UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

Apuntes de la asignatura:

Ecuaciones Diferenciales

Miguel García Bravo

Noviembre 2026

Introducción

Las siguientes notas pretenden cubrir la mayoría de los contenidos típicos de un curso avanzado de ecuaciones diferenciales para matemáticos. En particular, estos apuntes sirvieron para impartir el curso de Ecuaciones Diferenciales de 3º del Grado de Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid en los cursos 2023-2024, 2024-2025, 2025-2026.

Concretamente, se analizará con detalle la teoría fundamental de las ecuaciones diferenciales con un estudio detallado de la Teoría de Cauchy-Lipschitz sobre existencia y unicidad de soluciones y de la teoría de Cauchy-Peano sobre existencia de soluciones. Un segundo objetivo de estas notas es introducir las diferentes nociones de estabilidad de soluciones y se estudiarán varias técnicas para determinar la estabilidad de las mismas en sistemas autónomos no lineales: principios de linealización, teoremas de Lyapunov, etc. Por último, se pretende analizar, en la medida de lo posible, la dinámica local y global de soluciones de sistemas autónomos no lineales.

En estos apuntes se presupone un conocimiento básico de ecuaciones diferenciales ordinarias. En particular, se asume que el lector está familiarizado con las diferentes técnicas de resolución explícita de ecuaciones diferenciales de primer orden, ya sean de variables separadas o lineales. No obstante, se incluye un primer capítulo introductorio que repasa brevemente estas cuestiones básicas y sirve de punto de partida para enunciar los primeros teoremas de existencia y unicidad. El lector también puede encontrar en el Anexo A unas notas detalladas sobre el estudio de sistemas lineales.

No puedo dejar de mencionar que, en la redacción de las presentes notas, especialmente en el desarrollo de la teoría fundamental, ha tenido una fuerte influencia el curso de ecuaciones diferenciales que recibí yo mismo del profesor Julián López Gómez en el curso 2013-2014.

Índice general

1. Introducción a las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias **3**
- 1.1. Ecuaciones diferenciales lineales . . . 4
- 1.2. EDOs no lineales . . . 6
- 1.3. EDOs en variables separadas . . . 7

2. Teoría de Cauchy-Lipschitz **11**
- 2.1. Teoría de Cauchy-Lipschitz . . . 11
  - 2.1.1. Funciones Lipschitz . . . 12
  - 2.1.2. Teorema del punto fijo . . . 18
  - 2.1.3. Teoremas fundamentales de Cauchy-Lipschitz . . . 20
- 2.2. Soluciones maximales y prolongabilidad . . . 27
- 2.3. Teoremas de existencia y unicidad para EDOs de orden superior . . . 33
- 2.4. Continuidad y diferenciabilidad respecto a condiciones iniciales . . . 38
  - 2.4.1. Ecuaciones variacionales . . . 46

3. Teoría de Cauchy-Peano **49**
- 3.1. Teorema de Arzelà-Ascoli . . . 50
- 3.2. Teorema de existencia de Cauchy-Peano . . . 53
- 3.3. Soluciones maximales en la teoría de Cauchy-Peano . . . 56

4. Estabilidad de soluciones **59**
- 4.1. Repaso breve de sistemas lineales . . . 59
- 4.2. Definiciones de estabilidad . . . 61
- 4.3. Estabilidad de sistemas lineales . . . 63
  - 4.3.1. Sistemas lineales de coeficientes constantes $x' = Ax$ . . . 64
  - 4.3.2. Sistemas lineales $x' = A(t)x$ . . . 68
- 4.4. Estabilidad de sistemas no lineales autónomos . . . 69
  - 4.4.1. Principios de Linealización . . . 70
  - 4.4.2. Teoremas de Lyapunov . . . 76
- 4.5. Cuenca de atracción, región invariante y teorema de Lyapunov mejorado . . . 79

5. Dinámica de sistemas autónomos **87**
- 5.1. Trayectorias de soluciones . . . 87
  - 5.1.1. Primeras propiedades . . . 88
  - 5.1.2. Conjuntos ω-límite y α-límite . . . 94
  - 5.1.3. Ecuación de trayectorias . . . 98

5.2. Propiedades específicas de sistemas en $\mathbb{R}^2$ 101
5.2.1. Cambio a coordenadas polares 101
5.2.2. Criterios de no existencia de órbitas periódicas 105
5.2.3. Teorema de Poincaré -Bendixson. 109
5.3. Flujo. Teorema de Grobman-Hartman. Variedad estable e inestable 114
5.4. Sistemas conservativos y disipativos. 117
5.4.1. Sistemas conservativos 118
5.4.2. Sistemas disipativos 126
5.5. Aplicación: Sistemas de Lotka-Volterra 129

A. Repaso de sistemas lineales **137**
A.1. Estructura del conjunto de soluciones 137
A.2. Sistemas lineales con coeficientes constantes 140
A.2.1. Estudio de las soluciones del sistema homogéneo $\mathbf{x}'(\mathbf{t}) = \mathbf{A}\mathbf{x}(\mathbf{t})$ 141
A.2.2. Estudio de las soluciones de sistemas no homogéneos $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{G}(\mathbf{t})$. 145
A.3. Exponencial de una matriz 146

Capítulo 1

Introducción a las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Definición 1.1. Una ecuación diferencial es una ecuación matemática que relaciona cierta función con sus derivadas. El objetivo será determinar explícitamente dicha función, o al menos conocer lo máximo posible sobre ella.

Las **Ecuaciones Diferenciales Ordinarias** (EDO) son aquellas en las que la función incógnita solo depende de una variable. En general, denotaremos a esta función por $x(t)$ o bien $y(t)$, pues en multitud de problemas del mundo físico la variable independiente es el tiempo. Algunos ejemplos son

$$x'(t) = \operatorname{sen}(t), \qquad x'(t) = x(t), \qquad x'''(t) + x''(t) + x'(t) + x(t) + t = 0,$$

donde se entiende $x : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con I algún intervalo, o bien

$$\begin{cases} x_1'(t) &= x_2(t) \\ x_2'(t) &= x_3(t) + 2 \\ &\vdots \\ x_n'(t) &= \sqrt{|x_1'(t)|} + t \end{cases}$$

donde $x = (x_1, \ldots, x_n) : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$. Si nos encontramos en este último caso se suele llamar *sistema de ecuaciones diferenciales*.

Notación: Existen diferentes opciones para denotar a las derivadas sucesivas de una función $x(t)$:

- Notación de Leibniz: la más usada (aunque no la única) en los cursos de EDO, $\frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \ldots$
- Notación de Lagrange: muy usada en Matemáticas, $x', x'', \ldots, x^{n)}, \ldots$
- Notación de Newton: de uso amplio en Física, $\dot{x}, \ddot{x}, \ldots$

Nosotros emplearemos en este curso las notaciones de Leibniz y de Lagrange indiferentemente. Además, para simplificar, en muchas ocasiones omitiremos la dependencia de t de las funciones $x(t)$ y de sus derivadas.

Otra manera de escribir una ecuación diferencial sería $tx^2dx + \operatorname{sen}(t)dt = 0$, que simplemente es un formalismo para indicar que estamos ante la ecuación diferencial $tx^2x' + \operatorname{sen}(t) = 0$.

Por otro lado, en las **Ecuaciones en Derivadas Parciales** (EDP) las funciones incógnitas dependen de varias variables. Por ejemplo

1. $\dfrac{\partial u}{\partial x_1}(x_1, x_2) = -\dfrac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, x_2)$.
2. Ecuación del calor (unidimensional): $\dfrac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2(t, x)}$.
3. Ecuación de Laplace: $\Delta u(x_1, x_2) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x_1, x_2) + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(x_1, x_2) = 0$.

Este tipo de ecuaciones diferenciales son mucho más difíciles de estudiar y se suelen introducir en cursos más avanzados, utilizando herramientas matemáticas más potentes. Por lo tanto, en este curso nos limitaremos a estudiar las ecuaciones diferenciales ordinarias.

En este tema introductorio nos centraremos en repasar las ecuaciones diferenciales ordinarias de la forma

$$x'(t) = f(t, x(t)) \qquad (x' = f(t, x)) \tag{1.1}$$

donde $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ con U un conjunto abierto. Una *solución* de (1.1) es cualquier función $x : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida en algún intervalo I que es derivable y que satisface (1.1) para todo $t \in I$. A la gráfica de una solución se le llama en ocasiones *curva integral*. La EDO (1.1) es de *primer orden* (solo aparece una derivada de la variable independiente). En el caso de que no aparezca la dependencia de la variable independiente t tendríamos una EDO *autónoma*. Esto es

$$x'(t) = f(x(t))$$

En este tipo de EDOs tendrá sentido y será muy importante estudiar los puntos de equilibrio, es decir, las soluciones de la ecuación $f(x) = 0$, que serán soluciones constantes.

1.1. Ecuaciones diferenciales lineales

Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo y sean $a, b : I \to \mathbb{R}$ funciones continuas. Una EDO lineal tiene la forma

$$x'(t) = a(t)x(t) + b(t) \qquad (x' = a(tx + b(t)) \tag{1.2}$$

y una solución de la misma será cualquier función $x \in C^1(I)$ que satisfaga (1.2) para todo $t \in I$. La ecuación homogénea asociada a (1.2) es

$$x'(t) = a(t)x(t) \tag{1.3}$$

Estructura del conjunto de soluciones de (1.2): El conjunto de soluciones de una EDO lineal homogénea dada por (1.3) es un subespacio vectorial de dimensión uno dentro de $C^1(I)$. En particular, dados $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ y dadas dos soluciones $x_1, x_2 \in C^1(I)$, entonces $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$ es también solución. Para ser más precisos,

$$\Big\{\text{Conjunto de soluciones de (1.3)}\} = \{Ce^{\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds}) : C \in \mathbb{R}\Big\} \subset C^1(I).$$

Enunciamos ahora el siguiente teorema de existencia y unicidad para ecuaciones diferenciales lineales.

Teorema 1.2. *Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo y sean $a, b \in C(I)$ funciones continuas. Entonces, para cada $t_0 \in I$, $x_0 \in \mathbb{R}$ el PVI $\begin{cases} x' = a(t)x + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ tiene una única solución $x \in C^1(I)$ dada por la fórmula*

$$x(t) = x(t; t_0, x_0) = x_0 e^{\int_{t_0}^t a(s)\,ds} + \int_{t_0}^t b(s) e^{\int_s^t a(z)\,dz}\,ds. \tag{1.4}$$

Demostración. Aplicando el Teorema fundamental del cálculo comprobamos que

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt}(t) &= x_0 \frac{d}{dt}\left(\int_{t_0}^t a(s)\,ds\right) e^{\int_{t_0}^t a(s)\,ds} + \frac{d}{dt}\left(\int_{t_0}^t b(s) e^{\int_s^t a(z)\,dz}\,ds.\right) \\
&= x_0 a(t) e^{\int_{t_0}^t a(s)\,ds} + \frac{d}{dt}\left(e^{\int_{t_0}^t a(z)\,dz} \int_{t_0}^t b(s) e^{\int_s^{t_0} a(z)\,dz}\,ds.\right) \\
&= x_0 a(t) e^{\int_{t_0}^t a(s)\,ds} + a(t) e^{\int_{t_0}^t a(z)\,dz} \int_{t_0}^t b(s) e^{\int_s^{t_0} a(z)\,dz}\,ds + e^{\int_{t_0}^t a(z)\,dz} b(t) e^{\int_t^{t_0} a(z)\,dz} \\
&= x_0 a(t) e^{\int_{t_0}^t a(s)\,ds} + a(t) \int_{t_0}^t b(s) e^{\int_s^t a(z)\,dz}\,ds + b(t) \\
&= a(t)x(t) + b(t).
\end{aligned}$$

Además, es claro que $x(t_0) = x_0$, luego x es solución.

Veamos la unicidad de esta solución en todo I. Independientemente de cómo sea el intervalo I (esto es, abierto, cerrado, semiabierto, acotado o no acotado) siempre existen intervalos compactos I_n tales que $t_0 \in I_n$ e $I_n \subset I_{n+1}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, y tales que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n = I$. Probaremos que hay unicidad de soluciones en cada I_n y, por lo tanto, se seguirá la unicidad en todo I. Fijemos por tanto $n \in \mathbb{N}$. Por reducción al absurdo, supongamos que existen dos soluciones $x(t)$ e $y(t)$ definidas en I_n. Veremos que $y(t) = x(t)$ en I_n. Comenzamos definiendo la función

$$\varphi(t) = \int_{t_0}^t |y(s) - x(s)|\,ds, \qquad t \in I_n,\ t \geq t_0.$$

Observamos que por el Teorema fundamental del cálculo $\varphi'(t) = |y(t) - x(t)|$ es una función continua en I_n, pues x e y al ser soluciones lo son. Además, $\varphi(t_0) = 0$ y $\varphi \geq 0$ es claro, y también tenemos que para todo $t \in I_n \cap [t_0, \infty)$,

$$\begin{aligned}
\varphi'(t) = |y(t) - x(t)| &\leq \left|\left(y(t_0) + \int_{t_0}^t y'(s)\,ds\right) - \left(x(t_0) + \int_{t_0}^t x'(s)\,ds\right)\right| \\
&\leq \left|\int_{t_0}^t a(s)(y(s) - x(s))\,ds\right| \\
&\leq \left(\sup_{s\in I_n} |a(s)|\right) \int_{t_0}^t |y(s) - x(s)|\,ds \\
&= M\varphi(t).
\end{aligned}$$

Consideramos ahora una nueva función

$$\psi(t) = e^{-Mt}\varphi(t).$$

Comprobamos fácilmente que $\psi(t_0) = 0$, que $\psi \geq 0$ y que para todo $t \in I_n$, $t \geq t_0$

$$\psi'(t) = (-M)e^{-Mt}\varphi(t) + e^{-Mt}\varphi'(t) \leq (-M)e^{-Mt}\varphi(t) + e^{-Mt}M\varphi(t) = 0.$$

Necesariamente tenemos que $\psi = 0$ en $I_n \cap [t_0, \infty)$, por lo que $\varphi = 0$ en $I_n \cap [t_0, \infty)$ y así $x = y$ en $I_n \cap [t_0, \infty)$. Para ver la igualdad en $(-\infty, t_0] \cap I_n$ se procede análogamente usando las funciones

$$\begin{cases} \widetilde{\varphi}(t) = \int_t^{t_0} |x(s) - y(s)|\, ds \\ \widetilde{\psi}(t) = e^{Mt}\widetilde{\varphi}(t) \end{cases}$$

y probando que $\widetilde{\psi}(t_0) = 0$ y que $\widetilde{\psi}'(t) \geq 0$ para todo $t \in I_n \cap (-\infty, t_0]$. Se dejan los detalles al lector. □

Corolario 1.3 (Teorema de estructura para ecuaciones lineales)**.** *El conjunto de soluciones de una ecuación diferencial lineal dada por* (1.2) *genera una subvariedad afín de dimensión* 1 *en el espacio* $C^1(I)$*, paralela al subespacio vectorial generado por las soluciones de la correspondiente ecuación homogénea* (1.3)*.*

Demostración. El "vector-función" generador del subespacio de soluciones de la ecuación homogénea es $x_h(t) = e^{\int_{t_0}^t a(s)\, ds}$. Ahora es fácil ver que

$$\{\text{Conjunto de soluciones}\} = \{Cx_h(t) + x_p(t) : C \in \mathbb{R}\} \subset C^1(I),$$

donde x_p es cualquier solución particular de la EDO. □

Ejemplo 1.4. Sea la EDO lineal $x'(t) = 2x(t) + 5$. La solución (general) de la EDO homogénea asociada $x' = 2x$ es la familia de funciones

$$v(t) = Ce^{2t}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Se ve fácilmente que una solución particular es $x_p(t) = -5/2$, por lo que el conjunto de soluciones de la EDO será

$$\{Ce^{2t} - 5/2 : C \in \mathbb{R}\} \subset C^1(\mathbb{R}).$$

1.2. EDOs no lineales

Una EDO $x' = f(t, x)$ se dice no lineal si no es lineal. Un ejemplo de este tipo de EDO sería la ecuación de Bernoulli

$$x' = a(t)x + b(t)x^p, \quad p \neq 0, 1$$

donde $a, b \in C(I)$ siendo $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo.

Resolución de la ecuación de Bernouilli: Haremos el cambio de variable $y = x^{1-p}$, llegando a una EDO lineal en la función-incógnita $y(t)$. Por tanto, asumiendo que $x \neq 0$, escribimos

$$x' = a(t)x + b(t)x^p \quad \Rightarrow \quad x^{-p}x' = a(t)x^{1-p} + b(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{1-p}y' = a(t)y + b(t)$$
$$\Rightarrow \quad y' = (1-p)a(t)y + (1-p)b(t).$$

Un ejemplo de ecuación de tipo Bernnoulli es la *ecuación logística* (o de Verhulst)

$$x' = \lambda x - \mu x^2 = \mu x \left(\frac{\lambda}{\mu} - x \right), \quad \lambda, \mu > 0. \tag{1.5}$$

Esta ecuación modela la dinámica de una población x que dispone de un límite de recursos. Es una mejora del modelo malthusiano $x' = \lambda x$, donde no hay control sobre el crecimiento de la población. La EDO (1.5) es autónoma y sus puntos de equilibrio son las soluciones de $\lambda x - \mu x^2 = 0$, es decir, $x = 0$ o $x = \lambda/\mu$. Además, la EDO (1.5) puede ser resuelta explícitamente (para ello, podemos tratar la EDO como una Bernouilli o como una EDO en variables separadas). La solución general viene dada por

$$x(t) = \frac{\lambda/\mu}{1 + Ce^{-\lambda t}}$$

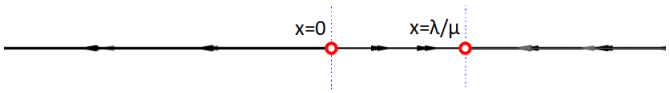
Si queremos imponer una condición inicial $x(0)$ tendríamos la solución (que será única)

$$x(t) = \frac{1}{e^{-\lambda t}\left(\frac{1}{x_0} - \frac{\mu}{\lambda} \right) + \frac{\mu}{\lambda}}.$$

Cuando hayamos visto las nociones de estabilidad de soluciones en el Capítulo 4 podremos decir que la solución constante λ/μ es asintóticamente estable (pues si partimos de una condición inicial cercana a λ/μ las soluciones tienden a λ/μ cuando t tiende a $+\infty$) pero no globalmente asintóticamente estable (pues no todas las soluciones convergen necesariamente al valor λ/μ), o que el 0 es inestable (pues existe un entorno del 0 tal que si partimos de condiciones iniciales tan cercanas al 0 como queramos, pero que no sean 0, estas soluciones se ven repelidas y se escapan siempre del entorno incial). También podemos ver que tenemos soluciones que no están definidas en toda la recta real $\mathbb{R}$, sino que aparecen los llamados tiempos de explosión. Un análisis de la ecuación (1.5) nos dice que el denominador se anula en tiempo

$$T(x_0) = \frac{1}{\lambda} \log \left(1 - \frac{\lambda}{\mu x_0} \right).$$

Luego, si $x_0 \in (0, \lambda/\mu)$ no hay tiempos de explosión. Si $x_0 > \lambda/\mu$ se tiene una asíntota vertical cuando $t \to T(x_0)^+$. Y si $x_0 < 0$ se tiene una asíntota vertical cuando $t \to T(x_0)^-$. Por último, representamos a continuación la recta de fases de la ecuación logística, simplemente viendo el signo de la función $f(x) = \lambda x - \mu x^2$.



1.3. EDOs en variables separadas

Una ecuación diferencial en variables separadas es aquella de la forma

$$x'(t) = f(x(t))g(t) \quad (x' = f(x)g(t))$$

donde $f : U \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son funciones continuas en ciertos intervalos.

Teorema 1.5. *Sean $U = (y_1, y_2)$, $I = (t_1, t_2) \subset \mathbb{R}$ dos intervalos abiertos y $f \in C(U)$, $g \in C(I)$ dos funciones continuas. Sea también $t_0 \in I$, $x_0 \in U$.*

1. *Si $f(x_0) \neq 0$, entonces existe algún intervalo $J \subset I$ con $t_0 \in J$ tal que el PVI* $\begin{cases} x' = f(x)g(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ *tiene una única solución $x \in C^1(J)$. Además, la ecuación*

$$\int_{x_0}^{x} \frac{1}{f(u)}\, du = \int_{t_0}^{t} f(u)\, du$$

proporciona la solución de forma implícita.

2. *Si $f(x_0) = 0$ entonces tenemos la solución constante $x(t) = x_0$ para todo $t \in I$ (no necesariamente única).*

Para la demostración necesitamos recordar antes lo que dice el Teorema de la Función Implícita, cuya demostración no incluimos.

Teorema 1.6 (Teorema de la Función Implícita)**.** *Sea $U \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto abierto, $(t_0, x_0) \in U$ y $H : U \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1. Supongamos que $H(t_0, x_0) = 0$ y que $\dfrac{\partial H}{\partial x}(t_0, x_0) \neq 0$. Entonces existe un $\eta > 0$ y una única función $x : J = (t_0 - \eta, t_0 + \eta) \to \mathbb{R}$ de clase C^1 tal que*

1. *$x(t_0) = x_0$.*
2. *Se tiene que $(t, x(t)) \in U$ para todo $t \in J$. Y además $H(t, x(t)) = 0$ para todo $t \in J$.*

Demostración. La demostración de (b) es obvia, por lo que pasamos a probar (a).

Como $f(x_0) \neq 0$ por continuidad existirá un $\varepsilon > 0$ tal que si $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset U$ entonces $f(x) \neq 0$. Podemos definir por tanto la siguiente función de dos variables

$$H(t, x) = \int_{x_0}^{x} \frac{1}{f(s)}\, ds - \int_{t_0}^{t} g(s)\, ds, \qquad \forall (t, x) \in I \times (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon).$$

Es fácil comprobar que tenemos lo siguiente:

1. $H(t_0, x_0) = 0$.
2. $H \in C^1(I \times (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon))$.
3. $\dfrac{\partial H}{\partial x}(t_0, x_0) = \dfrac{1}{f(x_0)} \neq 0$. Aquí se ha usado el Teorema fundamental del cálculo.

Todas estas propiedades sobre la función H nos permiten aplicar el Teorema de la Función Implícita 1.6 y existirá por tanto $\eta > 0$ y una única función $x : J = (t_0 - \eta, t_0 + \eta) \subset I \to \mathbb{R}$ de clase C^1 tal que

1. $x(t_0) = x_0$.
2. Tenemos que $(t, (x(t)) \in I \times (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ para todo $t \in J$. Además, $H(t, x(t)) = 0$ para todo $t \in J$. Esto significa que

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{1}{f(s)}\, ds - \int_{t_0}^{t} g(s)\, ds = 0, \quad t \in J$$

y por tanto derivando respecto de t, por el Teorema fundamental del cálculo,

$$\frac{x'(t)}{f(x(t))} = g(t), \quad t \in J.$$

Con los dos puntos anteriores acabamos de verificar que $x(t)$ es solución del PVI en J.

Para probar la unicidad supongamos que existiese otra solución $u(t)$ de clase C^1 definida en el mismo intervalo J. Por un lado, tenemos $u(t_0) = x_0$, luego por continuidad de f y de u debería existir un $\delta > 0$ tal que $f(u(t)) \neq 0$ para todo $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \subset J$. Definimos

$$\widetilde{\delta} = \sup\{\delta > 0 : \delta \leq \eta,\ f(u(t)) \neq 0\ \forall\, t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)\}.$$

Usando que u es solución y por tanto $u'(t) = f(u(t))g(t)$ tenemos que para cada $t \in (t_0 - \widetilde{\delta}, t_0 + \widetilde{\delta})$,

$$\frac{u'(t)}{f(u(t))} = g(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\int_{x_0}^{u(t)} \frac{1}{f(s)}\, ds = g(t) \quad \Rightarrow \quad \int_{x_0}^{u(t)} \frac{1}{f(s)}\, ds = \int_{t_0}^{t} g(s)\, ds.$$

Esto significa que $H(t, u(t)) = 0$ para todo $t \in (t_0 - \widetilde{\delta}, t_0 + \widetilde{\delta})$. Ahora recordamos que el Teorema de la Función Implícita establece que solo existe una única función x tal que $x(t_0) = x_0$ y $H(t, x(t)) = 0$ en $J = (t_0 - \eta, t_0 + \eta)$ luego, como $\widetilde{\delta} \leq \eta$, no queda más remedio que $u(t) = x(t)$ en el intervalo $(t_0 - \widetilde{\delta}, t_0 + \widetilde{\delta})$.

Concluiremos ahora por reducción al absurdo que necesariamente $\eta = \widetilde{\delta}$, y que por tanto $x = u$ en $J = (t_0 - \eta, t_0 + \eta)$. En efecto, si $0 < \widetilde{\delta} < \eta$, tenemos $u(t) = x(t) \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ para todo $t \in (t_0 - \widetilde{\delta}, t_0 + \widetilde{\delta})$ y así

$$f(u(t_0 + \widetilde{\delta})) = \lim_{t \to (t_0 + \widetilde{\delta})^-} f(u(t)) = f(x(t_0 + \widetilde{\delta})) \neq 0.$$

Esto significa, por continuidad de f y de u, que podríamos encontrar otro $\delta \in (t_0 + \widetilde{\delta}, \eta)$ donde $f(u(\delta)) \neq 0$. Y esto es una contradicción con la definición de $\widetilde{\delta}$. Es decir que $\widetilde{\delta} < \eta$ no puede ser, y se tiene $\eta = \widetilde{\delta}$.

□

Vemos ahora un ejemplo de que no siempre una EDO en variables separadas tiene soluciones únicas.

Ejemplo 1.7. *El problema de valor inicial* $\begin{cases} x' = x^{2/3} \\ x(0) = 0 \end{cases}$. tiene dos soluciones, $x(t) = 0$ y $y(t) = (t/3)^3$ para $t \in \mathbb{R}$. De hecho, al tratarse de una EDO autónoma, podemos encontrar infinitas soluciones $x_C : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $C \in \mathbb{R}$ definidas por

$$x_C(t) = \begin{cases} 0, & t \leq C \\ \left(\dfrac{t - C}{3}\right)^3, & t > C \end{cases}$$

Acabamos esta sección con otro ejemplo que muestra que aunque en una EDO en variables separadas haya existencia y unicidad de soluciones, esa solución no tiene por qué estar definida en todo $\mathbb{R}$.

Ejemplo 1.8. $\begin{cases} x' = x^2 \\ x(0) = x_0 > 0 \end{cases}$. Por el Teorema de existencia y unicidad para EDOs en variables separadas hay existencia y unicidad en algún intervalo $J \subset \mathbb{R}$ que contiene a $t = 0$. Si resolvemos explícitamente tendríamos que escribir

$$x' = x^2 \quad \Rightarrow \quad x^{-2}dx = dt \quad \Rightarrow \quad \int_{x_0}^{x} z^{-2}\, dz = \int_0^t 1\, ds$$
$$\Rightarrow -x^{-1} + x_0^{-1} = t \quad \Rightarrow \quad x(t) = \frac{1}{\frac{1}{x_0} - t}.$$

Así vemos que el dominio de definición es $J = (-\infty, 1/x_0)$.

Capítulo 2

Teoría de Cauchy-Lipschitz

El objetivo del presente capítulo es establecer resultados que nos digan cuándo el problema de valor inicial

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}, \quad f : J \times \Omega \to \mathbb{R} \tag{2.1}$$

siendo $J \subset \mathbb{R}$ un intervalo y $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto, posee solución y, cuando exista, establecer si esta solución es única o no lo es. Las secciones 2.1 y 2.2 desarrollan toda la teoría sobre existencia y unicidad de soluciones para sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden, que se suele llamar Teoría de Cauchy-Lipschitz. La sección 2.3 está dedicada a explicar cómo toda esta teoría se traslada a las ecuaciones diferenciales de orden superior, pues todo sistema de orden superior tiene su sistema equivalente de orden uno. En la última sección 2.4 se estudian ecuaciones diferenciales en las que aparecen parámetros y veremos en qué situaciones las soluciones dependen de manera continua o diferenciable respecto de estos parámetros. Dedicaremos el Capítulo 3 a la teoría de Cauchy-Peano, que se limita a estudiar la existencia de soluciones de PVIs del tipo (3.1), sin entrar en el estudio de la unicidad.

Adelantándonos a lo que veremos a continuación, podemos decir que la teoría de Cauchy-Lipschitz establece que cuando la función f que define (3.1) sea suficientemente regular, en particular habrá que pedir que sea continua y Lipschitz respecto de la segunda variable $x \in \Omega$, se tendrá existencia y unicidad de soluciones, y si la f es solamente continua solo podremos asegurar la existencia.

2.1. Teoría de Cauchy-Lipschitz

El objetivo esencial de esta sección es desarrollar la Teoría de Cauchy-Lipschitz, y en particular, dar la demostración del siguiente teorema.

Teorema 2.1 (Teorema de Cauchy-Lipschitz global). *Sea $J \subset \mathbb{R}$ un intervalo cerrado y sea $f : J \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función continua que además satisface*

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L\|x - y\|, \quad \forall t \in J,\ \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Entonces para cada $t_0 \in I$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ el PVI $\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ *tiene una única solución definida en J.*

Ejemplo 2.2. En el siguiente PVI hay existencia pero no unicidad de soluciones

$$\begin{cases} x' = x^{1/3} \\ x(0) = 0 \end{cases}.$$

La función $f(t,x) = x^{1/3}$ es continua en $\mathbb{R}^2$. Sin embargo, podemos comprobar que no existe ningún abierto U con $x = 0 \in U$, ningún intervalo I con $0 \in I$, ni ninguna constante $L \geq 0$ tal que

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L\|x - y\|, \quad \forall t \in I,\ x, y \in U.$$

Esto se debe a que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t,x) = \frac{1}{3x^{2/3}} \to \infty$$

cuando $x \to 0$. En esta situación no podemos usar ningún Teorema de Cauchy-Lipschitz para asegurar unicidad. Lo que realmente ocurre es que de hecho no hay unicidad. Por un lado, $x = 0$ es solución del PVI, y por otro lado, tratando esa EDO como una de variables separadas, se llega a la solución

$$x(t) = \left(\frac{2t}{3}\right)^{3/2}.$$

Antes de demostrar el Teorema de Cauchy-Lipschitz global, tanto su versión local como su versión global, necesitamos introducir unas nociones previas.

2.1.1. Funciones Lipschitz

Definición 2.3. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y sea $F : \Omega \to \mathbb{R}^m$.

- Decimos que F es (globalmente) Lipschitz en Ω si existe $L \geq 0$ tal que

$$\|F(x) - F(y)\| \leq L\|x - y\|, \quad \forall x, y \in \Omega \tag{2.2}$$

  A L se le llama constante de Lipschitz[1] de F en Ω.

- Decimos que F es localmente Lipschitz en Ω si para cada $x_0 \in \Omega$ existe $R > 0$ tal que $B_R(x_0) = B(x_0, R) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| < R\} \subset \Omega$ y F es globalmente Lipschitz en $B_R(x_0)$.

Ejemplo 2.4.

1. $F(x) = 2x$, $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Podemos decir que F es Lipschitz en $\mathbb{R}$ porque $|F(x) - F(y)| = |2x - 2y| = 2|x - y|$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

2. $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $F(x) = x^2$.

   a) F no es (globalmente) Lipschitz en $\mathbb{R}$: En caso contrario existiría $L \geq 0$ tal que $|x^2 - y^2| \leq L|x - y|$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$. Si esto ocurriese entonces

   $$|x^2 - y^2| = |x - y|\,|x + y| \leq L|x - y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

   por lo que

   $$|x + y| \leq L \quad \forall x, y \in \mathbb{R}\ x \neq y.$$

   Esto es una clara contradicción (tomar por ejemplo $x = L, y = L + 1$).

[1] Para este curso de EDIF no nos interesa en general determinar la menor constante de Lipschitz, y a cualquier valor $L \geq 0$ para el que se da (2.2) lo llamaremos constante de Lipschitz.

b) F es localmente Lipschitz en $\mathbb{R}$: En efecto, dado $x_0 \in \mathbb{R}$ tomamos cualquier $R > 0$ y tomamos $L = 2(|x_0| + R)$. Tenemos que $B_R(x_0) \subset \mathbb{R}$ y además

$$\begin{aligned}|x^2 - y^2| = |x + y|\,|x - y| &\leq (|x - x_0| + |y - x_0| + 2|x_0|)|x - y| \leq 2(R + |x_0|)|x - y| \\ &= 2(1 + |x_0|)|x - y| = L|x - y|\end{aligned}$$

para todo $x, y \in B_R(X_0)$.

3. $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $F(x) = \sqrt{|x|}$ no es localmente Lipschitz en $\mathbb{R}$.

   Si lo fuese, para $x_0 = 0$ existirían $L \geq 0$, $R > 0$ tales que

   $$|F(0) - F(x)| \leq L|0 - x|, \quad \forall x \in B(0, R).$$

   Esto implica que

   $$\sqrt{|x|} \leq L|x|, \quad \forall x \in B(0, R) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{|x|}} \leq L, \quad \forall x \in B(0, R) \setminus \{0\}.$$

   Lo cual es una contradicción porque $\lim_{|x|\to 0} \dfrac{1}{\sqrt{|x|}} = \infty$.

4. $F : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ dada por $F(x) = x^p$, $0 < p < 1$. Probaremos que no existe ningún $\varepsilon > 0$ tal que F sea (globalmente) Lipschitz en $(0, \varepsilon)$. En caso contrario existiría $\varepsilon > 0$ y $L \geq 0$ tal que

   $$|x^p - y^p| \leq L|x - y| \quad \forall x, y \in (0, \varepsilon).$$

   Por ser F una función diferenciable en $(0, \varepsilon)$ podemos aplicar el Teorema del Valor Medio para determinar que entre cualesquiera $x, y \in (0, \varepsilon)$ existirá $\xi = \xi(x, y)$ tal que

   $$|x^p - y^p| = p\xi(x, y)^{p-1}|x - y| \leq L|x - y| \quad \forall x, y \in (0, \varepsilon.$$

   Luego, $p\xi(x, y)^{p-1} \leq L$ para todo $x, y \in (0, \varepsilon$ con $x \neq y$. Pero esto es una contradicción pues tomando dos sucesiones $x_n, y_n \to 0^+$ tales que $x_n \neq y_n$, se tendría que

   $$p\xi(x_n, y_n)^{p-1} \leq L \quad \text{para todo } n \text{ suficientemente grande.}$$

   Tomando límites $n \to \infty$, como $1 - p < 0$ y como $\xi(x_n, y_n) \to 0$ se sigue que $\infty \leq L$, ¡contradicción!.

5. $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $F(x) = \operatorname{sen}(x)$. Tenemos que F es Lipschitz en $\mathbb{R}$ con constante $L = 1$ porque, aplicando el Teorema del Valor Medio, dados dos $x, y \in \mathbb{R}$ existirá un $\xi \in \mathbb{R}$ entre ellos tal que

   $$|\operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(y)| = |\cos(xi)||x - y| \leq |x - y|.$$

6. $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ operador lineal afín, esto es,

   $$F(x) = Ax + B, \quad A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R}),\ B \in \mathbb{R}^m.$$

   Tenemos que F es Lipschitz en $\mathbb{R}^n$ porque

   $$\|F(x) - F(y)\| = \|A(x - y)\| \leq \|A\|_{L(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)}\|x - y\|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Definición 2.5. Denotamos al conjunto de operadores lineales de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$ por $L(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$, que coincide justamente con el conjunto de las matrices $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Este conjunto tiene estructura de espacio vectorial y podemos dotarlo de las siguientes normas (se deja como ejercicio al lector la comprobación de que son normas).

1. **Norma de matrices**: Dada $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ definimos la norma de matrices / operadores lineales como
$$\|A\|_{L(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)} = \max_{\|h\|=1} \|Ah\|.$$
Se tiene que para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$,
$$\|Ax\| = \left\|A\frac{x}{\|x\|}\|x\|\right\| = \|x\| \left\|A\frac{x}{\|x\|}\right\| \leq \|x\|\|A\|_{L(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)}.$$

2. **Norma supremo**: Dada $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ definimos la norma supremo de matrices como
$$\|A\|_\infty = \max_{1\leq i\leq m,\, 1\leq j\leq n} |a_{ij}|, \quad \text{donde } A = (a_{ij}).$$

3. **Norma euclídea**: Dada $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ definimos la norma euclídea como
$$\|A\|_2 = \left(\sum_{1\leq i\leq m,\, 1\leq j\leq n} |a_{ij}|^2\right)^{1/2}, \quad \text{donde } A = (a_{ij}).$$

4. **Norma** $\|\cdot\|_1$: Dada $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ definimos la norma
$$\|A\|_1 = \sum_{1\leq i\leq m,\, 1\leq j\leq n} |a_{ij}|, \quad \text{donde } A = (a_{ij}).$$

Las normas que más usaremos nosotros son la norma de matrices y la norma supremo, y se puede probar que existe una constante $C = C(n,m) > 1$ tal que
$$\|A\|_\infty \leq \|A\|_{L(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)} \leq C(n,m)\|A\|_\infty.$$
De hecho todas las normas que uno pueda definir en el espacio vectorial de las matrices $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ son equivalentes entre sí.

Proposición 2.6. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto convexo*[2] *y sea $F \in C^1(\Omega;\mathbb{R}^m)$, esto es, $\partial F_i/\partial x_j \in C(\Omega;\mathbb{R})$ para todo $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$. Entonces F es globalmente Lipschitz en Ω si y solo si*
$$M = \sup_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n\\ x\in\Omega}} \left|\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x)\right| = \sup_{x\in\Omega} \|Df(x)\|_\infty < \infty.$$

[2]Bastaría pedir cuasiconvexidad, esto es, que para todo $x, y \in \Omega$ existe un camino rectificable $\gamma \subset \Omega$ uniendo x con y tal que $\ell(\gamma) \leq C|x-y|$. Sin cuasiconvexidad la proposición es falsa, considérese por ejemplo el disco partido $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x,y)\| < 1\} \setminus [0,1] \times \{0\}$.

Demostración. $\Leftarrow$): Sean $x, y \in \Omega$. Por convexidad, el segmento

$$[x, y] = \{sy + (1-s)x : \ s \in [0,1]\}$$

está totalmente contenido en Ω, luego podemos definir la función $\varphi(s) = F(sy + (1-s)x)$ con $s \in [0,1]$. Por hipótesis sabemos que $\varphi \in C^1([0,1]; \mathbb{R}^m)$; luego por el Teorema Fundamental del Cálculo y aplicando la regla de la cadena podemos escribir para todo $x, y \in \Omega$,

$$F(y) - F(x) = \varphi(1) - \varphi(0) = \int_0^1 \varphi'(s)\, ds = \int_0^1 DF(sy + (1-s)x) \cdot (y - x)\, ds.$$

Por tanto, para todo $x, y \in \Omega$

$$\begin{aligned} \|F(y) - F(x)\| &\leq \int_0^1 \|DF(sy + (1-s)x) \cdot (y-x)\|\, ds \leq \int_0^1 \|DF(sy + (1-s)x)\|_{L(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)} \|y - x\|\, ds \\ &\leq C(n,m)\|y - x\| \int_0^1 \|DF(sy + (1-s)x)\|_\infty\, ds \leq C(n,m) \sup_{z \in \Omega} \|DF(z)\|_\infty \\ &= C(n,m) M \|y - x\|. \end{aligned}$$

Hacemos constar que la primera desigualdad no es trivial, y es consecuencia de la desigualdad de Schwarz.

$\Rightarrow$): Sea $x \in \Omega$. Entonces $DF(x) \in L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ donde

$$DF(x)(h) = \lim_{\eta \to 0} \frac{F(x + \eta h) - F(x)}{\eta}, \quad \forall h \in \mathbb{R}^n.$$

Dado $x \in \Omega$ y dado $h \in \mathbb{R}^n$ con $\|h\| = 1$, si cogemos $\eta > 0$ suficientemente pequeño para que $x + \eta h \in \Omega$, tenemos que

$$\left\| \frac{\|F(x + \eta h) - F(x)\|}{\eta} \right\| = \frac{\|F(x + \eta h) - F(x)\|}{|\eta|} \leq L \frac{\|\eta h\|}{|\eta|} = L\|h\| = L.$$

Por lo que

$$\max_{\|h\|=1} \|DF(x)(h)\| \leq L.$$

Luego, por equivalencia de normas en $L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$, se sigue que

$$\sup_{x \in \Omega} \|DF(x)\|_\infty \leq \sup_{x \in \Omega} \|DF(x)\|_{L(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)} \leq L < \infty$$

□

Corolario 2.7. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y sea $F \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^m)$. Entonces F es localmente Lipschitz en Ω.*

Demostración. Sea $x_0 \in \Omega$ y $R > 0$ tal que $\overline{B_R(x_0)} \subset \Omega$, donde estamos usando que Ω es abierto. Tomamos

$$M := \max \left\{ \left| \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) \right| : \ 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n,\ x \in \overline{B_R(x_0)} \right\} < \infty,$$

que es una cantidad finita, pues para funciones continuas definidas en un compacto siempre tenemos un máximo. Si llamamos $\widetilde{\Omega} = B_R(x_0)$ y aplicamos la Proposición 2.6 a $F : \widetilde{\Omega} \to \mathbb{R}^m$ tenemos que F será globalmente Lipschitz en $\widetilde{\Omega} = B_R(x_0)$. □

Ejemplo 2.8. 1. $F(x) = \arctan(x)$, $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Tenemos que $F \in C^\infty(\mathbb{R})$. Como para todo $x \in \mathbb{R}$

$$|F'(x)| = \left| \frac{1}{1+x^2} \right| \leq 1$$

se sigue por la Proposición 2.6 que F es Lipschitz en $\mathbb{R}$ con constante $L = 1$.

2. $F(x, y) = (\operatorname{sen}(x) + \cos(x), \operatorname{sen}(y)\cos(x))$, $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Tenemos que $F \in C^\infty(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$ con

$$Df(x, y) = \begin{bmatrix} \cos(x) - \operatorname{sen}(x) & 0 \\ -\operatorname{sen}(y)\operatorname{sen}(x) & \cos(y)\cos(x) \end{bmatrix}$$

Luego $\|Df(x)\|_\infty \leq 2$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, y usando la Proposición 2.6 la función F es Lipschitz en $\mathbb{R}^2$.

3. $F(x) = x^p$, $p > 1$, $F : (0, \infty) \to \mathbb{R}$. Tenemos que $F \in C^1((0, \infty))$ y que $|F'(x)| = px^{p-1}$, luego $\lim_{x\to\infty} |F'(x)| = +\infty$. Por la Proposición 2.6 se deduce que F no es Lipschitz en $(0, \infty)$. Sin embargo el Corolario 2.7 nos dice que F sí es localmente Lipschitz en $(0, \infty)$.

4. $F(x, y) = x + y, x^2)$, $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Tenemos que $F \in C^\infty(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$ con $DF(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2x & 0 \end{bmatrix}$. Como $\|DF(x, y)\|_\infty$ no está acotada en $\mathbb{R}^2$, la Proposición 2.6 nos dice que F no es Lipschitz en $\mathbb{R}^2$. Pero sí sabemos por el Corolario 2.7 que F sí es localmente Lipschitz en $\mathbb{R}^2$.

5. $F(x) = x^p$, $0 < p < 1$, $F : (0, \infty) \to \mathbb{R}$. Como $F \in C^1((0, \infty))$ por el Corolario 2.7 sabemos que F es localmente Lipschitz en $(0, \infty)$. Ya vimos que F no es globalmente Lipschitz en $(0, \infty)$, de hecho la derivada no está acotada.

A partir de ahora ya queremos pensar en ecuaciones diferenciales del tipo $x' = f(t, x(t))$ donde $f : J \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ siendo $J \subset \mathbb{R}$ intervalo y $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto.

Definición 2.9. Sea $J \subset \mathbb{R}$ un intervalo, sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y sea $f \in C(J \times \Omega; \mathbb{R}^n)$.

1. Se dice que f es **globalmente Lipschitz en Ω uniformemente en** J si existe $L \geq 0$ tal que

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L\|x - y\|, \qquad \forall x, y \in \Omega, \ \ \forall t \in J.$$

2. Se dice que f es **localmente Lipschitz en Ω uniformemente en** J si para todo $x_0 \in \Omega$ existen $L \geq 0$, $R > 0$ tal que $B(x_0, R) \subset \Omega$ y

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L\|x - y\|, \qquad \forall x, y \in B(x_0, R), \ \ \forall t \in J.$$

Es importante tener presente que existen funciones $f(t, x)$ globalmente Lipschitz en $x \in \mathbb{R}^n$ uniformemente en $t \in \mathbb{R}$, que no son continuas como funciones $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Por ejemplo $f(t, x) = 1$ si $t \geq 0$, $f(t, x) = 0$ si $t < 0$, satisface que $\|f(t, x) - f(t, y)\| = 0 \cdot |x - y|$ para todo $x, y, t \in \mathbb{R}$, pero claramente no es una función continua.

Ejemplo 2.10. 1. $f(t, y) = t^2 + \operatorname{sen} y$ es globalmente Lipschitz en $y \in \mathbb{R}$ uniformemente en $t \in \mathbb{R}$.

Por el Teorema del Valor Medio sabemos que existe ξ entre x e y tal que

$$|f(t, y) - f(t, x)| = |\operatorname{sen} y - \operatorname{sen} x| = |\cos(\xi)| \cdot |y - x| \leq |x - y|, \quad \forall x, y, t \in \mathbb{R}.$$

2. $f(t,y) = t + y^2$ es localmente Lipschitz en $y \in \mathbb{R}$ uniformemente en $t \in \mathbb{R}$.

   En efecto, para cada $x_0 \in \mathbb{R}$ tomamos $R = 1$, $L = 2(1 + |x_0|)$. En ese caso $B(x_0, R) \subset \mathbb{R}$ y además para todo $x, y \in B(x_0, R)$ y $t \in \mathbb{R}$,

   $$|f(t,x) - f(t,y)| = |x+y||x-y| \leq (|x-x_0| + 2|x_0| + |y-x_0|)|x-y| \leq (2+2|x_0|)|x-y| = L|x-y|.$$

   También se podría probar que f no puede ser globalmente Lipschitz en $\mathbb{R}$ uniformemente en $t \in \mathbb{R}$.

3. Sea $f(t,x) = A(t)x + B(t)$ donde $t \in [a,b] = J$, $A(t) = (a_{ij}(t))_{1 \leq i,j \leq n}$, $B(t) = (b_{ij}(t))_{1 \leq i,j \leq n}$ con $a_{ij}(t), b_{ij}(t) \in C^1(J)$ para todo i, j.

   Se tiene que f es Lipschitz en $\mathbb{R}^n$ uniformemente en J porque para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$, $t \in J$,

   $$\begin{aligned} \|f(t,x) - f(t,y)\| = \|A(t)(x-y)\| &\leq \|A(t)\|_{L(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)} \|x-y\| \leq C(n)\|A(t)\|_\infty \|x-y\| \\ &\leq C(n) \max_{1 \leq i,j \leq n,\, t \in J} |a_{ij}(t)| \, \|x-y\| = L\|x-y\|, \end{aligned}$$

   donde el máximo se alcanza y es finito por tener funciones continuas definidas en compactos.

Proposición 2.11. *Sea $J \in \mathbb{R}$ intervalo arbitrario, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto convexo y $f \in C(J \times \Omega; \mathbb{R}^n)$ tal que $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \in C(J \times \Omega; \mathbb{R})$ para todo $1 \leq i, j \leq n$. Entonces f es globalmente Lipschitz (con constante $L \geq 0$) en $x \in \Omega$ uniformemente en $t \in J$ si y solo si*

$$M = \sup \left\{ \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(t,x) \right| : t \in J, x \in \Omega, 1 \leq i, j \leq n \right\} = \sup_{t \in J, y \in \Omega} \|D_x f(t,y)\|_\infty < \infty.$$

Aquí estamos usando la notación

$$D_x(t,y) = \begin{bmatrix} (\partial f_1/\partial x_1)(t,y) & \cdots & (\partial f_1/\partial x_n)(t,y) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\partial f_n/\partial x_1)(t,y) & \cdots & (\partial f_n/\partial x_n)(t,y) \end{bmatrix}.$$

Demostración. $\Leftarrow$) Sea $t \in J$ y sean $y, z \in \Omega$. Por convexidad de Ω $[y,z] = \{sy + (1-s)z : s \in [0,1]\}$. Entonces

$$\begin{aligned} \|f(t,y) - f(t,z)\| = \| \int_0^1 \frac{d}{ds}(f(t, sy + (1-s)z)) \, ds \| &\leq \int_0^1 \|D_x f(t, sy + (1-s)z) \cdot (y-z)\| \, ds \\ &\leq \int_0^1 n\|D_x f(t, sy + (1-s)z)\|_\infty \, \|y-z\| \, ds \leq nM\|y-z\|. \end{aligned}$$

$\Rightarrow$) Para cada $t \in J, y \in \Omega, h \in \mathbb{R}^n$ podemos escribir

$$D_x f(t,y)h = \lim_{\eta \to 0} \frac{f(t, y+\eta h) - f(t,y)}{h}.$$

Tomando $y \in \Omega$, $\|h\| = 1$ y escogiendo $\eta > 0$ suficientemente pequeño para que $y + \eta h \in \Omega$ (recordemos que Ω es abierto), tenemos que, usando la Lipschitzianidad de f

$$\left\| \frac{f(t, y+\eta h) - f(t,y)}{\eta} \right\| \leq \frac{L\|\eta h\|}{|\eta|} = L\|h\| = L.$$

Así pues para todo $t \in J, y \in \Omega$,

$$\|D_x f(t,y)\|_{L(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)} = \max_{\|h\|=1} \|D_x f(t,y)h\| \leq L,$$

y usando la equivalencia de normas de matrices

$$\|D_x f(t,y)\|_\infty \leq L < \infty \quad \forall y \in \Omega,\, t \in J.$$

□

Corolario 2.12. *Sea $J \subset \mathbb{R}$ intervalo, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $f \in C(J \times \Omega; \mathbb{R}^n)$ tal que $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \in C(J \times \Omega; \mathbb{R})$ para todo $1 \leq i, j \leq n$.*

1. *Si $J = [a,b]$ es cerrado y acotado entonces f es localmente Lipschitz en Ω uniformemente en $J = [a,b]$.*
2. *Si J es arbitrario entonces f es localmente Lipschitz en Ω uniformemente en subintervalos compactos de J.*

Demostración. Se deja como ejercicio al lector. □

Ejemplo 2.13. 1. Sea $f : [t_0, \infty) \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ con $t_0 \in \mathbb{R}$ definida por

$$f(t,x,y) = (a(t)\operatorname{sen}(x) + b(t)\operatorname{sen}(y), c(t)\operatorname{sen}(x) + d(t)\operatorname{sen}(y))$$

siendo $a, b, c, d \in C([t_0, \infty))$. Entonces es claro que $\frac{\partial f_1}{\partial x}, \frac{\partial f_1}{\partial y}, \frac{\partial f_2}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial y} \in C([t_0, \infty) \times \mathbb{R}^2; \mathbb{R})$ y además están acotadas en conjuntos del tipo $[t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R}^2$ para cualquier $T > 0$. Esto nos permite aplicar la Proposición 2.11 para concluir que f es globalmente Lipschitz en $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ uniformemente en intervalos $[t_0, t_0 + T]$ para cada $T > 0$.

2. $f : [t_0, \infty) \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ con $t_0 \in \mathbb{R}$ definida por

$$f(t,x,y) = (a(t)x + b(t)y, c(t)x^2 + d(t)y^2)$$

siendo $a, b, c, d \in C([t_0, \infty))$. Entonces es claro que $\frac{\partial f_2}{\partial x}(t,x,y) = 2xc(t)$ no está acotada en $J \times \mathbb{R}^2$ para ningún intervalo $J \subset [t_0, \infty)$ (a no ser que $c(t)$ se anule totalmente en algún intervalo). Por este motivo la Proposición 2.11 nos dice que f no puede ser Lipschitz en $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ uniformemente en ningún intervalo $J \subset [t_0, \infty)$. Por otro lado, lo que si sabe es que f sí es localmente Lipschitz en $\mathbb{R}^2$ uniformemente en subintervalos compactos de $[t_0, \infty)$ (gracias al Corolario 2.12).

2.1.2. Teorema del punto fijo

Será esencial en la demostración del Teorema de Cauchy Lipschitz global (Teorema 2.1) utilizar el teorema de la aplicación contractiva (o del punto fijo). Este resultado es muy importante en Análisis y en cursos más avanzados aparecerá a menudo.

Definición 2.14. Dado un conjunto X, decimos que X es un *espacio métrico*, si existe una función distancia asociada llamada *métrica* $d : X \times X \to [0, \infty)$ tal que para todos $x, y, z \in X$

1. $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
2. $d(x,y) = d(y,x)$ (simetría).
3. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ (propiedad triangular).

Definición 2.15. Un espacio métrico se dice *completo* si toda sucesión de Cauchy en el espacio es convergente.

Así como $\mathbb{R}^n$ es un espacio métrico completo con la distancia euclidea, los subconjuntos abiertos propios $U \subset \mathbb{R}^n$ con la distancia inducida por $\mathbb{R}^n$ no son completos, pues puede haber sucesiones de Cauchy que converjan a algún punto de la frontera ∂U.

Proposición 2.16. *El espacio vectorial de las funciones continuas en un intervalo compacto $J \subset \mathbb{R}$, que denotamos por $C(J;\mathbb{R}^n)$, es un espacio métrico completo, con la distancia dada por*

$$d_\infty(y,x) = \sup_{t\in I} |y(t) - x(t)|. \tag{2.3}$$

Demostración. Se deja como ejercicio comprobar el hecho de que (2.3) define una métrica. Veamos ahora que el espacio es completo. Tomemos una sucesión de Cauchy $(x_n)_{n\geq 1} \subset C(J)$. Entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \geq n_0$ se tiene que para todo $t \in J$,

$$|x_n(t) - x_m(t)| \leq \varepsilon. \tag{2.4}$$

En particular para cada $t \in J$ la sucesión de números reales $(x_n(t))_{n\geq 1}$ es de Cauchy en $\mathbb{R}^n$. Como el espacio $\mathbb{R}^n$ es completo con la distancia euclídea usual dada por el valor absoluto (ver curso de Análisis de Variable Real de 1º.), para cada $t \in J$ existirá un punto, que denotaremos por $x(t) \in \mathbb{R}^n$, tal que

$$\lim_{n\to\infty} x_n(t) = x(t).$$

Tomamos ahora el límite $m \to \infty$ en la desigualdad (2.4), y usando la continuidad de la norma $\|\cdot\|$, tenemos que para todo $n \geq n_0$

$$\sup_{t\in J} |x_n(t) - x(t)| \leq \varepsilon.$$

Esto significa que la sucesión de funciones $(x_n(t))_{n\geq 1}$ converge uniformemente a $x(t)$ (en la métrica d_∞). Además sabemos que toda sucesión uniformemente convergente de funciones continuas es continua. Luego $x(t) \in C(J;\mathbb{R}^n)$ y hemos probado la proposición. □

Es importante en el resultado anterior que el espacio de llegada de las funciones sea completo, como lo es $\mathbb{R}^n$. Si no lo fuese, el resultado sería falso. Más en concreto, $(C([0,1],U), d_\infty)$ no es completo, siendo $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto con $\partial U \neq \emptyset$.

Definición 2.17. Dado un espacio métrico X se dice que una aplicación $K : X \to X$ es **contractiva** si es λ-Lipschitz para algún $\lambda \in [0,1)$, es decir para todo $x, y \in X$

$$d(K(x), K(y)) \leq \lambda d(x,y).$$

Teorema 2.18 (Teorema de la aplicación contractiva)**.** *Sea (X,d) un espacio métrico completo, y sea $K : X \to X$ una aplicación contractiva con constante de Lipschitz $\lambda \in [0,1)$. Entonces existe un único punto fijo $x_\infty \in X$, esto es, tal que $K(x_\infty) = x_\infty$*

Demostración. Sea $x_0 \in X$ un punto cualquiera y definamos, para cada $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = K(x_n)$. Como K es $\lambda-$Lipschitz, tenemos que para todo $n \geq 1$,

$$d(x_n, x_{n+1}) = d(K(x_{n-1}), K(x_n)) \leq \lambda d(x_{n-1}, x_n) \leq \cdots \leq \lambda^n d(x_0, x_1).$$

Así, si tomamos $m > n$

$$d(x_n, x_m) \leq \sum_{j=n}^{m-1} d(x_j, x_{j+1}) \leq \sum_{j=n}^{m-1} \lambda^j d(x_0, x_1) = \frac{\lambda^n - \lambda^k}{1-\lambda} d(x_0, x_1) \leq \lambda^n \frac{d(x_0, x_1)}{1-\lambda}.$$

Si hacemos tender $n \to \infty$ y como $\lambda \in [0, 1)$ acabamos de probar que la sucesión $(x_n)_{n\geq 1} \subset X$ es de Cauchy. Como el espacio métrico X es completo, existe $x_\infty \in X$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Además,

$$d(K(x_n), K(x_\infty)) \leq \lambda d(x_n, x_\infty),$$

luego $\lim_{n\to\infty} K(x_n) = K(x_\infty)$. Esto implica que

$$K(x_\infty) = \lim_{n\to\infty} K(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x_\infty.$$

Para probar que x_∞ es el único punto fijo de K obsérvese que, por reducción al absurdo, si hubiese otro $y \neq x_\infty$, tendríamos

$$d(x_\infty, y) = d(K(x_\infty), K(y)) \leq \lambda d(x_\infty, y) < d(x_\infty, y),$$

lo que es una contradicción.

□

2.1.3. Teoremas fundamentales de Cauchy-Lipschitz

Recordamos de nuevo el enunciado del famoso teorema de Cauchy-Lipschitz global (también conocido como teorema de Picard-Lindelöf)

Teorema 2.1 (Teorema de Cauchy-Lipschitz global)**.** *Sea $J = [a, b] \subset \mathbb{R}$ un intervalo cerrado, y sea $f \in C(J \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ globalmente Lipschitz en $\mathbb{R}^n$ uniformemente en J. Entonces, para cada $t_0 \in J$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ el PVI*

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{2.5}$$

tiene una única solución definida en todo el intervalo J.

Demostración. Primeramente, supondremos que $J = [a, b] \subset \mathbb{R}$ es un intervalo acotado. Comenzamos definiendo el operador

$$K : C(J; \mathbb{R}^n) \to C(J; \mathbb{R}^n)$$

dado por

$$K(x)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds.$$

El operador K está bien definido, pues manda funciones continuas en J a funciones continuas en J. Observamos además lo siguiente:

Idea clave: $x \in C^1(J;\mathbb{R}^n)$ es solución del PVI (3.1) si y solo sí $Kx = x$ con $x \in C(I)$, esto es, si x es un punto fijo del operador K.

$\Rightarrow$) Si $x \in C^1(J;\mathbb{R}^n)$, claramente $x \in C(J;\mathbb{R}^n)$. Además por ser solución tenemos que $x'(t) = f(t,x(t))$ para todo $t \in J$. Por tanto para todo $t \in J$

$$K(x)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} x'(s)\,ds = x_0 + x(t) - x_0 = x(t).$$

Esto es $Kx = x$.

$\Leftarrow$) Por otro lado, asumamos que $x \in C(J;\mathbb{R}^n)$ y que $Kx = x$. Como $f \in C(J\times\mathbb{R}^n)$ y $x \in C(J;\mathbb{R}^n)$, se tiene que $s \to f(s,x(s))$ es una función continua y, por tanto, $Kx \in C^1(I)$. Además, como $Kx = x$ tenemos que $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,x(s))\,ds$, y será solución del PVI (3.1) ya que, por el Teorema Fundamental del Cálculo,

$$\begin{cases} x'(t) = f(t,x(t)), \quad \forall\, t \in I \\ x(t_0) = x_0 + \displaystyle\int_{t_0}^{t_0} f(s,x(s))\,ds = x_0. \end{cases}$$

Por tanto, nuestro **objetivo** será intentar aplicar el Teorema de aplicación contractiva (Teorema 2.18) al operador K. Pero veremos en seguida que esto no tiene por qué ser posible en general, y lo que sí probaremos es que K^m para cierto $m \in \mathbb{N}$ es contractivo, y con esto bastará. Para la aplicación del Teorema 2.18 es importante recalcar que, por la Proposición 2.16, tenemos que el espacio métrico $(C(J;\mathbb{R}^n), d_\infty)$ es completo.

Por hipótesis, f es globalmente Lipschitz en $x \in \mathbb{R}^n$ uniformemente en $t \in J$. Llamemos $L \geq 0$ a la constante de Lipschitz. Podemos escribir que para todo $y, x \in C(J;\mathbb{R}^n)$ y todo $t \in J$,

$$\begin{aligned} \|K(y)(t) - K(x)(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^{t} (f(s,y(s)) - f(s,x(s)))\,ds \right\| \leq \int_{\min\{t,t_0\}}^{\max\{t,t_0\}} \|f(s,y(s)) - f(s,x(s))\|\,ds \\ &\leq \int_{\min\{t,t_0\}}^{\max\{t,t_0\}} L\|y(s) - x(s)\|\,ds \leq L \int_{\min\{t,t_0\}}^{\max\{t,t_0\}} d_\infty(x,y)\,ds \\ &= L d_\infty(y,x)|t - t_0| \leq L d_\infty(x,y)\ell(J) \end{aligned}$$

Si se diese el caso de que $L\ell(J) < 1$, donde $\ell(J)$ denota la longitud del intervalo cerrado y acotado J, entonces tendríamos que K sería contractiva. Pero esto no tiene por qué ser así. Para solventar este problema probaremos que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que K^m será un operador contractivo. Y con esto bastará.

Aserto: Para cada $m \in \mathbb{N}$, $t \in I$, $x, y \in C(I)$, tenemos

$$\|K^m(x)(t) - K^m(y)(t)\| \leq \frac{L^m}{m!}|t - t_0|^m d_\infty(x,y).$$

Lo probamos por inducción sobre $m \in \mathbb{N}$:

1. El caso $m = 1$ ya lo hemos probado.

2. Supongamos cierto el aserto para $m \in \mathbb{N}$. Veámoslo para $m+1$. Como $K^{m+1} = K \circ K^m$,

$$\begin{aligned}
\|K^{m+1}(y)(t) - K^{m+1}(x)(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^{t} (f(s, K^m(y)(s)) - f(s, K^m(x)(s)))\, ds \right\| \\
&\leq L \int_{\text{mín}\{t,t_0\}}^{\text{máx}\{t,t_0\}} \|K^m(x)(s) - K^m(y)(s)\|\, ds \\
&\leq L \int_{\text{mín}\{t,t_0\}}^{\text{máx}\{t,t_0\}} \frac{L^m}{m!} |s - t_0|^m d_\infty(x,y)\, ds \\
&= \frac{L^{m+1}}{m!} d_\infty(x,y) \frac{|t-t_0|^{m+1}}{m+1} \\
&= \frac{L^{m+1}}{(m+1)!} |t-t_0|^{m+1} d_\infty(x,y).
\end{aligned}$$

Tenemos entonces $d_\infty(K^m(x), K^m(y)) \leq \dfrac{L^m}{m!}\ell(J)^m d_\infty(x,y)$, y como

$$\lim_{n\to\infty} \frac{L^m}{m!}\ell(J)^m = 0,$$

existirá $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$\lambda := \frac{L^m}{m!}\ell(J)^m \in [0,1).$$

Así tenemos que el operador K^m es contractivo. Aplicando el Teorema de la aplicación contractiva (Teorema 2.18) aseguramos la existencia de una única función $x_\infty \in C(I)$ tal que $K^m(x_\infty) = x_\infty$. Veamos que también es un punto fijo del operador K, y esto implicará que es solución del PVI (3.1). En efecto

$$K(x_\infty) = K(K^m(x_\infty)) = K^{m+1}(x_\infty) = K^m(K(x_\infty)).$$

Esto nos dice que $K(x_\infty)$ también es punto fijo de K^m, luego por unicidad debemos tener que $K(x_\infty) = x_\infty$.

Nos falta ahora ver la unicidad de este punto fijo respecto del operador K, y así aseguraremos la unicidad de la solución (recordar que la unicidad que daba el Teorema de la aplicación contractiva era sobre el punto fijo del operador K^m). Por reducción al absurdo, si existiese otro punto fijo para K, al que llamamos y, entonces usando que K^m es $\lambda-$Lipschitz con $\lambda < 1$,

$$d_\infty(x_\infty, y) = d_\infty(K^m(x_\infty), K^m(y)) = d_\infty(K^m(K(x_\infty)), K^m(K(y))) < d(K(x_\infty), K(y)) = d(x_\infty, y),$$

lo que es una contradicción (que cualquier punto fijo de K también lo es de K^m).

Caso $J \subset \mathbb{R}$ no acotado: Escribimos $I = \bigcup_{n\geq 1}[-n,n] \cap J$ y aplicamos el Teorema al intervalo cerrado y acotado $J_n := [-n,n] \cap J$. Tenemos que existe una única solución $x_n : J_n \to \mathbb{R}$ al PVI (3.1) definida en J_n. Por unicidad de las soluciones tenemos que $x_{n+1}|_{J_n} = x_n$ luego si hacemos esto para todo $n \in \mathbb{N}$ podemos definirnos una función solución $x : J \to \mathbb{R}$ como $x(t) = x_n(t)$ si $t \in J_n$. □

Observación 2.19. Si tenemos un sistema $x' = f(t,x)$, $x(t_0) = x_0$ con f no necesariamente globalmente Lipschitz en todo $\mathbb{R}^n$, sino simplemente en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, podría ocurrir que las soluciones no estén definidas en todo $\mathbb{R}$. Por ejemplo, en el sistema $x' = x^2$, todas las soluciones excepto la nula tienen asíntotas verticales (es decir, explotan en tiempo finito), y sin embargo $f(x) = x^2$ es globalmente Lipschitz en cualquier abierto acotado.

Definición 2.20. Dado un PVI $\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0, \quad t_0 \in J,\, x_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases}$ donde $f : J \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es continua con J intervalo compacto, se llaman *iteradas de Picard-Lindelöf* a la sucesión de funciones

$$x_n(t) := K(x_{n-1})(t)$$

donde

$$\begin{cases} x_0(t) = x_0 \\ K(x)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds \end{cases}.$$

Obsérvese que, en el caso de que f sea globalmente Lipschitz en $\mathbb{R}^n$ uniformemente en J, se tiene que $x(t) = \lim_{n\to\infty} x_n(t)$ es la única solución del PVI definida en J. Esta afirmación anterior se deduce de la demostración del Teorema 2.18.

Corolario 2.21. *Sea $J \subset \mathbb{R}$ cualquier intervalo, $t_0 \in J$, $f \in C(J\times\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ globalmente Lipschitz en $\mathbb{R}^n$ uniformemente en subintervalos compactos de J. Entonces para cada $x_0 \in \mathbb{R}^n$ el PVI* $\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ *posee una única solución en J.*

Demostración. Tomamos una sucesión de intervalos compactos $J_n \subset J$ tales que $J_n \subset J_{n+1}$ y $t_0 \in J_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y tal que $\bigcup_{n\geq 1} J_n = J$. Por el Teorema de Cauchy-Lipschitz global (Teorema 2.1) el PVI tiene una única solución definida en J_n. Y haciendo esto para cada $n \in \mathbb{N}$ se obtienen soluciones $x_n(t)$ definidas en cada J_n. Es fácil ver que dado $n \in \mathbb{N}$, la solución x_{n+1} debe coincidir con x_n en el intervalo J_n por unicidad de soluciones. Luego x_{n+1} es una *prolongación* de x_n. Este hecho hace que podamos definir una función $x : J \to \mathbb{R}^n$ dada por $x(t) = x_n(t)$ si $t \in J_n$. Se puede comprobar que esta función está bien definida, es solución en J del PVI, y además es única (si existiesen dos, estas serían diferentes en algún intervalo J_n, pero en esos intervalos debe haber unicidad). □

Ejemplo 2.22. 1. Sea el sistema

$$x' = \begin{bmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix} = f(t,x) = A(t) \begin{bmatrix} \operatorname{sen}(x_1) \\ \vdots \\ \operatorname{sen}(x_n) \end{bmatrix}, \quad A(t) \in C(\mathbb{R}; \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})).$$

Tenemos que $f \in C(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ y, además, $|(\partial f_i/\partial x_j)(t,x)| \leq M < \infty$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y todo $t \in J$, siendo J cualquier intervalo compacto. Usando el Corolario 2.12 se tiene que f es Lipschitz en $\mathbb{R}^n$ uniformemente en compactos de $\mathbb{R}$. Luego usando el Corolario 2.21 se tiene que existe una única solución al PVI $x' = f(t,x)$, $x(t_0) = x_0$ definida en todo $\mathbb{R}$, para cualquier valor $(t_0, x_0) \in J \times \mathbb{R}^n$.

2. (Sistemas lineales) Sea $x' = A(t)x + B(t)$ donde $J = [a,b]$, $a_{ij} \in C(J)$, $b_j \in C(J)$, $1 \leq i,j \leq n$, $A(t) = (a_{ij}(t))$, $B(t) = (b_{ij}(t))$. Por el Teorema de Cauchy-Lipschitz global (Teorema 2.1) para todo $t_0 \in J$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ existe una única solución en J al PVI $x' = A(t)x + B(t)$, $x(t_0) = x_0$.

3. Sea $\begin{cases} x' = x^p,\ p > 1 \\ x(0) = x_0,\ x_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$. Definiendo $f(t,x) = x^p$ tenemos que f no es globalmente Lipschitz en $\mathbb{R}$ uniformemente en ningún intervalo $J \subset \mathbb{R}$. Luego no podemos usar el Teorema de Cauchy-Lipschitz global. De hecho, ya sabíamos que la solución no está definida en todo $\mathbb{R}$ (salvo la solución nula).

Teorema 2.23 (Teorema de Cauchy-Lipschitz local)**.** *Sean $t_0 \in \mathbb{R}$, $T > 0$, $J = [t_0 - T, t_0 + T]$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $f \in C(J \times \Omega; \mathbb{R}^n)$ localmente Lipschitz en $x \in \Omega$ uniformemente en $t \in J$. Entonces el PVI* $\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ *tiene una única solución local. Esto significa que existe $\delta > 0$ tal que el PVI anterior admite una solución única $x \in C^1([t_0 - \delta, t_0 + \delta]; \mathbb{R}^n)$.*

Ejemplo 2.24. El PVI $x' = x^{2/3}$ con $x(0) = 0$ posee dos soluciones $x_1 = 0$ y $x_2(t) = (t/3)^3$ que difieren en cualquier intervalo J con $0 \in J$. Además, obsérvese que la función $f(t,x) = x^{2/3}$ no es localmente Lipschitz en ningún abierto Ω que contenga a $x_0 = 0$, uniformemente en ningún intervalo J que contenga al $t_0 = 0$.

Demostración del Teorema de Cauchy-Lipschitz local. Sea $x_0 \in \Omega$, $R > 0$ y $L \geq 0$ tal que $\overline{B_R(x_0)} \subset \Omega$ y

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L\|x - y\| \quad \forall x, y \in \overline{B_R(x_0)},\ \forall t \in J.$$

Acabamos de usar la Lipschitzianidad local de la f respecto de la variable $x \in \Omega$.

Sea ahora $\widetilde{f} : J \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una extensión continua de $f|_{J \times \overline{B_R(x_0)}}$ dada por la fórmula

$$\widetilde{f}(t,x) = \begin{cases} f(t,x), & \|x - x_0\| \leq R,\ t \in J \\ f\left(t, x_0 + \dfrac{(x - x_0)}{\|x - x_0\|} R\right), & \|x - x_0\| > R,\ t \in J \end{cases} \tag{2.6}$$

No es difícil probar que $\widetilde{f}$ es una función continua. Además, veremos a continuación que es Lipschitz (con constante L) en $\mathbb{R}^n$ uniformemente en J. Para demostrar esto último cogeremos $x, y \in \mathbb{R}^n$ cualesquiera y probaremos que

$$\|\widetilde{f}(t,x) - \widetilde{f}(t,y)\| \leq L\|x - y\|.$$

1. (Caso 1) Si $\|x - x_0\|, \|y - y_0\| \leq R$

$$\|\widetilde{f}(t,x) - \widetilde{f}(t,y)\| = \|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L\|x - y\|.$$

2. (Caso 2) Si $\|x - x_0\| \leq R$, $\|y - y_0\| > R$,

$$\begin{aligned} \|\widetilde{f}(t,x) - \widetilde{f}(t,y)\| &= \left\| f(t,x) - f\left(t, x_0 + \frac{(y - x_0)}{\|y - x_0\|} R\right) \right\| \\ &\leq L \left\| x - \left(x_0 + \frac{(y - x_0)}{\|y - x_0\|} R\right) \right\| \leq L\|x - y\|. \end{aligned}$$

   El último paso no es completamente trivial, pero se deja como ejercicio al alumno.

3. (Caso 3) Si $\|x - x_0\| > 0$, $\|y - y_0\| \leq R$, procedemos como en el caso 2.).

4. (Caso 4) Si $\|x - x_0\|, \|y - y_0\| > R$,

$$\begin{aligned}\|\widetilde{f}(t,x)-\widetilde{f}(t,y)\| &= \left\| f\left(t, x_0+\frac{(x-x_0)}{\|x-x_0\|}R\right) - f\left(t, x_0+\frac{(y-x_0)}{\|y-x_0\|}R\right)\right\| \\ &\leq L\left\|\left(x_0+\frac{(x-x_0)}{\|x-x_0\|}R\right)-\left(x_0+\frac{(y-x_0)}{\|y-x_0\|}R\right)\right\| \\ &= LR\left\|\frac{x-x_0}{\|x-x_0\|}-\frac{y-x_0}{\|y-x_0}\right\| \leq L\|x-y\|.\end{aligned}$$

Se concluye pues que $\widetilde{f}$ es globalmente Lipschitz en $\mathbb{R}^n$ uniformemente en J. Consideramos a continuación el PVI asociado a $\widetilde{f}$, esto es,

$$(\widetilde{P})\begin{cases} x' = \widetilde{f}(t,x) \\ x(t_0)=x_0 \end{cases}.$$

Aplicando el Teorema de Cauchy-Lipschitz global (Teorema 2.1) a $(\widetilde{P})$ tendremos una única solución $x \in C^1([t_0-T, t_0+T];\mathbb{R}^n)$. Ahora veremos que existe $\delta > 0$ tal que

$$x(t) \in \overline{B_R(x_0)} \quad \text{para todo } t \in [t_0-\delta, t_0+\delta]. \tag{2.7}$$

En efecto, tomando $\delta = \text{mín}\{T, R/M\}$, donde

$$M = \text{máx}\{\|\widetilde{f}(t,x)\| : t \in J,\, x \in \overline{B_R(x_0)}\} = \text{máx}\{\|f(t,x)\| : t \in J,\, x \in \overline{B_R(x_0)}\} < \infty.$$

En la última línea se está usando que la función continua f alcanza el máximo en el compacto $J \times \overline{B_R(x_0)}$. De esta forma, si $t \in [t_0-\delta, t_0+\delta]$ se tiene que

$$\|x(t)-x_0\| \leq \left\|\int_{t_0}^{t} x'(s)\,ds\right\| = \left\|\int_{t_0}^{t}\widetilde{f}(s,x(s))\,ds\right\| \leq M|t-t_0| \leq \delta M \leq R$$

y (2.7) quedaría probado.

Por consiguiente, si $x(t)$ es la solución de $(\widetilde{P})$ en $J=[t_0-T, t_0+T]$, en particular lo es en $[t_0-\delta, t_0+\delta]$, y gracias a (2.7) y al hecho de que $f = \widetilde{f}$ en $J \times \overline{B_R(x_0)}$ concluimos que

$$\begin{cases} x'(t) = \widetilde{f}(t,x(t)) = f(t,x(t)) \quad \forall t \in [t_0-\delta, t_0+\delta] \\ x(t_0)=x_0 \end{cases}.$$

Esto significa que $x(t)$ es solución al PVI original en $[t_0-\delta, t_0+\delta]$.

Se acabará la demostración del teorema una vez hayamos probado la unicidad de esta solución. Por reducción al absurdo supongamos que existe otra solución $y(t)$ que resuelve el PVI en el intervalo $[t_0-\delta, t_0+\delta]$.

Probaremos en primer lugar que necesariamente $y(t) \in \overline{B_R(x_0)}$ para todo $t \in [t_0-\delta, t_0+\delta]$. Recordemos que $\delta = \text{mín}\{T, R/M\}$ con $M = \text{máx}\{\|f(t,x)\| : t \in J, x \in \overline{B_R(x_0)}\}$. En efecto, supongamos que existiese un tiempo $t_1 \in (t_0-\delta, t_0+\delta)$ tal que $\|y(t_1)-x_0\| > R$. Sin pérdida de generalidad asumiremos que $t_1 > t_0$. En este caso definiendo

$$t^* = \sup\{t > t_0 : \|y(t)-x_0\| < R\} < t_1$$

se tiene que $\|y(t^*)-x_0\| = R$ y además $\|y(t)-x_0\| < R$ para todo $t \in (t_0, t^*)$. Pero entonces tendríamos que

$$\|y(t^*) - x_0\| = \left\| \int_{t_0}^{t^*} y'(s)\, ds \right\| \leq \int_{t_0}^{t^*} \|f(s, y(s))\|\, ds \leq M|t^* - t_0| < M\delta \leq R.$$

Y esto es una contradicción, pues $\|y(t^*) - x_0\| = R$.

En segundo lugar, puesto que $y(t) \in \overline{B_R(x_0)}$ para todo $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ tenemos que

$$f(t, y(t)) = \widetilde{f}(t, y(t)) \quad \forall t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta].$$

Usando la unicidad de soluciones de $(\widetilde{P})$, y como $y(t)$ es solución de $(\widetilde{P})$ en el intervalo $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$, necesariamente debemos tener que $x(t) = y(t)$ para todo $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$. □

Dos corolarios inmediatos serían.

Corolario 2.25. *Sean $J \subset \mathbb{R}$ un intervalo, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y $f \in C(J \times \Omega; \mathbb{R}^n)$. Si se tiene que $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \in C(J \times \Omega; \mathbb{R})$ para todo $1 \leq i, j \leq j$ entonces para todo $(t_0, x_0) \in J \times \Omega$ existe $\delta > 0$ de forma que el PVI $x' = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$ tiene solución única $x(t)$ en $[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \cap J$.*

Corolario 2.26. *Sea $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ abierto y sea $f \in C^1(U; \mathbb{R}^n)$. Entonces, para todo $(t_0, x_0) \in U$ existe $\delta > 0$ de forma que el PVI $x' = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$ tiene solución única $x(t)$ en $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$.*

Tras haber probado el Teorema de Cauchy-Lipschitz local, y con un poco más de esfuerzo, demostraremos a continuación el siguiente hecho, que permite saber que, en muchas ocasiones, la solución será única allá donde esté definida. En otras palabras, la unicidad local se transforma en unicidad global.

Proposición 2.27. *Si $f : J \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ satisface que $f \in C(J \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ y es localmente Lipschitz en $\mathbb{R}^n$ uniformemente en J, entonces para todo $(t_0, x_0) \in J \times \mathbb{R}^n$ existe una solución al PVI $\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ que será única allá donde esté definida*[3].

Demostración. Sea $x(t)$ solución del PVI definida en $[t_0, t_0 + h] \subset J$, $h > 0$. Supondremos que existe otra solución $y(t)$ definida en el mismo intervalo y veremos que deben coincidir. El argumento para $[t_0 - h, t_0] \subset J$ es análogo, y se deja para el alumno.

Definimos

$$A = \{\delta \in [0, h] : x(t) = y(t)\ \forall t \in [t_0, t_0 + \delta]\}.$$

1. $A \neq \emptyset$ pues $0 \in A$.
2. Sea $\delta^* = \sup(A)$. Entonces $x(t) = y(t)$ en todo $t \in [t_0, t_0 + \delta^*]$ por continuidad de las soluciones.
   - En el caso de que $\delta^* = h$ hemos acabado.
   - Si $\delta^* < h$ nos planteamos el PVI

$$(P') \begin{cases} z' = f(t, z) \\ z(t_0^*) = x(t_0^*) = y(t_0^*) \end{cases}$$

[3]Esto significa que si x está definida en algún intervalo $I \subset J$ con $t_0 \in I$, entonces, si y fuese otra solución del mismo PVI y también estuviese definida en todo I, se debe tener que $x(t) = y(t)$ para todo $t \in I$.

donde $t_0^* = t_0 + \delta^*$. Por el Teorema de Cauchy-Lipschitz local (Teorema 2.23) sabemos que existirá un $\varepsilon > 0$ (que suponemos suficientemente pequeño para que $t_0^* + \varepsilon \leq h$) tal que habrá una única solución a (P') definida en $[t_0^*, t_0^* + \varepsilon]$. Pero tanto x como y resuelven (P') en $[t_0, t_0^* + \varepsilon]$, luego $x = y$ en $[t_0, t_0^* + \varepsilon]$ por unicidad de soluciones. Y esto contradice que $\delta^* = \sup(A)$.

Así pues, hemos probado que $\delta^* = h$ y entonces $x(t) = y(t)$ en todo $t \in [t_0, t_0 + h]$.

□

2.2. Soluciones maximales y prolongabilidad

Sea $J = [t_0, t_0 + T]$, $T \leq \infty$, $f : J \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continua y localmente Lipschitz en $\mathbb{R}^n$ uniformemente en subintervalos compactos de J. Sea el PVI

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{2.8}$$

y sea el conjunto de soluciones

$$\Sigma = \{(u_I, I) : I = [t_0, t_0 + h],\ [t_0, t_0 + h),\ h \leq T \text{ con } u_I \text{ siendo solución del PVI en } I\}.$$

De momento trabajaremos con dominio $x \in \mathbb{R}^n$, y más adelante se trabajará con dominios $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, y se definirán las que llamaremos soluciones relativas a Ω con sus respectivas nociones de prolongabilidad y maximalidad.

Definición 2.28 (Prolongabilidad)**.** Sean $(u_1, I_1), (u_2, I_2) \in \Sigma$. Diremos que (u_2, I_2) es una *prolongación* de (u_1, I_1) cuando $I_1 \subset I_2$ y $u_2|_{I_1} = u_1$. Diremos que (u_2, I_2) es prolongación estricta de (u_1, I_1) cuando $I_1 \subsetneq I_2$. Y diremos que (u, I) es una *solución maximal* cuando no admita prolongaciones estrictas.

En la definición anterior se podría haber pedido únicamente que $I_1 \subset I_2$ puesto que nuestras hipótesis de regularidad de f nos devuelven unicidad de soluciones allá donde estén definidas.

En el caso de que (u_2, I_2) sea prolongación de (u_1, I_1) escribiremos $(u_1, I_1) \leq (u_2, I_2)$. Esto define una relación de orden total en Σ. (Sin unicidad tendríamos un orden parcial).

Ejemplo 2.29. En el PVI $x' = x^{2/3}$, $x(0) = 0$ tenemos dos soluciones $x_1 = 0$ y $x_2(t) = (t/3)^3$. Claramente $(x_1, (-1, 1))$ no es comparable a $(x_2, (-1, 1))$.

Los siguientes dos lemas serán de mucha utilidad.

Lema 2.30. *Sea $f : J \times \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, con $J = [t_0, t_0 + T] \subset \mathbb{R}$, $T \leq \infty$, y $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto, una función continua y localmente Lipschitz en la segunda variable uniformemente en subintervalos compactos de tiempo de la primera. Sean $t_0 \in J$, $x_0 \in \Omega$ y sea $x(t)$ una solución del PVI (2.8) definida en un intervalo $I = [t_0, t_1]$ con $t_1 < t_0 + T$. Entonces existe $\delta > 0$ y una prolongación estricta de la solución a un intervalo $[t_0, t_1 + \delta]$.*

Demostración. Basta plantearse el PVI

$$(\widetilde{P}) \begin{cases} z' = f(t,z) \\ z(t_1) = x(t_1) \end{cases}$$

y aplicar el Teorema de Cauchy-Lipschitz local (Teorema 2.23) para encontrar un $\delta > 0$ y una única solución $y(t)$ definida en $[t_1 - \delta, t_1 + \delta] \subset J$. Por unicidad de soluciones allá donde estén definidas (ver Proposición 2.27) necesariamente $x(t) = y(t)$ en $[t_1 - \delta, t_1]$. Luego definiendo

$$\widetilde{x}(t) = \begin{cases} x(t) & t \in [t_0, t_1] \\ y(t) & t \in (t_1, t_1 + \delta] \end{cases}.$$

se tiene claramente una solución del PVI original definida en $[t_0, t_1 + \delta]$. □

Lema 2.31. *Sea $f\colon J \times \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, con $J = [t_0, t_0 + T] \subset \mathbb{R}$, $T \leq \infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y f una función continua y localmente Lipschitz en la segunda variable uniformemente en subintervalos compactos de tiempo. Sean $t_0 \in J$, $x_0 \in \Omega$ y sea $x(t)$ una solución del PVI (2.8) definida en un intervalo $I = [t_0, b) \subset J$ con $b < \infty$. Supongamos que existe una sucesión de tiempos $(t_k)_{k\geq 1} \subset I$ convergiendo a b y tal que se da uno de los siguientes casos.*

(a) Se tiene

$$\lim_{k\to\infty} x(t_k) = x^* \in \overline{\Omega}.$$

Entonces $\lim_{t\to b^-} x(t) = x^*$. En particular, si $x^* \in \Omega$ existe una prolongación estricta de la solución $(x, [t_0, b))$ a $(x, [t_0, b])$.

(b) Se tiene

$$\lim_{k\to\infty} \|x(t_k)\| = +\infty.$$

Entonces $\lim_{t\to b^-} \|x(t)\| = \infty$.

Observación 2.32. El resultado anterior es análogo si trabajamos en $J = [t_0 - T, t_0]$ y con soluciones definidas en $(a, t_0]$ con $t_0 - T < a$.

Demostración. (a) Supongamos $\lim_{k\to\infty} x(t_k) = x^* \in \Omega$ con $(t_k)_{k\geq 1} \subset [t_0, b)$ convergiendo a b. Sea $R > 0$ tal que $B(x^*, 3R) \subset \Omega$ y asumiremos sin pérdida de generalidad que $x(t_k) \in B(x^*, R)$ y que $t_k \leq t_{k+1}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Definimos

$$M = \max\{\|f(t,x)\| : t \in [t_0, b],\, x \in \overline{B(x^*, 2R)}\} < \infty.$$

Razonaremos por reducción al absurdo, es decir, asumamos que $\lim_{t\to b^-} x(t) \neq x^*$. En ese caso, existe $r > 0$ y una sucesión creciente $(s_k)_{k\geq 1}$ convergiendo a b tal que $\|x(s_k) - x^*\| \geq r > 0$. Podemos asumir que $0 < r < R$ y que $t_k < s_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Más aún, por continuidad de la solución, podemos reemplazar s_k por otros $s_k' \in (t_k, s_k]$ de tal forma que $x(t) \in B(x^*, 2R)$ para todo $t \in [t_k, s_k']$ (recordar que $x(t_k) \in B(x^*, R)$ para todo $k \in \mathbb{N}$). Es decir, asumiremos que $(t_k)_{k\geq 1}$, $(s_k)_{k\geq 1}$ son sucesiones crecientes convergentes a b tales que $t_k < s_k$ y $x(t) \in B(x^*, 2R)$ para todo $t \in [t_k, s_k]$ y todo $k \in \mathbb{N}$, y tales que

$$\lim_{k\to\infty} x(t_k) = x^* \quad ; \quad \|x(s_k) - x^*\| \geq r > 0 \ \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Pero entonces

$$0 < r \leq \|x(s_k) - x^*\| \leq \|x(s_k) - x(t_k)\| + \|x(t_k) - x^*\| \leq \int_{t_k}^{s_k} \|f(u, x(u))\|\, du + \|x(t_k) - x^*\|$$
$$\leq |s_k - t_k| M + \|x(t_k) - x^*\| \to 0 \quad \text{cuando } k \to \infty.$$

Si definimos ahora la función

$$\widetilde{x}(t) = \begin{cases} x(t) & t \in [t_0, T_{max}) \\ x^* & t = T_{max} \end{cases}$$

cuyo dominio de definición es $\widetilde{I} = [t_0, b]$ vemos que $(\widetilde{x}, \widetilde{I})$ es una solución que prolonga estrictamente a (x, I).

(b) Supongamos $\lim_{k\to\infty} \|x(t_k)\| = +\infty \in \Omega$. De nuevo podemos suponer sin pérdida de generalidad que la sucesión $(t_k)_{k\geq 1}$ es estrictamente creciente. Por reducción al absurdo, si $\lim_{t\to b^-} \|x(t)\| \neq \infty$ entonces existe $K > 0$ y una sucesión $(s_k)_{k\geq 1}$ tal que $s_n \to b^-$ y además $\|x(s_k)\| \leq K$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Al ser $(x(s_k))_{k\geq 1} \subset \mathbb{R}^n$ una sucesión acotada, por el Teorema de Bolzano-Weierstrass deberá existir una subsucesión convergente $\lim_{m\to\infty} x(s_{k_m}) = \xi \in \mathbb{R}^n$. Pero entonces estaríamos en el primer caso y tendríamos que $\lim_{t\to b^-} x(t) = \xi$, lo cual es un absurdo, pues habíamos asumido que $\|x(t_k)\| \to \infty$ con $t_k \to b^-$.

□

Teorema 2.33 (Teorema sobre soluciones maximales A)**.** *Sean $t_0 \in \mathbb{R}$, $T > 0$, $J = [t_0, t_0 + T]$, $f \in C(J \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ localmente Lipschitz en $\mathbb{R}^n$ uniformemente en J. Entonces, para cada $x_0 \in \mathbb{R}^n$ el PVI (2.8) tiene una única solución (x, I) maximal. Además, o bien $I = J$ o bien $I = [t_0, T_{max})$ para algún $T_{max} \leq t_0 + T$, y en tal caso*

$$\lim_{t\to T_{max}^-} \|x(t)\| = \infty.$$

(Cuando se da este último comportamiento se suele decir que x explota en tiempo finito).

Demostración. Tomemos el conjunto de soluciones y lo llamaremos

$$\Sigma = \{(x_\alpha, I_\alpha) : \alpha \in A\}$$

para cierto conjunto de índices A. Sea ahora $I = \bigcup_{\alpha\in A} I_\alpha$. Definiendo $x(t) = x_\alpha(t)$ si $t \in I_\alpha$, tendremos una función bien definida en I que será solución del PVI en I. Además, por la unicidad de soluciones que nos da la Proposición 2.27 (consecuencia del Teorema de Cauchy-Lipschitz local), la función $x(t)$ es única, y por cómo la hemos definido es una solución maximal.

Solo nos falta estudiar cómo es el intervalo I (en ocasiones lo llamaremos intervalo maximal de definición). En el caso de que $I = J$ hemos acabado. Luego supondremos que $I \subsetneq J$. En este caso tendremos dos opciones

- O bien $I = [t_0, T_{max}]$ con $T_{max} < t_0 + T$.
- O bien $I = [t_0, T_{max})$ con $T_{max} \leq t_0 + T$.

Probaremos en primer lugar que el primer caso no puede darse por reducción al absurdo. Nos planteamos el siguiente PVI

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(T_{max}) = x(T_{max}) \end{cases}.$$

Por el Teorema de Cauchy-Lipschitz local existe una única solución definida en $[T_{max}, T_{max}+\delta)$ para cierto $\delta > 0$. Pero en ese caso, esa solución $y(t)$ prolonga a $x(t)$ estrictamente. Y esto es una contradicción con la maximalidad de (x, I).

Así pues, solo hemos de estudiar el caso $I = [t_0, T_{max})$ con $T_{max} \leq t_0 + T$. Nuestro objetivo será probar que existe una sucesión creciente de tiempos $(t_k)_{k\geq 1}$ tales que $t_k \to T_{max}$ con $\lim_{k\to\infty} \|x(t_k)\| = \infty$. Esto será suficiente, pues el Lema 2.31 (b) automáticamente nos dice que $\lim_{t\to b^-} \|x(t)\| = \infty$.

(1) Veremos que Γ no es acotado en $\mathbb{R}^n$ por reducción al absurdo. Supongamos que Γ es acotado y tomemos $(t_k)_{k\geq 1}$ una sucesión creciente de tiempos con $t_k \geq t_0$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y con $t_k \to T_{max}$. Entonces tomamos el conjunto

$$\{x(t_k) : k \in \mathbb{N}\} \subset \Gamma \subset \overline{\Gamma}.$$

Como $\overline{\Gamma}$ es un conjunto cerrado y acotado, y por tanto compacto, por Bolzano-Weierstrass existirá una subsucesión $(t_{k_m})_{m\geq 1}$ tal que $\lim_{m\to\infty} x(t_{k_m}) = x^* \in \mathbb{R}^n$. Pero, por el Lema 2.31 (a), tendremos que existe el límite $\lim_{t\to T_{max}^-} x(t) = x^*$ y así tendríamos una prolongación estricta de la solución a $\widetilde{I} = [t_0, T_{max}]$, lo cual es una contradicción.

(2) Encontraremos una sucesión creciente $(t_k)_{k\geq 1}$ tales que $t_k \to T_{max}$ con $\lim_{k\to\infty} \|x(t_k)\| = \infty$.

- Para $1 > 0$ existe $t_1 > t_0$ tal que $\|x(t_1)\| \geq 1$ porque Γ es no acotado. Sea ahora

  $$\Gamma = \{x(t) : t \in [t_0, t_1]\} \cup \{x(t) : t \in (t_1, T_{max})\},$$

  donde el primer conjunto de la unión debe ser acotado y el segundo conjunto que llamamos $\Gamma_1 = \{x(t) : t \in (t_1, T_{max})\}$ no lo es (pues Γ no lo es).

- Para $2 > 0$, existe $t_2 > t_1$ tal que $\|x(t_2)\| \geq 2$ porque Γ_1 no es acotado.

- Continuamos así sucesivamente hasta encontrar $(t_n)_{n\geq 1} \subset [t_0, T_{max})$ con $t_n < t_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y con $\|x(t_n)\| \geq n$.

Llamemos $t_\infty = \lim_{n\to\infty} t_n \leq T_{max}$. Debemos finalmente ver que $t_\infty = T_{max}$. En efecto, en caso contrario, si $t_\infty < T_{max}$ por la continuidad de x tendríamos $\lim_{n\to\infty} x(t_n) = x(t_\infty) \in \mathbb{R}^n$, pero $\|x(t_n)\| \geq n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego

$$\infty = \lim_{n\to\infty} \|x(t_n)\| = \|x(t_\infty)\|.$$

Esto es una contradicción, luego $t_\infty = T_{max}$ y ya hemos acabado. □

Ejemplo 2.34. Sea

$$\begin{cases} x' = \sqrt{1-x} \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}.$$

Sea $U = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq 1\}$. En el caso de que $t_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 < 1$ como $f(t, x) = \sqrt{1-x}$ es localmente Lipschitz en $(-\infty, 1)$ uniformemente en $\mathbb{R}$ (ya que $f \in C(\mathbb{R} \times (-\infty, 1))$, $(\partial f/\partial x) \in C(\mathbb{R} \times (-\infty, 1))$), el Teorema de Cauchy-Lipschitz local nos dice que hay una única solución local.

Si $x_0 = 1$ entonces tomamos la solución constante $x = 1$. Para ver si la unicidad falla, podemos intentar resolver la EDO en variables separadas

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x}} = dt \quad \Rightarrow \quad 2(1-x)^{1/2} = t + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Como $x(t_0) = 1$ entonces $C = -t_0$. Luego la solución al PVI es

$$-2\sqrt{1-x(t)} = t - t_0 \quad \Rightarrow \quad x(t) = 1 - \frac{(t-t_0)^2}{4},$$

la cual se puede comprobar que es solución. Luego no hay unicidad en ese caso.

Observemos en cualquier caso que $\sqrt{1-x} = (-1/2)(t-t_0)$ solo tiene sentido si $t \leq t_0$. Además x' es siempre positiva, luego x debe ser siempre creciente.

Teorema 2.35 (Teorema sobre soluciones maximales B)**.** *Sean $t_0 \in \mathbb{R}$, $J = [t_0, \infty)$, $f \in C(J \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ localmente Lipschitz en $\mathbb{R}^n$ uniformemente en subintervalos compactos de J. Entonces, para cada $x_0 \in \mathbb{R}^n$ el PVI (2.8) tiene una única solución (x, I) maximal. Además, o bien $I = J$ o bien $I = [t_0, T_{max})$ para algún $T_{max} \leq \infty$, y si $T_{max} < \infty$ entonces*

$$\lim_{t \to T_{max}^-} \|x(t)\| = \infty.$$

Demostración. Se deja como ejercicio al lector. Simplemente hay que seguir los pasos de la demostración anterior. □

Hacemos constar que en los dos teoremas anteriores podríamos haber trabajado con soluciones maximales hacia la izquierda de t_0, esto es con (u, I) siendo $I = [T_{min}, t_0]$ o bien $I = (T_{min}, t_0]$. Las demostraciones se harían de manera análoga.

Ahora trabajaremos con la situación de que el dominio de la variable x no sea todo $\mathbb{R}^n$ sino solo un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Definición 2.36. Sea $t_0 \in \mathbb{R}$, $J = [t_0, t_0+T]$ con $0 < T \leq \infty$. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y sea $f : J \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ continua y localmente Lipschitz en Ω uniformemente en J. Decimos que, dado un intervalo $I \subset J$, $t_0 \in I$, el par (x, I) es solución del PVI $\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ *relativa a* Ω si x es solución del PVI y además $x(t) \in \Omega$ para todo $t \in I$.

Las definiciones de *prolongación* y de *solución maximal relativas a* Ω son análogas.

Teorema 2.37 (Teorema sobre soluciones maximales C)**.** *Sea $t_0 \in \mathbb{R}$, $J = [t_0, t_0 + T]$ con $0 < T \leq \infty$. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto acotado y sea $f \in C(J \times \Omega; \mathbb{R}^n)$ localmente Lipschitz en $x \in \Omega$ uniformemente en $t \in J$. Entonces para cada $x_0 \in \Omega$ el PVI $\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ posee una única solución maximal (x, I) relativa a Ω. Además si $I \neq J$ entonces $I = [t_0, T_{max})$ con $T_{max} < \infty$ y en ese caso $\lim_{t \to T_{max}^-} x(t) \in \partial\Omega$.*

En particular, si $T_{max} < \infty$, la solución $x(t)$ abandona cualquier compacto $K \subset \Omega$ en algún tiempo $t^* \in [t_0, T_{max})$.

Demostración. Se propone como ejercicio al alumno. □

Teorema 2.38 (Teorema sobre soluciones maximales D)**.** *Sea $J = [t_0, t_0 + T]$ con $0 < T \leq \infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto (no necesariamente acotado) y $f \in C(J \times \Omega; \mathbb{R}^n)$ localmente Lipschitz en $x \in \Omega$ uniformemente en $t \in J$. Entonces, para cada $x_0 \in \Omega$ el problema de valor inicial*

$$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

tiene una única solución maximal (x, I) relativa a Ω. Además si $I \neq J$ entonces $I = [t_0, T_{max})$ con $T_{max} < \infty$ y en tal caso

$$\lim_{t \to T_{max}^-} x(t) \in \partial\Omega \quad o \quad \lim_{t \to T_{max}^-} \|x(t)\| = \infty.$$

Enunciamos a continuación un último corolario para el caso particular de sistemas autónomos.

Corolario 2.39. *Sea un sistema autónomo $x' = f(x)$, $x(0) = x_0$, con $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$. Llamemos $[0, T_{max})$ al intervalo maximal de definición de la única solución $x(t)$. Entonces, si existe un compacto $K \subset \mathbb{R}^n$ tal que $\{x(t) : t \in [0, T_{max})\} \subset K$, se debe tener que $T_{max} = \infty$.*

El resultado es análogo para intervalos maximales $(T_{min}, 0]$.

Ejemplo 2.40. Sea el PVI

$$\begin{cases} x' = f(t,x) = \begin{cases} x^{2/3} & x \geq 0 \\ -x^{2/3} & x < 0 \end{cases} \\ x(0) = 0 \end{cases}.$$

No hay unicidad de soluciones, pues tenemos $x_1 = 0$,

$$x_2(t) = \begin{cases} (t/3)^3 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad ; \quad x_3(t) = \begin{cases} (t/3)^3 & t \geq 0 \\ (-t/3)^3 & t < 0 \end{cases}.$$

Si hubiésemos puesto como condición inicial $x(1) = 27$, tendríamos que x_2 y x_3 son soluciones del sistema definidas en todo $\mathbb{R}$. Luego como soluciones definidas en $\mathbb{R}$ no son únicas. Sin embargo, sí podemos entender que son únicas como soluciones relativas a $\Omega = (0, \infty)$, que es donde podemos aplicar el Teorema 2.37, y en ese caso, como soluciones maximales relativas a $(0, \infty)$, el intervalo maximal de existencia de ambas es $I = (0, \infty)$ pues $\lim_{t \to 0^+} x_2(t) = \lim_{t \to 0^+} x_3(t) = 0 \in \partial\Omega$.

Dedicaremos ahora un momento a explicar en más detalle por qué los teoremas anteriores tienen sus versiones análogas si las soluciones se ven definidas a la izquierda de t_0, es decir, tenemos intervalos de existencia $I = [T_{min}, t_0]$ o $I = (T_{min}, t_0]$.

Idea: Dado el PVI

$$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

con $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$ hacemos el cambio $s = 2t_0 - t$, $y(s) = x(t)$. Así tenemos otro PVI dado por

$$(\widetilde{P}) \begin{cases} y'(s) = x'(t)\dfrac{dt}{ds} = -x'(t) = -f(t, x(t)) = -f(2t_0 - s, y(s)) \\ y(t_0) = x(t_0) = x_0 \end{cases}.$$

Definiendo $g(s, y) = -f(2t_0 - s, y)$ tenemos que g preserva todas las propiedades de regularidad de la f cuando $t_0 \leq s \leq t_0 + T$ (pues en este caso $t \in [t_0 - T, t_0]$). De esta forma aplicamos a $(\widetilde{P})$ los teoremas de la teoría de Cauchy-Lipschitz en $[t_0, t_0 + T]$, y estos resultados se trasladan, tras deshacer el cambio, a las soluciones del PVI inicial con intervalos de existencia de las soluciones $I \subset [t_0 - T, t_0]$.

Veamos ahora dos ejemplos sencillos de problemas de valor inicial, donde se pueden usar todos los resultados vistos en esta sección. Además no olvidemos que debemos tener en cuenta los teoremas de existencia y unicidad vistos en el Capítulo 1.

Ejemplo 2.41. En el siguiente PVI hay existencia y unicidad de soluciones definidas en todo $\mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x' = 3x\cos t \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

La función $f(t,x) = 3x\cos t$ es continua en todo $\mathbb{R}^2$, además $\frac{\partial f}{\partial x}(t,x) = 3\cos t$ es continua y está acotada en todo $\mathbb{R}^2$. Entonces por la Proposición 2.11 f es globalmente Lipschitz en $x \in \mathbb{R}$ uniformemente en $t \in \mathbb{R}$. Aplicando el Teorema de Cauchy-Lipschitz global (Teorema 2.1) tenemos que para todo $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$ el PVI dado tendrá una única solución definida globalmente en todo $\mathbb{R}$.

También se podría haber usado el Teorema de existencia y unicidad para EDOs en variables separadas (Teorema 1.5), siempre que $x_0 \neq 0$. Sin embargo, el razonamiento del párrafo anterior usando el Teorema de Cauchy-Lipschitz global nos da más información porque incluye el caso $x_0 = 0$.

También podríamos haber usado el Teorema de existencia y unicidad para EDOs lineales y tendríamos las mismas conclusiones que en el primer párrafo.

Ejemplo 2.42. Demostraremos que en el siguiente PVI hay existencia y unicidad de soluciones, a priori solo definidas localmente.

$$\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

La función $f(t,y) = y^2$ satisface que $\frac{\partial f}{\partial y}(t,y) = 2y$, luego $f, \frac{\partial f}{\partial y} \in C(\mathbb{R}^2)$, luego por el Corolario 2.26 sabemos que existe una única solución definida a priori solo en un entorno del $t_0 = 0$. En efecto no se tendrá existencia de solución definida en todo $t \in \mathbb{R}$ ya que si resolvemos tenemos por solución

$$y(t) = \frac{1}{1-t}$$

cuyo intervalo de definición (incluyendo a $t_0 = 0$) es $(-\infty, 1)$. Es decir, cuando $t \to 1$ tenemos que la solución explota ya que $\lim_{t\to 1} y(t) = +\infty$.

2.3. Teoremas de existencia y unicidad para EDOs de orden superior

Sea la ecuación diferencial de orden superior

$$x^{n)}(t) = g(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{n-1)}(t)) \tag{2.9}$$

con $g : J \times \Omega \to \mathbb{R}$ siendo $J \subset \mathbb{R}$ intervalo y $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto. Por solución entendemos cualquier función $x : I \to \mathbb{R}$ tal que (2.9) se satisface para todo $t \in I$ con $I \subset J$, $x(t) \in \Omega$ para todo $t \in I$. Observemos que podemos transformar (2.9) en un sistema haciendo

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = x' \\ \vdots \\ x_n = x^{n-1)} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1}' = x_n \\ x_n' = g(t, x_1, \ldots, x_n) \end{cases} \qquad \text{Sistema asociado a (2.9) de orden 1.} \tag{2.10}$$

Lema 2.43. *Si Σ_E y Σ_S denotan el conjunto de soluciones de (2.9) y (2.10) respectivamente entonces la aplicación $T : \Sigma_E \to \Sigma_S$ definida por $T(x) = (x, x', \ldots, x^{n-1)}$ es una biyección.*

Demostración. Es trivial. □

Lema 2.44. *Sea $g : J \times \Omega \to \mathbb{R}$, $J \subset \mathbb{R}$ intervalo, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto. Entonces g es globalmente Lipschitz en Ω uniformemente en J si y solo si $f(t, x) = f(t, x_1, \ldots, x_n) = (x_2, x_3, \ldots, x_n, g(t, x))$ lo es. Además g es localmente Lipschitz en Ω si y solo si f lo es.*

Demostración. Solo probaremos la primera parte. Para ello usaremos la norma supremo $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$ en $\mathbb{R}^n$ en vez de la euclídea $\|x\| = \|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$. Se puede probar que ambas normas son equivalentes, esto es, que existe una constante $C \geq 1$ tal que $C^{-1}\|x\| \leq \|x\|_\infty \leq C\|x\|$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

$\Leftarrow$): Tenemos que existe $L \geq 0$ tal que $\|f(t, x) - f(t, y)\|_\infty \leq L\|x - y\|_\infty$ para todo $x, y \in \Omega$. Ahora si $x, y \in \Omega$

$$\begin{aligned} |g(t, x) - g(t, y)| &\leq \max\left\{\max_{2\leq i\leq n} |x_i - y_i|, |g(t, x) - g(t, y)|\right\} \\ &= \|f(t, x) - f(t, y)\|_\infty \leq L\|x - y\|_\infty \leq LC\|x - y\|. \end{aligned}$$

$\Rightarrow$): Tenemos que existe $L \geq 0$ tal que $|g(t, x) - g(t, y)| \leq L\|x - y\|_\infty$ para todo $x, y \in \Omega$. Ahora si $x, y \in \Omega$

$$\begin{aligned} \|f(t, x) - f(t, y)\|_\infty &= \max\left\{\max_{2\leq i\leq n} |x_i - y_i|, |g(t, x) - g(t, y)|\right\} \\ &\leq \max\left\{\max_{2\leq i\leq n} |x_i - y_i|, L\|x - y\|_\infty\right\} \leq \max\{1, L\}\|x - y\|_\infty. \end{aligned}$$

□

Por lo tanto, en base a los lemas anteriores, toda la teoría de Cauchy-Lipschitz y los teoremas correspondientes tienen sus versiones análogas para EDOs de orden superior. Enunciamos a continuación todos estos resultados, sin demostración.

Teorema 2.45 (Teorema de Cauchy-Lipschitz global para EDOs orden superior)**.** *Sea $J = [a, b]$ y $g \in C(J \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ globalmente Lipschitz en $x \in \mathbb{R}^n$ uniformemente en $t \in J$. Entonces, para cada $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y $t_0 \in J$ el problema de valor inicial*

$$\begin{cases} x^{n)} = g(t, x, x', x'', \ldots, x^{n-1)}) \\ (x(t_0), x'(t_0), \ldots, x^{n-1)}(t_0)) = x_0 \end{cases}$$

Teorema 2.46 (Teorema de Cauchy-Lipschitz local para EDOs orden superior)**.** *Sea $J = [t_0, t_0 + T]$ con $T > 0$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $g \in C(J \times \Omega; \mathbb{R})$ localmente Lipschitz en $x \in \Omega$ uniformemente en $t \in J$. Entonces, para cada $x_0 \in \Omega$ existe $\delta > 0$ tal que el problema de valor incial*

$$\begin{cases} x^{n)} = g(t, x, x', x'', \ldots, x^{n-1)}) \\ (x(t_0), x'(t_0), \ldots, x^{n-1)}(t_0)) = x_0 \end{cases}$$

tiene una única solución en $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$. Además la solución es única en cualquier intervalo donde esté definida y no salga de Ω.

Corolario 2.47. *Sea $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ un conjunto abierto y $g \in C^1(U;\mathbb{R}^n)$. Entonces para todo $(t_0,x_0) \in U$ el PVI*

$$\begin{cases} x^{n)} = g(t,x,x',x'',\ldots,x^{n-1)}) \\ (x(t_0),x'(t_0),\ldots,x^{n-1)}(t_0)) = x_0 \end{cases}$$

posee una única solución local, es decir, existe $\delta > 0$ y una única solución definida en $(t_0-\delta, t_0+\delta)$.

Teorema 2.48 (Teorema EDOs orden superior (soluciones maximales A))**.** *Sea $J = [t_0, t_0+T]$ con $T > 0$ y $g \in C(J \times \mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ localmente Lipschitz en $x \in \mathbb{R}^n$ uniformemente en $t \in J$. Entonces, para cada $x_0 \in \mathbb{R}^n$ el problema de valor inicial*

$$\begin{cases} x^{n)} = g(t,x,x',x'',\ldots,x^{n-1)}) \\ (x(t_0),x'(t_0),\ldots,x^{n-1)}(t_0)) = x_0 \end{cases}$$

tiene una única solución maximal (x,I). Además o bien $I = J$, o bien $I = [t_0, T_{max})$ para algún $T_{max} \leq t_0 + T$ y en tal caso

$$\lim_{t \to T_{max}^-} \|(x(t),x'(t),\ldots,x^{n-1)}(t))\| = \infty$$

Teorema 2.49 (Teorema EDOs orden superior (soluciones maximales B))**.** *Sea $J = [t_0,\infty)$, $g \in C(J \times \mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ localmente Lipschitz en $x \in \mathbb{R}^n$ uniformemente en subintervalos compactos de J. Entonces, para cada $x_0 \in \mathbb{R}^n$ el problema de valor incial*

$$\begin{cases} x^{n)} = g(t,x,x',x'',\ldots,x^{n-1)}) \\ (x(t_0),x'(t_0),\ldots,x^{n-1)}(t_0)) = x_0 \end{cases}$$

tiene una única solución maximal (x,I). Además $I = [t_0, T_{max})$ con $T_{max} \leq \infty$ y si $T_{max} < \infty$, en tal caso

$$\lim_{t \to T_{max}^-} \|(x(t),x'(t),\ldots,x^{n-1)}(t))\| = \infty$$

Teorema 2.50 (Teorema EDOs orden superior (soluciones maximales C))**.** *Sea $J = [t_0, t_0+T]$ con $0 < T \leq \infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto acotado y $g \in C(J \times \Omega;\mathbb{R})$ localmente Lipschitz en $x \in \Omega$ uniformemente en $t \in J$. Entonces, para cada $x_0 \in \Omega$ el problema de valor incial*

$$\begin{cases} x^{n)} = g(t,x,x',x'',\ldots,x^{n-1)}) \\ (x(t_0),x'(t_0),\ldots,x^{n-1)}(t_0)) = x_0 \end{cases}$$

tiene una única solución maximal (x,I) relativa a Ω. Además si $I \neq J$ entonces $I = [t_0, T_{max})$ con $T_{max} < \infty$ y en tal caso

$$\lim_{t \to T_{max}^-} (x(t),x'(t),\ldots,x^{n-1)}(t)) \in \partial\Omega$$

Teorema 2.51 (Teorema EDOs orden superior (soluciones maximales D))**.** *Sea $J = [t_0, t_0+T]$ con $0 < T \leq \infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto (no necesariamente acotado) y $g \in C(J \times \Omega;\mathbb{R})$ localmente Lipschitz en $x \in \Omega$ uniformemente en $t \in J$. Entonces, para cada $x_0 \in \Omega$ el problema de valor inicial*

$$\begin{cases} x^{n)} = g(t,x,x',x'',\ldots,x^{n-1)}) \\ (x(t_0),x'(t_0),\ldots,x^{n-1)}(t_0)) = x_0 \end{cases}$$

tiene una única solución maximal (x, I) relativa a Ω. Además si $I \neq J$ entonces $I = [t_0, T_{max})$ con $T_{max} < \infty$ y en tal caso

$$\lim_{t \to T_{max}^-} (x(t), x'(t), \ldots, x^{n-1)}(t)) \in \partial\Omega \quad o \quad \lim_{t \to T_{max}^-} \|(x(t), x'(t), \ldots, x^{n-1)}(t))\| = \infty$$

Es importante remarcar que en una ecuación diferencial de orden superior

$$x^{n)} = g(t, x, x', \ldots, x^{n-1)})$$

se puede dar el caso de que la solución maximal $x(t)$ satisfaga que para cierto $T_{max} < \infty$ tengamos

$$\lim_{t \to T_{max}^-} \|(x(t), x'(t), \ldots, x^{n-1)})\| = +\infty$$

y sin embargo se tenga que $\|x(t)\|$ permanezca acotada cuando $t \to T_{max}^-$. Por ejemplo la función $x(t) = \text{sen}(1/t)$ para $t \in (0, \infty)$ satisface que $|x(t)| \leq 1$ para todo $t \in (0, \infty)$ y sin embargo

$$x'(t) = \frac{-1}{t^2}\cos(1/t) \quad \Rightarrow \quad \lim_{t \to 0^+} \left| \frac{-1}{t^2}\cos(1/t) \right| = +\infty.$$

Ejemplo 2.52. Consideremos la ecuación del péndulo sin rozamiento $x'' + \text{sen}(x) = 0$. El sistema asociado será

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = \text{sen}(x) \end{cases}.$$

Por el Teorema de Cauchy-Lipschitz global (Teorema 2.1 si lo vemos como sistema o como teorema 2.45 si lo vemos como EDO de orden superior) sabemos que, dado que $f(t, x, y) = (y, \text{sen}(x))$ es Lipschitz en $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ uniformemente en $t \in \mathbb{R}$, existirá una única solución definida en todo $\mathbb{R}$ para cualquier condición inicial.

Ejemplo 2.53. Vamos a estudiar la siguiente ecuación diferencial de orden 2 (que tendrá como sistema asociado un sistema conservativo, que estudiaremos en detalle en el capítulo 5).

$$\begin{cases} x'' - x^2 = 0 \\ x(0) = 1 \\ x'(0) = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \text{Sistema asociado} \quad \begin{cases} x' = y \\ y' = x^2 \\ (x(0), y(0)) = (1, 0). \end{cases}.$$

Como $f(t, x, y) = (y, x^2)$ es continua y $C^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^2)$ por el Teorema de Cauchy-Lipschitz local existirá una única solución local (no podemos usar el teorema de Cauchy-Lipschitz global porque $|\partial f_2/\partial x(t, x, y)| = 2|x|$ no está acotada, y por tanto no es globalmente Lipschitz en $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ uniformemente en ningún intervalo de tiempo).

La pregunta que nos hacemos es si existe tiempo de explosión finito para x o para $y = x'$. Es decir, el Teorema sobre soluciones maximales (Teorema 2.49) nos dice que el intervalo maximal de existencia de la solución a la derecha de $t_0 = 0$ es de la forma $[0, \infty)$ o bien $[0, T_{max})$ con $T_{max} < \infty$, y en este segundo caso se tiene

$$\lim_{t \to T_{max}^-} \|(x(t), y(t))\| = +\infty.$$

Nuestro objetivo es dilucidar qué opción de las anteriores se da. Sea $I = [0, T_{max})$ el intervalo maximal de existencia.

- Probemos que $x'(t) > 0$ para todo $t \in I$. En efecto

$$x'(t) - x'(0) = \int_0^t x''(s)\,ds = \int_0^t x^2(s)\,ds > 0 \quad \Rightarrow \quad x'(t) > x'(0) = 0.$$

La desigualdad $\int_0^t x^2(s)\,ds > 0$ se debe a que $x^2(0) = 1 > 0$, luego como $x^2(s)$ es continua, necesariamente la integral debe ser estrictamente positiva.

- Buscaremos una EDO de orden 1 para $x(t)$. Para ello, el truco será multiplicar la EDO de orden 2 por x'.

$$x'' - x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x'' \cdot x' - x^2 \cdot x' = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{(x')^2}{2}\right)' - \left(\frac{x^3}{3}\right)' = 0$$
$$\Rightarrow \quad \frac{(x')^2}{2} - \frac{x^3}{3} = C, \quad C \in \mathbb{R}. \quad \Rightarrow \quad \frac{(x'(t))^2}{2} = \frac{x(t)^3}{3} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Como $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$ tenemos que $C = -1/3$ y por tanto la única solución debe satisfacer

$$(x'(t))^2 = \frac{2}{3}(x(t)^3 - 1) \quad \Rightarrow \quad x'(t) = +\sqrt{\frac{2}{3}(x(t)^3 - 1)} \quad t \in I.$$

El motivo de coger la raíz positiva es que ya sabemos que $x' > 0$.

- Del apartado anterior deducimos que $|x(t)|$ explota en tiempo finito T_{max} si y solo si lo hace $|x'(t)|$ en el mismo tiempo.

- Ahora utilizamos la siguiente estrategia para determinar si existe tiempo de explosión finito (eso es, si $T_{max} < \infty$). Fijemos $t \in I$. Entonces

$$t = \int_0^t 1\,ds = \int_0^t \frac{x'(s)}{x'(s)}\,ds = \int_0^t \frac{x'(s)}{\sqrt{\frac{2}{3}(x(s)^3 - 1)}}\,ds = \int_{x(0)}^{x(t)} \frac{du}{\sqrt{\frac{2}{3}(u^3 - 1)}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \int_1^{x(t)} \frac{du}{\sqrt{u^3 - 1}}$$
$$\leq \sqrt{\frac{3}{2}} \int_1^{\infty} \frac{du}{\sqrt{u^3 - 1}} = \sqrt{\frac{3}{2}} K$$

Se deja como ejercicio al lector la comprobación de que $K = \int_1^\infty \frac{du}{\sqrt{u^3 - 1}}$ es una integral impropia convergente, esto es, $K < \infty$.

- Se tiene $t \leq \sqrt{3/2}K$ para todo $t \in I$. Es fácil ver que tomando el límite cuando $t \to T_{max}^-$ necesariamente $T_{max} < \infty$. Y esto significa que

$$\lim_{t \to T_{max}^-} |x(t)| = \lim_{t \to T_{max}^-} |x'(t)| = \infty.$$

Si se quiere determinar el tiempo de explosión basta darse cuenta de que en los cálculos anteriores tomando $t = T_{max}$ se deduce que

$$T_{max} = \sqrt{\frac{3}{2}} K = \sqrt{\frac{3}{2}} \int_1^\infty \frac{du}{\sqrt{u^3 - 1}}.$$

2.4. Continuidad y diferenciabilidad respecto a condiciones iniciales

El siguiente resultado será una herramienta esencial que nos permitirá por un lado dar acotaciones sobre el comportamiento de soluciones y por otro lado, dadas dos soluciones podremos estimar cuánto se van separando a lo largo del tiempo. En última instancia podremos concluir que las soluciones de ecuaciones diferenciales $x' = f(t,x)$, $x(t_0) = x_0$ con f de clase C^1 en algún abierto de $\mathbb{R}^{n+1}$ se comportan de manera diferenciable respecto del dato inicial x_0.

Lema 2.54 (Lema de Grönwall). *Sea $J = [t_0, t_0 + T]$, $x, y, p \in C(J;\mathbb{R})$ con $p(t) \geq 0$ para todo $t \in J$, tales que*

$$x(t) \leq y(t) + \int_{t_0}^{t} p(s)x(s)\,ds \quad \forall t \in J.$$

Entonces

$$x(t) \leq y(t) + \int_{t_0}^{t} y(s)p(s)e^{\int_s^t p(z)\,dz}\,ds \quad \forall t \in J. \tag{2.11}$$

Demostración. Sea $\varphi(t) = \int_{t_0}^{t} p(s)x(s)\,ds$ para $t \in J$. Nuestro objetivo será probar que

$$\varphi(t) \leq \int_{t_0}^{t} y(s)p(s)e^{\int_{t_0}^t p(z)\,dz}\,ds \tag{2.12}$$

para todo $t \in J$ y habremos acabado. Como $x(s)p(s)$ es una función continua en J, φ será de clase C^1 en J con

$$\begin{cases} \varphi'(t) = p(t)x(t) \\ \varphi(t_0) = 0 \end{cases}$$

Además $x(t) \leq y(t) + \varphi(t)$, luego $\varphi'(t) = p(t)x(t) \leq p(t)y(t) + p(t)\varphi(t)$ (observar que aquí se está usando que $p(t) \geq 0$). Definimos a continuación

$$\psi(t) = e^{-\int_{t_0}^t p(z)\,dz}\varphi(t), \quad t \in J$$

y observamos que tenemos

$$\varphi'(t) = p(t)e^{\int_{t_0}^t p(z)\,dz}\psi(t) + e^{\int_{t_0}^t p(z)\,dz}\psi'(t) \leq p(t)y(t) + p(t)e^{\int_{t_0}^t p(z)\,dz}\psi(t).$$

Por lo tanto

$$\psi'(t) \leq p(t)y(t)e^{-\int_{t_0}^t p(z)\,dz}.$$

Si integramos a ambos lados de la desigualdad obtenemos que para todo $t \in J$,

$$\int_{t_0}^{t} \psi'(s)\,ds \leq \int_{t_0}^{t} p(s)y(s)e^{-\int_{t_0}^s p(z)\,dz}\,ds \quad \Rightarrow \quad \psi(t) \leq \psi(t_0) + \int_{t_0}^{t} p(s)y(s)e^{-\int_{t_0}^s p(z)\,dz}\,ds$$
$$\Rightarrow \quad \varphi(t) = e^{\int_{t_0}^t p(z)\,dz}\psi(t) \leq \int_{t_0}^{t} p(s)y(s)e^{-\int_{t_0}^s p(z)\,dz + \int_{t_0}^t p(z)\,dz}\,ds = \int_{t_0}^{t} y(s)p(s)e^{\int_{t_0}^t p(z)\,dz}\,ds.$$

Hemos probado (2.12) luego la demostración está acabada.

□

Este último resultado es la versión del Lema de Grönwall (Lema 2.54) para tiempos hacia la izquierda de t_0.

Lema 2.55. *Sea $J = [t_0 - T, t_0]$, $x, y, p \in C(J; \mathbb{R})$ con $p(t) \geq 0$ para todo $t \in J$, tales que*

$$x(t) \leq y(t) + \int_t^{t_0} p(s)x(s)\,ds \quad \forall t \in J.$$

Entonces

$$x(t) \leq y(t) + \int_t^{t_0} y(s)p(s)e^{\int_t^s p(z)\,dz}\,ds \quad \forall t \in J. \tag{2.13}$$

Demostración. Sea $s = t_0 - t \in [0, T]$. Entonces para todo $s \in [0, T]$ tenemos que

$$\begin{aligned} z(s) := x(t_0 - s) &\leq y(t_0 - s) + \int_{t_0 - s}^{t_0} p(u)x(u)\,du = y(t_0 - s) - \int_s^0 p(t_0 - r)x(t_0 - r)\,dr \\ &= y(t_0 - s) + \int_0^s p(t_0 - r)z(r)\,dr. \end{aligned}$$

Podemos ahora aplicar el Lema de Grönwall (Lema 2.54) para $s \in [0, T]$ y escribir

$$z(s) \leq y(t_0 - s) + \int_0^s y(t_0 - u)p(t_0 - u)e^{\int_u^s p(t_0 - r)\,dr}\,du$$

Por tanto, para $s \in [0, T]$,

$$\begin{aligned} x(t_0 - s) &\leq y(t_0 - s) + \int_0^s y(t_0 - u)p(t_0 - u)e^{\int_u^s p(t_0 - r)\,dr}\,du \\ &= y(t_0 - s) - \int_{t_0}^{t_0 - s} y(w)p(w)e^{\int_{t_0 - w}^s p(t_0 - r)\,dr}\,dw \\ &= y(t_0 - s) + \int_{t_0 - s}^{t_0} y(w)p(w)e^{-\int_w^{t_0 - s} p(z)\,dz}\,dw \\ &= y(t_0 - s) - \int_{t_0}^{t_0 - s} y(w)p(w)e^{\int_{t_0 - s}^w p(z)\,dz}\,dw. \end{aligned}$$

Llamando $t_0 - s = t \in [t_0 - T, t_0]$ concluimos que

$$x(t) \leq y(t) + \int_t^{t_0} y(s)p(s)e^{\int_t^s p(z)\,dz}\,ds \quad \forall t \in J.$$

□

Corolario 2.56. *Sea $J = [a, b]$ con $t_0 \in J$. Sean $x, y, p \in C(J; \mathbb{R})$ con $p(t) \geq 0$ para todo $t \in J$ tales que*

$$x(t) \leq y(t) + \int_{\min\{t, t_0\}}^{\max\{t, t_0\}} p(s)x(s)\,ds$$

Entonces

$$x(t) \leq y(t) + \int_{\min\{t_0, t\}}^{\max\{t_0, t\}} y(s)p(s)e^{\int_{\min\{t,s\}}^{\max\{t,s\}} p(z)\,dz}\,ds.$$

Veremos otras versiones del Lema de Grönwall que aplican a casos particulares, pero que puede ser útil tener en cuenta.

Corolario 2.57 (Lema de Grönwall-versión reducida)**.** *Sea $J = [t_0, t_0+T]$, $x, p \in C(J;\mathbb{R})$ con $p(t) \geq 0$ para todo $t \in J$ y sea $K \in \mathbb{R}$ tales que*

$$x(t) \leq K + \int_{t_0}^{t} p(s)x(s)\,ds \quad \forall t \in J.$$

Entonces

$$x(t) \leq Ke^{\int_{t_0}^{t} p(z)\,dz} \tag{2.14}$$

Demostración. Aplicando el Lema de Grönwall (Lema 2.54) con $y(t) = K$ obtenemos que

$$x(t) \leq K\left(1 - \int_{t_0}^{t}\left(-p(s)e^{\int_s^t p(z)\,dz}\right)\,ds\right) = K\left(1 - \left[e^{\int_s^t p(z)\,dz}\right]_{t_0}^{t}\right) = Ke^{\int_{t_0}^{t} p(z)\,dz}.$$

□

Corolario 2.58. *Sea $J = [t_0, t_0+T]$, $x \in C^1(J;\mathbb{R}^n)$ con $\|x'(t)\| \leq a\|x(t)\|$ para cierta constante $a \geq 0$ y todo $t \in J$. Entonces*

$$\|x(t)\| \leq \|x(t_0)\|e^{a(t-t_0)}.$$

Demostración. Bajo las hipótesis dadas, integrando respecto de t obtenemos que

$$\|x(t)\| \leq \|x(t_0)\| + \int_{t_0}^{t} a\|x(s)\|\,ds.$$

Ahora, aplicando el Corolario del lema de Grönwall (Corolario 2.57) llegamos a que para todo $t \in J$

$$\|x(t)\| \leq \|x(t_0)\|e^{\int_{t_0}^{t} a\,ds} = \|x(t_0)\|e^{a(t-t_0)}.$$

□

Corolario 2.59. *Sea $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función continua, localmente Lipschitz en $x \in \mathbb{R}^n$ uniformemente en intervalos compactos de $\mathbb{R}$. Supóngase que existen $a, b : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ continuas con*

$$\|f(t,x)\| \leq a(t)\|x\| + b(t), \quad t \in [0, \infty).$$

Entonces la única solución (maximal) de la ecuación diferencial $x' = f(t,x)$ con $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ está definida en todo $[0, T_{max}) = [0, \infty)$ puesto que se tiene la estimación

$$\|x(t)\| \leq \left(\|x(0)\| + \int_0^t b(s)\,ds\right)e^{\int_0^t a(s)\,ds} \quad \forall t \in [0, T_{max}).$$

Demostración. Antes de comenzar la prueba nos conviene definir las funciones

$$A(t) = \int_0^t a(s)\,ds \quad ; \quad B(t) = \int_0^t b(s)\,ds$$

que son funciones continuas (de hecho C^1), crecientes y que están bien definidas en todo $t \in [0, \infty)$. Es decir, no hay ningún $T > 0$ tal que

$$\int_0^T a(s)\,ds = \infty \quad \text{o} \quad \int_0^T b(s)\,ds = +\infty,$$

pues las funciones a, b son continuas y están definidas en todo $[0, \infty)$.

Ahora intentemos utilizar el Lema de Grönwall. En primer lugar, si llamamos $I = [0, T_{max})$ al intervalo maximal de definición de la solución maximal, podemos escribir que para todo $t \in I$,

$$\begin{aligned}\|x(t)\| &= \|x_0 + \int_0^t x'(s)\,ds\| = \|x_0 + \int_0^t f(s, x(s))\,ds\| \leq \|x_0\| + \int_0^t (a(s)\|x(s)\| + b(s))\,ds \\ &= (\|x_0\| + B(t)) + \int_0^t a(s)\|x(s)\|\,ds.\end{aligned}$$

Ahora, llamemos $y(t) = \|x_0\| + B(t)$, y procedemos a aplicar el Lema de Grönwall. Obtenemos que para todo $t \in I$,

$$\begin{aligned}\|x(t)\| &\leq y(t) + \int_0^t y(s)a(s)e^{\int_s^t a(z)\,dz}\,ds \leq y(t) + \int_0^t y(t)a(s)e^{\int_s^t a(z)\,dz}\,ds \\ &= y(t)\left(1 - \int_0^t (-a(s))e^{\int_s^t a(z)\,dz}\,ds\right) = y(t)\left(1 - \left[e^{\int_s^t a(z)\,dz}\right]_0^t\right) \\ &= y(t)\left(1 - \left(1 - e^{A(t)}\right)\right) = y(t)e^{A(t)}.\end{aligned}$$

Observar que en la primera línea se ha usado que $y(s) \leq y(t)$ para todo $s \leq t$ pues b es una función positiva.

Concluimos que $\|x(t)\| \leq y(t)e^{A(t)}$ para todo $t \in [0, T_{max})$, y como el término de la derecha está definido para todo $t \in [0, \infty)$, entonces necesariamente $T_{max} = \infty$. En caso contrario sabemos por la teoría de Cauchy-Lipschitz que $\lim_{t \to T_{max}^-} \|x(t)\| = +\infty$, pero por otro lado

$$\lim_{t \to T_{max}^-} \|x(t)\| \leq \lim_{t \to T_{max}^-} y(t)e^{A(t)} = y(T_{max})e^{A(T_{max})} < \infty.$$

□

A la hora de aplicar cualquiera de los tres resultados anteriores nos referiremos indistintamente a cualquier de ellos como Lema de Grönwall.

Ejemplo 2.60. Sea el sistema $\begin{cases} x' = \dfrac{x^3}{1+x^2} \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$. Como $f(t, x) = x^3/(1 + x^2)$ es de clase C^1, por el Teorema de Cauchy Lipschitz local (Teorema 2.35), existe una única solución maximal definida en $I = (T_{min}, T_{max})$ con $t_0 \in I$. De hecho podríamos haber sido más cuidadosos y habernos dado cuenta de que realmente

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(t, x)\right| = \left|\frac{3x^2(1 + x^2) - 2x^4}{(1 + x^2)^2}\right| \leq 2 \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

por lo que f es globalmente Lipschitz en $x \in \mathbb{R}$ uniformemente en $t \in \mathbb{R}$. Así, podríamos haber aplicado el Teorema de Cuachy-Lipschitz global (Teorema 2.1) y saber que el intervalo maximal de existencia es $I = \mathbb{R}$.

En cualquier caso, encontraremos ahora una cota sobre el crecimiento de las soluciones usando el Lema de Grönwall. Sea $t \geq t_0$. Tenemos

$$|x(t)| = \left| x_0 + \int_{t_0}^{t} x'(s)\, ds \right| \leq |x_0| + \int_{t_0}^{t} \left| \frac{x(s)^3}{1+x(s)^2} \right| ds \leq |x_0| + \int_{t_0}^{t} |x(s)|\, ds, \quad \forall t \in [0, \infty).$$

Aplicando el Lema de Grönwall se sigue que para todo $t \geq t_0$

$$|x(t)| \leq |x_0| e^{(t-t_0)}.$$

Obsérvese que si no hubiésemos aplicado el Teorema de Cauchy-Lipschitz global, otra forma de haber sabido que el tiempo maximal de existencia a la derecha de t_0 era $[0, \infty)$ hubiese sido usar esta estimación anterior, que impide que las soluciones puedan tener un tiempo maximal de existencia finito, pues explotarían, y esto ya vemos que no se puede dar.

De manera análoga, podríamos haber obtenido la estimación

$$|x(t)| \leq |x_0| e^{(t_0-t)} \quad \forall t \leq t_0.$$

Proposición 2.61. *Sea $J = [t_0, t_0 + T]$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $f, g \in C(J \times \Omega; \mathbb{R}^n)$ globalmente Lipschitz en Ω (con constante $L \geq 0$) uniformemente en J. Entonces*

1. *Si $x, y \in C^1(J; \Omega)$ solucionan la EDO $z' = f(t, z)$ con $x(t_0) = x_0 \in \Omega$ e $y(t_0) = y_0 \in \Omega$, tenemos que*

$$\|x - y\|_\infty = d_\infty(x, y) = \max_{t \in J} \|x(t) - y(t)\| \leq e^{L(t_0+T)} \|x_0 - y_0\|.$$

2. *Si $x, y \in C^1(J; \Omega)$ solucionan las EDOs $z' = f(t, z)$ y $z' = g(t, z)$ respectivamente con $x(t_0) = y(t_0) = x_0 \in \Omega$, entonces*

$$\|x - y\|_\infty \leq \left(\frac{e^{L(t_0+T)} - 1}{L} \|f - g\|_\infty \right),$$

donde $\|f - g\|_\infty = d_\infty(f, g) = \sup_{t \in J,\, x \in \Omega} \|f(t, x) - g(t, x)\|$. Y si Ω es acotado, podríamos haber tomado el máximo en la frase anterior.

Para la demostración necesitaremos el siguiente resultado de carácter general.

Proposición 2.62. *Bajo las hipótesis del Teorema 2.61, si $x, y \in C^1(J; \Omega)$ tenemos que*

$$\|x - y\|_\infty \leq e^{L(t_0+T)} + \left(\frac{e^{L(t_0+T)} - 1}{L} \right) (\delta_1 + \delta_2)$$

donde $\delta_0 = \|x(t_0) - y(t_0)\|$, $\delta_1 = \max t \in J \|x'(t) - f(t, x(t))\|$, $\delta_2 = \max_{t \in J} \|y'(t) - f(t, y(t))\|$.

Demostración. Sea $t \in J$. Tenemos que

$$\begin{aligned}
\|x(t)-y(t)\| &= \left\| x(t_0) + \int_{t_0}^{t} x'(s)\,ds - y(t_0) - \int_{t_0}^{t} y'(s)\,ds \right\| \\
&\leq \|x(t_0) - y(t_0)\| + \int_{t_0}^{t} \|f(s,x(s)) - x'(s)\| + \|f(s,x(s)) - f(s,y(s))\| + \|y'(s) - f(s,y(s))\|\,ds \\
&\leq \delta_0 + \int_{t_0}^{t} (\delta_1 + \delta_2 + \|f(s,x(s)) - f(s,y(s))\|)\,ds \\
&\leq \delta_0 + \int_{t_0}^{t} (\delta_1 + \delta_2 + L\|x(s) - y(s)\|)\,ds \\
&\leq \delta_0 + (t-t_0)(\delta_1+\delta_2) + \int_{t_0}^{t} L\|x(s) - y(s)\|\,ds.
\end{aligned}$$

Si aplicamos el Lema de Grönwall tenemos que para todo $t \in J$

$$\begin{aligned}
\|x(t) - y(t)\| &\leq [\delta_0 + (t-t_0)(\delta_1+\delta_2)] + \int_{t_0}^{t} (\delta_0 + (s-t_0)(\delta_1+\delta_2) L e^{\int_s^t L\,dz})\,ds \\
&= [\delta_0 + (t-t_0)(\delta_1+\delta_2)] - \left[[\delta_0 + (s-t_0)(\delta_1+\delta_2)] e^{L(t-s)} \right]_{t_0}^{t} \\
&= \delta_0 e^{L(t-t_0)} + (\delta_1+\delta_2)\left(\frac{e^{L(t-t_0}-1}{L}\right) \\
&\leq \delta_0 e^{LT} + (\delta_1+\delta_2)\left(\frac{e^{LT}-1}{L}\right).
\end{aligned}$$

□

Demostración del Teorema 2.61. 1. Trivial.

2. Usamos la Proposición 2.62 con la función f (también podríamos aplicarla con la función g y llegaríamos al mismo resultado). Entonces

$$\|x - y\|_\infty \leq 0 + \left(\frac{e^{L(t_0+T)}-1}{L}\right)(\delta_1+\delta_2) = \left(\frac{e^{L(t_0+T)}-1}{L}\right)\|f-g\|_\infty,$$

donde en la segunda igualdad se está usando que

$$\begin{aligned}
\delta_2 &= \max_{t\in J} \|y'(t) - f(t,y(t))\| \leq \max_{t\in J}(\|y'(t) - g(t,y(t))\| + \|g(t,y(t)) - f(t,y(t))\|) \\
&= \max_{t\in J} \|g(t,y(t)) - f(t,y(t))\| \leq \|g-f\|_\infty.
\end{aligned}$$

□

En ocasiones, las ecuaciones diferenciales que estudiemos dependerán de parámetros.

$$(P)\ \begin{cases} x' = f(t,x,\lambda), & \lambda \in \mathbb{R}^m \text{ parámetros} \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad , \quad f = (f_1,\ldots,f_n) : J \times \Omega \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n.$$

Podemos pasar la dependencia de los parámetros a dependencia respecto de condiciones iniciales definiendo

$$g : J \times \widetilde{\Omega} \to \mathbb{R}^{n+m} \quad \widetilde{\Omega} = \Omega \times \mathbb{R}^m,$$

como sigue:

$$\begin{cases} g_i(t,y) = f_i(t,y), & 1 \leq i \leq n \\ g_i(t,y) = 0, & n+1 \leq i \leq n+m \end{cases}.$$

Si ahora consideramos el problema de valor inicial

$$(\widetilde{P}) \begin{cases} y' = g(t,y) \\ y(t_0) = (x_0, \lambda) \end{cases}$$

podemos afirmar lo siguiente

Aserto: $x(t)$ es solución de (P) para $\lambda \in \mathbb{R}^m$ si y solo si $y(t) = (x(t), \lambda)$ es solución de $(\widetilde{P})$.

Este hecho hace que siempre que queramos estudiar la dependencia de soluciones respecto de parámetros que aparezcan en nuestra ecuación diferencial, podemos pasar esa dependencia a las condiciones iniciales en un nuevo PVI modificado $(\widetilde{P})$, y por tanto todos los resultados que ya tenemos (y alguno más que veremos) sobre dependencia continua / Lipschitz / diferenciable sobre condiciones iniciales se traslada a los parámetros de la manera indicada.

Con vistas a demostrar la dependencia continua de las soluciones respecto de as condiciones iniciales, siempre que la función que defina el sistema sea "suficientemente regular", es útil que definamos la noción de flujo de un sistema. Este concepto aparecerá en muchas otras ocasiones a lo largo de estas notas.

Definición 2.63 (Flujo de un sistema)**.** Sea $J \subset \mathbb{R}$ intervalo, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $f \in C(J \times \Omega; \mathbb{R}^n)$ localmente Lipschitz en Ω uniformemente en J. Entonces definimos el flujo del sistema como la aplicación $\varphi : W \to \mathbb{R}^n$ dada por

$$\varphi(t, t_0, x_0) = \varphi(t; t_0, x_0) = x(t; t_0, x_0)) = x(t),$$

donde $W = \{(t, t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times J \times \Omega : \ t \in I_{(t_0,x_0)}\}$ y donde $\varphi(t; t_0, x_0) = x(t)$ denota la solución maximal del PVI

$$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{2.15}$$

evaluada en t, siendo $I_{(t_0,x_0)}$ su intervalo maximal de existencia.

Antes de probar el Teorema sobre dependencia continua respecto de las condiciones iniciales de un PVI (2.15), donde la función f sea suficientemente regular (para poder aplicar la teoría de Cauchy-Lipschitz) necesitamos primero probar la siguiente proposición.

Proposición 2.64. *Sea $J \subset \mathbb{R}$ intervalo arbitrario, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $f \in C(J \times \Omega; \mathbb{R}^n)$ localmente Lipschitz en Ω uniformemente en J. Consideremos $x_0 \in \Omega$ y $t_0, t_1 \in J$, y llamemos $x(t) = \varphi(t; t_0, x_0)$, $y(t) = \varphi(t; t_1, x_0)$ a las soluciones correspondientes al PVI $z' = f(t,z)$ con $z(t_0) = x_0$ y $z(t_1) = x_0$ respectivamente.*

Supongamos que existe $[a,b] \subset \mathbb{R}$ con $[a,b] \subset I_{(t_0,x_0)} \cap I_{(t_1,x_0)}$, y sea $K \subset \Omega$ un compacto tal que

$$x(t), y(t) \in K \quad \forall t \in [a,b].$$

Entonces, si llamamos $L \geq 0$ a la constante de Lipschitz de f en K, y $M = \max_{t\in[a,b],\, z\in K} |f(t,z)|$ tenemos

$$\|x(t) - y(t)\| \leq M|t_0 - t_1|e^{L|t-t_1|} \quad \forall t \in [a,b].$$

Demostración. Supongamos sin pérdida de generalidad que $t_1 > t_0$. Tenemos

$$\begin{aligned}\|x(t) - y(t)\| &= \left\|(x_0 + \int_{t_0}^{t} x'(s)\,ds) - (x_0 + \int_{t_1}^{t} y'(s)\,ds)\right\| = \left\|\int_{t_0}^{t_1} x'(s)\,ds + \int_{t_1}^{t} (x'(s) - y'(s))\,ds\right\| \\ &\leq \int_{t_0}^{t_1} \|f(s,x(s))\|\,ds + \int_{t_1}^{t} \|f(s,x(s)) - f(s,y(s))\|\,ds \\ &\leq M|t_1 - t_0| + L\int_{t_1}^{t} \|x(s) - y(s)\|\,ds.\end{aligned}$$

Usando la desigualdad de Grönwall concluimos que

$$\|x(t) - y(t)\| \leq M|t_1 - t_0|e^{L|t-t_1|}, \quad \forall t \in [a,b].$$

□

Teorema 2.65 (Teorema sobre dependencia continua respecto a las condiciones iniciales)**.** *Sea $f : J \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ función continua, localmente Lipschitz en Ω uniformemente en J. Aquí $J \subset \mathbb{R}$ es un intervalo y $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un abierto. Entonces el flujo $\varphi : W \subset \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}^n$, $\varphi(t;t_0,x_0)$ es una función continua, donde*

$$W = \{(t,t_0,x_0) \in \mathbb{R} \times J \times \Omega :\, t \in I_{(t_0,x_0)}\}.$$

Demostración. Fijemos un punto $(\tau_0,t_0,x_0) \in W$ y veamos la continuidad del flujo en ese punto. Empezamos tomando un intervalo $[a,b] \subset I_{(t_0,x_0)}$ tal que $\tau_0, t_0 \in (a,b)$. Llamemos $x(t) = \varphi(t;t_0,x_0)$.

Dado $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño para que $\operatorname{dist}(\{\varphi(t;t_0,x_0) :\, t \in [a,b]\}, \partial\Omega) > 3\varepsilon$ definimos el conjunto

$$A_\varepsilon = \{(t,x) \in [a,b] \times \mathbb{R}^n :\, \|x - \varphi(t;t_0,x_0)\| \leq 2\varepsilon\} \subset [a,b] \times \Omega.$$

Obsérvese que

$$K_\varepsilon = \{x \in \Omega :\, \|x - \varphi(t;t_0,x_0)\| \leq 2\varepsilon \text{ para algún } t \in [a,b]\}$$

es un conjunto compacto. Podemos definir $M = \max_{t\in[a,b],\, z\in K_\varepsilon} |f(t,z)|$ y asumir que f es L-Lipschitz en la segunda variable $x \in K_\varepsilon$ uniformemente respecto del tiempo $t \in [a,b]$.

Probaremos que existe $\delta > 0$ tal que si $\|(\tau_1,t_1,x_1) - (\tau_0,t_0,x_0)\| < \delta$ entonces $\|\varphi(\tau_1,t_1,x_1) - \varphi(\tau_0,t_0,x_0)\| < \varepsilon$.

Nuestro primer objetivo será demostrar que si $\delta' = \dfrac{\varepsilon}{(1+M)(1+e^{L|b-a|})} > 0$ entonces para todo $|t_1 - t_0| < \delta'$ y $\|x_1 - x_0\| < \delta'$ se tendrá que

$$(t, \varphi(t;t_1,x_1)) \in A_\varepsilon, \quad \forall t \in [a,b].$$

Llamemos $y(t) = \varphi(t;t_1,x_1)$ y llamemos $[c,d] \subseteq [a,b]$ al intervalo máximo donde $(t,y(t)) \in A_\varepsilon$ para todo $t \in [c,d]$. Veamos que $[c,d] = [a,b]$. Para ello supongamos que $[c,d] \subsetneq [a,b]$. Usando la Proposición 2.64, y la Proposición 2.61 (asumiendo que f es L-Lipschitz respecto de la segunda variable uniformemente en la primera siempre que nos movamos en A_ε),

$$\begin{aligned}\|x(t) - y(t)\| &\leq \|\varphi(t;t_0,x_0) - \varphi(t;t_0,x_1)\| + \|\varphi(t;t_0,x_1) - \varphi(t;t_1,x_1)\| \\ &\leq \|x_0 - x_1\|e^{L|t-t_0|} + M|t_1 - t_0|e^{L|t-t_0|} \leq (1+M)\delta' e^{L|b-a|} \leq \varepsilon, \quad \forall t \in [c,d].\end{aligned}$$

Pero en este caso, por definición de A_ε aún podríamos encontrar un $\eta > 0$ tal que la solución $y(t)$ se podría definir en un intervalo de tiempos η mayor y aún estaría dentro de A_ε. Más precisamente tendríamos $\|x(t) - y(t)\| \leq 2\varepsilon$, $\forall t \in [c-\eta, d+\eta]$. Esto indica que necesariamente $[a,b] = [c,d]$ siempre que cojamos $\delta' > 0$ suficientemente pequeño como se ha indicado.

Ahora nos encaminamos a concluir el argumento. Tomaremos $0 < \delta < \delta'$ de tal forma que $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$, $(\tau_0 - \delta, \tau_0 + \delta) \subset [a,b]$. Así, si $\|(\tau_1, t_1, x_1) - (\tau_0, t_0, x_0)\| < \delta$ entonces

$$\|\varphi(\tau_1; t_0, x_0) - \varphi(\tau_1; t_0, x_0)\| = \|x(\tau_1) - x(\tau_0)\| = \left\| \int_{\tau_0}^{\tau_1} f(s, x(s))\, ds \right\| \leq M|t_1 - t_0|.$$

Y juntando todo

$$\begin{aligned} \|\varphi(\tau_1; t_1, x_1) - \varphi(\tau_0; t_0, x_0)\| &= \|y(\tau_1) - x(\tau_0)\| \leq \|y(\tau_1) - x(\tau_1)\| + \|x(\tau_1) - x(\tau_0)\| \\ &\leq \|x_0 - x_1\| e^{L|b-a|} + M|t_1 - t_0| e^{L|b-a|} + M|\tau_1 - \tau_0| \\ &\leq (M+1)(1 + e^{L|b-a|})\delta < \varepsilon. \end{aligned}$$

□

El siguiente resultado nos da la dependencia diferenciable respecto de las condiciones iniciales.

Teorema 2.66 (Teorema sobre dependencia diferenciable respecto a las condiciones iniciales)**.** *Sea $f : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de clase C^k, $k \geq 1$. Entonces el flujo $\varphi \in C^k(W)$ donde*

$$W = \{(t, t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times U : t \in I_{(t_0, x_0)}\}$$

Demostración. La prueba no es trivial y nos limitaremos a dar la referencia [1, Sección 2.7], donde el alumno puede encontrar una demostración detallada. □

2.4.1. Ecuaciones variacionales

En las hipótesis del Teorema 2.66, definiremos ahora las ecuaciones variacionales lineales (respecto de t_0 y de x_0) asociadas a un sistema de ecuaciones diferenciales. Más en concreto, dado un sistema

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

si consideramos su flujo $\varphi(t; t_0, x_0)$ se tiene que $D_{x_0}\varphi(t; t_0, x_0)$ será la única solución matricial del sistema

$$\begin{cases} y' = D_x f(t, \varphi(t; t_0, x_0))y \\ y(t_0) = Id \end{cases} \tag{2.16}$$

puesto que

- $\dfrac{\partial}{\partial t}(D_{x_0}\varphi(t; t_0, x_0)) = D_{x_0}\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial t}(t; t_0, x_0)\right) = D_{x_0} f(t, \varphi(t; t_0, x_0)) = D_x f(t, \varphi(t; t_0, x_0)) D_{x_0}\varphi(t; t_0, x_0).$
- Como $\varphi(t_0; t_0, x_0) = x_0 \ \forall\, (t_0, x_0) \in U \quad$ entonces $D_{x_0}\varphi(t_0; t_0, x_0) = Id.$

A las ecuaciones que definen el sistema (2.16) se las denomina como las *ecuaciones variacionales lineales respecto de* x_0.

Y la *ecuación variacional lineal respecto de* t_0 sería

$$\frac{\partial}{\partial t_0}\varphi(t;t_0,x_0) = -D_{x_0}\varphi(t;t_0,x_0)\cdot f(t_0,x_0)$$

Para llegar a la ecuación diferencial anterior basta observar que

$$\varphi(t;t_0,\varphi(t_0;t,y_0)) = y_0 \quad \forall t,t_0\in\mathbb{R},\, y_0\in\mathbb{R}^n$$

De este modo, llamando $x_0 = \varphi(t_0;t,y_0)$ y derivando respecto de t_0 en ambos lados, obtenemos

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\partial}{\partial t_0}(y_0) &= \left(\frac{\partial}{\partial t_0}\varphi\right)(t;t_0,\varphi(t_0;t,y_0)) = \frac{\partial}{\partial t_0}\varphi(t;t_0,x_0) + D_{x_0}\varphi(t;t_0,x_0)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial t}\varphi\right)(t_0;t,y_0) \\ &= \frac{\partial}{\partial t_0}\varphi(t;t_0,x_0) + D_{x_0}\varphi(t;t_0,x_0)\cdot f(t_0,x_0) \end{aligned}$$

Y si considerásemos sistemas de ecuaciones diferenciales dependientes de parámetros

$$\begin{cases} x' = f(t,x,\lambda) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

también podemos plantear las *ecuaciones variacionales lineales respecto de* λ

$$\begin{cases} y'(t) = D_x f(t,\varphi(t;t_0,x_0,\lambda),\lambda)\cdot y + D_\lambda f(t,\varphi(t;t_0,x_0,\lambda),\lambda) \\ z(t_0) = 0 \end{cases}$$

donde la única solución al PVI es $y(t) = D_\lambda\varphi(t;t_0,x_0,\lambda)$.

Ejemplo 2.67. Sea el sistema

$$\begin{cases} x' = \lambda x^2 t \\ x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Observemos que $f(t,x,\lambda) = \lambda x^2 t \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$, luego podremos plantearnos las diferentes ecuaciones variacionales. Denotemos por $\varphi(t;t_0,x_0,\lambda)$ al flujo del sistema. Veamos cómo calcular la ecuación variacional respecto de x_0. Esto es, debemos plantearnos un PVI, donde la única solución $y(t)$ sea justo $y(t) = \frac{\partial}{\partial x_0}\varphi(t;t_0,x_0,\lambda)$. La ecuación variacional es

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial}{\partial x_0}\varphi\right) = \dfrac{\partial}{\partial x_0}\left(\dfrac{\partial}{\partial t}\varphi\right) = \dfrac{\partial}{\partial x_0}(\lambda\varphi^2 t) = \lambda t 2\varphi\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_0} \quad \Rightarrow \quad y'(t) = \lambda 2t\varphi(t;t_0,x_0,\lambda)y(t) \\ \dfrac{\partial}{\partial x_0}\varphi(t_0;t_0,x_0,\lambda) = 1 \quad \Rightarrow \quad y(t_0) = 1 \end{cases}$$

Dando por hecho que sabemos resolver el PVI inicial, tenemos que el flujo viene dado por

$$\varphi(t;t_0,x_0,\lambda) = \frac{x_0}{1-\frac{\lambda}{2}x_0(t^2-t_0^2)},$$

luego la ecuación variacional respecto a x_0 se escribe como

$$\begin{cases} y'(t) = \dfrac{2\lambda t x_0}{1 - \frac{\lambda}{2} x_0 (t^2 - t_0^2)} y(t) \\ y(t_0) = 1 \end{cases}$$

Resolviendo llegamos a que

$$y(t) = \frac{\partial}{\partial x_0} \varphi(t; t_0, x_0, \lambda) = \frac{1}{\left(1 - \frac{\lambda}{2} x_0 (t^2 - t_0^2)\right)^2}$$

que es lo mismo a lo que habríamos llegado derivando respecto de x_0 en la expresión del flujo $\varphi(t; t_0, x_0, \lambda)$ directamente.

Capítulo 3

Teoría de Cauchy-Peano

En este capítulo, a diferencia del anterior, el objetivo será estudiar meramente la existencia de soluciones, sin importarnos la unicidad de las mismas. Veremos que para que un PVI del tipo

$$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{3.1}$$

bastará que la función f sea continua. Este resultado se conoce como Teorema de Peano. Damos directamente su enunciado y dos ejemplos que muestran por un lado que la falta de continuidad puede llevar a la no existencia de soluciones, y que incluso con continuidad no se puede asegurar la unicidad de las mismas.

Teorema 3.1 (Teorema de Cauchy-Peano global - 1890)**.** *Sea $J = [t_0, t_0 + T]$, $f \in C(J \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ acotada. Sea $M = \|f\|_\infty = \sup\{|f(t,x)| \, t \in J, \, x \in \mathbb{R}^n\}$. Entonces para cada $x_0 \in \mathbb{R}^n$, el PVI (3.1) tiene al menos una solución (global) definida en J. (En general no se tiene por qué tener unicidad).*

Ejemplo 3.2. Sea $x' = f(x)$ con $x(0) = 0$, donde $f(x) = 0$ si $x < 0$ y $f(x) = 1$ si $x \geq 0$. Este sistema no posee soluciones. Probaremos esto por reducción al absurdo, y veremos que se entra en contradicción con la propiedad de Darboux (o de los valores intermedios) que toda función diferenciable en un intervalo debe satisfacer.

Supongamos que existe alguna solución $x(t)$ definida en algún intervalo $I \subset \mathbb{R}$ con $0 \in I$.

Ejemplo 3.3. Sea $x' = f(x)$ donde $f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \sqrt{|x|} & x \in [0,1], \, x(0) = 0. \\ 1 & x > 1 \end{cases}$ La función $f(x) = \sqrt{|x|}$ es continua y acotada en $\mathbb{R}$, luego podemos aplicar el Teorema de Cauchy-Peano para asegurar que existe al menos una solución definida en cualquier intervalo compacto $J = [0, T]$ que queramos. Sin embargo, no podemos asegurar la unicidad de las soluciones. De hecho, existen dos soluciones, $x_1(t) = 0$ y $x_2(t) = \begin{cases} t^2/4 & t \in [0,2] \\ t - 1 & t \geq 2 \end{cases}$.

La demostración que daremos del Teorema de Peano sigue las ideas de Tonelli de 1928. Siguiendo este camino, resulta necesario ver antes el famoso Teorema de Arzelà-Ascoli. Este es un resultado muy importante en el campo del Análisis Matemático, con importantes aplicaciones más allá de las ecuaciones diferenciales. Para nosotros resultará una herramienta muy potente para demostrar el Teorema de Peano sobre existencia de soluciones, así como el Teorema del punto fijo fue esencial en la Teoría de Cauchy-Lipschitz.

3.1. Teorema de Arzelà-Ascoli

Teorema 3.4 (Teorema de Arzelà-Ascoli)**.** *Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto y sea $\mathcal{F} \subset C(K;\mathbb{R}^n)$ subconjunto infinito. Entonces $\mathcal{F}$ es relativamente compacto en $(C(K;\mathbb{R}^n), d_\infty)$ si y solo si $\mathcal{F}$ es acotado y equicontinuo.*

Definición 3.5. Un espacio de Banach es un espacio normado y completo. (Por ejemplo $(C(K;\mathbb{R}^n)), \|\cdot\|_\infty))$ es Banach si $K \subset \mathbb{R}^n$ es compacto, donde $\|f\|_\infty = d_\infty(f,0))$.

Definición 3.6. Sea X un espacio de Banach y $\mathcal{F} \subset X$. Decimos que $\mathcal{F}$ es relativamente compacto si $\overline{\mathcal{F}}$ es compacto, lo que es equivalente (al estar en un espacio métrico) a que toda sucesión $(f_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{F}$ posee una subsucesión convergente en X (y lo hará a un elemento de $\overline{\mathcal{F}}$.

Observación 3.7. Dado X Banach y $\mathcal{F} \subset X$ se tiene que $\overline{\mathcal{F}}$ es compacto entonces $\overline{\mathcal{F}}$ es cerrado y acotado. El recíproco, aunque cierto si $X = \mathbb{R}^n$, no es cierto en general. Por ejemplo pensemos en $X = (C([0,1];\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ y en $\mathcal{F} = \{f_n(x) = x^n : n \in \mathbb{N}\}$.

En general, si estamos en espacios métricos, lo que sí tenemos es que un conjunto es compacto si y solo si es completo y totalmente acotado[1]. Si el espacio métrico es completo se tiene que la compacidad equivale a ser cerrado y totalmente acotado.

Definición 3.8. Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto y sea $\mathcal{F} \subset (C(K;\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_\infty)$. Se dice que $\mathcal{F}$ es equicontinuo si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $x, y \in K$ con $\|x - y\| < \delta$, entonces $\|f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon$ para todo $f \in \mathcal{F}$.

Teorema de Arzelà-Ascoli. Si $\mathcal{F}$ fuese un conjunto finito, entonces automáticamente tenemos acotación, equicontinuidad y compacidad.

• $\mathcal{F}$ relativamente compacto $\Rightarrow$ $\mathcal{F}$ acotado y equicontinuo: Como $\overline{\mathcal{F}}$ es compacto por hipótesis tenemos que debe ser acotado, luego $\mathcal{F}$ también es acotado. Solo nos falta ver que $\mathcal{F}$ es equicontinuo. Razonaremos por reducción al absurdo.

Si $\mathcal{F}$ no fuese equicontinuo existiría $\varepsilon > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ existirían $x_n, y_n \in K$ y una función $f_n \in \mathcal{F} \subset \overline{\mathcal{F}}$ tales que

$$\|x_n - y_n\| \leq \frac{1}{n} \quad \text{pero} \quad \|f_n(x_n) - f_n(y_n)\| \geq \varepsilon.$$

Como $K^2 \times \overline{\mathcal{F}}$ es compacto, podemos extraer una subsucesión $(x_{n_m}, y_{n_m}, f_{n_m})$ convergente a algún $(x_w, y_w, f_w) \in K^2 \times \overline{\mathcal{F}}$. Es decir, tenemos que $f_{n_m} \to f_w$ uniformemente en K, y además que $\|x_{n_m} - y_{n_m}\| \to \|x_w - y_w\|$ cuando $m \to \infty$. Esto último indica que $x_w = y_w$, puesto que sabíamos que $\|x_{n_m} - y_{n_m}\| \leq 1/n_m$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Juntando todo tenemos que

$$\begin{aligned}
\varepsilon &\leq \|f_{n_m}(x_{n_m}) - f_{n_m}(y_{n_m})\| \\
&\leq \|f_{n_m}(x_{n_m}) - f_w(x_{n_m})\| + \|f_w(x_{n_m}) - f_w(y_{n_m})\| + \|f_w(y_{n_m}) - f_{n_m}(y_{n_m})\| \\
&\leq 2\|f_{n_m} - f_w\|_\infty + \|f_w(x_{n_m}) - f_w(y_{n_m})\| \to 0 + 0 = 0 \quad \text{cuando } m \to \infty.
\end{aligned}$$

Pero $\varepsilon \leq 0$ es una contradicción y hemos acabado.

[1] Un conjunto $\mathcal{F} \subset X$, donde X es espacio métrico se dice totalmente acotado si para todo $\varepsilon > 0$ existe un número $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que podemos recubrir $\mathcal{F}$ por $N(\varepsilon)$ bolas de radio ε.

• $\mathcal{F}$ acotado y equicontinuo $\Rightarrow$ $\mathcal{F}$ relativamente compacto: Sea $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones en $\mathcal{F}$. Debemos construir una subsucesión $(f_{n_m})_{m\geq 1}$ convergente en $C(K;\mathbb{R}^n)$. Dividimos la demostración en tres etapas:

Etapa 1: Existe $D = \{d_i : i \in \mathbb{N}\} \subset K$ tal que $d_i \neq d_j$ si $i \neq j$, y además es denso en K (esto es, $\overline{D} = K$).

Sea $n \geq 1$, y consideramos $B(x, 1/n)$ con $x \in K$. Si para un n fijo consideramos todas las bolas con centros en K tenemos un recubrimiento de K dado por

$$K = \bigcup_{x\in K} B(x, 1/n).$$

Usando la compacidad de K debe existir un $p(n) \in \mathbb{N}$ y ciertos centros $x_{n,1}, \ldots, x_{n,p(n)}$ tales que

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{p(n)} B(x_{n,j}, 1/n).$$

Si definimos $D = \{x_{n,j} : n \in \mathbb{N},\ 1 \leq j \leq p(n)\}$ tenemos un conjunto numerable (pues unión numerable de conjuntos finitos s numerable) y además será denso. Veamos esto último en más detalle. Sea $x \in K$ fijo. Para cada $n \in \mathbb{N}$ fijo sabemos que existe un $x_{n,j_n(x)}$ con $1 \leq j_n(x) \leq p(n)$ tal que

$$x \in B(x_{n,j_n(x)}, 1/n) \quad \Rightarrow \quad \|x - x_{n,j_n(x)}\| < \frac{1}{n}.$$

De esta manera, la sucesión $(x_{n,j_n(x)})_{n\geq 1}$ converge a x. Esto prueba la densidad de D en K.

Etapa 2: Existe una subsucesión $(f_{n_m})_{m\geq 1}$ de $(f_n)_{n\geq 1}$ que converge puntualmente en D. (Aquí se usa la acotación de $\mathcal{F}$).

Sea $D = \{d_n : n \in \mathbb{N}\} \subset K$ con $\overline{D} = K$. Consideremos la sucesión $(f_n(d_1))_{n\geq 1}$, que es acotada en $\mathbb{R}^n$. Aquí estamos usando la acotación de $\mathcal{F}$, que nos dice que existe $C > 0$ tal que

$$\|f\|_\infty \leq C \quad \forall f \in \mathcal{F}.$$

Gracias a Bolzano-Weierstrass sabemos que existe una subsucesión convergente $(f_n^1(d_1))_{n\geq 1}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} f_n^1(d_1) = f_w^1 \in \mathbb{R}^n.$$

Ahora consideramos $(f_n^1(d_2))_{n\geq 1}$, que de nuevo es una sucesión acotada en $\mathbb{R}^n$; luego Bolzano-Weierstrass nos dice que existirá una subsucesión de esta sucesión tal que

$$\lim_{n\to\infty} f_n^2(d_2) = f_w^2 \in \mathbb{R}^n.$$

Además, por ser subsucesión de $(f_n^1(d_2))_{n\geq 1}$, se tiene también que $\lim_{n\to\infty} f_n^2(d_1) = f_w^1$. Repitiendo este proceso indefinidamente llegamos para cada $m \in \mathbb{N}$ a una sucesión $(f_n^m)_{n\geq 1}$ subsucesión de $(f_n^{m-1})_{n\geq 1}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} f_n^m(d_i) = f_w^i \quad \forall 1 \leq i \leq m.$$

Definimos $g_n = f_n^n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Tenemos que $(g_n)_{n\geq 1}$ es una subsucesión de $(f_n)_{n\geq 1}$ y, además, para cada $m \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n\to\infty} g_n(d_m) = f_w^m.$$

Etapa 3 $(f_{n_m})_{m\geq 1}$ es de Cauchy en $C(K;\mathbb{R}^n)$, que es completo para la norma supremo; luego será convergente. (Usamos que $\mathcal{F}$ es equicontinuo).

Como ya se ha indicado en la etapa 2, nuestra subsucesión convergente viene denotada por $(g_n)_{n\geq 1}$ (no usaremos la notación $(f_{n_m})_{m\geq 1}$). Ya sabemos que $(g_n)_{n\geq 1}$ converge puntualmente en D. Ahora probaremos que realmente es una sucesión de Cauchy en $(C(K;\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_\infty)$.

Usando la hipótesis de equicontinuidad de la familia $\mathcal{F}$ para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $\|x-y\| < \delta$ (con $x, y \in K$) entonces

$$\|g_n(x) - g_n(y)\| \leq \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall n \geq 1.$$

Cogemos ese $\delta > 0$ y consideramos el recubrimiento

$$K \subset \bigcup_{n\geq 1} B_\delta(d_n).$$

Obsérvese que la unión de las bolas recubre K, por ser $\{d_n\}_{n\geq 1}$ denso en K, y entonces $\overline{D} = K$. Ahora, si $x \in K$ debe existir $j = j(x)$ tal que

$$\|x - d_{j(x)}\| < \delta \quad \Leftrightarrow \quad x \in B_\delta(d_{j(x)}).$$

Por otro lado, la compacidad de K nos indica que podemos tomar un subrecubrimiento finito de K, dado por

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{q} B_\delta(d_j).$$

Cojamos ahora $n, m \in \mathbb{N}$ y, con vistas a probar que la sucesión $(g_n)_{n\geq 1}$ es de Cauchy escribimos para cada $x \in K$

$$\begin{aligned}\|g_{n+m}(x) - g_n(x)\| &\leq \|g_{n+m}(x) - g_{n+m}(d_{j(x)})\| + \|g_{n+m}(d_{j(x)}) - g_n(d_{j(x)})\| + \|g_n(d_{j(x)}) - g_n(x)\| \\ &\leq \frac{2\varepsilon}{3} + \|g_{n+m}(d_{j(x)}) - g_n(d_{j(x)})\|.\end{aligned}$$

Para cada $j = 1, \ldots, q$ tenemos que existe $\lim_{n\to\infty} g_n(d_j) = f_w^j$. En particular tenemos q sucesiones de Cauchy. Luego, dado el $\varepsilon > 0$ del principio, existe $n_0 = n_0(\varepsilon, q)$ tal que si $n \geq n_0$, $m \geq 1$ se tiene que

$$\|g_{n+m}(d_j) - g_n(d_j)\| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Como sabemos que $d_{j(x)} \in \{d_1, \ldots, d_q\}$ para todo $x \in K$, entonces concluimos que

$$\|g_{n+m}(x) - g_n(x)\| \leq \frac{2\varepsilon}{3} + \|g_{n+m}(d_{j(x)}) - g_n(d_{j(x)})\| \leq \varepsilon, \quad \forall n \geq n_0,\, m \geq 1,\, x \in K.$$

Esto significa que $\|g_{n+m} - g_n\|_\infty \leq \varepsilon$ para todo $n \neq n_0$, $m \geq 1$. Luego la sucesión $(g_n)_{n\geq 1}$ es de Cauchy, que es lo que queríamos probar.

□

3.2. Teorema de existencia de Cauchy-Peano

Demostración del Teorema de Cauchy-Peano global. Recordemos que una función $x(t)$ será solución del PVI en J si y solo si

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds, \quad \forall t \in J.$$

Seguiremos ahora el esquema de Tonelli para construir una sucesión de funciones que convergerá a nuestra solución. Definiremos para cada $n \in \mathbb{N}$ las funciones

$$x_n(t) = \begin{cases} x_0, & t_0 \le t \le t_0 + \dfrac{T}{n} \\ x_0 + \int_{t_0}^{t-\frac{T}{n}} f(s, x_n(s))\, ds, & t \ge t_0 + \dfrac{T}{n} \end{cases}.$$

Para entender mejor el comportamiento de $x_n(t)$, escribimos a continuación su valor en los intervalos $\left[t_0 + \frac{T}{n}, t_0 + \dfrac{2T}{n}\right]$ y $\left[t_0 + \dfrac{2T}{n}, t_0 + \frac{3T}{n}\right]$. Estos son

$$x_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t-\frac{T}{n}} f(s, x_0)\, ds, \quad \text{para } t \in \left[t_0 + \frac{T}{n}, t_0 + \frac{2T}{n}\right]$$

y

$$x_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t_0+\frac{T}{n}} f(s, x_0)\, ds + \int_{t_0+\frac{T}{n}}^{t-\frac{T}{n}} f\left(s, x_0 + \int_{t_0}^{s-\frac{T}{n}} f(\tau, x_0)\, d\tau\right) ds, \quad \text{para } t \in \left[t_0 + \frac{2T}{n}, t_0 + \frac{3T}{n}\right]$$

respectivamente. Si definimos $\mathcal{F} = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset (C(J; \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_\infty)$, veremos a continuación que $\mathcal{F}$ es acotada y equicontinua.

1. Acotación: Si $t \in [t_0, t_0 + T/n]$, entonces $\|x_n(t)\| = \|x_0\|$. Si, en cambio, $t \ge T/n$, entonces

$$\begin{aligned} \|x_n(t)\| &= \left\| x_0 + \int_{t_0}^{t-\frac{T}{n}} f(s, x_n(s))\, ds \right\| \\ &\le \|x_0\| + M|t - (T/n) - t_0| \le \|x_0\| + MT =: C \end{aligned}$$

   Así $\mathcal{F} \subset \overline{B}(0, C)$.

2. Equicontinuidad: Distinguiremos casos:

   - Si $t_0 \le t, s \le t_0 + T/n$ tenemos que

$$\|x_n(t) - x_n(s)\| = \|x_0 - x_0\| = 0.$$

   - Si $t_0 \le t \le t_0 + T/n \le s$, tenemos que

$$\begin{aligned} \|x_n(t) - x_n(s)\| &= \left\| x_0 - x_0 - \int_{t_0}^{s-\frac{T}{n}} f(\tau, x_n(\tau))\, d\tau \right\| \le \left\| \int_{t_0}^{s-\frac{T}{n}} f(\tau, x_n(\tau))\, d\tau \right\| \\ &\le M|s - (T/n) - t_0| \le M|s - t|. \end{aligned}$$

- Si $t_0 + T/n \leq t, s$, tenemos que

$$\begin{aligned}\|x_n(t) - x_n(s)\| &= \left\| \int_{t_0}^{t-\frac{T}{n}} f(\tau, x_n(\tau))\, d\tau - \int_{t_0}^{s-\frac{T}{n}} f(\tau, x_n(\tau))\, d\tau \right\| = \left\| \int_{s-\frac{T}{n}}^{t-\frac{T}{n}} f(\tau, x_n(\tau))\, d\tau \right\| \\ &\leq M|s-t|.\end{aligned}$$

  Hemos probado que $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ son todas globalmente Lipschitz con la misma constante $M \geq 0$. Así, dado $\varepsilon > 0$, cogiendo $\delta = \varepsilon/M$, tenemos que si $|s-t| \leq \delta = \varepsilon/M$ tenemos que $\|x_n(t) - x_n(s)\| \leq \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego tenemos que la familia es equicontinua.

Gracias a que $\mathcal{F}$ es acotada y equicontinua podemos aplicar el Teorema de Arzelà-Ascoli (Teorema 3.4) y obtenemos que existe $x \in C(J;\mathbb{R}^n)$ y una subsucesión $\{x_{n_m}\}_{m\geq 1}$ tal que $\lim_{m\to\infty} x_{n_m} = x$ en $(C(J;\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_\infty)$. Para acabar, probaremos que x es solución del PVI. Para esto bastará ver que

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds, \quad \forall t \in J.$$

Como $x_{n_m}(t_0) = x_0$ para todo $m \in \mathbb{N}$ tenemos que $x(t_0) = \lim_{m\to\infty} x_{n_m}(t_0) = x_0$ (recordemos que convergencia uniforme implica convergencia puntual). En el caso de que $t > t_0$ tenemos que existirá $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $t - \frac{T}{n_m} > t_0$ para todo $m \geq m_0$. Así pues, si $m \geq m_0$ tenemos que

$$x_{n_m}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t-\frac{T}{n_m}} f(s, x_{n_m}(s))\, ds = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_{n_m}(s))\, ds - \int_{t-\frac{T}{n_m}}^{t} f(s, x_{n_m}(s))\, ds.$$

Por un lado tenemos que

$$\left\| \int_{t-\frac{T}{n_m}}^{t} f(s, x_{n_m}(s))\, ds \right\| \leq M\frac{T}{n_m} \to 0 \quad \text{cuando } m \to \infty. \tag{3.2}$$

Por otro lado, como $x_{n_m} \to x$ uniformemente y f es continua, se probará con detalles unas líneas más abajo que para todo $\varepsilon > 0$ existirá un $m_1 \geq m_0$ tal que para todo $m \geq m_1$

$$\left\| \int_{t_0}^{t} f(s, x_{n_m}(s)) - \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\| \, ds \right\| \leq \int_{t_0}^{t} \|f(s, x_{n_m}(s)) - f(s, x(s))\|\, ds \leq \int_{t_0}^{t} \frac{\varepsilon}{T}\, ds \leq \varepsilon. \tag{3.3}$$

Una vez comprobemos esto, hemos acabado, pues se sigue que

$$\lim_{m\to\infty} \int_{t_0}^{t} f(s, x_{n_m}(s))\, ds = \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds. \tag{3.4}$$

Y uniendo (3.2) con (3.4) tenemos que

$$x(t) = \lim_{m\to\infty} x_{n_m}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds.$$

Probemos ahora (3.3). Sea $\varepsilon > 0$ y sea

$$Q_R = \{(t, x) \in J \times \mathbb{R}^n : \|x - x(t)\| \leq R\}$$

siendo $R > 0$ arbitrario. Obsérvese que Q_R no es más que un entorno tubular de radio $R > 0$ en torno a $\{(t, x(t)) : t \in J\}$. Como $f : J \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es continua, $f|_{Q_R}$ es uniformemente continua, pues Q_R es un compacto. En particular, existirá $\delta > 0$ tal que si $(t, x), (t, y) \in Q_R$ con $\|x - y\| \leq \delta$ entonces

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq \frac{\varepsilon}{T}.$$

Además, dado ese $\delta > 0$, como $x_{n_m} \to x$ en $(C(J; \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_\infty)$ podemos encontrar $m_1 \geq m_0$ tal que

$$\|x_{n_m}(s) - x(s)\| \leq \delta \quad \forall s \in K, \ \forall m \geq m_1.$$

□

Teorema 3.9 (Teorema de Cauchy-Peano local)**.** *Sea $J = [t_0, t_0 + T]$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y sea $f \in C(J \times \Omega; \mathbb{R}^n)$. Entonces para todo $x_0 \in \Omega$, existe un $\delta > 0$ tal que el PVI (3.1) posee una solución definida al menos en $[t_0, t_0 + \delta]$.*

Demostración. Se deja como ejercicio al alumno. □

Observación 3.10. En vista de los resultados de existencia y unicidad que hemos visto parece que si partimos de una función continua $f \in C(\mathbb{R}^n)$ el conjunto de puntos (t_0, x_0) para los que podría no haber unicidad de soluciones locales para el problema de valor inicial (3.1) debería ser pequeño. Sin embargo existen ejemplos de ecuaciones diferenciales $x' = f(t, x)$ tales que para todo $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ existen al menos dos soluciones locales al problema. Véase el libro de Hartman (páginas 18-26).

Veamos ahora dos ejemplos:

Ejemplo 3.11. (**Ejemplo de Müller, 1927**) Sea $f : [0, 1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(t, x) = \begin{cases} 2t & x \leq 0 \\ 2t(1 - \lambda) - 2t\lambda & x = \lambda t^2, \ \lambda \in [0, 1] \\ -2t & x \geq t^2 \end{cases}$$

y el PVI $x' = f(t, x)$, $x(0) = 0 \in \mathbb{R}$.

- f es continua y acotada, luego por el Teorema de Cauchy-Peano existe una solución definida en $[0, 1]$.
- f no es localmente Lipschitz en ningún entorno de $x = 0$ uniformemente en ningún entorno de $t = 0$.
- Hay unicidad de soluciones al PVI.
- Las iteradas de Picard-Lindelöf no tienen nada que ver con la solución.

Acabamos el capítulo con un último ejemplo, en el que pretendemos mostrar la utilidad de todos los teoremas de existencia y unicidad vistos hasta ahora, en los Capítulos 1-3.

Ejemplo 3.12. Comprobaremos que en el siguiente PVI hay existencia y unicidad de soluciones, pero que no podemos aplicar ningún teorema de Cauchy-Lipschitz.

$$\begin{cases} y' = y^{1/3} + 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

En primer lugar se observa que se puede aplicar el Teorema de Peano y asegurar la existencia de soluciones. Respecto a la unicidad vemos que dada la función $f(t, y) = y^{1/3} + 1$, no existen intervalos abiertos $U, I \subset \mathbb{R}$ tales que $0 \in U$ y $0 \in I$ de manera que f sea localmente Lipschitz en U uniformemente en I. Así, no podemos aplicar los Teoremas de Cauchy Lipschitz. Sin embargo, la EDO $y' = y^{1/3} + 1$ es de variables separadas y, llamando $h(y) = y^{1/3} + 1$, tenemos que $h(0) = 1 \neq 0$, luego por el Teorema de existencia y unicidad para EDOs en variables separadas existirá solución local (definida en un entorno de $t_0 = 0$).

3.3. Soluciones maximales en la teoría de Cauchy-Peano

Al igual que hicimos en la teoría de Cauchy-Lipschitz, donde expusimos resultados sobre existencia de soluciones maximales y, a la vez, dábamos cierta información acerca de los intervalos maximales de definición y cuándo podía ocurrir explosión en tiempo finito, la teoría de Cauchy-Peano también permite desarrollar resultados análogos. Ahora, puesto que no tendremos unicidad, las soluciones maximales no tendrán por qué ser únicas.

Definición 3.13. Dado un conjunto, se puede definir un orden como un subconjunto $\mathcal{O} \subset X \times X$ que satisface las siguientes propiedades:

1. Reflexiva: $(a, a) \in \mathcal{O}$ para todo $a \in X$.
2. Antisimetría: $(a, b), (b, a) \in \mathcal{O}$ implica que $a = b$.
3. Transitiva: $(a, b), (b, c) \in \mathcal{O}$ implica que $(a, c) \in \mathcal{O}$

Por convenio, escribiremos a partir de ahora $x \leq y$ para querer decir $(x, y) \in \mathcal{O}$. Diremos $\mathcal{O} = \leq$ define un *orden total* (o bien que X tiene un orden total dado por $\mathcal{O}$) si para todo $a, b \in X$ o bien $a \leq b$ o bien $b \leq a$. Un orden será *parcial* si no es total (es decir, que existe algún $a, b \in X$ tal que ni $a \leq b$ ni $b \leq a$.

Por otro lado, definimos *cadena* como cualquier subconjunto $C \subset X$ totalmente ordenado (es decir, para todo $a, b \in C$ se debe tener que o bien $a \leq b$ o bien $b \leq a$.

Y por último, un orden parcial $(X, \leq)$ se dice inductivo cuando cualquier cadena está acotada superiormente; es decir, que existe $s \in X$ tal que $c \leq s$ para todo $c \in C$.

Lema 3.14 (Lema de Zorn (1935))**.** *Si $(X, \leq)$ es un conjunto ordenado por un orden $\leq$ parcial e inductivo, cualquier cadena C posee un elemento maximal $m \in X$. Esto es $c \leq m$ para todo $c \in C$, y si $m \leq x$ para algún otro $x \in X$, entonces $m = x$.*

Demostración. La demostración requiere del Axioma de Elección, de hecho el Lema de Zorn es equivalente a este. Recordemos que el Axioma de Elección establece que dada una familia de conjuntos arbitraria, siempre puedo coger un elemento de cada conjunto.

La idea de la prueba será suponer que no hay un elemento maximal en la cadena C, lo que permitiría escoger siempre un elemento mayor en la cadena y, repitiendo el proceso, se acabaría probando que realmente $X = C$, y estaríamos ante un orden total.

Para una demostración más rigurosa se recomienda consultar cualquier manual de Topología o de Teoría de Conjuntos.

□

Sea ahora $J = [t_0, t_0 + T$ o bien $J = [t_0, \infty)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $f : J \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ continua. Tomemos $x_0 \in \Omega$ y consideremos el PVI

$$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} . \tag{3.5}$$

Por el Teorema de Cauchy Peano local (Teorema 3.9) sabemos que existe $\delta > 0$ tal que $(x, [t_0, t_0 + \delta])$ es solución de (3.5). Llamemos al conjunto de soluciones

$$\Sigma = \{(u, I) : I \in \{[t_0, t_0 + h], [t_0, t_0 + h)\}, o < h \leq T, u \in C^1(I) \text{ resuelve (3.5) en } I\}$$

y definiremos a continuación las nociones de prolongabilidad.

Definición 3.15. Dadas dos soluciones $(x_1, I_1), (x_2, I_2) \in \Sigma$ diremos que (x_2, I_2) es prolongación por la derecha de (x_1, I_1) si $I_1 \subset I_2$ y además $x_2|_{I_1} = x_1$. En tal caso escribiremos $(x_1, I_1) \leq (x_2, I_2)$. Se podría definir análogamente prolongaciones por la izquierda.

El lector puede comprobar que $(\Sigma, \leq)$ es un conjunto ordenado. Pero solo tendremos in orden parcial, pues por ejemplo si consideremos el PVI $x' = x^{1/3}$, $x(0) = 0$, tenemos que para algún intervalo $I_1 = I_2 = [0, T]$,

$$(x_1(t), I_1) = (0, [0, T]) \quad ; \quad (x_2(t), I_2) = ((2/3)t^{3/2}, [0, T])$$

son ambas soluciones, pero ninguna es prolongación de la otra.

Teorema 3.16 (Teorema soluciones maximales Cauchy-Peano)**.** *Sea $J = [t_0, t_0 + T]$ y $f \in C(J \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$. Entonces para cada $x_0 \in \mathbb{R}^n$, el PVI (3.5) tiene al menos una solución no prolongable estrictamente a la derecha (una solución maximal) (x, I). Además, para cualquier solución no prolongable estrictamente a la derecha (x, I), o bien $I = J$, en cuyo caso decimos que x está globalmente definida en J, o bien $I = [t_0, T_{max})$, para algún $t_0 < T_{max} \leq t_0 + T$ y, en tal caso,*

$$\lim_{t \to T_{max}^-} \|x(t)\| = +\infty$$

y diremos que x explota en tiempo finito T_{max}.

Demostración. Llamemos Σ al conjunto de soluciones del PVI y consideremos una cadena suya

$$C = \{(x_\alpha, I_\alpha) : \alpha \in A\}.$$

Entonces tomamos $I = \bigcup_{\alpha \in A} I_\alpha$ y tomamos $x(t) = x_\alpha(t)$ si $t \in I_\alpha$. Observemos que esta función $x(t)$ está bien definida en I porque $x_\alpha(t) = x_\beta(t)$ si $t \in I_\alpha \cap I_\beta$. De hecho (u, I) es una cota superior de $(C, \leq)$. Es aquí donde entra en juego el Lema de Zorn que nos garantiza que cualquier cadena admitirá una solución no prolongable estrictamente a la derecha. Tenemos que $x(t)$ será una solución maximal del PVI.

Se nos presentan a continuación dos situaciones: o bien $I = J$, o bien $I \subsetneq J$. En el segundo caso se tiene que

$$I = [t_0, T_{max}], \;\; t_0 < T_{max} < t_0 + T \quad \text{o} \quad I = [t_0, T_{max}) \;\; t_0 < T_{max} \leq t_0 + T.$$

El primer caso lo descartamos porque tras plantearnos el PVI $\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(T_{max}) = x(T_{max}) \end{cases}$ y volviendo a aplicar el Teorema de Cauchy-Peano local, podríamos encontrar una solución, que generaría una prolongación estricta de $x(t)$ más allá de T_{max}. Hemos por tanto deducido que el intervalo maximal de definición de x es del tipo $I = [t_0, T_{max})$ con $t_0 < T_{max} < t_0 + T$. Veamos ahora que

$$\lim_{t \to T_{max}^-} \|x(t)|\| = +\infty.$$

□

1. El conjunto $\Gamma = \{u(t) : t \in I\}$ no es acotado.

   En caso contrario, al igual que hicimos en la demostración del Teorema 2.33, existiría una sucesión $(t_k)_{k\geq 1}$ con $t_k \to T_{max}$ y tal que $\lim_{k\to\infty} x(t_k) = x^* \in \mathbb{R}^n$. Ahora uno puede probar que de hecho $\lim_{t\to T_{max}^-} x(t) = x^*$ (comparar con el Lema 2.31). En efecto, dado $t \in [t_0, T_{max})$,

   $$\|x(t) - x(t_k)\| = \left\| \int_{t_k}^{t} x'(s)\, ds \right\| = \left\| \int_{t_k}^{t} x'(s)\, ds \right\| \leq \max_{(r,y)\in J\times\overline{\Gamma}} \|f(r,y)\|\, |t - t_k| = M\, |t - t_k|$$

   Si hacemos tender k a infinito se obtiene

   $$\|x(t) - x^*\| \leq M|t - T_{max}| \quad \forall t \in I,$$

   y por consiguiente $\lim_{t\to T_{max}^-} x(t) = x^*$, lo que implicaría que la solución puede extenderse a un intervalo más grande $[t_0, T_{max}) \subset [t_0, T_{max}]$, contradiciendo la maximalidad de (x, I).

2. Existe una sucesión de tiempos creciente $(t_k)_{k\geq 1}$ tal que $t_k \to T_{max}$ con $\lim_{k\to\infty} \|x(t_k)\| = \infty$.

   La demostración de este hecho sigue los mismos pasos que en la demostración del Teorema 2.33.

Ejemplo 3.17. Consideremos el PVI $\begin{cases} x' = \cos(x^{1/3}) \\ x(0) = 0 \in \mathbb{R} \end{cases}$.

Gracias al Teorema de Cauchy-Peano, como $f(x) = \cos(x^{1/3})$ es continua y acotada en $\mathbb{R}$, es fácil concluir la existencia de al menos una solución definida en todo $\mathbb{R}$. Observemos que la Teoría de Cauchy-Lipschitz no nos garantiza existencia y unicidad de soluciones al PVI, pues no hay entornos de $x = 0$ donde $f(x)$ sea Lipschitz. Por otro lado, sí que es cierto que al tratarse de una EDO en variables separadas con $f(0) \neq 0$, el Teorema 1.5 nos asegura la existencia de una única solución local.

Capítulo 4

Estabilidad de soluciones

El estudio de la estabilidad de soluciones de un sistema del tipo $x' = f(t, x)$ intenta explicar cómo podemos saber si el comportamiento de las soluciones es el "esperable", o quizás no lo es. Siendo algo más precisos, cuando a una solución en un sistema se le llame *estable* se quiere indicar que todas las soluciones que pasen en algún momento cerca de ella, se quedarán cerca de ella en todo tiempo futuro. Se dirá, por el contrario, *inestable* si esto no sucede.

En sistemas generales no es nada trivial estudiar la estabilidad de soluciones. Sin embargo, tendremos la "suerte" de al menos hacer un estudio bastante completo de la estabilidad para el caso de sistemas lineales $x' = A(t)x + B(t)$. Un caso particular de sistema lineal es aquel donde $A(t) = A$ es una matriz constante. Para este caso veremos cómo resolver y encontrar las soluciones explícitas de cualquier sistema de ecuaciones diferenciales lineales $x' = Ax$. Se hará un brevísimo repaso sobre este asunto en la Sección 5.1, pero se remite a los Anexos para una exposición más completa sobre todo el estudio de estos sistemas.

Si por contra nos encontramos ante un sistema no lineal, uno deberá apañárselas para estudiar la estabilidad, de maneras más "creativas". Veremos esencialmente dos métodos, que aparecen en la Sección 4.4. Uno que se basa en reducir "localmente " la cuestión de la estabilidad a un sistema lineal con coeficientes constantes, donde conocemos perfectamente todo lo concerniente a la estabilidad; y otro método, basado en el uso de las funciones de Lyapunov, que tendrá la ventaja de darnos, además, información sobre el comportamiento de las soluciones de manera global (aunque esto se verá en más detalle en el siguiente capítulo).

4.1. Repaso breve de sistemas lineales

Dado un sistema lineal homogéneo $x' = A(t)x$, $A \in C(\mathbb{R}; \mathbb{M}_n(\mathbb{R}))$, siempre existe un conjunto de n soluciones linealmente independientes $\{x_1, \ldots, x_n\}$ que llamaremos *conjunto fundamental*. Si denotamos por Σ al conjunto de soluciones de $x' = A(t)x$ tenemos que

$$\begin{aligned}\Sigma &= \{c_1x_1 + \cdots + c_nx_n : c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}\} = \operatorname{span}\{x_1, \ldots, x_n\} \\ &= L(x_1, \ldots, x_n) = \langle x_1, \ldots, x_n\rangle \subset C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n)\end{aligned}$$

es un subespacio vectorial de dimensión n. Una *matriz fundamental* $\Phi \in C(\mathbb{R}; \mathbb{M}_n(\mathbb{R}))$ será aquella cuyas columnas forman un conjunto fundamental de soluciones. Dada cualquier solución $x(t)$ podemos

escribir

$$x(t) = \Phi(t) \cdot C = \Phi(t) \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \quad \text{para ciertas constantes } C = (c_1, \dots c_N).$$

Para encontrar un conjunto fundamental de soluciones podemos escoger los x_j, $1 \leq j \leq n$ como las únicas soluciones de

$$\begin{cases} x' = A(t)x \\ x(t_0) = e_j \end{cases}, \quad t_0 \in \mathbb{R}, \;\; e_j = (0, \dots, 1^{n)}, \dots 0).$$

y en ese caso $\{x_1, \dots, x_n\}$ forman un conjunto fundamental de soluciones con la propiedad adicional de que si Φ es su matriz fundamental asociada, tenemos $\Phi(t_0) = Id$. A cualquier matriz fundamental para la que exista $\widetilde{t} \in \mathbb{R}$ con $\Phi(\widetilde{t}) = Id$ se le llama *matriz fundamental principal*.

Si $G \in C(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$ y consideramos el sistema lineal no homogéneo $x' = A(t)x + G(t)$, su conjunto de soluciones viene dado por

$$\{c_1 x_1 + \cdots c_n x_n + x_p : \, c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}\}$$

donde $\{x_1, \dots, x_n\}$ es un conjunto fundamental de soluciones de $x' = A(t)x$ y donde x_p es una solución particular de $x' = A(t)x + G(t)$.

En el caso particular de que $A(t) = A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, se tiene que una matriz fundamental principal de $x' = Ax$ viene dada por

$$\Phi(t) = e^{At} \quad \text{donde} \quad e^A = I + A + \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{3!} + \cdots = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{A^j}{j!}.$$

Además la única solución del PVI $\begin{cases} x' = Ax \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ se puede expresar como $x(t) = e^{(t-t_0)A} = e^{(t-t_0)A} x_0$.

Fórmula de variación de las constantes: Si $x(t)$ es la única solución del PVI $x' = Ax + G(t)$, $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$, $t_0 \in \mathbb{R}$, donde $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, $G \in C(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$, entonces

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)} G(s)\, ds \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Demostración. Bastará que comprobemos que la función $x(t)$ dada en el enunciado es solución del PVI, y como sabemos que, por tratarse de un sistema lineal, hay unicidad de soluciones definidas en todo $\mathbb{R}$, concluiremos que esa debe ser la solución.

En primer lugar es claro que $x(t_0) = e^0 x_0 + 0 = Id\, x_0 = x_0$. En segundo lugar, utilizando el Teorema Fundamental del Cálculo, la regla del producto de derivación, y sabiendo derivar la exponencial de una matriz,

$$\begin{aligned} x'(t) &= Ae^{A(t-t_0)} x_0 + Ae^{At} \int_{t_0}^{t} e^{A(-s)} G(s)\, ds + e^{At} e^{A(-t)} G(t) \\ &= A \left[e^{A(t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)} G(s)\, ds \right] + e^0 G(t) = Ax(t) + G(t). \end{aligned}$$

□

4.2. Definiciones de estabilidad

Consideraremos ecuaciones diferenciales del tipo

$$x' = f(t, x)$$

donde $f : [\beta, \infty) \times \Omega \to \mathbb{R}^n$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto y donde $f \in C([\beta, \infty) \times \Omega; \mathbb{R}^n)$ es localmente Lipschitz en $x \in \Omega$ uniformemente en $t \in [\beta, \infty)$. Por la Teoría de Cauchy-Lipschitz dado cualquier $(t_0, x_0) \in [\beta, \infty) \times \Omega$ el problema de valor inicial $x' = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$, posee una única solución $x(t) = x(t; t_0, x_0)$ relativa a Ω, que no tiene por qué estar definida en todo $[t_0, \infty)$.

Definición 4.1. Sea $\overline{x}(t)$ la solución maximal del PVI $\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(\beta) = x_0 \end{cases}$ relativa a Ω, que supondremos definida en todo $[\beta, \infty)$.

1. $\overline{x}(t)$, $t \geq \beta$ se dice solución estable si para todo $\varepsilon > 0$ y todo $t_0 \geq \beta$, existe un $\delta = \delta(t_0, \varepsilon) > 0$ tal que si $\|x_0 - \overline{x}(t_0)\| < \delta$ entonces

$$\|x(t; t_0, x_0) - \overline{x}(t)\| < \varepsilon \quad \forall t \geq t_0.$$

2. $\overline{x}(t)$, $t \geq \beta$ se dice solución asintóticamente estable si es estable y además para todo $t_0 \geq \beta$, existe un $\delta = \delta(t_0) > 0$ tal que si $\|x_0 - \overline{x}(t_0)\| < \delta$ entonces

$$\lim_{t \to \infty} \|x(t; t_0, x_0) - \overline{x}(t)\| = 0.$$

3. $\overline{x}(t)$, $t \geq \beta$ se dice solución globalmente asintóticamente estable si es estable y además para todo $(t_0, x_0) \in [\beta, \infty) \times \Omega$

$$\lim_{t \to \infty} \|x(t; t_0, x_0) - \overline{x}(t)\| = 0.$$

4. $\overline{x}(t)$, $t \geq \beta$ se dice solución inestable si no es estable.

Observación 4.2. Es importante hacer algunas observaciones

1. Si $\overline{x}(t)$ no está definida en todo $[\beta, \infty)$ es porque explota o sale de Ω, y siempre diremos en ese caso que la solución es inestable.

2. Hemos mirado únicamente hacia la derecha de β para definir estabilidad. Esto se conoce como estabilidad en sentido de Lyapunov. Podríamos haber introducido nociones de estabilidad análogas hacia la izquierda de β.

3. En la definición de asintóticamente estable, el hecho de que para todo $t_0 \geq \beta$ exista $\delta > 0$ tal que si $\|x_0 - \overline{x}(t_0)\| < \delta$ entonces $\lim_{t \to \infty} \|x(t; t_0, x_0) - \overline{x}(t)\| = 0$, no tiene por qué implicar estabilidad. Lo veremos más adelante en el Ejemplo 5.20.

Veamos ahora algunos ejemplos.

Ejemplo 4.3. Sea $x' = ax$ con $a \in \mathbb{R}$. Supongamos primero que $a < 0$. Entonces, dada la solución $\overline{x}(t) = x(\beta)e^{a(t-\beta)}$, $t \geq \beta$, con $\beta \in \mathbb{R}$, tenemos que es globalmente asintóticamente estable.

- $\overline{x}$ es estable: Dado $\varepsilon > 0$ y dado $t_0 \geq \beta$ cogemos $\delta = \varepsilon > 0$ y tenemos que si $\|x_0 - \overline{x}(t_0)\| < \delta$ entonces para todo $t \geq t_0$

$$|x(t; t_0, x_0) - \overline{x}(t)| = |x_0 e^{a(t-t_0)} - \overline{x}(t_0)e^{a(t-t_0)}| = |x_0 - \overline{x}(t_0)|e^{a(t-t_0)} \leq |x_0 - \overline{x}(t_0)| < \varepsilon.$$

- Dado $t_0 \geq \beta$ y cualquier $x_0 \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$\lim_{t\to\infty} |x(t; t_0, x_0) - \overline{x}(t)| = \lim_{t\to\infty} |x_0 e^{a(t-t_0)} - \overline{x}(t_0)e^{a(t-t_0)}| = \lim_{t\to\infty} |x_0 - \overline{x}(t_0)|e^{a(t-t_0)} = 0.$$

En el caso de que $a = 0$, todas las soluciones son constantes $x(t) = x(t_0)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, luego existe estabilidad pero no existe estabilidad asintótica. Y si $a > 0$ todas las soluciones son inestables puesto que para cualesquiera $x_0 \neq \overline{x}_0$,

$$\lim_{t\to\infty} |x(t; t_0, x_0) - \overline{x}(t; t_0, \overline{x}_0)| = \lim_{t\to\infty} |x_0 - \overline{x}_0|e^{a(t-t_0)} = \infty.$$

Ejemplo 4.4. Sea $x' = x^2$. Las soluciones vienen dadas por

$$x(t; \beta, \overline{x_0}) = \frac{\overline{x_0}}{1 - \overline{x_0}(t - \beta)}.$$

- Caso $\overline{x_0} > 0$: Las soluciones correspondientes están definidas en $I = (-\infty, \beta + 1/\overline{x_0})$ con

$$\lim_{t\to(\beta+1/\overline{x_0})^-} x(t) = \infty,$$

  luego son soluciones inestables.

- Caso $\overline{x_0} = 0$: La solución $x = 0$ es inestable, como se deduce del punto anterior.

- Caso $\overline{x_0} < 0$: Las solución correspondiente $x(t; \beta, \overline{x_0})$ está definida en $(\beta + 1/\overline{x_0}, \infty)$ con

$$\lim_{t\to\infty} x(t; \beta, \overline{x_0}) = 0.$$

  Probaremos que entonces $x(t; \beta, \overline{x_0})$ es asintóticamente estable. Que la solución es estable se deja como ejercicio. Por otro lado, dado $t_0 \geq \beta$ tomamos $\delta = |\overline{x}(t_0)|/2$. Entonces si $|x_0 - \overline{x}(t_0)| < \delta$ tenemos que $x_0 < 0$, y por tanto, por lo mencionado más arriba,

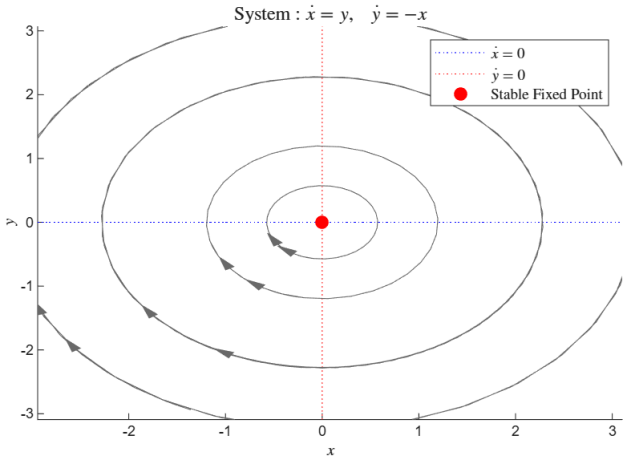
$$\lim_{t\to\infty} |\overline{x}(t) - x(t; t_0, x_0)| = |0 - 0| = 0.$$

  Es fácil ver que las soluciones no son, en ningún caso, globalmente asintóticamente estables por lo visto en el caso $\overline{x_0}$.

Ejemplo 4.5. Considerar el sistema $\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases}$ que tiene por soluciones

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = x(0) \begin{bmatrix} \cos t \\ \operatorname{sen} t \end{bmatrix} + y(0) \begin{bmatrix} \operatorname{sen} t \\ \cos t \end{bmatrix}.$$

Se comprueba fácilmente que el origen es una solución estable, pero no asintóticamente estable.



4.3. Estabilidad de sistemas lineales

Sea $A \in C([\beta, \infty); \mathbb{M}_n(\mathbb{R}))$, sea $G \in C([\beta, \infty); \mathbb{R}^n)$ y sea la EDO lineal no homogénea

$$x' = A(t)x + G(t) \tag{4.1}$$

Proposición 4.6. *La estabilidad, la estabilidad asintótica, la estabilidad asintótica global o la inestabilidad de cualquier solución $\overline{x}(t)$ de (4.1) es la misma que la de cualquier otra solución y coincide con la de la solución nula $x = 0$ del sistema homogéneo asociado*

$$x' = A(t)x \tag{4.2}$$

Demostración. Para estudiar cualquier noción de estabilidad de una solución $\overline{x}(t)$ de (4.1) habría que tomar otra solución $y(t)$ del sistema tal que la cantidad $\|y(t_0) - \overline{x}(t_0)\|$ sea pequeña, y estimar los valores $\|y(t) - \overline{x}(t)\|$ para tiempos $t \geq t_0$. Pero debemos observar que $(y - \overline{x})$ es solución de (4.2), y si $\|y(t) - \overline{x}(t)\|$ es pequeño, es porque realmente la solución $(y - \overline{x})$ de (4.2) es cercana a la solución nula $x = 0$ del mismo sistema homogéneo. Luego realmente estaríamos, de manera equivalente, estudiando la estabilidad de la solución nula en (4.2). Es decir, la estabilidad, la estabilidad asintótica, la estabilidad asintótica global o la inestabilidad determina el mismo tipo de estabilidad para todas las soluciones del sistema no homogéneo (4.1).

Desarrollaremos solo la demostración rigurosa para el caso de la estabilidad.

- Supongamos que la solución nula es estable en el sistema (4.2). Veremos entonces que toda solución $\overline{x}(t)$, $t \geq \beta$, es una solución estable de (4.1). Tomemos $\varepsilon > 0$, $t_0 \geq \beta$, y tomemos $\delta > 0$ dado por la estabilidad de $x = 0$ en (4.2). De esta forma sea ahora $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|x_0 - \overline{x}(t_0)\| < \delta$. Observemos que si $y(t) = x(t; t_0, x_0)$ denota la solución del sistema $x' = A(t) + G(t)$ con $x(t_0) = x_0$ entonces $(y - \overline{x}(t))(t)$ es solución de $x' = A(t)x$ con $y(t_0) = x_0 - \overline{x}(t_0)$. Luego como tenemos que $\|y(t_0) - 0\| = \|x_0 - \overline{x}(t_0)\| < \delta$, por la estabilidad de la solución nula en (4.2) se sigue que

$$\|x(t; t_0, x_0) - \overline{x}(t)\| = \|(y - \overline{x})(t) - 0\| < \varepsilon \quad \forall t \geq t_0.$$

□

La proposición anterior nos indica que se puede hablar en términos generales de la *estabilidad de un sistema lineal* del tipo (4.1) refiriéndose a la estabilidad de la solución $x = 0$ del sistema homogéneo asociado $x' = A(t)x$.

4.3.1. Sistemas lineales de coeficientes constantes $x' = Ax$

Sea $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ y sea $\sigma(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\}$ el conjunto de autovalores de A donde $\lambda_i \neq \lambda_j$ para $i \neq j$. Por el Teorema de Jordan sabemos que podemos escribir

$$\mathbb{C}^n = N\left[(A-\lambda_1 I)^{\nu(\lambda_1)}\right] \oplus \cdots \oplus \left[(A-\lambda_p I)^{\nu(\lambda_p)}\right]$$

donde

- $N[B] = \{z \in \mathbb{C}^n : Bz = 0\}$ denota el núcleo de una matriz $B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$.
- $\nu(\lambda_i)$, $1 \leq i \leq p$, son los ascendentes (también llamados índices) algebraicos de cada autovalor, y se definen como el mayor natural tal que

  $$N\left[(A-\lambda_i I)^{\nu(\lambda_i)}\right] = \left[(A-\lambda_i I)^{\nu(\lambda_i)+1}\right].$$

  En el caso de que $\nu(\lambda_i) = 1$ se dice que el autovalor λ_i es semisimple.
- $\left[(A-\lambda_i I)^{\nu(\lambda_i)}\right] \subset \mathbb{C}^n$ son los subespacios generalizados de los autovalores λ_i. Si llamamos

  $$m_g(\lambda_i) = \dim(N[A-\lambda_i I]) \quad ; \quad m_a(\lambda_i) = \dim\left(N\left[(A-\lambda_i I)^{\nu(\lambda_i)}\right]\right)$$

  se debe tener que $\nu(\lambda_i) = m_a(\lambda_i) - m_g(\lambda_i) + 1$. Además, recordamos que $m_a(\lambda_i)$ también denota la multiplicidad del autovalor λ_i como raíz del polinomio característico $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$.
- La notación $\mathbb{C}^n = V_1 \oplus \cdots \oplus V_p$ significa que $V_1, \ldots, V_p$ son subespacios vectoriales tales que $V_i \neq V_j = \{0\}$ para $i \neq j$ y que $\mathbb{C}^n = V_1 + \cdots + V_p$.

En el caso de que $x_0 \in \mathbb{C}^n$ podemos considerar el PVI $x' = Ax$, $x(t_0) = x_0$, donde las soluciones $x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ podrían tomar valores complejos. Pero la interpretación es que entenderíamos $x'(t)$ como

$$x'(t) = (\Re x(t))' + i(\Im x(t))' = A\Re(x(t)) + iA\Im(x(t)).$$

Se sigue de hecho que tanto $\Re(x(t)) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ como $\Im(x(t)) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ son soluciones del sistema $x' = Ax$ igualmente.

Ejemplo 4.7. Si consideramos $x'' + x = 0$, que tiene sistema asociado $(x', y') = (y, -x)$ tenemos que $x(t) = e^{it} = \cos(t) + i\,\mathrm{sen}(t)$ es solución de la EDO de orden dos, o bien

$$(x(t), y(t)) = (\cos(t) + i\,\mathrm{sen}(t), -\mathrm{sen}(t) + i\cos(t))$$

es solución del sistema. Además $\Re(x(t), y(t)) = (\cos(t), -\mathrm{sen}(t))$ y $\Im(x(t), y(t)) = (\mathrm{sen}(t), \cos(t))$ son también soluciones.

Si $x \in \mathbb{C}^n$, escribiendo $x_0 = x_{01} + \cdots + x_{0p}$ donde $x_{0i} \in N\left[(A-\lambda_i I)^{\nu(\lambda_i)}\right]$ para cada $1 \leq i \leq p$, tenemos que la solución al PVI

$$\begin{cases} x' = Ax \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

viene dada por

$$x(t) = x(t;t_0,x_0) = e^{A(t-t_0)}x_0 = e^{A(t-t_0)}x_0 = e^{A(t-t_0)}(x_{01}+\cdots x_{0p}) = \sum_{j=1}^{p} e^{\lambda_j(t-t_0)I}e^{(t-t_0)(A-\lambda_j I)}x_{0j}$$
$$= \sum_{j=1}^{p} e^{\lambda_j(t-t_0)}\left[x_{0j} + (t-t_0)(A-\lambda_j I)x_{0j} + \cdots + \frac{(t-t_0)^{\nu(\lambda_j)-1}(A-\lambda_j I)^{\nu(\lambda_j)-1}}{(\nu(\lambda_j)-1)!}x_{0j}\right].$$

En particular tenemos que

(a) Si $x_{0j} \in N\left[(A-\lambda_j I)^{\nu(\lambda_j)}\right]$ entonces $x(t;t_0,x_{0j}) \in N\left[(A-\lambda_j I)^{\nu(\lambda_j)}\right]$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

(b) Si $x_{0j} \in N\left[(A-\lambda_j I)\right]$ entonces $x(t;t_0,x_{0j}) = e^{\lambda_j(t-t_0)}x_{0j}$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Proposición 4.8. *Sea $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. Si existe $\lambda \in \sigma(A)$ con $\Re\lambda > 0$ el sistema $x' = Ax$ posee soluciones no acotadas.*

Demostración. Sea $x_0 \in N\left[(A-\lambda I)\right] \setminus \{0\} \subset \mathbb{C}^n$. Entonces, usando la observación (b) anterior,

$$\|x(t;t_0,x_0)\| = \|x(t)\| = \|e^{\lambda(t-t_0)}x_0\| = e^{\Re(\lambda)(t-t_0)}\|x_0\| \to \infty$$

cuando $t \to \infty$. Como también sabemos que $\Re(x(t))$ y $\Im(x(t))$ son soluciones de $x' = Ax$, y que se tiene que

$$\|x(t)\| = \Re(x(t)) + \Im(x(t))\| \leq \|\Re(x(t))\| + \|\Im(x(t))\|$$

se sigue por tanto que, o bien $\lim_{t\to\infty}\|\Re x(t)\| = \infty$, o bien $\lim_{t\to\infty}\|\Im x(t)\| = \infty$. Indicamos que para un vector complejo $z \in \mathbb{C}^n$, entendemos $\|z\| = \sqrt{|z_1|^2 + \cdots |z_n|^2}$, siendo $|z_1|, \ldots |z_n|$ los módulos complejos. □

Proposición 4.9. *Si dada $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ existe $\lambda \in \sigma(A)$ con $\Re(\lambda) = 0$ y $\nu(\lambda) \geq 2$ entonces el sistema $x' = Ax$ posee soluciones no acotadas.*

Demostración. Sea $x_0 \in N\left[(A-\lambda I)^2\right] \setminus N[(A-\lambda I)]$. Entonces, si $t \geq t_0$,

$$\begin{aligned}\|x(t;t_0,x_0)\| = \|x(t)\| &= \|e^{\lambda(t-t_0)}(x_0 + (t-t_0)(A-\lambda I)x_0)\| \\ &= \left|e^{\lambda(t-t_0)}\right| \|x_0 + (t-t_0)(A-\lambda I)x_0\| \\ &\geq (|t-t_0|\,\|(A-\lambda I)x_0\| - \|x_0\|)),\end{aligned}$$

luego $\lim_{t\to\infty}\|x(t)\| = +\infty$. Ahora, el mismo razonamiento empleado en la Proposición 4.8 nos dice que o bien $\|\Re(x(t))\| \to \infty$, o bien $\|\Im(x(t))\| \to \infty$. □

Proposición 4.10. *Sea $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ tal que $\Re(\lambda) < 0$ para todo $\lambda \in \sigma(A)$. Entonces toda solución $x(t)$ del sistema $x' = Ax$ satisface $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$. Además existirán $\alpha > 0$, $M \geq 1$ tales que*

$$\left\|e^{A(t-t_0)}\right\|_{L(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)} \leq Me^{-\alpha(t-t_0)}, \quad \forall t \geq t_0.$$

Demostración. Sea $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y sea $x(t) = x(t; t_0, x_0)$ la solución de $x' = Ax$ con $x(t_0) = x_0$. Escribiremos

$$x_0 = x_{01} + \dots x_{0p}, \quad x_{0j} \in N\left[(A - \lambda_j I)^{\nu(\lambda_j)}\right],\ \sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}.$$

Entonces tenemos que para todo $t \geq t_0$,

$$\begin{aligned}
\|x(t)\| &= \left\|e^{A(t-t_0)}x_0\right\| \\
&\leq \sum_{j=1}^{p} \left|e^{\lambda_j(t-t_0)}\right| \left\|x_{0j} + (t-t_0)(A-\lambda_j I)x_{0j} + \cdots + \frac{(t-t_0)^{\nu(\lambda_j)-1}(A-\lambda_j I)^{\nu(\lambda_j)-1}}{(\nu(\lambda_j)-1)!}x_{0j}\right\| \\
&= \sum_{j=1}^{p} e^{\Re(\lambda_j)(t-t_0)} \left(\|x_{0j}\| + (t-t_0)\|A-\lambda_j I\|\,\|x_{0j}\| + \cdots + \frac{(t-t_0)^{\nu(\lambda_j)-1}\|A-\lambda_j I\|^{\nu(\lambda_j)-1}}{(\nu(\lambda_j)-1)!}\|x_{0j}\|\right) \\
&= \sum_{j=1}^{p} e^{\Re(\lambda_j)(t-t_0)} P_j(t)\|x_{0j}\| \leq \sum_{j=1}^{p} e^{\widetilde{\lambda}(t-t_0)} P_j(t)\|x_{0j}\|,
\end{aligned}$$

donde $P_j(t)$ es un polinomio de grado $\nu(\lambda_j) - 1$ y $\widetilde{\lambda} := \text{máx}\{\Re(\lambda_1), \dots, \Re(\lambda_p)\}$. Si definimos ahora $\alpha \in (0, \widetilde{\lambda})$ y $\varepsilon = -\widetilde{\lambda} - \alpha > 0$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\|x(t)\| &\leq \sum_{j=1}^{p} e^{\widetilde{\lambda}(t-t_0)} P_j(t)\|x_{0j}\| = \sum_{j=1}^{p} e^{(\widetilde{\lambda}+\varepsilon)(t-t_0)} P_j(t)\|x_{0j}\| e^{-\varepsilon(t-t_0)} \\
&= e^{-\alpha(t-t_0)} \sum_{j=1}^{p} M_j\|x_{0j}\| \leq e^{-\alpha(t-t_0)} \sum_{j=1}^{p} M_j\|x_{0j}\|,
\end{aligned}$$

donde se está usando que cada polinomio $P_j(t)$ es una función continua en el intervalo $[t_0, \infty)$ tal que $\lim_{t\to\infty} e^{-\varepsilon(t-t_0)}P_j(t) = 0$, por lo que debe existir $M_j > 0$ tal que $e^{-\varepsilon(t-t_0)}P_j(t) \leq M_j$ para todo $t \geq t_0$. Llamemos por otro lado $C_j \geq 0$ a ciertas constantes que satisfacen $\|x_{0j}\| \leq C_j\|x_0\|$, y que son independientes de x_0 (esto corresponde a las proyecciones de $\mathbb{C}^n$ en los subespacios complementados $N\left[(A-\lambda_j I)^{\nu(\lambda_j)}\right]$). Concluimos por tanto que

$$\|x(t)\| \leq e^{-\alpha(t-t_0)} \sum_{j=1}^{p} M_j C_j\|x_0\| \leq \text{máx}\{1, \sum_{j=1}^{p} M_j C_j\} e^{-\alpha(t-t_0)}\|x_0\|.$$

Tomando $M := \text{máx}\{1, \sum_{j=1}^{p} M_j C_j\}$, hemos terminado. □

Proposición 4.11. *Sea $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ tal que $\Re(\lambda) \leq 0$ para todo $\lambda \in \sigma(A)$, y en el caso de que $\Re(\lambda) = 0$ entonces λ es semisimple (esto es, $\nu(\lambda) = 1$). Entonces existe $M \geq 0$ tal que*

$$\left\|e^{A(t-t_0)}\right\|_{L(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)} \leq M, \quad \forall t \geq t_0.$$

Demostración. Sea $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y escribimos $x_0 = x_{01} + \cdots + x_{op}$ como en la Proposición 4.10. Entonces

para todo $t \geq t_0$ tenemos que

$$\begin{aligned}\left\|e^{A(t-t_0)}x_0\right\| &\leq \sum_{j=1}^{p}\left|e^{\lambda_j(t-t_0)}\right| P_j(t)\|x_{0j}\| \\ &= \sum_{\Re(\lambda_j)<0}\left|e^{\lambda_j(t-t_0)}\right| P_j(t)\|x_{0j}\| + \sum_{\Re(\lambda_j)=0}\left|e^{\lambda_j(t-t_0)}\right| P_j(t)\|x_{0j}\| \\ &= \sum_{\Re(\lambda_j)<0}\left|e^{\lambda_j(t-t_0)}\right| P_j(t)\|x_{0j}\| + \sum_{\Re(\lambda_j)=0}\|x_{0j}\|.\end{aligned}$$

Ahora, para los términos del primer sumatorio podemos razonar como en la Proposición 4.10 para encontrar un $\alpha > 0$ y un $M_1 \geq 1$ tal que

$$\begin{aligned}\left\|e^{A(t-t_0)}x_0\right\| &\leq M_1 e^{-\alpha(t-t_0)}\sum_{\Re(\lambda_j)<0}\|x_{0j}\| + \sum_{\Re(\lambda_j)=0}\|x_{0j}\| \leq \text{máx}\{1, M_1\}\sum_{j=1}^{p}\|x_{0j}\| \\ &\leq \text{máx}\{1, M_1\}\sum_{j=1}^{p} C_j\|x_0\|,\end{aligned}$$

donde los $C_j \geq 0$ son los mismos que la Proposición 4.10. Tomando $M := \text{máx}\{1, M_1\}\sum_{j=1}^{p} C_j$, hemos acabado. □

Aprovechamos para definir los puntos hiperbólicos de sistemas lineales. Más adelante, en la Sección 5.4 veremos que existe una generalización de esta definición de punto hiperbólico para sistemas no necesariamente lineales.

Definición 4.12. Se dice que el sistema $x' = Ax$, o que el origen, es hiperbólico cuando $\Re(\lambda) \neq 0$ para todo $\lambda \in \sigma(A)$. Se define en este caso,

- Variedad estable de $x' = Ax$:

$$W^s = \bigoplus_{\substack{\lambda_j \in \sigma(A) \\ \Re(\lambda_j)<0}} N\left[(A - \lambda_j I)^{\nu(\lambda_j)}\right].$$

- Variedad inestable de $x' = Ax$:

$$W^u = \bigoplus_{\substack{\lambda_j \in \sigma(A) \\ \Re(\lambda_j)>0}} N\left[(A - \lambda_j I)^{\nu(\lambda_j)}\right].$$

Observemos que al ser el origen hiperbólico tenemos $\mathbb{C}^n = W^s \oplus W^u$.

Se deja al alumno comprobar que, si $x_0 \in W^s$ pertenece a a variedad estable del sistema, entonces $\lim_{t\to\infty} x(t; 0, x_0) = 0$ y que si $x_0 \in W^u$ pertenece a a variedad inestable del sistema entonces $\lim_{t\to-\infty} x(t; 0, x_0) = 0$.

4.3.2. Sistemas lineales $x' = A(t)x$

Teorema 4.13. *Sea el sistema lineal $x' = A(t)x$ con $A(t) \in C([\beta, \infty); \mathbb{M}_n(\mathbb{R}))$. Entonces el sistema es estable si y solo si todas sus soluciones están acotadas en $[\beta, \infty)$.*

Demostración. $\Leftarrow$): Sea $\Phi(t; t_0)$ la matriz fundamental principal de $x' = A(t)x$ con $\Phi(t_0; t_0) = Id$. Sea $t_0 \geq \beta$ y sea $\varepsilon > 0$. Las columnas de $\Phi(t; t_0)$ son soluciones de $x' = A(t)x$, luego por hipótesis están acotadas en $[t_0, \infty)$. Así, existe $C > 0$ tal que para todo $x_0 \in \mathbb{R}^n$,

$$\|x(t; t_0, x_0)\| = \|\Phi(t; t_0)x_0\| \leq \|\Phi(t; t_0)\|_{L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)}\|x_0\| \leq n\|\Phi(t; t_0)\|_\infty \|x_0\| = C\|x_0\|, \quad \forall t \geq t_0.$$

Tomando $\delta = \varepsilon/C$ tenemos que si $\|x_0 - 0\| < \delta$ entonces

$$\|x(t; t_0, x_0) - 0\| \leq C\|x_0\| < C\delta = \varepsilon \quad \forall t \geq t_0.$$

$\Rightarrow$): Supongamos que $x = 0$ es estable. Entonces dados $1 > 0$, $t_0 = \beta$, existe $\delta = \delta(1, \beta) > 0$ tal que si $\|x_0 - 0\| < \delta$ entonces

$$\|x(t; \beta, x_0) - 0\| < 1 \quad \forall t \geq \beta.$$

Sea ahora $z_0 \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ y definimos $x_0 = \frac{z_0 \delta}{2\|z_0\|}$. Tenemos que $\|x_0\| = \delta/2 < \delta$ y por tanto $\|x(t; \beta, x_0)\| < 1$ para todo $t \geq \beta$. Por otro lado

$$\|x(t; \beta, z_0)\| = \|\Phi(t; \beta)z_0\| = \frac{2\|z_0\|}{\delta}\|\Phi(t; \beta)x_0\| = \frac{2\|z_0\|}{\delta}\|x(t; \beta, x_0)\| \leq \frac{2\|z_0\|}{\delta}$$

para todo $t \geq \beta$. De esta forma $x(t; \beta, z_0)$ está acotada en $[\beta, \infty)$.

□

Corolario 4.14. *El sistema lineal con coeficientes constantes $x' = Ax$, $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ es estable si y solo si $\Re(\lambda) \leq 0$ para todo $\lambda \in \sigma(A)$ (podemos escribir $\Re(\sigma(A)) \leq 0$) y si $\Re(\lambda) = 0$ para algún $\lambda \in \sigma(A)$ entonces $\nu(\lambda) = 1$ (es semisimple).*

Demostración. Basta usar las Proposiciones 4.8, 4.9 y 4.11 de la sección anterior y el Teorema 4.13. □

Teorema 4.15. *El sistema $x' = A(t)x$ con $A(t) \in C([\beta, \infty); \mathbb{M}_n(\mathbb{R}))$ es globalmente asintóticamente estable si y solo si $x' = A(t)x$, $t \geq \beta$ es asintóticamente estable, y si y solo si todas las soluciones de $x' = A(t)x$ convergen a 0 cuando $t \to \infty$.*

Demostración. Supongamos en primer lugar que el sistema es globalmente asintóticamente estable. Entonces, automáticamente, se tiene que es asintóticamente estable.

Supongamos que el sistema es asintóticamente estable. Esto es, supongamos que la solución $x = 0$ es asintóticamente estable. Esto significa que $x = 0$ debe ser estable y que para todo $t_0 \geq \beta$ existe $\delta > 0$ tal que si $\|x_0\| < \delta$ entonces $\lim_{t\to\infty} \|x(t; t_0, x_0)\| = 0$. Sea $z(t)$ una solución no nula de $x' = A(t)x$ y definamos

$$x(t) = \frac{\delta}{2\|z(t_0)\|} z(t).$$

Es claro que $x(t)$ es también solución con $\|x(t_0)\| = \delta/2 < \delta$, por tanto

$$\lim_{t\to\infty} \|z(t)\| = \lim_{t\to\infty} \left\| \frac{2\|z(t_0)\|}{\delta} x(t) \right\| = 0.$$

Supongamos por último que toda solución de $x' = A(t)x$ converge a 0 cuando $t \to \infty$. Queremos probar que $x = 0$ es globalmente asintóticamente estable. Para ello, solo debemos probar que $x = 0$ es estable. Pero esto último se sigue del Teorema 4.13, y sabiendo que cuando una función continua $x : [\beta, \infty)$ converge a 0 cuando $t \to \infty$ se tiene que está acotada. □

Corolario 4.16. *El sistema $x' = Ax$, $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, es globalmente asintóticamente estable si y solo si $x' = Ax$ es asintóticamente estable y si y solo si $\Re(\lambda) < 0$ para todo $\lambda \in \sigma(A)$ (podemos escribir $\Re(\sigma(A)) < 0$).*

Demostración. Sea $\beta \in \mathbb{R}$ cualquiera.

$\Leftarrow$): Usar directamente la Proposición 4.10.

$\Rightarrow$): Por reducción al absurdo. Supongamos que existe $\lambda \in \sigma(A)$ con $\Re(\lambda) \geq 0$. En ese caso escogemos $x_0 \in N[(A - \lambda I)]$ con $x_0 \neq 0$. Entonces para todo $t_0 \geq \beta$

$$\|x(t)\| = \|x(t; t_0, x_0)\| = \left| e^{\lambda(t-t_0)} \right| \|x_0\| = e^{\Re(\lambda)(t-t_0)} \|x_0\| \geq \|x_0\|.$$

Como $\Re(x(t))$ e $\Im(x(t))$ son soluciones reales del sistema, y como

$$\|x_0\| \leq \|x(t)\| \leq \|\Re(x(t))\| + \|\Im(x(t))\|,$$

es imposible que ambas soluciones converjan a 0 cuando $t \to \infty$. Luego por el Teorema 4.15, $x = 0$ no es asintóticamente estable para $x' = Ax$.

□

4.4. Estabilidad de sistemas no lineales autónomos

Consideraremos sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales y autónomos[1], es decir, del tipo

$$x' = f(x) \tag{4.3}$$

Además asumiremos que $f \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$, por lo que la existencia y unicidad de soluciones maximales $(x, I = (\alpha, \omega))$ está asegurada por la Teoría de Cauchy-Lipschitz local.

Puesto que el estudio de la estabilidad es una cuestión nada trivial cuando estamos ante sistemas no lineales, en general uno se contentará con estudiar la estabilidad solamente de aquellas soluciones constantes, es decir, los puntos de equilibrio.

Definición 4.17. Decimos que $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ es un punto de equilibrio de $x' = f(x)$ si $f(\overline{x}) = 0$, y en ese caso $x(t) = \overline{x}$ es solución.

[1]Se podría haber desarrollado una teoría análoga para sistemas no autónomos, pero hemos preferido no hacerlo para poder hacer una exposición lo más clara posible.

Observación 4.18. En sistemas autónomos $x' = f(x)$ con $f \in C^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ tenemos las siguientes propiedades:

1. Si $f(\overline{x}) = 0$ entonces $\overline{x}$ será estable con $t \geq \beta$ (para cualquier β) si y solo si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $\|x_0 - \overline{x}\| < \delta$ entonces $\|x(t;0,x_0) - \overline{x}\| < \varepsilon$ para todo $t \geq 0$.

   Demostración. Es claro que la definición de estabilidad dada en la Definición 4.1 implica el enunciado anterior. Veamos el recíproco. Supongamos que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $\|x_0 - \overline{x}\| < \delta$ entonces $\|x(t;0,x_0) - \overline{x}\| < \varepsilon$ para todo $t \geq 0$. Probemos ahora que $\overline{x}$ es estable, $t \geq \beta$. Tomemos $t_0 \geq \beta$ y $\varepsilon > 0$ arbitrario. Tomaremos el $\delta > 0$ que nos da nuestra hipótesis. Si ahora cogemos $\|x_0 - \overline{x}\| < \varepsilon$, entonces

   $$\|x(t;t_0,x_0) - \overline{x}\| = \|x(t - t_0;0,x_0) - \overline{x}\| < \varepsilon \quad \forall t - t_0 \geq 0.$$

   Observar que en la primera igualdad se está usando la propiedad crucial de los sistemas autónomos de que $x(t;t_0,x_0) = x(t-t_0;0,x_0)$ para todo $t \in I_{(t_0,x_0)}$, siendo este intervalo el intervalo maximal de definición de la solución de $x' = f(x)$ que satisface $x(t_0) = x_0$. De hecho, si $I_{(0,x_0)} \cap [0,\infty) = [0,\infty)$ es el intervalo maximal de definición de $x(t) = x(t;0,x_0)$, entonces $I_{(t_0,x(t_0))} \cap [t_0,\infty) = [t_0,\infty)$ es el intervalo maximal de definición de $y(t;t_0,x(t_0))$. Todas estas propiedades sobre las soluciones de sistemas autónomos se verán en detalle en la Sección 5.1. □

2. En vista del punto anterior, un punto de equilibrio $\overline{x}$ será inestable si somos capaces de encontrar un $\varepsilon_0 > 0$ de tal forma que para todo $\delta > 0$ exista un $x_0 \in B(0,\delta)$ y exista un $T > 0$ de tal forma que $\|x(T;0,x_0)\| = \varepsilon$.

3. Un punto de equilibrio $\overline{x}$ del sistema $x' = f(x)$ es estable, asintóticamente estable o inestable si y solo si la solución $y = 0$ es estable, asintóticamente estable o inestable respectivamente en el sistema $y' = f(y + \overline{x})$. Se deja como ejercicio la comprobación de este hecho.

Veremos esencialmente dos formas para estudiar la estabilidad de puntos de equilibrio en sistemas $x' = f(x)$. Esto será mediante los principios de linealización, o mediante las funciones de Lyapunov.

4.4.1. Principios de Linealización

Teorema 4.19. *Sea $y' = Ay + h(y)$ donde $A \in M_n(\mathbb{R})$, $h \in C^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$, $h(0) = 0$, $Dh(0) = 0$. Suponemos también que $Re(\sigma(A)) < 0$. Entonces existe $r > 0$ tal que si $y_0 \in B(0,r)$ entonces la solución $y(t;0,y_0)$ está definida en todo $[0,\infty)$ y además existen $\alpha > 0$, $M \geq 0$ tal que*

$$\|y(t;0,y_0)\| \leq Me^{-\alpha t}\|y_0\|, \quad \forall t \in [0,\infty).$$

En particular, $y = 0$ es asintóticamente estable en $y' = Ay + h(y)$.

Demostración. Como $\mathrm{Re}(\sigma(A)) < 0$ (por la Proposición 4.10 vista en clase) sabemos que existen $\alpha > 0$, $M \geq 1$ tales que

$$\|e^{At}x\| \leq Me^{-\alpha t}\|x\|, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,\ t \in [0,\infty).$$

Por otro lado, por la definición de la diferencial de la función h en $y = 0$ se tiene que

$$\lim_{y\to 0} \frac{\|h(y) - h(0) - Dh(0)y\|}{\|y\|} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{y\to 0} \frac{\|h(y)\|}{\|y\|} = 0.$$

Así dado $\varepsilon = \frac{\alpha}{2M} > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\|h(y)\| \leq \varepsilon\|y\|$, para todo $y \in B(0,\delta)$. Definimos $r = \frac{\delta}{2M} > 0$.

Tomemos $y_0 \in B(0,r)$ y llamemos $y(t) = y(t;0,y_0)$ a la única solución del sistema con $y(0) = y_0$. Sea ahora el conjunto

$$A = \{t^* > 0 : \|y(t)\| < \delta,\ \forall t \in [0,t^*]\} \subset \mathbb{R}$$

Como $y(0) = y_0 \in B(0,r) \subset B(0,\delta/2)$ y por continuidad de la solución y es claro que existe un t^* tal que $\|y(t)\| < \delta$ para todo $t \in [0,t^*]$, por lo que $A \neq \emptyset$. Además, es fácil comprobar que A es un intervalo abierto de la forma $A = (0,T)$, donde $T = \sup(A)$ puede ser finito o infinito. Si llamamos $I = [0,T_{max})$ al intervalo maximal de definición de la solución $y(t)$ es claro que $T \leq T_{max}$. Nuestro siguiente objetivo, que dividiremos en pasos, será ver que de hecho $T_{max} = T = \infty$.

- **Paso 1**: Veamos que $\|y(t)\| \leq \delta/2$ para todo $t \in [0,T)$.

  Por la fórmula de variación de las constantes tenemos que

  $$y(t) = e^{At}y_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}h(y(s))\,ds \quad \forall t \in [0,T)$$

  y como para todo $t \in [0,T)$ se tiene que $\|h(y(t))\| \leq \varepsilon\|y(t)\|$, podemos escribir que si $t \in [0,T)$,

  $$\|y(t)\| \leq Me^{-\alpha t}\|y_0\| + M\varepsilon\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}\|y(s)\|\,ds \quad \Rightarrow \quad e^{\alpha t}\|y(t)\| \leq M\|y_0\| + M\varepsilon\int_0^t e^{\alpha s}\|y(s)\|\,ds$$

  Aplicando el Lema de Grönwall, y usando que $\varepsilon \leq \frac{\alpha}{2M}$ y que $\|y_0\| \leq \frac{\delta}{2M} \leq \frac{\delta}{2}$, tendremos que si $t \in [0,T)$,

  $$e^{\alpha t}\|y(t)\| \leq M\|y_0\|e^{(M\varepsilon)t} \ \Rightarrow\ \|y(t)\| \leq M\|y_0\|e^{(M\varepsilon-\alpha)t} \leq M\|y_0\|e^{-\alpha t/2} \leq \frac{\delta}{2}e^{-\alpha t/2} \leq \frac{\delta}{2} \quad (4.4)$$

  Es decir, tenemos que $\|y(t)\| \leq \delta/2$ para todo $t \in [0,T)$.

- **Paso 2**: Probemos ahora que $T = T_{max}$, y luego veremos que $T = T_{max} = \infty$. Para ver que $T = T_{max}$ razonamos por reducción al absurdo y si $T < T_{max}$ es porque existe el valor $y(T)$ y entonces como $\|y(t)\| \leq \delta/2$ para todo $t \in [0,T)$ se sigue que $y(T) \in \overline{B(0,\delta/2)}$. En particular, por continuidad de y existe un $h > 0$ tal que $\|y(t)\| \leq 2\delta/3$ para todo $t \in [0,T+h]$, lo que contradice la definición de T.

- **Paso 3**: Veamos ahora que $T = T_{max} = \infty$. En efecto, si $T = T_{max} < \infty$ sabemos que la teoría de Cauchy-Lipschitz nos dice que $\lim_{t\to T^-}\|y(t)\| = \infty$. Pero esto es un absurdo puesto que $\|y(t)\| \leq \delta/2$ para todo $t \in [0,T)$.

Para concluir observemos que como $T = \infty$, los cálculos en (4.4) nos dicen que

$$\|y(t)\| \leq Me^{-\alpha t/2}\|y_0\|, \quad \forall t \in [0,\infty).$$

Se deja como ejercicio al lector que esto implica que la solución nula $y = 0$ es asintóticamente estable. □

Teorema 4.20 (Principio de Linealización (estabilidad)). *Sea $x' = f(x)$ con $f \in C^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$. Si $f(\overline{x}) = 0$ y $Re(\sigma(Df(\overline{x}))) < 0$ entonces $\overline{x}$ es asintóticamente estable en $x' = f(x)$.*

Demostración. Por la Observación 4.18 bastará ver que $y = 0$ es solución asintóticamente estable del sistema $y' = f(y + \overline{x})$. Empezamos escribiendo

$$y' = Df(\overline{x}) \cdot y + h(y)$$

donde $h(y) := f(y + \overline{x}) - Df(\overline{x}) \cdot y$. Es fácil comprobar que

(i) $h \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$.

(ii) $h(0) = f(\overline{x}) - Df(\overline{x}) \cdot 0 = f(\overline{x}) = 0$.

(iii) $Dh(0) = Df(\overline{x}) - Df(\overline{x}) = 0$.

Luego podemos aplicar el Teorema 4.19, y como $\Re(\sigma(Df(\overline{x}))) < 0$ tendremos que $y = 0$ es asintóticamente estable en $y' = f(y + \overline{x})$.

□

Teorema 4.21. *Sea $y' = Ay + h(y)$ donde $A \in M_n(\mathbb{R})$, $h \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$, $h(0) = 0$, $Dh(0) = 0$. Entonces si existe $\lambda \in \sigma(A)$ con $Re(\lambda) > 0$, el punto de equilibrio $y = 0$ es inestable.*

Antes de demostrar este teorema, veamos un resultado de interés independiente.

Proposición 4.22. *Sea $f \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ con $f(0) = 0$. Entonces, si $z = 0$ es asintóticamente estable para el sistema $z' = -f(z)$ entonces $y = 0$ es inestable para el sistema $y' = f(y)$.*

Demostración. Recordemos la definición de estabilidad para la solución nula $x = 0$ en un sistema autónomo $x' = f(x)$ con $f(0) = 0$ (ver la Observación 4.18): "La solución $x = 0$ es estable en el sistema $x' = f(x)$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $\|x_0\| < \delta$ entonces $\|x(t; 0, x_0)\| < \varepsilon$ para todo $t \in [0, \infty)$".

Por consiguiente, en un sistema $x' = f(x)$ con $f(0) = 0$ se dice que la solución $x = 0$ es inestable si existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ existe un $x_0 \in B(0, \delta)$ y existe un tiempo $T > 0$ de tal forma que $\|x(T; 0, x_0)\| = \varepsilon_0$.

Para demostrar la Proposición, asumiremos que $z = 0$ es asintóticamente estable para $z' = -f(z)$ y deduciremos que $y = 0$ es inestable para $y' = f(y)$ de la manera explicada en el párrafo anterior.

Comenzamos usando el hecho de que $z = 0$ es asintóticamente estable en $z' = -f(z)$ para asegurar que existe $\eta > 0$ tal que si $\|z_0\| < \eta$, entonces $\lim_{t\to\infty} \|z(t; 0, z_0)\| = 0$ (siendo $z(t; 0, z_0)$ la única solución de $z' = -f(z)$ con $z(0) = z_0$). Sea ahora $\varepsilon_0 = \eta/2$ y tomemos un $\delta > 0$ arbitrario.

Escojamos un $z_0 \in \partial B(0, \varepsilon_0) \subset B(0, \eta)$, y como $\lim_{t\to\infty} \|z(t; 0, z_0)\| = 0$ deberá existir $T > 0$ tal que $0 < \|z(T; 0, z_0)\| < \delta$. Definimos $y_0 = z(T; 0, z_0) \in B(0, \delta)$ y también la función $y(t) = z(T - t)$. Veamos ahora que de hecho $y(t)$ es la única solución al sistema $y' = f(y)$ con $y(0) = y_0$ (por tanto podemos escribir $y(t) = y(t; 0, y_0)$). En efecto

$$\begin{cases} y'(t) = -z'(T - t) = f(z(T - t)) = f(y(t)), & \forall t \geq 0 \\ y(0) = z(T) = y_0 \end{cases}.$$

Además $y(T) = z(0) = z_0 \in \partial B(0, \varepsilon_0)$. □

Pasamos ahora a demostrar el Teorema 4.21.

Demostración. Dividiremos la demostración en diferentes pasos.

CASO 1: **Supongamos primero que todos los autovalores de A tienen parte real estrictamente positiva**. En este caso, definiendo una nueva función $z(t) = y(-t)$ tenemos que

$$z' = -Az - h(z)$$

y además $\mathrm{Re}(\sigma(-A)) < 0$. Podemos aplicar por tanto el Teorema 4.19 para asegurar que $z = 0$ debe ser asintóticamente estable. Ahora usando la Proposición 4.22 se sigue que $y = 0$ debe ser inestable para el sistema original.

***Conclusión más fuerte que la mera inestabilidad**: Probaremos que $y = 0$ es un punto *fuente*.

Definición 4.23. Dado un sistema autónomo $x' = f(x)$ con $f(0) = 0$, se dice que el punto de equilibrio 0 es un punto fuente si existe $\delta > 0$ tal que para toda condición inicial $y_0 \in B(0, \delta) \setminus \{0\}$ tenemos que existe $T > 0$ con $\|y(T; 0, y_0)\| = \delta$. (Describir al punto de equilibrio $y = 0$ como punto fuente es natural porque todas las soluciones que parten cerca de él se alejan).

En efecto, sabemos por el Teorema 4.19 que en el sistema $z' = -Az - h(z)$ hay un $\delta > 0$ tal que si $\|z_0\| < \delta$ entonces

$$\|z(t; 0, z_0)\| \leq Me^{-\alpha t}\|z_0\|$$

para ciertas constantes $M \geq 0$, $\alpha > 0$. Por reducción al absurdo supongamos que existe un $y_0 \in B(0, \delta) \setminus \{0\}$ tal que la solución $y(t; 0, y_0) = y(t)$ satisface que $\|y(t)\| < \delta$ para todo $t \geq 0$. Definamos para cada $T > 0$ la función

$$z_T(t) = y(T - t), \quad t \in [0, T].$$

Tenemos que $z_T(t) \in B(0, \delta)$ para todo $t \in [0, T]$ y, además, z_T es solución de $z' = -Az - h(z)$ en $[0, T]$ porque $z_T'(t) = -y'(T - t) = -Ay(T - t) - h(y(T - t)) = -Az_T(t) - h(z_T(t))$ y con $z_T(0) = y(T)$, luego tenemos que (observar que $z_T(t) = z(t; 0, y(T))$)

$$\|z_T(t)\| \leq Me^{-\alpha t}\|y(T)\| < Me^{-\alpha t}\delta, \quad \forall t \in [0, T].$$

Por tanto evaluando en $t = T$

$$\|y_0\| = \|z_T(T)\| \leq Me^{-\alpha T}\delta.$$

Como estos cálculos son independientes de $T > 0$, tenemos que $0 < \|y_0\| \leq Me^{-\alpha T}\delta$. para todo $T > 0$, lo que es una contradicción haciendo $T \to \infty$.

CASO 2: **Supongamos ahora que no todos los autovalores tienen parte real estrictamente positiva**.

¡LO VEMOS SOLO PARA EL CASO $n = 2$!

Asumamos que $\sigma(A) = \{\lambda, \mu\}$ con $\mathrm{Re}(\lambda) \leq 0$ y $\mathrm{Re}(\mu) > 0$. En particular, se debe tener que $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Escribiremos $A = PJP^{-1}$ donde

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$$

y P es la matriz de paso (donde cada columna está formada por el autovector correspondiente a cada autovalor). Si hacemos el cambio $z(t) = P^{-1}y(t)$ tendremos que

$$z'(t) = P^{-1}y'(t) = P^{-1}(Ay(t) + h(y(t))) = P^{-1}PJP^{-1}y(t) + P^{-1}h(y(t)) = Jz(t) + P^{-1}h(Pz(t)).$$

Definiendo $\widetilde{h} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ como $\widetilde{h}(z) = (P^{-1} \circ h \circ P)(z)$. Tenemos así el siguiente sistema no lineal y autónomo para la función incógnita $z(t) = (z_1(t), z_2(t))$,

$$\begin{cases} z_1' = \lambda z_1 + \widetilde{h}_1(z_1, z_2) \\ z_2' = \mu z_2 + \widetilde{h}_2(z_1, z_2) \end{cases}$$

Observemos que como P^{-1} y P son transformaciones lineales, la inestabilidad de la solución $z = 0$ en el sistema anterior equivale a la inestabilidad de la solución $y = 0$ en el sistema original. Se dejan los detalles de la comprobación de este hecho al lector. Además, la función $\widetilde{h}$ satisface que

$$\widetilde{h}(0) = 0 \quad ; \quad \widetilde{h} \in C^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2) \quad ; \quad D\widetilde{h}(0) = P^{-1} Dh(P \cdot 0) P = 0.$$

Por la definición de diferencial $D\widetilde{h}(0)$ sabemos que $\lim_{z \to 0} \frac{\|\widetilde{h}(z)\|}{\|z\|} = 0$, por lo que dado $m = \frac{\mu}{4}$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $\|\widetilde{h}(z)\| \leq m\|z\|$ para todo $\|z\| < \varepsilon$.

Objetivo a probar: Queremos ver la inestabilidad de $z = 0$. Para ello ya hemos encontrado el $\varepsilon > 0$ anterior y probaremos que para todo $0 < \delta < \varepsilon$ existirá $z_0 \in B(0, \delta)$ tal que si llamamos $z(t) = z(t; 0, z_0)$ a la solución del sistema con $z(0) = z_0$ entonces existirá $T > 0$ con $\|z(T)\| = \varepsilon$.

Sea $\delta \in (0, \varepsilon)$ arbitrario. Definimos la función de Lyapunov

$$V(z_1, z_2) = \frac{1}{2}(z_2^2 - z_1^2),$$

y las regiones

$$\Omega = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2 : \, z_2 > |z_1|\} \quad ; \quad C_\varepsilon = B(0, \varepsilon) \cap \Omega.$$

Tomemos ahora $z_0 \in B(0, \delta) \cap \Omega \subset C_\varepsilon$ y llamemos $z(t) = z(t; 0, z_0)$ a la única solución con $z(0) = z_0$, siendo $[0, T_{max})$ su intervalo maximal de existencia. Probaremos que existirá $T > 0$ tal que $\|z(T)\| = \varepsilon$, y lo haremos por reducción al absurdo: Supongamos que $\|z(t)\| < \varepsilon$ para todo $t \in [0, T_{max})$. Observar que en particular, por la teoría de Cauchy-Lipschitz, esto implica que $T_{max} = \infty$.

Definimos a continuación $\gamma(t) = V(z(t))$, $t \in [0, \infty)$ y demostremos las siguientes propiedades:

(1) $V(z) > 0$ para todo $z \in C_\varepsilon$. Esto es claro.

(2) $\gamma'(t) \geq \mu\gamma(t)$ para todo $t \in [0, \infty)$.

Tras varios cálculos, usando hechos como que $\|\widetilde{h}(z)\| \leq m\|z\|$ porque $\|z(t)\| < \varepsilon$, o que $\lambda < 0$, o que $m = \mu/4$, obtenemos que para todo $t \in [0, \infty)$,

$$\begin{aligned} \gamma' &= \frac{\partial V}{\partial z_1} z_1' + \frac{\partial V}{\partial z_2} z_2' = -z_1(\lambda z_1 + \widetilde{h}_1(z)) + z_2(\mu z_2 + \widetilde{h}_2(z)) \\ &= -\lambda z_1^2 + \mu z_2^2 + z_2 \widetilde{h}_2(z) - z_1 \widetilde{h}_1(z) \geq +\mu z_2^2 - \lambda z_1^2 - m\|z\|(|z_1| + |z_2|) \\ &\geq (\mu - 2m) z_2^2 - (\lambda + 2m) z_1^2 \geq (\mu - 2m) z_2^2 - 2m z_1^2 \\ &= \frac{\mu}{2}(z_2^2 - z_1^2) = \mu\gamma \end{aligned}$$

(3) $z(t) \in C_\varepsilon$ para todo $t \in [0, \infty)$.

Por reducción al absurdo, supongamos que existe $t^* > 0$ de manera que

$$\begin{cases} z(t) \in C_\varepsilon, \quad \forall t \in [0, t^*) \quad \Rightarrow \quad V(z(t)) > 0, \quad \forall t \in [0, t^*) \\ z(t^*) \in \partial C_\varepsilon = (\partial\Omega \cap B(0,\varepsilon)) \cup (\overline{\Omega} \cap \partial B(0,\varepsilon)) \end{cases} . \tag{4.5}$$

Hacemos constar que como $z(t) \in B(0,\varepsilon)$ para todo $t \in [0,\infty)$ por hipótesis, necesariamente $z(t^*) \in \partial\Omega \subset \{z \in \mathbb{R}^2 : V(z) = 0\}$. Sin embargo, por un lado $V(z(t^*)) = 0 = \gamma(t^*)$. Y por otro lado, usando (1), (2) y que $z(t) \in C_\varepsilon$ para todo $t \in (0, t^*)$, se tiene que $\gamma'(t) \geq \mu\gamma(t) = V(z(t)) > 0$ para todo $t \in (0, t^*)$ y así γ es creciente en $(0, t^*)$ y podemos escribir $\gamma'(t) \geq \mu\gamma(t) \geq \mu\gamma(0) = \mu V(z_0) > 0$ para todo $t \in (0, t^*)$. Esto hace que por continuidad de γ' tengamos

$$\begin{cases} \gamma(t^*) = 0 \\ \gamma'(t^*) > 0 \end{cases} ,$$

y así existirá un $h > 0$ pequeño tal que $\gamma(t) < 0$ para todo $t \in (t^* - h, t^*)$. Esto significa que $V(z(t)) < 0$ para $t \in (t^* - h, t^*)$, lo que es una contradicción con (4.5).

(4) $\gamma'(t) \geq \mu\gamma(0)$ para todo $t \in [0,\infty)$.

Por (1) y por (3) tenemos que $\gamma(t) = V(z(t)) > 0$ para todo $t \in [0,\infty)$. Ahora usando (2) y que $\mu > 0$ se sigue que γ es estrictamente creciente, y por tanto podemos escribir

$$\gamma'(t) \geq \mu\gamma(t) \geq \mu\gamma(0), \quad \forall t \in [0,\infty).$$

Concluimos la demostración como sigue. De la desigualdad (4), $\gamma'(t) \geq \mu\gamma(0)$, integrando a ambos lados obtenemos

$$\gamma(t) - \gamma(0) \geq \mu\gamma(0)t \quad \Rightarrow \quad \gamma(t) \geq \gamma(0)(1 + \mu t).$$

para todo $t \in [0,\infty)$. Por lo tanto

$$\|z(t)\|^2 = z_1^2(t) + z_2^2(t) \geq \frac{1}{2}(z_2^2(t) - z_1^2(t)) = V(z(t)) = \gamma(t) \geq \gamma(0)(1 + \mu t), \quad \forall t \in [0,\infty).$$

Pero esto es una contradicción con haber asumido que $\|z(t)\| < \varepsilon$ para todo $t \in [0,\infty)$, observando que el término de la derecha de la desigualdad crece linealmente en t (con pendiente positiva $\mu\gamma(0) > 0$). Por lo tanto no queda más remedio de que exista $T > 0$ con $\|z(T)\| = \varepsilon$.

□

Observación 4.24. Una idea esencial utilizada en la demostración anterior es que la función de Lyapunov $V(z) = z_2^2/2 - z_1^2/2$ satisface

$$\nabla V(z(t)) \cdot z'(t) > 0$$

mientras $z(t)$ se encuentre en la zona $\{V > 0\}$. Este hecho tiene una interpretación geométrica muy clara: las soluciones que en algún momento estén en la zona $\{V > 0\}$ deben atravesar las curvas de nivel de la función V de las más bajas a las más altas. Por lo tanto, si sabemos que $V(z(t^*)) > 0$, necesariamente se cumple $V(z(t)) > V(z(t^*)) > 0$ para todo $t \geq t^*$. En particular, la solución nunca sale de la región $\{V > 0\}$. Esta idea volverá a aparecer en el Teorema 4.25 (Teorema de Cetaev).

Principio de Linealización (inestabilidad)] Sea $x' = f(x)$ con $f \in C^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$. Si $f(\overline{x}) = 0$ y supongamos que existe $\lambda \in \sigma(Df(\overline{x}))$ con $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$. Entonces $\overline{x}$ es inestable en $x' = f(x)$.

Demostración. Se demuestra de manera análoga al Principio de Linealización (estabilidad), usando la Observación 4.18 y el Teorema 4.21.

□

4.4.2. Teoremas de Lyapunov

En ocasiones los principios de linealización pueden no proporcionarnos ninguna información acerca de la estabilidad de un punto de equilibrio $\overline{x}$ de un sistema $x' = f(x)$. Esto ocurre cuando hay autovalores con parte real nula, y ningún autovalor con parte real positiva. En ese caso, es conveniente disponer de otros métodos para analizar la estabilidad de los puntos de equilibrio. Veremos a continuación los Teoremas de estabilidad y de inestabilidad de Lyapunov.

Los resultados siguientes aparecen enunciados únicamente para sistemas donde el origen sea punto de equilibrio, pero los resultados son análogos para otros puntos de equilibrio $\overline{x} \neq 0$.

Teorema 4.25 (Teorema de inestabilidad de Lyapunov (Cetaev)). *Sea $x' = f(x)$, $f \in C^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$, $f(0) = 0$. Sean $U, \Omega \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos abiertos con $0 \in U$ y con $0 \in \partial\Omega$, y sea $V : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ función continua con $V \in C^1(\Omega;\mathbb{R})$ tal que*

1. *$V(x) = 0$ para todo $x \in \partial\Omega$.*
2. *$V(x) > 0$ para todo $x \in \Omega \cap U$.*
3. *$\dot{V}(x) = \nabla V(x) \cdot f(x) > 0$ para todo $x \in \Omega \cap U$.*

Entonces el origen es inestable.

Demostración. Basta probar que existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $x_0 \in \Omega \cap B(0,\varepsilon)$, $x_0 \neq 0$, existirá $T > 0$ tal que $\|x(T;0,x_0)\| = \varepsilon$. Sea pues $\varepsilon > 0$ tal que $\overline{B(0,\varepsilon)} \subset U$ (pues U es abierto) y sea $x_0 \in \Omega \cap B(0,\varepsilon)$. En particular

$$V(x_0) =: V_0 > 0.$$

Ahora por reducción al absurdo supongamos que

$$x(t;0,x_0) \in B(0,\varepsilon), \quad \forall t \in [0, T_{max}).$$

Observamos que necesariamente $T_{max} = \infty$, pues si $T_{max} < \infty$, sabemos que la solución explota y saldría de la bola $B(0,\varepsilon)$. Supongamos pues que

$$x(t;0,x_0) \in B(0,\varepsilon), \quad \forall t \in [0, \infty).$$

Probemos ahora que $x(t) = x(t;0,x_0) \in B(0,\varepsilon) \cap \Omega$ para todo $t \in [0,\infty)$. Probaremos esto por reducción al absurdo. Supongamos que existe un $t^* > 0$ tal que

$$\begin{cases} x(t) \in \Omega \cap B(0,\varepsilon), & \forall t \in [0, t^*) \\ x(t^*) \in \partial(B(0,\varepsilon) \cap \Omega) \end{cases}.$$

Como por hipótesis $x(t^*) \in B(0,\varepsilon)$ debemos tener que $x(t^*) \in \partial\Omega$, es decir, $V(x(t^*)) = 0$. Además

$$x(t) \in \Omega \cap B(0,\varepsilon), \quad \forall t \in [0,t^*) \quad \Rightarrow \quad V(x(t)) > 0, \quad \forall t \in [0,t^*).$$

Así pues

$$\frac{d}{dt}(V \circ x)(t) = \dot{V}(x(t)) = \nabla V(x(t)) \cdot f(x(t)) > 0, \quad \forall t \in [0,t^*),$$

por lo que usando el Teorema de Valor Medio existirá $\xi \in (0,t^*)$ tal que

$$V(x(t^*)) - V(x(0)) = \dot{V}(x(\xi))(t^* - 0) > 0.$$

Pero $V(x(t^*)) - V(x(0)) = 0 - V(x_0) < 0$, luego tenemos una contradicción.

Resumiendo, hemos probado que $x(t) \in B(0,\varepsilon) \cap \Omega$ para todo $t \in [0,\infty)$. En particular, sabemos que $\frac{d}{dt}(V \circ x)(t) > 0$ para todo $t \in [0,\infty)$, lo que implica que $(V \circ x)(t)$ es creciente en t, y podemos escribir

$$V(x(t)) \geq V(x(0)) = V_0 > 0, \quad \forall t \in [0,\infty).$$

Tenemos que

$$x(t) \in V^{-1}([V_0,+\infty)) \cap \overline{B(0,\varepsilon)} \quad \forall t \in [0,\infty), \tag{4.6}$$

donde el conjunto $V^{-1}([V_0,+\infty)) \cap \overline{B(0,\varepsilon)}$ es un compacto (usar continuidad de V). Luego existe

$$\alpha = \text{mín}\{\dot{V}(z) = \nabla V(z) \cdot f(z) : \, z \in V^{-1}([V_0,+\infty)) \cap \overline{B(0,\varepsilon)}\} \tag{4.7}$$

Observemos que $\alpha > 0$. En efecto, si $\alpha \leq 0$ existiría un $w \in V^{-1}([V_0,+\infty)) \cap \overline{B(0,\varepsilon)}$ con $\dot{V}(w) \leq 0$. Es decir existiría $w \in \overline{\Omega} \cap U$ con $V(w) \geq V_0 > 0$ y con $\dot{V}(w) \leq 0$ a la vez. Pero por las hipótesis 1. y 2. si $V(w) > 0$ necesariamente $w \in \Omega \cap U$, y por tanto por la hipótesis 3. se seguiría que $\dot{V}(w) > 0$.

Debido a (4.6) y (4.7) se sigue que $\dot{V}(x(t)) \geq \alpha$ para todo $t \in [0,\infty)$. Integrando tenemos que

$$V(x(t)) \geq \alpha t + V_0, \quad \forall t \in [0,\infty).$$

Pero

$$\sup_{t\in[0,\infty)} V(x(t)) \leq \sup_{z\in\overline{B(0,\varepsilon)}} V(z) < \infty,$$

Por lo que tenemos una contradicción, y el teorema queda probado. □

Observación 4.26. En muchas ocasiones en sistemas autónomos 2x2, funciones de Lyapunov del tipo

$$V(x,y) = \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} \quad ; \quad V(x,y) = \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} \quad ; \quad V(x,y) = \frac{x^4}{4} - \frac{y^2}{2} \quad ; \quad V(x,y) = \frac{x^2}{2} - \frac{y^4}{4}$$

pueden utilizarse para estudiar la inestabilidad del origen.

Teorema 4.27 (Teorema de estabilidad de Lyapunov). *Sea $x' = f(x)$, $f \in C^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$, $f(0) = 0$, $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto con $0 \in U$. Sea $V : U \to \mathbb{R}$ de clase C^1 con $V(0) = 0$ y $V(x) > 0$ para todo $x \in U \setminus \{0\}$. Entonces*

(a) Si $\dot{V}(x) = \nabla V(x) \cdot f(x) \leq 0$ para todo $x \in U$, entonces 0 es estable.

(b) Si $\dot{V}(x) = \nabla V(x) \cdot f(x) < 0$ para todo $x \in U \setminus \{0\}$, entonces 0 es asintóticamente estable.

Demostración. (a) Sea $\varepsilon > 0$ tal que $\overline{B(0,\varepsilon)} \subset U$. Sea

$$m_\varepsilon = \min\{V(x) : x \in \partial B(0,\varepsilon)\}.$$

Por compacidad de la frontera de la bola y continuidad de V, es claro que el mínimo se alcanza y además $m_\varepsilon > 0$.
Por continuidad de V, como $V(0) = 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $\|x\| < \delta$ entonces $V(x) < m_\varepsilon/2$. Tomemos $x_0 \in B(0,\delta)$ y veamos que $x(t) = x(t;,0,x_0)$ no sale de la bola $B(0,\varepsilon)$. Por reducción al absurdo, supongamos que existe $t^* > 0$ tal que

$$\begin{cases} x(t) \in B(0,\varepsilon), & \forall t \in [0,t^*) \\ \|x(t^*)\| = \varepsilon \end{cases}$$

El hecho de que para todo $t \in [0,t^*)$ tengamos que $x(t) \in B(0,\varepsilon) \subset U$ implica que

$$\frac{d}{dt}(V \circ x)(t) = \nabla V(x(t)) \cdot f(x(t)) \leq 0$$

Luego $(V \circ x)(t)$ es decreciente, y entonces

$$V(x(t)) \leq V(x(0)) = V(x_0) < m_\varepsilon/2, \quad \forall t \in [0,t^*)$$

Por otro lado, como $\|x(t^*)\| = \varepsilon$,

$$V(x(t^*)) \geq m_\varepsilon.$$

Estos últimos dos hechos suponen una contradicción con la continuidad de $V \circ x$.

(b) Sea $\varepsilon > 0$ tal que $\overline{B(0,\varepsilon)} \subset U$. Por el apartado anterior tenemos estabilidad, en concreto, existe $\delta > 0$ tal que para todo $x_0 \in B(0,\delta)$ entonces $x(t) = x(t;0,x_0) \in B(0,\varepsilon)$ para todo $t \in [0,T_{max}) = [0,\infty)$ (ya que $T_{max} < \infty$ no es posible porque sino habría explosión en tiempo finito y la solución $x(t)$ saldría de $B(0,\varepsilon)$). Nos falta por probar que

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0.$$

El caso $x_0 = 0$ es inmediato pues $x(t;0,0) = 0$ para todo $t \geq 0$. Luego asumimos que $x_0 \neq 0$. Por reducción al absurdo, en caso contrario existiría $\eta > 0$ y una sucesión creciente de tiempos $(t_k)_{k\geq 1}$ tales que $t_k \to \infty$ y tal que para todo $k \in \mathbb{N}$

$$\|x(t_k)\| \geq \eta.$$

Como $x(t_k)_{k\geq 1} \subset \overline{B(0,\varepsilon)}$, por compacidad existe una subsucesión de $(t_k)_{k\geq 1}$, denotada igual, tal que

$$\lim_{k\to\infty} x(t_k) = z_0 \in \overline{B(0,\varepsilon)} \setminus B(0,\eta).$$

Observamos que

- $V \circ x$ es (estrictamente) decreciente, porque para todo $t \in [0,\infty)$ tenemos que $x(t) \in B(0,\varepsilon) \subset U$ y así
$$\frac{d}{dt}(V \circ x)(t) = \nabla V(x(t)) \cdot f(x(t)) < 0.$$
Además $V \circ x$ es acotada inferiormente, porque $V \geq 0$. Así debe existir el límite
$$\lim_{t\to\infty} V(x(t)) = \lim_{k\to\infty} V(x(t_k)) = V(z_0).$$

- Por la dependencia continua de las soluciones respecto de las condiciones iniciales, y tomando un $t > 0$ tal que $t \in I_{z_0}$, donde I_{z_0} denota el intervalo maximal de definición de la solución $x(t; 0, z_0)$ que sale de z_0, tenemos
$$\lim_{k\to\infty} x(t; 0, x(t_k)) = x(t; 0, z_0).$$

De estos dos hechos deducimos que V aplicado a la solución que parte de z_0 debería ser constante a $V(z_0)$ en el intervalo donde existe $I_{z_0} \cap [0, \infty) = [0, T)$, esto es,

$$\begin{aligned} V(z_0) &= \lim_{k\to\infty} V(x(t_k)) = \lim_{s\to\infty} V(x(s)) = \lim_{s\to\infty} V(x(s; 0, x_0)) = \lim_{k\to\infty} V(x(t + t_k; 0, x_0)) \\ &= \lim_{k\to\infty} V(x(t; 0, x(t_k))) = V(x(t; 0, z_0)), \quad \forall t \in [0, T) \end{aligned}$$

Y esto contradice el hecho de que (usando que $z_0 \in \overline{B(0,\varepsilon)} \setminus \{0\} \subset U$)

$$\frac{d}{dt}(V \circ x(\cdot; 0, z_0))(0) = \nabla V(x(0; 0, z_0)) \cdot f(x(0; 0, z_0)) = \nabla V(z_0) \cdot f(z_0) < 0$$

□

Observación 4.28. En muchas ocasiones en sistemas autónomos 2x2, funciones de Lyapunov del tipo

$$V(x, y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} \quad ; \quad V(x, y) = \frac{x^4}{2} + \frac{y^4}{2} \quad ; \quad V(x, y) = \frac{x^4}{2} + \frac{y^2}{2} \quad ; \quad V(x, y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^4}{2}$$

pueden utilizarse para estudiar la estabilidad del origen.

Concluimos esta sección con un último resultado, que damos sin demostración, que puede entenderse como un inverso del Teorema de Lyapunov, en el sentido que nos asegurará que en todo sistema donde el origen (u otro punto de equilibrio) sea una solución asintóticamante estable, deberá existir una función de Lyapunov asociada.

Teorema 4.29. *Sea $x = 0$ punto de equilibrio asintóticamente estable de $x' = f(x)$, con $f : U \to \mathbb{R}^n$ localmente Lipschitz, siendo U abierto y $0 \in U$. Sea $A_0 \subset U$ la cuenca de atracción del origen. Entonces existe una función $V : A_0 \to \mathbb{R}$ de clase C^1 tal que*

- $V(x) > 0$ *para todo* $x \in A_0 \setminus \{0\}$.
- $V(0) = 0$.
- $\nabla V(x) \cdot f(x) < 0$ *para todo* $x \in A_0 \setminus \{0\}$.

4.5. Cuenca de atracción, región invariante y teorema de Lyapunov mejorado

Esta última sección del Capítulo 4 tiene un enfoque diferente a las sección previa sobre estabilidad de sistemas no lineales. Observemos que todo el estudio realizado en la Sección 4.4 es puramente "local". Ahora intentaremos dar información global del comportamiento de las soluciones. Para ello, introduciremos nociones como región invariante y cuenca de atracción , que nos permitirán entender el comportamiento de las soluciones a un escala más global. De hecho, los teoremas de Lyapunov

presentados en la Sección 4.3. dan realmente la idea de cómo encontrar resultados que explican de manera global la dinámica de las soluciones en algunos casos.

Comenzamos con unas definiciones[2].

Definición 4.30. Sea $x' = f(x)$, $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$.

1. Decimos que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es una región invariante del sistema si para cada $x_0 \in \Omega$, $x(t; 0, x_0) \in \Omega$ para todo $t \in I_x = I_{x_0} = (\alpha, \omega)$.
   - Ω se dice positivamente invariante si para cada $x_0 \in \Omega$, $x(t; 0, x_0) \in \Omega$ para todo $t \in [0, \omega)$.
   - Ω es negativamente invariante si para cada $x_0 \in \Omega$, $x(t; 0, x_0) \in \Omega$ para todo $t \in (\alpha, 0]$.
2. Supongamos que $f(\xi) = 0$ para algún $\xi \in \mathbb{R}^n$. Se define la cuenca de atracción del punto de equilibrio ξ como aquella región $A_\xi \subset \mathbb{R}^n$ tal que si $x_0 \in A_\xi$ entonces $\lim_{t\to\infty} x(t; 0, x_0) = \xi$.

Entenderemos mejor la definición de región invariante con un ejemplo.

Ejemplo 4.31. Sea el sistema

$$\begin{cases} x' = (y^2 - 1)(1 - x^2 - y^2) \\ y' = (x^2 - 1)(1 - x^2 - y^2) \end{cases}$$

- El conjunto $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ es invariante, pues ∂C está formado por puntos de equilibrio. Luego si $(x_0, y_0) \in C$, la solución correspondiente $(x(t), y(t))$ no puede atravesar ∂C por la unicidad de soluciones (observar que $f(x, y) = ((y^2-1)(1-x^2-y^2), (x^2-1)(1-x^2-y^2)) \in C^1(\mathbb{R}^2)$). Luego $(x(t), y(t)) \in C$ para todo $t \in I_{(x_0,y_0)}$. Como la región C está acotada, la solución no puede explotar en tiempo finito y así deducimos también que $I_{(x_0,y_0)} = \mathbb{R}$.
- $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$ es invariante. En efecto, si $x_0 = y_0$, nos planteamos el PVI

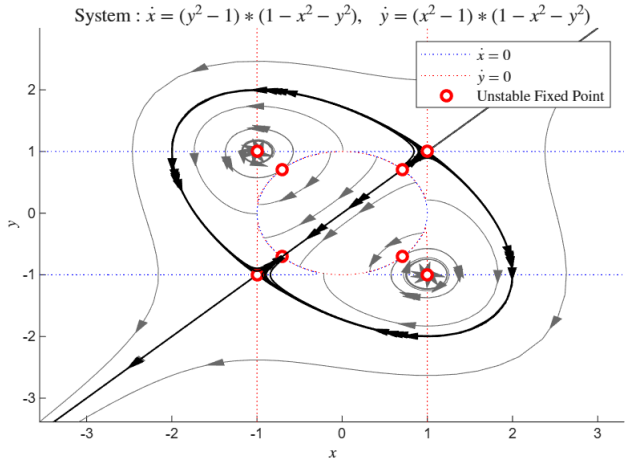
  $$\begin{cases} z' = (z^2 - 1)(1 - 2z^2) \\ z(0) = x_0 = y_0 \end{cases}$$

  y vemos que debe existir una única solución (z, I_z). Tomando $(x(t), y(t)) = (z(t), z(t))$ vemos que debe ser la única solución del sistema inicial con $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$. Luego $(x(t), y(t)) \in R$ para todo $t \in I_{(x,y)} = I_z = (\alpha, \omega)$ con $(x_0, y_0) \in R$.
- Se deja como ejercicio al alumno determinar todos los puntos de equilibrio del sistema y estudiar su estabilidad.

Veremos ahora como argumentos parecidos a los teoremas de Lyapunov nos permiten conocer información sobre regiones positivamente invariantes y cuencas de atracción de puntos de equilibrio. Para ello, utilizaremos el siguiente lema clave.

Lema 4.32. *Sea $x' = f(x)$ un sistema autónomo con $f \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$.*

[2]Podríamos haber definido cuencas de atracción y regiones invariantes para sistemas $x' = f(x)$ donde f solo sea localmente Lipschitz en algún abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.



(a) Supongamos que existe $V \in C^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ *tal que*

$$\dot{V}(x) = \nabla V(x) \cdot f(x) \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Entonces para todo $c \in \mathbb{R}$ *los conjuntos* $K_c = \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) \leq c\}$ *son positivamente invariantes.*

(b) Supongamos que existe un abierto $U \subset \mathbb{R}^n$ *y una función* $V \in C^1(U;\mathbb{R})$ *tal que*

$$\dot{V}(x) = \nabla V(x) \cdot f(x) \leq 0 \quad \forall x \in U.$$

Entonces para todo $c > 0$ *tal que el conjunto* $K_c = \{x \in U : V(x) \leq c\}$ *sea cerrado,* K_c *es positivamente invariante.*

Demostración. (a) Por reducción al absurdo supongamos que hay alguna solución $x(t)$ con $x(0) \in K_c$ y tal existe $t^* > 0$ con $x(t^*) \notin K_c$. Esto es $V(x(t^*)) > c$. Si definimos la función $z(t) = V(x(t))$ y aplicamos el Teorema del Valor Medio en el intervalo $[0, t^*]$ llegamos a que debe existir un $\xi \in (0, t^*)$ tal que

$$\nabla V(x(\xi)) \cdot f(x(\xi)) = z'(\xi) = (z(t^*) - z(0))\frac{1}{t^*} > 0$$

En lo anterior hemos usado que $V(x(0)) \leq c$ y que $V(x(t^*)) > c$. Pero por hipótesis teníamos que $\nabla V(x)) \cdot f(x) \leq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, por lo que hemos llegado a una contradicción.

(b) Probemos que K_m debe ser positivamente invariante por reducción al absurdo. Supongamos que existe $x_0 \in K_m$ (en particular $V(x_0) \leq c$) tal que existe t^* con $x(t^*;0,x_0) \notin K_m$ (esto es, $V(x(t^*;0,x_0) > c$). Como $K_c \subset U$ es cerrado dentro del abierto U, por continuidad de x y de V, podemos asumir que $x(t^*;0,x_0) \in U$ y que $x(t;0,x_0) \in U$ para todo $t \in [0,t^*]$. Si aplicamos el Teorema del Valor Medio a la función $V \circ x$ en el intervalo $[0,t^*]$ tenemos que debería existir un $\xi \in (0,t^*)$ tal que

$$\frac{d}{dt}(V \circ x)(\xi;0,x_0) = \frac{V(x(t^*)) - V(x(0))}{t^*} > 0.$$

Pero a la vez sabemos que

$$\frac{d}{dt}(V \circ x)(\xi;0,x_0) = \dot{V}(x(\xi;0,x_0)) \leq 0.$$

□

Teorema 4.33 (Teorema de Lyapunov mejorado). *Sea $x' = f(x)$, $f \in C^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$, $f(\overline{x}) = 0$. Sea también $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto con $\overline{x} \in U$, y $V : U \to [0,\infty)$ función de clase C^1 tal que $V(x) = 0$ si y solo si $x = \overline{x}$. Supongamos que $\nabla V(x) \cdot f(x) < 0$ para todo $x \in U \setminus \{0\}$. Entonces*

1. *$\overline{x}$ es asintóticamente estable.*
2. *Si dado $m > 0$, el conjunto $K_m = \{x \in U : V(x) \leq m\}$ es compacto con $K_m \subset U$, entonces K_m es positivamente invariante y forma parte de la cuenca de atracción de $\overline{x}$.*

Demostración. La primera parte ya está probada en el Teorema 4.27. Probemos la segunda parte.El hecho de que K_m debe ser positivamente invariante es consecuencia del Lema 4.32.

Solamente nos falta probar que K_m debe formar parte de la cuenca de atracción de $\overline{x}$. Tomemos $x_0 \in K_m$, y debemos comprobar que $x(t) = x(t;0,x_0) \to \overline{x}$ cuando $t \to \infty$. En primer lugar observamos que al ser K_m compacto y positivamente invariante, y como $x_0 \in K_m$, se debe tener que $x(t)$ está definida en todo $[0,\infty)$, luego tomar el límite cuando $t \to \infty$ está justificado. Por reducción al absurdo, si el límite no fuese $\overline{x}$ existiría una sucesión de tiempos creciente $(t_k)_{k\geq 1}$ con $t_k \to \infty$ y tal que $\|x(t_k) - \overline{x}\| \geq \eta$ para cierto $\eta > 0$. Como $(x(t_k))_{k\geq 1} \subset K_m$ está dentro de un compacto, existe una subsucesión de $(t_k)_{k\geq 1}$, que denotamos igual, tal que existe el límite

$$\lim_{k\to\infty} x(t_k) = z_0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{k\to\infty} V(x(t_k)) = V(z_0).$$

En particular $V(z_0) < 0$. Además, puesto que $V \circ x$ es decreciente en $t \in [0,\infty)$ y está acotada inferiormente por cero, realmente tenemos

$$V(z_0) = \lim_{k\to\infty} V(x(t_k)) = \lim_{t\to\infty} V(x(t;0,x_0)).$$

Y usando la dependencia continua respecto a las condiciones y las propiedades de las trayectorias que veremos en el Capítulo 5 (en concreto el Corolario 5.5) tenemos que para todo $t \geq 0$ con $t \in I_{z_0}$

$$V(z_0) = \lim_{t\to\infty} V(x(t;0,x_0) = \lim_{k\to\infty} V(x(t+t_k;0,x_0)) = \lim_{k\to\infty} V(x(t;0,x(t_k))) = V(x(t;0,z_0)). \quad (4.8)$$

Esto implica que la función $V(x(t;0,z_0))$ es constante en $t \in I_{z_0} \cap [0,\infty)$, pero por otro lado tenemos

$$\frac{d}{dt}(V \circ x)(0;0,z_0) = \dot{V}(x(0;0,z_0)) = V(z_0) < 0.$$

Esto es una contradicción, luego la demostración está acabada.

□

Y por último, enunciaremos el Teorema de Lasalle, que permite concluir la estabilidad asintótica de algunos puntos de equilibrio donde parecería que los teoremas de Lyapunov solo nos darían la mera estabilidad. La demostración de este Teorema se verá en detalle en la Sección 5.7.

Teorema 4.34 (Teorema de Lasalle). *Sea $x' = f(x)$, $f \in C^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$, $f(\overline{x}) = 0$. Sea también $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto con $\overline{x} \in U$, y $V : U \to [0,\infty)$ función de clase C^1 tal que $V(x) = 0$ si y solo si $x = \overline{x}$. Supongamos que $\nabla V(x) \cdot f(x) \leq 0$ para todo $x \in U \setminus \{0\}$ y que además el conjunto*

$$\{x : \nabla V(x) \cdot f(x) = 0\} \cap U$$

no contiene ninguna trayectoria, aparte de $\overline{x}$. Entonces:

1. *$\overline{x}$ es asintóticamente estable.*
2. *Si además $K \subset U$ es un conjunto compacto con $\overline{x} \in int(K)$ y positivamente invariante, entonces K forma parte de la cuenca de atracción de $\overline{x}$.*

Demostración. Véase la Sección 5.1.2. □

Ejemplo 4.35. Sea el sistema

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x^3 + x - y \end{cases}$$

Estudiaremos la estabilidad del punto de equilibrio $(1,0)$. Sea la función de Lyapunov

$$V(x,y) = \frac{y^2}{2} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{4} = \frac{y^2}{2} + (x^2-1)^2\frac{1}{4} \geq 0.$$

Tomemos el abierto $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0),(-1,0)\}$, que contiene a $(1,0) \in U$. Además $V \in C^1(U;[0,\infty))$ y $V(x,y) = 0$ con $(x,y) \in U$ si y solo si $(x,y) = (1,0)$. Por otro lado,

$$\nabla V(x,y) \cdot f(x,y) = -y^2 \leq 0$$

para todo $(x,y) \in U$. Finalmente, el conjunto

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \nabla V(x,y) \cdot f(x,y) = 0\} \cap U = \{y = 0\} \cap U$$

no contiene ninguna trayectoria aparte de la solución constante $(1,0)$. Esto se debe a que si $(x_0,y_0) \in (\{y=0\} \cap U) \setminus \{(1,0)\}$ entonces

$$\begin{cases} x'(0) = 0 \\ y'(0) = -x_0^3 + x_0 \neq 0 \end{cases}.$$

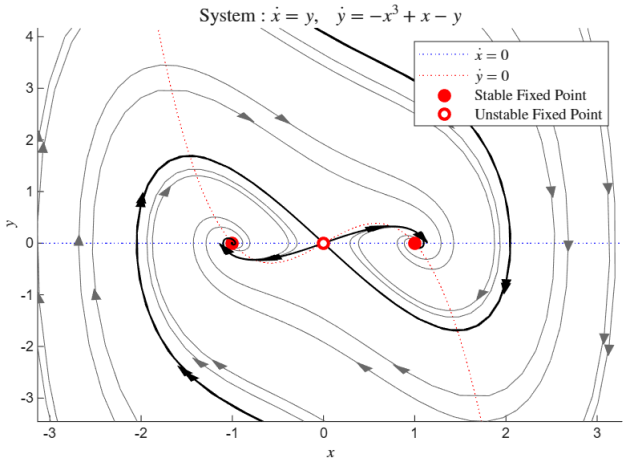
Luego las soluciones que tocan al eje $y = 0$ (y no son constantes) deben atravesar el eje y abandonarlo. (Se puede usar un argumento similar al de la sección de los sistemas de Lotka-Volterra).

Podemos por tanto aplicar el Teorema de Lasalle (Teorema 4.34) y concluir que el $(1,0)$ es un punto asintóticamente estable. Además, para todo $m \in \mathbb{R}$ tal que $m \leq 1/4$, los conjuntos

$$K_m = \{V(x,y) \leq m\} \cap \{x > 0\}$$

son entornos compactos de $(1,0)$ positivamente invariantes (el hecho de que es posotivamente invariante se prueba de la misma forma que en la primera parte de la demostración del Teorema 4.33). De hecho tenemos dos componentes conexas, cada una de ellas positivamente invariante. El Teorema de Lasalle también nos dice que K_m forma parte de la cuenca de atracción de $(1,0)$.

Un estudio análogo se podría haber hecho para el punto de equilibrio $(-1,0)$.



Ejemplo 4.36. Sea el sistema

$$\begin{cases} x' = -x(x+2)(x+1) + y^2 \\ y' = -xy \end{cases}.$$

Intentaremos determinar el conjunto más grande posible que rodee al origen y forme parte de su cuenca de atracción. Definimos la función de Lyapunov

$$V(x,y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}.$$

Tomando el entorno abierto del origen $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > -1\}$ tenemos que

$$\dot{V}(x,y) = -x^2(x+2)(x+1) \leq 0$$

y además observamos que el conjunto

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \dot{V}(x,y) = 0\} \cap U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$$

no posee trayectorias aparte de la de la solución constante $(0,0)$. Esto se debe a que si $(x_0, y_0) \in \{x = 0\} \setminus \{(0,0)\}$ entonces

$$\begin{cases} x'(0) = y_0^2 \neq 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}.$$

Esto muestra que toda solución que toca al eje $x = 0$, y es diferente de la solución nula $(0,0)$ debe abandonar el eje necesariamente.

Por todo lo anterior podemos aplicar el Teorema de Lasalle para asegurar que el origen es asintóticamente estable. Más aún, para cada $m < 1/2$ tenemos que

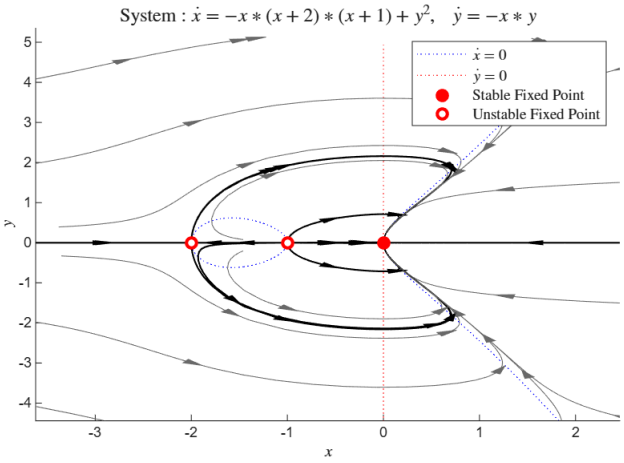
$$K_m = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : V(x,y) \leq m\}$$

es un compacto tal que $(0,0) \in \text{int}(K_m)$, que además es positivamente gracias al Lema 4.32. Luego el Teorema de Lasalle nos dice que K_m forma parte de la cuenca de atracción del origen para todo $m \in (0, 1/2)$. Por lo tanto concluimos que

$$\bigcup_{m \in (0,1/2)} K_m = B(0,1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\} \subseteq A_{(0,0)},$$

es decir, la bola unidad abierta forma parte de la cuenca de atracción del origen.

Indicamos por último que ninguno de los Principios de Linealización nos hubiesen servido para determinar la estabilidad del origen, puesto que la matriz que define el sistema linealizado tiene autovalores 0 y -2.



Capítulo 5

Dinámica de sistemas autónomos

Consideraremos sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales y autónomos, esto es, del tipo

$$x' = f(x) \tag{5.1}$$

Además, asumiremos que f es localmente Lipschitz (por ejemplo si $f \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$), con $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto, por lo que la existencia y unicidad de soluciones están asegurada por la Teoría de Cauchy-Lipschitz local. Además los teoremas sobre soluciones maximales nos dicen que, dado el PVI

$$\begin{cases} x' = f(x) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{5.2}$$

existirá una solución maximal definida en algún intervalo maximal $(\alpha, \omega) = (\alpha(t_0, x_0), \omega(t_0, x_0))$ (pudiendo ser $\alpha = -\infty$ y $\omega = \infty$, pero si son finitos sabemos que debe haber explosión de la solución).

5.1. Trayectorias de soluciones

Definición 5.1. La *trayectoria* u *órbita* de una solución $x(t) = x(t; 0, x_0)$ del PVI (5.2) definida en $I_x = (\alpha, \omega)$ se define como

$$\Gamma = \Gamma_x = \Gamma_{(t_0, x_0)} = \{x(t) : t \in I_x\} \subset \mathbb{R}^n.$$

La trayectoria positiva $\Gamma^+ \subset \Gamma$ es

$$\Gamma^+ = \{x(t) : t \in [t_0, \omega)\}$$

y la trayectoria negativa $\Gamma^- \subset \Gamma$

$$\Gamma^- = \{x(t) : t \in (\alpha, t_0]\}.$$

Definición 5.2. El *diagrama de fases* de un sistema autónomo $x' = f(x)$ será la representación de todas sus trayectorias en el espacio $\mathbb{R}^n$. Normalmente se añaden flechas en las órbitas de los diagramas de fases para indicar el sentido en el que las soluciones se mueven cuando t crece. Si $n = 1$ se le suele llamar recta de fases, y si $n = 2$ se le suele llamar plano de fases.

5.1.1. Primeras propiedades

Proposición 5.3. *En un sistema autónomo $x' = f(x)$, con $f \in C^1(\Omega;\mathbb{R}^n)$ siendo $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto, si $x(t)$ es solución en (α,ω) entonces $y(t) = x(t+C)$ es también solución en $(\alpha-C,\omega-C)$ para cualquier $C \in \mathbb{R}$. Además si $I_x = (\alpha,\omega)$ es el intervalo maximal de x entonces $(\alpha - C, \omega - C) = (\alpha,\omega) - C = I_x - C = I_y$ es el intervalo maximal de y.*

Observación 5.4. Usaremos el convenio de que si $\alpha = -\infty$ entonces $\alpha + C = -\infty + C = -\infty$ y que si $\omega = +\infty$ entonces $\omega + C = +\infty + C = +\infty$.

Demostración. Si tomamos un tiempo $t \in (\alpha - C, \omega - C)$ se tiene que $t + C \in (\alpha,\omega)$. Entonces, usando que x es solución en (α,ω), se sigue que

$$y'(t) = x'(t + C) = f(x(t + C)) = f(y(t)).$$

Esto nos dice que $y(t)$ es solución del sistema en $(\alpha,\omega) - C$ El intervalo maximal de I_y no puede ser más grande que $I_x - C$. Si fuese así, y tuviésemos que y es solución en $J \supset (\alpha,\omega) - C$, entonces $J + C \supset I_x$ sería un intervalo de tiempos donde x sería solución, ya que

$$x'(t) = y'(t - C) = f(y(t - C)) = f(x(t)), \quad \forall t \in J + C,$$

contradiciendo la maximalidad de I_x.

□

Corolario 5.5. *Sea $x' = f(x)$ con $f \in C^1(\Omega;\mathbb{R}^n)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Si $x(t), y(t)$ son soluciones maximales y existen $t_1 \neq t_2$ tales que $x(t_1) = y(t_2)$, entonces*

1. *$x(t) = y(t + t_2 - t_1)$ para todo $t \in I_x$.*
2. *$I_x = I_y - (t_2 - t_1)$.*
3. *$\Gamma_y = \Gamma_x$.*

Demostración. Definimos

$$z(t) = y(t + t_2 - t_1), \quad t \in I_y - (t_2 - t_1).$$

Observamos que $z(t)$ también es solución con intervalo maximal de definición igual a $I_z = I_y - (t_2 - t_1)$ (usando la Proposición 5.3). Por otro lado, $z(t_1) = y(t_2) = x(t_1)$, significa que tanto z como x son soluciones del sistema con la misma condición inicial, luego por unicidad $x(t) = z(t)$ en todo tiempo t de sus intervalos maximales de definición, que deben ser los mismos. Esto es $I_x = I_z$. Luego $I_x = I_y - (t_2 - t_1)$. Por último

$$\Gamma_x = \{x(t) : t \in I_x\} = \{y(t + t_2 - t_1) : t \in I_y - (t_2 - t_1)\} = \{y(t) : t \in I_y\} = \Gamma_y.$$

□

El resultado anterior nos permite, a partir de ahora, usar la notación Γ_{x_0}, $x_0 \in \Omega$, para referirnos a la órbita generada por cualquier solución que en algún momento pase por x_0. Tenemos entonces que $\Gamma_{x_0} = \Gamma_{(0,x_0)} = \Gamma_{(t,x_0)}$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Observación 5.6. Algunas observaciones más a tener en cuenta son:

- Si $x(t)$, $y(t)$ son soluciones maximales, o bien sus trayectorias coinciden y satisfacen $x(t) = y(t+C)$ para algún $C \in \mathbb{R}$, o bien no tienen ningún punto en común.
- Por unicidad, las soluciones no constantes no pueden alcanzar ningún punto de equilibrio en tiempo finito.
- A la hora de dibujar diagramas de fases, es útil dibujar paralelamente el campo vectorial $x \to f(x)$, que nos indica la dirección con la que atraviesan las trayectorias en esos puntos.

Veamos ahora más propiedades importantes sobre el comportamiento de las trayectorias. En las 5 propiedades siguientes consideramos sistemas $x' = f(x)$ con $f \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$.

Propiedad 1: Si $x(t)$ es solución con $x(t) \in K$ para todo $t \in [0, \omega) = [0, \omega(0, x(0)))$, donde $K \subset \mathbb{R}^n$ es un compacto, entonces $\omega = +\infty$. (Véase también el Corolario 2.39).

Demostración. Si $\omega < \infty$, por los Teoremas de Cauchy-Lipschitz sobre soluciones maximales, sabemos que $x(t)$ debe explotar en tiempo finito. Esto es,

$$\lim_{t \to \omega^-} \|x(t)\| = \infty.$$

Pero $x(t) \in K \subset \mathbb{R}^n$, con K un compacto, para todo $t \in [0, \omega)$, luego el límite anterior no puede ser infinito. Necesariamente $\omega = +\infty$. □

Propiedad 2: Sea $x(t)$ una solución en $[0, \omega) = [0, \omega(0, x(0)))$ con $\lim_{t \to \omega^-} x(t) = \xi \in \mathbb{R}^n$. Entonces $\omega = +\infty$ y, además, ξ es un punto de equilibrio del sistema.

Demostración. Tenemos $\xi = \lim_{t \to \omega^-} x(t)$. Entonces

$$\Gamma^+ \cup \{\xi\} = \{x(t) : t \in [0, \omega)\} \cup \{\xi\} \subset \mathbb{R}^n$$

es un conjunto compacto. Esto puede argumentarse diciendo que $\Gamma^+ \cup \{\xi\}$ es cerrado y acotado, o bien que $\Gamma^+ \cup \{\xi\}$ es secuencialmente compacto (pues toda sucesión posee una subsucesión convergente). De esta forma, por la Propiedad 1 se sigue que $\omega = +\infty$. Por otro lado, si miramos componente a componente $x = (x_1, \ldots, x_n)$ tenemos que

$$\lim_{t \to \infty} x_j(t) = \xi_j \in \mathbb{R} \quad \forall j = 1, \ldots, n.$$

Ahora tomamos $h > 0$ y se tiene que

$$. \lim_{t \to \infty} |x_j(t+h) - x_j(t)| = 0 \quad \forall j = 1, \ldots, n. \tag{5.3}$$

Usando el Teorema del Valor Medio, para cada j, tenemos que existe $\tau_j \in (t, t+h)$ tal que

$$|x_j(t+h) - x_j(t)| = |x_j'(\tau_j)|h = |f_j(x_1(\tau_j), \ldots, x_n(\tau_j))| = |f_j(x(\tau_j))|h.$$

Haciendo tender $t \to \infty$, y por tanto $\tau_j \to \infty$, y usando la continuidad de f y (5.3) tenemos que para cada $j = 1, \ldots, n$,

$$0 = \lim_{t \to \infty} h|f_j(x(t))| = h|f_j(\xi)|.$$

Así $f_j(\xi) = 0$ para cada $j = 1, \ldots, n$, y por lo tanto $f(\xi) = 0$. Entonces $\xi \in \mathbb{R}^n$ será un punto de equilibrio.

□

Propiedad 3: Sea $x(t)$ una solución maximal tal que $x(t_1) = x(t_2)$ para ciertos $t_1, t_2 \in I_x = (\alpha, \omega)$ con $t_1 \neq t_2$. Entonces $I_x = \mathbb{R}$ y además

1. O bien $x(t) = \xi \in \mathbb{R}^n$ es una solución constante (punto de equilibrio).
2. O bien $x(t)$ es periódica con algún periodo minimal[a] $\tau > 0$. Esto es, $x(t + \tau) = x(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, siendo $\tau > 0$ el valor positivo más pequeño que satisface lo anterior. Siendo más riguroso
$$\tau := \text{mín}\{T > 0 : \, x(t + T) = x(t) \, \forall t \in \mathbb{R}\}$$

[a] Si una función es continua, periódica y no constante, siempre existe un periodo minimal $\tau > 0$. Por otro lado, existen funciones periódicas (discontinuas), que no tienen un periodo minimal positivo, como por ejemplo $x(t) = 1$ si $t = k2^{-m}$ con $k \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$ y $x(t) = 0$ en caso contrario.

Demostración. Sea $I_x = (\alpha, \omega)$ el intervalo maximal de definición de x. Por el Corolario 5.5 podemos escribir

$$x(t) = x(t + t_1 - t_2) = x(t + (t_2 - t_1)), \quad \forall t \in I_x = I_x - (t_1 - t_2) = I_x - (t_2 - t_1).$$

El hecho de que $I_x = I_x - (t_1 - t_2) = I_x - (t_2 - t_1)$ no nos deja más opción que tener que $I_x = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$. Sea ahora el conjunto de periodos

$$P = \{T \in \mathbb{R} : \, x(t + T) = x(t) \, \forall t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}.$$

Es fácil comprobar las siguientes propiedades.

- $P \neq \emptyset$ porque $0 \in P$, $t_1 - t_2 \in P$.
- $T_1, T_2 \in P \;\Rightarrow\; T_1 \pm T_2 \in P$.
- $T_1 \in P$, $m \in \mathbb{Z} \;\Rightarrow\; mT_1 \in P$.
- P es un cerrado en $\mathbb{R}$ porque, si $T_n \to T$ con $(T_n)_{n \geq 1} \subset P$, por continuidad de $x(t)$ se tiene que para todo $t \in \mathbb{R}$,
$$x(t + T) = \lim_{n \to \infty} x(t + T_n) = \lim_{n \to \infty} x(T_n) = x(T).$$

Sea ahora $\widetilde{\tau} = \text{ínf}(P \cap (0, \infty)$, que está bien definido por ser un conjunto acotado inferiormente. Ahora tenemos dos opciones:

1. O bien $\widetilde{\tau} = 0$. En este caso probaremos que para todo $T \in \mathbb{R}$, $x(t + T) = x(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Esto significará que $P = \mathbb{R}$ y por tanto $x(t) = x(s)$ para todos $t, s \in \mathbb{R}$, luego $x(t) = \xi$ para todo $t \in \mathbb{R}$ con $\xi \in \mathbb{R}^n$ solución constante.

   En efecto, tomemos $T \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$ arbitrario. Veremos a continuación que existirá $s \in P$ con $|s - T| < \varepsilon$. Como sabemos que P es cerrado se seguirá que $T \in P$ y habremos acabado. Como

ya hemos dicho fijemos $T \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$. Como $0 = \text{ínf}(P \cap (0,\infty))$ existe $T_1 \in P$ con $0 < T_1 < \varepsilon$. Por la propiedad Arquimediana existirá $m \in \mathbb{Z}$ tal que

$$m \leq \frac{T}{T_1} \leq m_1 \quad \Rightarrow \quad mT_1 \leq T < T_1 m + T_1.$$

Definiendo $s = T_1 m \in P$ (porque $T_1 \in P$, $m \in \mathbb{Z}$) tenemos que

$$|s - T| = |T_1 m - T| < T_1 < \varepsilon.$$

2. O bien $\widetilde{\tau} > 0$. En ese caso $P \cap (0,\infty) = P \cap [\widetilde{\tau}, +\infty)$ y, como P es cerrado, tenemos que $P \cap [\widetilde{\tau}, \infty)$ debe ser cerrado y acotado inferiormente; luego existe $\text{mín}(P \cap [\widetilde{\tau}, \infty)) = \text{mín}(P \cap (0,\infty)) = \text{ínf}(P \cap (0,\infty)) = \widetilde{\tau}$. Si llamamos $\tau = \widetilde{\tau} \in P$ tenemos que $\tau > 0$ debe ser el periodo minimal de la solución $x(t)$.

□

Definición 5.7. Una curva es una función continua $x : I \to \mathbb{R}^n$, donde $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo. En ocasiones también llamaremos curva a la imagen de la función x, esto es $x(I)$.

- Una curva cerrada simple[1] es la imagen de una función continua $x : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ con $a, b \in \mathbb{R}$, $x(a) = x(b)$ y tal que $x|_{[a,b))}$ es inyectiva.
- Una curva abierta simple es la imagen de una función continua e inyectiva $x : (a,b) \to \mathbb{R}^n$. Aquí el intervalo (a,b) permite la opción de que $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ y $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Con las propiedades vistas hasta ahora sobre trayectorias, podemos concluir que el diagrama de fases de $x' = f(x)$ con $f \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ consta de trayectorias que no se cortan y que pueden ser de tres tipos.

1. En el caso de que x no se corte consigo mismo: Curvas abiertas simples.
2. En el caso de que x se corte consigo mismo:
   2.1 Curvas cerradas simples, esto es, soluciones periódicas definidas en $\mathbb{R}$.
   2.2 Puntos de equilibrio, esto es, soluciones constantes definidas en todo $\mathbb{R}$.

Propiedad 4: Sea $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ una curva simple (abierta o cerrada), donde Γ no tiene por qué ser órbita. Si Γ no contiene puntos de equilibrio y $\Gamma_{x_0} \subset \Gamma$ para cierto $x_0 \in \mathbb{R}^n$, entonces $\Gamma_{x_0} = \Gamma$.

Demostración. Llamemos $x(t) = x(t; 0, x_0)$ y así $\Gamma_{x_0} = \Gamma_x$.

Caso Γ curva simple abierta: Sea $g : (a,b) \to \mathbb{R}^n$ con $\Gamma = g((a,b))$ siendo g continua e inyectiva. En particular la inversa $g^{-1} : \Gamma \to (a,b)$ está bien definida y además podríamos probar de hecho que g será un homeomorfismo sobre su imagen Γ (se deja como ejercicio al alumno). Definimos ahora

[1] Se deja como ejercicio al alumno probar que toda curva cerrada simple Γ es homeomorfa a la circunferencia unidad $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.

$$g^{-1}\circ x : (\alpha,\omega) = I_x \xrightarrow{x} \Gamma \xrightarrow{g^{-1}} (a,b)$$
$$t \mapsto x(t) \mapsto g^{-1}(x(t))$$

Claramente $g^{-1}\circ x$ es una función continua por ser composición de funciones continuas. Probemos que además debe ser una función inyectiva.

- Inyectividad de $g^{-1}\circ x$: Sean $t_1, t_2 \in I_x$ con $g^{-1}(x(t_1)) = g^{-1}(x(t_2))$. Entonces, tras aplicar g, tenemos que $x(t_1) = x(t_2)$. Si $t_1 \neq t_2$ la Propiedad 3 nos dice que $x(t)$ solo admite 2 posibilidades. O bien es un punto de equilibrio, pero en ese caso $\Gamma_x = \Gamma_{x_0} = \{x_0\} \in \Gamma$, lo que es una contradicción con nuestras hipótesis. O bien $x(t)$ es periódica, y por lo tanto Γ_{x_0} sería una curva cerrada simple. Como $\Gamma_{x_0} \subset \Gamma$ es un conjunto compacto y conexo y g^{-1} es un homeomorfismo se tiene que $g^{-1}(\Gamma_{x_0})$ sería un compacto conexo dentro de (a,b), es decir, $g^{-1}(\Gamma_{x_0}) = [s,s'] \subset (a,b)$. En ese caso estaríamos diciendo que $g : [s,s'] \to \Gamma_{x_0}$ sería un homeomorfismo (pues recordamos que g es inyectiva). Pero esto último es claramente falso[2]. No queda, pues, más remedio que $t_1 = t_2$.

Podemos concluir de la continuidad y de la inyectividad de $g^{-1}\circ x : (\alpha,\omega) \to (a,b)$ que la función es de hecho monótona. Asumiremos en primer lugar que $g^{-1}\circ x$ es creciente. Nuestro objetivo es probar que $\Gamma = \Gamma_{x_0}$. Obsérvese que una vez veamos esto se tendrá que $(g^{-1}\circ x)(\alpha,\omega) = (a,b)$, que sumado a que hemos supuesto que $g^{-1}\circ x$ es creciente, implica

$$\lim_{t\to\alpha^+} g^{-1}(x(t)) = a \quad ; \quad \lim_{t\to\omega^-} g^{-1}(x(t)) = b. \tag{5.4}$$

Supongamos por reducción al absurdo que existe $q \in \Gamma$ con $q = g(c)$, $c \in (a,b)$, tal que $q \notin \Gamma_{x_0}$. Entonces el conjunto

$$S = \{g^{-1}(x(t)) : t \in I_x\}$$

satisface que $S \subset (a,c)$ o bien $S \subset (c,b)$. En el caso de que $S \subset (a,b)$ tendríamos que $\lim_{t\to\omega^-} g^{-1}(x(t)) = \eta_1 \in (a,c]$. Como g es continua, entonces $\lim_{t\to\omega^-} x(t) = g(\eta_1) \in \Gamma$, y por la Propiedad 2 deducimos que $g(\eta_1)$ es punto de equilibrio, ¡contradicción!. En el caso de que $S \subset (c,b)$ tendríamos que $\lim_{t\to\alpha^+} g^{-1}(x(t)) = \eta_2 \in [c,b)$. Como g es continua entonces $\lim_{t\to\alpha^+} x(t) = g(\eta_2) \in \Gamma$, y por la Propiedad 2 deducimos que $g(\eta_2)$ es punto de equilibrio, ¡contradicción!.

En el caso de que $g^{-1}\circ x$ hubiese sido decreciente hubiésemos argumentado de manera similar y entonces podemos concluir que $\Gamma_{x_0} = \Gamma$ y además que $g^{-1}\circ x$ es sobreyectiva con

$$g^{-1}\circ x \text{ creciente } \Rightarrow \begin{cases} \lim_{t\to\alpha^+} g^{-1}(x(t)) = a \\ \lim_{t\to\omega^-} g^{-1}(x(t)) = b \end{cases} ; \; g^{-1}\circ x \text{ decreciente } \begin{cases} \lim_{t\to\alpha^+} g^{-1}(x(t)) = b \\ \lim_{t\to\omega^-} g^{-1}(x(t)) = a \end{cases} \tag{5.5}$$

Caso Γ curva simple cerrada: Tenemos $g : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ continua con $g(a) = g(b)$ y $g|_{[a,b)}$ inyectiva, y donde $\Gamma = g([a,b])$.

Por reducción al absurdo, supongamos que existe $q \in \Gamma$, $q = g(c)$ para algún $c \in [a,b)$ y tal que $q \notin \Gamma_x$. Reparametrizando supongamos sin pérdida de generalidad que $q = g(a) = g(b)$. La curva

[2]Para probar que no existen homeomorfismos $g : [s,s'] \to \Gamma_{x_0}$ podemos tomar $\widetilde{s} \in (s,s')$ y considerar $g : [s,s'] \setminus \{\widetilde{s}\} \to \Gamma_{x_0} \setminus \{g(\widetilde{s})\}$. Mientras que $[s,s'] \setminus \{\widetilde{s}\}$ es disconexo, $\Gamma_{x_0} \setminus \{g(\widetilde{s})\}$ es conexo, y de ahí se puede deducir una contradicción.

$\Gamma^* = \Gamma \setminus \{q\}$ es simple y $g : (a,b) \to \mathbb{R}^n$ es una parametrización suya, esto es, $g(a,b) = \Gamma^*$ y además $\Gamma_x \subset \Gamma^*$. Usando el caso anterior tendremos que $\Gamma_x = \Gamma^*$ y por (5.5) además

$$\lim_{t\to\alpha^+} g^{-1}(x(t)) \in \{a,b\} \quad ; \quad \lim_{t\to\omega^-} g^{-1}(x(t)) \in \{a,b\}.$$

En cualquier caso se sigue que

$$\lim_{t\to\alpha^+} x(t) = \lim_{t\to\omega^-} x(t) = g(a) = g(b) = q.$$

La Propiedad 2 nos dice que q sería punto de equilibrio, ¡contradicción!.

□

Ejemplo 5.8. Sea $x' = f(x)$ con $f \in C^1(\mathbb{R})$. Supondremos que el conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = 0\}$ está formado por puntos aislados[3]. Consideremos ahora dos puntos $\xi_1 < \xi_2$ con $f(\xi_1) = f(\xi_2) = 0$ y con $f(x) \neq 0$ para todo $x \in (\xi_1, \xi_2)$

Usando la Propiedad 4 podemos deducir

- Tenemos que $\Gamma = (x_1, x_2)$ es una trayectoria que satisface que si $x_0 \in \Gamma$, se tiene claramente que, por unicidad de soluciones, $\Gamma_{x_0} \subset \Gamma$. Luego la Propiedad 4 nos da automáticamente que $\Gamma_{x_0} = \Gamma = (\xi_1, \xi_2)$. Como la trayectoria es un conjunto acotado, se debe tener además que el intervalo maximal de la solución es $I_{x_0} = \mathbb{R}$.

- El signo de f indica el crecimiento de las soluciones. Luego, si f hubiese sido positiva en (ξ_1, ξ_2), se debería tener que
$$\begin{cases} \lim_{t\to\infty} x(t;0,x_0) = \xi_2 \\ \lim_{t\to\infty^-} x(t;0,x_0) = \xi_1 \end{cases}.$$

Sin usar la Propiedad 4 también podemos deducir lo mismo.

- Entonces, para cada $x_0 \in (\xi_1, \xi_2)$ la solución $x(t) = x(t;0,x_0)$, que está definida en $I_x = (\alpha, \omega)$, no puede atravesar los valores $x = \xi_1$ ni $x = \xi_2$, por unicidad de soluciones. Por tanto, se debe tener que $I_x = \mathbb{R}$ y, además, $x(t) \in (\xi_1, \xi_2)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Como el signo de f es constante en (ξ_1, ξ_2), la solución $x(t)$ será monótona y se debe tener que existen los límites
$$L_1 = \lim_{t\to\infty} x(t) \quad ; \quad L_2 = \lim_{t\to-\infty} x(t)$$
La Propiedad 2 implica que los dos puntos L_1, L_2 deben ser puntos de equilibrio. Como $L_1, L_2 \in [\xi_1, \xi_2]$ y la función f no se anula en (ξ_1, ξ_2), no queda más remedio que L_1 y L_2 valgan ξ_1 o ξ_2. El valor preciso dependerá del signo de f.

Resumiendo, en este ejemplo $x' = f(x)$, donde los ceros de f son aislados, tenemos que las trayectorias pueden ser de tres tipos: puntos de equilibrio, órbitas conectando puntos de equilibrio u órbitas no acotadas conectando un punto de equilibrio con $\pm\infty$.

Definición 5.9. Sea $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ y consideremos el sistema $x' = f(x)$.

[3]Se dice que un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ está formado por puntos aislados si para todo $x \in A$ existe $r > 0$ tal que $(x - r, x + r) \cap (A \setminus \{x\}) = \emptyset$. O, equivalentemente, si A' denota el conjunto de puntos de acumulación de A se debe tener que $A' \cap A = \emptyset$

1. Si $x(t)$ es una solución definida en todo $\mathbb{R}$ tal que existe el límite

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to-\infty} x(t) = \xi$$

diremos que su trayectoria Γ_x es homoclínica. En ese caso, ξ debe ser punto de equilibrio.

2. Si $x(t)$ es una solución definida en todo $\mathbb{R}$ tal que existen los límites

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \xi_1 \neq \xi_2 = \lim_{t\to-\infty} x(t)$$

diremos que su trayectoria Γ_x es heteroclínica. En ese caso ξ_1, ξ_2 deben ser puntos de equilibrio.

También se suele decir que estamos ante conexiones homoclínicas u heteroclínicas cuando estemos ante las situaciones arriba indicadas.

5.1.2. Conjuntos ω-límite y α-límite

Definición 5.10. Sea $f \in C^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$. Definimos el ω-límite de $x_0 \in \mathbb{R}^n$ como

$$\omega(x_0) = \{y \in \mathbb{R}^n : \text{existe } (t_k)_{k\geq 1}, \text{ tal que } \lim_{k\to\infty} t_k = +\infty \text{ y } \lim_{k\to\infty} x(t_k;x_0) = y\}.$$

Se define el α-límite de $x_0 \in \mathbb{R}^n$ como

$$\alpha(x_0) = \{y \in \mathbb{R}^n : \text{existe } (t_k)_{k\geq 1}, \text{ tal que } \lim_{k\to\infty} t_k = -\infty \text{ y } \lim_{k\to\infty} x(t_k;x_0) = y\}.$$

A los conjuntos anteriores a veces se les denomina conjuntos límite de $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Observaciones: Las siguientes propiedades se deducen inmediatamente de la definición.

- $\omega(x_0) = \emptyset$ siempre que I_{x_0} (el intervalo maximal de la solución que parte de $x_0 \in \mathbb{R}^n$) no contenga ningún intervalo de la forma $[t_0, +\infty)$. Análogamente, $\alpha(x_0) = \emptyset$ siempre que I_{x_0} no contenga ningún intervalo de la forma $(-\infty, t_0]$.
- Dado $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y su trayectoria Γ_{x_0}, es claro que si $y \in \Gamma_{x_0}$ entonces $\omega(x_0) = \omega(y)$ y que $\alpha(x_0) = \alpha(y)$ porque $\Gamma_{x_0} = \Gamma_y$, ya que de hecho existe t_1 con $x(t_1;x_0) = y$ y, por tanto,

$$x(t;y) = x(t + t_1;x_0)$$

Ejemplos: Sea $x' = f(x)$, $f \in C^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$.

- Si $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ es un punto de equilibrio asintóticamente estable, entonces existe $r > 0$ tal que si $x_0 \in B(\overline{x}, r)$ se tiene que $\omega(x_0) = \overline{x}$.
- Si Γ_{x_0} es una órbita periódica para cierto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ entonces $\omega(x_0) = \Gamma_{x_0} = \alpha(x_0)$.
- Existen ejemplos donde las soluciones se acercan en espiral a una órbita periódica. En esos casos, el ω-límite será toda esa órbita periódica. Por ejemplo, considerar un sistema en coordenadas polares (ver la Subsección 5.2.1) dado por $(r', \theta') = (r(1-r), 1)$, donde $\omega(x_0) = \{r = 1\}$ para todo $x_0 \neq 0$. O incluso en el Ejemplo 5.27, se deja como ejercicio al lector probar que $\alpha(x_0) = \{x^2+y^2\}$ para todo $x_0 \neq 0$.

- Existen ω-límites y α-límites que no son puntos de equilibrio ni órbitas periódicas; véase el Ejemplo 5.34.

Proposición 5.11. *Sea $x' = f(x)$, $f \in C^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Supongamos que la semiórbita positiva $\Gamma^+_{x_0} = \{x(t;x_0) : t \in [0,\omega)\}$ es acotada. Entonces*

1. *$\omega(x_0) \neq \emptyset$.*
2. *$\omega(x_0)$ es cerrado, acotado y conexo.*
3. *$\omega(x_0)$ es un conjunto invariante.*

Los asertos anteriores también se dan de manera análoga para $\alpha(x_0)$.

Demostración. Llamemos $x(t) = x(t;x_0)$ a la solución y (α,ω) a su intervalo maximal de definición.

1. Como $\Gamma^+_{x_0}$ es acotada, tenemos que $\omega = +\infty$ y así $\Gamma^+_{x_0}$ está contenido en un compacto y, por tanto, debe existir una sucesión de tiempos $(t_k)_{k\geq 1}$ con $\lim_{k\to\infty} t_k = +\infty$ tal que existe $\lim_{k\to\infty} x(t_k)$. Se tiene así que $\omega(x_0) \neq \emptyset$.

2. En primer lugar, $\omega(x_0)$ es acotado, pues $\omega(x_0) \subset \overline{\Gamma^+_{x_0}}$, siendo $\overline{\Gamma^+_{x_0}}$ un conjunto acotado. En segundo lugar, veamos que $\omega(x_0)$ es cerrado. Para ello, tomemos $(z_n)_{n\geq 1} \subset \omega(x_0)$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$. En ese caso, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe un $t_n \geq n$ tal que $\|x(t_n;x_0) - z_n\| < 1/n$. Se tiene por tanto que $\|x(t_n;x_0) - z\| \leq 1/n + \|z - z_n\|$, y tomando límites cuando $n \to \infty$ obtenemos que $z \in \omega(x_0)$. Acabamos de probar que $\omega(x_0)$ debe ser cerrado.

   En tercer lugar, y para concluir, veamos que $\omega(x_0)$ es conexo. Lo probamos por reducción al absurdo. Tomemos dos abiertos $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^n$ con $\omega(x_0) \subset U_1 \cup U_2$, $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Supongamos además que $\omega(x_0) \cap U_1 \neq \emptyset$, $\omega(x_0) \cap U_2 \neq \emptyset$. Entonces existen $p_i \in \omega(x_0) \cap U_i$ para $i = 1,2$, lo que implica la existencia de sucesiones $(t^i_n)_{n\geq 1} \subset U_i$, $i = 1,2$, tales que $\lim_{n\to\infty} t^i_n = +\infty$ y con $\lim\limits_{n\to\infty} x(t^i_n;x_0) = p_i$. A partir de estas dos sucesiones de tiempos, construiremos a continuación dos subsucesiones de las mismas, $(t^1_{n_k})_{k\geq 1}$ y $(t^2_{m_k})_{k\geq 1}$ de tal forma que

$$t^1_{n_1} < t^2_{m_1} < t^1_{n_2} < t^2_{m_2} < \cdots < t^1_{n_k} < t^2_{m_k}.$$

   Por continuidad de la solución $x(t) = x(t;x_0)$, y como $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, deben existir tiempos t_k tales que

$$\begin{cases} t^1_{n_k} < t_k < t^2_{m_k} \\ x(t_k) \notin (U_1 \cup U_2) \end{cases}$$

   para todo $k \in \mathbb{N}$. Puesto que $\{x(t_k) : k \in \mathbb{N}\} \subset \Gamma_{x_0} \subset \overline{\Gamma_{x_0}}$ es compacto, existirá una subsucesión de tiempos $(t_{k_j})_{j\geq 1}$ de $(t_k)_{k\geq 1}$ y existirá $z^* \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\lim_{j\to\infty} x(t_{k_j}) = z^* \in \mathbb{R}^n \quad \Rightarrow \quad z^* \in \omega(x_0).$$

   Como $x(t_{k_j}) \notin (U_1 \cup U_2)$ para todo $j \in \mathbb{N}$ y como $\mathbb{R}^n \setminus (U_1 \cup U_2)$ es un cerrado necesariamente $z^* \in \mathbb{R}^n \setminus (U_1 \cup U_2)$. Por lo tanto hemos llegado a una contradicción con el hecho de que $\omega(x_0) \subset U_1 \cup U_2$.

3. Probemos que $\omega(x_0)$ es invariante. Tomemos $z \in \omega(x_0)$ y veamos que $\Gamma_z \subset \omega(x_0)$. Por definición de ω-límite, si $z \in \omega(x_0)$ existe una sucesión de tiempos $t_n \to \infty$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} x(t_n; x_0) = \lim_{n\to\infty} x(t_n) = z.$$

Sea $t \in \mathbb{R}$ fijo. Entonces, usando la continuidad del flujo respecto de las condiciones iniciales y las propiedades especiales de las soluciones de los sistemas autónomos (esto es, $x(t+s;0,x_0) = x(t;0,x(s;0,x_0))$),

$$\lim_{n\to\infty} x(t+t_n;x_0) = \lim_{n\to\infty} x(t;x(t_n;x_0)) = x(t;z) \quad \Rightarrow \quad x(t;z) \in \omega(x_0).$$

Por tanto tomando $\widetilde{t}_n = t+t_n$ tenemos una sucesión de tiempos con $\widetilde{t}_n \to \infty$ con $\lim_{n\to\infty} x(\widetilde{t}_n;x_0) = x(t;z)$. Esto significa que $\Gamma_z \subset \omega(x_0)$.

□

Proposición 5.12. *Sea $x' = f(x)$, $f \in C^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Si $\omega(x_0)$ consta de un único punto $\omega(x_0) = \{\xi\}$ con $\xi \in \mathbb{R}^n$ entonces $\lim_{t\to\infty} x(t;x_0) = \xi$ (y así ξ será un punto de equilibrio).*

Demostración. Llamemos $x(t) = x(t;x_0)$. Supongamos que

$$\lim_{t\to\infty} x(t;x_0) \neq \xi.$$

Entonces existiría un $\eta > 0$ y una sucesión de tiempos creciente $(t_k)_{k\geq 1}$ tales que $\|x(t_k) - \xi\| \geq \eta$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Por otro lado, como $\{\xi\} = \omega(x_0)$ debe existir otra sucesión de tiempos creciente $(s_k)_{k\geq 1}$ tal que $\|x(s_k) - x(t_k)\| < \eta/2$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Sin pérdida de generalidad, tras escoger subsucesiones adecuadas, podemos asumir que $t_k < s_k < t_{k+1}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Ahora bien, por continuidad de la solución $x(t)$ necesariamente deben existir tiempos $r_k \in (t_k, s_k)$ tal que $\|x(r_k) - \xi\| = 2\eta/3$. Puesto que $\partial B(\xi, 2/3\eta)$ es un compacto, habrá una subsucesión de (r_k) que denotamos igual tal que $(x(r_k))_{k\geq 1}$ es convergente a algún valor $z \in \partial B(\xi, 2/3\eta)$. Pero entonces $z \in \omega(x_0)$ con $z \neq \xi$, lo cual no es posible por hipótesis. □

Proposición 5.13. *Sea $x' = f(x)$, $f \in C^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$. Supongamos que existe $V \in C^1(U;\mathbb{R})$ con $\nabla V(x) \cdot f(x) \leq 0$ para todo $x \in U$. Entonces, si $K \subset U$ es un cerrado positivamente invariante, para cada $x_0 \in K$ tenemos que $\omega(x_0) \subset \{x \in U : \nabla V(x) \cdot f(x) = 0\}$. (Observar que podemos considerar $K = U = \mathbb{R}^n$).*

Demostración. Como $x_0 \in K$ y K es un cerrado positivamente invariante, es claro que $x(t;x_0) \in K \subset U$ para todo $t \geq 0$ donde esté definida la solución. Y además $\omega(x_0) \subset K \subset U$.

Sea $z \in \omega(x_0)$. Queremos probar que $\nabla V(z) \cdot f(z) = 0$. En efecto, como $z \in \omega(x_0)$, existe una sucesión de tiempos $t_k \to \infty$ tales que

$$\lim_{k\to\infty} x(t_k;x_0) = z \quad \Rightarrow \quad \lim_{k\to\infty} V(x(t_k;x_0)) = V(z).$$

Además la función $V(x(t;x_0))$ es decreciente para $t \geq 0$, por tanto,

$$\lim_{t\to\infty} V(x(t;x_0)) = V(z).$$

Sea ahora $\tau > 0$ fijo, tal que $x(\tau; z)$ esté definida. Entonces

$$V(z) = \lim_{k\to\infty} V(x(t_k + \tau; x_0)) = \lim_{k\to\infty} V(x(\tau; x(t_k; x_0)) = V(x(\tau; z))$$

por la dependencia continua respecto de condiciones iniciales. Se sigue entonces que

$$\lim_{\tau\to 0^+} \frac{V(x(\tau; z)) - V(x(0; z))}{\tau} = \lim_{\tau\to 0^+} \frac{V(x(\tau; z)) - V(z)}{\tau} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(V(x(\cdot; z))\right)|_{t=0} = 0.$$

Concluimos que $\nabla V(x(0; z)) \cdot f(x(0; z)) = \nabla V(z) \cdot f(z) = 0$. □

Usemos el resultado anterior para dar una demostración del Teorema de Lasalle (Teorema 4.34). Recordamos el enunciado y damos su demostración.

Teorema 4.34 (Teorema de Lasalle). *Sea $x' = f(x)$, $f \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$, $f(\overline{x}) = 0$. Sea también $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto con $\overline{x} \in U$, y $V : U \to [0, \infty)$ función de clase C^1 tal que $V(x) = 0$ si y solo si $x = \overline{x}$. Supongamos que $\nabla V(x) \cdot f(x) \leq 0$ para todo $x \in U$ y que además el conjunto*

$$\{x \in U : \nabla V(x) \cdot f(x) = 0\}$$

no contiene ninguna trayectoria, aparte de $\overline{x}$.

1. *Entonces $\overline{x}$ es asintóticamente estable.*
2. *Si además $K \subset U$ es un conjunto compacto con $\overline{x} \in int(K)$ y positivamente invariante, entonces K forma parte de la cuenca de atracción de $\overline{x}$.*

Demostración. Recordamos que por el Teorema de Lyapunov (estabilidad) ya sabemos que $\overline{x}$ es estable. Para ver que es asintóticamente estable, bastará que probemos que $\omega(x_0) = \overline{x}$ para todo $x_0 \in K$ (observar que $\text{int}(K)$ es un abierto que contiene a $\overline{x}$. Pues en ese caso por la Proposición 5.12 se tendrá que $\lim_{t\to\infty} x(t; 0, x_0) = \overline{x}$. Además esto directamente servirá para probar que todo $K \subset A_{\overline{x}}$.

Sea pues $x_0 \in K$. Como K es cerrado y positivamente invariante, es inmediato que $\omega(x_0) \subset K$ con $\omega \neq \emptyset$. Además, por la Proposición 5.13 tenemos que

$$\omega(x_0) \subset \{x \in U : \nabla V(x) = 0\}.$$

Como la Proposición 5.11 nos dice que $\omega(x_0)$ es invariante se sigue que, si tomamos $z \in \omega(x_0)$,

$$\Gamma_z \subset \omega(x_0) \subset \{x \in U : \nabla V(x) = 0\}.$$

Pero por hipótesis tenemos que $\{x \in U : \nabla V(x) = 0\}$ no contiene trayectorias aparte de $\overline{x}$. No queda más remedio que $z = \overline{x}$, o dicho de otro modo hemos probado que

$$\omega(x_0) = \{\overline{x}\}.$$

□

En general el estudio de los conjuntos límite de soluciones suele ser bastante complicado. Sin embargo, y esto será muy importante, en $\mathbb{R}^2$, debido a sus limitaciones topológicas los conjuntos ω y α-límites no podrán ser muy raros. Este será el contenido del Teorema de Poincaré Bendixson (Teorema 5.32) que nos dirá que los conjuntos límites solo podrán ser puntos de equilibrio, órbitas periódicas, o uniones de puntos de equilibrio con curvas abiertas simples que unen puntos de equilibrio.

Simplemente saltando a una dimensión mayor, en $\mathbb{R}^3$, uno puede encontrarse situaciones mucho más complicadas. Como ejemplo el lector puede leer sobre el sistema de Lorenz, donde para ciertos parámetros aparecen conjuntos ω-límites con estructura fractal.

5.1.3. Ecuación de trayectorias

En esta sección hemos preferido hacer una exposición algo más "informal" sobre la ecuación de trayectorias para el caso particular de $\mathbb{R}^2$. Aunque incluiremos en la parte final un resultado general en $\mathbb{R}^n$ (véase el Teorema 5.18) que demuestra que siempre se puede calcular la ecuación de trayectorias, al menos localmente, fuera de los puntos de equilibrio.

Motivaremos el cálculo de la ecuación de trayectorias a través de un ejemplo, y luego haremos una exposición algo más rigurosa de qué significa exactamente este nuevo concepto.

Ejemplo 5.15. Sea el sistema

$$\begin{cases} x' = y(1-x^2-y^2) \\ y' = -x(1-x^2-y^2) \end{cases}.$$

Determinamos en primer lugar el conjunto de puntos de equilibrio $A = \{(0,0)\} \cup \{x^2+y^2=1\}$. Fijemos ahora $(x_0, y_0) \notin A$ y sea $(x(t), y(t))$ la única solución del sistema con condición inicial $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$. Además, por unicidad de soluciones sabemos que $\Gamma_{(x,y)} \cap A = \Gamma_{(x_0,y_0)} \cap A = \emptyset$. Podemos escribir para todo $t \in I_{(x_0,y_0)}$

$$x'(t)(-x(t))(1-x(t)^2-y(t)^2) = y'(t)y(t)(1-x(t)^2-y(t)^2) \quad \Rightarrow \quad -x'(t)x(t) = y'(t)y(t)$$
$$\Rightarrow \quad \int_0^t (x'(s)x(s) + y'(s)y(s))\,ds = \int_0^t 0\,ds \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{x(t)^2}{2} + \frac{y(t)^2}{2}\right) - \frac{x_0^2}{2} - \frac{y_0^2}{2} = 0.$$

Hemos deducido por tanto que

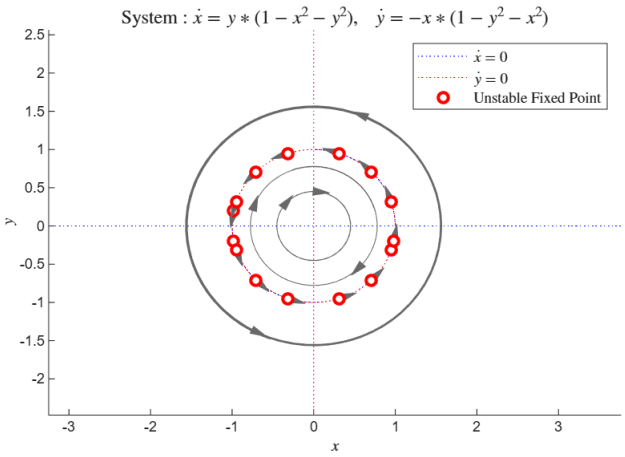
$$x(t)^2 + y(t)^2 = x_0^2 + y_0^2, \quad \forall t \in I_{(x_0,y_0)}.$$

Podemos concluir por tanto que las trayectorias no constantes del sistema son de la forma $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = C\}$ para algún $C \in (0,1) \cup (1,\infty)$. De hecho, si permitimos $C \in \{0,1\}$ la ecuación $x^2+y^2=C$ nos determina todas las trayectorias del sistema (constantes y no constantes). A esta ecuación se le suele llamar ecuación de trayectorias.

Aprovechamos este ejemplo para ver algunas consecuencias interesantes de haber determinado la ecuación de trayectorias.

1. Todos los conjuntos $T_C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = C\}$, donde deben vivir las soluciones, son conjuntos acotados, luego los intervalos de existencia de todas las soluciones son todo $\mathbb{R}$.

2. Por la Propiedad 4 de la sección anterior, una solución $(x(t), y(t))$ con $(x(0), y(0)) \notin A$ debe tener una trayectoria que recorra completamente la curva cerrada simple $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = x(0)^2 + y(0)^2\}$.



3. Podemos determinar fácilmente por la definición la estabilidad del origen $(0,0)$. (También se podría haber visto la estabilidad del origen usando la función de Lyapunov $V(x,y) = x^2/2 + y^2/2$ y aplicando los teoremas correspondientes).

4. Los puntos de equilibrio $\{x^2 + y^2 = 1\}$ son inestables (se deja como ejercicio al lector).

Cálculo general de la ecuación de trayectorias en sistemas planos: Sea el sistema

$$\begin{cases} x'(t) = f_1(x(t), y(t)) \\ y'(t) = f_2(x(t), y(t)) \end{cases} \tag{5.6}$$

donde $f \in C^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$. Buscamos una función $\widetilde{y}(x)$ (o $\widetilde{x}(t)$) de tal forma que si $(x(t), y(t))$ es una solución del sistema, entonces $\widetilde{y}(x(t)) = y(t)$ (o $\widetilde{x}(y(t)) = x(t)$) para todo t donde está definida la solución, y por tanto podamos representar las trayectorias de las soluciones como $(x, \widetilde{y}(x))$ (o como $(\widetilde{x}(y), y)$). Se puede entender esto como una reparametrización de la solución $t \to (x(t), y(t))$. A la igualdad $\widetilde{y}(x) = y$ (o $\widetilde{x}(y) = x$) se le llama *ecuación de trayectorias*.

En general, determinar la ecuación de trayectorias de un sistema plano como (5.6) consiste en lo siguiente: Supondremos que tenemos una solución (x, y) con $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$ y tal que $f(x_0, y_0) \neq 0$ (luego la solución no es constante). Entonces o bien $f_1(x_0, y_0) \neq 0$ o bien $f_2(x_0, y_0) \neq 0$. Supondremos solamente el primer caso. La idea será buscar una función $\widetilde{y} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $\widetilde{y}(x(t)) = y(t)$ para el mayor intervalo posible de tiempos t. Se debe tener que si derivamos respecto de t

$$\frac{d\widetilde{y}}{dx}(x(t))\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\widetilde{y}}{dx} f_1(x(t), y(t)) = f_2(x(t), y(t)).$$

Así, para cada $x = x(t)$ debemos tener

$$\frac{d\widetilde{y}}{dx}(x) f_1(x, \widetilde{y}(x)) = f_2(x, \widetilde{y}(x)) \tag{5.7}$$

Esta ecuación (5.7) no es más que una ecuación diferencial ordinaria de primer orden en la función incógnita $\widetilde{y}(x)$. Si añadimos la condición inicial $\widetilde{y}(x(0)) = y(0)$ y resolvemos explícitamente, tras obtener

la solución $\widetilde{y}(x)$ obtendríamos la ecuación de trayectorias $y = \widetilde{y}(x)$. De hecho, en ocasiones la solución a (5.7) vendrá dada de forma implícita como $g(x, \widetilde{y}(x)) = 0$. La interpretación que debemos hacer es que hemos probado que $\Gamma_{(x_0,y_0)} \subset T := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \widetilde{y}(x)\}$ (o bien $\Gamma_{(x_0,y_0)} \subset \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = 0\}$).

Observación 5.16. A priori, los cálculos anteriores nos permiten asegurar que solamente en un entorno de $t = 0$ (donde la resolución de (5.7)) se tiene que $(x(t), y(t)) \in T$. Sin embargo, en la práctica, en muchas situaciones los cálculos nos permiten asegurar que realmente $\Gamma_{(x_0,y_0)} \subset T$.

Ejemplo 5.17. Calcularemos la ecuación de trayectorias del siguiente sistema

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = y(y - x) \end{cases}.$$

Tenemos

$$\frac{dx}{dt} y(y - x) = \frac{dy}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dt}(y - x) = \frac{dy}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = y - x.$$

En los cálculos anteriores hemos asumido que estamos fuera de los puntos de equilibrio, que son toda la recta $y = 0$, luego dividir por y estaba permitido.

Ahora resolveríamos la EDO $y' = y - x$ que es lineal no homogénea. Su solución general vendrá dada por la suma de la solución general de la EDO homogénea asociada $y' = y$ más una solución particular. Esto es

$$\begin{cases} \text{Solución de la EDO homogénea asociada :} & y_h(t) = Ce^x, \ \ C \in \mathbb{R} \\ \text{Solución particular :} & y_p(t) = x + 1 \end{cases}.$$

Por tanto tenemos que la ecuación de trayectorias viene dada por

$$y(x) = Ce^x + x + 1, \quad C \in \mathbb{R}.$$

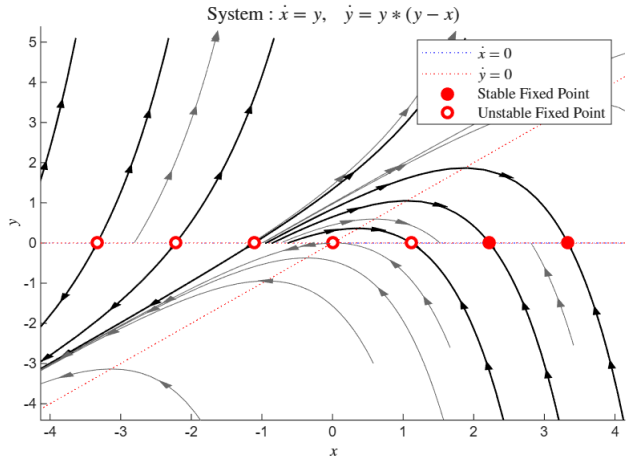
Dicho de otra manera, los conjuntos $T_C = \{(x, Ce^x + x + 1) : x \in \mathbb{R}\}$ con $C \in \mathbb{R}$ determinan las diferentes trayectorias del sistema. De manera más precisa, queremos decir que si $(x(t), y(t))$ es solución no constante en un intervalo $t \in I_{(x,y)}$, entonces existe un único $C \in \mathbb{R}$ tal que $(x(t), y(t)) \in T_C$ para todo $t \in I_{(x,y)}$ (o equivalentemente podríamos haber escrito $\Gamma_{(x,y)} \subset T_C$).

Hacemos constar además que para un mismo $C \in \mathbb{R}$, el conjunto T_C puede ser unión de diferentes trayectorias, incluso incluyendo la posibilidad de que aparezca algún punto de equilibrio, como es el caso de nuestro ejemplo. Por ejemplo T_0 es unión de 3 trayectorias (2 de ellas son curvas abiertas simples y la otra es un punto de equilibrio). O por ejemplo $T_{-1/2}$ es unión de 5 trayectorias (3 de ellas curvas abiertas simples y otras 2 puntos de equilibrio).

Presentamos para finalizar un resultado general, que indica que en sistemas de $\mathbb{R}^n$ siempre es posible obtener la ecuación de trayectorias fuera de los puntos de equilibrio.

Teorema 5.18. *Sea $f \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$ con $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y sea $\overline{x} = (\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n) \in \Omega$ tal que $f(\overline{x}) \neq 0$. Entonces existe $i = 1, \ldots, n$, existe $\varepsilon > 0$ y existe $h : (\overline{x}_i - \varepsilon, \overline{x}_i + \varepsilon) \to \mathbb{R}^n$ tal que $h((\overline{x}_i - \varepsilon, \overline{x}_i + \varepsilon)) \subset \Gamma_{\overline{x}}$ y h resuelve*

$$\begin{cases} h'(\tau) = \left(\dfrac{f_1(h(\tau))}{f_i(h(\tau))}, \ldots, \dfrac{f_n(h(\tau))}{f_i(h(\tau))} \right) \\ h(\overline{x}_i) = \overline{x} \end{cases}.$$



Demostración. Como $f(\overline{x}) \neq 0$, escogemos $i = 1, \ldots, n$ tal que $f_i(\overline{x}) \neq 0$. De esta forma, si llamamos a $x(t; \overline{x})$ a la única solución del sistema $x' = f(x)$ con $x(0; \overline{x}) = \overline{x}$, tenemos

$$x_i'(0; \overline{x}) = f_i(\overline{x}) \neq 0; \quad ; \quad x_i(t; \overline{x}) \in C^1 \quad ; \quad x_i(0, \overline{x}) = \overline{x}_i.$$

Por tanto, el Teorema de la Función Inversa nos dice que existirá una única función $\sigma : (\overline{x}_i - \varepsilon, \overline{x}_i + \varepsilon) \to \mathbb{R}$, tal que $\sigma \in C^1$, $\sigma(\overline{x}_i) = 0$,

$$x_i(\sigma(\tau); \overline{x}) = \tau$$

y

$$\sigma'(\tau) = \frac{1}{x_i'(\sigma(\tau); \overline{x})} = \frac{1}{f_i(x(\sigma(\tau); \overline{x}))}.$$

Definimos $h : (\overline{x}_i - \varepsilon, \overline{x}_i + \varepsilon) \to \Gamma_{\overline{x}} \subset \mathbb{R}^n$ por

$$h(\tau) = x(\sigma(\tau); \overline{x}).$$

Entonces tenemos que

$$h(\overline{x}_i) = x(\sigma(\overline{x}_i); \overline{x}) = x(0, \overline{x}) = \overline{x}.$$

y, además, para cada $j = 1, \ldots, n$,

$$\frac{dh_j}{d\tau}(\tau) = \frac{d}{d\tau} x_j(\sigma(\tau); \overline{x}) = x_j'(\sigma(\tau); \overline{x}) \cdot \sigma'(t) = \frac{f_j(x(\sigma(\tau); \overline{x}))}{f_i(x(\sigma(\tau); \overline{x}))} = \frac{f_j(h(\tau)}{f_i(h(\tau))}.$$

□

5.2. Propiedades específicas de sistemas en $\mathbb{R}^2$

5.2.1. Cambio a coordenadas polares

Dado un sistema

$$\begin{cases} x' = f_1(x, y) \\ y' = f_2(x, y) \end{cases} \qquad f_1, f_2 \in C^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}), \tag{5.8}$$

realizar un cambio a polares significa introducir las funciones $r(t)$, $\theta(t)$ tales que

$$(x(t), y(t)) = (r(t)\cos(\theta(t)), r(t)\,\mathrm{sen}(\theta(t))).$$

Luego la posición de una solución en tiempo t podrá darse con exactitud si conocemos su distancia al origen $r(t) \geq 0$ y su ángulo $\theta(t) \in [0, 2\pi)$ respecto del semieje $\{y = 0, x \geq 0\}$. Si queremos despejar las funciones r y θ en función de x e y podemos escribir (entendemos que la arcotangente toma valores en $(-\pi/2, \pi/2)$.

$$r(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)} \quad ; \quad \theta(t) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y(t)}{x(t)}\right) & x(t) > 0, y(t) \geq 0 \\ \arctan\left(\frac{y(t)}{x(t)}\right) + 2\pi & x(t) > 0, y(t) < 0 \\ \pi/2 & x(t) = 0, y(t) > 0 \\ -\pi/2 & x(t) = 0, y(t) < 0 \\ \arctan\left(\frac{y(t)}{x(t)}\right) + \pi & x(t) < 0 \end{cases}.$$

En ocasiones, y normalmente en sistemas donde el origen es punto de equilibrio, al introducir las nuevas funciones incógnita $(r(t), \theta(t))$, podemos obtener un sistema

$$\begin{cases} r'(t) = g_1(r(t), \theta(t)) \\ \theta'(t) = g_2(r(t), \theta(t)) \end{cases} \tag{5.9}$$

que se puede estudiar más fácilmente que el sistema original (5.8), pudiendo así obtener información que de otro modo hubiera sido más difícil.

Para determinar el sistema (5.9) que satisfacen (r, θ) procedemos como sigue:

- Como $r^2(t) = x^2(t) + y^2(t)$, se tiene que

  $$2r'r = 2x'x + 2y'y = 2\left(f_1(r\cos(\theta), r\,\mathrm{sen}(\theta))r\cos(\theta) + f_2(r\cos(\theta), r\,\mathrm{sen}(\theta))r\,\mathrm{sen}(\theta)\right).$$

  Por tanto

  $$r' = f_1(r\cos(\theta), r\,\mathrm{sen}(\theta))\cos(\theta) + f_2(r\cos(\theta), r\,\mathrm{sen}(\theta))\,\mathrm{sen}(\theta).$$

- Como

  $$\begin{cases} x' = r'\cos(\theta) - r\,\mathrm{sen}(\theta)\theta' = f_1(r\cos(\theta), r\,\mathrm{sen}(\theta)) \\ y' = r'\,\mathrm{sen}(\theta) + r\cos(\theta)\theta' = f_2(r\cos(\theta), r\,\mathrm{sen}(\theta)) \end{cases},$$

  tenemos que

  $$y'\cos(\theta) - x'\,\mathrm{sen}(\theta) = r^2\theta' = f_2(r\cos(\theta), r\,\mathrm{sen}(\theta))\cos(\theta) - f_1(r\cos(\theta), r\,\mathrm{sen}(\theta))\,\mathrm{sen}(\theta).$$

  Por tanto

  $$\theta' = \frac{1}{r^2} f_2(r\cos(\theta), r\,\mathrm{sen}(\theta))\cos(\theta) - f_1(r\cos(\theta), r\,\mathrm{sen}(\theta))\,\mathrm{sen}(\theta).$$

Ejemplo 5.19. Sean los sistemas

$$(P1)\ \begin{cases} x' = y + x(x^2 + y^2) \\ y' = -x + y(x^2 + y^2) \end{cases} \quad ; \quad (P2)\ \begin{cases} x' = y - x(x^2 + y^2) \\ y' = -x - y(x^2 + y^2) \end{cases}$$

Nuestro objetivo es estudiar la estabilidad del origen de ambos sistemas. Nos centramos primero en $(P1)$. Lo primero que hay que darse cuenta es que linealizar no nos sirve de nada. Sí que sacaríamos información si usamos la función de Lyapunov $V(x,y) = x^2/2 + y^2/2$, pero vamos a estudiar el sistema haciendo el cambio a polares.

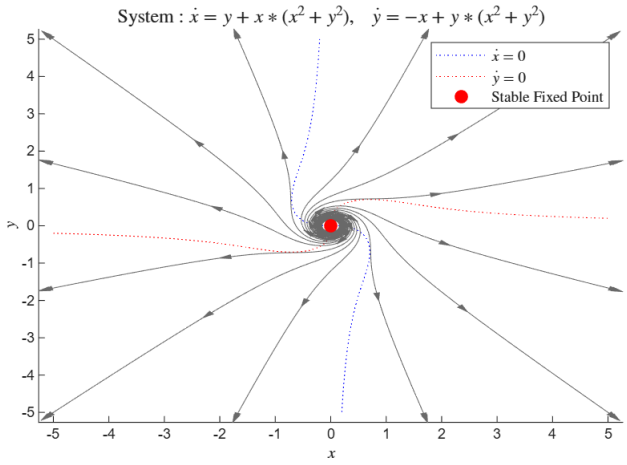
El sistema en polares es (usando que $r^2 = x^2 + y^2$, $\theta = \arctan(y/x)$)

$$\begin{cases} r'r = xx' + yy' = x(y + x(x^2+y^2)) + y(-x + y(x^2+y^2)) = r^4 \\ \theta' = \dfrac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot \dfrac{y'x - yx'}{x^2} = \dfrac{1}{r^2}(-x^2 + xy(x^2+y^2) - y^2 - yx(x^2+y^2)) = \dfrac{-r^2}{r^2} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} r'(t) = r^3(t) \\ \theta'(t) = -1 \end{cases}$$

Tenemos que la única solución al sistema anterior con $r(0) = r_0$, $\theta(0) = \theta_0$, es

$$r(t) = \frac{1}{\sqrt{1/r_0^2 - 2t}} \quad ; \quad \theta(t) = -t + \theta_0.$$

Observamos que $r(t)$ es siempre creciente, luego se deduce en particular que el $(0,0)$ es inestable. Además cuando $t \to 1/r_0^2$ se tiene explosión de la solución, y cuando $t \to -\infty$ las soluciones convergen al $(0,0)$. Por último, las trayectorias se mueven en forma de espirales a lo largo del origen en el sentido horario de las agujas del reloj.



Si hubiésemos estudiado $(P2)$ habríamos llegado al sistema en polares

$$\begin{cases} r'(t) = -r^3(t) \\ \theta'(t) = -1 \end{cases},$$

en el que el origen sería un punto globalmente asintóticamente estable, con todas soluciones convergiendo a él en espiral en el sentido de las agujas del reloj.

El siguiente ejemplo, más allá de servir para seguir practicando los cambios a coordenadas polares, nos muestra una situación en la que un punto de equilibrio (el $(1,0)$ no será estable, y sin embargo para todo $x_0 \neq 0$ se tiene que $\lim_{t\to\infty} x(t;0,x_0) = (1,0)$).

Ejemplo 5.20. Sea el sistema

$$\begin{cases} x' = (x-y)\sqrt{x^2+y^2} + (xy - x^3 - xy^2) \\ y' = (x+y)\sqrt{x^2+y^2} - (x^2 + x^2y + y^3) \end{cases}$$

- Se deja como ejercicio al lector que el $(1,0)$ y el origen son los únicos puntos de equilibrio.

- Realizando el cambio a coordenadas polares (omitiremos el punto $(0,0)$que ya sabemos es punto de equilibrio) se tiene

$$\begin{cases} rr' = xx' + yy' = r^3 - r^4 \\ \theta' = r - x = r(1-\cos(\theta)) = 2r\,\mathrm{sen}^2(\theta/2) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} r' = r^2(1-r) \\ \theta' = r(1-\cos(\theta)) \end{cases}.$$

  De hecho es fácil ver que las soluciones giran siempre en sentido antihorario, hasta que convergen en el infinito a ángulo cero. Y que $\lim_{t\to\infty} r(t) = 1$. Es decir, toda solución (x,y) con $(x(0),y(0)) \neq (0,0)$ satisface que

$$\lim_{t\to\infty} (x(t),y(t)) = (1,0).$$

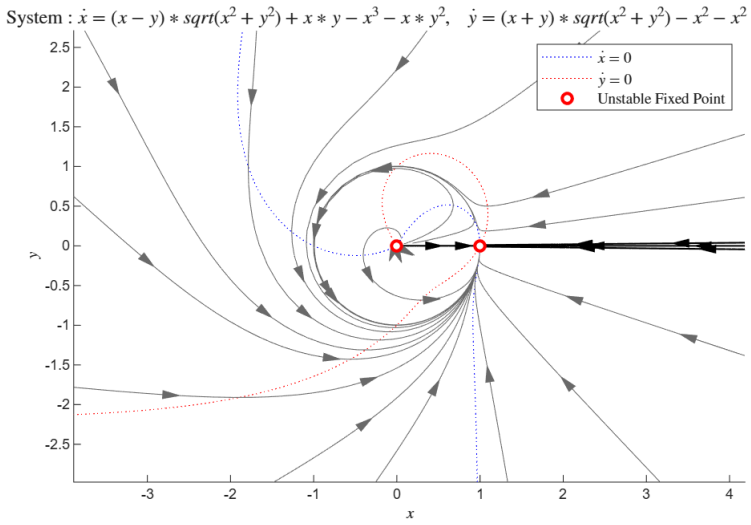
- Observemos que la semirrecta $\{y=0, x>0\}$ es invariante pues está formada por tres trayectorias diferentes: $\{y=0, x\in(0,1)$, $\{(0,0)\}$ y $\{y=0, x>1\}$.

- Cualquier solución (x,y) con $y(0)>0$ y con $x(0)>0$ en algún momento $t>0$ satisface que $x(t)<0$ y por tanto $\|(x(t),y(t))-(1,0)\| \geq 1$. Este hecho nos indica que realmente el $(1,0)$ es un punto inestable (a pesar de que toda solución del sistema converge a él).

- Veamos esto que el punto $(\mathbf{1},\mathbf{0})$ es inestable en detalle: Podemos escoger cualquier $\varepsilon_0 \in (0,1/2)$, y entonces para cualquier $\delta>0$ tomamos el punto $(1,\delta/2) \in B((1,0),\delta)$. Si llamamos $(x(t),y(t))$ a la única solución con $(x(0),y(0)) = (x_0,y_0)$ sabemos que existe $t^*>0$ con $x(t^*)<0$ por lo que

$$\|(x(t^*),y(t^*))-(1,0)\| \geq |x(t^*)-1| > 1 \geq \varepsilon_0,$$

  con lo que hemos acabado.



5.2.2. Criterios de no existencia de órbitas periódicas

Los resultados que veremos en esta sección serán únicamente válidos en sistemas planos, pues el papel de la topología de $\mathbb{R}^2$ será determinante. En concreto estudiaremos dos criterios (Teoremas 5.23 y 5.28) que nos ayudarán a asegurar la no existencia de órbitas periódicas en sistemas planos. Será esencial trabajar en $\mathbb{R}^2$ pues necesitaremos usar el famoso Teorema de Jordan-Schönflies que enunciamos a continuación.

Teorema 5.21 (Teorema de Jordan-Schönflies)**.** *Sea $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ una curva cerrada simple. Entonces el complemento $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ tiene exactamente dos componentes conexas, Ω y Ω', cuya frontera común es la propia curva Γ. Además, Ω es acotada (se denomina interior de Γ, y escribiremos $\Gamma^{int} = \Omega$) y Ω' es no acotada (se denomina exterior de Ω, y escribiremos $\Gamma^{ext} = \Omega'$).*

Además $\Gamma^{int} \cup \Gamma = \overline{\Omega}$ es un compacto homeomorfo a la bola unidad cerrada. Esto es, existe un homeomorfismo $h : \overline{\Omega} \to \overline{B(0,1)}$.

Comenzaremos con el criterio negativo de Bendixson.

Definición 5.22. Un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ se dice *simplemente conexo* si es conexo por caminos y además toda aplicación continua $g : [0,1] \to \Omega$ con $g(0) = g(1) = q$ es contractible a q, esto es, que existe una aplicación continua $H : [0,1] \times [0,1] \to \Omega$ con $H(t,0) = g(t)$, $H(t,1) = 1$ para todo $t \in [0,1]$.

De manera algo más informal se puede decir que un abierto del plano es simplemente conexo si no contiene "agujeros". Por ejemplo, $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ no es simplemente conexo, pero el disco partido $\Omega = B(0,1) \setminus ([0,1] \times \{0\})$ sí que lo es.

Teorema 5.23 (Criterio negativo de Bendixson)**.** *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un abierto simplemente conexo y sea $f = (f_1, f_2) \in C^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$. Supongamos que*

$$div(f(x,y)) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y)$$

tiene signo constante y no es idénticamente nula en Ω. Entonces el sistema autónomo $(x', y') = f(x,y)$ no posee ninguna órbita periódica en Ω.

Para la demostración necesitaremos usar el Teorema de Green, que enunciamos sin demostración a continuación.

Teorema 5.24 (Teorema de Green)**.** *Sea $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ una curva cerrada simple parametrizada por cierta función $g : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ de clase C^1 y que se recorre en el sentido de las agujas del reloj (orientada negativamente). Sea $D = \Gamma^{int} \subset \mathbb{R}^2$ la región abierta delimitada por la curva Γ. Sea $F = (P,Q) : U \to \mathbb{R}^2$ un campo vectorial de clase C^1 con $U \subset \mathbb{R}^2$ abierto tal que $\overline{D} \subset U$. Entonces*

$$\int_\Gamma (P,Q) \cdot dr = \int_D \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) dxdy$$

Observación 5.25. Precisemos algunos aspectos del enunciado anterior.

- La integral de línea de un campo $F = (P,Q)$ se define como

$$\int_\Gamma (P,Q) \cdot dr = \int_0^1 (P(g(t)), Q(g(T))) \cdot g'(t) dt$$

donde $g : [0,1] \to \Gamma$ es una parametrización.

- En el caso de que Γ esté positivamente orientada, conseguiremos que lo esté reparametrizando por $h(t) = g(1-t)$ y así
$$\int_{\Gamma_g} (P,Q)\cdot dr = -\int_{\Gamma_h} (P,Q)\cdot dr,$$
donde Γ_g y Γ_h denotan la curva Γ parametrizada por g o por h respectivamente,

Demostración del Teorema 5.23. Supongamos que existe una solución $(x(t), y(t))$ periódica con trayectoria $\Gamma = \Gamma_{(x_0,y_0)} \subset \Omega$. Supongamos que $T > 0$ es el periodo minimal de la solución y así $(x,y) : [0,T] \to \Omega$ es de clase C^1 con $(x(0), y(0)) = (x(T), y(T))$ y con
$$\{(x(t), y(t)) : t \in [0,T]\} = \Gamma.$$
Observemos también que por ser Ω simplemente conexo $D := \Gamma^{int}$ está totalmente contenido en Ω, es decir, $\overline{D} \subset \Omega$. En lo que sigue, quedará claro que nos dará igual si Γ es recorrido por $(x(t), y(t))$ en el sentido de las agujas del reloj o no.

Definimos ahora el campo vectorial $F = (P,Q) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ como
$$\begin{cases} P(x,y) = -f_2(x,y) \\ Q(x,y) = f_1(x,y) \end{cases} \qquad \forall (x,y) \in \Omega.$$
Tenemos que $F \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^2)$. Así, aplicamos el Teorema de Green y podemos escribir (en función de si la curva está orientada positivamente o negativamente,
$$\int_\Gamma (P,Q)\cdot dr = \pm \int_D \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) dxdy,$$
donde
$$\begin{aligned} \int_\Gamma (P,Q)\cdot dr &= \int_\Gamma (-f_2, f_1)\cdot dr = \int_0^T (-f_2(x(t),y(t)), f_1(x(t),y(t)))\cdot (x'(t), y'(t))\, dt \\ &= \int_0^T (-y'(t), x'(t))\cdot (x'(t), y'(t))\, dt = \int_0^T (-x'(t)y'(t) + x'(t)y'(t))\, dt = 0. \end{aligned}$$
y
$$\begin{aligned} \pm \int_D \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) dxdy &= \pm \int_D \left(-\frac{\partial f_2}{\partial y} - \frac{\partial f_1}{\partial x}\right) dxdy \\ &= \pm \int_D \operatorname{div} f(x,y)\, dxdy. \end{aligned}$$
Se deduce pues que $\int_D \operatorname{div} f(x,y)\, dxdy = 0$, lo cual es imposible pues por hipótesis tenemos que la divergencia debía tener signo constante en Ω, y en particular en $D \subset \Omega$. ¡Contradicción!. Concluimos por tanto que no deben existir órbitas periódicas. □

Observación 5.26. El criterio negativo de Bendixson admite la siguiente variante, conocida como criterio negativo de Bendixson-Dulac. Esta versión establece que basta saber que una región simplemente conexa $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ existe una función $\varphi \in C^1(\Omega)$ tal que $\operatorname{div}(f\varphi)(x,y)$ tiene signo constante (y no es idénticamente nula), para concluir que el sistema $(x', y') = f(x,y)$ no posee ninguna órbita periódica en Ω.

La demostración de esta variante es esencialmente la misma que la del Teorema 5.23, y por tanto se deja como ejercicio al lector comprobar los detalles.

Ejemplo 5.27. Consideremos el sistema

$$\begin{cases} x' = -y - x + x(x^2+y^2) = f_1(x,y) \\ y' = x - y + y(x^2+y^2) = f_2(x,y). \end{cases}$$

Sea $f = (f_1, f_2) \in C^\infty(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^2)$. Tenemos que el origen es el único punto de equilibrio y que

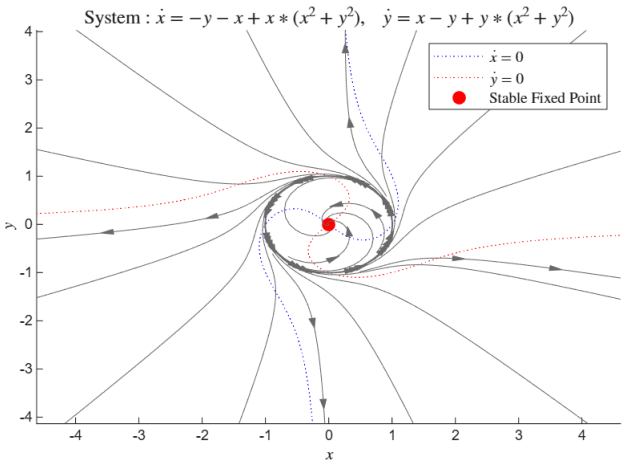
$$\text{div} f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) = -1+3x^2+y^2-1+x^2+3y^2 = 4(x^2+y^2-1/2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2+y^2 = 1/2.$$

Podemos concluir los siguientes hechos:

- En la región abierta y simplemente conexa $\Omega_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 1/2\}$ tenemos que $\text{div} f < 0$, luego por el Criterio negativo de Bendixson (Teorema 5.23) sabemos que en Ω_1 no hay órbitas periódicas.
- En la región abierta $\Omega_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 > 1/2\}$ tenemos que $\text{div} f > 0$, pero Ω_2 no es simplemente conexo luego no sabemos si habrá órbitas periódicas o no las habrá en esa región.
- Por otro lado, si consideramos la función de Lyapunov

  $$V(x,y) = x^2/2 + y^2/2 \quad \Rightarrow \quad \dot{V}(x,y) = (x^2+y^2)(x^2+y^2-1).$$

  Por tanto $\dot{V}(x,y) < 0$ para todo $(x,y) \in B(0,1) \setminus (0,0)$. Por el Teorema de Lyapunov 4.33 tenemos que $(0,0)$ será asintóticamente estable, y que además $B(0,1)$ forma parte de la cuenca de atracción del origen.



Para concluir esta sección veamos un resultado más acerca de la posible existencia de órbitas periódicas en sistemas planos. Siendo más precisos, el siguiente teorema asegurará la existencia de puntos de equilibrio dentro de órbitas periódicas. Pero ese enunciado tiene el corolario inmediato de que si no hay puntos de equilibrio en un sistema plano, es que no puede haber órbitas periódicas. De nuevo este resultado se basa de manera crucial en la topología restrictiva de $\mathbb{R}^2$.

Teorema 5.28. *Dado un sistema $x' = f(x)$, $f \in C^1(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^2)$, entonces toda órbita periódica no constante Γ posee en su interior un punto de equilibrio.*

Para demostrar este resultado, aparte de necesitar usar el potente resultado de Jordan-Schönflies, necesitaremos usar el Teorema del punto fijo de Brouwer, que enunciamos a continuación.

Teorema 5.29 (Teorema del punto fijo de Brouwer[4])**.** *Toda aplicación continua de una bola cerrada de un espacio euclídeo en sí misma admite un punto fijo.*

Demostración del Teorema 5.28. Tenemos que Γ es una curva de Jordan (curva cerrada simple). Entonces el Teorema de Jordan nos dice que $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma = \Gamma^{ext} \cup \Gamma^{int}$, siendo Γ^{ext} un abierto conexo no acotado y Γ^{int} un abierto conexo acotado. Pero sabemos más. Por el Teorema de Jordan-Schönflies también se tiene que

$$K = \Gamma \cup \Gamma^{int}$$

es un compacto homeomorfo a la bola unidad cerrada $\overline{B(0,1)}$.

Sea ahora $t > 0$, que entenderemos durante todo el presente párrafo, y sea $\varphi^t : K \to K$ definida por $\varphi^t(y) = x(t;y)$. Por las propiedades de continuidad del flujo (dependencia continua respecto de las condiciones iniciales) se tiene que φ^t es una función continua. Como K es homeomorfo a la bola unidad cerrada $\overline{B(0,1)}$ por el Teorema del punto fijo de Brouwer existirá al menos un punto fijo $\varphi^t(x_t) = x_t$ para algún $x_t \in K$.

Tomemos una sucesión de tiempos decreciente $(t_n)_{n\geq 1}$ con $\lim_{n\to\infty} t_n = 0$ y para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $x_n \in K$ tal que $\varphi^{t_n}(x_n) = x_n$. Se observa que necesariamente Γ_{x_n} es necesariamente una órbita periódica de periodo (quizás no minimal) $t_n \geq 0$. Como K es compacto, existe una subsucesión $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ convergente

$$\overline{x} = \lim_{k\to\infty} x_{n_k} \in K.$$

Probaremos que $\overline{x}$ es un punto de equilibrio viendo que para todo $t \in \mathbb{R}$, $\varphi^t(\overline{x}) = \overline{x}$. En efecto, sea $t \in \mathbb{R}$ fijo. Entonces para todo $k \in \mathbb{N}$, como $\Gamma_{x_{n_k}}$ es una órbita periódica de periodo t_{n_k}, existirá una sucesión de tiempos $0 \leq s_{t,k} < t_{n_k}$ tal que $\varphi^{s_{t,k}}(x_{n_k}) = \varphi^t(x_{n_k})$. Así

$$\varphi^t(\overline{x}) = \lim_{k\to\infty} \varphi^t(x_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} \varphi^{s_{t,k}}(x_{n_k}) = \varphi(0,\overline{x}) = \overline{x},$$

donde en el penúltimo paso se está usando que $s_{t,k} \to 0$, pues $t_{n_k} \to 0$, cuando $k \to \infty$, y la dependencia continua del flujo respecto de las condiciones iniciales.

Por tanto se ha probado que existe $\overline{x} \in K = \Gamma \cup \Gamma^{\text{int}}$. Sin embargo $x \notin \Gamma$, pues esta ya era la trayectoria de una órbita periódica, que por unicidad no puede contener puntos de equilibrio. □

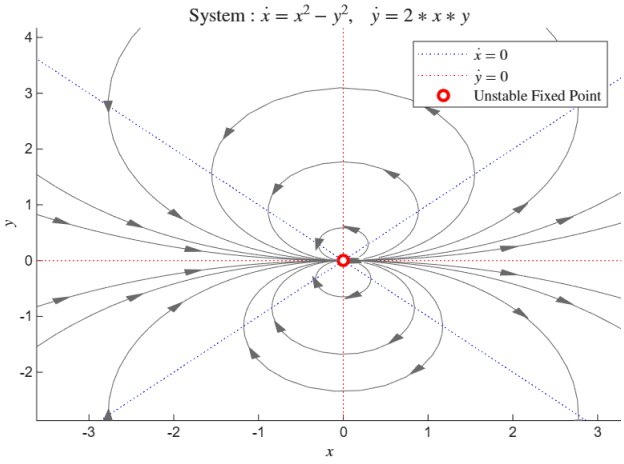
Observación 5.30. El teorema anterior no es válido si, en vez de una órbita periódica, se tiene una curva homoclínica que conecta un punto de equilibrio $\xi \in \mathbb{R}^n$ consigo mismo. Pudiera ser en ese caso que no haya puntos de equilibrio en el interior de la curva cerrada simple que genera la unión de la órbita homoclínica con el punto de equilibrio ξ. Considérese, por ejemplo:

$$\begin{cases} x' = x^2 - y^2 \\ y' = 2xy \end{cases}$$

[4]Una generalización de este resultado sería el Teorema del punto fijo de Schauder: *Toda aplicación continua de un convexo compacto no vacío de un espacio de Banach tiene un punto fijo.*

donde la ecuación de las trayectorias viene dada por

$$x^2 + (y - C)^2 = C^2, \quad C \in \mathbb{R}.$$



Corolario 5.31. *Sea un sistema $x' = f(x)$ con $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ tal que no tiene ningún punto de equilibrio. Entonces el sistema no posee soluciones periódicas.*

5.2.3. Teorema de Poincaré -Bendixson.

Teorema 5.32 (Teorema de Poincaré-Bendixson)**.** *Sea $x' = f(x)$ con $f \in C^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$, $x_0 \in \mathbb{R}^2$. Si $\Gamma^+_{x_0}$ (análogo si $\Gamma^-_{x_0}$ es acotada) es acotada y $\omega(x_0)$ contiene a lo sumo una cantidad finita de puntos de equilibrio entonces se da una sola de las siguientes alternativas:*

1. *$\omega(x_0)$ es un punto de equilibrio.*
2. *$\omega(x_0)$ es una órbita periódica.*
3. *$\omega(x_0)$ contiene una cantidad finita de puntos de equilibrio $\{x_1, \ldots, x_m\}$ y una cantidad finita de órbitas Γ_y que serán curvas abiertas simples (órbitas homoclínicas o heteroclínicas) que conectan puntos de equilibrio entre sí (es decir, $\alpha(y), \omega(y) \in \{x_1, \ldots, x_m\}$).*

Un corolario inmediato de este teorema sería.

Corolario 5.33 (Teorema de Poincaré-Bendixson)**.** *Sea $x' = f(x)$ con $f \in C^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$, $x_0 \in \mathbb{R}^2$. Si $\Gamma^+_{x_0}$ es acotada (análogo para $\Gamma^-_{x_0}$ acotada) y $\omega(x_0)$ no contiene puntos de equilibrio, entonces $\omega(x_0)$ es una curva cerrada simple que viene de la trayectoria de una órbita periódica.*

Solo veremos la demostración de este último corolario, siendo la demostración del Teorema 5.32 mucho más difícil.

Demostración. Supongamos que $\Gamma^+_{x_0}$ no contiene puntos de equilibrio. Si $x(t) = x(t; x_0)$ es una solución periódica, es claro que $\omega(x_0) = \Gamma^+_{x_0}$ y hemos acabado. Por tanto, asumamos que $x(t)$ no es periódica, o lo que es lo mismo, que $\Gamma^+_{x_0}$ no es una curva cerrada simple.

Tomemos $p \in \omega(x_0) \neq \emptyset$, que sabemos que no es un punto de equilibrio. Obsérvese que por la Proposición 5.11 3., esto es, por la invarianza de $\omega(x_0)$, se debe tener que $\omega(p) \subset \omega(x_0)$.

(1) Probemos que dado $q \in \omega(p)$, este punto forma parte de una órbita periódica. De esta forma tendremos que existe una órbita periódica $S = \omega(p) \subset \omega(x_0)$

En primer lugar, como $\omega(x_0)$ no contiene puntos de equilibrio y como para todo $p \in \omega(x_0)$, por invarianza, se tiene $\omega(p) \subset \omega(x_0)$, se tiene que $q \in \omega(p) \subset \omega(x_0)$ no puede ser un punto de equilibrio, ya que $\omega(x_0)$ no contenía puntos de equilibrio.

Sabiendo que q no es un punto de equilibrio consideramos un segmento transversal $[P, Q]$ que contenga a q en su interior. Esto es, $(P - Q) \cdot f(q) = 0$ y además tomamos $v = f(q)/\|f(q)\|$ de tal forma que $f(x) \cdot v > 0$ para todo $x \in [P, Q]$. La continuidad de f nos permite escoger este segmento $[P, Q]$ tan pequeño como necesitemos y satisfaciendo la propiedad anterior.

Ahora probaremos que existe una sucesión de tiempos $(t_k)_{k\geq 1}$ tal que $P_k = x(t_k; p) \subset \omega(x_0) \cap [P, Q]$. Sin embargo, veremos también que necesariamente todos los P_k son iguales, es decir, $P_k = q \in [P, Q] \cap \omega(x_0)$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Luego $x(t; p)$ debe ser una órbita periódica. Definiremos $S = \{x(t; p) : t \in \mathbb{R}\}$. Veamos en detalle todo lo expuesto en este párrafo.

- Es fácil ver que como $q \in \omega(p)$, existe una sucesión de tiempos s_k creciente con $s_k \to \infty$ y tal que $x(s_k; p)$ se encuentra en un entorno pequeño de q. Se deja como ejercicio al lector que necesariamente (puesto que q no es punto de equilibrio y está en el interior del segmento $[P, Q]$), deberá existir otra sucesión de tiempos $(t_k)_{k\geq 1}$ también creciente y convergente a infinito, muy cerca de la sucesión $(s_k)_{k\geq 1}$ y tal que $x(t_k; p) \in [P, Q]$.
- Probemos que si $\omega(x_0) \cap [P, Q] \neq \emptyset$, entonces $\omega(x_0) \cap [P, Q]$ es un único punto.

  Supongamos que hubiese dos puntos $q_1 \neq q_2 \in \omega(x_0) \cap [P, Q]$. Recordemos que $f(p), f(q) \neq 0$, con una idea parecida a la del punto anterior, podríamos encontrar una sucesión de tiempos $(t_k)_{k\geq 1}$ tal que

$$x(t_{2k}; x_0) = q_{1,k} \in [P, Q] \quad ; \quad x(t_{2k+1}; x_0) = q_{2,k} \in [P, Q]$$

  con $q_{1,k} \to q_1$ y $q_{2,k} \to q_2$ cuando $k \to \infty$. Pero esto es imposible, porque al estar en $\mathbb{R}^2$ disponemos del Teorema de Jordan. Más en concreto, si lo anterior fuese cierto, encontraríamos tres tiempos $t_k < t_{k+1} < t_{k+2}$ de tal forma que no están ordenados en el segmento $[P, Q]$. Esto es,

$$\begin{cases} (P - Q) \cdot (x(t_{k+1}; p) - x(t_k; p)) > 0 \\ (P - Q) \cdot (x(t_{k+2}; p) - x(t_{k+1}; p)) < 0 \end{cases}$$

  (o viceversa cambiando los signos). Teniendo en cuenta que las trayectorias de las soluciones solo cruzan el segmento $[P, Q]$ en un sentido, el interior de la curva cerrada simple

$$\Gamma = \{x(t; p) : t \in [t_k, t_{k+1}]\} \cup [x(t_k; p), x(t_{k+1}; p)]$$

  sería positivamente invariante o negativamente invariante, en función del caso. Pero si resulta negativamente invariante tenemos que $x(t_{k+1} + \epsilon; p) \in \Gamma^{\text{ext}}$ para cierto $\epsilon > 0$ con $t_{k+1} + \varepsilon < t_{k+2}$. Luego es imposible que $x(t_{k+2}; p)$ vuelva a tocar al segmento $[P, Q]$ desde Γ^{int}, porque usamos el Teorema de Jordan, y porque se contradecería la unicidad de soluciones la invarianza negativa de Γ^{int}. En el caso de que la región Γ^{int} sea negativamente invariante el razonamiento es análogo, ahora con $x(t_{k+1} + \varepsilon; p) \in \Gamma^{\text{int}}$.

(2) Probemos, para acabar, que necesariamente $\omega(x_0) = S$.

Recordemos que por el punto anterior que ya sabemos que existe una órbita periódica $S \subset \omega(x_0)$. Analizamos la situación en función de la posición de x_0 respecto de S. Observemos que S es una curva cerrada simple (curva de Jordan). Si $x_0 \in S$ es fácil concluir que $\Gamma_{x_0} = S$ y hemos acabado.

- $x_0 \in S^{\text{ext}}$. Tomando $p \in S \subset \omega(x_0)$ podemos tomar un segmento $[P, Q]$ con p en su interior y tal que sea transversal al campo $f(p)$, esto es $(P - Q) \cdot f(p) = 0$ y con $f(p) \cdot f(x) > 0$ para todo $x \in [P, Q]$. Como hicimos anteriormente, usando que $p \in \omega(x_0)$, encontramos una sucesión de tiempos creciente $t_k \to \infty$ tal que $x(t_k; x_0) \in [P, Q]$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y con $t_k \to \infty$ y $x(t_k; x_0) \to p$. Necesariamente, el orden de los puntos $\{x(t_k; x_0)\}_{k\in\mathbb{N}}$ dentro del segmento $[P, Q]$ debe ser monótono, acercándose al punto $p \in [P, Q]$. Esto obliga a que la parte interior de todas las siguientes curvas cerradas simples sean positivamente invariante para todo $k \in \mathbb{N}$.

$$\Gamma_k = \{x(t; p) : t \in [t_k, t_{k+1}]\} \cup [x(t_k; x_0), x(t_{k+1}; x_0)]$$

Llamemos

$$R_k = \Gamma_k^{\text{int}} \setminus S.$$

Es claro que $\omega(x_0) \subset \overline{R_k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y nos falta por asegurar que $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} \overline{R_k} = S$, para concluir que $\omega(x_0) \subset S \subset \omega(x_0)$, y así $\omega(x_0) = S$.
La idea sería tomar un $q = x(t_k; x_0) \in [P, Q]$, si llamamos $T > 0$ al periodo de la solución periódica que pasa por $p \in S$, dado ε, por continuidad del flujo respecto del tiempo y de las condiciones iniciales, podemos encontrar $\delta > 0$ tal que si $\|p - q\| < \delta$ entonces

$$\|x(t; q) - x(t; p)\| < \varepsilon \quad \forall t \in [0, T].$$

Puesto que $x(t_k, x_0) \to p$, podemos afirmar que para todo $\varepsilon > 0$,

$$\omega(x_0) \subset \{x \in \mathbb{R}^2 : \operatorname{dist}(x, S) < \varepsilon\},$$

y así $\omega(x_0) \subset S$, y hemos acabado.

□

Ejemplo 5.34. El sistema

$$\begin{cases} x' = -y - \left(\dfrac{x^4}{4} - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{2}\right)(x^3 - x) \\ y' = x^3 - x - \left(\dfrac{x^4}{4} - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{2}\right) y \end{cases}$$

posee tres puntos de equilibrio $\{(0,0), (1,0), (-1,0)\}$. Los puntos $(1,0), (-1,0)$ son fuentes (se comprueba por linealización) y el $(0,0)$ es un punto de silla. De hecho existen dos órbitas homoclínicas Γ_1, Γ_2 que "salen y llegan" del $(0,0)$ y rodean los puntos $(1,0)$ y $(-1,0)$ respectivamente. De esta forma $\Gamma_1 \cup \{(0,0)\}$ y $\Gamma_2 \cup \{(0,0)\}$ generan dos curvas cerradas simples. Estas curvas Γ_1, Γ_2 actúan como la variedad estable e inestable del $(0,0)$, que es un punto de silla.

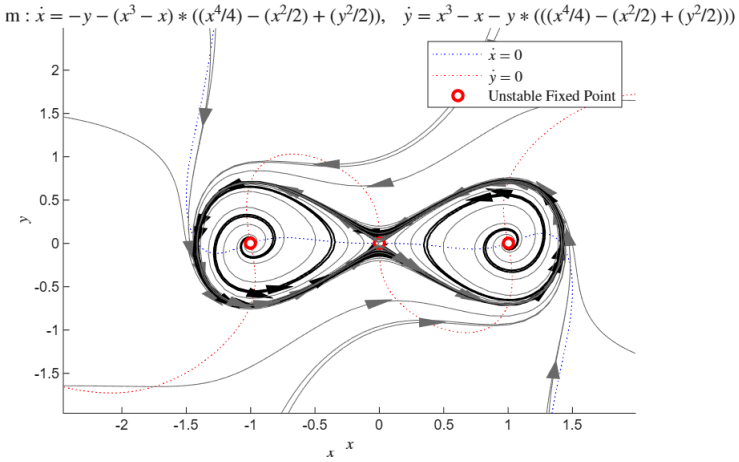
Resulta que para cualquier $x_0 \notin \overline{(\Gamma_1 \cup \{(0,0)\})^{\text{int}}} \cup \overline{(\Gamma_2 \cup \{(0,0)\})^{\text{int}}}$ se tiene que

$$\omega(x_0) = \Gamma_1 \cup \{(0,0)\} \cup \Gamma_2$$

Y si $x_0 \in (\Gamma_1 \cup \{(0,0)\})^{\text{int}}$ o $x_0 \in (\Gamma_2 \cup \{(0,0)\})^{\text{int}}$ se tiene que

$$\begin{cases} \omega(x_0) = \Gamma_1 \cup \{(0,0)\} \\ \alpha(x_0) = (1,0) \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} \omega(x_0) = \Gamma_2 \cup \{(0,0)\} \\ \alpha(x_0) = (-1,0) \end{cases}$$

respectivamente.



Es esencial entender que el Teorema de Poincaré-Bendixson solo es válido para dimensión $n = 2$. En dimensiones mayores los conjuntos ω-límites pueden ser muy extraños (véase el sistema de Lorenz).

Una aplicación muy útil del Teorema de Poincaré-Bendixson es probar la existencia de órbitas periódicas en ciertas regiones.

Corolario 5.35. *Sea $x' = f(x)$, $f \in C^1(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^2)$. Sea $K \subset \mathbb{R}^2$ compacto positivamente invariante sin puntos de equilibrio. Entonces K contiene una órbita periódica. De hecho si $x_0 \in K$, o bien $\omega(x_0) = \Gamma_{x_0}$ es directamente una órbita periódica, o bien $x(t;x_0)$ se acerca en espiral a una órbita periódica (no constante) cuando $t \to \infty$.*

Ejemplo 5.36. Analizaremos en detalle el comportamiento de las soluciones y de las correspondientes trayectorias del sistema siguiente.

$$\begin{cases} x' = y = f_1(x,y) \\ y' = -x + y(1 - x^2 - 2y^2) = f_2(x,y) \end{cases} \qquad f = (f_1, f_2)$$

El único punto de equilibrio es el $(0,0)$. Si linealizamos en él obtenemos

$$Df(x,y) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1-2xy & 1-x^2-6y^2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad Df(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \sigma(Df(0,0)) = \{1/2 \pm (\sqrt{3}/2)i\}.$$

Por los principios de linealización estamos ante un punto inestable, de hecho una fuente (pues ambos autovalores tienen parte real positiva).

Construyamos a continuación un anillo en torno al origen que sea positivamente invariante. Para ello consideramos la función de Lyapunov

$$V(x,y) = x^2 + y^2.$$

Observamos que

- Si $V(x,y) \geq 1$ entonces $\nabla V(x,y) \cdot f(x,y) = 2y^2(1-x^2-2y^2) = 2y^2(1-x^2-y^2) \leq 0$.
- Si $V(x,y) \leq 1/2$ entonces $\nabla V(x,y) \cdot f(x,y) = 2y^2(1-x^2-2y^2) = 2y^2(1-2x^2-2y^2)+2y^2x^2 \geq 0$.

Veamos que esto nos permite probar que el conjunto compacto $K = \{\overline{B(0,1)} \setminus B(0,1/\sqrt{2})$ es positivamente invariante. En efecto por reducción al absurdo supongamos que para alguna solución $(x(t),y(t))$ tal que $(x(0),y(0)) \in K$ tenemos que existe $t^* > 0$ con $(x(t^*),y(t^*)) \notin \overline{B(0,1)}$ (el caso $(x(t^*),y(t^*)) \notin B(0,1/\sqrt{2})$ se argumenta de manera análoga). Entonces por continuidad de la solución deberá existir $0 \leq \widetilde{t} < t^*$ tal que

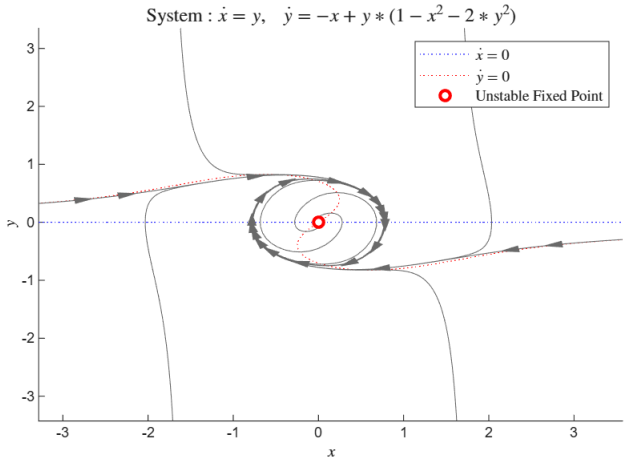
$$\begin{cases} (x(t),y(t)) \notin \overline{B(0,1)} & \text{para todo } t \in (\widetilde{t},t^*] \\ (x(\widetilde{t}),y(\widetilde{t})) \in \partial B(0,1) \end{cases}.$$

Sea $z(t) = V(x(t),y(t))$. Tenemos que

$$\begin{cases} z(\widetilde{t}) = V(x(\widetilde{t}),y(\widetilde{()})) = 1 \\ z(t^*) = V(x(t^*),y(t^*)) > 1 \\ z'(t) = \nabla V(x(t),y(t)) \cdot f(x(t),y(t)) \leq 0 \ \ \forall t \in (\widetilde{t},t^*) \end{cases}.$$

Pero estos tres hechos son una contradicción entre sí, pues al ser z decreciente en $[\widetilde{t},t^*]$ se debe tener que $z(\widetilde{t}) \geq z(t^*)$, pero $z(\widetilde{t}) = 1 < z(t^*)$.

Una vez hemos verificado que $K = \{\overline{B(0,1)} \setminus B(0,1/\sqrt{2})$ es positivamente invariante, y sabiendo que en K no hay puntos de equilibrio, usamos el Corolario 5.35 para deducir que debe existir una órbita periódica en K.



5.3. Flujo. Teorema de Grobman-Hartman. Variedad estable e inestable

Comenzamos recordando la noción de flujo, que ya se introdujo en la Definición **??**. Reescribiremos tal definición en el contexto de sistemas autónomos.

Definición 5.37 (Flujo de sistemas autónomos)**.** Dado un sistema autónomo $x' = f(x)$, $f \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$ con $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto, definimos el flujo como la aplicación

$$\begin{aligned} \varphi \ &: W \to \Omega \\ &(t, x) \mapsto \varphi(t, x) \end{aligned}$$

donde $W = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \Omega : \ t \in I_x\}$ y $\varphi_(t, x)$, para cada $x \in \Omega$ fijo, la solución maximal del PVI

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\varphi(t, x) = f(\varphi(t, x)) \\ \varphi(0, x) = x \end{cases} .$$

con intervalo maximal de existencia I_x.

Por los resultados sobre dependencia diferenciable respecto de las condiciones iniciales (Teorema 2.66) sabemos que $\varphi \in C^1(W)$, donde W es abierto.

Por otro lado, introducimos la notación

$$\varphi(t, x) = \varphi_t(x) = \varphi^t(x).$$

Por ejemplo el sistema $x' = Ax$ con $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ tiene como flujo $\varphi_t(x) = e^{At}x$ con $(t, x) \in W = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

Proposición 5.38. *El flujo φ de un sistema autónomo $x' = f(x)$, $f \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$, con $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto, verifica que*

1. *$\varphi_0(x) = x$ para todo $x \in \Omega$*
2. *Para cada $x \in \Omega$ fijo, si $t_2 \in I_x$ y $t_1 \in I_{\varphi_{t_2}(x)}$, entonces $t_1 + t_2 \in I_x$ y, además, $\varphi_{t_1+t_2}(x) = \varphi_{t_1}(\varphi_{t_2}(x))$.*

Demostración. 1. Trivial.

2. Las funciones

$$\begin{cases} y(t) = \varphi(t, \varphi_{t_2}(x)) \\ z(t) = \varphi(t + t_2, x) \end{cases}$$

solucionan el mismo problema de valor inicial (con $x \in \Omega$ fijo) puesto que $y(0) = \varphi_{t_2}(x) = \varphi(t_2, x) = z(0)$ y además

$$\begin{cases} y'(t) = \frac{d}{dt}\varphi(t, \varphi_{t_2}(x)) = f(\varphi(t, \varphi_{t_2}(x))) = f(y(t)) \\ z(t)' = \frac{d}{dt}\varphi(t + t_2, x) = f(\varphi(t + t_2, x)) = f(z(t)) \end{cases} .$$

Sean ahora $t_2 \in I_x$ y $t_1 \in I_{\varphi_{t_2}(x)}$ fijos. Como $y(\cdot)$ está definida en t_1 entonces $z(\cdot)$ está definida en t_1, luego $t_1 + t_2 \in I_x$. Por otro lado $y(t) = z(t)$ para todo $t \in I_{\varphi_{t_2}(x)}$, por lo que

$$y(t_1) = z(t_1) \quad \Rightarrow \quad \varphi(t_1, \varphi_{t_2}(x)) = \varphi_{t_1}(\varphi_{t_2}(x)) = \varphi(t_1 + t_2, x) = \varphi_{t_1+t_2}(x).$$

□

Proposición 5.39. *Sea el sistema $x' = f(x)$, $f \in C^1(\Omega;\mathbb{R}^n)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y sea φ su flujo. Sea además $U \subset \Omega$ abierto, $t \in \mathbb{R}$ y consideremos $V = \varphi_t(U)$. Entonces V es un conjunto abierto y $\varphi_t : U \to V$ es un homeomorfismo. Además $(\varphi_t)^{-1} = \varphi_{-t}$.*

Demostración. Por la unicidad de soluciones tenemos que φ_t es una función biyectiva. Gracias a la Proposición 5.38 tenemos que

$$\begin{cases} \varphi_{-t} \circ \varphi_t(x) = \varphi_{-t}(\varphi_t(x)) = \varphi_0(x) = x \quad \forall x \in U \\ \varphi_t \circ \varphi_{-t}(y) = y \quad \forall y \in V \end{cases}.$$

Luego se deduce que $\varphi_{-t} = (\varphi_t)^{-1}$ es una función continua (pues φ_{-t} lo es usando el teorema de dependencia continua respecto de las condiciones iniciales). De hecho φ_t será un difeomorfismo. □

Aprovechamos este momento para introducir los sistemas dinámicos de manera general.

Definición 5.40. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y sea $\varphi : \mathbb{R} \times \Omega \to \Omega$ una aplicación de clase C^1. Para cada $t \in \mathbb{R}$ definimos $\varphi_t(\cdot) = \varphi(t, \cdot)$ como la aplicación $\varpi_t : \Omega \to \Omega$ dada por $\varphi_t(x) = \varphi(t, x)$, $x \in \Omega$. Diremos que $\{\varphi_t\}_t$ es un *sistema dinámico* si

1. $\varphi_0 = Id$
2. $\varphi_t \circ \varphi_{\widetilde{t}} = \varphi_{t+\widetilde{t}}$ para todo $t, \widetilde{t} \in \mathbb{R}$.

Observación 5.41. De la definición de sistema dinámico $\{\varphi_t(\cdot)\}$ se deduce que $\varphi_t \in C^1(\Omega;\Omega)$ con inversa de clase C^1 dada por $\varphi_{-t} : \Omega \to \Omega$.

Proposición 5.42. *Sea $x' = f(x)$, $x \in \Omega$, donde sabemos que hay existencia global de soluciones. Entonces podemos definir el sistema dinámico $\varphi : \mathbb{R} \times \Omega \to \Omega$ como $\varphi(t, \xi) = x(t;\xi)$ donde $x(t;\xi)$ denota la única solución del PVI $x' = f(x)$, $x(0) = \xi$.*

Observación 5.43. Por otro lado, todo sistema dinámico $\{\varphi_t\}_t$ permite obtener una ecuación diferencial autónoma

$$f(x = \frac{d}{dt}\varphi_t(x)|_{t=0}.$$

Ejemplo 5.44. Veamos algunos ejemplos de sistemas dinámicos y no dinámicos.

1. $\varphi(t, x) = t^2 + x$ no es sistema dinámico porque
$$\begin{cases} \varphi_t(\varphi_s(x)) = \varphi(t, s^2 + x) = t^2 + s^2 + x \\ \varphi_{t+s}(x) = (t+s)^2 + x = t^2 + s^2 + 2ts + x \end{cases}$$
no son iguales.
2. $\varphi(t, x) = t + 2$ no es sistema dinámico porque $\varphi(0, x) = 2 \neq x$ en general.
3. $\varphi(t, x) = \dfrac{1}{\frac{1}{x} - t}$ con $\varphi : \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sí es sistema dinámico porque φ es de clase C^1 en $\mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$, y además para todo $t, s \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,
$$\begin{cases} \varphi_t(\varphi_s(x) = \varphi(t, \varphi_s(x)) = \dfrac{1}{\dfrac{1}{\left(\frac{1}{\frac{1}{x} - s}\right)} - t} = \dfrac{1}{\frac{1}{x} - s - t} = \varphi_{t+s}(x) \\ \\ \varphi_0(x) = x \end{cases}$$

Dejamos ahora a un lado los sistemas dinámicos para enunciar los importantísimos teoremas de Grobman-Hartman y de la variedad estable e inestable. Para ello, necesitamos extender la noción de punto hiperbólico que vimos en la Definición 4.12 a sistemas no lineales autónomos de la siguiente forma.

Definición 5.45. Dado un sistema autónomo $x' = f(x)$, $f \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$ con $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto, decimos que un punto de equilibrio $\overline{x}$ es *hiperbólico* si $\Re(\lambda) \neq 0$ para todo $\lambda \in \sigma(Df(\overline{x}))$.

Observemos que el hecho de que un punto de equilibrio sea hiperbólico siempre indica que los Principios de Linealización nos darán información acerca de su estabilidad.

Teorema 5.46 (Teorema de Grobman y Hartman)**.** *Sea $\overline{x}$ un punto de equilibrio hiperbólico de un sistema $x' = f(x)$, $f \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^2$ con $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto. Entonces existe un entorno abierto U de $\overline{x}$ y otro V de 0, y existe un homeomorfismo $h : U \to V$ tal que $h(\overline{x}) = 0$ y tal que se cumple lo siguiente.*

1. *$h(\overline{x}) = 0$.*
2. *Si φ^t denota el flujo del sistema en U y $\psi^t = e^{Df(\overline{x})t}$ es el flujo del sistema $y' = Df(\overline{x})y$, entonces $x_0 \in U$ con $\varphi^t(x_0) \in U$ para algún $t \in \mathbb{R}$ si y solo si $h(x_0) \in V$ con $\psi^t(h(x_0)) \in V$ para el mismo t. Y además en ese caso $h \circ \varphi^t(x_0) = \psi^t(h(x_0))$.*

Demostración. La demostración de este Teorema no es abordable para este curso de Ecuaciones Diferenciales, por su extensión y complejidad. Nos limitaremos a dar la referencia [**?**], para el lector interesado. □

Una manera de interpretar el enunciado del Teorema de Grobman-Hartman es que el homeomorfismo h transforma órbitas en órbitas, y que el dibujo del diagrama de fases del sistema $x' = f(x)$ cerca de un punto de equilibrio hiperbólico $\overline{x}$ es una deformación topológica del de $y' = Df(\overline{x})y$. Se suele decir que los flujos φ^t y ψ^t son C^0-conjugados.

Nuestro siguiente objetivo es mostrar que no solo tenemos una deformación topológica (a través de un homeomorfismo) entre las trayectorias de las soluciones del sistema no lineal y del sistema linealizado en torno a los puntos de equilibrio hiperbólicos, sino que realmente aquellas trayectorias de soluciones que convergen hacia el punto de equilibrio cuando $t \to + < \infty$, o aquellas que vienen del punto de equilibrio cuando $t \to -\infty$, deben hacerlo de manera tangencial a cómo lo hacían las trayectorias correspondientes en el sistema linealizado.

Definición 5.47. Dado un punto de equilibrio hiperbólico $\overline{x}$ de un sistema $x' = f(x)$, $f \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$ con $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto, y dado un entorno abierto U de $\overline{x}$, definimos el *conjunto estable local* de $\overline{x}$ en U, $W^s_{loc}(\overline{x}, U) =$, y el *conjunto inestable local* de $\overline{x}$ en U, $W^u_{loc}(\overline{x}, U)$, como

$$W^s_{loc}(\overline{x}, U) = \left\{ \xi \in U : \, x(t, \xi) \in U \, \forall t \geq 0 \text{ y } \lim_{t \to \infty} x(t; \xi) = \overline{x} \right\}$$
$$W^u_{loc}(\overline{x}, U) = \left\{ \xi \in U : \, x(t, \xi) \in U \, \forall t \leq 0 \text{ y } \lim_{t \to \infty} x(t; \xi) = \overline{x} \right\}$$

Ejemplo 5.48. Si $f(x) = Ax$, $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ con $\Re(\sigma(A)) \neq 0$, entonces existen dos subespacios E^s, E^u tales que $E^s \oplus E^u = \mathbb{R}^n$ y tal que si $\xi_s \in E^s$ entonces $e^{At}\xi_s \in E^s$ y

$$\|e^{At}\xi_s\| \leq Me^{-\alpha t}\|\xi_s\|, \quad \forall t \geq 0 \text{ (para ciertos } M \geq 0, \alpha > 0)$$

y tal que si $\xi_u \in E^u$ entonces $e^{At}\xi_u \in E^u$ y

$$\|e^{At}\xi_u\| \leq Me^{\alpha t}\|\xi_u\|, \quad \forall t \leq 0 \text{ (para ciertos } M \geq 0, \alpha > 0).$$

Teorema 5.49 (Teorema de la variedad estable e inestable). *Dado $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ un punto de equilibrio hiperbólico de $x' = f(x)$, $f \in C^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$, entonces existe U entorno abierto de $\overline{x}$ tal que*

1. *$W^s_{loc}(\overline{x}, U)$ es una variedad diferenciable que es tangente a $\overline{x} + E^s$ en el punto $\overline{x}$, donde E^s es la variedad/subespacio estable del sistema lineal $x' = Df(\overline{x})x$.*
2. *$W^u_{loc}(\overline{x}, U)$ es una variedad diferenciable que es tangente a $\overline{x} + E^u$ en el punto $\overline{x}$, donde E^u es la variedad/subespacio estable del sistema lineal $x' = Df(\overline{x})x$.*

Demostración. De nuevo, al igual que pasaba con el Teorema de Grobman-Hartman la demostración de este resultado es larga y técnica y la omitiremos en este curso. □

Ejemplo 5.50. Sea el sistema

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y + x^2 \end{cases}.$$

La resolución explícita de este sistema es:

$$x(t) = e^{-t}x(0) \quad ; \quad y(t) = e^t\left(y(0) + \frac{1}{3}x(0)^2\right) - \frac{1}{3}e^{-2t}x(0)^2.$$

Tenemos que el punto de equilibrio $(0,0)$ es hiperbólico, pues si tomamos $f(x,y) = (-x, y+x^2)$ tenemos

$$Df(x,y) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2x & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad Df(0,0) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \sigma(Df(0,0)) = \{\pm 1\}.$$

Además, si U es cualquier abierto que contiene al origen

$$\begin{cases} W^u(0,U) = \{(x_0,y_0) \in U : x_0 = 0\} \\ W^s(0,U) = \{(x_0,y_0) \in U : y_0 = -x_0^2/3\} \end{cases}.$$

Por otro lado, la variedad estable del sistema lineal $x' = Df(0,0))x$ es

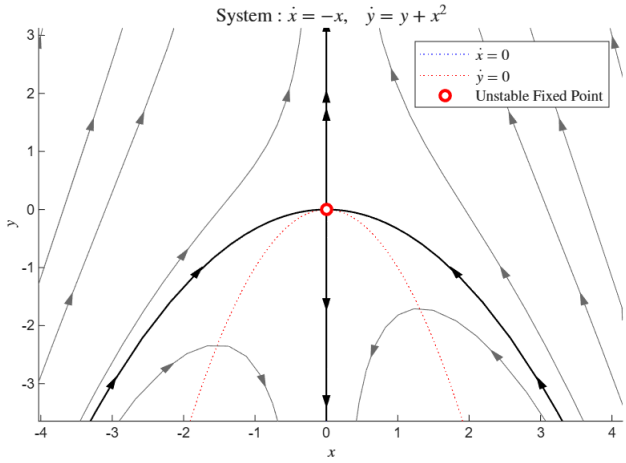
$$E^u = \text{span}((0,1))$$

y la variedad inestable es

$$E^u = \text{span}((1,0)).$$

5.4. Sistemas conservativos y disipativos.

Dividiremos esta sección en dos subsecciones. Una tratando los sistemas conservativos y otra tratando los sistemas disipativos.



5.4.1. Sistemas conservativos

Definición 5.51. Sea $x' = f(x)$, $f \in C^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$. Decimos que el sistema es

1. **Conservativo**: Si existe $E \in C^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ con $\nabla E(x) \cdot f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. A la función E se le denomina energía.

2. **Gradiente**: Si existe $V \in C^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ con $\nabla V(x) = -f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. La función V se llama potencial.

3. **Hamiltoniano**: Si $n = 2$ y existe $H \in C^2(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$ con

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial y}(x,y) = f_1(x,y) \\ \dfrac{\partial H}{\partial x} = -f_2(x,y) \end{cases} \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Observación 5.52. Tenemos lo siguiente:

1. Los sistemas Hamiltonianos son conservativos, pues $\nabla H(x,y) \cdot f(x,y) = 0$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, luego la función H actúa como energía.

2. Dada una función $H \in C^2(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$ definimos su sistema Hamiltoniano asociado como

$$(H) \quad \begin{cases} x' = \dfrac{\partial H}{\partial y} \\ y' = -\dfrac{\partial H}{\partial x} \end{cases}$$

   Dada una función $V \in C^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ definimos su sistema gradiente asociado como

$$(G) \quad x' = -\nabla V(x).$$

3. Los diagramas de fases de un sistema Hamiltoniano y de un sistema gradiente del tipo

$$\begin{cases} x' = \partial H/\partial y \\ y' = -\partial H/\partial x \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} x' = -\partial H/\partial x \\ y' = -\partial H/\partial y \end{cases}$$

para la misma función $H(x,y)$, $H \in C^2(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^2)$ poseen trayectorias que son ortogonales (perpendiculares) entré sí en cada punto.

Proposición 5.53. *Sea $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$. Entonces*

(a) Si $x' = f(x)$ es conservativo con energía E entonces $\{(x,y) \in \mathbb{R}^n : E(x,y) = a\}$ es un conjunto invariante para todo $a \in \mathbb{R}$.

(b) Si $x' = f(x)$ es gradiente con potencial V (i.e. tal que $\nabla V(x) = -f(x)$) entonces $\{(x,y) \in \mathbb{R}^n : V(x,y) \leq a\}$ es un conjunto positivamente invariante para todo $a \in \mathbb{R}$.

Demostración. 1. Supongamos que dado $a \in \mathbb{R}$ el conjunto $\{E(x,y) = a\}$ no es invariante. En se caso existiría $x_0 \in \{E(x,y) = a\}$ tal que la solución $x(t)$ con $x(0) = x_0$ satisface que existirían $t_1 < t_2$ tales que

$$\begin{cases} E(x(t_1)) = a \\ E(x(t)) \neq a \quad \forall t \in (t_1, t_2] \end{cases}.$$

Sin embargo esto implicaría que por el Teorema de Valor Medio debería existir un $t^* \in (t_1, t_2)$ con

$$\frac{d}{dt} E(x(t))|_{t=t^*} \neq 0.$$

Sin embargo por hipótesis tenemos que

$$\frac{d}{dt} E(x(t)) = \nabla E(x(t)) \cdot (x'(t)) = \nabla E(x(t)) \cdot f(x(t)) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

2. Esto ya se probó en el Lema 4.32.

□

El siguiente resultado nos da una caracterización de los sistemas Hamiltonianos como aquellos donde la divergencia del sistema se anule. Y esto no será más que una aplicación de potente Teorema de Stokes.

Teorema 5.54. *Un sistema*

$$\begin{cases} x' = f_1(x,y) \\ y' = f_2(x,y) \end{cases}, \quad f_1, f_2 \in C^1(\mathbb{R}^2).$$

es sistema Hamiltoniano si y solo si su divergencia es nula en todo el dominio:

$$div f(x,y) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) = 0 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Demostración. La implicación $\Rightarrow$) es inmediata, luego probemos simplemente $\Leftarrow$). Puesto que $\operatorname{div} f = 0$, se tiene que el campo vectorial $(x,y) \to (-f_2(x,y), f_1(x,y))$ es un campo gradiente por lo que el Teorema de Stokes nos garantiza que existe $H \in C^2(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^2)$ con

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial x}(x,y) = -f_2(x,y) \\ \dfrac{\partial H}{\partial y}(x,y) = f_1(x,y) \end{cases}.$$

□

Ejemplo 5.55. Si consideramos el sistema

$$\begin{cases} x' = -y + x^2 + y^2 = f_1(x,y) \\ y' = x - 2xy = f_2(x,y) \end{cases}$$

como tenemos que $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ y además se puede comprobar que $\operatorname{div} f(x_1, x_2) = 0$, podemos usar el Teorema 5.54 y asegurar la existencia de una función (energía) $E \in C^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$ con $\nabla E(x,y) = (-f_2, f_1)$. Para calcular E razonamos como sigue. Escribiremos

$$E(x,y) = \int (2xy - x)dx + h(y) = x^2 y - \frac{x^2}{2},$$

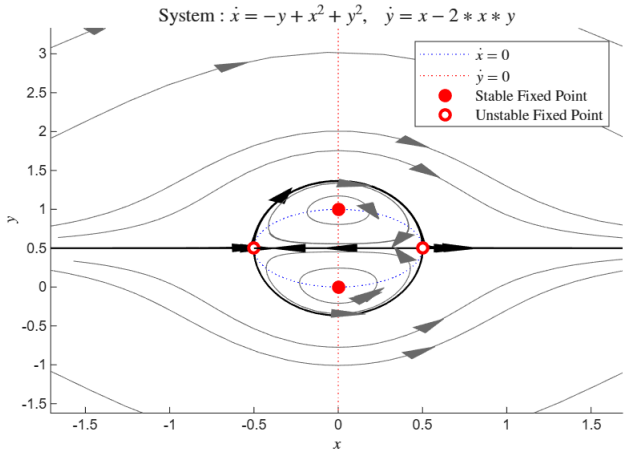
donde $h(y)$ es una función a determinar. La determinamos sabiendo que $\partial E/\partial y = f_1$. Esto es

$$\frac{\partial E}{\partial y}(x,y) = x^2 + h'(y) = -y + x^2 + y^2 \quad \Leftrightarrow \quad h'(y) = -y + y^2 \quad \Leftarrow \quad h(y) = \frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2}$$

Así $E(x,y) = x^2 y + y^3/3 - x^2/2 - y^2/2$. Hay que observar que la función E no es única, pues podemos sumarle cualquier constante. Además la función los conjuntos de nivel de la función $E(x,y)$ nos estará dando la ecuación de trayectorias del sistema haciendo

$$E(x,y) = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Recordemos que gracias a la Proposición 5.53 los conjuntos $\{E(x,y) = C\}$ son invariantes (y podrían incluir a una o a la unión de varias trayectorias diferentes).



Un ejemplo importante de sistema conservativo (de hecho Hamiltoniano) para cierta $f \in C^1(\mathbb{R})$ es

$$x'' + f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x' = y \\ y' = -f(x) \end{cases}.$$

En este caso también una EDO de orden 2 dada por $x'' + f(x) = 0$ es llamada sistema conservativo. El sistema asociado tendrá energía

$$E(x, y) = \frac{y^2}{2} + \int_0^x f(u)\, du.$$

A la cantidad $y^2/2$ se le llama energía cinética y a la función $U(x) = \int_0^x f(u)\, du$ se le llama energía potencial. La ecuación de trayectorias del sistema vendrá dada por la familia

$$E(x, y) = \frac{y^2}{2} + U(x) = E, \quad E \in \mathbb{R},$$

o bien

$$y = \pm\sqrt{2(E - U(x))}, \quad E \in \mathbb{R}.$$

Observemos que $f(\overline{x}) = 0$ si y solo si $(\overline{x}, 0)$ es punto de equilibrio del sistema y si y solo si U tiene un punto crítico en $\overline{x}$ (es decir, $U'(\overline{x}) = f(\overline{x}) = 0$). Para esbozar el plano de fases de un sistema conservativo asociado a una EDO $x'' + f(x)$ es de mucha utlidad entender la gráfica de $U(x)$ y ubicar sus mínimos y máximos locales (y sus puntos de inflexión que sean puntos críticos).

Proposición 5.56. *Sea $f \in C^1(\mathbb{R})$ y sea el sistema conservativo $x'' + f(x) = 0$ donde*

$$U(x) = \int_0^x f(u)\, du$$

denota la energía potencial. Entonces

1. *Los mínimos locales de $U(x)$ son centros del sistema. Esto significa, que el $(0, 0)$ será un punto de equilibrio estable y que existe un entorno del mismo donde todas las trayectorias son soluciones periódicas al alrededor de él. En particular, los puntos de equilibrio $(\overline{x}, 0)$ son estables.*

2. *Los máximos locales de $U(x)$ son puntos de silla. Esto es, que el sistema linealizado realmente tendrá un autovalor con parte real positiva y otro con parte real negativa, y así por Grobman-Hartman y el Teorema de la variedad estable e inestable tenemos un comportamiento local del plano de fases como un punto de silla en los sistemas lineales. En particular, los puntos de equilibrio $(\overline{x}, 0)$ son inestables.*

3. *Los puntos de inflexión de $U(x)$ que sean además críticos (esto es con $U'(\overline{x}) = 0$, siendo $\overline{x}$ ni máximo ni mínimo local) se llaman puntos elípticos, y se tendrá que $(\overline{x}, 0)$ es inestable.*

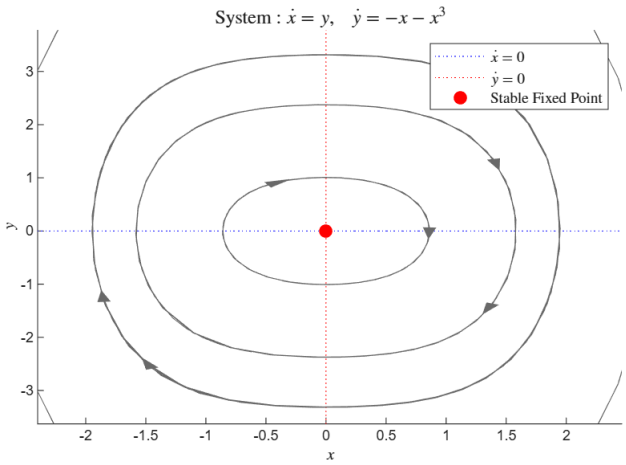
Demostración. Se deja como ejercicio la lector. □

Veamos ahora en detalle como podemos determinar completamente el diagrama de fases de los siguientes 3 ejemplos de sistemas conservativos.

Ejemplo 5.57. Sea la EDO $x'' + x^3 - \lambda x = 0$ con $\lambda \in \mathbb{R}$. El sistema asociado es

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = \lambda x - x^3 \end{cases}.$$

La energía potencial del sistema es $U(x) = x^4/4 - \lambda x^2/2$.



- Si $\lambda \leq 0$ solo hay un punto de equilibrio, el $(0,0)$. Como $U(x)$ tiene un mínimo local en $x = 0$ se sigue que el origen es un centro, es decir, una solución estable con órbitas periódicas a su alrededor.

- Si $\lambda > 0$ tenemos tres puntos de equilibrio $\{(0,0), (\sqrt{\lambda}, 0), (-\sqrt{\lambda}, 0)\}$. Vemos que para $x = 0$ el potencial U tiene un máximo local, luego estamos ante un punto de silla. Y para $x = \pm\sqrt{\lambda}$ el potencial U tiene dos mínimos locales, luego estamos ante dos centros. También es interesante destacar la existencia de dos trayectorias homoclínicas que "conectan el $(0,0)$ consigo mismo", recordemos que esto significaba que esto son soluciones $(x(t), y(t))$ tales que $\lim_{t\to\pm\infty}(x(t), y(t)) = (0,0)$.

  También indicamos que usando los principios de linealización, como

$$Df(x,y) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \lambda - 3x^2 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} Df(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \lambda & 0 \end{bmatrix} \\ Df(\sqrt{\lambda}, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2\lambda & 0 \end{bmatrix} \\ Df(-\sqrt{\lambda}, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2\lambda & 0 \end{bmatrix} \end{cases},$$

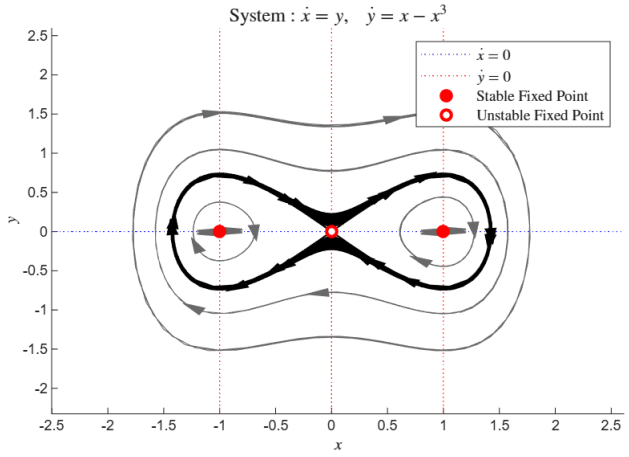
  podríamos decir que el $(0,0)$ (para $\lambda > 0$) es un punto de silla y que para los otros dos puntos no podríamos concluir nada sobre estabilidad.

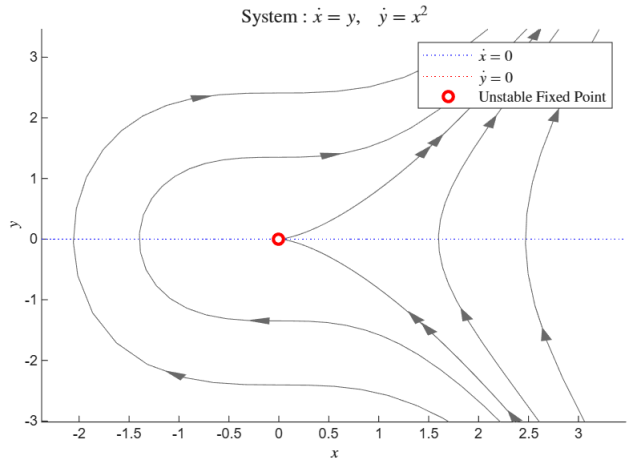
Ejemplo 5.58. Sea $x'' = \lambda - x^2$. Tenemos por sistema asociado $\begin{cases} x' = y \\ y' = x^2 - \lambda \end{cases}$, y el potencial es $U(x) = x^3/3 - \lambda x$.

- Si $\lambda < 0$ tenemos que no hay puntos de equilibrio.

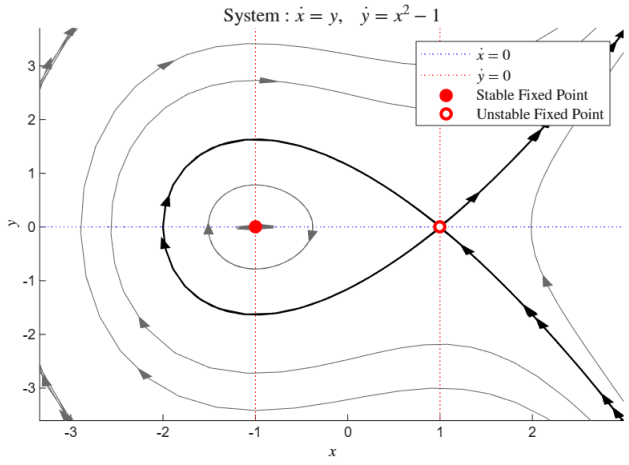
- Si $\lambda = 0$ el $(0,0)$ es el único punto de equilibrio y será elíptico, pues $x = 0$ es un punto de inflexión para $U(x) = x^3/3$ sin ser máximo ni mínimo local.

- Si $\lambda > 0$ tenemos dos puntos de equilibrio $\{(\sqrt{\lambda}, 0), (-\sqrt{\lambda}, 0)\}$. En $x = \sqrt{\lambda}$ hay un mínimo local para el potencial, luego $(\sqrt{\lambda}, 0)$ será un centro, y en $x = -\sqrt{\lambda}$ hay un máximo local luego $(-\sqrt{\lambda}, 0)$ es un punto de silla (esto también se podría haber visto por linealización).





Aparte es interesante observar que tenemos una conexión o trayectoria homoclínica "conectando el origen consigo mismo".



Ejemplo 5.59. Sea la ecuación del **péndulo sin rozamiento** dada por

$$x'' + \operatorname{sen}(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x' = y \\ y' = -\operatorname{sen}(x) \end{cases} .$$

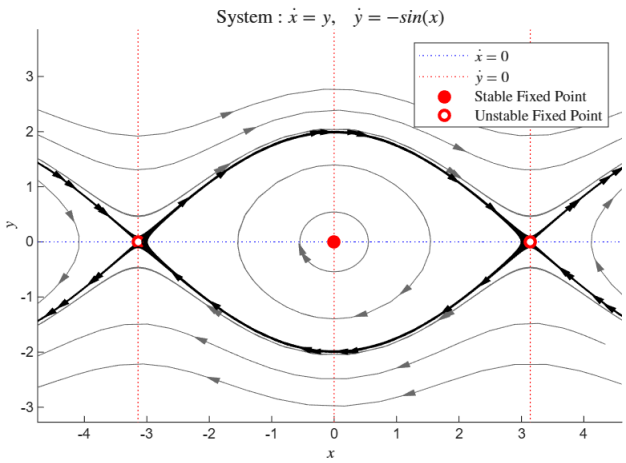
El potencial del sistema es

$$U(x) = \int_0^x \operatorname{sen}(u)\, du = 1 - \cos(x).$$

Tenemos en este caso infinitos puntos de equilibrio

$$\{(k\pi, 0) : k \in \mathbb{Z}\}.$$

- Los puntos $(2k\pi, 0)$ con $k \in \mathbb{Z}$ son puntos estables (centros), ya que $2k\pi$ son mínimos locales del potencial U.
- Los puntos $(2k\pi + \pi, 0)$ con $k \in \mathbb{Z}$ son puntos inestables (puntos de silla), porque $2k\pi + \pi$ son máximos locales del potencial U.
- Existen infinidad de conexiones heteroclínicas uniendo puntos de equilibrio del tipo $(2k\pi - \pi, 0)$ con $k \in \mathbb{Z}$ (cuando $t \to -\infty$) a puntos de equilibrio del tipo $(2k\pi + \pi, 0)$ con $k \in \mathbb{Z}$ (cuando $t \to +\infty$).



Acabamos nuestro estudio de los sistemas conservativos con un último resultado que nos da ciertas propiedades interesantes.

Proposición 5.60. *Consideremos un sistema conservativo del tipo $x'' + f(x) = 0$ con $f \in C^1(\mathbb{R})$. Entonces:*

(a) El sistema no puede tener puntos asintóticamente estables.

(b) Si la energía potencial $U(x)$ está acotada inferiormente, entonces todas las soluciones están definidas globalmente en $\mathbb{R}$.

(c) Si la energía potencial $U(x)$ satisface que existen $a < b$ con U teniendo un mínimo local ξ en (a,b) y con $U'(x) \neq 0$ para todo $x \in [a,b] \setminus \{\xi\}$ y tal que $U(a) = U(b) = E \in \mathbb{R}$, entonces existe una solución periódica $x(t)$ con $a \leq x(t) \leq b$ y con trayectoria satisfaciendo $y(t) = \pm\sqrt{2(E - U(x(t))}$. Además el periodo $T > 0$ de la solución será

$$\frac{T}{2} = \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{2(E - U(x))}}$$

(d) Si $(x(t), x'(t))$ es una solución con $x'(t) > 0$ para todo $t \geq 0$ y explota en tiempo finito $T_{max} > 0$ entonces el tiempo de explosión viene dado por la fórmula $T_{max} = \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{2(E - U(x))}}$.

Demostración. (a) Supongamos que existe un punto de equilibrio $\xi \in \mathbb{R}^n$ asintóticamente estable del sistema

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -f(x) \end{cases}.$$

Entonces existe un entorno abierto de ξ, $W \subset \mathbb{R}^n$, tal que

$$\begin{cases} \lim_{t\to\infty}(x,y)(t;(x_0,y_0)) = \xi \\ (x,y)(t;(x_0,y_0)) \in W \end{cases} \qquad \forall (x_0,y_0) \in W,\ \forall t \in [0,\infty).$$

Pero en ese caso, siendo la energía del sistema $E(x,y) = y^2/ + \int_0^x f(u)\,du$, tenemos que por continuidad de E y puesto que la energía es constante en sistemas conservativos,

$$E((x,y)(t;(x_0,y_0)) = E(x_0,y_0) = E(\xi) \quad \forall t \geq 0.$$

Pero por otro lado es fácil comprobar que la energía nunca es constante en ningún entorno abierto de $\mathbb{R}^2$ (basta dejar fijo x y mover y).

(b) Sea $(x(t), y(t))$ solución del sistema

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -f(x) \end{cases}$$

con intervalo maximal de existencia (α, ω). Tenemos que

$$|y(t)| \leq |x'(t)| \leq \sqrt{2(E - U(x(t))}, \quad \forall t \in (\alpha,\omega).$$

Sea $M > 0$ tal que $U(x) \geq -M$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Entonces $|x'(t)| \leq \sqrt{2(E+M)}$ para todo $t \in (\alpha,\omega)$ y por el Teorema del Valor Medio

$$|x(t) - x(0)| \leq \sqrt{2(E+M)}|t| \quad \forall t \in (\alpha,\omega).$$

En el caso de que $\omega < \infty$ (si $\alpha > -\infty$ se razona análogamente) tendríamos que $(x(t), y(t))$ viviría en un compacto para todo $t \in [0,\omega)$. Luego por la teoría de Cauchy-Lipschitz esto es una contradicción (pues debería haber explosión en ω).

(c) La ecuación de trayectorias asociada a energía $E = U(a) = U(b)$ viene dada por

$$y = \pm\sqrt{2(E - U(x))}.$$

Es claro por hipótesis que $U(x) < E$ para todo $x \in (a, b)$, y que U está acotada inferiormente en $x \in [a, b]$. Esto significa que el conjunto

$$\Gamma = \{(x, y) \in [a, b] \times \mathbb{R} : \, y = \pm\sqrt{2(E - U(x))}\}$$

es una curva cerrada simple. Además sabemos que Γ no contiene ningún punto de equilibrio $(x, 0)$ puesto que en ese caso $U'(x) = 0$, pero solamente hay un punto crítico ξ de U en $[a, b]$ que es mínimo local, luego $U(\xi) < U(a) = U(b) = E$, luego $(x, 0) \notin \Gamma$.

De esta forma, usando la Propiedad de 5 sobre trayectorias, y tomando cualquier condición inicial x_0 tal que $(x_0, 0) \in \Gamma$ se sigue que $\Gamma_{x_0} = \Gamma$ y por tanto estamos ante una órbitas trayectoria.

Para determinar su periodo $t > 0$ escribimos

$$\begin{aligned}\frac{T}{2} &= \int_0^{T/2} 1\, dt = \int_0^{T/2} \frac{x'(t)}{x(t)}\, dt = \int_0^{T/2} \frac{x'(t)}{\sqrt{2(E - U(x(t)))}}\, dt \\ &= \frac{b}{a} \frac{dx}{\sqrt{2(E - U(x))}}.\end{aligned}$$

(d) Puesto que $x'(t) > 0$ para todo $t \in [0, \omega)$ es riguroso escribir

$$\omega = \int_0^{\omega} 1\, dt = \int_0^{\omega} \frac{x'(t)}{x(t)}\, dt = \int_0^{\omega} \frac{x'(t)}{\sqrt{2(E - U(x(t))}}, dt = \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2(E - U(x))}}.$$

□

5.4.2. Sistemas disipativos

Son aquellos de la forma

$$x'' + \varepsilon x' + f(x) = 0, \quad f \in C^1(\mathbb{R}).$$

donde $\varepsilon > 0$ es un parámetro. Los puntos de equilibrio son los mismos que en el sistema conservativo asociado ($\varepsilon = 0$).

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -f(x) - \varepsilon y \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \text{Puntos de equilibrio} = \{(x, 0) : \, f(x) = 0\}.$$

También llamaremos energía a la función $E(x, y) = y^2/2 + U(x)$ y energía potencial a $U(x) = \int_0^x f(u)\, du$. Ahora, la energía no se conservará, se disipará. Llamando $g(x, y) = (y, -f(x) + \varepsilon y)$, se tiene que

$$Dg(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -f'(x) & -\varepsilon \end{bmatrix} \Rightarrow \quad \text{traza(Dg(x,y))} = \varepsilon \, ; \, \det(Dg(x, y)) = f'(x).$$

Por el método de linealización se puede ver que si $\overline{x}$ es punto de equilibrio entonces será

- Asintóticamente estable si $f'(\overline{x}) > 0$. Se tiene que $(\overline{x}, 0)$ es un sumidero.

- Inestable si $f'(\overline{x}) < 0$. En este caso $\overline{x}, 0)$ será un punto de silla.

Para los sistemas disipativos la energía $E(x, y)$ no se conserva, pero sabremos que es decreciente (se va disipando). Esto es, si $(x(t), y(t))$ es solución, entonces

$$\frac{d}{dt}E(x(t), y(t)) = y(t)y'(t) + U'(x(t))x'(t) = y(t)(-f(x(t)) - \varepsilon y(t)) - f(x(t))x'(t) = -\varepsilon y^2(t), \quad \forall t \geq 0.$$

Luego $E(x(t)), y(t)) \leq E(x(0), y(0))$ para todo $t \geq 0$ donde esté definida la solución.

Proposición 5.61. *En un sistema disipativo $x'' + \varepsilon x' + f(x) = 0$ toda solución no constante $(x(t), y(t))$ satisface que $E(x(t), y(t))$ es estrictamente decreciente.*

Demostración. Supongamos por reducción al absurdo que existen $t_1 < t_2$ con $E(x(t_1), y(t_1)) = E(x(t_2), y(t_2))$. En ese caso, como sabemos que $\frac{d}{dt}E(x(t), y(t)) \leq 0$ se tiene que $E(x(t), y(t))$ es constante en $[t_1, t_2]$. Así,

$$0 = \frac{d}{dt}E(x(t), y(t)) = -\varepsilon y^2(t), \quad \forall t \in (t_1, t_2) \quad \Rightarrow \quad x'(t) = 0 \quad \forall t \in [t_1, t_2].$$

Por tanto $x(t) = x(t_1)$ para todo $t \in [t_1, t_2]$. Por tanto, tomando cualquier $t^* \in (t_1, t_2)$ se tiene que $x'(t^*) = y(t^*) = 0$ y que $x''(t^*) = y'(t^*) = 0$, así que

$$y'(t^*) = -\varepsilon y(t^*) - f(x(t^*)) \quad \Rightarrow \quad 0 = 0 - f(x(t^*))$$

Se sigue que $0 = f(x(t^*)) = f(x(t_1))$ y así $x(t_1)$ sería un punto de equilibrio. Luego $(x, y) = (x(t_1), 0)$ era una solución constante y se tiene una contradicción con las hipótesis del enunciado. □

Ejemplo 5.62. Sea el sistema disipativo

$$x'' + \varepsilon x' - x + x^3 = 0 \quad ; \quad \begin{cases} x' = y \\ y' = -\varepsilon y + x - x^3 \end{cases}$$

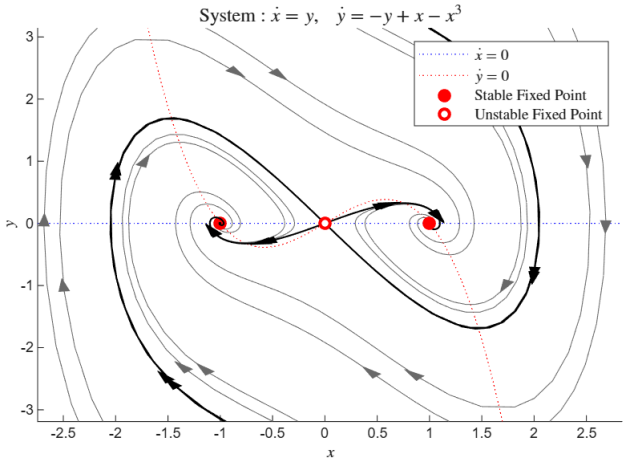
con $\varepsilon > 0$. Los puntos de equilibrio son $\{(0, 0), (1, 0), (-1, 0)\}$. La energía del sistema es $E(x, y) = y^2/2 + x^4/4 - x^2/2$ y la energía potencial es $U(x) = x^4/4 - x^2/2$.

Si linealizamos en el $(0, 0)$ podemos ver que estamos ante un punto hiperbólico que es punto de silla (es un mínimo local del potencial). Y si linealizamos en $(\pm 1, 0)$ tenemos que ambos puntos son asintóticamente estables. Es interesante observar que estos puntos de equilibrio hubiesen sido centros en el sistema conservativo asociado, pero al introducir el término disipativo $+\varepsilon x'$ los hemos "convertido" en asintóticamente estables.

Por la Proposición 5.61 sabemos que la energía es estrictamente decreciente fuera de los puntos de equilibrio. Y si $(x_0, y_0) \in \{E(x, y) < 0\}$ tendremos que la solución correspondiente $(x(t), y(t))$ converge a $(1, 0)$ o a $(-1, 0)$. Podemos ver esto último con un argumento similar al del ejemplo 4.35 donde $\varepsilon = 1$.

Ejemplo 5.63. Sea el sistema disipativo

$$x'' + \varepsilon x' + xe^{-x^2} = 0 \quad ; \quad \begin{cases} x' = y \\ y' = -\varepsilon y - xe^{-x^2} \end{cases}$$



con $\varepsilon > 0$. El único punto de equilibrio es el origen. La energía del sistema es $E(x,y) = \frac{y^2}{2} - \frac{e^{-x^2}}{2}$ y la energía potencial es $U(x) = -\frac{e^{-x^2}}{2}$. Como $x = 0$ es un mínimo local para el potencial $U(x)$ sabemos que el origen es asintóticamente estable. Además, podríamos usar el Teorema de Lasalle con la función de Lyapunov

$$V(x,y) = \frac{y^2}{2} - \frac{e^{-x^2}}{2} + \frac{1}{2},$$

que satisface que $V \geq 0$ en todo $\mathbb{R}^2$, que $V(x,y) = 0$ si y solo si $(x,y) = 0$ y que $\nabla V(x,y) \cdot (y, -\varepsilon y - xe^{-x^2}) = -\varepsilon y^2 \leq 0$. Entonces, si $m > 0$ es tal que $\{V(x,y) \leq m\}$ es un entorno compacto del origen, entonces debe ser positivamente invariantes y formar parte de la cuenca de atracción del origen. Así,

$$\bigcup_{m \in (0,1/2)} \{V(x,y) \leq m\} = \{V(x,y) < 1/2\}$$

forma parte de la cuenca de atracción del origen. No está claro en cualquier caso que todas las soluciones del sistema vayan al origen.

También podría ser interesante estudiar los tiempos maximales de existencia. Pero tras una breve conmprobación se puede ver que la función $g(x,y) = (y, -\varepsilon y - xe^{-x^2})$ es globalmente Lipschitz en $\mathbb{R}^2$, luego toda solución está definida en todo $\mathbb{R}$.

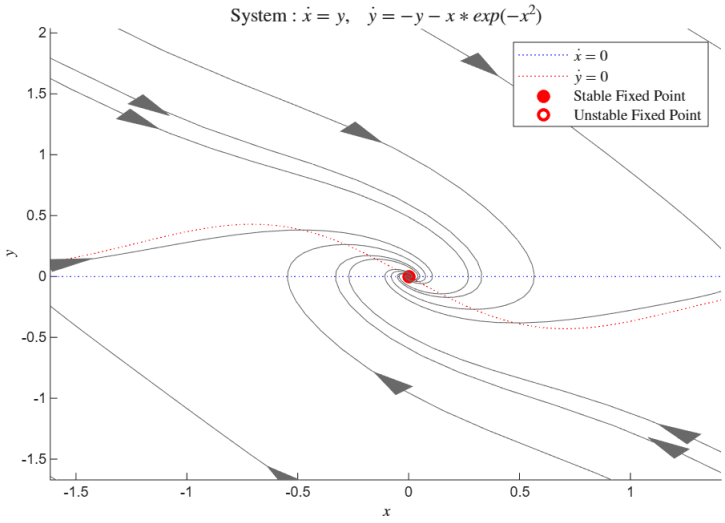
Proposición 5.64. *Consideremos una EDO disipativa $x'' + \varepsilon x' + f(x) = 0$ con $\varepsilon > 0$ y $f \in C^1(\mathbb{R})$. Entonces:*

i) Para toda solución cuya semiórbita positiva es acotada, su conjunto ω-límite está formado por equilibrios.

ii) Si los equilibrios forman un conjunto discreto (por ejemplo si hay solo un número finito de ellos) entonces el conjunto ω-límite de las soluciones del apartado i) están formados por un único equilibrio y la solución converge a ese equilibrio cuando $t \to \infty$.

iii) Si x_* es un mínimo local estricto de la energía potencial $U(x) = \int_0^x f(s)\,ds$ tal que $x_* \in (a,b)$ tal que $U(a) = U(b)$, en $[a,b]$ y asumimos que no hay otros puntos críticos de U. Sea $E_0 = \max_{[a,b]} F$ (que verificará $E_0 = U(a) = U(b)$). Entonces para cualquier dato inicial en

$$U = \{(x,v),\ x \in (a,b),\ E(x,v) < E_0\}$$



la solución converge, cuando $t \to \infty$, *a* $(x_*, 0)$. *Por tanto* $(x_*, 0)$ *es asintóticamente estable y* U *está dentro de su cuenca de atracción.*

iv) Si x_* *es un máximo local aislado de* U *entonces* $(x_*, 0)$ *es inestable.*

Demostración. Se deja como ejercicio al lector. □

5.5. Aplicación: Sistemas de Lotka-Volterra

Sea $x(t)$ el número de presas de cierta especie en tiempo t, y sea $y(t)$ el número de depredadores de cierta especie en tiempo t, que conviven en el mismo hábitat. El modelo de Lotka-Volterra de tipo presa-depredador con crecimiento Malthusiano (sin competencia intraespecífica) viene dado por

$$\begin{cases} x' = \lambda x - bxy = (\lambda - by)x \\ y' = -\mu y + cxy = (-\mu + cx)y \end{cases} \qquad b, c, \lambda, \mu > 0 \tag{5.10}$$

Podemos reducir el número de parámetros que aparecen en el modelo haciendo el cambio $x = u/c$, $y = v/b$. De esta forma

$$\begin{cases} x' = \dfrac{u'}{c} = (\lambda - by)x = \left(\lambda - b\dfrac{v}{b}\right)\dfrac{u}{c} = (\lambda - v)\dfrac{u}{c} \\ y' = \dfrac{v'}{b} = (-\mu + cx)y = \left(-\mu + c\dfrac{u}{c}\right)\dfrac{v}{b} = (-\mu + u)\dfrac{v}{b} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} u' = (\lambda - v)u \\ v' = (-\mu + u)v \end{cases} \qquad \lambda, \mu > 0.$$

Los diferentes modelos de tipo Lotka-Volterra (2 especies interaccionan) son los siguientes (con reducción de parámetros como se ha indicado).

1. Crecimiento Malthusiano. Sean $\lambda, \mu > 0$.

   a) Presa-depredador: $\begin{cases} x' = \lambda x - xy \\ y' = -\mu y + xy \end{cases}$

b) Competición: $\begin{cases} x' = \lambda x - xy \\ y' = -\mu y - xy \end{cases}$

c) Simbiosis: $\begin{cases} x' = -\lambda x + xy \\ y' = -\mu y + xy \end{cases}$

2. Competencia intraespecífica (o modelo logístico). Sean $\lambda, \mu, c, b > 0$.

a) Presa-depredador:

$$\begin{cases} x' = \lambda x - x^2 - bxy \\ y' = -\mu y - y^2 + cxy \end{cases} \tag{5.11}$$

b) Competición: $\begin{cases} x' = \lambda x - x^2 - bxy \\ y' = \mu y - y^2 - cxy \end{cases}$

c) Simbiosis: $\begin{cases} x' = -\lambda x - x^2 + bxy \\ y' = -\mu y - y^2 + cxy \end{cases}$

Realizaremos un estudio a fondo únicamente del sistema (5.11), de tipo presa-depredador con competencia intraespecífica. El valor del producto $bc > 1$ o $bc < 1$ determina el grado de intensidad en la interacción entre x e y. Si $bc > 1$ se dice que hay alta intensidad, y si $bc < 1$ se dice que hay baja intensidad. Los puntos de equilibrio son

$$\left\{(0,0), (0,-\mu), (\lambda, 0), (A,B) := \left(\frac{\lambda + b\mu}{1+bc}, \frac{c\lambda - \mu}{1+bc}\right)\right\},$$

aunque el punto $(0, -\mu)$ no se estudiará por no pertenecer al primer cuadrante. En lo que sigue será esencial ir distinguiendo el caso $c\lambda - \mu > 0$ del caso $c\lambda - \mu < 0$ pues (A, B) estará en el primer cuadrante en el primer caso, y no lo estará en el segundo.

Antes de comenzar el estudio del sistema (5.11), enunciamos sin demostración el siguiente lema que será de utilidad para determinar que ciertas regiones son positivamente invariantes.

Lema 5.65. *Sea un sistema autónomo $x' = f(x)$ con $f \in C^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$. Sea $C \subset \mathbb{R}^2$ una curva expresada por $C = \{s(x,y) = 0\}$ donde s es una función de clase C^1. Sea $(x_0, y_0) \in C$ y sea $U \subset \mathbb{R}^2$ abierto con $(x_0, y_0) \in U$. Supongamos que $\nabla s(x,y) \neq 0$ para todo $(x,y) \in U$, y llamemos $(x(t), y(t))$ a la única solución del PVI*

$$\begin{cases} (x', y') = f(x,y) \\ (x(0), y(0)) = (x_0, y_0) \end{cases}.$$

Entonces

(I) Si $\nabla s(x_0, y_0) \cdot f(x_0, y_0) > 0$ tenemos que existe $\delta > 0$ tal que $(x(t), y(t)) \in U$ para todo $t \in (-\delta, \delta)$ y además

$$\begin{cases} (x(t), y(t)) \in \{s(x,y) < 0\} & \forall t \in (-\delta, 0) \\ (x(t), y(t)) \in \{s(x,y) > 0\} & \forall t \in (0, \delta) \end{cases}$$

(II) Si $\nabla s(x_0, y_0) \cdot f(x_0, y_0) < 0$ tenemos que existe $\delta > 0$ tal que $(x(t), y(t)) \in U$ para todo $t \in (-\delta, \delta)$ y además

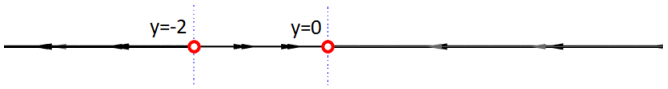
$$\begin{cases} (x(t), y(t)) \in \{s(x,y) > 0\} & \forall t \in (-\delta, 0) \\ (x(t), y(t)) \in \{s(x,y) < 0\} & \forall t \in (0, \delta) \end{cases}$$

• **Soluciones del tipo** $(\mathbf{x(t)}, \mathbf{0})$, $(\mathbf{0}, \mathbf{y(t)})$. En el caso $x = 0$ es fácil ver que al resolver independientemente los sistemas

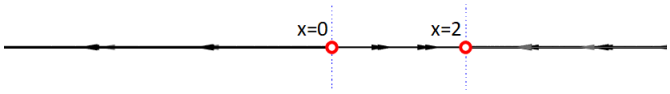
$$\begin{cases} x' = 0 \\ x(0) = 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} y' = -y^2 - \mu y \\ y(0) = y_0 \end{cases},$$

obtendríamos las soluciones $(0, y(t))$ explícitamente. En particular las rectas $\{x = 0\}$, $\{y = 0\}$ son conjuntos invariantes.

La recta de fases del sistema en el eje $x = 0$ queda como sigue.



Un razonamiento análogo nos daría la recta de fases en el eje $y = 0$.



• **Linealización en los puntos de equilibrio del primer cuadrante**. Podemos calcular la matriz Jacobiana de derivadas de la función $f(x, y) = (\lambda x - x^2 - bxy, -\mu y - y^2 + cxy)$,

$$Df(x, y) = \begin{bmatrix} \lambda - 2x - by & -bx \\ cy & -\mu - 2y + cx \end{bmatrix}.$$

La linealización en el origen

$$Df(0, 0) = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\mu \end{bmatrix},$$

junto con el Teorema de Grobman-Hartman (pues se trata de un punto hiperbólico), nos indica que estamos ante un punto de silla. Además ya conocemos que la variedad estable es $\{x = 0\}$ y la variedad inestable $\{y = 0\}$. Por otro lado tenemos

$$Df(\lambda, 0) = \begin{bmatrix} -\lambda & -b\lambda \\ 0 & -\mu + c\lambda \end{bmatrix}.$$

Ahora estaremos ante un punto asintóticamente estable si $-\mu + c\lambda < 0$ e inestable si $-\mu + c\lambda > 0$. De hecho, en este último caso el Teorema de Grobman-Hartman (pues estamos ante un punto hiperbólico) nos dice que tenemos un punto de silla, y el Teorema de la variedad estable / inestable nos dice que la dirección de entrada del conjunto estable local de $(\lambda, 0)$ es el eje $\{y = 0\}$ y el conjunto inestable local será paralelo a la recta generada por las soluciones

$$\begin{bmatrix} -\lambda + \mu - c\lambda & -b\lambda \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{\lambda - \mu + c\lambda}{b\lambda} x.$$

Por último, en el caso de que $-\mu + c\lambda > 0$ tenemos un tercer punto de equilibrio en el primer cuadrante, el punto (A, B). La matriz Jacibiana sería

$$Df(A, B) = \begin{bmatrix} -A & -bA \\ cB & -B \end{bmatrix}$$

Se tiene que

$$\begin{cases} \text{Traza}(Df(A,B)) = -A - B < 0 \\ \text{Det}(Df(A,B))) = AB + bcAB > 0 \end{cases}$$

por lo que la parte real de todos los autovalores es estrictamente negativa. Así sabemos que se trata de un punto de equilibrio asintóticamente estable.

• **Regiones invariantes. Campo de pendientes. Convergencia de las soluciones.**

A la hora de esbozar el diagrama de fases con precisión (solo en el primer cuadrante) es útil definir las siguientes tres regiones (si $c\lambda - \mu < 0$) y las cuatro regiones siguientes (si $c\lambda - \mu > 0$), donde básicamente estamos distinguiendo las partes donde $x' < 0$ o $x' > 0$ y $y' < 0$ o $y' > 0$. En lo que sigue definimos las rectas $r(x,y) = \lambda - x - by$, $s(x,y) = -\mu - y + cx$, y observamos que

$$\begin{cases} x' = xr(x,y) \\ y' = ys(x,y) \end{cases} .$$

Sea también $\mathbb{R}^2_+ = \{x > 0, y > 0\}$.

CASO $c\lambda - \mu < 0$: Sean las regiones

$$\begin{aligned} I &= \mathbb{R}^2_+ \cap \{x' < 0, y' > 0\} = \mathbb{R}^2_+ \cap \{s > 0, r < 0\} \\ II &= \mathbb{R}^2_+ \cap \{x' < 0, y' < 0\} = \mathbb{R}^2_+ \cap \{s < 0, r < 0\} \\ III &= \mathbb{R}^2_+ \cap \{x' > 0, y' < 0\} = \mathbb{R}^2_+ \cap \{s < 0, r > 0\} \end{aligned}$$

Es importante también observar que $x' = 0$ si y solo si $x = 0$ o $r(x,y) = 0$, y que $y' = 0$ si y solo si $y = 0$ o $s(x,y) = 0$. Estas regiones vienen indicadas en el dibujo que aparece más abajo; Dibujo 5.1.

Lema 5.66. *Toda solución que parte del primer cuadrante $\mathbb{R}^2_+$ debe converger al punto $(\lambda, 0)$ cuando $t \to \infty$.*

Demostración. 1. Toda trayectoria que comienza en I entra en II.

Sea $(x(t), y(t))$ solución con $(x(0), y(0)) \in I$. Supongamos que $(x(t), y(t)) \in I$ para todo $I \subset \mathbb{R}$ intervalo maximal de existencia de la solución. Entonces

$$\begin{cases} x'(t) < 0 \; \forall t \in I \; \Rightarrow \; \text{(decreciente)} \;\; \mu/c \leq x(t) \leq x(0) \; \forall t \in I \cap [0, \infty) \\ y'(t) > 0 \; \forall t \in I \; \Rightarrow \; \text{(creciente)} \;\; y(0) \leq y(t) \leq cx(0) - \mu \; \forall t \in I \cap [0, \infty) \end{cases}$$

Esto nos dice que $(x(t), y(t))$ se encuentra en un compacto para todo $t \in I \cap [0, \infty)$ luego necesariamente $I \cap [0, \infty) = [0, \infty)$ y por acotación y monotonía de la solución debe existir

$$\lim_{t \to \infty} (x(t), y(t)) = (\xi, \eta),$$

donde (ξ, η) debe ser un punto de equilibrio. Sin embargo en la región $\overline{I}$ no hay puntos de equilibrio, luego tenemos un absurdo.

2. Ninguna trayectoria puede entrar en la región I desde la región II.

Para justificar esta afirmación usaremos el Lema 5.65. De hecho, considerando la recta $s(x,y) = -y + cx - \mu$ tenemos que para todo $(x,y) \in \{s = 0\} \cap \{x > 0\}$

$$\nabla s(x,y) \cdot f(x,y) = (c,-1)(x \cdot r(x,y), y \cdot s(x,y)) = (c,-1)(x \cdot r(x,y), 0) = cx \cdot r(x,y) < 0,$$

porque tenemos $r(x,y) < 0$. Aplicando pues el Lema 5.65 concluimos que toda solución que toque a $\{s = 0\} \cap \{x > 0\}$ va de la región $\{s > 0\}$ a la región $\{s < 0\}$.

3. La región III es positivamente invariante y toda trayectoria que comienza en III debe converger a $(\lambda, 0)$ cuando $t \to \infty$.

   La región III es positivamente invariante porque si una solución sale de allí, debería cortar a otras trayectorias (las de los ejes, y esto no puede pasar por unicidad de soluciones) o debería irse a la región II, pero un argumento análogo al realizado en el punto anterior impide que esto pueda ocurrir.

   Por tanto tenemos que toda solución (x,y) que sale de III satisface que $(x(t), y(t))$ permanece en un compacto para todo $t \in [0, T_{max})$. Esto implica que $T_{max} = +\infty$ por la teoría fundamental de existencia y unicidad sobre soluciones maximales. Además tenemos que $x'(t) > 0$ y $y'(t) < 0$ para todo $t \in [0, \infty)$, y como ambas funciones están acotadas inferiormente por cero, debe existir el límite

   $$\lim_{t \to \infty} (x(t), y(t)) = (\xi, \eta) \in \overline{III}$$

   que sabemos debe ser punto de equilibrio. En III hay dos puntos de equilibrio, el $(0,0)$ y el $(\lambda, 0)$, pero se descarta fácilmente la opción de que $(\xi, \eta) = (0,0)$ porque $x(0) > 0$ y al ser $x'(t) > 0$ para todo $t \geq 0$. Luego en efecto se tiene que toda solución que sale de la región III va a $(\lambda, 0)$.

4. Toda trayectoria que comienza en II está definida en $[0, \infty)$ y también acaba convergiendo a $(\lambda, 0)$ cuando $t \to \infty$.

   Si una solución sale de II ya sabemos que no puede entrar en la región I por el segundo apartado. Además tenemos que si una solución (x,y) satisface que $(x(0), y(0)) \in II$ se tiene $x'(t) < 0$ y $y'(t) < 0$ para todo $t \in [0, T_{max})$. Por tanto

   $$\begin{cases} 0 < x(t) \leq \frac{y(0)+\mu}{c} \ \forall t \in [0, T_{max}) \\ 0 < y(t) \leq y(0) \ \forall t \in [0, T_{max}) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad (x(t, y(t)) \text{ vive en un compacto } \forall t \in [0, T_{max}).$$

   Se tiene que $T_{max} = \infty$ y además habría dos posibilidades. O bien que la solución pase a la región III, y en ese caso ya sabemos que acabará convergiendo a $(\lambda, 0)$. O bien que permanezca siempre en II, pero al estar x, y acotadas inferiormente y ser estrictamente decrecientes, debería existir

   $$\lim_{t \to \infty} (x(t), y(t)) = (\xi, \eta) \in \overline{II}.$$

   Sabemos que en ese caso (ξ, η) es un punto de equilibrio, y como en $\overline{II}$ solo hay un punto de equilibrio, el $(\lambda, 0)$, la solución solo puede converger a ese punto.

□

CASO $c\lambda - \mu > 0$: Ahora aparece otro punto de equilibrio, el (A, B) en $\mathbb{R}^2_+$. Sean las regiones

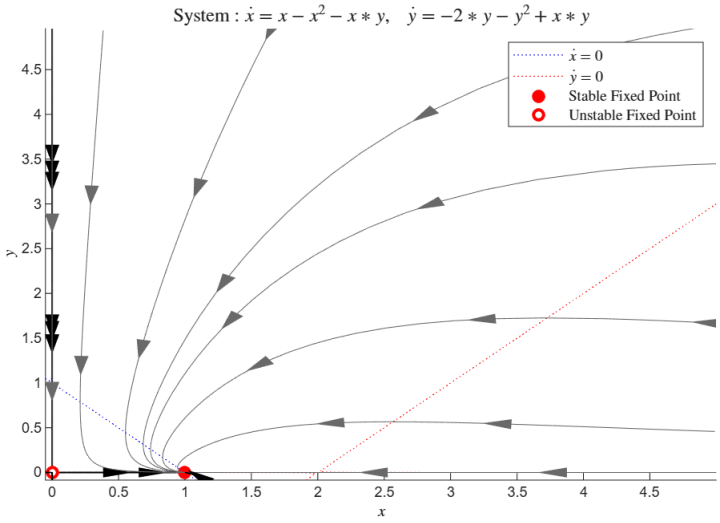


Figura 5.1: Diagrama de fases del sistema (5.11). Caso $c\lambda - \mu < 0$.

$$
\begin{aligned}
I &= \mathbb{R}^2_+ \cap \{x' < 0, y' > 0\} = \mathbb{R}^2_+ \cap \{s > 0, r < 0\} \\
II &= \mathbb{R}^2_+ \cap \{x' < 0, y' < 0\} = \mathbb{R}^2_+ \cap \{s < 0, r < 0\} \\
III &= \mathbb{R}^2_+ \cap \{x' > 0, y' < 0\} = \mathbb{R}^2_+ \cap \{s < 0, r > 0\} \\
IV &= \mathbb{R}^2_+ \cap \{x' > 0, y' > 0\} = \mathbb{R}^2_+ \cap \{s > 0, r > 0\}
\end{aligned}
$$

Podemos hacer un primer esbozo del campo de direcciones de las soluciones en el primer cuadrante, incluyendo las regiones arriba definidas.

Lema 5.67. *Toda solución que parte del primer cuadrante $\mathbb{R}^2_+$ debe converger al punto (A, B) cuando $t \to \infty$.*

Demostración. 1. Toda solución (x, y) con $(x(0), y(0)) \in \mathbb{R}^2_+$ está definida en $[0, \infty)$.

Se deja como ejercicio al lector.

2. Toda trayectoria que comienza en I, II, III o IV o bien pasa a II, III, IV o I respectivamente, o bien converge al punto de equilibrio (A, B).

Se deja como ejercicio al lector.

3. Toda solución de R^2_+ acaba convergiendo a (A, B) cuando $t \to \infty$.

Basta que comprobemos que no pueden existir órbitas periódicas en el primer cuadrante, pues en ese caso, usando el Teorema de Poincaré-Bendixson, sabremos que toda solución del primer cuadrante deberá converger al único punto de equilibrio del mismo, el (A, B). Las soluciones que salen de $\mathbb{R}^2_+$ nunca pueden converger al origen, pues este era un punto de silla, y sabemos que su variedad estable se encontraba en el eje $\{x = 0\}$.

Para demostrar que no hay órbitas periódicas en $\mathbb{R}^2_+$ usaremos el criterio de Bendixson-Dulac (véase la Observación 5.26). Por ejemplo, para el caso particular de

$$\begin{cases} x' = 2x - x^2 - xy \\ y' = -y - y^2 + xy \end{cases},$$

si tomamos la función $\varphi(x, y) = 1/xy$ que es de clase C^1 en $\mathbb{R}^2_+$, tenemos que

$$\operatorname{div}(f\varphi)(x, y) = (-1/y) - (1/x) < 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2_+.$$

La misma función $\varphi(x, y) = 1/xy$ sirve para demostrar el caso general (se deja como ejercicio al lector).

□

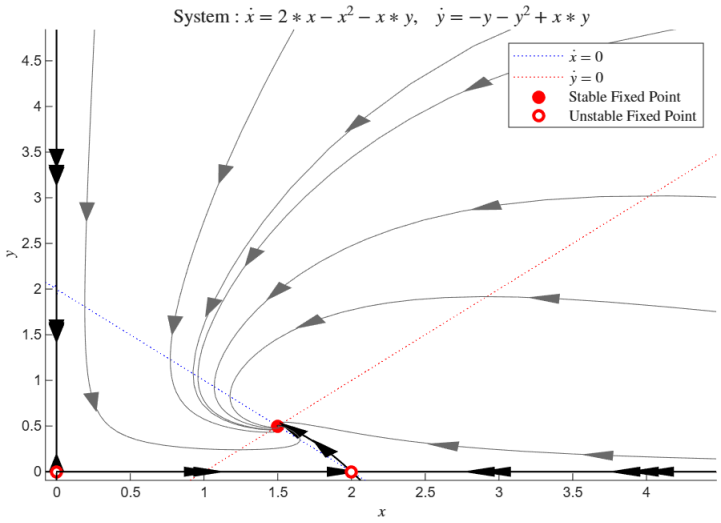


Figura 5.2: Diagrama de fases del sistema (5.11). Caso $c\lambda - \mu > 0$.

Apéndice A

Repaso de sistemas lineales

Definición A.1. Un sistema de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden es de la forma

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}(t)x_1(t) + \cdots + a_{1n}(t)x_n(t) + g_1(t) \\ x_2'(t) = a_{21}(t)x_1(t) + \cdots + a_{2n}(t)x_n(t) + g_2(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) = a_{n1}(t)x_1(t) + \cdots + a_{nn}(t)x_n(t) + g_n(t) \end{cases} . \tag{A.1}$$

donde $g_i, a_{ij} : I \to \mathbb{R}$ son funciones continuas para todo $1 \leq i, j \leq n$ en cierto intervalo $I \subset \mathbb{R}$.

En forma matricial escribiríamos $x'(t) = A(t)x(t) + G(t)$ donde

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad ; \quad A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{bmatrix} \quad ; \quad G(t) = \begin{bmatrix} g_1(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{bmatrix}.$$

Si $G(t) = (0, \dots, 0)$ se dice que el sistema es homogéneo.

Ahora realizaremos un estudio de la estructura que forman el conjunto de soluciones de un sistema de EDOs de orden 1 lineal. Para ello necesitaremos previamente enunciar el siguiente teorema de existencia y unicidad.

Teorema A.2. *Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo y sean $a_{ij}, g_i \in C(I)$ para todo $1 \leq i, j, \leq n$. Para cada $t_0 \in I$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, existe una única solución $x : I \to \mathbb{R}^n$ al sistema* (A.1) *satisfaciendo las condiciones iniciales $x(t_0) = x_0$.*

Demostración. Usar el Teorema de Cauchy-Lipschitz global. □

A.1. Estructura del conjunto de soluciones

Durante esta sección denotaremos por I a un intervalo de $\mathbb{R}$.

Definición A.3. Decimos que un conjunto de funciones $x_1, \dots, x_m : I \to \mathbb{R}^n$ son *linealmente dependientes en I* si existen $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ no todos nulos tales que

$$\lambda_1 x_1(t) + \cdots + \lambda_m x_m(t) = 0 \quad \forall t \in I.$$

Decimos que $x_1, \dots, x_m$ son *linealmente independientes en I* si no son linealmente dependientes en I.

Definición A.4. Dado un conjunto de funciones $x_1 = (x_{11}, \ldots, x_{1n}), \ldots, x_n = (x_{n1}, \ldots, x_{nn}) : I \to \mathbb{R}^n$ se denomina *Wronskiano* de estas funciones a la aplicación $W[x_1, \ldots, x_n] : I \to \mathbb{R}$ dada por

$$W[x_1, \ldots, x_n](t) = \det \begin{bmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \cdots & x_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1}(t) & x_{2n}(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{bmatrix}$$

Lema A.5. *Si $x_1, x_2, \ldots, x_n : I \to \mathbb{R}^n$ son linealmente dependientes en I entonces $W[x_1, \ldots, x_n](t) = 0$ para todo $t \in I$.*

Demostración. Trivial. □

Definición A.6. Se denomina *conjunto fundamental de soluciones* del sistema lineal homogéneo

$$x'(t) = A(t)x(t) \tag{A.2}$$

en un intervalo I a cualquier conjunto de n soluciones linealmente independientes en $x_1, \ldots x_n : I \to \mathbb{R}^n$.

Teorema A.7 (Teorema de estructura de sistemas lineales homogéneas)**.** *Sea $I \subset \mathbb{R}$ intervalo y sea el sistema lineal homogéneo*

$$x'(t) = A(t)x(t),$$

donde $A(t) = (a_{ij}(t))_{1 \le i,j \le n}$, $a_{ij} \in C(I)$ para todo $1 \le i, j \le n$. Entonces:

(a) Si $x_1, \ldots, x_n : I \to \mathbb{R}^n$ son soluciones, cualquier combinación lineal suya también lo es. Si además son linealmente independientes, entonces $W[x_1, \ldots, x_n](t) \neq 0$ para todo $t \in I$.

(b) Siempre existe un conjunto fundamental de soluciones $\{x_1, \ldots, x_n\}$ y dada cualquier otra solución $x : I \to \mathbb{R}^n$, siempre existirán constantes (únicas) $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ tales que

$$x(t) = c_1 x_1(t) + \cdots + c_n x_n(t), \quad \forall t \in I.$$

Demostración. (a) La primera parte es trivial. Veamos la segunda parte. Supongamos por reducción al absurdo que existe $t_0 \in I$ tal que $W[x_1, \ldots, x_n](t_0) = 0$. Entonces

$$\det \begin{bmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \cdots & x_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1}(t) & x_{2n}(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{bmatrix} \neq 0$$

y por tanto si nos planteamos el sistema lineal

$$\begin{cases} c_1 x_{11}(t_0) + \cdots + c_n x_{1n}(t_0) = 0 \\ \vdots \\ c_1 x_{n1}(t_0) + \cdots + c_n x_{nn}(t_0) = 0 \end{cases}$$

sabemos que existirá una solución no nula $(c_1, \ldots, c_n) \neq (0, \ldots, 0)$. Consideramos ahora la función dada por la combinación lineal $z = c_1 x_1 + \cdots c_n x_n$. Por un lado sabemos que z debe ser solución del sistema homogéneo y por otro lado satisface la condición inicial

$$z(t_0) = c_1 x_1(t_0) + \cdots c_n x_n(t_0) = (0, \ldots, 0).$$

Sin embargo, esto significa que el PVI dado por

$$\begin{cases} x'(t) = A(t)x(t) \\ x(t) = (0, \dots, 0) \end{cases}$$

tendría dos soluciones, la nula y la función z. Por el Teorema de existencia y unicidad A.2 se seguiría que $z(t) = 0$ para todo $t \in I$. Esto implica que $\{x_1, \dots, x_n\}$ serían linealmente dependientes, contradiciendo la hipótesis.

(b) Sea $t_0 \in I$ y para cada $j = 1, \dots, n$ sea el PVI

$$(PVI)_j \begin{cases} x'(t) = A(t)x(t) \\ x(t_0) = e_j = (0, \dots, \overset{j)}{1}, \dots, n) \end{cases}.$$

Por el Teorema de existencia y unicidad A.2, para cada $j = 1 \dots, n$, existe una única solución $x_j : I \to \mathbb{R}^n$. Además $W[x_1, \dots, x_n](t_0) = \det(I_{n\times n}) = 1$, luego por el Lema A.5 las funciones $\{x_1, \dots, x_n\}$ deben ser linealmente independientes y así forman un conjunto fundamental de soluciones del sistema $x'(t) = A(t)x(t)$.

En el caso de que $z = (z_1, \dots, z_n) : I \to \mathbb{R}^n$ sea otra solución, tomando $t_0 \in I$ arbitrario, sabemos que $W[x_1, \dots, x_n](t_0) \neq 0$ gracias al primer apartado. Si ahora planteamos el sistema (algebráico) lineal

$$\begin{cases} c_1 x_{11}(t_0) + \cdots + c_n x_{1n}(t_0) = z_1(t_0) \\ \vdots \\ c_1 x_{n1}(t_0) + \cdots + c_n x_{nn}(t_0) = z_n(t_0) \end{cases}$$

sabemos que debe existir una única solución $(c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$. Definimos la función $w = c_1 x_1 + \cdots c_n x_n$. Por un lado tenemos que debe ser solución al sistema $x'(t) = A(t)x(t)$ pòr ser combinación lineal de soluciones, y por otro resuelve el PVI

$$\begin{cases} x'(t) = A(t)x(t) \\ x(t_0) = z(t_0) \end{cases}.$$

Sin embargo, el PVI anterior también es resuelto por la función $z(t)$. Aplicando el Teorema de existencia y unicidad A.2 se obtiene que

$$z(t) = w(t) = c_1 x_1(t) + \cdots + c_n x_n(t).$$

□

Se sigue del Teorema A.7 que el conjunto de soluciones del sistema lineal homogéneo (A.2) tiene estructura de subespacio vectorial de dimensión n dentro del espacio $C^1(I; \mathbb{R}^n)$. Una base del subepsacio viene dada por cualquier conjunto fundamental de soluciones.

Definición A.8. Dado un sistema lineal homogéneo $x'(t) = A(t)x(t)$ con $A(t) \in C(I; \mathbb{M}_n)$, donde $\mathbb{M}_n$ denota el conjunto de matrices $n \times n$, decimos que la función matricial $\Phi(t) \in C(I; \mathbb{M}_n)$ es una *matriz fundamental* del sistema si sus columnas forman un conjunto fundamental de soluciones. En el caso de que exista $t_0 \in I$ tal que $\Phi(t_0) = Id_{n\times n}$ decimos que $\Phi(t)$ es una *matriz fundamental principal*[1].

[1]Siempre hay varias matrices fundamentales principales.

Observaciones:

- Podemos escribir la solución general de un sistema lineal homogéneo $x'(t) = A(t)x(t)$ como

$$x(t) = \Phi(t) \cdot \begin{bmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_n \end{bmatrix}, \quad C_1, \ldots, C_n \in \mathbb{R},$$

  donde de hecho

$$x(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(0)x(0)$$

- $\Phi'(t) = A(t)\Phi(t)$.

Pasamos ahora a estudiar el sistema no homogéneo $x'(t) = A(t)x(t) + G(t)$ con $G = (g_1, \ldots, g_n) : I \to \mathbb{R}^n$ continua (ver (A.1)).

Teorema A.9. *Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ intervalo y sea el sistema lineal $x'(t) = A(t)x(t)+G(t)$ con $A(t) \in C(I; \mathbb{M}_n)$, $G(t) \in C(I; \mathbb{R}^n)$. Si $\{x_1, \ldots, x_n\}$ forman un conjunto fundamental de soluciones del sistema homogéneo asociado $x'(t) = A(t)x(t)$ y si $x_p : I \to \mathbb{R}^n$ es una solución particular del sistema no homogéneo, entonces para cualquier otra solución $x : I \to \mathbb{R}^n$ existen constantes $C_1, \ldots, C_n \in \mathbb{R}$ tales que*

$$x(t) = x_p(t) + \sum_{k=1}^{n} C_k x_k(t).$$

Demostración. Sea $x : I \to \mathbb{R}^n$ solución. Basta que comprobemos que $x - x_p$ es solución de la EDO homogéneas asociada, donde x_p denota nuestra solución particular al sistema no homogéneo. En efecto,

$$(x - x_p)'(t) = x'(t) - x_p'(t) = A(t)x(t) + G(t) - (A(t)x_p(t) + G(t)) = A(t)(x(t) - x_p(t)).$$

Aplicando el Teorema A.7(b), existirán constantes (únicas) $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ tales que $x - x_p = \sum_{i\geq 1}^{n} c_i x_i$, por lo que

$$x = x_p + \sum_{i\geq 1}^{n} c_i x_i.$$

□

A.2. Sistemas lineales con coeficientes constantes

Sea $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathbb{M}_n$ y consideremos el sistema

$$x'(t) = Ax(t) + G(t),$$

donde $G : I \to \mathbb{R}^n$ es una función continua.

A.2.1. Estudio de las soluciones del sistema homogéneo $\mathbf{x}'(\mathbf{t}) = \mathbf{Ax}(\mathbf{t})$

Buscaremos soluciones de la forma

$$x(t) = Ve^{\lambda t} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} e^{\lambda t}, \quad v_1, \ldots, v_n, \lambda \in \mathbb{R}.$$

En ese caso, si una expresión del anterior tipo es solución se sigue que

$$x'(t) = \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda v_1 e^{\lambda t} \\ \vdots \\ \lambda v_n e^{\lambda t} \end{bmatrix} = \lambda V e^{\lambda t} = AVe^{\lambda t} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda V = AV.$$

Es decir, λ debe ser un autovalor de la matriz A y V es un autovector asociado. Por tanto, la búsqueda de soluciones del sistema lineal homogéneo pasa por el cálculo de las raíces de la ecuación característica de la matriz A, esto es, $\det(A - \lambda I) = 0$. En función de si estas raíces, es decir los autovalores, sean reales o complejos y dependiendo de sus multiplicades algebraicas y geométricas aparecerán diferentes situaciones a la hora de dar la solución general del sistema $x' = Ax$.

(a) A tiene n autovalores reales diferentes.

Un conjunto fundamental de soluciones viene dado por

$$\begin{cases} x_1(t) = V_1 e^{\lambda_1 t} \\ \qquad \vdots \\ x_n(t) = V_n e^{\lambda_n t} \end{cases}$$

donde $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ son los autovalores y $V_1, \ldots, V_n$ son sus autovectores asociados.

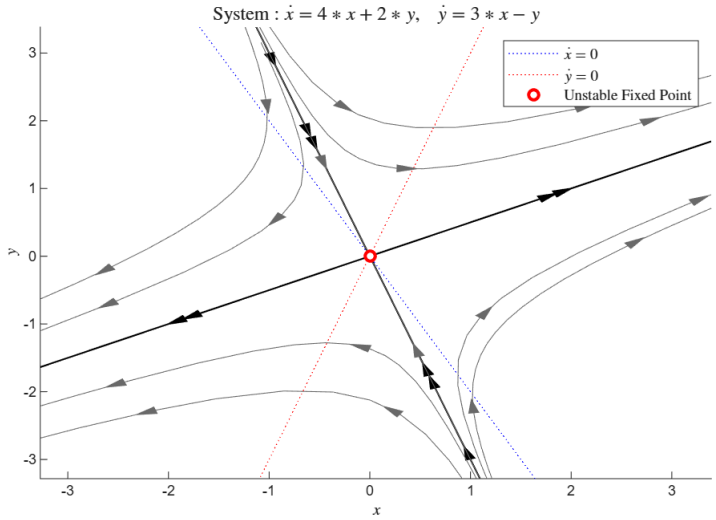
Ejemplo A.10. Resolveremos el sistema $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$.

Las raíces de la ecuación característica son $\lambda_1 = 5$ y $\lambda_2 = -2$. Ahora calculamos los subespacios propios asociados a cada autovalor.

$$\begin{cases} (A - 5I)V = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad V = k \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \ k \in \mathbb{R} \\ \\ (A + 2I)V = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad V = k \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \ k \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Podemos escribir por tanto la solución general del sistema como

$$x(t) = C_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{5t} + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} e^{-2t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$



(b) A tiene un auotvalor $\lambda \in \mathbb{R}$ con multiplicidad algebraica igual a la geométrica $m = m_a(\lambda) = m_g(\lambda)$.

Un conjunto de m soluciones linealmente independientes der soluciones viene dado por

$$\begin{cases} x_1(t) = V_1 e^{\lambda t} \\ \quad \vdots \\ x_m(t) = V_m e^{\lambda t} \end{cases}$$

donde $V_1, \ldots, V_m$ son m autovectores linealmente independientes de λ.

(c) A tiene dos autovalores complejos conjugados $\lambda = \alpha \pm \beta i$ con autovectores asociados V, $\overline{V}$ (aquí $\overline{V} = (\overline{v_1}, \ldots, \overline{v_n})$ denota el vector conjugado).

Un conjunto de dos soluciones linealmente independientes está dado por

$$\begin{cases} x_1(t) = V e^{(\alpha+\beta i)t} \\ x_2(t) = \overline{V} e^{(\alpha-\beta i)t} \end{cases}$$

o, si queremos que nuestra soluciones tomen valores reales, por

$$\begin{cases} \dfrac{x_1(t) + x_2(t)}{2} = e^{\alpha t}(\mathrm{Re}(V)\cos(\beta t) - \mathrm{Im}(V)\,\mathrm{sen}(\beta t)) \\ \dfrac{x_1(t) - x_2(t)}{2i} = e^{\alpha t}(\mathrm{Im}(V)\cos(\beta t) + \mathrm{Re}(V)\,\mathrm{sen}(\beta t)) \end{cases}.$$

Ejemplo A.11. Resolveremos el sistema $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}$.

La ecuación característica asociada a la matriz de coeficientes del sistema, que llamamos A, es

$$\det(A - \lambda I) = (1 - \lambda)((2 - \lambda)^2 + 9).$$

Sus raíces son $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2 + 3i$ y $\lambda_3 = 2 - 3i$. Ahora calculamos los subespacios propios asociados a λ_1 y λ_2.

$$\begin{cases} (A - I)V = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad V = k \begin{bmatrix} 10 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}, \ k \in \mathbb{R} \\ \\ (A - (2+3i)I)V = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad V = k \begin{bmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{bmatrix}, \ k \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Observar que automáticamente también sabemos los autovectores asociados al autovalor λ_3. Estos serán los conjugados de los de λ_2, esto es la recta generada por el vector $(0, -i, 1)$. Escribimos la solución general del sistema como

$$\begin{aligned} x(t) = & C_1 \begin{bmatrix} 10 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix} e^t + C_2 e^{2t} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cos(3t) - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \operatorname{sen}(3t) \right) + \\ & C_3 e^{2t} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cos(3t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \operatorname{sen}(3t) \right), \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(d) A tiene autovalores complejos $\lambda = \alpha \pm \beta i$ de multiplicidad algebráica igual a la geométrica $m = m_a(\alpha + \beta i) = m_g(\alpha + \beta i)$.

Un conjunto de $2m$ soluciones linealmente independientes es

$$\begin{cases} x_1(t) = V_1 e^{(\alpha+\beta i)t} \\ \quad \vdots \\ x_m(t) = V_m e^{(\alpha+\beta i)t} \end{cases} ; \quad \begin{cases} x_{m+1}(t) = \overline{V}_1 e^{(\alpha-\beta i)t} \\ \quad \vdots \\ x_{2m}(t) = \overline{V}_m e^{(\alpha-\beta i)t} \end{cases}$$

donde $V_1, \ldots, V_m$ son autovectores linealmente independientes de $\alpha + \beta i$.

(e) A tiene un autovalor λ real o complejo con multiplicidad algebraica $m_a(\lambda) \geq 2$ y geométrica $m_g(\lambda) < m_a(\lambda)$.

Ya sabemos que disponemos de m_g soluciones linealmente independientes dadas por

$$\begin{cases} x_1(t) = V_1 e^{\lambda t} \\ \quad \vdots \\ x_{m_g}(t) = V_{m_g} e^{\lambda t} \end{cases},$$

pero ¿cómo buscamos $m_a(\lambda) - m_g(\lambda)$ solucines más? Procederemos como sigue:

Para cada $j = 1, \ldots, m_a(\lambda) - m_g(\lambda)$ buscaremos soluciones de la forma

$$x^j(t) = e^{\lambda t}(U_0 + U_1 t + \cdots + U_j t^j),$$

donde imponemos que $U_j \neq (0,\dots,0)$. Si x^j es solución llegamos a las siguientes igualdades

$$\begin{aligned}(x^j)'(t) &= \lambda e^{\lambda t}(U_0 + U_1 t + \cdots + U_j t^j) + e^{\lambda t}U_1 + 2e^{\lambda t}U_2 t + \cdots + jU_j t^{j-1}e^{\lambda t} \\ &= Ax^j(t) = e^{\lambda t}(Au_0 + AU_1 t + \cdots + AU_j t^j) \quad \Leftrightarrow \\ (\lambda I - A)U_0 + t((\lambda I - A)U_1 + 2U_2) + \cdots t^{j-1}((\lambda I - A)U_{j-1}) + jU_j + t^j((\lambda I - A)U_j) &= 0.\end{aligned}$$

Concluimos que para que la igualdad anterior se de para todo $t \in \mathbb{R}$ se deben satisfacer las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} (A-\lambda I)U_0 = U_1 \\ (A-\lambda I)U_1 = 2U_2 \\ \quad\vdots \\ (A-\lambda I)U_{j-1} = jU_j \\ (A-\lambda I)U_j = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} U_1 = (A-\lambda I)U_0 \\ U_2 = \dfrac{1}{2}(A-\lambda I)^2 U_0 \\ \quad\vdots \\ U_j = \dfrac{1}{j!}(A-\lambda I)^j U_0 \\ (A-\lambda I)U_j = 0 \end{cases}.$$

Como queremos que U_j no sea nulo es obligatorio imponer que $U_j = \dfrac{1}{j!}(A-\lambda i)^j U_0 \neq 0$. Esto, junto con la última condición de la lista anterior implica que debemos pedir que

$$U_0 \in \ker((A-\lambda I)^{j+1}) \setminus \ker((A-\lambda I)^j).$$

Una vez hayamos escogido cualquier U_0 de tal forma, los demás vectores $U_1,\dots,U_j$ vendrán dados por las igualdades anteiores. Y de esta forma habremos encontrado una nueva solución x^j. Repitiendo este proceso para cada $j = 1,\dots,m_a(\lambda) - m_g(\lambda)$ obtendremos $m_a(\lambda) - m_g(\lambda)$ soluciones linealmente independientes más.

Ejemplo A.12. Resolveremos el sistema $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}\mathbf{x}$.

La ecuación característica asociada a la matriz de coeficientes del sistema, que llamamos A, es

$$\det(A-\lambda I) = (1-\lambda)(7-\lambda) + 9 = \lambda^2 - 8\lambda + 16.$$

Posee una raíz doble $\lambda = 4$. Ahora calculamos el subespacio propios asociado.

$$(A-4I)V = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad V = k\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix},\ k \in \mathbb{R}.$$

En particular $m_g(4) = 1$ y sabemos que una solución del sistema será

$$x_1(t) = e^{4t}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

pero debemos encontrar otra de la forma $x_2(t) = e^{4t}(U_0 + U_1 t)$ donde

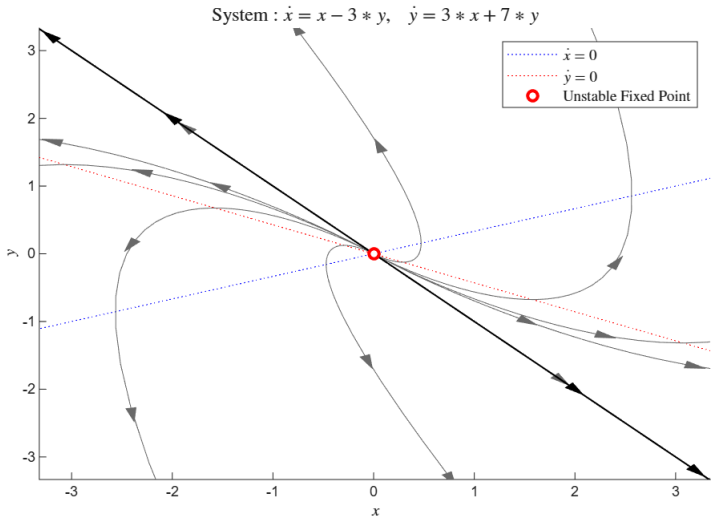
$$\begin{cases} U_1 = (A-4I)U_0 \\ U_0 \in \ker(A-4I)^2 \setminus \ker(A-4I) \end{cases}.$$

Como

$$(A-4I)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

podemos tomar $U_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ y por tanto $U_1 = (A-4I)U_0 = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \end{bmatrix}$. Escribimos finalmente la solución general como

$$x(t) = C_1 e^{4t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + C_2 e^{4t} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \end{bmatrix} t \right), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$



A.2.2. Estudio de las soluciones de sistemas no homogéneos $\mathbf{x}' = \mathbf{Ax} + \mathbf{G(t)}$.

Por el Teorema de estructura de sistemas lineales A.7 sabemos que la solución general vendrá dada por

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = C_1 x_1(t) + \cdots C_n x_n(t) + x_p(t), \quad C_1, \ldots, C_n \in \mathbb{R},$$

donde $\{x_1, \ldots, x_n\}$ forman un conunto fundamental de soluciones del sistema homogéneo asociado e x_p es una solución particular del sistema no homogéneo. La pregunta ahora es ¿cómo encontramos una solución particular?

(a) **Método de los coeficientes indeterminados.**

Si

$$G(t) = e^{\alpha t}(P_m(t)\cos(\beta t) + Q_r(t)\,\mathrm{sen}(\beta t))$$

con $P_m, Q_r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ son polinomios de grados m y r respectivamente [2] entonces una solución particular sería de la forma

$$x_p(t) = e^{\alpha t}(R_k(t)\cos(\beta t) + S_k(t)\,\mathrm{sen}(\beta t)) \tag{A.3}$$

donde

[2] Decimos que una función vectorial $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ es un polonimio de cada componente de P es un polinomio como función real de variable real.

- s es el orden de multiplicidad de la raíz $\alpha \pm \beta i$ del polinomio característico del sistema homogéneo asociado.
- $k = \text{máx}\{m, r\} + s$.
- $R_k, S_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ son polinomios de grado k con coeficientes vectoriales a determinar.

(b) **Método de variación de las constantes.**

Dada la solución general del sistema homogéneo asociado $x(t) = \sum_{k=1}^{n} x_k(t)$, $C_1, \ldots, C_n \in \mathbb{R}$, buscamos una solución particular de la forma

$$x_p(t) \sum_{k=1}^{n} C_k(t) x_k(t) \tag{A.4}$$

Observamos que si consideramos la matriz fundamental $\Phi(t)$ cuyas columnas son las soluciones del sistema homogéneo $\{x_1(t), \ldots, x_n(t)\}$, podemos escribir

$$x_p(t) = \Phi(t) \begin{bmatrix} C_1(t) \\ \vdots \\ C_n(t) \end{bmatrix} = \Phi(t) C(t),$$

donde $C(t)$ es un vector-columna formado por las funciones $C_1(t), \ldots, C_n(t)$ a determinar. Para calcular una posible solución de $C(t)$ simplemente imponemos que $x_p(t)$ sea solución.

$$x_p'(t) = \Phi'(t)C(t) + \Phi(t)C'(t) = Ax_p(t) + G(t) = A\Phi(t)C(t) + G(t).$$

Como $\Phi(t)$ es matriz fundamental, sabemos que $\Phi'(t) = A\Phi(t)$ así que

$$\Phi(t)C'(t) = G(t) = \quad \Rightarrow \quad C'(t) = \Phi^{-1}(t)G(t).$$

En el cálculo anterior recordemos que $\det(\Phi(t)) \neq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Integrando la última expresión obtendríamos $C(t)$.

De hecho, sabiendo que e^{At} es una matriz fundamental (ver siguiente sección), de aquí tenemos la Fórmula de Varaiación de las Constantes, que nos dice que si x es solución del sistema $x' = Ax + G(t)$ con $x(0) = x_0$, entonces

$$x(t) = e^{At}x_0 + e^{At} \int_0^t (e^{As})^{-1} G(s)\, ds = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)} G(s)\, ds$$

A.3. Exponencial de una matriz

Definiremos a continuación una noción que servirá de mucha utilidad a la hora de realizar una representación *formal e intuitiva* de las soluciones de los sistemas lineales homogéneos con coeficientes constantes. Este concepto nuevo es el de exponencial de una matriz. De la misma forma que cuando teníamos una EDO del tipo $x' = ax$ con $a \in \mathbb{R}$, las soluciones venían dadas por $x(t) = Ce^{at}$, $C \in \mathbb{R}$, ahora con sistemas $x' = Ax$ donde $A \in \mathbb{M}_n$ pasará algo parecido.

Definición A.13. Sea $A \in \mathbb{M}_n$. Definimos la exponencial de la matriz A como

$$e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \cdots + \frac{A^k}{k!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}. \tag{A.5}$$

Observación: Si $n = 1$, entonces $A = a \in \mathbb{R}$ y tenemos la definición usual de exponencial

$$e^a = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!}.$$

Propiedades:

1. e^A está bien definido.

   Es decir, necesitamos comprobar que cada entrada de la matriz e^A viene dada por una serie convergente. Sea $\|A\|_\infty = \text{máx}_{1\leq i,j\leq n} |a_{ij}|$ donde $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$.

   Lema A.14. *Si llamamos* $A^k = (a_{ij}^k)_{1\leq i,j\leq n} \in \mathbb{M}_n$ *para cada* $k \in \mathbb{N}$, *entonces* $\|A\|_\infty \leq (n\|A\|_\infty)^k$.

   Demostración. Se deja como ejercicio al lector. □

   Aplicando el Lema A.14 tenemos que cada entrada de la matriz A^k estará acotada por la serie

   $$\sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{a_{ij}^k}{k!} \right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n\|A\|_\infty)^k}{k!}.$$

   Como

   $$\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{(n\|A\|_\infty)^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{(n\|A\|_\infty)^k}{k!}} = \lim_{k\to\infty} \frac{n\|A\|_\infty}{k+1} = 0,$$

   por el criterio del cociente la serie será absolutamente convergente, por tanto convergente.

2. Si la matriz A es diagonal

   $$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

   entonces es fácil comprobar que

   $$\begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & \cdots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \cdots & e^{\lambda_n} \end{bmatrix}$$

3. $e^0 = I$.

4. Si A es nilpotente, es decir, si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $A^k = 0$, entonces $e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \cdots + \frac{A^{k-1}}{(k-1)!}$.

5. $e^{rI} = e^r I$ para todo $r \in \mathbb{R}$. Esto es claro porque

   $$e^{rI} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(rI)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r^k}{k!} I = e^r I.$$

6. Si $A, B \in \mathbb{M}$ son matrices que conmutan, esto es que $AB = BA$, entonces $e^{A+B} = e^A e^B$. Se deja como ejercicio al lector probar esto.

7. $\det(e^A) \neq 0$ para toda matriz $A \in \mathbb{M}_n$.

   En efecto, basta con comprobar que $\det(e^A) = e^{\text{traza}(A)}$. Y esto es así porque tras escribir PAP^{-1}, donde J es la forma canóninca de Jordan de A y P es la matriz de paso, tenemos

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(PJP^{-1})^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{PJ^kP^{-1}}{k!} = Pe^JP^{-1} \quad \Rightarrow$$
$$\det(e^A) = \det(Pe^JP^{-1}) = \det(P)\det(e^J)\det(P^{-1}) = \det(e^J) = e^{\lambda_1+\cdots+\lambda_n} = e^{\text{traza}(J)}.$$

   Ahora simplemente falta comprobar que $\text{traza}(J) = \text{traza}(A)$, lo cual es inmediato una vez se demuestre que dadas cualesquiera dos matrices $M_1, M_2 \in \mathbb{M}_n$ se tiene que $\text{traza}(M_1M_2) = \text{traza}(M_2M_1)$. Se deja al lector la comprobación de este hecho.

8. $(e^A)^{-1} = e^{-A}$. Esto es claro tras aplicar 6..

Ejemplo A.15. Calcularemos la exponencial e^{At} y e^{Bt}, $t \in \mathbb{R}$ donde $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$.

En el caso de la matriz A, observamos que es una matriz nilpotente, esto es $A^k = 0$ para todo $k \geq 3$. Se tiene

$$e^{At} = I + At + \frac{(At)^2}{2!} = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

En el caso de la matriz B, tenemos que los autovalores son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 2$, y la matriz canónica de Jordan y la matriz de paso serán

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad ; \quad P = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Entonces

$$e^{Bt} = Pe^{Jt}P^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3e^t + 4e^{2t} & 6e^t - 6e^{2t} \\ -2e^t + 2e^{2t} & 4e^t - 3^{2t} \end{bmatrix}.$$

Teorema A.16. *Dado el sistema homogéneo $x' = Ax$ donde $A \in \mathbb{M}_n$, entonces e^{At} es una matriz fundamental principal. Además, si $\Phi(t)$ es otra matriz fundamental, entonces $\Phi(t) = e^{At}\Phi(0)$.*

Demostración. Cada entrada de la matriz e^{At} viene dada por una serie que no solo es absolutamente convergente, sino que la serie de sus derivadas también converge absolutamente y uniformemente en compactos de $t \in \mathbb{R}$. Esto indica que la derivación término a término está justificada y deducimos que

$$\frac{d}{dt}(e^{At}) = \frac{d}{dt}(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}) = \sum_{k=0}^{\infty} (\frac{d}{dt}(\frac{A^k t^k}{k!}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{kA^k t^{k-1}}{k!} = A\sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j t^j}{j!} = Ae^{At}.$$

Esto significa que cada columna de la matriz e^{At} es solución del sistema $x' = Ax$. Por otro lado es claro que $\det(e^{At}) \neq 0$para todo $t \in \mathbb{R}$ por la propiedad 7., luego las columnas de e^{At} son linealmente independientes. Así concluimos que e^{At} es una matriz fundamental. Pero es que además $e^0 = I$, así que debe ser principal también.

Veamos ahora la segunda parte del enunciado del teorema. Sea $\Phi(t)$ otra matriz fundamental de $x' = Ax$. Tenemos que $\Phi'(t) = A\Phi(t)$. Si llamamos $V_1(t), \ldots, V_n(t)$ a las columnas de $\Phi(t)$ por el Teorema A.7 sabemos que existen vectores constantes únicos

$$C_1 = \begin{bmatrix} C_{11} \\ \vdots \\ C_{1n} \end{bmatrix}; \quad \cdots \quad ; C_n = \begin{bmatrix} C_{n1} \\ \vdots \\ C_{nn} \end{bmatrix}$$

tales que

$$V_1(t) = e^{At}C_1; \quad \cdots \quad ; V_n(t) = e^{At}C_n.$$

Por tanto si llamamos C a la matriz cuyas columnas son $C_1, \ldots, C_n$ entonces $\Phi(t) = e^{At}C$. SI evaluamos en $t = 0$ se sigue $\Phi(0) = C$ y concluimos que

$$\Phi(t) = e^{At}\Phi(0).$$

□

Consecuencia: Si consideramos el PVI $\begin{cases} x' = Ax \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ la única solución es $x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0$.

Bibliografía

[1] D. Azagra, *Manual de Ecuaciones Diferenciales*, https://blogs.mat.ucm.es/dazagrar/manuales-de-asignaturas/ 2018.