Apuntes sobre la estructura y la evolución de las sociedades

Índice

Índice detallado

Prefacio

He estado estudiando el mecanismo mercantil durante muchos años y mi primera intención era publicar como tesis doctoral los resultados de esa investigación. El tiempo ha demostrado que no he completado ni mucho menos ese estudio, pero para intentar continuarlo me encontré en la necesidad de presentar una tesis en un plazo muy breve. Por ello he decidido publicar sólo el análisis de unos comportamientos especialmente simples, aunque con un vínculo directo con las sociedades contemporáneas. Con este fin he aprovechado algunos textos informales en donde desarrollé teorías y conceptos vinculados a economistas del pasado, con un lenguaje sencillo pero con unas herramientas y un planteamiento moderno.

Como resultado homenajearemos a los economistas del pasado estudiando cuánto podría expandirse una economía manteniendo un crecimiento proporcional y cuánto podrían reducirse las jornadas laborales manteniendo un estado estacionario. Comprobaremos que estas preguntas, aparentemente tan inocentes, tienen consecuencias insospechadas. También analizaremos el parecido, que puede resultar sorprendente en una primera impresión, entre el comportamiento de algunas sociedades y el de nuestros modelos. Veremos que *podemos entender parte de la extraordinaria complejidad de las sociedades contemporáneas mediante leyes simples y éstas como resultado de determinados procesos evolutivos*.

He intentado que el texto resulte lo más accesible posible, aunque sin dejar de usar por ello unas matemáticas muy sencillas. El gran libro de la Historia, biológica y humana, también está escrito en lenguaje matemático y sin dominar este lenguaje es muy difícil comprender nada de él. No obstante he escogido un planteamiento matemático simple y fácil, a veces renunciando con ello a la simetría y a la belleza que permiten desarrollos más avanzados. Además he expresado con palabras los formalismos allí donde resulta verdaderamente importante una percepción intuitiva de su significado y los he ilustrado con numerosos ejemplos. Para simplificar la exposición también he abusado de las notas al pie, sobre todo en algunos capítulos, y he intentado no usar términos técnicos, por lo menos no sin explicar previamente su significado.

Por otra parte algunos fragmentos de este trabajo les parecerán demasiado evidentes y prolijos a los economistas, otros se lo parecerán a los matemáticos, otros a los demógrafos, otros a los biólogos, otros a los historiadores, etc. Pero el lector experto en alguno de estos campos debe entender que lo que a él le parece evidente no tiene que serlo para una persona sin su formación específica. Para facilitar la comprensión he intentado dar una descripción lo más general posible, accesible a cualquier persona aun sin conocimientos que pudieran parecer básicos a los expertos. Por todo lo dicho espero que ningún lector tenga demasiadas dificultades para entender todo el texto.

La simple referencia a algunos de los temas que tratamos en este trabajo evidencia que me he visto obligado a adentrarme en campos en los que no soy especialista. Es obvio que quién habla de lo que no sabe muchas veces no puede evitar decir tonterías; sólo soy un economista y espero que el lector me disculpe por los graves errores que sin duda habré cometido en otros terrenos. Pero debe notarse que serían necesarias muchas vidas para poder hablar con el conocimiento necesario no ya de todos estos temas sino incluso de sólo uno de ellos. No obstante pienso que es imprescindible intentar una visión sintética de estos aspectos para poder estudiar el tema que nos ocupa, aunque con ello se caiga inevitablemente en planteamientos erróneos o superficiales.

Por todo ello me gustaría recalcar que este trabajo consiste sólo en unos primeros apuntes, como indico desde su título, y escritos con excesiva premura. Incluso he tenido que prescindir de algunos capítulos (como la comparación entre los dos modelos, el estudio de alguna de sus simetrías, y también sobre la historia de la ciencia económica) porque su redacción era demasiado grosera. Tampoco he podido incorporar toda una parte dedicada al estudio de los sistemas sociales desde un punto de vista físico, a pesar de que éste es imprescindible para entender de manera profunda mucho de lo que se expone. Y las partes cuarta y quinta, que sí he tenido la osadía de incluir, no puede decirse que se encuentren ni siquiera en estado de borrador. Además no he tenido ocasión para distribuir el texto entre expertos en los diferentes temas, que podrían haber efectuado una primera corrección de sus faltas más graves. Por todo ello pido también disculpas al lector.

Hoy en día no estamos en situación de contrastar directamente nuestros modelos con las sociedades que pretenden representar, comprobando hasta que punto se parecen las magnitudes observadas con las que afirma la teoría, dado que no disponemos de los datos ni de la potencia de cálculo necesarios para ello. No obstante sí podemos dar un contraste indirecto o cualitativo, por ejemplo demostrando que nuestros modelos cumplen leyes que se observan en la realidad, y ésta es una de las razones por la que he dedicado tanto espacio a la segunda parte de este trabajo. En el futuro, con mejores datos y procedimientos de cálculo, podremos comparar nuestros modelos directamente con la realidad.

Espero desarrollar este primer esbozo con más detalle en futuras ediciones y corregir los errores más groseros que contiene, alguno de ellos resultado no sólo de mi torpeza sino también de la manera demasiado apresurada en la que fue concebido. Agradezco a este fin cualquier comentario que el lector quiera hacerme llegar (mi email es mmuinosp@cps.ucm.es). En otros trabajos posteriores intentaré publicar mi investigación sobre el mecanismo mercantil, si es que consigo desarrollarla lo suficiente, y ya más a largo plazo un estudio detallado sobre la historia del pensamiento económico y social.

Primera parte. Planteamiento de los modelos

1: Comportamientos simples

1.1 Procesos de producción

Escribiremos los procesos de producción con unas recetas de cocina, por usar una expresión de Leontief; necesitamos ocho huevos, cuatro patatas y un decilitro de aceite para producir una tortilla de patatas

huevos	patatas	aceite	tortillas		huevos	patatas	aceite	tortillas
8	4	1	0	→	0	0	0	1

Los insumos los incluiremos en un vector **A** y los productos en un vector **B**, de manera que escribiremos la receta anterior con dos vectores (dos listas de números)

A = [8, 4, 1, 0]　　　　　**B** = [0, 0, 0, 1]

Llamaremos *intensidad* al número de veces que se utiliza una receta. Por ejemplo, si la intensidad en un determinado momento t es 100, lo que anotaremos como $\mathbf{X_t} = 100$, si se utiliza 100 veces la receta, se consumirán 800 huevos, 400 patatas y 100 decilitros de aceite y se producirán 100 tortillas; se consumirán $\mathbf{X_t}\ \mathbf{A} = [800, 400, 100, 0]$ y se producirán $\mathbf{X_t}\ \mathbf{B} = [0, 0, 0, 100]$.

Si conocemos las recetas que pueden darse en un sistema las podemos escribir en unas matrices (en unas tablas) **A** y **B**. Un ejemplo sería

	trigo	hierro		trigo	hierro
Proceso nº 1	280	12	→	575	0
Proceso nº 2	120	8	→	0	20
Proceso nº 3	280	12	→	400	0

donde el trigo se mide en arrobas y el hierro en toneladas. Con 280 arrobas de trigo y 12 toneladas de hierro pueden producirse 575 arrobas de trigo, con 120 arrobas de trigo y 8 toneladas de hierro pueden producirse 20 toneladas de hierro, y con 280 arrobas de trigo y 12 toneladas de hierro pueden producirse 400 arrobas de trigo. Las matrices quedarían

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 280 & 12 \\ 120 & 8 \\ 280 & 12 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 575 & 0 \\ 0 & 20 \\ 400 & 0 \end{bmatrix}$$

Supondremos por el momento que las recetas no cambian con el tiempo y que en todos los procesos el consumo se efectúa en un instante t y la producción en un instante t+1 (hacemos esto para facilitar la explicación; veremos más adelante como tratar otras estructuras temporales). Por ejemplo, si las intensidades fueran $\mathbf{X_t} = [1, 3, 0]$, si el primer proceso operara una vez, el segundo tres veces y el tercero no operara, en el momento t el consumo de trigo sería 1×280 + 3×120 + 0×280 = 640 arrobas y el consumo de hierro sería 1×12 + 3×8 + 0×12 = 36 toneladas; en el momento t+1 la producción de trigo sería 1×575 + 3×0 + 0×400 = 575 arrobas y la producción de hierro sería 1×0 + 3×20 + 0×0 = 60 toneladas. Luego el consumo en el momento t sería $\mathbf{X_t\ A}$ = [640, 36] y la producción en el momento t+1 sería $\mathbf{X_t\ B}$ = [575, 60].

En ocasiones distinguiremos entre el consumo de los trabajadores, que escribiremos en una matriz **V**, y el resto de los insumos, que escribiremos en una matriz **C**, de manera que

$$\mathbf{A} = \mathbf{C} + \mathbf{V}$$

Por ejemplo, si los trabajadores consumen tres cuartas partes del trigo nos queda

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 70 & 12 \\ 30 & 8 \\ 70 & 12 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} 210 & 0 \\ 90 & 0 \\ 210 & 0 \end{bmatrix}$$

1.2 Asignaciones factibles

Si en un sistema el consumo de cada materia en el momento t es igual a su producción desde el momento t–1 tenemos, para recetas que no cambian con el tiempo,

$$\mathbf{X_t\ A} = \mathbf{X_{t-1}\ B} \qquad \{1.1\}$$

o, de manera desarrollada,

$$\begin{aligned} &\ldots \\ &\mathbf{X_{-2}\ A} = \mathbf{X_{-3}\ B} \\ &\mathbf{X_{-1}\ A} = \mathbf{X_{-2}\ B} \\ &\mathbf{X_{0}\ A} = \mathbf{X_{-1}\ B} \\ &\mathbf{X_{1}\ A} = \mathbf{X_{0}\ B} \\ &\mathbf{X_{2}\ A} = \mathbf{X_{1}\ B} \\ &\ldots \end{aligned}$$

Llamaremos a estas expresiones *condiciones de balance material*. Por otra parte si las intensidades con las que operan los procesos no pueden ser negativas tenemos

$$\mathbf{X_t} \geq \mathbf{0} \qquad \{1.2\}$$

Diremos que estamos ante una *asignación factible* si se cumplen {1.1} y {1.2}, si se cumplen las condiciones de balance material para unas intensidades no negativas. Aquellas soluciones en las que no existe ningún consumo o producción de ninguna materia, por ejemplo porque todas las intensidades son nulas, las llamaremos *soluciones triviales*, pero en general nos interesan sólo las soluciones no triviales.

1.3 Comportamientos simples

Para unas recetas dadas a menudo existirán muchas asignaciones factibles, pero algunas son muy interesantes por su sencillez. Para recetas que no cambian con el tiempo tenemos:

- el *estado estacionario*, cuando las intensidades no cambian con el tiempo

  $\mathbf{X_{t+1}} = \mathbf{X_t}$

- el *crecimiento proporcional*, cuando las intensidades crecen con el mismo *factor de expansión* α (llamamos factor de una magnitud a 1 más la tasa de esa magnitud)

  $\mathbf{X_{t+1}} = \alpha\,\mathbf{X_t}$ {1.3}

Si con las recetas de nuestro ejemplo las intensidades fueran $\mathbf{X_t}$ = [0, 1, 1] estaríamos ante un estado estacionario

Tiempo *t*	Intensidades $\mathbf{X_t}$	Consumo $\mathbf{X_t\,A}$	Producción $\mathbf{X_t\,B}$
–2	[0, 1, 1]	[400, 20]	[400, 20]
–1	[0, 1, 1]	[400, 20]	[400, 20]
0	[0, 1, 1]	[400, 20]	[400, 20]
1	[0, 1, 1]	[400, 20]	[400, 20]
2	[0, 1, 1]	[400, 20]	[400, 20]

y si fueran $\mathbf{X_t} = 1.25^t$ [4, 6, 0] tendríamos un crecimiento proporcional

Tiempo *t*	Intensidades $\mathbf{X_t}$	Consumo $\mathbf{X_t\,A}$	Producción $\mathbf{X_t\,B}$
–2	[2.56, 3.84, 0]	[1177.6, 61.44]	[1472, 76.8]
–1	[3.2, 4.8, 0]	[1472, 76.8]	[1840, 96]
0	[4, 6, 0]	[1840, 96]	[2300, 120]
1	[5, 7.5, 0]	[2300, 120]	[2875, 150]
2	[6.25, 9.375, 0]	[2875, 150]	[3593.75, 187.5]

El estado estacionario es un caso particular de crecimiento proporcional cuando el factor de expansión α es igual a 1.

1.4 Condiciones de crecimiento proporcional

Para que un sistema con recetas que no cambian con el tiempo muestre un crecimiento proporcional es necesario que se cumpla {1.1}, {1.2} y {1.3}. Desde {1.3}, anotando las intensidades en el momento 0 como **X**, tenemos que

$$\mathbf{X_t} = \alpha^t\,\mathbf{X}$$

y substituyendo en {1.1} resulta

$$\alpha^t\,\mathbf{X\,A} = \alpha^{t-1}\,\mathbf{X\,B}$$

o, de manera desarrollada,

…
α^{-2} **X A** = α^{-3} **X B**
α^{-1} **X A** = α^{-2} **X B**
α^{0} **X A** = α^{-1} **X B**
α^{1} **X A** = α^{0} **X B**
α^{2} **X A** = α^{1} **X B**
…

Estas ecuaciones matriciales son la misma pero multiplicada por una potencia de α, por lo que para confirmar que se cumplen todas basta comprobar una de ellas, por ejemplo cuando t es igual a 0. Así que nos queda

$$\mathbf{X\,A} = \mathbf{X\,B} / \alpha \qquad \{1.4\}$$

Además para confirmar que se cumple {1.2} es suficiente comprobar que las intensidades con las que operan los procesos en el momento 0 no son negativas y que el factor de expansión es positivo

$$\mathbf{X} \geq \mathbf{0} \qquad \{1.5\}$$
$$\alpha > 0 \qquad \{1.6\}$$

En consecuencia para confirmar que una trayectoria no trivial $\mathbf{X_t} = \alpha^t\,\mathbf{X}$ es un crecimiento proporcional para unas recetas dadas **A** y **B** basta con comprobar que **X** y α cumplen

$$\mathbf{X\,A} = \mathbf{X\,B} / \alpha$$
$$\mathbf{X} \geq \mathbf{0}$$
$$\alpha > 0$$

lo que significa

el consumo de cada materia es igual a su producción entre α,
las intensidades no son negativas,
y el factor de expansión α es positivo.

Hacemos notar que si con unas intensidades **X** se cumplen estas condiciones con **X** multiplicadas por un número positivo también se cumplirán.

Así que para que exista un crecimiento proporcional con las recetas del ejemplo de §1.1 tiene que cumplirse (anotaremos la intensidad del proceso i en el momento 0 como x_i)

$$x_1\,280 + x_2\,120 + x_3\,280 = (x_1\,575 + x_2\,0 + x_3\,400) / \alpha$$
$$x_1\,12 + x_2\,8 + x_3\,12 = (x_1\,0 + x_2\,20 + x_3\,0) / \alpha$$
$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$
$$x_3 \geq 0$$
$$\alpha > 0$$

o expresado con palabras

consumo de trigo = producción de trigo / factor de expansión,
consumo de hierro = producción de hierro / factor de expansión,
las intensidades no son negativas,
y el factor de expansión es positivo.

Con las recetas de §1.1 se cumplen todas las condiciones en los dos casos que hemos estudiado, uno en estado estacionario y otro en crecimiento proporcional, pero hay muchos otros crecimientos proporcionales posibles, como $\mathbf{X_t} = 1.12081^t$ [4, 10.9709, 5] o como $\mathbf{X_t} = 1.13475^t$ [1, 2.4935, 1].

1.5 Condiciones de estado estacionario

Son las del crecimiento proporcional para un α igual a 1. En consecuencia para confirmar que una trayectoria no trivial $\mathbf{X_t} = \mathbf{X}$ es un estado estacionario para unas recetas dadas **A** y **B** basta con comprobar que **X** cumpla

$$\mathbf{X\,A} = \mathbf{X\,B}$$
$$\mathbf{X} \geq \mathbf{0}$$

o dicho con palabras

el consumo de cada materia es igual a su producción,
y las intensidades no son negativas.

2: ¿Cuánto puede crecer una economía?

2.1 Planteamiento

Un comportamiento simple especialmente interesante es el *crecimiento proporcional máximo*, que es aquella situación en donde de todos los crecimientos proporcionales posibles escogemos el que muestra el mayor factor de expansión. Por razones históricas llamaremos a este problema *modelo Von Neumann*, o VN para abreviar. Resolver VN para unas recetas **A** y **B** dadas es encontrar la trayectoria no trivial $\mathbf{X_t} = \alpha^t\,\mathbf{X}$ para la que **X** y α cumplen

$$\max_{\alpha,\mathbf{X}} \alpha$$
$$\mathbf{X\,A} = \mathbf{X\,B} / \alpha$$
$$\mathbf{X} \geq \mathbf{0}$$
$$\alpha > 0$$

lo que significa

buscamos las intensidades con el mayor factor de expansión α posible,
de manera que el consumo de cada materia sea igual a su producción entre α,
siempre que las intensidades no sean negativas,
y siempre que el factor de expansión α sea positivo.

En realidad ésta no es la manera en la que John von Neumann escribió su modelo en el artículo original. La versión original es más complicada, pero puede demostrarse que es un caso particular del modelo anterior. Lo único que cabe reseñar es que el modelo original supone implícitamente que todas las materias pueden ser eliminadas de forma gratuita, mientras que nosotros no suponemos tal cosa. En el caso de que una materia pueda ser eliminada de forma gratuita nosotros añadimos el proceso correspondiente. Por ejemplo, si éste fuera el caso del trigo entonces hubiéramos tenido que añadir el proceso

trigo	hierro		trigo	hierro
1	0	→	0	0

Si quisiéramos estudiar el modelo original con el nuestro bastaría con que añadiéramos un proceso de eliminación gratuita para cada materia[1].

[1] También hubiera servido escribir las condiciones de balance material {1.1}, y por lo tanto {1.4}, con desigualdades, como veremos más adelante.

2.2 Condiciones de máximo

Para que el problema tenga solución puede demostrarse[2] que

$$(-\mathbf{A_i} + \mathbf{B_i}/\alpha)\ \mathbf{Y} \leq 0 \qquad \text{y si } x_i > 0 \text{ se aplica} = \qquad \{2.1\}$$

donde $\mathbf{A_i}$ y $\mathbf{B_i}$ son las recetas del proceso *i*. En definitiva, si el proceso *i* opera, si $x_i > 0$, la condición {2.1} tiene que cumplirse con el signo = y si el proceso *i* no opera con el signo ≤ [3]. **Y** es un vector-columna[4] con unas variables auxiliares que se conocen con el nombre de *multiplicadores de Lagrange* y que aparecen cuando maximizamos algo sometido a unas restricciones. Hay un multiplicador por cada restricción, por cada balance material, y por lo tanto por cada materia. Estos multiplicadores juegan un papel muy importante y más adelante explicaremos alguno de los motivos.

También puede demostrarse que

$$1 - \mathbf{X\,B\,Y} / \alpha^2 = 0 \qquad \{2.2\}$$

Hacemos notar que {2.2} excluye las soluciones triviales y por eso no necesitamos añadir una restricción en el planteamiento del problema para descartar estas soluciones. Como señalamos con anterioridad, si unas **X** son solución de las condiciones de crecimiento proporcional estas **X** multiplicadas por un número positivo también son

---

[2] Estamos ante un problema de maximización restringida y usaremos el método de Lagrange para estudiar las condiciones de su solución. Para ello formamos el lagrangiano $\mathcal{L}$, la función objetivo más las restricciones por su correspondiente multiplicador (prescindiremos de las restricciones de los signos de las variables para facilitar la comprensión),

$$\mathcal{L} = \alpha + \mathbf{X}\,(-\mathbf{A} + \mathbf{B}/\alpha)\ \mathbf{Y}$$

y derivamos el lagrangiano con respecto a las variables x_i y α para obtener las condiciones de primer orden

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = (-\mathbf{A_i} + \mathbf{B_i}/\alpha)\ \mathbf{Y}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha} = 1 - \mathbf{X\,B\,Y} / \alpha^2$$

Con el método de Lagrange (o con su generalización, las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker; véase Kuhn y Tucker [1]) las condiciones de primer orden son necesarias si las restricciones cumplen unas condiciones de regularidad, y además para que estemos en un máximo tienen que cumplirse unas condiciones de orden superior; pero en este trabajo no nos detendremos ni en las condiciones de regularidad ni en las de orden superior.

[3] Podríamos haber escrito {2.1} como

si $x_i > 0$ entonces $(-\mathbf{A_i} + \mathbf{B_i}/\alpha)\ \mathbf{Y} = 0$

si $x_i = 0$ entonces $(-\mathbf{A_i} + \mathbf{B_i}/\alpha)\ \mathbf{Y} \leq 0$

Más adelante explicaremos estas condiciones y las desarrollaremos con un ejemplo para facilitar su comprensión. Por el momento basta con saber que tienen que cumplirse para que el problema tenga solución.

[4] Un vector-columna es una lista de números escrita en una columna y un vector-fila es una lista de números escrita en una fila. Los **X** son vectores-fila y los **Y** vectores-columna.

solución[5], pero entonces para que siga cumpliéndose {2.2} es necesario que los **Y** sean divididos por el mismo número. Para un t cualquiera tenemos que $\mathbf{X_t} = \alpha^t\,\mathbf{X}$, y en consecuencia a ese t le corresponden unos $\mathbf{Y_t} = \mathbf{Y} / \alpha^t$.

2.3 Aproximación del capitalismo

Hasta ahora no hemos dicho nada de ningún sistema social en concreto. Simplemente hemos estudiado cómo escribir los procesos de producción con recetas y las condiciones que tienen cumplir los crecimientos proporcionales máximos. De hecho hacemos notar que VN no es sólo un modelo económico, ya que podemos utilizarlo para aproximar el comportamiento de determinados sistemas reales, sean o no estos económicos. No obstante VN puede servir para obtener una primera aproximación del comportamiento de los capitalismos reales, como mostraremos a continuación, aunque con muchas limitaciones.

Para explicar esto comenzaremos recordando los esquemas de reproducción ampliada de Marx. Éste era un gran estudioso del capitalismo, al que conocía como pocos, y fue de los primeros en investigar los ciclos económicos, las desproporcionalidades que le son inherentes. Y sin embargo para estudiarlo desarrolló los esquemas de reproducción ampliada, en donde se supone el crecimiento proporcional. Desde luego Marx no pretendía falsificar los hechos imaginando mundos teóricos de ensueño, sino sólo construir una primera aproximación, para entender mejor la complejísima dinámica del capitalismo estudiándolo en un comportamiento teórico especialmente simple. Así que para modelizar el capitalismo escogemos de todas las trayectorias posibles el crecimiento proporcional porque por ahora no somos capaces de describir el complejísimo comportamiento de este sistema, no porque queramos alejarnos de la realidad. Empezamos pues con una simplificación radical.

Marx, como muchos otros economistas, también señaló que el capitalismo es un sistema en donde la asignación se establece en lo fundamental siguiendo la maximización del beneficio, en donde rige la “producción por la producción misma” utilizando sus palabras. Y para unas recetas dadas a menudo existirán muchos crecimientos proporcionales posibles. Así que para modelizar el capitalismo tenemos que escoger de

[5] Podríamos haber añadido una normalización para evitarlo, como $\Sigma\, x_i = 1$, pero no es realmente necesario.

entre todos los crecimientos proporcionales posibles aquél que se corresponda mejor con la producción por la producción misma. Y éste resulta ser, claro está, el caso con el máximo factor de expansión.

Por lo tanto hemos simplificado el problema suponiendo el crecimiento proporcional, y de todos los crecimientos proporcionales posibles el que más se parece a la producción por la producción misma es el que muestra el máximo factor de expansión: crecimiento proporcional con maximización del factor de expansión; bueno, esto es VN. Y ahora señalaremos algunas razones más por las que cabe pensar que no andamos muy desencaminados cuando estudiamos el capitalismo con VN como primera aproximación.

Recordemos que para que nuestro problema tuviera solución tenían que darse unas determinadas condiciones en las que aparecían unas variables auxiliares **Y**, los multiplicadores de Lagrange. Supongamos por un momento que estos **Y** fueran una versión teórica de los precios. Entonces los procesos que operan, los que tienen una intensidad positiva, cumplen {2.1} con el signo =, por lo que $(\mathbf{B_i\,Y}) / (\mathbf{A_i\,Y}) = \alpha$, donde $\mathbf{B_i\,Y}$ sería el precio actual de los productos o ingresos y $\mathbf{A_i\,Y}$ el precio de los insumos o costes; $\alpha - 1$ sería pues igual a un índice conocido como *tasa de beneficio*[6]. En definitiva, si interpretamos los multiplicadores de Lagrange como precios, todos los procesos que operan obtienen la misma tasa de beneficio que resulta además igual a $\alpha - 1$, la tasa de expansión.

¿Y qué pasa con los procesos que no operan?; éstos tenían que cumplir {2.1} con el signo ≤, por lo que $(\mathbf{B_i\,Y}) / (\mathbf{A_i\,Y}) \leq \alpha$, la tasa de beneficio que obtendrían si operaran sería menor o igual a la que obtienen los que operan. En definitiva, sólo operan los procesos más rentables.

A estas dos afirmaciones, los procesos que operan obtienen la misma tasa de beneficio y son los más rentables, las llamaremos *ley de la rentabilidad* y fueron señaladas por muchos economistas como unas características que se cumplían de forma aproximada en los capitalismos reales.

6 Aunque este concepto es problemático, como veremos, pero lo usamos en honor a los clásicos.

Además nuestros $\mathbf{Y_t}$ cumplen la *ley del interés compuesto*, decrecen geométricamente con el mismo factor de interés en el tiempo[7], que es el abecé de la contabilidad capitalista. Y veremos que también cumplen las fórmulas que aparecen en los manuales de aritmética comercial y de matemática financiera, como las de los precios de las máquinas con eficiencia constante a lo largo de su vida[8], y otras leyes que deduciremos más adelante como las reglas de los signos, propiedades todas ellas que se observan en los precios de los capitalismos reales. Pero debemos subrayar que en realidad no hemos supuesto ni la ley de la rentabilidad, ni la del interés compuesto, ni las fórmulas de los manuales y ni siquiera que existan los precios. Simplemente nos hemos encontrado con unas variables auxiliares en el cálculo, los multiplicadores de Lagrange, que cumplen estas propiedades que muchos economistas dijeron que tendían a cumplir los precios de los capitalismos en la realidad.

Puede parecer sorprendente que VN muestre estas propiedades que se observan empíricamente en los capitalismos, porque VN es sólo la teoría del crecimiento máximo. Una de las tareas fundamentales de este trabajo consiste precisamente en analizar el parecido entre este modelo teórico y estas sociedades, pero para dar una intuición previa del mismo diremos que VN y los capitalismos tienen en común la asignación de acuerdo con la producción por la producción misma, y que por ello no debe extrañarnos demasiado que encontremos propiedades en este modelo semejantes a las que se observan en esas sociedades. No obstante está claro que la distancia entre VN y los capitalismos es muy grande y que VN sólo puede ser considerado como una aproximación muy grosera de estos sistemas. Para empezar el mecanismo de asignación en los capitalismos reales dista de ser perfectamente eficiente, y esto determina que en estos sistemas existan crisis, desproporciones, caos. Además en los capitalismos una parte de la asignación la establecen otros mecanismos diferentes del mercantil-capitalista, que no siempre obedecen la producción por la producción misma, como pueden ser los "gastos sociales" o la asignación familiar. Aun así VN nos permite

[7] Las restricciones {1.4} y los multiplicadores de Lagrange correspondientes se refieren sólo a un instante temporal, pero más adelante veremos cómo escribir las restricciones con varios instantes temporales y que entonces los multiplicadores de Lagrange que se corresponden a cada instante efectivamente cumplen la ley del interés compuesto.

[8] Este ejemplo se expone en Sraffa [1b], página 95 y siguientes, para unas ecuaciones que son un caso particular de las condiciones de máximo de VN para los procesos que operan. Más adelante estudiaremos éste y otros ejemplos.

entender alguna de las características fundamentales de los capitalismos, como veremos. Por ejemplo, en el modelo el ser humano es un insumo como otro cualquiera, y esto pasa también en las empresas en donde el ser humano sólo es un insumo como las máquinas o los animales para quién decide la asignación, el empresario-capitalista. Además que los multiplicadores de Lagrange de VN y los precios de los capitalismos reales se parezcan tanto no puede ser una casualidad; esto nos indica un camino para comprender mejor los precios y el papel que juegan en la realidad.

En adelante a los α, $\mathbf{X_t}$ e $\mathbf{Y_t}$ soluciones de VN los llamaremos *factor-VN (*o *factor de expansión máxima*), *intensidades-VN* y *valores-VN* (o simplemente *precios*).

2.4 Otras aplicaciones y limitaciones de VN

Hay muchos otros sistemas sociales posibles además del capitalismo. Aquellos que se comporten de forma similar a la producción por la producción misma es posible que podamos aproximarlos mediante VN, pero los que se comporten de otras maneras distintas no. Así en un socialismo (en el sentido auténtico del término) la asignación no se establecería siguiendo la producción por la producción misma y por lo tanto esta sociedad no puede ser aproximada con VN. Pero con otros sistemas sí puede hacerse esto, como ocurre con algunas sociedades biológicas que como Darwin nos explicó obedecen la reproducción por la reproducción misma; con VN podemos intentar modelizar una colmena de abejas. Por supuesto entonces los $\mathbf{Y_t}$ no pueden ser interpretados como tasas de intercambio, pero quizá sí como unas magnitudes importantes, como unas valoraciones que se les da a las materias en la colmena.

Por otra parte VN nos informa de las intensidades con las que tendrían que operar las recetas para que el crecimiento sea el máximo y los correspondientes multiplicadores de Lagrange. Nos permite por lo tanto compararlos con las intensidades y los precios de una economía real, para saber hasta que punto se comporta de manera parecida a VN. Además VN tiene aplicaciones en otros campos, incluso en la teoría de la planificación económica, pero no nos extenderemos sobre esto.

Y una vez explicadas algunas aplicaciones de VN, y hay bastantes más, vamos a explicar también algunas de sus limitaciones.

Una muy llamativa es que VN no es capaz de tratar el problema de la tierra cuando no puede incorporarse desde el entorno, cuando es "escasa", y la razón es bien sencilla: entonces la cantidad de tierra no puede crecer proporcionalmente. Lo mismo pasa con todas las materias no reproducibles (estudiaremos esta limitación con detalle más adelante).

Otra es que VN supone que la intensidad de un proceso puede ser cualquier número no negativo, también con decimales como 2.9283. Esto significa que las materias tienen que ser divisibles.

Otra es que VN puede generalizarse para tratar con funciones de producción con rendimientos constantes a escala, pero fracasa estrepitosamente con otro tipo de rendimientos, ya que para que exista un crecimiento proporcional es necesario que los rendimientos sean constantes.

En realidad todas estas limitaciones son resultado del pacto que hemos firmado con la simplificación. Este pacto nos permite construir una teoría muy sencilla, muy potente y además con unas matemáticas muy fáciles, pero tenemos que pagar un precio por todo ello que es no poder tratar los comportamientos no-simples. Con materias no reproducibles, con materias indivisibles, o con funciones con rendimientos no constantes a escala los comportamientos en general no serán simples y por ello no podemos estudiar estos casos con VN. Por lo tanto para que VN sea un modelo cuantitativo preciso de un sistema real es necesario que éste siga un comportamiento cercano a uno simple y que además exista una tendencia a la maximización del crecimiento del sistema. No obstante la indivisibilidad de algunas materias puede no tomarse en consideración en una primera aproximación si la cantidad de la materia usada es un número grande, y la presencia de materias "escasas" puede obviarse en algunos casos si no afectan al grueso de la producción. Pero aun cuando estemos ante alguna de estas limitaciones, y por ello VN no sirva como modelo cuantitativo preciso del sistema real, veremos que el estudio de VN será a menudo muy útil desde un punto de vista cualitativo.

En definitiva, de nuestra inocente pregunta de cuánto puede crecer una economía hemos obtenido nada menos que una teoría del capitalismo, entre otras cosas. VN ciertamente tiene muchas limitaciones y sólo nos proporciona una aproximación muy grosera, pero es el mejor modelo del capitalismo que se haya publicado. Es muy limitado pero es lo mejor que tenemos.

2.5 Un ejemplo de solución de VN

Más adelante describiremos algunos algoritmos para encontrar la solución de VN para unas recetas cualquiera, pero ahora sólo plantearemos las ecuaciones de VN y su solución para las recetas de nuestro ejemplo. Tenemos las condiciones de crecimiento proporcional {1.4}, {1.5} y {1.6}, que ya explicamos en §1.4,

$$x_1\, 280 + x_2\, 120 + x_3\, 280 = (x_1\, 575 + x_2\, 0 + x_3\, 400) \,/\, \alpha$$
$$x_1\, 12 + x_2\, 8 + x_3\, 12 = (x_1\, 0 + x_2\, 20 + x_3\, 0) \,/\, \alpha$$
$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$
$$x_3 \geq 0$$
$$\alpha > 0$$

y además las condiciones de máximo {2.1} y {2.2} (anotamos el multiplicador de Lagrange que se corresponde al balance material j como y_j)

$$-(280\, y_1 + 12\, y_2) + (575\, y_1 + 0\, y_2) \,/\, \alpha \leq 0 \qquad \text{si } x_1 > 0 \text{ se aplica} =$$
$$-(120\, y_1 + 8\, y_2) + (0\, y_1 + 20\, y_2) \,/\, \alpha \leq 0 \qquad \text{si } x_2 > 0 \text{ se aplica} =$$
$$-(280\, y_1 + 12\, y_2) + (400\, y_1 + 0\, y_2) \,/\, \alpha \leq 0 \qquad \text{si } x_3 > 0 \text{ se aplica} =$$
$$1 - (x_1\, 575\, y_1 + x_2\, 0\, y_1 + x_3\, 400\, y_1 + x_1\, 0\, y_2 + x_2\, 20\, y_2 + x_3\, 0\, y_2) \,/\, \alpha^2 = 0$$

que, interpretando los multiplicadores de Lagrange como precios, implican que:

la tasa de beneficio del proceso nº 1 es menor o igual a $\alpha - 1$, y si opera es igual,
la tasa de beneficio del proceso nº 2 es menor o igual a $\alpha - 1$, y si opera es igual,
la tasa de beneficio del proceso nº 3 es menor o igual a $\alpha - 1$, y si opera es igual,
1 menos el precio total de los productos entre α^2 es igual a 0.

Las ecuaciones se satisfacen con $\alpha = 1.25$, $\mathbf{X_t} = 1.25^t\, [4, 6, 0]$, $\mathbf{Y_t} = 1.25^{-t}\, [1/2624, 15/2624]$ (si multiplicáramos las intensidades $\mathbf{X_t}$ y dividiéramos los multiplicadores de Lagrange o precios $\mathbf{Y_t}$ por un número positivo cualquiera las ecuaciones también se satisfarían). En definitiva, el factor de expansión es 1.25, tienen que operar 4 procesos de tipo nº 1 por cada 6 procesos de tipo nº 2 y los procesos de tipo nº 3 no operan, el hierro resulta tener un multiplicador de Lagrange o precio 15 veces mayor que el del trigo. La evolución del sistema resulta:

Tiempo t	Intensidades $\mathbf{X_t}$	Multiplicadores de Lagrange o precios $\mathbf{Y_t}$
–2	[2.56, 3.84, 0]	[0.000595, 0.008932]
–1	[3.2, 4.8, 0]	[0.000476, 0.007146]
0	[4, 6, 0]	[0.000381, 0.005716]
1	[5, 7.5, 0]	[0.000305, 0.004573]
2	[6.25, 9.375, 0]	[0.000244, 0.003659]

Por lo tanto el crecimiento proporcional mostrado en §1.3 era también la solución de VN, pero haremos el cálculo detallado para $t = 0$.

El consumo de trigo resulta ser 4×280 + 6×120 + 0×280 = 1840;
la producción de trigo resulta ser 4×575 + 6×0 + 0×400 = 2300;
el factor de expansión del trigo es 2300 / 1840 = 1.25.

El consumo de hierro resulta ser 4×12 + 6×8 + 0×12 = 96;
la producción de hierro resulta ser 4×0 + 6×20 + 0×0 = 120;
el factor de expansión del hierro es 120 / 96 = 1.25.

El primer proceso tiene como costes 280×1/2624 + 12×15/2624 = 460/2624 = 0.17530;
tiene como ingresos en precios actuales 575×1/2624 + 0×15/2624 =575/2624= 0.21913;
su tasa de beneficio resulta (575/2624) / (460/2624) = 1.25, el 25%.

El segundo proceso tiene como costes 120×1/2624 + 8×15/2624 = 240/2624 = 0.09146;
tiene como ingresos en precios actuales 0×1/2624 + 20×15/2624 = 300/2624 = 0.11433;
su tasa de beneficio resulta (300/2624) / (240/2624) = 1.25, el 25%.

El tercero tendría si operara como costes 280×1/2624+12×15/2624=460/2624=0.17530;
tendría como ingresos en precios actuales 400×1/2624+0×15/2624=400/2624=0.15244;
su tasa de beneficio resultaría (400/2624) / (460/2624) = 0.87, el –13%; obtendría una rentabilidad menor que los otros dos y por eso no opera.

Añadiremos también la evolución temporal del consumo y la producción para cada materia, y de los costes e ingresos para cada proceso.

t	$\mathbf{X_t\,A}$		$\mathbf{X_t\,B}$		$\mathbf{A\,Y_t}$			$\mathbf{B\,Y_t}$		
	trigo	hierro	trigo	hierro	proc. 1º	proc. 2º	proc. 3º	proc. 1º	proc. 2º	proc. 3º
–2	1177.6	61.44	1472	76.8	0.27391	0.14291	0.27391	0.34239	0.17864	0.23819
–1	1472	76.8	1840	96	0.21913	0.11433	0.21913	0.27391	0.14291	0.19055
0	1840	96	2300	120	0.17530	0.09146	0.17530	0.21913	0.11433	0.15244
1	2300	120	2875	150	0.14024	0.07317	0.14024	0.17530	0.09146	0.12195
2	2875	150	3593.75	187.5	0.11220	0.05854	0.11220	0.14024	0.07317	0.09756

3: ¿Cuánto pueden reducirse las jornadas?

3.1 Planteamiento

Si en una determinada sociedad todas las jornadas laborales se redujeran a la mitad, manteniendo constante el consumo de los trabajadores, sería necesario duplicar el número de trabajadores en cada receta, y por lo tanto las materias destinadas a su consumo, para mantener el mismo nivel de consumo del resto de los insumos y el mismo nivel de producción anterior. En general si todas las jornadas se redujeran ε veces habría que aumentar también ε veces las materias dedicadas al consumo de los trabajadores y la matriz de insumos resultaría

$$\mathbf{A} = \mathbf{C} + \varepsilon\,\mathbf{V}$$

Queremos calcular cual es el ε (positivo) mayor que permite que la economía permanezca en un estado estacionario. Vimos en §1.5 que las condiciones de este comportamiento son que $\mathbf{X}\,\mathbf{A} = \mathbf{X}\,\mathbf{B}$ con $\mathbf{X} \geq \mathbf{0}$. En definitiva nuestro problema consiste en encontrar, para unas recetas $\mathbf{C}$, $\mathbf{V}$ y $\mathbf{B}$ dadas, la trayectoria no trivial $\mathbf{X_t} = \mathbf{X}$ y el ε que cumplan

$$\max_{\varepsilon,\mathbf{X}} \varepsilon$$
$$\mathbf{X}\,(\mathbf{C} + \varepsilon\,\mathbf{V}) = \mathbf{X}\,\mathbf{B}$$
$$\mathbf{X} \geq \mathbf{0}$$
$$\varepsilon > 0$$

lo que significa

> buscamos las intensidades con el mayor factor ε de reducción de las jornadas,
> siendo el consumo de cada materia (con la reducción) igual a su producción,
> siempre que las intensidades no sean negativas,
> y siempre que el factor de reducción de las jornadas ε sea positivo.

3.2 Condiciones de máximo

Para que el problema tenga solución puede demostrarse[9] que

$$(-\mathbf{C_i} - \varepsilon\,\mathbf{V_i} + \mathbf{B_i})\,\mathbf{Y} \leq 0 \qquad \text{y si } x_i > 0 \text{ se aplica =} \qquad \{3.1\}$$

[9] Tenemos un problema de maximización restringida. Formamos el lagrangiano $\mathcal{L}$, la función objetivo más las restricciones por su correspondiente multiplicador (prescindimos de las restricciones de signo),

$$\mathcal{L} = \varepsilon + \mathbf{X}\,(-\mathbf{C} - \varepsilon\,\mathbf{V} + \mathbf{B})\,\mathbf{Y}$$

y derivamos con respecto a las variables x_i y ε para obtener las condiciones de primer orden

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = (-\mathbf{C_i} - \varepsilon\,\mathbf{V_i} + \mathbf{B_i})\,\mathbf{Y}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varepsilon} = 1 - \mathbf{X}\,\mathbf{V}\,\mathbf{Y}$$

donde $\mathbf{C_i}$, $\mathbf{V_i}$ y $\mathbf{B_i}$ son las recetas del proceso *i*. Por lo tanto[10] si $x_i > 0$, si el proceso *i* opera, la condición {3.1} tiene que cumplirse con el signo =, y si el proceso *i* no opera con el signo ≤. Los **Y** son los multiplicadores de Lagrange del problema.

Además puede demostrarse que

$$1 - \mathbf{X}\,\mathbf{V}\,\mathbf{Y} = 0 \qquad \{3.2\}$$

Hacemos notar que {3.2} excluye las soluciones triviales. Como estamos en un estado estacionario tenemos que $\mathbf{X_t} = \mathbf{X}$, y para que se cumpla {3.2} a cada *t* le corresponden unos $\mathbf{Y_t} = \mathbf{Y}$.

3.3 Sociología de la asignación

Si una clase dominante controla la asignación de una sociedad está en posición de someter a los trabajadores a unas jornadas laborales mayores de las que existirían si fueran éstos quienes tuvieran el poder. Por lo tanto el factor ε solución del problema anterior es una variable sociológica fundamental ya que nos informa del control que tienen los trabajadores de la economía. Estudiando las recetas de una sociedad podemos obtener información directa de hasta que punto los trabajadores controlan la asignación o están sometidos a alguna dominación (de amos, señores feudales, capitalistas, burócratas, etc).

Para un trabajador cualquiera diremos que su *jornada necesaria* es su jornada corriente dividida entre el ε solución del problema anterior y que su *jornada excedente* es la diferencia entre su jornada corriente y la necesaria. Por ejemplo, si un determinado trabajador tiene una jornada de 8 horas y el ε solución es 1.6 su jornada necesaria es de 5 horas y su jornada excedente de 3 horas. Las jornadas necesarias son una aproximación de las que tendrían los trabajadores si la economía estuviera bajo su control, ya que cabe esperar que los trabajadores no se sometieran a si mismos a unas jornadas mucho mayores que las necesarias. Además para cualquier trabajador, sea cual sea su jornada corriente,

$$\varepsilon = \frac{\text{jornada corriente}}{\text{jornada necesaria}} = 1 + \frac{\text{jornada excedente}}{\text{jornada necesaria}}$$

[10] Podríamos haber escrito {3.1} como

si $x_i > 0$ entonces $(-\mathbf{C_i} - \varepsilon\,\mathbf{V_i} + \mathbf{B_i})\,\mathbf{Y} = 0$

si $x_i = 0$ entonces $(-\mathbf{C_i} - \varepsilon\,\mathbf{V_i} + \mathbf{B_i})\,\mathbf{Y} \leq 0$

Por razones históricas llamaremos al problema anterior *Teoría de la explotación* (TE para abreviar) y al ε solución *factor de explotación* (o *factor-TE*).

A las intensidades solución de TE las llamaremos *intensidades-trabajo*. Nos informan de cómo tendría que ser la estructura económica para que las jornadas fueran las necesarias, lo que nos permite establecer una comparación con la estructura de una economía real cualquiera.

Vimos que para que un factor ε sea el máximo tienen que cumplirse unas determinadas condiciones en las que aparecen unas variables auxiliares $\mathbf{Y}$, los multiplicadores de Lagrange. Supongamos por un momento que estos $\mathbf{Y}$ fueran los valores-trabajo (más adelante explicaremos que son estas magnitudes). Entonces para los procesos que operan se cumple {3.1} con el signo =, de donde $(\mathbf{B_i} - \mathbf{C_i} - \mathbf{V_i})\ \mathbf{Y} / (\mathbf{V_i}\ \mathbf{Y}) = \varepsilon - 1$, por lo que con las recetas originales $(\mathbf{B_i} - \mathbf{C_i} - \mathbf{V_i})\ \mathbf{Y}$ sería el valor-trabajo de los productos menos los insumos, y $\mathbf{V_i}\ \mathbf{Y}$ el valor-trabajo de los insumos consumidos por los trabajadores; $\varepsilon - 1$ sería pues igual a un índice que se conoce como *tasa de plusvalía*[11]. En definitiva, si interpretamos los multiplicadores de Lagrange como valores-trabajo, todos los procesos que operan obtendrían con las recetas originales **C**, **V** y **B** la misma tasa de plusvalía, que resulta además igual a $\varepsilon - 1$, la tasa de explotación.

¿Y qué pasa con los procesos que no operan?; tenían que cumplir {3.1} con el signo ≤, por lo que nos queda $(\mathbf{B_i} - \mathbf{C_i} - \mathbf{V_i})\ \mathbf{Y} / (\mathbf{V_i}\ \mathbf{Y}) \leq \varepsilon - 1$, con lo que la tasa de plusvalía que obtendrían si operaran sería menor o igual a la que obtienen los que operan.

A estas dos afirmaciones, los procesos que operan obtienen la misma tasa de plusvalía y son los que muestran una tasa de plusvalía mayor, las llamaremos *ley ricardiana* y a los **Y** *valores-trabajo* (una definición de los valores-trabajo es precisamente la de las magnitudes para las que se cumple la ley ricardiana; más adelante estudiaremos otras definiciones equivalentes). Pero debemos subrayar que en realidad no hemos supuesto ni que se cumpla la ley ricardiana ni que existan los valores-trabajo. Esta ley y estas magnitudes aparecen en TE como una necesidad lógica, de forma similar a como en VN aparecen la ley de la rentabilidad y los precios.

[11] aunque este concepto es problemático, como veremos.

3.4 Otras aplicaciones y limitaciones de TE

Además de para estudiar el grado de control de la asignación por los trabajadores, TE puede servir para modelizar determinadas sociedades reales o hipotéticas, como aquellas en las que los trabajadores tienen el control de la asignación y trabajan las jornadas necesarias. Por ejemplo, una sociedad de pequeños productores vinculados entre sí por relaciones mercantiles, en donde no hay excedente y en donde las jornadas serían justo las necesarias, una *producción mercantil simple*, obedecería las ecuaciones de TE. En un sistema así cabe esperar que las tasas de intercambio de las mercancías fueran precisamente los valores-trabajo, que las intensidades con las que operaran los procesos fueran las intensidades-trabajo y que el factor de explotación fuera igual a 1. [12]

Vimos que VN podía servir para modelizar una colmena; pues TE puede servir para medir como afecta a una colmena unos parásitos o unos depredadores. Si en una determinada colmena que muestra un estado estacionario las recetas son tales que las abejas pudieran reducir sus jornadas manteniendo el estado estacionario estamos ante un indicio de la presencia de parásitos o depredadores que consumen parte de los recursos de la colmena. Escribiendo en **V** el consumo de las abejas, en **C** el resto de los insumos y en **B** los productos, podemos calcular el factor de explotación que nos señala como afectan a la vida de las abejas los parásitos o depredadores. Si ese factor fuera 1 entonces no existiría depredación ni parasitismo.

Por otra parte TE comparte muchas de las limitaciones de VN pero por ejemplo no la que señalamos con respecto a la tierra, porque ahora la cantidad de tierra sí puede permanecer en un estado estacionario. No obstante muestra algunas limitaciones específicas.

Por ejemplo, una limitación específica es que estamos suponiendo que los trabajadores no cambian su consumo con independencia de cual sea la reducción de las jornadas, ni que tampoco cambia el resto de insumos y productos de las recetas. Pero si los

[12] Algunos autores como Proudhon han defendido un sistema similar como sociedad ideal, pero otros no están de acuerdo con esto como Marx. Más adelante detallaremos este punto.

trabajadores tuvieran la mitad de su jornada corriente sí cabe esperar que se modificase la estructura de su consumo, aunque fuera levemente[13].

Otro problema es que tenemos que definir con claridad nuestras matrices, lo que puede parecer muy sencillo *a priori* pero que no lo es en determinadas situaciones. Por ejemplo, en algún libro leí que en el Imperio Inca la producción se dividía en cinco partes aproximadamente iguales: una para el Inca, otra para los sacerdotes, otra para los burócratas, otra para los campesinos y la última para el ejército, las viudas y los huérfanos. Es dudoso que las cosas fueran realmente así, pero supongamos que lo fueran. Si escribimos en $\mathbf{V}$ sólo el consumo de los campesinos entonces el factor de explotación está claro y ε sería igual a 5. Pero si incluimos en $\mathbf{V}$ el consumo de los campesinos más el de las viudas y el de los huérfanos, aceptando que son un consumo de los trabajadores indirecto, entonces ε sería menor. Y en una sociedad capitalista actual habría que preguntarse si debemos incluir el consumo del “Estado de Bienestar” o no. En definitiva, la solución de TE depende de lo que consideremos como consumo de los trabajadores[14].

Otra cuestión es cómo tratamos a los seres humanos en las ecuaciones. Si no los incluimos en absoluto, como en el artículo original de John von Neumann, entonces estamos de hecho suponiendo que los humanos pueden ajustar su población sin costes al estado estacionario de TE o al crecimiento proporcional que muestra VN. Si los incluimos como una serie de materias más nuestras ecuaciones no sólo serían una Economía y una Sociología de la asignación sino también una Demografía, pero entonces a los seres humanos les corresponderían unos precios y unos valores-trabajo, lo que se entiende bien en una sociedad esclavista pero que requiere de cierta interpretación en una capitalista. Más adelante explicaremos cómo tratar la Demografía.

Vemos que de nuestra inocente pregunta de cuánto pueden reducirse las jornadas hemos obtenido, entre otras cosas, un análisis sociológico del control de la asignación que además podemos aplicar a cualquier sociedad puesto que ni siquiera hemos supuesto que estemos hablando de una economía mercantil.

[13] VN tiene una limitación paralela al suponer que las recetas no cambian con el factor de expansión. En realidad es fácil estudiar estos aspectos tratando las recetas como funciones de α y ε, pero no haremos esto aquí para no complicar la exposición.
[14] Esta limitación también la tiene VN ya que $\mathbf{A} = \mathbf{C} + \mathbf{V}$.

3.5 Un ejemplo de solución de TE

Vamos a plantear las ecuaciones y a mostrar la solución de TE para las recetas de nuestro ejemplo. Cuando las jornadas se reducen en una proporción ε, las condiciones de estado estacionario teniendo en cuenta la reducción de las jornadas quedan

$$\begin{aligned}
&x_1\,(70 + \varepsilon\, 210) + x_2\,(30 + \varepsilon\, 90) + x_3\,(70 + \varepsilon\, 210) = x_1\, 575 + x_2\, 0 + x_3\, 400\\
&x_1\,(12 + \varepsilon\, 0) + x_2\,(8 + \varepsilon\, 0) + x_3\,(12 + \varepsilon\, 0) = x_1\, 0 + x_2\, 20 + x_3\, 0\\
&x_1 \geq 0\\
&x_2 \geq 0\\
&x_3 \geq 0\\
&\varepsilon > 0
\end{aligned}$$

o dicho con palabras:

consumo de trigo (con la reducción de las jornadas) = producción de trigo,
consumo de hierro (con la reducción de las jornadas) = producción de hierro,
las intensidades no pueden ser negativas,
y el factor de reducción de las jornadas tiene que ser positivo.

Además las condiciones de máximo {3.1} y {3.2} resultan

$$\begin{aligned}
&-(70 + \varepsilon\, 210)\, y_1 - (12 + \varepsilon\, 0)\, y_2 + 575\, y_1 + 0\, y_2 \leq 0 &&\text{si } x_1 > 0 \text{ se aplica} =\\
&-(30 + \varepsilon\, 90)\, y_1 - (8 + \varepsilon\, 0)\, y_2 + 0\, y_1 + 20\, y_2 \leq 0 &&\text{si } x_2 > 0 \text{ se aplica} =\\
&-(70 + \varepsilon\, 210)\, y_1 - (12 + \varepsilon\, 0)\, y_2 + 400\, y_1 + 0\, y_2 \leq 0 &&\text{si } x_3 > 0 \text{ se aplica} =\\
&1 - (x_1\, 210\, y_1 + x_2\, 90\, y_1 + x_3\, 210\, y_1 + x_1\, 0\, y_2 + x_2\, 0\, y_2 + x_3\, 0\, y_2) = 0
\end{aligned}$$

que, interpretando los multiplicadores de Lagrange como valores-trabajo, implican que:

la tasa de plusvalía del proceso nº 1 es menor o igual a $\varepsilon - 1$, y si opera es igual,
la tasa de plusvalía del proceso nº 2 es menor o igual a $\varepsilon - 1$, y si opera es igual,
la tasa de plusvalía del proceso nº 3 es menor o igual a $\varepsilon - 1$, y si opera es igual,
1 menos el valor-trabajo del consumo total de los trabajadores (con las recetas originales) es igual a 0.

Todas las ecuaciones se satisfacen con $\varepsilon = 19/12$, con $\mathbf{X_t} = [1, 1, 0]$ y con $\mathbf{Y_t} = [1/300, 23/480]$ (si multiplicáramos las intensidades y dividiéramos los valores-trabajo por un número positivo cualquiera las ecuaciones también se satisfarían). En definitiva, tienen que operar el mismo número de procesos de tipo nº 1 que de tipo nº 2 y los procesos de tipo nº 3 no operan. El valor-trabajo del hierro resulta ser 14.375 veces mayor que el del trigo. El factor de explotación es 1.58333, por lo que un trabajador con una jornada corriente de 8 horas tendría una jornada necesaria de 5 horas y 3 minutos y una excedente de 2 horas y 57 minutos. Las recetas con $\mathbf{A} = \mathbf{C} + 19/12\,\mathbf{V}$ serían

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 70 & 12 \\ 30 & 8 \\ 70 & 12 \end{bmatrix} \qquad \frac{19}{12}\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 332.5 & 0 \\ 142.5 & 0 \\ 332.5 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 402.5 & 12 \\ 172.5 & 8 \\ 402.5 & 12 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 575 & 0 \\ 0 & 20 \\ 400 & 0 \end{bmatrix}$$

La evolución del sistema queda

Tiempo *t*	Intensidades $\mathbf{X_t}$	Multipl. de Lagrange o valores-trabajo $\mathbf{Y_t}$
–2	[1, 1, 0]	[0.0033333, 0.047917]
–1	[1, 1, 0]	[0.0033333, 0.047917]
0	[1, 1, 0]	[0.0033333, 0.047917]
1	[1, 1, 0]	[0.0033333, 0.047917]
2	[1, 1, 0]	[0.0033333, 0.047917]

y también

t	$\mathbf{X_t}$ **A**		$\mathbf{X_t}$ **B**		**A** $\mathbf{Y_t}$			**B** $\mathbf{Y_t}$		
	trigo	hierro	trigo	hierro	proc. 1º	proc. 2º	proc. 3º	proc. 1º	proc. 2º	proc. 3º
–2	575	20	575	20	1.91666	0.95833	1.91666	1.91666	0.95833	1.33333
–1	575	20	575	20	1.91666	0.95833	1.91666	1.91666	0.95833	1.33333
0	575	20	575	20	1.91666	0.95833	1.91666	1.91666	0.95833	1.33333
1	575	20	575	20	1.91666	0.95833	1.91666	1.91666	0.95833	1.33333
2	575	20	575	20	1.91666	0.95833	1.91666	1.91666	0.95833	1.33333

Segunda parte. Desarrollo de los modelos

4: Algunos viejos y nuevos problemas

4.1 Cantidades de trabajo necesario

Una definición del valor-trabajo de una materia es la suma del trabajo directamente necesario para su producción más el trabajo indirectamente necesario para producir el resto de insumos no laborales. Los clásicos parecían creer que esta definición permitía calcular estas magnitudes sin caer en una circularidad lógica y sin usar herramientas matemáticas sofisticadas. Pero si escribimos matemáticamente esta definición, para el caso de una *producción simple*[15] y con un único tipo de trabajo, tenemos un sistema de ecuaciones lineales

$$\mathbf{Y} = \mathbf{L} + \mathbf{C}\ \mathbf{Y} \qquad \{4.1\}$$

donde **Y** sería el vector columna de las cantidades de trabajo necesario o valores-trabajo, **L** el vector columna de horas de trabajo directo y **C Y** las cantidades de trabajo indirecto que incorporan el resto de los insumos. No obstante es cierto que en determinadas situaciones muy sencillas no necesitamos ecuaciones para calcular los valores-trabajo.

Diremos que aquellas materias para las que sólo se necesita trabajo para su producción son de grado 1, las que requieren trabajo y materias de grado 1 son de grado 2, las que necesitan trabajo y materias de grado 1 y 2 son de grado 3, etc. Para las materias de grado 1 podemos calcular directamente los valores-trabajo; si se necesitan 0.05 horas de trabajo para recoger en el bosque 1 kg de madera el valor-trabajo de ésta será 0.05 h / kg de madera. Una vez calculados los valores-trabajo de las materias de grado 1 podemos hacer el cálculo para las de grado 2; si se necesitan 0.1 horas de trabajo y 4 kg de madera para producir 1 kg de carbón vegetal su valor-trabajo será $0.1 + 4 \times 0.05 = 0.3$ h / kg de carbón. Con las de grados superiores es lo mismo; si se necesitan 7 horas de trabajo, 10 kg de madera y 5 kg de carbón vegetal para producir una artesanía su valor-trabajo será $7 + 10 \times 0.05 + 5 \times 0.3 = 9$ h / artesanía. Este método "por grados" resulta muy fácil de entender y es equivalente a {4.1}, pero está limitado a las materias para las que **C** puede escribirse como triangular inferior[16].

[15] Cuando en las recetas el proceso *i* produce sólo una unidad de materia *i*, cuando **B** es la matriz identidad **I**, una matriz cuadrada con elementos nulos salvo los de la diagonal que son 1. No debe confundirse la "producción simple" con la "producción mercantil simple" que es un tipo de sociedad.

[16] Una matriz es triangular inferior si sólo los elementos debajo de la diagonal son no-nulos, como por ejemplo

Otra posibilidad sin recurrir a {4.1} es hacer este cálculo por “aproximaciones sucesivas”. En una primera aproximación $\mathbf{Y}^{(1)}$ los valores-trabajo son las cantidades de trabajo directo necesario **L**; en una segunda aproximación $\mathbf{Y}^{(2)}$ son **L** más las cantidades de trabajo que incorporan el resto de los insumos medidos con la primera aproximación $\mathbf{C}\ \mathbf{Y}^{(1)}$; en una tercera aproximación $\mathbf{Y}^{(3)}$ son $\mathbf{L} + \mathbf{C}\ \mathbf{Y}^{(2)}$; etc. Tenemos una iteración

$$\mathbf{Y}^{(1)} = \mathbf{L}$$
$$\mathbf{Y}^{(2)} = \mathbf{L} + \mathbf{C}\ \mathbf{Y}^{(1)}$$
$$\mathbf{Y}^{(3)} = \mathbf{L} + \mathbf{C}\ \mathbf{Y}^{(2)}$$
$$\mathbf{Y}^{(4)} = \mathbf{L} + \mathbf{C}\ \mathbf{Y}^{(3)}$$
$$\ldots$$

Podemos hacer esto con matrices **C** de cualquier tipo y si la iteración converge lo hará a la solución de {4.1}.

Una tercera opción sin {4.1} es un cálculo “histórico”. Los trabajos directamente necesarios son **L**; los trabajos directamente necesarios para producir los insumos son **C L** (los insumos **C** por los trabajos directamente necesarios **L**); los trabajos directamente necesarios para producir los insumos necesarios para producir los insumos son $\mathbf{C}^2\ \mathbf{L}$ (los insumos **C** por los trabajos directamente necesarios para producir los insumos **C L**); y así sucesivamente. Los valores-trabajo son la suma de todos estos términos, una serie infinita,

$$\mathbf{Y} = \mathbf{L} + \mathbf{C}\ \mathbf{L} + \mathbf{C}^2\ \mathbf{L} + \mathbf{C}^3\ \mathbf{L} + \mathbf{C}^4\ \mathbf{L} + \ldots$$

Si la serie es convergente la **Y** resultante es la solución de {4.1}.[17]

Pero tanto estos métodos sin ecuaciones como {4.1} están limitados al caso de la producción simple[18] y un único tipo de trabajo. Fuera de estas condiciones en general hay que recurrir a ecuaciones más complicadas para calcular los valores-trabajo.

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{21} & 0 & 0 & 0 \\ c_{31} & c_{32} & 0 & 0 \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & 0 \end{bmatrix}$$

[17] Esta serie también puede entenderse como el desarrollo del método por aproximaciones sucesivas

$$\mathbf{Y}^{(1)} = \mathbf{L}$$
$$\mathbf{Y}^{(2)} = \mathbf{L} + \mathbf{C}\ \mathbf{Y}^{(1)} = \mathbf{L} + \mathbf{C}\ \mathbf{L}$$
$$\mathbf{Y}^{(3)} = \mathbf{L} + \mathbf{C}\ \mathbf{Y}^{(2)} = \mathbf{L} + \mathbf{C}\ (\mathbf{L} + \mathbf{C}\ \mathbf{L}) = \mathbf{L} + \mathbf{C}\ \mathbf{L} + \mathbf{C}^2\ \mathbf{L}$$
$$\mathbf{Y}^{(4)} = \mathbf{L} + \mathbf{C}\ \mathbf{Y}^{(3)} = \mathbf{L} + \mathbf{C}\ (\mathbf{L} + \mathbf{C}\ \mathbf{L} + \mathbf{C}^2\ \mathbf{L}) = \mathbf{L} + \mathbf{C}\ \mathbf{L} + \mathbf{C}^2\ \mathbf{L} + \mathbf{C}^3\ \mathbf{L}$$
$$\ldots$$

o como el resultado de unas substituciones desde {4.1}

$$\mathbf{Y} = \mathbf{L} + \mathbf{C}\ \mathbf{Y} = \mathbf{L} + \mathbf{C}\ (\mathbf{L} + \mathbf{C}\ \mathbf{Y}) = \mathbf{L} + \mathbf{C}\ (\mathbf{L} + \mathbf{C}\ (\mathbf{L} + \mathbf{C}\ \mathbf{Y})) = \mathbf{L} + \mathbf{C}\ (\mathbf{L} + \mathbf{C}\ (\mathbf{L} + \mathbf{C}\ (\mathbf{L} + \mathbf{C}\ \mathbf{Y}))) =$$
$$= \ldots = \mathbf{L} + \mathbf{C}\ \mathbf{L} + \mathbf{C}^2\ \mathbf{L} + \mathbf{C}^3\ \mathbf{L} + \mathbf{C}^4\ \mathbf{L} + \ldots$$

4.2 Tipos de trabajo

Un problema al que los clásicos no consiguieron dar una solución satisfactoria fue calcular los valores-trabajo cuando existe más de un tipo de trabajo (y advertimos *a priori* que nosotros no tuvimos dificultades con esto ni en TE ni en VN). Los clásicos intentaron "reducir" las diferentes calidades de trabajo a una unidad común.

Anotaremos como $\mathbf{L_i}$ el vector columna del número de horas de trabajo de tipo *i* que se requiere en los procesos, $\mathbf{R_i}$ será el vector fila del consumo de los trabajadores de tipo *i* por hora de trabajo, y **L** el vector columna de horas de trabajo directo que se requieren en los procesos pero ya reducidas a un trabajo dado. El coste en valor-trabajo de una hora de trabajo de tipo *i* en proporción al coste de una hora de trabajo de tipo *j* resulta

$$w_{ij} = \frac{\mathbf{R_i Y}}{\mathbf{R_j Y}}$$

Si conociéramos estos coeficientes w_{ij} podríamos reducir todos los trabajos a uno en particular, digamos el de tipo *k*, y entonces

$$\mathbf{L} = \mathbf{L_1}\, w_{1k} + \mathbf{L_2}\, w_{2k} + \mathbf{L_3}\, w_{3k} + \mathbf{L_4}\, w_{4k} + \ldots \qquad \{4.2\}$$

Pero para calcular los w_{ik} necesitamos conocer los valores-trabajo. Por lo tanto no se puede hacer la reducción con {4.2} *antes* de conocer los valores-trabajo y no se pueden calcular los valores-trabajo con ninguno de los métodos referidos equivalentes a {4.1} *antes* de tener la reducción hecha. Y aquí encallaron los clásicos. Algunos autores sugirieron aproximar estos w_{ik} usando los precios observados en la realidad, pero esto en general es incorrecto ya que la reducción habría que hacerla con los valores-trabajo.

La solución de este aparente callejón sin salida pasa por calcular los valores-trabajo *en el mismo momento* en el que hacemos la reducción, con un sistema de ecuaciones que implique {4.1} y {4.2} simultáneamente. Tenemos de {4.2}

$$\mathbf{L} = \mathbf{L_1}\frac{\mathbf{R_1 Y}}{\mathbf{R_k Y}} + \mathbf{L_2}\frac{\mathbf{R_2 Y}}{\mathbf{R_k Y}} + \mathbf{L_3}\frac{\mathbf{R_3 Y}}{\mathbf{R_k Y}} + \mathbf{L_4}\frac{\mathbf{R_4 Y}}{\mathbf{R_k Y}} + \ldots$$

y por lo tanto

$$\mathbf{L} = (\mathbf{L_1 R_1} + \mathbf{L_2 R_2} + \mathbf{L_3 R_3} + \mathbf{L_4 R_4} + \ldots)\mathbf{Y}\frac{1}{\mathbf{R_k Y}}$$

[18] Los clásicos en ocasiones trataron las materias duraderas bajo producción simple imputando la carga de desvalorización, pero nosotros las estudiaremos con *producción conjunta* (los procesos producen más de una materia) ya que permite un cálculo más sencillo y más general, como veremos en el capítulo 6.

Pero $\mathbf{L_i}$ $\mathbf{R_i}$ es la matriz del consumo de los trabajadores de tipo *i*, y en consecuencia la suma de los $\mathbf{L_i}$ $\mathbf{R_i}$ es la matriz del consumo de todos los trabajadores **V**

$$\mathbf{V} = \mathbf{L_1 R_1} + \mathbf{L_2 R_2} + \mathbf{L_3 R_3} + \mathbf{L_4 R_4} + \ldots$$

por lo que, anotando $q = 1 / (\mathbf{R_k}\ \mathbf{Y})$, nos queda

$$\mathbf{L} = \mathbf{V}\ \mathbf{Y}\ q \qquad \{4.3\}$$

que significa que en cada proceso las cantidades de trabajo directo necesario ya reducidas son proporcionales al valor-trabajo del consumo de los trabajadores. Sustituyendo {4.3} en {4.1} tenemos

$$\mathbf{Y} = \mathbf{V}\ \mathbf{Y}\ q + \mathbf{C}\ \mathbf{Y} \qquad \{4.4\}$$

donde los **Y** están sometidos a la normalización $q = 1 / (\mathbf{R_k}\ \mathbf{Y})$. Con {4.4} podemos calcular los valores-trabajo con varios tipos de trabajo[19].

Hacemos notar que {4.4} son las condiciones de máximo de TE {3.1} para los procesos que operan en el caso de producción simple, donde $q = \varepsilon$. Por lo tanto los valores-trabajo que resultan de los métodos sin ecuaciones que hemos citado, los que podemos calcular con {4.1} y también con {4.4} son los multiplicadores de Lagrange de TE, salvo la unidad de medida. En definitiva, {4.1} implica que se cumple la ley ricardiana, con un único tipo de trabajo o cuando hacemos la reducción de varios tipos.

4.3 Productivo e improductivo

Los clásicos, a partir de una idea fisiocrática, definieron el trabajo (o consumo) productivo como el que contribuía al crecimiento económico (o a veces como el que creaba materias, o también el que generaba beneficios), y trabajo (o consumo) improductivo como el que no hacía esto. En realidad los autores muestran diferencias importantes, pero sobre todo a la hora de establecer que clase de procesos contribuían al crecimiento y cuales no, y algunos señalan que el cálculo de las cantidades de trabajo necesario implicaría sólo la contabilidad del trabajo productivo y no del improductivo, ya que este último no es necesario.

Nosotros no hicimos ninguna referencia a este problema porque a la hora de plantear VN nuestras inteligentes ecuaciones se encargan ellas mismas de adjudicar una intensidad 0 a

[19] {4.4} es un sistema en autovalores, un tipo de ecuaciones que trataremos más adelante. El autovalor es *q* y el autovector es **Y**.

aquellos procesos que no contribuyen a aumentar el factor de expansión máxima, y lo mismo pasa en TE con el factor de explotación. Por ello nosotros no necesitamos un estudio previo sobre cuales son los procesos productivos o necesarios.

Por ejemplo, supongamos que tenemos las siguientes recetas

	trigo	hierro	seda		trigo	hierro	seda
Proceso nº 1	280	12	0	→	575	0	0
Proceso nº 2	120	8	0	→	0	20	0
Proceso nº 3	1	1	0	→	0	0	1

Al resolver VN nos queda $\alpha = 1.25$, $\mathbf{X_t} = 1.25^t$ [4, 6, 0], $\mathbf{Y_t} = 1.25^{-t}$ [1/2624, 15/2624, 20/2624], donde observamos que el proceso de producción de seda no opera porque su producto no contribuye al crecimiento. Pero nosotros no tuvimos que eliminar previamente el proceso de producción de la seda porque la solución de VN ya se encarga *a posteriori* de decirnos que su intensidad es 0.

En TE ocurre lo mismo. Pero debemos fijarnos que la estructura económica que se corresponde a VN no necesariamente ha de parecerse a la de TE.

4.4 Materias "escasas"

Existen algunas materias para las que superado un límite no puede incrementarse su cantidad, como la tierra allí donde no puede ocuparse libremente. Los clásicos se enfrentaron al problema de que se observaba que los precios de estas materias cuando se superaba ese límite, cuando se volvían "escasas", eran a menudo muy diferentes de sus costes de producción (o de las cantidades de trabajo necesarias) cuando todavía podían producirse. Algunos autores intentaron explicar los precios de estas materias, o la renta que se obtenía de ellas, con teorías *ad hoc*. Nosotros no haremos esto, pero veremos que nuestros modelos también tienen problemas con las materias "escasas".

Modifiquemos nuestras recetas de §1.1 añadiendo al trigo y al hierro una tercera materia que simboliza la tierra; los procesos que producen el trigo consumen como insumo una hectárea de tierra que resulta también un producto junto con el trigo. Supondremos que además existe un cuarto proceso que simboliza la incorporación de la tierra desde el entorno consumiendo algún insumo para acondicionarla para la producción (aunque esto último no es imprescindible). Las matrices quedan

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 70 & 12 & 1 \\ 30 & 8 & 0 \\ 70 & 12 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} 210 & 0 & 0 \\ 90 & 0 & 0 \\ 210 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 575 & 0 & 1 \\ 0 & 20 & 0 \\ 400 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La solución de VN resulta $\alpha = 1.2437$, $\mathbf{X_t} = 1.2437^t$ [0.3625, 0.5492, 0, 0.0883], $\mathbf{Y_t} = 1.2437^{-t}$ [0.0041, 0.0603, 0.0851]. El precio de la tierra es el coste de su acondicionamiento (si este coste fuera nulo entonces el precio de la tierra sería 0), y esto se corresponde perfectamente a lo que se observa en el capitalismo cuando la tierra no es “escasa”, cuando puede incorporarse desde el entorno.

Pero si el resto de la economía puede expandirse, la tierra es necesaria para la producción de otras materias y no puede incorporarse desde el entorno, si la tierra es “escasa”, entonces no será posible ningún comportamiento simple salvo el estado estacionario y la solución de VN puede que no exista o puede que deje de parecerse a los capitalismos reales. Para ilustrar este punto prescindamos del cuarto proceso. En este caso VN realmente tiene solución, que resulta $\alpha = 1$, $\mathbf{X_t} = [0, 1, 1]$, $\mathbf{Y_t} = [0, 0, 1]$; el factor de expansión máximo es 1, porque la tierra es necesaria y no puede aumentar su cantidad; pero el trigo y el hierro tienen precios nulos, lo que no se corresponde con lo que se observa habitualmente en los capitalismos reales. Más adelante veremos que el precio puede entenderse como la tasa a la que aumenta el factor de expansión máximo ante la introducción en el sistema de una “pequeña” cantidad de la materia correspondiente a lo largo del tiempo[20]. Con la introducción de una pequeña cantidad de trigo o de hierro no se modificaría el factor de expansión máximo, porque la cantidad de tierra seguiría sin poder crecer, y sólo con la introducción de tierra en el sistema podríamos aumentar el factor de expansión. Por ello sólo la tierra tiene un multiplicador de Lagrange positivo, porque su presencia determina la magnitud del factor de expansión. En definitiva, ante materias “escasas” puede que el factor de expansión máximo esté determinado por su presencia, y entonces los multiplicadores de Lagrange del resto de las materias no se parecen a los

[20] En todos los problemas de maximización restringida los multiplicadores de Lagrange son la tasa a la que aumenta la magnitud de la función objetivo en el máximo ante una variación en las restricciones (bajo determinadas condiciones, como que con la variación el problema siga teniendo solución). En VN la función objetivo es el factor de expansión, las restricciones las condiciones de balance material, y como veremos la variación de la restricción puede interpretarse como la introducción de una “pequeña” (infinitésima) cantidad de la materia correspondiente a lo largo del tiempo creciendo con el factor de expansión. Por lo tanto el precio es la tasa a la que aumenta el factor de expansión ante la introducción de una “pequeña” cantidad de la materia en el sistema.

precios observados[21]. Por lo tanto, si una materia o un conjunto de materias suponen un límite absoluto al crecimiento, porque no puedan incrementarse más allá de una tasa dada inferior al que es posible con el resto de la economía, sólo estas materias tendrán precios no-nulos[22], porque los precios son precisamente la medida en la que los balances materiales suponen un límite al crecimiento.

Fijémonos en que si además tampoco estuviera disponible el tercer proceso entonces ni siquiera existiría un comportamiento simple. Llamaremos *factores propios* de una materia o un conjunto de materias a aquellos para los que existe un crecimiento proporcional cuando no tomamos en consideración el resto de materias. Si una materia es necesaria para producir las otras y sus factores propios no tienen ningún punto en común con los del resto de la economía no será posible ningún crecimiento proporcional. Cuando en nuestro ejemplo incluimos sólo los procesos 1º y 2º la tierra tiene como único factor propio 1, mientras que el resto de la economía tiene como factor propio 1.25, y por lo tanto no es posible ningún crecimiento proporcional.

Para las recetas sin el proceso de incorporación TE se satisface con $\varepsilon = 1.58333$, $\mathbf{X_t} = [1, 1, 0]$ e $\mathbf{Y_t} = [1/300, 23/480, 0]$. Las intensidades con las que operan los procesos no han cambiado frente al caso en donde no tratábamos la tierra, ni tampoco los valores-trabajo del trigo y del hierro, mientras que el de la tierra es nulo[23]. Como TE supone un estado estacionario no existe problema con la tierra, aunque no estén disponibles los procesos de incorporación. Más adelante veremos que, de forma análoga a los precios, los valores-trabajo pueden entenderse como la tasa a la que aumenta el factor de explotación ante la introducción de una pequeña cantidad de la materia en el sistema; los valores-trabajo son la medida en la que los balances materiales suponen un límite a la reducción de las jornadas. En nuestro ejemplo el trigo y el hierro sí suponen una limitación, y por ello tienen valores-trabajo positivos, pero un aumento o reducción de la tierra sólo implicaría un aumento o reducción de la escala a la que puede operar el conjunto de la economía pero

[21] No obstante en otro trabajo veremos que entonces la solución de VN nos informa de determinadas propiedades dinámicas del sistema.
[22] Una variante de este problema fue señalada en Champernowne [1].
[23] De hecho las ecuaciones se satisfacen para un valor-trabajo de la tierra cualquiera, porque con la materia tierra el coeficiente +1 de su producción se cancela con el coeficiente –1 de su consumo, con lo que la restricción correspondiente a la materia tierra toma la forma 0 = 0 para cualquier ε. No obstante si existiera un proceso de incorporación de la tierra su valor-trabajo estaría delimitado por la condición de máximo correspondiente.

no una modificación de la reducción de las jornadas. En definitiva, TE supone un estado estacionario que no se ve alterado por la necesidad de incrementar la cantidad de tierra, por lo que podemos estudiar también el caso en el que la tierra no puede incorporarse[24].

Con otras materias "escasas" el problema es similar al de la tierra. Pero si la materia es necesaria, no puede incrementarse, y además se consume en la producción, si es un recurso no renovable, entonces no será posible mantener ni un estado estacionario ya que la cantidad de esa materia necesariamente tendrá que disminuir. Entonces no podemos estudiar estas materias ni con el estado estacionario de TE (salvo que impongamos que pueden incorporarse desde el entorno).

Como ya señalamos, estos problemas son el resultado de que en nuestros modelos estudiamos sólo comportamientos simples. Con este tipo de materias puede que estos comportamientos no sean posibles o que su presencia determine el factor de expansión. Subrayamos estos aspectos de nuestros modelos para dejar bien patentes sus limitaciones; ningún modelo debe ser aplicado a la realidad de manera irreflexiva, tampoco los nuestros. No obstante más adelante plantearemos otros sistemas de ecuaciones que sí pueden tratar con comportamientos no simples y por ello también con este tipo de materias, incluso con las no renovables.

4.5 Valores negativos

Vimos que nosotros escribíamos VN de una manera diferente al artículo original. Pues bien, esta manera de escribir las ecuaciones tiene como consecuencia que bajo determinadas circunstancias puedan aparecer soluciones negativas para los precios (o para los valores-trabajo). Pero también dijimos que si añadíamos un proceso de eliminación gratuita para cada materia entonces teníamos el modelo VN original como un caso particular del nuestro. Si añadiéramos el proceso de eliminación gratuita de la materia j la condición de máximo para ese proceso quedaría tanto en VN como en TE

$$-1\, y_j \leq 0$$

[24] No obstante si estuviéramos ante una serie de procesos con tierras de diferentes fertilidades sólo obtendríamos la mayor reducción de las jornadas con la más fértil de todas, por lo que sólo se usaría ésta y la escala a la que opera el conjunto de la economía estaría limitada por su cantidad disponible. En realidad existen procedimientos que permiten tratar el uso de tierras con diferentes fertilidades, por ejemplo agregando su operación en las recetas, pero no nos detendremos en ellos.

y si el proceso de eliminación opera se aplica =, por lo que el precio y el valor-trabajo de la materia *j* tiene que ser no negativo y si el proceso de eliminación opera nulo. Por lo tanto si suponemos que existe un proceso de eliminación gratuita para cada materia los precios y los valores-trabajo no serán en ningún caso negativos.

Pero suponer que todas las materias pueden eliminarse gratuitamente es muy poco realista, y nosotros no hemos hecho este supuesto precisamente porque así tenemos la posibilidad de estudiar los precios y valores-trabajo negativos. Para entenderlo planteemos un ejemplo en donde aparecen precios negativos

	trigo	hierro	desperdicios		trigo	hierro	desperdicios
Proceso nº 1	280	12	0	→	575	0	1
Proceso nº 2	120	8	0	→	0	20	1
Proceso nº 3	1	1	1	→	0	0	0

La solución de VN queda α = 1.20052, $\mathbf{X_t}$ = 1.20052^t [0.20668, 0.33889, 0.45441], $\mathbf{Y_t}$ = 1.20052^{-t} [0.006718, 0.10372, –0.11042], donde el precio de lo que hemos llamado desperdicios es negativo (e igual al del trigo y el hierro necesarios para eliminarlos, pero con signo cambiado) y tiene que operar el proceso nº 3 de eliminación con el consumo de otras materias.

Si hubiéramos añadido un cuarto proceso de eliminación gratuita de los desperdicios

	trigo	hierro	desperdicios		trigo	hierro	desperdicios
Proceso nº 4	0	0	1	→	0	0	0

la solución de VN resultaría α = 1.25, $\mathbf{X_t}$ = 1.25^t [0.22222, 0.33333, 0, 0.44444], $\mathbf{Y_t}$ = 1.25^{-t} [0.00685, 0.10289, 0], donde no operaría el proceso de eliminación con el consumo de otras materias sino el de eliminación gratuita, los desperdicios tendrían precio nulo y el factor de expansión sería mayor que antes.

Vemos por lo tanto que interpretar el precio negativo es perfectamente fácil: el precio es negativo cuando hay que destinar recursos para eliminar la materia[25]. Que en nuestras teorías puedan resultar valores negativos se corresponde con los hechos, ya que en los capitalismos reales observamos la existencia de precios negativos: los residuos nucleares, las basuras, las materias que hay que eliminar con el consumo de recursos, tienen precios

[25] En realidad los precios negativos ya fueron tratados en Jevons [1], página 127, e incluso en Remak [1b] se da una interpretación parecida a la nuestra.

negativos, se paga a quién se le venden estas materias. Y ésta es una de las razones por las que no suponemos la eliminación gratuita, porque así podemos estudiar la eliminación de los desperdicios con el consumo de otras materias, un aspecto muy importante en las economías reales. Con el modelo VN original no podemos hacer eso.

En TE es lo mismo ya que si hay que destinar recursos para eliminar una materia su valor-trabajo será negativo. Si una materia tiene un valor-trabajo positivo podemos decir que es necesaria una determinada cantidad de tiempo de trabajo para producirla o incorporarla, y si tiene un valor-trabajo negativo que es necesaria una determinada cantidad de tiempo de trabajo para destruirla o eliminarla.

4.6 Tasa de beneficio y tasa de plusvalía

El *beneficio* (la ganancia, la rentabilidad) de un proceso se define como la suma de los ingresos netos a lo largo del tiempo en el que opera

$$\mathbf{f_0\, Y_0} + \mathbf{f_1\, Y_1} + \mathbf{f_2\, Y_2} + \mathbf{f_3\, Y_3} + \mathbf{f_4\, Y_4} + \ldots$$

donde $\mathbf{f_r}$ es el vector-fila de los flujos físicos netos e $\mathbf{Y_r}$ es el vector-columna de los precios, ambos en el momento r después de iniciarse el proceso.

El *beneficio actualizado* se define como la serie

$$\frac{I_0}{(1+i)^0} + \frac{I_1}{(1+i)^1} + \frac{I_2}{(1+i)^2} + \frac{I_3}{(1+i)^3} + \frac{I_4}{(1+i)^4} + \ldots \qquad \{4.5\}$$

donde $I_r = \mathbf{f_r\, Y_0}$ es el ingreso neto en el momento r en precios actuales e i es el tipo de interés (tasa de descuento, tipo de actualización). El beneficio actualizado es igual al beneficio cuando se cumple la ley del interés compuesto $\mathbf{Y_r} = \mathbf{Y_0} / (1+i)^r$.

La *tasa de beneficio g* (tasa de ganancia, tasa de rentabilidad) se define como el tipo de interés que anula el beneficio actualizado para unos ingresos netos I_r dados, esto es, como la g solución de la ecuación

$$\frac{I_0}{(1+g)^0} + \frac{I_1}{(1+g)^1} + \frac{I_2}{(1+g)^2} + \frac{I_3}{(1+g)^3} + \frac{I_4}{(1+g)^4} + \ldots = 0 \qquad \{4.6\}$$

Sean los procesos con los ingresos netos en precios actuales I_r

tiempo	0	1	2
proceso 1º	–1	1.2	0
proceso 2º	–1	0	1.4

Resolviendo {4.6} vemos que las tasas de beneficio son del 20% y del 18.32% respectivamente, pero si el tipo de interés fuera del 10% los beneficios actualizados serían 0.09090 y 0.15702 respectivamente. Por lo tanto si el criterio de asignación fuera la tasa de beneficio escogeríamos el proceso 1º pero si lo fuera el beneficio actualizado escogeríamos el proceso 2º. Ambos criterios no siempre coincidirán; maximizar la tasa de beneficio no es necesariamente lo mismo que maximizar el beneficio (actualizado).

Calculemos la tasa de beneficio del proceso con los I_r

tiempo	0	1	2
proceso 3º	–1	2.4	–1.43

Vemos que la ecuación {4.6} tiene dos soluciones, el 10% y el 30%. Y pueden construirse ejemplos con un número arbitrario de raíces para {4.6} o incluso con ninguna. Por lo tanto no siempre podemos establecer la tasa de beneficio de un proceso.

Los clásicos formularon la ley de la rentabilidad usando el concepto tasa de beneficio porque pensaban que siempre era un criterio equivalente al beneficio (actualizado) y que siempre podía establecerse para cualquier proceso, pero ya hemos visto que esto en general no es así[26]. Pero realmente lo que los clásicos pretendían decir es que *se maximiza el beneficio* y reformularemos la ley de la rentabilidad en concordancia con este criterio: *los procesos que operan obtienen beneficios marginales nulos y los que no operan beneficios marginales no-positivos*[27]. En efecto, así pueden interpretarse las condiciones

[26] No sólo los clásicos cometieron este error. Véase Massé [1], página 28.

[27] Con una variable no-negativa $x \geq 0$ para que una función $f(x)$ alcance su máximo es necesario:

si la variable es positiva que la derivada de la función sea nula, si $x > 0$ entonces $df / dx = 0$,

y si la variable es nula que la derivada sea no-positiva, si $x = 0$ entonces $df / dx \leq 0$.

El beneficio (actualizado) total resulta $\mathbf{X}\ (-\mathbf{A} + \mathbf{B}/\alpha)\ \mathbf{Y}$ y la derivada del beneficio con respecto a la intensidad del proceso *i*, o *beneficio marginal*, es $(-\mathbf{A_i} + \mathbf{B_i}/\alpha)\ \mathbf{Y}$. Por lo tanto, como las intensidades tienen que ser no-negativas, para que el beneficio alcance su máximo es necesario:

si la intensidad es positiva que el beneficio marginal sea nulo, si $x_i > 0$ entonces $(-\mathbf{A_i} + \mathbf{B_i}/\alpha)\ \mathbf{Y} = 0$,

si la intensidad es nula que el beneficio marginal sea no-positivo, si $x_i = 0$ entonces $(-\mathbf{A_i}+\mathbf{B_i}/\alpha)\ \mathbf{Y} \leq 0$,

que resultan las condiciones de máximo de VN {2.1}.

Fijémonos en que hemos planteado VN como el crecimiento proporcional con el máximo factor de expansión y que hemos deducido la ley de la rentabilidad. Pero también hubiéramos podido suponer el crecimiento proporcional y la ley de la rentabilidad y entonces deducir que se maximiza el factor de expansión. De hecho éste último es el camino que se sigue en el artículo de John von Neumann. En definitiva, la producción por la producción misma implica la ley de la rentabilidad y viceversa.

de máximo de VN {2.1} para un tipo de interés igual a $\alpha - 1$. En buena medida el papel que jugaba la tasa de beneficio en el pensamiento clásico le corresponde ahora al tipo de interés. En VN el beneficio y el beneficio actualizado son iguales porque se cumple la ley del interés compuesto, pero en los capitalismos reales se observa que el criterio de asignación es el beneficio ya que la ley del interés compuesto se cumple sólo bajo ciertas condiciones. Con las recetas el beneficio marginal es igual al beneficio unitario por lo que en este caso la ley de la rentabilidad también puede formularse diciendo que *los procesos que operan obtienen beneficios nulos y los que no operan beneficios no-positivos*[28]. En los capítulos siguientes a menudo razonaremos en términos de beneficios unitarios para facilitar la exposición.

No obstante en determinadas circunstancias la tasa de beneficio sí existe y sí es un criterio compatible con los beneficios (actualizados), como cuando tenemos una serie de procesos con un único e igual pago inicial y un único ingreso final separados además por el mismo lapso temporal, que suele ser el caso en el que la tasa de beneficio se usa como índice de rentabilidad en finanzas; o en VN, escrito con las matrices **A** y **B**, si los costes **A Y** y los ingresos **B Y** son positivos para todos los procesos; o también si tenemos dos procesos para los que existe tasa de beneficio, los beneficios actualizados son decrecientes con el tipo de interés y el tipo de interés corriente está entre ambas tasas de beneficio.

La *plusvalía* se define como el beneficio medido en valores-trabajo. La *tasa de plusvalía* es la razón entre la plusvalía y el valor-trabajo del consumo de los trabajadores. Con el concepto tasa de plusvalía también pueden existir problemas ya que por ejemplo el valor-trabajo del consumo de los trabajadores puede ser 0 para algún proceso, como ocurre en los procesos automáticos. Si existe algún consumo de los trabajadores sí podemos definir la tasa de plusvalía para el conjunto de la economía, pero de todas maneras

[28] A veces se la conoce como *ley de Von Neumann*, aunque es una expresión de lo que los clásicos pretendían afirmar y también Walras con su *ni bénéfice ni perte*; sobre esto véase McKenzie [2]. Pero hacemos notar que con rendimientos no constantes a escala el beneficio unitario no necesariamente será igual al beneficio marginal y entonces la maximización del beneficio implica que sólo sea éste último el que rige. En VN el valor se conserva en el tiempo, de forma que el valor de los insumos es igual al de los productos, pero con funciones de producción con rendimientos no constantes a escala o si se introducen o retiran materias del sistema esto no será necesariamente así.
Fijémonos en que si en nuestro ejemplo de §2.5 calculáramos los beneficios (marginales y unitarios) usando unos valores que no cambiaran con el tiempo entonces los procesos que operan obtendrían beneficios positivos, pero como los precios en VN cumplen la ley del interés compuesto sus beneficios son nulos. También debemos notar que unos beneficios (marginales y unitarios) nulos son compatibles con una tasa de beneficio positiva, como ocurre en el ejemplo de §2.5 con los procesos que operan.

reformularemos la ley ricardiana como el cumplimiento de las condiciones {3.2}. En TE, para las recetas con las jornadas ya reducidas, *los procesos que operan obtienen una plusvalía nula y los que no operan una plusvalía no-positiva*[29]; y con las recetas originales, los procesos que operan obtienen una plusvalía proporcional al valor-trabajo del consumo de los trabajadores y los que no operan proporcional o menos que proporcional.

No obstante, una vez hechas estas advertencias, cuando tratemos las ideas de los clásicos seguiremos refiriéndonos a la ley de la rentabilidad y a la ley ricardiana usando los conceptos tasa de beneficio y tasa de plusvalía como si no presentaran dificultades.

[29] Aquí hablamos en términos de plusvalía unitaria para facilitar la exposición, como también haremos más adelante, pero hacemos ver que {3.2} debe ser interpretada como la *plusvalía marginal*, como la plusvalía que se obtendría de ampliar la intensidad del proceso en una pequeña cantidad. En TE se maximiza la plusvalía.

5: Espacio

5.1 Posición espacial de las materias

Algunos autores prestaron mucha atención a la geografía económica, como Thünen. Para estudiar estos aspectos simplemente diferenciaremos cada materia por su posición espacial. Por ejemplo, supongamos que tenemos dos puntos geográficos, que en uno de ellos se produce trigo, en el otro hierro, y que ambas materias son transportadas desde el punto de producción originario al otro. Las recetas podrían ser

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 70 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 30 & 8 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} 210 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 90 & 0 \\ 0.01 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.01 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 575 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

donde las materias son el trigo$_1$ y el hierro$_1$ (ambas en el punto 1), el trigo$_2$ y el hierro$_2$ (ambas en el punto 2) y donde el proceso 1 describe la producción de trigo en el primer punto, el proceso 2 la producción de hierro en el segundo punto, el proceso 3 el transporte de trigo desde el primer punto al segundo y el proceso 4 el transporte de hierro desde el segundo punto al primero. La solución de VN es α = 1.16331, $\mathbf{X_t}$ = 1.16331^t [0.00437, 0.00664, 0.92792, 0.06105], $\mathbf{Y_t}$ = 1.16331^{-t} [0.20099, 3.58907, 0.23615, 3.08286], y la solución de TE nos queda ε = 1.57369, $\mathbf{X_t}$ = [0.00538, 0.00538, 0.92465, 0.06457], $\mathbf{Y_t}$ = [0.61275, 8.91171, 0.62239, 8.90191], donde las materias tienen precios y valores-trabajo ligeramente mayores dónde tienen que ser transportadas.

De la misma manera podemos incluir cualquier número de puntos geográficos y cualquier número de materias en nuestras matrices. Además podemos introducir cualquier red de comunicaciones, vinculando los puntos de forma arbitraria y escribiendo una serie de procesos alternativos de transporte, para cada medio de transporte disponible y para cada camino disponible. Las ecuaciones, VN y TE, nos dirán dónde se producen las materias, dónde se consumen, en qué cantidades y con qué procesos; de dónde a dónde se transportan, por qué vía y con qué medio de transporte; los precios y los valores-trabajo de todas las materias en todos los puntos; el factor-VN y el factor-TE. En definitiva, tenemos unas geografías económicas completas.

Dado que tratamos los procesos de transporte como un caso particular de producción, las condiciones de máximo tanto en VN como en TE determinan que en nuestros modelos una materia no será transportada a un destino si en ese punto puede producirse con menor coste, e igualmente una materia no será producida en un punto si resulta más barato trasladarla desde otro. Además una materia será transportada sólo a los puntos en los que el transporte resulte más beneficioso y también sólo desde los puntos en los que el transporte resulte menos costoso. La diferencia en valor entre los puntos, teniendo en cuenta el tipo de interés en VN, resulta igual a los costes de transporte (si en nuestro ejemplo el transporte no supusiera costes añadidos los valores-trabajo serían iguales en ambos puntos y si no requiriera ni costes ni tiempo lo serían también los precios). Por lo tanto las materias son transportadas desde dónde son más baratas a dónde son más caras[30].

[30] Podemos distribuir los puntos geográficos a lo largo del espacio (por ejemplo en una malla cuadrada o hexagonal) y entonces concebir el valor de cada materia como análogo a un campo escalar. Si los transportes sólo pueden realizarse entre puntos adyacentes y si en cada punto los costes y los tiempos de trasporte a los adyacentes son iguales, los transportes en nuestros modelos se efectuarán hacia los destinos donde el valor de la materia crezca más, esto es, en la dirección del gradiente del campo escalar definido por el valor.
Tenemos una situación análoga al mecanismo de localización por el olor. La densidad del aroma de una flor forma un campo escalar que se distribuye a lo largo del espacio. Si un insecto se dirige hacia donde la intensidad del aroma aumenta más, si sigue el gradiente del campo escalar, acabará encontrando la flor. Además bajo determinadas condiciones la trayectoria gradiental será la de menor distancia y tiempo requerido. Por ello no es de extrañar que el mecanismo de localización por el olor sea tan común en la Naturaleza.
Si los transportistas se desplazan entre puntos adyacentes (con igual coste y tiempo) seguirán la trayectoria más rentable desplazándose sucesivamente hacia la localidad en donde el valor de la materia transportada es mayor. Éste es un ejemplo del uso más importante de los valores en las sociedades mercantiles, permitir una asignación local en unidades de producción con la que obtener una asignación general sin necesidad de resolver el problema de planificar toda la economía en su conjunto. Nuestros transportistas, usando sólo la información contenida en los valores, pueden encontrar el camino más rentable de manera local, sin necesidad de resolver el problema general.
Usando los valores incluso en las sociedades antiguas podía desarrollarse un comercio a través de grandes distancias con transportes locales, siguiendo el gradiente. El valor de la seda aumentaba desde China hasta Roma y bastaba con que los mercaderes fueran transportándola en la dirección del gradiente, trasladándose pequeños recorridos y sin necesidad de un organismo que planificara el transporte a lo largo de toda la Ruta de la Seda.

6: Materias duraderas

6.1 Materias con vida limitada

Algunas materias pueden durar más de un paso temporal y experimentar cambios con la edad, como una máquina que va envejeciendo desde que es producida. Escribiremos esta situación diferenciando estas materias según su edad, de forma que la máquina nueva será una materia, la máquina de edad 1 será otra, la de edad 2 otra, etc. Como por ahora estamos estudiando procesos que duran una unidad temporal, unos procesos producirán la máquina nueva, los que usen una máquina nueva la consumirán como insumo y producirán además de los productos habituales una máquina de edad 1, los que usen una máquina de edad 1 producirán además una máquina de edad 2, etc. Un ejemplo de una serie de procesos que usan una materia duradera de *n* edades sería

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
\mathbf{a_0} & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \rightarrow & \mathbf{b_0} & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
\mathbf{a_1} & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \rightarrow & \mathbf{b_1} & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
\mathbf{a_2} & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \rightarrow & \mathbf{b_2} & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\mathbf{a_{n-1}} & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & \rightarrow & \mathbf{b_{n-1}} & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\
\mathbf{a_n} & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & \rightarrow & \mathbf{b_n} & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0
\end{array}$$

donde $\mathbf{a_r}$ y $\mathbf{b_r}$ son vectores-fila con el resto de los insumos y de los productos usados junto con la materia duradera. Un proceso podrá usar varias materias duraderas diferentes simultáneamente y las edades y duraciones de estas materias no tienen que ser iguales. Además el mismo tipo de materia duradera puede ser usado por varios procesos, y dependiendo del uso puede estar acompañada de distintas combinaciones del resto de insumos y productos, o experimentar duraciones y desgastes diferentes. Por lo tanto, aunque una materia duradera tenga un límite de vida física máximo, el momento en el que deje de usarse en la producción, su vida económica, es una de las incógnitas del problema. Para cada momento en el que pueda terminar su vida económica escribiremos un proceso correspondiente, donde se consume la materia pero no se produce una con edad superior, como el último de la lista anterior. Si el uso al que ha sido destinada determina que ya no puede ser utilizada como antes por otros procesos, sino que tiene que estar acompañada de otras combinaciones del resto de insumos y productos (por desgaste, por transporte, etc.), la trataremos como una materia duradera distinta. Además la materia duradera nueva puede ser producida por varios procesos diferentes, como el primero de la lista.

6.1.1 Precios de las materias con vida limitada

Estudiemos los precios según la edad para el caso de una materia de n edades. Las condiciones de máximo de VN para los procesos que usen las materias duraderas quedan

$$
\begin{aligned}
&-\mathbf{a_0}\,\mathbf{y} + (\mathbf{b_0}\,\mathbf{y} + y_0) / \alpha \leq 0\\
&-(\mathbf{a_1}\,\mathbf{y} + y_0) + (\mathbf{b_1}\,\mathbf{y} + y_1) / \alpha \leq 0\\
&-(\mathbf{a_2}\,\mathbf{y} + y_1) + (\mathbf{b_2}\,\mathbf{y} + y_2) / \alpha \leq 0\\
&\ldots\\
&-(\mathbf{a_{n-1}}\,\mathbf{y} + y_{n-2}) + (\mathbf{b_{n-1}}\,\mathbf{y} + y_{n-1}) / \alpha \leq 0\\
&-(\mathbf{a_n}\,\mathbf{y} + y_{n-1}) + \mathbf{b_n}\,\mathbf{y} / \alpha \leq 0
\end{aligned}
$$

donde aquí y_r es el precio de la materia duradera de edad r e $\mathbf{y}$ es el vector-columna de los precios del resto de materias, y con los procesos que operan se aplica =.

Despejando y_r y sustituyendo desde abajo hacia arriba tenemos

$$
\begin{aligned}
&y_{n-1} \geq -\mathbf{a_n}\,\mathbf{y} + \mathbf{b_n}\,\mathbf{y} /\alpha\\
&y_{n-2} \geq -\mathbf{a_{n-1}}\,\mathbf{y} + \mathbf{b_{n-1}}\,\mathbf{y} /\alpha - \mathbf{a_n}\,\mathbf{y} /\alpha + \mathbf{b_n}\,\mathbf{y} /\alpha^2\\
&y_{n-3} \geq -\mathbf{a_{n-2}}\,\mathbf{y} + \mathbf{b_{n-2}}\,\mathbf{y} /\alpha - \mathbf{a_{n-1}}\,\mathbf{y} /\alpha + \mathbf{b_{n-1}}\,\mathbf{y} /\alpha^2 - \mathbf{a_n}\,\mathbf{y} /\alpha^2 + \mathbf{b_n}\,\mathbf{y} /\alpha^3\\
&\ldots
\end{aligned}
$$

por lo que

$$y_r \geq \sum_{k=r+1}^{n} \left(-\frac{\mathbf{a_k}}{\alpha^{k-r-1}} + \frac{\mathbf{b_k}}{\alpha^{k-r}} \right) \mathbf{y}$$

y, anotando el precio del resto de las materias en el momento t como $\mathbf{y_t}$, donde $\mathbf{y_t} = \mathbf{y} /\alpha^t$,

$$y_r \geq \sum_{k=r+1}^{n} \left(-\mathbf{a_k}\mathbf{y_{k-r-1}} + \mathbf{b_k}\mathbf{y_{k-r}} \right)$$

Los lados derechos de las dos últimas expresiones son los ingresos actualizados netos y los ingresos netos[31] que pueden obtenerse con el uso de la materia con posterioridad, lo que llamaremos sus *ingresos de consumo*. Por lo tanto el precio de las materias duraderas es igual al ingreso que se vaya a obtener con su uso más rentable en el futuro, ya que operan los procesos más rentables. Como Marx hacía decir a Butler en una de las primeras páginas de *El capital*, "el valor de una cosa, es exactamente tanto como lo que habrá de rendir".

Despejando y_r de las condiciones de máximo y sustituyendo de arriba abajo tenemos

[31] Nos expresamos en términos unitarios para facilitar la comprensión, como seguiremos haciendo en otras ocasiones, pero los lados derechos de estas expresiones deben ser interpretadas también como los ingresos marginales actualizados y los ingresos marginales.

$y_0 \leq \mathbf{a_0\ y}\ \alpha - \mathbf{b_0\ y}$
$y_1 \leq \mathbf{a_0\ y}\ \alpha^2 - \mathbf{b_0\ y}\ \alpha + \mathbf{a_1\ y}\ \alpha - \mathbf{b_1\ y}$
$y_2 \leq \mathbf{a_0\ y}\ \alpha^3 - \mathbf{b_0\ y}\ \alpha^2 + \mathbf{a_1\ y}\ \alpha^2 - \mathbf{b_1\ y}\ \alpha + \mathbf{a_2\ y}\ \alpha - \mathbf{b_2\ y}$
...

o en general

$$y_r \leq \sum_{k=0}^{r} \left(\mathbf{a_k} \alpha^{r-k+1} - \mathbf{b_k} \alpha^{r-k} \right) \mathbf{y} = \sum_{k=0}^{r} \left(\frac{\mathbf{a_k}}{\alpha^{k-r-1}} - \frac{\mathbf{b_k}}{\alpha^{k-r}} \right) \mathbf{y}$$

y recordando que $\mathbf{y_t} = \mathbf{y} / \alpha^t$ tenemos

$$y_r \leq \sum_{k=0}^{r} \left(\mathbf{a_k} \mathbf{y_{k-r-1}} - \mathbf{b_k} \mathbf{y_{k-r}} \right)$$

Los lados derechos de las dos últimas expresiones son los costes actualizados netos y los costes netos en los que debe incurrirse con anterioridad para producir la materia. Por lo tanto el precio de las materias duraderas es también igual a lo que llamaremos sus *costes de producción*, al coste (actualizado) que ha sido necesario para su producción en el pasado con el método más barato, ya que operan los procesos más rentables. El valor de una cosa es exactamente tanto como lo que ha costado producirla.

En definitiva, para todos los procesos disponibles,

ingresos de consumo ≤ precio ≤ costes de producción

y también, con los procesos que efectivamente operan,

mayor ingreso de consumo = precio = menor coste de producción

Una materia duradera vale los costes netos que acompañaron su producción con el método más barato y también los ingresos netos que se generarán con su uso más rentable[32].

---

[32] Hemos efectuado la exposición en términos unitarios, pero en términos marginales queda

ingresos marginales de consumo ≤ precio ≤ costes marginales de producción

mayor ingreso marginal de consumo = precio = menor coste marginal de producción

Observemos que no hemos supuesto estas propiedades sino que las hemos deducido. Subrayemos también la simetría temporal de estas afirmaciones, que más adelante estudiaremos con detalle. Con producción simple es muy fácil entender la perspectiva del coste de producción y con *consumo simple* (el proceso *i* consume una unidad de materia *i*) la del ingreso de consumo. No obstante lo normal será la producción y el consumo conjuntos, por lo que no siempre ambas perspectivas podrán definirse con claridad o serán igual de comprensibles. Pero con una materia duradera en la mitad de su vida, para la que sólo se requiere de una sucesión de consumos para su producción y de la que sólo se obtiene una sucesión de ingresos con su consumo, el precio será el coste (actualizado) necesario para producirla y también el ingreso (actualizado) que se obtiene con su consumo.

Para intentar construir una teoría de los precios los economistas clásicos usaron la perspectiva del coste de producción, a veces bajo la variante del valor-trabajo, mientras que los neoclásicos la del ingreso de consumo, a menudo bajo la forma de "utilidad subjetiva". Para un ejemplo de la primera perspectiva véase el método por grados de §4.1, y para la segunda véase Carl Menger [1], donde el planteamiento es muy parecido al método por grados pero invirtiendo el orden temporal: los bienes de primer orden son los que satisfacen las necesidades y que por ello tienen un valor directo, los de segundo orden son los que pueden

Recordemos que nosotros no hacemos el supuesto de que siempre existan los procesos de eliminación gratuita, tampoco para las materias duraderas, y si éstas no pueden eliminarse gratuitamente es posible que muestren precios o valores-trabajo negativos porque mantener la materia a partir de un momento dado implique el consumo de recursos.

6.1.2 Precios con eficiencia constante

Especialmente interesante es el caso con eficiencia constante, cuando se consumen los mismos insumos y se producen los mismos productos con independencia de la edad de la materia duradera a partir del momento en que es producida, cuando $\mathbf{a_r} = \mathbf{a}$ y $\mathbf{b_r} = \mathbf{b}$ para $r > 0$. Entonces, para los procesos que operan,

$$y_r = \sum_{k=r+1}^{n}\left(-\frac{\mathbf{a}}{\alpha^{k-r-1}}+\frac{\mathbf{b}}{\alpha^{k-r}}\right)\mathbf{y} = \left(-\mathbf{a}+\frac{\mathbf{b}}{\alpha}\right)\mathbf{y}\sum_{k=r+1}^{n}\frac{1}{\alpha^{k-r-1}} = \left(-\mathbf{a}+\frac{\mathbf{b}}{\alpha}\right)\mathbf{y}\frac{\alpha^n-\alpha^r}{\alpha^n-\alpha^{n-1}}$$

y como de aquí y_0 resulta

$$y_0 = \left(-\mathbf{a}+\frac{\mathbf{b}}{\alpha}\right)\mathbf{y}\frac{\alpha^n-1}{\alpha^n-\alpha^{n-1}}$$

dividiendo ambos extremos de las dos últimas expresiones nos queda

$$\frac{y_r}{y_0} = \frac{\alpha^n-\alpha^r}{\alpha^n-1} \qquad \{6.1\}$$

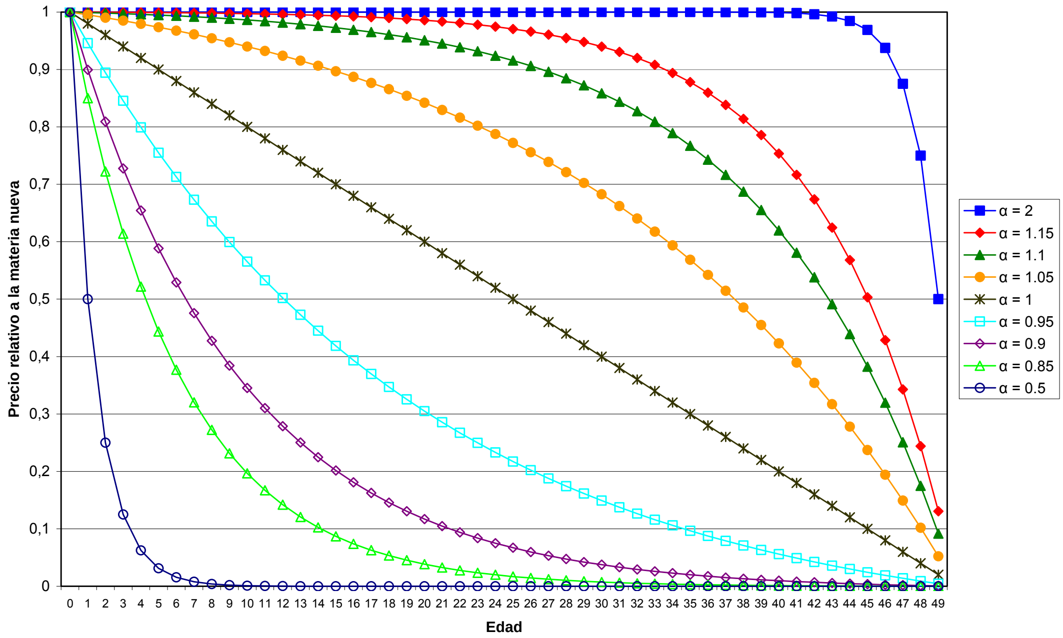
que es la fórmula de la depreciación de las materias duraderas con eficiencia constante, donde α es 1 más el tipo de interés; la representaremos para varios α cuando n es 50.

---

producir bienes de primer orden y por ello adquieren un valor indirecto, los de tercer orden son los que pueden producir bienes de segundo orden, etc. El método por grados parte del trabajo pasado mientras que Menger parte de la utilidad futura, aunque eso no significa que los neoclásicos prescindieran de la primera perspectiva ni que los clásicos ignoraran la segunda. Además los clásicos tendían a concebir el valor de una manera "objetiva" y los neoclásicos de una manera "subjetiva" (y marginal), pero fijémonos en que estas dos perspectivas temporales son independientes de una concepción "objetiva" o "subjetiva".

En VN ambas perspectivas temporales son correctas y equivalentes, pero no suponemos conocidos ni el coste de producción ni el ingreso de consumo *antes* de conocer los precios, puesto que ambos conceptos se definen en términos de precios (y veremos más adelante que este problema de circularidad tuvo una gran importancia en la historia de la teoría económica). Además en VN el coste de producción se refiere a todos los insumos, y no sólo al trabajo, y el ingreso de consumo se refiere a los beneficios, y no a la "utilidad subjetiva". Por lo tanto en VN el valor puede entenderse como coste de producción y también como ingreso de consumo, pero ambos términos se establecen en términos "objetivos" y no se suponen conocidos antes de establecer los precios (y ambos es preferible entenderlos de manera marginal).

Sin embargo en los capitalismos ambas perspectivas no son idénticas, incluso cuando pueden definirse con claridad. Una materia ya existente sólo se valora por su ingreso de consumo, con independencia del coste de producción que haya requerido, y así el trigo se valora por los ingresos que se espera que se obtendrán con él y no por los costes en los que se ha incurrido al producirlo. En los capitalismos el valor de una materia no depende de su pasado sino de su futuro. Pero las materias a producir sí se deciden a partir del coste de producción, y el trigo se sembrará sólo si el ingreso que se espera obtener compensa su coste. En definitiva, en los capitalismos las materias son valoradas por su ingreso de consumo (también las "escasas"), pero se producen sólo cuando su precio compensa su coste de producción, y por ello en estos sistemas se observa que, cuando pueden ser definidos, el coste de producción y el ingreso de consumo tienden a igualarse.



El alquiler que hay que pagar por una materia cualquiera durante un lapso de tiempo es el precio de la materia al principio del lapso menos el precio (actualizado) al final del mismo. El alquiler de una materia de vida limitada y eficiencia constante será

$$y_r - \frac{y_{r+1}}{\alpha} = \frac{\alpha^n - \alpha^r}{\alpha^n - 1} y_0 - \frac{\alpha^n - \alpha^{r+1}}{\alpha^n - 1}\frac{y_0}{\alpha} = \frac{\alpha^n - \alpha^{n-1}}{\alpha^n - 1} y_0 \qquad \{6.2\}$$

que es la fórmula de la *carga de depreciación* en el caso de eficiencia constante y que, aunque es igual para todas las edades (e igual al precio de la última edad), como vemos depende de α.

6.1.3 Valores-trabajo de las materias con vida limitada

Estas fórmulas también describen los valores-trabajo cuando el tipo de interés es 0 (cuando α es 1) y recordando que $\mathbf{a_r} = \mathbf{c_r} + \varepsilon\, \mathbf{v_r}$. Como puede deducirse de las condiciones de máximo de TE de manera similar a la sección anterior, el valor-trabajo de una materia duradera de la edad r resulta

$$\sum_{k=r+1}^{n} \left(-\mathbf{c_k} - \varepsilon\, \mathbf{v_k} + \mathbf{b_k}\right)\mathbf{y} \le y_r \le \sum_{k=0}^{r} \left(\mathbf{c_k} + \varepsilon\, \mathbf{v_k} - \mathbf{b_k}\right)\mathbf{y}$$

y si los procesos operan se aplica =, por lo que sigue siendo válida la perspectiva del ingreso de consumo y también la del coste de producción, pero midiendo lo que habrá de rendir y lo que ha costado en valores-trabajo. En el caso de eficiencia constante los valores-trabajo quedan, para los procesos que operan,

$$y_r = \sum_{k=r+1}^{n} \left(-\mathbf{c} - \varepsilon\, \mathbf{v} + \mathbf{b}\right)\mathbf{y} = (n - r)\left(-\mathbf{c} - \varepsilon\, \mathbf{v} + \mathbf{b}\right)\mathbf{y}$$

y por lo tanto

$$\frac{y_r}{y_0} = \frac{n-r}{n}$$

esto es, descienden linealmente con la edad. La *carga de desvalorización* resulta[33]

$$y_r - y_{r+1} = \frac{n-r}{n} y_0 - \frac{n-(r+1)}{n} y_0 = \frac{y_0}{n}$$

6.2 Materias "radiactivas"

Otro tipo de materia duradera es la que se consume parcialmente en los procesos de producción pero sin envejecer, de forma análoga a una materia radiactiva que se descompone siguiendo la ley de decrecimiento exponencial. Un ejemplo sería

$$\mathbf{a} \quad 1 \quad \rightarrow \quad \mathbf{b} \quad s$$

donde **a** y **b** son vectores-fila con el resto de los insumos y de los productos usados con la materia duradera, y s es la constante de desintegración o tasa de supervivencia. Un proceso podrá usar varias materias "radiactivas" diferentes simultáneamente y además el mismo tipo de materia "radiactiva" puede ser usado por varios procesos, y los **a**, **b** y s no tienen que ser iguales.

Las condiciones de máximo de VN en este caso quedan

$$-(\mathbf{a}\,\mathbf{y} + y) + (\mathbf{b}\,\mathbf{y} + s\,y)\,/\,\alpha \leq 0$$

donde aquí y es el precio de la materia "radiactiva" e **y** es el vector-columna de los precios del resto de materias, y si los procesos operan se aplica =. Despejando y tenemos

[33] Los clásicos para tratar las materias duraderas en ocasiones usaron el método de imputar la carga de desvalorización, donde para una materia de duración n con eficiencia constante se cuenta como insumo el número de materias duraderas usadas dividido entre n (véase el ejemplo del arado que dura 12 años en Mill [1], página 32). En cambio con una materia no duradera y otra duradera con tres edades nosotros dedicamos a ésta última tres materias según su edad

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} 0.3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 1 \\ 7 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Con el método de imputar la carga de desvalorización este mismo ejemplo quedaría

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 2 & 1/3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} 0.3 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}$$

Es fácil ver que en el caso de eficiencia constante este último método facilita usar algunos de los algoritmos descritos en §4.1 y también que produce los mismos valores-trabajo que el nuestro. Pero nuestro método es más sencillo y general, ya que funciona con cualquier tipo de eficiencia, y además es aplicable también al cálculo de los precios mientras que incluso con eficiencia constante la carga de depreciación depende de α, como vimos en §6.1.2, lo que supone complicar las ecuaciones de manera innecesaria. No obstante nuestro método fue estudiado también por los clásicos desde Torrens (véase Sraffa [1b], página 133).

$$y \geq \frac{\alpha}{\alpha - s}\left(-\mathbf{a} + \frac{\mathbf{b}}{\alpha}\right)\mathbf{y} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{s}{\alpha}\right)^{k}\left(-\mathbf{a} + \frac{\mathbf{b}}{\alpha}\right)\mathbf{y} = \sum_{k=0}^{\infty} s^{k}\left(-\frac{\mathbf{a}}{\alpha^{k}} + \frac{\mathbf{b}}{\alpha^{k+1}}\right)\mathbf{y} =$$
$$= -\mathbf{a}\mathbf{y_0} + \mathbf{b}\mathbf{y_1} - s\mathbf{a}\mathbf{y_1} + s\mathbf{b}\mathbf{y_2} - s^2\mathbf{a}\mathbf{y_2} + s^2\mathbf{b}\mathbf{y_3} - s^3\mathbf{a}\mathbf{y_3} + s^3\mathbf{b}\mathbf{y_4} + \ldots$$

donde anotamos $\mathbf{y_t} = \mathbf{y} / \alpha^t$ como el precio del resto de las materias en el momento t, y donde con los procesos que operan se aplica =. Por lo tanto operarán los procesos más rentables y el precio de las materias “radiactivas” será el beneficio actualizado (y el beneficio) que vaya a producir su uso más rentable[34].

En el caso de los valores-trabajo la fórmula es la misma pero con α igual a 1 y con $\mathbf{a} = \mathbf{c} + \varepsilon\, \mathbf{v}$, por lo que nos queda

$$y \geq \frac{1}{1-s}(-\mathbf{c} - \varepsilon\mathbf{v} + \mathbf{b})\mathbf{y}$$

6.3 Materias con vida ilimitada

Un tipo de materia especialmente importante es aquella que no se consume en la producción, aunque sí se requiera su presencia para la misma, y que tiene una vida ilimitada, como una maquina que puede reponerse a su estado original mediante reparaciones y repuestos. Un ejemplo sería

$$\mathbf{a} \quad 1 \quad \rightarrow \quad \mathbf{b} \quad 1$$

donde **a** y **b** son vectores-fila con el resto de los insumos y de los productos usados con la materia duradera (podemos concebir las materias de vida ilimitada como un caso particular de materia “radiactiva” cuando s es igual a 1).

Las condiciones de máximo de VN en este caso quedan

$$-(\mathbf{a}\,\mathbf{y} + y) + (\mathbf{b}\,\mathbf{y} + y) / \alpha \leq 0$$

y despejando y resulta

$$y \geq \frac{\alpha}{\alpha - 1}\left(-\mathbf{a} + \frac{\mathbf{b}}{\alpha}\right)\mathbf{y} = -\mathbf{a}\mathbf{y_0} + \mathbf{b}\mathbf{y_1} - \mathbf{a}\mathbf{y_1} + \mathbf{b}\mathbf{y_2} - \mathbf{a}\mathbf{y_2} + \mathbf{b}\mathbf{y_3} - \mathbf{a}\mathbf{y_3} + \mathbf{b}\mathbf{y_4} + \ldots$$

donde anotamos $\mathbf{y_t} = \mathbf{y} / \alpha^t$ como el precio del resto de las materias en el momento t, y donde con los procesos que operan se aplica =. Esta expresión se conoce en matemáticas financieras como fórmula de la *renta perpetua prepagable*. En efecto, si la materia no se

[34] Hubiéramos llegado al mismo resultado si hubiéramos escrito el caso “radiactivo” como una materia duradera que envejece con un número de edades infinito, eficiencia constante y con una tasa de supervivencia.

consume su precio será los beneficios que producirá su uso más rentable de manera perpetua.

En las condiciones de máximo de TE correspondientes las materias de vida ilimitada se cancelan, como vimos con la tierra en §4.4, y por ello no afectan a la solución de las ecuaciones.

6.3.1 Tierra

El ejemplo más importante de materia con vida ilimitada es la tierra. Ya vimos en §4.4 que en VN tenemos problemas con la tierra si es "escasa", si existe crecimiento y no puede ser incorporada desde el entorno; pero si entonces la tierra, o en general una materia con vida ilimitada, puede ser producida o incorporada por otros procesos entonces no tendremos dificultad. Además podemos dedicar diferentes materias para cada tipo de tierra y así tratar la adecuación a diferentes cultivos y también otros aspectos que ya vimos como la posición geográfica. En este caso el precio de la tierra ya preparada para la producción será el coste de su acondicionamiento (en su forma menos costosa), y también la renta perpetua que se deduce de la fórmula anterior (en su uso más rentable). Y en efecto en los capitalismos reales se observa que la fórmula de la renta perpetua se usa para calcular el precio de la tierra, incluso cuando ésta es "escasa" y su precio no se corresponde con el coste de acondicionamiento.

6.4 Materias con vida cíclica

Algunas materias de vida ilimitada repiten un ciclo de manera que llegado el final del mismo se encuentran en la misma situación que cuando lo inician, como una parcela de tierra destinada al cultivo de trigo que, desde que es acondicionada para la producción, es arada, sembrada, crecen los retoños, maduran, se cosechan, y vuelve a estar en la situación anterior a ser arada. Podemos representar esta evolución con los procesos

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
\mathbf{a_0} & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \rightarrow & \mathbf{b_0} & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
\mathbf{a_1} & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \rightarrow & \mathbf{b_1} & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\
\mathbf{a_2} & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & \rightarrow & \mathbf{b_2} & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\mathbf{a_{n-2}} & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & \rightarrow & \mathbf{b_{n-2}} & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\
\mathbf{a_{n-1}} & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & \rightarrow & \mathbf{b_{n-1}} & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0
\end{array}$$

6.4.1 Precios de las materias con vida cíclica

Las condiciones de máximo de VN para los procesos que usen estas materias quedan

$-(\mathbf{a_0}\,\mathbf{y} + y_0) + (\mathbf{b_0}\,\mathbf{y} + y_1) / \alpha \leq 0$
$-(\mathbf{a_1}\,\mathbf{y} + y_1) + (\mathbf{b_1}\,\mathbf{y} + y_2) / \alpha \leq 0$
...
$-(\mathbf{a_{n-2}}\,\mathbf{y} + y_{n-2}) + (\mathbf{b_{n-2}}\,\mathbf{y} + y_{n-1}) / \alpha \leq 0$
$-(\mathbf{a_{n-1}}\,\mathbf{y} + y_{n-1}) + (\mathbf{b_{n-1}}\,\mathbf{y} + y_0) / \alpha \leq 0$

donde aquí y_r es el precio de la materia en el momento del ciclo r e $\mathbf{y}$ es el vector-columna de los precios del resto de materias, y si los procesos operan se aplica =. Despejando y sustituyendo desde abajo hacia arriba tenemos

$y_{n-1} \geq (-\,\mathbf{a_{n-1}} + \mathbf{b_{n-1}} / \alpha)\,\mathbf{y} + y_0 / \alpha$
$y_{n-2} \geq (-\,\mathbf{a_{n-2}} + \mathbf{b_{n-2}} / \alpha - \mathbf{a_{n-1}} / \alpha + \mathbf{b_{n-1}} / \alpha^2)\,\mathbf{y} + y_0 / \alpha^2$
$y_{n-3} \geq (-\,\mathbf{a_{n-3}} + \mathbf{b_{n-3}} / \alpha - \mathbf{a_{n-2}} / \alpha + \mathbf{b_{n-2}} / \alpha^2 - \mathbf{a_{n-1}} / \alpha^2 + \mathbf{b_{n-1}} / \alpha^3)\,\mathbf{y} + y_0 / \alpha^3$
...
$y_0 \geq (-\,\mathbf{a_0} + \mathbf{b_0} / \alpha - \mathbf{a_1} / \alpha + \mathbf{b_1} / \alpha^2 - \ldots - \mathbf{a_{n-1}} / \alpha^{n-1} + \mathbf{b_{n-1}} / \alpha^n)\,\mathbf{y} + y_0 / \alpha^n$

por lo que

$$y_0 \geq \frac{\alpha^n}{\alpha^n - 1}(-\mathbf{a_0} + \mathbf{b_0} / \alpha - \mathbf{a_1} / \alpha + \mathbf{b_1} / \alpha^2 - \ldots - \mathbf{a_{n-1}} / \alpha^{n-1} + \mathbf{b_{n-1}} / \alpha^n)\mathbf{y} =$$
$$-\mathbf{a_0}\,\mathbf{y_0} + \mathbf{b_0}\,\mathbf{y_1} - \mathbf{a_1}\,\mathbf{y_1} + \mathbf{b_1}\,\mathbf{y_2} - \ldots - \mathbf{a_{n-1}}\,\mathbf{y_{n-1}} + \mathbf{b_{n-1}}\,\mathbf{y_n} - \mathbf{a_0}\,\mathbf{y_n} + \mathbf{b_0}\,\mathbf{y_{n+1}} - \mathbf{a_1}\,\mathbf{y_{n+1}} + \ldots$$

donde anotamos $\mathbf{y_t} = \mathbf{y} / \alpha^t$ como el precio del resto de las materias en el momento t, y donde con los procesos que operan se aplica =. En definitiva la materia cuando el ciclo se inicia valdrá los beneficios que producirá en el futuro su uso más rentable; tenemos de nuevo la fórmula de la renta perpetua. Ahora bien, esto también es así para cualquier otro momento del ciclo, de manera que el precio de la materia dependerá del momento del ciclo en el que se encuentre.

El alquiler que hay que pagar por una materia cíclica para los procesos que operan queda

$y_r - y_{r+1} / \alpha = (-\,\mathbf{a_r} + \mathbf{b_r} / \alpha)\,\mathbf{y} = -\mathbf{a_r}\,\mathbf{y_0} + \mathbf{b_r}\,\mathbf{y_1}$

esto es, el alquiler de la materia cíclica será igual a los beneficios que produce en el lapso correspondiente. La materia cíclica aumentará su precio a lo largo del ciclo según disminuyan los ingresos en cada momento. En la tierra destinada al cultivo de trigo, y suponiendo que a lo largo del ciclo el único ingreso se realizara con la venta de la cosecha, la tierra valdrá menos después de la cosecha e irá aumentando su valor según se desarrolle el cultivo, como los costes del mismo, hasta llegar a su máximo en la cosecha.

Fijémonos en que una materia de vida ilimitada es un caso particular de materia de vida cíclica cuando el período del ciclo es 1, y que con éstas tendremos las dificultades ya señaladas para aquellas.

6.4.2 Valores-trabajo de las materias con vida cíclica

En el caso de los valores-trabajo las condiciones de máximo nos quedan

$$
\begin{aligned}
&-(\mathbf{c_0}\,\mathbf{y} + \varepsilon\,\mathbf{v_0}\,\mathbf{y} + y_0) + (\mathbf{b_0}\,\mathbf{y} + y_1) \le 0\\
&-(\mathbf{c_1}\,\mathbf{y} + \varepsilon\,\mathbf{v_1}\,\mathbf{y} + y_1) + (\mathbf{b_1}\,\mathbf{y} + y_2) \le 0\\
&\ldots\\
&-(\mathbf{c_{n-2}}\,\mathbf{y} + \varepsilon\,\mathbf{v_{n-2}}\,\mathbf{y} + y_{n-2}) + (\mathbf{b_{n-2}}\,\mathbf{y} + y_{n-1}) \le 0\\
&-(\mathbf{c_{n-1}}\,\mathbf{y} + \varepsilon\,\mathbf{v_{n-1}}\,\mathbf{y} + y_{n-1}) + (\mathbf{b_{n-1}}\,\mathbf{y} + y_0) \le 0
\end{aligned}
$$

donde aquí y_r es el valor-trabajo de la materia en el momento del ciclo r e $\mathbf{y}$ es el vector-columna de los valores-trabajo del resto de materias, y si los procesos operan se aplica =. Por lo tanto el valor-trabajo de la materia a lo largo del ciclo obedece la fórmula

$$y_{\mathrm{r}} - y_{\mathrm{r+1}} = (-\,\mathbf{c_r} - \varepsilon\,\mathbf{v_r} + \mathbf{b_r})\,\mathbf{y}$$

La evolución del valor-trabajo a lo largo del ciclo es pues similar a la de los precios. Señalamos que las materias de vida ilimitada no afectaban a la solución de TE, porque en un estado estacionario no hay que producirlas ni eliminarlas. En TE pasa lo mismo con las materias de vida cíclica, y por ello la fórmula anterior sólo define la diferencia del valor-trabajo para cada momento del ciclo $y_{\mathrm{r}} - y_{\mathrm{r+1}}$ y no propiamente el nivel absoluto del valor-trabajo. Son los procesos de incorporación y eliminación de la materia de vida cíclica, si existen, los que determinan el valor-trabajo en términos absolutos[35].

---

[35] Por ejemplo, si tuviéramos una materia normal y una cíclica de tres etapas, las matrices podrían ser

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 20 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Las ecuaciones de TE se satisfacen con $\varepsilon = 2.3333$, $\mathbf{X} = [0.3333, 0.3333, 0.3333]$, $\mathbf{Y} = [0.5, h, 3.3333 + h, 6.6666 + h]$, donde h es un número cualquiera (hay un grado de libertad porque el número de variables es menor que el número de restricciones). Vemos que en el primer momento del ciclo la materia vale menos que en el segundo, y en éste vale también menos que en el tercero; en el tercer momento vale más que en los anteriores porque es en el tercero donde se realiza la producción de la materia no cíclica.

Como no hemos incluido ningún proceso de producción o incorporación de la materia cíclica el único comportamiento simple posible para esta materia es el estado estacionario, y como el conjunto del sistema no puede mantenerse en ese estado VN no tiene solución. Pero si añadiéramos un cuarto proceso para la producción de la materia en un momento del ciclo, como

$$\mathbf{C_4} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{V_4} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B_4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

entonces VN sí tendría solución, que resulta $\alpha = 1.2078$, $\mathbf{X_t} = 1.2078^t\,[0.2258, 0.3294, 0.2727, 0.1721]$, $\mathbf{Y_t} = 1.2078^{-t}\,[0.1000, 0.2999, 0.8452, 1.5039]$. Vemos que el precio aumenta hasta el momento de la producción de la materia no cíclica y que en el segundo instante es igual a los costes de su producción.

6.5 Otros tipos

Los casos estudiados no agotan, ni mucho menos, los tipos posibles de materias duraderas. Por ejemplo, no hemos tratado las materias de vida limitada o cíclica bajo tasas de supervivencia. De entre los tipos no estudiados hay ejemplos especialmente importantes como los que se aplican a las poblaciones biológicas (matrices de Leslie, de Lefkovitch, etc.), pero detallaremos alguno de sus usos en Demografía en el capítulo siguiente. No obstante el estudio de todos estos casos es similar al que hemos efectuado con los sí tratados. Además en general los valores-trabajo, cuando están definidos, obedecen las fórmulas de los precios para un α igual a 1 y con $\mathbf{a_r} = \mathbf{c_r} + \varepsilon\, \mathbf{v_r}$. Ya vimos que tenemos un problema en nuestros modelos con las materias "escasas" o con las que tienen factores propios diferentes de los del resto de la economía; esto será así también si son materias duraderas.

7: Estructura demográfica y laboral

7.1 Demografía

En las *matrices de Leslie* se estudia a las personas (o a los seres vivos, y a menudo se incluyen sólo las hembras) como nosotros hemos tratado las materias duraderas de vida limitada, escribiendo cada grupo de edad como una materia diferente. Las mujeres de cada grupo de edad producen una serie de mujeres de edad 0, esto es se reproducen, con una tasa de reproducción b_r. Además las mujeres de edad 0 producen mujeres de edad 1, las de edad 1 producen mujeres de edad 2, etc., con unas tasas de supervivencia s_r

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_0 & s_0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & 0 & s_1 & ... & 0 & 0 & 0 \\ b_2 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ b_{n-3} & 0 & 0 & ... & 0 & s_{n-3} & 0 \\ b_{n-2} & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & s_{n-2} \\ b_{n-1} & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Si dos tasas de reproducción consecutivas y las tasas de supervivencia son positivas las poblaciones sometidas a las matrices de Leslie tienden a un crecimiento proporcional a largo plazo[36]. La solución de VN nos describe ese comportamiento a largo plazo, de manera que el factor-VN resulta ser el de ese crecimiento, las intensidades-VN son el número de individuos en cada grupo de edad o *población exponencial* (de Lotka), y los valores-VN son lo que biólogos y demógrafos conocen como *valores reproductivos* (de Fisher).

7.1.1 Condiciones de crecimiento proporcional y población exponencial

Las condiciones de crecimiento proporcional resultan

$$x_0 = (x_0\, b_0 + x_1\, b_1 + x_2\, b_2 + ... + x_{n-3}\, b_{n-3} + x_{n-2}\, b_{n-2} + x_{n-1}\, b_{n-1}) / \alpha$$
$$x_1 = x_0\, s_0 / \alpha$$
$$x_2 = x_1\, s_1 / \alpha$$
$$...$$
$$x_{n-2} = x_{n-3}\, s_{n-3} / \alpha$$
$$x_{n-1} = x_{n-2}\, s_{n-2} / \alpha$$

por lo que substituyendo

[36] Los modelos basados en cohortes de edad pueden remontarse al problema de los conejos de Fibonacci (con el número áureo como factor de expansión), pero se conocen como matrices de Leslie por la profundidad con la que las investigó este autor. Generalmente se escriben como la transpuesta de la matriz **B**. Véase Leslie [1] y Keyfitz y Caswell [1].

$x_1 = x_0\, s_0 \,/\, \alpha$
$x_2 = x_1\, s_1 \,/\, \alpha = x_0\, s_0\, s_1 \,/\, \alpha^2$
$x_3 = x_1\, s_1 \,/\, \alpha = x_0\, s_0\, s_1\, s_2 \,/\, \alpha^3$
...

Anotando la tasa de supervivencia desde la edad *i* hasta la edad *j* como

$$S_{i,j} = \prod_{k=i}^{j-1} s_k$$

nos queda

$$\frac{x_r}{x_0} = \frac{S_{0,r}}{\alpha^r} \qquad \{7.1\}$$

Vemos pues que la población exponencial relativa es el porcentaje de supervivientes desde el nacimiento, o *curva de supervivencia*, actualizado con el factor de expansión. En VN la población crecerá en el tiempo con el factor α manteniendo la estructura de la población exponencial. Si el factor de expansión fuera 1 la población exponencial relativa sería la curva de supervivencia $S_{0,r}$ y se la conoce como *población estacionaria*.

7.1.2 Condiciones de máximo de VN y valores reproductivos

Las condiciones de máximo de VN para los procesos que operan quedan

$-\,y_0 + (b_0\, y_0 + s_0\, y_1) \,/\, \alpha = 0$
$-\,y_1 + (b_1\, y_0 + s_1\, y_2) \,/\, \alpha = 0$
...
$-\,y_{n\text{-}2} + (b_{n\text{-}2}\, y_0 + s_{n\text{-}2}\, y_{n\text{-}1}) \,/\, \alpha = 0$
$-\,y_{n\text{-}1} + b_{n\text{-}1}\, y_0 \,/\, \alpha = 0$

por lo que substituyendo desde abajo hacia arriba

$y_{n\text{-}1} = b_{n\text{-}1}\, y_0 \,/\, \alpha$
$y_{n\text{-}2} = b_{n\text{-}2}\, y_0 \,/\, \alpha + s_{n\text{-}2}\, b_{n\text{-}1}\, y_0 \,/\, \alpha^2$
$y_{n\text{-}3} = b_{n\text{-}3}\, y_0 \,/\, \alpha + s_{n\text{-}3}\, b_{n\text{-}2}\, y_0 \,/\, \alpha^2 + s_{n\text{-}3}\, s_{n\text{-}2}\, b_{n\text{-}1}\, y_0 \,/\, \alpha^3$
$y_{n\text{-}4} = b_{n\text{-}4}\, y_0 \,/\, \alpha + s_{n\text{-}4}\, b_{n\text{-}3}\, y_0 \,/\, \alpha^2 + s_{n\text{-}4}\, s_{n\text{-}3}\, b_{n\text{-}2}\, y_0 \,/\, \alpha^3 + s_{n\text{-}4}\, s_{n\text{-}3}\, s_{n\text{-}2}\, b_{n\text{-}1}\, y_0 \,/\, \alpha^4$
...

y en general

$$\frac{y_r}{y_0} = \frac{b_r}{\alpha} + \frac{S_{r,r+1}b_{r+1}}{\alpha^2} + \frac{S_{r,r+2}b_{r+2}}{\alpha^3} + \frac{S_{r,r+3}b_{r+3}}{\alpha^4} + \ldots = \sum_{k=r}^{n-1} \frac{S_{r,k}b_k}{\alpha^{k-r+1}} \qquad \{7.2\}$$

$S_{r,k}$ es la tasa de supervivencia desde la edad *r* hasta la *k* y b_k es el número de hijas por mujer viva al final de la edad *k*, por lo que $S_{r,k}\, b_k$ es el número de hijas que tendrá por término medio una mujer de edad *r* cuando llegue al final de la edad *k*. Por lo tanto el valor reproductivo relativo $y_r \,/\, y_0$ es igual al número de hijas que tendrá por término medio una mujer del grupo de edad *r* hasta el final de su vida, actualizado con el factor de expansión según el tiempo que falta para que las tenga. Si el factor de expansión fuera 1 el valor reproductivo relativo sería el número de hijas futuras h_r

$$h_r = \sum_{k=r}^{n-1} S_{r,k} b_k$$

pero en general hay que considerar la actualización. Por ejemplo, el valor reproductivo correspondiente al grupo de las mujeres de edad 30 será

$$\frac{y_{30}}{y_0} = \frac{b_{30}}{\alpha} + \frac{S_{30,31} b_{31}}{\alpha^2} + \frac{S_{30,32} b_{32}}{\alpha^3} + \frac{S_{30,33} b_{33}}{\alpha^4} + \ldots$$

esto es, el número de hijas que tendrán por término medio al final de los 30 dividido entre α, más el número de hijas al final de los 31 dividido entre α^2, más el número de hijas al final de los 32 dividido entre α^3, etc. En consecuencia a las mujeres de un grupo de edad que supere la edad de reproducción les corresponderá un valor reproductivo nulo.

Subrayemos que los valores reproductivos sólo son un caso particular de valores-VN o precios. De hecho si las tasas de supervivencia fueran del 100% los valores reproductivos cumplirían las fórmulas de los precios de las materias duraderas con vida limitada, y si además las tasas de reproducción fueran iguales cumplirían {6.1}. En definitiva, el valor reproductivo que se corresponde a un grupo de edad en un determinado instante es exactamente tanto como (el valor reproductivo de) la descendencia que habrá de rendir[37].

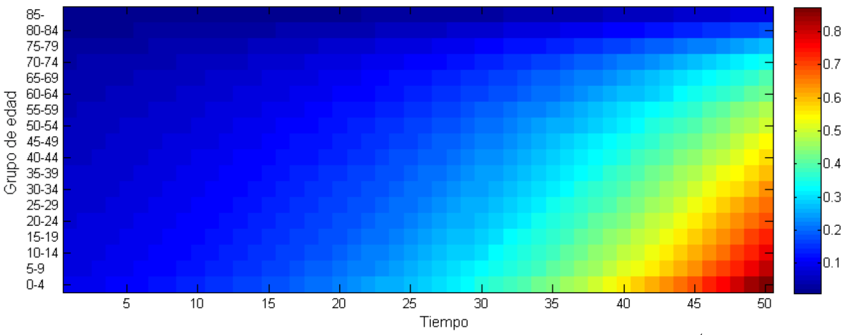
7.1.3 Ejemplos

Estudiemos unos ejemplos adaptados desde los datos de la población española en 1963 por quinquenios (sólo las hembras). Comentaremos las soluciones del modelo en el caso de que las tasas de reproducción fueran las originales (y entonces α sería 1.047), en el que fueran las originales divididas entre 1.346 (entre h_0, y entonces α sería 1), y en el que fueran las originales divididas entre 2 (y entonces α sería 0.941). Detallamos las hijas futuras h_r para las tasas de reproducción originales; cuando dividimos estas tasas por un número las hijas futuras se dividen también por ese número. Recordemos que las poblaciones reales efectivamente acabarían comportándose como indica el modelo si las tasas de supervivencia y reproducción no cambiaran con el tiempo, pero en la realidad estas tasas sí se modifican y por ello no debemos confundir el modelo con la realidad.

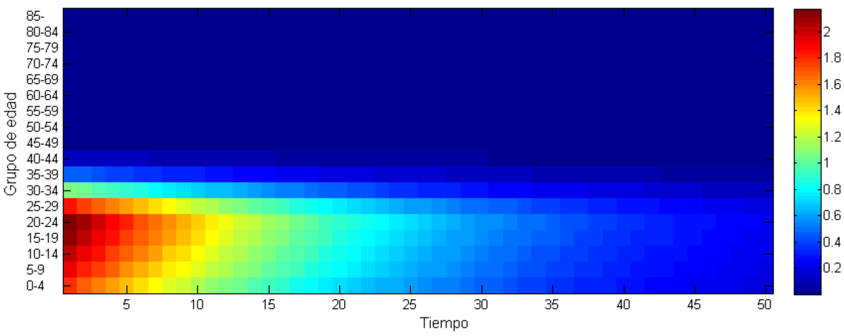
[37] Y también es exactamente tanto como (el valor reproductivo de) la ascendencia que ha supuesto su generación. Como ahora estamos ante un consumo simple esta perspectiva es menos fácil de explicar y por eso no nos detendremos en ella. Fijémonos en que la categoría valor puede tener sentido incluso allí donde no hay intercambios.

Grupo de edad	Último cumpleaños	Tasas de supervivencia	Tasas de reproducción	Curva de supervivencia	Hijas futuras	b_r $\alpha = 1.047$		$b_r / 1.346$ $\alpha = 1$		$b_r / 2$ $\alpha = 0.941$	
r		s_r	b_r	$S_{0,r}$	h_r	**X**	**Y**	**X**	**Y**	**X**	**Y**
0	0-4	0.967	0	1.000	1.346	0.092	1.774	0.067	2.309	0.041	3.515
1	5-9	0.997	0	0.967	1.392	0.085	1.921	0.064	2.388	0.042	3.422
2	10-14	0.998	0	0.964	1.396	0.081	2.018	0.064	2.395	0.044	3.231
3	15-19	0.998	0.025	0.962	1.399	0.077	2.117	0.064	2.400	0.047	3.047
4	20-24	0.997	0.250	0.960	1.377	0.073	2.176	0.064	2.362	0.050	2.830
5	25-29	0.995	0.485	0.957	1.130	0.070	1.841	0.064	1.939	0.053	2.231
6	30-34	0.995	0.373	0.952	0.649	0.066	1.073	0.063	1.113	0.056	1.254
7	35-39	0.992	0.200	0.947	0.277	0.063	0.464	0.063	0.476	0.059	0.527
8	40-44	0.989	0.073	0.939	0.078	0.060	0.132	0.063	0.134	0.062	0.146
9	45-49	0.983	0.005	0.929	0.005	0.056	0.008	0.062	0.009	0.065	0.009
10	50-54	0.976	0	0.913	0	0.053	0	0.061	0	0.068	0
11	55-59	0.939	0	0.891	0	0.049	0	0.059	0	0.071	0
12	60-64	0.968	0	0.837	0	0.044	0	0.056	0	0.070	0
13	65-69	0.905	0	0.810	0	0.041	0	0.054	0	0.072	0
14	70-74	0.835	0	0.733	0	0.035	0	0.049	0	0.070	0
15	75-79	0.683	0	0.612	0	0.028	0	0.041	0	0.062	0
16	80-84	0.507	0	0.418	0	0.018	0	0.028	0	0.045	0
17	85-		0	0.212	0	0.009	0	0.014	0	0.024	0

Representaremos[38] la evolución del modelo con las tasas de reproducción originales, cuando α es 1.047, durante 50 quinquenios. Las intensidades, que son iguales a la población en cada grupo de edad, aumentan con el tiempo, $\mathbf{X_t} = 1.047^t\, \mathbf{X}$,



y los valores reproductivos disminuyen con el tiempo, $\mathbf{Y_t} = 1.047^{-t}\, \mathbf{Y}$,



Observemos que *el valor reproductivo es proporcional al número de descendientes a largo plazo a partir de las hijas que se van a tener*, y no de las que ya se han tenido[39]. Así

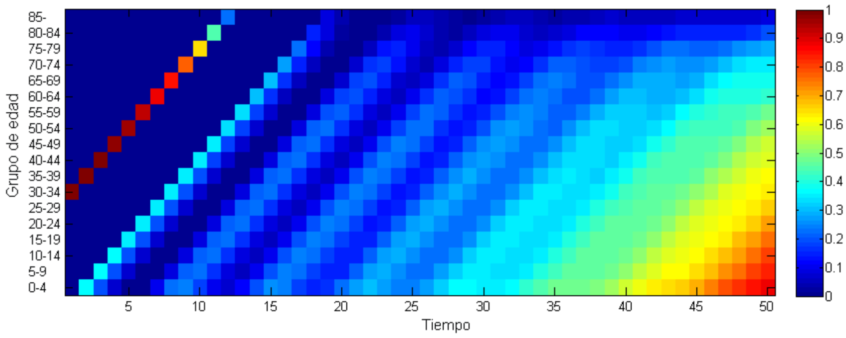
---

[38] Usamos una variante del *diagrama de Lexis*. En horizontal representamos el tiempo, en vertical el grupo de edad y el color codifica la magnitud de la variable correspondiente de acuerdo con la barra lateral. El gráfico está pixelado porque el tiempo en nuestro caso es una magnitud discreta.

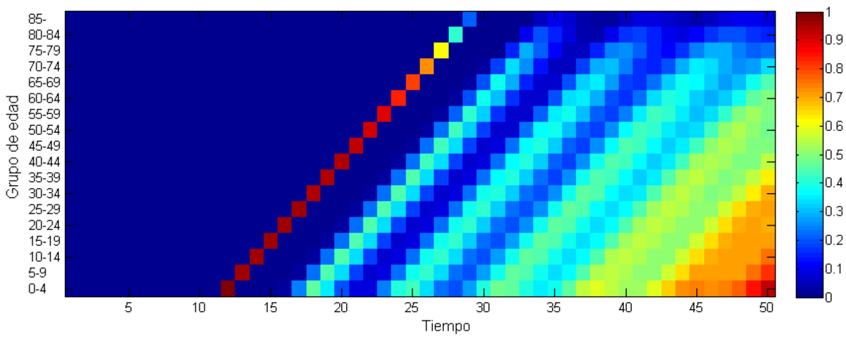
[39] Como hemos dicho, el precio de una materia es el precio de las materias que va a producir. Por lo tanto el precio de éstas últimas será el precio de las materias que a su vez producirán, y el de éstas el precio de las que producirán, etc. En consecuencia el valor reproductivo de una hembra es el valor reproductivo de su

una mujer de edad *r* añadida en el momento *t*, por ejemplo por inmigración, producirá a largo plazo un aumento de la población α veces mayor que una de la misma edad *r* añadida en el momento *t*+1, porque las hijas de la primera mujer nacerán antes; el valor reproductivo disminuye con el tiempo con el factor α. Además dos mujeres de edades diferentes añadidas en el mismo momento tendrán un número de hijas diferente, producirán a largo plazo un aumento de la población distinto, y por lo tanto tendrán valores diferentes. En definitiva, el valor reproductivo depende del tiempo y de la edad.

Por ejemplo, el valor del grupo 30-34 en el primer quinquenio, 1.047^0 1.073 = 1.073, es similar al del grupo 0-4 en el decimosegundo quinquenio, 1.047^{-11} 1.774 = 1.070. Si fuera introducida en el sistema una mujer de cada grupo la del primero tendría directamente menos hijas que la del segundo por término medio, 0.649 frente a 1.346, pero las tendría muchos años antes, por lo que ambas a largo plazo contarían con un número similar de descendientes y ambas tienen un valor reproductivo parecido[40]. La descendencia por término medio a partir de una mujer del grupo 30-34 en el primer quinquenio sería



mientras que a partir de una del grupo 0-4 en el decimosegundo quinquenio nos queda



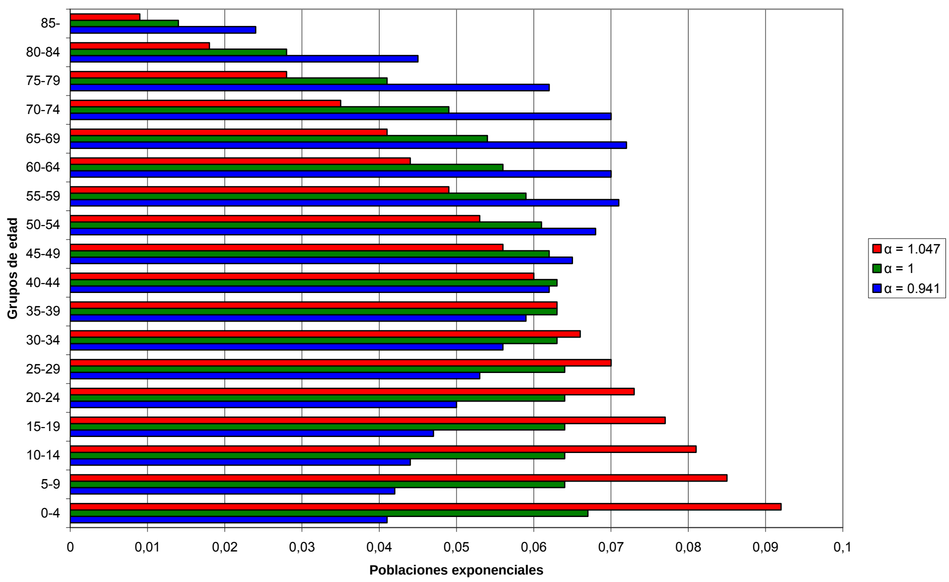
---

descendencia, a partir de las hijas que va a tener, en un instante cualquiera. Pero con las matrices de Leslie a largo plazo esta descendencia será una población exponencial, cuando se cumplen las condiciones que hemos señalado. Por ello el valor reproductivo será proporcional a esta descendencia a largo plazo, con independencia de cuales sean los valores reproductivos entonces, porque también será proporcional a la descendencia de una edad concreta (y no tenemos el problema de la circularidad).

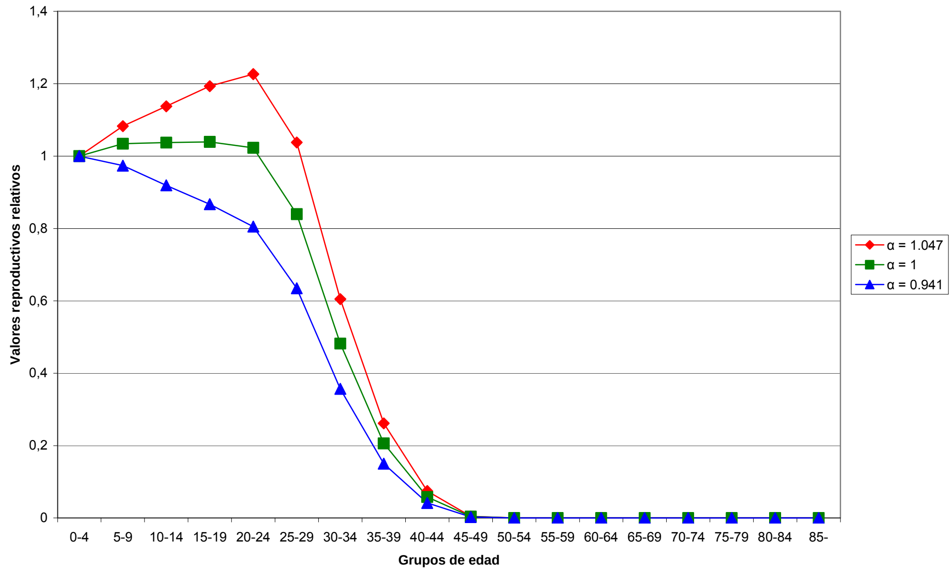
[40] Por eso ambos grupos muestran el mismo color en el gráfico de los valores. Podemos calcular la dinámica de la población, ya que desde {1.1} nos queda un sistema de ecuaciones en diferencias $\mathbf{X_t} = \mathbf{X_{t-1}}\ \mathbf{B}$.

Vemos que en ambos casos las descendencias toman progresivamente la estructura de la población exponencial. En el quinquenio 50º, al final de los gráficos, una mujer del primer grupo tendría por término medio 9.7779 descendientes y una del segundo 9.7063. En el quinquenio 200º las descendencias serían de 9708 y 9680 individuos respectivamente, y la razón de las descendencias entonces, 9708 / 9680 = 1.003, aproxima la de los valores reproductivos, 1.073 / 1.070 = 1.003. Como vemos en nuestro ejemplo, el valor reproductivo es proporcional a las descendencias a largo plazo. Más adelante mostraremos que el precio, en general y no sólo en Demografía, puede ser interpretado como el aumento de la producción ponderada en un instante futuro que supone la introducción en el sistema de una pequeña cantidad de la materia correspondiente.

Pasemos ahora a comentar las tres soluciones de VN de nuestra tabla según sean las tasas de reproducción. La población exponencial **X** nos informa de la pirámide de la población en el modelo. Cuando α es 1 **X** es proporcional a la curva de supervivencia $S_{0,r}$, pero cuando no hay que tener en cuenta la actualización. Cuando la población se expande con un α igual a 1.047 por quinquenio la pirámide de la población exponencial es más amplia en los grupos de edad menor. Ante una población que se contrae con un α de 0.941 por quinquenio la pirámide de la población exponencial es más ancha en los grupos de edad avanzada.



El valor reproductivo relativo es el número de hijas futuras cuando α es 1, pero cuando no hay que tener en cuenta la actualización. En cualquier caso desde los 50-54 las mujeres no tienen hijas por lo que el valor reproductivo desde esa edad en adelante es siempre 0. Desde el grupo de 20-24 hasta el de 50-54 el valor va disminuyendo porque el número de hijas actualizado que se tendrán en el futuro disminuye también según aumenta la edad. A partir de los 15-19 años las mujeres empiezan a tener hijas, pero hay que tener en cuenta la supervivencia y la actualización, y por eso cuando α es 1.047 una mujer del grupo 0-4 tiene un valor menor que una del grupo 20-24, y cuando α es 0.941 mayor.



Los valores reproductivos absolutos dependen de la normalización que hayamos usado con las **X**, ya que como estamos ante un consumo simple desde {2.2} nos queda que **X Y** = α. En nuestros casos la suma de las intensidades es 1, por lo que el valor reproductivo absoluto del primer grupo de edad y_0 es menor cuanto mayor resulte α, ya que entonces también será mayor la proporción de la población en los grupos de edad que se reproducen.

7.2 Demografía y Economía integradas

Las matrices de Leslie tratan la población abstrayendo el resto del sistema económico, pero los clásicos estudiaron los aspectos demográficos como una parte del sistema económico para comprender sus importantes interrelaciones. Para seguir su ejemplo escribiremos los humanos como una serie de materias junto con el resto de las materias que forman el sistema económico. Así para que exista un crecimiento proporcional la población tendrá que crecer con el mismo factor que el resto de la economía. Tenemos pues una Demografía y una Economía integradas.

Si quisiéramos diferenciar la población por su sexo simplemente reservaríamos una serie de materias para los grupos de edad de los machos y otras para los grupos de edad de las hembras. Los procesos de aprendizaje y formación de los trabajadores pueden ser considerados como procesos como los demás, en donde por ejemplo se produce un trabajador cualificado a partir de un trabajador sin cualificar a través del proceso de producción de formación profesional, de manera que reservaremos un grupo de materias para los trabajadores con cada tipo de cualificación. De la misma manera podemos estudiar los procesos de educación y crianza. También podemos diferenciar la población por su posición espacial, lo que nos permitirá estudiar las migraciones así como las diferencias geográficas de las estructuras laborales. Y lo mismo podemos hacer con otras propiedades que consideremos relevantes para nuestro análisis, como pueden ser las características corporales o de personalidad. En definitiva, ahora no sólo podemos estudiar los procesos de consumo y producción de las materias sino también la distribución de la población y toda la estructura laboral. Este planteamiento tiene consecuencias importantes, por ejemplo a la hora de analizar el trabajo productivo: ahora la reproducción humana, la crianza y educación, la formación profesional, la atención sanitaria, etc., son ejemplos de trabajo productivo que se desarrollarán en nuestros modelos.

Para tratar con más comodidad la Demografía diferenciaremos la matriz de insumos **A** entre las materias que consumen los trabajadores y las materias que simbolizan las personas (las materias que simbolizan los humanos según su edad, sexo, etc.), que escribiremos en **V**, y el resto de insumos, que escribiremos en **C**. Además diferenciaremos la matriz de productos **B** entre los “productos humanos” (las que simbolizan los humanos) que escribiremos en **W**, y el resto de productos, que escribiremos en **D**. Nos queda

$$\mathbf{A} = \mathbf{C} + \mathbf{V}$$
$$\mathbf{B} = \mathbf{D} + \mathbf{W}$$

Además en **W** también podemos incluir los productos que no se ven afectados por la reducción de las jornadas (los realizados por los trabajadores como afición, los desechos del consumo humano, etc.)

7.3 Sociedades biológicas

Si estamos estudiando una sociedad biológica, como la colmena, podemos tratarla igual que una sociedad humana, destinando una serie de materias para las obreras, otras para las reinas, otras para los zánganos, etc., y otro grupo para el resto de las materias consumidas y producidas. Por ejemplo, planteemos un modelo de una colmena extremadamente simplista y sin ninguna pretensión de realismo, en donde las primeras tres materias serán las obreras según su edad, las cuatro siguientes las reinas, la octava los huevos y la novena el alimento (prescindiremos de los machos, de diferenciar los alimentos, etc.). Los primeros tres procesos describen a las obreras consumiendo alimento para producir alimento y envejeciendo, los cuatro siguientes las reinas consumiendo alimento para producir huevos y envejeciendo, y los dos últimos los huevos que pueden dedicarse a ser obreras o reinas según sean alimentados. Las matrices quedan

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 9 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9 & 0 & 0 & 500 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9 & 0 & 500 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9 & 500 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 500 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La solución de VN resulta α = 1.15417, $\mathbf{X_t}$ = 1.15417^t [0.35987, 0.15590, 0.06754, 0.00034, 0.00026, 0.00020, 0.00016, 0.41535, 0.00039], $\mathbf{Y_t}$ = 1.15417^{-t} [0.82032, 0.72534, 0.50610, 7.19683, 6.00452, 4.47549, 2.51463, 0.02015, 0.69059].

Las intensidades-VN nos informan de la estructura de la producción y demográfica en la colmena, y así vemos que por cada huevo dedicado a la crianza de reinas se dedican 0.41535 / 0.00039 = 1065 huevos a la crianza de obreras.

También podemos dar un primer sentido a los valores-VN en la colmena. Por ejemplo, si una obrera tiene que elegir entre defender de un ataque exterior un huevo o una unidad de alimento o una reina nueva o una obrera nueva, cabe esperar que escogerá defender a una reina como primera opción, ya que vale lo que 357.16 huevos, lo que 10.42 unidades de alimento o lo que 8.77 obreras. Los valores-VN nos informan del orden de prioridades que usaría una abeja que actuara manteniendo lo mejor posible la capacidad reproductiva de su colmena frente a ataques exteriores, como veremos. Más adelante señalaremos la importancia de los valores-VN en el estudio del proceso de selección natural.

7.4 Estatutos laborales

A lo largo de la Historia han existido muchos estatutos diferentes para los trabajadores, como la esclavitud, la servidumbre, el sistema de castas, el trabajo asalariado, etc. El estatuto del trabajador no altera la manera en la que tenemos que escribir las recetas, por lo que el hecho de que los trabajadores sean asalariados o esclavos o siervos no supone ni dificultad ni diferencia a la hora de escribirlas. Pero el estatuto sí puede suponer que determinados procesos de producción sean imposibles para un determinado tipo de trabajador; así un asalariado es libre de negarse a realizar un trabajo que ponga en grave riesgo su vida, lo que no puede hacer un esclavo. Estas situaciones podemos tratarlas con facilidad no escribiendo ese proceso si los trabajadores son asalariados. También podemos tratar sociedades en donde conviven diferentes estatutos diferenciando para ello las materias en las que escribimos los trabajadores y los procesos correspondientes.

Es evidente, por lo tanto, que nuestras recetas no sólo son descripciones físicas o tecnológicas de los procesos posibles, sino que también dependen de la estructura política y social. Así en muchos países están establecidos legalmente la duración máxima de la jornada laboral, el salario mínimo, la duración de las vacaciones, etc. Todas estas circunstancias afectan a nuestras recetas y por lo tanto a las soluciones de nuestros sistemas de ecuaciones.

7.5 Demografía y costes laborales

Los clásicos concebían el capitalismo como un sistema en donde el mecanismo mercantil establecía la mayor parte de la asignación y donde otros mecanismos de asignación operaban simultáneamente en ciertas esferas de la sociedad como en la reproducción humana. Esto no significaba que los mecanismos que establecían la dinámica de la población no estuvieran vinculados al resto de la economía y al mecanismo mercantil de forma indirecta. No obstante en este texto no estudiamos ninguno de los mecanismos de asignación que operan en el capitalismo ni en otros sistemas sociales, ni siquiera el mecanismo mercantil. Hacemos un estudio cinemático, un estudio del movimiento sin analizar las causas o fuerzas o mecanismos que lo provocan, y por ello no entraremos en detalles sobre el funcionamiento de estos mecanismos en lo que respecta a la demografía humana. Sólo señalaremos muy rápidamente la interpretación que cabe realizar en nuestras ecuaciones en lo que respecta al salario de un trabajador.

Al incluir la Demografía en nuestras ecuaciones los humanos muestran precios y valores-trabajo como el resto de las materias, de acuerdo con su edad, su sexo, su cualificación, etc.[41] Si nos estuviéramos refiriendo a una sociedad esclavista la interpretación de estas magnitudes sería clara y directa y no requeriría un apartado diferente de la del precio o el valor-trabajo de un animal doméstico. Pero en una sociedad capitalista los humanos no se compran ni se venden como los animales domésticos y por ello en esta situación sí conviene realizar cierta interpretación. Desde luego en un capitalismo moderno un trabajador no se compra ni se vende, pero sí se alquila a su propietario que es el propio trabajador. Alquilar una materia durante un lapso temporal es equivalente a comprarla al inicio de ese lapso y venderla al final del mismo, y si la materia sufre modificaciones durante el lapso estaremos hablando de materias diferentes. En consecuencia el precio de alquiler de un trabajador será el precio de la materia que lo simboliza al iniciar el proceso menos el precio de la materia que lo simboliza al finalizarlo, como podríamos afirmar del alquiler de cualquier otra materia[42]. Además el empresario tiene que pagar el consumo del trabajador mientras dure el proceso. El precio de los trabajadores al iniciar los procesos más su consumo resulta $\mathbf{V}\ \mathbf{Y_t}$, y el precio al finalizarlos es $\mathbf{W}\ \mathbf{Y_{t+1}}$. Por lo tanto $\mathbf{V}\,\mathbf{Y_t} - \mathbf{W}\,\mathbf{Y_{t+1}}$ es lo que los empresarios tienen que pagar por usar los trabajadores en la producción y lo interpretaremos como los costes laborales.

Fijémonos en que cuando no incluíamos la Demografía en las ecuaciones el coste laboral consistía sólo en el consumo de los trabajadores. Aún sin tratar la Demografía hubiéramos podido intentar una teoría de los costes laborales más realista incluyendo en **V** los costes de crianza y formación (y vejez), que fue el camino que esbozaron los clásicos. Pero esta opción en la práctica supone muchas dificultades ya que por ejemplo habría que tener en cuenta la actualización. Nosotros ahora no necesitamos incluir estas partidas en la **V** de los trabajadores porque al tratar la Demografía estos costes determinan indirectamente el precio de alquiler. Por lo tanto un trabajador no sólo recibirá como sueldo lo que consume directamente sino también lo que cuesta reproducir su propio trabajo y lo que cuesta mantenerlo en su ancianidad. Vemos que la inclusión de la Demografía nos permite

[41] En el artículo original de John von Neumann se supone que el trabajo puede expandirse en cantidades ilimitadas. Más adelante veremos que entonces el valor de los humanos es 0, pero esta perspectiva significa renunciar en buena medida al estudio de las interrelaciones entre la población y la economía.
[42] El precio de alquiler de una materia, o de un trabajador, también puede entenderse como la carga de depreciación por su uso.

construir con sencillez una teoría de los costes laborales mucho más realista que la correspondiente al consumo directo del trabajador. Esta perspectiva nos permite retomar el problema que señalamos en §3.4 en lo que respecta a qué debemos escribir en **V**, ya que salvo que incluyamos unos procesos de eliminación gratuita (de los huérfanos, las viudas, etc.) ahora el coste de mantenerlos determinará también los costes laborales.

Puede parecer que los precios o los valores-trabajo de los seres humanos son conceptos muy alejados de lo que se observa en los capitalismos reales, porque en estos sistemas las personas no se compran ni se venden como en los esclavismos. Pero debe tenerse en cuenta que los valores no siempre se expresan como tasas de intercambio y que la categoría valor puede tener sentido incluso allí donde no hay intercambios, como ya vimos en el caso de los valores reproductivos. Esto ocurre también para algunas materias que son consideradas mercancías con precio en el capitalismo, a pesar de que no pueden ser intercambiadas; así una máquina que no puede venderse por el alto coste que implicaría su desplazamiento sí tiene dentro de la empresa lo que podríamos llamar un valor contable, aunque no pueda ser intercambiada y que por lo tanto su valor no se corresponda con una tasa de intercambio. De la misma manera podemos concebir el valor de los humanos como una magnitud sin correlato con una tasa efectiva de intercambio.[43]

---

[43] Como resulta obvio de nuestro análisis, la categoría valor puede tener sentido incluso donde no existen intercambios de ninguna clase. Además en los sistemas mercantiles a las mercancías se les atribuye un valor en todo momento, aunque son efectivamente intercambiadas en pocas ocasiones.
Pero hay que tener en cuenta que algunos trabajadores ni reciben un salario, como en determinadas formas de trabajo doméstico. No obstante en algunos casos el valor de los humanos sí aparece de manera explícita como tasa de intercambio, y no sólo en los sistemas esclavistas sino incluso en los capitalismos modernos. Por ejemplo, si el trabajador firma un contrato de exclusividad por el resto de su vida laboral y esa prestación puede ser objeto de compraventa, entonces la tasa de intercambio que se corresponde a ese contrato refleja de forma explícita el valor del trabajador. Este tipo de contrato no suele ser habitual en los capitalismos modernos pero sí es común en determinados trabajos como en el atletismo profesional; así un futbolista joven generalmente vale más que uno mayor porque se espera que su vida laboral sea más prolongada.
Otro ámbito en donde podemos encontrar de forma explícita conceptos parecidos al valor de un humano es en el terreno del cálculo actuarial o de seguros. Para unas aportaciones pioneras véase Halley [1] y Euler [1] y [2]. Compárese la fórmula del valor total de una renta anual vitalicia, Euler [2] página 168, con la fórmula del valor reproductivo relativo {7.2}; si las tasas de reproducción fueran iguales a la renta a pagar cada año el valor total de la renta vitalicia sería igual al valor reproductivo. De hecho Fisher construyó el concepto de valor reproductivo usando esta misma analogía.
En el próximo capítulo veremos que sólo necesitamos incluir en las ecuaciones las materias duraderas (como los humanos) cuando se incorporan a los procesos como insumos o lo abandonan como productos, y entonces los valores en el resto de instantes desaparecen de las ecuaciones. Podemos pues escribir las ecuaciones prescindiendo del concepto de valor de un humano, salvo cuando se incorpora o abandona un proceso, y también podríamos intentar seguir el camino que esbozaron los clásicos. Pero este concepto resulta útil para comprender con mayor claridad el coste laboral.
Sobre esto véase también Walras [1b], §175, página 374.

Por otra parte observemos que la perspectiva del coste de producción tiene su contrapartida en el ingreso de consumo. En realidad ambos puntos de vista son correctos en nuestras ecuaciones. Tenemos las condiciones de máximo de VN

$$-(\mathbf{C}+\mathbf{V})\,\mathbf{Y}+(\mathbf{D}+\mathbf{W})\,\mathbf{Y}\,/\,\alpha \leq \mathbf{0}$$

y por lo tanto, como $\mathbf{Y_{t+1}} = \mathbf{Y_t}\,/\,\alpha$,

$$-\mathbf{C}\,\mathbf{Y_t}+\mathbf{D}\,\mathbf{Y_{t+1}} \leq \mathbf{V}\,\mathbf{Y_t}-\mathbf{W}\,\mathbf{Y_{t+1}}$$

y si el proceso opera se aplica =. El lado izquierdo son los beneficios que permite el uso de los trabajadores y el derecho los costes laborales, como vimos, y para los procesos que operan ambos términos son iguales. Para los humanos, como para el resto de las materias, lo que habrán de rendir en su uso más rentable es igual a lo que cuesta su reproducción y mantenimiento en su forma menos costosa[44]. También queda claro que a un humano que habrá de rendir en el futuro pérdidas porque necesitará ser mantenido le corresponde un precio y valor-trabajo negativo[45].

7.6 Las matrices en TE

Si las jornadas se reducen a la mitad tendremos que para una población y un consumo de la misma constante los flujos del resto de insumos y del resto de productos se reducirán a la mitad, o lo que es lo mismo que para el mantenimiento de estos flujos habría que duplicar la población y su consumo. En general si las jornadas se reducen ε veces tendremos que multiplicar por ε la población y su consumo, por lo que nos queda

$$\mathbf{A} = \mathbf{C} + \varepsilon\,\mathbf{V}$$
$$\mathbf{B} = \mathbf{D} + \varepsilon\,\mathbf{W}$$

y entonces TE resulta

---

[44] Y una vez más debemos interpretar estas expresiones de forma marginal.
Aunque no nos detendremos en este punto, en los capitalismos avanzados actuales los trabajadores han conseguido imponer unos niveles salariales muy por encima del coste físico de reproducción y mantenimiento, de manera que en estos sistemas hay que hablar de unos costes establecidos por razones político-sociales más que físico-tecnológicas. Sin embargo algunos clásicos trataron los costes laborales de una manera análoga a los costes de producción de otras materias, como vinculados a un nivel de subsistencia, porque esta perspectiva se correspondía mejor a los capitalismos que observaban. Es la capacidad de influencia política y social la que determina que los salarios de los trabajadores en los capitalismos avanzados debamos estudiarlos de forma específica.

[45] Por ejemplo porque la persona esté incapacitada para trabajar, por vejez o por enfermedad o por no tener la formación adecuada a la tecnología corriente o simplemente porque su capacidad de producción no alcanza lo que cuesta su manutención.
En algunas sociedades antiguas a las personas que no podían producir el equivalente de su coste de mantenimiento se las abandonaba o se dejaba que murieran de hambre. Incluso en nuestros tiempos en algunos países existen personas que sufren un destino parecido y un aumento del precio de los alimentos puede implicar que ya no sea rentable que una persona permanezca viva. Si estudiamos una sociedad en la que es posible que una persona muera de hambre podemos incluir el proceso de eliminación gratuita correspondiente y si este proceso opera a esa persona le corresponderá un valor nulo.

$$\max_{\varepsilon,\mathbf{X}} \varepsilon$$
$$\mathbf{X}\,(\mathbf{D} + \varepsilon\,\mathbf{W}) = \mathbf{X}\,(\mathbf{C} + \varepsilon\,\mathbf{V})$$
$$\mathbf{X} \geq \mathbf{0}$$
$$\varepsilon > 0$$

Las condiciones de máximo quedan

$$(-\mathbf{C_i} - \varepsilon\,\mathbf{V_i} + \mathbf{D_i} + \varepsilon\,\mathbf{W_i})\,\mathbf{Y} \leq 0 \qquad \text{y si } x_i > 0 \text{ se aplica} =$$
$$1 - \mathbf{X}\,(\mathbf{V} - \mathbf{W})\,\mathbf{Y} = 0$$

Por lo tanto tenemos que

$$\frac{(\mathbf{D_i} + \mathbf{W_i} - \mathbf{C_i} - \mathbf{V_i})\mathbf{Y}}{(\mathbf{V_i} - \mathbf{W_i})\mathbf{Y}} \leq \varepsilon - 1$$

y para los procesos que operan se aplica =, donde el numerador es la plusvalía con las recetas originales y el denominador el coste laboral, ambos del proceso *i* y medidos en valores-trabajo, por lo que en TE sigue cumpliéndose la ley ricardiana, también cuando estudiamos la Demografía (por supuesto obviamos que esta fracción puede tomar la forma 0/0, como señalamos en §4.6). Además el coste laboral total en valor-trabajo es igual a 1.

Es evidente que una de las condiciones para que TE tenga solución es que resulte posible que la población pueda mantenerse en un estado estacionario, al igual que una de las condiciones para que VN tenga solución es que la población y el resto de la economía puedan expandirse con el mismo factor[46].

[46] Si una población, biológica o humana, supusiera un limite absoluto al crecimiento formaría un grupo de materias "escasas", y si sólo pudiera crecer con un factor diferente a los que son posibles con el resto de la economía no existiría ningún comportamiento simple. No obstante si escribimos las recetas de manera que son posibles unas tasas de reproducción y supervivencia para las que la población puede expandirse con un factor α_1 y también son posibles otras tasas para las que puede expandirse con un factor diferente α_2 podrá crecer con cualquier factor entre α_1 y α_2. Generalmente las poblaciones biológicas pueden llegar a crecer con un factor muy alto si se destinan los suficientes recursos a su cría, y con un factor nulo si se impide su reproducción o si se recurre a su sacrificio (con fines alimenticios o de otro tipo), y por lo tanto no representarán un problema. En el caso humano a menudo son posibles comportamientos reproductivos diferentes, y también la emigración y la inmigración, aunque no se pueda impedir o fomentar la reproducción. Pero si escribimos en nuestras recetas una población que no dispone de pautas de reproducción alternativas es posible que nuestras ecuaciones no tengan solución realista, porque no sea posible un comportamiento simple o porque la población forme un grupo de materias "escasas".

8: Procesos duraderos

8.1 Un paso temporal

Existen varias alternativas para tratar los procesos duraderos, y una primera es mantener las recetas escritas como hasta ahora y añadir una materia que simboliza la evolución del proceso. Detallaremos el caso en el que todos los procesos son de vida limitada. Podemos dividir los procesos duraderos en subprocesos, definiendo una serie de matrices $\mathbf{a_r}$ y $\mathbf{b_r}$ con los insumos y los productos de los procesos en el momento *r*. Los procesos comenzarían con unos subprocesos que consumen $\mathbf{a_0}$ y un paso temporal después producen $\mathbf{b_0}$ y unas materias que simbolizan los procesos con edad 1; otros subprocesos consumen $\mathbf{a_1}$ y las materias que simbolizan los procesos con edad 1 y un paso después producen $\mathbf{b_1}$ y las materias que simbolizan los procesos con edad 2; etc. Nos queda

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a_0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{a_1} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{a_2} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{a_{n-2}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{a_{n-1}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{b_0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{b_1} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{b_2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{b_{n-2}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{b_{n-1}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

donde las **0** matrices cuadradas nulas y las **I** matrices identidad (matrices cuadradas nulas salvo los elementos de la diagonal que son 1). Por ejemplo, si los subprocesos son

$$\mathbf{a_0} = \begin{bmatrix} 280 & 0 \\ 120 & 0 \\ 280 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{b_0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 15 \\ 400 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{a_1} = \begin{bmatrix} 0 & 12 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{b_1} = \begin{bmatrix} 575 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{a_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 8 \\ 0 & 12 \end{bmatrix} \mathbf{b_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

las matrices **A** y **B** quedan

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 280 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 120 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 280 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 400 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 575 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

El primer proceso consume 280 de trigo en el instante 0 y 12 de hierro en el instante 1 para producir 575 de trigo en el instante 2; el segundo proceso consume 120 de trigo en el instante 0, produce 15 de hierro en el 1, consume 8 de hierro en el 2 y produce 5 de hierro en el 3; y el tercer proceso consume 280 de trigo en el 0, produce 400 de trigo en el 1 y consume 12 de hierro en el 2.

Esta manera de escribir las recetas determina que todos los procesos pueden durar hasta *n* pasos temporales, pero si alguno dura menos basta con poner como 0 los insumos y productos posteriores a su terminación, o también con prescindir de los subprocesos posteriores y de las materias correspondientes que simbolizan su evolución.[47]

Nuestro planteamiento permite tratar la selección de técnicas tomando en consideración los diferentes tiempos de producción. Pero si añadiéramos un proceso de eliminación gratuita para la materia que simboliza la evolución de un proceso en un momento dado sería equivalente a suponer que el proceso puede interrumpirse en ese momento sin necesidad de consumir ningún recurso y sin producir ningún desperdicio ni materia aprovechable. Por eso no haremos el supuesto de que siempre existan los procesos de eliminación gratuita para estas materias, para así poder estudiar los procesos de reciclaje de fábricas e instalaciones. Si un proceso puede ser interrumpido en un determinado momento escribiremos esta situación con dos procesos diferentes, el que no es interrumpido y el que sí es interrumpido, y si un proceso puede ser interrumpido en un número de instantes escribiremos cada una de las posibilidades como un proceso alternativo. Hacemos notar que si un proceso no puede interrumpirse es posible que la materia que lo simboliza en algún momento muestre un valor negativo, porque mantener el proceso operando a partir de ese momento implique el consumo de recursos (como ocurre en nuestro ejemplo).

[47] Podemos escribir un proceso de vida infinita añadiendo una materia de duración ilimitada como las vistas en §6.3, y también un proceso cíclico añadiendo una materia de vida cíclica como las de §6.4. Así los procesos pueden iniciarse con una serie de subprocesos, como los vistos en el caso de vida limitada, que permiten la producción de la materia de duración ilimitada o cíclica que simboliza el nuevo proceso correspondiente, y una vez iniciados operar con vida ilimitada o cíclica. Por ejemplo, podríamos escribir las matrices para un único proceso que permanece en vida infinita o ilimitada con unos insumos $\mathbf{a}_3$ y unos productos $\mathbf{b}_3$ después de una iniciación que dura tres períodos como

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{a}_1 & 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{a}_2 & 0 & 1 & 0 \\ \mathbf{a}_3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \mathbf{b}_0 & 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{b}_1 & 0 & 1 & 0 \\ \mathbf{b}_2 & 0 & 0 & 1 \\ \mathbf{b}_3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

8.1.1 Condiciones de crecimiento proporcional

Anotaremos como $\mathbf{x_r}$ el vector de las intensidades de los subprocesos con edad *r*. Las condiciones de balance material quedan

$$-(\mathbf{x_0 a_0} + \mathbf{x_1 a_1} + \ldots + \mathbf{x_{n-1} a_{n-1}}) + (\mathbf{x_0 b_0} + \mathbf{x_1 b_1} + \ldots + \mathbf{x_{n-1} b_{n-1}})/\alpha = \mathbf{0} \qquad \{8.1\}$$

y también

$$\begin{aligned} &-\mathbf{x_1\, I} + \mathbf{x_0\, I} / \alpha = \mathbf{0} \\ &-\mathbf{x_2\, I} + \mathbf{x_1\, I} / \alpha = \mathbf{0} \\ &\ldots \\ &-\mathbf{x_{n\text{-}2}\, I} + \mathbf{x_{n\text{-}3}\, I} / \alpha = \mathbf{0} \\ &-\mathbf{x_{n\text{-}1}\, I} + \mathbf{x_{n\text{-}2}\, I} / \alpha = \mathbf{0} \end{aligned} \qquad \{8.2\}$$

donde además

$$\begin{aligned} &\mathbf{x_r} \geq \mathbf{0} \\ &\alpha > 0 \end{aligned}$$

8.1.2 Condiciones de máximo de VN

Estudiemos los multiplicadores de Lagrange de VN para las restricciones {8.1} y {8.2}. Con estas restricciones la formulación de VN es la misma que la que vimos en §2.1. Anotaremos como $\mathbf{y_r}$ el vector de los precios de las materias que simbolizan los procesos a la edad *r* y como $\mathbf{y}$ los precios del resto de materias. Procediendo de manera similar al caso de las materias duraderas llegamos a la expresión

$$\sum_{k=r+1}^{n}\left(-\frac{\mathbf{a_k}}{\alpha^{k-r-1}} + \frac{\mathbf{b_k}}{\alpha^{k-r}}\right)\mathbf{y} \leq \mathbf{y_r} \leq \sum_{k=0}^{r}\left(\frac{\mathbf{a_k}}{\alpha^{k-r-1}} - \frac{\mathbf{b_k}}{\alpha^{k-r}}\right)\mathbf{y}$$

donde con los procesos que operan se aplica =. Anotando $\mathbf{Y_t} = \mathbf{y}/\alpha^t$ como el precio del resto de los insumos y productos en el momento *t*

$$\sum_{k=r+1}^{n}\left(-\mathbf{a_k Y_{k-r-1}} + \mathbf{b_k Y_{k-r}}\right) \leq \mathbf{y_r} \leq \sum_{k=0}^{r}\left(\mathbf{a_k Y_{k-r-1}} - \mathbf{b_k Y_{k-r}}\right)$$

Por lo tanto los precios de las materias que simbolizan los procesos en el momento *r* son iguales a los costes que acompañan al desarrollo de los procesos desde su inicio en su forma más barata y también a los ingresos que producen los procesos hasta su conclusión en su uso más rentable. Por supuesto, esta última idea se corresponde con lo que en finanzas se conoce como *valoración fundamental*, que determina que una empresa tiene un valor igual a los beneficios que (se espera que) producirá en el futuro. Volvemos a encontrar en VN un vínculo directo con los capitalismos reales. Fijémonos en que si el proceso operara con eficiencia constante su precio con la edad obedecería {6.1}.

Para nuestro ejemplo de §8.1 la solución de VN es α = 1.19602, $\mathbf{X_t}$ = 1.19602^t [0.19562, 0.19883, 0, 0.16356, 0.16624, 0, 0.13675, 0.13899, 0], $\mathbf{Y_t}$ = 1.19602^{-t} [0.00758, 0.09209, 2.53698, -0.29409, -0.92398, 0, -0.35174, -1.10510]. El primer proceso opera 0.98 veces lo que el segundo, el tercer proceso no opera, y el hierro es 12.14 veces más caro que el trigo. El precio de la materia que simboliza el proceso 1º es positivo en el primer momento, porque el proceso a partir de ese instante producirá ingresos, y nulo en el segundo, porque a partir de ese instante no producirá ni costes ni ingresos. Los precios de las materias que simbolizan los procesos 2º y 3º son negativos tanto en el primer instante como en el segundo, porque a partir de entonces su operación implica incurrir en pérdidas netas.

8.1.3 Condiciones de crecimiento proporcional para los procesos que se inician

Con la forma estudiada de tratar los procesos duraderos no necesitamos modificar nuestra formulación de VN (ni de TE), ya que seguimos usando sólo las matrices **A** y **B**, lo que nos permite aplicar los teoremas que sabemos ciertos en este caso simple a cuando tratamos con procesos duraderos. Pero es un tanto engorroso tener que incluir las materias que simbolizan la evolución de los procesos. Así si redujéramos a la mitad el tiempo de análisis que separa la matriz de insumos y de productos tendríamos que duplicar no sólo el número de matrices $\mathbf{a_r}$ y $\mathbf{b_r}$ sino también el número de materias que simbolizan la evolución de los procesos. Si hiciéramos que el tiempo de análisis tendiera a 0 el número de subprocesos y materias tendería a ∞, lo que supone un inconveniente para generalizar las ecuaciones al caso en tiempo continuo. Ahora explicaremos cómo paliar este problema.

Desde {8.2} nos queda

$$\mathbf{x_r} = \frac{\mathbf{x_0}}{\alpha^r} \qquad \{8.3\}$$

Por lo tanto {8.1} resulta

$$\mathbf{x_0}\left(-\mathbf{a_0} + \frac{\mathbf{b_0}-\mathbf{a_1}}{\alpha} + \frac{\mathbf{b_1}-\mathbf{a_2}}{\alpha^2} + \ldots + \frac{\mathbf{b_{n-2}}-\mathbf{a_{n-1}}}{\alpha^{n-1}} + \frac{\mathbf{b_{n-1}}}{\alpha^n}\right) = \mathbf{x_0}\sum_{r=0}^{n-1} -\frac{\mathbf{a_r}}{\alpha^r} + \frac{\mathbf{b_r}}{\alpha^{r+1}} = \mathbf{0}$$

Definiendo

$$\mathbf{F}(\alpha) = \sum_{r=0}^{n-1} -\frac{\mathbf{a_r}}{\alpha^r} + \frac{\mathbf{b_r}}{\alpha^{r+1}} \qquad \{8.4\}$$

y, dado que desde {8.3} tenemos que si $\mathbf{x_0}$ es no negativo lo tienen que ser también todos los $\mathbf{x_r}$, las condiciones de crecimiento proporcional también pueden escribirse

$$\begin{aligned}&\mathbf{x_0}\,\mathbf{F}(\alpha) = \mathbf{0}\\&\mathbf{x_0} \geq \mathbf{0}\\&\alpha > 0\end{aligned} \qquad \{8.5\}$$

En consecuencia podemos prescindir de las materias que simbolizan la evolución de los procesos, ya que no aparecen en {8.5}, e incluir sólo $\mathbf{x_0}$, las intensidades de los procesos cuando se inician.

Además no necesitamos escribir las materias duraderas de edades que no se incorporan a un proceso como insumos o lo abandonan como productos. Por ejemplo estudiemos el caso de una materia duradera que se incorpora con edad q a un proceso en el momento r y que no abandona el mismo hasta el momento w. Aparecería como insumo en $\mathbf{a_r}$ con edad q, como producto en $\mathbf{b_r}$ con edad q+1, como insumo en $\mathbf{a_{r+1}}$ con edad q+1, como producto en $\mathbf{b_{r+1}}$ con edad q+2, como insumo en $\mathbf{a_{r+2}}$ con edad q+2, etc., hasta aparecer sólo como producto en $\mathbf{b_w}$. En cada instante posterior a r y anterior a w aparece como producto con un +1 y como insumo con un –1 con la misma edad, por lo que el término +1 del producto se cancela con el término –1 del insumo. Esto significa que sólo necesitamos incluir las restricciones correspondientes a las materias duraderas que se incorporan o abandonan los procesos, pero no las de todas las edades.

En definitiva, si las materias duraderas se incorporan o abandonan los procesos en un número finito de edades, podemos reducir todo lo que queramos el tiempo de análisis que separa el consumo de los insumos de la producción, sólo modificando las matrices $\mathbf{a_r}$ y $\mathbf{b_r}$ en $\mathbf{F}(\alpha)$ para tener en cuenta la mayor precisión. Entonces con un menor tiempo de análisis los números de procesos y materias no se modificarán, ya que el de procesos será igual al de subprocesos que se inician y el de materias será igual al número edades en las que las materias duraderas se incorporan o abandonan los procesos más el número del resto de materias.

8.1.4 Condiciones de máximo de VN para los procesos que se inician

Podemos plantear estas condiciones a partir de {8.5}, incluyendo sólo los precios de las materias duraderas se incorporan o abandonan los procesos y del resto de materias, pero no el de las que simbolizan la evolución de los procesos ni del resto de materias duraderas. Entonces VN resulta

$$\max_{\alpha,\mathbf{x_0}} \alpha$$
$$\mathbf{x_0}\,\mathbf{F}(\alpha) = \mathbf{0}$$
$$\mathbf{x_0} \geq \mathbf{0}$$
$$\alpha > 0$$

y las condiciones de máximo quedan

$$\mathbf{F_i}(\alpha)\,\mathbf{y} \leq 0 \qquad \text{y si } x_{i,0} > 0 \text{ se aplica} = \qquad \{8.6\}$$

donde $\mathbf{F_i}(\alpha)$ es la fila de $\mathbf{F}(\alpha)$ que se corresponde al proceso i, donde $\mathbf{y}$ son los multiplicadores de Lagrange del problema y donde el añadido significa que si el subproceso que se inicia i opera se aplica =. También

$$1 + \mathbf{x_0}\,\mathbf{F}'(\alpha)\,\mathbf{y} = 0 \qquad \{8.7\}$$

donde $\mathbf{F}'(\alpha)$ es la matriz de las derivadas de $\mathbf{F}(\alpha)$ con respecto a α, esto es

$$\mathbf{F}'(\alpha) = \sum_{r=0}^{n-1} r\frac{\mathbf{a_r}}{\alpha^{r+1}} - (r+1)\frac{\mathbf{b_r}}{\alpha^{r+2}}$$

La condición {8.7} excluye las soluciones triviales. Las condiciones {8.6} pueden interpretarse como la ley de la rentabilidad, ya que

$$\mathbf{F}(\alpha)\mathbf{y} = \left(\sum_{r=0}^{n-1} -\frac{\mathbf{a_r}}{\alpha^r} + \frac{\mathbf{b_r}}{\alpha^{r+1}}\right)\mathbf{y} = \sum_{r=0}^{n-1}\left(-\mathbf{a_r}\mathbf{Y_r} + \mathbf{b_r}\mathbf{Y_{r+1}}\right) \leq \mathbf{0}$$

donde hemos aplicado que $\mathbf{Y_t} = \mathbf{y}\,/\alpha^t$. Por lo tanto $\mathbf{F}(\alpha)\mathbf{y}$ puede interpretarse como los beneficios actualizados y la suma siguiente como los beneficios. En consecuencia los procesos que operan obtienen beneficios (y beneficios actualizados) nulos, se aplica =, y los que no operan beneficios (y beneficios actualizados) no-positivos, se aplica ≤. Nuevamente las propiedades observadas en el capitalismo aparecen en VN.

La solución de VN de nuestro ejemplo de §8.1 es $\alpha = 1.19602$, $\mathbf{X_t} = 1.19602^t$ [0.49594, 0.50406, 0], $\mathbf{Y_t} = 1.19602^{-t}$ [0.00299, 0.03633], el primer proceso opera 0.98 veces lo que el segundo y el tercero no opera, y el hierro es 12.14 veces más caro que el trigo (compárese con la solución de §8.1.2).

8.1.5 Procesos duraderos en TE

Para resolver TE con procesos duraderos hay que escribir las materias que simbolizan las evoluciones de los procesos en **C** y **D**. Si los trabajadores consumen tres cuartas partes del trigo, la solución de TE de nuestro ejemplo de §8.1 queda $\varepsilon = 1.58333$, $\mathbf{X_t}$ = [0.16667, 0.16667, 0, 0.16667, 0.16667, 0, 0.16667, 0.16667, 0], $\mathbf{Y_t}$ = [0.02, 0.2875, 8.05, -0.8625, -3.45, 0, -0.8625, -3.45], el primer proceso opera con la misma intensidad que el segundo y el tercero no opera, y el hierro es 14.375 veces más caro que el trigo (algunos de los valores-trabajo de las materias que simbolizan los procesos son negativos de manera similar a los precios en VN).

Escribiendo los procesos prescindiendo de las materias que simbolizan la evolución de los procesos[48] y las condiciones de estado estacionario para una determinada reducción de las jornadas correspondientes, como en {8.5} para $\alpha = 1$ y donde $\mathbf{a_r} = \mathbf{c_r} + \varepsilon\, \mathbf{v_r}$ y $\mathbf{b_r} = \mathbf{d_r} + \varepsilon\, \mathbf{w_r}$, entonces TE resulta

$$\max_{\varepsilon, \mathbf{x_0}} \varepsilon$$
$$\mathbf{x_0}\left(\sum_{r=0}^{n-1} -\mathbf{c_r} - \varepsilon\, \mathbf{v_r} + \mathbf{d_r} + \varepsilon\, \mathbf{w_r}\right) = \mathbf{0}$$
$$\mathbf{x_0} \geq \mathbf{0}$$
$$\varepsilon > 0$$

Las condiciones de máximo quedan

$$\left(\sum_{r=0}^{n-1} -\mathbf{c_r} - \varepsilon\, \mathbf{v_r} + \mathbf{d_r} + \varepsilon\, \mathbf{w_r}\right)\mathbf{y} \leq \mathbf{0} \qquad \text{y si } x_{i,0} > 0 \text{ se aplica} =$$

donde $\mathbf{y}$ son los multiplicadores de Lagrange del problema y donde el añadido significa que si el subproceso que se inicia i opera se aplica =, por lo que se cumple la ley ricardiana. También

$$1 + \mathbf{x_0}\left(\sum_{r=0}^{n-1} \mathbf{w_r} - \mathbf{v_r}\right)\mathbf{y} = 0$$

Esta condición excluye las soluciones triviales. En consecuencia, la solución de TE no se ve afectada por la estructura temporal de los procesos, como sí ocurre en VN salvo cuando α es igual a 1, y por ello para resolver TE podemos escribir las recetas sin tomar en consideración este aspecto (compárese el ejemplo anterior con el de §3.5).

8.2 Varios pasos temporales

Otra alternativa para estudiar los procesos que duran más de un paso temporal, además de las vistas en §8.1, consiste en escribir las recetas con unas matrices $\mathbf{f_r}$ conteniendo los flujos netos de materias para cada instante temporal r después de iniciarse los procesos,

---

[48] Si planteamos las ecuaciones con estas materias el vector de los valores-trabajo de las materias que simbolizan la evolución de los procesos con edad r, $\mathbf{y_r}$, cumple

$$\sum_{k=r+1}^{n} \left(-\mathbf{c_k} - \varepsilon\, \mathbf{v_k} + \mathbf{d_k} + \varepsilon\, \mathbf{w_k}\right)\mathbf{y} \leq \mathbf{y_r} \leq \sum_{k=0}^{r} \left(-\mathbf{c_k} - \varepsilon\, \mathbf{v_k} + \mathbf{d_k} + \varepsilon\, \mathbf{w_k}\right)\mathbf{y}$$

y para los procesos que operan se aplica =. Tenemos de nuevo la valoración fundamental pero medida en valores-trabajo.

donde pondremos con signo positivo las producciones y con signo negativo los consumos, y no incluiremos las materias que simbolizan la evolución de los procesos. Así para escribir con nuestra nueva alternativa los antiguos $\mathbf{a_r}$ y $\mathbf{b_r}$ pondríamos

$\mathbf{f_0} = -\,\mathbf{a_0}$
$\mathbf{f_1} = \mathbf{b_0} - \mathbf{a_1}$
$\mathbf{f_2} = \mathbf{b_1} - \mathbf{a_2}$
...
$\mathbf{f_{n-1}} = \mathbf{b_{n-2}} - \mathbf{a_{n-1}}$
$\mathbf{f_n} = \mathbf{b_{n-1}}$

Para el ejemplo de §8.1 las recetas quedarían

$$\mathbf{f_0} = \begin{bmatrix} -280 & 0 \\ -120 & 0 \\ -280 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{f_1} = \begin{bmatrix} 0 & -12 \\ 0 & 15 \\ 400 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{f_2} = \begin{bmatrix} 575 & 0 \\ 0 & -8 \\ 0 & -12 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{f_3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En definitiva, ahora nuestras recetas están minutadas. Si un proceso opera con vida ilimitada o cíclica, quizá después de un tiempo de iniciación, no existen dificultades a la hora de escribir la receta correspondiente, pero hacemos notar que entonces estaríamos ante un número infinito de matrices.

8.2.1 Condiciones de crecimiento proporcional

Las condiciones de balance material para nuestras matrices de flujos netos quedan

$$\mathbf{X_t f_0} + \mathbf{X_{t-1} f_1} + \mathbf{X_{t-2} f_2} + \mathbf{X_{t-3} f_3} + \ldots = \sum_{r=0} \mathbf{X_{t-r} f_r} = \mathbf{0} \qquad \{8.8\}$$

o sea, para cada instante t el flujo neto de cada materia es 0. Estos flujos serán los de los procesos que se inician en t, $\mathbf{X_t}$ $\mathbf{f_0}$, más los de los que se inician en t–1 que tendrán edad 1 en t, $\mathbf{X_{t-1}}$ $\mathbf{f_1}$, más los de los que se inician en t–2 que tendrán edad 2, $\mathbf{X_{t-2}}$ $\mathbf{f_2}$, etc. Hacemos notar que la forma en la que hemos escrito nuestros procesos implica que estos no pueden ser interrumpidos una vez que han sido iniciados, pero podemos proceder como en §8.1, y si un proceso puede ser interrumpido en un número de instantes escribiremos cada una de las posibilidades como un proceso diferente.

Substituyendo {1.3} en {8.8} nos queda

$$\mathbf{X} \sum_{r=0} \frac{\mathbf{f_r}}{\alpha^r} = \mathbf{0} \qquad \{8.9\}$$

Definiendo la matriz (que resulta una suma infinita si estamos ante algún proceso de vida ilimitada o cíclica después de su iniciación)

$$\mathbf{F}(\alpha) = \sum_{r=0} \frac{\mathbf{f_r}}{\alpha^r}$$

y recordando que las intensidades no pueden ser negativas y que el factor de expansión tiene que ser positivo, las condiciones de crecimiento proporcional quedan

$$\begin{aligned} &\mathbf{X}\,\mathbf{F}(\alpha) = \mathbf{0} \\ &\mathbf{X} \geq \mathbf{0} \\ &\alpha > 0 \end{aligned} \qquad \{8.10\}$$

Aunque hemos modificado las condiciones de balance material para adaptarnos a las recetas minutadas, en realidad {8.10} es equivalente a {8.5}, salvo el caso de que en alguna receta exista alguna producción justo cuando se inicia el proceso. Por lo tanto, los teoremas que sabemos ciertos para el caso de las recetas escritas con un paso temporal, con las matrices **A** y **B**, se pueden aplicar a las recetas minutadas $\mathbf{f_r}$ salvo que existan producciones instantáneas (y aun entonces podemos escribir los procesos retrasándolos un instante temporal).

8.2.2 Condiciones de VN

Con las recetas minutadas VN puede escribirse como

$$\begin{aligned} &\max_{\alpha,\mathbf{X}} \alpha \\ &\mathbf{X}\,\mathbf{F}(\alpha) = \mathbf{0} \\ &\mathbf{X} \geq \mathbf{0} \\ &\alpha > 0 \end{aligned}$$

Las condiciones de máximo quedan

$$\mathbf{F_i}(\alpha)\,\mathbf{Y} \leq 0 \qquad \text{y si } x_i > 0 \text{ se aplica} = \qquad \{8.11\}$$

donde $\mathbf{F_i}(\alpha)$ es la fila de $\mathbf{F}(\alpha)$ que se corresponde al proceso *i*, donde los **Y** son los multiplicadores de Lagrange del problema y donde el añadido significa que si el proceso *i* opera se aplica =. También

$$1 + \mathbf{X}\,\mathbf{F}'(\alpha)\,\mathbf{Y} = 0 \qquad \{8.12\}$$

donde $\mathbf{F}'(\alpha)$ es la matriz derivada de $\mathbf{F}(\alpha)$ con respecto a α, esto es

$$\mathbf{F}'(\alpha) = -\sum_{r=0} r \frac{\mathbf{f_r}}{\alpha^{r+1}}$$

Como $\mathbf{X_t} = \alpha^t\,\mathbf{X}$ tenemos que, para que siga cumpliéndose {8.12}, a cada *t* le corresponden unos $\mathbf{Y_t} = \alpha^{-t}\,\mathbf{Y}$, esto los $\mathbf{Y_t}$ disminuyen en el tiempo con el mismo factor con el que crecen las $\mathbf{X_t}$. {8.12} excluye las soluciones triviales.

Las condiciones {8.11} se corresponden a {8.6} y pueden interpretarse también como la ley de la rentabilidad, ya que

$$\mathbf{F}(\alpha)\mathbf{Y} = \sum_{r=0} \frac{\mathbf{f_r}}{\alpha^r}\mathbf{Y} = \sum_{r=0} \mathbf{f_r}\mathbf{Y_r} \leq \mathbf{0}$$

donde hemos aplicado que $\mathbf{Y_t} = \mathbf{Y} / \alpha^t$. Por lo tanto $\mathbf{F}(\alpha)$ $\mathbf{Y}$ puede interpretarse como los beneficios actualizados y la suma de los $\mathbf{f_r}$ $\mathbf{Y_r}$ como los beneficios. Los procesos que operan obtienen beneficios (y beneficios actualizados) nulos, se aplica =, y los que no operan beneficios (y beneficios actualizados) no-positivos, se aplica ≤.

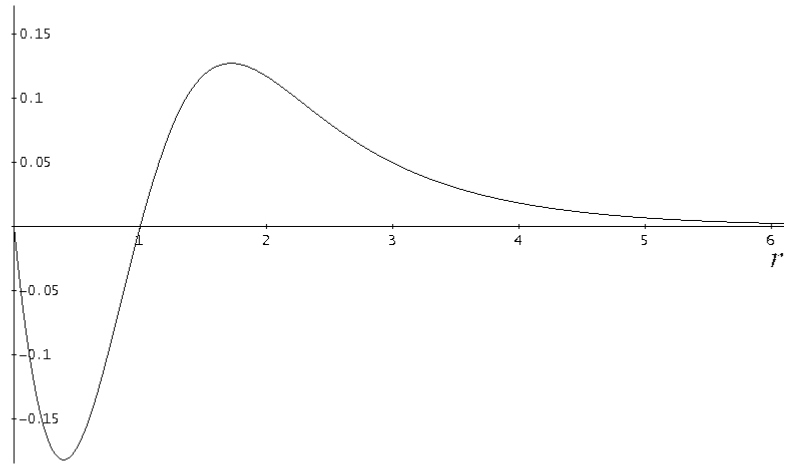
La solución de VN de nuestro ejemplo de §8.1 escrita con las matrices $\mathbf{f_r}$ es la misma que la vista en §8.1.4.

8.3 Tiempo continuo

Con las formas de tratar los procesos duraderos vistas en §8.1.3 y §8.2 podemos reducir todo lo que queramos el tiempo de análisis y dar una aproximación a la solución con tiempo continuo. No obstante estudiaremos nuestros modelos con tiempo continuo cuando pueden tratarse con un número finito de procesos y materias, aunque en determinadas situaciones la generalización al tiempo continuo implica en realidad la aparición de un número infinito de procesos y materias para un instante dado. Por ejemplo, junto con el tiempo continuo cabría la posibilidad de estudiar el espacio también como un continuo y para las materias duraderas de vida limitada el tiempo continuo implica la existencia de infinitas edades. En el caso de que tuviéramos un número infinito de materias tendríamos también un número infinito de valores, e igualmente con infinitos procesos tendríamos infinitas intensidades. No trataremos en este trabajo estas situaciones, pero no suponen una dificultad conceptual frente al caso de un número finito de procesos y materias; sólo supone una dificultad de explicación del tratamiento matemático correspondiente y por ello no la efectuaremos aquí.

No obstante, y como ocurría en el caso en tiempo discreto, si el número de edades de materias duraderas que se incorporan o abandonan los procesos es finito, el número de materias y procesos en tiempo continuo también será finito con tiempo continuo. Dado que podemos definir el número de entradas y salidas de los procesos de las materias duraderas tan grande como queramos, a menudo podremos tratar cualquier caso realista sin dificultades en tiempo continuo con un número finito de procesos y materias. Igualmente podemos intentar aproximar el espacio continuo con un número grande pero finito de puntos geográficos.

Introduciremos una nueva manera de escribir las recetas con tiempo continuo, y que resulta una generalización del método descrito en §8.2. Definiremos la función $f_{ij}(r)$ que describe el flujo neto de materia j en el proceso i en el instante r posterior a su inicio. Por ejemplo, una función para un proceso y una materia determinados podría ser $e^{-r} - e^{-r^2}$, cuyo gráfico resulta



y donde el proceso se inicia con el consumo de la materia hasta una unidad temporal posterior a su inicio y más adelante la produce. Anotaremos como $\mathbf{f}(r)$ la matriz de las funciones $f_{ij}(r)$.

Si quisiéramos escribir con nuestro nuevo método las matrices **A** y **B** quedarían

$$\mathbf{f}(r) = -\delta(r-0)\mathbf{A} + \delta(r-1)\mathbf{B}$$

y las de flujos netos en tiempo discreto resultarían

$$\mathbf{f}(r) = \sum_{t=0} \delta(r-t)\mathbf{f_t}$$

donde $\delta(r)$ es la *delta de Dirac*.

8.3.1 Condiciones de crecimiento proporcional

Anotaremos $\mathbf{X}(t)$ como el vector de las intensidades, no negativas, con las que operan los procesos en el momento t. Las condiciones de balance material ahora resultan

$$\int_0^\infty \mathbf{X}(t-r)\,\mathbf{f}(r)\,dr = \mathbf{0} \qquad \{8.13\}$$

o sea, para cada instante t el flujo neto de cada materia es 0 (compárese con {8.8}). Estos flujos serán la integral de los flujos de los procesos que se inician en cada instante anterior a t.

Diremos que estamos en un crecimiento proporcional cuando

$$\mathbf{X}(t) = \alpha^t\,\mathbf{X} \qquad \{8.14\}$$

Substituyendo {8.14} en {8.13} y simplificando tenemos

$$\mathbf{X}\,\mathbf{F}(\alpha) = 0 \qquad \{8.15\}$$

donde hemos definido la matriz

$$\mathbf{F}(\alpha) = \int_0^\infty \frac{\mathbf{f}(r)}{\alpha^r}\,dr$$

8.3.2 Condiciones de VN

VN queda

$$\max_{\alpha,\mathbf{X}} \alpha$$
$$\mathbf{X}\,\mathbf{F}(\alpha) = \mathbf{0}$$
$$\mathbf{X} \geq \mathbf{0}$$
$$\alpha > 0$$

Las condiciones de máximo resultan

$$\mathbf{F_i}(\alpha)\,\mathbf{Y} \leq 0 \qquad \text{y si } x_i > 0 \text{ se aplica } = \qquad \{8.16\}$$

donde $\mathbf{F_i}(\alpha)$ es la fila de $\mathbf{F}(\alpha)$ que se corresponde al proceso i, y donde los $\mathbf{Y}$ son los multiplicadores de Lagrange del problema. Además se cumple que

$$1 + \mathbf{X}\,\mathbf{F}'(\alpha)\,\mathbf{Y} = 0 \qquad \{8.17\}$$

donde $\mathbf{F}'(\alpha)$ es la matriz de derivadas de $\mathbf{F}(\alpha)$ con respecto a α.

$$\mathbf{F}'(\alpha) = -\int_0^\infty r\,\frac{\mathbf{f}(r)}{\alpha^{r+1}}\,dr$$

Como a cada t le corresponde un $\mathbf{X}(t) = \alpha^t\,\mathbf{X}$ y como se cumple {8.17} tenemos que a cada t le corresponde un $\mathbf{Y}(t) = \alpha^{-t}\,\mathbf{Y}$. {8.17} excluye las soluciones triviales.

Las condiciones {8.16} las podemos interpretar como la ley de la rentabilidad, ya que

$$\mathbf{F}(\alpha)\mathbf{Y} = \left(\int_0^\infty \frac{\mathbf{f}(r)}{\alpha^r}\,dr\right)\mathbf{Y} = \int_0^\infty \mathbf{f}(r)\mathbf{Y}(r)\,dr \leq \mathbf{0}$$

donde hemos aplicado que $\mathbf{Y}(t) = \mathbf{Y} / \alpha^t$. Por lo tanto $\mathbf{F}(\alpha)\,\mathbf{Y}$ puede interpretarse como los beneficios actualizados y la integral de los $\mathbf{f}(r)\,\mathbf{Y}(r)$ con respecto a r como los beneficios. En consecuencia los procesos que operan obtienen beneficios (y beneficios actualizados) nulos, se aplica =, y los que no operan beneficios (y beneficios actualizados) no-positivos, se aplica ≤.

8.3.3 VN con transformadas de Laplace

A veces resulta útil trabajar con la matriz de las *transformadas de Laplace* de las funciones de flujos netos, que anotaremos como $\mathbf{L}(s)$

$$\mathbf{L}(s) = \int_0^{\infty} e^{-sr} \mathbf{f}(r)\, dr$$

s es la tasa de expansión instantánea, $s = \log(\alpha)$. Por lo tanto

$$\mathbf{X}(t) = e^{st}\, \mathbf{X}$$
$$\mathbf{Y}(t) = e^{-st}\, \mathbf{Y}$$

y además

$$\mathbf{F}(\alpha) = \mathbf{L}(s)$$

Dado que el logaritmo de un número positivo es una función creciente de ese número, VN puede escribirse como

$$\max_{s,\mathbf{X}} s$$
$$\mathbf{X}\, \mathbf{L}(s) = \mathbf{0}$$
$$\mathbf{X} \geq \mathbf{0}$$

Las condiciones de máximo son

$$\mathbf{L_i}(s)\, \mathbf{Y} \leq \mathbf{0} \qquad \text{y si } x_i > 0 \text{ se aplica =} \qquad \{8.18\}$$

donde $\mathbf{L_i}(s)$ es la fila de $\mathbf{L}(s)$ que se corresponde al proceso i, y donde los $\mathbf{Y}$ son los multiplicadores de Lagrange del problema. Además se cumple que

$$1 + \mathbf{X}\, \mathbf{L'}(s)\, \mathbf{Y} = 0 \qquad \{8.19\}$$

donde $\mathbf{L'}(s)$ es la matriz de derivadas de $\mathbf{L}(s)$ con respecto a s

$$\mathbf{L'}(s) = -\int_0^{\infty} r\, e^{-sr} \mathbf{f}(r)\, dr$$

{8.19} excluye las soluciones triviales. Comparando {8.17} y {8.19} tenemos que los multiplicadores de Lagrange de VN escrito con $\mathbf{F}(\alpha)$ son α veces los multiplicadores de Lagrange de VN escrito con $\mathbf{L}(s)$, para intensidades iguales.

8.3.4 Ejemplo de solución de VN con infinitos procesos y materias

Aunque hemos visto que tratar con un número finito de procesos y materias nos permite aproximar adecuadamente la mayoría de las situaciones, es interesante señalar algún caso con un número infinito de procesos y materias. En este trabajo nos limitaremos a recordar un ejemplo conocido en Demografía como *ecuación de Lotka*[49], y que viene a

[49] Véase Lotka [1].

ser la versión en tiempo continuo de las matrices de Leslie, pero sin entrar en el detalle de la deducción de sus condiciones de solución.

Anotaremos como $x(t,r)$ al número de individuos de edad r en el momento t, como $b(r)$ a la tasa de reproducción a la edad r y como $S(i,j)$ a la tasa de supervivencia desde la edad i a la edad j. Los recién nacidos en el momento t son la suma para cada edad r de los individuos existentes en el momento t por su tasa de reproducción

$$x(t,0)=\int_0^\infty x(t,r)b(r)dr \qquad \{8.20\}$$

Los individuos de edad r en el momento t son los nacidos en el momento $t-r$ por la tasa de supervivencia entre la edad 0 y la r

$$x(t,r)=x(t-r,0)S(0,r) \qquad \{8.21\}$$

Lotka estudió la evolución del sistema a partir de estas condiciones y también el comportamiento a largo plazo del mismo, que es un crecimiento proporcional. La condición de crecimiento proporcional para la población de cada edad resulta

$$x(t,r)=\alpha^t\, x(0,r) \qquad \{8.22\}$$

Substituyendo {8.21} y {8.22} en {8.20} nos queda

$$x(t,0)=\int_0^\infty x(t-r,0)S(0,r)b(r)dr=\int_0^\infty \frac{x(t,0)}{\alpha^r}S(0,r)b(r)dr=x(t,0)\int_0^\infty \frac{S(0,r)b(r)}{\alpha^r}dr$$

y dividiendo ambos lados por $x(t, 0)$ resulta

$$1=\int_0^\infty \frac{S(0,r)b(r)}{\alpha^r}dr \qquad \{8.23\}$$

Conociendo $S(0,r)$ y $b(r)$ podemos resolver α a partir de esta ecuación integral, conocida como de Euler-Lotka. Desde {8.21} y {8.22} tenemos la población exponencial (compárese con {7.1})

$$\frac{x(t,r)}{x(t,0)}=\frac{x(t-r,0)S(0,r)}{x(t,0)}=\frac{x(t,0)S(0,r)}{\alpha^r x(t,0)}=\frac{S(0,r)}{\alpha^r} \qquad \{8.24\}$$

Los valores reproductivos en tiempo continuo tampoco suponen dificultad y de hecho fueron estudiados por Fisher originariamente para este caso. Fisher anota como v_x el valor reproductivo de la edad x (sin especificar el instante al que se corresponde), como *m* su "parámetro maltusiano", lo que para nosotros es el logaritmo de α, como l_t lo que para nosotros es $S(0,t)$ y como b_t lo que para nosotros es $b(t)$. El valor reproductivo relativo en la notación original de Fisher queda[50]

$$v_x / v_0 = \frac{e^{mx}}{l_x} \int_x^\infty e^{-mt} l_t b_t dt$$

Transcribiendo esta definición a nuestra notación resulta

$$\frac{y(t,r)}{y(t,0)} = \frac{\alpha^r}{S(0,r)} \int_r^\infty \alpha^{-k} S(0,k) b(k) dk$$

ya que $\alpha = e^m$. Como $S(0,k) / S(0,r) = S(r,k)$ nos queda

$$\frac{y(t,r)}{y(t,0)} = \int_r^\infty \frac{S(r,k)b(k)}{\alpha^{k-r}} dk \qquad \{8.25\}$$

(compárese con {7.2}). Fisher señala la estructura de los valores reproductivos dependiendo de la edad, pero también cambian con el tiempo según la ley del interés compuesto

$$y(t,r) = \alpha^{-t} y(0,r) \qquad \{8.26\}$$

En definitiva, a partir de $S(i,j)$ y $b(i)$ podemos calcular α resolviendo {8.23}. Conociendo α podemos calcular la pirámide de la población con {8.24} y la evolución de la misma con el tiempo según {8.22}. También podemos calcular los valores reproductivos según la edad con {8.25} y su evolución en el tiempo con {8.26}.

[50] Véase Fisher [1], 2ª edición, página 27.

9: Funciones de producción

9.1 Recetas y funciones de producción

Una receta como

trigo	hierro		trigo	hierro
280	12	→	575	0

nos señala que si consumimos 280 arrobas de trigo y 12 toneladas de hierro podemos producir 575 arrobas de trigo, y que si consumimos los insumos multiplicados por un número positivo podemos producir los productos multiplicados por ese mismo número. Es importante subrayar que nuestras recetas *no* dicen que consumiendo los insumos podamos producir menos productos, ni que produciendo los productos podamos consumir más de los insumos que se reseñan; para hacer cualquiera de estas dos cosas tendríamos que recurrir a otros procesos. Nuestras recetas no son pues idénticas a lo que a veces se conoce como funciones de producción de coeficientes fijos[51]. Nosotros imponemos que se consumen justo los insumos y que se producen justo los productos señalados, multiplicados por la intensidad del proceso correspondiente.

No obstante con nuestras recetas podemos tratar todas las demás funciones de producción con *rendimientos constantes a escala*, que son aquellas en las que si multiplicamos todos los insumos por un número positivo se multiplican también los productos por ese mismo número. Con otro tipo de rendimientos[52] no serían posibles

[51] Porque a menudo con éstas sí se supone que pueden producirse menos cantidades de los productos y que sí pueden consumirse más cantidades de los insumos de los que se indican. Una *función de producción* es una relación entre los insumos y el producto que puede obtenerse consumiéndolos. Anotando como f la producción y como χ_i el insumo i, la de coeficientes fijos resulta $f \leq \min(\chi_1/a_1, \chi_2/a_2, \chi_3/a_3, \ldots, \chi_n/a_n)$, la lineal $f \leq \sum a_i \chi_i$ y la (Wicksteed) Cobb-Douglas $f \leq a_0 \prod \chi_i^{a_i}$. El signo ≤ indica que pueden producirse menos productos de los reseñados; si la función es *estricta*, si pueden producirse sólo justo los productos indicados, usaríamos el signo =.

[52] La expresión “rendimientos decrecientes” se ha aplicado a varias situaciones diferentes, lo que ha provocado una gran confusión. Se ha señalado, por lo menos desde Turgot, que si en una determinada parcela de tierra se invierten cantidades sucesivas de insumos la producción crecería con cada incremento de la inversión pero cada vez en menor medida, de manera que llegado a un determinado nivel de inversión el incremento de la producción sería prácticamente nulo. Diremos que tenemos rendimientos decrecientes en el sentido de Turgot cuando el incremento de un solo insumo manteniendo constantes los demás supone un incremento de la producción, $\partial f/\partial\chi_i > 0$, pero de manera decreciente, $\partial^2 f/\partial\chi_i^2 < 0$.
Una segunda acepción está vinculada a la existencia de diversas calidades de materias no reproducibles (tierra, minas, etc.). En una economía que se expande primero se usarían las más fértiles o eficientes, después las siguientes en eficiencia, etc. La expansión en este caso implicaría pues tener que incurrir en “rendimientos decrecientes”. Algunos clásicos, particularmente Ricardo, consideraban esta circunstancia como clave para entender la dinámica del capitalismo, porque la necesidad de usar tierras (minas, etc.) menos fértiles implicaría que el crecimiento debería ralentizarse hasta alcanzar un estado estacionario. Es importante subrayar que estas dos acepciones son independientes, de manera que los rendimientos

ninguno de los comportamientos simples que hemos planteado, y por ello no las trataremos en este trabajo[53].

9.1.1 Aproximación con recetas

Con determinadas funciones de producción puede escribirse un equivalente exacto con un número pequeño de nuestras recetas[54], pero con las llamadas de *coeficientes variables* a menudo no podemos hacer esto, aunque sí podemos siempre dar una aproximación "poligonal" a las mismas. Para ello obtendremos muestras de diversas combinaciones de los insumos para calcular los consumos y producciones de las

---

decrecientes en este segundo sentido pueden darse con funciones de producción que no muestran rendimientos decrecientes en el sentido de Turgot, y también pueden cumplirse estas últimas condiciones sin que nos encontremos en la situación analizada por Ricardo (y con anterioridad por Anderson).

Existe aun otra acepción vinculada, la "utilidad marginal decreciente", que es una hipótesis psicológica según la cual la "satisfacción" que se obtiene del consumo obedecería propiedades matemáticas parecidas a las señaladas en la primera acepción para la producción física. Por supuesto, esta hipótesis puede cumplirse o no con independencia de las acepciones anteriores. En este trabajo no haremos hipótesis psicológicas.

Nosotros decimos que estamos ante una función de producción con rendimientos constantes a escala cuando si multiplicamos los insumos por una constante positiva el producto se multiplica por esa misma constante, cuando $f(k\,\chi_1, k\,\chi_2, k\,\chi_3, \ldots, k\,\chi_n) = k\,f(\chi_1, \chi_2, \chi_3, \ldots, \chi_n)$, cuando la función es homogénea de grado 1, lo que no excluye ni implica ninguna de las posibilidades anteriores. Diremos que tenemos rendimientos decrecientes a escala cuando para todo $k > 1$ la relación anterior se cumple con signo $<$, y rendimientos crecientes a escala cuando lo hace con signo $>$.

53 Supongamos que estuviéramos ante una economía con una sola materia, un solo insumo y con una función de producción con rendimientos a escala no constantes, como $f(\chi) = \chi^2$. Entonces es evidente que en general el sistema no evolucionará con un crecimiento proporcional, ya que nos queda $\chi_{t+1} = \chi_t^2$. Si por ejemplo partiéramos de $\chi_0 = 3$ la evolución de χ_t resultaría 3, 9, 81, 6561, … y el factor de expansión cambiaría con el tiempo. Esta dificultad surge cuando los comportamientos son necesariamente diferentes con la escala porque cuando no es así podemos tratarlos con las recetas. Por ejemplo, con rendimientos decrecientes a escala pero con procesos que pueden ser replicados el sistema sí puede evolucionar con un crecimiento proporcional; entonces podemos escribir una receta para cada nivel de insumos posible.

54 Por ejemplo, supongamos que hay que consumir una cantidad de trigo χ_1 y una cantidad de hierro χ_2 para producir una cantidad de cerdos. Con una función de coeficientes fijos, como $f \leq \min(\chi_1/a_1, \chi_2/a_2)$, basta con escribir una receta poniendo como vector de insumos los coeficientes a_i que se corresponden a cada materia y como vector de productos un vector nulo salvo para la materia producida que será 1, y además unos procesos de eliminación gratuita de las materias que se corresponden a los insumos usados

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Con una función lineal, como $f \leq a_1\,\chi_1 + a_2\,\chi_2$, basta con escribir una receta por cada insumo χ_i, escribiendo el vector de insumos como 0 salvo la materia a la que pertenece χ_i que será 1 y el de productos como 0 salvo para la materia a la que pertenece el producto que será a_i, y además los procesos de eliminación gratuita de las materias que se corresponden a los insumos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Es fácil ver que si una función de producción no es estricta, si está escrita con $\leq$, podemos tratarla como si fuera estricta y añadir los procesos de eliminación gratuita correspondientes. También que si todas las funciones no son estrictas es equivalente a suponer que pueden eliminarse de manera gratuita todas las materias (y viceversa), como se supone en el artículo original de John von Neumann, porque pueden consumirse las materias sin aumentar ningún producto.

materias que resultarían en cada caso y escribir cada posibilidad con una receta diferente.

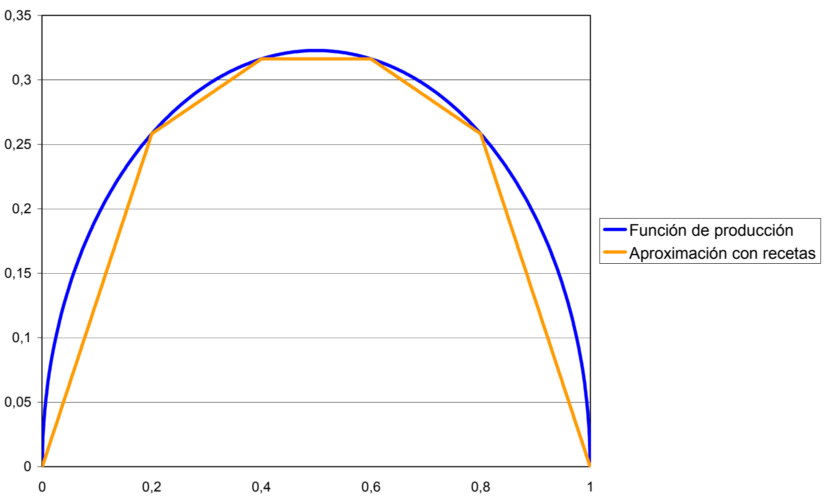
Por ejemplo, si la cantidad producida de hierro depende de la cantidad de trigo χ_1 y hierro χ_2 consumidos como insumos para su producción, de manera que la cantidad producida fuera $\sqrt{\chi_1\chi_2 5/12}$, podemos escribir las recetas[55]

χ_1	χ_2	$\sqrt{\chi_1\chi_2 5/12}$	trigo	hierro		trigo	hierro
0	1	0	0	1	→	0	0
0.2	0.8	0.258198	0.2	0.8	→	0	0.258198
0.4	0.6	0.316227	0.4	0.6	→	0	0.316227
0.6	0.4	0.316227	0.6	0.4	→	0	0.316227
0.8	0.2	0.258198	0.8	0.2	→	0	0.258198
1	0	0	1	0	→	0	0

Una función de producción adopta una magnitud para cada conjunto posible de insumos pero, como las recetas pueden operar simultáneamente, combinando linealmente las intensidades podemos aproximar la magnitud de la función para cada conjunto de insumos. Por ejemplo, si las intensidades de las recetas 2ª y 3ª fueran 0.5 ambos procesos operando determinan unos consumos y producciones

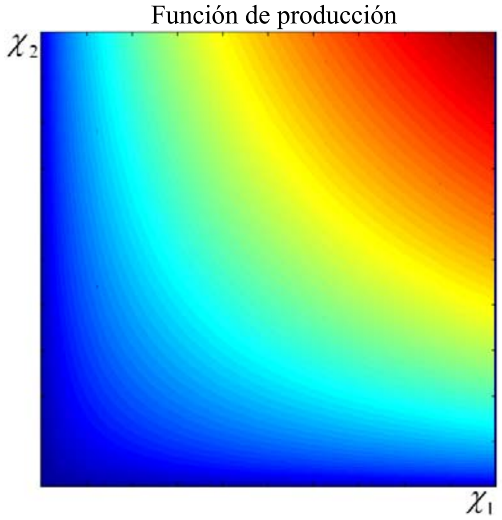
trigo	hierro		trigo	hierro
0.3	0.7	→	0	0.287212

que aproximan la magnitud de la función para esos insumos, $\sqrt{0.3 \times 0.7 \times 5/12} =$ 0.295803. Por lo tanto combinando las recetas consecutivas obtenemos una aproximación poligonal de la función



$\chi_1 = 1 - \chi_2$

[55] Con esta función $\sqrt{\chi_1\chi_2 5/12}$, de tipo Cobb-Douglas, tenemos rendimientos constantes a escala y también rendimientos decrecientes en el sentido de Turgot con respecto a ambos insumos χ_1 y χ_2.



Si necesitáramos una aproximación mejor bastaría con construir más recetas obteniendo más muestras de las combinaciones de insumos, por ejemplo incrementándolos con un paso de 0.01 en vez de con un paso de 0.2.

Con este método puede tratarse cualquier conjunto de funciones de producción con rendimientos constantes a escala de manera general, con cualquier número de insumos, con producción conjunta[56], o con diferentes estructuras temporales en los procesos. Tampoco supone una dificultad escribir las matrices para resolver TE, simplemente diferenciando entre los insumos que representan el consumo de los trabajadores y el resto de insumos. Además tenemos la ventaja de que no necesitamos más aparato matemático que el ya estudiado. Este método por lo tanto nos sirve para comprobar que la presencia de otro tipo de funciones de producción no altera nuestro análisis.

No obstante con las recetas pueden usarse por ejemplo la 2ª y la 5ª a la vez, y esto implica que con nuestras recetas no sólo podemos obtener la producción señalada por el polígono sino también cualquier punto del área delimitada por la envoltura convexa del polígono. Pero a menudo las funciones de producción se definen de manera que esto no resulta una dificultad, por ejemplo porque pueden usarse las funciones de producción no sólo con una combinación de insumos sino con varias simultáneamente, o porque las

[56] Cuando un insumo es argumento de más de una función de producción. Aunque para simplificar la exposición hemos planteado nuestro ejemplo sólo con la función de producción del hierro, para tratar la producción conjunta debemos tomar en consideración las funciones de producción de todas las materias. Así una materia duradera con vida limitada podría ser un insumo argumento de la función de producción de alguna otra materia y además será argumento de la función de poducción de la materia duradera con una edad superior; si tuviera vida ilimitada será argumento además de la función de la misma materia; etc.

funciones no son estrictas y delimitan un conjunto convexo para las combinaciones de insumos[57].

Por otra parte este método tiene el inconveniente de que a veces tenemos que trabajar con un número muy grande de procesos para obtener una buena aproximación a las funciones, aunque como veremos más adelante con determinados algoritmos esto no es un problema. En consecuencia esta aproximación con recetas es engorrosa y además es interesante desarrollar un planteamiento específico para las demás funciones de producción.

9.2 Comportamientos simples

Aquí únicamente trataremos el caso en el que la producción de las materias en el momento t depende sólo del consumo de los insumos en el momento t-1. En realidad no supone dificultad tratar otro tipo de estructuras temporales (en cada instante posterior al inicio de los procesos tendríamos unos insumos y una función de producción para cada materia), o el caso en tiempo continuo (los insumos sería funciones del tiempo y trabajaríamos con funcionales de producción), e igualmente no hay dificultades a la hora de estudiar TE, pero no nos extenderemos en estos puntos para no alargar la exposición.

Anotaremos la cantidad de materia de tipo i usada como insumo en un uso j en el momento t como $\chi_{i,j,t}$. El conjunto de los insumos en el momento t lo anotaremos como $\mathbf{X_t}$, aunque fijémonos en que en general no será una matriz, y como $\mathbf{X}$ el conjunto de los insumos en el momento 0, $\chi_{i,j} = \chi_{i,j,0}$. Anotaremos la función que describe la relación entre los insumos en el momento t-1 y los productos en el momento t como $f_{i,t}(\mathbf{X_{t-1}})$. Supondremos que estas funciones de producción muestran rendimientos constantes a escala y que además no cambian con el tiempo, $f_{i,t} = f_i$. La función f_i describe la relación entre los insumos y los productos de los procesos que producen materia del tipo i, de manera que podemos estar ante muchos procesos diferentes coexistiendo, producción conjunta, etc. Supondremos que las funciones están definidas de manera estricta, que la

[57] En este último caso agregaremos los correspondientes procesos de eliminación gratuita.
En realidad no supone problema escribir unas restricciones añadidas para que dos procesos no puedan operar a la vez, porque podemos definir los comportamientos simples bajo este tipo de condiciones. Así para que la 2ª y la 5ª receta no puedan operar simultáneamente bastaría con escribir

$$x_2 \cdot x_5 = 0$$

pero no desarrollaremos este planteamiento para no complicar la exposición.

producción es justo la que indica la magnitud de la función; si para algunas materias pueden producirse menos cantidades del producto de los que se indican añadiremos los insumos de eliminación gratuita correspondiente, insumos que no son argumento de ninguna función de producción.

Las condiciones de balance material quedan

$$f_i(\mathbf{X_{t-1}}) - \sum_j \chi_{i,j,t} = 0 \qquad \{9.1\}$$

o sea, en cada instante *t* la producción de cada materia *i* es igual a su consumo. Diremos que estamos en un crecimiento proporcional cuando

$$\mathbf{X_t} = \alpha^t \mathbf{X} \qquad \{9.2\}$$

Substituyendo {9.2} en {9.1} tenemos un conjunto de expresiones que son la misma multiplicada por una potencia de α, por lo que nos basta con comprobar una de ellas

$$f_i(\mathbf{X}/\alpha) - \sum_j \chi_{i,j} = 0$$

y, como estamos tratando con funciones con rendimientos a escala constantes, nos queda

$$f_i(\mathbf{X})/\alpha - \sum_j \chi_{i,j} = 0 \qquad \{9.3\}$$

Además supondremos que los insumos no son negativos y el factor de expansión debe ser positivo. Por lo tanto para confirmar que una trayectoria no trivial $\mathbf{X_t} = \alpha^t \mathbf{X}$ es un crecimiento proporcional para unas funciones de producción dadas f_i basta con comprobar que $\mathbf{X}$ y α cumplan

$$f_i(\mathbf{X})/\alpha - \sum_j \chi_{i,j} = 0$$

$$\mathbf{X} \geq \mathbf{0}$$

$$\alpha > 0$$

Por supuesto, las condiciones de estado estacionario son las de crecimiento proporcional con un α igual a 1.

9.3 VN

En consecuencia VN puede escribirse como

$$\max_{\alpha,\mathbf{X}} \alpha$$

$$f_i(\mathbf{X})/\alpha - \sum_j \chi_{i,j} = 0$$

$$\mathbf{X} \geq \mathbf{0}$$

$$\alpha > 0$$

que con palabras significa

buscamos los insumos con el mayor factor de expansión,
de manera que la producción de cada materia entre α sea igual a su consumo,
siempre que los insumos sean no negativos,
y siempre que el factor de expansión sea positivo.

Las condiciones de máximo resultan[58]

$$\sum_k \frac{\partial f_k}{\partial \chi_{r,s}} \frac{y_k}{\alpha} - y_r \leq 0 \qquad si\ \chi_{r,s} > 0 \text{ se aplica} = \qquad \{9.4\}$$

$$1 - (\sum_k f_k(\mathbf{X}) y_k) / \alpha^2 = 0 \qquad \{9.5\}$$

La última de estas expresiones excluye las soluciones triviales. Los y_k son los multiplicadores de Lagrange del problema; si los interpretamos como precios, la expresión

$$\sum_k \frac{\partial f_k}{\partial \chi_{r,s}} \frac{y_k}{\alpha}$$

es la suma de las tasas en las que aumenta la producción de cada materia por su precio actualizado correspondiente ante la variación del insumo $\chi_{r,s}$, o *ingresos marginales* del insumo $\chi_{r,s}$, y el precio y_r es el *coste marginal* de incrementar el insumo. Por lo tanto las condiciones de máximo pueden ser interpretadas como:

los beneficios marginales de cada insumo son iguales o menores a 0, y si el insumo es mayor que 0 son iguales,
1 menos el precio total de la producción entre α^2 es igual a 0.

En consecuencia hemos deducido la *ley de la rentabilidad marginal* de Thünen, y debemos subrayar que no hemos supuesto esta ley sino que la hemos deducido como una condición de máximo. Recordemos que ya señalamos en §4.6 que la ley de la rentabilidad clásica puede ser interpretada de manera marginal, y entonces $\mathbf{A_i}\ \mathbf{Y}$ puede ser interpretado como el coste marginal y $\mathbf{B_i}\ \mathbf{Y} / \alpha$ como el ingreso marginal que resulta

[58] El lagrangiano $\mathcal{L}$ queda (prescindiendo de las restricciones de signo de las variables)

$$\mathcal{L} = \alpha + \sum_i (f_i(\mathbf{X})/\alpha - \sum_j \chi_{i,j}) y_i$$

Derivando con respecto a $\chi_{r,s}$ y α tenemos las condiciones de primer orden

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \chi_{r,s}} = \sum_k \frac{\partial f_k}{\partial \chi_{r,s}} \frac{y_k}{\alpha} - y_r$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha} = 1 - (\sum_k f_k(\mathbf{X}) y_k) / \alpha^2$$

Para aplicar directamente el método de Lagrange necesitamos que las funciones de producción sean continuas y que existan las derivadas parciales con respecto a los insumos $\partial f_k / \partial \chi_{r,s}$. En realidad pueden estudiarse fácilmente los casos en que no están definidas algunas de estas derivadas o en que las funciones no son continuas, pero no haremos esto aquí para no alargar la exposición.

de incrementar levemente la intensidad del proceso *i*. E incluso hubiéramos podido escribir los balances materiales con las recetas y las funciones de producción coexistiendo, y entonces tendríamos juntas ambas formas de la ley de la rentabilidad. En VN la intensidad de los procesos y la magnitud de los insumos son tales que su beneficio marginal no es positivo y si los procesos operan o si los insumos son usados su beneficio marginal es nulo[59].

9.3.1 Ejemplo

Sean $\chi_{1,1}$, $\chi_{1,2}$ y $\chi_{1,3}$ las cantidades de trigo en arrobas y $\chi_{2,1}$, $\chi_{2,2}$ y $\chi_{2,3}$ las cantidades de hierro en toneladas usadas como insumos en el momento 0. Sea la función que describe la producción de trigo $7.043768\chi_{1,1}^{14/23}\chi_{2,1}^{9/23}+3.675318\chi_{1,3}^{7/10}\chi_{2,3}^{3/10}$ y la que describe la producción de hierro $0.645497\chi_{1,2}^{1/2}\chi_{2,2}^{1/2}$.

Las condiciones de crecimiento proporcional quedan

$$
\begin{aligned}
&(7.043768\chi_{1,1}^{14/23}\chi_{2,1}^{9/23}+3.675318\chi_{1,3}^{7/10}\chi_{2,3}^{3/10})/\alpha-\chi_{1,1}-\chi_{1,2}-\chi_{1,3}=0\\
&0.645497\chi_{1,2}^{1/2}\chi_{2,2}^{1/2}/\alpha-\chi_{2,1}-\chi_{2,2}-\chi_{2,3}=0\\
&\chi_{1,1}\geq 0\\
&\chi_{1,2}\geq 0\\
&\chi_{1,3}\geq 0\\
&\chi_{2,1}\geq 0\\
&\chi_{2,2}\geq 0\\
&\chi_{2,3}\geq 0\\
&\alpha>0
\end{aligned}
$$

que significan:

la producción de trigo entre α es igual al consumo de trigo,
la producción de hierro entre α es igual al consumo de hierro,
los insumos no son negativos,
y el factor de expansión es positivo.

[59] Con las recetas el beneficio unitario es igual al beneficio marginal porque estamos ante rendimientos constantes a escala, pero con otro tipo de rendimientos ambos criterios no necesariamente coincidirán y entonces el criterio de asignación compatible con la maximización del beneficio es el beneficio marginal.
Fijémonos en que no hemos hablado en ningún caso de “utilidades subjetivas”. El “principio marginal” se ha confundido con la teoría de la “utilidad subjetiva” porque ambas ideas las defendió la escuela neoclásica, pero en realidad son conceptos que no están vinculados lógicamente. Así el propio Thünen defendió el principio marginal sin hacer referencia a utilidades subjetivas, y algunos autores son subjetivistas sin tratar el principio marginal. En este aspecto hay que lamentar que el término “utilidad” a menudo se use de forma confusa para referirse por una parte a la “utilidad subjetiva” y por otra a los beneficios. A la hora de construir VN (y TE) nosotros somos “marginalistas” pero no “subjetivistas”.
Otra confusión común es la de vincular la ley de la rentabilidad marginal con la teoría de la renta de la tierra de Ricardo. En realidad ambos son conceptos que tampoco están relacionados lógicamente, ya que la ley de la rentabilidad marginal puede cumplirse sin la existencia de materias no reproducibles, y la tierra menos productiva y que no produce renta puede ser estudiada con recetas sin necesidad de aplicar el principio marginal sino sólo con los beneficios unitarios.

Las condiciones de máximo {9.4} y {9.5} resultan

$$(14/23)\ 7.043768\chi_{1,1}^{-9/23}\chi_{2,1}^{9/23}y_1/\alpha - y_1 \le 0 \qquad \text{si } \chi_{1,1} > 0 \text{ se aplica} =$$
$$(1/2)\ 0.645497\chi_{1,2}^{-1/2}\chi_{2,2}^{1/2}y_2/\alpha - y_1 \le 0 \qquad \text{si } \chi_{1,2} > 0 \text{ se aplica} =$$
$$(7/10)\ 3.675318\chi_{1,3}^{-3/10}\chi_{2,3}^{3/10}y_1/\alpha - y_1 \le 0 \qquad \text{si } \chi_{1,3} > 0 \text{ se aplica} =$$
$$(9/23)\ 7.043768\chi_{1,1}^{14/23}\chi_{2,1}^{-14/23}y_1/\alpha - y_2 \le 0 \qquad \text{si } \chi_{2,1} > 0 \text{ se aplica} =$$
$$(1/2)\ 0.645497\chi_{1,2}^{1/2}\chi_{2,2}^{-1/2}y_2/\alpha - y_2 \le 0 \qquad \text{si } \chi_{2,2} > 0 \text{ se aplica} =$$
$$(3/10)\ 3.675318\chi_{1,3}^{7/10}\chi_{2,3}^{-7/10}y_1/\alpha - y_2 \le 0 \qquad \text{si } \chi_{2,3} > 0 \text{ se aplica} =$$
$$1-\left((7.043768\chi_{1,1}^{14/23}\chi_{2,1}^{9/23} + 3.675318\chi_{1,3}^{7/10}\chi_{2,3}^{3/10})y_1 + 0.645497\chi_{1,2}^{1/2}\chi_{2,2}^{1/2}y_2\right)/\alpha^2 = 0$$

que pueden ser interpretadas como:

el beneficio marginal de $\chi_{1,1}$ es menor o igual a 0 y si $\chi_{1,1}$ es positivo es igual,
el beneficio marginal de $\chi_{1,2}$ es menor o igual a 0 y si $\chi_{1,2}$ es positivo es igual,
el beneficio marginal de $\chi_{1,3}$ es menor o igual a 0 y si $\chi_{1,3}$ es positivo es igual,
el beneficio marginal de $\chi_{2,1}$ es menor o igual a 0 y si $\chi_{2,1}$ es positivo es igual,
el beneficio marginal de $\chi_{2,2}$ es menor o igual a 0 y si $\chi_{2,2}$ es positivo es igual,
el beneficio marginal de $\chi_{2,3}$ es menor o igual a 0 y si $\chi_{2,3}$ es positivo es igual,
1 menos el precio total de los productos entre α^2 es igual a 0.

La solución resulta α = 1.25, $\chi_{1,1}$ = 1120 arrobas, $\chi_{1,2}$ = 720 arrobas, $\chi_{1,3}$ = 0 arrobas, $\chi_{2,1}$ = 48 toneladas, $\chi_{2,2}$ = 48 toneladas, $\chi_{2,3}$ = 0 toneladas, la producción de trigo es de 2300 arrobas y la de hierro de 120 toneladas, el precio del trigo y_1 = 1/2624 y el precio del hierro y_2 = 15/2624 (si multiplicáramos los insumos y dividiéramos los precios por un número positivo cualquiera las ecuaciones también se satisfarían). Por supuesto hemos escogido las funciones de producción para que la solución de VN coincida con nuestro ejemplo de §2.5. Realmente no hay diferencias de fondo entre el planteamiento con recetas y el que estamos haciendo ahora con otras funciones de producción.

10: Ciclos

10.1 Comportamientos simples

Hasta ahora hemos estudiado recetas que no cambian con el tiempo, pero a menudo este caso se aplica mal a la realidad, y así los ciclos anuales, diarios, etc. afectan a las colmenas y a las sociedades humanas de una manera muy marcada. Para tratar estas situaciones analizaremos el caso en el que las recetas cambian periódicamente[60].

Recordemos las condiciones de balance material {1.1}, aunque reordenándolas y tomando en consideración que las recetas pueden cambiar con el tiempo,

$$- \mathbf{X_t\, A_t} + \mathbf{X_{t-1}\, B_{t-1}} = \mathbf{0} \qquad \{10.1\}$$

o de manera desarrollada para mayor claridad

$$\begin{array}{l} \ldots \\ - \mathbf{X_0\, A_0} + \mathbf{X_{-1}\, B_{-1}} = \mathbf{0} \\ - \mathbf{X_1\, A_1} + \mathbf{X_0\, B_0} = \mathbf{0} \\ - \mathbf{X_2\, A_2} + \mathbf{X_1\, B_1} = \mathbf{0} \\ - \mathbf{X_3\, A_3} + \mathbf{X_2\, B_2} = \mathbf{0} \\ - \mathbf{X_4\, A_4} + \mathbf{X_3\, B_3} = \mathbf{0} \\ - \mathbf{X_5\, A_5} + \mathbf{X_4\, B_4} = \mathbf{0} \\ \ldots \end{array}$$

Estas condiciones se aplican aunque no estemos ante un comportamiento simple y dicen que el flujo neto de cada materia en cada instante es 0. En el momento *t* el número de materias será igual al de columnas de $\mathbf{B_{t-1}}$ y de $\mathbf{A_t}$, y el número de procesos que se inician será igual al de filas de $\mathbf{A_t}$ y de $\mathbf{B_t}$ y también al número de elementos del vector de intensidades $\mathbf{X_t}$, pero el número de materias y el de procesos pueden cambiar en el tiempo.

---

[60] En este trabajo no estudiaremos los ciclos endógenos, como las “crisis periódicas” de Juglar y Marx. Estas crisis son consecuencia del funcionamiento del mecanismo de asignación mercantil y se observan por lo menos desde principios del siglo XIX hasta nuestros días, salvo el intervalo entre la Segunda Guerra Mundial y la crisis de 1973. Así a partir de Tugán-Baranovski [2] podemos fechar las crisis en Inglaterra en 1825, 1836, 1847, 1857, 1866, 1873, 1882, 1891, 1900 y 1907. Completaremos esta secuencia para los EE.UU. con las fechas 1914, 1921, 1929, 1937, intervalo sin ciclos definidos, 1973, 1981, 1990, 2000 y 2008. Vemos que el ciclo es aproximadamente periódico, que su período medio va modificándose en el tiempo y que en la actualidad es de un poco menos de 9 años. Este ciclo es una evidencia más de que el capitalismo dista de mostrar la perfecta eficiencia reproductiva de VN. Nunca debemos olvidar que VN sólo puede ser usado como una aproximación grosera del capitalismo.
Otro ejemplo de ciclo endógeno es el demográfico descrito por Condorcet: la población tiende a crecer hasta que choca con las limitaciones de los recursos, lo que provoca un empeoramiento de las condiciones de vida; entonces la mortalidad aumenta y la población disminuye, por lo que los recursos terminan por volverse abundantes para el tamaño de la población; en consecuencia la reproducción aumenta de nuevo y se repite el ciclo. Estos ciclos demográficos endógenos efectivamente han sido observados en poblaciones biológicas, tanto en condiciones controladas como naturales.

Si las matrices con las recetas se repiten con período p tendremos que

$$\begin{aligned} \mathbf{A_{t+p}} &= \mathbf{A_t} \\ \mathbf{B_{t+p}} &= \mathbf{B_t} \end{aligned} \qquad \{10.2\}$$

Con recetas que cambian con período p y donde se cumplen las condiciones de balance material existen unos comportamientos muy interesantes:

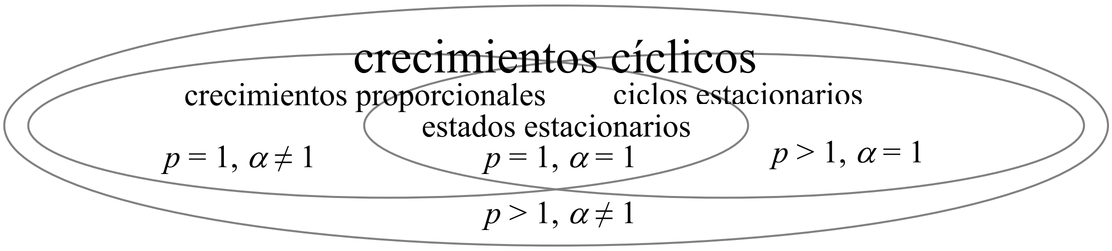
- el *ciclo estacionario*, cuando las intensidades se repiten con período p

  $\mathbf{X_{t+p}} = \mathbf{X_t}$

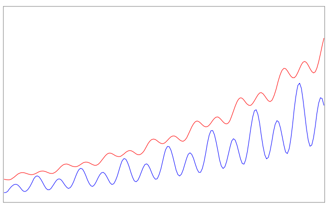
- el *crecimiento cíclico*, (o *crecimiento proporcional cíclico* o *ciclo exponencial*) cuando las intensidades crecen con el mismo factor α con período p

  $$\mathbf{X_{t+p}} = \alpha\, \mathbf{X_t} \qquad \{10.3\}$$

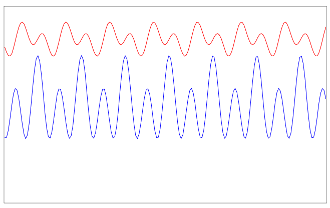
El crecimiento proporcional y el ciclo estacionario son casos particulares de crecimiento cíclico, cuando p es igual a 1 y cuando α es igual a 1 respectivamente, y el estado estacionario es un caso particular del resto de comportamientos, cuando α y p son ambos iguales a 1. Aclararemos con un diagrama la relación de casos particulares



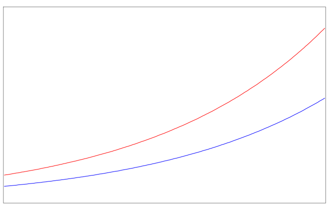
También ilustraremos con unos ejemplos gráficos la evolución en el tiempo de estos cuatro comportamientos simples



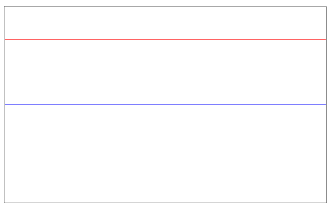
crecimiento cíclico, $\mathbf{X_{t+p}} = \alpha\, \mathbf{X_t}$



$\alpha = 1$, ciclo estacionario, $\mathbf{X_{t+p}} = \mathbf{X_t}$



$p = 1$, crecimiento proporcional, $\mathbf{X_{t+1}} = \alpha\, \mathbf{X_t}$



$p = 1$, $\alpha = 1$, estado estacionario, $\mathbf{X_{t+1}} = \mathbf{X_t}$

10.2 Condiciones de crecimiento cíclico

Para facilitar la comprensión desarrollaremos el caso en el que las recetas se repiten con un período p igual a 3. Entonces las recetas periódicas {10.2} y las intensidades con crecimiento cíclico {10.3} resultan

$$\begin{array}{lll}
\dots & \dots & \dots \\
\mathbf{A}_{-3} = \mathbf{A}_0 & \mathbf{B}_{-3} = \mathbf{B}_0 & \mathbf{X}_{-3} = \alpha^{-1}\,\mathbf{X}_0 \\
\mathbf{A}_{-2} = \mathbf{A}_1 & \mathbf{B}_{-2} = \mathbf{B}_1 & \mathbf{X}_{-2} = \alpha^{-1}\,\mathbf{X}_1 \\
\mathbf{A}_{-1} = \mathbf{A}_2 & \mathbf{B}_{-1} = \mathbf{B}_2 & \mathbf{X}_{-1} = \alpha^{-1}\,\mathbf{X}_2 \\
 & & \\
\mathbf{A}_3 = \mathbf{A}_0 & \mathbf{B}_3 = \mathbf{B}_0 & \mathbf{X}_3 = \alpha\,\mathbf{X}_0 \\
\mathbf{A}_4 = \mathbf{A}_1 & \mathbf{B}_4 = \mathbf{B}_1 & \mathbf{X}_4 = \alpha\,\mathbf{X}_1 \\
\mathbf{A}_5 = \mathbf{A}_2 & \mathbf{B}_5 = \mathbf{B}_2 & \mathbf{X}_5 = \alpha\,\mathbf{X}_2 \\
\mathbf{A}_6 = \mathbf{A}_0 & \mathbf{B}_6 = \mathbf{B}_0 & \mathbf{X}_6 = \alpha^2\,\mathbf{X}_0 \\
\mathbf{A}_7 = \mathbf{A}_1 & \mathbf{B}_7 = \mathbf{B}_1 & \mathbf{X}_7 = \alpha^2\,\mathbf{X}_1 \\
\mathbf{A}_8 = \mathbf{A}_2 & \mathbf{B}_8 = \mathbf{B}_2 & \mathbf{X}_8 = \alpha^2\,\mathbf{X}_2 \\
\mathbf{A}_9 = \mathbf{A}_0 & \mathbf{B}_9 = \mathbf{B}_0 & \mathbf{X}_9 = \alpha^3\,\mathbf{X}_0 \\
\dots & \dots & \dots
\end{array}$$

Por lo tanto, substituyendo {10.2} y {10.3} en {10.1}, nos queda

$$\begin{array}{l}
\dots \\
-\mathbf{X}_0\,\mathbf{A}_0 + \alpha^{-1}\,\mathbf{X}_2\,\mathbf{B}_2 = \mathbf{0} \\
-\mathbf{X}_1\,\mathbf{A}_1 + \mathbf{X}_0\,\mathbf{B}_0 = \mathbf{0} \\
-\mathbf{X}_2\,\mathbf{A}_2 + \mathbf{X}_1\,\mathbf{B}_1 = \mathbf{0} \\
-\alpha\,\mathbf{X}_0\,\mathbf{A}_0 + \mathbf{X}_2\,\mathbf{B}_2 = \mathbf{0} \\
-\alpha\,\mathbf{X}_1\,\mathbf{A}_1 + \alpha\,\mathbf{X}_0\,\mathbf{B}_0 = \mathbf{0} \\
-\alpha\,\mathbf{X}_2\,\mathbf{A}_2 + \alpha\,\mathbf{X}_1\,\mathbf{B}_1 = \mathbf{0} \\
-\alpha^2\,\mathbf{X}_0\,\mathbf{A}_0 + \alpha\,\mathbf{X}_2\,\mathbf{B}_2 = \mathbf{0} \\
-\alpha^2\,\mathbf{X}_1\,\mathbf{A}_1 + \alpha^2\,\mathbf{X}_0\,\mathbf{B}_0 = \mathbf{0} \\
-\alpha^2\,\mathbf{X}_2\,\mathbf{A}_2 + \alpha^2\,\mathbf{X}_1\,\mathbf{B}_1 = \mathbf{0} \\
-\alpha^3\,\mathbf{X}_0\,\mathbf{A}_0 + \alpha^2\,\mathbf{X}_2\,\mathbf{B}_2 = \mathbf{0} \\
\dots
\end{array}$$

Tenemos infinitas ecuaciones matriciales pero que se repiten en bloques de 3 (y en general en bloques de p) sólo que multiplicadas por una potencia de α. Por lo tanto para asegurarnos de que existe un crecimiento cíclico con una trayectoria $\mathbf{X}_{t+3} = \alpha\,\mathbf{X}_t$, para unas recetas que se repiten con período 3 dadas, basta con comprobar que se cumple el conjunto finito de ecuaciones

$$\begin{array}{l}
-\mathbf{X}_0\,\mathbf{A}_0 + \alpha^{-1}\,\mathbf{X}_2\,\mathbf{B}_2 = \mathbf{0} \\
-\mathbf{X}_1\,\mathbf{A}_1 + \mathbf{X}_0\,\mathbf{B}_0 = \mathbf{0} \\
-\mathbf{X}_2\,\mathbf{A}_2 + \mathbf{X}_1\,\mathbf{B}_1 = \mathbf{0}
\end{array}$$

En general para unas recetas que se repiten con período p basta con comprobar que las intensidades y el factor que forman la trayectoria $\mathbf{X}_{t+p} = \alpha\,\mathbf{X}_t$ cumplan

$$
\begin{aligned}
&-\mathbf{X_0}\,\mathbf{A_0} + \alpha^{-1}\,\mathbf{X_{p-1}}\,\mathbf{B_{p-1}} = \mathbf{0}\\
&-\mathbf{X_1}\,\mathbf{A_1} + \mathbf{X_0}\,\mathbf{B_0} = \mathbf{0}\\
&-\mathbf{X_2}\,\mathbf{A_2} + \mathbf{X_1}\,\mathbf{B_1} = \mathbf{0}\\
&\ldots\\
&-\mathbf{X_{p-2}}\,\mathbf{A_{p-2}} + \mathbf{X_{p-3}}\,\mathbf{B_{p-3}} = \mathbf{0}\\
&-\mathbf{X_{p-1}}\,\mathbf{A_{p-1}} + \mathbf{X_{p-2}}\,\mathbf{B_{p-2}} = \mathbf{0}
\end{aligned}
\qquad \{10.4\}
$$

Hemos aprovechado que estamos ante un comportamiento simple para reducir el problema a un tamaño finito. En realidad ya hicimos esto mismo cuando estudiamos las condiciones del crecimiento proporcional en §1.4.

Definamos el vector **X** como el conjunto de las intensidades entre 0 y p-1

$$\mathbf{X} = [\mathbf{X_0}, \mathbf{X_1}, \mathbf{X_2}, \ldots, \mathbf{X_{p-3}}, \mathbf{X_{p-2}}, \mathbf{X_{p-1}}]$$

y la matriz

$$
\mathbf{F}(\alpha) = \begin{bmatrix}
-\mathbf{A_0} & \mathbf{B_0} & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\
\mathbf{0} & -\mathbf{A_1} & \mathbf{B_1} & \ldots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{A_2} & \ldots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ldots & -\mathbf{A_{p-3}} & \mathbf{B_{p-3}} & \mathbf{0}\\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{0} & -\mathbf{A_{p-2}} & \mathbf{B_{p-2}}\\
\mathbf{B_{p-1}}/\alpha & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{A_{p-1}}
\end{bmatrix}
$$

Las ecuaciones {10.4} nos quedan[61]

$$\mathbf{X}\,\mathbf{F}(\alpha) = \mathbf{0} \qquad \{10.5\}$$

Por otra parte supondremos que las intensidades con las que operan los procesos no pueden ser negativas, lo que escribiremos como

$$\mathbf{X} \geq \mathbf{0} \qquad \{10.6\}$$

Además es necesario que el factor de expansión sea positivo

[61] Existe una alternativa para tratar las recetas cíclicas, que consiste en escribir las matrices de manera que

$$
\mathbf{A} = \begin{bmatrix}
\mathbf{A_0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\
\mathbf{0} & \mathbf{A_1} & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A_2} & \ldots & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{A_{p-2}} & \mathbf{0}\\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{0} & \mathbf{A_{p-1}}
\end{bmatrix}
\qquad
\mathbf{B} = \begin{bmatrix}
\mathbf{0} & \mathbf{B_0} & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{B_1} & \ldots & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{0} & \mathbf{B_{p-2}}\\
\mathbf{B_{p-1}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{0} & \mathbf{0}
\end{bmatrix}
$$

Esta forma de escribir las matrices puede entenderse como el estudio de los ciclos estacionarios posibles si la matriz **B** se redujera en un factor α distribuido en las p etapas del ciclo. Es fácil ver que si existe un crecimiento proporcional para {10.5} con un factor α existirá también uno para esta alternativa con un factor $\alpha^{1/p}$, de manera que podemos convertir la solución de un caso al otro. Esta alternativa es interesante porque nos permite plantear VN con las matrices **A** y **B**, sin ningún elemento negativo, de forma que podemos aplicar los teoremas que sabemos ciertos para este caso a los crecimientos cíclicos (por ejemplo, los teoremas de existencia de solución).

$\alpha > 0$

En consecuencia para confirmar que la trayectoria definida por una **X** no trivial y α es un crecimiento cíclico para unas recetas que cambian periódicamente dadas basta con comprobar que se cumpla

$$\mathbf{X}\,\mathbf{F}(\alpha) = \mathbf{0}$$
$$\mathbf{X} \geq \mathbf{0}$$
$$\alpha > 0$$

(hacemos notar que si **X** es solución de {10.5} y {10.6} **X** multiplicado por un número positivo también es solución). Estamos ante un problema similar al caso en el que las recetas no cambian con el tiempo.

10.3 Condiciones de ciclo estacionario

El ciclo estacionario es un crecimiento cíclico con un factor de expansión igual a 1. Por lo tanto las condiciones de ciclo estacionario son

$$\mathbf{X}\,\mathbf{F} = \mathbf{0}$$
$$\mathbf{X} \geq \mathbf{0}$$

donde la matriz **F** = **F** (1) resulta

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} -\mathbf{A_0} & \mathbf{B_0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{A_1} & \mathbf{B_1} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{A_2} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & -\mathbf{A_{p-2}} & \mathbf{B_{p-2}} \\ \mathbf{B_{p-1}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & -\mathbf{A_{p-1}} \end{bmatrix}$$

10.4 Planteamiento de VNC

Nos interesa ahora calcular cuánto puede crecer cíclicamente una economía. Llamaremos VNC al crecimiento cíclico con el mayor factor de expansión. VNC puede calcularse para unas recetas dadas resolviendo

$$\max_{\alpha,\mathbf{X}} \alpha$$
$$\mathbf{X}\,\mathbf{F}(\alpha) = \mathbf{0}$$
$$\mathbf{X} \geq \mathbf{0}$$
$$\alpha > 0$$

Vemos que podemos calcular VNC usando la misma formulación matemática que para VN, el caso con recetas constantes. Las condiciones de máximo son también iguales

$\mathbf{F}(\alpha)\,\mathbf{Y} \leq \mathbf{0}$, y si el proceso opera se aplica =

$1 + \mathbf{X}\,\mathbf{F}'(\alpha)\,\mathbf{Y} = 0$

donde **Y** son los multiplicadores de Lagrange

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y_0} \\ \mathbf{Y_1} \\ \mathbf{Y_2} \\ \dots \\ \mathbf{Y_{p-1}} \end{bmatrix}$$

Desarrollando la primera de estas expresiones resulta

$$\begin{aligned}
&-\mathbf{A_0}\,\mathbf{Y_0} + \mathbf{B_0}\,\mathbf{Y_1} \le \mathbf{0}\\
&-\mathbf{A_1}\,\mathbf{Y_1} + \mathbf{B_1}\,\mathbf{Y_2} \le \mathbf{0}\\
&-\mathbf{A_2}\,\mathbf{Y_2} + \mathbf{B_2}\,\mathbf{Y_3} \le \mathbf{0}\\
&\dots\\
&-\mathbf{A_{p-2}}\,\mathbf{Y_{p-2}} + \mathbf{B_{p-2}}\,\mathbf{Y_{p-1}} \le \mathbf{0}\\
&-\mathbf{A_{p-1}}\,\mathbf{Y_{p-1}} + \mathbf{B_{p-1}}\,\mathbf{Y_0} / \alpha \le \mathbf{0}
\end{aligned}$$

y para los procesos que operan se aplica =. Interpretando los $\mathbf{Y_r}$ como los precios de las materias en el momento *r*, estas expresiones son la ley de la rentabilidad, ya que $-\mathbf{A_r}\,\mathbf{Y_r} + \mathbf{B_r}\,\mathbf{Y_{r+1}}$ son los beneficios, por lo que los procesos obtienen beneficios no-positivos y los que operan beneficios nulos.

Por otra parte se cumple la ley del interés compuesto, pero con respecto a los ciclos sucesivos; ahora tenemos que

$$\begin{aligned}
&\mathbf{Y_{n\cdot p}} = \mathbf{Y_0} / \alpha^n\\
&\mathbf{Y_{n\cdot p+1}} = \mathbf{Y_1} / \alpha^n\\
&\mathbf{Y_{n\cdot p+2}} = \mathbf{Y_2} / \alpha^n\\
&\dots\\
&\mathbf{Y_{(n+1)\cdot p-3}} = \mathbf{Y_{p-3}} / \alpha^n\\
&\mathbf{Y_{(n+1)\cdot p-2}} = \mathbf{Y_{p-2}} / \alpha^n\\
&\mathbf{Y_{(n+1)\cdot p-1}} = \mathbf{Y_{p-1}} / \alpha^n
\end{aligned}$$

Por ejemplo, supongamos que la unidad temporal usada es el trimestre y que el ciclo tiene un período *p* igual a 4 (aunque ahora nos referimos a una unidad temporal base que es igual en todos los pasos, el trimestre, en realidad podemos usar unidades base diferentes en cada paso a la hora de escribir las recetas). Entonces los precios entre dos trimestres sucesivos no cumplen la ley del interés compuesto, pero sí de año en año. De hecho en dos trimestres sucesivos no necesariamente existirán las mismas materias, pero sí cada año.

10.4.1 Ejemplo

Estudiaremos las hembras de una población animal usando el trimestre, las estaciones, como unidad temporal base y con un período *p* igual a 4, esto con un ciclo anual.

Supondremos que los animales pueden vivir hasta dos años y que tienen crías en primavera. Como p es 4 tendremos cuatro pares de matrices $\mathbf{A_t}$ y $\mathbf{B_t}$ y como los animales pueden vivir hasta ocho estaciones tendremos ocho materias en cada matriz. Supondremos que las matrices que describen el consumo en invierno y la producción en primavera resultan

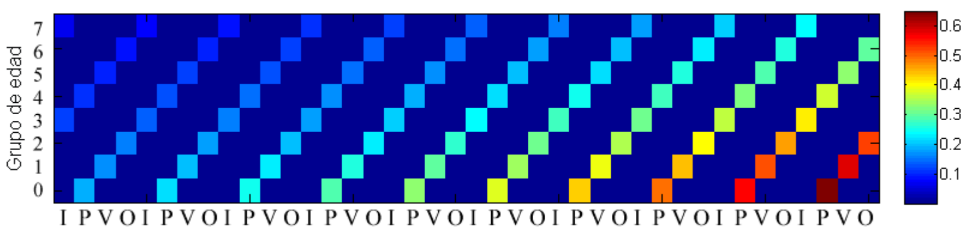
$$\mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0.9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0.9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0.9 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

y que para el resto de las estaciones son las mismas pero con unas tasas de reproducción iguales a 0. La solución tiene un $\alpha = 1.1463$, y durante las cuatro primeras estaciones, empezando por el invierno, las intensidades y los precios resultan

$$\mathbf{X_0} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0.1209 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0.0692]$$
$$\mathbf{X_1} = [0.1901 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0.1088 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$
$$\mathbf{X_2} = [0 \quad 0.1711 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0.0979 \quad 0 \quad 0]$$
$$\mathbf{X_3} = [0 \quad 0 \quad 0.1540 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0.0881 \quad 0]$$

$$\mathbf{Y}_0 = \begin{bmatrix} 2.5307 \\ 2.5307 \\ 6.9521 \\ 6.9521 \\ 4.4214 \\ 4.4214 \\ 4.4214 \\ 4.4214 \end{bmatrix} \quad \mathbf{Y}_1 = \begin{bmatrix} 4.4214 \\ 2.8119 \\ 2.8119 \\ 2.8119 \\ 2.8119 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{Y}_2 = \begin{bmatrix} 4.9126 \\ 4.9126 \\ 3.1243 \\ 3.1243 \\ 3.1243 \\ 3.1243 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{Y}_3 = \begin{bmatrix} 1.9870 \\ 5.4584 \\ 5.4584 \\ 3.4715 \\ 3.4715 \\ 3.4715 \\ 3.4715 \\ 0 \end{bmatrix}$$

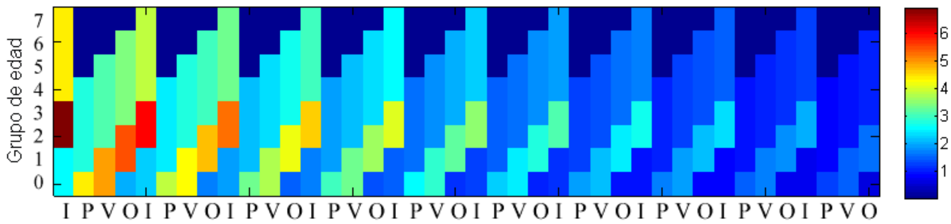
Representaremos gráficamente[62] la evolución temporal de las intensidades a lo largo de cuarenta estaciones



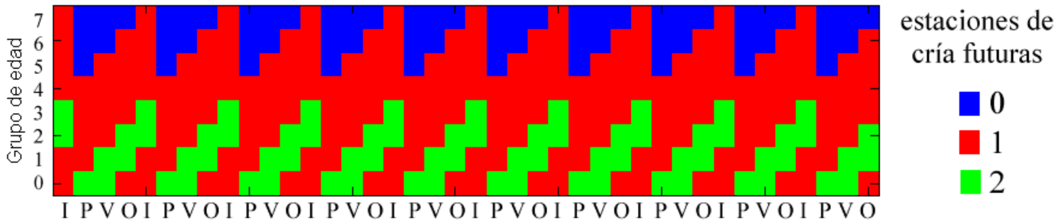
[62] Usamos la variante del diagrama de Lexis que ya vimos en §7.1, representando el tiempo en el eje horizontal (indicamos la inicial de la estación correspondiente) y el grupo de edad en el eje vertical.

Vemos que la solución para las intensidades, que son iguales al número de hembras en cada grupo de edad, implica que la población evoluciona cíclicamente. Como todos los partos se producen en las primaveras no hay ningún individuo que nazca en el resto de las estaciones. El número de hembras de un grupo de edad en una estación será el del grupo de edad inferior en la estación anterior por la tasa de supervivencia. El número de nacidas en primavera será la suma del número de hembras en invierno por la tasa de reproducción correspondiente a su edad.

Los precios o valores-reproductivos durante las cuarenta estaciones resultan



Podemos entender con facilidad estos precios recordando que el valor de una hembra es lo que va a producir. Así que el valor que se corresponde a un grupo de edad será el del grupo de edad superior en la siguiente estación multiplicado por la tasa de supervivencia; en invierno con aquellos grupos que se reproduzcan además hay que sumar el valor de una hembra recién nacida en la siguiente primavera por la tasa de reproducción. Los precios parecen mostrar una estructura muy compleja, pero en realidad siguen siendo proporcionales al número de descendientes a largo plazo a partir de las hijas que se tendrán en el futuro, como vimos en §7.1 con las matrices de Leslie[63]. La aparente complejidad es consecuencia de que este número depende del número de estaciones de cría futuras, de las primaveras futuras habiendo alcanzado la madurez reproductiva, y de que además hay que tener en cuenta la supervivencia y la actualización. Representaremos el número de estaciones de cría futuras para aclarar la estructura de los precios.



[63] Estamos de nuevo ante un caso de consumo simple, por lo que podemos calcular la dinámica de la población con $\mathbf{X}_t = \mathbf{X}_{t-1}\,\mathbf{B}_{t-1}$

En definitiva, las hembras que no alcanzarán en ningún caso la siguiente estación de cría tienen un precio nulo y las que pueden alcanzar sólo una estación de cría un precio menor del que tienen las que pueden alcanzar dos. Los precios están definidos incluso para las hembras que pudieran nacer fuera de la primavera, puesto que si introdujéramos desde el exterior una de ellas también tendría unos descendientes a largo plazo.

10.4.2 VNC con recetas constantes

Hay muchos aspectos interesantes que tratar sobre VNC, pero aquí nos detendremos sólo en su estudio cuando las recetas no cambian con el tiempo[64]. Para muchas recetas la solución es simplemente la de VN, pero existen algunos tipos de recetas para las que además de la solución de VN existen soluciones particulares de VNC diferentes. En definitiva, es posible que existan crecimientos proporcionales cíclicos máximos diferentes del crecimiento proporcional incluso cuando las recetas no cambian con el tiempo. Las recetas para las que ocurre esto tienen un componente cíclico en su estructura, componente que no se detecta directamente con VN pero que sí podemos estudiar con VNC.

Por ejemplo, planteemos VNC con sucesivos períodos para las recetas

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Con $p = 1$ VNC tiene como solución $\alpha = 2$, $\mathbf{X} = [0.3333, 0.3333, 0.3333]$, $\mathbf{Y} = [2, 2, 2]$, que por supuesto es la misma que VN, ya que VNC es VN si p es 1.

Con $p = 2$ VNC tiene como solución $\alpha = 4$, $\mathbf{X} = [0.1111, 0.1111, 0.1111, 0.2222, 0.2222, 0.2222]$, $\mathbf{Y} = [12, 12, 12, 6, 6, 6]$, que en realidad sigue siendo equivalente a VN; el factor de expansión se eleva al cuadrado porque ahora el tiempo total se duplica; las intensidades evolucionan pues en cada unidad temporal de base multiplicándose por 2, y los precios dividiéndose entre 2 de acuerdo con la ley del interés compuesto.

Pero con $p = 3$ las cosas sí son diferentes a VN. Ahora existen tres soluciones, todas con el mismo $\alpha = 8$, que resultan

[64] Otro aspecto interesante sería el estudio de los procesos de almacenamiento, que pueden entenderse como transportes en el tiempo.

X = [0.1429, 0, 0, 0, 0.2857, 0, 0, 0, 0.5714], **Y** = [56, 0, 0, 0, 28, 0, 0, 0, 14]
X = [0, 0.1429, 0, 0, 0, 0.2857, 0.5714, 0, 0], **Y** = [0, 56, 0, 0, 0, 28, 14, 0, 0]
X = [0, 0, 0.1429, 0.2857, 0, 0, 0, 0.5714, 0], **Y** = [0, 0, 56, 28, 0, 0, 0, 14, 0]

Cuando existan varias soluciones con el mismo factor para VN o VNC diremos que estamos ante un caso *degenerado*. Entonces la suma de estas soluciones multiplicadas cada una de ellas por un número si resulta no-negativa también es una solución. Es evidente que en nuestro ejemplo la suma de estas tres soluciones se corresponde a la solución de VN, pero también que cada una de ellas (o una combinación de las mismas) es una solución por derecho propio. En realidad en nuestro ejemplo cada una de estas soluciones puede interpretarse como una de las fases de un ciclo de período 3, posible incluso aunque las recetas no cambien con el tiempo. Y en general si existe una solución de VNC con recetas constantes esta solución desplazada una fase del ciclo también será solución.

Si en nuestro ejemplo resolviéramos VNC para p mayores nos encontraríamos con el caso degenerado cuando p fuera múltiplo de 3, pero estas soluciones serían equivalentes a las que hemos estudiado. Así para $p = 4$, que no es múltiplo de 3, tenemos la solución no degenerada con $\alpha = 16$, **X** = [0.0222, 0.0222, 0.0222, 0.0444, 0.0444, 0.0444, 0.0888, 0.0888, 0.0888, 0.1778, 0.1778, 0.1778] e **Y** = [240, 240, 240, 120, 120, 120, 60, 60, 60, 30, 30, 30], donde las intensidades evolucionan con un crecimiento proporcional y los precios de acuerdo a ley del interés compuesto; y también para $p = 5$ tenemos una solución no degenerada. Pero para $p = 6$ tenemos de nuevo tres soluciones. En general si con recetas constantes resolvemos VNC y encontramos q soluciones degeneradas de período p existirán también soluciones degeneradas para los períodos múltiplos de p (y para los divisores de q que serán combinaciones lineales; en nuestro ejemplo q es igual a 3, un número primo que no tiene divisores). No obstante las posibles soluciones de VNC con recetas constantes tendrán el mismo factor de expansión que las de VN teniendo en cuenta el aumento del tiempo total[65]. De hecho existen métodos para detectar cuando estamos ante matrices que muestran este tipo de comportamiento, sin necesidad de resolver VNC para cada p, pero no los desarrollaremos aquí [66].

[65] A partir de unas soluciones degeneradas podemos construir un crecimiento proporcional combinando linealmente las diferentes fases del ciclo, y por lo tanto construimos una solución de VN.
[66] Así podemos hacer esto estudiando el resto de autovalores y no sólo del que resulta el factor de expansión (es obvia la similitud con el estudio de las resonancias). Un ejemplo de recetas con

10.5 Planteamiento de TEC

Estudiaremos cuánto pueden reducirse las jornadas manteniendo un ciclo estacionario. Si las jornadas se reducen en un factor ε las recetas en el momento t serán

$$\mathbf{A_t} = \mathbf{C_t} + \varepsilon\,\mathbf{V_t}$$
$$\mathbf{B_t} = \mathbf{D_t} + \varepsilon\,\mathbf{W_t}$$

y la matriz **F** queda

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} -\mathbf{C_0} - \varepsilon\mathbf{V_0} & \mathbf{D_0} + \varepsilon\mathbf{W_0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{C_1} - \varepsilon\mathbf{V_1} & \mathbf{D_1} + \varepsilon\mathbf{W_1} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{C_2} - \varepsilon\mathbf{V_2} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & -\mathbf{C_{p-2}} - \varepsilon\mathbf{V_{p-2}} & \mathbf{D_{p-2}} + \varepsilon\mathbf{W_{p-2}} \\ \mathbf{D_{p-1}} + \varepsilon\mathbf{W_{p-1}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & -\mathbf{C_{p-1}} - \varepsilon\mathbf{V_{p-1}} \end{bmatrix}$$

Definiendo las matrices **C**, **V**, **D** y **W** como

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C_0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C_1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{C_2} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{C_{p-2}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{C_{p-1}} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{V_0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{V_1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{V_2} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{V_{p-2}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{V_{p-1}} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{D_0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{D_1} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{D_{p-2}} \\ \mathbf{D_{p-1}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{W_0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{W_1} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{W_{p-2}} \\ \mathbf{W_{p-1}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

tenemos que

$$\mathbf{F} = \mathbf{D} + \varepsilon\,\mathbf{W} - \mathbf{C} - \varepsilon\,\mathbf{V}$$

Llamaremos TEC al ciclo estacionario para el que las jornadas se reducen lo máximo posible. La condición de estado estacionario $\mathbf{X\,F} = \mathbf{0}$ también puede escribirse como

$$\mathbf{X}\,(\mathbf{C} + \varepsilon\,\mathbf{V}) = \mathbf{X}\,(\mathbf{D} + \varepsilon\,\mathbf{W})$$

Por lo tanto para calcular TEC tenemos que resolver

---

comportamiento intrínsecamente periódico son las matrices de Leslie en las que las tasas de supervivencia son positivas pero sólo una tasa de reproducción es positiva. El ciclo en este caso tendrá un periodo p igual a la edad de la reproducción; véase Leslie [1]. También si las tasas de reproducción son no nulas sólo cada p edades.

$$\max_{\varepsilon,\mathbf{X}} \varepsilon$$
$$\mathbf{X}\,(\mathbf{C} + \varepsilon\,\mathbf{V}) = \mathbf{X}\,(\mathbf{D} + \varepsilon\,\mathbf{W})$$
$$\mathbf{X} \geq \mathbf{0}$$
$$\varepsilon > 0$$

Vemos que podemos calcular TEC usando la misma formulación matemática que para TE, el caso con recetas constantes. Las condiciones de máximo son también iguales. No nos detendremos más en TEC porque se le aplica lo dicho para VNC.

10.6 Procesos duraderos

Definiremos $\mathbf{f_{t,r}}$ como la matriz de flujos netos de los procesos que se inician en el momento *t* a la edad *r*. Las condiciones de balance material quedan

$$\begin{aligned}
&\ldots\\
&\ldots + \mathbf{X_{-5}}\,\mathbf{f_{-5,5}} + \mathbf{X_{-4}}\,\mathbf{f_{-4,4}} + \mathbf{X_{-3}}\,\mathbf{f_{-3,3}} + \mathbf{X_{-2}}\,\mathbf{f_{-2,2}} + \mathbf{X_{-1}}\,\mathbf{f_{-1,1}} + \mathbf{X_0}\,\mathbf{f_{0,0}} = \mathbf{0}\\
&\ldots + \mathbf{X_{-4}}\,\mathbf{f_{-4,5}} + \mathbf{X_{-3}}\,\mathbf{f_{-3,4}} + \mathbf{X_{-2}}\,\mathbf{f_{-2,3}} + \mathbf{X_{-1}}\,\mathbf{f_{-1,2}} + \mathbf{X_0}\,\mathbf{f_{0,1}} + \mathbf{X_1}\,\mathbf{f_{1,0}} = \mathbf{0}\\
&\ldots + \mathbf{X_{-3}}\,\mathbf{f_{-3,5}} + \mathbf{X_{-2}}\,\mathbf{f_{-2,4}} + \mathbf{X_{-1}}\,\mathbf{f_{-1,3}} + \mathbf{X_0}\,\mathbf{f_{0,2}} + \mathbf{X_1}\,\mathbf{f_{1,1}} + \mathbf{X_2}\,\mathbf{f_{2,0}} = \mathbf{0}\\
&\ldots + \mathbf{X_{-2}}\,\mathbf{f_{-2,5}} + \mathbf{X_{-1}}\,\mathbf{f_{-1,4}} + \mathbf{X_0}\,\mathbf{f_{0,3}} + \mathbf{X_1}\,\mathbf{f_{1,2}} + \mathbf{X_2}\,\mathbf{f_{2,1}} + \mathbf{X_3}\,\mathbf{f_{3,0}} = \mathbf{0}\\
&\ldots
\end{aligned}$$

y en general

$$\sum_{r=0} \mathbf{X_{t-r}}\mathbf{f_{t-r,r}} = \mathbf{0} \qquad \{10.7\}$$

Estas condiciones se aplican también cuando no estamos ante un comportamiento simple y dicen que el flujo neto de cada materia en cada instante es 0. En cada momento *t* el número de materias será igual al de columnas de $\mathbf{f_{t-r,r}}$ para todo *r* mayor o igual a 0, y el número de procesos que se inician será igual al de filas de $\mathbf{f_{t,r}}$ para todo *r* mayor o igual a que 0, pero el número de materias y de procesos que se inician puede cambiar con el tiempo.

Si las recetas de los procesos se repiten cada *p* pasos temporales tenemos que

$$\mathbf{f_{t+p,r}} = \mathbf{f_{t,r}}$$

Pongamos el caso en el que $p = 4$. Definiremos las matrices $\mathbf{f_r}$ como

$$\mathbf{f_0} = \begin{bmatrix} \mathbf{f_{0,0}} & \mathbf{f_{0,1}} & \mathbf{f_{0,2}} & \mathbf{f_{0,3}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{f_{1,0}} & \mathbf{f_{1,1}} & \mathbf{f_{1,2}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{f_{2,0}} & \mathbf{f_{2,1}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{f_{3,0}} \end{bmatrix} \quad \mathbf{f_1} = \begin{bmatrix} \mathbf{f_{0,4}} & \mathbf{f_{0,5}} & \mathbf{f_{0,6}} & \mathbf{f_{0,7}} \\ \mathbf{f_{1,3}} & \mathbf{f_{1,4}} & \mathbf{f_{1,5}} & \mathbf{f_{1,6}} \\ \mathbf{f_{2,2}} & \mathbf{f_{2,3}} & \mathbf{f_{2,4}} & \mathbf{f_{2,5}} \\ \mathbf{f_{3,1}} & \mathbf{f_{3,2}} & \mathbf{f_{3,3}} & \mathbf{f_{3,4}} \end{bmatrix} \quad \mathbf{f_2} = \begin{bmatrix} \mathbf{f_{0,8}} & \mathbf{f_{0,9}} & \mathbf{f_{0,10}} & \mathbf{f_{0,11}} \\ \mathbf{f_{1,7}} & \mathbf{f_{1,8}} & \mathbf{f_{1,9}} & \mathbf{f_{1,10}} \\ \mathbf{f_{2,6}} & \mathbf{f_{2,7}} & \mathbf{f_{2,8}} & \mathbf{f_{2,9}} \\ \mathbf{f_{3,5}} & \mathbf{f_{3,6}} & \mathbf{f_{3,7}} & \mathbf{f_{3,8}} \end{bmatrix}$$

etc., y también

$$\mathbf{F}(\alpha) = \mathbf{f_0} + \frac{\mathbf{f_1}}{\alpha} + \frac{\mathbf{f_2}}{\alpha^2} + \frac{\mathbf{f_3}}{\alpha^3} + \frac{\mathbf{f_4}}{\alpha^4} + \ldots = \sum_{r=0} \frac{\mathbf{f_r}}{\alpha^r}$$

Podemos proceder de manera similar a como vimos en §10.2, y tenemos que las condiciones de crecimiento cíclico quedan

$$\mathbf{X}\,\mathbf{F}(\alpha) = \mathbf{0}$$
$$\mathbf{X} \geq \mathbf{0}$$
$$\alpha > 0$$

Llegamos a las mismas ecuaciones que en §8.2. La formulación de VN y TE también es similar.

11: Tipos de procesos y materias

11.1 Tipos de materias

Llamamos *sistema* a la parte del universo que estudiamos, *entorno* al resto del universo y *frontera* al límite que separa al sistema del entorno. La frontera del sistema la podemos entender como una membrana o pared y cuando no sea una realidad física la concebiremos como una línea imaginaria[67].

Como hasta ahora escribimos[68] que **balance material** = **0** esto equivale a suponer que la frontera es una membrana impermeable para todas las materias. Los balances materiales son restricciones de índole física análogas a los principios de conservación, e implican que en cada instante las cantidades de cada materia consumidas por los procesos en el sistema tienen que ser iguales a las cantidades producidas. Escribimos los balances materiales para las materias del sistema y no para las del entorno, porque es el sistema lo que estudiamos (aunque por supuesto siempre podemos definir el sistema de manera que abarquemos aquellos aspectos que consideremos fundamentales).

Pero una membrana puede ser, con respecto a una materia, impermeable, permeable, o permeable en una dirección. Por lo tanto, dependiendo de si una materia puede atravesar o no la frontera, distinguiremos cuatro tipos de materias en el sistema:

---

[67] Era mi intención incluir en este trabajo toda una parte dedicada al estudio de los sistemas desde un punto de vista físico, en especial termodinámico, y de su relación con el entorno. Por ejemplo, es evidente que no puede mantenerse un estado estacionario fuera del estado muerto en un sistema que no incorpore y expulse materias desde y al entorno (ni siquiera luz y calor) y que tampoco será posible un crecimiento. Es por ello que el estudio de la relación física entre un sistema y su entorno es fundamental. Espero poder tratar estos aspectos en futuras versiones de este trabajo.

[68] Con anterioridad hemos visto cómo escribir los balances materiales y las condiciones de signo de las intensidades (o de los insumos) dependiendo de cómo escribamos también las recetas (o las funciones de producción):

un paso temporal {1.1}	tiempo discreto {8.8}	tiempo continuo {8.13}	funciones de producción {9.2}
$-\mathbf{X_t A_t} + \mathbf{X_{t-1} B_{t-1}} = \mathbf{0}$	$\sum_{r=0} \mathbf{X_{t-r} f_{t-r,r}} = \mathbf{0}$	$\int_0^\infty \mathbf{X}(t-r)\,\mathbf{f}(t-r,r)\,dr = \mathbf{0}$	$f_{i,t}(\mathbf{X_{t-1}}) - \sum_j \chi_{i,j,t} = 0$
$\mathbf{X_t \geq 0}$	$\mathbf{X_t \geq 0}$	$\mathbf{X}(t) \geq \mathbf{0}$	$\mathbf{X_t \geq 0}$

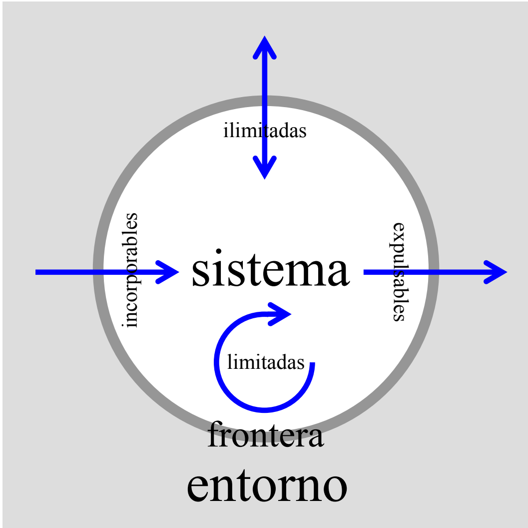
Hacemos notar que estas expresiones pueden aplicarse a comportamientos no simples y de hecho las hemos escrito para cuando las recetas o funciones cambian con el tiempo, como ya hicimos en {10.1} y {10.7}. Para no tener que detallar cada caso, en este capítulo nos referiremos a estas expresiones escribiendo

balance material = **0**
intensidad ≥ **0**

A partir de estas expresiones definíamos los comportamientos simples suponiendo que las recetas o las funciones de producción no cambiaban con el tiempo (o lo hacían de forma periódica) y que las intensidades o los insumos crecían de manera (periódicamente) geométrica.

- *materias expulsables*, si pueden expulsarse desde el sistema al entorno,
- *materias incorporables*, si pueden incorporarse al sistema desde el entorno,
- *materias ilimitadas*, si son a la vez expulsables e incorporables,
- *materias limitadas*, si no son ni expulsables ni incorporables.

Un gráfico servirá para aclarar la exposición



La frontera del sistema es para las materias expulsables permeable sólo para la salida, para las incorporables permeable sólo para la entrada, para las ilimitadas permeable en ambas direcciones y para las limitadas impermeable[69]. Por lo tanto el tipo de materia depende de si la materia puede franquear o no la frontera del sistema y de la dirección en la que puede hacerlo. Tenemos pues que el sistema, o si se prefiere el metabolismo, incorpora materias desde su entorno, las transforma en su interior y expulsa materias a su entorno.

Definiremos los comportamientos simples como aquellos en los que la materia no cambia de tipo con el tiempo, o que como las recetas cambia de forma periódica. Supondremos que el entorno puede proveer sin cota de las materias incorporables al sistema y que el entorno puede absorber las materias expulsables también sin límite[70].

[69] Hablamos de membranas o paredes permeables en una dirección como una abstracción, ya que éste es un concepto que debe tratarse con cuidado si no queremos caer en imposibles desde un punto de vista físico, como ya señaló Szilárd. Una membrana permeable en una dirección (sin necesidad de la aplicación de trabajo para su funcionamiento) sería un “demonio de Maxwell” que podría generar un gradiente que podría usarse como fuente de trabajo. Una membrana permeable en una dirección implica también que la dinámica del sistema depende de la dirección temporal.

[70] Por supuesto es obvio que ningún entorno real, tampoco el planeta Tierra, puede proveer o absorber materias sin cota y que este hecho tiene consecuencias muy importantes a la hora de estudiar la dinámica de los sistemas. Un sistema que crece geométricamente acabará siendo relativamente grande para cualquier entorno, como sabían perfectamente Ricardo y los clásicos o Jevons (ya hicimos una breve referencia a esto al tratar los “rendimientos decrecientes” en el capítulo 9). Por ejemplo, la población que estudiamos en §7.1, que crece con un factor de 1.047 por quinquenio equivalente a una tasa menor del 1%

Además en nuestros modelos supondremos que el tipo de cada materia es un dato conocido.

En nuestras ecuaciones podemos tratar los diferentes tipos de materias escribiendo las condiciones de balance material para cada tipo con signos diferentes[71] según corresponda:

- *materias expulsables*, **balance material** $\geq$ **0**,
- *materias incorporables*, **balance material** $\leq$ **0**,
- *materias ilimitadas*, **balance material** $\gtreqless$ **0**,
- *materias limitadas*, **balance material** = **0**.

Por lo tanto la manera en la que la materia pueda franquear o no la frontera del sistema determina el signo de la condición de balance material correspondiente.

11.2 Tipos de procesos

Además los procesos operan de forma definida por el signo de su intensidad. Apuntaremos brevemente este aspecto, que en otro trabajo desarrollaremos con más detalle. Dependiendo del sentido en el que opere, podemos tratar los diferentes tipos de procesos escribiendo las intensidades con signos diferentes

- *procesos directos*, **intensidad** $\geq$ **0**,
- *procesos inversos*, **intensidad** $\leq$ **0**,
- *procesos mixtos*, **intensidad** $\gtreqless$ **0**,
- *procesos imposibles*, **intensidad** = **0**.

Por ejemplo, si tenemos las recetas escritas con las matrices **A** y **B**, y éstas son no-negativas, los procesos directos consumirán una serie de materias en el momento t y producirán otras en el momento t+1, los procesos inversos producirán en t y consumirán en t+1, los procesos mixtos pueden operar tanto de forma directa como inversa y los procesos imposibles no pueden operar de ninguna manera.

---

anual, se duplicaría cada 75 años; un sistema que creciera con una tasa anual del 8% se duplicaría cada 9 años, se decuplicaría cada 30 y se centuplicaría cada 60. Un crecimiento geométrico acabará pues chocando con las limitaciones que le impone el entorno, y esto es clave para entender aspectos fundamentales de las economías, por ejemplo las "crisis periódicas", como veremos en otro trabajo.
Por lo tanto con nuestros modelos sólo pretendemos estudiar algunas propiedades de la realidad y para ello abstraemos otras circunstancias. No obstante, si el sistema es relativamente pequeño con respecto al entorno, suponer que éste puede proveer o absorber determinadas materias sin límite no es demasiado irreal, sobre todo teniendo en cuenta que siempre podemos definir como limitadas las materias para las que esto no puede aceptarse. De todas formas más adelante plantearemos otras ecuaciones que no necesitan de estos supuestos y que por ello sí pueden tratar con entornos más realistas.

[71] El símbolo $\gtreqless$ significará no-restringido, esto es "mayor, menor o igual que".

11.3 Forma estándar

Nosotros planteamos nuestros sistemas originariamente escribiendo las condiciones de balance material con signo =, lo que equivale a suponer que todas las materias son limitadas, y las intensidades de los procesos con signo ≥, que equivale a suponer que los procesos son directos[72]. Hicimos esto para facilitar la comprensión, pero también porque con estos supuestos podemos abarcar el resto de los casos, como veremos. Los sistemas de ecuaciones escritos bajo estos supuestos diremos que están en *forma estándar*, mientras que si los balances materiales están escritos con desigualdades diremos que están en *forma general*.

11.3.1 Tipos de materias definidas con procesos añadidos

Para tratar los tipos de materias podemos añadir una serie de procesos de incorporación o eliminación gratuita según corresponda, manteniendo las condiciones de balance material escritas con igualdades (y ya hicimos esto mismo en algún ejemplo anterior). Por supuesto recordemos que estos procesos no significan en ningún caso que las materias puedan crearse o destruirse, sino que son trasladadas desde o hasta el entorno[73]. Así para cada materia, dependiendo de su tipo, procederemos:

- *materias expulsables*, añadimos un proceso de eliminación gratuita,
- *materias incorporables*, añadimos un proceso de incorporación gratuita,
- *materias ilimitadas*, añadimos un proceso de eliminación gratuita y otro de incorporación gratuita,
- *materias limitadas*, no añadimos ningún proceso.

Los procesos de eliminación gratuita podemos escribirlos como procesos que consumen la materia sin producir ninguna otra. Si la materia correspondiente fuera la primera, con los procesos escritos con las recetas **A** y **B**, tendríamos

$\mathbf{A} = [1, 0, 0, ..., 0] \qquad \mathbf{B} = [0, 0, 0, ..., 0]$

Para los procesos escritos con las matrices de flujos netos $\mathbf{f_r}$

$\mathbf{f_0} = [-1, 0, 0, ..., 0] \quad \mathbf{f_1} = [0, 0, 0, ..., 0] \quad \mathbf{f_2} = [0, 0, 0, ..., 0] \quad ...$

---

[72] En cambio en el artículo original John von Neumann supone “que los factores de producción naturales, incluyendo el trabajo, están disponibles ilimitadamente” y escribe las condiciones de balance material para el resto de materias con desigualdades. Esto equivale a suponer implícitamente que la tierra, los humanos y demás “factores de producción naturales” serían materias ilimitadas y el resto materias expulsables.

[73] De hecho hubiéramos podido tratar los flujos a través de la frontera del sistema como un caso particular de transporte espacial, en donde la materia es transportada desde el entorno al sistema o al revés y en donde se abstrae el entorno. Pero estos aspectos tienen la suficiente importancia como para que resulte preferible dedicarles una atención específica.

Para los procesos escritos con las funciones de flujos netos $\mathbf{f}(r)$, y usando la delta de Dirac,

$$\mathbf{f}(r) = [-\delta(\mathrm{r}-0), 0, 0, \ldots, 0]$$

Para los procesos escritos con funciones de producción $f_i(\mathbf{X})$ podemos añadir un insumo más de la materia correspondiente que no es argumento de ninguna función de producción.

Los procesos de incorporación gratuita podemos escribirlos como procesos que producen la materia sin consumir ninguna otra. Con las recetas **A** y **B** podemos escribir[74]

$$\mathbf{A} = [-1, 0, 0, ..., 0] \quad \mathbf{B} = [0, 0, 0, ..., 0]$$

Para los procesos escritos con las matrices $\mathbf{f_r}$ nos queda

$$\mathbf{f_0} = [1, 0, 0, ..., 0] \qquad \mathbf{f_1} = [0, 0, 0, ..., 0] \qquad \mathbf{f_2} = [0, 0, 0, ..., 0] \qquad ...$$

Para los procesos escritos con $\mathbf{f}(r)$ tenemos

$$\mathbf{f}(r) = [\delta(\mathrm{r}-0), 0, 0, \ldots, 0]$$

Para los procesos escritos con funciones de producción $f_i(\mathbf{X})$ podemos reescribir la función, que sería la antigua más una variable que puede tomar valores no negativos.

Tenemos que añadiendo procesos de eliminación e incorporación gratuita podemos tratar todas las materias como si fueran limitadas y por ello tratar todos los tipos de materias escribiendo las condiciones de balance material con igualdades.

11.3.2 Tipos de procesos definidos cambiando los signos de las recetas

Para tratar los tipos de procesos podemos cambiar el signo de sus flujos netos, para poder escribir el problema manteniendo las intensidades escritas con signo ≥. Así para cada proceso, dependiendo de su tipo, procederemos:

- *procesos directos*, escribimos el proceso tal cual,
- *procesos inversos*, escribimos el proceso cambiando el signo de sus flujos netos,
- *procesos mixtos*, escribimos el proceso tal cual y además añadimos otro con el signo de sus flujos netos cambiados,
- *procesos imposibles*, no escribimos el proceso.

[74] A veces nos interesa que todos los coeficientes sean no-negativos, pero entonces podemos retrasar la incorporación un paso temporal y escribir

$$\mathbf{A} = [0, 0, 0, ..., 0] \qquad \mathbf{B} = [1, 0, 0, ..., 0]$$

No obstante entonces debemos tener en cuenta el retraso a la hora de analizar la solución de VN, aunque no en la de TE porque entonces la solución no depende del tiempo.

Si, una vez resuelto VN o TE, queremos convertir las intensidades a la forma general debemos cambiar el signo de las intensidades de los procesos inversos, debemos tomar como intensidad de los procesos mixtos la del proceso correspondiente escrito tal cual menos la del proceso con el signo cambiado y debemos atribuir una intensidad 0 a los procesos imposibles.

11.4 Forma canónica

Además de la forma estándar a veces es útil, por ejemplo en algunos algoritmos, plantear los problemas de manera que tanto a las intensidades como a los balances materiales les corresponda el signo $\geq$. Los problemas escritos de esta manera diremos que están en *forma canónica*.

11.4.1 Tipos de materias definidas cambiando los signos

Para tratar los tipos de materias procederemos:

- *materias expulsables*, escribimos la materia tal cual,
- *materias incorporables*, escribimos la materia cambiando su signo,
- *materias ilimitadas*, no escribimos la materia,
- *materias limitadas*, escribimos la materia tal cual y añadimos otra igual pero con el signo cambiado.

El problema de esta manera de tratar las materias es que tenemos que alejarnos de un planteamiento físico de las recetas, de manera que por ejemplo en el caso de las limitadas tenemos que incluir dos veces la misma materia, aunque con el signo cambiado. Esto supone un inconveniente al estudiar la Física de los sistemas y por eso preferiremos la forma estándar o la general. Una vez resueltas las ecuaciones en la forma canónica, para pasar a la forma general debemos cambiar el signo del valor de las materias incorporables, tomar como 0 el valor de las ilimitadas y atribuir un valor a las limitadas igual al multiplicador de la materia escrita tal cual menos el de la materia escrita con signo cambiado.

11.4.2 Tipos de procesos definidos cambiando los signos

Procederemos como ya señalamos en §11.3.2.

11.5 Tipo de materia y valor

El tipo de materia determina el signo del multiplicador de Lagrange correspondiente en nuestros modelos, como se evidencia transcribiendo las recetas a la forma estándar. En efecto, para las materias expulsables las condiciones de máximo de los procesos de eliminación gratuita quedan

$-y_i \leq 0$

y si estos procesos operan se aplica =. Por lo tanto una materia expulsable tiene valor no-negativo y si el proceso de eliminación opera valor nulo, como ya señalamos en §4.4.

Para las materias incorporables las condiciones de máximo de los procesos de incorporación gratuita quedan

$y_i \leq 0$

y si estos procesos operan se aplica =. En consecuencia una materia incorporable tiene valor no-positivo, y si el proceso de incorporación opera valor nulo.

Para las materias ilimitadas las condiciones de máximo de los procesos de eliminación gratuita quedan

$-y_i \leq 0$

y las de los procesos de incorporación gratuita resultan

$y_i \leq 0$

Por lo tanto una materia ilimitada tiene siempre valor nulo.

Para las materias limitadas no necesitamos añadir ningún proceso, por lo que pueden mostrar valores de cualquier signo.

En resumen, los valores (los precios en VN y los valores-trabajo en TE) nos quedan según el tipo de materia:

- *materias expulsables*, **balance material ≥ 0**, **valor ≥ 0**,
- *materias incorporables*, **balance material ≤ 0**, **valor ≤ 0**,
- *materias ilimitadas*, **balance material** $\gtrless$ **0**, **valor = 0**,
- *materias limitadas*, **balance material = 0**, **valor** $\gtrless$ **0**,

y si alguna materia es realmente expulsada o incorporada entonces su valor es nulo, lo que podemos anotar

balance material · valor = 0.

A todas estas relaciones las llamaremos *reglas del signo del balance material y el valor*.

Estas propiedades también podrían haberse deducido si en vez de transcribir las recetas a la forma estándar hubiéramos escrito las condiciones de balance material con los signos correspondientes. En definitiva, en nuestras ecuaciones el signo del valor de una materia depende de la capacidad del sistema para incorporarla o eliminarla al entorno, depende de la permeabilidad de la frontera: *el signo del valor de una materia depende de cómo puede atravesar la frontera*.

Hacemos notar que éstas son leyes que se observan en los capitalismos reales y que nosotros no estamos suponiéndolas sino que las deducimos. Así en el artículo original de John von Neumann (con materias expulsables) se supone que los precios son no negativos y la "regla de los bienes gratuitos" (si una materia es realmente expulsada su precio resultaba nulo). Pero en realidad nosotros no necesitamos suponer esta regla ni que los precios son no negativos, sino que deducimos estas propiedades como condiciones de máximo para el caso de las materias expulsables[75].

11.6 Tipo de proceso y balance contable

En nuestras ecuaciones a cada balance material le corresponde un multiplicador de Lagrange o valor, y a cada variable o intensidad una condición de máximo. En nuestros problemas llamaremos a la condición de máximo que se corresponde a cada intensidad *balance contable*[76]. El balance contable puede interpretarse en VN como los beneficios marginales (o unitarios, como señalamos en §4.6) y en TE como la plusvalía marginal que se corresponde a la intensidad o al insumo. En la forma estándar, con intensidades no negativas, teníamos que **balance contable** $\leq$ **0**, y si el proceso operaba se aplicaba =. Pero ya señalamos en §11.3.2 que podemos reescribir con las recetas el resto de los tipos de procesos en la forma estándar, cambiando el signo de sus flujos netos. Entonces los balances contables deben cambiarse de signo de manera correspondiente.

[75] Además si escribiéramos "los factores de producción naturales, incluyendo el trabajo" como materias ilimitadas tendrían valor nulo.

[76] Los balances contables y las condiciones de signo de los valores quedan, dependiendo de cómo escribamos también las recetas (o las funciones de producción):

un paso temporal {2.1}	tiempo discreto {8.11}	tiempo continuo {8.16}	funciones de producción {9.4}
$-\mathbf{A_t Y_t} + \mathbf{B_t Y_{t+1}} \leq \mathbf{0}$	$\sum_{r=0} \mathbf{f_{t,r} Y_{t+r}} \leq \mathbf{0}$	$\int_0^\infty \mathbf{f}(t,r)\,\mathbf{Y}(t+r)dr \leq \mathbf{0}$	$\sum_k \frac{\partial f_{k,t+1}}{\partial \chi_{i,j,t}} y_{k,t+1} - y_{i,t} \leq 0$
$\mathbf{Y_t} \gtreqless \mathbf{0}$	$\mathbf{Y_t} \gtreqless \mathbf{0}$	$\mathbf{Y}(t) \gtreqless \mathbf{0}$	$\mathbf{Y_t} \gtreqless \mathbf{0}$

Hacemos notar que estas expresiones pueden aplicarse a comportamientos no simples y de hecho las hemos escrito para cuando las recetas o funciones cambian con el tiempo. Para no tener que detallar cada caso, en este capítulo nos referiremos a estas expresiones escribiendo

balance contable $\leq$ **0**

valor $\gtreqless$ **0**

Los procesos directos tendrán balances contables negativos o nulos y si operan nulos, o sea que en VN los beneficios de los procesos que operan son nulos y los que no operan no-positivos. Los procesos inversos tendrán balances contables positivos o nulos y si operan nulos; pero en estos procesos se produce $\mathbf{A_t}$ y se consume $\mathbf{B_t}$, por lo que tenemos que en VN los beneficios serían $\mathbf{A_t}\ \mathbf{Y_t} - \mathbf{B_t}\ \mathbf{Y_{t+1}}$, que es el balance contable con signo cambiado, por lo que los beneficios vuelven a ser nulos para los procesos que operan y no-positivos para los que no operan. Un proceso mixto lo escribíamos en forma estándar con dos procesos directos y los dos balances contables correspondientes tienen que ser menores o iguales a 0; por lo tanto el proceso necesariamente tendrá un balance contable nulo y en VN los beneficios serán nulos. Los procesos imposibles no los escribíamos en forma estándar por lo que pueden tener balances contables y por ende beneficios en VN de cualquier signo.

Por lo tanto, para todos los procesos, salvo los imposibles, se cumple la ley de la rentabilidad en VN. Y lo dicho para VN se aplica también a la plusvalía en TE y la ley ricardiana. En resumen:

- *procesos directos*, **intensidad** $\geq$ **0**, **balance contable** $\leq$ **0**,
- *procesos inversos*, **intensidad** $\leq$ **0**, **balance contable** $\geq$ **0**,
- *procesos mixtos*, **intensidad** $\gtreqless$ **0**, **balance contable** = **0**,
- *procesos imposibles*, **intensidad** = **0**, **balance contable** $\gtreqless$ **0**,

y si algún proceso opera en algún sentido, si tiene una intensidad no nula, entonces su balance contable es nulo, lo que podemos anotar

intensidad · **balance contable** = **0**.

A todas estas relaciones las llamaremos *reglas del signo de la intensidad y el balance contable*.

Estas propiedades también podrían haberse deducido si en vez de tratar los diferentes tipos de procesos cambiando los signos de sus flujos netos hubiéramos escrito las intensidades con los signos correspondientes. Alguna de estas leyes fueron ya estudiadas en el pasado y así en el modelo VN original se suponía que todos los procesos eran directos, que los beneficios eran nulos o negativos, y también que los procesos que tenían beneficios negativos no operaban (lo que se conoce como “regla de la rentabilidad”). Pero nosotros no estamos suponiendo estas leyes, como sí se hacía en el modelo VN original, sino que las encontramos como una necesidad lógica.

En definitiva el signo del balance contable de un proceso depende del signo de su intensidad, esto es, *el signo del balance contable depende de la forma en la que un proceso puede operar*.

11.7 Recapitulación sobre las reglas de los signos

Resumiremos las reglas de los signos con la tabla

intensidad ~ 0	**↔ balance contable ~ 0**	**intensidad · balance contable = 0**
balance material ~ 0	**↔ –valor ~ 0**	**balance material · valor = 0**

donde substituiremos los caracteres ~ de acuerdo al esquema

$\geq$ en una expresión implica $\leq$ en la correspondiente
= en una expresión implica $\gtreqless$ en la correspondiente

y que se aplica a cualquier forma de escribir las recetas[77]. Además hacemos notar que para los procesos con intensidad no nula el balance contable es 0 y para los procesos con valor no nulo el balance material es 0.

11.8 Frontera con costes

Hasta ahora hemos tratado con materias que podían incorporarse al sistema o eliminarse el entorno de manera gratuita sin necesidad de consumir recursos para ello. No obstante es muy interesante estudiar el caso en que sí se necesite de otros recursos para usarlas, el caso en que atravesar las fronteras del sistema implique el consumo de recursos.

Por ejemplo, imaginemos una economía que puede acceder a vastos depósitos de carbón en su entorno, lo suficientemente grandes como para poder hacer la abstracción de que el carbón del subsuelo está disponible sin limitación. Pero el carbón del subsuelo habrá que incorporarlo al sistema y esta extracción a menudo supone un coste. Así que de nuestro análisis anterior tenemos que si incluyéramos el carbón del subsuelo en las ecuaciones, como parte del sistema, sería una materia ilimitada y tendría un valor nulo; pero sin embargo el carbón en la superficie lo tendría positivo porque se necesita

[77] Fijémonos en el signo – delante de **valor**. Por ejemplo, para las recetas $\mathbf{A_t}$ y $\mathbf{B_t}$ en la forma estándar tenemos

$$\mathbf{X_t} \geq \mathbf{0} \qquad -\mathbf{A_t}\,\mathbf{Y_t} + \mathbf{B_t}\,\mathbf{Y_{t+1}} \leq \mathbf{0} \qquad \mathbf{X_t}^{T} \cdot (-\mathbf{A_t}\,\mathbf{Y_t} + \mathbf{B_t}\,\mathbf{Y_{t+1}}) = \mathbf{0}$$
$$-\mathbf{X_t}\,\mathbf{A_t} + \mathbf{X_{t-1}}\,\mathbf{B_{t-1}} = \mathbf{0} \qquad -\mathbf{Y_t} \gtreqless \mathbf{0} \qquad (-\mathbf{X_t}\,\mathbf{A_t} + \mathbf{X_{t-1}}\,\mathbf{B_{t-1}}) \cdot \mathbf{Y_t}^{T} = \mathbf{0}$$

(anotamos con el símbolo · el producto elemento a elemento y con el superíndice ^{T} la transposición, y en general nos interesan las soluciones no triviales, aquellas para las que existe algún consumo o producción de alguna materia con valor no nulo). Con otro tipo de recetas o de funciones de producción el planteamiento es similar, simplemente aplicando las expresiones que recordamos en las notas de §11.1 y §11.6. Observemos que ahora hemos escrito las recetas de manera que estamos ante unos sistemas de ecuaciones que no suponen un comportamiento simple.

consumir recursos para su extracción. Como resultado de tener que destinar recursos para que la materia atraviese la frontera tenemos pues un *coste de incorporación* análogo al coste de producción. De hecho el valor del carbón en la superficie será igual al coste actualizado que se requiere para su extracción. En general, para las materias que pueden ser incorporadas del entorno (con o sin costes) tenemos que valor ≤ “costes de incorporación o producción” y, para los procesos que operan, valor = “menor coste de incorporación o producción”. Para que una materia sea incorporada del entorno es necesario pues que el coste de incorporación sea menor que el de producción.

Imaginemos ahora una economía que puede expulsar una materia al entorno sin límites, por ejemplo un gas a la atmósfera. Imaginemos también que en un proceso se produce como desperdicio ese gas pero que trasladarlo hasta la atmósfera supone consumir recursos, por ejemplo por los costes de mantenimiento de una chimenea. Entonces, aunque el gas atmosférico tendría valor nulo si lo consideráramos parte del sistema y lo incluyéramos en las ecuaciones, el gas antes de entrar en el proceso de eliminación lo tendrá negativo. Y de hecho el valor de este gas será menos el coste actualizado (esto es, el ingreso actualizado) que se requiere para su eliminación, o *ingreso de expulsión*. En general, para las materias que pueden ser expulsadas al entorno (con o sin costes) tenemos que valor ≥ “ingresos de expulsión o consumo” y, para los procesos que operan, valor = “mayor ingreso de expulsión o consumo”. Para que una materia pueda ser expulsada al entorno es necesario pues que el coste de expulsión con signo cambiado sea mayor que el ingreso de consumo. Una materia, para la que se necesiten consumir recursos de valor positivo para su expulsión, será realmente expulsada si su ingreso de consumo es un número negativo menor en módulo que el coste de expulsión.

En general con todas las materias tenemos que[78], para todos los procesos disponibles,

ingresos de expulsión o consumo ≤ valor ≤ costes de incorporación o producción

y, con los procesos que operan,

mayor ingreso de expulsión o consumo = valor = menor coste de incorporación o producción.

[78] Insistiremos en que estas expresiones deben entenderse en un sentido marginal, aunque las expongamos en un sentido unitario para facilitar la comprensión.

Por lo tanto, en nuestras ecuaciones tenemos que diferenciar entre las materias de las que podemos hacer la abstracción de que son ilimitadas (o expulsables o incorporables) y las que se encuentran dentro del sistema de manera limitada. Aunque sean físicamente similares para nosotros son materias distintas precisamente por la forma en la que pueden atravesar la frontera del sistema. En consecuencia aunque algunas materias sean ilimitadas en el entorno, y evidentemente esto es siempre una abstracción porque ilimitado no hay nada en el Universo, esto no significa que necesariamente tengan valores nulos dentro del sistema si se necesita consumir recursos para incorporarlas o expulsarlas[79].

[79] Aunque en este trabajo no estudiaremos el funcionamiento del mecanismo mercantil-capitalista, si hacemos notar que a menudo en los capitalismos reales se trata a algunos recursos no renovables de forma similar a las materias incorporables, con un precio parecido a su coste de extracción, y también a algunos desperdicios de forma similar a las materias expulsables, con un precio parecido a menos su coste de eliminación, incluso cuando es evidente que no son estos tipos de materias y que el entorno no podrá proveerlas o recibirlas en el futuro como en el presente. Hay varias razones para esto y una de las más importantes es la dificultad del cálculo de la asignación en los capitalismos, y en otros sistemas, ante la imposibilidad de prever el futuro con total, o a veces con alguna, exactitud. Por ello frecuentemente en los capitalismos se considera el futuro, de muy difícil previsión, como una extrapolación ruda del pasado y del presente, incluso cuando el mantenimiento de estas condiciones es manifiestamente imposible. En consecuencia la asignación en los capitalismos reales a menudo adolece de una "miopía" a la hora de tratar el futuro, aspecto que es también muy importante a la hora de entender los ciclos económicos.
Sin embargo en VN, como en otras ecuaciones que estudiaremos más adelante, estamos ante lo que podríamos describir como una asignación perfectamente previsora, y ésta es una distancia más entre nuestros modelos y los capitalismos reales. Hacemos notar esta circunstancia para subrayar de nuevo que nunca debemos olvidar la distancia entre nuestros modelos y estas realidades.

12: Intercambios

12.1 Intercambios externos y valor

Apuntaremos sólo un brevísimo análisis de los intercambios, ya que trataremos este aspecto de manera más detallada en otros trabajos. No supondremos que nuestro sistema opera internamente de forma mercantil, pero sí que otros sistemas le ofrecen la posibilidad de intercambiar una serie de materias con unas tasas dadas. Por lo tanto estudiaremos cuánto puede crecer una economía y cuánto pueden reducirse las jornadas si el sistema puede intercambiar materias con otros sistemas, a los que llamaremos *mercados*. Trataremos estos intercambios con varias alternativas.

12.1.1 Trueques

Una primera alternativa consiste en considerar los trueques bilaterales posibles como procesos, de manera que escribiremos la recepción por el sistema o "compra" de p_{ij} unidades de materia j a cambio de la entrega a los mercados o "venta" de una unidad de materia i. Llamaremos a estos p_{ij} *coeficientes de trueque*. Así el proceso de recepción o compra de 9 unidades de la materia 2 por la entrega o venta de 1 unidad de la materia 3 podemos escribirlo, con las matrices $\mathbf{f_r}$,

$\mathbf{f_0} = [0, 9, –1, 0, …]$ $\mathbf{f_1} = [0, 0, 0, 0, …]$ $\mathbf{f_2} = [0, 0, 0, 0, …]$ …

Tanto en VN como en TE la condición de máximo de estos procesos de trueque queda

$$-y_i + p_{ij} y_j \leq 0$$

y si el intercambio se efectúa se aplica =, por lo que

$$y_i \geq p_{ij} y_j$$

En nuestros modelos el valor de la materia a entregar es mayor o igual del valor de lo que se recibiría a cambio, y si el trueque se realiza es igual. Si fuera posible el trueque inverso con un coeficiente p_{ji}, esto la compra de p_{ji} unidades de materia i por la venta de una unidad de materia j, tendríamos que

$$p_{ij} \leq y_i / y_j \leq 1 / p_{ji}$$

En consecuencia, la posibilidad de trueques implica que *los valores internos relativos están delimitados por los coeficientes de trueque*[80].

[80] Los coeficientes deben mostrar alguna coherencia. Supongamos que un sistema pudiera entregar 1 litro de leche por 2 de zumo y también 1 de zumo por 3 de leche; si el sistema entregara 1 litro de leche para obtener 2 de zumo y entregara este zumo a cambio de leche obtendría un total de 6 litros de leche; el sistema podría obtener toda la leche que quisiera, y por lo tanto todo el zumo también, de manera instantánea (porque escribimos los trueques como procesos instantáneos, aunque por supuesto no hay

12.1.2 Compra-venta

Otra alternativa consiste en escribir las recepciones por el sistema o compras como un proceso de incorporación y las entregas simultaneas a los mercados o ventas como un proceso de eliminación, pero acompañados del consumo y la producción de una materia simbólica añadida que llamaremos *divisa* y que actúa como unidad contable. Supondremos que los mercados ofrecen al sistema unos intercambios con unos precios de compra c_j y unos precios de venta v_j conocidos[81]. Supondremos además que la condición de balance material correspondiente a la divisa es nula, de manera que el conjunto de las compras equivale al conjunto de las ventas, ponderados ambos con los precios que ofrecen los mercados. Así un ejemplo de un sistema que puede intercambiar con unos mercados podría ser

$$\mathbf{f_0} = \begin{bmatrix} -280 & -12 & 0 \\ -120 & -8 & 0 \\ -280 & -12 & 0 \\ 1 & 0 & -c_1 \\ 0 & 1 & -c_2 \\ -1 & 0 & v_1 \\ 0 & -1 & v_2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{f_1} = \begin{bmatrix} 575 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 \\ 400 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

---

dificultad para tratar trueques como procesos que requieren tiempo, o con costes añadidos); estaríamos pues ante materias incorporables de forma gratuita. Para que éste no sea el caso es necesario que $p_{ij}\,p_{ji} \le 1$, que $p_{ij}\,p_{jk}\,p_{ki} \le 1$, y lo mismo para trueques en círculo con un mayor número de materias. También es fácil ver que los trueques podrían suponer la eliminación gratuita de las materias si no se cumple que $p_{ij}\,p_{ji} \ge 1$, que $p_{ij}\,p_{jk}\,p_{ki} \ge 1$, etc. En definitiva, si queremos que los coeficientes de trueque sea coherentes, que no impliquen la incorporación o eliminación gratuita de materias, es necesario que $p_{ij}\,p_{ji} = 1$, que $p_{ij}\,p_{jk}\,p_{ki} = 1$, que $p_{ij}\,p_{jk}\,p_{kl}\,p_{li} = 1$, etc.

Podemos construir fácilmente unos trueques coherentes si para una materia *k* conocemos los p_{ki} para todo *i* y si además $p_{ik} = 1 / p_{ki}$, escribiendo sólo los procesos de trueque para estos p_{ki} y p_{ik}. La materia *k* se usaría como unidad de cuenta para los trueques entre otras materias; trocar la materia 1 por la 2 se realizaría trocando la materia 1 por la *k* y la *k* por la 2, sin que en el cómputo global se entregue o reciba ninguna cantidad de *k* (desarrollaremos esta idea a continuación). Observemos que para coeficientes coherentes tenemos que $y_i / y_j = p_{ij} = 1 / p_{ji}$, los valores relativos internos serían iguales a los coeficientes de trueque.

No supone dificultad escribir trueques en los que participen más de dos materias, pero no necesitamos escribirlos porque pueden resultar de la operación simultánea de varios trueques bilaterales.

[81] Los precios de venta y compra tienen unas condiciones de coherencia similar a las estudiadas en el trueque, ya que son los coeficientes de trueque y de trueque inverso con respecto a la divisa, $v_j = p_{jd}$, $c_j = 1 / p_{dj}$. Así suponiendo que $c_j \ge v_j$ descartamos la posibilidad de incorporar gratuitamente la materia *j* y la divisa, y suponiendo que $c_j \le v_j$ la de eliminarlas gratuitamente. Aunque pudiera parecer que sería más sencillo suponer simplemente que $c_j = v_j$ o incluso escribir un solo símbolo para un precio exterior (y entonces los intercambios serían coherentes y la divisa sería la unidad de cuenta del trueque, sólo que sin usar una materia física en particular), nuestro análisis gana en claridad tratando estas magnitudes como diferentes. Hacemos notar que cuando los precios de compra y venta son iguales basta con escribir los procesos de compra y definirlos como procesos mixtos, esto es con intensidades que pueden tomar cualquier signo.

donde son conocidos los precios de compra y venta, aunque no los hayamos especificado en el ejemplo. La primera materia simboliza el trigo, la segunda el hierro y la tercera la divisa. Los tres primeros procesos son los procesos productivos habituales, los dos siguientes simbolizan las compras desde los mercados (y que suponen la incorporación al sistema de la materia correspondiente) y los dos últimos las ventas a los mercados (y que suponen la eliminación del sistema de la materia). En este ejemplo hemos escrito la posibilidad de que se compren o vendan todas las materias en el sistema, pero podemos limitar esta posibilidad sólo a un número de estas materias, por ejemplo a las existentes en unos determinados puntos geográficos.

Como la divisa es una materia simbólica o contable el balance correspondiente no es propiamente un balance material. No obstante podemos interpretar su multiplicador de Lagrange, que anotaremos como λ, como el valor de la divisa en términos del valor del resto de las materias. Llamaremos a $c_j\,\lambda$ *coste de compra* y a $v_j\,\lambda$ *ingreso de venta* de la materia j. De la condición de máximo para los procesos de compra al exterior para la materia j (tanto en VN como en TE) tenemos

$$y_j - c_j\,\lambda \leq 0$$

y si el proceso de compra opera se aplica =. De la condición de máximo para los procesos de venta al exterior tenemos

$$-y_j + v_j\,\lambda \leq 0$$

y si el proceso de venta opera se aplica =. En consecuencia para la materia j nos queda

$$v_j\,\lambda \leq y_j \leq c_j\,\lambda$$

esto es, para aquellas materias que puedan intercambiarse con los mercados, los valores de las materias en el sistema están delimitados por los ingresos de venta y los costes de compra; si la materia fuera realmente vendida o comprada su valor sería el ingreso de venta o el coste de compra; si estos últimos fueran iguales entonces serían proporcionales al valor de la materia. La posibilidad de intercambiar materias con los mercados determina que en el sistema los valores de las materias intercambiables están delimitados por los ingresos de venta y los costes de compra.

12.1.3 Flujos de materias a través de la frontera

Una tercera manera de estudiar los intercambios es tratar las materias que fluyen a través de la frontera como variables, bajo la restricción de que el valor de las materias que se compran y que se venden se igualan en términos de los precios que ofrecen los mercados al sistema. Distinguiremos entre las materias que se compran $\mathscr{C}$ y las que se venden $\mathscr{V}$ y supondremos que son magnitudes no negativas. Los precios de compra los anotaremos como c y los de venta como v y serán para nosotros datos. VN quedaría

$$\max_{\alpha,\mathbf{X},\mathscr{C},\mathscr{V}} \alpha$$
$$\mathscr{C} - \mathscr{V} + \mathbf{X}\,\mathbf{F}(\alpha) = \mathbf{0}$$
$$\mathscr{V}\mathsf{v} = \mathscr{C}\mathsf{c}$$
$$\mathbf{X} \geq \mathbf{0}$$
$$\mathscr{C} \geq \mathbf{0}$$
$$\mathscr{V} \geq \mathbf{0}$$
$$\alpha > 0$$

Las condiciones de máximo correspondientes a las intensidades y al factor de expansión no cambian con respecto al modelo sin intercambios. La condición con respecto a las materias que se compran $\mathscr{C}$ queda (anotaremos como λ el multiplicador de Lagrange que se corresponde al balance de las ventas y compras)

$$\mathbf{Y} - \mathsf{c}\,\lambda \leq \mathbf{0}, \qquad \text{y si la materia es comprada se aplica =}$$

y la condición con respecto a las materias que se venden $\mathscr{V}$ resulta

$$-\mathbf{Y} + \mathsf{v}\,\lambda \leq \mathbf{0}, \qquad \text{y si la materia es vendida se aplica =}$$

Luego

$$\mathsf{v}\,\lambda \leq \mathbf{Y} \leq \mathsf{c}\,\lambda$$

y si la materia es realmente comprada o vendida se aplica =. De nuevo los valores internos están delimitados por los que ofrecen los mercados, y si $\mathsf{c} = \mathsf{v}$ los valores internos serían proporcionales a los del mercado. Aunque hemos escrito las ecuaciones para el caso en el que todas las materias pueden comprarse y venderse podemos limitar las compras sólo a algunas materias y hacer lo mismo con las ventas[82]. El planteamiento en TE es similar.

---

[82] En Morgenstern y Thompson [1] puede encontrarse un tratamiento de los intercambios bajo el supuesto de que los precios internos están delimitados por los que ofrecen los mercados. Obsérvese que nosotros no hacemos este supuesto sino que deducimos esta propiedad.
Es evidente que esta tercera manera de tratar los intercambios es equivalente a la segunda (y por lo tanto a la primera), y si planteamos ambos métodos con los mismos precios de compra y de venta entonces las $\mathscr{C}$ y $\mathscr{V}$ solución del tercer método serían también iguales a las intensidades de los procesos de compra y de venta solución del segundo. También si los precios de compra y venta son iguales hubiéramos podido escribir las condiciones de balance material y el balance de compras y ventas como

$$\mathscr{C} + \mathbf{X}\,\mathbf{F}(\alpha) = \mathbf{0}$$
$$0 = \mathscr{C}\mathsf{c}$$

tratando $\mathscr{C}$ como una variable irrestricta. La condición de máximo para $\mathscr{C}$ sería

$$\mathbf{Y} - \mathsf{c}\,\lambda = \mathbf{0}$$

por lo que los multiplicadores de Lagrange serían proporcionales a los precios exteriores.

12.1.4 Débitos y créditos

Estudiaremos los intercambios en los que la recepción y entrega de las materias no son simultáneas. Llamaremos *débitos* a las compras del sistema en las que el pago a los mercados se efectúa con posterioridad y *créditos* a las ventas del sistema en las que el pago de los mercados se realiza con posterioridad. Desarrollaremos un planteamiento similar al visto en §12.1.2 para tratar los intercambios simultáneos, de manera que el conjunto de las entregas y recepciones de la divisa, teniendo en cuenta la actualización, se anulen. Por ejemplo, si el trigo pudiera comprarse a débito pagando dos instantes temporales después y venderse de manera simultánea, y si el hierro puede comprarse a débito pagando un instante temporal después y venderse a crédito recibiendo el pago dos instantes después, las recetas nos quedarían

$$\mathbf{f_0} = \begin{bmatrix} -280 & -12 & 0 \\ -120 & -8 & 0 \\ -280 & -12 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & v_{1_0} \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{f_1} = \begin{bmatrix} 575 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 \\ 400 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c_{2_1} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{f_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c_{1_2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v_{2_2} \end{bmatrix}$$

donde suponemos conocidos los c_{i_t} y los v_{i_t}, aunque no los hayamos especificado en el ejemplo. Hacemos notar que los pagos y los ingresos se establecen en términos de las materias intercambiadas, y aquí la divisa es de nuevo sólo una unidad contable con las que el sistema iguala las recepciones y entregas de materias en el tiempo en términos de los precios de débito y crédito que ofrecen los mercados. En general las condiciones de máximo de VN para los procesos de débito resultan

$$y_i - c_{i_t} \lambda / \alpha^t \leq 0$$

donde λ es el multiplicador de Lagrange que se corresponde al balance actualizado de la divisa, y que podemos interpretar como el valor de la divisa en términos de los precios del resto de materias. Por lo tanto el precio de la materia a recibir a débito será menor o igual al pago aplazado que hay que efectuar por ella a los mercados, teniendo en cuenta

Es fácil ver que hubiéramos podido tratar las materias expulsables como aquellas que pueden venderse a precio 0 al entorno pero no pueden ser compradas, las incorporables como las que pueden comprarse a precio 0 pero no pueden ser vendidas, las ilimitadas como las que pueden comprarse y venderse a precio 0, y las limitadas como las que no pueden ser ni compradas ni vendidas. Por lo tanto los intercambios con el entorno pueden entenderse como flujos a través de la frontera y viceversa; y ya dijimos que a su vez éstos pueden verse como una forma especial de transporte entre el sistema y el entorno.

la actualización; y si el proceso de débito opera será igual. Para los procesos de crédito las condiciones de máximo de VN resultan

$$-y_i + v_{i_t}\lambda/\alpha^t \leq 0$$

por lo que el precio de la materia a entregar a crédito a los mercados será mayor o igual al ingreso aplazado que se recibirá, teniendo en cuenta la actualización; y si el proceso de crédito opera será igual. En consecuencia, si una materia puede entregarse a crédito o recibirse a débito (para el caso de que el aplazamiento del pago e ingreso es igual) nos queda

$$v_{i_t}\lambda/\alpha^t \leq y_i \leq c_{i_t}\lambda/\alpha^t$$

En VN la existencia de procesos de crédito y débito con los mercados implica que el *valor está delimitado por los ingresos de crédito y los costes de débito*.[83]

Aunque hemos detallado el ejemplo con un solo pago o ingreso de la divisa, no hay dificultad en tratar los débitos y créditos que suponen una serie de pagos e ingresos a lo largo del tiempo, y también pueden tratarse los casos en los que los flujos de materias tienen una estructura temporal. Tampoco existen dificultades para desarrollar los intercambios en el tiempo de manera similar al tratado para los intercambios simultáneos con los trueques en §12.1.1 y con los flujos de materias a través de la frontera en §12.1.3.

En TE, razonando de manera similar desde las correspondientes condiciones de máximo, llegamos a la expresión

$$v_{i_t}\lambda \leq y_i \leq c_{i_t}\lambda$$

y si el proceso de crédito o débito opera se aplica =. En TE los intercambios se efectúan con independencia del tiempo, y por ello no hay diferencia entre los débitos y créditos y las compras y ventas, puesto que la solución de TE no depende de la estructura temporal de los procesos, como ya hemos señalado.

12.2 Intercambios internos y valor

Hemos visto que existe un vínculo entre los multiplicadores de Lagrange y las tasas de intercambio externas, las que ofrecen los mercados al sistema. Ilustraremos ahora

[83] Los coeficientes de crédito y débito deben mostrar de nuevo alguna coherencia, como en el caso de los intercambios simultáneos, pero teniendo en cuenta la actualización.

brevemente el vínculo entre los multiplicadores de Lagrange y unas posibles tasas de intercambio internas al sistema. Nos limitaremos a estudiar los intercambios simultáneos.

Supongamos unas recetas cualquiera y calculemos la solución de VN correspondiente, por ejemplo como en §2.5. Planteemos un nuevo problema en donde sólo incluiremos algunas de las recetas que sí operan según la solución anterior y además unos procesos de intercambio, como en §12.1.2, con precios de compra y venta iguales a los multiplicadores de Lagrange de VN. Si incluimos sólo el primer proceso tenemos

$$\mathbf{f_0} = \begin{bmatrix} -280 & -12 & 0 \\ 1 & 0 & -1/2624 \\ 0 & 1 & -15/2624 \\ -1 & 0 & 1/2624 \\ 0 & -1 & 15/2624 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{f_1} = \begin{bmatrix} 575 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Este problema puede interpretarse como un subsistema, como una unidad de producción o empresa, que se relaciona de manera mercantil con el resto de la economía. La solución de VN de este problema, al que llamaremos *VN local*, resulta $\alpha = 1.25$, $\mathbf{X_t} = 1.25^t$ [4, 0, 48, 720, 0], $\mathbf{Y_t} = 1.25^{-t}$ [1/1472, 15/1472, 2624/1472]; los nuevos precios son proporcionales a los del problema general (tienen que serlo porque los precios de compra y venta son iguales) y el factor de expansión también es el mismo. Las intensidades son tales que el subsistema compra hierro con el tercer proceso y vende trigo con el cuarto al resto del sistema.

Si planteamos un subsistema sólo con el segundo proceso de §2.5 la solución de VN local resulta $\alpha = 1.25$, $\mathbf{X_t} = 1.25^t$ [6, 720, 0, 0, 48], $\mathbf{Y_t} = 1.25^{-t}$ [1/1152, 15/1152, 2624/1152], los precios son de nuevo proporcionales a los del problema general, el factor de expansión es el mismo y las intensidades son tales que el subsistema compra trigo con el segundo proceso y vende hierro con el quinto al resto del sistema, además en unas cantidades (proporcionalmente) inversas al problema con sólo el primer proceso.

Diremos que existe una *coordinación* de unos subsistemas cuando los intercambios entre ellos son tales que no hay déficit ni superávit de ninguna materia a lo largo del tiempo[84]. Cuando las precios de compra y venta son los del problema general tenemos que los subsistemas pueden coordinarse creciendo cada uno lo máximo posible con el mismo factor de expansión. Pero si supusiéramos otros precios de compra-venta diferentes a los precios del problema general los factores de expansión de los VN locales no tendrían que ser iguales a los del problema general. Por ejemplo, si supusiéramos que los precios de compra-venta son proporcionales a [1, 12], en vez de [1, 15], el factor de expansión del primer subsistema sería $\alpha = 1.3561$ y el del segundo $\alpha = 1.1111$, por lo que no podrían coordinar sus intercambios en el tiempo. Si una tonelada de hierro se intercambia por menos de 15 arrobas de trigo, si el hierro es relativamente más barato, el proceso de producción del trigo podría expandirse más deprisa porque obtendría más hierro para consumir como insumo a cambio de su excedente de producción de trigo, mientras que el proceso de producción de hierro tendría que hacerlo necesariamente más despacio porque obtendría menos trigo a cambio.

En definitiva, *las tasas de intercambio con las que unos subsistemas pueden coordinarse, creciendo cada uno lo máximo posible, son proporcionales a los multiplicadores de Lagrange de VN del problema general*, y además *la coordinación de estos subsistemas equivale a la asignación de VN* [85]. Con estas tasas de intercambio, y

---

[84] La coordinación de unos subsistemas que pueden intercambiar entre sí implica que se cumplen las condiciones de balance material para el conjunto del sistema a lo largo del tiempo.
Si planteamos un subsistema sólo con el tercer proceso de §2.5, que en la solución de VN general no operaba, la solución sería $\alpha = 0.869565$, $\mathbf{X_t} = 0.869565^t$ [1, 0, 12, 180, 0], $\mathbf{Y_t} = 0.869565^{-t}$ [1/529, 15/529, 2624/529], por lo que el factor de expansión sería menor que el de la solución de VN general. Por lo tanto este proceso no podría coordinarse con los otros dos, que sí operaban en la solución general, intercambiando con los precios de VN.

[85] Si planteamos los VN locales con unos precios de compra-venta que son los precios de VN necesariamente los multiplicadores de Lagrange de cada VN local tienen que ser proporcionales a los de VN, como demostramos en §12.1.2. Si en un subsistema hemos incluido un proceso que operaba y por ello cumplía el balance contable en el problema general, para estos multiplicadores de Lagrange existirá solución para VN local con el factor de expansión de VN general, ya que el balance contable del problema local será proporcional al del problema general. Y si en un subsistema hemos definido un proceso que no operaba y no cumplía el balance contable en el problema general, para estos multiplicadores de Lagrange no existirá solución para VN local con el factor de expansión de VN general porque entonces satisfaría el balance contable en el problema general (aunque es posible que exista solución con otro factor de expansión). Como en el problema general los balances materiales de cada materia se anulan, podremos escalar los subsistemas de los procesos que sí operan en el problema general para que los balances materiales totales, a través de la compra-venta, se anulen también.
En definitiva, a partir de una solución de VN podemos construir una serie de subsistemas que intercambian materias entre ellos con unas tasas que son proporcionales a los precios-VN, y además los intercambios son tales que no hay déficit ni superávit de ninguna materia. Y, a la inversa, si podemos coordinar con unas tasas de intercambio unos subsistemas, de forma que cada uno crezca lo máximo posible con el mismo factor, con la escala a la que se realiza la coordinación, el factor de expansión de las subsistemas que operan y las tasas de intercambio correspondientes tenemos una solución de VN para el

sólo con éstas, los subsistemas operando de manera atomizada y creciendo ellos mismos lo máximo posible pueden comprar unos lo que venden otros de manera que los balances materiales totales se anulen, alcanzando con ello la asignación de VN para el conjunto de la economía. Los precios-VN son las tasas de intercambio que permiten el mantenimiento de la asociación mercantil entre economías con crecimiento máximo.

Lo que hemos dicho de VN podemos decirlo también de TE, pero entonces los subsistemas operarían cada uno para reducir las jornadas lo máximo posible manteniendo un estado estacionario y no para maximizar su expansión. Los valores-trabajo son las tasas de intercambio que permiten que estos subsistemas se coordinen de manera que no exista déficit ni superávit de ninguna materia y que todos los subsistemas que operan reduzcan las jornadas en la misma medida, y esta coordinación producirá la asignación de TE. Los valores-trabajo son las tasas de intercambio que permiten el mantenimiento de la asociación mercantil entre economías en estado estacionario con la mayor reducción de las jornadas.

Por lo tanto VN (y TE) también puede interpretarse como la búsqueda de las tasas de intercambio y las escalas a la que tienen que operar unos subsistemas para que creciendo cada uno (reduciendo las jornadas en TE) lo máximo posible pueden coordinar sus producciones y consumos manteniendo un crecimiento proporcional (un estado estacionario) con el mismo factor de expansión (de reducción de las jornadas).

El problema de la asignación está atomizado tanto en un capitalismo como en una producción mercantil simple, de manera que las unidades de producción pueden relacionarse entre si mediante intercambios. Esta atomización de la asignación es fundamental en las sociedades que superan los niveles más primitivos de desarrollo tecnológico, ya que en una economía compleja, más en una con un nivel tecnológico como el actual, no es posible establecer una asignación global debido a la dificultad de los problemas de obtener la información necesaria, de efectuar el cálculo y de aplicar el resultado del mismo en la realidad. Por ello un método para establecer la asignación consiste en dividir el problema en una serie de subproblemas menores y después coordinar estos subproblemas, consiste en ejecutar la asignación en pequeñas unidades

---

problema general, por lo que las tasas de intercambio que permiten esta coordinación son los precios de VN del problema general.

de producción y coordinar éstas con algún mecanismo. El mecanismo mercantil basado en los intercambios entre unidades atomizadas es una manera de intentar establecer esa coordinación.

Observemos no obstante que no hemos estudiado la forma de operar del mecanismo mercantil y por ejemplo no hemos detallado cómo se forman las tasas de intercambio[86]. Por lo tanto no estamos diciendo que el mecanismo mercantil produzca necesariamente la asignación y los valores de VN (o de TE), porque tampoco afirmamos que este mecanismo consiga efectivamente la coordinación de las unidades de producción, y de hecho cuando los modelos no tengan solución tal coordinación no será posible. Sólo decimos que si con unos subsistemas que maximizan su factor de expansión (su factor de explotación) y que intercambian materias, un mecanismo económico, el mercantil u otro cualquiera, consiguiera esa coordinación tendría que ser con unas tasas de intercambio y una asignación proporcionales a los valores y a las intensidades de VN (de TE).[87]

---

[86] Llamaremos *tasas de intercambio* a los "precios" con los que se efectúan los intercambios, *ponderaciones* a los "precios" con los que se calculan los beneficios, y *valores* a los "precios" entendidos como los multiplicadores de Lagrange que se corresponden a los balances materiales.
Los capitalismos se caracterizan por la existencia de un gran número de unidades de asignación o empresas que maximizan internamente el beneficio y que intercambian las materias entre ellas. En los capitalismos se observa que las ponderaciones, los valores internos en cada empresa y las tasas de intercambio para el conjunto de la economía tienden a ser proporcionales, y por eso desde la experiencia en estos sistemas resulta muy sencillo confundir estos conceptos, donde por ejemplo a los tres se los conoce como "precios".
Pero debemos notar que son conceptos distintos, y que en otras sociedades no necesariamente tendrían que ser proporcionales o incluso no necesariamente tendrían que existir. Así en un socialismo mercantil existirían tasas de intercambio para el conjunto de la economía y valores internos en cada unidad de producción, porque en cada unidad se maximizaría una función objetivo, pero no existirían ponderaciones porque no se maximizaría el beneficio sino otra función. En un socialismo planificado o en la isla de Robinson no existirían ni tasas de intercambio ni ponderaciones, porque no habría intercambios ni se maximizaría el beneficio, pero sí valores para el conjunto de la economía, porque Robinson también asigna maximizando una función objetivo (podríamos decir que su "utilidad subjetiva") sometida a unos balances materiales. Y en un "capitalismo planificado", en una asignación que se estableciera de forma planificada con el fin de maximizar el beneficio, tendríamos ponderaciones y valores, ambos para el conjunto de la economía, pero no tasas de intercambio porque no habría intercambios.
Por lo tanto estamos ante tres conceptos que es importante no confundir. No obstante es obvio que existirán tasas de intercambio en todas las economías mercantiles, que existirán valores en todas las economías optimas (allí donde se maximice una función objetivo restringida a los balances materiales) y que existirán ponderaciones allí donde la función objetivo sea precisamente el beneficio.
En otros trabajos estudiaremos el mecanismo mercantil y los capitalismos con detalle; aquí sólo hemos querido apuntar la existencia de estos tres aspectos fundamentales del precio en los capitalismos.
[87] En el artículo original John von Neumann dice que como resultado de su argumentación parece seguirse que "(si nuestros supuestos son válidos) el mecanismo de precios normal provoca las intensidades de producción técnicamente más eficientes". Es evidente que en un sentido estricto esto no es correcto, puesto que como hemos visto TE también puede ser entendida como una economía mercantil. Por lo tanto el mecanismo de precios no implica necesariamente un capitalismo, ni una asignación parecida a VN, y son concebibles otras sociedades que operen mediante este mecanismo, como un

No hemos analizado los intercambios en el tiempo, los créditos y débitos, y su relación con los subsistemas. Pero es fácil ver que si las tasas de intercambio internas son los precios de VN, cumpliendo la ley del interés compuesto con un factor igual al de expansión máxima, los subsistemas se podrían coordinar obteniendo la solución de VN.

12.3 Intercambios y sistemas biológicos

A veces se conciben los intercambios mercantiles como algo típico y exclusivo de las economías humanas, pero situaciones similares son muy comunes en otros sistemas. Por ejemplo, un pez limpiador ofrece su servicio a cambio del alimento que para él suponen los parásitos extraídos; el pez limpiador y el limpiado tienen la opción de no participar en el intercambio y sin embargo a ambos les conviene porque ambos mejoran su capacidad reproductiva con él, por lo que podemos hablar de un intercambio “voluntario”.

Igualmente una abeja intercambia con una planta el servicio de transporte de polen a cambio del néctar que ésta le ofrece. En este caso pudiera parecer que la planta no tiene capacidad de rechazar el intercambio, y que por ello estaríamos en una situación distinta a la anterior, ya que la planta no tiene “voluntad”. Pero en realidad la planta ha evolucionado para favorecer este intercambio como método de aumentar su reproducción, hasta el punto de desarrollar flores con este fin, de forma que la planta entrega alimento a cambio de la polinización. En consecuencia, podemos considerar este tipo de intercambios también como “voluntarios” desde un punto de vista evolutivo, porque ambas especies han evolucionado para favorecerlos y porque ambas salen ganando con ellos.

---

socialismo mercantil. Con esto no queremos negar que bajo determinadas condiciones el mecanismo mercantil no tienda a producir sociedades parecidas a VN, o al capitalismo, pero para que esto ocurra es necesario que existan otros condicionantes, como por ejemplo que la competencia entre las unidades de producción las obligue a maximizar del beneficio.

Por otra parte, los economistas clásicos y neoclásicos tendían a concebir los valores como unas magnitudes que, aunque ciertamente encontraban una expresión como tasas de intercambio, tenían una realidad “previa” a los intercambios (en forma de “costes objetivos” o de “utilidades subjetivas”). Pero algunos autores desarrollaron una concepción diferente del valor, y se entendió el mismo como una magnitud cuyo papel fundamental era hacer compatibles las acciones de los agentes económicos a través de los intercambios, que el “equilibrio” fuera posible, de forma que ningún agente pudiera mejorar sus preferencias sin satisfacer menos las de otro (véase Debreu [1], página 74). Nuestra concepción del valor, sin embargo, está más cercana a la de los economistas anteriores, de manera que nosotros estudiamos este concepto incluso allí donde no hay intercambios. Aunque, por supuesto, en este capítulo hemos visto que los valores sí se corresponden a las tasas de intercambio, cuando éstos se desarrollan, y sí son las magnitudes que permiten la coordinación a través de los intercambios de una serie de subsistemas.

Por lo tanto el estudio de los intercambios “voluntarios” no se aplica sólo a las economías humanas y puede ser muy fructífero en otros terrenos, en especial en la dinámica evolutiva. Para que el intercambio se produzca la evolución debe operar de manera que a la abeja le compense visitar la flor y que a la planta le compense producir el néctar. Ambos procesos tienen un coste y éste debe estar compensado con el ingreso de participar en el intercambio. Podemos pues tratar el caso de la colmena y las plantas de forma integrada, estudiando ambos como si fueran elementos o subsistemas de un único sistema que los engloba en un solo problema VN, porque la tendencia al crecimiento máximo de la colmena no contradice la de las plantas. Esta perspectiva permite entender con más facilidad los procesos de co-evolución. En definitiva, en la Naturaleza no sólo observamos las luchas entre depredadores y presas o entre parásitos y huéspedes, sino también la asociación y la simbiosis, en forma de, por ejemplo, intercambios “voluntarios”.

13: Flujos impuestos

13.1 Comportamientos simples

En el capítulo anterior estudiamos los intercambios "voluntarios", aquellos que el sistema puede aceptar o rechazar. Trataremos ahora los intercambios "involuntarios", aquellos que el sistema no puede rechazar. Estudiaremos cuánto puede crecer una economía y cuánto pueden reducirse las jornadas cuando imponemos al sistema unos flujos de materias dados a través de la frontera.

Escribiremos las condiciones de balance material teniendo en cuenta la posible incorporación de unas determinadas cantidades de cada materia en el sistema en el momento t, que anotaremos como $\mathbf{Q_t}$. Este vector puede incluir tanto elementos positivos, materias que son introducidas en el sistema, como negativos, materias que son extraídas. Las condiciones de balance material, para el caso de las recetas con un paso temporal en la forma estándar, resultan

$$\mathbf{Q_t} - \mathbf{X_t}\,\mathbf{A} + \mathbf{X_{t-1}}\,\mathbf{B} = \mathbf{0} \qquad \{13.1\}$$

Estudiaremos el caso en el que $\mathbf{Q_t}$ crece con el mismo factor de expansión que el resto de la economía

$$\mathbf{Q_t} = \alpha^t\,\mathbf{Q} \qquad \{13.2\}$$

donde hemos anotado $\mathbf{Q_0}$ como $\mathbf{Q}$. Entonces, teniendo en cuenta {1.3}, {13.1} resulta

$$\mathbf{Q} - \mathbf{X}\,\mathbf{A} + \mathbf{X}\,\mathbf{B} / \alpha = \mathbf{0} \qquad \{13.3\}$$

$\mathbf{Q}$ lo trataremos como un dato y estará definido con referencia a una normalización de las intensidades[88]. En consecuencia para confirmar que una trayectoria no trivial $\mathbf{X_t} = \alpha^t\,\mathbf{X}$ es un crecimiento proporcional para unas recetas dadas $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$, y con $\mathbf{Q_t} = \alpha^t\,\mathbf{Q}$, basta con comprobar que $\mathbf{X}$ y α cumplen {13.3} y las condiciones de signo de las intensidades {1.5} y del factor de expansión {1.6}, además de la normalización de las intensidades.

[88] En ocasiones resulta útil definir una normalización para las intensidades, por ejemplo haciendo igual a 1 la suma de sus cuadrados o de sus módulos. Así en la forma estándar (y siempre podremos reescribir las recetas a esta forma) podemos añadir la restricción

$$\sum x_i = 1$$

Cuando no se introducen materias en el sistema una expresión de este tipo simplemente determina el nivel absoluto de las intensidades y no altera de una manera fundamental nuestras ecuaciones, porque si tienen solución para unas determinadas intensidades y valores la tienen también para estas intensidades multiplicadas y estos valores divididos por un número positivo cualquiera.

13.2 VN

13.2.1 Flujos impuestos

VN resulta pues

$$\max_{\alpha,\mathbf{X}} \alpha$$
$$\mathbf{Q} - \mathbf{X}\,\mathbf{A} + \mathbf{X}\,\mathbf{B} / \alpha = \mathbf{0}$$
$$\textstyle\sum \mathbf{X} = 1$$
$$\mathbf{X} \geq \mathbf{0}$$
$$\alpha > 0$$

y las condiciones de máximo quedan[89]

$$(\mathbf{Q} - \mathbf{A_i} + \mathbf{B_i}/\alpha)\,\mathbf{Y} \leq 0, \qquad \text{y si el proceso } i \text{ opera se aplica } =$$
$$1 - \mathbf{X}\,\mathbf{B}\,\mathbf{Y} / \alpha^2 = 0$$

Tampoco hay dificultades en plantear las demás definiciones de las recetas (con varios pasos temporales, en tiempo continuo, con funciones de producción, etc.), en definir una estructura temporal para **Q**, o en plantear el problema correspondiente a TE.

13.2.2 Intensidades como datos

Otra manera de tratar los flujos impuestos al sistema es establecer como datos algunas de las intensidades de los procesos que anotaremos como $\mathbf{X_q}$, mientras que las demás que anotaremos como **X** las seguimos tratando como variables (mantendremos una normalización para estas intensidades **X**). Así los procesos $\mathbf{A_q}$ y $\mathbf{B_q}$ cuyas intensidades fijamos como datos determinarán unos flujos de materias que se imponen al resto del

[89] El lagrangiano resulta, prescindiendo de las condiciones de signo,

$$\mathcal{L} = \alpha + (\mathbf{Q} - \mathbf{X}\,\mathbf{A} + \mathbf{X}\,\mathbf{B} / \alpha)\,\mathbf{Y} + (\textstyle\sum \mathbf{X} - 1)\,\mu$$

donde anotamos el multiplicador de Lagrange que se corresponde a la normalización de las intensidades como μ. Las condiciones de máximo quedan

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = (-\mathbf{A_i} + \mathbf{B_i}/\alpha)\,\mathbf{Y} + \mu \leq 0, \qquad \text{y si el proceso } i \text{ opera se aplica } =$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha} = 1 - \mathbf{X}\,\mathbf{B}\,\mathbf{Y} / \alpha^2 = 0$$

Multiplicando {13.3} por **Y** tenemos

$$\mathbf{Q}\,\mathbf{Y} + \mathbf{X}\,(-\mathbf{A} + \mathbf{B} / \alpha)\,\mathbf{Y} = 0$$

y multiplicando las intensidades por sus condiciones de máximo correspondientes y sumando resulta

$$\mathbf{X}\,(-\mathbf{A} + \mathbf{B} / \alpha)\,\mathbf{Y} + \mu \textstyle\sum \mathbf{X} = 0$$

ya que o bien la intensidad o bien la condición se anula. Desde estas dos últimas expresiones, y como $\sum \mathbf{X} = 1$, nos queda

$$\mu = \mathbf{Q}\,\mathbf{Y}$$

Por lo tanto podemos escribir la condición de máximo para las intensidades como

$$(\mathbf{Q} - \mathbf{A_i} + \mathbf{B_i}/\alpha)\,\mathbf{Y} \leq 0, \qquad \text{y si el proceso } i \text{ opera se aplica } =$$

Si **Q** es un vector nulo entonces μ es 0, si no añadiéramos ni retiráramos materias en el sistema a lo largo del tiempo, estaríamos ante VN tal como lo hemos visto hasta ahora y entonces una variación en la normalización no afectaría al factor de expansión, por lo que el multiplicador μ que se corresponde a esta restricción sería igual a 0 y las condiciones de máximo serían las ya vistas.
Si **Q** no es un vector nulo μ no será en general igual a 0 y entonces la normalización sí afecta al factor de expansión, al estar **Q** definida con relación a esa normalización.

sistema. Dado que podemos entender como **Q** el flujo neto de los procesos cuyas intensidades hemos establecido como datos

$$\mathbf{Q} = \mathbf{X_q}\,(-\mathbf{A_q} + \mathbf{B_q} / \alpha)$$

estamos ante la misma situación que la vista §13.2.1, sólo que ahora **Q** puede tener una estructura temporal.

13.2.3 Flujos impuestos usando el formalismo inicial

Planteemos las restricciones con la matriz

$$\mathbf{F}(\alpha) = \begin{bmatrix} -\mathbf{A} + \mathbf{B}/\alpha & \mathbf{P} \\ \mathbf{Q} & 1 \end{bmatrix}$$

donde **P** es un vector-columna con un número de elementos igual al número de procesos habituales y cuyos elementos son –1, y donde añadimos una materia simbólica que consumen los procesos habituales y que produce un último proceso añadido junto con **Q**. Anotando la intensidad de este proceso añadido como ζ y manteniendo como **X** las restantes, las restricciones quedan

$$\mathbf{X}\,(-\mathbf{A} + \mathbf{B} / \alpha) + \zeta\,\mathbf{Q} = \mathbf{0}$$
$$\mathbf{X}\,\mathbf{P} + \zeta = 0$$

Anotando $\mathbf{S} = \mathbf{P}\,\mathbf{Q}$ y como $\zeta = -\mathbf{X}\,\mathbf{P}$, tenemos que los balances materiales resultan

$$\mathbf{X}\,(-\mathbf{S} - \mathbf{A} + \mathbf{B} / \alpha) = \mathbf{0}$$

Planteando VN con estas últimas restricciones las condiciones de máximo quedan

$(-\mathbf{S} - \mathbf{A} + \mathbf{B} / \alpha)\,\mathbf{Y} \le \mathbf{0}$, y si el proceso opera se aplica =

$1 - \mathbf{X}\,\mathbf{B}\,\mathbf{Y} / \alpha^2 = 0$

Como los elementos de **P** son –1 y por ello $-\mathbf{S} = -\mathbf{P}\,\mathbf{Q}$ es una matriz cuyas filas son iguales a **Q**, tanto los balances materiales como las condiciones de máximo son equivalentes a los vistos en §13.2.1. Por lo tanto podemos plantear VN con flujos impuestos usando el mismo formalismo de §2.1, sin más que sumar a la matriz **A** de los insumos la matriz **S** de los flujos impuestos, de manera que las recetas nos quedan[90]

$$\mathbf{A} + \mathbf{S} \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{B}$$

13.3 Ejemplos de flujos impuestos

Un caso de flujo impuesto puede consistir en la migración de parte de la población, dentro del sistema o a través de la frontera, por razones que el sistema no puede eludir.

[90] Señalemos la simetría entre **P** y **Q** en este planteamiento, aunque dejamos su estudio detallado para futuras ediciones de este trabajo.
Por otra parte hacemos notar que si definiéramos el beneficio marginal sólo con los insumos y productos, sin contar con los flujos impuestos, ahora en los procesos que operan no sería en general nulo sino igual al valor de éstos, $(-\mathbf{A_i} + \mathbf{B_i} / \alpha)\,\mathbf{Y} = \mathbf{S_i}\,\mathbf{Y} = -\mathbf{Q}\,\mathbf{Y}$.

Así si estudiamos la evolución de una población con la matriz de Leslie podemos tratar la migración de una parte de la misma a través de la frontera como vimos en §13.2.1, escribiendo estos contingentes en **Q** definidos para una normalización de la población que no atraviesa la frontera, esto es en proporción al tamaño de la población residente.

Podemos usar también estos planteamientos, por ejemplo el visto en §13.2.3, para desarrollar una primera aproximación de la operación del Estado entendida como un flujo de materias impuesto al resto del sistema. Así podemos escribir en **Q** la producción neta estatal, entendida como materias que se incorporan o abandonan el resto del sistema, e interpretar **P** como la subvención neta que obtendrían los procesos habituales, que además podemos diferenciar para cada proceso. Por ejemplo, si el Estado cobra impuestos sólo a los procesos que usen hierro sólo los elementos de **P** correspondientes a estos procesos serán negativos. Y si el Estado consume recursos de forma neta $\mathbf{S} = \mathbf{P}\,\mathbf{Q}$ es la matriz que describe la parte del consumo estatal que le corresponde en impuestos a cada proceso habitual. Así que la condición de máximo de los procesos habituales puede interpretarse como [91]

–Costes + Ingresos – Impuestos + Subvenciones ≤ 0

y si el proceso opera se aplica =. También podemos tratar de la misma manera los consumos de una clase dominante, como flujos impuestos al sistema, y entonces las condiciones de máximo para los procesos habituales resultan

–Costes + Ingresos – Consumos de la clase dominante ≤ 0

y si el proceso opera se aplica =.

De la misma forma pueden definirse como datos unas **S** para cada flujo de materias que impongamos simultáneamente al sistema, que podemos sumar a los insumos **A** para plantear VN con el formalismo inicial de §2.1, como vimos en §13.2.3. Así podemos tratar simultáneamente los impuestos de diversas entidades estatales junto con el consumo de unas clases dominantes. Tampoco hay dificultades en establecer una estructura temporal para las **S**, en tratar las demás formas de escribir las recetas, o en plantear el problema correspondiente a TE. [92]

[91] De nuevo escribimos estas condiciones en términos unitarios, pero es preferible entenderlas de manera marginal.

[92] Podemos usar TE para calcular cuánto podrían reducirse las jornadas si no existiera la imposición y cuánto manteniéndola. Para este último problema podemos usar el formalismo de §3.1 sumando **S** a **C**.

13.3.1 Flujos impuestos en proporción al consumo o al coste

La imposición de unos flujos de materias al sistema significará habitualmente un cambio en las intensidades y en los valores. Pero si **Q** es proporcional al consumo **X A** del problema sin la imposición, de manera que $\mathbf{X\,S} = k\,\mathbf{X\,A}$, las intensidades relativas en cada instante no cambian con la imposición y el nuevo factor de expansión máximo será el antiguo entre $1 + k$. Igualmente si **P** es proporcional a los costes **A Y** sin la imposición, de forma que $\mathbf{S\,Y} = k\,\mathbf{A\;Y}$, los precios relativos en cada instante no cambian con la imposición y el nuevo factor de expansión máximo será el antiguo entre $1 + k$.[93]

Por ejemplo, si con las recetas de §4.3 se impusieran unos consumos de trigo y seda, y **P** fuera proporcional a los costes **A Y**, entonces **P** y **Q** podrían ser

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} -460 \\ -240 \\ -16 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -0.1 & 0 & -0.005 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{S} = \mathbf{P\,Q} = \begin{bmatrix} 46 & 0 & 2.3 \\ 24 & 0 & 1.2 \\ 1.6 & 0 & 0.08 \end{bmatrix}$$

La solución de VN resulta α = 1.04166, $\mathbf{X_t} = 1.04166^t$ [1.40346, 2.08508, 6.51144], $\mathbf{Y_t} = 1.04166^{-t}$ [0.00069433, 0.010415, 0.013886]. El valor de la imposición **S Y** es la quinta parte de los costes para cada proceso, $k = 0.2$, por lo que el nuevo factor resulta 1.25/(1+0.2) = 1.04166. La estructura de la economía ha cambiado y ahora se produce seda, pero los valores del hierro y la seda siguen siendo 15 y 20 veces el del trigo.

En definitiva, si $\mathbf{S\,Y} = k\,\mathbf{A\;Y}$ entonces los precios relativos para las materias en un determinado momento no cambiarán. Así los precios de las materias duraderas con eficiencia constante obedecerán para cualquier momento temporal la fórmula {6.1} con el factor que resulta sin la imposición, las materias de vida ilimitada la fórmula de la renta perpetua con ese mismo factor, etc. Los precios mostrarán pues un factor de interés "implícito" igual al factor que resulta sin la imposición, y si $k > 0$ este factor de interés "implícito" será mayor que el factor de expansión de la economía.[94]

Ricardo dedica buena parte de los *Principios* al estudio de la influencia de los diferentes tributos sobre el valor, pero nosotros no desarrollaremos este aspecto para no alargar la exposición.

[93] Fijémonos que estas afirmaciones son correctas sólo si tomamos en consideración las materias que simbolizan la evolución de los procesos, de manera que si estamos ante el problema escrito con las matrices $\mathbf{f_r}$, como en §8.2, serán correctas sólo si los reescribimos como en §8.1.1. Y aunque nos hemos limitado a afirmar estas propiedades sin demostrarlas, son evidentes cuando se estudia VN como un problema de autovalores generalizados, como haremos más adelante.

[94] En algunas sociedades antiguas que se mantenían prácticamente estacionarias existía un tipo de interés, incluso descontando la "prima al riesgo". Nuestro planteamiento ayuda a entender esta situación.

También en TE si **S Y** = k (**V** – **W**) **Y**, si el valor de los flujos impuestos en cada proceso es proporcional a los costes laborales, los valores-trabajo relativos no cambiarán y el nuevo factor al que pueden reducirse las jornadas será el antiguo menos k. Lo mismo ocurre con las intensidades-trabajo relativas si **X S** = k **X** (**V** – **W**), si los flujos impuestos de cada materia son proporcionales al consumo laboral.

13.4 Flujos impuestos y sistemas biológicos

No todos los intercambios en la Naturaleza son "voluntarios". Cuando una manada de leones devora un búfalo es obvio que el intercambio es "voluntario" para los depredadores pero no para la presa. Entonces tenemos que la tendencia al crecimiento de los leones sí contradice la de los búfalos. Por ello no podemos tratar el conjunto depredador-presa (o parásito-huésped) con VN como si fuera un único sistema, como hacíamos en §12.3, aunque los leones y los búfalos sí obedezcan el comportamiento de VN de forma independiente.

Pero podemos estudiar con nuestro planteamiento la imposición a un sistema de unos parasitismos o de unas depredaciones. Por ejemplo, si en el modelo de colmena que vimos en §7.3 impusiéramos la retirada de miel **Q** sería proporcional a [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, –1] y podríamos calcular como tendría que adaptarse la colmena para cada nivel de extracción de miel posible. En definitiva, si una colmena crece lo máximo posible, descontando las materias que retiran la depredación y el parasitismo, podemos calcular cual es el comportamiento del sistema bajo estas condiciones.

13.5 Variación en los flujos impuestos y valor

En todo problema de maximización restringida los multiplicadores de Lagrange son la tasa a la que se incrementa la función objetivo, lo que se maximiza, ante una variación en las restricciones correspondientes[95]. En VN la función objetivo es el factor de expansión y las restricciones los balances materiales, y una variación en los balances materiales puede interpretarse como la introducción de unas "pequeñas" (infinitésimas) cantidades de la materia correspondiente a lo largo del tiempo, de acuerdo a $\mathbf{Q_t} = \alpha^t\,\mathbf{Q}$.

[95] Dicho de forma grosera, porque para que sea cierto es necesario que se cumplan una serie de condiciones, como que con la variación de las restricciones el problema siga teniendo solución, que ésta sea única, o que las magnitudes de las variables solución no experimenten cambios bruscos. Pueden encontrarse demostraciones de esta propiedad en cualquier manual de Optimización.

Por lo tanto *el precio es la tasa a la que aumenta el factor de expansión máximo ante la introducción de unas "pequeñas" cantidades de la materia correspondiente en el sistema*. Forzando la notación matemática[96] podríamos escribir

$$\frac{\partial \alpha}{\partial q_j} = y_j \qquad \{13.4\}$$

En definitiva, si se introdujeran unas "pequeñas" cantidades de materias en el sistema a lo largo del tiempo, de forma que $\mathbf{Q_t} = \alpha^t\ \mathbf{Q}$, el factor de expansión crecería en una magnitud igual al precio de las materias introducidas **Q Y**.

En TE tenemos una situación similar. Como TE implica un estado estacionario si introdujéramos unas "pequeñas" cantidades en el sistema a lo largo del tiempo, de forma que $\mathbf{Q_t} = \mathbf{Q}$, el factor de explotación aumentaría en una magnitud igual al valor-trabajo de las materias introducidas; *el valor-trabajo es la tasa a la que aumenta el factor de explotación ante la introducción de unas "pequeñas" cantidades de la materia correspondiente en el sistema*.

Por lo tanto si introducimos en el sistema unas "pequeñas" cantidades de una materia (a lo largo del tiempo y en una cantidad que crece como el sistema) aumentaremos el factor si el valor de esta materia es positivo y lo reduciremos si el valor es negativo. Además el valor no sólo nos indica si el factor se incrementa o reduce sino también en qué medida lo hace; que una materia valga el triple que otra significa que si introducimos unas "pequeñas" cantidades de la primera materia el factor se incrementará el triple que si introducimos unas "pequeñas" cantidades iguales (en sus correspondientes unidades de medida) de la segunda. El valor de una materia, el precio en VN o el valor-trabajo en TE, podemos interpretarlo pues como la tasa en la que se incrementa la función objetivo, el factor de expansión máximo o de explotación respectivamente, ante una variación en la restricción correspondiente, ante la introducción de unas "pequeñas" cantidades de la materia en el sistema.

---

[96] Porque no podemos escribir sin más el factor de expansión como una función de **Q**. Pero si con la variación de la cantidad de materia *j* introducida, que anotamos como q_j, el problema sigue teniendo solución única y si el factor de expansión cambia de manera "suave" entonces la tasa de este cambio efectivamente será el precio de la materia *j*.
Fijémonos que cuando **Q** no es nulo sigue siendo cierto que el precio es la tasa a la que aumenta el factor de expansión ante la introducción de una pequeña cantidad de la materia correspondiente.

13.5.1 Interpretación de los balances contables

Esta perspectiva nos permite dar una interpretación intuitiva de los balances contables[97]. La operación de un proceso implica el consumo y la producción de materias[98], y el consumo podemos entenderlo como equivalente a la imposición de una retirada de materias del sistema y la producción como equivalente a la imposición de su incorporación. Por lo tanto el incremento en una "pequeña" cantidad de la intensidad de un proceso determinará un crecimiento del factor igual al valor del incremento de su producción menos el valor del incremento de su consumo, teniendo en cuenta la actualización. Pero este valor es justamente el balance contable del proceso. Así que el balance contable de un proceso es la magnitud con la que crece el factor ante un incremento de la intensidad del proceso en una "pequeña" cantidad.

En consecuencia, el balance contable de un proceso que opera debe ser nulo, porque si fuera positivo podría incrementarse el factor aumentando su intensidad en una "pequeña" cantidad, de la misma manera que lo haría la introducción de las materias que se producirían junto con la retirada de las materias que se consumirían con ese aumento; y si el balance contable fuera negativo reduciéndola. Y el balance contable de un proceso que no opera debe ser no-positivo, porque si fuera positivo podría incrementarse el factor haciendo que el proceso aumentase su intensidad, pero sí puede ser nulo o negativo, porque no puede reducirse más la intensidad del proceso que es 0.

13.5.2 Leyes de los signos y tasas de intercambio

También podemos entender intuitivamente las leyes de los signos del balance material y los valores[99]. Como vimos, una materia tendrá valor positivo, nulo o negativo si al

[97] Pero limitada a que se cumplan las condiciones anteriores. Además el hecho de que estemos ante un comportamiento simple y que las cantidades de materias que se introducen tengan que crecer en el tiempo con el mismo factor que el resto del sistema complica un poco esta comprensión. Más adelante veremos que si no suponemos un comportamiento simple estos aspectos son quizá más fáciles de entender.

[98] Y cuando hay flujos impuestos ya vimos que podíamos entender éstos sumándolos a los insumos.

[99] De hecho también podemos tratar el tipo de materias considerando **Q** como variables, además de **X** y el factor correspondiente, bajo unas restricciones de signo. La cantidad incorporada al sistema de las materias expulsables tomaría signo negativo $\mathbf{Q} \leq \mathbf{0}$, para las materias incorporables signo positivo $\mathbf{Q} \geq \mathbf{0}$, para las materias limitadas signo nulo $\mathbf{Q} = \mathbf{0}$, y para las materias ilimitadas cualquier signo $\mathbf{Q} \gtreqless \mathbf{0}$. Las condiciones de máximo con respecto a las **Q** resultan

$$\frac{\partial \pounds}{\partial q_j} = y_j$$

Entonces, dependiendo del signo de **Q**, del tipo de materia, tenemos

- *materias expulsables*, $\mathbf{Q} \leq \mathbf{0}$, **valor** $\geq \mathbf{0}$,
- *materias incorporables*, $\mathbf{Q} \geq \mathbf{0}$, **valor** $\leq \mathbf{0}$,
- *materias ilimitadas*, $\mathbf{Q} \gtreqless \mathbf{0}$, **valor** $= \mathbf{0}$,
- *materias limitadas*, $\mathbf{Q} = \mathbf{0}$, **valor** $\gtreqless \mathbf{0}$,

añadirla al sistema en unas "pequeñas" cantidades aumenta, no se modifica o se reduce el factor. Por eso si una materia puede ser incorporada de forma gratuita no puede tener un valor positivo, ya que si así fuera podría aumentarse el factor introduciéndola. De la misma manera si una materia puede ser eliminada de forma gratuita no puede tener valor negativo, ya que entonces podría incrementarse el factor eliminándola. Y una materia ilimitada sólo puede tener valor nulo, porque de otro modo incorporándola o eliminándola podría incrementarse el factor.

Igualmente se entiende el vínculo de los valores con las tasas a las que pueden efectuarse los intercambios, ya que éstos pueden comprenderse también como la introducción y la retirada de materias del sistema. Si para las tasas de intercambio que ofrecen los mercados algún proceso de compra o venta tiene un balance contable positivo podrá aumentarse el factor incrementando su intensidad. Pero cuando el balance contable de los procesos de intercambio es nulo no podrá aumentarse el factor incrementando sus intensidades, y para eso es necesario (en el caso de que los precios de compra y venta sean iguales) que los valores sean proporcionales a las tasas de intercambio que ofrecen los mercados.

13.5.3 Valor, ingreso y coste

Además, como vimos en los capítulos anteriores, una materia puede utilizarse de varias formas, una materia puede

- consumirse en los procesos de producción
- exportarse a otro punto geográfico del sistema
- expulsarse al entorno
- venderse a los mercados
- entregarse a crédito a los mercados

Igualmente se puede adquirir una materia de diversas maneras, una materia puede

- producirse en los procesos de producción
- importarse desde otro punto geográfico del sistema
- incorporarse desde el entorno
- comprarse desde los mercados
- recibirse a débito desde los mercados

---

y si algún **Q** toma una magnitud no nula entonces el valor correspondiente es 0. Nos queda una relación similar a las reglas de los signos, de manera que

$$\mathbf{Q} \sim \mathbf{0} \qquad \leftrightarrow \qquad -\mathbf{Y} \sim \mathbf{0} \qquad\qquad \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Y}^{\mathrm{T}} = \mathbf{0}$$

Además como $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Y}^{\mathrm{T}} = \mathbf{0}$ y como $\mu = \mathbf{Q}\,\mathbf{Y} = \sum \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Y}^{\mathrm{T}}$ resulta que $\mu = 0$. Hacemos notar que en realidad ahora no necesitamos añadir la normalización de las intensidades, porque las **Q** son también variables.

Por lo tanto usando la materia en una pequeña cantidad pueden obtenerse unos ingresos con su consumo, exportación, expulsión, venta o crédito, a los que llamamos *ingresos marginales*. Y para adquirir la materia en una pequeña cantidad hace falta incurrir en unos costes con su producción, importación, incorporación, compra o débito, a los que llamamos *costes marginales*.

Como hemos deducido en nuestros modelos VN y TE tenemos que, para cada materia y con todos los procesos disponibles,

ingresos marginales ≤ valor ≤ costes marginales

y además con los procesos que efectivamente operan

mayor ingreso marginal = valor = menor coste marginal

En consecuencia, en nuestros modelos *una materia vale su mayor ingreso marginal y también su menor coste marginal*[100]. Podemos entender mejor esta propiedad fijándonos en que si una materia valiera más que su menor coste marginal entonces el proceso con el menor coste tendría un balance contable positivo, por lo que podría incrementarse el factor adquiriendo la materia con el aumento de la intensidad de ese proceso. De la misma manera si una materia valiera menos que su mayor ingreso marginal el proceso que muestre el mayor ingreso también tendría un balance contable positivo, y podría incrementarse el factor aumentando su intensidad.

[100] Hacemos notar que efectivamente esto es lo que se observa en los capitalismos (aunque las materias "escasas" no tienen necesariamente definidos unos costes marginales porque es posible que no puedan ser producidas o incorporadas). En el caso de que tratemos con insumos y funciones de producción el razonamiento es similar, sin más que tener en cuenta la correspondiente definición del ingreso marginal y que el coste marginal ya es el valor.

Tercera parte. Análisis de los modelos

14: Soluciones

14.1 VN

VN es el crecimiento proporcional con el mayor factor de expansión posible. Por supuesto, para unas recetas dadas no siempre será posible un crecimiento proporcional, y aún cuando sea posible no siempre el problema estará acotado, y por lo tanto *no siempre existirá solución para VN*[101]. No obstante bajo determinadas condiciones se puede demostrar que sí existe solución. En la literatura se encuentran varias de estas demostraciones, pero aquí desarrollaremos algunas muy fáciles de entender[102].

Comenzaremos con una aplicable al modelo en forma canónica[103]. Supondremos que en las recetas:

S1: cada materia puede ser producida después de todos sus posibles consumos,

S2: cada proceso consume alguna materia antes de efectuar alguna producción.

Hacemos notar que estas condiciones no implican que todas las producciones tengan que ser posteriores a los consumos, sino que podemos estar ante producciones y consumos alternados[104].

Las condiciones de crecimiento proporcional, para una **X** no trivial, quedan[105]

---

[101] Ya hemos señalado algún ejemplo en el que VN no tenía solución, como el visto en §4.4.

[102] En el artículo original John von Neumann trata de demostrar la existencia de solución y la unicidad de la misma para el factor de expansión máximo en el caso canónico cuando $\mathbf{A} + \mathbf{B} > \mathbf{0}$. Esto es un error, ya que si la matriz **A** es estrictamente positiva y la matriz **B** es nula se cumple esta condición y sin embargo no existe ningún crecimiento proporcional (α sería 0). Igualmente si la matriz **A** es nula y la matriz **B** es estrictamente positiva existe algún crecimiento proporcional pero el problema no está acotado (α sería ∞). Sobre esto véase Kemeny, Morgenstern y Thompson [1], quienes además construyen una demostración de que existe alguna solución para el modelo escrito con las recetas **A** y **B** en la forma canónica bajo los supuestos de que cada materia puede ser producida por algún proceso y que cada proceso consume alguna materia. En Gale [2] también se construye una demostración bajo estos supuestos, simplificada además en Gale [1].
No obstante los teoremas de existencia de estos autores no abarcan los procesos duraderos en tiempo discreto o continuo, cuando escribimos las recetas con las $\mathbf{f_r}$ o las $\mathbf{f}(r)$, porque por ejemplo en nuestro caso los procesos no necesariamente pueden interrumpirse. Nosotros construimos nuestra demostración para tratar estos casos, razonando de forma parecida a Gale [1].

[103] Vimos en §11.4 como reescribir un modelo a la forma canónica, y fijémonos en que estas condiciones tienen que aplicarse a las recetas cuando ya están escritas en esta forma. Supondremos también que $\mathbf{F}(\alpha)$ es una matriz acotada para todo α positivo. Esto será así en tiempo discreto, con los procesos escritos con las $\mathbf{f_r}$, si los procesos son de duración finita y si los valores de los flujos netos permanecen dentro de un intervalo acotado; también en tiempo continuo, con las $\mathbf{f}(r)$, incluso aunque en un número finito de puntos tengamos valores no acotados.

[104] Fijémonos en que cuando estamos ante las recetas escritas con las matrices **A** y **B** con materias expulsables nuestros S1 y S2 son equivalentes a los supuestos de Kemeny-Morgenstern-Thompson y Gale.

[105] $\mathbf{X}\,\mathbf{F}(\alpha)$ es el balance material actualizado, que con las recetas **A** y **B** resulta

$\mathbf{X\,F}(\alpha) \geq \mathbf{0}$
$\mathbf{X} \geq \mathbf{0}$
$\alpha > 0$

Para un α positivo suficientemente pequeño los signos de $\mathbf{X\ F}(\alpha)$ serán los de los últimos flujos netos diferentes de 0 para cada materia[106], y entonces bajo S1 existen algunas intensidades no negativas con al menos una positiva, $\mathbf{X} \geqq \mathbf{0}$, para las que $\mathbf{X\,F}(\alpha)$ es una magnitud positiva para todas las materias, $\mathbf{X\,F}(\alpha) > \mathbf{0}$ (por ejemplo si todas las intensidades fueran iguales a 1). Luego para un α suficientemente pequeño existe algún crecimiento proporcional y por lo tanto existe alguna solución factible (y no trivial).

Para un α suficientemente grande los signos de $\mathbf{X\ F}(\alpha)$ serán los de los primeros flujos netos diferentes de 0 para cada materia, y entonces bajo S2 para todo $\mathbf{X} \geqq \mathbf{0}$ resulta que $\mathbf{X\,F}(\alpha)$ será una magnitud negativa para por lo menos una materia, por lo que no se cumple que $\mathbf{X\,F}(\alpha) \geq \mathbf{0}$. Luego para un α suficientemente grande no existe ningún crecimiento proporcional y por lo tanto el problema está acotado.

$$\mathbf{X\,F}(\alpha) = -\mathbf{X\,A} + \frac{\mathbf{X\,B}}{\alpha}$$

con las recetas escritas en tiempo discreto

$$\mathbf{X\,F}(\alpha) = \mathbf{X\,f_0} + \frac{\mathbf{X\,f_1}}{\alpha} + \frac{\mathbf{X\,f_2}}{\alpha^2} + \frac{\mathbf{X\,f_3}}{\alpha^3} + \ldots + \frac{\mathbf{X\,f_n}}{\alpha^n} = \sum_{r=0}^{n} \frac{\mathbf{X\,f_r}}{\alpha^r}$$

y en tiempo continuo

$$\mathbf{X\,F}(\alpha) = \int_0^{\infty} \frac{\mathbf{X\,f}(r)}{\alpha^r}\,d\,r$$

[106] Para un α positivo suficientemente pequeño el signo del polinomio inverso de α

$$p_0 + \frac{p_1}{\alpha} + \frac{p_2}{\alpha^2} + \ldots + \frac{p_{n-1}}{\alpha^{n-1}} + \frac{p_n}{\alpha^n} = \sum_{r=0}^{n} \frac{p_r}{\alpha^r}$$

será el de p_n si éste no es igual a 0; si $p_n = 0$ el signo será el de p_{n-1} si éste no es igual a 0; si $p_{n-1} = p_n = 0$ el signo será el de p_{n-2} si éste no es 0; etc. Por lo tanto para un α positivo suficientemente pequeño el signo del polinomio inverso será el del último coeficiente distinto de 0.
Para un α suficientemente grande el signo del polinomio inverso de α será el de p_0 si éste no es igual a 0; si $p_0 = 0$ el signo será el de p_1 si éste no es igual a 0; si $p_0 = p_1 = 0$ el signo sería el de p_2 si éste no es 0; etc. Por lo tanto para un α suficientemente grande el signo del polinomio inverso será el del primer coeficiente distinto de 0.
Si en vez de un polinomio inverso estamos ante una expresión del tipo

$$\int_0^{\infty} \frac{p(r)}{\alpha^r}\,d\,r$$

nos encontramos en un caso similar, de manera que el signo de esta expresión para un α positivo suficientemente pequeño será el de $p(r)$ para el mayor r con el que $p(r)$ es diferente de 0, y el signo para un α suficientemente grande será el de $p(r)$ para el menor r (no negativo) con el que $p(r)$ es diferente de 0.
$\mathbf{X\,F}(\alpha)$ en tiempo discreto es un vector de polinomios inversos de α, uno para cada materia, y en tiempo continuo es un vector de expresiones como la integral anterior, también una para cada materia.

En definitiva, bajo S1 existe alguna solución factible y bajo S2 el problema está acotado. Por lo tanto bajo S1 y S2 existe alguna solución para VN.[107]

Advertimos que estas condiciones son suficientes pero no necesarias. Si se cumplen existirá alguna solución para VN, pero si no se cumplen es posible que exista o que no[108]. No hemos demostrado que estén definidos los multiplicadores de Lagrange o precios, pero lo estarán si se cumplen ciertas condiciones de regularidad. También hacemos notar que cabe la posibilidad de que el factor de expansión máximo sea menor que 1, que el crecimiento proporcional máximo sea un decrecimiento[109].

Además la solución no es necesariamente única para α, y por ejemplo no lo será si las recetas puedan descomponerse en economías separadas. Entonces pueden existir varias soluciones con α diferentes, que describirán varias economías posibles creciendo con diferentes factores de expansión. Pongamos un ejemplo muy simple de esta situación con las recetas escritas con **A** y **B**

---

[107] En el caso de las funciones de producción, el balance material actualizado queda

$$-\sum_j \chi_{i,j} + f_i(\mathbf{X})/\alpha \geq 0$$

Es fácil ver que

si las funciones son no negativas y acotadas, si para cualquier $\mathbf{0} \leq \mathbf{X} < \infty$ tenemos que $0 \leq f_i(\mathbf{X}) < \infty$,

si las funciones muestran rendimientos constantes a escala, si $f_i(k\,\mathbf{X}) = k\,f_i(\mathbf{X})$,

si todas las materias pueden ser producidas, si existe algún $\mathbf{X} \geq \mathbf{0}$ con el que $f_i(\mathbf{X}) > 0$ para todo i,

también habrá solución para VN (no necesitamos suponer que para obtener una producción hay que consumir algún insumo, que no es posible que $f_i(\mathbf{0}) > 0$, porque esto está implícito en el resto de supuestos). Existen algunos insumos para los que la producción de cada materia es positiva, por lo que para un α suficientemente pequeño el balance material actualizado de cada materia también será positivo y por lo tanto existe alguna solución factible; y para un α suficientemente grande el balance material actualizado de alguna materia será necesariamente negativo, por lo que el problema está acotado.

[108] De hecho en determinados casos resulta sencillo relajar las condiciones, porque usamos S1 para demostrar que existe algún crecimiento proporcional para un α suficientemente bajo, y que por ello existe alguna solución factible, y S2 para demostrar que no para un α suficientemente alto, y que por ello el máximo está necesariamente acotado. Tenemos pues dos teoremas independientes. Por ello existirá solución para VN si se cumple S2 y si sabemos que existe algún crecimiento proporcional, aunque no se cumpla S1; o también si se cumple S1 y si sabemos que no existe un crecimiento proporcional para un α mayor que un número, aunque no se cumpla S2. Además si los procesos pueden ser interrumpidos en cualquier instante podemos relajar S1 y suponer sólo que cada materia puede ser producida por algún proceso.

[109] Diremos que unas recetas son *productivas* si existe algún $\mathbf{X} \geq \mathbf{0}$ para el que $\mathbf{X}\,\mathbf{F}(1) > \mathbf{0}$. En general una condición suficiente para que unas recetas sean productivas es que puedan encontrarse unos procesos en un número igual al de materias para los que para la inversa de $\mathbf{F}(1)$ correspondiente existe y tiene elementos positivos (una condición necesaria es que los elementos de la inversa sean no-negativos). Ante una producción simple esto ocurrirá cuando se cumplen las condiciones de Hawkins-Simon. Si las recetas son productivas entonces el factor de expansión máximo no puede ser menor que 1 porque existe un crecimiento proporcional con $\alpha = 1$; como estamos en la forma canónica y podemos eliminar de forma gratuita todas las materias también habrá un crecimiento proporcional para todo $0 < \alpha \leq 1$.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 280 & 12 & 0 & 0 \\ 120 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 280 & 12 \\ 0 & 0 & 120 & 8 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 575 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 450 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 20 \end{bmatrix}$$

Hay dos soluciones de VN para estas matrices, que resultan

$\alpha = 1.25$, $\mathbf{X_t} = 1.25^t\,[0.4, 0.6, 0, 0]$, $\mathbf{Y_t} = 1.25^{-t}\,[0.0038, 0.0572, 0, 0]$
$\alpha = 1.0796$, $\mathbf{X_t} = 1.0796^t\,[0, 0, 0.4673, 0.5327]$, $\mathbf{Y_t} = 1.0796^{-t}\,[0, 0, 0.0035, 0.0401]$

Por lo tanto *la solución no siempre será única para el factor de expansión*, y es posible que existan varios máximos relativos. Esto en realidad no es una limitación del modelo, ya que veremos que por la manera en la que han sido diseñadas las sociedades es posible que su comportamiento no se parezca al máximo absoluto sino a uno relativo. Nos interesan pues todos los máximos relativos y no sólo el máximo absoluto[110].

Pero aun cuando existe solución y ésta es única para el factor de expansión, *es posible que existan varias combinaciones de intensidades y precios posibles*. Intuitivamente podemos comprender esta situación con un ejemplo; si entre dos puntos geográficos existen dos caminos que siguen recorridos diferentes, pero los caminos son igual de costosos y lleva el mismo tiempo recorrerlos, es obvio que una solución puede ser escoger el primero de los caminos, que otra puede ser escoger el segundo y otra una combinación de ambos. Todas estas soluciones tendrán el mismo factor de expansión. La solución múltiple en este caso nos indica la indiferencia ante la elección entre los dos caminos, por lo que tampoco es una limitación del modelo. Otro caso de solución múltiple es el que vimos en §10.4.2 para VNC, que podríamos haber planteado también como VN.

Además debemos recordar que incluso cuando existe solución y es única para el factor de expansión, intensidades y precios, existen casos como el ejemplo con la tierra "escasa" de §4.4 en los que la solución de VN no se parecerá a los capitalismos reales.

[110] En la literatura a menudo sólo se considera como solución válida el máximo absoluto (o global), pero hay por lo menos dos buenas razones para aceptar los máximos relativos (o locales) como soluciones. La primera es que, cómo detallaremos más adelante, cabe esperar que a menudo los sistemas reales se comporten de forma similar a un máximo relativo por la forma en la que han sido diseñados. La segunda es que si sólo aceptáramos los máximos absolutos entonces se perdería parte de una simetría muy importante que estudiaremos más adelante y que llamaremos *dualidad neumanniana*; la teoría es más simple, simétrica y bella aceptando los máximos relativos, y la belleza siempre tiene razón.

14.2 TE

TE es el estado estacionario con la mayor reducción de las jornadas. Por supuesto, no siempre existirá un factor de explotación para el que sea posible un estado estacionario y aun cuando exista el problema no siempre estará acotado, y por lo tanto *no siempre tendrá solución TE*. No obstante existen determinadas condiciones bajo las que se puede demostrar que sí hay solución.

Para el modelo escrito en forma canónica, supondremos que[111]:

S1: las recetas son laboralmente productivas[112],

S2: cada proceso consume algún insumo laboral[113].

Las condiciones estado estacionario quedan, para unas intensidades no triviales,

$$\mathbf{X}\,(-\mathbf{C} - \varepsilon\,\mathbf{V} + \mathbf{D} + \varepsilon\,\mathbf{W}) \geq \mathbf{0}$$
$$\mathbf{X} \geq \mathbf{0}$$
$$\varepsilon > 0$$

Para un ε positivo suficientemente pequeño los signos de $\mathbf{X}(-\mathbf{C} - \varepsilon\mathbf{V} + \mathbf{D} + \varepsilon\mathbf{W})$ serán los mismos que los de $\mathbf{X}$ ($\mathbf{D}$ – $\mathbf{C}$), y entonces bajo S1 existe algún $\mathbf{X} \geqq \mathbf{0}$ para el que $\mathbf{X}(-\mathbf{C} - \varepsilon\mathbf{V} + \mathbf{D} + \varepsilon\mathbf{W})$ es positivo para todas las materias (por ejemplo si todas las intensidades fueran iguales a 1). Luego para un ε suficientemente pequeño existe algún estado estacionario y por lo tanto existe alguna solución factible (y no trivial).

Para un ε suficientemente grande los signos de $\mathbf{X}$ ($-\mathbf{C}$ – ε $\mathbf{V}$ + $\mathbf{D}$ + ε $\mathbf{W}$) serán los de $\mathbf{X}$ ($\mathbf{W}$ – $\mathbf{V}$), y entonces bajo S2 para todo $\mathbf{X} \geqq \mathbf{0}$ resulta que $\mathbf{X}$ ($-\mathbf{C}$ – ε $\mathbf{V}$ + $\mathbf{D}$ + ε $\mathbf{W}$) será una magnitud negativa para por lo menos una materia, por lo que no se cumple que

---

[111] Y además que las matrices están acotadas, lo que ocurrirá siempre que los procesos no tengan una duración infinita. Recordemos que como TE no se ve afectado por la estructura temporal de los procesos podíamos incluir en las matrices todas las producciones y consumos con independencia del momento en el que se realicen. Recordemos también que incluíamos las materias que simbolizan los humanos en $\mathbf{V}$ y en $\mathbf{W}$.

[112] Diremos que unas recetas son *laboralmente productivas* si existe algún $\mathbf{X} \geq \mathbf{0}$ para el que $\mathbf{X}$ ($\mathbf{D}$ – $\mathbf{C}$) > $\mathbf{0}$, si la matriz $\mathbf{D}$ – $\mathbf{C}$ es productiva; esto es, si existen algunas intensidades para las que es posible producir de forma neta una cantidad positiva de cada materia descontando el consumo neto de los trabajadores. También si existe algún $\mathbf{X} \geq \mathbf{0}$ con el que $\mathbf{X}$ ($\mathbf{D}$ – $\mathbf{C}$) $\geq \mathbf{0}$ y si cuando se aplica = se cumple $\mathbf{X}$ ($\mathbf{V}$ – $\mathbf{W}$) $\leq \mathbf{0}$; esto es, si para las materias con una producción neta nula existe un consumo neto de los trabajadores no-positivo.

[113] Si para todo $\mathbf{X} \geqq \mathbf{0}$ tenemos que $\mathbf{X}$ ($\mathbf{W}$ – $\mathbf{V}$) es negativo para por lo menos una materia. Esto es equivalente a suponer que no hay procesos completamente automaticos, que en todos los procesos se utiliza el trabajo humano y que los trabajadores consumen de forma neta alguna materia. Aunque sí es posible imaginar una economía totalmente automática donde no existiera consumo de los trabajadores, variantes de este supuesto son comunes en la literatura; por ejemplo véase Arrow y Hahn [1] o Morishima [1].

$\mathbf{X}(-\mathbf{C}-\varepsilon\,\mathbf{V}+\mathbf{D}+\varepsilon\,\mathbf{W}) \geq \mathbf{0}$. Luego para un ε suficientemente grande no existe ningún estado estacionario y por lo tanto el problema está acotado.

Bajo S1 existe alguna solución factible y bajo S2 el problema está acotado. En consecuencia bajo S1 y S2 existe alguna solución para TE.

Como en VN, advertimos que éstas son condiciones suficientes pero no necesarias, es posible que exista solución aunque no se cumplan[114]. Además tienen que darse ciertas condiciones de regularidad para que estén definidos los valores-trabajo. También cabe la posibilidad de que ε sea menor que 1, de que haya que prolongar las jornadas para alcanzar un estado estacionario[115]. Y la solución no siempre será única para el factor de explotación ε, ya que si por ejemplo las recetas pueden descomponerse en economías separadas entonces es posible que existan varias soluciones. Igualmente, aun cuando exista solución y sea única para el factor de explotación, también es posible que existan varias soluciones para las intensidades-trabajo y los valores-trabajo.

[114] De hecho podemos relajar fácilmente S2, el supuesto de que todos los procesos consumen laboralmente alguna materia, por el de que es necesario algún consumo laboral. Entonces con un ε suficientemente grande para todo $\mathbf{X} \geqq \mathbf{0}$ nos queda que $\mathbf{X}\,(-\mathbf{C} - \varepsilon\,\mathbf{V} + \mathbf{D} + \varepsilon\,\mathbf{W})$ será una magnitud negativa para por lo menos una materia, por lo que TE estará acotado aun cuando algunos procesos, pero no todos, fueran automáticos.

[115] Pero si las recetas son productivas entonces existe un estado estacionario con $\varepsilon = 1$, y por lo tanto el factor de explotación no puede ser menor que 1. Hacemos notar que para tener la seguridad de que en TE $\varepsilon \geq 1$ tienen que cumplirse las mismas condiciones que para que tengamos al seguridad de que en VN $\alpha \geq 1$.

15: Perturbaciones

En nuestros modelos podemos modificar los coeficientes de flujos netos, incorporar o retirar un proceso o una materia, o cambiar el tipo de un proceso o de una materia. Nos interesa estudiar como varía la solución de nuestros modelos ante estas perturbaciones.

15.1 Perturbación de los coeficientes

En determinados casos VN y TE resultan un problema de autovalores polinómicos[116]. Estudiaremos como cambian los autovalores y autovectores por la izquierda y derecha (el factor de expansión, las intensidades y los precios en VN) cuando modificamos o "perturbamos" la matriz **A** añadiéndole h **M** y la matriz **B** añadiéndole h **N**, donde **M** y **N** son matrices y h un escalar. Plantearemos sólo la perturbación de los coeficientes del sistema básico cuando es cuadrado y no degenerado, y nos limitaremos al caso en el que la perturbación modifica las variables de forma que pueden ser expresadas en series de potencias[117]

$$\alpha(h) = \alpha_0 + h\ \alpha_1 + h^2\ \alpha_2 + h^3\ \alpha_3 + h^4\ \alpha_4 + h^5\ \alpha_5 + h^6\ \alpha_6 + \ldots$$
$$\mathbf{X}(h) = \mathbf{X_0} + h\ \mathbf{X_1} + h^2\ \mathbf{X_2} + h^3\ \mathbf{X_3} + h^4\ \mathbf{X_4} + h^5\ \mathbf{X_5} + h^6\ \mathbf{X_6} + \ldots$$
$$\mathbf{Y}(h) = \mathbf{Y_0} + h\ \mathbf{Y_1} + h^2\ \mathbf{Y_2} + h^3\ \mathbf{Y_3} + h^4\ \mathbf{Y_4} + h^5\ \mathbf{Y_5} + h^6\ \mathbf{Y_6} + \ldots$$

---

[116] Los *problemas de autovalores* tienen la forma

$$\mathbf{X}\ \mathbf{F}(\alpha) = \mathbf{0}$$
$$\mathbf{F}(\alpha)\ \mathbf{Y} = \mathbf{0}$$

esto es, resultan unos sistemas de ecuaciones lineales homogéneas dada la matriz $\mathbf{F}(\alpha)$. La solución de este tipo de sistemas depende del rango de $\mathbf{F}(\alpha)$. Cuando $\mathbf{F}(\alpha)$ es cuadrada si para un α el rango es igual al número de incógnitas n (el número de filas y columnas) estos sistemas sólo tienen la solución trivial con $\mathbf{X} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{Y} = \mathbf{0}$. Pero si para un α el rango es menor que n entonces además de la trivial existirá una solución con un número de grados de libertad igual a n menos el rango de $\mathbf{F}(\alpha)$. Por lo tanto, para que estos sistemas tengan una solución no trivial es necesario que el determinante de la matriz sea nulo, $\det(\mathbf{F}(\alpha)) = 0$. A los α raíces de esta ecuación los llamaremos *autovalores*, y a las soluciones no triviales de los sistemas lineales correspondientes *autovectores por la izquierda* **X**, y *autovectores por la derecha* **Y**.

En VN (y en TE) los *sistemas básicos* son aquellos formados por los procesos con intensidades no nulas y por las materias con valores no nulos. Para los sistemas básicos cuadrados los balances materiales y contables forman un problema de autovalores; aunque por supuesto para que estemos ante una solución de VN no basta con que se cumplan estas condiciones sino que además tienen que cumplirse las condiciones de signo del factor, las intensidades y precios, y la derivada del Lagrangiano con respecto al factor debe ser nula.

En VN con las recetas **A** y **B** tenemos que $\mathbf{F}(\alpha) = -\mathbf{A} + \mathbf{B} / \alpha$, pero multiplicaremos por conveniencia $\mathbf{F}(\alpha)$ por α, de manera que $\mathbf{F}(\alpha) = \mathbf{B} - \alpha\,\mathbf{A}$. El determinante $\det(\mathbf{B} - \alpha\,\mathbf{A})$ resulta para unas **A** y **B** cuadradas dadas un polinomio de α, de grado igual o menor que n. Entonces para el sistema básico estamos ante un problema de autovalores polinómicos (véase Wilkinson [1]). Un polinomio tiene un número de raíces igual a su grado, aunque no todas tienen por qué ser distintas. Puede demostrarse que el rango de $(\mathbf{B} - \alpha\,\mathbf{A})$ es n menos el número de multiplicidad de la raíz α, por lo que el número de grados de libertad de los **X** e **Y** correspondientes será 1 si la raíz tiene una multiplicidad 1; entonces diremos que estamos en el caso no degenerado. Las otras formas de escribir las recetas pueden estudiarse en el mismo sentido, aunque no las plantearemos aquí.

[117] Aquí los subíndices no representan una evolución temporal, sino el grado de los coeficientes de las series.

En realidad ante una perturbación es posible que el sistema deje de tener solución, o que cambie el sistema básico. Nosotros estudiamos sólo el caso en el que ante la perturbación el autovalor y los autovectores cambian de manera "suave", de manera que puede ser expresada en estas series de potencias. Estudiaremos por lo tanto sólo perturbaciones locales, que son aquellas para la que sigue existiendo solución, no se modifica el sistema básico y para las que el nuevo factor se corresponde al desarrollo en serie a partir del factor no perturbado[118].

Las ecuaciones de autovalores[119] pueden escribirse, ya con la perturbación,

$$\mathbf{X}(h)\,(\mathbf{B} + h\,\mathbf{N} - \alpha(h)\,(\mathbf{A} + h\,\mathbf{M})) = \mathbf{0} \qquad \{15.1\}$$
$$(\mathbf{B} + h\,\mathbf{N} - \alpha(h)\,(\mathbf{A} + h\,\mathbf{M}))\,\mathbf{Y}(h) = \mathbf{0} \qquad \{15.2\}$$

e impondremos también que se cumpla[120]

$$\alpha(h) - \mathbf{X}(h)\,(\mathbf{A} + h\,\mathbf{M})\,\mathbf{Y}(h) = 0 \qquad \{15.3\}$$

Además, por conveniencia ya que no es imprescindible, supondremos que la suma de las intensidades es una constante para cualquier h,

$$\sum \mathbf{X}(h) = \text{constante} \qquad \{15.4\}$$

Desarrollando {15.1} tenemos

$$(\mathbf{X_0} + h\,\mathbf{X_1} + h^2\,\mathbf{X_2} + h^3\,\mathbf{X_3} + \ldots)\,(\mathbf{B} + h\,\mathbf{N}) - (\alpha_0\,\mathbf{X_0} + h\,(\alpha_0\,\mathbf{X_1} + \alpha_0\,\mathbf{X_1}) + \\ + h^2\,(\alpha_0\,\mathbf{X_2} + \alpha_1\,\mathbf{X_1} + \alpha_2\,\mathbf{X_0}) + \ldots)\,(\mathbf{A} + h\,\mathbf{M}) = \mathbf{0}$$

y ordenando por potencias de h

$$(\mathbf{X_0}\,\mathbf{B} - \alpha_0\,\mathbf{X_0}\,\mathbf{A}) + h\,(\mathbf{X_1}\,\mathbf{B} + \mathbf{X_0}\,\mathbf{N} - (\alpha_0\,\mathbf{X_1} + \alpha_1\,\mathbf{X_0})\,\mathbf{A} - \alpha_0\,\mathbf{X_0}\,\mathbf{M}) + h^2\,(\mathbf{X_2}\,\mathbf{B} + \\ + \mathbf{X_1}\,\mathbf{N} - (\alpha_0\,\mathbf{X_2} + \alpha_1\,\mathbf{X_1} + \alpha_2\,\mathbf{X_0})\,\mathbf{A} - (\alpha_0\,\mathbf{X_1} + \alpha_1\,\mathbf{X_0})\,\mathbf{M}) + h^3\,(\mathbf{X_3}\,\mathbf{B} + \mathbf{X_2}\,\mathbf{N} - \\ - (\alpha_0\,\mathbf{X_3} + \alpha_1\,\mathbf{X_2} + \alpha_2\,\mathbf{X_1} + \alpha_3\,\mathbf{X_0})\,\mathbf{A} - (\alpha_0\,\mathbf{X_2} + \alpha_1\,\mathbf{X_1} + \alpha_2\,\mathbf{X_0})\,\mathbf{M}) + \ldots = \mathbf{0}$$

Esta expresión es un vector de polinomios de h, y un polinomio es nulo para cualquier magnitud de la variable sólo si sus coeficientes son todos nulos. Por lo tanto nos queda

[118] En realidad las fórmulas que vamos a deducir se aplican a todos los autovalores, y no sólo al factor-VN, y por eso con ellas podríamos estudiar perturbaciones que impliquen el cambio del autovalor del sistema básico, el caso degenerado, los sistemas no cuadrados, etc. Pero no detallaremos estos aspectos para no alargar la exposición.
[119] Que son las condiciones de balance material {1.4} y de balance contable {2.1} para el sistema básico, pero multiplicándolas por conveniencia por $\alpha(h)$. En §8.1 vimos como escribir los procesos duraderos con las matrices **A** y **B**, por lo que podemos tratar las perturbaciones en este caso.
[120] En definitiva, la condición de máximo {2.2}. Como $\alpha(h) = (\mathbf{X}(h)\,(\mathbf{B} + h\mathbf{N})\,\mathbf{Y}(h)) / (\mathbf{X}(h)\,(\mathbf{A} + h\mathbf{M})\,\mathbf{Y}(h))$ llegamos a {15.3} multiplicándola por $\alpha(h)$.

$$\mathbf{X_0\, B} - \alpha_0\, \mathbf{X_0\, A = 0}$$
$$\mathbf{X_1\, B + X_0\, N} - (\alpha_0\, \mathbf{X_1} + \alpha_1\, \mathbf{X_0})\, \mathbf{A} - \alpha_0\, \mathbf{X_0\, M = 0}$$
$$\mathbf{X_2\, B + X_1\, N} - (\alpha_0\, \mathbf{X_2} + \alpha_1\, \mathbf{X_1} + \alpha_2\, \mathbf{X_0})\, \mathbf{A} - (\alpha_0\, \mathbf{X_1} + \alpha_1\, \mathbf{X_0})\, \mathbf{M = 0}$$
$$\mathbf{X_3\, B + X_2\, N} - (\alpha_0\, \mathbf{X_3} + \alpha_1\, \mathbf{X_2} + \alpha_2\, \mathbf{X_1} + \alpha_3\, \mathbf{X_0})\, \mathbf{A} - (\alpha_0\, \mathbf{X_2} + \alpha_1\, \mathbf{X_1} + \alpha_2\, \mathbf{X_0})\, \mathbf{M = 0}$$
$$\ldots$$

La primera de estas expresiones la satisface la solución del problema no perturbado. El resto también pueden escribirse, para $n > 0$,

$$\mathbf{X_n}(\mathbf{B} - \alpha_0 \mathbf{A}) - \alpha_n (\mathbf{X_0 A}) = \left(\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \mathbf{X_{n-i}} \right) \mathbf{A} + \left(\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \mathbf{X_{n-i-1}} \right) \mathbf{M} - \mathbf{X_{n-1} N} \qquad \{15.5\}$$

Razonando de manera similar desde {15.2} llegamos a las expresiones

$$\mathbf{B\, Y_0 - A\, Y_0}\, \alpha_0 = \mathbf{0}$$
$$\mathbf{B\, Y_1 + N\, Y_0 - A}\, (\mathbf{Y_1}\, \alpha_0 + \mathbf{Y_0}\, \alpha_1) - \mathbf{M\, Y_0}\, \alpha_0 = \mathbf{0}$$
$$\mathbf{B\, Y_2 + N\, Y_1 - A}\, (\mathbf{Y_2}\, \alpha_0 + \mathbf{Y_1}\, \alpha_1 + \mathbf{Y_0}\, \alpha_2) - \mathbf{M}\, (\mathbf{Y_1}\, \alpha_0 + \mathbf{Y_0}\, \alpha_1) = \mathbf{0}$$
$$\mathbf{B\, Y_3 + N\, Y_2 - A}\, (\mathbf{Y_3}\, \alpha_0 + \mathbf{Y_2}\, \alpha_1 + \mathbf{Y_1}\, \alpha_2 + \mathbf{Y_0}\, \alpha_3) - \mathbf{M}\, (\mathbf{Y_2}\, \alpha_0 + \mathbf{Y_1}\, \alpha_1 + \mathbf{Y_0}\, \alpha_2) = \mathbf{0}$$
$$\ldots$$

e igualmente la primera de estas expresiones la satisface la solución del problema no perturbado. El resto también pueden escribirse, para $n > 0$,

$$(\mathbf{B} - \alpha_0 \mathbf{A})\mathbf{Y_n} - (\mathbf{AY_0})\alpha_n = \mathbf{A}\left(\sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{Y_{n-i}} \alpha_i \right) + \mathbf{M}\left(\sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{Y_{n-i-1}} \alpha_i \right) - \mathbf{NY_{n-1}} \qquad \{15.6\}$$

Desde {15.3} tenemos

$$(\alpha_0 + h\alpha_1 + h^2\alpha_2 + \ldots) - (\mathbf{X_0} + h\mathbf{X_1} + h^2\mathbf{X_2} + \ldots)(\mathbf{A} + h\mathbf{M})(\mathbf{Y_0} + h\mathbf{Y_1} + h^2\mathbf{Y_2} + \ldots) = 0$$

y por lo tanto, para cada potencia de h,

$$\alpha_0 - \mathbf{X_0\, A\, Y_0} = 0$$
$$\alpha_1 - \mathbf{X_0\, A\, Y_1 - X_1\, A\, Y_0 - X_0\, M\, Y_0} = 0$$
$$\alpha_2 - \mathbf{X_0\, A\, Y_2 - X_1\, A\, Y_1 - X_2\, A\, Y_0 - X_0\, M\, Y_1 - X_1\, M\, Y_0} = 0$$
$$\alpha_3 - \mathbf{X_0\, A\, Y_3 - X_1\, A\, Y_2 - X_2\, A\, Y_1 - X_3\, A\, Y_0 - X_0\, M\, Y_2 - X_1\, M\, Y_1 - X_2\, M\, Y_0} = 0$$
$$\ldots$$

La primera de las expresiones la cumple la solución no perturbada y el resto quedan, para $n > 0$,

$$-\mathbf{X_n}(\mathbf{AY_0}) + \alpha_n - (\mathbf{X_0 A})\mathbf{Y_n} = \sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{X_i A Y_{n-i}} + \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{X_i M Y_{n-i-1}} \qquad \{15.7\}$$

Desarrollando {15.4}

$$\sum (\mathbf{X_0} + h\, \mathbf{X_1} + h^2\, \mathbf{X_2} + h^3\, \mathbf{X_3} + h^4\, \mathbf{X_4} + h^5\, \mathbf{X_5} + h^6\, \mathbf{X_6} + \ldots) = \text{constante}$$

por lo que, para cada potencia de h,

$\sum \mathbf{X_0}$ = constante
$\sum \mathbf{X_1} = 0$
$\sum \mathbf{X_2} = 0$
$\sum \mathbf{X_3} = 0$
...

La primera de las expresiones la cumple la solución no perturbada y el resto puede escribirse (**1** es un vector-columna con todos los elementos igual a 1), para $n > 0$,

$$\mathbf{X_n}\,\mathbf{1} = 0 \qquad \{15.8\}$$

Combinando {15.6}, {15.7}, {15.5} y {15.8} plantearemos el sistema lineal[121], para $n > 0$,

$$\mathbf{U}\begin{bmatrix} \mathbf{X_n^{\mathrm{T}}} \\ \alpha_n \\ \mathbf{Y_n} \end{bmatrix} = \mathbf{R_n} \qquad \{15.9\}$$

donde

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{A}\mathbf{Y_0} & \mathbf{B}-\alpha_0\mathbf{A} \\ (-\mathbf{A}\mathbf{Y_0})^{\mathrm{T}} & 1 & -\mathbf{X_0}\mathbf{A} \\ (\mathbf{B}-\alpha_0\mathbf{A})^{\mathrm{T}} & (-\mathbf{X_0}\mathbf{A})^{\mathrm{T}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1}^{\mathrm{T}} & 0 & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R_n} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}(\sum_{i=1}^{n-1}\mathbf{Y_{n-i}}\alpha_i) + \mathbf{M}(\sum_{i=0}^{n-1}\mathbf{Y_{n-i-1}}\alpha_i) - \mathbf{N}\mathbf{Y_{n-1}} \\ \sum_{i=1}^{n-1}\mathbf{X_i}\mathbf{A}\mathbf{Y_{n-i}} + \sum_{i=0}^{n-1}\mathbf{X_i}\mathbf{M}\mathbf{Y_{n-i-1}} \\ ((\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i\mathbf{X_{n-i}})\mathbf{A} + (\sum_{i=0}^{n-1}\alpha_i\mathbf{X_{n-i-1}})\mathbf{M} - \mathbf{X_{n-1}}\mathbf{N})^{\mathrm{T}} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Si conocemos la solución del problema no perturbado, si conocemos α_0, $\mathbf{X_0}$ e $\mathbf{Y_0}$, entonces podemos formar la matriz **U** y para cualquier n el vector $\mathbf{R_n}$ involucra a los términos de las series de grado menor que n. Por lo tanto si conocemos α_0, $\mathbf{X_0}$ e $\mathbf{Y_0}$ podemos calcular $\mathbf{R_1}$, resolver el sistema de ecuaciones lineales {15.9} y obtener α_1, $\mathbf{X_1}$ e $\mathbf{Y_1}$; conociendo estas magnitudes podemos calcular $\mathbf{R_2}$, resolver {15.9} y obtener α_2, $\mathbf{X_2}$ e $\mathbf{Y_2}$; y así sucesivamente hasta obtener todos los términos de las series que queramos[122]. No obstante

[121] Estudiaremos más adelante sus condiciones de solución.
[122] Además como

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X_n^{\mathrm{T}}} \\ \alpha_n \\ \mathbf{Y_n} \end{bmatrix} = \mathbf{U}^{+}\mathbf{R_n}$$

hacemos notar que estas series tienen un radio de convergencia, que no estudiaremos aquí, de manera que para valores de h que lo superen este planteamiento no resulta útil[123]; más adelante señalaremos un método para intentar solventar esta dificultad.

15.1.1 Primer término de la serie para el autovalor

Detallaremos el primer término perturbativo α_1, la tasa a la que cambia el factor ante la perturbación. Vimos que de {15.1} nos queda

$$\mathbf{X_1\,B} + \mathbf{X_0\,N} - (\alpha_0\,\mathbf{X_1} + \alpha_1\,\mathbf{X_0})\,\mathbf{A} - \alpha_0\,\mathbf{X_0\,M} = \mathbf{0}$$

Ordenando tenemos

$$\mathbf{X_1}\,(\mathbf{B} - \alpha_0\,\mathbf{A}) + \mathbf{X_0}\,(\mathbf{N} - \alpha_0\,\mathbf{M}) + \alpha_1\,\mathbf{X_0\,A} = \mathbf{0}$$

y multiplicando por $\mathbf{Y_0}$

$$\mathbf{X_1}\,(\mathbf{B} - \alpha_0\,\mathbf{A})\,\mathbf{Y_0} + \mathbf{X_0}\,(\mathbf{N} - \alpha_0\,\mathbf{M})\,\mathbf{Y_0} + \alpha_1\,\mathbf{X_0\,A\,Y_0} = \mathbf{0}$$

Por lo tanto despejando α_1 nos queda

$$\alpha_1 = -\frac{\mathbf{X_1(B}-\alpha_0\mathbf{A)Y_0} + \mathbf{X_0(N}-\alpha_0\mathbf{M)Y_0}}{\mathbf{X_0\,A\,Y_0}}$$

Pero desde {15.2} $(\mathbf{B} - \alpha_0\,\mathbf{A})\,\mathbf{Y_0} = \mathbf{0}$ y desde {15.3} $\alpha_0 - \mathbf{X_0\,A\,Y_0} = 0$, por lo que

$$\alpha_1 = \mathbf{X_0}\left(-\mathbf{M} + \frac{\mathbf{N}}{\alpha_0}\right)\mathbf{Y_0} \qquad \{15.10\}$$

En definitiva, ante una perturbación de las recetas *la tasa a la que cambia el factor de expansión máximo es el precio actualizado total de la perturbación*[124].

---

sólo necesitamos calcular la pseudo-inversa de $\mathbf{U}$. Con el superíndice $^+$ anotamos la inversa generalizada o pseudo-inversa de Moore-Penrose. Observemos que $\mathbf{U}$ no depende de n ni tampoco de $\mathbf{M}$ y $\mathbf{N}$, por lo que a partir de $\mathbf{U}^+$ podemos obtener todos los coeficientes de las series con un bajo coste computacional, y además esta misma matriz nos servirá para calcular cualquier perturbación cambiando las correspondientes $\mathbf{M}$ y $\mathbf{N}$.
En realidad a partir de {15.5} y tomando por ejemplo la normalización {15.8} pueden calcularse estas series para el autovalor y los autovectores por la izquierda resolviendo sucesivamente el sistema lineal cuadrado

$$\begin{bmatrix}\mathbf{X_n} & \alpha_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{B}-\alpha_0\mathbf{A} & \mathbf{1}\\ -\mathbf{X_0A} & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}(\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i\mathbf{X_{n-i}})\mathbf{A} + (\sum_{i=0}^{n-1}\alpha_i\mathbf{X_{n-i-1}})\mathbf{M} - \mathbf{X_{n-1}N} & 0\end{bmatrix}$$

Igualmente podríamos añadir una normalización para los autovectores por la derecha y a partir de {15.6} tendríamos un sistema lineal cuadrado que nos permitiría calcular sucesivamente los términos de las series. Sin añadir una normalización hubiéramos podido también calcular los coeficientes de las series, pero dependiendo de parámetros, y además para hacer compatible los resultados de las series con la solución de VN hubiéramos tenido que añadir la normalización *a posteriori*. Por ello {15.3} parece natural para expresar el vínculo entre los autovectores por la derecha y por la izquierda, y aunque {15.8} no es completamente general, usaremos también esta condición para simplificar la exposición; más general sería la normalización $\sum \mathbf{X}(h)^2$ = constante, que implica que, para $n > 0$, $2\mathbf{X_0X_n^T} = -\sum_{i=1}^{n-1}\mathbf{X_iX_{n-i}^T}$.

[123] Por supuesto, las series sólo seguirán informándonos de la solución de VN para los h con los que siguen cumpliéndose el resto de condiciones, esto es, a los h para los que el factor-VN es positivo y se satisfacen los signos de intensidades y precios.

Este resultado[125] nos permite entender mejor los precios. Si aumentamos levemente el coeficiente de producción de una materia (o si disminuimos su coeficiente de insumo) el factor de expansión máximo aumentará si su precio es positivo, disminuirá si es negativo y no se modificará si es nulo. Las materias con precio negativo son pues aquellas en las que un pequeño incremento de su coeficiente de producción (o una reducción de su coeficiente de consumo) supone una reducción del factor de crecimiento máximo. Además el factor variará justo en proporción al precio; si modificamos alternativamente la producción de dos materias en un proceso, ambas con precio positivo pero una valiendo el triple que la otra, el factor-VN aumentará el triple en el primer caso que en el segundo. Y la variación del factor depende del momento en el que operan los coeficientes que modificamos, de forma que hay que tener en cuenta la actualización. Por lo tanto, el precio de una materia es la medida en la que una leve perturbación en el balance material correspondiente afecta al factor de expansión[126] (e interés). Además esta variación también depende de la intensidad del proceso involucrado, y si modificamos alternativamente la producción de una misma materia en dos procesos diferentes el factor-VN aumentará en la proporción de las intensidades respectivas. Por lo tanto, la intensidad que se corresponde a un proceso es la medida en la que una leve perturbación en su balance contable afecta al factor de interés[127] (y expansión).

15.1.2 Primeros términos de la series para los autovectores

Desde {15.1} tenemos

---

[124] Recordemos que nos referimos siempre a perturbaciones locales. Por lo tanto ésta es una propiedad aplicable sólo si sigue existiendo solución, si el sistema básico no cambia y si el nuevo autovalor se corresponde a la serie del antiguo.

[125] Que además resulta fácil generalizar. Por ejemplo en el caso en tiempo discreto, para unas perturbaciones correspondientes $\mathbf{f_r} + h\,\mathbf{g_r}$ nos queda

$$\alpha_1 = \mathbf{X_0}\left(\mathbf{g_0} + \frac{\mathbf{g_1}}{\alpha_0} + \frac{\mathbf{g_2}}{\alpha_0^2} + \frac{\mathbf{g_3}}{\alpha_0^3} + \frac{\mathbf{g_4}}{\alpha_0^4} + \ldots\right)\mathbf{Y_0}$$

[126] Ésta es una propiedad de los multiplicadores de Lagrange en cualquier problema de optimización restringida, ya que el multiplicador de Lagrange que se corresponde a una restricción es la tasa a la que cambia la función objetivo en el máximo ante una variación en la restricción. Pero hacemos notar que en este capítulo hemos deducido esta propiedad sin hacer referencia al carácter de multiplicadores de Lagrange de los precios, sino sólo al hecho de que son los autovectores por la derecha de un problema de autovalores.
Si tratamos los flujos impuestos como en §13.3.2 y mantenemos como normalización que la suma de las intensidades es 1, la perturbación del flujo impuesto q_j es equivalente a la perturbación de todos los elementos de la columna j de **S** (y por lo tanto de **A**) con el signo cambiado, por lo que

$$\alpha_1 = -\,(-\Sigma x_i)\, y_j = y_j,$$

que es la fórmula que vimos en {13.4}.

[127] Y esta afirmación nos lleva a sospechar que las intensidades son a su vez los multiplicadores de Lagrange de un problema de optimización en donde la función objetivo es el factor de interés y donde los balances contables son las restricciones. Más adelante comprobaremos que efectivamente éste es el caso.

$$\mathbf{X_1\,B} + \mathbf{X_0\,N} - (\alpha_0\,\mathbf{X_1} + \alpha_1\,\mathbf{X_0})\,\mathbf{A} - \alpha_0\,\mathbf{X_0\,M} = \mathbf{0}$$

por lo que nos queda

$$\mathbf{X_1\,U} = -\,\mathbf{X_0\,R}$$

donde

$$\mathbf{U} = -\mathbf{A} + \mathbf{B}\,/\,\alpha_0$$
$$\mathbf{R} = -\mathbf{M} + \mathbf{N}\,/\,\alpha_0 - \mathbf{A}\,\alpha_1\,/\,\alpha_0$$

Pero por hipótesis **U** es una matriz singular y este sistema lineal tienen un grado de libertad. No obstante si añadimos una normalización como {15.8} para las $\mathbf{X_1}$ tenemos un sistema lineal en el que estas variables son las únicas incógnitas[128], por lo que

$$\mathbf{X_1} = \begin{bmatrix} -\mathbf{X_0\,R} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U} & \mathbf{1} \end{bmatrix}^{+} \qquad \{15.11\}$$

Igualmente desde {15.2} tenemos

$$\mathbf{B\,Y_1} + \mathbf{N\,Y_0} - \mathbf{A}\,(\mathbf{Y_1}\,\alpha_0 + \mathbf{Y_0}\,\alpha_1) - \mathbf{M\,Y_0}\,\alpha_0 = \mathbf{0}$$

por lo que

$$\mathbf{U\,Y_1} = -\,\mathbf{R\,Y_0}$$

Como nos interesa que se cumpla {15.3}, podemos añadir como normalización para $\mathbf{Y_1}$

$$\alpha_1 - \mathbf{X_0\,A\,Y_1} - \mathbf{X_1\,A\,Y_0} - \mathbf{X_0\,M\,Y_0} = 0$$

y por lo tanto resulta[129]

$$\mathbf{Y_1} = \begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{X_0\,A} \end{bmatrix}^{+} \begin{bmatrix} -\mathbf{R\,Y_0} \\ \alpha_1 - \mathbf{X_1\,A\,Y_0} - \mathbf{X_0\,M\,Y_0} \end{bmatrix} \qquad \{15.12\}$$

15.1.3 Análisis con ecuaciones diferenciales

Sólo con los primeros términos de las series podemos calcular el efecto de la perturbación resolviendo unas ecuaciones diferenciales. De {15.10}, {15.11} y {15.12} nos queda

$$\frac{d\alpha}{dh} = \mathbf{X}(-\mathbf{M} + \mathbf{N}/\alpha)\mathbf{Y}$$

$$\frac{d\mathbf{X}}{dh} = \begin{bmatrix} -\mathbf{X\,R} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U} & \mathbf{1} \end{bmatrix}^{+}$$

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dh} = \begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{X}(\mathbf{A} + h\mathbf{M}) \end{bmatrix}^{+} \begin{bmatrix} -\mathbf{R\,Y} \\ \dfrac{d\alpha}{dh} - \dfrac{d\mathbf{X}}{dh}(\mathbf{A} + h\mathbf{M})\mathbf{Y} - \mathbf{X\,M\,Y} \end{bmatrix}$$

---

[128] Si conocemos $\mathbf{X_0}$, $\mathbf{Y_0}$ y α_0 desde {15.10} podemos calcular α_1. Estamos ante un sistema lineal rectangular, pero hubiéramos podido incorporar la normalización sumándola al resto de las ecuaciones, o prescindir de una de las columnas de **U** y de **R**, y entonces tendríamos un sistema lineal cuadrado que podríamos resolver con la inversa habitual.

[129] También podemos prescindir de una de las filas de **U** y de **R** y expresar $\mathbf{Y_1}$ como la solución del sistema lineal cuadrado resultante. Recordemos que nos referimos siempre a perturbaciones locales.

donde hemos anotado $\alpha(h)$, $\mathbf{X}(h)$ e $\mathbf{Y}(h)$ de manera abreviada como α, $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$, y donde

$$\mathbf{U} = -(\mathbf{A} + h\,\mathbf{M}) + (\mathbf{B} + h\,\mathbf{N})/\alpha$$
$$\mathbf{R} = -\mathbf{M} + \mathbf{N}/\alpha - (\mathbf{A} + h\,\mathbf{M})\frac{d\alpha}{dh}/\alpha$$

Estas ecuaciones diferenciales tienen la ventaja de que nos permiten estudiar las perturbaciones incluso en alguna situación en la que las series divergen[130].

15.1.4 Ejemplos de análisis de perturbaciones en VN

Unos ejemplos aclararán la exposición. Estudiemos como cambia la solución de VN para nuestras recetas de §2.5 si incrementamos el coeficiente de producción de trigo del primer proceso. La solución de VN para el problema no perturbado resultaba α = 1.25, $\mathbf{X_t} = 1.25^t$ [4, 6, 0], $\mathbf{Y_t} = 1.25^{-t}$ [1/2624, 15/2624], por lo que los procesos que operan, el 1º y el 2º, forman un sistema cuadrado y la solución es no degenerada, y por lo tanto podemos aplicar las fórmulas que hemos deducido. Tenemos para los procesos que operan

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 280 & 12 \\ 120 & 8 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 575 & 0 \\ 0 & 20 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

El primer término de la serie para el factor de expansión nos queda desde {15.10}

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/1.25 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2624 \\ 15/2624 \end{bmatrix} = 4 \times 1/1.25 \times 1/2624 = 1/820$$

que es el precio actualizado de la perturbación. Por lo tanto si aumentamos la producción de trigo del primer proceso en una pequeña cantidad h el nuevo factor de expansión será

$$\alpha(h) = \alpha_0 + \alpha_1\, h + \ldots \approx 1.25 + 1/820\, h$$

En este ejemplo sólo con el primer término de la serie obtenemos una aproximación razonable incluso para una h considerablemente grande[131], y además podemos reducir el

[130] Estas fórmulas no caen en circularidad ya que conociendo $\alpha(h)$, $\mathbf{X}(h)$ e $\mathbf{Y}(h)$, conociendo las variables para un h cualquiera (por ejemplo para el problema sin perturbar con h = 0), podemos calcular $\mathbf{U}$ y $d\alpha/dh$; con esta tasa obtenemos $\mathbf{R}$ y por lo tanto $d\mathbf{X}/dh$; y de aquí calculamos $d\mathbf{Y}/dh$. De hecho hubiéramos podido escribir las ecuaciones diferenciales usando simplemente {15.9} para n = 1, pero este planteamiento nos permite afirmar que, si con las normalizaciones respectivas que hemos usado {15.3} y {15.4} los sistemas {15.11} y {15.12} tienen solución única, entonces {15.9} tendrá solución única para n = 1, y por lo tanto también para todo n > 1. Además podemos resolverlas para todos los autovalores del sistema básico, o incluso variando $\mathbf{M}$ y $\mathbf{N}$ con h. No obstante estas ecuaciones están limitadas a las α no nulas y a los h para los que los sistemas lineales tienen una solución.

[131] Comprobemos la eficacia de la aproximación sólo con el primer término de la serie para diferentes h

h	factor-VN	1.25 + 1/820 h	error
0.01	1.250012195017	1.250012195121	–0.000000000104
0.1	1.250121940773	1.250121951219	–0.000000010446
1	1.251218468290	1.251219512195	–0.000001043905
10	1.262091420526	1.262195121951	–0.000103701425
100	1.362230732200	1.371951219512	–0.009720487312

error de la aproximación todo lo que queramos calculando más términos de la serie[132]. Pero no siempre será éste el caso, porque las series tienen un radio de convergencia fuera del cual no permiten obtener una aproximación razonable, aunque entonces podemos atacar el problema con las ecuaciones diferenciales. En definitiva, a partir de los primeros términos de las series nos queda

$$\alpha(h) \approx 1.25 + 0.0012195121\, h$$
$$x_1(h) / x_2(h) \approx (4 - 0.0046829268\, h) / (6 + 0.0046829268\, h)$$
$$y_1(h) / y_2(h) \approx (0.0003810975 + 0.000000165\, h) / (0.0057164634 + 0.000013629\, h)$$

Con la perturbación, con el incremento del coeficiente de producción del trigo en una cantidad h pequeña, el factor-VN crecerá, la intensidad del proceso de producción de trigo con respecto a la del proceso de producción de hierro disminuirá y el precio del trigo con respecto al precio del hierro disminuirá también. Por lo tanto en nuestro ejemplo intensidades y precios “reaccionan” a la perturbación.

Tratemos otro caso, la modificación de las tasas de reproducción y supervivencia en la matriz de Leslie. Desde {15.10} si perturbamos la tasa de reproducción b_r (aquí el subíndice r se refiere de nuevo al grupo de edad), haciendo el elemento de la matriz **N** correspondiente igual a 1, nos queda

$$\alpha_1 = x_r\, y_0 / \alpha$$

con lo que la tasa a la que aumenta el factor de expansión será proporcional al número de mujeres en el grupo de edad correspondiente x_r. Si perturbamos de la misma manera la tasa de supervivencia s_r nos queda

$$\alpha_1 = x_r\, y_{r+1} / \alpha$$

[132] Desde {15.9} los cinco primeros términos de las series quedan

$$\alpha(h) = 1.25 + 0.001219512195122\, h - 1.044674337284719\times10^{-6}\, h^2 +$$
$$+ 7.706104570095486\times10^{-10}\, h^3 - 4.619729169844813\times10^{-13}\, h^4 + 1.836967825097845\times10^{-16}\, h^5 + ...$$
$$x_1(h) = 4 - 0.468292682926829\times10^{-2}\, h + 0.492529127551835\times10^{-5}\, h^2 -$$
$$- 0.470291795602722\times10^{-8}\, h^3 + 0.409226457454267\times10^{-11}\, h^4 - 0.324338773786344\times10^{-14}\, h^5 + ...$$
$$x_2(h) = 6 + 0.468292682926829\times10^{-2}\, h - 0.492529127551835\times10^{-5}\, h^2 +$$
$$+ 0.470291795602722\times10^{-8}\, h^3 - 0.409226457454267\times10^{-11}\, h^4 + 0.324338773786344\times10^{-14}\, h^5 + ...$$
$$y_1(h) = 0.0003810975609756 + 0.001650440359252\times10^{-4}\, h - 0.050907935432822\times10^{-8}\, h^2 +$$
$$+ 0.055682475069206\times10^{-11}\, h^3 - 0.034060445090357\times10^{-14}\, h^4 - 0.000631584924596\times10^{-17}\, h^5 + ...$$
$$y_2(h) = 0.0057164634146342 + 0.136297354942615\times10^{-4}\, h - 0.147855702604983\times10^{-8}\, h^2 -$$
$$- 0.695171393685194\times10^{-11}\, h^3 + 0.957840952893431\times10^{-14}\, h^4 - 0.679617556271054\times10^{-17}\, h^5 + ...$$

Sólo con estos cinco primeros términos las series para $h = 100$ resultan $\alpha = 1.362230726272485$, $\mathbf{X} = [3.576634104452405,\ 6.423365895547596]$, $\mathbf{Y} = [0.000393033872172,\ 0.007058589559060]$. Para $h = 100$ la solución de VN queda $\alpha = 1.362230732200013$, $\mathbf{X} = [3.576636295322016, 6.423363704677985]$, $\mathbf{Y} = [0.000393034145260,\ 0.007058590963433]$, por lo que el error es del orden de 10^{-6}. Si hubiéramos usado diez términos el error sería del orden de 10^{-12}, etc.

Por lo tanto si aumentamos (levemente) la tasa de supervivencia correspondiente a una edad el factor de expansión aumentará en proporción al número de mujeres en ese grupo de edad x_r por el valor reproductivo correspondiente a la edad siguiente y_{r+1}. Si a esta edad le corresponde un valor reproductivo nulo el factor no se modificará; aunque las mujeres que ya no van a tener hijos vivan más tiempo no cambiará el factor de expansión. Vemos que el análisis de las perturbaciones nos permite dar una nueva interpretación a los valores reproductivos.

15.2 Introducción y retirada de un proceso

15.2.1 Análisis mediante perturbaciones

Hay varias opciones para estudiar la manera en la que cambia la solución de VN cuando añadimos un proceso, y una primera consiste en usar el análisis de perturbaciones desarrollado. Si partimos de unas recetas para la que VN tiene una solución (cuadrada y no degenerada) y que queremos saber cual sería la nueva solución si añadimos un proceso a los disponibles y éste substituye a uno de los antiguos en el sistema básico, podemos plantear la perturbación correspondiente a cada posible sustitución. Anotemos las recetas del proceso i como $\mathbf{A_i}$ y $\mathbf{B_i}$ y las del nuevo proceso como $\mathbf{A_n}$ y $\mathbf{B_n}$. La sustitución del proceso i por el nuevo la trataremos con las matrices $\mathbf{M}$ y $\mathbf{N}$, nulas para todas las filas menos para la i, que resultaría $\mathbf{M_i} = \mathbf{A_n} - \mathbf{A_i}$ y $\mathbf{N_i} = \mathbf{B_n} - \mathbf{B_i}$, de forma que con $h = 1$ tenemos que la matriz de insumos incluirá en la fila i el proceso nuevo. Conociendo las posibles magnitudes de las variables para cada sustitución escogemos aquellas que cumplan el resto de condiciones de VN. Por ejemplo, si a los procesos vistos en §15.1.4 les agregáramos el proceso

$$[100 \quad 9] \qquad \rightarrow \qquad [200 \quad 10]$$

si el nuevo proceso substituyera al primero de los antiguos plantearíamos la perturbación

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 100-280 & 9-12 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 200-575 & 10-0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

esto es, la que resulta del nuevo proceso menos el viejo. De igual manera si el nuevo proceso substituyera al segundo de los antiguos nos queda la perturbación

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 100-120 & 9-8 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 200-0 & 10-20 \end{bmatrix}$$

A partir de las series correspondientes, o de las ecuaciones diferenciales, para $h = 1$ obtenemos las posibles nuevas soluciones de VN en cada caso[133].

La retirada de un proceso puede estudiarse de manera similar, si el proceso retirado operaba y es substituido por otro en el sistema básico, perturbando su receta con el resto de procesos disponibles que no operaban. Por ejemplo, si retiramos el primer proceso de §1.1, éste sería substituido ocasionalmente por el único disponible que no operaba, el tercero. El análisis de la perturbación quedaría

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 280-280 & 12-12 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 400-575 & 0-0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

esto es, el tercer proceso menos el primero[134]. Si hubiera más procesos disponibles plantearíamos la perturbación para cada proceso.

Debemos recordar que este análisis con perturbaciones es de tipo local, y por ello es posible que la introducción o la retirada de un proceso implique que no exista solución, que cambie el sistema básico o que el autovalor para el que esté definida la nueva solución sea diferente del que se corresponde al desarrollo en serie del antiguo. Además no siempre las series serán convergentes o las ecuaciones diferenciales alcanzarán una h igual a 1 manteniendo los sistemas lineales implicados solución.

15.2.2 Análisis mediante las condiciones de máximo de VN

Otra perspectiva es usar las condiciones de máximo de VN. Si para unos procesos VN tiene solución y añadimos otro existen tres posibilidades dependiendo de cómo se satisface el balance contable del nuevo proceso con los precios y el factor anteriores, para cualquiera de las formas de escribir las recetas[135]:

- si se satisface con holgura: se cumplen las condiciones de máximo con el nuevo proceso no operando y tenemos una solución con el mismo factor, precios e intensidades para el resto de procesos;

[133] Las series con 20 términos resultan para $h = 1$ en el primer caso $\alpha = 1.4286$, $\mathbf{X} = [0.7500,\ 0.2500]$, $\mathbf{Y} = [0.0051,\ 0.1020]$, y en el segundo $\alpha = 1.7310$, $\mathbf{X} = [-0.3683,\ 1.3683]$, $\mathbf{Y} = [0.0196,\ 0.1053]$. Por lo tanto si el problema está en la forma estándar la solución de VN se corresponde al primer caso, ya que el segundo implica intensidades negativas. El error cometido con la serie es del orden de 10^{-6}. Por supuesto, también es posible que la introducción de un nuevo proceso no altere el sistema básico y que permanezcan los antiguos.

[134] De hecho esta perturbación es similar a la que estudiamos en §15.1.4, pero con $h = -175$.

[135] Con el método de Lagrange se obtienen condiciones de máximo local. Como nosotros estamos estudiando las perturbaciones de tipo local podemos usar estas condiciones, pero debemos ser conscientes de que es posible que la introducción o la retirada de un proceso produzca cambios de tipo global; más adelante pondremos algún ejemplo de esto.

- si se satisface sin holgura (con signo =): se cumplen las condiciones de máximo por lo que el factor será el mismo, pero además de la vieja solución es posible que exista otra con el mismo factor pero con el nuevo proceso operando;
- si no se satisface: no se cumplen las condiciones de máximo y la vieja solución ya no lo será, y entonces es posible que exista otra con el nuevo proceso operando y con un factor mayor, o también que el problema no esté acotado[136].

En cualquier caso *la introducción de un nuevo proceso no provocará que disminuya el factor de expansión máximo*, ya que siempre existe la posibilidad de no utilizarlo, y *el balance contable es el criterio que determina si el nuevo proceso opera o no*.[137]

Si para unos procesos VN tiene solución y retiramos uno, existen dos posibilidades dependiendo de la intensidad del proceso retirado:

- si era nula: las restricciones y las condiciones de máximo seguirán cumpliéndose por lo que el factor, las intensidades del resto de procesos y los precios no se verán alterados;
- si no era nula: es posible que sólo con los otros procesos no exista una asignación factible, que no haya solución, pero si la hay ésta no podrá mostrar en ningún caso un factor mayor que antes[138].

Por lo tanto *la retirada de un proceso no aumentará el factor de expansión*, porque estamos eliminando la posibilidad de utilizarlo.

---

[136] En este caso el factor no puede ser igual o menor que antes, porque entonces tendrían que cumplirse las condiciones de máximo. Pero puede ser que con el nuevo proceso el factor no esté acotado y que por ello VN no tenga solución. No obstante si estamos ante la forma canónica y todos los procesos, también el que incorporamos, cumplen el supuesto S2 de §14.1 entonces el problema estará acotado.

[137] Recordemos una vez más que nos referimos a perturbaciones locales. Así para los procesos

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

existirán dos soluciones para VN en la forma estándar, con $\alpha = 3$, $\mathbf{X_t} = 3^t\,[1, 0]$, $\mathbf{Y_t} = 3^{-t}\,[3, 0]$ y con $\alpha = 2$, $\mathbf{X_t} = 2^t\,[0, 1]$, $\mathbf{Y_t} = 2^{-t}\,[0, 2]$. Pero si añadimos el proceso

$$[0 \quad 0] \qquad\qquad [1 \quad 0]$$

su condición de máximo resulta

$$y_1 / \alpha \leq 0$$

Para el autovalor $\alpha = 3$ esta condición no se satisface y la nueva solución no estará acotada, pero para el autovalor $\alpha = 2$ sí se satisface sin holgura y queda la solución $\alpha = 2$, $\mathbf{X_t} = 2^t\,[0, 1, 0]$, $\mathbf{Y_t} = 2^{-t}\,[0, 2]$. Por lo tanto, añadiendo un proceso una de las dos soluciones se vuelve no acotada y con la otra no se modifica el factor, como señalamos. Si tomáramos el mayor de los factores para los que existe solución como referencia, de manera no local, el factor máximo disminuiría con la introducción de un proceso.

[138] Porque entonces incorporando de nuevo la receta obtendríamos un factor menor, en contradicción con lo dicho. Recordemos siempre el carácter local de estas afirmaciones.

En resumen, introducir un proceso implica aumentar las posibilidades de acción del sistema y por ello el factor no decrecerá (localmente); retirar un proceso implica disminuir las opciones del sistema y por ello el factor no crecerá (localmente también).

Esto tiene implicaciones interesantes. Por ejemplo, vimos en §12 como podíamos modelizar los intercambios de una economía con un entorno mercantil. Por lo tanto si una economía aislada tiene solución para VN y modelizamos la introducción de la misma en un entorno mercantil añadiendo los procesos de intercambio esa introducción no disminuirá su factor de expansión (por supuesto, estamos razonando bajo el supuesto de que los intercambios son voluntarios). Igualmente si un desarrollo científico permite el descubrimiento de una nueva receta su incorporación a las disponibles por el sistema no provocará que disminuya el factor, si las antiguas pueden seguir operando. Además el balance contable juega un papel fundamental a la hora de decidir si un nuevo proceso operará. Como vimos en VN el balance contable era el beneficio, por lo que se entiende la importancia de su toma en consideración. Debemos insistir en el carácter local de estos razonamientos, porque las condiciones de máximo de Lagrange son de tipo local.

15.3 Introducción y retirada de una materia

15.3.1 Análisis mediante perturbaciones

Si la introducción de una materia implica la substitución de una antigua en el sistema básico podemos intentar analizar la nueva solución sin necesidad de resolver el nuevo problema utilizando las series perturbativas, de forma análoga a como procedimos en §15.2.1 con los procesos, perturbando cada columna con la nueva. Y la retirada de una materia puede estudiarse de manera similar, si la vieja materia tenía precio no nulo y es substituida por otra, perturbando su columna con las materias que tenían precio nulo. No expondremos este punto para no alargar la exposición porque realmente es análogo a lo visto en §15.2.1 con los procesos.

15.3.2 Análisis mediante las restricciones de VN

Si para unas materias VN tiene solución y añadimos otra existen tres posibilidades dependiendo de cómo se satisface el balance material de la nueva materia con las intensidades y el factor anteriores:

- si se satisface con holgura: se cumplen las restricciones con la nueva materia con precio nulo y tenemos una solución con el mismo factor, intensidades y precios para el resto de procesos;
- si se satisface sin holgura: se cumplen las restricciones por lo que el factor será el mismo, pero además de la vieja solución es posible que exista otra con el mismo factor pero con la nueva materia con precio no nulo;
- si no se satisface: no se cumplen las restricciones y la vieja solución ya no lo será, y entonces es posible que exista otra con la nueva materia con precio no nulo y con un factor menor, o también que el problema no sea factible[139].

En cualquier caso, *la introducción de una nueva materia no provocará que aumente el factor de expansión máximo*, ya que estamos añadiendo una restricción, y *el balance material es el criterio que determina si la nueva materia tiene precio nulo o no*.

Si para unas materias VN tiene solución y retiramos una, existen dos posibilidades dependiendo del precio de la materia retirada:

- si era nulo: las restricciones y las condiciones de máximo seguirán cumpliéndose por lo que el factor, las intensidades y los precios del resto de materias no se verán alterados;
- si no era nulo: es posible que sólo con el resto de materias el problema no esté acotado, y por ello que no haya solución, pero si la hay ésta no podrá mostrar en ningún caso un factor menor que antes[140].

Por lo tanto *la retirada de una materia no provocará que disminuya el factor de expansión máximo* (siempre localmente), porque estamos retirando una restricción.

En resumen, introducir una materia en el sistema implica añadir una restricción, y por ello que el factor en ningún caso crezca; retirar una materia implica eliminar una restricción, y por ello que el factor en ningún caso decrezca. Además el balance material juega un papel fundamental a la hora de determinar si la materia añadida tendrá precio nulo o no. Y si un balance material se cumple con holgura la solución no se modificará por retirar la materia.

[139] En este caso el factor no puede ser igual o mayor que el anterior porque entonces tendrían que cumplirse las restricciones. Pero puede ser que con la nueva materia las restricciones no sean factibles, y que por ello VN no tenga solución. No obstante si estamos ante la forma canónica y todas las materias, también la que incorporamos, cumplen el supuesto S1 de §14.1 entonces existirá una solución factible.

[140] Porque entonces incorporando de nuevo la materia obtendríamos un factor mayor, en contradicción con lo dicho. Pero si estamos en la forma canónica y se cumple el supuesto S2 de §14.1 el problema estará acotado.

15.4 Cambio de tipo de una materia

Dado que podemos escribir nuestros problemas en la forma estándar, el cambio del tipo de una materia puede estudiarse como la introducción o la retirada de los procesos de eliminación o incorporación gratuita que usábamos en §11.3.1. La incorporación de un proceso implica aumentar la posibilidad de acción del sistema, y por lo tanto que α no disminuya o que el problema no sea factible, e igualmente la retirada de un proceso implica que α no aumente o que el problema resulte no acotado. Nos queda

α no aumenta o problema no factible

α no disminuye o problema no acotado

		Tipo posterior			
		Expulsable Proceso de eliminación.	**Incorporable** Proceso de incorporación.	**Ilimitada** Procesos de eliminación e incorporación.	**Limitada**
Tipo anterior	**Expulsable** Proceso de eliminación.		Retiramos el proceso de eliminación y añadimos el de incorporación.	Añadimos el proceso de incorporación.	Retiramos el proceso de eliminación.
	Incorporable Proceso de incorporación.	Retiramos el proceso de incorporación y añadimos el de eliminación.		Añadimos el proceso de eliminación.	Retiramos el proceso de incorporación.
	Ilimitada Procesos de eliminación e incorporación.	Retiramos el proceso de incorporación.	Retiramos el proceso de eliminación.		Retiramos los procesos de incorporación y eliminación.
	Limitada	Añadimos el proceso de eliminación.	Añadimos el proceso de incorporación.	Añadimos los procesos de incorporación y eliminación.	

En consecuencia, si la materia era ilimitada el cambio a cualquier otro tipo no producirá que α aumente, porque equivale a retirar procesos; si la materia era limitada el cambio a cualquier otro tipo no producirá que α disminuya, porque equivale a añadir procesos; el cambio de cualquier tipo a ilimitada no producirá que α disminuya, y el cambio a limitada no producirá que α aumente (no obstante recordemos que la retirada de un proceso que operaba puede provocar que la solución deje de ser factible, y la introducción de un proceso que deje de ser acotada). Por ejemplo, si el entorno no puede seguir proveyendo al sistema sin limites de una materia podemos modelizar esta situación modificando el tipo de materia de ilimitada a limitada y el factor de expansión no aumentará con este cambio. También vimos que el modelo VN original suponía que las materias eran expulsables, mientras que el nuestro (en forma estándar) que eran limitadas; por lo tanto para unas recetas **A** y **B** iguales el factor solución del problema original no será menor que el nuestro.

15.5 Cambio de tipo de un proceso

Vimos en §11.3.2 que podíamos escribir los tipos de procesos en la forma estándar modificando el signo de sus flujos netos. Podemos pues tratar el cambio de tipo de procesos con la incorporación o eliminación de procesos, con el signo de sus flujos netos cambiado cuando corresponda. Como con la introducción de un proceso α no disminuirá o el problema resultará no acotado y como con la retirada de un proceso α no aumentará o el problema resultará no factible, nos queda

α no aumenta o problema no factible
α no disminuye o problema no acotado

		Tipo posterior			
		Directo Proceso con el signo de los flujos sin cambiar.	**Inverso** Proceso con el signo de los flujos cambiado.	**Mixto** Procesos con el signo de los flujos sin cambiar y cambiado.	**Imposible** Proceso no disponible.
Tipo anterior	**Directo** Proceso con el signo de los flujos sin cambiar.		Cambiamos el signo de los flujos del proceso.	Añadimos el proceso con el signo de los flujos cambiado.	Retiramos el proceso con el signo de los flujos sin cambiar.
	Inverso Proceso con el signo de los flujos cambiado.	Cambiamos el signo de los flujos del proceso.		Añadimos el proceso con el signo de los flujos sin cambiar.	Retiramos el proceso con el signo de los flujos cambiado.
	Mixto Procesos con el signo de los flujos sin cambiar y cambiado.	Retiramos el proceso con el signo de los flujos cambiado.	Retiramos el proceso con el signo de los flujos sin cambiar.		Retiramos los procesos con el signo de los flujos sin cambiar y cambiado.
	Imposible Proceso no disponible.	Añadimos el proceso con el signo de los flujos sin cambiar.	Añadimos el proceso con el signo de los flujos cambiado.	Añadimos los procesos con el signo de los flujos sin cambiar y cambiado.	

Por lo tanto, si el proceso era mixto el cambio a cualquier otro tipo no producirá que α aumente, porque equivale a retirar procesos. Y si el proceso era imposible el cambio a cualquier otro tipo no producirá que α disminuya, porque equivale a añadir procesos. El cambio de cualquier tipo a mixto no producirá que α disminuya, y el cambio a imposible no producirá que α aumente.

15.6 Análisis de perturbaciones en TE

El análisis de perturbaciones en TE es similar al de VN, ya que también podemos plantearlo como un problema de autovalores, y por ello no estudiaremos su deducción detallada. Anotaremos como **M** la perturbación de (**V** – **W**) y como **N** la de de (**D** – **C**). Las ecuaciones perturbadas resultan

$$\mathbf{X}(h)\,(\mathbf{D} - \mathbf{C} + h\,\mathbf{N} - \varepsilon(h)\,(\mathbf{V} - \mathbf{W} + h\,\mathbf{M})) = \mathbf{0}$$
$$(\mathbf{D} - \mathbf{C} + h\,\mathbf{N} - \varepsilon(h)\,(\mathbf{V} - \mathbf{W} + h\,\mathbf{M}))\,\mathbf{Y}(h) = \mathbf{0}$$

donde además desde {3.2} tenemos

$$1 - \mathbf{X}(h)\,(\mathbf{V} - \mathbf{W} + h\,\mathbf{M})\,\mathbf{Y}(h) = 0$$

Para obtener las series correspondientes a TE tenemos que substituir en {15.9} α_n por ε_n, la matriz **A** por (**V** – **W**) y la matriz **B** por (**D** – **C**). Además tomando en cuenta {3.2} y normalizando también las intensidades para que su suma sea constante para todo *h*, tenemos un sistema lineal similar a {15.9} con la matriz **U** y el vector $\mathbf{R_n}$ definidos como[141]

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -(\mathbf{V}-\mathbf{W})\mathbf{Y_0} & (\mathbf{D}-\mathbf{C})-\varepsilon_0(\mathbf{V}-\mathbf{W}) \\ (-(\mathbf{V}-\mathbf{W})\mathbf{Y_0})^{\mathrm{T}} & 0 & -\mathbf{X_0}(\mathbf{V}-\mathbf{W}) \\ ((\mathbf{D}-\mathbf{C})-\varepsilon_0(\mathbf{V}-\mathbf{W}))^{\mathrm{T}} & (-\mathbf{X_0}(\mathbf{V}-\mathbf{W}))^{\mathrm{T}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1}^{\mathrm{T}} & 0 & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R_n} = \begin{bmatrix} (\mathbf{V}-\mathbf{W})(\sum_{i=1}^{n-1}\mathbf{Y_{n-i}}\varepsilon_i) + \mathbf{M}(\sum_{i=0}^{n-1}\mathbf{Y_{n-i-1}}\varepsilon_i) - \mathbf{N}\mathbf{Y_{n-1}} \\ \sum_{i=1}^{n-1}\mathbf{X_i}(\mathbf{V}-\mathbf{W})\mathbf{Y_{n-i}} + \sum_{i=0}^{n-1}\mathbf{X_i}\mathbf{M}\mathbf{Y_{n-i-1}} \\ ((\sum_{i=1}^{n-1}\varepsilon_i\mathbf{X_{n-i}})(\mathbf{V}-\mathbf{W}) + (\sum_{i=0}^{n-1}\varepsilon_i\mathbf{X_{n-i-1}})\mathbf{M} - (\mathbf{X_{n-1}}\mathbf{N}))^{\mathrm{T}} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para deducir ε_1, del balance material perturbado nos queda

$$\mathbf{X_0}\,(\mathbf{D}-\mathbf{C}) + \varepsilon_0\,\mathbf{X_0}\,(\mathbf{W}-\mathbf{V}) = \mathbf{0}$$
$$\mathbf{X_1}\,(\mathbf{D}-\mathbf{C}) + \mathbf{X_0}\,\mathbf{N} + (\varepsilon_0\,\mathbf{X_1} + \varepsilon_1\,\mathbf{X_0})\,(\mathbf{W}-\mathbf{V}) - \varepsilon_0\,\mathbf{X_0}\,\mathbf{M} = \mathbf{0}$$

etc. Ordenando tenemos

$$\mathbf{X_1}\,(\mathbf{D}-\mathbf{C}+\varepsilon_0\,(\mathbf{W}-\mathbf{V})) + \mathbf{X_0}\,(\mathbf{N}-\varepsilon_0\,\mathbf{M}) + \varepsilon_1\,\mathbf{X_0}\,(\mathbf{W}-\mathbf{V}) = \mathbf{0}$$

y multiplicando por $\mathbf{Y_0}$

$$\mathbf{X_1}\,(\mathbf{D}-\mathbf{C}+\varepsilon_0\,(\mathbf{W}-\mathbf{V}))\,\mathbf{Y_0} + \mathbf{X_0}\,(\mathbf{N}-\varepsilon_0\,\mathbf{M})\,\mathbf{Y_0} + \varepsilon_1\,\mathbf{X_0}\,(\mathbf{W}-\mathbf{V})\,\mathbf{Y_0} = \mathbf{0}$$

Despejando ε_1 nos queda

$$\varepsilon_1 = -\frac{\mathbf{X_1}(\mathbf{D}-\mathbf{C}+\varepsilon_0(\mathbf{W}-\mathbf{V}))\mathbf{Y_0} + \mathbf{X_0}(\mathbf{N}-\varepsilon_0\mathbf{M})\mathbf{Y_0}}{\mathbf{X_0}\,(\mathbf{W}-\mathbf{V})\,\mathbf{Y_0}}$$

Pero por hipótesis $(\mathbf{D}-\mathbf{C}-\varepsilon_0\,(\mathbf{V}-\mathbf{W}))\,\mathbf{Y_0} = \mathbf{0}$ y $1-\mathbf{X_0}\,(\mathbf{V}-\mathbf{W})\,\mathbf{Y_0} = 0$, por lo que

$$\varepsilon_1 = \mathbf{X_0}\left(-\varepsilon_0\mathbf{M}+\mathbf{N}\right)\mathbf{Y_0} \qquad \{15.13\}$$

En definitiva, ante una perturbación de las recetas *la tasa a la que cambia el factor de explotación es el valor-trabajo total de la perturbación*. El valor-trabajo de una materia es la medida en la que una leve perturbación en el balance material correspondiente afecta al

[141] Hacemos notar que la matriz **U** añadiéndole la columna [**1** 0 **0** 0] es la matriz de las segundas derivadas parciales del lagrangiano de TE con respecto a las variables (las intensidades $\mathbf{X_0}$ y el factor ε_0) y los multiplicadores de Lagrange (los valores $\mathbf{Y_0}$ y el multiplicador μ que se corresponde a la normalización de las intensidades), o *hessiano orlado*. Si hubiéramos incluido el desarrollo en serie de μ nos quedaría **U** ya con esta columna, pero no lo hemos hecho para simplificar la exposición ya que μ será 0 para cualquier *h*.

factor al que pueden reducirse las jornadas (para perturbaciones locales). También comprobamos que las intensidades-trabajo son la medida en la que una leve perturbación en el balance contable del proceso correspondiente, en la plusvalía, afecta al factor de plusvalía (y explotación).

El resto del análisis es similar a lo visto en VN, y también pueden escribirse las ecuaciones diferenciales perturbativas para TE usando el primer término de las series, podemos plantear de la misma manera la introducción y retirada de procesos y materias, etc.

16: Algoritmos

Uno de los aspectos más divertidos e instructivos de la teoría económica es plantear las recetas y resolver las ecuaciones por uno mismo. Realmente es muy importante practicar resolviendo algunos casos simples para entender mejor los modelos. A lo largo del texto ya hemos descrito algunos algoritmos allí donde nos ayudaron a esclarecer el sentido de las ecuaciones, y éste será el cometido principal de los que describiremos a continuación, aunque por supuesto también nos interesa la eficiencia computacional. Por ello no detallaremos aquí los criterios de convergencia de estos algoritmos ni explicaremos como evitar sus inconvenientes.

16.1 Iteraciones

En §7.1 vimos que, bajo una serie de condiciones, las poblaciones sometidas a matrices de Leslie mostraban una dinámica a largo plazo que tendía a VN. Es obvio que en esta situación para resolver VN basta con calcular la dinámica a largo plazo del sistema. De forma más general si estamos ante un consumo simple podemos proceder partiendo de unos vectores $\mathbf{X}^{(0)}$ e $\mathbf{Y}^{(0)}$ positivos arbitrarios y aplicar las iteraciones

$$\mathbf{X}^{(n)} = \mathbf{X}^{(n-1)}\,\mathbf{B}$$
$$\mathbf{Y}^{(n)} = \mathbf{B}\,\mathbf{Y}^{(n-1)}$$

hasta que converjan en unas proporciones[142]. α será entonces el factor con el que crecen las $\mathbf{X}^{(n)}$. En definitiva, allí donde podemos calcular la dinámica de un sistema y ésta converge a VN podemos calcular la solución de VN simplemente como el comportamiento a largo plazo del sistema[143].

16.2 Autovalores

Ya hemos señalado que en VN los procesos con intensidades no nulas deben tener balances contables nulos y las materias con precios no nulos deben tener balances

[142] Una matriz es *irreducible* cuando no existe ninguna permutación de filas y columnas que la convierta en

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_3 \end{bmatrix}$$

donde $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{B}_2$ y $\mathbf{B}_3$ son matrices cuadradas. A partir de unos teoremas de Perron y Frobenius, si **B** si es una matriz irreducible puede demostrarse que estas iteraciones convergerán y que las intensidades y precios resultantes serán positivos. Pero si **B** no es irreducible es posible que las iteraciones no converjan porque entren en comportamientos cíclicos.

[143] No nos extenderemos en esto, pero las iteraciones a veces pueden usarse en condiciones distintas al consumo simple; por ejemplo, si estamos ante una producción simple y la matriz **A** es irreductible. En ocasiones puede calcularse la solución de VN con iteraciones incluso para matrices rectangulares usando pseudo-inversas.

materiales nulos. Para estos procesos y materias, en el caso escrito con **A** y **B**, tenemos (multiplicando ambos balances por α)

$$\begin{aligned} &\mathbf{X}\,(\mathbf{B} - \alpha\,\mathbf{A}) = \mathbf{0} \\ &(\mathbf{B} - \alpha\,\mathbf{A})\,\mathbf{Y} = \mathbf{0} \end{aligned} \qquad \{16.1\}$$

Cuando las matrices **A** y **B** son cuadradas estamos ante un *problema de autovalores generalizados* o *polinómicos*, que ha sido estudiado con gran detalle por su importancia en muchos terrenos y para el que existen algoritmos muy eficientes. Pero para que estemos ante una solución de VN además de las ecuaciones anteriores tienen que cumplirse otras condiciones que afectan a todos los procesos y materias.

En consecuencia para buscar las soluciones de VN procederemos:

1º construimos todos los sistemas cuadrados, o *menores*, posibles;

2º resolvemos los problemas de autovalores para cada menor y obtenemos los autovectores por la izquierda y por la derecha para cada autovalor, las intensidades y los precios para cada factor de expansión[144];

3º completamos **X** e **Y** atribuyendo una magnitud 0 a las intensidades de los procesos y a los precios de las materias que no formen parte del menor (también es útil normalizar las intensidades y los precios para que se cumpla la restricción {2.2});

4º comprobamos si para alguna de las combinaciones de α, **X** e **Y** resultantes se cumplen todas las demás condiciones de VN, y si lo hacen tenemos una solución.

Para resolver VN con procesos duraderos en tiempo discreto podemos o bien usar la formulación que se hace en §8.1 (escribiéndolos con las matrices **A** y **B**) o bien definir las matrices de flujos netos $\mathbf{f_r}$ como en §8.2 y resolver los problemas de autovalores polinómicos correspondientes, multiplicando {8.9} y {8.11} para los procesos que operan por α^n,

$$\begin{aligned} &\mathbf{X}\,(\mathbf{f_0}\,\alpha^n + \mathbf{f_1}\,\alpha^{n-1} + \mathbf{f_2}\,\alpha^{n-2} + \ldots + \mathbf{f_{n-2}}\,\alpha^2 + \mathbf{f_{n-1}}\,\alpha + \mathbf{f_n}) = \mathbf{0} \\ &(\mathbf{f_0}\,\alpha^n + \mathbf{f_1}\,\alpha^{n-1} + \mathbf{f_2}\,\alpha^{n-2} + \ldots + \mathbf{f_{n-2}}\,\alpha^2 + \mathbf{f_{n-1}}\,\alpha + \mathbf{f_n})\,\mathbf{Y} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

---

[144] Para unas matrices de orden $n \times n$ habrá n combinaciones de autovalores α con sus correspondientes autovectores por la izquierda **X** y por la derecha **Y**. Un algoritmo para resolver estas ecuaciones, no muy eficiente pero sí fácil de entender, consiste en calcular los autovalores como los α solución de la ecuación det(**B** – α **A**) = 0, por ejemplo desarrollando este determinante o *polinomio característico* y obteniendo sus raíces. A continuación para cada autovalor podemos calcular los correspondientes autovectores resolviendo los sistemas lineales homogéneos {16.1}, por ejemplo con la *triangulación* de Gauss.

Con TE podemos seguir el mismo planteamiento, comprobando las condiciones correspondientes, ya que tenemos también un problema de autovalores polinómicos

$$\mathbf{X}\,((\mathbf{D}-\mathbf{C})+\varepsilon\,(\mathbf{W}-\mathbf{V}))=\mathbf{0}$$
$$((\mathbf{D}-\mathbf{C})+\varepsilon\,(\mathbf{W}-\mathbf{V}))\,\mathbf{Y}=\mathbf{0}$$

Este algoritmo para resolver VN y TE tiene la ventaja de que casi siempre consigue encontrar todos los máximos relativos posibles, incluso usando algoritmos numéricos para resolver los problemas de autovalores. Pero tiene el inconveniente de que es muy costoso desde el punto de vista computacional, porque cuando el número de procesos o de materias es grande el número de menores a investigar es muy grande también[145], y por eso para estos problemas necesitamos otro tipo de aproximación. Además para tratar las recetas en tiempo continuo necesitaríamos resolver problemas de autovalores no polinómicos, lo que no es tan sencillo como el caso polinómico. No obstante es muy útil para los problemas pequeños (de hecho es el que hemos usado con casi todos los ejemplos de este trabajo) y nos permite entender mejor nuestros modelos como problemas de autovalores generalizados.

16.3 Existencia de un comportamiento simple para un factor dado

Otros problemas con los que nuestros modelos tienen una relación importante son los programas lineales. Comprobar si existe un comportamiento simple para un factor dado es muy sencillo resolviendo un programa lineal. Para este tipo de problemas existen algoritmos muy eficientes, incluso si el número de procesos y materias es muy grande, y si planteamos el problema además con el factor-VN o el factor-TE podemos obtener además las correspondientes intensidades y valores, como veremos.

16.3.1 Existencia de un comportamiento simple con un programa lineal

Para cualquier α mayor que 0 podemos calcular la matriz $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\alpha)$, tanto en tiempo discreto como continuo[146]. Si para un factor α el programa lineal

$$\begin{aligned}&\max_{\mathbf{X}}\ \mathbf{X}\,\mathbf{0}\\&\mathbf{X}\,\mathbf{F}\geq\mathbf{0}\\&\mathbf{X}\geq\mathbf{0}\end{aligned}\qquad\{16.2\}$$

[145] Aunque a veces podemos estudiar sólo los menores de mayor tamaño, lo que reduce mucho el número de menores a analizar. Por ejemplo éste será a menudo el caso si rescribimos los modelos a la forma estándar.

[146] Supondremos que **F** está acotada y que no incluimos los procesos que no realicen ningún consumo ni producción.

tiene solución no trivial (con unas **X** no nulas) entonces existe un crecimiento proporcional para ese α y si la única solución es la trivial no existe. Hemos escrito nuestro problema en forma canónica, pero si no fuera de este tipo podemos escribirlo con los signos correspondientes o convertirlo a esta forma como vimos en §11.4. Igualmente si {16.2} con la matriz $\mathbf{F} = (\mathbf{D} - \mathbf{C}) + \varepsilon\,(\mathbf{W} - \mathbf{V})$ tiene solución no trivial existirá un estado estacionario para una reducción de las jornadas ε y no existirá si la única solución es la trivial. Más adelante señalaremos otras maneras de comprobar si existe un comportamiento simple con un determinado factor.

16.3.2 Valores en VN y TE

Las condiciones de máximo de {16.2} resultan

$$\mathbf{F}\,\mathbf{Y} \le \mathbf{0}$$
$$\mathbf{Y} \ge \mathbf{0}$$

donde **Y** son los multiplicadores de Lagrange. Si estos **Y** podemos normalizarlos multiplicándolos por un número positivo para que además se cumpla que

$$1 + \mathbf{X}\,\mathbf{F}'(\alpha)\,\mathbf{Y} = 0$$

(**Y** tiene que ser no trivial para ello) entonces los α, **X** e **Y** cumplen todas las condiciones de VN, por lo que tenemos las intensidades-VN y los valores-VN. En definitiva, para un factor α podemos saber si existe un crecimiento proporcional con {16.2}. Si además podemos normalizar los multiplicadores de Lagrange de {16.2} para que se cumpla la condición anterior α será el factor-VN, **X** las intensidades-VN e **Y** los valores-VN.

Si planteamos {16.2} con la matriz $\mathbf{F} = (\mathbf{D} - \mathbf{C}) + \varepsilon\,(\mathbf{W} - \mathbf{V})$ para un factor ε y si los multiplicadores de Lagrange normalizados permiten que se cumpla además

$$1 + \mathbf{X}\,(\mathbf{W} - \mathbf{V})\,\mathbf{Y} = 0$$

se cumplen todas las condiciones de TE, por lo que ε será el factor-TE, **X** las intensidades-trabajo e **Y** los valores-trabajo[147].

---

[147] Si conocemos los autovalores de los menores que vimos en §16.2 podemos resolver {16.2} para cada autovalor y comprobar si intensidades y valores pueden normalizarse para que se cumplan todas las condiciones; si lo hacen tendremos una solución.

Planteemos el dual de {16.2}, con el mismo α, que resulta

$$\min_{\mathbf{Y}}\ \mathbf{0}\,\mathbf{Y}$$
$$\mathbf{F}\,\mathbf{Y} \le \mathbf{0}$$
$$\mathbf{Y} \ge \mathbf{0}$$

Este dual nos permite aventurar que al problema VN (y a TE) le corresponde un problema dual, en donde se minimiza el factor de interés (de plusvalía) de manera que se cumplan los balances contables.

16.3.3 Bisección

Podemos utilizar lo visto para encontrar el factor-VN (y el factor-TE). Supongamos que conocemos un factor $\alpha_{sí}$ para el que existe un crecimiento proporcional y un α_{no} mayor que $\alpha_{sí}$ para el que no existe. Entonces en el intervalo $[\alpha_{sí}, \alpha_{no})$ VN debe tener al menos una solución. Un algoritmo para encontrar el factor-VN es:

1º definimos $\alpha_p = (\alpha_{sí} + \alpha_{no}) / 2$;

2º comprobamos si existe un crecimiento proporcional para α_p;

3º si existe redefinimos $\alpha_{sí} = \alpha_p$ y si no existe redefinimos $\alpha_{no} = \alpha_p$;

4º volvemos al punto 1º hasta que $\alpha_{no} - \alpha_{sí}$ sea menor que una cota prefijada.

Este algoritmo[148] acabará aproximando el factor-VN con toda la precisión que necesitemos y, aunque no encontrará todos los máximos relativos posibles, en el caso de que estemos ante el modelo VN original sí encontrará el máximo absoluto[149]. Procediendo de manera similar, a partir de un $\varepsilon_{sí}$ y un ε_{no}, podemos calcular el factor-TE. Pero el algoritmo de la bisección necesita partir de un $\alpha_{sí}$ y un α_{no}, y no siempre será sencillo encontrar unos factores así. Por eso a menudo conviene usar otros algoritmos, además de que con ellos el número de veces que hay que resolver el problema auxiliar puede ser bastante menor para obtener la misma precisión.

No obstante si estamos ante el modelo VN original, escrito con las matrices **A** y **B** en la forma canónica, es muy fácil encontrar un $\alpha_{sí}$ y un α_{no}, porque si existe un crecimiento proporcional con un factor $\alpha_{sí}$ existirá también un crecimiento proporcional en el intervalo $(0, \alpha_{sí}]$, ya que todas las materias son expulsables. Para encontrarlos procederemos:

1º definimos $\alpha_p = 1$;

2º comprobamos si existe un crecimiento proporcional para α_p;

3º si existe redefinimos $\alpha_{sí} = \alpha_p$ y duplicamos la magnitud de α_p; si no existe redefinimos $\alpha_{no} = \alpha_p$ y reducimos a la mitad la magnitud de α_p;

4º volvemos a 2º hasta que hayamos definido tanto $\alpha_{sí}$ como α_{no}.

---

[148] En Hamburger, Thompson y Weil [1] puede encontrarse una variante de este algoritmo para el modelo VN original; véase la comparación con el algoritmo de los autovalores con los menores de mayor tamaño para el modelo VN original en la página 546.

[149] En cada iteración se reduce a la mitad la amplitud del intervalo $[\alpha_{sí}, \alpha_{no})$, por lo que en 40 iteraciones se reduce a una billonésima de la inicial. Y puede modificarse para que encuentre los máximos relativos; véase Morgenstern y Thompson [1].

16.4 Distancias al comportamiento simple para un factor dado

Hay otros problemas auxiliares que podemos usar para determinar si existe un crecimiento proporcional para un α (o un estado estacionario para ε) definiendo las correspondientes matrices **F**. Si estamos ante la forma canónica otro problema auxiliar útil es el programa lineal

$$\begin{aligned}&\max_{\mathbf{X},u} u\\ &\mathbf{X}\,\mathbf{F} \geq u\\ &\Sigma\,\mathbf{X} = 1\\ &\mathbf{X} \geq \mathbf{0}\end{aligned} \qquad \{16.3\}$$

(podemos transformar un modelo a la forma canónica como vimos en §11.4). Este problema tendrá solución para cualquier α positivo, ya que siempre existirá una u que permita que se cumplan los balances materiales $\mathbf{X}\,\mathbf{F} \geq u$. La u solución puede interpretarse como la cantidad mayor que retirándose en todos los balances materiales permite que éstos se cumplan. Definiremos la función $u(\alpha)$ como la u solución de este problema para un α. Si $u(\alpha) \geq 0$ existirá un comportamiento simple con el factor α y si $u(\alpha) < 0$ no[150].

Este problema tiene la ventaja de que, en el caso de que no exista un comportamiento simple, $u(\alpha)$ nos da una referencia del grado de incumplimiento de los balances materiales. Esto puede ser usado para encontrar los α con los que sí existe un comportamiento simple, ya que será habitual que si nos alejamos de las α para las que existe un comportamiento simple $u(\alpha)$ disminuya. Además nos proporciona unas intensidades **X** que se corresponden al comportamiento simple cuando éste es posible, y que cuando no son las que permiten un menor alejamiento a éste (para la distancia

[150] Si tratamos un proceso mixto como en §11.4 $u(\alpha)$ sería 0 para cualquier α, ya que existirá una solución con los dos procesos que substituyen al mixto con intensidades iguales a 0.5. Podemos evitar esta dificultad resolviendo {16.3} para cada uno de los procesos que substituyen al mixto y escogiendo la mayor $u(\alpha)$.
Si planteamos {16.3} para las **F** con el factor-VN (o el factor-TE) los multiplicadores de Lagrange que se corresponden a las condiciones de balance material serán proporcionales a los precios de VN (o a los valores-trabajo), si podemos normalizarlos para que cumplan las condiciones de máximo para los factores. Esto se entiende escribiendo las condiciones de máximo o el correspondiente programa dual

$$\begin{aligned}&\min_{\mathbf{Y},v} v\\ &\mathbf{F}\,\mathbf{Y} \leq v\\ &\Sigma\,\mathbf{Y} = 1\\ &\mathbf{Y} \geq \mathbf{0}\end{aligned}$$

Este problema puede interpretarse como el cálculo de la cantidad menor que retirándose en todos los balances contables permite que éstos se cumplan. Tanto el problema {16.3} como su dual son importantes en la *Teoría de juegos* y la u solución puede ser interpretada como el valor del juego con la matriz de pagos **F**. John von Neumann ya señaló el vínculo de su modelo con la Teoría de juegos; véase Neumann [1b], nota en página 5, y también Neumann y Morgenstern [1], nota en página 154.

correspondiente) [151]. Y del análisis de sensibilidad de los programas lineales podemos deducir fácilmente la tasa a la que aumenta la distancia $u(\alpha)$ cuando variamos α, que es $u'(\alpha) = \mathbf{X}\,\mathbf{F}'(\alpha)\,\mathbf{Y}$, donde $\mathbf{Y}$ son los multiplicadores de Lagrange, lo que resulta muy útil en algunos algoritmos. Para TE definiremos las $u(\varepsilon)$ con la matriz $\mathbf{F} = (\mathbf{D} - \mathbf{C}) + \varepsilon\,(\mathbf{W} - \mathbf{V})$ y tenemos también que $u'(\varepsilon) = \mathbf{X}\,(\mathbf{W} - \mathbf{V})\,\mathbf{Y}$.

16.4.1 Uso de las distancias al comportamiento simple

Podemos buscar la solución de nuestros modelos usando una función $u(\alpha)$ de distancia como la definida. Por ejemplo, podemos proceder resolviendo

$$\begin{aligned} &\max_{\alpha} \alpha \\ &u(\alpha) \geq 0 \\ &\alpha > 0 \end{aligned} \qquad \{16.4\}$$

que resulta un problema de maximización de una variable positiva con una restricción; en el caso de TE buscaremos el mayor ε positivo para el que $u(\varepsilon) \geq 0$.

Hay muchos algoritmos que permiten resolver este problema, calculando la magnitud de la función $u(\alpha)$ con la solución de un problema auxiliar, y con algunos se pueden encontrar las soluciones de VN y TE con muy pocas iteraciones, sólo resolviendo un número pequeño de problemas auxiliares, lo que permite atacar problemas verdaderamente grandes. Además dado que podemos definir las distancias para las recetas tanto en tiempo discreto como continuo, podemos resolver nuestros modelos también en estos casos. A continuación detallaremos uno de estos algoritmos especialmente sencillo.

16.4.2 Newton

Bajo determinadas condiciones para resolver {16.4} incluso basta con encontrar la solución de la ecuación

$$u(\alpha) = 0$$

Entonces podemos usar cualquiera de los algoritmos clásicos para encontrar la raíz de una ecuación, como el *método de Newton-Raphson*. Procederemos:

[151] En la forma estándar si existen unas intensidades no triviales que anulan los balances materiales existe un comportamiento simple. Por lo tanto podemos definir otra distancia a partir de la solución del problema

$$\begin{aligned} &\min_{\mathbf{X}} \sum (\mathbf{X}\mathbf{F})^2 \\ &\Sigma\,\mathbf{X} = 1 \\ &\mathbf{X} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Este es un problema de mínimos cuadrados con variables no negativas y con una restricción lineal, para el que existen algoritmos muy eficientes, y que siempre tendrá una solución para cualquier α. Además añadiendo la restricción a la función objetivo, $\Sigma\,(\mathbf{X}\,\mathbf{F})^2 + (1 - \Sigma\,\mathbf{X})^2$, tenemos un problema de mínimos cuadrados no negativos. Definiremos $u(\alpha)$ como menos la magnitud de la función objetivo.

1º partimos de un $\alpha^{(n)}$ inicial;

2º resolvemos {16.3} para $\alpha^{(n)}$, obteniendo $u(\alpha^{(n)})$ y además $u'(\alpha^{(n)}) = \mathbf{X}\,\mathbf{F}'(\alpha^{(n)})\,\mathbf{Y}$;

3º calculamos $\alpha^{(n+1)}$ aplicando la fórmula $\alpha^{(n+1)} = \alpha^{(n)} - \dfrac{u(\alpha^{(n)})}{u'(\alpha^{(n)})}$

4º volvemos al punto 2º hasta que $\alpha^{(n)}$ converja.

El método de Newton-Raphson no siempre es convergente, pero cuando lo es lo hace muy rápidamente. Pero este procedimiento no es general porque a veces la distancia al comportamiento simple no tiene una raíz simple y será 0 en un intervalo (lo que ocurrirá a menudo si las materias son limitadas), aunque existen métodos para tratar estos casos. Procediendo de manera similar podemos resolver TE.

16.5 Linealización

El método de Newton-Raphson para resolver una ecuación no lineal ha sido generalizado para resolver sistemas de ecuaciones no lineales y con la *programación lineal secuencial* para resolver programas no lineales. En todos los casos se procede partiendo de una magnitud inicial de las variables, se aproximan las funciones no lineales del problema original en forma de funciones lineales, se resuelve el problema lineal correspondiente para obtener una nueva magnitud de las variables, y se itera el procedimiento hasta que las variables converjan (si lo hacen, porque esto no siempre ocurre).

En VN la función objetivo ya es lineal y la linealización de las restricciones, en unos $\alpha^{(n)}$ y $\mathbf{X}^{(n)}$ dados, queda

$$\mathbf{X}\,\mathbf{F}(\alpha) \approx \mathbf{X}\,\mathbf{F}(\alpha^{(n)}) + (\alpha - \alpha^{(n)})\,\mathbf{X}^{(n)}\,\mathbf{F}'(\alpha^{(n)})$$

Además normalizando las intensidades evitamos la solución trivial. Por lo tanto para VN en la forma estándar nos queda el programa lineal, donde $\alpha^{(n)}$ y $\mathbf{X}^{(n)}$ son datos y α y $\mathbf{X}$ las incógnitas,

$$\begin{aligned} &\max_{\alpha,\mathbf{X}} \ \alpha \\ &\mathbf{X}\,\mathbf{F}(\alpha^{(n)}) + (\alpha - \alpha^{(n)})\,\mathbf{X}^{(n)}\,\mathbf{F}'(\alpha^{(n)}) = \mathbf{0} \\ &\Sigma\,\mathbf{X} = 1 \\ &\mathbf{X} \geq \mathbf{0} \\ &\alpha \geq 0 \end{aligned} \qquad \{16.5\}$$

Para aplicar el método de la programación lineal secuencial a VN procederemos[152]:

1º partimos de unos $\alpha^{(n)}$ y $\mathbf{X}^{(n)}$ iniciales;

2º resolvemos el programa lineal {16.5} para $\alpha^{(n)}$ y $\mathbf{X}^{(n)}$;

3º si el programa lineal no tiene solución interrumpimos el algoritmo;

4º si la tiene definimos $\alpha^{(n+1)} = \alpha$ y $\mathbf{X}^{(n+1)} = \mathbf{X}$ y volvemos al punto 2º hasta que las variables converjan.

Las condiciones de máximo del programa lineal {16.5} resultan

$\mathbf{F}(\alpha^{(n)})\,\mathbf{Y} + \mu \leq \mathbf{0}$, si $\mathbf{X} > \mathbf{0}$ se aplica =

$1 + \mathbf{X}^{(n)}\,\mathbf{F}'(\alpha^{(n)})\,\mathbf{Y} \leq 0$, si $\alpha > 0$ se aplica =

donde $\mathbf{Y}$ son los multiplicadores de Lagrange correspondiente a la linealización de los balances materiales y μ el multiplicador de Lagrange correspondiente a la normalización de las intensidades. Si para unos $\alpha^{(n)}$ y $\mathbf{X}^{(n)}$ existe un crecimiento proporcional entonces las restricciones del programa lineal correspondiente son factibles, ya que se cumplirán por lo menos para $\alpha = \alpha^{(n)}$ y $\mathbf{X} = \mathbf{X}^{(n)}$ normalizando las $\mathbf{X}$. Si la solución del problema lineal no altera la magnitud de las variables, si $\alpha = \alpha^{(n)}$ y $\mathbf{X} = \mathbf{X}^{(n)}$, para un $\alpha > 0$ se cumple además

$\mathbf{X}\,\mathbf{F}(\alpha) = \mathbf{0}$

$\Sigma\,\mathbf{X} = 1$

$\mathbf{X} \geq \mathbf{0}$

$\alpha > 0$

$\mathbf{F}(\alpha)\,\mathbf{Y} + \mu \leq \mathbf{0}$, si $\mathbf{X} > \mathbf{0}$ se aplica =

$1 + \mathbf{X}\,\mathbf{F}'(\alpha)\,\mathbf{Y} = 0$

que son las condiciones de crecimiento proporcional y las condiciones de máximo de VN (ya que entonces $\mu = 0$, porque la normalización de las intensidades no afecta al factor de expansión), por lo que tenemos una solución para VN.

Este algoritmo no siempre convergerá, pero en el caso de que el programa lineal no tenga solución existen métodos para no tener que interrumpir el algoritmo en el paso 3º, aunque no los detallaremos aquí. No obstante si estamos intentando resolver un VN con solución y partimos de unos $\alpha^{(n)}$ y $\mathbf{X}^{(n)}$ para los que existe un crecimiento proporcional, entonces este algoritmo a menudo acabará alcanzando la solución de VN con muy pocas iteraciones.

En TE podemos proceder de manera similar y la linealización resulta

[152] Una variante de la linealización para VN puede consultarse en Robinson [1].

$$\max_{\varepsilon,\mathbf{X}} \ \varepsilon$$
$$\mathbf{X}\,((\mathbf{D}-\mathbf{C})+\varepsilon^{(n)}\,(\mathbf{W}-\mathbf{V}))+(\varepsilon-\varepsilon^{(n)})\,\mathbf{X}^{(n)}\,(\mathbf{W}-\mathbf{V})=\mathbf{0}$$
$$\Sigma\,\mathbf{X}=1$$
$$\mathbf{X}\geq\mathbf{0}$$
$$\varepsilon\geq 0$$

16.6 Simplex

Un algoritmo bien conocido para resolver programas lineales es el *método simplex* desarrollado por Dantzig. Nosotros describiremos un método parecido para resolver VN y TE cuando el número de procesos disponibles es mayor que el número de materias. Como en el simplex, partiremos de un sistema básico e iremos añadiendo y quitando una fila o proceso a ese sistema básico, aunque en nuestro caso usaremos unos criterios de entrada y salida diferentes del simplex y trabajaremos con un sistema básico que no será necesariamente cuadrado.

Procederemos:

1º partimos de un sistema básico, de un conjunto de procesos;

2º para el sistema básico resolvemos VN con un algoritmo cualquiera y obtenemos el factor de expansión (e interés), las intensidades y los precios correspondientes; si VN no tuviera solución interrumpimos el algoritmo;

3º nuestro criterio de salida será descartar del sistema básico los procesos que cumplan las condiciones de máximo con holgura, esto es, los que muestren pérdidas para los precios y el factor de interés que hemos calculado (y que no operarán);

4º nuestro criterio de entrada será incorporar al sistema básico el proceso que incumpla más las condiciones de máximo de todos los disponibles, esto es, el que obtenga mayores beneficios para los precios y el factor de interés que hemos calculado; si ningún proceso obtiene beneficios hemos encontrado una solución con las intensidades de los procesos no incluidos en el sistema básico iguales a 0 e interrumpimos el algoritmo;

5º tenemos un nuevo sistema básico y volvemos al paso 2º.

Por supuesto, con nuestro algoritmo estamos imitando el funcionamiento de los sistemas mercantiles. En los capitalismos, para los precios y el tipo de interés corriente, si un proceso produce beneficios es puesto a operar y si produce pérdidas deja de usarse. La introducción y la retirada de los procesos provocan un cambio correspondiente en la estructura económica, y también en los precios y en el factor de expansión (e interés). Nuestro algoritmo procede imitando la selección de técnicas en el capitalismo, incorporando los procesos más rentables, descartando los menos rentables y calculando los precios y el factor de interés que se corresponden a la nueva situación. Aunque ya advertimos que en este trabajo no estudiamos la manera en la que opera el mecanismo de asignación mercantil, este algoritmo nos permite dar una idea de cómo este mecanismo puede llegar a producir una asignación y unos precios similares a VN.

Se han desarrollado algoritmos similares al simplex o al que acabamos de describir para resolver varios tipos de problemas de maximización restringida, en los que se parte de un sistema básico, se resuelve el problema para el sistema básico, se obtiene un nuevo sistema básico a partir de unos criterios de entrada y de salida vinculados a las condiciones de máximo y a los multiplicadores de Lagrange, y se itera el procedimiento. Al igual que podemos decir que nuestro algoritmo imita el funcionamiento del mecanismo mercantil, también podemos decir que el mecanismo mercantil imita a nuestro algoritmo y a las demás variantes del simplex. En efecto, el mecanismo mercantil puede ser concebido como un algoritmo real que intenta la solución de un determinado problema de maximización restringida. Si los algoritmos matemáticos como el simplex intentan la solución de un problema matemático, el algoritmo real que llamamos mecanismo mercantil intenta la solución de un problema real, el problema de establecer una asignación con un determinado fin. En este algoritmo real los precios juegan el papel de multiplicadores de Lagrange y la contabilidad el de las condiciones de máximo.

Desde el punto de vista computacional nuestro algoritmo matemático a menudo funciona muy bien, incluso para sistemas muy grandes. De hecho, como el tamaño de los sistemas básicos depende fundamentalmente del número de materias, ya que los sistemas básicos serán casi cuadrados, podremos atacar con él problemas con un número prácticamente ilimitado de procesos, lo que nos permite estudiar las funciones de producción con la aproximación poligonal con un número de muestras tan grande como queramos y, si usamos algún algoritmo especialmente eficiente para resolver VN de los sucesivos sistemas básicos, con un número verdaderamente grande de materias. No obstante sólo encuentra un máximo relativo que depende del sistema básico de partida, aunque podemos aprovechar esta circunstancia para buscar diferentes máximos relativos. Pero puede ocurrir que no encuentre una solución para un sistema básico inicial y sí para otro, y además en ocasiones entra en pautas cíclicas (como ocurre también con el algoritmo real mercantil), lo que a veces puede evitarse prescindiendo de descartar procesos de los básicos saltándose el paso 3º.

Nos interesa que el VN del sistema básico inicial tenga solución. Para facilitarlo conviene incluir un número de procesos mayor o igual al número de materias. Cuando todas las materias son expulsables podemos reescribir el problema a la forma estándar, añadiendo un proceso de eliminación gratuita para cada materia y tratando todas las materias como limitadas, como vimos, y entonces como sistema básico inicial podemos usar los procesos de eliminación gratuita junto con uno o más procesos normales cualquiera. Si estamos intentando resolver el problema con funciones de producción, con la aproximación poligonal, a menudo se consigue un sistema básico inicial con solución escogiendo unas recetas que se correspondan a una situación donde exista una producción y un consumo positivos para cada materia.

Es evidente que podemos usar un esquema similar para resolver TE, usando las correspondientes condiciones de máximo y multiplicadores de Lagrange.

Cuarta parte. Asignación, valor y contabilidad

17: Asignaciones óptimas

17.1 Planteamiento

En este trabajo nos limitamos a estudiar con cierto detalle los comportamientos simples porque esto es suficiente para nuestros fines. No obstante resulta útil tratar muy brevemente los comportamientos no simples para entender mejor nuestros modelos. Señalaremos para ello sólo algunas características generales de estos comportamientos porque dejamos su estudio detallado para otros trabajos.

Decimos que estamos ante una *asignación factible* si con unas recetas dadas las intensidades son tales que se cumplen los balances materiales para cada materia y las restricciones de signo para cada proceso[153] a lo largo de un intervalo de tiempo. Una asignación factible satisface pues las condiciones

$$\mathbf{X}_{t-1}\,\mathbf{B}_{t-1} - \mathbf{X}_t\,\mathbf{A}_t = \mathbf{0}$$
$$\mathbf{X}_t \geq \mathbf{0}$$

Pero para unas recetas a menudo serán posibles muchas asignaciones factibles. Diremos que estamos en una *asignación óptima*, o una *economía óptima*, si de todas las intensidades para las que existe una asignación factible escogemos aquellas con las que se obtiene la mayor magnitud de una función objetivo dada[154]. El problema de calcular una asignación óptima para una función objetivo y unas recetas dadas puede escribirse

$$\begin{aligned} &\max_{\mathbf{X}_t} \Phi(\mathbf{X}_t) \\ &\mathbf{X}_{t-1}\,\mathbf{B}_{t-1} - \mathbf{X}_t\,\mathbf{A}_t = \mathbf{0} \qquad \{17.1\} \\ &\mathbf{X}_t \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

lo que significa:

> queremos calcular las intensidades que maximizan la función objetivo Φ,
> de manera que se cumplan los balances materiales para cada materia,
> y siempre que las intensidades de los procesos sean no-negativas.

---

[153] Vimos como escribíamos estas condiciones dependiendo de la forma de las recetas con anterioridad, por ejemplo en §11.1. También vimos que los signos de los balances materiales dependían del tipo de materia y los signos de las intensidades del tipo de proceso.

[154] La expresión "economía óptima" no implica pues ninguna calificación moral, sino simplemente que la asignación maximiza una función objetivo. En otras ocasiones hemos usado también términos que tienen un uso vulgar diferente del que les damos aquí, como "trabajo productivo" o "solución degenerada". Para evitar equívocos no queremos dejar de advertir que estamos haciendo un uso particular de estos y otros términos, que se alejan de su uso habitual. Por supuesto, que una determinada solución sea degenerada no significa que sea "mala" y que un trabajo sea productivo no significa que sea "bueno". Pudiera parecer que no es necesario hacer esta advertencia, pero demasiado a menudo se confunden lo que son expresiones técnicas con su uso vulgar. Contra este error ha tenido que lucharse desde los clásicos, y a menudo no ha bastado con advertencias explícitas como la que hacemos aquí (o como la que hace J. S. Mill en [1b], capítulo III).

Hemos escrito los balances materiales para las recetas $\mathbf{A_t}$ y $\mathbf{B_t}$ sin flujos impuestos y en la forma estándar para simplificar la exposición, pero no hay dificultad para tratar el resto de casos. En realidad incluso podemos plantear el problema con funciones de producción no lineales, podemos establecer que las intensidades tienen que ser números enteros y así tratar las materias indivisibles, podemos escribir el problema con *funciones de probabilidad de producción*[155] para considerar las aleatoriedades, podemos tratar las materias "escasas" y los recursos no-renovables, etc. En definitiva, ahora no estamos suponiendo en absoluto que estemos ante un comportamiento simple.

Las restricciones de nuestro problema (los balances materiales) y las variables que tenemos que calcular (las intensidades) son sólo las que se corresponden al intervalo de tiempo que estudiamos, pero *a priori* no hemos especificado un intervalo temporal concreto, de forma que incluso podemos estar ante un problema con infinitas variables y restricciones[156].

17.2 Condiciones de máximo

Estamos ante un problema de maximización restringida y lo estudiaremos con el método de Lagrange. El lagrangiano de este problema resulta, prescindiendo de las condiciones de signo,

$$\mathcal{L}(\mathbf{X_t}, \mathbf{Y_t}) = \Phi(\mathbf{X_t}) + \sum (\mathbf{X_{t-1}}\, \mathbf{B_{t-1}} - \mathbf{X_t}\, \mathbf{A_t})\, \mathbf{Y_t}$$

donde $\mathbf{Y_t}$ son los multiplicadores de Lagrange que se corresponden a los balances materiales en el momento *t*. Las condiciones de máximo de primer orden quedan[157]

---

[155] Este tipo de funciones nos informan de la probabilidad de obtener unos productos con unos insumos. Los insumos y las producciones son los argumentos de esta función y la probabilidad de obtener la producción su magnitud. Así $\Pi(\chi, b)$ nos informa de la probabilidad de obtener en una parcela una cosecha b sembrando un cantidad de trigo χ. No estudiaremos aquí estos aspectos, pero si tratamos con producciones aleatorias la función objetivo de {17.1} puede definirse no sólo usando las intensidades o los insumos como argumento sino también con las probabilidades (y con los productos).

[156] Si hubiéramos establecido un intervalo temporal finito entonces no tendríamos esta dificultad. VN y TE están definidos para un intervalo temporal infinito, pero usábamos el hecho de que estábamos ante comportamientos simples para plantear los modelos con un número finito de variables y restricciones.

[157] Con el método de Lagrange las condiciones de primer orden consisten en que las derivadas parciales del lagrangiano con respecto a las variables y multiplicadores de Lagrange se anulen, si estas variables no están bajo condiciones de signo. Estas derivadas resultan

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{X_t}} = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{X_t}} + \mathbf{B_t}\mathbf{Y_{t+1}} - \mathbf{A_t}\mathbf{Y_t}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{Y_t}} = \mathbf{X_{t-1}}\, \mathbf{B_{t-1}} - \mathbf{X_t}\, \mathbf{A_t}$$

En nuestro caso tenemos que $\partial\mathcal{L}/\partial\mathbf{X_t}$ es el balance contable del proceso y $\partial\mathcal{L}/\partial\mathbf{Y_t}$ es el balance material de la materia. No obstante el método de Lagrange es aplicable cuando las funciones implicadas son derivables, lo

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{X_t}} + \mathbf{B_t}\,\mathbf{Y_{t+1}} - \mathbf{A_t}\,\mathbf{Y_t} \le \mathbf{0} \qquad \{17.2\}$$

y con los procesos que operan se aplica =. Los $\mathbf{Y_t}$ son los multiplicadores de Lagrange que se corresponden a los balances materiales en el momento *t*. Hacemos notar que la asignación y los multiplicadores solución de nuestro problema dependen de la función objetivo que usemos, y por ello con unas mismas recetas pueden existir asignaciones y valores diferentes según la función objetivo que definamos.

No vamos a detenernos en esto, pero resulta sencillo comprobar que muchos de los desarrollos que hemos establecido para VN y TE son aplicables a todas las economías óptimas, aunque no todos. Así podemos escribir las recetas tomando en consideración la posición geográfica, podemos estudiar las materias duraderas, los procesos duraderos y en tiempo continuo, los tipos de procesos y materias, los intercambios con un entorno mercantil, etc.[158] Además las condiciones que tienen que cumplir las economías óptimas pueden escribirse como

intensidad ~ 0	↔ **balance contable ~ 0**	**intensidad · balance contable = 0**
balance material ~ 0	↔ **–valor ~ 0**	**balance material · valor = 0**

donde substituiremos los caracteres ~ de acuerdo al esquema

$\geq$ en una expresión implica $\leq$ en la correspondiente
= en una expresión implica $\gtreqless$ en la correspondiente

Fijémonos en que ahora los balances contables no son necesariamente los de VN o a los de TE e incluyen el término $\partial\Phi/\partial\mathbf{X_t}$.

17.3 Multiplicadores y condiciones de Lagrange

Es fundamental tener alguna noción del método de Lagrange para entender las economías óptimas. Por ello intentaremos dar aquí una explicación brevísima e intuitiva de sus condiciones de máximo, a costa de no ser muy rigurosos en nuestra exposición.

Sea Φ una función de *n* variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, y sean $f_1, f_2, \ldots, f_m$ una serie de *m* funciones de las mismas variables. Un problema de maximización restringida "clásico" es encontrar

que por ejemplo nos permite tratar las funciones de producción no lineales pero no así las materias indivisibles, por lo menos no sin entrar en matizaciones que no haremos aquí.

[158] También las leyes de los signos se aplican a las economías óptimas (si una materia es expulsable tendrá un valor no-negativo, si es incorporable un valor no-positivo y si es ilimitada nulo), y en una economía óptima inserta en unos mercados con los que puede intercambiar materias los valores internos serán proporcionales a las tasas de intercambio, pero sólo si los procesos de incorporación o eliminación de la materia y los procesos de intercambio no afectan la función objetivo.

de entre las magnitudes de las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ para las que las funciones $f_1, f_2, \ldots, f_m$ se anulan aquellas con las que la función Φ alcanza su mayor magnitud. Este problema lo podemos escribir

$$\max_{x_1, x_2, \ldots, x_n} \Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$
$$f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$
$$f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$
$$\ldots$$
$$f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

Llamaremos *función objetivo* a $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y *restricciones* a las ecuaciones $f_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$.

Con el método de Lagrange formamos el lagrangiano, la función objetivo más las restricciones multiplicadas por unas variables auxiliares en el cálculo y_j, los multiplicadores de Lagrange,

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m) = \Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \sum_{j=1}^{m} f_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) y_j$$

y planteamos unas condiciones de máximo anulando las derivadas del lagrangiano con respecto a las variables y multiplicadores. Por lo tanto para cada variable x_i nos queda

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f_j}{\partial x_i} y_j = 0$$

y para cada multiplicador de Lagrange y_j tenemos

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_j} = f_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

que resulta la restricción correspondiente al multiplicador.

Aunque no nos detendremos a explicarlo, el multiplicador de Lagrange y_j que se corresponde a la restricción $f_j(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = 0$ es la tasa a la que se incrementa la función objetivo en el máximo ante una variación en la restricción[159]. Por ejemplo, si variáramos la restricción j, de manera que quedara $f_j(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) + h = 0$ donde h es un número muy pequeño, entonces en la solución del nuevo problema la magnitud de la función objetivo en el máximo sería igual a la que tenía sin la variación más $h\, y_j$. Podemos

[159] Dicho de una manera grosera, porque para que esto sea cierto es necesario que el problema tenga solución, que la variación en las restricciones no implique que el problema deje de tener solución, o que la magnitud de las variables en la solución cambien de manera "suave".

entender pues el multiplicador de Lagrange y_j como un indicador de la importancia de la restricción j en el problema, ya que nos informa de cómo afecta al objetivo que intentamos maximizar una pequeña variación en la misma. Así en el caso de que el multiplicador de Lagrange correspondiente a una restricción fuera 0 una variación en la misma no provocaría ningún cambio en la magnitud de la función objetivo en el máximo. Si el multiplicador de Lagrange que se corresponde a una restricción es el triple del que se corresponde a otra entonces una variación en la primera restricción aumentaría la función objetivo en el máximo el triple de lo que lo haría una variación en la segunda restricción.

El método de Lagrange nos proporciona una condición de máximo para cada variable x_i que resulta la suma de dos términos[160]. El primero, $\partial\Phi/\partial x_i$, al que llamaremos *contribución marginal directa*, es la tasa a la que aumenta la función objetivo ante una variación de la variable x_i. Si una variable no es argumento de las restricciones, o si éstas no existieran porque estuviéramos ante un problema de maximización irrestricto, para

[160] Para entender intuitivamente las condiciones de máximo y los multiplicadores de Lagrange nos basaremos en la forma de operar del *algoritmo del gradiente*. En el caso de un problema de máximo sin restricciones (y entonces el lagrangiano es la función objetivo) con este algoritmo partimos de unas magnitudes de las variables x_i y las modificamos en la dirección del gradiente de la función objetivo, en la dirección en la que la función objetivo crece más; esto es, resolvemos las ecuaciones diferenciales

$$\frac{dx_i}{dr} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i}$$

Por ejemplo, si nuestro problema tiene dos variables podemos entenderlas como las coordenadas de posición de un punto y la función objetivo como la altura del terreno en ese punto. Buscamos el punto en el que el terreno alcanza su altura mayor. El algoritmo del gradiente parte de un punto inicial y modifica su posición "ascendiendo" por la función objetivo en la dirección en la que la altura del terreno crece más. También podemos buscar el mínimo de la función objetivo con este algoritmo escribiendo las ecuaciones diferenciales con signo menos, "descendiendo" por la función objetivo.

Aunque no lo explicaremos ahora, cuando existen restricciones el método de Lagrange puede entenderse como la substitución del problema de maximización con restricciones original por un problema de punto de silla sin restricciones, en donde buscamos el máximo del lagrangiano para las variables x_i y el mínimo para los multiplicadores de Lagrange y_j. Por ello para usar el algoritmo del gradiente tenemos que escribir las ecuaciones diferenciales correspondientes a los multiplicadores con signo menos. Por lo tanto, atribuimos unas magnitudes iniciales a las variables x_i y a los multiplicadores de Lagrange y_j, y modificamos estas magnitudes de acuerdo con las ecuaciones diferenciales

$$\frac{dx_i}{dr} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i}$$

$$\frac{dy_j}{dr} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_j}$$

En definitiva, modificamos las variables según su condición de máximo (y los multiplicadores de Lagrange según su restricción con signo cambiado). En consecuencia, las condiciones de máximo nos informan de cómo tenemos que aumentar las variables para acercarnos a la solución (y las restricciones de cómo tenemos que reducir los multiplicadores de Lagrange). Aunque debemos notar que el algoritmo del gradiente no siempre es aplicable en la práctica a todos los problemas, porque por ejemplo no siempre es convergente, sin embargo sí nos permite dar una interpretación sencilla a las condiciones de máximo y entender mejor el papel de los multiplicadores de Lagrange.

encontrar el máximo de la función objetivo deberíamos encontrar aquella magnitud de x_i para la que esta contribución directa se anula, ya que si ésta fuera positiva podríamos aumentar la magnitud de la función objetivo incrementando la variable y si fuera negativa reduciéndola.

El segundo término, $\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f_j}{\partial x_i} y_j$, al que llamaremos *contribución marginal indirecta*, es la suma de las tasas a las que aumentan las restricciones ante una variación de la variable x_i por sus multiplicadores de Lagrange y_j. Podemos entender este segundo termino fijándonos en que una variación en la variable x_i al modificar la magnitud de la restricción j actúa de una manera análoga a como lo haría la variación de esta restricción añadiéndole un pequeño número h. Como la variable x_i modifica la restricción j en una tasa $\partial f_j/\partial x_i$, y como el multiplicador de Lagrange y_j es la tasa a la que aumenta la función objetivo en el máximo ante una variación de la restricción j, la variable al modificar la magnitud de la restricción j modificará también la magnitud de la función objetivo en el máximo en una tasa que será igual a $\frac{\partial f_j}{\partial x_i} y_j$. Pero también puede modificar el resto de restricciones, por lo que la contribución indirecta de la variable será la suma de esta expresión para cada restricción, será la suma de las tasas con las que se modifican las restricciones por sus multiplicadores de Lagrange ante una variación en la variable. Una variable que no es argumento de la función objetivo podrá influir en el problema por ser argumento de las restricciones, y entonces para alcanzar la solución del problema su contribución marginal indirecta debe anularse, porque si fuera positiva podríamos incrementar la magnitud de la función objetivo incrementando la variable y si fuera negativa reduciéndola.

Pero una variable puede influir en el problema tanto de manera directa como indirecta, y la suma de las contribuciones directa e indirecta forma la condición de máximo. Esta condición tiene que sumar 0, la condición de máximo correspondiente tiene que anularse, ya que si esta condición fuera positiva podríamos aumentar la magnitud de la función objetivo en el máximo incrementando la variable y si fuera negativa reduciéndola. En definitiva, la condición de máximo nos informa de la tasa en la que la función objetivo en el máximo se incrementa ante la variación de la variable, y por ello debe anularse en el máximo[161]. Tenemos pues una contabilidad definida en el problema que nos facilita el *cálculo matemático* de la solución usando los multiplicadores de Lagrange[162]. Por lo tanto la condición de máximo podemos entenderla como un indicador de si tenemos que aumentar o reducir la magnitud de la variable para alcanzar el máximo de la función objetivo, como una contabilidad de las contribuciones marginales directa e indirecta que se corresponden a cada variable.[163]

---

[161] Si una variable está sometida a una restricción de no negatividad del tipo $x_i \geq 0$ se aplica lo dicho si la variable es positiva, aunque si la variable es nula la condición puede ser también negativa ya que entonces no podemos reducir más la variable.

[162] Por supuesto, los matemáticos saben perfectamente que en los problemas de maximización restringida los multiplicadores de Lagrange admiten una interpretación como valores, y por eso a veces los llaman "precios sombra", "valores duales" o "valoraciones objetivamente determinadas"; pero no parecen tan conscientes de que las condiciones de máximo admiten la interpretación de una contabilidad.

Las condiciones de máximo también pueden entenderse como la afirmación de que el gradiente de la función objetivo tiene que ser una combinación lineal de los gradientes de las restricciones. Como vimos si tenemos un problema con dos variables podemos interpretarlas como la posición de un punto y la función objetivo como la altura del terreno en ese punto. Si además nuestro problema tiene una restricción ésta puede entenderse como una curva, como un camino en el terreno. Ahora nuestro problema consiste en encontrar el punto del camino donde el terreno alcanza su altura mayor. Para que esto ocurra es necesario que en ese punto el camino transcurra paralelo a la curva de nivel del terreno, puesto que si no fuera así desplazándonos por el camino podríamos ascender en alguna medida. Pero el gradiente de una función es la dirección en la que la función crece más, y por lo tanto es perpendicular a sus curvas de nivel. En consecuencia, que la curva de nivel de la función objetivo sea paralela a la restricción es equivalente a decir que el gradiente de la función objetivo sea paralelo (o proporcional) al gradiente de la restricción, que es la condición de máximo de Lagrange. Si dibujamos las curvas de nivel de la función objetivo y también las de la restricción, tratada como una función, y señalamos los puntos en los que ambas son paralelas habremos dibujado los puntos en los que se puede cumplir la condición de máximo, que en nuestro caso con dos variables habitualmente formarán una curva. La solución tiene que estar en un punto donde esta curva se cruce con la restricción.

Además el multiplicador de Lagrange resulta la proporción (con signo menos) entre el gradiente del objetivo y el de la restricción en la solución. Imaginemos que modificamos la restricción añadiéndole un pequeño número *h*. Esto no cambiará la forma de las curvas de nivel de la restricción, y por lo tanto tampoco los puntos en los que se pueda cumplir la condición de máximo, pero sí modificará el camino que ahora estará en una curva de nivel inferior. El aumento de la altura del terreno en el máximo con esta variación será igual a *h* por el multiplicador de Lagrange.

[163] Si estamos ante restricciones de desigualdad tenemos un problema "no clásico", pero podemos convertir este tipo de problemas al caso clásico añadiendo variables auxiliares. Por ejemplo, una restricción del tipo $f_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq 0$ puede ser rescrita como $f_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) - x_{n+1}^2 = 0$; y también podemos rescribirla como $f_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) - x_{n+1} = 0$ siendo x_{n+1} una variable no negativa. Las restricciones de signo de las variables pueden ser tratadas como el resto, con su multiplicador de Lagrange, pero a menudo resulta útil no incluirlas en el lagrangiano y escribir las condiciones de máximo con el signo correspondiente, que es la opción que hemos escogido al plantear nuestros modelos porque esta perspectiva nos permite entender mejor las reglas de los signos.

Tratando las restricciones de signo como en este trabajo, es fácil demostrar (por ejemplo, como hemos hecho con nuestros modelos en §11.5 y §11.6) que el cuadro que escribimos en §17.2 para las economías óptimas es aplicable a todo problema de maximización restringida, de manera que

$$\boxed{\begin{array}{lll} x_i \sim 0 & \leftrightarrow \quad \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} \sim 0 & x_i \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_j} \sim 0 & \leftrightarrow \quad -y_j \sim 0 & \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_j} y_j = 0 \end{array}}$$

donde substituiremos los caracteres ~ de acuerdo al esquema

$\geq$ en una expresión implica $\leq$ en la correspondiente

$=$ en una expresión implica $\gtreqless$ en la correspondiente

17.4 Valores y balances contables

Pasemos ahora al problema de una economía óptima. En nuestro caso las restricciones son los balances materiales, y una variación en los mismos puede ser entendida como la adición de una pequeña cantidad de materia al sistema, por lo que el multiplicador que se corresponde al balance de una materia, al que llamamos *valor de la materia, es la tasa a la que se incrementa la función objetivo en el máximo ante una variación en el balance material correspondiente*.

En el problema de una economía óptima las variables son las intensidades de los procesos y las condiciones de máximo los balances contables, y éstos implican la adición de dos términos. El primero $\partial\Phi/\partial\mathbf{X_t}$, la contribución marginal directa, es la tasa a la que se incrementa directamente la función objetivo ante una variación en la intensidad del proceso. El segundo término, la contribución marginal indirecta, podemos dividirlo a su vez en dos. Llamaremos *ingresos marginales* a $\mathbf{B_t}\,\mathbf{Y_{t+1}}$, a las cantidades de materias que produce marginalmente el proceso multiplicadas por sus valores, y que por lo tanto es la tasa a la que se incrementa la función objetivo en el máximo indirectamente por el hecho de que el proceso produce materias, de forma análoga a si las introdujéramos desde el entorno al sistema. Llamaremos *costes marginales* a $\mathbf{A_t}\,\mathbf{Y_t}$, a las cantidades que consume marginalmente el proceso multiplicadas por sus valores, y que por lo tanto es la tasa a la que se reduce la función objetivo en el máximo indirectamente por el hecho de que el proceso consume materias, de forma análoga a si las extrajéramos del sistema al entorno. Hay que subrayar que estos términos son siempre contribuciones marginales, se

---

Expresado con palabras

variable ~ 0 ↔	condición de máximo ~ 0	variable · condición de máximo = 0
restricción ~ 0 ↔	–multiplicador de Lagrange ~ 0	restricción · multiplicador de Lagrange = 0

De acuerdo con el esquema, *el signo de la condición de máximo se corresponde con el de su variable, y al menos una de ellas se anula; además el signo del multiplicador de Lagrange se corresponde con el de su restricción, y al menos uno de ellos se anula*. Éstas son las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker generalizadas para todos los signos posibles de variables y restricciones.

En Kuhn y Tucker [1] se demuestra que bajo determinados supuestos sobre la función objetivo y las restricciones estas condiciones son suficientes para la existencia de un máximo absoluto. Pero nosotros no hacemos esos supuestos, y por lo tanto sólo tenemos condiciones necesarias para un máximo relativo; en nuestro caso además debemos tener en consideración unas condiciones de regularidad y de orden superior, aunque no las estudiaremos aquí.

Nuestro cuadro se corresponde también a las condiciones de primer orden de un problema de punto de silla, donde se maximiza el lagrangiano con respecto a las variables y se minimiza con respecto a los multiplicadores de Lagrange, sometidos variables y multiplicadores a sus signos correspondientes. Que existan unos x_i e y_j que son solución de este problema de punto de silla es una condición suficiente para que estos x_i sean solución del problema de maximización restringida; y si unos x_i son una solución del problema de maximización restringida y se cumplen ciertas condiciones de regularidad existirán unos y_j junto con los que tendremos una solución del problema de punto de silla.

corresponden a la tasa a la que se incrementaría la función objetivo en el máximo si variáramos levemente la intensidad del proceso. Para los procesos que operan la tasa a la que contribuyen a incrementar la función objetivo directamente más la tasa en la que lo hace indirectamente, con la producción y el consumo, es igual a 0; y para los procesos que no operan es menor o igual a 0. Por lo tanto, un proceso puede contribuir directamente al incremento de la función objetivo aunque no produzca nada, o puede contribuir indirectamente con la producción y el consumo de materias aunque no afecte directamente a la función objetivo, o puede contribuir de ambas formas simultáneamente. En consecuencia en nuestro caso la condición de máximo, a la que llamamos *balance contable del proceso, es la tasa a la que se incrementa la función objetivo en el máximo ante una variación en la intensidad del proceso*.

En definitiva, los procesos que operan deben tener un balance contable nulo, ya que si éste fuera positivo incrementando la intensidad del proceso podríamos aumentar la magnitud de la función objetivo, y si fuera negativo lo conseguiríamos reduciendo la intensidad. Y los procesos que no operan deben tener balances contables no-positivos, porque si los tuvieran positivos incrementando su intensidad podríamos aumentar la magnitud de la función objetivo; pero pueden tenerlos nulos o negativos, porque como su intensidad ya es 0 no podemos reducirla más. Como vemos en toda economía óptima puede definirse una contabilidad que facilite el *cálculo económico* de la asignación usando los valores.

17.5 Ejemplos de economías óptimas

Para unas recetas dadas todas las economías óptimas posibles tienen en común las condiciones de balance material, aunque en algunos casos nos limitemos a intervalos temporales concretos, pero se diferencian en las distintas funciones objetivo que se aplican. Por lo tanto para unas recetas dadas podemos construir tantas economías óptimas como funciones objetivo podamos imaginar. Describiremos algunos casos particulares.

17.5.1 La economía de Robinson Crusoe

Un ejemplo de economía óptima sería la de Robinson, si éste establece una asignación con el fin de maximizar su “utilidad subjetiva”. Para modelizar la asignación que establecería Robinson tendríamos que escribir pues una función objetivo que codificara su “utilidad” (prescindiremos del problema de establecer esta función) y las restricciones estarían determinadas por las recetas que puede usar. Dado que Robinson no puede modificar el pasado, las intensidades que tendría que tomar en consideración, él y nosotros, se refieren sólo al presente y al futuro. Por lo tanto matemáticamente el problema podemos escribirlo

$$
\begin{aligned}
&\max_{\mathbf{X}_t} \Phi(\mathbf{X}_t) \\
&\mathbf{Q} - \mathbf{X}_0\,\mathbf{A}_0 = \mathbf{0} \\
&\mathbf{X}_0\,\mathbf{B}_0 - \mathbf{X}_1\,\mathbf{A}_1 = \mathbf{0} \\
&\mathbf{X}_1\,\mathbf{B}_1 - \mathbf{X}_2\,\mathbf{A}_2 = \mathbf{0} \\
&\mathbf{X}_2\,\mathbf{B}_2 - \mathbf{X}_3\,\mathbf{A}_3 = \mathbf{0} \\
&\mathbf{X}_3\,\mathbf{B}_3 - \mathbf{X}_4\,\mathbf{A}_4 = \mathbf{0} \\
&\ldots \\
&\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3, \mathbf{X}_4, \ldots \geq \mathbf{0}
\end{aligned}
\qquad \{17.3\}
$$

donde **Q** es el vector de materias de las que dispone en el momento presente, que supondremos conocido, y donde los $\mathbf{A}_t$ y $\mathbf{B}_t$ son las recetas que puede aplicar Robinson en el momento *t*.

Las condiciones de máximo resultan

$$
\begin{aligned}
&\partial\Phi/\partial\mathbf{X}_0 + \mathbf{B}_0\,\mathbf{Y}_1 - \mathbf{A}_0\,\mathbf{Y}_0 \leq \mathbf{0} \\
&\partial\Phi/\partial\mathbf{X}_1 + \mathbf{B}_1\,\mathbf{Y}_2 - \mathbf{A}_1\,\mathbf{Y}_1 \leq \mathbf{0} \\
&\partial\Phi/\partial\mathbf{X}_2 + \mathbf{B}_2\,\mathbf{Y}_3 - \mathbf{A}_2\,\mathbf{Y}_2 \leq \mathbf{0} \\
&\partial\Phi/\partial\mathbf{X}_3 + \mathbf{B}_3\,\mathbf{Y}_4 - \mathbf{A}_3\,\mathbf{Y}_3 \leq \mathbf{0} \\
&\ldots \\
&\mathbf{Y}_0, \mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \mathbf{Y}_3, \mathbf{Y}_4, \ldots \gtreqless \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

y si algún proceso opera se aplica =.

Por supuesto, no estamos diciendo que Robinson para resolver su problema escribe estas ecuaciones, o unas similares, y aplica un algoritmo en un ordenador para encontrar la asignación óptima. Robinson usa su experiencia y su ojo de buen cubero, pero no por ello debemos pensar que su cálculo, basado a menudo en conocimiento imperfecto y nebuloso, es diferente del que estamos modelizando. En esencia estamos ante el mismo problema, sólo que Robinson usa su inteligencia e intuición para plantearlo y obtener una aproximación a su solución mientras que nosotros modelizamos su cálculo de forma matemática y radicalmente simplista[164].

---

[164] Obviamente estamos planteando sólo el caso más simple, pero Robinson necesitaría tomar en consideración las probabilidades de obtener una mala cosecha, las indivisibilidades, las no linealidades, etc., y nosotros para modelizar su economía deberíamos pues plantear un problema mucho más complicado. De hecho sabemos como modelizarla teniendo en cuenta muchas de las complicaciones a las que se enfrenta Robinson, pero no hacemos esto aquí para no alargar la exposición.
Fijémonos no obstante en que hemos modelizado el problema de una manera tan radicalmente simplista que según nuestro planteamiento Robinson no tendría que efectuar más que un cálculo en el momento $t = 0$ para saber como tendría que organizar la asignación a lo largo de toda su vida. Pero es obvio que cuando la producción es probabilística, o si Robinson modificara su función objetivo con el tiempo, el problema de

Cada restricción de este problema tiene su correspondiente multiplicador de Lagrange, el valor de la materia, que es la tasa a la que se incrementaría la "utilidad" de Robinson si pudiera disponer de una pequeña cantidad más de la materia. Así que para nuestro Robinson las materias tienen valor según contribuyan a incrementar su "utilidad". Si introducir en su economía una pequeña cantidad de trigo en un instante dado permite aumentar la "utilidad" de Robinson el triple que introducir una pequeña cantidad de hierro en otro instante el valor del trigo en el primer instante será el triple que el del hierro en el segundo (en sus correspondientes unidades físicas de medida).

Vimos que las condiciones de máximo de toda economía óptima implicaban la suma de unos términos. Ahora el término $\partial\Phi/\partial\mathbf{X_t}$ es la tasa a la que aumenta directamente la "utilidad" de Robinson por el hecho de que el proceso correspondiente opere. Por ejemplo, un proceso puede reducir la "utilidad" si requiere trabajo del propio Robinson o puede aumentarla si implica que disfruta de algún alimento. Además $\mathbf{B_t}\,\mathbf{Y_{t+1}} - \mathbf{A_t}\ \mathbf{Y_t}$ puede interpretarse como la tasa a la que aumenta indirectamente la "utilidad" de Robinson por el hecho de que el proceso produzca y consuma materias. Un proceso que resulte indiferente de forma directa a Robinson puede sin embargo contribuir indirectamente al incremento o decremento de su "utilidad" al producir y consumir materias, de la misma manera que lo haría la introducción y retirada de las materias que produce y consume.

Para maximizar su "utilidad" Robinson tiene que establecer una asignación con la que la adición de estos términos sea nula para los procesos que operan y no-positiva para los que no operan. Por lo tanto si Robinson conociera los valores y estos términos podría calcular muy fácilmente si un proceso le conviene que opere o no, o si le conviene que el proceso aumente de intensidad, porque su balance contable es positivo, o que la reduzca, porque su balance contable es negativo. Como vemos incluso en una economía tan sencilla como la de Robinson es concebible una contabilidad que facilite el cálculo de la asignación óptima, usando para ello los multiplicadores de Lagrange o valores y las condiciones de máximo o balances contables.

establecer una asignación implica tener que actualizar el cálculo en cada paso temporal. Por esto Robinson no puede planificar su economía de una vez y atenerse fielmente a lo calculado, sino que tiene que corregir, actualizar y modificar sus cálculos en el tiempo. Para Robinson el problema de la asignación también está condicionado por la dificultad de pronosticar el futuro.

17.5.2 Maximización de la satisfacción de las necesidades

Estudiemos una asignación que maximiza la satisfacción de las necesidades de la gente codificadas en la función objetivo Φ. Por lo tanto estamos en una economía en la que de todas las asignaciones posibles, de todas las asignaciones factibles, se escoge aquella que maximiza Φ, aquella que maximiza la satisfacción de las necesidades de la gente (prescindimos de nuevo del problema de definir esta función). En realidad el ejemplo de Robinson anterior es un caso particular del nuevo, y podemos escribir las mismas ecuaciones {17.3} para modelizar el problema en una primera aproximación (y tendríamos que hacer parecidas reservas a nuestra simplificación extrema).

El valor $\mathbf{Y_t}$ en nuestra economía es la tasa a la que aumentaría la satisfacción de las necesidades de la gente en el máximo si añadiéramos una pequeña cantidad de la materia correspondiente al sistema. Si en un determinado instante añadiendo una cantidad pequeña de trigo (en arrobas) la tasa a la que aumenta la satisfacción de las necesidades de la gente es el triple de la que se consigue añadiendo una cantidad pequeña de hierro (en toneladas) en otro momento, entonces el valor del trigo (en arrobas) en el primer instante será el triple que el del hierro (en toneladas) en el segundo.

Un pequeño incremento en la intensidad de un proceso aumentará la satisfacción de las necesidades de la gente directamente en una tasa $\partial\Phi/\partial\mathbf{X_t}$, e indirectamente mediante la producción de materias en una tasa $\mathbf{B_t}\ \mathbf{Y_{t+1}}$ y también mediante el consumo de materias en una tasa $-\mathbf{A_t}\ \mathbf{Y_t}$. Los balances contables determinan que los procesos que operan en esta economía serán aquellos en los que la suma de estos términos sea nula y los que no operan no-positiva. En nuestra economía un proceso puede operar aunque no produzca nada, y así pueden destinarse recursos a un parque natural del que no se obtiene ninguna producción porque la gente desee que se mantenga. También un proceso puede operar aunque no afecte a la satisfacción de las necesidades de la gente directamente, y por ejemplo puede producirse wolframio si sirve para que puedan operar otros procesos. Y de nuevo vemos que es posible desarrollar una contabilidad en nuestra economía basada en las condiciones de máximo y en los valores. [165]

[165] Podemos llamar *socialismo* a aquel sistema social en donde el control de la asignación lo tiene la sociedad (y es obvio que un sistema así no tiene nada que ver con los “socialismos reales”). Se han distinguido varias formas de socialismo según el objetivo con el que se establezca la asignación y la distribución: la sociedad sin explotación que quería Proudhon (aunque a éste no le hubiera gustado el

17.5.3 Maximización de la producción ponderada final

Plantearemos ahora la asignación a lo largo de un intervalo temporal finito, $0 \leq t \leq n$. La producción de cada materia al final del intervalo temporal es $\mathbf{X_n\ B_n}$, y la suma de estas producciones multiplicadas con unos coeficientes $\mathbf{Z}$, que llamamos *ponderaciones*, resulta $\mathbf{X_n\ B_n\ Z}$. Como esta expresión es la función objetivo el problema queda

$$
\begin{aligned}
&\max_{\mathbf{X_0, X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}, X_n}} \mathbf{X_n\ B_n\ Z} \\
&\mathbf{Q - X_0\ A_0 = 0} \\
&\mathbf{X_0\ B_0 - X_1\ A_1 = 0} \\
&\mathbf{X_1\ B_1 - X_2\ A_2 = 0} \\
&\mathbf{X_2\ B_2 - X_3\ A_3 = 0} \\
&\ldots \\
&\mathbf{X_{n-2}\ B_{n-2} - X_{n-1}\ A_{n-1} = 0} \\
&\mathbf{X_{n-1}\ B_{n-1} - X_n\ A_n = 0} \\
&\mathbf{X_0, X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}, X_n \geq 0}
\end{aligned}
\qquad \{17.4\}
$$

donde suponemos conocidas las recetas y también $\mathbf{Q}$, las cantidades disponibles en el momento inicial, y $\mathbf{Z}$, las ponderaciones. Estamos ante un *programa lineal* con un número finito de variables, ya que hemos delimitado un intervalo temporal finito[166].

Las condiciones de máximo de este problema resultan

apelativo de socialista), el socialismo igualitario donde cada persona recibiría lo mismo que las demás, o la sociedad orientada a la satisfacción de las necesidades de la gente de Marx; pero generalmente los autores socialistas, también los citados, suelen combinar en diferentes proporciones estos ingredientes. Además hay discrepancias en lo que respecta al mecanismo económico a usar, la planificación, el mercado, etc.
Nuestra economía de §17.5.2 puede entenderse como un socialismo según el planteamiento de Marx, aunque no hemos especificado el mecanismo económico que usa. Un modelo del socialismo de Proudhon bajo condiciones de comportamiento simple lo tenemos en TE cuando el factor de explotación es 1. No obstante, si limitamos el comportamiento al estado estacionario o al ciclo estacionario, podemos modelizar con TE un socialismo más cercano al que quería Marx si en vez plantear el problema con las recetas que efectivamente se observan lo escribimos con unas recetas que tomen ya en consideración la satisfacción de las necesidades de la gente, con un consumo más igualitario e incluyendo las necesidades generales (por ejemplo, como flujos impuestos). Entonces TE nos informaría de cómo tendría que ser la estructura económica para que las jornadas laborales además se redujeran lo máximo posible. Dado que TE no presupone ningún mecanismo de asignación su solución podría interpretarse tanto como un socialismo mercantil o como uno planificado.

[166] Este problema también podría plantearse para un intervalo temporal infinito, $t \geq 0$, como el visto con Robinson, manteniendo como función objetivo $\mathbf{X_n\ B_n\ Z}$. Pero si para una producción cualquiera en el instante n es posible establecer alguna asignación para $t > n$ las restricciones que se corresponden a los instantes posteriores a n no afectan al problema, de manera que por ejemplo los $\mathbf{Y_t}$ correspondientes son 0. Entonces podemos limitar el intervalo temporal a $0 \leq t \leq n$. Pero si las restricciones para $t > n$ sí afectaran al problema, porque condicionaran la asignación en los instantes anteriores, entonces habría que tomarlas en consideración y los $\mathbf{Y_t}$ correspondientes no serían necesariamente 0. Para simplificar la exposición aquí trataremos sólo el caso en el que podemos prescindir de las restricciones que se corresponden a los instantes posteriores a n.

$$\begin{aligned}
&\mathbf{B_0\ Y_1 - A_0\ Y_0 \leq 0}\\
&\mathbf{B_1\ Y_2 - A_1\ Y_1 \leq 0}\\
&\mathbf{B_2\ Y_3 - A_2\ Y_2 \leq 0}\\
&\dots\\
&\mathbf{B_{n-1}\ Y_n - A_{n-1}\ Y_{n-1} \leq 0}\\
&\mathbf{B_n\ Z - A_n\ Y_n \leq 0}\\
&\mathbf{Y_0, Y_1, Y_2, \dots, Y_{n-1}, Y_n \gtrless 0}
\end{aligned} \qquad \{17.5\}$$

y para los procesos que operan se aplica =.

El valor $\mathbf{Y_t}$ ahora es la tasa a la que aumentaría la producción ponderada final en el máximo si añadiéramos una pequeña cantidad de la materia correspondiente al sistema. Si en un determinado instante añadiendo una cantidad pequeña de trigo (en arrobas) la tasa a la que aumenta la producción ponderada final es el triple de la que se consigue añadiendo una cantidad pequeña de hierro (en toneladas) en otro momento, entonces el valor del trigo (en arrobas) en el primer instante será el triple que el del hierro (en toneladas) en el segundo.

La función objetivo $\mathbf{X_n\ B_n\ Z}$ sólo implica a las intensidades de los procesos que operan en el momento final *n*. Para los procesos que operan en un momento anterior al final $t < n$ un pequeño incremento en su intensidad no aumentará la producción final directamente, pero sí indirectamente mediante la producción de materias en una tasa $\mathbf{B_t\ Y_{t+1}}$ y también mediante el consumo de materias en una tasa $-\mathbf{A_t\ Y_t}$. Para los procesos que operan en el momento final $t = n$ un pequeño incremento en su intensidad aumentará la producción final directamente en una tasa $\mathbf{B_n\ Z}$, e indirectamente mediante el consumo de materias en una tasa $-\mathbf{A_n\ Y_n}$. En cualquier caso los balances contables determinan que los procesos que operan serán aquellos en los que la suma de estos términos sea nula y los que no operan no-positiva.

18: Mecanismos económicos, valor y contabilidad

18.1 Dificultad de la asignación

18.1.1 Dificultad del problema matemático de la asignación

En general resulta muy difícil plantear y resolver las ecuaciones de una economía óptima, también en el caso de la economía de Robinson vista en §17.5.1. Podemos entender esta dificultad sólo con intentar escribir las ecuaciones correspondientes, incluso en nuestro caso extremadamente simplista y usando datos imaginados o inventados. Primero necesitamos conocer la función objetivo en forma de expresión matemática precisa, y no de una manera intuitiva como Robinson. Segundo, necesitamos conocer las restricciones, y es obvio que para una economía medianamente compleja estaríamos ante un número enorme de ecuaciones y variables. Tercero, una vez escrito el problema o almacenada la información correspondiente en un ordenador, tendríamos que buscar su solución aplicando un algoritmo; pero en general es muy difícil resolver sistemas grandes y a veces imposible con los ordenadores actuales. En definitiva, está claro que plantear y resolver las ecuaciones de una economía óptima no es en absoluto sencillo, incluso sobre el papel.

18.1.2 Dificultad del problema real de la asignación

Si resolver las ecuaciones sobre el papel no es sencillo establecer la asignación en la realidad lo es aun menos. Imaginemos que proveyéramos a nuestro Robinson con un potente ordenador y con la asistencia de los mejores economistas y matemáticos, y que le sugiriéramos que efectuara el cálculo de la asignación resolviendo las ecuaciones que vimos con anterioridad u otras similares. Es evidente que Robinson hubiera tenido muchos problemas para especificar matemáticamente su función objetivo, para recopilar la información necesaria sobre las materias y recetas disponibles y para resolver el problema resultante. No sería de extrañar que hubiera muerto de hambre antes de poder calcular lo que tenía que sembrar.

En una economía más compleja que la de Robinson, por ejemplo en la que vimos en §17.5.2, el problema resulta aun más inabordable. Primero tenemos que conocer la función objetivo real, una expresión matemática explícita que codifica las necesidades de la gente, lo que a primera vista quizá parezca ya una tarea imposible[167]. Segundo, deben conocerse

[167] Y se han construido argumentos para intentar demostrar que efectivamente es una tarea imposible. Pero en realidad sí pueden concebirse formas que permitan aproximar una expresión matemática de una función

las restricciones, los datos sobre las recetas y las cantidades iniciales disponibles, lo que no es imposible desde un punto de vista lógico pero desde luego supone recopilar una cantidad ímproba de datos, supone disponer de un aparato estadístico muchísimo más avanzado de los que existen en la actualidad. Tercero, tendría que resolverse el problema matemático con algún algoritmo, y ya señalamos que esto no es en absoluto sencillo con los problemas grandes. Y cuarto, como tarea añadida al problema matemático, una vez efectuado el cálculo habría que llevarlo a la práctica, habría que organizar la producción para llevar a cabo la asignación calculada, ejecutando los trabajos de la manera correspondiente. Por lo tanto, tenemos las siguientes dificultades para establecer una asignación en la realidad:

1º establecer la función objetivo,
2º establecer las restricciones,
3º efectuar el cálculo,
4º llevar a la práctica la asignación calculada.

Parece claro que ninguna de las cuatro tareas que hemos detallado son posibles hoy en día en una economía humana sólo medianamente compleja efectuándolas con lo que llamaremos una *asignación explícita*, planteando y resolviendo las ecuaciones; aunque no por razones lógicas sino prácticas y sí son imaginables sociedades muchísimo más avanzadas que operasen estableciendo la asignación mediante un cálculo explícito de la misma (por lo que quizá los extraterrestres sí disfruten de una economía así). [168]

18.2 Necesidad de los mecanismos de asignación

Pero el hecho es que Robinson establece una asignación con bastante éxito, y sin disponer de ordenadores ni de economistas que le ayuden. Robinson organiza su economía de acuerdo a lo que llamaremos una *asignación directa*. Robinson sabe más o menos lo que

---

objetivo así, por ejemplo usando mercados de bienes de consumo. Las personas recibirían unas monedas o unos bonos, en función de sus necesidades o de lo que hubieran trabajado, y comprarían con ellas los bienes de consumo en unos mercados. En éstos el precio de lo que se vende bien se subiría y el precio de lo que se vende mal se bajaría, con lo que se establecerían de manera continua unos precios. Con ellos tenemos una aproximación de la función objetivo como una función lineal. Añadiendo algunos supuestos más, por ejemplo la evolución de estos precios en el tiempo con una tasa de descuento o la atribución a los trabajos de un precio negativo, podría maximizarse el consumo de las personas ponderado en estos precios.

[168] En algunas empresas muy avanzadas se asigna de forma explícita, se plantean y resuelven problemas del tipo de §17.5.3 para establecer la asignación. Ésta es la razón por la que las técnicas de programación lineal y no lineal son habituales en el entorno empresarial, allí donde es posible usarlas de forma explícita. Pero está claro que esto no es posible más que donde la producción sigue pautas regulares y el control sobre ella es extraordinario.
No obstante allí donde la asignación se establezca de manera explícita la aplicación de los algoritmos matemáticos tendrá a menudo como consecuencia la toma en consideración de los multiplicadores de Lagrange, y por ello ésta es una vía para que la categoría valor tome cuerpo en la realidad.

quiere (conoce su función objetivo, su "utilidad subjetiva"), obtiene información acerca de las materias que puede usar a través de sus sentidos y estima las recetas que puede utilizar gracias a su experiencia pasada o mediante experimentos (establece sus restricciones), calcula la asignación que le interesa gracias a su imaginación e inteligencia con su prodigioso cerebro, quizá sólo con la ayuda de pluma, papel y la aritmética (efectúa el cálculo), y tiene el poder para obligarse a si mismo a trabajar y modificar la realidad (lleva la asignación a la práctica). La asignación directa no se limita sólo a la economía de Robinson y, por ejemplo, un pequeño grupo de cazadores-recolectores o una familia también pueden organizar su economía así, aunque ahora las decisiones tengan que tomarse colectivamente. Pero el problema de la asignación es difícil ya para Robinson, y no es extraño que éste se equivoque muy a menudo y que tenga que estar corrigiendo constantemente sus cálculos. No obstante, Robinson puede ayudarse en sus cálculos con la contabilidad específica que se corresponde a su problema, en la que los multiplicadores de Lagrange juegan un papel esencial. Los posibles cálculos de Robinson son una vía para comprender que la categoría valor juegue un papel en la realidad, ya que éste en buena medida tendrá que resolver un problema similar al que hemos modelizado de manera matemática, tendrá que aproximar con su inteligencia e intuición su solución.

Está claro que la asignación directa está limitada a economías no demasiado complejas, y que superado un tamaño no muy elevado resulta imposible asignar de esta manera, porque esta tarea supera lo que pueden calcular los cerebros humanos, aun trabajando "en paralelo". Pero el desarrollo tecnológico sólo es posible con una gran especialización y en economías de un tamaño y complejidad considerables[169]. Por ello los mecanismos de asignación se vuelven imprescindibles. Esto es aún más cierto con la alta tecnología, y para que existan aviones, ordenadores, rascacielos, etc. es necesaria la operación coordinada de un gran número de personas especializadas en muchas tareas concretas. El problema de la asignación en estas condiciones es abrumador, y en una economía moderna implica un número enorme de procesos y materias, superior en muchos órdenes de magnitud a los que podemos resolver en nuestros modelos por ahora o al que puede computarse con los cerebros humanos[170].

---

[169] La necesidad de una tecnología compleja conlleva también una economía de tamaño considerable cuando están presentes las indivisibilidades.

[170] Sin embargo el mecanismo mercantil consigue que se establezca una asignación. Por supuesto no estamos diciendo que lo consiga de manera perfectamente eficiente (cuando estudiemos el mecanismo mercantil en

En el caso de la colmena se plantea también el problema de establecer la asignación, sólo que ahora dependiendo de los pequeños cerebros de las abejas. Es obvio que estos órganos tienen una capacidad de cómputo muy limitada y que no son capaces de dar una aproximación a la solución del problema, como sí puede hacerlo Robinson en su pequeña economía. Así que en la colmena los mecanismos de asignación son aun más imprescindibles ya que no es posible la asignación directa.

18.3 Mecanismos económicos, valor y contabilidad

18.3.1 Los mecanismos de asignación como algoritmos reales

Como vemos, los mecanismos económicos son *imprescindibles* en la tarea real de establecer una asignación, también en las economías humanas medianamente complejas, ya que entonces una asignación explícita o directa es impracticable. Ahora bien, estos mecanismos tienen que efectuar una tarea similar desde un punto de vista lógico a lo que nosotros hacemos planteando las ecuaciones de una economía óptima y aplicando un algoritmo matemático para resolverlas. Podemos decir pues que *los mecanismos económicos actúan como algoritmos reales*, pueden ser entendidos como procedimientos reales para encontrar la solución del problema de la asignación. Cada mecanismo económico buscará el máximo de una función objetivo concreta sometida a sus condiciones de balance material, y lo hará mediante procedimientos particulares, diferentes de los que aplican otros mecanismos. La tarea de los mecanismos económicos tiene su contrapartida lógica en la que nosotros efectuamos con los algoritmos matemáticos, y por ello se comprende que algunos de estos algoritmos reales se parezcan a ciertos algoritmos matemáticos en su forma de operar.

18.3.2 Valor y contabilidad en una economía óptima

Desde un punto de vista lógico hay infinitas funciones objetivo posibles (podemos construir tantas como dicte nuestra imaginación) y por lo tanto hay infinitas economías óptimas posibles. Pero toda economía óptima está sometida a las condiciones de balance material y a las restricciones de signo, y por lo tanto desde un punto de vista lógico en las economías óptimas la asignación es un problema de maximización restringida. Como vimos, en estos problemas para que exista una solución tienen que cumplirse además de las restricciones unas condiciones de máximo en las que intervienen unas variables

otro trabajo veremos que es precisamente su forma de operar la que provoca las crisis económicas). Pero el solo hecho de que consiga establecer una asignación más o menos coherente resulta en sí impresionante.

auxiliares, los multiplicadores de Lagrange. Comprobar si unas determinadas variables y multiplicadores forman una solución óptima resulta sencillo simplemente comprobando si se cumplen las restricciones y las condiciones de máximo. Muchos algoritmos matemáticos que intentan la solución de los problemas de maximización restringida usan este hecho de forma sistemática, comprueban si unas variables y unos multiplicadores satisfacen las restricciones y las condiciones de máximo, y si no es así los modifican intentando que las incumplan menos. Por lo tanto la solución de los problemas de maximización restringida se facilita mucho, desde el punto de vista matemático, con el estudio de los multiplicadores de Lagrange y las condiciones de máximo.

No es de extrañar pues que en algunos de los algoritmos económicos reales se observen conceptos con un papel similar al que juegan los multiplicadores de Lagrange y las condiciones de máximo en los algoritmos matemáticos, porque al problema real de la asignación le corresponde lógicamente el problema matemático. Así en una economía óptima el conocimiento de los multiplicadores de Lagrange del problema matemático correspondiente, de los valores, sería muy útil, ya que por ejemplo con ellos se podría decidir muy sencillamente los procesos que conviene usar y los que no, sólo cotejando las condiciones de máximo, los balances contables. Por ello se comprende que en determinadas economías reales los valores y la contabilidad jueguen un papel fundamental, ya que permiten simplificar el problema del cálculo de la asignación. Con el conocimiento de los valores el problema de determinar si una asignación es la óptima se reduce al problema de comprobar si se cumplen las condiciones de máximo, si se cumplen los balances contables. En consecuencia no debe extrañarnos que en una economía óptima la categoría valor juegue un papel en la realidad y que la contabilidad sea usada de manera sistemática[171].

[171] Ya hemos señalado en el capítulo 16 el parecido de la forma de operar de los mecanismos mercantiles con un algoritmo como el simplex, y ya hemos hecho referencia también en §17.3 al algoritmo del gradiente. Pero en una economía óptima las variables son las intensidades x_i y los términos $\partial\mathcal{L}/\partial x_i$ los balances contables correspondientes; y los multiplicadores de Lagrange y_j son los valores y $\partial\mathcal{L}/\partial y_j$ los balances materiales correspondientes. Así que si aplicáramos el algoritmo del gradiente al problema de una economía óptima procederíamos aumentando las intensidades cuyos balances contables fueran positivos (en el capitalismo, los procesos con beneficios) y reduciendo las intensidades cuyos balances contables fueran negativos (en el capitalismo, los procesos con pérdidas). Igualmente se aumentarían los valores cuyos balances materiales fueran negativos (los de las materias con déficit) y se reducirían los valores cuyos balances materiales fueran positivos (los de las materias con superávit). Se entiende que un mecanismo económico o algoritmo real imite o se comporte de forma parecida al algoritmo matemático del gradiente, y no creemos necesario subrayar la similitud de la forma de proceder de este algoritmo matemático con la forma de operar del algoritmo real que llamamos mecanismo mercantil.

En definitiva, en los textos de Matemáticas al tratar la maximización restringida es habitual la interpretación de los multiplicadores de Lagrange como los valores de una economía (y podrían interpretarse también las condiciones de máximo como una contabilidad). Nosotros en cambio al tratar las economías interpretamos los valores y las contabilidades como los multiplicadores de Lagrange y la comprobación de las condiciones de máximo de un problema de maximización restringida.

18.3.3 Valor y contabilidad en los capitalismos

En VN vimos que si interpretamos los multiplicadores de Lagrange como precios las condiciones de máximo eran la ley de la rentabilidad. Para comprobar si tenemos una solución de VN, para unas intensidades y unos precios dados, basta con que las intensidades cumplan los balances materiales y que se cumplan las condiciones de máximo, basta con comprobar si los procesos que operan tienen beneficios (actualizados) nulos y los que no operan beneficios (actualizados) no positivos; basta con que se cumplan lo que hemos llamado balances contables. En las empresas capitalistas con la contabilidad se comprueba si un proceso obtiene pérdidas o no, se comprueba si se cumple la ley de la rentabilidad.

Vemos que en el mecanismo capitalista *los precios juegan el papel de los multiplicadores de Lagrange* y *la contabilidad el de las condiciones de máximo*. Este mecanismo opera pues de forma parecida a alguno de los algoritmos matemáticos para resolver los problemas de maximización restringida, opera como un algoritmo real. Es por ello que los precios y la contabilidad son tan importantes en el capitalismo, porque es con la comprobación de los balances contables con lo que se establece la asignación, con lo que se intenta aproximar la solución del problema. Desde luego la importancia de los procedimientos contables en el capitalismo no ha pasado desapercibida y muchos autores han subrayado que el capitalismo es el triunfo de la contabilidad.

18.3.4 Valor y contabilidad en otros sistemas

Pero habría que precisar la afirmación anterior, en el sentido de que el capitalismo es el triunfo de una determinada contabilidad, justo la que se deduce de las condiciones de máximo de VN (y ésta es una prueba más del parecido de este modelo con esa sociedad). En efecto, un socialismo como el visto en §17.5.2 también puede entenderse como una economía óptima en donde se maximizaría una función objetivo, y por ello también existen unos multiplicadores de Lagrange y unas condiciones de máximo. Es concebible pues una contabilidad específica asociada a esas condiciones y a esos multiplicadores. Por lo tanto no es correcta una asociación entre capitalismo y contabilidad entendida como algo exclusivo, ya que en un socialismo también podría usarse una contabilidad. No obstante la contabilidad y los valores socialistas serían diferentes de los capitalistas, porque las funciones objetivo son distintas y por ello lo son también las condiciones de máximo y los multiplicadores de Lagrange.

19: Crecimiento máximo como asignación óptima

19.1 VN como asignación óptima

Queremos encontrar alguna asignación óptima que se corresponda con la solución de VN. Hay varias maneras de atacar esta cuestión y algunas de las más iluminadoras implican matemáticas poco habituales, pero también podemos escribir problemas sencillos, además con un número finito de variables y restricciones, con las que obtendremos la asignación de VN y para los que podremos dar una interpretación clara y simple.

Planteemos por ejemplo la maximización de la producción ponderada final vista en §17.5.3. Hagamos que las cantidades iniciales sean $\mathbf{Q} = \mathbf{X_{-1}}\ \mathbf{B_{-1}}$ y que la ponderaciones finales sean $\mathbf{Z} = \mathbf{Y_{n+1}}$, donde suponemos conocidas las recetas y también $\mathbf{X_{-1}}$ e $\mathbf{Y_{n+1}}$. Obviamente las condiciones de máximo resultan las mismas que las vistas en §17.5.3, ya que seguimos ante el mismo problema.

Si planteamos el problema con recetas que no cambian con el tiempo y $\mathbf{X_{-1}}$ e $\mathbf{Y_{n+1}}$, que tratamos como datos, son precisamente las intensidades y los precios solución de VN para estas recetas, por simple sustitución en las restricciones y en las condiciones de máximo se comprueba que la solución de VN será también una solución de la maximización de la producción ponderada final a lo largo de su intervalo temporal, aunque es posible que además existan otras. Y este problema puede ser interpretado fácilmente como la maximización de la producción al final del intervalo temporal ponderada con unos precios, $\mathbf{X_n}\ \mathbf{B_n}\ \mathbf{Y_{n+1}}$, partiendo de unas materias disponibles al inicio del intervalo temporal, $\mathbf{X_{-1}}\ \mathbf{B_{-1}}$. Por lo tanto *la solución de VN se corresponde con una economía que maximiza la producción ponderada al final del intervalo temporal de análisis*, cuando las cantidades iniciales y las ponderaciones se corresponden con las intensidades y precios solución de VN. Las intensidades de VN a lo largo del tiempo (creciendo con el factor-VN) son precisamente las que se corresponden a la maximización de la producción ponderada final, los precios de VN (decreciendo con el factor-VN) son los valores, las tasas a la que se incrementa la producción final ante una variación en el balance material de las materias, y el balance contable de un proceso es la tasa a la que se incrementa la producción final ante una variación en la intensidad del proceso correspondiente. También es fácil comprobar que si en la maximización de la producción ponderada final escribimos recetas que cambian periódicamente con el tiempo una solución será la correspondiente a VNC.

Recordemos el ejemplo de las mujeres añadidas de §7.1.3, donde dijimos que el valor-reproductivo era proporcional a la contribución al crecimiento de la población a largo plazo. Si planteamos la maximización de la producción ponderada final con la matriz de Leslie del ejemplo de §7.1.3, partiendo de una población inicial $\mathbf{X_{-1}}$ igual a la solución de VN y usando como ponderación de la producción final $\mathbf{Y_{n+1}}$ los valores-reproductivos, la solución será precisamente la que se corresponde a VN. Los valores-reproductivos se corresponden realmente a los valores de nuestro nuevo problema, y también la interpretación que dimos del precio de una materia como el precio de lo que va a producir. Pero esta interpretación es aplicable a cualquier tipo de producción, de manera que el precio de una materia en un instante, el multiplicador de Lagrange, es la tasa a la que se incrementa la producción final ponderada (en un futuro cualquiera) si añadiéramos al sistema una pequeña cantidad de la materia en el instante correspondiente.

En realidad estas últimas propiedades siguen siendo ciertas para cualquier solución de la maximización de la producción ponderada final, también cuando plantemos el problema con unos $\mathbf{X_{-1}}$ e $\mathbf{Y_{n+1}}$ que no se corresponden a la solución de VN. De hecho VN y VNC pueden entenderse como formas de encontrar soluciones sencillas a la maximización de la producción ponderada final cuando las recetas no cambian con el tiempo o cuando lo hacen de manera periódica. Pero recordemos que además de estas soluciones simples pueden existir otras que no lo sean[172], es perfectamente posible que existan otras soluciones que no se correspondan a VN[173].

19.2 Comparación entre VN y otras economías óptimas

Comparemos los balances contables de la economía que maximiza la producción ponderada final que vimos en §17.5.3, cuando se corresponde a VN, con los de las

[172] Además se puede demostrar, aunque no lo haremos aquí, que bajo determinadas condiciones la trayectoria que describe la maximización de la producción ponderada final con recetas constantes se parecerá a la descrita en VN incluso cuando planteamos este problema con unos $\mathbf{X_{-1}}$ e $\mathbf{Y_{n+1}}$ que no se correspondan a la solución de VN, lo que se conoce como *teoremas de la autopista*. Bajo determinadas condiciones, recordémoslo, la estructura de la economía evolucionará desde su forma inicial hasta la de VN, y permanecerá en ella hasta que se desvié de la misma al final de la trayectoria para adaptarse a la ponderación final particular. Véase McKenzie [3].

[173] Pusimos un ejemplo en §10.4.2 de unas recetas que no cambian con el tiempo para las que sin embargo es posible una solución cíclica. Esta última solución no lo es de VN, aunque sí de VNC.

economías que maximizan la satisfacción de las necesidades de Robinson de §17.5.1 o de la gente de §17.5.2. En los tres casos, en realidad en toda economía óptima, tenemos que

contribución marginal directa + ingreso marginal – coste marginal ≤ 0

y si el proceso opera se aplica =, donde recordemos que hemos llamado contribución marginal directa a $\partial\Phi/\partial\mathbf{X_t}$, ingreso marginal a $\mathbf{B_t}\ \mathbf{Y_{t+1}}$ y coste marginal a $\mathbf{A_t}\ \mathbf{Y_t}$. Pero en la maximización de la producción ponderada final la contribución marginal directa sólo existe para las intensidades de los procesos que operan en el último instante temporal. Así que para las intensidades en el resto de instantes, $0 \leq t < n$, tenemos

ingreso marginal – coste marginal ≤ 0

y si el proceso opera se aplica =, que es por supuesto la ley de la rentabilidad capitalista[174].

En la economía de Robinson de §17.5.1 o en la de §17.5.2 que un proceso opere o no está determinado por un balance contable en donde, además de los ingresos y costes marginales, se toma en consideración la tasa a la que contribuye directamente a incrementar la satisfacción de las necesidades, las de Robinson o las de la gente. Pero en las economías que se parecen a la vista en §17.5.3 o a VN no se maximiza la satisfacción de las necesidades de la gente (y, fijémonos bien, tampoco la satisfacción de las necesidades de una clase dominante), se maximiza la producción ponderada final. Por lo tanto el balance contable de VN sólo tiene en cuenta los beneficios marginales. Mientras que en la economía de §17.5.2 se destinarán recursos a un parque natural si eso es lo que desea la gente, aunque estos recursos no vayan a producir nada, en VN se destinan recursos sólo a las actividades que permitan obtener ingresos que compensen sus costes, en VN no hay lugar para consumos si no producen ingresos (salvo que impongamos al sistema unos flujos de materias).

Además los valores de las materias en la economía de Robinson de §17.5.1 o en la economía orientada a la satisfacción de las necesidades de §17.5.2 serán diferentes de los de una economía que maximiza la producción ponderada final de §17.5.3 y de los de VN. En aquellos sistemas los valores son la tasa a la que se incrementa la satisfacción de las necesidades ante el añadido de una pequeña cantidad de la materia correspondiente, pero

[174] Para las intensidades en el último instante, $t = n$, nos queda

contribución marginal directa – coste marginal ≤ 0

y en §17.5.3 la contribución marginal directa es $\mathbf{B_n}\ \mathbf{Z}$, la tasa con la que el proceso incrementa la producción final ponderada.

en §17.5.3 y en VN los precios son la tasa a la que se incrementa la producción ponderada final. Así que tenemos que en general los valores de una economía que maximiza la producción ponderada final, los de VN, no tienen porqué coincidir o incluso parecerse a los valores de Robinson o a los de una economía orientada a la satisfacción de las necesidades. El hecho de que estemos ante funciones objetivo diferentes determina esta distancia, incluso aun cuando escribamos las ecuaciones con recetas iguales y por ello las restricciones sean las mismas.

19.2.1 Un ejemplo; valor de una materia duradera

Veamos el caso de una materia duradera de *n* edades. Las condiciones de máximo que se corresponden a los procesos que la usan resultan, en toda economía óptima,

$$
\begin{aligned}
&\partial\Phi/\partial x_{0,t} - \mathbf{a_{0,t}}\,\mathbf{y_t} + \mathbf{b_{0,t}}\,\mathbf{y_{t+1}} + y_{0,t+1} \le 0\\
&\partial\Phi/\partial x_{1,t+1} - \mathbf{a_{1,t+1}}\,\mathbf{y_{t+1}} - y_{0,t+1} + \mathbf{b_{1,t+1}}\,\mathbf{y_{t+2}} + y_{1,t+2} \le 0\\
&\partial\Phi/\partial x_{2,t+2} - \mathbf{a_{2,t+2}}\,\mathbf{y_{t+2}} - y_{1,t+2} + \mathbf{b_{2,t+2}}\,\mathbf{y_{t+3}} + y_{2,t+3} \le 0\\
&\ldots\\
&\partial\Phi/\partial x_{n-1,t+n-1} - \mathbf{a_{n-1,t+n-1}}\,\mathbf{y_{t+n-1}} - y_{n-2,t+n-1} + \mathbf{b_{n-1,t+n-1}}\,\mathbf{y_{t+n}} + y_{n-1,t+n} \le 0\\
&\partial\Phi/\partial x_{n,t+n} - \mathbf{a_{n,t+n}}\,\mathbf{y_{t+n}} - y_{n-1,t+n} + \mathbf{b_{n,t+n}}\,\mathbf{y_{t+n+1}} \le 0
\end{aligned}
$$

donde hemos anotado $x_{r,t}$ como la intensidad del proceso que usa la materia duradera con edad *r* en el instante *t*, $y_{r,t}$ como el precio de la materia duradera de edad *r* en el instante *t*, $\mathbf{a_{r,t}}$ y $\mathbf{b_{r,t}}$ el resto de materias usadas como insumos y productos, e $\mathbf{y_t}$ como los precios del resto de materias en el momento *t*. Si substituimos desde abajo hacia arriba nos queda

$$y_{r,t+r+1} \ge \sum_{k=r+1}^{n}(\partial\Phi/\partial x_{k,t+k} - \mathbf{a_{k,t+k}}\mathbf{y_{t+k}} + \mathbf{b_{k,t+k}}\mathbf{y_{t+k+1}}) \qquad \{19.1\}$$

y substituyendo de arriba abajo resulta

$$y_{r,t+r+1} \le \sum_{k=0}^{r}(-\partial\Phi/\partial x_{k,t+k} + \mathbf{a_{k,t+k}}\mathbf{y_{t+k}} - \mathbf{b_{k,t+k}}\mathbf{y_{t+k+1}}) \qquad \{19.2\}$$

Pero en §17.5.3 la tasa a la que aumenta la función objetivo ante la operación de un proceso que use la materia será 0 (en el caso de que la vida de la materia duradera no alcance el final del intervalo temporal). Por lo tanto las fórmulas {19.1} y {19.2} en este caso quedan

$$y_{r,t+r+1} \ge \sum_{k=r+1}^{n}(-\mathbf{a_{k,t+k}}\mathbf{y_{t+k}} + \mathbf{b_{k,t+k}}\mathbf{y_{t+k+1}})$$

$$y_{r,t+r+1} \le \sum_{k=0}^{r}(\mathbf{a_{k,t+k}}\mathbf{y_{t+k}} - \mathbf{b_{k,t+k}}\mathbf{y_{t+k+1}})$$

Resulta fácil comprobar que estas fórmulas se corresponden a las que vimos en §6.1.1, se corresponden con las fórmulas de los precios en VN. Por lo tanto en la maximización de la producción ponderada final de §17.5.3, como en VN, una materia vale exactamente tanto como las materias que habrá de rendir y también tanto como las materias que cuesta adquirirla.

Pero esto no será así en otras economías óptimas, ya que entonces los valores de las materias duraderas incluyen los términos

$$\sum_{k=r+1}^{n} \partial\Phi / \partial x_{k,t+k} \qquad \{19.3\}$$

$$-\sum_{k=0}^{r} \partial\Phi / \partial x_{k,t+k} \qquad \{19.4\}$$

El término {19.3} es la tasa a la que aumenta la función objetivo ante una variación en los procesos que usan la materia a partir de la edad *r*, y {19.4} es la tasa a la que disminuye la función objetivo ante una variación de los procesos que utilizan la materia duradera hasta la edad *r*. Si la función objetivo fuera la satisfacción de las necesidades de Robinson, y forzando un poco el lenguaje, podríamos llamar a {19.3} incremento marginal de la utilidad subjetiva con su uso futuro o "utilidad marginal futura", y a {19.4} decremento marginal de la utilidad subjetiva con su uso pasado o "desutilidad marginal pasada". En la economía de Robinson se cumple que, para todos los procesos disponibles,

> utilidades marginales futuras + ingresos marginales ≤ valor ≤ desutilidades marginales pasadas + costes marginales

y para los procesos que efectivamente operan

> mayor (utilidad marginal futura + ingreso marginal) = valor = menor (desutilidad marginal pasada + coste marginal)

Pero en VN las utilidades marginales futuras y las desutilidades marginales pasadas son 0, y las materias se valoran sólo por sus ingresos marginales y sus costes marginales, como vimos, sólo se valoran por las materias que se pueden obtener con su uso y por las materias que se necesitan para adquirirla. En la economía de Robinson, sin embargo, sí existirá la utilidad marginal futura y la desutilidad marginal pasada. Una materia para Robinson no sólo vale las materias que va a producir, sino también lo que le permite aumentar la satisfacción de sus necesidades el hecho de que puedan usarse los procesos que la necesitan, y no sólo vale las materias que cuesta producirla, sino también lo que disminuye la satisfacción de sus necesidades el hecho de que tiene que producirse.

En resumen, vemos que los valores, los balances contables y por lo tanto la asignación en la maximización de la producción ponderada final de §17.5.3 y en VN pueden ser muy diferentes de los que se corresponden a la economía de Robinson de §17.5.1 y a la de una economía orientada a la satisfacción de las necesidades de §17.5.2. Así que las fórmulas de los precios de VN no son en absoluto generalizables al resto de economías óptimas, como tampoco lo son sus balances contables[175]. No obstante, es posible un cálculo económico en toda economía óptima, pero la contabilidad y los valores que se corresponden a una economía pueden ser muy diferentes de los de otra.

19.2.2 Un experimento mental; el "robinsón productivista"

Para ilustrar la distancia entre VN y otras economías óptimas, imaginemos que un robinsón se comportara como indica §17.5.3 o VN, que estableciera la asignación maximizando la producción final ponderada (para un instante prefijado y con unas ponderaciones dadas), no su "utilidad subjetiva". Entonces nuestro "robinsón productivista" tendría las jornadas laborales más prolongadas e intensas posibles, y el consumo más limitado y barato posible, porque es con esta conducta con la que se

[175] En la economía de Robinson o en la economía de §17.5.2 el valor es la tasa a la que se incrementa la satisfacción de las necesidades, de Robinson o de la gente, si añadimos una pequeña cantidad de la materia al sistema. Por lo tanto en estas economías sí tiene cierto sentido lo que podríamos llamar una visión "subjetivista" del valor, ya que las materias se valorarían por cómo contribuyen a satisfacer las necesidades (aunque en §17.5.2 no estemos hablando de "utilidades subjetivas" personales o individuales sino más bien colectivas o sociales). En estos sistemas puede mantenerse la concepción del valor de Menger, por lo menos como ilustración, y una materia puede ser un "bien de consumo" porque como tal contribuya a aumentar directamente la satisfacción de las necesidades de la gente, o puede adquirir valor como "medio de producción" porque contribuya a producir "bienes de consumo". Una materia adquiere su valor por como aumenta la "utilidad", bien directamente bien indirectamente mediante los procesos de producción.

Pero en VN o en un capitalismo, sin embargo, las materias se valoran por cómo contribuyen a incrementar los beneficios, la producción final ponderada en precios, no por cómo contribuyen a satisfacer las necesidades de la gente. Por lo tanto una visión "subjetivista" de los precios en VN, o en los capitalismos, es incorrecta. Los precios en VN no son valoraciones subjetivas directas o indirectas. En VN todas las materias son "medios de producción", también las consumidas por los humanos o incluso los propios humanos, en cuanto contribuyen a maximizar el crecimiento.

Por otra parte, en la economía de Robinson y en los capitalismos no se puede modificar el pasado. Por eso para Robinson una materia existente en el momento inicial $t = 0$ vale la mayor utilidad futura más el ingreso de consumo que puede obtenerse de ella, con independencia de cuales hayan sido sus costes de su producción; en un presente determinado el valor de una materia depende sólo de su futuro y no de su pasado, precisamente porque no puede influir en éste. Pero las materias que Robinson estima que puedan existir en el futuro también tienen un valor para él, que dependen de cual será su futuro posterior pero también de lo que costará producirlas en términos de desutilidad y de materias necesarias. En el capitalismo se mantiene esta dependencia temporal y por eso en este sistema las materias realmente existentes en un instante presente valen justo las materias que van a producir, con independencia de lo que haya costado producirlas; pero las materias que (se espera que) existirán en el futuro se valoran, además de por lo que van a producir, también por lo que costará producirlas, como se deduce de §17.5.3.

obtendría la mayor producción final, como se deduce fácilmente de §17.5.3 y VN. Un "robinsón productivista" se comportaría pues de una manera totalmente diferente a la que cabe esperar de Crusoe. Los valores serían muy distintos, porque con el "robinsón productivista" las materias se valorarían por cómo se incrementa la producción final mientras que con Crusoe se valorarían por cómo se incrementa la satisfacción de sus necesidades, en ambos casos con la introducción de una pequeña cantidad de la materia en el sistema. Además los balances contables de los procesos serían también muy diferentes, ya que el del "robinsón productivista" sería sólo el beneficio marginal mientras que el de Crusoe incluiría la tasa con la que la operación de un proceso aumenta directamente la satisfacción de sus necesidades.

Analicemos las economías de nuestros dos robinsones con TE. Crusoe cabe esperar que establezca la asignación ahorrando su trabajo, de manera que con las recetas que escogería el factor de explotación estaría cercano a 1; para Crusoe no tiene sentido trabajar mucho más que lo necesario. Pero la economía del "robinsón productivista" operaría sin esta tendencia, y la jornada laboral sería la de mayor intensidad y extensión posible, siempre que el trabajador pudiera seguir operando para maximizar la producción final. La solución de TE con las recetas que operan en este caso implica un factor de explotación que no necesariamente estará cercano a 1. Vimos que TE podía usarse como un estudio del control de la asignación por los trabajadores. La economía de Crusoe es la que cabe esperar allí donde es el propio trabajador quién tiene el control de la asignación, pero la economía del "robinsón productivista" se corresponde mejor a una en donde el control de la asignación estuviera en otras manos. Parece evidente que si un robinsón tuviera el control de la asignación no se comportaría de manera productivista sino como Crusoe, y que si observáramos que se comporta como se deduce de §17.5.3 o de VN es porque existe alguna fuerza ajena a sus deseos que le obliga a ello.

19.2.3 Un segundo experimento mental; la economía robótica

Imaginemos ahora una economía en la que el avance tecnológico pudiera desplazar el trabajo humano de manera progresiva hasta una total automatización y robotización. Por ejemplo, supongamos que las recetas de §1.1 evolucionaran de manera que **V** disminuyera progresivamente hasta que resultaran

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 70 & 12 \\ 30 & 8 \\ 70 & 12 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 575 & 0 \\ 0 & 20 \\ 400 & 0 \end{bmatrix}$$

Con estas recetas VN tiene como solución $\alpha = 2.0578$, $\mathbf{X_t} = 2.0578^t\ [0.1253, 0.8747, 0]$, $\mathbf{Y_t} = 2.0578^{-t}\ [0.0112, 0.1958]$. Es posible pues un crecimiento máximo sin seres humanos presentes y con precios perfectamente definidos. Como vemos el comportamiento que impera en VN es completamente a-humano, no depende de que existan o no personas en el sistema. VN puede tener solución, y pueden estar definidos los precios, con independencia de que exista o no el consumo y el trabajo humanos. [176]

Además, aun cuando estén presentes en las recetas, en VN los humanos son tratados como insumos en igualdad de condiciones con otros insumos, no hay ninguna diferencia en el modelo entre la manera en la que es tratado un trabajador y una máquina. VN describe una economía que no es antropocéntrica y en donde los seres humanos son materias como las demás. En VN se dedican recursos para mantener a los trabajadores sólo cuando usar éstos en la producción permite obtener un mayor crecimiento, y si no fuera éste el caso no se les

[176] Por supuesto, nuestro experimento mental tiene como inspiración la imagen de Sismondi, usada para criticar a Ricardo, de una Inglaterra totalmente mecanizada en la que el rey pusiera en marcha los autómatas girando una manivela ([1] tomo II, nota en la página 330); el capítulo sobre la maquinaria añadido por Ricardo a la tercera edición de los *Principios*, quizá influido por críticas como la de Sismondi; los esquemas de reproducción de Tugán sin seres humanos (véase [1] capítulo IX, y también [2], en especial la nota en la página 219); los cálculos de los precios de economías automáticas en Dmitriev [1]; y, ya fuera del terreno propiamente económico, los telares que tejen solos de Aristóteles o la *Teoría de los autómatas autorreproductivos* iniciada por Von Neumann.
Hacemos notar que en nuestro experimento mental no hay ni consumo ni trabajo humano, y en consecuencia no existe solución para TE; los precios en VN no sólo no son valoraciones subjetivas directas o indirectas (no hay humanos presentes ni por lo tanto "utilidades subjetivas") sino que tampoco son trabajo humano transformado. Es evidente que estas dos concepciones del precio en el capitalismo resultan antropocentrismos injustificados desde el momento en que en este sistema el consumo y el trabajo humano son tratados de igual manera que el resto de los consumos y trabajos. Podemos imaginar otros sistemas sociales en donde los consumos o los trabajos humanos sí fueran tratados de manera diferenciada y que por ello los trabajos o las "utilidades subjetivas" sí fueran determinantes en la valoración, por ejemplo en un socialismo como el de Marx, pero éste no es el caso en el capitalismo.
Un error común es confundir un ideal con la realidad, confundir el "deber ser" con el "ser". Algunas veces se razona en un mundo ideal y se aplican las conclusiones que se obtuvieron de ese estudio a la realidad de una forma no muy crítica, porque la realidad no siempre se parecerá al ideal. Como hemos dicho, en una economía organizada para satisfacer las necesidades humanas está claro que las "utilidades subjetivas" son fundamentales; pero en VN y en el capitalismo la asignación no se establece para satisfacer las necesidades humanas sino de acuerdo con la producción por la producción misma. En aquel mundo ideal las cosas se valorarían por cómo contribuyen a satisfacer las necesidades, directa e indirectamente; pero en los capitalismos reales las cosas se valoran por cómo contribuyen a aumentar los beneficios. Por lo tanto una visión "subjetivista" del valor es aceptable para el socialismo que quería Marx pero incorrecta en un capitalismo. Menger se equivoca al aplicar unas ideas que sí tienen cierto sentido allí donde la economía está orientada a satisfacer las necesidades, como en un socialismo o en la economía de Robinson, a un sistema como el capitalismo en donde la asignación no obedece ese fin.

mantendría, como podría decirse de una máquina o de un animal. En cambio en la economía de Robinson o en la orientada a la satisfacción de las necesidades de §17.5.2 sí estamos ante unas economías antropocéntricas, ya que los seres humanos determinan la función objetivo y la asignación se establece para satisfacer sus necesidades. Es obvio que la economía de Robinson no tendría sentido si no existe el propio Robinson, o que §17.5.2 no tendría sentido si no hay personas, y esto tiene su expresión matemática en que en ambos casos no estaría definida la función objetivo. Pero la asignación de VN sí tiene sentido incluso aunque no haya humanos presentes y la función objetivo no se establece en relación con los seres humanos ni depende de ellos.

19.3 VN y la contabilidad en los capitalismos

Si observamos que en una economía real se usa una determinada contabilidad podemos intentar dar una estimación de la función objetivo del problema matemático correspondiente y obtener con ello las ecuaciones de una asignación óptima con las que intentar modelizar esa realidad. En efecto, como la contabilidad se corresponde a las condiciones de máximo, de su conocimiento podemos intentar reconstruir la función objetivo. Recordemos las condiciones de máximo {17.2} para toda economía óptima

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{X_t}} + \mathbf{B_t\, Y_{t+1} - A_t\, Y_t \le 0} \qquad \text{y si el proceso opera se aplica =}$$

Observando las derivadas $\partial\Phi/\partial\mathbf{X_t}$ en la contabilidad de la economía real podemos intentar reconstruir la función objetivo $\Phi(\mathbf{X_t})$.

La contabilidad capitalista se caracteriza por la ley de la rentabilidad, los procesos que operan obtienen beneficios marginales nulos y los que no operan beneficios marginales no positivos. Como los beneficios marginales resultan $\mathbf{B_t\, Y_{t+1} - A_t\, Y_t}$ esta ley empírica puede escribirse

$$\mathbf{B_t\, Y_{t+1} - A_t\, Y_t \le 0} \qquad \text{y si el proceso opera se aplica =}$$

Comparando esta expresión con {17.2} vemos que ambas se corresponden si $\partial\Phi/\partial\mathbf{X_t} = \mathbf{0}$. La ley de la rentabilidad es pues una contabilidad que se corresponde por ejemplo a una función objetivo que no depende de las intensidades (como una función nula).[177]

[177] También llegaríamos a unas condiciones de máximo que se corresponderían con la ley de la rentabilidad si la función objetivo fuera $\sum (\mathbf{X_{t-1}\, B_{t-1}} - \mathbf{X_t\, A_t})\, \mathbf{Z_t}$, siendo $\mathbf{Z_t}$ unas ponderaciones dadas proporcionales a los $\mathbf{Y_t}$. En definitiva, si en una economía se maximiza el beneficio establecido con unas ponderaciones que son k veces los multiplicadores de Lagrange, donde k es un número positivo, las condiciones de máximo resultan

$$\mathbf{B_t\, Z_{t+1} - A_t\, Z_t + B_t\, Y_{t+1} - A_t\, Y_t \le 0} \qquad \text{y si el proceso opera se aplica =}$$

Notemos que los balances contables de la economía que maximiza la producción ponderada final de §17.5.3 para los procesos entre $0 < t < n$ también son precisamente estas condiciones (y por lo tanto si §17.5.3 lo planteáramos para un n infinito obtendríamos la ley de la rentabilidad). En definitiva, la contabilidad capitalista se corresponde a las condiciones de máximo de VN o también a las de una economía que partiendo de unas cantidades iniciales maximiza la producción ponderada al final de un intervalo temporal.

Podría pensarse que, dado que la contabilidad capitalista se aplica en las empresas, §17.5.3 o VN se aplicarían sólo a la asignación a este nivel, pero no para el conjunto de una sociedad capitalista. Pero, como vimos en §12.3, si un conjunto de subsistemas que obedecen cada uno VN se coordinan mediante intercambios producirán de forma global la asignación de VN también a ese nivel, y es fácil ver que éste también es el caso con las ecuaciones de §17.5.3. Por lo tanto, aunque la contabilidad en el capitalismo se establezca en las empresas, el vínculo mercantil determina una asignación que no se diferencia de la que se establecería de forma global, si el mecanismo mercantil consiguiera la coordinación de los subsistemas.

19.4 VN como asignación óptima (apéndice)

En §19.1 vimos que VN podía interpretarse como una solución del programa lineal de §17.5.3, la maximización de la producción ponderada final[178] a lo largo del intervalo temporal $0 \leq t \leq n$. Sin embargo existen otros problemas para los que VN también resulta su solución bajo determinadas circunstancias.

Por ejemplo, estudiemos una economía óptima donde la función objetivo no dependa de las intensidades (como una función nula). Definiendo la matriz $\mathbf{F}$ y los vectores $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ como

---

y por lo tanto, dado que $\mathbf{Z_t} = \mathbf{Y_t}\, k$, obtenemos de nuevo la ley de la rentabilidad.

[178] Al igual que VN está vinculado a la maximización de la producción ponderada final para unas cantidades iniciales dadas, es fácil comprobar que también está vinculado con la minimización del consumo ponderado inicial para unas cantidades finales dadas. Los precios también son la tasa a la que disminuye el consumo ponderado inicial ante una variación en los balances materiales. Como vemos existe una simetría temporal en las ecuaciones, pero dejamos su estudio para otros trabajos.

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & -\mathbf{A}_0 & \mathbf{B}_0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots \\ \cdots & \mathbf{0} & -\mathbf{A}_1 & \mathbf{B}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots \\ \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{A}_2 & \mathbf{B}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots \\ \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{A}_3 & \mathbf{B}_3 & \mathbf{0} & \cdots \\ \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{A}_4 & \mathbf{B}_4 & \cdots \\ \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{A}_5 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \qquad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \cdots \\ \mathbf{Y}_0 \\ \mathbf{Y}_1 \\ \mathbf{Y}_2 \\ \mathbf{Y}_3 \\ \mathbf{Y}_4 \\ \mathbf{Y}_5 \\ \cdots \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \cdots & \mathbf{X}_0 & \mathbf{X}_1 & \mathbf{X}_2 & \mathbf{X}_3 & \mathbf{X}_4 & \mathbf{X}_5 & \cdots \end{bmatrix}$$

las condiciones de primer orden quedan

$$\begin{array}{lcll} \mathbf{X} \sim \mathbf{0} & \leftrightarrow & \mathbf{F\,Y} \sim \mathbf{0} & \mathbf{X}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{F\,Y} = \mathbf{0} \\ \mathbf{X\,F} \sim \mathbf{0} & \leftrightarrow & -\mathbf{Y} \sim \mathbf{0} & \mathbf{X\,F} \cdot \mathbf{Y}^{\mathrm{T}} = \mathbf{0} \end{array} \qquad \{19.5\}$$

que implican que se cumplen los balances materiales y los balances contables en el intervalo temporal $(-\infty, \infty)$ en correspondencia con los signos de las intensidades y valores según el tipo de proceso y de materia[179]. Por supuesto, no hay dificultad en escribir la matriz **F** para las recetas en tiempo discreto o en plantear estas condiciones con las funciones de producción o en tiempo continuo.

En el caso de que las recetas no cambien con el tiempo por simple substitución se comprueba que los $\mathbf{X}_t$ e $\mathbf{Y}_t$ solución de VN satisfacen también estas condiciones, y cuando las recetas cambian de manera periódica lo hacen los de VNC. Por lo tanto si encontramos una solución de VN o VNC para unas recetas que no cambian en el tiempo, o que lo hacen de manera periódica, está solución satisfará también {19.5} con esas mismas recetas. VN y VNC pueden entenderse pues como una manera de encontrar algunas soluciones para este nuevo problema, las que se corresponden a los comportamientos simples.

Pero este problema es más difícil de interpretar que §17.5.3, aunque sólo sea porque ahora estamos ante infinitas variables y restricciones. Por eso hemos preferido exponer una generalización de VN con §17.5.3, porque éste es un programa lineal finito y perfectamente habitual. Además nuestro nuevo problema puede entenderse como una generalización de §17.5.3 para un intervalo temporal infinito y también como un problema

[179] También hubiéramos llegado a {19.5} si hubiéramos escrito las condiciones de una economía óptima donde se maximizara **X F Z**, siendo **Z** unas ponderaciones proporcionales a los **Y**; en definitiva, donde se maximizaran los beneficios ponderados en unos “precios” proporcionales a los multiplicadores de Lagrange.

de punto de silla en donde los beneficios a lo largo del tiempo **X F Y** se maximizan con respecto a las intensidades **X** y se minimizan con respecto a los valores **Y**. [180]

Fijémonos en que este problema puede tener otras soluciones, además de las de VN y VNC, aunque las recetas no cambien en el tiempo o que lo hagan de manera periódica, y que puede plantearse sin suponer un comportamiento simple, con recetas que cambian con el tiempo de forma no periódica, con funciones no lineales, con indivisibilidades, etc. En definitiva, podemos entenderlo como una generalización de VN aplicable no sólo a los comportamientos simples sino también a los comportamientos no simples. En otros trabajos estudiaremos sus propiedades y cómo calcular sus soluciones.[181]

---

[180] Forzando la notación matemática para intentar facilitar la comprensión, hubiéramos podido escribir este problema también como

$$\max_{\mathbf{X}} \min_{\mathbf{Y}} \mathbf{X\,F\,Y}$$

$$\mathbf{X} \sim \mathbf{0}$$

$$-\mathbf{Y} \sim \mathbf{0}$$

Dependiendo de cómo escribamos las recetas (o las funciones de producción) los beneficios a lo largo del tiempo quedan

un paso temporal {1.1}	tiempo discreto {8.8}	tiempo continuo {8.13}	funciones de producción {9.2}
$\sum_t \left(-\mathbf{X_t A_t} + \mathbf{X_{t-1} B_{t-1}}\right)\mathbf{Y_t}$	$\sum_t \left(\sum_{r=0} \mathbf{X_{t-r}\, f_{t-r,r}}\right)\mathbf{Y_t}$	$\int \left(\int_0^\infty \mathbf{X}(t-r)\mathbf{f}(t-r,r)\,dr\right)\mathbf{Y}(t)\,dt$	$\sum_t \sum_i \left(f_{i,t}(\mathbf{X_{t-1}}) - \sum_j \chi_{i,j,t}\right) y_{i,t}$

En todos los casos las condiciones de este problema implican que:

se cumplen los balances materiales (que resumimos en una nota en §11.1),
se cumplen los balances contables (que resumimos en una nota en §11.6),
o la intensidad (el insumo) o el balance contable correspondiente o ambos se anulan,
o el balance material o el valor correspondiente o ambos se anulan.

Para el caso escrito con las recetas $\mathbf{A_t}$ y $\mathbf{B_t}$ en la forma estándar escribimos ya estas condiciones en §11.7.

[181] Podemos plantear este problema para un intervalo temporal diferente de (–∞, ∞). Suponiendo conocidas las intensidades en el instante $t = 0$, con el intervalo temporal [0, ∞) tendríamos un problema de “condiciones iniciales”, lo que nos permite estudiar la influencia de un presente determinado en la asignación futura. También podemos plantearlo para un intervalo temporal (–∞, 0], con unas “condiciones finales”, lo que nos permite estudiar el pasado que ha generado un determinado presente. Además la maximización de la producción ponderada final de §17.5.3 puede entenderse como su solución parcial para el intervalo temporal [0, n], conocidas las cantidades disponibles en el momento 0 y los valores en el momento n (y si conocemos los valores en el momento 0 y las cantidades en el momento n la minimización del consumo ponderado inicial también resulta su solución parcial).

Fijémonos en que VN es una teoría que no depende de unas condiciones iniciales o de un estado presente, en VN estudiamos la estructura económica que crece más y ésta no depende de la historia, pero al limitarnos a un comportamiento simple estamos también prescindiendo de la influencia de un determinado presente sobre el futuro. En cambio con este nuevo problema sí podemos establecer un presente concreto como dato y estudiar como influye éste en el futuro, o también cual ha sido el pasado que lo ha provocado. En este sentido resulta mucho más útil que VN a la hora de tratar economías reales, aunque a costa de una mayor complicación y dificultad matemática. Por ejemplo, la evolución de una ciudad está determinada por su historia (así es habitual que las calles de una ciudad contemporánea reproduzcan en parte el mapa de la ciudad hace siglos), lo que podemos considerar con nuestro nuevo problema pero no con VN. En el caso de una colmena de abejas esto no es tan importante, porque las colmenas comienzan su ciclo vital desde cero, pero en el caso de las sociedades humanas la estructura económica sí está muy influida por el pasado.

Quinta parte. La evolución de las sociedades

20: Introducción

En este trabajo queremos estudiar en una primera aproximación la estructura y la evolución de las sociedades, esto es, *cómo funcionan las sociedades y por qué han llegado a funcionar como lo hacen*. Para analizar su estructura hemos planteado un modelo teórico, el crecimiento proporcional máximo o VN, y hemos afirmado que su comportamiento es similar al de algunas sociedades reales, y más específicamente al que muestran los capitalismos y algunas sociedades biológicas. Sin embargo no hemos explicado debidamente el motivo por el que estas sociedades reales se comportan de esta manera tan peculiar, ni tampoco hemos dicho nada de los procesos evolutivos que han regido su aparición.

Para tratar estos aspectos empezaremos planteando dos cuestiones concretas:

1ª ¿por qué VN se parece a los capitalismos?

2ª ¿por qué los humanos viven en capitalismos?

Fijémonos en que éstas son dos preguntas diferentes, ya que VN podría parecerse a los capitalismos aun cuando los humanos vivieran en otros sistemas, y los humanos podrían vivir en capitalismos aunque estos sistemas no se parecieran a VN. No obstante veremos que resulta más sencillo contestarlas si las vinculamos entre sí (hubiéramos podido englobarlas en la cuestión de por qué los humanos viven en un sistema que se parece a VN), y también que respondiéndolas entenderemos mucho mejor las estructuras de las sociedades al concebirlas como resultado de un proceso evolutivo. Aunque responder a estas cuestiones pudiera parecer muy sencillo, comenzaremos mostrando que éste no es necesariamente el caso descartando algunas posibles respuestas.

20.1 ¿Por qué VN se parece a los capitalismos?

Nuestra primera cuestión acepta implícitamente como cierto que VN se parece a los capitalismos reales, algo que no es evidente y que hay que probar. Pero en los capítulos anteriores hemos dado numerosas pruebas de que esto es efectivamente así, ya que a partir de este modelo podemos dar cuenta de muchas leyes empíricas que se observan en estos sistemas, como por ejemplo:

- la propia existencia de los precios (véase §2)
- los procesos cumplen la ley de la rentabilidad (§2)
- los desperdicios que hay que eliminar con costes tienen precio negativo (§4)
- las materias son más baratas allí donde son producidas originariamente (§5)

- los precios de las materias duraderas obedecen las fórmulas de depreciación (§6)
- el precio de la tierra es su renta perpetua (§6)
- el coste laboral es igual al ingreso que se va a obtener con el trabajo (§7)
- el precio de una empresa es su valoración fundamental (§8)
- para cada insumo se cumple la ley de la rentabilidad marginal (§9)
- la ley del interés compuesto se cumple en cada fase de una economía cíclica (§10)
- se cumplen las leyes de los signos según el tipo de materia (§11)
- los precios son proporcionales a las tasas de intercambio de los mercados (§12)
- el precio de una materia es su ingreso más rentable y su coste mas barato (§13)
- la contabilidad de los capitalismos es la que se deduce de VN (§19)

Fijémonos en que éstas son leyes cuantitativas precisas y que incluso alguna de ellas tiene una formulación matemática que no es en absoluto trivial. Además, aunque sólo hemos escogido una o dos de estas leyes por capítulo, desde el texto o desarrollando VN en mayor medida hubiéramos podido detallar muchas otras. Por lo tanto *a partir de VN podemos deducir muchas leyes cuantitativas precisas que se observan empíricamente en los capitalismos*. No puede ser una casualidad que todas estas leyes que podemos deducir como propiedades del crecimiento máximo se observen en los capitalismos reales. Ésta es una señal inequívoca de que VN y los capitalismos tienen mucho en común. [182]

No obstante recordemos que también hemos dicho que VN no es una teoría exacta de los capitalismos, sino sólo una aproximación muy grosera, y que ya hemos señalado algunas diferencias sistemáticas entre este modelo y estas realidades. Pero por el momento no nos detendremos en estas diferencias porque algunas de ellas las entenderemos mejor comprendiendo antes la similitud.

Ahora bien, el parecido entre estas sociedades y este modelo puede resultar en una primera impresión cuando menos sorprendente, ya que *VN es sólo el estudio del crecimiento máximo* y no resulta en absoluto obvio que este comportamiento tan peculiar tenga que

[182] Debemos notar que estas leyes no sólo nos permiten afirmar el parecido entre los capitalismos y VN, sino también la distancia con otros modelos. Así en TE se cumplen algunas de las leyes empíricas que se observan en el capitalismo, porque TE sirve como modelo para una producción mercantil simple, sistema que puede entenderse como un capitalismo primitivo. Pero es evidente la distancia entre TE y los capitalismos, ya que en estas realidades tiende a existir un crecimiento y no un estado estacionario, se cumple la ley de la rentabilidad y no la ley ricardiana, los precios son diferentes de los valores-trabajo, existe un tipo de interés, las materias duraderas con eficiencia constante se deprecian según {6.1} y no de forma lineal, etc. También hemos señalado en §19.2 la distancia de VN, y por lo tanto de una economía en la que se cumplan estas leyes, con las economías orientadas a la satisfacción de las necesidades, de la gente o de Robinson. En unas economías así no se cumpliría la ley de la rentabilidad sino que existiría otra contabilidad vinculada a otras condiciones de máximo, el valor no sería la tasa a la que se incrementan los beneficios, el de las materias duraderas no coincidiría ni con el coste de producción ni el ingreso de consumo, etc.

parecerse a los capitalismos. Para insistir en lo curioso de esta circunstancia descartaremos algunas explicaciones que pudieran darse de este parecido.

Podría pensarse que VN describe el único comportamiento lógicamente posible y que por lo tanto los sistemas reales siguen las pautas del único comportamiento coherente. Pero éste no es el caso porque ya vimos que para unas recetas habitualmente existirán muchas asignaciones posibles, y muchos comportamientos simples posibles, y que por lo tanto las sociedades no están obligadas por razones de coherencia lógica a un comportamiento determinado. Además podemos definir otras sociedades hipotéticas posibles desde un punto de vista lógico y que podrían llegar a funcionar de una manera muy distinta a VN (por ejemplo como TE). Así que la explicación de que VN es el único comportamiento lógicamente posible podemos descartarla.

Quizá VN se parece a los capitalismos porque habríamos añadido como supuestos las leyes que hemos citado, como la ley de la rentabilidad o la del interés compuesto, y eso determinaría que modelo y realidad se parecieran. Pero esto tampoco es así, ya que no hemos supuesto en absoluto estas leyes, no las hemos añadido a nuestro modelo para que se parezca a la realidad como hipótesis *ad hoc*, no hemos supuesto que tengan que existir los precios, ni que tenga que cumplirse la ley de la rentabilidad, etc. Nosotros hemos *deducido* todas estas leyes como propiedades del crecimiento máximo, pero en ningún caso las hemos añadido como supuestos.

Quizá es que en VN hemos modelizado el mecanismo de asignación de los capitalismos, por lo que estaríamos reproduciendo la forma en la que se establece la asignación en estos sistemas. Pero no hemos hecho tal cosa, no hemos añadido la forma en la que surgen los precios, ni la propiedad privada, ni la forma en la que funcionan las empresas, etc. En VN no hemos hecho referencia a ningún mecanismo de asignación, ni al mercantil-capitalista ni a ningún otro, y sólo hemos supuesto el crecimiento máximo. Así que la razón del parecido no estriba en que hayamos modelizado el mecanismo de asignación de los capitalismos.

Hemos descartado estas posibles respuestas, pero haciéndolo no sólo no hemos dado una solución a nuestra primera cuestión sino que hasta cierto punto pudiera parecer que hemos incrementado el misterio que la rodea. Resulta que tenemos un modelo lógico y unas realidades, VN y los capitalismos. Y resulta que el modelo lógico muestra una serie de propiedades que se observan empíricamente en esas realidades. Pero esto no puede explicarse ni porque el modelo sea el único comportamiento lógicamente posible, ni porque hayamos añadido estas propiedades como supuestos, ni porque hayamos modelizado el mecanismo que establece la asignación en esos sistemas.

20.2 ¿Por qué los humanos viven en capitalismos?

La segunda cuestión resulta también una circunstancia curiosa, ya que tampoco parece existir ninguna razón obvia que la explique. De nuevo comenzaremos descartando algunas posibles respuestas.

Podría pensarse que los humanos viven en capitalismos porque estos sistemas son las únicas sociedades que se adecuan a su naturaleza. Quizá el ser humano se ve compelido a comportarse de manera capitalista porque lo lleva escrito en los genes. Pero desde luego esto no es así, ya que la Historia ha visto nacer y morir muchas otras sociedades que no eran capitalismos, y si estas sociedades fueron posibles en el pasado no hay razón para pensar que éstas u otras no sean posibles hoy. De hecho desde que el ser humano ha surgido ha vivido la mayor parte del tiempo en sistemas no capitalistas, y todavía existen grupos de humanos que viven en sistemas distintos. Así que podemos descartar que los capitalismos sean las únicas sociedades que se adecuan a la naturaleza de los humanos.

Quizá los humanos viven en capitalismos porque han diseñado estas sociedades para organizar su economía. Está claro que la inteligencia y la capacidad de los seres humanos los alejan mucho de otro tipo de animales. Quizá han usado su inteligencia para diseñar los capitalismos como un medio de organizar su economía. Pero resulta evidente que éste no es el caso, desde luego no podemos citar a los inventores de los capitalismos porque estos sistemas no han sido el resultado de un diseño consciente.

Quizá por lo menos los humanos han escogido los capitalismos de entre una serie de alternativas, quizá los humanos usaron su inteligencia para decidir que preferían los capitalismos a otras sociedades posibles. Pero de la observación de la Historia se evidencia que esto no ha ocurrido, no se puede decir que el capitalismo surgió en tal fecha en la que los humanos decidieron vivir en un sistema así. Estas sociedades no sólo no surgieron como resultado de una decisión consciente de los humanos sino que en realidad a éstos ni se les planteó la posibilidad de escoger entre tal o cual sociedad.

Por lo tanto los capitalismos no son las únicas sociedades que se adecuan a la naturaleza humana, ni son sociedades que los humanos hayan diseñado para su vida, ni tampoco que hayan escogido de entre una serie de alternativas. No podemos entender que los humanos vivan en capitalismos con estas explicaciones[183]. Nuevamente pudiera parecer que descartando estas respuestas hemos incrementado el misterio de la segunda pregunta.

Con esta pequeña introducción hemos intentado subrayar que nuestras dos cuestiones no tienen en absoluto unas respuestas evidentes y para ello hemos descartado algunas de las que podrían intentarse. En definitiva, no resulta evidente la razón del parecido entre VN y los capitalismos, ni tampoco la razón de que los humanos vivan en estos sistemas.

Pero es posible que no sepamos dar una respuesta clara a nuestras dos cuestiones porque los capitalismos son sistemas que nos abruman con su complejidad. Quizá obtengamos alguna pista para resolver nuestros misterios si intentamos desentrañarlos en el caso de sociedades mucho más simples. Dijimos con anterioridad que VN se parecía también a las colmenas y sería interesante preguntarse por qué esto es así y por qué las abejas viven en una sociedad como en la que viven y no en otra. Es posible que buscando la respuesta en un sistema social más sencillo, como el de las abejas, podamos encontrar pistas para el caso de las complejas sociedades humanas. Así que comenzaremos analizando dos cuestiones paralelas a las que planteamos con relación a los capitalismos:

1ª ¿por qué VN se parece a la colmena?

2ª ¿por qué las abejas viven en un sistema que funciona como la colmena?

[183] Además, aunque esto es opinable, incluso parece que muchos humanos viven en capitalismos a su pesar, muy a menudo parece como si estuvieran bastante disconformes con el funcionamiento de las sociedades en las que viven. El capitalismo tiene algunos defensores, pero muchos de los pensadores en el terreno social lo atacan o por lo menos señalan un gran número de sus problemas y dificultades. Y los que han diseñado o sugerido sociedades hipotéticas alternativas casi siempre lo han hecho tomando una gran distancia del capitalismo, o incluso en oposición clara a este sistema, precisamente por el descontento que les produce la sociedad en la que viven. Incluso los que dicen defender el capitalismo a menudo suelen vincularlo a utopías tan distantes de los capitalismos reales como las postuladas por los críticos (como una producción mercantil simple o una economía similar a §17.5.2).
Otros autores también han detectado este descontento; véase por ejemplo Schumpeter [2]. No obstante la opinión general sobre el capitalismo es fluctuante y parece depender mucho de la fase del ciclo económico en la que se observe, pero incluso en los auges las críticas sólo se acallan parcialmente.

21: Las sociedades biológicas[184]

21.1 El funcionamiento de la colmena

Dijimos que el comportamiento de la colmena también se parece a VN, pero nos hemos limitado a señalar que estas sociedades obedecen la reproducción por la reproducción misma como la única razón de que esto sea así y no hemos explicado realmente los motivos por los que la colmena sigue este comportamiento. Responder a la pregunta de por qué las colmenas de la abeja melífera funcionan como lo hacen, obedeciendo este comportamiento concreto, pasa por averiguar quién o qué ha diseñado la colmena. Pero detengámonos primero a analizar el funcionamiento de la colmena.

Si hubiera que resumir el funcionamiento de la colmena en la naturaleza en una expresión sin duda la más adecuada sería la de *eficiencia reproductiva*. La colmena, todos los investigadores que la han estudiado coinciden en ello, es un sistema extremadamente eficiente en donde todo está orientado a la reproducción de la propia colmena[185]. Existen muchos ejemplos que podríamos señalar para ilustrar esta afirmación, pero escogeremos sólo algunos de los más conocidos, hasta el punto de ser lugares comunes.

Uno de los aspectos más espectaculares de la colmena es el diseño maravillosamente eficiente de los panales. Éstos están diseñados de tal forma que un ingeniero humano no podría construir nada mejor con los materiales de los que pueden disponer las abejas, e incluso para diseñar algo similar tendría que hacer numerosos cálculos muy difíciles. Aunque no parece que las abejas sepan muchas Matemáticas, sus panales son prismas hexagonales prácticamente perfectos y, aunque no parece que tengan grandes conocimientos de Física, las celdas son de hecho óptimas desde el punto de vista del ingeniero y los panales están construidos minimizando la cantidad de cera usada para un volumen de almacenamiento dado.

---

[184] Aunque ya he advertido sobre esto, quiero recordar que sólo soy economista, que no tengo conocimientos suficientes de otros campos, y que no he tenido ocasión de distribuir el texto entre expertos que hubieran podido corregir los errores más graves. Esto, que se aplica a mucho de lo expuesto en otros capítulos, es más cierto si cabe en lo que respecta a los temas que trataremos en éste vinculados a la Biología. El lector debe tener en cuenta estas circunstancias a la hora de valorar lo que se plantea.

[185] La sociedad de la abeja melífera ha sido la más estudiada de todas las biológicas, desde la Antigüedad hasta nuestros días, y la bibliografía sobre la misma es inmensa. Aun así es evidente que nuestro conocimiento de la colmena es aun menor que el que tenemos sobre el capitalismo y que quedan muchos aspectos fundamentales por descubrir. En este trabajo intentamos usar la colmena para entender mejor el capitalismo, pero también el capitalismo para entender mejor la colmena.

En la colmena vemos que también se plantea el problema económico, hay que establecer una asignación, y para ello hay que coordinar a un número muy grande de individuos. Observamos toda una serie de mecanismos para realizar esta tarea, algunos de los cuales son verdaderamente ingeniosos, como por ejemplo el uso de los olores o la regulación de la temperatura en la colmena. Pero quizá el más famoso de todos sea la danza que analizó Von Frisch, con la que las abejas se comunican la dirección y la distancia a una fuente de alimento. Así las abejas ahorran una buena cantidad de trabajo al no tener que buscar al azar las fuentes de alimento que han descubierto sus compañeras.

Otro aspecto muy bien conocido es el hecho de que las abejas almacenan alimento durante el verano para que la colmena pueda sobrevivir durante el invierno. No parece que las abejas tengan capacidad para comprender el ciclo de las estaciones, y de hecho pocas de ellas sobrevivirán hasta ver el nuevo año, y sin embargo su actividad está orientada para la supervivencia de la colmena en un futuro del que ellas no son conscientes e incluso del que a menudo no van a participar. Las abejas de alguna manera organizan su economía de forma previsora o aparentemente previsora.

También es bien sabido que en la colmena sólo se destinan recursos a aquello que sirve para la reproducción de la misma. Así los zánganos, los machos reproductores, una vez que han dejado de tener utilidad reproductiva son expulsados de la colmena para morir de hambre o frío porque entonces sólo resultan una carga, y lo mismo les ocurre a las obreras cuando se detecta que están enfermas. En la colmena no hay sitio para consumos improductivos.

Además todos los miembros de la colmena se sacrifican completamente por ella. Las obreras, por ejemplo, se dedican a un trabajo incansable, son el paradigma mismo de la laboriosidad, e incluso están dispuestas a usar su aguijón para defender la colmena a pesar de que esto les cuesta la vida. Y las reinas o hembras reproductoras están enclaustradas en la colmena y no la abandonan salvo para la fecundación o para formar un nuevo enjambre, viven sólo para la puesta de huevos y podríamos decir que son sólo parte del órgano reproductivo de la colmena. Todos los individuos de la colmena están completamente sometidos a la reproducción de la misma.

En definitiva, la colmena es un productivismo extremo en donde todo está subordinado a la reproducción de la propia colmena. Éste es el fin al que están orientados todos los comportamientos en la colmena y al que están subordinados todos sus miembros. Los diseños eficientes, los complicados mecanismos de comunicación y asignación, la conducta aparentemente previsora, la inexistencia de consumos improductivos, el sacrificio a la reproducción, son sólo algunos ejemplos de la adaptación a ese fin que conoce todo el mundo. Pero realmente un estudio detallado de la colmena no hace más que confirmar el lugar común de que ésta funciona con una asombrosa eficiencia reproductiva. Todos los científicos que han estudiado la colmena han llegado a esta misma conclusión.

Fijémonos bien en lo que hemos dicho: una gran eficiencia reproductiva. La colmena *no* es un sistema en donde la asignación se establezca para el bienestar de sus miembros, no funciona para que las abejas lleven una vida cómoda ni para que disfruten de su existencia, no es precisamente una utopía apícola. La colmena es un productivismo extremo en donde las abejas están completamente subordinadas a la reproducción de la propia colmena y en donde son sacrificadas a este fin. Incluso algunos biólogos hablan de la colmena como de un *superorganismo*, usan una analogía en donde las abejas juegan el papel de las células en un organismo, tan dispuestas a la muerte para la reproducción del mismo como por ejemplo lo están las células de la piel de un animal[186]. La colmena es un totalitarismo de la reproducción, las abejas individuales no importan y lo único fundamental es la reproducción del sistema. En definitiva, *las colmenas tienden a comportarse con una gran eficiencia reproductiva*.[187]

[186] Por supuesto, el cuerpo humano es una sociedad de células; igualmente una célula es una sociedad de pequeñas subcélulas, como el núcleo, las mitocondrias, etc.; una mitocondria es una sociedad de proteínas y otras moléculas; una molécula una sociedad de átomos; un átomo una sociedad de partículas, como electrones, protones, neutrones, etc. Desde este punto de vista el estudio de los diferentes niveles de organización de la materia podemos entenderlos como una Sociología particular, y también la Sociología biológica o humana como una Física específica.

[187] Limitando la aplicación del término "sociedad" como los biólogos (sólo a los sistemas en los que no hay relaciones de tipo depredador-presa o parásito-huésped, y no a todos los sistemas concebibles, como es también el uso común), éste será el caso también del resto de sociedades biológicas, aunque a menudo será necesario tomar en consideración otras tendencias, como detallaremos más adelante.
Pero hacemos notar ya en este punto que en otras sociedades la tendencia a la eficiencia reproductiva del conjunto coexiste, a veces en oposición, con la tendencia a la eficiencia reproductiva de los individuos que la forman. Por eso en otras sociedades las cosas no están tan claras como en la colmena, y a veces se observan fuertes conflictos internos, por ejemplo por la presencia de jerarquías sociales como las que existen en una manada de lobos. No con todas las sociedades biológicas conviene hablar pues de superorganismos, aunque haya algunas que superan a las colmenas en complejidad y en espectacularidad en la subordinación al fin reproductivo, como por ejemplo los termiteros o los hormigueros.

21.2 El diseño de la colmena

Lo dicho nos plantea una serie de cuestiones: ¿quién ha sido el ingeniero, con una amplia formación en Física y en Matemáticas, que ha diseñado el panal?; ¿cómo saben las abejas que tienen que almacenar miel durante el verano para que la colmena pueda sobrevivir al invierno?; ¿quién ha sido el economista que ha diseñado los complejos mecanismos de asignación y comunicación en la colmena como el lenguaje de las danzas?

Desde Darwin y Wallace tenemos una respuesta clara a estas cuestiones: el ingeniero que ha diseñado los panales y el economista que ha establecido los mecanismos de asignación en la colmena ha sido, por supuesto, el proceso de la *selección natural*. La colmena funciona de manera eficiente porque es el resultado de un proceso evolutivo.

Existen buenas razones para afirmar que en un pasado remoto los ancestros de las abejas melíferas eran animales solitarios, como lo son muchos otros insectos o incluso otras especies de abejas. Las sociedades de la abeja melífera surgieron a través del conocido proceso de mutación genética y selección de las mutaciones más aptas, como el resto de sociedades biológicas, porque cada mutación seleccionada supuso un incremento de la capacidad reproductiva. Surgieron por mutaciones genéticas aleatorias sociedades simples de abejas que se reproducían mejor que los insectos solitarios y que por ello los desplazaron[188]. El mecanismo de la selección natural determinó este primer paso. Pero la

---

Además no todos los sistemas biológicos tienden a la eficiencia reproductiva, ya que por ejemplo algunos consisten en relaciones de tipo presa-depredador, y en éstos el funcionamiento del sistema no tiende a la eficiencia reproductiva del conjunto, porque el depredador reduce el crecimiento de la presa. El crecimiento máximo del conjunto del sistema implicaría pues la inexistencia del depredador.
Como vemos el término "sociedad" es problemático y ambiguo, porque no siempre resulta sencillo delimitar su aplicabilidad. Desde el grupo formado por una osa y su osezno, pasando por una manada de lobos, hasta un termitero, no está claro donde podemos establecer un límite en el que puede aplicarse este concepto, y es evidente que existen muchos tipos y grados diferentes de sociabilidad. Y ya hemos señalado que incluso un organismo solitario puede entenderse como una sociedad de células.
Fijémonos también en que hemos dicho eficiencia reproductiva y no *eficiencia termodinámica*. Estos aspectos hubiéramos querido tratarlos en la parte dedicada al estudio de los sistemas desde un punto de vista físico, que desgraciadamente no hemos tenido tiempo de incluir. Pero en otros trabajos posteriores veremos que la eficiencia reproductiva no siempre coincide con la eficiencia termodinámica porque por ejemplo para alcanzar ésta los procesos deben ser cuasi-estáticos y por lo tanto de duración cuasi-infinita. Para obtener la eficiencia reproductiva, en cambio, hay que tener en cuenta la duración de los procesos (salvo cuando el factor-VN es 1), y si en un sistema todos los tiempos de producción se redujeran a la mitad el factor de expansión máxima se elevaría al cuadrado. En definitiva, la eficiencia termodinámica está definida con independencia del tiempo pero no la eficiencia reproductiva y por ello en general no coinciden.

[188] Para que las sociedades desplacen a los organismos es necesario que éstos cooperando y especializándose sean capaces de reproducirse mejor que de forma solitaria. La cooperación a través de la especialización es pues la clave del origen de la complejidad. En futuras ediciones estudiaremos más profundamente estos aspectos.

selección natural siguió privilegiando la supervivencia de las sociedades de abejas que se reproducían mejor frente a las que lo hacían peor. Como consecuencia de este proceso las sociedades más productivas de abejas desplazaron a las sociedades menos productivas. En definitiva, al igual que la compleja anatomía de un organismo surgió de pasos progresivos, cada uno de ellos suponiendo una mejora en la aptitud reproductiva, la compleja estructura de la colmena surgió de forma similar[189].

Desde el momento en que somos conscientes de que la colmena es el producto de la selección natural podemos entender por qué el comportamiento de las abejas se parece al óptimo desde el punto de vista reproductivo; simplemente porque son las colmenas que muestran un comportamiento parecido a éste las que sobreviven y se reproducen.

Por lo tanto la selección natural es un proceso que consiste en una continua solución de un problema de optimización, que escoge de todas las sociedades que surgen las que se reproducen mejor, las más cercanas al óptimo reproductivo. La selección natural podemos concebirla pues como un magnífico algoritmo[190] que escoge las sociedades más productivas y desecha las menos productivas. En definitiva, *las colmenas tienden a la*

---

[189] Podemos intentar reconstruir el surgimiento de las modernas sociedades de insectos partir de animales solitarios, y a este fin se han señalado dos posibles vías evolutivas (véase Wilson [1b], página 414-415). En la secuencia *parasocial* (que se ha sugerido como la que han seguido las abejas) "los adultos que pertenecen a la misma generación se ayudan entre sí en diversas medidas. En el nivel más inferior, pueden ser meramente comunitarios, lo que significa que cooperan en la construcción del nido, pero crían a su descendencia por separado. En el nivel siguiente, la *quasisociabilidad*, la prole es atendida de forma cooperativa, pero cada hembra aún pone sus huevos en algún momento de su vida. En el estado *semisocial*, la cooperación cuasisocial se ve mejorada por la adición de una auténtica casta obrera; en otras palabras, algunos miembros de la colonia nunca intentan reproducirse. Finalmente cuando las colonias semisociales persisten el suficiente tiempo como para que los miembros de dos o más generaciones se solapen y cooperen" tenemos la colonia *eusocial* moderna. La secuencia *subsocial* (que se sugerido para hormigas, termes, avispas sociales, y unos pocos grupos de abejas sociales), en cambio, estaría basada en una "asociación cada vez más estrecha entre la madre y la descendencia. Al nivel más primitivo, la hembra proporciona un cuidado directo [de sus descendientes, a diferencia de los insectos que abandonan los huevos después de la puesta] durante un cierto tiempo, pero se marcha antes de que los jóvenes alcancen la edad adulta. Es posible entonces que el cuidado se extienda hasta el punto en que la madre aún esté presente cuando su descendencia alcance la madurez, y que entonces pudiera ayudarla en la cría de una nueva prole. Sólo queda que algunos miembros del grupo sirvan de obreros permanentes". Estas secuencias permiten entender como pasos progresivos pudieron construir la gran complejidad que observamos hoy a partir de animales solitarios, siendo cada uno de los pasos una mejora en la eficiencia reproductiva, y también la importancia que tiene en este proceso el progresivo aumento de la especialización y la cooperación.

[190] De hecho los matemáticos imitan el proceso de la selección natural para resolver problemas de optimización con los llamados *algoritmos genéticos*. Podríamos decir que éstos son algoritmos lógicos mientras que la selección natural es un algoritmo real. También se han desarrollado muy recientemente algoritmos para resolver problemas de optimización que imitan el funcionamiento de los mecanismos de asignación que se observan en las sociedades animales. El hecho de que algunos de estos algoritmos sean muy eficaces es una prueba indirecta de que realmente los mecanismos de asignación en las sociedades animales tienden a ser también eficientes.

eficiencia reproductiva porque han sido diseñadas por el proceso de la selección natural.[191]

21.3 La selección natural y VN

La selección natural es pues la gran matemática, la gran economista, la gran optimizadora. Por ello el gran libro de la Historia biológica también está escrito en lenguaje matemático, y más concretamente en el lenguaje de la Optimización, porque su autor principal (aunque no el único) es el proceso de selección natural. El diseño hexagonal tan espectacular que vemos en los panales, las danzas, las conductas aparentemente previsoras, la optimización que observamos por doquier en la colmena, son el resultado de la selección natural[192].

Pero nosotros al plantear VN estamos de hecho imitando a la selección natural. Si ésta escoge las sociedades que mejor se reproducen, nosotros hacemos eso mismo al escoger el crecimiento con el mayor factor de expansión. Y es por ello, porque actuamos imitando a la selección natural, por lo que nuestro VN se parece a las colmenas, porque modelo y realidad son ambos el resultado de un proceso de optimización de la reproducción. Por lo tanto no es sólo que VN se parezca a las colmenas; es que la selección natural diseña colmenas que tienden a parecerse a VN, que tienden a ser productivismos más y más perfectos. Las sociedades biológicas producto de la selección natural tienden a parecerse a VN porque éste es el crecimiento "más apto" desde un punto de vista lógico. Y es por eso

---

[191] Nos referimos a la selección natural porque éste es el proceso que los biólogos han concluido como determinante en el diseño de las sociedades biológicas. Pero hacemos notar que otros procesos, como el descrito por Lamarck, también provocarían la eficiencia reproductiva de las colmenas. Para ello sólo es necesario que estos procesos supongan una sucesiva mejora en la aptitud reproductiva.

[192] Por ejemplo, sobre el panal Darwin en [1b], capítulo VIII, página 292, dice que "Obtuso debe ser el hombre que pueda examinar la exquisita estructura de un panal, tan primorosamente adaptado a su objeto, sin admiración entusiasta. Sabemos, por los matemáticos, que las abejas han resuelto prácticamente un problema difícil, y han hecho sus celdas de la figura conveniente para que contengan la mayor cantidad posible de miel, con el menor consumo posible de preciosa cera para construirlas. Se ha observado que un obrero hábil, con todos los instrumentos y medidas a propósito, encontraría muy difícil hacer celdas de cera de la verdadera forma; y esto lo ejecuta una muchedumbre de abejas que trabajan en una colmena oscura". También, página 301, que "Más allá de este estado de perfección en la arquitectura, no podría llevar la selección natural; porque en cuanto se nos alcanza, el panal de la abeja de colmena es absolutamente perfecto para economizar trabajo y cera. […] la selección natural por grados lentos ha llevado a las abejas cada vez más perfectamente a ahuecar esferas iguales a una distancia dada unas de otras en una doble fila, y a construir y excavar la cera entre los planos de intersección; las abejas naturalmente no saben que ahuecan sus esferas a una distancia particular unas de otras, como no saben cuáles son los diferentes ángulos de los prismas exagonales y de las planchas rómbicas de las bases; el poder del procedimiento de la selección natural ha sido la construcción de celdas de la fuerza debida y del tamaño y figura convenientes para las larvas, haciendo esto con la mayor economía posible del trabajo y cera. El enjambre individual que hiciera de este modo las mejores celdas con el menor trabajo y con menos gasto de miel en la secreción de la cera, sería el victorioso, y trasmitiría sus instintos económicos nuevamente adquiridos a nuevos enjambres, los cuales a su vez tendrían las mayores probabilidades de triunfo en la lucha por la existencia".

que las colmenas se parecen a VN, porque el proceso de selección natural escoge las colmenas más productivas frente a las menos productivas, escoge precisamente aquellas que se parecen más a VN.

No hemos estudiado aquí ninguno de los mecanismos de asignación en las sociedades biológicas, y por supuesto somos conscientes de que una teoría precisa de la colmena de una especie determinada requiere que estudiemos los mecanismos particulares que operan en ella, diferentes de los que operan en otras especies. Pero como sabemos que estos mecanismos son también resultado de la selección natural, que escogerá aquellos más aptos, podemos tener cierta seguridad de que acabaran produciendo una asignación no muy diferente de VN, sea como fuere su forma de operar. La selección natural escoge estos mecanismos de manera que aquellos que produzcan una asignación que se parezca más a VN desplazarán a los que produzcan una que se parezca menos. Así que, aunque no estudiemos los mecanismos de asignación concretos, tenemos cierta garantía de que la asignación que produzcan se parecerá a la que resulta de VN.[193]

Entender pues que la selección natural ha diseñado las colmenas es fundamental porque nos ayuda a comprender la estructura de estas sociedades, al igual que comprender el papel de la selección natural al diseñar el cuerpo de una gacela nos facilita entender su anatomía.

En definitiva, las colmenas pueden ser aproximadas con VN porque son el resultado de la selección natural, porque este proceso es un algoritmo de selección de las sociedades más productivas, de las que más se parecen a VN (si no cuantitativamente, porque el sistema analizado no siga un comportamiento simple, sí al menos cualitativamente). Al construir VN escogiendo de todos los comportamientos simples posibles el de mayor factor de expansión estamos imitando a la selección natural, y la selección natural al escoger de todas las sociedades las que se reproducen mejor imita a VN. En consecuencia *la selección natural diseña colmenas parecidas a VN*.[194]

---

[193] Si el mecanismo mercantil ha embelesado a algunos economistas, los mecanismos de asignación en la colmena lo han hecho con los biólogos, los mecanismos del organismo humano con los médicos, etc.

[194] Por supuesto, los biólogos son plenamente conscientes de que el proceso de selección natural diseña sociedades aproximadamente óptimas desde el punto de vista reproductivo y han utilizado profusamente esta circunstancia para explicar la estructura de las sociedades con modelos de optimización. Un ejemplo lo tenemos en Wilson [1], página 300 y siguientes, en donde se calcula la distribución de las hormigas entre las

21.4 Las propiedades de VN y las sociedades biológicas naturales

La selección natural tiende a producir sociedades parecidas a VN, y hemos deducido que VN implica que se cumplan determinadas leyes. Por lo tanto cabe esperar que estas leyes se cumplan aproximadamente también en la colmena y en las sociedades biológicas naturales, porque son condiciones necesarias desde un punto de vista lógico, por lo menos en aquellas sociedades que se comporten de forma parecida a una simple y en las que exista una tendencia a la maximización del crecimiento del conjunto del sistema. Si la colmena la ha diseñado la selección natural y si ésta es un proceso de optimización de la reproducción y diseña sociedades parecidas a VN, entonces las colmenas deben cumplir, por lo menos aproximadamente, las leyes que se deducen de VN, como la propia existencia de valores, ley de la rentabilidad, la del interés compuesto, las leyes de los signos, etc.

---

castas que maximiza la producción de reinas y machos con un programa lineal (como el visto en §17.5.3; dado que el hormiguero parte de una reina y un macho este problema equivale a calcular la distribución que maximiza el factor de expansión); además este autor ha hecho experimentos retirando individuos de la colonia para estudiar la medida en la que ésta obedece el óptimo reproductivo. También han intentado explicar el comportamiento de animales individuales con modelos de optimización, por ejemplo tratando los "presupuestos energéticos", que son un caso particular de nuestros balances contables cuando los insumos y los productos pueden expresarse ambos en términos de energía. Tenemos otro caso en Demografía humana y biológica, con el estudio de la población exponencial y de los valores-reproductivos; ya vimos en el capítulo 7 que este estudio es un caso particular explícito de VN, para las matrices de Leslie, y que los valores-reproductivos son un caso particular de los precios-VN, los multiplicadores de Lagrange del problema de calcular el crecimiento máximo. Igualmente Fisher planteó el problema del cálculo de los valores-reproductivos para el caso en tiempo continuo, y explicó el papel que estas magnitudes juegan en relación con el proceso de selección natural. También, en Wilson [1] página 96, véase algunos usos la ecuación Euler-Lotka {8.23}, a veces en su versión en tiempo discreto, como en el estudio de la duración óptima de la vida maximizando el factor de expansión. Incluso el propio Darwin, aunque no formulara sus ideas matemáticamente, era consciente de que la selección natural era lo que hoy llamamos un problema de optimización, aunque no usara términos matemáticos para estudiar la selección del *más* apto. Y ya vimos cómo sí hablaba explícitamente de "instintos económicos" y como señalaba que las abejas habían resuelto un difícil problema matemático en el panal construyéndolo con la "mayor economía de trabajo y cera".
Por lo tanto el uso de modelos de optimización para estos fines es un lugar común entre los biólogos, y por ello no somos precisamente originales al plantear el vínculo entre la lógica de la optimización matemática y el proceso de selección natural, porque los biólogos llevan mucho tiempo escribiendo problemas de optimización para tratar el comportamiento de individuos y sociedades diseñados por la selección natural.
Además, como la selección natural está fundada casi siempre en las mutaciones genéticas, una mutación que suponga un cambio radical a menudo, pero no siempre, supone también la imposibilidad del sistema para mantenerse o por lo menos un empeoramiento en su eficiencia. Como resultado la selección natural es un algoritmo que frecuentemente acaba encontrando máximos relativos y no máximos absolutos. Por ejemplo, la selección natural ha determinado en los vertebrados unos ojos en los que generalmente una pequeña modificación implicaría un empeoramiento en su diseño; pero esto no significa que no sea posible una gran modificación que sí supusiera una mejora, y así se ha señalado que en los ojos de los vertebrados las células fotosensibles están ubicadas de manera que la luz que incide en aquellas es obstaculizada, frente al diseño de los ojos de otros animales más eficiente porque esto no ocurre. Por ello al estudiar las soluciones de nuestros modelos debemos considerar los máximos relativos, y no sólo los absolutos, porque debido al proceso que las han diseñado las sociedades pueden comportarse como alguno de aquellos.

Ahora bien, señalamos que estas leyes daban cuenta de muchos de los fenómenos de los capitalismos y por ello no resultaría extraño que dijéramos que los mecanismos de asignación en estos sistemas producen una sociedad parecida a VN. Pero sin embargo en la colmena los mecanismos de asignación son muy diferentes de los observados en los capitalismos, no hay empresas, ni mercados, ni tasas de intercambio, ni créditos a un determinado tipo de interés. ¿Cómo es posible entonces que en la colmena se observen también las leyes que deducimos de VN?

Lo primero que tenemos que comprender es que la categoría valor, la ley de la rentabilidad, la del interés compuesto, etc. son *propiedades que cumplirá todo crecimiento máximo*, que se cumplirán allí donde impere VN, con independencia del mecanismo que establezca la asignación. De hecho en VN no hemos modelizado el funcionamiento de ningún mecanismo de asignación concreto, ni el mercantil-capitalista ni ningún otro. Por lo tanto estas leyes no son específicas ni de los capitalismos ni de las sociedades humanas, ni son el resultado particular del mecanismo capitalista, sino que se cumplirán allí donde exista una sociedad que se comporte de manera parecida a VN, como una necesidad lógica, y por lo tanto se cumplirán allí donde opere el proceso de selección natural.

Por ejemplo, el valor es el multiplicador de Lagrange que se corresponde a un balance material, una restricción que existe también en la colmena. La categoría valor se aplicará pues en toda sociedad que se comporte como VN, aunque en esa sociedad no existan intercambios ni tasas de intercambio. Por lo tanto debemos insistir en que el valor no es necesariamente una tasa de intercambio, y que no es necesario que existan intercambios para que puedan existir los valores[195]. Y lo mismo cabe decir de la ley de la rentabilidad que, como es una condición de máximo de VN, se aplicará en todos los sistemas que se comporten de manera similar a este modelo, aunque no haya empresas, ni contabilidades, ni beneficios. Nos equivocaríamos pues si concebimos los valores o la ley de la rentabilidad como exclusivos de las economías humanas.

[195] Aunque esto no significa que si un sistema intercambia con su entorno, o si está compuesto de unidades de asignación que intercambian entre sí, los multiplicadores de Lagrange no estén vinculados a esas tasas de intercambio, como vimos en el capítulo 12. De todas maneras debe quedar claro que la categoría valor es propia de todas las economías óptimas, de las economías donde se maximiza una función objetivo sometida a los balances materiales, y que por lo tanto puede aplicarse incluso allí donde no hay intercambios de ninguna clase (como ocurre en la economía de Robinson).

En definitiva, como la colmena es el resultado del proceso de selección natural, y como este proceso diseña sociedades parecidas a VN, cabe esperar que observemos la categoría valor, la ley de la rentabilidad, etc., como propiedades que se cumplen en la colmena. Y lo mismo cabe decir del resto de las economías biológicas (que puedan ser aproximadas mediante un comportamiento simple y que tiendan al crecimiento del conjunto). Y esto con independencia de que en la colmena no hay ni mercados, ni tasas de intercambio, ni empresas, con independencia del hecho de que los mecanismos de asignación son muy distintos de los que existen en los capitalismos.

Y, efectivamente, los valores ya han sido estudiados en Biología. Un uso particular de la categoría valor es el que hacen los biólogos con los valores-reproductivos, que analizamos en §7.1 y que es aplicable al estudio de las poblaciones. Fisher ya señaló cómo calcular estas magnitudes y el vínculo que la selección natural tiene con ellas. No estamos siendo pues originales al vincular el valor con el proceso de selección natural, porque esto ya lo han hecho los biólogos[196].

Por ejemplo, cabe esperar que la selección natural escoja una mutación genética que aumente el factor de expansión. Podemos estudiar las mutaciones tratándolas como perturbaciones de las recetas, como hemos visto en el capítulo 15, de manera que tratamos las mutaciones como nuevos procesos incorporados o también como modificaciones de los ya existentes. Si para una mutación concreta su balance contable correspondiente es positivo entonces la selección natural tenderá a imponerla y si tiene un balance contable negativo tenderá a extinguirla. Así si en una población que obedece una matriz de Leslie surge una mutación por la que aumenta la tasa de reproducción en una edad determinada está tenderá a imponerse porque el factor de expansión crecerá con esta mutación. Pero también podemos estudiar casos más complejos y menos evidentes, y si una mutación aumenta la tasa de supervivencia en una edad con alto valor a costa de una disminución igual (teniendo en cuenta las intensidades) de la tasa de supervivencia en una edad de bajo valor el balance contable correspondiente será positivo; la mutación tenderá a ser

[196] Véase por ejemplo Fisher [1] páginas 27 y siguientes, o Wilson [1b] páginas 95 y siguientes. Así Fisher plantea el cálculo del valor reproductivo para una determinada edad como la respuesta a la pregunta "¿En qué medida las personas de esta edad, en promedio, contribuyen a la ascendencia de las generaciones futuras? La cuestión es de un cierto interés, ya que la acción directa de la selección natural debe ser proporcional a esa contribución".
En otro sentido véase también Lotka [2], páginas 348 y siguientes. En ediciones futuras de este trabajo estudiaremos el vínculo entre el valor y la Termodinámica, y entre ésta y la evolución de las sociedades.

seleccionada favorablemente y a difundirse en la población, porque con ella la capacidad reproductiva general aumentará. En definitiva, la selección natural opera como si tuviera en cuenta la ley de la rentabilidad y los valores reproductivos, actúa de acuerdo a una contabilidad, porque actúa como un proceso de optimización[197].

Nosotros hemos generalizado la aplicación del concepto valor reproductivo desde las poblaciones al conjunto de organismos y materias que componen una sociedad biológica, como vimos en el capítulo 7. Por lo tanto de nuestro razonamiento cabe esperar que en la colmena los mecanismos de asignación estén vinculados a los valores, a la ley de la rentabilidad, etc. Pusimos un ejemplo de esto en §7.3 al decir que cabe esperar que una abeja defienda primero a una reina de un ataque exterior. En efecto, la selección natural escogerá aquellos genes en los que las obreras primero defiendan lo más valioso para la colmena, porque esta conducta implica una mejor capacidad reproductiva. Las colmenas en donde los genes obliguen a las obreras a comportarse así desplazarán a las que tengan genes diferentes. Por lo tanto bajo la selección natural las obreras acabarán defendiendo la colmena como si tomaran en consideración la categoría valor[198], si surge una mutación que permita esta precisión en el comportamiento, y obviamente esto será así con independencia de que las obreras sepan o no lo que están haciendo. Las obreras tampoco saben lo que hacen cuando construyen celdas hexagonales, pero están usando el método de construcción menos costoso, están aplicando la ley de la rentabilidad, o como dice Darwin "el panal de la abeja […] es absolutamente perfecto por lo que se refiere a economizar trabajo y cera". Cuando comunican a sus compañeras de panal la dirección de una fuente de alimento también están ahorrando el trabajo del conjunto de la colmena. Y cuando almacenan alimento durante el verano para el invierno siguen la pauta que se deduce del crecimiento cíclico máximo, de VNC. En definitiva, las leyes que hemos deducido de VN,

[197] La selección natural de las mutaciones es un proceso con similitudes con el proceso de selección de técnicas en el capitalismo. Por ejemplo, vimos en §16.7 que podíamos construir un algoritmo semejante al simplex que imitaba la selección de técnicas en el capitalismo. Podemos entender este algoritmo también como una imitación del proceso de selección de genes por la selección natural. Una mutación será incorporada a los procesos básicos, será seleccionada favorablemente, si con ello se aumenta el factor de expansión, si la receta correspondiente es rentable; y será descartada de los básicos, será seleccionada desfavorablemente, si no aumenta el factor, si la receta correspondiente no es rentable.

[198] Podríamos desarrollar esta idea diciendo que una variante de la categoría valor es el *valor militar* o *estratégico*. Por ejemplo, determinadas colonias de hormigas viven de la caza de otros insectos y del saqueo de otras colonias; para aquellas la guerra es una forma de producción. También los recursos destinados a la defensa de la colonia, frente a parásitos o depredadores, pueden entenderse como procesos de producción, ya que no incurrir en estos costes implicaría tener que enfrentarse a costes mayores.

del crecimiento máximo, son las leyes que tienen que obedecer las sociedades que surgen del proceso de la selección natural.

Pero no desarrollaremos más estas ideas porque en realidad los biólogos ya lo han hecho en el caso de los valores-reproductivos para las poblaciones que obedecen matrices de Leslie, y nosotros sólo las hemos generalizado para sistemas más complejos incluyendo en este análisis la ley de la rentabilidad, la del interés compuesto, etc.

En definitiva, dado que las sociedades biológicas han sido diseñadas por la selección natural, y como este proceso tiende a desarrollar sociedades parecidas a VN, *las leyes de VN se cumplen en las sociedades biológicas*, por lo menos de manera aproximada en aquellos sistemas que se comporten de forma parecida a una simple y que tiendan al crecimiento del conjunto.

Tenemos pues otra vía para entender que la categoría valor juegue un papel en la realidad (además de las vistas en el capítulo 18 con la asignación explícita, con los cálculos de la asignación directa de Robinson o como resultado de la operación de un mecanismo económico), como resultado de la acción de la selección natural[199].

21.5 Sistemas biológicos que se distancian de VN

21.5.1 Sistemas que no se comportan de forma simple

Al igual que determinadas sociedades biológicas son el resultado de la selección natural también lo son los organismos o sociedades de células. En realidad a éstos puede aplicársele mucho de lo dicho para aquellas y así también muestran una gran eficiencia reproductiva porque también son resultado del proceso de selección natural. Pero es dudoso que se pueda usar VN para modelizar cuantitativamente la mayoría de los organismos, porque recordemos que para que VN sea un buen modelo cuantitativo de un sistema es necesario que en éste exista una tendencia a la maximización del crecimiento

[199] Incluso podemos entender en parte la "utilidad subjetiva" como el resultado de la acción de la selección natural. Vimos que la selección natural tenderá a privilegiar a las colmenas en las que las abejas defiendan primero a las reinas. Las "utilidades subjetivas" de las abejas están pues establecidas en correspondencia con los valores reproductivos. Igualmente la selección natural tenderá a producir humanos con instintos que se correspondan a las necesidades reproductivas, y por ello las materias tenderán a ser apreciadas "subjetivamente" de acuerdo con su valor reproductivo. El "placer y dolor" en los que algunos autores intentaron fundamentar el valor pueden entenderse desde esta perspectiva, y tenderá a preferirse "subjetivamente" tal alimento a tal otro en función de su capacidad nutritiva, etc. Pero nunca debemos olvidar que el ser humano es mucho más que sus instintos.

del conjunto del sistema y que además siga un comportamiento cercano a uno simple. El primer punto efectivamente se da tanto en las sociedades biológicas como en los organismos, pero éstos últimos casi en ningún caso tienden a mostrar comportamientos simples y por lo tanto difícilmente VN podrá ser usado como una teoría cuantitativa de los mismos (salvo quizá para algunos organismos muy simples, como una esponja).

En cambio en el caso de una colmena de abejas o de un capitalismo la distancia a los comportamientos simples puede ser hasta cierto punto obviada en una primera aproximación. Por ejemplo, los seres humanos y las abejas son materias indivisibles y VN supone que todas las materias son divisibles, con lo que tenemos una distancia clara entre realidad y modelo. Pero en estas sociedades existe un número muy grande de individuos, por lo que en una primera aproximación podemos tratarlos como si fueran materias divisibles. En el caso de los organismos esta distancia es mucho más problemática desde el momento en que se desplazan de forma no periódica, muestran claras no linealidades, necesitan reproducirse sexualmente, etc. [200]

21.5.2 Sistemas que no tienden al crecimiento del conjunto

En VN escogemos el máximo crecimiento para el conjunto del sistema, lo que se corresponde bien con aquellos sistemas en los que no hay grandes tendencias contrarias a la reproducción global, pero no por ejemplo para estudiar las relaciones de parasitismo o depredación en donde sí existen estas tendencias. Un sistema en el que una parte del mismo limita el crecimiento del resto no se parecerá pues a VN, porque entonces el sistema en su conjunto no tiende al crecimiento máximo. Por lo tanto la “sociedad” formada por un depredador y su presa no se comportará de manera parecida a VN, aunque depredador y presa si tiendan cada uno por su parte a VN. No obstante en el caso

[200] Los problemas que tenemos con algunos organismos, como los desplazamientos no periódicos, los tendremos también con algunas sociedades. La dificultad no estriba pues en que estemos ante un organismo, ya que éste puede entenderse como una sociedad de células, sino en que estemos ante un comportamiento no simple.
(No obstante entonces puede intentarse el estudio de algunos de estos sistemas con ecuaciones como {19.5}, que no suponen un comportamiento simple. Podemos aproximar la acción de la selección natural para los organismos con el problema de obtener el mayor número de hijos, o mejor el mayor número de nietos, o mejor aun el mayor número de bisnietos, etc. Estos problemas pueden escribirse como la maximización de la producción ponderada en el momento n vista en §17.5.3, para una n cada vez mayor. Y haciendo que n sea ∞ llegamos a {19.5}, o también a VN y VNC si nos limitamos a los comportamientos simples.)
Por otra parte las matrices de Leslie pueden ser interpretadas como aplicables tanto a individuos como a poblaciones, y podremos intentar modelizar con VN una población si en su conjunto se comporta de manera simple, aunque cada individuo particular se comporte de forma no simple. (Además cabría interpretar VN como aplicable a un individuo en un sentido estadístico, aunque no se comporte de manera simple, como cabe hacer esto también con las matrices de Leslie, pero no desarrollaremos este planteamiento aquí.)

biológico el término "sociedad" suele aplicarse sólo a aquellas asociaciones en las que están excluidas las relaciones de tipo parasitario o depredador[201].

También en aquellas sociedades en las que las luchas internas tengan gran importancia es posible que el comportamiento se aleje de la maximización del crecimiento, porque por ejemplo estas luchas supongan una gran detracción de recursos. Las luchas internas en las sociedades biológicas suelen ser consecuencia de que la selección natural actúa en diferentes niveles de selección. Por lo tanto si la selección natural escoge a los individuos que se reproducen mejor, incluso cuando forman parte de una sociedad, la tendencia al crecimiento de aquellos puede coexistir en conflicto con la del sistema en su conjunto[202].

Otro nivel de organización que a menudo no podremos estudiar con VN es un ecosistema. Aun cuando pudiéramos suponer que obedece un comportamiento simple, un ecosistema no tiende a un crecimiento máximo porque la selección natural no escoge ecosistemas

---

[201] Por otra parte podemos estudiar ciertos aspectos de las relaciones de depredación y parasitismo con TE, como vimos en §3.4, o con flujos impuestos, como en §13.4.

[202] Es evidente que para entender el resultado de la selección natural es fundamental determinar el nivel de selección en el que este proceso opera, y si este nivel es la sociedad tendremos un comportamiento maximizador del crecimiento del conjunto, mientras que si lo es el organismo tendremos un comportamiento maximizador para este nivel. Pero a menudo el nivel de selección puede entenderse como un punto intermedio entre los casos extremos del organismo y la sociedad, y entonces veremos coexistiendo tendencias en conflicto.

No obstante que el nivel de selección se establezca para un sistema no necesariamente está en contradicción con que se establezca también para partes del mismo. Así en los hormigueros el nivel de selección puede entenderse establecido para las reinas que los fundan (y los machos que las fecundan) y a la vez para el conjunto de los hormigueros; los genes de los reproductores contienen la forma de operar del conjunto de la sociedad, y los reproductores cuyos genes determinen unos hormigueros más eficientes desplazarán a los que tengan otros genes. En definitiva, la maximización del conjunto del sistema no es siempre incompatible con la maximización de partes del mismo, y así en §12.3 ya vimos que podíamos entender VN como la coordinación de unos subsistemas que maximizan su propio crecimiento (y que intercambian materias).

Como vemos las relaciones sociales son a menudo muy complejas, también en el caso de los sistemas biológicos. Por ejemplo, puede parecer que en una manada de lobos la lógica que impera no es tanto la reproducción del grupo como la de los individuos que lo forman, y que la pareja reproductora de alguna manera explota al resto de los adultos. Pero, aunque sólo una pareja se reproduzca, podemos entender la estructura de la manada como orientada también hacia la reproducción del propio sistema, al menos de manera parcial. La existencia de una sola pareja reproductora puede verse como una forma de especialización, no muy diferente de la que supone la existencia de una sola hembra que se reproduce en la colmena. El hecho de que el resto de adultos no abandone la manada, cuando puede hacerlo, es una prueba de que desde un punto de vista evolutivo les interesa la permanencia en ella (quizá porque así tengan la posibilidad ellos mismos de ser parte de la pareja reproductora en el futuro, o porque necesiten la protección de la manada hasta formar una propia o integrarse en otra, o porque así ayuden a la reproducción de parientes). Pero los conflictos no sólo existen en la manada sino también en la colmena, y por ejemplo lo primero que hace una reina recién nacida es matar a cualquier posible competidora. Como vemos las relaciones sociales, incluso entre los insectos, no son en absoluto sencillas, y los conflictos sociales a menudo coexisten con la tendencia hacia la eficiencia reproductiva. No es necesario pues advertir de nuevo que *en este trabajo sólo se apuntan algunas ideas muy simplistas para cuestiones que en realidad son muy complejas*.

según su reproducibilidad. Los ecosistemas no compiten entre sí, ni son seleccionados por su aptitud como las sociedades biológicas o los organismos, sino que son el resultado de la interacción de muchos elementos, casi todos diseñados por la selección natural pero no el ecosistema en su conjunto. Un ecosistema no actúa pues de manera similar a una economía que optimiza su propia expansión. La selección natural escoge los sistemas más aptos (los organismos y bajo determinadas condiciones los grupos o las sociedades[203]), pero no los ecosistemas que crecen más rápido, y VN es el estudio de la maximización de la reproducción para el conjunto del sistema. En definitiva, es muy posible que en los ecosistemas reales el crecimiento no se parezca a un máximo ni siquiera local (además de que suelen mantenerse en estados o en ciclos estacionarios, debido también a la presencia de materias "escasas", cuando no muestran oscilaciones caóticas), porque determinados procesos pueden imponerse aunque esto suponga un detrimento del crecimiento del conjunto del ecosistema. Por ello, aunque una tarea pendiente es precisamente la modelización matemática de un ecosistema, y mucho de lo desarrollado en este trabajo cabría esperar que ayudara a ese fin, no podremos usar VN para esto de manera directa[204].

---

[203] (O incluso las especies; pero esperamos no entrar en polémicas con algunos biólogos al añadir estas posibilidades, porque no es un tema del que tengamos un conocimiento suficiente.)
Y aunque para simplificar hemos entendido los organismos como sociedades sin conflictos internos, a menudo se parecen más a un ecosistema. Así en el cuerpo de un humano coexisten multitud de bacterias, algunas en una relación simbiótica pero también como parásitos.

[204] Dejamos el estudio de las relaciones de parasitismo y depredación, la influencia de los diferentes niveles de selección así como la modelización de los ecosistemas para otros trabajos. No obstante, para ilustrar que VN y un ecosistema realmente pueden comportarse de formas muy diferentes, imaginemos un ecosistema muy simple en donde tenemos sólo plantas, herbívoros y carnívoros simbolizados en tres materias por ese orden. El primer proceso describe la producción de plantas a partir de plantas (supondremos que la tierra no es "escasa"), el segundo la producción de herbívoros a partir de herbívoros alimentándose de plantas, y el tercero la producción de carnívoros a partir de carnívoros alimentándose de herbívoros. Las matrices podrían ser

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Existen tres soluciones para VN, suponiendo posible la eliminación gratuita:

$\alpha = 4$, $\mathbf{X_t} = 4^t\,[1, 0, 0]$, $\mathbf{Y_t} = 4^{-t}\,[4, 0, 0]$, por lo que sólo existirían plantas,

$\alpha = 3$, $\mathbf{X_t} = 3^t\,[3, 1, 0]$, $\mathbf{Y_t} = 3^{-t}\,[0, 3, 0]$, tendríamos plantas y herbívoros,

$\alpha = 2$, $\mathbf{X_t} = 2^t\,[2, 2, 1]$, $\mathbf{Y_t} = 2^{-t}\,[0, 0, 2]$, con plantas, herbívoros y carnívoros.

Estas tres soluciones describen tres ecosistemas distintos, cada uno resultando un máximo local. La primera solución describe la situación en la que las plantas consiguen no ser devoradas por los herbívoros, y entonces sólo las plantas tendrán precio positivo porque el factor de crecimiento del ecosistema estará limitado sólo por la capacidad de reproducción de las plantas. La segunda describe la situación en la que los herbívoros consiguen alimentarse sin restricciones de las plantas y además esquivan cualquier tipo de depredación de los carnívoros; entonces sólo los herbívoros serán una limitación para la expansión del conjunto del ecosistema, si hay herbívoros en el ecosistema el crecimiento proporcional máximo tendrá un factor igual a 3 porque con los herbívoros no se podrá alcanzar un factor mayor. La tercera describe la situación en la que los carnívoros se alimentan sin restricciones de los herbívoros y éstos de las plantas; entonces sólo los carnívoros suponen una limitación y sólo ellos mostrarán precio positivo; el factor del ecosistema estará

No obstante determinadas relaciones que pueden parecerse a la depredación o al parasitismo sí pueden estudiarse con VN. Por ejemplo, no hay dificultades para tratar los animales domésticos, su cría y el uso que se les da a los mismos en los capitalismos, ni tampoco hay dificultades para estudiar el cultivo de hongos por las hormigas agricultoras (aquí estamos ante una relación más bien simbiótica, puesto que el hongo es devorado por las hormigas pero éstas también alimentan al hongo proporcionándole vegetales y cuidados), porque en ambos casos se maximiza el crecimiento del conjunto del sistema, que es lo que permite usar VN como modelo para aproximarnos a la realidad.

En consecuencia, una estrategia inteligente al usar VN es definir el sistema de estudio de manera que sea aceptable el supuesto de un comportamiento simple y que el sistema tienda al crecimiento en su conjunto. Allí donde estos supuestos no nos alejen demasiado de la realidad la solución de VN nos permitirá aproximarnos a los hechos. Esto no excluye sistemas complicados como sociedades con más de una especie presente, como por ejemplo las hormigas agricultoras y los hongos.

---

limitado por la capacidad de reproducción de los carnívoros. Es obvio que estas soluciones son sólo algunos de los ecosistemas posibles y que no necesariamente un ecosistema real tenderá a parecerse a una de ellas.
Generalicemos brevemente nuestro ejemplo con las matrices

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_2 & 1 & 0 \\ 0 & a_3 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 \end{bmatrix}$$

donde a_2, a_3, b_1, b_2 y b_3 son números positivos.
Cualesquiera que sean estos números siempre existirá la solución $\alpha = b_1$, $\mathbf{X_t} = b_1^{\,t}$ [1, 0, 0], $\mathbf{Y_t} = b_1^{\,-t}$ [b_1, 0, 0], que describe un ecosistema sólo con plantas. Si las plantas no son consumidas tendremos como solución un máximo definido por la capacidad de reproducción de las mismas.
Si el coeficiente de reproducción de los herbívoros b_2 fuera mayor que el de las plantas b_1, y aquellos no fueran depredados por los carnívoros, no sería posible un crecimiento máximo con herbívoros ya que éstos se reproducirían más deprisa que las plantas de las que se alimentan (y por ello tendrían que ser eliminados de manera gratuita) pero reducirían el factor de expansión de las plantas; el factor de expansión sería menor o igual que el de las plantas y el máximo estará determinado por ellas. Pero si $b_2 < b_1$ tendremos además como solución un ecosistema con plantas y herbívoros, con el máximo determinado por la capacidad de reproducción de éstos, que resulta $\alpha = b_2$, $\mathbf{X_t} = b_2^{\,t}$ [$a_2\, b_2 / (b_1\text{-}b_2)$, 1, 0], $\mathbf{Y_t} = b_2^{\,-t}$ [0, b_2, 0].
De la misma manera si el coeficiente de reproducción de los carnívoros b_3 superara al de las plantas b_1 o al de los herbívoros b_2 no podría existir un crecimiento máximo con carnívoros, porque éstos se reproducirían más deprisa que el resto del ecosistema del que se alimentan. Pero si $b_3 < b_1$ y además $b_3 < b_2$ entonces es posible un crecimiento máximo con plantas, herbívoros y carnívoros, donde el máximo estará determinado por la capacidad de reproducción de éstos, y tendremos también la solución $\alpha = b_3$, $\mathbf{X_t} = b_3^{\,t}$ [$a_2\, a_3\, b_3^2 / ((b_1\text{-}b_3)(b_2\text{-}b_3))$, $a_3\, b_3 / (b_2\text{-}b_3)$, 1], $\mathbf{Y_t} = b_3^{\,-t}$ [0, 0, b_3].
Nuestra generalización puede ampliarse en muchos sentidos, aunque no haremos esto aquí para no alargar la exposición. Pero, por ejemplo, si añadiéramos la estructura de edades como en el capítulo 7, de manera que los coeficientes a_2 y a_3 fueran matrices con los consumos de herbívoros y carnívoros y b_1, b_2 y b_3 las matrices de Leslie correspondientes, llegaríamos a un conjunto de tres soluciones similar al visto. Hacemos notar que el valor en nuestros ecosistemas sigue siendo la tasa a la que aumentaría el factor de expansión máximo si introdujeramos una “pequeña” cantidad de la materia correspondiente.

21.5.3 Sistemas diseñados por procesos diferentes de la selección natural

Hasta ahora nos hemos referido a sistemas diseñados por la selección natural. No obstante en los últimos milenios los humanos han modificado el proceso de selección de determinadas especies de acuerdo a fines diferentes de la maximización de la reproducción. Por ejemplo, esto ha sido así en el caso de las colmenas de la *apis mellifera*, ya que con esta especie los humanos han tendido a escoger aquellas colmenas que les resultaban más útiles, aunque esto supusiera una merma de su capacidad reproductiva en un entorno natural. En definitiva, las colmenas de esta especie han sido sometidas también al proceso de *selección artificial*[205]. Es obvio que si las colmenas no son seleccionadas por su reproducibilidad sino por otra razón su comportamiento acabará distanciándose de VN. Si a lo largo de generaciones los apicultores han escogido las colmenas por su capacidad para la producción de miel entonces la estructura de las colmenas puede haber sido alterada de una manera importante y no se parecería tanto a VN como en el caso salvaje. Así es posible que las colmenas seleccionadas artificialmente tiendan a operar en buena medida para maximizar la producción de miel y no el crecimiento.

La selección artificial ha influido mucho en la anatomía de un número importante de animales domésticos y también en la estructura de determinadas sociedades biológicas, aunque en general en menor medida. Por ejemplo, por el momento no parece que haya influido mucho en el comportamiento de la colmena de la abeja melífera, aunque sí hay que señalar su importancia en el caso de las sociedades de ovinos, vacunos, etc. No obstante si este proceso continuara durante mucho tiempo, o si se efectuara con técnicas nuevas como la ingeniería genética, sin duda el comportamiento de la colmena de esta especie podría acabar distanciándose mucho del de VN.

En definitiva, *VN no es una ley física ineludible*, ni siquiera en el caso de las sociedades biológicas, sino que es la consecuencia de unos procesos de selección determinados. Si las condiciones en las que el proceso de selección natural opera dejan de darse las sociedades pueden llegar a comportarse de una manera muy diferente de VN. Si estamos ante un

[205] El propio Darwin señaló la importancia de procesos que operan en paralelo con la selección natural, como la selección sexual. Es evidente que la anatomía del pavo real está muy influida por la selección sexual. De igual manera la estructura de las sociedades biológicas puede estar muy determinada por otros procesos además de la selección natural, como la selección artificial que también estudió Darwin. Incluso cabe especular que, al igual que la existencia del sexo determina una selección sexual, la existencia de las sociedades determina una selección social.

sistema depredador-presa, o si no existiera competencia por los recursos y selección del más apto, o si otro proceso diferente operase como la selección artificial, el sistema llegará a comportarse de una manera muy diferente de la que indica VN.

21.6 Recapitulación

Las sociedades biológicas naturales tienden a comportarse con una gran eficiencia reproductiva porque la selección natural escoge las sociedades que se reproducen mejor y descarta las que se reproducen peor. Al plantear VN imitamos la acción de la selección natural y la selección natural al escoger las sociedades que se reproducen mejor actúa imitando a VN. Es por ello que las sociedades biológicas naturales tienden a parecerse a VN y que las leyes que hemos deducido para VN tienden a cumplirse en estas sociedades, por lo menos en las que se comporten de manera aproximadamente simple y en las que no hay grandes tendencias contrarias al crecimiento del conjunto. En consecuencia *VN no es sólo la teoría del crecimiento máximo sino también un capítulo de la Teoría de la evolución darwiniana*. Por ello la categoría valor, la ley de la rentabilidad, la del interés compuesto, las fórmulas de depreciación, etc., propiedades que se deducen de VN, tienen aplicación allí donde la selección natural ha diseñado una sociedad, son también parte del desarrollo de esa teoría. Se comprende pues que estas categorías jueguen un papel en los sistemas biológicos. Pero allí donde el comportamiento no sea simple, o allí donde no se maximice el crecimiento del conjunto del sistema, o si las sociedades biológicas son diseñadas por otro proceso distinto de la selección natural, el comportamiento no será necesariamente parecido al crecimiento máximo. VN no es una ley física ineludible sino que es la consecuencia de unos procesos de selección que pueden ser alterados.

Así que ahora podemos dar una respuesta clara y simple a nuestras dos preguntas en el caso de las abejas. VN se parece a la colmena y las abejas viven en una sociedad así porque la colmena la ha diseñado la selección natural. [206]

[206] En estos primeros apuntes nos contentamos sólo con dar una aproximación grosera al estudio de los procesos evolutivos que han conformado las sociedades, pero es obvio que incluso en el caso de las sociedades biológicas estos procesos son muchísimo más complicados que el esquema que hemos esbozado. Cada sociedad biológica ha tenido un proceso evolutivo particular, y sería ridículo pretender englobarlas a todas en un esquema tan simplista como el que hemos detallado. Estudiar la evolución de la colmena de una determinada especie significa pues estudiar un proceso evolutivo y unos mecanismos de asignación particulares y específicos. Por eso no queremos dejar de repetir que lo que estamos haciendo en este trabajo es sólo una primera aproximación grosera y simplista. En definitiva, repetiremos una vez más que aquí nos contentamos con un primer esbozo esquemático de procesos que en realidad son extremadamente complejos.

22: Las sociedades humanas

De la lectura del capítulo anterior pudiera parecer que hemos encontrado respuestas a nuestras dos cuestiones no sólo para el caso de las sociedades biológicas sino también para las sociedades humanas. En efecto, si estas sociedades hubieran sido diseñadas por un proceso similar a la selección natural se entendería que VN se pareciera a los capitalismos y que los humanos vivieran en unos sistemas así.

Pero es muy evidente que una hipótesis darwiniana[207] no puede dar cuenta de muchos de los fenómenos observados en el caso de las sociedades humanas. Así la selección natural diseña sociedades muy similares entre si para cada especie, quizá sólo con algunas variaciones como adaptaciones a entornos particulares, y por ejemplo las colmenas de la *apis mellifera* operan todas de una manera muy parecida. Sin embargo vemos que las civilizaciones humanas muestran nítidas distancias entre ellas, incluso cuando estas civilizaciones son contemporáneas, y estas distancias no pueden ser explicadas sólo como adaptaciones a entornos particulares.

Además la selección natural diseña sociedades que operan de manera parecida a VN. Pero las civilizaciones humanas muestran comportamientos que no se corresponden con VN, como la existencia de grandes consumos improductivos por parte de las clases dominantes en algunas sociedades antiguas o la solidaridad sin una contrapartida productiva en el caso del "Estado de bienestar" de los capitalismos avanzados actuales. En VN y en la colmena no hay lugar para consumos improductivos y una obrera enferma puede llegar a ser expulsada; pero en los capitalismos avanzados actuales los humanos enfermos o incapacitados son mantenidos aun cuando su consumo no será compensado por un ingreso.

En definitiva, a partir de una hipótesis darwiniana no podemos explicar las diferencias entre las civilizaciones ni tampoco los comportamientos distantes de VN. Éstas son

[207] Llamamos *hipótesis darwiniana* a la que basa en la acción de procesos similares a la selección natural la explicación de la estructura de las sociedades, esto es, en un proceso de selección de los que se reproducen mejor, con independencia de que este proceso consista en la selección de mutaciones genéticas o de otro tipo. Pero debemos recordar que Darwin sabía perfectamente que este tipo de procesos no era de aplicación universal sino que sólo operaban bajo determinadas condiciones, y así señaló situaciones en las que operaban procesos distintos como la selección artificial. En definitiva, no estamos afirmando en absoluto que Darwin defendiera esta hipótesis en el caso de las sociedades humanas y usamos la expresión "hipótesis darwiniana" en un sentido figurado.

pruebas de que la historia de la Humanidad no ha sido escrita por procesos similares a la selección natural, por lo menos no con el carácter casi exclusivo que sí podemos afirmar en el caso biológico.

Además se entiende fácilmente que las abejas estén sometidas a vivir en sistemas como la colmena, que operan siguiendo la producción por la producción misma, puesto que no tienen la inteligencia necesaria para escapar a procesos espontáneos como la selección natural. Pero los humanos sí tienen esa inteligencia, y han demostrado que pueden sobreponerse a este tipo de procesos por ejemplo diseñando determinadas sociedades animales de acuerdo a fines diferentes a la reproducibilidad. Se nos plantea la cuestión de por qué los humanos no han seleccionado artificialmente su propia sociedad y viven en unos sistemas como los capitalismos, que no funcionan para satisfacer sus necesidades.

Y sin embargo hemos señalado que VN y los capitalismos sí tienen mucho en común, y hemos justificado esta afirmación no de forma vaga e imprecisa sino demostrando que en VN se cumplen leyes cuantitativas que se observan en los capitalismos. Tenemos pues una aparente paradoja. Por una parte resulta claro que una hipótesis darwiniana no puede dar cuenta de muchos de los fenómenos en el caso de las sociedades humanas, y sin embargo la civilización predominante en nuestros días sí se parece en buena medida a lo que cabría esperar si la selección natural hubiera regido la historia de la Humanidad, sí se parece en muchos sentidos a la colmena. Y esto a pesar de que los humanos tienen inteligencia y han demostrado que son capaces de seleccionar artificialmente las sociedades de acuerdo a fines diferentes de los que cabe esperar de un diseño a cuenta de la selección natural.

Es evidente que en el caso de las sociedades humanas han operado algunas tendencias que han causado la distancia entre las civilizaciones y con VN, y por otro lado algunas otras que han tendido a causar un parecido de los capitalismos con VN. Es por la presencia de este conjunto complejo de tendencias por la que es necesario que estudiemos las sociedades humanas en un capítulo diferente de las biológicas. Dejamos este estudio para futuras ediciones de este trabajo, pero no queríamos por menos que advertir de su necesidad para evitar posibles equívocos.

Sexta parte. Notas históricas

23: Valor-trabajo y precio[208]

23.1 Aristotélicos

Algunas de las primeras reflexiones económicas formaban parte también de la Ética y estaban vinculadas al estudio de la justicia en los intercambios y de las condiciones en las que éstos se mantendrían. Así Aristóteles afirma que en el intercambio “habrá, por tanto, reciprocidad cuando los bienes se igualen de suerte que lo que produce el zapatero esté, respecto a lo que produce el agricultor, en la misma relación que el agricultor respecto del zapatero” y que “si no fuera posible esta reciprocidad no habría asociación”. Por lo tanto esa forma de asociación que es el intercambio mercantil se mantendrá (Economía) y será justa (Ética) sólo si la igualación de los bienes en el cambio supone una reciprocidad entre los que participan en el mismo. La ganancia y la pérdida en el intercambio son contrarias al justo medio, lo que más adelante se llamará “principio de justicia conmutativa”, y además no permiten el mantenimiento de la asociación mercantil[209].

A partir de esto (y de otras influencias como “el que no quiera trabajar que tampoco coma” o “ganarás el pan con el sudor de tu frente”) algunos autores defendieron que las tasas de intercambio deben estar vinculadas al tiempo de trabajo necesario, a los valores-trabajo, puesto que sólo así el producto del zapatero puede igualarse al producto del agricultor con reciprocidad. Los escolásticos (Alberto Magno, Tomás de Aquino, Duns Scoto) desarrollaron estas reflexiones en la concepción del precio justo como lo que se necesita en *labore et expensis*, en trabajo y gastos, o también en la afirmación de que la obtención de un interés (la usura) era contrario a la Ética. Otros autores esbozaron teorías ético-positivas del valor como cantidad de trabajo, y así para Locke del principio ético de que “cada hombre es propietario de su propia persona” se deduce que “la labor de su cuerpo y el trabajo de sus manos son propiamente suyos” y además, como análisis positivo, “es el trabajo lo que añade la diferencia de valor sobre cada cosa”[210].

23.2 Smith

Pero una teoría positiva del precio como valor-trabajo chocaba con el hecho de que los precios de los productos incluían, además de los insumos, beneficios y rentas que no son

[208] En esta sección me fue muy útil Tugán [1b], capítulo VI, aun cuando no coincidamos en bastantes puntos.
[209] Aristóteles [1], 1133; pero véase todo el libro V, sobre todo los capítulos 4 y 5.
[210] Locke [1], páginas 116 y 122; véase el capítulo V, *Of Property*, del *Second Treatise*.

resultado del trabajo. Algunos autores intentaron solventar esta dificultad considerando el precio como "trabajo y tierra" (Petty, Cantillon) y otros como insumos más rentas (fisiócratas). Adam Smith, sin embargo, mantuvo la necesidad de una teoría para el "estado primitivo y rudo" y otra para la "sociedad avanzada".

Smith afirmó que en el "estado primitivo y rudo de la sociedad, que precede a la acumulación del capital y a la apropiación de la tierra", en donde "el producto integro del trabajo pertenece al trabajador", efectivamente los precios son proporcionales a las cantidades de trabajo necesarias, a los valores-trabajo; "si en una nación de cazadores, por ejemplo, cuesta usualmente doble trabajo matar un castor que un ciervo, el castor, naturalmente, se cambiará por o valdrá dos ciervos".

Pero en la "sociedad avanzada", en presencia de la propiedad y del excedente, los trabajadores están obligados a compartir el producto del trabajo con los propietarios. Entonces los capitales migrarán de donde son menos rentables a donde lo son más, por lo que tenderá a cumplirse la ley de la rentabilidad. Y los valores-trabajo no son en general compatibles ni con esta ley ni con la existencia de beneficios y rentas. Para este caso es necesaria pues una nueva teoría, que podríamos decir que consistía en una versión primitiva de la teoría del coste de producción, y que en general sólo coincidiría con la teoría del valor-trabajo cuando no hay excedente[211]. Los smithianos pulieron estas ideas en la dirección del coste de producción y por ejemplo Torrens señala que "el valor de cambio de las mercancías está determinado por la cantidad de capital gastada en su producción".

23.3 Ricardo

Pero los ricardianos objetaron que era imposible construir una teoría del precio como coste de producción, ya que los precios de los insumos son también los precios de los productos, por lo que caeríamos en un círculo vicioso. No obstante Ricardo observó que, aunque era cierta la afirmación de Smith de que en presencia de excedente precios y valores-trabajo diferirían ya que tendería a cumplirse la ley de la rentabilidad, bajo determinadas condiciones los valores-trabajo sí eran una teoría adecuada de los precios[212]. Y aun cuando

[211] Detallaremos en otra sección la teoría de los precios particular de Smith.

[212] En resumen, las *condiciones de Ricardo* para que los precios sean proporcionales a los valores-trabajo son que el tiempo de producción y la *composición orgánica* (la razón entre el valor-trabajo de los insumos que no consumen los trabajadores y los insumos que sí) sean comunes en todos los procesos. Detallaremos más adelante estas condiciones y como solventó Ricardo la existencia de rentas y de varios tipos de trabajo.

no se dieran estas condiciones podríamos usar los valores-trabajo como aproximación a los precios. Además los valores-trabajo pueden calcularse sin caer en circularidades lógicas.

Pero los críticos de la escuela ricardiana enseguida objetaron que las condiciones señaladas por Ricardo eran irreales. Además si los valores-trabajo fueran una buena aproximación de los precios tendría que observarse la ley ricardiana de una igual tasa de plusvalía; pero esto no se corresponde con los fenómenos en el capitalismo, ya que en este sistema se observa que tiende a cumplirse la ley de la rentabilidad y no la ley ricardiana. Ricardo era consciente de estos problemas, que de hecho constituyeron algunas de las causas del derrumbe de la escuela ricardiana, pero no fue capaz de resolverlos.

23.4 Proudhon

Proudhon afirmó, como Smith, que en el capitalismo los valores-trabajo no eran una buena teoría de los precios. Pero en una sociedad ideal, que para Proudhon debería estar basada en la asociación mercantil de pequeños productores, no existirían clases dominantes que se apropiaran del excedente ni explotación y los precios entonces serían los valores-trabajo. Afirmó pues que los valores-trabajo eran un ideal a realizar, en una línea casi aristotélica, tanto desde un punto de vista moral como de eficiencia social.

De esta idea se desarrollaron muchas variantes incluso con anterioridad a Proudhon, como las de los llamados “socialistas ricardianos” y demás defensores del “derecho del trabajador a su producto íntegro”[213], y así Rodbertus postuló los valores-trabajo como valores de lo que se denominó inadecuadamente un socialismo de Estado[214]. También la distancia entre valores-trabajo y precios fue considerada una prueba de la ineficiencia del capitalismo desde el punto de vista humano. Ya en el siglo XX algunos autores defendieron el papel de los valores-trabajo en un socialismo de mercado o en uno planificado[215].

---

[213] Véase Anton Menger [1].

[214] Rodbertus también desarrolló una teoría de los precios en el capitalismo vinculados a los valores-trabajo, pero no nos detendremos en ella.

[215] Por ejemplo si se asignara minimizando la cantidad total de trabajo usada. Para el planteamiento de este problema véase Dantzig [1], página 254.

23.5 Marx

Marx señala, con los smithianos, que la presencia de excedente hace que los valores-trabajo no sirvan como teoría de los precios. Y para Marx las condiciones señaladas por Ricardo son tan restrictivas que en realidad éste confunde valores-trabajo y precios, ya que ambas son magnitudes que bajo condiciones realistas diferirán considerablemente. Pero está de acuerdo con los ricardianos en que es imposible construir una teoría del coste de producción. Así que para Marx la solución de Smith es imposible y la de Ricardo incorrecta en general. Construir una teoría de los precios en el capitalismo pasa por estudiar cómo se produce y cómo circula el excedente en ese sistema, procesos de los que estos autores tuvieron barruntos e incluso intuiciones profundas pero que no llegaron a comprender en su esencia.

Para Marx existe excedente porque las jornadas de los trabajadores están extendidas por encima de las necesarias en proporción a la tasa de explotación. En correspondencia el valor del excedente lo produce el trabajo humano, y sólo el trabajo humano, y lo produce además de acuerdo con una ley cuantitativa precisa, la ley ricardiana de una igual tasa de plusvalía; el excedente se produce en proporción a la cantidad de trabajo empleado. Pero el mecanismo de la competencia capitalista determina que el excedente circule entre los capitales con una ley diferente de la que rige en su producción, que circule de acuerdo con la ley de la rentabilidad para generar una tasa de beneficio común. Por lo tanto en el capitalismo el excedente se produce de acuerdo con una ley (la ricardiana) y circula entre los capitales de acuerdo con otra diferente (la de la rentabilidad).

En el proceso de producción del excedente, y vinculados a ley ricardiana, surgen los valores-trabajo y la tasa de plusvalía. Pero la circulación del excedente hace que estas variables sean modificadas o “transformadas” en precios y tasa de beneficio. Así que, aunque los valores-trabajo diferirán considerablemente de los precios, son su punto de partida, su raíz, su sustancia. Si el excedente circulara en proporción al trabajo empleado, que es como se produce según Marx, los precios serían los valores-trabajo; pero como circula de acuerdo con la ley de la rentabilidad, mediante el mecanismo de la competencia, los valores-trabajo se transforman en precios. Por lo tanto el trabajo es la sustancia que toma la forma de precio bajo la competencia capitalista.

Una teoría de los precios en el capitalismo tiene que reflejar el proceso real en el que éstos se forman, tiene que comenzar con los valores-trabajo porque lo esencial es el trabajo humano produciendo el excedente. Pero estas magnitudes deben ser transformadas en precios porque existe un proceso real en el que surgen los precios a partir de los valores-trabajo, la circulación del excedente de acuerdo con la ley de la rentabilidad. La necesidad de la transformación en la teoría es pues el reflejo de la existencia de un proceso real. En consecuencia, una teoría del coste de producción no sólo es imposible por circular sino también por quedarse en la apariencia de los fenómenos y prescindir del hecho esencial de que el valor del excedente lo produce el trabajo humano.

Frente a Proudhon y Rodbertus, Marx señala que los valores-trabajo no deben ser los valores en una economía socialista, porque entonces no se tendrían en cuenta adecuadamente las necesidades de los incapacitados o podrían darse grandes desigualdades entre los trabajadores según su cualificación. En la fase superior de la sociedad comunista los trabajadores controlarán la asignación y las jornadas serán cercanas a las necesarias (algo superiores a éstas para atender las necesidades generales), pero existirá una planificación económica y no deberá regir el "derecho del trabajador a su producto íntegro" sino el "a cada cual según sus necesidades", aunque en una etapa intermedia pueda ser necesaria una distribución en parte dependiente del "a cada cual según su trabajo"[216].

23.6 Recapitulación y crítica

Resumiremos con un esquema las diferentes posiciones:

Aristotélicos: el valor-trabajo es el precio justo y que mantiene la asociación mercantil.
Smith: el valor-trabajo es el precio sólo en el estado primitivo y rudo.
Ricardo: el valor-trabajo es una aproximación al precio en el capitalismo.
Proudhon: el valor-trabajo es el precio en una sociedad ideal.
Marx: el valor-trabajo es la sustancia del precio en el capitalismo.

Advertimos que siempre hemos usado nuestros términos y no los de cada autor, que como es natural el pensamiento de una persona evoluciona con el tiempo pero sólo exponemos las que podríamos llamar posiciones culminantes[217], y que además las hemos destilado en

[216] Véase Marx [3], en especial el comentario al punto I 3.
[217] que no siempre son las últimas; nos referimos más concretamente al Smith de *La riqueza de las naciones*, al Ricardo de la tercera edición de los *Principios*, o al Marx de *El capital*. Además de la propia evolución de

unas formas más coherentes y claras de las que a veces pueden leerse en los originales[218]. También hay que señalar que lo que hemos tratado como escuelas uniformes (aristotélicos, smithianos, ricardianos, socialistas ricardianos) distan claramente de serlo, pero un análisis específico de cada autor requeriría mucho espacio. Además la sucesión de opiniones que hemos descrito, concatenándose entre sí, es sólo una simplificación; el pensamiento económico real ha evolucionado de una manera mucho más caótica, con superposiciones y retrocesos, con ideas olvidadas y después recuperadas, y por eso no hemos seguido estrictamente el orden cronológico. Siempre debe tenerse en cuenta que el desarrollo de la ciencia no resulta a sus contemporáneos tan claro como las exposiciones realizadas muy *a posteriori*.

Para ilustrar en términos modernos las diferentes posiciones podríamos decir que una teoría del coste de producción sería VN y que un modelo del "estado primitivo y rudo" sería TE cuando no hay explotación ni excedente (cuando ε es igual a 1, y en general sólo entonces es equivalente a VN con α igual a 1). TE sin explotación sería también un modelo de la sociedad ideal de Proudhon.

Y para intentar simplificar la exposición abusaremos en lo que resta del capítulo de las notas al pie; sugerimos una primera lectura prescindiendo de las notas.

23.6.1 Planteamientos normativos

La influencia de los planteamientos éticos o normativos ha sido mayor de lo que generalmente se reconoce y así muchos autores utilizan argumentos de esta naturaleza tanto para defender el capitalismo como para atacarlo. Pero hay discrepancias entre los que mantienen planteamientos ético-normativos sobre cual es el contenido o la interpretación de los mismos, e incluso postulados defendidos por determinados autores son negados por otros. En consecuencia es dudoso que puedan definirse criterios de tipo normativo aceptables de manera unánime.

---

cada autor hubiera sido interesante estudiar las interpretaciones de que fueron objeto, en especial el Smith de Ricardo, y el Smith y el Ricardo de Marx, porque no coinciden con la nuestra en todo.

[218] Por ejemplo, en Smith hay también referencias a Locke y al aristotelismo normativo; y en Ricardo un intento de análisis de cómo se modifican los precios ante una variación de los salarios, lo que puede entenderse como un rudimento de la "transformación". Por todo lo dicho es obvio que estaríamos falsificando a estos autores si afirmáramos que nuestras reconstrucciones son perfectamente fieles. Describimos posiciones coherentes y claras donde a veces hay evolución en el pensamiento, vacilaciones, oscuridad, e incluso contradicciones. En definitiva, hacemos una reconstrucción más que una exposición. Quién desee saber lo que dijeron realmente Smith, Ricardo, Marx, etc. debe estudiar los originales.

Por ejemplo, algunos autores postulan que el trabajador debe ser retribuido en equivalencia a lo que produce su trabajo; pero unos dicen que esto ya ocurre en el capitalismo, porque el trabajador recibe su producto (marginal), otros afirman que no es éste el caso, ya que el excedente es apropiado por terratenientes y capitalistas[219], y por fin otros niegan que deba aplicarse este postulado[220]. Además prácticamente todos estos

[219] Ni unos ni otros imaginaron que pudieran tener razón a la vez. Efectivamente, como señalamos en §7.4 y cuando no imponemos flujos al sistema, en VN el coste laboral (marginal) es igual al producto (marginal) que va a obtenerse del uso del trabajo, como con cualquier otro insumo. Pero fijémonos que en VN el excedente medido en precios es nulo, incluso cuando estamos ante un crecimiento, porque los precios cumplen la ley del interés compuesto con un tipo de interés igual a la tasa de expansión. Así que el hecho de que todos los insumos reciban su producto (marginal), que no haya excedente en términos de precios, no significa que no haya excedente en términos físicos y que éste no sea apropiado por capitalistas y terratenientes. Por lo tanto que los trabajadores reciban su producto (marginal) medido en los precios de VN es compatible con que las jornadas sean mayores que las necesarias, como se evidencia desde TE. Si para medir el excedente usáramos unos valores que no cambiasen con el tiempo en VN con crecimiento todos los insumos, también los trabajadores, recibirían menos de su producto (marginal).
Observemos que el precio de los insumos es igual a producto marginal, y esto es así para los trabajadores, para las máquinas o para la tierra; pero el consumo de los capitalistas y terratenientes no es un insumo. Además nos hemos limitado al caso en el que al sistema no se le imponen unos flujos de materias; cuando estos flujos sí se imponen entonces el beneficio marginal, en términos de insumos y productos y sin contar con estos flujos, no será en general nulo, como vimos en §13.2.3, y sí puede existir excedente en términos de precios.

[220] Así Marx no acepta este postulado, el "a cada uno según su trabajo" de los socialistas ricardianos o Proudhon, y mantiene en cambio el "a cada uno según sus necesidades" como criterio para su socialismo. Los primeros críticos del capitalismo solían oponerse al "robo" del excedente repartido de acuerdo al capital y por ello solían apoyar el primero de los criterios, pero hoy en día la mayoría de los críticos apoya el segundo y de hecho una parte de la asignación en algunos capitalismos se establece ya de acuerdo con este segundo criterio (sanidad pública, pensiones de incapacidad, etc.).
Se ha defendido el carácter normativo de otros criterios como el *Óptimo de Pareto*, que es aquella distribución en la que no es posible que algún sujeto mejore su situación sin que otro la empeore, e incluso se ha afirmado que el mecanismo mercantil acaba produciendo una distribución así. Pero también este criterio ha sido cuestionado ya que por ejemplo, si como a menudo se supone los intercambios sólo se realizaran cuando los individuos salieran ganando personalmente con ello, una persona que estuviera incapacitada para trabajar y que no tuviera propiedades no obtendría nada en los intercambios porque tampoco tendría nada que ofrecer; entonces estaríamos ante un Óptimo de Pareto pese a que esa persona muriera de hambre, situación que ha sido considerada por algunos autores como Locke como contraria a principios éticos. No obstante este criterio puede ser útil como un análisis positivo de los intercambios, e incluso puede entenderse como una ampliación del estudio de Aristóteles de las condiciones en los que se desarrollan.
En definitiva, no parece que pueda definirse un criterio normativo aceptable de forma unánime.
Por otra parte hacemos notar que para Marx y Engels los valores-trabajo eran unas magnitudes que no debían usarse en la planificación y, frente a Proudhon, afirman que "querer suprimir la forma de producción capitalista por el procedimiento de restablecer el 'verdadero valor' es […] querer fundar una sociedad en la que los productores dominen por fin a sus productos, mediante la realización consecuente de una categoría económica que es la más acabada expresión del sometimiento de los productores al producto". En su socialismo "el plan quedará finalmente determinado por la comparación de los efectos útiles de los diversos objetos de uso entre ellos y con las cantidades de trabajo necesarias para su producción. La gente hace todo esto muy sencillamente en su casa, sin necesidad de meter de por medio el célebre 'valor' " (Engels [1b], páginas 307 y 308). Por lo tanto, aunque Marx y Engels entendieron que las categorías mercantiles no son una necesidad lógica, que los valores-trabajo que resultan de las recetas usadas en el capitalismo no tienen que ser utilizados en el socialismo y que éste no tiene que asemejarse necesariamente a una producción mercantil simple, también parece obvio que tenían una visión muy *naïf* de la planificación. Que podamos planificar de forma directa una economía doméstica sencillamente, sin usar mecanismos como el mercantil,

planteamientos están orientados a la defensa o al ataque político del capitalismo, pero rara vez han contribuido a la mejora de la comprensión de su dinámica, y por el momento tampoco parece que hayan ayudado gran cosa a definir una sociedad alternativa.

23.6.2 Smith

Smith piensa que el trabajo humano crea todo el producto, pero que en la "sociedad avanzada" una parte del mismo acaba en manos de capitalistas y terratenientes y ello determina que los valores-trabajo no sean los precios. Las tres clases sociales (trabajadores, capitalistas y terratenientes), propietarias de lo que más adelante se llamaron sus "factores de producción" (el trabajo, el capital y la tierra), reciben su correspondiente "recompensa" (el salario, el beneficio y la renta). Pero el beneficio y la renta son en realidad una "deducción" del producto del trabajo. Por ello el precio de una mercancía no es la cantidad de trabajo necesario para producirla, como ocurría en el "estado primitivo y rudo", sino la cantidad de trabajo que puede *purchase or command*, que puede adquirir u ordenar, en estas condiciones. Smith analiza pues el precio en relación con la distribución, como la suma de lo que recibe cada clase, la suma de salarios, beneficios y rentas[221], construye lo que podríamos llamar una sociología del precio. Además Smith señala el posible uso de los valores-trabajo como índices que permitirían comparar precios en diferentes situaciones y también como medida del "valor real", del sacrificio que cuesta

no significa que resulte también sencillo hacer esto mismo con la economía de todo un país. Parece claro que Marx y Engels subestimaron la necesidad de un mecanismo económico que usara una contabilidad y unos valores para establecer una asignación (la contabilidad en la que parecían pensar consistía más bien en el cumplimiento de los balances materiales). No obstante, en alguna ocasión sí se muestran más conscientes de esta necesidad; por ejemplo, véase el prefacio de Engels a Marx [4], donde se crítica la falta de un regulador en la utopía de Rodbertus que actúe de manera análoga al mecanismo mercantil para establecer las cantidades consumidas y producidas. Además debemos recordar que Marx nunca pretendió saber cómo debería funcionar el socialismo y que siempre fue muy prudente en esta cuestión.

[221] Véase [3], libro I, capítulo VI. Smith no incluye el capital no salarial porque supone que se puede descomponer a su vez en salarios, beneficios y rentas. Anotando como $\mathbf{S_b}$ la matriz que describe los beneficios y $\mathbf{S_r}$ la que describe las rentas, los precios según Smith (bajo producción simple y prescindiendo de la descomposición) son la suma

$$\mathbf{Y = (C + V + S_b + S_r)\, Y}$$

aunque por supuesto Smith no escribió tales ecuaciones, ni parecía consciente de que fueran necesarias. Es posible que Smith pretendiera descomponer $\mathbf{C\,Y}$ con algo parecido a una substitución sucesiva

$$\mathbf{Y = (V + S_b + S_r)\, Y + C\, Y = (V + S_b + S_r)\, Y + C\,(V + S_b + S_r)\, Y + C^2\, Y = (V + S_b + S_r)\, Y + C\,(V + S_b + S_r)\, Y + C^2\,(V + S_b + S_r)\, Y + C^3\, Y = \ldots = (I + C + C^2 + C^3 + \ldots)\,(V + S_b + S_r)\, Y}$$

No entraremos a explicar su teoría particular de los salarios, los beneficios y las rentas. En nuestro tiempo se suele partir como datos sólo de los insumos, pero ya los discípulos de Smith caminaron hacia una teoría del precio como proporcional al precio de los insumos. En términos modernos esto equivaldría a las condiciones de máximo de VN para los procesos que operan; pero, por supuesto, seguimos ante un sistema de ecuaciones, que estos autores no llegaron a escribir y de cuya necesidad tampoco parecían conscientes.

producir algo (idea que tendrá desarrollos muy divergentes, algunos en la dirección de la "desutilidad" del trabajo[222] y otros como un estudio de la eficiencia social).

Por supuesto, la crítica de los ricardianos a las teorías del coste de producción tiene su base en que a principios del XIX no se conocían las ecuaciones de los precios, lo que determinaba que estas ideas cayeran en un círculo vicioso[223]. Desde nuestra perspectiva es evidente que sin ecuaciones no puede conseguirse una teoría aceptable en esa dirección[224].

23.6.3 Ricardo

Ricardo se enfrenta al problema de intentar aproximar unos precios sin disponer de ecuaciones, y para ello intenta reducir todos los insumos a uno, el trabajo, en una forma que sorprende por su habilidad[225]. Primero, pudiera parecer que una teoría del valor-trabajo no puede tratar con diferentes tipos de trabajo; pero Ricardo señala que la escala de los coeficientes de reducción no cambia demasiado con el tiempo, por lo que podemos usar los calculados en el pasado en términos de precios observados[226]. Segundo, pudiera parecer que no puede dar cuenta del precio de los productos agrarios por la presencia de la renta de la tierra (ni de los precios de los minerales y demás materias primas, por la renta

[222] En este sentido, véase Jevons [1], capítulo V. Trataremos este aspecto en un capítulo que añadiremos en futuras ediciones sobre la relación entre "utilidad subjetiva" y precio.

[223] Los críticos de la escuela smithiana señalan también la circularidad de versiones más avanzadas de la teoría del coste de producción como la de Torrens. Véase por ejemplo Ricardo [1], volumen IX, carta 544 a McCulloch del 21 de agosto de 1823, y Marx [2b], volumen III, página 64, "En realidad es un lindo *cercle vicieux* el querer determinar el valor de la mercancía por el valor del capital, ya que el valor del capital equivale al valor de las mercancías que lo forman. Tiene razón *James Mill* cuando replica a este muchacho [a Torrens] lo siguiente: '*Capital es mercancía*, y decir que el valor de las mercancías se determina por el valor del capital equivale a decir que el valor de una mercancía se determina por el valor de ella' ". Fijémonos en que los críticos no negaban que el precio fuera la adición de insumos, beneficios y rentas, o proporcional al coste de producción, sino que a partir de estas ideas se hubiera construido una teoría satisfactoria del precio.

Se han confundido mucho las posiciones de smithianos y ricardianos, sobre todo desde la amalgama que intentó John Stuart Mill. Así la crítica de Walras o de Jevons de que se intenta deducir varias incógnitas de una sola ecuación tiene sentido en lo que respecta a los primeros smithianos, pero en realidad esta crítica es una variante de la que ya hicieran los ricardianos y Marx.

[224] Se ha señalado algún algoritmo que, pudiéndose deducir de las ecuaciones, puede entenderse como una forma de calcular los precios sin ellas, como la *reducción a cantidades de trabajo fechado* de Dmitriev-Sraffa, que bajo producción simple y con un único tipo de trabajo resulta

$$\mathbf{Y} = (1+i)\,\mathbf{L} + (1+i)^2\,\mathbf{C}\,\mathbf{L} + (1+i)^3\,\mathbf{C}^2\,\mathbf{L} + (1+i)^4\,\mathbf{C}^3\,\mathbf{L} + (1+i)^5\,\mathbf{C}^4\,\mathbf{L} + \ldots$$

(observemos que cuando el tipo de interés i es 0 los precios coincidirán con los valores-trabajo ya que entonces nos queda la serie del "método histórico" vista en §4.1). Pero este procedimiento no es general y además no puede aplicarse sin conocer previamente el tipo de interés, que es parte del problema.

[225] Una interpretación de Ricardo especialmente clara en términos más modernos se encuentra en Cassel [1], capítulo VIII.

[226] Véase Ricardo [2], capítulo I, sección II. Pero este planteamiento, que sigue al de Smith, no sólo implicaría una aproximación sino también caer en una circularidad, si pretendemos una teoría de los precios a partir de los valores-trabajo. No obstante la reducción sí puede hacerse con ecuaciones, como vimos en §4.2.

correspondiente); pero señala que la producción también se efectúa en la tierra menos rentable, que no paga renta, por lo que haciendo el cálculo en esta situación prescinde de este factor[227]. Y tercero, pudiera parecer que no es capaz de tratar la existencia de beneficios; pero indica que bajo determinadas condiciones los beneficios son proporcionales a las cantidades de trabajo[228]. Por lo tanto cuando conocemos los coeficientes de reducción, haciendo el cálculo con los procesos que no pagan rentas y cuando los beneficios son proporcionales al trabajo, podemos calcular los precios como proporcionales a los valores-trabajo.

Pero hoy es evidente que para calcular los valores-trabajo también hay que resolver un sistema de ecuaciones, salvo en casos muy simples, por lo que la crítica de circularidad puede aplicársele al propio Ricardo. Por otra parte los smithianos y Marx tienen razón al afirmar que en el capitalismo los precios pueden diferir considerablemente de los valores-

[227] Véase [2], capítulos II y III. Ricardo supone que para cada producto agrario o minero se usan en la producción una gradación de tierras o de minas con diferentes rentabilidades, pero que siempre existe alguna baldía y que por ello hay un tipo que se utiliza en la producción pero por la que no se paga renta. En definitiva, para decirlo en nuestros términos, Ricardo supone que existe un tipo de tierra que puede incorporarse desde el entorno, cuyo precio es por ello sólo su coste de preparación, y que se usa en la producción. Pero es evidente que éste no es el caso en general, ya que es posible que toda la tierra adecuada para un determinado cultivo esté ocupada y que en toda se pague renta. Y la renta afectará al precio del trigo, al de la harina, al del pan, etc. No obstante, y para ser justos con el talento de Ricardo, recordemos que VN también tiene problemas con las materias "escasas", y que estudiar estas materias de manera apropiada implicar tratar con comportamientos no-simples. Un intento de usar el planteamiento de Ricardo para tratar las rentas con las ecuaciones de los precios lo tenemos en Sraffa [1].

[228] Si para producir dos materias se consumen insumos en un instante inicial con el mismo precio y valor-trabajo pero con diferentes composiciones orgánicas y los procesos muestran el mismo tiempo de producción, la materia cuyos insumos muestren la menor composición orgánica tendrá un valor-trabajo mayor que la otra y sin embargo sus precios serán los mismos. Por lo tanto tendríamos beneficios iguales con diferentes cantidades de trabajo.

Si para producir dos materias se consumen los mismos insumos en un instante inicial pero los productos son obtenidos con una diferencia de t años, ambas materias tendrán la misma cantidad de trabajo incorporado, los mismos valores-trabajo, pero el precio de la materia que se produce después será $(1+i)^t$ veces el precio de la que se produce antes, donde i es el tipo de interés anual. Por lo tanto tendríamos beneficios diferentes con iguales cantidades de trabajo.

Las condiciones de Ricardo para la proporcionalidad entre el beneficio y las cantidades de trabajo con una tasa de beneficio positiva son precisamente que los procesos muestren las mismas composiciones orgánicas y los mismos tiempos de producción. Si una de las condiciones no se cumple los precios no serán tampoco proporcionales a los valores-trabajo. Para simplificar la exposición señalamos estas condiciones sólo para el caso en el que el consumo de los insumos se produce al inicio del proceso y la producción de los productos al final del mismo, pero en general hay que tener en cuenta también las estructuras temporales de los procesos y la existencia de materias duraderas; véase [2], capítulo I, secciones IV y V.

Hacemos notar que en este punto es donde hemos reconstruido más a Ricardo. En alguna ocasión pareciera que para éste la elección del trabajo como "insumo representativo" no era sólo una cuestión de utilidad metodológica, sino vinculada a ideas que hemos atribuido a otros autores. Pero en contraste a veces señala la distancia a sus condiciones (y su efecto con la variación de los salarios) como causa del precio además del trabajo, aunque no explica cómo tomarla en cuenta. Por eso hemos preferido la interpretación de los valores-trabajo como aproximación, a la que Ricardo también se refiere de manera explícita; véase [1], volumen IX, carta 548 a Mill del 30 de agosto de 1823.

trabajo (incluso haciendo el cálculo con los procesos que no pagan rentas). Y, sobre todo, hoy en día un planteamiento ricardiano no tiene sentido desde el momento en que sabemos calcular directamente unos precios que sí son compatibles con la ley de la rentabilidad.

23.6.4 Marx[229]

Para Ricardo el trabajo humano es un insumo como los demás y no posee ninguna propiedad especial, pero para Marx sí tiene la propiedad real y específica de crear el nuevo valor, algo que no ocurre con ningún otro insumo[230]. Según Marx sólo los humanos pueden producir nuevo valor, porque el excedente existe gracias a que las jornadas están extendidas por encima de las necesarias; por ello si un buey y un campesino empujan un arado sólo el humano crea nuevo valor. Este axioma[231] hoy en día parece increíble, una

[229] Podríamos decir que Marx intenta una síntesis superadora (o hegeliana) frente a la escuela smithiana y a la ricardiana. Marx les da la razón a ambas escuelas cuando señalan las dificultades de la otra, pero construye sobre lo que cree que hay de positivo en ellas.
Otro intento de síntesis de estas escuelas fue el de John Stuart Mill. Pero aquí deberíamos hablar más bien de síntesis ecléctica, o incluso sincrética, porque se defiende el precio como coste de producción, sin subrayar el problema de la circularidad, y a la vez se justifica un análisis a partir del valor-trabajo señalando que el trabajo es el insumo más importante, sin subrayar la discrepancia entre la ley ricardiana y los fenómenos. No se reconoce la oposición entre tesis distintas y simplemente se afirma que todos tienen razón.

[230] Para Ricardo los valores-trabajo son una forma de aproximar los precios y por eso efectúa su cálculo en las condiciones peores (por ejemplo, en la producción eficiente con la tierra menos rentable) porque será entonces cuando mejor respondan a ese fin. Pero para Marx los valores-trabajo son parte del estudio de cómo se produce el valor del excedente y por eso los calcula en las condiciones medias (en las producciones eficientes con todas las tierras) y no en las peores.

[231] Su origen histórico estriba en que algunos autores afirmaban que el excedente era producido por el conjunto del capital mientras que otros decían que era producido por el trabajo. La primera postura la defendían Ricardo y algunos smithianos (salvo Smith), mientras que la segunda Smith, Sismondi, los ricardianos (salvo Ricardo), los "socialistas ricardianos", Proudhon, Rodbertus, Thünen, o incluso John Stuart Mill. En realidad estos últimos autores sabían perfectamente que desde un punto de vista físico los trabajadores no producían en un sentido estricto nada, sino que formaban parte de un proceso de transformación en el que intervenían muchos otros insumos. Pero, como Smith, pensaban que este proceso de transformación estaba "protagonizado" por el trabajo, o que por lo menos resultaba inconcebible sin él, y que el excedente debía entenderse como una deducción del resultado del trabajo. Incluso se señaló que lo que hoy llamamos problema de la asignación consistía ante todo en la tarea de distribuir el trabajo humano en las diferentes actividades. Y muchos autores habían defendido que era el trabajo humano lo que daba valor o agregaba valor a las cosas, como Locke, o que el capital era el resultado del trabajo pasado. Como además en el "estado primitivo" o en una sociedad sin excedente los precios eran los valores-trabajo y como la ley ricardiana afirmaba que el valor del excedente era proporcional a la cantidad de trabajo utilizado, los "socialistas ricardianos" pasaron a defender que era el trabajo humano lo que creaba o provocaba o producía el valor del excedente y, apoyándose en postulados éticos de orden aristotélico, que éste después era robado por los propietarios, en contradicción con el "derecho del trabajador a su producto íntegro". El trabajo humano de ser una aproximación o un intento de explicación en primera instancia del valor como en Ricardo pasó a ser su causa, en un sentido fuerte, y el excedente de ser una "deducción" como en Smith pasó a ser un robo o un expolio del trabajo. Por lo tanto en los "socialistas ricardianos" la teoría del valor se vinculó a una teoría de la explotación con fundamentos éticos.
Para Marx la teoría de la explotación no era un análisis ético del "robo" del producto del trabajo sino un estudio del proceso de producción del excedente (entre otros aspectos; también era una sociología de la asignación, como en nuestra visión). La extensión de las jornadas por encima de las necesarias era lo que determinaba que existiera excedente y por ello la tasa de explotación (y plusvalía) era la variable clave de la que había que partir para entender el funcionamiento del capitalismo. Según Marx los capitalistas pagaban lo que costaba producir los insumos, también en el caso de la "fuerza de trabajo"; pero gracias a la capacidad

especie de antropocentrismo injustificado, porque no se entiende qué pueda tener el trabajo humano de especial que permita afirmar tal propiedad[232]. Desde luego podemos descartar una especificidad física del trabajo humano y sólo cabría imaginar la posible existencia de algún proceso o mecanismo en el capitalismo que determinara que operase la ley ricardiana.

En determinados sistemas sociales efectivamente existen procesos que permiten entender que los precios resulten proporcionales a los valores-trabajo. Así en el "estado primitivo" de Smith si el precio del castor fuera menor que el de dos ciervos los cazadores abandonarían la caza del castor por la del ciervo hasta que los precios se correspondieran al trabajo que cuesta cada caza. También se entiende el proceso en condiciones parecidas, como en una producción mercantil simple. En el capitalismo Marx basa en la competencia entre capitales, que ya señaló Smith, el que opere la ley de la rentabilidad en la circulación del excedente. Pero Marx no detalla un proceso en el capitalismo que permita entender el motivo por el que la ley ricardiana deba regir la producción del valor del excedente.

Podría pensarse que en el capitalismo, y en otras sociedades, existe excedente porque las jornadas se extienden más allá de las necesarias y que esto supondría una justificación de la ley ricardiana. Pero aunque estemos ante jornadas mayores que las necesarias esta situación no puede afirmarse como la causa de que exista el excedente (ni el valor), ya que con TE también podríamos calcular cuánto pueden reducirse las jornadas sólo para determinados tipos de trabajo, sin tomar en consideración otros, y eso no supone que los trabajadores que sí hemos incluido causen la existencia del excedente mientras que los otros no. Además que puedan calcularse las cantidades de trabajo necesario para producir

---

del trabajo de crear el excedente obtenían la plusvalía. Por lo tanto en Marx se mantiene el vínculo entre la teoría del valor y la de la explotación, concebidas como facetas que no podían entenderse sino como parte de un todo único, aunque *El capital* fuera un estudio de las leyes de movimiento del capitalismo y no de su justicia.

Nosotros en cambio concebimos la teoría de la explotación y la de los precios como problemas diferentes y no facetas de una misma teoría. En esto coincidimos con Tugán aunque, a diferencia de las posiciones de este autor, para nosotros los valores-trabajo sí forman parte de la teoría de la explotación.

[232] Podría pensarse que TE es también un antropocentrismo injustificado, ya que tratamos a los seres humanos y a sus jornadas de manera distinta al resto de los insumos. La diferencia estriba en que para Marx el "capital variable" tiene la propiedad efectiva y real de crear el valor del excedente mientras que en TE el "capital variable" lo es sólo porque es el que nosotros variamos. Nosotros no decimos que el trabajo humano tenga propiedades diferentes del resto de los insumos en ningún sentido, y más concretamente no decimos que cree el valor del excedente. Sólo estudiamos la relación entre el trabajo de la Humanidad y la Economía, y en ese sentido hacemos un antropocentrismo que creemos justificado. Por lo tanto no nos oponemos a un análisis desde una perspectiva antropocéntrica, pero sí a la atribución de propiedades antropocéntricas a un sistema real que no las posee.

cada materia no es una especificidad del trabajo humano porque también pueden calcularse los valores-trigo y también serían los precios en el "estado primitivo y rudo"[233].

Se ha sugerido que una parte fundamental de la asignación, en el capitalismo y en otros sistemas sociales, se refiere al trabajo humano y que esto justifica un análisis a partir de los valores-trabajo[234]. Pero, como señaló el propio Marx, el capitalismo es un sistema deshumanizado y la asignación del trabajo en este sistema no obedece leyes diferentes de las que afectan al resto de los insumos ni da cuenta de un posible proceso que permita

[233] Podemos definir las cantidades de trigo necesario, o de cualquier otro insumo, bajo producción simple y con un único tipo de trigo, de forma similar a como definimos las cantidades de trabajo necesario en §4.1, pero escribiendo en **L** las cantidades de trigo directamente necesarias y en **C** el resto de los insumos (con una notación diferente véase Vegara [1], página 56 y siguientes).
Generalizaremos esta definición escribiendo **C** como arriba, esto es, como la matriz **A** pero haciendo 0 la columna correspondiente al trigo (o columnas, si hay varios tipos), definiendo $\mathbf{V} = \mathbf{A} - \mathbf{C}$, escribiendo en **B** los productos y resolviendo las ecuaciones de TE para estas matrices.
Por ejemplo, para las recetas de §1.1 la solución de TE-trigo (incluyendo el consumido por los trabajadores) resulta $\varepsilon = 1.4375$, $\mathbf{X} = [0.5, 0.5, 0]$, $\mathbf{Y} = [0.0072, 0.1033]$ y la de TE-hierro resulta $\varepsilon = 1.5526$, $\mathbf{X} = [0.2892, 0.7108, 0]$, $\mathbf{Y} = [0.0107, 0.1696]$. Que el factor de explotación-trigo sea $\varepsilon = 1.4375 = 23/16$ nos informa de que 16/23 del trigo existente es necesario y 7/23 es excedente; esto es, de que puede extraerse del sistema 7/23 del trigo existente manteniendo un estado estacionario, o también de que puede aumentarse el consumo de trigo en 23/16. Las intensidades-trigo nos informan de cómo tendría que ser la estructura económica en esa situación, y los valores-trigo de cuales serían entonces los valores. Vemos que para extraer la máxima proporción de trigo la estructura económica ha de ser muy diferente de la que se corresponde a la extracción de la máxima proporción de hierro, y también diferente de la estructura del crecimiento máximo. Igualmente los valores serán distintos en cada situación.
Es fácil ver que en un sistema sin excedente, si ε es 1, los valores-trabajo son proporcionales a los valores-trigo o a la cantidad directa e indirecta de cualquier otro insumo que sea necesario. Que en el estado primitivo los precios tiendan a ser proporcionales a los valores-trabajo no es pues una especificidad del trabajo humano, ya que sin excedente los precios serán proporcionales a la cantidad directa e indirecta necesaria de cualquier otro insumo. Y que el factor de explotación-trigo sea mayor que 1 no significa que sólo el trigo produzca el valor del excedente.
No nos detendremos en el análisis de TE-insumo, pero de todas maneras el desarrollo teórico que hemos realizado con TE para el trabajo puede aplicarse directamente para otro insumo o para una combinación de insumos. Así las fórmulas de los valores-trabajo del capítulo 6 lo son también de los valores-trigo, tomando en consideración la definición correspondiente de las matrices **C**, **V** y **B**. También puede calcularse usando el formalismo de TE cuánto podría aumentarse o reducirse cualquier combinación de insumos o productos.
Podemos calcular asimismo los individuos que pueden extraerse de una población manteniéndose ésta en un estado estacionario, problema que se conoce en la literatura como *Teoría de la cosecha*. Aquí **B** es una matriz de Leslie, **C** una matriz identidad y **V** una matriz diagonal con las proporciones relativas extraídas de cada edad. Por ejemplo, si sólo extrajéramos individuos recién nacidos **V** sería una matriz nula salvo su primer elemento; si extrajéramos individuos de todas las edades en la misma proporción **V** sería la matriz identidad.
Y hacemos notar que si resolvemos TE escribiendo en **V** la matriz **A** tendremos que su solución será equivalente a la de VN; los precios de VN pueden interpretarse pues como "valores-todos los insumos", incluyendo los que simbolizan la evolución temporal de los procesos. Así pues VN puede entenderse como un caso particular de TE, y el crecimiento máximo como la extracción de todos los insumos en la proporción adecuada que permite la mayor replicación del sistema.
[234] Se han formulado varios argumentos parecidos a éste, que subrayan la centralidad del trabajo humano, pero el más interesante lo encontramos en Marx [1b], página 53 o página 215 y siguientes, en donde se señala el trabajo en cualquier sistema social como "un proceso entre el hombre y la naturaleza en que el hombre media, regula y controla su metabolismo con la naturaleza". Pero esta perspectiva da un protagonismo a la Humanidad que no tiene en el capitalismo y tampoco da cuenta de la razón por la que el trabajo humano produce el nuevo valor.

entender que el trabajo produzca el nuevo valor. No obstante sí son imaginables sistemas en los que el trabajo humano jugase un papel específico, porque por ejemplo los humanos tuvieran el control de la asignación y posibilidades de tratar su trabajo de manera diferente a otros insumos. Pero éste no es el caso en el capitalismo; el capitalismo no es un sistema antropocéntrico y por lo tanto una teoría que pretenda describir su comportamiento tampoco puede serlo[235].

Como vemos no parece que exista en el capitalismo un proceso o mecanismo que dé cuenta de la ley ricardiana, y además los argumentos con los que Marx intenta justificar la plausibilidad de su axioma no son nada convincentes[236]. No obstante un postulado no necesita de más justificación que la adecuación de la teoría construida sobre él a los

[235] Entiéndasenos bien, no es que consideremos inadecuado plantear una perspectiva antropocéntrica, es que el capitalismo no es un sistema antropocéntrico. Una teoría antropocéntrica de los precios en el capitalismo tiene tanto sentido como una teoría antropocéntrica de la gravedad. Marx tenía una visión demasiado benevolente del capitalismo al pensar que en su funcionamiento las cantidades de trabajo humano se reflejaban en los precios, aunque fuera de manera transformada.

[236] Un primer argumento está basado en la observación de Aristóteles (1133b) de que las mercancías se comparan cuantitativamente entre sí en el intercambio por lo que deben tener algo en común. Pero éste algo en común no es ninguna propiedad física de las mercancías, ya que en el intercambio estas propiedades se abstraen. Por lo tanto la propiedad en común que tienen las mercancías y que las hace comparables cuantitativamente en el intercambio sólo puede resultar que son producto del trabajo humano.

El segundo es otro razonamiento por exclusión. Para explicar la existencia del beneficio tenemos que partir de que las cosas deben venderse a su valor, ya que aunque los capitalistas se robaran entre sí no conseguirían crear un beneficio en conjunto. Pero los insumos no laborales sólo transfieren su valor a los productos, y por ello son un capital "constante". Así que para que haya un beneficio es necesario que el otro insumo, el trabajo humano, sea un capital "variable", que tenga la propiedad de crear el nuevo valor.

Un tercer argumento, apenas esbozado, se basa en una supuesta tendencia a igualar las tasas de plusvalía sectoriales, porque los trabajadores emigrarían de los sectores con mayor explotación a los de menor.

Al primer argumento hay que objetar que muchas mercancías no son producto del trabajo humano y sin embargo tienen precio, como por ejemplo la tierra. Y que hay muchas otras propiedades que las mercancías tienen en común, como por ejemplo que del uso de todas cabe esperar un beneficio o una pérdida. Además el propio Marx señala que los precios divergen de los valores-trabajo, por lo que en todo caso esa propiedad sería también diferente de los trabajos necesarios. (Ya señalamos que en VN el precio es precisamente el beneficio que se va a obtener de la materia.)

Al segundo que de igual manera podríamos haber "deducido" que el capital no laboral es el que crea el nuevo valor. (Hacemos notar que en VN el beneficio en precios es nulo y que todos los insumos están en pie de igualdad. No nos detendremos en este punto pero uno de los problemas que preocuparon a los clásicos fue explicar la "realización" del beneficio, explicar como era posible que existiera una ganancia y que se cumpliera a la vez el intercambio entre iguales. Algunos autores negaron que en un capitalismo sin consumidores improductivos o sin acceso a mercados exteriores fuera posible el beneficio o el crecimiento.)

El tercer argumento sí describiría un proceso que permitiría entender que los valores-trabajo fueran los precios, a diferencia de los dos primeros. Pero el propio Marx dice que los trabajadores en el capitalismo no pueden medir directamente la explotación a la que están sometidos, por lo que no se entiende como podría realizarse tal proceso. Y además en el capitalismo se observa que los trabajadores se desplazan desde los sectores donde los salarios son menores a donde son mayores, pero esta migración no depende de la tasa de plusvalía o explotación.

hechos, pero sobre el axioma de Marx no se ha construido una teoría que describa eficazmente la realidad[237].

Por otra parte la propia idea de que el valor sea algo que se puede "producir" parece en sí increíble; siendo benevolentes podemos considerarla una metáfora desafortunada. Y, aunque los precios en el capitalismo pudieran concebirse como transformación de otras magnitudes menos evidentes, la misma diferenciación entre un proceso de producción y un proceso de circulación del valor, obedeciendo además leyes distintas, parece que sólo podría tener sentido si el valor fuera una realidad física material, como un líquido o un sólido que puedan ser producidos y después distribuidos; pero es obvio que éste no es el caso.

Además hoy sabemos que sí es posible construir una teoría del coste de producción (y del ingreso de consumo) no circular sin tomar en consideración el axioma de Marx, lo que es una prueba clara de que éste no se corresponde con una propiedad real. Si ésta propiedad fuera real Marx tendría razón en que una teoría del coste de producción no podría construirse, no por lo menos con la sencillez con la que construimos VN[238]. Y a la hora de plantear VN no hacemos ninguna distinción entre el trabajo humano y el resto de los insumos, hasta el punto de que VN tiene solución y muestra precios incluso para una economía totalmente automatizada, donde no existe trabajo humano. En definitiva, es concebible una economía automática con crecimiento y precios; si los precios tuvieran como sustancia los valores-trabajo esto no podría ser así[239].

---

[237] En otras ramas de la ciencia es habitual partir de axiomas que no son nada evidentes. Por ejemplo, la hipótesis heliocéntrica de Aristarco y Copérnico choca con la evidencia "aparente" o "superficial", que diría Marx, de una Tierra inmóvil y de un Sol desplazándose por el firmamento. Fue el desarrollo de la teoría a partir de los postulados, su adecuación a los hechos y su simplicidad, lo que justificó la hipótesis de Copérnico, por lo menos hasta que se encontraron pruebas directas del movimiento terrestre unos siglos después. Marx era un trabajo-céntrico que quizá creyera poder justificar su axioma de la misma manera, pese a que "aparentemente" sólo se observe la ley de la rentabilidad, por ejemplo consiguiendo explicar los ciclos en el capitalismo a partir de su hipótesis.

[238] Marx pensaba literalmente que no partir de los valores-trabajo equivalía a renunciar a construir una teoría de los precios o de la tasa de beneficio, pero hoy sabemos que no es éste el caso. Y si Marx tuviera razón construir una teoría de los precios sin partir de los valores-trabajo sólo sería concebible usando complicados epiciclos, para seguir con la analogía con la hipótesis heliocéntrica, y no de la forma directa con la que lo hacemos en VN. Hoy es la "transformación" la que nos parece un conjunto de complicados e innecesarios epiciclos.

[239] Ya vimos en §19.2.3 una economía automática. Para las recetas de este ejemplo no existiría solución de TE ni valores-trabajo. Por lo tanto con nuestros modelos no es aplicable la afirmación de que es necesaria una tasa de explotación positiva para que exista una tasa de beneficio positiva (véase Morishima y Cathepores [1]), ya que por ejemplo para unas recetas dadas es posible que alguno cualquiera de nuestros modelos tenga solución mientras que el otro no.

Por otra parte en la "transformación", en el segundo paso de su análisis con el que pretende tomar en consideración la manera en la que la competencia provoca unos precios diferentes de los valores-trabajo, Marx comete una serie de errores, como él mismo reconoce, ya que de su procedimiento en general no resultan unos precios que cumplan con la ley de la rentabilidad[240]. No obstante el algoritmo de Marx produce unos precios que se acercan más a ley de la rentabilidad que los valores-trabajo[241]. En realidad hoy sí sabemos como "transformar" los valores-trabajo en precios[242], por lo menos bajo determinadas condiciones, pero esto tampoco es una especificidad del trabajo humano porque podemos aplicar estos métodos para "transformar" los valores-trigo en precios.

[240] Marx calcula los precios (bajo producción simple y con un tiempo de producción común) como el valor-trabajo de los insumos por 1 más la tasa de beneficio media calculada en términos de valores-trabajo. Pero el propio Marx señala que los insumos deberían establecerse en términos de precios y no de valores-trabajo y que por lo tanto su algoritmo es sólo una aproximación; [1b], volumen III, página 207, "Originariamente suponíamos que el precio de costo de una mercancía era igual al *valor*[-trabajo] de las mercancías consumidas en su producción. Pero para el comprador, el precio de producción de una mercancía es el precio de costo de la misma, y por lo tanto puede entrar como precio de costo en la formación del precio de otra mercancía. Puesto que el precio de producción puede divergir del valor de la mercancía, también el precio de costo de una mercancía, en el cual se halla comprendido este precio de producción de otra mercancía, puede hallarse por encima o por debajo de la parte de su valor global formado por el valor de los medios de producción que entran en ella. Es necesario recordar esta significación modificada del precio de costo, y no olvidar, por consiguiente, que si en una esfera particular de la producción se equipara el precio de costo de la mercancía al valor de los medios de producción consumidos para producirla, siempre es posible un error. Para nuestra investigación presente no es necesario investigar más detalladamente este punto".
Además la tasa de beneficio en valores-trabajo no necesariamente coincidirá con la tasa de beneficio en precios (como se detalla en Tugán [1b], página 185 y siguientes). En realidad esto no tiene importancia en el algoritmo, porque obtendríamos los mismos precios relativos aun prescindiendo de la tasa de beneficio, pero es un error creer como Marx que la tasa de beneficio se establece en el "proceso de producción" del excedente. Marx pensaba que era en este proceso en donde se determinaban las principales variables económicas, la tasa de plusvalía y también la de beneficio, y que el proceso de circulación y la transformación no significaban una modificación esencial sino sólo una redistribución del excedente. Desde nuestra perspectiva está claro que ésta es una equivocación fundamental.
Y es un error creer que la tasa de beneficio es el criterio de asignación en el capitalismo, aunque en esto también se equivocaron Smith, Ricardo y muchos otros autores, incluso en nuestros días (véase §4.6).
[241] En Samuelson [1] se estudian las condiciones en las que el procedimiento de Marx produce unos precios que sí cumplen con la ley de la rentabilidad. Y en Bródy [1] se sugiere iterar el algoritmo de Marx, con lo que tendríamos (prescindiendo de la tasa de beneficio, ya que no modifica los precios relativos)

$$\mathbf{Y}^{(n+1)} = \mathbf{A}\,\mathbf{Y}^{(n)}$$

Esta iteración efectivamente acaba convergiendo a los precios de la ley de la rentabilidad, pero para unos valores iniciales cualquiera, por lo que no se entiende la razón por la que tenemos que empezar precisamente con los valores-trabajo. Además esta iteración no siempre es generalizable a condiciones diferentes de la producción simple.
[242] Este aspecto estaba desarrollado en un capítulo que hemos retirado a última hora, en donde estudiábamos la relación entre nuestros dos modelos. No obstante una manera de "transformar" la solución de TE a la de VN, o viceversa, es usar el análisis de perturbaciones visto en el capítulo 15 (definiendo $\mathbf{M} = \mathbf{N} = \mathbf{C} + \mathbf{W}$ con $h = 1$ para "transformar" TE a VN, o con $h = -1$ para "transformar" VN a TE). En otros trabajos veremos que además hay otras formas de vincular nuestros dos modelos.

En definitiva, al plantear el axioma de que el trabajo humano tiene la propiedad real de crear el valor del excedente Marx se alejó más que Ricardo de nuestra perspectiva actual, pero al desarrollar un procedimiento para obtener una aproximación a los precios mejor que los valores-trabajo se nos acercó. No obstante el axioma de Marx no era ni un capricho ni una locura descabellada sino hasta cierto punto un lugar común en su tiempo, y además recordemos que la teoría alternativa del coste de producción mostraba serias dificultades sin ecuaciones. De hecho, si medimos las teorías por su capacidad para aproximar la realidad, la de Ricardo era mejor que la de los smithianos (ya que aquél podía aproximar unos precios coincidentes con los que consideramos hoy correctos bajo condiciones muy restrictivas, lo que los smithianos no podían hacer) y la de Marx mejor que la de Ricardo (porque su algoritmo de la "transformación" nos acerca a la ley de la rentabilidad). Además hay que decir que esa visión de los seres humanos produciendo el excedente, de éste circulando por la competencia, y como resultado del precio como trabajo humano transformado, aunque es claramente falsa, es también indiscutiblemente grandiosa.

Desde los comentarios de Engels a los volúmenes póstumos de *El capital* hubo algunos intentos de salvar las ideas de Marx como parte de la teoría de los precios, pero casi todos convertían a Marx o en un smithiano (el valor-trabajo como precio efectivo en sociedades precapitalistas o, algo mejor, como precio teórico aplicable a la producción mercantil simple entendida como un análisis previo del capitalismo[243]), o en un ricardiano (el valor-trabajo como una primera aproximación mejorada con la transformación), o incluso en un aristotélico-proudhoniano[244]. La idea del valor-trabajo como magnitud real en el capitalismo, como sustancia del precio consecuencia de que el valor del excedente lo produce el trabajo humano, parece que no encontró defensores después de Marx, ni siquiera entre sus supuestos discípulos.

[243] Efectivamente en una producción mercantil simple (o en un capitalismo bajo las condiciones de Ricardo) los precios serían los valores-trabajo, y sin duda puede ser interesante el estudio del capitalismo como una variación de aquel sistema. Pero este planteamiento es compatible con negar que son sólo los trabajadores quienes producen el valor del excedente y sin embargo ésta era según Marx la idea de la que había que partir para entender el funcionamiento del capitalismo.

[244] Pero las interpretaciones ricardianas y aristotélico-proudhonianas contradicen posiciones explícitas de Marx. Además de las referencias citadas con anterioridad, véase para la primera [2b], capítulos X y XX, y para la segunda [4].

24: Modelos económicos

24.1 El Tableau économique de Quesnay

El *Tableau* describe los flujos físicos y en valor entre las diferentes clases sociales y es el primer modelo económico propiamente dicho. Resulta

Insumos				Rentas				Productos		
m_1	m_2	m_3		m_1	m_2	m_3		m_1	m_2	m_3
1	1	1	+	0	1	1	→	2	3	0
1	1	0	+	0	0	0	→	0	0	2

donde los agricultores (la *classe productive*, porque produce más de lo que consume) consumen 1 unidad de m_1 (materias primas), 1 unidad de m_2 (alimentos y otros bienes de consumo) y 1 unidad de m_3 (bienes manufacturados) para producir 2 unidades de m_1 y 3 de m_2; los artesanos o industriales (la *classe stéril*, porque produce lo mismo que consume) consumen 1 unidad de m_1 y 1 unidad de m_2 para producir 2 unidades de m_3; los propietarios (la *classe des propriétaires*) consumen 1 unidad de m_2 y 1 de m_3 de la renta que reciben de los agricultores; la unidad de medida es mil millones de libras de Tours. Vemos que en términos físicos para cada materia el consumo es igual a la producción, se cumplen los balances materiales, y que en términos de valor para cada proceso los costes más las rentas son iguales a los ingresos, se cumplen los balances contables[245].

24.2 Los esquemas de reproducción de Marx

Un ejemplo de esquema de *reproducción simple* (estado estacionario) es

	Insumos				Plusvalía		Productos	
	Medios de producción		Consumo trabajadores		Consumo capitalistas		Medios de producción	Medios de consumo
I	4000	+	1000	+	1000	→	6000	
II	2000	+	500	+	500	→		3000

El sector I produce los medios de producción y el sector II los medios de consumo. Anotaremos para cada sector *i* el valor de los medios de producción como c_i, el valor del consumo de los trabajadores como v_i, el valor del consumo de los capitalistas como s_i y el valor del producto como b_i. Vemos de nuevo que en términos físicos para cada materia el consumo es igual a la producción, se cumplen los balances materiales,

$$c_1 + c_2 = b_1$$
$$v_1 + s_1 + v_2 + s_2 = b_2$$

[245] Ésta se puede entender también como una primera forma de la dualidad neumanniana, pero dejaremos el estudio de esta simetría para futuras ediciones de este trabajo.

y que en términos de valor para cada proceso los costes más el consumo capitalista son iguales a los ingresos, se cumplen balances contables; o, como diría Marx, capital constante + capital variable + plusvalía = valor de los productos

$$c_1 + v_1 + s_1 = b_1$$
$$c_2 + v_2 + s_2 = b_2$$

Los esquemas supusieron una mejora notable del *Tableau* en varios sentidos. Éste no llegó a superar el estadio de ejemplo numérico, pero Marx se acercó a un análisis algebraico del problema y así dedujo que $c_2 = v_1 + s_1$. Además el *Tableau* está centrado en las clases sociales mientras que en los esquemas los protagonistas son los sectores productivos, lo que abrió paso a los modelos multisectoriales (el propio Marx llegó a escribir esquemas con tres y más sectores). Por otra parte Marx también desarrolló el primer modelo de crecimiento proporcional, con los esquemas de reproducción ampliada, pero no nos extenderemos en esto.

24.3 Las ecuaciones de Walras

Walras realizó una primera formulación con lo que nosotros hemos llamado recetas para el caso particular de producción simple y bajo condiciones de estado estacionario. Las ecuaciones de Walras, en la versión simplificada usada por Leontief, pueden escribirse[246]

$$\mathbf{X}\,\mathbf{A} = \mathbf{X}$$
$$\mathbf{A}\,\mathbf{Y} = \mathbf{Y}$$

donde la primera expresión significa que para cada materia el consumo es igual a la producción y la segunda que para cada proceso los costes son iguales a los ingresos. Los balances materiales y contables son aquí explícitos.

Es imposible exagerar la importancia del trabajo de Walras ya que al plantear un sistema de ecuaciones, donde Quesnay escribió un ejemplo aritmético y Marx una formulación algebraica primitiva, construyó una teoría económica verdaderamente moderna. Con los sistemas de ecuaciones se abrió un enorme potencial, puesto que de las "matemáticas verbales" de los clásicos se pasó a la modelización matemática explícita, que por naturaleza es mucho más clara, rigurosa y potente. No obstante en tiempos de Walras sólo

[246] Estas ecuaciones son un caso particular de VN bajo producción simple y cuando el factor de expansión máximo es 1 (y bajo estas condiciones VN es equivalente a TE, por lo que también son un caso particular de TE). Las ecuaciones de Walras tuvieron como precedente las ecuaciones de Isnard publicadas en 1781, que desgraciadamente no tuvieron influencia en sus contemporáneos y que el propio Walras tuvo que rescatar del olvido.

era posible un estudio cualitativo de estas ecuaciones, ya que la limitación en la capacidad de cálculo y en la información empírica disponible impedía cualquier otra aplicación. Pero ya en el siglo XX los primeros ordenadores facilitaron usarlas en un primer estudio empírico de las interrelaciones de la economía, como el efectuado con el *Análisis Input-Output* de Leontief.

24.4 El modelo Von Neumann

No obstante las primeras ecuaciones de Walras tienen muchas limitaciones intrínsecas y la formulación de John von Neumann supuso una mejora muy considerable, ya que permitió atacar el problema del crecimiento proporcional, la producción conjunta (con la inclusión de la matriz **B**), la selección de técnicas (con matrices rectangulares), las materias duraderas, etc. Von Neumann planteó su modelo con las siguientes ecuaciones

$$\begin{array}{ll}
\mathbf{X} \geq \mathbf{0} & \\
\mathbf{Y} \geq \mathbf{0} & \\
\sum \mathbf{X} > 0 & \\
\sum \mathbf{Y} > 0 & \\
\alpha\, \mathbf{X}\, \mathbf{A} \leq \mathbf{X}\, \mathbf{B}, & \text{si se aplica} < \text{entonces } y_j = 0 \\
\beta\, \mathbf{A}\, \mathbf{Y} \geq \mathbf{B}\, \mathbf{Y}, & \text{si se aplica} > \text{entonces } x_i = 0
\end{array}$$

que con palabras significan:

S1 las intensidades de los procesos son no-negativas,
S2 los precios de las materias son no-negativos,
S3 la suma de las intensidades es positiva,
S4 la suma de los precios es positiva,
S5 para cada materia j, el factor de expansión α por su consumo es menor o igual a su producción, S5' y si es menor el precio correspondiente es 0 ("regla de los bienes gratuitos"),
S6 para cada proceso i, el factor de interés β por sus costes es mayor o igual a sus ingresos, S6' y si es mayor la intensidad correspondiente es 0 ("regla de la rentabilidad").

El modelo original de John von Neumann es un caso particular del nuestro cuando las recetas están escritas con las matrices **A** y **B**, los procesos son directos y las materias expulsables[247].

---

[247] John von Neumann señaló que el problema anterior era equivalente a

$$\begin{array}{l}
\max\limits_{\alpha,\mathbf{X}} \alpha \\
\mathbf{X} \geq \mathbf{0} \\
\sum \mathbf{X} > 0 \\
\alpha\, \mathbf{X}\, \mathbf{A} \leq \mathbf{X}\, \mathbf{B}
\end{array}$$

Las restricciones imponen S1, S3 y S5, pero la maximización del factor de expansión implica que se cumplan los demás supuestos, por lo que es equivalente al modelo original. En §2.1 nosotros escribimos las

Como vemos los modelos de la teoría económica son el resultado de muchas mejoras progresivas a lo largo de más de dos siglos y no de la creación de un único autor. Notemos que sólo hemos citado los principales hitos, pero por supuesto ha habido muchos otros autores que han contribuido de una manera muy importante a su desarrollo.

Una de las tareas de nuestro tiempo es continuar el camino trazado en la dirección de la modelización de economías reales, tarea que no podía ser afrontada con pleno éxito por los economistas del pasado ya que los datos y la potencia de cálculo necesarios para ello sólo ahora empiezan a vislumbrarse como accesibles. Otra segunda tarea fundamental es construir modelos de economías alternativas a las existentes, con el fin de que la Humanidad pueda escoger la sociedad que prefiera con conocimiento de causa[248].

---

ecuaciones con materias limitadas, porque desde la forma estándar podemos tratar aspectos como los precios negativos y el resto de tipos de materias y procesos.
Igualmente señaló la equivalencia con el problema

$$\begin{aligned}&\min_{\beta,\mathbf{Y}} \beta\\ &\mathbf{Y} \geq \mathbf{0}\\ &\sum \mathbf{Y} > 0\\ &\beta\, \mathbf{A}\, \mathbf{Y} \geq \mathbf{B}\, \mathbf{Y}\end{aligned}$$

que es también equivalente a nuestro dual en el caso de la forma canónica. Las restricciones imponen S2, S4 y S6, pero la minimización del factor de interés implica que se cumplan los demás supuestos.
Esta equivalencia entre estos problemas es una forma de la dualidad neumanniana. Estudiaremos esta simetría en futuras ediciones de este trabajo, aunque ya hemos hecho referencias a algunos aspectos de la misma a lo largo del texto, y como vimos tenía vínculos con la programación lineal, la teoría de juegos, etc. No obstante señalaremos que existen unas simetrías entre dos problemas, el primal y el dual, de manera que las variables y los multiplicadores de Lagrange del primal pueden entenderse como los multiplicadores de Lagrange y variables del dual, las restricciones y condiciones de máximo del primal como las condiciones y restricciones del dual, y además la magnitud de las funciones objetivo son iguales en ambos. En VN podemos interpretar el primal como el cálculo de las intensidades con el mayor factor de expansión para las que puede existir un crecimiento proporcional, y el dual como el cálculo de los valores con el menor factor de interés para los que puede cumplirse la ley de la rentabilidad. TE muestra también una dualidad neumanniana, y el primal puede entenderse como el cálculo de las intensidades con el mayor factor de explotación para las que puede mantenerse un estado estacionario y el dual como el cálculo de los valores con el menor factor de plusvalía para los que puede cumplirse la ley ricardiana.
No obstante existen algunas diferencias a la hora de afrontar esta simetría entre el planteamiento habitual en la literatura y el nuestro. Así Gale sólo acepta como solución para su primal los máximos absolutos y para su dual los mínimos absolutos. Esto lleva a que la dualidad neumanniana de sus modelos no sea completa, de manera que por ejemplo es posible que el factor de expansión máximo (absoluto) puede ser mayor que el factor de interés mínimo (absoluto), salvo que se den determinadas condiciones. En el caso tratado en §14.1, cuando las recetas pueden descomponerse en economías separadas, para Gale la solución del primal resulta

$$\alpha = 1.25,\ \mathbf{X} = [0.4, 0.6, 0, 0]$$

y la del dual

$$\beta = 1.0796,\ \mathbf{Y} = [0, 0, 0.0035, 0.0401]$$

en donde el factor de expansión máximo es mayor que el factor de interés y en donde el primal y el dual no tienen vinculación. Nosotros en cambio aceptamos como solución todos los máximos y mínimos relativos y para estas recetas tenemos dos soluciones.

[248] Incluso con anterioridad a Tomás Moro o a Platón se han propuesto infinidad de sociedades alternativas o utopías, pero casi siempre de manera literaria y no científica cuando no de forma mítica. En nuestro trabajo hemos formulado algunos modelos que pueden ser interpretados como teorías de sociedades alternativas, y

aunque las ecuaciones de Walras han sido interpretadas habitualmente como una teoría del capitalismo también pueden entenderse como un modelo de sociedad alternativa. Otro análisis interesante puede encontrarse por ejemplo en el estudio del "salario natural" de Thünen.

Referencias

Bibliografía

Se listan obras citadas o de primera referencia. Cuando ha sido posible se reseñan los textos más accesibles y en varias versiones, con las ediciones en el idioma original numeradas en cursiva. Los enlaces han sido comprobados en la fecha de publicación del texto.

Aristóteles

[1] *Ética a Nicómaco*, Instituto de Estudios Políticos, Madrid 1970.

[1b] *Aristotle in twenty-three volumes. Vol. 19, The Nicomachean Ethics*, Harvard University Press; William Heinemann Ltd., London 1934, http://www.perseus.tufts.edu/cgi-bin/ptext?lookup=Aristot.+Nic.+Eth.+

Arrow, Kenneth J. y Frank H. **Hahn**

[1] General competitive analysis, North-Holland Publishing, Amsterdam 1980.

[1b] *Análisis general competitivo*, Fondo de Cultura Económica, México 1977.

Baumol, William J. y Stephen M. **Goldfield**

[1] (editores) *Precursors in Mathematical Economics: An Anthology*, The London School of Economics, 1968.

Bródy, András

[1] *Proportions, prices and planning: a mathematical restatement of labor theory of value*, Akadémiai Kiadó, Budapest 1974.

[2] "Prices and quantities", incluido en Eatwell, Milgate y Newman [1].

Cassel, Gustav

[1] Theoretische Sozialökonomie, 5ª ed., A. Deichert, Leipzig 1932.

[1b] *Economía social teórica*, Aguilar, Madrid 1946.

[1c] *The Theory Of Social Economy*, 1ª ed., T. Fisher Unwin, London 1923, http://www.archive.org/details/theoryofsocialec033101mbp

Champernowne, David G.

[1] "A note on J. v. Neumann's Article on 'A Model of Economic Equilibrium' ", *Review of Economic Studies*, Vol. 13, 1945, http://www.jstor.org/stable/2296112

Dantzig, George B.

[1] Linear programming and Extensions, Princeton University Press, 1963, parcialmente en http://books.google.com/books?id=2j46uCX5ZAYC

Dantzig, George B. y Mukund N. **Thapa**

[1] Linear Programming 1: Introduction, Springer, New York 1997, parcialmente en http://books.google.es/books?id=I-aluupuDEMC

[2] Linear Programming 2: Theory and Extensions, Springer, New York 2003, http://lia.dis.ufro.cl/~arminluer/IO/

Darwin, Charles

[1] The origin of species by means of natural selection, or the preservation of favoured races in the struggle for life, 6ª ed., John Murray, London 1876.

[1b] *El origen de las especies*, Perojo, Madrid 1877.

[2] The descent of man, and selection in relation to sex, 2ª ed., John Murray, London 1882.

[2b] *El origen del hombre*, Trilla y Serra, Barcelona 1880.

Todos los textos pueden consultarse en http://darwin-online.org.uk

Debreu, Gerard
[1] Theory of value: An Axiomatic Analysis of Economic Equilibrium, Yale University Press, 1959, http://cowles.econ.yale.edu/P/cm/m17/
[1b] *Teoría del valor: un análisis axiomático del equilibrio económico*, Bosch, Barcelona 1973, parcialmente en http://books.google.es/books?id=y-0z_BgLRSgC
Dmitriev, Vladimir K.
[1] *Economic essays on value, competition and utility*, Cambridge University Press, London 1974.
[1b] *Ensayos económicos sobre el valor, la competencia y la utilidad*, Siglo XXI, México 1977.
Dore, Mohammed, Sukhamoy **Chakravarty** y Richard **Goodwin**
[1] (editores) *John von Neumann and modern economics*, Clarendon Press, Oxford 1989.
Dorfman, Robert, Paul A. **Samuelson** y Robert M. **Solow**
[1] Linear programming and economic analysis, Courier Dover Publications, 1987, parcialmente en http://books.google.com/books?id=k5_vzaCNQP4C
[1b] *Programación lineal y análisis económico*, 2ª ed., Aguilar, Madrid 1964.
Eatwell, John, Murray **Milgate** y Peter **Newman**
[1] (editores) *The New Palgrave: A Dictionary of Economics*, 1ª ed., Macmillan, London 1998; advertimos que la segunda edición de 2008 no incluye alguno de los artículos a los que hacemos referencia.
Engels, Friedrich
[1] (con contribuciones de Marx) *Herrn Eugen Dühring's Umwälzung der Wissenschaft*, Dietz Verlag, Berlin 1962, http://www.mlwerke.de/me/me20/me20_001.htm
[1b] *Anti-Dühring*, Grijalbo, México 1964, http://www.ucm.es/info/bas/es/marx-eng/78ad/78AD.htm
Euler, Leonard
[1] "Recherches générales sur la mortalité et la multiplication du genre humain", *Histoire de l'Académie Royale des Sciences et des Belles-Lettres*, année 1760, Haude et Spener, Berlin 1767, páginas 144-164, http://bibliothek.bbaw.de/bibliothek-digital/digitalequellen/schriften/anzeige/index_html?band=02-hist/1760&seite:int=154
[2] "Sur les rentes viagères", páginas 165-175 de la referencia anterior.
Fisher, Ronald A.
[1] The Genetical Theory of Natural Selection, 2ª ed. revisada, Dover Publications, New York 1958.
[1b] The Genetical Theory of Natural Selection, 1ª ed., Clarendon Press, Oxford 1930, http://www.archive.org/details/geneticaltheoryo031631mbp
Gale, David
[1] The Theory of Linear Economic Models, McGraw-Hill, New York 1960, parcialmente en http://books.google.com/books?id=3t3F9rLAZnYC
[2] "The closed linear model of production", incluido en Kuhn y Tucker [2].
Halley, Edmund
[1] "An Estimate of the Degrees of the Mortality of Mankind, drawn from curious Tables of the Births and Funerals at the City of Breslaw; with an Attempt to ascertain the Price of Annuities upon Lives", *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* 17, London 1693, http://www.york.ac.uk/depts/maths/histstat/halley.pdf

Hamburger, Michael J., Gerald L. **Thompson** y Roman L. **Weil** Jr.
[1] "Computation of Expansion Rates for the Generalized von Neumann Model of an Expanding Economy", *Econometrica*, Vol. 35, No. 3/4, jul.-oct. 1967, http://www.jstor.org/stable/1905656
Jevons, William S.
[1] The Theory of Political Economy, 5ª ed., http://socserv2.socsci.mcmaster.ca/~econ/ugcm/3ll3/jevons/
[1b] *La teoría de la Economía Política*, Pirámide, Madrid 1998.
Kantorovich, Leonid V.
[1] *The best use of economic resources*, Harvard University Press, 1965.
[1b] *La asignación óptima de los recursos económicos*, Ariel, Barcelona 1968.
[2] "Métodos matemáticos de la planificación y la organización de la producción", incluido en Nemchinov [1b].
[3] (y otros) *Essays in Optimal Planning*, International Arts and Sciences Press, New York 1976.
Kemeny, John G., Oskar **Morgenstern** y Gerald L. **Thompson**
[1] "A Generalization of the von Neumann Model of an Expanding Economy", *Econometrica* 24, 1956, http://www.jstor.org/stable/1905746
Keyfitz, Nathan y Hal **Caswell**
[1] Applied Mathematical Demography, 3ª ed., Springer, 2005, parcialmente en http://books.google.com/books?id=ny2MJU4A3DIC
Koopmans, Tjalling C.
[1] (editor) *Activity Analysis of Production and Allocation*, John Wiley and Sons, Inc., New York 1951, http://cowles.econ.yale.edu/P/cm/m13/
Kuhn, Harold W. y Albert W. **Tucker**
[1] "Nonlinear Programming", *Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, páginas 481-492, University of California Press, 1951, http://projecteuclid.org/euclid.bsmsp/1200500213
[2] (editores) *Linear Inequalities and Related Systems*, Princeton University Press, 1956, parcialmente en http://books.google.es/books?id=zfaUBDY33XkC
Kurz, Heinz D. y Neri **Salvadori**
[1] Theory of production: a long-period analysis, Cambridge University Press, 1997, parcialmente en http://books.google.es/books?id=vJKjkwUvfeEC
Leontief, Wassily W.
[1] The Structure of American Economy, 1919-1939: an empirical application of equilibrium analysis, 2ª ed., Oxford University Press, New York 1951.
[1b] *La estructura de la economía americana, 1919-1939: una aplicación empírica del análisis del equilibrio*, Bosch, Barcelona 1958.
[2] Input-output economics, 2ª ed., Oxford University Press, 1986, parcialmente en http://books.google.com/books?id=hBDEXblq6HsC
[2b] *Análisis económico input-output*, Orbis, Barcelona 1984.
Leslie, P. H.
[1] "On the Use of Matrices in Certain Population Mathematics", *Biometrika*, Vol. 33, Nº 3, 1945, páginas 213–245, http://www.jstor.org/stable/2332297
Locke, John
[1] Two Treatises of Government, London 1823, http://socserv.socsci.mcmaster.ca/~econ/ugcm/3ll3/locke/government.pdf
[1b] *Dos ensayos sobre el gobierno civil*, Espasa-Calpe, Madrid 1997.
Łoś, Jerzy y Maria W. **Łoś**
[1] (editores) *Mathematical models in economics: proceedings of the Symposium*

on Mathematical Methods of Economics, February-July 1972 and of the Conference on Von Neumann Models, 10-15 July 1972, North-Holland Pub. Co., 1974.

Lotka, Alfred J.

[1] Théorie analytique des associations biologiques, Hermann et cie., 1934.

[1b] *Analytical theory of biological populations*, Springer, 1998, parcialmente en http://books.google.com/books?id=6qeMqs9ceecC

[1c] *Teoría analítica de las asociaciones biológicas*, Centro Latinoamericano de Demografía, San José, Costa Rica, 1983.

[2] *Elements of Physical Biology*, Williams and Wilkins Company, 1925, http://www.archive.org/details/elementsofphysic017171mbp

Marx, Karl

[1] Das Kapital, *Kritik der politischen Ökonomie*, vol. I-III, en Marx-Engels Werke, Dietz Verlag, Berlin 1962-1983, http://www.mlwerke.de/me/ y también en http://www.archive.org/search.php?query=Marx%20Das%20Kapital

[1b] *El capital, Crítica de la Economía Política*, Siglo XXI, Madrid 1984, http://www.ucm.es/info/bas/es/marx-eng/capital.htm

[2] Theorien über den Mehrwert, J.H.W. Dietz, Stuttgart 1910, http://www.archive.org/search.php?query=Theorien%20mehrwert

[2b] *Teorías sobre la plusvalía*, Fondo de Cultura Económica, México 1980 (advertimos que la distribución en capítulos no coincide con la de [2]).

[2c] *Theories of Surplus Value*, Progress Publishers, (capítulos como en [2b]) http://www.marx.org/archive/marx/works/1863/theories-surplus-value/

[3] *Crítica del Programa de Gotha*, Progreso, Moscú 1974, http://www.ucm.es/info/bas/es/marx-eng/oe3/mrxoe303.htm

[4] Misère de la Philosophie, Éditions Sociales, 1948, http://classiques.uqac.ca/classiques/Marx_karl/misere_philo/misere_philo.html

[4b] *Miseria de la filosofía*, Ediciones en Lenguas Extranjeras, Moscú, http://www.marx.org/espanol/m-e/1847/miseria

Massé, Pierre

[1] Le choix des investissements: critères et méthodes, 2ª ed., Dunod, París 1968.

[1b] *La elección de las inversiones: criterios y métodos*, Sagitario, Barcelona 1963.

McKenzie, Lionel W.

[1] Classical General Equilibrium Theory, The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 2002.

[2] "General equilibrium", incluido en Eatwell, Milgate y Newman [1].

[3] "Turnpikes", *The American Economic Review*, Vol. 88, No. 2, mayo 1998, http://www.jstor.org/stable/116884

Menger, Anton

[1] Das Recht auf den vollen Arbeitsertrag in geschichtlicher Darstellung, 2ª ed., Verlag der J.G. Cotta'schen Buchhandlung Nachfolger, Stuttgart 1891, http://www.archive.org/details/dasrechtaufdenvo00menguoft

[1b] *El derecho al producto íntegro del trabajo*, Comares, Granada 2004.

[1c] *The Right to the Whole Produce of Labour*, Macmillan, 1899, http://www.archive.org/details/righttowholepro00menggoog

Menger, Carl

[1] Grundsätze der Volkswirthschaftslehre, 1ª ed., Wilhelm Braumüller, Viena 1871, http://www.archive.org/details/grundstzedervol01menggoog

[1b] *Principios de Economía Política*, Unión Editorial, Madrid 1983, http://www.hacer.org/pdf/Menger00.pdf

Mill, John Stuart
[1] The Principles of Political Economy, University of Toronto Press, 1965, http://oll.libertyfund.org/person/21
[1b] *Principios de Economía Política*, Fondo de Cultura Económica, México 1985, parcialmente en http://books.google.es/books?id=XqZf1VC2o4EC
Morgenstern, Oskar y Gerald L. **Thompson**
[1] Mathematical theory of expanding and contracting economies, Lexington Books, 1976.
Morishima, Michio
[1] Theory of Economic Growth, Oxford University Press, 1969, parcialmente en http://books.google.com/books?id=tOtIPsF_8UkC
[1b] *Teoría del crecimiento económico*, Tecnos, Madrid 1973.
Morishima, Michio y Georges **Catephores**
[1] Value, exploitation and growth: Marx in the light of modern economic theory, McGraw-Hill, 1978.
[1b] *Valor, explotación y crecimiento: Marx a la luz de la moderna teoría económica*, Oikos-Tau, Barcelona 1990.
Nemchinov, Vasily S.
[1] (editor) *The use of mathematics in economics*, M.I.T. Press, 1965.
[1b] *El uso de las matemáticas en la Economía*, Labor, Barcelona 1973.
Neumann, John von
[1] "Über ein ökonomisches Gleichungssystem und eine Verallgemeinerung des Brouwerschen Fixpunktsatzes", *Ergebnisse eines mathematischen kolloquiums* (editado por Karl Menger), vol. 8, páginas 73-83, Deuticke, Leipzig 1937, parcialmente en http://books.google.es/books?id=V9uew6_F9VQC
[1b] "A Model of General Economic Equilibrium", *Review of Economic Studies* nº 13, 1945, http://www.jstor.org/stable/2296111
[1c] "Un modelo de equilibrio económico general", en *La Economía en sus textos*, Taurus, Madrid 1998.
Neumann, John von y Oskar **Morgenstern**
[1] Theory of Games and Economic Behaviour, 3ª ed., Princeton University Press, 1953, http://www.archive.org/details/theoryofgamesand030098mbp
Nove, Alec y Domenico M. **Nuti**
[1] (editores) *Socialist Economics: Selected Readings*, Penguin, 1972.
[1b] *Teoría económica del socialismo*, Fondo de Cultura Económica, México 1978.
Quesnay, François
[1] Tableau oeconomique, Versalles 1759, http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k106140h
[2] (y otros) *Physiocratie ou Constitution naturelle du gouvernement le plus avantageux au genre humain*, Merlín, París 1769, http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k73143p
[3] Oeuvres économiques et philosophiques de F. Quesnay, J. Bauer, Francfort 1888, http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k72832q
[4] *El "Tableau economique" y otros escritos fisiócratas*, Fontamara, Barcelona 1974.
Remak, Robert
[1] "Kann die Volkswirtschaftslere eine exakte Wissenschaft werden?", *Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik*, 131, Band 111, Folge 76, Fünftes Heft, Nov. 1929, páginas 703-736

[1b] "A Postulated Price System", en Baumol y Goldfield [1], páginas 271-277, (extracto de [1]).
Ricardo, David
[1] The Works and Correspondence, The University Press for the Royal Economic Society, Cambridge 1951-1973 (edición de Sraffa), http://oll.libertyfund.org/person/45
[1b] *Obras y correspondencia*, Fondo de Cultura Económica, México 1959 y siguientes, parcialmente en http://books.google.es/books?id=EyFzJ-Zl24IC
[2] On The Principles of Political Economy and Taxation, volumen 1 de [1].
[2b] *Principios de Economía Política y Tributación*, Seminarios y Ediciones D. L., Madrid 1973.
Robinson, Stephen M.
[1] "A linearization technique for solving the irreducible Von Neumann model", incluido en Łoś y Łoś [1], páginas 139-150.
Samuelson, Paul A.
[1] "Understanding the Marxian Notion of Exploitation: A Summary of the So-Called Transformation Problem Between Marxian Values and Competitive Prices", *Journal of Economic Literature*, American Economic Association, vol. 9, nº 2, junio 1971, http://www.jstor.org/stable/2721055
Schumpeter, Joseph A.
[1] *History of Economic Analysis*, Routledge, 1994, parcialmente en http://books.google.es/books?id=pTylUAXE-toC
[1b] *Historia del análisis económico*, Ariel, Barcelona 1982.
[2] *Capitalismo, socialismo y democracia*, Aguilar, Madrid 1971.
[2b] *Capitalisme, socialisme et démocratie*, Petite bibliothèque Payot, Paris 1946, http://classiques.uqac.ca/classiques/Schumpeter_joseph/capitalisme_socialisme_demo/capitalisme.html
Sismondi, Jean-Charles-Léonard Simonde de
[1] Nouveaux principes d'économie politique, ou De la richesse dans ses rapports avec la population, Delaunay, París 1819,
volumen I http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k955530 y
volumen II http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k95554b
[1b] *Nuevos principios de economia politica ó de la riqueza en sus relaciones con la poblacion*, Imprenta de Benavides, 1834.
Smith, Adam
[1] Works and Correspondence, Oxford University Press, 1976, http://oll.libertyfund.org/person/44
[2] The Theory of Moral Sentiments, volumen 1 de [1].
[3] An Inquiry Into the Nature and Causes of the Wealth of Nations, volúmenes 2a y 2b de [1].
[3b] *Investigación sobre la naturaleza y causas de la riqueza de las naciones*, Fondo de Cultura Económica, México 1958, parcialmente en http://books.google.es/books?id=HtY-UPxZT0YC
Sraffa, Piero
[1] Production of Commodities by Means of Commodities. Prelude to a critique of economic theory, Cambridge University Press, London 1960, parcialmente en http://books.google.es/books?id=SJw8AAAAIAAJ
[1b] *Producción de mercancías por medio de mercancías*, Oikos-Tau, Barcelona 1966, parcialmente en http://www.scribd.com/doc/11390311 , http://www.scribd.com/doc/12488979 , http://www.scribd.com/doc/12488986 ,

http://www.scribd.com/doc/12488999

Thünen, Johann-Heinrich von

[1] Der isolierte Staat in Beziehung auf Landwirtschaft und Nationalökonomie, varias ediciones en http://books.google.es/books?id=Z1lGAAAAYAAJ y en http://www.archive.org/search.php?query=Der%20Isolierte%20Staat

[1b] *Recherches sur l'influence que le prix des grains, la richesse du sol et les impôts exercent sur les systèmes de culture*, (primera parte de [1]), Guillaumin et Cie., Paris 1851, http://books.google.com/books?vid=UCM5320561546

[1c] *Le salaire naturel et son rapport au taux de l'intérêt*, (segunda parte de [1]), Guillaumin et Cíe., Paris 1857, http://books.google.com/books?id=y7VLmR_DeJMC

Tugán-Baranovski, Mijaíl I.

[1] *Theoretische Gundlagen des Marxismus*, Duncker & Humblot, Leipzig 1905.

[1b] *Los fundamentos teóricos del marxismo*, Hijos de Reus, Madrid 1915.

[2] *Historia de las crisis industriales en Inglaterra*, La España Moderna, Madrid 1914.

Todos los textos pueden consultarse en http://www.ucm.es/info/bas/es/tugan/

Vegara, Josep María

[1] Economía política y modelos multisectoriales, Tecnos, Madrid 1979.

Walras, Léon

[1] Éléments d'économie politique pure ou théorie de la richesse sociale, R. Pichon et R. Durand-Auzias, Paris 1926, http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k111752b

[1b] *Elementos de economía política pura*, Alianza, Madrid 1987.

Wilkinson, James H.

[1] The algebraic eigenvalue problem, Oxford University Press, 1988, parcialmente en http://books.google.es/books?id=5wsK1OP7UFgC

Wilson, Edward O.

[1] Sociobiology: the new synthesis, Harvard University Press, 2000, parcialmente en http://books.google.com/books?id=v7lV9tz8fXAC

[1b] *Sociobiología: La nueva síntesis*, Omega, Barcelona 1980.

Índice de nombres

Índice de abreviaturas y símbolos

Listamos sólo las abreviaturas y los símbolos más comunes a lo largo del texto, con la sección en la que se explica su significado. Estos símbolos aparecen en alguna sección con variantes en la notación, pero siempre definiéndose su significado particular. Por ejemplo, pueden aparecer con subíndices que indiquen el momento temporal o el proceso al que se refieren, o en minúsculas para señalar algún uso concreto. El resto de símbolos se definen en el mismo capítulo en el que se usan.

VN	Modelo Von Neumann, §2.1
TE	Teoría de la explotación, §3.3
VNC	Modelo Von Neumann cíclico, §10.4
TEC	Teoría de la explotación cíclica, §10.5
α	escalar factor de expansión, §1.3
ε	escalar factor de explotación, §3.1
x_i	escalar intensidad del proceso *i*, §1.4
y_j	escalar valor de la materia *j*, §2.5
$\chi_{i,j}$	escalar insumo de materia *i* en el uso *j*, §9.2
$\mathbf{X}$	vector-fila de intensidades, §1.1
$\mathbf{Y}$	vector-columna de valores, §2.2
$\mathbf{A}$	matriz de insumos, §1.1
$\mathbf{B}$	matriz de productos, §1.1
$\mathbf{C}$	matriz de insumos no laborales, §1.1
$\mathbf{D}$	matriz de productos no laborales, §7.2
$\mathbf{V}$	matriz de insumos laborales, §1.1
$\mathbf{W}$	matriz de productos laborales, §7.2
$\mathbf{S}$	matriz de flujos impuestos, §13.2
$\mathbf{f_r}$	matriz de flujos en tiempo discreto, §8.2
$\mathbf{f}(r)$	matriz de flujos en tiempo continuo, §8.3
$\mathbf{F}(\alpha)$	matriz de flujos actualizados, §8.1
$f_i(\mathbf{X})$	función de producción de la materia *i*, §9.2