces $F \in \langle K_1, V_1\rangle \cap \ldots \cap \langle K_n, V_n\rangle \subset B_\varepsilon(F)$ pues si $G \in \langle K_1, V_1\rangle \cap \ldots \cap \langle K_n, V_n\rangle$ entonces para todo $x \in X$ existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $x \in B_{\varepsilon_{x_i}}(x_i)$ y por tanto $G(x) \subset B_\varepsilon(F(x_i))$ con $d(x, x_i) < \varepsilon_{x_i} < \varepsilon$.

Proposición 2.3.5 *Sean X e Y espacios métricos compactos y consideremos el conjunto $M(X,Y)$ de las aplicaciones multivaluadas finas de X a Y. Dadas $F, G \in M(X,Y)$, dados $K_1, \ldots, K_r$ compactos de $X \times \mathbb{R}_+$ y dado $\varepsilon > 0$, decimos que $G \in N(K_1, \ldots, K_r, \varepsilon)(F)$ si $G(K_i) \subset B_\varepsilon(F(K_i))$ para todo $i \in \{1, \ldots, r\}$, y para todo $(x,t) \in X \times \mathbb{R}_+$ existe $(x', t') \in X \times \mathbb{R}_+$ con $d((x,t),(x',t')) < \varepsilon$ tal que* $\operatorname{diam}(G(x,t)) < \operatorname{diam}(F(x',t')) + \varepsilon$. *Entonces la familia*

$$\{N(K_1, \ldots, K_r, \varepsilon)(F) \mid F \in M(X,Y), K_1, \ldots, K_r \text{ compactos}, \varepsilon > 0\}$$

define un sistema de entornos que induce exactamente la topología definida anteriormente en $M(X,Y)$.

Dem. Es fácil probar que es un sistema de entornos. Vamos a demostrar la equivalencia de las topologías. Sea $F \in M(X,Y)$, y sea $N(K_1, \ldots, K_r, \varepsilon)(F)$ entorno de F en esta topología. Consideremos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$K_1 \cup \ldots \cup K_r \subset X \times [0, n_0].$$

Como $F(K_i) \subset B_{\frac{\varepsilon}{2}}(F(K_i))$ existe $0 < \varepsilon' < \frac{\varepsilon}{2^{n_0+1}}$ tal que

$$F(B_{2^{n_0}\varepsilon'}(K_i)) \subset B_{\frac{\varepsilon}{2}}(F(K_i)).$$

Entonces $F \subset B_{\varepsilon'}(F) \subset N(K_1, \ldots, K_r, \varepsilon)(F)$ pues si $G \in B_{\varepsilon'}(F)$, para todo $(x,t) \in X \times [0, n_0]$ existe $(x', t') \in X \times [0, n_0]$ con $d((x,t),(x',t')) < 2^{n_0}\varepsilon'$ tal que $G(x,t) \subset B_{2^{n_0}\varepsilon'}(F(x',t'))$, luego

$$G(K_i) \subset B_{2^{n_0}\varepsilon'}(F(B_{2^{n_0}\varepsilon'}(K_i))) \subset B_\varepsilon(F(K_i)).$$

Recíprocamente, sea $F : X \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow Y$ multivaluada fina y sea $\varepsilon > 0$. Sea $\Delta > \operatorname{diam}(Y)$ y sea $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{\Delta}{2^{n_0}} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Entonces, para todo $(x,t) \in X \times [0,n_0]$ existe $\varepsilon_{(x,t)} < \frac{\varepsilon}{2}$ tal que

$$F(\overline{B_{\varepsilon_{(x,t)}}(x,t)}) \subset B_{\frac{\varepsilon}{4}}(F(x,t)).$$

Sea $\{(x_1,t_1),\ldots,(x_r,t_r)\}$ tal que

$$X \times [0,n_0] \subset B_{\varepsilon_{(x_1,t_1)}}(x_1,t_1) \cup \ldots \cup B_{\varepsilon_{(x_r,t_r)}}(x_r,t_r)$$

y tal que para todo $n \leq n_0$ y todo $(x,t) \in X \times [0,n]$ existe $(x_i,t_i) \in X \times [0,n]$ tal que $(x,t) \in B_{\varepsilon_{(x_i,t_i)}}(x_i,t_i)$. Consideramos para todo $i \in \{1,\ldots,r\}$

$$K_i = \overline{B_{\varepsilon_{(x_i,t_i)}}(x_i,t_i)}.$$

Entonces $F \subset N(K_1,\ldots,K_r,\frac{\varepsilon}{4})(F) \subset B_\varepsilon(F)$ pues si $G \in N(K_1,\ldots,K_r,\frac{\varepsilon}{4})(F)$ consideramos $\{\varepsilon_n\}$, verificando $\sum \varepsilon_n < \varepsilon$, tal que

$$\varepsilon_n = \begin{cases} \frac{\varepsilon}{2} & \text{si } 1 \leq n \leq n_0 \\ \Delta & \text{si } n_0 < n. \end{cases}$$

Entonces para todo $n \leq n_0$ y todo $(x,t) \in X \times [0,n]$ existe $i \in \{1,\ldots,n\}$ tal que $(x,t) \in B_{\varepsilon_{(x_i,t_i)}}(x_i,t_i)$ y $(x_i,t_i) \in [0,n]$ y por tanto

$$\begin{aligned} G(x,t) &\subset G(\overline{B_{\varepsilon_{(x_i,t_i)}}(x_i,t_i)}) \subset B_{\frac{\varepsilon}{4}}(F(\overline{B_{\varepsilon_{(x_i,t_i)}}(x_i,t_i)})) \subset B_{\frac{\varepsilon}{4}}(B_{\frac{\varepsilon}{4}}(F(x_i,t_i))) \\ &\subset B_{\frac{\varepsilon}{2}}(F(x_i,t_i)). \end{aligned}$$

con $d((x,t),(x_i,t_i)) < \varepsilon_{(x_i,t_i)} < \frac{\varepsilon}{2}$. Y para todo $(x,t) \in [n_0,\infty)$ se tiene

$$G(x,t) \subset B_\Delta(F(x,t)).$$

El siguiente teorema es un resultado fundamental en esta sección. Tiene que ver con propiedades de tipo exponencial en el espacio $M(X,Y)$ y los principales resultados de esta sección y la siguiente son consecuencia de él.

Teorema 2.3.6 *Sean X, Y y Z espacios métricos compactos y consideremos una aplicación multivaluada fina $F : X \times Z \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow Y$. Entonces, la función $F' : Z \longrightarrow M(X,Y)$ definida por $F'(z)(x,t) = F(x,z,t)$ es continua. Recíprocamente, si $F' : Z \longrightarrow M(X,Y)$ es continua, entonces la aplicación asociada*

$F : X \times Z \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow Y$ definida por $F(x,z,t) = F'(z)(x,t)$ es una aplicación multivaluada fina. Por tanto, existe una biyección natural entre los conjuntos $C(Z, M(X,Y))$ y $M(X \times Z, Y)$, donde $C(Z, M(X,Y))$ representa el conjunto de aplicaciones continuas de Z a $M(X,Y)$.

Dem. Sea $z_0 \in Z$. Vamos a ver que si $F : X \times Z \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow Y$ es una aplicación multivaluada fina entonces F' es continua en z_0. Sea $\varepsilon > 0$, sea $\Delta > \operatorname{diam}(Y)$ y sea $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{k=k_0+1}^{\infty} \frac{\Delta}{2^k} < \frac{\varepsilon}{2},$$

y tal que $\operatorname{diam}(F(x,z,t)) < \varepsilon$ para todo $(x,z,t) \in X \times Z \times [k_0, \infty)$. Por otra parte, para todo $(x,t) \in X \times [0,k_0]$, existe $0 < \delta_{(x,t)} < \frac{\varepsilon}{2}$ tal que

$$F(B_{\delta_{(x,t)}}(x, z_0, t)) \subset B_{\frac{\varepsilon}{2}}(F(x, z_0, t)),$$

y por la compacidad de $X \times \{z_0\} \times [0,k_0]$, podemos encontrar una familia finita de puntos $(x_1,t_1), \ldots, (x_n,t_n)$ y $\delta > 0$ tales que

$$X \times B_\delta(z_0) \times [0,k_0] \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_{\delta_{(x_i,t_i)}}(x_i, z_0, t_i)$$

y tal que para todo $k \leq k_0$ y todo $(x,t) \in X \times [0,k]$ existe $(x_i,t_i) \in X \times [0,k]$ tal que $(x,t) \in B_{\delta_{(x_i,t_i)}}(x_i,t_i)$. Luego, para todo $(x,z,t) \in X \times B_\delta(z_0) \times [0,k]$ con $k \leq k_0$, existe $(x', z_0, t') \in X \times \{z_0\} \times [0,k]$ con $d((x,z,t),(x',z_0,t')) < \frac{\varepsilon}{2}$ tal que

$$F(x,z,t) \subset B_{\frac{\varepsilon}{2}}(F(x', z_0, t')).$$

Definimos entonces $\{\varepsilon_k\}$, verificando $\sum \frac{\varepsilon_k}{2^k} < \varepsilon$, del modo siguiente

$$\varepsilon_k = \begin{cases} \frac{\varepsilon}{2} & \text{si } 1 \leq k \leq k_0 \\ \Delta & \text{si } k_0 < k. \end{cases}$$

Sea $z \in Z$ tal que $d(z,z_0) < \delta$. Entonces para todo $(x,t) \in X \times [0,k]$ con $k \leq k_0$, existe $(x',t') \in X \times [0,k]$ con $d((x,t),(x',t')) < \varepsilon_k$ tal que

$$F'(z)(x,t) \subset B_{\varepsilon_k}(F'(z_0)(x',t')).$$

Y si $(x,t) \in X \times [0,k]$ con $k \geq k_0$ entonces $F'(z)(x,t) \subset B_\Delta(F'(z_0)(x,t))$. Por otra parte, para todo $(x,t) \in X \times [0,k_0]$ existe $(x',t') \in X \times \mathbb{R}_+$ con

$d((x,t),(x',t')) < \varepsilon$ tal que

$$\operatorname{diam}(F'(z)(x,t)) < \operatorname{diam}(F'(z_0)(x',t')) + \varepsilon.$$

Y para todo $(x,t) \in X \times [k_0, \infty)$, se tiene

$$\operatorname{diam}(F'(z)(x,t)) < \varepsilon \leq \operatorname{diam}(F'(z_0)(x,t)) + \varepsilon.$$

Por tanto $F'(z) \in B_\varepsilon(F'(z_0))$ y ésto prueba la continuidad de F' en z_0.

Para probar el recíproco, consideramos $F' : Z \longrightarrow M(X,Y)$ continua y sea $F : X \times Z \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow Y$ su aplicación asociada. Vamos a ver primero que F es semicontinua superiormente. Sea $(x_0, z_0, t_0) \in X \times Z \times \mathbb{R}_+$ y sea $\varepsilon > 0$. Como $F'(z_0)$ es semicontinua superiormente en (x_0, t_0), existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$F'(z_0)(B_{\delta_1}(x_0,t_0)) \subset B_{\frac{\varepsilon}{2}}(F(x_0,z_0,t_0)).$$

Sea $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $(t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1) \subset [0, k_0]$. Como F' es continua en z_0, existe $\delta_2 < \min\{\frac{\delta_1}{2}, \varepsilon\}$ verificando que $F'(z) \in B_{\frac{\delta_1}{2^{k_0+1}}}(F'(z_0))$ para todo $z \in Z$ con $d(z,z_0) < \delta_2$. Por tanto para todo $(x,t) \in X \times [0,k_0]$ existe $(x',t') \in B_{\frac{\delta_1}{2}}(x,t)$ tal que $F(x,z,t) \subset B_{\frac{\delta_1}{2}}(F(x',z_0,t'))$. En particular, para todo $(x,z,t) \in X \times Z \times \mathbb{R}_+$ con $d((x,z,t),(x_0,z_0,t_0)) < \delta_2$ existe $(x',t') \in B_{\frac{\delta_1}{2}}(x,t)$ tal que

$$F(x,z,t) \subset B_{\frac{\delta_1}{2}}(F(x',z_0,t')),$$

y como $d((x',t'),(x_0,t_0)) < \frac{\delta_1}{2} + \delta_2 < \delta_1$ es $F(x',z_0,t') \subset B_{\frac{\varepsilon}{2}}(F(x_0,z_0,t_0))$. Por tanto

$$F(x,z,t) \subset B_{\frac{\delta_1}{2}}(F(x',z_0,t')) \subset B_{\frac{\delta_1}{2}+\frac{\varepsilon}{2}}(F(x_0,z_0,t_0)) \subset B_\varepsilon(F(x_0,z_0,t_0))$$

y F es semicontinua superiormente en (x_0,z_0,t_0).

Vamos a ver ahora que F es multivaluada fina. Sea $\varepsilon > 0$, entonces para todo $z \in Z$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $z' \in Z$ con $d(z,z') < \delta$ se tiene

$$F'(z') \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(F'(z)).$$

Por la compacidad de Z existe una familia finita de puntos $z_1, z_2, \ldots, z_n \in Z$ tal que para todo $z \in Z$ existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ con $F'(z) \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(F'(z_i))$ y de ésto se sigue que para todo $(x,t) \in X \times \mathbb{R}_+$ existe $(x',t') \in X \times \mathbb{R}_+$ tal que $d((x,t),(x',t')) < \frac{\varepsilon}{2}$ y

$$\mathrm{diam}(F'(z)(x,t)) < \mathrm{diam}(F'(z_i)(x',t')) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Como $F'(z_i)$ es una aplicación multivaluada fina existe $t_0 \in \mathbb{R}_+$ tal que

$$\mathrm{diam}(F'(z_i)(x,t)) < \frac{\varepsilon}{2}$$

para todo $x \in X$, todo $t \geq t_0 - \frac{\varepsilon}{2}$ y todo $i \in \{1,\ldots,n\}$. Así, para todo $(x,z,t) \in X \times Z \times [t_0,\infty)$, existe $(x',z_i,t') \in X \times Z \times [t_0 - \frac{\varepsilon}{2},\infty)$ tal que

$$\mathrm{diam}(F(x,z,t)) = \mathrm{diam}(F'(z)(x,t)) < \mathrm{diam}(F'(z_i)(x',t')) + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Por tanto F es una aplicación multivaluada fina y ésto completa la demostración del teorema.

Como consecuencia del teorema anterior obtenemos el siguiente resultado que proporciona una representación de los morfismos en la categoría MSh como ciertos subconjuntos de $M(X,Y)$.

Corolario 2.3.7 *Dos aplicaciones multivaluadas finas $F, G : X \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow Y$ son homótopas si y solo si están en la misma componente conexa por caminos de $M(X,Y)$. Como consecuencia, los morfismos de X a Y en la categoría MSh se pueden identificar con las componentes conexas por caminos de $M(X,Y)$.*

Dem. F y G son homótopas si y solo si existe una aplicación multivaluada fina $H : X \times I \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow Y$ tal que $H(x,0,t) = F(x,t)$ y $H(x,1,t) = G(x,t)$ para todo $(x,t) \in X \times \mathbb{R}_+$ pero por el teorema anterior ésto es equivalente a la existencia de una aplicación continua $h : I \longrightarrow M(X,Y)$ tal que $h(0) = F$ y $h(1) = G$.

El siguiente resultado da una nueva caracterización de la clase $[F]_w$ y establece una relación entre $[F]$ y $[F]_w$.

Teorema 2.3.8 *Dos aplicaciones multivaluadas finas $F, G : X \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow Y$ son debilmente homótopas si y solo si están en la misma componente conexa de $M(X,Y)$. Por tanto, las clases $[F]_w$, ésto es, los morfismos 'shape', se pueden identificar con las componentes conexas de $M(X,Y)$. Además $[F]_w = \overline{[F]}$, es decir, cada morfismo 'shape' es la adherencia de un morfismo 'shape' fuerte.*

Dem. La demostración se hará en varios pasos. Vamos a ver primero que si F es debilmente homótopa a G entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe $G' \in B_\varepsilon(G)$ tal que G' es homótopa a F. Como consecuencia, $[F] \subset [F]_w \subset \overline{[F]}$ y por tanto $[F]_w$ es un subconjunto conexo de $M(X,Y)$.

Para probar esta primera afirmación, dado $\varepsilon > 0$ consideramos $\Delta > \operatorname{diam}(Y)$ y $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{k=k_0+1}^{\infty} \frac{\Delta}{2^k} < \frac{\varepsilon}{2},$$

y tal que $F|_{X\times[k_0,\infty)}$ es ε-homótopa a $G|_{X\times[k_0,\infty)}$. Es fácil ver que entonces existe $\phi : X \times [0,1] \longrightarrow Y$ aplicación multivaluada ε-fina tal que $\phi_0 = G|_{X\times\{k_0\}}$ y $\phi_1 = F|_{X\times\{k_0+1\}}$. Definimos $G' : X \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow Y$ como

$$G'(x,t) = \begin{cases} G(x,t) & \text{si } 0 \le t \le k_0 \\ \phi(x, t-k_0) & \text{si } k_0 \le t \le k_0+1 \\ F(x,t) & \text{si } k_0+1 \le t. \end{cases}$$

Como $G'(x,t) = F(x,t)$ para todo $t \ge k_0+1$, entonces G' es homótopa a F. Para ver que $G' \in B_\varepsilon(G)$ definimos $\{\varepsilon_k\}$, verificando $\sum \varepsilon_k < \varepsilon$, como

$$\varepsilon_k = \begin{cases} \frac{\varepsilon}{2} & \text{si } 1 \le k \le k_0 \\ \Delta & \text{si } k_0 < k. \end{cases}$$

Entonces para todo $(x,t) \in X \times [0,k_0]$ se tiene que $G'(x,t) = G(x,t)$, y si $t \ge k_0$ entonces

$$G'(x,t) \subset B_\Delta(G(x,t)).$$

Por otra parte para todo $(x,t) \in X \times [0,k_0]$ se tiene

$$\operatorname{diam}(G'(x,t)) = \operatorname{diam}(G(x,t)) < \operatorname{diam}(G(x,t) + \varepsilon,$$

si $(x,t) \in X \times [k_0, k_0+1]$ es

$$\operatorname{diam}(G'(x,t)) = \operatorname{diam}(\phi(x,t)) < \varepsilon \le \operatorname{diam}(G(x,t) + \varepsilon,$$

y si $t \geq k_0 + 1$ se tiene

$$\operatorname{diam}(G'(x,t)) = \operatorname{diam}(F(x,t)) < \varepsilon \leq \operatorname{diam}(G(x,t) + \varepsilon.$$

Luego $G' \in B_\varepsilon(G)$.

Vamos a ver ahora que para toda $F \in M(X,Y)$ y todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ y existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que para toda $F' \in B_\delta(F)$, se tiene que $F|_{X\times[k_0,\infty)}$ es ε-homótopa a $F'|_{X\times[k_0,\infty)}$. Como consecuencia $[F]_w$ es cerrado en $M(X,Y)$ y, como $[F] \subset [F]_w \subset \overline{[F]}$, deducimos que $\overline{[F]} = [F]_w$.

Para probar la primera de estas dos afirmaciones, dado $\varepsilon > 0$ tomemos $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $(x,t) \in X \times [k_0 - 1, \infty)$

$$\operatorname{diam}(F(x,t)) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Ahora, como F es semicontinua superiormente, para todo $(x,t) \in X \times [0,k_0]$ existe $0 < \delta_{(x,t)} < \min\{\frac{\varepsilon}{12}, 1\}$ tal que

$$F(B_{\delta_{(x,t)}}(x,t)) \subset B_{\frac{\varepsilon}{6}}(F(x,t)).$$

Sea $0 < \delta_1 < \min\{\frac{\varepsilon}{6}, 2\}$ menor que el número de Lebesgue del recubrimiento del compacto $X \times [0,k_0]$ dado por la familia

$$\{B_{\delta_{(x,t)}}(x,t) \mid (x,t) \in X \times [0,k_0]\}.$$

Sea $F' \in B_\delta(F)$ con $\delta = \frac{\delta_1}{2^{k_0}} < 1$. Entonces para todo $(x,t) \in X \times \{k_0\}$ existe $(x',t') \in X \times [0,k_0]$ con $d((x,t),(x',t')) < \delta_1$ tal que

$$F'(x,t) \subset B_{\delta_1}(F(x',t')).$$

Por otra parte como $(x,t),(x',t') \in X \times [0,k_0]$ y $d((x,t),(x',t')) < \delta_1$ existe $(x'',t'') \in X \times [0,k_0]$ tal que $(x,t),(x',t') \in B_{\delta_{(x'',t'')}}(x'',t'')$ y

$$F(x,t) \cup F(x',t') \subset B_{\frac{\varepsilon}{6}}(F(x'',t'')).$$

Por tanto $F'(x,t) \subset B_{\delta_1}(F(x',t')) \subset B_{\frac{\varepsilon}{6}+\delta_1}(F(x'',t'')) \subset B_{\frac{\varepsilon}{3}}(F(x'',t''))$. Luego

$$F(x,t) \cup F'(x,t) \subset B_{\frac{\varepsilon}{3}}(F(x'',t'')).$$

Por otra parte, $(x'',t'') \in X \times [k_0-1,k_0]$ (por ser $(x,t) \in X \times \{k_0\}$ y $\delta_{(x'',t'')} < 1$), y por tanto $\mathrm{diam}(F(x'',t'')) < \frac{\varepsilon}{3}$. Luego

$$\mathrm{diam}(F(x,t) \cup F'(x,t)) < \varepsilon$$

y $F|_{X\times\{k_0\}}$ es ε-homótopa a $F'|_{X\times\{k_0\}}$. Finalmente como $F' \in B_\delta(F)$, entonces para todo $(x,t) \in X \times [k_0,\infty)$, existe $(x',t') \in B_\delta(x,t) \subset X \times [k_0-1,\infty)$ tal que

$$\mathrm{diam}(F'(x,t)) < \mathrm{diam}(F(x',t')) + \delta < \frac{\varepsilon}{3} + \delta < \varepsilon.$$

De todo lo anterior se deduce que $F|_{X\times[k_0,\infty)}$ es ε-homótopa a $F'|_{X\times[k_0,\infty)}$.

Para ver que $[F]_w$ es cerrado en $M(X,Y)$ tomamos $G \in \overline{[F]_w}$ y vamos a ver que G es debilmente homótopa a F. Sea $\varepsilon > 0$ y sean $\delta > 0$ y $k_0 \in \mathbb{N}$ tales que para todo $F' \in B_\delta(G)$ se tiene que $F'|_{X\times[k_0,\infty)}$ y $G|_{X\times[k_0,\infty)}$ son ε-homótopas. Como $G \in \overline{[F]_w}$ dado $\delta > 0$ existe $F' \in B_\delta(G)$ tal que F' es debilmente homótopa a F y por tanto dado $\varepsilon > 0$ existe $t_0 \geq k_0$ tal que $F'|_{X\times[t_0,\infty)}$ y $F|_{X\times[t_0,\infty)}$ son ε-homótopas. Luego $F|_{X\times[t_0,\infty)}$ y $G|_{X\times[t_0,\infty)}$ son ε-homótopas.

Finalmente, tenemos que demostrar que si $A \subset M(X,Y)$ es conexo y $F \in A$, entonces $A \subset [F]_w$. Consideremos para cada $\varepsilon > 0$ el conjunto

$$K_\varepsilon = \{H \in A \mid F|_{X\times[k_H,\infty)}\ \varepsilon\text{–homótopa a } H|_{X\times[k_H,\infty)} \text{ para } k_H \in \mathbb{R}_+\}.$$

Entonces K_ε es abierto pues si $H' \in K_\varepsilon$ existe $k_{H'} \in \mathbb{R}_+$ tal que $F|_{X\times[k_{H'},\infty)}$ y $H|_{X\times[k_{H'},\infty)}$ son ε-homótopas. Pero por otra parte existe $\delta > 0$ y existe $k'_{H'} > k_{H'}$ tales que para todo $H'' \in B_\delta(H')$, se tiene que $H''|_{X\times[k'_{H'},\infty)}$ es ε-homótopa a $H'|_{X\times[k'_{H'},\infty)}$. Luego $B_\delta(H') \subset K_\varepsilon$ y K_ε es abierto.

También se verifica que K_ε es cerrado en A pues si $H' \in \overline{K_\varepsilon}$ (adherencia de K_ε en A) existe $\delta > 0$ y existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tales que si $H'' \in B_\delta(H')$ se tiene que $H''|_{X\times[k_0,\infty)}$ es ε-homótopa a $H'|_{X\times[k_0,\infty)}$. Dado $\delta > 0$, como $H' \in \overline{K_\varepsilon}$, existe $H'' \in B_\delta(H') \cap K_\varepsilon$. Como $H'' \in K_\varepsilon$ existe $k_{H''}$ tal que $F|_{X\times[k_{H''},\infty)}$ es ε-homótopa a $H''|_{X\times[k_{H''},\infty)}$. Así, tomando $k_{H'} = \max\{k_0, k_{H''}\}$, se tiene que $F|_{X\times[k_{H'},\infty)}$ es ε-homótopa a $H'|_{X\times[k_{H'},\infty)}$. Luego $H' \in K_\varepsilon$ y K_ε es cerrado. Por tanto K_ε es abierto y cerrado en A conexo. Como consecuencia $A = K_\varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$. Luego si $F, G \in A$, entonces F y G son debilmente homótopas. Esto completa le demostración del teorema.

Observación 2.3.9 De la demostración del teorema anterior se deduce que, dada $F \in M(X,Y)$, también es denso en $[F]_w$ el subconjunto de $[F]$ formado por las aplicaciones multivaluadas finas $G \in M(X,Y)$ tales que existe $t_0 \in \mathbb{R}_+$ tal que $G(x,t) = F(x,t)$ para todo $x \in X$ y todo $t \geq t_0$. En particular, también es denso en $[F]_w$ el subconjunto de $[F]$ formado por las aplicaciones multivaluadas finas asintóticas a F. Además es fácil ver, por la construcción de la homotopía entre dos aplicaciones multivaluadas finas asintóticas, que ambos subconjuntos de $[F]$ son conexos por caminos.

Observación 2.3.10 Dada $F \in M(X,Y)$, dado $\varepsilon > 0$, si definimos

$$[F]_\varepsilon = \{G \in M(X,Y) \mid F|_{X\times[k_G,\infty)} \ \varepsilon\text{−homótopa a } G|_{X\times[k_G,\infty)}, \text{ para } k_G \in \mathbb{R}_+\}$$

se tiene que $[F]_w = \cap_{\varepsilon>0}[F]_\varepsilon$. Además $[F]_\varepsilon$ verifica:

1. $[F]_\varepsilon$ es abierto y cerrado en $M(X,Y)$ para todo $\varepsilon > 0$.
2. $[F]_{\varepsilon_1} \subset [F]_{\varepsilon_2}$ si $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_2$.
3. $[F]_\varepsilon = M(X,Y)$ para todo $\varepsilon \geq \Delta = \mathrm{diam}(Y)$.

Corolario 2.3.11 *Sea $F \in M(X,Y)$. Entonces la clase $[F]_w$ se puede identificar también con la quasicomponente conexa de $M(X,Y)$ que contiene a F.*

2.4 GRUPOS DE HOMOTOPÍA FUERTE Y ESPACIOS DE LAZOS DE STEENROD

Definición 2.4.1 Sean X e Y espacios métricos compactos contenidos en el cubo de Hilbert Q y sean $X_0 \subset X$ e $y_0 \in Y$. Una aplicación aproximativa de (X,X_0) a (Y,y_0) es una aplicación continua $f : (X,X_0)\times\mathbb{R}_+ \longrightarrow (Q,y_0)$ tal que para cada entorno V de Y en Q existe $t_0 \in \mathbb{R}_+$ tal que $f(X \times [t_0,\infty)) \subset V$.

Dos aplicaciones aproximativas $f,g : (X,X_0) \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow (Q,y_0)$ de (X,X_0) a (Y,y_0) son homótopas (rel.X_0), si existe $h : (X,X_0) \times [0,1] \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow (Q,y_0)$ aplicación aproximativa de $(X \times [0,1], X_0 \times [0,1])$ a (Y,y_0) tal que

$$h(x,0,t) = f(x,t), h(x,1,t) = g(x,t)$$

para todo $(x,t) \in X \times \mathbb{R}_+$. Se dice que f y g son debilmente homótopas (rel.X_0), si para cada entorno V de Y en Q existe $t_0 \in \mathbb{R}_+$ y existe una aplicación continua $h : (X, X_0) \times [0,1] \times [t_0, \infty) \longrightarrow (V, y_0)$ tal que

$$h(x,0,t) = f(x,t), h(x,1,t) = g(x,t)$$

para todo $(x,t) \in X \times [t_0, \infty)$.

Si (X, x_0) es un espacio métrico compacto punteado se define el n-ésimo grupo 'shape' fuerte $\tilde{\Pi}_n(X, x_0)$ de X en x_0 como el conjunto de clases de homotopía (rel.∂I^n) de aplicaciones aproximativas $f : (I^n, \partial I^n) \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow (Q, x_0)$ de $(I^n, \partial I^n)$ a (X, x_0) con la operación $*$ definida como $[f] * [g] = [h]$ donde $h : (I^n, \partial I^n) \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow (X, x_0)$ viene dada por

$$h(t_1, t_2, \ldots, t_n, t) = \begin{cases} f(2t_1, t_2, \ldots, t_n, t) & \text{si } 0 \leq t_1 \leq \frac{1}{2} \\ g(2t_1 - 1, t_2, \ldots, t_n, t) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t_1 \leq 1. \end{cases}$$

De forma análoga se define el n-ésimo grupo de Borsuk $\Pi_n^B(X, x_0)$ de X en x_0 como el conjunto de clases de homotopía débil (rel.∂I^n) de aplicaciones aproximativas $f : (I^n, \partial I^n) \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow (Q, x_0)$ de $(I^n, \partial I^n)$ a (X, x_0) con la misma operación de grupo que en el caso anterior.

Definición 2.4.2 Sea (X, x_0) espacio métrico compacto punteado. Decimos que dos aplicaciones multivaluadas finas $F, G : (I^n, \partial I^n) \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow (X, x_0)$ son homótopas (rel.∂I^n) si existe $H : (I^n, \partial I^n) \times I \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow (X, x_0)$ aplicación multivaluada fina tal que

$$H(t_1, \ldots, t_n, 0, r) = F(t_1, \ldots, t_n, r), H(t_1, \ldots, t_n, 1, r) = G(t_1, \ldots, t_n, r),$$

para todo $(t_1, \ldots, t_n) \in I^n$ y para todo $r \in \mathbb{R}_+$.

Definimos $\Pi_n^*(X, x_0)$ como el conjunto de clases de homotopía (rel.∂I^n) de aplicaciones multivaluadas finas de la forma $F : (I^n, \partial I^n) \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow (X, x_0)$ con la operación definida por $[F] * [G] = [H]$ donde $H : (I^n, \partial I^n) \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow (X, x_0)$ viene dada por

$$H(t_1, t_2, \ldots, t_n, t) = \begin{cases} F(2t_1, t_2, \ldots, t_n, t) & \text{si } 0 \leq t_1 \leq \frac{1}{2} \\ G(2t_1 - 1, t_2, \ldots, t_n, t) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t_1 \leq 1. \end{cases}$$

De forma análoga definimos $\Pi_n(X, x_0)$ como el conjunto de clases de homotopía débil (rel.∂I^n) de aplicaciones $F : (I^n, \partial I^n) \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow (X, x_0)$ multivaluadas finas con la misma operación que en el caso anterior. En este caso F y G son debilmente homótopas (rel.∂I^n) si para todo $\varepsilon > 0$ existe $r_0 \in \mathbb{R}_+$ y existe una aplicación $H : (I^n, \partial I^n) \times I \times [r_0, \infty) \longrightarrow (X, x_0)$ multivaluada ε-fina semicontinua superiormente tal que

$$H(t_1, \ldots, t_n, 0, r) = F(t_1, \ldots, t_n, r), H(t_1, \ldots, t_n, 1, r) = G(t_1, \ldots, t_n, r),$$

para todo $(t_1, \ldots, t_n) \in I^n$ y para todo $r \geq r_0$.

Observación 2.4.3 Es inmediato comprobar que ambos conjuntos son grupos con la operación $*$.

Teorema 2.4.4 *$\Pi_n^s(X, x_0)$ es isomorfo a $\tilde{\Pi}_n(X, x_0)$.*

Dem. Sea $[F] \in \Pi_n^s(X, x_0)$ con $F : (I^n, \partial I^n) \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow (X, x_0)$ aplicación multivaluada fina. Vamos a ver que existe $f : (I^n, \partial I^n) \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow (Q, x_0)$ aplicación aproximativa de $(I^n, \partial I^n)$ a (X, x_0) asintótica a F que por tanto define un elemento de $\tilde{\Pi}_n(X, x_0)$.

Vamos a ver, en general, que si K_0 un subconjunto cerrado de un espacio métrico compacto K y $F : (K, K_0) \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow (X, x_0)$ es una aplicación multivaluada fina, entonces existe $f : (K, K_0) \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow (Q, x_0)$ aplicación aproximativa de (K, K_0) a (X, x_0) asintótica a F.

Sea $\varepsilon_0 > \varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \cdots$ sucesión nula tal que $\operatorname{diam}(F(x,t)) < \varepsilon_n$ para todo $x \in K$, para todo $t \geq n$, para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Entonces para cada $x \in K$ y cada $t \in [n, n+1]$, $n \in \mathbb{N}$, existe $U^{(x,t)}$ entorno abierto de (x,t) contenido en $K \times (n-1, n+2)$ tal que

$$F(U^{(x,t)}) \subset B_{\delta_{(x,t)}}(F(x,t)) \text{ donde } \delta_{(x,t)} = \frac{\varepsilon_n - \operatorname{diam}(F(x,t))}{2}.$$

Luego $\operatorname{diam}(F(U^{(x,t)})) < \varepsilon_n$. Ahora, por la compacidad de $K \times [n, n+1]$ para todo $n \in \mathbb{N}$, podemos definir una sucesión de conjuntos abiertos $U_2, U_3, U_4, \ldots$

y una sucesión creciente $k_1 = 1 < k_2 < k_3 < k_4 < \cdots$ de números enteros tal que para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$K \times [n, n+1] \subset U_{k_n+1} \cup U_{k_n+2} \cup \cdots \cup U_{k_{n+1}} \subset K \times (n-1, n+2)$$

y tal que $\mathrm{diam}(F(U_k)) < \varepsilon_n$ para todo $k > k_n$.

Consideramos $U_1 = K \times [0,1)$ y definimos para cada $n \in \mathbb{N}$ una aplicación $\delta_n : K \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\delta_n(x,t) = \frac{d((x,t),(K \times \mathbb{R}_+) - U_n)}{\sum_k d((x,t),(K \times \mathbb{R}_+) - U_k)}.$$

La suma en el denominador es finita, pues $d((x,t),(K \times \mathbb{R}_+) - U_k) \neq 0$ si y solo si $(x,t) \in U_k$.

Escojemos ahora para cada $n \in \mathbb{N}$ un punto $y_n \in F(U_n)$, de tal forma que si $U_n \cap K_0 \neq \emptyset$ tomamos $y_n = x_0$, y definimos $f : K \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow Q$ tal que

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n(x,t) y_n.$$

La suma vuelve a ser finita y como $\sum \delta_n(x,t) = 1$ y Q es convexo, f es una función continua bien definida. Además, si $(x,t) \in K_0 \times \mathbb{R}_+$ y (x,t) pertenece solo a $\{U_{i_1}, \ldots, U_{i_n}\}$ entonces

$$f(x,t) = \delta_{i_1}(x,t) y_{i_1} + \cdots + \delta_{i_n}(x,t) y_{i_n} = \delta_{i_1}(x,t) x_0 + \cdots + \delta_{i_n}(x,t) x_0 = x_0$$

En general , para cada $(x,t) \in K \times [n, n+1]$, si consideramos la familia de abiertos

$$\{U_{i_1}, \ldots, U_{i_r}\} \subset \{U_{k_{n-1}+1}, \ldots, U_{k_n}, U_{k_n+1}, \ldots, U_{k_{n+1}}, U_{k_{n+1}+1}, \ldots, U_{k_{n+2}}\}$$

a los que (x,t) pertenece, se tiene

$$f(x,t) = \delta_{i_1}(x,t) y_{i_1} + \cdots + \delta_{i_r}(x,t) y_{i_r} \text{ con } \delta_{i_1}(x,t) + \cdots + \delta_{i_r}(x,t) = 1$$

y si $y \in F(x,t)$ se tiene

$$\begin{aligned} d(f_0(x,t), y) &= \| \sum_{k=1}^{r} \delta_{i_k}(x,t) y_{i_k} - \sum_{k=1}^{r} \delta_{i_k}(x,t) y \| = \| \sum_{k=1}^{r} \delta_{i_k}(x,t)(y_{i_k} - y) \| \\ &= \sum_{k=1}^{r} \delta_{i_k}(x,t) \| y_{i_k} - y \| \leq \max\{\| y_{i_k} - y \|\} \\ &\leq \max\{\mathrm{diam}(F(U_{i_k}))\} < \varepsilon_{n-1}. \end{aligned}$$

(En las expresiones anteriores hemos utilizado la norma $\| \ \|$ del espacio de Hilbert l_2 donde Q se supone contenido.) Luego hemos probado que para cada $\varepsilon > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que para cada $x \in K$ y cada $t \geq n$ se tiene $d(f(x,t), F(x,t)) < \varepsilon$. Finalmente, esta última condición implica que para cada entorno V de Y en Q existe $t_0 \in \mathbb{R}_+$ tal que $f(K \times [t_0, \infty)) \subset V$. Por tanto, f es aplicación aproximativa de K a X y por lo anterior f es asintótica a F.

Vamos a ver ahora que si $G : (I^n, \partial I^n) \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow (X, x_0)$ es otro representante de $[F]$ y $g : (I^n, \partial I^n) \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow (Q, x_0)$ es una aplicación aproximativa de $(I^n, \partial I^n)$ a (X, x_0) asintótica a G entonces f y g definen el mismo elemento de $\tilde{\Pi}_n(X, x_0)$. Sea

$$H : (I^n, \partial I^n) \times I \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow (X, x_0)$$

aplicación multivaluada fina tal que para todo $(t_1, \ldots, t_n) \in I^n$ y todo $r \in \mathbb{R}_+$

$$H(t_1, \ldots, t_n, 0, r) = F(t_1, \ldots, t_n, r), H(t_1, \ldots, t_n, 1, r) = G(t_1, \ldots, t_n, r),$$

Sea $h : (I^n, \partial I^n) \times I \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow (Q, x_0)$ aplicación aproximativa de $(I^n, \partial I^n) \times I$ a (X, x_0) asintótica a H. Entonces f y h_0 son asintóticas y como Q es convexo existe una aplicación aproximativa $h' : (I^n, \partial I^n) \times I \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow (Q, x_0)$ de $I^n \times I$ a X dada por

$$h'(t_1, \ldots, t_n, s, r) = (1 - s) f(t_1, \ldots, t_n, r) + s h_0(t_1, \ldots, t_n, r)$$

tal que $h'_0 = f$ y $h'_1 = h_0$ y lo mismo ocurre con h_1 y g. Luego f y g definen el mismo elemento de $\tilde{\Pi}_n(X, x_0)$.

Luego existe una aplicación bien definida

$$\Phi : \Pi_n^s(X, x_0) \longrightarrow \tilde{\Pi}_n(X, x_0)$$

que a cada $[F] \in \Pi_n(X, x_0)$ la hace corresponder $[f] \in \tilde{\Pi}_n(X, x_0)$ con F asintótica a f. Es inmediato que Φ es homomorfismo de grupos.

Para demostrar que Φ es suprayectivo, basta ver que si K_0 es un subconjunto cerrado de un espacio métrico compacto K y $f : (K, K_0) \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow (Q, x_0)$ es una aplicación aproximativa de (K, K_0) a (X, x_0) entonces la aplicación multivaluada fina $F : (K, K_0) \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow (X, x_0)$ dada por la expresión

$$F(x,t) = \{x' \in X \mid d(f(x,t), x') = d(f(x,t), X)\},$$

es asintótica a f, pues $d(f(x,t), F(x,t)) = d(f(x,t), X)$ para todo $x \in X$ y todo $t \in \mathbb{R}_+$.

Vamos a ver finalmente que Φ es inyectivo. Supongamos que $\Phi[F] = [f]$ y que f es homótopa a C_{x_0}. Sea $h : (I^n, \partial I^n) \times I \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow (Q, x_0)$ aplicación aproximativa de $(I^n, \partial I^n) \times I$ a (X, x_0) tal que para todo $(t_1, \ldots, t_n) \in I^n$ y todo $r \in \mathbb{R}_+$

$$h(t_1, \ldots, t_n, 0, r) = f(t_1, \ldots, t_n, r), h(t_1, \ldots, t_n, 1, r) = x_0.$$

Existe entonces $H : (I^n, \partial I^n) \times I \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow (X, x_0)$ multivaluada fina asintótica a h verificando que

$$H(t_1, \ldots, t_n, 1, r) = x_0$$

para todo $(t_1, \ldots, t_n) \in I^n$ y para todo $r \in \mathbb{R}_+$. Pero entonces, F y H_0 son asintóticas y por tanto la expresión

$$H'(t_1, \ldots, t_n, s, r) = \begin{cases} F(t_1, \ldots, t_n, r) & \text{si } 0 \leq s < \frac{1}{2} \\ F(t_1, \ldots, t_n, r) \cup H_0(t_1, \ldots, t_n, r) & \text{si } s = \frac{1}{2} \\ H_0(t_1, \ldots, t_n, r) & \text{si } \frac{1}{2} < s \leq 1 \end{cases}$$

define una homotopía $H' : (I^n, \partial I^n) \times I \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow (X, x_0)$ entre F y H_0 y por tanto F define el mismo elemento de $\tilde{\Pi}_n(X, x_0)$ que la aplicación constante C_{x_0}.

Definición 2.4.5 Sea (X, x_0) espacio métrico compacto punteado. Definimos el espacio de lazos de Steenrod de X en x_0 como el conjunto $\Omega^s(X, x_0)$ de todas las aplicaciones multivaluadas finas de la forma $F : (I, \partial I) \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow (X, x_0)$ con la topología de subespacio de $M(I, X)$. Denotamos por C_0 al lazo constante dado por $C_0(t, r) = x_0$, para todo $t \in I$ y para todo $r \in \mathbb{R}_+$, y definimos $\Omega^s_2(X, x_0) = \Omega(\Omega^s(X, x_0), C_0)$ y, por inducción, $\Omega^s_n(X, x_0) = \Omega(\Omega^s_{n-1}(X, x_0), *)$ (donde $\Omega(\ )$ denota el espacio clásico de lazos).

Obsérvese que $\Omega^s(X, x_0) \subset M(I, X)$ y que no hay ninguna relación de equivalencia entre sus elementos.

El siguiente resultado permite reducir el cálculo de los grupos de homotopía 'shape' fuerte al de grupos de homotopía usuales.

Teorema 2.4.6 *$\Pi_1^s(X, x_0)$ puede identificarse de modo natural con las componentes conexas por caminos del espacio de lazos de Steenrod $\Omega^s(X, x_0)$. Si $n \geq 2$, $\Pi_n^s(X, x_0)$ es isomorfo a $\pi_{n-1}(\Omega^s(X, x_0), C_0)$ y por tanto a $\pi(\Omega_{n-1}^s(X, x_0), *)$.*

Dem. Vamos a demostrar la primera afirmación. Sea $[F] \in \Pi_1^s(X, x_0)$, entonces $F : (I, \partial I) \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow (X, x_0)$ es una aplicación multivaluada fina y por tanto $F \in \Omega^s(X, x_0)$. Además, si $[F] = [G]$ existe $H : (I, \partial I) \times I \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow (X, x_0)$ aplicación multivaluada fina tal que para todo $t \in I$ y todo $r \in \mathbb{R}_+$

$$H(t, 0, r) = F(t, r), H(t, 1, r) = G(t, r).$$

Pero entonces la aplicación $H' : I \longrightarrow M(I, X)$ definida por

$$H'(s)(t, r) = H(t, s, r)$$

es continua. Como $H'(s)(t, r) = x_0$ para todo $t \in \partial I$ y todo $r \in \mathbb{R}_+$ se tiene $\mathrm{Im}(H') \subset \Omega^s(X, x_0)$. Luego H' nos da un camino en $\Omega^s(X, x_0)$ de F a G.

Reciprocamente si F y G están en la misma componente conexa por caminos de $\Omega^s(X, x_0)$ y $H' : I \longrightarrow M(I, X)$ es un camino en $\Omega^s(X, x_0)$ de F a G, tenemos inducida $H : I \times I \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow X$ aplicación multivaluada fina definida por

$$H(t, s, r) = H'(s)(t, r).$$

Como $\mathrm{Im}(H') \subset \Omega^s(X, x_0)$ se tiene que $H'(s)(t, r) = x_0$ para todo $t \in \partial I$ y todo $r \in \mathbb{R}_+$. Luego $H(t, s, r) = x_0$ para todo $t \in \partial I$, todo $s \in I$ y todo $r \in \mathbb{R}_+$. Por tanto $H : (I, \partial I) \times I \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow (X, x_0)$ y verifica que para todo $t \in I$ y todo $r \in \mathbb{R}_+$

$$H(t, 0, r) = F(t, r), H(t, 1, r) = G(t, r).$$

Luego $[F] = [G]$.

Vamos a probar la segunda afirmación. Sea $[F] \in \Pi_n^s(X, x_0)$ con

$$F : (I^n, \partial I^n) \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow (X, x_0)$$

aplicación multivaluada fina. Podemos considerar $F : I^{n-1} \times I \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow X$ y por tanto tenemos inducida una aplicación continua $F' : I^{n-1} \longrightarrow M(I, X)$ definida por

$$F'(t_1, \ldots, t_{n-1})(t, r) = F(t_1, \ldots, t_{n-1}, t, r),$$

donde si $t \in \partial I$ entonces $(t_1, \ldots, t_{n-1}, t) \in \partial I^n$ para todo $(t_1, \ldots, t_{n-1}) \in I^{n-1}$ y por tanto

$$F'(t_1, \ldots, t_{n-1})(t, r) = F(t_1, \ldots, t_{n-1}, t, r) = x_0.$$

Luego $F'(I^{n-1}) \subset \Omega^s(X, x_0)$. Por otra parte, si $(t_1, \ldots, t_{n-1}) \in \partial I^{n-1}$, entonces $(t_1, \ldots, t_{n-1}, t) \in \partial I^n$ para todo $t \in I$ y por tanto

$$F'(t_1, \ldots, t_{n-1})(t, r) = F(t_1, \ldots, t_{n-1}, t, r) = x_0.$$

Luego $F' : (I^{n-1}, \partial I^{n-1}) \longrightarrow (\Omega^s(X, x_0), C_0)$ y por tanto define un elemento $[F'] \in \pi_{n-1}(\Omega^s(X, x_0), C_0)$.

Vamos a ver ahora que la clase de F' solo depende de la clase de F. Sea $G : (I^n, \partial I^n) \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow (X, x_0)$ aplicación multivaluada fina homótopa a F y sea G' la aplicación asociada a G. Sea $H : (I^n, \partial I^n) \times I \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow (X, x_0)$ una aplicación multivaluada fina tal que para todo $(t_1, \ldots, t_n) \in I^n$ y todo $r \in \mathbb{R}_+$

$$H(t_1, \ldots, t_n, 0, r) = F(t_1, \ldots, t_n, r), H(t_1, \ldots, t_n, 1, r) = G(t_1, \ldots, t_n, r).$$

Tenemos inducida una aplicación continua $H' : I^{n-1} \times I \longrightarrow M(I, X)$ definida por

$$H'(t_1, \ldots, t_{n-1}, s)(t, r) = H(t_1, \ldots, t_{n-1}, t, s, r).$$

Como $H'(t_1, \ldots, t_{n-1}, s)(t, r) = x_0$ para todo $(t_1, \ldots, t_{n-1}) \in I^{n-1}$, todo $s \in I$, todo $t \in \partial I$ y todo $r \in \mathbb{R}_+$ se tiene $\mathrm{Im}(H') \subset \Omega^s(X, x_0)$. Además H' verifica que $H'(t_1, \ldots, t_{n-1}, s) = C_0$ para todo $(t_1, \ldots, t_{n-1}) \in \partial I^{n-1}$ y todo $s \in I$. Entonces, como $H'_0 = F'$ y $H'_1 = G'$, H' es una homotopía (rel.∂I^{n-1}) en $\Omega^s(X, x_0)$ de F' a G'. Esto muestra que la clase de homotopía $[F']$ no depende del representante de la clase de homotopía $[F]$ y tenemos así definida una aplicación

$$\alpha : \Pi_n^s(X, x_0) \longrightarrow \pi_{n-1}(\Omega^s(X, x_0), C_0)$$

que es claramente homomorfismo de grupos.

Vamos a ver que α es inyectiva. Sean $F, G : (I^n, \partial I^n) \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow X$ y sea $\alpha([F]) = [F'], \alpha([G]) = [G']$ con

$$F', G' : (I^{n-1}, \partial I^{n-1}) \longrightarrow (\Omega^s(X, x_0), C_0).$$

Supongamos que F' y G' son homótopas (rel.∂I^{n-1}). Tenemos que probar que F y G son homótopas (rel.∂I^n). Sea

$$H' : (I^{n-1}, \partial I^{n-1}) \times I \longrightarrow (\Omega^s(X, x_0), C_0)$$

aplicación continua verificando que para todo $(t_1, \ldots, t_{n-1}) \in I^{n-1}$,

$$H'(t_1, \ldots, t_{n-1}, 0) = F'(t_1, \ldots, t_{n-1}), H'(t_1, \ldots, t_{n-1}, 1) = G'(t_1, \ldots, t_{n-1}),$$

Entonces la aplicación $H : I^n \times I \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow X$ definida por

$$H(t_1, \ldots, t_{n-1}, t_n, s, r) = H'(t_1, \ldots, t_{n-1}, s)(t_n, r).$$

es una aplicación multivaluada fina. Además si $(t_1, \ldots, t_n) \in \partial I^n$, entonces $(t_1, \ldots, t_{n-1}) \in \partial I^{n-1}$ o $t_n \in \partial I$. En el primer caso se tiene que

$$H(t_1, \ldots, t_n, s, r) = H'(t_1, \ldots, t_{n-1}, s)(t_n, r) = C_0(t_n, r) = x_0,$$

y en el segundo caso, como $\mathrm{Im}(H') \in \Omega^s(X, x_0)$, entonces

$$H(t_1, \ldots, t_n, s, r) = H'(t_1, \ldots, t_{n-1}, s)(t_n, r) = x_0,$$

para todo $r \in \mathbb{R}_+$ y todo $s \in I$. Luego $H(\partial I^n \times I \times \mathbb{R}_+) = \{x_0\}$ y como $H_0 = F$ y $H_1 = G$ entonces F y G son homótopas (rel.∂I^n).

Finalmente, vamos a comprobar que α es suprayectiva.

Sea $[F'] \in \pi_{n-1}(\Omega^s(X, x_0), C_0)$ con $F' : (I^{n-1}, \partial I^{n-1}) \longrightarrow (\Omega^s(X, x_0), C_0)$ continua. Tenemos inducida una aplicación multivaluada fina $F : I^n \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow X$ tal que para todo $(t_1, \ldots, t_n) \in I^n$ y todo $r \in \mathbb{R}_+$,

$$F(t_1, \ldots, t_n, r) = F'(t_1, \ldots, t_{n-1})(t_n, r).$$

Además, si $(t_1,\ldots,t_n) \in \partial I^n$ entonces $(t_1,\ldots,t_{n-1}) \in \partial I^{n-1}$ o $t_n \in \partial I$. En el primer caso se tiene que

$$F(t_1,\ldots,t_n,r) = F'(t_1,\ldots,t_{n-1})(t_n,r) = C_0(t_n,r) = x_0,$$

y en el segundo que

$$F(t_1,\ldots,t_n,r) = F'(t_1,\ldots,t_{n-1})(t_n,r) = x_0,$$

para todo $r \in \mathbb{R}_+$. Luego $F : (I^n, \partial I^n) \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow (X, x_0)$ define un elemento $[F] \in \Pi_n^s(X,x_0)$ tal que $\alpha([F]) = [F']$. Luego α es suprayectiva y por tanto $\Pi_n^s(X,x_0)$ es isomorfo a $\pi_{n-1}(\Omega^s(X,x_0),C_0)$.

Finalmente aplicando que para el espacio de lazos clásico y los grupos de homotopía usuales, $\pi_k(Z,z_0)$ es isomorfo a $\pi_{k-1}(\Omega(Z,z_0),C_{z_0})$ para todo espacio topológico Z y todo $k \in \mathbb{N}$, se tiene que $\pi_{n-1}(\Omega^s(X,x_0),C_0)$ es isomorfo a $\pi_{n-2}(\Omega(\Omega^s(X,x_0),C_0),*)$ que es igual a $\pi_{n-2}(\Omega_2^s(X,x_0),*)$, éste es isomorfo a $\pi_{n-3}(\Omega_3^s(X,x_0),*)$, y así sucesivamente hasta llegar a $\pi(\Omega_{n-1}^s(X,x_0),*)$. Esto completa la demostración del teorema.

Capítulo 3

MULTIFIBRACIONES

Basandose en trabajos de R.C.Lacher [68], [69] sobre aplicaciones celulares, D.S.Coram y P.F.Duvall, Jr. [29] definieron en 1977 el concepto de fibración aproximativa entre espacios ANR localmente compactos, reemplazando la propiedad de elevación de homotopía de las fibraciones de Hurewicz por una propiedad de elevación de homotopía aproximada. Se obtiene así una generalización de las fibraciones de Hurewicz con propiedades análogas a las de éstas. Por ejemplo, Coram y Duvall demuestran que las fibras son FANRs y que si el espacio base es conexo por caminos todas las fibras tienen la misma forma.

S.Mardešić y T.B.Rushing ([78] y [79]) introdujeron en 1979 el concepto de fibración 'shape' entre espacios métricos compactos como la noción de fibración adaptada a la categoría de la forma. Aunque una fibración 'shape' es una aplicación continua $p : E \longrightarrow B$, la propiedad de elevación correspondiente se refiere a homotopías con imágenes en sistemas de ANRs y aplicaciones que tienen a E, B y p por límite. También definen el concepto de fibración 'shape' entre espacios métricos localmente compactos y prueban que en el caso de ANRs localmente compactos éstas coinciden con las fibraciones aproximativas de Coram y Duvall. Mardešić [77] extiende en 1981 el concepto de fibración 'shape' a espacios topológicos arbitrarios.

Las fibraciones 'shape' entre espacios métricos compactos verifican también propiedades análogas a las de las fibraciones de Hurewicz. Por ejemplo, si el espacio base es 'joinable' según Krasinkiewicz y Minc [65], entonces todas las fibras tienen la misma forma. Mardešić prueba en [76], entre otras propiedades, que si el espacio base es conexo y una de las fibras es conexa (o movible, o un ANSR), entonces todas lo son. T.Watanabe muestra en [112] que estas propiedades no son ciertas, en general, para fibraciones 'shape' entre espacios topológicos arbitrarios.

F.Cathey estudia en [21] propiedades de las fibraciones relacionadas con la teoría de la forma fuerte y H.M.Hastings y S.Waner en [54] y H.M.Hastings en [53] clasifican parcialmente las fibraciones 'shape' utilizando sucesiones inversas de espacios y límites inversos de aplicaciones. En el trabajo [97] de J.M.R.Sanjurjo se presentan propiedades de las fibraciones 'shape' ligadas a la categoría de Lusternik-Schnirelman. Otros trabajos relacionados con fibraciones aproximativas y fibraciones 'shape' son los artículos [26] de T.A.Chapman, [39] de S.Ferry, [44] de K.R.Goodearl y T.B.Rushing y [93] de F.Quinn.

En la primera sección de este capítulo presentamos una nueva descripción de las fibraciones 'shape' entre espacios métricos compactos, eliminando todos los elementos externos para obtener una caracterización intrínseca. Nuestro enfoque se basa de nuevo en la teoría de aplicaciones multivaluadas. Las fibraciones 'shape' se caracterizan como aplicaciones continuas cumpliendo una cierta propiedad PEHM de elevación de homotopías multivaluadas, respecto de todos los espacios métricos. Introducimos el concepto más restrictivo de multifibración y probamos que las multifibraciones tienen propiedades de elevación de caminos que resultan características. Demostramos que las multifibraciones verifican una propiedad PEHMF de elevación de homotopías multivaluadas finas respecto de todos los espacios topológicos. Finalmente, probamos que si $p : E \longrightarrow B$ tiene la propiedad PEHMF respecto de todos los espacios métricos compactos y existe un camino multivaluado fino en B entre x e y, entonces $SSh(p^{-1}(x)) = SSh(p^{-1}(y))$. Este resultado expresa condiciones formalmente más débiles que el resultado de Mardešić [76].

En la segunda sección introducimos la propiedad (más fuerte que la propiedad de elevación única de caminos) de elevación cercana de caminos multivaluados cercanos y probamos que una fibración 'shape' tiene la propiedad de elevación cercana de caminos cercanos si y solo si las fibras son totalmente desconectadas. También demostramos que toda fibración 'shape' con la propiedad de elevación cercana de caminos cercanos es una fibración de Hurewicz con la propiedad de elevación única de caminos (el recíproco no es cierto). Finalmente vemos que la propiedad de elevación cercana de caminos multivaluados cercanos implica una propiedad de elevación asintótica de caminos multivaluados finos asintóticos, y ésta a su vez implica la propiedad clásica de elevación única de caminos.

En la tercera sección estudiamos propiedades relacionadas con los grupos de homotopía, los grupos 'shape' y los grupos 'shape' fuerte. Probamos que una fibración 'shape' con elevación cercana de caminos multivaluados cercanos induce monomorfismos entre los grupos 'shape' y entre los grupos 'shape' fuerte y, por ser fibración con elevación única de caminos, también induce monomorfismos entre los grupos de homotopía usuales.

Por último, en la cuarta sección, damos condiciones necesarias y suficientes para la existencia de elevaciones de aplicaciones multivaluadas finas definidas en continuos de Peano y con valores en el espacio base de una fibración 'shape' con elevación cercana de caminos multivaluados cercanos.

Para información general sobre la teoría de fibraciones de Hurewicz se pueden consultar los libros [58] y [107] de S.T.Hu y E.H.Spanier, respectivamente.

3.1 MULTIFIBRACIONES

Definición 3.1.1 Sean E y B espacios métricos compactos y $p : E \longrightarrow B$ una aplicación continua. Se dice que p tiene la propiedad de elevación de homotopías multivaluadas (PEHM) respecto de un espacio topológico X si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ con la siguiente propiedad:

Dadas $F : X \longrightarrow E$ y $H : X \times I \longrightarrow B$ aplicaciones multivaluadas δ-finas semicontinuas superiormente tales que $d(pF(x), H(x,0)) < \delta$ para todo $x \in X$, existe $H' : X \times I \longrightarrow E$ aplicación multivaluada ε-fina semicontinua superiormente tal que $d(H'(x,0), F(x)) < \varepsilon, d(pH'(x,t), H(x,t)) < \varepsilon$ para todo $(x,t) \in X \times I$.

Definición 3.1.2 Sean E y B espacios métricos compactos y sea $p : E \longrightarrow B$ una aplicación continua. Se dice que p es una fibración 'shape' – en el sentido de "Mardešić-Rushing" – si y solo si cuando X e Y se sumergen en el cubo de Hilbert Q, y se considera $\tilde{p} : Q \longrightarrow Q$ extensión de p, se verifica lo siguiente:

Dada $V_1 \supset V_2 \supset V_3 \supset \cdots$ sucesión básica de entornos compactos y ANR de B en Q y dada $U_1 \supset U_2 \supset U_3 \supset \cdots$ sucesión básica de entornos compactos y ANR de E en Q tales que $\tilde{p}(U_n) \subset V_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces para todo $\varepsilon > 0$ y para todo $i \in \mathbb{N}$ existe $\delta > 0$ y existe $j \geq i$ con la siguiente propiedad:

Dado X espacio métrico y dadas $f_j : X \longrightarrow U_j, h_j : X \times I \longrightarrow V_j$ tales que

$$d(\tilde{p}f_j, (h_j)_0) < \delta,$$

existe $h_i' : X \times I \longrightarrow U_i$ tal que:

$$d((h_i')_0, f_j) < \varepsilon, d(\tilde{p}h_i', h_j) < \varepsilon.$$

Observación 3.1.3 Es sabido que el que p sea fibración 'shape' es independiente de la extensión $\tilde{p} : Q \longrightarrow Q$ y de las sucesiones de entornos escogidas.

El siguiente lema aparece en [102] para espacios métricos compactos, la demostración del caso no compacto es análoga.

Lema 3.1.4 *Sea X espacio métrico, sea Y una parte cerrada del cubo de Hilbert Q, y sea $F : X \longrightarrow Y$ una aplicación multivaluada ε-fina semicontinua superiormente. Entonces existe una aplicación continua $f : X \longrightarrow Q$ (univaluada) tal que $d(f(x), F(x)) < \varepsilon$ para todo $x \in X$.*

Recíprocamente, si $f : X \longrightarrow B_\varepsilon(Y)$ es una aplicación (univaluada) continua, existe una aplicación multivaluada 2ε-fina semicontinua superiormente $F : X \longrightarrow Y$ tal que $d(f(x), F(x)) < \varepsilon$ para todo $x \in X$.

Teorema 3.1.5 *Sean E y B espacios métricos compactos y sea $p : E \longrightarrow B$ continua.*

Entonces p es una fibración 'shape' si y solo si p tiene la propiedad PEHM respecto de cualquier espacio métrico X, de tal forma que δ solo depende de ε y no de X.

Dem. Supongamos que E y B están contenidos en el cubo de Hilbert Q y sea $\tilde{p}: Q \longrightarrow Q$ extensión de p a Q. Sea $V_1 \supset V_2 \supset V_3 \supset \cdots$ sucesión básica de entornos compactos y ANR de B y sea $U_1 \supset U_2 \supset U_3 \supset \cdots$ sucesión básica de entornos compactos y ANR de E tales que $\tilde{p}(U_n) \subset V_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Vamos a ver primero que si p es una fibración 'shape' entonces p tiene la propiedad PEHM respecto de cualquier espacio métrico X con las condiciones del enunciado.

Sea $\varepsilon > 0$. Existe $0 < \varepsilon' < \frac{\varepsilon}{3}$ tal que para todo compacto K de Q con $\operatorname{diam}(K) < \varepsilon'$, se tiene

$$\operatorname{diam}(\tilde{p}(K)) < \frac{\varepsilon}{3},$$

y por tanto, si K y K' son compactos de Q con $d(K, K') < \varepsilon'$, entonces

$$d(\tilde{p}(K), \tilde{p}(K')) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Sea $i \in \mathbb{N}$ tal que $U_i \subset B_{\varepsilon'}(E)$ y $V_i \subset B_{\varepsilon'}(B)$. Entonces existe $\delta' > 0$ y existe $j \geq i$ asociados a ε' y a i con la propiedad de la definición de fibración 'shape'. Sea $0 < \delta < \min\{\frac{\varepsilon}{3}, \frac{\delta'}{5}\}$ tal que $B_\delta(E) \subset U_j, B_\delta(B) \subset V_j$ y tal que para todo compacto K de Q con $\operatorname{diam}(K) < \delta$, se tiene

$$\operatorname{diam}(\tilde{p}(K)) < \frac{\delta'}{5}.$$

Vamos a ver que este δ verifica la condición del enunciado.

Sea X espacio métrico y sean $F : X \longrightarrow E$ y $H : X \times I \longrightarrow B$ aplicaciones multivaluadas δ-finas semicontinuas superiormente con $d(pF(x), H(x, 0)) < \delta$ para todo $x \in X$. Existen $f : X \longrightarrow B_\delta(E) \subset U_j$ y $h : X \times I \longrightarrow B_\delta(B) \subset V_j$ aplicaciones continuas tales que $d(F(x), f(x)) < \delta$ y $d(H(x,t), h(x,t)) < \delta$ para todo $(x, t) \in X \times I$. Por tanto

$$\begin{aligned} d(\tilde{p}f(x), h(x,0)) \;&\leq\; d(\tilde{p}f(x), pF(x)) + \operatorname{diam}(pF(x)) + d(pF(x), H(x,0)) \\ &\qquad + \operatorname{diam}(H(x,0)) + d(H(x,0), h(x,0)) \\ &<\; \frac{\delta'}{5} + \frac{\delta'}{5} + \delta + \delta + \delta. \end{aligned}$$

para todo $x \in X$. Luego $d(\tilde{p}f, h_0) \leq \frac{\delta'}{5} + \frac{\delta'}{5} + \delta + \delta + \delta < \delta'$.

Entonces existe $h' : X \times I \longrightarrow U_i \subset B_{\varepsilon'}(E)$ tal que

$$d(h'_0, f) < \varepsilon', d(\tilde{p}h', h) < \varepsilon'.$$

Y existe $H' : X \times I \longrightarrow E$ aplicación multivaluada $2\varepsilon'$-fina, y por tanto ε-fina, semicontinua superiormente verificando que $d(H'(x,t), h'(x,t)) < \varepsilon'$ para todo $(x,t) \in X \times I$. Finalmente se tiene que

$$\begin{aligned}
d(H'(x,0), F(x)) &\leq d(H'(x,0), h'(x,0)) + d(h'(x,0), f(x)) + d(f(x), F(x)) \\
&< \varepsilon' + \varepsilon' + \delta < \varepsilon \\
d(pH'(x,t), H(x,t)) &\leq d(pH'(x,t), \tilde{p}h'(x,t)) + d(\tilde{p}h'(x,t), h(x,t)) \\
&\qquad + d(h(x,t), H(x,t)) \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \varepsilon' + \delta < \varepsilon,
\end{aligned}$$

para todo $(x,t) \in X \times I$.

Vamos a ver ahora que si p tiene la propiedad PEHM respecto de cualquier espacio métrico X con las condiciones del enunciado, entonces p es una fibración 'shape'.

Sea $\varepsilon > 0$ y sea $i \in \mathbb{N}$. Existe $0 < \varepsilon' < \frac{\varepsilon}{5}$ tal que $B_{\varepsilon'}(E) \subset U_i$ y tal que para todo compacto K de Q con $\operatorname{diam}(K) < \varepsilon'$, se tiene

$$\operatorname{diam}(\tilde{p}(K)) < \frac{\varepsilon}{5}.$$

Sea $\delta' > 0$ asociado a ε' por la propiedad PEHM. Sea $0 < \delta < \min\{\frac{\varepsilon}{10}, \frac{\delta'}{3}\}$ tal que para todo compacto K de Q con $\operatorname{diam}(K) < \delta$, se tiene

$$\operatorname{diam}(\tilde{p}(K)) < \frac{\delta'}{3},$$

y sea $j \geq i$ tal que $U_j \subset B_\delta(E), V_j \subset B_\delta(B)$. Vamos a ver que δ y j verifican la condición de la definición de fibración 'shape'.

Sea entonces X espacio métrico y sean

$$f_j : X \longrightarrow U_j \subset B_\delta(E) \text{ y } h_j : X \times I \longrightarrow V_j \subset B_\delta(B)$$

tales que $d(\tilde{p}f_j, (h_j)_0) < \delta$. Existen $F : X \longrightarrow E$ y $H : X \times I \longrightarrow B$ aplicaciones multivaluadas 2δ-finas semicontinuas superiormente, y por tanto δ'-finas, tales que $d(F(x), f_j(x)) < \delta, d(H(x,t), h_j(x,t)) < \delta$ para todo $(x,t) \in X \times I$, y por tanto

$$\begin{aligned} d(pF(x), H(x,0)) &\leq d(pF(x), \tilde{p}f_j(x)) + d(\tilde{p}f_j(x), h_j(x,0)) \\ &\qquad + d(h_j(x,0), H(x,0)) \\ &< \frac{\delta'}{3} + \delta + \delta < \delta', \end{aligned}$$

para todo $x \in X$. Entonces existe $H' : X \times I \longrightarrow E$ aplicación multivaluada ε'-fina semicontinua superiormente tal que

$$d(H'(x,0), F(x)) < \varepsilon', d(pH'(x,t), H(x,t)) < \varepsilon'$$

para todo $(x,t) \in X \times I$. Y existe $h'_i : X \times I \longrightarrow B_{\varepsilon'}(E) \subset U_i$ tal que $d(H'(x,t), h'_i(x,t)) < \varepsilon'$ para todo $(x,t) \in X \times I$. Finalmente se tiene que

$$\begin{aligned} d(h'_i(x,0), f_j(x)) &\leq d(h'_i(x,0), H'(x,0)) + \mathrm{diam}(H'(x,0)) + d(H'(x,0), F(x)) \\ &\qquad + \mathrm{diam}(F(x)) + d(F(x), f_j(x)) \\ &< \varepsilon' + \varepsilon' + \varepsilon' + 2\delta + \delta < \frac{9\varepsilon}{10}, \end{aligned}$$

para todo $x \in X$, y

$$\begin{aligned} d(\tilde{p}h'_i(x,t), h_j(x,t)) &\leq d(\tilde{p}h'_i(x,t), pH'(x,t)) + \mathrm{diam}(pH'(x,t)) \\ &\qquad + d(pH'(x,t), H(x,t)) + \mathrm{diam}(H(x,t)) \\ &\qquad + d(H(x,t), h_j(x,t)) \\ &< \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} + \varepsilon' + 2\delta + \delta < \frac{9\varepsilon}{10}, \end{aligned}$$

para todo $(x,t) \in X \times I$. Luego $d((h'_i)_0, f_j) \leq \frac{9\varepsilon}{10} < \varepsilon$ y $d(\tilde{p}h'_i, h_j) \leq \frac{9\varepsilon}{10} < \varepsilon$. Esto concluye la demostración del teorema.

Z.Čerin ha obtenido en [23] una caracterización de las fibraciones 'shape' utilizando aplicaciones multivaluadas aproximativamente continuas.

En lo que sigue, diremos que $p : E \longrightarrow B$ es una multifibración si tiene la propiedad PEHM respecto de cualquier espacio topológico X, de tal forma que δ solo depende de ε y no de X. En el momento presente desconocemos si es suficiente que p goce de esta propiedad respecto de los espacios métricos para que sea una multifibración. Por tanto queda abierto el siguiente problema.

Problema ¿Es toda fibración 'shape' una multifibración?

El teorema 3.1.6 garantiza que las multifibraciones son fibraciones 'shape'. A continuación veremos que las multifibraciones poseen propiedades de elevación de caminos que resultan caracteristicas.

Dado E espacio métrico compacto y dado $\delta > 0$ consideramos el conjunto $P_\delta(E)$ de las partes compactas δ-pequeñas (ésto es, con diámetro menor que δ) de E con la topología generada por el sistema de entornos

$$\{B_\varepsilon(K) \mid K \in P_\delta(E), \varepsilon > 0\}$$

donde $K' \in B_\varepsilon(K)$ si $K' \subset B_\varepsilon(K)$ en el sentido usual. Esta topología es la restricción de la topología semi-finita superior estudiada por E.Michael [83] (ver también Kuratowski [66] p175).

Por otra parte dado B espacio métrico compacto y dado $\delta > 0$ consideramos el conjunto B_δ^I de las aplicaciones $\omega : I \longrightarrow B$ multivaluadas δ-finas semicontinuas superiormente (es decir, las aplicaciones univaluadas continuas de I en $P_\delta(B)$), con la topología compacto-abierta. Vimos en un capítulo anterior que ésta coincide con la generada por el sistema de entornos $\{B_\varepsilon(\omega) \mid \omega \in B_\delta^I, \varepsilon > 0\}$ donde $\omega' \in B_\varepsilon(\omega)$ si para todo $t \in I$ existe $t' \in I$ con $d(t,t') < \varepsilon$ tal que $\omega'(t) \subset B_\varepsilon(\omega(t'))$.

Finalmente dada $p : E \longrightarrow B$ aplicación suprayectiva y dado $\delta > 0$, podemos definir el conjunto

$$\Omega_\delta = \{(K,\omega) \in P_\delta(E) \times B_\delta^I \mid d(\omega(0), p(K)) < \delta\} \subset P_\delta(E) \times B_\delta^I,$$

con la topología inducida por la topología producto de $P_\delta(E) \times B_\delta^I$.

Se tiene entonces el siguiente resultado, que caracteriza las multifibraciones en términos intrínsecos, sin referencias a espacios externos X respecto de los cuales se puedan elevar las homotopías.

Teorema 3.1.6 *Sean E y B espacios métricos compactos y sea $p : E \longrightarrow B$ aplicación continua suprayectiva. Entonces son equivalentes:*

i) p es una multifibración.

ii) Para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ y existe $\lambda : \Omega_\delta \longrightarrow E_\varepsilon^I$ (univaluada) continua tal que $d(\lambda(K,\omega)(0), K) < \varepsilon$ y $d(p(\lambda(K,\omega)(t)), \omega(t)) < \varepsilon$ para todo $(K,\omega) \in \Omega_\delta$ y todo $t \in I$.

Dem. Vamos a ver primero que i) implica ii). Sea $\varepsilon > 0$. Entonces existe $\delta > 0$ tal que si X es un espacio topológico y $F : X \longrightarrow E$ y $H : X \times I \longrightarrow B$ son aplicaciones multivaluadas δ-finas semicontinuas superiormente tales que $d(pF(x), H(x,0)) < \delta$ para todo $x \in X$, existe $H' : X \times I \longrightarrow E$ aplicación multivaluada ε-fina semicontinua superiormente tal que $d(H'(x,0), F(x)) < \varepsilon$ y $d(pH'(x,t), H(x,t)) < \varepsilon$ para todo $(x,t) \in X \times [0,1]$.

Sea $X = \Omega_\delta$ y sean $F : \Omega_\delta \longrightarrow E$ dada por $F(K,\omega) = K$ y $H : \Omega_\delta \times I \longrightarrow B$ dada por $H((K,\omega),t) = \omega(t)$, aplicaciones multivaluadas δ-finas semicontinuas superiormente tales que para todo $(K,\omega) \in \Omega_\delta$ se verifica

$$d(pF(K,\omega), H((K,\omega),0)) = d(p(K), \omega(0)) < \delta.$$

Entonces existe $H' : \Omega_\delta \times I \longrightarrow E$ aplicación multivaluada ε-fina semicontinua superiormente tal que para todo $(K,\omega) \in \Omega_\delta$ y todo $t \in I$ se tiene

$$d(H'((K,\omega),0), F(K,\omega)) = d(H'((K,\omega),0), K) < \varepsilon,$$

$$d(pH'((K,\omega),t), H((K,\omega),t)) = d(pH'((K,\omega),t), \omega(t)) < \varepsilon.$$

Definimos $\lambda : \Omega_\delta \longrightarrow E_\varepsilon^I$ (univaluada) como $\lambda(K,\omega)(t) = H'((K,\omega),t)$. Está bien definida pues para todo $(K,\omega) \in \Omega_\delta$, se tiene que $\lambda(K,\omega) : I \longrightarrow E$ es aplicación multivaluada ε-fina semicontinua superiormente (por serlo H'). Además, λ es continua pues dados (K_0,ω_0) y $\eta > 0$, para todo $t_0 \in I$ existe $0 < \mu_{t_0} < \eta$ tal que para todo $K \in B_{\mu_{t_0}}(K_0)$, todo $\omega \in B_{\mu_{t_0}}(\omega_0)$ y todo $t \in I$ con $d(t_0,t) < \mu_{t_0}$ se tiene

$$\lambda(K,\omega)(t) = H'((K,\omega),t) \subset B_\eta(H'((K_0,\omega_0),t_0)) = B_\eta(\lambda(K_0,\omega_0)(t_0)).$$

Por la compacidad de I existen $t_1, \ldots, t_n \in I$ tales que

$$I \subset (t_1 - \mu_{t_1}, t_1 + \mu_{t_1}) \cup \ldots \cup (t_n - \mu_{t_n}, t_n + \mu_{t_n}).$$

Si tomamos $\mu = \min\{\mu_{t_1}, \ldots, \mu_{t_n}\} > 0$ se tiene que $\lambda(K, \omega) \in B_\eta(\lambda(K_0, \omega_0))$ para todo $K \in B_\mu(K_0)$ y para todo $\omega \in B_\mu(\omega_0)$, pues para todo $t \in I$ existe $t_i \in \{t_1, \ldots, t_n\} \subset I$ con $d(t, t_i) < \mu_{t_i} < \eta$ tal que

$$\lambda(K, \omega)(t) = H'((K, \omega), t) \subset B_\eta(H'((K_0, \omega_0), t_i)) = B_\eta(\lambda(K_0, \omega_0)(t_i)).$$

Finalmente, λ verifica que

$$d(\lambda(K, \omega)(0), K) = d(H'((K, \omega), 0), K) < \varepsilon,$$

$$d(p(\lambda(K, \omega)(t)), \omega(t)) = d(p(H'((K, \omega), t)), \omega(t)) < \varepsilon,$$

para todo $(K, \omega) \in \Omega_\delta$ y todo $t \in I$.

Vamos a probar que ii) implica i). Sea $\varepsilon > 0$ y sean $\delta > 0$ y $\lambda : \Omega_\delta \longrightarrow E_\varepsilon^I$ en las condiciones del enunciado.

Sea X espacio topológico y sean $F : X \longrightarrow E$ y $H : X \times I \longrightarrow B$ aplicaciones multivaluadas δ-finas semicontinuas superiormente tales que

$$d(pF(x), H(x, 0)) < \delta$$

para todo $x \in X$. Vamos a ver que existe $H' : X \times I \longrightarrow E$ aplicación multivaluada ε-fina semicontinua superiormente tal que $d(H'(x, 0), F(x)) < \varepsilon$ y $d(pH'(x, t), H(x, t)) < \varepsilon$ para todo $(x, t) \in X \times [0, 1]$.

Consideramos $G : X \longrightarrow B_\delta^I$ definida por $G(x)(t) = H(x, t)$ bien definida y continua (se prueba igual que antes para λ). A partir de G definimos una aplicación continua $G' : X \longrightarrow \Omega_\delta$ tal que $G'(x) = (F(x), G(x))$ que está bien definida pues

$$d(pF(x), G(x)(0)) = d(pF(x), H(x, 0)) < \delta,$$

para todo $x \in X$. Consideramos la composición

$$X \xrightarrow{G'} \Omega_\delta \xrightarrow{\lambda} E_\varepsilon^I$$

que es univaluada y continua, y a partir de ella definimos

$$H' : X \times I \longrightarrow E$$

tal que $H'(x,t) = \lambda G'(x)(t)$. Entonces H' es una aplicación multivaluada semicontinua superiormente pues dado (x_0, t_0) y dado $\eta > 0$ por la semicontinuidad superior de $\lambda G'(x_0)$ existe $0 < \eta_1 < \eta$ tal que si $d(t,t_0) < \eta_1$ entonces

$$\lambda G'(x_0)(t) \subset B_{\frac{\eta}{2}}(\lambda G'(x_0)(t_0)).$$

Por la continuidad de $\lambda G'$ existe U^{x_0} entorno de x_0 en X tal que si $x \in U^{x_0}$ entonces

$$\lambda G'(x) \in B_{\frac{\eta_1}{2}}(\lambda G'(x_0)).$$

Entonces para todo $t \in I$ existe $t' \in I$ con $d(t,t') < \frac{\eta_1}{2}$ tal que

$$\lambda G'(x)(t) \subset B_{\frac{\eta_1}{2}}(\lambda G'(x_0)(t')).$$

En particular si $d(t,t_0) < \frac{\eta_1}{2}$ se tiene $d(t_0,t') < \eta_1$ y por tanto

$$\lambda G'(x_0)(t') \subset B_{\frac{\eta}{2}}(\lambda G'(x_0)(t_0)).$$

Luego para todo $(x,t) \in X \times I$ tal que $x \in U^{x_0}$ y $d(t,t_0) < \frac{\eta_1}{2}$ se tiene que

$$H'(x,t) = \lambda G'(x)(t) \subset B_\eta(\lambda G'(x_0)(t_0)) = B_\eta(H'(x_0,t_0)).$$

Luego H' es semicontinua superiormente, y es ε-fina pues para todo $(x,t) \in X \times I$ se tiene

$$\mathrm{diam}(H'(x,t)) = \mathrm{diam}(\lambda G'(x)(t)) < \varepsilon.$$

Finalmente, se tiene $d(H'(x,0), F(x)) = d(\lambda(F(x), G(x))(0), F(x)) < \varepsilon$ y

$$d(pH'(x,t), H(x,t)) = d(p(\lambda(F(x), G(x))(t)), G(x)(t)) < \varepsilon$$

para todo $(x,t) \in X \times I$.

Observación 3.1.7 Obsérvese que λ ha de verificar que si $K \subset K'$ y $\omega \subset \omega'$ entonces $\lambda(K,\omega) \subset \lambda(K',\omega')$.

Dem. Supongamos que existe $t_0 \in I$ tal que $\lambda(K,\omega)(t_0) \not\subset \lambda(K',\omega')(t_0)$. Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\lambda(K,\omega)(t_0) \not\subset B_\varepsilon(\lambda(K',\omega')(t_0)).$$

Por otra parte, por la continuidad de $\lambda(K',\omega')$, existe $0 < \delta < \frac{\varepsilon}{2}$ tal que

$$\lambda(K',\omega')(B_\delta(t_0)) \subset B_{\frac{\varepsilon}{2}}(\lambda(K',\omega')(t_0)).$$

Por tanto

$$B_\delta(\lambda(K',\omega')(B_\delta(t_0))) \subset B_\varepsilon(\lambda(K',\omega')(t_0)).$$

Luego, dado t_0, para todo $t \in I$ con $d(t,t_0) < \delta$ se tiene que

$$\lambda(K,\omega)(t_0) \not\subset B_\delta(\lambda(K',\omega')(t)).$$

Por tanto $\lambda(K,\omega) \notin B_\delta(\lambda(K',\omega'))$. Pero dado $\delta > 0$, por ser λ continua en (K',ω'), existe $\eta > 0$ tal que para todo $K'' \in B_\eta(K')$ y todo $\omega'' \in B_\eta(\omega')$ se tiene

$$\lambda(K'',\omega'') \in B_\delta(\lambda(K',\omega')).$$

En particular, como $K \subset K'$ y $\omega \subset \omega'$ entonces

$$\lambda(K,\omega) \in B_\delta(\lambda(K',\omega')).$$

Contradicción.

A continuación se presentan dos ejemplos de multifibraciones. Es conocido que ambos son ejemplos de fibraciones 'shape'.

Ejemplo 3.1.8 Sean los conjuntos

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x \leq 1, y = \text{sen}(\frac{1}{x})\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0, -1 \leq y \leq 1\}$$

y $B = [0,1]$, y sea $p : E \longrightarrow B$ dada por $p(x,y) = x$. Es conocido que p es una fibración 'shape' pero además es multifibración.

Ejemplo 3.1.9 Sea E solenoide diádico definido como

$$E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_k$$

donde E_k es una sucesión decreciente de toros macizos de tal forma que cada uno da dos vueltas dentro del anterior y por tanto 2^{k-1} vueltas dentro de E_1. Sea B la circunferencia unidad y sea $p : E \longrightarrow B$ la proyección canónica. Entonces p es una multifibración.

Sea X espacio topológico, Y espacio métrico y sea $F : X \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow Y$ aplicación multivaluada. Se dice que F es una aplicación multivaluada fina si es semicontinua superiormente y para todo $\varepsilon > 0$ existe $r_0 \in \mathbb{R}_+$ tal que $\text{diam}(F(x,r)) < \varepsilon$ para todo $x \in X$ y todo $r \geq r_0$.

Se dice que F y G son asintóticas si para todo $\varepsilon > 0$ existe $r_0 \in \mathbb{R}_+$ tal que $d(F(x,r), G(x,r)) < \varepsilon$ para todo $x \in X$ y todo $r \geq r_0$.

Definición 3.1.10 Sean E y B espacios métricos compactos y $p : E \longrightarrow B$ continua. Sea X espacio topológico. Se dice que p tiene la propiedad de elevación de homotopías multivaluadas finas (PEHMF) respecto de X si dadas $F : X \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow E$ y $H : X \times I \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow B$ aplicaciones multivaluadas finas tales que pF y H_0 son asintóticas, existe $H' : X \times I \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow E$ aplicación multivaluada fina tal que H'_0 y F son asintóticas, y también lo son pH' y H.

Observación 3.1.11 Si $p : E \longrightarrow B$ tiene la propiedad PEHMF respecto de X espacio métrico compacto y $G, G' : X \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow B$ son aplicaciones multivaluadas finas homótopas, entonces G puede elevarse a E – en el sentido de que existe $F : X \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow E$ aplicación multivaluada fina tal que pF y G son asintóticas – si y solo si G' puede elevarse a E. Luego el que una aplicación multivaluada fina $G : X \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow B$ se pueda elevar a E es una propiedad de la clase de homotopía de G, es decir, del morfismo 'shape' fuerte correspondiente a G.

Teorema 3.1.12 *Sean E y B espacios métricos compactos y $p : E \longrightarrow B$ continua. Sea X espacio topológico y supongamos que p tiene la propiedad PEHM respecto de $X \times I$. Entonces p tiene la propiedad PEHMF respecto de X.*

En consecuencia, si p es una multifibración, p tiene la propiedad PEHMF respecto de todo espacio topológico X.

Dem. Supongamos que p tiene la propiedad PEHM respecto de $X \times I$. Sea $\{\varepsilon_n\}$ sucesión nula, entonces existe $\{\eta_n\}$ sucesión nula tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $\eta_n \leq \varepsilon_n$ y η_n está asociado a ε_n por la definición de la propiedad PEHM respecto de $X \times I$. Por otra parte, si p tiene la propiedad PEHM respecto de $X \times I$, entonces p tiene la propiedad PEHM respecto de X. Por tanto existe $\{\delta_n\}$ sucesión nula tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $\delta_n < \frac{\eta_n}{3}$ y δ_n está asociado a $\frac{\eta_n}{3}$ por la definición de la propiedad PEHM respecto de X.

Sean $F : X \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow E$ y $H : X \times I \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow B$ aplicaciones multivaluadas finas tales que pF y H_0 son asintóticas. Existe $\{k_n\} \subset \mathbb{N}$ sucesión creciente no acotada tal que para todo $x \in X$, todo $t \in I$ y todo $r \geq k_n$ se tiene

$$\operatorname{diam}(F(x,r)) < \delta_n, \ \operatorname{diam}(H(x,t,r)) < \delta_n, \ d(pF(x,r), H(x,0,r)) < \delta_n.$$

Entonces para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $G_n : X \times I \longrightarrow E$ aplicación multivaluada $\frac{\eta_n}{3}$-fina semicontinua superiormente tal que para todo $x \in X$ y todo $t \in I$ se tiene

$$d(G_n(x,0), F(x,k_n)) < \frac{\eta_n}{3}, d(pG_n(x,t), H(x,t,k_n)) < \frac{\eta_n}{3}.$$

Por otra parte, como $d(G_n(x,0), F(x,k_n)) < \frac{\eta_n}{3}$ y $d(G_{n+1}(x,0), F(x,k_{n+1})) < \frac{\eta_n}{3}$ podemos considerar $G'_n : X \times (\{0\} \times [k_n, k_{n+1}] \cup I \times \{k_n, k_{n+1}\}) \longrightarrow E$ aplicación multivaluada η_n-fina dada por

$$G'_n(x,t,r) = \begin{cases} G_n(x,t) & \text{si } r = k_n, 0 < t \leq 1 \\ G_n(x,0) \cup F(x,k_n) & \text{si } r = k_n, t = 0 \\ F(x,r) & \text{si } r \in (k_n, k_{n+1}), t = 0 \\ G_{n+1}(x,0) \cup F(x,k_{n+1}) & \text{si } r = k_{n+1}, t = 0 \\ G_{n+1}(x,t) & \text{si } r = k_{n+1}, 0 < t \leq 1. \end{cases}$$

Tenemos entonces

$$G'_n : X \times (\{0\} \times [k_n, k_{n+1}] \cup I \times \{k_n, k_{n+1}\}) \longrightarrow E$$

y $H|_{X \times I \times [k_n, k_{n+1}]} : X \times I \times [k_n, k_{n+1}] \longrightarrow B$ aplicaciones multivaluadas η_n-finas semicontinuas superiormente tales que $d(pG'_n(x,t,r), H(x,t,r)) < \eta_n$, para todo $(x,t,r) \in X \times (\{0\} \times [k_n, k_{n+1}] \cup I \times \{k_n, k_{n+1}\})$.

Entonces, como existe un homeomorfismo de $X \times I \times [k_n, k_{n+1}]$ en si mismo que manda $X \times (\{0\} \times [k_n, k_{n+1}] \cup I \times \{k_n, k_{n+1}\})$ en $X \times \{0\} \times [k_n, k_{n+1}]$, podemos aplicar PEHM y tenemos que existe $G''_n : X \times I \times [k_n, k_{n+1}] \longrightarrow E$ aplicación multivaluada ε_n-fina semicontinua superiormente tal que

$$d(G'_n(x,t,r), G''_n(x,t,r)) < \varepsilon_n$$

para todo $(x,t,r) \in X \times (\{0\} \times [k_n, k_{n+1}] \cup I \times \{k_n, k_{n+1}\})$, y

$$d(pG''_n(x,t,r), H(x,t,r) < \varepsilon_n$$

para todo $(x,t,r) \in X \times I \times [k_n, k_{n+1}]$.

Finalmente, definimos $H' : X \times I \times [k_1, \infty) \longrightarrow E$ como

$$H'(x,t,r) = \begin{cases} G''_1(x,t,r) & \text{si } r = k_1 \\ G''_n(x,t,r) \cup G''_{n+1}(x,t,r) & \text{si } r = k_{n+1}, n \in \mathbb{N} \\ G''_n(x,t,r) & \text{si } k_n < r < k_{n+1}, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

donde para todo $n \in \mathbb{N}$, como $G'_n|_{X \times \{k_{n+1}\} \times I} = G'_{n+1}|_{X \times \{k_{n+1}\} \times I}$, se tiene que

$$\begin{aligned} \operatorname{diam}(H'(x,t,k_{n+1})) &= \operatorname{diam}(G''_n(x,t,k_{n+1}) \cup G''_{n+1}(x,t,k_{n+1})) \\ &\leq \operatorname{diam}(G''_n(x,t,k_{n+1})) + d(G''_n(x,t,k_{n+1}), G'_n(x,t,k_{n+1})) \\ &\qquad + \operatorname{diam}(G'_n(x,t,k_{n+1})) \\ &\qquad + d(G'_{n+1}(x,t,k_{n+1}), G''_{n+1}(x,t,k_{n+1})) \\ &\qquad + \operatorname{diam}(G''_{n+1}(x,t,k_{n+1})) \\ &< 5\varepsilon_n, \end{aligned}$$

para todo $(x,t) \in X \times I$, y si $(x,t,r) \in X \times I \times (k_n, k_{n+1})$, entonces

$$\operatorname{diam}(H'(x,t,r)) = \operatorname{diam}(G''_n(x,t,r)) < \varepsilon_n.$$

Además, para todo $(x,t,r) \in X \times I \times [k_n, k_{n+1}]$ se tiene

$$\begin{aligned} d(H'(x,0,r), F(x,r)) &\leq d(G''_n(x,0,r), F(x,r)) \\ &\leq d(G''_n(x,0,r), G'_n(x,0,r)) + \operatorname{diam}(G'_n(x,0,r)) \\ &\qquad + d(G'_n(x,0,r), F(x,r)) \\ &< 2\varepsilon_n, \end{aligned}$$

y $d(pH'(x,t,r), H(x,t,r)) \leq d(pG''_n(x,t,r), H(x,t,r)) < \varepsilon_n$.

Es fácil ver finalmente que H' es semicontinua superiormente y que se puede extender a una aplicación multivaluada fina $H' : X \times I \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow E$ que, por lo anterior, cumple las condiciones de asintoticidad necesarias.

Observación 3.1.13 Sean E y B espacios métricos compactos y $p : E \longrightarrow B$ continua. Sea X espacio topológico y supongamos que p tiene la propiedad PEHM respecto de $X \times I$. Entonces para toda sucesión nula $\{\varepsilon_n\}$, existe $\{\delta_n\}$ sucesión nula tal que, dadas $F : X \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow E$ y $H : X \times I \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow B$ aplicaciones multivaluadas finas tales que

$$\operatorname{diam}(F(x,r)) < \delta_n,\ \operatorname{diam}(H(x,t,r)) < \delta_n,\ d(pF(x,r), H(x,0,r)) < \delta_n.$$

para todo $x \in X$, todo $t \in I$ y todo $r \geq k_n$, para cierta sucesión creciente no acotada $\{k_n\}$, entonces existe $H' : X \times I \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow E$ aplicación multivaluada fina tal que $\operatorname{diam}(H'(x,t,r)) < \varepsilon_n$,

$$d(F(x,r), H'(x,0,r)) < \varepsilon_n \text{ y } d(pH(x,t,r), H'(x,0,r)) < \varepsilon_n,$$

para todo $x \in X$, todo $t \in I$ y todo $r \geq k_n$.

Definición 3.1.14 Sean $x, y \in B$. Un camino multivaluado fino entre x e y es toda aplicación multivaluada fina $\omega : (I,0,1) \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow (B,x,y)$. Por tanto, existe un camino multivaluado fino entre x e y si y solo si las aplicaciones multivaluadas finas constantes $c_x, c_y : \mathbb{R}_+ \longrightarrow B$, dadas por $c_x(t) = x$ y $c_y(t) = y$ para todo $t \in \mathbb{R}_+$, son homótopas.

El siguiente resultado expresa condiciones formalmente más débiles que el resultado de Mardešić [76], garantizando que dos fibras $p^{-1}(x)$ y $p^{-1}(y)$ tienen la misma forma. El ejemplo de Keesling-Mardešić [59] prueba que el resultado no es cierto en general sin más hipótesis que la conexión de B.

Teorema 3.1.15 *Sean E y B espacios métricos compactos y $p : E \longrightarrow B$ continua con la propiedad PEHMF respecto de todos los espacios métricos compactos. Supongamos que existe un camino multivaluado fino entre x e y. Entonces $SSh(p^{-1}(x)) = SSh(p^{-1}(y))$.*

Dem. Vamos a ver primero que dado $x \in X$ y dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$p^{-1}(B_\delta(x)) \subset B_\varepsilon(p^{-1}(x)).$$

En caso contrario, existiría $(x'_n) \subset E$ que, por la compacidad de E, podemos tomar convergente a un cierto $x' \in E$, tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $x'_n \in p^{-1}(B_{\frac{1}{n}}(x))$ pero $x'_n \notin B_\varepsilon(p^{-1}(x))$. Pero por la primera condición se tiene que $(p(x'_n))$ converge a x y por la segunda se tiene que $p(x') \neq x$ y ésto contradice la continuidad de p. Luego existe $\delta > 0$ tal que

$$p^{-1}(B_\delta(x)) \subset B_\varepsilon(p^{-1}(x)).$$

Sean ahora $x, y \in B$ y supongamos que existe un camino multivaluado fino entre x e y. Sea $\{\varepsilon_n\}$ sucesión nula. Entonces existe $\{\delta_n\}$ sucesión nula tal que

$$p^{-1}(B_{\delta_n}(x)) \subset B_{\varepsilon_n}(p^{-1}(x)) \text{ y } p^{-1}(B_{\delta_n}(y)) \subset B_{\varepsilon_n}(p^{-1}(y)),$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Sea $\omega : (I, 0, 1) \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow (B, x, y)$ un camino multivaluado fino. Sean $F : p^{-1}(x) \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow E$ dada por $F(x', r) = x'$, y $G : p^{-1}(x) \times I \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow B$ dada por $G(x', t, r) = \omega(t, r)$, aplicaciones multivaluadas finas tales que $pF = G_0$. Entonces existe

$$H : p^{-1}(x) \times I \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow E$$

aplicación multivaluada fina tal que H_0 y F son asintóticas, y también lo son pH y G. Por otra parte, si consideramos $F' : p^{-1}(y) \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow E$ dada por $F'(y', r) = y'$ y $G' : p^{-1}(x) \times I \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow B$ dada por $G'(y', t, r) = \omega(1 - t, r)$, obtenemos dos aplicaciones multivaluadas finas tales que $pF' = G'_0$. Entonces existe $H' : p^{-1}(y) \times I \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow E$ aplicación multivaluada fina tal que H'_0 y F' son asintóticas, y también lo son pH' y G'. Entonces existe $\{k_n\} \subset \mathbb{N}$ sucesión estrictamente creciente tal que

$$\operatorname{diam}(H(x', t, r)) < \delta_n, \; d(H(x', 0, r), x') < \delta_n, \; d(pH(x', t, r), \omega(t, r)) < \delta_n$$

para todo $x' \in p^{-1}(x)$, todo $t \in I$ y todo $r \geq k_n$, y

$$\operatorname{diam}(H'(y', t, r)) < \delta_n, \; d(H'(y', 0, r), y') < \delta_n, \; d(pH'(y', t, r), \omega(1 - t, r)) < \delta_n$$

para todo $y' \in p^{-1}(y)$, todo $t \in I$ y todo $r \geq k_n$. En particular, para todo $x' \in p^{-1}(x)$, todo $y' \in p^{-1}(y)$ y todo $r \geq k_n$, se tiene que

$$d(pH(x',1,r),y) < \delta_n \text{ y } d(pH'(y',1,r),x) < \delta_n,$$

luego

$$H(x',1,r) \cap p^{-1}(B_{\delta_n}(y)) \neq \emptyset \text{ y } H'(y',1,r) \cap p^{-1}(B_{\delta_n}(x)) \neq \emptyset$$

y por tanto

$$H(x',1,r) \cap B_{\varepsilon_n}(p^{-1}(y)) \neq \emptyset \text{ y } H'(y',1,r) \cap B_{\varepsilon_n}(p^{-1}(x)) \neq \emptyset.$$

Sea $\alpha : p^{-1}(x) \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow p^{-1}(y)$ dada por

$$\alpha(x',r) = \begin{cases} p^{-1}(y) & \text{si } 0 \leq r \leq k_1 \\ \overline{B}_{\varepsilon_n}(H(x',1,r)) \cap p^{-1}(y) & \text{si } k_n < r \leq k_{n+1}, n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Entonces α es una aplicación multivaluada fina de $p^{-1}(x)$ a $p^{-1}(y)$, y si definimos $\alpha' : p^{-1}(y) \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow p^{-1}(x)$ dada por

$$\alpha'(y',r) = \begin{cases} p^{-1}(x) & \text{si } 0 \leq r \leq k_1 \\ \overline{B}_{\varepsilon_n}(H'(y',1,r)) \cap p^{-1}(x) & \text{si } k_n < r \leq k_{n+1}, n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

obtenemos una aplicación multivaluada fina de $p^{-1}(y)$ a $p^{-1}(x)$. Vamos a ver que $[\alpha'][\alpha] = [I_x]$ donde $I_x : p^{-1}(x) \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow p^{-1}(x)$ viene dada por $I_x(x',r) = x'$.

Sea $\gamma : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ aplicación dilatadora asociada al par (α, α'), que podemos tomar no acotada y tal que $\operatorname{diam}(H'(\alpha(x',\gamma(r)),t,r)) < \delta_n$ para todo $(x',t) \in p^{-1}(x) \times I$ y para todo $r \geq n$. Sabemos entonces que $[\alpha'][\alpha] = [\beta]$ donde $\beta : p^{-1}(x) \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow p^{-1}(x)$ viene dada por $\beta(x',r) = \alpha'(\alpha(x',\gamma(r)),r)$. Vamos a ver que $[\beta] = [I_x]$.

Consideramos $J : p^{-1}(x) \times (I \times \{0,1\} \cup \{0\} \times I) \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow E$ dada por

$$J(x',t,s,r) = \begin{cases} H(x',0,\gamma(r)) \cup \{x'\} & \text{si } t = 0, s = 0 \\ H(x',2t,\gamma(r)) & \text{si } 0 < t < \frac{1}{2}, s = 0 \\ H(x',1,\gamma(r)) \cup H'(\alpha(x',\gamma(r)),0,r) & \text{si } t = \frac{1}{2}, s = 0 \\ H'(\alpha(x',\gamma(r)),2t-1,r) & \text{si } \frac{1}{2} < t \leq 1, s = 0 \\ x' & \text{si } t = 0, 0 < s \leq 1 \\ x' & \text{si } 0 < t \leq 1, s = 1 \end{cases}$$

que es una aplicación multivaluada fina pues

$$d(H(x',0,\gamma(r)),x') < \delta_n, d(H(x',1,\gamma(r)),\alpha(x',\gamma(r))) \leq \varepsilon_n,$$

$$d(\alpha(x',\gamma(r)),H'(\alpha(x',\gamma(r)),0,r))<\delta_n,$$

para todo $x'\in p^{-1}(x)$ y todo $r\in\mathbb{R}_+$ con $\gamma(r)\geq k_n$.

Por otra parte, existe $K:p^{-1}(x)\times(I,0,1)\times I\times\mathbb{R}_+\longrightarrow(B,x,x)$ aplicación multivaluada fina tal que

$$K(x',t,0,r)=\begin{cases}\omega(2t,\gamma(r)) & \text{si } 0\leq t\leq\frac{1}{2}\\ \omega(2-2t,r) & \text{si } \frac{1}{2}\leq t\leq 1\end{cases}$$

y tal que $K(x',t,1,r)=K(x',0,s,r)=K(x',1,s,r)=x$. Además, como

$$d(pH(x',2t,\gamma(r)),\omega(2t,\gamma(r)))<\delta_n,$$

$$d(pH'(\alpha(x',\gamma(r)),2t-1,r),\omega(2-2t,r))<\delta_n,$$

para todo $(x',t)\in p^{-1}(x)\times I$ y todo $r\geq k_n$ con $\gamma(r)\geq k_n$, entonces se tiene que $K|_{p^{-1}(x)\times(I\times\{0,1\}\cup\{0\}\times I)\times\mathbb{R}_+}$ y pJ son asintóticas. Por tanto, por la propiedad PEHMF, existe una aplicación multivaluada fina $K':p^{-1}(x)\times I\times I\times\mathbb{R}_+\longrightarrow E$ tal que $K'|_{p^{-1}(x)\times(I\times\{0,1\}\cup\{0\}\times I)\times\mathbb{R}_+}$ y J son asintóticas, y también lo son pK' y K. Luego existe $\{k'_n\}\subset\mathbb{N}$ sucesión estrictamente creciente tal que para todo $x'\in p^{-1}(x)$, todo $s\in I$ y todo $r\geq k'_n$ se tiene

$$d(pK'(x',1,s,r),x)<\delta_n,$$

y por tanto

$$K'(x',1,s,r)\cap B_{\varepsilon_n}(p^{-1}(x))\supset K'(x',1,s,r)\cap p^{-1}B_{\delta_n}(x)\neq\emptyset.$$

Entonces si definimos $L:p^{-1}(x)\times I\times\mathbb{R}_+\longrightarrow p^{-1}(x)$ tal que

$$L(x',s,r)=\begin{cases}p^{-1}(x) & \text{si } 0\leq r\leq k'_1\\ \overline{B}_{\varepsilon_n}(K'(x',1,s,r))\cap p^{-1}(x) & \text{si } k'_n<r\leq k'_{n+1}, n\in\mathbb{N},\end{cases}$$

obtenemos una aplicación multivaluada fina tal que $L|_{p^{-1}(x)\times\{0\}\times\mathbb{R}_+}$ es asintótica a $K'|_{p^{-1}(x)\times\{1\}\times\{0\}\times\mathbb{R}_+}$, y ésta es asintótica a $J|_{p^{-1}(x)\times\{1\}\times\{0\}\times\mathbb{R}_+}$, donde

$$\begin{aligned}\overline{B}_{\varepsilon_n}(J(x',1,0,r))\cap p^{-1}(x) &= \overline{B}_{\varepsilon_n}(H'(\alpha(x',\gamma(r)),1,r))\cap p^{-1}(x)\\ &= \alpha'(\alpha(x',\gamma(r)),r),\end{aligned}$$

para todo $x' \in p^{-1}(x)$ y todo $r \geq k_n$. Por otra parte, $L|_{p^{-1}(x)\times\{1\}\times\mathbb{R}_+}$ es asintótica a $K'|_{p^{-1}(x)\times\{1\}\times\{1\}\times\mathbb{R}_+}$, y ésta lo es a $J|_{p^{-1}(x)\times\{1\}\times\{1\}\times\mathbb{R}_+}$ donde

$$J(x', 1, 1, r) \;=\; x',$$

para todo $x' \in p^{-1}(x)$ y todo $r \in \mathbb{R}_+$. Luego $[\alpha'][\alpha] = [I_x]$. Analogamente se prueba que $[\alpha][\alpha'] = [I_y]$. Luego $SSh(p^{-1}(x)) = SSh(p^{-1}(y))$.

Sea X espacio topológico, Y espacio métrico y sea $F : X \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow Y$ aplicación multivaluada. Se dice que F es una aplicación multivaluada localmente fina si es semicontinua superiormente y para todo $\varepsilon > 0$ y para todo $x \in X$ existe U^x entorno de x y existe $r_x \in \mathbb{R}_+$ tal que $\mathrm{diam}(F(x', r)) < \varepsilon$ para todo $x' \in U^x$ y todo $r \geq r_x$. Obsérvese que si X es compacto las aplicaciones multivaluadas localmente finas coinciden con las aplicaciones multivaluadas finas.

Se dice que $F, G : X \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow Y$ aplicaciones multivaluadas son puntualmente asintóticas si para todo $\varepsilon > 0$ y para todo $x \in X$ existe $r_x \in \mathbb{R}_+$ tal que $d((F(x,r), G(x,r)) < \varepsilon$ para todo $r \geq r_x$.

Dados E, B espacios métricos compactos y dada $p : E \longrightarrow B$ aplicación suprayectiva, podemos definir el conjunto

$$\Omega = \{(\alpha, \omega) \in M(\{0\}, E) \times M(I, B) \mid \omega|_{\{0\}\times\mathbb{R}_+} \text{ es asintótica a } p\alpha\},$$

donde $M(\{0\}, E)$ y $M(I, B)$ son los conjuntos de aplicaciones multivaluadas finas de un punto en E y de I en B, respectivamente. Consideramos en Ω la topología inducida por la topología producto de $M(\{0\}, E) \times M(I, B)$.

Se tiene entonces el siguiente resultado.

Proposición 3.1.16 *Sean E y B espacios métricos compactos y $p : E \longrightarrow B$ suprayectiva. Entonces son equivalentes:*
i) Para todo espacio topológico X y para cualesquiera $F : X \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow E$ y $H : X \times I \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow B$ aplicaciones multivaluadas localmente finas tales que pF y H_0 son puntualmente asintóticas, existe $H' : X \times I \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow E$ aplicación multivaluada localmente fina tal que H'_0 y F son puntualmente asintóticas, y también lo son pH' y H.

ii) Existe una aplicación (univaluada) continua $\lambda : \Omega \longrightarrow M(I,E)$ tal que $\lambda(\alpha,\omega)|_{\{0\}\times \mathbb{R}_+}$ y α son asintóticas, y $p\lambda(\alpha,\omega)$ y ω son puntualmente asintóticas, para todo $(\alpha,\omega) \in \Omega$.

Dem. Vamos a ver primero que i) implica ii). Sea $X = \Omega$ y consideremos la aplicación $F : \Omega \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow E$ dada por $F((\alpha,\omega),r) = \alpha(r)$ y la aplicación $H : \Omega \times I \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow B$ dada por $H((\alpha,\omega),t,r) = \omega(t,r)$. Entonces F y H son aplicaciones multivaluadas localmente finas. Además, se verifica que

$$pF \text{ y } H'|_{\Omega\times\{0\}\times\mathbb{R}_+}$$

son puntualmente asintóticas. Entonces existe $H' : \Omega \times I \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow E$ aplicación multivaluada localmente fina tal que F y $H'|_{\Omega\times\{0\}\times\mathbb{R}_+}$ son puntualmente asintóticas y también lo son pH' y H. Definimos $\lambda : \Omega \longrightarrow M(I,E)$ (univaluada) como $\lambda(\alpha,\omega)(t,r) = H'((\alpha,\omega),t,r)$. Está bien definida pues para todo $(\alpha,\omega) \in \Omega$, se tiene que $\lambda(\alpha,\omega) : I \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow E$ es aplicación multivaluada fina (por ser H' localmente fina). Además, λ es continua. En efecto, dados (α_0,ω_0) y $\varepsilon > 0$, existe $U^{(\alpha_0,\omega_0)}$ entorno de (α_0,ω_0) y existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\mathrm{diam}(H'((\alpha,\omega),t,r)) < \varepsilon$ para todo $(\alpha,\omega) \in U^{(\alpha_0,\omega_0)}$, todo $t \in I$ y todo $r \geq k_0$, y podemos suponer que, fijado $\Delta > \mathrm{diam}(E)$, k_0 verifica además que

$$\sum_{k=k_0+1}^{\infty} \frac{\Delta}{2^k} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por otra parte, para todo $t_0 \in I$ y todo $r_0 \in [0,k_0]$ existe $U^{(\alpha_0,\omega_0)}_{(t_0,r_0)} \subset U^{(\alpha_0,\omega_0)}$, entorno de (α_0,ω_0), y existe $0 < \delta_{(t_0,r_0)} < \frac{\varepsilon}{2}$ tal que para todo $(\alpha,\omega) \in U^{(\alpha_0,\omega_0)}_{(t_0,r_0)}$ y todo $(t,r) \in I \times \mathbb{R}_+$ con $d((t_0,r_0),(t,r)) < \delta_{(t_0,r_0)}$ se tiene

$$\begin{aligned}
\lambda(\alpha,\omega)(t,r) &= H'((\alpha,\omega),t,r) \\
&\subset B_{\frac{\varepsilon}{2}}(H'((\alpha_0,\omega_0),t_0,r_0)) = B_{\frac{\varepsilon}{2}}(\lambda(\alpha_0,\omega_0)(t_0,r_0)).
\end{aligned}$$

Por la compacidad de $I \times [0,k_0]$ existen $(t_1,r_1),\ldots,(t_n,r_n)$ tales que

$$I \times [0,k_0] \subset B_{\delta_{(t_1,r_1)}}(t_1,r_1) \cup \ldots \cup B_{\delta_{(t_n,r_n)}}(t_n,r_n),$$

y tales que para todo $k \leq k_0$ y todo $(t,r) \in I \times [0,k]$ existe $(t_i,r_i) \in I \times [0,k]$ tal que $(t,r) \in B_{\delta_{(t_i,r_i)}}(t_i,r_i)$. Sea $V^{(\alpha_0,\omega_0)} = U^{(\alpha_0,\omega_0)}_{(t_1,r_1)} \cap \ldots \cap U^{(\alpha_0,\omega_0)}_{(t_n,r_n)}$, y vamos a ver que $\lambda(\alpha,\omega) \in B_\varepsilon(\lambda(\alpha_0,\omega_0))$, para todo $(\alpha,\omega) \in V^{(\alpha_0,\omega_0)}$. Definimos $\{\varepsilon_k\}$, verificando $\sum \frac{\varepsilon_k}{2^k} < \varepsilon$, como

$$\varepsilon_k = \begin{cases} \frac{\varepsilon}{2} & \text{si } 1 \leq k \leq k_0 \\ \Delta & \text{si } k_0 < k. \end{cases}$$

Si $(t,r) \in I \times [0,k]$ con $k \leq k_0$, existe $(t_i,r_i) \in I \times [0,k]$ verificando que $d((t,r),(t_i,r_i)) < \delta_{(t_i,r_i)} < \frac{\varepsilon}{2}$ tal que

$$\lambda(\alpha,\omega)(t,r) \subset B_{\frac{\varepsilon}{2}}(\lambda(\alpha_0,\omega_0)(t_i,r_i)).$$

Y si $(t,r) \in I \times [0,k]$ con $k > k_0$, entonces

$$\lambda(\alpha,\omega)(t,r) \subset B_\Delta(\lambda(\alpha_0,\omega_0)(t,r)).$$

Por otra parte, si $(t,r) \in I \times [0,k_0]$ existe $(t',r') \in I \times \mathbb{R}_+$ tal que

$$\lambda(\alpha,\omega)(t,r) \subset B_{\frac{\varepsilon}{2}}(\lambda(\alpha_0,\omega_0)(t',r')),$$

con $d((t,r),(t',r')) < \frac{\varepsilon}{2}$ y por tanto

$$\operatorname{diam}(\lambda(\alpha,\omega)(t,r)) < \operatorname{diam}(\lambda(\alpha_0,\omega_0)(t',r')) + \varepsilon.$$

Y si $r \geq k_0$, se tiene

$$\operatorname{diam}(\lambda(\alpha,\omega)(t,r)) = \operatorname{diam}(H((\alpha,\omega),t,r)) < \varepsilon.$$

Por tanto, λ es continua y, finalmente, verifica que dado $(\alpha,\omega) \in \Omega$ se tiene

$$d(\lambda(\alpha,\omega)(0,r),\alpha(r)) = d(H'((\alpha,\omega),0,r),F((\alpha,\omega),r)),$$

para todo $r \in \mathbb{R}_+$. Luego $\lambda(\alpha,\omega)|_{\{0\}\times\mathbb{R}_+}$ y α son asintóticas. Por otra parte,

$$d(p(\lambda(\alpha,\omega)(t,r)),\omega(t,r)) = d(p(H'((\alpha,\omega),t,r)),H((\alpha,\omega),t,r)),$$

para todo $t \in I$ y todo $r \in \mathbb{R}_+$. Luego $p\lambda(\alpha,\omega)$ y ω son puntualmente asintóticas.

Vamos a probar que ii) implica i). Supongamos que existe $\lambda : \Omega \longrightarrow M(I,E)$ en las condiciones del enunciado.

Sea X espacio topológico y sean $F : X \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow E$ y $H : X \times I \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow B$ aplicaciones multivaluadas localmente finas tales que pF y H_0 son puntualmente asintóticas. Consideramos $G : X \longrightarrow M(\{0\}, E)$ dada por $G(x)(0,r) = F(x,r)$ y $G' : X \longrightarrow M(I, B)$ dada por $G'(x)(t,r) = H(x,t,r)$, bien definidas por ser F y H localmente finas, y continuas (se prueba igual que antes para λ). Entonces $G'' : X \longrightarrow \Omega$ dada por $G''(x) = (G(x), G'(x))$ es una aplicación continua, bien definida pues para todo $x \in X$ se tiene que $pG(x)$ y $G'|_{\{0\}\times \mathbb{R}_+}$ son asintóticas, por ser pF y H_0 puntualmente asintóticas y verificarse que

$$G'(x)(0,r) = H(x,0,r) \text{ y } pF(x,r) = pG(x)(0,r),$$

para todo $(x,r) \in X \times \mathbb{R}_+$. Consideramos la composición

$$X \xrightarrow{G''} \Omega \xrightarrow{\lambda} M(I, E)$$

que es univaluada y continua, y a partir de ella definimos

$$H' : X \times I \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow E$$

tal que $H'(x,t,r) = \lambda G''(x)(t,r)$. Vamos a ver que H' es multivaluada semicontinua superiormente.

Sea (x_0, t_0, r_0) y sea $\eta > 0$. Por la semicontinuidad superior de $\lambda G''(x_0)$ existe $0 < \eta_1 < \eta$ tal que si $d((t,r),(t_0,r_0)) < \eta_1$ entonces

$$\lambda G''(x_0)(t,r) \subset B_{\frac{\eta}{2}}(\lambda G''(x_0)(t_0,r_0)).$$

Sea $k_0 > r_0 + \frac{\eta}{2}$. Por la continuidad de $\lambda G''$, existe U^{x_0} entorno de x_0 en X tal que si $x \in U^{x_0}$ entonces $\lambda G''(x) \subset B_{\frac{\eta_1}{2^{k_0+1}}}(\lambda G''(x_0))$. Por tanto para todo $(t,r) \in I \times [0, k_0]$ existe $(t', r') \in I \times [0, k_0]$ con $d((t,r),(t',r')) < \frac{\eta_1}{2}$ tal que

$$\lambda G''(x)(t,r) \subset B_{\frac{\eta_1}{2}}(\lambda G''(x_0)(t',r')).$$

En particular si $d((t,r),(t_0,r_0)) < \frac{\eta_1}{2}$ se tiene $d((t_0,r_0),(t',r')) < \eta_1$ y por tanto

$$\lambda G''(x_0)(t',r') \subset B_{\frac{\eta}{2}}(\lambda G''(x_0)(t_0,r_0)).$$

Luego $H'(x,t,r) = \lambda G''(x)(t,r) \subset B_\eta(\lambda G''(x_0)(t_0,r_0)) = B_\eta(H'(x_0,t_0,r_0))$ para todo $(x,t,r) \in X \times I \times \mathbb{R}_+$ tal que $x \in U^{x_0}$ y $d((t,r),(t_0,r_0)) < \frac{\eta_1}{2}$.

Luego H' es semicontinua superiormente, y es localmente fina pues dado $\varepsilon > 0$ y dado $(x_0, t_0) \in X \times I$ existe U^{x_0} entorno de x_0 tal que si $x \in U^{x_0}$ entonces

$$\lambda G''(x) \subset B_{\frac{\varepsilon}{2}}(\lambda G''(x_0)),$$

y por otra parte existe r_0 tal que $\mathrm{diam}(\lambda G''(x_0)(t,r)) < \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $t \in I$ y todo $r \geq r_0$. Por tanto para todo $x \in U^{x_0}$, todo $t \in I$ y todo $r \geq r_0 + \frac{\varepsilon}{2}$ se tiene

$$\mathrm{diam}(H'(x,t,r)) = \mathrm{diam}((\lambda G''(x))(t,r)) < \varepsilon.$$

Finalmente, dado $x \in X$, se tiene que

$$d(H'(x,0,r), F(x,r)) = d(\lambda(G(x), G'(x))(0,r), G(x)(0,r))$$

para todo $(x,r) \in X \times \mathbb{R}_+$, y por tanto $H'|_{X\times\{0\}\times\mathbb{R}_+}$ es puntualmente asintótica a F. Analogamente

$$d(pH'(x,t,r), H(x,t,r)) = d(p(\lambda(G(x), G'(x))(t,r)), G'(x)(t,r))$$

para todo $(x,t,r) \in X \times I \times \mathbb{R}_+$, y por tanto pH' es puntualmente asintótica a H. Esto completa la demostración del teorema.

3.2 APLICACIONES CON LA PROPIEDAD DE ELEVACIÓN CERCANA DE CAMINOS MULTIVALUADOS CERCANOS

Comencemos recordando esta bien conocida definición.

Definición 3.2.1 Sean E y B espacios métricos compactos y sea $p : E \longrightarrow B$ una aplicación continua. Se dice que p tiene la propiedad de elevación única de caminos si dadas $\omega', \omega'' : I \longrightarrow E$ aplicaciones continuas tales que $\omega'(0) = \omega''(0)$ y $p\omega' = p\omega''$ entonces $\omega' = \omega''$.

Definición 3.2.2 Sea E espacio métrico y sea $\delta > 0$. Un camino δ-fino en E es toda aplicación $\omega : I \longrightarrow E$ multivaluada δ-fina semicontinua superiormente. Llamamos n-camino δ-fino en E a toda aplicación $\omega : I^n \longrightarrow E$ multivaluada δ-fina semicontinua superiormente.

Definición 3.2.3 Sean E y B espacios métricos compactos y sea $p : E \longrightarrow B$ una aplicación continua. Decimos que p tiene la propiedad de elevación cercana de caminos multivaluados cercanos si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que dados $\omega', \omega'' : I \longrightarrow E$ caminos δ-finos tales que

$$d(\omega'(0), \omega''(0)) < \delta \text{ y } d(p\omega'(t), p\omega''(t)) < \delta$$

para todo $t \in I$, entonces $d(\omega'(t), \omega''(t)) < \varepsilon$ para todo $t \in I$.

Proposición 3.2.4 *Sea $p : E \longrightarrow B$ una aplicación continua, entre espacios métricos compactos, con la propiedad de elevación cercana de caminos multivaluados cercanos. Entonces p tiene la propiedad de elevación única de caminos.*

Teorema 3.2.5 *Sean E y B espacios métricos compactos y sea $p : E \longrightarrow B$ continua con la propiedad de elevación cercana de caminos multivaluados cercanos. Entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que dado X espacio métrico compacto conexo y dadas $F', F'' : X \longrightarrow E$ aplicaciones multivaluadas δ-finas semicontinuas superiormente tales que $d(F'(x_0), F''(x_0)) < \delta$ para un punto cualquiera $x_0 \in X$ y tales que $d(pF'(x), pF''(x)) < \delta$ para todo $x \in X$, se tiene que $d(F'(x), F''(x)) < \varepsilon$ para todo $x \in X$.*

Dem. Supongamos que p tiene la propiedad de elevación cercana de caminos multivaluados cercanos. Sea $\varepsilon > 0$ y sea $\delta > 0$ tal que dados $\omega', \omega'' : I \longrightarrow E$ caminos δ-finos tales que $d(\omega'(0), \omega''(0)) < \delta$ y $d(p\omega'(t), p\omega''(t)) < \delta$ para todo $t \in I$, se tiene $d(\omega'(t), \omega''(t)) < \varepsilon$ para todo $t \in I$.

Sea X espacio métrico compacto conexo y sean $F', F'' : X \longrightarrow E$ aplicaciones multivaluadas δ-finas semicontinuas superiormente tales que existe $x_0 \in X$ con $d(F'(x_0), F''(x_0)) < \delta$, y tales que $d(pF'(x), pF''(x)) < \delta$ para todo $x \in X$. Sea $x \in X$ y vamos a ver que $d(F'(x), F''(x)) < \varepsilon$.

Como F' y F'' son aplicaciones multivaluadas δ-finas semicontinuas superiormente, existe $\eta > 0$ tal que $\operatorname{diam}(F'(K)) < \delta$ y $\operatorname{diam}(F''(K)) < \delta$ para todo subconjunto compacto K de X con $\operatorname{diam}(K) < \eta$.

Como X es conexo existe $\omega : I \longrightarrow X$ camino η-fino tal que $\omega(0) = x_0$ y $\omega(1) = x$. Entonces $F'\omega, F''\omega : I \longrightarrow E$ son caminos δ-finos tales que

$$d(F'\omega(0), F''\omega(0)) = d(F'(x_0), F''(x_0)) < \delta$$

y $d(pF'\omega(t), pF''\omega(t)) < \delta$ para todo $t \in I$. Entonces se tiene que

$$d(F'\omega(t), F''\omega(t)) < \varepsilon$$

para todo $t \in I$. En particular $d(F'(x), F''(x)) = d(F'\omega(1), F''\omega(1)) < \varepsilon$.

Para las fibraciones de Hurewicz es conocido (ver [107], II.2.5) el siguiente resultado.

Teorema 3.2.6 *Una fibración $p : E \longrightarrow B$ tiene la propiedad de elevación única de caminos si y solo si ninguna fibra tiene caminos no constantes.*

En el siguiente resultado se prueba que la propiedad de elevación cercana de caminos multivaluados cercanos queda caracterizada por la condición más fuerte de que las fibras sean totalmente desconectadas, en el caso de las fibraciones 'shape'.

Teorema 3.2.7 *Sean E y B espacios métricos compactos y sea $p : E \longrightarrow B$ suprayectiva con la propiedad PEHM respecto de I. Entonces p tiene la propiedad de elevación cercana de caminos multivaluados cercanos si y solo si $p^{-1}(x)$ es totalmente desconectado, para todo $x \in B$.*

Dem. Supongamos que p tiene la propiedad de elevación cercana de caminos multivaluados cercanos y que existe $x \in X$ tal que $p^{-1}(x)$ no es totalmente desconectado. Entonces existe $A \subset p^{-1}(x)$ tal que A es conexo y tiene más de dos puntos. Sean $x', y' \in A$, $x' \neq y'$. Entonces dado $\varepsilon = d(x', y')$, por la propiedad de elevación cercana de caminos multivaluados cercanos, existe $\delta > 0$ tal que dados $\omega', \omega'' : I \longrightarrow E$ caminos δ-finos tales que $d(\omega'(0), \omega''(0)) < \delta$ y $d(p\omega'(t), p\omega''(t)) < \delta$ para todo $t \in I$, se tiene $d(\omega'(t), \omega''(t)) < \varepsilon$ para todo $t \in I$.

Pero como A es conexo, existe $\omega' : I \longrightarrow A \subset p^{-1}(x)$ camino δ-fino tal que $\omega'(0) = x', \omega'(1) = y'$, y podemos considerar, por otra parte, $\omega'' : I \longrightarrow p^{-1}(x)$

dado por $\omega''(t) = x'$ para todo $t \in I$. Entonces ω' y ω'' son caminos δ-finos tales que $\omega'(0) = \omega''(0)$ y $p\omega' = p\omega''$, y por tanto $d(\omega'(t), \omega''(t)) < \varepsilon$ para todo $t \in I$. En particular,

$$d(\omega'(1), \omega''(1)) = d(y', x') < \varepsilon.$$

Esta contradicción prueba la primera implicación.

Vamos a probar la otra implicación, ésto es, vamos a ver que si $p^{-1}(x)$ es totalmente desconectado para todo $x \in B$, entonces p tiene la propiedad de elevación cercana de caminos multivaluados cercanos.

Sea $\varepsilon > 0$. Vamos a ver que existe $0 < \eta < \varepsilon$ tal que para todo $A \subset B$ con $\operatorname{diam}(A) < \eta$ existen $\{U_1, \ldots, U_n\}$ subconjuntos abiertos de E disjuntos dos a dos con diámetro menor que ε tal que

$$p^{-1}(A) \subset U_1 \cup \ldots \cup U_n$$

con $d(U_i, U_j) > \eta$ para todo $i \neq j$.

Para todo $x \in B$, como $p^{-1}(x)$ es compacto y totalmente desconectado, existen $\{U_1^x, \ldots, U_{n_x}^x\}$ conjuntos abiertos y cerrados en $p^{-1}(x)$, disjuntos dos a dos y con diámetro menor que $\frac{\varepsilon}{3}$, tales que

$$p^{-1}(x) = U_1^x \cup \ldots \cup U_{n_x}^x.$$

Existe $0 < \varepsilon_x < \frac{\varepsilon}{3}$ tal que $d(U_i^x, U_j^x) > 3\varepsilon_x$ para todo $i \neq j$. Entonces

$$B_{\varepsilon_x}(p^{-1}(x)) = B_{\varepsilon_x}(U_1^x) \cup \ldots \cup B_{\varepsilon_x}(U_{n_x}^x),$$

unión de bolas abiertas en E con $d(B_{\varepsilon_x}(U_i^x), B_{\varepsilon_x}(U_j^x)) > \varepsilon_x$ para todo $i \neq j$. Ahora, existe $0 < \eta_x < \varepsilon_x$ tal que

$$p^{-1}(B_{\eta_x}(x)) \subset B_{\varepsilon_x}(p^{-1}(x)).$$

En caso contrario, existiría $(y_n) \subset E$ que, por la compacidad de E, podemos tomar convergente a un cierto $y \in E$, tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $y_n \in p^{-1}(B_{\frac{1}{n}}(x))$ pero $y_n \notin B_{\varepsilon_x}(p^{-1}(x))$. Pero por la primera condición se tiene que $(p(y_n))$ converge a x y por la segunda se tiene que $p(y) \neq x$ y ésto contradice la continuidad de p. Luego existe $0 < \eta_x < \varepsilon_x$ tal que

$$p^{-1}(B_{\eta_x}(x)) \subset B_{\varepsilon_x}(p^{-1}(x)),$$

y, por la compacidad de B, existe $0 < \eta < \varepsilon$ tal que para todo $A \subset B$ con $\mathrm{diam}(A) < \eta$ existe $x \in B$ tal que

$$p^{-1}(A) \subset p^{-1}(B_{\eta_x}(x)) \subset B_{\varepsilon_x}(p^{-1}(x)) = B_{\varepsilon_x}(U_1^x) \cup \ldots \cup B_{\varepsilon_x}(U_{n_x}^x)$$

con $d(B_{\varepsilon_x}(U_i^x), B_{\varepsilon_x}(U_j^x)) > \eta$ para todo $i \neq j$. Luego para todo $A \subset B$ con $\mathrm{diam}(A) < \eta$ existen $\{U_1, \ldots, U_n\}$ subconjuntos abiertos de E disjuntos dos a dos con diámetro menor que ε tal que

$$p^{-1}(A) \subset U_1 \cup \ldots \cup U_n$$

con $d(U_i, U_j) > \eta$ para todo $i \neq j$.

Sea $0 < \eta' < \frac{\eta}{6}$ tal que $\mathrm{diam}(p(K)) < \frac{\eta}{6}$ para todo K compacto de E con $\mathrm{diam}(K) < \eta'$. Sea $0 < \delta' < \eta'$ asociado a η' por la propiedad PEHM respecto de I, y sea $0 < \delta < \frac{\delta'}{3}$ tal que $\mathrm{diam}(p(K)) < \frac{\delta'}{3}$ para todo K compacto de E con $\mathrm{diam}(K) < \delta$. Vamos a ver que δ está asociado a ε por la propiedad de elevación cercana de caminos multivaluados cercanos.

Sean $\omega', \omega'' : I \longrightarrow E$ caminos δ-finos tales que $d(\omega'(0), \omega''(0)) < \delta$ y $d(p\omega'(t), p\omega''(t)) < \delta$ para todo $t \in I$. Fijamos $s \in I$ y consideramos las aplicaciones $F : I \times \{0\} \cup \{0,1\} \times I \longrightarrow E$ dada por

$$F(t,r) = \begin{cases} \omega'(s-2st) & \text{si } 0 \leq t < \frac{1}{2}, r = 0 \\ \omega'(0) \cup \omega''(0) & \text{si } t = \frac{1}{2}, r = 0 \\ \omega''(2st - s) & \text{si } \frac{1}{2} < t \leq 1, r = 0 \\ \omega'(s) & \text{si } t = 0 \\ \omega''(s) & \text{si } t = 1 \end{cases}$$

y $H : I \times I \longrightarrow B$ definida como

$$H(t,r) = \begin{cases} p\omega'(s - 2st + 2rst) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ p\omega'(2rs + 2st - s - 2rst) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Entonces F y H son aplicaciones multivaluadas δ'-finas semicontinuas superiormente tales que

$$d(pF(t,r), H(t,r)) < \delta'$$

para todo $(t,r) \in I \times \{0\} \cup \{0,1\} \times I$. Entonces, como existe un homeomorfismo de $I \times I$ en si mismo que manda $I \times \{0\} \cup \{0,1\} \times I$ en $I \times \{0\}$, podemos aplicar PEHM y tenemos que existe $H' : I \times I \longrightarrow E$ aplicación multivaluada η'-fina semicontinua superiormente tal que $d(H'(t,r), F(t,r)) < \eta'$ para todo $(t,r) \in I \times \{0\} \cup \{0,1\} \times I$ y $d(pH'(t,r), H(t,r)) < \eta'$ para todo $(t,r) \in I \times I$. En particular,

$$d(pH'(t,1), H(t,1)) = d(pH'(t,1), p\omega'(s)) < \eta' < \frac{\eta}{6},$$

para todo $t \in I$, y como H' es η'-fina, entonces pH' es $\frac{\eta}{6}$-fina y por tanto $H'(t,1) \in p^{-1}(B_{\frac{\eta}{3}}(p\omega'(s)))$ para todo $t \in I$. Por otra parte ω'' es δ-fina, luego $\mathrm{diam}(p\omega''(s)) < \frac{\delta'}{3} < \eta' < \frac{\eta}{6}$ y, como $d(p\omega'(s), p\omega''(s)) < \delta < \eta' < \frac{\eta}{6}$, entonces

$$\omega'(s), \omega''(s) \in p^{-1}(B_{\frac{\eta}{3}}(p\omega'(s))).$$

Luego podemos definir $\bar{\omega} : I \longrightarrow p^{-1}(B_{\frac{\eta}{3}}(\omega(s)))$ tal que

$$\bar{\omega}(t) = \begin{cases} H'(0,1) \cup \omega'(s) & \text{si } t = 0 \\ H'(t,1) & \text{si } 0 < t < 1 \\ H'(1,1) \cup \omega''(s) & \text{si } t = 1. \end{cases}$$

Es fácil ver que $\bar{\omega}$ es aplicación multivaluada η-fina semicontinua superiormente.

Por otra parte, como $\mathrm{diam}(B_{\frac{\eta}{3}}(p\omega'(s))) < \eta$ se tiene que existen $\{U_1, \ldots, U_n\}$ subconjuntos abiertos de E disjuntos dos a dos con diámetro menor que ε tal que

$$p^{-1}(B_{\frac{\eta}{3}}(p\omega'(s))) \subset U_1 \cup \ldots \cup U_n$$

con $d(U_i, U_j) > \eta$ para todo $i \neq j$. Y como $\bar{\omega}$ es η-fina, existirá U_i tal que $\bar{\omega}(I) \subset U_i$. En particular, $\omega'(s), \omega''(s) \subset U_i$ y $d(\omega'(s), \omega''(s)) < \varepsilon$.

La condición sobre la suprayectividad de p se puede suprimir del teorema, como muestra el siguiente corolario.

Corolario 3.2.8 *Sean E y B espacios métricos compactos y sea $p : E \longrightarrow B$ continua con la propiedad PEHM respecto de I. Entonces p tiene la propiedad de elevación cercana de caminos multivaluados cercanos si y solo si toda fibra no vacía es totalmente desconectada.*

Dem. Basta observar que si $p : E \longrightarrow B$ tiene la propiedad PEHM respecto de I, entonces $p : E \longrightarrow p(E)$ también la tiene. Además, $p : E \longrightarrow B$ tiene la propiedad de elevación cercana de caminos multivaluados cercanos si y solo si $p : E \longrightarrow p(E)$ tiene la propiedad de elevación cercana de caminos multivaluados cercanos y, por el teorema anterior, esta última propiedad equivale a que $p^{-1}(x)$ sea totalmente desconectado para todo $x \in p(E)$.

Observación 3.2.9 La propiedad PEHM solamente se ha utilizado en la segunda parte de la demostración del teorema. Luego para toda aplicación continua $p : E \longrightarrow B$ con la propiedad de elevación cercana de caminos multivaluados cercanos se tiene que toda fibra no vacía es totalmente desconectada.

Ejemplo 3.2.10 Sea E un solenoide diádico y sea B la circunferencia unidad. La proyección de E sobre B del ejemplo 3.1.9 es una multifibración cuyas fibras son conjuntos de Cantor y por tanto totalmente desconectados. Por tanto p es una multifibración con la propiedad de elevación cercana de caminos multivaluados cercanos.

Teorema 3.2.11 *Sean E y B espacios métricos compactos y sea $p : E \longrightarrow B$ una fibración 'shape' con la propiedad de elevación cercana de caminos multivaluados cercanos. Entonces p es una fibración (de Hurewicz) con la propiedad de elevación única de caminos.*

Dem. Vamos a ver que p tiene la propiedad de elevación de homotopía respecto de cualquier espacio métrico. Sea X espacio métrico y sean $f : X \to E$ y $H : X \times I \to B$ aplicaciones continuas tales que $pf = H_0$. Vamos a ver que existe $H' : X \times I \to E$ continua tal que $H'_0 = f$ y $pH' = H$.

Sea $\{\varepsilon_n\}$ sucesión decreciente verificando que $\varepsilon_n < \frac{1}{2^{n+1}}$ y que $2\varepsilon_n$ está asociado a $\frac{1}{2^{n+2}}$ por la propiedad de elevación cercana de caminos cercanos, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Por la propiedad PEHM, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $H'_n : X \times I \to E$ aplicación multivaluada ε_n-fina semicontinua superiormente tal que

$$d(H'_n(x,0), f(x)) < \varepsilon_n \text{ y } d(pH'_n(x,t), H(x,t)) < \varepsilon_n$$

para todo $(x,t) \in X \times I$. Entonces para todo $x \in X$ y todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$d(H'_n(x,0), H'_{n+1}(x,0)) < \varepsilon_n + \varepsilon_{n+1} \leq 2\varepsilon_n,$$

$$d(pH'_n(x,t), pH'_{n+1}(x,t)) < \varepsilon_n + \varepsilon_{n+1} \leq 2\varepsilon_n,$$

para todo $t \in I$. Y por la propiedad de elevación cercana de caminos cercanos se cumple que

$$d(H'_n(x,t), H'_{n+1}(x,t)) < \frac{1}{2^{n+2}}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, para todo $x \in X$ y todo $t \in I$. Luego, como H'_{n+1} es ε_{n+1}-fina se tiene que

$$H'_{n+1}(x,t) \subset B_{\varepsilon_{n+1}+\frac{1}{2^{n+2}}} H'_n(x,t) \subset B_{\frac{1}{2^{n+1}}} H'_n(x,t)$$

y por tanto

$$\overline{B}_{\frac{1}{2^{n+1}}} H'_{n+1}(x,t) \subset \overline{B}_{\frac{1}{2^n}} H'_n(x,t)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, todo $x \in X$ y todo $t \in I$. Entonces, para cada $(x,t) \in X \times I$, se tiene que $\{\overline{B}_{\frac{1}{2^n}} H'_n(x,t)\}$ es una sucesión decreciente de conjuntos compactos con diámetro tendiendo a cero. Luego existe un único elemento

$$e_{(x,t)} \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B}_{\frac{1}{2^n}} H'_n(x,t).$$

Definimos $H' : X \times I \to E$ tal que $H'(x,t) = e_{(x,t)}$ para todo $(x,t) \in X \times I$. Vamos a ver que H' es continua. Sea $(x_0,t_0) \in X \times I$ y sea $\varepsilon > 0$. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{4}$ y $\varepsilon_n < \frac{\varepsilon}{4}$. Entonces, como $H'(x,t) \in \overline{B}_{\frac{1}{2^n}} H'_n(x,t) \subset B_{\frac{\varepsilon}{4}} H'_n(x,t)$ y $\operatorname{diam}(H'_n(x,t)) < \varepsilon_n < \frac{\varepsilon}{4}$, se tiene que $H'_n(x,t) \subset B_{\frac{\varepsilon}{2}} H'(x,t)$ y por tanto

$$B_{\frac{\varepsilon}{4}} H'_n(x,t) \subset B_{\frac{3\varepsilon}{4}} H'(x,t)$$

para todo $(x,t) \in X \times I$. Sea $\delta > 0$ tal que $H'_n(x,t) \subset B_{\frac{\varepsilon}{4}} H'_n(x_0,t_0)$ para todo $(x,t) \in X \times I$ con $d(x,x_0) < \delta$ y $d(t,t_0) < \delta$. Entonces

$$H'(x,t) \in B_{\frac{\varepsilon}{4}} H'_n(x,t) \subset B_{\frac{\varepsilon}{4}} B_{\frac{\varepsilon}{4}} H'_n(x_0,t_0) \subset B_{\frac{\varepsilon}{4}} B_{\frac{3\varepsilon}{4}} H'(x_0,t_0) \subset B_\varepsilon H'(x_0,t_0)$$

para todo $(x,t) \in X \times I$ con $d(x,x_0) < \delta$ y $d(t,t_0) < \delta$. Luego H' es continua.

Además, como para todo $x \in X$ se tiene $d(H'_n(x,0), f(x)) < \varepsilon_n$, entonces $H'_n(x,0) \subset B_{2\varepsilon_n}(f(x))$ y por tanto

$$H'(x,0) \in \overline{B}_{\frac{1}{2^n}} H'_n(x,0) \subset B_{2\varepsilon_n + \frac{1}{2^n}}(f(x))$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego $H'(x,0) = f(x)$ para todo $x \in X$.

Finalmente, para todo $(x,t) \in X \times I$ y todo $\gamma > 0$, por la continuidad de H', existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\varepsilon_n < \frac{\gamma}{2}$ y

$$p(B_{\varepsilon_n + \frac{1}{2^n}}(H'(x,t))) \subset B_{\frac{\gamma}{2}}(pH'(x,t)).$$

Por otra parte, como $H'(x,t) \in \overline{B}_{\frac{1}{2^n}} H'_n(x,t)$ se tiene $H'_n(x,t) \subset B_{\varepsilon_n + \frac{1}{2^n}} H'(x,t)$. Por tanto,

$$H(x,t) \in B_{\varepsilon_n}(pH'_n(x,t)) \subset B_{\varepsilon_n}(pB_{\varepsilon_n + \frac{1}{2^n}}(H'(x,t))) \subset B_\gamma(pH'(x,t)).$$

Luego $pH'(x,t) = H(x,t)$ para todo $(x,t) \in X \times I$.

Como consecuencia del teorema anterior y del teorema II.5.10 de [107], se tiene el siguiente corolario.

Corolario 3.2.12 *Sean E y B espacios métricos compactos y sea $p : E \longrightarrow B$ una fibración 'shape' con la propiedad de elevación cercana de caminos multivaluados cercanos. Supongamos que E y B son localmente conexos por caminos y que B es semilocalmente 1-conexo (ésto es, todo punto $b \in B$ tiene un entorno N tal que $\pi(N,b) \to \pi(B,b)$ es trivial). Entonces p es una proyección recubridora.*

El recíproco del teorema anterior no es cierto como muestran los siguientes ejemplos.

Ejemplo 3.2.13 Sea K el pseudoarco [7] y B un espacio métrico compacto cualquiera. Sea $p_1 : B \times K \longrightarrow B$ la proyección sobre la primera componente. Entonces p_1 es una multifibración (también es una fibración de Hurewicz) cuyas fibras son homeomorfas a K, que es un continuo tal que cada componente conexa por caminos es un punto. Por tanto p_1 es una multifibración que es fibración con la propiedad de elevación única de caminos, pero sin la propiedad de elevación cercana de caminos multivaluados cercanos.

Ejemplo 3.2.14 ([78], Ejemplo 4) Sea K el pseudoarco, sea $E = K \vee K$ y sea $p : E \longrightarrow K$. Entonces, como las componentes conexas por caminos de K son los puntos, toda homotopía de un espacio topológico cualquiera en K es fija. Luego p es una fibración de Hurewicz y, como sus fibras son discretas, tiene la propiedad de elevación única de caminos. Sin embargo, p no es fibración 'shape' (ver [78], Ejemplo 4), ni tiene la propiedad de elevación cercana de caminos multivaluados cercanos.

Ejemplo 3.2.15 Sea K el pseudoarco, sea $E = K \times \{0, 1\}$ y sea $B = K \vee K$ (considerado como el cociente de E al identificar $(x_0, 0)$ y $(x_0, 1)$ para un cierto punto $x_0 \in K$). Sea $p : E \longrightarrow K$ la proyección. Entonces p es una fibración de Hurewicz con la propiedad de elevación cercana de caminos multivaluados cercanos pero no es fibración 'shape'.

Definición 3.2.16 Sean E y B espacios métricos compactos y sea $p : E \longrightarrow B$ una aplicación continua. Decimos que p tiene la propiedad de elevación asintótica de caminos multivaluados finos asintóticos si dadas $\omega', \omega'' : I \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow E$ aplicaciones multivaluadas finas tales que $\omega'|_{\{0\}\times\mathbb{R}_+}$ y $\omega''|_{\{0\}\times\mathbb{R}_+}$ son asintóticas, y también lo son $p\omega'$ y $p\omega''$ se tiene que también han de ser asintóticas ω' y ω''.

Observación 3.2.17 Sea $p : E \longrightarrow B$ una aplicación continua, entre espacios métricos compactos, con la propiedad de elevación asintótica de caminos multivaluados finos asintóticos. Entonces p tiene la propiedad de elevación única de caminos.

Teorema 3.2.18 *Sean E y B espacios métricos compactos y sea $p : E \longrightarrow B$ una aplicación continua con la propiedad de elevación asintótica de caminos multivaluados finos asintóticos. Entonces dadas $\omega', \omega'' : I^n \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow E$ aplicaciones multivaluadas finas tales que $\omega'|_{\{(0,\ldots,0)\}\times\mathbb{R}_+}$ y $\omega''|_{\{(0,\ldots,0)\}\times\mathbb{R}_+}$ son asintóticas, y también lo son $p\omega'$ y $p\omega''$ se tiene que también han de ser asintóticas ω' y ω''.*

Dem. Sean $\omega', \omega'' : I^n \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow E$ aplicaciones multivaluadas finas tales que $\omega'|_{\{(0,\ldots,0)\}\times\mathbb{R}_+}$ y $\omega''|_{\{(0,\ldots,0)\}\times\mathbb{R}_+}$ son asintóticas, y también lo son $p\omega'$ y $p\omega''$. Sea

$\alpha : I \longrightarrow I^n$ aplicación continua suprayectiva tal que $\alpha(0) = (0, \ldots, 0)$ y consideremos $\tilde{\omega}', \tilde{\omega}'' : I \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow E$ dadas por

$$\tilde{\omega}'(t,r) = \omega'(\alpha(t), r), \ \tilde{\omega}''(t,r) = \omega''(\alpha(t), r).$$

Entonces $\tilde{\omega}'$ y $\tilde{\omega}''$ son aplicaciones multivaluadas finas tales que

$$d(\tilde{\omega}'(0,r), \tilde{\omega}''(0,r)) = d(\omega'((0,\ldots,0),r), \omega''((0,\ldots,0),r))$$

para todo $r \in \mathbb{R}_+$ y por tanto $\tilde{\omega}'|_{\{0\}\times\mathbb{R}_+}$ y $\tilde{\omega}''|_{\{0\}\times\mathbb{R}_+}$ son asintóticas, y también lo son $p\tilde{\omega}'$ y $p\tilde{\omega}''$ pues

$$d(p\tilde{\omega}'(t,r), p\tilde{\omega}''(t,r)) = d(p\omega'(\alpha(t),r), p\omega''(\alpha(t),r))$$

para todo $r \in \mathbb{R}_+$. Entonces por la propiedad de elevación asintótica de caminos multivaluados finos asintóticos se tiene que $\tilde{\omega}'$ y $\tilde{\omega}''$ son asintóticas, y por ser α suprayectiva se tiene que ω' y ω'' son asintóticas.

De forma análoga al teorema anterior se prueba, teniendo en cuenta que todo continuo de Peano es imagen continua de $[0,1]$, el siguiente teorema.

Teorema 3.2.19 *Sean E y B espacios métricos compactos y sea $p : E \longrightarrow B$ una aplicación continua con la propiedad de elevación asintótica de caminos multivaluados finos asintóticos. Sean $F', F'' : X \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow E$ aplicaciones multivaluadas finas definidas en un continuo de Peano X, tales que $F'|_{\{x_0\}\times\mathbb{R}_+}$ y $F''|_{\{x_0\}\times\mathbb{R}_+}$ son asintóticas para un punto cualquiera $x_0 \in X$ y tales que también lo son pF' y pF''. Entonces F' y F'' son asintóticas.*

El siguiente teorema relaciona la propiedad de elevación cercana de caminos multivaluados cercanos y la propiedad de elevación asintótica de caminos multivaluados finos asintóticos.

Teorema 3.2.20 *Sea $p : E \longrightarrow B$ una aplicación continua, entre espacios métricos compactos, con la propiedad de elevación cercana de caminos multivaluados cercanos. Entonces p verifica la propiedad de elevación asintótica de caminos multivaluados finos asintóticos.*

Dem. Sean $\omega', \omega'' : I \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow E$ aplicaciones multivaluadas finas tales que $\omega'|_{\{0\}\times\mathbb{R}_+}$ y $\omega''|_{\{0\}\times\mathbb{R}_+}$ son asintóticas, y también lo son $p\omega'$ y $p\omega''$. Vamos a ver que ω' y ω'' son asintóticas.

Sea $\varepsilon > 0$ y sea $\delta > 0$ asociado a ε por la propiedad de elevación cercana de caminos multivaluados cercanos. Entonces existe $r_0 \in \mathbb{R}_+$ tal que $\omega'|_{I\times\{r\}}$ y $\omega''|_{I\times\{r\}}$ son δ-finas y

$$d(\omega'(0,r), \omega''(0,r)) < \delta, d(p\omega'(t,r), p\omega''(t,r)) < \delta,$$

para todo $t \in I$ y todo $r \geq r_0$. Entonces

$$d(\omega'(t,r), \omega''(t,r)) < \varepsilon$$

para todo $t \in I$ y todo $r \geq r_0$. Por tanto, ω' y ω'' son asintóticas.

De forma análoga al teorema anterior se prueba, a partir del teorema 3.2.5, el siguiente teorema.

Teorema 3.2.21 *Sea $p : E \longrightarrow B$ una aplicación continua, entre espacios métricos compactos, con la propiedad de elevación cercana de caminos multivaluados cercanos. Sean $F', F'' : X \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow E$ aplicaciones multivaluadas finas definidas en un espacio métrico compacto y conexo X, tales que $F'|_{\{x_0\}\times\mathbb{R}_+}$ y $F''|_{\{x_0\}\times\mathbb{R}_+}$ son asintóticas para un punto cualquiera $x_0 \in X$ y tales que también lo son pF' y pF''. Entonces F' y F'' son asintóticas.*

Observación 3.2.22 Hay resultados análogos para 'multinets' (en el sentido de [102]).

3.3 RELACIONES CON LOS GRUPOS DE HOMOTOPÍA

Definición 3.3.1 Sea E espacio métrico, sea $n \in \mathbb{N}$ y sean $\omega', \omega'' : I^n \longrightarrow E$ n-caminos δ-finos. Decimos que ω' y ω'' son ε-homótopos (rel.$\{\partial I^n; \eta\}$), si existe $H : I^n \times I \longrightarrow E$ aplicación multivaluada ε-fina semicontinua superiormente tal que $H_0 = \omega'$, $H_1 = \omega''$ y $\mathrm{diam}(H(\{t\} \times I)) < \eta$ para todo $t \in \partial I^n$.

Observación 3.3.2 Si ω' y ω'' son ε-homótopos (rel.$\{\{0,1\};\eta\}$) y ω'' y ω''' son ε-homótopos (rel.$\{\{0,1\};\eta\}$), entonces se tiene que ω' y ω''' son ε-homótopos (rel.$\{\{0,1\};2\eta\}$).

Observación 3.3.3 Sea E espacio métrico y sean $\omega',\omega'' : I^n \longrightarrow E$ n-caminos ε-finos tales que $\omega'|_{\partial I^n} = \omega''|_{\partial I^n}$ y ω' y ω'' son ε-homótopos (rel.$\{\partial I^n;\varepsilon\}$). Entonces ω' y ω'' son ε-homótopos (rel.∂I^n).

Dem. Sean $\omega',\omega'' : I^n \longrightarrow E$ n-caminos ε-finos tales que $\omega'|_{\partial I^n} = \omega''|_{\partial I^n}$ y sea $H : I^n \times I \longrightarrow E$ una ε-homotopía (rel.$\{\partial I^n;\varepsilon\}$) entre ω' y ω''.

Sea $r : I^n \longrightarrow I^n$ aplicación continua tal que

$$r(t_1,\ldots,t_n) = (3t_1 - 1,\ldots,3t_n - 1) \text{ si } (t_1,\ldots,t_n) \in K = \left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right] \times \overset{n}{\cdots} \times \left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right],$$

y tal que en el resto de los puntos r es la proyección radial hacia ∂I^n desde el punto $(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\ldots,\frac{1}{2})$ (en particular, $r|_{\partial I^n} = id_{\partial I^n}$). Entonces r es homótopa (rel.∂I^n) a la identidad en I^n.

Sean $\bar{\omega}' = \omega' r : I^n \longrightarrow E$ y $\bar{\omega}'' = \omega'' r : I^n \longrightarrow E$ n-caminos ε-finos. Es inmediato, por ser ω' y ω'' ε-finos que ω' y $\bar{\omega}'$ son ε-homótopos (rel.∂I^n), y que ω'' y $\bar{\omega}''$ son ε-homótopos (rel.∂I^n).

Y por otra parte, $H' : I^n \times I \longrightarrow E$ dada por

$$H'(t,s) = \begin{cases} \omega'(r(t)) = \omega''(r(t)) & \text{si } t \in I^n - K \\ H(\{r(t)\} \times I) & \text{si } t \in \partial K \\ H(r(t),s) & \text{si } t \in \operatorname{int}(K) \text{ (interior de } K) \end{cases}$$

es una ε-homotopía (rel.∂I^n) de $\bar{\omega}'$ a $\bar{\omega}''$. Luego ω' y ω'' son ε-homótopos (rel.∂I^n).

Teorema 3.3.4 *Sean E y B espacios métricos compactos y sea $p : E \longrightarrow B$ con la propiedad PEHM respecto de I^n y con la propiedad de elevación cercana de caminos multivaluados cercanos. Entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que dados $\omega',\omega'' : I^n \longrightarrow E$ n-caminos δ-finos con $d(\omega'(0,\ldots,0),\omega''(0,\ldots,0)) < \delta$ y tales que $p\omega'$ y $p\omega''$ son δ-homótopos (rel.$\{\partial I^n;\delta\}$), se tiene que ω' y ω'' son ε-homótopos (rel.$\{\partial I^n;\varepsilon\}$).*

Dem. Sea $\varepsilon > 0$. Sea $0 < \eta < \frac{\varepsilon}{3}$ asociado a $\frac{\varepsilon}{5}$ por la propiedad de elevación cercana de caminos multivaluados cercanos. Sea $0 < \delta < \frac{\eta}{5}$ asociado a $\frac{\eta}{5}$ por la propiedad PEHM respecto de I^n.

Sean $\omega', \omega'' : I^n \longrightarrow E$ n-caminos δ-finos con $d(\omega'(0), \omega''(0)) < \delta$ tales que $p\omega'$ y $p\omega''$ son δ-homótopos (rel.$\{\partial I^n; \delta\}$). Existe $H : I^n \times I \longrightarrow B$ δ-homotopía tal que $H_0 = p\omega'$, $H_1 = p\omega''$ y $\operatorname{diam}(H(\{t\} \times I)) < \delta$ para todo $t \in \partial I^n$. Entonces si consideramos $F : I^n \times \{0\} \cup \partial I^n \times I \longrightarrow E$ tal que

$$F(t,s) = \omega'(t)$$

para todo $(t,s) \in I^n \times \{0\} \cup \partial I^n \times I$, se tiene que F y H son aplicaciones multivaluadas δ-finas semicontinuas superiormente tales que $d(pF(t,s), H(t,s)) < \delta$ para todo $(t,s) \in I^n \times \{0\} \cup \partial I^n \times I$. Entonces, como existe un homeomorfismo de $I^n \times I$ en si mismo que manda $I^n \times \{0\} \cup \partial I^n \times I$ en $I^n \times \{0\}$, podemos aplicar PEHM y tenemos que existe $H' : I^n \times I \longrightarrow E$ $\frac{\eta}{5}$-homotopía tal que $d(H'(t,s), \omega'(t)) < \frac{\eta}{5}$ para todo $(t,s) \in I^n \times \{0\} \cup \partial I^n \times I$ (y por tanto $\operatorname{diam}(H'(\{t\} \times I)) < \eta$ para todo $t \in \partial I^n$), y tal que $d(pH'(t,s), H(t,s)) < \frac{\eta}{5}$ para todo $(t,s) \in I^n \times I$. Entonces ω' es η-homótopa (rel.$\{\partial I^n; \eta\}$) a H'_0 y H'_0 es η-homótopa (rel.$\{\partial I^n; \eta\}$) a H'_1. Por otra parte, como

$$\begin{aligned} d(H'_1(0,\ldots,0), \omega''(0,\ldots,0)) &\leq d(H'_1(0,\ldots,0), \omega'(0,\ldots,0)) \\ &\quad + \operatorname{diam}(\omega'(0,\ldots,0)) \\ &\quad + d(\omega'(0,\ldots,0), \omega''(0,\ldots,0)) \\ &< \frac{\eta}{5} + \delta + \delta < \eta \end{aligned}$$

y

$$d(pH'_1(t), p\omega''(t)) = d(pH'(t,1), H(t,1)) < \frac{\eta}{5} < \eta,$$

para todo $t \in I^n$, se tiene que $d(H'(t,1), \omega''(t)) < \frac{\varepsilon}{5}$ para todo $t \in I^n$, y como $\operatorname{diam}(H'(t,1)) < \frac{\eta}{5} < \frac{\varepsilon}{15}$ y $\operatorname{diam}(\omega''(t)) < \delta < \frac{\varepsilon}{15}$ para todo $t \in I^n$, entonces H'_1 y ω'' son $\frac{\varepsilon}{3}$-homótopas (rel.$\{\partial I^n; \frac{\varepsilon}{3}\}$). Por tanto ω' y ω'' son ε-homótopas (rel.$\{\partial I^n; \varepsilon\}$).

Corolario 3.3.5 *Sean E y B espacios métricos compactos y sea $p : E \longrightarrow B$ con la propiedad PEHM respecto de I^n y con la propiedad de elevación cercana* *de caminos multivaluados cercanos. Entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que dados $\omega', \omega'' : I^n \longrightarrow E$ δ-finas tales que $\omega'|_{\partial I^n} = \omega''|_{\partial I^n}$ y $p\omega'$ y $p\omega''$ son δ-homótopos (rel.$\{\partial I^n; \delta\}$), se tiene que ω' y ω'' son ε-homótopos (rel.∂I^n).*

Dem. Sea $\varepsilon > 0$ y sea $\delta > 0$ verificando las condiciones del teorema anterior. Sean $\omega', \omega'' : I^n \longrightarrow E$ n-caminos δ-finos tales que $\omega'|_{\partial I^n} = \omega''|_{\partial I^n}$ y $p\omega'$ y $p\omega''$ son δ-homótopos (rel.$\{\partial I^n; \delta\}$). Entonces ω' y ω'' son ε-homótopos (rel.$\{\partial I^n; \varepsilon\}$) y por tanto, por la observación 3.3.3, son ε-homótopos (rel.∂I^n).

Definición 3.3.6 Sea E espacio métrico y sean $\omega', \omega'' : I^n \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow E$ aplicaciones multivaluadas finas. Decimos que ω' y ω'' son asintoticamente homótopas respecto a ∂I^n si existe $H : I^n \times I \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow E$ aplicación multivaluada fina tal que $H|_{I^n \times \{0\} \times \mathbb{R}_+} = \omega'$, $H|_{I^n \times \{1\} \times \mathbb{R}_+} = \omega''$, y para todo $\varepsilon > 0$ existe $r_0 \in \mathbb{R}_+$ tal que $\operatorname{diam}(H(\{t\} \times I \times \{r\})) < \varepsilon$, para todo $t \in \partial I^n$ y todo $r \geq r_0$.

Observación 3.3.7 a) Sea E espacio métrico y sean $\omega', \omega'' : I^n \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow E$ aplicaciones multivaluadas finas. Entonces ω' y ω'' son asintoticamente homótopas respecto a ∂I^n si y solo si son asintóticas a dos aplicaciones multivaluadas finas homótopas (rel.$\partial I^n \times \mathbb{R}_+$).
b) Sea E espacio métrico y sean $\omega', \omega'' : I^n \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow E$ aplicaciones multivaluadas finas tales que $\omega'|_{\partial I^n \times \mathbb{R}_+} = \omega''|_{\partial I^n \times \mathbb{R}_+}$ y tales que ω' y ω'' son asintoticamente homótopas respecto a ∂I^n. Entonces ω' y ω'' son homótopas (rel.$\partial I^n \times \mathbb{R}_+$).

Teorema 3.3.8 *Sean E y B espacios métricos compactos y sea $p : E \longrightarrow B$ con la propiedad PEHMF respecto de I^n y con la propiedad de elevación asintótica de caminos multivaluados finos asintóticos. Sean $\omega', \omega'' : I^n \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow E$ aplicaciones multivaluadas finas tales que $\omega'|_{\{(0,\ldots,0)\} \times \mathbb{R}_+}$ y $\omega''|_{\{(0,\ldots,0)\} \times \mathbb{R}_+}$ son asintóticas y tales que $p\omega'$ y $p\omega''$ son asintoticamente homótopas respecto a ∂I^n. Entonces ω' y ω'' son asintoticamente homótopas respecto a ∂I^n.*

Dem. Sean $\omega', \omega'' : I^n \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow E$ aplicaciones multivaluadas finas tales que $\omega'|_{\{(0,\ldots,0)\} \times \mathbb{R}_+}$ y $\omega''|_{\{(0,\ldots,0)\} \times \mathbb{R}_+}$ son asintóticas y sea $H : I^n \times I \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow B$ aplicación multivaluada fina tal que $H|_{I^n \times \{0\} \times \mathbb{R}_+} = p\omega'$, $H|_{I^n \times \{1\} \times \mathbb{R}_+} = p\omega''$, y tal que para todo $\varepsilon > 0$ existe $r_0 \in \mathbb{R}_+$ tal que $\mathrm{diam}(H(\{t\} \times I \times \{r\})) < \varepsilon$, para todo $t \in \partial I^n$ y todo $r \geq r_0$.

Sea $F : I^n \times \{0\} \times \mathbb{R}_+ \cup \partial I^n \times I \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow E$ dada por $F(t,s,r) = \omega'(t,r)$ para todo $(t,s) \in I^n \times \{0\} \cup \partial I^n \times I$ y para todo $r \in \mathbb{R}_+$. Por la propiedad PEHMF existe $H' : I^n \times I \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow E$ aplicación multivaluada fina tal que $H'|_{I^n \times \{0\} \times \mathbb{R}_+ \cup \partial I^n \times I \times \mathbb{R}_+}$ es asintótica a F, y tal que pH' y H son asintóticas. Entonces ω' es asintoticamente homótopa respecto a ∂I^n a $H_1' : I^n \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow E$ dada por $H_1'(t,r) = H'(t,1,r)$.

Por otra parte $H_1'|_{\{(0,\dots,0)\} \times \mathbb{R}_+}$ es asintótica a $\omega'|_{\{(0,\dots,0)\} \times \mathbb{R}_+}$ y ésta lo es a $\omega''|_{\{(0,\dots,0)\} \times \mathbb{R}_+}$, y pH_1' es asintótica a $H|_{I^n \times \{1\} \times \mathbb{R}_+} = p\omega''$. Luego H_1' y ω'' son asintóticas. Por tanto, ω' y ω'' son asintoticamente homótopas respecto a ∂I^n.

Corolario 3.3.9 *Sean E y B espacios métricos compactos y $p : E \longrightarrow B$ con la propiedad PEHMF respecto de I^n y con la propiedad de elevación asintótica de caminos multivaluados finos asintóticos. Entonces para todo par de aplicaciones multivaluadas finas $\omega', \omega'' : I^n \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow E$ tales que $\omega'|_{\partial I^n \times \mathbb{R}_+} = \omega''|_{\partial I^n \times \mathbb{R}_+}$, y tales que $p\omega'$ y $p\omega''$ son asintoticamente homótopas respecto a ∂I^n, se tiene que ω' y ω'' son homótopas (rel. $\partial I^n \times \mathbb{R}_+$).*

Observación 3.3.10 Hay resultados análogos para 'multinets'.

Dado X espacio métrico compacto, dado $x \in X$, para todo $n \in \mathbb{N}$ podemos considerar el grupo 'shape' fuerte $\Pi_n^s(X,x)$ y el grupo 'shape' $\Pi_n(X,x)$, introducidos en el capítulo 2.

Además, si $f : X \longrightarrow Y$ es una aplicación continua entre espacios métricos compactos, para todo $x \in X$, f induce homomorfismos

$$f_*^{hh} : \pi_n(X,x) \longrightarrow \pi_n(Y, f(x)), \quad f_*^{hs} : \pi_n(X,x) \longrightarrow \Pi_n^s(Y, f(x)),$$

$$f_*^{hw} : \pi_n(X,x) \longrightarrow \Pi_n(Y, f(x)), \quad f_*^{ss} : \Pi_n^s(X,x) \longrightarrow \Pi_n^s(Y, f(x)),$$

$$f_*^{sw} : \Pi_n^s(X,x) \longrightarrow \Pi_n(Y, f(x)), \quad f_*^{ww} : \Pi_n(X,x) \longrightarrow \Pi_n(Y, f(x)).$$

Se tienen los siguientes resultados.

Proposición 3.3.11 *Sea $p : (E, e_0) \longrightarrow (B, b_0)$ una aplicación continua entre espacios métricos compactos, con la propiedad PEHMF respecto de I^n y con la propiedad de elevación asintótica de caminos multivaluados finos asintóticos. Entonces el homomorfismo*

$$p_*^{ss} : \Pi_n^s(E, e_0) \longrightarrow \Pi_n^s(B, b_0),$$

es un monomorfismo.

Proposición 3.3.12 *Sea $p : (E, e_0) \longrightarrow (B, b_0)$ una aplicación continua entre espacios métricos compactos, con la propiedad PEHM respecto de I^n y con la propiedad de elevación cercana de caminos multivaluados cercanos. Entonces los homomorfismos*

$$p_*^{ss} : \Pi_n^s(E, e_0) \longrightarrow \Pi_n^s(B, b_0), \quad p_*^{ww} : \Pi_n(E, e_0) \longrightarrow \Pi_n(B, b_0),$$

son monomorfismos.

Proposición 3.3.13 *Sea $p : (E, e_0) \longrightarrow (B, b_0)$ una aplicación continua entre espacios métricos compactos. Sea $f : (X, x_0) \longrightarrow (B, b_0)$ una aplicación continua definida en un espacio métrico compacto X y supongamos que existe $f' : (X, x_0) \longrightarrow (E, e_0)$ continua tal que $pf' = f$. Entonces*

$$f_*^{ss}(\Pi_n^s(X, x_0)) \subset p_*^{ss}(\Pi_n^s(E, e_0)), \quad f_*^{ww}(\Pi_n(X, x_0)) \subset p_*^{ww}(\Pi_n(E, e_0)).$$

Corolario 3.3.14 *Sea $p : (E, e_0) \longrightarrow (B, b_0)$ una aplicación continua entre espacios métricos compactos, con la propiedad PEHMF respecto de I^n y con la propiedad de elevación asintótica de caminos multivaluados finos asintóticos. Supongamos que existe $s : (B, b_0) \longrightarrow (E, e_0)$ continua tal que $ps = Id$ (ésto es, existe s sección de p). Entonces el homomorfismo*

$$p_*^{ss} : \Pi_n^s(E, e_0) \longrightarrow \Pi_n^s(B, b_0),$$

es un isomorfismo.

Corolario 3.3.15 *Sea $p : (E, e_0) \longrightarrow (B, b_0)$ una aplicación continua entre espacios métricos compactos, con la propiedad PEHM respecto de I^n y con la propiedad de elevación cercana de caminos multivaluados cercanos. Supongamos que existe $s : (B, b_0) \longrightarrow (E, e_0)$ continua tal que $ps = Id$ (ésto es, existe s sección de p). Entonces los homomorfismos*

$$p_*^{ss} : \Pi_n^s(E, e_0) \longrightarrow \Pi_n^s(B, b_0), \quad p_*^{ww} : \Pi_n(E, e_0) \longrightarrow \Pi_n(B, b_0),$$

son isomorfismos.

3.4 ELEVACIÓN DE APLICACIONES MULTIVALUADAS FINAS

Dados X e Y espacios métricos compactos y $F : (X, x_0) \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow (Y, y_0)$ aplicación multivaluada fina, F induce homomorfismos

$$F_*^{ww} : \Pi_n(X, x_0) \longrightarrow \Pi_n(Y, y_0), \quad F_*^{ss} : \Pi_n^s(X, x_0) \longrightarrow \Pi_n^s(Y, y_0),$$

$$F_*^{sw} : \Pi_n^s(X, x_0) \longrightarrow \Pi_n(Y, y_0),$$

dados por $F_*^{ww}([\omega]_w) = [\sigma]_w$, $F_*^{ss}([\omega]) = [\sigma]$ y $F_*^{sw}([\omega]) = [\sigma]_w$, donde

$$\sigma(t, r) = F(\omega(t, \alpha(r)), r)$$

con α aplicación dilatadora asociada al par (ω, F). También F induce

$$F_*^{hs} : \pi_n(X, x_0) \longrightarrow \Pi_n^s(Y, y_0), F_*^{hw} : \pi_n(X, x_0) \longrightarrow \Pi_n(Y, y_0),$$

dados por $F_*^{hs}([\omega]) = [\sigma]$ y $F_*^{hw}([\omega]) = [\sigma]_w$ y donde $\sigma(t, r) = F(\omega(t), r)$.

Se tiene el siguiente resultado

Proposición 3.4.1 *Sea $p : (E, e_0) \longrightarrow (B, b_0)$ una aplicación continua entre espacios métricos compactos. Sea $F : (X, x_0) \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow (B, b_0)$ una aplicación multivaluada fina definida en un espacio métrico compacto X y supongamos que* *existe $F' : (X, x_0) \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow (E, e_0)$ aplicación multivaluada fina tal que pF' y F son asintóticas. Entonces*

$$\begin{aligned} F_*^{hs}(\pi_n(X,x_0)) \subset F_*^{ss}(\Pi_n^s(X,x_0)) &\subset p_*^{ss}(\Pi_n^s(E,e_0)), \\ F_*^{hw}(\pi_n(X,x_0)) \subset F_*^{sw}(\Pi_n^s(X,x_0)) &\subset p_*^{sw}(\Pi_n^s(E,e_0)) \subset p_*^{ww}(\Pi_n(E,e_0)), \\ F_*^{sw}(\Pi_n^s(X,x_0)) \subset F_*^{ww}(\Pi_n(X,x_0)) &\subset p_*^{ww}(\Pi_n(E,e_0)). \end{aligned}$$

El resultado anterior admite el siguiente resultado recíproco.

Teorema 3.4.2 *Sea $p : (E, e_0) \longrightarrow (B, b_0)$ una aplicación continua suprayectiva entre espacios métricos compactos, con la propiedad PEHM respecto de $I \times I$ y con la propiedad de elevación cercana de caminos multivaluados cercanos. Sea X un continuo de Peano y sea $F : (X, x_0) \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow (B, b_0)$ una aplicación multivaluada fina tal que*

$$F_*^{hw}(\pi_1(X,x_0)) \subset p_*^{ww}(\Pi_1^s(E,e_0)).$$

Entonces existe $F' : (X, x_0) \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow (E, e_0)$ aplicación multivaluada fina tal que pF' y F son asintóticas.

Dem. Sea $\{\varepsilon_n\}$ sucesión nula. Vimos en la demostración del teorema 3.2.7 que existe $\{\eta_n\}$ sucesión nula tal que $0 < \eta_n < \varepsilon_n$ y tal que para todo $A \subset B$ con $\operatorname{diam}(A) < \eta_n$ se tiene que $p^{-1}(A) = U_1 \cup \ldots \cup U_r$, donde $\operatorname{diam}(U_i) < \varepsilon_n$ para todo $i \in \{1, \ldots, r\}$ y $d(U_i, U_j) > \eta_n$ para todo $i \neq j$.

Por otra parte, existe $\{\mu_n\}$ sucesión nula con $0 < \mu_n < \eta_n$ tal que dados $\tau', \tau'' : I \longrightarrow E$ caminos μ_n-finos con $d(\tau'(0), \tau''(0)) < \mu_n$ y tales que $p\tau'$ y $p\tau''$ son μ_n-homótopas (rel.$\{\{0,1\}; \mu_n\}$), se tiene que τ' y τ'' son η_n-homótopas (rel.$\{\{0,1\}; \eta_n\}$).

Sea $\{\psi_n\}$ sucesión nula con $0 < \psi_n < \frac{\mu_n}{5}$ tal que $\operatorname{diam}(p(K)) < \frac{\mu_n}{5}$ para todo $K \subset E$ con $\operatorname{diam}(K) < \psi_n$.

Por la observación 3.1.13, se tiene que existe $\{\delta_n\}$ sucesión nula con $\delta_n < \psi_n$ tal que dadas $G : \mathbb{R}_+ \longrightarrow E$ y $H : I \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow B$ aplicaciones multivaluadas finas tales que

$$\operatorname{diam}(G(r)) < \delta_n, \ \operatorname{diam}(H(t,r)) < \delta_n, \ d(pG(r), H(0,r)) < \delta_n,$$

para todo $t \in I$ y para todo $r \geq k_n$, para cierta sucesión creciente no acotada $\{k_n\} \subset \mathbb{N}$, entonces existe $H' : I \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow E$ tal que

$$\operatorname{diam}(H'(t,r)) < \psi_n, \; d(H'(0,r), G(r)) < \psi_n, \; d(pH'(t,r), H(t,r)) < \psi_n,$$

para todo $t \in I$ y todo $r \geq k_n$.

Sea $F : X \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow B$ una aplicación multivaluada fina definida en un continuo de Peano X. Sea $\{k_n\}$ sucesión creciente no acotada tal que

$$\operatorname{diam}(F(x,r)) < \delta_n$$

para todo $(x,r) \in X \times [k_n, \infty)$.

Sea $x \in X$. Por ser X conexo por caminos existe $\omega : I \longrightarrow X$ aplicación continua tal que $\omega(0) = x_0$ y $\omega(1) = x$. Sea $\sigma : I \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow B$ aplicación multivaluada fina dada por $\sigma(t,r) = F(\omega(t), r)$, que verifica que $\sigma(0,r) = F(x_0, r) = b_0$ y $\sigma(1,r) = F(x,r)$ para todo $r \in \mathbb{R}_+$, y que $\operatorname{diam}(\sigma(t,r)) < \delta_n$ para todo $(t,r) \in I \times [k_n, \infty)$.

Como $\sigma(0,r) = F(x_0,r) = b_0 = p(e_0)$ para todo $r \in \mathbb{R}_+$, existe una aplicación multivaluada fina $\tau : I \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow E$ tal que

$$\operatorname{diam}(\tau(t,r)) < \psi_n, \; d(\tau(0,r), e_0) < \psi_n, \; d(p\tau(t,r), \sigma(t,r)) < \psi_n,$$

para todo $t \in I$ y todo $r \geq k_n$. En particular $d(p\tau(1,r), F(x,r)) < \psi_n$ para todo $r \geq k_n$.

Sea $\omega' : I \longrightarrow X$ otra aplicación continua tal que $\omega'(0) = x_0$ y $\omega'(1) = x$. Sea $\sigma' : I \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow B$ dada por $\sigma'(t,r) = F(\omega'(t), r)$. Sea $\tau' : I \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow E$ aplicación multivaluada fina tal que

$$\operatorname{diam}(\tau'(t,r)) < \psi_n, \; d(\tau'(0,r), e_0) < \psi_n, \; d(p\tau'(t,r), \sigma'(t,r)) < \psi_n,$$

para todo $t \in I$ y todo $r \geq k_n$. Vamos a ver que entonces

$$\operatorname{diam}(\tau(1,r) \cup \tau'(1,r)) < \eta_n$$

para todo $r \geq k_n$.

Consideramos la aplicación $\omega'^{-} : I \longrightarrow X$ dada por $\omega'^{-}(t) = \omega'(1-t)$. Entonces $\omega * \omega'^{-} : I \longrightarrow X$ dada por

$$\omega * \omega'^{-}(t) = \begin{cases} \omega(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \omega'(2-2t) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

define un elemento $[\omega * \omega'^{-}]_h \in \pi_1(X, x_0)$ y por tanto

$$F_*^{hw}([\omega * \omega'^{-}]_h) = [\sigma * \sigma'^{-}]_w \in F_*^{hw}\pi_1(X, x_0) \subset p_*^{ww}\Pi_1(E, e_0) \subset \Pi_1(B, b_0),$$

donde $\sigma * \sigma'^{-} : I \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow X$ viene dada por

$$\sigma * \sigma'^{-}(t,r) = \begin{cases} \sigma(2t, r) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \sigma'(2-2t, r) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Entonces existe $[\kappa]_w \in \Pi_1(E, e_0)$ tal que $\sigma * \sigma'^{-}$ y $p\kappa$ son debilmente homótopas (rel.$\{0,1\} \times \mathbb{R}_+$). Además, escogiendo adecuadamente el representante de $[\kappa]_w$ podemos conseguir que $\mathrm{diam}(\kappa(t,r)) < \psi_n$ y que $\sigma * \sigma'^{-}|_{I \times \{r\}}$ y $p\kappa|_{I \times \{r\}}$ sean μ_n-homótopas (rel.$\{0,1\}$) para todo $r \geq k_n$.

Sea $\bar{\tau} : I \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow E$ dada por

$$\bar{\tau}(t,r) = \begin{cases} \tau(0,r) \cup \{e_0\} & \text{si } t = 0 \\ \tau(t,r) & \text{si } 0 < t < 1 \\ \tau(1,r) \cup \tau'(1,r) & \text{si } t = 1, \end{cases}$$

sea $\bar{\tau}' : I \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow E$ dada por

$$\bar{\tau}'(t,r) = \begin{cases} \tau'(0,r) \cup \{e_0\} & \text{si } t = 0 \\ \tau'(t,r) & \text{si } 0 < t < 1 \\ \tau(1,r) \cup \tau'(1,r) & \text{si } t = 1, \end{cases}$$

y sea $\bar{\kappa} : I \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow E$ dada por

$$\bar{\kappa}(t,r) = \begin{cases} \kappa(0,r) \cup \tau(0,r) = \tau(0,r) \cup \{e_0\} & \text{si } t = 0 \\ \kappa(t,r) & \text{si } 0 < t < 1 \\ \kappa(1,r) \cup \tau'(0,r) = \tau'(0,r) \cup \{e_0\} & \text{si } t = 1, \end{cases}$$

aplicaciones multivaluadas semicontinuas superiormente. Entonces $p\bar{\tau}$ y $p\bar{\tau}'$ son aplicaciones multivaluadas finas tales que $p\bar{\tau}$ y σ son asintóticas y también lo son $p\bar{\tau}'$ y σ'. Entonces $\sigma * \sigma'^{-}$ y $p\bar{\tau} * p\bar{\tau}'^{-}$, dada por

$$p\bar{\tau} * p\bar{\tau}'^{-}(t,r) = \begin{cases} p\tau(0,r) \cup \{b_0\} & \text{si } t = 0 \\ p\tau(2t, r) & \text{si } 0 < t < \frac{1}{2} \\ p\tau(1,r) \cup p\tau'(1,r) & \text{si } t = \frac{1}{2} \\ p\tau'(2-2t, r) & \text{si } \frac{1}{2} < t < 1, \\ p\tau'(0,r) \cup \{b_0\} & \text{si } t = 1 \end{cases}$$

son asintóticas. Además, como

$$\operatorname{diam}(p\tau(t,r)) < \frac{\mu_n}{5}, \quad \operatorname{diam}(p\tau'(t,r)) < \frac{\mu_n}{5},$$
$$\operatorname{diam}(\sigma(t,r)) < \delta_n < \frac{\mu_n}{5}, \quad \operatorname{diam}(\sigma'(t,r)) < \delta_n < \frac{\mu_n}{5},$$
$$d(p\tau(t,r),\sigma(t,r)) < \psi_n < \frac{\mu_n}{5}, \quad d(p\tau'(t,r),\sigma'(t,r)) < \psi_n < \frac{\mu_n}{5},$$

para todo $t \in I$ y todo $r \geq k_n$, entonces $\sigma * \sigma'^{-}|_{I\times\{r\}}$ y $p\bar{\tau} * p\bar{\tau}'^{-}|_{I\times\{r\}}$ son μ_n-homótopas (rel.$\{\{0,1\}; \frac{2\mu_n}{5}\}$) para todo $r \geq k_n$. Por otra parte, es fácil ver que $\sigma * \sigma'^{-}|_{I\times\{r\}}$ y $p\bar{\kappa}|_{I\times\{r\}}$ son μ_n-homótopas (rel.$\{\{0,1\}; \frac{2\mu_n}{5}\}$) para todo $r \geq k_n$. Luego $p\bar{\tau} * p\bar{\tau}'^{-}|_{I\times\{r\}}$ y $p\bar{\kappa}|_{I\times\{r\}}$ son μ_n-homótopas (rel.$\{\{0,1\}; \mu_n\}$) para todo $r \geq k_n$. Por tanto, por la observación 3.3.3, se tiene que $p\bar{\tau} * p\bar{\tau}'^{-}|_{I\times\{r\}}$ y $p\bar{\kappa}|_{I\times\{r\}}$ son μ_n-homótopas (rel.$\{0,1\}$) para todo $r \geq k_n$. Por tanto, $p\bar{\tau}|_{I\times\{r\}}$ y $(p\bar{\kappa} * p\bar{\tau}')|_{I\times\{r\}}$, dada por

$$p\bar{\kappa} * p\bar{\tau}'(t,r) = \begin{cases} p\kappa(0,r) \cup p\tau(0,r) = p\tau(0,r) \cup \{b_0\} & \text{si } t = 0 \\ p\kappa(2t,r) & \text{si } 0 < t < \frac{1}{2} \\ p\kappa(1,r) \cup p\tau'(0,r) = p\tau'(0,r) \cup \{b_0\} & \text{si } t = \frac{1}{2} \\ p\tau'(2t-1,r) & \text{si } \frac{1}{2} < t < 1 \\ p\tau(1,r) \cup p\tau'(1,r) & \text{si } t = 1, \end{cases}$$

son μ_n-homótopas (rel.$\{0,1\}$).

Sean ahora $\tilde{\tau} : I \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow E$ dada por

$$\tilde{\tau}(t,r) = \begin{cases} \tau(0,r) \cup \{e_0\} & \text{si } t = 0 \\ \tau(t,r) & \text{si } 0 < t \leq 1, \end{cases}$$

y $\tilde{\tau}' : I \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow E$ dada por

$$\tilde{\tau}'(t,r) = \begin{cases} \tau'(0,r) \cup \{e_0\} & \text{si } t = 0 \\ \tau'(t,r) & \text{si } 0 < t \leq 1. \end{cases}$$

Entonces, para todo $r \geq k_n$, $\tilde{\tau}|_{I\times\{r\}}$ y $\bar{\kappa} * \tilde{\tau}'|_{I\times\{r\}}$ dada por

$$\bar{\kappa} * \tilde{\tau}'(t,r) = \begin{cases} \kappa(0,r) \cup \tau(0,r) = \tau(0,r) \cup \{e_0\} & \text{si } t = 0 \\ \kappa(2t,r) & \text{si } 0 < t < \frac{1}{2} \\ \kappa(1,r) \cup \tau'(0,r) = \tau'(0,r) \cup \{e_0\} & \text{si } t = \frac{1}{2} \\ \tau'(2t-1,r) & \text{si } \frac{1}{2} < t \leq 1, \end{cases}$$

son μ_n-finas con $\tilde{\tau}(0,r) = \bar{\kappa}(0,r)$ tales que $p\tilde{\tau}|_{I\times\{r\}}$ y $(p\bar{\kappa} * p\tilde{\tau}')|_{I\times\{r\}}$, son μ_n-homótopas (rel.$\{\{0,1\}; \mu_n\}$). Por tanto $\tilde{\tau}|_{I\times\{r\}}$ y $\bar{\kappa} * \tilde{\tau}'|_{I\times\{r\}}$ son η_n-homótopas (rel.$\{\{0,1\}; \eta_n\}$). En particular, $\operatorname{diam}(\tau(1,r) \cup \tau'(1,r)) < \eta_n$ para todo $r \geq k_n$.

Sea ahora $(x,r) \in X \times (k_n, k_{n+1}]$. Se tiene $\mathrm{diam}(\overline{B_{\frac{2\mu_n}{5}}(F(x,r))}) < \mu_n$ y por tanto

$$p^{-1}(\overline{B_{\frac{2\mu_n}{5}}(F(x,r))}) = K_1^{(x,r)} \cup \ldots \cup K_{n_{(x,r)}}^{(x,r)}$$

donde $\mathrm{diam}(K_i^{(x,r)}) < \varepsilon_n$ para todo $i \in \{1, \ldots, n_{(x,r)}\}$, y $d(K_i^{(x,r)}, K_j^{(x,r)}) > \eta_n$ para todo $i \neq j$. Supongamos que también se cumple que ningún $K_i^{(x,r)}$ se puede descomponer como unión de dos subcompactos que disten más de η_n (ésto siempre es posible por la compacidad de E). Es fácil ver que existe una única descomposición de $p^{-1}(\overline{B_{\frac{2\mu_n}{5}}(F(x,r))})$ con estas propiedades. Por otra parte, como

$$\tau(1,r) \cup \tau'(1,r) \subset p^{-1}(B_{\frac{2\mu_n}{5}}(F(x,r))),$$

se tiene que existe $K_{j_{(x,r)}}^{(x,r)}$ tal que $\tau(1,r) \subset K_{j_{(x,r)}}^{(x,r)}$, para todas las aplicaciones τ obtenidas según la construcción anterior.

Definimos $F' : X \times (k_1, \infty) \longrightarrow E$ dada por

$$F'(x,r) = K_{j_{(x,r)}}^{(x,r)}.$$

Entonces F' verifica que $\mathrm{diam}(F'(x,r)) < \varepsilon_n$ para todo $(x,r) \in X \times (k_n, \infty)$. Vamos a ver que F' es semicontinua superiormente.

Sea $(x, r_0) \in X \times (k_{n_0}, k_{n_0+1}]$ y sea V entorno de $F'(x,r_0)$ en E. Existe U entorno abierto de $p^{-1}(\overline{B_{\frac{2\mu_{n_0}}{5}}(F(x,r_0))})$ en E tal que $U = U_1 \cup \ldots \cup U_{n_{(x,r_0)}}$, donde $\mathrm{diam}(U_i) < \varepsilon_{n_0}$ para todo $i \in \{1, \ldots, n_{(x,r_0)}\}$, $d(U_i, U_j) > \eta_{n_0}$ para todo $i \neq j$, y tal que $U_{j_{(x,r_0)}} \subset V$. Existe $\alpha > 0$ tal que $\mathrm{diam}(B_\alpha(F(x,r_0))) < \delta_{n_0}$ y tal que

$$p^{-1}(\overline{B_{\frac{2\mu_{n_0}}{5}+\alpha}(F(x,r_0))}) \subset U.$$

En caso contrario, existiría $(y_k) \subset E$ que, por la compacidad de E, podemos tomar convergente a un cierto $y \in E$, tal que para todo $k \in \mathbb{N}$ se tiene que $y_k \in p^{-1}(\overline{B_{\frac{2\mu_{n_0}}{5}+\frac{1}{k}}(F(x,r_0))})$ pero $y_k \notin U$. Pero por la primera condición se tiene que, como $(p(y_k))$ converge a $p(y)$, ha de ser $y \in p^{-1}(\overline{B_{\frac{2\mu_{n_0}}{5}}(F(x,r_0))})$ y por la segunda se tiene que $y \notin U$ y ésto es una contradicción.

Sea $0 < \beta < r_0 - k_{n_0}$ tal que para todo $x' \in X$ y todo $r' \in \mathbb{R}_+$ con $d(x,x') < \beta$

y $d(r_0, r') < \beta$ se tiene que $F(x', r') \subset B_\alpha(F(x, r_0))$. Entonces

$$F'(x', r') \subset p^{-1}(\overline{B_{\frac{2\mu_{n_0}}{5}}(F(x', r'))}) \subset p^{-1}(\overline{B_{\frac{2\mu_{n_0}}{5}+\alpha}(F(x, r_0))}) \subset U,$$

y, por la construcción de F', existe $U_{j'}$ tal que $F'(x', r') \subset U_{j'}$. Sea W entorno conexo por caminos de x contenido en $B_\beta(x)$ (verificando por tanto que $\mathrm{diam}(F(W \times B_\beta(r_0))) < \delta_{n_0}$). Sea $x' \in W$ y sea $r' \in \mathbb{R}_+$ con $d(r_0, r') < \beta$, y vamos a ver que $F'(x', r') \subset U_{j_{(x,r_0)}} \subset V$.

Sea $\omega : I \longrightarrow X$ aplicación continua tal que $\omega(0) = x_0$ y $\omega(1) = x$. Sea $\sigma : I \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow B$ dada por $\sigma(t, r) = F(\omega(t), r)$. Sea $\tau : I \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow E$ aplicación multivaluada fina tal que

$$\mathrm{diam}(\tau(t, r)) < \psi_n, \; d(\tau(0, r), e_0) < \psi_n, \; d(p\tau(t, r), \sigma(t, r)) < \psi_n.$$

para todo $t \in I$ y todo $r \geq k_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Dado $x' \in W$, existe $\omega' : I \longrightarrow W \subset B_\beta(x)$ aplicación continua tal que $\omega'(0) = x$ y $\omega'(1) = x'$. Sea $\sigma' : I \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow B$ dada por

$$\sigma'(t, r) = \begin{cases} F(\omega(2t), r) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ F(\omega'(2t-1), r) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Entonces $\sigma|_{I\times\{r_0\}}$ y $\sigma'|_{I\times\{r_0\}}$ son δ_{n_0}-homótopas por una homotopía φ tal que

$$\varphi(\{0,1\} \times I) \subset F(W \times \{r_0\}),$$

y por otra parte $\sigma'|_{I\times\{r_0\}}$ y $\sigma'|_{I\times\{r'\}}$ son δ_{n_0}-homótopas por una homotopía φ' tal que

$$\varphi'(\{0,1\} \times I) \subset F(W \times B_\beta(r_0)).$$

Entonces, como $\mathrm{diam}(F(W \times B_\beta(r_0))) < \delta_{n_0}$, se tiene que $\sigma|_{I\times\{r_0\}}$ y $\sigma'|_{I\times\{r'\}}$ son $\frac{\mu_{n_0}}{5}$-homótopas (rel.$\{\{0,1\}; \frac{\mu_{n_0}}{5}\}$).

Sea $\tau' : I \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow E$ aplicación multivaluada fina tal que

$$\mathrm{diam}(\tau'(t, r)) < \psi_n, \; d(\tau'(0, r), e_0) < \psi_n, \; d(p\tau'(t, r), \sigma'(t, r)) < \psi_n$$

para todo $t \in I$ y todo $r \geq k_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Entonces $\tau|_{I\times\{r_0\}}$ y $\tau'|_{I\times\{r'\}}$ son caminos μ_{n_0}-finos tales que

$$d(\tau(0, r_0), \tau'(0, r')) < \mu_{n_0}$$

y tales que $p\tau|_{I\times\{r_0\}}$ y $p\tau'|_{I\times\{r'\}}$ son μ_{n_0}-homótopas (rel.$\{\{0,1\};\mu_{n_0}\}$). Entonces $\tau|_{I\times\{r_0\}}$ y $\tau'|_{I\times\{r'\}}$ son η_{n_0}-homótopas (rel.$\{\{0,1\};\eta_{n_0}\}$).

En particular, $\mathrm{diam}(\tau(1,r_0)\cup\tau'(1,r')) < \eta_{n_0}$. Y como $\tau(1,r_0)\subset U_{j_{(x,r_0)}}$ y $\tau'(1,r')\subset U$, ha de ser $\tau'(1,r')\subset U_{j_{(x,r_0)}}$, y por tanto $F'(x',r')\subset U_{j_{(x,r_0)}}\subset V$. Luego F' es semicontinua superiormente.

Por otra parte, como para x_0 podemos considerar $\omega_0 : I \longrightarrow X$ tal que $\omega_0(t) = x_0$ para todo $t\in I$, y podemos tomar $\tau_0 : I\times\mathbb{R}_+ \longrightarrow E$ dada por $\tau_0(t,r) = e_0$, entonces $e_0\in F'(x_0,r)$ para todo $r\in(k_1,\infty)$.

Finalmente $F' : X\times(k_1,\infty)\longrightarrow E$ se extiende a una aplicación multivaluada fina $F' : X\times\mathbb{R}_+\longrightarrow E$ tal que $e_0\in F'(x_0,r)$ para todo $r\in\mathbb{R}_+$. Además, como $p(F'(x,r))\subset\overline{B_{\frac{2\mu_n}{5}}(F(x,r))}$, para todo $(x,r)\in X\times(k_n,\infty)$, se tiene que pF' y F son asintóticas.

Vamos a construir $F''' : X\times\mathbb{R}_+\longrightarrow E$ aplicación multivaluada fina tal que pF''' y F son asintóticas y tal que $F'''(x_0,r) = e_0$ para todo $r\in\mathbb{R}_+$. Sean $\{\phi_n\}$ y $\{\gamma_n\}$ sucesiones nulas tales que

$$F'(\bar{B}_{\gamma_n}(x_0)\times[n,n+1])\subset\bar{B}_{\phi_n}(e_0)$$

para todo $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$. Definimos $F'' : X\times\mathbb{R}_+\longrightarrow E$ tal que

$$F''(x,r) = \begin{cases} F'(x,r) & \text{si } (x,r)\notin\cup_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}\bar{B}_{\gamma_n}(x_0)\times[n,n+1] \\ \bar{B}_{\phi_0}(e_0) & \text{si } (x,r)\in\bar{B}_{\gamma_0}(x_0)\times[0,1] \\ \bar{B}_{\phi_n}(e_0) & \text{si } (x,r)\in\bar{B}_{\gamma_n}(x_0)\times(n,n+1] \end{cases}$$

aplicación multivaluada fina (por ser $\cup_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}\bar{B}_{\gamma_n}(x_0)\times[n,n+1]$ cerrado en $X\times\mathbb{R}_+$) tal que $F'\subset F''$ y por tanto pF'' y F son asintóticas y $e_0\in F''(x_0,r)$ para todo $r\in\mathbb{R}_+$.

Sea $F''' : (X,x_0)\times\mathbb{R}_+\longrightarrow(E,e_0)$ dada por

$$F'''(x,r) = \begin{cases} F''(x,r) & \text{si } (x,r)\notin\cup_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}B_{\gamma_n}(x_0)\times[n,n+1) \\ e_0 & \text{si } (x,r)\in B_{\gamma_n}(x_0)\times[n,n+1) \end{cases}$$

Entonces F''' es multivaluada fina (por ser $\cup_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}B_{\gamma_n}(x_0)\times[n,n+1)$ abierto en $X\times\mathbb{R}_+$) y verifica que $F'''\subset F''$, y por tanto pF''' y F son asintóticas. Esto completa la demostración del teorema.

Corolario 3.4.3 *Sea $p : (E, e_0) \longrightarrow (B, b_0)$ una aplicación continua entre espacios métricos compactos, con la propiedad PEHM respecto de $I \times I$ y con la propiedad de elevación cercana de caminos multivaluados cercanos. Sea X un continuo de Peano y sea $F : (X, x_0) \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow (B, b_0)$ una aplicación multivaluada fina tal que*

$$F_*^{hs}(\pi_1(X, x_0)) \subset p_*^{ss}(\Pi_1^s(E, e_0)).$$

Entonces existe $F' : (X, x_0) \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow (E, e_0)$ aplicación multivaluada fina tal que pF' y F son asintóticas.

Dem. Basta observar que si $F_*^{hs}(\pi_1(X, x_0)) \subset p_*^{ss}(\Pi_1^s(E, e_0))$, entonces también se tiene que $F_*^{hw}(\pi_1(X, x_0)) \subset p_*^{ww}(\Pi_1(E, e_0))$.

Observación 3.4.4 El corolario anterior sigue siendo cierto si se reemplaza la condición

$$F_*^{hs}(\pi_1(X, x_0)) \subset p_*^{ss}(\Pi_1^s(E, e_0))$$

por la condición

$$F_*^{ww}(\Pi_1(X, x_0)) \subset p_*^{ww}(\Pi_1(E, e_0)),$$

o por

$$F_*^{ss}(\Pi_1^s(X, x_0)) \subset p_*^{ss}(\Pi_1^s(E, e_0)).$$

Capítulo 4

TEORÍA DE LA FORMA Y SISTEMAS DINÁMICOS

La categoría de la forma se utiliza para el estudio de las propiedades globales de los espacios métricos compactos, siendo especialmente satisfactoria en el caso de espacios con estructura local complicada. Este es el caso, en frecuentes ocasiones, de los atractores de sistemas (semi)dinámicos, que pueden tener una estructura local muy complicada. Por ejemplo la adherencia de la curva

$$\{(x, \operatorname{sen}(\frac{1}{x})) \mid 0 < x < 1\},$$

que aparece frecuentemente en teoría de la forma, es atractor de un sistema dinámico en el plano [52].

En 1991, B.M.Garay [42] da una caracterización topológica de los compactos K atractores globales asintoticamente estables de sistemas (semi)dinámicos definidos en espacios de Banach infinito-dimensionales. En concreto, prueba que, en estas condiciones, K tiene forma trivial.

En 1993, J.M.R.Sanjurjo [103] prueba que todo atractor compacto asintoticamente estable de un sistema dinámico definido en un ANR localmente compacto es un FANR. Independientemente, B.Günther y J.Segal [48], demuestran que un compacto finito-dimensional es atractor asintoticamente estable de un sistema dinámico definido en una variedad topológica si y sólo si tiene la forma de un poliedro finito. Parte de sus resultados fueron publicados anteriormente (en ruso) por S.A.Bogatyi y V.I.Gutsu en [9] para flujos generados por campos vectoriales C^1 en variedades diferenciables finito-dimensionales.

Para más resultados sobre sistemas dinámicos, utilizando la teoría de la forma pueden consultarse los trabajos de H.M.Hastings [51], [52], J.W.Robbin y D.Salamon [94], J.T.Rogers, Jr. [95], J.M.R.Sanjurjo [104] y C.Tezer [109].

En este capítulo establecemos nuevas conexiones entre ambas teorías.

En la primera sección de este capítulo recordamos la descripción de la teoría de la forma usando aplicaciones aproximativas y en la segunda enunciamos diferentes conceptos de sistemas (semi)dinámicos.

En la tercera sección estudiamos propiedades referentes a la forma de compactos positivamente invariantes y de compactos estables de sistemas dinámicos con atractores compactos asintoticamente estables. Probamos que si un sistema dinámico tiene un atractor global asintoticamente estable entonces todo continuo positivamente invariante conteniendo al atractor tiene forma trivial. Si además el atractor es unidimensional, entonces todo continuo positivamente invariante tiene forma trivial. También demostramos que en estas condiciones, el flujo en un continuo estable es atraido por un subcontinuo invariante que tiene la misma forma (obsérvese que todo continuo estable es positivamente invariante, pero no tiene porque ser invariante). El estudio de los sistemas (semi)dinámicos con atractores globales asintoticamente estables es uno de los principales temas de investigación en la teoría topológica de sistemas dinámicos [49].

En la cuarta sección consideramos el espacio $A(X,Y)$ de las aplicaciones aproximativas de X a Y con una métrica inspirada en la topología del espacio $M(X,Y)$ de la sección 2.3. En este caso, obtenemos un espacio métrico (obsérvese que $M(X,Y)$ no es ni siquiera Hausdorff). Además, las principales propiedades de $M(X,Y)$ siguen siendo ciertas para $A(X,Y)$. Por ejemplo, dos aplicaciones aproximativas son homótopas si y solo si están en la misma componente conexa por caminos de $A(X,Y)$, y son debilmente homótopas si y solo si están en la misma componente conexa de $A(X,Y)$.

Definimos un sistema semidinámico de Bebutov [2], [3] (ver [106], IV.20) en $A(X,Y)$ y estudiamos sus conjuntos positivamente invariantes. Demostramos que el primer límite prolongacional positivo de una aplicación aproximativa f

coincide con el conjunto de aplicaciones continuas de $X \times \mathbb{R}_+$ a Y debilmente homótopas a f, y deducimos varios corolarios relativos a los diferentes conjuntos límites de una aplicación aproximativa. Probamos que una aplicación aproximativa es Lagrange estable si y solo si es uniformemente continua y como corolario obtenemos que si una aplicación aproximativa f es uniformemente continua, entonces su clase de homotopía débil tiene un representante generado por una aplicación continua de X a Y. También vemos que el conjunto de elementos 'non wandering' del sistema semidinámico coincide con el conjunto de aplicaciones continuas de $X \times \mathbb{R}_+$ a Y. Finalmente damos caracterizaciones de las trayectorias positivas atractores orbitales y de las Lyapunov estables, de los conjuntos cerrados estables, y demostramos varios resultados relativos a las regiones de atracción de diferentes conjuntos.

Para información general sobre teoría de sistemas dinámicos y semidinámicos recomendamos los libros [5], [6], [45], [88], [105], [106] y [111] de N.P.Bhatia y O.Hájek, N.P.Bhatia y G.P.Szego, W.H.Gottschalk y G.A.Hedlund, V.V.Nemytskii y V.V.Stepanov, P.Saperstone, K.S.Sibirsky y J.de Vries respectivamente. Para información sobre atractores en espacios Hausdorff arbitrarios (no necesariamente localmente compactos), se puede consultar [4].

4.1 DESCRIPCIÓN DE LA CATEGORÍA DE LA FORMA DE BORSUK CON APLICACIONES APROXIMATIVAS

Sean X e Y espacios métricos compactos tales que Y está contenido en el cubo de Hilbert Q. Una aplicación aproximativa de X a Y es una aplicación continua $f : X \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow Q$ tal que para cada entorno V de Y en Q existe $t_0 \in \mathbb{R}_+$ tal que $f(X \times [t_0, \infty)) \subset V$.

Dos aplicaciones aproximativas $f, g : X \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow Q$ de X a Y son homótopas si existe $h : X \times [0,1] \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow Q$ aplicación aproximativa de $X \times [0,1]$ a Y tal que

$$h(x, 0, t) = f(x, t), h(x, 1, t) = g(x, t)$$

para todo $(x,t) \in X \times \mathbb{R}_+$.

Se dice que f y g son debilmente homótopas si para todo entorno V de Y existe $t_0 \in \mathbb{R}_+$ tal que $f|_{X\times[t_0,\infty)}$ y $g|_{X\times[t_0,\infty)}$ son homótopas en V (ésto es, existe una aplicación continua $h : X \times [0,1] \times [t_0, \infty) \longrightarrow V$ tal que

$$h(x,0,t) = f(x,t), h(x,1,t) = g(x,t)$$

para todo $(x,t) \in X \times [t_0, \infty)$.

Denotamos por $[f]$ a la clase de homotopía de f y por $[f]_w$ a la clase de homotopía débil de f. Obsérvese que $[f]_w \supset [f]$.

Sean X, Y y Z espacios métricos compactos tales que Y y Z están contenidos en el cubo de Hilbert Q. Sean $f : X \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow Q$ y $g : Y \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow Q$ aplicaciones aproximativas de X a Y y de Y a Z respectivamente. Entonces existe $g' : Q \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow Q$ aplicación fundamental de X a Y extensión de g. Sea $h : X \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow Q$ dada por $h(x,t) = g'(f(x,t),t)$. Entonces h es una aplicación aproximativa de X a Z cuya clase de homotopía solo depende de las clases de homotopía de f y g, y cuya clase de homotopía débil solo depende de las clases de homotopía débil de f y g, y no de la extensión g' escogida. Entonces podemos definir las composiciones $[g][f] = [h]$ y $[g]_w[f]_w = [h]_w$.

Teorema 4.1.1 *Si consideramos la clase de los espacios métricos compactos y las clases de homotopía de aplicaciones aproximativas entre ellos con la composición de clases de homotopía definida anteriomente se obtiene una categoría isomorfa a la categoría SSh.*

Teorema 4.1.2 *Si consideramos la clase de los espacios métricos compactos y las clases de homotopía débil de aplicaciones aproximativas entre ellos con la composición de clases de homotopía débil definida anteriomente se obtiene una categoría isomorfa a la categoría Sh.*

Observación 4.1.3 Si en vez de considerar $Y \subset Q$ se considera Y contenido en un espacio métrico $M \in$ ANR y entornos de Y en M se obtienen categorías isomorfas a las anteriores.

4.2 SISTEMAS DINÁMICOS Y SEMIDINÁMICOS

Sea M un espacio métrico. Un sistema dinámico (semidinámico) sobre M es una terna $(M, \mathbb{R}, \pi)$ $((M, \mathbb{R}_+, \pi))$ donde $\pi : M \times \mathbb{R} \longrightarrow M$ $(\pi : M \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow M)$ es una aplicación continua tal que

a) $\pi(x, 0) = x$ para todo $x \in M$,

b) $\pi(\pi(x,t), s) = \pi(x, t+s)$ para todo $x \in M$ y cualesquiera $t, s \in \mathbb{R}$ $(t, s \in \mathbb{R}_+)$.

Dado $x \in M$ definimos $\pi_x : \mathbb{R} \longrightarrow M$ $(\pi_x : \mathbb{R}_+ \longrightarrow M)$ dada por $\pi_x(t) = \pi(x,t)$.

Dado $x \in M$, se define la semitrayectoria positiva de x como

$$\gamma^+(x) = \{\pi(x,t) \mid t \in \mathbb{R}_+\},$$

se define el embudo en x como el conjunto

$$\gamma^-(x) = \{y \in M \mid x \in \gamma^+(y)\}$$

y el recorrido de x como $\gamma(x) = \gamma^+(x) \cup \gamma^-(x)$.

Dado $x \in M$ se tienen las siguientes posibilidades:

1. Existe t_0 tal que $\pi(x,t) = \pi(x,t_0)$ para todo $t \geq t_0$ y se dice que $\gamma^+(x)$ lleva a un estado estable (a partir de t_0). Se dice que $\gamma^+(x)$ es estable o crítica si $\pi(x,t) = \pi(x,0)$ para todo t.

2. Existe t_0 y existe $\tau > 0$ tal que $\pi(x, t+\tau) = \pi(x,t)$ para todo $t \geq t_0$ y se dice que $\gamma^+(x)$ lleva a un ciclo de periodo τ (a partir de t_0). Se dice que $\gamma^+(x)$ es periódica de periodo τ si $\pi(x, t+\tau) = \pi(x,t)$ para todo t.

3. Para todo $t \neq t'$ se tiene que $\pi(x,t) \neq \pi(x,t')$ y se dice que $\gamma^+(x)$ es no singular o no autointersecante.

En un sistema dinámico, si $\gamma^+(x)$ lleva a un estado estable, entonces es estable, y si $\gamma^+(x)$ lleva a un ciclo, entonces es periódica.

Sea $L \subset M$. Se dice que L es positivamente invariante si $\gamma^+(x) \subset L$ para todo $x \in L$. Se dice que L es negativamente invariante si $\gamma^-(x) \subset L$ para todo

$x \in L$. Se dice que L es invariante si es positivamente invariante y negativamente invariante.

Dado $x \in M$ se define

$$\Lambda^+(x) = \{y \in M \mid \text{ existe } t_n \to \infty \text{ tal que } \pi(x, t_n) \to y\}$$

límite positivo de x. Se tiene que

$$\overline{\gamma^+(x)} = \gamma^+(x) \cup \Lambda^+(x).$$

Se dice que

1. π_x es positivamente 'departing' si $\Lambda^+(x) = \emptyset$.

2. π_x es positivamente asintótico si $\Lambda^+(x) \neq \emptyset$ y $\Lambda^+(x) \cap \gamma^+(x) = \emptyset$.

3. π_x es positivamente Poisson estable si $\Lambda^+(x) \cap \gamma^+(x) \neq \emptyset$.

4. π_x es positivamente Lagrange estable si $\overline{\gamma^+(x)}$ es compacto.

Dado $x \in M$, se define

$$D^+(x) = \{y \in M \mid \text{ existen } \{x_n\} \to x \text{ y } \{t_n\} \subset \mathbb{R}_+ \text{ con } \pi(x_n, t_n) \to y\}$$

primera prolongación positiva de x, y

$$J^+(x) = \{y \in M \mid \text{ existen } \{x_n\} \to x \text{ y } \{t_n\} \to \infty \text{ tales que } \pi(x_n, t_n) \to y\}$$

primer límite prolongacional positivo de x. Se tiene que

$$D^+(x) = \gamma^+(x) \cup J^+(x) = \overline{\gamma^+(x)} \cup J^+(x).$$

Se dice que x es 'non-wandering' si $x \in J^+(x)$.

Sea $L \subset M$. Se dice que L es positivamente minimal si es no vacío, cerrado y positivamente invariante y todo $L' \subset L$ no vacío cerrado y positivamente invariante coincide con L.

Sean $x, y \in M$. Se dice que $\gamma^+(x)$ recurre a y si para todo $\varepsilon > 0$ existe $T > 0$ tal que $y \in B_\varepsilon(\pi(\{x\} \times [t, t+T]))$ para todo $t \in \mathbb{R}_+$. Se define

$$R^+(x) = \{y \in M \mid \gamma^+(x) \text{ recurre a } y\} \subset \Lambda^+(x).$$

Se dice que $\gamma^+(x)$ es recurrente si $x \in R^+(x)$.

Sea $x \in M$. Se dice que π_x es positivamente Lyapunov estable si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $d(\pi(x,t), \pi(y,t)) < \varepsilon$ para todo $y \in B_\delta(x)$ y todo $t \in \mathbb{R}_+$. Se dice que π_x es uniformemente positivamente Lyapunov estable si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $d(\pi(x, t+\tau), \pi(y,t)) < \varepsilon$ para todo $y \in B_\delta(\pi(x,\tau))$ y cualesquiera $t, \tau \in \mathbb{R}_+$.

Sean $x, y \in M$. Se dice que π_y es orbitalmente atraida por π_x si existe $t_0 \in \mathbb{R}_+$ tal que $\lim_{t\to\infty} d(\pi(x, t+t_0), \pi(y,t)) = 0$. Se define

$$\mathcal{A}^+(x) = \{y \in M \mid \pi_y \text{ orbitalmente atraida por } \pi_x\}$$

región de atracción orbital de π_x. Se dice que π_x es un atractor orbital si $\mathcal{A}^+(x)$ es un entorno de $\overline{\gamma^+(x)}$.

Sea $x \in M$. Se dice que π_x es orbitalmente asintoticamente estable si π_x es un atractor orbital uniformemente positivamente Lyapunov estable.

En lo que queda de sección vamos a definir conceptos relativos a estabilidad y atracción para conjuntos cerrados. Utilizaremos el enfoque dado en [6], donde se definen estos conceptos para conjuntos cerrados L en espacios métricos arbitrarios, en función de entornos del tipo $B_\varepsilon(L)$. En otros textos sobre sistemas dinámicos, se dan estas definiciones en base a entornos cualesquiera de L. Obsérvese que cuando L es compacto, como es nuestro caso en la sección tercera de este capítulo, ambos enfoques son equivalentes.

Sea $(M, \mathbb{R}, \pi)$ $((M, \mathbb{R}_+, \pi))$ un sistema dinámico (semidinámico). Se dice que un subconjunto cerrado L de M es estable si para todo $x \in L$ y todo $y \notin L$ existen U y V entornos de x e y respectivamente tales que $\pi(U \times \mathbb{R}_+) \cap V = \emptyset$ (L es estable si y solo si $D^+(L) = L$). Se dice que L es orbitalmente estable si para todo $x \in L$, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\pi(B_\delta(x) \times \mathbb{R}_+) \subset B_\varepsilon(L)$. Se dice que L es uniformemente estable si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\pi(B_\delta(L) \times \mathbb{R}_+) \subset B_\varepsilon(L)$. En el caso de M localmente compacto, las tres nociones de estabilidad coinciden para los conjuntos compactos.

Sea L un subconjunto cerrado no vacío de M. Sea $x \in M$. Se dice que

1. x es debilmente atraido a L si para todo $\varepsilon > 0$ y para todo $\tau \in \mathbb{R}_+$ existe $t > \tau$ tal que $\pi(x,t) \in B_\varepsilon(L)$.

2. x es atraido a L si para todo $\varepsilon > 0$ existe $t \in \mathbb{R}_+$ tal que

$$\pi(\{x\} \times [t, \infty)) \subset B_\varepsilon(L).$$

3. x es fuertemente atraido a L si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ y existe $t \in \mathbb{R}_+$ tal que $\pi(B_\delta(x) \times [t, \infty)) \subset B_\varepsilon(L)$.

Se define

1. $A_\omega(L)$ región de atracción débil de L.

2. $A(L)$ región de atracción de L.

3. $A_s(L)$ región de atracción fuerte de L.

Se tiene que

$$A_\omega(L) \supset A(L) \supset A_s(L)$$

y son conjuntos invariantes.

Se dice que L es un atractor débil, atractor o atractor fuerte si existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(L)$ está contenido en $A_\omega(L)$, $A(L)$ o $A_s(L)$, respectivamente.

Se dice que L es asintoticamente estable si y solo si L es un atractor uniformemente estable.

Una función $\varphi : M \longrightarrow \mathbb{R}_+$ es una función de Lyapunov si:

a) φ es continua,

b) $\varphi(\pi(x,t)) \leq \varphi(x)$ para todo $x \in M$ y todo $t \in \mathbb{R}_+$.

4.3 SOBRE LA FORMA DE REGIONES POSITIVAMENTE INVARIANTES DE SISTEMAS DINÁMICOS CON ATRACTORES GLOBALES ASINTOTICAMENTE ESTABLES

Comenzamos esta sección con un teorema que caracteriza totalmente la forma de los compactos positivamente invariantes de sistemas dinámicos con atractores globales asintoticamente estables unidimensionales. Para información sobre atractores unidimensionales se puede consultar [114].

Teorema 4.3.1 *Sea $(M, \mathbb{R}, \pi)$ un sistema dinámico definido en $M \in AR$ (en particular, un espacio de Banach o una variedad contractible). Supongamos que π tiene un atractor global compacto asintoticamente estable K. Entonces todo compacto positivamente invariante conteniendo al atractor tiene forma trivial.*

Si además K es unidimensional, entonces todo continuo positivamente invariante tiene forma trivial.

La demostración hace uso del siguiente Lema.

Lema 4.3.2 *Sea $(M, \mathbb{R}, \pi)$ un sistema dinámico definido en $M \in ANR$. Sea L_0 un compacto positivamente invariante contenido en un compacto L verificando que para todo entorno V de L_0 en M existe $t_0 \in \mathbb{R}_+$ tal que $\pi(L \times [t_0, \infty)) \subset V$. Entonces L_0 es un retracto 'shape' fuerte de L.*

Si además L es positivamente invariante, entonces L_0 es un retracto de deformación 'shape' fuerte de L.

Dem. En las condiciones del enunciado se tiene que

$$f = \pi|_{L\times\mathbb{R}_+} : L \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow M$$

es una aplicación aproximativa de L a L_0. Como L_0 es positivamente invariante, $f|_{L_0\times[0,\infty)}$ es homótopa en L_0 a la aplicación aproximativa de L_0 en sí mismo generada por $f|_{L_0\times\{0\}} = i_{L_0}$ (la identidad en L_0). Luego $[f]$ es una retracción 'shape' fuerte.

Si, además, L es positivamente invariante, entonces $f|_{L\times[0,\infty)}$ es homótopa en L a la aplicación aproximativa generada por $f|_{L\times\{0\}} = i_L$. Luego, en este caso, $[f]$ es una retracción de deformación 'shape' fuerte.

Demostración del Teorema. Sea K atractor global compacto asintoticamente estable. Vamos a ver que K tiene forma trivial. Sea $h : K \longrightarrow Q$ una inmersión en el cubo de Hilbert y sea $f : M \longrightarrow Q$ extensión de h. Sea $g : Q \longrightarrow M$ una extensión de $h^{-1} : h(K) \longrightarrow K$ (que existe por ser $M \in$ AR). Por el Lema, como K es atractor global asintoticamente estable, entonces K es un compacto positivamente invariante tal que $K \subset g(Q)$ y para todo entorno V de K en M existe U entorno de $g(Q)$ en M y existe $t_0 \in \mathbb{R}_+$ tal que $\pi(U \times [t_0,\infty)) \subset V$. Por tanto K es un retracto 'shape' fuerte de $g(Q)$ y existe $\sigma : g(Q)\times\mathbb{R}_+ \longrightarrow M$ aplicación aproximativa de $g(Q)$ a K tal que $[\sigma]$ es una retracción 'shape' fuerte. Entonces, si definimos $\tau : Q\times\mathbb{R}_+ \longrightarrow Q$ dada por $\tau(q,r) = f(\sigma(g(q),r))$, se tiene que $[\tau]$ es una retracción 'shape' fuerte de Q a $h(K)$. Por tanto $h(K)$ (y en consecuencia K) tiene forma trivial.

Sea ahora K' un compacto positivamente invariante conteniendo a K. Como K es atractor global asintoticamente estable, entonces K es un compacto positivamente invariante tal que $K \subset K'$ y para todo entorno V de K en M existe U entorno de K' en M y existe $t_0 \in \mathbb{R}_+$ tal que $\pi(U \times [t_0,\infty)) \subset V$. Por tanto K es un retracto de deformación 'shape' fuerte de K' y $Sh(K') = Sh(K)$. Luego $Sh(K')$ es trivial.

Supongamos ahora que $\dim(K) \leq 1$ y que L es un continuo positivamente invariante, y sea $L_0 = L\cap K$. Entonces L_0 es no vacío pues, como L es compacto positivamente invariante contenido en $A(K)$, se tiene $\emptyset \neq \Lambda^+(L) \subset L\cap K$. Además, L_0 es compacto y positivamente invariante y vamos a ver que verifica que para todo entorno V de L_0 existe $t_0 \in \mathbb{R}_+$ tal que $\pi(L\times[t_0,\infty)) \subset V$. Entonces se tendrá que L_0 es un retracto de deformación 'shape' fuerte de L.

Sea V entorno abierto de L_0 y sea W entorno de K tal que $W \cap L = V \cap L$ (basta tomar $W = M - (L - V)$). Entonces dado W, como $L \subset A_s(K)$, existe $t_0 \in \mathbb{R}_+$ tal que $\pi(L \times [t_0, \infty)) \subset W$. Por otra parte, como L es positivamente invariante, $\pi(L \times [t_0, \infty)) \subset L$. Por tanto,

$$\pi(L \times [t_0, \infty)) \subset W \cap L = V \cap L \subset V.$$

Así, L_0 es un retracto de deformación 'shape' fuerte de L y $Sh(L) = Sh(L_0)$. Como la conexión es un invariante 'shape', se tiene que L_0 es conexo.

Por tanto, L_0 es un subcontinuo de K y vamos a ver que, como $Sh(K)$ es trivial y $\dim(K) \leq 1$, entonces $Sh(L_0)$ es también trivial. Como $\dim K \leq 1$ y L_0 es un subcontinuo de K, toda aplicación $h : L_0 \longrightarrow P$ de L_0 en un poliedro finito P se puede extender a una aplicación $\hat{h} : K \longrightarrow P$ ([57], Teorema V.10.1). Como $Sh(K)$ es trivial, $\hat{h}$ es inesencial y por tanto h es homótopa a una constante. Por tanto $Sh(L_0)$ es trivial y por tanto también lo es $Sh(L)$. Esto completa la demostración del teorema.

Proposición 4.3.3 *Sea $(M, \mathbb{R}, \pi)$ un sistema dinámico definido en $M \in ANR$. Sea K compacto positivamente invariante y supongamos que existe L compacto con forma trivial, tal que $K \subset L \subset A_s(K)$. Entonces todo compacto positivamente invariante K' con $K \subset K' \subset A_s(K)$, tiene forma trivial.*

Si además K es unidimensional, entonces todo continuo positivamente invariante $K' \subset A_s(K)$ tiene forma trivial.

Dem. Sea K compacto positivamente invariante. Observemos primero que si L un compacto tal que $K \subset L \subset A_s(K)$, entonces K es un compacto positivamente invariante tal que $K \subset L$ y para todo entorno V de K en M existe U entorno de L en M y existe $t_0 \in \mathbb{R}_+$ tal que $\pi(U \times [t_0, \infty)) \subset V$. Luego, por el lema 4.3.2, K es un retracto 'shape' de L. Por tanto, si L tiene forma trivial, también K tiene forma trivial.

El resto de la demostración es igual que la del teorema anterior.

Ejemplo 4.3.4 El teorema no es cierto si reemplazamos los conceptos de la teoría de la forma por los correspondientes de la teoría de homotopía. Existe un sistema dinámico en $\mathbb{R}^2$ [52] que tiene por atractor global el conjunto

$$K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x \leq 1, y = \operatorname{sen}(\frac{1}{x})\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0, -1 \leq y \leq 1\},$$

con todos sus puntos de equilibrio. Entonces K es un atractor compacto unidimensional asintoticamente estable, pero el tipo de homotopía de K no es trivial.

Ejemplo 4.3.5 La segunda conclusión del teorema no se cumple, ni siquiera para continuos estables, si $\dim K > 1$. Consideramos el sistema dinámico en $\mathbb{R}^2$ cuyas órbitas son espirales aproximandose a la circunferencia unidad para puntos del exterior del círculo unidad, circunferencias para los puntos del círculo unidad menos el origen, y con el origen como punto estable. Entonces el círculo unidad es un atractor global asintoticamente estable de dimensión dos con forma trivial, pero la circunferencia unidad es un continuo estable que no tiene forma trivial.

Observación 4.3.6 En cualquier dimensión, si K es además positivamente minimal, entonces todo compacto positivamente invariante contiene a K y por tanto tiene forma trivial.

Corolario 4.3.7 *Sea $(M, \mathbb{R}, \pi)$ un sistema dinámico en un AR localmente compacto M. Supongamos que π tiene un atractor global compacto unidimensional asintoticamente estable K y sea L un continuo de M. Entonces*
i) Cada componente conexa de $\Lambda^+(L)$ es un subcontinuo de K positivamente invariante con forma trivial.[1]
ii) $J^+(L)$ es un subcontinuo de K positivamente invariante con forma trivial.
iii) $\overline{\gamma^+(L)}$ y $D^+(L)$ son continuos positivamente invariantes con forma trivial.

Dem. i) es consecuencia del teorema anterior pues $\Lambda^+(L)$ es un subcompacto de K positivamente invariante.

ii) es también consecuencia del teorema anterior pues $J^+(L)$ es un subcompacto de K positivamente invariante y vamos a ver que es conexo. Supongamos

[1] En particular si $L = \{x\}$, es conocido que $\Lambda^+(x)$, por ser compacto, es también conexo, y por tanto es un subcontinuo de K positivamente invariante con forma trivial. Por otra parte, es fácil encontrar, en las condiciones del enunciado, ejemplos de continuos L con $\Lambda^+(L)$ no conexo.

que no lo es. Entonces existen L_0^1 y L_0^2 subconjuntos cerrados de $J^+(L)$ no vacíos tales que $J^+(L) = L_0^1 \cup L_0^2$ y existen U_1, U_2 subconjuntos abiertos y disjuntos de M con $L_0^i \subset U_i$, $i = 1, 2$. Por otra parte, como L es compacto se tiene que para todo $x \in L$ es

$$\emptyset \neq \Lambda^+(x) \subset J^+(x) \subset J^+(L).$$

Luego $L \subset A_s(J^+(L))$ y por ser L es compacto, existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que

$$\pi(L \times [t_0, \infty)) \subset U_1 \cup U_2$$

y, como L es conexo, habrá de estar contenido en alguno de los dos y podemos suponer que $\pi(L \times [t_0, \infty)) \subset U_1$. Pero L_0^2 es positivamente invariante y, por tanto, $\pi(L_0^2 \times [t_0, \infty)) \subset L_0^2 \subset U_2$. Esta contradicción prueba que $J^+(L)$ es conexo.

Analogamente, iii) es también consecuencia del teorema anterior pues $\overline{\gamma^+(L)}$ y $D^+(L) = \overline{\gamma^+(L)} \cup J^+(L)$ son continuos positivamente invariantes.

El siguiente resultado afirma que el flujo en un continuo estable es atraido por un subcontinuo invariante que tiene la misma forma. Obsérvese que todo continuo estable es positivamente invariante, pero no tiene porque ser invariante.

Teorema 4.3.8 *Sea $(M, \mathbb{R}, \pi)$ un sistema dinámico definido en un ANR localmente compacto. Sea L un continuo estable y sea $L_0 = J^+(L)$. Entonces L_0 es un subcontinuo estable de L tal que*

i) L_0 es invariante.

ii) $L \subset A_s(L_0)$.

iii) L_0 es un retracto de deformación 'shape' fuerte de L.

Además, si π tiene un atractor fuerte global compacto K, entonces $L_0 \subset K$.

Dem. Sea L un continuo estable y sea $L_0 = J^+(L)$. Como L es estable, se tiene que

$$L_0 = J^+(L) \subset D^+(L) = L.$$

Además, L_0 es invariante pues $J^+(x)$ es invariante para todo $x \in L$.

Por otra parte, como L es compacto y positivamente invariante se tiene que para todo $x \in L$ es

$$\emptyset \neq \Lambda^+(x) \subset J^+(x) \subset J^+(L) = L_0.$$

Luego $L \subset A_s(L_0)$.

Vamos a ver que L_0 es compacto. Supongamos que no lo es. Entonces existe una sucesión $(x_n) \subset L_0$ tal que $x = \lim x_n \in L - L_0$. Para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos una sucesión $(x_n^k) \subset M$ con $x_n^k \longrightarrow y_n \in L$ y una sucesión $(t_n^k) \subset \mathbb{R}$ con $t_n^k \longrightarrow \infty$ tal que $x_n = \lim_{k \longrightarrow \infty} \pi(x_n^k, t_n^k)$. Podemos suponer (por la compacidad de L) que $y_n \longrightarrow y \in L$. Entonces podemos seleccionar una sucesión $(k_n) \subset \mathbb{N}$ tal que

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} x_n^{k_n} = y, \lim_{n \longrightarrow \infty} t_n^{k_n} = \infty, \lim_{n \longrightarrow \infty} \pi(x_n^{k_n}, t_n^{k_n}) = x.$$

Luego $x \in J^+(y) \subset L_0$. Esta contradicción prueba la compacidad de L_0.

Así, L_0 es un subcompacto de L y como

$$D^+(L_0) = \gamma^+(L_0) \cup J^+(L_0) \subset L_0 \cup J^+(L) = L_0,$$

entonces es estable.

Para ver que L_0 es un retracto de deformación 'shape' fuerte de L, basta ver que para todo entorno V de L_0 y todo $x \in L$, como $L \subset A_s(L_0)$, existe U^x entorno de x y existe $t_x \in \mathbb{R}_+$ tal que $\pi(U^x \times [t_x, \infty)) \subset V$ y por tanto, por la compacidad de L, existe U entorno de L y existe $t_0 \in \mathbb{R}_+$ tal que $\pi(U \times [t_0, \infty)) \subset V$. Luego L_0 es un retracto de deformación 'shape' fuerte de L.

Como la conexión es invariante 'shape', L_0 es conexo. Por tanto L_0 es un subcontinuo estable de L verificando i), ii) y iii).

Finalmente si π tiene un atractor fuerte global compacto K, entonces

$$L_0 = J^+(L) \subset K.$$

Esto completa la demostración del teorema.

Para atractores 2-dimensionales se tiene el siguiente resultado.

Teorema 4.3.9 *Sea $(M, \mathbb{R}, \pi)$ un sistema dinámico definido en $M \in ANR$. Sea K una 2-variedad compacta positivamente invariante y sea L un compacto positivamente invariante tal que $L \subset A_s(K)$. Entonces L es movible.*

Dem. Sea L un compacto positivamente invariante contenido en $A_s(K)$ y sea $L_0 = L \cap K$. Se prueba como en el teorema 4.3.1 que L_0 es un subcompacto positivamente invariante de L tal que $Sh(L) = Sh(L_0)$. Como $L_0 \subset K$ y todo compacto de una 2-variedad es movible, entonces L_0 es movible y por tanto también lo es L.

Ejemplo 4.3.10 Este resultado no es cierto si $\dim K > 2$, ni siquiera para continuos estables y atractores compactos asintoticamente estables. Consideramos el sistema dinámico en $\mathbb{R}^4$ cuyas órbitas son rectas aproximandose perpendicularmente a la esfera unidad K para puntos de $\mathbb{R}^4 - K$ distintos del origen, y tal que el origen y los puntos de K son puntos estables (ésto es, sus trayectorias son puntos). Entonces K es una 3-variedad compacta que es atractor asintoticamente estable. Por otra parte, si L es un solenoide contenido en K, entonces L es un continuo estable que no es movible.

Teorema 4.3.11 *Sea $(M, \mathbb{R}, \pi)$ un sistema dinámico definido en un espacio ANR completo. Sea π_x orbitalmente asintoticamente estable con $\overline{\gamma^+(x)}$ compacto. Sea L compacto positivamente invariante contenido en $A(\overline{\gamma^+(x)})$. Entonces L tiene forma trivial o la forma de la circunferencia S^1.*

Dem. Como π_x es orbitalmente asintoticamente estable y $\overline{\gamma^+(x)}$ es compacto, entonces ([105], III.5.4) $\overline{\gamma^+(x)}$ es asintoticamente estable. Además, como M es completo, $\Lambda^+(x)$ es una órbita periódica ([105], III.5.5) y por tanto $\Lambda^+(x)$ es homeomorfa a un punto o a la circunferencia S^1.

Sea ahora L un compacto positivamente invariante contenido en $A(\overline{\gamma^+(x)})$ y sea $L_0 = L \cap \overline{\gamma^+(x)}$. Se prueba como en el teorema 4.3.1 que L_0 es un subcompacto positivamente invariante de $\overline{\gamma^+(x)}$ tal que $Sh(L) = Sh(L_0)$. Por otra parte, como

$$L_0 \subset \overline{\gamma^+(x)} = \gamma^+(x) \cup \Lambda^+(x),$$

se tiene que, o bien $L_0 \cap \gamma^+(x) = \emptyset$, o bien $L_0 \cap \gamma^+(x) \neq \emptyset$.

En el primer caso se tiene que $L_0 \subset \Lambda^+(x)$ y como L_0 es positivamente invariante y $\Lambda^+(x)$ es una órbita periódica, entonces $L_0 = \Lambda^+(x)$. En el segundo caso se tiene, por ser L_0 compacto positivamente invariante, que existe $t_0 \in \mathbb{R}_+$ tal que

$$L_0 = \overline{\gamma^+(\pi(x,t_0))} = \gamma^+(\pi(x,t_0)) \cup \Lambda^+(x).$$

Pero como $\overline{\gamma^+(x)}$ es compacto, para todo entorno V de $\Lambda^+(x)$ existe $t_1 \in \mathbb{R}_+$ tal que $\overline{\gamma^+(\pi(x,t_1))} \subset V$ y por tanto existe $t_2 \in \mathbb{R}_+$ tal que $\pi(L_0 \times [t_2,\infty)) \subset V$. Por tanto $\Lambda^+(x)$ es un retracto de deformación 'shape' fuerte de L_0.

Así, en cualquiera de los dos casos posibles se tiene que $Sh(L_0) = Sh(\Lambda^+(x))$. Luego L_0, y por tanto L, tiene forma trivial o la forma de la circunferencia S^1.

Ejemplo 4.3.12 El teorema no es cierto si reemplazamos los conceptos de la teoría de la forma por los correspondientes de la teoría de homotopía. En particular, el tipo de homotopía de $\overline{\gamma^+(x)}$ no tiene que ser ni trivial ni el de S^1. Considerese el sistema dinámico en $\mathbb{R}^2$ ([105], III.5.7) cuyo flujo en coordenadas polares viene dado por

$$f(\rho,\theta) = \begin{cases} (0,0) & \text{si } \rho = 0 \\ (\dfrac{1}{1-(1-\frac{1}{\rho})e^{-t}}, \theta + t) & \text{si } 0 < \rho \leq 1. \\ (1-(1-\rho)e^{-t}, \theta + t) & \text{si } 1 < \rho. \end{cases}$$

Sus órbitas son espirales aproximandose a la circunferencia unidad para puntos no de la circunferencia y distintos del origen, los puntos de la circunferencia forman una órbita periódica de periodo 2π y el origen es un punto estable. Entonces dado $x = (\rho,\theta)$ con $0 < \rho < 1$, se tiene que π_x es orbitalmente asintoticamente estable pero $\overline{\gamma^+(x)}$ es un continuo cuyo tipo de homotopía no es ni trivial ni el de S^1.

4.4 PROPIEDADES DINÁMICAS DEL ESPACIO MÉTRICO DE LAS APLICACIONES APROXIMATIVAS

Definición 4.4.1 Sean X e Y espacios métricos compactos tales que Y está contenido en el cubo de Hilbert Q, y denotemos por $A(X,Y)$ al conjunto de aplicaciones aproximativas de X a Y. Dadas $f,g \in A(X,Y)$, definimos la distancia de f a g como:

$$d(f,g) = \max\left\{\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{d(f|_{X\times[0,k]}, g|_{X\times[0,k]})}{2^k}, \sup_{X\times\mathbb{R}_+} |d(f(x,s),Y) - d(g(x,s),Y)|\right\}$$

Entonces, si $d(f,g) < \varepsilon$, se tiene que $d(f|_{X\times[0,k]}, g|_{X\times[0,k]}) < 2^k\varepsilon$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Observación 4.4.2 Es fácil ver que d es una métrica en $A(X,Y)$.

Consideraremos el espacio $A(X,Y)$ con la topología generada por la métrica d. Se puede ver que es un invariante topológico del par (X,Y). En concreto, si α es un homeomorfismo de X a X' y β es un homeomorfismo de Y a Y', la aplicación $\gamma : A(X,Y) \longrightarrow A(X',Y')$ dada por $\gamma(f)(x',t) = \beta f(\alpha^{-1}(x'),t)$, es un homeomorfismo de $A(X,Y)$ a $A(X',Y')$ (ver 2.3.2).

El siguiente teorema, que se demuestra de forma parecida a los resultados de la sección 2.3, enumera las principales propiedades del espacio $A(X,Y)$.

Teorema 4.4.3 *a) Dos aplicaciones aproximativas de X a Y son homótopas si y solo si están en la misma componente conexa por caminos de $A(X,Y)$. Como consecuencia, los morfismos de X a Y en la categoría SSh se pueden identificar con las componentes conexas por caminos de $A(X,Y)$.*
b) Dos aplicaciones aproximativas de X a Y son debilmente homótopas si y solo si están en la misma componente conexa de $A(X,Y)$. Por tanto, los morfismos de X a Y en la categoría Sh se pueden identificar con las componentes conexas de $A(X,Y)$.

c) Dada $f \in A(X,Y)$, si consideramos los conjuntos

$$a(f) = \{g \in A(X,Y) \mid g \text{ asintótica a } f\},$$

$$c(f) = \{g \in A(X,Y) \mid \text{existe } t_0 \in \mathbb{R}_+ \text{ tal que } f|_{X\times[t_0,\infty)} = g|_{X\times[t_0,\infty)}\},$$

se tiene que $c(f) \subset a(f) \subset [f] \subset [f]_w$ y $\overline{c(f)} = \overline{a(f)} = \overline{[f]} = [f]_w$. En particular, todo morfismo en la categoría Sh es la adherencia de un morfismo en la categoría SSh.

d) Dada $f \in A(X,Y)$, dado $\varepsilon > 0$, si definimos

$$[f]_\varepsilon = \{g \in A(X,Y) \mid f|_{X\times[k_g,\infty)} \text{ homótopa a } g|_{X\times[k_g,\infty)} \text{ en } B_\varepsilon(Y), k_g \in \mathbb{R}_+\}$$

se tiene que $[f]_\varepsilon$ es abierto y cerrado en $A(X,Y)$ y que $[f]_w = \cap_{\varepsilon>0}[f]_\varepsilon$. Por tanto, los morfismos de X a Y en la categoría Sh se pueden identificar también con las cuasicomponentes conexas de $A(X,Y)$.

El siguiente teorema introduce un sistema semidinámico en $A(X,Y)$.

Teorema 4.4.4 *Sea $\pi : A(X,Y) \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow A(X,Y)$ tal que si $f \in A(X,Y)$ y $t \in \mathbb{R}_+$, definimos $\pi(f,t) : X \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow Q$ como:*

$$\pi(f,t)(x,s) = f(x,t+s).$$

Entonces $(A(X,Y), \mathbb{R}_+, \pi)$ es un sistema semidinámico.

Además, si X' es homeomorfo a X e Y' es homeomorfo a Y, entonces los sistemas semidinámicos $(A(X,Y), \mathbb{R}_+, \pi)$ y $(A(X',Y'), \mathbb{R}_+, \pi')$ son isomorfos.

Dem. Vamos a ver que π es continua. Sea $(f_0,t_0) \in A(X,Y) \times \mathbb{R}_+$ y sea $\varepsilon > 0$. Sea $k_0 > t_0$ tal que

$$\sum_{k=k_0+1}^{\infty} \frac{\Delta}{2^k} < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ con } \Delta = \text{diam}(Y),$$

y tal que $d(f_0(x,t), Y) < \frac{\varepsilon}{4}$ para todo $x \in X$ y todo $t > k_0$. Por ser f_0 continua en $X \times [0, 2k_0]$, existe $\delta > 0$ con $t_0 + \delta < k_0$ tal que

$$d(f_0(x,t_0+s), f_0(x,t+s)) < \frac{\varepsilon}{4}$$

para todo $x \in X$, todo $t \in \mathbb{R}_+$ con $|t - t_0| < \delta$ y todo $s \in [0, k_0]$, y por tanto

$$|d(f_0(x, t_0 + s), Y) - d(f_0(x, t + s), Y)| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Y si $s > k_0$, entonces $t_0 + s, t + s > k_0$ y

$$|d(f_0(x, t_0 + s), Y) - d(f_0(x, t + s), Y)| < 2\frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2},$$

para todo $x \in X$.

Por otra parte si $d(f, f_0) < \frac{\varepsilon}{2^{2k_0+2}}$, entonces para todo $x \in X$, todo $t \leq k_0$ y todo $s \leq k_0$ se tiene

$$d(f_0(x, t + s), f(x, t + s)) < \frac{\varepsilon}{4}$$

y para todo $t, s \in \mathbb{R}_+$

$$|d(f_0(x, t + s), Y) - d(f(x, t + s), Y)| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Por tanto si $d(f, f_0) < \frac{\varepsilon}{2^{2k_0+2}}$ y $|t - t_0| < \delta$ se tiene que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sup_{(x,s)\in X\times[0,k]} d(f_0(x, t_0 + s), f(x, t + s))}{2^k} < \sum_{k=1}^{k_0} \frac{\frac{\varepsilon}{2}}{2^k} + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \frac{\Delta}{2^k} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

y

$$\sup_{X\times\mathbb{R}_+} |d(f_0(x, t_0 + s), Y) - d(f(x, t + s), Y)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} < \varepsilon.$$

Así $d(\pi(f_0, t_0), \pi(f, t)) < \varepsilon$. Luego π es continua.

Por otra parte, si $f \in A(X, Y)$ se tiene que

$$\pi(f, 0)(x, s) = f(x, s + 0) = f(x, s)$$

para todo $(x, s) \in X \times \mathbb{R}_+$, y

$$\pi(\pi(f, t), s)(x, r) = \pi(f, t)(x, r + s) = f(x, r + t + s) = \pi(f, t + s)(x, r)$$

para todo $(x, s) \in X \times \mathbb{R}_+$ y cualesquiera $t, s \in \mathbb{R}_+$. Luego $(A(X, Y), \mathbb{R}_+, \pi)$ es un sistema semidinámico.

Supongamos ahora que α es un homeomorfismo de X a X' y β es un homeomorfismo de Y a Y' y sean $(A(X, Y), \mathbb{R}_+, \pi)$ y $(A(X', Y'), \mathbb{R}_+, \pi')$ sistemas semidinámicos definidos como en el enunciado del teorema. Sabemos que la aplicación $\gamma : A(X,Y) \longrightarrow A(X',Y')$ dada por $\gamma(f)(x',s) = \beta f(\alpha^{-1}(x'),s)$, es un homeomorfismo de $A(X,Y)$ a $A(X',Y')$ y vamos a ver que verifica que

$$\gamma(\pi(f,t)) = \pi'(\gamma(f),t),$$

para todo $(f,t) \in A(X,Y) \times \mathbb{R}_+$. En efecto, dado $(x',s) \in X' \times \mathbb{R}_+$ se tiene

$$\begin{aligned}\gamma(\pi(f,t))(x',s) &= \beta\pi(f,t)(\alpha^{-1}(x'),s) = \beta f(\alpha^{-1}(x'),t+s)\\ &= \gamma(f)(x',t+s) = \pi'(\gamma(f),t)(x',s).\end{aligned}$$

Por tanto, los sistemas semidinámicos $(A(X,Y),\mathbb{R}_+,\pi)$ y $(A(X',Y'),\mathbb{R}_+,\pi')$ son isomorfos.

Teorema 4.4.5 *Sea, para cada $t \in \mathbb{R}_+$, $\pi_t : A(X,Y) \longrightarrow A(X,Y)$ definida por $\pi_t(f) = \pi(f,t)$, para todo $f \in A(X,Y)$.*

Entonces π_t es continua, abierta, suprayectiva e invertible por la derecha, para todo $t \in \mathbb{R}_+$ (en general no es inyectiva).

Dem. Si $t = 0$ entonces π_0 es la identidad, que es evidentemente continua, abierta, suprayectiva e invertible por la derecha. Sea $t > 0$ y vamos a ver que π_t es abierta. Sea G abierto de $A(X,Y)$ y sea $f \in G$. Vamos a ver que existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(\pi(f,t)) \subset \pi_t(G)$. Como G es abierto, existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(f) \subset G$ y por tanto $\pi_t(B_\delta(f)) \subset \pi_t(G)$.

Sea $k_0 > t$ tal que

$$\sum_{k=k_0+1}^{\infty} \frac{\Delta}{2^k} < \frac{\delta}{2} \text{ donde } \Delta = \operatorname{diam}(Y),$$

y sea $\varepsilon = \frac{\delta}{2^{k_0+2}}$.

Entonces si $d(\pi(f,t),g) < \varepsilon$ se tiene que para todo $x \in X$ y todo $s \le k_0$

$$d(f(x,t+s),g(x,s)) < \frac{\delta}{4}.$$

En particular $d(f(x,t),g(x,0)) < \frac{\delta}{4}$ y existe $0 < \eta < t$ tal que

$$\operatorname{diam}(f(\{x\} \times [t-\eta,t]) \cup g(x,0)) < \frac{\delta}{4}$$

para todo $x \in X$. Entonces existe $h : X \times [t-\eta, t] \longrightarrow Q$ tal que

$$h(x, t-\eta) = f(x, t-\eta), h(x,t) = g(x,0), d(f(x,s), h(x,s)) < \frac{\delta}{2}$$

para todo $x \in X$ y todo $s \in [t-\eta, t]$. Entonces si consideramos $f' : X \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow Q$ dada por

$$f'(x,s) = \begin{cases} f(x,s) & \text{si } s \leq t-\eta \\ h(x,s) & \text{si } t-\eta \leq s \leq t \\ g(x,s-t) & \text{si } s \geq t, \end{cases}$$

se tiene que

$$d(f(x,s), f'(x,s)) = 0$$

si $(x,s) \in X \times [0, t-\eta]$,

$$d(f(x,s), f'(x,s)) = d(f(x,s), h(x,s)) < \frac{\delta}{2}$$

si $(x,s) \in X \times [t-\eta, t]$,

$$d(f(x,s), f'(x,s)) = d(f(x, t+(s-t)), g(x, s-t)) < \frac{\delta}{4}$$

si $(x,s) \in X \times [t, k_0]$, pues $0 \leq s-t < k_0$, y

$$d(f(x,s), f'(x,s)) \leq \Delta$$

si $(x,s) \in X \times [k_0, \infty)$. Por otra parte

$$|d(f(x,s), Y) - d(f'(x,s), Y)| < \frac{\delta}{2}$$

si $(x,s) \in X \times [0, k_0]$, y

$$|d(f(x,s), Y) - d(f'(x,s), Y)| = |d(f(x,s), Y) - d(g(x,s-t), Y)| < \varepsilon < \frac{\delta}{4}$$

si $(x,s) \in X \times [k_0, \infty)$. Por tanto $d(f, f') < \delta$ y como $\pi(f', t) = g$ se tiene que

$$B_\varepsilon(\pi(f,t)) \subset \pi_t(B_\delta(f)) \subset \pi_t(G).$$

Para ver que π_t es invertible por la derecha, basta considerar la aplicación $\pi_{-t} : A(X,Y) \longrightarrow A(X,Y)$ dada por

$$\pi_{-t}(g)(x,s) = \begin{cases} g(x,0) & \text{si } s \leq t \\ g(x,s-t) & \text{si } s \geq t, \end{cases}$$

para toda $g \in A(X,Y)$. Vamos a ver que π_{-t} es continua. Sea $g_0 \in A(X,Y)$ y sea $\varepsilon > 0$. Sea $k_0 > t$ tal que

$$\sum_{k=k_0+1}^{\infty} \frac{\Delta}{2^k} < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ con } \Delta = \text{diam}(Y).$$

Sea $g \in A(X,Y)$ tal que $d(g,g_0) < \frac{\varepsilon}{2^{2k_0+1}}$. Entonces para todo $x \in X$ y todo $s \in [0,t]$ se tiene

$$d(\pi_{-t}(g)(x,s), \pi_{-t}(g_0)(x,s)) = d(g(x,0), g_0(x,0)) < \frac{\varepsilon}{2},$$

y si $s \in [t, k_0]$ se tiene

$$d(\pi_{-t}(g)(x,s), \pi_{-t}(g_0)(x,s)) = d(g(x,s-t), g_0(x,s-t)) < \frac{\varepsilon}{2},$$

pues $s - t \in [0, k_0]$. Por tanto

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sup_{(x,s)\in X\times[0,k]} d(\pi_{-t}(g)(x,s), \pi_{-t}(g_0)(x,s))}{2^k} < \sum_{k=1}^{k_0} \frac{\frac{\varepsilon}{2}}{2^k} + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \frac{\Delta}{2^k} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

y

$$\sup_{X\times\mathbb{R}_+} |d(\pi_{-t}(g)(x,s), Y) - d(\pi_{-t}(g_0)(x,s), Y)| < \varepsilon.$$

Así $d(\pi_{-t}(g), \pi_{-t}(g_0)) < \varepsilon$. Luego π_{-t} es continua. Finalmente se tiene que

$$\pi_{-t}\pi_t(f)(x,s) = \begin{cases} \pi_t(f)(x,0) = f(x,t) & \text{si } s \leq t \\ \pi_t(f)(x,s-t) = f(x,s) & \text{si } s \geq t, \end{cases}$$

y $\pi_t\pi_{-t}(f)(x,s) = \pi_{-t}(f)(x,t+s) = f(x,s)$, para toda $f \in A(X,Y)$.

Observación 4.4.6 Dada $f \in A(X,Y)$ se tiene:

1. $\gamma^+(f)$ es estable si f está generada por una aplicación continua de X a Y.
2. $\gamma^+(f)$ lleva a un estado estable si existe $t_0 \in \mathbb{R}_+$ tal que $f(x,t) = f(x,t_0)$ para todo $t \geq t_0$.
3. $\gamma^+(f)$ es periódica si existe $\tau > 0$ tal que $f(x,t+\tau) = f(x,t)$ para todo $t \in \mathbb{R}_+$, ésto es, si f es periódica.
4. $\gamma^+(f)$ lleva a un ciclo si existe $t_0 \in \mathbb{R}_+$ y existe $\tau > 0$ tal que $f(x,t+\tau) = f(x,t)$ para todo $t \geq t_0$.

5. $\gamma^+(f)$ es no autointersecante si para todo $t_0, t_1 \in \mathbb{R}_+$ existe $t \geq t_0$ y existe $x \in X$ tal que $f(x, t + t_1)) \neq f(x, t)$.

Observación 4.4.7 Sea $f \in A(X, Y)$. Entonces $[f]$ y $[f]_w$ son conjuntos invariantes.

Observación 4.4.8 Denotamos por

$$\mathcal{C}(X, Y) = \{f \in A(X, Y) \mid f(x, t) = f(x, 0), \text{ para todo } x \in X \text{ y todo } t \in \mathbb{R}_+\}$$

al conjunto de aplicaciones aproximativas generadas por una aplicación continua (homeomorfo al conjunto de aplicaciones continuas de X a Y con la norma del supremo)[2]. Obsérvese que $\mathcal{C}(X, Y)$ es el conjunto de puntos estables de $A(X, Y)$. Sea

$$\mathcal{C}(X \times \mathbb{R}_+, Y) = \{f \in A(X, Y) \mid f(X \times \mathbb{R}_+) \subset Y\}.$$

Entonces $\mathcal{C}(X, Y)$ y $\mathcal{C}(X \times \mathbb{R}_+, Y)$ son subconjuntos cerrados de $A(X, Y)$ positivamente invariantes.

También es positivamente invariante el subconjunto formado por las aplicaciones periódicas. Dado $\tau > 0$, el conjunto de aplicaciones aproximativas de X a Y periódicas con periodo menor o igual que τ es cerrado en $A(X, Y)$. El formado por las aplicaciones periódicas es denso en $\mathcal{C}(X \times \mathbb{R}_+, Y)$.

Por otra parte, el subconjunto de $A(X, Y)$ formado por las aplicaciones que llevan a puntos estables y el formado por las que llevan a ciclos son invariantes.

Proposición 4.4.9 *Sea $f \in A(X, Y)$. Entonces $\gamma(f) \subset [f]$ y $\overline{\gamma(f)} \subset [f]_w$.*

Teorema 4.4.10 *Sea $f \in A(X, Y)$. Entonces $J^+(f) = [f]_w \cap \mathcal{C}(X \times \mathbb{R}_+, Y)$.*

Dem. Vamos a ver primero que $J^+(f) \subset [f]_w \cap \mathcal{C}(X \times \mathbb{R}_+, Y)$. Supongamos $g \in J^+(f)$. Sea $(x_0, t_0) \in X \times \mathbb{R}_+$ y sea $\varepsilon > 0$. Sea $t_1 \in \mathbb{R}_+$ tal que

$$d(f(x, t_0 + t), Y) < \frac{\varepsilon}{3}$$

[2] Obsérvese que si consideramos $\mathcal{C}(X, Y)$ con la métrica inducida por la métrica de $A(X, Y)$ y consideramos por otra parte el conjunto de aplicaciones continuas de X a Y con la métrica inducida por la norma del supremo, entonces la aplicación que hace corresponder a cada aplicación continua de X a Y la aplicación aproximativa generada por ella es una isometría.

para todo $x \in X$ y todo $t \geq t_1$. Como $g \in J^+(f)$, existe $h \in A(X,Y)$ con $d(f,h) < \frac{\varepsilon}{3}$ y existe $t_2 \geq t_1$ tal que $d(\pi(h,t_2),g) < \frac{\varepsilon}{3}$. Entonces

$$|d(f(x_0,t_0+t_2),Y) - d(h(x_0,t_0+t_2),Y)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$|d(h(x_0,t_0+t_2),Y) - d(g(x_0,t_0),Y)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Por tanto $|d(f(x_0,t_0+t_2),Y) - d(g(x_0,t_0),Y)| < \frac{2\varepsilon}{3}$ y como $d(f(x,t_0+t_2),Y) < \frac{\varepsilon}{3}$, se tiene $d(g(x_0,t_0),Y) < \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$, y por tanto $d(g(x_0,t_0),Y) = 0$ y como Y es compacto ha de ser $g(x_0,t_0) \in Y$.

Para probar que f y g son debilmente homótopas consideramos V entorno de Y en Q y sea $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(Y) \subset V$. Existe $0 < \delta < \varepsilon$ y existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $h \in A(X,Y)$ con $d(f,h) < \delta$ se tiene que $f|_{X\times[k_0,\infty)}$ y $h|_{X\times[k_0,\infty)}$ son homótopas en V y para todo $h' \in A(X,Y)$ con $d(g,h') < \delta$ se tiene que $g|_{X\times[k_0,\infty)}$ y $h'|_{X\times[k_0,\infty)}$ son homótopas en V. Ahora, como $g \in J^+(f)$ existe $h \in A(X,Y)$ con $d(f,h) < \delta$ y existe $t_0 \in \mathbb{R}_+$ tal que $d(g,\pi(h,t_0)) < \delta$. Pero entonces

$$f|_{X\times[k_0,\infty)} \text{ y } h|_{X\times[k_0,\infty)}$$

son homótopas en V y también lo son

$$g|_{X\times[k_0,\infty)} \text{ y } \pi(h,t_0)|_{X\times[k_0,\infty)},$$

y como $h(X \times [k_0,\infty)) \subset V$ entonces también son homótopas en V

$$h|_{X\times[k_0,\infty)} \text{ y } \pi(h,t_0)|_{X\times[k_0,\infty)}.$$

Luego $f|_{X\times[k_0,\infty)}$ y $g|_{X\times[k_0,\infty)}$ son homótopas en V.

Hemos visto que $J^+(f) \subset [f]_w \cap \mathcal{C}(X \times \mathbb{R}_+, Y)$ y vamos a probar el otro contenido. Sea $g \in [f]_w \cap \mathcal{C}(X \times \mathbb{R}_+, Y)$. Vamos a ver que para todo $\varepsilon > 0$ y todo $t_0 \in \mathbb{R}_+$, existe $g' \in B_\varepsilon(f)$ y existe $t \geq t_0$ tal que $\pi(g',t) = g$.

Sea $\varepsilon > 0$ y consideremos $k_0 \geq t_0$ tal que

$$\sum_{k=k_0+1}^{\infty} \frac{\Delta}{2^k} < \varepsilon, \text{ donde } \Delta = \mathrm{diam}(Y),$$

y tal que $f|_{X\times[k_0,\infty)}$ y $g|_{X\times[k_0,\infty)}$ son homótopas en $B_{\frac{\varepsilon}{2}}(Y)$. Existe entonces $h: X\times[0,1] \longrightarrow B_{\frac{\varepsilon}{2}}(Y)$ continua tal que $h_0 = f|_{X\times\{k_0\}}, h_1 = g|_{X\times\{k_0\}}$. Definimos $g': X\times \mathbb{R}_+ \longrightarrow Q$ como

$$g'(x,t) = \begin{cases} f(x,t) & \text{si } t \leq k_0 \\ h(x,t-k_0) & \text{si } k_0 \leq t \leq k_0+1 \\ g(x,2k_0+1-t) & \text{si } k_0+1 \leq t \leq 2k_0+1 \\ g(x,t-2k_0-1) & \text{si } 2k_0+1 \leq t. \end{cases}$$

Entonces

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sup_{(x,s)\in X\times[0,k]} d(f(x,s),g'(x,s))}{2^k} \leq \sum_{k=1}^{k_0} \frac{0}{2^k} + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \frac{\Delta}{2^k} < \varepsilon.$$

Por otra parte para todo $(x,t) \in X\times[0,k_0]$ se tiene

$$|d(g'(x,t),Y) - d(f(x,t),Y)| = 0,$$

si $(x,t)\in X\times[k_0,k_0+1]$ es

$$|d(g'(x,t),Y) - d(f(x,t),Y)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

y si $t \geq k_0+1$ se tiene

$$|d(g'(x,t),Y) - d(f(x,t),Y)| = |d(f(x,t),Y)| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Luego $g' \in B_\varepsilon(f)$ y $\pi(g', 2k_0+1) = g$ con $2k_0+1 \geq t_0$. Luego $g \in J^+(f)$.

Corolario 4.4.11 *Si $J^+(f) \neq \emptyset$ entonces $[f]_w$ tiene un representante generado por una aplicación continua de X a Y.*

Corolario 4.4.12 *Sea $f \in A(X,Y)$. Entonces*

$$D^+(f) = \gamma^+(f) \cup ([f]_w \cap \mathcal{C}(X\times\mathbb{R}_+,Y)) \subset [f] \cup ([f]_w \cap \mathcal{C}(X\times\mathbb{R}_+,Y)) \subset [f]_w.$$

Teorema 4.4.13 *Sea $f \in A(X,Y)$. Entonces $\Lambda^+(f) \subset [f]_w \cap \mathcal{C}(X\times\mathbb{R}_+,Y)$.*

Además si $g\in A(X,Y)$ es tal que $\lim_{t\to\infty}\pi(f,t) = g$, entonces

$$g \in a(f) \cap \mathcal{C}(X,Y) \subset [f] \cap \mathcal{C}(X,Y),$$

donde $a(f)$ es el conjunto de aplicaciones aproximativas asintóticas a f.

Dem. La primera afirmación es consecuencia del teorema anterior. Para probar la segunda afirmación consideremos $s_0 \in \mathbb{R}_+$ y $\varepsilon > 0$. Sea $k_0 > s_0$. Como $\lim\limits_{t\to\infty} \pi(f,t) = g$ existe $t_0 > s_0$ tal que

$$d(\pi(f,t),g) < \frac{\varepsilon}{4} \text{ y } d(\pi(f,t-s_0),g) < \frac{\varepsilon}{2^{k_0+1}}$$

para todo $t \geq t_0$, y por tanto para todo $x \in X$

$$d(f(x,t),g(x,0)) < \frac{\varepsilon}{2}, d(f(x,t),g(x,s_0)) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Entonces $d(g(x,s_0),g(x,0)) < \varepsilon$, para todo $\varepsilon > 0$. Luego $g(x,s_0) = g(x,0)$ para todo $s_0 \in \mathbb{R}_+$. Además, entonces f y g son asintóticas, y por tanto homótopas.

Corolario 4.4.14 *Si $\Lambda^+(f) \neq \emptyset$ entonces $[f]_w$ tiene un representante generado por una aplicación continua de X a Y.*

Corolario 4.4.15 *Sea $f \in A(X,Y)$. Entonces $R^+(f) \subset [f]_w \cap \mathcal{C}(X \times \mathbb{R}_+, Y)$. Por tanto, si $\gamma^+(f)$ es recurrente, entonces $f \in \mathcal{C}(X \times \mathbb{R}_+, Y)$.*

Teorema 4.4.16 *Sea $f \in A(X,Y)$. Entonces π_f es positivamente Lagrange estable si y solo si f es uniformemente continua.*

Dem. Supongamos que π_f es positivamente Lagrange estable pero que f no es uniformemente continua. Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ existen $(x_n,t_n),(y_n,s_n) \in X \times \mathbb{R}_+$ tales que $d(x_n,y_n) < \frac{1}{n}$, $t_n \leq s_n < t_n + \frac{1}{n}$ y $d(f(x_n,t_n),f(y_n,s_n)) > \varepsilon$.

Por la compacidad de $\overline{\gamma^+(f)}$ existe $\{\pi(f,t_{k_n})\}$ convergente. Luego dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq n_0$ se tiene que

$$d(\pi(f,t_{k_n}),\pi(f,t_{k_{n_0}})) < \frac{\varepsilon}{6},$$

y por tanto para todo $(x,t) \in X \times [0,1]$,

$$d(f(x,t_{k_n}+t),f(x,t_{k_{n_0}}+t)) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Como $\pi(f, t_{k_{n_0}})$ es continua en $X \times [0,1]$, existe $0 < \delta < 1$ tal que para todo $x, y \in X$ y todo $s \in \mathbb{R}_+$ tales que $d(x,y) < \delta$ y $0 < s < \delta$ se tiene

$$d(f(x, t_{k_{n_0}}), f(y, t_{k_{n_0}} + s)) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Por tanto, para todo $n \geq n_0$ y para todo $x, y \in X$ tales que $d(x,y) < \delta$ y todo $s \in \mathbb{R}_+$ tal que $0 < s < \delta$ se tiene

$$\begin{aligned} d(f(x, t_{k_n}), f(y, t_{k_n} + s)) &\leq d(f(x, t_{k_n}), f(x, t_{k_{n_0}})) \\ &\quad + d(f(x, t_{k_{n_0}}), f(y, t_{k_{n_0}} + s)) \\ &\quad + d(f(y, t_{k_{n_0}} + s), f(y, t_{k_n} + s)) \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Por tanto para todo $n \geq n_0$ tal que $\frac{1}{k_n} < \delta$ se tiene que $d(x_{k_n}, y_{k_n}) < \frac{1}{k_n} < \delta$ y $0 < s_{k_n} - t_{k_n} < \frac{1}{k_n} < \delta$ y por tanto

$$d(f(x_{k_n}, t_{k_n}), f(y_{k_n}, s_{k_n})) < \varepsilon.$$

Contradicción. Luego f es uniformemente continua.

Vamos a ver ahora que si f es uniformemente continua entonces π_f es positivamente Lagrange estable. Para ello tenemos que ver que toda sucesión en $\overline{\gamma^+(f)}$ tiene una subsucesión convergente y basta verlo con sucesiones en $\gamma^+(f)$, esto es, con sucesiones del tipo $\{\pi(f, t_n)\}$. Finalmente por la continuidad de π basta considerar el caso en que $t_n \to \infty$.

Por ser X compacto existe E conjunto numerable denso en $X \times \mathbb{R}_+$. Por la compacidad de Q existe $\{t_{k_n}\}$ tal que $\{\pi(f, t_{k_n})\}$ converge puntualmente en E a cierta función (si $E = \{(x_i, t_i)\}$ se toma $\{\pi(f, t_n^1)\}$ subsucesión convergente puntualmente en (x_1, t_1), de ésta se saca $\{\pi(f, t_n^2)\}$ subsucesión convergente puntualmente en (x_1, t_1) y (x_2, t_2), y así sucesivamente. Entonces la subsucesión diagonal $\{\pi(f, t_n^n)\}$ es convergente puntualmente en E).

Además, si $(x,t) \in (X \times \mathbb{R}_+) - E$, dado $\varepsilon > 0$, por la continuidad uniforme de f, existe $(y, s) \in E$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$d(f(x, t_{k_n} + t), f(y, t_{k_n} + s)) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Por otra parte, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq n_0$,

$$d(f(y, t_{k_n} + s), f(y, t_{k_{n_0}} + s)) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Por tanto, para todo $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned} d(f(x, t_{k_n} + t), f(x, t_{k_{n_0}} + t)) &\leq d(f(x, t_{k_n} + t), f(y, t_{k_n} + s)) \\ &\quad + d(f(y, t_{k_n} + s), f(y, t_{k_{n_0}} + s)) \\ &\quad + d(f(y, t_{k_{n_0}} + s), f(x, t_{k_{n_0}} + t)) \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Luego para todo $(x,t) \in (X \times \mathbb{R}_+) - E$, $\{f(x, t_{k_n} + t)\}$ es de Cauchy en Q compacto y por tanto convergente. Luego $\{\pi(f, t_{k_n})\}$ converge puntualmente en $X \times \mathbb{R}_+$ a cierta función $g : X \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow Q$.

Además, para todo $(x,t) \in X \times \mathbb{R}_+$, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq n_0$,

$$d(f(x, t_{k_n} + t), g(x,t)) < \frac{\varepsilon}{2},$$

y existe $n \geq n_0$ tal que

$$d(f(x, t_{k_n} + t), Y) < \frac{\varepsilon}{2},$$

por tanto $d(g(x,t), Y) < \varepsilon$. Luego $g(X \times \mathbb{R}_+) \subset Y$.

Vamos a ver que g es uniformemente continua y en particular se tendrá que $g \in A(X,Y)$. Para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $d(f(x,t), f(y,s)) < \frac{\varepsilon}{3}$ para todo $(x,t), (y,s) \in X \times \mathbb{R}_+$ tales que $d((x,t),(y,s)) < \delta$. Por otra parte dados $(x,t), (y,s)$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(f(x, t_{k_{n_0}} + t), g(x,t)) < \frac{\varepsilon}{3}, d(f(y, t_{k_{n_0}} + s), g(y,s)) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Por tanto, si $(x,t), (y,s) \in X \times \mathbb{R}_+$ son tales que $d((x,t),(y,s)) < \delta$, se tiene

$$\begin{aligned} d(g(x,t), g(y,s)) &\leq d(g(x,t), f(x, t_{k_{n_0}} + t)) + d(f(x, t_{k_{n_0}} + t), f(y, t_{k_{n_0}} + s)) \\ &\quad + d(f(y, t_{k_{n_0}} + s), g(y,s)) \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Finalmente vamos a ver que $\{\pi(f, t_{k_n})\}$ converge a g en $A(X,Y)$. Sea $\varepsilon > 0$ y sea k_0 tal que

$$\sum_{k=k_0+1}^{\infty} \frac{\Delta}{2^k} < \frac{\varepsilon}{2} \text{ donde } \Delta = \operatorname{diam}(Y).$$

Como f y g son uniformemente continuas, existe $\delta > 0$ tal que

$$d(f(x,t), f(y,s)) < \frac{\varepsilon}{6}, d(g(x,t), g(y,s)) < \frac{\varepsilon}{6}$$

para cualesquiera $(x,t),(y,s) \in X \times \mathbb{R}_+$ con $d((x,t),(y,s)) < \delta$. Por otra parte, existen $\{(x_1,t_1),\ldots,(x_r,t_r)\} \subset X \times [0,k_0]$ tales que

$$X \times [0,k_0] \subset B_\delta(x_1,t_1) \cup \ldots \cup B_\delta(x_r,t_r),$$

y existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $i \in \{1,\ldots,r\}$ y todo $n \geq n_0$,

$$d(f(x_i, t_{k_n} + t_i), g(x_i, t_i)) < \frac{\varepsilon}{6}.$$

Así, para todo $(x,t) \in X \times [0,k_0]$, existe $i \in \{1,\ldots,r\}$ tal que $(x,t) \in B_\delta(x_i,t_i)$ y por tanto, para todo $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned} d(f(x, t_{k_n} + t), g(x,t)) &\leq d(f(x, t_{k_n} + t), f(x_i, t_{k_n} + t_i)) \\ &\quad + d(f(x_i, t_{k_n} + t_i), g(x_i, t_i)) \\ &\quad + d(g(x_i,t_i), g(x,t)) \\ &< \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6} = \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Luego

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sup_{(x,t)\in X\times[0,k]} d(f(x, t_{k_n} + t), g(x,t))}{2^k} < \sum_{k=1}^{k_0} \frac{\frac{\varepsilon}{2}}{2^k} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Y por otra parte, podemos escoger n_0 de forma que para todo $n \geq n_0$ se verifique también que

$$d(f(x, t_{k_n} + t), Y) < \varepsilon$$

para todo $(x,t) \in X \times \mathbb{R}_+$, y como $g(X \times \mathbb{R}_+) \subset Y$, se tiene

$$\sup_{X\times\mathbb{R}_+} |d(f(x, t_{k_n} + t), Y) - d(g(x,t), Y)| < \varepsilon.$$

Entonces $d(\pi(f, t_{k_n}), g) < \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$. Por tanto $\{\pi(f, t_{k_n})\}$ converge a g en $A(X,Y)$.

Teorema 4.4.17 *Sea $f \in A(X,Y)$ tal que π_f es positivamente Lagrange estable. Entonces $\Lambda^+(f) \neq \emptyset$ y por tanto $[f]_w$ tiene un representante generado por una aplicación continua de X a Y.*

Corolario 4.4.18 *Si $f \in A(X,Y)$ es uniformemente continua, entonces $[f]_w$ tiene un representante generado por una aplicación continua de X a Y.*

Teorema 4.4.19 *Sea $f \in A(X,Y)$ positivamente asintótica. Entonces $[f]_w$ tiene un representante generado por una aplicación continua de X a Y.*

Si $[f]_w$ no tiene ningún representante generado por una aplicación continua de X a Y, entonces f es positivamente 'departing'.

Teorema 4.4.20 *Sea $f \in A(X,Y)$ positivamente Poisson estable. Entonces existe $t_0 \in \mathbb{R}_+$ tal que $f(X \times [t_0, \infty)) \subset Y$ y por tanto $[f]$ tiene un representante generado por una aplicación continua de X a Y.*

Teorema 4.4.21 *Sea $\mathcal{M}$ el conjunto de puntos 'non-wandering'. Entonces*

$$\mathcal{M} = \mathcal{C}(X \times \mathbb{R}_+, Y).$$

Dem. Si $f \in \mathcal{M}$, entonces $f \in J^+(f) \subset \mathcal{C}(X \times \mathbb{R}_+, Y)$.

Reciprocamente, si $f \in \mathcal{C}(X \times \mathbb{R}_+, Y)$, entonces

$$f \in [f]_w \cap \mathcal{C}(X \times \mathbb{R}_+, Y) = J^+(f).$$

Teorema 4.4.22 *Sea $L \subset A(X,Y)$, L positivamente minimal. Entonces existe $f \in A(X,Y)$ tal que $L \subset [f]_w \cap \mathcal{C}(X \times \mathbb{R}_+, Y)$.*

Proposición 4.4.23 *Sean $f, g \in A(X,Y)$. Entonces π_g es orbitalmente atraida por π_f si y solamente si existe $t_0 \in \mathbb{R}_+$ tal que $\pi(f, t_0)$ y g son asintóticas. Luego*

$$\mathcal{A}^+(f) = \bigcup_{t \in \mathbb{R}_+} a(\pi(f,t)) = \bigcup_{t \in \mathbb{R}_+} \{g \in A(X,Y) \mid g \text{ asintótica a } \pi(f,t)\} \subset [f].$$

Además, si π_f es atractor orbital, entonces

$$\mathcal{A}^+(f) = \bigcup_{t \in \mathbb{R}_+} a(\pi(f,t)) = [f] = [f]_w.$$

Dem. La primera afirmación es inmediata. Para probar la segunda, supongamos que $\mathcal{A}^+(f)$ es entorno de $\overline{\gamma^+(f)}$. Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(f) \subset \mathcal{A}^+(f)$. Sea $g \in [f]_w$. Vamos a ver que entonces existe $h \in B_\varepsilon(f)$ y existe $t_0 \in \mathbb{R}_+$ tal que $\pi(g, t_0) = \pi(h, t_0)$. En efecto, dado $\varepsilon > 0$, consideremos k_0 tal que

$$\sum_{k=k_0+1}^{\infty} \frac{\Delta}{2^k} < \varepsilon, \text{ donde } \Delta = \mathrm{diam}(Y),$$

y $f|_{X\times[k_0,\infty)}$ y $g|_{X\times[k_0,\infty)}$ son homótopas en $B_{\frac{\varepsilon}{2}}(Y)$. Es fácil ver que entonces existe $l : X \times [0,1] \longrightarrow B_{\frac{\varepsilon}{2}}(Y)$ tal que $l_0 = f|_{X\times\{k_0\}}, l_1 = g|_{X\times\{k_0+1\}}$. Definimos $h : X \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow Q$ como

$$h(x,t) = \begin{cases} f(x,t) & \text{si } t \leq k_0 \\ l(x, t-k_0) & \text{si } k_0 \leq t \leq k_0+1 \\ g(x,t) & \text{si } k_0+1 \leq t. \end{cases}$$

Entonces $h \in B_\varepsilon(f) \subset \mathcal{A}^+(f)$ y por tanto existe $t \in \mathbb{R}^+$ tal que h es asintótica a $\pi(f,t)$. Por otra parte, como $\pi(h, k_0+1) = \pi(g, k_0+1)$, también g es asintótica a $\pi(f,t)$. Luego $g \in \mathcal{A}^+(f)$. Por tanto

$$[f]_w \subset \mathcal{A}^+(f) \subset [f] \subset [f]_w.$$

Proposición 4.4.24 *Sea $f \in A(X,Y)$ tal que π_f es positivamente Lyapunov estable. Entonces*

$$[f]_w = [f] = a(f) = \{g \in A(X,Y) \mid g \text{ asintótica a } f\}.$$

Dem. Sea $g \in [f]_w$ y sea $\varepsilon > 0$. Existe $\delta > 0$ tal que para toda $h \in B_\delta(f)$ y todo $t \in \mathbb{R}_+$ se tiene

$$d(\pi(f,t), \pi(h,t)) < \varepsilon.$$

Por otra parte, como $g \in [f]_w$, vimos en la demostración de la proposición anterior que dado $\delta > 0$ existe $h \in B_\delta(f) \cap [f]_w$ y existe $t_0 \in \mathbb{R}_+$ tal que $\pi(g, t_0) = \pi(h, t_0)$. Luego

$$d(\pi(f,t), \pi(g,t)) < \varepsilon,$$

para todo $t \geq t_0$ y por tanto $d(f(x,t), g(x,t)) < \varepsilon$ para todo $x \in X$ y todo $t \geq t_0$. Luego f y g son asintóticas.

Observación 4.4.25 Sea $L \subset A(X,Y)$. Entonces L es estable si y solo si para toda $f \in L$ se tiene que

$$D^+(f) = \gamma^+(f) \cup ([f]_w \cap \mathcal{C}(X \times \mathbb{R}_+, Y)) \subset L.$$

Por tanto, $\mathcal{C}(X \times \mathbb{R}_+, Y)$ es estable y para toda $f \in A(X,Y)$, los conjuntos $[f]_w$ y $[f]_w \cap \mathcal{C}(X \times \mathbb{R}_+)$ son estables.

Por otra parte, si consideramos

$$S = \{f \in A(X,Y) \mid [f]_w \cap \mathcal{C}(X \times \mathbb{R}_+, Y) = \emptyset\},$$

entonces todo subconjunto cerrado de S positivamente invariante es estable. En particular, $[f]_w$ y $\overline{\gamma^+(f)} = \gamma^+(f)$ son estables para toda $f \in S$.

Observación 4.4.26 Dada $f \in \mathcal{C}(X,Y)$, el conjunto $\overline{\gamma^+(f)} = \{f\}$ no es, en general, estable ni orbitalmente estable. Por tanto $(A(X,Y), \pi, \mathbb{R}_+)$ no es, en general, estable ni orbitalmente estable.

Proposición 4.4.27 *Dado $L \subset A(X,Y)$ no vacío y dado $\varepsilon > 0$ consideramos*

$$L_\varepsilon = L \cap \mathcal{C}(X \times \mathbb{R}_+, \overline{B_\varepsilon(Y)}).$$

Entonces $A_\omega(L) = A_\omega(L_\varepsilon)$, $A(L) = A(L_\varepsilon)$ y $A_s(L) = A_s(L_\varepsilon)$, para todo $\varepsilon > 0$ (donde si $L_\varepsilon = \emptyset$ para algún $\varepsilon > 0$ se consideran vacías las correspondientes regiones de atracción).

Dem. Basta ver que si $g \in A(X,Y)$ entonces existe $t \in \mathbb{R}_+$ tal que

$$\pi(\{g\} \times [t, \infty)) \subset \mathcal{C}(X \times \mathbb{R}_+, \overline{B_{\frac{\varepsilon}{2}}(Y)}),$$

y por tanto $\pi(B_{\frac{\varepsilon}{2}}(g) \times [t, \infty)) \subset \mathcal{C}(X \times \mathbb{R}_+, \overline{B_\varepsilon(Y)})$.

Proposición 4.4.28 *Sea $f \in A(X,Y)$. Entonces*

$$A_\omega([f]_w) = A([f]_w) = [f]_w.$$

Dem. Sea $g \in A_\omega([f]_w)$ y sea $\varepsilon > 0$. Existe $t_0 \in \mathbb{R}_+$ y existe $f' \in [f]_w$ tal que

$$d(\pi(g, t_0), f') < \frac{\varepsilon}{2}$$

y $g(X \times [t_0, \infty)) \subset B_{\frac{\varepsilon}{2}}(Y)$, y por tanto $f'(X \times [0, \infty)) \subset B_\varepsilon(Y)$. En particular se tiene que $f'(X \times \{0\}) \subset B_\varepsilon(Y)$, $g(X \times \{t_0\}) \subset B_{\frac{\varepsilon}{2}}(Y)$ y $d(f'|_{X\times\{0\}}, g|_{X\times\{t_0\}}) < \frac{\varepsilon}{2}$. Por tanto $f'|_{X\times\{0\}}$ y $g|_{X\times\{t_0\}}$ son homótopas en $B_\varepsilon(Y)$ y también lo son f' y $\pi(g, t_0)$. Por otra parte, existe $t_1 \in \mathbb{R}_+$ tal que $g|_{X\times[t_1,\infty)}$ y $\pi(g, t_0)|_{X\times[t_1,\infty)}$ son homótopas en $B_\varepsilon(Y)$ y también lo son $f|_{X\times[t_1,\infty)}$ y $f'|_{X\times[t_1,\infty)}$. Luego $f|_{X\times[t_1,\infty)}$ y $g|_{X\times[t_1,\infty)}$ son homótopas en $B_\varepsilon(Y)$. Por tanto $g \in [f]_w$ y $A_\omega([f]_w) \subset [f]_w$.

Finalmente, para demostrar que $[f]_w \subset A([f]_w)$, basta ver que si $g \in [f]_w$ entonces $\pi(\{g\} \times [0, \infty)) \subset [f]_w$.

Corolario 4.4.29 *Sea $f \in A(X, Y)$. Entonces*

$$A_\omega([f]_w \cap \mathcal{C}(X \times \mathbb{R}_+, \overline{B_\varepsilon(Y)})) = A([f]_w \cap \mathcal{C}(X \times \mathbb{R}_+, \overline{B_\varepsilon(Y)})) = [f]_w$$

para todo $\varepsilon > 0$.

Corolario 4.4.30 *Sea $f \in A(X, Y)$. Entonces*

$$[f]_w \cap \mathcal{C}(X \times \mathbb{R}_+, Y) \subset A([f]_w \cap \mathcal{C}(X \times \mathbb{R}_+, Y)) \subset A_\omega([f]_w \cap \mathcal{C}(X \times \mathbb{R}_+, Y)) \subset [f]_w.$$

Además, dado L cerrado se tiene que $[f]_w \cap \mathcal{C}(X \times \mathbb{R}_+, Y) \subset A(L)$ si y solo si $[f]_w \cap \mathcal{C}(X \times \mathbb{R}_+, Y) \subset L$.

Dem. La primera parte es inmediata a partir de la proposición anterior. Además si $[f]_w \cap \mathcal{C}(X \times \mathbb{R}_+, Y) \subset L$ se tiene que

$$[f]_w \cap \mathcal{C}(X \times \mathbb{R}_+, Y) \subset A([f]_w \cap \mathcal{C}(X \times \mathbb{R}_+, Y)) \subset A(L).$$

Reciprocamente, supongamos que existe $g \in [f]_w \cap \mathcal{C}(X \times \mathbb{R}_+, Y)$ tal que $g \notin L$. Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(L) \cap B_\varepsilon(g) = \emptyset$. Consideremos $h : X \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow Y$ dada por

$$h(x,t) = \begin{cases} g(x,t) & \text{si } 0 \le t \le 1 \\ g(x, n^2 + n - t) & \text{si } n \le t \le n^2 + n, n \in \mathbb{N} \\ g(x, t - n^2 - n) & \text{si } n^2 + n \le t \le (n+1)^2, n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Entonces $h \in [f]_w \cap \mathcal{C}(X \times \mathbb{R}_+, Y)$ pero $h \notin A(L)$ pues $\pi(\{h\} \times [t, \infty)) \cap B_\varepsilon(g) \neq \emptyset$ para todo $t \in \mathbb{R}_+$ y por tanto $\pi(\{h\} \times [t, \infty)) \not\subset B_\varepsilon(L)$.

El siguiente ejemplo muestra que ninguno de los tres contenidos se puede cambiar, en general, por una igualdad.

Ejemplo 4.4.31 Sea $X = [0, 1]$ y sea

$$Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-1, 1] - \{0\}, y = \operatorname{sen}(\frac{1}{x})\} \cup (\{0\} \times [-1, 1]).$$

Entonces $[f]_w = A(X, Y)$ para toda $f \in A(X, Y)$ y se tiene:
a) $A(\mathcal{C}(X \times \mathbb{R}_+, Y)) \neq \mathcal{C}(X \times \mathbb{R}_+, Y)$ pues si consideramos $f \in A(X, Y)$ dada por $f(t, r) = (\frac{1}{r+1}, 0)$, entonces $f \in A(\mathcal{C}(X \times \mathbb{R}_+, Y)) - \mathcal{C}(X \times \mathbb{R}_+, Y)$.
b) $A_\omega(\mathcal{C}(X \times \mathbb{R}_+, Y)) \neq A(\mathcal{C}(X \times \mathbb{R}_+, Y))$. Para verlo, consideramos una sucesión creciente $\{r_n\} \subset \mathbb{R}_+$ tal que $\{r_{n+1} - r_n\}$ es divergente. Entonces existe $f \in A(X, Y)$ tal que $f(0, r_n) = (-1, 0)$ y $f(1, r_n) = (1, 0)$ y tal que $f(t, r) = (0, 0)$ para todo $t \in [0, 1]$ y todo $r \in \left[\frac{2r_n + r_{n+1}}{3}, \frac{r_n + 2r_{n+1}}{3}\right]$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces, por la primera condición se tiene que $f \notin A(\mathcal{C}(X \times \mathbb{R}_+, Y))$, y por la segunda se cumple que $f \in A_\omega(\mathcal{C}(X \times \mathbb{R}_+, Y))$.
c) $A_\omega(\mathcal{C}(X \times \mathbb{R}_+, Y)) \neq A(X, Y)$, pues si consideramos $f \in A(X, Y)$ tal que $f(0, r) = (-1, 0)$ y $f(1, r) = (1, 0)$, entonces $f \notin A_\omega(\mathcal{C}(X \times \mathbb{R}_+, Y))$ pues para toda $g \in \mathcal{C}(X \times \mathbb{R}_+, Y)$ y para todo $r \in \mathbb{R}_+$ se tiene $d(\pi(f, r), g) \geq 1$.

Proposición 4.4.32 *Sea $L \subset A(X, Y)$ cerrado no vacío y sea $f \in A(X, Y)$ tal que $f \in A_s(L)$. Entonces $[f]_w \subset A(L)$.*

Dem. Sea $g \in [f]_w$ y sea $\varepsilon > 0$. Como $f \in A_s(L)$, existe $\delta > 0$ y existe $t \in \mathbb{R}_+$ tal que $\pi(\{f'\} \times [t, \infty)) \subset B_\varepsilon(L)$ para todo $f' \in B_\delta(f)$. Por otra parte, como $g \in [f]_w$, existe $g' \in B_\delta(f)$ tal que $\pi(g, t_g) = \pi(g', t_g)$ para cierto $t_g \in \mathbb{R}_+$. Por tanto $g \in A(L)$.

Proposición 4.4.33 *Sea $L \subset A(X, Y)$ atractor débil cerrado. Entonces $A_\omega(L)$ es una unión de clases de homotopía débil.*

Si L es además atractor, entonces $A(L)$ es también una unión de clases de homotopía débil y

$$L \supset \{[f]_w \cap \mathcal{C}(X \times \mathbb{R}_+, Y) \mid f \in A(L)\}.$$

Dem. Sea L atractor débil cerrado y sea $f \in A_\omega(L)$. Como $A_\omega(L)$ es abierto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(f) \subset A_\omega(L)$. Sea $g \in [f]_w$, entonces existe $g' \in B_\varepsilon(f)$ tal que $\pi(g, t_g) = \pi(g', t_g)$ para cierto $t_g \in \mathbb{R}_+$. Luego, como $g' \in B_\varepsilon(f) \subset A_\omega(L)$, también $g \in A_\omega(L)$.

Por otra parte, si L es atractor, es atractor débil y $A(L) = A_\omega(L)$ es unión de clases de homotopía débil.

Finalmente, si $f \in A(L)$ con L atractor, entonces $[f]_w \subset A(L)$, y por la proposición anterior, $[f]_w \cap \mathcal{C}(X \times \mathbb{R}_+, Y) \subset L$.

Observación 4.4.34 La función $\varphi : A(X, Y) \longrightarrow \mathbb{R}_+$ dada por

$$\varphi(f) = \max\{d(f(x,t), Y) \mid (x,t) \in X \times \mathbb{R}_+\}$$

para toda $f \in A(X, Y)$, es una función de Lyapunov en $A(X, Y)$.

Obsérvese que $\varphi(f) \leq d(f, \mathcal{C}(X \times \mathbb{R}_+, Y))$ para toda $f \in A(X, Y)$ y que

$$B_\varepsilon(\mathcal{C}(X \times \mathbb{R}_+, Y)) \subset \varphi^{-1}([0, \varepsilon)) \subset \varphi^{-1}([0, \varepsilon]) = \mathcal{C}(X \times \mathbb{R}_+, \bar{B}_\varepsilon(Y))$$

para todo $\varepsilon > 0$.

Bibliografía

[1] F.W.Bauer, *A shape theory with singular homology*, Pacific J. Math. **64** (1976), 25–65.

[2] M.V.Bebutov *Sur les systèmes dynamiques dans l'espace des fonctions continues*, Doklady AN SSSR **27** (1940), 904–906 (ver Mathematical Reviews **2**, 225).

[3] M.V.Bebutov *On dynamical systems in the space of continuous functions*, Byulletin Moskovsk. Un-ta (Matematika) **2** (1941), 1–52 (en ruso).

[4] N.P.Bhatia, *Attraction and nonsaddle sets in dynamical systems*, Journal of Diff. Eq. **8** (1970), 229–249.

[5] N.P.Bhatia y O.Hájek, *Local semidynamical systems*, Lecture Notes in Math. 90, Springer-Verlag, Berlin, 1969.

[6] N.P.Bhatia y G.P.Szego, *Stability theory of dynamical systems*, Grundlehren der Math. Wiss. 161, Springer-Verlag, Berlin, 1970.

[7] R.H.Bing, *Concerning hereditarily indecomposable continua*, Pacific J. Math. **1** (1951), 43–51.

[8] S.Bogatyi, *Approximative and fundamental retracts*, Math. USSR-Sb. **22** (1974), 91–103.

[9] S.A.Bogatyi and V.I.Gutsu, *On the structure of attracting compacta*, Differentsial'nye Uravneniya **25** (1989), 907–909 (en ruso).

[10] K.Borsuk, *On some metrizations of the hyperspace of compact sets*, Fund. Math. **41** (1954), 168–202.

[11] K.Borsuk, *Theory of Retracts*, Monografie Matematyczne 44, Polish Scientific Publishers, Warszawa, 1967.

[12] K.Borsuk, *Concerning homotopy properties of compacta*, Fund. Math. **62** (1968), 223–254.

[13] K.Borsuk, *Concerning the notion of the shape of compacta*, in Proc. Intern. Symp. on Topology and its Applications, Herceg-Novi, 1968 (Beograd, 1969), pp. 98–104.

[14] K.Borsuk, *On movable compacta*, Fund. Math. **66** (1969), 137–146.

[15] K.Borsuk, *On the concept of shape for metrizable spaces*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. Math. Astron. et Phys. **18** (1970), 127–132.

[16] K.Borsuk, *Theory of shape*, Lecture Notes Series 28, Matematisk Institut, Aarhus Universitet, Aarhus, 1971.

[17] K.Borsuk, *Some remarks concerning the theory of shape in arbitrary metrizable spaces*, in Proc. of the Third Prague Symp. on General Topology, 1971, pp. 77–81.

[18] K.Borsuk, *Theory of shape*, Monografie Matematyczne 59, Polish Scientific Publishers, Warszawa, 1975.

[19] K.Borsuk, *On a class of compacta*, Houston J. Math. **1** (1975), 1–13.

[20] F.W.Cathey, *Strong shape theory*, in Shape Theory and Geom. Top. Proc. (Dubrovnik, 1981), Lecture Notes in Math. 870, Springer-Verlag, Berlin, 1981, pp. 215–238.

[21] F.W.Cathey, *Shape fibrations and strong shape theory*, Top. and Appl. **14** (1982), 13–30.

[22] Z.Čerin, *Multi-valued functions and triviality*, Topology Proc. **17** (1992), 1–27.

[23] Z.Čerin, *Approximate fibrations*, preprint.

[24] Z.Čerin y T.Watanabe, *Borsuk fixed point theorem for multivalued maps*, in Geometric Topology and Shape Theory (S.Mardešić and J.Segal, eds.), Lecture Notes in Math., vol. 1283, Springer-Verlag, Berlin, 1987, pp. 30–37.

[25] T.A.Chapman, *On some applications of infinite-dimensional manifolds to the theory of shape*, Fund. Math. **76** (1972), 191–193.

[26] T.A.Chapman, *Approximation results in topological manifolds*, Memoirs Amer. Math. Soc. **34** (1981), 1–64.

[27] D.Christie, *Net homotopy for compacta*, Trans. Amer. Math. Soc. **56** (1944), 275–308.

[28] M.H.Clapp, *On a generalization of absolute neighborhood retracts*, Fund. Math. **70** (1971), 117–130.

[29] D.Coram y P.F.Duvall, Jr, *Approximate fibrations*, Rocky Mountain J. Math. **7** (1977), 275–288.

[30] J.M.Cordier y T.Porter, *Shape theory. Categorical methods of approximation*, Ellis Horwood Series: Mathematics and its Applications, Ellis Horwood Ltd, Chichester, 1989.

[31] J.Dydak, *On internally movable compacta*, Bull. Acad. Polon. Sci. **27** (1979), 107–110.

[32] J.Dydak y S.Nowak, *Strong shape for topological spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **323** (1991), 765–796.

[33] J.Dydak y J.Segal, *Shape theory: An introduction*, Lecture Notes in Math. 688, Springer-Verlag, Berlin, 1978.

[34] J.Dydak y J.Segal, *Strong shape theory*, Dissertationes Math. **192** (1981), 1–42.

[35] J.Dydak y J.Segal, *Approximate polyhedra and shape theory*, Topology Proc. **6** (1981), 279–286.

[36] J.Dydak y J.Segal, *A list of open problems in shape theory*, in Open problems in Topology, J.Van Mill and G.M.Reed (Editors), North Holland, Amsterdam, 1990, pp. 457–467.

[37] D.A.Edwards y H.M.Hastings, *Čech and Steenrod homotopy theories with applications to geometric topology*, Lecture Notes in Math. 542, Springer-Verlag, Berlin, 1976.

[38] J.E.Felt, *ϵ-continuity and shape*, Proc. Amer. Math. Soc. **46** (1974), 426–430.

[39] S.Ferry, *A stable converse to Vietoris-Smale theorem with applications to shape theory*, Trans. Amer. Math. Soc. **261** (1980), 369–386.

[40] R.H.Fox, *On shape*, Fund. Math. **74** (1972), 47–71.

[41] R.H.Fox, *Shape theory and covering spaces*, in Topology conference (VPI & SU, March 22-24, 1973), Lecture Notes in Math. 375, Springer-Verlag, New York, 1974, pp. 71–90.

[42] B.M.Garay, *Strong cellularity and global asymptotic stability*, Fund. Math. **138** (1991), 147–154.

[43] R.Geoghegan y J.Krasinkiewicz, *Empty components in strong shape theory*, Top. and Appl. **41** (1991), 213–233.

[44] K.R.Goodearl y T.B.Rushing, *Direct limits and the Keesling-Mardešić fibration*, Pacific J. Math. **86** (1980), 471–476.

[45] W.H.Gottschalk y G.A.Hedlund, *Topological Dynamics*, Amer. Math. Soc. Colloquium Pub. 36, Providence R.I., 1955.

[46] A.Granas, *Fixed point theorems for the approximative* ANRs, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. Math. Astron. et Phys. **16** (1968), 15–19.

[47] B.Günther, *A Tom Dieck theorem for strong shape theory*, Trans. Amer. Math. Soc. **338** (1993), 857–870.

[48] B.Günther y J.Segal, *Every atractor of a flow on a manifold has the shape of a finite polyhedron*, Proc. Amer. Math. Soc. **119** (1993), 321–329.

[49] J.K.Hale, *Asymptotic behavior of dissipative systems*, AMS, Providence, R.I., 1988.

[50] H.M.Hastings, *Steenrod homotopy theory, homotopy idempotents and homotopy limits*, Topology Proceedings **2** (1977), 461–476.

[51] H.M.Hastings, *Shape theory and dynamical systems*, in The structure of attractors in dynamical systems (N.G.Markley and W.Perizzo, eds.), Lecture Notes in Math., vol. 668, Springer-Verlag, Berlin, 1978, pp. 150–160.

[52] H.M.Hastings, *A higher dimensional Poincaré-Bendixson theorem*, Glasnik Mat. **14** (1979), 263–268.

[53] H.M.Hastings, *Classifying shape fibrations and pro-fibrations II*, Topology Proceedings **13** (1988), 211–236.

[54] H.M.Hastings y S.Waner, *Classifying pro-fibrations and shape fibrations*, J. Pure and Appl. Alg. **41** (1986), 183–211.

[55] W.Holsztyński, *An extension and axiomatic characterization of Borsuk's theory of shape*, Fund. Math. **70** (1971), 157–168.

[56] W.Holsztyński, *Continuity of Borsuk's shape functor*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. Math. Astron. et Phys. **19** (1971), 1105–1108.

[57] S.T.Hu, *Theory of Retracts*, Wayne State University Press, Detroit, 1967.

[58] S.T.Hu, *Homotopy theory*, Academic Press, New York, 1959.

[59] J.Keesling y S.Mardešić, *A shape fibration with fibers of different shape*, Pacific J. Math. **84** (1979), 319–331.

[60] R.W.Kieboom, *An intrinsic characterization of the shape of paracompacta by means of non-continuous single-valued maps*, Bull. Belgian Math. Soc. **1** (1994), 701–711.

[61] Y.Kodama, *Multivalued maps and shape*, Glasnik Mat. **12** (1977), 133–142.

[62] Y.Kodama y J.Ono, *On fine shape theory I*, Fund. Math. **105** (1979), 29–39.

[63] Y.Kodama y J.Ono, *On fine shape theory II*, Fund. Math. **108** (1980), 89–98.

[64] A.Koyama, *Various compact multi-retracts and shape theory*, Tsukuba J. Math. **6** (1982), 319–332.

[65] J.Krasinkiewicz y P.Minc, *Generalized paths and pointed 1–movability*, Fund. Math. **104** (1979), 141–153.

[66] K.Kuratowski, *Topology I*, Academic Press, New York, 1966.

[67] K.Kuratowski, *Topology II*, Academic Press, New York, 1968.

[68] R.C.Lacher, *Cellularity criteria for maps*, Michigan Math. J. **17** (1970), 385–396.

[69] R.C.Lacher, *Cell-like maps and their generalizations*, Bull. Amer. Math. Soc. **83** (1977), 495–552.

[70] V.Laguna, M.A.Morón, N.T.Nhu y J.M.R.Sanjurjo, *Movability and limits of polyhedra*, Fund. Math. **143** (1993), 191–201.

[71] V.Laguna y J.M.R.Sanjurjo, *Internal fundamental sequences and approximative retracts*, Top. and Appl. **17** (1984), 189–197.

[72] V.Laguna y J.M.R.Sanjurjo, *Spaces of approximative maps*, Math. Japonica **31** (1986), 623–633.

[73] V.Laguna y J.M.R.Sanjurjo, *Shape morphisms and spaces of approximative maps*, Fund. Math. **133** (1989), 225–235.

[74] J.T.Lisica, *Strong shape theory and multivalued maps*, Glasnik Mat. **18** (1983), 371–382.

[75] S.Mardešić, *Shape for topological spaces*, Gen. Top. and Appl. **3** (1973), 265–282.

[76] S.Mardešić, *Comparing fibers in a shape fibrations*, Glasnik Mat. Ser. III **13** (33) (1978), 317–333.

[77] S.Mardešić, *Approximate polyhedra, resolutions of maps and shape fibrations*, Fund. Math. **114** (1981), 53–78.

[78] S.Mardešić y T.B.Rushing, *Shape fibrations*, Gen. Top. and Appl. **9** (1978), 193–215.

[79] S.Mardešić y T.B.Rushing, *Shape fibrations II*, Rocky Mountain J. Math. **9** (1979), 283–298.

[80] S.Mardešić y J.Segal, *Shapes of compacta and* ANR-*systems*, Fund. Math. **72** (1971), 41–59.

[81] S.Mardešić y J.Segal, *Equivalence of the Borsuk and the ANR-system approach to shapes*, Fund. Math. **72** (1971), 61–68.

[82] S.Mardešić y J.Segal, *Shape theory*, North Holland, Amsterdam, 1982.

[83] E.Michael, *Topologies on spaces of subsets*, Trans. Amer. Math. Soc. **71** (1951), 152–182.

[84] M.A.Morón, *Prabir Roy's space* Δ *as a counterexample in shape theory*, Proc. Amer. Math. Soc. **98** (1986), 187–188.

[85] M.A.Morón, *On internal movability, internal shape and internal* MANR-*spaces*, Colloq. Math. **57** (1989), 235–246.

[86] M.A.Morón y F.R.Ruiz del Portal, *Counting shape and homotopy types among fundamental absolute neighborhood retracts: An elementary approach*, Manuscripta Math. **79** (1993), 411–414.

[87] M.A.Morón y F.R.Ruiz del Portal, *Multivalued maps and shape for paracompacta*, Math. Japonica **39** (1994), 489–500.

[88] V.V.Nemytskii y V.V.Stepanov, *Qualitative theory of differential equations*, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1960.

[89] H.Noguchi, *A generalization of absolute neighborhoods retracts*, Kodai Math. Seminar reports **1** (1953), 20–22.

[90] T.Porter, *Čech homotopy*, J.London Math. Soc. **6** (1973), 429–436.

[91] T.Porter, *Borsuk's theory of shape and Čech homotopy*, Math. Scand. **33** (1973), 83–89.

[92] J.B.Quigley, *An exact sequence from the nth to the (n-1)st fundamental group*, Fund. Math. **77** (1973), 195–210.

[93] F.Quinn, *Ends of maps I*, Annals of Math. **110** (1979), 275–331.

[94] J.W.Robbin y D.Salamon, *Dynamical systems, shape theory and the Conley index*, Ergod. Th. & Dynam. Sys. **8*** (1988), 375–393.

[95] J.T.Rogers, Jr., *The shape of a cross-section of the solution funnel of an ordinary differential equation*, Illinois J. Math. **21** (1977), 420–426.

[96] J.M.R.Sanjurjo, *On fundamental approximative absolute neighborhood retracts*, Canad. Math. Bull. **27** (2) (1984), 134–142.

[97] J.M.R.Sanjurjo, *On the shape category of compacta*, J. London Math. Soc. **34** (1986), 559–567.

[98] J.M.R.Sanjurjo, *A non-continuous description of the shape category of compacta*, Quart. J. Math. Oxford (2) **40** (1989), 351–359.

[99] J.M.R.Sanjurjo, *Selections of multivalued maps and shape domination*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **107** (1990), 493–499.

[100] J.M.R.Sanjurjo, *Shape morphisms and small multivalued maps*, Math. Japonica **35** (1990), 713–717.

[101] J.M.R.Sanjurjo, *Multihomotopy sets and transformations induced by shape*, Quart. J. Math. Oxford (2) **42** (1991), 489–499.

[102] J.M.R.Sanjurjo, *An intrinsic description of shape*, Trans. Amer. Math. Soc. **329** (1992), 625–636.

[103] J.M.R.Sanjurjo, *Multihomotopy, Čech spaces of loops and shape groups*, Proc. London Math. Soc. (3) **69** (1994), 330–344.

[104] J.M.R.Sanjurjo, *On the structure of uniform attractors*, aparecerá en Journal of Math. Analysis and its Applications.

[105] P.Saperstone, *Semidynamical systems in infinite dimensional spaces*, Applied Math. Sciences 37, Springer-Verlag, Berlin, 1981.

[106] K.S.Sibirsky, *Introduction to topological dynamics*, Noordhoff International Publishing, Leyden, 1975.

[107] E.H.Spanier, *Algebraic topology*, McGraw-Hill Series in Higher Mathematics, McGraw-Hill, New York, 1966.

[108] A.Suszycki, *Retracts and homotopies for multimaps*, Fund. Math. **95** (1983), 9–26.

[109] C.Tezer, *Shift equivalence in homotopy*, Math. Z. **210** (1992), 197–201.

[110] J.Van Mill, *Infinite-dimensional topology*, North Holland, Amsterdam, 1989.

[111] J.de Vries, *Elements of Topological Dynamics*, Kluwer Acad. Publishers, Dordrecht–Boston–London, 1993.

[112] T.Watanabe, *Some strange examples of shape fibrations*, Top. and Appl. **60** (1994), 23-32.

[113] J.E.West, *Problems in infinite-dimensional topology*, in Open problems in Topology, J.Van Mill and G.M.Reed (Editors), North Holland, Amsterdam, 1990, pp. 523–597.

[114] R.F.Williams, *Classification of one-dimensional attractors*, in Proc. Sympos. Pure Math. Vol 14 AMS, 1970, pp. 341-361.