CUADERNOS DE TRABAJO
ESCUELA UNIVERSITARIA DE ESTADÍSTICA

Propiedades exóticas de los determinantes

Venancio Tomeo Perucha

Cuaderno de Trabajo número 01/2010

UCM
UNIVERSIDAD
COMPLUTENSE
MADRID

Los Cuadernos de Trabajo de la Escuela Universitaria de Estadística constituyen una apuesta por la publicación de los trabajos en curso y de los informes técnicos desarrollados desde la Escuela para servir de apoyo tanto a la docencia como a la investigación.

Los Cuadernos de Trabajo se pueden descargar de la página de la Biblioteca de la Escuela www.ucm.es/BUCM/est/ y en la sección de investigación de la página del centro www.ucm.es/centros/webs/eest/

CONTACTO: Biblioteca de la E. U. de Estadística
Universidad Complutense de Madrid
Av. Puerta de Hierro, S/N
28040 Madrid
Tlf. 913944035
buc_est@buc.ucm.es

ISSN: 1989-0567

Propiedades exóticas de los determinantes

Venancio Tomeo Perucha
Escuela U. de Estadística, Univ. Complutense
tomeo@estad.ucm.es

20 de abril de 2010

Resumen

En este trabajo se presentan unas propiedades de los determinantes que, por distintas causas, no se incluyen en las explicaciones que damos a nuestros alumnos en el último curso de bachillerato ni en las de primer curso de cualquiera de las carreras de ciencias. Se ha procurado motivar a profesores y alumnos mediante nombres apropiados y ejemplos sencillos.

Después de una breve introducción veremos estas cinco propiedades, que son: 1. Desarrollo por elemento determinado. 2. Regla del corazón para determinantes de orden tres. 3. Regla de las cuatro esquinas. 4. Cálculo de determinantes por bloques y 5. La regla de Laplace.

En cada una de ellas analizaremos el enunciado y algunos ejemplos de su uso y también se verá su demostración o se dejará para más adelante como caso particular de otra propiedad.

Palabras clave: *Determinantes, propiedades de los determinantes, cálculo de determinantes.*

0. Introducción

Los determinantes, ¿qué son?

Un determinante es una aplicación del conjunto de matrices cuadradas de orden n en el cuerpo sobre el que se han definido las matrices, que asocia a cada matriz un número obtenido de una forma determinada. Es decir

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ A & \longmapsto & |A| \end{array}$$

¿Cómo surgen?

El origen de los determinantes está en la resolución de sistemas lineales y fue obra de Leibniz, en Europa en 1678, y de Seki Kowa, en 1683 en Japón.

¿Cómo se explican?

Existen tres formas tradicionales de explicar los determinantes a nuestros alumnos:

- Por formas multilineales alternadas, como puede verse en LENTIN-RIVAUD y QUEYSANNE.
- Por la forma clásica de las permutaciones: BIRKHOFF-MACLANE y REY PASTOR.
- Por medio una axiomática: LANG y ROJO.

Y una cuarta forma consiste en explicar cómo funcionan sin una fundamentación rigurosa.

¿Qué propiedades tienen?

Las propiedades de los determinantes suelen organizarse en una lista de 9 o 10 de forma que unas se apoyan en las otras.

¿Cómo se calculan los determinantes?

Si son pequeños tienen su forma:

- el de orden dos tiene una forma sencilla y única,
- el de orden tres por la regla de Sarrus o desarrollando por línea.

Si son grandes desarrollando por línea,

o por la regla de Chio, que es el desarrollo por línea cuando se han hecho ceros, mediante el uso de pivotes,

o triangulando, que es repetir esta regla.

1. Desarrollo por elemento determinado

Proposición 1 *En todo determinante se puede quitar un elemento determinado, poniendo un cero, a condición de sumar al resultado ese elemento multiplicado por su adjunto.*

Es decir, para un determinante de orden 4 y elemento a_{32}, se tiene que

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & \mathbf{a_{32}} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & \mathbf{0} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - \mathbf{a_{32}} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

Ejemplo 1. Si queremos hallar el valor del determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 9 & -2 \\ 2 & 1 & 5 & -1 \\ 8 & \mathbf{0{,}0023} & 7 & 0 \\ -3 & -4 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

y aplicamos la regla, resulta

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 9 & -2 \\ 2 & 1 & 5 & -1 \\ 8 & \mathbf{0{,}0023} & 7 & 0 \\ -3 & -4 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 9 & -2 \\ 2 & 1 & 5 & -1 \\ 8 & \mathbf{0} & 7 & 0 \\ -3 & -4 & 2 & 4 \end{vmatrix} - \mathbf{0{,}0023} \begin{vmatrix} 1 & 9 & -2 \\ 2 & 5 & -1 \\ -3 & 2 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 0 - \mathbf{0{,}0023} \cdot (-61) = 0,001403$$

Ejemplo 2. Pensemos ahora en el determinante

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 \\ -4 & 2 & 2 & \mathbf{78977} \\ 1 & \mathbf{0{,}0041} & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

y vamos aplicar la regla tres veces. Resulta:

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 \\ -4 & 2 & 2 & \mathbf{78977} \\ 1 & \mathbf{0{,}0041} & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 \\ -4 & 2 & 2 & \mathbf{78977} \\ 1 & \mathbf{0} & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} \mathbf{-0{,}0041} \begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -4 & 2 & \mathbf{78977} \\ 2 & 2 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 \\ -4 & 2 & 2 & \mathbf{0} \\ 1 & \mathbf{0} & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} \mathbf{+78977} \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & \mathbf{0} & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \mathbf{-0{,}0041} \begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -4 & 2 & \mathbf{78977} \\ 2 & 2 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 \\ -4 & 2 & 2 & \mathbf{0} \\ 1 & \mathbf{0} & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} + \mathbf{78977} \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & \mathbf{0} & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$- \mathbf{0{,}0041} \begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -4 & 2 & \mathbf{0} \\ 2 & 2 & 5 \end{vmatrix} + \mathbf{0{,}0041 \cdot 78977} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$$

Dem.

Basta descomponer el determinante en suma de dos determinantes que tengan todas sus filas iguales excepto la i-ésima, donde está el elemento que queremos sacar. En uno de ellos ponemos cero en el lugar ij y en el otro todos los elementos de la fila son cero excepto ese elemento, y desarrollamos en este segundo determinante por el elemento a_{ij}. □

2. Regla del corazón para determinantes de orden tres

Necesitamos unas definiciones previas que enunciamos en general. Dado el determinante

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

llamamos **corazón** al determinante que resulta de quitar la primera y última fila y la primera y última columna, es decir

$$\heartsuit = \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix}$$

y llamamos **esquinas** a los que resultan de quitar una fila y una columna, primeras y últimas, es decir

$$\ulcorner = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix} \qquad \lrcorner = \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n,2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\llcorner = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n-1} \end{vmatrix} \qquad \urcorner = \begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \end{vmatrix}.$$

Proposición 2 *Se verifica que*

$$|A| \cdot \heartsuit = \ulcorner \cdot \lrcorner - \llcorner \cdot \urcorner$$

Si es $\heartsuit \neq 0$, podemos calcular el determinante en la forma

$$|A| = \frac{1}{\heartsuit} \left(\ulcorner \cdot \lrcorner - \llcorner \cdot \urcorner \right)$$

Ejemplo 3.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{5} \left(\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} \right) =$$

$$= \frac{1}{5} [(-3)(-3) - (-7)(-7)] = \frac{-40}{5} = -8.$$

Más sencillo que la regla de Sarrus, pero más costoso que desarrollar por una línea obteniendo tres determinantes de orden dos. Si no escribirmos los determinantes de orden dos, que podemos calcular directamente, los cálculos son muy simples:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{5} [(-3)(-3) - (-7)(-7)] = \frac{-40}{5} = -8.$$

Ejemplo 4. En el caso en que el corazón sea nulo, basta intercambiar dos filas o columnas, cambiando de signo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\left[8(-4) - (-4)(-8)\right] = \frac{64}{2} = 32.$$

Pero también es posible utilizar un parámetro que sustituya al cero, en la forma:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & \alpha & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{\alpha}\left[(\alpha - 8)(\alpha - 8) - (8 - 3\alpha)(8 - 3\alpha)\right] =$$

$$= \frac{1}{\alpha}\left[\alpha^2 - 16\alpha + 64 - 64 + 48\alpha - 9\alpha^2\right] = 32 - 8\alpha = 32.$$

Dem. Es el caso particular para $n = 3$ de la regla de las cuatro esquinas. □

3. Regla de las cuatro esquinas

Proposición 3 *Para cualquier determinante se verifica que*

$$|A| \cdot \heartsuit = \ulcorner\cdot\lrcorner - \llcorner\cdot\urcorner$$

Ejemplo 5. Calculemos

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 5 & 3 \\ 3 & 5 & 4 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}} \left(\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 4 & 5 & 3 \\ 5 & 4 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & -1 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix} \right)$$

En este caso hay que calcular cuatro determinantes de orden tres, lo mismo que si desarrollamos por línea.

En cuanto el determinante sea de orden mayor que cuatro, esta regla será mejor que el desarrollo por línea.

Dem.

Con la notación

$$A\begin{pmatrix} 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 \end{pmatrix}$$

indicamos el determinante de una submatriz de A, que está formada por las filas que se indican en la primera línea y las columnas que se indican en la segunda. Concretamente el determinante indicado es el *corazón* de la matriz $A \in \mathcal{M}_n$.

Si en la matriz $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ consideramos el menor

$$A\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & p \\ 1 & 2 & \cdots & p \end{pmatrix}, \qquad 1 \leq p < n,$$

formado por las p primeras filas y columnas y lo *orlamos*, añadiendo una fila y una columna de las $n-p$ filas y $n-p$ columnas restantes, formamos el menor

$$b_{rs} = A\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & p & r \\ 1 & 2 & \cdots & p & s \end{pmatrix}.$$

Con estos menores construimos la matriz de orden $n-p$

$$B = (b_{rs})_{r,s=p+1}^n$$

La *identidad determinante de Sylvester,* véase [2], nos dice que

$$B\begin{pmatrix} p+1 & \cdots & n \\ p+1 & \cdots & n \end{pmatrix} = |A| \cdot \left[A\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & p \\ 1 & 2 & \cdots & p \end{pmatrix}\right]^{n-p-1}.$$

Si hacemos $p = n-2$ en ella queda

$$B\begin{pmatrix} n-1 & n \\ n-1 & n \end{pmatrix} = |A| \cdot A\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-2 \\ 1 & 2 & \cdots & n-2 \end{pmatrix}$$

y llevando la última fila y la última columna, con dos cambios de signo, a los primeros lugares, se tiene que

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{1n} \\ b_{n1} & b_{nn} \end{vmatrix} = |A| \cdot A\begin{pmatrix} 2 & \cdots & n-1 \\ 2 & \cdots & n-1 \end{pmatrix}$$

es decir

$$|A| \cdot A\begin{pmatrix} 2 & \cdots & n-1 \\ 2 & \cdots & n-1 \end{pmatrix} =$$

$$= A\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{pmatrix} A\begin{pmatrix} 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \end{pmatrix}$$
$$- A\begin{pmatrix} 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{pmatrix} A\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \end{pmatrix},$$

que se llama regla de las cuatro esquinas. □

4. Cálculo de determinantes por bloques

Proposición 4 *Si un determinante puede dividirse por bloques en la forma*

$$|A| = \begin{vmatrix} B & C \\ D & E \end{vmatrix}$$

siendo B y E cuadradas y D está formada por ceros, se verifica que

$$|A| = |B| \cdot |E|$$

Ejemplo 6. El siguiente determinante es fácil de calcular

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 2 & 7 & 9 \\ 1 & 1 & 3 & 3 & 6 \\ 2 & 5 & -1 & 9 & -8 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = [1(-16) - 3(-2)] \cdot 1 = -10.$$

Dem. Es un caso particular de la regla de Laplace. □

Corolario *Si un determinante puede dividirse por bloques en la forma*

$$|A| = \begin{vmatrix} B & C \\ D & E \end{vmatrix}$$

siendo B y E cuadradas y B es regular, se tiene que

$$|A| = |B| \cdot |E - DB^{-1}C|$$

Ejemplo 7. El siguiente determinante puede calcularse con esta fórmula:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right| =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \left| \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right| =$$

$$= (-1) \cdot \left| \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \right| = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-6 + 3) = 3$$

Dem. Siendo I la matriz unidad y O una matriz de ceros, de órdenes adecuados, se tiene que

$$1 \cdot \begin{vmatrix} B & C \\ D & E \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I & O \\ -DB^{-1} & I \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} B & C \\ D & E \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B & C \\ D - DB^{-1}B & E - DB^{-1}C \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} B & C \\ O & E - DB^{-1}C \end{vmatrix} = |B| \cdot |E - DB^{-1}C| \qquad \square$$

5. La regla de Laplace

Proposición 5 *Todo determinante es igual a la suma de los productos obtenidos multiplicando todos los menores de orden k que se pueden formar con k líneas paralelas fijas, por sus adjuntos complementarios.*

Ejemplo 8. Si en el determinante de orden cinco

$$\left|\begin{array}{cc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right|$$

elegimos las dos primeras columnas sólo hay tres menores no nulos, que son

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix},$$

luego el determinante vale

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} =$$

$= 0 - 0 + (-6) \cdot (-2) = 12.$

DEM. Todos los términos de esos productos pertenecen al desarrollo del determinante pues contienen elementos de él, uno de cada fila y uno de cada columna. Todos son distintos porque contienen elementos distintos y en consecuencia se obtienen todos, ya que el número de menores que pueden formarse con k líneas de un determinante de orden n es $\binom{n}{k}$ y el número total de términos obtenidos será

$$\binom{n}{k} k!(n-k)! = n!,$$

puesto que hay $k!$ sumandos en el menor de orden k y $(n-k)!$ en el de orden $n-k$, es decir todos los términos del determinante. Los signos se corresponden con los del desarrollo porque se tiene en cuenta el número de cambios necesarios de las filas del menor, cada una con la inmediata anterior, para llevar los menores a ser principales sin desordenar las filas del complementario. $\square$

En el caso particular de elegir $k = 1$, tenemos la fórmula del *desarrollo por línea* o *desarrollo de Laplace*, según la cual todo determinante es igual a la suma de los productos de los elementos de una línea por sus adjuntos correspondientes.

6. Bibliografía

[1] G. BIRKHOFF, S. MACLANE. Álgebra moderna. *Ed. Vicens-Vives,* Barcelona 1954.

[2] F.R. Gantmacher. The Theory of Matrices. *Chelsea Publishing Company,* New York 1959.

[3] S. Lang. Álgebra lineal. *Ed. Fondo Educativo Interamericano S.A.,* México 1976.

[4] A. Lentin, J. Rivaud. Álgebra moderna. *Ed. Aguilar,* Madrid 1965.

[5] M. Queysanne. Álgebra básica. *Ed. Vicens-Vives,* Barcelona 1971.

[6] J. Rey Pastor, P. Pi Calleja, C.A. Trejo. Análisis matemático I. *Ed. Kapelusz,* Buenos Aires 1952.

[7] A.O. Rojo. Álgebra II. *Ed. El Ateneo,* Buenos Aires, 1972.

Cuadernos de Trabajo
Escuela Universitaria de Estadística

CT02/2008 **Inaccurate parameters in Gaussian Bayesian networks**
Miguel A. Gómez-Villegas, Paloma Main and Rosario Susi

CT01/2008 **A Value for Directed Communication Situations.**
E. González–Arangüena, C. Manuel, D. Gómez, R. van den Brink

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE
MADRID