

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS
Departamento de Geometría y Topología



TESIS DOCTORAL

Estudio de conexiones en un espacio fibrado

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR
PRESENTADA POR

Fernando Etayo Gordejuela

DIRECTOR:

José Javier Etayo Miqueo

Madrid, 2015

17
UCM
1989

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
Facultad de Ciencias Matemáticas
Departamento de Geometría y Topología

BIBLIOTECA UCM



5304845411

T
514.762
ETA

**ESTUDIO DE CONEXIONES EN FIBRADOS
VECTORIALES**



R. 38.764

Fernando Etayo Gordejuela
Madrid, 1990

Colección Tesis Doctorales. N.º 53/90

© Fernando Etayo Gordejuela

Edita e imprime la Editorial de la Universidad
Complutense de Madrid. Servicio de Reprografía
Escuela de Estomatología. Ciudad Universitaria
Madrid, 1990
Ricoh 3700
Depósito Legal: M-1198-1990

NC: X-53-022341-3

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS

DEPARTAMENTO DE GEOMETRIA Y TOPOLOGIA

ESTUDIO DE CONEXIONES EN FIBRADOS VECTORIALES

Memoria presentada por
Fernando ETAYO GORDEJUELA,
dirigida por el profesor
D. J. Javier ETAYO MIQUEO,
para obtener el Grado de
Doctor en C. Matemáticas.

1989

A Ujud

Quisiera agradecer, ante todo, la dedicación, estímulo y guía que ha sido mi padre para mí, en todos mis estudios y, muy especialmente, en los que siguieron a mi Licenciatura y que hoy culminan con esta Tesis Doctoral.

También quiero recordar a los que han compartido conversaciones, como Enrique Arrondo y Javier Lafuente, a los que me han ayudado de uno u otro modo, como Carlos Andradas que me proporcionó algunos artículos y mi hermano José Javier que me aleccionó en los trabajos mecanográfico y burocrático, y, en general, a todos cuantos con sus comentarios y con su ejemplo han contribuido a que llegara este momento.

INDICE

INTRODUCCION.	I
CAPITULO 0: CONEXIONES.	
§ 0.1. Fibrados vectoriales.	1
1. Conceptos básicos.	1
2. Corchete de Frölicher-Nijenhuis.	7
§ 0.2. Conexiones, pseudo-, casi- y fere-conexiones lineales en variedades.	11
§ 0.3. Conexiones infinitesimales.	17
1. Definiciones.	17
2. Casos particulares.	22
3. Derivada covariante.	27
4. Curvatura y torsión.	31
§ 0.4. Conexiones generalizadas.	36
1. Definiciones.	36
2. Derivada covariante.	41
Apéndice I: Relación entre los diferentes conceptos de conexión.	47
Apéndice II: Distintas notaciones.	49
CAPITULO 1: SOBRE LOS BUENOS CUADRADOS DE FIBRADOS.	
§ 1.1. Buenos cuadrados.	50
1. Definiciones.	50
2. Ejemplos y resultados.	58
§ 1.2. Secciones proyectables.	67
CAPITULO 2: ELEVACION DE CONEXIONES GENERALIZADAS.	
§ 2.1. Propiedades generales.	74
1. Definición y primeros resultados.	74
2. Expresiones locales.	80
§ 2.2. Casos particulares.	84
1. Conexiones en $\gamma: A \rightarrow B$.	84
2. Elevación de conexiones infinitesimales.	91
3. Conexiones inducidas en el producto fibrado.	93
§ 2.3. Cuestiones de existencia y unicidad.	97

CAPITULO 3: ELEVACION DE CONEXIONES INFINITESIMALES.	
§ 3.1. Propiedades generales.	100
1. Definiciones y su equivalencia.	100
2. Algunos resultados.	112
3. Expresiones locales.	116
4. Curvaturas.	119
§ 3.2. Conexiones en variedades.	130
CAPITULO 4: APLICACIONES.	
§ 4.1. Elevaciones al fibrado tangente.	136
1. Buenos cuadrados relacionados con el fibrado tangente.	136
2. Elevaciones completa y horizontal de conexiones lineales.	140
3. Otro punto de vista: las conexiones generalizadas.	146
4. Elevaciones de pseudoconexiones lineales.	152
§ 4.2. Elevaciones al fibrado de 2-jets.	156
1. Buenos cuadrados relacionados con el fibrado de 2-jets.	156
2. Elevación de conexiones lineales.	163
3. El isomorfismo $T(T_2M) \cong T_2(TM)$.	168
4. Elevación de pseudoconexiones lineales.	173
§ 4.3. Otras elevaciones.	177
1. Elevaciones al fibrado cotangente.	177
2. Elevaciones tangentes de Vilms.	179
3. Conexión de segundo orden de Bowman.	183
4. Elevación completa al fibrado de referencias.	186
BIBLIOGRAFIA.	189

INTRODUCCION.



1. Antecedentes.

Desde un punto de vista personal debería citar en primer lugar lo que ocuparía el último atendiendo al orden de importancia: el tratamiento que del problema de la elevación de derivaciones sobre una variedad a su fibrado tangente hacíamos en nuestra tesina [16]. Porque una tesina no representa en general más que el primer encuentro con un paisaje nuevo, no extrañará que quede abierto a futuras exploraciones y, así, explícitamente se anunciaba en ella que el estudio realizado en aquel fibrado "podría extenderse a otros fibrados y, en particular, a fibrados vectoriales generales, tema que aparece como más directamente inducido por el de los fibrados tangentes".

La elaboración de esta memoria significa, pues, el cumplimiento que ahí se esboza. Naturalmente, el problema es más complejo y las técnicas más sutiles. Aquel estudio queda como un caso particular inicial, pero también lo son algunos otros que se habían venido haciendo, obteniéndose así una teoría unificadora que, a su vez, puede dar lugar a nuevas sugerencias para otros tipos de fibrados. Por otra parte, estudiadas las elevaciones a la luz de la teoría aquí construída, surgen nuevas interpretaciones y una mayor riqueza de propiedades.

Pasemos de los antecedentes personales a los históricos, en la breve historia que estos problemas pueden exhibir. Las primeras estructuras estudiadas en el fibrado tangente fueron la métrica, dada por Sasaki en 1958, y la estructura casi compleja definida por una conexión lineal sobre la variedad, introducida en 1962 por Dombrowski [14]. Posteriormente, 1966-67, Yano, Kobayashi e Ishihara definieron la prolongación de campos tensoriales y de conexiones de la variedad base al fibrado tangente. Con el lenguaje de las elevaciones, la métrica de Sasaki resulta ser la elevación diagonal de una métrica de

la base. Un estudio paralelo se realiza igualmente en el fibrado cotangente [52].

El paso al fibrado de los 2-jets es también obra de Yano e Ishihara, en 1965, y Morimoto, en una serie de trabajos publicados entre 1968 y 1970 extien- de las elevaciones a fibrados de r-jets y p^r -velocidades, haciendo hincapié en los campos tensoriales, conexiones y G-estructuras. En esta línea se inscriben posteriores trabajos, como [54] para los fibrados de r-jets y [36] para los de p^r -velocidades.

La elevación de pseudoconexiones lineales al fibrado tangente se inicia con los artículos [22] y [26] y nosotros la hemos extendido [16] a fibrados de r-jets, relacionándola también con la de derivadas. Algunos precedentes de este estudio habían sido desarrollados en [16] para el fibrado tangente, punto de partida ya señalado de nuestro trabajo.

Técnicas diferentes han permitido definir otras conexiones en ciertos fibrados, conexiones que hoy podemos considerar como elevaciones. Así, Bowman, [3] a [5], ha estudiado las extensiones diferenciables del fibrado tangente y las conexiones inducidas en ellas, obteniendo las conexiones de segundo orden. Un poco antes, Vilms [50] había estudiado las conexiones en fibrados tangentes y, en particular, ciertas conexiones que en nuestro lenguaje denominaremos elevaciones tangentes. Todo ello sin salirnos de fibrados vectoriales, ya que, paralelamente, se iban también encontrando resultados similares en fibrados principales, como en [5].

Pues bien, ciñéndonos a los vectoriales, que es el objeto de nuestro estudio, nos encontramos de entrada con la delicada cuestión de decidir cuál es el concepto de conexión en un fibrado vectorial que conviene elegir. Ha de ser una definición suficientemente amplia para que abarque todos los ejemplos considerados antes, al tiempo que permita obtener autónomamente, sin recurrir a ella, resultados correspondientes a las conexiones particulares que engloba.

La idea primaria es la de conexión lineal en una variedad. Seguramente su presentación más sencilla, formulada mediante leyes de derivación, es la dada en 1960 por Koszul [34], y todas las demás son generalizaciones de esta concepción. Así tenemos:

a) Conexiones no lineales u homogéneas, si se prescinde del carácter lineal. Las tratan, sucesivamente, Barthel [1], Kandatu [31], Yano y Okubo [53], Yano e Ishihara [52] y Mok y Wong [39].

b) Las anteriores conexiones homogéneas lo son en un cierto sentido, des- contando el cual resultan las conexiones no homogéneas, como las estudiadas por Grifone [25] o en el anterior trabajo [30].

c) Una generalización en otra dirección de las propiedades del operador que define la conexión lineal da lugar a las casi-conexiones lineales de Worg

[51] y Vamanu [48-49] e, independientemente, a las pseudoconexiones lineales, que comprenden a las anteriores, y que Di Comitè establece en [12-13], así como a las que llamaremos fere-conexiones.

Todos estos tipos de conexiones están definidos en el fibrado tangente. Si pasamos a fibrados vectoriales arbitrarios encontramos dos tipos principales de conexiones:

d) Las conexiones infinitesimales definidas por Vilms [50]. Coinciden con las conexiones en un fibrado localmente trivial estudiadas por Hermann [29], Crampin [10] y otros, [37], [7], [11] y [38]. Estas definiciones generalizan la clásica de conexión en un fibrado dada por Ehresmann [15] en 1950.

e) Las conexiones generalizadas debidas a Spesivkyh, que contienen a todas las demás y están definidas mediante un campo tensorial de tipo (1,1), sin más restricciones.

Estas últimas van a constituir, por su generalidad, el instrumento principal de nuestra teoría. Han sido introducidas en unos artículos, [45] a [47], al parecer poco conocidos o divulgados y cuya consecución nos ha resultado extremadamente difícil y trabajosa, tras largo tiempo de búsqueda [24].

2. Descripción de la memoria.

El capítulo 0 se consagra al estudio de las conexiones, en sus diferentes versiones, para compararlas y establecer sus relaciones. Resultan fundamentales tres tipos de conexiones: las pseudoconexiones lineales definidas en una variedad, las conexiones infinitesimales en un fibrado vectorial y las conexiones generalizadas, también en un fibrado vectorial. La razón de su importancia estriba en que en todos los ejemplos manejados se tienen conexiones de uno de los primeros tipos y en que el tercero engloba todas las definiciones de conexión.

La introducción de las conexiones infinitesimales como restricción de conexiones definidas en fibrados localmente triviales queda justificada por la mayor riqueza conceptual y por el traslado que podamos hacer de estas técnicas a situaciones más generales. Esto exige haber presentado con anterioridad el formalismo del corchete de Frölicher-Nijenhuis, cuyo uso simplifica posteriormente muchos cálculos.

Como corresponde a un capítulo introductorio, apenas hay resultados desconocidos. Más novedosa es la introducción de las conexiones generalizadas, definidas por Spesivkyh como un campo tensorial de tipo (1,1) sobre la variedad total del fibrado. Es sorprendente que con esta definición tan general se puedan obtener propiedades aprovechables. Los únicos resultados originales que aportamos son la caracterización de las conexiones infinitesimales dentro de las generalizadas (proposición 0.4.) y una leve modificación en la definición de derivada covariante de una conexión generalizada.

Finalizamos el capítulo con dos apéndices: las relaciones entre los diferentes conceptos de conexión y, por otra parte, entre las diversas notaciones empleadas.

El capítulo 1 es totalmente original. Está consagrado al estudio de los buenos cuadrados, concepto que introducimos en la definición 1.1. Nuestro objetivo en esta memoria es el estudio de la elevación de conexiones en fibrados vectoriales. En el capítulo 0 recopilamos las definiciones de conexiones y en el 2 y en el 3 daremos el concepto de elevación. Este capítulo 1 se dedica a estudiar cómo están definidos los fibrados vectoriales en los que se definen las conexiones que queremos elevar.

Básicamente, un buen cuadrado es un diagrama conmutativo (*)

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\gamma} & B \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \beta \\ C & \xrightarrow{\pi} & D \end{array} \quad (*)$$

en el que γ y π son fibrados vectoriales (en los que se definirán las conexiones), α y β son fibrados localmente triviales y de modo que existen trivializaciones para los cuatro fibrados a la vez.

Damos un enunciado algebraico y una interpretación geométrica antes de hallar familias de buenos cuadrados, que engloban los casos esperados (ejemplos 1.1. y 1.2., proposiciones 1.1., 1.2. y 1.3.). La segunda parte del capi-

tulo se dedica a la definición de sección proyectable: \bar{X} , sección de γ , es proyectable sobre X , sección de ν , si $\alpha \circ \bar{X} = X \circ \beta$. En los ejemplos 1.3. a 1.7. comprobamos que este concepto coincide con otros en casos conocidos.

El orden de exposición de los resultados en la memoria no se corresponde con el de su gestación. Lo natural es empezar con casos más simples (por lo menos, conceptualmente más simples) para ir después a los generales. Así, primero obtuvimos una definición muy aceptable sobre elevación de conexiones infinitesimales, que presentamos en el VI Coloquio Internacional de Geometría Diferencial de Santiago [20], y después otra para la elevación de conexiones generalizadas. Estas definiciones, dadas autónomamente, tienen la virtud de que coinciden cuando se aplican al concepto de conexión más pequeño, esto es, a las infinitesimales. Incluso para las conexiones no homogéneas, que son las infinitesimales en variedades, se puede dar una definición particular que coincide con las anteriores (proposición 3.13.).

A la hora de presentar los resultados hemos escogido, como tantas veces se hace, la otra vía: iremos de lo general a lo particular. Quiero hacer constar que nuestra atención se centrará en la elevación de conexiones generalizadas (capítulo 2) y en la de conexiones infinitesimales (capítulo 3), pudiéndose hacer un estudio similar para otras definiciones. Nos hemos restringido a estos dos casos porque consideramos que son los fundamentales y porque las conexiones infinitesimales tienen una riqueza estructural (curvatura, torsión) de la que carecen las generalizadas. Los resultados de estos dos capítulos son también íntegramente originales.

En el capítulo 2 se introduce la elevación de conexiones generalizadas: $\bar{F} \in T_1^1(A)$ es elevación de $F \in T_1^1(C)$ respecto del buen cuadrado (*) si $\alpha_* \bar{F} = F \circ \alpha_*$. Con esta definición tan sencilla se obtiene el comportamiento deseado de la derivada covariante (proposición 2.1.) y una caracterización en coordenadas locales (proposición 2.4.). A continuación estudiamos algunas conexiones particulares, como las infinitesimales (proposiciones 2.5. y 2.6.) con vistas a obtener la relación que debe ligar a dos conexiones infinitesimales \bar{F} y F para que la primera sea elevación de la segunda (proposición 2.7.). La proposición 2.8. establece algunos casos en que la elevación queda unívocamente determinada. En § 2.3. estudiamos el problema de existencia y unicidad de elevaciones.

"elevación" o "de orden superior" caben en nuestra teoría. Un ambicioso objetivo sería, por ejemplo, encontrar relaciones con las conexiones superiores, incluso de orden infinito, que desarrolló Ver Ecke.

La técnica de los buenos cuadrados se ha mostrado fructífera porque ha permitido construir la teoría aquí expuesta y porque ha servido para hallar nuevas propiedades de objetos conocidos con anterioridad (como las elevaciones de campos a T_2M del ejemplo 1.7. y, especialmente, las construcciones de § 4.1. y § 4.2.). Creemos que se abre así un amplio campo de trabajo: buscaríamos la aplicación de ideas análogas en el caso de G -estructuras y en el de elevaciones a otros fibrados. Para este último propósito introdujimos en el capítulo 0 la definición de conexión infinitesimal como restricción de la de conexión en un fibrado localmente trivial. Pero nuestro trabajo queda, por ahora, cortado aquí.

Me gustaría terminar con un recuerdo histórico. Hace ahora 50 años, el 31 de mayo de 1909, un eximio matemático español, don Julio Rey Pastor, firmaba el manuscrito de su tesis doctoral que leería poco después de un mes. Y lo hacía dirigiéndose al Tribunal con las siguientes palabras, de las que deseo atrevidamente apropiarme como colofón del mío: "Yo confío en que sabrá disculpar muchos de sus defectos la benevolencia que siempre inspira a los maestros la labor de los principiantes. ¿Acaso sin contar con ella tendría la osadía de presentarlo?"

CAPITULO 0. CONEXIONES.

§ 0.1. FIBRADOS VECTORIALES.

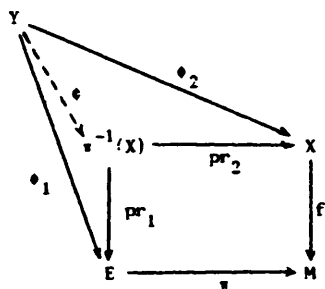
1. Conceptos básicos.

La teoría general de fibrados vectoriales ha sido desarrollada por numerosos autores. Aquí recogemos una colección de resultados, que utilizaremos en lo que sigue, y que tomamos de [2], [30], [35], [44] y [50].

I. Sea $\pi: E \rightarrow M$ un fibrado vectorial de rango r sobre una variedad de dimensión n .

Dada una aplicación diferenciable $f: X \rightarrow M$, existe un único fibrado vectorial $\pi_2: \pi^{-1}(X) \rightarrow X$, de rango r , que verifica la siguiente propiedad universal:

- (i) existe una aplicación diferenciable $\pi_1: \pi^{-1}(X) \rightarrow E$ de modo que $\pi \circ \pi_1 = f \circ \pi_2$.
- (ii) para toda terna (Y, ϕ_1, ϕ_2) que verifique (i), existe una aplicación diferenciable $\phi: Y \rightarrow \pi^{-1}(X)$ tal que $\pi_1 \circ \phi = \phi_1$, $\pi_2 \circ \phi = \phi_2$; esto es, conmuta el diagrama siguiente:



La construcción efectiva de $(\pi^{-1}(X), pr_1, pr_2)$ es la siguiente:

$$\pi^{-1}(X) = \{ (e, x) \in E \times X \mid \pi(e) = f(x) \in M \}$$

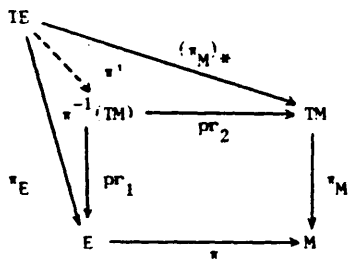
Y pr_1, pr_2 son las restricciones a $\pi^{-1}(X)$ de las proyecciones de $E \times X$ sobre E y sobre X.

A $\pi^{-1}(X)$ se le denominará **producto fibrado** de E y X sobre M.

II. A partir de un fibrado vectorial $\pi: E \rightarrow M$ se obtiene una sucesión exacta de fibrados vectoriales sobre E, dada por:

$$(*) \quad 0 \rightarrow VE \xrightarrow{i} TE \xrightarrow{\pi'} \pi^{-1}(TM) \rightarrow 0$$

donde $VE = \ker \pi_*$ y π' es la aplicación inducida por la propiedad universal del producto fibrado $\pi^{-1}(TM)$, al considerar el diagrama



Así, considerando la inclusión de $\pi^{-1}(TM)$ en $E \times TM$, resulta que $\pi' = (\pi_E, (\pi_M)_*)$ y que $VE = \ker \pi'$, con lo que la sucesión es ciertamente exacta.

La estructura de fibrado vectorial que tiene VE sobre E es la dada por la restricción de π_E a VE. Las secciones del fibrado $\pi_E|_{VE}: VE \rightarrow E$ se denominan **campos vectoriales verticales**, y no son sino los campos de E tangentes a

las fibras de π .

Además de esa estructura fibrada, se puede definir canónicamente una aplicación diferenciable $\rho: VE \rightarrow E$: se consideran el isomorfismo de fibrados sobre E , $VE \cong \pi^{-1}(E)$ y la inclusión $\pi^{-1}(E) \hookrightarrow E \times E$ y se define

$$\rho: VE \cong \pi^{-1}(E) \hookrightarrow E \times E \xrightarrow{\text{pr}_2} E$$

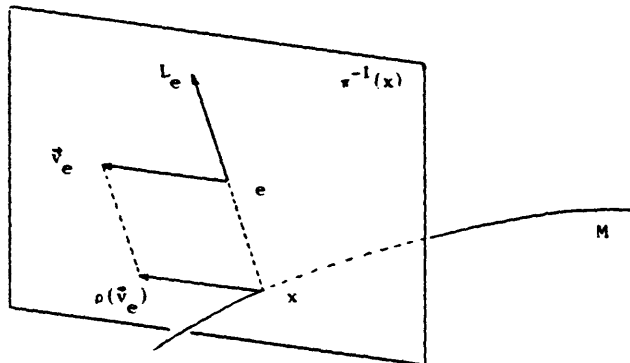
Resulta que (ρ, π) es un morfismo de fibrados sobre (π_E^{-1}, π) , esto es que conmuta el cuadrado

$$\begin{array}{ccc} VE & \xrightarrow{\rho} & E \\ \pi_E^{-1} \downarrow & & \downarrow \pi \\ E & \xrightarrow{\pi} & M \end{array}$$

III. Otra construcción canónica es la que define el campo vectorial de Liouville, que denotaremos por L . Dado $e \in \pi^{-1}(x)$, como $\pi^{-1}(x)$ es un espacio vectorial, consideramos el vector $\vec{x}e$, al dotar a $\pi^{-1}(x)$ de la estructura afín canónica. Así, definimos

$$L_e = (\vec{x}e)_e \in T_e(\pi^{-1}(x)) \hookrightarrow T_e E$$

La interpretación geométrica de ρ y L es la dada en el siguiente dibujo



Así, ρ asigna a un vector el punto de E obtenido al trasladarlo al origen de la fibra, y L asigna a cada punto su vector de posición. Obsérvese que se verifica la relación

$$\rho(L_e) = e$$

y que el campo de Liouville es vertical, pues es tangente a las fibras. El campo de Liouville puede definirse también como el que genera el flujo de las

dilataciones positivas en E:

$$e^{t\psi}(\vec{v}) = \exp t \cdot \vec{v}, \quad \psi \vec{v} \in \pi^{-1}(x), \quad \psi x \in M, \quad \psi t \in \mathbb{R}.$$

Las construcciones de ρ y l se basan en la identificación de M con la sección nula del fibrado $\pi: E \rightarrow M$. El complemento de dicha sección constituye un fibrado localmente trivial que denotaremos por $\pi:(E)_0 \rightarrow M$, siendo ésta restricción de la anterior. Gráficamente, ha sido denominado fibrado "slit", esto es, "rajado" o "cortado", por Mok y Wong en [30]. Va a jugar un importante papel en nuestra construcción. Por lo pronto, digamos que sigue teniendo sentido la sucesión (*) y los conceptos después definidos.

El campo de Liouville permite dar las siguientes definiciones:

Sea \mathcal{L} la derivada de Lie en E ;

$f \in I_0^k((E)_0)$ es homogénea de grado k si satisface la identidad de Euler

$$\mathcal{L}(f) = k f$$

$X \in T_0^1((E)_0)$ es homogéneo de grado k si verifica

$$\mathcal{L}_L X = (k-1) X$$

$\omega \in I_1^0((E)_0)$ es homogénea de grado k si

$$\mathcal{L}_L \omega = k \omega$$

IV. Estudiemos ahora las expresiones locales.

El fibrado vectorial $\pi: E \rightarrow M$ se expresa localmente por

$$\begin{aligned} \pi: U^n \times \mathbb{R}^r &\longrightarrow U^n \\ (x^i, a^\alpha) &\longrightarrow (x^i) \end{aligned}$$

donde n y r son las dimensiones.

Adoptamos el siguiente convenio de notación:

$$\begin{aligned} x &\in U^n && j, j \in \{1, \dots, n\} \\ a, a_1, a_2 &\in \mathbb{R}^r && \alpha, \beta \in \{1, \dots, r\} \\ c, c_1, c_2, c_3 &\in \mathbb{R}^n && \end{aligned}$$

La sucesión exacta del fibrado, (*), viene dada por

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow VE \xrightarrow{i} TE \xrightarrow{\pi^*} \pi^{-1}(TM) \longrightarrow 0 \\ 0 &\longrightarrow U^n \times \mathbb{R}^r \times (0) \times \mathbb{R}^r \longrightarrow U^n \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \longrightarrow U^n \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^n \longrightarrow 0 \\ (x, a_1, 0, a_2) &\longrightarrow (x, a_1, 0, a_2) \\ &\longrightarrow (x, a_1, c, a_2) \longrightarrow (x, a_1, c) \end{aligned}$$

La aplicación es

$$\begin{aligned} \rho: VE &\longrightarrow E \\ U^n \times R^\Gamma \times \{0\} \times R^\Gamma &\longrightarrow U^n \times R^\Gamma \\ (x, a_1, 0, a_2) &\longrightarrow (x, a_2) \end{aligned}$$

y el campo de Liouville es

$$L_e = \begin{pmatrix} \partial \\ \partial a_1^\alpha \end{pmatrix}_e \cdot a_1^\alpha(e)$$

que se puede expresar como sección del fibrado vertical $\pi_E: VE \rightarrow E$ del siguiente modo:

$$\begin{aligned} L: E &\longrightarrow VE \\ U^n \times R^\Gamma &\longrightarrow U^n \times R^\Gamma \times \{0\} \times R^\Gamma \\ (x, a_1^\alpha) &\longrightarrow (x, a_1^\alpha, 0, a_1^\alpha) \end{aligned}$$

V. En el caso de que el fibrado vectorial dado sea el fibrado tangente de una variedad, $\pi_M: TM \rightarrow M$, se pueden realizar algunas construcciones más.

En primer lugar, recordemos que TM admite dos estructuras de fibrado vectorial sobre TM : las definidas por π_{TM} y por $(\pi_M)_*$. Se expresan en coordenadas locales por

$$\begin{array}{ccc} \pi_{TM}: TM &\longrightarrow & TM & & (\pi_M)_*: TM &\longrightarrow & TM \\ U^n \times R^n \times R^n \times R^n &\longrightarrow & U^n \times R^n & & U^n \times R^n \times R^n \times R^n &\longrightarrow & U^n \times R^n \\ (x, c_1, c_2, c_3) &\longrightarrow & (x, c_1) & & (x, c_1, c_2, c_3) &\longrightarrow & (x, c_2) \end{array}$$

Kobayashi introdujo en [32] una involución en TM , que permuta las dos estructuras, pues está dada localmente por

$$S(x, c_1, c_2, c_3) = (x, c_2, c_1, c_3)$$

La denominaremos automorfismo de Kobayashi (en [2] se llama involución canónica). Obsérvese que el fibrado de los 2-jets, o tangente de segundo orden, T_2M , puede sumergirse en TM como el conjunto de puntos invariantes por el automorfismo de Kobayashi (cfr. [2], [4] o § 4.2. de esta memoria).

VI. También es interesante señalar que al considerar el fibrado vectorial $\pi_M: TM \rightarrow M$, la sucesión exacta resultante es

$$0 \longrightarrow VTM \xrightarrow{i} TM \xrightarrow{\pi^*} \pi_M^{-1}(TM) \longrightarrow 0$$

y que, en este caso, el isomorfismo $VTM \cong \pi_M^{-1}(TM)$ permite definir una estruc-

tura casi-tangente canónica en TM , J , dada por $J = i \circ \pi_M^{-1}$ (cfr. [28]) :

$$TM \xrightarrow{\pi_M^{-1}} \pi_M^{-1}(TM) \cong VTM \xrightarrow{i} TM$$

que localmente es

$$\begin{aligned} U^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow U^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \cong U^n \times \mathbb{R}^n \times \{0\} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow U^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \\ (x, c_1, c_2, c_3) &\longrightarrow (x, c_1, c_2) \oplus (x, c_1, 0, c_2) \longrightarrow (x, c_1, 0, c_2) \end{aligned}$$

Así $J^2(x, c_1, c_2, c_3) = (x, c_1, 0, 0)$ con lo que $J^2 = 0$.

También en este caso es posible definir de modo particular el campo de Liouville. [28]: Si $\delta: TM \rightarrow \pi_M^{-1}(TM)$ es la aplicación diagonal $\delta(z) = (z, z)$, obtenida al considerar $\pi_M^{-1}(TM) \subset TM \times TM$, entonces $L = i \circ \delta$. En efecto,

$$\begin{array}{c} TM \times TM \\ \downarrow \\ TM \xrightarrow{\delta} \pi_M^{-1}(TM) = \pi_M^{-1}(TM) \cong VTM \xrightarrow{i} TM \\ (x, c) \longrightarrow ((x, c), (x, c)) = (x, c, c) \cong (x, c, 0, c) \longrightarrow (x, c, 0, c) \end{array}$$

VII. En el fibrado tangente $\pi_M: TM \rightarrow M$ es posible definir la elevación vertical de campos

$$\begin{aligned} V: T_0^1(M) &\longrightarrow T_0^1(TM) \\ X(x^i) &= (x^i, X^i) \rightarrow X^V(x^i, c_1^i) = (x^i, c_1^i, 0, X^i) \end{aligned}$$

Esta construcción no es posible en fibrados vectoriales arbitrarios $\pi: E \rightarrow M$. El campo de Liouville verifica las dos propiedades siguientes [10]:

- (i) $[L, X^V] = -X^V$, para todo campo X de M
- (ii) Si \bar{X} es un campo vertical, entonces $[L, \bar{X}] = -\bar{X}$ existe $X \in T_0^1(M)$ tal que $\bar{X} = X^V$.

$[\phi, \psi](X) = [\phi, \psi(X)] + \psi[X, \phi] = (\mathcal{L}_\phi \psi)(X)$, para todo campo X de M .

Así es

$$[\phi, \psi] = \mathcal{L}_\phi \psi$$

donde \mathcal{L} denota la derivada de Lie.

(5) Si $\phi, \psi \in T_1^1(M)$ se tiene que $[\phi, \psi] \in T_2^1(M)$ y para cualesquiera campos X e Y de M resulta que

$$\begin{aligned} [\phi, \psi](X, Y) &= \frac{1}{2} \{ [\phi(X), \psi(Y)] - [\phi(Y), \psi(X)] + \phi\psi[X, Y] - \psi\phi[Y, X] - \\ &\quad - \phi[X, \psi(Y)] + \phi[Y, \psi(X)] - \psi[X, \phi(Y)] + \psi[Y, \phi(X)] \} = \\ &= N_{\phi, \psi}(X, Y) \end{aligned}$$

con lo que $[\phi, \psi]$ es el tensor de Nijenhuis. En particular, si $\phi = \psi$, $[\phi, \phi] = N_\phi$.

La propiedad (4) se generaliza del siguiente modo: Si $\phi \in T_0^1(M)$ y $\psi \in T_1^1(M)$, entonces

$$[\phi, \psi] = \mathcal{L}_\phi \psi$$

Como ejemplo de aplicación de estos cálculos resulta que al considerar el fibrado vectorial $\pi_M: TM \rightarrow M$ y la estructura casi-tangente canónica J e $T_1^1(M)$, se tienen las siguientes relaciones, [25]:

$$[J, J] = 0 \in T_2^1(TM)$$

$$[L, J] = -J \in T_1^1(TM)$$

La técnica se generalizó en los trabajos [11], [37] y [38] donde se definió el corchete de Frölicher-Nijenhuis para fibrados vectoriales arbitrarios. Como siempre, el usado en variedades es el mismo que el ahora definido en espacios vectoriales, pero restringido a los fibrados tangentes de las variedades. Seguimos el trabajo de Mangiarotti y Modugno, [37].

Sea $\pi: E \rightarrow M$ un fibrado vectorial. Se denotan por

$$\mathcal{A}_M = \bigoplus_{0 \leq i \leq n} \mathcal{A}_M^i \quad \text{y por} \quad \mathcal{A}_E = \bigoplus_{0 \leq i \leq n} \mathcal{A}_E^i$$

las álgebras de formas en M y en E . (Obsérvese que la definición dada de \mathcal{A}_E depende de la dimensión de M y no de la de E).

Se definen \mathcal{P}_E y \mathcal{V}_E como los conjuntos de campos proyectables y de can-

pos verticales, de modo que

$$P_E = T_0^1(E) \quad ; \quad P_E = \left\{ \bar{X} = \frac{\partial}{\partial x^i} \bar{X}^i(x) + \frac{\partial}{\partial a_1^\alpha} \bar{X}^\alpha(x, a_1) \right\}$$

$$V_E = P_E = T_0^1(E) \quad ; \quad V_E = \left\{ \bar{X} = \frac{\partial}{\partial a_1^\alpha} \bar{X}^\alpha(x, a_1) \right\}$$

siendo $v: E \rightarrow M$ localmente $v(x, a_1) = x$.

Un campo $\bar{X} \in T_0^1(E)$ se dice **proyectable** si está v -relacionado con un campo $X \in T_0^1(M)$, [11]. Al campo X se le denomina **proyección** de \bar{X} .

Se definen entonces los conjuntos

$F = \Omega_M \otimes P_E$, espacio de las formas proyectables con valores vectoriales.

$V = \Omega_M \otimes V_E$, espacio de las formas verticales con valores vectoriales.

Resulta que F es un módulo no localmente libre sobre $T_0^0(M)$ y que V es un módulo sobre $T_0^0(E)$.

Así, $F^S = \Omega_M^S \otimes P_E = T_0^1(E)$, y se tiene la siguiente expresión local:

$$F \otimes F^S \cong \bar{F} = \left[\frac{\partial}{\partial x^i} \bar{F}_{j_1, \dots, j_s}^i(x) + \frac{\partial}{\partial a_1^\alpha} \bar{F}_{j_1, \dots, j_s}^\alpha(x, a_1) \right] \otimes dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_s}$$

con

$$\bar{F}_{j_1, \dots, j_s}^i(x) \in T_0^0(M),$$

$$\bar{F}_{j_1, \dots, j_s}^\alpha(x, a_1) \in T_0^0(E).$$

Entonces \bar{F} se proyecta en $F \otimes \Omega_M^S \otimes T_0^1(M) = T_0^1(M)$, dado localmente por

$$F = \frac{\partial}{\partial x^i} \bar{F}_{j_1, \dots, j_s}^i(x) \otimes dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_s}$$

Se define entonces el corchete de Frölicher-Nijenhuis de dos formas proyectables $\bar{F} \in F^r$ y $\bar{G} \in F^s$ como $[\bar{F}, \bar{G}] \in F^{r+s}$, la única forma proyectable que para cada $u_1, \dots, u_{r+s} \in T_0^1(M)$ verifica

$$[\bar{F}, \bar{G}] (u_1, \dots, u_{r+s}) =$$

-10-

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{r!s!} \int_0^1 |a| \left([F(u_{\sigma(1)}, \dots, u_{\sigma(r)}, G(u_{\sigma(r+1)}, \dots, u_{\sigma(r+s)}))] - \right. \\
 &\quad -r F(u_{\sigma(1)}, \dots, u_{\sigma(r-1)}, [u_{\sigma(r)}, G(u_{\sigma(r+1)}, \dots, u_{\sigma(r+s)})]) - \\
 &\quad -s G([F(u_{\sigma(1)}, \dots, u_{\sigma(r)}, u_{\sigma(r+1)}), u_{\sigma(r+2)}, \dots, u_{\sigma(r+s)}]) + \\
 &\quad + \frac{rs}{2} F(u_{\sigma(1)}, \dots, u_{\sigma(r-1)}, G([u_{\sigma(r)}, u_{\sigma(r+1)}]), u_{\sigma(r+2)}, \dots, u_{\sigma(r+s)})) + \\
 &\quad \left. - \frac{rs}{2} G([F(u_{\sigma(1)}, \dots, u_{\sigma(r-1)}, [u_{\sigma(r)}, u_{\sigma(r+1)}]), u_{\sigma(r+2)}, \dots, u_{\sigma(r+s)}]) \right).
 \end{aligned}$$

donde F y G son las proyecciones de \bar{F} y \bar{G} .

Este corchete generalizado verifica las mismas propiedades que hemos dado con anterioridad, (cfr. [11] y [37]).

§ 0.2. CONEXIONES, PSEUDO-, CASI- Y FERE-CONEXIONES LINEALES EN VARIETADES.

Las conexiones lineales en variedades han sido estudiadas desde muchos puntos de vista. Hemos escogido introducirlas mediante una presentación de tipo Koszul, [34], pues así podremos abordar rápidamente el problema de su generalización a las pseudo-, casi- y fere-conexiones. De hecho, en el epígrafe § 0.3, obtendremos las conexiones lineales como casos particulares de otras conexiones y, por tanto, se podrá aplicar a éstas lo que de éstas digamos.

Definición. Se llama derivada sobre la variedad diferenciable M a un endomorfismo R -lineal $\partial: T(M) \rightarrow T(M)$ tal que

- (i) $\partial(T_s^r(M)) = T_s^r(M)$, para cada r, s
- (ii) $\partial(\theta \otimes \theta') = \partial\theta \otimes \theta' + \theta \otimes \partial\theta'$, para cualesquiera campos tensoriales.
- (iii) ∂ conmuta con toda contracción.

Como es bien sabido, una derivada queda determinada por su actuación sobre $T_0^0(M)$ y $T_0^1(M)$. De hecho, actúa sobre $T_0^0(M)$, y se puede asociar a cada derivada el campo así determinado, que se suele denominar campo de dirección de la derivada.

Denotaremos por $\mathcal{D}(M)$ el conjunto de derivadas sobre M .

Definimos una conexión lineal en M como una aplicación

$$\nabla: T_0^1(M) \times T_0^1(M) \longrightarrow T_0^1(M)$$

que verifica las siguientes condiciones:

- (1) $\nabla_{(X+Y)} Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z$
- (2) $\nabla_{fX} Y = f \cdot \nabla_X Y$
- (3) $\nabla_X (Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$

$$(A) \nabla_X(fY) = (Xf) \cdot Y + f \cdot \nabla_X Y$$

siendo $f \in T_0^0(M)$ y representando $\nabla(X, Y) = \nabla_X Y$.

Si definimos

$$\partial f = X(f) \quad , \quad \text{si } f \in T_0^0(M)$$

$$\partial Y = \nabla_X Y \quad , \quad \text{si } Y \in T_0^1(M)$$

obtenemos una derivada. Nos permite definir entonces una conexión lineal como una aplicación

$$\nabla : T(M) \longrightarrow D(M)$$

en que a cada campo se le hace corresponder una derivada en la dirección de ese campo y de modo que se verifiquen las cuatro propiedades anteriores. Obsérvese que las propiedades (1) y (2) hacen que ∇ sea una aplicación $T_0^0(M)$ -lineal de $T_0^1(M)$ en $D(M)$ y que las (3) y (4) se deducen ahora del hecho de ser ∇_X una derivada.

Por lo tanto, podemos definir una conexión lineal como una aplicación $T_0^0(M)$ -lineal entre $T_0^1(M)$ y $D(M)$, que hace corresponder a cada campo una derivada en la dirección de dicho campo.

Localmente una conexión lineal queda caracterizada por los símbolos de Christoffel, Γ_{kj}^i , definidos por

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \frac{\partial}{\partial x^i} \Gamma_{kj}^i \quad .$$

A una conexión lineal se le asocian dos campos tensoriales: T e $T_2^1(M)$, llamado tensor de torsión y R e $T_3^1(M)$, el tensor de curvatura. Sus definiciones son:

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \quad ;$$

$$R(X, Y)Z = [\nabla_X, \nabla_Y] Z - \nabla_{[X, Y]} Z \quad .$$

Las generalizaciones de este concepto de conexión lineal han aparecido de modo y en años diferentes, según los autores que las han tratado. En principio, se pueden distinguir dos caminos: uno consiste en estudiar el operador

∇ tratando de debilitar alguna de las condiciones y el otro en llevar la situación dada en el fibrado tangente $\pi_M: TM \rightarrow M$ a un fibrado vectorial arbitrario. El primer camino será el que estudiemos ahora; el segundo lo veremos en el capítulo 0.3, y en el §.0.4. obtendremos una visión conjunta de ambas vías.

Como es bien sabido, la suma afín de conexiones lineales es conexión lineal: $t \cdot \nabla + (1-t) \cdot \nabla'$. Sin embargo, el conjunto de conexiones lineales no alcanza la estructura de módulo sobre $T_0^0(M)$. Definimos entonces una pseudoconexión lineal de campo fundamental $F \in T_1^1(M)$ como una aplicación $T_0^0(M)$ -lineal

$$\nabla : T_0^1(M) \longrightarrow D(M)$$

tal que a cada campo vectorial X le haga corresponder una derivada en la dirección del campo $F(X)$, considerado F como endomorfismo de campos.

Resulta que el conjunto de pseudoconexiones lineales forma un módulo sobre el anillo de funciones $T_0^0(M)$, [21].

Si el campo fundamental F es no degenerado, esto es, si es un automorfismo de campos vectoriales, la pseudoconexión lineal se llama casi-conexión lineal.

Si la aplicación ∇ definida por una pseudoconexión lineal se puede descomponer como $\nabla = \tilde{\nabla} \circ F$, donde $\tilde{\nabla}$ es una conexión lineal, se dice que ∇ es una pseudoconexión lineal canónicamente engendrada.

Obsérvese que una conexión lineal es una pseudoconexión lineal de campo fundamental el tensor identidad (de Kronecker).

A una pseudoconexión lineal se le asocian unos símbolos de Christoffel del mismo modo que a una conexión lineal. El campo fundamental de la pseudoconexión influye en la ley de cambio de carta de los símbolos (cfr., por ejemplo [12],[15],[10]).

La expresión local de $\nabla_X Y$ es la siguiente:

$$\text{Sean } X = \frac{\partial}{\partial x^i} X^i, \quad Y = \frac{\partial}{\partial x^j} Y^j, \quad F = \frac{\partial}{\partial x^k} \otimes F_j^i dx^j$$

Entonces.

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= \nabla_X \left(\frac{\partial}{\partial x^j} Y^j \right) = \nabla_X \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right) \cdot Y^j + \frac{\partial}{\partial x^j} (\nabla_X Y^j) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x^i} \Gamma_{kj}^i X^k Y^j + \frac{\partial}{\partial x^j} \frac{\partial Y^i}{\partial x^k} F_k^j X^k = \frac{\partial}{\partial x^i} (\Gamma_{kj}^i Y^j - \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} F_h^j) X^k . \end{aligned}$$

Como hemos dicho, los conceptos de casi-conexión y pseudoconexión han aparecido separadamente: las casi-conexiones fueron introducidas por Wong, [51], y estudiadas después por Vamanu, [46] y [49]. Las pseudoconexiones lo fueron por Di Comite, [12] y [13]. Esto ha llevado a dar definiciones distintas de torsión y curvatura. En efecto, se tiene

(a) Pseudoconexiones lineales de campo fundamental F:

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - L_F(X, Y) \quad , \quad T \in T_2^1(M)$$

$$R(X, Y) = [\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{L_F(X, Y)} \quad , \quad R \in T_3^1(M) \quad N_F = 0$$

siendo $L_F(X, Y) = [F(X), Y] + [X, F(Y)] - F([X, Y])$ y N_F el tensor de Nijenhuis.

(b) Casi-conexiones lineales de campo fundamental F:

$$\tilde{T}(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - F^{-1}([F(X), F(Y)]) \quad , \quad \tilde{T} \in T_2^1(M)$$

$$\tilde{R}(X, Y) = [\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{F^{-1}([F(X), F(Y)])} \quad , \quad \tilde{R} \in T_3^1(M)$$

Las relaciones entre unos y otros campos de tensores fueron estudiadas en [17].

Otra generalización del concepto de conexión lineal se debe a Mok y Wong, [30]. Introdujeron el concepto de M-tensor y de conexión de tipo (p,0). Más recientemente, Obădeanu, [41], ha obtenido parecidos resultados al trabajar con pseudoconexiones canónicamente engendradas.

Otro tipo de planteamiento es el que lleva a prescindir, en el concepto de conexión lineal, del carácter $T_0^0(M)$ -lineal de la aplicación

$$\nabla : T_0^1(M) \longrightarrow \mathcal{D}(M)$$

Obtenemos así las derivaciones, y sus correspondientes generalizaciones, las pseudoderivaciones, [21].

Finalmente anunciamos un último punto de vista, consistente en considerar un operador ∇ al que se halla ligado un campo tensorial F e $T_1^1(M)$ y de modo que verifica las siguientes leyes:

- (1) $\nabla_{X+X'} Y = \nabla_X Y + \nabla_{X'} Y$
- (2) $\nabla_X (Y+Y') = \nabla_X Y + \nabla_X Y'$
- (3) $\nabla_{fX} Y = f \cdot \nabla_X Y$
- (4) $\nabla_X (fY) = f \cdot \nabla_X Y + (Xf) \cdot F(Y)$

A un tal operador lo denominaremos fere-conexión lineal. Obsérvese que si F es el tensor de Kronecker, entonces obtenemos una conexión lineal. Este nombre, que introducimos aquí, sirve para evitar la ambigüedad que se presenta en este campo, pues hay nombres iguales que definen distintos conceptos y, al revés, hay conceptos llamados de modo diferente por diversos autores. El apéndice II de este capítulo 0 ofrece una clasificación de las distintas notaciones. El origen del nombre proviene del adverbio latino "fere", casi. En efecto, estas fere-conexiones son aproximadamente conexiones, y la relación que existe entre conexiones y fere-conexiones es la misma que entre conexiones y pseudoconexiones. Difieren, solamente, en la actuación del campo F , ora sobre X , ora sobre Y .

La expresión local de $\nabla_X Y$ es la siguiente:

$$\text{Si } X = \frac{\partial}{\partial x^i} X^i, \quad Y = \frac{\partial}{\partial x^j} Y^j, \quad F = \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes F_{ij}^i dx^j$$

entonces

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= \nabla_X \left(\frac{\partial}{\partial x^j} Y^j \right) = \nabla_X \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) \cdot Y^j + \frac{\partial Y^j}{\partial x^k} X^k \cdot \frac{\partial}{\partial x^i} F_{ij}^i \\ &= \frac{\partial}{\partial x^i} \cdot \Gamma_{kj}^i X^k Y^j + \frac{\partial}{\partial x^i} F_{ij}^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^k} X^k \\ &= \frac{\partial}{\partial x^i} \cdot \left(\Gamma_{kj}^i Y^j + F_{ij}^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^k} \right) X^k \end{aligned}$$

Compárese esta última expresión con la de una pseudoconexión lineal.

A un operador $\nabla_X: T_0^1(M) \rightarrow T_0^1(M)$ que actúe como las propiedades (3) y (4) de una fere-conexión lineal le llamaremos fere-derivada, y si lo hace como una pseudoconexión lineal, pseudo-derivada. Estas definiciones son análogas a las que da Spesiviykh en [58], aunque los nombres difieren (ver el apéndice II).

§ 0.3. CONEXIONES INFINITESIMALES.

1. Definiciones.

Este concepto es el clásico de conexión en un fibrado vectorial. Le damos el nombre de infinitesimal para distinguirlo del de conexión generalizada que estudiaremos en el epígrafe siguiente. La idea básica es que una conexión infinitesimal es una distribución diferenciable de espacios horizontales, complementaria a la vertical (cfr. [10]).

Sea $\pi: E \rightarrow M$ un fibrado vectorial sobre una variedad real diferenciable M de dimensión n y sea r el rango del fibrado. Consideremos la sucesión exacta de fibrados sobre E

$$(*) \quad 0 \longrightarrow VE \xrightarrow{i} TE \xrightarrow{\pi^{-1}} \pi^{-1}(TM) \longrightarrow 0$$

Primera definición [50]: Una conexión infinitesimal en el fibrado vectorial $\pi: E \rightarrow M$ es una escisión diferenciable por la izquierda $V: TE \rightarrow VE$ de la sucesión (*), esto es, tal que $V \circ i = id_{VE}$.

Evidentemente, equivale a dar una escisión por la derecha de (*). $H: \pi^{-1}(TM) \rightarrow TE$, esto es, tal que $\pi^{-1} \circ H = id_{\pi^{-1}(TM)}$. Así se define en [37].

Se llama aplicación de conexión a la composición

$$K = \rho \circ V : TE \rightarrow E$$

Este concepto fue definido en primer lugar para las conexiones en fibrados tangentes por Dombrowski, en [14]. Se verifican las siguientes propiedades:

- (1) (K, π_M) es un morfismo de fibrados sobre (π_M, π) .
- (2) (K, π_E) es un morfismo de fibrados sobre (π_E, π) .
- (3) $K|_{VE} = \rho : VE \rightarrow E$.

Así que por (1) y (2) conmutan los cuadrados

$$\begin{array}{ccc}
 TE & \xrightarrow{K} & E \\
 \nu_* \downarrow & & \downarrow \nu \\
 TM & \xrightarrow{\nu_*} & M
 \end{array}
 \quad y \quad
 \begin{array}{ccc}
 TE & \xrightarrow{K} & E \\
 \nu_E \downarrow & & \downarrow \nu \\
 E & \xrightarrow{\nu} & M
 \end{array}$$

Las tres propiedades anteriores caracterizan la aplicación de conexión K de una conexión dada V . A la aplicación de conexión también se le da el nombre de conector (cfr. [2]).

Una escisión de la sucesión (*) proporciona una descomposición de TE en suma de Whitney de los fibrados VE y $\nu^{-1}(TM)$. Esto nos lleva a la siguiente definición, más geométrica

Segunda definición: Una conexión infinitesimal en $\nu: E \rightarrow M$ está dada por un subfibrado HE de $\nu_E: TE \rightarrow E$ que verifica

$$TE = HE \bullet VE$$

Si además HE es homogéneo, en el sentido de que

$$\mu_{k^e} H_e E = H_{ke} E$$

siendo $k \in \mathbb{R}$, $e \in E$, μ la multiplicación por un escalar en el fibrado, $\mu_{k^e} = ke$, y $H_e E$ la fibra en e de $HE \rightarrow E$. diremos que la conexión es invariante por dilataciones. Así es como se definen las conexiones en [14]. (Más adelante veremos que estas conexiones invariantes son las conexiones lineales en fibrados vectoriales, que definiremos con posterioridad).

A HE se le llama fibrado horizontal. La manera de relacionar estas dos primeras definiciones de conexión infinitesimal está dada por la igualdad

$$HE = \ker K$$

La descomposición del fibrado tangente TE permite definir las proyecciones v y h , para cada $e \in E$

$$V_e E \xleftarrow{v} T_e E \xrightarrow{h} H_e E$$

Obsérvese que $v = V$; la proyección vertical es la escisión por la izquierda.

La otra definición que vamos a dar proviene del estudio de conexiones en fibrados localmente triviales arbitrarios, iniciado por Ehresmann, [15]. Como demostró Hermann en [20] una conexión de Ehresmann en un fibrado vecto-

rial es una conexión infinitesimal en el sentido de la primera definición (ver [11]). Ahora bien, tiene interés porque se puede aplicar las técnicas del corchete de Frölicher-Nijenhuis. Tenemos así la siguiente definición

Tercera definición [7],[11],[29],[37] y [38]: Una conexión infinitesimal en $\pi: E \rightarrow M$ está dada por una 1-forma proyectable $h \in F^1$ tal que su proyección h' es la identidad

$$h' = id_{TM}$$

El hecho de llamar h a la conexión proviene de que $im(h)$ es el espacio horizontal de acuerdo con la segunda definición. Además, h queda caracterizado por $h(TM) \cong TE$, que produce la escisión $TE = im(h) \oplus VE$. [37].

Con esta definición se pueden aplicar las técnicas de Frölicher-Nijenhuis para hallar la curvatura y la derivada covariante, como veremos más adelante.

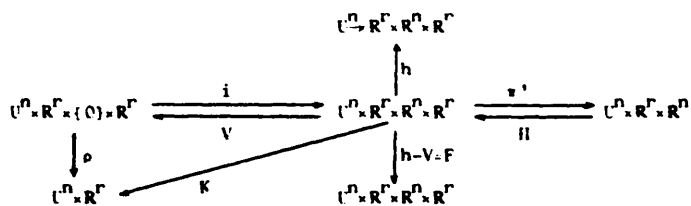
La equivalencia entre las tres definiciones queda patente cuando tomamos coordenadas locales. En efecto, si partimos de la sucesión exacta (*)

$$(*) \quad 0 \longrightarrow VE \xrightarrow{i} TE \xrightarrow{\pi'} \pi^{-1}(TM) \longrightarrow 0$$

una conexión infinitesimal en $\pi: E \rightarrow M$ define las siguientes aplicaciones

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & HE & & & \\
 & & & \uparrow h & & & \\
 0 & \longrightarrow & VE & \xrightarrow{i} & TE & \xrightarrow{\pi'} & \pi^{-1}(TM) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \rho & \swarrow V & \downarrow H & & \\
 & & E & & TE & & \\
 & & & \searrow K & \downarrow h-V=F & &
 \end{array}$$

que localmente se expresan por



Sabíamos que

$$i(x, a_1, 0, a_2) = (x, a_1, 0, a_2)$$

$$\pi'(x, a_1, c, a) = (x, a_1, c)$$

$$\rho(x, a_1, 0, a_2) = (x, a_2)$$

y recuerdo la notación: $x \in U^n$; $a_1, a_2 \in R^r$; $c \in R^n$; $i, j \in \{1, \dots, n\}$; $\alpha, \beta \in \{1, \dots, r\}$.

Entonces resulta

$V(x, a_1, c, a_2) = (x, a_1, 0, a_2 + \omega(x, a_1)c)$, donde $\omega: U^n \times R^r \rightarrow L(R^n, R^r)$. A ω se le llama **componente local de la conexión**. [50]. Como ω es lineal resulta

$$(\omega(x, a_1)c)^\alpha = (\omega_j^\alpha(x, a_1)c^j)^\alpha = \omega_j^\alpha(x, a_1)c^j.$$

$$K(x, a_1, c, a_2) = (x, a_2 + \omega(x, a_1)c)$$

$$h(x, a_1, c, a_2) = (x, a_1, c, -\omega(x, a_1)c). \text{ Así resulta que}$$

$$h = \left(\frac{\partial}{\partial x^j} - \frac{\partial}{\partial a_1^\alpha} \omega_j^\alpha(x, a_1) \right) \otimes dx^j, \text{ con lo que } h' = \frac{\partial}{\partial x^j} \otimes dx^j = \text{id}_{TM}.$$

Obsérvese que $h(TM)$ está generado por los campos vectoriales horizontales

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^j} c^i - \frac{\partial}{\partial a_1^\alpha} \omega_j^\alpha(x, a_1) c^j \right)$$

obtenidos al hallar $h\left(\frac{\partial}{\partial x^j} c^i\right)$

$$H(x, a_1, c) = (x, a_1, c, -\omega(x, a_1)c)$$

$$F(x, a_1, c, a_2) = (x, a_1, c, -a_2 - 2\omega(x, a_1)c)$$

Obsérvese que $h = \frac{1}{2} (I \cdot F)$
 $V = \frac{1}{2} (I \cdot F)$

donde I es el tensor de Kronecker, identidad en TE.

Así pues, una conexión infinitesimal queda determinada al dar una de las aplicaciones V , K , h , H o F , y cada una de ellas determina todas las demás. A una conexión infinitesimal la denotaremos de modo genérico por Γ .

Considérense ahora h , V y F como aplicaciones de TE en sí mismo. Resulta que

$$h\left(\frac{\partial}{\partial x^1} \cdot c^i + \frac{\partial}{\partial a_1^\alpha} \cdot a_2^\alpha\right) = \frac{\partial}{\partial x^1} \cdot c^i + \frac{\partial}{\partial a_1^\alpha} \cdot (-\omega_1^\alpha(x, a_1)c^i)$$

$$V\left(\frac{\partial}{\partial x^1} \cdot c^i + \frac{\partial}{\partial a_1^\alpha} \cdot a_2^\alpha\right) = \frac{\partial}{\partial a_1^\alpha} \cdot (a_2^\alpha + \omega_1^\alpha(x, a_1)c^i)$$

$$F\left(\frac{\partial}{\partial x^1} \cdot c^i + \frac{\partial}{\partial a_1^\alpha} \cdot a_2^\alpha\right) = \frac{\partial}{\partial x^1} \cdot c^i + \frac{\partial}{\partial a_1^\alpha} \cdot (-a_2^\alpha - 2\omega_1^\alpha(x, a_1)c^i)$$

Entonces a h , V y F les corresponden las siguientes expresiones locales:

$$h = \frac{\partial}{\partial x^1} \cdot dx^i + \frac{\partial}{\partial a_1^\alpha} \cdot (-\omega_1^\alpha(x, a_1)) \cdot dx^i$$

$$V = \frac{\partial}{\partial a_1^\alpha} \cdot \omega_1^\alpha(x, a_1) \cdot dx^i + \frac{\partial}{\partial a_1^\alpha} \cdot da_1^\alpha$$

$$F = \frac{\partial}{\partial x^1} \cdot dx^i + \frac{\partial}{\partial a_1^\alpha} \cdot (-2\omega_1^\alpha(x, a_1)) \cdot dx^i - \frac{\partial}{\partial a_1^\alpha} \cdot da_1^\alpha$$

En general, a

$$F^i = \frac{\partial}{\partial x^j} \cdot C_{j1}^i \cdot dx^j - \frac{\partial}{\partial x^i} \cdot M^i \cdot da_1^\beta + \frac{\partial}{\partial a_1^\alpha} \cdot \psi_j^\alpha \cdot dx^j - \frac{\partial}{\partial a_1^\alpha} \cdot B^\alpha \cdot da_1^\beta$$

se le puede hacer corresponder la matriz

$$\begin{bmatrix} C_j^i & H_j^i \\ \omega_j^a & B_j^a \end{bmatrix}$$

Así a h, V y F les corresponden las siguientes expresiones matriciales:

$$h: \begin{bmatrix} \delta_j^i & 0 \\ -\omega_j^a(x, a_1) & 0 \end{bmatrix}; \quad V: \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \omega_j^a(x, a_1) & \delta_j^a \end{bmatrix}; \quad F: \begin{bmatrix} \delta_j^i & 0 \\ -2\omega_j^a(x, a_1) & \delta_j^a \end{bmatrix}$$

Este punto deja ya preparado el terreno para definir las conexiones generalizadas. Sin embargo, continuaremos ahora con las propiedades de las conexiones infinitesimales, posponiendo, para el próximo epígrafe § 0.4., el estudio de las generalizadas.

2. Casos particulares.

Vamos a estudiar ahora algunas conexiones infinitesimales en particular.

Sea Γ una conexión infinitesimal en el fibrado vectorial $\pi: E \rightarrow M$. Como $\omega \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ resulta que ω es lineal en las π_E^{-1} -fibras, esto es,

$$\omega(x, a)c = \omega_j^i(x, a)c^j$$

Si ω es también lineal en las $(\pi_M)_\#$ -fibras, y verifica por lo tanto que

$$(\omega(x, a)c)^\beta = \Gamma_{i\alpha}^\beta(x) a^\alpha c^i$$

se dice que Γ es una conexión infinitesimal lineal, [50]. Esta condición equivale a que

$$f_{\Gamma} F = [L, F] = 0$$

donde f es la derivada de Lie, L el campo de Liouville y el corchete el de Frölicher-Nijenhuis.

Al estudiar la derivada covariante veremos que en el caso de que sea Γ una conexión infinitesimal lineal en el fibrado tangente de una variedad, este concepto coincide con el de conexión lineal en la variedad que definimos en § 0.2.

Y los $\Gamma_{ia}^b(x)$ son los símbolos de Christoffel de la conexión infinitesimal lineal.

Veamos ahora que las conexiones infinitesimales lineales son las que antes denominamos invariantes por dilataciones. Debemos comprobar que la condición de que el espacio horizontal se preserve por multiplicaciones equivale a que ω sea lineal en la segunda variable.

En efecto, si X es un campo vectorial en M , $X \in T_0^1(M)$, se define su elevación horizontal X^H en $T_0^1(E)$ como el único campo horizontal \ast -relacionado con X . [44]. Las expresiones locales son:

$$X(x^i) = (x^i, X^i)$$

$$X^H(x^i, a_1^a) = (x^i, a_1^a, X^i, -\omega_j^a(x, a_1) X^j)$$

Entonces.

$$\mu_{k\ast} X^H(x^i, a_1^a) = (x^i, k \cdot a_1^a, X^i, -k \cdot \omega_j^a(x, a_1) X^j)$$

mientras que

$$X^H(x^i, k \cdot a_1^a) = (x^i, k \cdot a_1^a, X^i, -\omega_j^a(x, k \cdot a_1) X^j)$$

Luego debe ser ω_j^a lineal en el segundo factor para que se preserven los espacios horizontales.

En lo que sigue, trabajaremos con una conexión infinitesimal Γ definida en el fibrado vectorial

$$\ast: (E)_0 \rightarrow M$$

Si ω es homogénea de grado 1 en las $(\ast_M)_\ast$ -fibras, se dice que Γ es una conexión infinitesimal homogénea. [50]. Estas conexiones, cuando $E = TM$ y el fibrado es el tangente a la variedad M , son las que también se denominan, en

[1] ([31], [39], [52] y [53]), conexiones no lineales. Se puede encontrar en [39] la relación entre las diferentes definiciones de conexiones no lineales. Son conexiones invariantes por dilataciones (cfr. [10] y [52]).

Los siguientes estudios tratan de conexiones definidas en el fibrado

$$\pi_M: (TM)_0 \rightarrow M$$

Para empezar, una conexión infinitesimal homogénea Γ en dicho fibrado viene caracterizada por la siguiente condición, [28]: Sea $F: TM \rightarrow TM$ la aplicación definida por Γ . Entonces Γ es homogénea si F es homogénea de grado 1, en el sentido de que

$$\mathcal{L}_L F = [L, F] = 0$$

siendo L el campo de Liouville.

Resulta así que si una conexión infinitesimal homogénea, dada por F , es además de clase C^1 sobre la sección nula, entonces la conexión es infinitesimal lineal en el fibrado $\pi_M: TM \rightarrow M$, [25].

Las construcciones anteriores permiten definir una clase más amplia de conexiones, las no homogéneas, que comprenden a las lineales y a las homogéneas. Seguimos la notación de Grifone, [25]. También han sido estudiadas por Mok y Wong en [39], obteniendo una equivalencia entre las conexiones no homogéneas en el sentido de Grifone y las (1.1)-conexiones en $(TM)_0 \rightarrow M$ por ellos definidas.

Definición [28]: Se llama conexión no homogénea sobre M a una 1-forma vectorial F sobre TM , C^∞ sobre $(TM)_0$, y tal que

$$(a) \quad JF = J$$

$$(b) \quad FJ = -J$$

siendo J la estructura casi-tangente canónica sobre TM .

Obsérvese que se puede considerar F como endomorfismo de TTM , pues

$$F: T_0^1(TM) \rightarrow T_0^1(TM)$$

pero $F \notin T_1^1(M)$ en general, puesto que F sólo es C^∞ sobre $(TM)_0$.

El siguiente resultado tiene importancia en sí mismo, y porque obtendré-

mos uno análogo que caracterice las conexiones infinitesimales (será la proposición 0.4 del epígrafe § 0.4.)

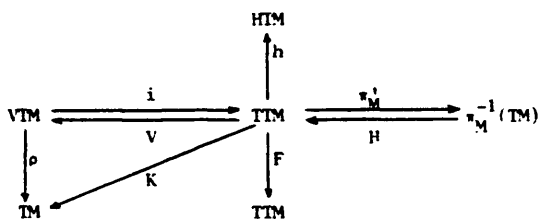
Proposición 0.1. [25]: Una 1-forma vectorial F sobre TM es una conexión (no homogénea) sobre M si y solamente si F define una estructura casi-producto sobre TM (i.e. $F^2 = id$), C^∞ sobre $(TM)_0$ y tal que para cada $z \in TM$ el subespacio de Γ_z correspondiente al valor propio -1 es el subespacio $V_z(TM)$ de vectores verticales, tangentes en z a $\pi_M^{-1}(\pi_M(z))$.

Estudiemos ahora las expresiones locales. Advirtamos primero que para que una conexión no homogénea defina una escisión por la derecha en la sucesión

$$0 \longrightarrow VTM \xrightarrow{i} TTM \xrightarrow{\pi_M^1} \pi_M^{-1}(TM) \longrightarrow 0$$

es necesario que M sea una variedad paracompacta (cfr. [25], prop. I.19).

Una conexión no homogénea F induce las siguientes aplicaciones:

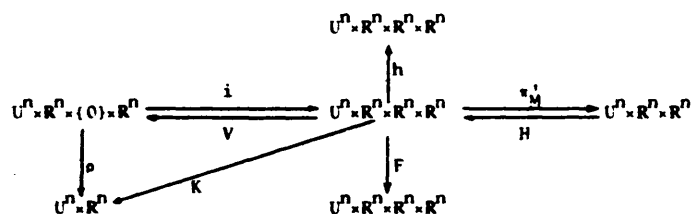


Las relaciones entre unas y otras aplicaciones son:

$$h = \frac{1}{2} (I-F) \quad ; \quad v = \frac{1}{2} (I-F) \quad ; \quad F = 2H \circ \pi_M^1 - I$$

y $H = h \circ H'$, donde H' es cualquier escisión de π_M^1 (que existe por ser M paracompacta) y no depende H de la elección de H' , [25].

En coordenadas locales se expresa así el diagrama precedente:



y las aplicaciones son:

$$F(x, c_1, c_2, c_3) = (x, c_1, c_2, -2\omega_j^i(x, c_1)c_2^j - c_3^i)$$

$$V(x, c_1, c_2, c_3) = (x, c_1, 0, \omega_j^i(x, c_1)c_2^j + c_3^i)$$

$$h(x, c_1, c_2, c_3) = (x, c_1, c_2, -\omega_j^i(x, c_1)c_2^j)$$

$$H(x, c_1, c_2) = (x, c_1, c_2, -\omega_j^i(x, c_1)c_2^j)$$

$$\rho(x, c_1, 0, c_3) = (x, c_3)$$

$$K(x, c_1, c_2, c_3) = (x, \omega_j^i(x, c_1)c_2^j + c_3^i)$$

con ω_j^i función de TM , C^∞ sobre $(TM)_0$.

Así la forma local de la conexión es

$$\omega(x, c_1)c_2 = \omega_j^i(x, c_1)c_2^j$$

y F admite la expresión matricial siguiente:

$$F : \begin{bmatrix} \delta_j^i & 0 \\ -2\omega_j^i(x, c_1) & -\delta_j^i \end{bmatrix}$$

Observación: Las conexiones infinitesimales en una variedad son las conexiones no homogéneas de clase C^1 sobre la sección nula. En el caso de que la conexión sea lineal, resulta que

$$\omega_k^i(x, c_1) = \Gamma_{kj}^i(x) c_1^j$$

y de modo recíproco,

$$\Gamma_{kj}^i = \frac{\partial \omega_k^i(x, c_1)}{\partial c_1^j}$$

Obsérvese que $h(TM)$ está generado por

$$\frac{\partial}{\partial x^i} c_2^i - \frac{\partial}{\partial c_1^j} \omega_j^i(x, c_1) c_2^j$$

que son también generadores del conjunto de soluciones de las ecuaciones pfa-
ffianas

$$\omega_j^i(x, c_1) dx^j + dc_1^i = 0$$

que es como se introducen los espacios horizontales en [52].

3. Derivada covariante.

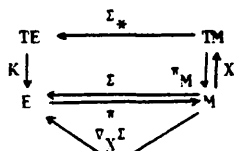
Sea Γ una conexión infinitesimal en el fibrado vectorial $\pi: E \rightarrow M$ y sea $\text{Sec}(\pi)$ el conjunto de secciones de dicho fibrado.

Se llama derivada covariante, [50], definida por Γ al operador

$$\begin{aligned} T_0^1(M) \times \text{Sec}(\pi) &\longrightarrow \text{Sec}(\pi) \\ (X, \Gamma) &\longrightarrow \nabla_X \Gamma = K \circ \Gamma_* \circ X \end{aligned}$$

donde Γ_* es la aplicación tangente de Γ , y K la aplicación de conexión.

El siguiente diagrama expresa la situación:



Las expresiones locales son:

$$X(x^i) = (x^i, X^i)$$

$$\Gamma(x^i) = (x^i, \Gamma^a)$$

$$\Gamma_*(x^i, c^i) = (x^i, \Gamma^a, c^i, \frac{\partial \Gamma^a}{\partial x^j} c^j)$$

$$K(x^i, a_1^a, c^i, a_2^a) = (x^i, a_2^a + \omega_1^a(x^i, a_1^a) c^i)$$

que nos da la de la derivada covariante:

$$(\nabla_X \Gamma)(x^i) = (x^j, \frac{\partial \Gamma^a}{\partial x^j} X^j + \omega_j^a X^j)$$

Observación: En el caso de que Γ sea una conexión lineal en el fibrado tangente a M (esto es, una conexión lineal en M) resulta

$$\nabla_X Y(x^i) = (x^i, \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} X^j + \Gamma_{jk}^i X^j Y^k)$$

que coincide con la fórmula clásica.

En este caso se puede introducir también la derivada covariante $\nabla_X Y$ e $T_0^1(M)$ como el campo tal que, [10],

$$(\nabla_X Y)^V = [X^H, Y^V] \text{ e } V_{TM}$$

La construcción no se puede generalizar a fibrados vectoriales pues la elevación horizontal (respecto de una conexión) sí está definida, pero no la vertical.

Esta definición de derivada covariante admite una generalización y una restricción: La generalización es la dada por Poor, en [44], cuando define el operador derivada covariante a partir de una conexión infinitesimal lineal en $\pi: E \rightarrow M$ y una aplicación diferenciable $f: N \rightarrow M$. Es lo que denomina derivada covariante a lo largo de f y está dada en

$$T_0^1(N) \times \text{Sec}_f(\pi) \longrightarrow \text{Sec}_f(\pi)$$

donde las secciones de π a lo largo de f son

$$\text{Sec}_f(\pi) = \{ \sigma: N \rightarrow E \mid \pi \circ \sigma = f \}.$$

La restricción es la derivada covariante de una conexión no homogénea, definida por Grifone, [25]. Se trata de una definición específica para este

tipo de conexiones, obtenida sin usar la aplicación de conexión K. En el fondo la construcción es la misma, puesto que sustituye K por otros dos operadores, de modo que el resultado final coincide.

Omitimos detallar ambas construcciones.

Las propiedades básicas de la derivada covariante son las de las conexiones lineales en una presentación de tipo Koszul, como la que hicimos en § 0.2. Con detalle:

La derivada covariante de una conexión infinitesimal verifica

$$\nabla_{(X+Y)} I = \nabla_X I + \nabla_Y I$$

$$\nabla_{fX} I = f \cdot \nabla_X I$$

y si además la conexión es también lineal, verifica

$$\nabla_X (I + I') = \nabla_X I + \nabla_X I'$$

$$\nabla_X (f \cdot I) = f \cdot \nabla_X I + (Xf) \cdot I$$

siendo $X, Y \in T_0^1(M)$; $I \in \text{Sec}(\pi)$; $f \in T_0^0(M)$.

De modo recíproco, [44], si ∇ es un operador derivada covariante (que verifica las cuatro propiedades anteriores) en el fibrado vectorial $\pi: E \rightarrow M$, entonces existe una conexión lineal única Γ en dicho fibrado tal que, dados $I \in \text{Sec}(\pi)$ y $X \in T_0^1(M)$, resulte que

$$I_* \cdot X \in \text{HE} \iff \nabla_X I = 0$$

(Recuerdo que $\text{HE} = \ker K$).

Estudiemos ahora la diferencial covariante.

Sea Γ una conexión lineal en la variedad M . Γ viene definida por un operador derivada covariante. A partir de él se puede definir la diferencial covariante como

$$\begin{array}{ccc} \nabla : T_0^1(M) & \longrightarrow & T_1^1(M) \\ Y & \longrightarrow & \nabla Y \end{array}$$

donde $(\nabla Y)(X) = \nabla_X Y$, $\forall X \in T_0^1(M)$.

La siguiente proposición justificará la definición de diferencial covariante.

Proposición 0.2.: Sean Γ una conexión lineal en M , $h: TTM \rightarrow TTM$ la proyección horizontal definida por Γ y X e Y campos en M . Entonces

$$[h.Y^V](X^H) = (\nabla_X Y)^V$$

donde el corchete es el de Frölicher-Nijenhuis.

Demostración.

$$[h.Y^V](X^H) = -[Y^V, h(X^H)] - h([X^H, Y^V]).$$

como vimos en § 0.1.2.

En una observación precedente, dijimos que $\{X^H, Y^V\}$ es vertical y, por lo tanto, su parte horizontal es nula.

$$Y h(X^H) = X^H, \text{ por ser horizontal.}$$

Luego

$$[h.Y^V](X^H) = -[Y^V, X^H] = [X^H, Y^V] = (\nabla_X Y)^V$$

qed

Esta proposición hace natural definir

$$\nabla Y^V = [h.Y^V]$$

Pues bien, esta es la definición general:

Definición [7],[11],[37] y [38]: Se llama diferencial covariante de $G \in F^r$ a

$$\nabla G = [h,G] \in F^{r+1}$$

siendo h la proyección horizontal definida por la conexión Γ .

Propiedades:

$$(1) [37] \quad \nabla G \in F^{r+1}, \quad \forall G \in F^r$$

$$(2) [37] \quad \nabla[F.G] = [\nabla F.G] + (-1)^r [F,\nabla G], \quad \text{si } F \in F^r \text{ y } G \in F^s$$

$$\begin{aligned} (3) \quad \nabla \nabla h &= \nabla [h, h] = [\nabla h, h] - [h, \nabla h] = \\ &= [[h, h], h] - [h, [h, h]] = 2[[h, h], h] = 0 \end{aligned}$$

por la propiedad de Jacobi.

4. Curvatura y torsión.

Torsión y curvatura son objetos de características distintas: mientras que la curvatura está definida para cualquier conexión infinitesimal, la torsión sólo lo está para las infinitesimales en variedades (esto es, para las conexiones no homogéneas). Empezamos por el estudio de la curvatura.

Definición [7], [11], [37] y [38]: Se llama curvatura R de una conexión infinitesimal Γ a la diferencial covariante de su proyección horizontal afectada del factor $(-\frac{1}{2})$.

$$R = -\frac{1}{2} [h, h] = -\frac{1}{2} N_h$$

donde N_h es el tensor de Nijenhuis.

En el caso de las conexiones no homogéneas (en variedades) la misma definición se da también en [28].

La curvatura de una conexión actúa sobre pares de campos \bar{X}, \bar{Y} e $\Gamma_0^1(E)$ del modo siguiente, [11]:

$$R(\bar{X}, \bar{Y}) = -[h(\bar{X}), h(\bar{Y})] - h^2([\bar{X}, \bar{Y}]) + h([h(\bar{X}), \bar{Y}]) + h([\bar{X}, h(\bar{Y})]).$$

Si \bar{X} es proyectable resulta que $h(\bar{X}) - \bar{X}$ es vertical, pues localmente

se tiene:

$$\begin{aligned}\bar{X}(x, a_1) &= (x^i, a_1^\alpha, \bar{X}^i(x), \bar{X}^\alpha(x, a_1)) \\ (h(\bar{X}))(x, a_1) &= (x^i, a_1^\alpha, \bar{X}^i(x), -\omega_i^\alpha(x, a_1) \bar{X}^i(x))\end{aligned}$$

con lo que

$$(h(\bar{X}) - \bar{X})(x, a_1) = (x^i, a_1^\alpha, 0, -\bar{X}^\alpha(x, a_1) - \omega_i^\alpha(x, a_1) \bar{X}^i(x))$$

que es un campo vertical.

Y resulta, de modo análogo, que si \bar{X} es proyectable entonces es vertical el campo

$$[h(\bar{X}), \bar{Y}] - [\bar{X}, \bar{Y}] = [h(\bar{X}) - \bar{X}, \bar{Y}]$$

siendo \bar{Y} un campo cualquiera proyectable (el corchete de Lie de un campo vertical y uno proyectable es vertical).

Entonces si \bar{X} e \bar{Y} son dos campos proyectables, se obtiene la expresión

$$\begin{aligned}R(\bar{X}, \bar{Y}) &= -[h(\bar{X}), h(\bar{Y})] - h([\bar{X}, \bar{Y}]) + 2h([\bar{X}, \bar{Y}]) = \\ &= -[h(\bar{X}), h(\bar{Y})] + h([\bar{X}, \bar{Y}])\end{aligned}$$

Esta es la expresión dada en [37].

En coordenadas locales es

$$R = \left(\frac{\partial(\omega_j^\alpha(x, a_1))}{\partial x^i} - \frac{\partial(\omega_i^\alpha(x, a_1))}{\partial a_1^\beta} \omega_j^\beta(x, a_1) \right) \cdot \frac{\partial}{\partial a_1^\alpha} \otimes dx^i \wedge dx^j$$

Hemos obtenido la expresión local de R para una conexión infinitesimal arbitraria. Si ésta es además lineal resulta que

$$\omega_i^\alpha(x, a_1) = \Gamma_{i\gamma}^\alpha(x) a_1^\gamma$$

con lo que la expresión de la curvatura es

$$R = \left(\frac{\partial \Gamma_{i\gamma}^\alpha(x)}{\partial x^i} a_1^\gamma - \Gamma_{i\beta}^\alpha(x) \Gamma_{\epsilon j}^\beta(x) a_1^\epsilon \right) \cdot \frac{\partial}{\partial a_1^\alpha} \otimes dx^i \wedge dx^j$$

Suponiendo que la conexión es lineal, sean \bar{X} e \bar{Y} campos proyectables.

de expresiones locales

$$\bar{X} = \frac{\partial}{\partial x^i} \bar{X}^i(x) + \frac{\partial}{\partial a_1^\alpha} \bar{X}^\alpha(x, a_1)$$

$$\bar{Y} = \frac{\partial}{\partial x^j} \bar{Y}^j(x) + \frac{\partial}{\partial a_1^\beta} \bar{Y}^\beta(x, a_1)$$

Entonces resulta que

$$R(\bar{X}, \bar{Y}) = \frac{\partial}{\partial a_1^\alpha} \left(\frac{\partial \bar{Y}^j}{\partial x^i} - \frac{\partial \bar{X}^i}{\partial x^j} + \Gamma_{i\beta}^\alpha(x) \bar{Y}^\beta(x) - \Gamma_{j\beta}^\alpha(x) \bar{X}^\beta(x) \right) \bar{X}^i \bar{Y}^j a_1^\alpha$$

Más adelante utilizaremos esta expresión.

Vemos la relación que tiene esta curvatura con la clásica definida en conexiones lineales en variedades y que estudiamos en § 0.2. Aquella definición se extiende a la siguiente

Definición [50] y [44]: Sea Γ una conexión infinitesimal lineal en un fibrado vectorial. Llamaremos curvatura clásica de Γ a

$$R_C(X, Y)\Sigma = [\nabla_X, \nabla_Y]\Sigma - \nabla_{[X, Y]}\Sigma$$

siendo $X, Y \in T_0^1(M)$ y $\Sigma \in \text{Sec}(\pi)$.

La relación entre ambas curvaturas viene regida por la siguiente

Proposición 0.3.: Sea una conexión infinitesimal lineal y sean \bar{X} e \bar{Y} campos proyectables de $T_0^1(E)$ y X e Y sus proyecciones en $T_0^1(M)$. Sea $\Sigma \in \text{Sec}(\pi)$. Entonces

$$\rho_0 R(\bar{X}, \bar{Y})\Sigma = R_C(X, Y)\Sigma$$

Demostración.

La expresión local de $R(\bar{X}, \bar{Y})$ es la que hemos hallado antes de definir la curvatura clásica.

Al ser \bar{X} e \bar{Y} campos proyectables sobre X e Y , resulta que localmente se relacionan por

$$\bar{X}^i(x) = X^i(x) \quad ; \quad \bar{Y}^j(x) = Y^j(x)$$

Entonces,

$$\begin{aligned} (\rho \circ R(\bar{X}, \bar{Y}) \Gamma)(x) &= \rho(R(\bar{X}, \bar{Y})(x^i, \Gamma^\alpha)) = \\ &= (x^i, (\frac{\partial \Gamma^\alpha_{jY}}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma^\alpha_{iY}}{\partial x^j} + \Gamma^\alpha_{i\beta} \Gamma^\beta_{jY} - \Gamma^\alpha_{j\beta} \Gamma^\beta_{iY}) X^i Y^j \Gamma^\alpha) \end{aligned}$$

que es la expresión de $(R_c(X, Y)\Gamma)(x)$.

qed

En el caso de que el fibrado vectorial dado fuera el fibrado tangente de una variedad, resulta esta proposición una generalización del resultado correspondiente enunciado por Grifone en [25].

Una propiedad geométrica que conserva la curvatura de conexiones infinitesimales es la siguiente, [37]: La distribución de espacios horizontales es integrable (en el sentido del teorema de Fröbenius) si y sólo si la curvatura es nula. El correspondiente para la curvatura clásica de una conexión infinitesimal lineal aparece en [44]. También se conservan las identidades de Bianchi.

Como habíamos dicho, la cuestión es diferente para la torsión, pues sólo se define para conexiones infinitesimales definidas en variedades.

Definiciones: Sea Γ una conexión infinitesimal en el fibrado $\pi_M: TM \rightarrow M$.

(1) [50] Se llama torsión a $\mathcal{T}: TTM \rightarrow TM$, $\mathcal{T} = \frac{1}{2}(K-K \circ S)$, donde S es el automorfismo de Kobayashi.

(2) [44] Si Γ es una conexión lineal, se llamará torsión clásica a

$$\begin{aligned} I_c: T_0^1(M) \times T_0^1(M) &\rightarrow T_0^1(M) \\ I_c(X, Y) &= \nabla_X Y - \nabla_Y X - \{X, Y\} \end{aligned}$$

(3) [25] Si Γ es una conexión no homogénea, se llama torsión débil a $t: TTM \times TTM \rightarrow TTM$, $t = \frac{1}{2}[J, h]$, siendo J la estructura casi-tangente canónica y h la proyección horizontal de la conexión.

(4) [25] Si Γ es una conexión no homogénea, se llama torsión fuerte a $I: TTM \rightarrow TTM$ tal que $-\frac{1}{2} \rho \circ I = \mathcal{T}$.

Aún es posible encontrar más torsiones, como la torsión homogénea definida en [30], que se anula sobre conexiones no lineales.

Las relaciones entre unas y otras son fáciles de establecer, partiendo de las expresiones locales:

$$\mathcal{T}(x^i, c^i, X^i, \bar{X}^i) = (x^i, -\frac{1}{2}(r_{jk}^i - r_{kj}^i) c^j X^k)$$

$$T_c((x^i, X^i); (x^i, Y^i)) = (x^i, (r_{jk}^i - r_{kj}^i) X^j Y^k)$$

$$t((x^i, c^i, X^i, \bar{X}^i); (x^i, c^i, Y^i, \bar{Y}^i)) = (x^i, c^i, 0, (r_{jk}^i - r_{kj}^i) X^j Y^k)$$

$$T(x^i, c^i, X^i, \bar{X}^i) = (x^i, c^i, 0, (r_{jk}^i - r_{kj}^i) c^j X^k)$$

Obtenemos los siguientes resultados:

Sean \bar{X} e \bar{Y} campos proyectables sobre X e Y . Entonces

$$T_c(X, Y) = \rho \cdot t(\bar{X}, \bar{Y}) = T(\bar{Y}) \cdot X = -2\mathcal{T}(\bar{Y}) \cdot X$$

$$T \cdot t = T \cdot T = \mathcal{T} \cdot T = 0$$

Las demostraciones son directas.

Dada una estructura casi-tangente, J' ; en la variedad M , se puede definir otra torsión. [11]:

$$T_{J'} = [h, J']$$

En el caso de que la estructura J' sea la canónica, la torsión así definida es el doble de la débil. Como no vamos a emplearla, no le damos nombre.



0.4. CONEXIONES GENERALIZADAS.

El concepto de conexión generalizada fue introducido por V.L. Spesivkyh en [45],[46] y [47]. Su idea básica consiste en encontrar una definición que generalice las de conexión infinitesimal en un fibrado vectorial y las de pseudo- y fere-conexión en una variedad, (Recuerdo el problema planteado por la confusa notación: nuestras pseudoconexiones son las que Spesivkyh denomina casi-conexiones, y nuestras fere-conexiones son sus pseudoconexiones. La elección que hemos hecho de la notación es acorde con la tradición de las escuelas de Wong y Di Comite. En el apéndice II de este capítulo aclaramos las diferentes denominaciones).

1. Definiciones.

Sea un fibrado vectorial $\pi: E \rightarrow M$.

Definición [47]: Se llama **conexión generalizada** en el fibrado $\pi: E \rightarrow M$ a todo campo tensorial $F \in I_1^1(E)$.

A un tal campo se le llama "affinor" en algunos contextos.

Si localmente se expresa π como

$$\begin{aligned} \pi: U^n \times \mathbb{R}^r &\rightarrow U^n \\ (x^i, a^\alpha) &\rightarrow (x^i) \end{aligned}$$

entonces F admite como expresión local

$$F = \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes C_j^i dx^j + \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes M_B^i da^B + \frac{\partial}{\partial a^\alpha} \otimes v_j^\alpha dx^j + \frac{\partial}{\partial a^\alpha} \otimes B_B^\alpha da^B .$$

que se puede expresar matricialmente por

$$F : \begin{pmatrix} C_j^i & M_B^i \\ v_j^\alpha & B_B^\alpha \end{pmatrix}$$

Mediante el fibrado vertical VE se definen los siguientes tipos de conexiones generalizadas:

- (1) Conexión generalizada fibrada: si $F(VE) \subseteq VE$.
- (2) Pseudoconexión: si $VE \subseteq \ker F$.
- (3) Fere-conexión: si $\text{im } F \subseteq VE$.

Localmente estas condiciones se expresan así

- (1) Conexión generalizada fibrada: $M_{\beta}^i = 0$.
- (2) Pseudoconexión: $M_{\beta}^i = 0$ y $B_{\beta}^{\alpha} = 0$.
- (3) Fere-conexión: $M_{\beta}^i = 0$ y $C_j^i = 0$.

Así resulta de modo inmediato que las pseudo- y fere-conexiones son conexiones generalizadas fibradas. Estos nombres quedarán justificados más adelante. Las demostraciones del comportamiento local son muy sencillas. Como ejemplo, hacemos la de (1):

$$VE = \left\{ (x, a_1, 0, a_2) \right\} = \left\{ \frac{\partial}{\partial a_1} \cdot a_2^{\alpha} \right\}$$

$$F \left(\frac{\partial}{\partial a_1} \cdot a_2^{\alpha} \right) = \frac{\partial}{\partial x^i} \cdot M_{\beta}^i \cdot a_2^{\beta} + \frac{\partial}{\partial a_1^{\alpha}} \cdot B_{\beta}^{\alpha} \cdot a_2^{\beta} \quad \text{e } VE \Leftrightarrow M_{\beta}^i = 0$$

Del mismo estilo son las otras demostraciones.

Otras conexiones especiales son las conexiones generalizadas lineales: aquéllas para las que la derivada de Lie respecto del campo de Liouville es nula: $\mathcal{L}_L F = 0$. Las estudiaremos al final de esta sección § 0.4.

En un trabajo anterior, [45], Spesivkykh había abordado la definición de pseudo- y fere-conexiones como aplicaciones definidas en la sucesión exacta del fibrado vectorial $\pi: E \rightarrow M$.

En efecto, consideremos la sucesión (*)

$$(*) \quad 0 \longrightarrow VE \xrightarrow{i} TE \xrightarrow{\pi^i} \pi^{-1}(TM) \longrightarrow 0$$

Las pseudo- y fere-conexiones definen los siguientes morfismos:

Si F es una fere-conexión, entonces, como $\text{im } F \subseteq VE$, podemos considerar

$$F = V : TE \rightarrow VE$$

Si F es una pseudoconexión, entonces se expresa localmente por

$$F = \begin{pmatrix} C_j^i & 0 \\ \nu_j^a & 0 \end{pmatrix} : F = \frac{\partial}{\partial x^i} \bullet C_j^i dx^j + \frac{\partial}{\partial a_1^a} \bullet \nu_j^a dx^j$$

y podemos definir $W : \pi^{-1}(TM) \rightarrow TE$, dada por

$$W = \frac{\partial}{\partial x^i} \bullet C_j^i dx^j + \frac{\partial}{\partial a_1^a} \bullet \nu_j^a dx^j : \frac{\partial}{\partial x^i} c^i \longrightarrow \frac{\partial}{\partial x^i} \cdot C_j^i c^j + \frac{\partial}{\partial a_1^a} \cdot \nu_j^a c^j,$$

esto es,

$$W(x^i, a_1^a, c^i) = (x^i, a_1^a, C_j^i c^j, \nu_j^a c^j)$$

A las aplicaciones dada F y así definida W les corresponde la misma expresión matricial.

Así que, considerando la sucesión (*), una fere-conexión queda definida por una aplicación V , mientras que una pseudoconexión queda definida por W :

$$(*) \quad 0 \longrightarrow VE \xrightarrow[\quad V \quad]{\quad i \quad} TE \xrightarrow[\quad W \quad]{\quad \pi' \quad} \pi^{-1}(TM) \longrightarrow 0$$

Estas son las definiciones que da Spesivkykh en [45].

Obsérvese que una conexión infinitesimal es una fere-conexión tal que V es escisión, $V i = \text{id}_{VE}$, y es también una pseudoconexión con W escisión. $\pi' W = \text{id}_{\pi^{-1}(TM)}$.

Por lo tanto, las conexiones infinitesimales son conexiones generalizadas fibradas, fere-conexiones y pseudoconexiones. En el siguiente resultado establecemos una caracterización de las conexiones infinitesimales, que supone una generalización de la proposición 0.1.

Proposición 0.4.: Una 1-forma vectorial F sobre E , esto es $F \in \Gamma_1^1(E)$, es una conexión infinitesimal en $\pi: E \rightarrow M$ si y sólo si F define una estructura casi-producto sobre TE , $F^2 = \text{id}$, tal que para cada $e \in E$, el subespacio de $T_e E$ correspondiente al valor propio -1 es el subespacio $V_e E$ de vectores verticales en E .

Observación: Hemos mantenido la notación de la proposición 0.1. para que se vea que ésta la generaliza. Podríamos haber dicho que una conexión generalizada F es infinitesimal si y sólo si se verifica la condición enunciada.

Demostración.

Sea F una conexión infinitesimal y sean h y V sus proyecciones horizontal y vertical, con lo que $F = h - V$.

Entonces, si $\tilde{e} \in T_e E$, resulta

$$F^2(\tilde{e}) = (h - V)(h - V)(\tilde{e}) = h^2(\tilde{e}) - hV(\tilde{e}) - Vh(\tilde{e}) + V^2(\tilde{e}) = h(\tilde{e}) + V(\tilde{e}) = \tilde{e}.$$

Luego $F^2 = \text{id}$.

Y además,

$$F(\tilde{e}) = -\tilde{e} \Leftrightarrow h(\tilde{e}) - V(\tilde{e}) = -h(\tilde{e}) - V(\tilde{e}) \Leftrightarrow h(\tilde{e}) = 0 \Leftrightarrow \tilde{e} \in V_e E.$$

Recíprocamente, sea $F \in \Gamma_1^1(E)$ con $F^2 = \text{id}$ y tal que el subespacio de $T_e E$ correspondiente al valor propio -1 sea $V_e E$.

Definimos entonces $h = \frac{1}{2}(I + F)$ y $V = \frac{1}{2}(I - F)$

Resulta que

$$h^2 = \frac{1}{4}(I^2 + IF + FI + F^2) = \frac{1}{2}(I + F) = h$$

$$V^2 = \frac{1}{4}(I^2 - IF - FI + F^2) = \frac{1}{2}(I - F) = V$$

$$h \cdot V = \frac{1}{4}(I^2 - F + F - F^2) = 0 \Rightarrow \text{im } V \subseteq \ker h$$

$$V \cdot h = \frac{1}{4}(I^2 - F - F - F^2) = 0 \Rightarrow \text{im } h \subseteq \ker V$$

$$h + V = I$$

$$h - V = F$$

Y $V(\tilde{e}) \in V_e E$ si $\tilde{e} \in T_e E$, pues, por hipótesis $F(\tilde{e}) = -\tilde{e} \in T_e E \in V_e E$, con lo que

$$F V(\tilde{e}) = \frac{1}{2} F(I - F)(\tilde{e}) = \frac{1}{2} (F - F^2)(\tilde{e}) = \frac{1}{2} (F - I)(\tilde{e}) = -V(\tilde{e})$$

implica que

$$V(\tilde{e}) \in V_e E$$

Así que F es una conexión infinitesimal de proyecciones V y h .

qed

Más aún, recordemos que al definir una conexión infinitesimal vimos que era equivalente dar F , H , h o V , y obtuvimos el diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & TE & & & \\
 & & & \uparrow h & & & \\
 0 & \longrightarrow & VE & \xrightleftharpoons[V]{i} & TE & \xleftarrow[H]{w'} & T^{-1}(TM) \longrightarrow 0 \\
 & & & \downarrow F=h-V & & & \\
 & & & TE & & &
 \end{array}$$

cuyas expresiones locales son

$$F(x, a_1, c, a_2) = (x, a_1, c, -a_2 - 2\omega(x, a_1)c)$$

$$V(x, a_1, c, a_2) = (x, a_1, 0, a_2 + \omega(x, a_1)c)$$

$$h(x, a_1, c, a_2) = (x, a_1, c, -\omega(x, a_1)c)$$

$$H(x, a_1, c) = (x, a_1, c, -\omega(x, a_1)c)$$

Entonces V define una fere-conexión, H define una pseudoconexión y el paso de h a H es el mismo que hemos dado al definir la aplicación W para una pseudoconexión.

En este sentido, con las conexiones infinitesimales ocurre lo mismo que pasaba con las lineales en una variedad: que se pueden considerar como pseudo- y como fere-conexiones. En este mismo epígrafe § 0.4. veremos que las pseudo- y fere-conexiones en un fibrado vectorial son generalización de las correspondientes en una variedad (con lo cual quedarán plenamente justificadas las denominaciones que les hemos dado).

Hagamos notar, ver [45], antes de pasar al estudio de la derivada covariante, que dada una pseudoconexión W

$$(*) \quad 0 \longrightarrow VE \xrightarrow{i} TE \xrightleftharpoons[W]{W} T^{-1}(TM) \longrightarrow 0$$

en los puntos de E, la imagen $QE = \text{im } W$ determina subespacios de las fibras de $\pi_E: TE \rightarrow E$, generados localmente por

$$X_j = \frac{\partial}{\partial x^i} \cdot C_j^i - \frac{\partial}{\partial a_1^\alpha} \cdot v_j^\alpha,$$

que son, en general, linealmente dependientes. Además, $QE \oplus VE \subset TE$ es, también en general, un subfibrado no localmente trivial.

Del mismo modo se procede con las fere-conexiones, V,

$$0 \longrightarrow VE \xrightarrow{V} TE \xrightarrow{\pi^*} \pi^{-1}(TM) \longrightarrow 0$$

considerando $PE = \ker V$. Resulta que PE está generado por las 1-formas

$$\theta^\alpha = v_i^\alpha dx^i + B_\theta^\alpha dx,$$

también linealmente dependientes en el caso general.

Si V y W son las pseudo- y fere-conexión definidas por una conexión infinitesimal, los espacios horizontales así obtenidos coinciden.

2. Derivada covariante.

Acabamos de ver cómo una conexión infinitesimal queda definida por F, V y H. que son tres conexiones generalizadas. Llamemos

$$\mathbb{F}, \mathbb{V}, \mathbb{H}$$

a los operadores derivada covariante por ellos definidos (todavía no sabemos cómo). Nos gustaría encontrar una definición de derivada covariante inducida por una conexión generalizada de modo que se conservara la relación $F = h \cdot V$. Eso va a ser posible, pues obtendremos una definición que verifique:

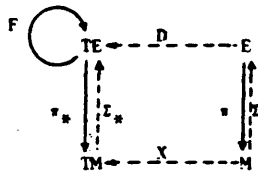
$$(1) \nabla_X = \overset{F}{\nabla}_X$$

$$(2) \frac{1}{2} \overset{F}{\nabla}_X = -\overset{V}{\nabla}_X = \overset{H}{\nabla}_X \quad \cdot \quad \overset{F}{\nabla}_X = \overset{H}{\nabla}_X - \overset{V}{\nabla}_X$$

siendo $X \in T_0^1(M)$ y $I \in \text{Sec}(\pi)$. En (1) se entiende el primer miembro como la derivada covariante de la conexión infinitesimal (la que definimos en la sección § 0.3.3.).

Sea $F \in T_1^1(E)$ una conexión generalizada en un fibrado vectorial $\pi: E \rightarrow M$ y sean $X \in T_0^1(M)$ y $I \in \text{Sec}(\pi)$. Entonces se define la derivada covariante de la sección I respecto del campo X , que denotaremos por $\nabla_X I$, del siguiente modo:

Se considera el diagrama



donde D está definido como

$$D = (\pi_* \circ \pi_* \circ F - F) \circ \pi_* \circ X \circ \pi$$

y cuya expresión local es

$$D(x^i, a_1^a) = (x^i, a_1^a, 0, (\frac{\partial \Gamma^a}{\partial x^1} M^1 \frac{\partial \Gamma^\lambda}{\partial x^j} + \frac{\partial \Gamma^a}{\partial x^1} C_j^\lambda - B^a \frac{\partial \Gamma^\lambda}{\partial x^j} - \pi_j^a) X^i)$$

siendo

$$\begin{aligned} \pi: M \rightarrow E & \quad \text{y} & \quad X: M \rightarrow TM \\ (x^i) \rightarrow (x^i, I^a) & & \quad (x^i) \rightarrow (x^i, X^i) \end{aligned}$$

Obsérvese que, aunque no lo hemos escrito explícitamente, D depende del campo X y de la sección I escogidos.

Con esta definición resulta que $D(x^i, a_1^a) \in VE$ siempre. Finalmente definimos

$$\nabla_X \Gamma = (\frac{1}{2}D) \cdot D \circ \Gamma' : M \longrightarrow E$$

$$(x^i) \rightarrow (x^i, \frac{1}{2}(\frac{\partial \Sigma^a}{\partial x^k} M_{\lambda}^k \frac{\partial \Sigma^{\lambda}}{\partial x^j} + \frac{\partial \Sigma^a}{\partial x^k} C_j^k - B_{\lambda}^a \frac{\partial \Sigma^{\lambda}}{\partial x^j} - v_j^a) X^j)$$

donde Γ' es una sección cualquiera de π . (No depende de la sección escogida).

Esta definición discrepa de la dada por Spesiviykh en [46] y [47] en el factor $\frac{1}{2}$, pero será la que adoptemos para conseguir que coincida la derivada covariante de una conexión infinitesimal, al considerarla como tal y como conexión generalizada.

En efecto, si F e $T_1^1(E)$ es una conexión infinitesimal

$$F = \begin{pmatrix} \delta_j^i & 0 \\ -2\omega_j^a & -\delta_{\beta}^a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_j^i & M_{\beta}^i \\ v_j^a & B_{\beta}^a \end{pmatrix}$$

la derivada covariante considerada como conexión generalizada es

$$\begin{aligned} (\nabla_X \Gamma)(x^i) &= (x^i, \frac{1}{2}(\frac{\partial \Sigma^a}{\partial x^k} C_j^k \frac{\partial \Sigma^{\lambda}}{\partial x^j} + \frac{\partial \Sigma^a}{\partial x^k} \delta_j^k + \delta_{\lambda}^a \frac{\partial \Sigma^{\lambda}}{\partial x^j} - 2\omega_j^a) X^j) = \\ &= (x^i, \frac{1}{2}(\frac{\partial \Sigma^a}{\partial x^j} + \frac{\partial \Sigma^a}{\partial x^j} - 2\omega_j^a) X^j) = \\ &= (x^i, (\frac{\partial \Sigma^a}{\partial x^j} + \omega_j^a) X^j) \end{aligned}$$

que coincide con la derivada covariante de la conexión infinitesimal.

Hallemos ahora las expresiones de las derivadas covariantes de la fereconexión V y la pseudoconexión H asociadas a la conexión infinitesimal:

$$V = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \omega_j^a & \delta_{\beta}^a \end{pmatrix} ; H = \begin{pmatrix} \delta_j^i & 0 \\ -\omega_j^a & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces,

$$(\nabla_{X^i}^{\mathbb{F}})(x^i) = (x^i, -\frac{1}{2}(\frac{\partial \omega_j^a}{\partial x^j} - \omega_j^a)X^j) = -\frac{1}{2}(\mathbb{F}_{X^i})(x^i)$$

$$(\nabla_{X^i}^{\mathbb{H}})(x^i) = (x^i, \frac{1}{2}(\frac{\partial \omega_j^a}{\partial x^j} - \omega_j^a)X^j) = \frac{1}{2}(\mathbb{F}_{X^i})(x^i)$$

Así resulta que $\mathbb{F}_{X^i} = \nabla_{X^i}^{\mathbb{H}} - \nabla_{X^i}^{\mathbb{V}}$, lo cual mantiene la relación $F = h \cdot V$.

Otra cuestión que no debe confundirse con la anterior es la siguiente: dada una conexión infinitesimal F , ¿existen algunas pseudoconexión W y fereconexión V' tales que

$$\mathbb{F} = \nabla^{V'} = \nabla^W ?$$

La respuesta es afirmativa: basta considerar

$$F = \begin{bmatrix} \delta_j^i & 0 \\ -2\omega_j^a & -\delta_\beta^a \end{bmatrix}; W = \begin{bmatrix} 2\delta_j^i & 0 \\ -2\omega_j^a & 0 \end{bmatrix}; V' = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2\omega_j^a & -2\delta_\beta^a \end{bmatrix}$$

Si llamamos H y V a la pseudoconexión y a la fereconexión definidas por F resulta que

$$W = 2H \quad ; \quad V' = -2V$$

por lo que definen las mismas derivadas covariantes que F . Obsérvese que también se tienen las relaciones

$$W = F + I \quad ; \quad V' = F - I$$

donde I es el tensor identidad de $T_1^1(E)$. Un resultado más amplio que garantiza la igualdad de esas derivadas covariantes es el siguiente:

Proposición 0.5. [47]: Dos conexiones generalizadas F y F' tales que

$$F' - F = g \cdot I$$

para alguna función g e $T_0^0(E)$, siendo I el tensor identidad en $T_1^1(E)$, definen las mismas derivadas covariantes.

La demostración es trivial.

Una clase importante de conexiones generalizadas es la de las lineales. Su definición extiende de modo natural la dada para conexiones infinitesimales. En efecto:

Definición [46] y [47]: Una conexión generalizada se dice lineal si F es homogéneo de primer grado, esto es, $L_L F = 0$, siendo L el campo vectorial de Liouville.

La expresión local de F es entonces, [46] y [47], la siguiente:

$$F = \begin{bmatrix} C_j^i(x, a_1) & M_B^i(x, a_1) \\ v_{j\lambda}^\alpha(x, a_1) & B_B^\alpha(x, a_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_j^i(x) & 0 \\ v_{j\lambda}^\alpha(x) a_1^\lambda & B_B^\alpha(x) \end{bmatrix}$$

y de hecho, de modo recíproco, si F admite esta expresión local es lineal.

Obsérvese que $C = (C_j^i) \in T_1^1(M)$ y que $B = (B_B^\alpha) \in \text{End}_M(E)$.

Además, si F es lineal, resulta que

$$\nabla_X(f \cdot \xi) = f \cdot \nabla_X \xi + \frac{1}{2}(C(X))(f) \cdot \xi - \frac{1}{2}(Xf) \cdot B(\xi)$$

Estudie ahora las pseudo- y fere-conexiones lineales en el fibrado tangente de una variedad diferenciable M .

Si $G \in T_1^1(M)$; $X, Y \in T_0^1(M)$, las expresiones locales son (ver § 0.2.):

(1) Pseudoconexión de campo fundamental G

$$\nabla_X Y = \frac{\partial}{\partial x^i} \cdot (\Gamma_{kj}^i Y^j) + \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} G_k^j X^k$$

(2) Fere-conexión de campo fundamental G

$$\nabla_X Y = \frac{\partial}{\partial x^i} \cdot (\Gamma_{kj}^i Y^j) - G_j^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^k} X^k$$

Si consideramos la pseudoconexión lineal

$$F = \begin{bmatrix} 2G_j^i & 0 \\ -2r_j^i & 0 \end{bmatrix}$$

con $r_j^i = r_{jk}^i a^k$, F define la siguiente derivada covariante:

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_X Y &= \frac{\partial}{\partial x^i} \cdot \left(0 + \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} 2G_k^j - 0 + 2r_{kj}^i Y^j \right) X^k = \\ &= \frac{\partial}{\partial x^i} \cdot \left(\frac{\partial Y^i}{\partial x^j} G_k^j + r_{kj}^i Y^j \right) X^k, \end{aligned}$$

que coincide con la expresión obtenida antes. Así.

$$\nabla_X Y = \bar{\nabla}_X Y,$$

la primera como derivada covariante en la pseudoconexión y la segunda como derivada covariante en la conexión generalizada F (que es una pseudoconexión en el sentido definido en esta sección). Queda de este modo justificado haber llamado pseudoconexiones a este tipo de conexiones generalizadas.

Y lo mismo ocurre para las fere-conexiones: considerando

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2\Gamma_j^i & -2G_j^i \end{bmatrix}$$

resulta que $\nabla_X Y = \bar{\nabla}_X Y$.

Explicación de símbolos del Apéndice I:

$A \longrightarrow B$ significa A incluido en B. En todos los casos ocurre que la restricción de B a A es exactamente A (por ejemplo, las conexiones infinitesimales en el fibrado tangente son las no homogéneas).

$A \longleftarrow B$ significa el concepto A se restringe a la situación en que está B: las conexiones de Ehresmann en fibrados vectoriales son las infinitesimales.

(*) significa es cierta la inclusión si es de clase C^1 sobre la sección nula.

(**) significa no son exactamente equivalentes las definiciones de todos esos autores (ver [39]).

El número que aparece en cada cuadro indica el epígrafe § 0.n. en que se estudia.

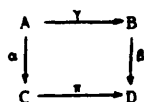
En mayúsculas se indican las conexiones cuyas elevaciones estudiaremos detalladamente: las generalizadas en el capítulo 2 y las infinitesimales y no homogéneas en el 3.

Apéndice II: Distintas notaciones.

Concepto		$\nabla_X(f \cdot Y) = (F(X))(f) \cdot Y + f \cdot \nabla_X Y$ F invertible	$\nabla_X(f \cdot Y) = (F(X))(f) \cdot Y + f \cdot \nabla_X Y$ F cualquiera	$\nabla_X(f \cdot Y) = (Xf) \cdot F(Y) + f \cdot \nabla_X Y$ F cualquiera
S C O R D O R E	Yo	casi-conexión	pseudoconexión	fere-conexión
	Spesivvykh	casi-conexión		pseudoconexión
	Wong Vamaru Peralta	casi-conexión	-	-
	Di Comite Peralta	-	pseudoconexión	-
	Otros autores	casi-conexión invertible	casi-conexión	

CAPÍTULO 1. SOBRE LOS BUENOS CUADRADOS DE FIBRADOS.

En este capítulo se describe el marco en el que vamos a trabajar. La idea es considerar diagramas del tipo



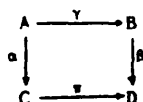
donde γ y π son fibrados vectoriales, para abordar la cuestión fundamental: dadas sendas conexiones (en el sentido que sea) en γ y π , ¿cuándo podremos decir que la dada en γ es elevación de la dada en π ? En los capítulos 2 y 3 abordaremos esta cuestión. Ahora vamos a estudiar este tipo de diagramas, sin aludir a las conexiones que podamos introducir en ellos.

Los primeros resultados son la definición del concepto de buen cuadrado y la obtención de familias de buenos cuadrados. El resto del capítulo se dedica al estudio de las secciones proyectables.

§ 1.1. BUENOS CUADRADOS.

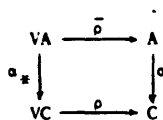
1. Definiciones.

Definición 1.1.: Se dice que



es un buen cuadrado de fibrados si se verifican las siguientes cinco propiedades:

- (1) α y β son fibrados localmente triviales, no necesariamente vectoriales.
- (2) γ y π son fibrados vectoriales.
- (3) El cuadrado es conmutativo: $\pi \circ \alpha = \beta \circ \gamma$.
- (4) Se cumple la siguiente condición: para todo d en D existe U , entorno de d en D , tal que U es entorno de trivialización para π y β , $\pi^{-1}(U)$ lo es para α y $\beta^{-1}(U)$ lo es para γ .
- (5) Conmuta el cuadrado

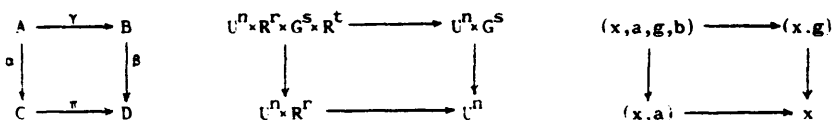


donde ρ y $\bar{\rho}$ son los morfismos canónicos.

Notación: Distinguiremos conceptos análogos en los fibrados γ y π colocando una barra sobre los correspondientes a γ , como hemos hecho con ρ y $\bar{\rho}$.

Las propiedades (1) y (3) son naturales. La (2) se exige para poder definir conexiones en γ y π , mientras que la (4) y la (5) para poder manejar coordenadas locales. En efecto, consideremos la propiedad (4') siguiente:

(4') Localmente se expresa el diagrama por



Resulta entonces que, supuestas las condiciones (1), (2) y (3), equivalen (4') \iff (4) y (5).

En efecto, la implicación (4') \Rightarrow (4) resulta por construcción y la implicación (4') \Rightarrow (5) se obtiene usando coordenadas locales:

$$VA = \ker \gamma_* = U^n \times R^r \times G^s \times R^t \times (0) \times R^r \times (0) \times R^t$$

$$VC = \ker \pi_* = U^n \times R^r \times (0) \times R^r$$

Hallemos las expresiones locales de ρ y $\bar{\rho}$.

Sea ϕ_C el isomorfismo entre VC y $\pi^{-1}(C)$. Entonces, considerando $\pi^{-1}(C) \cong C \times C$ y siendo pr_2 la proyección segunda de $C \times C$ en C , se define $\rho = pr_2 \circ \phi_C$ y obtenemos el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} VC & \xrightarrow{\phi_C} & \pi^{-1}(C) & \xrightarrow{pr_2} & C \\ & & \downarrow pr_1 & & \downarrow \pi \\ & & C & \xrightarrow{\pi} & D \end{array}$$

cuya expresión local es

$$\begin{array}{ccc} (x, a_1, 0, a_2) & \rightarrow & ((x, a_1), (x, a_2)) \rightarrow (x, a_2) \\ & & \downarrow \quad \downarrow \\ & & (x, a_1) \longrightarrow x \end{array}$$

que da $\rho(x, a_1, 0, a_2) = (x, a_2)$

De modo análogo se razona en el fibrado $\gamma: A \rightarrow B$, resultando que $\bar{\rho} = \overline{pr_2} \circ \phi_A$, con lo que

$$\begin{array}{ccccc} VA & \xrightarrow{\phi_A} & \gamma^{-1}(A) & \xrightarrow{\overline{pr_2}} & A \\ & & \downarrow \overline{pr_1} & & \downarrow \gamma \\ & & A & \xrightarrow{\gamma} & B \end{array}$$

se expresa localmente por

$$\begin{array}{ccc} (x, a_1, g, b_1, 0, a_2, 0, b_2) & \rightarrow & ((x, a_1, g, b_1), (x, a_2, g, b_2)) \rightarrow (x, a_2, g, b_2) \\ & & \downarrow \quad \downarrow \\ & & (x, a_1, g, b_1) \longrightarrow (x, g) \end{array}$$

de donde $\bar{\rho}(x, a_1, g, b_1, 0, a_2, 0, b_2) = (x, a_2, g, b_2)$

Entonces el cuadrado dado en (5) es conmutativo, pues su expresión local conmuta:

$$\begin{array}{ccc}
 VA & \xrightarrow{\bar{\alpha}} & A \\
 \alpha_* \downarrow & & \downarrow \alpha \\
 VC & \xrightarrow{\beta} & C
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 (x, a_1, g, b_1, 0, a_2, 0, b_2) & \longrightarrow & (x, a_2, g, b_2) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 (x, a_1, 0, a_2) & \longrightarrow & (x, g)
 \end{array}$$

De modo recíproco, si se verifican las propiedades (4) y (5) también se verifica la propiedad (4'), pues por la propiedad (4) el buen cuadrado se puede expresar localmente por

$$\begin{array}{ccc}
 U^n \times R^\Gamma \times G^S \times R^t & \xrightarrow{\gamma} & U^n \times G^S \\
 \alpha \downarrow & & \downarrow \beta \\
 U^n \times R^\Gamma & \xrightarrow{\pi} & U^n
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 (x, a, g, b) & \longrightarrow & (x, g) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 (x, a) & \longrightarrow & x
 \end{array}$$

El único problema se plantea si $G^S = R^\Gamma$. Entonces hay que garantizar que las proyecciones α y γ sean sobre distinto factor:

$$\begin{array}{ccc}
 U^n \times R^\Gamma \times R^\Gamma \times R^t & \xrightarrow{\gamma} & U^n \times R^\Gamma \\
 \alpha \downarrow & & \downarrow \beta \\
 U^n \times R^\Gamma & \xrightarrow{\pi} & U^n
 \end{array}$$

Y, precisamente, es la propiedad (5) la que lo garantiza. En efecto:

Si son distintas proyecciones, ya hemos visto que se cumple (5).

Si son la misma, resulta $\alpha = \gamma$ y

$$\begin{array}{ccc}
 (x, a_1, a_2, b_1) & \xrightarrow{\gamma} & (x, a_1) \\
 \alpha \downarrow & & \downarrow \beta \\
 (x, a_1) & \xrightarrow{\pi} & x
 \end{array}$$

con lo que

$$VA = \ker \gamma_* = U^n \times R^\Gamma \times R^\Gamma \times R^t \times \{0\} \times \{0\} \times R^\Gamma \times R^t$$

que nos da

$$\begin{array}{ccc}
 VA & \xrightarrow{\phi_A} & \gamma^{-1}(A) & \xrightarrow{\overline{pr}_2} & A \\
 & & \overline{pr}_1 \downarrow & & \downarrow \gamma \\
 & & A & \xrightarrow{\gamma} & B
 \end{array}$$

cuya expresión local es

$$\begin{array}{ccc}
 (x, a_1, a_2, b_1, 0, 0, a_3, b_2) = ((x, a_1, a_2, b_1), (x, a_1, a_3, b_2)) + (x, a_1, a_3, b_2) \\
 \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \\
 (x, a_1, a_2, b_1) \longrightarrow (x, a_1)
 \end{array}$$

Por lo tanto, resulta

$$\bar{\rho}(x, a_1, a_2, b_1, 0, 0, a_3, b_2) = (x, a_1, a_3, b_2)$$

Y así obtenemos la no conmutatividad del diagrama, porque queda:

$$\alpha \circ \bar{\rho}(x, a_1, a_2, b_1, 0, 0, a_3, b_2) = (x, a_1)$$

$$\rho \circ \alpha(x, a_1, a_2, b_1, 0, 0, a_3, b_2) = \rho(x, a_1, 0, 0) = (x, 0)$$

Hemos probado la equivalencia deseada.

Notación: Un buen cuadrado se expresará localmente como

$$\begin{array}{ccc}
 U^n \times R^r \times G^s \times R^t & \xrightarrow{\gamma} & U^n \times G^s \\
 \alpha \downarrow & & \downarrow \beta \\
 U^n \times R^r & \xrightarrow{\pi} & U^n
 \end{array}$$

siendo $\text{rango } \alpha = s-t$; $\text{rango } \gamma = r-t$
 $\text{rango } \pi = r$; $\text{rango } \beta = s$

y donde los superíndices indican la dimensión de las variedades.

La expresión en coordenadas es

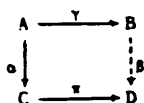
$$\begin{array}{ccc}
 (x, a_1, g, b_1) = (x^i, a_1^a, g^\lambda, b_1^o) & \xrightarrow{\gamma} & (x^i, g^\lambda) = (x, g) \\
 \alpha \downarrow & & \downarrow \beta \\
 (x, a_1) = (x^i, a_1^a) & \xrightarrow{\pi} & (x^i) = x
 \end{array}$$

y, en todo lo que sigue, emplearemos los siguientes índices:

- | | | |
|-------------------------------------|---|-----------------------------------|
| $i, j \in \{1, \dots, n\}$ | : | $x \in U^n \subset D$ |
| | : | $c, c_1, c_2, c_3, \dots \in R^n$ |
| $\alpha, \beta \in \{1, \dots, r\}$ | : | $a, a_1, a_2, a_3, \dots \in R^r$ |
| $\lambda, \mu \in \{1, \dots, s\}$ | : | $g \in G^s$ |
| | : | $d, d_1, d_2, d_3, \dots \in R^s$ |
| $c, t \in \{1, \dots, t\}$ | : | $b, b_1, b_2, b_3, \dots \in R^t$ |

Observaciones:

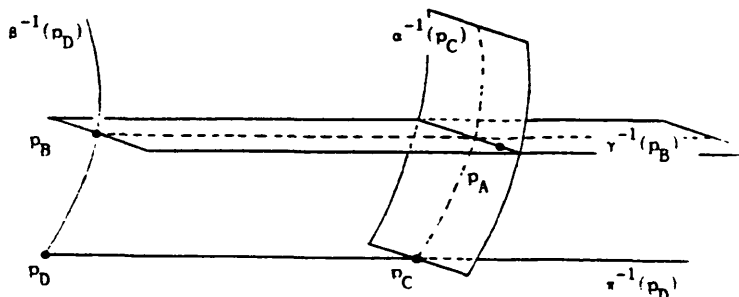
(1) Aunque parezca más natural introducir los buenos cuadrados con la propiedad (4') que con la (4) y la (5), hemos escogido este orden para dejar bien claro que la (4) y la (4') no son propiedades equivalentes: es más fuerte la (4'). Además, apréciase que la propiedad (5) sólo depende de α , γ y π , y no de β . Así podríamos preguntarnos cómo definir β para que dadas α , γ y π sea



un buen cuadrado. En los ejemplos de este capítulo presentaremos parecidos planteamientos.

(2) Interpretación geométrica de un buen cuadrado.

La condición local (4') se traduce geoméricamente en el siguiente dibujo (hecho para $r = s = t = 1$):



con los siguientes significados:

$p_A \in A$; $p_B \in B$; $p_C \in C$; $p_D \in D$.

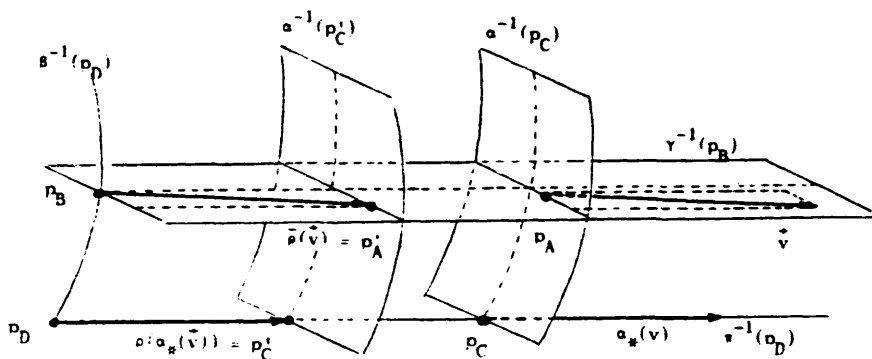
$$\gamma^{-1}(p_D) \cong (p_D) \times R^r \quad ; \quad \gamma^{-1}(p_B) \cong (p_B) \times R^r \times R^t$$

$$\beta^{-1}(p_D) \cong (p_D) \times G^s \quad ; \quad p_C \in \pi^{-1}(p_D) \quad ; \quad p_B \in \beta^{-1}(p_D)$$

$$\alpha^{-1}(p_C) \cong (p_C) \times G^s \times R^t \quad ; \quad p_A \in \gamma^{-1}(p_B) \cap \alpha^{-1}(p_C)$$

Así, las fibras de α y de γ se cortan transversalmente y su intersección es un espacio difeomorfo a \mathbb{R}^l .

La interpretación geométrica de la condición (5) revela otra faceta de la rigidez de la estructura. Recordemos primero el significado de los morfismos canónicos ρ y $\tilde{\rho}$: ρ lleva un vector \tilde{w} tangente en un punto de $\pi^{-1}(p_D)$ al punto de $\pi^{-1}(p_D)$ definido como $p_D + \tilde{w} \cdot Y$, análogamente, para $\tilde{\rho}$. Entonces resulta



Sea $\tilde{v} \in V_{p_A} A$ y sean $\gamma(p_A) = p_B$, $\alpha(p_A) = p_C$

Identificamos $V_{p_A} A$ con $\gamma^{-1}(p_B)$. Entonces definimos

$$p'_A = \tilde{\rho}(\tilde{v}) = p_B + \tilde{v} \in \gamma^{-1}(p_B) \quad \text{y} \quad p'_C = \alpha(p'_A)$$

Por otra parte, $\alpha_*(\tilde{v}) \in V_{p_C} C \cong \pi^{-1}(p_D)$

La propiedad (5) establece que $\rho(\alpha_*(\tilde{v})) = p'_C$, esto es, que

$$p_D + \alpha_*(\tilde{v}) = p'_C$$

Como se ve, esta propiedad (5) establece que las fibras $\alpha^{-1}(p_C)$, $\alpha^{-1}(p'_C)$ "mantengan" la separación entre ellas. Ciertamente esto significa que se pueda expresar localmente el cuadrado de acuerdo con lo formulado en la condi-

ción (4').

(3) Los buenos cuadrados en relación con otros conceptos.

Modugno, en [38], define los siguientes conceptos:

Una variedad fibrada ("fibred manifold") es una submersión suprayectiva $\pi: E \rightarrow M$. En este sentido, los fibrados localmente triviales son variedades fibradas.

Una variedad doblemente fibrada ("double fibred manifold") está constituida por dos variedades fibradas, $\gamma: A \rightarrow B$ y $\beta: B \rightarrow D$. Entonces, $\beta \circ \gamma: A \rightarrow D$ también es una variedad fibrada.

Y una variedad doblemente fibrada y proyectable ("projectable double fibred manifold") está constituida por cuatro variedades fibradas

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\gamma} & B \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \beta \\ C & \xrightarrow{\pi} & D \end{array}$$

tales que conmuta el diagrama: $\alpha \pi = \beta \gamma$.

Se dice que es lineal si γ y π son fibrados vectoriales y α es un morfismo lineal fibrado sobre β .

Obsérvese que nuestro concepto de buen cuadrado es todavía más restringido: los buenos cuadrados son variedades doblemente fibradas, proyectables y lineales.

Modugno propone como ejemplo de variedad doblemente fibrada, proyectable y lineal el siguiente:

$$\begin{array}{ccc} IA & \xrightarrow{\pi_A} & A \\ \alpha \pi \downarrow & & \downarrow \alpha \\ IC & \xrightarrow{\pi_C} & C \end{array}$$

En la proposición 1.1. veremos que, si α es un fibrado localmente trivial, también es éste un buen cuadrado.

2. Ejemplos y resultados.

Hemos visto, al probar la implicación (4) y (5) \Rightarrow (4'), que se pueden presentar problemas cuando tenemos un cuadrado

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\gamma} & B \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \beta \\ C & \xrightarrow{\nu} & D \end{array}$$

y es $B = C$: Si α y γ son proyecciones sobre distintos factores, es un buen cuadrado: si $\alpha = \gamma$, no lo es. Los dos ejemplos con los que iniciamos esta sección están en esta situación.

Ejemplo 1.1. Consideremos el diagrama de fibrados

$$\begin{array}{ccc} TTM & \xrightarrow{\pi_{TM}} & TM \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \pi_M \\ TM & \xrightarrow{\pi_M} & M \end{array}$$

donde $\alpha = (\pi_M)_*$ ó $\alpha = \pi_{TM}$.

En cualquiera de los dos casos este diagrama verifica las propiedades (1) a (4) de buen cuadrado. Las aplicaciones ρ y $\bar{\rho}$ son:

$$\begin{array}{l} \rho : \begin{array}{ccc} VTM & \longrightarrow & TM \\ \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}^n \times \{0\} \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}^n \\ (x, c_1, 0, c_2) & \longrightarrow & (x, c_2) \end{array} \\ \text{Y } \bar{\rho} : \begin{array}{ccc} \sqrt{VTM} & \longrightarrow & \sqrt{TM} \\ \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \{0\} \times \{0\} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \\ (x, c_1, c_2, c_3, 0, 0, c_4, c_5) & \longrightarrow & (x, c_1, c_4, c_5) \end{array} \end{array}$$

Si $\alpha = (\pi_M)_*$ se verifica la propiedad (5), pues queda el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \sqrt{VTM} & \xrightarrow{\bar{\rho}} & \sqrt{TM} \\ \alpha_* \downarrow & & \downarrow \alpha \\ \sqrt{VTM} & \xrightarrow{\rho} & \sqrt{TM} \end{array}$$

expresado localmente por

$$\begin{array}{ccc}
 (x, c_1, c_2, c_3, 0, 0, c_4, c_5) & \xrightarrow{\bar{\rho}} & (x, c_1, c_4, c_5) \\
 (\pi_M)^{**} \downarrow & & \downarrow (\pi_M)^* \\
 (x, c_2, 0, c_4) & \xrightarrow{\rho} & (x, c_4)
 \end{array}$$

mientras que si $\alpha = \pi_{TM}$ no es un buen cuadrado, pues queda

$$\begin{array}{ccc}
 (x, c_1, c_2, c_3, 0, 0, c_4, c_5) & \xrightarrow{\bar{\rho}} & (x, c_1, c_4, c_5) \\
 (\pi_{TM})^* \downarrow & & \downarrow \pi_{TM} \\
 (x, c_1, 0, 0) & \xrightarrow{\rho} & (x, 0)
 \end{array}$$

Obsérvese que localmente se expresan, en uno y otro caso, los diagramas así

$$\begin{array}{ccc}
 (x, c_1, c_2, c_3) & \xrightarrow{\pi_{TM}} & (x, c_1) \\
 (\pi_M)^* \downarrow & & \downarrow \pi_M \\
 (x, c_2) & \xrightarrow{\pi_M} & x
 \end{array}
 \quad \text{y} \quad
 \begin{array}{ccc}
 (x, c_1, c_2, c_3) & \xrightarrow{\pi_{TM}} & (x, c_1) \\
 \pi_{TM} \downarrow & & \downarrow \pi_M \\
 (x, c_1) & \xrightarrow{\pi_M} & x
 \end{array}$$

Cabría pensar aún en otro cuadrado: el definido por

$$\begin{array}{ccc}
 TM & \xrightarrow{\pi_{TM}} & TM \\
 \bar{\rho} \downarrow & & \downarrow \pi_M \\
 TM & \xrightarrow{\pi_M} & M
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 (x, c_1, c_2, c_3) & \xrightarrow{\quad} & (x, c_1) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 (x, c_3) & \xrightarrow{\quad} & x
 \end{array}$$

que verifica la propiedad (4') y, también, la (5) :

$$\begin{array}{ccc}
 (x, c_1, c_2, c_3, 0, 0, c_4, c_5) & \xrightarrow{\tilde{\rho}} & (x, c_1, c_4, c_5) \\
 \tilde{\rho}_* \downarrow & & \downarrow \tilde{\rho} \\
 (x, c_3, 0, c_5) & \xrightarrow{\rho} & (x, c_5)
 \end{array}$$

Hemos llamado $\tilde{\rho}$ a ese morfismo por ser generalización del ρ (es una extensión de ρ a todo IIM).

El hecho de no dar mayor importancia a este buen cuadrado se debe a que en el capítulo 4 encontraremos que las más conocidas elevaciones lo serán en nuestro sentido en el buen cuadrado

$$\begin{array}{ccc}
 \text{IIM} & \xrightarrow{\pi_{\text{IIM}}} & \text{IM} \\
 (\pi_M)_* \downarrow & & \downarrow \pi_M \\
 \text{IM} & \xrightarrow{\pi_M} & M
 \end{array}$$

pero no hay ejemplos significativos en la literatura matemática de elevaciones en el otro buen cuadrado (ver el ejemplo 1.3.).

Ejemplo 1.2. Del mismo modo que en el ejemplo precedente, se razona en el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 \text{IIM} & \xrightarrow{(\pi_M)_*} & \text{IM} \\
 \alpha \downarrow & & \downarrow \pi_M \\
 \text{IM} & \xrightarrow{\pi_M} & M
 \end{array}$$

con $\alpha = (\pi_M)_*$ ó $\alpha = \pi_{\text{IIM}}$. Obtenemos las siguientes expresiones locales:

$$\begin{array}{ccc}
 (x, c_1, c_2, c_3) \xrightarrow{(\pi_M)_*} (x, c_2) & & (x, c_1, c_2, c_3) \xrightarrow{(\pi_M)_*} (x, c_2) \\
 (\pi_M)_* \downarrow & & \downarrow \pi_M \\
 (x, c_2) \xrightarrow{\pi_M} x & & (x, c_1) \xrightarrow{\pi_M} x
 \end{array}$$

En el primer caso no es un buen cuadrado: en el segundo sí.

Obsérvese que en este ejemplo $\bar{\rho}$ está definida así.

$$\begin{aligned} \bar{\rho} : (U^n \times R^n \times R^n \times R^n \times (0) \times R^n \times (0) \times R^n) &\longrightarrow (U^n \times R^n \times R^n \times R^n) \\ (x, c_1, c_2, c_3, 0, c_4, 0, c_5) &\longrightarrow (x, c_4, c_2, c_5) \end{aligned}$$

pues resulta de la composición

$$\bar{\rho} = \overline{pr}_2 \circ \phi_{TM}$$

dada por

$$\begin{array}{ccccc} \text{VTM} & \xrightarrow{\phi_{TM}} & (\pi_M)_*^{-1} \text{TM} & \xrightarrow{\overline{pr}_2} & \text{TM} \\ & & \downarrow \overline{pr}_1 & & \downarrow (\pi_M)_* \\ & & \text{TM} & \xrightarrow{(\pi_M)_*} & \text{TM} \end{array}$$

$$(x, c_1, c_2, c_3, 0, c_4, 0, c_5) = ((x, c_1, c_2, c_3), (x, c_4, c_2, c_5)) = (x, c_4, c_2, c_5)$$

Así, si $\alpha = (\pi_M)_*$ resulta

$$(\pi_M)_* \circ \bar{\rho} (x, c_1, c_2, c_3, 0, c_4, 0, c_5) = (\pi_M)_* (x, c_4, c_2, c_5) = (x, c_4)$$

$$\alpha \circ (\pi_M)_* (x, c_1, c_2, c_3, 0, c_4, 0, c_5) = \alpha (x, c_2, 0, 0) = (x, 0)$$

por lo que no se verifica la propiedad (5).

Mientras que si $\alpha = \pi_{TM}$ entonces sí se verifica, porque obtenemos

$$\pi_{TM} \circ \bar{\rho} (x, c_1, c_2, c_3, 0, c_4, 0, c_5) = \pi_{TM} (x, c_4, c_2, c_5) = (x, c_4)$$

$$\alpha \circ (\pi_{TM})_* (x, c_1, c_2, c_3, 0, c_4, 0, c_5) = \alpha (x, c_1, 0, c_4) = (x, c_4)$$

Los siguientes resultados establecen la existencia de familias grandes de buenos cuadrados.

Proposición 1.1.:

(i) Sea $\pi: E \rightarrow M$ un fibrado localmente trivial. Entonces

$$\begin{array}{ccc} \Gamma E & \xrightarrow{\pi_E} & E \\ \pi_E \downarrow & & \downarrow \pi \\ E & \xrightarrow{\pi_M} & M \end{array}$$

es un buen cuadrado.

(ii) Sea $\pi: E \rightarrow M$ un fibrado vectorial. Entonces

$$\begin{array}{ccc} \Gamma E & \xrightarrow{\pi_E} & \Gamma M \\ \pi_E \downarrow & & \downarrow \pi_M \\ E & \xrightarrow{\pi} & M \end{array}$$

es un buen cuadrado.

Demostración.

(i) Sea la expresión local de $\pi: E \rightarrow M$ la siguiente:

$$\begin{array}{ccc} \pi: E & \longrightarrow & M \\ U^n \times G^S & \longrightarrow & U^n \\ (x, g^i) & \longrightarrow & (x^i) \end{array}$$

Entonces el diagrama dado verifica las propiedades (1), (2) y (3) de buen cuadrado. Veamos que también verifica la (4'): La expresión local del diagrama es:

$$\begin{array}{ccc} U^n \times G^S \times R^n \times R^S & \longrightarrow & U^n \times G^S \\ \downarrow & & \downarrow \\ U^n \times R^n & \longrightarrow & U^n \end{array} \quad \begin{array}{ccc} (x, g, c, d) & \longrightarrow & (x, g) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (x, c) & \longrightarrow & x \end{array}$$

con lo que cumple todas las propiedades.

(ii) La demostración es similar: Sea la expresión local del fibrado vectorial $\pi: E \rightarrow M$ la siguiente:

$$\begin{array}{ccc} \pi: E & \longrightarrow & M \\ U^n \times R^n & \longrightarrow & U^n \\ (x^i, a^\alpha) & \longrightarrow & (x^i) \end{array}$$

Verifica las tres primeras propiedades de buen cuadrado y también la (4'), pues localmente es:

$$\begin{array}{ccc} U^n \times R^\Gamma \times R^n \times R^\Gamma & \longrightarrow & U^n \times R^n \\ \downarrow & & \downarrow \\ U^n \times R^\Gamma & \longrightarrow & U^n \end{array} \quad \begin{array}{ccc} (x, a_1, c, a_2) & \longrightarrow & (x, c) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (x, a_1) & \longrightarrow & x \end{array}$$

El resultado que acabamos de probar se utilizará repetidamente en el capítulo 4. En la misma línea está la siguiente

Proposición 1.2.: Sean $\pi: C \rightarrow D$ un fibrado vectorial y $\beta: B \rightarrow D$ un fibrado localmente trivial. Entonces

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(B) & \xrightarrow{\gamma} & B \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \beta \\ C & \xrightarrow{\pi} & D \end{array}$$

donde α y γ son las dos proyecciones, es un buen cuadrado.

Demostración.

Por las propiedades del producto fibrado (estudiadas en § 0.1.) resulta que se verifican las propiedades (1), (2) y (3) de buen cuadrado. Veamos que se verifica también la (4').

Recuerdo que

$$\pi^{-1}(B) = \{(p,q) \in C \times B \mid \pi(p) = \beta(q)\}$$

Sean las expresiones locales de los fibrados π y β las siguientes:

$$\begin{array}{ccc} \pi: C \longrightarrow D & & \beta: B \longrightarrow D \\ U^n \times R^r \longrightarrow U^n & & U^n \times G^s \longrightarrow U^n \\ (x,a) \longrightarrow x & & (x,g) \longrightarrow x \end{array}$$

Entonces localmente es

$$\pi^{-1}(B) = U^n \times R^r \times G^s$$

y la expresión del diagrama es

$$\begin{array}{ccc} U^n \times R^r \times G^s \longrightarrow U^n \times G^s & & (x,a,g) \longrightarrow (x,g) \\ \downarrow & & \downarrow \\ U^n \times R^r \longrightarrow U^n & & (x,a) \longrightarrow x \end{array}$$

qed

Obsérvese que la expresión local del diagrama que acabamos de obtener es la misma que la general que vimos al comienzo de este capítulo, al dar la propiedad (4'), salvo que en este caso ha desaparecido el factor R^t . Esto se debe a que $\pi^{-1}(B)$ es el mínimo espacio que se fibra sobre $B \times C$ dando lugar a un buen cuadrado.

(Una situación más particular que las anteriores, pero que también utilizaremos más tarde es la recogida en la siguiente proposición.

Proposición 1.3.: Sea M una variedad diferenciable y sea $\pi_0^2: I_2^M \rightarrow M$ el fibrado de 2-jets sobre M . Entonces

$$\begin{array}{ccc} I_2^M & \xrightarrow{\pi_0^2} & M \\ \pi_1^2 \downarrow & & \downarrow \text{id} \\ TM & \xrightarrow{\pi_M} & M \end{array}$$

es un buen cuadrado, siempre que se haya definido una conexión infinitesimal en M .

Observación. El mismo resultado es válido para r -jets, considerando

$$\begin{array}{ccc} I_r^M & \xrightarrow{\pi_0^r} & M \\ \pi_1^r \downarrow & & \downarrow \text{id} \\ TM & \xrightarrow{\pi_M} & M \end{array}$$

Demostración.

Recuerdo, como dijimos en § 0.1., que I_2^M puede sumergirse en TM como el conjunto de puntos invariantes por el automorfismo de Kobayashi. (Para una más amplia descripción de I_2^M ver [5] o [52]).

Así se tienen las siguientes expresiones locales:

$$\begin{array}{ll} \pi_0^2: I_2^M \longrightarrow M & \pi_1^2: I_2^M \longrightarrow TM \\ \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n & \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}^n \\ (x, c_1, c_2) \longrightarrow x & (x, c_1, c_2) \longrightarrow (x, c_1) \end{array}$$

Veamos que se verifican las cinco condiciones de la definición de buen cuadrado:

La (1) y la (3) lo hacen trivialmente.

La (2) se verifica porque al estar definida una conexión infinitesimal en $\pi_M: TM \rightarrow M$ (esto es una conexión no homogénea en M) resulta que

$$\pi_0^2: I_2^M \rightarrow M$$

alcanza la estructura de fibrado vectorial. En efecto, resulta (cfr. [6]) que la aplicación de conexión K de la conexión dada, $K: TM \rightarrow TM$, y la $(\pi_M)_*: I_2^M \rightarrow TM$ restringidas a I_2^M definen un isomorfismo de fibrados

$$K \circ (\pi_M)_* : T_2M \rightarrow TM \circ TM$$

que dota a T_2M de estructura de fibrado vectorial sobre M .

La expresión local del diagrama es

$$\begin{array}{ccc} U^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & U^n \\ \downarrow & & \downarrow \\ U^n \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & U^n \end{array} \quad \begin{array}{ccc} (x, c_1, c_2) & \longrightarrow & x \\ \downarrow & & \downarrow \\ (x, c_1) & \longrightarrow & x \end{array}$$

con lo que se verifica (4).

Y también se verifica la propiedad (5) pues tenemos localmente

$$\forall T_2M = \ker (\pi_0^2)_* = U^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times (0) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$$

y
$$\bar{\rho} : \forall T_2M \longrightarrow T_2M$$

$$U^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times (0) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow U^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$$

$$(x, c_1, c_2, 0, c_4, c_5) \longrightarrow (x, c_4, c_5)$$

de donde resulta la conmutatividad $\pi_1^2 \bar{\rho} = \rho (\pi_1^2)_*$ buscada. En efecto

$$\begin{array}{ccc} (x, c_1, c_2, 0, c_4, c_5) & \xrightarrow{\bar{\rho}} & (x, c_4, c_5) \\ (\pi_1^2)_* \downarrow & & \downarrow \pi_1^2 \\ (x, c_1, 0, c_4) & \xrightarrow{\rho} & (x, c_4) \end{array}$$

qed

Observaciones.

(1) En esta proposición, a diferencia de los demás resultados de este capítulo, hemos necesitado definir una conexión no homogénea en M para que resulte el diagrama un buen cuadrado. Esto no va a presentar ningún problema en las aplicaciones, puesto que sólo la utilizaremos en la sección § 4.3.3. para elevar una conexión no homogénea definida en M .

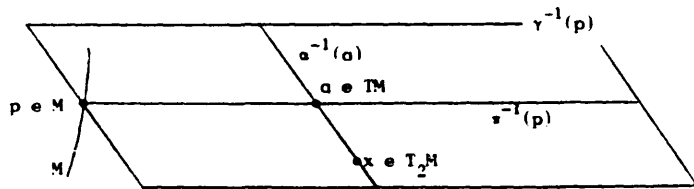
(2) A diferencia de las demostraciones de las proposiciones precedentes, hemos comprobado que se verifican las propiedades (4) y (5) en vez de la (4'). Mejor dicho, realmente hemos comprobado que se verifican todas ellas. Se debe a que la expresión

$$\pi_0^2(x, c_1, c_2) = x$$

hace un poco costoso ver si efectivamente se verifica la propiedad (4'). Obsérvese que respecto de la notación general se tiene en este caso

general	proposición 1.3.
\mathbb{R}^r	\mathbb{R}^n
G^s	(0)
\mathbb{R}^t	\mathbb{R}^n
$r + s + t = 2n$	

Resulta en este caso la siguiente interpretación geométrica (dibujada para $n = 1$)



$$\begin{array}{ccc}
 I_2 M & \xrightarrow{\gamma} & M \\
 \alpha \downarrow & & \downarrow \beta \\
 TM & \xrightarrow{\pi} & M
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 I_2 M & \xrightarrow{\pi_0^2} & M \\
 \pi_1^2 \downarrow & & \downarrow id \\
 TM & \xrightarrow{\pi_M} & M
 \end{array}$$

Aunque se puede considerar $\alpha^{-1}(\alpha) \subset \gamma^{-1}(p)$, si $\pi(q) = p$, esas fibras se siguen cortando transversalmente, puesto que la dimensión total de $(\beta \circ \gamma)^{-1}(p) = (\pi \circ \alpha)^{-1}(p)$ es $2n$, igual a la dimensión de $\gamma^{-1}(p)$.

En el capítulo 4 utilizaremos estos resultados con frecuencia.

§ 1.2. SECCIONES PROYECTABLES.

La siguiente definición de sección proyectable se utilizará con frecuencia en los capítulos posteriores:

Definición 1.2. Sea un buen cuadrado de fibrados

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\gamma} & B \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \beta \\ C & \xrightarrow{\pi} & D \end{array}$$

Una sección \bar{X} del fibrado $\gamma: A \rightarrow B$ se dice **proyectable** si existe una sección X del fibrado $\pi: C \rightarrow D$ de modo que $\alpha \bar{X} = X \beta$. Se dice entonces que X es la **proyección** de \bar{X} .

Nota: Como ya advertimos tras la definición 1.1., distinguimos los conceptos definidos en γ de los análogos en π mediante el uso de una barra en los primeros.

La siguiente proposición expresa la condición local para que \bar{X} sea proyectable:

Proposición 1.4.: Sea un buen cuadrado dado localmente por

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\gamma} & B \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \beta \\ C & \xrightarrow{\pi} & D \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} U^n \times R^r \times G^s \times R^t & \longrightarrow & U^n \times G^s \\ \downarrow & & \downarrow \\ U^n \times R^r & \longrightarrow & U^n \\ (x, a, g, b) & \longrightarrow & (x, g) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (x, a) & \longrightarrow & x \end{array}$$

Sea \bar{X} una sección de $\gamma: A \rightarrow B$, dada localmente por

$$\bar{X}(x^i, g^j) = (x^i, \bar{X}^\alpha(x, g), g^j, \bar{X}^\beta(x, g))$$

Entonces \bar{X} es proyectable si y solamente si $\bar{X}^\alpha(x, g)$ depende solamente de x, g , en este caso, se proyecta sobre la sección X de $\pi: C \rightarrow D$ dada localmente por

$$X(x^i) = (x^i, \bar{X}^\alpha(x, g))$$

La demostración es trivial.

Observación: Podríamos haber dado esta definición en supuestos más generales (exigiendo sólo que el diagrama fuera conmutativo), pero nos hemos restringido a los buenos cuadrados ya que sólo la necesitaremos en este caso.

La noción de campo o sección proyectable ha sido dada por muchos autores, y siempre del mismo modo. El interés de los ejemplos que se proponen a continuación radica en comprobar que esas definiciones conocidas coinciden con la nuestra cuando se escoge un determinado buen cuadrado. Así irá manifestándose la idea de que los buenos cuadrados constituyen una herramienta común utilizable en situaciones distintas. Esta idea quedará plenamente expuesta en el capítulo 4, cuando se demuestre que muchas de las elevaciones conocidas de conexiones son casos particulares de la teoría general de elevación de conexiones en buenos cuadrados.

Así proponemos los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1.3.

Cuando se estudian las elevaciones de campos vectoriales al fibrado tangente ([22],[52]) se definen los campos proyectables \bar{X} e $T_0^1(TM)$ como aquellos que verifican la siguiente condición: Existe un campo X e $T_0^1(M)$ de modo que $\bar{X} - X^C$ es un campo vertical, siendo X^C la elevación completa de X .

Así

$$(\bar{X} - X^C)(f^V) = 0$$

para toda función f e $T_0^0(M)$, denotando $f^V = f \cdot \pi_M^V$ la elevación vertical de f .

En coordenadas locales, la definición anterior se traduce así:

$$\bar{X}(x,c) = \frac{\partial}{\partial x^i} \bar{X}^i(x) + \frac{\partial}{\partial c^i} \bar{X}^{i-n}(x,c)$$

con $\bar{X}^i(x)$ e $T_0^0(M)$. Y la proyección de \bar{X} es el campo X dado en la definición, que tiene como expresión local

$$X(x) = \frac{\partial}{\partial x^i} \bar{X}^i(x)$$

Pues bien, resulta que un campo proyectable \bar{X} e $T_0^1(TM)$ es una sección del fibrado $\pi_{TM}: TTM \rightarrow TM$ proyectable respecto del buen cuadrado (ver ejemplo 1.1.1)

$$\begin{array}{ccc} TTM & \xrightarrow{\pi_{TM}} & TM \\ (\pi_M)^* \downarrow & & \downarrow \pi_M \\ TM & \xrightarrow{\pi_M} & M \end{array}$$

En efecto, empleando coordenadas locales, resulta

$$\begin{array}{ccc}
 (x^i, c^i, \bar{x}^i(x, c), \bar{x}^{i \cdot n}(x, c)) & \xleftarrow{\bar{X}} & (x^i, c^i) \\
 \downarrow (\pi_M)_* & & \downarrow \pi_M \\
 (x^i, \bar{x}^i(x, c)) & & \\
 \downarrow & \xleftarrow{X} & \downarrow \\
 (x^i, X^i(x)) & & (x^i)
 \end{array}$$

Para que \bar{X} se proyecte en X debe ser $\bar{x}^i(x, c) = X^i(x)$, que no depende de c .

Este ejemplo proporciona un dato importante: las clásicas elevaciones al fibrado tangente dependen de la estructura del buen cuadrado

$$\begin{array}{ccc}
 TTM & \xrightarrow{\pi_{TM}} & TM \\
 (\pi_M)_* \downarrow & & \downarrow \pi_M \\
 TM & \xrightarrow{\pi_M} & M
 \end{array} \quad (*)$$

En la sección § 4.1. detallaremos el papel desempeñado por este buen cuadrado en las elevaciones de conexiones.

Por lo que acabamos de ver, resulta en particular que las elevaciones completas de campos al fibrado tangente son campos proyectables y secciones proyectables en el buen cuadrado anterior. Podríamos preguntarnos del mismo modo qué pasa con las elevaciones horizontales y verticales de campos. Para las primeras hace falta introducir una conexión. Se estudiarán, con mayor generalidad, en el ejemplo 1.6. Veamos las verticales:

La elevación vertical X^V e $T_0^1(TM)$ de un campo X e $T_0^1(M)$ viene dada localmente por

$$X^V(x, c) = \frac{\partial}{\partial x^i} \cdot X^i(x)$$

Entonces X^V es proyectable sobre el campo nulo respecto del buen cuadrado anterior (*), pero se proyecta sobre el campo X si se toma el buen cuadrado (ver ejemplo 1.1.) siguiente

$$\begin{array}{ccc}
 TTM & \xrightarrow{\pi_{TM}} & TM \\
 \bar{\sigma} \downarrow & & \downarrow \pi_M \\
 TM & \xrightarrow{\pi_M} & M
 \end{array}$$

Ejemplo 1.4.

De modo análogo ocurre en el fibrado cotangente: un campo \bar{X} e $T_0^1(T^*M)$ es proyectable. [52], si existe X e $T_0^1(M)$ de modo que $\bar{X} - X^C$ sea vertical. en coordenadas locales, \bar{X} es proyectable si

$$\bar{X} = \frac{\partial}{\partial x^i} \bar{X}^i + \frac{\partial}{\partial p_i} \bar{X}^{i-n} \quad \text{con } \bar{X}^i \in T_0^0(M)$$

con $\bar{X}^i \in T_0^0(M)$.

(Para detalles sobre las coordenadas locales ver la sección § 4.3.1.)

Con nuestra definición resulta que \bar{X} es proyectable si lo es como sección en el buen cuadrado (proposición 1.1.):

$$\begin{array}{ccc} T_0^1 T^* M & \xrightarrow{\bar{X}} & T^* M \\ \downarrow \bar{\pi}_* & & \downarrow \pi^* \\ T_0^1 M & \xrightarrow{X} & M \end{array}$$

Ejemplo 1.5.

Vilms considera en [50] la elevación X^b de una sección X de un fibrado vectorial $\pi: E \rightarrow M$ como la sección $X^b = X_\#$ del fibrado vectorial $\pi_\#: TE \rightarrow TM$.

Si localmente el fibrado dado es

$$\begin{array}{ccc} \pi: E & \longrightarrow & M \\ U^n \times \mathbb{R}^r & \longrightarrow & U^n \\ (x^i, a^a) & \longrightarrow & (x^i) \end{array}$$

y si $X(x) = (x^i, X^a(x))$, entonces X^b está dado localmente por

$$X^b(x^i, c^i) = X_\#(x^i, c^i) = (x^i, X^a(x), c^i, \frac{\partial X^a(x)}{\partial x^i} c^i)$$

expresión obtenida sin más que generalizar la dada por Dombrowski en [11].

Entonces X^b es una sección proyectable en el buen cuadrado

$$\begin{array}{ccc} T_0^1 E & \xrightarrow{X^b} & T_0^1 M \\ \downarrow \pi_F & & \downarrow \pi_M \\ E & \xrightarrow{X} & M \end{array}$$

Este buen cuadrado se utilizará en la sección § 4.3.2.

Ejemplo 1.6.

Generalizando los ejemplos 1.3. y 1.4., y de modo dual al 1.5., tenemos el buen cuadrado (proposición 1.1.) siguiente

$$\begin{array}{ccc}
 TE & \xrightarrow{\nu_E} & E \\
 \nu_* \downarrow & & \downarrow \nu \\
 TM & \xrightarrow{\nu_M} & M
 \end{array}$$

donde ν es un fibrado vectorial. Las secciones proyectables de este buen cuadrado son los que denominamos campos proyectables en § 0.1.2., siguiendo las notaciones de [11] y [37].

Supuesta una conexión infinitesimal en el fibrado vectorial $\nu: E \rightarrow M$ obtuvimos en § 0.3.2. la elevación horizontal de campos X^H o $T_0^1(E)$. El campo X^H así definido es proyectable sobre el campo X respecto del buen cuadrado anterior.

Ejemplo 1.7.

Consideremos los tres diagramas obtenidos al variar ϵ en $(2,1,0)$ en este orden:

$$\begin{array}{ccc}
 T^2 M & \xrightarrow{\tau_2} & T_2 M \\
 \alpha_\epsilon \downarrow & & \downarrow \tau_0^2 \\
 TM & \xrightarrow{\tau_M} & M
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 U^n \times R^n \times R^n \times R^n \times R^n \times R^n & \longrightarrow & U^n \times R^n \times R^n \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 U^n \times R^n & \longrightarrow & U^n
 \end{array}$$

donde localmente α_ϵ está definido así:

$$\alpha_2(x, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5) = (x, c_3) \Rightarrow \alpha_2 = (\tau_0^2)_*$$

$$\alpha_1(x, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5) = (x, c_4)$$

$$\alpha_0(x, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5) = (x, c_5)$$

La elección de los índices quedará justificada más adelante.

Recuerdo que

$$\tau_{T_2 M}(x, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5) = (x, c_1, c_2)$$

con lo que ciertamente los tres son buenos cuadrados. (De hecho, por la proposición 1.1. sabemos ya que el primero lo era).

Resulta que $\bar{\rho}$ está localmente dada por

$$\bar{\rho}(x, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, 0, 0, 0, c_9, c_{10}, c_{11}) = (x, c_1, c_2, c_9, c_{10}, c_{11})$$

con lo que

$$a_\epsilon \bar{\rho} = \rho(a_\epsilon)_\#$$

en los tres casos:

$$a_2 \bar{\rho}(x, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, 0, 0, 0, c_9, c_{10}, c_{11}) = a_2(x, c_1, c_2, c_9, c_{10}, c_{11}) = (x, c_9)$$

$$\rho \circ (a_2)_\#(x, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, 0, 0, 0, c_9, c_{10}, c_{11}) = \rho(x, c_3, 0, c_9) = (x, c_9)$$

$$a_1 \bar{\rho}(x, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, 0, 0, 0, c_9, c_{10}, c_{11}) = a_1(x, c_1, c_2, c_9, c_{10}, c_{11}) = (x, c_{10})$$

$$\rho \circ (a_1)_\#(x, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, 0, 0, 0, c_9, c_{10}, c_{11}) = \rho(x, c_4, 0, c_{10}) = (x, c_{10})$$

$$a_0 \bar{\rho}(x, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, 0, 0, 0, c_9, c_{10}, c_{11}) = a_0(x, c_1, c_2, c_9, c_{10}, c_{11}) = (x, c_{11})$$

$$\rho \circ (a_0)_\#(x, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, 0, 0, 0, c_9, c_{10}, c_{11}) = \rho(x, c_5, 0, c_{11}) = (x, c_{11})$$

Sea X e $T_0^1(M)$. Entonces X tiene tres posibles elevaciones $X^{(0)}$, $X^{(1)}$ y $X^{(2)}$ a $T_2^1 M$, [52], dadas localmente así:

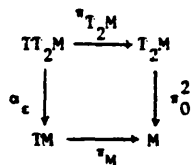
$$X(x) = (x^i, X^i(x))$$

$$X^{(0)}(x, c_1, c_2) = (x^i, c_1^i, c_2^i, 0, 0, X^i(x))$$

$$X^{(1)}(x, c_1, c_2) = (x^i, c_1^i, c_2^i, 0, X^i(x), \frac{\partial X^i(x)}{\partial x^j} c_1^j)$$

$$X^{(2)}(x, c_1, c_2) = (x^i, c_1^i, c_2^i, X^i(x), \frac{\partial X^i(x)}{\partial x^j} c_1^j, \frac{\partial X^i(x)}{\partial x^j} c_2^j - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 X^i(x)}{\partial x^j \partial x^k} c_1^j c_1^k)$$

Entonces resulta que $X^{(\epsilon)}$ es proyectable sobre X en el diagrama



para cada $\epsilon = 2, 1, 0$.

Este resultado es una generalización de lo que habíamos dicho en el ejemplo 1.3. para las elevaciones vertical y completa de campos al fibrado tangente.

Más aún, resulta que $X^{(0)}$ se proyecta en el campo nulo en los diagramas definidos por α_1 y α_2 , y $X^{(1)}$ hace lo propio en el diagrama definido por α_2 . Y, en general, $X^{(2)}$ no resulta proyectable en los diagramas determinados por α_0 y α_1 , ni $X^{(1)}$ en el dado por α_0 .

Podemos resumir los datos en el siguiente cuadro, en el que indicamos, en su caso, el campo sobre el que se proyecta:

		ELEVACION		
		$X^{(0)}$	$X^{(1)}$	$X^{(2)}$
BIEN CUADRADO	α_0	X	0	0
	α_1	*	X	0
	α_2	*	*	X

y donde * indica que en general no se proyecta. Queda ahora justificada la elección de los índices, que se corresponden con las elevaciones.

En la sección § 4.2. emplearemos estos resultados.

CAPITULO 2. ELEVACION DE CONEXIONES GENERALIZADAS.

El planteamiento de este capítulo es partir de un buen cuadrado

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\gamma} & B \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \beta \\ C & \xrightarrow{\gamma} & D \end{array}$$

y sendas conexiones generalizadas $F \in T_1^1(C)$ y $\tilde{F} \in T_1^1(A)$. Diremos que \tilde{F} es elevación de F si

$$\alpha_* \tilde{F} = F \circ \alpha_*$$

Con esta definición tan sencilla obtendremos resultados sobre la derivada covariante, expresiones locales, conexiones particulares y sus elevaciones. Veámoslo con orden.

2.1. PROPIEDADES GENERALES.

1. Definición y primeros resultados.

Sea un buen cuadrado

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\gamma} & B \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \beta \\ C & \xrightarrow{\gamma} & D \end{array}$$

y sean $F \in I_1^1(C)$ una conexión generalizada en $\pi: C \rightarrow D$ y $\bar{F} \in I_1^1(A)$ una conexión generalizada en $\gamma: A \rightarrow B$.

Definición 2.1. En estas condiciones se dice que \bar{F} es una elevación de F (respecto del buen cuadrado dado) si conmuta el diagrama siguiente:

$$\begin{array}{ccc} IA & \xrightarrow{\bar{F}} & IA \\ \alpha_* \downarrow & & \downarrow \alpha_* \\ IC & \xrightarrow{F} & IC \end{array}$$

También diremos que \bar{F} se proyecta en F .

Observación. Realmente, para la definición anterior sólo es preciso haber definido α , F y \bar{F} y no hay porqué pensar en conexiones ni buenos cuadrados. Sin embargo, fuera de este contexto, la definición no tiene interés. Por otra parte, veremos cómo esta definición tan general aporta muchos resultados.

Veamos cómo la definición respeta las derivadas covariantes, en el sentido de la siguiente

Proposición 2.1.: Sean un buen cuadrado de fibrados

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{X} & B \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \beta \\ C & \xrightarrow{Y} & D \end{array}$$

y $\bar{F} \in I_1^1(A)$, $F \in I_1^1(C)$ sendas conexiones en $\gamma: A \rightarrow B$ y $\pi: C \rightarrow D$ tales que \bar{F} es elevación de F (respecto del citado buen cuadrado). Sean las siguientes secciones:

\bar{I} . sección de γ que se proyecta sobre I , sección de π .

\bar{X} . sección de $\pi_B: B \rightarrow B$ que se proyecta sobre X , sección de $\pi_D: D \rightarrow D$.

Entonces $\bar{v}_X \bar{I}$ se proyecta sobre $v_X I$, siendo \bar{v} y v las derivadas covariantes asociadas a las conexiones generalizadas \bar{F} y F .

Demostración.

Por hipótesis se sabe que

$$\alpha_* \bar{I} = I_* \beta$$

con lo que

$$\alpha_* \bar{I}_* = I_* \beta_*$$

y que

$$\alpha_* \bar{X} = X_* \beta$$

$$\begin{aligned}
 \alpha_{\bar{X}} \cdot \bar{\rho}(F) &= \alpha_{\bar{X}} \cdot \bar{\Gamma}_{\bar{X}} \cdot \gamma_{\bar{X}} \cdot \bar{F} \cdot \bar{\Gamma}_{\bar{X}} \cdot \bar{X} \cdot \gamma - \alpha_{\bar{X}} \cdot \bar{F} \cdot \bar{\Gamma}_{\bar{X}} \cdot \bar{X} \cdot \gamma = \\
 &= \Gamma_{\bar{X}} \cdot \beta_{\bar{X}} \cdot \gamma_{\bar{X}} \cdot \bar{F} \cdot \bar{\Gamma}_{\bar{X}} \cdot \bar{X} \cdot \gamma - F \cdot \alpha_{\bar{X}} \cdot \bar{\Gamma}_{\bar{X}} \cdot \bar{X} \cdot \gamma = \\
 &= \Gamma_{\bar{X}} \cdot \gamma_{\bar{X}} \cdot \alpha_{\bar{X}} \cdot \bar{F} \cdot \bar{\Gamma}_{\bar{X}} \cdot \bar{X} \cdot \gamma - F \cdot \Gamma_{\bar{X}} \cdot \beta_{\bar{X}} \cdot \bar{X} \cdot \gamma = \\
 &= \Gamma_{\bar{X}} \cdot \gamma_{\bar{X}} \cdot F \cdot \alpha_{\bar{X}} \cdot \bar{\Gamma}_{\bar{X}} \cdot \bar{X} \cdot \gamma - F \cdot \Gamma_{\bar{X}} \cdot \beta_{\bar{X}} \cdot \bar{X} \cdot \gamma = \\
 &= \Gamma_{\bar{X}} \cdot \gamma_{\bar{X}} \cdot F \cdot \Gamma_{\bar{X}} \cdot \beta_{\bar{X}} \cdot \bar{X} \cdot \gamma - F \cdot \Gamma_{\bar{X}} \cdot \beta_{\bar{X}} \cdot \bar{X} \cdot \gamma = \\
 &= \Gamma_{\bar{X}} \cdot \gamma_{\bar{X}} \cdot F \cdot \Gamma_{\bar{X}} \cdot \beta_{\bar{X}} \cdot \bar{X} \cdot \gamma - F \cdot \Gamma_{\bar{X}} \cdot \beta_{\bar{X}} \cdot \bar{X} \cdot \gamma = \\
 &= \Gamma_{\bar{X}} \cdot \gamma_{\bar{X}} \cdot F \cdot \Gamma_{\bar{X}} \cdot \beta_{\bar{X}} \cdot \bar{X} \cdot \gamma - F \cdot \Gamma_{\bar{X}} \cdot \beta_{\bar{X}} \cdot \bar{X} \cdot \gamma = \\
 &= \Gamma_{\bar{X}} \cdot \gamma_{\bar{X}} \cdot F \cdot \Gamma_{\bar{X}} \cdot \beta_{\bar{X}} \cdot \bar{X} \cdot \gamma - F \cdot \Gamma_{\bar{X}} \cdot \beta_{\bar{X}} \cdot \bar{X} \cdot \gamma = D(F) \cdot \alpha
 \end{aligned}$$

Probemos ya que $\bar{\nu}_{\bar{X}} \bar{\Gamma}$ se proyecta sobre $\nu_X \Gamma$. Recuerdo que

$$\bar{\nu}_{\bar{X}} \bar{\Gamma} = \frac{1}{2} \bar{\rho} \cdot \bar{D}(\bar{F}) \cdot \bar{\Gamma}' \quad ; \quad \nu_X \Gamma = \frac{1}{2} \rho \cdot D(F) \cdot \Gamma'$$

siendo $\bar{\Gamma}'$ y Γ' secciones cualesquiera de $\gamma: A \rightarrow B$ y $\nu: C \rightarrow D$.

Las tomamos entonces de modo que $\bar{\Gamma}'$ se proyecte sobre Γ' , esto es, que

$$\alpha \cdot \bar{\Gamma}' = \Gamma' \cdot \beta$$

Resulta así, por la propiedad (5) de buen cuadrado, la igualdad buscada:

$$\begin{aligned}
 \alpha \cdot \bar{\nu}_{\bar{X}} \bar{\Gamma} &= \frac{1}{2} \alpha \cdot \bar{\rho} \cdot \bar{D}(\bar{F}) \cdot \bar{\Gamma}' = \\
 &= \frac{1}{2} \rho \cdot \alpha_{\bar{X}} \bar{D}(\bar{F}) \cdot \bar{\Gamma}' = \\
 &= \frac{1}{2} \rho \cdot D(F) \cdot \alpha \cdot \bar{\Gamma}' = \\
 &= \frac{1}{2} \rho \cdot D(F) \cdot \Gamma' \cdot \beta = \nu_X \Gamma \cdot \beta
 \end{aligned}$$

qed

Observación: En esta demostración hemos utilizado explícitamente la propiedad (5) de buen cuadrado. Es interesante hacerlo notar, porque cuando dimos la definición, en § 1.1.1., no parecía muy natural exigir la citada condición.

Fácilmente se establecen los dos siguientes resultados (en los que se supone la notación precedente) :

Proposición 2.2.: Si \bar{F}_1 y \bar{F}_2 son elevaciones de F_1 y F_2 , entonces $\bar{F}_1 + \bar{F}_2$ es elevación de $F_1 + F_2$.

Demostración.

Es trivial: $\alpha_* (\bar{F}_1 + \bar{F}_2) = \alpha_* \bar{F}_1 + \alpha_* \bar{F}_2 = F_1 \cdot \alpha_* + F_2 \cdot \alpha_* = (F_1 + F_2) \cdot \alpha_*$

qed

Para establecer el otro resultado necesitamos definir primero el concepto de elevación vertical de funciones:

Definición 2.2. Dados un fibrado localmente trivial $\alpha: A \rightarrow C$ y una función $g \in T_0^0(C)$ se llama elevación vertical de g a la función g^V definida como

$$g^V = g \cdot \alpha \in T_0^0(A)$$

Le damos ese nombre como generalización natural de la elevación de funciones al fibrado tangente ([52]).

Proposición 2.3.: Sean $\bar{I} \in T_1^1(A)$ e $I \in T_1^1(C)$ los respectivos tensores de Kronecker (considerados como conexiones generalizadas) y $\bar{g} \in T_0^0(A)$. Entonces, existe alguna función $g \in T_0^0(C)$ tal que $\bar{g} = g^V$ si y sólo si resulta que $\bar{g}\bar{I}$ es elevación de gI .

Demostración.

Es inmediata, pues para que commute el diagrama

$$\begin{array}{ccc} TA & \xrightarrow{\bar{g}\bar{I}} & TA \\ \alpha_* \downarrow & & \downarrow \alpha_* \\ TC & \xrightarrow{gI} & TC \end{array}$$

debe ser \bar{g} igual a g^V . En efecto:

Sean $p \in A$, $q = \alpha(p) \in C$ y $\tilde{w} \in I_p A$.

$$\begin{aligned} (\alpha_* \cdot (g^V \cdot \bar{I}))(\tilde{w}) &= \alpha_* ((g \cdot \alpha) \cdot \bar{I})(\tilde{w}) = \alpha_* ((g \cdot \alpha)(p) \cdot \tilde{w}) = (g \cdot \alpha)(p) \cdot \alpha_*(\tilde{w}) = \\ &= g(q) \cdot \alpha_*(\tilde{w}) = (g \cdot I)(\alpha_*(\tilde{w})) = ((g \cdot I) \cdot \alpha_*)(\tilde{w}). \end{aligned}$$

Recíprocamente, si $\bar{g}I$ es elevación de gI , resulta, con la notación precedente, que conmuta el diagrama y, por lo tanto, que

$$\bar{g}(p) \circ_{\tilde{w}} = g(q) \circ_{\tilde{w}}$$

cualesquiera que sean $p \in A$, $\tilde{w} \in T_p A$ y $q = \alpha(p)$.

Así que para todo p de A ,

$$\bar{g}(p) = (g \circ \alpha)(p)$$

con lo que se tiene la igualdad buscada.

qed

Este resultado tiene relación con la proposición 0.5. en que se probaba que dos conexiones generalizadas que diferían en el producto de una función por el tensor de Kronecker tenían las mismas derivadas covariantes. En efecto, obtenemos el siguiente

Corolario: Sean $\bar{F}, \bar{F}' \in I_1^1(A)$ conexiones generalizadas en $\gamma: A \rightarrow B$ y $F \in I_1^1(C)$ una conexión generalizada en $\alpha: C \rightarrow D$ tales que

- (a) $\bar{F}' = \bar{F} + \bar{g}I$, para alguna $\bar{g} \in I_0^0(A)$
- (b) \bar{F} se proyecta sobre F

Entonces \bar{F}' es elevación de alguna conexión generalizada $F' \in I_1^1(C)$ si y sólo si $\bar{g} = g^V$ para alguna $g \in I_0^0(C)$ y, en este caso, $F' = F + gI$.

La demostración se sigue fácilmente de las proposiciones precedentes.

Es importante advertir que dadas dos conexiones generalizadas \bar{F} y \bar{F}' como en el corolario, que definen la misma derivada covariante (por la proposición 0.5.), aunque \bar{F} sea elevación de una conexión generalizada F , a \bar{F}' no tiene por qué pasarle lo mismo. Pero si efectivamente \bar{F}' es elevación de una conexión F' , entonces F y F' también definen la misma derivada covariante.

2. Expresiones locales.

El objetivo de esta sección es llegar a la caracterización local de la elevación de conexiones generalizadas, que demostraremos en la proposición 2.4. En la práctica, son las expresiones locales las que permiten identificar las elevaciones, como veremos reiteradamente en el capítulo 4. También utilizaremos la proposición 2.4. en este capítulo, para probar la 2.7.

Sea un buen cuadrado, dado localmente por las siguientes expresiones (conformes con la notación general que establecimos en § 1.1.1.):

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{\gamma} & B \\
 \alpha \downarrow & & \downarrow \beta \\
 C & \xrightarrow{\nu} & D
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 U^n \times R^r \times G^s \times R^t & \longrightarrow & U^n \times G^s \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 U^n \times R^r & \longrightarrow & U^n \\
 \\
 (x, a_1, g, b_1) & \longrightarrow & (x, g) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 (x, a_1) & \longrightarrow & x
 \end{array}$$

Sea $F \in T_1^1(C)$ una conexión generalizada en $\nu: C \rightarrow D$. Entonces, como vimos en § 0.4., F admite una expresión matricial del tipo

$$F = \begin{pmatrix} C_j^i & M_\beta^i \\ \nu_j^\alpha & B_\beta^\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x^i} \bullet C_j^i dx^j & \frac{\partial}{\partial x^i} \bullet M_\beta^i da_1^\beta \\ \frac{\partial}{\partial a_1^\alpha} \bullet \nu_j^\alpha dx^j & \frac{\partial}{\partial a_1^\alpha} \bullet B_\beta^\alpha da_1^\beta \end{pmatrix}$$

y resulta que

$$\begin{aligned}
 F(x, a_1, c, a_2) &= F\left(\frac{\partial}{\partial x^i} \bullet c^i + \frac{\partial}{\partial a_1^\alpha} \bullet a_2^\alpha\right) = \\
 &= \frac{\partial}{\partial x^i} \bullet (C_j^i c^j + M_\beta^i a_2^\beta) + \frac{\partial}{\partial a_1^\alpha} \bullet (\nu_j^\alpha c^j + B_\beta^\alpha a_2^\beta) = \\
 &= (x^i, a_1, C_j^i c^j + M_\beta^i a_2^\beta, \nu_j^\alpha c^j + B_\beta^\alpha a_2^\beta)
 \end{aligned}$$

Obsérvese cómo alternamos la notación como campo vectorial en A y como sección del fibrado tangente a A . Según resulte más cómodo emplearemos una u otra notación sin advertirlo previamente.

Podemos representar matricialmente la actuación de F del siguiente modo:

$$F(x, a_1, c, a_2) = \begin{pmatrix} \delta_j^i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_B^a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_j^i & M_B^i \\ 0 & 0 & v_j^a & B_B^a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^i \\ a_1^a \\ c^i \\ a_2^a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^i \\ a_1^a \\ C_j^i c^j + M_B^i a_2^a \\ v_j^a c^j + B_B^a a_2^a \end{pmatrix}$$

De modo análogo razonamos con $F \circ T_1^1(A)$, obteniendo en primer lugar su expresión matricial:

$$F = \begin{pmatrix} C_j^i & C_B^i & M_\nu^i & M_\tau^i \\ C_j^a & C_B^a & M_\nu^a & M_\tau^a \\ \bar{v}_j^\lambda & \bar{v}_B^\lambda & B_\nu^\lambda & B_\tau^\lambda \\ \bar{v}_j^\sigma & \bar{v}_B^\sigma & B_\nu^\sigma & B_\tau^\sigma \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x^i} \cdot C_j^i dx^j & \frac{\partial}{\partial x^i} \cdot C_B^i da_1^B & \frac{\partial}{\partial x^i} \cdot M_\nu^i dg^\nu & \frac{\partial}{\partial x^i} \cdot M_\tau^i db_1^\tau \\ \frac{\partial}{\partial a_1^a} \cdot C_j^a dx^j & \frac{\partial}{\partial a_1^a} \cdot C_B^a da_1^B & \frac{\partial}{\partial a_1^a} \cdot M_\nu^a dg^\nu & \frac{\partial}{\partial a_1^a} \cdot M_\tau^a db_1^\tau \\ \frac{\partial}{\partial g^\lambda} \cdot \bar{v}_j^\lambda dx^j & \frac{\partial}{\partial g^\lambda} \cdot \bar{v}_B^\lambda da_1^B & \frac{\partial}{\partial g^\lambda} \cdot B_\nu^\lambda dg^\nu & \frac{\partial}{\partial g^\lambda} \cdot B_\tau^\lambda db_1^\tau \\ \frac{\partial}{\partial b_1^\sigma} \cdot \bar{v}_j^\sigma dx^j & \frac{\partial}{\partial b_1^\sigma} \cdot \bar{v}_B^\sigma da_1^B & \frac{\partial}{\partial b_1^\sigma} \cdot B_\nu^\sigma dg^\nu & \frac{\partial}{\partial b_1^\sigma} \cdot B_\tau^\sigma db_1^\tau \end{pmatrix}$$

Y razonando como antes se obtiene matricialmente la actuación de \bar{F} , que daremos explícitamente a continuación.

Antes quiero hacer observar que el hecho de desarrollar estas expresiones se debe al papel que desempeñan en la demostración de la proposición 2.A., que queda así reducida a un producto de matrices.

Veamos la expresion matricial de la actuación de F:

$$F(x, a_1, g, b_1, c, a_2, d, b_2) =$$

$$= \begin{pmatrix} \delta_{j,i}^i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_B^a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_U^\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_r^n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{j,i}^i & C_{j,i}^i & C_{j,i}^i & C_{j,i}^i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{j,i}^i & C_{j,i}^i & C_{j,i}^i & C_{j,i}^i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{j,i}^i & C_{j,i}^i & C_{j,i}^i & C_{j,i}^i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{j,i}^i & C_{j,i}^i & C_{j,i}^i & C_{j,i}^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^i \\ a_1^a \\ g^\lambda \\ b_1^a \\ c^i \\ a_2^a \\ d^\lambda \\ b_2^a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^i \\ a_1^a \\ g^\lambda \\ b_1^a \\ c^i + C_{j,i}^i C_{j,i}^i + C_{j,i}^i C_{j,i}^i + C_{j,i}^i C_{j,i}^i + C_{j,i}^i C_{j,i}^i \\ a_1^a \\ g^\lambda \\ b_1^a \\ c^i + C_{j,i}^i C_{j,i}^i + C_{j,i}^i C_{j,i}^i + C_{j,i}^i C_{j,i}^i + C_{j,i}^i C_{j,i}^i \\ a_2^a \\ d^\lambda \\ b_2^a \end{pmatrix}$$

Finalmente obtengamos la expresion de α_x : $IA + IC$. Como sabemos es

$$\alpha_x(x, a_1, g, b_1, c, a_2, d, b_2) = (x, a_1, c, a_2)$$

que se puede expresar matricialmente como

$$\begin{pmatrix} \delta_{j,i}^i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_B^a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_{j,i}^i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_B^a & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^i \\ a_1^a \\ g^\lambda \\ b_1^a \\ c^i \\ a_2^a \\ d^\lambda \\ b_2^a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^i \\ a_1^a \\ c^i \\ a_2^a \end{pmatrix}$$

Entonces la igualdad

$$\alpha_x \cdot F = F \cdot \alpha_x$$

se traduce en la igualdad de dos productos de matrices. Operando, resulta:

$$F \cdot \alpha_{\mu} = \begin{pmatrix} \delta_j^i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_B^a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_j^i & M_B^i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v_j^a & B_B^a & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$y \quad \alpha_{\mu} \cdot \bar{F} = \begin{pmatrix} \delta_j^i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_B^a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{C}_j^i & \bar{C}_B^i & \bar{M}_\mu^i & \bar{M}_\tau^i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{C}_j^a & \bar{C}_B^a & \bar{M}_\mu^a & \bar{M}_\tau^a \end{pmatrix}$$

Así hemos probado la siguiente proposición (supuesta la notación precedente):

Proposición 2.4.: En las condiciones anteriores, \bar{F} es elevación de F si y sólo si se verifican las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} \bar{C}_j^i &= C_j^i & ; & \quad \bar{C}_B^i &= M_B^i & ; & \quad \bar{M}_\mu^i &= 0 & ; & \quad \bar{M}_\tau^i &= 0 \\ \bar{C}_j^a &= v_j^a & ; & \quad \bar{C}_B^a &= B_B^a & ; & \quad \bar{M}_\mu^a &= 0 & ; & \quad \bar{M}_\tau^a &= 0 \end{aligned}$$

Observación: Veremos en § 2.2. la expresión local de las conexiones generalizadas fibradas en $\gamma: A \rightarrow B$ y comprobaremos que verifican

$$\bar{C}_B^i = \bar{M}_\tau^i = \bar{v}_B^\lambda = \bar{B}_\tau^\lambda = 0$$

Hago notar esto para que no se piense que resultan nulas las \bar{M} (pues entonces resultaría que la elevación de una conexión generalizada sería siempre una conexión fibrada).

§ 2.2. CASOS PARTICULARES.

1. Conexiones en $\gamma: A \rightarrow B$

Vamos a hallar las expresiones locales de los distintos tipos de conexiones generalizadas en $\gamma: A \rightarrow B$, supuesto que tenemos un buen cuadrado

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\gamma} & B \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \beta \\ C & \xrightarrow{\eta} & D \end{array}$$

y que empleemos las coordenadas inducidas. (Conservamos la notación constante de este capítulo).

Localmente resulta que

$$\begin{aligned} VA = \ker \gamma_* &= U^n \times R^r \times G^s \times R^t \times \{0\} \times R^r \times \{0\} \times R^t = \\ &= ((x^i, a_1^a, g^\lambda, b_1^\sigma, 0, a_2^a, 0, b_2^\sigma)) \end{aligned}$$

Entonces, teniendo en cuenta la expresión local de una conexión generalizada \bar{F} en $\gamma: A \rightarrow B$ (dada en § 2.1.2.) y las definiciones de los distintos tipos de conexiones generalizadas (dadas en § 0.4.1.) resultan las siguientes expresiones locales:

(1) Conexión generalizada fibrada: $\bar{F}(VA) \subset VA$

$$\begin{aligned} 0 &= C_B^i = \eta_T^i \\ 0 &= \bar{\nu}_B^\lambda = B_T^\lambda \end{aligned} \quad \bar{F} = \begin{pmatrix} C_{j,j}^i & 0 & \eta_{j,v}^i & 0 \\ C_{j,j}^a & C_B^a & \eta_{j,v}^a & \eta_{j,v}^b \\ \bar{\nu}_{j,j}^\lambda & 0 & B_{j,v}^\lambda & 0 \\ \bar{\nu}_{j,j}^\sigma & \bar{\nu}_B^\sigma & B_{j,v}^\sigma & B_{j,v}^\tau \end{pmatrix}$$

(2) Pseudoconexión: $VA \subset \ker \bar{F}$

$$\begin{aligned} 0 &= C_B^i = C_B^a = \bar{\nu}_B^\lambda = \bar{\nu}_B^\sigma \\ 0 &= \eta_T^i = \eta_T^a = B_T^\lambda = B_T^\sigma \end{aligned} \quad \bar{F} = \begin{pmatrix} C_{j,j}^i & 0 & \eta_{j,v}^i & 0 \\ C_{j,j}^a & 0 & \eta_{j,v}^a & 0 \\ \bar{\nu}_{j,j}^\lambda & 0 & B_{j,v}^\lambda & 0 \\ \bar{\nu}_{j,j}^\sigma & 0 & B_{j,v}^\sigma & 0 \end{pmatrix}$$

3) Fere-conexión: un \bar{F} VA

$$0 = \bar{C}_j^i = \bar{C}_B^i = \bar{M}_\mu^i = \bar{M}_\tau^i$$

$$0 = \bar{v}_j^\lambda = \bar{v}_B^\lambda = \bar{B}_\mu^\lambda = \bar{B}_\tau^\lambda$$

$$\bar{F} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_j^\alpha & C_B^\alpha & M_\mu^\alpha & M_\tau^\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{v}_j^\sigma & \bar{v}_B^\sigma & B_\mu^\sigma & B_\tau^\sigma \end{pmatrix}$$

Obsérvese que no es cierto que todas las elevaciones de una conexión generalizada de un cierto tipo sean conexiones generalizadas de ese mismo tipo.

Vamos a hallar ahora la expresión local de una conexión infinitesimal en el fibrado $\gamma: A \rightarrow B$. El siguiente teorema da la expresión buscada:

Proposición 2.5.: Una conexión infinitesimal en el fibrado $\gamma: A \rightarrow B$ es una conexión generalizada \bar{F} cuya expresión local es del tipo

$$\bar{F} = \begin{pmatrix} \delta_j^i & 0 & 0 & 0 \\ C_j^\alpha & -\delta_B^\alpha & M_\mu^\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \delta_\mu^\lambda & 0 \\ \bar{v}_j^\sigma & 0 & B_\mu^\sigma & -\delta_\tau^\sigma \end{pmatrix}$$

Demostración.

Por la proposición 0.4. hay que probar que $\bar{F}^2 = id$ y que para todo punto p de A el subespacio de $T_p A$ correspondiente al valor propio -1 es $V_p A$.

Lo primero se comprueba de modo inmediato.

Para lo segundo, fijemos $p = (x^i, a_1^\alpha, g^\lambda, b_1^\sigma)$ e A e impongamos la condición

$$\bar{F}(x^i, a_1^\alpha, g^\lambda, b_1^\sigma, c^i, a_2^\alpha, d^\lambda, b_2^\sigma) = (x^i, a_1^\alpha, g^\lambda, b_1^\sigma, -c^i, -a_2^\alpha, -d^\lambda, -b_2^\sigma)$$

Por la expresión local de \bar{F} , resulta que

$$\bar{F}(x^i, a_1^\alpha, g^\lambda, b_1^\sigma, c^i, a_2^\alpha, d^\lambda, b_2^\sigma) =$$

$$= (x^j, a_1^\alpha, g^\lambda, b_1^\sigma, \delta_j^i c^j, C_j^\alpha c^j - \delta_B^\alpha a_2^\alpha - M_\mu^\alpha d^\mu, \delta_\mu^\lambda d^\mu, \bar{v}_j^\sigma c^j + B_\mu^\sigma d^\mu - \delta_\tau^\sigma b_2^\sigma) =$$

$$= (x^i, a_1^\alpha, g^\lambda, b_1^\sigma, c^i, C_j^\alpha c^j - a_2^\alpha - M_\mu^\alpha d^\mu, d^\lambda, \bar{v}_j^\sigma c^j + B_\mu^\sigma d^\mu - b_2^\sigma)$$

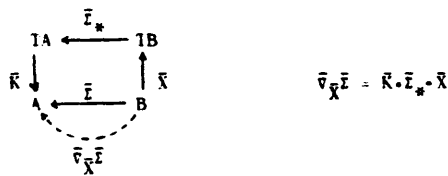
La condición buscada entonces es que para todo (c, a_2, d, b_2) de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^t$ se verifiquen las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} -c^i &= c^i \\ -a_2^\alpha &= C_j^\alpha c^j - a_2^\alpha + M_\nu^\alpha d^\nu \\ -d^\lambda &= d^\lambda \\ -b_2^\sigma &= \bar{v}_j^\sigma c^j + B_\nu^\sigma d^\nu - b_2^\sigma \end{aligned}$$

La primera y tercera condiciones imponen que $c = 0 = d$, y entonces, la segunda y la cuarta no suponen ninguna restricción. Estas condiciones son las que cumplen los elementos de VA, como vimos al principio de esta sección § 2.2.1.

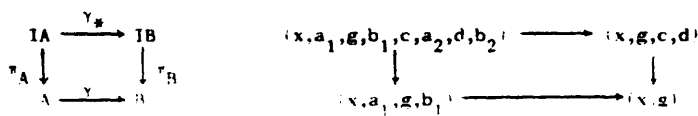
qed

Vamos a ampliar nuestro conocimiento de la expresión local de una conexión infinitesimal en $\gamma: A \rightarrow B$, vinculando la expresión local de la aplicación de conexión y la de la proposición precedente. Estudiemos la derivada covariante de una conexión infinitesimal: Viene dada por el siguiente diagrama (ver § 0.3.3.)



siendo \bar{E} una sección de $\gamma: A \rightarrow B$ y $\bar{X} \in T_0^1(B)$

Recordo que localmente se tiene



y que

$$\begin{aligned} \bar{K} &= (x, a_1, g, b_1, c, a_2, d, b_2) \\ \bar{X} &= (x, a_2, \bar{v}_1(x, a_1, g, b_1)(c, d), g, b_2, \bar{v}_2(x, a_1, g, b_1)(c, d)) \end{aligned}$$

Esta expresión se obtiene mediante el isomorfismo

$$: (R^n \times R^S \times R^r \times R^t \rightarrow R^n \times R^S \times R^r \rightarrow R^n \times R^S \times R^t$$

que permite escribir

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) : U^n \times R^r \times G^S \times R^t \longrightarrow L(R^n \times R^S, R^r \times R^t) \cong L(R^n \times R^S, R^r) \times L(R^n \times R^S, R^t)$$

Ahora bien, si además consideramos los isomorfismos

$$L(R^n \times R^S, R^r) \cong L(R^n; R^r) \times L(R^S, R^r)$$

$$L(R^n \times R^S, R^t) \cong L(R^n, R^t) \times L(R^S, R^t)$$

podemos representar

$$\alpha = ((\alpha_{11} \times \alpha_{12}), (\alpha_{21} \times \alpha_{22})) : U^n \times R^r \times G^S \times R^t \longrightarrow \\ \longrightarrow (L(R^n, R^r) \times L(R^S, R^r)) \times (L(R^n, R^t) \times L(R^S, R^t))$$

y se expresarán localmente del siguiente modo:

$$\alpha_{11} : U^n \times R^r \times G^S \times R^t \longrightarrow L(R^n, R^r)$$

$$\alpha_{11}(x, a_1, g, b_1) c = (\alpha_{11}^0(x, a_1, g, b_1) c) = (\alpha_{111}^0(x, a_1, g, b_1) c^i)$$

$$\alpha_{12} : U^n \times R^r \times G^S \times R^t \longrightarrow L(R^S, R^r)$$

$$\alpha_{12}(x, a_1, g, b_1) d = (\alpha_{12}^0(x, a_1, g, b_1) d) = (\alpha_{12\lambda}^0(x, a_1, g, b_1) d^\lambda)$$

$$\alpha_{21} : U^n \times R^r \times G^S \times R^t \longrightarrow L(R^n, R^t)$$

$$\alpha_{21}(x, a_1, g, b_1) c = (\alpha_{21}^0(x, a_1, g, b_1) c) = (\alpha_{21i}^0(x, a_1, g, b_1) c^i)$$

$$\alpha_{22} : U^n \times R^r \times G^S \times R^t \longrightarrow L(R^S, R^t)$$

$$\alpha_{22}(x, a_1, g, b_1) d = (\alpha_{22}^0(x, a_1, g, b_1) d) = (\alpha_{22\lambda}^0(x, a_1, g, b_1) d^\lambda)$$

Así, la expresión local de la aplicación de conexión es la siguiente

$$\tilde{\kappa}(x, a_1, g, b_1, c, a_2, d, b_2) = \begin{pmatrix} x^1, a_2^0 & \alpha_{111}^0(x, a_1, g, b_1) c^j & \alpha_{12\lambda}^0(x, a_1, g, b_1) d^\lambda \\ g, b_2^0 & \alpha_{21i}^0(x, a_1, g, b_1) c^i & \alpha_{22\lambda}^0(x, a_1, g, b_1) d^\lambda \end{pmatrix}$$

...

Calculemos la expresión de la derivada covariante. Sean

$$\bar{E}(x^i, g^\lambda) = (x^i, \bar{E}_1^\alpha, g^\lambda, \bar{E}_2^\sigma)$$

$$\bar{X}(x^i, g^\lambda) = (x^i, g^\lambda, \bar{X}_1^i, \bar{X}_2^\lambda)$$

Entonces $\bar{E}_* : TB \rightarrow TA$ actúa del siguiente modo:

$$\begin{aligned} \bar{E}_* \bar{X} &= \bar{E}_*(x^i, g^\lambda, \bar{X}_1^i, \bar{X}_2^\lambda) = \\ &= (x^i, \bar{E}_1^\alpha, g^\lambda, \bar{E}_2^\sigma, \bar{X}_1^i, \frac{\partial \bar{E}_1^\alpha}{\partial x^i} \bar{X}_1^i + \frac{\partial \bar{E}_1^\alpha}{\partial g^\lambda} \bar{X}_2^\lambda, \frac{\partial \bar{E}_2^\sigma}{\partial x^i} \bar{X}_1^i + \frac{\partial \bar{E}_2^\sigma}{\partial g^\lambda} \bar{X}_2^\lambda) \end{aligned}$$

Y, finalmente,

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{E} &= \bar{R} \bar{E}_* \bar{X} = \\ &= (x^i, \frac{\partial \bar{E}_1^\alpha}{\partial x^i} \bar{X}_1^i + \frac{\partial \bar{E}_1^\alpha}{\partial g^\lambda} \bar{X}_2^\lambda + \Omega_{11i}^\alpha(x, \bar{E}_1, g, \bar{E}_2) \bar{X}_1^i - \Omega_{12\lambda}^\alpha(x, \bar{E}_1, g, \bar{E}_2) \bar{X}_2^\lambda, \\ &g^\lambda, \frac{\partial \bar{E}_2^\sigma}{\partial x^i} \bar{X}_1^i + \frac{\partial \bar{E}_2^\sigma}{\partial g^\lambda} \bar{X}_2^\lambda + \Omega_{21i}^\sigma(x, \bar{E}_1, g, \bar{E}_2) \bar{X}_1^i + \Omega_{22\lambda}^\sigma(x, \bar{E}_1, g, \bar{E}_2) \bar{X}_2^\lambda). \end{aligned}$$

De la proposición 2.5. y de los razonamientos que acabamos de hacer se sigue la

Proposición 2.6.: Con la notación precedente, una conexión infinitesimal en $\gamma: A \rightarrow B$ tiene como expresión matricial

$$\bar{F} = \begin{pmatrix} \delta_j^i & 0 & 0 & 0 \\ -2\Omega_{11j}^\alpha & -\delta_8^\alpha & -2\Omega_{12\mu}^\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \delta_\mu^\lambda & 0 \\ -2\Omega_{21j}^\sigma & 0 & -2\Omega_{22\mu}^\sigma & -\delta_\tau^\sigma \end{pmatrix}$$

Demostración.

La idea de la misma consiste en partir de la expresión hallada en la proposición 2.5. y obtener la derivada covariante asociada a \bar{F} como conexión generalizada. Y, haciendo uso de la igualdad de las derivadas covariantes inducidas por la conexión considerada como generalizada y como infinitesimal

(igualdad que probamos en § 0.4.2.) obtendremos la igualdad de las expresiones de las proposiciones 2.5. y 2.6.

Sea

$$\bar{F} = \begin{pmatrix} \delta_j^i & 0 & 0 & 0 \\ C_j^a & -\delta_B^a & \bar{M}_\nu^a & 0 \\ 0 & 0 & \delta_\nu^\lambda & 0 \\ \bar{v}_j^\sigma & 0 & \bar{B}_\nu^\sigma & -\delta_\tau^\sigma \end{pmatrix}$$

y sean \bar{E} sección de $\gamma: A \rightarrow B$ y $\bar{X} \in T_0^1(B)$. Hallemos la expresión local del morfismo $\bar{D}(\bar{F}): A \rightarrow TA$

$$\bar{D}(\bar{F}) = (\bar{E}_* \gamma_* \bar{F} - \bar{F}) \circ \bar{E}_* \bar{X} \circ \gamma$$

Hallamos ordenadamente los términos que intervienen en esa relación.

$$\gamma(x, a_1, g, b_1) = (x, g)$$

$$\bar{E}_* \bar{X} \circ \gamma(x, a_1, g, b_1) = (x^i, \bar{E}_1^\alpha, g^\lambda, \bar{E}_2^\sigma, \bar{X}_1^i, \frac{\partial \bar{E}_1^\alpha}{\partial x^i} \bar{X}_1^i + \frac{\partial \bar{E}_1^\alpha}{\partial g^\lambda} \bar{X}_2^\lambda, \bar{X}_2^\lambda, \frac{\partial \bar{E}_2^\sigma}{\partial x^i} \bar{X}_1^i + \frac{\partial \bar{E}_2^\sigma}{\partial g^\lambda} \bar{X}_2^\lambda)$$

$$\bar{F} \circ \bar{E}_* \bar{X} \circ \gamma(x, a_1, g, b_1) = (x^i, \bar{E}_1^\alpha, g^\lambda, \bar{E}_2^\sigma, \bar{X}_1^i,$$

$$C_j^a(x, \bar{E}_1, g, \bar{E}_2) \bar{X}_1^i - \frac{\partial \bar{E}_1^\alpha}{\partial x^i} \bar{X}_1^i - \frac{\partial \bar{E}_1^\alpha}{\partial g^\lambda} \bar{X}_2^\lambda + \bar{M}_\lambda^a(x, \bar{E}_1, g, \bar{E}_2) \bar{X}_2^\lambda, \bar{X}_2^\lambda,$$

$$\bar{v}_i^\sigma(x, \bar{E}_1, g, \bar{E}_2) \bar{X}_1^i + \bar{B}_\lambda^\sigma(x, \bar{E}_1, g, \bar{E}_2) \bar{X}_2^\lambda - \frac{\partial \bar{E}_2^\sigma}{\partial x^i} \bar{X}_1^i - \frac{\partial \bar{E}_2^\sigma}{\partial g^\lambda} \bar{X}_2^\lambda).$$

con lo que obtenemos

$$\bar{E}_* \gamma_* \bar{F} \circ \bar{E}_* \bar{X} \circ \gamma(x, a_1, g, b_1) =$$

$$= (x^i, \bar{E}_1^\alpha, g^\lambda, \bar{E}_2^\sigma, \bar{X}_1^i, \frac{\partial \bar{E}_1^\alpha}{\partial x^i} \bar{X}_1^i + \frac{\partial \bar{E}_1^\alpha}{\partial g^\lambda} \bar{X}_2^\lambda, \bar{X}_2^\lambda, \frac{\partial \bar{E}_2^\sigma}{\partial x^i} \bar{X}_1^i + \frac{\partial \bar{E}_2^\sigma}{\partial g^\lambda} \bar{X}_2^\lambda)$$

que nos permite averiguar la expresión de $\bar{D}(\bar{F})$:

$$\begin{aligned} \bar{D}(\bar{F})(x, a_1, g, b_1) &= \\ &= (x^i, \bar{E}_1^\alpha, g^\lambda, \bar{E}_2^\sigma, 0, 2(\frac{\partial \bar{F}_1^\alpha}{\partial x^i} \bar{X}_1^i + \frac{\partial \bar{F}_1^\alpha}{\partial g^\lambda} \bar{X}_2^\lambda) - \bar{C}_i^\alpha(x, \bar{E}_1, g, \bar{E}_2) \bar{X}_1^i - \bar{K}_\lambda^\alpha(x, \bar{E}_1, g, \bar{E}_2) \bar{X}_2^\lambda, \\ &\quad \cdot (\frac{\partial \bar{F}_2^\sigma}{\partial x^i} \bar{X}_1^i + \frac{\partial \bar{F}_2^\sigma}{\partial g^\lambda} \bar{X}_2^\lambda) - \bar{V}_i^\sigma(x, \bar{E}_1, g, \bar{E}_2) \bar{X}_1^i - \bar{B}_\lambda^\sigma(x, \bar{E}_1, g, \bar{E}_2) \bar{X}_2^\lambda) . \end{aligned}$$

Por lo tanto, como $\bar{v}_{\bar{X}} \bar{F} = \frac{1}{2} \bar{\rho} \cdot \bar{D}(\bar{F}) \cdot \bar{E}'$, siendo \bar{E}' una sección cualquiera de γ , resulta que

$$\begin{aligned} \bar{v}_{\bar{X}} \bar{F} &= \\ &= (x^i, \frac{\partial \bar{F}_1^\alpha}{\partial x^i} \bar{X}_1^i + \frac{\partial \bar{F}_1^\alpha}{\partial g^\lambda} \bar{X}_2^\lambda - \frac{1}{2} \bar{C}_i^\alpha(x, \bar{E}_1, g, \bar{E}_2) \bar{X}_1^i - \frac{1}{2} \bar{K}_\lambda^\alpha(x, \bar{E}_1, g, \bar{E}_2) \bar{X}_2^\lambda, \\ &\quad g^\lambda, \frac{\partial \bar{F}_2^\sigma}{\partial x^i} \bar{X}_1^i + \frac{\partial \bar{F}_2^\sigma}{\partial g^\lambda} \bar{X}_2^\lambda - \frac{1}{2} \bar{V}_i^\sigma(x, \bar{E}_1, g, \bar{E}_2) \bar{X}_1^i - \frac{1}{2} \bar{B}_\lambda^\sigma(x, \bar{E}_1, g, \bar{E}_2) \bar{X}_2^\lambda) . \end{aligned}$$

Comparando esta expresión con la que obtuvimos antes de enunciar esta proposición, resulta que

$$\begin{aligned} \bar{C}_j^\alpha &= -2\alpha_{11j}^\alpha & \bar{M}_\mu^\alpha &= -2\alpha_{12\mu}^\alpha \\ \bar{V}_j^\sigma &= -2\alpha_{21j}^\sigma & \bar{B}_\mu^\sigma &= -2\alpha_{22\mu}^\sigma \end{aligned}$$

que es lo que queríamos probar.

qed

Recordando la relación $F = h - V$ (ver § 0.3.1.) se obtiene de modo inmediato la expresión local de la proyección horizontal y la de la vertical de una conexión infinitesimal. En efecto:

Corolario. Sea una conexión infinitesimal \bar{F} en $\gamma: A \rightarrow B$, de componentes locales $\alpha_1 = \alpha_{11} + \alpha_{12}$ y $\alpha_2 = \alpha_{21} + \alpha_{22}$. Sean \bar{h} y \bar{V} las proyecciones horizontal y vertical asociadas a \bar{F} . Entonces sus expresiones locales son:

$$\bar{h} = \begin{pmatrix} \delta_{ij}^j & 0 & 0 & 0 \\ -a_{11j}^a & 0 & -a_{12\mu}^a & 0 \\ 0 & 0 & \delta_{\mu}^{\lambda} & 0 \\ -a_{21j}^a & 0 & -a_{22\mu}^a & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(\bar{F} + I)$$

$$\bar{v} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{11j}^a & \delta_B^a & a_{12\mu}^a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21j}^a & 0 & a_{22\mu}^a & \delta_T^a \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(I - \bar{F})$$

2. Elevación de conexiones infinitesimales.

El único resultado que compone esta sección, la proposición 2.7., es de gran importancia: da la condición local para que una conexión infinitesimal \bar{F} en $\gamma: A \rightarrow B$ sea elevación de una conexión infinitesimal dada en $\pi: C \rightarrow D$ (respecto de un buen cuadrado también fijado). La importancia mencionada radica en el hecho de que en el capítulo 3 se estudiará la elevación de conexiones infinitesimales, sin necesidad de utilizar las conexiones generalizadas, y esta proposición 2.7. será la que asegure que ambas construcciones son equivalentes.

La demostración de la proposición que vamos a enunciar se sigue de la expresión local de las elevaciones, dada por la proposición 2.4., y de la de las conexiones infinitesimales obtenida en 2.6.

Proposición 2.7.: Sea un buen cuadrado de fibrados

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\gamma} & B \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \beta \\ C & \xrightarrow{\tau} & D \end{array}$$

y sean τ una conexión infinitesimal en $\tau: C \rightarrow D$ de componente local $\omega = (\omega_j^i)$ y $\bar{\tau}$ una conexión infinitesimal en $\gamma: A \rightarrow B$ de componente local $\bar{\omega} = (\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2) = (\bar{\omega}_{11} + \bar{\omega}_{12}, \bar{\omega}_{21} + \bar{\omega}_{22})$. Entonces $\bar{\tau}$ es elevación de τ (consideradas como conexiones generalizadas) si y sólo si en las correspondientes cartas inducidas están ligadas por la relación

$$\bar{\omega}_1(x, a_1, g, b_1)(c, d) = \omega(x, a_1)c$$

esto es

$$\bar{\omega}_{11}(x, a_1, g, b_1)c = \omega(x, a_1)c$$

y

$$\bar{\omega}_{12}(x, a_1, g, b_1)d = 0$$

Demostración.

Las expresiones matriciales de F y \bar{F} (esto es, de τ y $\bar{\tau}$ consideradas como conexiones generalizadas) son

$$F = \begin{pmatrix} \delta_j^i & 0 \\ -2\omega_j^a & -\delta_B^a \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \bar{F} = \begin{pmatrix} \delta_j^i & 0 & 0 & 0 \\ -2\bar{\omega}_{11j}^a & -\delta_B^a & -2\bar{\omega}_{12\mu}^a & 0 \\ 0 & 0 & \delta_\mu^\lambda & 0 \\ -2\bar{\omega}_{21j}^a & 0 & -2\bar{\omega}_{22\mu}^a & -\delta_\tau^a \end{pmatrix}$$

(la expresión de \bar{F} es la obtenida en la proposición 2.6.)

Entonces, por la proposición 2.5., resulta que \bar{F} es elevación de F si

$$-2\bar{\omega}_{11j}^a(x, a_1, g, b_1)c^j = -2\omega_j^a(x, a_1)c^j$$

$$-2\bar{\omega}_{12\mu}^a(x, a_1, g, b_1)d^\mu = 0$$

Por lo tanto resulta que

$$\bar{\omega}_1(x, a_1, g, b_1)(c, d) = \bar{\omega}_{11}(x, a_1, g, b_1)c + \bar{\omega}_{12}(x, a_1, g, b_1)d =$$

$$= \alpha_{11}(x, a_1, g, b_1)c = \omega(x, a_1)c.$$

qed

3. Conexiones inducidas en el producto fibrado.

Consideremos el buen cuadrado (ver proposición 1.2.) definido por

$$\begin{array}{ccc} \nu^{-1}(B) & \xrightarrow{\gamma} & B \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \beta \\ C & \xrightarrow{\nu} & D \end{array}$$

donde $\nu: C \rightarrow D$ es un fibrado vectorial y $\gamma: B \rightarrow D$ es un fibrado localmente trivial.

Como vimos en la demostración de la proposición 1.2., su expresión local es

$$\begin{array}{ccc} U^n \times R^r \times G^s & \longrightarrow & U^n \times G^s & & (x, a, g) & \longrightarrow & (x, g) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ U^n \times R^r & \longrightarrow & U^n & & (x, a) & \longrightarrow & x \end{array}$$

Entonces, sin más que olvidar lo que afecte al factor R^t en las definiciones generales, resulta en este caso que una conexión generalizada \bar{F} en $\nu: \nu^{-1}(B) \rightarrow B$ viene dada por

$$\bar{F} = \begin{pmatrix} \bar{C}_j^i & \bar{C}_B^i & \bar{g}_\mu^i \\ \bar{C}_j^a & \bar{C}_B^a & \bar{g}_\mu^a \\ \bar{\nu}_j^\lambda & \bar{\nu}_B^\lambda & \bar{B}_\mu^\lambda \end{pmatrix}$$

y que las conexiones particulares vienen dadas por

F conexión fibrada

$$F = \begin{pmatrix} C_j^i & 0 & M_j^i \\ \nabla_j^\alpha & C_B^\alpha & \nabla_B^\alpha \\ \bar{\nabla}_j^\lambda & 0 & \bar{\nabla}_B^\lambda \end{pmatrix}$$

F pseudoconexión

$$F = \begin{pmatrix} C_j^i & 0 & M_j^i \\ \nabla_j^\alpha & 0 & \nabla_B^\alpha \\ \bar{\nabla}_j^\lambda & 0 & \bar{\nabla}_B^\lambda \end{pmatrix}$$

F fere-conexión

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ C_j^\alpha & C_B^\alpha & \nabla_B^\alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

F conexión infinitesimal

$$F = \begin{pmatrix} \delta_j^i & 0 & 0 \\ -2\alpha_{11j}^\alpha & -\delta_B^\alpha & -2\alpha_{12\mu}^\alpha \\ 0 & 0 & \delta_\mu^\lambda \end{pmatrix}$$

Por otra parte, en virtud de la proposición 2.4., dada una conexión generalizada F en $\gamma: C \rightarrow D$ de expresión local

$$F = \begin{pmatrix} C_j^i & M_B^i \\ \nabla_j^\alpha & B_B^\alpha \end{pmatrix}$$

resulta que una conexión generalizada \bar{F} en $\gamma: \pi^{-1}(B) \rightarrow B$ es elevación de F si y sólo si su expresión local es

$$\bar{F} = \begin{pmatrix} C_j^i & M_B^i & 0 \\ \nabla_j^\alpha & B_B^\alpha & 0 \\ \bar{\nabla}_j^\lambda & \bar{\nabla}_B^\lambda & \bar{B}_\mu^\lambda \end{pmatrix}$$

El resultado que buscamos es dar una definición canónica de elevación en alguno de estos casos. Así obtenemos la siguiente proposición:

Proposición 2.8.:

(a) Sea F_1 una conexión infinitesimal en $\pi: C \rightarrow D$. Entonces existe una única conexión infinitesimal \bar{F}_1 en $\gamma: \pi^{-1}(B) \rightarrow B$ que sea elevación de F_1 . Sus expresiones locales son:

$$F_1 = \begin{pmatrix} \delta_j^i & 0 \\ -2\omega_j^\alpha & -\delta_B^\alpha \end{pmatrix} ; \bar{F}_1 = \begin{pmatrix} \delta_j^i & 0 & 0 \\ -2\omega_j^\alpha & -\delta_B^\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \delta_\mu^\lambda \end{pmatrix}$$

(b) Sea F_2 una fere-conexión en $\pi: C \rightarrow D$. Entonces existe una única fere-conexión \bar{F}_2 en $\gamma: \pi^{-1}(B) \rightarrow B$ que sea elevación de F_2 . Sus expresiones locales son:

$$F_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \nu_j^\alpha & \delta_B^\alpha \end{pmatrix} ; \bar{F}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \nu_j^\alpha & \delta_B^\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Demostración.

La unicidad queda garantizada por la proposición 2.4. , como hemos comentado antes de enunciar ésta.

La existencia se demuestra comprobando que \bar{F}_1 y \bar{F}_2 son ciertamente campos tensoriales de tipo (1,1), supuesto que lo son F_1 y F_2 . La demostración para \bar{F}_2 es trivial, pues tiene los mismos cambios de carta que F_2 . Y para \bar{F}_1 también, pues el término

$$\frac{\partial}{\partial g^\lambda} \otimes \delta_\mu^\lambda dg^\mu$$

es invariante por cambios de cartas.

qed

Observación. Para las pseudoconexiones no se puede garantizar el resultado análogo, porque dada una pseudoconexión en $\pi: C \rightarrow D$ de expresión local

$$F = \begin{pmatrix} C_j^i & 0 \\ \nu_j^\alpha & 0 \end{pmatrix}$$

cualquier pseudoconexión del tipo

$$\begin{pmatrix} C_j^i & 0 & 0 \\ \nu_j^\alpha & 0 & 0 \\ \bar{\nu}_j^\lambda & 0 & \bar{B}_\mu^\lambda \end{pmatrix}$$

sería elevación de la anterior. Un modo de definir una elevación canónica sería el considerar la elevación

$$F = \begin{pmatrix} C_j^i & 0 & 0 \\ r_j^a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_{\mu}^{\lambda} \end{pmatrix}$$

Observación. Además la proposición anterior cuando da unicidad es para elevaciones que sean del mismo tipo. En general, habrá muchas conexiones generalizadas que sean elevación de una conexión infinitesimal dada o de una fere-conexión dada.

El motivo por el que hemos buscado este tipo de resultado es el siguiente: existe un resultado análogo para fibrados principales (cfr. [33], tras la proposición II.6.2.) , enunciado por Kobayashi y Nomizu, que establece que dados un fibrado principal $P(M,G)$ y una aplicación $f: M' \rightarrow M$, toda conexión en P define una conexión en el fibrado inducido $f^{-1}(P)$. Con nuestra notación, este resultado puede ser considerado como un ejemplo de elevación canónica.

§ 2.3. CUESTIONES DE EXISTENCIA Y UNICIDAD.

Como hemos visto, es la proposición 2.4. la que da las condiciones locales que deben verificar sendas conexiones F y \tilde{F} para que la segunda sea elevación de la primera. El problema más natural que se plantea al obtener esa expresión es el de existencia y unicidad de las elevaciones. Y la respuesta es, en ambos casos, negativa.

Existencia: dada una conexión generalizada F , localmente se pueden definir muchas \tilde{F} que verifiquen la proposición 2.4. Sin embargo queda pendiente el probar que ciertamente esas \tilde{F} verifiquen la ley del cambio de cartas de un campo tensorial de tipo $(1,1)$ y sean realmente conexiones generalizadas. Además, y en cualquier caso, la elevación resulta interesante cuando \tilde{F} verifica alguna buena propiedad. En la sección § 2.2. acabamos de probar un caso interesante de existencia (y unicidad) de elevaciones. El capítulo 4 está dedicado por entero a dar ejemplos de elevaciones conocidas, expresados de acuerdo con la teoría aquí expuesta.

Unicidad: hemos visto cómo en ciertas condiciones se puede alcanzar (ver proposición 2.5.). Sin embargo, en general no se tiene unicidad e. incluso, veremos cómo dos conexiones distintas (las elevaciones completa y horizontal al fibrado tangente) son elevación de una misma conexión respecto de un mismo buen cuadrado (ver § 4.1.). Lo interesante no es tanto obtener la unicidad como el que la elevación goce de buenas propiedades.

El punto de vista seguido en este capítulo 2 es el global, buscando propiedades comunes a todas las elevaciones. Esto nos ha permitido abordar de modo conjunto las dos estructuras más frecuentes: las conexiones infinitesimales y las pseudoconexiones. Así, el capítulo 3 se consagrará al estudio de las conexiones infinitesimales, y en el 4 veremos, como aplicación, elevación de pseudoconexiones (sección § 4.2.) y de conexiones infinitesimales.

Como es lógico, al restringirnos a las conexiones infinitesimales obtendremos muchas más propiedades. Además, nuestro planteamiento permite estudiarlas autónomamente, sin necesidad de las generalizadas.

Y las pseudoconexiones tienen como ejemplo más rico de elevación el de las elevaciones al fibrado de n -jets. Esta construcción ha sido efectuada de-

-05-

talladamente en [15] y [10]. En la sección § 4.2. recogeremos algunos de los resultados allí obtenidos y los vincularemos con la teoría de elevaciones en buenos cuadrados.

CAPITULO 3. ELEVACION DE CONEXIONES INFINITESIMALES .

Estudiamos en este capítulo la elevación de conexiones infinitesimales en un buen cuadrado, considerando que tanto la conexión dada como sus elevaciones son infinitesimales. En la proposición 2.7. del capítulo precedente ya obtuvimos la expresión local que han de tener las conexiones infinitesimales elevadas. Ahora queremos llegar a ese mismo resultado (llegaremos en la proposición 3.4.), definiendo la elevación de conexiones infinitesimales sin utilizar el marco global de las conexiones generalizadas. El proceso será bastante más largo, pero reportará dos ventajas: la obtención de una definición "natural" propia, que no precise del uso de la poca difundida noción de conexión generalizada y conllevará un conocimiento más profundo de las relaciones que existen entre la conexión dada y la elevada.

Como dijimos en § 2.3. , al concretar nuestro estudio, reduciéndolo a las conexiones infinitesimales, obtendremos mayor riqueza de propiedades, en especial, en lo que se refiere a curvaturas y torsiones. Finalmente, de modo análogo a lo que ocurre entre conexiones generalizadas e infinitesimales, se tiene una relación entre infinitesimales y no homogéneas: éstas son las infinitesimales en variedades. Por ello podría pensarse una elevación particular para conexiones no homogéneas, y, efectivamente, tal definición existe y coincide con la restricción de la que aquí damos, como veremos en el epígrafe § 3.3.

Quisiera indicar también que algunos de los resultados de este capítulo y algunos de los ejemplos del próximo han sido presentados como comunicación en el VI International Colloquium on Differential Geometry. [20].

§ 3.1. PROPIEDADES GENERALES.

1. Definiciones y su equivalencia.

Supongamos dado un buen cuadrado

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\gamma} & B \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \beta \\ C & \xrightarrow{\nu} & D \end{array}$$

y sendas conexiones infinitesimales, $\bar{\Gamma}$ en $\gamma: A \rightarrow B$ y Γ en $\nu: C \rightarrow D$. Entonces si \bar{K} y \bar{V} son las aplicaciones de conexión y escisión definidas por $\bar{\Gamma}$ y K y V las definidas por Γ , tenemos las siguientes sucesiones exactas para $\bar{\Gamma}$

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & VA & \xrightarrow{\bar{\Gamma}} & TA & \xrightarrow{\gamma'} & \gamma^{-1}(TB) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \bar{\rho} & \swarrow \bar{V} & \searrow \bar{K} & & \\ & & & A & & & \end{array}$$

y para Γ

$$\begin{array}{ccccccc} & & & C & & & \\ & & \rho \swarrow & & \searrow K & & \\ 0 & \longrightarrow & VC & \xrightarrow{\Gamma} & TC & \xrightarrow{\nu'} & \nu^{-1}(TD) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \bar{\rho} & \swarrow V & \searrow K & & \\ & & & C & & & \end{array}$$

La colocación de los diagramas no es caprichosa; tratamos de obtener la siguiente definición de elevación: $\bar{\Gamma}$ será elevación de Γ si existen morfismos verticales "naturales" que cierren el diagrama haciéndolo conmutativo.

Antes de continuar, hago mención de que esta búsqueda la hacemos planteando el problema con la primera definición de conexión infinitesimal que dimos en § 0.3.1. Veremos en la proposición 3.1. que cualquier otro modo de definir una conexión infinitesimal conduce a la misma definición de elevación.

Describimos cuidadosamente el camino para llegar a la definición de elevación. El proceso será un poco largo, porque lo hacemos todavía sin emplear coordenadas locales. Señalamos los tres pasos en que lo dividimos hasta llegar a la definición.

Entonces se tiene que

$$\gamma \circ \gamma_1 = \pi_B \circ \gamma_2 \implies \beta \circ \gamma \circ \gamma_1 = \beta \circ \pi_B \circ \gamma_2 \implies \pi_D \circ \gamma_1 = \pi_D \circ \beta \circ \gamma_2$$

que es lo que queríamos probar.

Y por la propiedad universal del producto fibrado existe entonces

$$\beta' : \gamma^{-1}(TB) \rightarrow \pi^{-1}(TD)$$

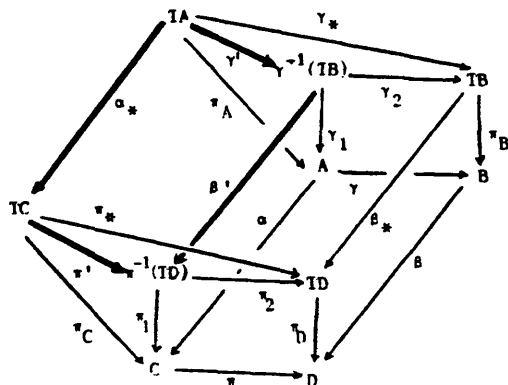
tal que

$$\pi_2 \circ \beta' = (\beta \circ \gamma_2) \quad \text{y} \quad \pi_1 \circ \beta' = (\alpha \circ \gamma_1)$$

Segundo paso: Conmutatividad $\beta' \circ \gamma' = \pi' \circ \alpha_*$

Para probarla consideramos el siguiente diagrama, que amplía el precedente:

Obsérvese que en principio conmutan todos los cuadrados y triángulos salvo el señalado con trazo fuerte, que es precisamente el que nos interesa estudiar. (Detallaremos la conmutatividad de todo el diagrama después de dibujarlo).



El diagrama que vimos en el paso primero era conmutativo. Los triángulos que hemos añadido también lo son por la propiedad universal de los productos fibrados aplicada a los morfismos π' y γ' :

$$\begin{aligned} \pi_# &= \pi_2 \circ \pi' & \text{y} & & \pi_C &= \pi_1 \circ \pi' \\ \gamma_# &= \gamma_2 \circ \gamma' & \text{y} & & \pi_A &= \gamma_1 \circ \gamma' \end{aligned}$$

Y también es conmutativo el cuadrado

$$\beta_{\#} \cdot \gamma_{\#} = \alpha_{\#} \cdot \pi_{\#}$$

por la propiedad (3) de buen cuadrado ($\beta\gamma = \alpha\pi$) y, de modo trivial, el cuadrado

$$\pi_C \cdot \alpha_{\#} = \alpha \cdot \pi_A$$

Veamos la conmutatividad deseada $\pi' \cdot \alpha_{\#} = \beta' \cdot \gamma'$:

Como $\pi^{-1}(TD) \subset C \times TD$ y π_1 y π_2 son las dos proyecciones de $C \times TD$ en C y en TD , bastará probar que

$$\begin{aligned} \pi_1(\pi' \cdot \alpha_{\#}) &= \pi_1(\beta' \cdot \gamma') \\ \text{y} \\ \pi_2(\pi' \cdot \alpha_{\#}) &= \pi_2(\beta' \cdot \gamma') \end{aligned}$$

Pues bien, tenemos

$$\pi_1 \cdot \beta' \cdot \gamma' = \alpha \cdot \gamma_1 \cdot \gamma' = \alpha \cdot \pi_A = \pi_C \cdot \alpha_{\#} = \pi_1 \cdot \pi' \cdot \alpha_{\#}$$

$$\pi_2 \cdot \beta' \cdot \gamma' = \beta_{\#} \cdot \gamma_2 \cdot \gamma' = \beta_{\#} \cdot \gamma_{\#} = \pi_{\#} \cdot \alpha_{\#} = \pi_2 \cdot \pi' \cdot \alpha_{\#}$$

como queríamos.

Tercer paso: Comprobación de que $\alpha_{\#}(VA) \subset VC$

Nos basamos en el paso anterior y en que

$$VA = \ker \gamma_{\#} = \ker \gamma'$$

$$VC = \ker \pi_{\#} = \ker \pi'$$

como vimos en § 0.1.1.

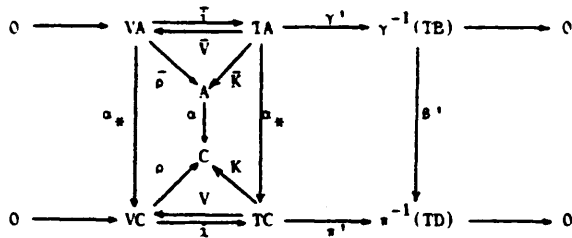
Entonces se sigue el resultado de modo trivial:

$$p \in VA = \ker \gamma' \Rightarrow p \in \ker (\beta' \cdot \gamma') = \ker (\pi' \cdot \alpha_{\#}) \Rightarrow \alpha_{\#}(p) \in \ker \pi' = VC.$$

Conclusión:

Con estos tres pasos hemos podido definir todos los morfismos buscados al comienzo de esta sección (los que cierran las sucesiones exactas definidas por las conexiones en γ y en π). Obsérvese que para esta construcción no hemos empleado ninguna conexión.

Obtenemos el siguiente diagrama:



Como hemos visto en el segundo paso, conmuta el cuadrado de la derecha $\beta', \gamma' = \pi' \circ a_*$. También conmuta el cuadrado $a_* \cdot \bar{\rho} = \rho \circ a_*$, por ser $\bar{\rho}$ e ρ inclusiones. Y también lo hace $a_* \cdot \bar{K} = K \circ a_*$, por la propiedad (5) de buen cuadrado (y nuevamente vemos la utilidad de haber mencionado explícitamente esta propiedad).

Las anteriores igualdades han sido establecidas independientemente de las conexiones que se quisieran considerar.

Dadas sendas conexiones, si conmutara

$$a_* \cdot \bar{V} = V \circ a_*$$

también lo haría

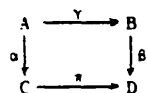
$$a_* \cdot \bar{K} = K \circ a_*$$

pues resultaría

$$a_* \cdot \bar{K} = a_* \cdot \bar{\rho} \cdot \bar{V} = \rho \circ a_* \cdot \bar{V} = \rho \circ V \circ a_* = K \circ a_*$$

Por lo tanto, para que conmute todo el diagrama anterior sólo es preciso que lo haga $a_* \cdot \bar{V} = V \circ a_*$. Esto nos permite dar la siguiente

Definición 3.1. Sea un buen cuadrado de fibrados

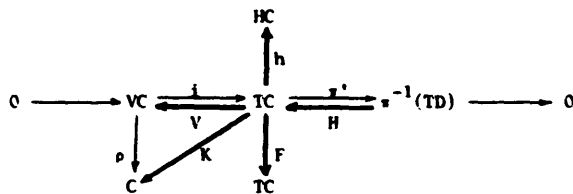


y sean \bar{F} una conexión infinitesimal en $\gamma: A \rightarrow B$ de aplicación de escisión $\bar{V}: IA \rightarrow VA$ y F una conexión infinitesimal en $\pi: C \rightarrow D$ de aplicación de escisión $V: TC \rightarrow VC$. Diremos que \bar{F} es elevación de F si

$$a_* \cdot \bar{V} = V \circ a_*$$

También diremos que \bar{F} se proyecta en F .

Para ver las otras posibles definiciones equivalentes recuerdo lo que dijimos en § 0.3.1.: Una conexión infinitesimal queda determinada por uno cualquiera de los cinco morfismos V , F , h , K o H , que recogemos en el siguiente diagrama:

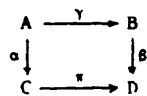


donde se dan las siguientes relaciones:

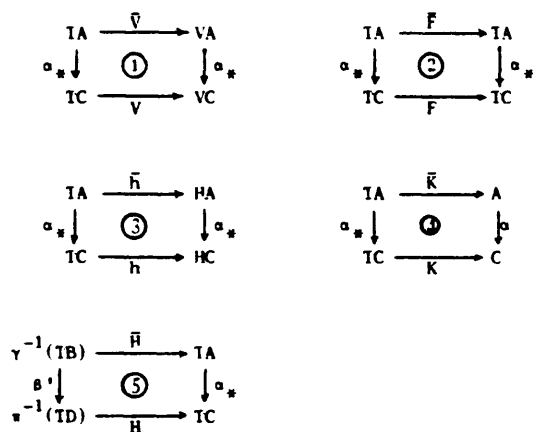
- | | |
|--|------------------------------|
| (1) $V \cdot i = id_{VC}$ | (5) $h = \frac{1}{2}(I + F)$ |
| (2) $\pi' \cdot H = id_{\pi^{-1}(TD)}$ | (6) $V = \frac{1}{2}(I - F)$ |
| (3) $K = \rho \circ V$ | (7) $\ker K = \text{im } H$ |
| (4) $F = h - V$ | (8) $\ker V = \text{im } H$ |

Análoga construcción se hace para una conexión \bar{f} definida en $\gamma: A \rightarrow B$. Así, para cada uno de los cinco morfismos se podría pensar en una definición de elevación, dada por la conmutatividad de un cierto diagrama. Pues bien, la siguiente proposición prueba que las cinco posibles definiciones son equivalentes.

Proposición 3.1.: Sea un buen cuadrado

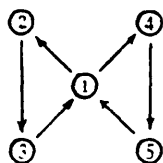


y sean \bar{f} una conexión infinitesimal en $\gamma: A \rightarrow B$ de elementos \bar{V} , \bar{F} , \bar{h} , \bar{K} y \bar{H} y f una conexión infinitesimal en $\pi: C \rightarrow D$ de elementos V , F , h , K y H . Entonces si conmuta uno de los cinco cuadrados siguientes, conmutan todos:



Demostración.

Vamos a probar la equivalencia, sin usar coordenadas locales, de acuerdo con el siguiente esquema:



Si emplearemos las propiedades enunciadas antes de la proposición y nos remitiremos a ellas indicando simplemente el número, (n), de la propiedad que apliquemos.

El orden está escogido de modo que las demostraciones triviales se hagan en primer lugar. Las no triviales son la $4 \Rightarrow 5$ y la $5 \Rightarrow 1$, que las haremos por caza por el diagrama.

$\textcircled{1} \Rightarrow \textcircled{2}$

Utilizamos (6): $V = \frac{1}{2}(I - F) \Rightarrow F = I - 2V$

Entonces, como por hipótesis $\alpha_* \bar{V} = V \alpha_*$, resulta que

$$\alpha_* \bar{F} = \alpha_*(\bar{I} - 2\bar{V}) = \alpha_* \bar{I} - 2\alpha_* \bar{V} = I \cdot \alpha_* - 2V \cdot \alpha_* = F \cdot \alpha_*$$

② ⇒ ③

Por (5) resulta que

$$\alpha_* \cdot \bar{h} = \alpha_* \cdot \frac{1}{2}(\bar{I} + \bar{F}) = \frac{1}{2}(\alpha_* \cdot \bar{I} + \alpha_* \cdot \bar{F}) = \frac{1}{2}(I \cdot \alpha_* + F \cdot \alpha_*) = h \cdot \alpha_*$$

③ ⇒ ①

Por (5) resulta que $F = 2h - I$, y sustituyendo en (6) obtenemos

$$V = I - h$$

Luego

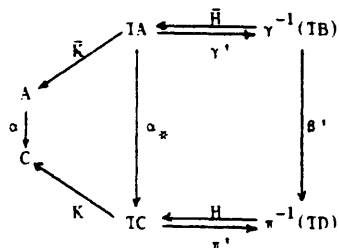
$$\alpha_* \cdot \bar{V} = \alpha_* \cdot \bar{I} - \bar{h} = I \cdot \alpha_* - h \cdot \alpha_* = V \cdot \alpha_*$$

① ⇒ ④

Ya lo habíamos probado antes de la definición 3.1., sin más que haber utilizado (3) y la quinta propiedad de buen cuadrado.

④ ⇒ ⑤

Consideremos el siguiente diagrama:



Debemos probar que $\alpha_* \cdot \bar{H} = H \cdot \beta'$, sabiendo que $\alpha \cdot \bar{K} = K \cdot \alpha_*$.

Sea

$$p \in \gamma^{-1}(IB)$$

Entonces $\bar{H}(p) \in IA$ y, por (7), resulta que $\bar{K} \cdot \bar{H}(p) = 0$

Por tanto,

$$0 = \alpha \cdot \bar{K} \cdot \bar{H}(p) = K \cdot \alpha_* \cdot \bar{H}(p) \Rightarrow \alpha_* \cdot \bar{H}(p) \in \ker K = \text{im } H$$

$\exists a \in \pi^{-1}(ID)$ tal que $H(a) = \alpha_* \cdot \bar{H}(p)$

Veamos que $q = \beta'(p)$.

Utilizando (2) y la conmutatividad $\pi' \circ \alpha_* = \beta' \circ \gamma'$ (cierta siempre, como vimos en el paso segundo previo a la definición de elevación), resulta:

$$q = \pi' \cdot H(q) = \pi' \circ \alpha_* \cdot \bar{H}(p) = \beta' \circ \gamma' \cdot \bar{H}(p) = \beta'(p)$$

Entonces tenemos el resultado deseado, pues para cualquier $p \in \gamma^{-1}(TB)$

$$\alpha_* \cdot \bar{H}(p) = H(q) = H \cdot \beta'(p)$$

⑤ \Rightarrow ①

Consideremos el diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 VA & \xrightleftharpoons[\bar{V}]{\bar{I}} & TA & \xrightleftharpoons[\bar{H}]{\gamma'} & \gamma^{-1}(TB) \\
 \alpha_* \downarrow & & \alpha_* \downarrow & & \beta' \downarrow \\
 VC & \xrightleftharpoons[V]{i} & TC & \xrightleftharpoons[H]{\pi'} & \pi^{-1}(TD)
 \end{array}$$

Por hipótesis $\alpha_* \cdot \bar{H} = H \cdot \beta'$. Debemos probar $\alpha_* \cdot \bar{V} = V \cdot \alpha_*$.

Sea $p \in TA$. Entonces p admite las siguientes descomposiciones:

$$p = (\bar{I} \cdot \bar{V}(p)) + (p - \bar{I} \cdot \bar{V}(p))$$

$$p = (p - \bar{H} \cdot \gamma'(p)) + \bar{H} \cdot \gamma'(p)$$

Probemos en primer lugar que

$$p - \bar{I} \cdot \bar{V}(p) = \bar{H} \cdot \gamma'(p)$$

En efecto, teniendo en cuenta (1), resulta que

$$\bar{V}(p - \bar{I} \cdot \bar{V}(p)) = \bar{V}(p) - \bar{V} \cdot \bar{I} \cdot \bar{V}(p) = \bar{V}(p) - \bar{V}(p) = 0$$

con lo que, por (5), se tiene

$$(p - \bar{I} \cdot \bar{V}(p)) \in \ker \bar{V} = \text{im } \bar{H}$$

Así, existe $q \in \gamma^{-1}(TB)$ de modo que

$$\bar{H}(q) = p - \bar{I} \cdot \bar{V}(p)$$

Veamos entonces que $q = \gamma'(p)$. En efecto, por medio de (2) y de la exactitud $\gamma' \cdot \bar{I} = 0$, obtenemos

$$\alpha = \gamma' \cdot \bar{H}(q) = \gamma'(p - \bar{I} \cdot \bar{V}(p)) = \gamma'(p) - \gamma' \cdot \bar{I} \cdot \bar{V}(p) = \gamma'(p)$$

Entonces,

$$\bar{H}_{\gamma'}(p) = \bar{H}(q) = p - \bar{I} \cdot \bar{V}(p)$$

Usando este resultado, la hipótesis, la propiedad (1) y la exactitud $V \cdot H = 0$ probamos ya la igualdad buscada:

$$\begin{aligned} V \cdot \alpha_{\#}(p) &= V \cdot \alpha_{\#} \cdot \bar{I} \cdot \bar{V}(p) + V \cdot \alpha_{\#} \cdot (p - \bar{I} \cdot \bar{V}(p)) = \\ &= V \cdot i \cdot \alpha_{\#} \cdot \bar{V}(p) + V \cdot \alpha_{\#} \cdot \bar{H}_{\gamma'}(p) = \\ &= \alpha_{\#} \cdot \bar{V}(p) + V \cdot H \cdot \beta' \cdot \gamma'(p) = \\ &= \alpha_{\#} \cdot \bar{V}(p) \end{aligned}$$

qed

Observaciones:

(1) La condición de que commute el cuadrado $\textcircled{4}$ es justamente la que dimos en la definición 2.1. restringida a las conexiones infinitesimales. Así que ya hemos logrado el objetivo que nos proponíamos en la sección § 2.2 de comprobar que esta definición es, simplemente, la restricción de la 2.1. Cuando utilicemos coordenadas locales volveremos a obtener la proposición 2.7.

(2) La demostración de esta proposición es de carácter puramente algebraico, y permite dar cinco definiciones diferentes de elevación de conexiones infinitesimales. El siguiente resultado proporciona una imagen mucho más geométrica de la definición de elevación:

Corolario. En las condiciones de la proposición 3.1., sean $\bar{\Gamma}$ y Γ sendas conexiones infinitesimales en $\gamma: A \rightarrow B$ y $\ast: C \rightarrow D$, y sean

$$IA = VA \circ HA \quad \text{y} \quad IC = VC \circ HC$$

las descomposiciones originadas por ellas (en el sentido de la segunda definición de conexión infinitesimal dada en § 0.3.1.). Entonces $\bar{\Gamma}$ es elevación de Γ si y sólo si $\alpha_{\#}$ respeta las citadas descomposiciones, esto es.

$$\alpha_{\#}(VA) = VC \quad \text{y} \quad \alpha_{\#}(HA) = HC$$

Demostración.

Sabemos que $\alpha_x(VA) \subseteq VC$, por el paso tercero previo a la definición de elevación, y que la descomposición $TC = VC \circlearrowright HC$ está dada por (ver § 0.3.1.)

$$p = V(p) \circlearrowright h(p)$$

Probamos el resultado por doble implicación:

⇒

Por hipótesis, $\alpha_x \circ \bar{V} = V \circ \alpha_x$ y $\alpha_x \circ \bar{h} = h \circ \alpha_x$.

Sea $p \in IA$. Entonces,

$$\alpha_x(p) = \alpha_x(\bar{V}(p) \circlearrowright \bar{h}(p)) = V \circ \alpha_x(p) \circlearrowright h \circ \alpha_x(p).$$

Luego $\alpha_x(VA) \subseteq VC$ y $\alpha_x(HA) \subseteq HC$. Y como α_x es suprayectiva se tienen las igualdades buscadas.

⇐

Suponemos que se dan las igualdades $\alpha_x(VA) = VC$ y $\alpha_x(HA) = HC$.

Sea $p \in IA$. Entonces,

$$\alpha_x(p) = \alpha_x(\bar{V}(p) \circlearrowright \bar{h}(p)), \text{ habiendo descompuesto } p;$$

$$\text{y } \alpha_x(p) = V(\alpha_x(p)) \circlearrowright h(\alpha_x(p)), \text{ habiendo descompuesto } \alpha_x(p).$$

$$\text{Como } \alpha_x(\bar{V}(p)) \in VC \quad : \quad V(\alpha_x(p)) \in VC$$

$$\alpha_x(\bar{h}(p)) \in HC \quad : \quad h(\alpha_x(p)) \in HC$$

y como $TC = VC \circlearrowright HC$, resulta que

$$\alpha_x \circ \bar{V}(p) = V \circ \alpha_x(p)$$

$$\alpha_x \circ \bar{h}(p) = h \circ \alpha_x(p)$$

qed

Esta sexta definición es, como decíamos, de carácter geométrico: $\bar{\cdot}$ es elevación de Γ si $\bar{\cdot}$ lleva espacios verticales en verticales (lo cual siempre ocurre) y horizontales en horizontales.

Podría pensarse que partiendo de la tercera definición de conexión infinitesimal, que dimos en § 0.3.1., una conexión infinitesimal queda determi-

nada por una 1-forma proyectable que se proyecta sobre la identidad), podríamos obtener una séptima definición de elevación. Sin embargo no es así, puesto que llegaremos a la conmutatividad del cuadrado (3) de la proposición 3.1. En efecto:

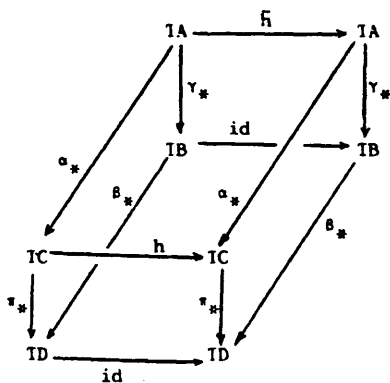
Lo primero que comprobamos es que la condición de que $h: TC \rightarrow TC$, 1-forma proyectable, se proyecte en $h' = id_{TD}: TD \rightarrow TD$ se reduce a la conmutatividad del cuadrado

$$\begin{array}{ccc} TC & \xrightarrow{h} & TC \\ \nu_* \downarrow & & \downarrow \nu_* \\ TD & \xrightarrow{h'} & TD \end{array}$$

(Suponemos que la conexión está definida en un fibrado vectorial $\nu: C \rightarrow D$). En efecto, empleando coordenadas locales (como vimos en § 0.3.1.) tenemos:

$$\begin{array}{ccc} (x, a_1, c, a_2) & \longrightarrow & (x, a_1, c, -u(x, a_1)c) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (x, c) & \longrightarrow & (x, c) \end{array}$$

Entonces la definición natural de elevación, que sería la conmutatividad del siguiente diagrama, se reduce a la conmutatividad del cuadrado (3) :



2. Algunos resultados.

El primero de estos resultados es el buen comportamiento de la derivada covariante en relación con la elevación de conexiones y las secciones proyectables. Así, establecemos un resultado similar a la proposición 2.1, siendo en el caso presente la demostración directa sensiblemente más sencilla que en aquél. De hecho, como dijimos en § 0.4.2., la derivada covariante de una conexión infinitesimal coincide con la obtenida al considerar la conexión como conexión generalizada. Remitiéndonos entonces a § 0.4.2. y a la proposición 2.1. obtendríamos una demostración de la que ahora vamos a enunciar. Sin embargo, fieles a la idea de que en este capítulo daremos resultados auto-contenidos, que no precisen del capítulo 2, probaremos el resultado de modo directo.

Proposición 3.2.: Sean un buen cuadrado de fibrados

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\gamma} & B \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \beta \\ C & \xrightarrow{\pi} & D \end{array}$$

y $\bar{\gamma}$ y π sendas conexiones infinitesimales en $\gamma: A \rightarrow B$ y en $\pi: C \rightarrow D$ tales que $\bar{\gamma}$ es elevación de π (respecto del citado buen cuadrado). Sean las siguientes secciones:

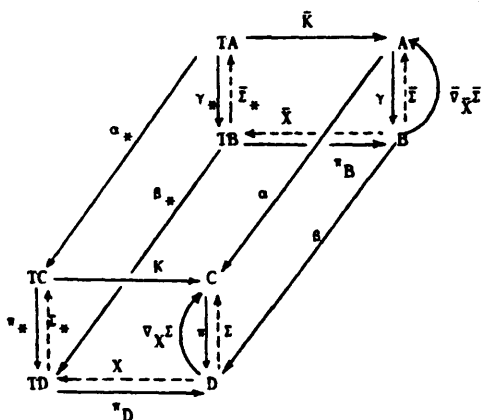
\bar{I} , sección de γ que se proyecta sobre I , sección de π

$\bar{\lambda}$, sección de $\pi_B: IB \rightarrow B$ que se proyecta sobre λ , sección de $\pi_D: ID \rightarrow D$.

Entonces $\bar{\nabla}_{\bar{\lambda}} \bar{I}$ se proyecta sobre $\nabla_{\lambda} I$, siendo $\bar{\nabla}$ y ∇ las derivadas covariantes asociadas a las conexiones infinitesimales $\bar{\gamma}$ y π .

Demostración.

El siguiente diagrama resume todos los datos:



Como \bar{X} se proyecta en X , es $\beta_* \cdot \bar{X} = X \cdot \beta$

Como \bar{I} lo hace en I , resulta que $\alpha \cdot \bar{I} = I \cdot \alpha$, y que $\alpha_* \cdot \bar{I}_* = I_* \cdot \beta_*$ (con lo que \bar{I}_* se proyecta sobre I_* en ese buen cuadrado tangente del dado).

Debemos probar que $\bar{v}_{\bar{X}} \bar{I}$ se proyecta sobre $v_X I$, esto es, que

$$\alpha \cdot (\bar{v}_{\bar{X}} \bar{I}) = (v_X I) \cdot \beta$$

Pues bien,

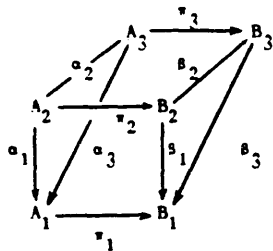
$$\alpha \cdot \bar{v}_{\bar{X}} \bar{I} = \alpha \cdot \bar{K} \cdot \bar{I}_* \cdot \bar{X} = K \cdot \alpha_* \cdot \bar{I}_* \cdot \bar{X} = K \cdot I_* \cdot \beta_* \cdot \bar{X} = K \cdot I_* \cdot X \cdot \beta = (v_X I) \cdot \beta,$$

sin más que haber aplicado la definición de derivada covariante y la de elevación.

qed

El siguiente resultado se establece de modo inmediato:

Proposición 3.3. (de transitividad de las elevaciones): Sea el siguiente diagrama conmutativo:



en el que todos los cuadrados son buenos cuadrados, y sean Γ_i ($i=1,2,3$) conexiones infinitesimales en $\pi_i: A_i \rightarrow B_i$, tales que Γ_2 es elevación de Γ_1 y Γ_3 lo es de Γ_2 . Entonces Γ_3 es elevación de Γ_1 .

Nota. Se supone que las elevaciones se realizan en los correspondientes buenos cuadrados.

Demostración.

Sean V_i las aplicaciones de escisión de las Γ_i . Entonces, por hipótesis

$$\alpha_{1*} \circ V_2 = V_1 \circ \alpha_{2*} \quad \text{y} \quad \alpha_{2*} \circ V_3 = V_2 \circ \alpha_{3*}$$

y, como $\alpha_3 = \alpha_1 \circ \alpha_2$, resulta que

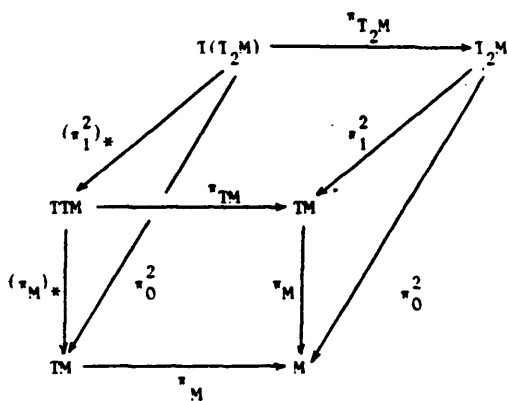
$$\alpha_{3*} \circ V_3 = \alpha_{1*} \circ \alpha_{2*} \circ V_3 = \alpha_{1*} \circ V_2 \circ \alpha_{2*} = V_1 \circ \alpha_{1*} \circ \alpha_{2*} = V_1 \circ \alpha_{3*}$$

por lo que Γ_3 es elevación de Γ_1 .

qed

Observación: Se podría pensar en el siguiente problema, en cierto modo recíproco del anterior: con el mismo planteamiento, si Γ_2 es elevación de Γ_1 y Γ_3 también es elevación de Γ_1 , ¿será necesariamente Γ_3 elevación de Γ_2 ? La respuesta es en general negativa. Vamos a dar rápidamente un ejemplo, sin desarrollar los cálculos, que posponemos para la sección § 4.2.

Consideremos una conexión lineal ∇ en M y sus elevaciones completa ∇^C y horizontal ∇^H al fibrado tangente, y completa ∇^* al fibrado de los 2-jets (todas ellas en el sentido clásico de Yano e Ishihara, [52]). Tomemos entonces el diagrama



que está en las condiciones de la proposición 3.3.

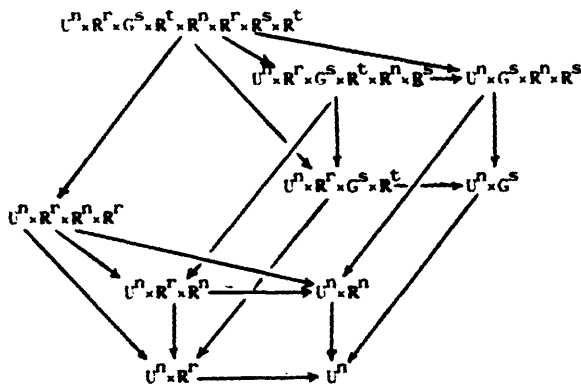
ν es una conexión en $\pi_M: TM \rightarrow M$

ν^C y ν^H son conexiones en $\pi_{TM}: TTM \rightarrow TM$

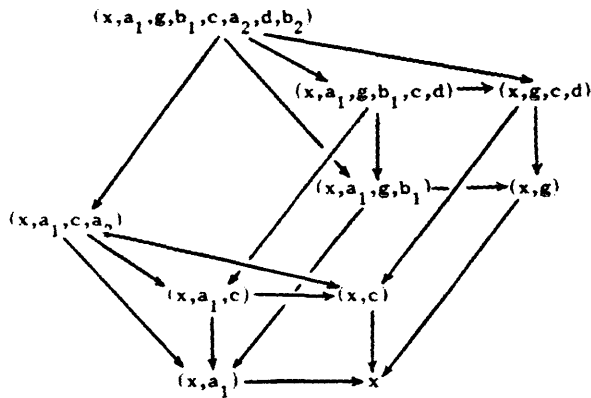
ν^* es una conexión en $\pi_{T_2M}: T(T_2M) \rightarrow T_2M$

Entonces ν^C y ν^H son elevaciones de ν , con nuestra definición, (lo veremos en § 4.1.), ν^* lo es de ν (lo veremos en § 4.2.), entendiéndose en cada caso el buen cuadrado en el que trabajamos. Pues bien, respecto del tercer buen cuadrado, ν^* es elevación de ν^C y no lo es de ν^H .

Obsérvese también que análogos proposición y comentarios podríamos haber dado en el caso de conexiones generalizadas. Omitimos hacer allí esta construcción por carecer de ejemplos propios suficientemente relevantes.



y las aplicaciones son entonces las siguientes:



Así, en coordenadas locales tenemos:

$$VA = \ker \gamma' = \ker \gamma_* = \{(x, a_1, g, b_1, 0, a_2, 0, b_2)\} = U^n \times R^r \times G^s \times R^t \times \{0\} \times R^r \times \{0\} \times R^t$$

$$VC = \ker \pi' = \ker \pi_* = \{(x, a_1, 0, a_2)\} = U^n \times R^r \times \{0\} \times R^r$$

Recuerdo ahora, como vimos en la sección § 0.3.1., que la aplicación de conexión K de una conexión infinitesimal Γ definida en $\pi: C \rightarrow D$ tiene como

expresión local

$$K(x, a_1, c, a_2) = (x, a_2 + \omega(x, a_1) | c)$$

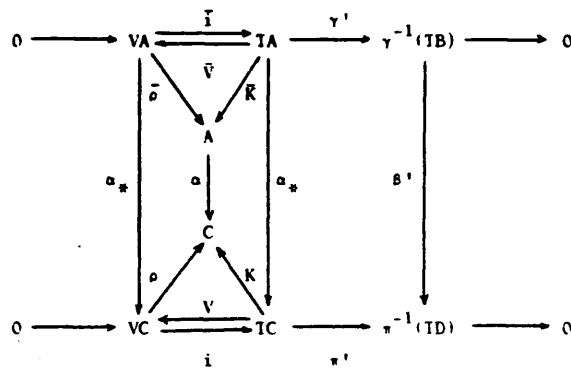
donde $\omega: U \times R^r \rightarrow L(R^n, R^r)$.

Razonando de modo similar, para una conexión infinitesimal \bar{F} definida en $\gamma: A \rightarrow B$ se obtiene la componente local, que denotaremos por $\bar{\Omega}$

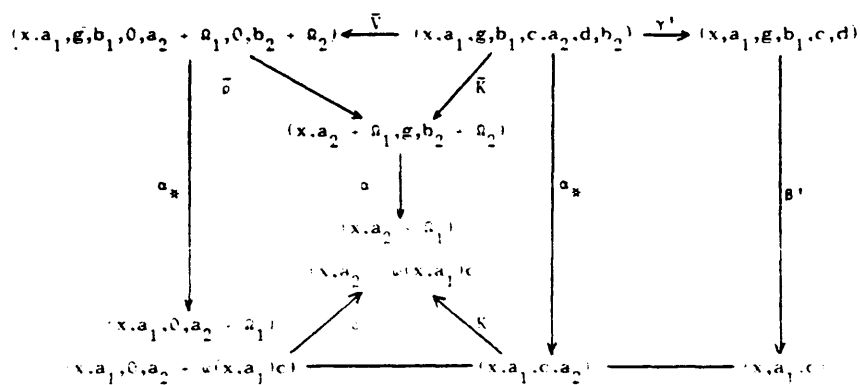
$$\bar{\Omega}: U^n \times R^r \times (R^s \times R^t) \rightarrow L(R^n \times R^s, R^r \times R^t) \cong L(R^n \times R^s, R^r) \times L(R^n \times R^s, R^t)$$

con lo que podemos escribir $\bar{\Omega} = (\bar{\Omega}_1, \bar{\Omega}_2)$. (Esta construcción es la misma que hicimos en § 2.2.1.)

Entonces el diagrama



se expresa localmente por



donde Ω_i denota $\Omega_i(x, a_1, g, b_1)(c, d)$, para $i = 1, 2$.

Así hemos probado la siguiente

Proposición 3.4.: Con la notación precedente, \mathbb{F} es una elevación de \mathbb{F} si y sólo si sus componentes locales $\Omega = (\Omega_1, \Omega_2)$ y ω están relacionadas en las cartas inducidas por

$$\Omega_1(x, a_1, g, b_1)(c, d) = \omega(x, a_1)c$$

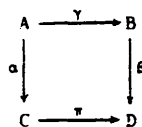
Observaciones.

- (1) Hemos obtenido el mismo resultado que en la proposición 2.7.
- (2) Se puede demostrar también que cualquiera de las otras cinco definiciones de elevación de conexiones infinitesimales conduce a la misma condición local. Directamente se obtiene este resultado aplicando la proposición 3.1. (en su caso, el corolario siguiente) y esta proposición 3.4.
- (3) Los comentarios sobre existencia y unicidad son los mismos que hicimos en la sección § 2.3.



4. Curvaturas.

Vamos a estudiar el comportamiento de las curvaturas, comenzando por unos lemas de carácter técnico. Supongamos dado un buen cuadrado

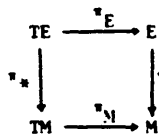


y emplearemos las coordenadas locales en el modo acostumbrado.

Lema 3.5.: Sea $\pi: E \rightarrow M$ un fibrado vectorial y sean $\bar{X}, \bar{Y} \in \Gamma_0^1(E)$ campos que se proyectan sobre $X, Y \in \Gamma_0^1(M)$. Entonces $[\bar{X}, \bar{Y}]$ se proyecta sobre $[X, Y]$.

Demostración.

En este caso no hay duda de que al decir que \bar{X} e \bar{Y} son proyectables se entiende que lo son respecto de



que es un buen cuadrado por la proposición 1.1. (ver ejemplo 1.6.)

Por hipótesis, $\pi_* \bar{X} = X \circ \pi$; $\pi_* \bar{Y} = Y \circ \pi$.

Debemos probar que $\pi_* [\bar{X}, \bar{Y}] = [X, Y] \circ \pi$

Empleando coordenadas locales resulta que

$$X(x^i) = (x^i, X^i(x))$$

$$Y(x^i) = (x^i, Y^i(x))$$

$$\bar{X}(x^i, a^\alpha) = (x^i, a^\alpha, X^i(x), \bar{X}^\alpha(x, a))$$

$$\bar{Y}(x^i, a^\alpha) = (x^i, a^\alpha, Y^i(x), \bar{Y}^\alpha(x, a))$$

Como es conocido,

$$[X, Y] = \left[\frac{\partial}{\partial x^i} \cdot X^i(x), \frac{\partial}{\partial x^j} \cdot Y^j(x) \right] = \frac{\partial}{\partial x^j} \cdot \frac{\partial Y^j(x)}{\partial x^i} X^i(x) - \frac{\partial}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial X^i(x)}{\partial x^j} Y^j(x)$$

que podemos expresar como

$$[X, Y](x^i) = \left(x^i, \frac{\partial Y^j(x)}{\partial x^i} X^j(x) - \frac{\partial X^i(x)}{\partial x^j} Y^j(x) \right)$$

Por otra parte obtenemos

$$[\bar{X}, \bar{Y}] = \left[\frac{\partial}{\partial x^i} \cdot X^i(x) - \frac{\partial}{\partial a^\alpha} \cdot \bar{X}^\alpha(x, a), \frac{\partial}{\partial x^j} \cdot Y^j(x) - \frac{\partial}{\partial a^\beta} \cdot \bar{Y}^\beta(x, a) \right]$$

Operando se tiene:

$$[\bar{X}, \bar{Y}](x^i, a^\alpha) = \left(x^i, a^\alpha, \frac{\partial Y^j(x)}{\partial x^i} X^j(x) - \frac{\partial X^i(x)}{\partial x^j} Y^j(x) \right)$$

$$\frac{\partial \tilde{Y}^{\alpha}(x,a)}{\partial x^i} \tilde{X}^i(x) - \frac{\partial \tilde{X}^{\alpha}(x,a)}{\partial x^i} Y^i(x) - \frac{\partial \tilde{Y}^{\alpha}(x,a)}{\partial a^{\beta}} \tilde{X}^{\beta}(x,a) - \frac{\partial \tilde{X}^{\alpha}(x,a)}{\partial a^{\beta}} \tilde{Y}^{\beta}(x,a)$$

de donde se sigue trivialmente el resultado buscado.

qed

Para los dos siguientes lemas suponemos que están definidas sendas conexiones infinitesimales $\tilde{\Gamma}$ en $\gamma: A \rightarrow B$ y Γ en $\nu: C \rightarrow D$. Como puede presentarse cierta ambigüedad al hablar de campos proyectables, especificaremos siempre el cuadrado respecto del cual lo son.

Lema 3.6.: Sea $\tilde{\Gamma}$ elevación de Γ . Sea \tilde{X} e $T_0^1(A)$ un campo proyectable respecto del buen cuadrado

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\Gamma}A & \xrightarrow{\nu_A} & A \\ \alpha_* \downarrow & & \downarrow \alpha \\ \Gamma C & \xrightarrow{\nu_C} & C \end{array}$$

y sea X su proyección. Sean \tilde{h} y h las proyecciones horizontales de las conexiones infinitesimales $\tilde{\Gamma}$ y Γ . Entonces $\tilde{h}(\tilde{X})$ es proyectable sobre $h(X)$ respecto del buen cuadrado indicado.

Observación. Considerando \tilde{X} e $T_0^1(A)$ no es proyectable en el fibrado $\gamma: A \rightarrow B$ (no es un campo proyectable en el sentido de 3.0.1.2.) pues lo sería si $\gamma_* \tilde{X} = \tilde{X}' \cdot \gamma$ para algún campo \tilde{X}' de B . Por eso indicamos con cuidado el buen cuadrado sobre el que trabajamos.

Demostración.

Por hipótesis, $\alpha_* \tilde{X} = X \cdot \alpha$.

Por la proposición 3.1., al ser $\tilde{\Gamma}$ elevación de Γ , resulta que $\alpha_* \tilde{h} = h \cdot \alpha_*$.

Debemos probar que $\alpha_* \tilde{h} \cdot \tilde{X} = h \cdot X \cdot \alpha$. Y esto es trivial sin más que considerar

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{\Gamma}A & \xleftarrow{\tilde{h}} & \tilde{\Gamma}A & \xleftarrow{\tilde{X}} & A \\ \alpha_* \downarrow & & \alpha_* \downarrow & & \downarrow \alpha \\ \Gamma C & \xleftarrow{h} & \Gamma C & \xleftarrow{X} & C \end{array}$$

qed

El tercer lema es todavía más sencillo:

Lema 3.7.: En las condiciones del lema anterior,

$$\alpha_* \cdot \tilde{h} \cdot \tilde{h} = h \cdot h \cdot \alpha_*$$

Demostración.

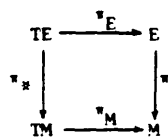
Es trivial: $\alpha_* \cdot \tilde{h} \cdot \tilde{h} = h \cdot \alpha_* \cdot \tilde{h} = h \cdot h \cdot \alpha_*$

qed

Más aún, $\tilde{h} \cdot \tilde{h} = \tilde{h}$ y $h \cdot h = h$ por ser proyecciones.

Finalmente, el siguiente lema queda establecido suponiendo dada una conexión infinitesimal en un fibrado vectorial arbitrario :

Lema 3.8.: Si Γ es una conexión infinitesimal en el fibrado vectorial $\pi: E \rightarrow M$ y $\tilde{X}, \tilde{Y} \in T_0^1(E)$ son campos cualesquiera, entonces $R(\tilde{X}, \tilde{Y}) \in T_0^1(E)$ es proyectable en el cuadrado



sobre el campo nulo $0 \in T_0^1(M)$.

Demostración.

Como vimos en § 0.3.4., la expresión local de R es

$$R = \left\{ \frac{\partial(\omega_j^\alpha(x, a_1))}{\partial x^i} + \frac{\partial(\omega_i^\alpha(x, a_1))}{\partial a_1^\beta} \omega_j^\beta(x, a_1) \right\} \frac{\partial}{\partial a_1^\alpha} \otimes dx^i \wedge dx^j$$

por lo que $R(\tilde{X}, \tilde{Y})$ es un campo vectorial cuya expresión local es del tipo

$$\frac{\partial}{\partial a_1^\alpha} \cdot Z^\alpha(x, a_1)$$

proyectable, por tanto, sobre el campo nulo de M (ver § 0.1.2.).

qed

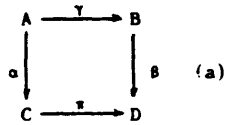
Obsérvese que este resultado también era conocido de otro modo (ver § 0.3.4.):

$$R = -\frac{1}{2} [h.h] = -\frac{1}{2} \nabla h \in \mathcal{F}^2$$

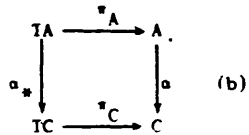
es una 2-forma proyectable y vertical.

Llegamos así al resultado fundamental:

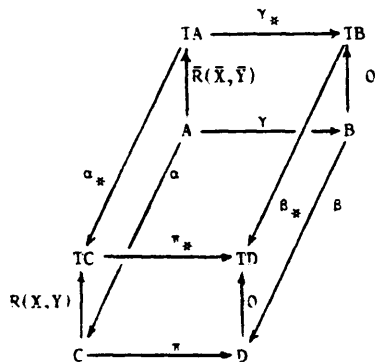
Proposición 3.9.: Sean un buen cuadrado (a)



dos conexiones infinitesimales, \bar{f} en $\gamma: A \rightarrow B$ y Γ en $\pi: C \rightarrow D$, tales que \bar{f} es elevación de Γ respecto del cuadrado (a) y sean $\bar{X}, \bar{Y} \in I_0^1(A)$ campos proyectables sobre $X, Y \in I_0^1(C)$ respecto del buen cuadrado (b)



Entonces, si \bar{R} y R son las curvaturas de \bar{f} y Γ , conmuta el siguiente diagrama:



y, en particular, $\bar{R}(\bar{X}, \bar{Y})$ se proyecta sobre $R(X, Y)$ respecto del cuadrado (b). (Se entiende que 0 indica la sección nula).

Demostración.

(i) Las bases conmutan porque son el buen cuadrado (α) y su tangente.

(ii) La cara lateral derecha lo hace trivialmente.

(iii) Las caras delantera y trasera conmutan por el lema 3.8.

(iv) La cara lateral izquierda precisa una demostración más detallada:

Por hipótesis sabemos que

$$\alpha_{\#} \cdot \bar{X} = X \cdot \alpha \quad ; \quad \alpha_{\#} \cdot \bar{Y} = Y \cdot \alpha \quad ; \quad \alpha_{\#} \cdot \bar{h} = h \cdot \alpha_{\#}$$

y debemos probar que

$$\alpha_{\#} \cdot \bar{R}(\bar{X}, \bar{Y}) = R(X, Y) \cdot \alpha$$

La expresión de la curvatura (ver § 0.3.4.) es

$$R(X, Y) = -[h(X), h(Y)] \cdot \alpha - h^2[X, Y] \cdot \alpha + h[h(X), Y] \cdot \alpha - h[X, h(Y)] \cdot \alpha$$

Entonces, aplicando los lemas 3.5., 3.6. y 3.7., obtenemos el resultado:

$$\begin{aligned} \alpha_{\#} \cdot \bar{R}(\bar{X}, \bar{Y}) &= -\alpha_{\#} [h(\bar{X}), h(\bar{Y})] \cdot \alpha - \alpha_{\#} h^2[\bar{X}, \bar{Y}] \cdot \alpha + \alpha_{\#} h[h(\bar{X}), \bar{Y}] \cdot \alpha + \alpha_{\#} h[\bar{X}, h(\bar{Y})] \cdot \alpha = \\ &= -[h(X), h(Y)] \cdot \alpha - h^2 \cdot \alpha_{\#} [\bar{X}, \bar{Y}] \cdot \alpha + h \cdot \alpha_{\#} [h(\bar{X}), \bar{Y}] \cdot \alpha + h \cdot \alpha_{\#} [\bar{X}, h(\bar{Y})] \cdot \alpha = \\ &= -[h(X), h(Y)] \cdot \alpha - h^2 [X, Y] \cdot \alpha + h [h(X), Y] \cdot \alpha + h [X, h(Y)] \cdot \alpha = \\ &= R(X, Y) \cdot \alpha \end{aligned}$$

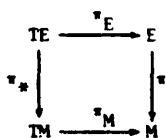
qed

Observaciones.

(1) El caso en el que las conexiones infinitesimales sean lineales será tratado en la proposición 3.12., donde estudiaremos la curvatura clásica.

(2) El lema 3.5. ha sido demostrado de modo directo, usando las expresiones locales. Se puede probar también de un modo muy sencillo utilizando este otro resultado auxiliar:

Lema 3.10.: Sea $\pi: E \rightarrow M$ un fibrado vectorial. Entonces \bar{X} e $T_{\mathcal{O}}^1(E)$ es proyectable sobre un campo X e $T_{\mathcal{O}}^1(M)$, respecto del buen cuadrado



si y sólo si $\bar{X}(f^V) = (Xf)^V$, para toda función $f \in T_0^0(M)$, siendo $f^V = f \circ \pi$.

Demostración del lema 3.10.

Empleando coordenadas locales es trivial:

$$\bar{X}(f \circ \pi) = \left(\frac{\partial}{\partial x^i} X^i(x) + \frac{\partial}{\partial a^\alpha} X^\alpha(x, a) \right) (f \circ \pi) = \left(\frac{\partial}{\partial x^i} X^i(x) \right) \circ \pi = (Xf) \circ \pi .$$

qed

Nueva demostración del lema 3.5.

Por hipótesis, $\pi_* \bar{X} = X \circ \pi$; $\pi_* \bar{Y} = Y \circ \pi$

Aplicamos el lema 3.10. y resulta

$$\begin{aligned}
 [\bar{X}, \bar{Y}](f^V) &= [\bar{X}, \bar{Y}](f \circ \pi) = \bar{X}(\bar{Y}(f \circ \pi)) - \bar{Y}(\bar{X}(f \circ \pi)) = \bar{X}((Yf) \circ \pi) - \bar{Y}((Xf) \circ \pi) = \\
 &= X(Y(f)) \circ \pi - Y(X(f)) \circ \pi = ([X, Y]f) \circ \pi = ([X, Y]f)^V .
 \end{aligned}$$

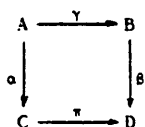
qed

Vamos a estudiar una última propiedad de la curvatura antes de pasar a las conexiones lineales:

Sea $\pi: E \rightarrow M$ un fibrado vectorial y sean $X, Y \in T_0^1(E)$ campo proyectables sobre $X', Y' \in T_0^1(M)$ en el buen cuadrado del lema 3.10. Vimos en § 0.3.4. que la expresión de la curvatura R de una conexión infinitesimal Γ definida en $\pi: E \rightarrow M$ se simplifica, en el sentido de que

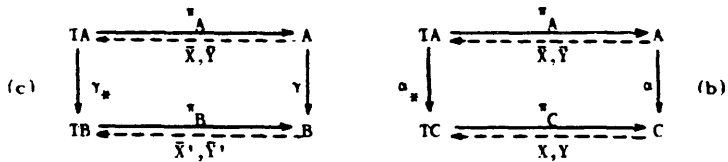
$$R(\bar{X}, \bar{Y}) = -[h(\bar{X}), h(\bar{Y})] + h[\bar{X}, \bar{Y}]$$

Supongamos entonces que tenemos un buen cuadrado de fibrados



y sendas conexiones infinitesimales $\bar{\Gamma}$ en $\gamma: A \rightarrow B$ y Γ en $\pi: C \rightarrow D$, tales que

\bar{F} es elevación de Γ y sean \bar{X}, \bar{Y} e $I_0^1(A)$ campos proyectables en los dos sentidos posibles, esto es, respecto de los buenos cuadrados (c) y (b):



Entonces resulta por la proposición 3.9. que

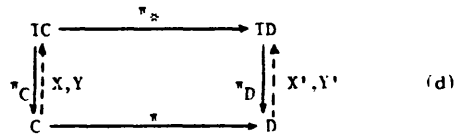
$$\alpha_X \circ \bar{R}(\bar{X}, \bar{Y}) = R(X, Y) \circ \alpha$$

y por la observación que acabamos de hacer, que

$$\bar{R}(\bar{X}, \bar{Y}) = -[h(\bar{X}), h(\bar{Y})] + h[\bar{X}, \bar{Y}]$$

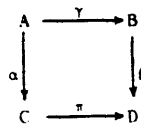
$$\text{Luego, } R(X, Y) \circ \alpha = -\alpha_X [h(\bar{X}), h(\bar{Y})] + \alpha_X \circ h[\bar{X}, \bar{Y}] = [-h(X), h(Y)] + h[X, Y] \circ \alpha$$

¿Significa esto que X e Y son proyectables en el buen cuadrado (d)?



Efectivamente, y la demostración viene dada en el siguiente

Lema 3.11.: Sea un buen cuadrado de fibrados



y sean \bar{X} e $I_0^1(A)$, \bar{X}' e $I_0^1(B)$, X e $I_0^1(C)$ tales que

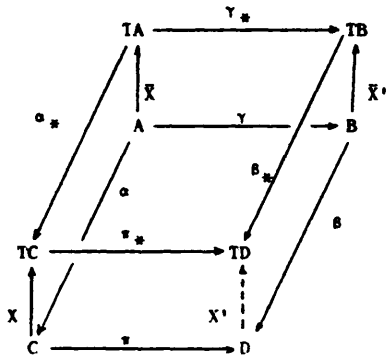
$$\gamma_X \circ \bar{X} = \bar{X}' \circ \gamma \quad ; \quad \alpha_X \circ \bar{X} = X \circ \alpha$$

Entonces existe X' e $I_0^1(D)$ de modo que

$$\beta_* \cdot \bar{X}' = X' \cdot \beta \quad \text{y} \quad \gamma_* \cdot X = X' \cdot \gamma$$

Demostración.

Considérese el diagrama



Entonces localmente resulta:

$$X(x^i, a^a) = (x^i, a^a, X^i(x, a), X^a(x, a))$$

$$\bar{X}'(x^i, g^g) = (x^i, g^g, \bar{X}^i(x, g), \bar{X}^g(x, g))$$

$$\bar{X}(x^i, a^a, g^g, b^b) = (x^i, a^a, g^g, b^b, \bar{X}^i(x, a, g, b), \bar{X}^a(x, a, g, b), \bar{X}^g(x, a, g, b), \bar{X}^b(x, a, g, b))$$

Ahora bien:

$$\text{Como } \gamma_* \cdot \bar{X} = \bar{X}' \cdot \gamma \Rightarrow \begin{cases} \bar{X}^i(x, a, g, b) = \bar{X}^i(x, g) \\ \bar{X}^g(x, a, g, b) = \bar{X}^g(x, g) \end{cases}$$

$$\text{y como } \alpha_* \cdot \bar{X} = X \cdot \alpha \implies \begin{cases} \bar{X}^i(x, a, g, b) = X^i(x, a) \\ \bar{X}^a(x, a, g, b) = X^a(x, a) \end{cases}$$

Luego \bar{X}^i sólo depende de x , pues a y g representan coordenadas transversales (como vimos en § 1.1.) y podemos definir el campo

$$X'(x) = (x^i, \bar{X}^i(x))$$

que obviamente verifica todo lo pedido.

qed

Para finalizar esta sección nos vamos a ocupar de estudiar la curvatura clásica de las conexiones lineales, obteniendo el resultado esperado:

Proposición 3.12.: Sean un buen cuadrado (a)

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{\gamma} & B \\
 \alpha \downarrow & & \downarrow \beta \\
 C & \xrightarrow{\tau} & D
 \end{array} \quad (a)$$

dos conexiones infinitesimales lineales, $\bar{\gamma}$ en $\gamma: A \rightarrow B$ y $\bar{\tau}$ en $\tau: C \rightarrow D$, tales que $\bar{\gamma}$ es elevación de $\bar{\tau}$ respecto de (a) y sean $\bar{X}, \bar{Y} \in \Gamma_0^1(B)$ campos proyectables sobre $X, Y \in \Gamma_0^1(D)$ respecto del buen cuadrado (e)

$$\begin{array}{ccc}
 TB & \xrightarrow{\bar{\gamma}_B} & B \\
 \beta_* \downarrow & & \downarrow \beta \\
 TD & \xrightarrow{\bar{\tau}_D} & D
 \end{array} \quad (e)$$

y \bar{E} una sección de $\gamma: A \rightarrow B$ proyectable sobre una sección E de $\tau: C \rightarrow D$ respecto del buen cuadrado (a).

Entonces, si R_C y R_D son las curvaturas clásicas de $\bar{\gamma}$ y $\bar{\tau}$, resulta que $R_C(\bar{X}, \bar{Y}) \cdot \bar{E}$ se proyecta sobre $R_D(X, Y) \cdot E$ en el buen cuadrado (a).

Demostración.

Recuerdo que $R_C(X, Y) \cdot E = [\nabla_X, \nabla_Y] \cdot E - \nabla_{[X, Y]} \cdot E$

Por hipótesis sabemos que

$$\beta_* \bar{X} = X \cdot \beta \quad ; \quad \beta_* \bar{Y} = Y \cdot \beta \quad ; \quad \alpha_* \bar{E} = E \cdot \beta$$

Por la proposición 3.2. resulta que

$$\alpha_* (\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{E}) = (\nabla_X E) \cdot \beta \quad ; \quad \alpha_* (\bar{\nabla}_{\bar{Y}} \bar{E}) = (\nabla_Y E) \cdot \beta$$

y por el lema 3.5. se tiene

$$\beta_* [\bar{X}, \bar{Y}] = [X, Y] \cdot \beta$$

Entonces, aplicando esos resultados obtenemos:

$$\begin{aligned} \alpha \cdot (\bar{R}_c(\bar{X}, \bar{Y})\bar{Z}) &= \alpha(\bar{v}_X(\bar{v}_Y\bar{Z}) - \bar{v}_Y(\bar{v}_X\bar{Z}) - \bar{v}_{[X, Y]}\bar{Z}) = \\ &= (\nabla_X(\nabla_Y Z)) \cdot \beta - (\nabla_Y(\nabla_X Z)) \cdot \beta - (\nabla_{[X, Y]} Z) \cdot \beta = (R_c(X, Y)Z) \cdot \beta \end{aligned}$$

qed

Observación. En la proposición 0.3. establecimos la relación entre R y R_c , y en la 3.9. vimos el comportamiento de R respecto de las elevaciones. Podríamos haber usado esos resultados para probar la proposición 3.11., pero tenemos dos motivos para haber escogido esta otra demostración: ésta es más simple que la otra y, además, puede hacerse conociendo sólo la teoría de conexiones infinitesimales lineales.

§ 3.2. CONEXIONES EN VARIETADES.

Consideraremos definido un fibrado localmente trivial $\pi: E \rightarrow M$, que fijamos a lo largo de toda la sección. El primer resultado que vamos a probar sirve para definir, de un modo equivalente al empleado en la definición 3.1., la elevación de una conexión infinitesimal Γ en M a una conexión infinitesimal $\bar{\Gamma}$ en E . (Recuerdo que las conexiones infinitesimales en variedades son las conexiones infinitesimales en sus fibrados tangentes, y coinciden con las llamadas conexiones no homogéneas).

Proposición 3.13.: Sean $\bar{\Gamma}$ una conexión no homogénea en E y Γ una conexión no homogénea en M . Entonces $\bar{\Gamma}$ es elevación de Γ respecto del buen cuadrado (*)

$$\begin{array}{ccc}
 TE & \xrightarrow{\pi^* \Gamma} & E \\
 \pi_* \downarrow & & \downarrow \pi \\
 TM & \xrightarrow{\Gamma} & M
 \end{array} \quad (*)$$

si y sólo si el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 TTE & \xrightarrow{\bar{\Gamma}} & TTE \\
 \pi_{**} \downarrow & & \downarrow \pi_{**} \\
 TTM & \xrightarrow{\Gamma} & TTM
 \end{array} \quad (***)$$

donde $\bar{\Gamma}$ y Γ son las 1-formas vectoriales definidas por $\bar{\Gamma}$ y Γ .

Demostración.

(*) es un buen cuadrado por la proposición 1.1.

La expresión local del diagrama (***) es la siguiente:

$$\begin{array}{ccc}
 U^n \times R^\Gamma \times R^\Gamma \times R^\Gamma \times R^\Gamma \times R^\Gamma \times R^\Gamma & \xrightarrow{\quad} & U^n \times R^\Gamma \times R^\Gamma \times R^\Gamma \times R^\Gamma \times R^\Gamma \times R^\Gamma \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 U^n \times R^\Gamma \times R^\Gamma \times R^\Gamma & \xrightarrow{\quad} & U^n \times R^\Gamma \times R^\Gamma \times R^\Gamma
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 (x, a_1, c_1, a_2, c_2, a_3, c_3, a_4) & \longrightarrow & (x, a_1, c_1, a_2, c_2, -c_3^{-2\Omega_1}, a_3, -a_4^{-2\Omega_2}) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 & & (x, a_1, c_2, -a_3^{-2\Omega_1}) \\
 (x, c_1, c_2, c_3) & \longrightarrow & (x, c_1, c_2, -c_3^{-2\omega(x, c_1)c_2})
 \end{array}$$

donde $\Omega_i = \Omega_i(x, c_1, a_1, a_2)(c_2, a_3)$

Entonces la conmutatividad de (**) se expresa localmente por la misma condición que la de que \bar{r} sea elevación de r en (*), sin más que considerar las proposiciones 2.7 ó 3.4. y la correlación entre los símbolos del caso general (izquierda) y los del presente (derecha):

$x \dots x$	$c \dots c_2$
$a_1 \dots c_1$	$a_2 \dots c_3$
$g \dots a_1$	$d \dots a_3$
$b_1 \dots a_2$	$b_2 \dots a_4$

qed

Obsérvese que en este caso podríamos tomar como definición de elevación la conmutatividad de (**) y proseguir el estudio omitiendo todo lo conocido del comportamiento de conexiones infinitesimales y generalizadas.

Los siguientes lemas preparan el terreno para la demostración de la proposición 3.17., que es la que establece el buen comportamiento de las torsiones respecto de la elevación de conexiones. (Estudiamos las torsiones en § 0.3.4.).

Lema 3.14.: Si $\pi: E \rightarrow M$ es un fibrado localmente trivial y S_E, S_M son los automorfismos de Kobayashi en E y en M , conmuta el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 TIE & \xrightarrow{S_E} & TIE \\
 \downarrow \pi_{**} & & \downarrow \pi_{**} \\
 TIM & \xrightarrow{S_M} & TIM
 \end{array}$$

Demostración.

Usando coordenadas locales resulta

$$\begin{array}{ccc}
 (x, a_1, c_1, a_2, c_2, a_3, c_3, a_4) & \longrightarrow & (x, a_1, c_2, a_3, c_1, a_2, c_3, a_4) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 (x, c_1, c_2, c_3) & \longrightarrow & (x, c_2, c_1, c_3)
 \end{array}$$

qed

Observación. De hecho, para que este lema sea cierto basta con que $\pi: E \rightarrow M$ sea una aplicación diferenciable (cfr. [32]).

Lema 3.15.: Sea $\pi: E \rightarrow M$ un fibrado localmente trivial y sean \bar{I} y I las estructuras casi-tangentes canónicas en E y en M . Entonces conmuta el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 TIE & \xrightarrow{J} & TIE \\
 \pi_{**} \downarrow & & \downarrow \pi_{**} \\
 TIM & \xrightarrow{J} & TIM
 \end{array}$$

Demostración.

En coordenadas locales es:

$$\begin{array}{ccc}
 (x, a_1, c_1, a_2, c_2, a_3, c_3, a_4) & \longrightarrow & (x, a_1, c_1, a_2, 0, 0, c_3, a_4) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 (x, c_1, c_2, c_3) & \longrightarrow & (x, c_1, 0, c_3)
 \end{array}$$

qed

Lema 3.16.

(a) Sea $\pi: E \rightarrow M$ un fibrado localmente trivial y sean $\bar{F}: TIE \rightarrow TIE$ y $F: TIM \rightarrow TIM$, $\bar{X}: IE \rightarrow TIE$ y $X: TM \rightarrow TIM$ tales que conmuten los diagramas

$$\begin{array}{ccc}
 TIE & \xleftarrow{\bar{F}} & TIE \\
 \pi_{**} \downarrow & & \downarrow \pi_{**} \\
 TIM & \xleftarrow{F} & TIM
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 TIE & \xleftarrow{\bar{X}} & IE \\
 \pi_{**} \downarrow & & \downarrow \pi_* \\
 TIM & \xleftarrow{X} & TM
 \end{array}$$

Entonces $\pi_{**} \circ \bar{F}(\bar{X}) = F(X) \circ \pi_*$

(b) Si además se definen $\tilde{G}: TTE \rightarrow TTE$, $G: TTM \rightarrow TTM$, $\tilde{Y}: TE \rightarrow TTE$ e $Y: TM \rightarrow TTM$ de modo que

$$\pi_{**} \tilde{G} = G \circ \pi_{**} \quad \text{y} \quad \pi_{**} \tilde{Y} = Y \circ \pi_*$$

entonces

$$\pi_{**} \circ [F, \tilde{G}](\tilde{X}, \tilde{Y}) = [F, G](X, Y) \circ \pi_*$$

Demostración.

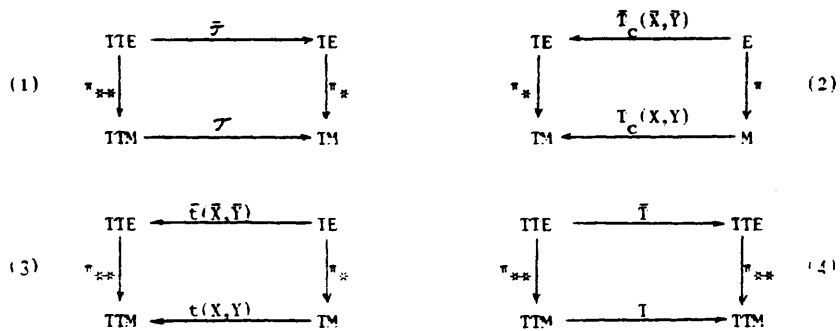
La parte (a) es trivial, porque $F(X) = F \circ X$

Y la parte (b) también es inmediata, desarrollando el corchete de Frölicher-Nijenhuis y aplicando la parte (a) y el lema 3.5.:

$$\begin{aligned} \pi_{**} [F, \tilde{G}](\tilde{X}, \tilde{Y}) &= \frac{1}{2} \pi_{**} ([F(\tilde{X}), \tilde{G}(\tilde{Y})] - [F(\tilde{Y}), \tilde{G}(\tilde{X})] + F\tilde{G}(\tilde{X}, \tilde{Y}) - \tilde{G}F(\tilde{Y}, \tilde{X}) - F[\tilde{X}, \tilde{G}(\tilde{Y})] + \\ &\quad + F[\tilde{Y}, \tilde{G}(\tilde{X})] - \tilde{G}[\tilde{X}, F(\tilde{Y})] + \tilde{G}[\tilde{Y}, F(\tilde{X})]) = \\ &= [F, G](X, Y) \circ \pi_* \end{aligned}$$

qed

Proposición 3.17.: Sea $\pi: E \rightarrow M$ un fibrado localmente trivial y sean \tilde{F} y F conexiones no homogéneas en E y en M tales que \tilde{F} es elevación de F . Sean $\tilde{\mathcal{T}}$, \tilde{I}_c (en el caso de que la conexión sea lineal), \tilde{t} y \tilde{T} (resp. \mathcal{T} , I_c , t y I) la torsión, la torsión clásica, la torsión débil y la torsión fuerte de \tilde{F} (resp. de F). Entonces conmutan los cuatro diagramas siguientes:



donde en (2): $\tilde{X}, \tilde{Y} \in T_0^1(E)$; $X, Y \in T_0^1(M)$ y se verifica que

$$\pi_* \circ \bar{X} = X \circ \pi \quad ; \quad \pi_* \circ \bar{Y} = Y \circ \pi$$

mientras que en (3): $\bar{X}, \bar{Y} \in T_0^1(TE)$; $X, Y \in T_0^1(TM)$ y se verifica

$$\pi_{**} \circ \bar{X} = X \circ \pi_* \quad ; \quad \pi_{**} \circ \bar{Y} = Y \circ \pi_*$$

Demostración.

(1) Basta aplicar la definición de \mathcal{J} , la de elevación y el lema 3.14.:

$$\begin{aligned} \pi_* \circ \bar{\mathcal{J}} &= \pi_* \circ \frac{1}{2}(\bar{K} - \bar{K} \circ S_E) = \frac{1}{2}(\pi_* \circ \bar{K} - \pi_* \circ \bar{K} \circ S_E) = \frac{1}{2}(K \circ \pi_{**} - K \circ \pi_{**} \circ S_E) = \frac{1}{2}(K \circ \pi_{**} - K \circ S_M \circ \pi_{**}) = \\ &= \mathcal{J} \circ \pi_{**} \end{aligned}$$

(2) Por la definición, la proposición 3.2. y el lema 3.5. resulta

$$\pi_* \circ \bar{T}_C(\bar{X}, \bar{Y}) = \pi_* (\bar{\nabla}_X \bar{Y} - \bar{\nabla}_Y \bar{X} - [\bar{X}, \bar{Y}]) = T_C(X, Y) \circ \pi_*$$

(3) Por los lemas 3.15. y 3.16. se obtiene directamente, al ser

$$t = \frac{1}{2} [J.h]$$

(4) Su demostración exige desarrollar las expresiones de T y \bar{T} , y no ofrece ninguna dificultad.

qed

Ligados al concepto de torsión están los siguientes (cfr. [50]):

Se llama **conexión conjugada** $\hat{\Gamma}$ de una dada Γ a la que tiene como aplicación de conexión

$$\hat{K} = K \circ S$$

Se dice que una conexión Γ es **simétrica** si $\Gamma = \hat{\Gamma}$, o de modo equivalente, si $\mathcal{J} = 0$.

Dada una conexión Γ se llama **conexión simétrica asociada** a Γ a

$$\tilde{\Gamma} = \frac{1}{2}(\Gamma + \hat{\Gamma})$$

Resulta que

$$\tilde{K} = \frac{1}{2}(K + K \circ S) \quad \text{y} \quad \tilde{\mathcal{J}} = 0$$

Es inmediato que si Γ es una conexión lineal, su conjugada $\hat{\Gamma}$ tiene sim-

bolos locales

$$\hat{\Gamma}_{jk}^i = \Gamma_{kj}^i .$$

Proposición 3.18.: Sea $\nu: E \rightarrow M$ un fibrado localmente trivial y sean $\tilde{\Gamma}$ y Γ conexiones no homogéneas en E y en M tales que $\tilde{\Gamma}$ es elevación de Γ . Entonces:

- (a) $\hat{\tilde{\Gamma}}$ es elevación de $\hat{\Gamma}$.
- (b) $\tilde{\tilde{\Gamma}}$ es elevación de $\tilde{\Gamma}$.
- (c) Si $\tilde{\Gamma}$ es simétrica, entonces Γ también lo es.

Demostración.

$$(a) \quad \nu_{*} \hat{\tilde{\Gamma}} = \nu_{*} \tilde{\Gamma} \circ S_E = K \circ \nu_{**} \circ S_E = K \circ S_M \circ \nu_{**} = \hat{K} \circ \nu_{**} .$$

$$(b) \quad \nu_{*} \tilde{\tilde{\Gamma}} = \frac{1}{2} \nu_{*} (\tilde{\Gamma} + \tilde{\Gamma} \circ S_E) = \frac{1}{2} (K \circ \nu_{**} + K \circ \nu_{**} \circ S_E) = \frac{1}{2} (K \circ \nu_{**} + K \circ S_M \circ \nu_{**}) = \hat{K} \circ \nu_{**}$$

(c) Si $\tilde{\tilde{\Gamma}} = \tilde{\tilde{\Gamma}}$, entonces

$$\tilde{\tilde{\Gamma}} \circ S_E = \tilde{\tilde{\Gamma}} \Rightarrow \nu_{*} \tilde{\tilde{\Gamma}} \circ S_E = \nu_{*} \tilde{\tilde{\Gamma}} \Rightarrow K \circ S_M = K \Rightarrow \hat{K} = K$$

En todos los apartados hemos utilizado el lema 3.14.

qed

Obsérvese que en (c) no decimos que todas las elevaciones de una conexión simétrica sean simétricas. Así, en [52], se prueba que siendo ∇ simétrica (∇ una conexión lineal en M), su elevación horizontal al fibrado tangente, ∇^H , es simétrica si y sólo si la curvatura de ∇ es nula.

CAPITULO 4. APLICACIONES.

Nos planteamos en este capítulo dos propósitos: por una parte mostrar que muchas elevaciones de conexiones y pseudoconexiones dadas en la literatura son casos particulares de la teoría que hemos desarrollado. Esto nos permite ver, en un único esquema, situaciones dispares. El otro interés es obtener propiedades nuevas de las elevaciones conocidas. Así se comprenderán mejor la definición de tales elevaciones y el papel, hasta ahora ignorado, que jugaban los buenos cuadrados.

§ 4.1. ELEVACIONES AL FIBRADO TANGENTE.

1. Buenos cuadrados relacionados con el fibrado tangente.

Vamos a trabajar con objetos definidos en $\pi_M: TM \rightarrow M$ y en $\pi_{TM}: ITM \rightarrow TM$, buscando definiciones de elevaciones de conexiones y pseudoconexiones del primer al segundo fibrado. Para desarrollar esta teoría consideramos los dos buenos cuadrados que obtuvimos en el ejemplo 1.1.:



cuyas expresiones locales son:

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{ccc}
 (x, c_1, c_2, c_3) & \longrightarrow & (x, c_1) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 (x, c_2) & \longrightarrow & x
 \end{array} & \text{y} & \begin{array}{ccc}
 (x, c_1, c_2, c_3) & \longrightarrow & (x, c_1) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 (x, c_3) & \longrightarrow & x
 \end{array} \\
 (*) & & (**)
 \end{array}$$

Considerando cualquiera de esos dos buenos cuadrados tenemos:

$$\rho: \text{VTM} \rightarrow \text{TM} \quad ; \quad \rho(x, c_1, 0, c_2) = (x, c_2)$$

$$\bar{\rho}: \text{VTIM} \rightarrow \text{TIM} \quad ; \quad \bar{\rho}(x, c_1, c_2, c_3, 0, 0, c_4, c_5) = (x, c_1, c_4, c_5)$$

Obsérvese que, con respecto a lo que ocurría en la teoría general (expuesta en los capítulos 2 y 3) aparecen intercambiadas las coordenadas segunda y tercera en la expresión de $\gamma = \tau_{\text{TM}}$. Obtenemos así las siguientes expresiones para las conexiones generalizadas en el fibrado $\tau_{\text{TM}}: \text{TIM} \rightarrow \text{TM}$ (que son independientes del buen cuadrado escogido):

(1) Conexión generalizada:

$$\bar{F} = \begin{pmatrix} \bar{C}_j^i & \bar{C}_{j-n}^i & \bar{M}_{j-2n}^i & \bar{M}_{j+3n}^i \\ \bar{C}_j^{i-n} & \bar{C}_{j+n}^{i-n} & \bar{M}_{j-2n}^{i-n} & \bar{M}_{j-3n}^{i-n} \\ \bar{v}_j^{i+2n} & \bar{v}_{j-n}^{i+2n} & \bar{B}_{j-2n}^{i+2n} & \bar{B}_{j-3n}^{i+2n} \\ \bar{v}_j^{i+3n} & \bar{v}_{j+n}^{i+3n} & \bar{B}_{j-2n}^{i+3n} & \bar{B}_{j-3n}^{i+3n} \end{pmatrix} e T_1^1(\text{TIM})$$

(2) Conexión generalizada fibrada:

$$\bar{F} = \begin{pmatrix} * & * & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix}$$

donde las * indican los correspondiente términos de la expresión (1).

(3) Fere-conexión:

$$\bar{F} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix}$$

(4) Pseudoconexión de campo fundamental G e $T_1^1(TM)$:

$$\bar{F} = \begin{pmatrix} 2G_j^i & 2G_{j-n}^i & 0 & 0 \\ 2G_j^{i-n} & 2G_{j+n}^{i-n} & 0 & 0 \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix}; \text{ si } G = \begin{pmatrix} G_j^i & G_{j-n}^i \\ G_j^{i-n} & G_{j-n}^{i-n} \end{pmatrix}$$

(5) Conexión infinitesimal de forma local $\alpha = (\alpha_{11} + \alpha_{12}, \alpha_{21} + \alpha_{22})$:

$$\bar{F} = \begin{pmatrix} \delta_j^i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_j^i & 0 & 0 \\ -2\alpha_{11j}^i & -2\alpha_{12j}^i & -\delta_j^i & 0 \\ -2\alpha_{21j}^i & -2\alpha_{22j}^i & 0 & -\delta_j^i \end{pmatrix}$$

(6) La condición para que \bar{F} sea elevación en el buen cuadrado (*) de

$$F = \begin{pmatrix} C_j^i & M_{j-n}^i \\ v_j^{i-n} & B_{j-n}^{i-n} \end{pmatrix}$$

es que sea

$$\bar{F} = \begin{pmatrix} C_j^i & 0 & M_{j-n}^i & 0 \\ * & * & * & * \\ v_j^{i-n} & 0 & B_{j-n}^{i-n} & 0 \\ * & * & * & * \end{pmatrix}$$

En efecto, para comprobarlo hay que proceder como en la demostración de la proposición 2.4., obteniendo la expresión matricial de $\alpha_* = (\alpha_M)_*$, que es

$$(\alpha_M)_* = \begin{pmatrix} \delta_j^i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_j^i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_j^i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_j^i \end{pmatrix}$$

y hallando $F \circ \alpha_* = \alpha_* \circ \bar{F}$. Nos da la condición buscada.

(7) La condición para que F sea elevación en el buen cuadrado (**) de F (F tiene la expresión local dada en (6)) es que sea

$$\bar{F} = \begin{pmatrix} C_j^i & 0 & 0 & M_{j+n}^i \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ v_j^{i+n} & 0 & 0 & B_{j+n}^{i-n} \end{pmatrix}$$

En efecto, basta tener en cuenta que en este caso $\alpha = \bar{\alpha}$, con lo que la expresión matricial de α_* es

$$\alpha_* = \bar{\alpha}_* = \begin{pmatrix} \delta_j^i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_j^i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_j^i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_j^i \end{pmatrix}$$

Así, la igualdad $F \circ \alpha_* = \alpha_* \circ \bar{F}$ nos lleva a la condición descrita.

2. Elevaciones completa y horizontal de conexiones lineales.

Comenzamos estudiando la clásica elevación completa de una conexión lineal sobre una variedad a su fibrado tangente (cfr. por ejemplo [52]). Denotamos por ∇ una tal conexión lineal y por ∇^C su elevación completa. Obtenemos, entonces, el siguiente resultado:

Proposición 4.1.: Sea ∇ una conexión lineal en una variedad M y sea ∇^C su elevación completa a TM . Entonces ∇^C es elevación de ∇ respecto del buen cuadrado (*)

$$\begin{array}{ccc}
 TTM & \xrightarrow{\tau_{TM}} & TM \\
 (\tau_M)_* \downarrow & & \downarrow \tau_M \\
 TM & \xrightarrow{\tau_M} & M
 \end{array}
 \quad (*)$$

Observación. Vamos a dar dos demostraciones: la primera ahora, siguiendo los resultados del capítulo 3 (es decir, considerando que ∇ y ∇^C son conexiones infinitesimales); la segunda en la sección § 4.1.3.. considerándolas como conexiones generalizadas.

Primera demostración de la proposición 4.1.

Vamos a desarrollarla por completo para que se vean las técnicas que se utilizan. En otras demostraciones similares omitiremos las partes más pesadas de los cálculos.

Los símbolos de ∇^C son ([52]):

$$\begin{aligned}
 \bar{r}_{kj}^i &= r_{kj}^i & ; & \quad \bar{r}_{k \ j-n}^i = 0 & \quad ; & \quad \bar{r}_{k-n \ j}^i = 0 & \quad ; & \quad \bar{r}_{k-n \ j-n}^i = 0 \\
 \bar{r}_{kj}^{i-n} &= (r_{kj}^i)^C & ; & \quad \bar{r}_{k \ j-n}^{i-n} = r_{kj}^i & \quad ; & \quad \bar{r}_{k-n \ j}^{i-n} = r_{kj}^i & \quad ; & \quad \bar{r}_{k-n \ j-n}^{i-n} = 0
 \end{aligned}$$

Vamos a hallar la aplicación de conexión \bar{K} de ∇^C a partir de los símbolos dados.

Como

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}}^C \frac{\partial}{\partial x^j} = \frac{\partial}{\partial x^i} \cdot \bar{r}_{kj}^i + \frac{\partial}{\partial c_1^i} \cdot \bar{r}_{kj}^{i+n}$$

y análogamente en los demás casos, obtenemos:

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}}^C \frac{\partial}{\partial x^j} = \frac{\partial}{\partial x^i} \cdot r_{kj}^i + \frac{\partial}{\partial c_1^i} \cdot (r_{kj}^i)^C$$

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}}^C \frac{\partial}{\partial c_1^j} = \frac{\partial}{\partial x^i} \cdot 0 + \frac{\partial}{\partial c_1^i} \cdot r_{kj}^i$$

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial c_1^k}}^C \frac{\partial}{\partial x^j} = \frac{\partial}{\partial x^i} \cdot 0 + \frac{\partial}{\partial c_1^i} \cdot r_{kj}^i$$

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial c_1^k}}^C \frac{\partial}{\partial c_1^j} = \frac{\partial}{\partial x^i} \cdot 0 + \frac{\partial}{\partial c_1^i} \cdot 0$$

Sean $X, Y \in I_0^1(TM)$. Localmente se expresarán por:

$$X = \frac{\partial}{\partial x^1} X^i + \frac{\partial}{\partial c_1^1} X^{i-n} \implies X(x, c_1) = (x^i, c_1^i, X^i, X^{i-n})$$

$$Y = \frac{\partial}{\partial x^1} Y^i + \frac{\partial}{\partial c_1^1} Y^{i-n} \implies Y(x, c_1) = (x^i, c_1^i, Y^i, Y^{i-n})$$

Entonces resulta:

$$\begin{aligned} \nabla_X^C Y &= \bar{K} \cdot Y_* \cdot X = \\ &= \bar{K}(x^i, c_1^i, Y^i, Y^{i-n}, X^j, X^{j-n}, \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} X^j + \frac{\partial Y^i}{\partial c_1^j} X^{j-n}, \frac{\partial Y^{i+n}}{\partial x^j} X^j + \frac{\partial Y^{i+n}}{\partial c_1^j} X^{j-n}) = \\ &= \bar{K}(x^i, c_1^i, Y^i, Y^{i-n}, X^j, X^{j-n}, Z^i, Z^{i-n}), \end{aligned}$$

con notación más cómoda en la última expresión.

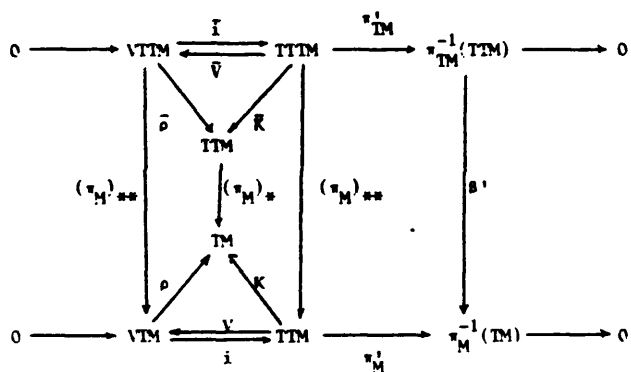
Por otra parte resulta:

$$\begin{aligned}
 v_{X^i}^C Y^j &= v_{X^i}^C \left(\frac{\partial}{\partial x^k} X^k + \frac{\partial}{\partial c_1^k} X^{k-n} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x^j} Y^j + \frac{\partial}{\partial c_1^j} Y^{j-n} \right) = \\
 &= X^k Y^j v_{X^i}^C \frac{\partial}{\partial x^k} \frac{\partial}{\partial x^j} + X^k \frac{\partial}{\partial x^j} \frac{\partial Y^j}{\partial x^k} + X^k Y^{j-n} v_{X^i}^C \frac{\partial}{\partial x^k} \frac{\partial}{\partial c_1^j} + X^k \frac{\partial}{\partial c_1^j} \frac{\partial Y^{j-n}}{\partial x^k} + \\
 &+ X^{k+n} Y^j v_{X^i}^C \frac{\partial}{\partial c_1^k} \frac{\partial}{\partial x^j} + X^{k+n} \frac{\partial}{\partial x^j} \frac{\partial Y^j}{\partial c_1^k} + X^{k-n} Y^{j-n} v_{X^i}^C \frac{\partial}{\partial c_1^k} \frac{\partial}{\partial c_1^j} + X^{k+n} \frac{\partial}{\partial c_1^j} \frac{\partial Y^{j-n}}{\partial c_1^k} = \\
 &= (x^i, c_1^i, X^k Y^j \Gamma_{kj}^i, X^k Y^j (\Gamma_{kj}^i)^C) + \\
 &+ (x^i, c_1^i, X^k \frac{\partial Y^i}{\partial x^k}, 0) + \\
 &- (x^i, c_1^i, 0, X^k Y^{j-n} \Gamma_{kj}^i) + \\
 &- (x^i, c_1^i, 0, X^k \frac{\partial Y^{i-n}}{\partial x^k}) + \\
 &- (x^i, c_1^i, 0, X^{k-n} Y^j \Gamma_{kj}^i) + \\
 &+ (x^i, c_1^i, X^{k-n} \frac{\partial Y^i}{\partial c_1^k}, 0) + \\
 &+ (x^i, c_1^i, 0, 0) + \\
 &+ (x^i, c_1^i, 0, X^{k-n} \frac{\partial Y^{i-n}}{\partial c_1^k}) = \\
 &= (x^i, c_1^i, X^k Y^j \Gamma_{kj}^i + X^k \frac{\partial Y^i}{\partial x^k} + X^{k-n} \frac{\partial Y^i}{\partial c_1^k}, \\
 &X^k Y^j (\Gamma_{kj}^i)^C + X^k Y^{j-n} \Gamma_{kj}^i + X^{k-n} Y^j \Gamma_{kj}^i + X^k \frac{\partial Y^{i+n}}{\partial x^k} + X^{k-n} \frac{\partial Y^{i+n}}{\partial c_1^k}) = \\
 &= (x^i, c_1^i, \Gamma_{kj}^i X^k Y^j + Z^i, (\Gamma_{kj}^i)^C X^k Y^j + \Gamma_{kj}^i (X^k Y^{j-n} + X^{k-n} Y^j) + Z^{i-n}).
 \end{aligned}$$

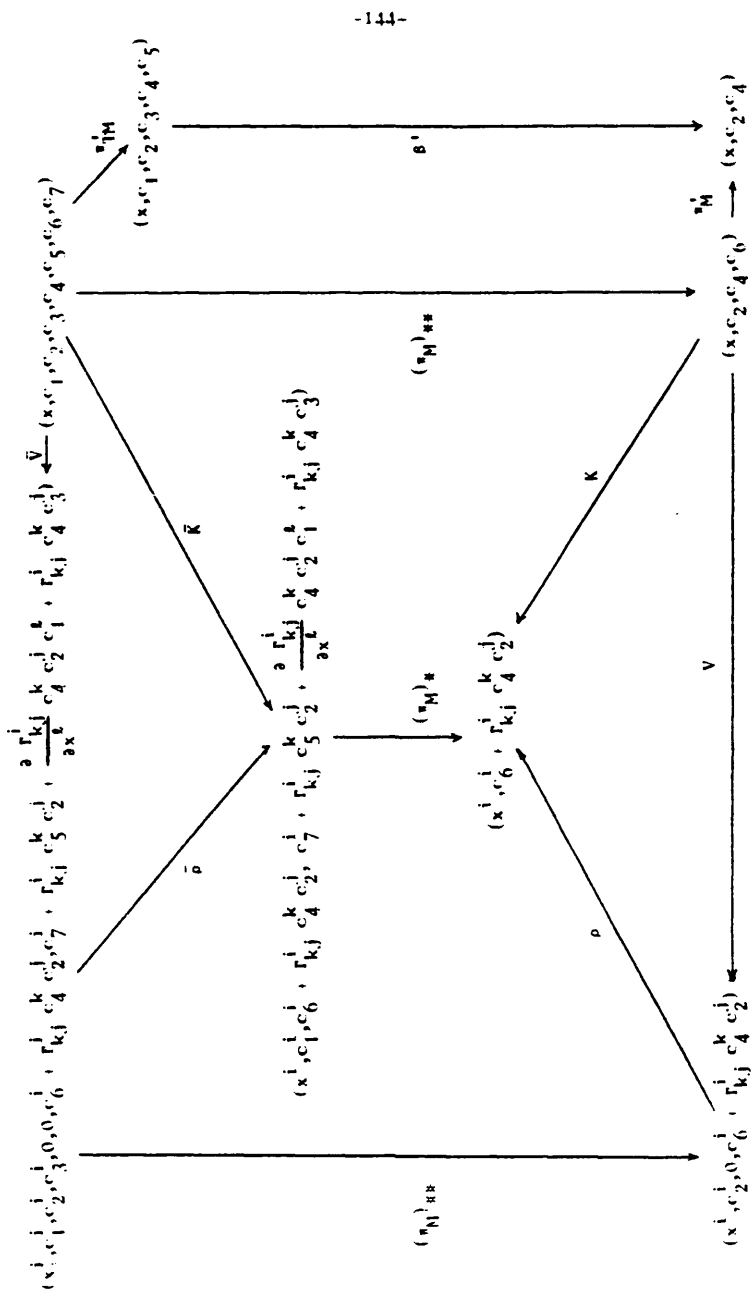
Como X e Y son campos cualesquiera, resulta que

$$\begin{aligned}
 \bar{R}(x, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7) &= \\
 &= (x^i \cdot c_1^i \cdot c_6^i + r_{kj}^i c_4^k c_2^j \cdot c_7^i + r_{kj}^i c_5^k c_2^j + (r_{kj}^i)^C c_4^k c_2^j + r_{kj}^i c_4^k c_3^j) = \\
 &= (x^i \cdot c_1^i \cdot c_6^i + r_{kj}^i c_4^k c_2^j \cdot c_7^i + r_{kj}^i c_5^k c_2^j + \frac{\partial r_{kj}^i}{\partial x^i} c_4^k c_2^j c_1^i + r_{kj}^i c_4^k c_3^j).
 \end{aligned}$$

Entonces el diagrama



se expresa localmente como:



con lo que, por lo visto en el capítulo 3, es ciertamente ∇^C una elevación de ∇ respecto del buen cuadrado (*).

qed

Pasemos a la elevación horizontal de conexiones lineales (cfr. por ejemplo [52]). Obtenemos un resultado muy parecido:

Proposición 4.2.: Sea ∇ una conexión lineal en una variedad M y sea ∇^H su elevación horizontal a TM . Entonces ∇^H es elevación de ∇ respecto del buen cuadrado (*).

$$\begin{array}{ccc}
 TTM & \xrightarrow{\nabla_{TM}} & TM \\
 (\pi_M)_* \downarrow & & \downarrow \pi_M \\
 TM & \xrightarrow{\nabla_M} & M
 \end{array}
 \quad (*)$$

Demostración.

Seguimos las técnicas de la proposición anterior, aunque abreviamos mucho la exposición.

Los símbolos de ∇^H , [52], son los mismos que los de ∇^C salvo

$$\bar{\Gamma}_{kj}^{i-n} = \left(\frac{\partial \Gamma_{kj}^i}{\partial x^l} - R_{lkj}^i \right) c_1^l$$

donde R es el tensor de curvatura de la conexión dada ∇ .

Entonces resulta que

$$\bar{K}(x, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7) =$$

$$= (x^i, c_1^i, c_0^i + \Gamma_{kj}^i c_4^k c_2^j, c_7^i + \Gamma_{kj}^i c_5^k c_2^j + \left(\frac{\partial \Gamma_{kj}^i}{\partial x^l} - R_{lkj}^i \right) c_4^k c_2^j c_1^l + \Gamma_{kj}^i c_4^k c_3^j)$$

de donde se obtienen directamente las igualdades

$$(\pi_M)_* \bar{V} = V \circ (\pi_M)_* \quad \text{y} \quad (\pi_M)_* \bar{K} = K \circ (\pi_M)_*$$

que prueban el resultado.

qed

Observación. Si la conexión dada ∇ tiene curvatura R no nula es $\nabla^C \neq \nabla^H$. Así que existen elevaciones distintas respecto de un mismo buen cuadrado. Este resultado demuestra lo que comentamos sobre la unicidad en la sección § 2.3.

3. Otro punto de vista: las conexiones generalizadas.

Hemos realizado con todo detalle la demostración de la proposición 4.1. para que se vea cómo se aplica en un caso particular la teoría general que hemos construido. Esa demostración se basaba en los resultados obtenidos en el capítulo 3. al considerar ∇ como una conexión infinitesimal en el fibrado vectorial $\pi_M: TM \rightarrow M$. Veamos ahora cómo se aborda el problema al considerar ∇ como conexión generalizada:

Segunda demostración de la proposición 4.1.

Hallemos la expresión de ∇^C como conexión generalizada, esto es, consideremos ∇^C en $\Gamma_1^1(TM)$.

Teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} \bar{K}(x, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7) &= \\ &= (x^i, c_1^i, c_6^i + a_1^i(x, c_1, c_2, c_3)(c_4, c_5), c_7^i + a_2^i(x, c_1, c_2, c_3)(c_4, c_5)) = \\ &= (x^j, c_1^j, c_6^i + a_{11k}^i(x, c_1, c_2, c_3)c_4^k - a_{12k}^i(x, c_1, c_2, c_3)c_5^k, \\ &\quad c_7^i + a_{21k}^i(x, c_1, c_2, c_3)c_4^k + a_{22k}^i(x, c_1, c_2, c_3)c_5^k) \end{aligned}$$

resultan las siguientes igualdades:

$$a_{11k}^i(x, c_1, c_2, c_3) = r_{kj}^i c_2^j$$

$$a_{12k}^i(x, c_1, c_2, c_3) = 0$$

$$a_{21k}^i(x, c_1, c_2, c_3) = \frac{\partial r_{kj}^i}{\partial x^k} c_2^j c_1^k + r_{kj}^i c_3^j$$

$$a_{22k}^i(x, c_1, c_2, c_3) = r_{kj}^i c_2^j$$

Así v^C tiene la expresión local

$$v^C = \begin{pmatrix} \delta_k^i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_k^i & 0 & 0 \\ -2r_{kj}^i c_2^j & 0 & -\delta_k^i & 0 \\ -2\left(\frac{\partial r_{kj}^i}{\partial x^k} c_2^j c_1^k + r_{kj}^i c_3^j\right) & -2r_{kj}^i c_2^j & 0 & -\delta_k^i \end{pmatrix} e T_1^1(TTM)$$

Y como v tiene la expresión local

$$v = \begin{pmatrix} \delta_k^i & 0 \\ -2r_{kj}^i c_2^j & -\delta_k^i \end{pmatrix} e T_1^1(TM)$$

resulta por la propiedad (6) de § 4.1.1. que v^C es elevación de v .

qed

Observación. Adviértase que al ser $(\pi_M)_*(x, c_1, c_2, c_3) = (x, c_2)$, las coordenadas de v vienen en función de x y c_2 .

Del mismo modo se razona con la elevación horizontal y se puede obtener una nueva demostración de la proposición 4.2.

Esta consideración de v y v^C como conexiones generalizadas no sirve solamente para dar la segunda demostración de la proposición 4.1. En efecto, acabamos de ver que v e $T_1^1(TM)$ y v^C e $T_1^1(TTM)$ considerados como conexiones generalizadas. Y si nos fijamos sólo en su aspecto tensorial, ¿no estarán también

así relacionadas ∇ y ∇^C ?

Dada una variedad diferenciable N , es conocida la teoría de elevaciones de campos tensoriales a su fibrado tangente TN (cfr. por ejemplo [52]). En particular si $N = TM$ y $F \in T_1^1(TM)$ se expresa localmente por

$$F = \begin{pmatrix} F_j^i & F_{j+n}^i \\ F_j^{i+n} & F_{j+n}^{i+n} \end{pmatrix}$$

se definen las elevaciones siguientes, cuyas expresiones locales en las cartas inducidas son:

(a) Elevación vertical:

$$F^V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ F_j^i & 0 & F_{j+n}^i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ F_j^{i+n} & 0 & F_{j+n}^{i+n} & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Elevación completa:

$$F^C = \begin{pmatrix} F_j^i & 0 & F_{j+n}^i & 0 \\ (F_j^i)^C & F_j^i & (F_{j+n}^i)^C & F_{j+n}^i \\ F_j^{i+n} & 0 & F_{j+n}^{i+n} & 0 \\ (F_j^{i+n})^C & F_j^{i+n} & (F_{j+n}^{i+n})^C & F_{j+n}^{i+n} \end{pmatrix}$$

(c) Elevación horizontal respecto de una conexión $\bar{\nabla}$ lineal definida en TM y de símbolos

$$\bar{F}_{j+\beta n \ k+\gamma n}^{i+\alpha n} \quad \text{con } \alpha, \beta, \gamma \in \{0,1\}$$

$$F^H = \begin{pmatrix} F_j^i & 0 & F_{j-n}^i & 0 \\ -\bar{F}_{k+\alpha n}^i F_j^{k+\alpha n} + F_{k-\beta n}^i \bar{F}_j^{k+\beta n} & F_j^i & -\bar{F}_{k+\alpha n}^i F_{j+n}^{k+\alpha n} + F_{k-\beta n}^i \bar{F}_{j-n}^{k+\beta n} & F_{j+n}^i \\ F_j^{i+n} & 0 & F_{j-n}^{i+n} & 0 \\ -\bar{F}_{k+\alpha n}^{i-n} F_j^{k+\alpha n} + F_{k-\beta n}^{i-n} \bar{F}_j^{k+\beta n} & F_j^{i+n} & -\bar{F}_{k+\alpha n}^{i-n} F_{j+n}^{k+\alpha n} + F_{k-\beta n}^{i-n} \bar{F}_{j-n}^{k+\beta n} & F_{j+n}^{i+n} \end{pmatrix}$$

donde $\bar{F}_{k+\gamma n}^{i-\alpha n} = \bar{F}_{j-k-\gamma n}^{i-\alpha n} c_2^j + \bar{F}_{j+n-k-\gamma n}^{i-\alpha n} c_3^j$

En los tres casos se tiene que $F^V, F^C, F^H \in T_1^1(TM)$

Entonces el siguiente resultado establece una simplificación conceptual muy grande, pues reduce la elevación de conexiones a elevación de campos tensoriales de tipo (1,1):

Proposición 4.3.: Sea $\nabla \in T_1^1(TM)$ una conexión lineal en M y sean $\nabla^C, \nabla^H \in T_1^1(TM)$ sus elevaciones completa y horizontal al fibrado tangente. Entonces se verifica:

(1) ∇^C es, salvo permutación de las variables c_1 y c_2 , la elevación completa de ∇ como campo tensorial de tipo (1,1).

(2) ∇^H es, salvo permutación de las variables c_1 y c_2 , la elevación horizontal de ∇ como campo tensorial de tipo (1,1) respecto de la conexión lineal ∇^H definida en TM , si se supone que ∇ no tiene torsión.

Observación. La permutación de las variables c_1 y c_2 es el automorfismo de Kohayashi en TM (ver § 0.1.1.)

Demostración.

(1) Recuerdo que la expresión matricial de ∇ es

$$\nabla = \begin{pmatrix} \delta_k^i & 0 \\ -2\Gamma_{kj}^i c_1^j & -\xi_k^i \end{pmatrix}$$

Es sabido que $f^C = 0$ si f es constante y que

$$(f(x, c_1))^C = \frac{\partial f}{\partial x^i} c_2^i + \frac{\partial f}{\partial c_1^i} c_3^i$$

Entonces,

$$(-2\Gamma_{kj}^i c_1^j) = -2\left(\frac{\partial(\Gamma_{kj}^i c_1^j)}{\partial x^i} c_2^i + \frac{\partial(\Gamma_{kj}^i c_1^j)}{\partial x^i} c_3^i\right) = -2\left(\frac{\partial\Gamma_{kj}^i}{\partial x^i} c_2^j c_1^j + \Gamma_{kj}^i c_3^j\right),$$

pues $\Gamma_{kj}^i = \Gamma_{kj}^i(x)$.

Así resulta que v^C elevada como campo tensorial es

$$v^C = \begin{pmatrix} \delta_k^i & 0 & 0 & 0 \\ (\delta_k^i)^C & \delta_k^i & 0 & 0 \\ -2\Gamma_{kj}^i c_1^j & 0 & -\delta_k^i & 0 \\ (-2\Gamma_{kj}^i c_1^j)^C & -2\Gamma_{kj}^i c_1^j & (-\delta_k^j)^C & -\delta_k^i \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \delta_k^i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_k^i & 0 & 0 \\ -2\Gamma_{kj}^i c_1^j & 0 & -\delta_k^i & 0 \\ -2\left(\frac{\partial\Gamma_{kj}^i}{\partial x^i} c_2^j c_1^j + \Gamma_{kj}^i c_3^j\right) & -2\Gamma_{kj}^i c_1^j & 0 & -\delta_k^i \end{pmatrix}$$

que es la expresión que obtuvimos en la segunda demostración de la proposición 4.1., salvo la permutación de c_1 y c_2 .

(2) Esta parte es de cálculo más lento. Comenzamos hallando las cuatro expresiones largas que aparecen en la matriz de v^H :

$$\begin{aligned}
 & -\bar{\Gamma}_{k+an}^i \bar{\Gamma}_j^{k+an} + \bar{\Gamma}_{k+8n}^i \bar{\Gamma}_j^{k+8n} = \\
 & = -\bar{\Gamma}_{lk}^i c_2^k \bar{\Gamma}_j^k - \bar{\Gamma}_{8n k}^i c_3^k \bar{\Gamma}_j^k - \bar{\Gamma}_{l k+n}^i c_2^k \bar{\Gamma}_j^{k+n} - \bar{\Gamma}_{l+n k+n}^i c_3^k \bar{\Gamma}_j^{k+n} + \\
 & + \bar{\Gamma}_k^i \bar{\Gamma}_{lj}^k c_2^k + \bar{\Gamma}_k^i \bar{\Gamma}_{l+n j}^k c_3^k + \bar{\Gamma}_{k+n}^i \bar{\Gamma}_{lj}^{k+n} c_2^k + \bar{\Gamma}_{k+n}^i \bar{\Gamma}_{l+n j}^{k+n} c_3^k = \\
 & = -\bar{\Gamma}_{lk}^i c_2^k \delta_j^k - 0 - 0 - 0 + (\delta_k^i \bar{\Gamma}_{lj}^k c_2^k) - 0 + 0 + 0 = \\
 & = -\bar{\Gamma}_{lj}^i c_2^k + \bar{\Gamma}_{lj}^i c_2^k = 0
 \end{aligned}$$

Razonando del mismo modo, obtenemos:

$$\begin{aligned}
 & -\bar{\Gamma}_{k+an}^i \bar{\Gamma}_{j+n}^{k+an} + \bar{\Gamma}_{k+8n}^i \bar{\Gamma}_{j+n}^{k+8n} = 0 \\
 & -\bar{\Gamma}_{k+an}^{i+n} \bar{\Gamma}_j^{k+an} + \bar{\Gamma}_{k+8n}^{i+n} \bar{\Gamma}_j^{k+8n} = -2 \left(\frac{\partial \bar{\Gamma}_{lj}^i}{\partial x^p} - R_{plj}^i \right) c_1^p c_2^k - 2 \bar{\Gamma}_{lj}^i c_3^k \\
 & -\bar{\Gamma}_{k+an}^{i+n} \bar{\Gamma}_{j+n}^{k+an} + \bar{\Gamma}_{k+8n}^{i+n} \bar{\Gamma}_{j+n}^{k+8n} = 0
 \end{aligned}$$

Entonces ∇^H elevada como campo tensorial tiene la siguiente expresión matricial:

$$\nabla^H = \begin{pmatrix} \delta_j^i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_j^i & 0 & 0 \\ -2\bar{\Gamma}_{jk}^i c_1^k & 0 & -\delta_j^i & 0 \\ -2 \left(\frac{\partial \bar{\Gamma}_{lj}^i}{\partial x^p} - R_{plj}^i \right) c_1^p c_2^k + \bar{\Gamma}_{lj}^i c_3^k & -2\bar{\Gamma}_{jk}^i c_1^k & 0 & -\delta_j^i \end{pmatrix}$$

que coincide con la expresión de ∇^H elevada como conexión salvo en la permutación de c_1 y c_2 y en que aquí aparece $\bar{\Gamma}_{lj}^i c_3^k$ mientras que, como conexión, resulta $\bar{\Gamma}_{jl}^i c_3^k$. Pero como por hipótesis ∇ no tiene torsión, es

$$\bar{\Gamma}_{lj}^i = \bar{\Gamma}_{jl}^i$$

4. Elevación de pseudoconexiones lineales.

Vamos a estudiar ahora la elevación de las pseudoconexiones lineales al fibrado tangente. Dichas elevaciones, vertical y completa, fueron introducidas por Falcitelli, Ianus y Pastore, [26], del siguiente modo:

Dada una pseudoconexión lineal ∇ en M de campo fundamental G e $T_1^1(M)$, existen

una única pseudoconexión lineal ∇^V , llamada elevación vertical, que tiene como campo fundamental G^V e $T_1^1(TM)$ y que verifica

$$\nabla_{X^C}^V Y^C = (\nabla_X Y)^V, \text{ para cualesquiera } X, Y \text{ e } T_0^1(M)$$

una única pseudoconexión lineal ∇^C , llamada elevación completa, que tiene como campo fundamental G^C e $T_1^1(TM)$ y que verifica

$$\nabla_{X^C}^C Y^C = (\nabla_X Y)^C, \text{ para cualesquiera } X, Y \text{ e } T_0^1(M)$$

Por nuestra parte, en [15] y [19], establecimos los símbolos de ∇^V y ∇^C , que son:

$$\nabla^V: \bar{\Gamma}_{k \cdot \beta n}^{i \cdot \alpha n}{}_{j \cdot \gamma n} = (\Gamma_{kj}^i)^{(\alpha - \beta - \gamma - 1)}$$

$$\nabla^C: \bar{\Gamma}_{k \cdot \beta n}^{i \cdot \alpha n}{}_{j \cdot \gamma n} = (\Gamma_{kj}^i)^{(\alpha - \beta - \gamma)}$$

con los siguientes convenios de notación:

$$\alpha, \beta, \gamma \in \{0, 1\}$$

y si llamamos $(s) = (\alpha - \beta - \gamma - 1)$ en el caso de ∇^V y $(s) = (\alpha - \beta - \gamma)$ en el de ∇^C , se tiene

$$s < 0 \quad \bar{\Gamma}_{k \cdot \beta n}^{i \cdot \alpha n}{}_{j \cdot \gamma n} = 0$$

$$s = 0 \quad \bar{\Gamma}_{k \cdot \beta n}^{i \cdot \alpha n}{}_{j \cdot \gamma n} = (\Gamma_{kj}^i)^V = \Gamma_{kj}^i$$

$$s = 1 \quad \bar{\Gamma}_{k \cdot \beta n}^{i \cdot \alpha n}{}_{j \cdot \gamma n} = (\Gamma_{kj}^i)^C = \frac{\partial \Gamma_{kj}^i}{\partial x^k} c_1^l$$

Como son pseudoconexiones lineales las que consideramos, resulta que los

símbolos de una tal ∇ son

$$\Gamma_k^i(x, c_1) = \Gamma_{kj}^i(x) c_1^j$$

y de una $\bar{\nabla}$ en TM

$$\bar{\Gamma}_{k+n}^{i+n}(x, c_1, c_2, c_3) = \bar{\Gamma}_{k+n j}^{i+n}(x, c_1) c_2^j + \bar{\Gamma}_{k+n j-n}^{i+n}(x, c_1) c_3^j$$

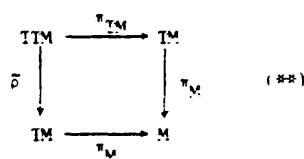
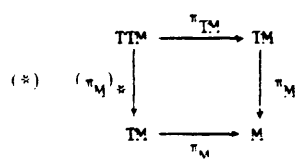
Sean $G \in T_1^1(M)$ y $\bar{G} \in T_1^1(TM)$ los campos fundamentales de ∇ y $\bar{\nabla}$. Entonces, según vimos en § 0.4.2. y en § 4.1.1., resulta que ∇ y $\bar{\nabla}$ consideradas como conexiones generalizadas tienen las siguientes expresiones locales:

$$\nabla = \begin{pmatrix} 2G_k^i & 0 \\ -2\Gamma_{kj}^i c_1^j & 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{\nabla} = \begin{pmatrix} 2\bar{G}_{k+n}^i & 2\bar{G}_{k+n}^i & 0 & 0 \\ 2\bar{G}_{k+n}^{i-n} & 2\bar{G}_{k+n}^{i-n} & 0 & 0 \\ -2(\bar{\Gamma}_{kj}^i c_2^j + \bar{\Gamma}_{k j+n}^i c_3^j) & -2(\bar{\Gamma}_{k+n j}^i c_2^j + \bar{\Gamma}_{k+n j-n}^i c_3^j) & 0 & 0 \\ -2(\bar{\Gamma}_{kj}^{i-n} c_2^j + \bar{\Gamma}_{k j-n}^{i-n} c_3^j) & -2(\bar{\Gamma}_{k-n j}^{i-n} c_2^j + \bar{\Gamma}_{k-n j-n}^{i-n} c_3^j) & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Resumimos en una única proposición todos los resultados referentes a las elevaciones de pseudoconexiones:

Proposición 4.4.: Sean ∇ una pseudoconexión lineal en M , de campo fundamental $G \in T_1^1(M)$, y ∇^V y ∇^C sus elevaciones vertical y completa al fibrado tangente. Sean los buenos cuadrados



Entonces se verifica:

- (1) ∇^C es elevación de ∇ , consideradas ambas como conexiones generalizadas, respecto del buen cuadrado (*).
- (2) ∇^V no es elevación de ∇ , al considerarlas como conexiones generalizadas, respecto del buen cuadrado (**).
- (3) ∇^C es la elevación completa de ∇ , salvo permutación de las variables c_1 y c_2 , consideradas como campos tensoriales de tipo (1,1).
- (4) ∇^V es la elevación vertical de ∇ , salvo permutación de las variables c_1 y c_2 , consideradas como campos tensoriales de tipo (1,1).

Demostración.

A partir de los símbolos de ∇^V y ∇^C se obtienen sus expresiones locales, consideradas como conexiones generalizadas, que son:

$$\nabla^V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2G_k^i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2\Gamma_{kj}^i c_2^j & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\nabla^C = \begin{pmatrix} 2G_k^i & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial G_k^i}{\partial x^l} c_2^l & 2G_k^i & 0 & 0 \\ -2\Gamma_{kj}^i c_2^j & 0 & 0 & 0 \\ -2\left(\frac{\partial \Gamma_{kj}^i}{\partial x^l} c_1^l c_2^j - \Gamma_{kj}^i c_3^l\right) & -2\Gamma_{kj}^i c_2^j & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces, como conexiones generalizadas:

∇^C es elevación de ∇ por (6) de § 4.1.1.

∇^V no es elevación de ∇ por (7) de § 4.1.1., pues la primera fila de ∇^V es toda de ceros: si es elevación en el caso de que sea ∇ una pseudoconexión banal, esto es, de campo fundamental nulo.

Y consideradas como campos tensoriales de tipo (1,1) se tiene el resultado, sin más que considerar las expresiones locales de F^V y F^C dadas en § 4.1.3. y que

$$\begin{aligned}
 -2(\Gamma_{kj}^i c_1^j) C &= -2\left(\frac{\partial(\Gamma_{kj}^i c_1^j)}{\partial x^k} c_2^k + \frac{\partial(\Gamma_{kj}^i c_1^j)}{\partial c_1^k} c_3^k\right) = \\
 &= -2\left(\frac{\partial \Gamma_{kj}^i}{\partial x^k} c_1^j c_2^k + \Gamma_{kj}^i \delta_k^j c_3^k\right) = -2\left(\frac{\partial \Gamma_{kj}^i}{\partial x^k} c_1^j c_2^k + \Gamma_{kj}^i c_3^j\right)
 \end{aligned}$$

qed

Observación. El apartado (2) de la proposición anterior tiene carácter negativo: contra lo esperado, ∇^V no es elevación de ∇ en el cuadrado (**). Lo que sí resulta es que ∇^V es elevación de la pseudoconexión idénticamente nula, respecto del cuadrado (*). Esta proposición pone de manifiesto, una vez más, las buenas propiedades de la elevación completa. En particular, si ∇ es una conexión lineal, esto es, si G es el campo tensorial de Kronecker, las elevaciones completas de ∇ como conexión y como pseudoconexión definen sendas conexiones generalizadas que difieren tan sólo en el campo de Kronecker. Entonces, aplicando la proposición 0.5., ambas definen la misma derivada covariante. Hemos probado este resultado con otras técnicas en [18] y [19].

Las proposiciones de este epígrafe se resumen del siguiente modo:

Elevaciones a TM	conexiones lineales	pseudoconexiones lineales
COMPLETA		
como conexión gener.	Es elevación en (*)	Es elevación en (*)
como campo tensorial	Coincide módulo S	Coincide módulo S
VERTICAL		
como conexión gener.		No es elevación en (**) Sí lo es en (*) de 0
como campo tensorial		Coincide módulo S
HORIZONTAL		
como conexión gener.	Es elevación en (*)	
como campo tensorial	Si $T=0$, coincide módulo S.	

§ 4.2. ELEVACIONES AL FIBRADO DE 2-JETS.

1. Buenos cuadrados relacionados con el fibrado de 2-jets.

Advierto en primer lugar que los resultados que demos en esta sección § 4.2. son generalizables al fibrado de r-jets. El hecho de tomar $r = 2$ se debe a la simplificación, muy de agradecer, de los cálculos. También se pueden extender estos resultados a los fibrados de velocidades, estudiados en [36].

Podemos partir de la idea de que T_2M está sumergido en TT_2M como el conjunto de puntos invariantes por el automorfismo de Kobayashi (cfr. [2] y [4]); para una exposición más acorde con la teoría de jets, ver [52].

Comenzamos estudiando las diferentes expresiones de conexiones generalizadas definidas en el fibrado vectorial

$$\pi_{T_2M}: TT_2M \rightarrow T_2M$$

Una tal conexión vendrá dada por \bar{F} e $T_1^1(TT_2M)$, con lo que su expresión matricial será del tipo

$$\bar{F} = \begin{pmatrix} \bar{C}_j^i & \bar{C}_{j-n}^i & \bar{C}_{j+2n}^i & \bar{M}_{j+3n}^i & \bar{M}_{j-4n}^i & \bar{M}_{j-5n}^i \\ \bar{C}_j^{i-n} & \bar{C}_{j-n}^{i-n} & \bar{C}_{j-2n}^{i-n} & \bar{M}_{j+3n}^{i-n} & \bar{M}_{j-4n}^{i-n} & \bar{M}_{j-5n}^{i-n} \\ \bar{C}_j^{i+2n} & \bar{C}_{j+n}^{i+2n} & \bar{C}_{j+2n}^{i+2n} & \bar{M}_{j+3n}^{i+2n} & \bar{M}_{j-4n}^{i+2n} & \bar{M}_{j-5n}^{i+2n} \\ \bar{v}_j^{i-3n} & \bar{v}_{j+n}^{i-3n} & \bar{v}_{j+2n}^{i-3n} & \bar{B}_{j+3n}^{i-3n} & \bar{B}_{j-4n}^{i-3n} & \bar{B}_{j+5n}^{i-3n} \\ \bar{v}_j^{i-4n} & \bar{v}_{j+n}^{i-4n} & \bar{v}_{j+2n}^{i-4n} & \bar{B}_{j+3n}^{i-4n} & \bar{B}_{j-4n}^{i-4n} & \bar{B}_{j+5n}^{i-4n} \\ \bar{v}_j^{i+5n} & \bar{v}_{j+n}^{i+5n} & \bar{v}_{j+2n}^{i+5n} & \bar{B}_{j+3n}^{i+5n} & \bar{B}_{j-4n}^{i+5n} & \bar{B}_{j+5n}^{i+5n} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} \bar{C} & \bar{M} \\ \hline \bar{v} & \bar{B} \end{array} \right)$$

Sea localmente

$$\begin{aligned} \pi_{T_2M}: TT_2M &\longrightarrow T_2M \\ (x, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5) &\rightarrow (x, c_1, c_2) \end{aligned}$$

Entonces $\text{VTI}_2^M = \ker (\pi_{T_2^M})_*$ viene dado localmente por

$$\text{VTI}_2^M = \{(x, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, 0, 0, 0, c_9, c_{10}, c_{11})\}$$

con lo que resultan las siguientes expresiones locales para \bar{F} (en las que * denotará el correspondiente término de la expresión general):

(1) \bar{F} conexión generalizada fibrada

$$\begin{aligned} \bar{F}(\text{VTI}_2^M) \subset \text{VTI}_2^M \\ \bar{M} = 0 \end{aligned} \quad \bar{F} = \begin{pmatrix} * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \end{pmatrix}$$

(2) \bar{F} pseudoconexión de campo fundamental G e $T_1^1(T_2^M)$

$$\begin{aligned} \text{VTI}_2^M \subset \ker \bar{F} \\ \bar{M} = 0 = \bar{B} \end{aligned} \quad \bar{F} = \begin{pmatrix} 2G_j^i & 2G_{j+n}^i & 2G_{j-2n}^i & 0 & 0 & 0 \\ 2G_j^{i+n} & 2G_{j+n}^{i+n} & 2G_{j-2n}^{i+n} & 0 & 0 & 0 \\ 2G_j^{i+2n} & 2G_{j+n}^{i+2n} & 2G_{j-2n}^{i+2n} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(3) \bar{F} fere-conexión

$$\begin{aligned} \text{Im } \bar{F} \subset \text{VTI}_2^M \\ \bar{C} = 0 = \bar{M} \end{aligned} \quad \bar{F} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \end{pmatrix}$$

(4) \tilde{F} conexión infinitesimal

$$\tilde{F} = \begin{pmatrix} \delta_j^i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_j^i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_j^i & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\delta_j^i & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 & -\delta_j^i & 0 \\ * & * & * & 0 & 0 & -\delta_j^i \end{pmatrix}$$

Estas expresiones son generalización de las que hallamos en la sección § 4.1. Apréciese que para obtenerlas no hemos tenido que introducir ningún buen cuadrado: sólo un fibrado vectorial (el tangente a T_2M).

Consideramos ahora los tres buenos cuadrados que estudiamos en el ejemplo 1.7. (de la sección § 1.2.), a saber:

$c = 2,1,0$ (en este orden)

$$\begin{array}{ccc} \Pi_2^M \xrightarrow{\pi_2^M} T_2M & & U^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow U^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \\ \downarrow \alpha_c & & \downarrow \\ TM \xrightarrow{\pi_M} M & & U^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow U^n \\ & & \downarrow \\ & & \mathbb{R}^n \end{array}$$

donde localmente α_c está definida así:

$$\alpha_2(x, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5) = (x, c_3) \Rightarrow \alpha_2 = (\pi_0^2)^*$$

$$\alpha_1(x, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5) = (x, c_4)$$

$$\alpha_0(x, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5) = (x, c_5)$$

Llamemos a esos tres buenos cuadrados ((2)), ((1)) y ((0)), respectivamente.

Sea F una conexión generalizada en $\nu_M: TM \rightarrow M$, dada localmente por

$$F = \begin{pmatrix} C_j^i & M_{j+n}^i \\ \nu_j^{i-n} & B_{j-n}^{i-n} \end{pmatrix}$$

Sea \bar{F} una conexión generalizada en $\nu_{T_2M}: TT_2M \rightarrow T_2M$. Entonces se tiene:

(5) \bar{F} es elevación de F respecto del buen cuadrado ((2)) si y sólo si localmente se expresa por

$$\bar{F} = \begin{pmatrix} C_j^i & 0 & 0 & M_{j-n}^i & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ \nu_j^{i-n} & 0 & 0 & B_{j-n}^{i-n} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \end{pmatrix}$$

(6) \bar{F} es elevación de F respecto del buen cuadrado ((1)) si y sólo si localmente se expresa por

$$\bar{F} = \begin{pmatrix} C_j^i & 0 & 0 & M_{j+n}^i & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ \nu_j^{i-n} & 0 & 0 & B_{j-n}^{i-n} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * \end{pmatrix}$$

(7) \bar{F} es elevación de F respecto del buen cuadrado ((0)) si y sólo si localmente se expresa por

$$\bar{F} = \begin{pmatrix} C_j^i & 0 & 0 & M_{j-n}^i & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ \nu_j^{i+n} & 0 & 0 & B_{j+n}^{i+n} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La demostración de las propiedades (5), (6) y (7) se puede hacer del siguiente modo: obtener la expresión matricial de $(a_\epsilon)_*$ y comprobar (como en la demostración de la proposición 2.4.) que $F(a_\epsilon)_* = (a_\epsilon)_* \bar{F}$.

Resulta así que la demostración de la proposición 2.4. es constructiva, pues nos sirve de modelo para comprobar en cada caso. En estas situaciones particulares es casi más sencillo demostrar de nuevo el resultado que adecuar a él la teoría general. Sin embargo, y sólo en uno de los casos, veamos cómo se adopta la teoría general:

Demostración de (5).

Con la notación general de la proposición 2.4 deben ser:

$$\bar{C}_j^i = C_j^i \quad \bar{C}_\beta^i = M_\beta^i \quad \bar{M}_\mu^i = 0 \quad \bar{M}_\tau^i = 0$$

$$\bar{C}_j^\alpha = \nu_j^\alpha \quad \bar{C}_\beta^\alpha = B_\beta^\alpha \quad \bar{M}_\mu^\alpha = 0 \quad \bar{M}_\tau^\alpha = 0$$

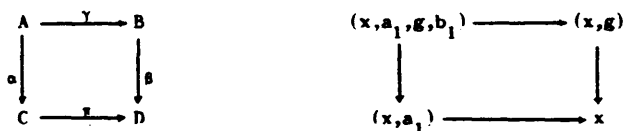
con los índices variando en los conjuntos

$$\begin{aligned} i, j &\in \{1, \dots, n\} & \lambda, \mu &\in \{1, \dots, s\} \\ \alpha, \beta &\in \{1, \dots, r\} & \sigma, \tau &\in \{1, \dots, t\} \end{aligned}$$

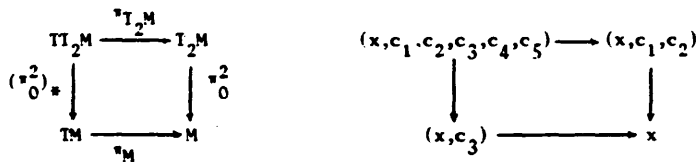
En nuestro caso son:

$$\begin{aligned} n &= n & s &= 2n = \text{rango}(\pi_0^2) \\ r &= n = \text{rango}(\pi_M) & t &= 2n \end{aligned}$$

Así, teniendo en cuenta que la expresión local del teorema general es



y que, mientras, en nuestro caso tenemos que la α y la γ juegan papeles intercambiados, pues son



resultan las siguientes igualdades entre los términos del teorema general 2.4. (a la izquierda) y los de nuestra construcción (a la derecha):

$$\begin{array}{lll}
 \bar{c}_j^i = \bar{c}_j^i & ; \bar{c}_B^i = \bar{q}_j^i & ; \bar{m}_\mu^i = (\bar{c}_{j+n}^i, \bar{c}_{j+2n}^i); \bar{m}_\tau^i = (\bar{m}_{j+4n}^i, \bar{m}_{j+5n}^i) \\
 \bar{c}_j^a = \bar{v}_j^{i+3n} & ; \bar{c}_B^a = \bar{B}_{j+3n}^{i+3n} & ; \bar{m}_\mu^a = (\bar{v}_{j+n}^{i+3n}, \bar{v}_{j+2n}^{i+3n}); \bar{m}_\tau^a = (\bar{B}_{j+4n}^{i-3n}, \bar{B}_{j+5n}^{i-3n}) \\
 \bar{v}_j^\lambda = \begin{pmatrix} \bar{c}_j^{i-n} \\ \bar{c}_j^{i-n} \end{pmatrix} & ; \bar{v}_B^\lambda = \begin{pmatrix} \bar{q}_j^{i+2n} \\ \bar{B}_{j+3n}^{i+3n} \end{pmatrix} & ; \bar{B}_\mu^\lambda = \begin{pmatrix} \bar{c}_{j+n}^{i-n} & \bar{c}_{j+2n}^{i-n} \\ \bar{c}_{j+n}^{i+2n} & \bar{c}_{j+2n}^{i+2n} \end{pmatrix}; \bar{B}_\tau^\lambda = \begin{pmatrix} \bar{q}_{j+4n}^{i-n} & \bar{q}_{j+5n}^{i-n} \\ \bar{q}_{j+4n}^{i-2n} & \bar{q}_{j+5n}^{i-2n} \end{pmatrix} \\
 \bar{v}_j^\sigma = \begin{pmatrix} \bar{v}_j^{i-4n} \\ \bar{v}_j^{i-5n} \end{pmatrix} & ; \bar{v}_B^\sigma = \begin{pmatrix} \bar{B}_{j+3n}^{i+4n} \\ \bar{B}_{j+3n}^{i+5n} \end{pmatrix} & ; \bar{B}_\mu^\sigma = \begin{pmatrix} \bar{v}_{j+n}^{i-4n} & \bar{v}_{j+2n}^{i-4n} \\ \bar{v}_{j+n}^{i-5n} & \bar{v}_{j+2n}^{i-5n} \end{pmatrix}; \bar{B}_\tau^\sigma = \begin{pmatrix} \bar{B}_{j+4n}^{i-4n} & \bar{B}_{j+5n}^{i-4n} \\ \bar{B}_{j+4n}^{i-5n} & \bar{B}_{j+5n}^{i-5n} \end{pmatrix}
 \end{array}$$

con lo que la matriz de \bar{F} se divide del siguiente modo para adaptarse a la estructura del teorema general 2.4.:

$$\begin{aligned}
 \bar{F} &= \left(\begin{array}{c|c|c|c|c}
 \bar{c}_j^i & \bar{c}_{j+n}^i & \bar{c}_{j-2n}^i & \bar{m}_{j+3n}^i & \bar{m}_{j-4n}^i & \bar{m}_{j+5n}^i \\
 \hline
 \bar{c}_j^{i-n} & \bar{c}_{j+n}^{i-n} & \bar{c}_{j-2n}^{i-n} & \bar{m}_{j+3n}^{i-n} & \bar{m}_{j-4n}^{i-n} & \bar{m}_{j+5n}^{i-n} \\
 \bar{c}_j^{i+2n} & \bar{c}_{j+n}^{i+2n} & \bar{c}_{j-2n}^{i+2n} & \bar{m}_{j+3n}^{i+2n} & \bar{m}_{j-4n}^{i+2n} & \bar{m}_{j+5n}^{i+2n} \\
 \hline
 \bar{v}_j^{i-3n} & \bar{v}_{j+n}^{i-3n} & \bar{v}_{j-2n}^{i-3n} & \bar{b}_{j+3n}^{i-3n} & \bar{b}_{j-4n}^{i-3n} & \bar{b}_{j+5n}^{i-3n} \\
 \bar{v}_j^{i-4n} & \bar{v}_{j+n}^{i-4n} & \bar{v}_{j-2n}^{i-4n} & \bar{b}_{j+3n}^{i-4n} & \bar{b}_{j-4n}^{i-4n} & \bar{b}_{j+5n}^{i-4n} \\
 \bar{v}_j^{i-5n} & \bar{v}_{j+n}^{i-5n} & \bar{v}_{j-2n}^{i-5n} & \bar{b}_{j+3n}^{i-5n} & \bar{b}_{j-4n}^{i-5n} & \bar{b}_{j+5n}^{i-5n}
 \end{array} \right) \\
 &= \left(\begin{array}{c|c|c|c}
 \bar{c}_j^i & \bar{m}_\mu^i & \bar{c}_\beta^i & \bar{b}_\tau^i \\
 \hline
 \bar{v}_j^\lambda & \bar{b}_\mu^\lambda & \bar{v}_\beta^\lambda & \bar{b}_\tau^\lambda \\
 \hline
 \bar{c}_j^\alpha & \bar{m}_\mu^\alpha & \bar{c}_\beta^\alpha & \bar{m}_\tau^\alpha \\
 \hline
 \bar{v}_j^\sigma & \bar{b}_\mu^\sigma & \bar{v}_\beta^\sigma & \bar{b}_\tau^\sigma
 \end{array} \right) \quad \text{en la notación general.}
 \end{aligned}$$

Las condiciones generales de la proposición 2.4. para que \bar{F} sea elevación de F se convierten en las dadas en (5).

qed

Obsérvese también que de esta expresión podemos obtener las que corresponden a las conexiones fibradas, pseudo- y fere-conexiones y a las conexiones infinitesimales, sin más que aplicar la teoría general. Obtendríamos entonces las expresiones halladas al comienzo de esta sección § 4.2.1.

Utilizaremos las técnicas desarrolladas en esta demostración al dar la segunda prueba de la proposición 4.5.

2. Elevación de conexiones lineales.

La elevación de conexiones lineales al fibrado de los 2-jets ha sido definida por Yano e Ishihara, [52], como la única que verifica

$$\nabla_{X^C}^* Y^C = (\nabla_X Y)^C$$

siendo $X, Y \in T_0^1(M)$ y $X^C = X^{(2)}$ e $Y^C = Y^{(2)}$ sus elevaciones de máximo orden (completas). De hecho, en [52] se define ∇^* localmente, pero no resulta difícil ver que la condición que hemos dado caracteriza ∇^* (ver [15]).

Se verifica entonces la siguiente

Proposición 4.5.: Sea ∇ una conexión lineal en una variedad M y sea ∇^* su elevación a T_2M , en el sentido anterior. Entonces ∇^* es una elevación respecto del buen cuadrado ((2)):

$$\begin{array}{ccc} \Pi T_2M & \xrightarrow{\nabla_{T_2M}} & T_2M \\ \downarrow (\nabla_0^2)^* & & \downarrow \nabla_0^2 \\ TM & \xrightarrow{\nabla_M} & M \end{array}$$

Primera demostración.

Consideramos ∇ y ∇^* como conexiones infinitesimales, para aplicar las técnicas del capítulo 3. Procedemos como en la primera demostración de la proposición 4.1., para obtener la aplicación de conexión de ∇^* a partir de sus símbolos. Estos vienen dados en [52] y son:

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{kj}^{i+2n} &= (\Gamma_{kj}^i)^{(2)} \\ \bar{\Gamma}_{kj}^{i-n} &= \bar{\Gamma}_{k-n j}^{i-2n} = \bar{\Gamma}_{k j+n}^{i+2n} = (\Gamma_{kj}^i)^{(1)} \\ \bar{\Gamma}_{kj}^i &= \bar{\Gamma}_{k-n j}^{i-n} = \bar{\Gamma}_{k j+n}^{i+n} = \bar{\Gamma}_{k-n j+n}^{i-2n} = \bar{\Gamma}_{k+2n j}^{i+2n} = \bar{\Gamma}_{k j-2n}^{i-2n} = \Gamma_{kj}^i \end{aligned}$$

y los demás símbolos son todos nulos.

(Los números entre paréntesis (1) y (2) son las I-elevaciones y II-elevaciones definidas en [52]).

Entonces por un cálculo largo pero directo se obtiene:

$$\begin{aligned} & \bar{R}(x, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, c_8, c_9, c_{10}, c_{11}) = \\ & = (x^i, c_1^i, c_2^i, r_{kj}^i, c_6^k, c_3^j + c_0^i, (r_{kj}^i)^{(1)} c_6^k, c_3^j + r_{kj}^i (c_6^k, c_4^j + c_7^k, c_3^j) + c_{10}^i, \\ & (r_{kj}^i)^{(2)} c_6^k, c_3^j + (r_{kj}^i)^{(1)} (c_6^k, c_4^j + c_7^k, c_3^j), r_{kj}^i (c_6^k, c_5^j + c_7^k, c_4^i + c_8^k, c_3^j) + c_{11}^i). \end{aligned}$$

De modo directo se comprueba entonces la conmutatividad

$$\begin{aligned} & (K \circ (\pi_0^2)_{**})(x, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, c_8, c_9, c_{10}, c_{11}) = \\ & = (x^i, r_{kj}^i, c_6^k, c_3^j + c_9^i) = ((\pi_0^2)_{**} \circ \bar{R})(x, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, c_8, c_9, c_{10}, c_{11}). \end{aligned}$$

qed

Segunda demostración.

Este otro modo de probar el resultado es considerar ∇ y ∇^* como conexiones generalizadas y hallar ∇^* en $T_1^1(TT_2M)$, esto es, hallar su expresión tensorial.

De la teoría general, puesto que estamos en el buen cuadrado ((2)) y, por lo que vimos al probar la propiedad (5) de § 4.2.1., resulta que la expresión de una conexión infinitesimal en T_2M es:

$$\left(\begin{array}{c|cccccc} \delta_j^i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \delta_j^i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_j^i & 0 & 0 & 0 \\ \hline -2a_{11j}^i & -2a_{12j}^i & -\delta_j^i & 0 & 0 & 0 \\ \hline -2a_{21j}^i & -2a_{22j}^i & 0 & -\delta_j^i & 0 & 0 \\ \hline & & 0 & 0 & -\delta_j^i & 0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|cccccc} \delta_j^i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \delta_j^i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_j^i & 0 & 0 & 0 \\ \hline -2a_{11j}^i & -2a_{121j}^i & -2a_{122j}^i & -\delta_j^i & 0 & 0 \\ \hline -2a_{21j}^i & -2a_{221j}^i & -2a_{222j}^i & 0 & -\delta_j^i & 0 \\ \hline -2a_{21j}^{i-n} & -2a_{221j}^{i-n} & -2a_{222j}^{i-n} & 0 & 0 & -\delta_j^i \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} & Y \bar{R}(x, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, c_8, c_9, c_{10}, c_{11}) = \\ & = (x^i, c_1^i, c_2^i, c_0^i + a_{11j}^i, c_6^j + a_{121}^i, c_7^j + a_{122j}^i, c_8^j, \\ & c_{10}^i - a_{21j}^i, c_6^j - a_{221j}^i, c_7^j - a_{222j}^i, c_8^j, c_{11}^i - a_{21j}^{i-n}, c_6^j - a_{221j}^{i-n}, c_7^j + a_{222j}^{i-n}, c_8^j), \end{aligned}$$

$$v = \begin{pmatrix} \delta_k^i & 0 \\ \Gamma_{kj}^i & c_3^j \\ & -\delta_k^i \end{pmatrix}$$

resulta, por la propiedad (5) de § 4.2.1., que v^* es elevación de v respecto del buen cuadrado ((2)).

qed

Observación. Ciertamente con una de las demostraciones basta para probar el teorema. La primera es más sencilla. Incluimos la segunda por varios motivos: porque informa más detalladamente de la estructura de v^* (al hacer la descomposición de los Ω), porque sirve de ejemplo para ver cómo se utilizan estas técnicas y porque, de hecho, al estudiar las pseudoconexiones lineales en T_2M nos encontraremos con una situación análoga.

El siguiente resultado relaciona v^* con las elevaciones completa y horizontal. v^C y v^H , de v al fibrado tangente. Con él probaremos la observación hecha tras la proposición 3.3.

Proposición 4.6.: Sean las siguientes conexiones lineales:

- v en M .
 - v^C y v^H sus elevaciones completa y horizontal a TM ,
 - v^* la elevación de v a T_2M .
- Y sea el buen cuadrado

$$\begin{array}{ccc} T_2M & \xrightarrow{v^*_{T_2M}} & T_2M \\ \downarrow (v^*_1)^2 & & \downarrow v^*_1 \\ TTM & \xrightarrow{v^*_{TM}} & TM \end{array}$$

Entonces v^* es elevación de v^C en dicho buen cuadrado, pero si la curvatura de v es no nula, entonces v^* no es elevación de v^H (respecto de ese mismo buen cuadrado).

Observación. Si $R=0$, entonces $v^C=v^H$ (ver las expresiones locales de v^H en la demostración de la proposición 4.2.).

Demostración.

Sean K^* , K^C y K^H las aplicaciones de conexión de \mathcal{V}^* , \mathcal{V}^C y \mathcal{V}^H .

Si probamos que

$$(\pi_1^2)_* \circ K^* = K^C \circ (\pi_1^2)_{**} \neq K^H \circ (\pi_1^2)_{**},$$

suponiendo $R \neq 0$, entonces, por la proposición 3.1., tendremos que \mathcal{V}^* es elevación de \mathcal{V}^C y no lo es de \mathcal{V}^H . Pues bien:

Por la proposición 4.5.:

$$\begin{aligned} & (\pi_1^2)_* \circ K^*(x, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, c_8, c_9, c_{10}, c_{11}) = \\ & = (\pi_1^2)_*(x^i, c_1^i, c_2^i, c_3^i, r_{kj}^i c_6^k c_3^j + c_9^i, (r_{kj}^i)^{(1)} c_6^k c_3^j + r_{kj}^i (c_6^k c_4^j + c_7^k c_3^j) + c_{10}^i, \\ & \quad (r_{kj}^i)^{(2)} c_6^k c_3^j + (r_{kj}^i)^{(1)} (c_6^k c_4^j + c_7^k c_3^j) + r_{kj}^i (c_6^k c_5^j + c_7^k c_4^j + c_8^k c_3^j) + c_{11}^i) \\ & = (x^i, c_1^i, r_{kj}^i c_6^k c_3^j + c_9^i, (r_{kj}^i)^{(1)} c_6^k c_3^j + r_{kj}^i (c_6^k c_4^j + c_7^k c_3^j) + c_{10}^i) \end{aligned}$$

Por la proposición 4.1.:

$$\begin{aligned} & K^C \circ (\pi_1^2)_{**}(x, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, c_8, c_9, c_{10}, c_{11}) = \\ & = K^C(x, c_1, c_3, c_4, c_6, c_7, c_9, c_{10}) = \\ & = (x^i, c_1^i, r_{kj}^i c_6^k c_3^j + c_9^i, (r_{kj}^i)^C c_6^k c_3^j + r_{kj}^i (c_6^k c_4^j + c_7^k c_3^j) + c_{10}^i) \end{aligned}$$

y por la proposición 4.2.:

$$\begin{aligned} & K^H \circ (\pi_1^2)_{**}(x, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, c_8, c_9, c_{10}, c_{11}) = \\ & = K^H(x, c_1, c_3, c_4, c_6, c_7, c_9, c_{10}) = \\ & = (x^i, c_1^i, r_{kj}^i c_6^k c_3^j + c_9^i, (r_{kj}^i)^C c_6^k c_3^j - R_{lkj}^i c_6^k c_3^j c_1^l + r_{kj}^i (c_6^k c_4^j + c_7^k c_3^j) + c_{10}^i) \end{aligned}$$

Para probar el resultado sólo nos falta demostrar que

$$(r_{kj}^i)^{(1)} = (r_{kj}^i)^C \circ \pi_1^2$$

donde la primera es la 1-elevación al fibrado T_2M y la otra es la completa al fibrado tangente. Pero precisamente esta es la definición de 1-elevación dada en [52]. En coordenadas locales ambas expresiones dan

$$\frac{\partial r_{kj}^i}{\partial x^k} c_l^k$$

qed

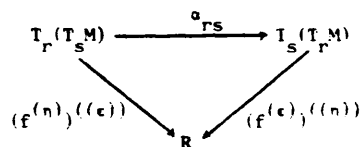
3. El isomorfismo $T(T_2M) \cong T_2(TM)$.

Morimoto establece en [40] la existencia, para cualesquiera r y s , números no negativos, de un difeomorfismo

$$\alpha_{rs} : T_r(T_s M) \rightarrow T_s(T_r M)$$

de modo que $\alpha_{sr} \circ \alpha_{rs} = \text{id}$, $\alpha_{rs} \circ \alpha_{sr} = \text{id}$. Más aún, su construcción está hecha para los fibrados de p^r -jets, y es usada en trabajos posteriores como [8] y [9].

El difeomorfismo α_{rs} queda caracterizado por la conmutatividad del siguiente diagrama, para toda función f e $T_0^0(M)$:



donde los paréntesis indican las elevaciones de funciones siguientes:

$\epsilon \in \{0, 1, \dots, r\}$; $n \in \{0, 1, \dots, s\}$

$$(\epsilon) : T_0^0(M) \rightarrow T_0^0(T_r M)$$

$$(n) : T_0^0(M) \rightarrow T_0^0(T_s M)$$

$$((\epsilon)) : T_0^0(T_s M) \rightarrow T_0^0(T_r(T_s M))$$

$$((n)) : T_0^0(T_r M) \rightarrow T_0^0(T_s(T_r M))$$

Las elevaciones están definidas a los respectivos fibrados como en [52].
Nuestro propósito es hallar la expresión local de

$$a_{12} : T(T_2 M) \rightarrow T_2(TM)$$

Proposición 4.7.: La expresión local de a_{12} es

$$a_{12} : T(T_2 M) \xrightarrow{\quad} T_2(TM)$$

$$(x, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5) \rightarrow (x, c_3, c_1, c_4, c_2, c_5)$$

Demostración.

Se trata de ver la conmutatividad del diagrama anterior. Vamos a desarrollar toda la demostración. Comenzamos indicando cómo son las diferentes elevaciones de funciones:

Sea $f \in T_0^0(M)$, $f = f(x)$

$(n) : T_0^0(M) \rightarrow T_0^0(T_2 M)$; $n \in \{0, 1, 2\}$

$$f^{(0)}(x, c_1, c_2) = f(x)$$

$$f^{(1)}(x, c_1, c_2) = \frac{\partial f}{\partial x^i} c_1^i$$

$$f^{(2)}(x, c_1, c_2) = \frac{\partial f}{\partial x^i} c_2^i + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} c_1^i c_1^j$$

$(\epsilon) : T_0^0(M) \rightarrow T_0^0(TM)$; $\epsilon \in \{0, 1\}$

$$f^{(0)}(x, c_1) = f(x)$$

$$f^{(1)}(x, c_1) = \frac{\partial f}{\partial x^i} c_1^i$$

Sea $\tilde{F} \in T_0^0(TM)$, $\tilde{F} = f(x, c_1)$

$((n))$: $T_0^0(TM) \rightarrow T_0^0(T_2(TM))$; $n \in \{0,1,2\}$

$$\begin{aligned} \tilde{F}^{((0))}(x, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5) &= \tilde{F}(x, c_1) \\ \tilde{F}^{((1))}(x, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5) &= \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x^1} c_2^i + \frac{\partial \tilde{F}}{\partial c_1^1} c_3^i \\ \tilde{F}^{((2))}(x, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5) &= \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x^1} c_4^i + \frac{\partial \tilde{F}}{\partial c_1^1} c_5^i \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial x^1 \partial x^j} c_2^i c_2^j + \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial x^1 \partial c_1^j} c_2^i c_3^j + \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial c_1^1 \partial x^j} c_3^i c_2^j + \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial c_1^1 \partial c_1^j} c_3^i c_3^j \right) \end{aligned}$$

y, finalmente, sea $\hat{f} \in T_0^0(T_2M)$, $\hat{f} = \hat{f}(x, c_1, c_2)$

$((\epsilon))$: $T_0^0(T_2M) \rightarrow T_0^0(T(T_2M))$; $\epsilon \in \{0,1\}$

$$\begin{aligned} \hat{f}^{((0))}(x, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5) &= \hat{f}(x, c_1, c_2) \\ \hat{f}^{((1))}(x, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5) &= \frac{\partial \hat{f}}{\partial x^1} c_3^i - \frac{\partial \hat{f}}{\partial c_1^1} c_4^i - \frac{\partial \hat{f}}{\partial c_2^1} c_5^i \end{aligned}$$

Se sigue ya el resultado, considerando:

Elevaciones $(f^{(n)})^{((\epsilon))}$ e $T_0^0(T(T_2M))$

$$\begin{aligned} (f^{(0)})^{((0))}(x, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5) &= f(x) \\ (f^{(0)})^{((1))}(x, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5) &= \frac{\partial f}{\partial x^1} c_3^i \\ (f^{(1)})^{((0))}(x, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5) &= \frac{\partial f}{\partial x^1} c_1^i \\ (f^{(1)})^{((1))}(x, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^j} c_3^j c_1^i + \frac{\partial f}{\partial x^1} c_4^i \\ (f^{(2)})^{((0))}(x, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5) &= \frac{\partial f}{\partial x^1} c_2^i + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^j} c_1^i c_1^j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (f^{(2)})^{((1))}(x, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^j} c_3^j c_1^i + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 f}{\partial x^1 \partial x^j \partial x^k} c_1^j c_1^k c_3^i - \\
 &+ \frac{\partial f}{\partial x^1} c_5^i + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^j} c_4^i c_1^j + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^j} c_1^i c_4^j
 \end{aligned}$$

mientras que por otra parte se tiene:

Elevaciones $(f^{(c)})^{(n)}$ e $T_0^0(T_2(TM))$

$$(f^{(0)})^{((0))}(x, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5) = f(x)$$

$$(f^{(0)})^{((1))}(x, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5) = \frac{\partial f}{\partial x^1} c_2^i$$

$$(f^{(0)})^{((2))}(x, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5) = \frac{\partial f}{\partial x^1} c_4^i + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^j} c_2^i c_2^j$$

$$(f^{(1)})^{((0))}(x, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5) = \frac{\partial f}{\partial x^1} c_1^i$$

$$(f^{(1)})^{((1))}(x, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^j} c_1^i c_2^j - \frac{\partial f}{\partial x^1} c_3^i$$

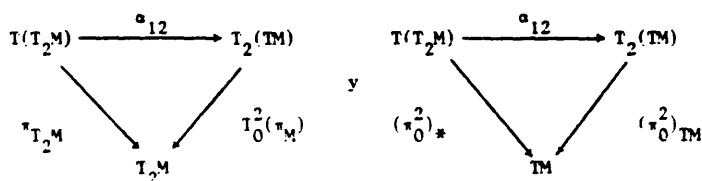
$$\begin{aligned}
 (f^{(1)})^{((2))}(x, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^j} c_1^i c_4^j + \frac{\partial f}{\partial x^1} c_5^i + \\
 &+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^1 \partial x^j \partial x^k} c_1^i c_2^j c_2^k + \frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^k} c_2^i c_3^k + \frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^k} c_3^i c_2^k \right)
 \end{aligned}$$

Entonces, comparando las expresiones se obtiene el resultado.

qed

Observaciones.

(1) Resulta entonces que conmutan los diagramas



donde $I_0^2(\pi_M)$ es la aplicación inducida por el fibrado de 2-jets. dada local-

mente por

$$T_0^2(\pi_M)(x, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5) = (x, c_2, c_4)$$

(2) En el caso de ser $r = s = 1$, el difeomorfismo

$$\alpha_{11}: TTM \rightarrow TTM$$

es el automorfismo de Kobayashi, que introdujimos en § 0.1.1.

Otro punto de vista para estudiar el isomorfismo $\alpha_{12}: I(T_2M) \rightarrow T_2(TM)$ es considerar ambos conjuntos como subfibrados de TTM. Las inclusiones vienen dadas localmente por

$$\begin{array}{ccc} I(T_2M) & \hookrightarrow & TTM \\ (x, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5) & \mapsto & (x, c_1, c_1, c_2, c_3, c_4, c_4, c_5) \end{array}$$

y por

$$\begin{array}{ccc} T_2(TM) & \hookrightarrow & TTM \\ (x, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5) & \mapsto & (x, c_1, c_2, c_3, c_2, c_3, c_4, c_5) \end{array}$$

puesto que $I(T_2M)$ es el subconjunto de TTM invariante por $(S_M)_*$ y $T_2(TM)$ el invariante por S_{TM} , donde S indica el automorfismo de Kobayashi en el espacio correspondiente.

Pues bien, obtenemos la siguiente

Proposición 4.8.: α_{12} es la restricción de $(S_M)_* \cdot S_{TM}$ a $I(T_2M)$.

Demostración.

Obvio, pues basta considerar el diagrama

$$\begin{array}{ccc} TTM & \xrightarrow{(S_M)_* \cdot S_{TM}} & TTM \\ \uparrow & & \uparrow \\ I(T_2M) & \xrightarrow{\alpha_{12}} & T_2(TM) \end{array}$$

cuya expresión local es

$$\begin{array}{ccc}
 (x, c_1, c_1, c_2, c_3, c_4, c_4, c_5) & = & (x, c_3, c_1, c_4, c_1, c_4, c_2, c_5) \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 (x, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5) & \longrightarrow & (x, c_3, c_1, c_4, c_2, c_5)
 \end{array}$$

Más aún, resulta que

$$p \in I(T_2M) \iff (S_M)_* S_{TM}(p) \in T_2(TM)$$

puesto que si

$$p = (x, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7)$$

entonces

$$(S_M)_* S_{TM}(p) = (x, c_4, c_1, c_5, c_2, c_6, c_3, c_7)$$

Por otra parte

$$p \in I(T_2M) \iff c_1 = c_2 \text{ y } c_5 = c_6$$

$$\text{y } (S_M)_* S_{TM}(p) \in T_2(TM) \iff (c_1, c_5) = (c_2, c_6)$$

qed



4. Elevación de pseudoconexiones lineales.

Tratamos la elevación de pseudoconexiones lineales definidas en una variedad al fibrado de r -jets sobre esa variedad en los trabajos [18] y [10]. De tal construcción vamos a tomar aquí sólo la definición de elevación para el caso de los 2-jets.

Definición 4.1. Sea ∇ una pseudoconexión lineal en M de campo fundamental G e $I_1^1(M)$. Entonces, para cada $n \in \{0, 1, 2\}$ existe una única pseudoconexión lineal $\nabla^{(n)}$ en I_2^M de campo fundamental $G^{(n)}$ e $I_1^1(T_2M)$ que verifique

$$\nabla_{X^{(2)}}^{(n)} Y^{(2)} = (\nabla_X Y)^{(n)}, \text{ para cualesquiera } X, Y \in T_0^1(M)$$

Se llama a $\nabla^{(n)}$ la n -elevación de ∇ y, en el caso de ser $n = 2$, también se llamará elevación completa.

La demostración de que la definición es correcta pasa por la obtención de los símbolos de la pseudoconexión elevada en función de los de la dada, resultando, [18] y [19], para la n -elevación los siguientes:

$$\Gamma_{k-\delta n \ j-\gamma n}^{i-\alpha n} = (\Gamma_{kj}^i)^{(\alpha-\delta-\gamma-2\cdot n)}$$

siendo $\alpha, \delta, \gamma \in \{0, 1, 2\}$

Obtenemos la siguiente

Proposición 4.9.: Sean ∇ una pseudoconexión lineal en M de campo fundamental $G \in T_1^1(M)$ y el buen cuadrado ((2))

$$\begin{array}{ccc} T(T_2M) & \xrightarrow{\nabla_{T_2M}} & T_2M \\ (\nabla_0^2) \downarrow & & \downarrow \nabla_0^2 \\ TM & \xrightarrow{\nabla_M} & M \end{array}$$

Entonces $\nabla^{(2)}$ es elevación de ∇ respecto de ((2)) como conexión generalizada, pero $\nabla^{(1)}$ no lo es de ∇ en ((1)), ni $\nabla^{(0)}$ de ∇ en ((0)).

Sean $F^{(n)}$, $n \in \{0, 1, 2\}$ las elevaciones de $\nabla \in T_1^1(TM)$ a $T_1^1(T_2(TM))$ como campo tensorial. Entonces

$$\alpha_{12}: T(T_2M) \rightarrow T_2(TM)$$

lleva los coeficientes de $\nabla^{(n)}$ e $T_1^1(T(T_2M))$ en los de $F^{(n)}$ e $T_1^1(T_2(TM))$.

Observación. Los buenos cuadrados ((1)) y ((0)) fueron definidos en § 4.2.1. Las elevaciones $\nabla^{(n)}$ son como pseudoconexiones y las $F^{(n)}$ como campos tensoriales.

Demostración.

De las expresiones de los símbolos de Christoffel de la pseudoconexión elevada $\nabla^{(n)}$ se deduce la expresión matricial de $\nabla^{(n)}$, para cada $n \in \{0, 1, 2\}$.

obteniéndose

$$\begin{aligned}
 v^{(0)} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2G_k^i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2r_{kj}^i c_3^j & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 v^{(1)} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2G_k^i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2\frac{\partial G_k^i}{\partial x^k} c_1^k & 2G_k^i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2r_{kj}^i c_3^j & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & -2r_{kj}^i c_3^j & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 v^{(2)} &= \begin{pmatrix} 2G_k^i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2\frac{\partial G_k^i}{\partial x^k} c_1^k & 2G_k^i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ ** & 2\frac{\partial G_k^i}{\partial x^k} c_1^k & 2G_k^i & 0 & 0 & 0 \\ -2r_{kj}^i c_3^j & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & -2r_{kj}^i c_3^j & 0 & 0 & 0 & 0 \\ *** & * & -2r_{kj}^i c_3^j & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

siendo $*$ = $-2\left(\frac{\partial r_{kj}^i}{\partial x^k} c_1^k c_3^j + r_{kj}^i c_4^j\right)$

$**$ = $2\left(\frac{\partial G_k^i}{\partial x^k} c_2^k + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G_k^i}{\partial x^k \partial x^m} c_1^k c_1^m\right)$

$***$ = $-2\left(\frac{\partial r_{kj}^i}{\partial x^k} c_2^k + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 r_{kj}^i}{\partial x^k \partial x^m} c_1^k c_1^m\right) c_3^j + \frac{\partial r_{kj}^i}{\partial x^k} c_1^k c_4^j + r_{kj}^i c_5^j$

Entonces resulta por la propiedad (5) de § 4.2.1. que $\nabla^{(2)}$ es elevación de ∇ respecto del buen cuadrado ((2)) y por (6) y (7) que $\nabla^{(1)}$ (resp. $\nabla^{(0)}$) no es elevación de ∇ en el buen cuadrado ((1)) (resp. en ((0))).

La segunda parte del teorema se sigue de un modo directo.

qed

Observación. También es cierto que si ∇ es una conexión lineal en M y ∇^* es $T_1^1(T_2M)$ es su elevación a T_2M (como conexión generalizada) y F^* es $T_1^1(T_2(TM))$ es su elevación como campo tensorial de tipo (1,1), entonces α_{12} lleva los coeficientes de ∇^* a los de F^* .

A este respecto, también es cierto, como probamos en [18] y [19], que ∇^* y $\nabla^{(2)}$, considerada la primera como conexión infinitesimal lineal y la segunda como pseudoconexión lineal de campo fundamental el de Kronecker, son dos conexiones generalizadas que definen la misma derivada covariante.

§ 4.3. OTRAS ELEVACIONES.

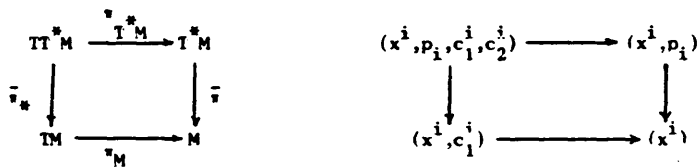
1. Elevaciones al fibrado cotangente.

El fibrado cotangente y las elevaciones completa y horizontal de una conexión lineal en una variedad a su fibrado cotangente están estudiadas en [52].
 Recuerdo someramente la notación que necesitamos:

Si U es una carta local de M de coordenadas (x^i) , la carta inducida en $\bar{v}^{-1}(U)$ tiene coordenadas locales (x^i, p_i) . Así, si $\omega \in T_1^0(U)$, se expresa

$$\omega = p_i dx^i = (x^i, p_i)$$

Y una base de $T_0^1(T^*U)$ está dada por $(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial p_i})$. Por lo tanto, se tiene la siguiente expresión local:



donde el diagrama es un buen cuadrado en virtud de la proposición 1.1.

Por analogía con la empleada para TM , utilizaremos la siguiente notación para los símbolos de una conexión lineal \bar{v} definida en T^*M :

$$\bar{v} \frac{\partial}{\partial x^k} \frac{\partial}{\partial x^j} = \frac{\partial}{\partial x^i} \bar{\Gamma}_{kj}^i + \frac{\partial}{\partial p_i} \bar{\Gamma}_{kj}^{i+n}$$

$$\bar{v} \frac{\partial}{\partial x^k} \frac{\partial}{\partial p_j} = \frac{\partial}{\partial x^i} \bar{\Gamma}_{k j+n}^i + \frac{\partial}{\partial p_i} \bar{\Gamma}_{k j-n}^{i-n}$$

$$\bar{v} \frac{\partial}{\partial p_k} \frac{\partial}{\partial x^j} = \frac{\partial}{\partial x^i} \bar{\Gamma}_{k+n j}^i + \frac{\partial}{\partial p_i} \bar{\Gamma}_{k-n j}^{i+n}$$

$$\bar{v} \frac{\partial}{\partial p_k} \frac{\partial}{\partial p_j} = \frac{\partial}{\partial x^i} \bar{\Gamma}_{k+n j-n}^i + \frac{\partial}{\partial p_i} \bar{\Gamma}_{k-n j-n}^{i+n}$$

Resulta entonces que si ∇ conexión lineal en M , tiene símbolos Γ_{kj}^i , las elevaciones completa ∇^C y horizontal ∇^H tienen los siguientes símbolos, coincidentes entre sí salvo el

$$\bar{\Gamma}_{kj}^{i-n} = \rho_a \left(\frac{\partial \Gamma_{kj}^a}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma_{ji}^a}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{ki}^a}{\partial x^j} + 2\Gamma_{it}^a \Gamma_{kj}^t \right), \text{ para } \nabla^C$$

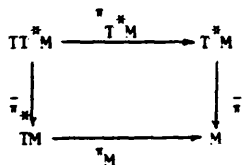
$$= \rho_a \left(-\frac{\partial \Gamma_{ji}^a}{\partial x^k} + \Gamma_{it}^a \Gamma_{kj}^t + \Gamma_{jt}^a \Gamma_{ik}^t \right), \text{ para } \nabla^H$$

$$\bar{\Gamma}_{kj}^i = \Gamma_{kj}^i \quad ; \quad \bar{\Gamma}_{k \ j-n}^i = \bar{\Gamma}_{k-n \ j}^i = \bar{\Gamma}_{k-n \ j-n}^i = 0$$

$$\bar{\Gamma}_{k \ j+n}^{i-n} = -\Gamma_{ki}^j \quad ; \quad \bar{\Gamma}_{k-n \ j}^{i-n} = -\Gamma_{ij}^k \quad ; \quad \bar{\Gamma}_{k-n \ j+n}^{i-n} = 0 .$$

Establecemos entonces la siguiente

Proposición 4.10.: Sean ∇ una conexión lineal en una variedad M y ∇^C y ∇^H sus elevaciones completa y horizontal al fibrado cotangente. Entonces ∇^C y ∇^H son elevaciones respecto del buen cuadrado



Demostración.

Llamando a las coordenadas de $\Pi^* M$

$$(x^i, p_i, c_1^i, c_2^i, c_3^i, c_4^i, c_5^i, c_6^i)$$

resultan las siguientes aplicaciones de conexión K^C v K^H para ∇^C y ∇^H :

$$K^C(x, p, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6) =$$

$$= (x^i, p_i, \Gamma_{kj}^i c_3^k c_1^j + c_5^i,$$

$$c_3^k c_1^j p_a \left(\frac{\partial r_{kj}^a}{\partial x^i} - \frac{\partial r_{ji}^a}{\partial x^k} - \frac{\partial r_{ki}^a}{\partial x^j} + 2r_{it}^a r_{kj}^t \right) - (c_3^k c_2^j - c_4^k c_1^j) r_{kj}^i + c_6^i$$

$$K^H(x, p, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6) =$$

$$= (x^i, p_i, r_{kj}^i c_3^k c_1^j + c_5^i,$$

$$c_3^k c_1^j p_a \left(-\frac{\partial r_{ji}^a}{\partial x^k} - r_{it}^a r_{kj}^t + r_{jt}^a r_{ik}^t \right) - (c_3^k c_2^j + c_4^k c_1^j) r_{kj}^i + c_6^i)$$

Entonces resulta

$$\bar{v}_* \circ K^C(x, p, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6) = (x^i, r_{kj}^i c_3^k c_1^j + c_5^i) =$$

$$\bar{v}_* \circ K^H(x, p, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6) = K \circ \bar{v}_* (x, p, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6)$$

qed

2. Elevaciones tangentes de Vilms.

Vilms establece en [50] la siguiente construcción: dados un fibrado vectorial $\pi: E \rightarrow M$ y una conexión infinitesimal Γ en él, definida por sus aplicaciones de escisión V y de conexión K , se obtiene de modo único una conexión infinitesimal $\bar{\Gamma}$ en el fibrado vectorial $\pi_*: TE \rightarrow TM$, definida por sus aplicaciones de escisión \bar{V} y de conexión \bar{K} , que son:

$$\bar{V} = S_E V_* S_E \quad \text{y} \quad \bar{K} = K_* S_E$$

Llamaremos a la conexión \bar{F} elevación tangente de la conexión dada. Resulta, ver [50], que si la conexión dada es homogénea (resp. lineal), también lo es la inducida.

Establezcamos la siguiente

Proposición 4.11.: Sea una conexión infinitesimal Γ en un fibrado vectorial $\pi: E \rightarrow M$. Entonces su elevación tangente \bar{F} es una elevación respecto del buen cuadrado

$$\begin{array}{ccc} TE & \xrightarrow{\pi_M} & TM \\ \pi_E \downarrow & & \downarrow \pi_M \\ E & \xrightarrow{\pi} & M \end{array}$$

Demostración.

El anterior es un buen cuadrado por la proposición 1.1. Sea su expresión local la siguiente:

$$\begin{array}{ccc} (x, a_1, c_1, a_2) & \longrightarrow & (x, c_1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (x, a_1) & \longrightarrow & x \end{array}$$

Entonces si V y K se expresan localmente como

$$V(x, a_1, c_1, a_2) = (x, a_1, 0, a_2 + \omega(x, a_1)c_1)$$

$$K(x, a_1, c_1, a_2) = (x, a_2 + \omega(x, a_1)c_1)$$

se hallan \bar{V} y \bar{K} , cuyas expresiones son, [50].

$$\bar{V}(x, a_1, c_1, a_2, c_2, a_3, c_3, a_4) =$$

$$= (x, a_1, c_1, a_2, 0, a_3 + \omega(x, a_1)c_2, 0, a_4 + \omega(x, a_1)c_3 + \omega'(x, a_1)(c_1, a_2)c_2)$$

$$\bar{K}(x, a_1, c_1, a_2, c_2, a_3, c_3, a_4) =$$

$$= (x, a_2 + \omega(x, a_1)c_2, c_1, a_4 + \omega(x, a_1)c_3 + \omega'(x, a_1)(c_1, a_2)c_2)$$

Entonces se sigue de modo inmediato que

$$K \circ \pi_{E*} = \pi_E \circ \tilde{K} \quad \text{y} \quad V \circ \pi_{E*} = \pi_E \circ \tilde{V}$$

qed

Una situación particularmente interesante se presenta cuando el fibrado dado $\pi: E \rightarrow M$ es el fibrado tangente de una variedad $\pi_M: TM \rightarrow M$. Entonces, por la proposición que acabamos de probar, la elevación tangente es una elevación en el buen cuadrado

$$\begin{array}{ccc} TTM & \xrightarrow{(\pi_M)_*} & TM \\ \pi_{TM} \downarrow & & \downarrow \pi_M \\ TM & \xrightarrow{\pi_M} & M \end{array}$$

Como vimos en las proposiciones 4.1. y 4.2., las elevaciones completa y horizontal de una conexión lineal en M al fibrado tangente son elevaciones en el buen cuadrado

$$\begin{array}{ccc} TTM & \xrightarrow{\pi_{TM}} & TM \\ (\pi_M)_* \downarrow & & \downarrow \pi_M \\ TM & \xrightarrow{\pi_M} & M \end{array}$$

En los ejemplos 1.1. y 1.2. vimos que estos son los dos únicos buenos cuadrados definidos en TTM con las aplicaciones fibradas π_{TM} y $(\pi_M)_*$. Existe una relación más estrecha entre esos dos buenos cuadrados, anticipada (sin emplear este lenguaje) por el propio Vilms, cuando estableció la siguiente

Proposición 4.12. [50]:

(i) Para cada conexión infinitesimal en M , el automorfismo de Kobayashi transforma la elevación tangente de la conexión (definida en $(\pi_M)_*: TTM \rightarrow TM$) en una conexión infinitesimal en $\pi_{TM}: TTM \rightarrow TM$ que tiene como aplicación de conexión $S_M^* K_* \circ S_{TM}^* (S_M)_*$ y como aplicación de escisión $(S_{TM}^* S_{M*})^{-1} \circ V_* \circ S_{TM}^* S_{M*}$

(ii) Si la conexión infinitesimal dada es homogénea, lineal o lineal simétrica, también lo es (respectivamente) la inducida por (i).

Obtenemos, como consecuencia de éste, el siguiente resultado:

Corolario: Sean ∇ una conexión lineal en M , $\tilde{\nabla}$ la elevación tangente in-

ducida en $(\pi_M)_*$: $TM \rightarrow TM$ y ∇^C la elevación completa definida en π_{TM}^* : $TM \rightarrow TM$.
Entonces el automorfismo de Kobayashi transforma $\bar{\nabla}$ en ∇^C .

Demostración.

Basta emplear las proposiciones 4.1. y 4.12.:

$$\begin{aligned} & S_M^* K_* S_{TM}^* (S_M)_* (x, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7) = \\ &= S_M^* K_* S_{TM} (x, c_2, c_1, c_3, c_4, c_6, c_5, c_7) = \\ &= S_M^* K_* (x, c_2, c_4, c_6, c_1, c_3, c_5, c_7) = \\ &= S_M (x, c_6 + \omega(x, c_2)c_4, c_1, c_7 - \omega(x, c_2)c_5 + \omega'(x, c_2)(c_1, c_3)c_4) = \\ &= (x, c_1, c_6 + \omega(x, c_2)c_4, c_7 + \omega(x, c_2)c_5 + \omega'(x, c_2)(c_1, c_3)c_4) = \\ &= (x^i, c_1^i, c_6^i + \Gamma_{kj}^i c_4^k c_2^j, c_7^i + \Gamma_{kj}^i c_5^k c_2^j + \frac{\partial \Gamma_{kj}^i}{\partial x^t} c_4^k c_2^j c_1^t + \Gamma_{kj}^i c_4^k c_3^j) \end{aligned}$$

qed

Observación. La elevación tangente queda caracterizada, como demuestra Vilms en [50], por la relación

$$\bar{\nabla}_{X^C} Z^b = (\nabla_X I)^b$$

siendo $X \in T_0^1(M)$ y $I \in \text{Sec}(\pi)$; b es la elevación que estudiamos en el ejemplo 1.5.

La proposición 4.12. nos permite definir la elevación completa de una conexión en M al fibrado tangente, aunque la conexión no sea lineal.

3. Conexión de segundo orden de Bowman.

Bowman consagra varios trabajos al estudio de conexiones definidas en fibrados tangentes de orden superior: [3],[4],[5] y [6]. Vamos a fijarnos en su construcción para el fibrado de los 2-jets $\pi_0^2: T_2M \rightarrow M$.

Como vimos en la demostración de la proposición 1.3., cada conexión infinitesimal en M, esto es, en $\pi_M: TM \rightarrow M$, determina una única estructura de fibrado vectorial en $\pi_0^2: T_2M \rightarrow M$. Esto permite definir conexiones infinitesimales en el fibrado de los 2-jets. Así, Bowman en [4] da la siguiente definición:

Una conexión infinitesimal en el fibrado de 2-jets, de aplicación de escisión \bar{V} , es una conexión de segundo orden en M si existe una conexión infinitesimal en M de modo que su aplicación de escisión V haga conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 T_2M & \xleftarrow{\bar{V}} & TT_2M \\
 (\pi_1^2)_* \downarrow & & \downarrow (\pi_1^2)_* \\
 VM & \xleftarrow{V} & TTM
 \end{array}$$

Obsérvese que si consideramos el buen cuadrado (*) (que lo es, por la proposición 1.3.)

$$\begin{array}{ccc}
 T_2M & \xrightarrow{\pi_0^2} & M \\
 \pi_1^2 \downarrow & & \downarrow \text{id} \\
 TM & \xrightarrow{\pi_M} & M
 \end{array} \quad (*)$$

entonces resulta que una conexión de segundo orden en M no es sino la elevación de una conexión en M respecto del buen cuadrado (*).

En el mismo trabajo,[4], Bowman obtiene una conexión $\bar{\Gamma}$ (de segundo orden) en $\pi_0^2: T_2M \rightarrow M$ inducida canónicamente por cada conexión Γ en $\pi_M: TM \rightarrow M$. Si K es la aplicación de conexión de Γ y \bar{K} es la de $\bar{\Gamma}$, ambas van ligadas por la relación

$$\bar{K} = I^{-1} \cdot S_M \cdot K_* \cdot S_{TM} \cdot (S_M)_* \cdot I_*$$

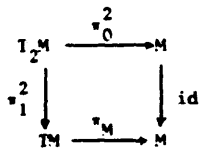
siendo I la inclusión de T_2M en TTM dada localmente por

$$I(x, c_1, c_2) = (x, 0, c_1, c_2)$$

que no es la obtenida al considerar $I_2 M = (p \circ \pi_M : S_M(p) = p)$

Obtenemos la siguiente

Proposición 4.13.: Sea Γ una conexión infinitesimal en M y sea $\bar{\Gamma}$ la conexión de segundo orden inducida. Entonces $\bar{\Gamma}$ es elevación de Γ en el buen cuadrado



Demostración.

Trivial, pues esto es cierto para toda conexión de segundo orden. Lo único que habría que probar es que es ciertamente elevación de la conexión dada. En efecto, utilizando la demostración de la proposición 4.11., resulta

$$\begin{aligned}
 \bar{K}(x, c_2, c_3, c_4, c_6, c_7) &= \\
 &= I^{-1} \circ S_M \circ K_{\#} \circ S_{TM} \circ (S_M)_{\#} \circ I_{\#}(x, c_2, c_3, c_4, c_6, c_7) = \\
 &= I^{-1} \circ S_M \circ K_{\#} \circ S_{TM} \circ (S_M)_{\#}(x, 0, c_2, c_3, c_4, 0, c_6, c_7) = \\
 &= I^{-1} \circ S_M \circ K_{\#} \circ S_{TM}(x, c_2, 0, c_3, c_4, c_6, 0, c_7) = \\
 &= I^{-1} \circ S_M(x, c_6 + w(x, c_2)c_4, 0, c_7 + w(x, c_2)0 + w'(x, c_2)(0, c_3)c_4) = \\
 &= I^{-1}(x, 0, c_6 + w(x, c_2)c_4, c_7 + w'(x, c_2)(0, c_3)c_4) = \\
 &= (x, c_6 + w(x, c_2)c_4, c_7 + w'(x, c_2)(0, c_3)c_4) .
 \end{aligned}$$

Se tiene entonces

$$\nu_1^2 \bar{K}(x, c_2, c_3, c_4, c_6, c_7) = (x, c_6 + w(x, c_2)c_4) = K(x, c_2, c_4, c_6) =$$

$$K(\nu_1^2)_{\#}(x, c_2, c_3, c_4, c_6, c_7) .$$

qed

Observación. Si Γ es una conexión lineal, también lo es $\bar{\Gamma}$, pues resulta

$$\bar{K}(x, c_2, c_3, c_4, c_6, c_7) = (x^i, c_6^i + \Gamma_{kj}^i c_4^k c_2^j, c_7^i + \Gamma_{kj}^i c_4^k c_3^j).$$

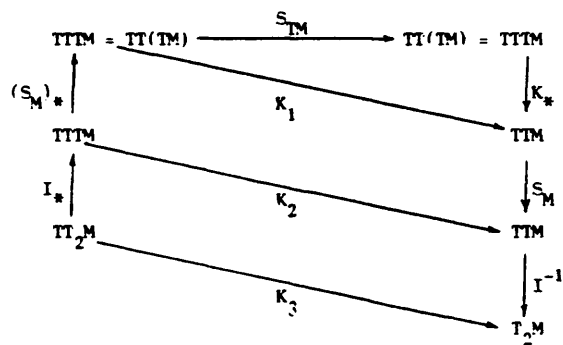
Así, de las proposiciones 4.11., 4.12. y 4.13. hemos obtenido las siguientes conexiones inducidas por una dada Γ en M , de aplicación de conexión K :

Γ_1 , elevación tangente, definida en $(\pi_M)_* : TTM \rightarrow TM$, con $K_1 = K_* \circ S_{TM}$.

Γ_2 , elevación completa, definida en $\pi_{TM}^* : TTM \rightarrow TM$, con $K_2 = S_M^* \circ K_* \circ S_{TM}^*$
 $(S_M^*)_* = S_M^* \circ K_1 \circ (S_M)_*$.

Γ_3 , conexión inducida de segundo orden, definida en $\pi_0^2 : T_2^2 M \rightarrow M$, con
 $K_3 = I^{-1} \circ S_M^* \circ K_* \circ S_{TM}^* \circ (S_M)_* \circ I_* = I^{-1} \circ K_2 \circ I_*$.

Las aplicaciones de conexión vienen dadas en el siguiente diagrama:



4. Elevación completa al fibrado de referencias.

Mok definió en [35b] la elevación completa de una conexión lineal en una variedad M al fibrado de las referencias lineales sobre M , $\tilde{\nu}_M: FM \rightarrow M$. Con otra técnica definieron Cordero y de León, [5], esa misma elevación. Como en todos los demás casos tratados en esta sección 4.3., vamos a demostrar que esa elevación es una elevación en nuestro sentido, respecto de un cierto buen cuadrado. El buen cuadrado es

$$\begin{array}{ccc}
 IFM & \xrightarrow{\tilde{\nu}_{FM}} & FM \\
 (\tilde{\nu}_M)^* \downarrow & & \downarrow \tilde{\nu}_M \\
 TM & \xrightarrow{\nu_M} & M
 \end{array} \quad (*)$$

que es un buen cuadrado por la proposición 1.1. Lo expresamos localmente por

$$\begin{array}{ccc}
 U^n \times GL(n, R) \times R^n \times gl(n, R) & \longrightarrow & U^n \times GL(n, R) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 U^n \times R^n & \longrightarrow & U^n
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 (x, G, c, g) & \longrightarrow & (x, G) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 (x, c) & \longrightarrow & x
 \end{array}$$

adoptando como convenio de notación el siguiente:

$$G, G_j^i \in GL(n, R) ; \quad g \in gl(n, R)$$

y todos los índices que se consideren variarán en $\{1, \dots, n\}$.

Un campo $X \in T_0^1(FM)$ se representará por

$$X = \frac{\partial}{\partial x^i} X^i + \frac{\partial}{\partial x^j} X^{jk}$$

donde se entiende que se suma en los índices i, j y k .

Dada una conexión lineal ν en M de símbolos locales ω_{kj}^i , la conexión $\tilde{\nu}$ elevación completa a FM , tiene los siguientes símbolos en la carta inducida. ver [35b] :

$$\bar{r}_{ji}^h = r_{ji}^h ; \quad \bar{r}_{ji}^h = G_c^a \frac{\partial r_{ji}^h}{\partial x^a} ; \quad \bar{r}_{j i_a}^h = \delta_a^t r_{ji}^h ; \quad \bar{r}_{j_a i}^h = \delta_a^t r_{ji}^h$$

$$\bar{r}_{j i_a}^h = \bar{r}_{j_a i}^h = \bar{r}_{j_a i_b}^h = \bar{r}_{j_a i_b}^h = 0$$

entendiéndose que

$$\bar{\nabla} \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} = \frac{\partial}{\partial x^k} \cdot \bar{r}_{ij}^k + \frac{\partial}{\partial G_c^k} \cdot \bar{r}_{ij}^k$$

$$\bar{\nabla} \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial G_a^j} = \frac{\partial}{\partial x^k} \cdot \bar{r}_{i j_a}^k + \frac{\partial}{\partial G_c^k} \cdot \bar{r}_{i j_a}^k$$

$$\bar{\nabla} \frac{\partial}{\partial G_a^i} \frac{\partial}{\partial x^j} = \frac{\partial}{\partial x^k} \cdot \bar{r}_{i_a j}^k + \frac{\partial}{\partial G_c^k} \cdot \bar{r}_{i_a j}^k$$

$$\bar{\nabla} \frac{\partial}{\partial G_a^i} \frac{\partial}{\partial G_b^j} = \frac{\partial}{\partial x^k} \cdot \bar{r}_{i_a j_b}^k + \frac{\partial}{\partial G_c^k} \cdot \bar{r}_{i_a j_b}^k$$

Entonces establecemos la siguiente

Proposición 4.14.: Con la notación anterior. $\bar{\nabla}$ es elevación de ∇ respecto del buen cuadrado (*).

Demostración.

Desarrollando la expresión de la aplicación de conexión \bar{K} , obtenemos, por un largo proceso, que

$$\begin{aligned} \bar{K}(x^i, G_k^j, Y^i, Y^j, X^i, X^j, Z^i, Z^j) = \\ = (x^i, G_k^j, r_{ab}^i X^a Y^b + Z^i, \frac{\partial r_{bc}^j}{\partial x^a} G_k^a X^b Y^c + r_{ap}^j X^a Y^p + r_{al}^j X^a Y^l + Z^j) \end{aligned}$$

con lo que se obtiene de modo directo la igualdad $(\bar{\nabla}_M)_* \bar{K} = K(\bar{\nabla}_M)**$

qed

Los cálculos efectuados en este capítulo 4, como decíamos a su comienzo, sirven para reunir en una sola teoría elevaciones obtenidas a partir de propiedades específicas de los fibrados o variedades involucradas en su definición. No hemos pretendido hacer un estudio exhaustivo: creemos que la diversidad de los ejemplos presentados sirve para hacer provechosa la teoría y, al mismo tiempo, pensamos que se podrán aplicar estas técnicas a otros casos no tratados aquí.

BIBLIOGRAFIA.

- [1] BARTHEL, W.: *Nichtlineare Zusammenhänge und deren Holonomien-*
gruppen.
J. Reine Angew. Math. **212** (1963), 120-149.
- [2] BESSE, A. L.: *Manifolds all of whose geodesic are closed.*
Springer. Berlin, (1978).
- [3] BOWMAN, R. H.: *On differentiable extensions, I, II.*
Tensor N.S. **21** (1970), 139-150 y 261-264.
- [4] BOWMAN, R. H.: *Second order connections.*
J. Differential Geometry **7** (1972), 549-561.
- [5] BOWMAN, R. H.: *Second order connections II.*
J. Differential Geometry **8** (1973), 75-84.
- [6] BOWMAN, R. H.: *On higher order differential geometry.*
Tensor N.S. **39** (1982), 85-89.
- [7] CARANUTTO, D.: *Bundle splittings, connections and locally principal*
fibred manifolds.
Boll. U.M.I. Serie VI, 5-D (1986), 17-30.
- [8] CORDERO, L. A.- de LEON, M.: *Prolongations of linear connections to*
the frame bundle.
Bull. Austral. Math. Soc. **28** (1983), 305-318.
- [9] CORDERO, L. A.- de LEON, M.: *Prolongations of G-structures to the*
frame bundle.
Ann. Mat. Pura Appl. (4) **143** (1986), 123-141.
- [10] CRAMPIN, M.: *Generalized Bianchi Identities for Horizontal*
Distributions.
Math. Proc. Cam. Phil. Soc. **94** (1983), 125-132.
- [11] CRAMPIN, M.- EBORT, L. A.: *Graded Lie algebras of derivations and*
Ehresmann connections.
J. Math. Pures Appl. (9) **66** (1987), 113-125.
- [12] DI COMITE, C.: *Pseudocommissioni lineari su una varietà*
differenziabile di classe C^m .
Ann. Mat. Pura Appl. (4) **83** (1969), 133-152.
- [13] DI COMITE, C.: *Pseudocommissioni su uno spazio fibrato principale.*
Ann. Mat. Pura Appl. (4) **96** (1973), 155-173.
- [14] DOMBROWSKI, P.: *On the geometry of the Tangent Bundle.*
J. Reine Angew. Math. **210** (1962), 73-88.

- [15] EHRESMANN, Ch.: *Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable.*
Coll. de Topologie, Bruselas (1950), 29-55.
- [16] ETAYO, F.: *Elevaciones al fibrado tangente.*
Tesina (1986). Facultad de Mat. U.C.M.
- [17] ETAYO, F.: *El tensor de Nijenhuis de una pseudoconexión.*
Aparecerá en Actas XII J. Mat. Hisp.-Lusas, Braga. 4-8-V-1987.
- [18] ETAYO, F.: *Lifts of pseudo-connections to $T_p M$.*
Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena 36 (1988)(en prensa).
- [19] ETAYO, F.: *Conexiones y pseudoconexiones en el fibrado de r -jets.*
Aparecerá en Actas XIII J. Mat. Hisp.-Lusas, Valladolid, 6-9-IX-1988.
- [20] ETAYO, F.: *Linear Connections on Squares of vector bundles.*
Aparecerá en Proc. VI Intern. Coll. on Diff. Geom., Santiago de Compostela, 19-23-IX-1988.
- [21] ETAYO, J. J.: *Pseudoderivaciones.*
Rev. Mat. Hisp.-Amer. (4) 35 (1975), 81-98.
- [22] ETAYO, J. J.: *Lifts of derivations and differentiations to the tangent bundle.*
Proc. IV Intern. Coll. on Diff. Geom., Santiago de Compostela (1970), 117-130.
- [23] ETAYO, J. J.: *On a complete lifting of derivations.*
Tensor N.S. 38 (1982), 169-178.
- [24] ETAYO, J. J.: *Pequeña historia de las conexiones geométricas.*
R. Acad. Ciencias. Madrid (1983).
- [25] ETAYO, J. J.: *Derivations in the tangent bundle.*
L.N.M. 1045, Springer, Berlín (1984), 43-52.
- [26] FALCITELLI, M.- JANUS, S.- PASTORE, A. M.: *Pseudocommissioni lineari sul fibrato tangente di una varietà differenziabile.*
Bull. Math. Soc. Sci. Math. R.S.Roumaine 28 (76) (1984) 235-249.
- [27] FRÖLICHER, A.- NIJENHUIS, A.: *Theory of vector valued differential forms. Part I: Derivations in the graded ring of differential forms.*
Indag. Math. 18 (1956), 338-350.
- [28] GRIFONE, J.: *Structure presque-tangente et connexions.I.*
Ann. Inst. Fourier, Grenoble 22,1 (1972), 287-334.
- [29] HERMANN, R.: *Gauge Fields and Cartan-Ehresmann Connections.*
Part A. Math. Sci. Press, Brookline (Mass.)(1977).

- [30] HU, S. T.: *Differentiable Manifolds*.
Holt, Rinehart and Wiston, N. York (1969).
- [31] KANDATU, A.: *Tangent bundle of a manifold with a non-linear connection*.
Kōdai Math. Sem. Rep. 18 (1966), 259-270.
- [32] KOBAYASHI, S.: *Theory of connections*.
Ann. Mat. Pura Appl. 43 (1957), 119-194.
- [33] KOBAYASHI, S.- NOMIZU, K.: *Foundations of Differential Geometry, I*.
Inters. N. York (1963).
- [34] KOSZUL, J. L.: *Lectures on Fibre Bundles and Differential Geometry*.
Tata Inst. Bombay (1960).
- [35] LANG, S.: *Differential Manifolds*.
Addison Wesley, Reading (Mass.) (1972).
- [36] de LEON, M.- SALGADO, M.: *Lifts of derivations to the tangent bundles of p^x -velocities*.
J. Korean Math. Soc. 23 (1986), 135-140.
- [37] MANGIAROTTI, L.- MODUGNO, M.: *Graded Lie algebras and connections on a fibred space*.
J. Math. Pur. Appl. 63 (1984), 111-120.
- [38] MODUGNO, M.: *Systems of vector valued forms on a fibred manifold and applications to gauge theory*.
L.N.M. 1251 Springer, Berlin (1987), 238-264.
- [38b] MOK, K. P.: *Complete lifts of tensors fields and connections to the frame bundle*.
Proc. London Math. Soc. 38 (1979), 72-88.
- [39] MOK, K. P.- WONG, Y. C.: *Connections and M-tensors on the Tangent Bundle TM* .
Topics in Diff. Geom. (Rund, H.-Forbes, W.ed.). Ac. Press N. York (1976), 157-172.
- [40] MORIMOTO, A.: *Prolongation of geometric structures*.
Math. Inst. Nagoya (1969).
- [41] OBADEANU, V.: *Some remarks on the pairs of linear M-connections*.
Tensor N.S. 43 (1986), 136-142.
- [42] PERALTA, J.: *Derivaciones, pseudoderivaciones y casi-derivaciones de grado superior y su comportamiento algebraico*.
Tesis Doctoral (1983). Facultad de Mat. U.C.M.
- [43] PERALTA, J.: *Algunos resultados sobre derivadas y conexiones de grado superior*.
Actas XI J. Mat. Hisp.-Lusas, Badajoz (1987), Vol.2, 280-289.

- [44] POOR, W. A.: *Differential Geometric Structures*.
Mc. Graw Hill, N. York (1981)
- [45] SPESIVYKH, V.: *A quasi-connection and a pseudocconnection in a differentiable fiber bundle*.
Soviet Math. (Iz. V.U.Z.) 22 (1978) n°10, 84-86.
- [46] SPESIVYKH, V.: *A generalised connection in a vector bundle*.
Ukrainian Math. J. 30 (1978) n°5, 525-528.
- [47] SPESIVYKH, V.: *A generalization of the concept of a connection in a vector bundle*.
Soviet Math. (Iz. V.U.Z.) 23 (1979) n°6, 80-84.
- [48] VAMANU, E.: *Cvasi-conexiuni pe varietăți diferentiabile*.
An. st. Univ. Iași Mat. 16 (1970), 383-388.
- [49] VAMANU, E.: *Quasi-connexions sur variétés différentiables, II*.
An. st. Univ. Iași Mat. ? (1972), 161-166.
- [50] VILMS, J.: *Connections on Tangent Bundles*.
J. Differential Geometry 1 (1967), 235-243.
- [51] WONG, Y. C.: *Linear connections and quasi-connections on a differentiable manifold*.
Tôhoku Math. J. 14 (1962), 48-63.
- [52] YANO, K.- ISHIHARA, S.: *Tangent and Cotangent Bundles: Differential Geometry*.
M. Dekker, N. York (1973).
- [53] YANO, K.- OKUBO, T.: *On the tangent bundle of generalized spaces of paths*.
Rend. Mat. 4 (1971), 327-347.
- [54] YUEN, C.: *Relèvements des dérivations et des structures aux fibrés tangents*.
Kôdai Math. Sem. Rep. 28 (1977), 182-196.