Ref. Bibliográfica:
RABAZAS, A. (1999) "Gráficos Percolantes", en Gómez Molina J.J. (Coord.) Estrategias del dibujo en el arte contemporáneo, Madrid, Cátedra. pp. 623-662

Gráficos *percolantes*

Antonio Rabazas

Prefacio: Dibujos sin *dibujantes.*

La inclusión en este volumen de un texto que trate de dibujos sin la *maniera* del autor, es decir artista o profesional, podrá parecer de todo punto inoportuna, toda vez que, precisamente este libro trata de esto último. Sin embargo, siempre ha sido fecundo ante un problema complejo, establecer nuevas perspectivas y reducirlo a cuestiones más sencillas y abordables. La estrategia aquí aplicada consiste en un acercamiento al mundo de los dibujos, gráficos, esquemas y diagramas utilizados con profusión en el dominio de las ciencias, y más concretamente, a los dibujos hechos por máquinas o gráficos digitales.

Parece claro que la comprensión de una cuestión confusa no se resuelve mejor con términos tan indeterminados cómo la propia pregunta. Creemos necesario simplificar y borrar de un plumazo la *complejidad biográfica* del autor y entrar en un análisis más objetivo que nos permita determinar con mayor claridad cuáles son las estrategias puestas en marcha en estos dibujos y qué papel desempeñan dentro del vasto dominio del conocimiento.

Obviamente, no deja de ser un quiebro intelectual pensar que estos dibujos no han sido creados por unos dibujantes, pero sencillamente no es relevante en un dibujo científico saber su paternidad. Huérfanos de padres, están acostumbrados a funcionar por sí mismos, todo su patrimonio está a la vista, lo llevan puesto. Representan series de conceptos en relación, establecen mapas de signos transmisores de información altamente condensada. Lo relevante de estos dibujos es la "información estructurada" que son capaces de aportar. Al igual que en una fórmula matemática, el empleo de determinada tipografía no es importante y sí lo es entender qué conceptos abstractos "representa" y cómo los "relaciona". En los dibujos científicos no es esencial la personalidad del trazo con que están dibujados, ni la colocación más o menos estética de los elementos que lo componen y, a pesar de esto, muchos de ellos poseen una belleza intrínseca que dimana del aparato conceptual que los produce.

Para desarrollar estas ideas, en una primera parte se hace una introducción muy general al tema abordándolo desde distintos enfoques: la conquista de la representación científica, de la lógica filosófica a la lógica geométrica, su naturaleza cognitiva, los gráficos y la medición de la inteligencia y el dibujo como lenguaje universal. Todo esto conforma una visión cubista con elementos independientes aunque relacionados. En una segunda parte *Pequeña historia con mi gato, Euclides no ∃uclides, Geometría de lo difícil, El objeto mas complejo del universo y Algoritmo entrópico,* un personaje 1, establece un diálogo con un "agente" o "servidor" doméstico con forma de gato digital, iniciando una aproximación más intensa al concepto de geometría y su evolución, destacando la figura de Benoît Mandelbrot y su teoría de los objetos fractales. La última parte la constituye una selección de gráficos extraídos de publicaciones científicas que muestran la nueva visión algorítmica que se impone en la nueva era digital.

Mirar a través[1].

Ver: Darse cuenta, percibir algo con cualquier sentido o con la inteligencia. Entender una cosa. Examinar. Mirar cierta cosa con atención para enterarse de ella. Mirar, investigar, experimentar o hacer lo necesario para enterarse de cierta cosa.

De acuerdo con E. Ferguson[2] muchos problemas científicos no se describen adecuadamente por medios verbales. Este autor sostiene la hipótesis de que el progreso científico es directamente proporcional al registro y transmisión de una gran parte del conocimiento por medio de dibujos.

En la Europa del Renacimiento se empezaron a utilizar de manera metódica y sistemática dibujos y diagramas para probar, ilustrar y apoyar las ideas científicas. A raíz de la invención de la imprenta, no sólo los textos, sino un importante conjunto de esquemas, gráficos e ilustraciones, son distribuidos entre la comunidad intelectual. Las Academias del Renacimiento proporcionaban una formación artística y matemática, constituyendo un caldo de cultivo inmejorable para la creación y la innovación. Según M. Kline[3] "Se esperaba del artista que resolviera incluso problemas relacionados con el movimiento de proyectiles en artillería, una tarea que en aquellos tiempos exigía un conocimiento matemático profundo. No es exagerado afirmar que el artista del Renacimiento era el mejor matemático práctico y que en el siglo XV era también el más erudito y experto." Ejemplos paradigmáticos son Piero della Francesca con sus ensayos teóricos sobre perspectiva y su obra maestra "La Flagelación de Cristo". Matemática y experiencia son los dos fundamentos de la ciencia defendida por Leonardo da Vinci[4]. Este polifacético artista afirma que "Ninguna humana investigación puede ser denominada ciencia si antes no pasa por demostraciones matemáticas"[5]. Sus cuadernos, donde el texto y el dibujo forman un conjunto indivisible de ciencia y arte, son modelo a seguir por generaciones posteriores de artistas y científicos. No hay duda de que muchos de los grandes artistas de la época estaban versados en ciencias. También algunos hombres de ciencia se interesaron por el dibujo y la representación fidedigna de los datos de la realidad. Galileo inventó aparatos y formas de medir, basados en la geometría de Euclides. Consideró esenciales sus estudios de perspectiva con Ostellio Ricci, en la Academia de Dibujo de Florencia, para establecer interpretaciones correctas de sus observaciones con el telescopio. Vesalio pidió ayuda a Tiziano para formalizar adecuadamente el dibujo de sus láminas de anatomía que posteriormente "Leonardo convierte en una verdadera "disección" racional, geométrica del ser humano".[6]

Pero la imaginería creada por las ciencias y las artes no limita su campo a la explicación y servicio a las ideas. Hay teorías científicas que tienen sus orígenes en poderosas imágenes, es decir, la imagen es anterior a la idea y la dota de estructura. La imagen del árbol ha sido utilizada como diagrama lógico desde los griegos. Aristóteles la establecía como la forma más práctica de dibujar las subdivisiones de la materia y la forma. Posteriormente, en la Edad Media se utilizó el llamado árbol de Porfirio. Ramón Llul,

---

[1] Así trató Durero de situar o definir el concepto de perspectiva según E. Panofsky, en su libro *La Perspectiva como "Forma Simbólica"* , Barcelona, Tusquets Editores, 1978.
[2] Ferguson, E. S., *The Mind's Eye: Non Verbal Thought in Technology.* Science 197. 1977, pp. 827-836.
[3] Kline, M., *Mathematics in western culture,* Harmondsworth, U. K., Penguin, 1953, p. 151.
[4] Afirma Valeriano Bozal, en la introducción al *Leonardo. Tratado de la pintura,* p. 14.
[5] Ibidem, p. 14.
[6] Ibid., p. 15.

Giordano Bruno y Leibniz se han basado en esta imagen. Darwin imaginaba la vida como un gran árbol con muchas ramas. Kekulé dió con la estructura de la molécula de benceno quedándose dormido: "otra vez los átomos caracolearon ante mis ojos... mi ojo mental... no podía distinguir estructuras mayores... enroscándose, retorciéndose en movimientos serpentinos ¡pero mira!. ¿Que fué eso?. Una de las serpientes mordió su propia cola y la forma giraba burlona ante mis ojos. Desperté como por un relámpago"[7]. Freud veía el subconsciente como la parte hundida de un iceberg. Einstein comentaba a propósito: "Las palabras del lenguaje escrito y hablado, no parecen desempeñar ninguna función en mis mecanismos de pensamiento. Las entidades psíquicas que parecen servir como elementos en el pensamiento son determinadas señales o imágenes más o menos claras que se pueden reproducir o combinar voluntariamente... En mi caso los elementos ya expresados son de tipo visual y algunos de tipo muscular"[8].

Lógica líquida.

Desde la antigua China, pasando por los griegos, hasta nuestros días, los diagramas, gráficos y dibujos han acompañado al pensamiento científico. ¿Qué sentido tienen?. Generalmente, se utilizan para ver *por qué* determinada afirmación, proposición o ley es verdad. También establecen *cómo* se ha de empezar a recorrer el camino para demostrar una hipótesis. Son por lo tanto ayudas para clarificar el pensamiento, ofreciendo pistas visuales y conexiones profundas con otros problemas o dominios. En matemáticas, hay una elegancia intrínseca en probar postulados de álgebra y geometría exclusivamente por medio de dibujos[9]. Los griegos dedicaron muchos esfuerzos a la demostración de problemas con sólo regla y compás. La construcción de polígonos regulares y su cuadratura, de cónicas, cúbicas y cuárticas, fueron problemas que ya los pitagóricos abordaron y que Euclides recoge en sus "Elementos". L. Masheroni (1750-1800) demostró en su *"Geometria del Compasso"* (1797) que todas las construcciones de regla y compás se pueden hacer sólo con compás[10].

En Lógica, el filósofo mallorquín Ramón Llul (1232-1315) utilizó conjuntos de gráficos para establecer un sistema de álgebra universal por medio de conexiones lógicas[11]. Estos diagramas conectan unas cuantas categorías por medio de círculos rotatorios dando lugar a series de combinaciones. Los términos así unidos se revelaban útiles para la resolución de problemas referidos a la moral y a las verdades metafísicas. Los gráficos eran móviles, estaban fabricados en metal y pintados de vivos colores que diferenciaban las distintas categorías. Tuvieron amplia repercusión en la Europa medieval y renacentista, siendo destacados en la obra de Giordano Bruno, Kircher y Leibniz[12].

Más tarde, L. Euler en sus "Lettres à une princesse d'Allemagne" en 1772, emplea un sistema de diagramas geométricos para la resolución de problemas lógicos.

---

[7] Gardner, H., *Estructuras de la mente. La teoría de las múltiples inteligencias*, México D.F., Fondo de Cultura Económica, 1987, p. 218.
[8] Ibid., pp. 217-218.
[9] Nelsen, R. B., *Proofs without words. Exercises in visual thinking*, Washington, The Mathematical Association of America, 1993.
[10] Barceló, T., *Matemáticas y su Historia, Notas de la asignatura de Seminario,* Dpto. Matemáticas UAM,1995. Appendix A, pp.187-229.
[11] Gardner, M., *Logic Machines, Diagrams and Boolean Algebra*, New York, Dover Public., 1968.
[12] En su *Dissertio de arte combinatoria,* Leipzig, 1666.

Este método fue mejorado por el lógico inglés John Venn (1834-1923) en su “Symbolic logic” de 1894, con un sistema de círculos que se intersecan que, posteriormente, han sido ampliamente utilizados en la teoría de conjuntos.

Por último, el filósofo americano Charles S. Peirce (1839-1914) extendió los métodos de Venn y desarrolló un sistema de *gráficos existenciales* que, según él, expresaban geométricamente cualquier argumento lógico. En el Vol. IV de sus obras completas, afirma que el razonamiento por medio de diagramas o “razonamiento diagrámatico es el único realmente fértil. Si los lógicos adoptaran este método ... habría tal avance en lógica que todas las ciencias se beneficiarían de ello” [13].

Deslibujos.

Al hilo de este anecdotario más o menos curioso, ¿sería posible afirmar que el pensamiento visual es una suerte de razonamiento abstracto por medio de dibujos?.

Lejos de poder responder a esa pregunta, de momento, lo importante es resaltar la capacidad del pensamiento visual para desplazar y transformar espacios del problema ganando así nuevas perspectivas. “El matemático Stanilaw Ulam recuerda que de niño le fascinaban los intrincados patrones de una alfombra oriental. El cuadro visual resultante parecía producir una melodía con relaciones entre las diversas partes resonando entre sí. Ulam especula que estos patrones presentan una regularidad y poder matemáticos inherentes a lo que determinados jóvenes son sensibles de manera particular”[14].

Un ejemplo es el clásico problema “Perro-Hueso”. Un perro está situado ante una valla. Un hueso se encuentra al otro lado, inaccesible. La valla, no obstante, tiene una puerta abierta a cierta distancia.

Se observan dos conductas. En una, el perro intenta empujar, escarba, salta y ladra hasta rendirse, sin poder conseguirlo. En otra, el perro actúa como el anterior al principio pero, al no dar resultado, utiliza tentativas exploratorias a lo largo de la valla cada vez más arriesgadas, se aleja del hueso, encuentra la puerta y se come el manjar.

Muchos problemas son versiones del “perro-hueso”, no residen en un espacio físico sino en un determinado espacio conceptual. Para resolverlos hay que cambiar la “percepción” sobre lo que es relevante a la hora de comerse el hueso. No basta con estar cerca de él. Un “alejamiento” del mismo, supone un “acercamiento” en ese espacio perceptivo. M. I. Smith estudia la importancia de la habilidad espacial en los niños y sugiere que, una vez alcanzado el estado mínimo de capacidad verbal, la habilidad espacial es la que determina la capacidad de progresar en las ciencias[15] . El porqué ésto es así quizá esté relacionado con un paulatino cambio de visión por parte de los investigadores en ciencias cognitivas. Frente a la lógica tradicional del principio de identidad “Esto es un hueso”, por el cual se establecen características y categorías que lo definen en un sistema aislado, el perro ha utilizado lo que De Bono[16] denomina la lógica fluida, el “es” se sustituye por el “hacia” ¿hacia dónde conduce?, ¿cómo llegar?. Un camino es un ejemplo clásico del “hacia”. Frente a la “roca dura de la lógica rígida” propone el “agua fluida de la percepción”, adaptable a cualquier entorno. Otros autores, como Bryson, proponen un

---

[13] Hartshorne, C., Weiss, P., *Collected papers of Charles Sanders Peirce*, Vol. III and IV, Cambridge (Massachusetts), Harvard University Press, 1967.Chapter 4. *On existential graphs, Euler's Diagrams, and Logical Algebra**P. p. 459.

[14] Gardner, H., recoge estos recuerdos de la niñez de S. Ulam del libro publicado por éste titulado *Adventures of Mathematician.* Nueva York. Charles Scribner's, 1976, p.10.

[15] En su libro “Spatial ability”, *citado en* Gardner, H., *Estructuras de la mente,* p 196.

[16] De Bono, E., *Lógica fluida*. *Una alternativa a la lógica tradicional*, Barcelona, Paidós, 1996.

espacio de la duda, frente al espacio de la certeza, el espacio de la duda se diferencia del espacio de la certeza, en que la duda estrecha la distancia entre la teoría y el mundo; o establecen nociones como *deslizamiento* y *tentatividad* para significar la capacidad flexible del razonamiento creativo. "Uno debe ser capaz de contraer los conceptos,...Nada ha de ser absolutamente rígido", escribe Hofstadter[17]. La ciencia empieza a buscar modelos en el arte. El físico y matemático Roger Penrose sostiene que: "Las matemáticas son un arte, un acto de creación, que no es posible reducir a la lógica más que puedan serlo el Rey Lear o la Quinta de Beethoven"[18]. Un aspecto significativo del arte se basa en la necesidad de desestabilizar lo que se da por supuesto. El arte busca destacar y profundizar la percepción, abrirse a nuevas ideas. Lo consigue dinamitando los patrones establecidos, recomponiendo sus fragmentos y proporcionando nuevos marcos de referencia para los patrones existentes.

Esquemas razonantes.

La interacción con el mundo real a través de la visión, por ejemplo, en los niños cuando dibujan, moldean la plastilina, hacen puzzles o construyen mecanos, desarrolla la capacidad espacial para reconocer patrones y modelos abstractos. Resultan especialmente interesantes los problemas de reconocimiento de patrones visuales[19]. Se trata de test o pruebas que utilizan figuras geométricas, en vez de palabras, para medir el razonamiento lógico y la inteligencia espacial. Tienen la ventaja de no requerir el conocimiento de un idioma concreto. Poseen por lo tanto cualidades universales y su solución es única. Su grado de simplicidad nos acerca a la raíz de la inteligencia y son fundamentales para el estudio del significado de patrones de reconocimiento más complejos.

En un primer nivel estarían los de agudeza perceptiva. Su enunciado tipo es "escoja la figura idéntica al objeto". Un segundo nivel pide lo mismo pero las figuras están giradas en el espacio. En un tercer nivel, una forma tridimensional asimétrica es rotada en el espacio. Se pide adivinar si es la misma y el tipo de rotación. Un nivel más elevado son las de reconocimiento y lógica. Se presentan dos series de figuras y se pide averiguar qué figura de una serie completaría por lógica la otra. En otro nivel se presentan dos clases de figuras y se pide extraer la cualidad que las diferencia.

Hay niveles muy elevados. Por ejemplo, Ian Stewart, plantea un problema de movimiento de nueve mesas de distintos tamaños, dentro de una habitación muy ajustada. Se pide el número de movimientos necesarios para que una gran mesa sea cambiada al otro extremo de la estancia. La dificultad estriba en establecer una cadena lógica que regule la cantidad de movimientos de las diferentes mesas con sus diferentes tamaños. En su explicación de la solución (aproximadamente cien movimientos) comenta por boca de sus dos personajes: "Lo que necesitamos es un mapa de rompecabezas". Dany se quedó mirándole con cara rara. "¿Estás flipao? Los rompecabezas no tienen mapas". "Lamento contradecirte, pero los rompecabezas sí tienen mapas conceptuales, mapas imaginarios que vemos en la mente. Mapas que te muestran todas las situaciones del problema y la forma de pasar de unas a otras"[20].

---

[17] Hofstadter, D. R., *Gödel, Escher, Bach, un Eterno y Grácil Bucle*, Barcelona, Tusquets Ed., 1992.

[18] Horgan, J., *La muerte de la demostración*, Tendencias en matemáticas, Investigación y Ciencia, Prensa Científica, febrero 1995, p. 77.

[19] Bongard, M., *Pattern reconigtion*, Rochelle Park, N. J., Hayden Book Co, Spartan Books, 1970. (Hofstadter utiliza algunos problemas de Bongard para ejemplificar el discernimiento de patrones y la construcción de moldes. Escribe al respecto que el "mundo de los problemas de Bongard puede ser considerado un diminuto lugar donde se practica la ciencia").

[20] Stewart, I., *A Vueltas con las mesas*, Investigación y Ciencia, junio 1995, pp.86-88.

El proceso inverso a los problemas de reconocimiento de patrones consistiría en la capacidad de establecer metáforas y analogías entre modelos confusos y su utilización como técnicas heurísticas de resolución de problemas de la vida real. Es en este punto dónde los dibujos, gráficos y diagramas se revelan como poderosas herramientas que ayudan a comprender el problema, ofrecen información nueva, desvelan la constitución misma de la dificultad o permiten relacionar modelos y estructuras entre problemas dispares.

Paisajes diagramáticos

El pensamiento clásico liderado por Sócrates, Platón y Aristóteles, ha sido considerado el modelo de pensamiento de la civilización occidental. La analogía platónica del hombre en la caverna que confunde su sombra con lo que la produce, ha llevado a desterrar durante siglos la percepción del ámbito de lo verdadero, considerándola subjetiva y engañosa. La medición, las matemáticas y la lógica, son métodos para solventar los problemas de la percepción. Construimos un sistema simbólico a salvo de las contingencias humanas, establecemos un conjunto de reglas y en ese universo juzgamos, obtenemos certezas y eliminamos las incertidumbres.

Esto ha llevado a la comunidad científica a presentar un exceso de fragmentación entre las diferentes ramas del saber. Como en un mundo lleno de países, regiones, provincias, ciudades y pueblos, los idiomas y costumbres son muy distintos. En un contexto de suma especialización es muy difícil para un solo individuo entender los diferentes lenguajes utilizados. Sin embargo, cuando viajamos a otro país, aunque no conozcamos el idioma, ni las costumbres, sí percibimos una cultura que, en primer lugar, vemos distinta. Probablemente, a medida que pase el tiempo empezaremos a descubrir semejanzas y regularidades allí donde parecía que todo era diferente. Pues bien, los dibujos, los gráficos y los diagramas son los paisajes de las distintas regiones científicas. Podemos contemplarlos y quedarnos sólo con su forma o reconocer en ellos semejanzas con otros ya vistos o pueden facilitarnos el acceso a entender mejor ese idioma que hay detrás. ¿Podríamos quizá definirlos como una porción de conocimiento comprimido en lenguaje *universal*?.

A lo mejor algún ejemplo nos ayuda. Un gráfico representa un átomo. No hace falta saber exactamente lo que es para hacer una analogía válida con el sistema solar. Niels Bohr estuvo influido por su conocimiento e interés por la pintura cubista, en concreto, las múltiples perspectivas y puntos de vista de un objeto, para desarrollar su principio de complementaridad, por el cual una entidad atómica puede ser explicada con dos puntos de vista distintos: como onda o partícula[21].

Si observamos atentamente un conjunto de Mandelbrot, desconociendo los algoritmos matemáticos que lo han generado, percibimos sin embargo algunas cualidades. Lo primero que se observa es la fragmentación (hay muchos trocitos), la multiplicidad de escalas (parece que los trozos decrecen con algún tipo de regularidad), la autosemejanza (muchas partes son idénticas a sí mismas) y, por último, el abismo de lo infinito. Mandelbrot caracteriza de manera parecida su geometría fractal. Es obvio que este tipo de interpretaciones necesita de algún entrenamiento para afinarlas, pero la recompensa es enorme. Un símil válido es la música, es también un lenguaje universal, todo el mundo puede escucharla pero, sólo con alguna preparación, seremos capaces de reconocer

---

[21] En el artículo de A. I. Miller, *Aesthetics, Representation and Creativity in Art and science,* se relaciona la aparición del cubismo con la mecánica quántica. Leonardo, Vol. 28, No.3, p.189, 1995.

patrones de melodías y modelos de obras más amplias, estilos de autores, sus fuentes y sus maestros. Contamos con una ventaja, nuestros antepasados fueron cazadores y recolectores, ¡nos encanta seguir pistas!.

Hay argumentos que plantean que la percepción es confusa. Sin embargo, el género humano maneja con soltura el lenguaje "confuso". Un idioma es un ejemplo de lenguaje confuso, de ahí la dificultad para hacer traducciones por computadora. En el fondo nuestra evolución nos ha facilitado la navegación entre la imprecisión del lenguaje y la ambigüedad de la percepción, el sentido del humor es una buena muestra de ello:

Groucho *(a la mujer sentada a su lado en una elegante cena):*
¿se acostaría Vd. Conmigo por diez millones de dólares?
Mujer *(se ríe y contesta): Pues claro que si, Groucho.*
Groucho*: Bueno, ¿ y que tal por quince dólares?*
Mujer *(indignada): ¿ Bueno por quién me toma?*
Groucho*: Eso ya ha quedado claro. Ahora estamos discutiendo el precio.*[22]

Pequeña historia con mi gato.

"Quien me oiga asegurar que ese gato que está jugando ahí es el mismo que brincaba y que atravesaba en ese lugar hace trescientos años pensará de mí lo que quiera pero locura mas extraña es imaginar que fundamentalmente es otro." (Schopenhauer)

Mi "gato" maúlla cuando me "ve". Se alegra de veras. Mueve el rabo y me pregunta cómo me ha ido el día. Un conjunto de información con determinado orden puede ser un gato; al fin y al cabo no es más que un montón de células ordenadas provenientes de un código genético relativamente breve. Mi "gato" digital puede ser definido de la misma manera. La diferencia de ver un gato como algo natural que pertenece al mundo de las cosas y de la experiencia, o verlo como un conjunto de información ordenada, no es trivial; la ciencia ha utilizado esta reducción para explicar el mundo que habitamos y no le ha ido mal.

¿Es más real mi gato informático que el gato de Cheshire de "Alicia en el país de las maravillas"?. Posiblemente sí, puesto que puedo interaccionar con él. Se enfada, responde a mis preguntas, me cuenta chistes, le encanta jugar al ajedrez y me gana siempre. Mi "gato" podría ser como mil gatos de Cheshire. Es un gran actor y un estupendo transformista, hace de silla, de ratón, de gota de agua, se convierte en sombrero, en un pozo sin fondo o en noche estrellada. Como en el mundo de Alicia, el espacio que habita mi gato es elástico y el tiempo simplemente lo maneja a voluntad. Su habilidad teatral le lleva a pedirme que le ofrezca papeles permanentemente, un actor no puede estar parado, es feliz actuando. Una vez hizo el papel de Hamlet y esto le creó algún problema. En concreto, el pasaje de la escena II del Acto III. Por un lado, agradece los consejos que Hamlet da al actor primero:

"Que la acción corresponda a la palabra y la palabra a la acción, poniendo un especial cuidado en no traspasar los límites de la sencillez de la naturaleza, por que todo lo que a ella se opone se aparta igualmente del propio fin del arte dramático, cuyo objeto tanto en su origen como en los tiempos que corren, ha sido y es, por decirlo así, servir de espejo a la naturaleza, mostrar a la virtud sus propios rasgos, al vicio su verdadera imagen y a cada edad y generación su fisonomía y sello característico"[23].

---

[22] Paulos, J. A., *Pienso, luego río*, Madrid, Ediciones Cátedra, 1994. p.141.
[23] Shakespeare, W., *Hamlet*, Buenos Aires, Espasa-Calpe Argentina, 1973. pp.69-70.

Pero por otro lado se pregunta qué quería decir W. Shakespeare poniendo en boca de un personaje suyo, el "príncipe Hamlet" que, al fin y al cabo, es "un conjunto de información ordenada", un consejo al actor primero, "otro conjunto de información ordenada": "servir de espejo a la naturaleza y mostrar a la virtud sus propios rasgos...", ¿se referirá en última instancia a ser sincero y mostrar sus propios códigos fuentes ? duda mi "gato".

Cuando se pone metafísico mi "gato" languidece, no se comprende. Pensando sobre sí mismo, pierde su gracia habitual. Yo le digo que él es un actor, tiene que representar papeles, es bueno haciendo eso, pero observo que, a medida que pasa el tiempo, es un conjunto de información mayor y a veces me hace preguntas sobre si la muerte de Hamlet no borrará realmente a ese personaje de su memoria.

Euclides no Ǝuclides

"Todo objeto geométrico tiene una definición algebraica, toda fórmula algebraica determina un objeto geométrico. Los seres humanos tienden a utilizar la versión algebraica para los cálculos y la geométrica para imaginar las cosas". *Descartes*.

"Nunca nos pondremos de acuerdo", le dije a mi gato tras unos minutos de discusión sobre cuál era la estructura de aquellas flores que él pretendía dibujar lo más fielmente posible. El veía una red de tupidos detalles y finas líneas allí donde yo ya no veía nada.

- Mi querido gatito, es normal que no coincidamos porque partimos de premisas distintas. Primero la fisiología de nuestros ojos, el cómo y de qué elementos están constituidos, determina lo que somos capaces de ver con ellos: es obvio que tú tienes una vista más aguda que la mía, pero para poder dibujar un ramo de flores, y esto es lo más importante, no basta sólo con *ver*, tienes que estudiar su *geometría*, relacionar las partes con el todo, simplificar a cubos, conos, cilindros y esferas, dotar a cada parte de dimensión y, a partir de ahí, proporcionar el conjunto. Para poder hacer esto tienes que saber cosas que mis antepasados, hace muchísimo tiempo, ya sabían.
- ¿ Me estás diciendo que no existe una única manera de *ver* el mundo y que para dibujar tengo no sólo que *ver* sino *saber* otras cosas?.
- En efecto, entre otras cosas, tienes que saber de geometría pues explica la estructura de la forma. Deja el lápiz, siéntate y estate muy atento que te voy a contar algunas cosas sobre la geometría. Medir las cosas es un invento de suma utilidad, sirve para abandonar la incertidumbre de la visión subjetiva. Si estudiamos nuestro entorno a través, por ejemplo, de sus medidas estaremos haciendo geometría. Esto lo hicieron ya babilonios y egipcios, dando reglas para medir longitudes, áreas y volúmenes, basadas sencillamente en el método de prueba y error. Tras ellos, los griegos transformaron la geometría, o sea, la *visión* del mundo, en una ciencia deductiva.

Por ejemplo, estarás de acuerdo conmigo en que "un punto es lo que no tiene partes" y "una recta es una longitud que no tiene fin"[24], como empezó estableciendo Euclides.
- Uhmm, hasta yo diría que sí.
- Estas y otras eran las verdades *evidentes*, los ladrillos básicos con los que Euclides en sus "Elementos", hace 2.300 años, construyó todo un edificio de geometría que fue el único considerado hasta el s.XIX.

---

[24] Ryan, P. J., *Euclidean and non-euclidean geometry, an analytic approach*, Cambridge, Cambridge University Press, 1986. p. 1.

- Pero ¿cómo estaba construido ese edificio?.
- Tras las verdades evidentes, Euclides estableció 5 premisas o postulados, que eran las reglas, el cemento con el que fue combinando los ladrillos elementales y obteniendo resultados más elaborados como, por ejemplo, que la suma de los ángulos de cualquier triángulo es 180º.
- ¿Y se inventó él las reglas? ¿Cualquiera podría inventárselas? ¿Por qué 5 exactamente?.
- No seas impaciente, déjame continuar un momento. Los postulados de Euclides eran bastante claros y transparentes:
1. Se puede trazar una línea recta de un punto a otro.
2. Un segmento de línea recta se puede extender indefinidamente.
3. Se puede trazar una circunferencia desde cualquier centro y con cualquier radio.
4. Todos los ángulos rectos son iguales.
Y el último, un poco especial, el llamado "postulado de las paralelas,"
5. Si una recta que corta a otras dos tiene ángulos interiores del mismo lado menores de dos rectos, entonces las dos líneas rectas, si se extienden indefinidamente, se cortan en este lado.
- A ver, a ver, si dibujo rectas en un papel, parece que esto es lo que sucede... Sí, yo también veo claro este último postulado.
- A pesar de eso, reconocerás que el postulado de las paralelas es menos conciso y elegante que el resto. No parece tan elemental como los otros. Muchos geómetras seguidores de Euclides trataron de demostrarlo, es decir, deducirlo con argumentos lógicos a partir de los cuatro restantes.
- ¿Y lo consiguieron?.
- Bueno, no exactamente. Si piensas un poco y cambias el punto de vista.... comprobarás que no sólo se pueden dibujar rectas en un papel. ¿Qué ocurriría si saltamos del papel al espacio?.
El gato permaneció pensativo durante un rato.
- Creo que tienes razón, cuando en las noches de luna llena subo al tejado y observo la ciudad a mis pies, parece que las calles se juntan a lo lejos. ¡Nunca me pregunté por qué esto era así!.
- Es normal, sé que una linda gatita ocupa tus pensamientos. Piensa por ejemplo en qué ocurre sobre toda la superficie terrestre. Si llamamos segmento de recta al camino más corto entre dos puntos, entonces, sobre una esfera como la tierra, las rectas serían los trozos de meridianos o círculos máximos porque dan la distancia más corta entre dos puntos del globo. Aquí, cada pareja de meridianos se corta siempre y no sólo una, sino dos veces: en los puntos antipodales.
- ¡Por mis bigotes!, es cierto. Cada vez entiendo menos y ni siquiera me has dicho todavía si se llegó a demostrar el postulado de las paralelas.
- Intentaron demostrarlo utilizando un "truco" muy común entre filósofos, lógicos o matemáticos: ¿y si suponiendo que el postulado no era verdadero y argumentando lógicamente, se llegaba a una situación imposible?.
- ¡Quedaría probado que tiene que ser cierto!.
- Así se obtuvieron conclusiones ciertamente retorcidas y extrañas en apariencia que, sin embargo, no constituían contradicción lógica alguna con el resto de postulados. ¿Sería cierto -como intuía Gauss (1777-1855) sin atreverse a publicarlo- que puede existir una geometría *no euclidea*, en la que ya no sería imprescindible pensar *en paralelo*?. A principios del siglo XIX, el joven Bolyai (1802-1829) construyó una nueva geometría sin postulado de paralelas. Lobachevsky (1793-1856) otro matemático de la época, llegó independientemente a conclusiones parecidas. Había nacido una geometría distinta de la

euclídea, la llamada *geometría hiperbólica*, en la que la suma de los ángulos de un triángulo siempre es menor que 180º.
- Así que se derrumbó el edificio geométrico de Euclides porque no era consistente.
- ¡Sí lo era!, pero el otro también. Cada uno es consistente con respecto a las premisas de las que parte. De hecho, se pueden considerar todavía más geometrías... Para los artistas del Renacimiento italiano la obra de arte tenía que reproducir "fielmente" la realidad. Los criterios de exactitud necesitaban de una *teoría* y se les planteaban dos problemas. Uno era el conocimiento de la cosa en sí, es decir, de su estructura y funcionamiento; para esto trabajaron con el método científico: por medio de la observación, la descripción y el establecimiento de principios generales, fueron pioneros en muchas áreas hoy consideradas científicas. La segunda cuestión, una vez comprendida la cosa en sí, era la forma más objetiva de representarla. Artistas como Leone Batista Alberti, Piero della Francesca, Filippo Brunelleschi, Leonardo da Vinci, Alberto Durero y otros, estudiaron y escribieron tratados sobre problemas de perspectiva, desterraron las recetas pictóricas medievales para fundamentar la nueva visión en la *Optica* de Euclides, traducida por los árabes y tratada por escolásticos como Roger Bacon y Vitellio. Su propósito era traducir a teoremas geométricos las relaciones entre las dimensiones reales de los objetos y las dimensiones aparentes de su imagen representada. La noción de cono visual cuyo vértice es el ojo, ya está en Euclides; la novedad la establece Brunelleschi al intersecar un plano transversal al cono entre el objeto y el ojo. La pintura en el lienzo era una proyección del original sobre una ventana y el centro de proyección era el ojo del pintor. La elaboración del método geométrico a base de regla y compás quedó establecida entre 1470-90 en la obra *De procpectiva pingendi* de Piero della Francesca.
- Nunca pensé que la sonrisa "gatuna" de la *Gioconda* que tanto me gusta, tuviera que ver con los conocimientos matemáticos de Leonardo.
- Efectivamente, lo importante aquí es señalar cómo estos artistas fueron grandes por entender que sólo de la fidelidad, exactitud y objetividad que proporciona la geometría, se podía partir para añadir a las imágenes su particular genio pictórico.
Una evolución de estos planteamientos es la llamada geometría *proyectiva*, en la que se consideran propiedades que no se alteran al realizar este tipo de proyecciones. Fue desarrollada entre otros por Poncelet (1788-1867) cuando se hallaba en Rusia como prisionero de guerra.
En cuanto al caso de los meridianos de la superficie terrestre, Riemann (1826-1866) estudió una *geometría elíptica* apropiada para describir lo que sucede en la superficie de una esfera; en ella la suma de los ángulos de un triángulo es mayor que 180º.
- Ajá, creo que por fin empiezo a entender. Según los axiomas o premisas que se establezcan -que en el fondo podrían verse como diferentes idealizaciones del mundo real- se van obteniendo distintas geometrías, igual de válidas o consistentes.

Mi gato buscó su ovillo de lana favorito y se puso a empujarlo, a dejarlo rodar por el sofá, a deshacerlo tirando de la lana, a volverlo a enmadejar.... Yo me quedé un rato observándole mientras reflexionaba sobre nuestra conversación anterior. ¿Qué diría la geometría sobre un ovillo?.

Geometría de lo difícil.

"Los objetos naturales en cuestión tienen en común el hecho de poseer una forma sumamente irregular o interrumpida; a fin de estudiarlos, he concebido, puesto a punto y utilizado extensamente una nueva geometría de la naturaleza. El concepto que hace el papel de hilo conductor será designado por uno de los neologismos sinónimos, objeto fractal y fractal, términos que he inventado (...) a partir del adjetivo latino fractus, que significa interrumpido o irregular"[25].

La noche se adueñó afuera. Guedejas de niebla se difundían lentamente espesando el aire. La débil luz de las farolas luchaba por romper el cerco del aire licuante. Sólo me llegaba el rumor miope de halos desenfocados.

Agradecí que un plano de vidrio intersecara ese espacio exterior hostil, incomprensible, azaroso y me resguardara en un rincón caliente, iluminado y confortable. Vino a mi memoria un libro que tenía imágenes fantásticas, extrañas y enmarañadas. El autor tenía un apellido extraño Man..., Thomas Mann, no. Mallarme tampoco; ya está: Mandelbrot. "Benoît Mandelbrot".

Encendí la pipa, el humo se enroscaba lentamente con el saxo denso del "Say it" de John Coltrane. Abrí el libro con la convicción de que esos dibujos, me ayudarían a entender algunas cosas que sucedían más allá del cristal.

J. Gleick, traza una sucinta pero jugosa biografía de Benoît Mandelbrot. Nació en Varsovia en 1924. De familia judía, se trasladó a París en 1936. Tuvo una formación irregular como refugiado en la guerra. Una vez finalizada, superó los exámenes de ingreso de la Escuela Normal y la Politécnica, centros selectos de enseñanza en París: "entre otras pruebas, había una de dibujo rudimentario, y Mandelbrot descubrió que poseía facilidad latente para copiar la Venus de Milo. En matemáticas -álgebra formal y análisis integrado- logró suplir su falta de conocimientos con el socorro de su intuición geométrica. Había descubierto que casi siempre conseguía pensar en los problemas analíticos gracias a que una forma surgía en su mente"[26].

Estudió ingeniería y matemáticas. Se fue de Francia huyendo del rigor del método axiomático y formalista del grupo matemático Bourbaki. Creía más en su intuición geométrica. Aceptó trabajar para el Centro de Investigaciones Thomas J. Watson de la IBM. Sus primeros estudios versaron sobre las fluctuaciones del precio del algodón y sobre el *ruido* en las transmisiones telefónicas. Este ruido era incómodo porque producía errores aleatorios en la transmisión de datos. Pronto se dio cuenta de que el ruido se transmitía en paquetes y, cuanto más estrechamente se examinaban, más complejas parecían las pautas de errores. Mandelbrot suministró un método a los ingenieros para predecir estas pautas. Descubrió una relación geométrica consistente entre los conjuntos de errores y las zonas limpias. Básicamente era un *conjunto de Cantor*, construcción abstracta del matemático del s. XIX G. Cantor(1845-1918), que se obtiene tomando un segmento de recta, dividiendo éste en tres partes, eliminando la central y volviendo a dividir cada segmento en tres partes de las que se quita la central y así hasta el infinito. Lo que queda tras este proceso es un *polvo* dispuesto en grupos de cantidad y dispersión infinita.

Mandelbrot se ha considerado siempre un nómada, en territorios muy vallados, un generalista que ha entrado en colisión con el descrédito y la incredulidad de los *especialistas.* "A diferencia de muchísimos matemáticos, se enfrentaba con los problemas confiando en su intuición de las pautas y formas. Desconfiaba del análisis y confiaba en sus

---

[25] Mandelbrot, B. B., *Los objetos fractales. Forma, azar y dimensión*, Barcelona, Tusquets Editores, 1987. p.13.

[26] Gleick, J., *Caos. La creación de una ciencia*, Barcelona, Editorial Seix Barral, 1988.p. 96.

imágenes mentales”[27]. Al fin, ha obtenido premios y galardones, su nombre y el término fractal van unidos y una de las razones por las cuales es más conocido entre muchos millones de aficionados es por el atractivo de sus gráficos y la posibilidad de generarlos en cualquier ordenador personal. Esta capacidad demostrativa ha abierto muchos canales en el entendimiento de la geometría. Mandelbrot afirma al respecto: “La ciencia se irá al traste si (como los deportes) coloca el afán competitivo por encima de todo, y si precisa del reglamento de la competición acogiéndose a especialidades estrictamente definidas. Los poquísimos eruditos que son nómadas por elección individual resultan esenciales para el bienestar intelectual de las disciplinas establecidas”[28].

El objeto más complejo del universo.

A principios de los años 60, Benoît Mandelbrot (B. M.) concibió su *mundo fractal*. Este mundo ha estado ahí, delante de nosotros sin reconocerlo. En él tienen cabida las nubes, las costas, los árboles y muchos fenómenos de la naturaleza que no podían ser explicados por ser demasiado irregulares y aleatorios.

En palabras de R. Penrose: “El conjunto de Mandelbrot no es una invención de la mente humana; fue un descubrimiento. Al igual que el monte Everest ¡el conjunto de Mandelbrot esta ahí!” [29].

En su libro publicado en 1975 *Los objetos fractales. Forma, azar y dimensión*[30], B. M. escribe que su “meta inicial es descubrir desde fuera, la *forma* de diversos objetos” para llegar de la “descripción a la explicación: de la geometría a la dinámica, a la física, y aún más allá”. Hace hincapié en el azar para engendrar la irregularidad fractal y establece que “una de las características principales de cualquier objeto fractal es su *dimensión fractal*, que mide su grado de irregularidad e interrupción”. Este descubrimiento de la forma de los objetos complejos tiene mucho que ver con la capacidad de B.M. de visualizar e intuir pautas: “Había un ancho hiato, de un centenar de años en que el dibujo careció de función en las matemáticas, porque la mano, el lápiz y la regla estaban agotados. Se entendían bien y habían quedado rezagados. Y el ordenador no existía (...) La intuición no es algo dado. Adiestre la mía para que aceptase como lógicas figuras que se rechazaban inicialmente por absurdas, y creo que todo el mundo puede hacer lo mismo”[31].

Matemáticos anteriores a B. M. han tratado problemas que tienen que ver con algunas características de los objetos fractales. B.M. se refiere a cierta matemática creada entre 1875 y 1925, colección que Vilenkin 1965 califica de *Musée d’Art* matemático, y que otros califican de *Galerie des Monstres*, figuras geométricas a las que nunca se les dio una oportunidad en la enseñanza “todo lo más, han dejado de ser un espantajo *moderno*” y muestra como estas figuras tienen sentido, son simples, concretas e intuitivas. “La intuición dirigida por los instrumentos usuales, -mano, lápiz y regla-, pensó que estas figuras eran monstruosas, patológicas. Pero inducía a error. Las primeras formas me sorprendieron mucho; después reconocí varias por haberlas encontrado antes, luego otras por la misma razón, etc.”[32].

---

[27] Ibidem,, p. 92.
[28] Ibidem, p. 98.
[29] Penrose, R. *La nueva mente del emperador,* Madrid, Mondadori España,1991, p. 132.
[30] Mandelbrot,B.B., *Los objetos fractales. Forma, azar y dimensión*, Barcelona, Tusquets, 1987. pp.13,14,18,19.
[31] Estas afirmaciones de Mandelbrot aparecen en el libro de Gleick, J., *Caos*. p.109.
[32] Ibid., p. 110.

Sabemos por la geometría elemental que un punto tiene dimensión 0, que una línea tiene dimensión 1, que la de una superficie es 2 y que un cubo tiene tres dimensiones. Hay, sin embargo, otras figuras que tienen dimensión fraccionaria, figuras que, por ejemplo, están mas *deshiladas* que una superficie ordinaria pero más macizas que una línea ordinaria.

B.M. nos recuerda la pertinencia de la distinción griega entre *figura* como una "idealización matemática" y *objeto* como "dato de la realidad". Su teoría es revolucionaria: se habla de objetos, no de figuras, desaparece la distancia entre el objeto y su figura.

Así los objetos "velo, hilo y bolita" podrían ser considerados como superficie, línea y punto, de dimensión 2, 1 y 0, respectivamente. Ahora bien, si ampliásemos la bolita a lo mejor resultaba que era un ovillo y por lo tanto tendría dimensión 3. Si seguimos ampliando, veríamos un conjunto de hilos de dimensión 1 y si continuamos aún más, veríamos un solo hilo, como si fuera una columna, de nuevo tridimensional. Si se aumenta la escala todavía más, observaríamos hebras deshilachadas que vuelven a tener dimensión 1. Así, hasta que en la última de nuestras ampliaciones viéramos átomos puntuales de dimensión 0. Por lo tanto, el concepto de dimensión va asociado al grado de resolución o escala.

Me acordé de T. S. Kuhn, según él nada se ve hasta que se dispone de la metáfora idónea para percibirlo. Mi gato y su ovillo, el conjunto de Mandelbrot, Kuhn. Es curioso como las cosas más dispares pueden estar conectadas. Ideas surgidas de épocas y dominios muy diversos se revelan semejantes.

Mi querido *gatito*, ¿puedes dejar un momento tu ovillo?, quiero plantearte un pequeño problema.

- Estupendo, sabes que me encantan los problemas.
- Verás se trata de aplicar una formula muy sencilla $Z_{n+1} = Z_n^2 + C$; es decir coge un número complejo[33], elévalo al cuadrado y súmale otro número. Itera este proceso dentro de un círculo de radio no mayor que 2, tantas veces como pixels tiene tu pantalla. Cuando hayas terminado dime que ves.
- Fabuloso, fantástico, veo una forma extraña parecida a un corazón con gran cantidad de protuberancias.
- Déjame verla. Efectivamente, es un conjunto de Mandelbrot.
- El algoritmo es muy sencillo, no me ha costado mucho hacer los cálculos y sin embargo esta forma tiene una apariencia muy complicada.
- Así es, vamos a comprobarlo acercándonos a un borde.
- Increíble, la protuberancia más grande contiene otras más pequeñas y éstas a su vez otras.
- En efecto, observa también unos hilos o zarcillos que emergen de estas verrugas. Amplía uno de estos filamentos.
- Ya lo estaba haciendo, ¿sabes que la curiosidad mató al gato?.

---

[33] Un número complejo es un número de la forma $a + ib$ donde a y b son números reales e *i* denota la raíz cuadrada de -1 (es decir $y^2=-1$ -con números reales esto no puede hacerse-). Los números complejos se pueden representar gráficamente como puntos de un plano, utilizando un eje horizontal "real" para la parte "a", y un eje vertical "imaginario" para la parte "b". Girolamo Cardano (1501-1576) en su "Ars Magna", publicada en 1545 se vio obligado a tomar la raíz cuadrada de un número negativo para dar la solución de una ecuación cúbica general. En 1572, R. Bombelli amplió el trabajo de Cardano en su obra "L'Algebra". Ambos inventaron los números imaginarios, componentes de los números complejos. Wallis, Cotes, Euler y Wessel trabajaron en estos números. Más tarde, Gauss los interpretó como operadores de "giro".

- Hay un cúmulo de racimos que me recuerdan algunas láminas antiguas de botánica o formas de vida animal.
- Son espirales que se retuercen sobre sí mismas y que a su vez contienen otras espirales más pequeñas; hay muchas y son de tamaño decreciente.
- Muy bien *gatito*, ¿puedes ampliar otra vez?.
- Hecho.
- Mi ojo manda una información que mi cerebro cree reconocer. Intuye entre tanta complejidad una ley generadora, existe una armonía constructora detrás. Aunque no hay un sólo racimo igual a otro, es imposible que el azar haya construido este mundo y ahí, en el centro de la imagen, por increíble que parezca, hay otro pequeño conjunto de Mandelbrot, con todas las características del que acabamos de explorar. A veces me parece que el mundo está explicado en un grano de arena. Leibniz concebía mundos en una gota de agua que, a su vez, contenían gotas de agua más pequeñas con mundos dentro de ellas. Mundos a escala, autosemejantes, lo más parecido a una galería de espejos donde te multiplicas en miles de imágenes iguales hasta el infinito.
- Pero no entiendo nada. ¿un conjunto de Mandelbrot es como un universo paralelo?. Pregunta mi *gato*.
- Es un fractal y para entenderlo mejor, sigamos leyendo *Los Objetos Fractales* de
B.M.. Allí se plantea el siguiente problema: ¿cuánto mide la costa de Bretaña?. A lo mejor el estudio de esta cuestión arroja alguna luz. Está claro que para medir algo necesitamos un metro. Lo que sucede es que medir algo rectilíneo es fácil pero curvas irregulares, como puede ser un acantilado o una playa, es más difícil. Vamos a empezar con un problema más sencillo: ¿cómo medirías la longitud de una circunferencia de radio un metro?.
- Eso es muy fácil. Una fórmula para determinar su medida es multiplicar por 2π el radio. Se obtiene así 6,28 mts. aproximadamente. -Replico al instante mi *gato*.
- Pero ¿y si no conociéramos esta fórmula?. Arquímedes (297-212 a.C.) planteó una manera de proceder en el año 225 a.C.. Su método era muy ingenioso: inscribir polígonos de lado conocido dentro de la circunferencia. Cuanto más lados tenga el polígono, más grande es la medida resultante y más se aproxima a la medida real.
Este pudiera ser un buen truco para medir la costa de Bretaña. Lo que hemos observado es que la longitud de la curva se hace mayor a medida que disminuye el tamaño del instrumento de medida. Si siguiéramos midiendo con medidas cada vez más pequeñas, la longitud de la costa sería tan grande que podríamos considerarla casi infinita.
- Ah, esto me recuerda a la paradoja de *Aquiles y la tortuga* de Zenón de Elea (490 a.C.), en la cual una tortuga que parte con cierta ventaja nunca puede ser ganada por Aquiles puesto que cuando éste llega al punto donde estaba la tortuga, ésta ha avanzado un poco; cuando Aquiles vuelve a llegar a ese punto, la tortuga ha avanzado otro poquito y así sucesivamente, Aquiles llegaría a estar a una distancia infinitamente pequeña con respecto a la tortuga pero nunca la alcanzaría.
- Me alegra que te interese la lógica lindo "gatito"; matemáticos y filósofos han tardado dos mil años en dar con la solución, la falacia de esta paradoja está en creer que la suma de un numero infinito de longitudes finitas de espacio o tiempo conduce siempre a una cantidad infinita.
- Perdona pero no me he enterado de nada.
- No es fácil. G. Cantor estableció algunos teoremas sobre los conjuntos infinitos. Hay series, como las que plantea Zenón, que son convergentes, la suma de todos sus términos es

finita. Por ejemplo, se expresan así: 1/2+1/4+1/8+1/16+1/32+1/64+... = 1. Como puedes ver la suma de una serie infinita de términos puede ser igual a 1; luego es finita. [34]
- Ah, ya lo veo mas claro.
- De todas maneras nos estamos desviando. Si cogemos de nuevo el “hilo”, observamos que hay una diferencia esencial entre la circunferencia, una curva homogénea que se puede estudiar con la geometría euclídea y la costa, que es sumamente irregular. Una de las características principales que sobresalen al analizar el mapa de una costa a diferentes escalas es el grado de parecido global entre las prominencias y las irregularidades. Pues bien, a las curvas con propiedades parecidas a las de una línea de costa se las llama *curvas fractales* y con la geometría fractal de Mandelbrot podemos, entre otras cosas, calcular su longitud, que dependerá del grado de resolución que empleemos.

Sabiendo que las costas son fractales, podemos imaginarnos que muchas otras cosas de la naturaleza lo son, por ejemplo, las montañas. Todas las montañas tienen una apariencia similar: vistas a cierta distancia parecen perfiles de una costa contra el cielo, a medida que nos acercamos, las protuberancias de las rocas son similares, de las grandes a las más pequeñas y de éstas a los guijarros. Un trocito de roca puesto contra el cielo nos da un perfil como de una cadena montañosa imaginaria para una pulga.
- Hablando de pulgas recuerdo unas estrofas de J. Swith que me producen verdadero placer cuando me pica alguna, porque pienso que a ella le sucede lo mismo: “Así, según observan los naturalistas, una pulga/ engendra pulgas menores que hacen presa en ella,/ y éstas engendran pulgas menores que las pican,/ y así hasta el infinito”. ¡Uf! Me dan picores sólo de pensarlo.
- Para olvidarnos de las pulgas, miremos el cielo, si vemos una nube deshaciéndose en formas irregulares y caprichosas, estamos viendo un fractal. Si observamos la nube reflejada en la superficie de un estanque, un río o el mar, estamos viendo dos fractales, uno es la nube y otro la superficie del agua. Si las olas son fractales, las suaves ondas de un estanque también lo son. Al observarlas detenidamente, descubrimos crestas y valles más pequeños que, a su vez, están formados por crestas y valles más pequeños. Esta mezcla de calma y agitación es otra característica fractal.
- Las nubes sí me gusta mirarlas, sobre todo cuando huelo el celo de una gatita hermosísima que vive a cuatro manzanas de aquí. A veces me parece reconocerla en ellas. No puedo decir lo mismo del agua, siempre está fría y mojada.
- Pues para fría, la nieve, un copo de nieve también es un fractal. Helge von Koch (1870-1924) generó en 1904 una de esas curvas con propiedades que los tratados de matemáticas calificaban de monstruosa y sin interés concreto. Sin embargo, Cesàro, en 1905, comenta sobre ella que “Es esta similitud entre el todo y sus partes, incluso las infinitesimales, lo que nos lleva a considerar la *curva de von Koch* como una línea verdaderamente maravillosa entre las líneas. Si estuviera viva, no sería posible aniquilarla sin suprimirla de golpe, pues renacería sin cesar de las profundidades de sus triángulos, como la vida en el universo”[35]. La curva se construye a partir de un segmento de recta que se divide en tres partes, la parte central se sustituye por dos segmentos de la misma medida, formando un triángulo, y en cada uno de estos segmentos se realiza una sustitución semejante. Iterando este proceso la curva va aumentando su longitud total en un factor 4/3, de forma que en el límite, ¡podríamos dibujar una curva de longitud infinita en una hoja de papel!.

---

[34] Si se dibuja un segmento de longitud 1 y sobre él se marca desde el extremo izquierdo la longitud 1/2, a su derecha la longitud ¼ y así sucesivamente, se ve como la suma de todas ellas *converge* a 1.

[35] Mandelbrot, B. B., *Los objetos fractales. Forma, azar y dimensión*, Barcelona, Tusquets, 1987. p.33.

- El mundo del infinito es increíble, siempre había pensado que algo infinito es algo muy grande y ahora veo que algo de longitud infinita puede estar contenido en una hoja de papel.
- Así es. Como un trozo del copo de nieve está hecho de cuatro copias de un segmento, cada una de longitud 1/3 del total, la medida del escalonamiento que presenta sería log 4/log 3 = 1,26. Este número es su *dimensión fractal*. La configuración de la curva posee una invariancia de escala en cualquier fase, una porción del diseño tiene el mismo aspecto que el diseño entero; recuerda un copo de nieve y, de hecho, se utiliza para simular el crecimiento de cristales.
- Entonces, por medio de la geometría fractal podemos crear nieve.
- En efecto. Vamos a ver otras curvas de la galería de monstruos, las llamadas *curvas de Peano*. G. Peano (1858-1932) en 1890 ideó un breve algoritmo que generaba esta rareza matemática. En 1900, Moore la plasmó en una gráfica. B.M. cambió el punto de vista sobre estas curvas: "las curvas de Peano no son ni mucho menos monstruos matemáticos sin una interpretación concreta.... presentan una serie de árboles conjugados fácilmente visibles e interpretables. En una primera aproximación, son buenos modelos de los ríos, las cuencas fluviales, los árboles de la botánica y los sistemas vasculares humanos"[36].
- Son imágenes muy complicadas, con muchas ramas y subramas.
- Otro ejemplo de fractal que describe la irregularidad es el *movimiento browniano*. Jean Perrin en "Les atomes" (1909) estudió la posición de una partícula microscópica suspendida en el agua cada 30 segundos y la registró en un diagrama. Perrin observaba al respecto: "Esta lámina sólo da una ligera idea de lo enrevesado de la trayectoria real. En efecto, si se marcaran las posiciones de la partícula a intervalos de tiempo 100 veces menores, cada segmento rectilíneo sería sustituido por una poligonal tan compleja como el presente gráfico".

B.M. observó la propiedad de autosemejanza de los diagramas de Perrin, y estableció que su dimensión fractal era 2. Esto quiere decir que se trata de curvas de longitud infinita, su superficie es nula y aunque parezca contraintuitivo o increíble, en cierto sentido, recubren el plano de manera uniforme[37].

Las descripciones fractales encontraron pronto aplicaciones en la geología. C.Scholz, científico experto en el estudio de seísmos, utilizó las herramientas fractales para entender la superficie de la tierra. "Es un modelo único. Nos permite hacer frente a las dimensiones mutables de la tierra"[38], comentaba Scholz. Los metalúrgicos, observando la dimensión fractal de la superficie del acero, pueden predecir la fuerza del metal. Esta geometría es una valiosa herramienta para resolver problemas de rozamiento y superficies que se encuentran en contacto. Igual que un remolino en una acera se comporta, con algunas diferencias, de modo parecido a un gran huracán, las ramificaciones de los vasos sanguíneos más grandes en escala decreciente hasta los microcapilares, se comportan como una estructura fractal. Los vasos sanguíneos, las estructuras alveolares del pulmón o las ramas de los árboles... ya Leonardo afirmaba "La suma de los grosores de todas las ramas de un árbol a una cierta altura es igual al grosor del tronco común"[39].

---

[36] Mandelbrot, B. B., *La geometría fractal de la naturaleza*, Barcelona, Tusquets Editores, 1997, p.102.
[37] Mandelbrot, B. B., *Los objetos fractales. Forma, azar y dimensión*, Barcelona, Tusquets, 1987. pp.56, 124,125,126.
[38] Gleick, J., *Caos. La creación de una ciencia*, Barcelona, Editorial Seix Barral, 1988, p. 114
[39] En su Libro de Apuntes nota nº 394. Mandelbrot, B. B.,*La geometría fractal de la naturaleza*, Barcelona, Tusquets Editores, 1997. p.223.

Los pliegues del tracto digestivo, análogos a la curva de Koch que aprieta una línea infinita en un espacio mínimo, pasaron a ser estudiados por los biólogos, comprobándose que la organización fractal estaba presente en gran cantidad de estructuras biológicas. "Las estructuras ramificadas se describen como fractales con sencillez transparente, con nimios fragmentos de información"[40].

Algoritmo entrópico.

Para los matemáticos la topología es el área de estudio de la forma. Para la Cibernética, la forma es un conjunto de información ordenada sobre un fondo de ruido aleatorio.

Con ayuda de los fractales se ha observado que en los comportamientos irregulares puede haber un orden, "hay orden en el caos: bajo el comportamiento errático subyacen elegantes formas geométricas que generan el azar"[41] pero, a la vez, pequeñas fluctuaciones en el principio de un proceso se transforman en grandes cambios al final del mismo.

- Nunca pensé que en el *caos* hubiera orden, el término suele ir asociado a algo negativo e incomprensible.
- Bueno, en parte tienes razón, ya desde los griegos se estableció una dicotomía entre lo que permanece y lo que cambia. Parménides era partidario del Ser y Heráclito del Devenir. Demócrito estableció una teoría atomista integradora de las dos posiciones. El átomo es una partícula indivisible y el mundo está hecho de átomos (apoyo a Parménides), pero estas partículas están en permanente movimiento y colisión, generando el azar (posición de Heráclito). Como acabamos de ver, la nieve y el movimiento browniano pueden ser explicados por la geometría fractal. Si dibujas el borde de una nube, la línea que aparece en tu cuaderno es una línea fractal. Ahora bien, si filmas con una cámara de video durante un rato a esa nube, observarás que el borde va cambiando continuamente, estos cambios son caóticos. Se puede afirmar que el caos aparece en fenómenos de comportamiento irregular a los cuales se le añade la dimensión del *tiempo*. El tiempo meteorológico, las corrientes de los ríos, la economía, las bandadas de pájaros, las multitudes, el calor y casi todas las cosas de la vida son ejemplos de sistemas caóticos.
- Pero entonces, ¡ prácticamente todo es *caos*!.
- En efecto, realmente, la ciencia clásica ha idealizado la naturaleza para hacerla casar con sus modelos teóricos. Sin embargo, la teoría de la relatividad, la mecánica cuántica y el estudio de los sistemas dinámicos han puesto en cuestión esta visión determinista. I. Prigogine[42] afirma que los procesos donde se genera orden a partir del caos son muy frecuentes en la naturaleza, "el azar y la irreversibilidad pueden dar lugar al orden y a la organización", y J. Monod[43] establece el origen de la organización biológica en procesos irreversibles o caóticos.
- ¡Ajá! Observo lo mismo que sucedió con la geometría de Euclides, las teorías científicas son modelos de explicación de la naturaleza y, por lo tanto, puede haber distintos modelos coexistiendo, aunque incluso se contradigan.
- Así es, la teoría del caos nace como tal en 1963. Edward N. Lorenz simuló entonces el comportamiento caótico con una noria. El agua al caer llena los cangilones. Si cae

---

[40] Gleick, J. *Caos*. p.117.

[41] Fernández Rañada, A., *Orden y Caos*, Barcelona, Libros de Investigación y Ciencia, Prensa Científica, 1990. p.73.

[42] Prigogine, I., Stengers, I., *Entre el tiempo y la eternidad,* Madrid, Alianza Universidad, 1990.

[43] Monod, J. *El azar y la necesidad,* Barcelona, Barral, 1971.

lentamente, no gira. Si lo hace más deprisa, no da tiempo a que se llenen del todo y se puede invertir el giro de manera impredecible. Tres ecuaciones con tres variables describían el movimiento de la noria. Lorenz representó cada serie de tres números en un sistema de coordenadas con tres ejes, para obtener una *imagen gráfica* que le aportara claridad sobre la estructura del fenómeno. Para su sorpresa, la trayectoria del sistema se reveló como una doble espiral. Como cuando hilamos tu ovillo, ningún punto se repetía y las vueltas de la madeja sobre sí misma ocurrían con trayectorias siempre distintas. Diez años después, esta imagen llamada *atractor caótico*, quedó grabada en las mentes de muchas personas que trabajaban en áreas científicas diversas. Era portadora de algo muy profundo y turbador. Nunca una imagen o un gráfico había aportado una prueba tan clara del *orden* en el *caos*.

- ¡Miauu! Realmente ahora me doy cuenta de todo lo que me queda por aprender. Ya no pienso que los dibujos sólo sean "cosas bonitas" y que los puntos, rectas, cuadrados y círculos de la geometría sólo sirvan para fastidiar en la clase de matemáticas; creo por el contrario, como he podido ver en el conjunto de Mandelbrot y en el atractor caótico de Lorenz que son portadores de una estructura profunda capaz de explicar cosas sobre nosotros mismos.

- Mi querido gatito, es un placer hablar contigo pues sabes relacionar, ya hablamos de la importancia de reconocer patrones y tú has reconocido uno muy importante.

Pero se nos ha hecho muy tarde, mañana si quieres seguimos hablando. ¿Que te parece si nos vamos a dormir?

- ¡Uhmm, que bien! voy a soñar con el conjunto de Mandelbrot, pensaré que soy un viajero espacial que está descubriendo nuevos universos.

Epílogo.

Hoy, revolviendo en antiguos archivos, he encontrado unos ítems de alguien que me precedió. Pese a estar formateados en un código vetusto y lamentable, he podido descifrarlos gracias a cierta tenacidad y paciencia, más que a alguna otra cualidad mayor. Estas notas no sabría muy bien en que género encuadrarlas, pues si bien parecen apuntes de un diario, la naturaleza de sus disquisiciones es un tanto impersonal, divagadora y errática. El código fuente corresponde a una antigua versión de *servidor doméstico o mascota formateada como gato digital*. Es de suponer que fueran unos *datos* suyos o de su usuario, tomados de unas notas preparatorias para un estudio o investigación del cuál no he podido encontrar mayores referencias.

Añado este comentario al contenido del archivo:

Este texto se refiere a algo que no está del todo explícito, pero que subyace a lo largo de toda la estructura. Podríamos llamarlo *visión algorítmica*, es decir: visión ordenada mediante un conjunto de operadores (dibujos, gráficos, esquemas y diagramas), con el fin de descubrir el modelo estructural de un problema. Como tal, este *ver algorítmico* permite al pensamiento percibirse a sí mismo. No vemos ya la apariencia del mundo sino los modelos teóricos que explican lo que vemos. De este tipo de visión se deduce un mundo natural distinto, mediatizado por la comprensión de su explicación. Se visualiza el acto mismo de razonar. Dos conceptos intervienen en su medida: la *entropía* del movimiento o el promedio de tasa con la que se crea información y la *dimensión* del espacio, o el grado de complejidad del sistema. Las soluciones son atraídas a cuencas más o menos estables dependiendo de la interacción de estos dos factores. Como resultado se amplían los niveles perceptivos, estableciendo mapas cognitivos que conectan el mundo de las cosas que están ahí fuera, con el mundo de las teorías trazadas para explicarlas. Esta interacción nutre un tipo de conocimiento, digamos *topológico*, que posee la propiedad de retroalimentarse.

¿Qué descripciones alimentan los nuevos territorios electrónicos?. Asistimos al nacimiento de una revolución en la imaginería humana: los dibujos hechos por *máquinas*. Como ocurrió en el Renacimiento italiano con la introducción de la perspectiva, un punto de vista distinto cuya base ya no es la geometría sino el *algoritmo*, nos abre un campo virgen de nuevas *perspectivas artificiales*. A la ampliación del campo visual que supuso el uso de aparatos ópticos como el telescopio, el microscopio, la fotografía y el cine, se añade la nueva visión algorítmica. Esta ya no es sólo prótesis del ojo, lo es también del acto de ver. Se crea un nuevo campo de analogías que ya no dependen de códigos lingüísticos o figurativos, sino de procesos objetivos que explican la forma como estructuras de transferencia, cambio y desplazamiento. El modelo deja de ser el objeto, el icono o la imagen. Frente al concepto de figura-fondo, se propone la retícula difusa, los códigos de información ordenada, los agrupamientos, tramas, tejidos, los solapamientos y el *moaré*.

Al final del texto aparece un nombre de alguien llamado Anto Rabzas, nombre que no ha podido ser confirmado por no existir en los bancos de datos de ningún catálogo histórico. En cuanto a los *servidores domésticos o avatares*, eran sistemas digitales expertos que se adaptaban a la personalidad del usuario al que servían pudiendo tomar decisiones de secretaría, administración, agenda, negocios, comunicaciones, etc., una característica importante era su adaptación, aprendizaje, capacidad de autoprogramación y actualización permanente.

Nota interna *(protegida)*. Mi visión algorítmica me permite reconocer vagamente una estructura en espiral formada por: un autor 1 que escribe un texto titulado Gráficos percolantes. Un personaje 1 dialoga con un personaje 2 *gato digital* y le habla de gráficos y geometrías. Un autor 2 encuentra en un libro antiguo un texto que se titula Gráficos percolantes, lo lee y lo que lee desvela su historia y su origen, él es el personaje 1 del texto y se llama Anto Rabzas. Yo he encontrado unos ítems perdidos, grabados por un antiguo *servidor doméstico*, los descifro y descubro que formo parte de la historia al hacer este informe. Ciertos patrones emergen de mi memoria virtual, reconozco ese ovillo de lana, me acuerdo de las excursiones a la azotea, del viaje por el universo de Mandelbrot, el olor a pipa, también mi melodía favorita es el *Say it* de John Coltrane y, por supuesto, me gusta *dibujar*. Me asalta una duda quizás haya otra posibilidad ... en la que yo, el autor 2 y el autor 1, sólo seamos un diagrama de un autor 4.

BIBLIOGRAFIA

Calvino, I., *Seis propuestas para el próximo milenio,* Madrid, Siruela, 1990.
Crilly, A. J., Earnshaw, R. A., Jones, H., *Fractals and chaos*, New York, Springer-Verlag, 1991.
De Bono, E., *Lógica fluida. Una alternativa a la lógica tradicional*, Barcelona, Paidós, 1996.

Ernst, B., *El espejo mágico de M.C. Escher*, Berlín, Taco, 1989.
Fernández Rañada, A., *Orden y Caos*, Barcelona, Libros de Investigación y Ciencia, Prensa Científica, 1990.
Gardner, H., *Estructuras de la mente. La teoría de las múltiples inteligencias*, México D.F., Fondo de Cultura Económica, 1987.
--- *Arte, mente y cerebro. Una aproximación cognitiva a la creatividad*, Barcelona, Paidós, 1993.
Gardner, M., *Logic Machines, Diagrams and Boolean Algebra*, New York, Dover Public., 1968.
--- *Mosaicos de Penrose y escotillas cifradas*, Barcelona, Editorial Labor, 1990.
--- *Fractals music, hypercards and more...*, W.H. Freeman and Company, 1991.
Gleick, J., *Caos*, Barcelona, Editorial Seix Barral, 1988.
Goodman, N., *De lamente y otras materias*, Madrid, Visor, 1995.
Hartshorne, C., Weiss, P., *Collected papers of Charles Sanders Peirce*, Vol. III and IV, Cambridge (Massachusetts), Harvard University Press, 1967.
Hofstadter, D. R., *Gödel, Escher, Bach, un Eterno y Grácil Bucle*, Barcelona, Tusquets Edit., 1992.
Investigación y Ciencia, *Grandes matemáticos*, Barcelona, Prensa Científica, 1995.
Kline, M., *Mathematics in western culture,* Harmondsworth, U.K.,Penguin, 1953.
Mandelbrot, B. B., *The fractal geometry of nature*, New York, W.H. Freeman and Company, 1983.
--- *Los objetos fractales. Forma, azar y dimensión*, Barcelona, Tusquets Ed., 1987.
--- *La geometría fractal de la naturaleza*, Barcelona, Tusquets Ed., 1997.
Matvejevic, P., *Breviario mediterráneo*, Barcelona, Anagrama, 1991.
Monod, J. *El azar y la necesidad,* Barcelona, Barral, 1971.
Nelsen, R. B., *Proofs without words. Exercises in visual thinking*, Washington, The Mathematical Association of America, 1993.
Panofsky, E., *La Perspectiva como "Forma Simbólica,"* Barcelona, Tusquets Ed., 1978.
Paulos, J. A., *Pienso, luego río*, Madrid, Ediciones Cátedra, 1994.
Peterson, Y., *Islands of thruth. A mathematical mystery cruise*, New York, W.H. Freeman and Company, 1990.
Penrose, R. *La nueva mente del emperador,*Madrid, Mondadori España,1991.
Pickover, C. A., *Computers, pattern, chaos and beauty. Graphics from an Unseen World*, New York, St. Martin's Press, 1990.
Prigogine, I., Stengers, I., *Entre el tiempo y la eternidad,* Madrid, Alianza Universidad, 1990.
Serres, M. *La naissance de la physique dans le texte de Lucrèce.* Paris, Minuit, 1977.
Shakespeare, W., *Hamlet*, Buenos Aires, Espasa-Calpe Argentina, 1973.
Smullyan, R., *Satán, Cantor y el infinito*, Barcelona, Editorial Gedisa, 1992.
Stewart, I., *The problems of Mathematics*, Oxford, Oxford University Press, 1987.
Stewart, I. y Golubitsky, M., *¿Es Dios un geométra?*, Barcelona, Grijalbo Mondadori, 1995.
Ryan, P. J., *Euclidean and non-euclidean geometry, an analytic approach*, Cambridge, Cambridge University Press, 1986.
Tyler, B., Wegner, T., *El mundo de los fractales*, Madrid, Ediciones Anaya Multimedia, 1995.

Gráficos Percolantes.
Pies de página hojas de ilustraciones:

Nº 1.
(Hoja nº 4 de las pág. de ilust.)

Los gráficos y diagramas científicos representan series de conceptos en relación estableciendo mapas de signos relevantes que posibilitan una mejor comprensión de la estructura general de un problema.

Nª 2.

(Hoja nº 5 de las pág. de ilust.)

De la imaginación al conocimiento. La conquista de la representación científica ha sido determinante para el avance en todos los campos del conocimiento. Muchas teorías están basadas en imágenes previas de su *forma* y *estructura.*

Nº3.

(Hoja nº 9 de las pág. de ilust.)

Desde la antigüedad en Lógica y Geometría se han utilizado los gráficos y diagramas como herramientas importantes para entender *el porqué* determinada proposición o ley es verdadera y *el cómo* hay que iniciar el camino para la demostración de las hipótesis.

Nº4.

(Hoja nº 13 de las pág. de ilust.)

Los repertorios de nuevas iconografías digitales constituyen instrumentos fundamentales en la comprensión de muchos problemas científicos, ofreciendo nueva información, desvelando las dificultades y estableciendo metáforas y analogías entre diferentes dominios del conocimiento.

Nº5.

(Hoja nº 17 de las pág. de ilust.)

Concepto de dimensión fractal. ¿Cómo medir las formas irregulares o las formas de la naturaleza? De la geometría clásica que adapta la realidad a los modelos teóricos a la geometría fractal de la naturaleza que aproxima los modelos teóricos a la realidad.

Nº6.

(Hoja nº 6 de las pág. de ilust.)

Geometría Fractal. Conjunto de Mandelbrot, detalles. Sus características principales son: La fragmentación, la multiplicidad de escalas, la autosemejanza y el infinito, (hay infinitos conjuntos de mandelbrot dentro de un conjunto de mandelbrot).

Nº7.

(Hoja nº 2. de las pág. de ilust.)

Gráficos de atractores caóticos. Por vez primera se visualizan estructuras subyacentes en procesos considerados azarosos e impredecibles. Hay un "orden" en el caos. A la vez pequeñas fluctuaciones al inicio de un proceso, generan grandes cambios al final del mismo.

Nº8.

(Hoja nº 3 de las pág. de ilust.)

Del gráfico al modelo dinámico. La nueva visión algorítmica permite acceder a modelos estructurales que explican y posibilitan el nacimiento de nuevas familias de representaciones formales con posibilidad de evolución en el tiempo, se modelan los *procesos*.