



UNIVERSIDAD COMPLUTENSE
MADRID

Facultad de C.C. Económicas y

Empresariales

Master Universitario en
FINANZAS DE EMPRESA

Análisis de los métodos multivariantes
para medir el riesgo en una cartera

Autor: Santiago Rivas Pardini

Tutor: Juan Mascareñas

V. bº del tutor:

Abstract

A la hora de estudiar el valor en riesgo de una cartera, el método univariante puede ser considerado como una sobre simplificación de la realidad. Después de haber experimentado la mayor y más larga crisis financiera de la historia, los mercados buscan una manera efectiva de medir el riesgo. En este estudio haremos un repaso de las principales formas de estimar el VaR y CVaR. El objetivo principal es establecer un indicador cualitativo que nos permita comparar entre los diferentes modelos. Los resultados muestran que la simulación histórica ponderada con un GARCH(1,1) optimiza el control del riesgo.

When estimating the value at risk of a given portfolio, the univariate approach can be an oversimplification of the reality. After having experienced the greatest and the longest financial crisis in documented history the financial market craves for an effective way of measuring risk. In this study we do an overview of the main ways you can estimate and model the VaR and CVaR. The main objective is to do establish a qualitative indicator that could help us to compare between models the models. The findings show that a historical simulation with a GARCH(1,1) approach is the most efficient model.

Índice

| | |
|--|----|
| 1.- Introducción | 1 |
| 2. Medición del riesgo a través de la volatilidad | 4 |
| 2.1. Métodos para estimar la volatilidad | 4 |
| a) Medias Móviles..... | 4 |
| b) Medias móviles ponderadas | 5 |
| c) Modelos Econométricos y dinámicos | 6 |
| 3. ¿Cómo medir el riesgo?..... | 9 |
| 3.1. Pre-Markowitz | 9 |
| 3.2. La teoría de selección de Carteras de Markowitz (MPT) | 10 |
| 3.3. CAPM | 11 |
| 3.4. Value at Risk (VaR)..... | 11 |
| 3.4.1. Formas estrictas de estimar el VaR..... | 13 |
| a) Simulación Histórica..... | 13 |
| b) Simulación histórica con pesos temporales | 14 |
| c) Estudio Paramétrico. | 15 |
| d) Simulación por Montecarlo | 17 |
| 3.4.2. Limitaciones del VaR | 18 |
| 3.5. Medidas Coherentes del Riesgo..... | 19 |
| 3.5.1. CVaR..... | 20 |
| 4. Estimación del VaR a través de cópulas financieras | 22 |
| 4.1. Cópulas elípticas | 24 |
| a) Cópula Gaussiana | 25 |
| b) Cópula t-student..... | 25 |
| 4.2. Cópulas Arquimedianas | 26 |
| a) Cópula de Gumbel | 27 |

| | |
|---|----|
| b) Cópula de Clayton | 28 |
| c) Cópula de Frank..... | 29 |
| 4.3 Distribución marginal de la cópula..... | 30 |
| 5. Metodología de contrastación..... | 31 |
| 5.1. Backtesting..... | 31 |
| a) Evaluación <i>in sample</i> | 32 |
| b) Evaluación <i>out sample</i> | 32 |
| 5.2. Estadísticos de contrastación | 32 |
| a) El índice de Kupiec | 33 |
| b) Medidas del rendimiento de los modelos. | 33 |
| 6. Descripción de la muestra..... | 36 |
| 6.1. Estableciendo agrupaciones dinámicas de la muestra | 39 |
| 7. Metodología del estudio | 40 |
| 8.- Resultado del estudio | 42 |
| 9.- Conclusiones | 45 |
| 10.- Bibliografía | 46 |
| 11.- Anexos..... | 47 |

*Gracias al profesor Don Juan Mascareñas
cuya dedicación por enseñar, me hizo
disfrutar de las finanzas y a todos mis
familiares por su apoyo.*

1.- Introducción

En las últimas décadas, debido a la globalización y a la creación de nuevos y complejos derivados financieros, se ha creado un escenario económico mucho más volátil, donde las empresas y los inversores están expuestos a un mayor riesgo. Según Jorion (2001) muchas de las instituciones financieras más grandes a nivel mundial han sufrido pérdidas valoradas en millones de euros principalmente debido a que la dirección subestimó la importancia del riesgo de mercado. Cada vez más las empresas hacen uso de sofisticados instrumentos financieros y no siempre se cumplen sus expectativas, pudiendo incluso incurrir en pérdidas. Si en ese momento no tienen el riesgo de mercado correctamente provisionado, se tendrán que enfrentar a grandes salidas de efectivo, desinversiones o incluso en última instancia llevar a la empresa a la quiebra.

Por ello, cada vez son más numerosos los estudios que pretenden cuantificar el riesgo de una forma más precisa. En particular, el valor en riesgo (VaR) es de las medidas más extendidas y juega un papel principal en el control del mismo. Sin embargo, la forma tradicional realiza ciertas hipótesis que son inconsistentes con una economía dinámica y en constante variación.

Asimismo, en ciertas ocasiones, debido a que el VaR no posee la propiedad de subaditividad, puede llegar a ocurrir que se ignoren los beneficios (desde el punto de vista del riesgo) de la diversificación ($VaR_{A+B} > VaR_A + VaR_B$). Por ello en los últimos años se han desarrollado lo que conocemos como medidas coherentes del riesgo que cumplen las propiedades de monotonía, homogeneidad positiva y subaditividad.

Sin embargo, también hay que tener en cuenta que no hay una única metodología para calcular estas medidas de riesgo multivariante, sino que nos encontramos con un amplio espectro de maneras por las cuales podemos estimar y optimizar las medidas de riesgo existentes. De hecho, puede darse el caso de que ciertos activos sólo estén relacionados en valores extremos (sólo en aquellos días en los que se dé un cisne negro), por lo que no podemos considerar su riesgo de manera independiente.

En este sentido cabe mencionar la aplicación de cópulas al campo de las finanzas, las cuales nos ayudarán a estudiar la interdependencia existente entre los componentes de una cartera, con el fin de poder simular resultados que se ajusten mejor a la realidad.

En este estudio además discutiremos sobre varias metodologías para estimar el VaR, CvaR y el TvaR multivariante, para después aplicarlo en un caso práctico con una cartera compuesta por 4 acciones. Con el fin de eliminar el riesgo de liquidez de nuestra cartera hemos elegido cuatro valores de empresas pertenecientes al IBEX35, y en concreto al sector financiero, para demostrar el inmenso efecto que puede tener la interdependencia de los valores escogidos.

El objetivo principal de este trabajo es intentar exponer las diferentes metodologías para medir el riesgo y establecer alguna medida cualitativa que nos ayude a compararlas. En general, el trabajo estudiará primero un marco teórico que nos explicará los modelos y luego aplicará dichos modelos a un caso práctico.

Así, este estudio se estructurará de la siguiente manera:

Primeramente haremos un breve resumen de maneras en las que se pueden medir la volatilidad (medias móviles, modelos GARCH, etc), para luego adentrarnos directamente en los diferentes modelos para medir el riesgo que han existido a lo largo de la historia.

A continuación, describiremos varios de los métodos modernos para medir el riesgo, que aplicaremos después a nuestra cartera. Los primeros modelos que veremos impondrán fuertes hipótesis sobre la estructura y consistencia del comportamiento de los rendimientos. Comenzaremos estudiando el modelo de simulación histórica donde se asume que la volatilidad y distribución de los rendimientos van a ser recurrentes a lo largo de la historia, lo que hará que a largo plazo todas las variables sean constantes.

Posteriormente, intentaremos relajar estas hipótesis, y asumiremos una estructura cambiante a lo largo del tiempo, pero siguiendo una distribución determinada. En concreto, ajustaremos los rendimientos con una distribución normal y una t-student y veremos cual optimiza el cálculo del riesgo.

Con el objetivo de intentar seguir modelando una estructura más dinámica, estudiaremos cuál es la interdependencia de las variables, y para ello utilizaremos las cópulas elípticas y Arquimedianas. Éstas nos ayudará a construir un modelo más realista y a estudiar los casos donde los activos financieros se interrelacionan en los casos extremos.

Por último aplicaremos una metodología que cada vez está extendida, la cual aplica un modelo GARCH(1,1) para hacer que la volatilidad sea dinámica a lo largo del tiempo y con ello obtener resultados más consistentes.

Paralelamente, describiremos algunos métodos estadísticos que nos ayudarán a contrastar los modelos entre sí, entre los que centraremos el QPS y el RMSE y propondremos un nuevo indicador al que denominaremos IOR. Este no es más que una relación entre los métodos estadísticos anteriores.

Ya para finalizar, nos centraremos en un ejemplo práctico, eligiendo cuatro valores del sector financiero español (Santander, BBVA, Banco Popular y Sabadell). Describiremos la muestra y comentaremos los resultados al aplicar los diferentes modelos haciendo un estudio de backtesting con el fin de ver la calidad predictiva de los mismos.

“La predicción, no la narración, es la verdadera prueba de nuestro entendimiento de la realidad.” - NassimNicholas Taleb

2. Medición del riesgo a través de la volatilidad

Antes de comenzar un estudio extenso de cómo podemos medir, de una manera precisa, el riesgo real existente en una cartera de valores, debemos, antes de nada, dejar claro un concepto fundamental: la volatilidad.

Bien podríamos utilizar la definición de John C. Hull (2007) en donde describe la volatilidad como: “*la desviación estándar de rendimientos realizados por la variable por unidad de tiempo, siempre y cuando el rendimiento este expresado en una capitalización continua*”. Es decir, se puede considerar la volatilidad como la desviación media de la variación de una variable en un espacio temporal determinado. Debido a que se puede utilizar para cuantificar la dispersión existente entre los rendimientos de diferentes instrumentos financieros, suele ser una de las variables principales en los modelos de medición de riesgo.

Sin embargo, hay que tener cuidado a la hora de usar este término ya que puede hacer referencia a cuatro tipos de volatilidad: histórica, implícita, relativa o prevista¹. Cada uno de estos tipos de volatilidad tiene sus implicaciones y significado financiero, por lo cual hay que tener en mente qué tipo de volatilidad se está usando en cada modelo y qué interpretación se le puede dar. En particular, en este estudio utilizaremos principalmente la volatilidad histórica, y en menor medida la prevista.

2.1. Métodos para estimar la volatilidad

Si bien es cierto que existen multitud de métodos para estimar la volatilidad, cada cual más complejo, con el fin de simplificar el estudio nos vamos a centrar en dos principales; medias móviles y modelo GARCH.

a) Medias Móviles

Una media móvil no es más que un promedio de una variable aleatoria en un espacio temporal determinado. Son comúnmente conocidas en los mercados financieros pues sirven como indicadores para ver si el mercado es bajista (si el precio actual se encuentra por debajo de la media móvil) o alcista (si el precio actual se encuentra por encima de la media móvil).

¹ Ver anexos para mayor información

Sin embargo, en este caso vamos a usarlas para calcular la volatilidad histórica media con el fin de utilizar estos datos para poder modelizar medidas de riesgo más complejas que nos permitirán cubrir mejor la posición de una cartera.

Matemáticamente podemos describirlas como una media que como particularidad sólo se calcula en base a un espacio temporal de tiempo (n días), y a medida que avanza la serie se va desplazando del mismo modo la media.

$$MA_t^n(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{t-i+1} \quad t = 1, 2, \dots, T \quad (2.1)$$

Como veremos en nuestro estudio, éste es el método más común para estimar la volatilidad futura, ya que no se requiere un modelo complejo que prediga la volatilidad futura sino que se asume que la volatilidad histórica es un buen estimador de la volatilidad futura. Esta forma de medir la volatilidad se utilizará sobre todo en las medidas estrictas del VaR y ayudará en gran medida a simplificar los modelos.

b) Medias móviles ponderadas

Hay que tener en cuenta que la forma clásica de las medias móviles tiene sus limitaciones, ya que sólo tiene en cuenta un periodo de tiempo limitado, y a menudo asignan la misma importancia al último día que al más lejano en la serie. Por ello es difícil que capte a tiempo cambios de tendencias, haciendo que el riesgo predicho no se ajuste correctamente al real.

Como bien recoge S.H. Poon (2008) podemos ver varios modelos que aún se basan en las medias móviles que pretenden evitar estos problemas. Cabe destacar la metodología EWMA (*Exponentially Weighted Moving Average*), la cual varía las ponderaciones que se le dan a los parámetros para que su peso cambie de manera exponencial.

Si bien es cierto que estos modelos ayudan a estimar de una forma más precisa los cambios de tendencia que se producen en una serie temporal, también hay que tener en cuenta que poseen ciertas limitaciones, ya que se presupone que el impacto de las variables anteriores decrece de manera exponencial. Por ello, en nuestro estudio utilizaremos modelos econométricos alternativos con el fin de intentar endogeneizar lo máximo posible la volatilidad.

c) Modelos Econométricos y dinámicos

Las medias móviles son útiles a la hora de estipular y replicar el comportamiento históricos de una variable, pero si intentar predecir su el comportamiento de la volatilidad futura necesitaríamos aplicar modelos basados en procesos estocásticos.

En este sentido, podríamos utilizar un proceso $MA(q)$ ²:

$$Y_t = \alpha + \phi_1 \varepsilon_t + \dots + \phi_{q+1} \varepsilon_{t-q} \quad (2.2)$$

En este modelo se intenta ver si los términos estocásticos anteriores tienen algún impacto en la variable aleatoria, de ésta manera podemos ver cómo ε representa una variable exógena en un tiempo determinado y ϕ los parámetros del sistema. En este mismo sentido si tomamos los rendimientos logarítmicos, sus cuadrados pueden ser utilizados para medir la volatilidad, y podríamos utilizarlos como variables endógenas de un modelo AR para estimar su comportamiento futuro. Sin embargo estos modelos se nos pueden quedar incompletos, y el estándar del mercado financiero opta más por utilizar los modelos ARCH/GARCH (autorregresivos con heterocedasticidad condicional).

La versión básica del modelo mínimos cuadrados ordinarios asume que el valor esperado de todos los términos error se mantienen constantes ante cualquier punto dado. Esta hipótesis se denomina homocedasticidad y es en la que se intenta relajar en los modelos ARCH/GARCH, es decir, pretende modelizar series de datos donde la varianza del termino error es dinámica y varía según en el momento del tiempo en el que nos encontremos (heterocedasticidad).

En datos donde las desviaciones de los errores no son equitativas, es decir, donde los errores se pueden ser mayores en ciertos puntos de la serie, se dice que sufren un problema de heterocedasticidad. El modelo GARCH trata la heterocedasticidad como una varianza a ser modelada y como resultado, no solo se reducen las deficiencias, sino que además se obtiene una predicción de cada desviación en cada error.

En particular, GARCH es un modelo para estimar futuras y actuales perturbaciones y posee diversas similitudes con del método EWMA (*Exponentially Weighed Moving Average*) pero en este caso no se asumen unos parámetros en concreto sino que los obtiene de la regresión. Podemos encontrar dos parámetros característicos en este

² Ver Dougherty (2007)

modelo GARCH; p , siendo este el número de condiciones GARCH y q el número de condiciones ARCH.

Cabe resaltar que el mismo nombre hace alusión sus características más destacadas:

Auto regresivo (AR): La desviación de mañana es una función de regresión de la desviación actual.

Condiciona (C): La perturbación futura mantiene una correlación con la volatilidad actual. Una futura variabilidad incondicional no mostraría correlación alguna con la actual.

Heterocedasticidad (H): Las desviaciones no son constantes, cambian con el tiempo.

Por lo cual, GARCH realiza las regresiones con variables retardadas o con términos históricos (las variables retardadas son o bien la varianza o el cuadrado de los rendimientos históricos) El modelo de GARCH(p,q) realiza regresiones con p rendimientos cuadráticos y q varianzas. Por lo tanto el GARCH (1,1) realiza una regresión con el rendimiento al cuadrado del periodo anterior y con la última varianza de la muestra. Matemáticamente podemos escribir el modelo de la siguiente manera:

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i e_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i \sigma_{t-i}^2 \quad (2.3)$$

Donde ω representa la varianza en el largo plazo, e_{t-i}^2 el retorno en un momento dado de la serie y α y β son parámetros empíricos determinados por criterios de máxima probabilidad de estimación. En particular, en nuestro estudio hemos realizado un modleo GARCH para cada uno de los componentes de la cartera y luego aplicado el algoritmo de Fiorentini para obtener el mejor ajuste posible³.

La expresión matemática nos indica que las desviaciones del mañana pueden ser modelizadas mediante una función del cuadrado residual, desviación actual, y el peso medio de la desviación subyacente. Las propiedades del modelo GARCH son bastante similares a las del modelo ARCH, pero requieren bastantes menos parámetros para realizar adecuadamente el proceso de modelo de la volatilidad.

³ Ver resultados en anexos

Los puntos clave de este proceso son su reversión de la media (*mean reversion*) (impuesta mediante la restricción $\alpha + \beta < 1$) y su simetría (es la magnitud de sus retornos pasados, y no sus signos, los que influyen las desviaciones futuras)

El Modelo GARCH también realiza el agrupamiento de las desviaciones (*Volatility clustering*) de los procesos de la volatilidad de los precios de los activos. El agrupamiento de la volatilidad es algo evidente que podemos apreciar todos los días, ya sea en el mercado de capitales, de las viviendas incluso en el de materias primas.

3. ¿Cómo medir el riesgo?

Antes de empezar el estudio es necesario que entendamos cómo ha avanzado el concepto de riesgo a lo largo del tiempo, lo cual no sólo nos dará un entendimiento de los diferentes modelos de riesgo sino que además nos ayudará a tener una idea clara de qué se considera riesgo en el mundo financiero.

3.1. Pre-Markowitz

En un comienzo, lo que se pretende al medir el riesgo es diseñar una función φ que cartografie las pérdidas ω a \mathbb{R} , es decir;

$$\varphi: \omega \rightarrow \mathbb{R} \quad (3.1)$$

Cabe destacar que la mayoría de académicos distinguen entre riesgo e incertidumbre. Como bien lo define Knight (1921), el riesgo es aleatoriedad con probabilidades conocidas, mientras que la incertidumbre es aleatoriedad con probabilidades desconocidas. Si bien es cierto que en el mundo financiero se suelen utilizar prácticamente como sinónimos, es importante entender el matiz que los diferencia.

Contrariamente a la creencia popular, la medición del riesgo y la diversificación es algo que ya se había investigado antes de que Markowitz publicara su teoría en 1952. Ya en el siglo XVIII el famoso matemático Bernoulli (1738) postulaba que las decisiones arriesgadas debían ser ponderadas por la utilidad esperada que iban a reportar. De hecho, Rubenstein (2002) considera que Bernoulli ya conocía el beneficio de la diversificación, es decir, que invertir en una cartera con varios activos no correlacionados puede reducir el riesgo sin reducir la rentabilidad. Del mismo modo la idea de medir el riesgo en base a la volatilidad ya había sido usada por algunos pocos economistas, (i.e. Fisher (1906); Tobin (1958)).

Antes de que se realizara una formulación matemática del riesgo, los estudios que se realizaban tomaban como base al activo en concreto, es decir se hacía un análisis fundamental del activo y se intentaba estimar el riesgo en base a ello. En este sentido cabe destacar a Benjamin Graham (1934), considerado por muchos como el padre del análisis moderno de valores. Él propuso la idea de medir el riesgo en base a un margen de seguridad basado en un análisis extenso del valor en sí. Sin embargo, aunque estos modelos sí que son utilizados por muchos inversores (Warren Buffet, Jeremy Grantham, etc.), en el mundo académico no han prosperado por su falta de análisis matemático.

3.2. La teoría de selección de Carteras de Markowitz (MPT)

A pesar de que los analistas sí que eran conscientes del riesgo, Markowitz fue el primero en formalizar un modelo matemáticamente consistente que considerara el riesgo de una cartera, la diversificación y la elección de activos.

Lo que propuso Markowitz es que el riesgo es igual a la varianza de los rendimientos de la cartera. De esta manera si obtenemos el rendimiento esperado;

$$E(\mu_p) = \sum_{i=1}^N w_i E(\mu_i) \quad (3.2)$$

Podemos definir la varianza de la cartera σ_p^2 como;

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sigma_{ij} w_i w_j \quad (3.3)$$

De tal forma que se puede establecer un binomio rentabilidad-riesgo $[E(\mu_p), \sigma_p^2]$, y aquellas que optimizan ésta combinación forman lo que se conoce como frontera eficiente. De esta manera el inversor es capaz de realizar una decisión que maximice la relación rentabilidad riesgo, situándose en aquella parte de la frontera que se adecua a su preferencia de riesgo.

Con el fin de que el modelo tenga sentido matemático Markowitz realiza una serie de hipótesis. Primero supone que los rendimientos esperados son perfectamente conocidos en cada uno de los instrumentos. Al mismo tiempo que también son conocidas las varianzas y covarianzas entre los activos financieros y que son consistentes a lo largo del tiempo. Asimismo también supone que los rendimientos siguen una distribución normal. Por lo tanto si se cumplen estas condiciones y al mismo tiempo los inversores se comportan de una manera racional el modelo optimiza la cartera en un momento concreto del tiempo.

Aunque el modelo realiza una hipótesis muy fuerte, ayuda a tener una idea muy intuitiva del riesgo a la vez que es relativamente sencillo de calcular. Una de las enormes ventajas de este modelo es que se puede calcular el ratio de Sharpe⁴, que nos

⁴ Relaciona cuanto más rendimiento ofrece la tasa libre de riesgo dada un nivel de riesgo.

permite establecer la *calidad* de la actuación de nuestra cartera en el mercado para un nivel de riesgo dado:

$$S = \frac{\mu_p - R_f}{\sigma_p} \quad (3.4)$$

3.3. CAPM

La MPT, aunque revolucionario, es en términos computacionales prácticamente inviable, ya que si no conocemos la relación entre las variables nos obliga a calcular las covarianzas, y en una cartera compuesta por más de 100 activos, es extremadamente costoso. Por este motivo, Sharpe⁵ desarrolló un modelo mucho más sencillo para ajustar una cartera al riesgo, el CAPM.

$$E[\mu_i] = R_f + \beta_i(E[\mu_m] - r_f) \quad (3.5)$$

$$\beta_i = \frac{\sigma_{im}}{\sigma_m} \quad (3.6)$$

Este modelo presenta de manera simple y elegante la idea que todo inversor si es racional (y conocidas las expectativas de los activos y la tasa libre de riesgo), exigirá a un activo con riesgo, la tasa sin riesgo más una prima (en donde el principal riesgo es el riesgo sistemático). Este modelo nos ayuda a estipular como se deber comportar el rendimiento de un activo antes las variaciones acaecidas en su rendimiento; dicho riesgo se mide a través de la Beta.

En otras palabras la beta relaciona la variación del rendimiento de un activo con la variación de rendimiento del mercado, de esta manera si el activo se comporta de la misma manera que el mercado su beta será igual a la unidad. Si nos encontramos con un activo más volátil su beta será superior a la unidad y de la misma manera si su beta es menor que la unidad no encontramos con un activo menos volátil que el mercado.

3.4. Value at Risk (VaR)

Todos los modelos anteriores nos ofrecen información de cómo se están comportando nuestras carteras con respecto al riesgo, no obstante deducimos el riesgo de manera implícita. Sin embargo todo esto cambia cuando se introduce el concepto de *valor en riesgo*.

⁵ Sharpe (1964)

Este método juega un papel fundamental en la evaluación del riesgo, y va a suponer un elemento imprescindible en su estudio posterior. Ésta medida se hizo popular en 1993 cuando tras una reunión del G-30 se consideró como una medida adecuada para analizar y hacer frente a los peligros que acarrear los derivados financieros. De esta manera el VaR pasó a ser una herramienta estándar para medir el riesgo, no solo por su simplicidad (con respecto a otros modelos) sino además porque permite cuantificar en términos monetarios las posibles pérdidas dado un nivel de probabilidad.

En general podemos definir el VaR como la expectativa de pérdida máxima, es decir la cantidad máxima probable que se puede perder en un tiempo determinado para un nivel de confianza y bajo circunstancias normales. Como bien lo define Jorion (2001):

“El VaR mide la mayor pérdida esperado en un horizonte de tiempo determinado, bajo condiciones de mercado normales y para un nivel de confianza. Por ejemplo, si un banco puede decir que el VaR diario para su cartera de mercado es un millón de dólares al 99% de confianza.. En otras palabras, bajo condiciones normales, solo en un por ciento de las ocasiones, los rendimientos de la cartera superaran el millón de dólares.”

De esta manera, matemáticamente podemos definir el VaR como la expectativa de pérdida dada una probabilidad acumulativa ζ en un horizonte temporal determinado;

$$F(Z(T) \leq VaR) = \zeta \quad (3.7)$$

Donde $F(\cdot)$ es una función de distribución de probabilidad acumulativa y $Z(T)$ representa las pérdidas dado un nivel de confianza determinado (siendo común que se establezca un valor de entre el 95% y el 99%).

Es importante destacar que el VaR debe entenderse dentro de un contexto, con respecto a un espacio temporal, a un nivel de confianza y a su metodología de cálculo. En concreto vamos a estudiar varias metodologías para calcular el VaR, cada una con sus ventajas y desventajas y que se adaptan mejor dependiendo del tipo y cantidad de datos de las que dispongamos.

3.4.1. Formas estrictas de estimar el VaR

El método tradicional univariante del VaR solo se centra en un solo activo financiero o en una cartera sin tener en cuenta la dependencia existente entre los activos⁶. Sin embargo si deseamos relajar un estudio más generalizado del VaR el cual modele explícitamente la estructura de correlación o de covarianza entre los activos que componen la cartera, debemos utilizar un enfoque multivariante.

De este modo conseguir medir el valor en riesgo de una cartera multivalente presenta no solo un reto teórico sino también computacional, ya que estudiar una cartera que a lo largo de su evolución ha sufrido numerosas permutaciones de activos puede ser extremadamente complejo. Por eso se han ido introduciendo numerosas metodologías que facilitan su cálculo, de las cuales en éste estudio nos fijaremos en cuatro de ellas:

a) Simulación Histórica

Usando una base de datos histórica podemos obtener una distribución de probabilidad empírica de las pérdidas de un activo o una cartera, es decir el método histórico reorganiza los datos ordenándolos por valor. A partir de ahí se puede estipular el valor en riesgo apropiado (extrayéndolo del cuantil correspondiente). Este método se puede afinar utilizando diversos métodos estadísticos (i.e.; *bootstrapping* si la muestra no es amplia, simulación ponderada históricamente, etc.)

Este método se basa en la idea de que los rendimientos de los activos y sus desviaciones de la media, van a seguir una distribución similar a aquella que ya han sufrido en el pasado, lo cual es un hipótesis bastante inconsistente en muchos casos.

Sin embargo es el método no paramétrico más utilizado para calcular el VaR, no sólo por su simpleza sino porque utiliza la distribución de pérdida empírica, asumiendo que toda la información sobre la distribución de pérdidas futuras viene reflejada por la distribución de pérdida histórica. Esta suposición permite estimar el VaR directamente de los datos históricos sin necesidad de estimar un modelo estadístico explícito que nos calcule la distribución de pérdidas.

Una de las bondades de la simulación histórica multivariante es que es muy parecida al caso univariante, en este caso simplemente hay que ponderar por los pesos que supone cada activo en la cartera.

⁶ El método tradicional asume que los activos son completamente independientes, considerando que las pérdidas son observables

$$R_p = \sum_{i=1}^N w_i R_i \quad (3.8)$$

Donde R_p representa el rendimiento compuesto de la cartera, y w_i la ponderación de cada uno de los activos de la cartera (R_i).

Posteriormente, el VaR del próximo periodo (VaR_{t+1}) es estimado por el cuantil $1-\alpha$ de la distribución histórica de los rendimientos de la cartera (R_p), y multiplicado por el valor actual de la cartera (\bar{P})

$$VaR_{t+1} = -Q_{1-\alpha}(R_p(t), R_p(t-1), \dots, R_p(1)) \bar{P} \quad (3.9)$$

Utilizando, de esta manera, n observaciones anteriores si quisiéramos calcular el VaR con un nivel de confianza del 99% sería tan sencillo como observar la centésima parte de los rendimientos más bajos ($n \times 0.01$) de la cartera y multiplicarlo por el valor actual de mercado de sí misma.

Obviamente lo más atractivo de este sistema es lo simple de implementar, ya que no hacen falta modelos estadísticos para estudiar su distribución de pérdidas. Si bien es cierto que la hipótesis de que los rendimientos pasados son una buena estimación de los rendimientos futuros, como veremos más adelante no siempre es posible construir modelos de dependencia entre las variables y este sistema nos permite de una manera simple calcular una aproximación del VaR.

b) Simulación histórica con pesos temporales

Con el fin de intentar reducir el efecto *fantasma*⁷, Boudokh (1998) propuso que en vez de ponderar todas las observaciones por igual ($1/N$) se deberían dar un peso diferente que variara con respecto a cómo de cerca se encontraban los datos del momento actual. Según el autor, debido a que los eventos recientes tienen un mayor impacto sobre los rendimientos actuales, se debería darle una ponderación menor a aquellas observaciones que se encontraran más alejadas del presente, y una mayor ponderación a aquellas que se encuentran más cerca.

De manera práctica estos pesos suelen ser exponencialmente decrecientes, teniendo la siguiente forma;

⁷ El efecto por el cual las variables más alejadas del momento actual tienen un menor efecto sobre los rendimientos presentes que las que se encuentran más recientes.

$$\begin{aligned}
w_1 &= \frac{1 - \lambda}{1 - \lambda^n} \\
w_2 &= \lambda w_1 \\
&\dots \\
w_N &= \lambda^{N-1} w_1 \\
\sum_{i=1}^i w_i &= 1
\end{aligned}
\tag{3.10}$$

Donde w_i representa las ponderaciones ajustadas con respecto a la *edad* de las observaciones, y la constante λ se encuentra en el intervalo $[0,1]$. Cuanto más se acerque a cero, menos relevancia tendrán las observaciones pasadas, y cuanto más se acerque a uno más se parecerá al VaR a través de simulación histórica.

Si bien es cierto que esta metodología tiene grandes beneficios, también tiene algunas inconsistencias en palabras Boudokh;

“Si usamos unas ponderaciones decrecientes nos permitirá captar el comportamiento cíclico de la volatilidad de los rendimientos. Sin embargo, a la hora de calcular el VaR de una cartera partir de su volatilidad condicional, deberemos asumir una condición de normalidad. Desgraciadamente, dicha hipótesis no se ve respaldada por los datos financieros. Habitualmente las muestras financieras exhiben colas anchas y asimetría, propiedades que son muy difíciles de tener en cuenta con este método”.

c) Estudio Paramétrico.

Esta metodología es muy común entre los gestores de *Hedge funds* ya que lo único que se necesita para calcular ciertos estadísticos (la media, la desviación típica, asimetría, etc.) de la cartera, asumir que la muestra sigue una distribución en particular y ya, el mismo modelo devuelve el riesgo que se está soportando.

Si bien es cierto que este modelo es extremadamente simple de aplicar, su mayor debilidad es que asume una distribución determinada de los rendimientos, lo cual lleva a que se produzcan enormes errores en la estimación. Del mismo modo también se asume que la desviación típica y media es consistente a lo largo del tiempo, por lo tanto no tienen en cuenta las tendencias de estas variables.

En este sentido podemos ver que las dos distribuciones más utilizadas para este método son la distribución normal y la t -student.

c.1) Distribución normal

Es sin duda la estimación paramétrica más utilizada en el cálculo de riesgo. Este método se basa en dos hipótesis principales;

- La cartera es lineal; el cambio en el valor de la cartera es linealmente dependiente de los activos que la componen. En otras palabras no se considera productos que posean un activo subyacente, es decir la cartera no puede contener derivados financieros.
- Los activos que componen la cartera, combinados, siguen una distribución normal.

Partiendo de estas hipótesis podemos concluir que los retornos de los componentes de la cartera siguen una distribución normal en su forma multivariante, con un vector de media μ y una matriz de covarianzas Σ .

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \dots \\ \mu_n \end{pmatrix} \quad y \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1\sigma_1 & \dots & \sigma_1\sigma_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_n\sigma_1 & \dots & \sigma_n\sigma_n \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

El vector μ captura la media de los rendimientos, mientras que la matriz de covarianzas capta las interacciones entre los diferentes retornos de los activos. Adicionalmente, si denominamos al valor de la cartera \bar{P} y al peso que tiene cada activo como el vector;

$$w = (w_1, w_1, \dots, w_n) \quad (3.12)$$

Entonces podemos calcular el retorno esperado (μ_p) y la varianza de la cartera (σ_p^2) de la siguiente manera;

$$\mu_p = w\mu \quad (3.13)$$

$$\sigma_p^2 = w\Sigma w' \quad (3.14)$$

Por lo cual bajo estas suposiciones el VaR se puede calcular a través de la siguiente ecuación;

$$VaR_\alpha(L) = \bar{P} (-\mu_p - \sigma_p^2 z_{1-\alpha}) \quad (3.15)$$

En la ecuación, se ha dado por supuesto que se conoce tanto el vector de los rendimientos medios como la matriz de covarianzas, sin embargo en la mayoría de ocasiones estos son desconocidos y tendremos que calcularlos utilizando un modelo explícito que se base en las observaciones disponibles.

La forma más simple de estimar estas variables es usando el vector de la media y la matriz de covarianza de la muestra disponible $(\hat{\mu}, \hat{\Sigma})$;

$$\hat{\mu} = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N r_i \quad (3.16)$$

$$\hat{\Sigma} = \frac{1}{N-1} (r_i - \hat{\mu})(r_j - \hat{\mu})' \quad (3.17)$$

c.2) Distribución *t*-student

Estudios empíricos⁸ han demostrado que los rendimientos financieros por lo general no siguen una distribución normal, por lo cual suponer una normalidad en su forma multivariante puede llegar a dar errores en la estimación del riesgo. Por lo tanto se propuso introducir la distribución *t*-student, ya que es capaz de lidiar con problemas de leptocurtosis y de colas anchas, haciendo que se ajuste más a la realidad.

De forma similar al caso anterior podemos formular el VaR bajo dicha distribución como;

$$VaR_{\alpha}(L) = \bar{P} \left(-\mu_p - \sqrt{\frac{v-2}{v}} \sigma_p^2 t_{1-\alpha, v} \right) \quad (3.18)$$

Donde al igual que en el caso anterior; $\mu_p = w\mu$ y $\sigma_p^2 = w\Sigma w'$

d) Simulación por Montecarlo

Este método es una herramienta analítica mucho más compleja, en la cual se intenta simular todos los posibles escenarios que pueden ocurrir y se estudia cuál es la probabilidad de que se produzca cada uno de ellos. Una vez diseñado y realizado las simulaciones se pueden extraer fácilmente (dado un nivel de confianza determinado) las máximas pérdidas que se esperan.

⁸ Giménez, A. P. (1992)

La idea básica de esta metodología es simular repetidamente a través de un proceso estocástico que rija el retorno de los activos. En particular se puede combinar éste método con el de simulación histórica. Para ello solamente hace falta calcular ciertos estadísticos de la muestra (la media, forma, asimetría, etc.) y partir de ahí a través de Montecarlo se realizan un número elevado de simulaciones, y extraes el valor en riesgo de éstas.

El artículo de Xu, C., & Chen, H. (2012) nos ofrece una proceso general para estimar el VaR a través de Montecarlo;

- 1.- Selecciona un modelo estocástico para la variable de interés.
- 2.- A continuación se construyen caminos ficticios o simulados para las variables estocásticas.
- 3.- Consecuentemente se repite la simulación suficientes veces como para que el nivel de confianza de la distribución sea suficientemente ajustado a los valores *reales* de la cartera.
- 4.- Posteriormente se infiere el VaR a través de esta distribución proxy.

La ventaja de Montecarlo es que te permite recrear infinidad de escenarios posibles, a los que se expone la cartera en cuestión, sin embargo, la clave y debilidad de este modelo es ponderar la probabilidad de cada uno de ellos. Si bien es cierto que presenta ventajas con respecto a la simulación histórica y paramétrica, ya que no tiene por qué asumir la normalidad de los rendimientos, ni que los datos históricos condicionen el futuro, también presenta una desventaja puesto que al intentar predecir la probabilidad de escenarios futuros puede infravalorar el impacto de una variable, lo que puede llevar a que se infra estime el riesgo.

3.4.2. Limitaciones del VaR

Por mucho que el VaR supusiera una revolución a la hora de medir el riesgo, hay que reconocer las limitaciones que presenta, muchas de ellas debido a la simplificación que se realiza al intentar modelizar la realidad.

La primera y más obvia es que el modelo sólo mide el riesgo en circunstancias normales, es decir, para un nivel de confianza de más del 95%. Por mucho que este porcentaje de una sensación de seguridad (ya que en la mayoría de casos no se

sobrepasará las expectativas), es en las colas de la curva donde encontramos casos extremos que no se habían previsto y que el VaR no entra a modelizar en absoluto.

Asimismo, los diferentes métodos de estimación no dan resultados consistentes entre sí, lo cual lleva a cuestionarse su representatividad. Es importante entender que cada método parte de sus hipótesis y es por ello que cuanto más se adecuen estas a la realidad más se ajustará el modelo. Por ello es imprescindible realizar un estudio previo de los datos disponibles y buscar realizar hipótesis realistas.

También hay que considerar que aunque es un modelo relativamente sencillo de calcular (con respecto a otros existentes) a medida que el tamaño de la cartera aumenta, el número de cálculos para estudiar sus correlaciones se incrementa exponencialmente aumentando así el coste y la comodidad del modelo.

Del mismo modo, esta metodología tiene sentido siempre y cuando la variable aleatoria siga una distribución normal o lognormal. Sin embargo, muchos estudios apuntan que en la práctica, los rendimientos suelen seguir distribuciones de colas anchas, causando que se infravalore el riesgo real.

Finalmente no cumple la propiedad aditiva, es decir las correlaciones entre los factores considerados también entra en los cálculos, y es por ello que el VaR no es aditivo. Por lo tanto el valor en riesgo de una cartera que contiene un activo A y otro B no es igual al VaR de A más el VaR de B.

Es por todo esto que hay autores como Bali (2007) que consideran que el VaR es una medida inadecuada sobre todo para el estudio de las colas de la distribución⁹. Por ello se pretendió desarrollar medidas de riesgo que cumplieran ciertas características y que ayudaran a mitigar las limitaciones del VaR, pero que mantuvieran las enormes ventajas que este sistema posee.

3.5. Medidas Coherentes del Riesgo

Uno de los mayores hitos en la medición del riesgo fue cuando Artzner (1997) propuso los primeros axiomas; las medidas de riesgo que obedecían tales axiomas se denominan medidas de riesgo coherentes. Los axiomas de coherencia fueron un punto de inflexión puesto que ya no es posible asignar arbitrariamente una función para la medición del

⁹ *"The results show that the normal VaR thresholds at various tails are quite inadequate"*

riesgo a menos que obedezca estos axiomas, por consecuencia, el VaR ya no se considera una medida adecuada del riesgo.

Sea X e Y las futuras pérdidas de dos carteras, entonces podemos definir las medidas coherentes $p(\cdot)$ como aquellas que siguen los siguientes axiomas:

- a) Monotonía: Si $X \leq Y$ entonces $p(X) \leq p(Y)$
- b) Homogeneidad positiva: $p(\lambda X) = \lambda p(X)$ para $\lambda > 0$
- c) Invariante por traslación: $p(X + a) = p(X) + a$, $a \in \mathbb{R}$
- d) Subaditividad : $p(X + Y) \leq p(X) + p(Y)$

Ahora proseguimos a explicar qué implica cada axioma. La monotonía nos dice que a mayor riesgo le asociamos una mayor pérdida; el axioma de homogeneidad positiva nos asegura que no se puede aumentar o disminuir el riesgo invirtiendo diferentes cantidad en los mismos valores, es decir, el riesgo surge de la acción en sí misma y no es una función de la cantidades adquirida.

El axioma que exige que sea invariante por traslación se debe a que cuando se incluye en un estudio un activo libre de riesgo, éste no tiene ninguna probabilidad de pérdida (por tanto se debe recuperar al menos la cantidad inicial invertida). La inversión inicial se resta ya que las medidas de riesgo tratan las pérdidas como cantidades positivas, mientras que las ganancias las consideran en negativo.

Finalmente, la subaditividad es el axioma más importante ya que asegura que se mida debidamente el riesgo de las carteras diversificadas. Lo que implica que invertir en una cartera compuesta por los activos X e Y es igual o menos arriesgado que invertir por separado en cualquiera de los activos¹⁰.

3.5.1. CVaR

Una de las medidas que se puede considerar como coherentes es el VaR condicional. De forma genérica podemos decir que el CVaR es una extensión del Valor en riesgo, y se puede definir como la cuantificación de las pérdidas esperadas que exceden al VaR, es decir proporciona la expectativa condicionada a que se encuentre por encima del límite fijado por el VaR.

¹⁰ VaR no es una coherente debido a que el riesgo medida no obedecer al axioma subaditividad, con lo cual puede resultar en un mayor riesgo inherentes a la diversificación.

Con el fin de entender este concepto con más detalle podemos utilizar el desarrollo matemático realizado por Rockafelles y Uryasev (2000), el cual nos dice que para un cierto $\alpha \in (0,1)$ se puede definir el CVaR como;

$$CVaR_{\alpha}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} z dF_X^{\alpha}(z) \quad (3.19)$$

$$F_X^{\alpha}(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z < VaR_{\alpha}(X) \\ \frac{F_X(z) - \alpha}{1 - \alpha} & \text{si } z \geq VaR_{\alpha}(X) \end{cases} \quad (3.20)$$

Para resolver esta integral es necesario diferenciar dos conceptos que asimismo nos ayudarán a medir el riesgo;

a) Déficit esperado (ES)

$$CVaR_{\alpha}^{+}(X) = E[X \mid X > VaR_{\alpha}(X)] \quad (3.21)$$

b) Valor Cola (TVaR)

$$CVaR_{\alpha}^{-}(X) = E[X \mid X \geq VaR_{\alpha}(X)] \quad (3.22)$$

Una vez hecha esta caracterización podemos definir el CVaR como:

$$CVaR_{\alpha}(X) = \begin{cases} \lambda_{\alpha}(X)VaR_{\alpha}(X) + (1 - \lambda_{\alpha}(X))CVaR_{\alpha}^{+}(X) & \text{si } F_X(VaR_{\alpha}(X)) < 1 \\ VaR_{\alpha}(X) & \text{si } F_X(VaR_{\alpha}(X)) = 1 \end{cases} \quad (3.23)$$

$$\lambda_{\alpha}(X) = \frac{F_X(VaR_{\alpha}(X)) - \alpha}{1 - \alpha} \quad (3.24)$$

De esta manera podemos ver como CVaR no es más que una media ponderada entre el Expected shortfall y el VaR. Sin embargo, cuando nos encontramos en una distribución continua (como es en nuestro estudio) hace que estos tres valores converjan a uno mismo (para distribuciones continuas el CVaR = ES = TVaR). La hipótesis de continuidad suele ser tan común en la literatura no se suele diferenciar estos dos conceptos y se utilizan como sinónimos.

Si los representamos gráficamente, podemos ver que es posible establecer una relación de orden donde $VaR \leq CVaR^{-} \leq CVaR \leq CVaR^{+}$. Asimismo podemos apreciar que el CVaR es continuo con respecto a α y convexo en X.

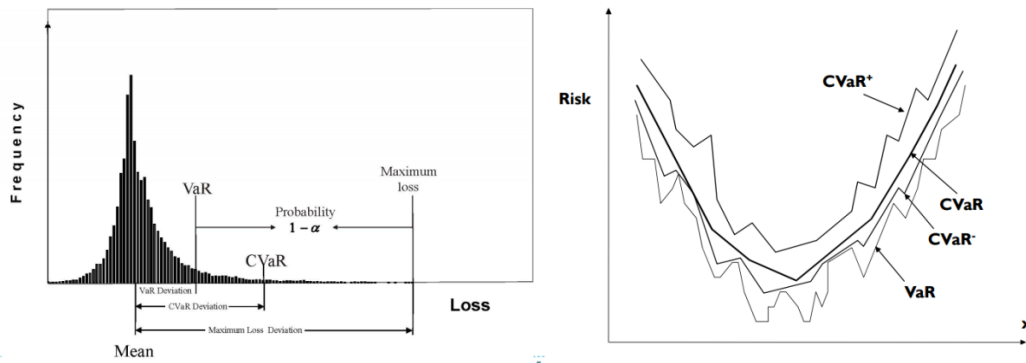


Figura 1 & Figura 2: relación entre las medidas coherentes obtenidas de la presentación de Uryasev, S. (2010).

El CVaR puede aplicar no solo a cualquier instrumento financiero, sino también a cualquier fuente subyacente de riesgo. Son numerosas las ventajas de las medidas coherentes (ES, CVaR, TVaR, etc.) presentan, pero lo más importante a la hora de medir el riesgo de una cartera es que estas medidas son subaditividad;

“Gracias al concepto de una medida coherente del riesgos podemos comparar dos variables y entender la raíz de todos los problemas de las paradojas del VaR: su falta de subaditividad” (Acerbi 2001)

4. Estimación del VaR a través de cópulas financieras

El término *cópula* viene del sustantivo latino que significa lazo o unión y eso es exactamente a lo que se dedican las cópulas financieras a ver las relación e interdependencia entre variables aleatorias.

La noción matemática de cópula fue introducida por Skalar en 1959 con el fin de descomponer una distribución de una función n -dimensional en dos partes, la distribución marginal de la funciones F_i y la cópula C , describiendo así la parte dependiente de distribución. En particular podemos definir una cópula como una función de distribución multivariante que se encuentra definida en el espacio cerrado n -dimensional $[0,1]^n$, tal que las distribuciones marginales son asimismo uniformes en el intervalo $[0,1]$.

Con el fin de formular correctamente una cópula seguiremos el desarrollo matemático realizado por Giacomini (2005);

Una cópula d -dimensional es una función $C : [0,1]^d \rightarrow [0,1]$ que satisface las siguientes propiedades para todo $u = (u_1, \dots, u_d)^T \in [0,1]^d$ y $j \in \{1, \dots, d\}$:

1. Si $u_j = 0$ entonces $C(u_1, \dots, u_d) = 0$
2. $C(1, \dots, 1, u_j, 1, \dots, 1) = u_j$
3. Para todo $v = (v_1, \dots, v_d)^T \in [0,1]^d$, $v_j \leq u_j$

$$V_c(u, v) \geq 0$$

Donde $V_c(u, v)$ es dado por

$$\sum_{i_1}^2 \dots \sum_{i_d}^2 (-1)^{i_1 + \dots + i_d} C(g_{1i_1}, \dots, g_{di_d}) \text{ y } g_{j1} = v_j \text{ y } g_{j2} = u_j \quad (4.1)$$

Aunque este desarrollo matemático puede parecer a primera vista complejo, en realidad lo que nos está diciendo es que las cópulas son funciones multivariantes, crecientes y no negativas.

Asimismo podemos concluir que “cada función de distribución puede ser descompuesta en sus distribuciones marginales y al menos una cópula, la cual será única si las distribuciones marginales y la multivariada son continuas.”¹¹

Es decir, si existe una función de distribución multivariante H con marginales $F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n)$, entonces existe una función de distribución conjunta multivariante;

$$H(x_1, x_2, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n)) \quad (4.2)$$

Como podemos ver, a pesar de ser una herramienta relativamente nueva en el mundo financiero, las cópulas son muy útiles a la hora de modelizar la estructura de dependencia entre varias variables aleatorias. A la hora de estudiar el comportamiento conjunto de varios instrumentos financieros, las cópulas son capaces de detectar una dependencia no lineal entre ellos, mientras que si por ejemplo solo utilizáramos las correlaciones sólo seríamos capaces de detectar las lineales. Por ello, las cópulas son un instrumento excelente para simular variables aleatorias ya que una vez definidas sus

¹¹ Torres, G. I., & Olarte, A. M. (2009)

distribuciones marginales, nos podemos limitar a simular variables uniformes cuya estructura de dependencia esté determinada por su cópula.

Como bien nos dice Bunde (2004) la cópula nos ayuda a separar el comportamiento marginal de los riesgos individuales y su estructura de dependencia de una variable aleatoria multivariante.

También hay que destacar que las cópulas presentan varias propiedades que hacen que el estudio financiero sea mucho más sencillo; son continuas, diferenciables e invariantes ante transformaciones estrictamente crecientes. Esta última propiedad nos dice que indiferentemente de si utilizamos los rendimientos aritméticos o logarítmicos la cópula va a ser la misma.

Existen multitud de cópulas pero las podemos agrupar en dos familias principales; las elípticas y las cópulas arquimedianas. Como veremos a continuación las primeras son simétricas, con distribuciones que tienen una densidad constante, y las segundas están hechas para situaciones caóticas.

Por último no existe consenso en cuanto a qué cópula utilizar en qué situación, y tampoco existe un consenso sobre cómo contrastar la precisión de dichas cópulas, de hecho en la mayoría de la literatura propone elegir arbitrariamente una cópula en base a las necesidades o motivaciones que el estudio persiga. En el estudio realizado por Kole en 2005 se propone utilizar las pruebas de bondad de ajuste, tales como Kolmogorov-Smirnov y Anderson-Darling, para comprobar la adecuación de la cópula.

4.1. Cópulas elípticas

La clase de las distribuciones elípticas nos proporciona una amplia fuente de distribuciones multivariantes que comparten muchas propiedades con las distribuciones multivariantes normales y permite modelizar dependencias extremas y no normales. Las distribuciones elípticas son sencillas de simular y por lo tanto, gracias al teorema postulado por Sklar, simular cópulas elípticas es también relativamente sencillo.

Estudiaremos las dos principales cópulas elípticas, debido a que son las más útiles para luego aplicar a un estudio financiero.

a) Cópula Gaussiana

Esta cópula es una de las más extendidas en el mundo financiero y su distribución es la más utilizada. Lo que representa es la estructura de dependencia para una distribución normal multivariante, lo que implica que las distribuciones normales con esta cópula forman distribuciones normales multivariante.

Sea Φ_{Σ} la función de distribución normal multivariante con media cero y matriz de correlaciones Σ y Φ^{-1} la inversa de la distribución normal univariante estándar y p el coeficiente de correlación, entonces podemos definir matemáticamente la cópula Gaussiana como;

$$C_{Gauss}(u_1, u_2, \dots, u_n; \Sigma) = \Phi_{\Sigma}[\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_2), \dots, \Phi^{-1}(u_n)]$$

$$= \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_1)} \dots \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_n)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-p^2}} \exp\left(\frac{2pst - s^2 - t^2}{2(1-p^2)}\right) ds dt \quad (4.4)$$

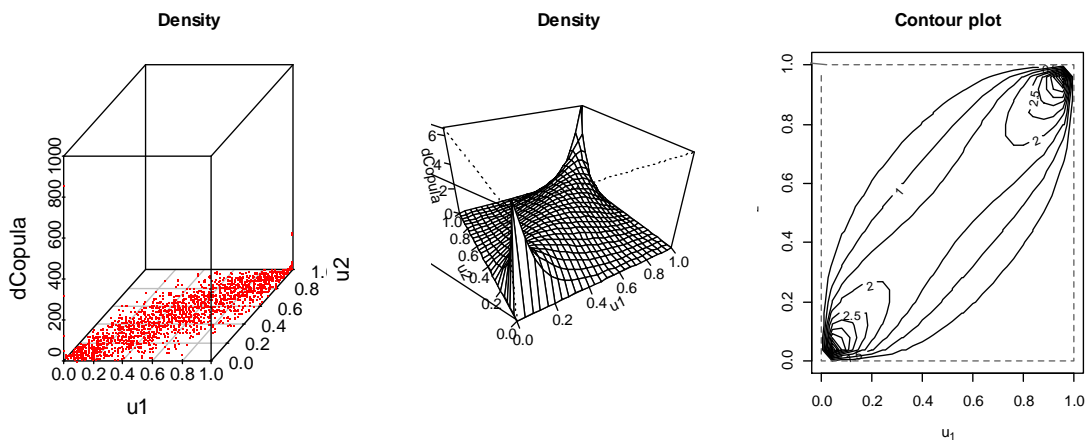


Figura 3, Figura 4 & Figura 5: Cópula Gaussiana (elaboración propia).

b) Cópula t-student

Esta cópula es muy similar a la gaussiana. La principal diferencia es que contiene la estructura de dependencia para la distribución t -student. De la misma manera que la anterior, si llamamos $T_{\Sigma, \nu}$ a la función de distribución t -student centrada, con matriz de correlación Σ , con ν grados de libertad, t_{ν}^{-1} representa la inversa a la función de distribución t -student, y p la correlación. Podemos definir esta cópula como;

$$C_{t-stu}(u_1, u_2, \dots, u_n; \Sigma) = T_{\Sigma, \nu}[t_{\nu}^{-1}(u_1), t_{\nu}^{-1}(u_2), \dots, t_{\nu}^{-1}(u_n)]$$

$$= \int_{-\infty}^{t_v^{-1}(u_1)} \dots \int_{-\infty}^{t_v^{-1}(u_n)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-p^2}} \left(1 + \frac{s^2 + t^2 - 2pst}{v(1-p^2)} \right)^{-\frac{v+2}{2}} ds dt \quad (4.5)$$

Es preciso puntualizar que a medida que aumentan los grados de libertad la probabilidad de eventos en las colas disminuye, por lo cual cuando v tiende a infinito la cópula t -student converge a una Gaussiana. Sin embargo con un grado de libertad bajo sí que difieren considerablemente los valores. La principal ventaja de esta cópula es que consigue estudiar la dependencia tanto en el centro como en las colas de la distribución, mientras que la Gaussiana sólo detecta la dependencia en el centro de la distribución.

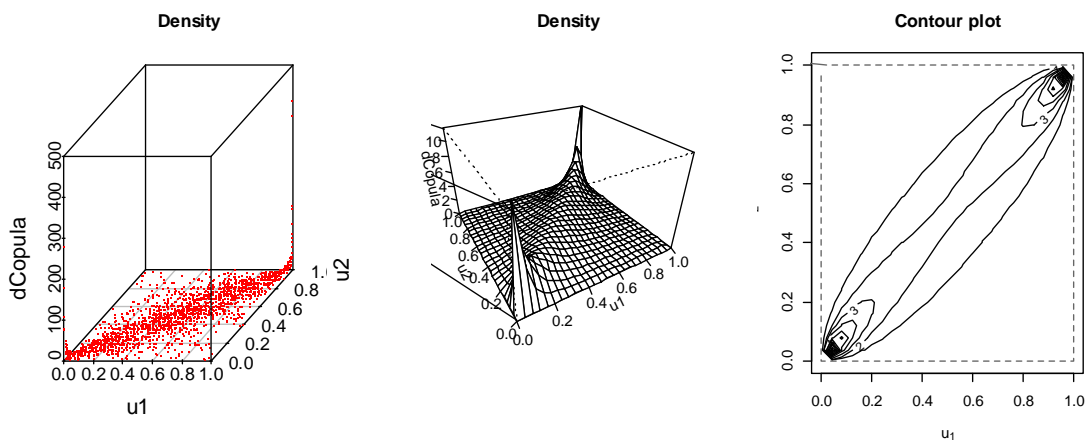


Figura 6, Figura 7 & Figura 8: Cópula t -student (elaboración propia).

4.2. Cópulas Arquimedianas

Existen multitud de cópulas que pertenecen a la clase arquimedianas, y gracias a esta gran variedad, permite recoger multitud de estructuras de dependencia que las cópulas elípticas no muestran (debido a que son simétricas). Asimismo se pueden construir con gran facilidad.

De esta manera, teniendo en cuenta que la mayoría de los rendimientos de los activos financieros no están normalmente distribuidos, estas cópulas nos permiten modelizar su estructura de dependencia sobre todo para situaciones extremas y no normales. Por ello, cada vez son más utilizadas en los modelos financieros.

Si quisiéramos describir matemáticamente las cópulas arquimedianas podemos seguir el desarrollo realizado por Nelsen (2006);

$$C(u_1, u_2, \dots, u_n; \theta) = \Psi^{-1}[\Psi(u_1; \theta) + \Psi(u_2; \theta) + \dots + \Psi(u_n; \theta); \theta]$$

Donde $\Psi[0,1] \times \Theta \rightarrow [0, \infty)$ es una función continua, monótonamente decreciente y convexa, de tal forma que

En concreto las cópulas Arquimedianas son un tipo de clase asociativas. La mayoría de ellas acepta una formulación explícita, algo que no es posible en las cópulas elípticas. En la práctica dichas cópulas permiten modelizar estructuras de dependencia arbitrarias en varias dimensiones asignando un único parámetro que gobierna la fuerza de la dependencia.

Si bien es cierto que existen multitud de cópulas Arquimedianas con diversos patrones nos vamos centrar en las tres cópulas Arquimedianas más comunes; Gumbel, Clayton, Frank.

a) Cópula de Gumbel

Fue propuesta por Gumbel en 1960 y se trata de una cópula asimétrica que considera como fórmula generadora;

$$\phi_{\alpha}(t) = (-\ln(t))^{\alpha} \quad (4.6)$$

La cópula de Gumbel exhibe una mayor dependencia en la cola superior, y su formulación matemática viene dada por;

$$C(u_1, \dots, u_d) = \exp\left\{-\left[(-\ln(u_1))^{\alpha} + \dots + (-\ln(u_d))^{\alpha}\right]^{1/\alpha}\right\} \quad (4.7)$$

Donde el parámetro α determina el grado de dependencia entre las variables. La independencia absoluta se da cuando $\alpha = 1$ mientras que la dependencia perfecta se obtiene a medida que α tiende a infinito. A modo ilustrativo si representáramos el caso bivalente de esta cópula se podría esbozar el siguiente gráfico¹²:

¹² El gráfico se ha obtenido tras realizar su programación en R.

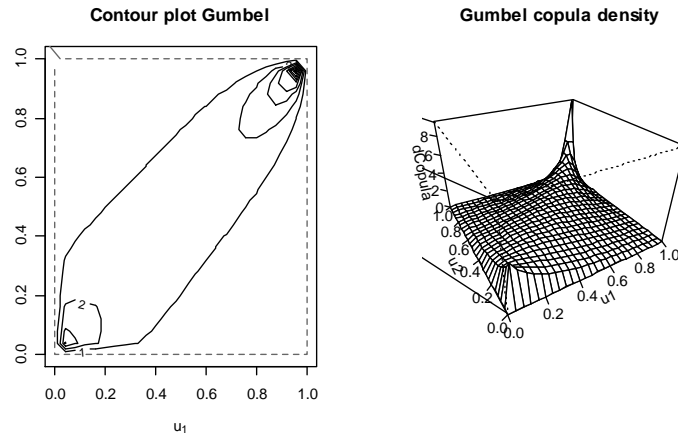


Figura 9, Figura 10 & Figura 11: Cópula Gumbel (elaboración propia).

b) Cópula de Clayton

La segunda cópula arquimediana que veremos es la cópula de Clayton la cual en cierto modo se parece a la anterior siendo también asimétrica, pero en este caso exhibe una mayor dependencia en la parte inferior de la cola. En este sentido, se define la función generadora como;

$$\phi_{\alpha}(t) = \frac{1}{\alpha}(t^{-\alpha} - 1) \quad (4.8)$$

Y la función de la cópula es;

$$C(u_1, \dots, u_d) = \max \left[(u_1^{-\alpha} + \dots + u_d^{-\alpha} - d + 1)^{-1/\alpha}, 0 \right] \quad (4.9)$$

Por lo cual a medidas que $\alpha \rightarrow \infty$ se obtiene una dependencia perfecta entre las variables en las colas, mientras que cuando $\alpha \rightarrow 0$ se muestra independencia en las colas. A modo ilustrativo si representamos gráficamente el caso bivalente de esta cópula entenderemos mejor dichos conceptos:

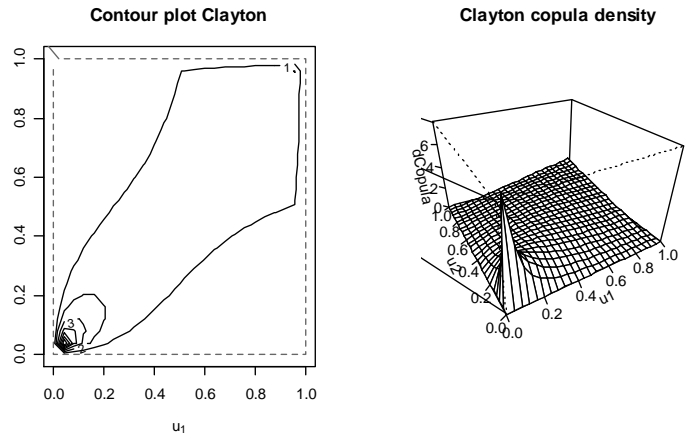


Figura 12 & Figura 13: Cópula Clayton elaboración propia.

c) Cópula de Frank

Por último en nuestro estudio utilizaremos la cópula de Frank, al contrario de los casos anteriores esta cópula asume la independencia de las colas, y pretende ver si las variables no poseen una estructura de dependencia. La función generadora se define como;

$$\phi_{\alpha}(t) = -\ln \frac{\exp(-\alpha t) - 1}{\exp(-\alpha) - 1} \quad (4.10)$$

Y la función de la cópula se desarrolla de la siguiente manera;

$$C(u, v) = -\frac{1}{\alpha} \ln \left(1 + \frac{\prod_{i=1}^m [\exp(-\alpha u_i) - 1]}{[\exp(-\alpha) - 1]^{d-1}} \right) \quad (4.11)$$

A modo ilustrativo representaremos gráficamente el caso bivariante de esta cópula:

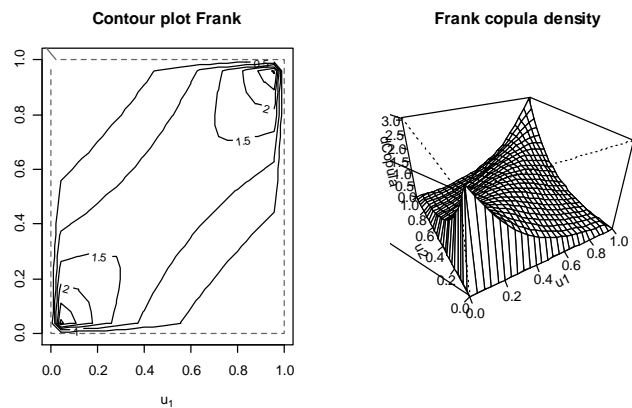


Figura 14 & Figura 15: Cópula Clayton (elaboración propia).

4.3 Distribución marginal de la cópula

La distribución marginal juega un papel crucial en las teorías de cópulas. Dado que la función de cópulas multivariante se definen en un espacio n dimensional $[0,1] \times \dots \times [0,1]$, las observaciones reales no pueden ser sustituidas directamente en la cópula. De esta manera las distribuciones marginales funcionan como un *proxy* entre la función de la cópula y las observaciones reales. En el caso de una cartera la distribución marginal no es más que la distribución de probabilidad de sus componentes.

Teóricamente, la teoría de cópulas no restringe la decisión sobre la distribución marginal y funciona bajo la hipótesis de cualquier distribución marginal. En este estudio, por motivos de simplificar la investigación seleccionaremos la distribución normal como distribución marginal.

5. Metodología de contrastación

En este apartado aplicaremos las diferentes metodologías para medir el riesgo que hemos visto a una cartera específica, no sólo con el fin de mostrar su aplicación práctica sino también para intentar cuantificar cuál de ellas se ajusta mejor y por qué. Para ello se consideró elegir valores españoles, no solo por la elevada volatilidad del mercado sino porque además al ser España uno de los países más afectados (superando las peores expectativas de los modelos de riesgos aplicados antes de Basilea III), es interesante realizar un estudio de qué modelo se ajusta mejor con el fin de prevenir que se repitan los mismos errores.

Así pues, lo que pretende este estudio es observar cómo de bien se ajustan los diferentes modelos de riesgo en el mercado español, así como ver el impacto que ha tenido la crisis financiera en el sistema financiero, estudiando aquellas pérdidas que ningún modelo era capaz de predecir. Con el fin de que este estudio sea el más representativo posible, se ha cogido una serie de 24 años que se subdividirá en dos (desde 1992 a 2009 y de 2009 a 2016), con el fin de ser capaces de diferenciar el cambio en las pérdidas esperadas durante las crisis financieras de 2008.

La cartera en cuestión estará formada por 4 de los valores más negociados del IBEX 35 y que al mismo tiempo son 6 de las empresas con mayor capitalización. De esta manera conseguimos evitar el riesgo de iliquidez de estos activos (evitando así horquillas y que el valor de mercado no se acerque tanto al valor real), asimismo conseguimos que sean empresas bastante representativas del mercado en general.

5.1. Backtesting

Antes de comenzar el estudio, se analiza la metodología que vamos a utilizar para contrastar los resultados obtenidos, y ver cómo de eficiente es el modelo; el *Backtesting*. Es el método más extendido para comprobar el VaR, ya que permite un análisis retrospectivo ayudando a ver con datos empíricos la precisión de la estimación del riesgo.

Este proceso se basa en las observaciones históricas para confirmar que el modelo estimado realiza un buen pronóstico del riesgo, pudiendo ver el número de veces que la cartera excede el riesgo previsto. En la práctica se pueden realizar dos tipos de aproximaciones para evaluar;

a) Evaluación *in sample*

Esta metodología realiza la comprobación del modelo utilizando todos los datos disponibles. Si bien es cierto que permite aumentar la muestra y ajustar mejor las estimaciones realizadas y comprobar cómo de bien se ajusta el modelo a la muestra disponible, no prueba la capacidad predictiva del modelo. En otras palabras, esta metodología no nos ayuda tanto a ver cómo de bien se anticipa un modelo ante cambios estructurales, sino más bien estudia si la serie sigue un patrón y una distribución determinada.

b) Evaluación *out sample*

La segunda aproximación que se puede realizar implica descartar parte de la muestra con el fin de probar la capacidad predictiva del modelo. Por ello se calcula el modelo sin tener en cuenta parte de la muestra, a modo de estimación a futuro, y luego se estudia cómo de preciso ha sido. Este es el método que utilizaremos en nuestro estudio pues disponemos de multitud de datos que nos permitirán ver no sólo que metodología se ajusta mejor sino además estudiar su capacidad de predicción.

Dependiendo de qué método utilicemos, la evolución *in sample* o *out sample*, los pasos que se van seguir son los siguientes

1. Se obtiene la muestra y se organiza por fecha.
2. Se subdivide la muestra en m intervalos:

$$[r_1, r_m], [r_2, r_{m+1}], \dots, [r_i, r_{m+i-1}], \dots, [r_{N-m}, r_{N-1}] \quad (5.1)$$

3. Aquí es donde divergen las dos metodologías;
 - a) Se calcula el VaR para el intervalo $[r_i, r_{m+i-1}]$ utilizando los valores hasta el periodo $m + i - 1$. (*in sample*)
 - b) Se calcula el VaR para el intervalo $[r_i, r_{m+i-1}]$ utilizando los valores hasta el periodo i . (*out sample*)

5.2. Estadísticos de contrastación

De esta manera y tal como hemos definido las diferentes medidas de riesgo, de forma muy pragmática podemos probar en qué modelo se observa proporción de pérdida superior a la predicha¹³, a través de los siguientes indicadores:

¹³ Esta proporción debe ser en promedio no mayor al nivel de significancia. Alonso, J. C., & Semaán, P. (2009)

a) El índice de Kupiec

Los estudios suelen a menudo fijarse en el índice Kupiec (1995) con el fin de estudiar cual es la capacidad predictiva de sus modelos. Este índice propone un test de la proporción de trasgresiones que se producen en un tiempo determinado, si dichas violaciones difieren mucho de las estimadas entonces la capacidad predictiva del riesgo subyacente es cuestionada. Para ello, bajo la hipótesis nula de que el modelo es correcto, se estudia si el índice está sigue asintóticamente una distribución chi-cuadrada.

Si bien es cierto que este índice nos permite ver si la cantidad de transgresiones estimadas en la series es significativamente diferente a las reales. Por ello, esta medida por sí misma no nos aporta mucha información, más allá de si la proporción de la cantidad que las pérdidas que exceden a las estimadas (dado un cierto nivel de confianza) se corresponden a las que se había estimado en el modelo. En ningún caso nos aporta un criterio de carácter cualitativo por el cual poder comparar los diferentes modelos.

b) Medidas del rendimiento de los modelos.

Si bien es cierto que el índice de Kupiec nos ayuda a ver si el modelo se está ajustando a lo que estaba prediciendo, en muchos casos interesará no sólo ver su actuación individual sino además ser capaces de compararlo con otros modelos existentes. A la hora de evaluar la actuación relativa de los diferentes modelos de VaR, nos encontramos dos objetivos conflictivos. Por un lado se espera que el VaR estimado sea elevado y por ello la diferencia entre el VaR y la pérdida real será pequeña en los días en que las pérdidas se produzca. Esto se debe a que si las pérdidas exceden a la estimación la empresa puede pasar por serios apuros económicos e incluso en última instancia producir su quiebra. Por otro lado, a la empresa tampoco le interesa sobrestimar el VaR, ya que al provisionarse para cubrirse de las pérdidas esperadas incurrirá en un coste de oportunidad.

Por ello discutiremos dos medidas principales; la primera se trata de la función de probabilidad cuadrática (QPS por sus siglas en inglés) como medida del primer objetivo y la segunda es el error medio cuadrático (RMSE por sus siglas en inglés) como medida del segundo objetivo.

b.1) La función de probabilidad (QPS)

En 1998 el autor J.A. Lopez introduce el concepto de la función de probabilidad cuadrática como medida del rendimiento de los modelos de riesgo. Matemáticamente se define como;

$$QPS = \frac{2}{n} \sum_{t=1}^n (C_t - p)^2 \quad (5.2)$$

Donde n representa el número de observaciones, p es la probabilidad esperada de trasgresiones, es decir pérdidas por encima de las estimadas por el VaR. C_t es una función e pérdida determinada que refleja el interés del usuario. En este estudio seguiremos la función binaria propuesta por el autor, la cual solo se preocupa de la frecuencia de las trasgresiones.

$$C_t = \begin{cases} 1 & L_t > VaR_t \\ 0 & L_t \leq VaR_t \end{cases} \quad (5.3)$$

Este indicador toma valores del rango entre [0,2], y cuanto más preciso sea el modelo que estima el riesgo más bajo será el valor que toma este indicador.

b.2) El error medio cuadrático (RMSE)

El error medio cuadrático es una medida común para calcular la diferencia entre el valor estimado y valor real. Si definimos el VaR estimado como VaR_t y las pérdidas actuales como L_t , entonces el RMSE se define matemáticamente como;

$$RMSE = \sqrt{E[(VaR_t - L_t)^2]} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum (VaR_t - L_t)^2} \quad (5.4)$$

En este estudio utilizaremos este indicador como medida de exceso de capital reservado durante los días de no-trasgresión. Por ello la t representa aquellos días que no se trasgredió el límite estimado. Al igual que el indicador anterior, cuanto menor sea este índice más se minimiza el dinero reservado a cubrirse de posibles eventualidades.

b.3) Indicador de optimización del riesgo (IOR)

Si continuamos dicho razonamiento, se puede apreciar que las mediadas anteriores son dos caras de la misma moneda, en donde en una se aprecia cuando el riesgo está sobrestimando y en la otra cuando está infraestimado. Por ello, en este estudio se

propone construir una nueva medida a la que denominaremos indicador de optimización del riesgo (IOR) que no será más que el ratio compuesto entre el RMSE y la inversa del QPS:

$$IOR = \frac{\sqrt{\frac{1}{n} \sum (VaR_t - L_t)^2}}{\frac{n/2}{\sum_{t=1}^n (C_t - p)^2}} \quad (5.5)$$

Gracias a este indicador tendremos una forma cómoda y sencilla para contrastar los diferentes resultados de los modelos aplicados, y no solo porque estos consigan cubrir la cartera, sino porque además optimicen el dinero ocioso.

Desde un punto de vista matemático este indicador nos muestra el error medio cuadrático del VaR entre el la inversa de la probabilidad cuadrática esperada. Por lo cual estamos comparando dos medidas de dispersión que cuanto más se minimicen, más se minimizará el IOR y tendremos un modelo de riesgo que optimiza las provisiones necesarias.

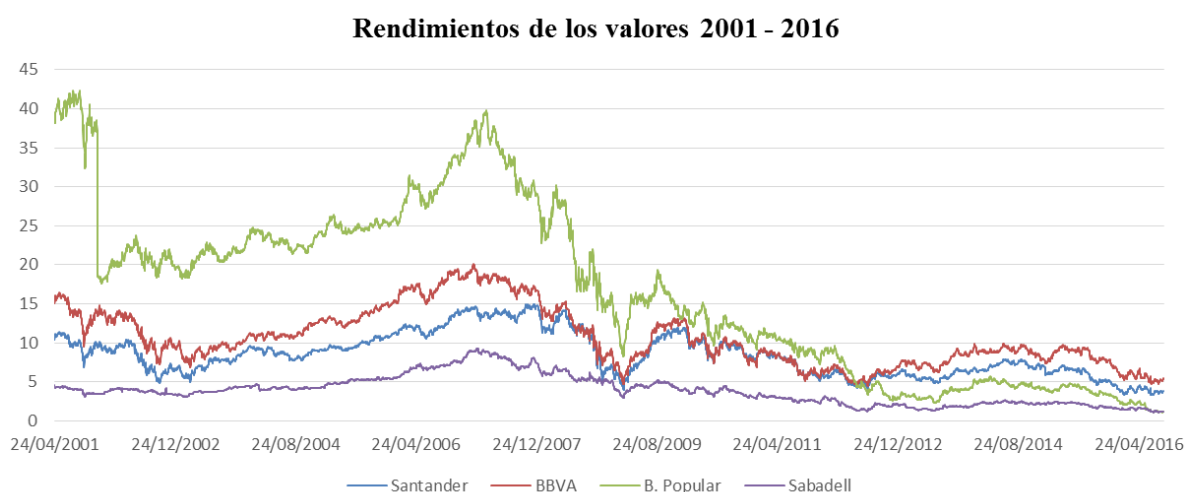
6. Descripción de la muestra

Para esta investigación se han elegido cuatro valores de un mismo sector y definido una cartera, a través de la cual se intentará medir el riesgo de mercado utilizando las metodologías descritas en los apartados anteriores.

Las cuatro acciones elegidas; Santander (SANT), Banco Bilbao Vizcaya Argentaria (BBVA), Banco Popular (POPU), Sabadell (SABD). La cuestión ahora es decidir qué proporción se le da a cada acción dentro de la cartera, si bien es cierto que muchos estudios discriminan entre carteras equiponderadas y ponderadas por la importancia que tengan en el mercado, este trabajo se va a limitar a estudiar una cartera equiponderada. La razón se debe a que se pretende hacer un estudio donde se vea el impacto que tiene la dependencia existente entre los activos financieros, por lo cual si utilizáramos una cartera ponderada por aquellas empresas que tuvieran más capitalización, no veríamos de forma tan clara el impacto que pueden tener las cópulas a la hora de medir el riesgo.

Para intentar conseguir resultados representativos se ha utilizado la serie del último precio de cotizaciones de dichas acciones de los últimos 15 años (empezando el 24/04/2001 y acabando 26/08/2016). A continuación podemos ver gráficos de los rendimientos aritméticos de estas acciones,

Figura 16: Precios diarios de cierre de los valores de la cartera



Podemos observar fácilmente que hasta el año 2001 - 2008 los valores estaban teniendo una tendencia positiva, exceptuando Banco Popular que en Noviembre de 2001 vió su acción desplomarse casi un 70%.

Si bien es cierto que observar la evolución historia de la variable nos ayuda a tener una visión amplia de la muestra, necesitamos transformar los precios a una medida relativa, y aunque los rendimientos aritméticos nos ayudan a tener una idea de la tendencia que siguen los valores financieros, para el estudio vamos a utilizar los rendimientos logarítmicos por las enormes ventajas que estos presentan.

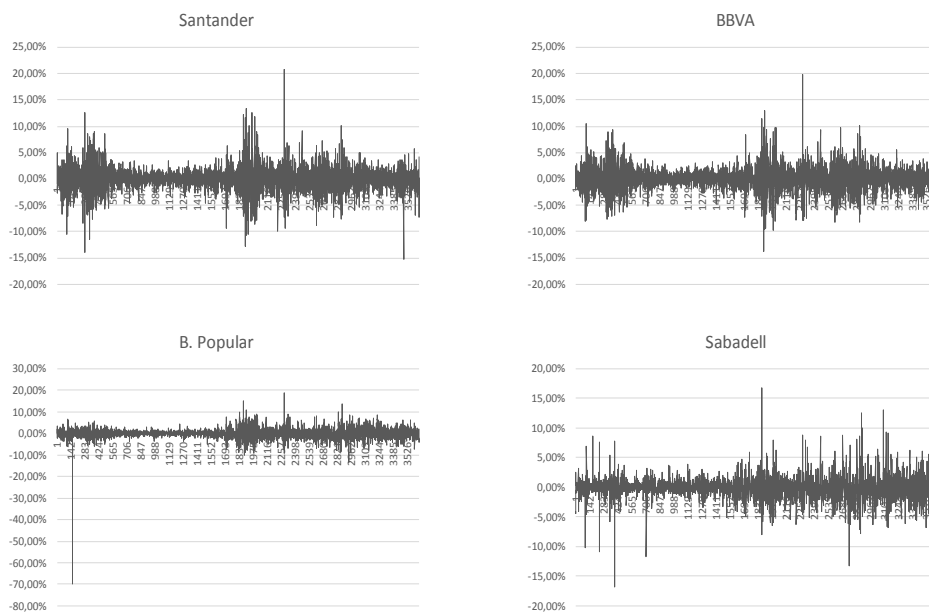
$$r_t = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) \quad (6.1)$$

En primer lugar los rendimientos logarítmicos nos ayudan a normalizar los datos, creando un marco comparable que permitirá una mejor relación analítica entre dos o más activos debido a que crea una medida comparable a pesar de que los datos procedan de series de precios desiguales.

Asimismo si imponemos la hipótesis de que los precios se distribuyen log-normalmente, entonces $\ln(1 + r_i)$ se distribuye de manera de manera normal. Esto nos puede ser muy útil a la hora de aplicar las cópulas.

De esta manera los valores de nuestra cartera presentan los siguientes rendimientos logarítmicos;

Figura 17: Rendimientos logarítmicos diarios de los valores de la cartera



En el gráfico 5.2 podemos ver como era de esperar que Sabadell y Banco Popular tengan las acciones que han tenido una mayor dispersión, aunque cabe mencionar que

todos los valores a partir del año 2001 han visto sus volatilidades aumentadas significativamente.

| Estadísticas | | | | |
|---------------------|------------------|-------------|-------------------|-----------------|
| | Santander | BBVA | B. Popular | Sabadell |
| Media | -0,02% | -0,02% | -0,06% | -0,03% |
| Mínimo | -15,19% | -13,67% | -69,93% | -16,79% |
| Máximo | 20,88% | 19,91% | 18,79% | 16,78% |
| Courtosis | 6,605 | 5,119 | 184,099 | 9,914 |
| Asimetría | 0,145 | 0,306 | -6,093 | 0,191 |

Tabla 1: Estadísticas de la muestra

Podemos apreciar que todos los valores poseen una media negativa en sus rendimientos y presentan un índice de asimetría relativamente bajo (a excepción de POPU que posee una distribución asimétrica con una cola larga hacia la izquierda). Del mismo modo podemos ver que todos presentan un problema de colas anchas ya que poseen una courtosis superior a tres.

Una vez que hemos estudiado los principales estadísticos de los rendimientos logarítmicos, es interesante ver si estos siguen una distribución normal. Para ello utilizaremos el estadístico más utilizado que es el Jarque –Bera;

$$JB = \frac{n}{6} \left((\widehat{asim})^2 + \frac{(curt - 3)^2}{4} \right) \quad (6.2)$$

Este indicador nos ayudará a confirmar o rechazar la hipótesis de normalidad de los de datos de las cuatro series.

| Prueba de Jarque-Bera | | | | | |
|------------------------------|-------------|-------------|--------------|-------------|--|
| | SANT | BBVA | POPU | SABD | |
| JB (Valor observado) | 9.619,47 | 4.972,57 | 3.682.240,94 | 23.372,80 | |
| JB (Valor crítico) | 5,99 | 5,99 | 5,99 | 5,99 | |
| GL | 2 | 2 | 2 | 2 | |
| valor-p (bilateral) | <0,0001 | <0,0001 | <0,0001 | <0,0001 | |
| alfa | 0,05 | 0,05 | 0,05 | 0,05 | |

Tabla 2: Resultados del test Jarque-Bera

Por lo cual a la hora de interpretar estos datos debemos rechazar la hipótesis nula que dice que las muestras siguen una distribución normal ya que el p-valor estimado es menor que el nivel de significación alfa (0.05).

6.1. Estableciendo agrupaciones dinámicas de la muestra

Con el fin de analizar la actuación de los diferentes modelos emplearemos el método conocido como *rolling window* utilizando una ‘ventana’ de 510 observaciones (2 años). La figura 15 lo muestra de forma más ilustrativa;

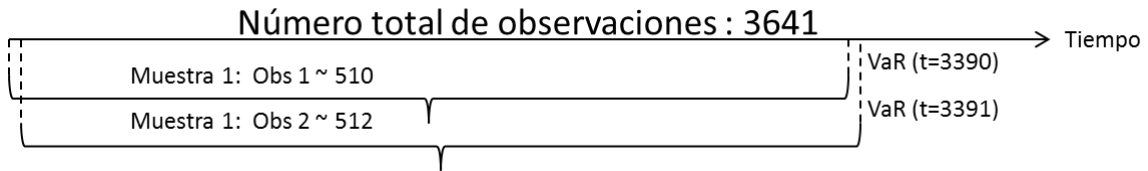


Figura 15: Rolling window (elaboración propia).

En este estudio en particular la muestra se compone de 3641 datos históricos comenzando el 25/04/2001 y acabando el 25/08/2016, los cuales dividiremos en dos, una compuesta por los primeros 3389 datos y otra de 252 datos que utilizaremos para hacer *backtesting*, de esta manera reservamos el último año de la muestra para ver qué modelo predice mejor el riesgo.

| | In sample | Out sample | Total |
|---------------|-------------------------|-------------------------|------------|
| Media | 25/04/2001 - 24/08/2015 | 25/08/2016 - 25/08/2016 | |
| Mínimo | $N_1 = 3389$ | $N_2 = 252$ | $N = 3641$ |

Tabla 3: División de la muestra

7. Metodología del estudio

La precisión de los modelos de estimación del riesgo depende en gran medida de sus propias características y a qué muestra se aplica. Para ello, es necesario utilizar modelos que se adecuen a las propiedades estadísticas de muestra. En este trabajo vamos a estudiar 12 modelos de los que podremos estimar el VaR, CVaR y el TVaR, es decir, en total veremos 36 medidas diferentes del riesgo e intentaremos ver cuál de ellas se ajusta mejor y por qué razón.

A continuación podremos ver en la tabla todas las diferentes maneras de medir el riesgo y la diferente nomenclatura que utilizaremos. Haremos además cuatro puntualizaciones en:

- a) La simulación histórica (SH) al igual que simulación histórica con pesos temporales (SHPT) se realizara acorde a la teoría descrita en la sección 3.3.1. Cabe destacar que seguiremos la recomendación de Chao Xu (2012) y fijaremos el peso λ en 0,94.
- b) Con el fin de intentar que el modelo sea más dinámico e intentar evitar la hipótesis de una volatilidad constante en el tiempo, utilizaremos la idea propuesta por Hull y White (1998) donde sugieren ajustar los rendimientos para que tengan en cuenta la volatilidad reciente. Por ejemplo; podemos estimar el VaR para el día T+1 y transformar los rendimientos históricos (r_t) en unos ponderados por la volatilidad (r_t^*), antes de aplicar el modelo de simulación histórica.

$$r_t^* = \frac{\sigma_{T+1}}{\sigma_t} r_t \quad t = 1, 2, \dots, T \quad (7.1)$$

Donde σ_t representa la volatilidad asociada a la muestra histórica y σ_{T+1} es la volatilidad estimada. De esta manera utilizaremos el modelo GARCH descrito en el apartado 2.1.

- c) En el caso de los modelos paramétricos y de Montecarlo usaremos las fórmulas descritas en la sección 3.3.1. En teoría las discrepancias entre estos dos métodos deberían ser ínfimas a medida que aumenta la muestra. Asimismo usaremos estos modelos como punto de partida para comparar la efectividad de las cópulas.
- d) Las cópulas las estimaremos siguiendo estos pasos;

1. Primero seleccionamos la cópula que queremos estimar (Gauss, t-student, Frank, etc.) según las características que deseemos modelar.
2. Seleccionamos una distribución marginal para cada uno de los componentes que conforman la cartera y estimamos los parámetros de la distribución marginal.
3. Transformamos los datos originales para que se encuentren en el dominio de la función de la cópula a través de las distribuciones marginales seleccionadas.
4. Ajustamos la cópula a los datos estocásticos y luego estudiamos los parámetros de la función.
5. Utilizamos la cópula para generar variables aleatorias de la función de probabilidad conjunta.
6. Invertimos las variables aleatoriamente generadas.
7. Calculamos la pérdida o beneficio generado por las variables simuladas
8. Repetimos el proceso suficientes veces como para que los datos estimados sean estadísticamente significativos
9. Inferimos las mediciones del riesgo a través de la distribución de los rendimientos simulados por el modelo.

Cabe resaltar que asumiremos, por simplificar el estudio, que las distribuciones marginales siguen una distribución normal.

- e) Por último, todos estos modelos se repetirán para el VaR, el CVar y el TVaR, según la metodología descrita en el apartado 3.4. con el fin de realizar una comparativa entre ellos también

8.- Resultado del estudio

Esta sección está dedicada a mostrar los resultados de los diversos modelos multivariantes utilizados para medir el VaR y descritos en las secciones anteriores. Todos los modelos han sido calculados con un nivel de confianza del 99% y estimados para un espacio temporal de un día. Para cada simulación a través del modelo de Montecarlo se han realizado 10.000 iteraciones. De esta manera los resultados obtenidos son los siguientes:

| Value at risk | | | | |
|--|--------------------------|-------------|------------|------------|
| Resumen de los resultados (x10 ⁻²) | | | | |
| | Nº transgresiones | RMSE | QPS | IOR |
| HS | 11 | 5,3101 | 4,9204 | 0,2613 |
| AWHS | 17 | 6,7522 | 7,3831 | 0,4985 |
| HS - GARCH | 4 | 9,4792 | 1,8955 | 0,1797 |
| Normal - MC | 11 | 5,0541 | 4,9207 | 0,2487 |
| T-studnet - MC | 19 | 4,4851 | 8,3076 | 0,3726 |
| Normal Cópula | 14 | 5,0411 | 6,2047 | 0,3128 |
| T - Cópula | 12 | 5,1153 | 5,3468 | 0,2735 |
| Clayton Cópula | 14 | 5,0732 | 6,1914 | 0,3141 |
| Gumbel Cópula | 11 | 5,2124 | 4,9200 | 0,2564 |
| Frank Cópula | 20 | 4,5347 | 8,7360 | 0,3962 |

Tabla 4: Resultados del estudio Valor en riesgo

| Conditional Value at risk | | | | |
|--|--------------------------|-------------|------------|------------|
| Resumen de los resultados (x10 ⁻²) | | | | |
| | Nº transgresiones | RMSE | QPS | IOR |
| HS | 2 | 7,5896 | 4,7162 | 0,3579 |
| AWHS | 17 | 7,1201 | 7,1201 | 0,5070 |
| HS - GARCH | 3 | 13,0886 | 1,7889 | 0,2341 |
| Normal - MC | 7 | 5,6566 | 4,6682 | 0,2641 |
| T-student - MC | 11 | 5,5971 | 7,9770 | 0,4465 |
| Normal Cópula | 9 | 5,5934 | 5,9551 | 0,3331 |
| T - Cópula | 7 | 5,7394 | 5,0993 | 0,2927 |
| Clayton Cópula | 8 | 5,5856 | 5,9428 | 0,3319 |
| Gumbel Cópula | 7 | 5,8068 | 4,6969 | 0,2727 |
| Frank Cópula | 13 | 4,8031 | 8,4254 | 0,4047 |

Tabla 5: Resultados del estudio Valor en riesgo condicional

Los resultados se pueden resumir de la siguiente manera:

- 1 Los métodos básicos para calcular el VaR (HS / Normal – MC / T-student – MC) no realizan un buen trabajo en estimar las pérdidas esperadas y como resultados el valor del estadístico QPS es relativamente mayor que en el resto de modelos. Uno de los hechos más sorprendentes de este estudio es que tras ajustar a la muestra una distribución t-student esta presenta menores estimaciones para el riesgo.

Desde un punto de vista estadístico, esto no tiene mucho sentido pues una de las cualidades de la t-student es justamente que presenta unas colas más anchas en su función de distribución. Sin embargo hay que tener en cuenta dos factores; el primero es que se trata de una simulación multivariante, por lo cual la distribución t-student suele acercarse al comportamiento de distribución normal, y segundo no es posible comparar directamente una variable normal con una variable t , ya que se introduce un parámetro adicional: los grados de libertad.

Por lo cual, estrictamente hablando la distribución t posee una curtosis superior pero existe la posibilidad (como es el caso) que al simularla a través de Montecarlo dé predicciones inferiores a la simulación normal.

- 2 La simulación histórica ajustada con el modelo GARCH muestra resultados prometedores, es con diferencia en la que menos transgresiones se han realizado. Aunque también es cierto que es asimismo la que posee un RMSE mayor (es decir la que obliga al tenedor de la cartera a provisionar una mayor cantidad mayor de capital), sin embargo si hacemos una comparativa común entre las dos cualidades a través del índice IOR, podemos ver que es la que posee un mejor comportamiento relativo.

Esto quiere decir que si bien es cierto que obliga a tener un gran cantidad de dinero ocioso, es la que mejor optimiza el ratio minimizando el riesgo y optimizando el dinero a provisionar. Por ello concluimos que este modelo es el que mejor se adapta ante cambio en el mercado, y consigue estimar con mayor capacidad las pérdidas esperadas.

- 3 Podemos ver que el caso de la simulación histórica ponderada, es el modelo que tienen un mayor número de trasgresiones, y no precisamente por que permita

que se provisiona menor cantidad que otros métodos. Es más es se trata del segundo modelo con un mayor RSE, y a pesar de ello no consigue evitar que se transgreda el modelo en diecisiete de ocasiones.

- 4 A la hora de comparar los métodos básicos multivariantes con los modelos basados en las cópulas, podemos ver mejoras significativas en estos últimos. En particular la cópula de Gumbel y la t student son las que mejor modelizan al interdependencia de los valores en cuestión, no solo por el hecho que nos minimiza el número de trasgresiones IOR, sino porque además son las que optimiza estadísticos AIC y BIC.
- 5 Por último, podemos realizar un análisis comparativo el VaR y el CVaR. Sin embargo hay que tener claro que son conceptos de riesgo muy diferentes, uno nos indica la probabilidad de que se exceden las pérdidas dado un nivel de confianza, y otro nos indica cual es la pérdida media de ese exceso. De esta manera, lo que se compara es a nivel conceptual, es dirimir que optimiza más la medición del riesgo, el provisionarse considerando el número de veces que las pérdidas superan un cierto nivel de confianza, o provisionarse con la pérdida media esperada que produce cuando el resultado empírico supera al predicho.

Si hacemos una comparativa a través del índice IOR podemos ver que con diferencia el VaR supera las cualidades del CVaR, en otras palabras, el VaR permite optimizar nuestro riesgo, minimizando el dinero a provisionar, al mismo tiempo que minimiza el error cometido por infravalorar el riesgo.

9.- Conclusiones

El objetivo de este estudio es examinar la capacidad productiva de varios modelos multivariantes para el VaR y el CvaR.

En particular, seleccionamos una cartera compuesta por 5 valores y le aplicamos los modelos de simulación histórica, simulación histórica ponderada en el tiempo, simulación histórica combinada con el método GARCH, método de Montecarlo con distribuciones normales y t-student y finalmente, la aplicación de cópulas.

De nuestro estudio se puede concluir lo siguiente:

- Primero, los resultados del modelo de Montecarlo tanto en el caso de t-student como en el caso de una distribución normal son los peores en relación con los estadísticos RMSE, QPS e IOR.
- Segundo, la aplicación de cópulas mejora significativamente la calidad de las estimaciones, ya que nos permite modelizar las estructuras de dependencia entre las variables. En concreto, ofrecen resultados prometedores las cópulas t student y Gumbel, haciéndonos ver que sí existe una fuerte correlación en las colas de la distribución de las variables.
- Tercero, nos encontramos que el mejor método predictivo es la simulación histórica junto con un modelo GARCH. La enorme capacidad que tiene este modelo de adaptarse a los recientes cambios, junto con las bondades que posee la simulación histórica hacen que este método sea el que menos trasgresiones tiene. Además, tiene un menor IOR.

Nuestro objetivo secundario era ofrecer una guía práctica para estimar el VaR y el CVaR de una cartera con las diferentes metodologías existentes. En este sentido la comparación empírica realizada en el apartado anterior nos ayuda a ver las cualidades y defectos de cada modelo.

Podemos concluir que este estudio puede ser útil como punto de partida para estudiar los posibles problemas derivados de una mala estimación del riesgo.

10.- Bibliografía

Acerbi, C., Nordio, C., & Sirtori, C. (2001). Expected shortfall as a tool for financial risk management. arXiv preprint cond-mat/0102304.

Alonso, J. C., & Semaán, P. (2009). Cálculo del valor en riesgo y pérdida esperada mediante R: Empleando modelos con volatilidad constante. *Apuntes de Economía*, 21, 1-15.

Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J. M., & Heath, D. (1997). A characterization of measures of risk. *Cornell University Operations Research and Industrial Engineering*.

Bali, T. G. (2007). A generalized extreme value approach to financial risk measurement. *Journal of Money, Credit and Banking*, 39(7), 1613-1649

Bernoulli, D. Exposition of a new theory of measurement of risk. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*.

Boudoukh, J., Richardson, M., & Whitelaw, R. (1998). The best of both worlds. *Risk*, 11(5), 64-67.

Dougherty, C. (2007). *Introduction to econometrics*. Oxford university press, USA

Fisher, I. (1906). *The nature of capital and income*. The Macmillan Company.

Giacomini, E. (2005). *Risk Management with Copulae*. Institute for Statistics and Econometrics.

Giménez, A. P. (1992). Distribución de los rendimientos de acciones. *Estadística española*, (131), 431-454

Graham, B., & Dodd, D. L. (1934). *Security analysis: principles and technique*. McGraw-Hill.

Gumbel, E. J. (1960). Bivariate exponential distributions. *Journal of the American Statistical Association*, 55(292), 698-707.

Hull, J. (2015). *Risk Management and Financial Institutions*,+ Web Site (Vol. 733). John Wiley & Sons.

Hull, J., & White, A. (1998). Incorporating volatility updating into the historical simulation method for value-at-risk. *Journal of Risk*, 1(1), 5-19.

- Knight, F. H. (1921). Risk, uncertainty and profit. New York: Hart, Schaffner and Marx.
- Kole, E., Koedijk, K., & Verbeek, M. (2005). Testing copulas to model financial dependence. Department of Financial Management, RSM Erasmus University, Rotterdam, The Netherlands.
- Kupiec, P. H. (1995). Techniques for verifying the accuracy of risk measurement models. *The J. of Derivatives*, 3(2).
- Lee, R. W. (2005). Implied volatility: Statics, dynamics, and probabilistic interpretation. In *Recent Advances in Applied Probability* (pp. 241-268). Springer US.
- Lopez, J. A. (1998). Methods for evaluating value-at-risk estimates. *Economic Policy Review*, 4(3).
- Markowitz, H. (1952). Portfolio selection. *The Journal of Finance*, 7(1), 77-91
- Ntwiga, D. B., Maritz, J., & Strategists, C. F. (2004). Copulas in Finance. African Institute for Mathematical Sciences.
- Parasuraman, N. R., & Ramudu, P. J. (2011). Historical And Implied Volatility: An Investigation Into Nse Nifty Futures And Options. *Australian Journal Of Business And Management Research*, 1(7), 112
- Philippe, J. (2001). Value at risk. McGraw Hill, USA, 36.
- Philippe, J. (2001). Value at risk: the new benchmark for managing financial risk. NY: McGraw-Hill Professional.
- Poon, S. H. (2008). Historical volatility models. Retrieved 29/9/2010, 2010. Disponible en: www.php.portals.mbs.ac.uk/Portals/49/docs/spoon/HisVol.pdf. Pdf
- Rockafellar, R. T., & Uryasev, S. (2000). Optimization of conditional value-at-risk. *Journal of risk*, 2, 21-42.
- Rubinstein, M. (2002). Markowitz's "Portfolio Selection": A Fifty- Year Retrospective. *The Journal of finance*, 57(3), 1041-1045.
- Sharpe, W. F. (1964). Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk. *The journal of finance*, 19(3), 425-442.

Sharpe, W. F. (1994). The sharpe ratio. *The journal of portfolio management*, 21(1), 49-58.

Sklar, M. (1959). *Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges*. Université Paris 8.

Taleb, N. N. (2007). *The black swan: The impact of the highly improbable*. Random house.

Tobin, J. (1958). Liquidity preference as behavior towards risk. *The review of economic studies*, 25(2), 65-86.

Torres, G. I., & Olarte, A. M. (2009). Valor en riesgo desde un enfoque de cópulas. *Revista Ad-Minister*, 15, 113-136.

Uryasev, S., Sarykalin, S., Serraino, G., & Kalinchenko, K. (2010). VaR vs CVaR in risk management and optimization. In CARISMA conference.

Xu, C., & Chen, H. (2012). *Measuring Portfolio Value at Risk*. Lund University.

11.- Anexos

11.1. Principales tipos de volatilidad¹

a) Volatilidad Histórica

Muestra que desviación ha sufrido una variable con anterioridad, en otras palabras, se basa en las perturbaciones históricas de un instrumento financiero. Su rendimiento se calcula mediante la siguiente formula:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{t=1}^n (r_t - \bar{r})^2} \quad (10.1)$$

Siendo r_t el rendimiento de la variable, P_t el precio de cierre en t , P_{t-1} el precio anterior a t y T el número total de análisis. Mediante la siguiente expresión se puede obtener la volatilidad histórica de los rendimientos de la variable X :

b) Volatilidad Implícita

Este término se refiere a los precios negociados por los partes económicas y financieras. En este caso se incorporan proyecciones efectuadas de los mercados sobre su futura volatilidad. A estas desviaciones se las puede conocer mediante modelos de valoración usando los precios de derivados, como ejemplo podríamos tomar el modelo Black-Scholes. Por este motivo, la precisión de la desviación será correlativa a la especificación que se haya realizado en el modelo de valoración.

c) Volatilidad Prevista

Esta volatilidad es la que ciertos modelos pueden predecir debido a la utilización de métodos de pronóstico econométricos. Esta desviación puede contrastar con la histórica o la del mismo mercado. Al igual que la volatilidad implícita, ambas intentan predecir las desviaciones de un activo financiero en el futuro.

11.2. Resultados del modelo GARCH

¹ Tania Nadiezhda (2010)

Modelo 2: GARCH, usando las observaciones 2001-04-26:2014-04-17 (T = 3386)

Variable dependiente: **Santander**

Desviaciones típicas basadas en el Hessiano

| | <i>Coefficiente</i> | <i>Desv. Típica</i> | <i>z</i> | <i>Valor p</i> | |
|------------------------|---------------------|---------------------|-----------------------|----------------|-----|
| const | 0.000640562 | 0.000255308 | 2.5090 | 0.0121 | ** |
| alpha(0) | 2.58765e-06 | 7.11373e-07 | 3.6375 | 0.0003 | *** |
| alpha(1) | 0.089125 | 0.00905079 | 9.8472 | <0.0001 | *** |
| beta(1) | 0.909955 | 0.00846221 | 107.5316 | <0.0001 | *** |
| Media de la vble. dep. | -0.000095 | | D.T. de la vble. dep. | 0.022837 | |
| Log-verosimilitud | 8698.327 | | Criterio de Akaike | -17386.65 | |
| Criterio de Schwarz | -17356.02 | | Crit. de Hannan-Quinn | -17375.70 | |

Varianza incondicional del error = 0.00281198

Modelo 5: GARCH, usando las observaciones 2001-04-26:2014-04-17 (T = 3386)

Variable dependiente: **BBVA**

Desviaciones típicas basadas en el Hessiano

| | <i>Coefficiente</i> | <i>Desv. Típica</i> | <i>z</i> | <i>Valor p</i> | |
|------------------------|---------------------|---------------------|-----------------------|----------------|-----|
| const | 0.000571207 | 0.000254862 | 2.2412 | 0.0250 | ** |
| alpha(0) | 2.87553e-06 | 8.08893e-07 | 3.5549 | 0.0004 | *** |
| alpha(1) | 0.0944788 | 0.0102309 | 9.2346 | <0.0001 | *** |
| beta(1) | 0.903092 | 0.00995426 | 90.7242 | <0.0001 | *** |
| Media de la vble. dep. | -0.000150 | | D.T. de la vble. dep. | 0.022196 | |
| Log-verosimilitud | 8740.283 | | Criterio de Akaike | -17470.57 | |
| Criterio de Schwarz | -17439.93 | | Crit. de Hannan-Quinn | -17459.61 | |

Varianza incondicional del error = 0.00118373

Modelo 3: GARCH, usando las observaciones 2001-04-26:2014-04-16 (T = 3385)

Variable dependiente: **BPopular**

Desviaciones típicas basadas en el Hessiano

| | <i>Coefficiente</i> | <i>Desv. Típica</i> | <i>z</i> | <i>Valor p</i> | |
|------------------------|---------------------|-----------------------|-----------|----------------|-----|
| const | 0.000267522 | 0.000230284 | 1.1617 | 0.2454 | |
| alpha(0) | 1.22996e-06 | 3.79903e-07 | 3.2376 | 0.0012 | *** |
| alpha(1) | 0.0724238 | 0.009083 | 7.9736 | <0.0001 | *** |
| beta(1) | 0.927576 | 0.00854817 | 108.5117 | <0.0001 | *** |
| Media de la vble. dep. | -0.000442 | D.T. de la vble. dep. | 0.020948 | | |
| Log-verosimilitud | 8934.804 | Criterio de Akaike | -17859.61 | | |
| Criterio de Schwarz | -17828.97 | Crit. de Hannan-Quinn | -17848.66 | | |

Varianza incondicional del error = 413640

Modelo 4: GARCH, usando las observaciones 2001-04-26:2014-04-17 (T = 3386)

Variable dependiente: **Sabadell**

Desviaciones típicas basadas en el Hessiano

| | <i>Coefficiente</i> | <i>Desv. Típica</i> | <i>z</i> | <i>Valor p</i> | |
|------------------------|---------------------|-----------------------|-----------|----------------|-----|
| const | 0.000469835 | 0.000237913 | 1.9748 | 0.0483 | ** |
| alpha(0) | 1.03947e-05 | 1.54249e-06 | 6.7389 | <0.0001 | *** |
| alpha(1) | 0.155304 | 0.0174191 | 8.9158 | <0.0001 | *** |
| beta(1) | 0.834503 | 0.0151364 | 55.1323 | <0.0001 | *** |
| Media de la vble. dep. | -0.000194 | D.T. de la vble. dep. | 0.017873 | | |
| Log-verosimilitud | 9190.912 | Criterio de Akaike | -18371.82 | | |
| Criterio de Schwarz | -18341.19 | Crit. de Hannan-Quinn | -18360.87 | | |

Varianza incondicional del error = 0.00101978

11.3. Resultados gráficos del estudio

Figura 18: Estimación del VaR y CVaR. Simulación Histórica.

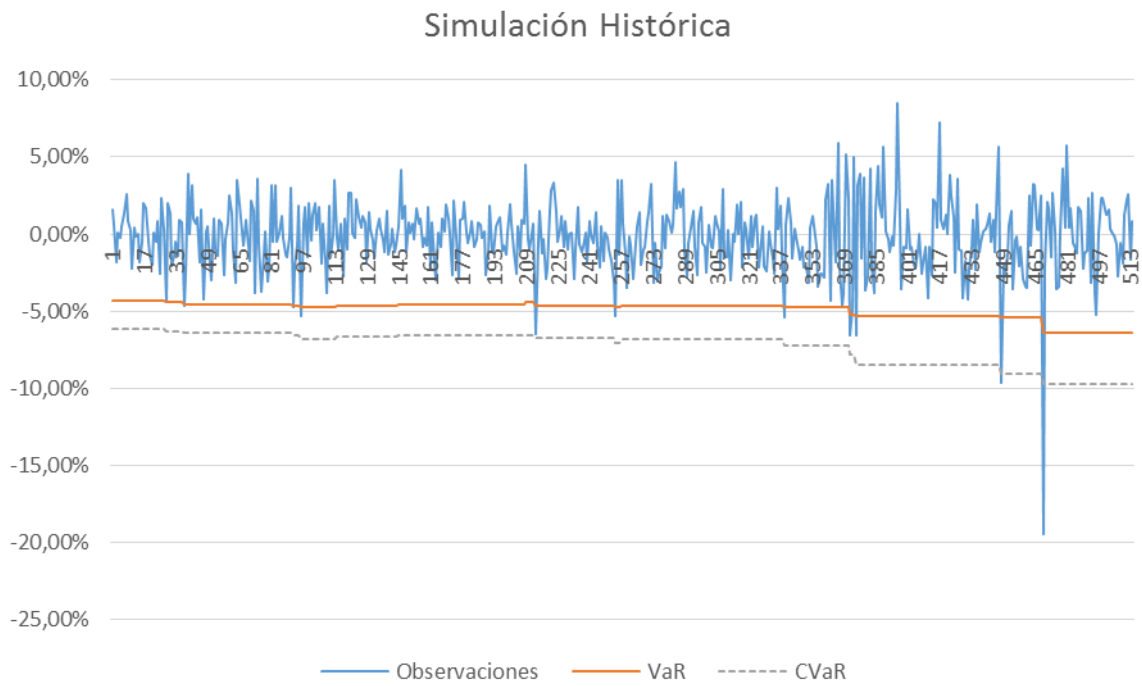


Figura 19: Estimación del VaR y CVaR. Simulación Histórica con ponderaciones.

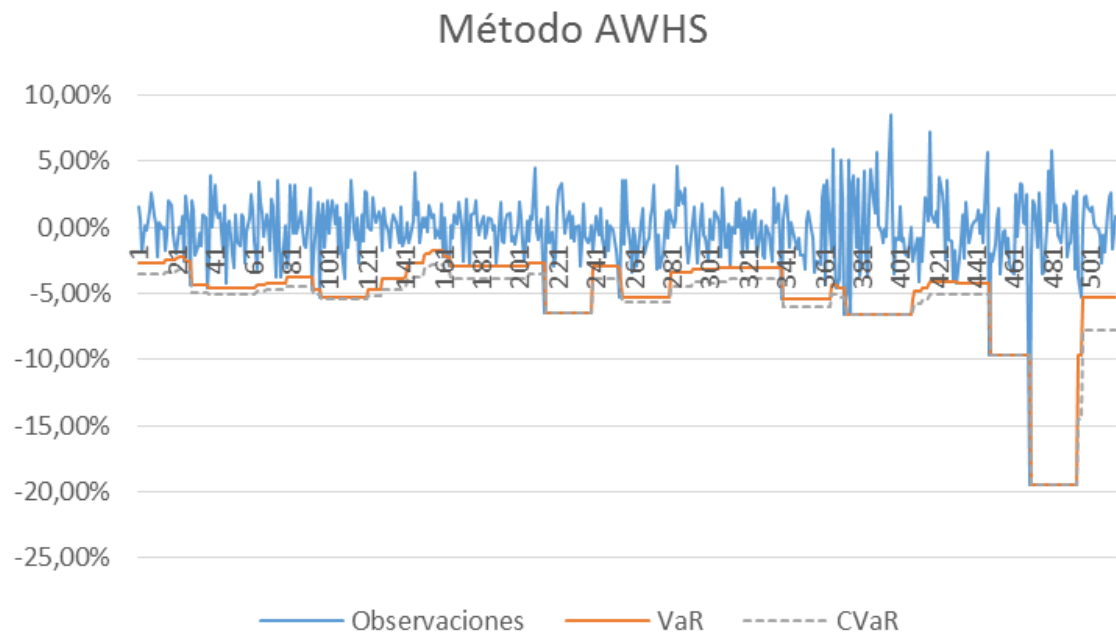


Figura 20: Estimación del VaR y CVaR. Montecarlo Distribución Normal.

Simulación paramétrica - Distribución Normal

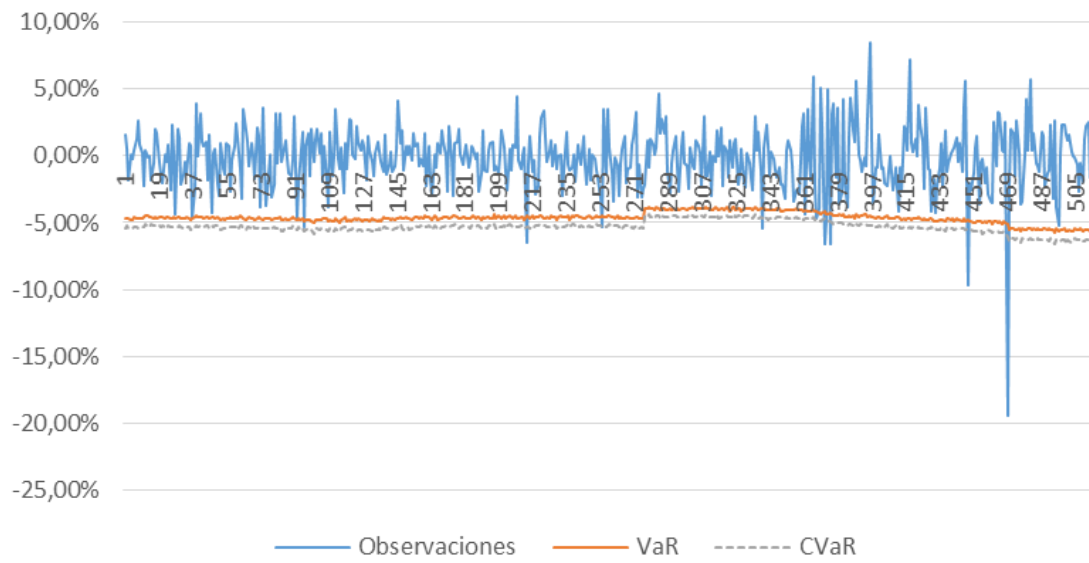


Figura 21: Estimación del VaR y CVaR. Montecarlo Distribución t-student.

Simulación paramétrica - Distribución t -student

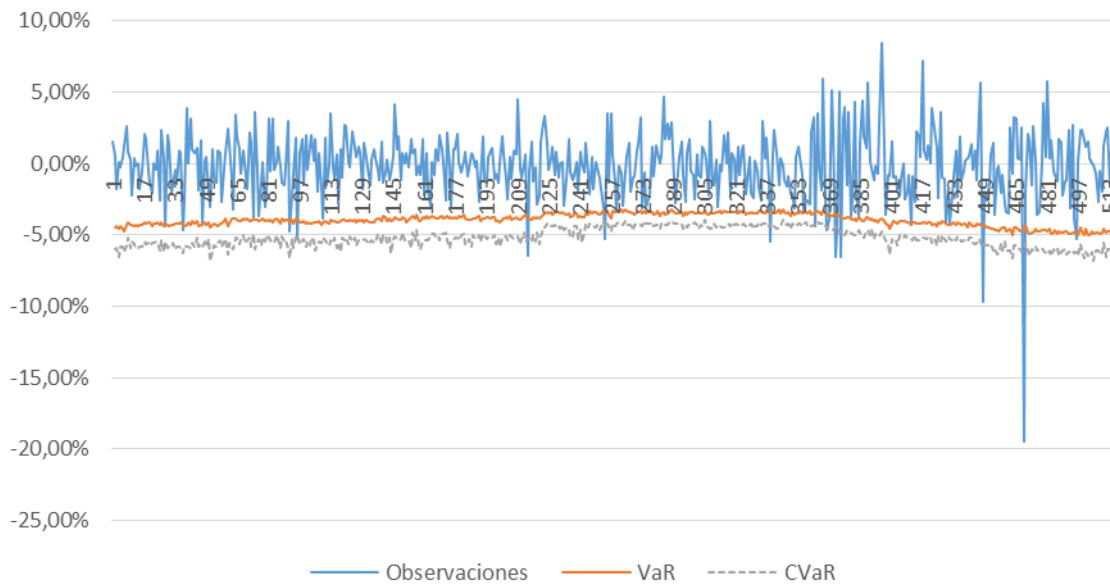


Figura 22: Estimación del VaR y CVaR. Simulación Histórica con GARCH

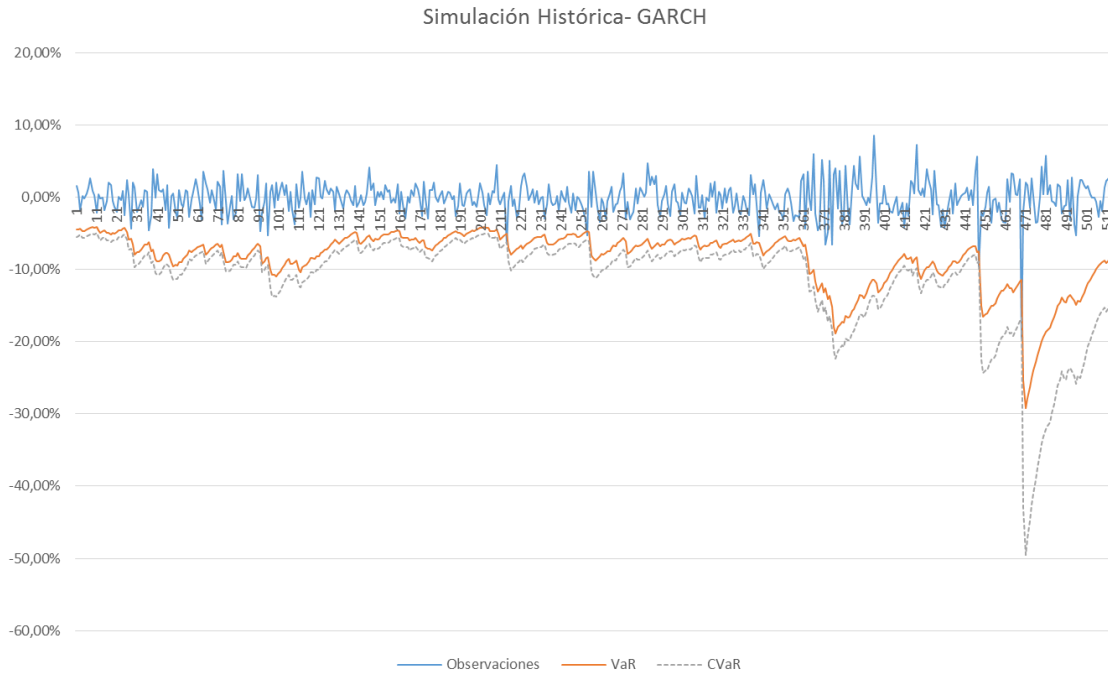


Figura 23: Estimación del VaR y CVaR. Cópula Normal

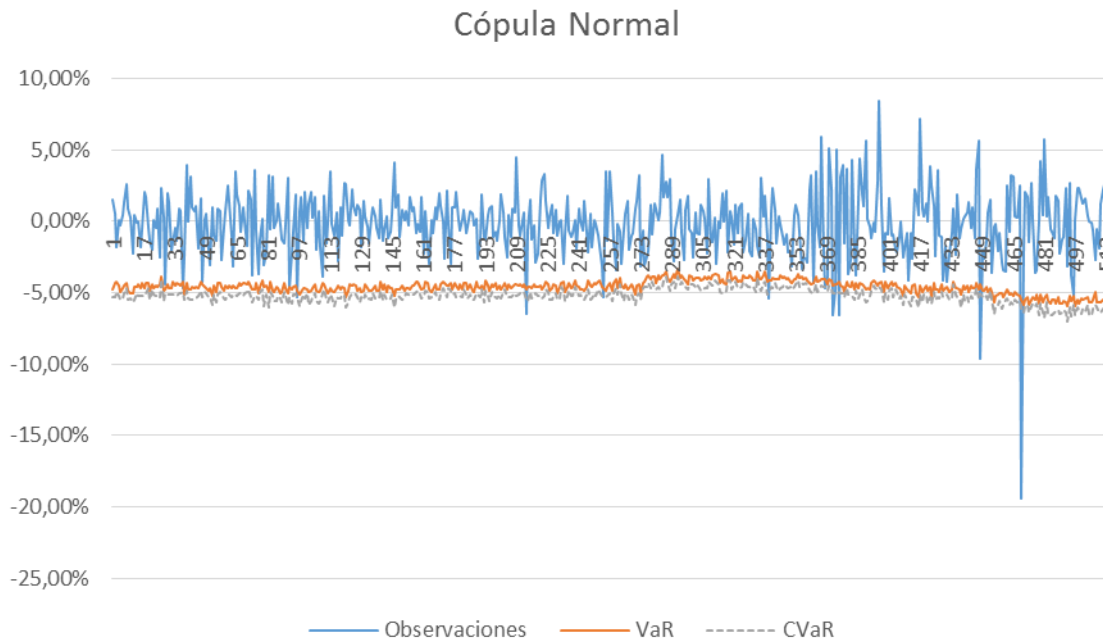


Figura 24: Estimación del VaR y CVaR. Cópula t-student

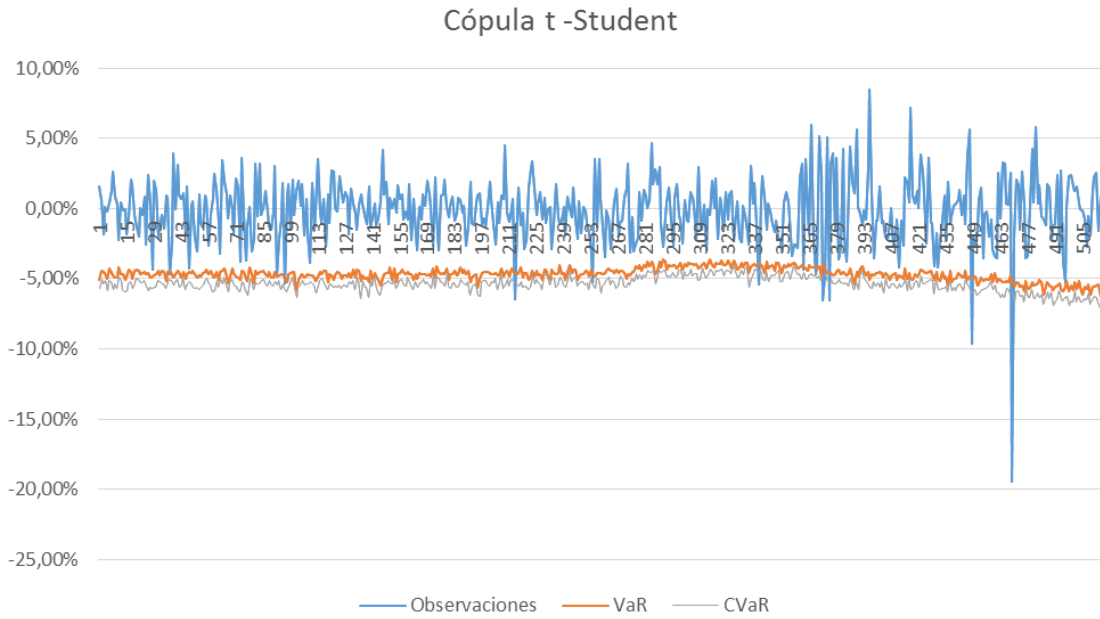


Figura 25: Estimación del VaR y CVaR. Cópula Clayton

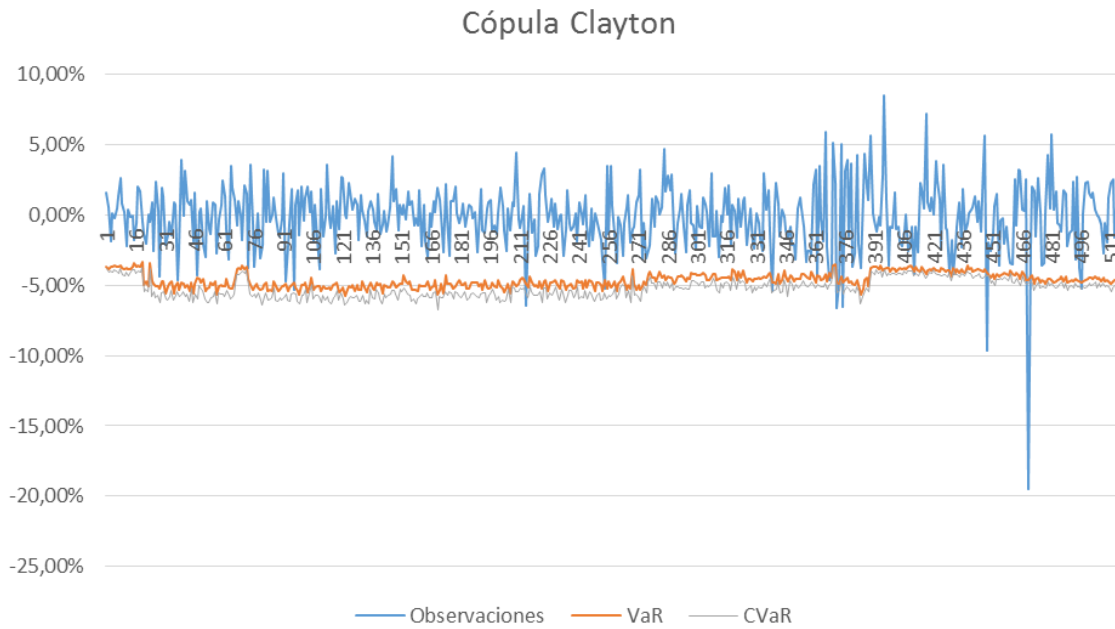


Figura 26: Estimación del VaR y CVaR. Cópula Gumbel

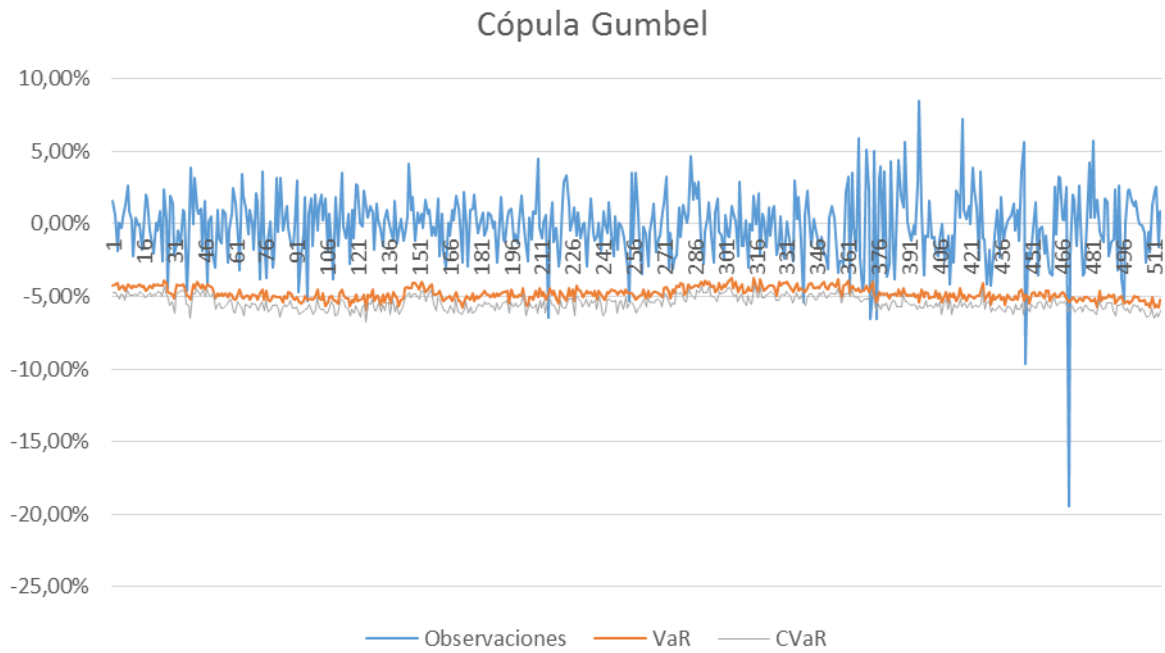
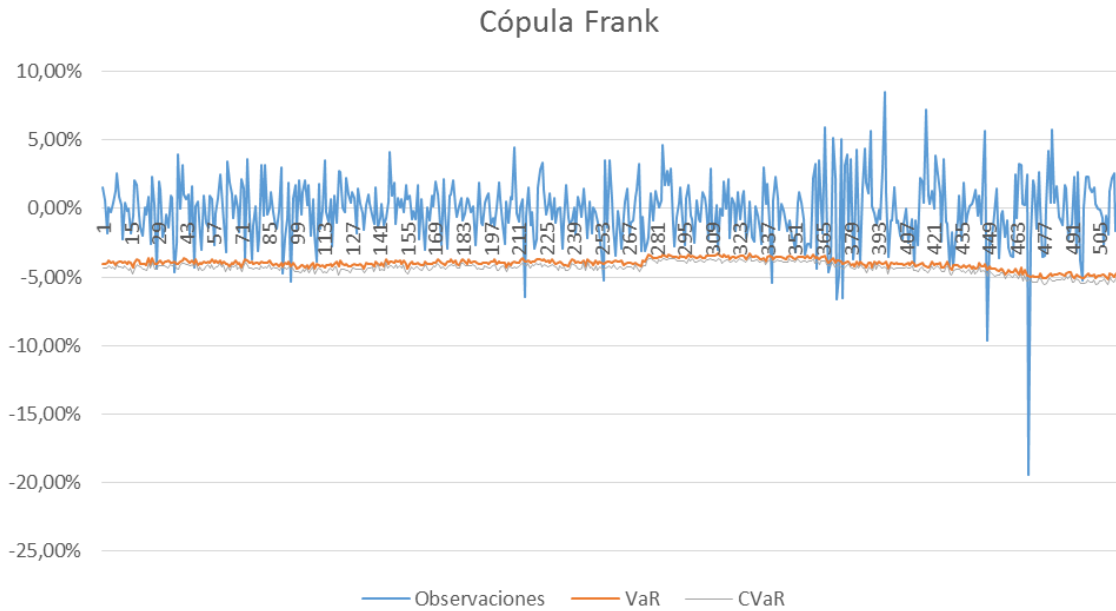


Figura 27: Estimación del VaR y CVaR. Cópula Frank



11.4. Lista de Formulas

- 2.1.- Medias móviles
- 2.2.- Modelo MA(q)
- 2.3.- Modelo GARCH (p,q)
- 3.1.- Función del riesgo Pre- Markowitz
- 3.2.- MPT. Rendimientos esperados de la cartera
- 3.3.- MPT. La varianza de la cartera
- 3.4.- Índice de Sharpe
- 3.5.- CAPM. Rendimiento esperado.
- 3.6.- CAPM. Beta.
- 3.7.- La expectativa de pérdida dada una probabilidad acumulativa
- 3.8.- HS. Rendimiento esperado de un cartera.
- 3.9.- HS. VaR
- 3.10.- Simulación con pesos temporales
- 3.11.- Distribución normal. Vector de media μ y una matriz de covarianzas Σ .
- 3.12.- Distribución normal. Vector de ponderaciones dela cartera
- 3.13.- Distribución normal. El retorno esperado (μ_p)
- 3.14.- Distribución normal. La varianza de la cartera (σ_p^2)
- 3.15.- Distribución normal. VaR
- 3.16.- Distribución normal. Vector de estimación de la media
- 3.17.- Distribución normal. Matriz de estimación de las covarianzas.
- 3.18.- Distribución t – student. VaR
- 3.19.- CVaR. Integral con respecto a la función de distribución.
- 3.20.- CVaR. Función.
- 3.21.- Déficit esperado (ES)
- 3.22 Valor cola (TVaR)
- 3.23.- CVaR. Con respecto al ES y al VaR
- 4.1.- Cópulas
- 4.2.- Función de distribución conjunta multivariante
- 4.4.- Cópula Gaussiana
- 4.5.- Cópula t-student
- 4.6.- Cópula de Gumbel. Función generadora.

- 4.7.- Cópula de Gumbel. Formulación matemática.
- 4.8.- Cópula de Clayton. Función generadora.
- 4.9.- Cópula de Clayton. Formulación matemática.
- 4.10.- Cópula de Frank. Función generadora.
- 4.11.- Cópula de Frank. Formulación matemática.
- 5.1.- Evaluación *out simple*.
- 5.2.- La función de probabilidad (QPS)
- 5.3.- QPS. Frecuencia de las trasgresiones.
- 5.4.- El error medio cuadrático (RMSE)
- 5.5.- Indicador de optimización del riesgo (IOR)
- 6.1.- Rendimientos logarítmicos.
- 6.2.- Jarque –Bera
- 7.1.- Ponderación de Hull y White
- 10.1.- Volatilidad Histórica

11.5. Lista de Figuras

- Figura 1: Relación entre las medidas coherentes obtenidas de la presentación de Uryasev, S. (2010).
- Figura 2: Relación entre las medidas coherentes obtenidas de la presentación de Uryasev, S. (2010).
- Figura 3: Cópula Gaussiana (elaboración propia).
- Figura 4: Cópula Gaussiana (elaboración propia).
- Figura 5: Cópula Gaussiana (elaboración propia).
- Figura 6: Cópula t-student (elaboración propia).
- Figura 7: Cópula t-student (elaboración propia).
- Figura 8: Cópula t-student (elaboración propia).
- Figura 9: Cópula Gumbel (elaboración propia).
- Figura 10: Cópula Gumbel (elaboración propia).
- Figura 11: Cópula Gumbel (elaboración propia).
- Figura 12: Cópula Clayton elaboración propia.
- Figura 13: Cópula Clayton elaboración propia.
- Figura 14: Cópula Clayton (elaboración propia).
- Figura 15: Cópula Clayton (elaboración propia)
- Figura 16: Precios diarios de cierre de los valores de la cartera
- Figura 17: Rendimientos logarítmicos diarios de los valores de la cartera
- Figura 18: Estimación del VaR y CVaR. Simulación Histórica.
- Figura 19: Estimación del VaR y CVaR. Simulación Histórica con ponderaciones.
- Figura 20: Estimación del VaR y CVaR. Montecarlo Distribución Normal.
- Figura 21: Estimación del VaR y CVaR. Montecarlo Distribución t-student.
- Figura 22: Estimación del VaR y CVaR. Simulación Histórica con GARCH
- Figura 23: Estimación del VaR y CVaR. Cópula Normal
- Figura 24: Estimación del VaR y CVaR. Cópula t-student
- Figura 25: Estimación del VaR y CVaR. Cópula Clayton
- Figura 26: Estimación del VaR y CVaR. Cópula Gumbel
- Figura 27: Estimación del VaR y CVaR. Cópula Frank

11.6. Lista de Tablas

Tabla 1: Estadísticas de la muestra

Tabla 2: Resultados del test Jarque-Bera

Tabla 3: División de la muestra

Tabla 4: Resultados del estudio Valor en riesgo

Tabla 5: Resultados del estudio Valor en riesgo condicional