

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE EDUCACIÓN



TESIS DOCTORAL

La competencia noticing del formador de matemáticas
y su didáctica de futuros maestros de Educación Primaria

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR

PRESENTADA POR

Ignacio Antonio Fernández Balboa

DIRIGIDA POR

Nuria Joglar Prieto

Jon Robert Star

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE EDUCACIÓN

CENTRO DE FORMACIÓN DEL PROFESORADO

Departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales,
Sociales y Matemáticas



TESIS DOCTORAL

**La competencia *noticing* del formador de matemáticas
y su didáctica de futuros maestros de Educación Primaria**

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR

PRESENTADA POR

Ignacio Antonio Fernández Balboa

Directores

Nuria Joglar Prieto, Universidad Complutense de Madrid

Jon Robert Star, Harvard University

Programa de Doctorado en Educación

AGRADECIMIENTOS

En el transcurso del largo y sinuoso camino que ha supuesto la realización de esta tesis doctoral, he sido muy afortunado por contar con el apoyo de muchas personas que han contribuido con su tiempo, esfuerzo y cariño a llevar a término este trabajo. Por ello, en las siguientes líneas quisiera plasmar brevemente la gran gratitud que les profeso por su inestimable ayuda.

Muchísimas gracias, Nuria y Jon, pues no podría haber tenido mejores directores. Nuria, cualquier intento de verbalizar mi agradecimiento por tu dedicación a lo largo de estos años sería fallido, ya que no encuentro palabras con las que reconocer tu entrega y tu esfuerzo en la labor que ha conllevado la investigación realizada. En cualquier caso, te quiero decir que aprecio sumamente la ingente cantidad de tiempo que me has regalado, que sobrepasa con mucho el trabajo esperable de un director de tesis, así como tu ejemplo extraordinario como investigadora, docente y persona, el cual he tenido muy presente en mi formación y seguiré teniéndolo en mi futura trayectoria profesional. Y a ti, Jon, quiero darte las gracias por haber puesto a disposición de este estudio tu mente preclara, puesto que tus orientaciones me han posibilitado avanzar con paso firme en la dirección correcta, así como por tu disponibilidad absoluta en todo momento de manera desinteresada para ayudarme a resolver las dificultades que han ido apareciendo en el proceso. En definitiva, gracias a los dos por el trabajo tan intenso que habéis realizado y por vuestra cercanía y comprensión. Sabed que contáis con mi admiración y mi amistad.

A mi tutora, Mercedes, gracias por tu generosidad, por haber aceptado supervisar la adecuación de mi formación como investigador y el planteamiento y el desarrollo del trabajo a lo largo de los cursos en el programa de doctorado. Te agradezco tu interés y tu gran profesionalidad y también todos los consejos que han ayudado a guiar mi evolución académica como doctorando.

Esperanza, tú has sido mi compañera de fatigas en esta extensa singladura, juntos hemos hecho frente a los obstáculos surgidos y hemos compartido los hitos logrados en el proceso constante de aprendizaje que hemos experimentado. Por eso, te doy las gracias, porque la soledad de escribir una tesis ha sido menor contigo, porque te has preocupado siempre por mí. Te deseo todo lo mejor en tu nueva etapa docente y mucho éxito en todo lo que te propongas, tanto en lo académico como en lo personal.

A los participantes de esta investigación, os agradezco profundamente el interés, la energía y el tiempo que habéis dedicado a este proyecto, ya que sin vosotros no habría sido posible su ejecución. Vuestras aportaciones han sido clave para comprender mejor la competencia *noticing* de los formadores de matemáticas y su didáctica. Así pues, Marcos, Daniel, Raquel, Jorge, Lucas y Pablo: gracias de corazón.

Quisiera hacer extensible mi sincero agradecimiento a todos aquellos compañeros, investigadores y docentes de la Universidad Complutense de Madrid y también de otras universidades, que me habéis concedido vuestro apoyo y aprecio durante la elaboración de este estudio y que, de un modo u otro, me habéis ayudado a dar forma a su contenido en distintos seminarios, charlas y reuniones que he disfrutado y que espero poder seguir teniendo en el futuro.

En la esfera personal, quiero daros las gracias a quienes habéis estado siempre a mi lado. Iciar, mamá y papá, os agradezco enormemente no solo que me hayáis apoyado y alentado de manera incesante en esta última etapa de mi desarrollo educativo, sino que estéis ahí siempre que os necesito. Me siento altamente afortunado por contar con vuestro inagotable amor incondicional, que es recíproco, y con vuestra absoluta confianza en todo lo que me propongo.

También quiero manifestar mi gratitud al resto de mi familia y a mis amigos, pues vuestro interés en el progreso de mi trabajo y vuestras palabras de cariño y de ánimo me han ayudado a seguir adelante, a superar los momentos en los que quizá se me pasó por la mente abandonar. Gracias por preocuparos por mí y por vuestro afecto.

Finalmente, quiero expresarte mi infinito agradecimiento a ti, Azu, mi compañera de vida, no sin antes pedirte perdón por todo el tiempo que la tesis nos ha robado. Gracias por haber estado siempre a mi lado durante estos años, por leer y revisar mis textos una y otra vez, por escuchar mis ideas, por tu inagotable paciencia conmigo y por creer como crees en mí. Tengo muy claro que este trabajo no habría llegado a su fin sin tu amor y sin tu apoyo inefables, que espero estar correspondiendo debidamente. Soy consciente de mi inmensa suerte por tenerte junto a mí y ardo en deseos de averiguar todo lo que podemos conseguir juntos de ahora en adelante, en la nueva etapa que comienza tras terminar esta tesis doctoral.

¿Cómo citar esta tesis doctoral?

Fernández-Balboa, I. A. (2024). *La competencia noticing del formador de matemáticas y su didáctica de futuros maestros de Educación Primaria* [Tesis doctoral, Universidad Complutense de Madrid].

La presente tesis doctoral ha sido sufragada por el Programa de Financiación conjunto de la Universidad Complutense de Madrid y el Banco Santander a través de una ayuda para contratos predoctorales de personal investigador en formación (referencia: CT17/17-CT18/17).

ÍNDICE

1. INTRODUCCIÓN	23
1.1. Motivación y justificación.....	25
1.2. Objeto de estudio	28
1.3. Estructura del trabajo	29
2. MARCO TEÓRICO	33
2.1. La competencia <i>noticing</i>	35
2.1.1. Génesis.....	36
2.1.2. Conceptualizaciones.....	41
2.1.3. Aproximaciones metodológicas.....	47
2.1.4. La competencia <i>noticing</i> en este estudio	52
2.2. El formador de matemáticas y su didáctica	58
2.2.1. Conceptualización.....	58
2.2.2. El formador de matemáticas y su didáctica en este estudio.....	62
2.3. La competencia <i>noticing</i> del formador de matemáticas y su didáctica	63
3. MARCO METODOLÓGICO	75
3.1. Pregunta y objetivos de investigación	77
3.2. Enfoque metodológico	79
3.3. Participantes del estudio.....	81
3.4. Diseño de la investigación.....	88
3.4.1. Fase 1. <i>Noticing</i> espontáneo	90
3.4.1.a. Recopilación de grabaciones de clase y selección de fragmentos	91
3.4.1.b. Instrucciones y análisis hechos por los participantes.....	94
3.4.1.c. Transcripciones de las sesiones.....	96
3.4.1.d. Extracción de eventos e interpretaciones.....	97
3.4.1.e. Etiquetado de eventos e interpretaciones	102
3.4.1.f. Codificación y análisis de eventos e interpretaciones.....	103
3.4.2. Fase 2. <i>Noticing</i> inducido	111
3.4.2.a. Recopilación de grabaciones de clase y selección de fragmentos	111
3.4.2.b. Instrucciones y análisis hechos por los participantes.....	112
3.4.2.c. Transcripciones de las sesiones.....	114
3.4.2.d. Extracción de eventos e interpretaciones.....	114

3.4.2.e. Etiquetado de eventos e interpretaciones	115
3.4.2.f. Codificación y análisis de eventos e interpretaciones.....	115
3.4.3. Entrevistas.....	116
3.5. Técnicas e instrumentos de recogida de datos	119
3.6. Técnicas de análisis de datos.....	120
4. ANÁLISIS DE LOS DATOS Y RESULTADOS.....	123
4.1. Análisis cuantitativo con 6 MTE.....	128
4.1.1. Fase 1. <i>Noticing</i> espontáneo	129
4.1.1.a. Eje 1. Eventos: <i>¿qué notan?</i>	129
4.1.1.b. Eje 2. Eventos: <i>¿cómo notan?</i>	133
4.1.1.c. Eje 3. Interpretaciones: <i>¿qué interpretan?</i>	140
4.1.1.d. Eje 4. Interpretaciones: <i>¿cómo interpretan?</i>	146
4.1.1.e. Síntesis de los niveles de los formadores en los ejes de la fase 1	154
4.1.2. Fase 2. <i>Noticing</i> inducido	156
4.1.2.a. Eje 1. Eventos: <i>¿qué notan?</i>	156
4.1.2.b. Eje 2. Eventos: <i>¿cómo notan?</i>	160
4.1.2.c. Eje 3. Interpretaciones: <i>¿qué interpretan?</i>	166
4.1.2.d. Eje 4. Interpretaciones: <i>¿cómo interpretan?</i>	172
4.1.2.e. Síntesis de los niveles de los formadores en los ejes de la fase 2.....	180
4.1.3. Evolución de la fase 1 a la fase 2.....	182
4.1.3.a. Eje 1. Eventos: <i>¿qué notan?</i>	182
4.1.3.b. Eje 2. Eventos: <i>¿cómo notan?</i>	186
4.1.3.c. Eje 3. Interpretaciones: <i>¿qué interpretan?</i>	192
4.1.3.d. Eje 4. Interpretaciones: <i>¿cómo interpretan?</i>	199
4.1.3.e. Síntesis de los niveles de los formadores en los ejes de cada fase.....	207
4.1.4. Eventos e interpretaciones no referidos a <i>call-outs</i>	211
4.2. Análisis cualitativo con 3 MTE	214
4.2.1. Fase 1. <i>Noticing</i> espontáneo	215
4.2.1.a. Eje 1. Eventos: <i>¿qué notan?</i>	215
4.2.1.b. Eje 2. Eventos: <i>¿cómo notan?</i>	218
4.2.1.c. Eje 3. Interpretaciones: <i>¿qué interpretan?</i>	222
4.2.1.d. Eje 4. Interpretaciones: <i>¿cómo interpretan?</i>	227
4.2.2. Fase 2. <i>Noticing</i> inducido	254

4.2.2.a. Eje 1. Eventos: ¿qué notan?	254
4.2.2.b. Eje 2. Eventos: ¿cómo notan?	258
4.2.2.c. Eje 3. Interpretaciones: ¿qué interpretan?	262
4.2.2.d. Eje 4. Interpretaciones: ¿cómo interpretan?	267
4.2.3. Evolución de la fase 1 a la fase 2	301
4.2.3.a. Eje 1. Eventos: ¿qué notan?	301
4.2.3.b. Eje 2. Eventos: ¿cómo notan?	305
4.2.3.c. Eje 3. Interpretaciones: ¿qué interpretan?	310
4.2.3.d. Eje 4. Interpretaciones: ¿cómo interpretan?	314
4.2.4. Fase 3. Entrevistas	333
4.2.5. Eventos e interpretaciones no referidos a <i>call-outs</i>	346
5. DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS Y CONCLUSIONES	351
5.1. Discusión de los resultados y conclusiones	353
5.2. Principales aportaciones de la investigación	368
5.3. Limitaciones de la investigación y perspectivas de futuro	370
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	373
RESUMEN DE LA TESIS / ABSTRACT	399
ANEXOS	403
Anexo 1. Cuestionario para la selección de la muestra	405
Anexo 2. Transcripción de los vídeos mostrados a los participantes	407
Anexo 3. Instrucciones para los participantes en la fase 1	443
Anexo 4. Transcripción de los comentarios de Marcos en la fase 1	449
Anexo 5. Transcripción de los comentarios de Daniel en la fase 1	515
Anexo 6. Transcripción de los comentarios de Jorge en la fase 1	559
Anexo 7. Transcripción de los comentarios de Lucas en la fase 1	603
Anexo 8. Transcripción de los comentarios de Pablo en la fase 1	649
Anexo 9. Transcripción de los comentarios de Raquel en la fase 1	691
Anexo 10. Eventos e interpretaciones de Marcos en la fase 1	733
Anexo 11. Eventos e interpretaciones de Daniel en la fase 1	781
Anexo 12. Eventos e interpretaciones de Jorge en la fase 1	797
Anexo 13. Eventos e interpretaciones de Lucas en la fase 1	813

Anexo 14. Eventos e interpretaciones de Pablo en la fase 1.....	831
Anexo 15. Eventos e interpretaciones de Raquel en la fase 1	845
Anexo 16. Listado de <i>call-outs</i>	855
Anexo 17. Conjunto de eventos e interpretaciones de la fase 1 de todos los participantes, integrados en la transcripción de los vídeos en el momento en el que se realizaron los comentarios de los que se extrajeron	869
Anexo 18. Conjunto de eventos e interpretaciones de la fase 1 de todos los participantes, integrados en la transcripción de los vídeos tras el <i>call-out</i> al que cada uno se refiere si se da el caso.....	951
Anexo 19. Listado de <i>call-outs</i> con elementos fundamentales.....	1037
Anexo 20. Instrucciones para los participantes en la fase 2	1057
Anexo 21. Transcripción de los comentarios de Marcos en la fase 2.....	1063
Anexo 22. Transcripción de los comentarios de Daniel en la fase 2	1121
Anexo 23. Transcripción de los comentarios de Jorge en la fase 2	1169
Anexo 24. Transcripción de los comentarios de Lucas en la fase 2	1221
Anexo 25. Transcripción de los comentarios de Pablo en la fase 2.....	1267
Anexo 26. Transcripción de los comentarios de Raquel en la fase 2	1311
Anexo 27. Eventos e interpretaciones de Marcos en la fase 2.....	1353
Anexo 28. Eventos e interpretaciones de Daniel en la fase 2.....	1393
Anexo 29. Eventos e interpretaciones de Jorge en la fase 2	1415
Anexo 30. Eventos e interpretaciones de Lucas en la fase 2	1441
Anexo 31. Eventos e interpretaciones de Pablo en la fase 2.....	1461
Anexo 32. Eventos e interpretaciones de Raquel en la fase 2	1477
Anexo 33. Conjunto de eventos e interpretaciones de la fase 2 de todos los participantes, integrados en la transcripción de los vídeos en el momento en el que se realizaron los comentarios de los que se extrajeron	1489
Anexo 34. Conjunto de eventos e interpretaciones de la fase 2 de todos los participantes, integrados en la transcripción de los vídeos tras el <i>call-out</i> al que cada uno se refiere si se da el caso.....	1575

Índice de figuras

Figura 2.1. Tres conceptualizaciones de <i>teacher noticing</i> (Jacobs y Spangler, 2017).....	42
Figura 3.1. Fases para la recogida de datos sobre el <i>noticing</i> de los MTE.....	90
Figura 3.2. Fase inicial para la selección de los participantes y fases para la recogida de datos sobre el <i>noticing</i> de los MTE: ideas, tablas y anexos principales	118
Figura 4.1. Número de eventos asociados a <i>call-outs</i> : vídeo 1, fase 1	129
Figura 4.2. Número de eventos asociados a <i>call-outs</i> : vídeo 2, fase 1	130
Figura 4.3. Número de eventos asociados a <i>call-outs</i> : vídeo 3, fase 1	130
Figura 4.4. Número de eventos asociados a <i>call-outs</i> : todos los vídeos, fase 1	131
Figura 4.5. Nivel de <i>noticing</i> de cada MTE —eje 1— en función del porcentaje de <i>call-outs</i> identificados con respecto al total de <i>call-outs</i> : todos los vídeos, fase 1.....	132
Figura 4.6. Eventos —asociados a <i>call-outs</i> — clasificados en niveles en función de los elementos fundamentales explicitados: vídeo 1, fase 1	133
Figura 4.7. Eventos —asociados a <i>call-outs</i> — clasificados en niveles en función de los elementos fundamentales explicitados: vídeo 2, fase 1	134
Figura 4.8. Eventos —asociados a <i>call-outs</i> — clasificados en niveles en función de los elementos fundamentales explicitados: vídeo 3, fase 1	135
Figura 4.9. Eventos —asociados a <i>call-outs</i> — clasificados en niveles en función de los elementos fundamentales explicitados: todos los vídeos, fase 1	136
Figura 4.10. Porcentaje de eventos —asociados a <i>call-outs</i> — clasificados en cada nivel, en función de los elementos fundamentales explicitados, con respecto al total de <i>call-outs</i> identificados: todos los vídeos, fase 1	137
Figura 4.11. Nivel de <i>noticing</i> de cada MTE —eje 2— en función del nivel medio de los eventos asociados a <i>call-outs</i> según los elementos fundamentales explicitados: todos los vídeos, fase 1	139
Figura 4.12. Número de eventos —asociados a <i>call-outs</i> — acompañados de al menos una interpretación matemática: vídeo 1, fase 1	140
Figura 4.13. Porcentaje de eventos —asociados a <i>call-outs</i> — que están acompañados de al menos una interpretación matemática con respecto al total de <i>call-outs</i> identificados: vídeo 1, fase 1.....	141
Figura 4.14. Número de eventos —asociados a <i>call-outs</i> — acompañados de al menos una interpretación matemática: vídeo 2, fase 1	141

Figura 4.15. Porcentaje de eventos — asociados a <i>call-outs</i> — que están acompañados de al menos una interpretación matemática con respecto al total de <i>call-outs</i> identificados: vídeo 2, fase 1.....	142
Figura 4.16. Número de eventos — asociados a <i>call-outs</i> — acompañados de al menos una interpretación matemática: vídeo 3, fase 1	142
Figura 4.17. Porcentaje de eventos — asociados a <i>call-outs</i> — que están acompañados de al menos una interpretación matemática con respecto al total de <i>call-outs</i> identificados: vídeo 3, fase 1.....	143
Figura 4.18. Número de eventos — asociados a <i>call-outs</i> — acompañados de al menos una interpretación matemática: todos los vídeos, fase 1.....	144
Figura 4.19. Porcentaje de eventos — asociados a <i>call-outs</i> — que están acompañados de al menos una interpretación matemática con respecto al total de <i>call-outs</i> identificados: todos los vídeos, fase 1.....	144
Figura 4.20. Nivel de <i>noticing</i> de cada MTE — eje 3 — en función del porcentaje de eventos — asociados a <i>call-outs</i> — acompañados de al menos una interpretación matemática con respecto al total de <i>call-outs</i> identificados: todos los vídeos, fase 1	145
Figura 4.21. Interpretaciones referidas a <i>call-outs</i> clasificadas en las categorías matemática y didáctica: vídeo 1, fase 1	146
Figura 4.22. Número medio de interpretaciones matemáticas referidas a <i>call-outs</i> por cada <i>call-out</i> identificado: vídeo 1, fase 1	147
Figura 4.23. Interpretaciones referidas a <i>call-outs</i> clasificadas en las categorías matemática y didáctica: vídeo 2, fase 1	147
Figura 4.24. Número medio de interpretaciones matemáticas referidas a <i>call-outs</i> por cada <i>call-out</i> identificado: vídeo 2, fase 1	148
Figura 4.25. Interpretaciones referidas a <i>call-outs</i> clasificadas en las categorías matemática y didáctica: vídeo 3, fase 1	149
Figura 4.26. Número medio de interpretaciones matemáticas referidas a <i>call-outs</i> por cada <i>call-out</i> identificado: vídeo 3, fase 1	150
Figura 4.27. Interpretaciones referidas a <i>call-outs</i> clasificadas en las categorías matemática y didáctica: todos los vídeos, fase 1.....	150
Figura 4.28. Porcentaje de interpretaciones referidas a <i>call-outs</i> en la categoría matemática y en la categoría didáctica con respecto al total de interpretaciones referidas a <i>call-outs</i> : todos los vídeos, fase 1	151

Figura 4.29. Número medio de interpretaciones matemáticas referidas a <i>call-outs</i> por cada <i>call-out</i> identificado: todos los vídeos, fase 1.....	151
Figura 4.30. Nivel de <i>noticing</i> de cada MTE –eje 4– en función del porcentaje de interpretaciones matemáticas referidas a <i>call-outs</i> con respecto al total de interpretaciones sobre <i>call-outs</i> , así como del número medio de interpretaciones matemáticas referidas a <i>call-outs</i> por cada <i>call-out</i> identificado: todos los vídeos, fase 1	153
Figura 4.31. Número de eventos asociados a <i>call-outs</i> : vídeo 1, fase 2.....	156
Figura 4.32. Número de eventos asociados a <i>call-outs</i> : vídeo 2, fase 2.....	157
Figura 4.33. Número de eventos asociados a <i>call-outs</i> : vídeo 3, fase 2.....	157
Figura 4.34. Número de eventos asociados a <i>call-outs</i> : todos los vídeos, fase 2	158
Figura 4.35. Nivel de <i>noticing</i> de cada MTE –eje 1– en función del porcentaje de <i>call-outs</i> identificados con respecto al total de <i>call-outs</i> : todos los vídeos, fase 1.....	159
Figura 4.36. Eventos –asociados a <i>call-outs</i> – clasificados en niveles en función de los elementos fundamentales explicitados: vídeo 1, fase 2.....	160
Figura 4.37. Eventos –asociados a <i>call-outs</i> – clasificados en niveles en función de los elementos fundamentales explicitados: vídeo 2, fase 2.....	161
Figura 4.38. Eventos –asociados a <i>call-outs</i> – clasificados en niveles en función de los elementos fundamentales explicitados: vídeo 3, fase 2.....	162
Figura 4.39. Eventos –asociados a <i>call-outs</i> – clasificados en niveles en función de los elementos fundamentales explicitados: todos los vídeos, fase 2	163
Figura 4.40. Porcentaje de eventos –asociados a <i>call-outs</i> – clasificados en cada nivel, en función de los elementos fundamentales explicitados, con respecto al total de <i>call-outs</i> identificados: todos los vídeos, fase 2	164
Figura 4.41. Nivel de <i>noticing</i> de cada MTE –eje 2– en función del nivel medio de los eventos asociados a <i>call-outs</i> según los elementos fundamentales explicitados: todos los vídeos, fase 2.....	165
Figura 4.42. Número de eventos –asociados a <i>call-outs</i> – acompañados de al menos una interpretación matemática: vídeo 1, fase 2.....	167
Figura 4.43. Porcentaje de eventos –asociados a <i>call-outs</i> – que están acompañados de al menos una interpretación matemática con respecto al total de <i>call-outs</i> identificados: vídeo 1, fase 2.....	167
Figura 4.44. Número de eventos –asociados a <i>call-outs</i> – acompañados de al menos una interpretación matemática: vídeo 2, fase 2.....	168

Figura 4.45. Porcentaje de eventos — asociados a <i>call-outs</i> — que están acompañados de al menos una interpretación matemática con respecto al total de <i>call-outs</i> identificados: vídeo 2, fase 2.....	168
Figura 4.46. Número de eventos — asociados a <i>call-outs</i> — acompañados de al menos una interpretación matemática: vídeo 3, fase 2.....	169
Figura 4.47. Porcentaje de eventos — asociados a <i>call-outs</i> — que están acompañados de al menos una interpretación matemática con respecto al total de <i>call-outs</i> identificados: vídeo 3, fase 2.....	169
Figura 4.48. Número de eventos — asociados a <i>call-outs</i> — acompañados de al menos una interpretación matemática: todos los vídeos, fase 2.....	170
Figura 4.49. Porcentaje de eventos — asociados a <i>call-outs</i> — que están acompañados de al menos una interpretación matemática con respecto al total de <i>call-outs</i> identificados: todos los vídeos, fase 2.....	170
Figura 4.50. Nivel de <i>noticing</i> de cada MTE — eje 3 — en función del porcentaje de eventos — asociados a <i>call-outs</i> — acompañados de al menos una interpretación matemática con respecto al total de <i>call-outs</i> identificados: todos los vídeos, fase 2.....	171
Figura 4.51. Interpretaciones referidas a <i>call-outs</i> clasificadas en las categorías matemática y didáctica: vídeo 1, fase 2.....	173
Figura 4.52. Número medio de interpretaciones matemáticas referidas a <i>call-outs</i> por cada <i>call-out</i> identificado: vídeo 1, fase 2.....	174
Figura 4.53. Interpretaciones referidas a <i>call-outs</i> clasificadas en las categorías matemática y didáctica: vídeo 2, fase 2.....	174
Figura 4.54. Número medio de interpretaciones matemáticas referidas a <i>call-outs</i> por cada <i>call-out</i> identificado: vídeo 2, fase 2.....	175
Figura 4.55. Interpretaciones referidas a <i>call-outs</i> clasificadas en las categorías matemática y didáctica: vídeo 3, fase 2.....	176
Figura 4.56. Número medio de interpretaciones matemáticas referidas a <i>call-outs</i> por cada <i>call-out</i> identificado: vídeo 3, fase 2.....	177
Figura 4.57. Interpretaciones referidas a <i>call-outs</i> clasificadas en las categorías matemática y didáctica: todos los vídeos, fase 2.....	177
Figura 4.58. Porcentaje de interpretaciones referidas a <i>call-outs</i> en la categoría matemática y en la categoría didáctica con respecto al total de interpretaciones referidas a <i>call-outs</i> : todos los vídeos, fase 2.....	178

Figura 4.59. Número medio de interpretaciones matemáticas referidas a <i>call-outs</i> por cada <i>call-out</i> identificado: todos los vídeos, fase 2.....	179
Figura 4.60. Nivel de <i>noticing</i> de cada MTE –eje 4– en función del porcentaje de interpretaciones matemáticas referidas a <i>call-outs</i> con respecto al total de interpretaciones sobre <i>call-outs</i> , así como del número medio de interpretaciones matemáticas referidas a <i>call-outs</i> por cada <i>call-out</i> identificado: todos los vídeos, fase 2	179
Figura 4.61. Número de eventos asociados a <i>call-outs</i> : vídeo 1, fases 1 y 2.....	182
Figura 4.62. Número de eventos asociados a <i>call-outs</i> : vídeo 2, fases 1 y 2.....	183
Figura 4.63. Número de eventos asociados a <i>call-outs</i> : vídeo 3, fases 1 y 2.....	184
Figura 4.64. Número de eventos asociados a <i>call-outs</i> : todos los vídeos, fases 1 y 2	184
Figura 4.65. Nivel de <i>noticing</i> de cada MTE –eje 1– en función del porcentaje de <i>call-outs</i> identificados con respecto al total de <i>call-outs</i> : todos los vídeos, fases 1 y 2.....	185
Figura 4.66. Eventos –asociados a <i>call-outs</i> – clasificados en niveles en función de los elementos fundamentales explicitados: vídeo 1, fases 1 y 2.....	187
Figura 4.67. Eventos –asociados a <i>call-outs</i> – clasificados en niveles en función de los elementos fundamentales explicitados: vídeo 2, fases 1 y 2.....	188
Figura 4.68. Eventos –asociados a <i>call-outs</i> – clasificados en niveles en función de los elementos fundamentales explicitados: vídeo 3, fases 1 y 2.....	189
Figura 4.69. Eventos –asociados a <i>call-outs</i> – clasificados en niveles en función de los elementos fundamentales explicitados: todos los vídeos, fases 1 y 2	189
Figura 4.70. Nivel de <i>noticing</i> de cada MTE –eje 2– en función del nivel medio de los eventos asociados a <i>call-outs</i> según los elementos fundamentales explicitados: todos los vídeos, fases 1 y 2.....	191
Figura 4.71. Número de eventos –asociados a <i>call-outs</i> – acompañados de al menos una interpretación matemática: vídeo 1, fases 1 y 2.....	192
Figura 4.72. Porcentaje de eventos –asociados a <i>call-outs</i> – que están acompañados de al menos una interpretación matemática con respecto al total de <i>call-outs</i> identificados: vídeo 1, fases 1 y 2.....	193
Figura 4.73. Número de eventos –asociados a <i>call-outs</i> – acompañados de al menos una interpretación matemática: vídeo 2, fases 1 y 2.....	194
Figura 4.74. Porcentaje de eventos –asociados a <i>call-outs</i> – que están acompañados de al menos una interpretación matemática con respecto al total de <i>call-outs</i> identificados: vídeo 2, fases 1 y 2.....	194

Figura 4.75. Número de eventos — asociados a <i>call-outs</i> — acompañados de al menos una interpretación matemática: vídeo 3, fases 1 y 2.....	195
Figura 4.76. Porcentaje de eventos — asociados a <i>call-outs</i> — que están acompañados de al menos una interpretación matemática con respecto al total de <i>call-outs</i> identificados: vídeo 3, fases 1 y 2.....	195
Figura 4.77. Número de eventos — asociados a <i>call-outs</i> — acompañados de al menos una interpretación matemática: todos los vídeos, fases 1 y 2.....	196
Figura 4.78. Porcentaje de eventos — asociados a <i>call-outs</i> — que están acompañados de al menos una interpretación matemática con respecto al total de <i>call-outs</i> identificados: todos los vídeos, fases 1 y 2.....	196
Figura 4.79. Nivel de <i>noticing</i> de cada MTE — eje 3 — en función del porcentaje de eventos — asociados a <i>call-outs</i> — acompañados de al menos una interpretación matemática con respecto al total de <i>call-outs</i> identificados: todos los vídeos, fases 1 y 2.....	197
Figura 4.80. Interpretaciones referidas a <i>call-outs</i> clasificadas en las categorías matemática y didáctica: vídeo 1, fases 1 y 2	199
Figura 4.81. Número medio de interpretaciones matemáticas referidas a <i>call-outs</i> por cada <i>call-out</i> identificado: vídeo 1, fases 1 y 2	200
Figura 4.82. Interpretaciones referidas a <i>call-outs</i> clasificadas en las categorías matemática y didáctica: vídeo 2, fases 1 y 2	200
Figura 4.83. Número medio de interpretaciones matemáticas referidas a <i>call-outs</i> por cada <i>call-out</i> identificado: vídeo 2, fases 1 y 2	201
Figura 4.84. Interpretaciones referidas a <i>call-outs</i> clasificadas en las categorías matemática y didáctica: vídeo 3, fases 1 y 2	202
Figura 4.85. Número medio de interpretaciones matemáticas referidas a <i>call-outs</i> por cada <i>call-out</i> identificado: vídeo 3, fases 1 y 2	203
Figura 4.86. Interpretaciones referidas a <i>call-outs</i> clasificadas en las categorías matemática y didáctica: todos los vídeos, fases 1 y 2.....	203
Figura 4.87. Número medio de interpretaciones matemáticas referidas a <i>call-outs</i> por cada <i>call-out</i> identificado: todos los vídeos, fases 1 y 2.....	205
Figura 4.88. Nivel de <i>noticing</i> de cada MTE — eje 4 — en función del porcentaje de interpretaciones matemáticas referidas a <i>call-outs</i> con respecto al total de interpretaciones sobre <i>call-outs</i> , así como del número medio de interpretaciones matemáticas referidas a <i>call-outs</i> por cada <i>call-out</i> identificado: todos los vídeos, fases 1 y 2	206

Figura 4.89. Nivel de <i>noticing</i> de cada MTE en cada uno de los ejes que vertebran el análisis de los datos: todos los vídeos, fases 1 y 2	208
Figura 4.90. Eventos no referidos a <i>call-outs</i> en las categorías matemática y didáctica: todos los vídeos, fases 1 y 2	211
Figura 4.91. Interpretaciones no referidas a <i>call-outs</i> en las categorías matemática y didáctica: todos los vídeos, fases 1 y 2	213

Índice de tablas

Tabla 2.1. <i>Revised Learning to Notice Framework</i> (Van Es y Sherin, 2021)	54
Tabla 3.1. Distribución de los MTE en las categorías de formación académica	82
Tabla 3.2. Distribución de los MTE en las categorías de experiencia docente	85
Tabla 3.3. Distribución de los MTE —elegibles como participantes— en las categorías de formación académica y de experiencia docente	86
Tabla 3.4. Distribución de los MTE —elegidos como participantes— en las categorías de formación académica y de experiencia docente	87
Tabla 3.5. Descriptores para establecer el nivel de un evento en el eje 2	106
Tabla 3.6. Descriptores gráficos para establecer el nivel de un evento en el eje 2	107
Tabla 3.7. Esquema de los ejes que estructuran la codificación y el análisis de eventos e interpretaciones	110
Tabla 4.1. Estructura del análisis de los datos	127
Tabla 4.2. Intervalos para establecer el nivel de <i>noticing</i> de un MTE en el eje 1	132
Tabla 4.3. Nivel de <i>noticing</i> de cada MTE en el eje 1 [<i>¿qué notan?</i>]: conjunto de todos los vídeos, fase 1	133
Tabla 4.4. Intervalos para establecer el nivel de <i>noticing</i> de un MTE en el eje 2	139
Tabla 4.5. Nivel de <i>noticing</i> de cada MTE en el eje 2 [<i>¿cómo notan?</i>]: conjunto de todos los vídeos, fase 1	140
Tabla 4.6. Intervalos para establecer el nivel de <i>noticing</i> de un MTE en el eje 3	145
Tabla 4.7. Nivel de <i>noticing</i> de cada MTE en el eje 3 [<i>¿qué interpretan?</i>]: conjunto de todos los vídeos, fase 1	146
Tabla 4.8. Intervalos para establecer el nivel de <i>noticing</i> de un MTE en el eje 4	152
Tabla 4.9. Nivel de <i>noticing</i> de cada MTE en el eje 4 [<i>¿cómo interpretan?</i>]: conjunto de todos los vídeos, fase 1	154

Tabla 4.10. Nivel de <i>noticing</i> de cada MTE en cada uno de los ejes que vertebran el análisis de los datos: conjunto de todos los vídeos, fase 1	154
Tabla 4.11. Nivel de <i>noticing</i> de cada MTE en el eje 1 [<i>¿qué notan?</i>]: conjunto de todos los vídeos, fase 2.....	159
Tabla 4.12. Nivel de <i>noticing</i> de cada MTE en el eje 2 [<i>¿cómo notan?</i>]: conjunto de todos los vídeos, fase 2.....	166
Tabla 4.13. Nivel de <i>noticing</i> de cada MTE en el eje 3 [<i>¿qué interpretan?</i>]: conjunto de todos los vídeos, fase 2.....	172
Tabla 4.14. Nivel de <i>noticing</i> de cada MTE en el eje 4 [<i>¿cómo interpretan?</i>]: conjunto de todos los vídeos, fase 2	180
Tabla 4.15. Nivel de <i>noticing</i> de cada MTE en cada uno de los ejes que vertebran el análisis de los datos: conjunto de todos los vídeos, fase 2	180
Tabla 4.16. Nivel de <i>noticing</i> de cada MTE en el eje 1 [<i>¿qué notan?</i>]: conjunto de todos los vídeos, fases 1 y 2.....	186
Tabla 4.17. Porcentaje de eventos — asociados a <i>call-outs</i> — clasificados en cada nivel, en función de los elementos fundamentales explicitados, con respecto al total de <i>call-outs</i> identificados: conjunto de todos los vídeos, fases 1 y 2	190
Tabla 4.18. Nivel de <i>noticing</i> de cada MTE en el eje 2 [<i>¿cómo notan?</i>]: conjunto de todos los vídeos, fases 1 y 2.....	192
Tabla 4.19. Nivel de <i>noticing</i> de cada MTE en el eje 3 [<i>¿qué interpretan?</i>]: conjunto de todos los vídeos, fases 1 y 2.....	198
Figura 4.20. Porcentaje de interpretaciones referidas a <i>call-outs</i> en la categoría matemática y en la categoría didáctica con respecto al total de interpretaciones referidas a <i>call-outs</i> : conjunto de todos los vídeos, fases 1 y 2	204
Tabla 4.21. Nivel de <i>noticing</i> de cada MTE en el eje 4 [<i>¿cómo interpretan?</i>]: conjunto de todos los vídeos, fases 1 y 2.....	207
Tabla 4.22. Porcentaje de eventos no referidos a <i>call-outs</i> en las categorías matemática y didáctica con respecto al total de eventos formulados: todos los vídeos, fases 1 y 2	212
Tabla 4.23. <i>Call-outs</i> identificados por Marcos, Daniel y Raquel — eje 1 —: vídeos 1, 2 y 3, fase 1.....	216
Tabla 4.24. <i>Call-outs</i> identificados por Marcos, Daniel y Raquel acompañados de al menos una interpretación matemática — eje 3 —: vídeos 1, 2 y 3, fase 1.....	223
Tabla 4.25. Temas tratados en las interpretaciones referidas a <i>call-outs</i>	227

Tabla 4.26. <i>Call-outs</i> identificados por Marcos, Daniel y Raquel —eje 1—: vídeos 1, 2 y 3, fase 2.....	255
Tabla 4.27. <i>Call-outs</i> identificados por Marcos, Daniel y Raquel acompañados de al menos una interpretación matemática —eje 3—: vídeos 1, 2 y 3, fase 2.....	263
Tabla 4.28. <i>Call-outs</i> identificados por Marcos, Daniel y Raquel —eje 1—: vídeos 1, 2 y 3, fases 1 y 2.....	302
Tabla 4.29. Niveles de los <i>call-outs</i> formulados por Marcos, Daniel y Raquel en ambas fases.....	305
Tabla 4.30. <i>Call-outs</i> identificados por Marcos, Daniel y Raquel acompañados de al menos una interpretación matemática —eje 3—: vídeos 1, 2 y 3, fases 1 y 2.....	311

Capítulo 1

Introducción

1. INTRODUCCIÓN

En este primer capítulo de la obra que se desarrolla con detenimiento a lo largo de las páginas del presente escrito, se expone de forma concisa el exordio de la investigación realizada con la intención de precisar la motivación y la justificación de esta tesis doctoral, así como su objeto de estudio y la estructura que le da forma.

1.1. Motivación y justificación

La búsqueda de la medra sostenida de la educación es una constante en cualquier sociedad actual y, sin duda, la educación matemática supone un pilar fundamental en la consolidación del acervo cultural de una población dada hoy en día. Por ello, entre otros motivos, la didáctica de las matemáticas —al igual que otras didácticas específicas— ha experimentado un ensanchamiento y un auge considerables en los últimos años, pues no es sino esta la herramienta que permite desarrollar y establecer los cauces necesarios para que se dé un adecuado proceso de enseñanza-aprendizaje de la ciencia a la que nos hemos referido: las matemáticas.

Mi primer contacto consciente con la didáctica de las matemáticas se produjo como alumno al cursar el grado en Magisterio de Educación Primaria. En ese momento, el efecto que tuvo sobre mí dicha disciplina fue el de suscitar en mi interior un interés considerable ya no por el propio contenido matemático —que ya lo tenía—, sino, especialmente, por la manera de trabajarlo con los estudiantes. A este respecto, en pos de una enseñanza eficaz, en diferentes asignaturas de la carrera se hizo patente la importancia de que los maestros han de ser capaces de identificar eventos relevantes en el aula de primaria referidos a la enseñanza y al aprendizaje, reflexionar acerca de los mismos y tomar decisiones con base en las interpretaciones efectuadas, todo ello como parte de un ciclo que es necesario iterar constantemente para perfeccionar la instrucción y, por ende, la adquisición de contenidos y de habilidades por parte de los estudiantes. Este modo de proceder, que *a priori* podría parecer una perogrullada por la obviedad de la conveniencia de su aplicación, no es solo propio de los maestros de Educación Primaria, sino que es consustancial a la práctica de enseñanza de cualquier docente y, en este sentido, podemos decir que cobra una especial transcendencia en el caso de los formadores de futuros maestros, como ahora se explica.

Cuando empecé mis estudios de doctorado en Educación, tuve la oportunidad de aproximarme a la didáctica de las matemáticas ya no como discente, sino desde el prisma del formador de matemáticas y su didáctica de futuros maestros, siendo entonces cuando me percaté de la importancia —a menudo subestimada— que tiene la labor que realizan estos profesionales de la educación, puesto que son el primer eslabón de una cadena cuya fortaleza depende en gran medida de su desempeño. En otras palabras: el formador tiene la tarea de instruir al futuro maestro, quien será el encargado de, en último término, tratar de enseñar a los alumnos en etapas de educación obligatoria, conque, si el primer eslabón no es efectivo en su cometido, los demás pueden verse debilitados, dando lugar a que se quiebre la cadena, esto es, a que no se produzca un aprendizaje adecuado en las escuelas. Por eso, si bien cada uno de los elementos de los diferentes niveles educativos son vitales, es razonable pensar que el proceso cíclico anteriormente citado —basado en la detección, interpretación y toma de decisiones en contextos de aula— será aún más decisivo, si cabe, en aquel que es el único que puede tener repercusión sobre todos los demás.

Así es que, con esta reflexión en mi haber, en los comienzos de mi andadura en el mundo de la investigación fui conocedor de la existencia de una competencia profesional denominada *teacher noticing*, un constructo teórico desarrollado fundamentalmente en el ámbito de la educación matemática y que se corresponde, en esencia, con el ciclo descrito previamente. No obstante, es preciso indicar que la noción de *noticing* no es trivial —si es que pudiera parecerlo—, ya que dominar la ejecución de cada paso del ciclo, de cada una de las partes que conforman dicha competencia, entraña una notable complejidad, como se podrá comprobar en este trabajo. De este modo, pude poner nombre a aquello que me interesaba sobre la práctica profesional de los formadores de matemáticas y su didáctica, erigiéndose su *noticing* como la cuestión central de mi tesis.

Ya con el foco de esta disertación puesto en el *noticing*, al desarrollar mi labor como investigador en formación en la Unidad de Didáctica de las Matemáticas —en la Facultad de Educación de la Universidad Complutense de Madrid— pude advertir que el perfil de los formadores de matemáticas y su didáctica no es heterogéneo, ya que estos cuentan con formación académica y experiencia docente diferentes, lo que me llevó a plantearme cuál sería la influencia del perfil profesional de un formador en su competencia *noticing* —así como cuál debería ser la formación y la experiencia que necesita un formador para ejercer de manera idónea como tal, si bien este aspecto no se aborda de un modo directo en esta

tesis doctoral —. Como consecuencia, además de tratar de analizar la competencia *noticing* del formador de matemáticas y su didáctica, se pretende examinar la relación entre esta y su perfil profesional, entre otros asuntos que serán formulados con posterioridad.

En definitiva, mi considerable interés por las matemáticas y por su didáctica, amén de por la figura del formador y por su perfil profesional, con la mirada puesta en concreto en su *noticing* —competencia que, sin duda, repercutirá en su quehacer como profesional y, por tanto, en la formación que reciban los futuros maestros y, en última instancia, en la forma de enseñar de estos y en el aprendizaje de sus estudiantes—, es lo que ha motivado la realización de este trabajo.

Con todo ello, podemos entender que está justificada esta investigación, dado que se trata de un tema viable, actual y relevante. La viabilidad del estudio reposa en el acceso que se ha podido tener a la población cuyo *noticing* se quería comprender, pues teníamos contacto con muchos de los sujetos que la integraban y su disposición para participar en la tesis ha resultado ser en todo momento muy positiva. Con respecto a la actualidad del asunto que se trata, esta no es posible ponerla en entredicho en absoluto, ya que solo hace falta buscar literatura sobre la competencia *noticing* en el área de la educación matemática para darse cuenta de la cantidad ingente de artículos que se han escrito al respecto en los últimos años, en los que queda sobradamente acreditada la importancia del *noticing* para mejorar la habilidad docente para enseñar matemáticas. Y en lo que a la relevancia de esta cuestión refiere, podemos entender que es totalmente relevante y pertinente, no solo por la importancia ya explicada que tiene la competencia objeto de estudio en los formadores de forma particular —por ser la primera pieza de un alambicado engranaje que asume los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas—, sino también por la escandalosa poquedad de literatura que se ocupa de estudiar el *noticing* del formador de matemáticas y su didáctica, lo que contrasta con la abundancia de artículos centrados en la competencia de maestros de Educación Primaria o de profesores de Educación Secundaria.

En suma, esta investigación pretende comprender mejor el *noticing* del formador en vinculación con su perfil profesional, lo que podría redundar en resultados que quizá permitirían señalar cómo debería ser el perfil profesional —al menos, en lo concerniente a su *noticing*— de un formador de matemáticas y su didáctica de futuros maestros.

1.2. Objeto de estudio

Como ya se ha apuntado en los párrafos previos, este trabajo se centra en estudiar la competencia *noticing* del formador de matemáticas y su didáctica de futuros maestros de Educación Primaria. Concretamente, se analizan los eventos y las interpretaciones que los formadores que participan en el estudio formulan, al visionar la práctica de enseñanza de otro formador a través de grabaciones de vídeo, en relación con dicha práctica. Por lo tanto, abordamos dos de los tres elementos principales del constructo de *noticing*, esto es, la detección de eventos relevantes y su interpretación, dejando a un lado la propuesta de acciones alternativas o toma de decisiones, como se explicará en páginas posteriores.

La competencia *noticing* la ponen en práctica los docentes constantemente, puesto que todos los días y a todas horas identifican e interpretan hechos que tienen lugar en los diversos procesos de enseñanza-aprendizaje en los que participan. Sin embargo, aunque podría parecer que estamos ante una acción sencilla, no lo es tanto cuando lo que se busca es ser capaz de detectar los eventos que realmente son relevantes en una situación dada e interpretarlos de manera fundamentada para que las reflexiones llevadas a cabo puedan, efectivamente, ayudar a mejorar la propia práctica de enseñanza. Por esta razón, en este trabajo se trata de vincular el *noticing* con la formación académica y la experiencia docente de los participantes, ya que se tiene la hipótesis de que un perfil profesional más completo — mayor formación en didáctica de las matemáticas y mayor experiencia ejerciendo como formador — verá su reflejo en una competencia *noticing* más desarrollada.

Por otro lado, cabe decir que este estudio no supone una intervención *per se*, pues no se ha diseñado con el afán de formar a los participantes en la competencia *noticing* para que experimenten una mejora en esta. Con todo, sin aspirar a transformar la realidad que observamos y limitándonos a comprenderla, desde un paradigma interpretativo y con un enfoque principalmente cualitativo, planteamos la hipótesis en el estudio de que el mero hecho de interactuar con los sujetos en relación con su *noticing* se traducirá en una mejora en dicha competencia, aspecto que se expondrá en subsiguientes capítulos.

Asimismo, merece la pena precisar — con el ánimo de no conducir a error alguno — que no es objeto de estudio de esta tesis el conocimiento del formador de matemáticas y su didáctica, sino la competencia *noticing*, que podría ser entendida como el resultado del conocimiento en acción del docente, lo cual no es exactamente lo mismo.

Por último, para concluir este apartado, consideramos relevante hacer hincapié en por qué nos centramos en el estudio de los formadores, analizando estos, a su vez, a otro formador, en el contexto educativo actual en el que se da más importancia al aprendizaje que a la enseñanza y en el que se ha situado al alumno como figura principal del proceso de enseñanza-aprendizaje, relegando a un segundo plano al docente, a quien ahora se le considera como un guía para el aprendizaje del discente y ya no como la única fuente de conocimiento de la que se dispone. A este respecto, si bien convenimos en que el alumno debe ser el centro de atención, pues el objetivo último es su aprendizaje, consideramos la labor del docente esencial para alcanzar dicha meta y, por consiguiente, pensamos que es también importante prestar atención a las competencias profesionales docentes — en este caso, al *noticing* de los formadores — para comprender mejor cómo tiene lugar el proceso de enseñanza que posteriormente se vinculará con el de aprendizaje del estudiante.

En definitiva, en este trabajo se considera el *noticing* del formador de matemáticas y su didáctica de futuros maestros como una pieza clave en el desarrollo de la educación matemática, tanto en la formación inicial como en la permanente, resultando la actuación del formador, como primer eslabón de la cadena educativa, tremendamente relevante en los frutos que puedan obtener los estudiantes de las distintas etapas de la educación.

En cualquier caso, todas las ideas planteadas en este apartado se desarrollarán con mayor detenimiento a lo largo de los distintos capítulos del trabajo, que se enumeran y se describen sucintamente a continuación.

1.3. Estructura del trabajo

Para lograr el propósito de esta investigación, el presente documento se estructura en diferentes capítulos que permiten organizar las ideas a tratar por bloques, de tal forma que la claridad expositiva de lo que se narra sea la suficiente como para garantizar al lector una adecuada comprensión del contenido planteado.

En este primer capítulo, *Introducción*, se presentan, tal y como ya se ha señalado, la motivación y la justificación del trabajo realizado, su objeto de estudio y la estructura que vertebra el contenido que en él se recoge.

En el segundo capítulo, *Marco teórico*, se abordan las principales bases teóricas de la investigación, que giran en torno a dos conceptos, a saber: el de *noticing* y el de *formador*. En cuanto al primero, se exponen su génesis, las diversas conceptualizaciones existentes sobre el constructo y las distintas aproximaciones metodológicas que han sido empleadas en distintos artículos para su estudio, así como la definición asumida en este trabajo. Y en lo que respecta al segundo, se presenta la conceptualización del término y se proporciona la definición escogida en esta tesis. Finalmente, se revisa la escasa literatura que se ocupa de la intersección de ambas nociones.

En el tercer capítulo, *Marco metodológico*, se realiza una descripción de los aspectos metodológicos del estudio. Así pues, es en este capítulo en el que se formulan la pregunta y los objetivos de investigación, se explica el enfoque metodológico asumido —basado en un paradigma interpretativo con una visión cualitativa—, se aporta la información sobre los participantes —detallando el proceso seguido para su elección— y se expone con todo tipo de detalles el diseño de investigación creado *ad hoc* para esta tesis, el cual supone en sí mismo una aportación relevante del trabajo. Por último, se mencionan las técnicas y los instrumentos utilizados para la recogida de datos y las técnicas usadas para su análisis.

En el cuarto capítulo, *Análisis de los datos y resultados*, se lleva a cabo el análisis de los datos plasmados en los documentos que se han presentado como anexos en el capítulo precedente —elaborados con la información recopilada en las diferentes fases del diseño de investigación— y se ponen de relieve los principales resultados obtenidos. El análisis se estructura en dos grandes bloques: por un lado, se hace un análisis grupal, que tiene en cuenta los datos de todos los participantes y que se realiza con un enfoque que, si bien es descriptivo, se apoya en datos cuantitativos; y, por otra parte, se desarrollan tres análisis individuales, que se centran en los datos referidos a tres de los formadores —por mostrar resultados dispares entre ellos en el bloque previo y por ser representantes de tres perfiles profesionales diferentes, es decir, por poseer una formación académica y una experiencia docente distintas entre sí— y que se realizan desde una aproximación cualitativa, siendo esta sección en la que se hace un mayor hincapié por la especial riqueza de los resultados que de la misma es posible extraer, habida cuenta de que se preocupa principalmente por cómo interpretan los formadores.

En el quinto y último capítulo, *Discusión de los resultados y conclusiones*, se describen y discuten todos los resultados alcanzados, poniéndolos en relación con la pregunta y los

objetivos de investigación, y se establecen las conclusiones obtenidas. Asimismo, se trata de sintetizar cuáles han sido las aportaciones de esta tesis doctoral al área de la educación matemática y, en particular, a la del *noticing* en dicho contexto, se explican las limitaciones que tiene este trabajo y se indican cuáles son las perspectivas de futuro, o sea, los posibles caminos que se pueden tomar a partir del presente trabajo para continuar ahondando en la comprensión de la competencia *noticing* del formador de matemáticas y su didáctica de futuros maestros de Educación Primaria.

En último término, este documento presenta en su parte final todas las referencias bibliográficas empleadas, así como un gran número de anexos, que ayudarán a entender mejor el estudio, y un breve resumen, tanto en español como en inglés, del contenido de la investigación.

Capítulo 2

Marco teórico

2. MARCO TEÓRICO

El propósito que persigue esta investigación no es sino el de dilucidar cómo es la competencia *noticing* de los formadores de matemáticas y su didáctica de futuros maestros de Educación Primaria, por lo que las principales bases teóricas del estudio giran en torno a dos conceptos: el de *noticing* y el de *formador*. En consecuencia, en este segundo capítulo se exponen ambos términos, además de precisar la definición que de estos asumimos en la tesis, y se presenta la escasa literatura existente que aborda su intersección.

2.1. La competencia *noticing*

El vocablo *noticing* deriva de la palabra *notice*, cuyo significado, según una de las definiciones que proporciona el diccionario de la Universidad de Cambridge (s. f.), es el de «to see or become conscious of something or someone». Asimismo, dicho infinitivo se puede traducir al español como «notar», cuyo significado, atendiendo a lo contemplado en el diccionario de la Real Academia Española (s. f.), se corresponde con el de «reparar, observar o advertir» o «percibir una sensación o darse cuenta de ella» —segunda y tercera acepción—. Por lo tanto, desde una perspectiva general, las acciones asociadas al término de *noticing* las llevamos a cabo frecuentemente en el día a día (Dindyal *et al.*, 2021), ya que es habitual que a lo largo de una jornada nos fijemos en multitud de hechos que tienen lugar a nuestro alrededor. Sin embargo, en esta tesis abordamos el concepto de *noticing* desde un punto de vista técnico, entendiendo que constituye un elemento fundamental de la competencia profesional docente (Santagata *et al.*, 2021), resultando particularmente relevante en el ámbito de la educación matemática (Van Es y Sherin, 2021). En este sentido, la competencia *noticing* no es igual que en la vida cotidiana, sino que se convierte en una práctica con un carácter intencional (Mason, 2002) que abarca los procesos a través de los cuales los profesores han de gestionar la información que se les presenta durante el acto de enseñanza (Sherin *et al.*, 2011b). Así pues, con este enfoque, dicha competencia recibe la denominación de *teacher noticing* o de *professional noticing* —la de «mirada profesional», en español—, entre otras —según el planteamiento de cada autor—, o sencillamente, y de forma general, la de *noticing*, que es la que empleamos por simplicidad en este estudio.

2.1.1. Génesis

El desarrollo del *noticing* como construcción teórica se ha producido esencialmente durante el s. XXI (Bastian *et al.*, 2022) y continúa en evolución en la actualidad. Empero, existe literatura que se remonta a la primera década del pasado siglo en la que es posible reconocer ideas que guardan cierta relación con el concepto de *noticing* que conocemos hoy en día, como es el caso del trabajo de Dewey (1904), *The relation of theory to practice in education*, en el que se plantea la noción de «atención interna» de los estudiantes —entre otras cuestiones—. Este tipo de atención se vincula con el pensamiento del alumno, o sea, con los procesos mentales que activa ante una situación dada, por lo que no tiene por qué ser apreciable en su comportamiento, a diferencia de la «atención externa», que sí muestra su reflejo en las posturas o en la actitud física del sujeto. A este respecto, el profesor tiene el cometido de detectar los signos de presencia o de ausencia de la atención interna de sus estudiantes y de saber cómo ha comenzado y si se mantiene en el tiempo, así como de ser capaz de distinguir ambas clases de atención (Dewey, 1904). Por consiguiente, dado que dicho estudio pone de relieve la importancia de conocer qué y cómo notan los docentes en relación, en esta ocasión, con el razonamiento del alumnado (Erickson, 2011), podemos concebirlo como un primer sustento del *noticing* (Haubert, 2017).

Tras la Segunda Guerra Mundial, el interés de las investigaciones sobre el profesor pasó a centrarse principalmente en las acciones de este en clase más que en lo que pudiera percibir durante su práctica de enseñanza, no siendo hasta los años sesenta y principios de los setenta cuando el pensamiento del profesor recuperaría el protagonismo perdido (Erickson, 2011). Así es que, en la década de los ochenta, encontramos de nuevo ideas que podrían constituir el germen del *noticing*, como el trabajo de Erickson *et al.* (1986), titulado *Teachers' practical ways of seeing and making sense*, en el cual se analiza —a través de varios estudios de caso— cómo observan e interpretan los maestros de Educación Primaria los sucesos que acontecen a diario en el aula. Aunque el estudio no hace alusión a la noción de *noticing* como constructo, es clara su conexión con esta si atendemos a los aspectos en los que pone el foco, como son examinar si la manera en la que los maestros observan e interpretan evoluciona a lo largo del tiempo o comprobar si su experiencia docente tiene algún tipo de influencia en tales habilidades (Erickson *et al.*, 1986), entre otros. Por tanto, se puede decir que este es uno de los trabajos primigenios sobre *noticing* —como el propio autor indicaría más tarde (Erickson, 2011)— en el ámbito educativo en general.

Poco después, Goodwin (1994) publica su artículo *Professional vision*, concepto con el que hace referencia a las distintas formas de ver y de comprender acontecimientos que son propias de cada grupo social o profesional y que se articula en tres prácticas básicas: *coding*, *highlighting* y *producing and articulating material representations*. Si nos fijamos en las dos primeras, que consisten en transformar el entorno en categorías o eventos relevantes para un grupo de profesionales dado, la primera, y en el empleo de métodos que permitan resaltar dichos eventos, la segunda, advertimos un nexo evidente con el *noticing*, pues en ambos casos subyace la percepción deliberada. Así pues, teniendo en cuenta que la idea de *professional vision* adquiere sentido en una comunidad en la que sus miembros llevan a cabo una misma práctica en contextos en los que los estímulos perceptuales son complejos (Goodwin, 1994), podemos considerar que los docentes, como integrantes de un grupo en el que se desempeñan actividades semejantes, tienen un modo propio o característico de notar cuando participan del proceso de enseñanza (Sherin, 2007), así como que las aulas suponen el escenario ideal —por las intrincadas interacciones que en ellas se dan— en el que estudiar de qué forma los profesores observan e interpretan los hechos que detectan (Dindyal *et al.*, 2021). Por todo ello, la noción de *professional vision*, aunque inicialmente se estudia en los ámbitos de la excavación arqueológica y de la argumentación jurídica —en el citado artículo—, puede extrapolarse al campo de la educación y al de la enseñanza de las matemáticas, además de considerarse como un elemento precursor más del *noticing*.

Tanto es así que, ya en el comienzo de esta centuria, las ideas de Goodwin (1994) entroncan directamente con el terreno de la educación matemática en la publicación de Sherin (2001), *Developing a professional vision of classroom events*, quien, si bien no establece una definición manifiesta del concepto de *professional vision*, sí evidencia que lo entiende como una práctica o habilidad del profesor que abarca la detección y la interpretación de eventos relevantes —a los que se refiere como *call-outs* (Frederiksen, 1992)— asociados a las interacciones que ocurren en el aula. Además, en dicho trabajo se examinan algunos componentes que configuran la competencia *professional vision* de los profesores y de los investigadores en el marco de la enseñanza de las matemáticas y se señalan factores que influyen en su desarrollo, como son el rol asumido en el aula —profesor, investigador—, el medio a través del cual se observa —mediante grabaciones de vídeo, en directo— o las estrategias utilizadas para detectar e interpretar eventos relevantes que suceden en clase (Sherin, 2001). Así pues, este es uno de los primeros estudios sobre *noticing* encuadrado en la enseñanza de las matemáticas.

Un año después, Van Es y Sherin (2002) publican *Learning to notice: scaffolding new teachers' interpretations of classroom interactions*, un artículo en el que se examina cómo un conjunto de profesores de matemáticas y de ciencias de Educación Secundaria aprende a detectar e interpretar interacciones en el aula. Por ende, para estas autoras, tal y como se puede apreciar por lo expuesto hasta ahora en relación con los textos de Sherin (2001) y Van Es y Sherin (2002), las interacciones en clase, ya sean entre profesor y alumno o entre alumnos, suponen un elemento central en su modo de entender el *noticing*, sobre todo a raíz de la reforma educativa que por entonces se estaba implantando en Estados Unidos en el área de la educación matemática, la cual abogaba por una mayor interacción entre profesor y estudiante que permitiera al primero adaptar su práctica de enseñanza —en el momento en el que esta se produce— en función de las ideas aportadas por el segundo (National Council of Teachers of Mathematics, 2000). Así pues, estructuran su noción de *noticing* —constructo al que suelen referirse como *teacher's professional vision*, sobre todo a lo largo de la primera década del s. XXI— en tres procesos: detectar lo que es importante en una situación de enseñanza o interacción, establecer conexiones entre los eventos que se han señalado y principios generales de enseñanza y aprendizaje y emplear lo que uno conoce sobre el contexto de la situación para razonar acerca de ella (Sherin y Van Es, 2005; Van Es y Sherin, 2002, 2008, 2010). No obstante, es posible reorganizar estos procesos en dos aspectos esenciales (Sherin, 2007, 2017; Sherin y Van Es, 2009; Van Es y Sherin, 2021): *attending* o *selective attention*, esto es, identificar eventos relevantes —primer proceso—, e *interpreting* o *knowledge-based reasoning*, es decir, interpretar los eventos relevantes vistos —segundo y tercer proceso—. Para promover el aprendizaje de los profesores del estudio (Van Es y Sherin, 2002), es decir, su mejora de la competencia *noticing*, se les proveyó de una herramienta informática creada *ad hoc* que les ayudaba a analizar su propia práctica docente a través de vídeos centrando su atención principalmente en el pensamiento del alumno, el rol del profesor y el discurso (Sherin y Van Es, 2005; Van Es y Sherin, 2002). Y, por otro lado, para poder examinar la posible evolución de los mismos, las investigadoras elaboraron una trayectoria con cuatro niveles de desarrollo en el aprendizaje del *noticing* (Van Es y Sherin, 2002). En suma, estas autoras lo que proponen es un planteamiento de la competencia *noticing* enfocado al desarrollo profesional que se centra en la detección e interpretación de eventos relevantes en el aula de matemáticas, con las interacciones como eje, que ha dado en denominarse *Learning to notice framework* (Van Es y Sherin, 2002, 2008) y que sigue en desarrollo (Van Es y Sherin, 2021), como se expondrá ulteriormente.

En paralelo al trabajo de Van Es y Sherin (2002), Mason (2002) presenta *Researching your own practice: the discipline of noticing*, un libro en el que desarrolla de un modo vasto y pormenorizado su visión sobre el *noticing*, la cual no se constriñe a la esfera educativa, sino que se extiende allende los límites de la idea de *teacher noticing*, es decir, del *noticing* como competencia docente (Dindyal *et al.*, 2021). En esta obra se introduce la noción de *intentional noticing*, que implica la observación o percepción con una actitud intencional —aunque influida notablemente por los focos de atención provocados por el contexto— como una práctica profesional que permite aprender de la experiencia desde un enfoque basado en la indagación, el cual habrá de posibilitar una mejora de la sensibilidad para percibir distintos aspectos de la propia práctica y poder fundamentar las prácticas futuras (Mason, 2002), actuando de maneras nuevas cuando sea necesario en sustitución de otras que puedan resultar más rutinarias o habituales (Mason, 2011). A este respecto, distingue dos procesos en el *noticing*: uno que consiste en describir el evento detectado de la forma más objetiva posible, sin incluir juicios, evaluaciones o explicaciones —*account of*—, y otro que se encarga de aportar explicaciones, reflexiones o interpretaciones sobre aquello que se ha señalado —*account for*— (Mason, 2002). A partir de estos dos procesos, será posible formular acciones alternativas que mejoren la práctica ordinaria (Mason, 2011). Este autor propone, asimismo, tres niveles de intensidad en cuanto al proceso de *account of*, a saber: *ordinary-noticing*, *marking* y *recording*. En el primero, uno es capaz de percibir hechos, pero estos se desvanecen rápidamente de la memoria, por lo que solo se reconstruyen a partir de lo que otra persona pueda decir sobre ellos; en el segundo, no solo es posible detectar eventos, sino también mencionarlos con posterioridad sin ayuda externa —la relevancia de lo detectado hace que permanezca en el recuerdo—; y en el tercero, amén de lo anterior, se deja constancia de lo que se ha notado —por escrito, usualmente—, por lo que siempre cabrá la opción de tener acceso a dicha información en el futuro (Mason, 2002, 2011). No obstante, si bien los profesores suelen notar diversos tipos de eventos mientras enseñan matemáticas —o cualquier otra disciplina—, es difícil que lo hagan en el último de los tres niveles, aunque es posible que desarrollen su habilidad y su energía en pos de una mejora en este sentido (Mason, 2011). Además, señala que es especialmente conveniente que los docentes estimulen su atención «micro» —frente a la «macro» y la «meso»—, puesto que esta, al orientarse hacia el discernimiento de detalles y el reconocimiento de relaciones y de propiedades, propicia que experimenten un cambio en su percepción, así como en su forma de pensar y de razonar, en el mismo momento en el que se produce la instrucción

de la materia (Mason, 2017). En definitiva, y ante todo, para este investigador, conocido como el «padre del *noticing*» de forma coloquial (Amador *et al.*, 2021) —presumiblemente por ser el primero en usar dicho término en referencia al constructo como tal y en escribir un libro al respecto—, el *noticing* entraña un método sistemático para investigar en torno a la práctica de uno mismo (Mason, 2021).

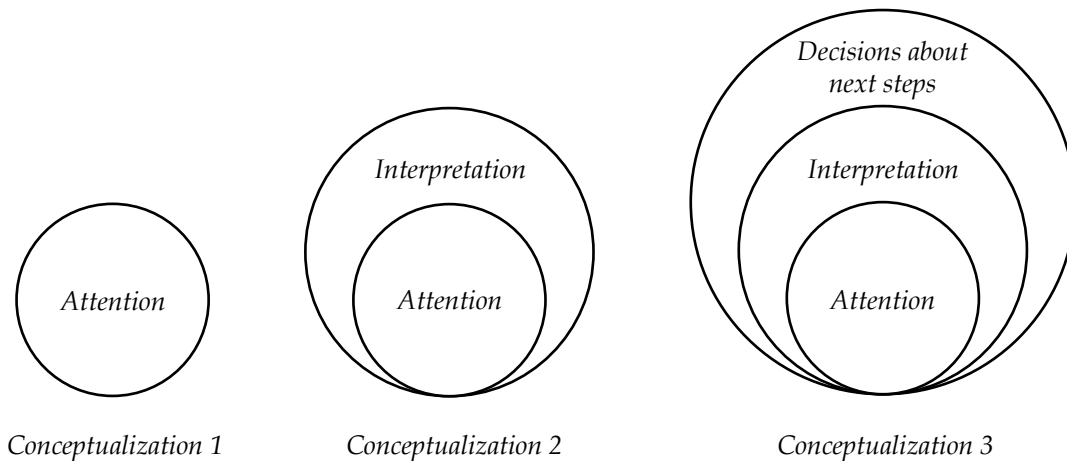
Más adelante, Jacobs *et al.* (2010) introducen con su artículo, *Professional noticing of children's mathematical thinking*, el término *professional noticing*. En este trabajo, tal y como señalan Dindyal *et al.* (2021), se continúa con el desarrollo de la idea de *professional vision* (Goodwin, 1994), pero con una perspectiva más extensa que la de Van Es y Sherin (2002), pues en este caso no se restringe la concepción de *noticing* a los procesos de identificación e interpretación de eventos, sino que, además, como también plantearía Mason (2011) en cierto sentido, se aborda la proposición de alternativas (Maluangnont, 2015). Por lo tanto, se entiende el concepto de *professional noticing* como una competencia del profesor que le permite llevar a cabo un conjunto de tres habilidades interrelacionadas durante el acto de enseñanza: identificar las estrategias usadas por los alumnos, interpretar la comprensión matemática de estos y decidir cómo responder en función de dicho entendimiento. Tales procesos ponen el foco en el pensamiento matemático de los discentes, siendo este aspecto el núcleo de la competencia *professional noticing* (Jacobs *et al.*, 2010), cuyo planteamiento se conoce como *Professional noticing framework*.

En resumen, a través del recorrido temporal descrito en los párrafos previos, lo que se ha pretendido es poner de relieve algunas de las ideas originarias que han dado forma al *noticing*, así como varios ejemplos de los primeros y más relevantes trabajos sobre dicho constructo, con la mirada puesta principalmente en la educación matemática. No obstante, es preciso apuntar que, dado el ingente conjunto de investigaciones realizadas alrededor del *noticing* (Bastian *et al.*, 2022), indudablemente otros muchos autores, desde diferentes enfoques y en distintos contextos, también han contribuido notablemente a su evolución (Dindyal *et al.*, 2021). Así pues, con todo lo recogido en las páginas precedentes se espera haber podido transmitir al menos dos ideas esenciales: que el *noticing* es una competencia profesional docente y que la «percepción» es un elemento común a los diversos modos de entender el *noticing*. En lo que se refiere a la primera idea, cabe remarcar que, si bien las acciones asociadas al *noticing* como concepto general están presentes frecuentemente en cualquier situación diaria (Philipp *et al.*, 2014) —como ya subrayamos—, como constructo

se considera parte integral de las competencias del profesor (Kaiser *et al.*, 2017), y no solo del profesor de matemáticas, sino del de cualquier otra materia. En este sentido, aunque el *noticing* se erige como construcción teórica básicamente en el ámbito de la enseñanza de las matemáticas —como resultado de la escritura a lo largo de más de dos décadas de una plétora de artículos, incluyendo un número completo en el volumen 53 de la revista *ZDM-Mathematics Education*, y de algunos libros (*v. gr.*, Schack *et al.*, 2017; Sherin *et al.*, 2011a)—, es posible hallar igualmente estudios sobre *noticing* acerca de otras disciplinas (Amador *et al.*, 2021), tales como las ciencias (*v. gr.*, Chan *et al.*, 2021; Luna y Sherin, 2017), la educación física (*v. gr.*, Reuker, 2017) o la sanidad (*v. gr.*, Clement *et al.*, 2023), por citar algunas. Y en lo que respecta a la segunda idea, pese a que los distintos investigadores no mantienen una misma postura en cuanto al alcance de la noción de *noticing*, pues algunos son más restrictivos que otros acerca de los elementos que la constituyen —incluyendo o no la interpretación de eventos o la propuesta de alternativas—, el componente presente en todas las concepciones es el de la «percepción» (Stahnke *et al.*, 2016). Esta variedad de posicionamientos es la que da lugar a las distintas conceptualizaciones de la competencia, cuestión abordada en el apartado que subsigue.

2.1.2. Conceptualizaciones

El *noticing* es un constructo que actualmente sigue en desarrollo y que no cuenta con una única definición compartida por todos los investigadores que realizan estudios al respecto (Amador, 2020a; Jacobs, 2017). No obstante, tal y como apunta Rassi (2020), sí es frecuente en la literatura —y parece haber consenso en ello— organizar las distintas conceptualizaciones en función de la inclusión —o exclusión— en ellas de los elementos que comúnmente se vinculan con la noción de *noticing*, esto es, la percepción de eventos referidos a diversos aspectos del proceso de enseñanza-aprendizaje, la interpretación de tales eventos y la formulación de respuestas con base en las interpretaciones realizadas (Jacobs, 2017; Jacobs y Spangler, 2017; Sherin *et al.*, 2011b; Sherin, Russ y Colestock, 2011). De esta manera, principalmente son tres las definiciones que encontramos del concepto que nos ocupa —si bien los distintos autores que adoptan una misma conceptualización introducen en ella diferentes matices, complementando desde sus sensibilidades teóricas la definición asumida—, tal y como se desarrolla a continuación.

Figura 2.1. Tres conceptualizaciones de *teacher noticing* (Jacobs y Spangler, 2017).

La primera conceptualización es la que entiende que el *noticing* abarca solamente la detección de eventos o sucesos. Investigadores como Star y Strickland (2008), unos de los representantes más destacables de este planteamiento –en el que posteriormente se han fundamentado distintos estudios (*v. gr.*, Fadde y Sullivan, 2013; Star *et al.*, 2011)–, conciben el *noticing* como la identificación de lo que resulta relevante en una situación de clase, interesándose por lo que capta la atención de los profesores, así como por aquello que estos no detectan o indican (Fadde y Sullivan, 2013; Star y Strickland, 2008). En este sentido, los distintos autores que abogan por esta definición sostienen la adecuación de no incorporar la interpretación de eventos al constructo –y, por consiguiente, tampoco la formulación de respuestas en relación con ellos– arguyendo que con la inserción de más componentes se podría correr el riesgo de extender tanto su alcance que se entorpeciera el propósito final del investigador de comprender la práctica de enseñanza del profesor (B. Sherin y Star, 2011). Por tanto, esta conceptualización de *noticing* como construcción teórica es la más restrictiva, dado que únicamente integra uno de los tres elementos que señalamos con anterioridad.

La segunda conceptualización de *noticing* comprende la identificación de eventos, así como su interpretación, abogando por este posicionamiento un considerable número de investigadores (*v. gr.*, Colestock y Sherin, 2009; Goldsmith y Seago, 2011; Sherin, 2007; Sherin y Van Es, 2005, 2009; Teuscher y Switzer, 2018; Van Es, 2011; Van Es, Cashen *et al.*, 2017; Van Es y Sherin, 2002, 2008, 2010). Destacan en particular los estudios de Van Es y Sherin (2002, 2008) por sentar las bases de esta postura y por haber sido un referente para los trabajos que desde entonces se han llevado a cabo con esta orientación. Por otro lado,

en relación con la inclusión de la interpretación de eventos en esta definición, la decisión se justifica, entre otros motivos, por la habitualidad de que tanto la percepción de eventos relevantes como la enunciación de interpretaciones referidas a estos se presenten como elementos concomitantes cuando los profesores analizan un proceso de enseñanza dado (Sherin y Russ, 2014), así como porque a menudo se antoja prácticamente imposible para los investigadores discernir qué hechos indicados o realizados por el docente habrían de considerarse como eventos y cuáles como interpretaciones (Sherin, 2017), dificultad que han expuesto también otros autores, evidenciando la estrecha relación que existe entre ambos componentes del *noticing* (B. Sherin y Star, 2011; Castro-Superfine *et al.*, 2017). No obstante, esta decisión no se sustenta solamente en trabajos empíricos, sino que se toma además con base en estudios teóricos que apoyan la vinculación de la percepción con la interpretación (Sherin, 2017). Y en lo que se refiere a la no incorporación de la propuesta de respuestas o decisiones a partir de las interpretaciones, si bien los investigadores que sí incluyen este tercer elemento en el concepto de *noticing* lo hacen argumentando que los tres procesos —identificar, interpretar y decidir cómo responder— ocurren casi de forma simultánea (Jacobs *et al.*, 2010), los investigadores que excluyen la tercera pieza del puzle lo hacen generalmente por la carestía de estudios teóricos que respalden la integración de la toma de decisiones en modelos de percepción, aduciendo que no es suficiente la mera concomitancia de elementos para proceder a la ampliación del constructo (Sherin, 2017). Así pues, esta segunda conceptualización aborda un aspecto más que la anterior.

La tercera conceptualización de *noticing* engloba la identificación de eventos y su interpretación, así como la formulación de respuestas referidas a los eventos con base en las interpretaciones realizadas. El principal trabajo que abre camino a esta perspectiva es el de Jacobs *et al.* (2010), a partir del cual otros autores han realizado más estudios en una línea similar, o sea, atendiendo a los tres procesos que integran la competencia desde esta visión (*v. gr.*, Amador y Carter, 2018; Amador, Estapa *et al.*, 2017; Fernández y Choy, 2020; Fernández *et al.*, 2018; Ivars *et al.*, 2020; Jacobs *et al.*, 2011; Kazemi *et al.*, 2011; Krupa *et al.*, 2017; Santagata, 2011; Schack *et al.*, 2013). En este caso, la elección de incluir en el *noticing* la decisión de cómo responder ante un evento es defendida por los autores no solamente por la simultaneidad de los tres procesos —como ya comentamos—, sino también por las aportaciones hechas por otros investigadores que sostienen que la atención selectiva del profesor viene determinada por la consideración de las acciones educativas que luego se han de tomar (Erickson, 2011) y que integran la proposición de estrategias de enseñanza

alternativas en el proceso de dar sentido a las acciones del profesor (Santagata *et al.*, 2007), aspectos que abonan el alcance de esta tercera definición de *noticing* (Jacobs *et al.*, 2010), la de mayor envergadura de las tres presentadas.

En definitiva, estas conceptualizaciones son las que de manera esencial modelan la noción actual de *teacher noticing* en el ámbito de la educación matemática, definiciones que —en la inmensa mayoría de los estudios en los que se asumen— quedan contenidas en lo que se conoce como *in-the-moment noticing*, esto es, se asocia el *noticing* a un cierto sentido de inmediatez, por lo que solo los análisis que el profesor aporta —percepción de eventos, interpretación de estos o propuesta de respuestas— durante el transcurso de la situación de enseñanza o de aprendizaje que está observando, o en un tiempo relativamente breve tras la misma, se consideran consustanciales al *noticing* (Jacobs y Spangler, 2017; Jessup, 2018; Sherin, 2017; Stockero *et al.*, 2017). Asimismo, cabe poner de manifiesto que se han realizado investigaciones en las que se ha atendido a distintas combinaciones de los tres elementos que aparecen en las diversas definiciones —sin examinar necesariamente todos los componentes de la definición adoptada—, poniendo el foco solamente en uno de los elementos, en dos o en el conjunto de los tres (Stahnke *et al.*, 2016). Con todo, la evolución del constructo de *noticing* ha continuado a lo largo de los últimos años y se han llevado a cabo múltiples estudios que han ampliado los límites del concepto o que han modificado su perspectiva (Dindyal *et al.*, 2021; López, 2021; Sherin, 2017), siendo algunos de dichos trabajos los que se explican sucintamente en los siguientes párrafos.

Entre los autores que han expandido el constructo de *noticing* podemos encontrar, por ejemplo, a Amador, Males *et al.* (2017) y a Dietiker *et al.* (2018), quienes proponen un nuevo tipo de *noticing* que denominan *curricular noticing*. Lo definen como el modo en el que los profesores dan sentido a la complejidad de los contenidos y de las oportunidades pedagógicas en materiales curriculares (Amador, Males *et al.*, 2017) y se basa en cómo es entendida la competencia por Jacobs *et al.* (2010), por lo que el *curricular noticing* incluye un conjunto de tres fases interrelacionadas que se corresponden con detectar, interpretar y dar respuesta a distintos aspectos presentes en los materiales, dando lugar a un proceso de interacción entre el profesor y los materiales curriculares (Dietiker *et al.*, 2018). Cabe aclarar que por materiales curriculares entienden los libros de texto empleados en clase —en formato físico o digital—, las actividades matemáticas propuestas o los contenidos matemáticos a estudiar, entre otros (Amador, Males *et al.*, 2017; Dietiker *et al.*, 2018). De

este modo, esta nueva formulación teórica no solamente abre el campo de actuación del *noticing* a los mencionados materiales, sino que, además, al plantear que los procesos que configuran el *curricular noticing* pueden ejecutarse no solo durante la propia instrucción, sino antes y después de la misma también (Dietiker *et al.*, 2018), se produce una variación considerable en la forma en la que se había concebido el *noticing* hasta este momento, ya que su alcance ahora no lo restringen a las interacciones que los profesores tienen con los estudiantes durante el momento en el que se desarrolla el acto de enseñanza-aprendizaje (Sherin, 2017), a diferencia de las tres conceptualizaciones explicadas anteriormente.

En otros trabajos también se deja de circunscribir el *noticing* solo al momento en el que acontece la instrucción, como en los realizados por Choy (2016), Choy *et al.* (2017) y Choy y Dindyal (2021), en los que se aborda lo que denominan *productive noticing*, noción ligada a la planificación de clases, a su implementación y a la revisión posterior de estas (Choy, 2016; Choy *et al.*, 2017). Estos autores manifiestan que a menudo los profesores no son capaces de centrar su atención en aspectos que realmente sean productivos, es decir, que permitan actuar en favor del desarrollo del pensamiento matemático de los alumnos (Choy y Dindyal, 2021), por lo que se plantean que es menester desarrollar un marco que ayude a los docentes a notar de un modo que redunde en unas prácticas más productivas —*FOCUS framework*— y señalan dos características principales del *productive noticing*. En primer lugar, la dirección de la atención de los profesores hacia la percepción de aspectos vitales de la enseñanza de las matemáticas, sugiriendo tres aspectos esenciales en los que fijarse —fundamentados en el *Three points framework* (Yang y Ricks, 2012)—: los conceptos matemáticos clave a enseñar, las dificultades que puedan tener los estudiantes en torno a estos y las acciones a efectuar para enseñarlos mitigando tales dificultades (Choy, 2016; Choy *et al.*, 2017). Y, en segundo lugar, la alineación de estos tres aspectos, o sea, que las acciones realizadas por el profesor aborden realmente la dificultad de los alumnos con el contenido en cuestión, para lo cual normalmente es preciso que medie el razonamiento didáctico del docente, es decir, la justificación de las decisiones tomadas con base en las interpretaciones realizadas sobre el hecho detectado acerca del pensamiento matemático del discente (Choy, 2016; Choy y Dindyal, 2021). Así pues, conectando la planificación o el diseño de lecciones con el concepto de *noticing*, estos autores amplían las ocasiones en las que es posible poner en práctica la competencia *noticing* y recalcan —en consonancia con Mason (2002, 2011)— que la preparación de los profesores previa a la instrucción y su análisis posterior contribuyen a que su *noticing* sea más productivo (Choy, 2016).

Por otro lado, Domínguez (2019, 2021) hace hincapié en la idea de que el *noticing* constituye una práctica relacional y acuña la denominación de *reciprocal noticing*. Este tipo de *noticing* es entendido como una práctica relacional a través de la cual el profesor y los alumnos intercambian sus roles de conocedores reconociéndose mutuamente el *noticing* de cada uno cuando estudian un concepto matemático (Domínguez, 2019). Expresado de otra manera: se considera que el *noticing* es un proceso recíproco porque lo hacen efectivo tanto el profesor como los alumnos en una interacción, de tal forma que aquello que diga y note el docente se verá influenciado por lo que enuncie y note el alumnado y viceversa (Mason, 2016) — en un ciclo que se itera durante la interacción —, dando lugar el canje de papeles como conocedores — emisores de conocimiento — al aprendizaje de ambas partes (Domínguez, 2019), es decir, al entendimiento profundo del contenido en cuestión (Davis y Sumara, 2005). Por tanto, este autor aporta una visión más dialógica del constructo que presta mayor atención a la naturaleza de las relaciones en el aula (Dindyal *et al.*, 2021).

Los estudios presentados, que aportan nuevos tipos de *noticing* — *curricular noticing*, *productive noticing* y *reciprocal noticing* —, son solo algunos ejemplos que dan cuenta de la evolución que la construcción teórica de *noticing* sigue experimentando en la actualidad, siendo posible encontrar otros muchos trabajos que modifican en mayor o menor medida la definición de *noticing* o que se aproximan al constructo desde variados e innovadores planteamientos (*v. gr.*, Castro-Superfine *et al.*, 2017; Jazby, 2020, 2023; Jazby *et al.*, 2023; Kaiser *et al.*, 2015; König *et al.*, 2014; Scheiner, 2016; Stockero *et al.*, 2017; Tran y Wright, 2017). En este sentido, dada la gran diversidad en la literatura con relación al concepto de *noticing* ocasionada por el desarrollo de nuevas conceptualizaciones (Dindyal *et al.*, 2021; Stockero *et al.*, 2017), son varios los artículos que presentan revisiones bibliográficas para tratar de arrojar luz sobre las diferentes conceptualizaciones del constructo, los enfoques desde los que estas se plantean, las distintas metodologías empleadas o los contextos en los que se ha estudiado dicha competencia (*v. gr.*, Amador *et al.*, 2021; Dindyal *et al.*, 2021; König *et al.*, 2022; López, 2021; Santagata *et al.*, 2021), artículos que, a fin de cuentas, ponen de relieve — entre otros aspectos — la falta de consenso en la definición y en el estudio del *noticing* entre los investigadores (Amador, 2020a). Esta variedad de conceptualizaciones y de posturas, si bien puede tener ciertos beneficios, dado que distintos modelos pueden complementarse los unos a los otros (Jazby, 2023), no es menos cierto que también puede suscitar dudas acerca de la claridad del *teacher noticing* (Jacobs y Spangler, 2017).

En cualquier caso, a pesar de las disensiones acerca de la definición del constructo, lo que sí es posible percibir con claridad en los distintos trabajos que abordan su estudio es que el desarrollo de la competencia *noticing* busca ayudar a los profesores a ejercer una enseñanza más eficaz y, a la postre, mejorar el aprendizaje y las experiencias en el aula de los alumnos (Larison *et al.*, 2024; Van Es y Sherin, 2021), sin perjuicio del enfoque teórico adoptado o de la aproximación metodológica que se asuma, aspecto —este último— que se trata brevemente en el siguiente apartado.

2.1.3. Aproximaciones metodológicas

Al igual que ocurre con las conceptualizaciones de *teacher noticing*, tampoco existe unicidad en relación con la forma de estudiarlo, siendo posible encontrar en la literatura de los últimos lustros un amplio abanico de procedimientos dirigidos a la exploración de tal competencia, los cuales están condicionados en ocasiones por la definición de *noticing* adoptada (Sherin *et al.*, 2011b). Asimismo, el centro de interés del estudio del constructo, es decir, el propósito particular que se persiga, supone también un elemento que guarda una estrecha relación tanto con la conceptualización como con los métodos en los que se sustenta la investigación, por lo que, antes de proceder a examinar los diferentes aspectos que configuran las diversas aproximaciones metodológicas, indicamos algunos de dichos centros de interés de manera concisa a continuación.

Las múltiples publicaciones sobre *noticing* en el campo de la educación matemática abordan su estudio interesándose por distintos aspectos de la competencia (Dindyal *et al.*, 2021; Jacobs y Spangler, 2017; Rassi, 2020; Sherin *et al.*, 2011b). Por un lado, si atendemos al calibre del foco con el que se examina el *noticing* del profesor, algunos trabajos centran su atención esencialmente en un único asunto o tema, como es el caso de aquellos que se focalizan en el pensamiento matemático de los alumnos (*v. gr.*, Amador, Carter *et al.*, 2017; Fernández *et al.*, 2018; Jacobs *et al.*, 2010; Jacobs *et al.*, 2011; Jazby *et al.*, 2023; Krupa *et al.*, 2017; Schack *et al.*, 2013; Simpson y Haltiwanger, 2017; Teuscher *et al.*, 2017; Van Es, 2011) o en ideas matemáticas clave (*v. gr.*, Callejo y Zapatera, 2017; Ding y Domínguez, 2016; Fernández *et al.*, 2013; Fisher *et al.*, 2019; Pouta *et al.*, 2021; Sánchez-Matamoros *et al.*, 2015; Schifter, 2011; Walkoe, 2015; Zapatera y Callejo, 2013) —sin ser estos bloques excluyentes entre sí—, mientras que otros abarcan un rango más extenso de los eventos que notan los

profesores (*v. gr.*, Huang y Li, 2012; Osmanoğlu *et al.*, 2015; Sherin, Russ y Colestock, 2011; Star *et al.*, 2011; Star y Strickland, 2008; Van Es y Sherin, 2002), teniendo además en cuenta, por ejemplo, el papel del docente y su discurso, las interacciones entre este y los alumnos, la gestión de la clase o las características físicas del aula. A este respecto, tal y como señala Rassi (2020), a partir de 2010 predominan los estudios centrados en el *noticing* del profesor acerca del pensamiento matemático de los alumnos, así como —en menor medida— sobre entornos de aprendizaje equitativos (*v. gr.*, Fernandes, 2012; Hand, 2012; Louie *et al.*, 2021; Turner *et al.*, 2012; Van Es, Hand y Mercado, 2017; Wager, 2014). Por otro lado, otro de los aspectos que guardan relación con el centro de interés de un estudio de *noticing* es el nivel educativo en el que este se sitúa, de tal modo que podemos encontrar trabajos orientados a analizar el *noticing* de maestros de Educación Infantil (*v. gr.*, Anantharajan, 2020; Callejo *et al.*, 2022; Haubert, 2017; Moreno *et al.*, 2021; Sánchez-Matamoros *et al.*, 2021), maestros de Educación Primaria (*v. gr.*, Amador y Carter, 2018; Callejo y Zapatera, 2017; Fernández *et al.*, 2013; Schack *et al.*, 2013; Van Es y Sherin, 2008), profesores de Educación Secundaria (*v. gr.*, Karsenty, 2018; Krupa *et al.*, 2017; Simpson y Haltiwanger, 2017; Star y Strickland, 2008; Teuscher y Switzer, 2018) o profesores de niveles superiores —como, por ejemplo, de enseñanzas universitarias o en contextos de formación permanente del profesorado— (*v. gr.*, Amador, 2016, 2020b, 2022; Kazemi *et al.*, 2011; Klymchuk y Thomas, 2011), siendo los trabajos centrados en Educación Primaria y en Educación Secundaria la gran mayoría, resultando muy complicado hallar investigaciones sobre el *noticing* del profesor en otros niveles educativos (Stahnke *et al.*, 2016). Igualmente, el propósito de los distintos estudios puede estar ligado a la competencia de futuros docentes, es decir, de sujetos que aún están estudiando para ser profesores —*pre-service/prospective teachers*— (*v. gr.*, Callejo *et al.*, 2022; Castro-Superfine *et al.*, 2017; Schack *et al.*, 2013; Star *et al.*, 2011; Walkoe, 2015) o a la de profesores que ya se encuentran en ejercicio —*in-service/practicing teachers*— (*v. gr.*, Dyer y Sherin, 2016; Karsenty y Arcavi, 2017; Larison *et al.*, 2024; Van Es, Hand y Mercado, 2017; Wager, 2014). En este sentido, algunos trabajos se interesan por las diferencias existentes entre el *noticing* de profesores noveles y el de profesores expertos, prestando atención, por lo tanto, a la influencia de la experiencia docente en la competencia *noticing* (*v. gr.*, Bastian *et al.*, 2022; Huang y Li, 2012; Jacobs *et al.*, 2010; Pouta *et al.*, 2021; Stahnke y Blömeke, 2021). En suma, los distintos aspectos apuntados son solamente algunos de los que intervienen en la configuración de la intención de un trabajo sobre *teacher noticing*, los cuales guardan relación con la aproximación metodológica que se defina para examinar aquellos puntos

de interés establecidos en torno al constructo, cobrando forma dichas aproximaciones con base principalmente en los elementos que comentamos en los párrafos que subsiguen.

Sherin, Russ y Colestock (2011) identifican tres formas para estudiar el *noticing* de los profesores. La primera consiste en proveer a los docentes cuya competencia se quiere analizar de muestras de prácticas de enseñanza de otros profesores —con grabaciones de vídeo, por lo general— para que describan aquello que detectan (*v. gr.*, Fadde y Sullivan, 2013; Osmanoglu *et al.*, 2015; Sherin y Van Es, 2009). La principal ventaja de esta primera alternativa es que posibilita comparar el *noticing* de varios sujetos al observar una misma situación de enseñanza-aprendizaje sobre la que tienen la misma información, mientras que, como inconveniente, se da la circunstancia de que no poseen el conocimiento sobre el contexto con el que sí cuenta el profesor cuya acción se observa (Jacobs y Spangler, 2017; Sherin, Russ y Colestock, 2011). La segunda forma plantea que los profesores analicen su propia práctica de enseñanza, normalmente tras esta, bien sin apoyo audiovisual, bien a partir de grabaciones de vídeo de la misma (*v. gr.*, Ainley y Luntley, 2007; Amador, Carter *et al.*, 2017; Van Es y Sherin, 2008). Este planteamiento tiene el beneficio de que los sujetos tienen mucha información sobre el contexto de la instrucción —pues se trata de su propia clase— (Jacobs y Spangler, 2017), pero puede provocar que, si no se dispone de algún tipo de apoyo que permita al docente recordar el acto de enseñanza, las reflexiones sobre este adolezcan de cierta imprecisión acerca de lo que se notó en los distintos momentos de su transcurso (Sherin, Russ y Colestock, 2011). Y la tercera opción —que estaría enmarcada en la anterior, puesto que se ocupa del *noticing* de un profesor sobre su propia práctica— propone no contar con los comentarios del sujeto sobre el proceso de enseñanza, sino que sea el investigador quien, a partir de las acciones visibles del profesor, infiera el grado de *noticing* de este. Sin embargo, dadas las dificultades que entraña esta tercera alternativa, precisamente por tener que inferir lo que nota el profesor a raíz de lo que haga y diga a lo largo de una lección, es con diferencia la menos usada para investigar el *teacher noticing* (Jacobs y Spangler, 2017; Sherin, Russ y Colestock, 2011).

Otro aspecto que conforma la aproximación metodológica definida en un estudio sobre el constructo que nos ocupa tiene que ver con los medios usados para hacer emerger el *noticing* de los sujetos. Para dicho fin, se ha empleado una gran diversidad de recursos —entendidos como objetos o artefactos que se proveen al profesor sobre los que se realiza la acción de notar— en las distintas investigaciones (Rassi, 2020), siendo las grabaciones

de vídeo uno de los más habituales (*v. gr.*, Colestock y Sherin, 2009; Roth-McDuffie *et al.*, 2014; Star *et al.*, 2011; Van Es y Sherin, 2008; Wallin y Amador, 2019), pudiendo encontrar vídeos de fragmentos de lecciones o de lecciones al completo (Sherin *et al.*, 2011b) en los que se pone el foco en todos los integrantes de la clase, en un grupo reducido de la misma o en interacciones entre dos sujetos (Jacobs y Spangler, 2017). Otros de los recursos que se pueden identificar en los estudios son las tareas que realizan los estudiantes por escrito (*v. gr.*, Jacobs *et al.*, 2010; Monson *et al.*, 2020; Simpson y Haltiwanger, 2017), fotografías de partes del desarrollo de una clase (*v. gr.*, Oslund y Crespo, 2014), historietas creadas con programas informáticos que representan momentos o aspectos de una lección —a modo de viñetas de un cómic— (*v. gr.*, Chieu *et al.*, 2011) o transcripciones de situaciones de clase (*v. gr.*, Dreher y Kuntze, 2015; Scherrer y Stein, 2013), por citar algunos ejemplos (Jacobs y Spangler, 2017). Asimismo, con relación a esta cuestión —cómo hacer emerger el *noticing* de los profesores—, son dos principalmente las posturas que se pueden adoptar: por un lado, una que consiste en proporcionar al docente *inputs* o *prompts* de carácter amplio o general para posibilitar que aflore su *noticing*, los cuales suelen ser preguntas como, por ejemplo, «¿qué notas?» —lo que, centrándose en el uso de vídeos, Santagata *et al.* (2021) denominan *open-ended video viewing support*— (*v. gr.*, Stockero, 2008; Colestock y Sherin, 2009; Osmanoğlu *et al.*, 2015); y, por otro lado, otra que trata de guiar el *noticing* del sujeto mediante *inputs* o *prompts* de carácter específico, los cuales suelen ser preguntas acerca de aspectos concretos del proceso de enseñanza-aprendizaje dado o formularse como un set de categorías que estructuran qué y cómo ha de notar el profesor —lo que, centrándose en el uso de vídeos, Santagata *et al.* (2021) denominan *structured video viewing support*— (*v. gr.*, Star y Strickland, 2008; Mitchell y Marin, 2015; Walkoe y Levin, 2018). Estas dos posturas se desarrollan con más detalle en el marco metodológico cuando se explica qué entendemos por «*noticing* espontáneo» y «*noticing* inducido» —capítulo 3—.

Igualmente, es necesario plantearse cómo capturar la información que dé cuenta de la presencia de la competencia objeto de estudio, es decir, cómo recoger las reacciones que tienen los sujetos ante los artefactos que se les facilitan (Rassi, 2020). A este respecto, son múltiples las formas de proceder (Dindyal *et al.*, 2021; Jacobs y Spangler, 2017; Rassi, 2020; Sherin *et al.*, 2011b), pudiendo organizarlas básicamente en dos grupos atendiendo a si las reacciones se producen de forma oral o escrita. En el primer caso, la información sobre el *noticing* del profesor se obtiene a partir de sus comentarios hablados, los cuales suelen conservarse mediante grabaciones de audio o de vídeo —que a menudo luego se

transcriben — (v. gr., Larison *et al.*, 2024; Roth-McDuffie *et al.*, 2014; Van Es y Sherin, 2008), pudiendo surgir tales comentarios a raíz de, por ejemplo, instrucciones a seguir, tareas a realizar o entrevistas efectuadas por un investigador (v. gr., Amador, Carter *et al.*, 2017; Colestock y Sherin, 2009; Sherin y Van Es, 2009). Resulta especialmente interesante el uso de pequeñas cámaras portátiles para capturar el *noticing* de forma oral, ya que pueden ser portadas por el profesor cuya competencia se quiere estudiar —situándose en las gafas o en alguna prenda de vestir—, posibilitando grabar desde su perspectiva los eventos que considera más relevantes durante el desarrollo de su propia práctica de enseñanza —por lo general, se van guardando los treinta segundos de grabación previos a cada ocasión en la que el sujeto aprieta un botón en la cámara que porta— (v. gr., Estapa y Amador, 2016; Sherin, Russ y Colestock, 2011; Stockero, 2013). En el segundo caso, la información sobre el *noticing* del profesor se recopila a través de producciones escritas de este, que pueden surgir en respuesta a, por ejemplo, cuestiones que se le planteen sobre un artefacto dado (v. gr., Goldsmith y Seago, 2011; Ivars *et al.*, 2020; Monson *et al.*, 2020; Van Es y Sherin, 2002), un test con preguntas que incluyan posibles respuestas —verdadero/falso, opción múltiple— (v. gr., Star y Strickland, 2008) o la tarea de redactar un diario en el que dejar constancia de lo que se percibe cada día en el aula (v. gr., E. A. Davis, 2006; Teuscher *et al.*, 2017). Cabe decir que, a veces, las muestras escritas son recogidas mediante el empleo de herramientas informáticas diseñadas para posibilitar el análisis de vídeos (v. gr., Van Es y Sherin, 2002; Stockero y Rupnow, 2017; Walkoe, 2015) o en contextos virtuales en los que los docentes pueden interaccionar entre ellos con relación a un objeto dado (v. gr., Callejo *et al.*, 2008; Fernández *et al.*, 2012), pudiendo darse ambas circunstancias al mismo tiempo (v. gr., Larison *et al.*, 2024). Asimismo, otra manera de capturar el *teacher noticing* de forma escrita —que ha comenzado a desarrollarse en los últimos años— consiste en la creación de historietas por medio de la utilización de herramientas informáticas para representar los aspectos más relevantes detectados en una situación de enseñanza-aprendizaje dada —difiere este caso del citado en el párrafo anterior en que las viñetas son creadas por los propios sujetos para indicar lo que notan, mientras que, en el trabajo de Chieu *et al.* (2011), los profesores reciben las imágenes para comentarlas, no las crean— (v. gr., Amador *et al.*, 2016; Lee, 2021; Walkoe y Levin, 2018). Tal y como se puede apreciar, algunos modos de los citados para capturar el *teacher noticing* habrían resultado irrealizables otrora —en los primeros compases del desarrollo de la construcción teórica—, lo que evidencia la gran evolución tecnológica existente en las aproximaciones metodológicas para su estudio.

Por último, además de los elementos planteados, cabe decir que hay otros muchos aspectos que configuran la metodología que se decida implementar en un estudio, como son, por citar algunos, que se examine el *noticing* de los profesores de forma individual o como grupo —como indican Sherin *et al.* (2011b)—, que la participación de los sujetos sea individual, por parejas, en pequeños grupos o en grandes grupos, que se pretenda que la competencia de los docentes evolucione —a través de, por ejemplo, cursos de formación (Rassi, 2020), siendo comunes los *video clubs* (v. gr., Amador, 2021; Karsenty, 2018; Van Es y Sherin, 2008, 2010; Walkoe, 2015; Wallin y Amador, 2019), esto es, reuniones orientadas al desarrollo profesional de los profesores en las que estos observan y analizan vídeos de prácticas de enseñanza (Van Es, 2009)— o que simplemente se persiga examinarla en un momento concreto o, por supuesto, que se escoja un enfoque cualitativo, uno cuantitativo o una combinación de ambos —como apuntan Santagata *et al.* (2021)—.

En definitiva, los distintos aspectos tratados, entre otros, son los que dan forma a la aproximación metodológica, definiéndose el posicionamiento desde el que se examina el *noticing* a partir de la misma, así como a raíz de la conceptualización que se asuma.

2.1.4. La competencia *noticing* en este estudio

Tras haber expuesto la génesis del *noticing* y sus conceptualizaciones, así como los diferentes elementos que moldean las aproximaciones metodológicas para su estudio, en el presente apartado se plantea de forma breve cómo se entiende la competencia *noticing* en esta tesis, indicando la conceptualización adoptada y la metodología definida, si bien esta última se desarrolla con más extensión en el tercer capítulo del trabajo, es decir, en el marco metodológico.

En cuanto a la conceptualización, en la investigación hacemos uso de la planteada en segundo lugar en el apartado 2.1.2, o sea, de aquella que incluye tanto la identificación de eventos como su interpretación —pero no la toma de decisiones—, basándonos sobre todo en las ideas desarrolladas por Sherin y Van Es a lo largo de las dos últimas décadas a raíz del trabajo en el que presentaron su manera de entender el constructo de *noticing*, esto es, el *Learning to notice framework* (Van Es y Sherin, 2002). Estas autoras —tal y como se indicó en páginas previas— estructuran su noción de *noticing* en tres procesos, a saber:

identificar aquello que es relevante en una situación de enseñanza o interacción en el aula, establecer conexiones entre los eventos detectados y principios generales de enseñanza y aprendizaje y utilizar lo que uno conoce acerca del contexto de la situación para razonar sobre ella (Sherin y Van Es, 2005; Van Es y Sherin, 2002, 2008, 2010). Si tratamos de hacer una correspondencia entre dichos procesos y los elementos de la conceptualización que adoptamos —detección de eventos y su interpretación—, parece obvio que el primero de los procesos se corresponde con el primer elemento y que el tercero hace lo propio con el segundo elemento. Sin embargo, no resulta tan evidente con cuál de los dos elementos de la conceptualización se corresponde el segundo proceso propuesto por las investigadoras. En este sentido, en los diferentes artículos publicados por Sherin y Van Es sobre *noticing* a lo largo de estos años (*v. gr.*, Sherin 2007, 2017; Sherin y Van Es, 2005, 2009; Van Es, 2011; Van Es y Sherin, 2002, 2008, 2010) no se precisa si la conexión entre eventos y principios generales de enseñanza y aprendizaje se asocia a la detección de eventos o más bien a la interpretación de estos, no siendo hasta el advenimiento de un trabajo reciente (Van Es y Sherin, 2021), en el que se realiza una revisión del *Learning to notice framework*, cuando se explicita con claridad que dicho proceso pertenece al plano de la interpretación —aspecto que difiere del modo en el que entendemos en esta tesis tal proceso, ya que lo vinculamos con la identificación de eventos, tal y como se explica en líneas posteriores—. No obstante, cabe señalar que en algunos de los trabajos de Sherin y Van Es se establecen únicamente dos procesos como los integrantes del constructo, los cuales coinciden con los elementos de la definición que empleamos: *attending* o *selective attention*, es decir, identificar eventos relevantes, e *interpreting* o *knowledge-based reasoning*, esto es, interpretar los eventos vistos (*v. gr.*, Sherin, 2007, 2017; Sherin y Van Es, 2009). Este hecho concuerda con lo formulado en la última versión del marco de estas autoras (Van Es y Sherin, 2021), en la cual ya no se establece la conexión entre eventos y principios generales de enseñanza y aprendizaje como una de las partes clave del marco, no porque se excluya de su modo de entender el *noticing*, sino porque se integra en la interpretación de eventos. Así pues, atendiendo a lo explicado, podemos concluir, por un lado, que la conceptualización de *noticing* de Sherin y Van Es se corresponde con la segunda definición planteada en este marco teórico, pues se ciñe al reconocimiento de eventos y la interpretación de estos —con independencia de que tales partes del constructo se planteen en dos o en tres procesos, según el artículo—, y, por otro, que su forma de concebir el *noticing* no es inmutable, ya que ha evolucionado con el paso del tiempo.

En relación con este último aspecto —la evolución de la definición de las autoras—, hay que señalar que en su última revisión (Van Es y Sherin, 2021) no se ha llevado a cabo solamente la modificación ya comentada, sino que además se han establecido divisiones en los dos procesos principales —*attending* e *interpreting*— y se ha añadido un tercero que se ha denominado *shaping*, tal y como se muestra en la siguiente tabla:

Tabla 2.1. *Revised Learning to Notice Framework* (Van Es y Sherin, 2021).

<i>Attending</i>	<i>Identify noteworthy features of classroom interactions</i> <i>Disregard selected features of classroom interactions</i>
<i>Interpreting</i>	<i>Use one's knowledge and experiences to make sense of what is observed</i> <i>Adopt a stance of inquiry</i>
<i>Shaping</i>	<i>Construct interactions and contexts that provide access to additional information</i>

Como se puede apreciar, el primer proceso —*attending*— ya no solo comprende la identificación de eventos relevantes asociados a interacciones del aula, sino que también aborda las decisiones del profesor de ignorar ciertos aspectos de tales interacciones sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje. Así pues, el desarrollo de la competencia *noticing* de un profesor, en relación con este proceso, implicaría focalizar su atención en los sucesos que realmente tienen importancia, así como aprender a no tomar en consideración los que no la tienen tanto —como pueden ser, en el contexto de la enseñanza de las matemáticas, aspectos relativos a la didáctica general— (Van Es y Sherin, 2021). En cuanto al segundo proceso —*interpreting*—, este ya no abarca exclusivamente el empleo de aquello que uno conoce para tratar de explicar los eventos detectados —lo cual involucraría la posibilidad de establecer conexiones con principios generales de enseñanza y aprendizaje—, sino que ahora además incluye la adopción de una actitud de investigación como un aspecto clave de la interpretación. Por ende, la mejora del *noticing* de un docente, en lo que se refiere a este proceso, no solo supondría tratar de reflexionar sobre el suceso identificado desde el conocimiento que su formación y su experiencia le proporcionen, sino también mantener una postura que dé importancia a tratar de comprender en profundidad lo que se quiere interpretar —por ejemplo, en caso de haber percibido algún aspecto sobre el pensamiento matemático de un alumno, planteándose preguntas sobre el mismo que le lleven a poder entenderlo mejor— (Van Es y Sherin, 2021). Y, por último, a través del nuevo componente propuesto —*shaping*—, se incorpora a la conceptualización un tercer proceso que consiste en la creación de nuevas interacciones, por parte del sujeto cuyo *noticing* se estudia, que

tienen como fin la obtención de información adicional a partir de la situación que se haya visto para poder comprenderla en profundidad. En este sentido, este proceso puede dar lugar a que se produzcan nuevos procesos de *attending* y de *interpreting*, dado que con las nuevas interacciones se revelan más datos relativos a la situación detectada susceptibles de ser notados e interpretados. Tales interacciones, cuando el *noticing* se examina durante la propia práctica de enseñanza del profesor, pueden generarse formulando cuestiones a los estudiantes dirigidas a desentrañar más información que posibilite entender mejor lo que se ha identificado —*assessing questions* (Smith y Sherin, 2019)—, pero no orientadas a impulsar el pensamiento matemático del alumnado —*advancing questions* (Smith y Sherin, 2019)—, pues estas últimas podrían considerarse como constituyentes del tercer elemento de la tercera conceptualización presentada en el apartado 2.1.2 —aquella que incluye la toma de decisiones para dar respuesta a una situación con las que, por lo general, se trata de reforzar o impulsar el razonamiento de los estudiantes (v. gr., Jacobs *et al.*, 2010)—. Si, por el contrario, el *teacher noticing* se estudia en contextos donde la práctica de enseñanza del docente es analizada mediante recursos como los vídeos —ya sea la participación de los sujetos de forma individual o grupal—, podemos encontrar interacciones enmarcadas en el proceso de *shaping* cuando, por ejemplo, los participantes piden ver de nuevo cierta parte de la grabación —por no haber podido captar toda la información o por no haberla entendido bien— o debaten en torno a aspectos que no están presentes explícitamente en el vídeo, pero que les ayudan a entender mejor lo acontecido (Van Es y Sherin, 2021). Por lo tanto, el proceso de *shaping* posibilita al profesor «dar forma» a las interacciones con el objetivo de recabar más información que le ayude a comprender la situación considerada mejor, teniendo claro que no se trata de un elemento análogo al de toma de decisiones de la tercera conceptualización propuesta en el presente capítulo, así como que no todas las interacciones representan ejemplos de *shaping* (Van Es y Sherin, 2021) —tal y como se ha tratado de explicar—.

Sin embargo, si bien hemos querido exponer de forma sucinta el estado actual del *Learning to notice framework* para dar a conocer al lector su evolución, en el presente estudio hacemos uso de la versión previa a la publicación de Van Es y Sherin (2021), dado que la última revisión no había sido presentada en el momento de iniciar esta tesis ni a lo largo de la mayor parte de su desarrollo. Asimismo, cabe decir que la nueva configuración del marco se encuentra todavía en ciernes en tanto en cuanto aún no se han realizado trabajos en los que se utilice como estructura del estudio de la competencia *noticing*. No obstante,

las apreciaciones añadidas en los procesos de *attending* e *interpreting* sí pueden ser de utilidad al analizar los resultados de los formadores desde un punto de vista más amplio en los capítulos correspondientes de esta investigación. Así pues, nos basamos en aquellos elementos que durante los últimos lustros han conformado la noción de *noticing* para estas autoras, esto es, la detección de eventos relevantes y su interpretación (*v. gr.*, Sherin 2007, 2017; Sherin y Van Es, 2005, 2009; Van Es y Sherin, 2002, 2008, 2010). Y en lo que respecta a las conexiones entre eventos y principios generales de enseñanza y aprendizaje —que las autoras sitúan como parte del proceso de interpretar, como ya comentamos—, en este trabajo las entendemos como parte de la identificación de eventos. Para tratar de explicar este extremo, procedemos a aclarar primero qué se entiende por realizar conexiones entre eventos y principios generales de enseñanza y aprendizaje mediante un ejemplo dado por Van Es y Sherin (2008): imaginemos que un profesor detecta un evento en una grabación de vídeo y lo explicita como que «un profesor está ayudando a un estudiante»; el mismo evento podría haber sido explicitado —haciendo una conexión con un principio general de enseñanza/aprendizaje— como que «está teniendo lugar una situación de andamiaje del aprendizaje del estudiante». Desde nuestro punto de vista, este tipo de conexiones no forman parte del proceso de interpretar, pues no constituyen una explicación del suceso observado ni una reflexión en torno al mismo. En cambio, pensamos que sí que tienen que ver con el modo en el que se explicita un evento, como sucede en el ejemplo —enmarcado, en este caso, en la didáctica general—, es decir, con cómo se identifican los eventos. Esta manera de entender dicho proceso se ve reflejada en los ejes que vertebran el análisis de los datos de la tesis, así como en los objetivos perseguidos, puesto que nos preocupamos por conocer qué y cómo identifican eventos relevantes los formadores, así como por saber qué y cómo interpretan —tal y como se desarrolla con detalle en el capítulo 3, relativo al marco metodológico—.

En resumen, en lo que se refiere a la conceptualización de *noticing* adoptada en esta tesis, hacemos uso de aquella que se ciñe a la percepción de eventos y a su interpretación, sin incluir la toma de decisiones, apoyándonos principalmente en los trabajos publicados tanto por Sherin como por Van Es en relación con su primera versión del *Learning to notice framework* (Van Es y Sherin, 2002). Cabe señalar, por un lado, que no incluimos la toma de decisiones, entre otros motivos, para no extender en exceso el alcance de la investigación, pues es una de las primeras que se ocupa de la competencia *noticing* de los formadores de matemáticas, mientras que sí abordamos el plano de las interpretaciones, sobre todo por

la riqueza de la información que estas nos pueden proporcionar; y, por otro lado, que nos apoyamos en las ideas de Sherin y Van Es no solo porque su definición se corresponda con aquella por la que hemos optado, sino también debido al hecho de que muchos de los elementos que configuran su aproximación metodológica para el estudio del constructo en varios de sus trabajos concuerdan con los que planteamos en nuestra tesis —como se podrá ver a lo largo de las páginas—, además de por ser las primeras en abrir camino a la conceptualización que asumimos.

En cuanto a la aproximación metodológica que planteamos para tratar de examinar la competencia *noticing* de los formadores en la tesis, ahora simplemente enumeramos los elementos de los que nos servimos —de los citados en el apartado previo— para mostrar de forma sumaria las características principales del diseño metodológico definido, el cual se desarrolla ampliamente en el tercer capítulo. Así pues, cabe señalar que nos centramos en el estudio del *noticing* de formadores de matemáticas en ejercicio de futuros maestros de Educación Primaria —en el nivel de enseñanza universitaria—, interesándonos por la identificación e interpretación por parte de los formadores de diferentes tipos de eventos —sin constreñir nuestra atención a un solo aspecto del proceso de enseñanza-aprendizaje o a un solo contenido matemático—, así como por las diferencias entre sujetos en función de su formación académica y experiencia docente. Asimismo, optamos por hacer emerger el *noticing* de los participantes proveyéndolos de grabaciones de vídeo de fragmentos de lecciones impartidas por otro formador —en las que se pone el foco principalmente en la práctica de enseñanza de este y en las interacciones con los estudiantes—, aplicando tanto un *open-ended video viewing support* como un *structured video viewing support* —estudiando, por tanto, el *noticing* espontáneo y el *noticing* inducido de los sujetos—, y capturamos la presencia de la competencia oralmente, mediante grabaciones de vídeo de los comentarios de los formadores —cuyo contenido se transcribe luego—. Y, por último, apuntamos que analizamos el *noticing* de los formadores de manera individual, desarrollándose también su participación individualmente, así como que este trabajo no se concibe como un curso de desarrollo profesional para los formadores que aspire a mejorar su *noticing* —si bien, como se comprobará a lo largo del presente documento, la limitada intervención realizada puede posibilitar su evolución—, sino que simplemente pretende examinar el *noticing* de estos en un momento concreto, así como que hemos decidido trabajar desde un enfoque principalmente cualitativo, aunque también nos valemos de ciertos análisis cuantitativos en algunos casos.

En definitiva, con todo lo plasmado en las páginas previas, se ha perseguido trazar una idea clara de qué es el *teacher noticing*, abordando tanto sus conceptualizaciones como los diversos modos de estudiarlo, y plantear la postura que adoptamos en esta tesis en lo que se refiere a dicho constructo. A continuación, se procede a tratar el segundo término relevante en la investigación, esto es, el de *formador*.

2.2. El formador de matemáticas y su didáctica

El vocablo «formador», que se define como «que forma o pone en orden» —según la primera acepción presentada en el diccionario de la Real Academia Española (s. f.)—, deriva del término «formar», cuyo significado —conforme a la quinta acepción de dicho diccionario— es el de «preparar moral, intelectual o profesionalmente a una persona o a un grupo de personas». A partir de esta noción general sobre el concepto que nos ocupa, en el presente apartado se trata de explicar con mayor minuciosidad qué es un formador, tanto en el contexto educativo general como particularmente en el ámbito de la enseñanza de las matemáticas y su didáctica. Así pues, a lo largo de las próximas páginas se aborda la conceptualización de «formador» —incidiendo, entre otros aspectos, en los quehaceres propios de este y en los diversos términos empleados para referirse a dicha figura— y se plantea cómo se entiende tal concepto en este trabajo de investigación. Cabe señalar que, a diferencia del apartado relativo a la competencia *noticing*, este se desarrolla de un modo más reducido, pues nuestro interés se centra en exponer aquellos elementos que resultan necesarios para poder comprender de forma adecuada las características principales de la población objeto de estudio en la tesis.

2.2.1. Conceptualización

Tal y como apunta Even (2008, 2014), en la literatura existente relativa al formador se han empleado diferentes denominaciones para referirse a este grupo de personas —al menos en lengua inglesa—, tales como *teacher educators*, *teachers of teachers*, *teacher-leaders*, *facilitators*, *didacticians*, *professional development providers*, *professional development teachers*, *professional developers* o *teacher developers*. Esta falta de acuerdo en la elección y en el uso de un único término que englobe a dicho conjunto de sujetos, los cuales desarrollan su labor

en el mismo ámbito, se traduce en la dificultad de reconocerlos como integrantes de un grupo identificable que comparten la misma actividad profesional — que pertenecen a una misma «comunidad de práctica» (Wenger, 1998) —. No obstante, cabe decir que el vocablo más generalizado en inglés es el de *teacher educator* (v. gr., Boei *et al.*, 2015; K. Smith, 2005; Van der Klink, 2017; Vanassche, 2022; Vanassche *et al.*, 2019), mientras que en español es frecuente encontrar en los diferentes estudios la palabra de la que venimos haciendo uso en las líneas anteriores, es decir, la de «formador» (v. gr., Alcaraz-Domínguez *et al.*, 2018; Cornejo, 2007; Jarauta *et al.*, 2021; Mamaqi y Miguel, 2011; Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura [UNESCO], 2021). Además, si bien estos conceptos se utilizan a veces en el mismo sentido — como sinónimos —, en otras ocasiones implican sutiles matices que ponen de manifiesto ciertas diferencias entre los formadores de profesores (Pascual, 2021). Sin embargo, no es objeto de esta investigación ahondar en las discrepancias derivadas de la terminología sobre el formador, sino centrar la atención en la definición más amplia que incluya a todos los individuos designados por las citadas denominaciones. En este sentido, según lo manifestado por la Comisión Europea (2013), podemos decir que los formadores de profesores son todos aquellos que intervienen en el proceso de enseñar a los profesores a enseñar, tanto en la formación inicial — con futuros docentes — como en la formación permanente — con docentes en ejercicio —, razón por la cual el formador está presente en todas las etapas de la formación del profesor.

Para llevar a cabo la tarea de instruir a los profesores en la enseñanza — tanto a los futuros profesores como a los que están en activo —, el formador actúa de forma explícita, mediante la impartición de clases, talleres, conferencias o tutorías, pero también de forma implícita, ya que su propia práctica ejemplifica lo que significa ser docente, persiguiendo en ambos casos que sus alumnos — a su vez, profesores — consigan conectar la teoría con la práctica en el aula, para lo que en algunas ocasiones se apoya en su propia producción investigativa, la cual permite el desarrollo de una comprensión más profunda del proceso de enseñanza-aprendizaje, tanto por su parte como por la de sus estudiantes. Por tanto, el desempeño del formador puede presentar una doble vertiente, ya que, además de ejercer las funciones de enseñante, a menudo también realiza actividades ligadas al ámbito de la investigación (Comisión Europea, 2013). Asimismo, cabe señalar que dichas acciones son llevadas a término en distintos contextos — tales como colegios, institutos, universidades o centros de formación del profesorado, tanto de titularidad pública como privada — por diferentes tipos de formadores, ya que este colectivo se distingue por el hecho de que sus

miembros presentan características dispares, encontrando diversos perfiles de formador atendiendo, principalmente, a razones de formación académica, área de especialización y experiencia docente (Comisión Europea, 2013). Por ello, a diferencia de lo que ocurre en otras profesiones, es posible que los formadores tengan múltiples identidades, pudiendo sentirse cada cual como maestro de Educación Infantil, maestro de Educación Primaria, profesor de Educación Secundaria, profesor de Universidad o, por supuesto, profesor de otros profesores (Swennen *et al.*, 2010), además de como varias identidades a la vez.

Con relación al área de especialización, hay formadores competentes en diferentes campos de conocimiento, acaparando nuestra atención en este estudio los formadores de matemáticas y su didáctica. Para referirnos a este subconjunto de los formadores, al igual que sucede con el concepto general, la variedad de términos que pueden ser utilizados es muy extensa (Even 2008, 2014), siendo probablemente el más habitual de todos ellos el de *mathematics teacher educator* (*v. gr.*, Amador, 2022; Appelgate *et al.*, 2020; Appova y Taylor, 2019; Beswick y Chapman, 2013; Chick y Beswick, 2018; Coles y Helliwell, 2023; Jaworski, 2008a, 2008b; Pocalana y Robutti, 2022; Zaslavsky y Leikin, 2004) y, en la lengua española, el de formador de profesores de matemáticas (y su didáctica) —o expresiones similares— (*v. gr.*, Marbán, 2022; Llinares, 2018; Pascual, 2021; Pascual *et al.*, 2019; Pochulu *et al.*, 2016; Rojas y Deulofeu, 2015; Sánchez y García, 2004; Seckel y Font, 2020). Así pues, se define al formador de matemáticas y su didáctica como el profesional cuya actividad esencial es la de instruir a los profesores, tanto en entornos de formación inicial como permanente, en la enseñanza de las matemáticas (Jaworski, 2008b).

En cuanto a las acciones asociadas a la tarea de enseñar a los profesores a enseñar, los contextos en los que estas se realizan y los perfiles e identidades del formador, todo lo planteado con anterioridad referente a la figura del formador —sin ceñirse a una materia concreta— es aplicable, lógicamente, también al formador de profesores de matemáticas. No obstante, como cabría esperar, este último ha de tener en cuenta cuestiones específicas al formar a los profesores relativas a su campo de conocimiento, siendo muy interesantes las consideraciones planteadas al respecto por Eubanks-Turner (2020). La primera de ellas sugiere que el formador debe conseguir que el profesor aprecie con nitidez las conexiones entre las matemáticas que está aprendiendo y aquellas que ha de enseñar, asegurándose, asimismo, de que entiendan la influencia que tiene el conocimiento que están adquiriendo en su comprensión de las matemáticas y en la enseñanza de estas, para lo cual el formador

debe conocer el currículo de los diferentes niveles en los que impartirán o imparten clase sus estudiantes. En segundo lugar, la autora apunta que el formador tiene que proveer al profesor de prácticas de enseñanza matemática efectivas, facilitando que comprenda por qué y cómo implementarlas, así como su impacto en el aprendizaje. Las prácticas pueden proceder de compañeros con experiencia — en el caso de profesores en activo —, así como de instituciones o sociedades profesionales que desarrollan recursos que recogen buenas prácticas de enseñanza matemática (*v. gr.*, Association of Mathematics Teacher Educators, 2017; National Council of Teachers of Mathematics, 2014). La tercera recomendación que expresa la autora, centrándose en la formación inicial, consiste en brindar oportunidades a los futuros profesores para poner en práctica en entornos controlados los conocimientos matemáticos y didáctico-matemáticos aprendidos. Para ello, los formadores de profesores de matemáticas pueden propiciar que estos se involucren en la realización de lo que se ha venido a denominar «aproximaciones a la práctica» (Grossman *et al.*, 2009), las cuales les permiten simular distintas situaciones de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas y recibir retroalimentación del formador. Igualmente, en algunos casos — como sucede en España —, también se presenta la oportunidad de aplicar lo aprendido en entornos reales durante los periodos de prácticas de enseñanza que se incluyen en los diferentes estudios que habilitan para ejercer como maestro o profesor de matemáticas en nuestro sistema de educación. Y, finalmente, como última consideración, la investigadora indica la necesidad de dar a conocer a los profesores la relevancia cultural de las matemáticas que tienen que aprender y enseñar, motivo por el cual los formadores deben procurar que los profesores vean la importancia de comunicar a sus alumnos la utilidad de los conceptos matemáticos que estudian en el aula en la sociedad actual (Eubanks-Turner, 2020).

En definitiva, atendiendo a las reflexiones de Eubanks-Turner (2020), el formador de profesores de matemáticas, como profesional encargado de enseñar a los profesores a enseñar matemáticas, tiene el cometido de desarrollar permanentemente su conocimiento matemático para enseñar a los profesores (Zopf, 2010) para que estos, a su vez, adquieran el conocimiento especializado necesario para poder enseñar matemáticas (Ball *et al.*, 2008; Carrillo *et al.*, 2014, 2018) y, en última instancia, mejorar el aprendizaje de los estudiantes de los diversos niveles educativos. Por consiguiente, como se desprende de lo informado, la relevancia y la transcendencia de la labor de los formadores es inestimable, tanto en el plano educacional como en el social. Asimismo, es necesario señalar que el desarrollo del conocimiento del formador no es importante únicamente para que el proceso expuesto se

desarrolle con garantías, sino que además guarda una estrecha relación con el constructo teórico que se aborda en este trabajo, esto es, el *teacher noticing*, ya que dicha competencia descansa sobre el conocimiento en acción del docente, resultando ser el conocimiento del formador un prerrequisito para poder desarrollar su *noticing* (W. Smith *et al.*, 2022). Así es que, a las consideraciones aportadas por Eubanks-Turner (2020) sobre las tareas a realizar por el formador de matemáticas y su didáctica, podemos añadir la necesidad de que este, además de su conocimiento matemático para enseñar a los profesores, desarrolle también su competencia *noticing*, dado que constituye un aspecto fundamental de la competencia profesional docente (Kaiser *et al.*, 2017; Santagata *et al.*, 2021).

Para concluir, tras haber presentado de forma breve la información necesaria para poder saber qué se entiende por formador de matemáticas y su didáctica, a continuación planteamos cómo se concibe en este trabajo dicha figura y qué términos empleamos para referirnos a ella, así como el subconjunto de los formadores en el que nos centramos.

2.2.2. El formador de matemáticas y su didáctica en este estudio

En el presente trabajo de investigación tomamos la definición amplia de formador de matemáticas y su didáctica propuesta por Jaworski (2008b) y, por lo tanto, entendemos que cualquier profesional cuya labor consista en instruir a los profesores en la enseñanza de las matemáticas —en entornos de formación inicial o continua— debe ser considerado como formador de matemáticas y su didáctica. Igualmente, convenimos con la definición aportada por Amador (2022), quien considera a este agente como el encargado de facilitar el desarrollo profesional de los profesores para enseñar matemáticas. El principal motivo por el que asumimos esta conceptualización integral —además de por coincidir con ella— reside en que los contados estudios acerca del *noticing* del formador de matemáticas y su didáctica examinan la competencia de sujetos muy diversos, tanto por la variedad de los contextos en los que llevan a cabo su actividad como por la heterogeneidad de sus perfiles en lo concerniente a la formación académica y la experiencia docente. Por ello, abogamos por una definición global e inclusiva.

Con respecto a la terminología con la que hacer alusión a dichos profesionales, en la tesis usamos los términos más generalizados en la literatura, por lo que a lo largo de las

sucesivas páginas los nombramos como «MTE» — siglas de *mathematics teacher educator* — o como «formadores» — refiriéndonos a los de matemáticas y su didáctica —. Asimismo, en algunos momentos hacemos mención de ellos simplemente como «profesores» o como «docentes» — pues también lo son — con el ánimo de no resultar redundantes en los casos en los que es necesario señalarlos repetidamente, pero siempre sin dar opción a que haya ambigüedad en cuanto a quiénes nos estamos refiriendo. Igualmente, como ocurre con la definición que adoptamos, cabe señalar que, en la escasa literatura relativa al *noticing* del formador de matemáticas y su didáctica, la denominación *mathematics teacher educator* es una de las más utilizadas, lo que supone otra razón para su uso en este trabajo.

Por último, solamente resta concretar sobre qué formadores de matemáticas y su didáctica nos centramos en la presente tesis. Si bien entendemos el concepto de MTE en un sentido amplio, en este estudio ponemos el foco únicamente en un subconjunto de los formadores, particularmente en aquellos que trabajan en la Universidad enseñando cómo enseñar matemáticas a futuros maestros de Educación Primaria. Las características de los participantes de la investigación se explican en detalle en el apartado 3.3, perteneciente al capítulo relativo al marco metodológico.

Tras haber expuesto de forma breve cómo se concibe la figura del formador en este trabajo, en el siguiente apartado se presentan las pocas publicaciones que han centrado su interés en el estudio del *noticing* del formador de matemáticas y su didáctica.

2.3. La competencia *noticing* del formador de matemáticas y su didáctica

En el ámbito de la educación matemática, las investigaciones sobre *noticing* se han centrado básicamente en los docentes de Educación Primaria y de Educación Secundaria, tanto en la formación inicial como en la permanente, siendo exigua la atención prestada a la competencia de aquellos cuya labor fundamental es la de enseñar a los profesores cómo enseñar matemáticas (Amador, 2016, 2022). Los principales artículos que se interesan por el *noticing* de dichos sujetos son los realizados por Elham Kazemi, Kristin Lesseig y demás integrantes de su equipo de investigación, por una parte, y por Julie M. Amador, por otra, pudiéndose encontrar también alguna otra publicación realizada por otros autores, como Tracy Helliwell o Marta Kobiela. Así pues, el propósito de este apartado es el de presentar

de forma escueta los principales trabajos que se han llevado a cabo hasta la fecha sobre el *noticing* del formador de matemáticas y su didáctica. Para ello, a lo largo de los siguientes párrafos se enumeran los distintos artículos al respecto, organizándolos por autores, y se exponen las ideas clave que en ellos se recogen.

El primer estudio que podemos encontrar acerca del *noticing* de los MTE es el que firman Kazemi *et al.* (2011). En dicho trabajo, las autoras analizan su propio *noticing*, como formadoras expertas, en el marco de un programa de desarrollo profesional que se dirige a formadores de profesores de Educación Primaria y de Educación Secundaria. Por tanto, nos encontramos ante una investigación que en realidad aborda el estudio del *noticing* de un conjunto de MTE que actúan como formadoras de formadores, figura que las autoras han denominado «LOL» —siglas de *leaders of leaders*— (Kazemi *et al.*, 2011). A lo largo del curso de desarrollo profesional —centrado en ayudar a los formadores que participan en el mismo a crear entornos que posibiliten un aprendizaje matemático efectivo, al formar a profesores en la enseñanza de las matemáticas, a partir del análisis de vídeos en los que otro formador imparte formación a profesores—, las autoras —LOL— ponen en práctica su *noticing*, para lo cual tratan de identificar eventos relevantes relativos al razonamiento de los participantes, los interpretan y analizan la forma en la que dichas interpretaciones podrían influir en la modificación, *a posteriori*, del diseño de los cursos de formación para perfeccionar el apoyo brindado a los formadores con relación a su labor de enseñar cómo enseñar matemáticas (Kazemi *et al.*, 2011). Esta investigación evidencia que el *noticing* de los MTE expertos es un elemento clave para conocer las necesidades de los formadores y poder reestructurar los programas de desarrollo profesional dirigidos a tal colectivo. Sin embargo, el método que usan las autoras para analizar su propio *noticing* no se explicita de manera clara en el estudio, al igual que ocurre con su perfil con relación a la formación académica y la experiencia docente —que directamente se omite—, lo que hace necesario contar con más investigaciones que profundicen en el *noticing* de los MTE —en este caso, LOL— con algo más de transparencia en cuanto al proceso seguido y a las características de los sujetos cuyo *noticing* se examina.

Posteriormente, Lesseig *et al.* (2017) —el mismo equipo de investigación, pero con un miembro más— publican un segundo trabajo. En este se presentan los resultados que derivan de las modificaciones hechas en el programa de desarrollo profesional dirigido a formadores a partir de las reflexiones efectuadas en el estudio de Kazemi *et al.* (2011). Así

pues, esta investigación se centra en el *noticing* de los MTE que participan en el programa y expone cómo los cambios realizados en los *inputs* o *prompts* planteados a los formadores en los distintos seminarios para guiar los análisis de los vídeos propuestos — en los cuales se muestran situaciones reales en las que un formador interactúa con profesores sobre una actividad matemática dada —, así como las nuevas tareas formuladas, moldean el *noticing* de los MTE, facilitando que dirijan su atención hacia el trabajo matemático realizado por el formador y los profesores de los vídeos, que conecten dichos aspectos con los objetivos de aprendizaje de los profesores y que interpreten las acciones del formador orientadas a que se alcancen tales objetivos (Lesseig *et al.*, 2017). Además, en esta segunda versión del programa, tanto los *prompts* como los vídeos han sido elegidos dando importancia no solo al «conocimiento común del contenido», sino también al «conocimiento especializado del contenido» — atendiendo al marco de Ball *et al.* (2008) —. Por otra parte, en lo que respecta a los participantes, en este trabajo sí se ofrece información sobre su perfil, manifestándose que se cuenta con 72 formadores — con distintos grados de experiencia docente en cuanto al tiempo que llevan ejerciendo como tales — que se ocupan de la formación de profesores en activo de Educación Primaria y de Educación Secundaria, pero sin indicarse cuál es su formación académica (Lesseig *et al.*, 2017). En conclusión, este trabajo pone de relieve que el programa de desarrollo profesional para formadores implementado propicia que estos no se limiten a describir eventos que suceden en contextos de formación, sino que además los interpreten en relación con los objetivos matemáticos de los profesores y las diferentes estrategias de los MTE para lograr dichos fines, y destaca que la mejora del *noticing* de los formadores es fundamental para que puedan impulsar de manera eficaz el conocimiento especializado de los profesores necesario para enseñar matemáticas (Lesseig *et al.*, 2017).

Por otro lado, Julie M. Amador realiza diferentes estudios en los que se aborda el *noticing* de los MTE de diversas formas. En el primero de ellos, Amador (2016) explora la competencia *noticing* de cuatro formadores noveles a través de su participación en varios «experimentos de enseñanza», los cuales proveen un contexto en el que poder estudiar el pensamiento matemático de los alumnos al tiempo que se aprende a notar de una manera profesional (Norton y McCloskey, 2008). En este artículo, se aporta bastante información sobre el perfil de los participantes, pudiendo apreciar gran heterogeneidad en lo referido a la formación académica — un biólogo, un ingeniero civil y dos matemáticas — y menos en lo relativo a los contextos en los que se ha constituido su experiencia docente, ya que, si bien han tenido experiencias docentes en distintos ámbitos, comparten que todos ellos

imparten con regularidad cursos de matemáticas en la universidad a futuros profesores o participan en sesiones de desarrollo profesional con profesores de matemáticas en servicio (Amador, 2016). Como parte de la investigación, los cuatro MTE participaron en un curso de doctorado sobre educación matemática con una estructura definida principalmente en tres partes. En primer lugar, cada participante tuvo que llevar a cabo un experimento de enseñanza con un estudiante de matemáticas de Educación Secundaria o de Universidad —y no con un futuro profesor o un profesor en activo, como sería propio de su labor como formador, puesto que Amador (2016) defiende que, para que los MTE puedan enseñar a enseñar matemáticas y a percibir e interpretar el pensamiento matemático de los alumnos, así como a tomar decisiones de enseñanza basadas en tales interpretaciones, primero ellos mismos han de tener desarrollado su *noticing* en lo que se refiere a la manera en la que los alumnos piensan en las matemáticas— y, luego, reflexionar por escrito sobre los aspectos más reseñables del pensamiento matemático del alumno surgido en las interacciones con este durante el experimento de enseñanza —dando cuenta así de su grado de *noticing*—. En segundo lugar, los participantes recibieron formación durante seis semanas acerca del constructo de *noticing*, haciendo hincapié en distintas conceptualizaciones. Y, por último, al final de esta formación sobre *noticing*, se repitió la fase inicial, realizando de nuevo otro experimento de enseñanza, así como la correspondiente reflexión por escrito al respecto (Amador, 2016). Los resultados que se desprenden de dicho proceso indican que, a pesar de la formación recibida sobre la construcción teórica de *noticing*, los MTE noveles apenas mostraron mejora en su nivel de *noticing* del primer experimento de enseñanza realizado al segundo —llegando, incluso, a disminuir en uno de los sujetos—, por lo que podemos deducir que este tipo de formador, con tan poca experiencia, quizá necesite más tiempo de desarrollo profesional sobre este constructo para experimentar una evolución que sea significativa. Los comentarios que incluyeron en sus reflexiones escritas fueron sobre todo evaluativos, siendo escasas las interpretaciones sobre el razonamiento matemático de los estudiantes y muy poco frecuentes las conexiones con principios generales de enseñanza o de aprendizaje (Amador, 2016). En definitiva, si bien este trabajo no aspira a establecer generalizaciones sobre todos los MTE noveles, los hallazgos obtenidos pueden ayudar a mejorar la formación de estos formadores y suponen una evidencia de la importancia de dotarles de desarrollo profesional sobre la competencia *noticing*, lo que, al mismo tiempo, prueba la necesidad imperiosa de llevar a cabo más investigaciones acerca de cómo notan los formadores (Amador, 2016).

Más adelante, en un segundo artículo, Amador (2020b) plantea una investigación similar a la anterior en tanto en cuanto también se examina el *noticing* de los participantes en relación con el razonamiento matemático de estudiantes —de Educación Primaria y de Educación Secundaria— a través de experimentos de enseñanza y de reflexiones escritas sobre estos. Sin embargo, en esta ocasión no se indica que los formadores, un total de 17, sean noveles, presentando todos ellos experiencia en su actividad como tales en distintos puestos de diferentes colegios e institutos con profesores en activo de Educación Primaria y de Educación Secundaria —a excepción de uno de ellos, quien trabaja como MTE en la Universidad—. Asimismo, todos están estudiando o un máster o un doctorado orientado extensamente a la educación matemática —no se aporta información sobre su formación previa— y, como parte del estudio, se han inscrito en un curso de tres semestres en el que se les ha instruido, entre otras cosas, en cómo realizar de manera adecuada experimentos de enseñanza y reflexiones sobre ellos dirigidas a generar «modelos del pensamiento de los estudiantes» (Amador, 2020b). Así pues, en esta investigación no se forma a los MTE en el constructo de *noticing* como tal ni se analiza una posible evolución de su competencia entre experimentos de enseñanza, sino que esta vez se pretende examinar en qué medida los formadores aportan evidencias acerca del pensamiento matemático de los estudiantes cuando reflexionan por escrito en torno a los aspectos más relevantes del mismo. En este sentido, el análisis de los datos —centrado en el grado de especificidad de las evidencias, el origen de estas y su conexión con las descripciones del razonamiento del alumno— revela un nivel de *noticing* que, en líneas generales, resulta ser susceptible de evolucionar mucho aún para la mayoría de los participantes, lo que pone de manifiesto la necesidad de dotar de más formación a los MTE enfocada a mejorar su *noticing* vinculado con el pensamiento matemático de los estudiantes, prestando especial atención a la aportación de evidencias que respalden sus percepciones y reflexiones (Amador, 2020b). Por todo ello, este trabajo supone un paso más hacia la comprensión del *noticing* del formador para poder ayudarlo a desarrollar su competencia, lo que al mismo tiempo posibilitaría a los profesores recibir un mejor apoyo por parte de los MTE para mejorar también su competencia *noticing* y sus prácticas de enseñanza, y deja patente que no es posible presumir que los formadores, por el mero hecho de serlo, ya tengan su competencia *noticing* suficientemente desarrollada.

En una publicación posterior, Amador (2021) estudia el *noticing* de los formadores en el contexto de un *video club*, centrando su interés en cuándo notan profesionalmente a lo largo de las sesiones de visionado, así como en qué notan y cómo lo hacen. Este trabajo

pone el foco particularmente en los MTE que ocupan puestos institucionales en el sistema educativo — dada la posibilidad que su posición les proporciona para influir todavía más, si cabe, en la enseñanza — y en la forma en la que participan en una práctica de desarrollo profesional junto con varios profesores de su centro escolar. Así pues, los participantes en este estudio son cuatro formadores y ocho profesores de matemáticas que imparten clase en 6.º de Educación Primaria y en 1.º y 2.º de Educación Secundaria. En cuanto al perfil de los MTE, se cuenta con el director del centro — con ocho años en el puesto y un máster en liderazgo educativo —, un formador de matemáticas del distrito escolar que desarrolla su labor en cursos de secundaria — con cinco años en el cargo y realizando un doctorado en educación matemática —, una superintendente adjunta del distrito — con tres años en el puesto y un doctorado en educación — y un formador de matemáticas regional — con diez años en el cargo, experiencia como profesor de Universidad y un doctorado en educación matemática —, quien, además de ser participante, realizó la función de moderador de las reuniones (Amador, 2021). Por lo tanto, como se puede comprobar, la información que se aporta sobre los sujetos de la investigación es bastante detallada — lo cual es más sencillo y habitual cuando la muestra es pequeña, como es el caso —. El *video club* se desarrolló en cuatro sesiones y en ellas se visionaron vídeos de fragmentos de clases de matemáticas de algunos de los ocho profesores participantes a sus alumnos en los que se podían apreciar ejemplos del pensamiento matemático de los estudiantes. Al finalizar las reuniones, cada una de estas fue transcrita, dividiéndose luego tales transcripciones en distintas partes en función de las *idea units* presentes (J. K. Jacobs *et al.*, 1997), esto es, estableciendo una parte cada vez que el tema o el foco de la conversación cambiaba, dando lugar a un total de 144 divisiones entre todas las sesiones — apareciendo en todas las divisiones, adrede, al menos una intervención de uno de los formadores —. Con todo ello, se pudo proceder a analizar en qué momentos se producía el *noticing* de los MTE, así como a valorar con puntuaciones del 0 al 4 la aportación de cada formador en cada una de las divisiones efectuadas en las transcripciones en función de una variación realizada *ad hoc* del *Framework for learning to notice student thinking* de Van Es (2011), tratando de dar respuesta así a los propósitos del estudio (Amador, 2021). De esta manera, los resultados indican que los formadores, en su conjunto, evidenciaron muestras de *noticing* — acerca del profesor o de los estudiantes — sobre todo en las partes centrales de las conversaciones. Además, señalan que solamente un tercio de sus aportaciones incluyeron muestras de *noticing*, centrándose a menudo en el pensamiento matemático de los alumnos — aunque sin llegar a verbalizar evidencias de

los vídeos que respaldasen sus comentarios —, así como la existencia de diferencias en la competencia entre los formadores, obteniendo distintos niveles con relación a aquello que notan y a cómo lo notan (Amador, 2021) — por sus diversos perfiles, probablemente —. En definitiva, este trabajo, que no aspira a realizar generalizaciones, ilustra cómo un conjunto de formadores pone en práctica su *noticing* en el contexto de un *video club* y con ello aporta información muy relevante para poder avanzar en el entendimiento de la competencia de este colectivo y, en consecuencia, en su desarrollo profesional en dichos entornos.

Posteriormente, en un artículo reciente relativo al asunto que venimos abordando, Amador (2022) caracteriza la competencia *noticing* de los formadores de matemáticas y su didáctica y su capacidad para interpretar el razonamiento matemático de los estudiantes y conectar tales interpretaciones con evidencias de dicho razonamiento. Para ello, plantea una metodología similar a la plasmada en la publicación de 2016, anteriormente descrita, ya que se sirve de nuevo de entrevistas —basadas en experimentos de enseñanza— y de reflexiones por escrito para crear modelos de pensamiento de los alumnos —centrándose cada participante en un estudiante a su elección de K-16, es decir, de Educación Primaria, Educación Secundaria o Universidad, aportándose en el artículo información únicamente sobre los resultados relativos a un discente de 6.º de Educación Primaria— y también trata de que se produzca una evolución en el *noticing* de los participantes (Amador, 2022). Así pues, en esta ocasión los sujetos que participan en el estudio son 16 formadores que llevan a cabo su actividad como tales en distintos entornos educativos, y desde diversos puestos, y que están estudiando o un máster o un doctorado en educación matemática —no se dice nada con relación a su formación previa—. Todos ellos, como parte de la investigación, se encuentran inmersos en un curso *online* de un semestre de duración diseñado para ayudar a los MTE a mejorar su competencia *noticing*, con un enfoque centrado en el razonamiento matemático de los alumnos. Durante el curso, los formadores tuvieron que realizar varias lecturas sobre el constructo y tareas —dos entrevistas a estudiantes y dos reflexiones por escrito para generar modelos de pensamiento de los alumnos— para poner en práctica su *noticing*, sobre las cuales recibieron retroalimentación a lo largo del curso. De esta manera, se esperaba que, con la formación recibida, se diera una mejora entre la primera reflexión y la segunda, las cuales suponían el reflejo de su *noticing* (Amador, 2022). Para valorar la posible evolución, teniendo en cuenta los objetivos de la investigación, se creó un marco, denominado *Notice framework* —inspirado en los trabajos realizados por Jacobs *et al.* (2010) y por Castro-Superfine y Bragelman (2018)—, con el que examinar las reflexiones escritas

del siguiente modo: si no presentaban evidencias o interpretaciones del razonamiento del estudiante, se asignaba la categoría *lacking* al escrito; si tenía evidencias o interpretaciones del razonamiento del alumno, pero no ambas, se establecía la categoría *limited*; y si lo que sucedía era que se incluían los dos elementos, la categoría otorgada era la de *robust*. De la misma forma, se estableció otro marco, llamado *Connections framework*, mediante el que se clasificaron los escritos de la categoría *robust* en tres clases, según la solidez de la conexión entre las evidencias y las interpretaciones: *robust weak*, *robust moderate* y *robust strong*. Así es que los diferentes escritos —cada uno de los dos modelos de pensamiento matemático de los estudiantes creados por cada MTE— fueron codificados con una de las categorías descritas, lo que permitió analizar la mejora del *noticing* de los sujetos, no solo en cuanto a la formulación de evidencias y de interpretaciones, sino también en lo que respecta a la conexión entre estas (Amador, 2022). Los resultados de este estudio revelan que ninguno de los participantes se situó en el nivel inferior en el segundo modelo, mientras que en el primero únicamente lo hizo uno. Asimismo, cabe indicar que un 43,75 % —siete sujetos— no experimentó evolución alguna entre modelos, cuatro de ellos porque se estancaron en el nivel *limited* y los otros tres porque ya no tenían opción de poder mejorar, ubicándose en ambos momentos en el nivel *robust strong*, mientras que el 56,25 % restante mejoró sus resultados en distintos grados del primer modelo al segundo, no encontrando sujetos que empeorasen (Amador, 2022). Habida cuenta de lo expuesto, a nuestro parecer, son tres las conclusiones más relevantes de este artículo: en primer lugar, se deja claro que es posible mejorar el *noticing* de los MTE con formación orientada a tal efecto; en segundo lugar, se pone de manifiesto que no todos los formadores evolucionan de la misma forma —lo cual tiene que ver, probablemente, con la formación académica y la experiencia docente de los sujetos—; y, por último, hay formadores que, por su perfil profesional, tienen un nivel de *noticing* muy elevado sin haberse formado *ex profeso* en dicha competencia, motivo por el que pueden no mostrar ninguna evolución, aunque se aspire a propiciarla, dándose lo que se conoce como «efecto techo» (Amador, 2022).

Finalmente, en su último artículo acerca del *noticing* del formador de matemáticas y su didáctica, Amador *et al.* (2023) estudian dicha competencia en un conjunto de MTE y de profesores de matemáticas a partir de los comentarios que todos ellos hacen acerca de distintos vídeos en los que se recogen prácticas de enseñanza matemática, con la atención puesta en examinar las diferencias entre el *noticing* de los MTE y el de los profesores y en comprobar si la clase de comentarios que formulan varía a lo largo de la participación de

los sujetos en la investigación. Con respecto al grupo de participantes, este está integrado por un total de nueve profesores de Educación Primaria y de Educación Secundaria, que cuentan con una experiencia de entre 1 y 19 años como docentes de matemáticas, así como por ocho formadores, cuya experiencia como tales es de entre 1 y 13 años. En el transcurso de los dos años en los que se desarrolló la investigación — tiempo fijado intencionalmente para poder posibilitar oportunidades de mejora en los distintos participantes a través de un desarrollo profesional continuado (Loucks-Horsley *et al.*, 2009) —, los nueve profesores tomaron parte en varios ciclos de formación *online* guiados por los MTE — además de en otros cursos dirigidos a la enseñanza de las matemáticas —, con una duración aproximada de entre una y tres semanas cada uno, que se llevaron a cabo de forma individual, esto es, cada profesor interactuó individualmente con un solo formador en cada ciclo. Tales ciclos de formación comprendían las siguientes seis fases: primero, el profesor confeccionaba el esquema de una clase que iba a impartir a sus alumnos; posteriormente, esa planificación era analizada junto con el formador; a continuación, el profesor impartía la lección, la cual se grababa en vídeo; en el lapso de, a lo sumo, uno o dos días tras dar la clase, el profesor visionaba la grabación y comentaba por escrito — mediante una herramienta informática y deteniendo el vídeo cada vez que deseaba hacer una anotación — aquellos aspectos que más le llamaban la atención de la misma; más adelante, siempre después del profesor, era el turno del MTE de visionar el vídeo y de incluir sus comentarios escritos sobre lo que le parecía más importante; por último, el profesor y el formador interactuaban, por segunda vez, para hablar acerca de las anotaciones hechas. Cabe señalar que, a la hora de comentar los vídeos por escrito, a los sujetos se les facilitó una serie de *inputs* que ponían la atención sobre todo en el razonamiento matemático de los alumnos (Amador *et al.*, 2023). En total, en el estudio se analizaron 554 comentarios de profesores y formadores provenientes de 22 ciclos de formación, siendo cada uno de los comentarios codificado atendiendo a cuatro categorías, a saber: *subject*, referida a sobre quién se realiza la anotación — *teacher*, *student*, *group of students* o *whole class* —; *specificity*, que recoge la presencia o la ausencia de alguna conexión dentro del comentario entre dos aspectos, tales como el profesor, los alumnos o estrategias de enseñanza o de aprendizaje — *specific* o *general* —; *content*, referida al asunto o tema del que trata la anotación — como, por ejemplo, *goals*, *contextualizing*, *lesson features*, *technology* o *connections to prior learning* —; y *analytic stance*, que aborda cómo se comunica lo observado — *tag*, *describe*, *evaluate*, *interpret*, *suggest* o *question* (usándose el primer valor solamente cuando no hay presencia de ninguno de los otros) —. Asimismo, con relación a

las categorías, es oportuno decir que un mismo comentario puede recibir más de un valor en una misma categoría, excepto en la de *specificity*, para la que solo se puede aplicar uno de los dos antes señalados (Amador *et al.*, 2023). Así pues, con base en dicha codificación, los resultados derivados de los análisis efectuados sobre las distintas anotaciones reflejan que los profesores, a lo largo de los ciclos, fueron centrando cada vez más su atención en los alumnos, lo que redundó en que sus aportaciones fueran paulatinamente también más específicas que generales, dado que en los últimos ciclos establecieron conexiones entre el pensamiento matemático de los alumnos y aspectos de la práctica de enseñanza. Además, aumentaron sus anotaciones relativas a objetivos matemáticos con respecto a la categoría *content*, mientras que en la de *analytic stance* fueron predominantes en los diferentes ciclos los comentarios descriptivos o evaluativos —o los codificados con la etiqueta *tag*—, o una combinación de estos, siendo prácticamente inexistentes las interpretaciones, así como el planteamiento de sugerencias o preguntas. Por otra parte, en cuanto a los formadores, las anotaciones de estos se centraron esencialmente en los alumnos y fueron codificadas como específicas. Asimismo, a lo largo de los ciclos se centraron más en contenidos referidos a los objetivos de enseñanza del profesor del vídeo, lo que concuerda con que aumentaran sus comentarios con preguntas, atendiendo menos a interpretar los eventos detectados en favor de proponer cuestiones dirigidas a promover el pensamiento del profesor en la fase final del ciclo, o sea, en la conversación entre profesor y MTE sobre las anotaciones hechas acerca de la grabación de vídeo. Así pues, encontramos convergencias entre los profesores y los formadores en el grado de especificidad —aunque la proporción de comentarios con conexiones es mayor en el caso de los segundos— y en que se focalizan en los estudiantes y en los objetivos matemáticos. En cambio, observamos divergencias fundamentalmente en que para los primeros abundan los comentarios descriptivos, y se incrementan con el paso de los ciclos, mientras que para los MTE este código se mantiene bajo y constante en el tiempo (Amador *et al.*, 2023). Por todo ello, los autores ponen de relieve con este trabajo la importancia del empleo de las anotaciones —comentarios por escrito— porque permite articular el *noticing* de los docentes (Mason, 2002), conocer variaciones en el foco respecto a lo que estos observan y revelar los aspectos en los que podrían recibir mayor formación o apoyo. Por ende, este artículo provee información de utilidad, tanto para investigadores como para formadores, a la hora de diseñar oportunidades de aprendizaje profesional, se dirijan estas a MTE o a profesores de matemáticas de otros niveles, así como para estudiar las interacciones entre formadores y profesores (Amador *et al.*, 2023).

En suma, los siete artículos descritos en los párrafos previos pueden considerarse como los más relevantes de la escasa literatura existente sobre el *noticing* del formador de matemáticas y su didáctica. No obstante, es posible encontrar alguna otra publicación con relación a dicho tema, como, por ejemplo, la de Helliwell (2017), en la que la investigadora presenta su interpretación acerca de las acciones que dan forma a la disciplina del *noticing* —atendiendo a la propuesta de Mason (2002)— como un marco metodológico para poder estudiar su propio *noticing* como MTE, lo cual da lugar a su aprendizaje como formadora, o la de Kobiela *et al.* (2020), en la que se analiza el *noticing* de cuatro MTE mediante el uso de *rehearsals* guiados por estos (Lampert *et al.*, 2013) —o sea, simulaciones de procesos de enseñanza en los que, en este caso, un profesor novel desempeña funciones de profesor y sus compañeros actúan como alumnos— y se destacan los aspectos principales en los que se fijan los formadores y las estrategias que emplean para interpretarlos.

Cabe decir que en los distintos artículos expuestos en este apartado se hace uso de diferentes denominaciones para referirse a los formadores, tales como *mathematics teacher educator*, *leader* o *coach*. A este respecto, como ya comentamos en páginas precedentes con relación a los diversos términos para nombrar a dichos profesionales, es posible encontrar ciertas diferencias en los contextos en los que los sujetos englobados por cada una de tales denominaciones desempeñan su labor, así como en sus perfiles profesionales —formación y experiencia—. Sin embargo, a efectos de este estudio, atendiendo a la definición amplia de formador asumida, la propuesta por Jaworski (2008b), así como al modo en el cual se describe en cada publicación citada a sus participantes, consideremos que todos ellos son técnicamente *mathematics teacher educators* —por razones semánticas—, o sea, formadores de matemáticas y su didáctica, motivo por el que nos referimos a ellos de dicha forma.

En definitiva, con la información presentada en este marco teórico, hemos tratado de arrojar luz sobre el constructo de *noticing* y sobre la figura del formador, amén de dejar patente la importancia de realizar más investigaciones que aúnen ambos componentes, es decir, que contribuyan a conocer con mayor detalle la competencia *noticing* del formador de matemáticas y su didáctica para poder crear programas de desarrollo profesional que permitan formar a este colectivo en dicha competencia docente con mayor efectividad, lo que redundaría en una mejor práctica de enseñanza por su parte y, en consecuencia, por parte de los profesores a los que enseñen a enseñar y, a la postre, en un mejor aprendizaje de los estudiantes de matemáticas de los distintos niveles educativos.

Capítulo 3

Marco metodológico

3. MARCO METODOLÓGICO

Tras haber presentado el marco teórico en el que se fundamenta este trabajo, en el presente capítulo se aborda la descripción de los aspectos metodológicos del mismo. Para tal fin, a continuación se plantean la pregunta y los objetivos de investigación, el enfoque metodológico asumido, la información sobre los participantes del estudio y el diseño de investigación creado, así como las técnicas y los instrumentos empleados para la recogida de datos y las técnicas usadas para el análisis de estos.

3.1. Pregunta y objetivos de investigación

Esta tesis se interesa por la competencia *noticing* de los formadores de matemáticas y su didáctica de futuros maestros de Educación Primaria y su propósito se puede recoger en una pregunta de investigación que queda enunciada como sigue:

- **Pregunta de investigación:** ¿Cómo es la competencia *noticing* de los formadores de matemáticas y su didáctica de futuros maestros de Educación Primaria?

Para dar respuesta a esta cuestión, se ha establecido un conjunto de objetivos cuya consecución pretende aportar la información necesaria para poder realizar una primera aproximación a la descripción de la competencia *noticing* de los formadores. Por un lado, y teniendo en cuenta que el estudio centra su interés en el análisis de los eventos y de las interpretaciones que se recogen en los comentarios aportados por los participantes acerca de la práctica de enseñanza de otro formador en grabaciones de vídeo, se proponen estos cinco objetivos:

- **Objetivo 1:** Determinar qué eventos relevantes identifican los MTE relativos a la práctica de enseñanza de otro formador grabada en vídeo.
- **Objetivo 2:** Examinar cómo explicitan los MTE aquellos eventos relevantes que detectan relativos a la práctica de enseñanza de otro formador grabada en vídeo.
- **Objetivo 3:** Determinar qué eventos relevantes interpretan los MTE relativos a la práctica de enseñanza de otro formador grabada en vídeo.
- **Objetivo 4:** Examinar cómo interpretan los MTE aquellos eventos relevantes que detectan relativos a la práctica de enseñanza de otro formador grabada en vídeo.

- **Objetivo 5:** Diseñar un sistema de análisis y codificación que permita abordar los cuatro objetivos anteriores, es decir, que posibilite estudiar qué eventos relevantes relativos a la práctica de enseñanza de otro formador grabada en vídeo identifican los participantes y cómo los explicitan, así como examinar qué eventos relevantes interpretan y cómo los interpretan.

Por otro lado, y atendiendo a las características propias de los participantes como formadores, se concretan los siguientes dos objetivos:

- **Objetivo 6:** Examinar la influencia de la formación académica y de la experiencia docente de los MTE en su competencia *noticing*, si la hubiera.
- **Objetivo 7:** Examinar la evolución de la competencia *noticing* de los MTE a partir de su participación en el estudio, si la hubiera.

Así pues, atendiendo a los cinco primeros objetivos, se puede percibir que en esta investigación se da especial importancia no solo a comprobar qué eventos relevantes son identificados por los MTE, sino también a estudiar cómo los explicitan, es decir, se quiere poner el foco en qué información aporta cada sujeto ante un mismo evento acontecido en el vídeo que observan. Así es que, con relación a este aspecto, se trata de crear un sistema de niveles de *noticing* basado en el contenido explicitado a la hora de identificar un evento, tal y como se expone más adelante. En cuanto a las interpretaciones, se hace hincapié en cómo explican los eventos o cómo reflexionan en torno a ellos, además de reparar en qué eventos son los que interpretan. En definitiva, se quiere investigar acerca de qué eventos relevantes identifican los participantes sobre la práctica de enseñanza de otro formador y cómo los explicitan, así como examinar qué hechos interpretan y cómo los interpretan.

Por otro lado, en los dos objetivos finales subyacen dos conjeturas que se plantean con base en las características propias de los participantes del estudio. La primera sostiene que las diferencias relativas a la formación académica y a la experiencia docente entre los formadores tendrán un peso importante en su competencia *noticing*, por lo que se espera que no analice del mismo modo una práctica de enseñanza matemática dada un MTE que sea matemático que otro que no lo sea, o uno que cuente con una amplia experiencia como formador que otro que lleve poco tiempo ejerciendo como tal, o uno que tenga experiencia como profesor de secundaria o maestro de primaria que otro que no la posea. La segunda defiende que, dadas las características que se podrían suponer en un MTE diferentes a las

de otros docentes que no lo son — realicen estos últimos su labor en niveles universitarios o en otros —, los participantes experimentarán cierta evolución en su competencia *noticing* a lo largo del estudio con una mínima intervención por parte del investigador, sin que dar lugar a dicho cambio sea en sí un objetivo que se pretenda lograr en esta tesis.

La respuesta a la pregunta de investigación se pretende alcanzar, por tanto, desde una perspectiva muy determinada, tal y como se expresa en la concreción de los objetivos, la cual se desarrolla con minuciosidad en los siguientes apartados de este capítulo, lo que permitirá comprender mejor los objetivos propuestos.

3.2. Enfoque metodológico

Es posible concebir el enfoque metodológico de un estudio como el paradigma que guiará la investigación, entendiéndolo como un conjunto de ideas acerca de la naturaleza de la realidad que condicionan las pautas del pensamiento y las acciones del investigador que lo asume (Bassey, 1999). En otras palabras: un paradigma es un esquema teórico, una manera de percibir y de comprender el mundo, que nos conduce a identificar ciertas áreas problemáticas y que implica una determinada forma de acercarse a ellas para analizarlas e interpretarlas (Muñoz-Catalán y Monteiro, 2016). Por lo tanto, representa el sistema de supuestos axiológicos de partida en el momento de iniciar un proceso de investigación, lo que establece el camino a seguir para tratar de describir, comprender, explicar y resolver el problema al que queremos dar respuesta (Sánchez-Santamaría, 2013).

A la hora de tratar de fijar el paradigma de investigación, además de atender a la pregunta y a los objetivos planteados, así como al tipo de resultados o respuestas que se quieren alcanzar, es necesario reflexionar en torno a la posición que se tomará con relación a los planos ontológico, epistemológico y metodológico del trabajo (Guba y Lincoln, 1994). Atendiendo a cómo estos autores definen dichos planos y teniendo en cuenta que estos son interdependientes, puesto que las asunciones en cada uno afectarán a las de los demás (Santos, 2002), indicamos ahora nuestra perspectiva en cada uno de ellos. Con relación al aspecto ontológico, referido a la forma y a la naturaleza de la realidad y, en consecuencia, a lo que se puede saber sobre ella, entendemos que nuestro objeto de estudio responde a múltiples realidades, dado que presumiblemente la competencia *noticing* difiere de unos

formadores a otros en función de sus características propias y del contexto en el cual se quiera analizar su competencia. Con respecto al plano epistemológico, entendido como la naturaleza de la relación entre el investigador y lo que puede ser conocido, consideramos que conocer cómo es la competencia *noticing* del formador requiere de dar sentido a sus comentarios y, por lo tanto, de realizar interpretaciones sobre los eventos que identifica y sobre las explicaciones y las reflexiones que formula. Y en cuanto al nivel metodológico, centrado en cómo el investigador puede averiguar lo que cree que puede ser conocido, se hace necesaria una aproximación hermenéutica a la información proporcionada por los participantes, que se concreta en el diseño de investigación que más adelante se describe en este capítulo.

Como consecuencia de todo lo informado, el paradigma en el que nos situamos no es sino el interpretativo, en el que la realidad es considerada como una construcción social, razón por la que cabe la posibilidad de que distintos investigadores propongan diferentes elucidaciones sobre un mismo objeto de estudio, asumiéndose además que el investigador puede influir en la situación que está examinando, por lo que se considera en sí mismo un elemento potencial de la investigación. El propósito de este paradigma es poder avanzar en el conocimiento a través de la descripción y la interpretación de los fenómenos con la intención de obtener significados acerca de los acontecimientos analizados (Bassey, 1992, 1999). Así pues, frente a la aspiración de la teoría positivista de realizar generalizaciones universales, lo que se pretende es crear un cuerpo de conocimientos capaz de explicar un caso específico de estudio (Lincoln y Guba, 1985; Ruiz-Olabuénaga, 2012), que adquiere pleno significado en el contexto particular en el que se encuentra (Pérez-Serrano, 1994).

El paradigma interpretativo se sirve de forma principal de un enfoque cualitativo (Ricoy, 2006), el cual procura trazar una aproximación a la información desde una visión inductiva, descriptivo-interpretativa y holística y pretende comprender casos concretos, desde el criterio propio del investigador y sin pretensiones de generalizar los resultados — como ya se ha indicado —, centrándose en los procesos que tienen lugar en una realidad dinámica a través del uso de métodos cualitativos (Eisner, 1998; Reichardt y Cook, 1986). Por tanto, proponemos un estudio no experimental (Kerlinger y Lee, 2002) con un enfoque esencialmente cualitativo dirigido hacia la comprensión que, si bien no se esfuerza *a priori* por modificar la realidad que tratamos de conocer, sí puede suponer un paso previo para una posterior transformación (Bartolomé, 1992).

El conocimiento resultante de la investigación cualitativa se construye desde una orientación idiográfica que dispensa resultados con base en interpretaciones acerca de las aportaciones de unos participantes y un contexto concretos, resultados que han de tener suficiente certeza como para dotar del rigor necesario a la investigación (Dorio *et al.*, 2009). Para tal fin, nos atenemos a los criterios de credibilidad, transferibilidad, dependencia y confirmabilidad (Guba, 1985). Con relación al primero, consistente en que los resultados se ajusten a la realidad, lo logramos mediante la triangulación de expertos (Flick, 2007) y a través de la validación de los propios investigadores del estudio. En lo que respecta a la transferibilidad, referida a que la información recabada pueda usarse como conocimiento referencial en otros contextos de características similares, el presente trabajo servirá como punto de partida sobre todo en futuras disertaciones sobre el *noticing* de los formadores, dada la exigüidad de estas, para lo cual se proporciona una exhaustiva descripción de los resultados alcanzados para posibilitar que se puedan reconocer situaciones semejantes en otros contextos. En lo que concierne a la dependencia, entendida como la consistencia de los datos, se plantea en los siguientes apartados información detallada acerca del proceso seguido para la selección de los participantes y de las fases implementadas para obtener datos acerca del *noticing* de los formadores, así como sobre las técnicas empleadas para recoger dichos datos, y se facilitan las transcripciones de todos los participantes a lo largo del estudio, así como todo tipo de documentos relativos a la codificación realizada, lo que posibilita comprobar la solidez de los resultados. Y, por último, en lo que se refiere a la confirmabilidad, entendida como el propósito de ofrecer la información de la manera más consensuada posible, sin por ello dejar de reflejar el significado atribuido a los diferentes participantes, además de apoyarnos en la triangulación de expertos, se hace uso de una validación en colaboración con los participantes de la investigación a través de entrevistas (Dorio *et al.*, 2009) y se presentan fragmentos de las transcripciones a lo largo del análisis de los resultados como evidencias que sustentan las distintas afirmaciones formuladas en el trabajo (Hammersley, 1992; Pascual, 2021).

3.3. Participantes del estudio

Los participantes de la presente investigación se han seleccionado del conjunto de formadores de matemáticas y su didáctica de futuros maestros de Educación Primaria en las universidades públicas de la Comunidad de Madrid que ejercieron como tales durante

el curso académico 2018-2019, el cual estaba integrado por un total de 39 docentes. Habida cuenta de la conjetura relativa al sexto objetivo del trabajo, por la cual entendemos que la formación académica y la experiencia docente son aspectos que influyen notablemente en el *noticing* de los MTE, se procedió a llevar a cabo un muestreo de conveniencia (Ballestín y Fàbregues, 2018) a través del cual se ha seleccionado a los 6 participantes del estudio atendiendo a dichas variables.

Para tal fin, en esta fase inicial de recogida de datos —que se corresponde con la selección de los participantes— se elaboró un cuestionario con en torno a una veintena de preguntas destinadas a conocer las características de los integrantes de la población diana. De todas ellas, se decidió emplear para el muestreo las que arrojaban información sobre ciertos aspectos de su formación académica —carrera, máster y doctorado—, amén de su experiencia docente —como formador, como profesor de Educación Secundaria y como maestro de Educación Primaria—. El resto de datos, si bien no se han usado en esta tesis, pueden permitirnos realizar análisis sobre el perfil de los MTE en futuras investigaciones. Así pues, se adjunta a este trabajo el cuestionario utilizado, incluyendo en él únicamente las preguntas que se han tenido en cuenta para la selección de los participantes (Anexo 1). Cabe decir, además, que el cuestionario aplicado se construyó con *Google Forms* y se envió por correo electrónico a los 39 formadores de la población diana, obteniendo respuesta de 29 de ellos.

Por un lado, en lo que respecta a la primera variable, *formación académica*, se ha clasificado a los docentes en tres categorías en función de los datos obtenidos: matemática, didáctico-matemática y didáctica.

En la categoría matemática (F1), incluimos a todos los MTE que tienen una amplia formación matemática con base en la carrera estudiada, así como en los estudios de máster y de doctorado —si los tuvieran—, o sea, a aquellos que tienen estudios reglados con un alto grado de contenidos matemáticos, pero que no tienen formación reglada en didáctica, ya sea en didáctica de las matemáticas o en didáctica general —encontramos básicamente a matemáticos—. Este grupo se divide en dos subcategorías en función de si los docentes poseen o no el título de doctor en matemáticas, pues entendemos que los conocimientos matemáticos de aquellos con un doctorado en dicha área serán más profundos y diversos y, por consiguiente, probablemente abordarán el análisis de la práctica de enseñanza de otro formador de un modo diferente. Así pues, las dos subcategorías resultantes son:

- F1.1: sujetos de F1 con doctorado en matemáticas o en áreas con una carga potente en matemáticas (y sin formación reglada en didáctica).
- F1.2: sujetos de F1 sin doctorado en matemáticas o en áreas con una carga potente en matemáticas (y sin formación reglada en didáctica).

En la categoría didáctico-matemática (F2), incluimos a aquellos que tienen estudios reglados tanto en matemáticas como en didáctica, ya sea en didáctica de las matemáticas o en didáctica general —encontramos básicamente a matemáticos—. En este sentido, estos tienen una formación matemática equivalente, al menos, a la de los docentes situados en la subcategoría F1.2, pero además poseen formación reglada en didáctica. Atendiendo a su formación didáctica, se establecen cuatro subcategorías que se presentan ordenadas en función de su contenido didáctico-matemático, de mayor a menor, a continuación:

- F2.1: sujetos de F2 con doctorado en didáctica de las matemáticas.
- F2.2: sujetos de F2 con máster en investigación en didáctica de las matemáticas.
- F2.3: sujetos de F2 con máster en formación del profesorado de secundaria en la especialidad de matemáticas.
- F2.4: sujetos de F2 con máster en didáctica general (sin contenido matemático).

Ante el caso de que un docente cumpla con la condición de más de una de dichas subcategorías, este se situará en la que tenga un contenido didáctico-matemático más alto de todas en las que pueda ubicarse.

En la categoría didáctica (F3), incluimos a los docentes que no tienen una formación reglada basada de forma principal en las matemáticas. Sí que han estudiado matemáticas durante la carrera, pero a un nivel significativamente inferior respecto a los sujetos de las dos categorías anteriores. En cambio, poseen una formación alta en didáctica, sobre todo en didáctica general, pero también en didáctica de las matemáticas —solo encontramos a maestros—. En esta categoría no hemos visto la necesidad de crear subcategorías, ya que no hay diferencias considerables entre los MTE que respondieron al cuestionario y que se sitúan en F3 en lo referido a la variable de formación.

Atendiendo a las diferentes categorías y subcategorías planteadas, en la tabla que se muestra a continuación podemos ver cómo se distribuyen en las mismas los 29 docentes de los que se obtuvieron datos:

Tabla 3.1. Distribución de los MTE en las categorías de formación académica.

Categoría	Subcategoría	Número de sujetos
<i>F1. Matemática</i>	F1.1	9
	F1.2	4
<i>F2. Didáctico-matemática</i>	F2.1	10
	F2.2	1
	F2.3	1
	F2.4	1
<i>F3. Didáctica</i>	—	3

Podemos observar que la mayoría de los sujetos tiene una formación reglada que se basa en un conocimiento matemático extenso (F1 y F2) y que, por el contrario, la gran minoría de los docentes —únicamente tres— son maestros (F3). Por tanto, es posible decir que se trata de un grupo bastante homogéneo en lo que a la formación de carrera se refiere. Puesto que nos interesa tener una muestra lo más heterogénea posible, parece obvio que será necesario contar con participantes de la categoría F3, dado que son los que presentan más diferencias en formación respecto a los demás MTE. En cuanto a la categoría F1, se van a seleccionar sujetos de las dos subcategorías y, en lo que respecta a la categoría F2, solamente elegiremos formadores de la subcategoría F2.1, pues en ella encontramos a los docentes con la mayor formación didáctico-matemática, es decir, a los sujetos con el perfil más marcado de su categoría y, por tanto, más diferenciado del de las otras dos.

Cabe reiterar que la clasificación resultante relativa a la formación académica ha surgido a partir de los datos obtenidos y, por consiguiente, refleja las características de los docentes que respondieron al cuestionario. Así pues, podría darse la situación en la que otros formadores con perfiles distintos no se pudieran incluir en ninguna de las categorías establecidas, como sería el caso, por ejemplo, de un formador que fuera maestro y tuviera un doctorado en didáctica de las matemáticas. Por lo tanto, la clasificación presentada no pretende poder categorizar cualquier tipo de MTE en cuanto a su formación académica, sino que responde únicamente a la población concreta con la que estamos trabajando.

Por otro lado, en cuanto a la segunda variable, *experiencia docente*, se ha llevado a cabo la clasificación del conjunto de los sujetos con arreglo a dos criterios. En primer lugar, fijándonos en la cantidad de años que han ejercido como MTE, obteniendo de este modo tres categorías: experiencia baja —de 1 a 5 años—, experiencia media —de 6 a 15 años—

y experiencia alta — más de 15 años —. En segundo lugar, prestando atención a la índole de su experiencia docente, es decir, comprobando si han impartido matemáticas en otros niveles del sistema educativo como profesores de Educación Secundaria o como maestros de Educación Primaria, además de como MTE en la Universidad, estableciéndose de esta manera tres categorías: experiencia solamente como MTE, experiencia como MTE y en Educación Secundaria y experiencia como MTE y en Educación Primaria. Cabe precisar que, si bien algún sujeto tiene experiencia en la Universidad como otro tipo de docente, además de como formador, dicho aspecto no lo tenemos en cuenta para la selección de la muestra, aunque sí se podría considerar para analizar los datos que obtengamos sobre su *noticing*. Con base en esta clasificación, en la siguiente tabla se plasma la distribución de los 29 docentes de los que se obtuvieron datos en las distintas categorías planteadas:

Tabla 3.2. Distribución de los MTE en las categorías de experiencia docente.

Experiencia como MTE	Tipo de experiencia			
	<i>Solamente como MTE</i>	<i>Como MTE y en Ed. Secundaria</i>	<i>Como MTE y en Ed. Primaria</i>	
	<i>Alta [más de 15]</i>	3	1	—
	<i>Media [6-15]</i>	3	9	—
	<i>Baja [1-5]</i>	7	3	3

Uno de los aspectos más reseñables de los datos expuestos en la tabla es la ausencia de sujetos con experiencia media o alta como MTE que hayan ejercido como maestros de Educación Primaria. Es un dato llamativo, cuando menos, al tratarse de profesores que se encargan precisamente de preparar a futuros maestros de Educación Primaria y que, en parte, puede deberse a los requisitos que tradicionalmente han existido para acceder a la carrera docente en la Universidad como formador. En cualquier caso, se trata de un hecho que no entramos a analizar en este trabajo, aunque cabe indicar que esta situación ya ha comenzado a variar en los últimos años, por ejemplo, con el acceso de maestros a estudios de doctorado en didáctica de las matemáticas.

En lo referido a los sujetos que poseen experiencia en Educación Secundaria o en Educación Primaria, para seleccionarlos como participantes del estudio consideraremos como elegibles solamente a aquellos que tengan más años de docencia en dichos niveles que como MTE, información de la que disponemos a partir del cuestionario. Usamos este criterio porque buscamos una muestra heterogénea y así podemos asegurarnos de que la

experiencia en otros niveles educativos de dichos MTE tenga más peso en su experiencia docente que aquella que tengan como formadores y, por ende, de que la probabilidad de que la misma influya en su modo de entender la enseñanza y en su *noticing* sea alta.

Al igual que sucede con la clasificación por formación académica, la referida a la experiencia docente se ha generado a raíz de los datos recabados, por lo que podría darse la situación en la que otros MTE con perfiles diferentes no se pudieran incluir en ninguna de las categorías establecidas, como sería el caso, por ejemplo, de un formador que tuviera experiencia en Educación Secundaria y, asimismo, en Educación Primaria. Por ello, esta clasificación se adapta solo a la población concreta con la que estamos trabajando.

Una vez clasificados los formadores en función de las dos variables de interés, y procediendo a descartar a aquellos que consideramos no elegibles por los argumentos ya descritos, así como a la directora de esta disertación —quien a su vez es un elemento del conjunto de los 29 MTE de los que tenemos datos—, planteamos en la siguiente tabla la distribución de posibles participantes incluyendo la información relativa a su formación y a su experiencia:

Tabla 3.3. Distribución de los MTE —elegibles como participantes— en las categorías de formación académica y de experiencia docente.

	Tipo de experiencia		
	<i>Solamente como MTE</i>	<i>Como MTE y en Ed. Secundaria</i>	<i>Como MTE y en Ed. Primaria</i>
Experiencia como MTE	<i>Alta [más de 15]</i>	F2.1 (3)	—
	<i>Media [6-15]</i>	F1.1 (2)	F1.2 (2)
	<i>Baja [1-5]</i>	F1.1 (4)	F3 (3)
		F1.2 (1)	
		F2.1 (1)	

Como se puede ver en la tabla, contamos con 18 formadores elegibles para formar parte del conjunto de participantes. Al cruzar los datos sobre la formación y la experiencia, vemos que en la celda de *experiencia como MTE baja y experiencia como MTE y en Ed. Primaria* solo encontramos sujetos de F3, es decir, maestros. Asimismo, en la celda diametralmente opuesta, la de aquellos con *experiencia como MTE alta y experiencia solamente como MTE*, hallamos únicamente sujetos de F2.1, es decir, doctores en didáctica de las matemáticas. Son datos interesantes que esperamos examinar, junto con otros muchos obtenidos en el cuestionario, en investigaciones ulteriores a la presente disertación.

Llegados a este punto, y sin perder de vista la intención de dar lugar a un conjunto heterogéneo de participantes, se ha procedido a elegir para el estudio a un MTE de cada celda de experiencia —en la que se encuentre algún sujeto— de la tabla anterior. Para ello, se ha analizado a los formadores por celdas, constatando que no hay grandes diferencias entre ellos —en cada celda—, por lo que se ha seleccionado a los participantes de tal modo que contáramos con representantes de las diferentes categorías de formación académica por las que nos interesamos —F1.1, F1.2, F2.1 y F3— y de todas las universidades de las que proceden los docentes objeto de estudio, esto es, cuatro universidades públicas de la Comunidad de Madrid, atendiendo igualmente a la disponibilidad y a la motivación por su parte para participar en la investigación. De esta forma, se ha llegado al conjunto final de participantes, constituido por 6 MTE, cuya distribución se plasma en la siguiente tabla, en la cual ya se incluyen los pseudónimos adjudicados a cada uno de ellos:

Tabla 3.4. Distribución de los MTE —elegidos como participantes— en las categorías de formación académica y de experiencia docente.

		Tipo de experiencia		
		<i>Solamente como MTE</i>	<i>Como MTE y en Ed. Secundaria</i>	<i>Como MTE y en Ed. Primaria</i>
Experiencia como MTE	<i>Alta [más de 15]</i>	Marcos, F2.1	—	—
	<i>Media [6-15]</i>	Daniel, F1.1	Lucas, F1.2	—
	<i>Baja [1-5]</i>	Jorge, F1.1	Pablo, F2.1	Raquel, F3

Una vez determinados los 6 participantes, se aporta ahora más información sobre los mismos de forma breve —actualizada a fecha de la realización del cuestionario— para comprender mejor su perfil:

- Marcos: es matemático de carrera y doctor en didáctica de las matemáticas y cuenta con 32 años de experiencia como profesor universitario, todos ellos como MTE de futuros maestros.
- Daniel: es matemático de carrera y doctor en matemáticas y cuenta con 28 años de experiencia como profesor universitario, 9 de ellos como MTE de futuros maestros.
- Jorge: es matemático de carrera y doctor en matemáticas y cuenta con 10 años de experiencia como profesor universitario, 2 de ellos como MTE de futuros maestros.
- Lucas: es matemático de carrera y cuenta con 6 años de experiencia como profesor universitario, todos ellos como MTE de futuros maestros, y con 11 años como profesor de matemáticas en Educación Secundaria.

- Pablo: es matemático de carrera y doctor en didáctica de las matemáticas y cuenta con solo 1 año de experiencia como profesor universitario, como MTE de futuros maestros, y con 15 años como profesor de matemáticas en Educación Secundaria.
- Raquel: es maestra de Educación Primaria de carrera y cuenta con 2 años de experiencia como profesora universitaria, ambos como MTE de futuros maestros, y con 15 años como maestra de Educación Primaria.

Tras haber explicado con detalle el proceso para la selección de los participantes del estudio, así como las características de los mismos relativas a su formación académica y a su experiencia docente, en el siguiente apartado se describe de forma pormenorizada el diseño de investigación aplicado.

3.4. Diseño de investigación

El diseño de investigación proporciona un marco para la recogida y el análisis de datos y su elección refleja las decisiones sobre la prioridad que el investigador da a una serie de dimensiones del proceso investigativo, como pueden ser aspectos asociados a las relaciones entre las variables a estudiar o el entendimiento de determinados hechos y de su significado en un contexto social concreto (Bryman, 2012). En este sentido, supone un puente entre la cuestión que se trata y la solución que se busca (Rodríguez *et al.*, 1999). En nuestro estudio, para planificar las diferentes fases para la recolección de información, y tras revisar las características de diversos diseños específicos que responden a un enfoque cualitativo (*v. gr.*, Bisquerra, 2009; Bryman, 2012; Creswell, 2013), se ha decidido elaborar un diseño de investigación *ad hoc* para dar respuesta a la pregunta de esta tesis de la mejor manera posible atendiendo a la especificidad de la aproximación que desde los objetivos propuestos realizamos a la comprensión de la competencia *noticing* de los MTE.

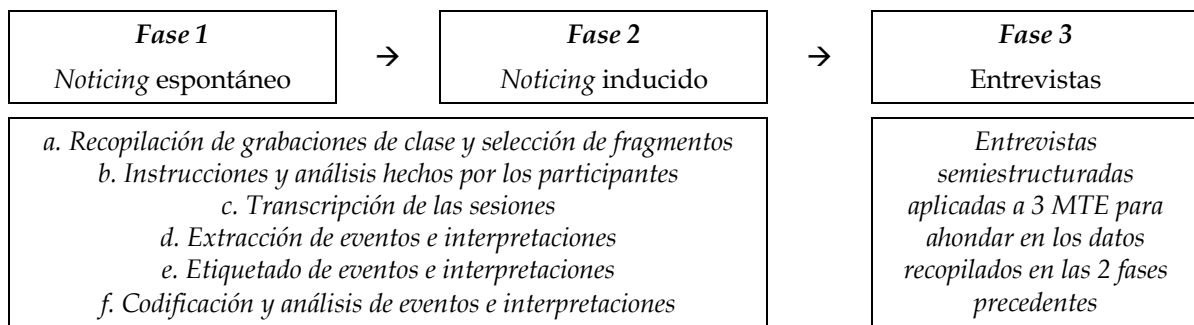
Dada la idiosincrasia de la perspectiva cualitativa, el diseño planteado necesita ser abierto, flexible y emergente, es decir, tiene que adaptarse y evolucionar a medida que se va generando conocimiento para posibilitar la comprensión de la realidad que se estudia (Dorio *et al.*, 2009; Flick, 2015). Por lo tanto, el plan inicial para la recogida de información ha de ser susceptible de recibir modificaciones durante el estudio en pos de encaminar la indagación hacia la consecución de respuestas al problema objeto de análisis a través de

los significados aportados por los participantes (Creswell, 2014). En consecuencia, nuestro diseño ha experimentado variaciones a lo largo del tiempo para llegar a un planteamiento final que se estructura en un total de tres fases y que, habida cuenta de que no responde a una estructura preestablecida y conocida, se describe con exhaustividad a continuación para su adecuado entendimiento, haciendo a veces alusión a algunos de los documentos elaborados en cada fase, que muestran parte de los datos recopilados y que se adjuntan como anexos, con el exclusivo propósito de facilitar la comprensión de la descripción que ofrecemos del diseño de investigación, aunque sin esbozar análisis alguno de los datos y sin extraer resultados a partir de los mismos, cuestión que se aborda en el cuarto capítulo de la tesis, relativo al análisis de los datos y a los resultados.

Asimismo, podemos entender que el diseño que planteamos, al haberse creado a medida para alcanzar los objetivos formulados, supone en sí mismo una aportación de la investigación y que, además, el proceso para la selección de los participantes mediante el uso de un cuestionario, explicado en el apartado previo —relativo a los participantes—, se puede considerar también como un elemento del diseño de investigación, dado que nos aporta información necesaria no solo para establecer la muestra, sino para articular parte de la respuesta a la cuestión que pretendemos dilucidar. Así pues, las tres fases del diseño que se describen en las siguientes páginas responden concretamente a los procesos que se han implementado para obtener datos del *noticing* de los MTE escogidos.

Para facilitar la lectura de la prolija explicación de las distintas fases que se expone a continuación, se aporta ahora un esquema que pretende plantear el esqueleto principal de la información que se va a desarrollar y que presenta el asunto fundamental que trata cada una de las fases, así como los apartados abordados en cada una. Los apartados de la primera fase y de la segunda fase —que son los mismos entre sí— se aplican a todos los participantes, mientras que la tercera fase se implementa únicamente con tres de ellos, tal y como se explica más adelante. Cabe decir, además, que el mismo esquema se planteará de nuevo al término de la explicación de las tres fases, incluyendo información adicional que a lo largo de las mismas se va a detallar y añadiendo la fase inicial sobre la selección de la muestra, con el objeto de contar con una figura que reúna las ideas primordiales del contenido de las fases y que posibilite apreciar de un vistazo el diseño de investigación al completo que se ha concebido, así como los documentos que se han creado para permitir el análisis de los datos recabados, que se describen en los apartados correspondientes.

Figura 3.1. Fases para la recogida de datos sobre el *noticing* de los MTE.



A continuación, se desarrollan las tres fases del diseño de investigación orientadas a la recogida de datos sobre el *noticing* de los MTE.

3.4.1. Fase 1. *Noticing* espontáneo

Esta primera fase de recogida de datos se ha diseñado con el propósito de recabar información referente a lo que hemos venido a denominar «*noticing* espontáneo», que se entiende como aquel que emerge del docente sin que este reciba pautas o directrices que le ayuden a detectar eventos o a realizar interpretaciones de los mismos en la situación de enseñanza-aprendizaje grabada en vídeo que se disponga a analizar. En otras palabras: se trata del *noticing* que se manifiesta en el sujeto a raíz de un *open-ended video viewing support* (Santagata *et al.*, 2021), es decir, a partir de *inputs* o *prompts* que tienen un carácter amplio o general y que suelen ser presentados en forma de instrucciones o preguntas como, por ejemplo, «¿qué eventos detectas?» o «¿cómo interpretas los eventos identificados?». Así pues, para obtener datos sobre el *noticing* espontáneo del docente, no se le proporciona un conjunto de preguntas específicas acerca de aspectos determinados del vídeo ni un marco de dimensiones o categorías que puedan guiar o estructurar su análisis sobre la situación observada, tanto en el foco como en su profundidad, y transformar, por consiguiente, su competencia *noticing*, sino que simplemente se le suministran indicaciones generales que buscan que explicita qué eventos identifica en una situación dada y cómo los interpreta, tal y como sucede, en parte, en los estudios realizados por Stockero (2008), Van Es y Sherin (2008), Colestock y Sherin (2009) y Osmanoğlu *et al.* (2015), por citar algún ejemplo.

A modo de breve descripción de esta fase, cabe señalar que esta se desarrolló con cada uno de los 6 participantes de forma individual, de tal modo que en el transcurso de

la misma solo estuvieron presentes el formador en cuestión y el investigador. Se llevó a cabo durante una sesión con cada uno de ellos — que fue grabada en vídeo para posibilitar su posterior análisis — en la que el participante visionó y comentó oralmente un conjunto de vídeos que mostraban fragmentos de clases en las que una formadora, no participante en esta disertación, enseñaba matemáticas y su didáctica a futuros maestros de Educación Primaria. Los comentarios efectuados por cada uno de los participantes atendieron a unas instrucciones que previamente fueron explicadas por el investigador y que simplemente pretendían especificar las tareas a realizar, focalizándolas en el análisis de la práctica de enseñanza de la MTE del vídeo — pero sin ofrecer categorías ni preguntas que condujeran la detección de eventos o su interpretación hacia aspectos concretos de la misma — para, de esta forma, centrar las observaciones en el contexto de la investigación y propiciar un escenario en el que se pudieran recopilar datos que satisficieran, al menos parcialmente, las demandas de los objetivos de la investigación relativos a los eventos e interpretaciones que los distintos formadores aportan al analizar la práctica de enseñanza de otro MTE.

A continuación, se proporciona información detallada sobre cada una de las etapas seguidas en el diseño metodológico de esta primera fase, sin centrarnos únicamente en la propia sesión en la que se recopilaron los datos, sino también en aquellas etapas llevadas a cabo previamente para su preparación y posteriormente para posibilitar su análisis.

3.4.1.a. Recopilación de grabaciones de clase y selección de fragmentos

A lo largo del primer cuatrimestre del curso académico 2018-2019, procedimos a grabar en vídeo la práctica totalidad de las lecciones de la asignatura «Matemáticas y su Didáctica I», impartida por la directora de la presente tesis — quien a su vez es MTE — a estudiantes del grado universitario de Maestro en Educación Primaria, asignatura que se centra en los fundamentos teórico-prácticos referidos a los contenidos del número natural y sus operaciones y a su didáctica. De la totalidad de dichas grabaciones, se seleccionaron los fragmentos de vídeo que en esta primera fase de recogida de datos se mostraron a los participantes para que los analizaran y obtuviéramos, de este modo, información sobre su *noticing*. Así pues, grabamos y utilizamos las clases de la asignatura a la que teníamos un acceso más fácil al ser impartida por la directora de este trabajo, para lo que contamos con los preceptivos consentimientos informados de los alumnos de la misma.

El contenido de la asignatura en cuestión no lo hemos entendido como un elemento que *a priori* pueda tener un peso especial en la competencia *noticing* de los integrantes de la muestra —al tratarse de MTE—, por lo que no hacemos especial hincapié sobre ello a lo largo de este documento, aunque sí lo incluimos en las entrevistas de la tercera fase de recogida de datos. La principal característica que debían tener las clases grabadas es que fueran de matemáticas y su didáctica y que se dirigieran a futuros maestros de Educación Primaria, puesto que este es el contexto en el que desarrollan todos los participantes su labor docente.

Una vez grabadas las sesiones de la citada asignatura —un total de 25—, poniendo el foco de forma principal en la formadora, procedimos a visionarlas con el propósito de elegir los fragmentos con potencial que se mostrarían a los participantes (Van Es y Sherin, 2008, 2010). Para ello, y teniendo como referencia las dimensiones para la caracterización de vídeos propuestas por Sherin *et al.* (2009), buscamos episodios que recogieran ejemplos claros y ricos de la práctica de enseñanza de la MTE, centrados en aspectos matemáticos o didáctico-matemáticos. Asimismo, procuramos que mostraran diferentes partes de las sesiones —el comienzo, el desarrollo, el final—, que plasmaran secuencias con suficiente información como para ser entendidas de forma aislada, que tuvieran un inicio y un final bien definidos (Schoenfeld, 1999), que incluyeran contenidos variados, tanto matemáticos como didáctico-matemáticos, y que además tuvieran una buena calidad de imagen y de audio. Con estas condiciones, obtuvimos varios fragmentos de entre los cuales escogimos siete que pertenecían a tres sesiones distintas y que se organizaron en los tres vídeos que se mostraron finalmente a los sujetos, cuyo contenido se describe ahora sucintamente:

- Vídeo 1: consta de tres fragmentos de una misma sesión que se corresponden con el comienzo, el desarrollo y el final de la misma, respectivamente. En el primero, la docente explica la tarea que han de realizar los alumnos por grupos, que consiste en contar los palillos de un conjunto de palillos y en organizarlos en subconjuntos, pudiendo emplear para ello gomas de colores, con el propósito de que se pueda saber cuántos palillos hay de un vistazo; luego, cada grupo se junta con otro para reagrupar todos los palillos de ambos grupos; y ya en la parte final de la clase, se ponen en común los agrupamientos para saber el total de palillos repartidos en el aula. En el segundo, la formadora interactúa con dos grupos para comprobar qué agrupamientos hicieron y qué acuerdos han tenido que alcanzar luego, al juntarse,

para reagrupar los palillos. Y en el tercero, se realiza una puesta en común con toda la clase en la que se ve qué agrupamientos hicieron dos grupos de alumnos y a qué acuerdos han llegado al tener que reagrupar los palillos, para lo cual la formadora va apuntando en la pizarra los agrupamientos realizados.

- Vídeo 2: consta de un solo fragmento, que presenta el desarrollo de una sesión, en el que la formadora plantea en la pizarra el proceso de resolución de un ejercicio consistente en pasar el número B6 de base 16 a base 2 sin pasar por base 10. Para lograrlo, interactúa con los alumnos para que propongan estrategias de resolución. Tras analizar las dos primeras propuestas y hacer ver sus desventajas, desarrolla paso a paso con la colaboración de los alumnos la tercera que se sugiere, basada en el hecho de que 16 se puede expresar como 2^4 , llegando finalmente a conseguir la escritura del número B6 en base 2.
- Vídeo 3: consta de tres fragmentos de una misma sesión que se corresponden con el principio, el desarrollo y el final de la misma, respectivamente. En el primero, la docente presenta la actividad a desarrollar, que consiste en representar el proceso de resolución de un total de cuatro operaciones dadas —dos sumas y dos restas— en diferentes registros de representación: manipulativo (con el ábaco vertical, el sorobán y los bloques multibase), tabular (de forma gráfica y de forma simbólica) y simbólico-numérico. En el segundo, se presenta la interacción entre la docente y tres alumnos que tienen dificultades para realizar una de las dos restas ($704 - 45$) con el ábaco vertical al tener que hacer descomposiciones y reagrupamientos. Y en el tercero de ellos, la formadora lleva a cabo una puesta en común con toda la clase plasmando en la pizarra el proceso de resolución de una de las operaciones en los distintos registros de representación tratados —en paralelo—, haciendo hincapié en diversas consideraciones didáctico-matemáticas sobre el uso de dichos registros durante el proceso de enseñanza-aprendizaje de las operaciones.

Como se observa, cada vídeo aborda un contenido matemático distinto —aunque todos relacionados con nuestro sistema de numeración—: el primero se centra en el conteo y en el funcionamiento del sistema de numeración decimal; el segundo trata el cambio de base, siendo quizá el contenido de los tres vídeos que entraña más dificultades para los estudiantes; y el tercero se ocupa del proceso de las operaciones con estructura aditiva a través del empleo de diferentes registros de representación. Así pues, las consideraciones didáctico-matemáticas sobre cada uno de los contenidos son también distintas.

Los vídeos tienen una duración de unos 13, 14 y 21 minutos, respectivamente, y la transcripción de los mismos se adjunta a este documento para posibilitar la consulta de su contenido íntegro (Anexo 2).

3.4.1.b. Instrucciones y análisis hechos por los participantes

Una vez seleccionados los fragmentos, se procedió a elaborar las instrucciones que fueron leídas a los participantes el día en el que se celebró la sesión para el visionado de los vídeos y, por tanto, en el que se realizó la recolección de datos acerca de su *noticing* en esta primera fase. El objetivo que se perseguía con la elaboración de las instrucciones era explicar a los formadores su cometido durante la sesión, el cual consistió en llevar a cabo dos tareas: en primer lugar, indicar todos los eventos —hechos, situaciones, acciones— que pudieran identificar sobre la práctica de enseñanza de la formadora; y, en segundo, interpretar los eventos detectados —aportar explicaciones sobre por qué ocurrieron de tal modo, reflexiones sobre ellos—, si les es posible, para ahondar en la práctica de enseñanza señalada. Así pues, se les solicitaba que se centrasen en la formadora, no en las acciones de los alumnos ni en el razonamiento matemático de estos —aunque sí se pudiera hacer alusión a dichos aspectos para explicar los hechos detectados o reflexionar sobre ellos—, explicitando eventos e interpretaciones acerca de su práctica de enseñanza, sin tener que aportar posibles acciones posteriores o alternativas sobre ella, por lo que nos basamos en cómo Van Es y Sherin (2008) entienden la construcción teórica de *noticing*.

Asimismo, en las instrucciones se hizo ver que los comentarios que se quisieran realizar para explicitar eventos e interpretaciones se tendrían que hacer de forma oral y a lo largo del visionado de los vídeos, para lo cual se pararía la reproducción tantas veces como fuera necesario cuando el participante lo estimara oportuno, teniendo en cuenta que no se podría retroceder en las secuencias de los fragmentos, es decir, no se permitiría ver más de una vez ninguna parte de la grabación, ciñéndonos todo lo posible de esta manera a las principales conceptualizaciones de *noticing*, que entienden la competencia como una práctica que tiene lugar en el momento (Sherin, 2017).

Por otro lado, también se explicó que los comentarios que aportaran debían tener en cuenta consideraciones como que no se trata de juzgar o criticar el trabajo que realiza la MTE del vídeo —con el solo ánimo de señalar defectos o faltas—, sino de reflexionar en

torno a sus acciones, que se asume que la MTE actúa en todo momento a favor del máximo beneficio de sus alumnos y que los vídeos que se proponen no pretenden mostrar la mejor práctica de enseñanza ni la peor, sino simplemente ejemplos de clases reales que han de servir para poder reflexionar sobre la práctica de enseñanza en sí. Dichas indicaciones las tomamos del programa israelí de desarrollo profesional *VIDEO-LM* de Karsenty y Arcavi (2017), que busca que los profesores de matemáticas de Educación Secundaria mejoren su propia práctica de enseñanza a partir de la reflexión sobre la práctica de otros profesores en grabaciones de vídeo (Karsenty, 2018; Karsenty y Arcavi, 2017), por lo que, además de asumir algunas de sus consideraciones a la hora de que los MTE realicen observaciones, compartimos con este programa el hecho de que los participantes centren su análisis en la figura del docente — aspecto que no es habitual en estudios de *noticing* —, y no en la de los estudiantes, así como el empleo del recurso del vídeo para ello.

Tras la explicación de las instrucciones a los participantes —que indican las tareas a realizar sin incluir *inputs* o *prompts* que guíen la atención de los MTE hacia contenidos concretos de los vídeos—, se quiso comprobar que habían entendido correctamente lo que en realidad se les quería transmitir. Para ello, se propuso una especie de entrenamiento antes de comenzar a analizar los vídeos que consistió en visionar un pequeño fragmento de poco más de un minuto, cuya temática no tenía que ver con el ámbito educativo para no repercutir en los comentarios posteriores —presentaba a una persona restaurando una puerta—, y en leer después una serie de comentarios que se podrían haber hecho sobre el mismo, teniendo que manifestar si en dichos comentarios se incluía de forma explícita la detección de eventos, la propuesta de alguna interpretación, la sugerencia de alternativas o alguna crítica o juicio. De este modo, se pudo aclarar qué entendíamos por cada uno de estos aspectos, focalizando el análisis posterior de los vídeos en la detección de eventos y en su interpretación, tal y como se les solicitaba, y no en otros derroteros.

Cabe señalar, además, que para obtener la versión final de las instrucciones se llevó a cabo un pequeño estudio piloto —triangulación de expertos (Flick, 2007)— con dos MTE de futuros maestros de Educación Primaria —quienes no formaban parte de la población diana de 39 sujetos, puesto que en el curso académico 2018-2019 no impartieron ninguna asignatura a dichos estudiantes—, en el cual se emplearon las instrucciones elaboradas y los tres vídeos escogidos, lo que nos ayudó no solamente a refinar el texto y a comprobar que las instrucciones generadas eran inteligibles y que cumplían con su cometido, sino a

verificar también que los distintos fragmentos de vídeo propuestos eran suficientemente claros y ricos como para propiciar la identificación de bastantes eventos sobre la práctica de enseñanza de la MTE y la interpretación de estos.

La versión final de las instrucciones que se emplearon en la fase 1 se adjunta a este trabajo para permitir su consulta en caso de querer conocer el contenido completo de las mismas (Anexo 3).

Una vez que el participante en cuestión comprendió las distintas tareas a realizar, se inició el visionado de los tres vídeos —mostrándose el mismo conjunto de vídeos a los 6 participantes— y, por consiguiente, el análisis del sujeto sobre los mismos. Durante la reproducción, no se ofreció por parte del investigador ningún tipo de guía o indicación acerca de en qué debía fijarse el formador, motivo por el que este podía explicitar eventos matemáticos o didáctico-matemáticos, así como aquellos relativos a aspectos de didáctica general o a otros asuntos, además de poder aportar interpretaciones del tipo que quisiera. En este sentido, no se señaló al participante la clase de comentarios que debía hacer, más allá de lo expuesto en las instrucciones —que tan solo acotaban el análisis que pudieran realizar a la figura de la formadora, atendiendo de este modo a los objetivos y al contexto de la tesis—, dado que el propósito de esta primera fase de recogida de datos es obtener información sobre el *noticing* espontáneo de los MTE. De esta manera, al no constreñir la índole de las observaciones que pudieran hacer sobre la docente del vídeo, al no inducir comentarios sobre contenidos concretos, se esperaba obtener cierta variedad de eventos e interpretaciones en los que se viera reflejada la influencia tanto de la formación como de la experiencia de cada uno de los integrantes de la muestra.

Por último, cabe mencionar que todas las sesiones fueron grabadas en vídeo para permitir su posterior transcripción, la cual facilitaría el análisis de su contenido.

3.4.1.c. Transcripciones de las sesiones

Los comentarios formulados por los participantes sobre los vídeos que visionaron fueron transcritos para posibilitar el estudio de la información aportada, contándose, por lo tanto, con un total de seis transcripciones —una por cada participante y sesión—. Cada una de estas se integró en la transcripción realizada de los tres vídeos propuestos, dando

lugar a un documento para cada sujeto en el que se presentan sus comentarios insertados justo en el momento del vídeo en el que se produjeron, es decir, cuando el sujeto decidió parar la reproducción para aportar información sobre algún aspecto observado. Dichos documentos se adjuntan a este trabajo para posibilitar la consulta de cualquier dato sobre las aportaciones completas en esta primera fase de recogida de información de cada uno de los formadores, dando lugar a estos anexos:

- Transcripción de los comentarios de Marcos en la fase 1 (Anexo 4).
- Transcripción de los comentarios de Daniel en la fase 1 (Anexo 5).
- Transcripción de los comentarios de Jorge en la fase 1 (Anexo 6).
- Transcripción de los comentarios de Lucas en la fase 1 (Anexo 7).
- Transcripción de los comentarios de Pablo en la fase 1 (Anexo 8).
- Transcripción de los comentarios de Raquel en la fase 1 (Anexo 9).

Una vez generados estos documentos, se examinó cada uno de los comentarios de cada participante para determinar si incluían eventos o interpretaciones sobre la práctica de enseñanza de la formadora.

3.4.1.d. Extracción de eventos e interpretaciones

Para determinar si se incluyen o no eventos o interpretaciones en los comentarios realizados por los formadores, es preciso clarificar qué entendemos por cada uno de estos dos conceptos.

Con relación a los eventos, y en el contexto de esta investigación, entendemos por evento aquel hecho, situación o acción que se corresponde con algún aspecto de la práctica de enseñanza de la formadora del vídeo. Por lo tanto, para poder extraer un evento de un comentario, es necesario que en este se haga alusión de manera explícita a algún aspecto sobre la práctica de enseñanza de la MTE y que dicho aspecto se presente realmente en el vídeo en cuestión. Consecuentemente, cabe la posibilidad de no encontrar ningún evento en un comentario —bien porque no se explicita ningún aspecto referente a la práctica de enseñanza de la docente, bien porque lo explicitado no suceda en realidad en el vídeo—, así como encontrar uno o varios, en función de la información aportada.

Una vez que se haya detectado en el comentario información que cumpla con los requisitos señalados, y que, por tanto, sea susceptible de constituir uno o varios eventos, es necesario decidir la cantidad de eventos que se va a establecer. Para este fin, acotamos la extensión de cada evento atendiendo al concepto de *idea unit* (J. K. Jacobs *et al.*, 1997; J. K. Jacobs y Morita, 2002), de tal modo que extraemos un evento distinto cada vez que se produce un cambio en el foco de la información del comentario que es susceptible de convertirse en un evento. Dicho con otras palabras: se constituyen tantos eventos como ideas diferentes —que puedan tener sentido de forma independiente— se expliciten sobre la práctica de enseñanza de la MTE. No obstante, este proceso para delimitar un evento puede resultar ambiguo en ocasiones, puesto que el nivel de profundidad con el que se desgrane una situación acontecida en un vídeo, así como la información que se plantee sobre ella en un comentario, puede variar de un investigador a otro. Por ello, una labor importante para llevar a cabo de forma adecuada este tratamiento de los datos ha sido la de mantenerse en un nivel de detalle semejante a la hora de descomponer los diferentes comentarios de los individuos, procurando hacer uso de los mismos criterios con todos los participantes y en todos los fragmentos de vídeo, pero atendiendo al mismo tiempo a la relevancia que algunas ideas recogidas en estos puedan tener *per se*, lo que podría dar lugar a la conveniencia de variar en ciertos momentos el nivel de desgrane fijado si así lo justificaran las circunstancias.

Para tratar de aclarar lo expuesto en el párrafo precedente, se propone un ejemplo creado para dicho fin. Imaginemos que queremos analizar el siguiente comentario que un sujeto podría haber manifestado: «La docente ha ido preguntando a los alumnos por los fallos que han cometido a la hora de resolver el ejercicio al tiempo que recoge en la pizarra las dificultades que van exponiendo y explica el modo en el que podrían haberlas resuelto, incidiendo en que entiendan el proceso de resolución. Los alumnos, sin embargo, parecen distraídos». El primer paso que como investigadores damos para tratar de extraer eventos consiste en ver qué información aborda aspectos relativos a la práctica de enseñanza de la formadora que se puedan encontrar realmente en el vídeo visionado. En nuestro ejemplo, todo el comentario, menos la última oración, sería susceptible de conformar uno o varios eventos al cumplir las dos condiciones antes mencionadas —al ser un ejemplo, damos por sentado que lo que se identifica aparece en el hipotético vídeo—. Luego, el siguiente paso sería determinar cuántos eventos se establecen, momento en el que entra en juego el nivel de profundidad con el que se desee desgranar la información del comentario. Así pues, se

podría tomar la decisión de establecer diversos eventos, por ejemplo, del siguiente modo: «Pregunta a los alumnos por los fallos que han tenido al resolver el ejercicio»; «Recoge en la pizarra las dificultades que los alumnos han comentado»; «Explica cómo podrían haber resuelto los alumnos sus dificultades con el ejercicio»; «Incidir en que entiendan el proceso de resolución». De esta manera, atomizando así la información, se podrían extraer cuatro eventos. Sin embargo, si entendemos que solo hay una idea principal en el comentario, que se centra en que la formadora pretende que los estudiantes comprendan el proceso de resolución para que puedan solventar los problemas que tienen con el ejercicio, para lo cual les plantea preguntas y anota sus dificultades, se podría establecer un solo evento: «Explica cómo dar solución a las dificultades por las que ha preguntado a los alumnos, al tiempo que las registra en la pizarra, centrándose en que estos comprendan el proceso de resolución». Así pues, en función de cuántas ideas fundamentales perciba el investigador en el comentario —atendiendo al concepto de *idea unit*—, se procederá a fijar un número u otro de eventos. Lo importante, como ya se ha indicado, es tratar de mantener el mismo criterio con todos los sujetos y en todos los vídeos, el cual puede tomar en consideración para desgranar más o menos cierto comentario, por ejemplo, la relevancia que una idea pueda tener en los vídeos o cuán frecuente sea la detección de ciertos aspectos por parte de los participantes. De esta forma, se podrá decidir el número de eventos que se vaya a establecer a raíz de un comentario.

En relación con las interpretaciones, estas las entendemos como explicaciones de un evento o reflexiones en torno a este que aportan información que no se distingue en el vídeo —a diferencia de los eventos, que sí han de ser perceptibles—, sino que emana del conocimiento que el participante posee y aplica a lo que observa y analiza. En el caso de las interpretaciones, en un comentario será posible —como sucede con los eventos— no establecer ninguna, así como determinar la presencia de una o varias. Para establecer el número de interpretaciones, se ha de implementar de manera análoga el procedimiento expuesto anteriormente para los eventos, tratando de ver, por lo tanto, si la información susceptible de conformar una interpretación pone el foco en distintos aspectos o se centra en uno solo, si conviene establecer más de una interpretación por la relevancia de alguna de las ideas planteadas, aunque estas solamente se centren en una cuestión, etcétera. Para tratar de clarificarlo, proponemos un ejemplo más, que amplía el visto antes: «La docente ha ido preguntando a los alumnos por los fallos que han cometido a la hora de resolver el ejercicio al tiempo que recoge en la pizarra las dificultades que van exponiendo y explica

el modo en el que podrían haberlas resuelto, incidiendo en que entiendan el proceso de resolución. Los alumnos, sin embargo, parecen distraídos. Pone el foco en los problemas que han tenido los estudiantes porque sabe que el alumnado tiene bastantes lagunas con la suma de potencias de distinta base. Es importante que las explicaciones no se basen en recetas que se aplican sin reflexión, ya que estas no suelen permitir al alumno entender el trasfondo matemático». En este caso, una vez identificada la parte susceptible de ser una interpretación, podríamos localizar dos ideas principales y desgranar la información en dos interpretaciones: una que trataría de explicar el motivo por el que la formadora se ha detenido en solventar las dificultades de los alumnos —al hacer referencia a las distintas lagunas que estos tienen con respecto a la suma de potencias de distinta base— y otra que reflexiona sobre la importancia de centrarse en el proceso y no basar las explicaciones en recetas —al comentar que las recetas no suelen permitir a los estudiantes comprender el trasfondo matemático—. No obstante, el investigador podría optar por desgranar más o menos el contenido del texto, dando lugar a más o menos interpretaciones, en función de las ideas que entienda que pueden ser independientes. De nuevo, lo importante es dotar de coherencia y consistencia al procedimiento en todos los casos analizados.

A tenor de todo lo expresado, se entiende que es posible explicitar un evento sin aportar una interpretación, pero es preciso señalar que también es posible proponer una interpretación sin hacer explícito el evento al que va ligada, en cuyo caso se podrá deducir el evento al que se refiere la interpretación a partir del contenido de esta. En tal situación, estaremos ante lo que hemos denominado «evento implícito», concepto que clarificamos volviendo a emplear el ejemplo con el que venimos trabajando, recortando el comentario en este caso para quedar del siguiente modo: «Es importante que las explicaciones no se basen en recetas que se aplican sin reflexión, ya que estas no suelen permitir al alumno entender el trasfondo matemático». En este comentario no se explicita que la formadora del vídeo está intentando resolver las dificultades de los alumnos tratando de que estos entiendan el proceso de resolución —como sí se hacía en el ejemplo anterior—, sino que se ha procedido directamente a dar una interpretación que aborda la importancia de no emplear recetas sin reflexionar acerca del contenido matemático que subyace, la cual se refiere al hecho de que la formadora incide en el proceso. Así pues, de dicho comentario extraeríamos una interpretación y un evento implícito, el cual no quedaría redactado de ninguna manera, puesto que no sabemos cómo lo habría explicitado el participante, pero sí se dejaría constancia del mismo para tenerlo en cuenta en el análisis de los datos.

Asimismo, es necesario mencionar que a veces es posible encontrar en diferentes comentarios información que se puede asociar a un mismo evento de la grabación o a una misma interpretación sobre este, puesto que en algunas ocasiones los participantes paran la reproducción varias veces con la intención de complementar la información sobre una misma situación mediante distintos comentarios que, generalmente, aparecen de manera consecutiva. En estos casos, no se establece el mismo evento, o interpretación, de forma reiterada en cada comentario, sino que se tiene en cuenta la información de todos ellos referida al mismo hecho, redactándose el evento o la interpretación en cuestión solamente en uno de ellos. Otra situación diferente sería aquella en la que en distintos comentarios se hiciera alusión a un mismo hecho que tiene lugar más de una vez en el vídeo. En este caso, aunque el evento fuera el mismo, si se ha repetido en varias ocasiones a lo largo del fragmento y el MTE lo ha identificado más de una vez, sí se podría considerar establecer un evento por cada uno de los que tengan lugar y se expliciten.

Una vez analizados todos los comentarios de cada MTE y establecidos los eventos e interpretaciones que en cada caso se presentaron, se elaboró un documento para cada participante en el que únicamente se incluyó la transcripción de sus comentarios —sin la transcripción del contenido de los tres vídeos visionados—, acompañando a cada uno de estos de los eventos e interpretaciones que de ellos se extrajeron, cuya redacción ha sido reelaborada en algunas ocasiones, tratando de ceñirnos lo máximo posible a las palabras empleadas por los MTE en el comentario. Con dicha reescritura conseguimos, en primer lugar, tener todos los eventos de todos los formadores redactados con la misma estructura para facilitar su posterior análisis, de tal manera que siempre comiencen con un verbo referido a la MTE del vídeo en presente simple del modo indicativo y en tercera persona del singular, por ejemplo: «Solicita que representen con los materiales el proceso, no el resultado»; esta forma no la hemos aplicado a las interpretaciones, las cuales no han sido provistas de una estructura fija. Y, en segundo lugar, clarificar el discurso de algunos de los sujetos, pues los comentarios, al haberse producido de forma oral y haberse transcrito literalmente, en ocasiones presentan deficiencias lingüísticas que pueden entorpecer su comprensión. El conjunto de los seis documentos a los que hacemos referencia —uno por cada sujeto—, en los cuales se incluyen los comentarios aportados, así como los eventos y las interpretaciones que se han establecido para cada uno, se adjuntan a este trabajo para posibilitar su consulta, dando lugar a los anexos que se enumeran a continuación:

- Eventos e interpretaciones de Marcos en la fase 1 (Anexo 10).
- Eventos e interpretaciones de Daniel en la fase 1 (Anexo 11).
- Eventos e interpretaciones de Jorge en la fase 1 (Anexo 12).
- Eventos e interpretaciones de Lucas en la fase 1 (Anexo 13).
- Eventos e interpretaciones de Pablo en la fase 1 (Anexo 14).
- Eventos e interpretaciones de Raquel en la fase 1 (Anexo 15).

En los anexos, los eventos y las interpretaciones se acompañan de las etiquetas que permiten identificarlos, las cuales se explican en el siguiente apartado, y de los códigos a los que se asocian, que se abordan en el apartado posterior relativo a la codificación.

3.4.1.e. Etiquetado de eventos e interpretaciones

Con la finalidad de poder identificar, localizar y mencionar de una manera rápida y sencilla los eventos y las interpretaciones que se han establecido en cada comentario de cada formador en los distintos vídeos, se ha elaborado un sistema de etiquetado.

En relación con los eventos, las etiquetas presentan una estructura como la que se puede apreciar en el siguiente ejemplo: «M10.2-3.1». Tal y como se observa, en la primera posición hallamos una letra mayúscula, la cual se corresponde con la inicial del nombre (pseudónimo) del participante que ha enunciado el evento en cuestión. Inmediatamente después aparece un número, el cual indica el comentario al que pertenece el evento, que va seguido de un punto y de otro número, que hace referencia al evento al que se refiere dentro del comentario. A continuación, tras un guion, encontramos un número más, que alude al vídeo sobre el que se ha hecho el comentario, que puede ir seguido de un punto y de otro número, que indicaría el fragmento del vídeo en caso de que existiera. Así pues, la etiqueta del ejemplo estaría notificándonos que estamos ante el segundo evento que se ha extraído a partir del décimo comentario que ha expresado Marcos en la primera parte del tercer vídeo. Asimismo, en el caso de los eventos implícitos —que, como ya dijimos, no redactamos, aunque sí los establecemos—, la etiqueta que los identifica tiene la misma estructura planteada, pero se añadiría la letra «i» minúscula entre paréntesis justo antes del guion. Por lo tanto, si el ejemplo fuera un evento implícito, su etiqueta quedaría como sigue: «M10.2(i)-3.1».

Por su parte, las interpretaciones heredan la etiqueta del evento al que se refieren, a la cual se le añade la letra «I» mayúscula entre paréntesis y, a continuación, un número que identifica a la interpretación en relación con el evento al que acompaña. Por lo tanto, partiendo del ejemplo anterior relativo al evento, podríamos tener el siguiente sobre una interpretación: «M10.2-3.1(I)4». Esta etiqueta nos estaría informando de que estamos ante la cuarta interpretación que ha formulado Marcos sobre el segundo evento extraído de su décimo comentario en la primera parte del tercer vídeo. Si se tratara de una interpretación sobre un evento implícito, al recibir la etiqueta del evento al que se refiere, quedaría de la siguiente forma: «M10.2(i)-3.1(I)4».

Así pues, este sistema de etiquetas aporta suficiente información como para poder identificar los eventos y las interpretaciones de un modo ágil y permite tener organizados los datos, facilitando, por ende, su análisis.

3.4.1.f. Codificación y análisis de eventos e interpretaciones

En este momento, tras las etapas descritas en las páginas previas, ya se dispone del conjunto de eventos e interpretaciones, que cada MTE ha aportado para cada vídeo en la primera fase, con sus correspondientes etiquetas. Dicho conjunto de datos es el que será analizado para tratar de dar alcance, en parte, a los objetivos de la tesis. Con tal propósito, e incidiendo en la consecución del quinto objetivo propuesto, se ha creado un sistema de codificación y análisis que nos permitirá estructurar el estudio de los datos atendiendo a cuatro ejes —que se apoyan en los fines de los cuatro primeros objetivos—, a saber: qué eventos relevantes hacen explícitos los MTE, cómo explicitan dichos eventos, qué eventos relevantes interpretan y cómo realizan dichas interpretaciones.

*Eje 1: ¿Qué eventos relevantes detectan los MTE
relativos a la práctica de enseñanza de otro formador grabada en vídeo? [¿Qué notan?]*

Para abordar este primer eje —relativo al objetivo 1—, es fundamental determinar primero cuáles son los eventos relevantes de los tres vídeos. A esta clase de eventos, que reflejan los aspectos que son más significativos o importantes en una situación compleja, los denominaremos *call-outs* (Frederiksen, 1992; Van Es y Sherin, 2008). Para establecer el listado definitivo del conjunto de *call-outs* presentes en los tres vídeos, se llevó a cabo un

proceso conformado por dos partes. En la primera —cimentada en un enfoque *top-down* (Grbich, 2013)—, visionamos los vídeos en repetidas ocasiones prestando atención a todos los eventos relativos a la práctica de enseñanza de la formadora que tuvieran que ver con cuestiones matemáticas o didáctico-matemáticas. Pusimos el foco solamente en este tipo de eventos, dejando a un lado los referidos a la didáctica general o a otros temas —como pueden ser los rasgos suprasegmentales del habla, la organización física de la clase o la gestión del aula, entre otros—, ya que entendemos que el *noticing* de los formadores de matemáticas y su didáctica de futuros maestros de Educación Primaria ha de distinguirse del de otros profesores esencialmente en aquello que tenga relación con las dimensiones matemática y didáctico-matemática, por lo que el conjunto de *call-outs* propuesto solo se hace eco de dichos aspectos. Una vez identificados los eventos mencionados, procedimos a confeccionar un listado en el que incluimos únicamente aquellos que consideramos más importantes —basando nuestras decisiones en diferentes teorías del área de didáctica de las matemáticas—, llegando de este modo a un listado con un total de 97 *call-outs* entre los tres vídeos. Sin embargo, el listado no quedó establecido de manera definitiva hasta que fue llevada a cabo la segunda parte del proceso —en este caso, con un enfoque *bottom-up* (Grbich, 2013)—. En esta se complementó cada *call-out* con la información aportada por los MTE y se comprobó que cada uno hubiera sido detectado por al menos un participante en al menos una de las dos primeras fases de recogida de datos, es decir, en la relativa al *noticing* espontáneo y en la relativa al *noticing* inducido —en esta segunda, que se explica más adelante en el apartado sobre la fase 2, los MTE comentaron de nuevo los mismos vídeos de la fase 1—. Como resultado de esta etapa, se eliminaron tan solo dos *call-outs* que no habían sido identificados por ninguno de los participantes en ninguna de las dos fases, dando lugar a través del proceso completo que se ha descrito al listado de *call-outs* definitivo (Anexo 16), que cuenta con un total de 95 entre los tres vídeos.

Cabe decir que, al igual que los eventos de los participantes, la redacción de cada *call-out* comienza con un verbo referido a la formadora en presente simple de indicativo y en tercera persona del singular, así como que su escritura se ha llevado a cabo incluyendo aquellos elementos matemáticos o didáctico-matemáticos que describen los aspectos más significativos del evento en cuestión. Asimismo, cada uno ha sido etiquetado, para poder identificarlos y organizarlos de un modo sencillo, con etiquetas que tienen una estructura como la de este ejemplo: «C5-1.2». La «C» mayúscula indica que se trata de un *call-out*, el primer número tras esta hace referencia al evento relevante del que se trata dentro de un

fragmento o vídeo dado, dicho vídeo se indica con el primer número después del guion y su parte —si es que tuviera partes— se refleja en el último número tras el punto. Así, la etiqueta del ejemplo se asociaría al quinto *call-out* de la segunda parte del vídeo 1.

El citado listado será el que sustente el análisis que se realizará de todos los eventos extraídos de los comentarios de los participantes para comprobar cuáles aluden a *call-outs*. Para facilitar la materialización de esta correspondencia entre el conjunto de eventos de cada MTE y el conjunto de *call-outs*, se ha creado un documento en el que se ha incluido la transcripción de los vídeos, así como el conjunto de eventos e interpretaciones de cada participante, insertados justo en el lugar en el que se realizó cada uno de los comentarios de los que se extrajeron estos. Dicho documento (Anexo 17) supone un registro que ayuda a ver coincidencias entre los distintos MTE y entre estos y los eventos relevantes, los cuales los tenemos localizados a lo largo de los tres vídeos. No obstante, hay que tener en cuenta que los sujetos, aunque se refirieran a un mismo hecho, no siempre detienen la grabación en el mismo punto, ya que algunos hacen alusión al evento justo cuando ocurre y otros lo indican tiempo después, hecho por el que dos eventos de dos participantes insertados en diferentes partes del texto podrían referirse a una misma situación, aunque en la mayoría de los casos se sitúan cercanos entre sí en el documento. Así pues, tener todos los eventos recogidos en un mismo escrito ha resultado de gran utilidad para poner de manifiesto las correspondencias con los *call-outs*, lo que ha posibilitado crear otro documento en el que se plantea cada uno de los *call-outs*, de forma integrada en la transcripción de los vídeos, acompañados de los eventos e interpretaciones de cada formador sobre cada uno de ellos (Anexo 18), teniendo en cuenta que no más de un evento de un mismo participante puede aludir a un mismo *call-out* —si se diera el caso, habrían de fusionarse en un solo evento—. En dicho documento, los eventos [E] y las interpretaciones [I] se presentan etiquetados y codificados, explicándose en las siguientes páginas la codificación usada.

Una vez establecidas las coincidencias, se pudieron llevar a cabo los análisis sobre los datos, los cuales se explican en el cuarto capítulo de este trabajo.

Eje 2: ¿Cómo explicitan los MTE los eventos relevantes que identifican relativos a la práctica de enseñanza de otro formador grabada en vídeo? [¿Cómo notan?]

Para tratar este segundo eje —referido al objetivo 2—, hay que tener en mente que, si bien varios MTE pueden identificar un mismo evento sobre la práctica de enseñanza de

la formadora del vídeo, lo más probable es que cada uno de ellos lo explicita de un modo diferente —por su formación y experiencia—, haciendo uso de distintas palabras y, más importante, poniendo el foco en diversos aspectos del hecho observado. Así pues, lo que se quiere analizar ahora es cómo se explicitan los eventos detectados y, por consiguiente, sobre qué elementos de estos hacen hincapié. Para realizar dicho análisis, nos ceñiremos a los eventos de los sujetos que se corresponden con los *call-outs*, por lo que el listado de *call-outs* servirá también para dotar de estructura al tratamiento que se haga de los datos en este eje. Sin embargo, en este caso no se pretende comprobar la correspondencia entre los eventos de los participantes y los 95 *call-outs* propuestos, sino entre los primeros y los elementos matemáticos o didáctico-matemáticos más relevantes de los segundos. Para tal fin, analizamos todos los *call-outs* y extrajimos de cada uno los elementos matemáticos o didáctico-matemáticos más importantes que plasmaran la idea esencial (o ideas) de cada cual —para facilitar el estudio de los datos, se decidió no establecer más de dos elementos por *call-out*— y luego complementamos el conjunto de elementos a partir del contenido de los comentarios formulados por los participantes —de nuevo, *top-down* y *bottom-up*—.

A partir del documento en el que se plasman todos los *call-outs* con sus respectivos «elementos fundamentales» (Anexo 19), se decidió elaborar un sistema de niveles —idea adoptada del estudio de Van Es y Sherin (2002)— mediante el cual codificar los eventos extraídos de los comentarios de los MTE —referidos a *call-outs*— con un nivel del 1 al 3 en función de los elementos fundamentales que se expliciten y de cómo se expliciten. Así pues, se asignará un nivel u otro atendiendo a los descriptores de la siguiente tabla:

Tabla 3.5. Descriptores para establecer el nivel de un evento en el eje 2.

Descriptores	
Nivel 3	Explicita todos los elementos fundamentales: todos de forma completa
Nivel 2	Explicita todos los elementos fundamentales: alguno de forma parcial O
	Explicita algún elemento fundamental (no todos): alguno de forma completa
Nivel 1	Explicita algún elemento fundamental (no todos): ninguno de forma completa O
	No explicita ningún elemento fundamental

Como se puede observar, el nivel 3 se otorga a aquellos eventos que explicitan de forma completa todos los elementos fundamentales de un *call-out*. Con «forma completa» nos referimos a que se explicitan todos y cada uno de los elementos del *call-out* de manera íntegra, bien refiriéndose a ellos con las mismas palabras con las que se han establecido,

bien aludiéndolos con otros conceptos o palabras que signifiquen lo mismo, es decir, en el evento queda patente de un modo claro la presencia plena de los elementos en cuestión. Por otra parte, el nivel 2 se otorga a aquellos eventos que explicitan todos los elementos fundamentales, haciendo alusión a al menos uno de ellos de forma parcial, o explicitan algún elemento —no todos—, describiendo al menos uno de ellos de forma completa. En este caso, cuando hablamos de «forma parcial» nos referimos a que se alude de soslayo al elemento, esto es, se puede apreciar en el texto que se está haciendo referencia al elemento correspondiente, pero con unos términos o palabras que no lo describen o identifican con exactitud, aunque sí se aproximan al sentido que tiene el elemento. Y en cuanto al nivel 1, este se asigna a un evento cuando se explicita solo algún elemento —no todos—, y no de forma completa, o cuando no se menciona explícitamente ningún elemento fundamental.

Para poder comprender mejor lo explicado, se presenta a continuación una tabla con elementos gráficos que pueden ayudar a tener una idea más clara y visual del sistema de niveles, así como un ejemplo sencillo, posteriormente, al que se aplica dicho sistema. En la tabla, el rectángulo relleno representa un elemento explicitado de forma completa, el rectángulo a rayas simboliza un elemento explicitado de forma parcial y el rectángulo vacío hace lo propio con un elemento que no ha sido explicitado.

Tabla 3.6. Descriptores gráficos para establecer el nivel de un evento en el eje 2.

	<i>Call-outs con 1 elemento</i>	<i>Call-outs con 2 elementos</i>
<i>Nivel 3</i>		  ○
<i>Nivel 2</i>		 ○ 
<i>Nivel 1</i>		 ○ 

Pongamos como ejemplo el siguiente *call-out* —creado para entender mejor cómo aplicar dichos niveles—: «Desarrolla los cálculos del problema haciendo hincapié en que está empleando la propiedad distributiva de la suma y el producto», y establezcamos para el mismo exclusivamente un elemento fundamental: «La propiedad distributiva». Ahora, imaginemos tres eventos diferentes que podrían haberse extraído de los comentarios de tres participantes distintos y que se correspondieran con el *call-out* formulado: «Resuelve

el problema empleando la propiedad distributiva y mencionando su uso»; «Está haciendo los cálculos planteando una propiedad»; «Está realizando las operaciones del problema». El primero de ellos obtendría un nivel 3, puesto que explicita de forma completa el único elemento fundamental del *call-out*; el segundo se situaría en un nivel 2, ya que identifica el elemento, pero lo hace parcialmente; y el tercero, si bien detecta el *call-out* —aportando, en este caso, información sobre el mismo—, no alude ni parcial ni totalmente al elemento que se ha establecido como fundamental, por lo que se situaría en un nivel 1.

Es importante mencionar que los tres niveles presentados no son «equidistantes», es decir, el nivel 3 dista del nivel 2 mucho menos que el nivel 2 del nivel 1. Mientras que en los dos niveles superiores sí se pone el foco en los aspectos esenciales de un *call-out*, en el nivel inferior se atiende a otros asuntos o, a lo sumo, de un modo parcial a un elemento cuando en el *call-out* aparecen dos. Asimismo, con relación a los eventos implícitos, cabe señalar que estos, cuando se refieran a un *call-out* —cuestión que se podrá saber, como ya se ha explicado, a raíz de la información presente en la interpretación que lo acompañe—, únicamente podrán situarse en el nivel 1, puesto que, al ser eventos que no se redactan, no se hace explícito ninguno de los elementos fundamentales del *call-out*. Estos aspectos suponen matices sustanciales a tener en cuenta en los análisis desarrollados en el cuarto capítulo de la tesis con relación a este segundo eje.

*Eje 3: ¿Qué eventos relevantes interpretan los MTE
relativos a la práctica de enseñanza de otro formador grabada en vídeo? [¿Qué interpretan?]*

En este tercer eje —relativo al objetivo 3—, la explicación del análisis que se realiza de los datos es quizá algo más sencilla que en los anteriores, ya que simplemente se quiere poner el foco en los eventos de los participantes —referidos a *call-outs*— que se presentan acompañados de alguna interpretación matemática —es decir, las que abordan aspectos matemáticos o didáctico-matemáticos, en contraposición a las didácticas, como se explica en el siguiente eje—. En este sentido, la intención principal que subyace en este eje es la de determinar cuántos *call-outs* son interpretados desde una perspectiva matemática por cada formador. Igualmente, podría ser de interés —en futuros trabajos— el análisis de los temas que son abordados en dichos *call-outs*, entre otros aspectos.

Atendiendo a este planteamiento, en el cuarto capítulo se plasma el análisis de los datos obtenidos respecto al objetivo en cuestión.

Eje 4: ¿Cómo interpretan los MTE los eventos relevantes que identifican relativos a la práctica de enseñanza de otro formador grabada en vídeo? [¿Cómo interpretan?]

En este cuarto eje —referido al objetivo 4—, examinamos las interpretaciones que los MTE han aportado ligadas a los eventos que tienen correspondencia con *call-outs*. Para estructurar su estudio, se han organizado en dos bloques: el matemático [M] —en el cual se va a centrar este trabajo—, que incluye aspectos matemáticos y didáctico-matemáticos, y el didáctico [D], que abarca aspectos pedagógicos y de didáctica general y, en definitiva, todos aquellos que no se incluyen en el bloque matemático. La asignación de uno u otro código no se hará en función de cómo se explicita la interpretación —a diferencia de cómo se codifican los eventos en niveles—, sino atendiendo a la naturaleza de la idea que sea abordada en la explicación o reflexión, de tal manera que la interpretación, si se refiere a un aspecto del bloque matemático, será codificada con una [M] y, si no, con una [D]. Esta codificación, que se sirve en parte de algunos planteamientos que se recogen en distintos modelos de conocimiento del profesor, como los de Shulman (1986, 1987), Ball *et al.* (2008) o Carrillo *et al.* (2014, 2018), simplemente nos ayuda a realizar una primera inspección de las interpretaciones —en forma de clasificación—, pudiendo de este modo comprobar su enfoque general. No obstante, en el análisis que en el cuarto capítulo de la tesis se hace de las interpretaciones, se trata de explorar con una mayor profundidad los temas que estas presentan, como teorías de didáctica de las matemáticas, dificultades de los alumnos con ciertos contenidos o aspectos matemáticos de la tarea, entre otros.

Por otro lado, con relación a las interpretaciones que acompañan a eventos que no se corresponden con ningún *call-out*, así como en lo referido a dicho conjunto de eventos, cabe apuntar que en ambos casos se aplicará la última codificación explicada, es decir, la consistente en las categorías [M] y [D]. Así pues, dichas interpretaciones recibirán uno u otro código atendiendo al mismo procedimiento usado con las interpretaciones que sí se asocian a eventos relacionados con *call-outs* y, por su parte, los eventos que no se refieren a *call-outs*, al no tener como referencia ningún conjunto de elementos fundamentales, se codificarán con [M] o [D] según el tema abordado, como sucede con las interpretaciones, y no en función de cómo se expliciten. Por lo tanto, si bien todos los eventos relacionados con un *call-out* se centran en aspectos matemáticos o didáctico-matemáticos —sean estos explicitados o no—, los demás eventos pueden poner el foco en aspectos del mismo tipo o en otros de distinta índole.

Una vez explicados los cuatro ejes que vertebran de forma general el apartado de codificación y análisis de eventos e interpretaciones, se presenta a continuación una tabla en la que se recoge de forma esquemática el foco de cada uno de ellos en lo que respecta al tratamiento de los datos:

Tabla 3.7. Esquema de los ejes que estructuran la codificación y el análisis de eventos e interpretaciones.

Eje 1. Eventos: ¿qué notan? <i>Call-outs identificados</i>	Eje 3. Interpretaciones: ¿qué interpretan? <i>Call-outs interpretados matemáticamente</i>
Eje 2. Eventos: ¿cómo notan? <i>Elementos fundamentales explicitados: niveles</i>	Eje 4. Interpretaciones: ¿cómo interpretan? <i>Interpretaciones matemáticas asociadas a call-outs</i>

Cabe decir que, si bien la estructura de los cuatro ejes se basa en los propósitos de los cinco primeros objetivos del presente estudio, los resultados que se obtengan en ellos a partir del análisis de los datos posibilitarán, en cierta medida, dar alcance también a lo dispuesto en los objetivos 6 y 7, relativos a la influencia de la formación y la experiencia en el *noticing* de los MTE, así como a la posible evolución que podría experimentar dicha competencia en los formadores a lo largo de las distintas fases del diseño de investigación, respectivamente.

Por otro lado, es importante señalar que, aunque el análisis del presente trabajo se focaliza en los eventos asociados a los *call-outs* y en sus interpretaciones atendiendo a la organización planteada — decisión tomada para acotar el estudio del conjunto de los datos y por el mayor interés que pueden suscitar los eventos relevantes y sus interpretaciones frente a los demás —, en el cuarto capítulo también se hace alusión, aunque de soslayo, al resto de eventos e interpretaciones. Sin embargo, su análisis se deja para futuros trabajos en los que, con toda probabilidad, el examen de tal información nos posibilitará también encontrar diferencias en la competencia *noticing* de los participantes por razones relativas a la formación académica o a la experiencia docente.

Asimismo, queremos hacer hincapié en que la creación de los distintos documentos descritos y anexados, así como la codificación de los eventos y de las interpretaciones, ha sido llevada a cabo por el investigador del estudio y revisada con ayuda de otros expertos del área de didáctica de las matemáticas — triangulación de expertos (Flick, 2007) — y de los directores de la tesis reiteradamente hasta que se ha logrado una coherencia suficiente tanto en los textos como en la asignación de códigos. El proceso de codificación, dado que

ha habido que analizar en torno a 700 eventos y 400 interpretaciones —entre la fase 1 y la fase 2—, ha sido denso y laborioso y los ciclos para su refinamiento se han alargado en el tiempo hasta la obtención de los documentos finales anexados, los cuales permitirán que se realice adecuadamente el análisis de los datos.

3.4.2. Fase 2. *Noticing* inducido

Esta segunda fase de recogida de datos se ha diseñado con el propósito de recabar información acerca de aquello que hemos venido a denominar «*noticing* inducido», que se entiende como aquel que emerge del docente cuando este recibe pautas o directrices que le ayudan a detectar eventos o a realizar interpretaciones de los mismos en la situación de enseñanza-aprendizaje grabada en vídeo que se disponga a analizar. En otras palabras: se trata del *noticing* que se manifiesta en el sujeto a raíz de un *structured video viewing support* (Santagata *et al.*, 2021), es decir, a partir de *inputs* o *prompts* que tienen un carácter concreto y que suelen presentarse como un conjunto de preguntas específicas sobre determinados aspectos de la grabación o como un marco de dimensiones o categorías que tratan de guiar o estructurar el análisis que el profesor realiza sobre la situación observada, tanto en el foco como en su profundidad, y modificar, por consiguiente, su competencia *noticing*, tal y como sucede, en parte, en los estudios realizados por Star y Strickland (2008), Van Es y Sherin (2008), Roth-McDuffie *et al.* (2014), Mitchell y Marin (2015), Osmanoğlu *et al.* (2015), Walkoe (2015), Karsenty y Arcavi (2017), Walkoe y Levin (2018) y Wallin y Amador (2019), por citar algún ejemplo.

Dado que esta fase tiene la misma estructura que la previa, a continuación solo se recuerdan los distintos apartados de la misma y se explican las diferencias que en algunos casos encontramos en su contenido.

3.4.2.a. *Recopilación de grabaciones de clase y selección de fragmentos*

Los vídeos utilizados en esta segunda fase fueron los mismos que se establecieron y utilizaron en la primera y, por lo tanto, su transcripción es también la misma (Anexo 2). Se decidió usar el mismo conjunto de vídeos porque se quiere analizar la influencia de la

inducción — los *inputs* o *prompts* que se facilitaron en esta ocasión a los MTE para centrar sus observaciones en aspectos matemáticos y didáctico-matemáticos, que se describirán posteriormente — sobre el *noticing* de los participantes, asegurándonos de esta manera de que el contenido de los vídeos no tuviera repercusión alguna en la posible variación que pudieran experimentar los comentarios formulados por los sujetos con respecto a la fase anterior. Por este motivo, la realización de la segunda fase tuvo lugar aproximadamente un año después de celebrarse la primera para tratar de evitar, en la medida de lo posible, que los participantes recordaran los detalles de las grabaciones.

3.4.2.b. Instrucciones y análisis hechos por los participantes

La diferencia fundamental entre la primera y la segunda fase radica en la redacción de las instrucciones que se leyeron y se explicaron a los participantes al inicio de la sesión que se desarrolló con cada uno de ellos. En esta ocasión, al conjunto de instrucciones ya empleadas en la fase anterior se añadió una nueva indicación: todos los comentarios que realizasen sobre la práctica de enseñanza de la formadora del vídeo — tanto eventos como interpretaciones — debían focalizarse en aspectos matemáticos o didáctico-matemáticos, por lo que tendrían que abstenerse de incluir información acerca de asuntos relativos a la didáctica general o a la pedagogía, así como sobre cuestiones de otra índole. La pretensión de que se pusiera el foco en los aspectos matemáticos y didáctico-matemáticos de manera exclusiva se debe a que — como ya se ha comentado en páginas anteriores — la principal diferencia que es posible esperar entre los formadores de matemáticas y su didáctica de futuros maestros de Educación Primaria y otro tipo de docentes ha de encontrarse sobre todo en los componentes que conforman dichas dimensiones, esto es, los conocimientos matemáticos y, sobre todo, los didáctico-matemáticos que tiene que poseer y que poner en juego un MTE — y que, por ende, influirán en su competencia *noticing* — son distintos de los que otros docentes han de manejar, esencialmente por el perfil profesional del que se ha de dotar a los estudiantes a los que enseñan los MTE. Por ello, en esta fase, y con las instrucciones indicadas, se pretende obtener información sobre qué *call-outs* identifican y cómo los explicitan, así como sobre cuáles interpretan y cómo son tales interpretaciones, en lo que concierne a los aspectos matemáticos y didáctico-matemáticos de la práctica de enseñanza analizada.

Asimismo, para tratar de ayudar a los participantes a centrar sus observaciones en los planos señalados, se les indicó que podían orientar sus comentarios basándose en estas dimensiones: contenidos, objetivos, tareas e interacciones con los alumnos —tomadas del modelo *SLF* del programa *VIDEO-LM* (Karsenty, 2018; Karsenty y Arcavi, 2017)—. Se les hizo ver que dichas dimensiones no pretendían en absoluto constreñir sus observaciones, sino servir de ayuda para focalizar mejor sus aportaciones, pudiendo hacer uso de ellas o no, según desearan. Además, en relación con las interpretaciones, y dado que en la fase 1 la mayoría de los MTE no aportó demasiadas, se les instó a tratar con ahínco de proponer más explicaciones y reflexiones sobre lo observado en esta segunda fase.

Por lo tanto, la carga inductiva incorporada a las instrucciones de la fase 2, que se adjuntan para posibilitar su consulta (Anexo 20), se reduce a las directrices para orientar los comentarios hacia aspectos matemáticos y didáctico-matemáticos, así como hacia las dimensiones de apoyo del modelo *SLF*. A lo largo de cada sesión, el rol del investigador fue el mismo que en la fase 1, es decir, no propuso preguntas a los participantes ni ofreció más indicaciones de las aportadas antes de iniciar el visionado de los vídeos. Así pues, si bien ahora se aborda el *noticing* inducido, es cierto que la inducción planteada es mínima si se compara con la que se puede encontrar en distintos estudios de *noticing* en los que se facilita un *structured video viewing support* —como, por ejemplo, en los trabajos señalados anteriormente cuando se ha definido el concepto de *noticing* inducido—. No obstante, el diseño aplicado se ha creado de esta manera deliberadamente, puesto que pensamos que los participantes de este estudio —dadas sus características como MTE que los diferencian de otros docentes— van a ser capaces de experimentar un cambio en su *noticing* con una mínima dirección, pudiendo centrarse en los *call-outs* de los vídeos que analicen a través de una única modificación en la consigna de las instrucciones recibidas. Por ende, todo el planteamiento de esta fase entronca directamente con el objetivo 7 del trabajo y, en este sentido, no obtendremos información únicamente para analizar el *noticing* inducido de los participantes, sino también para comprobar si existe una evolución en su competencia de la primera a la segunda fase en lo que a los aspectos matemáticos y didáctico-matemáticos de la práctica de enseñanza de la formadora del vídeo se refiere.

Al igual que en la fase anterior, la sesión con cada formador fue grabada en vídeo para posibilitar su transcripción y su posterior análisis.

3.4.2.c. Transcripciones de las sesiones

Los comentarios formulados por los participantes sobre los vídeos que visionaron fueron transcritos para posibilitar el estudio de la información aportada, contándose, por tanto, con un total de seis transcripciones — una por cada participante y sesión —. Al igual que en la fase 1, cada una de estas se integró en la transcripción realizada de los tres vídeos propuestos, dando lugar a un documento para cada participante en el que se presentan sus comentarios insertados justo en el momento del vídeo en el que se hicieron, es decir, cuando el formador decidió parar la reproducción para aportar información sobre algún aspecto observado. Dichos documentos se adjuntan a este trabajo para que sea posible la consulta de cualquier dato acerca de las aportaciones completas en esta fase de recogida de información de cada uno de los sujetos, dando lugar a estos anexos:

- Transcripción de los comentarios de Marcos en la fase 2 (Anexo 21).
- Transcripción de los comentarios de Daniel en la fase 2 (Anexo 22).
- Transcripción de los comentarios de Jorge en la fase 2 (Anexo 23).
- Transcripción de los comentarios de Lucas en la fase 2 (Anexo 24).
- Transcripción de los comentarios de Pablo en la fase 2 (Anexo 25).
- Transcripción de los comentarios de Raquel en la fase 2 (Anexo 26).

Una vez creados estos documentos, se examinó cada uno de los comentarios para extraer de ellos los eventos e interpretaciones sobre la práctica de enseñanza de la MTE del vídeo.

3.4.2.d. Extracción de eventos e interpretaciones

A la hora de determinar los eventos e interpretaciones a partir de los comentarios de los formadores, se siguió el procedimiento descrito en el apartado homónimo de la fase previa, dando lugar tras su desarrollo a los anexos que se enumeran a continuación:

- Eventos e interpretaciones de Marcos en la fase 2 (Anexo 27).
- Eventos e interpretaciones de Daniel en la fase 2 (Anexo 28).
- Eventos e interpretaciones de Jorge en la fase 2 (Anexo 29).
- Eventos e interpretaciones de Lucas en la fase 2 (Anexo 30).

- Eventos e interpretaciones de Pablo en la fase 2 (Anexo 31).
- Eventos e interpretaciones de Raquel en la fase 2 (Anexo 32).

En los anexos, los eventos y las interpretaciones se acompañan de las etiquetas que permiten identificarlos y de los códigos a los que se asocian.

3.4.2.e. Etiquetado de eventos e interpretaciones

Con la finalidad de poder identificar, localizar y mencionar de una forma rápida y sencilla los distintos eventos e interpretaciones que se han establecido en cada uno de los comentarios de cada MTE en los diferentes vídeos en esta segunda fase, se ha empleado el sistema de etiquetado descrito en la fase 1. La única diferencia en las etiquetas tiene que ver con la adición de un elemento a las mismas que posibilita saber que el evento —o la interpretación— al que se refiere pertenece a la segunda fase de recogida de datos. Por lo tanto, si la etiqueta utilizada como ejemplo en la fase precedente, «M10.2-3.1», se hubiera establecido en la segunda fase, quedaría como sigue: «2M10.2-3.1». Como se observa, solo se trata de incorporar un «2» antes de la letra asociada a la inicial del pseudónimo de cada MTE, tanto en las etiquetas de los eventos como en las de las interpretaciones, ya sean de eventos implícitos o no. Por consiguiente, el ejemplo de etiqueta que ofrecimos para una interpretación dada, «M10.2-3.1(I)4», quedaría así si fuera de la fase 2: «2M10.2-3.1(I)4».

Una vez extraídos los eventos y las interpretaciones de los comentarios y aplicado el sistema de etiquetado, se pasaría a implementar el sistema de codificación.

3.4.2.f. Codificación y análisis de eventos e interpretaciones

En este momento, tras las etapas anteriores, ya se dispone del conjunto de eventos e interpretaciones, con sus correspondientes etiquetas, que cada MTE ha aportado para cada vídeo en la fase 2. Este conjunto de datos es el que será analizado para dar alcance, en parte, a los objetivos del trabajo. Para ello, se ha aplicado el mismo procedimiento que se describe pormenorizadamente en la fase previa y que se estructura en los cuatro ejes que abordan los cuatro primeros objetivos de la tesis. En este sentido, tanto el listado de *call-outs* (Anexo 16) como el conjunto de elementos fundamentales de cada uno de ellos

(Anexo 19) son también los mismos en esta fase, puesto que —como se ya ha explicado anteriormente— la información recogida en dichos documentos se ha establecido a partir de la revisión de los datos que se han recopilado tanto en la primera como en la segunda fase del diseño de investigación —así como desde los análisis de los investigadores sobre los tres vídeos—. Por lo tanto, solo restaría aportar en este apartado dos documentos que sí muestran información específica de la fase 2 —tal y como se hizo en fase 1—, a saber: el conjunto de eventos e interpretaciones de la fase 2 de todos los participantes, integrados en la transcripción de los vídeos en el momento en el que se realizaron los comentarios de los que se extrajeron (Anexo 33), por una parte, y el conjunto de eventos e interpretaciones de la fase 2 de todos los participantes, integrados en la transcripción de los vídeos tras el *call-out* al que cada uno se refiere (Anexo 34), por otra.

Por otro lado, cabe aclarar que, si bien en las instrucciones de esta fase se facilitaba a los sujetos una serie de dimensiones extraídas del modelo *SLF* (Karsenty, 2018; Karsenty y Arcavi, 2017), estas no se han utilizado para la codificación de los datos, ya que su única finalidad era la de facilitar que las observaciones se centraran en los aspectos matemáticos y didáctico-matemáticos de la práctica de enseñanza de la formadora del vídeo.

Una vez explicadas las diferencias de la segunda fase, relativa al *noticing* inducido, con respecto a la fase previa, se pasa ahora a desarrollar la fase 3, referida a las entrevistas llevadas a cabo con algunos de los participantes.

3.4.3. Fase 3. Entrevistas

En esta fase se pretende obtener más información sobre tres de los participantes de la investigación, concretamente sobre Marcos, Daniel y Raquel. Se ha querido recabar más datos acerca de ellos porque, atendiendo al análisis que hemos realizado de los eventos e interpretaciones relativos a las dos fases anteriores de todos los participantes —el cual se desarrolla en el siguiente capítulo—, se ha comprobado que estos tres MTE presentan una competencia *noticing*, respectivamente, muy distinta entre sí, lo que puede deberse a las diferencias que también manifiestan en cuanto a su formación académica y su experiencia docente. Por ende, tal y como se explica con más detalle en la introducción del siguiente capítulo, se ha estimado conveniente estudiar con mayor profundidad la información que

cada uno de estos participantes ha aportado en las dos fases previas. En este sentido, las entrevistas suponen un buen complemento a dicho estudio y están enfocadas a dialogar con estos MTE en torno a algunos de los comentarios que hicieron sobre los vídeos con el ánimo de poder explicar y validar junto con ellos, a través del propio uso de la entrevista, los resultados obtenidos (Dorio *et al.*, 2009), que se plantean en el cuarto capítulo, relativo al análisis de los datos y a la obtención de resultados. De este modo, atendemos al criterio de confirmabilidad (Guba, 1985), visto en el enfoque metodológico, que ayuda a aportar rigor a los resultados de la investigación cualitativa. Asimismo, mediante las entrevistas se pretende ahondar en el entendimiento de la relación entre los resultados y la formación y la experiencia de cada uno de los tres sujetos seleccionados —objetivo 6 de la tesis—, así como averiguar si el contenido de los vídeos ha influido de alguna manera en su *noticing*, entre otras cuestiones.

Así pues, las entrevistas se implementaron tras la segunda fase y cada una de ellas se creó de manera individualizada para cada formador atendiendo a los comentarios que cada cual aportó en las dos fases previas. De este modo, ha sido posible confirmar algunas de las explicaciones que al analizar los datos hemos dado en lo que se refiere a la relación entre los resultados sobre el *noticing* espontáneo e inducido de los tres MTE seleccionados para esta tercera fase y sus diferentes perfiles profesionales.

Además, cabe señalar que las entrevistas se realizaron de forma oral y que fueron grabadas en audio para poder analizarlas posteriormente, así como que, en esta ocasión, no se adjunta su contenido en forma de anexos, puesto que consideramos que plasmar la información más relevante recopilada por esta vía en el apartado oportuno del capítulo 4 de este trabajo es suficiente para dar a conocer al lector los aportes concretos que resultan ser de utilidad para alcanzar el propósito perseguido con este instrumento.

En suma, una vez expuestas con detenimiento cada una de las tres fases del diseño de investigación llevadas a cabo con los participantes del presente estudio, a continuación se proporciona una tabla que recopila las fases del estudio y los principales aspectos que en ellas se abordan, amén de las tablas y de los anexos cardinales que han sido generados a lo largo de cada etapa del proceso investigativo, incluyendo también la fase inicial, que se ocupaba de la selección de la muestra, con el objetivo de brindar una figura que reúna las ideas primordiales del diseño metodológico creado.

Figura 3.2. Fase inicial para la selección de los participantes y fases para la recogida de datos sobre el *noticing* de los MTE: ideas, tablas y anexos principales.



3.5. Técnicas e instrumentos de recogida de datos

En trabajos con un enfoque principalmente cualitativo es habitual valerse de varias formas de recogida de información que den lugar, por consiguiente, a diferentes tipos de datos (Creswell, 2014). Por tanto, con el propósito de obtener información para poder dar respuesta a la pregunta de investigación planteada, se han seleccionado varias técnicas de recogida de datos que se han llevado a la práctica por medio de la aplicación de distintos instrumentos, tal y como se ha explicado a lo largo del presente capítulo y como se expone en los siguientes párrafos.

En la fase inicial del estudio, se ha empleado la técnica de la encuesta (Ballestín y Fàbregues, 2018) mediante la implementación de un cuestionario (Anexo 1), creado *ad hoc*, destinado a la selección de los participantes. Con tal cuestionario se busca conocer ciertas características de los integrantes de la población cuyo *noticing* queremos examinar —los formadores de matemáticas y su didáctica de futuros maestros de Educación Primaria que ejercieron como tales en el curso 2018-2019 en las universidades públicas de la Comunidad de Madrid—, poniendo el foco sobre todo en su formación académica y en su experiencia docente. El instrumento, creado con *Google Forms* y administrado *online*, se compone de alrededor de una veintena de preguntas que han permitido elegir a los 6 formadores que han participado en el resto de fases del trabajo.

Para las fases de recogida de datos relativas al *noticing* espontáneo y al inducido, respectivamente, se ha recurrido a la observación no participante (Flick, 2007) a través de la utilización de un registro audiovisual (Ballestín y Fàbregues, 2018). Por un lado, se han realizado grabaciones de la mayoría de las lecciones de la asignatura «Matemáticas y su Didáctica I» —impartida por la directora de este trabajo—, cuyo contenido dio lugar a los tres vídeos que visionaron los participantes del estudio; por otro lado, se han grabado las sesiones en las que los participantes analizan dichos vídeos. Así pues, el empleo de este instrumento nos ha permitido tener almacenada la información —tanto la referida a los vídeos comentados por los MTE como la relativa a las sesiones en las que formulan tales comentarios— y poder revisarla y analizarla posteriormente (Del Rincón, 1997).

En último lugar, en la fase final se ha hecho uso de la entrevista semiestructurada (Ballestín y Fàbregues, 2018; Flick, 2007). Las cuestiones incluidas en las entrevistas hechas —formuladas a raíz del análisis de los datos de las dos fases anteriores— han permitido

ahondar en la comprensión de la información recopilada y confirmar con la colaboración de los propios participantes algunos de los resultados alcanzados. Las entrevistas se han llevado a cabo de forma oral y se han grabado en audio para poder analizar las respuestas dadas por los formadores.

El conjunto de técnicas e instrumentos mencionados ha posibilitado recabar gran cantidad de información de distinta índole que, a su vez, ha permitido generar múltiples documentos —anexados a lo largo de este capítulo— que han facilitado el análisis de los datos, así como dotar de estructura al mismo, y la extracción de resultados.

3.6. Técnicas de análisis de datos

Si bien nuestro trabajo se encuadra en un paradigma interpretativo con un enfoque principalmente cualitativo, es cada vez más frecuente en estudios educativos integrar en diferentes estadios del proceso de investigación, y de distintas maneras, tanto métodos de análisis cualitativos como cuantitativos (Bryman, 2006). Así pues, aunque la mayor parte de esta tesis se sirve de análisis cualitativos, estos se presentan y efectúan a raíz de ciertos análisis cuantitativos previos que motivan la exploración cualitativa que se desarrolla con mayor profusión posteriormente.

En relación con el análisis cuantitativo, se examinan los datos obtenidos en las fases primera y segunda —sobre *noticing* espontáneo e inducido, respectivamente— tomando como estructura para ello los cuatro ejes explicados en el apartado 3.4.1.f de este capítulo —que responden a los cuatro primeros objetivos del estudio—. Los análisis ejecutados se circunscriben a la estadística descriptiva, puesto que esta nos permitirá dar respuesta a la mayoría de las cuestiones que planteamos en relación con los diferentes objetivos de esta disertación sobre el *noticing* de los MTE.

A partir de los datos que derivan del análisis cuantitativo, se ponen de manifiesto las diferencias entre los participantes y la existencia de tres perfiles distintos de MTE —al menos cuantitativamente, en un primer momento—, tal y como se especifica en el cuarto capítulo. Así pues, el análisis cualitativo, realizado con mayor detalle y profundidad, se centra de manera exclusiva en Marcos, Daniel y Raquel, es decir, en los tres participantes que representan lo que podemos entender como tres tipos distintos de formadores en lo

que respecta a su competencia *noticing*. En este caso nos servimos tanto de los datos que se han obtenido en las fases 1 y 2 como de los recogidos en la fase 3 —en las entrevistas— y estructuramos su estudio, de nuevo, en torno a los cuatro ejes ya citados.

Para ambos tipos de análisis empleamos los documentos elaborados a partir de los datos recopilados en las distintas fases del diseño de investigación que se han descrito en páginas previas y que se encuentran anexados a este trabajo. Asimismo, cabe reiterar que la validación de los datos y de los análisis de estos se realiza —como se ha explicado con anterioridad— a través de la validación llevada a cabo por los propios investigadores de la tesis —investigador y directores— y mediante la triangulación de expertos (Flick, 2007), así como en colaboración con los participantes del presente estudio (Dorio *et al.*, 2009) por medio de las entrevistas ya señaladas.

El desarrollo de los análisis efectuados, así como una explicación más detallada de la organización de estos, se presenta en el próximo capítulo, en el cual se aborda el análisis de los datos y se presentan los resultados alcanzados.

Capítulo 4

Análisis de los datos y resultados

4. ANÁLISIS DE LOS DATOS Y RESULTADOS

Tras haber expuesto el marco metodológico del trabajo, en este capítulo se aborda el análisis de los datos plasmados en los documentos que se han presentado como anexos en el capítulo previo —elaborados con la información recopilada en las distintas fases del diseño de investigación— y se ponen de relieve los principales resultados obtenidos.

El análisis llevado a cabo se organiza en dos grandes bloques: por un lado, se hace un análisis que tiene en cuenta los datos de todos los participantes y que se realiza con un enfoque cuantitativo; y, por otro, se plantea otro análisis que se centra en los datos de tres de los formadores —cuya selección se justifica más adelante— y que se desarrolla desde una aproximación cualitativa, siendo este segundo bloque en el que se hace más hincapié, tanto por la especial riqueza de los resultados que del mismo es posible extraer como por ser la perspectiva cualitativa la que se corresponde con el espíritu investigativo de la tesis, tal y como se ha expuesto en la sección sobre el enfoque metodológico.

Con relación al análisis cuantitativo —en el cual se examina información de todos los participantes de la muestra en paralelo, pero no datos de estos como grupo, dado que no se ha obtenido información alguna de tal índole, sino en todo momento de cada sujeto individualmente—, en primer lugar se plantea el análisis realizado relativo a la fase 1 del diseño de investigación —*noticing* espontáneo—, a continuación se hace lo propio con la fase 2 —*noticing* inducido— y, finalmente, se presenta la evolución que cada formador ha experimentado de una fase a otra y se presta atención a las diferencias entre los sujetos en la variación de sus resultados entre las dos fases. En cada uno de estos tres apartados, el análisis de la información se vertebra del mismo modo, esto es, con base en la estructura de cuatro ejes desarrollada en el marco metodológico. Así pues, y teniendo presente que en este bloque asumimos un enfoque cuantitativo, en el primer eje se trata de comprobar cuántos *call-outs* ha identificado cada MTE; en el segundo, se precisan y se examinan los niveles establecidos —según los elementos fundamentales que hayan sido explicitados— para cada uno de los eventos formulados por cada sujeto asociados a algún *call-out*; en el tercero, se determina la proporción de eventos relativos a *call-outs* —detectados por cada formador— acompañados de por lo menos una interpretación matemática con respecto al total de *call-outs* identificados; y, en el cuarto, se expone y se analiza la codificación hecha de las interpretaciones que se refieren a algún *call-out* en las categorías matemática [M] y didáctica [D] —con el interés puesto en la proporción de las interpretaciones matemáticas

con respecto al total de interpretaciones asociadas con algún *call-out* —, por una parte, y se observa el número medio de interpretaciones matemáticas referidas a *call-outs* que cada participante aporta por cada *call-out* detectado, por otra. En los cuatro ejes se abordan los datos recopilados acerca de cada uno de los tres vídeos —por separado y en su conjunto— que los sujetos de la muestra visionaron y comentaron.

Cabe decir que este primer análisis tiene como objetivo, desde un plano numérico y en cada apartado —fase 1, fase 2 y evolución entre ambas fases—, mostrar cómo es la competencia *noticing* de cada participante e identificar diferencias entre ellos para poder seleccionar a los sujetos sobre los que hacer posteriormente el estudio cualitativo con el que tratar de explicar y conocer mejor cómo es el *noticing* de dichos MTE. En este sentido, la selección de estos formadores se justifica por presentar datos muy dispares entre sí en el primer bloque —tal y como se desarrolla en páginas ulteriores— y, asimismo, por tener una formación académica y una experiencia docente también diferentes, respectivamente, siendo este segundo hecho el que podría explicar el primero.

Con relación al análisis cualitativo —en el cual se escudriñan los datos de los tres formadores seleccionados en el bloque precedente, esto es, Marcos, Daniel y Raquel—, la estructura usada es la misma que en el análisis cuantitativo, o sea, primero se plantea el estudio de los datos relativos al *noticing* espontáneo, luego se hace lo mismo con los que se corresponden con el *noticing* inducido y, finalmente, se examina la evolución de una fase a otra y se atiende a las diferencias entre los sujetos en la variación de sus resultados entre ambas fases. El tratamiento de los datos en estos apartados se organiza también con base en los cuatro ejes ya señalados, pero, teniendo en cuenta que ahora trabajamos desde un enfoque cualitativo, el abordaje de la información en cada eje se ejecuta de una manera distinta. Así pues, en el primero, se consideran cuáles son los *call-outs* que cada MTE ha identificado; en el segundo, se traen a colación y se examinan las evidencias textuales de cada formador que abonan los niveles otorgados a los eventos referidos a *call-outs*; en el tercero, se comprueba cuáles son los *call-outs* detectados acerca de los que se ha aportado alguna interpretación matemática; y, en el cuarto, se examina la información presente en las interpretaciones dadas —sobre todo en las matemáticas— referidas a algún *call-out*. Al igual que ocurre en el primer bloque, en cada eje se tratan los datos recopilados sobre los tres vídeos —por separado y en su conjunto— que los sujetos visionaron y comentaron.

Cabe decir que este segundo análisis, además de contar con un enfoque distinto al primero a la hora de examinar los datos, incluye un apartado más, el cual se corresponde con la fase 3, esto es, con las entrevistas realizadas a cada uno de los tres MTE. Con dichas entrevistas se pretende ahondar en los resultados obtenidos en los análisis efectuados y confrontarlos con las opiniones y los pensamientos de los sujetos sobre su propio *noticing* en pos de dotar de validez a los resultados también con la colaboración de los formadores del estudio.

La estructura general de este capítulo, explicada en los párrafos previos, se recoge de forma esquemática en la siguiente tabla:

Tabla 4.1. Estructura del análisis de los datos.

<i>Análisis cuantitativo [6 MTE]</i>			
Fase 1 <i>Noticing</i> espontáneo	Fase 2 <i>Noticing</i> inducido		Evolución Fase 1 → Fase 2
Eje 1. Eventos ¿Qué notan?	Eje 2. Eventos ¿Cómo notan?	Eje 3. Interpretaciones ¿Qué interpretan?	Eje 4. Interpretaciones ¿Cómo interpretan?
<i>Call-outs</i> detectados	<i>Niveles de los eventos</i> <i>relativos a call-outs</i>	<i>Call-outs detectados</i> <i>con interpretaciones [M]</i>	<i>Interpretaciones [M]</i> <i>relativas a call-outs</i>
Vídeo 1	Vídeo 2	Vídeo 3	Todos los vídeos
<i>Análisis cualitativo [3 MTE]</i> <i>Marcos, Daniel y Raquel</i>			
Fase 1 <i>Noticing</i> espontáneo	Fase 2 <i>Noticing</i> inducido	Evolución Fase 1 → Fase 2	Fase 3 Entrevistas
Eje 1. Eventos ¿Qué notan?	Eje 2. Eventos ¿Cómo notan?	Eje 3. Interpretaciones ¿Qué interpretan?	Eje 4. Interpretaciones ¿Cómo interpretan?
<i>Cuáles son</i> <i>los call-outs</i> <i>detectados</i>	<i>Evidencias de</i> <i>los niveles de los</i> <i>eventos</i>	<i>Cuáles son</i> <i>los call-outs con</i> <i>interpretaciones [M]</i>	<i>Contenido de las</i> <i>interpretaciones [M]</i> <i>relativas a call-outs</i>
Vídeo 1	Vídeo 2	Vídeo 3	Todos los vídeos

Asimismo, es importante señalar —tal y como ya se hizo en el capítulo anterior— que, si bien el análisis de la presente disertación se focaliza en los eventos asociados a los *call-outs* y en sus interpretaciones matemáticas —decisión tomada para acotar el estudio de los datos, así como por el mayor interés que pueden tener los eventos relevantes y sus interpretaciones matemáticas frente a los demás eventos e interpretaciones en el área en el que se enmarca este trabajo—, en este capítulo se alude además, de forma sucinta, a la información que se aporta en el resto de eventos e interpretaciones. Dicho análisis es útil porque nos puede permitir también encontrar diferencias en el *noticing* de los formadores

por razones de formación y experiencia, comprobar a qué otros aspectos de la práctica de enseñanza de la MTE del vídeo dan importancia, así como complementar el estudio de la evolución de un mismo sujeto entre fases prestando atención, por ejemplo, a la variación en el número de eventos e interpretaciones de la categoría didáctica [D] y al contenido de los mismos o a los eventos matemáticos no referidos a *call-outs* que hayan detectado, entre otros aspectos. No obstante, en detalle, se pretende abordarlo en futuros trabajos.

4.1. Análisis cuantitativo con 6 MTE

En este primer bloque de análisis, se presenta el examen cuantitativo de los datos recabados sobre todos los participantes en las dos fases de recogida de información sobre su *noticing* —espontáneo e inducido, respectivamente—, así como la evolución existente entre ambas, atendiendo a los cuatro ejes descritos en el capítulo previo que vertebran el tratamiento de los datos y en relación con cada uno de los tres vídeos comentados por los formadores. En último término, se tratan de manera breve los eventos e interpretaciones que no se refieren a *call-outs*.

Cabe recordar brevemente el contenido matemático de los vídeos —se dispone del contenido íntegro en las transcripciones del Anexo 2 y de un resumen más completo en el apartado 3.4.1.a—: el primero incide en el conteo y en el sistema de numeración decimal, el segundo aborda los cambios de base y en el tercero de ellos se pone el foco en el proceso de las operaciones con estructura aditiva mediante la utilización de distintos registros de representación. Resulta conveniente tener presente tanto esta información como el perfil de los sujetos relativo a su formación académica y experiencia docente —que se desarrolla en el apartado 3.3— durante la lectura del análisis cuantitativo.

Por otro lado, con el propósito de aproximarnos mejor a una caracterización inicial del *noticing* de los MTE y describir de una forma más sencilla el estado de su competencia en la primera y en la segunda fase y su evolución entre estas, los resultados obtenidos en cada uno de los ejes de ambas fases serán categorizados en distintos niveles de *noticing*, a saber: 1 o bajo, 2 o medio-bajo, 3 o medio, 4 o medio-alto y 5 o alto. La competencia de cada participante se ubicará en un nivel u otro en función de los criterios que en cada eje se han establecido, los cuales se basan en los aspectos que se abordan en cada uno de ellos

— desarrollados en sentido lato en el capítulo anterior y en las primeras páginas de este — y se dan a conocer en páginas ulteriores en los apartados sobre cada eje. En todo caso, los niveles se establecen a partir de los datos del conjunto de los tres vídeos.

4.1.1. Fase 1. *Noticing espontáneo*

Se presenta a continuación el análisis cuantitativo de los datos de todos los MTE, en paralelo, relativos a su *noticing* espontáneo, es decir, al manifestado en los formadores a raíz de un *open-ended video viewing support*. Dichos datos han sido extraídos del Anexo 18 — explicado en el capítulo 3 —, en el que encontramos los eventos e interpretaciones de la fase 1 de todos los sujetos, integrados en la transcripción de los vídeos tras el *call-out* al que cada uno se refiere — cuando es el caso —, así como etiquetados y codificados. Si bien en otros anexos también se contempla información relacionada con este bloque — análisis cuantitativo —, es el citado documento el único que reúne todo el contenido necesario para la labor que nos ocupa en esta primera fase.

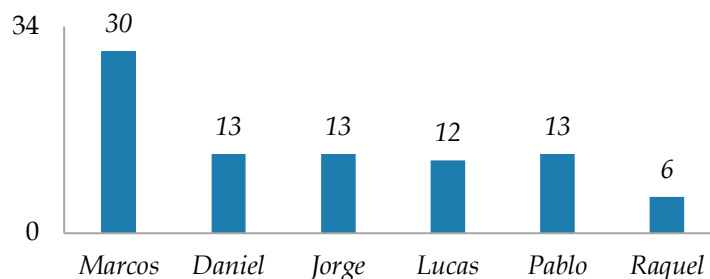
4.1.1.a. Eje 1. *Eventos: ¿qué notan?*

En este eje nos centramos en determinar el número de eventos asociados a *call-outs* que aporta cada formador en los distintos vídeos — análisis interindividual —.

Vídeo 1

En el primer vídeo, para el que se estableció un conjunto de 34 *call-outs*, cada uno de los participantes identificó la cantidad de *call-outs* que se recoge en la siguiente figura:

Figura 4.1. Número de eventos asociados a *call-outs*: vídeo 1, fase 1.

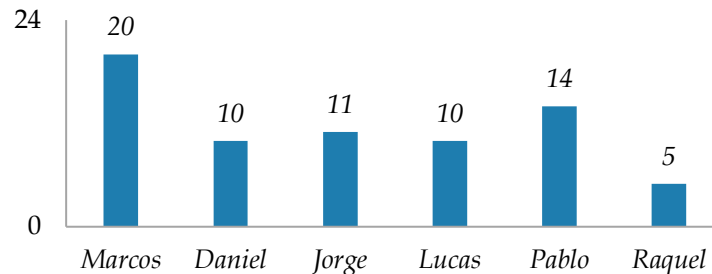


Como se puede observar, se conforman claramente tres grupos entre los MTE en relación con el número de eventos relevantes detectados: uno en el que se sitúa Marcos, quien indica un 88 % de todos los *call-outs*, otro en el que encontramos a Raquel, quien identifica un 18 %, y otro, entre ambos, en el que se posicionan los demás sujetos, quienes detectan un 35-38 % del total.

Vídeo 2

En el segundo vídeo, para el que se estableció un conjunto de 24 *call-outs*, cada uno de los participantes identificó la cantidad de *call-outs* que se recoge en el siguiente gráfico:

Figura 4.2. Número de eventos asociados a *call-outs*: vídeo 2, fase 1.

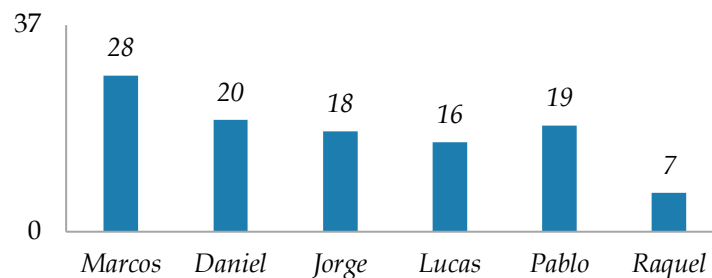


Tal y como se puede apreciar, se generan de nuevo los mismos tres grupos entre los MTE en relación con el número de eventos relevantes identificados: uno en el que se sitúa Marcos, quien explicita un 83 % de todos los *call-outs*, otro en el que se ubica Raquel, quien indica un 21 %, y otro, entre ambos, en el que se sitúan los demás formadores, que identifican un 42-58 % del total.

Vídeo 3

En el tercer vídeo, para el que se estableció un conjunto de 37 *call-outs*, cada uno de los participantes identificó la cantidad de *call-outs* que se recoge en la siguiente figura:

Figura 4.3. Número de eventos asociados a *call-outs*: vídeo 3, fase 1.

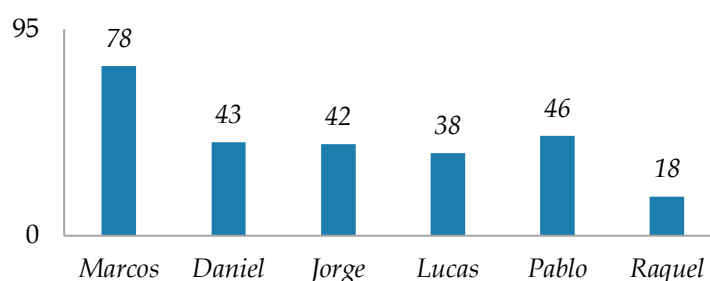


Como se puede comprobar, una vez más se configuran los mismos grupos entre los MTE en relación con el número de eventos relevantes identificados: uno en el que se encuentra Marcos, quien señala un 76 % de todos los *call-outs*, otro en el que está Raquel, quien identifica un 19 %, y otro, en medio, en el que se posiciona el resto de formadores, quienes explicitan un 43-54 % del total.

Conjunto de todos los vídeos

Teniendo en cuenta los tres vídeos en conjunto, en los que se establece un total de 95 *call-outs*, en el siguiente gráfico se plasma el número de *call-outs* que cada MTE detectó:

Figura 4.4. Número de eventos asociados a *call-outs*: todos los vídeos, fase 1.



Se observa que se mantienen los mismos tres grupos que han ido apareciendo en los datos relativos a cada vídeo por separado: uno —en el extremo superior— en el que únicamente se encuentra Marcos, quien señala un 82 % de todos los *call-outs*, otro —en el extremo inferior— en el que solo se ubica Raquel, quien identifica un 19 %, y un tercero, en medio, en el que se sitúan los demás sujetos, quienes detectan un 40-48 % del total.

Tras revisar el número de *call-outs* explicitados por cada uno de los MTE, se podría colegir que el contenido de los vídeos parece no influir en qué notan los formadores —en cuanto a cantidad—, puesto que es posible apreciar en todos los gráficos un patrón similar en el que siempre Marcos es quien más eventos relevantes indica y Raquel es quien menos detecta, a gran distancia en ambos casos —por cada extremo, respectivamente— del resto de participantes.

En cuanto al nivel de *noticing* de cada MTE en el eje 1, este se ha determinado con base en el número de *call-outs* identificados por cada formador del total establecido para el conjunto de los tres vídeos, es decir, se establece en función del porcentaje de *call-outs*

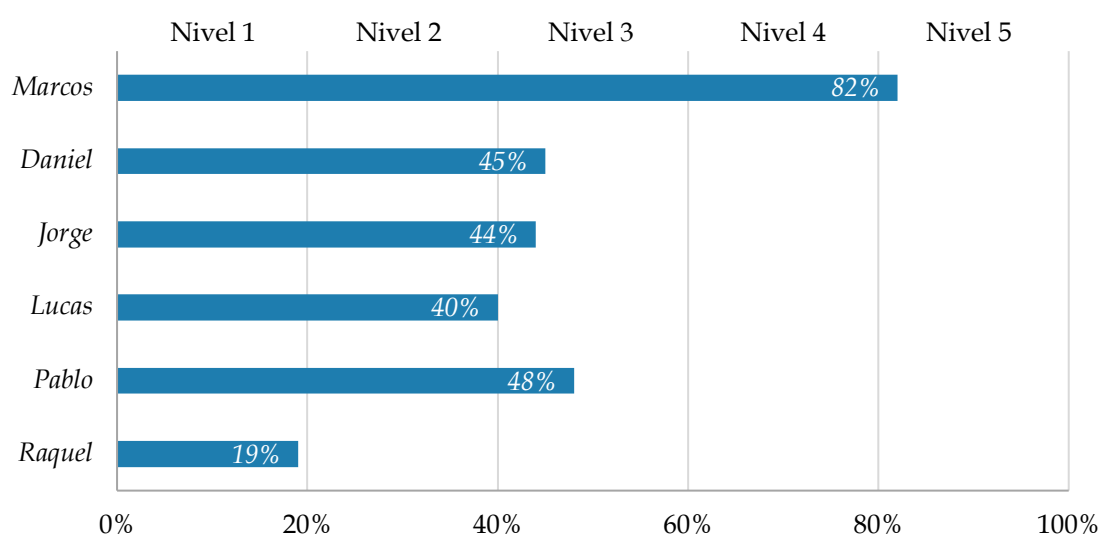
detectados del total de 95 eventos relevantes — que se pueden consultar en el Anexo 16 — con arreglo a lo dispuesto en la siguiente tabla:

Tabla 4.2. Intervalos para establecer el nivel de *noticing* de un MTE en el eje 1.

	Intervalos
Nivel 1 o bajo	[0 %, 20 %)
Nivel 2 o medio-bajo	[20 %, 40 %)
Nivel 3 o medio	[40 %, 60 %)
Nivel 4 o medio-alto	[60 %, 80 %)
Nivel 5 o alto	[80 %, 100 %]

Atendiendo a dichos intervalos, en el siguiente gráfico se plasma el porcentaje de *call-outs* explicitado por cada uno de los sujetos con respecto al conjunto de los tres vídeos en la primera fase, así como el nivel de *noticing* de cada MTE en este eje en función de tales valores:

Figura 4.5. Nivel de *noticing* de cada MTE — eje 1 — en función del porcentaje de *call-outs* identificados con respecto al total de *call-outs*: todos los vídeos, fase 1.



Advertimos que Marcos es el único formador que presenta un nivel alto en cuanto a *call-outs* identificados, situándose en la parte baja del nivel 5, y que Raquel es la única que se sitúa en el nivel bajo, aunque en la parte alta del mismo. En el nivel 3 se ubican los demás sujetos, todos en su primera mitad, estando Lucas justamente en el límite inferior de este nivel.

En resumen, en esta fase el nivel de *noticing* de los formadores en el eje 1, es decir, su nivel en cuanto a *qué notan*, es el que se recoge en esta tabla:

Tabla 4.3. Nivel de *noticing* de cada MTE en el eje 1 [*¿qué notan?*]: conjunto de todos los vídeos, fase 1.

	Marcos	Daniel	Jorge	Lucas	Pablo	Raquel
Nivel	Alto	Medio	Medio	Medio	Medio	Bajo

Como se puede comprobar, el margen de mejora es amplio para la mayoría de los participantes, siendo Marcos el único que se sitúa en el nivel alto.

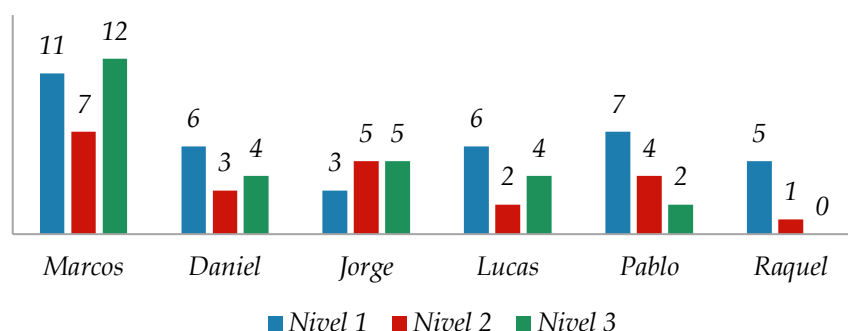
4.1.1.b. Eje 2. Eventos: *¿cómo notan?*

En este eje abordamos los niveles otorgados a los eventos —referidos a *call-outs*— expresados por cada formador en cada vídeo —análisis interindividual—. Cabe recordar que el nivel de dichos eventos se ha establecido en función de cómo se han explicitado los elementos fundamentales establecidos en cada *call-out* —elementos que se recogen en el Anexo 19— a tenor de lo reflejado en las tablas 3.5 y 3.6 del capítulo anterior. Igualmente, es importante tener presente que la distancia cualitativa entre los eventos del nivel 1 y los del 2 es mayor que la existente entre los eventos del nivel 2 y los del 3, como se especifica en el marco metodológico.

Vídeo 1

En el primer vídeo, los eventos —asociados a *call-outs*— formulados por cada MTE se distribuyen en los tres niveles posibles del siguiente modo:

Figura 4.6. Eventos —asociados a *call-outs*— clasificados en niveles en función de los elementos fundamentales explicitados: vídeo 1, fase 1.

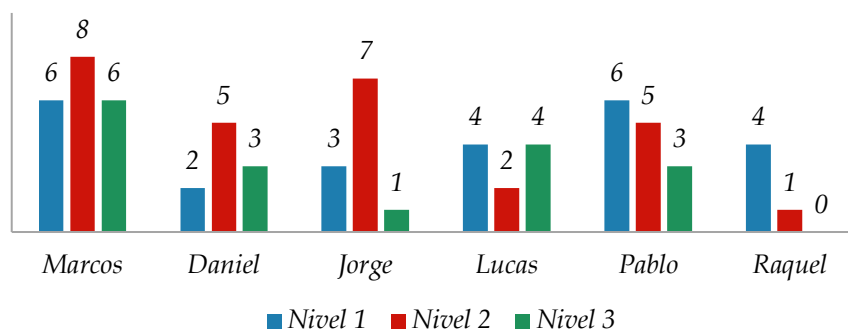


Como se puede apreciar en la figura, el número de eventos situados en el nivel 1 es bastante notable en la mayoría de los formadores, siendo el que tiene la frecuencia más alta en el caso de Daniel, Lucas, Pablo y Raquel. Además, su peso es todavía más relevante para Pablo y Raquel, ya que se corresponde con más de la mitad sus eventos, de forma respectiva, mientras que solo para Jorge se presenta en menos del 25 % de los suyos. En cuanto al nivel 3, este supone la mayor frecuencia solamente para Marcos —también para Jorge, en igualdad con el nivel 2—. Asimismo, no hay sujetos con más de la mitad de sus eventos en este nivel y solo para Pablo y Raquel se corresponde con menos del 25 % de sus eventos, suponiendo un 0 % para la maestra. Y en relación con nivel 2, este no aparece como la frecuencia más alta para ningún sujeto, excepto para Jorge —en igualdad con la del nivel 3—, y de hecho se trata de la más baja para Marcos, Daniel y Lucas. No se asocia con más de la mitad de los eventos de ningún formador y tiene una presencia menor del 25 % únicamente para Raquel. Por ende, se podría afirmar que en este vídeo la incidencia del nivel inferior destaca frente a la de los demás, siendo posible discernir principalmente dos grupos entre los participantes —tanto por lo explicado como por la línea que dibujan los extremos superiores de las barras de cada uno de los MTE—: uno en el que podemos situar a Marcos, Daniel, Jorge y Lucas —destacando Marcos, por su mayor proporción de eventos en el nivel 3, así como Jorge, por su menor proporción de eventos en el nivel 1—, con niveles más altos, y otro en el que se encuentran Pablo y Raquel, con niveles más bajos —destacando Raquel por tender sus resultados claramente hacia el nivel inferior—.

Vídeo 2

En el segundo vídeo, los eventos —asociados a algún *call-out*— formulados por los MTE se distribuyen en los tres niveles posibles de la siguiente manera:

Figura 4.7. Eventos —asociados a *call-outs*— clasificados en niveles en función de los elementos fundamentales explicitados: vídeo 2, fase 1.

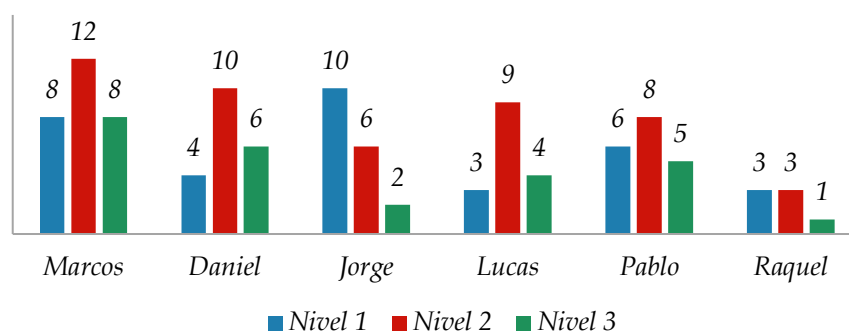


Se puede comprobar que, si bien el nivel 1 sigue teniendo un peso importante en los eventos de este segundo vídeo, ahora solo supone el nivel con la frecuencia más alta para Pablo y Raquel —también para Lucas, en igualdad con el nivel 3— y se corresponde con más de la mitad de los eventos de un mismo sujeto únicamente en el caso de Raquel, mientras que solo para Daniel se presenta en menos del 25 % de los suyos. En cuanto al nivel 3, este representa la mayor frecuencia solamente para Lucas —junto con la del nivel inferior—. Además, nadie cuenta con más de la mitad de sus eventos en este nivel y para Jorge, Pablo y Raquel se corresponde con menos del 25 % de sus eventos, respectivamente, representando de nuevo un 0 % para la maestra. Por lo tanto, es palpable que la incidencia de los niveles 1 y 3 se ve reducida en comparación con la del vídeo anterior en favor del nivel intermedio, que es el que pasa a tener mayor presencia. Así pues, en lo que respecta al nivel 2, este supone la frecuencia más alta para Marcos, Daniel y Jorge, asociándose a más de la mitad de los eventos de Jorge y a menos del 25 % de los de Lucas y Raquel, de forma respectiva. Por ende, sería posible agrupar a los sujetos en los mismos grupos que en el vídeo 1 —tanto por lo explicado como por la línea que esbozan los puntos superiores de las barras de cada MTE—: uno, con niveles más altos, en el que encontramos a Marcos, Daniel, Jorge y Lucas —destacando el último, por su mayor proporción de eventos en el nivel 3, y Daniel, por su menor proporción de eventos en el nivel 1—, si bien Lucas tiene un dibujo distinto al concentrar la mayoría de sus eventos en los valores extremos, y otro conformado por Pablo y Raquel, con niveles más bajos —sobre todo Raquel—.

Vídeo 3

En el tercer vídeo, los eventos —asociados a algún *call-out*— formulados por cada MTE se distribuyen en los tres niveles posibles del siguiente modo:

Figura 4.8. Eventos —asociados a *call-outs*— clasificados en niveles en función de los elementos fundamentales explicitados: vídeo 3, fase 1.

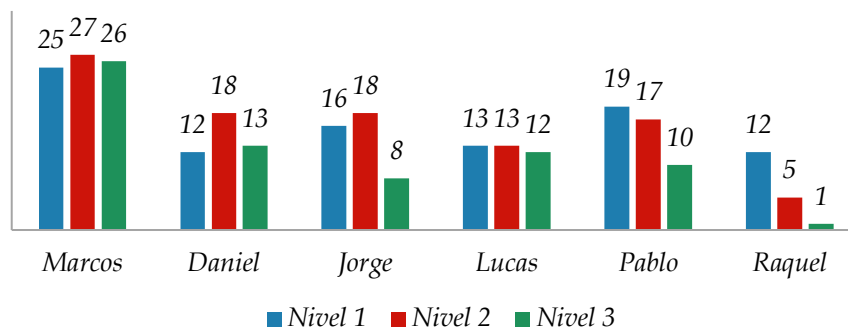


Como se puede observar, el número de eventos ubicados en el nivel 1 sigue siendo significativo en la mayoría de los formadores, pero menos que en los otros dos vídeos, ya que solo representa la mayor frecuencia para Jorge —también para Raquel, en igualdad con la del nivel 2—, único MTE que tiene más de la mitad de sus eventos en dicho nivel, mientras que solo para Daniel y Lucas se corresponde con menos del 25 %. Por otro lado, respecto al nivel 3, este no representa la frecuencia más alta para ningún participante, no hay sujetos con más de la mitad de sus eventos en este nivel y solo para Jorge y Raquel se corresponde con menos del 25 % de sus eventos, respectivamente. La presencia del nivel inferior, por lo tanto, es la menor de los tres vídeos, mientras que la del nivel superior es similar a la del primero. Así pues, en cuanto al nivel 2, este supone la mayor frecuencia para todos los formadores —para Raquel, en igualdad con la del nivel 1—, menos para Jorge, se asocia con más de la mitad de los eventos en el caso de Lucas y para ninguno de los sujetos se manifiesta en menos del 25 % de sus eventos. En consecuencia, es el nivel intermedio el que mayor incidencia tiene en este vídeo. Por todo ello, es posible encontrar principalmente dos grupos entre los participantes —tanto por lo explicado como por la línea que dibujan los extremos superiores de las barras de cada MTE—: uno conformado por Marcos, Daniel, Lucas y Pablo —destacando Daniel y Lucas, por su menor proporción de eventos en el nivel 1—, con niveles más altos, y otro en el que encontramos a Jorge y Raquel, con niveles más bajos —destacando Jorge por su amplia proporción de eventos en el nivel inferior—.

Conjunto de todos los vídeos

Los eventos —asociados a *call-outs*— formulados por cada MTE en el conjunto de todos los vídeos se distribuyen en los tres niveles posibles de esta forma:

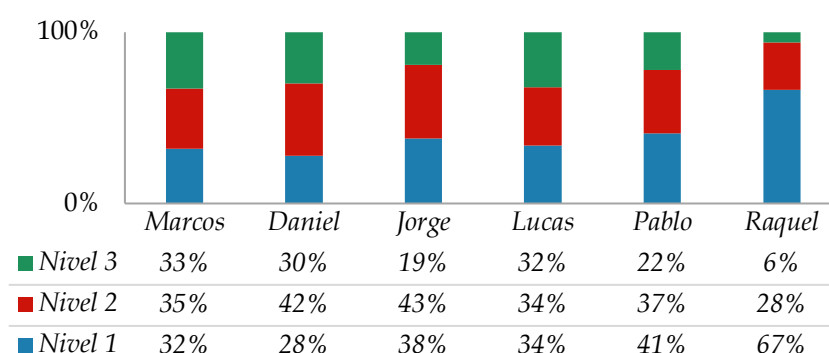
Figura 4.9. Eventos —asociados a *call-outs*— clasificados en niveles en función de los elementos fundamentales explicitados: todos los vídeos, fase 1.



Se puede comprobar que, en la mayoría de los casos, la aparición de los tres niveles es bastante homogénea, si bien el nivel 1 tiene una incidencia ligeramente superior —junto con la del nivel 2—. Así es que el nivel inferior supone la frecuencia más alta para Pablo y Raquel —además de para Lucas, en igualdad con el nivel 2—, se corresponde con más de la mitad de los eventos exclusivamente en el caso de Raquel y para ningún sujeto tiene una presencia menor del 25 % en sus eventos. En cuanto al nivel 3, este no representa la mayor frecuencia para ningún MTE y tampoco se corresponde con más de la mitad de los eventos de ninguno de ellos, surgiendo en menos del 25 % de los eventos de Jorge, Pablo y Raquel, respectivamente. Y en relación con el nivel 2, este es el que en más ocasiones se manifiesta para Marcos, Daniel y Jorge —también para Lucas, en igualdad con el nivel inferior— y no se corresponde con más de la mitad de los eventos de ningún docente, si bien supone al menos el 25 % para todos ellos. Por consiguiente, el peso de los tres niveles es parecido en líneas generales —salvo algunas excepciones—, dando lugar a una posible distribución de los participantes en tres grupos principales —tanto por lo indicado a partir de los gráficos de cada vídeo, amén de por los grupos surgidos a raíz de los datos de cada uno, como por la información de la figura que nos ocupa y la línea que esbozan los puntos superiores de las barras de cada MTE en la misma—: uno, con niveles más altos, formado por Marcos, Daniel y Lucas, otro en el que se sitúan Jorge y Pablo, con niveles intermedios, y un tercero, con niveles más bajos, cuya única integrante es Raquel.

Estas agrupaciones son aún más claras si prestamos atención a la proporción que supone cada nivel para cada MTE con respecto al total de eventos —asociados a *call-outs*— formulados por cada uno de ellos, tal y como se puede ver en la siguiente figura:

Figura 4.10. Porcentaje de eventos —asociados a *call-outs*— clasificados en cada nivel, en función de los elementos fundamentales explicitados, con respecto al total de *call-outs* identificados: todos los vídeos, fase 1.



Nota. Los valores de Raquel no suman el 100 % por el redondeo a la unidad, lo que no afecta a la interpretación de los datos.

Se constata de forma meridiana que, por un lado, Marcos, Daniel y Lucas son los que tienen una proporción mayor de sus eventos en el nivel superior con respecto al resto de participantes, así como la menor proporción en el nivel inferior. Los tres formadores presentan resultados muy similares, distribuyéndose sus eventos, respectivamente, casi a partes iguales en cada nivel —siendo la incidencia del nivel intermedio levemente mayor en el caso de Daniel—. Por otro lado, Jorge y Pablo se sitúan en un escalón inferior, puesto que proporcionalmente son menos sus eventos enmarcados en el nivel 3 y más aquellos en el nivel 1, en comparación con Marcos, Daniel y Lucas. Y, por último, en un peldaño más bajo estaría Raquel, pues ha explicitado la mayoría de sus eventos —dos tercios— en consonancia con el nivel 1, alcanzando el nivel 3 de forma apenas testimonial.

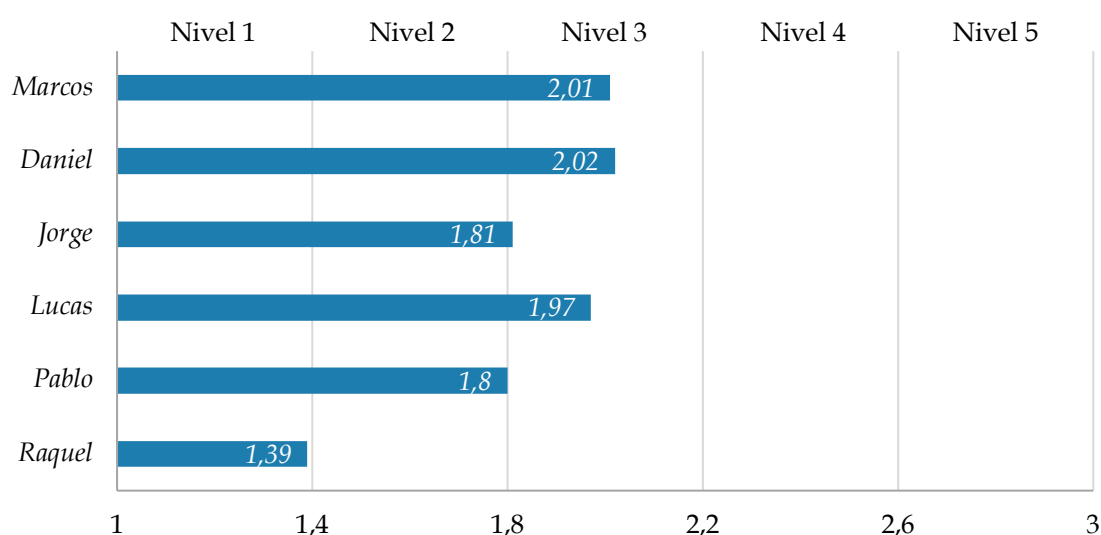
Asimismo, tras examinar la distribución de los eventos asociados a *call-outs* de cada sujeto en los distintos niveles, es posible llegar a la conclusión de que el contenido de los vídeos podría tener cierta influencia en cómo notan los formadores, es decir, en la manera en la que explicitan los eventos relevantes en cada caso —a diferencia de lo que ocurre en el eje 1, en el que no parece que dicha variable tenga repercusión alguna—. Esto se puede observar atendiendo a la línea que dibujan los extremos superiores de las barras de cada docente en el gráfico de cada vídeo: ningún MTE mantiene el mismo dibujo de un vídeo a otro, siendo especialmente inestable en el caso de Jorge, mientras que Raquel es quien experimenta una variación menor.

En relación con el nivel de *noticing* de cada MTE en el eje 2, este se ha fijado según el nivel medio de los eventos referidos a *call-outs* en el conjunto de los tres vídeos, el cual se calcula de manera ponderada obteniendo un punto por cada evento en el nivel 1, dos puntos por cada uno en el nivel 2 y tres puntos por cada uno en el nivel 3. Por lo tanto, el valor que se otorga a los eventos es mayor cuanto más alto es el nivel que alcanzan a tener de los elementos fundamentales explicitados —nótese que la distancia cuantitativa entre el valor de los eventos ubicados en el nivel inferior y el de los eventos del nivel intermedio es proporcionalmente más grande que la existente entre el valor de los eventos del nivel intermedio y el de los eventos del nivel superior, tal y como cualitativamente se planteaba al inicio de este apartado sobre el eje 2, así como en el marco metodológico, dado que en el nivel 2 se puntúa el doble que en el 1 y, por su parte, en el nivel 3 se puntúa una vez y media lo que en el 2—. Por todo ello, las medias ponderadas se posicionan en el intervalo $[1, 3]$, otorgándose un nivel a cada MTE con arreglo a lo dispuesto en la siguiente tabla:

Tabla 4.4. Intervalos para establecer el nivel de *noticing* de un MTE en el eje 2.

	Intervalos
Nivel 1 o bajo	[1, 1.4)
Nivel 2 o medio-bajo	[1.4, 1.8)
Nivel 3 o medio	[1.8, 2.2)
Nivel 4 o medio-alto	[2.2, 2.6)
Nivel 5 o alto	[2.6, 3]

Ajustándose a estos intervalos, en el siguiente gráfico se plasma el nivel medio de los eventos –referidos a *call-outs*– formulados por cada sujeto en el conjunto de los tres vídeos en la primera fase, así como el nivel de *noticing* de cada MTE en función de dichos valores:

Figura 4.11. Nivel de *noticing* de cada MTE –eje 2– en función del nivel medio de los eventos asociados a *call-outs* según los elementos fundamentales explicitados: todos los vídeos, fase 1.

Vemos que cinco de los participantes se ubican en el nivel intermedio –Marcos, Daniel y Lucas están en torno al punto medio del mismo, mientras que Jorge y Pablo se encuentran en su extremo inferior– y que Raquel, en cambio, se queda en el nivel bajo a las puertas del siguiente nivel, a una distancia de 0,41 puntos de la media del docente más cercano, lo que se corresponde con los grupos establecidos a raíz de los resultados de los tres vídeos en su conjunto.

En resumen, en esta fase el nivel de *noticing* de los formadores en el eje 2, es decir, su nivel en cuanto a *cómo notan*, es el que se recoge en la siguiente tabla:

Tabla 4.5. Nivel de *noticing* de cada MTE en el eje 2 [*¿cómo notan?*]: conjunto de todos los vídeos, fase 1.

	Marcos	Daniel	Jorge	Lucas	Pablo	Raquel
Nivel	Medio	Medio	Medio	Medio	Medio	Bajo

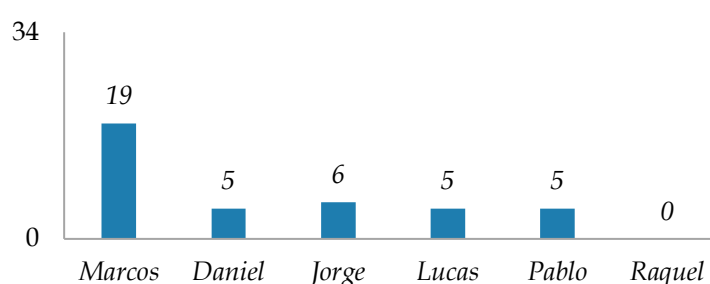
Como se puede apreciar, el margen de mejora es amplio para todos los sujetos, ya que ninguno de ellos alcanza el nivel alto ni se acerca a él.

4.1.1.c. Eje 3. Interpretaciones: *¿qué interpretan?*

En este tercer eje se pone el foco en examinar aquellos eventos asociados a *call-outs* que aporta cada formador y que están acompañados de al menos una interpretación de la categoría matemática [M] en cada uno de los tres vídeos propuestos para ser comentados — análisis interindividual —.

Vídeo 1

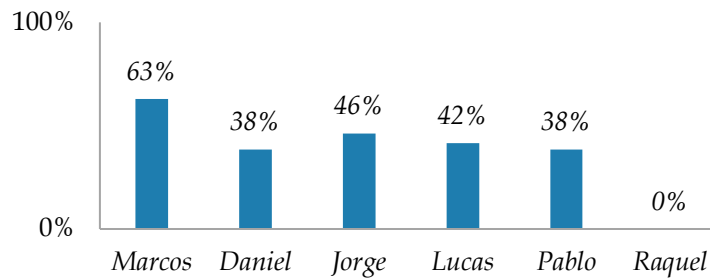
En el primer vídeo, para el que se estableció un conjunto de 34 *call-outs*, cada uno de los participantes aportó la cantidad de eventos asociados a *call-outs* — con al menos una interpretación matemática por evento — que se recoge en la siguiente figura:

Figura 4.12. Número de eventos — asociados a *call-outs* — acompañados de al menos una interpretación matemática: vídeo 1, fase 1.

Como se puede observar, se configuran tres grupos de manera marcada: uno en el que se encuentra Marcos, siendo el que más *call-outs* interpreta matemáticamente, otro en el que se sitúa Raquel, quien no interpreta matemáticamente ningún *call-out*, y otro, entre ambos, conformado por el resto de MTE, quienes interpretan entre cinco y seis eventos relevantes desde un punto de vista matemático.

Si bien el número de *call-outs* sobre los que se formulan interpretaciones de carácter matemático constituye una información relevante —que en cierta medida guarda relación con los datos del eje 1—, se antoja más importante conocer la propensión de cada sujeto a interpretar o no —matemáticamente— los eventos que formulan relativos a *call-outs*, o sea, saber la proporción de eventos —referidos a algún *call-out*— que incluyen al menos una interpretación de la categoría matemática con respecto al total de *call-outs* identificados:

Figura 4.13. Porcentaje de eventos —asociados a *call-outs*— que están acompañados de al menos una interpretación matemática con respecto al total de *call-outs* identificados: vídeo 1, fase 1.

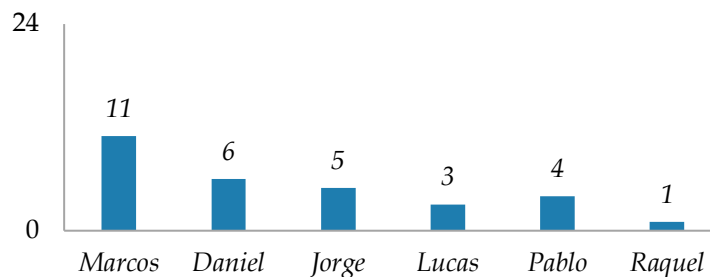


Comprobamos que en este caso se establecen los mismos grupos que en el gráfico anterior: Marcos, por un lado, siendo el único que interpreta matemáticamente más de la mitad de los *call-outs* que detecta, Raquel, por otro, quien no realiza interpretaciones desde un punto de vista matemático sobre ninguno de los *call-outs* que identifica, y los demás MTE, por otro, interpretando matemáticamente un 38-46 % de sus eventos relevantes.

Vídeo 2

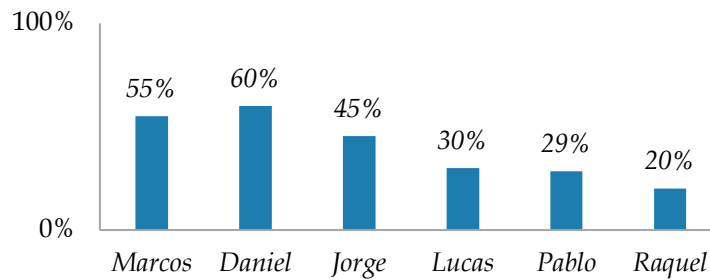
En el segundo vídeo, para el que se estableció un conjunto de 24 *call-outs*, cada uno de los participantes aportó la cantidad de eventos asociados a *call-outs* —con al menos una interpretación matemática por evento— que se recoge en el siguiente gráfico:

Figura 4.14. Número de eventos —asociados a *call-outs*— acompañados de al menos una interpretación matemática: vídeo 2, fase 1.



Como se aprecia, se vuelven a configurar los tres grupos del primer vídeo, aunque ya no de una forma tan marcada: de nuevo Marcos es el sujeto que más *call-outs* interpreta matemáticamente y Raquel es quien menos, encontrando entre ambos al resto de MTE, con valores entre tres y seis, que en este vídeo distan menos de los de Marcos y Raquel.

Figura 4.15. Porcentaje de eventos —asociados a *call-outs*— que están acompañados de al menos una interpretación matemática con respecto al total de *call-outs* identificados: vídeo 2, fase 1.

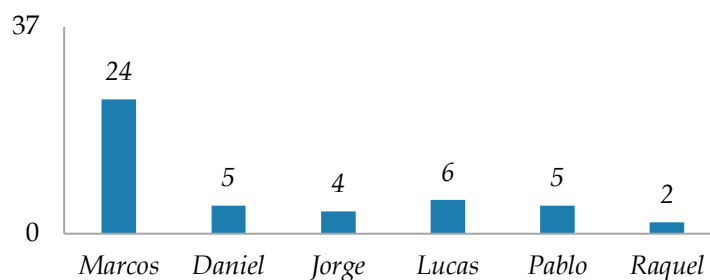


En lo referido a la proporción de eventos —asociados a *call-outs*— que incluyen al menos una interpretación matemática con respecto al total de *call-outs* identificados, en el gráfico previo se aprecia que en este vídeo los grupos difieren de los del anterior, dándose ahora principalmente dos: uno formado por Marcos, Daniel y Jorge, quienes interpretan con una mirada matemática en torno a la mitad de los *call-outs* que detectan, y otro cuyos integrantes son Lucas, Pablo y Raquel, con valores del 20-30 %. De nuevo, Raquel se sitúa en la parte inferior.

Vídeo 3

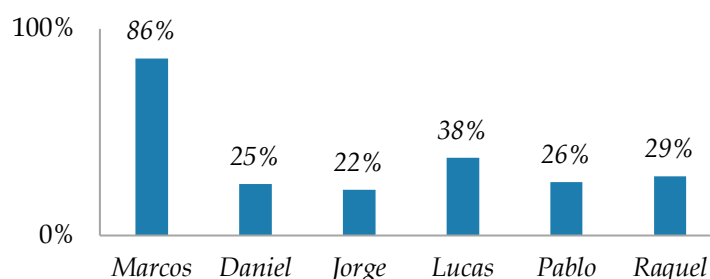
En el tercer vídeo, para el que se estableció un conjunto de 37 *call-outs*, cada uno de los participantes aportó la cantidad de eventos asociados a *call-outs* —con al menos una interpretación matemática por evento— que se recoge en la siguiente figura:

Figura 4.16. Número de eventos —asociados a *call-outs*— acompañados de al menos una interpretación matemática: vídeo 3, fase 1.



Se puede apuntar que en este vídeo Marcos aporta un número mucho más alto de eventos —asociados a *call-outs*— con interpretaciones matemáticas que el resto de MTE, quienes interpretan matemáticamente entre dos y seis *call-outs*. Por tanto, en esta ocasión encontramos dos grupos diferentes, aunque situándose Marcos y Raquel de nuevo en los extremos superior e inferior, de forma respectiva.

Figura 4.17. Porcentaje de eventos —asociados a *call-outs*— que están acompañados de al menos una interpretación matemática con respecto al total de *call-outs* identificados: vídeo 3, fase 1.

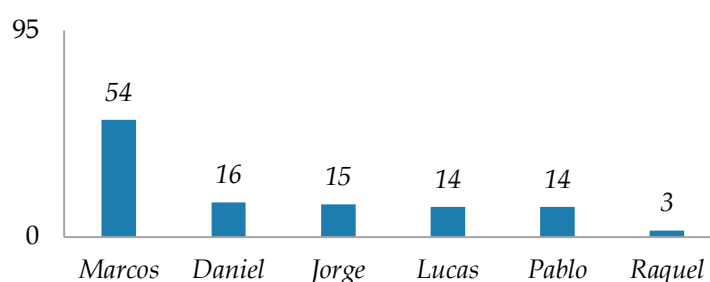


En cuanto a la proporción de eventos —asociados a *call-outs*— que tienen al menos una interpretación matemática con respecto al total de *call-outs* identificados, en la figura previa se aprecia que en este vídeo los grupos difieren de los del anterior. Ahora se forma un total de dos grupos con los formadores distribuidos de este modo: en uno se encuentra únicamente Marcos, con una proporción amplísima de *call-outs* interpretados desde un punto de vista matemático —casi nueve de cada diez—, y en otro grupo, a gran distancia, se sitúan los demás sujetos, quienes presentan valores entre el 22 % y el 38 %, siendo Jorge el que proporcionalmente menos interpreta matemáticamente —poco más de dos *call-outs* de cada diez identificados—. Asimismo, cabe resaltar que, si bien Raquel es la formadora que ha interpretado matemáticamente menos eventos relevantes en términos absolutos, su tendencia a interpretar desde tal enfoque los *call-outs* que explicita es mayor que la de Daniel, Jorge y Pablo, siendo Lucas el que despunta en este segundo grupo.

Conjunto de todos los vídeos

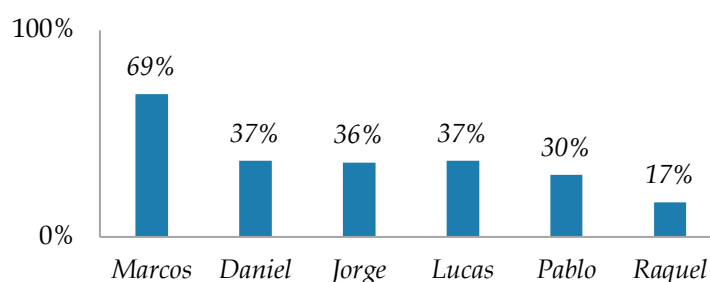
En el conjunto de todos los vídeos, para los que se estableció un total de 95 *call-outs*, cada uno de los sujetos aportó el número de eventos asociados a *call-outs* —incluyendo al menos una interpretación matemática por evento— recogido en el gráfico que se presenta a continuación:

Figura 4.18. Número de eventos —asociados a *call-outs*— acompañados de al menos una interpretación matemática: todos los vídeos, fase 1.



Claramente se establecen tres grupos: uno, a gran distancia de los otros dos, en el que está Marcos, con el valor más alto, otro en el que está Raquel, con solo tres eventos, y un tercero, entre ambos, en el que se sitúan los demás sujetos, con 14-16 eventos.

Figura 4.19. Porcentaje de eventos —asociados a *call-outs*— que están acompañados de al menos una interpretación matemática con respecto al total de *call-outs* identificados: todos los vídeos, fase 1.



En términos porcentuales, aparecen los mismos grupos que en la figura anterior, aunque ahora la distancia entre cada grupo es menor. Sorprende la tendencia de Marcos a interpretar matemáticamente la gran mayoría de los *call-outs* que identifica —casi siete de cada diez—, así como la débil inclinación de la maestra a hacer lo propio con aquellos que detecta ella —menos de dos de cada diez—, mientras que los demás MTE interpretan matemáticamente en torno a un tercio de los eventos relevantes que indican.

Asimismo, tras examinar los datos de cada vídeo, es posible decir que el contenido de estos podría influir en cierto grado en qué interpretan los MTE —como en el eje 2—, puesto que se aprecia una variabilidad considerable entre los valores porcentuales de cada vídeo —atendiendo a un mismo sujeto— en la mayoría de los sujetos.

En cuanto al nivel de *noticing* de cada MTE en el eje 3, este se ha fijado atendiendo al porcentaje de eventos —asociados a algún *call-out*— que se presentan acompañados de

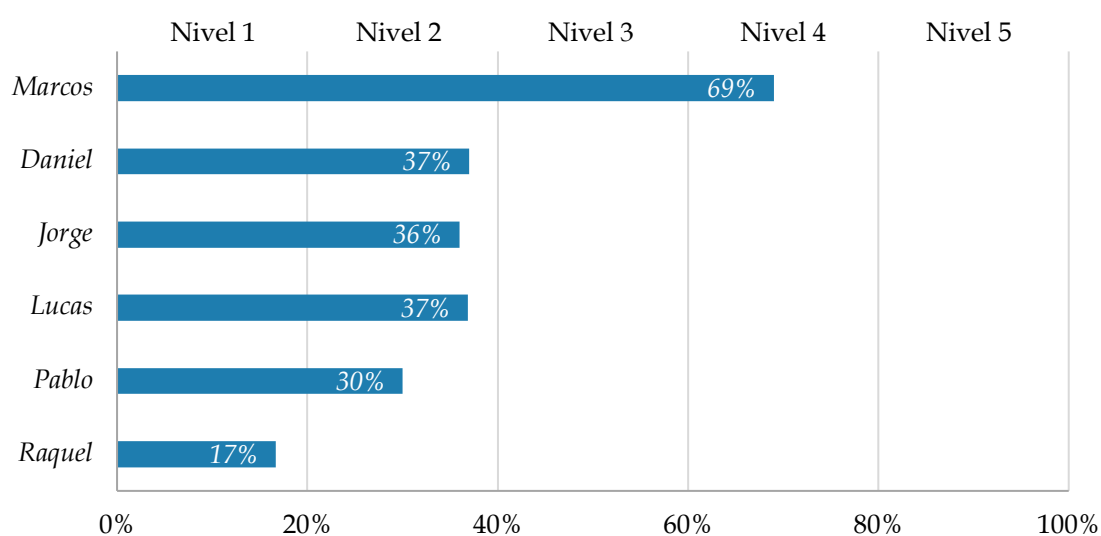
al menos una interpretación matemática con respecto al total de *call-outs* identificados por cada sujeto en el conjunto de los tres vídeos, según lo dispuesto en esta tabla:

Tabla 4.6. Intervalos para establecer el nivel de *noticing* de un MTE en el eje 3.

	Intervalos
Nivel 1 o bajo	[0 %, 20 %)
Nivel 2 o medio-bajo	[20 %, 40 %)
Nivel 3 o medio	[40 %, 60 %)
Nivel 4 o medio-alto	[60 %, 80 %)
Nivel 5 o alto	[80 %, 100 %]

Con base en estos intervalos, en la siguiente figura se recoge el nivel de *noticing* de cada MTE en este eje de acuerdo con el criterio ya mencionado:

Figura 4.20. Nivel de *noticing* de cada MTE —eje 3— en función del porcentaje de eventos —asociados a *call-outs*— acompañados de al menos una interpretación matemática con respecto al total de *call-outs* identificados: todos los vídeos, fase 1.



Se observa que Marcos se sitúa en un nivel superior con respecto al resto de MTE, concretamente en el nivel 4, mientras que los demás se ubican por debajo a una distancia considerable, siendo el nivel 2 el alcanzado por Daniel, Jorge, Lucas y Pablo y el nivel 1, cerca de su límite superior, por Raquel, quien muestra la menor proclividad a acompañar de interpretaciones de la categoría matemática los *call-outs* que enuncia.

En resumen, en esta fase el nivel de *noticing* de los formadores en el eje 3, es decir, su nivel en cuanto a *qué interpretan*, es el que se recoge en la siguiente tabla:

Tabla 4.7. Nivel de *noticing* de cada MTE en el eje 3 [*¿qué interpretan?*]: conjunto de todos los vídeos, fase 1.

	Marcos	Daniel	Jorge	Lucas	Pablo	Raquel
Nivel	Medio-alto	Medio-bajo	Medio-bajo	Medio-bajo	Medio-bajo	Bajo

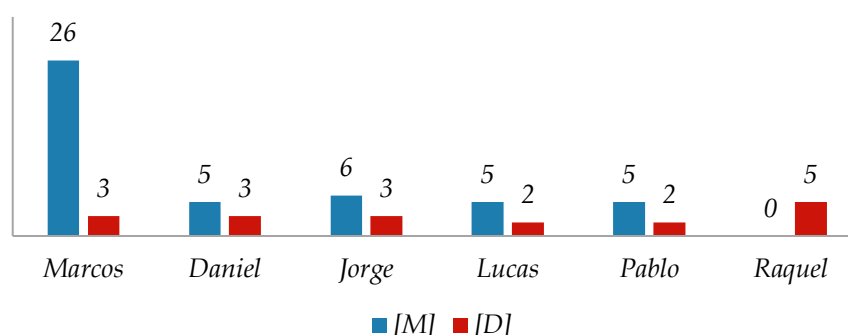
Como se puede observar, el margen de mejora es muy amplio para la mayoría de los sujetos, siendo Marcos el único que se acerca al nivel alto.

4.1.1.d. Eje 4. Interpretaciones: ¿cómo interpretan?

En este eje se analizan las interpretaciones de la categoría matemática [M] referidas a *call-outs* –análisis interindividual–, prestando atención tanto a la proporción de estas con respecto al número total de interpretaciones referidas a *call-outs* –[M] y [D]– como a su proporción con respecto al total de *call-outs* identificados. Conviene recordar que las categorías [M] y [D] se explican en detalle en el apartado 3.4.1.f del capítulo previo.

Vídeo 1

En el primer vídeo, las interpretaciones que aluden a *call-outs* aportadas por cada MTE se distribuyen en las categorías [M] y [D] del siguiente modo:

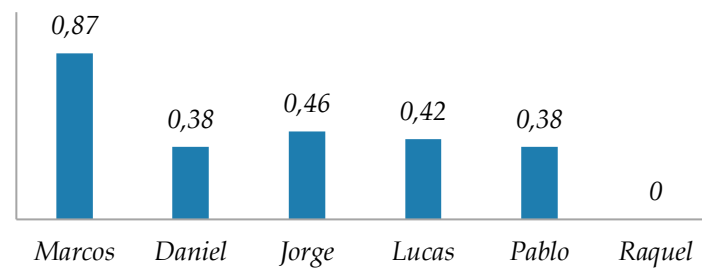
Figura 4.21. Interpretaciones referidas a *call-outs* clasificadas en las categorías matemática y didáctica: vídeo 1, fase 1.

En cuanto a las interpretaciones matemáticas, se puede apreciar que estas suponen la mayor proporción para todos los participantes menos para la maestra. Además, cabe señalar que Marcos aporta más del cuádruple de tales interpretaciones que cualquier otro sujeto, mientras que Raquel no aporta ninguna. Con relación a las didácticas, los valores

son similares para todos los MTE, siendo la maestra quien tiene el dato más alto, tanto en términos absolutos como relativos. Así pues, se podría decir que son tres los grupos que se generan: uno con Marcos, que tiene el dato —referido a las interpretaciones [M]— más alto con creces, tanto absoluto como relativo, otro en el que se ubica Raquel, en el extremo opuesto, y otro, en medio, conformado por el resto de docentes.

En lo que respecta al número medio de interpretaciones matemáticas por cada uno de los *call-outs* identificados, aparecen los mismos grupos: por un lado, está Marcos, quien aporta de media casi nueve interpretaciones [M] por cada diez *call-outs* observados, por otro, en el lado opuesto, Raquel, con ninguna interpretación [M], y, por otro, entre ambos, Daniel, Jorge, Lucas y Pablo, que rondan de promedio las cuatro interpretaciones [M] por cada decena de *call-outs* vistos, tal y como se puede apreciar en la siguiente figura:

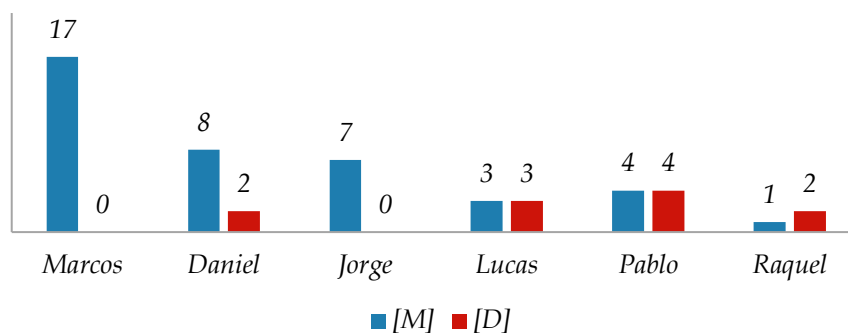
Figura 4.22. Número medio de interpretaciones matemáticas referidas a *call-outs* por cada *call-out* identificado: vídeo 1, fase 1.



Vídeo 2

En el segundo vídeo, las interpretaciones que aluden a *call-outs* aportadas por cada MTE se distribuyen en las categorías [M] y [D] de la siguiente manera:

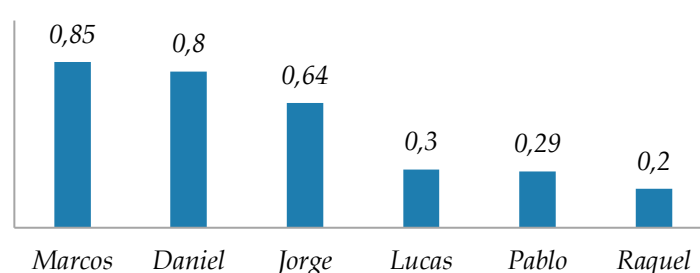
Figura 4.23. Interpretaciones referidas a *call-outs* clasificadas en las categorías matemática y didáctica: vídeo 2, fase 1.



En relación con las interpretaciones matemáticas, se observa que estas suponen la mayor proporción para todos los participantes —en igualdad con las didácticas, en el caso de Lucas y Pablo— menos para Raquel. Además, cabe señalar que Marcos es también en este vídeo quien más interpretaciones de este tipo aporta con diferencia, mientras que la maestra solo aporta una. En cuanto a las didácticas, destacan Marcos y Jorge al no tener ninguna en esta categoría, formulando de dos a cuatro de tal índole el resto de MTE. Por tanto, se podría decir que se establecen tres grupos: uno conformado por Marcos, que en este vídeo vuelve a ser quien presenta claramente el valor más alto —absoluto y relativo— referido a las interpretaciones [M], otro en el que se encuentra Raquel, en el lado opuesto, y otro, entre ambos, formado por los demás sujetos, si bien en este último grupo es mayor la heterogeneidad de resultados que en el mismo grupo constituido en el primer vídeo.

En lo referido al número medio de interpretaciones matemáticas por cada uno de los *call-outs* detectados, los grupos que se configuran difieren de los previos: por un lado, se encuentran Marcos y Daniel, alcanzando ambos las ocho interpretaciones [M] por cada diez eventos relevantes observados —casi nueve, de nuevo, en el caso de Marcos—, por otro, en el lado opuesto, se ubican Lucas, Pablo y Raquel, con entre dos y tres, y, por otro, entre ambos —más cerca del primero—, Jorge, que supera las seis interpretaciones [M] de promedio por cada decena de *call-outs* vistos, como se aprecia en el siguiente gráfico:

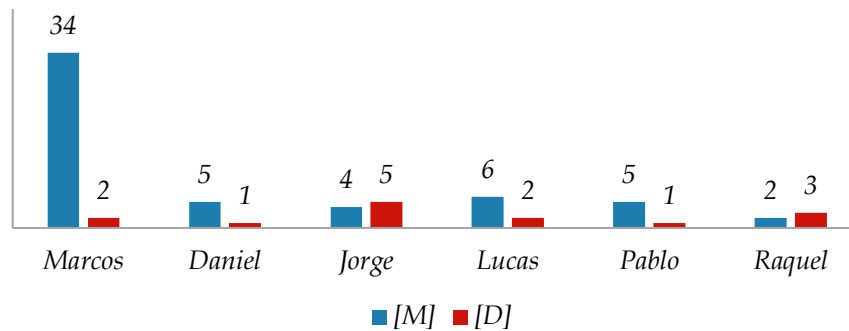
Figura 4.24. Número medio de interpretaciones matemáticas referidas a *call-outs* por cada *call-out* identificado: vídeo 2, fase 1.



Vídeo 3

En el tercer vídeo, las interpretaciones que se refieren a algún *call-out* aportadas por cada formador se distribuyen en las categorías [M] y [D] de la manera que se plantea en la siguiente figura:

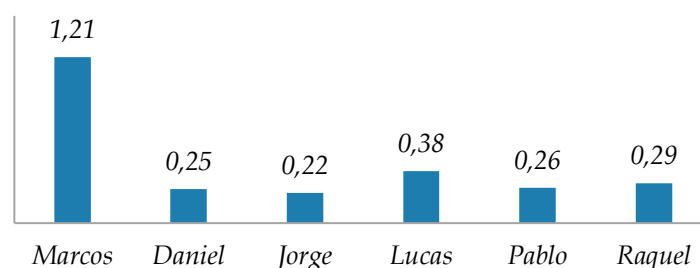
Figura 4.25. Interpretaciones referidas a *call-outs* clasificadas en las categorías matemática y didáctica: vídeo 3, fase 1.



En cuanto a las interpretaciones matemáticas, estas suponen la mayor proporción para todos los participantes menos para Jorge y Raquel. Además, cabe indicar que Marcos es también en este vídeo quien más interpretaciones de esta índole aporta con diferencia, mientras que la maestra es quien menos formula, aunque ya a una distancia más corta del resto de sujetos. Respecto a las didácticas, destacan Daniel y Pablo, por tener solo una en esta categoría, mientras que Jorge es el que más formula — cinco —, presentando los demás MTE entre dos y tres. Por lo tanto, se podrían establecer tres grupos principales entre los sujetos: uno formado por Marcos, que en este vídeo vuelve a ser quien presenta de lejos el valor más alto en términos absolutos — también, aunque con una holgura más pequeña, en términos relativos — referido a las interpretaciones [M], otro en el que se ubican Jorge y Raquel, en el lado opuesto, con los valores relativos más bajos — 44 % y 40 %, de forma respectiva — referentes a las interpretaciones [M], y otro, entre ambos, constituido por los demás formadores, o sea, Daniel, Lucas y Pablo.

Por otro lado, en lo que respecta al número medio de interpretaciones matemáticas por cada uno de los eventos relevantes detectados, los grupos que se configuran resultan ser distintos de los anteriores: por un lado, se encuentra Marcos, quien presenta un valor digno de recibir atención, puesto que formula de promedio más de doce interpretaciones matemáticas por cada diez eventos relevantes observados — hecho que da clara cuenta de su innegable propensión a realizar interpretaciones matemáticas acerca de los *call-outs* —, y, por otro, con cierta diversidad en los datos — pero todos en el rango 0,22-0,38 —, se sitúa el resto de sujetos, quienes aportan una media de entre dos y casi cuatro interpretaciones con un enfoque matemático por cada diez *call-outs* explicitados, como se puede ver en la siguiente figura:

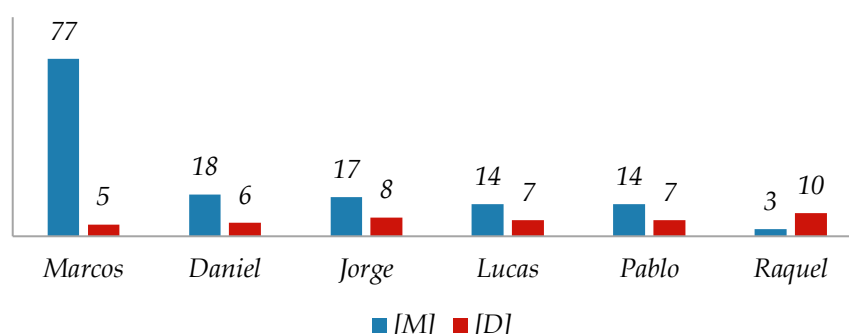
Figura 4.26. Número medio de interpretaciones matemáticas referidas a *call-outs* por cada *call-out* identificado: vídeo 3, fase 1.



Conjunto de todos los vídeos

En los tres vídeos en conjunto, las interpretaciones referidas a *call-outs* aportadas por cada MTE se distribuyen en las categorías [M] y [D] de la manera que se plantea en el siguiente gráfico:

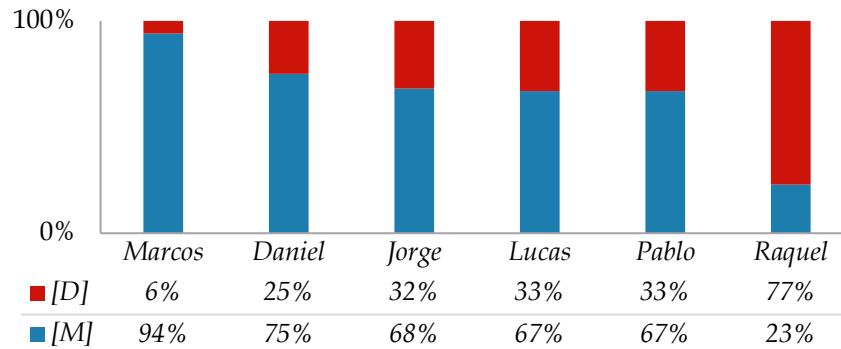
Figura 4.27. Interpretaciones referidas a *call-outs* clasificadas en las categorías matemática y didáctica: todos los vídeos, fase 1.



En cuanto a las interpretaciones matemáticas, estas suponen la mayor proporción para todos los participantes menos para Raquel. Además, es patente que Marcos presenta un valor exageradamente superior al del resto de sujetos, mientras que el de la maestra es notablemente bajo, siendo el menor de todos. Respecto a las interpretaciones didácticas, se observa que los valores son similares para todos los formadores. Por tanto, claramente son tres grupos principales los que se podrían establecer entre los docentes: uno —con los mejores resultados— en el que encontramos a Marcos, otro —en el extremo opuesto— en el que se ubica Raquel y un tercero formado por Daniel, Jorge, Lucas y Pablo, quienes, si bien han mostrado diferencias entre ellos en los diferentes vídeos, en el conjunto de estos tienen unos resultados muy semejantes.

Si situamos los datos del gráfico previo en relación con el total de interpretaciones referidas a *call-outs* que cada MTE ha formulado en el conjunto de los vídeos, obtenemos la siguiente figura:

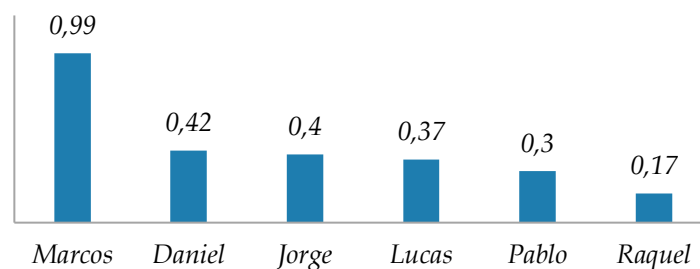
Figura 4.28. Porcentaje de interpretaciones referidas a *call-outs* en la categoría matemática y en la categoría didáctica con respecto al total de interpretaciones referidas a *call-outs*: todos los vídeos, fase 1.



De esta forma, las diferencias entre Marcos y Raquel son, si cabe, más perceptibles, situándose entre ellos los demás MTE, con proporciones similares entre sí.

En lo referido al número medio de interpretaciones matemáticas por cada uno de los *call-outs* detectados, los grupos que se generan resultan ser prácticamente los mismos: uno en el que se sitúa Marcos, quien de media aporta casi una interpretación matemática por cada evento relevante identificado —lo que pone de manifiesto su elevada inclinación a realizar interpretaciones matemáticas sobre los *call-outs*—, otro, en el lado opuesto, en el que se ubica Raquel, con menos de dos interpretaciones [M] de media por cada decena de *call-outs* detectados, y un tercero, entre ambos —pero a una distancia mayor de Marcos que de Raquel—, en el que se posicionan Daniel, Jorge, Lucas y Pablo, tal y como se refleja en esta figura:

Figura 4.29. Número medio de interpretaciones matemáticas referidas a *call-outs* por cada *call-out* identificado: todos los vídeos, fase 1.



Después de analizar los datos de cada vídeo, es posible decir que el contenido de estos podría influir en cierto modo en cómo interpretan los MTE — como también sucede en los ejes 2 y 3 —, ya que se aprecia una variabilidad evidente entre los valores de cada uno de los vídeos — atendiendo a un mismo sujeto — en la mayor parte de los formadores. Además, las variaciones entre vídeos se producen en sentido inverso entre algunos de los participantes, como, por ejemplo, entre Daniel y Raquel, arrojándose en el caso de Daniel una media de interpretaciones [M] por *call-out* visto bastante mayor en el segundo vídeo que en el tercero, mientras que la evolución es la contraria para la maestra, quien ve su dato del último vídeo acrecentado con respecto al del segundo — hecho que podría tener su explicación en la formación académica de los docentes y en el contenido de los vídeos, como se tratará de analizar más adelante —.

En cuanto al nivel de *noticing* de cada MTE en el eje 4, este se ha fijado en función de las dos variables que se han venido manejando: la proporción de interpretaciones [M] referidas a *call-outs* con respecto al total de interpretaciones asociadas a *call-outs*, por una parte, y el número medio de interpretaciones [M] referidas *call-outs* por cada *call-out* visto, por otra, para el conjunto de los vídeos. Así pues, para cada sujeto se ha tomado su valor referido a la primera variable — extraído de la figura 4.28 y expresado en tanto por uno —, así como el asociado a la segunda — obtenido de la figura 4.29 —, y se ha realizado la media aritmética, dando lugar a un nivel de *noticing* con base en lo dispuesto en la tabla mostrada a continuación:

Tabla 4.8. Intervalos para establecer el nivel de *noticing* de un MTE en el eje 4.

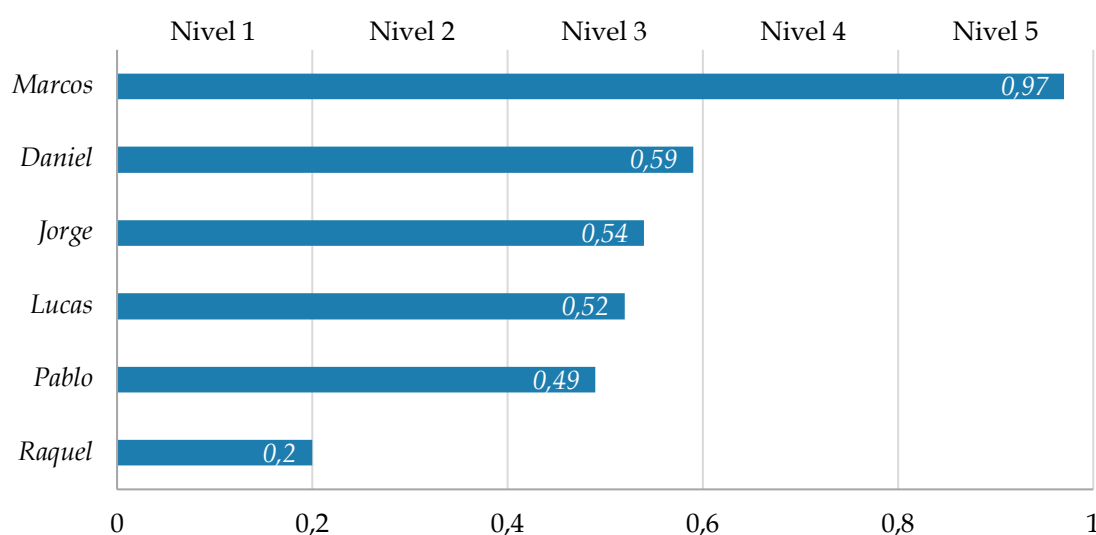
	Intervalos
Nivel 1 o bajo	[0, 0.2)
Nivel 2 o medio-bajo	[0.2, 0.4)
Nivel 3 o medio	[0.4, 0.6)
Nivel 4 o medio-alto	[0.6, 0.8)
Nivel 5 o alto	[0.8, 1]

Cabe señalar que, si bien el último intervalo presenta como extremo superior el 1, en realidad sería posible obtener valores superiores, ya que el valor de la segunda variable no está limitado en tanto en cuanto un sujeto puede formular tantas interpretaciones [M] referidas a *call-outs* como desee, pudiendo proporcionar de media más de una por *call-out* identificado — como sucede con Marcos en el vídeo 3 —. No obstante, a efectos prácticos,

puesto que para ningún participante el resultado obtenido en este eje excede de la unidad —lo cual resultaría extraordinario—, ni en esta fase ni en la siguiente, trabajamos con los intervalos mostrados, aunque teniendo presente la posibilidad expuesta.

Así pues, prestando atención a lo recogido en la tabla previa y al criterio explicado para obtener las puntuaciones finales en este cuarto eje, en la figura que a continuación se presenta se plantea el nivel de *noticing* de cada uno de los seis sujetos:

Figura 4.30. Nivel de *noticing* de cada MTE —eje 4— en función del porcentaje de interpretaciones matemáticas referidas a *call-outs* con respecto al total de interpretaciones sobre *call-outs*, así como del número medio de interpretaciones matemáticas referidas a *call-outs* por cada *call-out* identificado: todos los vídeos, fase 1.



Como se puede apreciar, Marcos se ubica en el nivel superior, rozando casi el valor correspondiente a la unidad. Por ende, aunque cabría la posibilidad de que mejorase aún más su resultado, por lo descrito en párrafos previos, podemos considerar que ha llegado prácticamente al techo del mejor nivel esperable, puesto que conseguir valores cercanos a la unidad puede considerarse como un hecho excepcional. Por su parte, los demás MTE se sitúan por debajo del resultado de Marcos a una distancia importante, siendo el nivel 3 el alcanzado por Daniel, Jorge, Lucas y Pablo y el nivel 2, justo en su límite inferior, por la maestra.

En resumen, en esta fase el nivel de *noticing* de los formadores en el eje 4, es decir, su nivel en cuanto a *cómo interpretan*, es el que se recoge en la siguiente tabla:

Tabla 4.9. Nivel de *noticing* de cada MTE en el eje 4 [¿cómo interpretan?]: conjunto de todos los vídeos, fase 1.

	Marcos	Daniel	Jorge	Lucas	Pablo	Raquel
Nivel	Alto	Medio	Medio	Medio	Medio	Medio-bajo

Como se comprueba, el margen de mejora es amplio para la mayoría de los sujetos, siendo Marcos el único que se sitúa en el nivel alto, rozando su extremo superior.

4.1.1.e. Síntesis de los niveles de los formadores en los ejes de la fase 1

A modo de recapitulación, en la siguiente tabla se plasman los niveles de cada uno de los MTE en los distintos ejes que estructuran el análisis de su competencia *noticing* para poder apreciar de un vistazo la situación de cada participante en esta primera fase — sobre su *noticing* espontáneo —, así como las diferencias entre ellos, a nivel cuantitativo:

Tabla 4.10. Nivel de *noticing* de cada MTE en cada uno de los ejes que vertebran el análisis de los datos: conjunto de todos los vídeos, fase 1.

	Marcos	Daniel	Jorge	Lucas	Pablo	Raquel
Eje 1 ¿Qué notan?	5	3	3	3	3	1
Eje 2 ¿Cómo notan?	3	3	3	3	3	1
Eje 3 ¿Qué interpretan?	4	2	2	2	2	1
Eje 4 ¿Cómo interpretan?	5	3	3	3	3	2

El primer pensamiento que surge tras haber examinado la información de esta fase, y al observar ahora la síntesis de los resultados, es que la competencia *noticing* de los MTE del estudio no es igual. El hecho de que todos ellos sean formadores de matemáticas y su didáctica no determina que su *noticing* sea el mismo. Por lo tanto, se hace necesario pensar que otras variables, tales como su formación académica o su experiencia docente, podrían influir en cierta forma en su competencia, aspecto que se abordará ulteriormente.

En relación con los datos de la tabla, sin lugar a dudas, Marcos es quien tiene más desarrollado en un primer momento su *noticing*, siendo el único MTE que alcanza el nivel

alto en algún eje —concretamente en el 1 y en el 4—. Además, observamos que en todos los ejes supera a los demás sujetos, menos en el segundo, empatando con cuatro de ellos —con todos menos con Raquel—. Así pues, se puede afirmar que Marcos presenta el nivel más elevado de los participantes y que su margen de mejora no es muy amplio, pudiendo perfeccionar principalmente su forma de explicitar los eventos relevantes detectados. En el lado contrario encontramos a Raquel, que obtiene los resultados inferiores de todos los participantes del estudio. De hecho, se encuentra en el nivel bajo en los tres primeros ejes, alcanzando un resultado algo mejor en el cuarto eje, en el que se sitúa en el límite inferior del nivel medio-bajo, por lo que podemos sospechar que su menor formación matemática podría haber influido en algún sentido en estos datos. Por tanto, su margen para mejorar es enorme y podría serle de utilidad la inducción que se proporciona a la hora de visionar los vídeos en la segunda fase —relativa al *noticing* inducido—. Y, por último, entre Marcos y Raquel se posicionan los demás formadores, quienes presentan exactamente los mismos niveles entre sí en todos los ejes. Si bien han mostrado algunas diferencias en los distintos vídeos, y además no se encuentran en los mismos puntos dentro del nivel en cada eje, a la postre sí se sitúan en los mismos intervalos, alcanzando el nivel medio en todos los casos, menos en el eje 2, en el que tienen un nivel medio-bajo. Por tanto, su margen de mejora es todavía amplio, ya que no han tocado techo en ninguno de los ejes.

Asimismo, resulta relevante hacer mención de la posible influencia que ha podido tener el contenido de cada vídeo en los resultados. Por un lado, en cuanto a la posición de cada sujeto respecto al resto de MTE en cada uno de los vídeos y ejes, la variabilidad ha sido escasa, ya que siempre Marcos ha formado parte del grupo que ha obtenido en cada caso mejores datos —a menudo en solitario— y Raquel, por su parte, del que ha arrojado resultados más bajos. Los demás participantes se han mantenido usualmente en un grupo intermedio, aunque a veces han integrado los grupos inferiores —principalmente Pablo— o los superiores —sobre todo Daniel—. Por otro, en cuanto a la consistencia de cada sujeto a lo largo de los vídeos en cada eje respecto a sí mismo, los datos se han mostrado estables, relativamente, en los ejes sobre eventos: en el primer eje no ha habido casi variación entre vídeos y en el segundo, si bien sí se ha dado para casi todos los MTE, no ha sido exagerada. Es en los ejes sobre interpretaciones en los que los vídeos han podido suponer un impacto mayor: en el tercer eje —en los datos porcentuales— y, aún más, en el cuarto —en la media de interpretaciones [M] por *call-out* visto— los datos han sido muy dispares entre vídeos, sobre todo para Marcos, Daniel, Jorge y Raquel.

Teniendo presente todo lo comentado en esta primera fase —cuyos resultados se tratarán de explicar posteriormente—, pasamos ahora a llevar a cabo los mismos análisis con los datos de la segunda, que se desarrollan en profundidad en el siguiente apartado.

4.1.2. Fase 2. *Noticing* inducido

Se presenta a continuación el análisis cuantitativo de los datos de todos los MTE, en paralelo, relativos a su *noticing* inducido, es decir, al manifestado en los formadores a raíz de un *structured video viewing support*. Dichos datos han sido extraídos del Anexo 34 —explicado en el capítulo 3—, en el que encontramos los eventos e interpretaciones de la fase 2 de todos los sujetos, integrados en la transcripción de los vídeos tras el *call-out* al que cada uno se refiere —cuando es el caso—, así como etiquetados y codificados. Si bien en otros anexos también se contempla información relacionada con este bloque —análisis cuantitativo—, es el citado documento el único que reúne todo el contenido necesario para la labor que nos ocupa en esta segunda fase.

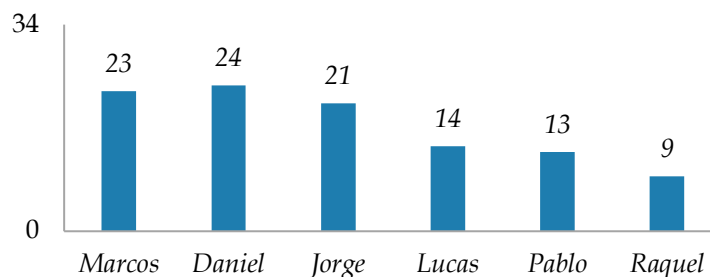
4.1.2.a. Eje 1. Eventos: ¿qué notan?

En este eje nos centramos en determinar el número de eventos asociados a *call-outs* que aporta cada formador en los distintos vídeos —análisis interindividual—.

Vídeo 1

En el primer vídeo, para el que se estableció un conjunto de 34 *call-outs*, cada uno de los participantes identificó la cantidad de *call-outs* que se recoge en la siguiente figura:

Figura 4.31. Número de eventos asociados a *call-outs*: vídeo 1, fase 2.

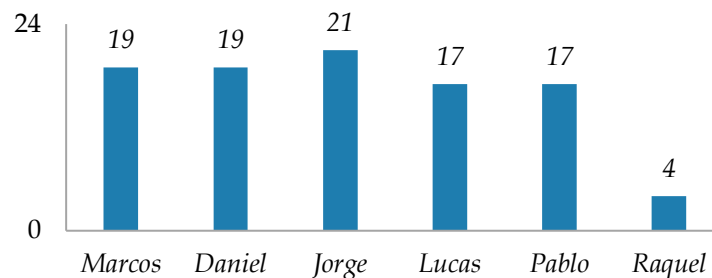


Como se puede observar, se conforman claramente dos grupos entre los MTE en relación con el número de eventos relevantes detectados: uno en el que se sitúan Marcos, Daniel y Jorge, quienes indican un 62-71 % de los *call-outs*, y otro en el que encontramos a Lucas, Pablo y Raquel, quienes identifican un 26-41 %, siendo la maestra quien verbaliza menos eventos relevantes.

Vídeo 2

En el segundo vídeo, para el que se estableció un conjunto de 24 *call-outs*, cada uno de los participantes identificó la cantidad de *call-outs* que se recoge en el siguiente gráfico:

Figura 4.32. Número de eventos asociados a *call-outs*: vídeo 2, fase 2.

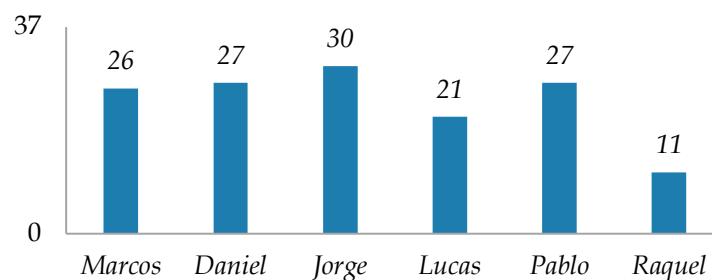


Como se puede apreciar, en este vídeo se generan de nuevo dos grupos entre los MTE en relación con el número de eventos relevantes detectados, pero con los integrantes distribuidos de distinta manera: uno en el que se encuentran Marcos, Daniel, Jorge, Lucas y Pablo, quienes explicitan un 71-88 % de todos los *call-outs*, y otro en el que se posiciona Raquel, quien indica solo un 17 % del total, un valor muy inferior al de los demás MTE.

Vídeo 3

En el tercer vídeo, para el que se estableció un conjunto de 37 *call-outs*, cada uno de los participantes identificó la cantidad de *call-outs* que se recoge en la siguiente figura:

Figura 4.33. Número de eventos asociados a *call-outs*: vídeo 3, fase 2.

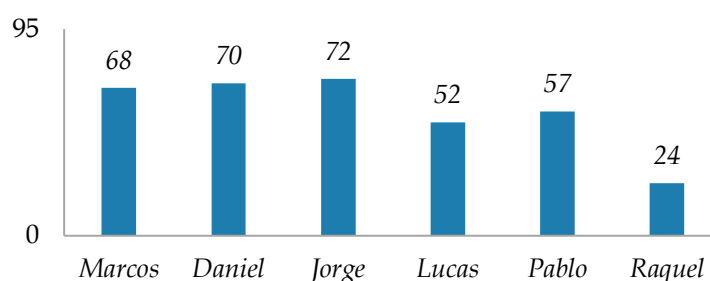


En este vídeo se configuran tres grupos entre los MTE en relación con el número de eventos relevantes identificados: uno en el que se encuentran Marcos, Daniel, Jorge y Pablo, quienes señalan un 70-81 % de todos los *call-outs*, otro en el que está Raquel, quien identifica un 30 %, y otro, en medio, en el que se posiciona Lucas, con un 57 % del total.

Conjunto de todos los vídeos

Teniendo en cuenta los tres vídeos en su conjunto, en los que encontramos un total de 95 *call-outs*, se muestra en la siguiente figura el número de *call-outs* que cada formador explicitó en sus comentarios:

Figura 4.34. Número de eventos asociados a *call-outs*: todos los vídeos, fase 2.



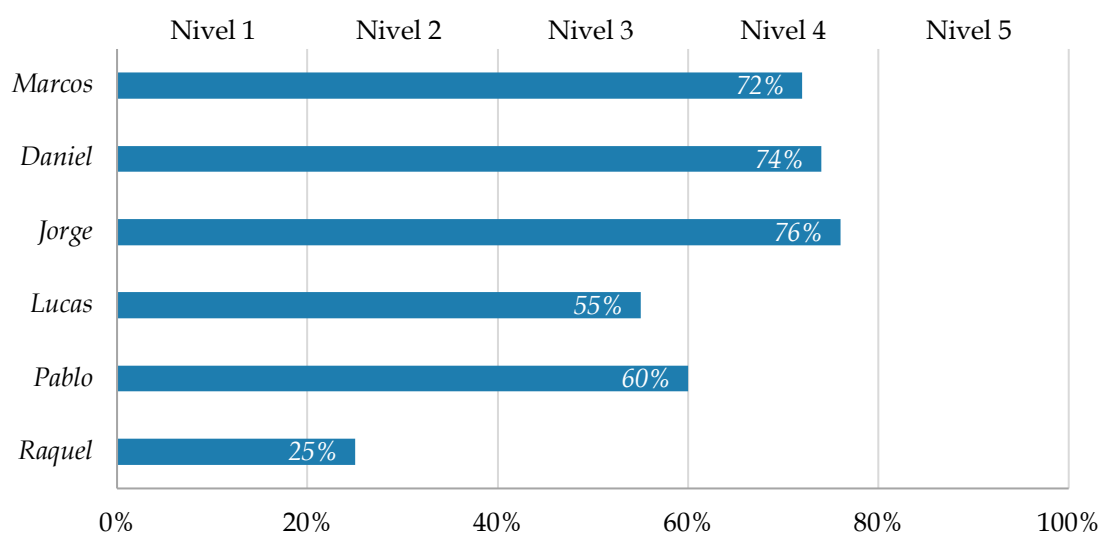
Se observa que se crean tres grupos en relación con los datos de los tres vídeos en conjunto: uno —en el extremo superior— en el que se encuentran Marcos, Daniel y Jorge, quienes señalan un 72-76 % de todos los *call-outs*, otro —en el extremo inferior— en el que se ubica Raquel, quien identifica un 25 %, y un tercero, en medio, en el que se sitúan Lucas y Pablo, quienes detectan un 55-60 % del total, más cerca del primer grupo que de Raquel, quien —como en cada vídeo por separado— es la MTE que detecta menos *call-outs*.

Tras revisar el número de *call-outs* explicitados por cada uno de los MTE, se podría colegir que el contenido de los vídeos influye en cierto modo en qué notan algunos de los formadores —en cuanto a cantidad—, ya que es posible apreciar variaciones en los grupos que se forman en cada vídeo, siendo notable la fluctuación en los datos de Lucas. Además, es especialmente palmaria la distancia entre los dos grupos que se generan en el vídeo 2, con una distancia de 54 puntos porcentuales entre el valor mínimo de uno —con mejores resultados— y el único valor del otro —integrado por la maestra—.

En cuanto al nivel de *noticing* de cada MTE en el eje 1 —fijado con base en el criterio descrito en el apartado 4.1.1.a de la primera fase y atendiendo al contenido recogido en la

tabla 4.2 —, en el siguiente gráfico se plasma el porcentaje de *call-outs* explicitado por cada formador con respecto al conjunto de los tres vídeos en la segunda fase, así como el nivel de *noticing* de cada docente en este eje de acuerdo con dichos valores:

Figura 4.35. Nivel de *noticing* de cada MTE —eje 1— en función del porcentaje de *call-outs* identificados con respecto al total de *call-outs*: todos los vídeos, fase 2.



Se puede advertir que Marcos, Daniel y Jorge son los sujetos que alcanzan un nivel más alto, colocándose en la segunda mitad del nivel 4. Por otro lado, se encuentran Lucas y Pablo, en la segunda mitad del nivel 3 y en el límite inferior del nivel 4, respectivamente. Por último, en la primera mitad del nivel 2, localizamos a Raquel, a una distancia bastante importante de los demás participantes, pues es —como ya se ha indicado— quien menos *call-outs* ha detectado en cada uno de los vídeos.

En resumen, en esta fase el nivel de *noticing* de los formadores en el eje 1, es decir, su nivel en cuanto a *qué notan*, es el que se recoge en esta tabla:

Tabla 4.11. Nivel de *noticing* de cada MTE en el eje 1 [*¿qué notan?*]: conjunto de todos los vídeos, fase 2.

	Marcos	Daniel	Jorge	Lucas	Pablo	Raquel
Nivel	Medio-alto	Medio-alto	Medio-alto	Medio	Medio-alto	Medio-bajo

Se constata que aún hay margen de mejora para muchos sujetos, aunque algunos, como Marcos, Daniel y Jorge, están cerca del nivel alto.

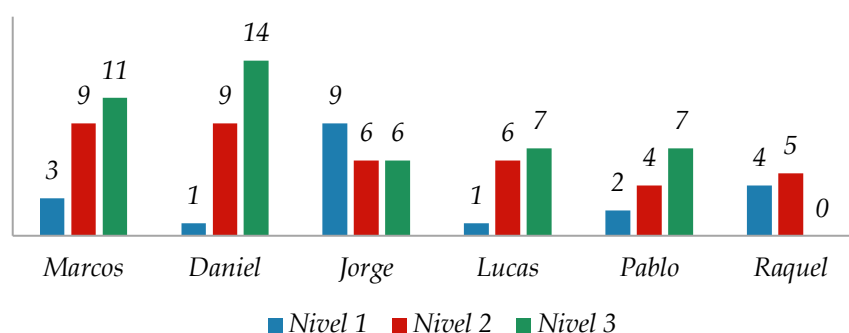
4.1.2.b. Eje 2. Eventos: ¿cómo notan?

En este eje abordamos los niveles otorgados a los eventos —referidos a *call-outs*— expresados por cada formador en cada vídeo —análisis interindividual—. Cabe recordar que el nivel de dichos eventos se ha establecido en función de cómo se han explicitado los elementos fundamentales establecidos en cada *call-out* —elementos que se recogen en el Anexo 19— a tenor de lo reflejado en las tablas 3.5 y 3.6 del capítulo anterior. Igualmente, es importante tener presente que la distancia cualitativa entre los eventos del nivel 1 y los del 2 es mayor que la existente entre los eventos del nivel 2 y los del 3, como se especifica en el marco metodológico.

Vídeo 1

En el primer vídeo, los eventos —asociados a *call-outs*— formulados por cada MTE se distribuyen en los tres niveles posibles del siguiente modo:

Figura 4.36. Eventos —asociados a *call-outs*— clasificados en niveles en función de los elementos fundamentales explicitados: vídeo 1, fase 2.



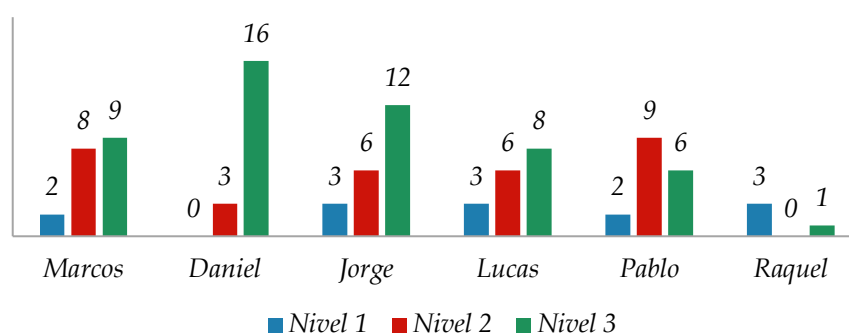
Como se puede apreciar, el nivel 1 tiene la menor presencia, en general, de los tres niveles, suponiendo la mayor frecuencia solo para Jorge. Además, no se corresponde con más de la mitad de los eventos de ningún formador, mientras que para todos ellos, menos para Jorge y Raquel, se asocia con menos del 25 % de los eventos explicitados. En cuanto al nivel 3, este supone la mayor frecuencia para todos los MTE menos para Jorge y Raquel, siendo especialmente relevante para Daniel, único sujeto para el que representa más de la mitad de sus eventos. Por el contrario, solo para Raquel se manifiesta en menos del 25 % de los suyos, concretamente en ninguno. Y con respecto al nivel 2, este aparece como la frecuencia más alta únicamente para la maestra, asociándose solo en su caso con más de la mitad de los eventos vistos, mientras que para ningún formador tiene una presencia

menor del 25 %. Por ende, se podría decir que en este vídeo la incidencia del nivel superior destaca frente a la de los demás, en líneas generales, siendo posible discernir dos grupos principales entre todos los participantes – tanto por lo explicado como por la línea que dibujan los extremos superiores de las barras de cada uno de los MTE –: uno en el que se ubican Marcos, Daniel, Lucas y Pablo –destacando Daniel, por su mayor proporción de eventos en el nivel 3–, con niveles más altos, y otro conformado por Jorge y Raquel –en el que destacan tanto Raquel, por la ausencia de eventos en el nivel 3, como Jorge, por su amplia proporción de eventos en el nivel 1–, con niveles más bajos.

Vídeo 2

En el segundo vídeo, los eventos –asociados a algún *call-out*– formulados por los MTE se distribuyen en los tres niveles posibles de esta manera:

Figura 4.37. Eventos –asociados a *call-outs*– clasificados en niveles en función de los elementos fundamentales explicitados: vídeo 2, fase 2.



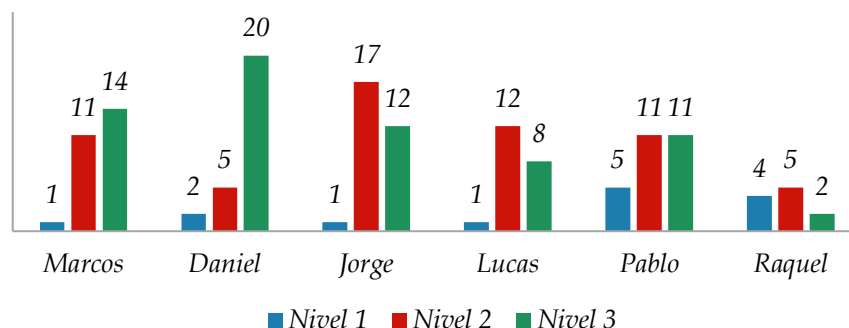
Se puede comprobar que en este vídeo el nivel 1 tiene de nuevo la menor presencia de los tres niveles, suponiendo la mayor frecuencia solo en el caso de Raquel, única MTE para la cual se corresponde además con más de la mitad de sus eventos. Para los demás, supone menos del 25 %, respectivamente, siendo reseñable la ausencia de este nivel para Daniel. Con relación al nivel 3, este supone la frecuencia más alta para todos los sujetos menos para Pablo y Raquel, siendo especialmente relevante para Daniel y Jorge, únicos formadores para los que representa más de la mitad de sus eventos, de forma respectiva. Además, no se manifiesta en ningún participante en menos del 25 % de sus eventos. Y en cuanto al nivel 2, este aparece como la frecuencia más alta solo para Pablo, asociándose solamente en su caso con más de la mitad de los eventos vistos, mientras que para Daniel y Raquel tiene una presencia menor del 25 % –por distintos motivos, tal y como se puede

observar —. Por lo tanto, se podría decir que en este vídeo la incidencia del nivel superior destaca frente a la de los demás, como en el vídeo anterior, siendo posible percibir tres grupos principales entre todos los participantes —tanto por lo explicado como por la línea que esbozan los puntos superiores de las barras de cada uno de los docentes—: uno, con niveles más altos, en el que se sitúan Marcos, Daniel, Jorge y Lucas —destacando Jorge y, sobre todo, Daniel, por su amplia proporción de eventos en el nivel 3—, otro, con niveles más bajos, conformado por Raquel, con el 75 % de sus eventos en el nivel inferior, y otro, con niveles intermedios, en el que se encuentra Pablo, que presenta un dibujo diferente al de los MTE del primer grupo al concentrar la mayoría de sus eventos en el nivel 2 —no obstante, se acerca más a ellos que a los resultados de la maestra—.

Vídeo 3

En el tercer vídeo, los eventos —asociados a algún *call-out*— formulados por cada MTE se distribuyen en los tres niveles posibles del siguiente modo:

Figura 4.38. Eventos —asociados a *call-outs*— clasificados en niveles en función de los elementos fundamentales explicitados: vídeo 3, fase 2.



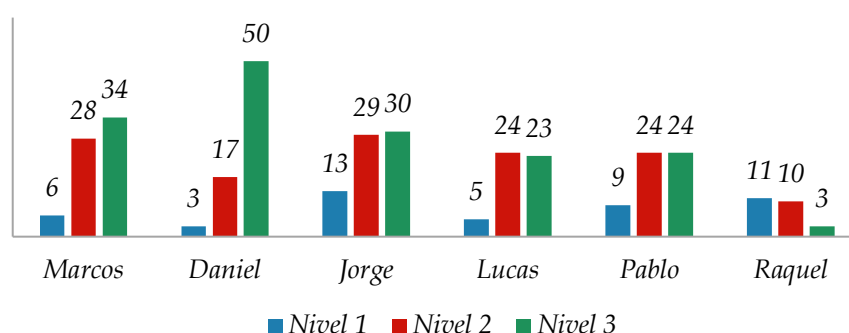
En este vídeo, al igual que en los anteriores, el nivel 1 tiene la menor presencia de los tres niveles. Además, no representa la frecuencia más alta para ningún formador ni se corresponde con más de la mitad de los eventos de ninguno de ellos, asociándose solo en el caso de la maestra con un porcentaje igual o superior al 25 % de los eventos detectados. En lo referido al nivel 3, este supone la mayor frecuencia para Marcos y Daniel —y para Pablo, en igualdad con la del nivel 2—, siendo especialmente relevante para Daniel, único docente para el que representa más de la mitad de sus eventos. Por el contrario, solo para Raquel se manifiesta en menos del 25 % de los suyos. Y en cuanto al nivel 2, este aparece como la frecuencia más alta para Jorge, Lucas y Raquel —y para Pablo, en igualdad con

la del nivel 3 —, asociándose con más de la mitad de los eventos vistos en el caso de Jorge y Lucas, mientras que solamente para Daniel tiene una presencia menor del 25 % —por su amplia proporción de eventos en el nivel superior—. En consecuencia, se podría decir que en este vídeo las incidencias de los niveles 2 y 3 son las más notables, destacando con respecto a la del nivel 1, siendo posible discernir dos grupos principales entre todos los MTE —tanto por lo explicado como por la línea que dibujan los extremos superiores de las barras de cada uno de los docentes—: uno en el que encontramos a Marcos, Daniel y Pablo —destacando Daniel, por su mayor proporción de eventos en el nivel 3, así como por su bajo porcentaje de eventos en el nivel 1—, con niveles más altos, y otro conformado por Jorge, Lucas y Raquel, con niveles más bajos. No obstante, hay que señalar que tanto Pablo como Raquel se posicionan en la parte baja de sus respectivos grupos por su mayor tendencia al nivel 1, así como por su menor inclinación hacia el nivel 3, en comparación con el resto de integrantes de los grupos a los que pertenecen.

Conjunto de todos los vídeos

Los eventos —asociados a *call-outs*— formulados por cada MTE en el conjunto de todos los vídeos se distribuyen en los tres niveles posibles de esta forma:

Figura 4.39. Eventos —asociados a *call-outs*— clasificados en niveles en función de los elementos fundamentales explicitados: todos los vídeos, fase 2.

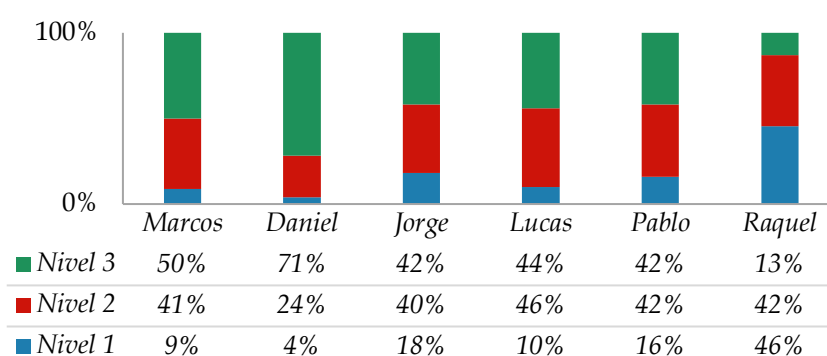


Se comprueba que la aparición de los tres niveles no es homogénea, siendo el nivel superior el que mayor incidencia tiene, globalmente, seguido del nivel intermedio. Así es que el nivel inferior supone la frecuencia más alta solamente para Raquel y no guarda una correspondencia con más de la mitad de los eventos de ninguno de los docentes, mientras que tiene una presencia menor del 25 % para todos los sujetos menos para la maestra. En relación con el nivel 3, este supone la frecuencia más alta para Marcos, Daniel y Jorge —y

para Pablo, en igualdad con la del nivel 2 —, correspondiéndose con más de la mitad de los eventos únicamente en el caso de Daniel, mientras que solo surge en menos del 25 % de los eventos de Raquel. Y en relación con el nivel 2, este es el que en más ocasiones se manifiesta para Lucas —también para Pablo, en igualdad con el nivel 3—. Además, no se corresponde con más de la mitad de los eventos de ningún sujeto, si bien supone al menos el 25 % para todos ellos, excepto para Daniel —en pro del nivel 3—. Por ende, es posible distribuir a los formadores en tres grupos principales —tanto por lo indicado a partir de los gráficos de cada vídeo, además de por los grupos surgidos a raíz de los datos de cada uno, como por la información de la figura que nos ocupa y la línea que esbozan los puntos superiores de las barras de cada MTE en la misma—: uno formado por Marcos y Daniel —destacando el apabullante valor, tanto en términos absolutos como relativos, referido a los eventos en el nivel 3 para Daniel—, con niveles más altos, otro en el que se sitúan Jorge, Lucas y Pablo —para quienes la presencia del nivel 1 es mayor que en el grupo anterior y, por su parte, la incidencia del nivel 3 es menor—, con niveles intermedios, y un tercero, con niveles más bajos, cuya única integrante es Raquel —para quien sigue predominando la presencia del nivel 1 y siendo mínima la del 3—.

Estas agrupaciones son aún más claras si prestamos atención a la proporción que supone cada nivel para cada MTE con respecto al total de eventos —asociados a *call-outs*— formulados por cada uno de ellos, tal y como se puede ver en la siguiente figura:

Figura 4.40. Porcentaje de eventos —asociados a *call-outs*— clasificados en cada nivel, en función de los elementos fundamentales explicitados, con respecto al total de *call-outs* identificados: todos los vídeos, fase 2.



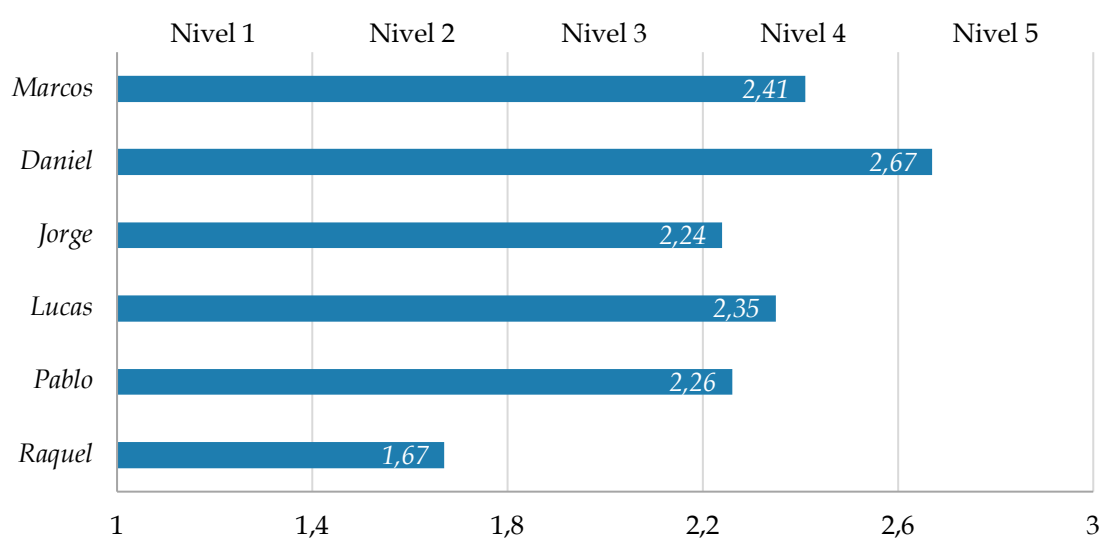
Nota. Los valores de Daniel y de Raquel, respectivamente, no suman el 100 % por el redondeo a la unidad, lo que no afecta a la interpretación de los datos.

Se constata meridianamente que, por un lado, Marcos y Daniel son quienes tienen una proporción mayor de sus eventos en el nivel superior, así como un menor porcentaje en el nivel inferior, con respecto a los demás participantes, resultando notorio el valor de Daniel asociado al nivel 3. Por otro lado, Jorge, Lucas y Pablo se encuentran en un peldaño inferior, dado que proporcionalmente son menos sus eventos enmarcados en el nivel 3 y más aquellos que hacen lo propio en el nivel 1. Y, por último, en un escalón más bajo está Raquel, ya que ha explicitado casi la mitad de sus eventos en consonancia con el nivel 1, alcanzando el nivel 3 en un porcentaje muy inferior al del resto de MTE. A pesar de ello, su valor referido al nivel 2 es similar al de los demás sujetos, sin incluir a Daniel.

Tras examinar la distribución de los eventos asociados a *call-outs* de cada docente en los distintos niveles, es posible concluir que el contenido de los vídeos podría tener una leve influencia en cómo notan los formadores, es decir, en la manera en la que explicitan los eventos relevantes en cada caso —como ocurre en el eje 1—. Esto se puede observar atendiendo a la línea que dibujan los extremos superiores de las barras de cada docente en el gráfico de cada vídeo: solo se mantiene un dibujo similar entre los vídeos en el caso de Marcos y Daniel, mientras que el resto experimenta cambios en una u otra medida.

En cuanto al nivel de *noticing* de cada sujeto en el eje 2, en el siguiente gráfico se presentan los resultados de esta segunda fase:

Figura 4.41. Nivel de *noticing* de cada MTE —eje 2— en función del nivel medio de los eventos asociados a *call-outs* según los elementos fundamentales explicitados: todos los vídeos, fase 2.



Se puede comprobar en la figura que Daniel es el único participante que alcanza el nivel alto, que Marcos, Jorge, Lucas y Pablo se sitúan en el nivel medio-alto y que Raquel, en la segunda mitad del nivel medio-bajo, está a una distancia de 0,57 puntos de la media del sujeto más cercano. Asimismo, cabe recordar que el nivel de *noticing* en este segundo eje, referido al nivel medio de los eventos — asociados a *call-outs* — formulados por cada formador en el conjunto de los tres vídeos, se ha fijado con base en el criterio desarrollado en el apartado 4.1.1.b de la primera fase y atendiendo a los intervalos que se plantean en la tabla 4.4.

En resumen, en esta fase el nivel de *noticing* de los formadores en el eje 2, es decir, su nivel en cuanto a *cómo notan*, es el que se recoge en la siguiente tabla:

Tabla 4.12. Nivel de *noticing* de cada MTE en el eje 2 [*¿cómo notan?*]: conjunto de todos los vídeos, fase 2.

	Marcos	Daniel	Jorge	Lucas	Pablo	Raquel
Nivel	Medio-alto	Alto	Medio-alto	Medio-alto	Medio-alto	Medio-bajo

Podemos apreciar que en este segundo eje la posibilidad de mejorar que tienen los participantes, si bien existe, no es colosal, dado que Daniel ha alcanzado el nivel alto y el resto de sujetos, excepto Raquel, se sitúan en el nivel inmediatamente previo. No obstante, como decimos, es posible que todavía evolucionen más. Es la maestra quien, al igual que en el eje 1, tiene más camino por recorrer en este segundo eje.

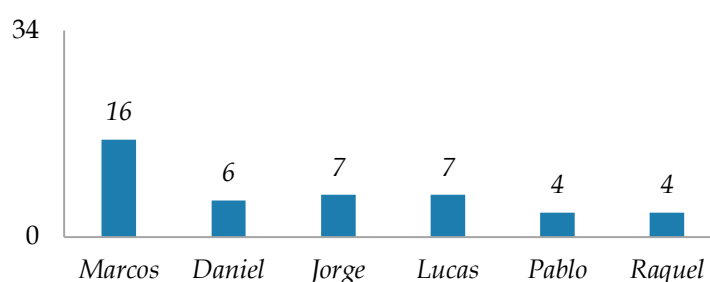
4.1.2.c. Eje 3. Interpretaciones: ¿qué interpretan?

En este eje se pone el foco en examinar los eventos asociados a *call-outs* que aporta cada MTE y que están acompañados de alguna interpretación de la categoría matemática en cada uno de los vídeos — análisis interindividual —.

Vídeo 1

En el primer vídeo, para el que se estableció un conjunto de 34 *call-outs*, cada uno de los participantes aportó la cantidad de eventos asociados a *call-outs* — con al menos una interpretación matemática por evento — que se recoge en la figura que a continuación se muestra:

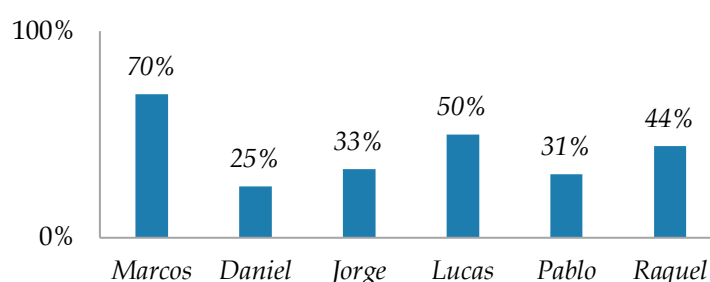
Figura 4.42. Número de eventos —asociados a *call-outs*— acompañados de al menos una interpretación matemática: vídeo 1, fase 2.



Como se puede observar, se configuran dos grupos de manera marcada: uno en el que se encuentra Marcos, siendo el que más *call-outs* interpreta matemáticamente, y otro en el que se sitúan los demás MTE, quienes interpretan entre cuatro y siete *call-outs* desde un enfoque matemático.

Si bien el número de *call-outs* sobre los que se formulan interpretaciones de carácter matemático constituye una información relevante —que en cierta medida guarda relación con los datos del eje 1—, se antoja más importante conocer la propensión de cada sujeto a interpretar o no —matemáticamente— los eventos que formulan relativos a *call-outs*, tal y como se dijo en la fase previa, es decir, saber cuál es la proporción de eventos —referidos a algún *call-out*— que incluyen al menos una interpretación matemática con respecto al total de eventos relevantes identificados:

Figura 4.43. Porcentaje de eventos —asociados a *call-outs*— que están acompañados de al menos una interpretación matemática con respecto al total de *call-outs* identificados: vídeo 1, fase 2.

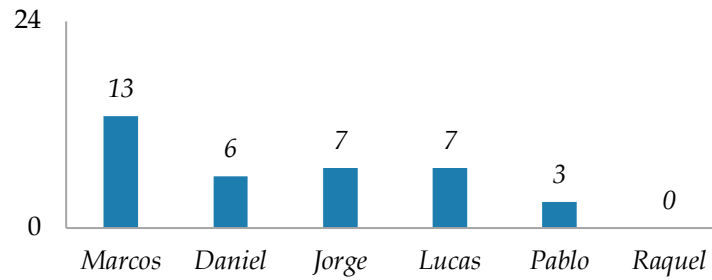


Comprobamos que en este caso se establecen grupos diferentes a los de la figura anterior: uno formado por Marcos, con un amplio 70 %, otro en el que se encuentran Lucas y Raquel, con un 44-50 %, y otro compuesto por Daniel, Jorge y Pablo, con un 25-33 %. Se puede apreciar que, aunque la maestra arrojaba el peor resultado —junto con Pablo— en términos absolutos, proporcionalmente supera a la mitad de los participantes.

Vídeo 2

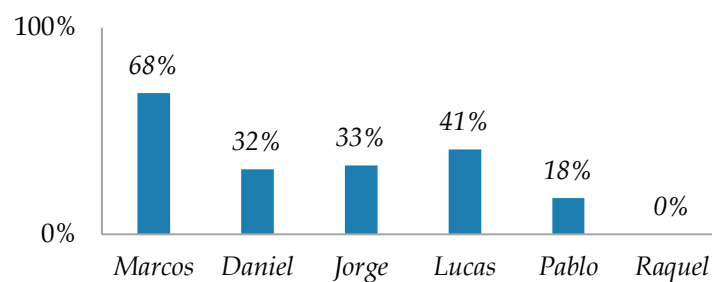
En el segundo vídeo, para el que se estableció un conjunto de 24 *call-outs*, cada uno de los participantes aportó la cantidad de eventos asociados a *call-outs* — con al menos una interpretación matemática por evento — que se recoge en el siguiente gráfico:

Figura 4.44. Número de eventos — asociados a *call-outs* — acompañados de al menos una interpretación matemática: vídeo 2, fase 2.



En este vídeo, los grupos que aparecen difieren de los del primero: se forma uno en el que se sitúa Marcos, quien identifica el mayor número de *call-outs* acompañándolos de al menos una interpretación [M], otro en el que se encuentran Daniel, Jorge y Lucas, en un escalón intermedio, y otro en el que se ubican Pablo y Raquel, resultando significativo el resultado de la maestra, pues ninguno de los cuatro eventos relevantes que detecta en este vídeo los acompaña de al menos una interpretación [M].

Figura 4.45. Porcentaje de eventos — asociados a *call-outs* — que están acompañados de al menos una interpretación matemática con respecto al total de *call-outs* identificados: vídeo 2, fase 2.

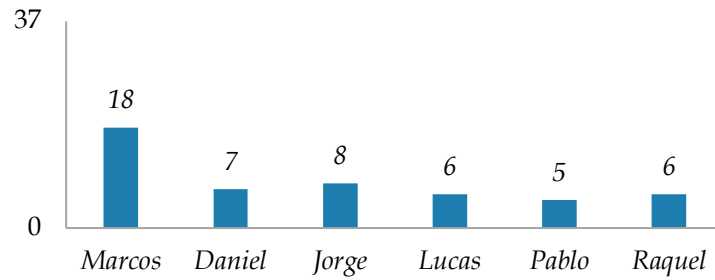


En lo referido a la proporción de eventos — asociados a *call-outs* — que incluyen al menos una interpretación [M] con respecto al total de *call-outs* identificados, los sujetos se organizan en tres grupos: uno en el que está Marcos, con un amplio 68 %, otro en el que se sitúan Pablo y Raquel, con un 0-18 % — destacando el 0 % de la maestra —, y otro, entre ambos, compuesto por Daniel, Jorge y Lucas, con un 32-41 %.

Vídeo 3

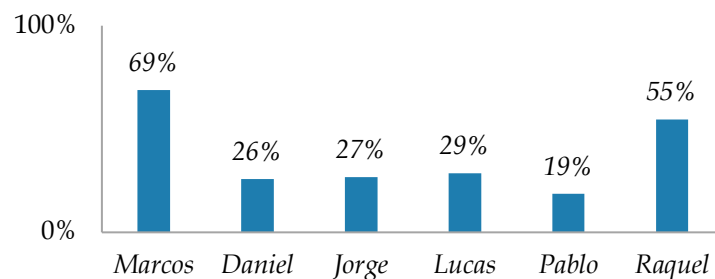
En el tercer vídeo, para el que se estableció un conjunto de 37 *call-outs*, cada uno de los participantes aportó la cantidad de eventos asociados a *call-outs* —con al menos una interpretación matemática por evento— que se recoge en la siguiente figura:

Figura 4.46. Número de eventos —asociados a *call-outs*— acompañados de al menos una interpretación matemática: vídeo 3, fase 2.



Vemos que en este vídeo surgen los mismos dos grupos que en el primero —figura 4.42—: por un lado, Marcos vuelve a aportar un número mayor de eventos —referidos a *call-outs*— con interpretaciones [M] que el resto de sujetos, quienes, por otro, interpretan matemáticamente entre cinco y ocho *call-outs*, menos de la mitad que Marcos.

Figura 4.47. Porcentaje de eventos —asociados a *call-outs*— que están acompañados de al menos una interpretación matemática con respecto al total de *call-outs* identificados: vídeo 3, fase 2.



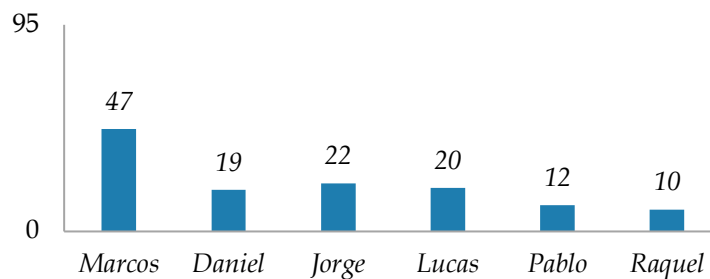
En cuanto a la proporción de eventos —asociados a *call-outs*— que tienen al menos una interpretación matemática con respecto al total de *call-outs* detectados, en la figura previa se aprecia que emergen dos grupos que no se habían dado en los otros vídeos: en uno se ubican Marcos y Raquel, quienes interpretan matemáticamente más de la mitad de los *call-outs* identificados —en torno a seis de cada diez—, y en otro, a gran distancia, se sitúan los demás sujetos, quienes presentan valores entre el 19 % y el 29 %, siendo Pablo el que proporcionalmente menos interpreta matemáticamente —menos de dos *call-outs* de

cada diez vistos —. Asimismo, una vez más cabe señalar que, si bien Raquel se encuentra entre los MTE que menos eventos relevantes han formulado acompañándolos de alguna interpretación [M], su tendencia a interpretar — desde un punto de vista matemático — los *call-outs* que explicita es de las más altas, tal y como ocurre en el primer vídeo.

Conjunto de todos los vídeos

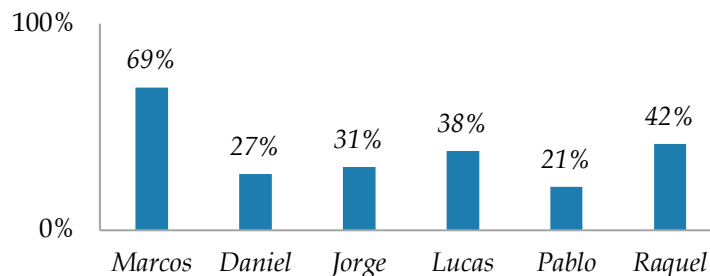
En el conjunto de todos los vídeos, para los que se estableció un total de 95 *call-outs*, cada uno de los sujetos aportó el número de eventos asociados a *call-outs* — incluyendo al menos una interpretación matemática por evento — recogido en el gráfico que se presenta a continuación:

Figura 4.48. Número de eventos — asociados a *call-outs* — acompañados de al menos una interpretación matemática: todos los vídeos, fase 2.



Claramente se establecen tres grupos: uno, a gran distancia de los otros dos, en el que está Marcos, con el valor más alto, otro en el que están Pablo y Raquel, con solo 10-12 eventos, y un tercero, entre ambos, en el que se sitúan los demás sujetos, con 19-22 eventos.

Figura 4.49. Porcentaje de eventos — asociados a *call-outs* — que están acompañados de al menos una interpretación matemática con respecto al total de *call-outs* identificados: todos los vídeos, fase 2.



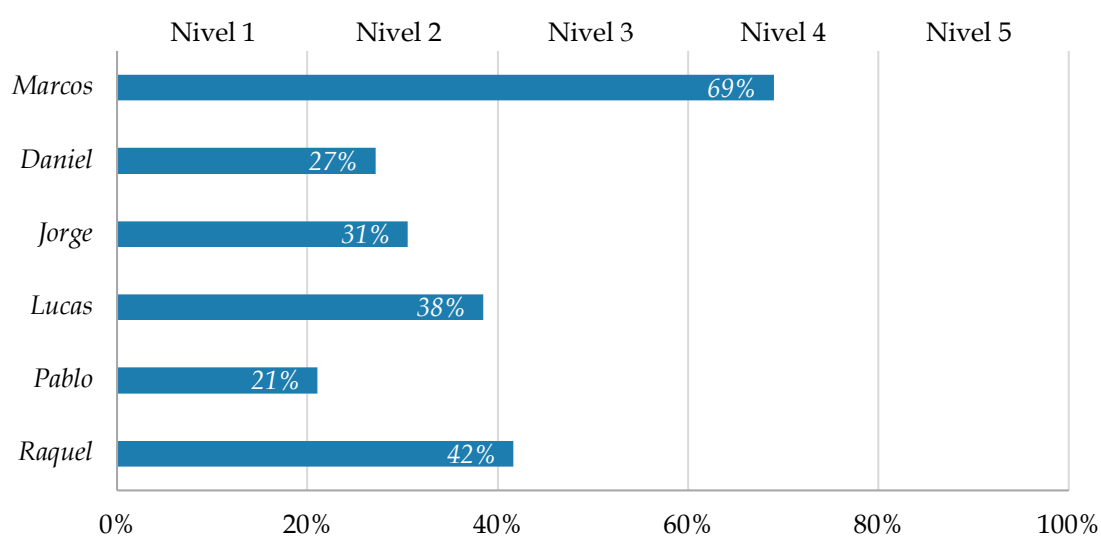
En términos porcentuales, el dibujo que se esboza en el gráfico es similar al de la figura 4.48, a excepción de Lucas y, sobre todo, de Raquel, que ven incrementada la altura de sus barras en una proporción mayor que el resto de participantes. Los grupos que se

crean, por lo tanto, son los siguientes: uno formado por Marcos —en la parte superior—, con casi siete eventos de cada diez identificados, otro —en la parte intermedia— integrado por Lucas y Raquel, con en torno a cuatro eventos de cada diez vistos, y un tercero —en la parte inferior— en el que encontramos a Daniel, Jorge y Pablo, siendo este último el que presenta un valor más bajo.

Asimismo, tras examinar los datos de cada vídeo, es posible decir que el contenido de estos podría influir en cierto grado en qué interpretan los MTE —como en los dos ejes previos—, ya que se aprecia una variabilidad considerable entre los valores porcentuales de cada vídeo —atendiendo a un mismo formador— en alguno de los sujetos, sobre todo en el caso de Raquel.

En lo que concierne al nivel de *noticing* de cada MTE en el eje 3 —fijado con base en el criterio descrito en el apartado 4.1.1.c de la primera fase y atendiendo al contenido de la tabla 4.6—, en el siguiente gráfico se plasma la proporción de eventos —asociados a algún *call-out*— acompañados de al menos una interpretación matemática formulados por cada sujeto con respecto al total de *call-outs* identificados por cada MTE en el total de los tres vídeos en la segunda fase, así como el nivel de *noticing* de cada docente en este eje de acuerdo con dichos valores:

Figura 4.50. Nivel de *noticing* de cada MTE —eje 3— en función del porcentaje de eventos —asociados a *call-outs*— acompañados de al menos una interpretación matemática con respecto al total de *call-outs* identificados: todos los vídeos, fase 2.



Se observa que Marcos se sitúa en un nivel superior con respecto al resto de MTE, concretamente en la primera mitad del nivel 4, mientras que los demás docentes se ubican por debajo a una distancia considerable, siendo el nivel 3 en el que encontramos a Raquel, cerca del extremo inferior, y el nivel 2 en el que se posicionan los otros cuatro formadores, quienes tienen valores dispares entre ellos, resultando ser Pablo el que presenta la menor proclividad a acompañar de interpretaciones [M] aquellos eventos relevantes que detecta en los vídeos.

En resumen, en esta fase el nivel de *noticing* de los formadores en el eje 3, es decir, su nivel en cuanto a *qué interpretan*, es el que se recoge en la siguiente tabla:

Tabla 4.13. Nivel de *noticing* de cada MTE en el eje 3 [*¿qué interpretan?*]: conjunto de todos los vídeos, fase 2.

	Marcos	Daniel	Jorge	Lucas	Pablo	Raquel
Nivel	Medio-alto	Medio-bajo	Medio-bajo	Medio-bajo	Medio-bajo	Medio

La posibilidad de mejorar que tienen los formadores en este eje es muy amplia en su mayoría, ya que ninguno logra situarse en el nivel alto y solamente Marcos alcanza el nivel inmediatamente anterior, quien sería el MTE que menos opciones de mejora tiene, aunque todavía puede evolucionar. En cuanto a Daniel, Jorge, Lucas y Pablo, aunque en los ejes sobre eventos de esta segunda fase han alcanzado el nivel medio o el medio-alto, en este eje —sobre interpretaciones— sus datos son notablemente inferiores. Asimismo, sorprenden los resultados Raquel, ya que en el conjunto de los vídeos es quien tiene una propensión más alta a interpretar de una manera matemática los eventos relevantes que identifica —después de Marcos—, si bien es quien menos *call-outs* acompaña de al menos una interpretación [M] —influyen, por tanto, los bajos valores en el eje 1—.

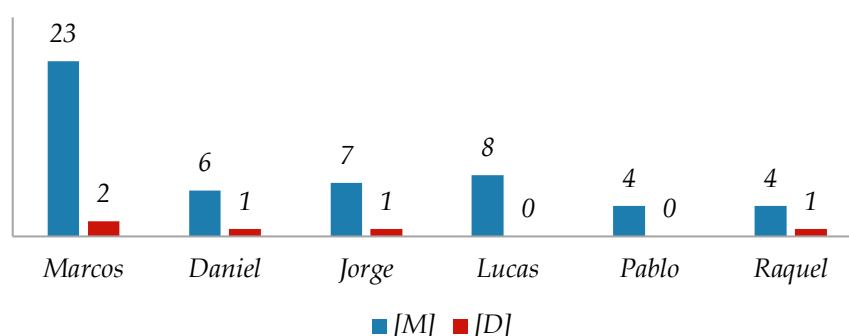
4.1.2.d. Eje 4. Interpretaciones: *¿cómo interpretan?*

En este eje se analizan las interpretaciones de la categoría matemática [M] referidas a *call-outs* —análisis interindividual—, prestando atención tanto a la proporción de estas con respecto al número total de interpretaciones referidas a *call-outs* —[M] y [D]— como a su proporción con respecto al total de *call-outs* identificados. Conviene recordar que las categorías [M] y [D] se explican en detalle en el apartado 3.4.1.f del capítulo previo.

Vídeo 1

En el primer vídeo, las interpretaciones que aluden a *call-outs* aportadas por cada MTE se distribuyen en las categorías [M] y [D] del siguiente modo:

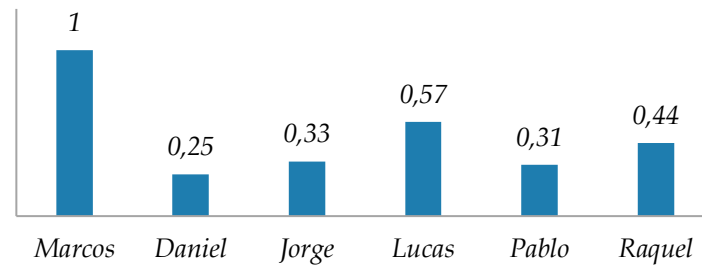
Figura 4.51. Interpretaciones referidas a *call-outs* clasificadas en las categorías matemática y didáctica: vídeo 1, fase 2.



Con respecto a las interpretaciones matemáticas, se observa que estas suponen la mayor proporción para todos los participantes. Además, cabe señalar que Marcos es quien aporta más de tales interpretaciones con diferencia —un total de 23—, mientras que Pablo y Raquel solamente formulan cuatro cada uno. En cuanto a las didácticas, los valores son similares para todos los formadores, fluctuando entre dos interpretaciones y ninguna, si bien, en términos relativos, es cierto que suponen un 20 % para la maestra. Por lo tanto, se podría decir que principalmente son dos los grupos que se generan: uno con Marcos, quien presenta el dato más alto con creces —referido a las interpretaciones [M]—, tanto absoluto como relativo, y un segundo grupo en el que encontramos al resto de MTE, con valores más o menos parecidos.

Con respecto al número medio de interpretaciones de la categoría matemática por *call-out* identificado, los docentes se distribuyen de una manera diferente, creándose tres grupos: por un lado, está Marcos, quien aporta de media una interpretación [M] por cada *call-out* observado —lo cual, además de resultar excepcional, refleja su gran inclinación a realizar muchas interpretaciones [M]—, por otro, en el extremo opuesto, se sitúan Daniel, Jorge y Pablo, con una media que ronda las tres interpretaciones [M] por cada decena de *call-outs* vistos, y, en un tercer grupo, entre los otros dos —a mayor distancia de Marcos—, se ubican Lucas y Raquel, con una media en torno a una interpretación [M] por cada dos eventos relevantes detectados, como se aprecia en la siguiente figura:

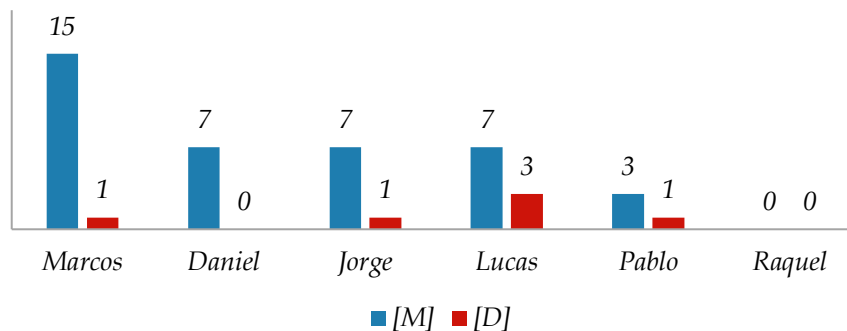
Figura 4.52. Número medio de interpretaciones matemáticas referidas a *call-outs* por cada *call-out* identificado: vídeo 1, fase 2.



Vídeo 2

En el segundo vídeo, las interpretaciones que aluden a *call-outs* aportadas por cada formador se distribuyen en las categorías [M] y [D] de la manera recogida en la figura que se presenta a continuación:

Figura 4.53. Interpretaciones referidas a *call-outs* clasificadas en las categorías matemática y didáctica: vídeo 2, fase 2.

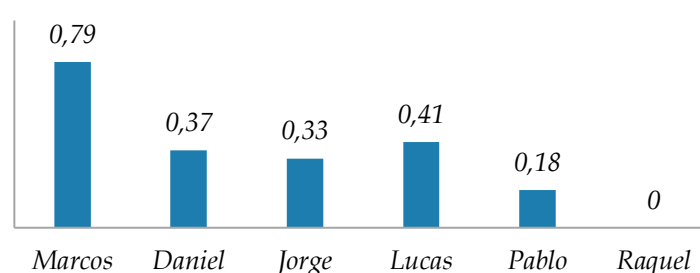


En relación con las interpretaciones matemáticas, se observa que estas suponen la mayor proporción para todos los participantes –sin incluir a Raquel, ya que en este vídeo no formuló interpretación alguna, ni matemática ni didáctica, referida a ninguno de los cuatro eventos relevantes que identificó–. Además, cabe decir que Marcos es también en este vídeo quien más interpretaciones de este tipo aporta con diferencia –más del doble que cualquier otro sujeto–. En cuanto a las didácticas, destaca Daniel al no tener ninguna en esta categoría, aunque para los demás MTE el número también es bajo –solo una–, excepto para Lucas, quien formula tres de tal índole –lo que supone un 30 % del total de sus interpretaciones asociadas a *call-outs*–. Por consiguiente, podríamos establecer tres grupos entre los participantes: uno conformado por Marcos, que en este vídeo vuelve a ser quien presenta el dato más alto –absoluto y relativo– referido a las interpretaciones

de carácter matemático, otro en el que se ubica Raquel, en el extremo opuesto, al no tener ninguna interpretación, y un tercero, entre ambos, formado por el resto de participantes, si bien en este último es obvio que tanto Lucas como Pablo se encuentran en la parte baja del grupo por la mayor proporción de interpretaciones [D] en comparación con los demás integrantes, en el caso del primero, y por el menor número —en términos absolutos— de interpretaciones de la categoría matemática, en el caso del segundo sujeto. Así pues, esta distribución es igual que la de la figura 4.51, a excepción de la maestra, quien se descuelga del grupo conformado por la mayoría de MTE por no haber interpretado ninguno de sus eventos relevantes.

Con respecto al número medio de interpretaciones de la categoría matemática por *call-out* identificado, los grupos que surgen son los mismos que en la figura previa: por un lado, hallamos a Marcos, que tiene casi ocho interpretaciones [M] de media por cada diez eventos relevantes observados, por otro, se ubica Raquel, en el lado opuesto —por lo ya explicado—, y, por último, entre ambos, se configura un tercer grupo con los demás MTE. No obstante, cabe señalar que ahora Lucas despunta en este grupo, con un promedio de más de cuatro interpretaciones [M] por cada diez *call-outs* vistos, situándose Pablo en la parte baja, de nuevo, con menos de dos por cada diez de media. Dichos datos se recogen en esta figura:

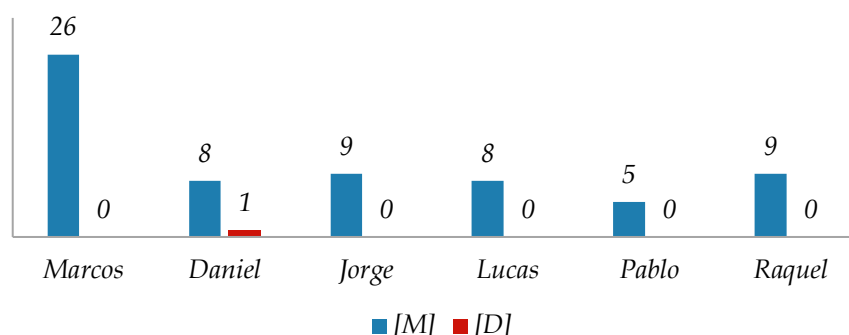
Figura 4.54. Número medio de interpretaciones matemáticas referidas a *call-outs* por cada *call-out* identificado: vídeo 2, fase 2.



Vídeo 3

En el tercer vídeo, las interpretaciones que se refieren a algún *call-out* aportadas por cada formador se distribuyen en las categorías [M] y [D] de la manera que se plantea en la siguiente figura:

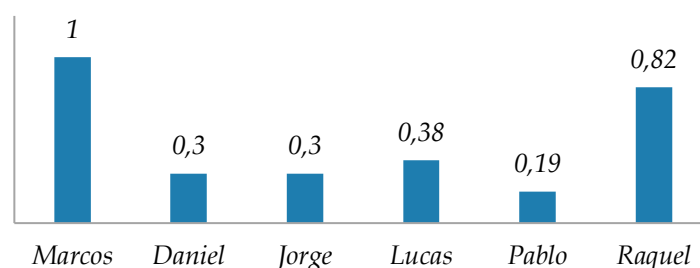
Figura 4.55. Interpretaciones referidas a *call-outs* clasificadas en las categorías matemática y didáctica: vídeo 3, fase 2.



Con respecto a las interpretaciones matemáticas, se observa que estas suponen la mayor proporción para todos los participantes. Además, cabe decir que Marcos es quien aporta más de tales interpretaciones con diferencia —un total de 26—, mientras que Pablo únicamente formula cinco. En cuanto a las didácticas, los valores son similares para todos los formadores, apareciendo en una ocasión —en el caso de Daniel— o en ninguna. Por lo tanto, se aprecian con claridad dos grupos entre los sujetos: uno con Marcos, quien vuelve a presentar el dato referido a las interpretaciones [M] más alto con creces —prácticamente el triple que los siguientes MTE con los valores más altos—, y un segundo grupo en el que encontramos al resto de docentes, con valores bastante parecidos entre sí, posicionándose Pablo en la parte inferior del mismo. Así pues, se vuelven a configurar los mismos grupos que en el primer vídeo atendiendo a las de interpretaciones referidas a *call-outs* aportadas por cada sujeto —figura 4.51—.

Por otro lado, en lo que respecta al número medio de interpretaciones matemáticas por cada uno de los eventos relevantes detectados, los grupos que se configuran resultan ser distintos de los anteriores: por un lado, se encuentran Marcos y Raquel, con una media de justo diez interpretaciones [M] por cada decena de eventos relevantes identificados, en el caso del primer MTE, y superior a las ocho, en el caso de la segunda, siendo muy buenos ambos resultados, y, por otro, con cierta diversidad en los datos —pero todos en el rango 0,19-0,38—, se sitúan los demás sujetos, que presentan un promedio aproximado de entre dos y cuatro interpretaciones desde un punto de vista matemático por cada diez *call-outs* explicitados, siendo Pablo quien arroja el valor más bajo dentro de este grupo, tal y como se plasma en la siguiente figura:

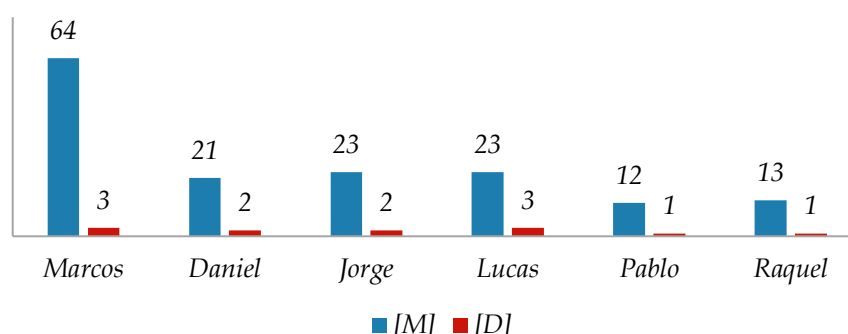
Figura 4.56. Número medio de interpretaciones matemáticas referidas a *call-outs* por cada *call-out* identificado: vídeo 3, fase 2.



Conjunto de todos los vídeos

En los tres vídeos en conjunto, las interpretaciones referidas a *call-outs* aportadas por cada MTE se distribuyen en las categorías [M] y [D] de la manera que se plantea en el siguiente gráfico:

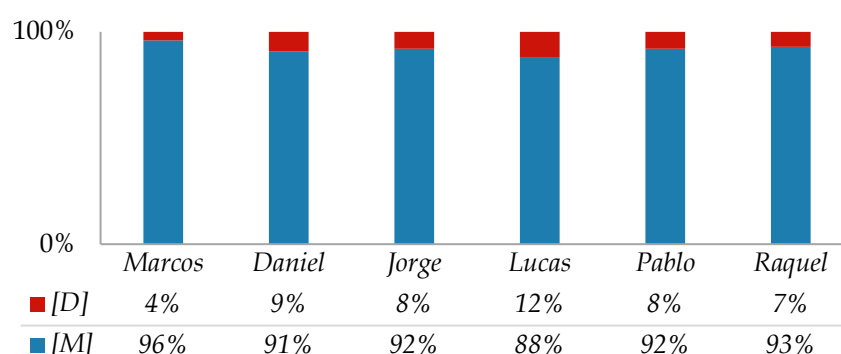
Figura 4.57. Interpretaciones referidas a *call-outs* clasificadas en las categorías matemática y didáctica: todos los vídeos, fase 2.



En cuanto a las interpretaciones matemáticas, estas suponen la mayor proporción para todos los participantes. Además, Marcos presenta un valor exageradamente superior al del resto de sujetos —casi el triple que los siguientes MTE con los valores más altos—, mientras que Pablo y Raquel son quienes menos aportan. Con relación a las didácticas, la presencia de estas es anecdótica, suponiendo la gran minoría en todos los casos. Por ende, se podrían establecer principalmente tres grupos entre los docentes: uno —con los mejores resultados— en el que solo encontramos a Marcos, otro —en el lado opuesto— en el que se posicionan Pablo y Raquel y, por último, un tercero formado por Daniel, Jorge y Lucas, entre ambos grupos.

Sin embargo, todas las diferencias expuestas entre los distintos sujetos desaparecen —prácticamente— si establecemos los datos del gráfico anterior en relación con el total de interpretaciones referidas a eventos relevantes que cada uno de los docentes ha formulado en el conjunto de los tres vídeos, como se puede comprobar en la figura que se muestra a continuación:

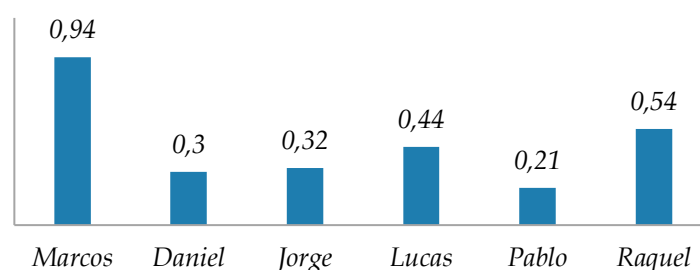
Figura 4.58. Porcentaje de interpretaciones referidas a *call-outs* en la categoría matemática y en la categoría didáctica con respecto al total de interpretaciones referidas a *call-outs*: todos los vídeos, fase 2.



Atendiendo al gráfico anterior, podemos ver que la proporción de interpretaciones matemáticas asociadas a eventos relevantes con respecto al total de interpretaciones sobre dichos eventos formuladas por cada uno de los participantes es muy parecida para todos los sujetos, superando el 90 % en todos los casos, excepto en el de Lucas, quien se queda cerca con un 88 %, y siendo digno de mención el 96 % obtenido por Marcos —más aún, si cabe, habiendo explicitado tamaña cantidad de interpretaciones referidas a algún *call-out* a lo largo de los vídeos—.

En lo que respecta al número medio de interpretaciones matemáticas por cada uno de los *call-outs* identificados, los grupos que se configuran son los tres siguientes: uno en el que se sitúa Marcos, que de media aporta casi una interpretación matemática por cada evento relevante detectado —lo que pone de manifiesto su elevada inclinación a realizar interpretaciones matemáticas sobre los *call-outs*—, otro, en el lado opuesto, en el cual se encuentran Daniel, Jorge y Pablo, con alrededor de tres interpretaciones [M] de media por cada diez *call-outs* vistos —algo menos en el caso de Pablo—, y un tercero, entre ambos y a más distancia de Marcos, en el que se ubican Lucas y Raquel, con un promedio de unas cinco interpretaciones [M] por cada decena de eventos relevantes explicitados, tal y como se refleja en la siguiente figura:

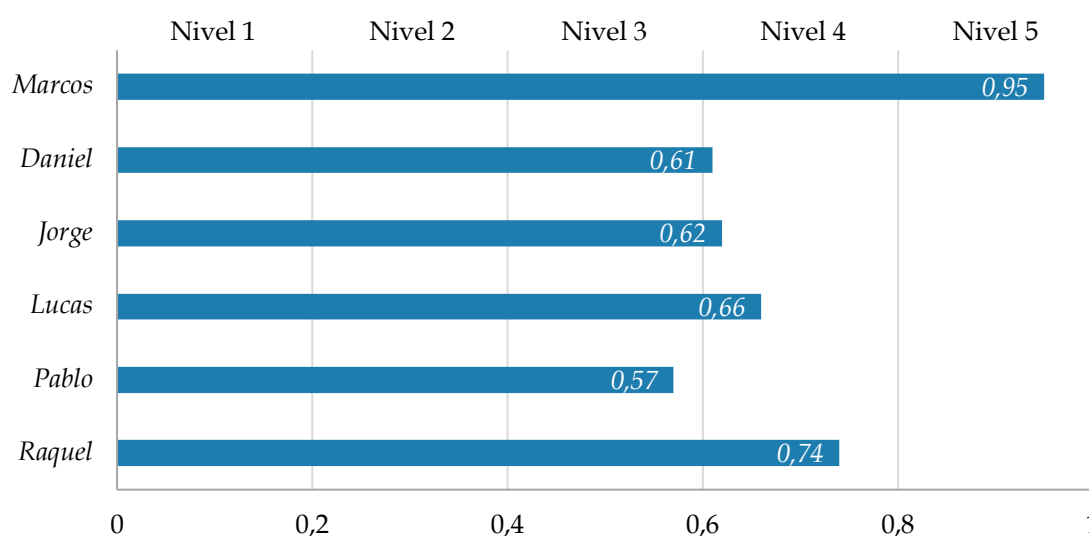
Figura 4.59. Número medio de interpretaciones matemáticas referidas a *call-outs* por cada *call-out* identificado: todos los vídeos, fase 2.



Tras analizar los datos de cada vídeo, es posible decir que el contenido de estos no parece influir mucho en cómo interpretan los MTE —a diferencia de lo que sucede en los demás ejes—, ya que no se aprecia una variabilidad significativa entre los valores de cada uno de los vídeos —en un mismo sujeto— en la mayoría de los formadores, siendo Raquel la única que tiene una variación notable al ofrecer valores muy distintos en cada vídeo.

Con relación al nivel de *noticing* de cada MTE en el eje 4, en este gráfico se presenta la media aritmética de cada sujeto obtenida a partir del porcentaje de interpretaciones [M] sobre *call-outs* con respecto al total de interpretaciones asociadas a *call-outs* de cada MTE, así como del número medio de interpretaciones [M] referidas a *call-outs* por cada *call-out* detectado por cada formador, y se indica el nivel de *noticing* de cada docente en este eje:

Figura 4.60. Nivel de *noticing* de cada MTE —eje 4— en función del porcentaje de interpretaciones matemáticas referidas a *call-outs* con respecto al total de interpretaciones sobre *call-outs*, así como del número medio de interpretaciones matemáticas referidas a *call-outs* por cada *call-out* identificado: todos los vídeos, fase 2.



Como se puede observar, Marcos se sitúa en el nivel 5, prácticamente rozando el límite superior —por lo que su margen de mejora en este eje es casi nulo—, Daniel, Jorge, Lucas y Raquel se encuentran en el nivel 4, siendo la maestra la única que logra alcanzar la segunda mitad del mismo, y Pablo, por su parte, se queda en el nivel 3, a poca distancia del nivel subsiguiente. Asimismo, cabe recordar que el nivel de *noticing* en este cuarto eje se ha fijado con base en el criterio desarrollado en el apartado 4.1.1.d de la primera fase y atendiendo a los intervalos que se plantean en la tabla 4.8.

En resumen, en esta fase el nivel de *noticing* de los formadores en el eje 4, es decir, su nivel en cuanto a *cómo interpretan*, es el que se recoge en la siguiente tabla:

Tabla 4.14. Nivel de *noticing* de cada MTE en el eje 4 [*¿cómo interpretan?*]: conjunto de todos los vídeos, fase 2.

	Marcos	Daniel	Jorge	Lucas	Pablo	Raquel
Nivel	Alto	Medio-alto	Medio-alto	Medio-alto	Medio	Medio-alto

Se constata que aún hay cierto margen de mejora para los sujetos, exceptuando a Marcos, quien ya ha tocado techo al alcanzar la parte superior del nivel alto.

4.1.2.e. Síntesis de los niveles de los formadores en los ejes de la fase 2

A modo de recapitulación, en la siguiente tabla se plasman los niveles de cada uno de los MTE en los distintos ejes que estructuran el análisis de su competencia *noticing*:

Tabla 4.15. Nivel de *noticing* de cada MTE en cada uno de los ejes que vertebran el análisis de los datos: conjunto de todos los vídeos, fase 2.

	Marcos	Daniel	Jorge	Lucas	Pablo	Raquel
Eje 1 <i>¿Qué notan?</i>	4	4	4	3	4	2
Eje 2 <i>¿Cómo notan?</i>	4	5	4	4	4	2
Eje 3 <i>¿Qué interpretan?</i>	4	2	2	2	2	3
Eje 4 <i>¿Cómo interpretan?</i>	5	4	4	4	3	4

En la tabla es posible percibir de un vistazo la situación de cada formador en esta segunda fase —sobre su *noticing* inducido—, así como las diferencias entre ellos, a nivel cuantitativo. Podemos comprobar que la competencia *noticing* de los MTE del estudio no es igual —de hecho, no se repite la misma configuración de resultados en ningún sujeto—, siendo Marcos quien la tiene más desarrollada en esta segunda fase, puesto que muestra los valores más altos, en general, siendo su margen de mejora bastante reducido. Alcanza el nivel superior en el cuarto eje y su resultado en el tercero cobra una relevancia especial si lo comparamos con el de los demás docentes, ya que en dicho eje presentan los valores más bajos —a excepción de Raquel—. Por su parte, Daniel es el único participante —junto con Marcos— que alcanza el nivel 5 en alguna ocasión, concretamente en lo que se refiere a cómo nota, manifestado el nivel más alto de *noticing* después de Marcos y seguido por Jorge, quien se sitúa en un peldaño por debajo solo en el eje 2. Seguidamente, encontramos a Lucas y Pablo, con niveles muy similares entre sí, y, por último, con los datos más bajos, está Raquel, que es la única formadora que tiene en más de un eje valores por debajo del nivel medio, los cuales los concentra en los dos ejes referidos a los eventos —qué y cómo nota—, mientras que los demás MTE —excepto Marcos— no alcanzan el nivel medio en uno de los ejes relativos a las interpretaciones —qué interpretan—.

Asimismo, resulta relevante mencionar la posible influencia del contenido de cada vídeo en los resultados. Por un lado, en cuanto a la posición de cada sujeto respecto a los demás MTE en cada uno de los vídeos y ejes, la variabilidad ha sido escasa, pues siempre Marcos ha formado parte del grupo que ha alcanzado en cada caso mejores datos —con frecuencia en solitario en los ejes 3 y 4— y Raquel del que ha tenido resultados más bajos —excepto en los ejes de interpretaciones de los vídeos 1 y 3—. Los demás participantes se han mantenido en una posición intermedia, aunque alguna vez han integrado los grupos inferiores —principalmente en los ejes de interpretaciones— o los superiores —sobre todo en los ejes de eventos—. Por otro, en cuanto a la consistencia de cada sujeto a lo largo de los vídeos en cada eje respecto a sí mismo, los datos han sido bastante estables en los ejes referidos a los eventos: Marcos y Daniel siempre han estado en los grupos con resultados más altos, Raquel se ha situado en aquellos con valores más bajos y los demás sujetos han cambiado de grupo según el eje y el vídeo. Es en los ejes sobre interpretaciones en los que los vídeos han podido influir más: si bien Marcos siempre se ha ubicado en el grupo con mejores datos, los demás MTE han ido oscilando entre los grupos con valores intermedios o bajos, resultando llamativa la disminución del nivel de Raquel en el vídeo 2.

Teniendo presente todo lo comentado en esta segunda fase, así como lo expuesto sobre la primera, pasamos ahora a examinar los cambios de una fase a otra en el apartado que se desarrolla a continuación y a tratar de explicar los resultados.

4.1.3. Evolución de la fase 1 a la fase 2

Se presenta a continuación el análisis cuantitativo de los datos de todos los MTE, en paralelo, relativos a su evolución entre la fase de *noticing* espontáneo (fase 1) y la fase de *noticing* inducido (fase 2), poniendo el foco también en las diferencias entre los sujetos en la variación de sus resultados entre ambas fases. Asimismo, se trata de aportar posibles explicaciones acerca de los resultados alcanzados en cada fase.

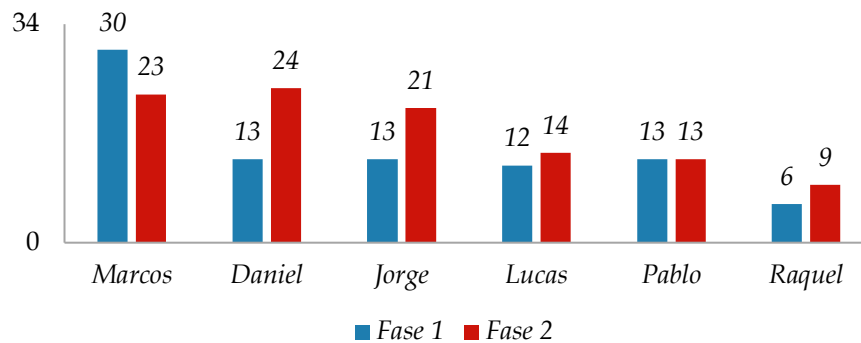
4.1.3.a. Eje 1. Eventos: ¿qué notan?

En este eje estudiamos la variación entre fases en el número de eventos asociados a *call-outs* que aporta cada formador en los distintos vídeos —análisis intraindividual— y las diferencias entre la evolución de cada sujeto —análisis interindividual—.

Vídeo 1

En el primer vídeo, para el que se estableció un conjunto de 34 *call-outs*, cada uno de los participantes identificó la cantidad de *call-outs* que se recoge en la siguiente figura:

Figura 4.61. Número de eventos asociados a *call-outs*: vídeo 1, fases 1 y 2.

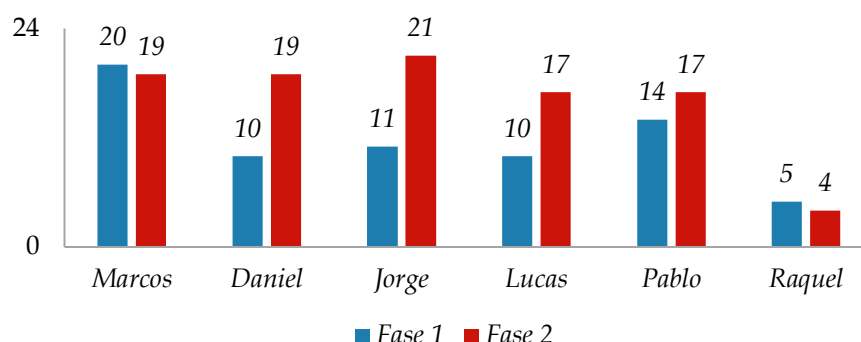


Como se puede apreciar, todos los participantes mejoran de una fase a otra, menos Marcos —que identifica 7 *call-outs* menos— y Pablo —que obtiene el mismo resultado—. Uno de los aspectos que más llama la atención del gráfico es que uno de los MTE alcanza un valor peor en la segunda fase que en la primera. No obstante, se puede explicar si nos fijamos en que ya en la primera fase identifica prácticamente todos los eventos relevantes, por lo que es complicado mantener el mismo nivel tan alto de observación en la segunda fase, si bien su resultado sigue siendo de los mejores en la fase 2. Por otro lado, merece la pena destacar la notable evolución de Daniel, quien, además de ser el que obtiene el mejor dato de la fase 2, experimenta la mayor evolución de todos los sujetos, detectando un total de 11 *call-outs* más la segunda vez que se enfrenta al vídeo.

Vídeo 2

En el segundo vídeo, para el que se estableció un conjunto de 24 *call-outs*, cada uno de los participantes identificó la cantidad de *call-outs* que se recoge en el siguiente gráfico:

Figura 4.62. Número de eventos asociados a *call-outs*: vídeo 2, fases 1 y 2.

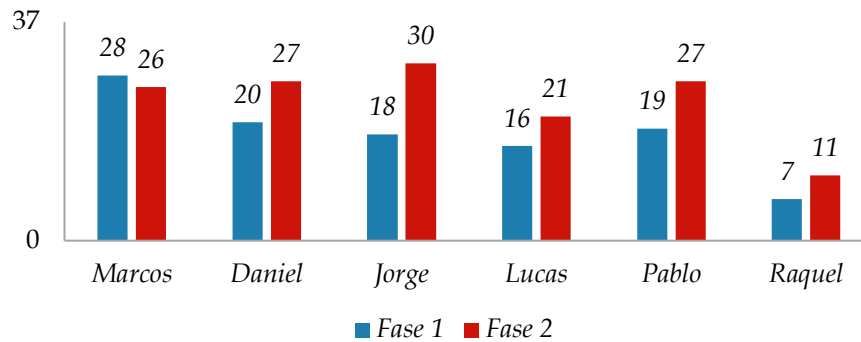


Como se observa, de nuevo mejoran los resultados de una fase a otra de todos los MTE menos los de dos de ellos —Marcos y Raquel, que explicitan un *call-out* menos cada uno—. En el caso de Marcos, se puede explicar su variación con el mismo argumento del vídeo 1, es decir, ya en la primera fase consigue un resultado cercano al máximo posible, por lo que puede resultar complicado mantenerlo en la segunda —aun así, solo disminuye en uno su valor y sigue siendo de los sujetos que más eventos relevantes identifican en la fase 2—. En el caso de la maestra, quizá su menor formación matemática en comparación con la del resto de docentes puede explicar la situación acontecida, a pesar de la inducción provista hacia lo matemático, habida cuenta del potente contenido matemático del vídeo en cuestión. Por otro lado, cabe señalar la gran evolución de Daniel y de Jorge.

Vídeo 3

En el tercer vídeo, para el que se estableció un conjunto de 37 *call-outs*, cada uno de los participantes detectó la cantidad de *call-outs* que se recoge en la figura que se muestra a continuación:

Figura 4.63. Número de eventos asociados a *call-outs*: vídeo 3, fases 1 y 2.

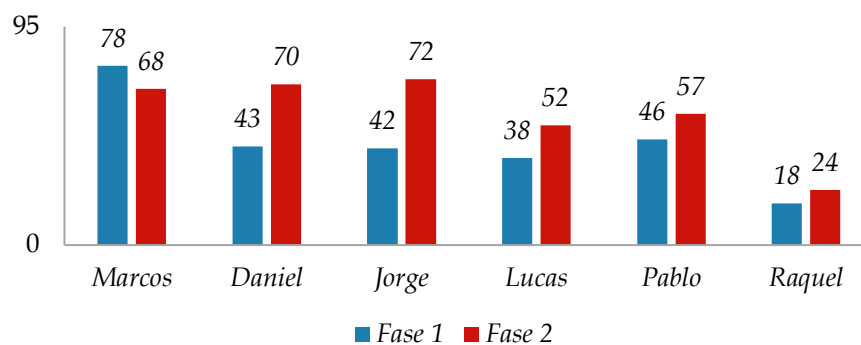


En relación con este tercer vídeo, todos los formadores mejoran menos Marcos. De nuevo, el caso de Marcos se puede justificar por lo ya expuesto en los dos vídeos previos. Asimismo, vuelve a ser considerable la evolución entre fases de Jorge, quien es capaz de identificar 12 eventos relevantes más en la segunda ocasión.

Conjunto de todos los vídeos

Teniendo en cuenta los tres vídeos en su conjunto, en los que encontramos un total de 95 *call-outs*, se muestra en la siguiente figura el número de *call-outs* que cada formador explicitó en sus comentarios:

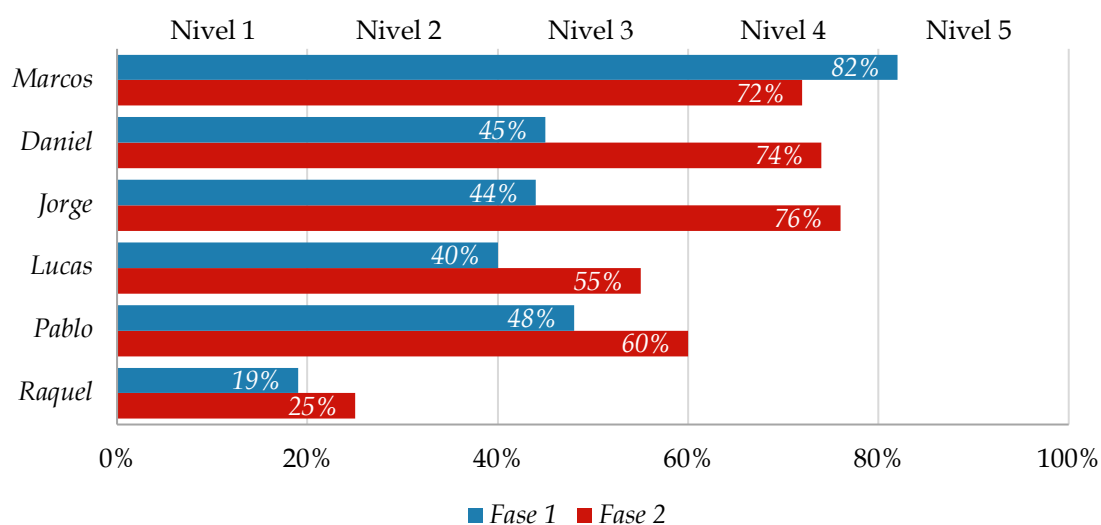
Figura 4.64. Número de eventos asociados a *call-outs*: todos los vídeos, fases 1 y 2.



Se puede comprobar que, en líneas generales, los resultados de los formadores son mejores en la segunda fase. Si bien Marcos señala 10 *call-outs* menos —por lo ya explicado en los todos vídeos anteriores—, sigue estando entre aquellos que más eventos relevantes identifican. Por otra parte, resulta admirable la gran evolución de Daniel y de Jorge, que detectan 27 y 30 *call-outs* más, de forma respectiva, que en la primera fase, lo cual supone una mejora enorme.

En cuanto al nivel de *noticing* de cada MTE en el eje 1 —fijado con base en el criterio descrito en el apartado 4.1.1.a de la primera fase y atendiendo al contenido recogido en la tabla 4.2—, en el siguiente gráfico se plasma el porcentaje de *call-outs* explicitado por cada formador con respecto al conjunto de los tres vídeos en las dos fases, así como el nivel de *noticing* de cada docente en este eje de acuerdo con dichos valores:

Figura 4.65. Nivel de *noticing* de cada MTE —eje 1— en función del porcentaje de *call-outs* identificados con respecto al total de *call-outs*: todos los vídeos, fases 1 y 2.



Se puede comprobar que el nivel de los MTE mejora en este eje entre fases —el de Marcos no lo hace, pero sigue siendo elevado—. A este respecto, el único sujeto que cuenta con un nivel medio-alto o alto en ambos momentos es Marcos, quien es el único que tiene una experiencia alta —más de 15 años, 32 en su caso— como formador. Por lo tanto, sería posible afirmar que, en lo referido a *qué notan* los MTE, parece que la experiencia docente como formador cobra un peso especial en la competencia *noticing*. Con relación a los otros dos sujetos con mejores resultados, Daniel y Jorge, comparten que son los únicos que son doctores en matemáticas, teniendo una experiencia media y baja, respectivamente, como

MTE. Por ende, podríamos decir que una robusta formación matemática es una variable que también podría propiciar un nivel elevado en lo que se refiere al tema que nos ocupa. Asimismo, parece ser que en este eje la formación matemática es capital para poder llegar a niveles, por lo menos, intermedios, pues la principal diferencia de Raquel — participante con los valores más bajos, con creces, en las dos fases — con los demás formadores radica en su menor formación académica en matemáticas, dado que es la única de todos los MTE que no es matemática de carrera, sino maestra.

En resumen, el nivel de *noticing* de los formadores en el eje 1, es decir, su nivel en cuanto a *qué notan*, es el que se recoge en esta tabla:

Tabla 4.16. Nivel de *noticing* de cada MTE en el eje 1 [*¿qué notan?*]: conjunto de todos los vídeos, fases 1 y 2.

	Marcos	Daniel	Jorge	Lucas	Pablo	Raquel
Nivel (F1)	Alto	Medio	Medio	Medio	Medio	Bajo
Nivel (F2)	Medio-alto	Medio-alto	Medio-alto	Medio	Medio-alto	Medio-bajo
Variación en el nivel	- 1 nivel	+ 1 nivel	+ 1 nivel	=	+ 1 nivel	+ 1 nivel
	- 10 %	+ 29 %	+ 32 %	+ 15 %	+ 12 %	+ 6 %

Se constata que aún hay margen de mejora para todos los sujetos, aunque algunos, como Marcos, Daniel y Jorge, ya se posicionan muy cerca del nivel alto. Además, Jorge es el docente que más puntos porcentuales — con respecto al total de *call-outs* establecidos — ha aumentado en la segunda fase, un 32 %, seguido de Daniel, con un 29 %, mientras que Marcos ha sido el único sujeto en retroceder con relación a su primera posición y Raquel, de los demás MTE, quien ha evolucionado menos, con un 6 %, estableciéndose en la parte baja del segundo nivel. Asimismo, cabe decir que no cambiar de nivel de una fase a otra no implica no mejorar o hacerlo menos que otros sujetos — véase el caso de Lucas —.

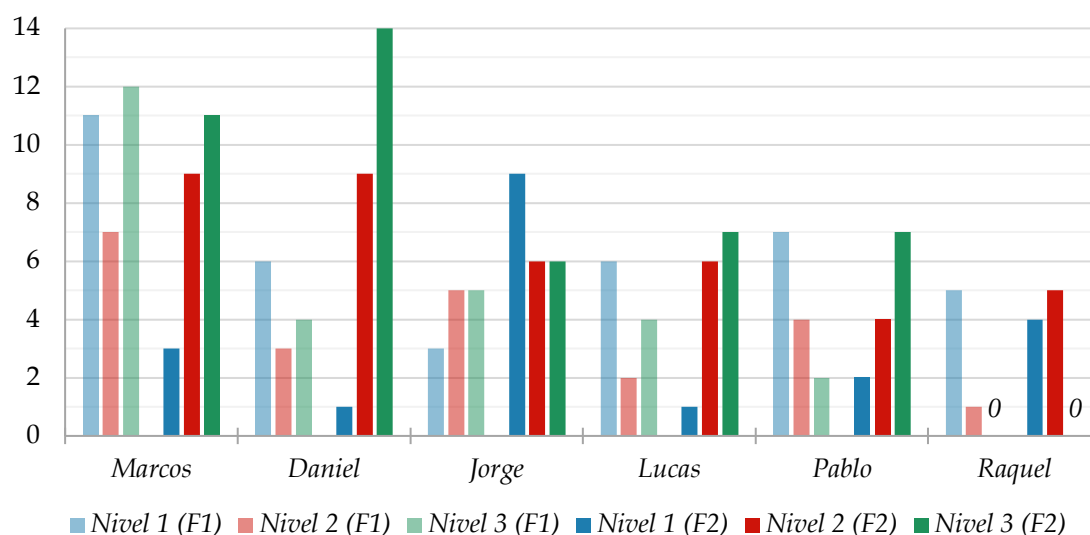
4.1.3.b. Eje 2. Eventos: *¿cómo notan?*

En este eje se examina la variación entre fases en los niveles — según los elementos fundamentales explicitados — otorgados a los eventos referidos a *call-outs* aportados por cada participante en cada uno de los vídeos — análisis intraindividual — y las diferencias entre la evolución experimentada por cada sujeto — análisis interindividual —.

Vídeo 1

En el primer vídeo, los eventos —asociados a *call-outs*— formulados por cada uno de los formadores se distribuyen en los tres niveles posibles del modo que se recoge en el siguiente gráfico:

Figura 4.66. Eventos —asociados a *call-outs*— clasificados en niveles en función de los elementos fundamentales explicitados: vídeo 1, fases 1 y 2.

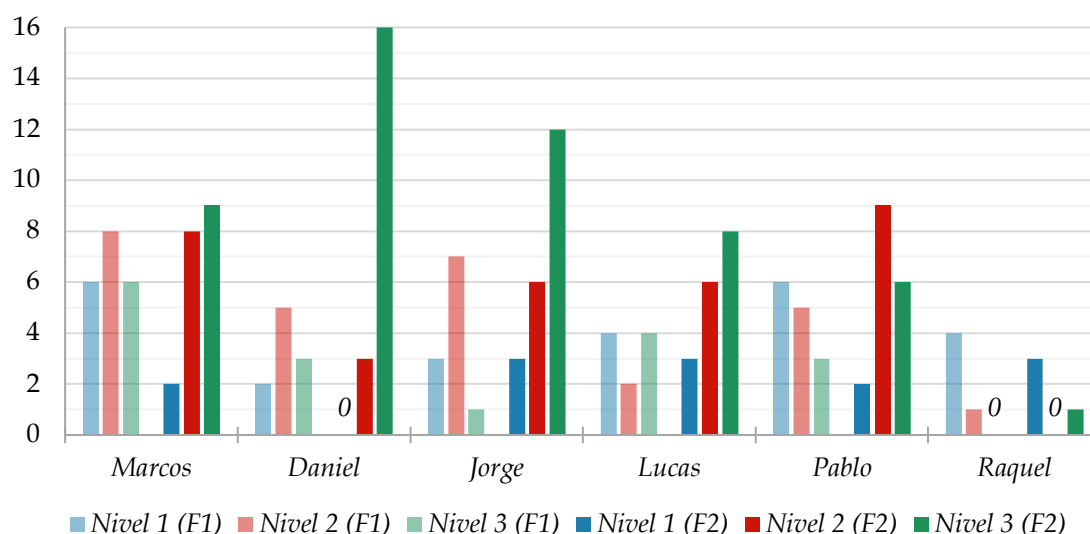


Como se puede apreciar, hay una clara evolución, en líneas generales, entre las dos fases, ya que en la primera predomina el nivel 1 y en la segunda hace lo propio el nivel 3, por lo que se puede afirmar que los formadores han sido capaces de explicitar los eventos relevantes que han identificado en la segunda fase con mayor precisión y con la atención puesta en sus elementos fundamentales. En concreto, destaca la formidable evolución de Daniel, para quien el nivel 1 casi desaparece y el nivel 3 es predominante, siendo también notable la mejora de Marcos, Lucas y Pablo. Asimismo, sorprende que Jorge aumente sus eventos en el nivel inferior y que sean los mayoritarios en la fase 2, así como que Raquel, tanto en la primera como en la segunda fase, no presente ningún evento en el nivel 3.

Vídeo 2

En el segundo vídeo, los eventos —asociados a algún *call-out*— formulados por los distintos MTE se distribuyen en los tres niveles posibles de la manera que se expone en el próximo gráfico:

Figura 4.67. Eventos —asociados a *call-outs*— clasificados en niveles en función de los elementos fundamentales explicitados: vídeo 2, fases 1 y 2.

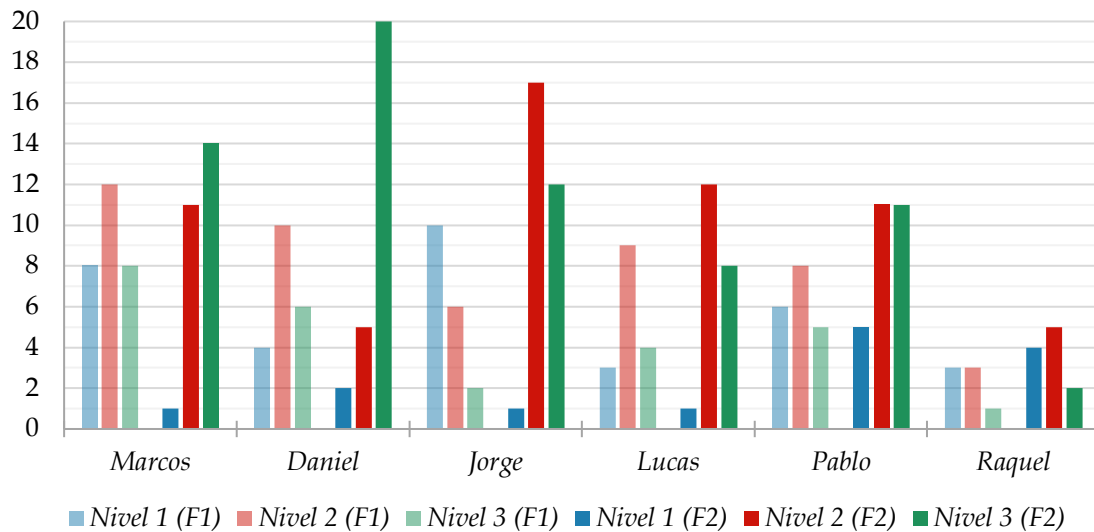


En este vídeo, tal y como se puede apreciar, se pasa de una primera fase en la que tiene una mayor presencia el nivel 2 —aunque el nivel 1 también destaca— a una segunda en la que el nivel 3 cobra el protagonismo. Por tanto, al igual que en el vídeo anterior, los participantes han sido capaces de explicitar los elementos fundamentales de los *call-outs* de un modo mucho más satisfactorio. De nuevo, Daniel despunta en la evolución relativa a este eje de una a otra fase, más si cabe que en el primer vídeo, puesto que ahora es nulo el influjo del nivel 1 en sus eventos y, por su parte, el nivel 3 sombra al nivel 2, por lo que este MTE es, claramente, quien presenta una mayor evolución y mejores resultados en la segunda fase. No obstante, también es meritoria la mejora de los demás participantes, con la excepción de la maestra, ya que, si bien consigue la aparición del nivel 3 en la fase 2, su progreso es muy pequeño y la presencia del nivel 1 sigue siendo bastante alta en términos relativos. Cabe recordar que el contenido de este vídeo —consistente en pasar un número de base 16 a base 2 sin pasar por base 10— tenía una carga matemática mucho mayor que los otros dos vídeos, aspecto que, ligado a la menor formación matemática de la maestra en comparación con los demás participantes, podría concebirse como una explicación de los resultados alcanzados por los formadores en este caso.

Vídeo 3

En el tercer vídeo, los eventos —asociados a algún *call-out*— formulados por cada MTE se distribuyen en los tres niveles posibles del siguiente modo:

Figura 4.68. Eventos —asociados a *call-outs*— clasificados en niveles en función de los elementos fundamentales explicitados: vídeo 3, fases 1 y 2.

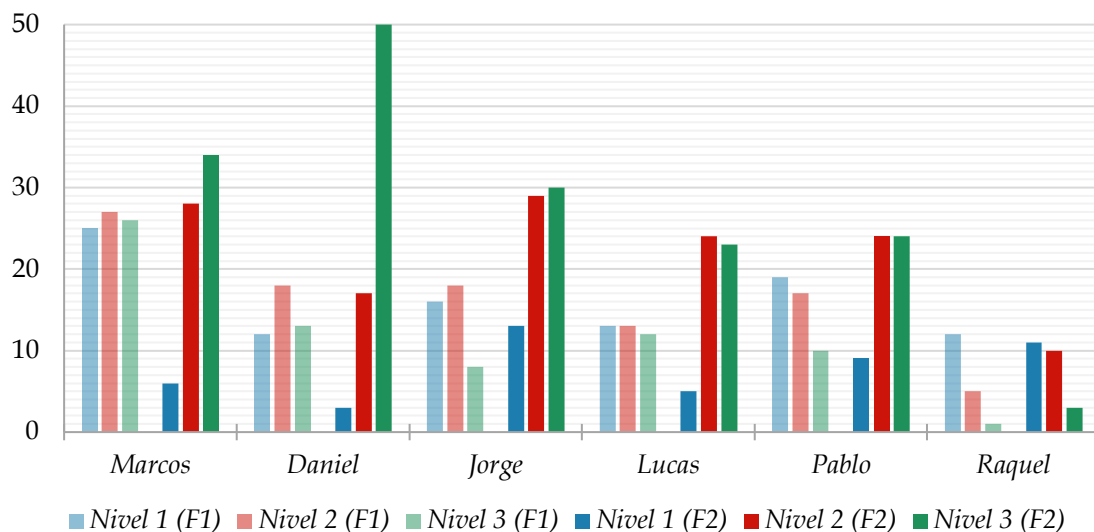


Como en los vídeos previos, todos los MTE mejoran de una fase a otra. En general, la presencia del nivel 1 se reduce drásticamente en la fase 2, acaparando el protagonismo los niveles 2 y 3. Una vez más, Daniel presenta la evolución mayor y Raquel, la menor.

Conjunto de todos los vídeos

Los eventos —asociados a *call-outs*— formulados por cada MTE en el conjunto de todos los vídeos se distribuyen en los tres niveles posibles del siguiente modo:

Figura 4.69. Eventos —asociados a *call-outs*— clasificados en niveles en función de los elementos fundamentales explicitados: todos los vídeos, fases 1 y 2.



Atendiendo a todos los vídeos, se aprecian varios hechos rápidamente. Por un lado, resalta el valor de Daniel relativo al nivel 3 de la fase 2, el cual, junto con el resto de datos, nos hace ver que se trata del sujeto más diestro al explicitar detalladamente los elementos fundamentales de los *call-outs* y del que ha progresado más entre fases. Por otro, se ve que todos los MTE mejoran, aunque Raquel lo hace de manera escasa, siendo la única que en ambas fases tiene el nivel 1 como el más predominante y el nivel 3 como el que menos.

La evolución de cada nivel y en cada fase de cada participante se puede comprobar porcentualmente en la siguiente tabla:

Tabla 4.17. Porcentaje de eventos — asociados a *call-outs* — clasificados en cada nivel, en función de los elementos fundamentales explicitados, con respecto al total de *call-outs* identificados: conjunto de todos los vídeos, fases 1 y 2.

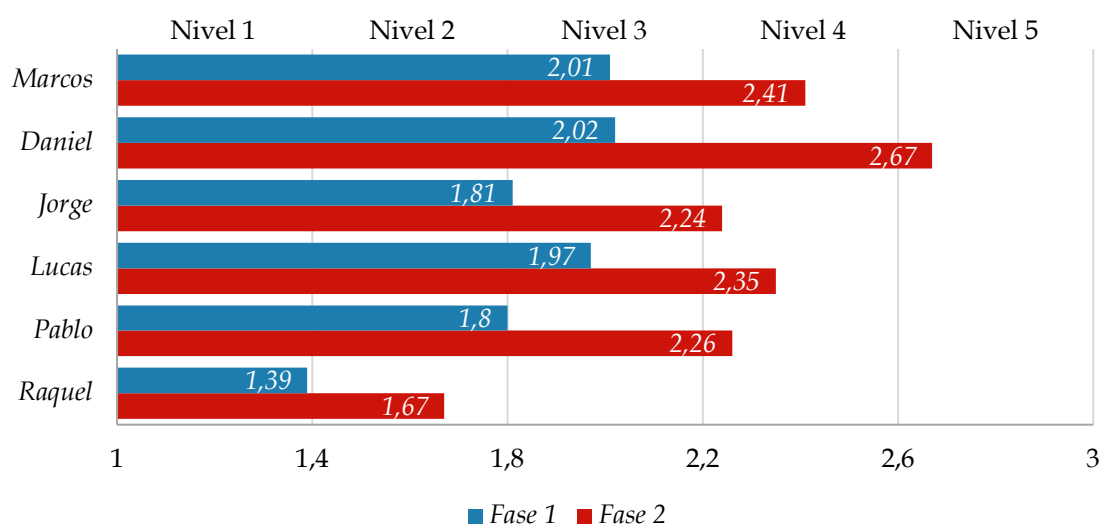
	Nivel 1 (F1)	Nivel 1 (F2)	Nivel 2 (F1)	Nivel 2 (F2)	Nivel 3 (F1)	Nivel 3 (F2)
Marcos	32 %	9 %	35 %	41 %	33 %	50 %
	– 23 %		+ 9 %		+ 17 %	
Daniel	28 %	4 %	42 %	24 %	30 %	71 %
	– 24 %		– 18 %		+ 41 %	
Jorge	38 %	18 %	43 %	40 %	19 %	42 %
	– 20 %		– 3 %		+ 23 %	
Lucas	34 %	10 %	34 %	46 %	32 %	44 %
	– 24 %		+ 12 %		+ 12 %	
Pablo	41 %	16 %	37 %	42 %	22 %	42 %
	– 25 %		+ 5 %		+ 20 %	
Raquel	67 %	46 %	28 %	42 %	6 %	13 %
	– 21 %		+ 14 %		+ 7 %	

Con relación al nivel 1, todos los sujetos ven reducida su presencia de una fase a otra un 20-25 % — valores en función del número total de *call-outs* identificados por cada formador en cada fase, no con base en la variación del valor de la primera fase —, por lo que la disminución ha sido parecida para todos. En cuanto al nivel 3, Daniel ha tenido la mayor evolución, con un 41 % más — del total de *call-outs* formulados en cada fase — en la segunda fase. Y en relación con el nivel 2, su aumento ha sido mayor cuanto menor ha sido la mejora en el nivel 3, siendo el incremento incluso negativo para Daniel y Jorge.

En cuanto al nivel de *noticing* de cada MTE en el eje 2 — fijado con base en el criterio desarrollado en el apartado 4.1.1.b de la primera fase y atendiendo a los intervalos que se

plantean en la tabla 4.4 —, en el siguiente gráfico se presenta el nivel medio de los eventos —asociados a *call-outs*— indicados por cada formador con respecto al conjunto de los tres vídeos en las dos fases y, además, el nivel de *noticing* de cada docente en este:

Figura 4.70. Nivel de *noticing* de cada MTE —eje 2— en función del nivel medio de los eventos asociados a *call-outs* según los elementos fundamentales explicitados: todos los vídeos, fases 1 y 2.



Se puede comprobar que el nivel de todos los formadores mejora en este eje de una fase a otra. A diferencia del eje 1, en la primera fase ningún participante supera el nivel 3 de forma espontánea, siendo los resultados en esta bastante homogéneos, a excepción de Raquel, que se queda a las puertas del nivel 2. Se hace necesaria la segunda fase para que los MTE lleguen a un nivel medio-alto o alto, destacando Daniel, quien logra alcanzar el nivel alto, tratándose del único sujeto que es doctor en matemáticas y que tiene, al menos, experiencia media —más de 5 años, 9 en su caso— como formador, siendo la confluencia de dichas variables lo que podría explicar su buen desempeño en este eje. No obstante, la distancia entre Daniel y los demás sujetos que son matemáticos de carrera no es excesiva, mientras que la distancia entre estos y la maestra es obvio que sí es amplia. Por ello, quizá la variable de formación académica podría tener un peso importante para lograr un nivel alto en este eje —posiblemente por la carga matemática de los elementos fundamentales de cada uno de los *call-outs*—, referido a *cómo notan* los MTE, mientras que la experiencia como MTE no tendría la misma relevancia —o al menos no tanta como en el eje 1—.

En resumen, el nivel de *noticing* de los formadores en el eje 2, es decir, su nivel en cuanto a *cómo notan*, es el que se recoge en la siguiente tabla:

Tabla 4.18. Nivel de *noticing* de cada MTE en el eje 2 [¿cómo notan?]: conjunto de todos los vídeos, fases 1 y 2.

	Marcos	Daniel	Jorge	Lucas	Pablo	Raquel
Nivel (F1)	Medio	Medio	Medio	Medio	Medio	Bajo
Nivel (F2)	Medio-alto	Alto	Medio-alto	Medio-alto	Medio-alto	Medio-bajo
Variación en el nivel	+ 1 nivel	+ 2 niveles	+ 1 nivel	+ 1 nivel	+ 1 nivel	+ 1 nivel
	+ 0.40	+ 0.65	+ 0.43	+ 0.38	+ 0.46	+ 0.28

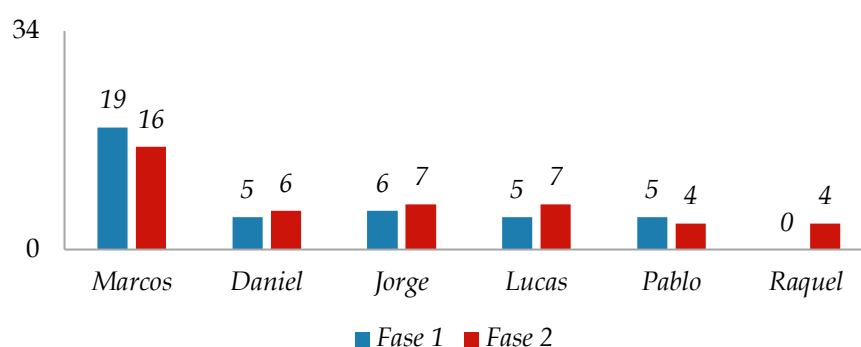
Se constata que aún hay margen de mejora para los sujetos, aunque Daniel ya está en el nivel alto en la fase 2 y los demás, excepto Raquel —en el nivel medio-bajo—, en el medio-alto. Además, Daniel ha tenido la variación positiva mayor —2 niveles—.

4.1.3.c. Eje 3. Interpretaciones: ¿qué interpretan?

En este eje se examina la variación entre fases en el número de eventos asociados a *call-outs* que formula cada sujeto y que van acompañados de alguna interpretación de la categoría matemática en cada uno de los vídeos —análisis intraindividual—, así como las diferencias entre la evolución experimentada por cada MTE —análisis interindividual—.

Vídeo 1

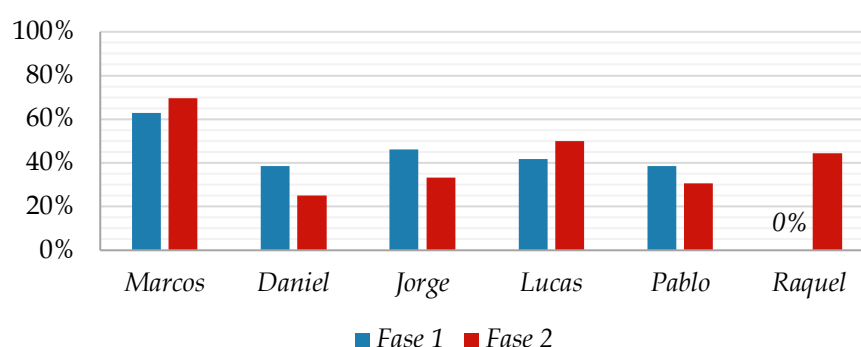
En el primer vídeo, para el que se estableció un conjunto de 34 *call-outs*, cada uno de los participantes aportó la cantidad de eventos asociados a *call-outs* —con al menos una interpretación matemática por evento— que se recoge en la siguiente figura:

Figura 4.71. Número de eventos —asociados a *call-outs*— acompañados de al menos una interpretación matemática: vídeo 1, fases 1 y 2.

Como se observa, la evolución de los docentes no es muy alta entre fases, siendo la maestra quien más progresa al pasar de 0 a 4. Además, algunos MTE logran peores datos en la fase 2, pasando Marcos de 19 a 16 y Pablo de 5 a 4. En cualquier caso, las variaciones son pequeñas.

Si bien los datos anteriores son interesantes, resulta más importante saber cuál es la propensión de los participantes a interpretar o no —matemáticamente— los diferentes eventos que formulan relativos a *call-outs*, para lo cual se plantea la proporción de eventos —referidos a algún *call-out*— que están acompañados de al menos una interpretación [M] con respecto al total de eventos relevantes verbalizados en la siguiente figura:

Figura 4.72. Porcentaje de eventos —asociados a *call-outs*— que están acompañados de al menos una interpretación matemática con respecto al total de *call-outs* identificados: vídeo 1, fases 1 y 2.

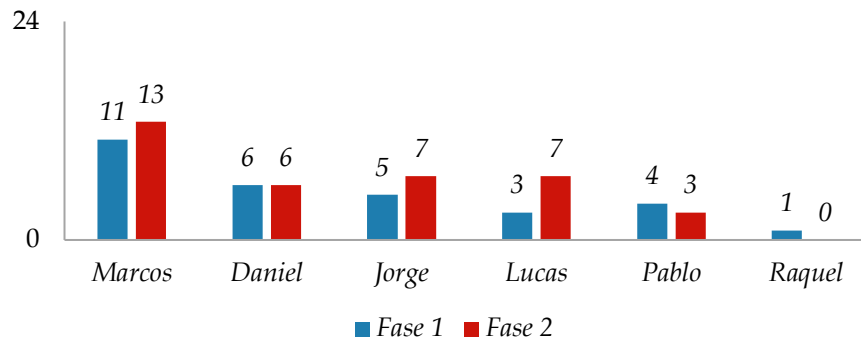


Al estar estos valores condicionados por el número de eventos relevantes que cada sujeto ha formulado, observamos que, por ejemplo, Marcos, si bien en el gráfico anterior mostraba un dato menor en la segunda fase, en esta figura tiene un valor mayor. De igual modo, pero al contrario, ocurre con Daniel y con Jorge. Por lo tanto, podemos comprobar que la propensión a interpretar matemáticamente los *call-outs* formulados mejora entre las dos fases en el caso de Marcos, Lucas y Raquel, mientras que empeora para el resto de los sujetos. Cabe señalar, asimismo, que Marcos obtiene valores notablemente altos en ambas fases, así como que la evolución de Raquel se acentúa más que la del resto de MTE porque fue quien menos *call-outs* detectó en este vídeo.

Vídeo 2

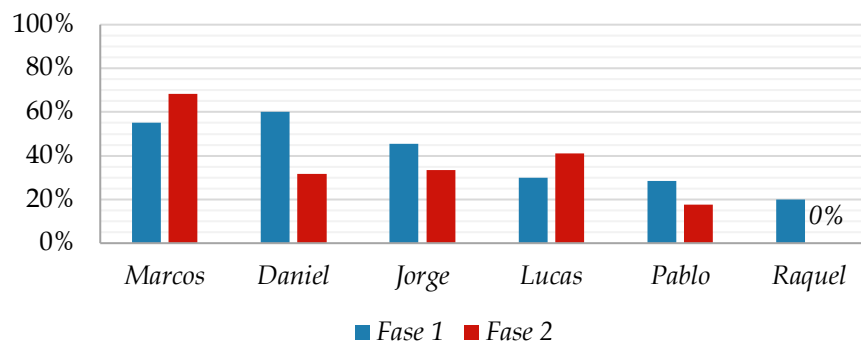
En el segundo vídeo, para el que se estableció un conjunto de 24 *call-outs*, cada uno de los participantes aportó la cantidad de eventos asociados a *call-outs* —con al menos una interpretación matemática por evento— que se recoge en el siguiente gráfico:

Figura 4.73. Número de eventos —asociados a *call-outs*— acompañados de al menos una interpretación matemática: vídeo 2, fases 1 y 2.



Como se aprecia, la evolución de los docentes no es especialmente alta entre fases, siendo negativa para Pablo y Raquel —más aún para la maestra, pues no formula ningún evento relevante asociado a al menos una interpretación matemática— y permaneciendo estancada en el caso de Daniel. Lucas sería quien más evoluciona de una fase a otra y, por su parte, Marcos es quien obtiene los mejores datos en ambas.

Figura 4.74. Porcentaje de eventos —asociados a *call-outs*— que están acompañados de al menos una interpretación matemática con respecto al total de *call-outs* identificados: vídeo 2, fases 1 y 2.

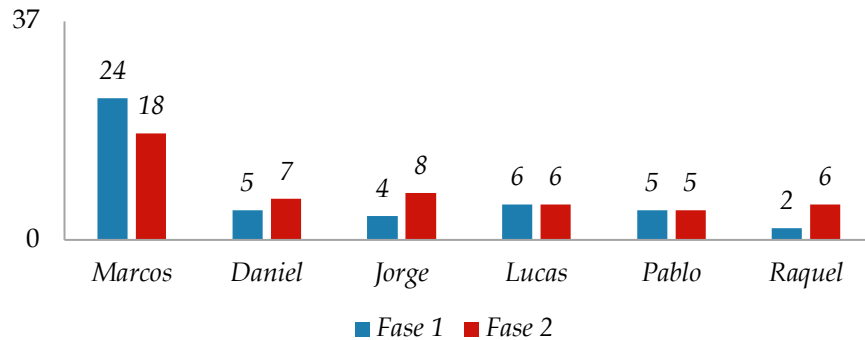


En lo referido a la proporción de eventos —asociados a *call-outs*— que incluyen al menos una interpretación [M] con respecto al total de *call-outs* identificados, Marcos es de nuevo en este vídeo quien mejores resultados logra en un segundo momento, resultando ser muy alta su inclinación a interpretar matemáticamente aquello que detecta. Del resto de participantes, únicamente mejora Lucas, mientras que los demás no progresan de una a otra fase, siendo especialmente llamativa la disminución en la segunda fase del valor de Daniel —que en la primera fue quien mayor propensión demostró— y la de Raquel —que obtiene un 0 %—, pudiéndose deber esta última a la menor formación matemática de la maestra y al mayor contenido matemático de este vídeo —como en los dos ejes previos—.

Vídeo 3

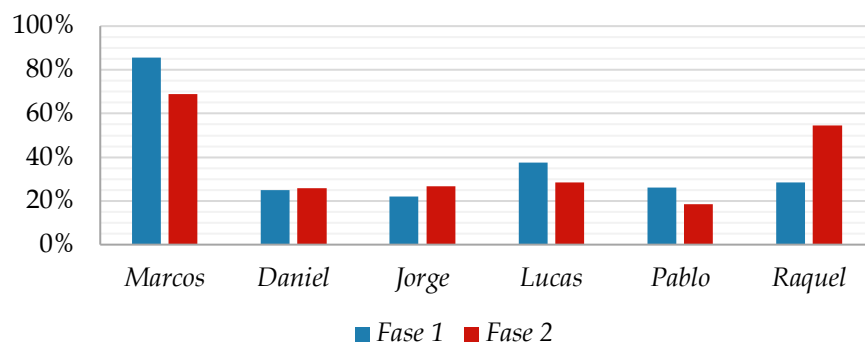
En el tercer vídeo, para el que se estableció un conjunto de 37 *call-outs*, cada uno de los participantes aportó la cantidad de eventos asociados a *call-outs* —con al menos una interpretación matemática por evento— que se recoge en la siguiente figura:

Figura 4.75. Número de eventos —asociados a *call-outs*— acompañados de al menos una interpretación matemática: vídeo 3, fases 1 y 2.



Como se observa, en este vídeo Daniel, Jorge y Raquel mejoran entre fases, Marcos empeora y Lucas y Pablo se estancan. Además, Marcos, a pesar de evolucionar de manera negativa, es quien logra los resultados más altos en ambas fases, con diferencia, mientras que Raquel es quien proporcionalmente aumenta más su valor de todos los MTE.

Figura 4.76. Porcentaje de eventos —asociados a *call-outs*— que están acompañados de al menos una interpretación matemática con respecto al total de *call-outs* identificados: vídeo 3, fases 1 y 2.



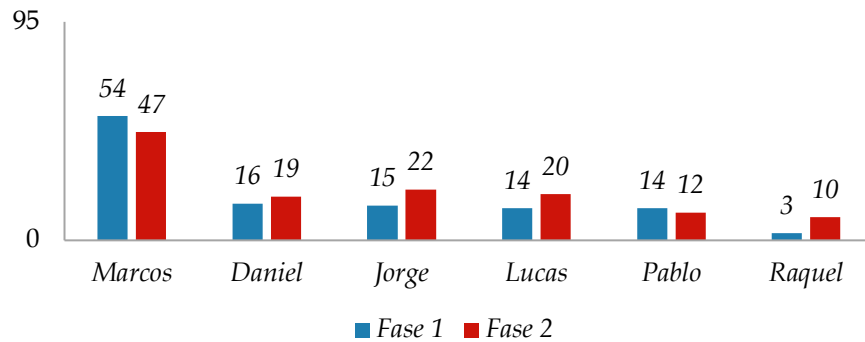
En lo referido a la proporción de eventos —asociados a *call-outs*— que incluyen al menos una interpretación [M] con respecto al total de *call-outs* identificados, Marcos es de nuevo en este vídeo quien mejores resultados consigue, tanto en la primera fase como en la segunda, siendo enorme su propensión a interpretar matemáticamente los *call-outs* que detecta en los dos casos. De los demás sujetos, Daniel, Jorge y Raquel mejoran y Lucas y

Pablo empeoran. Nuevamente, como en el vídeo 1, cabe destacar la evolución de Raquel, si bien es quien menos *call-outs* detectó —al igual que en los vídeos anteriores—.

Conjunto de todos los vídeos

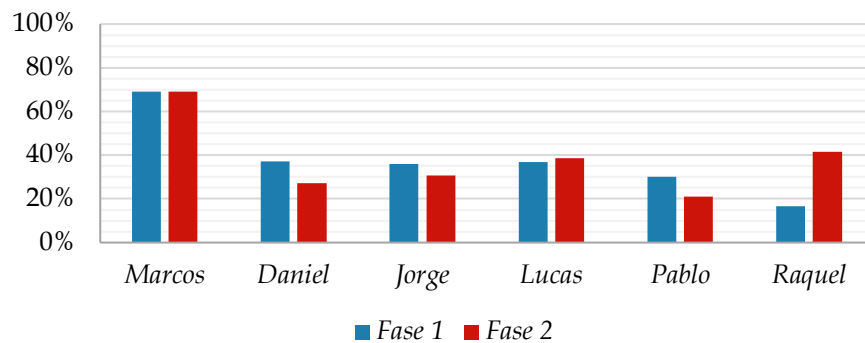
En el conjunto de todos los vídeos, para los que se estableció un total de 95 *call-outs*, cada uno de los sujetos aportó el número de eventos asociados a *call-outs* —incluyendo al menos una interpretación matemática por evento— recogido en el gráfico que se presenta a continuación:

Figura 4.77. Número de eventos — asociados a *call-outs* — acompañados de al menos una interpretación matemática: todos los vídeos, fases 1 y 2.



Al observar esta figura, se aprecia con nitidez que Marcos es quien más *call-outs* ha presentado asociados a al menos una interpretación matemática en ambas fases, mientras que Raquel se sitúa en el extremo opuesto. Asimismo, todos los MTE mejoran de una fase a otra, excepto Marcos —lo cual no es significativo, ya que alcanza en ambos casos valores muy altos— y Pablo —para quien solo baja su dato en 2 eventos—.

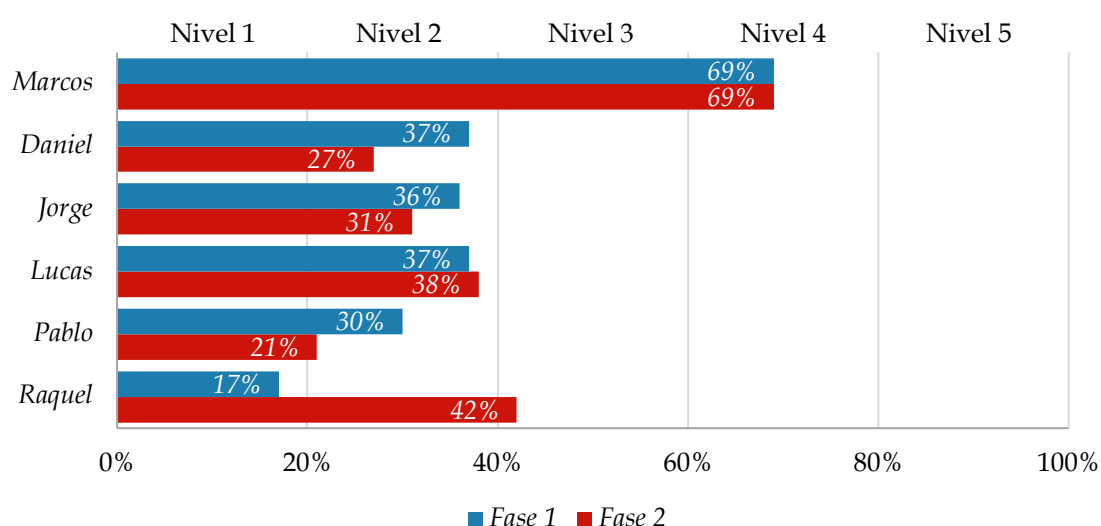
Figura 4.78. Porcentaje de eventos — asociados a *call-outs* — que están acompañados de al menos una interpretación matemática con respecto al total de *call-outs* identificados: todos los vídeos, fases 1 y 2.



Al analizar la propensión a interpretar matemáticamente los eventos relevantes, se comprueba que los valores alcanzados por Marcos son excepcionales, pues prácticamente tiende a interpretar matemáticamente el 70 % de los *call-outs* que explicita y, asimismo, es capaz de mantener dicha actitud interpretativa en las dos fases. En cuanto al resto de los MTE, solo mejoran Lucas —escasamente— y Raquel, cuya evolución es la mayor de todo el grupo —si bien, como ya se ha explicado, la variación en sus datos se ve potenciada por haber detectado muchos menos eventos relevantes que los demás sujetos y no tratarse de números grandes, aspecto a considerar para interpretar adecuadamente su resultado—.

En cuanto al nivel de *noticing* de cada MTE en el eje 3 —fijado con base en el criterio expuesto en el apartado 4.1.1.c de la primera fase y en el contenido de la tabla 4.6—, en el siguiente gráfico se plasma la proporción de eventos —asociados a algún *call-out*— que se acompañan de al menos una interpretación matemática explicitados por cada sujeto con respecto al total de *call-outs* vistos por cada MTE en el total de los tres vídeos en las dos fases, así como el nivel de *noticing* de cada sujeto en este eje de acuerdo con tales valores:

Figura 4.79. Nivel de *noticing* de cada MTE —eje 3— en función del porcentaje de eventos —asociados a *call-outs*— acompañados de al menos una interpretación matemática con respecto al total de *call-outs* identificados: todos los vídeos, fases 1 y 2.



Como se puede apreciar, el nivel de *noticing* de los formadores es bastante bajo en ambas fases, situándose mayoritariamente en el nivel 2, a excepción de Marcos, que logra situarse en las dos ocasiones en la parte media del nivel medio-alto —a una distancia más que grande de los demás participantes— y de Raquel, que consigue pasar de la parte alta

del nivel 1 a la baja del nivel 3. Asimismo, vemos que tres MTE obtienen peores datos en la segunda fase, lo que contrasta con lo acontecido en los ejes de eventos, en los que todos los formadores consiguen mejorar —excepto Marcos, en el eje 1, por lo ya expuesto—. En este tercer eje, mejoran Lucas, ligeramente, y Raquel, de un modo más notable —lo que se explica, en parte, por el escaso número de eventos relevantes identificados por ella, tal y como ya se ha expresado con anterioridad, lo cual no es óbice para privarla del meritorio resultado—. Así pues, en este eje parece que la variable que más importancia podría tener para lograr un elevado nivel de *noticing*, en lo que respecta a *qué interpretan* los MTE, sería la experiencia docente como formador, principal aspecto que distingue a Marcos del resto de participantes, ya que es el único que cuenta con una experiencia alta —más de 15 años, 39 en su caso, como ya mencionamos en el eje 1—. Asimismo, tampoco sería descabellado suponer que en este eje también la formación académica en didáctica de las matemáticas cobraría una relevancia singular, particularmente si tiene unas características como la de Marcos, pues el paradigma de investigación en el que se basa su tesis doctoral se apoya a menudo en interpretaciones sobre situaciones de aula, lo cual ha podido servirle de gran ayuda para obtener los magníficos resultados que hemos analizado.

En resumen, el nivel de *noticing* de los formadores en el eje 3, es decir, su nivel en cuanto a *qué interpretan*, es el que se recoge en esta tabla:

Tabla 4.19. Nivel de *noticing* de cada MTE en el eje 3 [*¿qué interpretan?*]: conjunto de todos los vídeos, fases 1 y 2.

	Marcos	Daniel	Jorge	Lucas	Pablo	Raquel
Nivel (F1)	Medio-alto	Medio-bajo	Medio-bajo	Medio-bajo	Medio-bajo	Bajo
Nivel (F2)	Medio-alto	Medio-bajo	Medio-bajo	Medio-bajo	Medio-bajo	Medio
Variación en el nivel	= + 0 %	= - 10 %	= - 5 %	= + 1 %	= - 9 %	+ 2 niveles + 25 %

Se constata que el margen de mejora es todavía enorme para casi todos los sujetos, pues cuatro de ellos se posicionan aún en el nivel medio-bajo después de haber visionado los vídeos por segunda vez. Por el contrario, Marcos, si bien aún puede progresar, se sitúa ya próximo al nivel alto, posición que ha mantenido en ambas fases. Asimismo, tal y como hemos comentado antes, sorprende la evolución de la maestra, pues ha mejorado un total de 2 niveles —si bien es necesario interpretar con cautela dicha variación—.

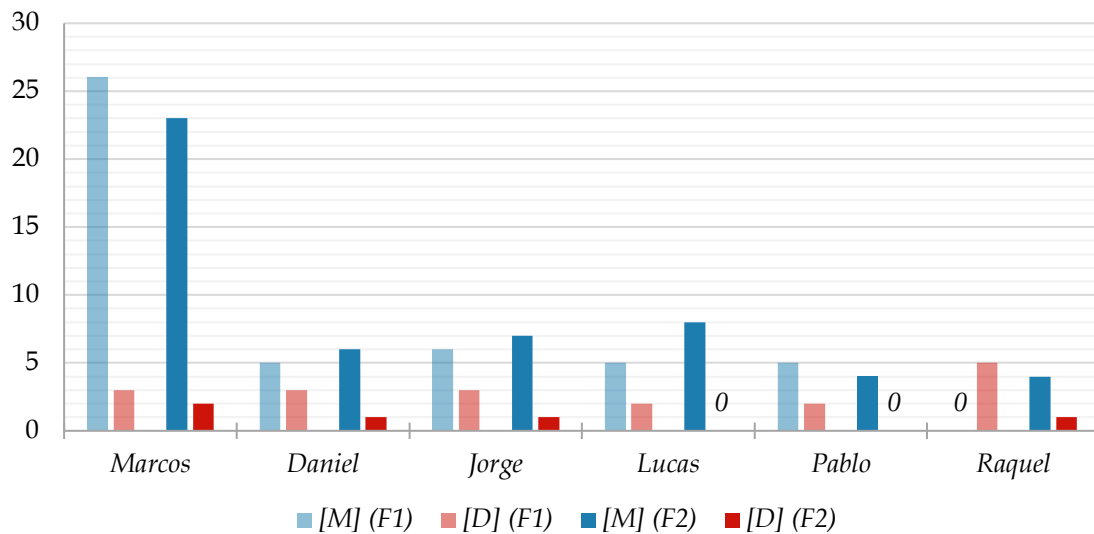
4.1.3.d. Eje 4. Interpretaciones: ¿cómo interpretan?

En este eje se examina la variación entre fases en relación con las interpretaciones de la categoría matemática [M] referidas a *call-outs* que ha formulado cada MTE —análisis intraindividual—, prestando atención tanto a la proporción de estas con respecto al total de interpretaciones referidas a *call-outs* —[M] y [D]— como a su proporción con respecto al total de *call-outs* identificados, en los distintos vídeos, así como las diferencias entre la evolución experimentada por cada formador —análisis interindividual—.

Vídeo 1

En el primer vídeo, las interpretaciones que aluden a *call-outs* aportadas por cada MTE se distribuyen en las categorías [M] y [D] del siguiente modo:

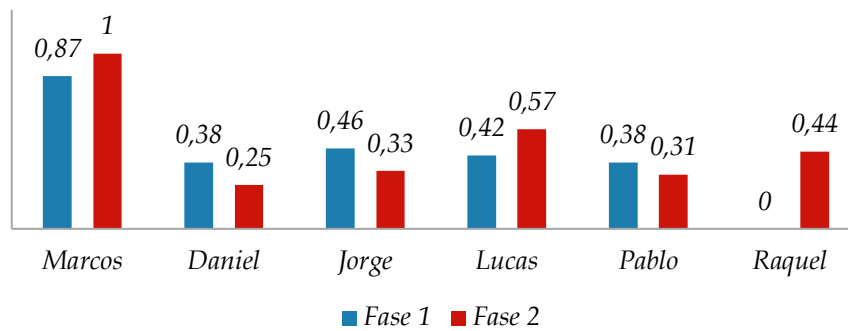
Figura 4.80. Interpretaciones referidas a *call-outs* clasificadas en las categorías matemática y didáctica: vídeo 1, fases 1 y 2.



Como se puede apreciar en el gráfico, existe una mejora clara para todos los sujetos de una fase a otra en lo que respecta a las interpretaciones [D], pues en todos los casos se reducen, desapareciendo para Lucas y Pablo y siendo prácticamente anecdóticas para los demás MTE. En cuanto a las interpretaciones [M], aumentan para todos menos en el caso de Marcos —que pierde 3— y de Pablo —que pierde 1—. Asimismo, sin lugar a dudas, lo más destacable de la figura es el desempeño de Marcos, pues en ambas fases aporta una cantidad enorme de interpretaciones [M] sobre *call-outs*, diferenciándose sobremanera de los otros participantes, lo que resta importancia a que no mejore en la fase 2.

En cuanto al número medio de interpretaciones [M] por cada *call-out* detectado, de nuevo es Marcos quien presenta unos resultados soberbios, ya que, además de mejorar en la fase 2, en ambas obtiene una media altísima, llegando a formular el mismo número de *call-outs* que de interpretaciones [M] asociadas a estos en la segunda fase. Los demás MTE empeoran, excepto Lucas y Raquel, siendo la evolución de esta la más grande —influida, en parte, por ser quien menos eventos relevantes detectó en este vídeo—.

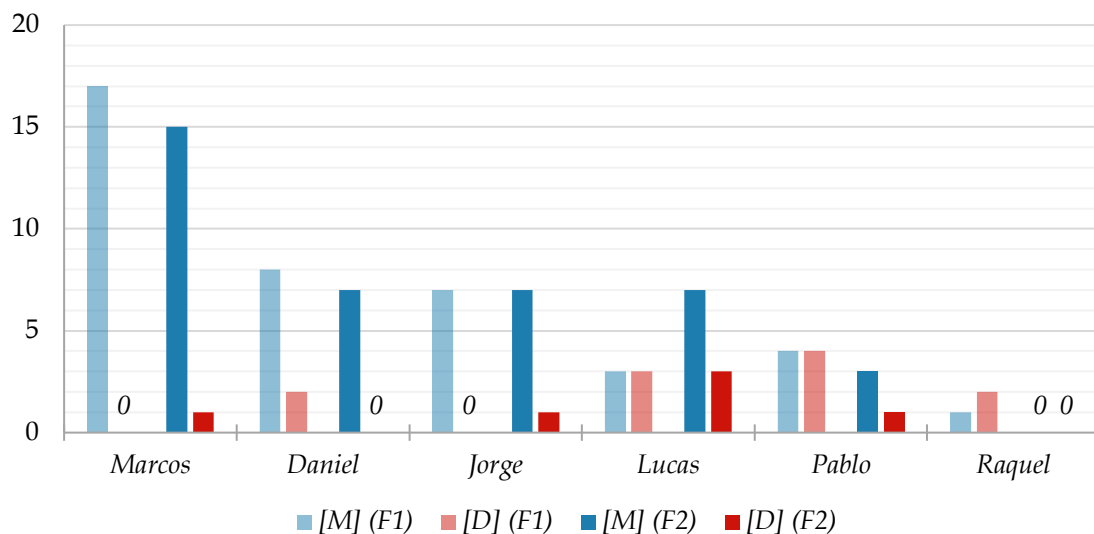
Figura 4.81. Número medio de interpretaciones matemáticas referidas a *call-outs* por cada *call-out* identificado: vídeo 1, fases 1 y 2.



Vídeo 2

En el segundo vídeo, las interpretaciones que aluden a *call-outs* aportadas por cada formador se distribuyen en las categorías [M] y [D] de la manera recogida en la figura que se presenta a continuación:

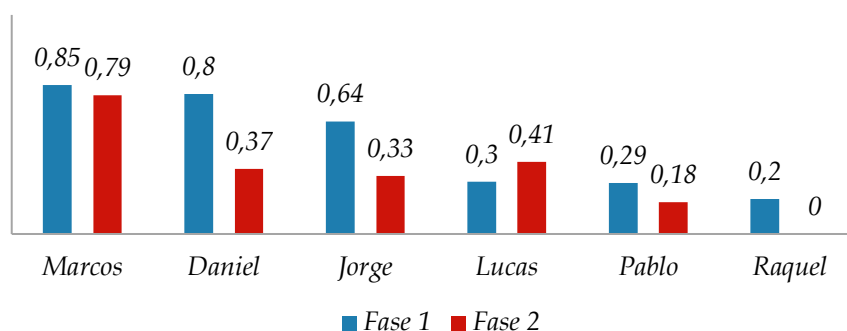
Figura 4.82. Interpretaciones referidas a *call-outs* clasificadas en las categorías matemática y didáctica: vídeo 2, fases 1 y 2.



Como se puede comprobar, la proporción de interpretaciones [D] es en casi todos los casos menor que la de las interpretaciones [M], con la excepción de los datos de Lucas, Pablo y Raquel en la fase 1, si bien su presencia no se reduce de una fase a otra para varios sujetos — Marcos, Jorge y Lucas —, al contrario de lo que ocurría en el vídeo previo, en el que su aparición disminuía en la segunda fase para todos los sujetos. No obstante, no hay participantes que en la fase 2 propongan más interpretaciones [D] que [M] — cabe señalar que Raquel no propone interpretación alguna en dicha fase, a pesar de la inducción dada en ella, lo que podría deberse a su menor formación en matemáticas —. Por otro lado, con relación a las interpretaciones [M], solo aumentan entre fases para Lucas, manteniéndose iguales o disminuyendo para los demás MTE, si bien — como hemos dicho — su presencia es mayor que la de las interpretaciones [D] en general. Asimismo, al igual que en el vídeo anterior, destacan los resultados de Marcos, aunque en este vídeo la distancia con el resto de formadores es algo menor.

En cuanto al número medio de interpretaciones [M] por cada *call-out* detectado, se aprecia en el siguiente gráfico que todos los docentes, a excepción de Lucas, tienen peores resultados la segunda vez que visionan este vídeo, resultando muy llamativo el descenso de Daniel y de Jorge por la amplitud del mismo, más aún cuando el contenido matemático presente en este vídeo es el más potente de las tres grabaciones y estos MTE son los únicos doctores en matemáticas del grupo. Asimismo, derivado del valor de la figura anterior, es sorprendente la media de cero obtenida por la maestra en la fase 2. Por último, incidimos en la actuación de Marcos, quien, además de alcanzar valores muy elevados, es capaz de mantenerlos similares en ambas fases, demostrando su capacidad para interpretar desde una perspectiva matemática lo que detecta.

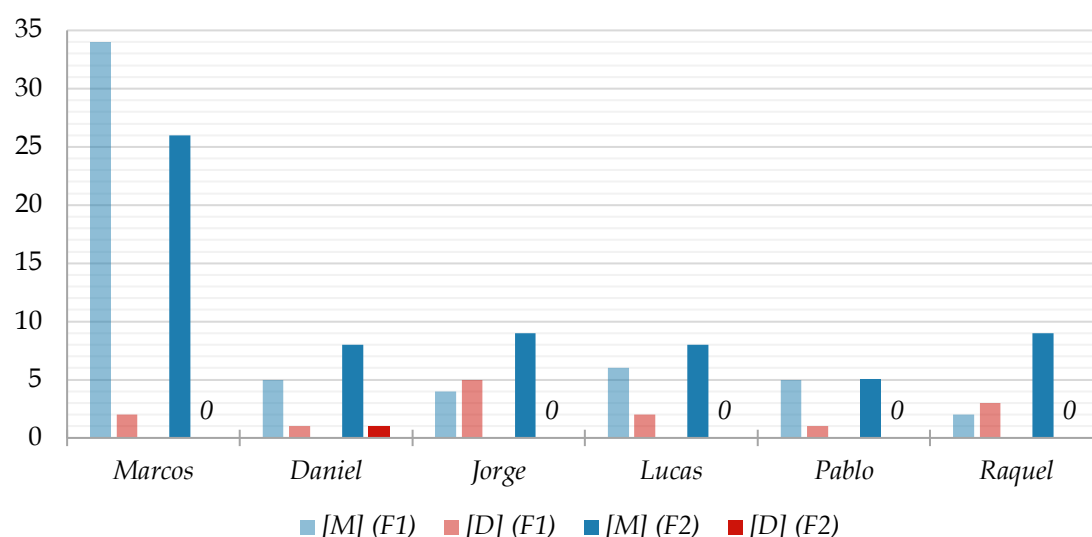
Figura 4.83. Número medio de interpretaciones matemáticas referidas a *call-outs* por cada *call-out* identificado: vídeo 2, fases 1 y 2.



Vídeo 3

En el tercer vídeo, las interpretaciones que se refieren a algún *call-out* aportadas por cada formador se distribuyen en las categorías [M] y [D] de la manera que se plantea en la siguiente figura:

Figura 4.84. Interpretaciones referidas a *call-outs* clasificadas en las categorías matemática y didáctica: vídeo 3, fases 1 y 2.

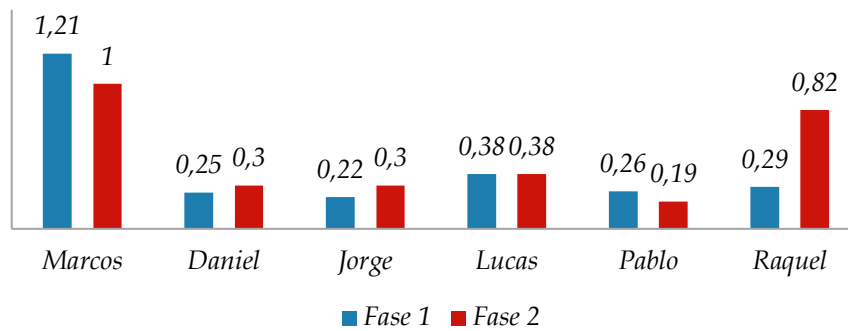


Como se puede apreciar en el gráfico, existe una mejora clara para todos los sujetos de una fase a otra en lo que respecta a las interpretaciones [D], pues en todos los casos se reducen — menos para Daniel, ya que no cambia —, desapareciendo para cinco de los seis participantes — apareciendo solo una para Daniel —. En cuanto a las interpretaciones [M], aumentan para todos menos para Marcos — que pierde 8 — y para Pablo — que mantiene el mismo número —. Por tanto, la evolución en este sentido es muy favorable de una fase a otra en términos generales. Lo más relevante de esta gráfica es, por un lado, la evolución de Raquel, que es la mayor con relación a las interpretaciones [M] — un aumento de 7 —, y, por otro, la ingente cantidad de interpretaciones [M] asociadas a *call-outs* que, tanto en la primera como en la segunda fase, aporta Marcos. Aunque es el único MTE que obtiene un peor resultado en un segundo momento, esto no empaña su extraordinaria actuación al interpretar el tercer vídeo.

En cuanto al número medio de interpretaciones [M] por cada *call-out* detectado, se comprueba que, de nuevo, algunos formadores mejoran, otros se mantienen igual y otros empeoran de una fase a otra. A este respecto, lo más destacable es la amplísima evolución

de Raquel –potenciada, en parte, por el bajo número de eventos relevantes identificados, como ya hemos mencionado en varias ocasiones–, que pasa de aportar de media menos de tres interpretaciones [M] por cada decena de *call-outs* vistos a más de ocho, así como el espectacular resultado de Marcos, capaz de aportar más interpretaciones [M] que eventos relevantes detectados en la primera fase y el mismo número de ambos en la segunda, lo que es de todo punto asombroso.

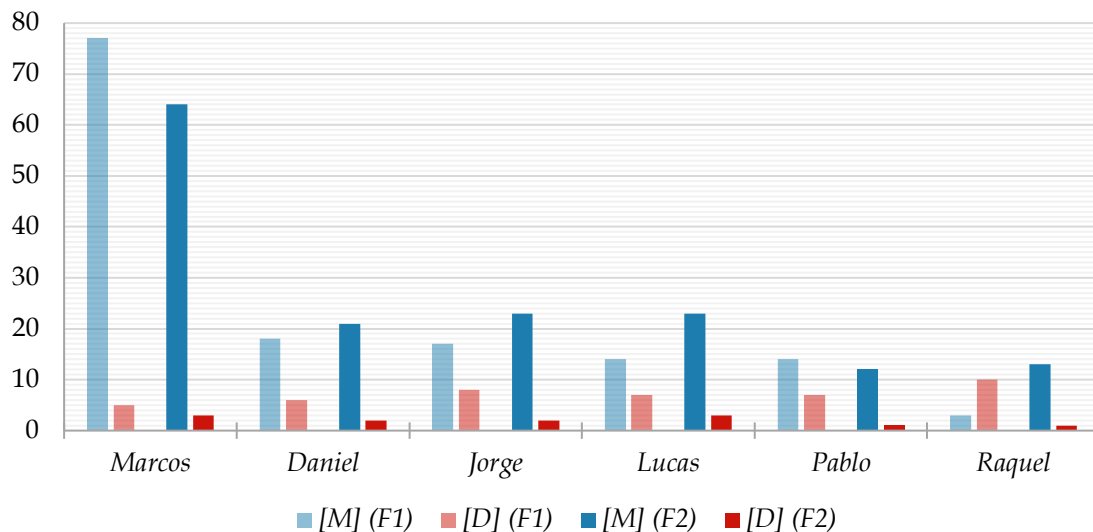
Figura 4.85. Número medio de interpretaciones matemáticas referidas a *call-outs* por cada *call-out* identificado: vídeo 3, fases 1 y 2.



Conjunto de todos los vídeos

En los tres vídeos en conjunto, las interpretaciones referidas a *call-outs* aportadas por cada MTE se distribuyen en las categorías [M] y [D] de la manera que se plantea en el siguiente gráfico:

Figura 4.86. Interpretaciones referidas a *call-outs* clasificadas en las categorías matemática y didáctica: todos los vídeos, fases 1 y 2.



Como se puede ver, la presencia de interpretaciones [D] ha disminuido para todos los sujetos de una fase a otra, siendo menor siempre que la de las interpretaciones [M], a excepción del caso de la maestra en la fase 1. En cuanto a las interpretaciones [M], menos para Marcos y Pablo, han aumentado de la primera a la segunda fase. De nuevo, como es ya habitual en este eje, cabe destacar los resultados de Marcos, pues son mucho más altos que los de los demás MTE, lo que pone de relieve su mayor actitud interpretativa.

En cuanto a la proporción que suponen las interpretaciones [M] y [D] —referidas a *call-outs*— aportadas por cada MTE en cada fase con respecto al total de interpretaciones —referidas a *call-outs*— que cada sujeto ha formulado, podemos observar los datos y las variaciones entre fases en la siguiente tabla:

Tabla 4.20. Porcentaje de interpretaciones referidas a *call-outs* en la categoría matemática y en la categoría didáctica con respecto al total de interpretaciones referidas a *call-outs*: conjunto de todos los vídeos, fases 1 y 2.

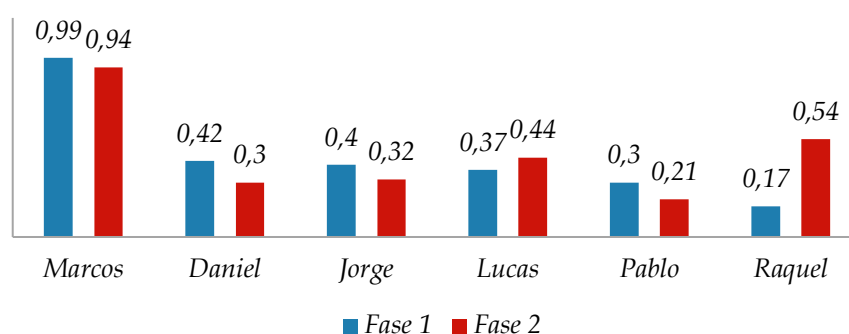
	Matemática (F1)	Matemática (F2)	Didáctica (F1)	Didáctica (F2)
Marcos	94 %	96 % + 2 %	6 %	4 % - 2 %
Daniel	75 %	91 % + 16 %	25 %	9 % - 16 %
Jorge	68 %	92 % + 24 %	32 %	8 % - 24 %
Lucas	67 %	88 % + 21 %	33 %	12 % - 21 %
Pablo	67 %	92 % + 25 %	33 %	8 % - 25 %
Raquel	23 %	93 % + 70 %	77 %	7 % - 70 %

Se comprueba que, en relación con las interpretaciones matemáticas, en la primera fase los resultados de los formadores son más heterogéneos, obteniendo Marcos un 94 % —en el extremo superior— y la maestra, por su parte, un 23 % —en el extremo inferior—, situándose los demás sujetos entre ambos, si bien más cerca de Marcos. En la segunda, se produce un aumento de los valores de todos los participantes, igualándose los valores de todos ellos en una horquilla entre el 88 % y el 96 %, manteniéndose Marcos con el mejor dato. En cuanto a las interpretaciones didácticas, los resultados son los complementarios de los anteriores y las variaciones son las mismas, pero en sentido contrario. Así pues, se

puede decir que en la primera fase los diferentes formadores partían de puntos distintos, pero han evolucionado para lograr valores bastante altos —en cuanto a lo matemático se refiere— y ubicarse en puntos cercanos entre sí en la segunda fase, otorgando una menor cabida a las interpretaciones didácticas.

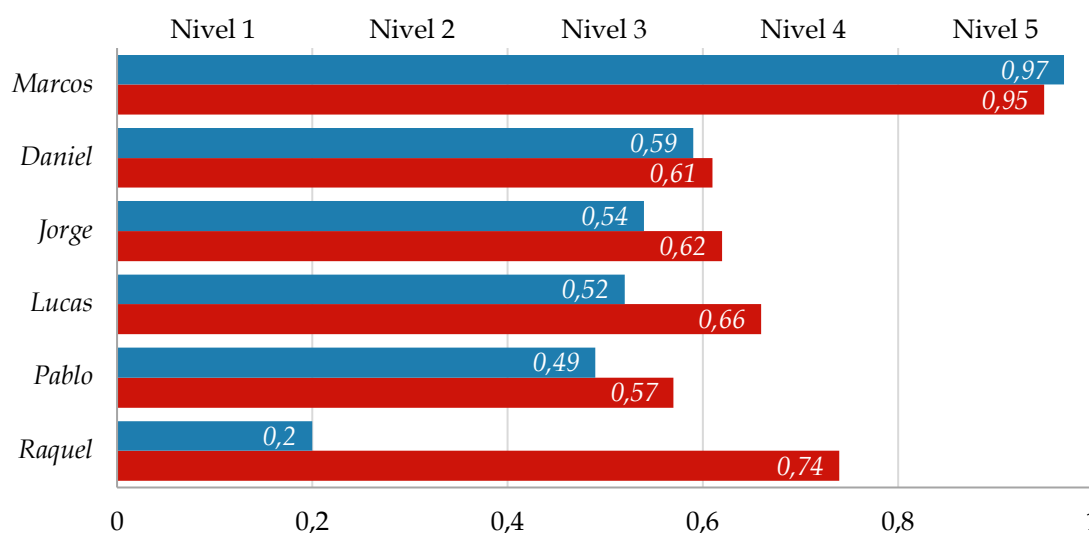
Con relación al número medio de interpretaciones [M] —referidas a *call-outs*— por cada uno de los *call-outs* explicitados, vemos que Marcos despunta enormemente, siendo capaz de formular de media casi una interpretación [M] por cada evento relevante visto, tanto en la primera como en la segunda fase. Llama también la atención la evolución que experimenta Raquel —analizada con anterioridad—, que alcanza en la segunda fase una media superior a una interpretación [M] por cada dos *call-outs* formulados, así como que los demás MTE obtengan valores tan bajos, empeorando todos ellos menos Lucas, quien aumenta en 0,07 puntos.

Figura 4.87. Número medio de interpretaciones matemáticas referidas a *call-outs* por cada *call-out* identificado: todos los vídeos, fases 1 y 2.



En cuanto al nivel de *noticing* de cada MTE en el eje 4 —fijado con base en el criterio desarrollado en el apartado 4.1.1.d de la primera fase y atendiendo a los intervalos que se plantean en la tabla 4.8—, en el siguiente gráfico se presenta la media aritmética de cada sujeto obtenida a partir del porcentaje de interpretaciones [M] sobre *call-outs* con respecto al total de interpretaciones asociadas a *call-outs* de cada MTE, así como del número medio de interpretaciones [M] referidas a *call-outs* por cada *call-out* detectado por cada formador, con respecto al conjunto de los tres vídeos en las dos fases y, además, se indica el nivel de *noticing* de cada docente en este eje:

Figura 4.88. Nivel de *noticing* de cada MTE —eje 4— en función del porcentaje de interpretaciones matemáticas referidas a *call-outs* con respecto al total de interpretaciones sobre *call-outs*, así como del número medio de interpretaciones matemáticas referidas a *call-outs* por cada *call-out* identificado: todos los vídeos, fases 1 y 2.



Como se puede apreciar, el nivel de *noticing* de los formadores mejora de una fase a otra —el de Marcos baja un poco, pero es insignificante—. En la primera fase, los sujetos se ubican en su mayoría en el nivel 3, a excepción de Raquel —en el extremo inferior del nivel 2— y de Marcos —en la parte alta del nivel 5—. La evolución que experimentan en la segunda fase es moderada, pero posibilita a Daniel, Jorge y Lucas alcanzar la parte baja del nivel 4, mientras que Pablo permanece en el nivel medio. Por su parte, la maestra es quien experimenta la evolución más espectacular de todos los formadores, resultando ser su nivel en la segunda fase casi el cuádruple del alcanzado en la primera —aunque ya se ha explicado que detectar pocos *call-outs* redundaba en una evolución mayor en este eje con formular pocas interpretaciones [M] más asociadas a los mismos, como es el caso que nos ocupa—. En cualquier caso, lo más reseñable de la figura es, una vez más, la actuación de Marcos a la hora de interpretar matemáticamente los eventos relevantes, pues la cantidad de interpretaciones matemáticas que formula es colosal y eso se refleja en su nivel en este cuarto eje. Por tanto, a tenor de los resultados podríamos albergar el pensamiento de que poseer una experiencia docente dilatada como MTE es primordial para lograr un elevado nivel de *noticing* en lo que respecta a *qué interpretan* los formadores, puesto que es en esta variable en la que se diferencia Marcos de los demás sujetos al tener una experiencia alta —más de 15 años, 39 en su caso, como ya mencionamos en ejes anteriores—. Asimismo, como se expuso en el eje 3, sería sensato sospechar que en este eje la formación académica

en didáctica de las matemáticas también podría haber influido en los datos de Marcos, ya que el paradigma de investigación en el que se basa su tesis doctoral requiere usualmente de realizar interpretaciones acerca de situaciones de aula, lo que ha podido ayudarle para obtener los extraordinarios resultados que hemos analizado.

En resumen, el nivel de *noticing* de los formadores en el eje 4, es decir, su nivel en cuanto a *cómo interpretan*, es el que se recoge en esta tabla:

Tabla 4.21. Nivel de *noticing* de cada MTE en el eje 4 [*¿cómo interpretan?*]: conjunto de todos los vídeos, fases 1 y 2.

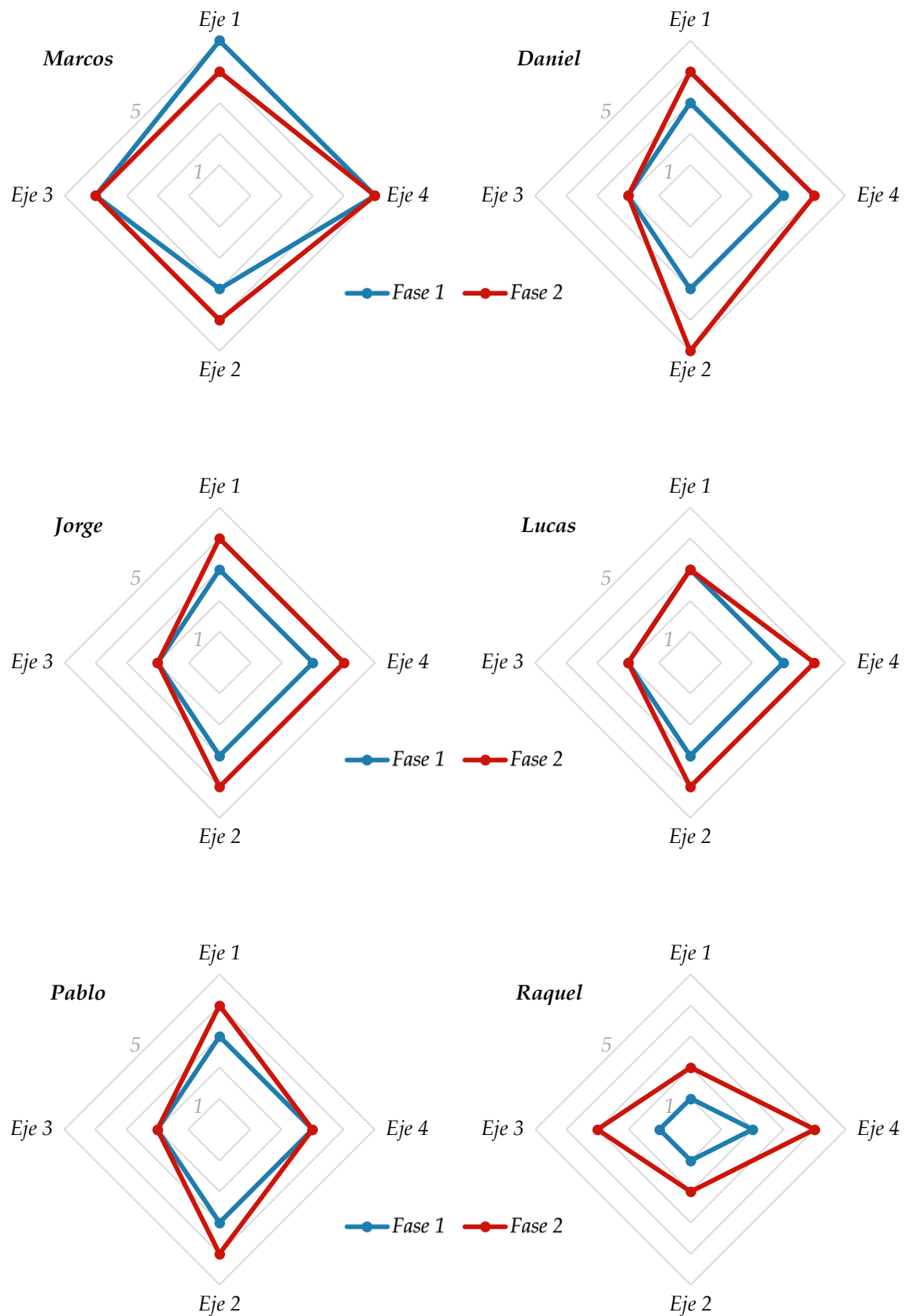
	Marcos	Daniel	Jorge	Lucas	Pablo	Raquel
Nivel (F1)	Alto	Medio	Medio	Medio	Medio	Medio-bajo
Nivel (F2)	Alto	Medio-alto	Medio-alto	Medio-alto	Medio	Medio-alto
Variación en el nivel	=	+ 1 nivel	+ 1 nivel	+ 1 nivel	=	+ 2 niveles
	- 0.02 %	+ 0.02	+ 0.08	+ 0.14	+ 0.08	+ 0.54

Se constata que el margen de mejora es todavía posible para casi todos los sujetos, aunque la mayoría logra niveles notables tras visionar los vídeos por segunda vez, siendo Pablo quien más margen de mejora tiene todavía. En cuanto a la maestra, ha mejorado en 0,54 puntos, un total de dos niveles — casi 3 —, pero, si bien es la mayor evolución de todo el grupo, es necesario interpretarla con cautela, tal y como hemos comentado antes. Quien ya no tiene margen de mejora es Marcos, que toca techo, situándose en ambas fases en la parte superior del nivel alto, lo que sin duda es — a riesgo de resultar reiterativos — causa de admiración.

4.1.3.e. Síntesis de los niveles de los formadores en los ejes de cada fase

Tras haber analizado desde una perspectiva numérica los cambios en los datos de todos los formadores de la primera a la segunda fase en cada uno de los cuatro ejes — *qué notan, cómo notan, qué interpretan y cómo interpretan* —, hemos podido observar que existen diferencias — al menos a nivel cuantitativo — en el nivel de *noticing* de los MTE. Así pues, a modo de recapitulación, en la siguiente figura se plasman los niveles de cada uno de los sujetos en las dos fases de recogida de datos y en los cuatro ejes que estructuran el análisis de su competencia *noticing*:

Figura 4.89. Nivel de *noticing* de cada MTE en cada uno de los ejes que vertebran el análisis de los datos: todos los vídeos, fases 1 y 2.



Como se puede apreciar, cada formador cuenta con un gráfico en el que se recogen los niveles —del 1 al 5— de cada eje en cada fase. Los ejes 1 y 2 —relativos a eventos— se han dispuesto en la vertical del gráfico, mientras que en su horizontal se han ubicado los ejes 3 y 4 —relativos a interpretaciones—. De este modo, se pretende facilitar la lectura de los datos de un vistazo, de tal manera que el *noticing* del MTE estará más desarrollado en cuanto a los ejes de los eventos cuanto más altura tenga la figura que dibujan las rectas y, en relación con los ejes de las interpretaciones, hará lo propio cuanto más anchura tenga la figura. Así pues, observando la silueta obtenida por cada docente, es fácil advertir que hay dos que son bastante diferentes de las demás: la de Marcos y la de Raquel.

En relación con los resultados de Marcos, es el único que alcanza en ambas fases y en todos los ejes al menos el nivel 4 —exceptuando el eje 2 de la fase 1, con un nivel 3—. Respecto a los eventos, en la fase 1 presenta claramente la figura más alta de todas, puesto que solo él llega al nivel 5 en el eje 1, situándose en el 4 en el eje 2 —como los demás MTE, menos Raquel—; y en la fase 2 su altura es la mayor, junto con la de Jorge y Pablo —en un nivel 4 tanto en el eje 1 como en el eje 2—, solo después de la de Daniel, quien en el eje 2 consigue alcanzar el nivel 5. Por tanto, en el conjunto de ambas fases, al mirar la figura de Marcos, se comprueba que tiene la mayor altura de todas. Respecto a las interpretaciones, también presenta la mayor anchuras de todas, pues ningún otro MTE obtiene sus niveles ni en el eje 3 —nivel 4 en ambas fases— ni en el eje 4 —nivel 5 en ambas fases—. Por tanto, se puede concluir que el nivel de *noticing* de Marcos es, en términos generales y desde un punto de vista numérico, el mayor de todos los participantes, despuntando sobre todo en los ejes sobre interpretaciones.

En lo referido a los resultados de Raquel, es la MTE que tiene los valores más bajos en todos los ejes de la fase 1 y en los ejes 1 y 2 de la fase 2. Respecto a los eventos, tanto en la primera fase como en la segunda esboza la figura con menos altura de todas, situándose en el nivel 1 en la fase 1 en ambos ejes y en el nivel 2 en la fase 2 en ambos ejes. Por tanto, su competencia *noticing* en relación con los eventos es —numéricamente— la que tiene un margen de mejora más alto. Respecto a las interpretaciones, la anchura de su figura es la menor de todas en la fase 1 —con el eje 3 en el nivel 1 y el eje 4 en el nivel 2—, pero cambia la situación en la fase 2, en la cual la anchura perfilada crece y pasa a ser la segunda más ancha del grupo, solo por detrás de Marcos. Por tanto, su nivel de *noticing* en cuanto a las interpretaciones evoluciona bastante, aunque aún puede seguir progresando.

Con respecto a los demás participantes, podemos ver que sus figuras son bastante similares entre sí. En la primera fase son idénticas y en la segunda tienen varios aspectos en común, como, por ejemplo, que todos se posicionan en un nivel medio-bajo en el eje 3. En el resto de ejes, coinciden Daniel, Jorge y Pablo en el eje 1 – nivel 4 –, Jorge, Lucas y Pablo en el eje 2 – nivel 4 – y, por último, Daniel, Jorge y Lucas en el eje 3 – nivel 4 –. De todos ellos, quien plasma una figura más alta es Daniel – único que llega al nivel 5 en el eje 2 –, quien tiene también la más ancha, junto con Jorge y Lucas.

Cabe decir que estos gráficos solamente pretenden servir de ayuda para, a simple vista, poder tener una idea más o menos fidedigna del nivel de *noticing* de cada sujeto en cada fase y eje, pero no hay que olvidar que no recogen las diferencias que dentro de cada nivel existen entre los formadores, siendo posible, por ejemplo, que la distancia en un eje dado entre el nivel de dos participantes sea mayor entre dos sujetos ubicados en el mismo nivel que entre dos sujetos situados en niveles consecutivos. No obstante, es información que se suele perder cuando se realiza una clasificación por niveles, pudiendo acudir a los datos presentados y examinados en las páginas previas para advertir los distintos matices oportunos en cada caso.

En definitiva, atendiendo a los análisis efectuados a lo largo de este capítulo, vemos que el *noticing* de cada formador es diferente, que no por el hecho de ser formadores todos tienen el mismo nivel de competencia, que posiblemente las diferencias que presentan en cuanto a formación académica y experiencia docente influyen en su *noticing* – como se ha comentado en cada eje al estudiar la evolución de la fase 1 a la fase 2 –. Así pues, a tenor de los resultados, así como atendiendo a los perfiles profesionales de cada sujeto – vistos en el capítulo 3 de este trabajo –, se justifica un análisis cualitativo, que permitirá ahondar detenidamente en otros aspectos sobre la competencia objeto de esta investigación, sobre tres de los MTE, a saber: Marcos, Daniel y Raquel. Estos formadores presentan resultados en los análisis llevados a cabo muy dispares y, además, poseen una formación académica y una experiencia docente también diferentes. Asimismo, cabe precisar en relación con la elección de Daniel que, además de por su perfil profesional, se ha optado por él por tener los mejores resultados, en su conjunto, de entre los sujetos que se sitúan entre la figura de Marcos y la de Raquel.

Por último, es importante señalar que, viendo los gráficos previos, es patente que la competencia *noticing* de los formadores ha evolucionado positivamente de la primera a

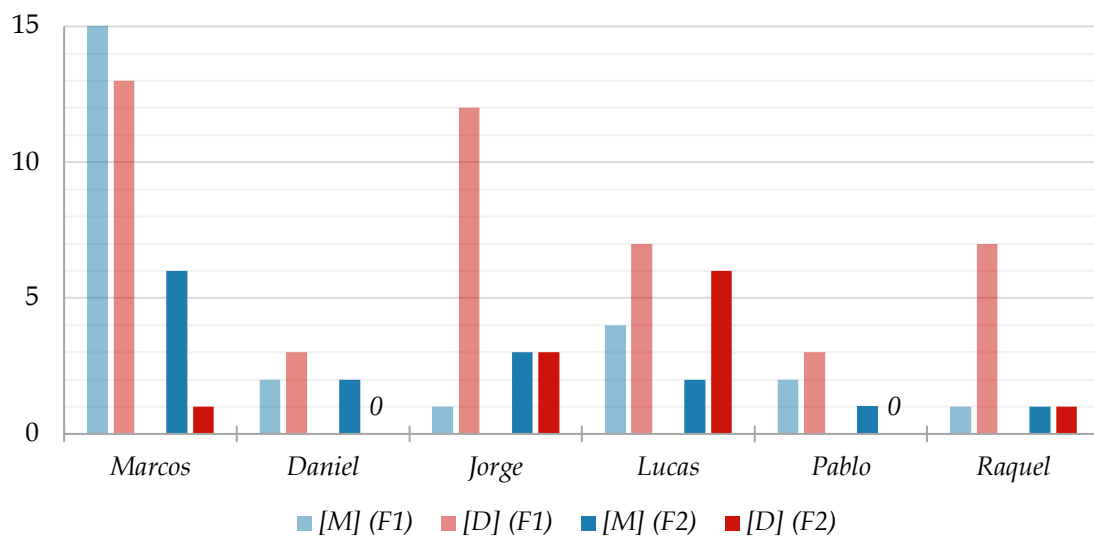
la segunda fase en líneas generales, sobre todo en los ejes acerca de eventos, todo ello con una mínima inducción dada a los sujetos en la segunda fase, lo que da cuenta de, por un lado, la factibilidad de perfeccionar el *noticing* y, por otro, la capacidad de los formadores de mejorar incluso sin haber sido sometidos a una intervención diseñada para para lograr tal efecto. No obstante, además de la inducción en la segunda fase, otras variables, como, por ejemplo, haber visionado las mismas grabaciones de vídeo en las dos fases —aunque entre ambas haya transcurrido más de un año—, pueden haber tenido también algún tipo de influencia en la evolución de los datos.

4.1.4. Eventos e interpretaciones no referidos a *call-outs*

Tras haber estudiado los eventos y las interpretaciones —referidos a *call-outs*— que cada formador ha formulado en cada fase del diseño de investigación, en este apartado se presenta y se comenta, de un modo totalmente sinóptico, la información sobre los eventos e interpretaciones no referidos a *call-outs* que han aportado, atendiendo al conjunto de los vídeos en ambas fases, desde un punto de vista cuantitativo.

Conjunto de todos los vídeos

Figura 4.90. Eventos no referidos a *call-outs* en las categorías matemática y didáctica: todos los vídeos, fases 1 y 2.



Como se puede apreciar en el gráfico anterior, en la primera fase fueron bastantes los eventos didácticos —no centrados en aspectos matemáticos o didáctico-matemáticos— explicitados por los MTE, sobre todo por Marcos, Jorge, Lucas y Raquel. No obstante, en la segunda fase prácticamente desaparecieron —excepto en el caso de Lucas, quien siguió formulando eventos de dicho tipo—. Por tanto, parece que la inducción planteada en la segunda fase repercutió en que, además de centrarse más en lo matemático —como hemos visto en las páginas previas—, dejaran a un lado los aspectos de otra clase. Asimismo, en cuanto a los eventos matemáticos no referidos a *call-outs* —centrados en las matemáticas, pero no incluidos en la lista de eventos relevantes por no considerarlos en el estudio como tales—, en ambas fases no son demasiado numerosos, excepto para Marcos, que, además de centrarse en identificar *call-outs* —como ya hemos expuesto—, presta también atención con cierto interés a otros eventos con contenido matemático o didáctico-matemático que, en principio, son menos relevantes, si bien reduce dicho número a menos de la mitad en la segunda fase.

Los valores previos, para poder darles significado adecuadamente, se plasman en la siguiente tabla en relación con el número total de eventos —*call-outs* y no *call-outs*— que cada formador ha identificado en cada fase en términos porcentuales:

Tabla 4.22. Porcentaje de eventos no referidos a *call-outs* en las categorías matemática y didáctica con respecto al total de eventos formulados: todos los vídeos, fases 1 y 2.

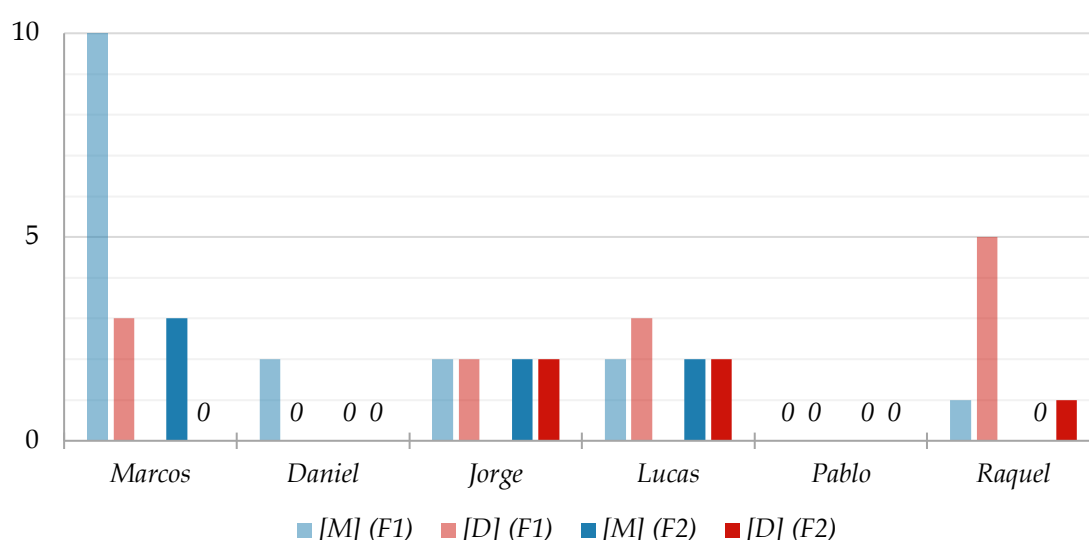
	Matemática (F1)	Matemática (F2)	Didáctica (F1)	Didáctica (F2)
Marcos	14 %	8 %	12 %	1 %
Daniel	4 %	3 %	6 %	0 %
Jorge	2 %	4 %	22 %	4 %
Lucas	8 %	3 %	14 %	10 %
Pablo	4 %	2 %	6 %	0 %
Raquel	4 %	4 %	27 %	4 %

En lo que concierne a los eventos matemáticos no referidos a *call-outs*, vemos que para Marcos suponen un 14 % del total de eventos formulados en la fase 1 y un 8 % en la fase 2, siendo en ambas fases quien obtiene, con diferencia, los porcentajes más altos, por lo que podemos afirmar que no centra su atención únicamente en los eventos relevantes, sino que otros eventos matemáticos tienen también peso en su *noticing*. Y en lo referido a los eventos didácticos, en la primera fase destacan Raquel y Jorge, con un 27 % y un 22 %, respectivamente.

respectivamente, lo que pone de manifiesto su interés por aspectos extramatemáticos que suceden en el aula. Ya en la segunda fase, la inducción provista hace que todos dejen a un lado, en gran medida, este tipo de eventos, excepto Lucas, para quien estos suponen aún un 10 % de todo lo que detecta en los vídeos.

En cuanto a las interpretaciones no referidas a *call-outs*, estas tienen una presencia menor que los eventos no referidos a *call-outs* —como cabría esperar—. Los únicos datos que merece la pena mencionar son, por un lado, el número de interpretaciones [M] hechas por Marcos en la fase 1 y, por otro, el número de interpretaciones [D] hechas por Raquel en la misma fase, en ambos casos por estar por encima del resto de valores, como se ve en la siguiente figura:

Figura 4.91. Interpretaciones no referidas a *call-outs* en las categorías matemática y didáctica: todos los vídeos, fases 1 y 2.



En definitiva, simplemente se ha querido informar de estos datos para que el lector tenga una visión más amplia del contexto en el que se ha realizado el análisis cuantitativo de las páginas precedentes, así como para reforzar la idea de que la inducción provista en la fase 2 ha tenido un efecto notable, centrando la atención en lo matemático.

Después de haber desarrollado a lo largo de una cantidad considerable de páginas —por el gran espacio que ocupan tanto gráficos como tablas— el análisis cuantitativo de los datos, a continuación se procede a exponer el análisis cualitativo realizado.

4.2. Análisis cualitativo con 3 MTE

En este segundo bloque de análisis, se presenta el examen cualitativo de los datos recopilados acerca de tres participantes en las dos fases de recogida de información sobre su *noticing* —espontáneo e inducido, respectivamente—, así como la evolución existente entre ambas, atendiendo a los cuatro ejes descritos en el capítulo previo que vertebran el tratamiento de los datos y en relación con los tres vídeos comentados por los formadores. Finalmente, se comentan las respuestas que cada uno de los tres MTE dio en las entrevistas que se realizaron, enfocadas a despejar posibles dudas sobre los resultados de las distintas fases y a confirmar o refutar las explicaciones que aportamos acerca de ellos a lo largo del trabajo, y, asimismo, se tratan de manera concisa los eventos e interpretaciones que no se refieren a *call-outs*.

Cabe recordar brevemente el contenido matemático de los vídeos —se dispone del contenido íntegro en las transcripciones del Anexo 2 y de un resumen más completo en el apartado 3.4.1.a—: el primero incide en el conteo y en el sistema de numeración decimal, el segundo aborda los cambios de base y en el tercero de ellos se pone el foco en el proceso de las operaciones con estructura aditiva mediante la utilización de distintos registros de representación. Resulta conveniente tener presente tanto esta información como el perfil de los sujetos relativo a su formación académica y experiencia docente —que se desarrolla en el apartado 3.3— durante la lectura del análisis cualitativo.

Por otro lado, si bien en este apartado abordamos la información de los cuatro ejes del diseño de investigación, nos centramos principalmente en aquellos que depositan su preocupación en el *cómo* —ejes 2 y 4— y, de estos, sobre todo en *cómo interpretan* —eje 4—, pues estimamos que la información que en ellos encontramos tiene especial interés frente a la de los ejes que se ocupan del *qué* —ejes 1 y 3—, al menos cualitativamente. Por tanto, aunque se tratará la información de los ejes impares, se hará de un modo sucinto para así poder focalizar los esfuerzos en los pares —primordialmente en el último de ellos—.

En definitiva, el propósito del análisis cualitativo es escrutar la información de la que se dispone sobre los tres formadores seleccionados para comprender mejor cómo es la competencia *noticing* de los MTE.

4.2.1. Fase 1. *Noticing* espontáneo

Se presenta a continuación el análisis cualitativo de los datos de tres participantes, en paralelo, relativos a su *noticing* espontáneo, es decir, al manifestado en los formadores a raíz de un *open-ended video viewing support*. Dichos datos han sido extraídos del Anexo 18 —explicado en el capítulo 3—, en el que encontramos los eventos e interpretaciones de la fase 1 de todos los sujetos, integrados en la transcripción de los vídeos tras el *call-out* al que cada uno se refiere —cuando es el caso—, así como etiquetados y codificados. Si bien en otros anexos también se contempla información relacionada con este bloque —análisis cualitativo—, es el citado documento el único que reúne todo el contenido necesario para la labor que nos ocupa en esta primera fase.

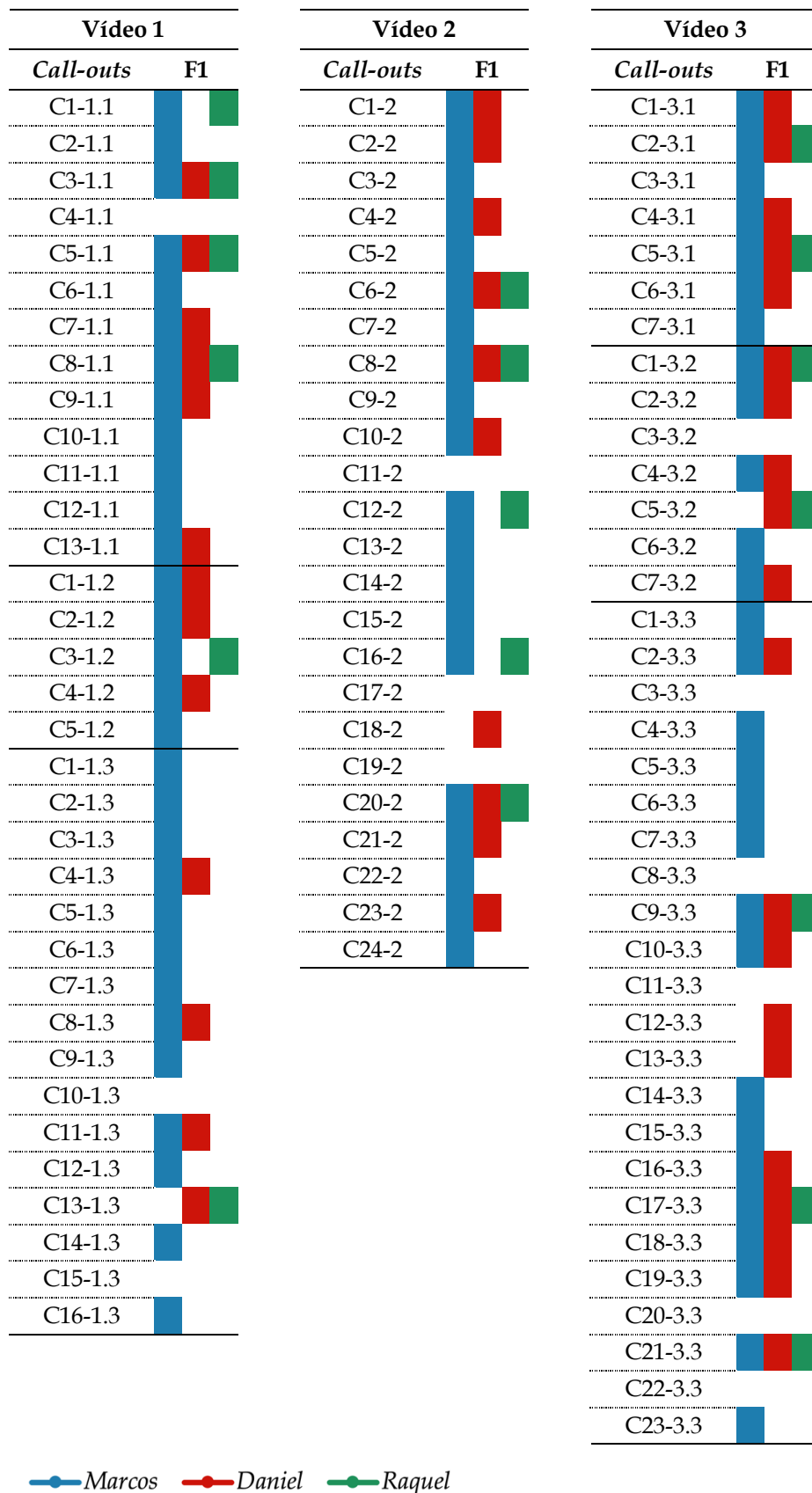
4.2.1.a. Eje 1. *Eventos: ¿qué notan?*

En este eje nos centramos ya no en determinar cuántos *call-outs* ha detectado cada formador —tal y como se ha hecho en el bloque anterior—, sino en considerar cuáles han identificado. Así pues, a continuación se examina qué eventos relevantes ha notado cada MTE en los distintos vídeos —análisis interindividual—.

No obstante, primero cabe indicar que un tratamiento diferente de la información se podría haber llevado a cabo también en el presente eje, que consistiría en examinar el contenido de los diversos eventos relevantes explicitados por cada uno de los sujetos para tratar de averiguar si existen diferencias en relación con el contenido de aquello a lo que prestan atención los participantes. Para ello, sería necesario, obviamente, que se diera en el conjunto de *call-outs* establecidos una diversidad significativa en las ideas que pudieran recoger, sobre lo cual podríamos decir —sin haber desarrollado dicha tarea en el trabajo— que es posible dar con tales diferencias entre eventos relevantes de un mismo vídeo, pero sobre todo entre *call-outs* de distintos vídeos. Con todo, tal indagación, dado que nuestro interés se dirige esencialmente a profundizar en los ejes referidos al *cómo*, se deja, por lo tanto, para futuras investigaciones acerca de los datos recogidos en esta tesis.

Así pues, en la siguiente tabla se recogen los *call-outs* vistos por Marcos, Daniel y Raquel, de forma respectiva, en cada uno de los vídeos en la primera fase:

Tabla 4.23. *Call-outs* identificados por Marcos, Daniel y Raquel –eje 1–: vídeos 1, 2 y 3, fase 1.



Además de apreciar de nuevo que Marcos es quien más eventos relevantes detecta y que Raquel es quien menos explicita —lo que ya se comprobó en la parte cuantitativa—, resulta interesante fijarse en que algunos *call-outs* no han sido identificados por ninguno de los MTE, así como en que otros han sido señalados por los tres.

En cuanto a los primeros, podemos hacer mención del C4-1.1 o del C20-3.3, ya que se trata de *call-outs* que no están presentes en otros —a diferencia de los demás que no han sido detectados, cuyas ideas sí es posible encontrarlas, de forma parcial, en otros eventos relevantes explicitados—. Tales eventos son los siguientes:

C4-1.1. *Hace alusión a conocimientos previos de Matemáticas de Ciencias Sociales: el contraste de hipótesis.*

C20-3.3. *Mantiene plasmados en paralelo los cinco registros de representación que ha empleado para realizar la suma.*

Así pues, parece que ni los conocimientos matemáticos previos de los estudiantes —futuros maestros— ni el hecho de mantener a la vez en la pizarra todos los registros de representación usados para hacer una suma —con el fin de compararlos— han recibido la atención suficiente como para ser mencionados por alguno de los tres sujetos.

Y en cuanto a los segundos, podemos aludir, por ejemplo, al C3-1.1, C5-1.1, C8-1.1, C6-2, C20-2, C2-3.1 o C21-3.3, que se enuncian así:

C3-1.1. *Contextualiza la actividad planteando que hay que comprobar si la cantidad de palillos que hay en cierta caja es la que se indica en la misma.*

C5-1.1. *Introduce la actividad a realizar: estimar y contar cuántos palillos hay repartidos en clase.*

C8-1.1. *Enuncia el objetivo de la actividad: entender el desarrollo de la escritura de los números en nuestro sistema de numeración.*

C6-2. *Plantea en la pizarra otra resolución propuesta por otro alumno, que consiste en pasar de base 16 a base 2 fijándose en que 16 es 2^4 , escribiendo la expresión de partida, que sería la expresión polinomial de B6 en base 16, así como el inicio y el final de la expresión polinomial en base 2 a la que hay que llegar.*

C20-2. *Explica la receta que podría dar un youtuber como David Calle para pasar de B6 en base 16 a base 2, que consistiría en escribir el 11 de 11×16^1 y el 6 del 6×16^0 en base 2, ambos con cuatro dígitos al ser 16 igual a 2^4 , y juntarlo.*

C2-3.1. *Explica que no quiere que los alumnos representen el resultado, sino que representen el proceso de la suma.*

C21-3.3. *Pone de manifiesto la secuenciación planteada: se parte de lo más concreto, que sería el problema dado en su contexto; luego se pasa a manipular con ábacos verticales, con ábacos japoneses y con bloques multibase; después se hace la suma en una tabla gráfica y luego en una numérica, las cuales se denominan tableros de posición; y finalmente se llega a lo más abstracto, que sería la suma simbólica con expresiones polinomiales o, en primaria, la suma simbólica tradicional, siendo el objetivo escribir finalmente el proceso de forma abstracta.*

Como podemos observar, los tres MTE han dado importancia a distintos aspectos, recogidos en los *call-outs* anteriores, como la contextualización, el enunciado y el objetivo de las tareas matemáticas, el desarrollo matemático de la resolución de un ejercicio, el uso y el entendimiento de recetas, la importancia del proceso frente al resultado o la secuencia a implementar en el aula de primaria para explicar un concepto matemático, asuntos que, independientemente del perfil profesional, han señalado los tres sujetos.

Por tanto, si bien los formadores muestran diferencias entre sí en este eje, también tienen puntos en común, tanto por no atender como por sí atender a ciertos aspectos sobre la práctica de enseñanza de la formadora de los vídeos que visionaron y comentaron.

4.2.1.b. Eje 2. Eventos: ¿cómo notan?

En este eje se examinan las evidencias textuales de cada formador que abonan los niveles —comentados antes en el bloque cuantitativo— otorgados a los eventos referidos a *call-outs* en el conjunto de los vídeos —análisis interindividual—. Por tanto, se pretende inspeccionar las diferencias existentes a la hora de explicitar los elementos fundamentales —recogidos en el Anexo 19—, para lo que nos centraremos, en particular, en *call-outs* que hayan sido detectados por los tres MTE en la primera fase. Así pues, se persigue mostrar algunos ejemplos en el cuerpo del trabajo acerca de cómo se aplica el criterio expuesto en las tablas 3.5 y 3.6 del tercer capítulo —sobre cómo establecer el nivel de un evento en el segundo eje— y, por ende, no relegar tal información exclusivamente a la sección final en la que se adjuntan los anexos.

En ocasiones, los formadores identifican un mismo *call-out* y lo explicitan con un detalle similar, situándose el evento formulado por cada cual en el mismo nivel. Algunos ejemplos de esta situación son los que siguen —se plantea el evento relevante, junto con sus elementos fundamentales, y la formulación del mismo realizada por cada sujeto—:

C6-2. *Plantea en la pizarra otra resolución propuesta por otro alumno, que consiste en pasar de base 16 a base 2 fijándose en que 16 es 2^4 , escribiendo la expresión de partida, que sería la expresión polinomial de B6 en base 16, así como el inicio y el final de la expresión polinomial en base 2 a la que hay que llegar.*

- *Relación entre la base 16 y la base 2: 16 como 2^4 .*
- *Escritura del número en base 16 y en base 2.*

M13.1-2. *Escribe el comienzo del desarrollo: escribe 11, etc., y al final escribe la primera cifra del número en base 2, la cual acompaña a 2^7 [E, 1].*

D4.1-2. *Empieza a desarrollar una idea de resolución que ha dado un alumno, permitiendo el empleo de la estrategia consistente en interpretar en base 16 la expresión dada para resolver el problema [E, 1].*

R2.1-2. *Organiza visualmente la información a los niños [a los futuros maestros] [E, 1].*

En este caso, vemos que los tres sujetos han formulado el *call-out* con un nivel 1 de precisión, por lo que —habiendo dos elementos fundamentales— o han explicitado solo uno elemento —y de forma parcial— o no han explicitado ninguno. Así pues, observamos que Marcos y Daniel indican parcialmente el segundo y que Raquel no hace mención de ninguno de ellos, razón por la que se sitúan en el nivel 1 todos los eventos formulados.

C9-3.3. *Hace ver la correspondencia que hay entre el registro de representación manipulativo, el sorobán y el simbólico-numérico, indicando que cada columna de la suma en la forma simbólica se corresponde con una varilla del ábaco y que ha colocado de forma vertical la suma para parecerse a la estructura del ábaco, teniendo así en cuenta la «posicionalidad» del sistema.*

- *Correspondencia entre la representación manipulativa y la simbólico-numérica.*
- *«Posicionalidad».*

M11.1-3.3. *Dice que lo coloca de forma vertical [la suma] para parecerse a la estructura del ábaco y ver la correspondencia entre las dos maneras, realizando la traducción entre ambas maneras de representación [E, 2].*

D2.1-3.3. *Trata de conectar la escritura del algoritmo tradicional en columna, vertical, con la representación del ábaco [E, 2].*

R1.1-3.3. *Está explicando la correspondencia entre la estructura del material manipulativo y la representación simbólica [de la operación] [E, 2].*

En este segundo ejemplo, los tres MTE expresan el evento con un nivel 2 de detalle, por lo que —al haber dos elementos fundamentales— o han explicitado los dos elementos —o bien uno de forma parcial y otro de forma completa, o bien ambos parcialmente— o han explicitado solamente uno —y de un modo completo—. Así pues, vemos que los tres docentes señalan completamente el primero y de manera parcial el segundo —al referirse a la estructura o a las columnas del ábaco—, motivo por el que se asigna el nivel 2 a todos los eventos planteados.

C2-3.1. *Explica que no quiere que los alumnos representen el resultado, sino que representen el proceso de la suma.*

- *Proceso.*

M4.1-3.1. *Dice a los alumnos que tienen que representar el proceso de la suma, no el resultado, con material manipulativo [E, 3].*

D1.2-3.1. *Pide que representen con los materiales el proceso, no el resultado [E, 3].*

R1.1-3.1. *Pide a los alumnos que se centren en el proceso de la suma [E, 3].*

En este tercer ejemplo, los tres participantes formulan el *call-out* con un nivel 3 de precisión, por lo que —al haber un solo elemento fundamental— han tenido que referirse al elemento de forma completa. Así pues, vemos que los tres han mencionado la idea que se ha fijado como fundamental —proceso— plenamente, lo que provoca que se asigne el nivel 3 a todos los eventos.

Asimismo, en otras ocasiones, los formadores detectan un mismo *call-out*, pero lo explicitan con una profundidad distinta, situándose el evento formulado por cada cual en diversos niveles. Algunos ejemplos de este escenario son los siguientes:

C8-2. *Escribe la expresión polinomial de 11 en base 2 a partir de los coeficientes que un alumno va diciendo.*

- *Expresión polinomial.*
- *Escritura en base 2.*

M19.1-2. *Llega a 1, 0, 1, 1 siguiendo las indicaciones del alumno, escribiendo también el 0×2^2 [E, 2].*

D5.1-2. *Traduce la expresión dada en una expresión con potencias de 2, en una expresión polinomial en notación binaria, desarrollando ella la parte algebraica siguiendo la idea planteada por un alumno [E, 3].*

R3.1-2. *Escribe lo que un alumno le va diciendo en voz alta cuando escribe el 11 [su desarrollo], siendo ella quien termina [E, 1].*

En este caso, los MTE se refieren al mismo evento relevante, pero cada uno de los eventos se posiciona en un nivel diferente. En el nivel más alto encontramos a Daniel, que es capaz de explicitar de un modo completo los dos elementos fundamentales — al hablar de la expresión polinomial y de la notación binaria —. Por su parte, Marcos se sitúa en el nivel 2, ya que, en este ejemplo, hace alusión a los dos elementos, pero de manera parcial en ambos casos — pues se refiere a la escritura polinomial cuando dice que escribe 0×2^2 y a la escritura en base 2 cuando dice que llega al 1, 0, 1, 1 —. Y en cuanto a Raquel, ella se queda en el nivel 1, pues no podemos considerar que aluda, ni siquiera de forma parcial, a ninguno de los elementos fundamentales.

C5-1.1. *Introduce la actividad a realizar: estimar y contar cuántos palillos hay repartidos en clase.*

- *Estimar*
- *Contar.*

M7.1-1.1. *Establece el objetivo del alumno: saber cuántos palillos hay [E, 2].*

D1.1-1.1. *Plantea la actividad [E, 1].*

R2.1-1.1. *Explica un poco en qué consiste lo que tienen que trabajar [E, 1].*

En este otro ejemplo, los tres eventos elaborados se refieren al mismo *call-out*, pero dos alcanzan el nivel inferior, mientras que a otro se le adjudica el nivel intermedio. Por un lado, los eventos de Daniel y de Raquel tienen el nivel 1 al no mencionar — ni si quiera parcialmente — ningún elemento. Y, por otro, Marcos indica uno de los dos elementos de una manera completa — al decir que hay que saber cuántos hay —, llegando al nivel 2.

C17-3.3. *Hace ver que en la nueva suma aparecen más de 10 unidades al sumar, por lo que hay que reagrupar al estar en base 10, explicándolo en cada registro de representación plasmado en la pizarra.*

- *Reagrupar.*
- *Distintos registros de representación.*

M25.1-3.3. *Indica que ahora hay que agrupar [E, 2].*

D6.2-3.3. *Hace ver que en el siguiente ejemplo ya hay que hacer reagrupamientos [E, 2].*

R2.1-3.3. *Explica otra forma, remarcando mucho sus características [E, 1].*

En este último ejemplo, dos de los eventos referidos al *call-out* se posicionan en el nivel 2 y el tercero hace lo propio en el nivel 1. Tanto Marcos como Daniel son capaces de explicitar el primer elemento fundamental de forma completa, mientras que no aluden al segundo, por lo que sus eventos reciben el nivel 2. La maestra, por su parte, no menciona ninguno de los elementos, por lo que no supera el nivel 1.

En suma, se ha querido presentar algunos casos con el ánimo de mostrar la forma en la que han sido clasificados los diferentes eventos referidos a *call-outs* en los tres niveles planteados, así como ejemplificar abreviadamente los resultados del bloque cuantitativo, en el que Marcos y Daniel presentan un nivel medio —posicionándose en la parte media del nivel 3 de un total de 5— y Raquel obtiene un nivel bajo —a las puertas del nivel 2 o medio-bajo—, y exponer que la formación matemática de los sujetos podría tener que ver con el modo de explicitar los eventos, pues se pueden percibir diferencias entre la maestra y los otros dos MTE en el léxico empleado para expresar los *call-outs*.

Si se desea examinar el resto de eventos referidos a *call-outs*, se puede consultar el Anexo 18, así como el Anexo 19 —este último para conocer los elementos fundamentales de cada evento relevante—, los cuales ya se explicaron en el tercer capítulo del trabajo.

4.2.1.c. Eje 3. Interpretaciones: ¿qué interpretan?

En este eje nos ocupamos ya no de determinar cuántos eventos referidos a *call-outs* y acompañados de al menos una interpretación matemática ha aportado cada uno de los formadores en los distintos vídeos —análisis interindividual—, tal y como se ha hecho en el bloque anterior, sino de considerar cuáles son aquellos *call-outs* acerca de los que se ha expresado alguna interpretación matemática. Así pues, en la siguiente tabla se muestran los *call-outs* identificados por Marcos, Daniel y Raquel, de forma respectiva y en cada uno de los vídeos en la fase 1, sobre los que han verbalizado alguna interpretación [M]:

Tabla 4.24. *Call-outs* identificados por Marcos, Daniel y Raquel acompañados de al menos una interpretación matemática –eje 3–: vídeos 1, 2 y 3, fase 1.

Vídeo 1		Vídeo 2		Vídeo 3	
<i>Call-outs</i>	F1	<i>Call-outs</i>	F1	<i>Call-outs</i>	F1
C1-1.1		C1-2		C1-3.1	
C2-1.1		C2-2		C2-3.1	  
C3-1.1		C3-2		C3-3.1	
C4-1.1		C4-2		C4-3.1	
C5-1.1		C5-2		C5-3.1	
C6-1.1		C6-2		C6-3.1	
C7-1.1		C7-2		C7-3.1	
C8-1.1		C8-2		C1-3.2	 
C9-1.1	 	C9-2	 	C2-3.2	
C10-1.1		C10-2	 	C3-3.2	
C11-1.1		C11-2		C4-3.2	
C12-1.1		C12-2		C5-3.2	
C13-1.1		C13-2		C6-3.2	
C1-1.2		C14-2		C7-3.2	
C2-1.2		C15-2		C1-3.3	
C3-1.2		C16-2		C2-3.3	 
C4-1.2	 	C17-2		C3-3.3	
C5-1.2		C18-2		C4-3.3	
C1-1.3		C19-2		C5-3.3	
C2-1.3		C20-2		C6-3.3	
C3-1.3		C21-2	 	C7-3.3	
C4-1.3		C22-2		C8-3.3	
C5-1.3		C23-2	 	C9-3.3	 
C6-1.3		C24-2		C10-3.3	
C7-1.3				C11-3.3	
C8-1.3				C12-3.3	
C9-1.3				C13-3.3	
C10-1.3				C14-3.3	
C11-1.3	 			C15-3.3	
C12-1.3	 			C16-3.3	
C13-1.3				C17-3.3	
C14-1.3				C18-3.3	
C15-1.3				C19-3.3	
C16-1.3				C20-3.3	
				C21-3.3	 
				C22-3.3	
				C23-3.3	

 Marcos  Daniel  Raquel

Cabe decir, antes de comentar brevemente la información, que, al igual que en el eje 1, se podría examinar el contenido de los diversos eventos relevantes explicitados por cada uno de los formadores para tratar de averiguar si existen diferencias en relación con el contenido de —en este caso— aquello sobre lo que deciden manifestar interpretaciones matemáticas. Empero, dado que nuestro interés se dirige esencialmente a profundizar en los ejes referidos al *cómo*, se deja la posibilidad citada para futuras investigaciones acerca de los datos recogidos en esta tesis.

Además de apreciar de nuevo que Marcos es quien más eventos relevantes detecta acompañándolos de al menos una interpretación [M], con diferencia, y que la maestra es quien menos —lo que ya se mencionó en la parte cuantitativa—, resulta interesante fijarse ahora en cómo se distribuyen las interpretaciones en los *call-outs* que fueron identificados por los tres formadores —para lo que es menester cruzar los datos de esta tabla con la del eje 1, es decir, con la tabla 4.23—. En este sentido, algunos de dichos *call-outs* no han sido interpretados matemáticamente por ningún MTE, otro —solo uno—, por el contrario, ha recibido interpretaciones [M] de todos los sujetos y otros han recibido la atención de uno o dos formadores a la hora de aportar al menos una interpretación matemática.

Con relación al primer grupo, este lo conforman el C3-1.1, C8-1.1 y C20-2, que se enuncian de esta manera:

C3-1.1. *Contextualiza la actividad planteando que hay que comprobar si la cantidad de palillos que hay en cierta caja es la que se indica en la misma.*

C8-1.1. *Enuncia el objetivo de la actividad: entender el desarrollo de la escritura de los números en nuestro sistema de numeración.*

C20-2. *Explica la receta que podría dar un youtuber como David Calle para pasar de B6 en base 16 a base 2, que consistiría en escribir el 11 de 11×16^1 y el 6 del 6×16^0 en base 2, ambos con cuatro dígitos al ser 16 igual a 2^4 , y juntarlo.*

Por lo tanto, parece que, si bien la contextualización y el objetivo de las actividades matemáticas, así como el entendimiento de recetas, son asuntos relevantes para todos los MTE —pues los tres han explicitado los eventos que versan sobre tales temas—, no lo son tanto a la hora de detenerse a explicarlos o reflexionar sobre los mismos desde un enfoque matemático, pues ninguno de los tres formadores ha aportado interpretación matemática alguna acerca de ellos.

En lo que respecta al segundo grupo, este lo integra un único evento relevante, el C2-3.1, que queda redactado como sigue:

C2-3.1. *Explica que no quiere que los alumnos representen el resultado, sino que representen el proceso de la suma.*

Así pues, parece que, independientemente del perfil profesional de los MTE —de su formación y experiencia—, todos ellos estiman de gran importancia el hecho de incidir en los procesos en matemáticas, con la relevancia que esto tiene frente a la mera obtención de resultados.

En el último grupo de eventos relevantes —que han recibido interpretaciones [M] por parte de alguno de los MTE, pero no de todos ellos—, encontramos *call-outs* que han sido interpretados matemáticamente solo por Marcos —C5-1.1, C6-2, C5-3.1 y C17-3.3—, por Marcos y Daniel —C8-2, C1-3.2 y C21-3.3— o por Marcos y Raquel —C9-3.3— y cuya formulación es la siguiente:

C5-1.1. *Introduce la actividad a realizar: estimar y contar cuántos palillos hay repartidos en clase.*

C6-2. *Plantea en la pizarra otra resolución propuesta por otro alumno, que consiste en pasar de base 16 a base 2 fijándose en que 16 es 2^4 , escribiendo la expresión de partida, que sería la expresión polinomial de B6 en base 16, así como el inicio y el final de la expresión polinomial en base 2 a la que hay que llegar.*

C5-3.1. *Pide a los alumnos que realicen una representación tabular de las operaciones como ellos quieran, teniendo en cuenta que puede tener características gráficas o características simbólicas.*

C17-3.3. *Hace ver que en la nueva suma aparecen más de 10 unidades al sumar, por lo que hay que reagrupar al estar en base 10, explicándolo en cada registro de representación plasmado en la pizarra.*

C8-2. *Escribe la expresión polinomial de 11 en base 2 a partir de los coeficientes que un alumno va diciendo.*

C1-3.2. *Pregunta varias veces cómo pueden representar el número 700 de otra forma en el ábaco, haciendo ver que tenían 704, que ella ha quitado 4 unidades y que ahora tienen que representar el número 700 de otro modo para poder quitar otra cuenta y restar 5 unidades.*

C21-3.3. *Pone de manifiesto la secuenciación planteada: se parte de lo más concreto, que sería el problema dado en su contexto; luego se pasa a manipular con ábacos verticales, con ábacos japoneses y con bloques multibase; después se hace la suma en una tabla gráfica y luego en una numérica, las cuales se denominan tableros de posición; y finalmente se llega a lo más abstracto, que sería la suma simbólica con expresiones polinomiales o, en primaria, la suma simbólica tradicional, siendo el objetivo escribir finalmente el proceso de forma abstracta.*

C9-3.3. *Hace ver la correspondencia que hay entre el registro de representación manipulativo, el sorobán y el simbólico-numérico, indicando que cada columna de la suma en la forma simbólica se corresponde con una varilla del ábaco y que ha colocado de forma vertical la suma para parecerse a la estructura del ábaco, teniendo así en cuenta la «posicionalidad» del sistema.*

Como se puede comprobar, Marcos se preocupa por aportar interpretaciones [M] sobre el enunciado de tareas matemáticas, el desarrollo matemático de su resolución, las características de la representación tabular, los procesos de reagrupación que tienen lugar en base 10, las expresiones polinomiales en cierta base, la representación de números en el ábaco, la secuencia a usar en el aula de primaria para explicar un concepto matemático y la correspondencia entre dos registros de representación, mientras que Daniel solo pone atención sobre las expresiones polinomiales, el ábaco y la secuencia didáctica en primaria y Raquel, por su parte, solo sobre la comparación de registros. Llama la atención, por un lado, que Marcos sea capaz de reflexionar en torno a tantos asuntos diferentes y, por otro, que la maestra no interprete matemáticamente aquellos *call-outs* que tienen una relación más directa con el aula de primaria, como el que trata el tema del ábaco o el que se ocupa de la secuencia de enseñanza a implementar en el aula, por ejemplo, y que Daniel no haga lo propio con aquellos que se centran más en el contenido matemático, como pueden ser aquellos que versan sobre el desarrollo matemático de la resolución de un ejercicio o sobre la base 10. A este respecto, la mayor formación en matemáticas de Daniel podría llevarle, paradójicamente, a no interpretar ciertos eventos con una carga matemática considerable por considerar obvia su posible interpretación, mientras que Raquel, que cuenta con una menor formación matemática, podría tener dificultades para interpretar desde un punto de vista matemático ciertos eventos, aunque estos conecten con el aula de primaria. Tales explicaciones se tratan de corroborar en las entrevistas realizadas a estos tres MTE.

En suma, vemos que no hay ningún evento relevante visto por los tres formadores que haya recibido alguna interpretación [M] de Daniel o Raquel sin que Marcos también haya dado una, lo que refuerza la idea plasmada en el bloque cuantitativo de que Marcos es el sujeto que presenta la mayor propensión a interpretar matemáticamente los *call-outs* que nota, seguido de Daniel y, por último, de Raquel, pudiendo considerar relevante, por lo tanto, la variable de experiencia como formador en este eje, así como trabajar desde un paradigma de investigación que confiera una notable relevancia a interpretar situaciones de aula — aspectos que diferencian el perfil profesional de Marcos del de los otros MTE —, para lograr un nivel considerable de *noticing* con respecto al asunto tratado en este tercer eje, esto es, *qué interpretan* los formadores.

4.2.1.d. Eje 4. Interpretaciones: ¿cómo interpretan?

El cuarto eje es de gran interés desde un punto de vista cualitativo, puesto que nos permite conocer el modo en el que los formadores interpretan los eventos relevantes que han detectado, para lo que nos centramos en analizar el contenido de las interpretaciones referidas a *call-outs* que cada formador ha aportado — análisis interindividual — a lo largo del visionado de los distintos vídeos. Con este propósito en mente, hemos examinado las interpretaciones aportadas por cada MTE sobre *call-outs* y hemos determinado qué temas se tratan en ellas, llegando a un conjunto de temas que estructuran el tratamiento que en este eje se hace de la información cualitativamente. Los principales temas o asuntos vistos en las interpretaciones de los tres formadores son los que se recogen en esta tabla:

Tabla 4.25. Temas tratados en las interpretaciones referidas a *call-outs*.

	Temas
Contenido matemático	Contenido matemático
	Tarea
	Objetivo
Contenido matemático: enseñanza	Procedimiento
	Material
Contenido matemático: enseñanza-aprendizaje	Teorías de didáctica de las matemáticas
	Alumnos de Magisterio como resolutores
Contenido matemático: aprendizaje	Alumnos de Magisterio como futuros maestros
	Alumnos de Educación Primaria
Contenido didáctico general	Contenido didáctico general

Como se puede observar, hemos organizado los distintos temas atendiendo a cinco categorías más amplias. La primera categoría aborda el contenido matemático y presenta un único tema, *contenido matemático*, con el que hacemos referencia a interpretaciones en las que se reflexiona en torno a nociones matemáticas *per se* sin establecer conexiones con aspectos de enseñanza o aprendizaje. La segunda categoría, que incluye cuatro temas, se centra en el contenido matemático con relación a cuestiones de enseñanza. El primero de sus temas, *tarea*, se da en las interpretaciones que se ocupan de algún elemento vinculado con las actividades matemáticas —consigna, contenido—; el segundo, *objetivo*, en las que se considera alguna cuestión sobre el fin a alcanzar —por la formadora, con el ejercicio—; en el tercero, *procedimiento*, en las interpretaciones que ponen el foco en la forma de llevar a cabo una explicación o una secuenciación didáctica; y el cuarto, *material*, en aquellas que tratan algún aspecto sobre los materiales empleados para transmitir un contenido —uso, características—. La tercera categoría se ocupa de nuevo del contenido matemático, pero desde un enfoque que atiende tanto a la enseñanza como al aprendizaje, incluyendo solo un tema, que se denomina *teorías de didáctica de las matemáticas*. En la cuarta categoría, que está integrada por tres temas, se presta atención al contenido matemático en relación con el aprendizaje, siendo los temas que se dan en las distintas interpretaciones los siguientes: *alumnos de Magisterio como resolutores*, *alumnos de Magisterio como futuros maestros* y *alumnos de Educación Primaria* —según se discorra sobre unos u otros—. Y la última categoría es la que se ocupa del contenido relacionado con la didáctica general, con un solo tema que se denomina *contenido didáctico general*.

Una vez expuestos brevemente cada uno de los temas o asuntos establecidos, cabe señalar que tales temas no pretenden clasificar las interpretaciones, por lo que una misma interpretación puede contener distintos temas, si bien puede suceder que cada cual tenga un peso distinto en una interpretación dada. Asimismo, conviene decir que los temas que se han organizado atendiendo a un enfoque de enseñanza o de aprendizaje pueden verse, sin lugar a dudas, desde uno u otro enfoque —plantear los temas relativos a la enseñanza desde un punto de vista del aprendizaje y viceversa—, pues las nociones que componen el proceso de enseñanza-aprendizaje son prácticamente indisolubles. Así, el objetivo de esta organización no es sino el de facilitar el análisis del contenido de las interpretaciones atendiendo a las principales cuestiones que en ellas aparecen, tratando de diferenciar lo matemático y lo didáctico general, por un lado, y la enseñanza y el aprendizaje, por otro, solo con pretensiones organizativas.

Con todo lo dicho, se presenta a continuación el análisis de las interpretaciones de los formadores organizado por temas, no sin antes señalar que, tal y como se comprobará, Marcos es el único MTE que ha aportado interpretaciones sobre todos los temas, mientras que Daniel se ha centrado principalmente en los objetivos y en los alumnos de Magisterio como resolutores y Raquel ha puesto el foco, en esencia, en cuestiones acerca de didáctica general. Nótese, igualmente, que se presenta subrayada la parte de la interpretación que guarda relación con el tema en el que se encuadra para favorecer un fácil seguimiento de las explicaciones que aportamos en cada momento al respecto en el trabajo, así como que cada una de las interpretaciones se plasma acompañada del evento al cual se refiere para contextualizarla y poder entenderla mejor.

Contenido matemático

Con relación al contenido matemático, básicamente aparecen interpretaciones de Marcos — Daniel tiene una o dos, pero resultan anecdóticas en su total —, siendo las más ejemplificadoras de este tema las que se proporcionan en las siguientes líneas:

M13.1-1.1. *Presenta ya una tarea: saber cuántos [palillos] hay al juntar dos distribuciones [E, 3].*

- *M13.1-1.1(I)1. Se pretende ver si la escritura permite la composición; dependiendo de si se han hecho o no buenas estructuras, se puede asimilar bien otro grupo o no. Nuestro sistema de numeración funciona bien algorítmicamente, es cómodo desde el punto de vista de técnicas operatorias, y si haces una buena organización [de los palillos] basada en eso, vas a tener las mismas facilidades [I, M].*

M14.1(i)-1.1. *Evento implícito en el comentario [E, 1].*

Transcripción del vídeo: Y al final, tenemos que juntarlos todos y de una forma ágil, sin tener que volver a contarlos todos, tenemos que saber cuántos palillos hay en total en la clase repartidos, ¿vale?

- *M14.1(i)-1.1(I)1. Se trata de ver si la distribución se puede ir heredando y puede funcionar; si es buena, lo va a hacer; algunas distribuciones pueden ser buenas para saber cuántos [palillos] hay, pero puede que no lo sean cuando compongan y se tendrán que rechazar. La distribución tiene que ser común; si unos hacen grupos de 6 y otros grupos de 8, cuando los junten habrá un problema; por ello, aunque ella no se lo dice, la situación les obliga a que se pongan de acuerdo en cómo agrupar, debe haber cierto isomorfismo [I, M].*

M11.1-1.3. Está descomponiendo el 87, empleando 3 grupos de 20 y 3 grupos de 9 [E, 3].

- M11.1-1.3(I)1. Las expresiones que está empleando no permiten hacer agrupamientos regulares; un sistema no regular puede funcionar, pero no hay unidades elementales, ya que 87 no es primo [I, M].

M15.1-2. Indica que hay que cambiar las bases, introduciendo además por primera vez el concepto de expresión polinomial [E, 2].

- M15.1-2(I)1. Un número en una base es simplemente una descomposición en un polinomio en función de las potencias de una base [I, M].
- M15.1-2(I)2. Los coeficientes en base 2 solo pueden ser 0 y 1 y aquí [en base 16] son del 0 al 15; por ello, hay que cambiar las bases [de las potencias], pero también los coeficientes [I, M].

M36.1(i)-2. Evento implícito en el comentario [E, 1].

Transcripción del vídeo: ¿Y David Calle me podría dar el algoritmo...? [Para pasar de base 15 a base 2].

- M36.1(i)-2(I)1. Quiere que le digan que el algoritmo funciona porque 16 es 2^4 ; con la otra base, hay que hacer distributivas... y no hay un algoritmo [I, M].

M6.1-3.1. Da a los alumnos la definición conjuntista de la suma [E, 3].

- M6.1-3.1(I)1. Es una de las definiciones de la suma, no es la única; les ha debido de dar anteriormente esa definición matemática a partir de la unión conjuntista [I, M].

M23.1-3.3. Plantea una secuenciación: primero pone un caso, lo explica, ve cómo se hace y realiza el paralelismo [entre los distintos sistemas de representación], y ahora es cuando al sumar van a aparecer potencias que antes no había [E, 3].

- M23.1-3.3(I)1. Ahora empieza a funcionar el sistema de numeración, se condiciona el sistema de numeración a la técnica de la suma y es cuando va a haber que redistribuir las potencias [I, M].

Como se puede observar en las interpretaciones previas, Marcos reflexiona acerca de distintos contenidos matemáticos, aludiendo a diferentes ideas, como, por ejemplo, el sistema de numeración que usamos, las técnicas operatorias, los agrupamientos regulares y no regulares, los números primos, el isomorfismo, las distribuciones comunes, las bases en las que se puede escribir un número, la descomposición polinómica —potencias de la base y coeficientes—, la propiedad distributiva o la definición de la suma. Resulta, por lo tanto, muy interesante que proponga interpretaciones sobre el funcionamiento del propio contenido matemático, siendo llamativo que ni Daniel ni Raquel hayan dado importancia

a esta cuestión. A este respecto, la ausencia de interpretaciones por parte de Daniel podría deberse a que, habida cuenta de su formación —ligada más a las matemáticas puras que a la didáctica de estas—, opine que tales consideraciones son obvias y, por ende, que no sea necesario traerlas a colación. En el caso de la maestra, quizá su menor formación sobre matemáticas le haga no adentrarse en interpretaciones de este tipo. En cualquier caso, se tratará de confirmar el conjunto de suposiciones que planteamos al respecto a través de la información recopilada en las entrevistas a los tres MTE.

Tarea

En lo concerniente a la tarea, nuevamente es Marcos el único participante que se preocupa por aportar alguna clase de explicación o de reflexión en torno al tema. De las interpretaciones formuladas por este formador, presentamos a continuación los ejemplos más ilustrativos de su interés en relación con las tareas matemáticas:

M18.1-1.3. *Indica el objetivo que tenían que alcanzar los alumnos: establecer la conexión entre los palillos y el sistema de numeración [E, 3].*

- *M18.1-1.3(I)1. Hasta el momento la actividad podría ser trasladable a los alumnos [de primaria], pero ahora ya se aprecia un objetivo de didáctica de las matemáticas para estos alumnos [futuros maestros] que en la actividad no estaba presente; ha trasladado la actividad a la vez que les hace pensar sobre por qué puede ser interesante; es una discusión de doble naturaleza [I, M].*

M24.1-2. *Dice que está contenta por encontrar una conexión entre el 0 [coeficiente de 2^0 de la parte de arriba] y el 0 final del resultado, así como entre el 1 [coeficiente de 2^3 de la parte de arriba] y el 1 inicial del resultado [E, 3].*

- *M24.1-2(I)2. Sigo sin saber si es que esta información ya estaba en el ejercicio. Debe de ser que sí, que el ejercicio en algún momento decía que el resultado empezaba por 1 y acababa por 0 [I, M].*

M28.1-2. *Está explicando los cálculos que está haciendo, señalando en la pizarra de dónde sale la escritura polinómica en función de las potencias de 2 que han obtenido [E, 2].*

- *M28.1-2(I)2. Es un ejercicio que está muy medido para obtener la escritura polinómica, aunque sea un poquito artificial con estos ceros ahí [0×2^6], porque cuando yo lo hago, eso no saldría, pero es verdad que hay que mantener el cero si luego quiero pasar de ahí directamente a la escritura posicional [I, M].*

M11.1-3.1. *Pide a los alumnos que construyan una tabla, que puede tener características gráficas o simbólicas [E, 3].*

- M11.1-3.1(I)2. Como no quiere decir cómo se hace la tabla, porque quiere que los alumnos la construyan, está asumiendo riesgos porque no queda muy clara la consigna; puede que los alumnos no sepan qué es lo que tienen que hacer si no han trabajado antes con alguna tabla sumando [I, M].

M17.1-3.2. *Está reinterpretando, en los términos de nuestro sistema convencional, en términos más matemáticos, lo que han hecho los alumnos, haciendo ver que han desagrupado [E, 2].*

- M17.1-3.2(I)2. Se ha hecho una simulación de manera acelerada de lo que sería una situación en una clase de primaria, donde el trabajo debería ser mucho más del alumno, pero aquí [en la facultad] no puedes reproducir exactamente las actividades de primaria porque estos no son niños de primaria, son maestros, tienen mucho más conocimiento y mucha más madurez [I, M].

M31.1-3.3. *Está explicando la tabla que los alumnos tenían que haber hecho [E, 2].*

- M31.1-3.3(I)1. Porque la consigna que dio al principio no contaba con suficientes indicaciones, lo cual didácticamente era correcto; por lo tanto, ahora ha tenido que proporcionar la tabla ella, lo cual es suficiente para que estos alumnos entiendan lo que se ha hecho [I, M].

Tal y como se aprecia en las interpretaciones, Marcos reflexiona acerca de distintos aspectos de la tarea. Por un lado, se preocupa por el enunciado de la actividad, mostrando interés por saber cuál es la información que se plantea en la misma y haciendo ver que, a veces, es didácticamente correcto limitar los datos que se dan según qué objetivo se quiera que alcancen los estudiantes. En este sentido, observamos que, por ejemplo, hace alusión a las características de la tarea cuando plantea que está muy medida para obtener —en el ejemplo en particular— la escritura polinómica. Por otro lado, también pone el foco en los destinatarios de la tarea, exponiendo que una misma tarea puede dirigirse a discentes de primaria o de Magisterio según los objetivos que se incluyan en la consigna. Por todo ello, los ejemplos presentados nos hacen percatarnos de que Marcos formula interpretaciones que, evidentemente, son propias de un MTE, ya que se sitúa constantemente en el plano de la didáctica de las matemáticas, examinando las tareas con relación a la enseñanza del contenido que los estudiantes han de aprender. Además, en sus interpretaciones aparecen otros temas, como el contenido matemático, los objetivos o los alumnos.

Al igual que en lo referido al tema sobre contenido matemático, con las entrevistas se trata de comprender mejor la importancia que Marcos otorga en sus comentarios a este tema, así como el motivo por el cual Daniel y Raquel no han realizado interpretaciones al respecto en esta primera fase.

Objetivo

En cuanto al tema sobre objetivos, solo encontramos interpretaciones propuestas por Marcos y por Daniel, pero no por la maestra. A continuación, se presentan en primer lugar las aportadas por Marcos, en las cuales se puede advertir que establece conexiones – en su práctica totalidad – entre los objetivos y el contenido matemático, o sea, concreta el objetivo que identifica en términos de alguna noción matemática a enseñar:

M12.1-1.1. *Dice a los alumnos que reflexionen para ver si hay una correspondencia entre los agrupamientos y el sistema de numeración [E, 3].*

- *M12.1-1.1(I)1. Pretende provocar el uso de agrupamientos recursivos para que aparezca esa correspondencia con el sistema de numeración [I, M].*

M10.1-1.2. *Pregunta a los alumnos si la distribución que han hecho [del 85] tiene que ver con la escritura usual que tenemos [E, 3].*

- *M10.1-1.2(I)1. Porque quiere, sin decirlo explícitamente, que utilicen la agrupación decimal. Sin embargo, el agrupamiento de 10 es muy pequeño, aunque sea muy cómodo; de hecho, en las unidades de medida, que también son decimales, no usamos el decímetro, el decámetro, el decagramo... [I, M].*

M18.1-1.3. *Indica el objetivo que tenían que alcanzar los alumnos: establecer la conexión entre los palillos y el sistema de numeración [E, 3].*

- *M18.1-1.3(I)1. Hasta el momento la actividad podría ser trasladable a los alumnos [de primaria], pero ahora ya se aprecia un objetivo de didáctica de las matemáticas para estos alumnos [futuros maestros] que en la actividad no estaba presente; ha trasladado la actividad a la vez que les hace pensar sobre por qué puede ser interesante; es una discusión de doble naturaleza [I, M].*

M27.1-1.3. *Dice a una alumna que elabore mejor la idea que está expresando [E, 1].*

- *M27.1-1.3(I)1. Porque quiere que la alumna haga explícito que es más fácil y rápido sumar cuando «no hay» unidades, sino que hay un cero en las unidades; no es la regla de los ceros, porque esa es para el producto, pero es algo parecido [I, M].*

M6.1-2. Dice coloquialmente que es una forma muy larga [el procedimiento del alumno], por lo que hay que buscar otra manera que sea eficaz [E, 2].

- M6.1-2(I)1. Se trata del principio de economía, que en matemáticas es brutal, es decir, siempre que tienes dos estrategias tienes que buscar una que sea más económica, por comodidad, pero sobre todo porque tendrás menos errores, y trata de que los alumnos se den cuenta; en este ejercicio es muy fácil equivocarse [I, M].

M20.1-2. Dice que 16 [2⁴] lo eleva a la 1 [E, 1].

- M20.1-2(I)1. Queda muy matemático decir 16 a la 1, ya que en la vida normalmente decimos 16, pero ella quiere forzar que eso sea una escritura polinómica y entonces quiere que aparezca elevado a 1; lo mismo ocurre cuando escribe 16⁰. Es una elegancia que solo la vemos desde el punto de vista de las matemáticas y los alumnos se pueden preguntar para qué ponerlo así [I, M].

M15.1-3.3. Coloca el material [los bloques multibase] de forma agrupada [E, 2].

- M15.1-3.3(I)2. Con este material, se puede juntar todo y luego organizarlo; se trata de un sistema mucho más básico que los otros que tiene. Colocar así el material es una decisión que ella toma para poder realizar el paralelismo [con los demás sistemas de representación], ya que el material [los bloques multibase] no te lo exige. En cambio, en este otro material [señala al sorobán] y en este [señala a la suma tradicional] sí es obligatorio [I, M].

En las interpretaciones de Marcos se vinculan los objetivos con lo que se pretende enseñar y, por lo tanto, con lo que se quiere que aprendan los estudiantes, plasmando en todo momento el contenido matemático que subyace tras las decisiones de la formadora, ligando los diversos objetivos, por ejemplo, a los agrupamientos recursivos, la agrupación decimal, el principio de economía en matemáticas, la escritura polinómica o el paralelismo entre registros de representación. Además, incluye apreciaciones que entroncan de forma directa con la labor de un MTE, como cuando dice en la interpretación M18.1-1.3(I)1 que la tarea propuesta por la formadora encierra un objetivo de didáctica de las matemáticas dirigido a los alumnos de Magisterio. El carácter de las interpretaciones de Marcos, por lo tanto, difiere del que imprime Daniel a las suyas, principalmente por no ligar este último los objetivos sobre los que reflexiona con el contenido matemático —o al menos no con la misma intensidad—, tal y como se puede comprobar en los ejemplos que se proporcionan en las siguientes líneas:

D2.1-1.1. *Presenta los primeros pasos a seguir para realizar la actividad, sin decir a los alumnos cómo tienen que hacerlo exactamente [E, 1].*

- *D2.1-1.1(I)1. Para que los alumnos entiendan qué tienen que hacer, ya que es posible que no entiendan lo que se les pide y que se pongan a contar [I, M].*

D1.1-1.3. *Pregunta a los alumnos, trabajando en gran grupo, qué estrategias han desarrollado, sin juzgarlas [E, 1].*

- *D1.1-1.3(I)1. Para que sean los alumnos quienes vayan viendo si sus estrategias son adecuadas o no y por qué [I, M].*

D4.1-1.3. *Está explorando la estrategia que han seguido los alumnos, viendo cómo de manejables son las agrupaciones que han hecho dos grupos de alumnos al juntarse para realizar la suma [E, 2].*

- *D4.1-1.3(I)1. Para tratar de que los alumnos se den cuenta de las ventajas que tiene hacer siempre grupos de 10 [I, M].*

D5.1-2. *Traduce la expresión dada en una expresión con potencias de 2, en una expresión polinomial en notación binaria, desarrollando ella la parte algebraica siguiendo la idea planteada por un alumno [E, 3].*

- *D5.1-2(I)1. Pretende escribir de un modo más preciso lo que el alumno dice, quizá porque este tenga dificultades o lagunas a la hora de realizar la manipulación algebraica [I, M].*

D8.1-2. *Pregunta al alumno que propuso la estrategia de resolución del ejercicio acerca del problema que tuvo con el 2^3 [E, 2].*

- *D8.1-2(I)1. Para que el alumno trate de interpretar la expresión a la que han llegado y diga si ya ha sabido resolverlo [I, M].*

D2.1-3.2. *Interactúa con los alumnos, tratando de que piensen sobre la dificultad que tienen a partir de los pasos que ya han dado [E, 1].*

- *D2.1-3.2(I)1. Pretende que sean los alumnos quienes resuelvan la actividad por ellos mismos y que vean la dificultad que tiene el uso del ábaco [I, M].*

D5.1-3.2. *Trata de que los alumnos analicen lo que han hecho [E, 2].*

- *D5.1-3.2(I)1. Para formalizarlo un poco más, para entender globalmente lo que han hecho, para darle sentido al procedimiento [I, M].*

Vemos que Daniel articula las interpretaciones sobre objetivos en función de lo que se busca que haga el alumno, pero sin prácticamente explicitar las matemáticas que están detrás de las acciones de la formadora, de tal modo que se expresa en términos tales como

que los alumnos entiendan lo que han de hacer, que traten de interpretar o que resuelvan por ellos mismos la tarea, siendo, por consiguiente, interpretaciones que se situarían en la categoría didáctica si no fuera porque en ellas se dirige la atención hacia algún aspecto de las matemáticas, aunque mínimamente. En este sentido, en alguna interpretación incluye nociones sobre las estrategias, las ventajas de hacer grupos de 10 o la formalización de los procedimientos llevados a cabo.

Así pues, queda patente que la profundidad de las interpretaciones de Marcos es mayor que la de las aportadas por Daniel, dado que no se quedan en meras explicaciones de lo observado, sino que incorporan reflexiones sobre la médula matemática del objetivo identificado. Esta situación, si bien llama la atención, dada la formación matemática que posee Daniel, se podría explicar con el mismo argumento esgrimido anteriormente acerca del tema sobre contenido matemático. No obstante, se trata de aclarar estos extremos con las entrevistas, así como que la maestra no haya reflexionado sobre los objetivos.

Procedimiento

En lo que respecta a los procedimientos, solo Marcos ha aportado interpretaciones, recogándose algunas de ellas a continuación:

M16.1-1.1. *Está dando pistas [E, 1].*

- M16.1-1.1(I)1. *Pretende que haya cierto isomorfismo [en los agrupamientos], pero si se dan menos indicaciones y no surge, es muy bueno, ya que entonces se puede pensar qué ha pasado; eso sí, se tarda más, claro [I, M].*

M4.1-3.2. *Dice a los alumnos que escriban 700 de otra forma [E, 2].*

- M4.1-3.2(I)1. *Ella no quiere decir que lo descompongan, pero sin decirlo lo que quiere es que hagan todos los cambios de manera que aquí obtengan 10 [en la varilla de las unidades], que quiten uno de aquí [señala la varilla de las centenas], que la transformen en 10 de aquí [señala la varilla de las decenas], dando lugar a 6 centenas y 10 decenas, luego que quiten una de aquí [indica la varilla de las decenas] y la transformen en 10 de aquí [señala la varilla de las unidades]. Pero cuando se usa el ábaco, si no puedes quitar 5 [en las unidades], quitas una de aquí [en las decenas] y añades solo las que hagan falta [en las unidades]. Por eso, están en una fase muy preliminar del ábaco. Lo que quiere es vayan manipulando, que vayan materializando los cambios [I, M].*

M17.1-3.2. *Está reinterpretando, en los términos de nuestro sistema convencional, en términos más matemáticos, lo que han hecho los alumnos, haciendo ver que han desagrupado [E, 2].*

- *M17.1-3.2(I)2. Se ha hecho una simulación de manera acelerada de lo que sería una situación en una clase de primaria, donde el trabajo debería ser mucho más del alumno, pero aquí [en la facultad] no puedes reproducir exactamente las actividades de primaria porque estos no son niños de primaria, son maestros, tienen mucho más conocimiento y mucha más madurez [I, M].*

M2.1-3.3. *Plantea una suma sin llevadas [E, 2].*

- *M2.1-3.3(I)1. Imagino que será el primer ejemplo al tratarse de una suma sin llevadas. Con el ábaco se hace metiendo 3 o metiendo 4 o metiendo 5, no tiene mayor historia, por lo que no sé qué juego va a dar [I, M].*

M31.1-3.3. *Está explicando la tabla que los alumnos tenían que haber hecho [E, 2].*

- *M31.1-3.3(I)1. Porque la consigna que dio al principio no contaba con suficientes indicaciones, lo cual didácticamente era correcto; por lo tanto, ahora ha tenido que proporcionar la tabla ella, lo cual es suficiente para que estos alumnos entiendan lo que se ha hecho [I, M].*

M32.1-3.3. *Está explicando la progresión didáctica, partiendo de los euros, de lo concreto, y siguiendo con lo manipulativo para llegar a lo abstracto, o sea, su objetivo como maestros [E, 3].*

- *M32.1-3.3(I)1. Se trata ya de una indicación, de una progresión, de índole didáctica que les servirá a los alumnos en su práctica fuera [en primaria] para que sus futuros alumnos aprendan lo trabajado. Establecer una progresión adecuada es algo que a los docentes nos preocupa mucho, la cual no siempre va de lo fácil a lo difícil, a veces tienes que presentar cosas difíciles para generar desequilibrios para que los alumnos tengan que actuar. En este caso, para entender eso [señala el algoritmo simbólico tradicional de la suma], es necesario conocer todo lo planteado en la pizarra [I, M].*

En estas interpretaciones se examinan diferentes procedimientos que se dan en el aula con los estudiantes de Magisterio, siendo Marcos capaz de señalar el punto en el que se sitúa un procedimiento detectado — como cuando habla de la fase preliminar del ábaco o de la suma sin llevadas —, así como de indicar la manera en la que se ha de proceder en un momento dado del transcurso de la clase — como cuando habla de la adecuación de no aportar ciertos datos en el enunciado de una actividad —, ofreciendo reflexiones, además,

acerca de este segundo aspecto. Asimismo, en la última interpretación —M32.1-3.3(I)1— discurre sobre la importancia y las características de las progresiones didácticas en el aula de primaria, lo que pone de manifiesto la relevancia que este sujeto otorga a este tema.

Así pues, podemos decir, por un lado, que las interpretaciones suministradas por Marcos son, una vez más, características de un MTE, pues otro docente no haría tal clase de comentarios, y, por otro, que parece que, en este asunto, su dilatada experiencia como formador —en comparación con los otros participantes— le permite ya no solo identificar cuestiones relativas a los procedimientos, sino someterlas a análisis.

Material

En relación con los materiales, básicamente es Marcos quien se preocupa por este tema. No obstante, Raquel genera una interpretación al respecto y, aunque solo sea una, la presentamos en este apartado, pues es una de las pocas que ha formulado en esta fase no referidas a la didáctica general. Además, cabe apuntar que las interpretaciones que se plantean ahora son únicamente del vídeo 3, no habiéndose formulado interpretaciones al respecto en otros vídeos, lo cual parece lógico, pues en dicho vídeo es en el que aparecían distintos materiales.

M4.1-3.2. *Dice a los alumnos que escriban 700 de otra forma [E, 2].*

- M4.1-3.2(I)1. *Ella no quiere decir que lo descompongan, pero sin decirlo lo que quiere es que hagan todos los cambios de manera que aquí obtengan 10 [en la varilla de las unidades], que quiten uno de aquí [señala la varilla de las centenas], que la transformen en 10 de aquí [señala la varilla de las decenas], dando lugar a 6 centenas y 10 decenas, luego que quiten una de aquí [indica la varilla de las decenas] y la transformen en 10 de aquí [señala la varilla de las unidades]. Pero cuando se usa el ábaco, si no puedes quitar 5 [en las unidades], quitas una de aquí [en las decenas] y añades solo las que hagan falta [en las unidades]. Por eso, están en una fase muy preliminar del ábaco. Lo que quiere es vayan manipulando, que vayan materializando los cambios [I, M].*

M3.1-3.3. *Está usando el sorobán para hacer la suma [E, 2].*

- M3.1-3.3(I)1. *Como se trata del ábaco japonés, sí que va a tener que hacer cambios con el 5 [señala las decenas] al sumar $210 + 543$; sí que va a haber agrupaciones [I, M].*

M11.1-3.3. Dice que lo coloca de forma vertical [la suma] para parecerse a la estructura del ábaco y ver la correspondencia entre las dos maneras, realizando la traducción entre ambas maneras de representación [E, 2].

- M11.1-3.3(I)1. En realidad, lo coloca de forma vertical porque es como lo colocamos normalmente. De hecho, muchos chinos usan el ábaco en posición horizontal [con las varillas de forma horizontal] porque de ese modo las bolas no se caen y lo pueden manejar con el pulgar y el índice. Ella lo coloca verticalmente [la forma simbólica] porque dentro de la tarea tienen que ver la correspondencia entre las dos maneras [sorobán y simbólico] [E, M].

M15.1-3.3. Coloca el material [los bloques multibase] de forma agrupada [E, 2].

- M15.1-3.3(I)2. Con este material, se puede juntar todo y luego organizarlo; se trata de un sistema mucho más básico que los otros que tiene. Colocar así el material es una decisión que ella toma para poder realizar el paralelismo [con los demás sistemas de representación], ya que el material [los bloques multibase] no te lo exige. En cambio, en este otro material [señala al sorobán] y en este [señala a la suma tradicional] sí es obligatorio [I, M].

M32.1-3.3. Está explicando la progresión didáctica, partiendo de los euros, de lo concreto, y siguiendo con lo manipulativo para llegar a lo abstracto, o sea, su objetivo como maestros [E, 3].

- M32.1-3.3(I)2. En realidad, los euros se pueden considerar como un sistema simbólico; si tienes 300, no tienes 300 moneditas de 1 euro, tienes un billete de 100 y demás, es decir, al final también el euro se puede componer con un sistema, por lo que no es más manipulativo que esto [señala a los bloques multibase], aunque es verdad que en este caso se enmarca en un contexto, pero no por ello es más manipulativo [I, M].
- M32.1-3.3(I)3. Los ábacos [señala el sorobán] no están pensados para enseñar ni para aprender, sino para trabajar, para obtener resultados, al igual que esto [el algoritmo tradicional de la suma]. En cambio, esto [señala los bloques multibase] sí está pensado para aprender, por lo que es más manipulativo y concreto que el ábaco. Esto otro [señala el tablero de posición] estaría en un punto intermedio [I, M].

En las interpretaciones de Marcos sobre este tema, es meridianamente la meticulosidad con la que reflexiona, pues comenta con profundidad distintos elementos presentes en los materiales que aparecen en el vídeo. Así pues, formula interpretaciones sobre el uso y las

características de los materiales — sorobán, bloques multibase —, compara las cualidades de estos — distinto nivel de abstracción/concreción — y, además, incide en cómo emplea la formadora el material. Asimismo, resulta muy interesante su apreciación acerca de que algunos materiales están concebidos para obtener resultados y otros se han creado con la finalidad de aprender un contenido matemático, reflexión que conecta directamente con el conocimiento que debería tener un formador sobre el material y que va más allá de lo estrictamente matemático.

En cuanto a Raquel, la interpretación que ella aporta en relación con el material es la que sigue:

R1.1-3.3. *Está explicando la correspondencia entre la estructura del material manipulativo y la representación simbólica [de la operación] [E, 2].*

R1.1-3.3(I)1. Cuando los niños aprenden, como primero se utiliza muchísimo el material manipulativo, si la estructura del material manipulativo se corresponde con la forma simbólica, a los niños luego no les cuesta trabajo hacer esa transcripción [I, M].

Se trata de una interpretación que aborda la estructura del material y, sobre todo, que conecta con el aula de primaria, lo que se puede achacar a su formación y experiencia como maestra.

En definitiva, Marcos es el único formador que muestra realmente una inclinación a tratar de interpretar la utilización que de los materiales se hace en los vídeos. Este hecho se pretende entender y explicar con mayor precisión a través de las entrevistas realizadas a los tres sujetos.

Teorías de didáctica de las matemáticas

En cuanto a las teorías de didáctica de las matemáticas, es nítido que se trata de un territorio dominado por Marcos, puesto que es el único MTE que incorpora este tema en sus interpretaciones. En este sentido, en ocasiones hace explícita la teoría de didáctica de las matemáticas en la que fundamenta su reflexión, siendo el caso de los ejemplos que se presentan a continuación:

M10.1-1.1. *Está complementando la consigna, sin limitarse a traducir: dice que no tomen notas y que, simplemente con cierta organización, de un vistazo, sepan establecer cuántos hay de una manera rápida [E, 3].*

- M10.1-1.1(I)1. *Lo que se llama en Teoría de Situaciones «la negociación de la consigna»; el objetivo del alumno ella lo ha dicho, pero ahora está estableciendo cuáles son las condiciones para hacerlo, lo que está permitido, y eso forma parte de una negociación; el alumno tiene que tener muy claro qué es lo que puede hacer [I, M].*

M14.1-1.3. *Escribe el 90, un número que no es primo [E, 1].*

- M14.1-1.3(I)1. *La cantidad de palillos de cada grupo, que a lo mejor ella la ha pensado, es una variable didáctica en el sentido de la Teoría de Situaciones; con el 90 está muy claro, el 10 va a estar [I, M].*

Se puede observar que alude explícitamente a la Teoría de Situaciones Didácticas desarrollada por Guy Brousseau, teoría en la que Marcos fundamenta su tesis doctoral en didáctica de las matemáticas. Así pues, la influencia del paradigma de investigación en el que se sitúa el sujeto es clara en sus comentarios, pero no solo porque mencione la teoría en cuestión, sino también por el léxico que emplea para expresar sus ideas, que es propio de las teorías que se encuentran en su haber intelectual. Así es que encontramos algunas interpretaciones en las que la aparición de las teorías en didáctica de las matemáticas no es explícita, sino implícita, como pueden ser las siguientes:

M12.1-1.1. *Dice a los alumnos que reflexionen para ver si hay una correspondencia entre los agrupamientos y el sistema de numeración [E, 3].*

- M12.1-1.1(I)2. *El objetivo de la actividad es muy didáctico, se sale un poco de un supuesto «adidactismo» que en principio podría presentar la actividad, ya que no se trata solamente de saber «cuántos hay», sino de pensar cómo se hace [I, M].*

M4.1-3.1. *Dice a los alumnos que tienen que representar el proceso de la suma, no el resultado, con material manipulativo [E, 3].*

- M4.1-3.1(I)2. *No sé si con representar se refiere a la representación gráfica o a la ejecución con el ábaco. Cuando se da una consigna, debe estar claro lo que se tiene que hacer: ¿qué se entiende por representar un proceso? Se puede suponer que los alumnos ya lo han trabajado antes y por eso la formadora lo dice así; ¿cómo represento que muevo una bola? [I, M].*

M9.1-3.1. Dice que hay que representar la suma en el registro simbólico-numérico [E, 3].

- M9.1-3.1(I)1. Cuando usa la palabra «representar», quizás lo que quiere decir es que hay que hacerlo en ese sistema de representación; con «representar» da la sensación de que quiere que haga el proceso en ese sistema de representación, porque lo que vamos a hacer es la suma en el registro simbólico-numérico; es un tratamiento dentro de un registro, no hay una conversión [I, M].

M16.1-3.1. Establece un orden concreto para hacer las sumas [E, 3].

- M16.1-3.1(I)1. El orden es una variable y habrá querido que en las sumas o en las operaciones entren en juego distintos usos y propiedades del ábaco [I, M].

M17.1-3.2. Está reinterpretando, en los términos de nuestro sistema convencional, en términos más matemáticos, lo que han hecho los alumnos, haciendo ver que han desagrupado [E, 2].

- M17.1-3.2(I)1. Es una especie de institucionalización de lo que han hecho, o sea, de darle un carácter más oficial, siempre partiendo de la idea de que son ellos los que lo han hecho [I, M].

M5.1-3.3. Dice «cómo dibujo» [E, 1].

- M5.1-3.3(I)1. Porque quiere hacer ver a los alumnos que está empleando un registro gráfico; yo digo «escribo» porque es una escritura del número también [I, M].

En estas interpretaciones, el sujeto hace uso de una terminología que es inherente a dos teorías distintas. Por un lado, se aprecia otra vez la Teoría de Situaciones Didácticas, ya que emplea términos como *adidactismo*, *consigna*, *variable* o *institucionalización*, que son propios de dicho paradigma. Por otro lado, podemos reconocer la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Raymond Duval, puesto que utiliza expresiones o vocablos que pertenecen a su jerga, tales como *sistema de representación*, *registro simbólico-numérico*, *registro gráfico*, *tratamiento* o *conversión*.

Por consiguiente, parece evidente que la formación académica —concretamente la adquirida de la mano de la experiencia investigativa en didáctica de las matemáticas— es un pilar fundamental para ser capaz de interpretar los eventos identificados con el apoyo de la literatura del área. Este hecho cobra especial relevancia cuando nos referimos a los formadores, pues, en su labor de enseñar a enseñar matemáticas, tener una capacidad de interpretación reforzada por la investigación del área posibilita mejorar su quehacer en el aula —amén, por supuesto, de su *noticing*—.

Alumnos de Magisterio como resolutores

Con respecto a este tema, hay que indicar que en muchas ocasiones se menciona a los alumnos de Magisterio en las interpretaciones formuladas por los formadores, pero se hace normalmente de manera auxiliar, es decir, no se sitúan en el foco de la interpretación en tanto en cuanto no se reflexiona sobre ellos, sino sobre otro tema —la tarea, el objetivo, el procedimiento—. Algunos ejemplos de esta situación son los siguientes de Marcos y de Daniel:

M21.1(i)-1.3. *Evento implícito en el comentario [E, 1].*

Transcripción: Muy bien, 7 grupos de 20 [señala al 3 y al 4].

- M21.1(i)-1.3(I)1. *Le ha gustado porque los alumnos han hecho un agrupamiento y ella lo que intenta hacer ver es que es muy cómodo trabajar con agrupamientos iguales [I, M].*

D4.1-1.3. *Está explorando la estrategia que han seguido los alumnos, viendo cómo de manejables son las agrupaciones que han hecho dos grupos de alumnos al juntarse para realizar la suma [E, 2].*

- D4.1-1.3(I)1. *Para tratar de que los alumnos se den cuenta de las ventajas que tiene hacer siempre grupos de 10 [I, M].*

Vemos que mencionan a los discentes, pero las interpretaciones no giran en torno a ellos, no se reflexiona sobre sus características de aprendizaje o sus acciones como clave para interpretar la práctica de enseñanza de la formadora. No obstante, aunque este tipo de interpretaciones tienen una gran presencia, en el caso de Marcos también encontramos algunas en las que se plantea información acerca de las características de los estudiantes, como en los siguientes ejemplos:

M18.1-1.3. *Indica el objetivo que tenían que alcanzar los alumnos: establecer la conexión entre los palillos y el sistema de numeración [E, 3].*

- M18.1-1.3(I)2. *Cuando se les da una consigna a los alumnos, muchas veces estos se quedan con un objetivo, y otro objetivo —que para el formador puede ser importante— puede que lo vean como secundario; por eso, no ha aparecido ningún patrón, aunque también es cierto que con números pequeños la actividad no es tan liosa, pero no es factible darles cientos de palillos [I, M].*

M17.1-3.2. *Está reinterpretando, en los términos de nuestro sistema convencional, en términos más matemáticos, lo que han hecho los alumnos, haciendo ver que han desagrupado [E, 2].*

- *M17.1-3.2(I)2. Se ha hecho una simulación de manera acelerada de lo que sería una situación en una clase de primaria, donde el trabajo debería ser mucho más del alumno, pero aquí [en la facultad] no puedes reproducir exactamente las actividades de primaria porque estos no son niños de primaria, son maestros, tienen mucho más conocimiento y mucha más madurez [I, M].*

M9.1-3.3. *Propone un proceso en el que se meten las cuentas de una en una [E, 2].*

- *M9.1-3.3(I)1. Ella quiere mantener la idea de que va subiendo de una en una, lo cual es un proceso muy laborioso, pero los alumnos entienden perfectamente que, si hay que añadir 5, basta con meter una de arriba. Cuando se usa el ábaco no se mete de una en una, sino que se meten las cuentas de golpe [I, M].*

M31.1-3.3. *Está explicando la tabla que los alumnos tenían que haber hecho [E, 2].*

- *M31.1-3.3(I)1. Porque la consigna que dio al principio no contaba con suficientes indicaciones, lo cual didácticamente era correcto; por lo tanto, ahora ha tenido que proporcionar la tabla ella, lo cual es suficiente para que estos alumnos entiendan lo que se ha hecho [I, M].*

En estos casos, Marcos plasma ideas relativas a las capacidades de los estudiantes de Magisterio, poniendo de manifiesto la forma en la que a veces procesan la información que se les da, así como que tienen una madurez y un conocimiento suficientes como para entender ciertos conceptos. Sin embargo, más que esta clase de interpretaciones, abundan las que se focalizan en las dificultades que los estudiantes de Magisterio tienen en el aula como resolutores de cuestiones matemáticas, siendo este tipo de interpretaciones las que predominan claramente entre las interpretaciones propuestas por Daniel, aunque Marcos y Raquel también tienen alguna entre las suyas — si bien en menor medida —. Atendamos en primer lugar a estos ejemplos de Daniel:

D2.1-1.1. *Presenta los primeros pasos a seguir para realizar la actividad, sin decir a los alumnos cómo tienen que hacerlo exactamente [E, 1].*

- *D2.1-1.1(I)1. Para que los alumnos entiendan qué tienen que hacer, ya que es posible que no entiendan lo que se les pide y que se pongan a contar [I, M].*

D3.1-1.2. Trata de que los alumnos conecten la actividad con la notación posicional, que es el objetivo de la actividad, sin desvelarles dicha conexión [E, 2].

- D3.1-1.2(I)1. Se trata de algo que a los alumnos les cuesta mucho, ya que nunca lo han pensado [I, M].

D5.1-1.3. Está preguntando a los alumnos acerca de sumar de 10 en 10 o de 9 en 9, haciéndoles ver cómo dependemos de la notación posicional [E, 3].

- D5.1-1.3(I)1. En mi experiencia, tenemos tan asumida la notación posicional que es difícil hacer que los alumnos la entiendan realmente [I, M].

D5.1-2. Traduce la expresión dada en una expresión con potencias de 2, en una expresión polinomial en notación binaria, desarrollando ella la parte algebraica siguiendo la idea planteada por un alumno [E, 3].

- D5.1-2(I)1. Pretende escribir de un modo más preciso lo que el alumno dice, quizá porque este tenga dificultades o lagunas a la hora de realizar la manipulación algebraica [I, M].

D7.1-2. Sigue haciendo la cuenta, desarrollando la parte algebraica, interviniedo más que al principio del vídeo [E, 2].

- D7.1-2(I)2. La formadora puede que sea consciente de que muchos alumnos probablemente no están comprendiendo el desarrollo algebraico, pues seguramente les cuesta seguir esta parte algebraica, pero sigue con el ejercicio, ya que hay que acabarlo [I, M].

D11.1-2. Pregunta a los alumnos si se podría aplicar la receta para pasar directamente de base 16 a base 2 si lo que se quisiera fuera pasar de base 15 a base 2, incidiendo en que no se podría [E, 3].

- D11.1-2(I)1. Entender qué es lo que se está haciendo cuando se emplea una receta es uno de los valores más importantes, ya que si no se entiende, no se sabe si se puede aplicar a un caso diferente y es posible que se use mal, lo cual es un error común [de los alumnos] [I, M].

D1.2-3.1. Pide que representen con los materiales el proceso, no el resultado [E, 3].

- D1.2-3.1(I)1. A los alumnos les cuesta representar o explicar el proceso seguido, entender que no es lo mismo representar el proceso que el resultado, por lo que presta atención a clarificarlo [I, M].

Comprobamos que estas interpretaciones acerca del alumno de Magisterio como resolutor se focalizan en las dificultades que este presenta para resolver algunos aspectos

matemáticos. La razón por la que Daniel se centra tanto en las dificultades podría radicar en la extensa experiencia de este sujeto enseñando matemáticas en niveles universitarios a estudiantes de ingeniería, cuyo perfil es distinto al de los alumnos a los que nos venimos refiriendo, lo cual se trata de dilucidar en el apartado sobre las entrevistas.

Vistos los ejemplos de Daniel, planteamos a continuación, a modo informativo, los de Marcos y Raquel, respectivamente:

M4.1-3.1. *Dice a los alumnos que tienen que representar el proceso de la suma, no el resultado, con material manipulativo [E, 3].*

- *M4.1-3.1(I)1. Porque los alumnos tienden a realizar la suma con números, con la técnica usual, y a representar luego el resultado; les das un ábaco que supuestamente es una ayuda para hacer eso y se lo toman como un obstáculo para hacerlo porque ellos están muy cómodos haciéndolo con los números y no se dan cuenta de que el ábaco hace eso mucho más rápido [I, M].*

M20.1-3.3. *Está remarcando a los alumnos las propiedades que están empleando: la conmutativa, la asociativa y la [distributiva] de la suma respecto del producto [E, 3].*

- *M20.1-3.3(I)2. Se trata de propiedades que son tan evidentes para los alumnos que ni se dan cuenta de que están ahí detrás [I, M].*

R5.1-2. *Recuerda a los alumnos la propiedad que ha usado [E, 2].*

- *R5.1-2(I)1. Es bueno recordarlo porque son conceptos que tienen los alumnos, pero que muchas veces se les escapan [I, M].*

Vemos que se interesan también por las dificultades de los alumnos de Magisterio como resolutores, pero estas interpretaciones no son, ni mucho menos, una mayoría entre las que cada uno formula.

Alumnos de Magisterio como futuros maestros

Otro tema relativo a los alumnos de Magisterio es aquel en el que se los mira como futuros maestros. Supone un tema que es prácticamente anecdótico para los formadores, apareciendo en torno a media decena de veces para Marcos y solo una vez para Daniel y Raquel, lo que pone de relieve la falta de conexión que en la primera fase existe entre las interpretaciones y la labor futura de los alumnos que aparecen en los vídeos visionados y analizados. En primer lugar, los ejemplos de Marcos son los siguientes:

M33.1-2. Dice que las reglas generales, si no se entienden, no valen, ya que está formando a maestros, haciendo ver que hay que saber cómo o por qué funciona la regla [E, 3].

- M33.1-2(I)1. Más allá de formar a maestros, es una consideración que tendría que estar en matemáticas en todos los órdenes, no solo en los maestros; en los maestros, desde luego, todavía más [I, M].

M18.1-1.3. Indica el objetivo que tenían que alcanzar los alumnos: establecer la conexión entre los palillos y el sistema de numeración [E, 3].

- M18.1-1.3(I)1. Hasta el momento la actividad podría ser trasladable a los alumnos [de primaria], pero ahora ya se aprecia un objetivo de didáctica de las matemáticas para estos alumnos [futuros maestros] que en la actividad no estaba presente; ha trasladado la actividad a la vez que les hace pensar sobre por qué puede ser interesante; es una discusión de doble naturaleza [I, M].

M25.1-3.3. Indica que ahora hay que agrupar [E, 2].

- M25.1-3.3(I)1. Trata de que los alumnos entiendan cómo funciona el sistema y también pretende que sepan cómo tratar esto luego en primaria; trata de justificar por qué lo hacemos así [la suma tradicional] [I, M].

M32.1-3.3. Está explicando la progresión didáctica, partiendo de los euros, de lo concreto, y siguiendo con lo manipulativo para llegar a lo abstracto, o sea, su objetivo como maestros [E, 3].

- M32.1-3.3(I)1. Se trata ya de una indicación, de una progresión, de índole didáctica que les servirá a los alumnos en su práctica fuera [en primaria] para que sus futuros alumnos aprendan lo trabajado. Establecer una progresión adecuada es algo que a los docentes nos preocupa mucho, la cual no siempre va de lo fácil a lo difícil, a veces tienes que presentar cosas difíciles para generar desequilibrios para que los alumnos tengan que actuar. En este caso, para entender eso [señala el algoritmo simbólico tradicional de la suma], es necesario conocer todo lo planteado en la pizarra [I, M].

M35.1-3.3. Está preguntando a los alumnos cómo han pasado todo este proceso [el aprendizaje de la suma en primaria] [E, 1].

- M35.1-3.3(I)1. Para que vean si las dificultades que tuvieron [en primaria] las podrían resolver luego [como maestros] por otras vías [I, M].

Contemplamos cinco casos en los que Marcos ha establecido un enlace con la labor que los estudiantes, como futuros maestros, desempeñarán en el aula de primaria, aunque sin ahondar en demasía en dicho quehacer profesional.

Sucede prácticamente lo mismo en los casos de Daniel y de Raquel, en los que se trata el tema casi de soslayo, sin centrarse realmente en el asunto, como se puede ver en las siguientes interpretaciones:

D9.1-3.3. Está describiendo el proceso o la secuencia de la suma, de lo concreto, pasando por lo pictórico, hasta lo abstracto [E, 3].

- *D9.1-3.3(I)1. Para que los alumnos tengan una visión global de la ruta de aprendizaje de un alumno [de primaria] cuando está aprendiendo a sumar en primaria [I, M].*

R1.1-3.1. Pide a los alumnos que se centren en el proceso de la suma [E, 3].

- *R1.1-3.1(I)1. Si un profesor consigue que sus alumnos entiendan el proceso, adquirirán el concepto y podrán ser buenos profesores; si solo sé hacer la suma, sin entender el proceso, no puedo transmitir cómo hacerla [I, M].*

Se aprecia una ligera conexión con el futuro perfil profesional del estudiantado de Magisterio, pero, de nuevo, es casi tangencial, no se reflexiona en torno a su figura como futuro maestro.

Así pues, podemos decir que, en líneas generales, este tema no acapara demasiado la atención de los formadores, lo cual resulta llamativo, pues su labor es la de desarrollar una parte del perfil profesional – una fracción de la formación – de la cual se valdrán los alumnos de Magisterio en las aulas cuando ejerzan como maestros. Este hecho se trata de abordar en las entrevistas.

Alumnos de Educación Primaria

La aparición de este tema en las interpretaciones de los MTE es todavía menor que la del anterior, esto es, no realizan conexiones con el aula de primaria y con sus alumnos para interpretar los eventos notados relativos a la práctica de enseñanza de la formadora de los vídeos. Podemos decir que solo aparece en alguna ocasión en alguna interpretación que proporciona Marcos, pero de manera muy superficial, y una sola vez en el caso de la maestra, que propone la única interpretación en toda la primera fase en la que se incluye una reflexión que profundiza – mínimamente – en el aprendizaje de los estudiantes de primaria, tal y como se observa a continuación:

M18.1-1.3. Indica el objetivo que tenían que alcanzar los alumnos: establecer la conexión entre los palillos y el sistema de numeración [E, 3].

- M18.1-1.3(I)1. Hasta el momento la actividad podría ser trasladable a los alumnos [de primaria], pero ahora ya se aprecia un objetivo de didáctica de las matemáticas para estos alumnos [futuros maestros] que en la actividad no estaba presente; ha trasladado la actividad a la vez que les hace pensar sobre por qué puede ser interesante; es una discusión de doble naturaleza [I, M].

M17.1-3.2. Está reinterpretando, en los términos de nuestro sistema convencional, en términos más matemáticos, lo que han hecho los alumnos, haciendo ver que han desagrupado [E, 2].

- M17.1-3.2(I)2. Se ha hecho una simulación de manera acelerada de lo que sería una situación en una clase de primaria, donde el trabajo debería ser mucho más del alumno, pero aquí [en la facultad] no puedes reproducir exactamente las actividades de primaria porque estos no son niños de primaria, son maestros, tienen mucho más conocimiento y mucha más madurez [I, M].

M20.1(i)-3.2. Evento implícito en el comentario [E, 1].

Transcripción del vídeo: Entonces, simbólico tienes que explicarlo conectado con esto.

- M20.1(i)-3.2(I)1. Emplea el ábaco no solo como un elemento didáctico para usar con los niños [de primaria], sino para que los alumnos descubran realmente qué están haciendo cuando están restando [I, M].

R1.1-3.3. Está explicando la correspondencia entre la estructura del material manipulativo y la representación simbólica [de la operación] [E, 2].

- R1.1-3.3(I)1. Cuando los niños aprenden, como primero se utiliza muchísimo el material manipulativo, si la estructura del material manipulativo se corresponde con la forma simbólica, a los niños luego no les cuesta trabajo hacer esa transcripción [I, M].

Vemos que las interpretaciones de Marcos en las que incluye una conexión con los alumnos de primaria no ahondan en sus características de aprendizaje, encontrando, a lo sumo, un ejemplo en el que habla sobre cómo se trabaja en primaria. Por su parte, Raquel menciona en una interpretación una dificultad de aprendizaje matemático que tienen los estudiantes de primaria, pero no profundiza demasiado en la cuestión, limitándose solo a señalarla.

En suma, pensamos que es muy llamativo que sean tan escasas las conexiones con los alumnos de primaria en las interpretaciones. Esto se podría entender en el caso de los MTE que no tienen experiencia como maestros, pero en el de Raquel es hartó complicado hallar una explicación satisfactoria, lo cual se trata de hacer con las entrevistas.

Contenido didáctico

Con relación al último tema establecido en el eje 4, el cual se ocupa de la didáctica general, hay que decir que tiene presencia en las interpretaciones de los tres formadores, siendo esta acusada en el caso de Daniel y muy acusada para la maestra. Se presentan en las siguientes líneas las interpretaciones acerca de este tema —sin subrayar su contenido, en esta ocasión, pues en su conjunto es contenido no matemático—:

M9.1-1.1. *Declara el objetivo didáctico de la actividad con estos alumnos, los futuros maestros [E, 1].*

- M9.1-1.1(I)1. *Lo que no se sabe aún es si se trata de una actividad para realizarla con alumnos más pequeños, y estamos reproduciendo la actividad con los futuros maestros, o si es una actividad destinada al futuro maestro directamente [I, D].*

M15.1-3.1. *Explica a los alumnos que les pedirá que pasen el proceso a una representación gráfica para examinar lo que están viendo [E, 2].*

- M15.1-3.1(I)1. *Al explicar cómo examinará se está adelantando a la pregunta clásica de los alumnos: «¿y esto cómo lo vas a preguntar en el examen?» [I, D].*

M13.1-3.2. *Plantea preguntas a los alumnos con un carácter didáctico, supervisando el trabajo que realizan [E, 1].*

- M13.1-3.2(I)1. *Para tratar de acelerar el proceso, ya que no hay tiempo para que lo hagan ellos solos al tener que cubrir ciertos contenidos; es algo que nos pasa a todos [I, D].*

D1.2-1.1. *Contextualiza la actividad con una situación que podría ser cotidiana [E, 2].*

- D1.2-1.1(I)1. *Para asegurarse de que toda la clase entienda lo que van a hacer [I, D].*

D3.1-1.1. *Dirige a los alumnos en su explicación sobre la actividad con detalles o pistas acerca de cómo realizarla [E, 1].*

- D3.1-1.1(I)1. *Si se ha trabajado más o menos el contenido, hacen falta más o menos detalles, más o menos dirección; en este caso, es difícil apreciar cuánto hace falta esa dirección, al no saber cuánto se ha trabajado antes un contenido parecido [I, D].*

D2.1-1.2. Razona sobre la estrategia que han propuesto los alumnos, sin decirles directamente qué es lo que han hecho mal [E, 1].

- D2.1-1.2(I)1. Para que los alumnos se den cuenta de los problemas que tiene lo que han hecho [I, D].

D4.1-2. Empieza a desarrollar una idea de resolución que ha dado un alumno, permitiendo el empleo de la estrategia consistente en interpretar en base 16 la expresión dada para resolver el problema [E, 1].

- D4.1-2(I)1. Con el inicio del desarrollo de la resolución trata de que los alumnos empiecen a ver por dónde van las cosas [I, D].

D3.1-3.1. Avisa a los alumnos de que, aunque lo que van a hacer no lo pueda evaluar en el examen tal y como lo van a hacer en clase, va a evaluarlo de alguna manera [E, 1].

- D3.1-3.1(I)1. Para que los alumnos estén más motivados con el tema de la evaluación en la clase práctica [I, D].

R2.2-1.1. Relaciona lo que tienen que hacer con una actividad natural del día a día, con cualquier sitio al que habitualmente pueden ir los alumnos, con su entorno más inmediato [E, 2].

- R2.2-1.1(I)1. Porque así, partiendo de sus intereses y de su entorno, están más receptivos y abiertos a la actividad [I, D].

R3.1-1.1. Acaba de marcar el objetivo de la actividad [E, 1].

- R3.1-1.1(I)1. Para que los alumnos sepan realmente para qué les va a servir esa sesión y qué se pretende sacar en concreto de la misma [I, D].

R1.2-1.2. Hace preguntas a los alumnos, detecta un error que han cometido y lo pone de manifiesto, pero sin explicar exactamente cómo han de proceder [E, 1].

- R1.2-1.2(I)1. Con las preguntas pretende que sean los propios alumnos los que se organicen para resolver ellos solos la actividad [I, D].

R2.1-1.3. Está preguntando a los alumnos por grupos, tratando de llegar a la conclusión [E, 1].

- R2.1-1.3(I)1. Para que los alumnos sinteticen y razonen el trabajo realizado y poder comprobar así si han adquirido el objetivo de la clase [I, D].

R2.1-2. Organiza visualmente la información a los niños [a los futuros maestros] [E, 1].

- R2.1-2(I)1. La esquematización, atendiendo al contenido o concepto que se trabaje, es la forma más adecuada para que los alumnos se organicen y puedan llegar a entender lo que se trabaje [I, D].

R3.1-2. *Escribe lo que un alumno le va diciendo en voz alta cuando escribe el 11 [su desarrollo], siendo ella quien termina [E, 1].*

- R3.1-2(I)1. *Porque detecta que le está costando trabajo al alumno [I, D].*

R2.1(i)-3.1. *Evento implícito en el comentario [E, 1].*

Transcripción del vídeo: La tabla [escribe en la pizarra] puede ser más gráfica, puede tener características gráficas, o puede tener características más simbólicas; a mí me va a interesar más la que tenga características más gráficas, luego ya veremos en detalle cómo, pero tenéis que intentar construirlo vosotros sin que yo os haya hablado de eso explícitamente, ¿vale?

- R2.1(i)-3.1(I)1. *Se fomenta la creatividad de los alumnos; cuanto más creativos sean, más se puede sacar de ellos [I, D].*

R1.1-3.2. *Ayuda a un alumno a razonar mediante preguntas [E, 1].*

- R1.1-3.2(I)1. *Porque veía que le estaba costando mucho trabajo [I, D].*

R2.1-3.3. *Explica otra forma, remarcando mucho sus características [E, 1].*

- R2.1-3.3(I)1. *Para que los alumnos no tengan confusiones, para que tengan las cosas claras [I, D].*

Se advierte que, desde un plano de didáctica general, Marcos trata asuntos como, por ejemplo, los destinatarios de la actividad, la evaluación o la necesidad de acelerar los procedimientos en clase para poder cubrir ciertos contenidos. Daniel, por su parte, sobre todo otorga importancia a que los alumnos de Magisterio entiendan aquello que trabajan en el aula, así como a algunos aspectos relativos a la necesidad de dar explicaciones más o menos detalladas, la evaluación o la motivación. Finalmente, Raquel, poniendo el foco principalmente en los alumnos de Magisterio, presta atención a que estos entiendan bien aquello que trabajan en el aula, a procedimientos para que adquieran ciertos conceptos o a dificultades del aprendizaje, así como a aspectos enlazados con la motivación, el trabajo autónomo o la creatividad, siendo estos dos últimos exclusivos de la maestra —quizá por su experiencia en el aula de primaria—.

En resumen, en este eje 4 se han detectado diferencias significativas entre los tres formadores. Por un lado, hemos podido comprobar que Marcos arrasa no solo desde un plano cuantitativo —como vimos en el bloque anterior—, sino también cualitativamente, puesto que la diferencia entre sus resultados y los de los demás sujetos es colosal. Se trata del único MTE que aporta interpretaciones relativas a todos los temas planteados en este cuarto eje, resultando asombrosa la profundidad de las interpretaciones que proporciona,

yendo siempre más allá de meras explicaciones para ofrecer reflexiones con enjundia que examinan minuciosamente las cuestiones en las que se centra. Además, normalmente es posible apreciar varios temas en sus interpretaciones, lo que da cuenta de la conexión que establece entre estos, no limitándose a abordarlos de forma aislada. Por todo ello, resulta palmaria —o al menos así lo sugiere su desempeño— la influencia tanto de su formación en didáctica de las matemáticas —siendo notorio el paradigma de investigación en el que se apoya— como su amplia experiencia como MTE, ya que son aspectos que le ayudan a interpretar mejor los eventos que identifica. Por otro lado, se ha visto que Daniel se centra principalmente en interpretar cuestiones sobre los objetivos y los alumnos de Magisterio como resolutores, siendo altamente llamativa la escasez de conexiones con elementos de las matemáticas en sus interpretaciones, que normalmente tienen forma de explicaciones de los eventos y no se adentran en reflexionar más allá acerca de lo identificado. También es característico de este participante su interés por las dificultades que tienen los alumnos de Magisterio con el contenido matemático, lo que podría explicarse —como se ha dicho anteriormente— atendiendo a su experiencia como profesor de matemáticas en estudios universitarios de ingeniería. Así pues, se podría sostener que su menor experiencia como formador —en comparación con Marcos— le hace no tener una actitud interpretativa tan desarrollada, así como que su vasta formación en matemáticas le lleva, paradójicamente, a no hacer mención de aquellos elementos matemáticos presentes en lo que interpreta. Por último, hemos advertido que Raquel dirige su atención, esencialmente, hacia el contenido didáctico general, dejando prácticamente en el olvido la vertiente matemática de todo lo que nota en los vídeos a la hora de interpretar. Asimismo, resulta singular la escasez de conexiones con el aula de primaria, las cuales no aparecen ni siquiera en los temas acerca del contenido didáctico general, habida cuenta de su formación académica como maestra y de los más de 15 años de experiencia ejerciendo como tal. Consecuentemente, se podría afirmar que su baja experiencia como formadora y su menor formación matemática —en comparación con los otros dos MTE— constituyen elementos que coadyuvan al resultado alcanzado por la maestra. Cabe recordar, finalmente, que los argumentos aportados para explicar los resultados se contrastan en las entrevistas realizadas.

Tras haber desarrollado desde un enfoque cualitativo el análisis de la información de la fase 1 en los cuatro ejes, pasamos ahora a abordar los datos de la fase 2.

4.2.2. Fase 2. *Noticing* inducido

Se presenta a continuación el análisis cualitativo de los datos de tres participantes, en paralelo, relativos a su *noticing* inducido, es decir, al manifestado en los formadores a raíz de un *structured video viewing support*. Dichos datos han sido extraídos del Anexo 34 —explicado en el capítulo 3—, en el que encontramos los eventos e interpretaciones de la fase 2 de todos los sujetos, integrados en la transcripción de los vídeos tras el *call-out* al que cada uno se refiere —cuando es el caso—, así como etiquetados y codificados. Si bien en otros anexos también se contempla información relacionada con este bloque —análisis cualitativo—, es el citado documento el único que reúne todo el contenido necesario para la labor que nos ocupa en esta segunda fase.

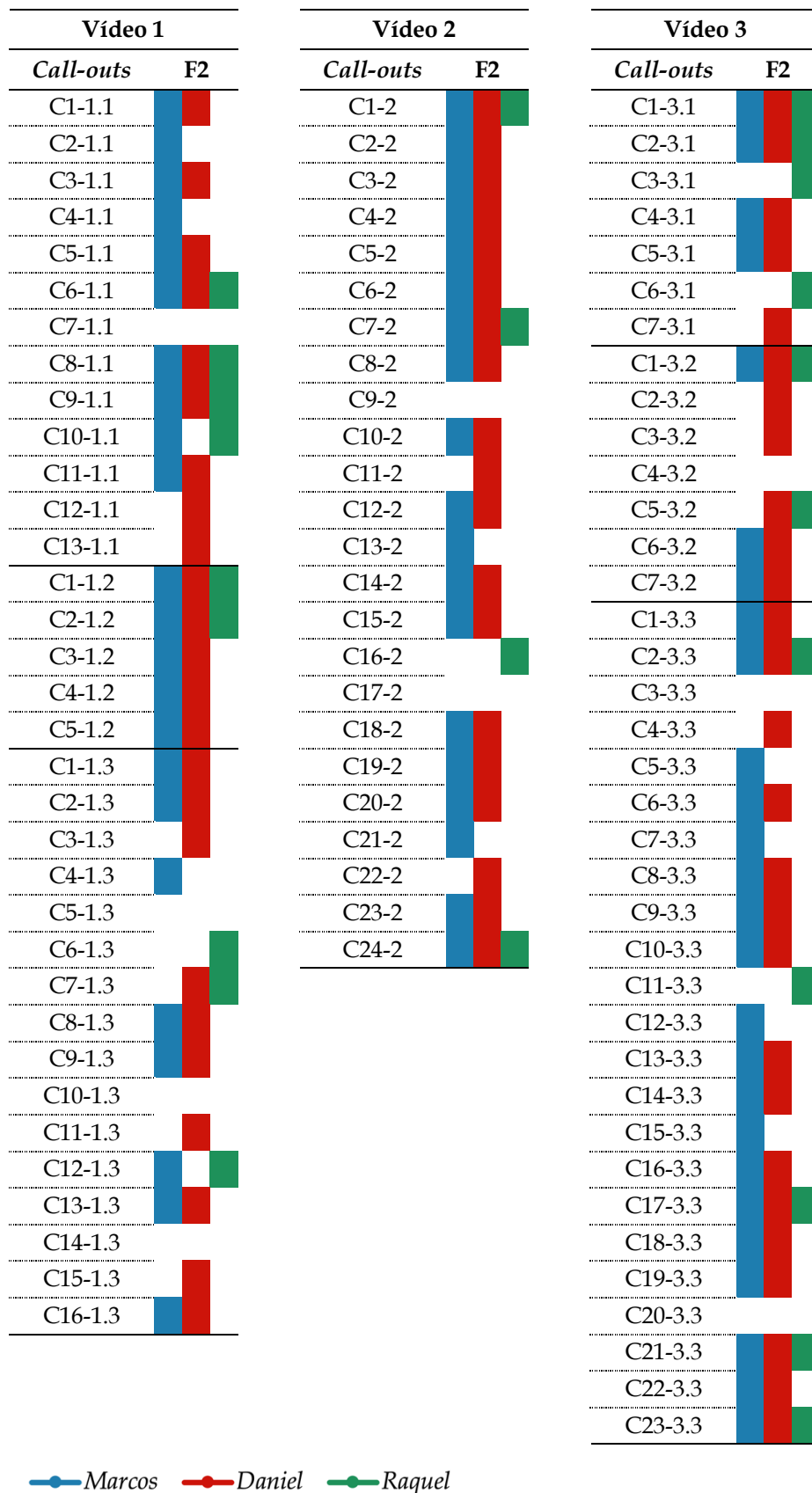
4.2.2.a. Eje 1. *Eventos: ¿qué notan?*

En este eje nos centramos ya no en determinar cuántos *call-outs* ha detectado cada formador —tal y como se ha hecho en el bloque anterior—, sino en considerar cuáles han identificado. Así pues, a continuación se examina qué eventos relevantes ha notado cada MTE en los distintos vídeos —análisis interindividual—.

No obstante, primero cabe recordar que un tratamiento distinto de la información se podría haber llevado a cabo también en el presente eje, que consistiría en examinar el contenido de los diversos eventos relevantes explicitados por cada uno de los sujetos para tratar de averiguar si existen diferencias en relación con el contenido de aquello a lo que prestan atención los participantes. Para ello, sería necesario, obviamente, que se diera en el conjunto de *call-outs* establecidos una diversidad significativa en las ideas que pudieran recoger, sobre lo cual podríamos decir —sin haber desarrollado dicha tarea en el trabajo— que es posible dar con tales diferencias entre eventos relevantes de un mismo vídeo, pero sobre todo entre *call-outs* de distintos vídeos. Con todo, tal indagación, dado que nuestro interés se dirige esencialmente a profundizar en los ejes referidos al *cómo*, se deja, por lo tanto, para futuras investigaciones acerca de los datos recogidos en esta tesis.

Así pues, en la siguiente tabla se recogen los *call-outs* vistos por Marcos, Daniel y Raquel, de forma respectiva, en cada uno de los vídeos en la segunda fase:

Tabla 4.26. *Call-outs* identificados por Marcos, Daniel y Raquel –eje 1–: vídeos 1, 2 y 3, fase 2.



Además de apreciar de nuevo que Marcos y Daniel identifican un elevado número de eventos relevantes —prácticamente la misma cantidad cada uno— y que Raquel es la formadora que menos nota —tal y como se vio en el bloque cuantitativo—, ahora resulta interesante fijarse en que algunos *call-outs* no han sido detectados por ningún sujeto, así como en que otros han sido señalados por los tres.

Con relación a los primeros, podemos mencionar el C7-1.1, C5-1.3, C9-2 o C20-3.3, puesto que se trata de *call-outs* que no están presentes en otros —a diferencia de los demás que no han sido identificados, cuyas ideas sí es posible encontrarlas, de forma parcial, en otros eventos relevantes explicitados—. Tales eventos relevantes son los que se muestran a continuación:

C7-1.1. Menciona el contenido matemático que van a trabajar: el número.

C5-1.3. Pregunta si escribe 9 grupos de 3 o 3 grupos de 9.

C9-2. Explica cómo se realiza la potencia de una potencia, haciendo ver que $(2^4)^1$ es $2 \times 2 \times 2 \times 2$ y que, como está elevado a 1, se copia una sola vez.

C20-3.3. Mantiene plasmados en paralelo los cinco registros de representación que ha empleado para realizar la suma.

Por tanto, parece que el contenido matemático a trabajar, la escritura simbólica de las agrupaciones establecidas, la explicación de cómo realizar la potencia de una potencia y, por último, el hecho de mantener al mismo tiempo en la pizarra todos los registros de representación empleados para hacer una suma —con propósito de poder compararlos— son aspectos que no han recibido la importancia suficiente como para ser explicitados por alguno de los tres formadores.

Y en cuanto a los segundos, podemos citar, por ejemplo, el C6-1.1, C8-1.1, C1-1.2, C1-2, C24-2, C2-3.1, C2-3.3, C17-3.3, C21-3.3 o C23-3.3, que se enuncian de la manera que se expone a continuación:

C6-1.1. Presenta un libro que utilizan en Estados Unidos para formar a profesores de primaria y que contiene muchas actividades para llevar al aula.

C8-1.1. Enuncia el objetivo de la actividad: entender el desarrollo de la escritura de los números en nuestro sistema de numeración.

C1-1.2. *Pregunta a los alumnos qué agrupaciones habían hecho antes de juntarse los dos grupos de alumnos y si han tenido que llegar a algún acuerdo al juntar los palillos de ambos grupos, incidiendo así en la primera y en la tercera instrucción de la consigna.*

C1-2. *Plantea el ejercicio a realizar: pasar de base 16 a base 2 directamente, sin pasar por base 10.*

C24-2. *Hace explícito que solamente se puede pasar directamente de una base a otra cuando una base es potencia de la otra, como de base 16 a base 2, ya que 16 es 2^4 .*

C2-3.1. *Explica que no quiere que los alumnos representen el resultado, sino que representen el proceso de la suma.*

C2-3.3. *Empieza a realizar la suma con el sorobán, indicando que lo hace gráficamente.*

C17-3.3. *Hace ver que en la nueva suma aparecen más de 10 unidades al sumar, por lo que hay que reagrupar al estar en base 10, explicándolo en cada registro de representación plasmado en la pizarra.*

C21-3.3. *Pone de manifiesto la secuenciación planteada: se parte de lo más concreto, que sería el problema dado en su contexto; luego se pasa a manipular con ábacos verticales, con ábacos japoneses y con bloques multibase; después se hace la suma en una tabla gráfica y luego en una numérica, las cuales se denominan tableros de posición; y finalmente se llega a lo más abstracto, que sería la suma simbólica con expresiones polinomiales o, en primaria, la suma simbólica tradicional, siendo el objetivo escribir finalmente el proceso de forma abstracta.*

C23-3.3. *Pregunta a los alumnos cómo han trabajado la suma en primaria, haciendo ver que es habitual trabajar la fase inicial de la representación de la suma directamente con lo simbólico, que es la fase final.*

Como podemos observar, los tres MTE han dado importancia a distintos aspectos, recogidos en los *call-outs* precedentes, como los manuales de didáctica de las matemáticas para formar a maestros, el enunciado y el objetivo de las tareas matemáticas, la necesidad de llegar a acuerdos para juntar agrupaciones diferentes, las conclusiones alcanzadas tras un proceso de trabajo —como cuando se dice que el paso directo de una base a otra solo es posible cuando una es potencia de la otra—, la importancia del proceso frente al mero resultado, el empleo de materiales, las sumas en las que hay que hacer reagrupamientos, la secuencia a implementar en el aula de primaria para explicar un concepto matemático o las experiencias previas de los alumnos de Magisterio como estudiantes de matemáticas en primaria.

Por tanto, si bien los formadores muestran diferencias entre sí en este eje, también tienen puntos en común, tanto por no atender como por sí atender a ciertos aspectos sobre la práctica de enseñanza de la formadora de los vídeos que visionaron y comentaron.

4.2.2.b. Eje 2. Eventos: ¿cómo notan?

En este eje se examinan las evidencias textuales de cada formador que abonan los niveles —comentados antes en el bloque cuantitativo— otorgados a los eventos referidos a *call-outs* en el conjunto de los vídeos —análisis interindividual—. Por tanto, se pretende inspeccionar las diferencias existentes a la hora de explicitar los elementos fundamentales —recogidos en el Anexo 19—, para lo que nos centraremos, en particular, en *call-outs* que hayan sido detectados por los tres MTE en la segunda fase. Así pues, se persigue mostrar algunos ejemplos en el cuerpo del trabajo acerca de cómo se aplica el criterio expuesto en las tablas 3.5 y 3.6 del tercer capítulo —sobre cómo establecer el nivel de un evento en el segundo eje— y, por ende, no relegar tal información exclusivamente a la sección final en la que se adjuntan los anexos.

En ocasiones, los formadores identifican un mismo *call-out* y lo explicitan con un detalle similar, situándose el evento formulado por cada cual en el mismo nivel. Algunos ejemplos de esta situación son los que siguen —se plantea el evento relevante, junto con sus elementos fundamentales, y la formulación del mismo realizada por cada sujeto—:

C2-3.3. *Empieza a realizar la suma con el sorobán, indicando que lo hace gráficamente.*

- *Representación gráfica de la respuesta con el sorobán.*

2M2.1-3.3. *Empieza a resolver la suma haciendo la representación en el ábaco japonés, en el sorobán [E, 2].*

2D1.2-3.3. *Comienza a resolver la tarea con la forma manipulativa, concretamente con el sorobán, indicando que es la representación que más les cuesta a los alumnos [E, 2].*

2R1.1-3.3. *Está trabajando el concepto de la suma visualmente, gráficamente [E, 2].*

En este caso, vemos que los tres sujetos han formulado el *call-out* con un nivel 2 de precisión, por lo que —al haber un solo elemento fundamental— han tenido que referirse al elemento de forma parcial. Así pues, observamos que Marcos y Daniel se han fijado en la parte del elemento referida al sorobán, mientras que Raquel ha puesto la atención en el

aspecto gráfico de la representación. En cualquier caso, todos los participantes reciben el mismo nivel —en este caso, el 2— por haber identificado parcialmente el único elemento fundamental, con independencia del aspecto que de este se haya observado.

C2-3.1. *Explica que no quiere que los alumnos representen el resultado, sino que representen el proceso de la suma.*

- *Proceso.*

2M4.2-3.1. *Indica que hay que poner el foco en el proceso de las operaciones, no en el resultado [E, 3].*

2D1.2-3.1. *Hace hincapié en que representen el proceso de la suma, no solo el resultado [E, 3].*

2R3.1-3.1. *Indica a los alumnos que tienen que representar el proceso de la suma [E, 3].*

En este segundo ejemplo, los tres formadores expresan el *call-out* con un nivel 3 de precisión, por lo que —al haber un solo elemento fundamental— han tenido que referirse al elemento de forma completa. Así pues, vemos que los tres han mencionado la idea que se ha fijado como fundamental —proceso— plenamente, lo que provoca que se asigne el nivel 3 a todos los eventos.

Cabe decir que en la segunda fase no se encuentran *call-outs* que hayan sido vistos por los tres MTE y cuya formulación se posicione en los tres casos en el nivel 1. Esto puede deberse a la escasa presencia del nivel inferior en los eventos de la fase 2 —sobre todo en los de Daniel y Marcos—, lo que dificulta que se dé la situación expuesta.

Asimismo, en otras ocasiones, los formadores detectan un mismo *call-out*, pero lo explicitan con una profundidad distinta, situándose el evento formulado por cada cual en diversos niveles. Algunos ejemplos de este escenario son los siguientes:

C24-2. *Hace explícito que solamente se puede pasar directamente de una base a otra cuando una base es potencia de la otra, como de base 16 a base 2, ya que 16 es 2^4 .*

- *Paso directo cuando una base es potencia de la otra.*

2M13.2-2. *Hace explícito que la base 16 funciona porque es 2^4 [E, 2].*

2D15.1-2. *Explica que un procedimiento directo se puede hacer cuando una de las bases es potencia de la otra, como con la base 16, que es potencia de 2 [E, 3].*

2R10.1-2. *Está haciendo ver propiedades de las potencias [E, 1].*

En este caso, los MTE se refieren al mismo evento relevante, pero cada uno de los eventos se posiciona en un nivel diferente. En el nivel más alto encontramos a Daniel, que es capaz de explicitar de un modo completo el único elemento fundamental — pues indica tanto la parte del paso directo como la de que una base sea potencia de la otra —. Por otro lado, Marcos se sitúa en el nivel 2, puesto que alude de forma parcial al elemento — señala que el ejemplo de la base 16 funciona porque 16 es 2^4 , pero no extrapola la información a cualquier base que sea potencia de otra —. Y en lo que respecta a la maestra, ella se queda en el nivel 1, ya que no es posible considerar que aluda, ni de manera parcial, al elemento fundamental — de hecho, se podría decir que su forma de expresar el evento relevante es errónea, pues, realmente, atendiendo a lo expresado en el *call-out*, no se están exponiendo propiedades de las potencias —.

C1-2. *Plantea el ejercicio a realizar: pasar de base 16 a base 2 directamente, sin pasar por base 10.*

- *De base 16 a base 2.*
- *Directamente o sin pasar por base 10.*

2M1.1-2. *Plantea que hay que pasar de base 16 a base 2 sin pasar por base 10 [E, 3].*

2D1.1-2. *Enuncia el problema a realizar, que consiste en pasar un número de base 16 a base 2 de forma directa, es decir, con la restricción de no pasar por base 10 [E, 3].*

2R1.1-2. *Está trabajando el cambio al sistema binario, la escritura de uno a otro [de una base a otra] [E, 1].*

En este otro ejemplo, los tres eventos elaborados se refieren al mismo *call-out*, pero dos alcanzan el nivel superior, mientras que a otro se le adjudica el nivel inferior. Por un lado, los eventos de Marcos y de Daniel tienen el nivel 3 al mencionar completamente los dos elementos fundamentales, pues se refieren tanto a la instrucción de pasar de base 16 a base 2 como a la de que se haga sin pasar por base 10. Por otro, Raquel apenas explicita parcialmente el primer elemento — alude a él de una forma muy imprecisa —, por lo que se sitúa en el nivel 1.

C9-1.1. *Establece la primera instrucción de la consigna: organizar los palillos, empleando las cintas elásticas si son de ayuda, para saber cuántos hay de un vistazo.*

- *Organizar.*
- *Saber cuántos hay de un vistazo.*

2M5.1-1.1. Dice a los alumnos que tienen que hacer grupos de palillos, que tienen que organizarlos de tal forma que de un vistazo se pueda saber cuántos palillos hay [E, 3].

2D5.1-1.1. Indica que hay que agrupar los palillos de tal forma que se pueda saber la cantidad de palillos que hay sin necesidad de registrar el número con símbolos usuales, sino solamente viendo los grupos de palillos hechos por los alumnos [E, 3].

2R3.1-1.1. Está indicando la tarea a realizar, que consiste en que los alumnos agrupen, en la cual está implícito el objetivo marcado al principio [de la sesión] [E, 2].

En este otro ejemplo, los tres eventos elaborados se refieren al mismo *call-out*, pero dos alcanzan el nivel superior, mientras que a otro se le adjudica el nivel intermedio. Por un lado, los eventos de Marcos y de Daniel tienen el nivel 3 al mencionar completamente los dos elementos fundamentales, pues se refieren tanto a la instrucción de organizar los palillos como a la de que se sepa cuántos hay de un vistazo. Por otro, Raquel explicita un solo elemento —el de organizar, al señalar que los alumnos han de agrupar—, de manera completa, por lo que se sitúa en el nivel 2.

C17-3.3. Hace ver que en la nueva suma aparecen más de 10 unidades al sumar, por lo que hay que reagrupar al estar en base 10, explicándolo en cada registro de representación plasmado en la pizarra.

- Reagrupar.
- Distintos registros de representación.

2M8.2-3.3. Está viendo cómo se realizan los reagrupamientos en cada uno de los sistemas de representación que está utilizando [E, 3].

2D8.1-3.3. Hace ver, con ayuda de una alumna, que hay un nuevo fenómeno que tratar en la suma cuando aparecen 10 o más de una cierta unidad —unidades, decenas o centenas—, que es el reagrupamiento, describiendo en los cuatro sistemas de representación que está usando —la notación vertical usual, la notación polinómica, el sorobán y los bloques de base 10— cómo representaría el proceso de que tengo 9 y 6, 15 unidades, las cuales se agrupan en 1 decena y 5 unidades, siendo un objetivo de la actividad dicha comparación [E, 3].

2R4.1-3.3. Indica que están trabajando en base 10 [E, 1].

En este último ejemplo, dos de los eventos referidos al *call-out* se posicionan en el nivel 3 y el tercero hace lo propio en el nivel 1. Tanto Marcos como Daniel son capaces de explicitar ambos elementos fundamentales de manera completa —hablan de reagrupar y

de los distintos registros de representación —, por lo que sus eventos obtienen el nivel 3. En cambio, Raquel centra su atención en que están trabajando en base 10, sin hacerse eco de ninguno de los aspectos más importantes del *call-out*, ni parcialmente, razón por la que se sitúa en el nivel 1. Asimismo, en este ejemplo merece ser resaltado el evento explicitado por Daniel, pues no se ha limitado a mencionar de una forma completa los dos elementos fundamentales, sino que, además, ha formulado la situación observada con una claridad absoluta, indicando todos los detalles de la misma — señalando, por ejemplo, la suma que va a ser realizada y cada uno de los registros en los que se va a representar —, erigiéndose como un evento expresado con una especificidad y una completitud exquisitas.

En suma, se ha querido presentar algunos casos con el ánimo de mostrar la forma en la que han sido clasificados los diferentes eventos referidos a *call-outs* en los tres niveles planteados, así como ejemplificar abreviadamente los resultados del bloque cuantitativo, en el que Daniel logra un nivel alto, Marcos obtiene un nivel medio-alto y Raquel alcanza un nivel medio-bajo, y exponer que la formación matemática de los MTE podría tener que ver con el modo de explicitar los eventos, puesto que se pueden percibir diferencias entre los tres participantes tanto en el vocabulario utilizado para formular los *call-outs* como en la exhaustividad al referirse a ellos. Asimismo, en esta segunda fase la inducción provista ha podido dar lugar a los altos niveles de precisión contemplados.

Si se desea examinar el resto de eventos referidos a *call-outs*, se puede consultar el Anexo 34, así como el Anexo 19 —este último para conocer los elementos fundamentales de cada evento relevante—, los cuales ya se explicaron en el tercer capítulo del trabajo.

4.2.2.c. Eje 3. Interpretaciones: ¿qué interpretan?

En este eje nos ocupamos ya no de determinar cuántos eventos referidos a *call-outs* y acompañados de al menos una interpretación matemática ha aportado cada uno de los formadores en los distintos vídeos — análisis interindividual —, tal y como se ha hecho en el bloque anterior, sino de considerar cuáles son aquellos *call-outs* acerca de los que se ha expresado alguna interpretación matemática. Así pues, en la siguiente tabla se muestran los *call-outs* identificados por Marcos, Daniel y Raquel, de forma respectiva y en cada uno de los vídeos en la fase 2, sobre los que han verbalizado alguna interpretación [M]:

Tabla 4.27. *Call-outs* identificados por Marcos, Daniel y Raquel acompañados de al menos una interpretación matemática –eje 3–: vídeos 1, 2 y 3, fase 2.

Vídeo 1		Vídeo 2		Vídeo 3	
<i>Call-outs</i>	F2	<i>Call-outs</i>	F2	<i>Call-outs</i>	F2
C1-1.1		C1-2		C1-3.1	 
C2-1.1		C2-2		C2-3.1	 
C3-1.1		C3-2		C3-3.1	
C4-1.1		C4-2		C4-3.1	
C5-1.1		C5-2		C5-3.1	 
C6-1.1		C6-2		C6-3.1	
C7-1.1		C7-2		C7-3.1	
C8-1.1	 	C8-2		C1-3.2	 
C9-1.1		C9-2		C2-3.2	
C10-1.1	 	C10-2	 	C3-3.2	
C11-1.1		C11-2		C4-3.2	
C12-1.1		C12-2		C5-3.2	
C13-1.1		C13-2		C6-3.2	 
C1-1.2	  	C14-2		C7-3.2	
C2-1.2		C15-2		C1-3.3	
C3-1.2		C16-2		C2-3.3	
C4-1.2		C17-2		C3-3.3	
C5-1.2		C18-2		C4-3.3	
C1-1.3		C19-2		C5-3.3	
C2-1.3		C20-2		C6-3.3	
C3-1.3		C21-2		C7-3.3	
C4-1.3		C22-2		C8-3.3	
C5-1.3		C23-2		C9-3.3	 
C6-1.3		C24-2		C10-3.3	
C7-1.3				C11-3.3	
C8-1.3				C12-3.3	
C9-1.3				C13-3.3	
C10-1.3				C14-3.3	
C11-1.3				C15-3.3	
C12-1.3				C16-3.3	
C13-1.3	 			C17-3.3	 
C14-1.3				C18-3.3	
C15-1.3				C19-3.3	
C16-1.3	 			C20-3.3	
				C21-3.3	
				C22-3.3	
				C23-3.3	 

 Marcos  Daniel  Raquel

Hay que recordar, antes de comentar brevemente los datos, que, al igual que en el eje 1, se podría examinar el contenido de los diversos eventos relevantes explicitados por cada uno de los formadores para tratar de averiguar si existen diferencias en relación con el contenido de —en este caso— aquello sobre lo que deciden manifestar interpretaciones matemáticas. Empero, dado que nuestro interés se dirige esencialmente a profundizar en los ejes referidos al *cómo*, se deja la posibilidad citada para futuras investigaciones acerca de la información recogida en esta tesis.

Además de apreciar de nuevo que Marcos es quien más eventos relevantes detecta acompañándolos de al menos una interpretación [M], con diferencia, y que la maestra es quien menos —lo que ya se mencionó en la parte cuantitativa—, resulta interesante fijarse ahora en cómo se distribuyen las interpretaciones en los *call-outs* que fueron identificados por los tres formadores —para lo que es menester cruzar los datos de esta tabla con la del eje 1, es decir, con la tabla 4.26—. En este sentido, algunos de dichos *call-outs* no han sido interpretados matemáticamente por ningún MTE, otros —solo dos—, por el contrario, han recibido interpretaciones [M] de todos los sujetos y otros han recibido la atención de uno o dos formadores a la hora de aportar al menos una interpretación matemática.

En relación con el primer grupo, este lo conforman el C6-1.1, C1-2 y C24-2, que se enuncian de esta manera:

C6-1.1. *Presenta un libro que utilizan en Estados Unidos para formar a profesores de primaria y que contiene muchas actividades para llevar al aula.*

C1-2. *Plantea el ejercicio a realizar: pasar de base 16 a base 2 directamente, sin pasar por base 10.*

C24-2. *Hace explícito que solamente se puede pasar directamente de una base a otra cuando una base es potencia de la otra, como de base 16 a base 2, ya que 16 es 2^4 .*

Por lo tanto, parece que, si bien los manuales de didáctica de las matemáticas para formar a maestros, el enunciado de las tareas matemáticas o las conclusiones alcanzadas tras un proceso de trabajo son asuntos relevantes para todos los MTE —pues los tres han detectado los eventos referidos a dichos temas—, no lo son tanto a la hora de detenerse a explicarlos o reflexionar sobre los mismos desde un enfoque matemático, ya que ninguno de los tres formadores ha aportado interpretación matemática alguna acerca de ellos.

En lo que respecta al segundo grupo, este lo integran solo dos eventos relevantes, el C1-1.2 y el C2-1.2, que quedan redactados como sigue:

C1-1.2. *Pregunta a los alumnos qué agrupaciones habían hecho antes de juntarse los dos grupos de alumnos y si han tenido que llegar a algún acuerdo al juntar los palillos de ambos grupos, incidiendo así en la primera y en la tercera instrucción de la consigna.*

C2-1.2. *Hace ver, tras preguntar cuántos palillos tienen las agrupaciones con gomas amarillas, que no es útil que con un mismo color se hagan agrupaciones de 15 o 20 palillos indistintamente, agrupaciones distintas, ya que de ese modo no se puede saber cuántos palillos hay visualmente, incidiendo así en la primera instrucción de la consigna.*

Así pues, parece que, independientemente del perfil profesional de los MTE —de su formación y experiencia—, todos estiman importante interpretar el hecho de tener que llegar a acuerdos para juntar agrupaciones distintas, así como que el empleo del material —en este caso, gomas de colores— se alinee con las condiciones de la consigna.

En el último grupo de eventos relevantes —que han recibido interpretaciones [M] por parte de alguno de los MTE, pero no de todos ellos—, encontramos *call-outs* que han sido interpretados matemáticamente por Marcos —C9-1.1, C7-2, C17-3.3 y C21-3.3—, por Marcos y Daniel —C8-1.1 y C23-3.3—, por Marcos y Raquel —C1-3.1, C1-3.2 y C2-3.3— o por Daniel y Raquel —C2-3.1— y cuya formulación es la siguiente:

C9-1.1. *Establece la primera instrucción de la consigna: organizar los palillos, empleando las cintas elásticas si son de ayuda, para saber cuántos hay de un vistazo.*

C7-2. *Transforma 16^1 y 16^0 en potencias de 2.*

C17-3.3. *Hace ver que en la nueva suma aparecen más de 10 unidades al sumar, por lo que hay que reagrupar al estar en base 10, explicándolo en cada registro de representación plasmado en la pizarra.*

C21-3.3. *Pone de manifiesto la secuenciación planteada: se parte de lo más concreto, que sería el problema dado en su contexto; luego se pasa a manipular con ábacos verticales, con ábacos japoneses y con bloques multibase; después se hace la suma en una tabla gráfica y luego en una numérica, las cuales se denominan tableros de posición; y finalmente se llega a lo más abstracto, que sería la suma simbólica con expresiones polinomiales o, en primaria, la suma simbólica tradicional, siendo el objetivo escribir finalmente el proceso de forma abstracta.*

C8-1.1. Enuncia el objetivo de la actividad: entender el desarrollo de la escritura de los números en nuestro sistema de numeración.

C23-3.3. Pregunta a los alumnos cómo han trabajado la suma en primaria, haciendo ver que es habitual trabajar la fase inicial de la representación de la suma directamente con lo simbólico, que es la fase final.

C1-3.1. Plantea a los alumnos que tienen que representar las cuatro operaciones del ejercicio, las sumas y las restas, en el registro de representación manipulativo con el ábaco vertical, con el sorobán y con los bloques multibase, comparando cada dos, viendo cómo se traduce de una forma a otra.

C1-3.2. Pregunta varias veces cómo pueden representar el número 700 de otra forma en el ábaco, haciendo ver que tenían 704, que ella ha quitado 4 unidades y que ahora tienen que representar el número 700 de otro modo para poder quitar otra cuenta y restar 5 unidades.

C2-3.3. Empieza a realizar la suma con el sorobán, indicando que lo hace gráficamente.

C2-3.1. Explica que no quiere que los alumnos representen el resultado, sino que representen el proceso de la suma.

Como se puede comprobar, Marcos se preocupa por aportar interpretaciones [M] sobre las instrucciones contenidas en el enunciado de las tareas matemáticas, el desarrollo matemático de los ejercicios, las sumas en las que es necesario hacer reagrupamientos, la secuencia a implementar en el aula de primaria para explicar un concepto matemático, el objetivo de las tareas matemáticas, las experiencias previas de los alumnos de Magisterio como estudiantes de matemáticas en primaria y las operaciones con diferentes materiales manipulativos –ábaco vertical y ábaco japonés–, mientras que Daniel únicamente pone atención sobre el objetivo de las tareas matemáticas, la secuencia didáctica en primaria y la importancia del proceso frente al resultado y Raquel, por su parte, solamente sobre el enunciado de la tarea, el trabajo con diferentes materiales manipulativos y la importancia del proceso frente al resultado. Llama la atención, por un lado, que Marcos sea capaz de reflexionar en torno a tantas cuestiones diferentes y, por otro, que la maestra no interprete matemáticamente algunos de los *call-outs* que tienen una relación más directa con el aula de primaria, como el que trata de la secuencia de enseñanza a usar en clase de primaria o el que se ocupa de experiencias matemáticas previas de los estudiantes de Magisterio en primaria, por ejemplo, y que Daniel no haga lo propio con aquellos que tienen una carga matemática mayor, como los que incluyen el enunciado o el desarrollo matemático de la actividad o el que se centra en las sumas con reagrupamientos. A este respecto, la mayor

formación en matemáticas de Daniel podría llevarle, de forma paradójica, a no interpretar ciertos eventos con una carga matemática importante por considerar evidente su posible interpretación, mientras que Raquel, quien cuenta con una menor formación matemática, podría tener dificultades para interpretar desde un enfoque matemático ciertos eventos, aunque estos conecten con el aula de primaria. Tales explicaciones se tratan de corroborar en las entrevistas realizadas a estos tres formadores.

En suma, vemos que no hay ningún evento relevante visto por los tres formadores que haya recibido alguna interpretación [M] de Daniel o Raquel sin que Marcos también haya dado una –a excepción del C2-3.1–, lo que refuerza la idea del bloque cuantitativo de que Marcos es quien presenta la mayor propensión a interpretar matemáticamente los *call-outs* que detecta, seguido de Daniel y, por último, de Raquel, pudiendo ser clave, por lo tanto, la variable de experiencia como formador en este eje, así como trabajar desde un paradigma de investigación que confiera una notable relevancia a interpretar situaciones de aula –aspectos que diferencian el perfil profesional de Marcos del de los otros MTE–, para lograr un nivel considerable de *noticing* con respecto al asunto tratado en este tercer eje, esto es, *qué interpretan* los formadores.

4.2.2.d. Eje 4. Interpretaciones: ¿cómo interpretan?

El cuarto eje es de gran interés desde un punto de vista cualitativo, puesto que nos permite conocer el modo en el que los formadores interpretan los eventos relevantes que han detectado, para lo que nos centramos en analizar el contenido de las interpretaciones referidas a *call-outs* que cada formador ha aportado –análisis interindividual– a lo largo del visionado de los distintos vídeos. Con este propósito en mente, hemos examinado las interpretaciones aportadas por cada MTE sobre *call-outs* y hemos determinado qué temas se tratan en ellas, llegando a un conjunto de temas que estructuran el tratamiento que en este eje se hace de la información cualitativamente. Los principales temas o asuntos vistos en las interpretaciones de los tres sujetos son los mismos que los recogidos en la fase 1 en la tabla 4.25, cuyo contenido se explica en los primeros párrafos del apartado 4.2.1.d.

Con todo lo dicho, se presenta a continuación el análisis de las interpretaciones de los formadores organizado por temas, no sin antes señalar que, tal y como se comprobará, Marcos es el único MTE que ha aportado interpretaciones sobre todos los temas, mientras

que Daniel se ha centrado principalmente en los objetivos y en los alumnos de Magisterio como resolutores y Raquel, por su parte, ha puesto la lupa sobre los procedimientos y los objetivos, así como sobre los alumnos de Magisterio como futuros maestros y los alumnos de Educación Primaria. Igualmente, nótese que — como en la primera fase — se presenta subrayada la parte de la interpretación que guarda relación con el tema en el que se sitúa para favorecer un fácil seguimiento de las explicaciones que en cada momento aportamos al respecto, así como que cada interpretación se plasma precedida por el evento al que se refiere para contextualizarla y poder entenderla mejor.

Contenido matemático

Con relación al contenido matemático, básicamente aparecen interpretaciones de Marcos — Daniel tiene una o dos, pero resultan anecdóticas en su total —, siendo las más ejemplificadoras de este tema las que se proporcionan en las siguientes líneas:

2M7.1-1.1. *Dice que piensen si los grupos que han hecho se ajustan a cómo se escribirían en nuestro sistema de numeración [E, 3].*

- *2M7.1-1.1(I)1. Nuestro sistema de numeración se basa en el agrupamiento decimal, en la base 10, en las centenas, decenas, etc., y no solo en hacer agrupaciones, sino en hacer agrupaciones de agrupaciones, el algoritmo de la numeración se basa en la idea de agrupamiento recursivo, no solo se agrupa de 10 en 10, sino que luego se agrupa de 10 en 10 los grupos de 10, dando lugar a las potencias [I, M].*

2M8.1-1.2. *Pregunta por la relación del 8 y el 5 con los grupos hechos, lo cual tiene que ver con uno de los objetivos que planteó, indicando que tienen que reflexionar sobre ello [E, 3].*

- *2M8.1-1.2(I)1. El agrupamiento de 10, que es en el que se basa el sistema de numeración, no es tan útil cuando materializamos colecciones manipulables, ya que es un agrupamiento relativamente pequeño. El hecho de usar 10 viene de que tenemos 10 dedos, no viene de otra razón. Matemáticamente puede haber razones para usar un número frente a otro en dos sentidos: por un lado, el número de divisores; por otro, el tamaño. En cuanto a los divisores, 10 solo tiene 2 y 5, no es un gran número. El 12 nos habría dado un sistema de numeración mucho más cómodo, los tercios y los cuartos serían números con parte fraccionaria finita. Con el 10, solo nos queda 2 y 5; un número tan sencillo como la tercera parte de una unidad nos genera un número que no es finito. Por otro lado, desde un punto de*

vista manipulable, el 10 es pequeño. De hecho, esto se ve mucho en las unidades de las magnitudes, que también van de 10 en 10, pero en el uso social no se hace de 10 en 10: usamos el metro y el centímetro, pero el decímetro desaparece porque, aunque por regularidad nos interesa, a la hora de manipular es un grupo demasiado pequeño; lo mismo ocurre con los metros y los gramos, no usamos los cambios decimales. Entonces, si usáramos grupos más grandes, el sistema de numeración requeriría de más símbolos; con el 10, tenemos símbolos distintos hasta el 10. Cuando el agrupamiento se hace muy pequeño, el sistema se automatiza mejor, la base binaria es la más automática, no habría que saberse tablas, pero, claro, se hacen números muy grandes y los algoritmos de cálculo serían odiosos; imagínate que tuviéramos que sabernos el repertorio de las tablas hasta el 20 si usáramos base 20, sería horroroso, tendría una gran cantidad de resultados que habría que memorizar. Entonces, usamos el 10, que además coincide con los dedos. Pero es verdad que, cuando se trata de colecciones manipulables, el 10 es muy pequeño, da la sensación de que no merece la pena usarlo. Yo creo que aquí hay una confrontación con el interés matemático de respetar el 10, porque así escribo los números, y por otro lado la comodidad o economía en la manipulación que hace que de 10 en 10 los grupos sean grupos demasiado pequeños. Se está intentando hacer converger los dos intereses y surge esta situación [I, M].

2M1.2-2. Está reproduciendo la estrategia de un alumno, que consiste en contar en base 16 y contar en base 2, llegando al resultado escrito en las dos bases cuando se cuenta la misma cantidad [E, 3].

- 2M1.2-2(I)1. Se trata de una estrategia que no es eficaz porque es muy lenta: no se hace una traducción, sino que se cuenta de una manera y de otra [I, M].

2M5.3-2. Cambia de base 16 a base 2, elevando a 0 el 2^4 y dejando la escritura $(2^4)^0$ [E, 3].

- 2M5.3-2(I)1. En las escrituras polinómicas en las que se basan las escrituras de los sistemas de numeración aparecen las potencias de la base y la última está elevada a 0 [I, M].

2M6.1-2. Escribe el polinomio del 11 en base 2 incluyendo las unidades que no aparecen: 0×2^2 [E, 2].

- 2M6.1-2(I)1. Pone el 0×2^2 porque 11 en base 2 es 1, 0, 1, 1. Aunque en la escritura polinómica no es obligatorio escribirlo, ya que un polinomio no tiene por qué tener monomios de todas las potencias, lo pone para hacer ver que la escritura se

corresponde con todos los coeficientes de las potencias, ya que emplea la escritura de un sistema de numeración posicional. La escritura polinómica no es la escritura del sistema de numeración; una vez que yo tengo la descomposición polinómica, yo puedo escribirlo con distintos sistemas de numeración. El nuestro es posicional y el posicional exige el 0, por eso aparece el 0 [I, M].

2M10.1-2. *Va haciendo la escritura polinómica, aplicando la propiedad distributiva [E, 2].*

- *2M10.1-2(I)1. Se observa la idea del teorema fundamental de la numeración, que es que todo número se puede escribir como un polinomio y sus coeficientes son únicos [I, M].*

2M6.1-3.3. *Está haciendo el proceso con la escritura polinómica, indicando que es una forma en la que se ve la «posicionalidad» [E, 3].*

- *2M6.1-3.3(I)2. Desde un punto de vista didáctico, no creo que eso que está haciendo sea precisamente lo posicional; lo posicional es lo de arriba [la suma con el algoritmo tradicional]. Yo podría escribir ese número en cualquier sistema y respondería a esa escritura polinómica. Por un lado está la escritura polinómica y por otro lado está el tipo de sistema. El sistema que nosotros usamos es regular y posicional, pero, por ejemplo, si usáramos un sistema decimal como el chino, que es multiplicativo y no es posicional, la descomposición polinómica sería la misma. Con lo cual, decirle posicional cuando escribo la polinómica yo creo que no es del todo correcto. Otra cosa es que diga: «bueno, puedo usarlo y luego veo cómo agrupo», y así justifica por qué lo hago de la otra manera; digamos que sería otro proceso distinto, pero no le añade «posicionalidad» al proceso. Lo que le añade mucha «posicionalidad» es el sorobán, el ábaco japonés, ese sí, porque no queda más remedio. Sin embargo, por ejemplo, los bloques multibase puedes juntarlos todos y luego separarlos, ahí la posición no es relevante. Los bloques multibase se comportan como un sistema aditivo y en los sistemas aditivos la posición no es nada relevante. Ahora, cuando tú escribes eso [la expresión polinómica], eso vale para cualquier sistema, entonces no creo que añada nada posicional [I, M].*

2M7.1-3.3. *Indica que emplea las propiedades asociativa, conmutativa y distributiva [E, 3].*

- *2M7.1-3.3(I)1. Le interesa mucho que los alumnos entiendan cuáles son las propiedades que sustentan las técnicas de cálculo. Es muy importante hacer eso para que sepan que esas propiedades hay que trabajarlas. Parece que la conmutativa, la asociativa y la distributiva son nombres que se añaden cuando uno estudia*

matemáticas, un poquito ya mayor, pero sin embargo son propiedades que hay que tener operativas para poder justificar los procedimientos que usamos. No se entiende ninguna técnica de cálculo ni, por supuesto, el producto sin las propiedades que ha enunciado; no tendríamos esas técnicas. Es una muy buena decisión explicar esas propiedades porque didácticamente van a tener mucha transcendencia [I, M].

Como se puede observar en las interpretaciones previas, Marcos reflexiona acerca de distintos contenidos matemáticos, aludiendo a diferentes ideas, como, por ejemplo, el sistema de numeración que usamos, los agrupamientos decimales recursivos, las ventajas y desventajas de fundamentar nuestro sistema de numeración en la base 10 frente a otras bases, la eficacia de una estrategia dada para la resolución de un ejercicio matemático, las escrituras polinómicas —estableciendo las diferencias con los sistemas de numeración—, el teorema fundamental de la numeración o las propiedades que sostienen las técnicas de cálculo. Resulta altamente interesante que aborde en sus interpretaciones tantos aspectos sobre las matemáticas en sí mismas, siendo llamativo que ni Daniel ni Raquel hayan dado importancia a esta cuestión. A este respecto, la ausencia de interpretaciones por parte de Daniel podría deberse a su formación —basada en un extenso conocimiento matemático que no estaría vinculado con la didáctica del mismo—, lo que podría haber generado, de forma paradójica, que diera por obvias las consideraciones sobre las características de las matemáticas y, por ende, que no las haya incluido en sus interpretaciones. En el caso de Raquel, quizá su menor formación matemática le haga no adentrarse en interpretaciones de esta clase. En cualquier caso, se tratará de corroborar las explicaciones que aportamos mediante la información recopilada en las entrevistas realizadas a estos tres participantes del presente estudio.

Tarea

En lo concerniente a la tarea, nuevamente es Marcos el único participante que se preocupa por aportar algún tipo de explicación o de reflexión en torno a este tema. De las interpretaciones formuladas por este formador, presentamos a continuación los ejemplos más ilustrativos de su interés en relación con las tareas matemáticas:

2M2.2-1.1. *Plantea una tarea: estimar los palillos que ha repartido y contarlos después [E, 3].*

- 2M2.2-1.1(I)1. Está reproduciendo con futuros maestros una tarea que puede llevarse a cabo con niños de primaria, por lo que de algún modo va a hacer pasar a los alumnos por procesos similares a los que pasarían los niños de primaria [I, M].
- 2M2.2-1.1(I)3. La tarea de estimar no se plantea habitualmente, los alumnos de matemáticas generalmente piensan que hay que obtener resultados precisos, cuando en la realidad los resultados no son precisos en casi ningún caso [I, M].

2M4.1-1.1. Hace explícito el objetivo de la actividad: que los alumnos reflexionen o constaten cómo son las características de los sistemas de numeración [E, 2].

- 2M4.1-1.1(I)1. Esto sí que es una diferencia entre una actividad hecha con alumnos [en la universidad] y una actividad hecha en primaria. En primaria, los niños se podrían enfrentar a este tipo de trabajo y no declararles cuál es el objetivo matemático que está detrás, sino simplemente ver si emergen las estrategias que justifiquen ese contenido [I, M].

2M8.1(i)-2. Evento implícito en el comentario [E, 1].

Transcripción del vídeo: Mira qué contenta estoy, porque $2^0 \times 2^0$ es 2^0 y el coeficiente es 0, que es este.

- 2M8.1(i)-2(I)1. Debe de ser que el ejercicio decía que el número empezaba con el 1 del 2^7 y terminaba con el 0 del 2^0 , por lo que pueden saber que la máxima potencia va a ser 2^7 [I, M].

2M11.2-2. Incide en el hecho de que una potencia no está explícita [E, 2].

- 2M11.2-2(I)1. Imagino que las cantidades están elegidas para que haya una potencia que no esté explícita y haya que tomar una decisión sobre qué hacer con ella. Además, no se solapan en ningún caso, se podrían haber solapado, podría haber habido potencias de 2 en las que interviniesen cantidades de los distintos órdenes de la base 16, pero aquí no ha ocurrido. Que las cantidades planteen esta aparente dificultad es un hecho didáctico que hace que surja una discusión rica e interesante [I, M].

2M2.1-3.1. Plantea un enunciado matemático que consiste en representar unas operaciones, unas sumas y unas restas, en el registro de representación manipulativo, empleando tres materiales manipulativos distintos y viendo cómo se traduce la representación cada dos materiales [E, 3].

- 2M2.1-3.1(I)1. Decir que hay que ver «cómo se traduce» no es una consigna clara, ya que no sé si se puede decir que haya respuestas correctas o incorrectas [I, M].

2M2.3-3.1. *Pide que representen las operaciones en el registro de representación tabular, que sería como un elemento intermediario entre el registro manipulativo y el simbólico, de la forma que los alumnos quieran, indicando que puede tener características simbólico-numéricas o características gráficas [E, 3].*

- *2M2.3-3.1(I)1. Decir que los alumnos lo hagan como quieran tiene «trampa»; los alumnos entenderán que no lo tienen que hacer como ellos quieran, sino que la forma tabular tiene que responder a algo, pero no creo que tengan claro qué es lo que tienen que hacer tal y como se plantea la consigna [I, M].*

2M1.1-3.2. *Mantiene un diálogo con un grupo de alumnos que tiene dificultades para realizar una resta, ya que tienen que restar 5 unidades a 704 y no hay unidades suficientes ni unidades inmediatamente superiores, dándoles indicaciones, pero sin decirles ella el procedimiento a realizar [E, 2].*

- *2M1.1-3.2(I)1. Los números deben de estar elegidos para provocar una discusión sobre los cambios que hay que hacer entre unidades, los acarreos que surgen en los algoritmos clásicos, para materializar las unidades necesarias mediante la descomposición del número para poder restar [I, M].*

Tal y como se aprecia en las interpretaciones, Marcos reflexiona acerca de distintos aspectos de la tarea. Por un lado, pone el foco en sus posibles destinatarios, haciendo ver que una misma actividad puede plantearse a alumnos de primaria o de Magisterio según los objetivos presentes en la consigna. Por otro lado, se preocupa de las características de la tarea, mostrando interés por el tipo de actividad, así como por la claridad y el contenido del enunciado. En este sentido, realiza con frecuencia vinculaciones con las cuestiones de las matemáticas que se trabajan con el ejercicio dado, apuntando, además, que seleccionar qué datos se plasman en una consigna es una decisión didáctica que depende del fin que se persiga con la tarea. Por todo ello, los ejemplos presentados nos hacen percatarnos de que Marcos formula interpretaciones que, evidentemente, son propias de un MTE, ya que se sitúa constantemente en el ámbito de la didáctica de las matemáticas, examinando las tareas en relación con la enseñanza del contenido que los alumnos han de aprender y con las decisiones que el docente ha de tomar. Además, en sus interpretaciones aparecen otros temas, como el contenido matemático, los objetivos o los alumnos, lo que da cuenta de la amplitud de sus interpretaciones, que contienen interrelaciones entre diversos elementos del proceso de enseñanza-aprendizaje observado.

Al igual que en lo referido al tema sobre contenido matemático, con las entrevistas se trata de comprender mejor la importancia que Marcos otorga en sus comentarios a este tema, así como el motivo por el cual Daniel y Raquel no han realizado interpretaciones al respecto en esta segunda fase.

Objetivo

Con relación al tema sobre objetivos, encontramos interpretaciones propuestas por los tres formadores. En primer lugar, se presentan las aportadas por Marcos, en las cuales se puede advertir que establece conexiones —en casi todos los casos— entre los objetivos y el contenido matemático, o sea, concreta el objetivo que identifica en términos de alguna noción matemática a enseñar, así como que no se limita a ofrecer explicaciones de lo visto, sino reflexiones de gran calado, como se puede comprobar en estos ejemplos:

2M4.1-1.1. *Hace explícito el objetivo de la actividad: que los alumnos reflexionen o constaten cómo son las características de los sistemas de numeración [E, 2].*

- 2M4.1-1.1(I)1. *Esto sí que es una diferencia entre una actividad hecha con alumnos [en la universidad] y una actividad hecha en primaria. En primaria, los niños se podrían enfrentar a este tipo de trabajo y no declararles cuál es el objetivo matemático que está detrás, sino simplemente ver si emergen las estrategias que justifiquen ese contenido [I, M].*

2M7.1-1.1. *Dice que piensen si los grupos que han hecho se ajustan a cómo se escribirían en nuestro sistema de numeración [E, 3].*

- 2M7.1-1.1(I)2. *Pretende que los alumnos hagan grupos de 10 o agrupamientos compatibles o con cierta coordinación con el sistema de numeración para que el conteo sea mucho más fácil; si hacen grupos de 17, puede funcionar, pero no para leer los números como los leemos [I, M].*

2M8.1-1.1. *Dice que los grupos tienen que compartir los palillos, los agrupamientos [E, 2].*

- 2M8.1-1.1(I)1. *Su objetivo es que hagan un agrupamiento común, por lo que al juntarse dos grupos prevalecerán los agrupamientos que sean iguales, ya que el conteo es más cómodo con agrupamientos iguales, compatibles, múltiplos... [I, M].*

2M8.1-1.2. *Pregunta por la relación del 8 y el 5 con los grupos hechos, lo cual tiene que ver con uno de los objetivos que planteó, indicando que tienen que reflexionar sobre ello [E, 3].*

- 2M8.1-1.2(I)1. *El agrupamiento de 10, que es en el que se basa el sistema de numeración, no es tan útil cuando materializamos colecciones manipulables, ya que es un agrupamiento relativamente pequeño. El hecho de usar 10 viene de que tenemos 10 dedos, no viene de otra razón. Matemáticamente puede haber razones para usar un número frente a otro en dos sentidos: por un lado, el número de divisores; por otro, el tamaño. En cuanto a los divisores, 10 solo tiene 2 y 5, no es un gran número. El 12 nos habría dado un sistema de numeración mucho más cómodo, los tercios y los cuartos serían números con parte fraccionaria finita. Con el 10, solo nos queda 2 y 5; un número tan sencillo como la tercera parte de una unidad nos genera un número que no es finito. Por otro lado, desde un punto de vista manipulable, el 10 es pequeño. De hecho, esto se ve mucho en las unidades de las magnitudes, que también van de 10 en 10, pero en el uso social no se hace de 10 en 10: usamos el metro y el centímetro, pero el decímetro desaparece porque, aunque por regularidad nos interesa, a la hora de manipular es un grupo demasiado pequeño; lo mismo ocurre con los metros y los gramos, no usamos los cambios decimales. Entonces, si usáramos grupos más grandes, el sistema de numeración requeriría de más símbolos; con el 10, tenemos símbolos distintos hasta el 10. Cuando el agrupamiento se hace muy pequeño, el sistema se automatiza mejor, la base binaria es la más automática, no habría que saberse tablas, pero, claro, se hacen números muy grandes y los algoritmos de cálculo serían odiosos; imagínate que tuviéramos que sabernos el repertorio de las tablas hasta el 20 si usáramos base 20, sería horroroso, tendría una gran cantidad de resultados que habría que memorizar. Entonces, usamos el 10, que además coincide con los dedos. Pero es verdad que, cuando se trata de colecciones manipulables, el 10 es muy pequeño, da la sensación de que no merece la pena usarlo. Yo creo que aquí hay una confrontación con el interés matemático de respetar el 10, porque así escribo los números, y por otro lado la comodidad o economía en la manipulación que hace que de 10 en 10 los grupos sean grupos demasiado pequeños. Se está intentando hacer converger los dos intereses y surge esta situación [I, M].*

2M9.1-1.2. *Pregunta si ha ayudado la escritura que han hecho [E, 2].*

- 2M9.1-1.2(I)1. Porque va buscando la escritura del sistema de numeración, empleando las unidades correspondientes de cada orden, que es como se escriben los números [I, M].

2M4.1-2. Analiza una nueva estrategia, consistente en dividir entre la nueva base, en base 16, tal y como se hace al pasar de base 10 a otra base [E, 3].

- 2M4.1-2(I)2. Pretende que los alumnos reflexionen sobre la relevancia del sistema de numeración en cualquier técnica de cálculo [I, M].

2M6.1-2. Escribe el polinomio del 11 en base 2 incluyendo las unidades que no aparecen: 0×2^2 [E, 2].

- 2M6.1-2(I)1. Pone el 0×2^2 porque 11 en base 2 es 1, 0, 1, 1. Aunque en la escritura polinómica no es obligatorio escribirlo, ya que un polinomio no tiene por qué tener monomios de todas las potencias, lo pone para hacer ver que la escritura se corresponde con todos los coeficientes de las potencias, ya que emplea la escritura de un sistema de numeración posicional. La escritura polinómica no es la escritura del sistema de numeración; una vez que yo tengo la descomposición polinómica, yo puedo escribirlo con distintos sistemas de numeración. El nuestro es posicional y el posicional exige el 0, por eso aparece el 0 [I, M].

2M7.1-2. Escribe el 6 como una expresión polinómica en función de la base 2, que sería 1, 1, 0 [E, 3].

- 2M7.1-2(I)1. Pone de manifiesto que se pueden plantear dos escrituras del mismo número, que es igual de válido el 6 que el 1, 1, 0 en base 2, con la intención de hacer ver que el número va por un lado y la escritura por otro [I, M].

2M2.1-3.2. Reinterpreta en términos matemáticos lo que han hecho los alumnos de forma guiada, haciendo ver que han desagrupado las centenas y las decenas [E, 3].

- 2M2.1-3.2(I)1. Para que los alumnos puedan hacer uso de la definición de la resta mediante la manipulación, que en este caso consistiría en retirar cosas [I, M].

2M1.1-3.3. Plantea una suma de forma simbólica [E, 3].

- 2M1.1-3.3(I)1. Imagino que va a realizar la suma con distintos procedimientos para ver las correspondencias entre ellos con el objetivo de que los alumnos entiendan por qué sumamos como sumamos y que adquieran técnicas para provocar que los niños de primaria también conozcan el porqué de los distintos algoritmos [I, M].

2M8.2-3.3. Está viendo cómo se realizan los reagrupamientos en cada uno de los sistemas de representación que está utilizando [E, 3].

- 2M8.2-3.3(I)1. Lo que quiere ver es que todos los procesos son el mismo y que son equivalentes al que hacemos de una manera mucho más automatizada en nuestro cálculo simbólico, en nuestra técnica de cálculo usual [I, M].

2M10.2-3.3. Realiza por último otra tabla, indicando que se trata de un sistema tabular simbólico [E, 3].

- 2M10.2-3.3(I)2. Hay un intento de mostrar cómo funciona cada sistema para que el alumno tenga recursos para que luego, cuando vaya a clase, sepa qué tipo de sistema puede utilizar para que los alumnos de primaria construyan de manera satisfactoria los algoritmos clásicos de las operaciones [I, M].

2M11.1-3.3. Pone de manifiesto todo el proceso, la evolución, la progresión desde lo manipulativo, pasando por lo tabular, para llegar a lo simbólico [E, 3].

- 2M11.1-3.3(I)1. Lo hace porque la idea es que el alumno conozca de dónde vienen las técnicas y cómo se adaptan al sistema; hace una progresión adecuada para que el alumno tenga recursos y pueda construir sus técnicas de cálculo, porque no se trata de que tú enseñes la técnica, sino de que el alumno la construya; es la única manera de conseguir un aprendizaje significativo del cálculo. No tiene sentido enseñar un algoritmo sin saber cómo funciona; no están para eso las matemáticas [I, M].

Como se puede observar, en todas estas interpretaciones asociadas a los objetivos se plantean conexiones con el contenido matemático que se pretende abordar, como, por ejemplo, el sistema de numeración, los agrupamientos comunes, las técnicas de cálculo o la escritura polinómica. Asimismo, cabe decir que, si bien algunas de las interpretaciones se formulan en torno a lo que se busca que los alumnos de Magisterio hagan o entiendan — 2M7.1-1.1(I)2, 2M4.1-2(I)2, 2M11.1-3.3(I)1 —, la mayoría de ellas no se explicita situando el foco en el estudiante, sino en el contenido matemático que subyace tras el objetivo que se ha identificado — 2M9.1-1.2(I)1, 2M7.1-2(I)1, 2M8.2-3.3(I)1 —, lo cual es un matiz sutil a la hora de explicitar los objetivos, pero que deja patente a qué se le está dando una mayor relevancia. Por otra parte, es importante apuntar que las interpretaciones de Marcos son principalmente reflexiones — basta con apreciar la extensión de estas para intuirlo —, no limitándose a proponer meras explicaciones de los eventos, por lo que en ellas se ahonda bastante en la idea que se examina — 2M4.1-1.1(I)1, 2M8.1-1.2(I)1, 2M6.1-2(I)1 —. Además, suele incluir alusiones a aspectos de la didáctica de las matemáticas, incorporando en su discurso aspectos sobre, por ejemplo, la práctica matemática en primaria — 2M4.1-1.1(I)1, 2M1.1-3.3(I)1, 2M10.2-3.3(I)2 —, por lo que es posible afirmar que sus interpretaciones son propias de un MTE, así como que no se restringen a un solo tema.

En relación con las interpretaciones de Daniel y de Raquel sobre los objetivos, estas también se centran en aspectos matemáticos, pero no con la misma profundidad que las vistas previamente. Sus interpretaciones coinciden, por lo tanto, en incorporar bastantes referencias al contenido matemático —pero superficialmente—, así como en explicitarse en función del alumno de Magisterio, esto es, posicionando lo que este tiene que entender o hacer en un lugar prominente de la interpretación. Así pues, a continuación se muestran los ejemplos más relevantes de estos participantes:

2D4.1-1.1. *Presenta el objetivo de la actividad: entender la escritura de los números [E, 2].*

- *2D4.1-1.1(I)1. Pretende que los alumnos entiendan que agrupar palillos es una estrategia que deben explorar [I, M].*

2D1.1-1.2. *Pide a los alumnos que expliquen las estrategias que han usado para agrupar los palillos una vez que se han juntado dos grupos [E, 2].*

- *2D1.1-1.2(I)1. Pretende que expliciten el tamaño de los grupos que han hecho y por qué han elegido esos tamaños para analizar cómo funciona [I, M].*

2D2.1-1.2. *Describe la estrategia que han usado los alumnos, consistente en hacer grupos de diferentes tamaños [E, 1].*

- *2D2.1-1.2(I)1. Para que los alumnos traten de detectar las ventajas y los inconvenientes de la estrategia que han seguido [I, M].*

2D5.2-1.3. *Pregunta a los alumnos por qué es más sencillo sumar grupos de 10 que grupos de 9, haciendo ver que los grupos de 10 coinciden con la estructura de nuestro sistema posicional [E, 3].*

- *2D5.2-1.3(I)1. Pretende que los alumnos vean cuáles son las ventajas de estructurar o de organizar los palillos en grupos de 10 [I, M].*

2D6.2-1.3. *Hace ver que los grupos que han hecho no coinciden con la notación posicional [E, 3].*

- *2D6.2-1.3(I)1. Para que los alumnos traten de arreglar el problema y lleguen a hacer grupos de 10 o potencias de 10 [I, M].*

2D11.2-2. *Explica a los alumnos cómo multiplicar potencias de 2, haciendo que observen que $2^2 \times 2^4$ es 2^6 porque aparecen 6 doses en esas potencias [E, 3].*

- *2D11.2-2(I)1. Pretende con ello enfatizar el proceso por encima de las recetas que los alumnos puedan conocer de secundaria, y que a lo mejor no llegan a comprender, como la de «sumar los exponentes» [I, M].*

2D14.2-2. *Plantea una situación alternativa, preguntando qué ocurriría si el ejercicio estuviera en base 15 en vez de en base 16, haciendo ver que con la base 15 habría que hacer los cálculos intermedios, que no habría un procedimiento directo [E, 3].*

- *2D14.2-2(I)1. Pretende que los alumnos detecten qué es lo que no funciona con la base 15 [I, M].*

2D3.2-3.3. *Conecta la estrategia del sorobán con la de la notación simbólica tradicional [E, 2].*

- *2D3.2-3.3(I)1. Para que los alumnos comprendan por qué sumamos unidades, decenas y centenas en esta suma [I, M].*

2R4.1-1.1. *Plantea como objetivo que los alumnos piensen cómo se escriben los números y cómo se agrupan [E, 2].*

- *2R4.1-1.1(I)1. Con su metodología matemática pretende que los alumnos, cuando enseñen a los niños en primaria, aborden la escritura de los números de una manera inductiva, empleando una metodología manipulativa, para que los niños lleguen a comprender cómo se agrupan y cómo se escriben los números de una forma visual [E, M].*

2R1.1-1.2. *Trata de ver si los alumnos han tenido que llegar a un acuerdo para llegar a una organización [de los palillos] [E, 2].*

- *2R1.1-1.2(I)1. Pretende que los alumnos se den cuenta de que en el aula [de matemáticas de primaria] se van a encontrar con que los niños realizan diferentes organizaciones, por lo que tienen que adaptarse a esa mentalidad [I, M].*

2R1.2-1.3. *Está viendo los agrupamientos hechos por otro grupo [E, 2].*

- *2R1.2-1.3(I)1. Pretende que los alumnos se den cuenta de que en el aula [de matemáticas de primaria] se van a encontrar con diferentes maneras de agrupar [I, M].*

2R1.1(i)-3.1. *Evento implícito en el comentario [E, 1].*

Transcripción del vídeo: Tenéis que hacer las 4 operaciones..., representarlas de distintas maneras. [...] con material manipulativo...

- *2R1.1(i)-3.1(I)1. Pretende que los alumnos vean cómo trabajar la descomposición de los números con los niños pequeños [I, M].*

2R1.1-3.2. *Está trabajando una operación con los alumnos a través del ábaco [E, 1].*

- *2R1.1-3.2(I)1. Con el ábaco pretende trabajar el concepto de descomposición polinómica de los números para poder sumarlos [I, M].*

Se advierte con nitidez lo expuesto al introducir las interpretaciones previas, o sea, que suelen verbalizar la interpretación en términos del alumno de Magisterio y que tratan los contenidos matemáticos con los cuales se relacionan los objetivos, pero sucintamente, por lo que, sobre todo, ofrecen explicaciones y no reflexiones sobre lo detectado. Además, la maestra, a diferencia de Daniel, vincula constantemente aquello que expresa acerca de los objetivos con el aula de primaria, hecho que se aborda en el tema correspondiente.

Así pues, son manifiestas las diferencias entre los MTE, sobre todo entre Marcos y los otros dos docentes, lo que se podría achacar a la gran experiencia como formador del primero, así como a su formación didáctico-matemática, lo que le posibilitaría interpretar de la manera analizada.

Procedimiento

En lo que respecta a los procedimientos, principalmente es la maestra quien los ha incorporado en sus interpretaciones relativas a eventos relevantes, siendo triviales – por la cantidad – para Marcos y Daniel. Las formuladas por Raquel son las siguientes:

2R4.1-1.1. *Plantea como objetivo que los alumnos piensen cómo se escriben los números y cómo se agrupan [E, 2].*

- 2R4.1-1.1(I)1. *Con su metodología matemática pretende que los alumnos, cuando enseñen a los niños en primaria, aborden la escritura de los números de una manera inductiva, empleando una metodología manipulativa, para que los niños lleguen a comprender cómo se agrupan y cómo se escriben los números de una forma visual [E, M].*

2R2.1-1.2. *Hace ver a los alumnos que en los grupos que han hecho no se aprecia matemáticamente el concepto de qué número de palillos hay, evitando decirles cómo solucionarlo [E, 1].*

- 2R2.1-1.2(I)1. *En la metodología matemática lo que se pretende es que sean los alumnos quienes a base de manipular alcancen el objetivo propuesto, tratando de razonarlo ellos mismos [I, M].*

2R1.1(i)-3.1. *Evento implícito en el comentario [E, 1].*

Transcripción del vídeo: Tenéis que hacer las 4 operaciones..., representarlas de distintas maneras. [...] con material manipulativo...

- 2R1.1(i)-3.1(I)2. Plantea una metodología basada en la gamificación y en el juego, que es como metodológicamente se enseña a los niños en matemáticas, para que los alumnos puedan transmitir el concepto de la suma a los niños [I, M].

2R2.1-3.2. *Interactúa con los alumnos, preguntando si han agrupado o desagrupado, haciendo que verbalicen y que razonen [E, 3].*

- 2R2.1-3.2(I)1. Es la metodología que se emplea en el aula: el juego es verbalizar, contar lo que se ha hecho, cómo se hace, cómo no se hace [I, M].

2R1.1-3.3. *Está trabajando el concepto de la suma visualmente, gráficamente [E, 2].*

- 2R1.1-3.3(I)1. Lo trabaja visualmente porque es así como hay que introducir la suma en el aula, sobre todo con los niños de infantil y de 1.º y 2.º de primaria, ya que para ellos el cálculo mental puede resultar difícil, pero visualmente van entendiendo la suma, los agrupamientos [I, M].

2R3.1-3.3. *Pregunta si hay que agrupar, haciendo ver que no es necesario [E, 2].*

- 2R3.1-3.3(I)1. Trata de emplear una metodología basada en el juego y en presentar los conceptos de forma gráfica, como la suma en este caso, ya que es la metodología que hay que emplear con los niños [de primaria] [I, M].

Sin lugar a dudas, lo más relevante del conjunto de interpretaciones aportadas por Raquel es, además de conectar de nuevo todo lo que plantea con el aula de primaria —lo cual se examinará más adelante—, el uso de las denominaciones *metodología matemática* y *metodología manipulativa*. A tenor de lo verbalizado, parece que emplea ambas expresiones como sinónimos, por lo que la metodología matemática, la manera de enseñarlas, estaría vinculada en todo momento a la metodología manipulativa, esto es —usando sus propias expresiones—, a lo manipulativo, a lo visual, a la gamificación y al juego —en la etapa de primaria, al menos—. Esto refleja una evidente concepción de cómo debe desarrollarse el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, aspecto que se tratará de abordar en la sección de entrevistas.

Por otra parte, en cuanto a las interpretaciones acerca de procedimientos extraídas de los comentarios de Marcos y de Daniel, se presentan a continuación las únicas que han explicitado:

2M11.1-3.3. *Pone de manifiesto todo el proceso, la evolución, la progresión desde lo manipulativo, pasando por lo tabular, para llegar a lo simbólico [E, 3].*

- 2M11.1-3.3(I)1. *Lo hace porque la idea es que el alumno conozca de dónde vienen las técnicas y cómo se adaptan al sistema; hace una progresión adecuada para que el alumno tenga recursos y pueda construir sus técnicas de cálculo, porque no se trata de que tú enseñes la técnica, sino de que el alumno la construya; es la única manera de conseguir un aprendizaje significativo del cálculo. No tiene sentido enseñar un algoritmo sin saber cómo funciona; no están para eso las matemáticas [I, M].*

2M12.1-3.3. *Está remarcando un hecho a los alumnos, que consiste en que el proceso de la enseñanza clásica empieza con el último trabajo [el sistema de representación simbólico-numérico] [E, 2].*

- 2M12.1-3.3(I)1. *Está defendiendo que el proceso debe ser distinto, es decir, ese es el estadio final, que es donde los alumnos tienen que llegar. Si empezamos por el final, y en esto entran todas las teorías de aprendizaje, corremos un gran riesgo de que no se produzca el aprendizaje significativo [I, M].*

2D3.1-3.1. *Dice que las operaciones están puestas en un orden y que es importante que sigan dicho orden, dicha secuencia didáctica [E, 3].*

- 2D3.1-3.1(I)1. *Se entiende que las operaciones están ordenadas de más fáciles a menos fáciles [I, M].*

Observamos que prestan atención a hechos distintos, dado que Marcos aborda la secuencia didáctica a implementar en primaria para enseñar un contenido matemático y Daniel se centra en el orden de las operaciones propuestas por la formadora a los alumnos de Magisterio.

En este caso parece que la experiencia docente de cada MTE —la de Raquel como maestra de Educación Primaria, la de Marcos como formador con una amplia trayectoria y la de Daniel como formador que también ha sido profesor de matemáticas universitario en ingenierías— podría haber tenido influencia tanto en el centro de interés de cada cual como en el modo en el que han explicitado la interpretación.

Material

En relación con los materiales, básicamente es Marcos quien se preocupa por este tema —Daniel plantea una o dos interpretaciones, pero resultan anecdóticas en su total—. Cabe señalar que las interpretaciones formuladas se corresponden exclusivamente con el

vídeo 3, no habiéndose explicitado interpretaciones al respecto en los otros vídeos, lo cual parece lógico, dado que en el tercer vídeo es en el que se pueden ver distintos materiales. Así pues, las siguientes son las interpretaciones acerca de materiales, referidas a *call-outs*, expresadas por Marcos:

2M2.1-3.3. *Empieza a resolver la suma haciendo la representación en el ábaco japonés, en el sorobán [E, 2].*

- 2M2.1-3.3(I)1. *Aunque la suma de estos números no tiene llevadas, en el sorobán sí tiene que hacer un agrupamiento auxiliar, así que se ha pensado en unos números para trabajar el cambio entre los agrupamientos auxiliares de cada unidad, pero no hay acarreo entre unidades [I, M].*

2M3.3-3.3. *Realiza un agrupamiento auxiliar, un cambio de 5 a 1, propio de este tipo de ábaco [E, 2].*

- 2M3.3-3.3(I)1. *El agrupamiento auxiliar permite no tener que contar; se trata de números visibles y se «subitizan» las cantidades sin necesidad de contar [I, M].*

2M4.1-3.3. *Está realizando el paralelismo, haciendo ver que [el algoritmo tradicional de la suma] lo ha puesto vertical para parecerse a la estructura del ábaco [E, 2].*

- 2M4.1-3.3(I)1. *Lo ha colocado vertical como lo colocamos siempre, es la manera tradicional de sumar. Siempre se nos ha dicho que lo ponemos así para que coincidan las unidades, etc. Sin embargo, quiere insistir tanto en la equivalencia con el ábaco que incluso llega a justificar la disposición de los números que ponemos nosotros. El ábaco hay veces que lo utilizan así [hace un gesto indicando que lo sitúan con las varillas en horizontal y no en vertical como lo ha dibujado la formadora], por lo menos los chinos. Bueno, con eso intenta remarcar eso [I, M].*

2M6.1-3.3. *Está haciendo el proceso con la escritura polinómica, indicando que es una forma en la que se ve la «posicionalidad» [E, 3].*

- 2M6.1-3.3(I)2. *Desde un punto de vista didáctico, no creo que eso que está haciendo sea precisamente lo posicional; lo posicional es lo de arriba [la suma con el algoritmo tradicional]. Yo podría escribir ese número en cualquier sistema y respondería a esa escritura polinómica. Por un lado está la escritura polinómica y por otro lado está el tipo de sistema. El sistema que nosotros usamos es regular y posicional, pero, por ejemplo, si usáramos un sistema decimal como el chino, que es multiplicativo y no es posicional, la descomposición polinómica sería la misma. Con lo cual, decirle posicional cuando escribo la polinómica yo creo que no es del todo correcto. Otra*

cosa es que diga: «bueno, puedo usarlo y luego veo cómo agrupo», y así justifica por qué lo hago de la otra manera; digamos que sería otro proceso distinto, pero no le añade «posicionalidad» al proceso. Lo que le añade mucha «posicionalidad» es el sorobán, el ábaco japonés, ese sí, porque no queda más remedio. Sin embargo, por ejemplo, los bloques multibase puedes juntarlos todos y luego separarlos, ahí la posición no es relevante. Los bloques multibase se comportan como un sistema aditivo y en los sistemas aditivos la posición no es nada relevante. Ahora, cuando tú escribes eso [la expresión polinómica], eso vale para cualquier sistema, entonces no creo que añada nada posicional [I, M].

2M8.2-3.3. Está viendo cómo se realizan los reagrupamientos en cada uno de los sistemas de representación que está utilizando [E, 3].

- 2M8.2-3.3(I)2. En realidad aquí solamente hay dos tipos de «algoritmos», sobre todo con las llevadas. Cuando ella cuenta lo de las llevadas, efectivamente, en el caso del ábaco y en el caso simbólico no se ve el cambio, es un cambio que yo produzco porque sé que el sistema funciona así. Me explico: sé que en la varilla del ábaco donde están las decenas cada bola vale 10 veces la unidad, pero eso no se ve, no hay una percepción de ese valor. Lo mismo ocurre en un sistema posicional, que se basa en eso, los símbolos son los mismos, pero solo la posición le da un valor distinto; pero es algo que yo debo conocer de inicio. La tabla estaría a mitad de camino, aunque los cambios se siguen sin percibir, se tienen que saber. Sin embargo, en los bloques multibase yo sí observo que, por ejemplo, 10 varillas [decenas] son físicamente equivalentes a una tabla [centena]; la manipulación te pone de manifiesto los cambios que hay que hacer. De hecho, el material Montessori de los multibase está hecho con bolitas con alambres y se ve que la tabla está hecha con 10 varillas, se pueden contar las 100 bolitas, y la de 1000 es un cubo y se pueden contar las 1000. Se observa cómo físicamente el agrupamiento es compatible [I, M].

2M10.2-3.3. Realiza por último otra tabla, indicando que se trata de un sistema tabular simbólico [E, 3].

- 2M10.2-3.3(I)1. Plantea lo tabular como un paso intermedio para llegar al proceso simbólico. Si nos damos cuenta, en el simbólico normal, el 5 que está puesto en las centenas en el número de abajo y el 5 que aparece en las decenas no se diferencian en nada, solo en la posición. Sin embargo, en la tabla se diferencian en que un 5 lleva una D arriba y el otro lleva una C arriba, es decir, hay una C y una D que

dicen lo que son. Y aunque también están puestos en un orden, no es solo la posición lo que marca el valor, sino la C, la D y la unidad. Entonces, es un paso intermedio. Sin embargo, los bloques multibase es un sistema puramente aditivo, con lo cual interpreto que la evolución que ella ha presentado aquí es una evolución muy interesante entre cómo se suma en un sistema aditivo, que se suma como en los bloques multibase, cómo se sumaría en un sistema multiplicativo, como sería el tabular, y cómo se suma en un sistema posicional, que es el nuestro. El ábaco es puramente posicional también, pero, en vez de tener símbolos para los distintos símbolos, tiene un sistema aditivo pequeño en cada orden, pero no es lo más relevante [I, M].

2M11.1-3.3. *Pone de manifiesto todo el proceso, la evolución, la progresión desde lo manipulativo, pasando por lo tabular, para llegar a lo simbólico [E, 3].*

- *2M11.1-3.3(I)2. No creo que tenga el mismo nivel manipulativo el ábaco que los bloques multibase. El ábaco es un sistema posicional, en las dos representaciones tipo ábaco que ha hecho ya se marca la posición con las mismas bolas, aunque estén en sitios distintos. Sin embargo, en los bloques multibase no, bloques multibase es un sistema puramente aditivo, con lo cual la percepción te dice el agrupamiento. En los bloques multibase cada unidad es distinta, cada unidad representa físicamente la cantidad de unidades totales que tiene. Esto, traducido en términos de sistemas de numeración, es: sistemas aditivos, sistemas multiplicativos y sistemas posicionales. Por eso, dentro de esa manipulación habría una gradación, es decir, los manipulativos no son todos equivalentes [I, M].*

En las interpretaciones de Marcos acerca de este tema, es evidente el gran esmero con el que reflexiona, pues comenta con profundidad distintos aspectos presentes en los materiales que aparecen en el vídeo. Así pues, formula interpretaciones sobre el uso y las características de los materiales —bloques multibase, tablas, sorobán— e incide en cómo los utiliza la formadora. Asimismo, resultan muy interesantes sus reflexiones relativas al distinto grado de manipulación de los materiales vistos, vinculando dicha manipulación con la visibilidad o percepción de los agrupamientos y con los distintos tipos de sistemas de numeración, de tal forma que los bloques multibase serían los más manipulativos y los que presentan una mayor percepción de los agrupamientos —sistema aditivo— y, por su parte, el sorobán —y, luego, el registro de representación simbólico— mostraría un grado de manipulación y de visibilidad de los grupos inferior —sistema posicional—, situando

entre ambos las tablas o los tableros de posición — sistema multiplicativo —. Por tanto, su amplio conocimiento sobre los materiales, propio de un MTE, pues otra clase de docente no tendría por qué conocer la información examinada, pone de manifiesto que la variable de experiencia como formador, al igual que la formación en didáctica de las matemáticas, podría tener un impacto importante en cómo interpretan los MTE en relación con el tema de los materiales en el aula de matemáticas, pues son las características que diferencian a Marcos de Daniel y Raquel.

Teorías de didáctica de las matemáticas

En cuanto a las teorías de didáctica de las matemáticas, es obvio que se trata de un territorio dominado por Marcos, ya que es el único sujeto que incorpora este tema en sus interpretaciones — además de Daniel, quien lo hace en una sola ocasión y cuya aportación se incluye en este apartado por su interés —. En este sentido, a veces menciona de manera explícita la teoría de didáctica de las matemáticas en la que apoya su reflexión, siendo el caso de los siguientes ejemplos:

2M1.2-1.1. Indica que el número de palillos es fijo, mientras que el de gomas no lo es [E, 3].

- 2M1.2-1.1(I)1. Imagino que el número de palillos está fijo porque la cantidad es relevante para lo que va a estudiar. Podría ser fijo y al azar, pero yo creo que está prefijado de una manera consciente, lo que se llama en Teoría de Situaciones «variable didáctica», porque interesará que dicha cantidad cumpla una serie de condiciones para hacer emerger ciertas estrategias. Lo que no se sabe es si todos tienen la misma cantidad de palillos [I, M].

2M5.1-1.1. Dice a los alumnos que tienen que hacer grupos de palillos, que tienen que organizarlos de tal forma que de un vistazo se pueda saber cuántos palillos hay [E, 3].

- 2M5.1-1.1(I)1. Explicitar que agrupan es una decisión didáctica, ella no quiere dejar que los agrupamientos surjan en un entorno adidáctico, ya que puede haber algún alumno que se ponga a contar los palillos de uno en uno sin ningún tipo de organización; como son futuros maestros, se les dice más o menos cómo tienen que trabajar. En un entorno adidáctico, hablando en términos de la Teoría de Situaciones, sería suficiente con pedir que cuenten los palillos, sin importar la organización, mientras que aquí el objetivo es organizarlos para saber cuántos hay [I, M].

2M1.1-1.2. Pregunta a los grupos de alumnos si han tenido que llegar a un acuerdo [E, 2].

- 2M1.1-1.2(I)1. *Aquí hay una dinámica de la gestión de la clase: el trabajo es en grupo, pero dicho trabajo depende de lo que hayan hecho los otros grupos. En las situaciones de formulación, en Teoría de Situaciones, se deja que los alumnos trabajen y luego se produce la comunicación; si se produce un fracaso, se vuelve a trabajar. Parece que aquí ya han llegado a un consenso [I, M].*

2M4.1-1.2. *Hace ver a los alumnos que haber hecho agrupamientos distintos, de 15 y de 20, con el mismo color, con el amarillo, puede ser un lío, indicando que en los grupos hechos podría haber 160 [palillos] como máximo, pero que podrían ser menos, y haciendo ver que el objetivo es que visualmente quede claro cuántos palillos hay [E, 3].*

- 2M4.1-1.2(I)2. *Aquí se da una situación en la que los alumnos han resuelto el problema, saber cuántos palillos hay, pero la formadora pretendía que quedara claro visualmente cuántos palillos hay, que es un objetivo más ambiguo y difícil para los alumnos. Esto tiene una transcendencia importante, sobre todo en Teoría de Situaciones, porque la situación tiene que sancionarse a sí misma; entonces, mientras que el objetivo de saber cuántos hay es fácilmente sancionable, se puede evaluar, el objetivo de que quede clara la distribución y me ayude a saber cuántos hay está generando problemas de materialización del objetivo [I, M].*

2M5.1-1.3. *Explica que está traduciendo lo que los alumnos están diciendo, escribiéndolo en el registro de representación simbólico-numérico y haciendo ver que podría emplear otros registros: emplear una foto, por ejemplo [E, 2].*

- 2M5.1-1.3(I)1. *Se trata de una reflexión sobre la traducción que está haciendo basada en los registros de representación de Duval; si tuviera que expresar lo que están diciendo los alumnos tal y como lo han hecho, tendría que decir «3 rosas», etc., en vez de escribirlo simbólico-numéricamente [I, M].*

2M2.1-3.2. *Reinterpreta en términos matemáticos lo que han hecho los alumnos de forma guiada, haciendo ver que han desagrupado las centenas y las decenas [E, 3].*

- 2M2.1-3.2(I)2. *Dejar que los alumnos elaboren el procedimiento y finalmente dar los nombres es algo clásico en Teoría de Situaciones: se empieza actuando y al final se atribuyen los nombres por parte del docente [I, M].*

2M5.2-3.3. *Indica el paralelismo entre los bloques multibase y el proceso simbólico [E, 3].*

- 2M5.2-3.3(I)1. *Quiere ver que se puede representar el algoritmo de muchas maneras distintas, porque son algoritmos distintos, y que simplemente es un problema de traducción; se basa en Duval [I, M].*

Se puede observar que alude explícitamente a la Teoría de Situaciones Didácticas de Guy Brousseau, teoría en la que Marcos fundamenta su tesis doctoral en didáctica de las matemáticas, y a la Teoría de Registros de Representación Semiótica desarrollada por Raymond Duval. Así pues, la influencia del paradigma de investigación en el que se sitúa el sujeto —y otras teorías— es clara en sus comentarios, pero no solo porque mencione la teoría en cuestión, sino también por el léxico que emplea para expresar sus ideas, que es propio de las teorías que se encuentran en su haber como investigador. Así es que vemos ciertas interpretaciones en las que las teorías en didáctica de las matemáticas no aparecen de forma explícita, sino implícita, como pueden ser las siguientes:

2M4.1-1.2. *Hace ver a los alumnos que haber hecho agrupamientos distintos, de 15 y de 20, con el mismo color, con el amarillo, puede ser un lío, indicando que en los grupos hechos podría haber 160 [palillos] como máximo, pero que podrían ser menos, y haciendo ver que el objetivo es que visualmente quede claro cuántos palillos hay [E, 3].*

- 2M4.1-1.2(I)1. *Aunque no es algo que estuviera presente en la consigna, ella pretende que no usen gomas del mismo color para agrupamientos distintos, ya que es la manera más habitual de marcar los distintos agrupamientos para saber de un vistazo el orden de cada uno, así como en nuestro sistema de numeración empleamos la posición, en otros emplean distintos tipos de letras, etc. [I, M].*

2M7.1-1.2. *Hace ver que pueden rehacer otra vez los grupos hechos [E, 3].*

- 2M7.1-1.2(I)1. *Se trata de un ejemplo claro de negociación de la consigna: cuando no se dejan claros los objetivos en la consigna, es necesario negociarla; eso es lo que está ocurriendo ahora, momento en el que la actividad está ya comenzada [I, M].*

2M3.1-3.3. *Hace la suma en el registro simbólico-numérico con ayuda de los alumnos [E, 2].*

- 2M3.1-3.3(I)1. *Quiere que vean el paralelismo que existe entre un proceso, la representación en el ábaco japonés, y otro, el registro simbólico-numérico, plantando la suma sin llevadas para que el paralelismo sea más evidente [I, M].*

En estas interpretaciones, el sujeto hace uso de una terminología que es inherente a dos teorías distintas. Por un lado, se aprecia otra vez la Teoría de Situaciones Didácticas, ya que utiliza términos como *consigna* o *negociación de la consigna* que son propios de dicho paradigma —como también lo son algunos que se hallan en los ejemplos explícitos, como *variable didáctica*, *entorno adidáctico* o *situaciones de formulación*—. Por otro, se reconoce una

vez más la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Raymond Duval, pues usa expresiones que pertenecen a su jerga, tales como *registro simbólico-numérico*.

Asimismo, en relación con este tema, Marcos se refiere a manuales de didáctica de las matemáticas, bien de forma explícita, bien por la terminología empleada, como en los siguientes casos:

2M2.3-3.1. *Pide que representen las operaciones en el registro de representación tabular, que sería como un elemento intermediario entre el registro manipulativo y el simbólico, de la forma que los alumnos quieran, indicando que puede tener características simbólico-numéricas o características gráficas [E, 3].*

- 2M2.3-3.1(I)2. *En muchos manuales se plantea que las tablas pueden tener características simbólico-numéricas o gráficas [I, M].*

2M3.3-3.3. *Realiza un agrupamiento auxiliar, un cambio de 5 a 1, propio de este tipo de ábaco [E, 2].*

- 2M3.3-3.3(I)1. *El agrupamiento auxiliar permite no tener que contar; se trata de números visibles y se «subitizan» las cantidades sin necesidad de contar [I, M].*

En la primera interpretación nombra a los manuales, aunque sin citar ninguno en particular, mientras que en la segunda utiliza la palabra *subitizan*, propia de los manuales de didáctica de las matemáticas.

Por otra parte, en cuanto a Daniel, este alude en una sola ocasión a una teoría, que más bien es una metodología para la enseñanza de las matemáticas, pero que se sustenta en una teoría general de aprendizaje, como se puede apreciar a continuación:

2D2.2-3.1. *Termina de plantear el ejercicio, indicando que los alumnos han de realizar una representación intermedia, la cual denomina «tabular» y que puede tener componentes gráficos o simbólicos, que quiere que generen sin haberla trabajado previamente [E, 3].*

- 2D2.2-3.1(I)1. *El proceso planteado en el ejercicio es muy parecido a las tres etapas de Jerome Bruner, más conocidas como el CPA de Singapur [I, M].*

Vemos que saca a colación el conocido como Método Singapur para interpretar lo observado, haciendo ver que este se fundamenta en los supuestos teóricos desarrollados por Jerome Bruner.

Por consiguiente, parece evidente que la formación académica —concretamente la adquirida de la mano de la experiencia investigativa en didáctica de las matemáticas— es un pilar fundamental para ser capaz de interpretar los eventos identificados con el apoyo de la literatura del área. Este hecho cobra especial relevancia cuando nos referimos a los formadores, pues, en su labor de enseñar a enseñar matemáticas, tener una capacidad de interpretación reforzada por la investigación del área posibilita mejorar su quehacer en el aula —amén, por supuesto, de su *noticing*—.

Alumnos de Magisterio como resolutores

Con respecto a este tema, hay que indicar que en muchas ocasiones se menciona a los alumnos de Magisterio en las interpretaciones formuladas por los formadores, pero se hace normalmente de manera auxiliar, es decir, no se sitúan en el foco de la interpretación en tanto en cuanto no se reflexiona sobre ellos, sino sobre otro tema —la tarea, el objetivo, el procedimiento—. Algunos ejemplos de esta situación, que se da en interpretaciones de los tres formadores, son los siguientes:

2M7.1-1.1. *Dice que piensen si los grupos que han hecho se ajustan a cómo se escribirían en nuestro sistema de numeración [E, 3].*

- 2M7.1-1.1(I)2. *Pretende que los alumnos hagan grupos de 10 o agrupamientos compatibles o con cierta coordinación con el sistema de numeración para que el conteo sea mucho más fácil; si hacen grupos de 17, puede funcionar, pero no para leer los números como los leemos [I, M].*

2M1.1-3.3. *Plantea una suma de forma simbólica [E, 3].*

- 2M1.1-3.3(I)1. *Imagino que va a realizar la suma con distintos procedimientos para ver las correspondencias entre ellos con el objetivo de que los alumnos entiendan por qué sumamos como sumamos y que adquieran técnicas para provocar que los niños de primaria también conozcan el porqué de los distintos algoritmos [I, M].*

2D4.1-1.1. *Presenta el objetivo de la actividad: entender la escritura de los números [E, 2].*

- 2D4.1-1.1(I)1. *Pretende que los alumnos entiendan que agrupar palillos es una estrategia que deben explorar [I, M].*

2D10.1-3.3. *Presenta la notación intermedia que se había introducido [al principio de la sesión], la tabla, concretamente una versión de tabla de valor posicional donde las unidades, decenas y centenas se representan con palotes, dando a dicho sistema de representación el nombre de tabular-gráfico al tener un carácter gráfico [E, 3].*

- 2D10.1-3.3(I)1. La versión que ha surgido de la tabla se parece más al ábaco que a los bloques multibase, pero ya se dijo al principio [de la sesión] que los alumnos podían improvisar la tabla al no haberse tratado antes [I, M].

2R2.1-1.2. Hace ver a los alumnos que en los grupos que han hecho no se aprecia matemáticamente el concepto de qué número de palillos hay, evitando decirles cómo solucionarlo [E, 1].

- 2R2.1-1.2(I)1. En la metodología matemática lo que se pretende es que sean los alumnos quienes a base de manipular alcancen el objetivo propuesto, tratando de razonarlo ellos mismos [I, M].

2R3.1-3.1. Indica a los alumnos que tienen que representar el proceso de la suma [E, 3].

- 2R3.1-3.1(I)1. Porque así es cómo los alumnos van a entender el proceso de la suma de los números [I, M].

Vemos que mencionan a los discentes, pero las interpretaciones no giran en torno a ellos, no se reflexiona sobre sus características de aprendizaje o sus acciones como clave para interpretar la práctica de enseñanza de la formadora. No obstante, aunque este tipo de interpretaciones tienen una gran presencia, Marcos y Daniel también comentan en sus interpretaciones cierta información acerca de las características de los estudiantes, como en los siguientes ejemplos:

2M2.3-3.1. Pide que representen las operaciones en el registro de representación tabular, que se situaría como un elemento intermediario entre el registro manipulativo y el simbólico, de la forma que los alumnos quieran, indicando que puede tener características simbólico-numéricas o características gráficas [E, 3].

- 2M2.3-3.1(I)1. Decir que los alumnos lo hagan como quieran tiene «trampa»; los alumnos entenderán que no lo tienen que hacer como ellos quieran, sino que la forma tabular tiene que responder a algo, pero no creo que tengan claro qué es lo que tienen que hacer tal y como se plantea la consigna [I, M].

2D11.2-2. Explica a los alumnos cómo multiplicar potencias de 2, haciendo que observen que $2^2 \times 2^4$ es 2^6 porque aparecen 6 doses en esas potencias [E, 3].

- 2D11.2-2(I)1. Pretende con ello enfatizar el proceso por encima de las recetas que los alumnos puedan conocer de secundaria, y que a lo mejor no llegan a comprender, como la de «sumar los exponentes» [I, M].

En estas interpretaciones se presentan ideas sobre las capacidades de los alumnos de Magisterio desde una perspectiva favorable. Sin embargo, son mucho más abundantes aquellas que prestan atención a las dificultades que tienen como resolutores de cuestiones matemáticas, siendo este tipo de interpretaciones características de Daniel y apareciendo con cierta frecuencia —aunque menor— en los comentarios de Marcos, como estas:

2M4.1-2. *Analiza una nueva estrategia, consistente en dividir entre la nueva base, en base 16, tal y como se hace al pasar de base 10 a otra base [E, 3].*

- *2M4.1-2(I)1. Se trata de una estrategia que seguramente no hayan podido llevar a cabo los alumnos [I, M].*

2M10.2-2. *Recuerda, a partir de la escritura polinómica que tiene, lo que es una potencia, haciendo ver que 2^4 es $2 \times 2 \times 2 \times 2$, y el producto de potencias, haciendo ver que en $2^4 \times 2^0$ hay 4 doses y ninguno, es decir, 4 doses [E, 3].*

- *2M10.2-2(I)1. Porque los alumnos no suelen estar acostumbrados a trabajar con escrituras polinómicas en función de un número [I, M].*

2M2.1-3.2. *Reinterpreta en términos matemáticos lo que han hecho los alumnos de forma guiada, haciendo ver que han desagrupado las centenas y las decenas [E, 3].*

- *2M2.1-3.2(I)3. Estos alumnos, que ya son adultos, deberían manejar sin problema los nombres vistos, centena, decena..., pero aún tienen dificultades con ello [I, M].*

2M3.1-3.2. *Interacciona con una alumna, pidiendo que le explique cómo lo hace por escrito [E, 1].*

- *2M3.1-3.2(I)1. Pretende que los alumnos elaboren la relación entre los procesos manipulativos y el proceso simbólico, que es el que tienen automatizado y que aplican de un modo poco reflexivo [I, M].*

2D9.1-2. *Plantea a los alumnos el problema del $(2^4)^0$, haciendo ver que eso es 1 y que se puede poner como 2^0 , o sea, que $(2^4)^0$ es 2^0 [E, 3].*

- *2D9.1-2(I)1. Plantea la cuestión a los alumnos porque seguramente sabe que «elevar a 0» les supone muchas veces un problema [I, M].*

2D11.2-2. *Explica a los alumnos cómo multiplicar potencias de 2, haciendo que observen que $2^2 \times 2^4$ es 2^6 porque aparecen 6 doses en esas potencias [E, 3].*

- *2D11.2-2(I)1. Pretende con ello enfatizar el proceso por encima de las recetas que los alumnos puedan conocer de secundaria, y que a lo mejor no llegan a comprender, como la de «sumar los exponentes» [I, M].*

2D1.2-3.1. *Hace hincapié en que representen el proceso de la suma, no solo el resultado [E, 3].*

- 2D1.2-3.1(I)1. *Porque es una confusión común de los estudiantes, están acostumbrados a los resultados, no a los procesos [I, M].*

2D3.2-3.2. *Hace ver que han desagrupado centenas en decenas y decenas en unidades para poder restar [E, 3].*

- 2D3.2-3.2(I)1. *A los alumnos les cuesta entender el ábaco, tienen dificultades para comprender el proceso de desagrupar y que las fichas tienen distintos significados según la posición en los palos [I, M].*

Comprobamos que se exponen algunas dificultades de los alumnos de Magisterio como resolutores por ambos formadores, pero, si prestamos atención al modo que tienen de expresarlas Marcos — «no hayan podido...», «no suelen estar acostumbrados a...», «aún tienen dificultades...», «tienen automatizado...» —, por una parte, y Daniel — «les supone muchas veces un problema...», «no llegan a comprender...», «es una confusión común...», «tienen dificultades para comprender...», «les cuesta entender...» —, por otra, apreciamos leves matices en el cariz de las formulaciones de uno y de otro que nos pueden conducir a sospechar que Daniel pone un énfasis mayor en la gravedad de las dificultades que los alumnos arrastran. La razón por la que Daniel se centra especialmente en las dificultades podría hallarse en su larga experiencia enseñando matemáticas en niveles universitarios a estudiantes de ingeniería, cuyo perfil es muy diferente al de los alumnos de Magisterio, lo cual se trata de dilucidar en el apartado sobre las entrevistas.

Alumnos de Magisterio como futuros maestros

Otro tema relativo a los alumnos de Magisterio es aquel en el que se los mira como futuros maestros, tema que tratan solamente Marcos y, sobre todo, Raquel. Se presentan en primer lugar las interpretaciones de Marcos al respecto:

2M2.2-1.1. *Plantea una tarea: estimar los palillos que ha repartido y contarlos después [E, 3].*

- 2M2.2-1.1(I)1. *Está reproduciendo con futuros maestros una tarea que puede llevarse a cabo con niños de primaria, por lo que de algún modo va a hacer pasar a los alumnos por procesos similares a los que pasarían los niños de primaria [I, M].*

2M7.1-1.1. Dice que piensen si los grupos que han hecho se ajustan a cómo se escribirían en nuestro sistema de numeración [E, 3].

- 2M7.1-1.1(I)3. Hace esta indicación porque está trabajando con futuros maestros; si la actividad se realizase con niños, los objetivos tendrían que ser distintos [I, M].

2M12.2-2. Indica que los alumnos, como futuros maestros de matemáticas, tienen que entender el proceso [E, 3].

- 2M12.2-2(I)1. Se trata de una reflexión metamatemática que se basa en que el conocimiento que tienen que tener los maestros sobre las matemáticas debe ser distinto al simple uso o a una concepción meramente utilitarista, por lo que deben preocuparse de cómo se aprende [I, M].

2M1.1-3.3. Plantea una suma de forma simbólica [E, 3].

- 2M1.1-3.3(I)1. Imagino que va a realizar la suma con distintos procedimientos para ver las correspondencias entre ellos con el objetivo de que los alumnos entiendan por qué sumamos como sumamos y que adquieran técnicas para provocar que los niños de primaria también conozcan el porqué de los distintos algoritmos [I, M].

2M10.2-3.3. Realiza por último otra tabla, indicando que se trata de un sistema tabular simbólico [E, 3].

- 2M10.2-3.3(I)2. Hay un intento de mostrar cómo funciona cada sistema para que el alumno tenga recursos para que luego, cuando vaya a clase, sepa qué tipo de sistema puede utilizar para que los alumnos de primaria construyan de manera satisfactoria los algoritmos clásicos de las operaciones [I, M].

Contemplamos cinco casos en los que Marcos ha establecido un enlace con la labor que los estudiantes, como futuros maestros, desempeñarán en el aula de primaria, siendo especialmente estimable la consideración que realiza sobre el conocimiento que tiene que tener un maestro, que no consiste solo en saber hacer uso de la matemáticas, sino en saber enseñarlas, en ser capaz de que los alumnos de primaria las aprendan, lo que, claramente, es una apreciación propia de un MTE.

En cuanto a Raquel, sus comentarios acerca de los estudiantes de Magisterio como futuros maestros se vinculan en todo momento con la que será su labor enseñando en el aula de primaria, resultando a veces difícil distinguir la parte de la interpretación que se refiere al futuro maestro de la que hace lo propio con los alumnos de primaria, tal y como se puede comprobar en estos ejemplos:

2R4.1-1.1. Plantea como objetivo que los alumnos piensen cómo se escriben los números y cómo se agrupan [E, 2].

- 2R4.1-1.1(I)1. Con su metodología matemática pretende que los alumnos, cuando enseñen a los niños en primaria, aborden la escritura de los números de una manera inductiva, empleando una metodología manipulativa, para que los niños lleguen a comprender cómo se agrupan y cómo se escriben los números de una forma visual [E, M].

2R1.1-1.2. Trata de ver si los alumnos han tenido que llegar a un acuerdo para llegar a una organización [de los palillos] [E, 2].

- 2R1.1-1.2(I)1. Pretende que los alumnos se den cuenta de que en el aula [de matemáticas de primaria] se van a encontrar con que los niños realizan diferentes organizaciones, por lo que tienen que adaptarse a esa mentalidad [I, M].

2R1.1(i)-3.1. Evento implícito en el comentario [E, 1].

Transcripción del vídeo: Tenéis que hacer las 4 operaciones..., representarlas de distintas maneras. [...] con material manipulativo...

- 2R1.1(i)-3.1(I)1. Pretende que los alumnos vean cómo trabajar la descomposición de los números con los niños pequeños [I, M].
- 2R1.1(i)-3.1(I)2. Plantea una metodología basada en la gamificación y en el juego, que es como metodológicamente se enseña a los niños en matemáticas, para que los alumnos puedan transmitir el concepto de la suma a los niños [I, M].

2R3.1-3.1. Indica a los alumnos que tienen que representar el proceso de la suma [E, 3].

- 2R3.1-3.1(I)2. Los niños [de primaria] adquieren fenomenal el concepto de la suma de los números si ven el proceso, si lo descomponen; es por donde hay que empezar [I, M].

2R2.1-3.2. Interactúa con los alumnos, preguntando si han agrupado o desagrupado, haciendo que verbalicen y que razonen [E, 3].

- 2R2.1-3.2(I)2. Ese vocabulario es muy normal en las aulas con los alumnos y es el que luego ellos van a tener que emplear en el aula [de primaria] [I, M].

2R1.1-3.3. Está trabajando el concepto de la suma visualmente, gráficamente [E, 2].

- 2R1.1-3.3(I)1. Lo trabaja visualmente porque es así como hay que introducir la suma en el aula, sobre todo con los niños de infantil y de 1.º y 2.º de primaria, ya que para ellos el cálculo mental puede resultar difícil, pero visualmente van entendiendo la suma, los agrupamientos [I, M].

2R3.1-3.3. *Pregunta si hay que agrupar, haciendo ver que no es necesario [E, 2].*

- 2R3.1-3.3(I)1. *Trata de emplear una metodología basada en el juego y en presentar los conceptos de forma gráfica, como la suma en este caso, ya que es la metodología que hay que emplear con los niños [de primaria] [I, M].*

En todas estas interpretaciones, Raquel se preocupa por que los futuros maestros sepan cómo trabajar en el aula de primaria con los niños las diferentes ideas matemáticas que han de tratar. Además, en comparación con las interpretaciones de Marcos, podemos apreciar que la verbalización que hace la maestra sugiere una conexión con la práctica, es decir, se puede intuir que los comentarios formulados por Raquel son propios no solo de un MTE, sino también de un maestro con experiencia.

Así pues, se podría decir que, en relación con este tema, la formación en didáctica de las matemáticas y la dilatada experiencia como formador de Marcos, por un lado, y la experiencia como maestra de Raquel, por otro, les permiten a ambos tratar aspectos sobre los alumnos de Magisterio como futuros maestros, lo cual no ocurre en el caso de Daniel, cuyo perfil profesional no incluye ninguno de los elementos citados.

Alumnos de Educación Primaria

En cuanto a este tema, la hegemonía la ostenta, sin lugar a dudas, Raquel, pues es la única que constantemente introduce en sus interpretaciones aspectos que conectan con los alumnos de primaria, lo cual habría de ser una característica consustancial a cualquier formador de futuros maestros. Por su parte, Marcos y Daniel apenas incluyen aspectos en relación con este tema en sus interpretaciones. Así pues, se presenta a continuación algún ejemplo de la maestra:

2R1.1-1.2. *Trata de ver si los alumnos han tenido que llegar a un acuerdo para llegar a una organización [de los palillos] [E, 2].*

- 2R1.1-1.2(I)1. *Pretende que los alumnos se den cuenta de que en el aula [de matemáticas de primaria] se van a encontrar con que los niños realizan diferentes organizaciones, por lo que tienen que adaptarse a esa mentalidad [I, M].*

2R1.1(i)-3.1. *Evento implícito en el comentario [E, 1].*

Transcripción del vídeo: Tenéis que hacer las 4 operaciones..., representarlas de distintas maneras. [...] con material manipulativo...

- 2R1.1(i)-3.1(I)2. *Plantea una metodología basada en la gamificación y en el juego, que es como metodológicamente se enseña a los niños en matemáticas, para que los alumnos puedan transmitir el concepto de la suma a los niños [I, M].*
- 2R3.1-3.1.** *Indica a los alumnos que tienen que representar el proceso de la suma [E, 3].*
 - 2R3.1-3.1(I)2. *Los niños [de primaria] adquieren fenomenal el concepto de la suma de los números si ven el proceso, si lo descomponen; es por donde hay que empezar [I, M].*
- 2R2.1-3.2.** *Interactúa con los alumnos, preguntando si han agrupado o desagrupado, haciendo que verbalicen y que razonen [E, 3].*
 - 2R2.1-3.2(I)1. *Es la metodología que se emplea en el aula: el juego es verbalizar, contar lo que se ha hecho, cómo se hace, cómo no se hace [I, M].*
 - 2R2.1-3.2(I)2. *Ese vocabulario es muy normal en las aulas con los alumnos y es el que luego ellos van a tener que emplear en el aula [de primaria] [I, M].*
- 2R1.1-3.3.** *Está trabajando el concepto de la suma visualmente, gráficamente [E, 2].*
 - 2R1.1-3.3(I)1. *Lo trabaja visualmente porque es así como hay que introducir la suma en el aula, sobre todo con los niños de infantil y de 1.º y 2.º de primaria, ya que para ellos el cálculo mental puede resultar difícil, pero visualmente van entendiendo la suma, los agrupamientos [I, M].*
- 2R3.1-3.3.** *Pregunta si hay que agrupar, haciendo ver que no es necesario [E, 2].*
 - 2R3.1-3.3(I)1. *Trata de emplear una metodología basada en el juego y en presentar los conceptos de forma gráfica, como la suma en este caso, ya que es la metodología que hay que emplear con los niños [de primaria] [I, M].*

Se puede observar que Raquel aporta bastante información sobre los alumnos de primaria en sus interpretaciones. Por una parte, se expresa en función de las características de aprendizaje de los niños, explicando cómo trabajan, cómo adquieren ciertos conceptos matemáticos o qué dificultades tienen, por ejemplo, con el cálculo mental, exponiendo la forma adecuada para salvar tales obstáculos según cómo les es más fácil entender aquello que *a priori* les puede generar ciertos problemas. Por otra, enuncia lo que interpreta según cómo se han de trabajar las matemáticas con los niños, lo que concuerda, a fin de cuentas, con la manera en la que estos aprenden, resaltando la importancia del juego en el aula y de verbalizar los procesos realizados. Por tanto, es clara la influencia que ejerce sobre esta formadora su experiencia como maestra y, muy posiblemente, su formación como tal.

En cuanto a las interpretaciones sobre este tema de Marcos y Daniel, el primero se centra en los objetivos de las actividades que los alumnos de primaria podrían realizar y el segundo pone el foco sobre ciertas prácticas de enseñanza matemática habituales en el nivel de primaria en las aulas españolas, tal y como se observa a continuación:

2M4.1-1.1. *Hace explícito el objetivo de la actividad: que los alumnos reflexionen o constaten cómo son las características de los sistemas de numeración [E, 2].*

- 2M4.1-1.1(I)1. *Esto sí que es una diferencia entre una actividad hecha con alumnos [en la universidad] y una actividad hecha en primaria. En primaria, los niños se podrían enfrentar a este tipo de trabajo y no declararles cuál es el objetivo matemático que está detrás, sino simplemente ver si emergen las estrategias que justifiquen ese contenido [I, M].*

2M7.1-1.1. *Dice que piensen si los grupos que han hecho se ajustan a cómo se escribirían en nuestro sistema de numeración [E, 3].*

- 2M7.1-1.1(I)3. *Hace esta indicación porque está trabajando con futuros maestros; si la actividad se realizase con niños, los objetivos tendrían que ser distintos [I, M].*

2D12.1-3.3. *Pregunta a los alumnos cómo aprendieron a sumar cuando eran alumnos de primaria, haciendo ver que lo tradicional suele ser empezar por la fase final, con la suma en vertical [E, 3].*

- 2D12.1-3.3(I)1. *Lo excepcional en España es usar material manipulativo, sobre todo cuando hablamos de alumnos de Magisterio, que estudiaron primaria hace más de 10 años [I, M].*

2D13.1-2. *Explica el procedimiento que han seguido formulándolo en términos de receta memorística, que consistiría en expresar cada coeficiente de la base 16 en base 2 y ponerlos en ciertas posiciones [E, 3].*

- 2D13.1-2(I)2. *El uso de recetas, algoritmos o procedimientos mecánicos, aplicados sin que los alumnos entiendan lo que hacen, es habitual en la enseñanza de las matemáticas y es algo que se debería evitar por los inconvenientes que tienen [I, M].*

En suma, es posible decir que, en este tema sobre alumnos de Educación Primaria, las diferencias más importantes se encuentran entre la maestra y los otros dos sujetos, las cuales posiblemente tengan que ver con que solamente la primera cuenta con experiencia en el aula de primaria, lo que hace que ella se sienta mucho más cómoda para hablar sobre cómo se enfrentan a las matemáticas los alumnos de dicho nivel educativo.

Contenido didáctico

En cuanto a este último tema, las interpretaciones expresadas por Daniel y por la maestra son prácticamente inexistentes, mientras que en el caso de Marcos son mínimas, aunque interesantes por el léxico que utiliza para formularlas. Así pues, solo presentamos ejemplos de Marcos que son atractivos —subrayando lo relevante— a continuación:

2M8.1-1.3. *Pregunta por qué se suma mejor de 10 en 10, haciendo ver que nos manejamos mejor con 10, 20, 30..., que tiene que ver con la base decimal [E, 3].*

- 2M8.1-1.3(I)1. *Pretende hacer ver a los alumnos, a través de un ejercicio de mayéutica, de un proceso de pregunta-respuesta, la ventaja de emplear la base decimal [I, M].*

2M11.1-3.3. *Pone de manifiesto todo el proceso, la evolución, la progresión desde lo manipulativo, pasando por lo tabular, para llegar a lo simbólico [E, 3].*

- 2M11.1-3.3(I)1. *Lo hace porque la idea es que el alumno conozca de dónde vienen las técnicas y cómo se adaptan al sistema; hace una progresión adecuada para que el alumno tenga recursos y pueda construir sus técnicas de cálculo, porque no se trata de que tú enseñes la técnica, sino de que el alumno la construya; es la única manera de conseguir un aprendizaje significativo del cálculo. No tiene sentido enseñar un algoritmo sin saber cómo funciona; no están para eso las matemáticas [I, M].*

2M12.1-3.3. *Está remarcando un hecho a los alumnos, que consiste en que el proceso de la enseñanza clásica empieza con el último trabajo [el sistema de representación simbólico-numérico] [E, 2].*

- 2M12.1-3.3(I)1. *Está defendiendo que el proceso debe ser distinto, es decir, ese es el estadio final, que es donde los alumnos tienen que llegar. Si empezamos por el final, y en esto entran todas las teorías de aprendizaje, corremos un gran riesgo de que no se produzca el aprendizaje significativo [I, M].*

Al igual que en el tema relativo a las teorías de didáctica de las matemáticas, donde hemos comprobado que Marcos se sirve de terminología propia de diversas teorías, en el plano didáctico general también usa ciertos vocablos, como *mayéutica* —que se relaciona con el método de Sócrates para guiar el aprendizaje a través de preguntas— o *aprendizaje significativo* —asociado a las teorías desarrolladas por David Ausubel—. Así pues, resulta interesante la fundamentación de sus argumentos también en este tema.

En resumen, en este eje 4 se han detectado diferencias significativas entre los tres participantes. Por un lado, se ha podido observar que Marcos descuella no solo desde un plano cuantitativo — como vimos en el bloque anterior —, sino también cualitativamente, puesto que la diferencia entre sus resultados y los de los demás sujetos es colosal. Se trata del único MTE que aporta interpretaciones relativas a todos los temas planteados en este cuarto eje, resultando asombrosa la profundidad de las interpretaciones que proporciona, yendo siempre más allá de meras explicaciones para ofrecer reflexiones con enjundia que examinan minuciosamente las cuestiones en las que se centra. Además, normalmente es posible apreciar varios temas en sus interpretaciones, lo que da cuenta de la conexión que establece entre estos, no limitándose a abordarlos de forma aislada. Por todo ello, resulta palmaria — o al menos así lo sugiere su desempeño — la influencia tanto de su formación en didáctica de las matemáticas — siendo notorio el paradigma de investigación en el que se apoya — como su amplia experiencia como MTE, ya que son aspectos que le ayudan a interpretar mejor los eventos que identifica. Por otro lado, se ha visto que Daniel se centra principalmente en interpretar cuestiones sobre los objetivos y los alumnos de Magisterio como resolutores, siendo altamente llamativa la escasez de conexiones con elementos de las matemáticas en sus interpretaciones, que normalmente tienen forma de explicaciones de los eventos y no se adentran en reflexionar más allá acerca de lo identificado. También es característico de este participante su interés por las dificultades que tienen los alumnos de Magisterio con el contenido matemático, lo que podría explicarse — como se ha dicho anteriormente — atendiendo a su experiencia como profesor de matemáticas en estudios universitarios de ingeniería. Así pues, se podría sostener que su menor experiencia como formador — en comparación con Marcos — le hace no tener una actitud interpretativa tan desarrollada, así como que su vasta formación en matemáticas le lleva, paradójicamente, a no hacer mención de aquellos elementos matemáticos presentes en lo que interpreta. Por último, hemos advertido que en la segunda fase Raquel dirige su atención, esencialmente, hacia los aspectos referidos a los alumnos de Magisterio como futuros maestros y a los de Educación Primaria a la hora de interpretar los eventos detectados, lo que concuerda con su formación académica y su dilatada experiencia docente como maestra. Las conexiones constantes que establece con el aula suponen, por tanto, la principal diferencia entre ella y los otros dos formadores. Asimismo, cabe apuntar que los argumentos aportados para explicar los resultados examinados en cada uno de los diez temas vistos se contrastan en las entrevistas realizadas.

Por último, es conveniente recordar que los resultados de esta segunda fase se han visto, con probabilidad, afectados por la inducción provista en las instrucciones dadas a los participantes para visionar y comentar los vídeos sobre la práctica de enseñanza de la formadora en cuestión. Si bien sus efectos se han podido percibir en las apreciaciones que hemos hecho en esta fase —siempre y cuando se recordaran las de la primera—, estos se hacen patentes con mayor claridad en la comparación entre fases que subsigue.

Por lo tanto, tras haber desarrollado desde un enfoque cualitativo el análisis de la información de la fase 2 en los cuatro ejes —y previamente de la fase 1—, pasamos ahora a abordar las principales diferencias entre los resultados obtenidos en ambas fases.

4.2.3. Evolución de la fase 1 a la fase 2

A lo largo de las siguientes páginas se presenta el análisis cualitativo efectuado en relación con los datos de Marcos, Daniel y Raquel, en paralelo, relativos a su evolución de la fase de *noticing* espontáneo (fase 1) a la fase de *noticing* inducido (fase 2), atendiendo al posible progreso alcanzado por cada MTE entre fases, así como a las diferencias entre los sujetos en cuanto a dicha variación en los resultados. Asimismo, se procura ligar los datos con el perfil profesional de cada formador para, de este modo, tratar de explicar el *noticing* propio de cada uno de ellos.

4.2.3.a. Eje 1. Eventos: ¿qué notan?

En este eje nos centramos ya no en determinar cuántos *call-outs* ha detectado cada formador —tal y como se ha hecho en el bloque cuantitativo—, sino en considerar cuáles han detectado. Por tanto, a continuación se comprueba qué eventos relevantes ha notado cada MTE en los distintos vídeos y en ambas fases —análisis intraindividual—, así como qué diferencias hay entre la evolución de cada sujeto —análisis interindividual—.

Así pues, en la siguiente tabla se muestran los eventos relevantes identificados por Marcos, Daniel y Raquel, de forma respectiva, en cada uno de los vídeos en la primera y en la segunda fase:

Tabla 4.28. *Call-outs* identificados por Marcos, Daniel y Raquel –eje 1–: vídeos 1, 2 y 3, fases 1 y 2.

Vídeo 1			Vídeo 2			Vídeo 3		
<i>Call-outs</i>	F1	F2	<i>Call-outs</i>	F1	F2	<i>Call-outs</i>	F1	F2
C1-1.1			C1-2			C1-3.1		
C2-1.1			C2-2			C2-3.1		
C3-1.1			C3-2			C3-3.1		
C4-1.1			C4-2			C4-3.1		
C5-1.1			C5-2			C5-3.1		
C6-1.1			C6-2			C6-3.1		
C7-1.1			C7-2			C7-3.1		
C8-1.1			C8-2			C1-3.2		
C9-1.1			C9-2			C2-3.2		
C10-1.1			C10-2			C3-3.2		
C11-1.1			C11-2			C4-3.2		
C12-1.1			C12-2			C5-3.2		
C13-1.1			C13-2			C6-3.2		
C1-1.2			C14-2			C7-3.2		
C2-1.2			C15-2			C1-3.3		
C3-1.2			C16-2			C2-3.3		
C4-1.2			C17-2			C3-3.3		
C5-1.2			C18-2			C4-3.3		
C1-1.3			C19-2			C5-3.3		
C2-1.3			C20-2			C6-3.3		
C3-1.3			C21-2			C7-3.3		
C4-1.3			C22-2			C8-3.3		
C5-1.3			C23-2			C9-3.3		
C6-1.3			C24-2			C10-3.3		
C7-1.3						C11-3.3		
C8-1.3						C12-3.3		
C9-1.3						C13-3.3		
C10-1.3						C14-3.3		
C11-1.3						C15-3.3		
C12-1.3						C16-3.3		
C13-1.3						C17-3.3		
C14-1.3						C18-3.3		
C15-1.3						C19-3.3		
C16-1.3						C20-3.3		
						C21-3.3		
						C22-3.3		
						C23-3.3		

—●— Marcos
 —●— Daniel
 —●— Raquel

En cada una de las fases comprobamos qué *call-outs* no habían sido detectados por ninguno de los tres docentes y cuáles los habían señalado todos ellos. Así pues, ahora nos fijamos en aquellos eventos relevantes que no han sido explicitados por ningún formador en ninguna fase y en los que han sido notados en ambas por los tres docentes.

En cuanto a los primeros, hallamos solo cuatro *call-outs* —C10-1.3, C17-2, C3-3.3 y C20-3.3—, pero el contenido de los tres primeros lo podemos encontrar, parcialmente, en otros eventos relevantes, por lo que, en realidad, el contenido del C20-3.3 es el único que presenta una idea que no detecta ninguno de los tres MTE en ninguna fase, quedando la redacción del *call-out* como sigue:

C20-3.3. *Mantiene plasmados en paralelo los cinco registros de representación que ha empleado para realizar la suma.*

Aunque en algunos *call-outs* detectados por los formadores se presta atención a la comparación entre varios registros de representación, la idea recogida en el C20-3.3, que se centra en trabajar en paralelo, es decir, en una forma concreta de abordar la enseñanza de un contenido matemático que posibilita comparar características de distintos entes de manera simultánea, no ha sido indicada por ninguno de los tres sujetos.

Y en cuanto a los segundos, localizamos solamente cinco *call-outs* —C8-1.1, C2-3.1, C1-3.2, C17-3.3 y C21-3.3—, que se formulan así:

C8-1.1. *Enuncia el objetivo de la actividad: entender el desarrollo de la escritura de los números en nuestro sistema de numeración.*

C2-3.1. *Explica que no quiere que los alumnos representen el resultado, sino que representen el proceso de la suma.*

C1-3.2. *Pregunta varias veces cómo pueden representar el número 700 de otra forma en el ábaco, haciendo ver que tenían 704, que ella ha quitado 4 unidades y que ahora tienen que representar el número 700 de otro modo para poder quitar otra cuenta y restar 5 unidades.*

C17-3.3. *Hace ver que en la nueva suma aparecen más de 10 unidades al sumar, por lo que hay que reagrupar al estar en base 10, explicándolo en cada registro de representación plasmado en la pizarra.*

C21-3.3. *Pone de manifiesto la secuenciación planteada: se parte de lo más concreto, que sería el problema dado en su contexto; luego se pasa a manipular con ábacos verticales, con ábacos japoneses y con bloques multibase; después se hace la suma en una tabla gráfica y*

luego en una numérica, las cuales se denominan tableros de posición; y finalmente se llega a lo más abstracto, que sería la suma simbólica con expresiones polinomiales o, en primaria, la suma simbólica tradicional, siendo el objetivo escribir finalmente el proceso de forma abstracta.

Podemos ver que los asuntos a los que prestan más atención los MTE son aquellos que tienen que ver con el enunciado de las tareas matemáticas, la importancia del proceso frente al resultado, los reagrupamientos necesarios en algunas operaciones o la secuencia a implementar en el aula de primaria para explicar un concepto matemático, aspectos que guardan relación, en gran medida, con la práctica propia de los formadores.

En cuanto a la evolución de una fase a otra de cada participante, además de lo ya visto en el bloque cuantitativo — Marcos pasa de identificar 78 *call-outs* en la fase 1 a notar 68 en la fase 2, Daniel pasa de 43 a 70 y Raquel pasa de 18 a 24 —, se puede observar que algunos de los eventos relevantes aludidos en la primera fase no se señalan en la segunda y que algunos explicitados en la segunda se dejan a un lado en la primera. A este respecto, un 23 % de los *call-outs* indicados por Marcos en la fase 1 no los nota en la fase 2, mientras que un 12 % de los vistos en la fase 2 son nuevos, no los formula en la fase 1. En cuanto a Daniel, un 14 % de los *call-outs* señalados en la primera fase los omite en la segunda y un 47 % de los enunciados en la segunda no los menta en la primera. Y en lo que respecta a Raquel, esta elude en la fase 2 un 61 % de los *call-outs* mencionados en la fase 1 y un 71 % de los vistos en la segunda no los indica en la primera. Así pues, teniendo en cuenta todos estos datos, se puede decir que, se mejore cuantitativamente entre fases — como Daniel y Raquel — o se empeore — como Marcos —, un conjunto de los *call-outs* notados en primera instancia se obvian en un segundo momento, resultando ser la maestra quien excluye una mayor parte — en términos relativos — de los eventos relevantes vistos de una fase a otra, con gran diferencia, y Daniel quien consigue mantener el foco por segunda vez — de una forma más contundente — en aquello a lo que otorgó importancia en un primer momento. Asimismo, se comprueba que, se mejore o se empeore cuantitativamente, los formadores descubren nuevos eventos que consideran relevantes al examinar una misma práctica de enseñanza por segunda vez y contando con cierta inducción.

En definitiva, es quizá Raquel quien muestra una menor consistencia entre fases, cualitativamente, en este primer eje, principalmente por la falta de correspondencia entre lo notado en una fase y en otra, lo que podría achacarse a su menor formación matemática

en comparación con los demás MTE, lo que quizá la habría conducido a no generarse una idea nítida de cuáles son los sucesos relativos a la práctica de enseñanza de la formadora con mayor transcendencia vinculados al plano matemático en las diferentes grabaciones de vídeo visionadas y comentadas en cada fase por los participantes.

Por último, podemos decir que, desde un punto de vista cualitativo —al menos en relación con lo examinado brevemente en las líneas precedentes—, la inducción provista en la segunda fase no presenta un efecto más allá de centrar la atención en las cuestiones referidas a las matemáticas o a su didáctica, pero no en la consistencia o permanencia de lo observado de una fase a otra sobre dichos aspectos.

4.2.3.b. Eje 2. Eventos: ¿cómo notan?

En este eje se examinan las evidencias textuales de cada formador que abonan los niveles —comentados antes en el bloque cuantitativo— otorgados a los eventos referidos a *call-outs* en los diferentes vídeos y en ambas fases —análisis intraindividual—, así como las diferencias que hay entre la evolución de cada MTE —análisis interindividual—. Para ello, nos fijaremos en los *call-outs* que hayan sido detectados por los tres sujetos en las dos fases —siguiendo la forma de proceder asumida en cada fase, de manera separada, en el bloque cualitativo—, lo que nos proporcionará una idea de la evolución de cada docente, pero también veremos otros eventos relevantes explicitados por cada formador en ambas fases —no notados por todos los MTE— para ejemplificar mejor los resultados del bloque cuantitativo y poder apreciar las disparidades entre la evolución de cada participante.

Respecto a los *call-outs* detectados por los tres sujetos en ambas fases —un total de cinco, como se ha visto en el eje previo—, los niveles alcanzados por cada uno son estos:

Tabla 4.29. Niveles de los *call-outs* formulados por Marcos, Daniel y Raquel en ambas fases.

	Fase 1			Fase 2		
	Marcos	Daniel	Raquel	Marcos	Daniel	Raquel
C8-1.1	1	3	1	2	2	1
C2-3.1	3	3	3	3	3	3
C1-3.2	2	1	1	2	3	1
C17-3.3	2	2	1	3	3	1
C21-3.3	3	3	2	3	3	2

Tal y como se puede apreciar, los niveles de estos cinco *call-outs* mejoran, en líneas generales, de una fase a otra: Marcos explicita con mayor precisión el C8-1.1 y el C17-3.3 en un segundo momento, subiendo un nivel en cada uno, Daniel hace lo propio con otros dos *call-outs*, el C1-3.2 y el C17-3.3 — siendo el único sujeto que consigue pasar del nivel 1 al nivel 3 en un mismo evento relevante —, mientras que en otro ve reducido su nivel, y la maestra obtiene unos niveles iguales en ambas fases. Asimismo, cabe señalar que también mejora el nivel de los eventos referidos a *call-outs* identificados por los tres formadores en la segunda fase con respecto al de los de la primera, dado que disminuye la presencia del nivel inferior marcadamente, tanto es así que en la segunda fase ya no es posible dar con un evento relevante que haya sido formulado por los tres MTE con un nivel 1 de precisión, hecho que sí sucedía en la primera fase — véanse los apartados 4.2.1.b y 4.2.2.b —.

Lo anterior supone una pequeña ejemplificación que refleja la evolución expuesta en el bloque cuantitativo, en el cual hemos podido comprobar que Marcos pasa del nivel medio al medio-alto, Daniel evoluciona del medio al alto y Raquel, por su parte, del bajo al medio-bajo — niveles logrados en el eje 2 y que, por tanto, van del 1 o bajo al 5 o alto y no del 1 al 3, a diferencia de los niveles de los eventos asociados a *call-outs* —. Así pues, en los siguientes párrafos se presenta la formulación de algunos de tales eventos relevantes, así como la de otros que no han sido detectados por los tres sujetos — extraídos en ambos casos del Anexo 18 y del Anexo 34 —, que ponen de relieve la evolución de los MTE según cómo han explicitado los elementos fundamentales de los *call-outs* — Anexo 19 —.

Con respecto a Marcos, hay que recordar que en la primera fase la presencia de los tres niveles — 1, 2 y 3 — era casi igual, pasando a ser muy baja la del nivel 1 en la segunda y siendo predominantes los niveles 2 y 3, con un peso ligeramente mayor del nivel 3. Así pues, algunos eventos que ejemplifican este hecho son los siguientes:

C8-1.1. *Enuncia el objetivo de la actividad: entender el desarrollo de la escritura de los números en nuestro sistema de numeración.*

- *Escritura de los números.*
- *Sistema de numeración.*

M9-1-1.1. *Declara el objetivo didáctico de la actividad con estos alumnos, los futuros maestros [E, 1].*

2M4-1-1.1. *Hace explícito el objetivo de la actividad: que los alumnos reflexionen o constaten cómo son las características de los sistemas de numeración [E, 2].*

Como se puede apreciar, Marcos identifica en ambas fases el C8-1.1, pasando del nivel 1 en la primera fase al nivel 2 en la segunda. Se trata de un *call-out* con dos elementos fundamentales, de los cuales no explicita ninguno en la fase 1, mientras que en la fase 2 explicita de un modo completo el segundo elemento.

C18-3.3. *Representa la primera suma con una tabla, con ayuda de un alumno, haciendo ver que se trata de un registro de representación tabular-gráfico: tabular, por haber empleado la estructura de una tabla, y gráfico, por haber representado las cantidades con palitos o rayas.*

- *Tabular-gráfico.*

M28.1-3.3. *Presenta un formato de tabla que ella ha decidido con barrotes [E, 2].*

2M10.1-3.3. *Realiza una tabla, indicando que se trata de un sistema tabular gráfico [E, 3].*

En este otro caso, observamos que detecta en las dos fases el C18-3.3, pasando del nivel 2 al nivel 3. Se trata de un *call-out* con un elemento fundamental, que es explicitado de forma parcial en la primera fase y de manera completa en la segunda, dado que en un primer momento solo hace referencia a la tabla y en un segundo ya añade que se trata de una tabla con características gráficas.

Estos dos casos solamente quieren servir de ejemplo para mostrar que Marcos ha conseguido mejorar de una fase a otra, siendo capaz de centrar su atención en los aspectos más importantes de los eventos que detecta.

Con respecto a Daniel, hay que recordar que en la primera fase la presencia de los tres niveles –1, 2 y 3– era casi la misma, apareciendo algo más el nivel 2, pasando a ser en la segunda casi inexistente la del nivel 1 y rotundamente predominante la del nivel 3, con una frecuencia absoluta mayor que el doble de la de los otros dos niveles juntos. Así pues, algunos eventos que ejemplifican este hecho son los siguientes:

C4-2. *Escribe en la pizarra otra resolución propuesta por otra alumna, que consiste en dividir B6 entre 2 en base 16.*

- *Dividir entre 2 en base 16.*

D2.1-2. *Está explorando una alternativa que da otro alumno [E, 1].*

2D3.1-2. *Plantea otra estrategia propuesta por un alumno, que consiste en hacer la división en base 16, es decir, pasar de base 16 a base 2 haciendo grupos de 2 [E, 3].*

Como se observa, Daniel detecta en ambas fases el C4-2, pasando del nivel 1 en la primera fase al nivel 3 en la segunda. Es un *call-out* con un solo elemento fundamental, el cual no explicita —ni parcialmente— en la fase 1, mientras que en la fase 2 lo explicita de un modo completo, pues alude tanto a que la división es en base 16 como a que hay que dividir entre 2.

C17-3.3. *Hace ver que en la nueva suma aparecen más de 10 unidades al sumar, por lo que hay que reagrupar al estar en base 10, explicándolo en cada registro de representación plasmado en la pizarra.*

- *Reagrupar.*
- *Distintos registros de representación.*

D6.2-3.3. *Hace ver que en el siguiente ejemplo ya hay que hacer reagrupamientos [E, 2].*

2D8.1-3.3. *Hace ver, con ayuda de una alumna, que hay un nuevo fenómeno que tratar en la suma cuando aparecen 10 o más de una cierta unidad —unidades, decenas o centenas—, que es el reagrupamiento, describiendo en los cuatro sistemas de representación que está usando —la notación vertical usual, la notación polinómica, el sorobán y los bloques de base 10— cómo representaría el proceso de que tengo 9 y 6, 15 unidades, las cuales se agrupan en 1 decena y 5 unidades, siendo un objetivo de la actividad dicha comparación [E, 3].*

En este otro caso, observamos que detecta en las dos fases el C17-3.3, pasando del nivel 2 al nivel 3. Se trata de un *call-out* que cuenta con dos elementos fundamentales, de los cuales explicita solamente el primero —de forma completa— en la fase 1 y los dos en la segunda —no solo de un modo completo, sino además muy detalladamente—.

Estos dos casos solamente quieren servir de ejemplo para exponer que Daniel ha conseguido mejorar sobremanera de una fase a otra, siendo capaz de centrar su atención en los aspectos fundamentales de los eventos que identifica, explicitándolos en su mayor parte con una precisión propia del nivel 3, como se ha querido reflejar con los ejemplos.

Con respecto a Raquel, es preciso recordar que en la primera fase la presencia del nivel 1 era la principal —más del doble que la de los otros dos niveles juntos—, la cual ha seguido siendo elevada en la segunda, compartiendo protagonismo con el nivel 2, en la que la aparición del nivel 3 es casi anecdótica. Así pues, algunos eventos que ejemplifican esta situación son los siguientes:

C8-1.1. *Enuncia el objetivo de la actividad: entender el desarrollo de la escritura de los números en nuestro sistema de numeración.*

- *Escritura de los números.*
- *Sistema de numeración.*

R3.1-1.1. *Acaba de marcar el objetivo de la actividad [E, 1].*

2R2.1-1.1. *Menciona su intención, el objetivo de la actividad, lo que pretende que los alumnos alcancen [E, 1].*

Como se puede apreciar, Raquel detecta en ambas fases el C8-1.1, quedándose en ambos casos en el nivel 1. Se trata de un *call-out* con dos elementos fundamentales, de los cuales no explicita ninguno ni en la fase 1 ni en la fase 2.

C1-3.2. *Pregunta varias veces cómo pueden representar el número 700 de otra forma en el ábaco, haciendo ver que tenían 704, que ella ha quitado 4 unidades y que ahora tienen que representar el número 700 de otro modo para poder quitar otra cuenta y restar 5 unidades.*

- *Representar el número de otra forma.*
- *Quitar una cuenta más.*

R1.1-3.2. *Ayuda a un alumno a razonar mediante preguntas [E, 1].*

2R1.1-3.2. *Está trabajando una operación con los alumnos a través del ábaco [E, 1].*

En este otro caso, Raquel identifica en ambas fases el C1-3.2, quedándose en ambos momentos en el nivel 1. Se trata de un *call-out* que presenta dos elementos fundamentales, de los cuales no explicita ninguno ni en la fase 1 ni en la fase 2. En esta ocasión sí introduce elementos matemáticos en la formulación del evento en la segunda fase, lo cual puede ser considerado como una mejora, pero no incluye los aspectos más importantes del *call-out* que nota, por lo que se queda en el nivel inferior.

Habría sido interesante mostrar un caso en el que la maestra pasara del nivel 1 al nivel 2, pues daría cuenta en cierto sentido de la evolución, aunque escasa, que ha tenido en este eje entre fases. Sin embargo, no se ha dado esta situación en ninguno de los vídeos, probablemente por lo explicado en la evolución de una fase a otra con relación al eje 1, es decir, por el bajo número de eventos relevantes que nota la maestra y, además, por el alto porcentaje de *call-outs* que explicita en la primera fase y no en la segunda, lo que dificulta – o imposibilita – encontrar el caso que buscamos.

En suma, se ha pretendido plantear algunos casos que ejemplifiquen la evolución de los MTE de una fase a otra, pudiendo advertir ciertos aspectos que han mejorado a la hora de explicitar los elementos fundamentales de los *call-outs*, así como las diferencias en el progreso de cada sujeto. A este respecto, hemos podido observar ejemplos que reflejan los datos del bloque cuantitativo, comprobando la moderada evolución de Marcos, la gran mejora de Daniel y el escaso progreso de Raquel mediante algunos *call-outs*. Asimismo, es menester hacer mención de que cabe pensar que en este eje la formación académica de los formadores ha podido tener, probablemente, una influencia importante, puesto que para poder fijarse en los elementos fundamentales de un evento relevante y poder explicitarlos con precisión y detalle es necesario contar con cierto conocimiento matemático, el cual es normal que la maestra, si bien quizá lo posea, no lo tenga tan presente como los otros dos docentes.

Por último, podemos decir que, desde un punto de vista cualitativo —al menos en relación con lo examinado brevemente en las líneas precedentes—, la inducción provista en la segunda fase ha podido contribuir a que los formadores se centraran en los aspectos relativos a las matemáticas y a su didáctica y, en consecuencia, favorecer una formulación más detallada y precisa de los elementos fundamentales de los diversos *call-outs* que han sido explicitados.

4.2.3.c. Eje 3. Interpretaciones: ¿qué interpretan?

En este eje nos ocupamos ya no de determinar cuántos eventos referidos a *call-outs* y acompañados de al menos una interpretación matemática ha aportado cada uno de los formadores en los distintos vídeos, tal y como se ha hecho en el bloque cuantitativo, sino de considerar cuáles son los *call-outs* sobre los que se ha expresado alguna interpretación matemática en los distintos vídeos y en ambas fases por parte de cada formador —análisis intraindividual—, así como de comprobar qué diferencias hay entre la evolución de cada sujeto —análisis interindividual—. Así pues, en la siguiente tabla se muestran los *call-outs* identificados por Marcos, Daniel y Raquel, de forma respectiva, en los distintos vídeos en la primera y en la segunda fase, sobre los que han verbalizado alguna interpretación de la categoría matemática:

Tabla 4.30. *Call-outs* identificados por Marcos, Daniel y Raquel acompañados de al menos una interpretación matemática – eje 3 –: vídeos 1, 2 y 3, fases 1 y 2.

Vídeo 1			Vídeo 2			Vídeo 3		
<i>Call-outs</i>	F1	F2	<i>Call-outs</i>	F1	F2	<i>Call-outs</i>	F1	F2
C1-1.1			C1-2			C1-3.1		
C2-1.1			C2-2			C2-3.1		
C3-1.1			C3-2			C3-3.1		
C4-1.1			C4-2			C4-3.1		
C5-1.1			C5-2			C5-3.1		
C6-1.1			C6-2			C6-3.1		
C7-1.1			C7-2			C7-3.1		
C8-1.1			C8-2			C1-3.2		
C9-1.1			C9-2			C2-3.2		
C10-1.1			C10-2			C3-3.2		
C11-1.1			C11-2			C4-3.2		
C12-1.1			C12-2			C5-3.2		
C13-1.1			C13-2			C6-3.2		
C1-1.2			C14-2			C7-3.2		
C2-1.2			C15-2			C1-3.3		
C3-1.2			C16-2			C2-3.3		
C4-1.2			C17-2			C3-3.3		
C5-1.2			C18-2			C4-3.3		
C1-1.3			C19-2			C5-3.3		
C2-1.3			C20-2			C6-3.3		
C3-1.3			C21-2			C7-3.3		
C4-1.3			C22-2			C8-3.3		
C5-1.3			C23-2			C9-3.3		
C6-1.3			C24-2			C10-3.3		
C7-1.3						C11-3.3		
C8-1.3						C12-3.3		
C9-1.3						C13-3.3		
C10-1.3						C14-3.3		
C11-1.3						C15-3.3		
C12-1.3						C16-3.3		
C13-1.3						C17-3.3		
C14-1.3						C18-3.3		
C15-1.3						C19-3.3		
C16-1.3						C20-3.3		
						C21-3.3		
						C22-3.3		
						C23-3.3		

— Marcos — Daniel — Raquel

En la tabla anterior se puede apreciar visualmente lo que en el bloque cuantitativo se expresó, esto es, que Marcos es quien más eventos relevantes formula acompañados de al menos una interpretación matemática, tanto en la primera como en la segunda fase, a gran distancia de los otros sujetos, así como que la aportación de la maestra en este eje es mínima, sobre todo en el vídeo 2 — con un contenido matemático mayor —. No se aprecia la propensión a interpretar desde una perspectiva matemática o didáctico-matemática los eventos relevantes detectados, pues para ello habría que cruzar esta tabla con la del eje 1, pero, si recordamos los resultados de tal eje, nos hacemos una idea de tal inclinación, que resultaba ser del 69 % en ambas fases para Marcos, del 37 % en la primera y del 27 % en la segunda para Daniel — único de los tres formadores que empeora en este tercer eje — y del 17 % para Raquel en la primera fase, quien evolucionó hasta el 42 % en la segunda, si bien en esta mejora influye notablemente el reducido número de eventos relevantes que la maestra detecta en ambas fases — como ya se explicó en el bloque cuantitativo —. Pero además de todo esto, es posible aproximarnos cualitativamente a los datos de la tabla, tal y como se ha hecho en cada fase de manera separada en el presente bloque, fijándonos en el modo en el que se distribuyen las interpretaciones en los *call-outs* que fueron detectados por los tres MTE — para lo que es preciso cruzar los datos de esta tabla con la del eje 1, es decir, con la tabla 4.28 —. Así pues, si prestamos atención a esos eventos relevantes — con la intención de acotar el análisis de este eje y tratar de que sea breve, por lo explicado en páginas anteriores —, podemos comprobar quiénes han formulado alguna interpretación matemática sobre ellos.

Por un lado, advertimos que, si bien en la primera fase hay tres eventos relevantes que, habiendo sido detectados por los tres sujetos, no han recibido ninguna interpretación matemática y en la segunda encontramos también otros tres, no hay ninguno que no haya sido interpretado desde un enfoque matemático por ninguno de los MTE en ambas fases. Por lo tanto, podemos decir que no hay un patrón de una fase a otra, no hay *call-outs* que, por su contenido, no se presten a ser interpretados matemáticamente por algún formador en alguna fase. Sucede lo mismo con los eventos relevantes que van acompañados de al menos una interpretación [M] por parte de todos los sujetos, ya que en la primera fase se puede localizar uno y en la segunda se advierten dos, pero no se repite ninguno de una a otra fase, por lo que no hay ningún *call-out* que sea interpretado matemáticamente por los tres participantes en las dos fases, no observándose, al igual que antes, patrón alguno en este sentido.

Por otro lado, algunos de los *call-outs* detectados por los tres docentes han recibido interpretaciones [M] por uno o dos de los MTE. A este respecto, si bien en la primera fase podemos decir que no hay eventos relevantes explicitados por los tres sujetos que hayan sido interpretados por Daniel y Raquel, pero no por Marcos, en la segunda ya no se puede hacer tal afirmación — véase el C2-3.1 —. Empero, se trata de un hecho que no tiene mayor transcendencia. Sí parece más relevante que Marcos sea el único formador que en las dos fases proponga interpretaciones [M] sobre algunos *call-outs* en solitario, es decir, sin que Daniel o Raquel aporten también alguna, pudiendo hallar cuatro casos en la primera fase y otros cuatro en la segunda, repitiéndose únicamente el C17-3.3 —el cual versa sobre la necesidad de reagrupar en una suma dada en diferentes registros de representación—, lo que viene a reforzar los datos cuantitativos expuestos en el trabajo.

En suma, la evolución de la fase 1 a la fase 2 es muy diferente para cada sujeto, lo que se podría explicar atendiendo a la formación académica y a la experiencia docente de cada uno — como ya se expuso en cada fase por separado —, o sea, la formación que tiene Marcos en didáctica de las matemáticas y su trabajo desde un paradigma de investigación que recurre a la interpretación de situaciones de aula le posibilitan que su desempeño en este eje sea excelente en ambas fases, mientras que la formación matemática se convierte en un hándicap para Daniel — por exceso, al no interpretar por considerar obvias aquellas aportaciones que pudiera hacer — y para Raquel — por defecto, dado que su conocimiento de las matemáticas es mucho menor que el de los otros sujetos —.

Por último, podemos decir que, desde un punto de vista cualitativo — al menos en relación con lo examinado brevemente en las líneas precedentes —, la inducción provista en la segunda fase no presenta un efecto más allá de centrar la atención en las cuestiones referidas a las matemáticas o a su didáctica, pero no en la consistencia o permanencia de interpretaciones [M] asociadas a unos mismos *call-outs* de una fase a otra, como tampoco lo tiene desde una perspectiva cuantitativa — recordemos que la evolución entre fases de la propensión a interpretar matemáticamente los eventos relevantes detectados se mostró anárquica en el conjunto de todos los participantes —.

En definitiva, en este eje se ha comentado algún aspecto adicional de forma breve acerca del mismo, siendo el siguiente — sobre el *cómo* — en el que nos detendremos más.

4.2.3.d. Eje 4. Interpretaciones: ¿cómo interpretan?

El cuarto eje es de gran interés desde un punto de vista cualitativo, puesto que nos permite conocer el modo en el que los formadores interpretan los eventos relevantes que han detectado, para lo que nos centramos en analizar el contenido de las interpretaciones referidas a *call-outs* que cada formador ha aportado – análisis intraindividual – a lo largo del visionado de los distintos vídeos en ambas fases, así como en averiguar cuáles son las diferencias existentes entre la evolución de cada sujeto – análisis interindividual –. Con este propósito en mente, abordamos los temas presentes en las interpretaciones referidas a *call-outs* verbalizadas por los MTE – temas recogidos en la tabla 4.25 – en los próximos párrafos para comprobar si ha habido alguna variación.

Contenido matemático

Con relación a este tema, tanto en la primera como en la segunda fase encontramos esencialmente interpretaciones formuladas por Marcos; ni Daniel ni Raquel se detienen a reflexionar sobre las matemáticas en sí mismas. Por lo tanto, podemos decir que no existe evolución alguna en el caso de los dos MTE con menos experiencia como tales de los tres, mientras que Marcos no solo presenta interpretaciones al respecto en los dos momentos, sino que, además, son muchas y variadas y en la segunda fase mejora, si cabe, al proponer reflexiones todavía más profundas y detalladas, como, por ejemplo, la que sigue:

2M8.1-1.2. *Pregunta por la relación del 8 y el 5 con los grupos hechos, lo cual tiene que ver con uno de los objetivos que planteó, indicando que tienen que reflexionar sobre ello [E, 3].*

- *2M8.1-1.2(I)1. El agrupamiento de 10, que es en el que se basa el sistema de numeración, no es tan útil cuando materializamos colecciones manipulables, ya que es un agrupamiento relativamente pequeño. El hecho de usar 10 viene de que tenemos 10 dedos, no viene de otra razón. Matemáticamente puede haber razones para usar un número frente a otro en dos sentidos: por un lado, el número de divisores; por otro, el tamaño. En cuanto a los divisores, 10 solo tiene 2 y 5, no es un gran número. El 12 nos habría dado un sistema de numeración mucho más cómodo, los tercios y los cuartos serían números con parte fraccionaria finita. Con el 10, solo nos queda 2 y 5; un número tan sencillo como la tercera parte de una unidad nos genera un número que no es finito. Por otro lado, desde un punto de*

vista manipulable, el 10 es pequeño. De hecho, esto se ve mucho en las unidades de las magnitudes, que también van de 10 en 10, pero en el uso social no se hace de 10 en 10: usamos el metro y el centímetro, pero el decímetro desaparece porque, aunque por regularidad nos interesa, a la hora de manipular es un grupo demasiado pequeño; lo mismo ocurre con los metros y los gramos, no usamos los cambios decimales. Entonces, si usáramos grupos más grandes, el sistema de numeración requeriría de más símbolos; con el 10, tenemos símbolos distintos hasta el 10. Cuando el agrupamiento se hace muy pequeño, el sistema se automatiza mejor, la base binaria es la más automática, no habría que saberse tablas, pero, claro, se hacen números muy grandes y los algoritmos de cálculo serían odiosos; imagínate que tuviéramos que sabernos el repertorio de las tablas hasta el 20 si usáramos base 20, sería horroroso, tendría una gran cantidad de resultados que habría que memorizar. Entonces, usamos el 10, que además coincide con los dedos. Pero es verdad que, cuando se trata de colecciones manipulables, el 10 es muy pequeño, da la sensación de que no merece la pena usarlo. Yo creo que aquí hay una confrontación con el interés matemático de respetar el 10, porque así escribo los números, y por otro lado la comodidad o economía en la manipulación que hace que de 10 en 10 los grupos sean grupos demasiado pequeños. Se está intentando hacer converger los dos intereses y surge esta situación [I, M].

Así pues, respecto al tema referido al contenido matemático, sin duda es Marcos el MTE que destaca en ambas fases. En este sentido, en las entrevistas se tratará de averiguar qué es lo que le motiva a interpretar sobre este tema y de confirmar las explicaciones que en cada fase por separado en este bloque cualitativo se han dado acerca de la inexistencia de interpretaciones sobre este tema por parte de Daniel y de Raquel, las cuales se centran en su formación matemática, incluso habiendo indicado en las instrucciones de la fase 2, de manera explícita, que podían apoyar sus comentarios, por ejemplo, en los contenidos matemáticos.

Tarea

En lo concerniente a la tarea, nuevamente es Marcos el único MTE que se preocupa por aportar alguna clase de explicación o de reflexión en torno al tema, tanto en la primera como en la segunda fase. Así pues, parece que la inducción provista con las instrucciones en la fase 2, en las que se señalaba explícitamente que uno de los temas en los que podían

basarse para comentar los vídeos era el de las tareas, no ha tenido efecto alguno en Daniel ni en la maestra, como en el tema previo. En el caso de Marcos, cabe poner de relieve que, tanto de manera espontánea como inducida, ha estimado importante reflexionar sobre la consigna de la tarea, la posibilidad de que una misma tarea tenga un objetivo u otro según se dirija a alumnos de Magisterio o de primaria y el propósito matemático que se persigue con la actividad, tal y como se puede apreciar en estos ejemplos:

M24.1-2. Dice que está contenta por encontrar una conexión entre el 0 [coeficiente de 2^0 de la parte de arriba] y el 0 final del resultado, así como entre el 1 [coeficiente de 2^3 de la parte de arriba] y el 1 inicial del resultado [E, 3].

- M24.1-2(I)2. Sigo sin saber si es que esta información ya estaba en el ejercicio. Debe de ser que sí, que el ejercicio en algún momento decía que el resultado empezaba por 1 y acababa por 0 [I, M].

2M8.1(i)-2. Evento implícito en el comentario [E, 1].

Transcripción del vídeo: Mira qué contenta estoy, porque $2^0 \times 2^0$ es 2^0 y el coeficiente es 0, que es este.

- 2M8.1(i)-2(I)1. Debe de ser que el ejercicio decía que el número empezaba con el 1 del 2^7 y terminaba con el 0 del 2^0 , por lo que pueden saber que la máxima potencia va a ser 2^7 [I, M].

M18.1-1.3. Indica el objetivo que tenían que alcanzar los alumnos: establecer la conexión entre los palillos y el sistema de numeración [E, 3].

- M18.1-1.3(I)1. Hasta el momento la actividad podría ser trasladable a los alumnos [de primaria], pero ahora ya se aprecia un objetivo de didáctica de las matemáticas para estos alumnos [futuros maestros] que en la actividad no estaba presente; ha trasladado la actividad a la vez que les hace pensar sobre por qué puede ser interesante; es una discusión de doble naturaleza [I, M].

2M4.1-1.1. Hace explícito el objetivo de la actividad: que los alumnos reflexionen o constaten cómo son las características de los sistemas de numeración [E, 2].

- 2M4.1-1.1(I)1. Esto sí que es una diferencia entre una actividad hecha con alumnos [en la universidad] y una actividad hecha en primaria. En primaria, los niños se podrían enfrentar a este tipo de trabajo y no declararles cuál es el objetivo matemático que está detrás, sino simplemente ver si emergen las estrategias que justifiquen ese contenido [I, M].

M28.1-2. *Está explicando los cálculos que está haciendo, señalando en la pizarra de dónde sale la escritura polinómica en función de las potencias de 2 que han obtenido [E, 2].*

- *M28.1-2(I)2. Es un ejercicio que está muy medido para obtener la escritura polinómica, aunque sea un poquito artificial con estos ceros ahí $[0 \times 2^6]$, porque cuando yo lo hago, eso no saldría, pero es verdad que hay que mantener el cero si luego quiero pasar de ahí directamente a la escritura posicional [I, M].*

2M1.1-3.2. *Mantiene un diálogo con un grupo de alumnos que tiene dificultades para realizar una resta, ya que tienen que restar 5 unidades a 704 y no hay unidades suficientes ni unidades inmediatamente superiores, dándoles indicaciones, pero sin decirles ella el procedimiento a realizar [E, 2].*

- *2M1.1-3.2(I)1. Los números deben de estar elegidos para provocar una discusión sobre los cambios que hay que hacer entre unidades, los acarreos que surgen en los algoritmos clásicos, para materializar las unidades necesarias mediante la descomposición del número para poder restar [I, M].*

Cabe decir que, como se puede apreciar, muchas de las interpretaciones de Marcos son propias de un formador, o sea, no las haría otro tipo de docente, aspecto sobre el que posiblemente tenga mucho que ver su amplia experiencia como tal. Así pues, en este tema es Marcos también quien despunta claramente sobre los otros sujetos. Se tratará de saber en las entrevistas qué le lleva a interesarse por este asunto, así como el motivo por el cual Daniel y Raquel no le han dado importancia en sus interpretaciones.

Objetivo

En cuanto al tema sobre objetivos, en la primera fase encontramos interpretaciones de Marcos y de Daniel, pero no de la maestra. Las verbalizadas por Marcos conectan con el contenido matemático en prácticamente todos los casos, mientras que las de Daniel se articulan en torno al alumno de Magisterio, a lo que se espera que haga o entienda, pero sin incluir aspectos del contenido matemático a trabajar. En la segunda fase, ya hallamos interpretaciones de los tres sujetos, volviendo a ser característica la constante vinculación que establece Marcos entre los objetivos y el contenido matemático, aspecto que ahora sí se da en las interpretaciones de Daniel, así como en las de Raquel, pero de un modo muy superficial, siendo de nuevo la figura del estudiante de Magisterio sobre la que giran las interpretaciones que ambos proponen. Se ejemplifica la situación mencionada a través de las siguientes interpretaciones, organizadas por formadores:

M12.1-1.1. Dice a los alumnos que reflexionen para ver si hay una correspondencia entre los agrupamientos y el sistema de numeración [E, 3].

- M12.1-1.1(I)1. Pretende provocar el uso de agrupamientos recursivos para que aparezca esa correspondencia con el sistema de numeración [I, M].

2M8.2-3.3. Está viendo cómo se realizan los reagrupamientos en cada uno de los sistemas de representación que está utilizando [E, 3].

- 2M8.2-3.3(I)1. Lo que quiere ver es que todos los procesos son el mismo y que son equivalentes al que hacemos de una manera mucho más automatizada en nuestro cálculo simbólico, en nuestra técnica de cálculo usual [I, M].

D8.1-2. Pregunta al alumno que propuso la estrategia de resolución del ejercicio acerca del problema que tuvo con el 2^3 [E, 2].

- D8.1-2(I)1. Para que el alumno trate de interpretar la expresión a la que han llegado y diga si ya ha sabido resolverlo [I, M].

2D6.2-1.3. Hace ver que los grupos que han hecho no coinciden con la notación posicional [E, 3].

- 2D6.2-1.3(I)1. Para que los alumnos traten de arreglar el problema y lleguen a hacer grupos de 10 o potencias de 10 [I, M].

2R1.1(i)-3.1. Evento implícito en el comentario [E, 1].

Transcripción del vídeo: Tenéis que hacer las 4 operaciones..., representarlas de distintas maneras. [...] con material manipulativo...

- 2R1.1(i)-3.1(I)1. Pretende que los alumnos vean cómo trabajar la descomposición de los números con los niños pequeños [I, M].

En definitiva, con respecto al tema de los objetivos, es posible observar una mejora en todos los formadores, pues Marcos en la segunda fase imprime en sus interpretaciones una profundidad que es quizá algo mayor — si bien en ambas fases su nivel es muy alto —, Daniel consigue ligar en un segundo momento los objetivos con contenidos matemáticos, aunque sea tenuemente, y Raquel pasa de no interpretar aspectos sobre los objetivos a sí hacerlo en una segunda ocasión. La diferencia en los resultados podría deberse a la mayor experiencia como MTE de Marcos y a su mayor formación didáctico-matemática.

Procedimiento

En lo que respecta a los procedimientos, solo Marcos propone interpretaciones al respecto en la primera fase, mientras que en la segunda no presta tanta atención al tema,

pudiendo hallar en dicha fase alguna interpretación puntual de Daniel y un gran número de interpretaciones de Raquel sobre el tema, destacando frente a los otros dos sujetos. Así pues, a continuación se plasman algunos casos que ejemplifican lo expuesto, organizando el contenido por formadores:

M32.1-3.3. *Está explicando la progresión didáctica, partiendo de los euros, de lo concreto, y siguiendo con lo manipulativo para llegar a lo abstracto, o sea, su objetivo como maestros [E, 3].*

- M32.1-3.3(I)1. Se trata ya de una indicación, de una progresión, de índole didáctica que les servirá a los alumnos en su práctica fuera [en primaria] para que sus futuros alumnos aprendan lo trabajado. Establecer una progresión adecuada es algo que a los docentes nos preocupa mucho, la cual no siempre va de lo fácil a lo difícil, a veces tienes que presentar cosas difíciles para generar desequilibrios para que los alumnos tengan que actuar. En este caso, para entender eso [señala el algoritmo simbólico tradicional de la suma], es necesario conocer todo lo planteado en la pizarra [I, M].

2M11.1-3.3. *Pone de manifiesto todo el proceso, la evolución, la progresión desde lo manipulativo, pasando por lo tabular, para llegar a lo simbólico [E, 3].*

- 2M11.1-3.3(I)1. *Lo hace porque la idea es que el alumno conozca de dónde vienen las técnicas y cómo se adaptan al sistema; hace una progresión adecuada para que el alumno tenga recursos y pueda construir sus técnicas de cálculo, porque no se trata de que tú enseñes la técnica, sino de que el alumno la construya; es la única manera de conseguir un aprendizaje significativo del cálculo. No tiene sentido enseñar un algoritmo sin saber cómo funciona; no están para eso las matemáticas [I, M].*

2D3.1-3.1. *Dice que las operaciones están puestas en un orden y que es importante que sigan dicho orden, dicha secuencia didáctica [E, 3].*

- 2D3.1-3.1(I)1. Se entiende que las operaciones están ordenadas de más fáciles a menos fáciles [I, M].

2R2.1-1.2. *Hace ver a los alumnos que en los grupos que han hecho no se aprecia matemáticamente el concepto de qué número de palillos hay, evitando decirles cómo solucionarlo [E, 1].*

- 2R2.1-1.2(I)1. En la metodología matemática lo que se pretende es que sean los alumnos quienes a base de manipular alcancen el objetivo propuesto, tratando de razonarlo ellos mismos [I, M].

2R1.1(i)-3.1. *Evento implícito en el comentario [E, 1].*

Transcripción del vídeo: Tenéis que hacer las 4 operaciones..., representarlas de distintas maneras. [...] con material manipulativo...

- 2R1.1(i)-3.1(I)2. *Plantea una metodología basada en la gamificación y en el juego, que es como metodológicamente se enseña a los niños en matemáticas, para que los alumnos puedan transmitir el concepto de la suma a los niños [I, M].*

2R1.1-3.3. *Está trabajando el concepto de la suma visualmente, gráficamente [E, 2].*

- 2R1.1-3.3(I)1. *Lo trabaja visualmente porque es así como hay que introducir la suma en el aula, sobre todo con los niños de infantil y de 1.º y 2.º de primaria, ya que para ellos el cálculo mental puede resultar difícil, pero visualmente van entendiendo la suma, los agrupamientos [I, M].*

La mayoría de las interpretaciones sobre procedimiento o secuenciación de Raquel tienen una conexión nítida con el aula de primaria, lo que pone de relieve su experiencia y su formación como maestra, mientras que la que propone Daniel se centra en el trabajo matemático con los alumnos de Magisterio, situándose los comentarios de Marcos en un espectro que abarca ambas esferas. Así pues, según lo expuesto, se puede decir que quien evoluciona en este tema es Raquel, si bien la aportación de Marcos en la primera fase es también reseñable, así como que parece probable que en este caso la formación académica y la experiencia docente tengan que ver con la manera de haber enfocado los comentarios de cada sujeto.

Material

En cuanto a los materiales, es Marcos el único que se ocupa de este tema, de forma exclusiva en relación con el vídeo 3, siendo las aportaciones de los otros dos MTE aisladas completamente. Tanto en la primera como en la segunda fase, Marcos explica aspectos de los materiales o reflexiona sobre ellos con un nivel de profundidad de todo punto excelso, poniendo de relieve su amplio conocimiento sobre el uso y las características de diversos materiales, tal y como se puede apreciar en estos ejemplos:

M11.1-3.3. *Dice que lo coloca de forma vertical [la suma] para parecerse a la estructura del ábaco y ver la correspondencia entre las dos maneras, realizando la traducción entre ambas maneras de representación [E, 2].*

- M11.1-3.3(I)1. En realidad, lo coloca de forma vertical porque es como lo colocamos normalmente. De hecho, muchos chinos usan el ábaco en posición horizontal [con las varillas de forma horizontal] porque de ese modo las bolas no se caen y lo pueden manejar con el pulgar y el índice. Ella lo coloca verticalmente [la forma simbólica] porque dentro de la tarea tienen que ver la correspondencia entre las dos maneras [sorobán y simbólico] [E, M].

M32.1-3.3. Está explicando la progresión didáctica, partiendo de los euros, de lo concreto, y siguiendo con lo manipulativo para llegar a lo abstracto, o sea, su objetivo como maestros [E, 3].

- M32.1-3.3(I)2. En realidad, los euros se pueden considerar como un sistema simbólico; si tienes 300, no tienes 300 moneditas de 1 euro, tienes un billete de 100 y demás, es decir, al final también el euro se puede componer con un sistema, por lo que no es más manipulativo que esto [señala a los bloques multibase], aunque es verdad que en este caso se enmarca en un contexto, pero no por ello es más manipulativo [I, M].
- M32.1-3.3(I)3. Los ábacos [señala el sorobán] no están pensados para enseñar ni para aprender, sino para trabajar, para obtener resultados, al igual que esto [el algoritmo tradicional de la suma]. En cambio, esto [señala los bloques multibase] sí está pensado para aprender, por lo que es más manipulativo y concreto que el ábaco. Esto otro [señala el tablero de posición] estaría en un punto intermedio [I, M].

2M4.1-3.3. Está realizando el paralelismo, haciendo ver que [el algoritmo tradicional de la suma] lo ha puesto vertical para parecerse a la estructura del ábaco [E, 2].

- 2M4.1-3.3(I)1. Lo ha colocado vertical como lo colocamos siempre, es la manera tradicional de sumar. Siempre se nos ha dicho que lo ponemos así para que coincidan las unidades, etc. Sin embargo, quiere insistir tanto en la equivalencia con el ábaco que incluso llega a justificar la disposición de los números que ponemos nosotros. El ábaco hay veces que lo utilizan así [hace un gesto indicando que lo sitúan con las varillas en horizontal y no en vertical como lo ha dibujado la formadora], por lo menos los chinos. Bueno, con eso intenta remarcar eso [I, M].

2M11.1-3.3. Pone de manifiesto todo el proceso, la evolución, la progresión desde lo manipulativo, pasando por lo tabular, para llegar a lo simbólico [E, 3].

- 2M11.1-3.3(I)2. No creo que tenga el mismo nivel manipulativo el ábaco que los bloques multibase. El ábaco es un sistema posicional, en las dos representaciones

tipo ábaco que ha hecho ya se marca la posición con las mismas bolas, aunque estén en sitios distintos. Sin embargo, en los bloques multibase no, bloques multibase es un sistema puramente aditivo, con lo cual la percepción te dice el agrupamiento. En los bloques multibase cada unidad es distinta, cada unidad representa físicamente la cantidad de unidades totales que tiene. Esto, traducido en términos de sistemas de numeración, es: sistemas aditivos, sistemas multiplicativos y sistemas posicionales. Por eso, dentro de esa manipulación habría una gradación, es decir, los manipulativos no son todos equivalentes [I, M].

Son muchas las interpretaciones interesantes que en las dos fases formula Marcos en torno a los materiales, pero no es el propósito volver a presentarlas todas ellas. Así es que con los ejemplos propuestos pretendemos poner de manifiesto las reflexiones que el formador hace sobre el uso y las características de los materiales en ambas fases, la mayor precisión con la que se expresa en la segunda y el hecho de que, también en las dos fases, aborde en las interpretaciones los mismos asuntos en algunos casos — como puede ser el empleo que se hace del ábaco en China o el grado de manipulación de varios materiales —, lo cual evidencia la importancia que otorga a dichas cuestiones.

En definitiva, sorprende, por un lado, que ni Daniel ni Raquel hayan interpretado prácticamente nada sobre los materiales — sobre todo en el caso de la maestra, que a buen seguro los empleará con los niños en el aula de primaria —, y, por otro, el nivel de detalle de Marcos en ambas fases y su mejora, si cabe, de una a otra fase. Por lo tanto, podríamos pensar que la variable que más influye en este tema es la de la experiencia como MTE, ya que es la diferencia entre los sujetos que, en el caso que nos ocupa, puede tener una mayor relevancia, lo cual se tratará de corroborar en las entrevistas.

Teorías de didáctica de las matemáticas

En lo referido a las teorías centradas en la didáctica de las matemáticas, solamente Marcos se apoya en ellas para fundamentar sus interpretaciones, tanto en la primera como en la segunda fase — Daniel hace alusión en una ocasión en la fase 2 al CPA del conocido como Método Singapur, que es más bien una metodología, pero es algo puntual —. En los siguientes ejemplos se puede comprobar cómo Marcos se basa en diversas construcciones teóricas no solo haciéndolas explícitas, sino también empleando el léxico consustancial a las mismas:

M14.1-1.3. Escribe el 90, un número que no es primo [E, 1].

- M14.1-1.3(I)1. La cantidad de palillos de cada grupo, que a lo mejor ella la ha pensado, es una variable didáctica en el sentido de la Teoría de Situaciones; con el 90 está muy claro, el 10 va a estar [I, M].

M12.1-1.1. Dice a los alumnos que reflexionen para ver si hay una correspondencia entre los agrupamientos y el sistema de numeración [E, 3].

- M12.1-1.1(I)2. El objetivo de la actividad es muy didáctico, se sale un poco de un supuesto «adidactismo» que en principio podría presentar la actividad, ya que no se trata solamente de saber «cuántos hay», sino de pensar cómo se hace [I, M].

M9.1-3.1. Dice que hay que representar la suma en el registro simbólico-numérico [E, 3].

- M9.1-3.1(I)1. Cuando usa la palabra «representar», quizás lo que quiere decir es que hay que hacerlo en ese sistema de representación; con «representar» da la sensación de que quiere que haga el proceso en ese sistema de representación, porque lo que vamos a hacer es la suma en el registro simbólico-numérico; es un tratamiento dentro de un registro, no hay una conversión [I, M].

M17.1-3.2. Está reinterpretando, en los términos de nuestro sistema convencional, en términos más matemáticos, lo que han hecho los alumnos, haciendo ver que han desagrupado [E, 2].

- M17.1-3.2(I)1. Es una especie de institucionalización de lo que han hecho, o sea, de darle un carácter más oficial, siempre partiendo de la idea de que son ellos los que lo han hecho [I, M].

2M5.1-1.3. Explica que está traduciendo lo que los alumnos están diciendo, escribiéndolo en el registro de representación simbólico-numérico y haciendo ver que podría emplear otros registros: emplear una foto, por ejemplo [E, 2].

- 2M5.1-1.3(I)1. Se trata de una reflexión sobre la traducción que está haciendo basada en los registros de representación de Duval; si tuviera que expresar lo que están diciendo los alumnos tal y como lo han hecho, tendría que decir «3 rosas», etc., en vez de escribirlo simbólico-numéricamente [I, M].

2M2.1-3.2. Reinterpreta en términos matemáticos lo que han hecho los alumnos de forma guiada, haciendo ver que han desagrupado las centenas y las decenas [E, 3].

- 2M2.1-3.2(I)2. Dejar que los alumnos elaboren el procedimiento y finalmente dar los nombres es algo clásico en Teoría de Situaciones: se empieza actuando y al final se atribuyen los nombres por parte del docente [I, M].

2M7.1-1.2. *Hace ver que pueden rehacer otra vez los grupos hechos [E, 3].*

- 2M7.1-1.2(I)1. *Se trata de un ejemplo claro de negociación de la consigna: cuando no se dejan claros los objetivos en la consigna, es necesario negociarla; eso es lo que está ocurriendo ahora, momento en el que la actividad está ya comenzada [I, M].*

2M3.1-3.3. *Hace la suma en el registro simbólico-numérico con ayuda de los alumnos [E, 2].*

- 2M3.1-3.3(I)1. *Quiere que vean el paralelismo que existe entre un proceso, la representación en el ábaco japonés, y otro, el registro simbólico-numérico, plantando la suma sin llevadas para que el paralelismo sea más evidente [I, M].*

Además, podríamos decir que Marcos mejora en este tema en la fase 2 en tanto en cuanto aumenta el número de ocasiones en las que se apoya en teorías de didáctica de las matemáticas y explicita más sus denominaciones, así como porque también incluye en sus reflexiones alusiones a manuales de didáctica de las matemáticas o términos propios de la materia, como en estos ejemplos:

2M2.3-3.1. *Pide que representen las operaciones en el registro de representación tabular, que sería como un elemento intermediario entre el registro manipulativo y el simbólico, de la forma que los alumnos quieran, indicando que puede tener características simbólico-numéricas o características gráficas [E, 3].*

- 2M2.3-3.1(I)2. *En muchos manuales se plantea que las tablas pueden tener características simbólico-numéricas o gráficas [I, M].*

2M3.3-3.3. *Realiza un agrupamiento auxiliar, un cambio de 5 a 1, propio de este tipo de ábaco [E, 2].*

- 2M3.3-3.3(I)1. *El agrupamiento auxiliar permite no tener que contar; se trata de números visibles y se «subitizan» las cantidades sin necesidad de contar [I, M].*

En definitiva, Marcos es el formador que obviamente destaca en este tema, ya que la presencia de los demás es inexistente, lo que puede ser achacable a su formación, pues es el único que es doctor en didáctica de las matemáticas, así como a su experiencia ya no docente, sino investigativa, puesto que su trayectoria ha transcurrido principalmente por los cauces de la Teoría de Situaciones Didácticas. Así pues, en las entrevistas no se tratará de conocer cuáles son las causas de los resultados —pues parece que es obvio—, sino la importancia que el formador da a las teorías de didáctica de las matemáticas para poder interpretar mejor.

Alumnos de Magisterio como resolutores

Con respecto a este tema, hay que indicar que en muchas ocasiones se menciona a los alumnos de Magisterio en las interpretaciones formuladas por los formadores, pero se hace normalmente de manera auxiliar, es decir, no se sitúan en el foco de la interpretación en tanto en cuanto no se reflexiona sobre ellos, sino sobre otro tema —la tarea, el objetivo, el procedimiento—. Esto ocurre en la primera fase, por parte de Marcos y de Daniel, y en la segunda, por parte de los tres sujetos. No hay ejemplos de Raquel en la primera porque casi todas sus interpretaciones se encuadran en la categoría didáctica —en las que sí hace alusión a los alumnos de Magisterio de forma auxiliar—, enmarcándose el tema que ahora tratamos en el plano matemático. Así pues, algunos ejemplos al respecto son estos:

M21.1(i)-1.3. *Evento implícito en el comentario [E, 1].*

Transcripción: Muy bien, 7 grupos de 20 [señala al 3 y al 4].

- M21.1(i)-1.3(I)1. *Le ha gustado porque los alumnos han hecho un agrupamiento y ella lo que intenta hacer ver es que es muy cómodo trabajar con agrupamientos iguales [I, M].*

2M7.1-1.1. *Dice que piensen si los grupos que han hecho se ajustan a cómo se escribirían en nuestro sistema de numeración [E, 3].*

- 2M7.1-1.1(I)2. *Pretende que los alumnos hagan grupos de 10 o agrupamientos compatibles o con cierta coordinación con el sistema de numeración para que el conteo sea mucho más fácil; si hacen grupos de 17, puede funcionar, pero no para leer los números como los leemos [I, M].*

D4.1-1.3. *Está explorando la estrategia que han seguido los alumnos, viendo cómo de manejables son las agrupaciones que han hecho dos grupos de alumnos al juntarse para realizar la suma [E, 2].*

- D4.1-1.3(I)1. *Para tratar de que los alumnos se den cuenta de las ventajas que tiene hacer siempre grupos de 10 [I, M].*

2D4.1-1.1. *Presenta el objetivo de la actividad: entender la escritura de los números [E, 2].*

- 2D4.1-1.1(I)1. *Pretende que los alumnos entiendan que agrupar palillos es una estrategia que deben explorar [I, M].*

2R2.1-1.2. *Hace ver a los alumnos que en los grupos que han hecho no se aprecia matemáticamente el concepto de qué número de palillos hay, evitando decirles cómo solucionarlo [E, 1].*

- 2R2.1-1.2(I)1. *En la metodología matemática lo que se pretende es que sean los alumnos quienes a base de manipular alcancen el objetivo propuesto, tratando de razonarlo ellos mismos [I, M].*

Sin embargo, también es posible hallar casos en los que se posiciona al estudiante en el centro de la interpretación, como cuando se habla acerca de sus características desde un punto de vista que pone el foco en las bondades de sus capacidades, siendo Marcos el MTE que principalmente presenta ejemplos de este tipo —sobre todo en la fase 1—, como los que siguen:

M17.1-3.2. *Está reinterpretando, en los términos de nuestro sistema convencional, en términos más matemáticos, lo que han hecho los alumnos, haciendo ver que han desagrupado [E, 2].*

- M17.1-3.2(I)2. *Se ha hecho una simulación de manera acelerada de lo que sería una situación en una clase de primaria, donde el trabajo debería ser mucho más del alumno, pero aquí [en la facultad] no puedes reproducir exactamente las actividades de primaria porque estos no son niños de primaria, son maestros, tienen mucho más conocimiento y mucha más madurez [I, M].*

M31.1-3.3. *Está explicando la tabla que los alumnos tenían que haber hecho [E, 2].*

- M31.1-3.3(I)1. *Porque la consigna que dio al principio no contaba con suficientes indicaciones, lo cual didácticamente era correcto; por lo tanto, ahora ha tenido que proporcionar la tabla ella, lo cual es suficiente para que estos alumnos entiendan lo que se ha hecho [I, M].*

En cualquier caso, la gran mayoría de las interpretaciones que giran en torno a los alumnos de Magisterio como resolutores son aquellas que inciden en sus dificultades con los contenidos matemáticos, siendo formuladas en ambas fases esencialmente por Marcos y por Daniel, resultando características del segundo formador por la gran proporción que suponen respecto al total de sus interpretaciones y por el énfasis que pone al expresar las dificultades que indica. Algunos de los ejemplos que evidencian la situación descrita son los que se plasman a continuación:

M20.1-3.3. *Está remarcando a los alumnos las propiedades que están empleando: la conmutativa, la asociativa y la [distributiva] de la suma respecto del producto [E, 3].*

- M20.1-3.3(I)2. *Se trata de propiedades que son tan evidentes para los alumnos que ni se dan cuenta de que están ahí detrás [I, M].*

2M10.2-2. Recuerda, a partir de la escritura polinómica que tiene, lo que es una potencia, haciendo ver que 2^4 es $2 \times 2 \times 2 \times 2$, y el producto de potencias, haciendo ver que en $2^4 \times 2^0$ hay 4 doses y ninguno, es decir, 4 doses [E, 3].

- 2M10.2-2(I)1. Porque los alumnos no suelen estar acostumbrados a trabajar con escrituras polinómicas en función de un número [I, M].

D7.1-2. Sigue haciendo la cuenta, desarrollando la parte algebraica, intervinendo más que al principio del vídeo [E, 2].

- D7.1-2(I)2. La formadora puede que sea consciente de que muchos alumnos probablemente no están comprendiendo el desarrollo algebraico, pues seguramente les cuesta seguir esta parte algebraica, pero sigue con el ejercicio, ya que hay que acabarlo [I, M].

2D3.2-3.2. Hace ver que han desagrupado centenas en decenas y decenas en unidades para poder restar [E, 3].

- 2D3.2-3.2(I)1. A los alumnos les cuesta entender el ábaco, tienen dificultades para comprender el proceso de desagrupar y que las fichas tienen distintos significados según la posición en los palos [I, M].

En definitiva, comprobamos que la presencia de los alumnos de Magisterio como resolutores no es la misma en las interpretaciones de cada formador, ya que Marcos es el único formador que muestra cierto interés en las capacidades de los estudiantes — desde un enfoque favorable a estos —, además de abordar sus dificultades, Daniel se focaliza en esencia en las dificultades matemáticas de los discentes en ambas fases — siendo algo que podría caracterizar el conjunto de sus interpretaciones — y Raquel se ciñe básicamente a mentarlos de forma auxiliar y solo en la fase 2. A este respecto, las explicaciones sugeridas en cada fase por separado sobre estos resultados se tratan de corroborar en las entrevistas, a través de las cuales se ligarán los datos a la formación y a la experiencia de los MTE.

Alumnos de Magisterio como futuros maestros

Otro tema relativo a los alumnos de Magisterio es aquel en el que se los mira como futuros maestros. Supone un tema que es prácticamente anecdótico para los formadores en la primera fase, manifestándose básicamente en el caso de Marcos — apenas en media decena de veces —, mientras que en la segunda se trata de una constante para la maestra, apareciendo también en algunas interpretaciones de Marcos, como se puede apreciar en estos ejemplos:

M33.1-2. Dice que las reglas generales, si no se entienden, no valen, ya que está formando a maestros, haciendo ver que hay que saber cómo o por qué funciona la regla [E, 3].

- M33.1-2(I)1. Más allá de formar a maestros, es una consideración que tendría que estar en matemáticas en todos los órdenes, no solo en los maestros; en los maestros, desde luego, todavía más [I, M].

M25.1-3.3. Indica que ahora hay que agrupar [E, 2].

- M25.1-3.3(I)1. Trata de que los alumnos entiendan cómo funciona el sistema y también pretende que sepan cómo tratar esto luego en primaria; trata de justificar por qué lo hacemos así [la suma tradicional] [I, M].

2M12.2-2. Indica que los alumnos, como futuros maestros de matemáticas, tienen que entender el proceso [E, 3].

- 2M12.2-2(I)1. Se trata de una reflexión metamatemática que se basa en que el conocimiento que tienen que tener los maestros sobre las matemáticas debe ser distinto al simple uso o a una concepción meramente utilitarista, por lo que deben preocuparse de cómo se aprende [I, M].

2M10.2-3.3. Realiza por último otra tabla, indicando que se trata de un sistema tabular simbólico [E, 3].

- 2M10.2-3.3(I)2. Hay un intento de mostrar cómo funciona cada sistema para que el alumno tenga recursos para que luego, cuando vaya a clase, sepa qué tipo de sistema puede utilizar para que los alumnos de primaria construyan de manera satisfactoria los algoritmos clásicos de las operaciones [I, M].

2R4.1-1.1. Plantea como objetivo que los alumnos piensen cómo se escriben los números y cómo se agrupan [E, 2].

- 2R4.1-1.1(I)1. Con su metodología matemática pretende que los alumnos, cuando enseñen a los niños en primaria, aborden la escritura de los números de una manera inductiva, empleando una metodología manipulativa, para que los niños lleguen a comprender cómo se agrupan y cómo se escriben los números de una forma visual [E, M].

2R1.1(i)-3.1. Evento implícito en el comentario [E, 1].

Transcripción del vídeo: Tenéis que hacer las 4 operaciones..., representarlas de distintas maneras. [...] con material manipulativo...

- 2R1.1(i)-3.1(I)1. Pretende que los alumnos vean cómo trabajar la descomposición de los números con los niños pequeños [I, M].

- 2R1.1(i)-3.1(I)2. *Plantea una metodología basada en la gamificación y en el juego, que es como metodológicamente se enseña a los niños en matemáticas, para que los alumnos puedan transmitir el concepto de la suma a los niños [I, M].*

2R2.1-3.2. *Interactúa con los alumnos, preguntando si han agrupado o desagrupado, haciendo que verbalicen y que razonen [E, 3].*

- 2R2.1-3.2(I)2. *Ese vocabulario es muy normal en las aulas con los alumnos y es el que luego ellos van a tener que emplear en el aula [de primaria] [I, M].*

Así pues, podemos decir que en las interpretaciones de Marcos se advierte interés por este tema en ambas fases, siendo la aparición del mismo parecida en las dos, mientras que en las de Daniel su presencia es prácticamente inexistente. En cuanto a la maestra, es reseñable la evolución de la fase 1 a la fase 2, ya que en la primera casi no prestó atención al tema y en la segunda se centró en él de forma sistemática, aspecto sobre el que se tratará de buscar una explicación mediante las entrevistas. En cualquier caso, parece que, por un lado, la amplia experiencia como MTE de Marcos y, por otro, la experiencia como maestra de Raquel habrían podido favorecer la conexión establecida con la labor que los alumnos que estudian Magisterio desarrollarán en el aula como maestros.

Alumnos de Educación Primaria

El presente tema se trata mínimamente en las interpretaciones de los sujetos en la primera fase, apareciendo solamente en tres ocasiones en las interpretaciones de Marcos, pero de manera muy superficial, y una sola vez en el caso de Raquel, quien propone una reflexión centrada totalmente en el modo en el que aprenden los niños de primaria. En la segunda fase, Marcos mantiene su perfil bajo, compartido ahora con Daniel, y la maestra experimenta un cambio drástico al incluir en la práctica totalidad de sus interpretaciones una vinculación con los alumnos de primaria. Sirvan de ejemplo estas interpretaciones:

M20.1(i)-3.2. *Evento implícito en el comentario [E, 1].*

Transcripción del vídeo: Entonces, simbólico tienes que explicarlo conectado con esto.

- M20.1(i)-3.2(I)1. *Emplea el ábaco no solo como un elemento didáctico para usar con los niños [de primaria], sino para que los alumnos descubran realmente qué están haciendo cuando están restando [I, M].*

2M4.1-1.1. *Hace explícito el objetivo de la actividad: que los alumnos reflexionen o constaten cómo son las características de los sistemas de numeración [E, 2].*

- 2M4.1-1.1(I)1. Esto sí que es una diferencia entre una actividad hecha con alumnos [en la universidad] y una actividad hecha en primaria. En primaria, los niños se podrían enfrentar a este tipo de trabajo y no declararles cuál es el objetivo matemático que está detrás, sino simplemente ver si emergen las estrategias que justifiquen ese contenido [I, M].

2D12.1-3.3. *Pregunta a los alumnos cómo aprendieron a sumar cuando eran alumnos de primaria, haciendo ver que lo tradicional suele ser empezar por la fase final, con la suma en vertical [E, 3].*

- 2D12.1-3.3(I)1. Lo excepcional en España es usar material manipulativo, sobre todo cuando hablamos de alumnos de Magisterio, que estudiaron primaria hace más de 10 años [I, M].

R1.1-3.3. *Está explicando la correspondencia entre la estructura del material manipulativo y la representación simbólica [de la operación] [E, 2].*

- R1.1-3.3(I)1. Cuando los niños aprenden, como primero se utiliza muchísimo el material manipulativo, si la estructura del material manipulativo se corresponde con la forma simbólica, a los niños luego no les cuesta trabajo hacer esa transcripción [I, M].

2R3.1-3.1. *Indica a los alumnos que tienen que representar el proceso de la suma [E, 3].*

- 2R3.1-3.1(I)2. Los niños [de primaria] adquieren fenomenal el concepto de la suma de los números si ven el proceso, si lo descomponen; es por donde hay que empezar [I, M].

2R1.1-3.3. *Está trabajando el concepto de la suma visualmente, gráficamente [E, 2].*

- 2R1.1-3.3(I)1. Lo trabaja visualmente porque es así como hay que introducir la suma en el aula, sobre todo con los niños de infantil y de 1.º y 2.º de primaria, ya que para ellos el cálculo mental puede resultar difícil, pero visualmente van entendiendo la suma, los agrupamientos [I, M].

Se puede apreciar que Raquel formula las interpretaciones de un modo distinto al de Marcos y Daniel, dado que, si bien los tres se refieren a los estudiantes de primaria, la maestra lo hace plenamente desde el plano del aprendizaje, mientras que Marcos y Daniel verbalizan sus ideas desde un punto a caballo entre el aprendizaje y la enseñanza, lo que podría deberse a que Raquel conoce cómo aprenden los niños desde su experiencia como maestra y no, de manera exclusiva, desde teorías de enseñanza-aprendizaje del contenido matemático de primaria.

En definitiva, la evolución de cada formador en este tema es distinta, abordándose en las entrevistas los resultados obtenidos en cada fase para tratar de saber cuáles son las causas que han dado lugar a los mismos.

Contenido didáctico

Con relación al último tema establecido en el eje 4, el cual se ocupa de la didáctica general, hay que decir que en la primera fase tiene presencia en las interpretaciones de los tres formadores, siendo esta acusada en el caso de Daniel y muy acusada para la maestra. En la segunda fase, las de Daniel y Raquel pasan a ser casi inexistentes y las de Marcos se reducen, pero las que propone son interesantes por cómo las formula, haciendo alusión a la mayéutica socrática o al aprendizaje significativo de David Ausubel.

En este caso, dada la exigua presencia de interpretaciones relativas a este tema en la segunda fase, no resulta relevante proponer ejemplos de los eventos formulados, dado que lo interesante sería poder observar diferencias en la redacción si en ambos momentos hubiera suficientes ejemplos. No obstante, sí cabe decir que en este tema la inducción de las instrucciones de la fase 2 parece haber surtido un gran efecto, sobre todo en la maestra, quien pasa de centrar casi todas sus interpretaciones en el contenido didáctico a centrarse prácticamente por completo en el plano matemático.

En resumen, en este eje 4 se han detectado diferencias significativas entre los tres MTE. Por un lado, Marcos es el único sujeto que en ambas fases formula interpretaciones sobre los nueve temas relativos a las matemáticas —aunque en la segunda fase disminuye la cantidad de aquellas sobre procedimientos—, siendo mínimas las referidas al contenido didáctico en la fase 2 —como se pretendía con las instrucciones dadas—. Además, mejora significativamente de una a otra fase, pues aporta explicaciones y reflexiones todavía más detalladas y profundas, principalmente en los temas sobre contenido matemático, tareas, objetivos, materiales y teorías de didáctica de las matemáticas. En general, los temas sobre los alumnos cuentan con menos interpretaciones que los demás temas matemáticos, pero también les da importancia en sus comentarios. Por tanto, parece obvio que su formación en didáctica de las matemáticas, su amplia experiencia como formador y el paradigma de investigación desde el que trabaja han podido tener un peso relevante en sus resultados desde un punto de vista cualitativo, resultados que concuerdan con los altos niveles que logra desde un plano cuantitativo. Por otro lado, Daniel también evoluciona de una fase

a la siguiente, aunque su desempeño no es tan integral como el de Marcos. En la primera, de los nueve temas matemáticos básicamente aborda aquellos acerca de los objetivos y de los alumnos de Magisterio como resolutores, centrando su atención en este último en las dificultades que tienen con el contenido matemático. Su evolución en la segunda fase se ve reflejada en la mínima conexión que establece entre las interpretaciones relativas a los objetivos y los contenidos matemáticos, así como en la notable reducción de los ejemplos sobre el tema de contenido didáctico, pero no es posible afirmar que preste atención a los demás temas matemáticos, resultando especialmente llamativo que no reflexione acerca del contenido matemático *per se*, dada su formación. Lo más particular de este formador, que se da en ambas fases, es el interés que muestra por los alumnos de Magisterio como resolutores, específicamente por sus dificultades con las matemáticas, asunto que abarca el grueso de sus interpretaciones. Por tanto, podríamos pensar que su extensa formación matemática ha podido suponer, paradójicamente, una desventaja para este formador a la hora de interpretar los eventos detectados, pues podría haberle hecho eludir los aspectos matemáticos por considerarlos obvios. Asimismo, que propenda a fijarse en las distintas dificultades de los alumnos podría estar motivado por su experiencia docente en estudios de ingeniería, donde el nivel matemático que se exige a los estudiantes es mayor que en el grado de Magisterio, y su falta de formación en didáctica de las matemáticas podría ser la razón por la que no se centra en temas como los relativos a la tarea o a los alumnos de primaria. Por último, Raquel también experimenta una evolución entre fases, puesto que en la primera la amplísima mayoría de sus interpretaciones ponen el foco en el contenido didáctico general y en la segunda es capaz de dejarlo a un lado y abordar los temas sobre los objetivos, los procedimientos y los estudiantes, siendo especialmente relevante en la fase 2 la vinculación constante que en sus interpretaciones establece con los alumnos de Magisterio como futuros maestros y con los alumnos de primaria. Sin embargo, llama la atención que no aporte en ninguna fase reflexiones acerca de los demás temas, sobre todo de la tarea y de los materiales, dada su formación y experiencia como maestra. Por tanto, podemos decir que lo más sobresaliente de la mejora de Raquel es la conexión que en la segunda fase realiza entre los eventos que detecta y lo que sucede en el aula de primaria, prestando atención tanto a la práctica de los futuros maestros como al aprendizaje de los niños de primaria, aspecto que queremos resaltar por la importancia que tiene, sobre todo habida cuenta de la labor de los participantes de la investigación, o sea, enseñar a enseñar matemáticas precisamente a futuros maestros de Educación Primaria. La razón por la que

en la primera fase Raquel no establece ningún nexo en sus interpretaciones con el aula de primaria se trata de averiguar mediante las entrevistas. Finalmente, cabe señalar que, en general, las interpretaciones analizadas en el eje 4 de los tres sujetos son comentarios que suelen incluir aspectos que solo un formador tendría en cuenta al reflexionar acerca de los vídeos propuestos, pues su experiencia docente como MTE, ya sea alta o baja, hace que se preocupen por elementos propios de su quehacer cotidiano enseñando a enseñar.

Tras haber desarrollado desde un enfoque cualitativo el análisis de la información centrado en la evolución de la primera a la segunda fase — y previamente sobre cada fase de forma separada — en los cuatro ejes, abordamos a continuación el contenido obtenido mediante las entrevistas a Marcos, Daniel y Raquel, es decir, pasamos a la fase 3.

4.2.4. Fase 3. Entrevistas

En esta fase se pretende obtener más información sobre los tres formadores cuyos resultados se han examinado en el bloque cualitativo — habida cuenta de las disparidades detectadas entre ellos en el bloque cuantitativo, así como por las diferencias existentes en sus perfiles profesionales, o sea, en su formación académica y en su experiencia docente — con el fin de arrojar luz sobre distintos aspectos de sus resultados y tratar de ratificar las explicaciones que sobre ellos se han dado a lo largo de las páginas anteriores con relación a las variables de formación y experiencia, las cuales parecen haber tenido una incidencia relevante en la competencia *noticing* de los formadores.

Cabe recordar que no se adjunta el contenido de las entrevistas como anexos, pues consideramos que plasmar ahora la información más importante recabada mediante esta vía es suficiente para dar a conocer al lector los aportes concretos que son de utilidad y de interés para alcanzar el propósito perseguido con este instrumento. Asimismo, es preciso mencionar que el apartado sobre las entrevistas se plantea contenido en el bloque relativo al análisis cualitativo porque solamente se centra en los tres MTE que se han seleccionado para dicho bloque. No obstante, en las cuestiones planteadas a los formadores también se abordan aspectos relativos a los datos de la sección cuantitativa, de tal manera que en las entrevistas se pregunta por asuntos de los cuatro ejes de la parte cuantitativa y, en cuanto a la cualitativa, específicamente por el eje 4, aquel que más nos interesa en el estudio.

Así pues, en las siguientes páginas se aporta la información más significativa que se ha recogido a través de las entrevistas — realizadas individualmente a cada docente —, organizándola en tres apartados, uno por cada MTE.

Entrevista a Marcos

Con respecto al eje 1, uno de los aspectos que más llama la atención es que Marcos es capaz de detectar el 82 % de los *call-outs* en la fase de *noticing* espontáneo — situándose en el nivel 5 sin haber recibido ningún tipo de inducción —, valor que, además de ser muy alto, dista mucho del de los demás participantes. Marcos opina que esto se puede deber a su extensa experiencia como formador, durante la cual ha trabajado en muchas ocasiones analizando vídeos en clase sobre situaciones de enseñanza-aprendizaje. Además, cree que su formación y conocimiento en didáctica de las matemáticas tiene mucho que ver con su resultado, pues su tesis doctoral se basa en el análisis de situaciones de enseñanza creadas para desarrollar diferentes fenómenos. Al tener que diseñar una situación de enseñanza, crea una plantilla en la que se establecen ciertos aspectos que pueden darse en la situación en cuestión, lo que le ha hecho desarrollar una manera particular de observar una práctica de enseñanza dada y aprender a prever lo que puede suceder en una situación, lo que le ha ayudado a examinar la práctica de enseñanza de la formadora de los vídeos. Por tanto, cree que su trayectoria profesional, o sea, su formación y su experiencia, es la responsable de que haya identificado un número tan alto de eventos relevantes.

Asimismo, se le preguntó por el hecho de que fuera el único sujeto que no mejora en el eje 1 de una fase a otra. A este respecto, explica que, dado el alto valor logrado en la primera fase, era difícil evolucionar en la segunda, no siendo la variación experimentada muy grande, pues se ubica en la segunda mitad del nivel 4 en un segundo momento.

En cuanto al eje 2, en la primera fase la presencia de los tres niveles — 1, 2 y 3 — es casi la misma, respectivamente, mientras que en la segunda la aparición del nivel 1 sufre una disminución importante y aumenta notablemente la del nivel 3, es decir, se explicitan de un modo más preciso los aspectos importantes de los *call-outs* notados. Al preguntar a Marcos si opina que este hecho se puede deber principalmente a la escasa inducción que se proporcionó en las instrucciones de la fase 2, este explica que él considera que la mejora puede tener que ver más con haber visto los mismos vídeos en las dos fases, aunque entre ambas hubiera transcurrido aproximadamente un año, que con las instrucciones. Piensa

que él, al examinar un vídeo de una clase de matemáticas, pone el foco esencialmente en los aspectos didáctico-matemáticos aunque no se le indique, por lo que el hecho de haber sido más preciso al explicitar los eventos relevantes en la segunda fase probablemente se deberá a recordar parte del contenido de los vídeos. No obstante, expresa que es probable que las instrucciones, al igual que otras variables, hayan tenido que ver en la mejora.

En lo referido al eje 3, en ambas fases mantiene la misma propensión a interpretar matemáticamente los *call-outs* que detecta. Tanto sin inducción como con ella, formula al menos una interpretación matemática en el 69 % de los eventos que explicita. Al preguntar a Marcos por el hecho de haber alcanzado desde la primera fase un nivel tan alto, que se corresponde con el nivel 4, este declara que las teorías de la didáctica de las matemáticas proporcionan una serie de herramientas que permiten interpretar los eventos relativos a una situación de enseñanza-aprendizaje para poder mejorarla. En particular, dice que el paradigma de investigación en el que principalmente él se apoya, la Teoría de Situaciones Didácticas, es de los que más herramientas dispone para explicar distintas situaciones de enseñanza. Por tanto, achaca a su formación en didáctica de las matemáticas, así como a su experiencia investigativa, los buenos datos de este eje.

Por otro lado, es llamativa la diferencia entre sus resultados y los del resto de MTE del trabajo, circunstancia que Marcos atribuye de nuevo al paradigma de investigación en el que se basa. Si bien hace ver que no es conocedor del perfil de los demás sujetos y, por ende, de las teorías en las que se apoyan, apunta que las teorías francesas se caracterizan por prestar mucha atención al análisis de situaciones de enseñanza, mientras que, quizá, las nuevas tendencias didáctico-matemáticas transitan por otros caminos.

En cuanto al eje 4, los valores que alcanza son prácticamente los mismos en ambas fases, rozando casi el límite superior del nivel 5 y situándose de nuevo a gran distancia de los demás sujetos. A este respecto, Marcos esgrime de nuevo los argumentos ofrecidos en relación con el eje 3, es decir, entiende que su formación en didáctica de las matemáticas, concretamente en la Teoría de Situaciones Didácticas, le confiere unos instrumentos que le posibilitan interpretar los eventos que identifica. Asimismo, piensa que ser el MTE con más años de experiencia como tal —lo cual se le confirma en la conversación— constituye otro factor que le permite interpretar más aquello que detecta en los vídeos, ya que se ha enfrentado en muchas ocasiones a distintas situaciones de enseñanza.

En lo que respecta al bloque cualitativo, concretamente al eje 4 —*cómo interpreta el MTE*—, se preguntó al formador acerca de los asuntos más relevantes sobre los temas que había incluido en sus interpretaciones.

En cuanto al tema relativo al contenido matemático, Marcos es el único sujeto que reflexiona en torno a las matemáticas en sí mismas, sin establecer conexiones con aspectos de la enseñanza o del aprendizaje, tanto en la fase 1 como en la fase 2. Al preguntarle por qué opina que se ocupa de este tema en sus interpretaciones, echa mano del conocimiento especializado, mencionando el MTSK —modelo sobre el conocimiento especializado del profesor de matemáticas desarrollado por autores como J. Carrillo o L. C. Contreras, antes citado en los capítulos 2 y 3—. Expresa que las matemáticas que manejan los formadores se corresponden con un conocimiento que no se aprende en la Facultad de Matemáticas, ya que en dicho contexto el objeto de aprendizaje no es el mismo que en primaria, por lo que es necesario aproximarse a las matemáticas de una manera diferente, aunque siguen siendo matemáticas. Añade que tiene la costumbre de justificar el contenido matemático, lo cual es capaz de hacerlo por ser matemático, pero que para tender a hacerlo es también necesario haber adquirido o desarrollado un conocimiento especializado para enseñar las matemáticas que se estudian primaria y para enseñar a enseñarlas.

También se le preguntó por los temas sobre tareas y objetivos, planteando por qué cree que aporta tantas interpretaciones acerca de ellos y, además, ligando las reflexiones al contenido matemático. A esto, Marcos responde que se debe a trabajar con la Teoría de Situaciones Didácticas. Explica que al diseñar una situación es necesario saber cuál es el objetivo que se persigue y cómo se va a plantear la tarea para que el alumno logre por sí mismo el objetivo, así como que todo ello tiene que estar justificado por un conocimiento matemático que se busca que aprenda el estudiante. Por tanto, explica este hecho con su formación y su experiencia investigativa.

En relación con el tema de los materiales, sobre el cual es el único MTE que aporta interpretaciones, en ambas fases, se le preguntó por qué le otorga tanta importancia como para tratarlo en sus interpretaciones. Su explicación es que reflexiona sobre los materiales por su larga experiencia como formador. Manifiesta que los materiales son herramientas para que los alumnos adquieran contenidos matemáticos y, por ende, los MTE tienen que conocer qué materiales existen y saber tomar decisiones sobre su uso, teniendo en cuenta que algunos están diseñados con un fin didáctico-matemático y otros están pensados para

obtener resultados, pero se incorporan al aula para lograr ciertos objetivos. Así pues, dice que la experiencia es la variable más importante para conocer los materiales, más que una teoría de didáctica de las matemáticas concreta.

Por otra parte, uno de los temas que aborda Marcos en sus interpretaciones, y que es característico de este formador, es el de las teorías de didáctica de las matemáticas. Se trata del único sujeto que se apoya en ellas para fundamentar sus reflexiones, hecho que se explica por ser el único de los tres que trabaja desde un paradigma de investigación en su labor como docente e investigador. Por ello, se le preguntó si tener conocimiento sobre teorías de didáctica de las matemáticas ayuda a interpretar los eventos detectados acerca de la formadora de los vídeos —si bien en respuestas previas ya ha introducido elementos al respecto—. Su respuesta es que, sin lugar a dudas, es importante conocerlas. Dice que para poder trabajar en didáctica de las matemáticas hay que saber psicología, pedagogía, matemáticas, etcétera, pero un conocimiento por separado de estas disciplinas no permite trabajar en didáctica de las matemáticas, es necesario disponer de unas herramientas y de unos objetivos propios, lo cual viene dado por las teorías de didáctica de las matemáticas, que generan un corpus propio para poder aproximarse mejor a la enseñanza de cómo se enseñan y se aprenden las matemáticas. Por lo tanto, sirven sobre todo a los MTE, aunque también pueden servir en cierto modo a los propios maestros. Y —como ya se ha dicho— la Teoría de Situaciones Didácticas, en especial, ofrece unas excelentes herramientas para interpretar situaciones de aula. Por tanto, Marcos piensa que es absolutamente relevante conocer teorías de didáctica de las matemáticas no solo para interpretar eventos —y, por consiguiente, favorecer el desarrollo de cierta parte del *noticing*—, sino para trabajar en el contexto de la didáctica de las matemáticas, de enseñar a enseñar matemáticas.

Sobre este mismo asunto, se le preguntó por un hecho que en sus resultados llama la atención, que es que no alude a teorías de didáctica de las matemáticas en relación con el vídeo 2, ni en la primera ni en la segunda fase. A este respecto, comenta que quizá sea por el tipo de tarea de dicho vídeo, puesto que se trata de un trabajo matemático que no tiene *a priori* una correspondencia directa con una tarea propia de primaria y la Teoría de Situaciones Didácticas se centra mucho en las actividades de aula.

Por último, se planteó a Marcos alguna cuestión relativa al tema de los estudiantes, tanto de Magisterio, como resolutores o como futuros maestros, como de primaria. En este sentido, se le hizo ver que, si bien incluye tales temas en sus interpretaciones, la incidencia

de estos es mucho menor que la de todos los vistos previamente. Su opinión es la de que, si los alumnos del vídeo hubieran sido niños de primaria, y no estudiantes de Magisterio, se habría inclinado más a incluir aspectos sobre sus características de aprendizaje. Aunque sí trata ciertas dificultades de aprendizaje de los alumnos de Magisterio como resolutores en sus comentarios, no se detiene en sus características de aprendizaje — tampoco en ellos como futuros maestros — ni en la de los discentes de primaria porque está acostumbrado a analizar vídeos en los que el profesor es un maestro, no un formador, y los alumnos son niños de primaria, no estudiantes de Magisterio. Esta es la razón que da para explicar tal circunstancia acontecida en sus comentarios.

Cabe señalar, finalmente, que este MTE ha indicado, por un lado, que el contenido de las grabaciones — centrado en el número natural y sus operaciones y en su didáctica — no ha repercutido en sus resultados, por lo que podrían haber sido otros los contenidos y haber tenido, en principio, el mismo desempeño, y, por otro, que haber realizado a través de videollamada la segunda reunión — por motivos de fuerza mayor — no cree que haya afectado tampoco a sus resultados.

En definitiva, las aportaciones hechas por Marcos en las entrevistas vienen a dotar de validez las distintas explicaciones que hemos hecho a lo largo del trabajo acerca de los resultados obtenidos por este formador. Así pues, se ha visto que su amplia formación en didáctica de las matemáticas y su extensa experiencia como MTE han podido influir en su competencia *noticing*, o sea, en qué y cómo nota e interpreta la práctica de enseñanza que se le ha propuesto por medio de las grabaciones de vídeo. Asimismo, se ha revelado como un elemento crucial el paradigma de investigación en el que se sitúa este formador, sobre todo en lo concerniente al plano de las interpretaciones, siendo los ejes 3 y 4 en los que ha despuntado más en comparación con el resto de participantes. Igualmente, merece la pena mencionar la importancia que ha dado Marcos a tener experiencia examinando vídeos de situaciones de aula para haber obtenido unos resultados tan buenos, así como haber visto los mismos vídeos en las dos fases para poder haber mejorado en la segunda. Este último hecho, a la hora de diseñar la investigación no creímos que fuera a influir demasiado, ya que entre las fases transcurre bastante tiempo como para recordar los pormenores de los vídeos, por lo que es algo a tener en cuenta en estudios posteriores. No obstante, el sujeto también achaca a la inducción de las segundas instrucciones cierto peso en su evolución, lo que se refleja en la disminución de aspectos de didáctica general en la segunda fase.

Entrevista a Daniel

Con respecto al eje 1, en la primera fase este MTE identifica menos de la mitad de los *call-outs* establecidos, quedándose en un 45 %. Al preguntarle por este dato, el docente explica que seguramente su falta de experiencia analizando situaciones de clase en vídeo sea la causa principal por la que no consiguió detectar más eventos relevantes, ya que era la primera vez que se enfrentaba a dicha tarea en su trayectoria como formador.

Asimismo, es muy significativa su evolución de una fase a otra, consiguiendo en la segunda detectar el 74 % de los *call-outs*. Daniel piensa que dicha mejora puede deberse a varios factores: por un lado, a la inducción provista en las segundas instrucciones y, por otro, al hecho de que los vídeos de la fase 2 fueran los mismos que los de la fase 1. Explica que, aunque hubiera pasado alrededor de un año entre fases, recordaba algunos aspectos de los vídeos. Además, dice que la segunda vez que examinó las grabaciones contaba con más experiencia analizando vídeos, pues, además de haberlo hecho en la primera fase, en otros contextos académicos había tenido después la oportunidad de analizar otros vídeos centrados en diversas prácticas de enseñanza, siendo esta última variable — la experiencia examinando vídeos — la que considera más importante en cuanto a su evolución.

En lo referido al eje 2, los resultados de Daniel son sorprendentes debido a la gran mejora que experimenta de la primera a la segunda fase, así como por el alto valor logrado en la segunda, siendo el único sujeto que se posiciona en el nivel 5. Al preguntarle por la influencia de la inducción de las instrucciones en su evolución, menciona que esta puede haber influido en sus resultados, pero que sobre todo, en este eje, la circunstancia de que los vídeos hayan sido los mismos en ambas fases le ha permitido ser más preciso en una segunda ocasión a la hora de explicitar los aspectos didáctico-matemáticos de los eventos. Cree que él se inclina a poner el foco en los detalles matemáticos o didáctico-matemáticos sin necesidad de que se le indique y que su mejora, por lo tanto, se debe posiblemente a haber reflexionado acerca de los vídeos tras realizar la primera fase.

Por otro lado, que su desempeño sea el mejor en la fase 2 lo achaca principalmente a su tendencia natural, por su forma de ser, a pensar mucho sobre las cuestiones que se le presentan. Opina que también tener una formación matemática amplia y una experiencia docente en distintos contextos educativos te puede dotar de más herramientas para poder analizar mejor una situación, pero se inclina más a pensar que, en su caso, su manera de

ser y haber reflexionado sobre los vídeos después de la primera fase son los factores que más repercusión pueden haber tenido en sus resultados.

En cuanto al eje 3, se explicó al sujeto que su nivel en ambas fases es medio-bajo y que empeora de una fase a otra, pasando de interpretar matemáticamente el 37 % de los eventos relevantes detectados a un 27 %. Ante dichos datos, Daniel se queda sorprendido y, en un primer momento, piensa que quizá no entendió bien las instrucciones, lo que se le pedía que hiciera al analizar los vídeos. No obstante, no creemos que este fuera el caso, ya que al explicar las instrucciones en cada fase, además de dedicar bastante tiempo, nos aseguramos de que se entendiera lo que se pedía, tanto es así que en las instrucciones de la primera fase, tal y como comentamos en el capítulo 3, se propusieron distintos ejemplos de comentarios para entender qué es explicitar un evento y qué es dar una interpretación y se llevó a cabo una especie de simulacro para cerciorarnos de que los MTE entendieran realmente lo que se les pedía. En cualquier caso, durante el diálogo en la entrevista sobre este eje, Daniel termina por señalar que quizá la confluencia de tres elementos pudo haber dado lugar a sus resultados, a saber: su reducida tendencia a interpretar en comparación con tratar de exponer ciertos aspectos en una situación de enseñanza —dejando que otros aporten las interpretaciones—, su limitada experiencia interpretando sucesos a través del uso de vídeos y, sobre todo, haber podido omitir las interpretaciones por considerar que su contenido podría resultar obvio. Consecuentemente, parece que su falta de experiencia trabajando con vídeos y, paradójicamente, su vasta formación matemática podrían haber sido las razones para obtener datos tan bajos en este eje.

En lo que respecta al eje 4, mejora de una fase a otra en cuanto a la proporción de interpretaciones matemáticas referidas a *call-outs* con respecto al total de interpretaciones sobre ellos, pero empeora en cuanto al número medio de interpretaciones [M] por *call-out* identificado, lo que da lugar a un nivel similar en ambas fases, posicionándose en el límite inferior del nivel 4. En relación con la primera variable, Daniel comunica que su tendencia natural es la de fijarse en los aspectos matemáticos o didáctico-matemáticos, por lo que la mejora puede deberse parcialmente a las instrucciones. Y con relación a la segunda, cree que puede deberse a lo explicado en el eje precedente.

En lo que respecta al bloque cualitativo, concretamente al eje 4 —*cómo interpreta el MTE*—, se preguntó al formador acerca de los asuntos más relevantes sobre los temas que había incluido o no en sus interpretaciones.

En cuanto al tema relativo al contenido matemático, así como a los que se centran en aspectos matemáticos desde el plano de la enseñanza — tarea, objetivo, procedimiento y material —, se le expuso que, en esencia, incluye en sus interpretaciones consideraciones sobre los objetivos, aunque sin ligarlos casi con el contenido matemático, dejando de lado los otros temas. Asimismo, se le mostraron algunos ejemplos de Marcos sobre estos temas para que pudiera ver a qué nos referíamos con cada uno de ellos. A tenor de todo esto, lo que manifiesta Daniel es que ahora le queda claro que no se refirió a dichos temas por no considerarlo necesario. Menciona que le parece evidente, por ejemplo, el funcionamiento de los bloques multibase o de un ábaco, que los elementos matemáticos de lo que detecta son obvios y, por tanto, no reflexiona sobre ellos en ninguna fase por no haberlo estimado preciso para comprender los eventos explicitados. A este respecto, se le preguntó si quizá su mayor formación matemática — al ser el único doctor en matemáticas de los tres MTE a los que se entrevistó — le habría hecho mantener esa postura. Sobre esto, Daniel expone que cualquier formador de matemáticas y su didáctica debería ser capaz de identificar los elementos matemáticos presentes en los vídeos propuestos, por lo que, una vez más, debe de ser su inclinación a no interpretar lo que le hizo no adentrarse en dichos temas.

Con respecto a las teorías de didáctica de las matemáticas, el formador explica que no cuenta con formación en didáctica de las matemáticas, que ha leído sobre ciertos temas al respecto, así como acerca de la didáctica general, pero que su formación no se sustenta en dichos pilares, sino en las propias matemáticas. Por eso, no fundamenta sus reflexiones basándose en ninguna teoría de didáctica de las matemáticas en ninguna de las fases.

Por último, en cuanto a los temas sobre los discentes, Daniel se interesa sobre todo por las dificultades de los alumnos de Magisterio como resolutores, cuestión que acapara la mayoría de sus interpretaciones. Al preguntarle acerca de este asunto, el sujeto explica que podría deberse a dos razones: por un lado, a la asignatura que ha impartido siempre como formador y, por otro, a su experiencia docente previa. En cuanto a la primera, dice que en los estudios de Magisterio en los cuales ha impartido clase las matemáticas se dan en unas asignaturas y la didáctica de las matemáticas se da en otra, habiéndose encargado él siempre de la parte matemática y no de su didáctica. Por eso, ha puesto su atención en conocer cuáles son las dificultades que sus alumnos tienen con el contenido matemático. En cuanto a la segunda, Daniel ha trabajado muchos años como profesor universitario de matemáticas en diferentes ingenierías y, a este respecto, expone dos consideraciones: por

una parte, que el nivel matemático abordado en dichos estudios es superior al que se trata en Magisterio y, por otra, que la relación con los alumnos en tal contexto difiere de la que tiene con los futuros maestros, pues con los primeros la comunicación es principalmente unidireccional –clase magistral–, lo que obstaculiza conocer sus dificultades, y con los segundos existe una comunicación bidireccional, pues se trata de alumnos que preguntan más en clase, poniendo al descubierto sus dudas. Por todo ello, Daniel piensa que en las interpretaciones sobre la práctica de enseñanza de la formadora de los vídeos ha prestado tanta atención a las diversas dificultades que tienen los estudiantes de Magisterio con las matemáticas, o sea, a sus obstáculos como resolutores.

Asimismo, en relación con los alumnos de Magisterio como futuros maestros y los alumnos de primaria, dice que la práctica ausencia de tales temas en sus interpretaciones se puede deber, de nuevo, a lo explicado con relación a su experiencia docente y conviene en que no contar con experiencia como maestro de primaria hace que se propenda menos a establecer conexiones entre los eventos detectados y el aula de primaria. Por lo tanto, se pone de manifiesto la importancia de la experiencia docente a la hora de reflexionar sobre la práctica de enseñanza de la formadora en vinculación con los estudiantes.

Cabe señalar, finalmente, que este MTE ha indicado, por un lado, que el contenido de las grabaciones –centrado en el número natural y sus operaciones y en su didáctica– no ha repercutido en sus resultados, por lo que podrían haber sido otros los contenidos y haber tenido, en principio, el mismo desempeño, y, por otro, que haber realizado a través de videollamada la segunda reunión –por motivos de fuerza mayor– no cree que haya afectado tampoco a sus resultados.

En definitiva, las aportaciones hechas por Daniel en las entrevistas vienen a dotar de validez las distintas explicaciones que hemos dado a lo largo del trabajo acerca de los resultados obtenidos por este formador. Así pues, se ha visto que su amplia formación en matemáticas, así como sus carencias relativas a la didáctica de las matemáticas, y sus años de experiencia como MTE y como profesor en otros contextos universitarios han podido influir en su competencia *noticing*, es decir, en qué y cómo nota e interpreta la práctica de enseñanza que se le ha propuesto por medio de las grabaciones de vídeo, revelándose su mayor dificultad en el plano de las interpretaciones. Igualmente, merece la pena subrayar la importancia que Daniel ha dado a la experiencia examinando vídeos de situaciones de aula, así como a analizar los mismos vídeos en las dos fases, para poder alcanzar un buen

nivel de *noticing* y poder evolucionar, aspectos en los que coincide con Marcos. Con todo, también atribuye a la inducción provista en las instrucciones cierta relevancia en el hecho de haber podido progresar de una a otra fase.

Entrevista a Raquel

En lo que respecta a los ejes 1 y 2, relativos a los eventos, los resultados alcanzados por Raquel se corresponden con el nivel 1 en la primera fase y con el nivel 2 en la segunda en ambos casos, experimentando, por lo tanto, una mejora de una a otra fase, aunque muy reducida. Al preguntarle si la inducción le sirvió para evolucionar, la maestra piensa que sí, aunque dice que quizá tuvo más peso el hecho de que en las dos fases se visionaran los mismos vídeos, ya que tras finalizar la fase 1 siguió pensando sobre su contenido, lo que le permitió analizarlos mejor en la fase 2, aunque hubiera transcurrido en torno a un año. Además, cree que los resultados de la primera fase son más bajos porque, a lo mejor, los nervios le jugaron una mala pasada, puesto que era la primera vez que participaba en un estudio de estas características y no sabía qué se esperaba de ella. Por otro lado, en cuanto a que los resultados fueran bajos en ambos momentos, a pesar de mejorar, opina que tuvo mucho que ver la falta de experiencia analizando situaciones de aula en vídeo, ya que se trataba de la primera vez que lo hacía. Asimismo, recalca que parte del contenido de las grabaciones, principalmente los desarrollos matemáticos planteados en la pizarra –en el vídeo 2 y en los últimos fragmentos de los vídeos 1 y 3–, no le llamó mucho la atención por no haber encontrado una vinculación directa con su experiencia docente en el aula de primaria ni con su formación como maestra. Así pues, todas estas circunstancias, que, en general, giran alrededor de las variables de formación y de experiencia, son las causantes del desempeño de la formadora en los dos primeros ejes.

En relación con los ejes 3 y 4, relativos a las interpretaciones, Raquel evoluciona de la parte superior del nivel 1 a la inferior del nivel 3 –en el eje 3– y del límite inferior del nivel 2 a la parte superior del nivel 4 –en el eje 4–. Así pues, los niveles alcanzados en la primera fase son bajos, como en los ejes sobre eventos, pero la mejora que experimenta es mayor en los ejes sobre interpretaciones. A este respecto, las explicaciones que aporta la maestra son las mismas que las dadas anteriormente, es decir, opina que la evolución se debe a las instrucciones y, en mayor medida, a haber visionado los mismos vídeos en las dos fases, así como a los nervios de la primera ocasión, y piensa que los bajos resultados, cuando se dan, se justifican por su falta de experiencia examinando vídeos y por algunos

de los contenidos presentes en ellos que no considera que guarden mucha relación con la experiencia que ella posee impartiendo clase en primaria ni con su formación académica como maestra.

Cabe señalar que la información sobre los cuatro ejes, con relación a los resultados desde un punto de vista cuantitativo, se ha presentado de manera agrupada en el caso de la maestra por utilizar los mismos argumentos para explicar los datos en cada par de ejes. De hecho, básicamente se basa en los mismos en los cuatro ejes y no arguye otras razones ni profundiza en ellas más allá de lo planteado.

En lo que respecta al bloque cualitativo, concretamente al eje 4 —*cómo interpreta la MTE*—, se preguntó a la formadora acerca de los asuntos más relevantes sobre los temas que había incluido o no en sus interpretaciones.

Con relación al tema acerca del contenido matemático, la maestra no lo incluye en ninguna de sus interpretaciones sobre los eventos relevantes que detecta. Al preguntarle por los motivos, apunta que dicha circunstancia se debe a su formación como maestra y aduce que este tipo de reflexiones son propias de los matemáticos.

En cuanto a los temas que se centran en aspectos matemáticos desde el plano de la enseñanza —tarea, objetivo, procedimiento y material—, Raquel no reflexiona en ninguna fase en torno a las tareas o los materiales y lo hace superficialmente sobre los objetivos en la segunda fase. Sobre este particular, dice que probablemente entendió que los aspectos relativos a esos temas eran evidentes y por eso no los presentó en sus interpretaciones. Y en lo que se refiere a los procedimientos, llama mucho la atención el empleo que hace de algunas denominaciones, como, por ejemplo, «metodología matemática», «metodología manipulativa» o «metodología basada en el juego». En este sentido, explica que para ella la metodología que se ha de utilizar en el aula de primaria para enseñar matemáticas a los niños debe basarse tanto en la manipulación como en el juego, motivo por el que las tres denominaciones anteriores las considera sinónimas.

Con relación a las teorías de didáctica de las matemáticas, no se le planteó ninguna cuestión, pues entendemos que, al no haberse adentrado en el mundo de la investigación en didáctica de las matemáticas, no se sitúa en ningún paradigma de investigación y, por lo tanto, no se basa en ninguna teoría a la hora de explicar los eventos detectados.

En último lugar, en cuanto a los temas acerca de los alumnos, hallamos el aspecto más llamativo de los resultados de Raquel, el cual no es sino la ausencia total de conexión en sus interpretaciones con el aula de primaria en la fase 1 y, por el contrario, la constante vinculación con el aula de primaria en la fase 2. Al preguntarle sobre este asunto, explica que probablemente la primera vez que examinó los vídeos se fijó más en la formadora y se olvidó de ligar sus acciones con el aula de primaria, seguramente por los nervios de ser la primera vez que se enfrentaba a analizar situaciones de aula en vídeo. Sin embargo, ya en la segunda fase tenía mucho más claro lo que se le pedía y, al sentirse menos cohibida y más relajada, pudo conectar lo detectado con su práctica docente en primaria. Además, indica que haberse centrado en un segundo momento en los aspectos relativos al aula de primaria — tanto en los niños como en los futuros maestros — se explica, sin duda, por su formación y su experiencia como maestra.

Cabe señalar, finalmente, que esta MTE ha indicado, por un lado, que el contenido de las grabaciones — centrado en el número natural y sus operaciones y en su didáctica — no ha repercutido en sus resultados, por lo que podrían haber sido otros los contenidos y haber tenido, en principio, el mismo desempeño — si bien sí ha influido el nivel de algunos de los contenidos —, y, por otro, que haber realizado a través de videollamada la segunda reunión — por motivos de fuerza mayor — no cree que haya afectado tampoco a ninguno de sus resultados.

En definitiva, las aportaciones hechas por Raquel en las entrevistas vienen a dotar de validez las distintas explicaciones que hemos hecho a lo largo del trabajo acerca de los resultados obtenidos por esta formadora. Así pues, se ha visto que su limitada formación en matemáticas y su escasa experiencia como MTE, así como su extensa experiencia como maestra de primaria, han podido influir en su competencia *noticing*, o sea, en qué y cómo nota e interpreta la práctica de enseñanza que se le ha propuesto a través de las diferentes grabaciones de vídeo, revelándose su mayor dificultad en las cuestiones matemáticas. De igual modo, merece la pena remarcar la importancia que Raquel ha dado a la experiencia analizando vídeos de situaciones de aula, así como a examinar los mismos vídeos en las dos fases, para poder alcanzar un buen nivel de *noticing* y poder evolucionar, aspectos en los que coincide con Marcos y Daniel. Con todo, también atribuye a la inducción provista cierta relevancia para poder progresar, aspecto que se ve reflejado en la disminución de una fase a otra de asuntos sobre didáctica general en los comentarios de esta MTE.

Tras haber presentado el contenido más relevante de las entrevistas realizadas, se puede apreciar que la formación académica y la experiencia docente son dos factores que parecen tener una gran influencia en el *noticing* de los formadores. Asimismo, cabe indicar que los sujetos han coincidido en ciertas observaciones al examinar sus resultados, como, por ejemplo, en la repercusión que en la fase 2 ha tenido proponer el mismo conjunto de vídeos, en la relevancia que supone tener o no experiencia previa analizando vídeos o en la no demasiada importancia que han dado a la inducción de las instrucciones para poder mejorar de una fase a otra —a pesar de que sí parece que ha surtido efecto—. Igualmente, es interesante que Marcos y Daniel opinen que siempre se inclinan a fijarse en los aspectos matemáticos o didáctico-matemáticos, aunque no se les dirija hacia ello —si bien es cierto que también atienden a aspectos de la categoría didáctica, principalmente Marcos y en la primera fase—, así como que Daniel y Raquel justifiquen la omisión de algunos temas en sus interpretaciones por la obviedad que para ellos tienen los mismos. Además, es posible descubrir en las explicaciones de los formadores numerosas concepciones que podrían ser objeto de futuros análisis relativos quizá no tanto a su *noticing*, sino a su conocimiento.

En suma, las entrevistas han facilitado comprender mejor el *noticing* de los MTE y entender con mayor profundidad la vinculación existente entre este y el perfil profesional del formador, así como la posibilidad de que dicha competencia evolucione. Así pues, se ha observado que cuanto mayor sea la formación matemática y didáctico-matemática del formador y mayor sea su experiencia docente como tal, y también en otros contextos, más probable es que posea una competencia *noticing* robusta o que pueda desarrollarla.

Para finalizar el presente bloque, se comentan brevemente en el siguiente apartado los eventos e interpretaciones no referidos a *call-outs*.

4.2.5. Eventos e interpretaciones no referidos a *call-outs*

Tras haber estudiado los eventos y las interpretaciones —referidos a *call-outs*— que cada formador ha formulado en cada fase del diseño de investigación, en este apartado se presenta y se comenta, de un modo totalmente sinóptico, la información sobre los eventos e interpretaciones no referidos a *call-outs* que han aportado, atendiendo al conjunto de los vídeos en ambas fases, desde un punto de vista cualitativo.

En relación con los eventos, los participantes explicitan en ambas fases eventos que no se refieren a *call-outs*, tal y como comprobamos en el bloque cuantitativo. Así pues, en la primera fase, un 26 % de los eventos formulados por Marcos, un 10 % de los de Daniel y un 31 % de los de Raquel fueron de dicho tipo, porcentajes que se redujeron a un 9 %, a un 3 % y a un 8 %, respectivamente, en la segunda, poniendo el foco dichos eventos tanto en asuntos o cuestiones de la categoría didáctica como de la categoría matemática — véase la tabla 4.22 para conocer las proporciones —. Algunos de tales eventos se presentan junto a interpretaciones, que se clasifican también en una de las dos categorías nombradas. Así pues, en las siguientes líneas se presentan algunos de los ejemplos más interesantes para que el lector conozca otros aspectos, diferentes de los recogidos en los *call-outs*, a los que los formadores también dan importancia al examinar la práctica de enseñanza de la MTE de los vídeos — se plasman organizados por sujetos y por categoría en la que se enmarcan los diversos eventos —:

M3.3-1.1. *Dice que va a traducir al español el texto que está en inglés [E, D].*

M17.1-1.1. *Da el tiempo a los alumnos [para hacer la tarea] [E, D].*

M11.2-3.1. *Recapitula lo que los alumnos tienen que hacer [E, D].*

M38.1-2. *Pregunta a los alumnos si está claro, manteniéndose luego en silencio [E, D].*

- *M38.1-2(I)1. Porque debe de estar pensando que no está claro para todos [I, D].*

M3.1-3.1. *Escribe todo en la pizarra [E, D].*

- *M3.1-3.1(I)1. Es clásico de los profesores de matemáticas escribir todo en la pizarra para que se lea bien [I, M].*

M29.1-3.3. *Usa tizas de colores [E, D].*

M25.1-2. *Deja un espacio en la escritura [E, M].*

- *M25.1-2(I)1. Porque está esperando un coeficiente en el espacio [I, M].*

M13.2-3.2. *Permite que usen cuentas de distintos colores en una misma varilla [E, M].*

2M5.1-1.2. *Hace ver a un alumno que las matemáticas se basan en hechos [E, M].*

- *2M5.1-1.2(I)1. En matemáticas necesitamos que los conocimientos sean totalmente explicitables y que no dependan de la interpretación, en este caso, de los productores del agrupamiento. Los conocimientos matemáticos han de funcionar en una comunidad, es para lo que hacemos las matemáticas [I, M].*

D3.1-2. *Deja tiempo a los alumnos para que propongan formas para solucionar el problema [E, D].*

D12.1-2. *Pregunta a los alumnos si ha quedado claro lo que han visto [E, D].*

D3.2-3.3. *Está dando menos margen a que participen los alumnos [E, D].*

- *D3.2-3.3(I)1. Porque el ejercicio es demasiado sencillo para que los alumnos tengan algo que decir [I, M].*

D4.2-3.3. *Trabaja de izquierda a derecha con los bloques en base 10 [E, M].*

- *D4.2-3.3(I)1. Trabajar de izquierda a derecha con los bloques en base 10 podría suponer un problema si hay que hacer reagrupamientos [I, M].*

R4.1-1.1. *Acaba de repetir por segunda vez a los alumnos todos los pasos que tienen que ir haciendo [E, D].*

- *R4.1-1.1(I)1. Para asegurarse de que los alumnos lo han escuchado y lo han entendido [I, D].*
- *R4.1-1.1(I)2. Es habitual enmarcar [lo que se va a hacer], ir diciendo las actividades a realizar, establecer el orden de lo que hay que hacer... [I, D].*

R5.1-1.1. *Termina diciendo el tiempo que tienen de trabajo [E, D].*

R1.1-1.2. *Está trabajando en grupo [E, D].*

- *R1.1-1.2(I)1. Cuando se trabaja en grupos cooperativos, la profesora va rotando por los grupos para comprobar si los alumnos han interpretado bien lo que tienen que hacer y pueden llegar a alcanzar el objetivo que se les ha propuesto [I, D].*

R2.1-1.2. *Habla a los alumnos de forma positiva, haciendo que razonen [E, D].*

R1.1-1.3. *Ha dicho 9 un poco más fuerte de lo normal [E, D].*

- *R1.1-1.3(I)1. Para volver a captar la atención de los alumnos que están hablando [I, D].*

R7.1-2. *Pregunta a los alumnos si lo han entendido tras explicarlo varias veces [E, D].*

- *R7.1-2(I)1. Cuando se dan clases de matemáticas, es importante asegurarse de que los alumnos van comprendiendo [I, M].*

2R4.1-2. *Está constantemente planteando preguntas a los alumnos [E, D].*

- *2R4.1-2(I)1. Su metodología consiste en que los alumnos verbalicen sus conocimientos y razonen para poder asentar mejor los conceptos [I, D].*

Como se puede observar, los eventos didácticos abordan distintos temas, estando presentes algunos de ellos en los eventos de los tres sujetos, como, por ejemplo, el tiempo que se da a los estudiantes para realizar cierta tarea o las preguntas que hace la formadora para asegurarse de que todos los alumnos tienen claro lo que se está trabajando. Además, Marcos trata asuntos como la traducción entre idiomas, la escritura en la pizarra o el uso de tizas de colores, Daniel atiende al grado de participación de los alumnos que establece

la formadora y, por su parte, la maestra se interesa por el trabajo en grupo, por cómo se expresa oralmente la formadora —positividad, entonación—, por la propuesta constante de preguntas a los alumnos o por la recapitulación del trabajo realizado, apareciendo este último aspecto también en los eventos de Marcos. Con relación a los matemáticos, Marcos se fija en la escritura matemática que propone la MTE o en que permite el uso de cuentas de distintos colores en una misma varilla del ábaco, mientras que Daniel, por ejemplo, se preocupa por el trabajo de izquierda a derecha con los bloques multibase.

En cuanto a las interpretaciones, en las didácticas se tratan aspectos relativos a las dificultades de los alumnos, por parte de Marcos, o a los procesos para asegurarse de que los alumnos comprenden lo que hacen, a la captación de la atención de los estudiantes o al trabajo en grupo, por parte de Raquel. Y en las matemáticas, encontramos información sobre el contenido matemático o la tarea —temas establecidos en este trabajo con respecto a las interpretaciones que sí se refieren a *call-outs*, en el eje 4—, formulada por Marcos y por Daniel, o sobre las acciones propias de los profesores de matemáticas, expresada por Marcos y por Raquel.

En definitiva, queda patente que los distintos sujetos prestan atención a diferentes aspectos de la práctica de enseñanza mostrada en las grabaciones, tanto en lo que respecta a los eventos como en lo referido a las interpretaciones, con vinculación o no a los *call-outs*, posiblemente por las diferencias en sus perfiles profesionales, pero también que presentan ciertos intereses en común, puesto que todos ellos son, a fin de cuentas, formadores.

Capítulo 5

Discusión de los resultados y conclusiones

5. DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS Y CONCLUSIONES

En este último capítulo se discuten los principales resultados de la investigación y se exponen las conclusiones alcanzadas en torno a los objetivos del trabajo. Asimismo, se señalan las principales aportaciones de esta tesis doctoral en relación con la pregunta de investigación y se mencionan algunas limitaciones del estudio y posibilidades de trabajos futuros acerca del *noticing* del formador de matemáticas y su didáctica.

5.1. Discusión de los resultados y conclusiones

El fin que se persigue en este apartado es el de examinar los resultados alcanzados y las conclusiones que se derivan de ellos con relación a la literatura sobre la competencia *noticing*, no limitándonos a la bibliografía centrada en los MTE —dada su escasez—, sino atendiendo también a otros estudios en los que se pone el foco en otros docentes. Para tal propósito, se va a atender a los objetivos de la presente disertación, dado que son los que nos acercan a la respuesta de la pregunta de investigación propuesta. Dichos objetivos se presentan en el tercer capítulo y se recuerdan a continuación:

- **Objetivo 1:** Determinar qué eventos relevantes identifican los MTE relativos a la práctica de enseñanza de otro formador grabada en vídeo.
- **Objetivo 2:** Examinar cómo explicitan los MTE aquellos eventos relevantes que detectan relativos a la práctica de enseñanza de otro formador grabada en vídeo.
- **Objetivo 3:** Determinar qué eventos relevantes interpretan los MTE relativos a la práctica de enseñanza de otro formador grabada en vídeo.
- **Objetivo 4:** Examinar cómo interpretan los MTE aquellos eventos relevantes que detectan relativos a la práctica de enseñanza de otro formador grabada en vídeo.
- **Objetivo 5:** Diseñar un sistema de análisis y codificación que permita abordar los cuatro objetivos anteriores, es decir, que posibilite estudiar qué eventos relevantes relativos a la práctica de enseñanza de otro formador grabada en vídeo identifican los participantes y cómo los explicitan, así como examinar qué eventos relevantes interpretan y cómo los interpretan.
- **Objetivo 6:** Examinar la influencia de la formación académica y de la experiencia docente de los MTE en su competencia *noticing*, si la hubiera.

- **Objetivo 7:** Examinar la evolución de la competencia *noticing* de los MTE a partir de su participación en el estudio, si la hubiera.

Empero, la organización de la discusión de los resultados y de las conclusiones, si bien se presenta atendiendo a estos objetivos, se estructura conforme a los cuatro ejes que se han utilizado para analizar los datos en el capítulo previo. Dichos ejes se corresponden con los primeros cuatro objetivos, de forma respectiva, por lo que la información referida a los demás objetivos —del cinco al siete— se presenta de forma transversal en los cuatro ejes, es decir, en relación con los primeros cuatro objetivos.

*Eje 1: ¿Qué eventos relevantes detectan los MTE
relativos a la práctica de enseñanza de otro formador grabada en vídeo? [¿Qué notan?]*

En relación con el análisis cuantitativo, todos los formadores identifican menos de la mitad de los *call-outs* en la primera fase, a excepción de Marcos, quien logra detectar el 82 % de todos los eventos relevantes, alcanzando el nivel alto, encontrando en el extremo opuesto a Raquel, en el nivel bajo, con un 19 %. En la segunda fase todos los MTE, menos Marcos, consiguen mejorar, explicitando entre un 12 % y un 22 % más del total de eventos relevantes, salvo la maestra, que solo nota un 6 % más del total. Por su parte, Marcos pasa del 82 % al 72 %, pero sigue estando entre los docentes que más detectan en la fase 2. Por tanto, en lo que respecta al *noticing* espontáneo de los MTE, la formación académica y la experiencia docente parecen influir bastante en *qué notan*, puesto que Marcos es el sujeto con más experiencia como formador y Raquel es quien posee una formación matemática más baja. En cuanto al *noticing* inducido, la formación matemática es la variable que quizá tiene un peso mayor para poder evolucionar, pues Daniel, Jorge, Lucas y Pablo consiguen mejorar bastante más que la maestra, mientras que la experiencia como MTE parece que no influye tanto en este sentido, dado que Jorge tiene una experiencia baja, como Raquel, y es el participante que experimenta un progreso más grande. Así pues, queda claro que no todos los formadores tienen un mismo nivel de *noticing*, así como que no evolucionan del mismo modo, resultados que coinciden con los de otros trabajos sobre el *noticing* del formador, como el realizado por Amador (2022). Por otro lado, en relación con Marcos, se puede decir que su evolución negativa se podría deber al alto valor logrado en la primera fase, el cual se antojaba muy difícil mantenerlo igual de elevado en un segundo momento de observación. Por ende, comprobamos que es posible que un formador cuente con una competencia *noticing* muy desarrollada —al menos en lo concerniente a este eje— sin que

haya participado en un curso de desarrollo profesional dirigido a mejorar las habilidades de observación o sin que haya recibido ningún tipo de inducción en sus análisis sobre los vídeos visionados, muy posiblemente por su perfil profesional, dándose lo que se conoce como «efecto techo» (Amador, 2022), pues superar el nivel obtenido por Marcos en la fase de *noticing* espontáneo, si bien es posible, es harto complicado, incluso con inducción.

En relación con el análisis cualitativo y, en consecuencia, con los contenidos de los vídeos a los que prestan atención los MTE, en la primera fase los tres sujetos elegidos no se fijan en los conocimientos matemáticos previos de los discentes — futuros maestros — ni en el hecho de mantener a la vez en la pizarra todos los registros de representación que se han empleado para hacer una suma — con el fin de compararlos —, mientras que sí se preocupan por asuntos como la contextualización, el enunciado y el objetivo de las tareas matemáticas, el desarrollo matemático de la resolución de un ejercicio, el entendimiento y el empleo de recetas, la importancia del proceso frente al resultado o la secuencia a usar en el aula de primaria para explicar un concepto matemático. En la segunda fase, ninguno de los tres pone el foco en el contenido matemático a trabajar, la escritura simbólica de las agrupaciones establecidas, la explicación de cómo realizar la potencia de una potencia o el hecho de mantener al mismo tiempo en la pizarra todos los registros de representación usados para hacer una suma — con la finalidad de compararlos —, pero sí prestan atención a los manuales de didáctica de las matemáticas para formar a maestros, el enunciado y el objetivo de las tareas matemáticas, la necesidad de alcanzar consensos para poder aunar agrupaciones que son distintas, las conclusiones a las que se llega después de un proceso de trabajo — como cuando se expresa que el paso directo de una base a otra solo es posible cuando una es potencia de la otra —, la importancia del proceso frente al mero resultado, el uso de materiales, las sumas en las que hay que hacer reagrupamientos, la secuencia a utilizar en el aula de primaria para explicar cierto concepto matemático o las experiencias previas de los alumnos de Magisterio como estudiantes de matemáticas en primaria. Así pues, en ambas fases, los tres MTE no se fijan en trabajar en paralelo, o sea, en una forma específica de abordar la enseñanza de un contenido matemático que posibilita comparar características de diferentes entes de manera simultánea, y sí se focalizan en el enunciado de las tareas matemáticas, la relevancia que tiene el proceso frente al mero resultado, los reagrupamientos necesarios en algunas operaciones o la secuencia a poner en práctica en el aula de primaria para explicar un concepto matemático. Por tanto, se observa que hay una evolución de la primera a la segunda fase en tanto en cuanto aumenta la variedad de

asuntos relativos al plano matemático sobre los que ponen su atención los formadores, al igual que sucede en otros trabajos, como en el llevado a cabo por Star y Strickland (2008), en el cual los participantes son capaces de identificar más hechos sobre distintos asuntos, como, por ejemplo, el contenido matemático de la sesión examinada, en una segunda fase de observación. Así pues, la evolución en términos cualitativos ha podido tener lugar por la inducción provista, que dirigía sus esfuerzos a centrar la observación de los formadores en los aspectos matemáticos —específicamente en la práctica de enseñanza de la MTE de las grabaciones de vídeo—, lo que ha redundado en una disminución de los eventos sobre didáctica general explicitados por los sujetos, así como en un aumento de los referidos a aspectos matemáticos, en una posterior fase de observación (Lesseig *et al.*, 2017; Sherin y Van Es, 2009; Van Es y Sherin, 2008, 2010). A este respecto, cabe señalar que podemos ver una diferencia importante entre el *noticing* de los MTE y el de los docentes de primaria o de secundaria —en cuanto a *qué notan*—, puesto que los primeros se fijan principalmente en aspectos matemáticos al observar una situación de enseñanza-aprendizaje por primera vez —como sucede en el presente trabajo—, aunque indiquen también eventos didácticos, y los segundos se centran inicialmente en cuestiones relativas a la didáctica general, como se desprende de trabajos como, por ejemplo, el desarrollado por Sherin y Van Es (2009).

En cuanto a los eventos relevantes identificados por cada uno de los tres MTE en ambas fases, un 23 % de los *call-outs* indicados por Marcos en la fase 1 no los detecta en la fase 2, mientras que un 12 % de los vistos en la fase 2 son nuevos, no los nota en la fase 1. Con relación a Daniel, un 14 % de los *call-outs* señalados en la primera fase los omite en la segunda y un 47 % de los enunciados en la segunda no los menciona en la primera. Y en lo que respecta a Raquel, esta elude en la fase 2 un 61 % de los *call-outs* explicitados en la fase 1 y un 71 % de los vistos en la segunda no los menta en la primera. Así pues, teniendo en cuenta estos datos, se puede concluir que en un segundo momento de observación, se haya progresado o empeorado cuantitativamente con respecto al primero, los formadores obvian eventos relevantes que ya habían verbalizado en primera instancia, pero también explicitan otros nuevos, resultados que guardan cierta relación con los del estudio llevado a cabo por Star *et al.* (2011), en el cual los participantes muestran una evolución en algunas categorías de observación y no en otras. Así pues, es quizá Raquel quien experimenta una menor consistencia entre fases, cualitativamente, en este primer eje, esencialmente por la falta de correspondencia entre lo notado en una fase y en otra, lo que podría achacarse a su menor formación matemática en comparación con los demás MTE, hecho que la habría

conducido a no generarse una idea nítida de cuáles son los sucesos relativos a la práctica de enseñanza de la formadora con mayor transcendencia matemática. Igualmente, desde un enfoque cualitativo —al menos en relación con lo examinado—, se podría decir que la inducción provista en la fase 2 no presenta un efecto más allá de focalizar la atención en las cuestiones referidas a las matemáticas o a su didáctica, pero no en la permanencia de lo observado de una fase a otra sobre dichos aspectos.

Con relación a la información de las entrevistas, comprobamos que los formadores apuntan que la inducción de las instrucciones y que los vídeos de la segunda fase fueran los mismos que los de la primera son elementos relevantes para que se pueda mejorar en este eje. Asimismo, los tres MTE coinciden en la importancia de la experiencia analizando vídeos para poder tener un nivel alto de *noticing* en cuanto a lo que se nota en los vídeos. A este respecto, la formación didáctico-matemática de Marcos, específicamente la basada en el paradigma de investigación en el que se fundamenta su tesis doctoral —la Teoría de Situaciones Didácticas—, ha influido mucho en su alto nivel de *noticing* espontáneo, pues dicho paradigma se centra en analizar distintas situaciones de aula, lo que le ha permitido desarrollar una gran experiencia examinando grabaciones de vídeo en las que se plantean procesos de enseñanza-aprendizaje, hecho que, según Marcos, le ha posibilitado adquirir una manera particular de observar una práctica de enseñanza dada, así como aprender a prever lo que puede suceder en una situación, apreciación que concuerda con lo expuesto por Leinhardt *et al.* (1991) acerca de los docentes expertos, sobre los que dicen que poseen una serie de *check points* en mente que les permiten evaluar el progreso de los procesos de instrucción a los que se enfrentan.

En definitiva, se ha visto que casi todos los formadores tienen un gran margen de mejora en este eje (Amador, 2020b), así como que la formación académica y la experiencia docente suponen variables que pueden influir en el nivel de *noticing* y en el desarrollo del mismo (Amador, 2021; Jacobs *et al.*, 2010).

Eje 2: ¿Cómo explicitan los MTE los eventos relevantes que identifican relativos a la práctica de enseñanza de otro formador grabada en vídeo? [¿Cómo notan?]

En relación con el análisis cuantitativo, en la primera fase todos los MTE, menos la maestra, alcanzan un nivel medio de *noticing*, quedándose Raquel en el límite superior del nivel bajo. En la segunda fase todos los docentes mejoran su desempeño, pasando al nivel

inmediatamente superior al que se encontraban, a excepción de Daniel, quien evoluciona hasta llegar al nivel alto. Daniel es el único participante que es doctor en matemáticas y que tiene, al menos, experiencia media — más de 5 años, 9 en su caso — como MTE, siendo la confluencia de ambos aspectos lo que podría explicar su buen resultado en este eje en una segunda observación — dándose nuevamente el «efecto techo» (Amador, 2022) —. No obstante, la distancia entre Daniel y los demás sujetos que son matemáticos de carrera no es excesiva, mientras que la distancia entre estos y la maestra sí es amplia. Por ello, quizá la variable de formación académica podría tener un peso importante para lograr un nivel alto en este eje — posiblemente por la carga matemática de los elementos fundamentales de cada uno de los *call-outs* —, referido a *cómo notan* los MTE, mientras que la experiencia como formador no tendría la misma relevancia — o al menos no tanta como en el eje 1 —. Sin embargo, el trabajo realizado por Amador (2016) concluye que la experiencia docente sí sería una variable relevante en este sentido, pues pone de manifiesto que el *noticing* de los MTE noveles, con respecto a la formulación de conexiones entre los eventos notados y principios generales de enseñanza y de aprendizaje, es bastante reducido, incluso tras un periodo de formación sobre el constructo teórico de *noticing*, llegando algunos sujetos del estudio a obtener peores resultados después de dicha capacitación. No obstante, no presta atención a la variable de formación, por lo que probablemente tanto la formación como la experiencia influyan notablemente en *cómo notan* los MTE.

Cabe recordar que, tal y como explicamos en el segundo capítulo, la conexión con principios generales de enseñanza y de aprendizaje es un elemento propio del *noticing* en la conceptualización propuesta por Van Es y Sherin (2002, 2008) que lo relacionan con el plano de las interpretaciones (Van Es y Sherin, 2021), mientras que en la presente tesis lo entendemos como parte de la manera de explicitar los eventos identificados — revítese el apartado 2.1.4 —. Por tanto, dicho elemento, asumido en el estudio de Amador (2016), no se corresponde plenamente con aquello que en este eje se valora, pero sí guarda una muy estrecha relación, puesto que tiene que ver con la forma de comunicar lo observado.

En relación con el análisis cualitativo y, en consecuencia, con la formulación de los *call-outs* que cada MTE ha propuesto y que determina el nivel en el cual se enmarca cada evento verbalizado — niveles del 1 al 3 —, en algunos casos los tres formadores escogidos identifican un mismo evento relevante, pudiendo explicitarlo con un nivel de detalle o de precisión igual o similar o, por el contrario, con una profundidad distinta, en ambas fases,

situándose los eventos, por lo tanto, en el mismo nivel o en uno diferente. A este respecto, los ejemplos examinados en el trabajo han sido muchos y diversos y se ha podido advertir la mejora de la primera a la segunda fase, por ejemplo, al no hallar en la segunda *call-outs* que hayan sido identificados por los tres MTE y cuya formulación se posicione en los tres casos en el nivel 1 —lo cual sí sucede en la primera—, así como al constatar un léxico más ligado al plano matemático en la segunda observación que pone el foco en los elementos fundamentales de los *call-outs*, pudiendo percibir en este sentido diferencias entre Raquel y los otros dos MTE, probablemente por la distinta formación matemática que poseen, ya que para ser capaz de explicitar los elementos con precisión es necesario contar con cierto conocimiento matemático, el cual es normal que la maestra, si bien quizá disponga de él, no lo tenga tan presente como los otros dos docentes. En cuanto a los resultados descritos, estos se podrían cotejar con los del estudio de Fisher *et al.* (2019), dado que es de los pocos trabajos en los que se usa un procedimiento similar al de este eje, adjudicando un valor a cada evento verbalizado —en este caso, del 0 al 3— en función de la completitud y de la precisión de la formulación con relación al hecho acontecido en los vídeos propuestos. En este sentido, al centrarse la publicación en el *noticing* de futuros maestros de primaria, se podría decir que, a tenor de los resultados, la competencia *noticing* de los formadores, en relación con *cómo notan*, es mayor y evoluciona más rápido que la de los futuros maestros, pues en dicho estudio más de la mitad de los participantes, después de recibir formación sobre el constructo de *noticing*, no muestran un nivel demasiado alto y no mejoran.

Con relación a la información de las entrevistas, comprobamos que los tres sujetos coinciden en la relevancia de la inducción de las instrucciones para haber sido capaces de mejorar de una a otra fase y prestar más atención a los detalles matemáticos de los eventos (Lesseig *et al.*, 2017), aunque creen que haber visionado los mismos vídeos en ambas fases es la principal causa de haber evolucionado, dado que los tres reflexionaron sobre ciertos aspectos de los vídeos tras la primera fase y recordaban algunos detalles de los mismos al hacer la segunda. Además, Daniel cree que tener una amplia formación matemática y una experiencia docente en distintos contextos también puede ayudar a analizar mejor aquello que se observa, al igual que su forma de ser, pues considera que es alguien que propende a pensar mucho sobre las cuestiones que se le presentan, mientras que Raquel también en este eje da importancia a la experiencia analizando vídeos para poder desarrollar un nivel alto de *noticing* y comenta que los nervios que pudo tener en la primera fase se reflejaron en su discreto desempeño.

Por último, podemos decir que, desde un punto de vista cualitativo —al menos en relación con lo examinado brevemente en este eje—, la inducción provista en la segunda fase ha podido contribuir a que los formadores se centraran en los aspectos relativos a las matemáticas y a su didáctica y, en consecuencia, favorecer una formulación más detallada y precisa de los elementos fundamentales de los *call-outs* identificados, pero también que otros aspectos, como la formación y la experiencia, así como otros no vinculados al perfil profesional —los nervios al observar una situación de enseñanza o la manera de ser que tiene cada cual—, tienen su efecto en *cómo notan* los formadores.

*Eje 3: ¿Qué eventos relevantes interpretan los MTE
relativos a la práctica de enseñanza de otro formador grabada en vídeo? [¿Qué interpretan?]*

En relación con el análisis cuantitativo, el nivel de *noticing* de los MTE es bastante bajo en ambas fases, situándose sobre todo en el nivel 2, a excepción de Marcos, que logra llegar en las dos ocasiones a la parte media del nivel medio-alto —a una distancia notable de los demás participantes— y de Raquel, que consigue pasar de la parte alta del nivel 1 a la baja del nivel 3. Por lo tanto, Marcos es el único participante que muestra una elevada propensión a interpretar matemáticamente los *call-outs* que identifica, tanto en la primera como en la segunda fase, por lo que se podría colegir que la variable que más importancia tiene para alcanzar un alto nivel de *noticing*, en lo que se refiere a *qué interpretan* los MTE, sería la experiencia docente como formador, principal aspecto que distingue a Marcos de los otros sujetos, pues es el único que cuenta con una experiencia alta como tal —más de 15 años, 39 en su caso, como se ha dicho en otras páginas—. Este hecho concuerda con lo recogido en el estudio de Amador (2016), en el que se comprueba que los formadores con poca experiencia proponen escasas interpretaciones sobre lo observado, incluso después de haber recibido formación sobre el constructo de *noticing*. Igualmente, Jacobs *et al.* (2010) apuntan que cuanto mayor es la experiencia docente —en su trabajo, en relación con los maestros de primaria—, mayor es la inclinación a interpretar aspectos matemáticos de lo que se nota —en su caso, del pensamiento matemático de los estudiantes—. Además, la formación en didáctica de las matemáticas también tendría una relevancia singular, sobre todo si tiene unas características como la de Marcos, pues el paradigma de investigación en el que se basa su tesis doctoral, así como su trayectoria investigativa, con frecuencia se apoya en interpretaciones sobre situaciones de aula, lo cual ha podido ayudarle a obtener los magníficos resultados expuestos.

Asimismo, tres MTE obtienen peores datos en la segunda fase, lo que contrasta con lo sucedido en los ejes de eventos, en los cuales todos los formadores mejoraron —excepto Marcos, en el eje 1, por lo ya explicado—. En este tercer eje, progresan Lucas, escasamente, y Raquel, de una manera más sobresaliente, lo que se debe, en parte, al reducido número de eventos relevantes identificados por ella. Marcos, por su parte, obtiene en las dos fases los mismos valores. Estas diferencias en la variación del *noticing* de los sujetos se observan también en otros estudios acerca del formador, como en el de Amador (2022), así como en trabajos centrados en otros docentes, como en el de Fisher *et al.* (2019), en el que se pueden apreciar incrementos, estancamientos y retrocesos en la capacidad para interpretar de los participantes —futuros maestros de primaria— en un postest realizado tras haber recibido formación sobre el constructo de *noticing*.

Así pues, el margen de mejora es todavía enorme para casi todos los sujetos, dado que cuatro de ellos se posicionan aún en el nivel medio-bajo después de haber visionado los vídeos por segunda vez y Raquel, por su parte, en la parte baja del nivel medio. Por el contrario, Marcos, aunque aún puede progresar, se sitúa próximo al nivel alto.

En relación con el análisis cualitativo y, por consiguiente, con cómo se distribuyen las interpretaciones matemáticas de los tres formadores seleccionados en los *call-outs* que fueron explicitados por estos, cabe recordar brevemente que algunos de tales *call-outs* no han sido interpretados matemáticamente por ninguno de los tres MTE, otros han recibido interpretaciones [M] por parte de todos los sujetos y otros han recibido la atención de uno o dos formadores —pero no de los tres— a la hora de aportar al menos una interpretación matemática. A este respecto, aunque en la primera fase hallamos tres eventos relevantes que, habiendo sido detectados por los tres sujetos, no han recibido ninguna interpretación matemática y en la segunda encontramos también otros tres, no hay ninguno que no haya sido interpretado desde un enfoque matemático por ninguno de los MTE en ambas fases. De igual modo, en relación con los eventos relevantes que van acompañados de al menos una interpretación [M] por parte de todos los sujetos, en la primera fase se puede localizar solo uno y en la segunda se encuentran dos, pero no se repite ninguno de una a otra fase, por lo que no hay ningún *call-out* interpretado matemáticamente por los tres participantes en las dos fases. Así pues, podemos decir que no hay un patrón de una fase a otra, esto es, el contenido de los *call-outs* parece no influir en esta cuestión, por lo que, desde un punto de vista cualitativo —al menos en relación con lo examinado—, la inducción provista en

la segunda fase no presenta un efecto más allá de orientar la atención hacia las cuestiones referidas a las matemáticas o a su didáctica, pero no en la consistencia o permanencia de interpretaciones [M] asociadas a unos mismos *call-outs* de una fase a otra, como tampoco lo tiene desde una perspectiva cuantitativa, pues la evolución entre fases de la propensión a interpretar matemáticamente los eventos relevantes notados se ha mostrado anárquica en el conjunto de todos los participantes.

Con relación a la información de las entrevistas, comprobamos que Marcos achaca su elevado nivel de *noticing* principalmente a su conocimiento de teorías de didáctica de las matemáticas, sobre todo a la Teoría de Situaciones Didácticas, ya que opina que estas proporcionan herramientas que permiten interpretar distintas situaciones de enseñanza y de aprendizaje en el aula. Por su parte, Daniel explica su bajo nivel, así como su retroceso entre fases, por la confluencia de tres factores, a saber: su reducida tendencia a interpretar en comparación con tratar de exponer ciertos aspectos en una situación de enseñanza por su forma de ser, su limitada experiencia interpretando sucesos a través del uso de vídeos y, sobre todo, haber considerado que los aspectos matemáticos presentes en los diferentes eventos vistos eran demasiado evidentes como para interpretarlos. Y en cuanto a Raquel, ella atribuye su bajo nivel en la primera fase a los nervios y a no haber examinado vídeos sobre procesos de enseñanza-aprendizaje con anterioridad, así como a su falta de interés por algunos contenidos matemáticos observados —por no encontrar una vinculación con su práctica docente en el aula de primaria—, mientras que su evolución en la segunda fase piensa que se debe a haber visto los mismos vídeos por segunda vez y a la inducción de las instrucciones. Así pues, podemos apreciar que los tres MTE, de un modo y otro, creen que su formación y experiencia influyen en su competencia *noticing*, siendo las teorías de didáctica de las matemáticas y la experiencia analizando situaciones de aula dos aspectos que tienen especial relevancia para poder tener una competencia *noticing* desarrollada. En lo que respecta a la experiencia analizando procesos de aprendizaje-enseñanza en vídeos, Teuscher *et al.* (2017) exponen que se trata de una variable que, al menos en relación con los futuros profesores de secundaria de matemáticas, posibilita inclinarse a interpretar los diversos aspectos matemáticos presentes en cierta situación —en su caso, el conocimiento matemático de los estudiantes— si se tiene desarrollada, lo que concuerda con lo visto en nuestra investigación, ya que Marcos es el único que tiene experiencia —y, además, muy extensa— examinando procesos de enseñanza-aprendizaje mediante vídeos.

Por último, es preciso mencionar que el planteamiento en este eje, esto es, estudiar la propensión de los formadores a interpretar matemáticamente los *call-outs* que detectan — analizando, por tanto, las interpretaciones en función de los eventos —, no se encuentra prácticamente en la literatura sobre *noticing*. En este sentido, algunos trabajos se interesan por explorar la concomitancia de los eventos y de interpretaciones en una reflexión escrita sobre una situación dada (Amador, 2022) o por comprobar el porcentaje de observaciones que incluyen interpretaciones — acerca del razonamiento matemático de los estudiantes — (Teuscher *et al.*, 2017), pero no es exactamente el mismo objeto de análisis que se propone en esta investigación, aunque sí guarda cierta relación.

Eje 4: ¿Cómo interpretan los MTE los eventos relevantes que identifican relativos a la práctica de enseñanza de otro formador grabada en vídeo? [¿Cómo interpretan?]

En relación con el análisis cuantitativo, el nivel de *noticing* de los formadores se ha definido atendiendo a la proporción de interpretaciones matemáticas referidas a *call-outs* con respecto al total de interpretaciones referidas a *call-outs*, así como al número medio de interpretaciones matemáticas por *call-out* notado. En cuanto a la primera variable, destaca considerablemente Marcos, pues el 94 % de sus interpretaciones sobre eventos relevantes son matemáticas, mientras que Raquel se queda en un 23 %, situándose los demás sujetos entre el 67 % y el 75 %. Ya en la segunda fase, gracias, en parte, a la inducción provista en las instrucciones, los valores se igualan bastante, superando todos el 90 % — menos Lucas, que se queda en un 88 % — y siendo Marcos de nuevo el que obtiene el mayor porcentaje con un 96 %. En cuanto a la segunda variable, el dato de Marcos vuelve a ser el más alto, ya que presenta de media prácticamente una interpretación matemática por *call-out* visto, lo que resulta absolutamente excepcional, mientras que la maestra apenas alcanza dos de media por cada decena de eventos relevantes, situándose los demás sujetos entre ambos, pero más cerca de Raquel. Ya en la segunda fase, Daniel, Jorge y Pablo ven mermados sus valores — también Marcos, pero casi nada, formulando más de nueve interpretaciones [M] aún por decena de *call-outs* notados —, mientras que mejoran Lucas y, sobre todo, Raquel, situándose en torno a una interpretación [M] por cada par de eventos relevantes. Por lo tanto, con relación al nivel resultante en este eje, todos los sujetos mejoran globalmente en la segunda fase — llegando al nivel 4, menos Pablo, que se queda a las puertas —, excepto Marcos, que prácticamente logra el mismo resultado — disminuye solo en 0,02 puntos —, llegando en ambas fases al extremo superior del nivel alto, pudiéndose percibir el llamado

«efecto techo» en este formador en ambas fases, lo cual concuerda con el desempeño de otros MTE que participaron en el trabajo de Amador (2022). Así pues, se podría decir que poseer una experiencia docente dilatada como MTE es primordial para lograr un elevado nivel de *noticing* en lo que respecta a *cómo interpretan* los formadores, dado que es en esta variable en la que se diferencia Marcos de los demás sujetos al tener una experiencia alta — más de 15 años, 39 en su caso —, ilación que también se recoge en otros estudios, como en el de Jacobs *et al.* (2010) — acerca de futuros profesores de secundaria de matemáticas —. Asimismo, como en ejes previos, la formación académica en didáctica de las matemáticas también podría haber influido en el modo de interpretar de Marcos, ya que el paradigma de investigación en el que se sustenta su tesis doctoral — y que ha marcado su trayectoria investigativa — requiere usualmente de realizar interpretaciones acerca de situaciones de aula, lo que ha podido ayudarle a obtener los extraordinarios resultados contemplados.

Por último, en relación con los datos presentados, cabe recalcar que la maestra es quien experimenta la evolución más significativa de todos los formadores, resultando ser su nivel en la segunda fase casi el cuádruple del alcanzado en la primera — aunque ya se ha explicado que detectar pocos *call-outs* redunda en una evolución mayor en este eje con formular pocas interpretaciones [M] más asociadas a los mismos, como es el caso que nos ocupa —. Empero, a pesar de su progreso, el número de interpretaciones [M] que formula es muy limitado en términos absolutos, al igual que ocurre con los demás MTE — excepto con Marcos —, resultados que se ajustan en parte a los obtenidos por Amador (2020b), ya que la gran mayoría de los formadores de su estudio, sin haber recibido formación sobre la competencia *noticing*, presentan como mucho un *mixed noticing* (Van Es, 2011), o sea, no desarrollan razonamientos acerca de los eventos que identifican — en este caso, sobre el pensamiento matemático de los estudiantes de primaria y de secundaria —.

En relación con el análisis cualitativo y, consecuentemente, con los temas sobre los que interpretan los MTE con respecto a los *call-outs* identificados — temas recogidos en la tabla 4.25 —, se aprecian importantes diferencias entre los tres sujetos elegidos. Marcos es el único que en ambas fases aporta interpretaciones sobre los nueve temas referidos a las matemáticas establecidos, siendo mínimas — y menores que en la primera fase — aquellas sobre el contenido didáctico en la segunda fase — como se pretendía con la inducción —. Además, aunque ya en la primera observación trata todos los temas, consigue mejorar en la segunda al proponer explicaciones y reflexiones todavía más profundas y detalladas, si

bien se extiende menos sobre los temas relativos a los estudiantes en comparación con los demás temas en ambas fases. Por lo tanto, parece evidente la influencia que en su *noticing* han tenido su formación en didáctica de las matemáticas, su amplísima experiencia como MTE y el paradigma de investigación desde el que trabaja. Con respecto a Daniel, este se interesa básicamente por los objetivos y por los alumnos de Magisterio como resolutores, tanto en la primera como en la segunda fase, experimentando una escasa evolución en la segunda observación, consistente en ligar los objetivos vistos a las ideas matemáticas que subyacen tras los mismos, aunque superficialmente, así como en reducir notablemente las interpretaciones sobre la didáctica general. Llama la atención, por tanto, que no reflexione acerca del contenido matemático *per se*, dada su amplia formación en matemáticas, lo que se podría explicar precisamente por dicha formación, que le llevaría a eludir los aspectos matemáticos por considerarlos evidentes. Lo que no evita en ninguna de las dos fases es centrarse en las dificultades que tienen los alumnos de Magisterio con las matemáticas, lo cual se erige como el aspecto más característico de este formador en sus interpretaciones, interés que se plasma en el grueso de las mismas y cuya explicación podría hallarse en su experiencia docente en estudios de ingeniería, donde el perfil de los estudiantes y el nivel matemático que se les exige son diferentes a los de Magisterio. Por último, Raquel centra su atención en la primera fase esencialmente en el contenido didáctico, consiguiendo una evolución notable en la segunda al dejar dicho tema a un lado y formular interpretaciones sobre los objetivos, los procedimientos y los estudiantes, siendo especialmente relevante en la segunda observación la vinculación constante que en sus interpretaciones establece con los alumnos de Magisterio como futuros maestros y con los alumnos de primaria. Así pues, Raquel destaca frente a los otros MTE por vincular sus interpretaciones con el aula de primaria —hecho que sucede poco en el caso de Marcos y prácticamente nada en el de Daniel—, aunque solo en la segunda fase, aspecto altamente reseñable por la importancia que tiene para los formadores, puesto que se dedican a enseñar a enseñar matemáticas a los futuros maestros.

Con respecto a los temas presentes en las interpretaciones, esta forma de plantear el estudio cualitativo en el eje 4 se puede encontrar también en otras investigaciones, tanto sobre los MTE como sobre otros docentes (*v. gr.*, Amador *et al.*, 2023; Sherin y Van Es, 2009; Star *et al.*, 2011; Star y Strickland, 2008; Van Es y Sherin, 2008, 2010), en las cuales los temas que proponen se basan en los formulados inicialmente por Frederiksen *et al.* (1998). Tales temas, sin embargo, difieren de los establecidos en esta tesis por ser menos en número y,

sobre todo, por centrarse muchos en aspectos que no tienen relación con lo matemático o didáctico-matemático —a excepción de los de Amador (2023)—. Asimismo, los temas que se plantean en nuestro trabajo no se han tomado de otras investigaciones, sino que se han determinado sobre todo a partir de los comentarios de los propios participantes. Por otra parte, cabe precisar que, en los estudios citados, los diferentes temas se vinculan con los comentarios de los docentes, no solamente con sus interpretaciones, por lo que el *content*, los *topics* o las *categories* —términos que usan— se pueden hallar en la verbalización tanto de eventos como de interpretaciones —no en los que interviene J. R. Star, pues en ellos se asume la conceptualización del constructo que se ciñe a los eventos—.

Con relación a la información de las entrevistas, simplemente cabe mencionar las ideas más relevantes expuestas por los participantes a modo de recapitulación. En primer lugar, Marcos manifiesta la necesidad de desarrollar un conocimiento especializado para poder reflexionar en torno al contenido matemático que los maestros enseñan en las aulas de primaria. Asimismo, atribuye sus interpretaciones acerca de las tareas y los objetivos, en conexión con el contenido matemático, a su formación en didáctica de las matemáticas y a su trayectoria investigativa, que se basan en la Teoría de Situaciones Didácticas, dado que estas le han llevado a diseñar muchas situaciones de aula en las que se busca que los alumnos logren un objetivo matemático a través de una tarea. En cuanto a los materiales, explica que se ha centrado en ellos por su dilatada experiencia como MTE y no tanto por su conocimiento de teorías de didáctica de las matemáticas, en las que se ha basado para interpretar otros temas y sobre las que indica que proporcionan muchas herramientas que facilitan interpretar procesos de enseñanza-aprendizaje. Igualmente, señala que no se ha centrado demasiado en el aula de primaria en sus reflexiones por la clase de vídeos vistos, ya que está acostumbrado a analizar grabaciones en las que el docente es un maestro y los alumnos son niños de primaria. En segundo lugar, Daniel expresa que no ha interpretado acerca del contenido matemático *per se* ni sobre la mayoría de los temas matemáticos que se enfocan desde la enseñanza porque ha considerado obvias las aportaciones que sobre ello se pudieran realizar. En cuanto a las teorías de didáctica de las matemáticas, no se ha apoyado en ninguna por no tener formación al respecto. Y con relación a los estudiantes, apunta que se ha focalizado principalmente en las dificultades matemáticas que tienen los alumnos de Magisterio por el tipo de asignatura que imparte a dichos discentes —que se centra en el contenido matemático y no en su didáctica— y por su experiencia docente en otros contextos universitarios en los que el nivel matemático es mayor y la comunicación

con los estudiantes no es tan fluida como en Magisterio, lo que incide en la posibilidad de conocer las dudas y problemas que tienen con el contenido. Por lo tanto, la formación y la experiencia docente de este MTE han influido considerablemente en sus interpretaciones. En último lugar, cabe recordar que Raquel achaca la escasez de aspectos matemáticos en sus interpretaciones a su formación y hace ver que algunos de los contenidos de los vídeos no tenían, en su opinión, una relación directa con su labor docente en el aula de primaria, motivo por el que no reflexionó sobre ellos. Por otro lado, en cuanto a los procedimientos, explica que la metodología que hay que usar en primaria para enseñar matemáticas debe estar basada en la manipulación y en el juego y, finalmente, manifiesta que las conexiones que constantemente establece en sus interpretaciones con el aula de primaria, durante la segunda observación, se deben seguramente a su formación y experiencia como maestra, hecho que no tuvo lugar en la primera por su falta de experiencia analizando procesos de enseñanza-aprendizaje en vídeos, principalmente. Por lo tanto, en su forma de interpretar también han incidido tanto su formación como su experiencia.

Una vez expuesta la información referida a los distintos aspectos que en cada uno de los cuatro ejes se examinan, incluyendo transversalmente elementos sobre los últimos tres objetivos de la tesis, se comentan ahora, de un modo muy breve, algunas ideas acerca de tales objetivos. En cuanto al quinto —sobre el diseño metodológico que ha posibilitado abordar los primeros cuatro propósitos del estudio—, cabe decir que uno de los aspectos que en este trabajo ha facilitado valorar la competencia *noticing* de los formadores ha sido el uso de niveles en cada uno de los ejes, así como con relación a los eventos en el segundo de ellos. A este respecto, Stockero y Rupnow (2017) señalan que cada vez es más frecuente utilizar sistemas de puntuación, como clasificaciones o niveles, para valorar el *noticing* de los docentes. En nuestro caso, decidimos emplear niveles a raíz, sobre todo, de la consulta de los artículos de Van Es y Sherin (2002) y de Van Es (2011), si bien adaptamos su uso a las necesidades propias de la presente disertación. Respecto al sexto —sobre la formación y la experiencia de los MTE y su influencia en su *noticing*—, al tratar de discutir los datos obtenidos con los de otras publicaciones, hemos visto que el interés por saber cómo incide la experiencia en la competencia es considerable (*v. gr.*, Amador, 2016; Bastian *et al.*, 2022; Huang y Li, 2012; Jacobs *et al.*, 2010; Pouta *et al.*, 2021; Stahnke y Blömeke, 2021), pero, en cambio, apenas se estudia cómo influye la formación académica. Por último, en cuanto al séptimo objetivo, solo es preciso apuntar que, como se ha explicado en cada eje, la mejora de la competencia *noticing* es posible, aunque no de igual modo para todos los MTE.

Finalmente, es importante mencionar la dificultad que entraña la discusión de los resultados de esta tesis en tanto en cuanto la aproximación metodológica en su totalidad asumida para el estudio del *noticing* —descrita de forma condensada en la parte final del apartado 2.1.4— y el diseño metodológico creado —expuesto latamente en el capítulo 3— para dar respuesta a la pregunta de investigación establecida no se plantean enteramente en los mismos términos en otros estudios sobre *noticing*, motivo por el cual puede resultar asaz complicado comparar, en ocasiones, nuestros resultados con los alcanzados en otras publicaciones, más aún cuando las centradas en el formador son tan escasas.

5.2. Principales aportaciones de la investigación

En este apartado se señalan sucintamente las principales aportaciones que la tesis doctoral realiza al campo de la educación matemática en lo que respecta a la pregunta de investigación formulada en el tercer capítulo y que se recuerda a continuación:

- **Pregunta de investigación:** ¿Cómo es la competencia *noticing* de los formadores de matemáticas y su didáctica de futuros maestros de Educación Primaria?

Uno de los aportes hechos es el propio marco teórico en el que se fundamenta este trabajo. Al aproximarse por primera vez a la competencia *noticing*, es probable que surjan dudas en torno a qué es y a cómo se estudia, puesto que los distintos autores conciben y examinan dicho constructo teórico de diversas maneras. Así pues, el segundo capítulo de la tesis contiene una revisión de la génesis, las conceptualizaciones y las aproximaciones metodológicas en relación con el *noticing* que pretende mostrar una visión panorámica de la competencia y clarificar las posibles confusiones que cualquier investigador que inicie su andadura en esta materia pudiera tener. Asimismo, el marco teórico trata de ayudar a comprender qué se entiende por «formador», figura que en la actualidad suscita un gran interés —reflejado, por ejemplo, en trabajos acerca de su conocimiento— y cuya actividad docente cuenta con numerosas dimensiones, y expone los principales estudios que se han realizado sobre el *noticing* de dicho profesional de la enseñanza.

Otra de las aportaciones tiene que ver con el marco metodológico, concretamente con la selección de los participantes y con el diseño de la investigación. Con respecto a la elección de los formadores del estudio, se ha generado un procedimiento de una manera

sumamente meticulosa que ha permitido elegir a los MTE atendiendo fundamentalmente a su formación académica y su experiencia docente, proceso que se ha explicado a lo largo de numerosas páginas del tercer capítulo con gran detalle —lo cual no es habitual en este tipo de trabajos— para permitir su adopción en otros estudios si fuera de utilidad. En lo que se refiere al diseño metodológico, al tratarse de una propuesta *ad hoc*, ha sido posible trazar nuevas formas de examinar el *noticing* de los formadores, lo que ha dado lugar a la estructura de cuatro ejes explicada en el trabajo. Si bien existe una correspondencia más directa entre el primer eje y lo propuesto en muchos artículos sobre *noticing*, lo planteado en los demás, y sobre todo en los relativos a interpretaciones, supone una novedad en la literatura y se puede replicar fácilmente en futuras indagaciones. Asimismo, cabe señalar que el hecho de proponer que los MTE observen la práctica de enseñanza de otro MTE es un enfoque que apenas se ha explorado, pues básicamente se han realizado propuestas en las que los formadores analizan clases de docentes de primaria o de secundaria en las que han de fijarse no en la instrucción, sino en el razonamiento matemático de los estudiantes, por lo general, como se ha venido haciendo usualmente al estudiar el *noticing* de docentes que no son MTE. Por tanto, este cambio en el enfoque también ha de ser destacado.

Por último, las aportaciones más importantes son aquellas que tienen que ver con los resultados derivados de los datos recogidos. En este sentido, tanto en el cuarto capítulo como en el apartado anterior se han comentado los diferentes resultados alcanzados, por lo que no se reiteran en este momento. Simplemente cabe indicar, a modo de síntesis, que se ha visto que los MTE cuentan con una capacidad mayor para detectar eventos que para interpretarlos, aunque en ambos casos es reducida para la mayoría de los sujetos en una primera observación. Tras una pequeña inducción, en general mejoran en ambos planos, aunque menos en el de las interpretaciones, teniendo aún un amplio margen para poder seguir progresando en todos los componentes valorados de su competencia, si bien se ha comprobado que es posible que el *noticing* de algunos sujetos prácticamente toque techo en algunos aspectos examinados, incluso en la primera observación en el caso de uno de ellos. Por lo tanto, en esta tesis doctoral se constata que no todos los formadores tienen su competencia *noticing* desarrollada de igual forma —ni su *noticing* espontáneo, sin dotarles de pautas de observación, ni el inducido, proveyéndoles de ciertas orientaciones para el análisis de la práctica de enseñanza propuesta—, por el mero hecho de realizar la misma labor educativa, así como que el perfil profesional de cada uno incide sustancialmente en tal competencia y en la posibilidad de que evolucione, habiéndose podido advertir que a

mayor formación matemática y didáctico-matemática —cobrando una relevancia especial ubicarse en un paradigma de investigación del área de la didáctica de las matemáticas— y mayor experiencia docente como MTE, más factible es contar con un *noticing* elevado y poder desarrollarlo más fácilmente, incluso sin tomar parte en un programa de desarrollo profesional diseñado para lograr tal efecto.

En definitiva, con esta tesis se ha conseguido tener una idea más nítida de cómo es la competencia *noticing* del formador de matemáticas y su didáctica. No obstante, hay que recordar que las conclusiones extraídas son solo aplicables a los participantes del estudio, no siendo posible extrapolar los resultados al conjunto total de MTE, propósito que no se perseguía en la investigación.

5.3. Limitaciones de la investigación y perspectivas de futuro

Para finalizar este capítulo, se exponen brevemente algunas de las limitaciones del trabajo realizado y se plantean algunos estudios que en relación con este se podrían llevar a cabo en el futuro.

Las principales limitaciones de la investigación tienen relación con aspectos de la metodología utilizada. Una de ellas tiene que ver con la selección de los participantes, en concreto con el cuestionario inicial que se mandó a los 39 MTE que formaban parte de la población total de formadores en la que nos centramos, puesto que obtuvimos respuesta de 29 de ellos. Habría sido interesante contar con los datos de los que no contestaron, ya que quizá habrían surgido características diferentes en su perfil profesional, en lo referido a su formación académica y experiencia docente, que nos habrían permitido elaborar una clasificación de los formadores más completa y, por tanto, contar con unos participantes cuyo perfil fuera todavía más variado, con las consecuencias que esto podría tener en la exploración del *noticing* de los formadores. En este sentido, habría sido de enorme interés tener MTE que fueran maestros y cuya formación académica fuera distinta a la de Raquel para examinar posibles diferencias en su competencia por razones de formación, así como docentes con la misma experiencia como MTE que Marcos, pero cuya principal actividad investigativa se circunscribiese a un paradigma diferente, poniendo el foco, por tanto, en la influencia que la trayectoria de investigación pudiera tener en la competencia *noticing*.

Otro de los hechos que ha supuesto una limitación en el estudio ha sido la decisión de usar las mismas grabaciones de vídeo en la fase de *noticing* espontáneo y en la fase de *noticing* inducido, especialmente en lo referido a la influencia de la inducción provista en las instrucciones de la segunda fase. Se ha comprobado que los participantes atribuyen a esta situación parte de su evolución, más que a la propia inducción, razón por la que no podemos achacar las variaciones de los sujetos solamente a la inducción. No obstante, es obvio que siempre habrá factores que también influirán en una posible evolución, aunque es posible trabajar en pos de reducir su incidencia.

En relación con el análisis de la información, si bien se ha llevado a cabo un examen sumamente pormenorizado de los datos, quizá la utilización de programas informáticos diseñados para realizar análisis de contenido podría haber propiciado el hallazgo de más relaciones entre las variables de formación académica y de experiencia docente y aquellos aspectos estudiados en cada uno de los ejes sobre el *noticing* de los participantes.

Con todo, aunque el trabajo presenta ciertas limitaciones, algunas de ellas podrían superarse en futuros estudios. A este respecto, son muchas las cuestiones susceptibles de ser abordadas en próximas investigaciones, pudiendo realizarse algunas de estas a partir de la información obtenida en la presente tesis y otras, por el contrario, con datos todavía por recopilar.

En cuanto a las primeras, sería posible apoyarse tanto en los resultados obtenidos como en la extensa información recopilada y presentada en los numerosos anexos de esta tesis. Así pues, a tenor de los resultados merecería la pena tratar de elaborar un programa de desarrollo profesional para los formadores dirigido a mejorar su competencia *noticing*, es decir, generar una intervención que diese pie a una evolución en las habilidades de los MTE para detectar e interpretar situaciones de enseñanza-aprendizaje, necesidad que ya se ha evidenciado en algunas publicaciones sobre el *noticing* del formador. Asimismo, a partir de las transcripciones de los comentarios de los participantes al visionar los vídeos propuestos, sería muy interesante realizar trabajos que ahondasen en el conocimiento del formador — asunto sobre el que se ha centrado la atención en los últimos años —, dada la gran cantidad de indicios y de evidencias que sobre el mismo es posible hallar, pudiendo ser también oportuno tratar de vincular dicho conocimiento con los perfiles profesionales que hemos establecido en la tesis. Igualmente, sería importante profundizar en el estudio de la influencia del contenido de los vídeos en la competencia *noticing*, explorando, por lo

tanto, los ejes 1 y 3 desde un enfoque cualitativo con más profundidad, así como analizar con más detalle los eventos e interpretaciones que no se refieren a *call-outs*. Y, por último, podría resultar pertinente expresar más aún la información recabada con el cuestionario con el que se seleccionó a los participantes del estudio, dado que permitiría analizar otros aspectos del perfil profesional de los MTE en relación con su *noticing*.

En cuanto a las segundas, sería relevante explorar las posibles diferencias entre el *noticing* de los MTE y el de otros docentes, analizar con mayor atención el modo en el que influye la formación académica — dada una misma experiencia — en la competencia, usar diferentes vídeos en distintas fases de observación para examinar mejor la incidencia de la inducción y, por supuesto, incluir el tercer elemento del constructo, o sea, la propuesta de acciones a realizar tras interpretar los eventos identificados, en trabajos relativos a los MTE. Asimismo, sería interesante contar con otros estudios acerca de otras competencias profesionales docentes de los formadores que complementasen la información relativa a su competencia *noticing* obtenida en esa tesis, pues dicho conocimiento, unido al referido a los perfiles profesionales — formación y experiencia —, posibilitaría mejores procesos de selección de la plantilla de formadores de matemáticas y su didáctica de futuros maestros en los distintos centros universitarios, procurando disponer de diferentes perfiles que se complementen entre sí en favor de una enseñanza más integral.

En definitiva, la competencia *noticing* del formador de matemáticas y su didáctica es un asunto sobre el que se ha escrito muy poco y, por ende, es necesario seguir abriendo líneas de investigación en torno a este tema habida cuenta de la importancia que tiene ser conscientes de cómo poder mejorar su aptitud para detectar eventos relevantes en el aula y poder interpretarlos, dado que una mayor competencia dará como resultado una mejor práctica de enseñanza y, por consiguiente, repercutirá en que los procesos educativos en los diferentes niveles en los que se enseñan y se aprenden matemáticas cobren una mayor efectividad y revistan una calidad superior.

Referencias bibliográficas

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Ainley, J. y Luntley, M. (2007). The Role of Attention in Expert Classroom Practice. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 10(1), 3-22.
- Alcaraz-Domínguez, S., Frossard, F. y Barajas, M. (2018). La competencia digital de los formadores del profesorado en España: Oportunidades y retos para su desarrollo. En F. Carrera, F. Martínez, J. L. Coiduras, E. Brescó y E. Vaquero (Eds.), *Educación con Tecnología. Un compromiso social: Aproximaciones desde la investigación y la innovación* (pp. 1301-1307). Edicions de la Universitat de Lleida y EDUTEC.
- Amador, J. M. (2016). Professional Noticing Practices of Novice Mathematics Teacher Educators. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 14(1), 217-241.
- Amador, J. M. (2020a). Noticing as a Tool to Analyze Mathematics Instruction and Learning. En S. Llinares y O. Chapman (Eds.), *International Handbook of Mathematics Teacher Education: Tools and Processes in Mathematics Teacher Education* (2.^a ed., vol. 2, pp. 311-336). Brill Sense.
- Amador, J. M. (2020b). Teacher Leaders' Mathematical Noticing: Eliciting and Analyzing. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 18(2), 295-313.
- Amador, J. M. (2021). School Leaders' Noticing Based on Video of Mathematics Instruction. *International Journal of Leadership in Education: Theory and Practice*.
- Amador, J. M. (2022). Mathematics Teacher Educator Noticing: Examining Interpretations and Evidence of Students' Thinking. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 25(2), 163-189.
- Amador, J. M., Bragelman, J. y Castro-Superfine, A. (2021). Prospective Teacher's Noticing: A Literature Review of Methodological Approaches to Support and Analyze Noticing. *Teaching and Teacher Education*, 99, artículo 103256.
- Amador, J. M. y Carter, I. S. (2018). Audible Conversational Affordances and Constrains of Verbalizing Professional Noticing during Prospective Teacher Lesson Study. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 21(1), 5-34.

- Amador, J. M., Carter, I. S., Hudson, R. A. y Galindo, E. (2017). Following Teacher's Mathematical and Scientific Noticing across Career Progression from Field Experiences to Classroom. En E. O. Schack, M. H. Fisher y J. A. Wilhelm (Eds.), *Teacher Noticing: Bridging and Broadening Perspectives, Contexts, and Frameworks* (pp. 161-181). Springer.
- Amador, J. M., Estapa, A., De Araujo, Z., Kosko, K. W. y Weston, T. L. (2017). Eliciting and Analyzing Preservice Teachers' Mathematical Noticing. *Mathematics Teacher Educator*, 5(2), 158-177.
- Amador, J. M., Gillespie, R. y Carson, C. (2023). Coaches and Teachers Shift Noticing across Coaching Cycles: Analysis of Video-Based Annotations. *Research in Mathematics Education*.
- Amador, J. M., Males, L. M., Earnest, D. y Dietiker, L. (2017). Curricular Noticing: Theory on and Practice of Teachers' Curricular Use. En E. O. Schack, M. H. Fisher y J. A. Wilhelm (Eds.), *Teacher Noticing: Bridging and Broadening Perspectives, Contexts, and Frameworks* (pp. 427-443). Springer.
- Amador, J. M., Weston, T., Estapa, A., Kosko, K. y De Araujo, Z. (2016). Animations as a Transformational Approximation of Practice for Preservice Teachers to Communicate Professional Noticing. *Journal of Technology and Teacher Education*, 24(2), 127-151.
- Anantharajan, M. (2020). Teacher Noticing of Mathematical Thinking in Young Children's Representations of Counting. *Journal for Research in Mathematics Education*, 51(3), 268-300.
- Appelgate, M. H., Dick, L., Soto, M. y Gupta, D. (2020). Growing a Greater Understanding of Multiplication through Lesson Study: Mathematics Teacher Educators' Professional Development. *The Mathematics Enthusiast*, 17(2-3), 583-613.
- Appova, A. y Taylor, C. E. (2019). Expert Mathematics Teacher Educators' Purposes and Practices for Providing Prospective Teachers with Opportunities to Develop Pedagogical Content Knowledge in Content Courses. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 22(2), 179-204.

- Association of Mathematics Teacher Educators (2017). *Standards for Preparing Teachers of Mathematics*. AMTE.
- Ball, D. L., Thames, M. H. y Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes it Special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.
- Ballestín, B. y Fàbregues, S. (2018). *La práctica de la investigación cualitativa en ciencias sociales y de la educación*. Editorial UOC.
- Bartolomé, M. (1992). Investigación cualitativa en educación: ¿Comprender o transformar? *Revista de Investigación Educativa*, 10(20), 7-36.
- Bassey, M. (1992). Creating Education through Research. *British Educational Research Journal*, 18(1), 3-16.
- Bassey, M. (1999). *Case Study Research in Educational Settings*. Open University Press.
- Bastian, A., Kaiser, G., Meyer, D., Schwarz, B. y König, J. (2022). Teacher Noticing and Its Growth toward Expertise: An Expert-Novice Comparison with Pre-service and In-service Secondary Mathematics Teachers. *Educational Studies in Mathematics*, 110(2), 205-232.
- Beswick, K. y Chapman, O. (2013). Mathematics Teacher Educators' Knowledge. En A. M. Lindmeier y A. Heinze (Eds.), *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 1, p. 215). PME.
- Bisquerra, R. (Coord.). (2009). *Metodología de la investigación cualitativa* (2.^a ed.). La Muralla.
- Boei, F., Dengerink, J., Geursen, J., Kools, Q., Koster, B., Lunenberg, M. y Willemse, M. (2015). Supporting the Professional Development of Teacher Educators in a Productive Way. *Journal of Education for Teaching*, 41(4), 351-368.
- Bryman, A. (2006). Integrating Quantitative and Qualitative Research: How is it Done? *Qualitative Research*, 6(1), 97-113.
- Bryman, A. (2012). *Social Research Methods* (4.^a ed.). Oxford University Press.

- Callejo, M. L., Llinares, S. y Valls, J. (2008). Using Video-Case and Online Discussion to Learn to “Notice” Mathematics Teaching. En O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano y A. Sepúlveda (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 32 and PME-NA 30* (vol. 2, pp. 233-240). PME y PME-NA.
- Callejo, M. L., Pérez-Tyteca, P., Moreno, M. y Sánchez-Matamoros, G. (2022). The Use of a Length and Measurement HLT by Pre-service Kindergarten Teachers to Notice Children’s Mathematical Thinking. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 20(3), 597-617.
- Callejo, M. L. y Zapatera, A. (2017). Prospective Primary Teachers’ Noticing of Students’ Understanding of Pattern Generalization. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 20(4), 309-333.
- Carrillo, J., Climent, N., Montes, M. Á., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-Gómez, Á., Ribeiro, M. y Muñoz-Catalán, C. (2018). The Mathematics Teacher’s Specialised Knowledge (MTSK) Model. *Research in Mathematics Education*, 20(3), 236-253.
- Carrillo, J., Contreras, L. C., Climent, N., Escudero-Ávila, D., Flores-Medrano, E. y Montes, M. Á. (Eds.). (2014). *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas*. Publicaciones de la Universidad de Huelva.
- Castro-Superfine, A. y Bragelman, J. (2018). Analyzing the Impact of Video Representation Complexity on Preservice Teacher Noticing of Children’s Thinking. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 14(11), artículo 1650.
- Castro-Superfine, A., Fisher, A., Bragelman, J. y Amador, J. M. (2017). Shifting Perspectives on Preservice Teachers’ Noticing of Children’s Mathematical Thinking. En E. O. Schack, M. H. Fisher y J. A. Wilhelm (Eds.), *Teacher Noticing: Bridging and Broadening Perspectives, Contexts, and Frameworks* (pp. 409-426). Springer.
- Chan, K. K. H., Xu, L., Cooper, R., Berry, A. y Van Driel, J. H. (2021). Teacher Noticing in Science Education: Do You See What I See? *Studies in Science Education*, 57(1), 1-44.

- Chick, H. y Beswick, K. (2018). Teaching Teachers to Teach Boris: A Framework for Mathematics Teacher Educator Pedagogical Content Knowledge. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 21(5), 475-499.
- Chieu, V. M., Herbst, P. y Weiss, M. (2011). Effect of an Animated Classroom Story Embedded in Online Discussion on Helping Mathematics Teachers Learn to Notice. *Journal of the Learning Sciences*, 20(4), 589-624.
- Choy, B. H. (2016). Snapshots of Mathematics Teacher Noticing during Task Design. *Mathematics Education Research Journal*, 28(3), 421-440.
- Choy, B. H. y Dindyal, J. (2021). Productive Teacher Noticing and Affordances of Typical Problems. *ZDM-Mathematics Education*, 53(1), 195-213.
- Choy, B. H., Thomas, M. O. J. y Yoon, C. (2017). The FOCUS Framework: Characterising Productive Noticing during Lesson Planning, Delivery and Review. En E. O. Schack, M. H. Fisher y J. A. Wilhelm (Eds.), *Teacher Noticing: Bridging and Broadening Perspectives, Contexts, and Frameworks* (pp. 445-466). Springer.
- Clement, T., Bolton, J., Griffiths, L., Cracknell, C. y Molloy, E. (2023). 'Noticing' in Health Professions Education: Time to Pay Attention? *Medical Education*, 57(4), 305-314.
- Coles, A. y Helliwell, T. (2023). The Role of Mathematics Teacher Educators in Preparing Teachers of Mathematics to Respond to Global Challenges within Their Classrooms. *London Review of Education*, 21(1), 1-13.
- Colestock, A. y Sherin, M. G. (2009). Teachers' Sense-Making Strategies while Watching Video of Mathematics Instruction. *Journal of Technology and Teacher Education*, 17(1), 7-29.
- Comisión Europea (2013). *Supporting Teacher Educators for Better Learning Outcomes*. Comisión Europea.
- Cornejo, J. (2007). La formación de los formadores de profesores: ¿Para cuándo en Chile? *Pensamiento Educativo, Revista de Investigación Educativa Latinoamericana*, 41(1), 37-55.

- Creswell, J. W. (2013). *Qualitative Inquiry and Research Design: Choosing among Five Approaches* (3.^a ed.). SAGE.
- Creswell, J. W. (2014). *Research Design. Qualitative, Quantitative and Mixed Methods Approaches* (4.^a ed.). SAGE.
- Davis, B. y Sumara, D. J. (2005). Challenging Images of Knowing: Complexity Science and Educational Research. *International Journal of Qualitative Studies in Education*, 18(3), 305-321.
- Davis, E. A. (2006). Characterizing Productive Reflection among Preservice Elementary Teachers: Seeing What Matters. *Teaching and Teacher Education*, 22(3), 281-301.
- Del Rincón, D. (1997). *Metodologies qualitatives orientades a la comprensió*. Universitat Oberta de Catalunya.
- Dewey, J. (1904). The Relation of Theory to Practice in Education. En C. A. McMurry (Ed.), *The Third Yearbook of the National Society for the Scientific Study of Education. Part I* (pp. 9-30). The University of Chicago Press.
- Dietiker, L., Males, L. M., Amador, J. M. y Earnest, D. (2018). Curricular Noticing: A Framework to Describe Teachers' Interactions with Curriculum Materials. *Journal for Research in Mathematics Education*, 49(5), 521-532.
- Dindyal, J., Schack, E. O., Choy, B. H. y Sherin, M. G. (2021). Exploring the Terrains of Mathematics Teacher Noticing. *ZDM-Mathematics Education*, 53(1), 1-16.
- Ding, L. y Domínguez, H. (2016). Opportunities to Notice: Chinese Prospective Teachers Noticing Students' Ideas in a Distance Formula Lesson. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 19(4), 325-347.
- Domínguez, H. (2019). Theorizing Reciprocal Noticing with Non-dominant Students in Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 102(1), 75-89.
- Domínguez, H. (2021). Students and Teachers Mobilizing Mathematical Concepts through Reciprocal Noticing. *ZDM-Mathematics Education*, 53(1), 43-55.

- Dorio, I., Sabariego, M. y Massot, I. (2009). Características generales de la metodología cualitativa. En R. Bisquerra (Coord.), *Metodología de la investigación cualitativa* (2.^a ed., pp. 275-292). La Muralla.
- Dreher, A. y Kuntze, S. (2015). Teacher Professional Knowledge and Noticing: The Case of Multiple Representations in the Mathematics Classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 88(1), 89-114.
- Dyer, E. B. y Sherin, M. G. (2016). Instructional Reasoning about Interpretations of Student Thinking that Supports Responsive Teaching in Secondary Mathematics. *ZDM-Mathematics Education*, 48(1-2), 69-82.
- Eisner, E. W. (1998). *El ojo ilustrado: Indagación cualitativa y mejora de la práctica educativa*. Paidós.
- Erickson, F. (2011). On Noticing Teacher Noticing. En M. G. Sherin, V. R. Jacobs y R. A. Philipp (Eds.), *Mathematics Teacher Noticing: Seeing through Teachers' Eyes* (pp. 17-34). Routledge.
- Erickson, F., Boersema, D., Brown, M., Kirschner, B., Lazarus, B., Pelissier, C. y Thomas, D. (1986). *Teachers' Practical Ways of Seeing and Making Sense: A Final Report*. Institute for Research on Teaching.
- Estapa, A. y Amador, J. M. (2016). Wearable Cameras as a Tool to Capture Preservice Teachers' Marked and Recorded Noticing. *Journal of Technology and Teacher Education*, 24(3), 281-307.
- Eubanks-Turner, C. (2020). Reflections of a Mathematics Teacher Educator: Considerations for Mathematicians Who Teach Teachers. *Notices of the American Mathematical Society*, 67(2), 201-204.
- Even, R. (2008). Facing the Challenge of Educating Educators to Work with Practicing Mathematics Teachers. En B. Jaworski y T. Wood (Eds.), *The International Handbook of Mathematics Teacher Education: The Mathematics Teacher Educator as a Developing Professional* (vol. 4, pp. 57-73). Sense Publishers.

- Even, R. (2014). Challenges Associated with the Professional Development of Didacticians. *ZDM-Mathematics Education*, 46(2), 329-333.
- Fadde, P. y Sullivan, P. (2013). Using Interactive Video to Develop Preservice Teachers' Classroom Awareness. *Contemporary Issues in Technology and Teacher Education*, 13(2), 156-174.
- Fernandes, A. (2012). Mathematics Preservice Teachers Learning about English Language Learners through Task-Based Interviews and Noticing. *Mathematics Teacher Educator*, 1(1), 10-22.
- Fernández, C. y Choy, B. H. (2020). Theoretical Lenses to Develop Mathematics Teacher Noticing: Learning, Teaching, Psychological, and Social Perspectives. En S. Llinares y O. Chapman (Eds.), *International Handbook of Mathematics Teacher Education: Tools and Processes in Mathematics Teacher Education* (2.^a ed., vol. 2, pp. 337-360). Brill Sense.
- Fernández, C., Llinares, S. y Valls, J. (2012). Learning to Notice Students' Mathematical Thinking through Online Discussions. *ZDM-Mathematics Education*, 44(6), 747-759.
- Fernández, C., Llinares, S. y Valls, J. (2013). Primary School Teacher's Noticing of Students' Mathematical Thinking in Problem Solving. *The Mathematics Enthusiast*, 10(1-2), 441-468.
- Fernández, C., Sánchez-Matamoros, G., Valls, J. y Callejo, M. L. (2018). Noticing Students' Mathematical Thinking: Characterization, Development and Contexts. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 13, 39-61.
- Fisher, M. H., Thomas, J., Jong, C., Schack, E. O. y Dueber, D. (2019). Comparing Preservice Teachers' Professional Noticing Skills in Elementary Mathematics Classrooms. *School Science and Mathematics*, 119(3), 142-149.
- Flick, U. (2007). *Introducción a la investigación cualitativa* (2.^a ed.). Ediciones Morata.
- Flick, U. (2015). *El diseño de investigación cualitativa*. Ediciones Morata.

- Frederiksen, J. R. (1992). *Learning to "See": Scoring Video Portfolios or "Beyond the Hunter-Gatherer" in Performance Assessment* [presentación de artículo]. Annual Meeting of the American Educational Research Association, San Francisco, Estados Unidos.
- Frederiksen, J. R., Sipusic, M., Sherin, M. G. y Wolfe, E. W. (1998). Video Portfolio Assessment: Creating a Framework for Viewing the Functions of Teaching. *Educational Assessment*, 5(4), 225-297.
- Goldsmith, L. T. y Seago, N. (2011). Using Classroom Artifacts to Focus Teachers' Noticing: Affordances and Opportunities. En M. G. Sherin, V. R. Jacobs y R. A. Philipp (Eds.), *Mathematics Teacher Noticing: Seeing through Teachers' Eyes* (pp. 169-187). Routledge.
- Goodwin, C. (1994). Professional Vision. *American Anthropologist*, 96(3), 606-633.
- Grbich, C. (2013). *Qualitative Data Analysis: An Introduction* (2.^a ed.). SAGE.
- Grossman, P. (2009). Redefining Teaching, Re-imagining Teacher Education. *Teachers and Teaching: Theory and Practice*, 15(2), 273-289.
- Guba, E. G. (1985). Criterios de credibilidad en la investigación naturalista. En J. Gimeno-Sacristán y A. Pérez-Gómez (Eds.), *La enseñanza: Su teoría y su práctica* (2.^a ed., pp. 148-165). Akal.
- Guba, E. G. y Lincoln, Y. S. (1994). Competing Paradigms in Qualitative Research. En N. Dezin e Y. Lincoln (Eds.), *Handbook of Qualitative Research* (pp. 105-117). SAGE.
- Hammersley, M. (1992). *What's Wrong with Ethnography? Methodological Explorations*. Routledge.
- Hand, V. (2012). Seeing Culture and Power in Mathematical Learning: Toward a Model of Equitable Instruction. *Educational Studies in Mathematics*, 80(1-2), 233-247.
- Haubert, L. R. (2017). *Professional Mathematical Noticing in Play-Based Prekindergarten Classrooms* [Tesis doctoral, University of Toledo]. OhioLINK Electronic Theses and Dissertations Center. https://rave.ohiolink.edu/etdc/view?acc_num=toledo1501736606962246

- Helliwell, T. (2017). Mathematics Teacher Educator Noticing: A Methodology for Researching My Own Learning. En F. Curtis (Ed.), *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics* (vol. 37, n.º 2, artículo 15). BSRLM.
- Huang, R. y Li, Y. (2012). What Matters Most: A Comparison of Expert and Novice Teachers' Noticing of Mathematics Classroom Events. *School Science and Mathematics*, 112(7), 420-432.
- Ivars, P., Fernández, C. y Llinares, S. (2020). A Learning Trajectory as a Scaffold for Pre-service Teachers' Noticing of Students' Mathematical Understanding. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 18(3), 529-548.
- Jacobs, J. K., Makoto, Y., Stigler, J. W. y Fernández, C. (1997). Japanese and American Teachers' Evaluations of Mathematics Lessons: A New Technique for Exploring Beliefs. *Journal of Mathematical Behavior*, 16(1), 7-24.
- Jacobs, J. K. y Morita, E. (2002). Japanese and American Teachers' Evaluations of Videotaped Mathematics Lessons. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33(3), 154-175.
- Jacobs, V. R. (2017). Complexities in Measuring Teacher Noticing: Commentary. En E. O. Schack, M. H. Fisher y J. A. Wilhelm (Eds.), *Teacher Noticing: Bridging and Broadening Perspectives, Contexts, and Frameworks* (pp. 273-279). Springer.
- Jacobs, V. R., Lamb, L. L. C. y Philipp, R. A. (2010). Professional Noticing of Children's Mathematical Thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, 41(2), 169-202.
- Jacobs, V. R., Lamb, L. L. C., Philipp, R. A. y Schappelle, B. P. (2011). Deciding How to Respond on the Basis of Children's Understandings. En M. G. Sherin, V. R. Jacobs y R. A. Philipp (Eds.), *Mathematics Teacher Noticing: Seeing through Teachers' Eyes* (pp. 97-116). Routledge.
- Jacobs, V. R. y Spangler, D. A. (2017). Research on Core Practices in K-12 Mathematics Teaching. En J. Cai (Ed.), *Compendium for Research in Mathematics Education* (pp. 766-792). National Council of Teachers of Mathematics.

- Jarauta, B., Hervás, G., Calduch, I. e Imbernón, F. (2021). El cambio en la formación de formadores: Un reto en la formación inicial del profesorado. En G. Cordero y P. Carnicero (Coords.), *¿Quién forma a los futuros docentes?: Un estudio conjunto en cuatro países* (pp. 27-37). Octaedro.
- Jaworski, B. (2008a). Development of the Mathematics Teacher Educator and Its Relation to Teaching Development. En B. Jaworski y T. Wood (Eds.), *The International Handbook of Mathematics Teacher Education: The Mathematics Teacher Educator as a Developing Professional* (vol. 4, pp. 335-361). Sense Publishers.
- Jaworski, B. (2008b). Mathematics Teacher Educator Learning and Development: An Introduction. En B. Jaworski y T. Wood (Eds.), *The International Handbook of Mathematics Teacher Education: The Mathematics Teacher Educator as a Developing Professional* (vol. 4, pp. 1-13). Sense Publishers.
- Jazby, D. (2020). Tactical Noticing of Student's Mathematical Thinking Mid-lesson. *Australian Primary Mathematics Classroom*, 25(1), 16-19.
- Jazby, D. (2023). Conceptualising Mathematics Teacher Noticing as a Perception/ Action Cycle. *Mathematics Education Research Journal*, 35(1, supl.), 133-155.
- Jazby, D., Widjaja, W., Xu, L. y Van Driel, J. H. (2023). Noticing Student Thinking under Pressure in Primary Mathematics and Science Lessons. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 21(2), 654-666.
- Jessup, N. A. (2018). *Understanding Teachers' Noticing of Children's Mathematical Thinking in Written Work from Different Sources* [Tesis doctoral, The University of North Carolina at Greensboro]. NC DOCKS. <https://libres.uncg.edu/ir/uncg/listing.aspx?styp=ti&id=23445>
- Kaiser, G., Blömeke, S., König, J., Busse, A., Döhrmann, M. y Hoth, J. (2017). Professional Competences of (Prospective) Mathematics Teachers: Cognitive versus Situated Approaches. *Educational Studies in Mathematics*, 94(2), 161-182.
- Kaiser, G., Busse, A., Hoth, J., König, J. y Blömeke, S. (2015). About the Complexities of Video-Based Assessments: Theoretical and Methodological Approaches to

- Overcoming Shortcomings of Research on Teachers' Competence. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 13(2), 369-387.
- Karsenty, R. (2018). Professional Development of Mathematics Teachers: Through the Lens of the Camera. En G. Kaiser, H. Forgasz, M. Graven, A. Kuzniak, E. Simmt y B. Xu (Eds.), *Invited Lectures from the 13th International Congress on Mathematical Education* (pp. 269-288). Springer.
- Karsenty, R. y Arcavi, A. (2017). Mathematics, Lenses and Videotapes: A Framework and a Language for Developing Reflective Practices of Teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 20, 433-455.
- Kazemi, E., Elliott, R., Mumme, J., Carroll, C., Lesseig, K. y Kelley-Petersen, M. (2011). Noticing Leaders' Thinking about Videocases of Teachers Engaged in Mathematics Tasks in Professional Development. En M. G. Sherin, V. R. Jacobs y R. A. Philipp (Eds.), *Mathematics Teacher Noticing: Seeing through Teachers' Eyes* (pp. 188-203). Routledge.
- Kerlinger, F. N. y Lee, H. B. (2002). *Investigación del comportamiento: Métodos de investigación en ciencias sociales* (4.^a ed.). McGraw Hill.
- Klymchuk, S. y Thomas, M. O. J. (2011). The Influence of Attention on Mathematical Knowledge of Teachers and Lecturers: A Comparison. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 42(7), 1011-1020.
- Kobiela, M., Din, S., Chandrasekhar, V. y Cameron, A. (2020). Characterizing Mathematics Teacher Educator Noticing and Its Relation to Novice Teacher Opportunities for Learning. En M. Gresalfi e I. S. Horn (Eds.), *Proceedings of the 14th International Conference of the Learning Sciences* (vol. 4, pp. 2441-2442). International Society of the Learning Science.
- König, J., Blömeke, S., Klein, P., Suhl, U., Busse, A. y Kaiser, G. (2014). Is Teachers' General Pedagogical Knowledge a Premise for Noticing and Interpreting Classroom Situations? A Video-Based Assessment Approach. *Teaching and Teacher Education*, 38, 76-88.

- König, J., Santagata, R., Scheiner, T., Adleff, A. K., Yang, X. y Kaiser, G. (2022). Teacher Noticing: A Systematic Literature Review of Conceptualizations, Research Designs, and Findings on Learning to Notice. *Educational Research Review*, 36, artículo 100453.
- Krupa, E., Huey, M., Lesseig, K., Casey, S. y Monson, D. (2017). Investigating Secondary Preservice Teacher Noticing of Students' Mathematical Thinking. En E. O. Schack, M. H. Fisher y J. A. Wilhelm (Eds.), *Teacher Noticing: Bridging and Broadening Perspectives, Contexts, and Frameworks* (pp. 49-72). Springer.
- Lampert, M., Franke, M. L., Kazemi, E., Ghouseini, H., Turrou, A. C., Beasley, H., Cunard, A. y Crowe, K. (2013). Keeping It Complex: Using Rehearsals to Support Novice Teacher Learning of Ambitious Teaching. *Journal of Teacher Education*, 64(3), 226-243.
- Larison, S., Richards, J. y Sherin, M. G. (2024). Tools for Supporting Teacher Noticing about Classroom Video in Online Professional Development. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 27(2), 139-161.
- Lee, M. Y. (2021). Using a Technology Tool to Help Pre-service Teachers Notice Students' Reasoning and Errors on a Mathematics Problem. *ZDM-Mathematics Education*, 53(1), 135-149.
- Leinhardt, G., Putnam, R. T., Stein, M. K. y Baxter, J. (1991). Where Subject Knowledge Matters. En J. E. Brophy (Ed.), *Advances in Research on Teaching* (vol. 2, pp. 87-113). JAI Press.
- Lesseig, K., Elliott, R., Kazemi, E., Kelley-Petersen, M., Campbell, M., Mumme, J. y Carroll, C. (2017). Leader Noticing of Facilitation in Videocases of Mathematics Professional Development. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 20(6), 591-619.
- Lincoln, Y. S. y Guba, E. G. (1985). *Naturalistic Inquiry*. SAGE.
- Llinares, S. (2018). Conocimiento, competencia docente del profesor de matemáticas y llegar a ser un formador de profesores. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 13, 1-3.

- López, M. L. (2021). Noticing: Una revisión bibliográfica sobre los orígenes y perspectivas actuales. *Revista Chilena de Educación Matemática*, 13(3), 79-92.
- Loucks-Horsley, S., Stiles, K. E., Mundry, S., Love, N. y Hewson, P. W. (2009). *Designing Professional Development for Teachers of Science and Mathematics* (3.^a ed.). Corwin.
- Louie, N., Adiredja, A. P. y Jessup, N. (2021). Teacher Noticing from a Sociopolitical Perspective: The FAIR Framework for Anti-deficit Noticing. *ZDM-Mathematics Education*, 53(1), 95-107.
- Luna, M. J. y Sherin, M. G. (2017). Using a Video Club Design to Promote Teacher Attention to Students' Ideas in Science. *Teaching and Teacher Education*, 66, 282-294.
- Maluangnont, S. (2015). *Teacher Candidates' Noticing of Instructional Features in the Context of an Ambitious Mathematics Teacher Education Program* [Tesis doctoral, Oregon State University]. ScholarsArchive@OSU. https://ir.library.oregonstate.edu/concern/graduate_thesis_or_dissertations/db78tf585
- Mamaqi, X. y Miguel, J. Á. (2011). El perfil profesional de los formadores de formación continua en España. *RELIEVE*, 17(1), artículo 2.
- Marbán, M. (2022). *Emociones de una formadora de maestros cuando enseña didáctica de las matemáticas en un contexto online sobrevenido* [Tesis doctoral, Universidad Rey Juan Carlos]. Repositorio Institucional de la Universidad Rey Juan Carlos. <https://burjcdigital.urjc.es/handle/10115/21111>
- Mason, J. (2002). *Researching Your Own Practice: The Discipline of Noticing*. Routledge.
- Mason, J. (2011). Noticing: Roots and Branches. En M. G. Sherin, V. R. Jacobs y R. A. Philipp (Eds.), *Mathematics Teacher Noticing: Seeing through Teachers' Eyes* (pp. 35-50). Routledge.
- Mason, J. (2016). Rising above a Cause-and-Effect Stance in Mathematics Education Research. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 19(4), 297-300.
- Mason, J. (2017). Probing Beneath the Surface of Experience. En E. O. Schack, M. H. Fisher y J. A. Wilhelm (Eds.), *Teacher Noticing: Bridging and Broadening Perspectives, Contexts, and Frameworks* (pp. 1-17). Springer.

- Mason, J. (2021). Learning about Noticing, by, and through, Noticing. *ZDM-Mathematics Education*, 53(1), 231-243.
- Mitchell, R. N. y Marin, K. A. (2015). Examining the Use of a Structured Analysis Framework to Support Prospective Teacher Noticing. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 18(6), 551-575.
- Monson, D., Krupa, E., Lesseig, K. y Casey, S. (2020). Developing Secondary Prospective Teachers' Ability to Respond to Student Work. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 23(2), 209-232.
- Moreno, M., Sánchez-Matamoros, G., Callejo, M. L., Pérez-Tyteca, P. y Llinares, S. (2021). How Prospective Kindergarten Teachers Develop Their Noticing Skills: The Instrumentation of a Learning Trajectory. *ZDM-Mathematics Education*, 53(1), 57-72.
- Muñoz-Catalán, M. C. y Monteiro, R. (2016). Afrontando la controversia en la investigación cualitativa: Discusión sobre la naturaleza de elementos metodológicos desde la investigación en educación. *Omnia*, 4, 23-30.
- National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. NCTM.
- National Council of Teachers of Mathematics (2014). *Principles to Actions: Ensuring Mathematical Success for All*. NCTM.
- Norton, A. H. y McCloskey, A. (2008). Teaching Experiments and Professional Development. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 11(4), 285-305.
- Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (2021). *Formadores de docentes en seis países de América Latina: Instituciones, prácticas y visiones*. UNESCO.
- Oslund, J. A. y Crespo, S. (2014). Classroom Photographs: Reframing What and How We Notice. *Teaching Children Mathematics*, 20(9), 564-572.
- Osmanoğlu, A., Işıksal, M. y Koç, Y. (2015). Getting Ready for the Profession: Prospective Teachers' Noticing Related to Teacher Actions. *Australian Journal of Education*, 40(2), 29-51.

- Pascual, I. (2021). *El conocimiento del formador de maestros en la etapa de formación inicial, en relación con la enseñanza de la didáctica de las matemáticas: Un estudio de caso* [Tesis doctoral, Universidad de Huelva]. Repositorio Institucional de la Universidad de Huelva. <http://hdl.handle.net/10272/20208>
- Pascual, I., Montes, M. y Contreras, L. C. (2019). Un acercamiento al conocimiento del formador de profesores de matemáticas. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 473-482). SEIEM.
- Pérez-Serrano, G. (1994). *Investigación cualitativa: Retos e interrogantes. I. Métodos*. La Muralla.
- Philipp, R., Jacobs, V. R. y Sherin, M. G. (2014). Noticing of Mathematics Teachers. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 465-466). Springer.
- Pocalana, G. y Robutti, O. (2022). Mathematics Teacher Educators' Work to Foster an Inquiry Community. En C. Fernández, S. Llinares, Á. Gutiérrez y N. Planas (Eds.), *Proceedings of the 45th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 3, pp. 323-330). PME.
- Pochulu, M., Font, V. y Rodríguez, M. (2016). Desarrollo de la competencia en análisis didáctico de formadores de futuros profesores de matemática a través del diseño de tareas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 19(1), 71-98.
- Pouta, M., Lehtinen, E. y Palonen, T. (2021). Student Teachers' and Experienced Teachers' Professional Vision of Students' Understanding of the Rational Number Concept. *Educational Psychology Review*, 33(1), 109-128.
- Rassi, D. (2020). *Opportunities to Notice and Factors Influencing Preservice Mathematics Teachers' Noticing* [Tesis doctoral, Illinois State University]. ProQuest LLC. <https://www.proquest.com/openview/38a4a73606a122b65223b697f3d4e298/1?pq-origsite=gscholar&cbl=18750&diss=y>
- Real Academia Española (s. f.). Formador. En *Diccionario de la lengua española*. Recuperado el 20 de julio de 2022, de <https://dle.rae.es/formador?m=form>

- Real Academia Española (s. f.). Formar. En *Diccionario de la lengua española*. Recuperado el 20 de julio de 2022, de <https://dle.rae.es/formar?m=form>
- Real Academia Española (s. f.). Notar. En *Diccionario de la lengua española*. Recuperado el 15 de julio de 2022, de <https://dle.rae.es/notar?m=form>
- Reichardt, C. S. y Cook, T. D. (1986). Hacia una superación del enfrentamiento entre los métodos cuantitativos y los cualitativos. En T. D. Cook y C. S. Reichardt (Eds.), *Métodos cualitativos y cuantitativos en investigación evaluativa* (pp. 25-58). Ediciones Morata.
- Reuker, S. (2017). The Noticing of Physical Education Teachers: A Comparison of Groups with Different Expertise. *Physical Education and Sport Pedagogy*, 22(2), 150-170.
- Ricoy, C. (2006). Contribución sobre los paradigmas de investigación. *Educação*, 31(1), 11-22.
- Rodríguez, G., Gil, J. y García, E. (1999). *Metodología de la investigación cualitativa* (2.^a ed.). Ediciones Aljibe.
- Rojas, F. y Deulofeu, J. (2015). El formador de profesores de matemática: Un análisis de las percepciones de sus prácticas instruccionales desde la «tensión» estudiante-formador. *Enseñanza de las Ciencias*, 33(1), 47-61.
- Roth-McDuffie, A., Foote, M. Q., Bolson, C., Turner, E. E., Aguirre, J. M., Bartell, T. G., Drake, C. y Land, T. (2014). Using Video Analysis to Support Prospective K-8 Teachers' Noticing of Students' Multiple Mathematical Knowledge Bases. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 17(3), 245-270.
- Ruiz-Olabuénaga, J. I. (2012). *Metodología de la investigación cualitativa* (5.^a ed.). Universidad de Deusto.
- Sánchez, V. y García, M. (2004). Formadores de profesores de matemáticas: Una aproximación teórica a su conocimiento profesional. *Revista de Educación*, 333, 481-493.

- Sánchez-Matamoros, G., Fernández, C. y Llinares, S. (2015). Developing Pre-service Teachers' Noticing of Students' Understanding of the Derivative Concept. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 13(6), 1305-1329.
- Sánchez-Matamoros, G., Moreno, M. y Valls, J. (2021). Instrumental Genesis of a Learning Trajectory: The Case of Pedro's Professional Noticing. *Acta Scientiae*, 23(7), 91-119.
- Sánchez-Santamaría, J. (2013). Paradigmas de investigación educativa: De las leyes subyacentes a la modernidad reflexiva. *Entelequia*, 16, 91-102.
- Santagata, R. (2011). From Teacher Noticing to a Framework for Analyzing and Improving Classroom Lessons. En M. G. Sherin, V. R. Jacobs y R. A. Philipp (Eds.), *Mathematics Teacher Noticing: Seeing through Teachers' Eyes* (pp. 152-168). Routledge.
- Santagata, R., König, J., Scheiner, T., Nguyen, H., Adleff, A. K., Yang, X. y Kaiser, G. (2021). Mathematics Teacher Learning to Notice: A Systematic Review of Studies of Video-Based Programs. *ZDM-Mathematics Education*, 53(1), 119-134.
- Santagata, R., Zannoni, C. y Stigler, J. W. (2007). The Role of Lesson Analysis in Pre-service Teacher Education: An Empirical Investigation of Teacher Learning from a Virtual Video-Based Field Experience. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 10(2), 123-140.
- Santos, L. (2002). A investigação e os seus implícitos: Contributos para uma discussão. En J. Murillo, P. M. Arnal, R. Escolano, J. M. Gairín y L. Blanco (Eds.), *Actas del VI Simposio de la SEIEM* (pp. 157-170). Universidad de La Rioja y SEIEM.
- Schack, E. O., Fisher, M. H., Thomas, J. N., Eisenhardt, S., Tassell, J. y Yoder, M. (2013). Prospective Elementary School Teachers' Professional Noticing of Children's Early Numeracy. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 16(5), 379-397.
- Schack, E. O., Fisher, M. H. y Wilhelm, J. A. (Eds.). (2017). *Teacher Noticing: Bridging and Broadening Perspectives, Contexts, and Frameworks*. Springer.
- Scheiner, T. (2016). Teaching Noticing: Enlightening or Blinding? *ZDM-Mathematics Education*, 48(1-2), 227-238.

- Scherrer, J. y Stein, M. K. (2013). Effects of a Coding Intervention on What Teachers Learn to Notice during Whole-Group Discussion. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 16(2), 105-124.
- Schifter, D. (2011). Examining the Behavior of Operations: Noticing Early Algebraic Ideas. En M. G. Sherin, V. R. Jacobs y R. A. Philipp (Eds.), *Mathematics Teacher Noticing: Seeing through Teachers' Eyes* (pp. 204-220). Routledge.
- Schoenfeld, A. (1999). Models of Teaching Process. *Journal of Mathematical Behavior*, 18(3), 243-261.
- Seckel, M. J. y Font, V. (2020). Competencia reflexiva en formadores del profesorado de matemática. *Magis, Revista Internacional de Investigación en Educación*, 12(25), 127-144.
- Sherin, B. y Star, J. R. (2011). Reflections on the Study of Teacher Noticing. En M. G. Sherin, V. R. Jacobs y R. A. Philipp (Eds.), *Mathematics Teacher Noticing: Seeing through Teachers' Eyes* (pp. 66-78). Routledge.
- Sherin, M. G. (2001). Developing a Professional Vision of Classroom Events. En T. Wood, B. S. Nelson y J. Warfield (Eds.), *Beyond Classical Pedagogy: Teaching Elementary School Mathematics* (pp. 75-93). Lawrence Erlbaum.
- Sherin, M. G. (2007). The Development of Teachers' Professional Vision in Video Clubs. En R. Goldman, R. Pea, B. Barron y S. J. Derry (Eds.), *Video Research in Learning Science* (pp. 383-395). Lawrence Erlbaum.
- Sherin, M. G. (2017). Exploring the Boundaries of Teacher Noticing: Commentary. En E. O. Schack, M. H. Fisher y J. A. Wilhelm (Eds.), *Teacher Noticing: Bridging and Broadening Perspectives, Contexts, and Frameworks* (pp. 401-408). Springer.
- Sherin, M. G., Jacobs, V. R. y Philipp, R. A. (Eds.). (2011a). *Mathematics Teacher Noticing: Seeing through Teachers' Eyes*. Routledge.
- Sherin, M. G., Jacobs, V. R. y Philipp, R. A. (2011b). Situating the Study of Teacher Noticing. En M. G. Sherin, V. R. Jacobs y R. A. Philipp (Eds.), *Mathematics Teacher Noticing: Seeing through Teachers' Eyes* (pp. 3-13). Routledge.

- Sherin, M. G., Linsenmeier, K. A. y Van Es, E. A. (2009). Selecting Video Clips to Promote Mathematics Teachers' Discussion of Student Thinking. *Journal of Teacher Education*, 60(3), 213-230.
- Sherin, M. G. y Russ, R. S. (2014). Teacher Noticing via Video: The Role of Interpretative Frames. En B. Calandra y P. J. Rich (Eds.), *Digital Video for Teacher Education: Research and Practice* (pp. 3-20). Routledge.
- Sherin, M. G., Russ, R. S. y Colestock, A. A. (2011). Accessing Mathematics Teachers' In-the-Moment Noticing. En M. G. Sherin, V. R. Jacobs y R. A. Philipp (Eds.), *Mathematics Teacher Noticing: Seeing through Teachers' Eyes* (pp. 79-94). Routledge.
- Sherin, M. G. y Van Es, E. A. (2005). Using Video to Support Teachers' Ability to Notice Classroom Interactions. *Journal of Technology and Teacher Education*, 13(3), 475-491.
- Sherin, M. G. y Van Es, E. A. (2009). Effects of Video Club Participation on Teachers' Professional Vision. *Journal of Teacher Education*, 60(1), 20-37.
- Shulman, L. S. (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.
- Shulman, L. S. (1987). Knowledge and Teaching: Foundations on the New Reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1-22.
- Simpson, A. y Haltiwanger, L. (2017). "This Is the First Time I've Done This": Exploring Secondary Prospective Mathematics Teachers' Noticing of Students' Mathematical Thinking. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 20(4), 335-355.
- Smith, K. (2005). Teachers Educators' Expertise: What Do Novice Teachers and Teacher Educators Say? *Teaching and Teacher Education*, 21(2), 177-192.
- Smith, M. y Sherin, M. G. (2019). *The Five Practices in Practice: Successfully Orchestrating Mathematical Discourse in Your Middle School Classroom*. Corwin Press.
- Smith, W., Beattie, H. L., Ren, L. y Heaton, R. M. (2022). The Evolution of a Child Study Assignment: A Potential Approach to Developing Elementary Mathematics Teachers' Professional Noticing. *Journal of Early Childhood Teacher Education*, 43(3), 363-388.

- Stahnke, R. y Blömeke, S. (2021). Novice and Expert Teachers' Noticing of Classroom Management in Whole-Group and Partner Work Activities: Evidence from Teachers' Gaze and Identification of Events. *Learning and Instruction*, 74, artículo 101464.
- Stahnke, R., Schueler, S. y Roesken-Winter, B. (2016). Teachers' Perception, Interpretation, and Decision-Making: A Systematic Review of Empirical Mathematics Education Research. *ZDM-Mathematics Education*, 48(1-2), 1-27.
- Star, J. R., Lynch, K. y Perova, N. (2011). Using Video to Improve Preservice Mathematics Teachers' Abilities to Attend to Classroom Features: A Replication Study. En M. G. Sherin, V. R. Jacobs y R. A. Philipp (Eds.), *Mathematics Teacher Noticing: Seeing through Teachers' Eyes* (pp. 117-133). Routledge.
- Star, J. R. y Strickland, S. K. (2008). Learning to Observe: Using Video to Improve Preservice Mathematics Teachers' Ability to Notice. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 11(2), 107-125.
- Stockero, S. L. (2008). Using a Video-Based Curriculum to Develop a Reflective Stance in Prospective Mathematics Teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 11(5), 373-394.
- Stockero, S. L. (2013). Student Teacher Noticing during Mathematics Instruction. En A. M. Lindmeier y A. Heinze (Eds.), *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 4, pp. 249-256). PME.
- Stockero, S. L., Leatham, K. R., Van Zoest, L. R. y Peterson, B. E. (2017). Noticing Distinctions among and within Instances of Student Mathematical Thinking. En E. O. Schack, M. H. Fisher y J. A. Wilhelm (Eds.), *Teacher Noticing: Bridging and Broadening Perspectives, Contexts, and Frameworks* (pp. 467-480). Springer.
- Stockero, S. L. y Rupnow, R. L. (2017). Measuring Noticing within Complex Mathematics Classroom Interactions. En E. O. Schack, M. H. Fisher y J. A. Wilhelm (Eds.), *Teacher Noticing: Bridging and Broadening Perspectives, Contexts, and Frameworks* (pp. 281-301). Springer.

- Swennen, A., Jones, K. y Volman, M. (2010). Teacher Educators: Their Identities, Sub-identities and Implications for Professional Development. *Professional Development in Education*, 36(1-2), 131-148.
- Teuscher, D., Leatham, K. R. y Peterson, B. E. (2017). From a Framework to a Lens: Learning to Notice Student Mathematical Thinking. En E. O. Schack, M. H. Fisher y J. A. Wilhelm (Eds.), *Teacher Noticing: Bridging and Broadening Perspectives, Contexts, and Frameworks* (pp. 31-48). Springer.
- Teuscher, D. y Switzer, J. M. (2018). Secondary Mathematics Student Teachers' Types of Noticing while Teaching. En T. E. Hodges, G. J. Roy y A. M. Tyminski (Eds.), *Proceedings of the 40th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 695-702). PME-NA.
- Tran, T. L. y Wright, R. J. (2017). Teachers' Professional Noticing from a Perspective of Key Elements of Intensive, One-to-One Intervention. En E. O. Schack, M. H. Fisher y J. A. Wilhelm (Eds.), *Teacher Noticing: Bridging and Broadening Perspectives, Contexts, and Frameworks* (pp. 481-504). Springer.
- Turner, E. E., Drake, C., Roth-McDuffie, A., Aguirre, J., Bartell, T. G. y Foote, M. Q. (2012). Promoting Equity in Mathematics Teacher Preparation: A Framework for Advancing Teacher Learning of Children's Multiple Mathematics Knowledge Bases. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 15(1), 67-82.
- Universidad de Cambridge (s. f.). Notice. En *Cambridge Dictionary*. Recuperado el 15 de julio de 2022, de <https://dictionary.cambridge.org/dictionary/english/notice>
- Van der Klink, M., Kools, Q., Avissar, G., White, S. y Sakata, T. (2017). Professional Development of Teacher Educators: What Do They Do? Findings from an Explorative International Study. *Professional Development in Education*, 43(2), 163-178.
- Van Es, E. A. (2009). Participants' Roles in the Context of a Video Club. *Journal of the Learning Sciences*, 18(1), 100-137.

- Van Es, E. A. (2011). A Framework for Learning to Notice Student Thinking. En M. G. Sherin, V. R. Jacobs y R. A. Philipp (Eds.), *Mathematics Teacher Noticing: Seeing through Teachers' Eyes* (pp. 134-151). Routledge.
- Van Es, E. A., Cashen, M., Barnhart, T. y Auger, A. (2017). Learning to Notice Mathematics Instruction: Using Video to Develop Preservice Teachers' Vision of Ambitious Pedagogy. *Cognition and Instruction*, 35(3), 165-187.
- Van Es, E. A., Hand, V. y Mercado, J. (2017). Making Visible the Relationship between Teachers' Noticing for Equity and Equitable Teaching Practice. En E. O. Schack, M. H. Fisher y J. A. Wilhelm (Eds.), *Teacher Noticing: Bridging and Broadening Perspectives, Contexts, and Frameworks* (pp. 251-270). Springer.
- Van Es, E. A. y Sherin, M. G. (2002). Learning to Notice: Scaffolding New Teachers' Interpretations of Classroom Interactions. *Journal of Technology and Teacher Education*, 10(4), 571-596.
- Van Es, E. A. y Sherin, M. G. (2008). Mathematics Teachers' "Learning to Notice" in the Context of a Video Club. *Teaching and Teacher Education*, 24(2), 244-276.
- Van Es, E. A. y Sherin, M. G. (2010). The Influence of Video Clubs on Teachers' Thinking and Practice. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 13(2), 155-176.
- Van Es, E. A. y Sherin, M. G. (2021). Expanding on Prior Conceptualizations of Teacher Noticing. *ZDM-Mathematics Education*, 53(1), 7-27.
- Vanassche, E. (2022). Four Propositions on How to Conceptualize, Research, and Develop Teacher Educator Professionalism. *Frontiers in Education*, 7, artículo 1036949.
- Vanassche, E., Kidd, W. y Murray, J. (2019). Articulating, Reclaiming and Celebrating the Professionalism of Teacher Educators in England. *European Journal of Teacher Education*, 42(4), 478-491.
- Wager, A. A. (2014). Noticing Children's Participation: Insights into Teacher Positionality toward Equitable Mathematics Pedagogy. *Journal for Research in Mathematics Education*, 45(3), 312-350.

- Walkoe, J. (2015). Exploring Teacher Noticing of Student Algebraic Thinking in a Video Club. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 18(6), 523-550.
- Walkoe, J. y Levin, D. M. (2018). Using Technology in Representing Practice to Support Preservice Teachers' Quality Questioning: The Roles of Noticing in Improving Practice. *Journal of Technology and Teacher Education*, 26(1), 127-147.
- Wallin, A. J. y Amador, J. M. (2019). Supporting Secondary Rural Teachers' Development of Noticing and Pedagogical Design Capacity through Video Clubs. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 22(5), 515-540.
- Wenger, E. (1998). *Communities of Practice: Learning, Meaning, and Identity*. Cambridge University Press.
- Yang, Y. y Ricks, T. E. (2012). How Crucial Incidents Analysis Support Chinese Lesson Study. *International Journal for Lesson and Learning Studies*, 1(1), 41-48.
- Zapatera, A. y Callejo, M. L. (2013). Preservice Primary Teachers' Noticing of Students' Generalization Process. En A. M. Lindmeier y A. Heinze (Eds.), *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 4, pp. 425-432). PME.
- Zaslavsky, O. y Leikin, R. (2004). Professional Development of Mathematics Teacher Educators: Growth through Practice. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 7(1), 5-32.
- Zopf, D. A. (2010). *Mathematical Knowledge for Teaching Teachers: The Mathematical Work of and Knowledge Entailed by Teacher Education* [Tesis doctoral, University of Michigan]. Deep Blue Repositories. <https://deepblue.lib.umich.edu/handle/2027.42/77702>

Resumen de la tesis / Abstract

RESUMEN DE LA TESIS

En el transcurso de los últimos lustros, el auge de la investigación en el campo de la educación matemática con relación al constructo de *noticing* ha redundado en un sinnúmero de publicaciones sobre esta competencia profesional docente. Empero, la atención puesta en los formadores de matemáticas y su didáctica en tales estudios ha sido ínfima. Por ello, la presente tesis doctoral se ocupa de conocer cómo es el *noticing* de dichos profesionales de la enseñanza, concretamente de aquellos encargados de formar a futuros maestros de Educación Primaria. Para alcanzar esta meta, se examina qué y cómo notan e interpretan seis formadores, que presentan perfiles profesionales diferentes, al observar la práctica de enseñanza de otro formador mediante grabaciones de vídeo. El diseño metodológico que posibilita la obtención de dicha información se ha creado *ad hoc* y contempla inspeccionar el desempeño de los participantes en dos momentos distintos atendiendo a un paradigma de investigación interpretativo que se sirve principalmente de un enfoque cualitativo. De igual modo, se analiza cómo repercuten la formación académica y la experiencia docente de los formadores en su *noticing* y cómo evoluciona este a partir de una mínima inducción provista al visionar las grabaciones por segunda vez. Los principales resultados logrados señalan que los formadores poseen una capacidad mayor para detectar eventos que para interpretarlos, aunque en ambos casos es reducida en una primera observación para casi todos ellos. Tras una leve inducción, en general mejoran en ambos planos, aunque menos en el de las interpretaciones, teniendo aún un amplio margen para seguir progresando en los componentes valorados de su competencia, si bien se ha visto que el *noticing* de ciertos MTE prácticamente toca techo en algunos elementos considerados, incluso en la primera observación en el caso de uno de ellos. Así pues, en esta tesis doctoral se comprueba que no todos los formadores tienen su *noticing* desarrollado de igual forma por el mero hecho de realizar la misma labor educativa, así como que el perfil profesional de cada uno incide sustancialmente en dicha competencia y en la posibilidad de que evolucione, habiéndose podido advertir que a mayor formación matemática y didáctico-matemática —cobrando una relevancia especial situarse en un paradigma de investigación del área de la didáctica de las matemáticas— y mayor experiencia docente como formador, más factible es contar con un *noticing* elevado y poder desarrollarlo más fácilmente.

Palabras clave: competencia *noticing*, formador —de matemáticas y su didáctica—, educación matemática.

ABSTRACT

During the last years, the upsurge of the research in the field of mathematics education as regards the construct of noticing has given rise to an endless number of publications based on this professional teacher competence. Nonetheless, the attention drawn to mathematics teacher educators in such studies has been negligible. Hence, the current doctoral thesis undertakes the exploration of these teaching professionals' noticing, specifically of those who instruct future Elementary Education teachers. In order to achieve this goal, it has been scrutinized what and how six teacher educators –with distinct professional profiles– notice and interpret when observing another teacher educator's teaching practice by means of video recordings. The methodological design which enables to gather such information has been devised ad hoc and includes the inspection of the participants' performance at two different points in time grounded on an interpretative research paradigm founded on a predominantly qualitative approach. Furthermore, it analyzes how the teacher educators' academic training and teaching experience influence their noticing and how it evolves after providing them with minimum support when watching the video recordings for the second time. The main results obtained manifest that the teacher educators possess a better capability to detect events than to interpret them, even though reduced in both cases during the first observation for almost all of them. After a slight induction, they improve in both dimensions in general, albeit to a lesser extent in the sphere of interpretations, still having much room for improvement in the evaluated components of their competence, although it has been appreciated that certain MTE virtually peaks in some examined aspects, even during the first observation in the case of one of them. Therefore, this doctoral thesis verifies that not all the teacher educators have developed their noticing similarly by the mere fact that they perform the same educational task, as well as that their professional profile impacts substantially on this competence and on the possibility that it evolves, having perceived that the higher the training in mathematics and in the didactics of mathematics –focusing on a research paradigm within the subject of the didactics of mathematics being particularly relevant– together with a large experience as a teacher educator, the more feasible it is to possess a higher noticing and to develop it more easily.

Keywords: noticing, mathematics teacher educator, mathematics education.

Anexos

ANEXO 1

Cuestionario para la selección de la muestra

Nota: Solo se incorporan las preguntas del cuestionario que finalmente se han empleado para la selección de los participantes.

CUESTIONARIO PARA FORMADORES DE MATEMÁTICAS Y SU DIDÁCTICA DE FUTUROS MAESTROS DE EDUCACIÓN PRIMARIA

El presente cuestionario se enmarca en la fase inicial de recogida de datos de la tesis doctoral en curso titulada «La competencia *noticing* del formador de matemáticas y su didáctica de futuros maestros de Educación Primaria», desarrollada por Ignacio Fernández Balboa en la Universidad Complutense de Madrid y dirigida por la doctora Nuria Joglar Prieto (Universidad Complutense de Madrid) y por el doctor Jon Star (Harvard University).

Este cuestionario está dirigido a los profesores universitarios que imparten matemáticas y su didáctica durante el curso académico 2018-2019 a alumnos que cursan estudios para ser maestros de Educación Primaria en alguna universidad pública de la Comunidad de Madrid.

Dado que usted forma parte de dichos formadores, quienes conforman un total de 39 sujetos, solicitamos su colaboración mediante la cumplimentación de este cuestionario. La información que recabemos nos servirá para seleccionar posteriormente una muestra de formadores que participaría en las sucesivas fases de recogida de datos de la tesis, centradas en su competencia *noticing*. Por consiguiente, quizá más adelante contactaríamos con usted de nuevo para plantearle la posibilidad de participar en el estudio si estuviera interesado y detallarle en qué consistiría dicha participación.

El tiempo estimado para rellenar el cuestionario es de 10 minutos y toda la información obtenida a través del mismo será empleada exclusivamente con fines relativos a la investigación.

FORMACIÓN ACADÉMICA

Pregunta 5. CARRERA

Indique la denominación de la carrera —o carreras— que ha estudiado y en qué Universidad.

Pregunta 6. MÁSTER

¿Ha cursado algún máster?

En caso afirmativo, indique la denominación del máster —o másteres— que ha estudiado y en qué Universidad.

Pregunta 7. DOCTORADO

¿Tiene el grado de doctor?

En caso afirmativo, indique la especialidad del doctorado, así como la Universidad en la que lo obtuvo y en qué año.

EXPERIENCIA DOCENTE

Pregunta 10. UNIVERSIDAD

¿En qué Universidad trabaja actualmente?

Pregunta 13. EXPERIENCIA COMO FORMADOR

¿Cuántos años de experiencia tiene como formador de matemáticas y su didáctica de futuros maestros de Educación Primaria? [*Cuente los años en los que ha impartido clase como años completos aunque no haya impartido clase el curso entero*].

Pregunta 14. EXPERIENCIA COMO MAESTRO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

¿Ha trabajado como maestro de Educación Primaria?

En caso afirmativo, indique en qué años y qué asignaturas impartió.

Pregunta 15. EXPERIENCIA COMO PROFESOR DE EDUCACIÓN SECUNDARIA

¿Ha trabajado como profesor de Educación Secundaria?

En caso afirmativo, indique en qué años y qué asignaturas impartió.

ANEXO 2

Transcripción de los vídeos mostrados a los participantes

Nota: El texto presentado entre corchetes en la transcripción se corresponde con información incluida por el investigador.

TRANSCRIPCIÓN DEL VÍDEO 1

Fragmento 1

[F = Formadora del vídeo].

F: Bueno, entonces os voy a dar el guion y empezáis a trabajar y, al final, los últimos 15 minutos, hacemos la puesta en común. El guion de la actividad aparece aquí en el campus, pone la fecha, ¿vale?, «actividad para la sesión del 19 de septiembre». Lo voy a leer porque está en inglés, por si alguno tuviera alguna dificultad, lo leo y os ponéis a trabajar, ¿vale?

Todo el mundo en la mesa tiene un montón de palillos y varias cintas de estas, ¿no?, elásticas. Si alguien necesita más cintas me las pide, palillos no, son los que os he puesto, ¿vale?, es con lo que tenéis que trabajar. El problema es que yo he comprado una caja de palillos en Supeco y resulta que mis compañeros lo compran en Mercadona y me dicen que las cajas de palillos que ponen 800 palillos del Mercadona traen más y que les sale a cuenta, y que cuando van a comprar materiales —porque a veces tenemos que comprar nosotros los materiales— pues que merece la pena. Yo no pude ir a Mercadona, fui a Supeco, pone que son 800, pero no sé si me han timado o no me han timado. Entonces, para hacer un control de calidad, hacer una estimación, que luego, bueno, los que hayáis hecho Matemáticas de Ciencias Sociales pues sabéis hacer un contraste de hipótesis y tal, pero bueno, lo primero que tengo que hacer es hacer una estimación de cuántos hay, ¿no? Entonces, los he repartido para no contarlos yo y la idea es ver cuántos hay.

Entonces, el guion de la actividad, tal y como aparece aquí... [espera a que cargue el ordenador]. Aquí está el guion. Esta actividad —esperad que la amplió un poco— está escaneada de un libro muy bueno que utilizan en los últimos años

en Estados Unidos para formar profesores de primaria. Lo bueno del libro es que, además de los contenidos teóricos, más de la mitad del libro son actividades para llevar al aula-taller como estamos haciendo aquí, ¿vale? Entonces, una de las actividades iniciales para el trabajo con el número, que es con lo que estamos empezando nosotros, es esta de los palillos, ¿vale?

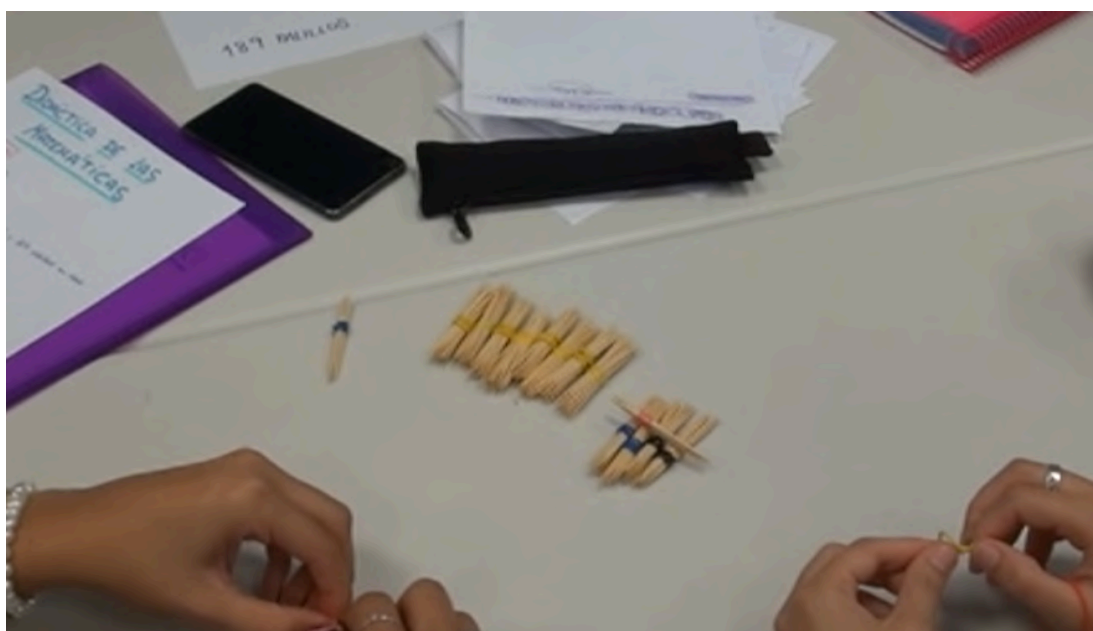
Entonces, aquí la pregunta es «cuántos», cuántos palillos, ¿no?, que es lo que os he preguntado a vosotros, ¿no?, cuántos. Entonces, cada grupo participando en esta actividad tiene un montón de palillos y luego tiene algo para atarlos, ¿no?, *rubber bands*, pues cintas de estas elásticas. Los materiales ya los tenéis. El objetivo de la actividad es ayudaros a entender el desarrollo de la escritura de los números tal y como los utilizamos nosotros en nuestro sistema de numeración, ¿vale? Entonces, primero, organiza los palillos de forma que visualmente puedas ver más o menos cuántos hay; usa las bandas elásticas, si te ayudan, para organizarlos de manera que así, de un vistazo, puedas decir cuántos tienes, primero los cuentas, lo organizas, piensas cómo organizarlo, pero la cosa es que la organización que tú tengas en la mesa te permita de un vistazo recordar cuántos hay sin necesidad de haberlo apuntado, ¿no?, y que, si yo me paso por allí, me podáis decir: «mira, hay no sé cuántos, porque...», lo veo porque lo hemos organizado así», ¿vale? Luego, reflexiona sobre si la manera en la que lo has organizado corresponde a cómo escribirías tú luego los numerales para representar esa cantidad de palillos. Después, tienes que juntar tus palillos con los de un grupo de al lado, ¿vale?, por ejemplo, vosotros con vosotros y así, cada dos grupos tienen que juntar los palillos que tienen y decidir cuántos tienen en común, ¿vale?, cuántos tienen en total. Y al final, tenemos que juntarlos todos y de una forma ágil, sin tener que volver a contarlos todos, tenemos que saber cuántos palillos hay en total en la clase repartidos, ¿vale? O sea que, primero, cada grupo tiene que saber cuántos tiene y tiene que generar una estrategia para, de manera rápida, mirar en la mesa y ver cuántos hay; después, reflexionar sobre si la manera en la que lo coloca cuando uno luego escribe, imaginaos, «tengo 72, pues cómo se escribe 72: siete, dos», pues la manera en la que lo coloco me ayuda con la escritura o no, no tiene por qué, se reflexiona un poco sobre eso; y cuando hayáis terminado esa parte, llamáis al grupo de al lado y decís: «venga, vamos a ver cuántos tenemos en total, visualmente, cómo lo organizasteis vosotros, cómo

lo organicé yo, a ver cómo lo tengo», ¿vale?; y luego todos. Tenéis un cuarto de hora, ¿vale?

Fragmento 2

[F = Formadora del vídeo]. [A = Alumnos].

- F: Necesito saber si habéis tenido que llegar a algún acuerdo entre los grupos o...
- A: Sí, claro, todo ha sido un consenso, todo ha sido un consenso.
- F: Ah, vale, ha sido un consenso. ¿Qué acuerdo habéis tenido que...?
- A: Hemos explicado cada uno pues lo que significaba cada..., cada gomita.
- F: Y, por ejemplo, ¿vosotros de cuánto en cuánto lo habíais agrupado? Erais los de 15, 10, 5, ¿no?
- A: Sí.
- F: ¿Y vosotros?
- A: 20, 10 y 4.
- F: 20, 10 y 4. Entonces, ¿habéis tenido que llegar a algún acuerdo alguno para reordenar?
- A: No, porque nos ha venido muy bien.
- F: ¿Os ha venido bien?
- A: Es que hemos sido muy inteligentes cogiendo el amarillo para los grandes [se refiere a gomas elásticas de color amarillo].
- F: Ahora los grandes de qué son, ¿de 20?
- A: De 20 y de 15, aquí están mezclados. ¿O los tenemos que reorganizar?



- F: Esto es superinteligente, ¿no? O sea, yo veo aquí..., digo: «en los amarillos, algunos tienen 20 y algunos tienen 15, búscate la vida Nuria».

- A: Pero son amarillos.
- F: Ya, pero entonces yo no sé... Yo digo: «vale, yo puedo ver 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 grupos amarillos», ¿no? Y ahora digo: «como mucho serán 160, si son todos de 20, pero... no necesariamente son 160, pueden ser menos».
- A: Bueno, pero como no lo sabes...
- F: ¿Entonces cómo sé cuántos hay?
- A: Te lo estamos diciendo, tienes que confiar en nosotros.
- F: No, en matemáticas la confianza no vale, uno tiene que...
- A: Es que no sé, no lo entiendo. ¿Lo tenemos que reorganizar?
- F: Vosotros ya sabéis cuántos palillos tenéis, pero ahora, visualmente, tenéis que poder contarme a mí cómo sabéis que hay ese número de palillos, ¿no?
- A: Ah, pues habría que... ¿Y no podemos quitar las gomas y reorganizarlo?
- F: Sí, sí, sí, yo no dije que no pudierais quitar las gomas.
- A: Aaaaah.
- F: ¿Alguien dijo que no se podían quitar?
- A: Y nosotros diciendo que no se podían quitar las gomas...
- F: Y una duda más. Alguno de vosotros..., por separado, ¿no?, cuando lo teníais..., habéis escrito la cantidad que teníais, ¿no? Eh, 109 teníais uno...
- A: 104 y 85.
- F: Por ejemplo, el 85 se escribe con un 8 y un 5. Ese 8 y ese 5, ¿estaban representados de alguna forma en...?
- A: No.
- F: No, vale. Y vosotros, la misma pregunta con lo vuestro.
- A: No.
- F: No había un patrón en cómo lo habíais representado, vale, ok.
- A: ¿Pero quieres que busquemos?
- F: Quiero que reflexionéis sobre eso, pero ahora lo vamos a poner en común, ¿vale?
- A: Vale.
- F: ¿Ha sido operativo el que ellos hayan hecho 15, 10, 5... y vosotras tuvieras 20...? ¿Eso ha ayudado a la hora de ponerlo en común?
- A: No, porque ahora hay que hacerlo otra vez.
- F: Ahora hay que volverlo a hacer...

Fragmento 3

[F = Formadora del vídeo]. [A = Alumnos].

- F: Me tenéis que decir cuántos palillos había en cada grupo inicialmente, antes de juntaros dos grupos, ¿vale? Entonces, por ejemplo, vosotros.
- A: 87.
- F: 87 [lo escribe en la pizarra]. Estamos de acuerdo, yo utilizo la escritura estándar que vosotros habéis visto en primaria, secundaria, bachillerato y al llegar aquí, ¿vale? Escritura estándar de nuestro sistema de numeración en nuestro contexto. Ese grupo, 87. ¿Cómo habíais hecho los grupos?
- A: Pues hemos hecho, eh..., tres grupos de 20.
- F: Tres grupos de 20, ¿cómo lo puedo poner? [Escribe un 3 en la pizarra].
- A: Eh..., tres rosas.
- A: 3×20 .
- F: ¿Tres rosas?
- A: Sí.
- A: No.
- F: Si pongo tres rosas... ¿Todo el mundo que ha utilizado gomitas rosas ha atado 20?
- A: No.
- F: ¿Otras personas que han atado 20 han usado otro color?
- A: Sí.
- F: Uf, el color no me vale. ¿Cómo lo pongo?
- A: 20×3 .
- A: 3×20 .
- F: 3 grupos de 20, ¿no? 3×20 . [Escribe 3×20]. Y luego...
- A: Pon en el 3 «color rosa» o algo así. Entre paréntesis.
- F: Vale, vale. [Pinta una raya rosa sobre el 20]. Y luego... Esto son 60.
- A: 9×3 .
- F: Y luego 9 grupos de 3, ¿no? [Escribe + 9]. ¿O 3 grupos de 9? [Borra el 9].
- A: 3×9 .
- F: 3 grupos de 9 y el 9 lo habéis puesto de otro color, ¿vale? [Escribe 3×9].
- A: Sí.

- F: ¿Alguien más ha utilizado grupos de 20?
- A: Nosotros.
- F: Varios. ¿Alguien más ha utilizado grupos de 9? [Destaca con la voz el número 9].
- A: Nosotras.
- F: Vosotras, vale, y vosotras también, vale. Siguiendo equipo, vosotras.
- A: Nosotras, 90.
- F: En total, 90. [Escribe 90 en la pizarra].
- A: 4 de 20 y 1 de 10.
- F: [Escribe $4 \times 20 + 1 \times 10$]. Vale, o sea que de momento han utilizado grupos de 20, grupos de 10, grupos de 9, ¿vale?



En esta escritura [señala lo que ha escrito en la pizarra] yo veo 3 grupos de 20, 3 grupos de 9, pero aquí [señala el 87] no veo un 3 y un 3. Yo aquí veo 4 grupos de 20, 1 grupo de 10, pero aquí [señala el 90] no veo 4, 1. Con lo cual, parece que tampoco habíais encontrado vosotros un patrón entre cómo escribo la cantidad total con símbolos numéricos y visualmente qué veo en los palillos, ¿vale? De momento, la transcripción de lo que veo en los palillos simbólico-numéricamente la tengo aquí a la derecha [señala el $3 \times 20 + 3 \times 9$ y el $4 \times 20 + 1 \times 10$], pero no veo ninguna relación con esto [señala el 87 y el 90]. Yo aquí estoy haciendo trampa porque estoy metiendo operaciones, nosotros ahora no estamos con las operaciones, estamos solo con el número, con la escritura del número, eso es lo que estamos trabajando, ¿no? Pero para ayudar a ver esa conexión de los palillos

hacia lo simbólico-numérico, pongo, escribo eso de transición para ir copiando lo que me decís, ¿no?, porque tardo más, tardo más en dibujar los palillos, las gomitas rosas, no sé qué, podría sacar la foto de la cámara y ponerlo rápido, ¿no?, pero..., bueno, lo escribo, lo transcribo así. Ahora, otro grupo. Vosotros dos ya estáis, que luego, luego... Ah, venga, ya que estamos aquí [dibuja una llave a la derecha de lo que ya ha escrito en la pizarra]. ¿A qué consenso... habéis llegado...?

A: Pues 7 grupos de 20...

F: Muy bien, 7 grupos de 20 [señala el 3 y el 4]. Han visto rápido y han dicho: «bien, los dos hemos agrupado, sin habernos copiado, en grupos de 20, con lo cual automáticamente tenemos 7 grupos de 20» [escribe 7×20].

A: Luego, ellos los 27 de 3×9 ...

F: Sí.

A: ... los han dividido en 2 de 10 para que se junten con los nuestros de 10.

F: ¿Y por qué no habéis hecho vosotros... separar este de 10 [señala el 10 de 1×10] en 1 de 9 y 1 de 1?

A: Porque se quedaría 1 solo y luego...

F: Bueno, pobrecillo, ¿no? No pasa nada.

A: Y porque es más fácil sumar de 10 en 10 que de 9 en 9.

A: Para ponerle la goma a 1...

F: Para ponerle la goma a 1... Bueno... Eso... Puede ser una justificación, pero tampoco muy potente... Me gusta más lo que ha dicho ella, o ella...

A: Que es más fácil sumar de 10 en 10 que de 9 en 9.

F: ¿Por qué será más fácil sumar de 10 en 10 que de 9 en 9 para nosotros? [Hablan varios alumnos a la vez]. ¿Por qué es más fácil sumar para nosotros de 10 en 10 y no de 9 en 9? [Hablan varios alumnos a la vez]. Porque tenemos 10 dedos, por ejemplo, ¿no? Porque estamos más acostumbrados a 10, 20, 30, 40... [mueve las manos con los dedos estirados], ¿no?, como que nuestro sistema de numeración parece que...

A: Porque en verdad solo sumas de 1 en 1 y luego le pones un 0, entonces...

F: Solo sumas de 1 en 1, elabora eso. Estamos en clase de matemáticas, ¿qué es 1, 1...?

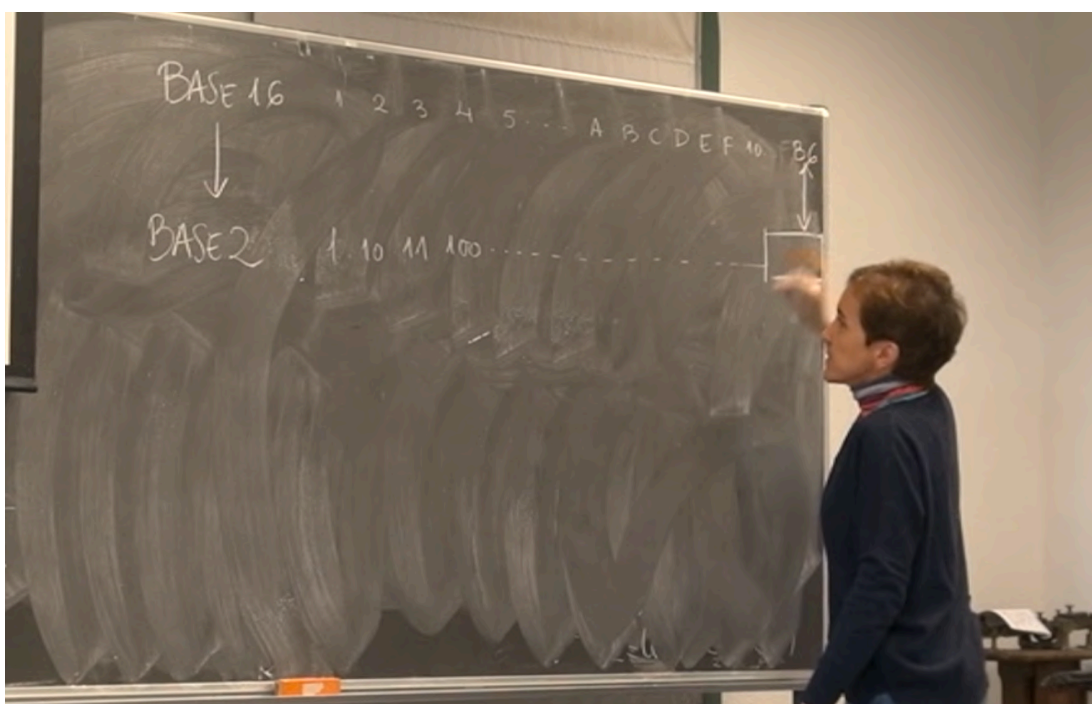
- A: Pues por ejemplo, si tienes 30, pues 1 más 1 más 1, 3, como es 10, pues le pones el 0 y ya tienes los 30.
- F: ¿3 qué?
- A: 3 grupos de 10.
- F: 3 grupos de 10, muy bien. 3 grupos de 10, vale. [Vuelve a la pizarra a terminar lo que empezó a escribir].
- A: 3 de 20, 3 de 10 y 1 de 7.
- F: [Escribe, después de 7×20 , 3×10]. 3 de 10, llegasteis a romper estos [señala 3×9] en 2 de 10 más 7 sueltos, ¿no? [escribe $2 \times 10 + 7$ encima de 3×9]. Y entonces estos dos [señala 2×10] con este [señala 1×10] 3 y 7 palillos ahí sueltos [escribe, después de $7 \times 20 + 3 \times 10$, 7×1], ¿vale? Ahora, la cantidad total, ¿cuánto es? [señala el 87 y el 90].
- A: 177.
- F: 1, 7, 7 [escribe 177 a la izquierda del 87 y del 90]. ¿Hay aquí 1, 7, 7 por algún lado? [señala el 7 de 7×20 , al 3 de 3×10 y al 7 de 7×1]. Este [señala el 7 de 7×1] parece que hay aquí, ¿no? Pero lo otro... no me cuadra mucho todavía... Vale, otros dos grupos.



TRANSCRIPCIÓN DEL VÍDEO 2

[F = Formadora del vídeo]. [A = Alumnos].

- F: Como me piden pasar de base 16 a base 2 directamente [escribe en la pizarra], pues Martín dice: «yo escribo aquí la secuencia 1, 2, 3, 4, 5..., A, B, C, D [dice 10, 11, 12, 13, señalando A, B, C, D], 14, 15 [escribiendo E, F], uno, cero [10]..., así hasta el B6», ¿vale? Y luego aquí en paralelo, voy uno [1], uno, cero [10], uno, uno [11], uno, cero, cero [100]..., hasta que pille aquí el que sea y ya está.



No he pasado por base 10, que es lo que me dice Nuria. Con lo cual, superado.
¿Pero qué pasó?

- A: Que es muy largo.

- F: Que es muy largo. Y que hasta en su casa, teniendo semanas, ha dicho: «paso». Tenías tiempo suficiente, porque había tiempo suficiente en dos semanas a hacerlo, pero... es largo y además un coñazo, con lo cual ha dicho: «paso». Con la idea Nuria ya se hace una idea de que lo he pensado, es un procedimiento válido, pero no ha sido eficaz, ¿vale?, entonces nosotros tenemos que seguir pensando porque tendremos que buscar alguna estrategia que sea eficaz. [Da la palabra a una alumna].

- A: ¿Se podría hacer la división?

- F: ¿Qué división?

A: La de B6 entre 2. Es que no sé cómo plantearlo.

F: Ella dice: «oye, mira Nuria, cuando tú pasas de base 10 a base 2 haces grupos de 2 y divides de 2 en 2; pues ahora lo mismo, si estoy en B6 a base 2, divide entre 2». Pero aquí estoy escribiendo en base 16... [En la pizarra ha escrito B6 entre 2, con la caja]. Podríamos intentar hacerlo, pero... ¿sabemos hacerlo... o cómo va esto? ¿O mentalmente para hacerlo me vais a pasar a base 10, y hacéis la división en base 10 —que es lo que sabéis hacer—, y luego otra vez volvemos y entonces hacemos trampa porque pasamos por base 10? Si sabéis dividir un número en base 16 entre 2, si sabéis hacer esta división en base 16 —yo lo tendría que pensar, ¿eh?, así a capón no lo sé hacer, pero si lo pienso... —, si sabéis hacer eso, valdría.



Pero esto lo vamos a ver en el dossier 3, ¿eh?, multiplicación y división. Nosotros tenemos herramientas para dividir en base 10 y sabemos cómo hacer restas sucesivas y el algoritmo tradicional de la cajita que habéis ido haciendo... Podríamos abordarlo, por eso abordamos los problemas de..., el anterior, ¿no?, de pasar de base 10 a base 2. Pero el de base 16 a base 2 hay que dividir en base 16. Sumar en base 16 lo sé hacer, restar en base 16 me cuesta un poco pero lo sé hacer, multiplicar en base 16 también podría hacerlo, con lo cual dividir podría hacerlo, pero... no me atrevo a hacerlo sin manos, hoy. Otra forma.

A: Fijándote en que 16 es 2^4 .

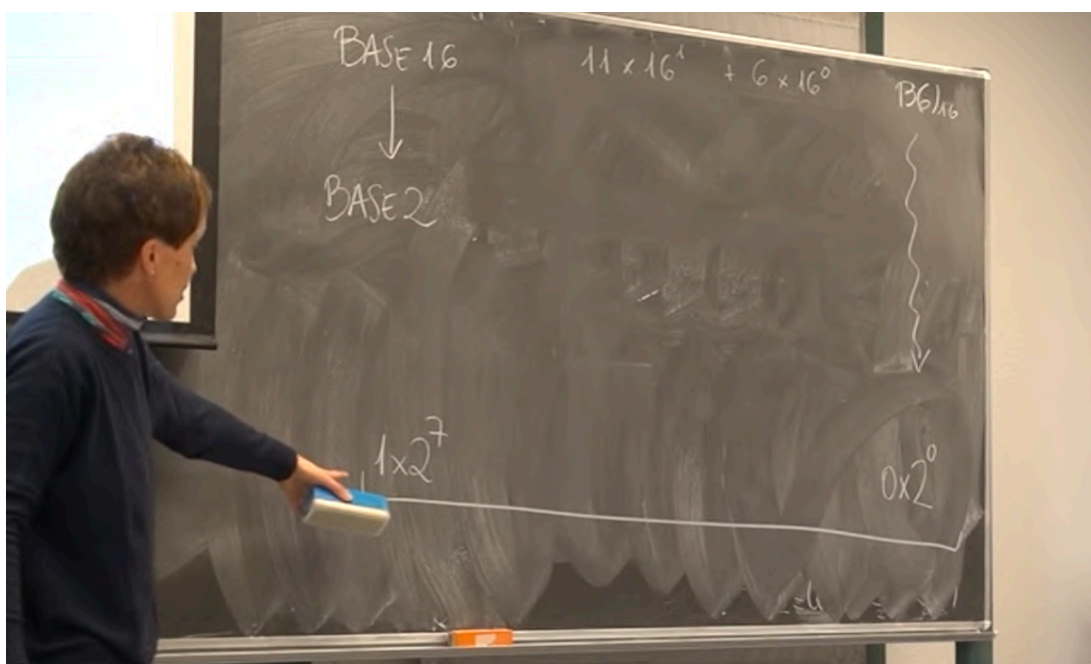
F: Fijándome en que 16 es 2^4 . Me lo voy a apuntar aquí [borra la pizarra y lo escribe].

A: Yo lo hice así, pero luego algo no me cuadraba.

F: Muy bien, vale.

A: Luego hice, 11...

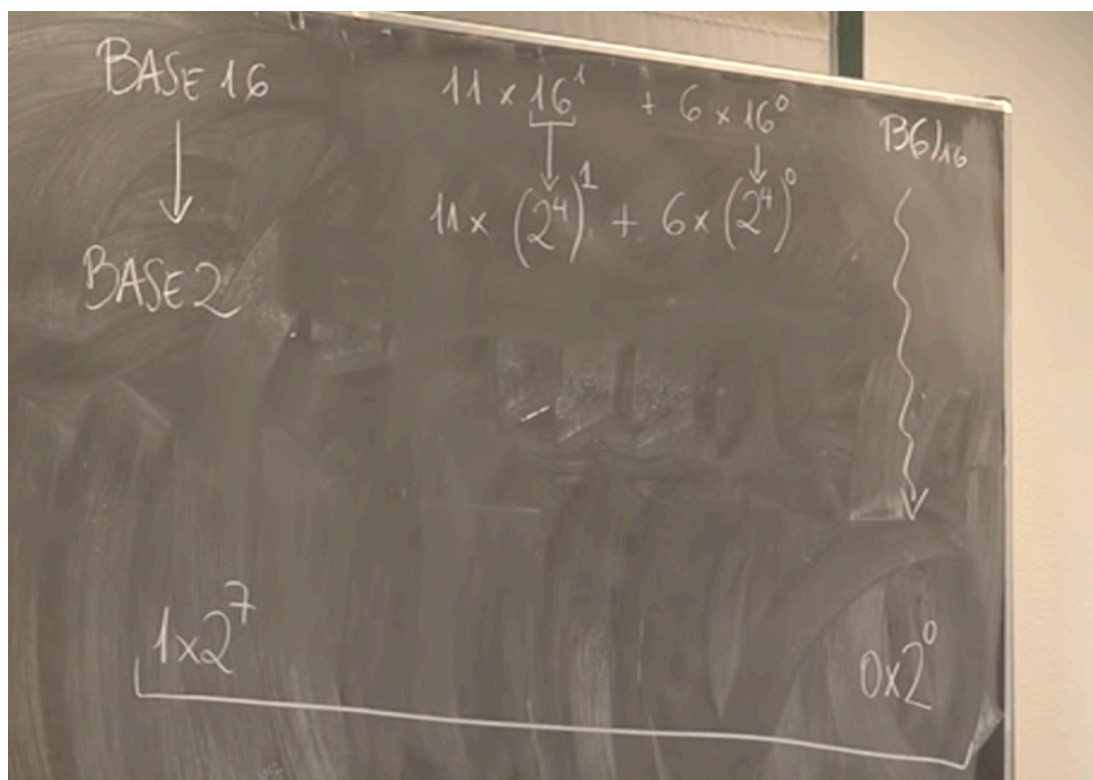
F: Venga, vamos a poner el punto de partida, ¿no? El punto de partida es que tenemos 11×16^1 , ¿no?, más 6×16^0 . Este es mi B6 en base 16. Y yo quiero llegar aquí a... Me acuerdo de que empezaba en 1×2^7 y a acababa en 0×2^0 , ¿vale?



Entonces yo quiero pasar de ahí [señala la parte superior de la pizarra] a aquí [señala la parte inferior]. Si lo consigo, ya lo tengo en base 2, ¿no? Ya solo cojo los coeficientes de las potencias de 2 y ya lo tengo. Entonces, Pablo dice: «cambia este 16», ¿no, Pablo?

A: Sí.

F: Este 16 ponlo como $(2^4)^1$ y este 16 ponlo como $(2^4)^0$. ¿Vale? Yo tengo una expresión polinomial en base 16, quiero llegar a una expresión polinomial en base 2, y él me dice: «yo veo claro el cambio, 16 es 2^4 , cada vez que veas un 16 ponlo como 2^4 ». Vale, y entonces resulta que aquí tengo 11 grupos de esto y aquí tengo 6 de estos. ¿El 11 y el 6... los puedo dejar?



A: No, los pasas a base 2.

F: Los paso a base 2. ¿Sé pasar 11 a base 2?

A: Sí.

F: Vale, vamos a escribir 11 en base 2.

A: 1, 0, 1, 1.

F: 1×2^3 , ¿no?

A: Sí.

F: Más...

A: Cero.

F: 0×2^2 . De momento llevo ocho. Más...

A: Uno.

F: 1×2^1 . Ya llevo 10...

A: Más uno.

F: Más 1×2^0 . Ahí ya tengo 11, ¿vale? Esta es una manera de escribir 11. ¿Cómo? Como potencias de 2. Expresión polinomial del 11 en base 2, como potencias de 2, ¿vale? Y esto va multiplicado... 2 elevado a la 4 y luego lo elevo a la 1, ¿cuánto me queda...? 2^4 es $2 \times 2 \times 2 \times 2$ y luego eso lo elevo a la 1, es decir, que lo copio una vez, o sea que me queda...

A: 2^4 .

- F: 2^4 . Más... El 6, ¿lo dejo?
- A: No.
- F: No. ¿Cómo escribo 6 en base 2?
- A: 1×2^2 .
- F: 1×2^2 , que son 4.
- A: 1×2^1 .
- F: 1×2^1 ... Y 0×2^0 [lo va escribiendo todo en la pizarra]. Ahí pone 6, una manera más chula, ¿no?, de poner 6 como potencias de 2, ¿no?, como un polinomio con potencias de 2. Vale, y luego estaba por... Y ahora tengo $(2^4)^0$. ¿Eso qué es?
- A: Uno.
- F: Uno. ¿Y si lo quiero poner como potencias de 2?
- A: 2^0 .
- F: 2^0 , muy bien. 2^0 [lo escribe en la pizarra]. Mira qué contenta estoy, porque $2^0 \times 2^0$ es 2^0 y el coeficiente es 0, que es este. Y $2^4 \times 2^3$ es 2^7 y el coeficiente es 1, que es este. Pues como que ya casi lo tengo, ¿no? ¿Sí o no?
- A: Sí...

BASE 16

↓

BASE 2

$$11 \times 16^1 + 6 \times 16^0$$

$$\downarrow$$

$$11 \times (2^4)^1 + 6 \times (2^4)^0$$

$$\downarrow$$

$$[1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0] \times 2^4 + [1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0] \times 2^0$$

$$\downarrow$$

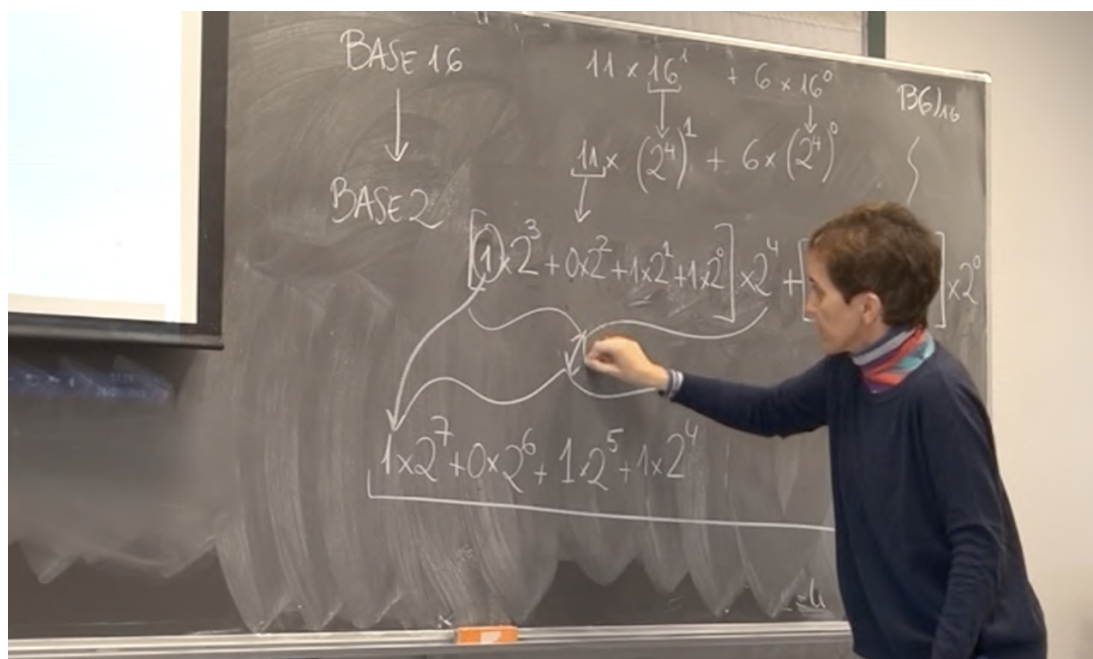
$$1 \times 2^7$$

$$\downarrow$$

$$0 \times 2^0$$

- F: Vale, y ahora... Venga, ¿cuál será el coeficiente...? Venga, vamos a poner aquí 2^6 , paso a la siguiente varilla del ábaco, ¿eh? ¿Cuál será el coeficiente de 2^6 ?

- A: Cero.
- F: Cero, porque ¿cómo consigo yo 2^6 ? $2^4 \times 2^2$, ¿no? 2^4 es $2 \times 2 \times 2 \times 2$, 2^2 es 2×2 , ya tengo ahí los seis doses, ¿vale?, que está aquí, y el coeficiente cero. ¿Por aquí puedo llegar a 2^6 ?
- A: No.
- F: No, pues ala. 0×2^6 . Genial, porque era lo que me había salido antes. Ahora, más... Siguiendo varilla del ábaco, 2^5 . ¿Dónde consigo yo 2^5 ? Aquí [señala el corchete de la derecha] como mucho llego a 2^2 , me olvido de esto. $2^4 \times 2^1$ [señalando el corchete de la izquierda] es 2^5 , ¿no?
- A: Sí.
- F: Vale, ¿y qué coeficiente lleva?
- A: 1.
- F: 1. ¿Y era el qué tenía que llevar?
- A: Sí.
- F: Sí, vamos bien. Y ahora, 2^4 , ¿cómo consigo 2^4 ?
- A: Con 2^0 ...
- F: $2^4 \times 2^0$, ¿no? Tengo aquí cuatro copias del 2 y aquí ninguna, pues tengo cuatro copias del 2 multiplicándose por sí mismo, y el coeficiente 1. 1×2^4 [lo escribe en la pizarra]. Oye, mira, todo esto se ha convertido en esto. Lo veis, ¿no?

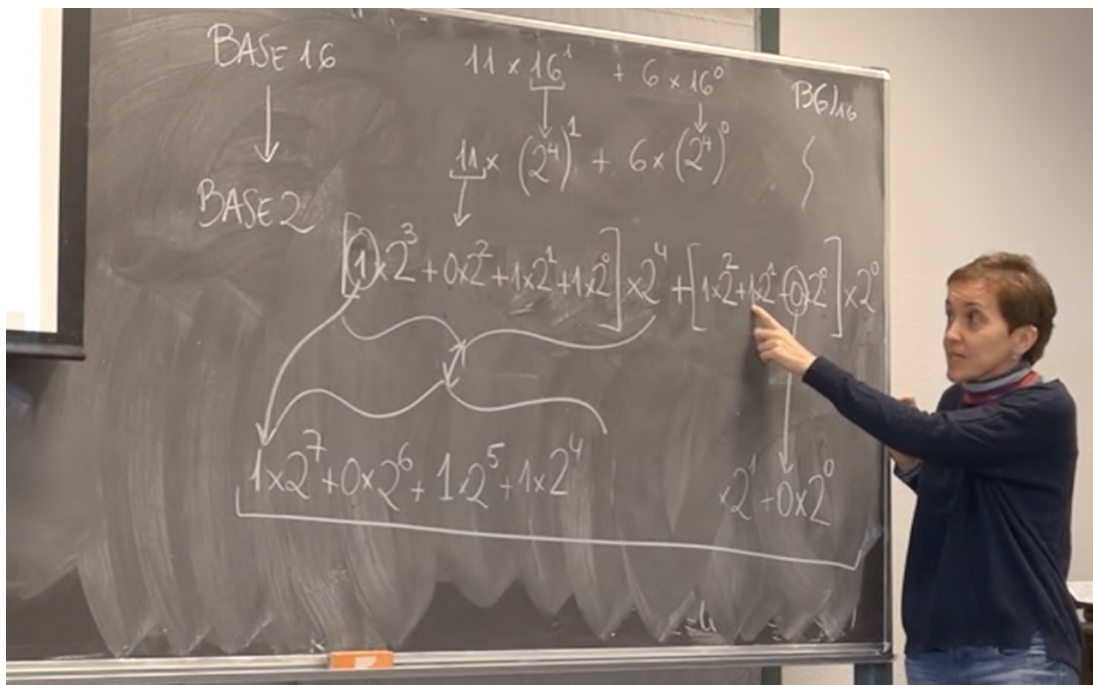


¿Qué es lo que he hecho? Propiedad distributiva. Voy multiplicando el 2^4 por cada uno de los sumandos, ¿vale? Muy bien. Y ahora, tiro por aquí, voy desde

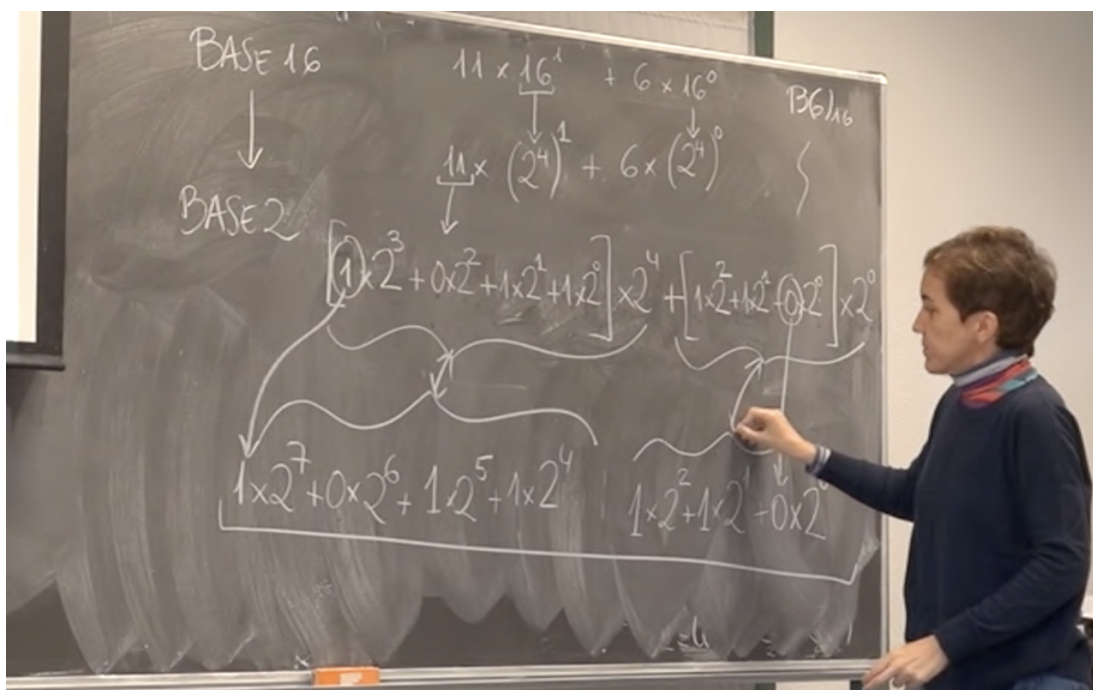
aquí [señala el 2^0 de la parte inferior derecha de la pizarra]. 2^0 , muy bien. Siguiendo varilla del ábaco, 2^1 . ¿Qué coeficiente tiene 2^1 ?

A: 1.

F: 1, que está aquí [lo señala], ¿vale?

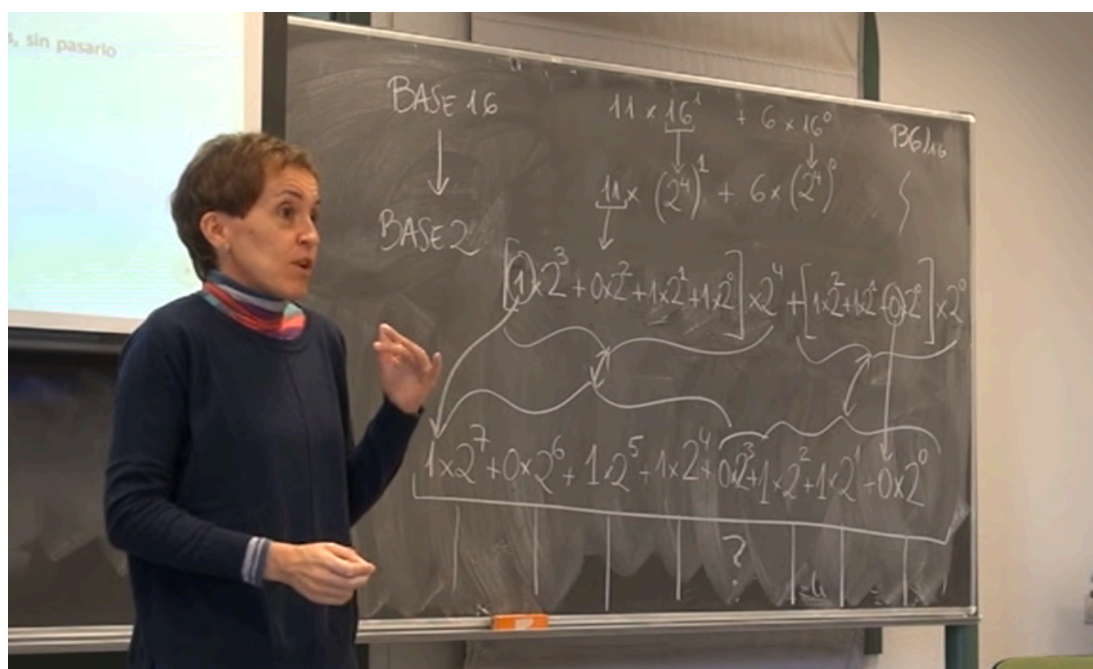


Porque sería $2^1 \times 2^0$, que es 2^1 , y lleva un 1 delante, un 1 [lo escribe abajo]. Voy bien. Y ahora, $2^0 \times 2^2$, 2^2 [lo escribe abajo], va con un 1 [lo escribe abajo]. O sea que esto que tengo aquí se convierte en esto que tengo aquí.



Y ahora, Pablo, ¿qué te pasó?

- A: Que como... Que claro, los iba a juntar, pero dije: «me falta el 2^3 ».
- F: Me falta el 2^3 . Pablo dice: «varilla del ábaco del $2^7, 2^6, 2^5, 2^4$, ¡uy!, $2^2, 2^1, 2^0$ ». «¡Uy!», dice Pablo [y dibuja una interrogación en la posición del 2^3].
- A: Pues si no hay, un cero.
- F: Pues se pone el 0, ya está. Lo pongo aquí: «+ 0×2^3 », y esto lo englobo aquí.



¿Qué es lo que pasa? Que escribo el 6 de una forma muy especial. Yo escribo el 6..., acordaos que esto era mi 6 [señala $1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0$], ¿eh?, esto era el 6, que es este 6 [señala el de un nivel anterior, más arriba en la pizarra], ¿vale? Yo he escrito el 6 como $1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0$, pero también puedo escribir el 6... $0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0$. No es lo estándar, porque como los ceros ahí no aportan mucho, pues no es lo estándar, pero si no me quiero olvidar de una de las varillas y no quiero tener un problema, como tenía Pablo, pues yo añado ahí para escribir el 6 de otra forma, ¿vale? Entonces, moraleja que cuentan los *youtubers*, por ejemplo David Calle, dice: «vamos a pasar de base 16 a base 2, ¿qué se hace chavales? Mirad, ¿veis este 11 que está aquí? [señala el de arriba de la pizarra], pues escribís este 11 en base 2: 1, 0, 1, 1 [señala los coeficientes de la expresión polinómica de la parte inferior de la pizarra]; ¿veis este 6 que está aquí? [señala el de arriba de la pizarra], pues lo escribís en base 2, pero cuidadín chavales, que hay que poner cuatro, ¿por qué?, porque 16 es 2^4 ». Y entonces dice: «vamos a escribir 6 en base 2 con cuatro: 0, 1, 1, 0». Y dice: «y ahora lo juntáis, fin». A mí no me vale porque yo no soy David Calle, yo no estoy de *youtuber*,

inflencer, superfamosa ayudando a los chavales a aprobar exámenes, que es un trabajo muy digno y que está bien, y además el tío es un *crack*, muy suelto, lo hace muy bien; yo estoy formando maestros, entonces tenéis que entender cómo hemos pasado de aquí [señala la parte superior de la pizarra] a aquí [señala la parte inferior de la pizarra] a través de esto [señala la parte media de la pizarra]. Entonces, la pregunta es: ¿se puede pasar de base 16 a base 2 sin pasar por base 10? Sí. Lo acabamos de hacer, ¿no? Es que me miráis con una cara... ¿Y por qué se puede? ¿Qué pasa si yo esto [el ejercicio] os lo doy en base 15 y, en vez de en base 16, todo el problema es en base 15?

A: Que sería $2^4 + 2^0$.

F: ¿ $2^4 + 2^0$ es 15?

A: O sea, no..., perdón. $2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0$.

F: Vale, y entonces tendría que ir haciendo todas las distributivas, todo el follón, ahí. ¿Y David Calle me podría dar el algoritmo...? Escribes, imaginaos el mismo número, ¿eh?, B6, en vez de en base 16, en base 15. ¿David Calle me puede decir...? Aquí tengo el 15, ¿no?, aquí tengo el 15 [los escribe encima de los 16], y David Calle me dice: «escribe esto [señala el 11] en base 2, escribe esto [señala el 6] en base 2, con tres y medio dígitos o cuatro dígitos o... tres dígitos, y lo pones junto. ¿Valdría ese algoritmo?

A: No.

F: No. ¿Vale? O sea, que poder se puede pasar, vas con paciencia escribiendo cada una de las expresiones que aparecen, pero un paso directo solo se puede cuando una base es potencia de la otra base, que es lo que hemos visto con 16, que es potencia de 2, que es 2^4 . ¿Está claro hasta aquí? ¿Sí?

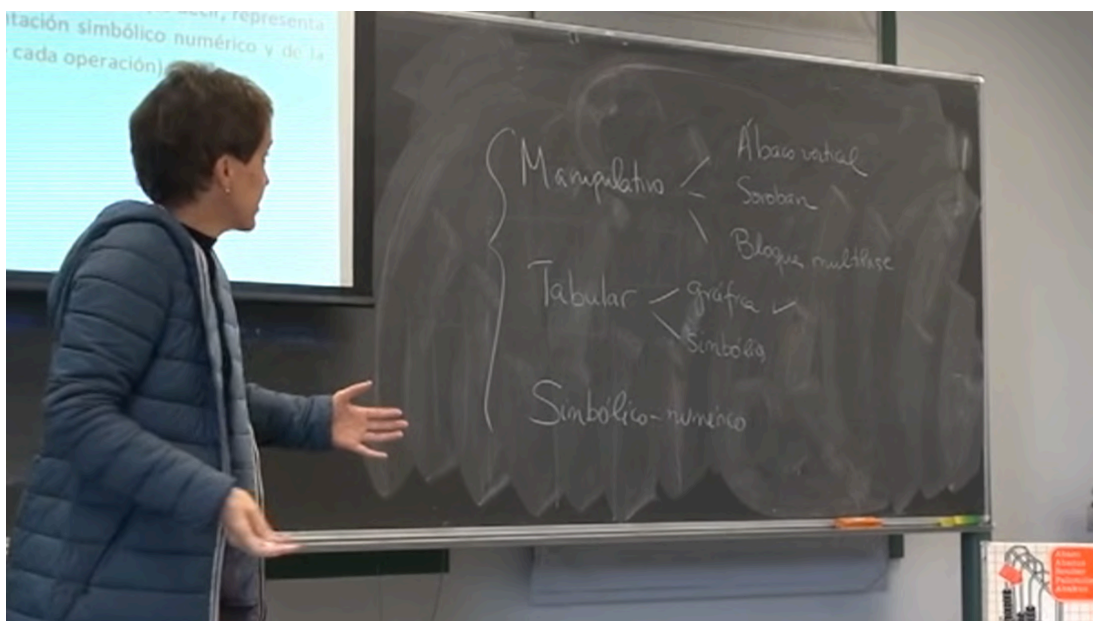
TRANSCRIPCIÓN DEL VÍDEO 3

Fragmento 1

[F = Formadora del vídeo].

- F: Entonces, la idea es..., el ejercicio 4, que está proyectado en la pantalla, es el ejercicio 4 de la última hoja, de la hoja del dossier 2, con el que vamos a trabajar ya esta semana, ¿vale? En ese ejercicio hay cuatro operaciones, cuatro problemas, cuatro operaciones. Tenéis que hacer las cuatro operaciones..., representarlas de distintas maneras. Voy a poner en la pizarra de cuántas maneras, ¿vale? Entonces, acordaos que nosotros estamos trabajando con material manipulativo [escribe en la pizarra «Manipulativo»], ¿vale? Entonces, en primer lugar tenéis que representar esta suma $[210 + 543]$, esta suma $[315 + 429]$, esta resta $[135 - 24]$ y esta resta $[704 - 45]$, por partes [va señalando en el PDF proyectado en la pantalla], ¿no?, empezáis con la primera... Tenéis que representarlo [escribe en la pizarra] con ábaco vertical, después en el sorobán y después con los multibase, ¿vale? Y tenéis que tener las tres representaciones del proceso delante para saber comparar cada dos, ¿vale?, para saber entender cómo se traduce una en otra. Lo que no quiero es que me digáis: « $210 + 543$ son 753; Nuria, te he representado 743* en el ábaco vertical, en el sorobán y en los bloques multibase». No quiero la representación del resultado, quiero la representación del proceso, de la suma, de la idea «suma». ¿En qué os tenéis que basar?, en la definición de la suma que vimos el otro día, ¿no?, que es: elijo un representante de uno, elijo un representante del otro y hago la unión, agrupo, junto, como lo queráis pensar, ¿vale? Entonces, hay que representar el proceso, el proceso, no solo el resultado final de ese proceso. Entonces, tenéis que representar el proceso de tres maneras en el sistema de representación manipulativo [señala lo que ha escrito antes en la pizarra], ¿vale? Y en paralelo [empieza a escribir en la pizarra] tenéis que representar el proceso en el sistema de representación simbólico-numérico; el enunciado está dado en ese sistema de representación, ¿vale?, esto es sistema de representación simbólico-numérico, pues tenéis que representar el proceso, las dos sumas y las dos restas, en ese sistema, ¿vale? Y luego, en medio [escribe en la pizarra], hay una representación que es formato tabla o tabular, de la que no he hablado explícitamente, pero que me gustaría que construyerais vosotros, ¿vale?

Necesito que construyáis, por ejemplo, esta suma [señala $210 + 543$], que la hagáis en tabla, con una tabla, como se os ocurra a vosotros diseñar la tabla, ¿vale? La tabla [escribe en la pizarra] puede ser más gráfica, puede tener características gráficas, o puede tener características más simbólicas; a mí me va a interesar más la que tenga características más gráficas, luego ya veremos en detalle cómo, pero tenéis que intentar construirlo vosotros sin que yo os haya hablado de eso explícitamente, ¿vale?



Entonces, paso 1, aquí [señala la parte de representación manipulativa de la pizarra], en paralelo paso 2, simbólico-numérico [lo señala en la pizarra] y luego ya, según vayáis trabajando los cuatro ejemplos, igual ya se os va ocurriendo cómo representarlo con una tabla y cómo trabajar con una tabla ese tipo de operaciones. ¿Está claro? Yo me voy a pasar por las mesas y me vais preguntando todas las dudas que os surjan. No voy a pedir que me mandéis nada, ¿vale?, porque todavía no he revisado las últimas fotos que me habéis mandado, con lo cual estoy un poco desbordada; como no sois muchos, yo voy por vuestros puestos. Ahora bien, en el grupo anterior han decidido grabar pequeños vídeos o hacer fotos de los procesos que iban construyendo por llevárselo como material para estudiar, a mí me parece una buena idea, pero ya vosotros hacéis lo que queráis, a mí no me lo tenéis que mandar, pero si queréis, una vez que hayáis construido, por ejemplo, con el ábaco japonés, imaginaos, esta resta de aquí [señala el PDF en la pantalla], y decís: «ah, pues nos vamos a grabar», uno lo hace

otro lo graba y lo tenéis de recuerdo, ¿no?, para cuando tengáis que estudiar. ¿Cómo voy a pedir yo eso en el examen? Pues no lo puedo pedir porque no puedo llevar un sorobán para cada uno porque tengo un día, 2 horas y media o 3, para haceros el examen final de la asignatura; pero para mí esto es muy importante, entonces yo voy a pedir que me representéis gráficamente, gráficamente, vuestro proceso de respuesta con un ábaco vertical, con un sorobán o con los bloques multibase, que es lo que yo luego voy a hacer aquí en la sesión final de discusión cuando acabemos esta hora de clase. Yo no voy a coger el ábaco aquí, lo voy a poner delante de todos y tal –podría hacerlo, pero no lo voy a hacer–, lo voy a hacer representando gráficamente el material manipulativo y así es como lo voy a pedir el día del examen, porque os voy a dar un cuadernillo y lo tenéis que hacer gráfico, ¿vale? Bueno, pues empezad, están escritas en un orden muy concreto, empezad a hacerlas en ese orden y luego ya discutimos sobre por qué están puestas en ese orden, ¿vale?

Fragmento 2

[F = Formadora del vídeo]. [A = Alumnos (A1, A2 y A3)].

- A1: Estamos rayados con la última resta.
 F: Vale, a ver, empezad.
 A1: Son 704 - 45.
 F: Vale.
 A1: Entonces, aquí no le podemos restar 5.



- F: Así tal cual está, puedes restar..., ¿cuántas puedes quitar?
 A1: Cuatro.
 F: Cuatro, vale, sí.
 A1: Entonces voy a suponer que aquí [señala la varilla de las decenas] hay un 1.
 A2: No, que hay 10.
 A1: Que hay 10, para que sea 14...
 F: A ver, olvídate de los «suponer». Tú dices: «tengo que quitar 5», ¿no?, quito 1, quito 2, quito 3, quito 4 [quita cuentas de la varilla de las unidades] y ahora ponme aquí más para que yo quite, tal y como está.



- A1: Habría que poner 10 y quitamos 1.
- F: Pero ¿cómo me ponéis..., cómo me ponéis ahí? A ver Pablo.
- A2: ¿Que lo ponga?
- F: No, no, que me digas... Yo aquí [señala la varilla de las centenas] tengo ahora mismo 700, ¿no? Escribe 700 de otra forma para que yo tenga bolas...
- A1: Aaaaah, hay que añadir una aquí [señala la varilla de las decenas].
- F: Venga, a ver.
- A2: [El alumno A2 quita una cuenta de la varilla de las centenas y la pone en la de las decenas].
- F: ¿Aquí sigue poniendo 700?
- A1: No, no, no, hay que poner una nueva aquí [vuelve a poner la cuenta en la varilla de las centenas —la que había puesto en la varilla de las decenas el alumno A2— y pone una nueva en la varilla de las decenas].
- F: A ver [quita la cuenta de la varilla de las decenas]. Teníamos 704, hemos quitado 4, tengo 700, ¿vale?
- A1: Sí.
- F: Ahora, escribe 700 de otra forma para poder quitar otra.
- A1: Pues...
- F: ¿Cómo podéis escribir 700 de otra forma?
- A1: Que aquí [señala la varilla de las decenas] haya 9...
- F: Venga.
- A1: Y aquí [señala la varilla de las unidades]..., 9.

F: A ver, para que haya aquíiii... [señala la varilla de las decenas], vamos a ver, ¿cómo consigo aquí decenas? Sin cambiar el número...

A1: Si quito esta... [quita una cuenta de la varilla de las centenas].



F: Venga, muy bien.

A1: Pongo aquí 10 [señala la varilla de las decenas].

F: Venga, dale.

A1: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10.

A3: ¡Ah, vale!



F: ¿Ahora aquí pone 700?

A1: Sí.

F: ¿Y cómo está escrito 700?

A3: Mal.

F: 6×10^2 , ¿no?, 6×100 , más...

A2: 10×10^1 .

F: 10×10^1 , muy bien. Ahora, ¿puedo quitar aquí [señala la varilla de las unidades] que quería quitar una? ¿Tengo?

A1: No.

F: No, ¿cómo puedo volver a escribir 700 para tener aquí [varilla de las unidades]?

A1: Pues quito de estas [quita una cuenta de la varilla de las decenas] y añado 10 aquí [señala la varilla de las unidades].

F: Vale, venga.



F: Vale, ¿y ahora puedes quitar la que te faltaba por quitar?

A1: [La estudiante A1 quita una cuenta de la varilla de las unidades].

F: Ya está. Ya habéis quitado 5 y teníais que quitar 45, ¿no? ¿Cuánto os falta por quitar?

A1: Sí, ahora aquí [señala la varilla de las decenas] hay que quitar 4.

F: Pues ya está, ¿no?

A1: Ah, vale, vale. Gracias.



- F: ¿Entonces qué habéis hecho para reescribir el 700...? O sea, yo tenía 700 ahí, tenía aquí 700 [deja el ábac con 7 cuentas en la varilla de las centenas], ¿qué habéis hecho?
- A2: Como es sistema decimal, pues aquí [señala la varilla de las decenas] hay 10, porque... representamos un 0, pues quitar una de aquí [varilla de las centenas] y ponerle las 10 aquí [varilla de las decenas] para luego restarlas aquí [varilla de las unidades].
- F: O sea que habéis..., ¿agrupado o desagrupado?
- A1: Desagrupado.
- A2: Aquí desagrupado.
- F: Desagrupado. Habéis desagrupado una centena en 10 decenas y luego una decena la habéis desagrupado en 10 unidades.
- A1: Vale, es que cuando tú lo haces en papel no haces esto así.
- F: Ah, pues dime entonces qué es lo que haces en papel.
- A1: Claro, lo haces muy mental. O sea, en verdad sí que haces eso, pero... bueno, ya me has entendido.
- F: No, no, pero lo tienes que explicar porque luego os he pedido que lo hagáis simbólico...
- A1: Ya, ya, ya.
- F: Entonces, simbólico tienes que explicarlo conectado con esto.
- A1: Vale, vale.

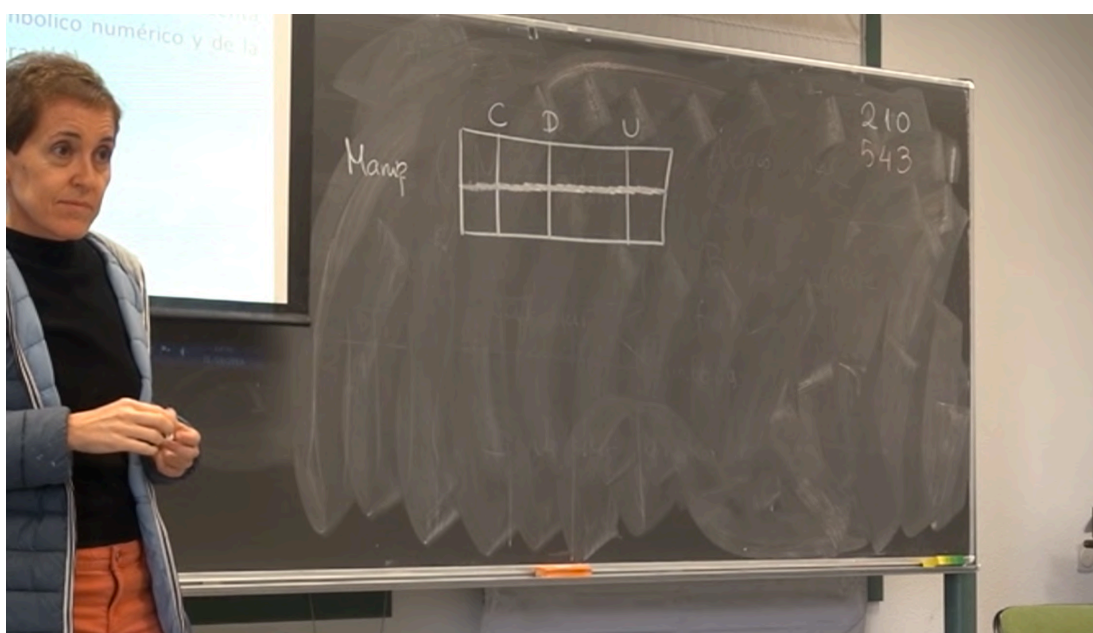
Fragmento 3

[F = Formadora del vídeo]. [A = Alumnos].

F: Vamos a corregir uno, el primero, ¿vale? Me dan $210 + 543$, ¿vale?, con símbolos. Voy a representarlo..., vamos a empezar con manipulativo y voy a ejemplificar con el sorobán, que es el que parece que más trabajo cuesta, ¿vale? Entonces, en el sorobán, cuando lo representéis gráficamente el día del examen, o ahora en vuestro cuaderno si tenéis que tomar notas, es muy importante marcar la barra del medio, porque la proximidad de las bolas a la barra del medio es la que te indica qué número está representando, ¿vale? Y ahora, dado el problema que me han planteado, ¿cuántas varillas pensáis que necesito escribir?

A: Tres.

F: ¿Tres varillas? Pongo una varilla, dos varillas, tres varillas. Esta, unidades, decenas, centenas. Esta la pongo un poco más gorda para que se note que es la barra de madera del medio, ¿vale? Y ahora, ¿cómo dibujo 210?



A: Pues 0 unidades.

F: 0, o sea que aquí no pongo nada pegado a la barra, ¿no? [señala la varilla de las unidades]. ¿Aquí? [señala la varilla de las decenas].

A: 1 decena.

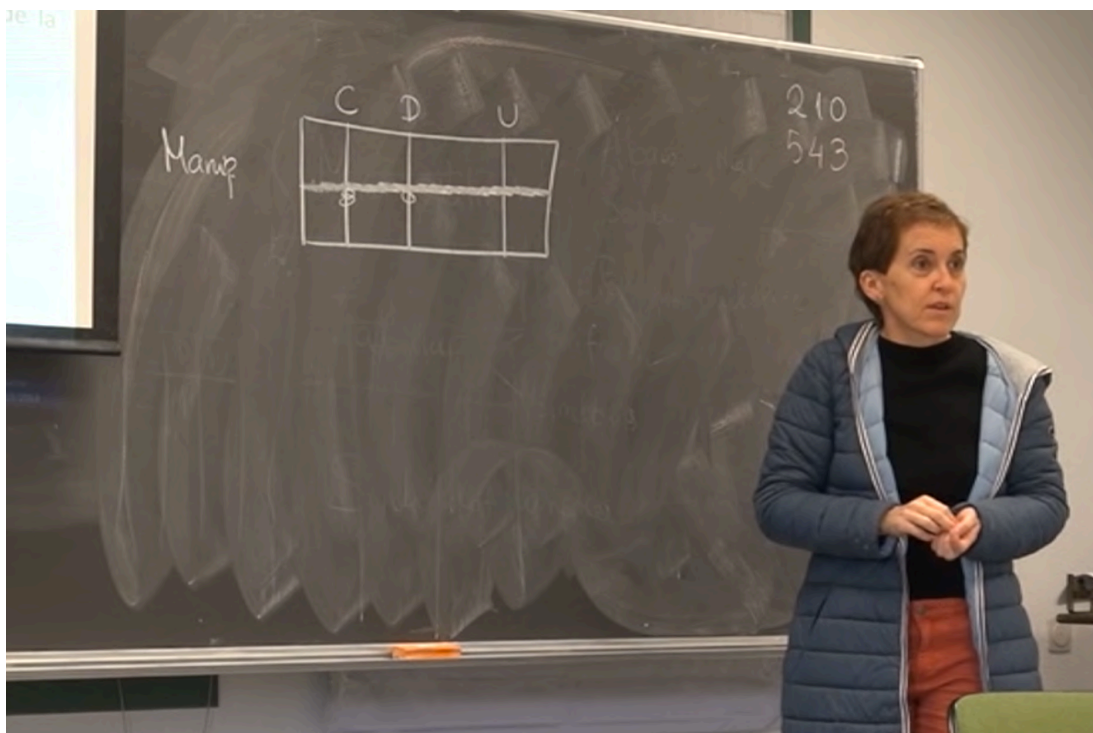
F: Una pegada a la barra, ¿arriba o abajo?

A: Abajo.

F: Abajo, o sea que aquí va una.

A: Y 2 centenas pegadas a la barra de abajo.

F: Pegadas a la barra, abajo. Una y dos, ahí está. Eso es 210.



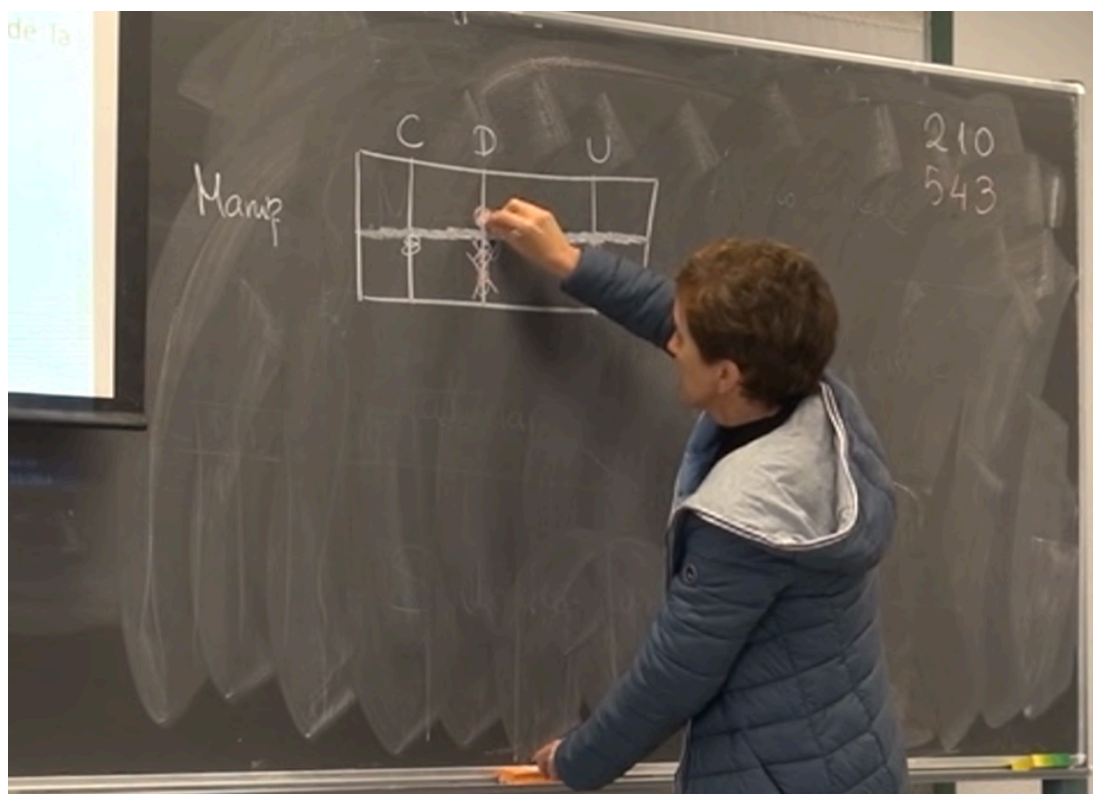
Y ahora, tengo que sumar 543, es decir, que tengo que añadir 543 unidades ahí. Aprovecho la estructura, ¿vale? Entonces, añado 3 unidades, en la varilla de las unidades, que son 3 aquí abajo, ¿no?, 1, 2 y 3 [las dibuja en la varilla de las unidades]. Después añado 4 decenas, en la varilla... 1, 2, 3, 4, ¿vale? [las dibuja en la varilla de las decenas], 4 decenas.

A: Pero cambiamos...

F: Pero...

A: Bajamos una de arriba y quitamos las de abajo.

F: Porque no tenéis 4, ¿vale?, ya no había suficientes, ¿por qué?, porque las bolas de arriba valen 5, entonces decís: «no pasa nada, estas, como eran 4 y 1, 5, se representan ahí arriba», ¿vale?

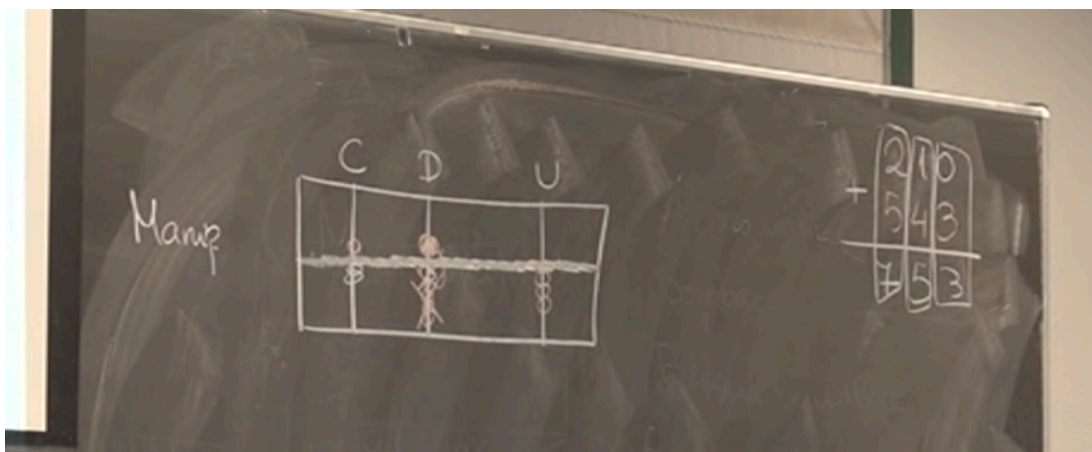


Y luego, 5..., tengo que añadir 5 centenas, ¿cómo lo hago?

A: Pues 1 arriba.

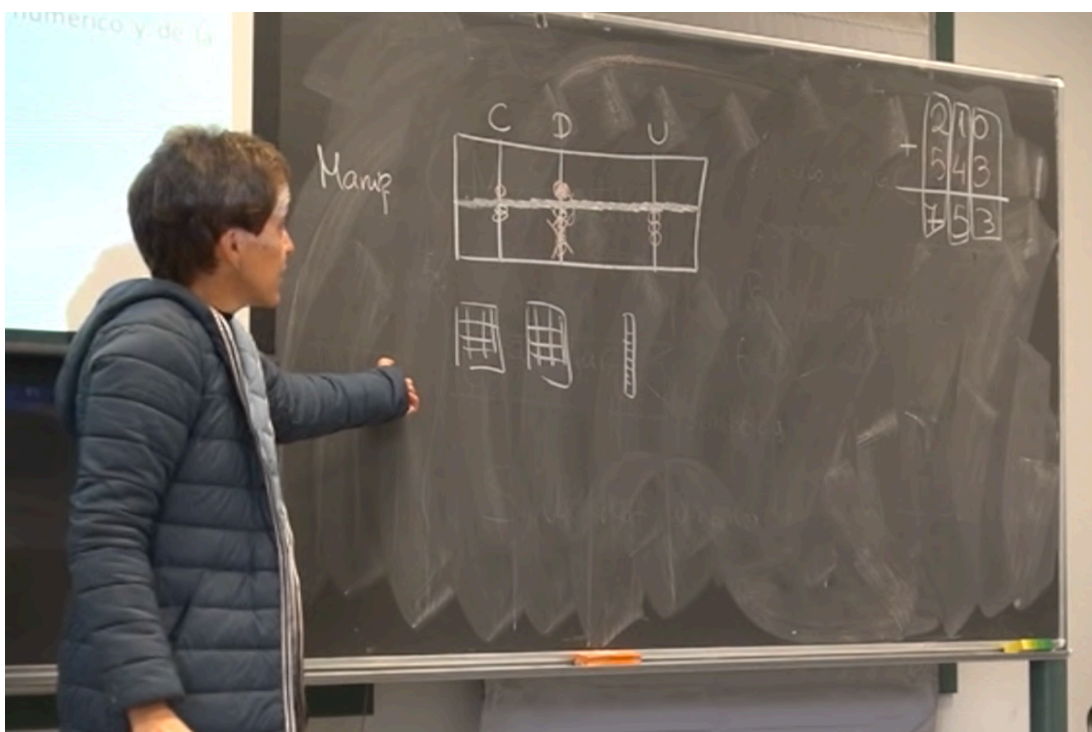
F: Una de arriba la bajo directamente o podría ir: «1, 2, 3, ya tengo 5, las subo ahí, 4, 5» [va señalando en la varilla de las centenas], ¿vale? Puedo hacerlo de dos formas distintas. Pero si aprovecho la estructura del ábaco, de manera que las bolas de arriba valen 5, como tengo que añadir 5, pues directamente ya añado ahí esas 5 [dibuja una bola en la varilla de las centenas, en la parte superior, pegada a la barra horizontal], ¿vale?

Entonces, [representa ahora el resultado en la suma con el algoritmo tradicional de forma simbólico-numérica a partir de lo que ha obtenido en la representación con el sorobán] me quedan 5 y 2, 7, aquí me quedan 5, y aquí me quedaban 3. Entonces, si yo lo represento así y voy sumando por columnas, tal cual he ido haciendo en el ábaco, tengo 0 unidades y 3 unidades, 3 unidades, 1 unidad y 4 unidades, 5 unidades, perdón, decenas, 2 centenas y 5 centenas, 7 centenas. Vertical, lo he colocado vertical por parecerme a la estructura del ábaco, ¿no?, para tener en cuenta la «posicionalidad», ¿vale?, del sistema.

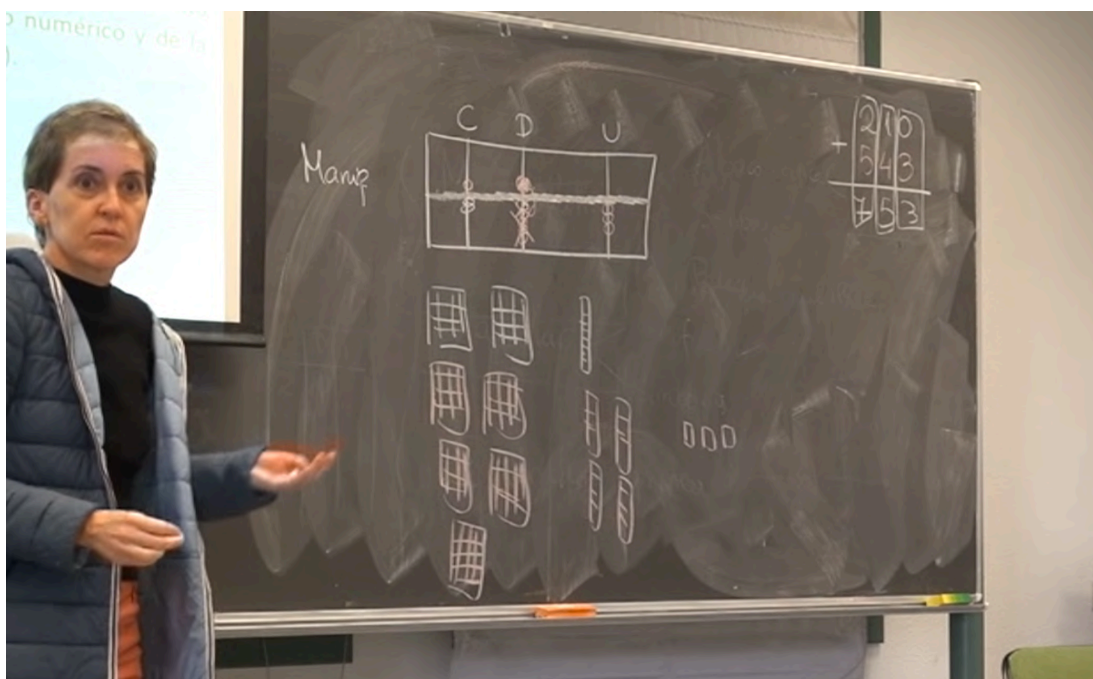


Entonces, he traducido al simbólico lo que he hecho aquí manipulativamente al escribir en simbólico en columnas y represento con cada columna cada una de estas [señala las varillas del sorobán de la pizarra]. Y luego, la escritura, sí que tengo que tener en cuenta que estos son 5 [señala las decenas de la suma en simbólico] con lo cual van arriba [en el sorobán] y esto son 7 [señala las centenas de la suma en simbólico], pues son 5 y 2 [en el sorobán], ¿vale?

Bloques multibase, bloques multibase, pongo aquí 210, ¿no?, que son 1 y 2 placas de 100 y 10, una decena; este es el 210.



Y ahora agrupo 543; una, dos, tres, cuatro y cinco [dibuja 5 placas de 100 unidades], añado, ¿vale?, 500. 40: una, dos, tres, cuatro [barras de 10]; y 3: uno, dos y tres [unidades]. Y ahora lo pongo todo junto. ¿Vale?

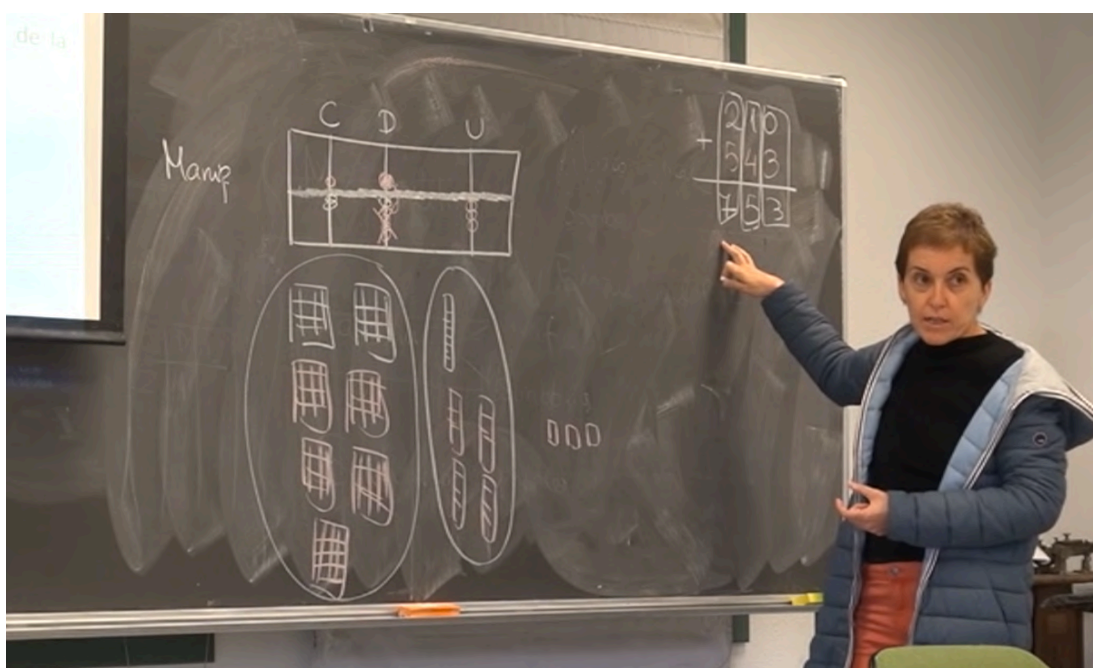


Y digo: «aquí tengo 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 [placas de 100]», ¿necesito agrupar? [Rodea con una línea todas las placas de 100].

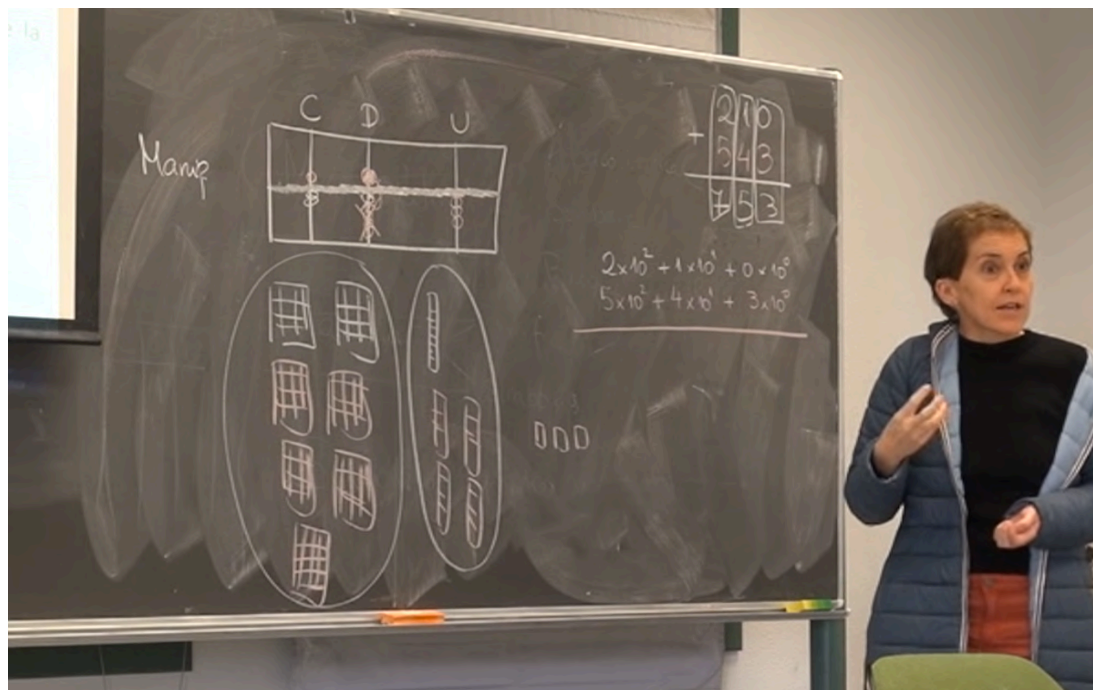
A: No.

F: No necesito agrupar. Aquí tengo 1, 2, 3, 4, 5, 6, 5, ¿necesito agrupar estos 5 de alguna manera? [Rodea con una línea todas las barras de 10]. No porque es base 10. Y aquí tengo 3, ¿vale? O sea, que me vuelve a salir 2, 4, 6, 7 [centenas; señala la suma en simbólico], 2, 4, 5 [decenas], 5 [señala la suma en simbólico] y 3. Y veo la conexión de uno con otro, ¿vale? ¿Está claro hasta aquí?

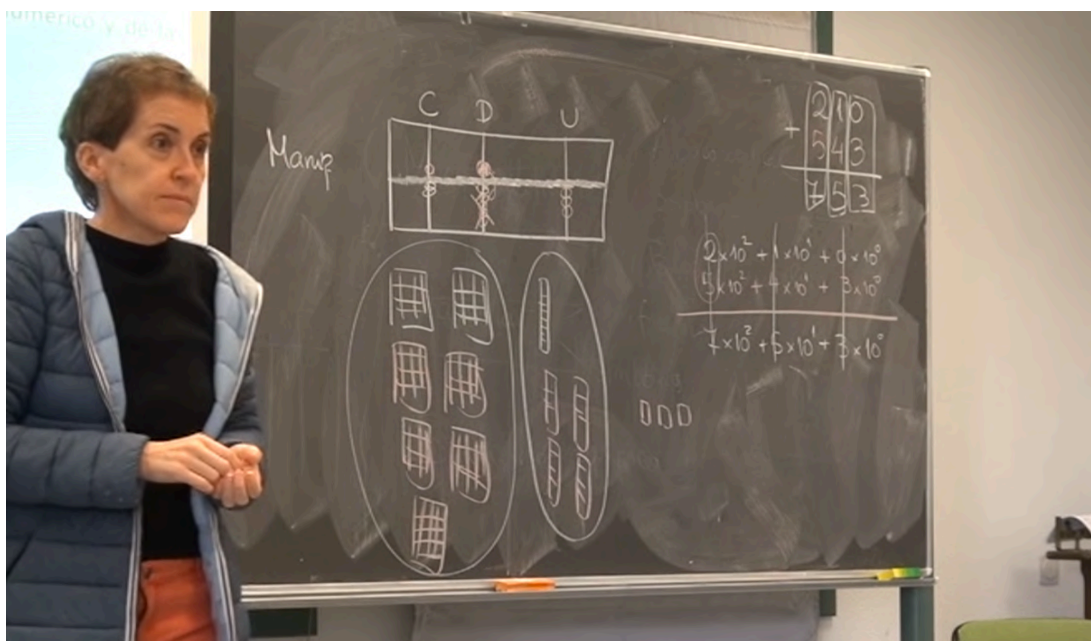
A: Sí, eso sí.



F: El que quiera escribirlo simbólico-numérico de otra manera en la que se vea la «posicionalidad» del sistema, podría escribirlo de la siguiente forma: $2 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 0 \times 10^0$, ese es el primer sumando; segundo sumando, $5 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 3 \times 10^0$; y sumo.



Y ahora, al sumar, utilizo la propiedad conmutativa, para colocar los sumandos en el orden que quiero, y asociativa, para ir organizando, ¿vale? O sea, que este [señala 5×10^2] —que, si lo coloco seguido, estaría aquí el cuarto [señala detrás de 0×10^0]— lo quiero colocar el segundo para agruparlo con este [señala 2×10^2], este [señala 4×10^1] —que estaría el quinto [señala detrás de 0×10^0]— lo coloco el tercero para agruparlo con este [señala 1×10^1], y este [señala 3×10^0] lo agrupo con este [señala 0×10^0]. Y ahora, al agrupar, ya me quedan 5 y 2, propiedad distributiva, 7×10^2 más, 4 y 1, 5×10^1 más, 0 y 3, 3×10^0 . Pero ahí estoy utilizando la asociatividad de la suma, la conmutatividad de la suma y la distributiva de la suma y el producto de números enteros, ¿vale? Pero si lo coloco así, veo esto, esto y eso [señala los coeficientes que acompañan a 10^2 , 10^1 y 10^0], que es lo mismo que esto, esto y eso [señala el 7, 5 y 3 del resultado de la suma en la forma simbólico-numérica], que es lo mismo que esto, esto y esto [señala los bloques multibase en la pizarra] y que es lo mismo que 1, 2 y 3 varillas [señala las varillas del sorobán en la pizarra]. ¿Está claro hasta aquí?



- A: Sí.
- F: Ahora, ¿qué diferencia hay entre esto y la siguiente suma que me plantean ahí [en el PDF proyectado en la pantalla]? $316 + 429$.
- A: Que me paso de unidades y tengo que pasar a las decenas.
- F: Que cuando agrupo aquí, por ejemplo [bloques multibase], o cuando agrupo aquí [sorobán], o cuando agrupo aquí [expresiones de sumas y productos de potencias de 10], aquí aparecen más de 10 [señala al 3 de 3×10^1]. En algún sitio aparecen más de 10, por ejemplo, cuando tengo 9 unidades y 6 unidades, aquí aparecerían 15 fichitas pequeñas [bloques multibase], aquí tendría que representar 15 [sorobán] y aquí aparecería 15×10^0 . Pero como estamos en base 10, no puedo dejarlo así, tengo que agrupar, tengo que agrupar. Entonces, agrupo 10 y dejo 5, y las 10 que agrupo las paso al siguiente valor, es decir, pego 10 fichas y construyo una barra [bloques multibase], agrupo 10 y me sale otra bola aquí en el ábaco, aquí abajo [parte baja de la varilla de las decenas], o agrupo 10 y me sale uno más aquí [en 5×10^1] y aquí [en 3×10^0] dejo las que se quedaban sueltas, las 5, ¿vale? O sea, que la única diferencia es que aquí, después de representar cada cantidad y de ir poniendo por orden el valor de cada una, tengo que agrupar porque en algunos sitios tengo 10 o más, ¿vale? Es la única diferencia.

Y ahora, si quisiéramos representar esto en formato tabla, como tenía Martín, ¿no? ¿Cuántas columnas pondré yo en la tabla?, ¿qué me pide el cuerpo? Tengo

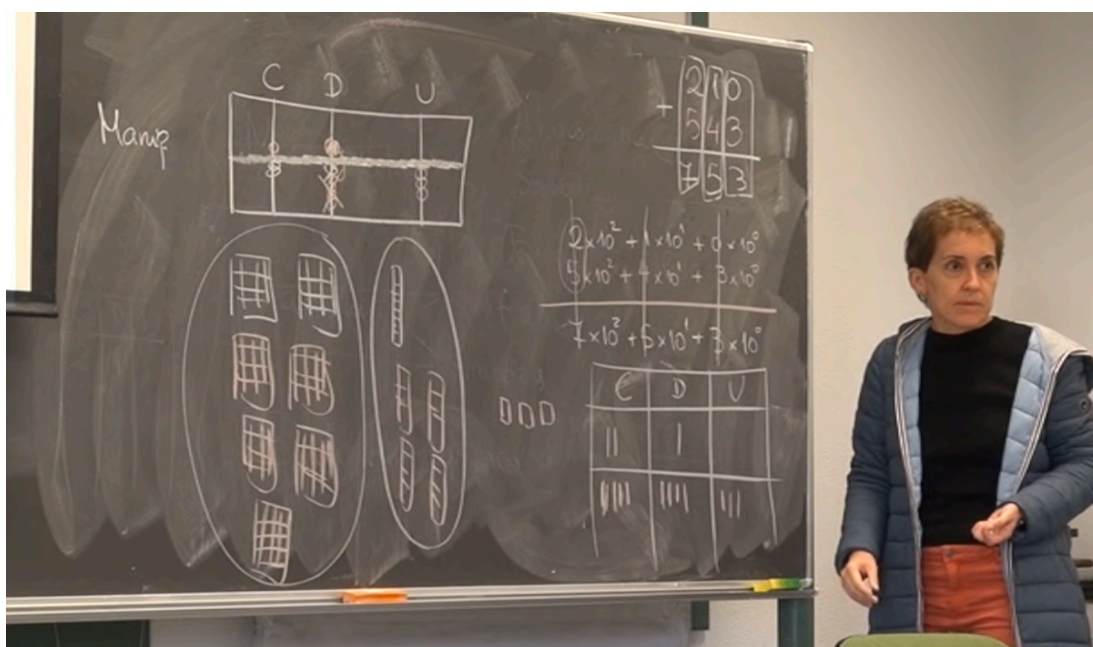
que dibujar una tabla, ¿vale?, vamos a dibujar una tabla [comienza a dibujarla en la pizarra], con filas y columnas, ¿cuántas columnas pongo?

A: Tres.

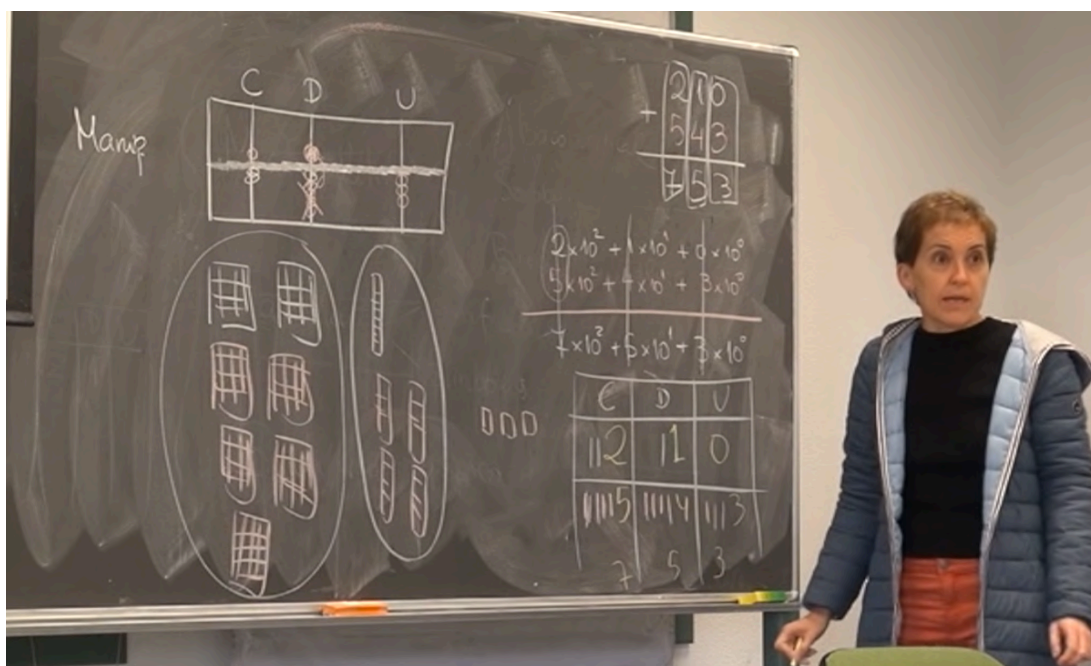
F: Tres, ¿por qué tres?

A: Centenas, decenas y unidades.

F: Unidades, decenas y centenas, ¿vale? Y entonces, represento el primer número, 210: 1, 2, 1, eso es 210 [pone dos rayas en la primera casilla de las centenas y una en la primera de las decenas]. Represento el segundo número, 500: 1, 2, 3, 4, 5; 40: 1..., bueno, en rosa, ya puestos..., 1, 2, 3, 4, 5; 40: 1, 2, 3, 4; y 3: 1, 2, 3. Y agrupo: ¿cuántas unidades tengo al final?, 3, ¿cuántas decenas tengo al final?, 5, ¿cuántas centenas tengo al final?, 7, fin.



Este sistema de representación es icónico-gráfico porque he representado aquí las cantidades con palitos, pero tiene una estructura especial porque está en una tabla, ¿vale? Entonces, vamos a decir que es un sistema de representación tabular-gráfico. Si en vez de poner aquí gráficos, yo hubiera dicho: «oye, mira, no me lío con los gráficos, ya puestos, como ya controlo mejor los símbolos, pues voy a poner aquí 210 y aquí abajo voy a poner 543 y luego ya sumo: 4 y 1, 5; 5 y 2, 7; 3 y 0, 3», ¿vale?



Sería tabular, tiene una estructura tabular, no es puramente simbólico-numérico, tiene una estructura tabular, pero con números dentro, tabular-numérico, ¿vale? Entonces, yo voy pasando de lo más concreto, que sería: «mi madre me ha dado 316 euros y mi abuela 429, ¿cuántos euros tengo en total?», después paso a manipular, con ábacos verticales, con ábacos japoneses, con bloques multibase..., y cuando interiorizo bien eso, digo: «ostras, venga, lo voy a poner en una tabla gráfica y voy a indicar lo que me indica cada varilla o lo que me indica cada agrupamiento de los bloques multibase, que es posición, en las columnas de una tabla, y ahí voy a poder marcarlo con símbolos». Esta tabla con símbolos se llama tablero de posición, porque tengo las posiciones indicadas —unidades, decenas y centenas—, y es uno de los recursos que más utilizan en el método famoso este Singapur, que habréis visto o habréis oído hablar de él, ¿vale? Entonces, ¿qué están haciendo?, están haciendo una transición de lo más concreto, pasando por lo manipulativo, hacia lo abstracto, que sería..., esto es lo más abstracto [señala las expresiones de sumas y productos de potencias de 10] y esto es lo abstracto que se trabaja en primaria [señala la suma hecha en el registro de representación simbólico-numérico], ¿vale? Pero no trabajan directamente con esto, vamos pasando..., concreto, concreto, concreto, concreto [de forma manipulativa], voy intentando abstraer un poco, pero tengo mis gráficos que me ayudan a visualizar lo que estoy haciendo [de forma tabular], y finalmente mi objetivo es escribirlo simbólico-numéricamente, de forma abstracta, ya al final. ¿Cómo habéis

trabajado mayoritariamente vosotros en primaria cuando estabais haciendo sumas de este estilo? ¿Desde aquí [señala lo manipulativo] o desde el final [señala lo simbólico-numérico]?

A: Desde el final...

A: Yo con las de centenas, decenas y unidades, las cajas...

F: Las cajas estas también os suenan, los tableros de posición, pero ¿y qué poníais en las posiciones, palitos o los números ya?

A: Los números directamente.

F: Los números directamente, o sea, que estabais trabajando la fase inicial, de la suma, la estabais trabajando directamente con lo simbólico, que es la fase final, ¿lo veis?

A: Jolín, sí.

F: Vale, pues ala, ya está.

ANEXO 3

Instrucciones para los participantes en la fase 1

INSTRUCCIONES

A continuación, voy a leerte las instrucciones que has de seguir para la realización de esta fase del proceso de recogida de datos (fase 1). Si te surge alguna duda mientras te las leo, puedes interrumpirme y preguntarme lo que estimes oportuno.

En esta fase, la labor que se te va a encomendar es la de visionar un conjunto de vídeos que se corresponden con fragmentos de diferentes clases de matemáticas y su didáctica impartidas en la Universidad por una formadora de matemáticas a futuros maestros de Educación Primaria.

Durante el visionado de cada vídeo, tendrás que llevar a cabo de forma oral las siguientes **TAREAS**:

1.º Identificar todas las situaciones o acciones que detectes de la formadora cuando dichas acciones estén relacionadas con su práctica de enseñanza. Es decir, no se trata de mencionar todo lo que notes que hace la formadora —por ejemplo, no es preciso indicar que se ha rascado un brazo, aunque lo veas—, sino de indicar todos los hechos o aspectos que identifiques que pienses que tienen relación con su práctica de enseñanza.

Los hechos que señales pueden ser relevantes, importantes, inusuales en una clase... o pueden ser habituales, no tener demasiada relevancia... Lo que importa es que se centren en la práctica de enseñanza de la formadora.

2.º Interpretar las situaciones o acciones que hayas detectado. Es decir, se pretende que expliques aspectos relativos a la práctica de enseñanza de la formadora, por qué han tenido lugar los hechos o las acciones que has señalado, por qué las ha llevado a cabo del modo en el que las ha llevado a cabo, cuál crees que es su intención, etcétera. Dichas explicaciones han de ir dirigidas a entender mejor su práctica de enseñanza y pueden realizarse con más o menos profundidad o estar más o menos fundamentadas —en tu propia experiencia, en distintos marcos teóricos, etcétera— según lo creas necesario para explicar adecuadamente la acción o situación en cuestión.

Es posible que identifiques hechos que quizá no puedas interpretar. En tal caso, te puedes limitar a indicar el hecho.

Asimismo, no se te pide que propongas prácticas de enseñanza alternativas que podrían haber sido mejores en un momento concreto.

Para llevar a cabo las dos tareas que se acaban de explicar, tendrás que seguir las siguientes **INDICACIONES**:

1. Los comentarios los irás haciendo durante el visionado de los vídeos. Antes de realizar cualquier comentario, habrá que detener la reproducción del vídeo, acción que puedes realizar tú si quieres o yo mismo, cuando empieces a hablar, si lo prefieres. Podrás hacer tantos comentarios como desees, parándose el vídeo tantas veces como sea necesario.

Cuando se detenga la grabación, puedes tomarte el tiempo que necesites para organizar tus ideas y, posteriormente, indicar el hecho detectado y la interpretación que quieres dar sobre el mismo.

2. No se podrá retroceder en el vídeo, es decir, no se podrá ver más de una vez ninguna parte de la grabación.

Por otro lado, al realizar tus comentarios sobre la práctica de enseñanza de la formadora, has de tener en cuenta las siguientes **CONSIDERACIONES**:

1. No se trata de juzgar o criticar el trabajo que realiza la profesora, sino de reflexionar en torno a sus acciones, lo cual no quiere decir que no se puedan indicar, por ejemplo, errores por parte de la formadora, siempre que se trate de explicarlos y se haga sin juzgarla o criticarla.

2. Asumimos que la profesora actúa en todo momento a favor del máximo beneficio de sus estudiantes.

3. Los vídeos que se proponen no pretenden demostrar ni la mejor ni la peor práctica de enseñanza, sino que suponen ejemplos de clases reales que han de servir para poder reflexionar sobre la práctica de enseñanza mostrada.

Una vez has recibido la información pertinente para realizar la tarea que se te pide, has de saber que vas a visionar un total de tres vídeos —cuyas duraciones aproximadas son de 13, 14 y 21 minutos, respectivamente— y que durante la reproducción de los vídeos yo me voy a limitar a escuchar tus comentarios, no voy a mantener una conversación sobre el contenido del vídeo ni a hacerte preguntas sobre tus reflexiones, pues no es el objetivo de esta fase. Recuerda además que esta sesión está siendo grabada en vídeo para poder estudiar posteriormente toda la información que se pueda extraer de tus análisis.

Así pues, estas son las instrucciones para poder realizar la fase 1. ¿Tienes alguna duda o cuestión al respecto?

PRUEBA PARA COMPROBAR LA COMPRENSIÓN DE LAS INSTRUCCIONES

En primer lugar, vas a observar un breve vídeo sobre cómo renovar una puerta. Tras visionar el vídeo, indica en la tabla cuáles de los siguientes cuatro aspectos abarca cada uno de los comentarios sobre las distintas situaciones o acciones que se suceden en la grabación:

- (A) identificación de un hecho,
- (B) interpretación del hecho identificado,
- (C) propuesta de alternativas,
- (D) juicios o críticas.

<i>Comentario</i>	<i>Incluye...</i>
1. El hombre quita las bisagras de la puerta con ayuda de un destornillador y un martillo.	A / B / C / D
2. Retira los tornillos de las bisagras con un destornillador eléctrico, ya que así realiza el trabajo de un modo más rápido y sencillo que empleando un destornillador manual.	A / B / C / D
3. Aplica pintura de esmalte y no pintura plástica, seguramente porque en diferentes ensayos clínicos se ha demostrado que este tipo de pintura tiene una mayor durabilidad, además de ser más resistente a la humedad y a los golpes, aunque requiere un mayor tiempo de secado. Además, requiere de la aplicación de al menos dos capas para que el resultado sea óptimo, por ello en el vídeo se indica que es conveniente aplicar de dos a tres capas.	A / B / C / D
4. Lija la puerta con una lijadora eléctrica, pero creo que el resultado sería mejor con una lija manual.	A / B / C / D
5. Lija la puerta con una lijadora eléctrica, pero creo que el resultado sería mejor con una lija manual, ya que el acabado con la lija manual es más natural.	A / B / C / D
6. Lija la puerta con una lijadora eléctrica, dado que es más rápido que hacerlo con la lija manual, aunque yo creo que el resultado sería mejor con una lija manual.	A / B / C / D
7. Tras pintar la puerta, coloca de nuevo las bisagras y una la pone un poco torcida, lo que puede deberse a un pequeño despiste.	A / B / C / D
8. Tras pintar la puerta, coloca de nuevo las bisagras y una la pone un poco torcida, lo que demuestra que es un poco chapuzas. No tiene mucha idea de bricolaje.	A / B / C / D

En **RESUMEN**, has de tener presente los siguientes aspectos:

1. Tu tarea consiste en identificar e interpretar todas las acciones que detectes de la formadora que tengan que ver con su práctica de enseñanza.
2. Es necesario pausar el vídeo antes de realizar un comentario, teniendo en cuenta además que no podrás retroceder en la reproducción de la grabación.
3. No se trata de juzgar a la formadora, asumimos que actúa a favor del máximo beneficio de sus alumnos. Los vídeos de sus clases han de servirte para reflexionar sobre la práctica de enseñanza en sí, por lo que tus comentarios han de centrarse en dicha práctica, dejando a un lado posibles observaciones que se pudieran realizar sobre los alumnos —las cuales se podrían mencionar, siempre que estuvieran en relación con la acción de la formadora—.

ANEXO 4

Transcripción de los comentarios de Marcos en la fase 1

Nota: El texto presentado entre corchetes en la transcripción se corresponde con información incluida por el investigador.

TRANSCRIPCIÓN DEL VÍDEO 1

Fragmento 1

[F = Formadora del vídeo]. [Comentarios de Marcos presentados en recuadros].

F: Bueno, entonces os voy a dar el guion y empezáis a trabajar y, al final, los últimos 15 minutos, hacemos la puesta en común. El guion de la actividad aparece aquí

Comentario 1: Bueno, está dando..., está explicando lo que va a hacer. Está diciendo en qué va a consistir..., les está un poco preparando el trabajo. No tiene mayor historia...

en el campus, pone la fecha, ¿vale?,

Comentario 2: Era verano, eso lo interpreto [lo dice sin parar el vídeo; lo dice, con un tono de broma, porque ve a la formadora en manga corta].

«actividad para la sesión del 19 de septiembre». Lo voy a leer porque está en inglés, por si alguno tuviera alguna dificultad, lo leo y os ponéis a trabajar, ¿vale?

Todo el mundo en la mesa tiene un montón de palillos y varias cintas de estas, ¿no?, elásticas. Si alguien necesita más cintas me las pide, palillos no, son los que os he puesto, ¿vale?,

Comentario 3: Bueno, ya está dando la consigna y está explicando el material. Por ejemplo, limita los palillos; imagino que porque tendrá que hacer algo en lo cual la cantidad de palillos debe de ser relevante, porque eso sí, las gomas, dice que no, pero los palillos ya les ha avisado que no les va a dar más, que solo necesitan esos, imagino que porque necesita..., no sé lo que va a hacer, pero ya lo ha limitado. Y bueno, lo va a traducir, eso me parece que es un hecho..., al estar en inglés, lo va a traducir. No sé yo si en castellano ella lo leería o lo explicaría, pero bueno, ha dicho que lo va a traducir, imagino que no solo lo traducirá sino que dará..., negociará la consigna, o sea, tendrá que asegurarse que los alumnos han entendido bien lo que tienen que hacer, si no, no se puede

hacer nada.

es con lo que tenéis que trabajar. El problema es que yo he comprado una caja de palillos en Supeco y resulta que mis compañeros lo compran en Mercadona y me dicen que las cajas de palillos que ponen 800 palillos del Mercadona traen más y que les sale a cuenta, y que cuando van a comprar materiales — porque a veces tenemos que comprar nosotros los materiales — pues que merece la pena. Yo no pude ir a Mercadona, fui a Supeco, pone que son 800, pero no sé si me han timado o no me han timado. Entonces, para hacer un control de calidad, hacer una estimación,

Comentario 4: Bueno, está dando un contexto. Al principio yo he creído que era simplemente una explicación ingenua de tal, pero no, imagino que el saber cuántos hay debe de formar parte del trabajo y entonces está intentando dar una justificación más allá de la actividad didáctica, está intentando contextualizar. Entonces, está diciendo, efectivamente: «quiero ver, quiero controlar cuántos hay», ¿de acuerdo? No ha dicho..., podría haber dicho: «bueno, se trata de saber cuántos hay», sin más, no, ha intentado darle una explicación que yo al principio me he creído que era de verdad, o sea, que es que realmente tenía un problema con que fueran los palillos de un sitio o de otro, pero vamos...

que luego, bueno, los que hayáis hecho Matemáticas de Ciencias Sociales pues sabéis hacer un contraste de hipótesis y tal, pero bueno, lo primero que tengo que hacer es hacer una estimación de cuántos hay, ¿no? Entonces, los he repartido para no contarlos yo y la idea es ver cuántos hay.

Entonces, el guion de la actividad, tal y como aparece aquí... [espera a que cargue el ordenador]. Aquí está el guion. Esta actividad —esperad que la amplió un poco— está escaneada de un libro muy bueno que utilizan en los últimos años en Estados Unidos para formar profesores de primaria.

Comentario 5: Está dando la fuente de donde viene y yo creo que lo está haciendo también con ánimo de que muchos puedan consultar la fuente, pero vamos, ella ha avisado efectivamente de dónde lo ha sacado y cuál es el objetivo de la fuente. La fuente tiene un objetivo, que era formar docentes, pero bueno, se lo está avisando, imagino que con la intención de que quien quiera pueda consultarlo..., ¿vale? Porque si no, no tendría que

decir..., «pues está en tal sitio» y punto.

Lo bueno del libro es que, además de los contenidos teóricos, más de la mitad del libro son actividades para llevar al aula-taller como estamos haciendo aquí, ¿vale? Entonces, una de las actividades iniciales para el trabajo con el número, que es con lo que estamos empezando nosotros, es esta de los palillos, ¿vale?

Comentario 6: Y está diciendo en qué parte del currículum estaría correcto este trabajo. Está diciendo: «pues en la parte inicial, de construcción del número...», y demás.

Entonces, aquí la pregunta es «cuántos», cuántos palillos, ¿no?, que es lo que os he preguntado a vosotros, ¿no?, cuántos.

Comentario 7: La consigna, o sea, el objetivo del alumno está muy claro, es decir, tienen que saber cuántos palillos hay. Ahora imagino que establecerá las condiciones o cómo tal..., pero desde luego, ha dejado bien claro..., desde luego no tiene ninguna ambigüedad, tienen que saber cuántos palillos hay. Imagino que será una actividad en la que los palillos son muchos y un conteo sencillo no debe de ser la mejor estrategia, imagino que tendrá algún tipo de...

Entonces, cada grupo participando en esta actividad tiene un montón de palillos y luego tiene algo para atarlos, ¿no?, *rubber bands*, pues cintas de estas elásticas.

Comentario 8: Gomas [lo dice sin parar el vídeo].

Los materiales ya los tenéis. El objetivo de la actividad es ayudaros a entender el desarrollo de la escritura de los números tal y como los utilizamos nosotros en nuestro sistema de numeración, ¿vale?

Comentario 9: Ha decidido declarar cuál es el objetivo didáctico de esta actividad con estos alumnos. Me da la sensación de que es con estos alumnos, ¿de acuerdo? Lo que desconozco es si la actividad es una actividad para llevar – bueno, ahora lo veré –, para llevar con alumnos más pequeños y lo que estamos es reproduciendo la actividad con los futuros maestros o es una actividad destinada al futuro maestro directamente. En cualquier caso, me da la sensación de que lo que dice, lo que está estableciendo es por qué ha presentado la actividad con ellos, ¿de acuerdo? Por ejemplo, con los..., bueno, con los alumnos... No, no voy a hacer eso, voy a seguir con esa alternativa.

Entonces, primero, organiza los palillos de forma que visualmente puedas ver más o menos cuántos hay; usa las bandas elásticas, si te ayudan, para organizarlos de manera que así, de un vistazo, puedas decir

Comentario 10: No solo traduce, está complementando la consigna, lo que se llama en Teoría de Situaciones «la negociación de la consigna». Tiene que quedar muy claro cuál es el objetivo. El objetivo del alumno ella lo ha dicho, pero ahora está estableciendo cuáles son las condiciones para hacerlo, ¿no?, cuáles son..., qué es lo que está permitido, o en este caso «sugerencia», y eso forma parte de una negociación, el alumno tiene que tener muy claro qué es lo que puede hacer, ¿de acuerdo? Entonces, ahí no solo está traduciendo. Está también..., «de un vistazo», ya ha usado varias expresiones cuyo objetivo es efectivamente incidir en los objetivos que ella quiere, ¿no?

cuántos tienes, primero los cuentas, lo organizas, piensas cómo organizarlo, pero la cosa es que la organización que tú tengas en la mesa te permita de un vistazo recordar cuántos hay sin necesidad de haberlo apuntado, ¿no?, y que, si yo me paso por allí, me podáis decir: «mira, hay no sé cuántos, porque..., lo veo porque lo hemos organizado así», ¿vale?

Comentario 11: ¿Ves? Ahora está estableciendo pequeñas cosas, es decir, el objetivo es saber cuántos hay, pero no de cualquier manera. Me dice que no apunte y que yo, simplemente con cierta organización, sepa establecer cuántos hay de una manera rápida.

Luego, reflexiona sobre si la manera en la que lo has organizado corresponde a cómo escribirías tú luego los numerales para representar esa cantidad de palillos.

Comentario 12: Imagino que lo que quiere es provocar el uso de agrupamientos, agrupamientos recursivos, para hacer una correspondencia con el sistema de numeración. Porque está diciendo que reflexionen..., ya es un objetivo de otra índole, ¿no?, es decir, pensar cómo lo he hecho. Ya no es hacerlo, sino es pensar cómo lo he hecho y si eso tiene relación con tal... Es un objetivo que..., ese ya se sale de..., ese ya es muy didáctico, ese ya se sale un poco de un supuesto «adidactismo» que en principio podría presentar la actividad, es decir, «tenemos que saber cuántos hay», no, tenemos que pensar cómo lo hacemos, es decir, ya tiene otra..., otra tarea, tiene trampa [lo dice con un tono de broma].

Después, tienes que juntar tus palillos con los de un grupo de al lado, ¿vale?, por ejemplo, vosotros con vosotros y así, cada dos grupos tienen que juntar los

palillos que tienen y decidir cuántos tienen en común, ¿vale?, cuántos tienen en total.

Comentario 13: Ahí ya hay una tarea, ya es juntar, una cosa es saber yo los que tengo y otra cosa es saber, con cierta facilidad, si junto dos distribuciones, saber cuántos hay en total. Ahí hay un intento de ver si la escritura permite la composición. Si es una buena estructura, puede asimilar perfectamente otro grupo, si no, no. Yo creo que lo hace porque nuestro sistema de numeración está diseñado porque efectivamente funciona bien algorítmicamente; es decir, desde el punto de técnicas operatorias es muy cómodo. Y claro, si tú haces una organización basada en eso, pues vas a tener las mismas facilidades. Imagino que querrá..., no lo sé, vamos a ver si va por ahí.

Y al final, tenemos que juntarlos todos y de una forma ágil, sin tener que volver a contarlos todos, tenemos que saber cuántos palillos hay en total en la clase repartidos, ¿vale?

Comentario 14: Queremos ver si esa distribución se puede ir heredando y puede funcionar; si es buena, lo va a hacer. Entonces, es una manera de ver..., es una manera de rechazar otras distribuciones que pueden ser buenas de cara a saber cuántos hay, pero que no van a ser buenas cuando ellos compongan. Y sobre todo hay un hecho, la distribución tiene que ser común; si unos hacen grupos de 6 y otros grupos de 8, cuando los juntes tengo un verdadero problema. Con lo cual ya les está, sin decírselo, les está obligando a que tomen una..., a que la manera de agruparlo tenga cierta..., sean isomorfas, tengan un cierto isomorfismo, si no, al juntarlo no vamos a tener nada. Entonces, es una manera muy... O sea, me gusta esa idea, es decir, sin decirlo estás obligando a que «señores, tenemos que ponernos de acuerdo en cómo agrupamos». Está bien.

O sea que, primero, cada grupo tiene que saber cuántos tiene

Comentario 15: Recapitula [lo dice sin parar el vídeo].

y tiene que generar una estrategia para, de manera rápida, mirar en la mesa y ver cuántos hay; después, reflexionar sobre si la manera en la que lo coloca cuando uno luego escribe, imaginaos, «tengo 72, pues cómo se escribe 72: siete, dos», pues la manera en la que lo coloco me ayuda con la escritura o no, no tiene por qué, se reflexiona un poco sobre eso;

Comentario 16: Ahí está incidiendo en eso. Eh..., bueno, yo creo que da demasiadas pistas

[se ríe]. Si cuando lo haces..., si tú lo vas haciendo, el hecho de que la instrucción no sea igual es muy rico, es muy rico. Yo creo que lo hace para que haya cierto isomorfismo. Pero bueno, yo es que aquí..., es alternativa. Si no surge, es muy bueno, porque entonces piensas qué ha pasado. Eso sí, tardan más, claro. Quiero decir, también hay que entender que estamos aquí, estamos con una clase...

y cuando hayáis terminado esa parte, llamáis al grupo de al lado y decís: «venga, vamos a ver cuántos tenemos en total, visualmente, cómo lo organizasteis vosotros, cómo lo organicé yo, a ver cómo lo tengo», ¿vale?; y luego todos. Tenéis un cuarto de hora, ¿vale?

Comentario 17: Ahora les da el tiempo.

Fragmento 2

[F = Formadora del vídeo]. [A = Alumnos]. [Comentarios de Marcos presentados en recuadros].

F: Necesito saber si habéis tenido que llegar a algún acuerdo entre los grupos o...

A: Sí, claro, todo ha sido un consenso, todo ha sido un consenso.

F: Ah, vale, ha sido un consenso. ¿Qué acuerdo habéis tenido que...?

A: Hemos explicado cada uno pues lo que significaba cada..., cada gomita.

F: Y, por ejemplo, ¿vosotros de cuánto en cuánto lo habíais agrupado? Eráis los de 15, 10, 5, ¿no?

A: Sí.

Comentario 1: ¿De cuánto ha dicho, de 15? O sea que ella les pregunta ya sobre si se han tenido que poner de acuerdo. Realmente en el acuerdo está gran parte de las decisiones. Entonces ella está preguntando. Dicen que sí, que se han puesto de acuerdo. Uno lo había hecho con 15, qué raro.

F: ¿Y vosotros?

A: 20, 10 y 4.

Comentario 2: ¿Otros lo habían hecho en 20, 10 y 4?

F: 20, 10 y 4. Entonces, ¿habéis tenido que llegar a algún acuerdo alguno para reordenar?

A: No, porque nos ha venido muy bien.

F: ¿Os ha venido bien?

A: Es que hemos sido muy inteligentes cogiendo el amarillo para los grandes [se refiere a gomas elásticas de color amarillo].

F: Ahora los grandes de qué son, ¿de 20?

A: De 20 y de 15, aquí están mezclados. ¿O los tenemos que reorganizar?

Comentario 3: Lo que pasa es que..., sí está bien, claro, tú has dado libertad absoluta, claro... Eh... Los grupos de 20 luego no se cuentan bien, o sea, se cuentan, pero..., en fin. Lo han hecho...



F: Esto es superinteligente, ¿no? O sea, yo veo aquí..., digo: «en los amarillos, algunos tienen 20 y algunos tienen 15, búscate la vida Nuria».

A: Pero son amarillos.

F: Ya, pero entonces yo no sé...

Comentario 4: Han juntado de distintos... Pues eso les ha debido de saltar...

Yo digo: «vale, yo puedo ver 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 grupos amarillos», ¿no? Y ahora digo:

Comentario 5: Lo que no sé es quién les ha dicho que usen las gomas del mismo color. Esa indicación no estaba. O sea, que ellos han decidido usar el amarillo en los grandes, pero en dos grupos distintos, no lo sé... Ahí no soy capaz de...

«como mucho serán 160, si son todos de 20, pero... no necesariamente son 160, pueden ser menos».

A: Bueno, pero como no lo sabes...

F: ¿Entonces cómo sé cuántos hay?

A: Te lo estamos diciendo, tienes que confiar en nosotros.

F: No, en matemáticas la confianza no vale, uno tiene que...

Comentario 6: [Se ríe]. Ella ahora mismo les está sometiendo a sus propias contradicciones. Es una cosa bastante típica en clase de matemáticas, dicen cosas, ellos están muy orgullosos porque lo han hecho, porque lo han hecho ellos, el «yo ya me entiendo», pero claro, cuando llega un agente externo como el profesor, entonces se

empiezan a ver las cosas que no funcionan. Y entonces aquí les está poniendo de manifiesto cómo, si no se ponen de acuerdo en los grupos, eso va a ser intratable. Y se lo está preguntado, entonces alguno ya ha salido diciendo: «bueno, ya nosotros sabemos lo que hacemos», y entonces ella obviamente les dice eso..., no hay..., quiero decir..., lo hace simplemente para que ellos vean la contradicción y a ver si proponen alguna manera de mejorarlo.

A: Es que no sé, no lo entiendo. ¿Lo tenemos que reorganizar?

F: Vosotros ya sabéis cuántos palillos tenéis, pero ahora, visualmente, tenéis que poder contarme a mí cómo sabéis que hay ese número de palillos, ¿no?

A: Ah, pues habría que...

Comentario 7: La consigna tiene ese punto ambiguo. Decir que visualmente lo ves..., o sea, que visualmente es fácil..., no está muy determinado. Y es verdad que el juego está ahí, ellos pueden decir «yo lo veo» y tú no les puedes decir que no lo ven. Entonces, sí que efectivamente ella intenta poner de manifiesto la ventaja que tiene el ponerse de acuerdo, pero yo creo que se está encontrando cierta resistencia; creo que es porque si la consigna sí era muy sencilla – es decir, hay que saber cuántos hay –, no era igual de sencilla para decidir qué se entiende por una distribución que lo muestre fácil. El hecho de juntarse, sin que tú lo digas, obliga a eso; pero estos incluso están aguantando juntándose con grupos distintos, lo cual sí es sorprendente. Pero es verdad que solo decir «yo lo necesito ver», esa consigna no deja muy claro qué es lo que está bien y qué es lo que está mal. Entonces yo creo que estamos teniendo ese problema aquí, me da esa sensación.

¿Y no podemos quitar las gomas y reorganizarlo?

F: Sí, sí, sí, yo no dije que no pudierais quitar las gomas.

A: Aaaaah.

Comentario 8: Ahora acaban de ver que efectivamente el acuerdo pasa..., ellos no habían entendido que el acuerdo podía hacer reformular otra vez el trabajo. Entonces «aaaaah», ahora parece ser que... Vamos a ver.

F: ¿Alguien dijo que no se podían quitar?

A: Y nosotros diciendo que no se podían quitar las gomas...

Comentario 9: Es que es verdad que las..., es muy importante, esto es muy importante, cuando das las consignas, tienen que dejar muy claro lo que se puede y lo que no se puede

hacer, porque luego te encuentras estas cosas. Y es verdad, eso nos pasa a todos. Porque es verdad que te crees que no va a tal..., y al final...

F: Y una duda más. Alguno de vosotros..., por separado, ¿no?, cuando lo teníais..., habéis escrito la cantidad que teníais, ¿no? Eh, 109 teníais uno...

A: 104 y 85.

F: Por ejemplo, el 85 se escribe con un 8 y un 5. Ese 8 y ese 5, ¿estaban representados de alguna forma en...?

Comentario 10: Forma parte de la consigna que no está... Claro, ella les ha dicho que esa facilidad en la distribución tenga que ver con la escritura usual que tenemos. De alguna manera está intentando que utilicen la agrupación decimal, porque es la que se ajusta. Pero efectivamente, como no quiere decirlo, simplemente tienen que descubrirlo ellos, está diciendo: «y tiene que ver con eso...». Volvemos a tener que alguno te puede decir: «sí, yo tengo 4 de 20 que son 80», y no le puedes decir que no. Es decir, ¿8 de 10 es más cómodo? Para ti, profe, sí, porque lo has decidido, pero... Es verdad que esa consigna tiene eso..., eso quizá se resuelva cuando tengan que juntarse, porque tienen que ponerse de acuerdo en una, pero, claro, pueden ir todos al 20. Y luego cómo agrupen los agrupamientos, cuando haya más a ver qué hacen con los grupos grandes, si los agrupan a su vez o los grupos grandes ya..., eso ya depende de la cantidad.

A: No.

F: No, vale. Y vosotros, la misma pregunta con lo vuestro.

A: No.

Comentario 11: Claro, le contestan que no [lo dice sin parar el vídeo].

F: No había un patrón en cómo lo habíais representado, vale, ok.

Comentario 12: A ellos les ha preocupado hacer un agrupamiento, lo han cogido de 20... Es verdad que el agrupamiento de 10 es muy pequeño..., cuando tienes cosas..., es verdad, aunque sea muy cómodo porque nosotros usamos..., de hecho por eso en las unidades de medida, que también son decimales, sin embargo nos las saltamos, usamos el kilo y tal y no usamos de 10 en 10, el decímetro no lo usamos..., el decámetro, el decagramo y todas esas cosas no las usamos porque son muy pocos, entonces es verdad que el agrupamiento de 10 es pequeño y aquí se está viendo. Entonces..., es más, podrían haber dicho: «mira, aquí hay 50», yo sé que hay 50 y los cuento en un momentín... Han

cogido 20, que no han cogido 30, ¿por qué 20?, hombre, es un divisor de 100, 2 es divisor de 10, entonces también es más fácil, o sea, no ha sido tampoco..., no han cogido grupos de 70, grupos de 30 que, efectivamente, al no tener relación con 100 te genera problemas; han cogido 20 que no está mal... De hecho, bueno..., los franceses usan la base 20 de vez en cuando, con el cuatro 20 [se ríe].

A: ¿Pero quieres que busquemos?

F: Quiero que reflexionéis sobre eso, pero ahora lo vamos a poner en común, ¿vale?

A: Vale.

Comentario 13: Por ejemplo, en Francia te hubieran dicho que está bien, se cuenta muy bien. Porque 80 es quatre-vingts, entonces dicen «cuatro 20», o sea, que ahí... [se ríe]. Y escriben 8, no escriben cuatro 20, o sea, que...

F: ¿Ha sido operativo el que ellos hayan hecho 15, 10, 5... y vosotras tuvieras 20...? ¿Eso ha ayudado a la hora de ponerlo en común?

A: No, porque ahora hay que hacerlo otra vez.

F: Ahora hay que volverlo a hacer...

Comentario 14: Ha vuelto a hacerles emerger sus contradicciones para que las arreglen. Pero siempre..., no propone ella nunca la solución, intenta que sean ellos los que lleguen. A veces es más fácil y otras veces más complicado y te hace intervenir a ti más, pero es verdad que siempre intenta que sean ellos – bueno, y yo creo que lo consigue –, que sean ellos los que tomen las decisiones en lo importante.

Fragmento 3

[F = Formadora del vídeo]. [A = Alumnos]. [Comentarios de Marcos presentados en recuadros].

F: Me tenéis que decir cuántos palillos había en cada grupo inicialmente, antes de juntaros dos grupos, ¿vale? Entonces, por ejemplo, vosotros.

A: 87.

Comentario 1: Bueno ahora me imagino que va a recapitular todos y a ver cómo lo han hecho y demás.

F: 87 [lo escribe en la pizarra]. Estamos de acuerdo, yo utilizo la escritura estándar que vosotros habéis visto en primaria, secundaria,

Comentario 2: Bueno, dice esto porque está trabajando el sistema de numeración. Un alumno no entiende que le estén diciendo que escribe 87..., ¿cómo lo quieres escribir si no? [se ríe]. Pero como está trabajando eso, dice: «lo estoy escribiendo así, tal...»; es muy típico, es muy típico de nosotros. Pero el alumno tiene que estar pensando: «¿de qué otra manera lo vas a escribir, muchacha?» [se ríe].

bachillerato y al llegar aquí, ¿vale? Escritura estándar de nuestro sistema de numeración en nuestro contexto. Ese grupo, 87. ¿Cómo habíais hecho los grupos?

A: Pues hemos hecho, eh..., tres grupos de 20.

F: Tres grupos de 20, ¿cómo lo puedo poner? [Escribe un 3 en la pizarra].

Comentario 3: Me ha saltado..., digo: «¿cómo va a escribir los grupos de 20?». Cuando se ha ido a escribirlo, digo: «a ver qué va a hacer», porque esa decisión es muy importante, a ver cómo lo escribe. Entonces, ahora lo está preguntando, «a ver cómo lo escribo».

A: Eh..., tres rosas.

A: 3 x 20.

F: ¿Tres rosas?

A: Sí.

A: No.

F: Si pongo tres rosas...

Comentario 4: Ahí le ha dicho uno 3 x 20 y no le ha hecho caso. Dice: «tres rosas»; otro habrá usado las gomas rosas y ha dicho tres rosas, pero ¿has oído uno que ha dicho

3 x 20? Debe de ser que ella no lo ha oído.

¿Todo el mundo que ha utilizado gomitas rosas ha atado 20?

A: No.

F: ¿Otras personas que han atado 20 han usado otro color?

A: Sí.

F: Uf, el color no me vale.

Comentario 5: Claro. Y todas no habrán hecho grupos de 20, es decir, que efectivamente está diciéndoles que el color no es lo relevante.

¿Cómo lo pongo?

A: 20×3 .

A: 3×20 .

F: 3 grupos de 20, ¿no? 3×20 . [Escribe 3×20]. Y luego...

A: Pon en el 3 «color rosa» o algo así. Entre paréntesis.

Comentario 6: Como ves, ha seleccionado el que ella quiere.

F: Vale, vale.

Comentario 7: Insisten en el rosa [lo dice sin parar el vídeo].

[Pinta una raya rosa sobre el 20].

Comentario 8: Ha puesto rosa, ¿no? [lo dice sin parar el vídeo].

Y luego... Esto son 60.

A: 9×3 .

Comentario 9: Son 60 porque lo dice ella, nadie lo ha dicho [se ríe].

F: Y luego 9 grupos de 3, ¿no? [Escribe $+ 9$]. ¿O 3 grupos de 9? [Borra el 9].

A: 3×9 .

Comentario 10: Buena pregunta, 3 grupos de 9 o 9 grupos de 3.

F: 3 grupos de 9 y el 9 lo habéis puesto de otro color, ¿vale? [Escribe 3×9].

A: Sí.

Comentario 11: Lo que está es proponiendo escrituras..., está haciendo descomposiciones del 87, ¿de acuerdo? Pero no son expresiones que me permitan hacer agrupamientos

regulares, está poniendo 3 de 9 y 3 de 60 [dice de 60, pero son de 20] y de hecho ninguno deja... Lo que yo no sé, si hubiera puesto un número primo..., porque puedes pensar que aquí [señala a la pantalla] hay unidades de 9 y luego unidades de 20 [señala a la pantalla], un sistema no regular, puede funcionar; lo que pasa es que no hay unidades elementales, claro, si el número es primo, tiene que haberlas. A lo mejor haber cogido un número primo hubiese dado un juego a lo mejor..., no lo sé. También es verdad que no sé si ella ha contado previamente los que ha puesto. Pero claro, aquí, 87 no es primo, con lo cual le ha salido. Entonces, a lo mejor..., no lo sé si alguno lo hace; o sea, no sé si alguno ha tenido que dejar palillos sueltos.*

F: ¿Alguien más ha utilizado grupos de 20?

A: Nosotros.

F: Varios. ¿Alguien más ha utilizado grupos de 9? [Destaca con la voz el número 9].

A: Nosotras.

Comentario 12: Hay varios con grupos de 9, pues es raro. O encajan muy bien los números, como es este caso, o es un agrupamiento que da un juego fatal. Es un agrupamiento muy incómodo [se ríe].

F: Vosotras, vale, y vosotras también, vale. Siguiendo equipo, vosotras.

A: Nosotras, 90.

F: En total, 90. [Escribe 90 en la pizarra].

Comentario 13: Tampoco es primo [lo dice sin parar el vídeo].

A: 4 de 20 y 1 de 10.

F: [Escribe $4 \times 20 + 1 \times 10$].

Comentario 14: Este le ha gustado más [se ríe], me da a mí la sensación. Ahora, aparecen muchos 20... Yo creo, no lo sé, pero imagino que la cantidad de palillos de cada grupo igual ella lo ha pensado, porque desde luego es una variable didáctica en el sentido de Teoría de Situaciones, porque claro, 90 está muy claro, el 10 va a estar.

Vale, o sea que de momento han utilizado grupos de 20, grupos de 10, grupos de 9, ¿vale?



En esta escritura [señala lo que ha escrito en la pizarra] yo veo 3 grupos de 20, 3 grupos de 9, pero aquí [señala el 87] no veo un 3 y un 3. Yo aquí veo 4 grupos de 20, 1 grupo de 10, pero aquí [señala el 90] no veo 4, 1. Con lo cual, parece que tampoco habíais encontrado vosotros un patrón

Comentario 15: Yo estoy convencido de que esa parte del patrón con el número es una parte de la consigna que ha quedado muy... detrás. Muchas veces los alumnos, cuando das una consigna, se quedan con un objetivo, y otro objetivo –que para ti puede ser importante, menos o más– puede que no les preocupe, es secundario. Ellos han conseguido lo que tú les has dicho; el que se parezca o no a lo otro... les ha parecido..., por lo que veo, me parece que no le ha preocupado a ninguno. También es verdad que con números pequeños tampoco es tan «traboso», si fueran números más grandes... Pero claro, tampoco les vas a dar quinientos y pico palillos...

entre cómo escribo la cantidad total con símbolos numéricos y visualmente qué veo en los palillos, ¿vale? De momento, la transcripción de lo que veo en los palillos

Comentario 16: Pero de momento esa preocupación solo la tiene ella [se ríe].

simbólico-numéricamente la tengo aquí a la derecha [señala el $3 \times 20 + 3 \times 9$ y el $4 \times 20 + 1 \times 10$], pero no veo ninguna relación con esto [señala el 87 y el 90].

Comentario 17: Bueno, no lo ve..., en esta [señala en la pantalla $4 \times 20 + 1 \times 10$] se le ve

un poco, lo que pasa que efectivamente no está..., aquí tiene grupos..., lo que pasa que no está exactamente como está ahí, pero... Este [señala el $3 \times 20 + 3 \times 9$] sí que no tiene mucha relación, pero el segundo... El segundo lo ves y de un vistazo sabes lo que hay, que es lo que tú le has dicho que haga.

Yo aquí estoy haciendo trampa porque estoy metiendo operaciones, nosotros ahora no estamos con las operaciones, estamos solo con el número, con la escritura del número, eso es lo que estamos trabajando, ¿no? Pero para ayudar a ver esa conexión de los palillos hacia lo simbólico-numérico, pongo, escribo eso de transición

Comentario 18: Esa observación es de otra categoría. O sea, hasta ahora la actividad podría ser trasladable a los alumnos tal y como lo está diciendo, pero ya les ha dicho que ella lo que quiere..., ya es un objetivo didáctico, o sea, ya es un objetivo de didáctica de las matemáticas, es que a partir de ahí los alumnos establezcan conexiones con el sistema de numeración; pero efectivamente en la actividad de los palillos no estaba presente. O sea, que ha trasladado la actividad a la vez que les hace pensar por qué esa actividad puede ser interesante. Es como una discusión de doble naturaleza.

para ir copiando lo que me decís, ¿no?, porque tardo más, tardo más en dibujar los palillos, las gomitas rosas, no sé qué, podría sacar la foto de la cámara y ponerlo rápido, ¿no?, pero..., bueno, lo escribo, lo transcribo así.

Comentario 19: Está diciendo que ella lo está escribiendo por una cuestión de economía, ¿de acuerdo? Está intentando ver... Es verdad que da una alternativa, que a lo mejor con los niños habrá que hacer, bueno, pues voy a ponerlo tal y como ellos lo han hecho, ¿no?

Ahora, otro grupo. Vosotros dos ya estáis, que luego, luego... Ah, venga, ya que estamos aquí [dibuja una llave a la derecha de lo que ya ha escrito en la pizarra].

Comentario 20: Estos se han juntado [lo dice sin parar el vídeo].

¿A qué consenso... habéis llegado...?

A: Pues 7 grupos de 20...

F: Muy bien, 7 grupos de 20 [señala el 3 y el 4]. Han visto rápido y han dicho:

Comentario 21: Eso le ha gustado, porque como han hecho un agrupamiento..., y está intentando efectivamente ver que cuando los agrupamientos son iguales es muy cómodo.

«bien, los dos hemos agrupado, sin habernos copiado, en grupos de 20, con lo cual automáticamente tenemos 7 grupos de 20» [escribe 7×20].

Comentario 22: Además han salido 20, y en eso me aventuro, porque para contar, cuando tú cuentas, cuando llegas a 20, los números del 1 al 20 son más cortos al hablarlos, entonces volver a decir 21, 22..., ¿por qué no han salido grupos?, porque hasta 20 se cuenta muy rápido. De hecho, es irregular hasta el 15, y luego 16, 17, 18... es un poquito más largo, pero paras en 20. Y es una estrategia bastante frecuente que cuando tienes más de 20 vuelves a empezar por 1, con lo cual quizá por eso hayan salido de 20, porque se cuentan muy fácil, hasta 20 se cuentan muy rápido. Y es curioso, porque si no se han puesto de acuerdo, que hayan salido los dos de 20 tiene que tener algún tipo de razón de ese tipo.

A: Luego, ellos los 27 de 3×9 ...

F: Sí.

A: ... los han dividido en 2 de 10 para que se junten con los nuestros de 10.

Comentario 23: Bueno, han impuesto...

F: ¿Y por qué no habéis hecho vosotros... separar este de 10 [señala el 10 de 1×10] en 1 de 9 y 1 de 1?

A: Porque se quedaría 1 solo y luego...

Comentario 24: «Se quedaría uno solo», ¿has visto cómo le molesta? Porque la consigna parecía que era agrupar.

F: Bueno, pobrecillo, ¿no? No pasa nada.

Comentario 25: A ella le gusta el 10, pero dice: «¿y por qué no habéis cogido el 9?», está intentando ver que le expliquen: «hombre, 10 es más cómodo...», y fíjate por dónde han salido, que se quedaría uno suelto.

A: Y porque es más fácil sumar de 10 en 10 que de 9 en 9.

A: Para ponerle la goma a 1...

F: Para ponerle la goma a 1... Bueno... Eso... Puede ser una justificación, pero tampoco muy potente... Me gusta más lo que ha dicho ella, o ella...

A: Que es más fácil sumar de 10 en 10 que de 9 en 9.

F: ¿Por qué será más fácil sumar de 10 en 10 que de 9 en 9 para nosotros?

Comentario 26: Claro, busca eso. Te gusta a ti más... Pero bueno, es verdad que...

[Hablan varios alumnos a la vez]. ¿Por qué es más fácil sumar para nosotros de 10 en 10 y no de 9 en 9? [Hablan varios alumnos a la vez]. Porque tenemos 10 dedos, por ejemplo, ¿no? Porque estamos más acostumbrados a 10, 20, 30, 40... [mueve las manos con los dedos estirados], ¿no?, como que nuestro sistema de numeración parece que...

A: Porque en verdad solo sumas de 1 en 1 y luego le pones un 0, entonces...

F: Solo sumas de 1 en 1, elabora eso. Estamos en clase de matemáticas, ¿qué es 1, 1...?

A: Pues por ejemplo, si tienes 30, pues 1 más 1 más 1, 3, como es 10,

Comentario 27: Está intentando que hagan explícita..., efectivamente, que sumar con unidades en las que no hay..., el cero, es muy fácil, es más rápido. No es la regla de los ceros, porque esa es para el producto, pero vamos..., una especie de eso, igual. Entonces, efectivamente... La alumna se lo ha dicho, ella lo ha interpretado bien, sabía lo que quería decir, pero no estaba bien dicho. Entonces, le está diciendo que lo diga.

pues le pones el 0 y ya tienes los 30.

F: ¿3 qué?

Comentario 28: Ahora quiere que diga decenas.

A: 3 grupos de 10.

F: 3 grupos de 10, muy bien.

Comentario 29: Ah, bueno, se ha quedado con grupos de 10, está bien [lo dice sin parar el vídeo].

3 grupos de 10, vale. [Vuelve a la pizarra a terminar lo que empezó a escribir].

A: 3 de 20, 3 de 10 y 1 de 7.

F: [Escribe, después de 7×20 , 3×10]. 3 de 10, llegasteis a romper estos [señala 3×9] en 2 de 10 más 7 sueltos, ¿no? [escribe $2 \times 10 + 7$ encima de 3×9]. Y entonces estos dos [señala 2×10] con este [señala 1×10] 3

Comentario 30: Al final han llegado a 7 sueltos [lo dice sin parar el vídeo].

y 7 palillos ahí sueltos [escribe, después de $7 \times 20 + 3 \times 10$, 7×1], ¿vale?

Comentario 31: Fíjate que antes les molestaba quedar uno suelto, pero esos 7 sueltos parece que no les ha molestado. O sea, que no solo era ese el problema.

Ahora, la cantidad total, ¿cuánto es? [señala el 87 y el 90].

A: 177.

F: 1, 7, 7 [escribe 177 a la izquierda del 87 y del 90]. ¿Hay aquí 1, 7, 7 por algún lado? [señala el 7 de 7×20 , al 3 de 3×10 y al 7 de 7×1].

Comentario 32: Fuerza, lo quiere forzar [se ríe]. Tampoco lo hay aquí [señala el $3 \times 20 + 3 \times 9$ y el $4 \times 20 + 1 \times 10$], con lo cual es raro que salga ahí, pero ella insiste.

Este [señala el 7 de 7×1] parece que hay aquí, ¿no? Pero lo otro... no me cuadra mucho todavía... Vale, otros dos grupos.

Comentario 33: No, lo que a mí me parece más curioso es por qué los grupos de 10 que tienes, cuando los sumas, 2 de 10 lo tienes que convertir en 1 de 20, para seguir con la misma mecánica, pero eso no ha salido.



TRANSCRIPCIÓN DEL VÍDEO 2

[F = Formadora del vídeo]. [A = Alumnos]. [Comentarios de Marcos presentados en recuadros].

Comentario 1: Aquí hacía más frío [lo dice sin parar el vídeo; lo dice, con un tono de broma, porque ve a la formadora en manga larga, mientras que en el vídeo 1 estaba en manga corta].

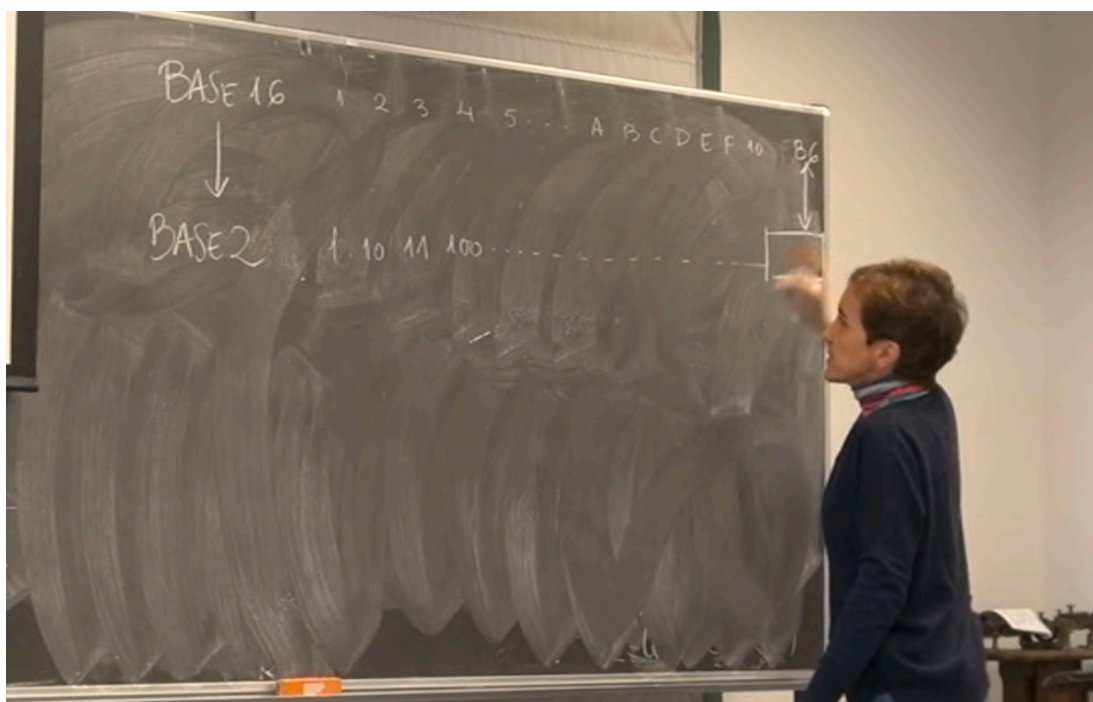
F: Como me piden pasar de base 16 a base 2 directamente [escribe en la pizarra], pues Martín dice: «yo escribo aquí la secuencia

Comentario 2: Bueno, está diciendo... Me imagino que será que está dando cómo lo ha hecho Martín, debe de ser algún alumno, digo yo.

1, 2, 3, 4, 5..., A, B, C, D [dice 10, 11, 12, 13, señalando A, B, C, D], 14, 15 [escribiendo E, F], uno, cero [10]..., así hasta el B6»,

Comentario 3: Ah, vale, ok. O sea, ha añadido el 9..., al llegar al 9 ha añadido más símbolos, como es base 16 necesitas 16 símbolos, bueno el 0 y 15 más, y le sale... A ver..., 1, 2, 3, 4, 5, 6..., sí, correcto, ha hecho eso, y luego el uno, cero [10] que es el 16 y B6, ¿no? Vale, que será..., $12 \times 16 + 6$, imagino que será eso.

¿vale? Y luego aquí en paralelo, voy uno [1], uno, cero [10], uno, uno [11], uno, cero, cero [100]..., hasta que pille aquí el que sea y ya está.



No he pasado por base 10,

Comentario 4: O sea, lo está intentando hacer directamente sin pasar por la base 10. Reproduce los números y luego cuentas en base 16 y cuentas en base 2, y obviamente los números tienen que ser lo mismo, este es el 1, este es el 2, este es el 3, el 4, el 5 y el resto pues igual [va señalando el número en base 16 con su correspondiente en base 2 en la pantalla], lo que pasa que así te mueres [se ríe]. Porque fíjate, tiene B de 16 y 6. Ese es el 78, si tiene que llegar hasta el 78... No, no, más, 6×16 son 96, 102...

que es lo que me dice Nuria. Con lo cual, superado. ¿Pero qué pasó?

A: Que es muy largo.

F: Que es muy largo. Y que hasta en su casa, teniendo semanas, ha dicho: «paso». Tenías tiempo suficiente, porque había tiempo suficiente en dos semanas a hacerlo, pero... es largo y además un coñazo, con lo cual ha dicho: «paso».

Comentario 5: El principio de economía es un principio siempre, lo dice muy coloquialmente, pero es el principio de economía, que en matemáticas es brutal, es decir, siempre que tienes dos estrategias tienes que buscar una que sea más económica, por comodidad, pero sobre todo porque tendrás menos errores. Ahí [señala a la pizarra del vídeo] es muy fácil equivocarse, ¿eh?

Con la idea Nuria ya se hace una idea de que lo he pensado, es un procedimiento válido, pero no ha sido eficaz, ¿vale?, entonces nosotros tenemos que seguir pensando porque tendremos que buscar alguna estrategia que sea eficaz. [Da la palabra a una alumna].

Comentario 6: Creo que sí que es eficaz, pero no es eficiente, ¿no? ¿Tú sabes la diferencia entre eficaz y eficiente? O sea, eficaz es porque lo ha sacado el resultado. No lo sé, es que siempre confundo qué es eficaz y qué es eficiente. Ella está dando el principio de economía, lo está enunciando de una manera muy rápida, para que los alumnos se den cuenta, ¿no?

A: ¿Se podría hacer la división?

F: ¿Qué división?

A: La de B6 entre 2. Es que no sé cómo plantearlo.

F: Ella dice: «oye, mira Nuria, cuando tú pasas de base 10 a base 2 haces grupos de 2 y divides de 2 en 2;

Comentario 7: Ahora está sacando otra vez..., está buscando otra manera de hacerlo.

pues ahora lo mismo, si estoy en B6 a base 2, divide entre 2». Pero aquí estoy escribiendo en base 16... [En la pizarra ha escrito B6 entre 2, con la caja]. Podríamos intentar hacerlo, pero... ¿sabemos hacerlo... o cómo va esto?

Comentario 8: Es otro alumno que le ha propuesto hacer lo que se hace de base 10 a otra base y es esto y luego ir cogiendo los restos. Pero claro, ahí lo tengo en base 16 y entonces dice: «bueno, si supiéramos hacer eso en base 16, también nos saldría».

¿O mentalmente para hacerlo me vais a pasar a base 10, y hacéis la división en base 10 —que es lo que sabéis hacer—, y luego otra vez volvemos y entonces hacemos trampa porque pasamos por base 10? Si sabéis dividir un número en base 16 entre 2, si sabéis hacer esta división en base 16 —yo lo tendría que pensar, ¿eh?, así a capón no lo sé hacer, pero si lo pienso... —, si sabéis hacer eso, valdría.

Comentario 9: Está viendo otro sistema, pero efectivamente aquí este [señala en la pizarra la anterior estrategia] era lento y este lo que pasa es que no se sabe. Se puede entender que está bien hecho, pero a ver quién es el castizo que se pone a dividir eso en base 16.



Pero esto lo vamos a ver en el dossier 3, ¿eh?, multiplicación y división. Nosotros tenemos herramientas para dividir en base 10 y sabemos cómo hacer restas sucesivas y el algoritmo tradicional de la cajita que habéis ido haciendo... Podríamos abordarlo, por eso abordamos los problemas de..., el anterior, ¿no?, de pasar de base 10 a base 2. Pero el de base 16 a base 2 hay que dividir en

base 16. Sumar en base 16 lo sé hacer, restar en base 16 me cuesta un poco pero lo sé hacer, multiplicar en base 16 también podría hacerlo, con lo cual dividir podría hacerlo, pero... no me atrevo a hacerlo sin manos, hoy.

Comentario 10: ¿Qué ha dicho, sin manos? O sea..., es que no sé la consigna, la consigna no sé exactamente cuál es. Es simplemente pasar el número B6 de 16 a 2, no sé si tiene alguna otra restricción.

Otra forma.

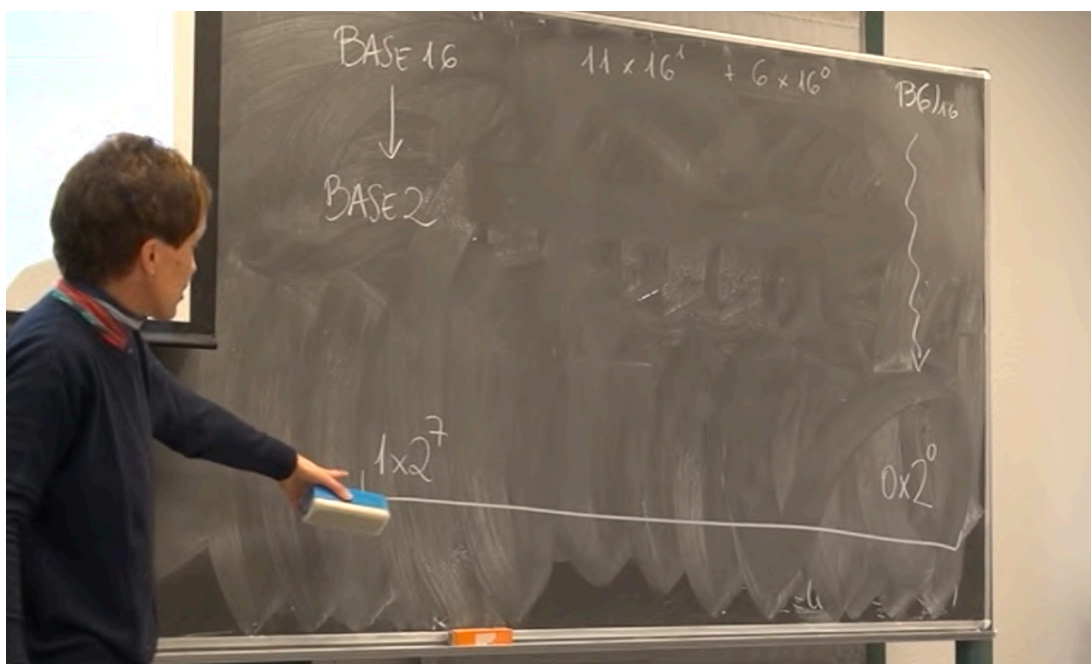
Comentario 11: No sé si este ejercicio, por lo que veo, parece ser que sí lo han hecho en casa, está mandado para casa y ahora está intentando ver cuál es..., está intentando, ella tiene un procedimiento..., porque, claro, 16 es una potencia de 2, con lo cual el cambio de base va a ser... Pero claro, me imagino que estará esperando a ver si alguien le da alguna pista para que ella relance, tome eso y pueda... Porque ya han salido dos maneras y no le ha gustado ninguna [se ríe].

- A: Fijándote en que 16 es 2^4 .
- F: Fijándome en que 16 es 2^4 . Me lo voy a apuntar aquí [borra la pizarra y lo escribe].
- A: Yo lo hice así, pero luego algo no me cuadraba.
- F: Muy bien, vale.
- A: Luego hice, 11...
- F: Venga, vamos a poner el punto de partida, ¿no? El punto de partida es que tenemos 11×16^1 , ¿no?, más 6×16^0 . Este es mi B6 en base 16.

Comentario 12: ¿Era 11 o 12? Ah, sí, claro, lo he hecho yo mal. Entonces no es el número que yo he dicho, me he equivocado, claro, claro.

Y yo quiero llegar aquí a... Me acuerdo de que empezaba en 1×2^7 y acababa en 0×2^0 , ¿vale?

Comentario 13: Es que ya lo tiene... No lo sé..., si lo tiene... No sé por qué pone esto. No sé si ya lo ha calculado y está viendo cómo lo han hecho o que realmente ha calculado... No sé. No sé por qué la primera cifra de este número en base 2 empieza por 2^7 , o sea, que tiene ocho cifras en base 2, no lo sé si es que ya lo han obtenido, no lo sé. Ella desde luego... No sabe las demás cifras... Es que no sé el enunciado del ejercicio, entonces no tengo más datos.



Entonces yo quiero pasar de ahí [señala la parte superior de la pizarra] a aquí [señala la parte inferior]. Si lo consigo, ya lo tengo en base 2, ¿no? Ya solo cojo los coeficientes de las potencias de 2 y ya lo tengo. Entonces, Pablo dice: «cambia este 16», ¿no, Pablo?

A: Sí.

Comentario 14: Sí, pero ahora faltan..., los coeficientes de aquí [señala la parte inferior de la pizarra] en base 2 solo pueden ser 0 y 1 y aquí [señala la parte superior de la pizarra] son del 0 al 15, con lo cual, sí, las bases [de las potencias] las cambia bien, pero los coeficientes también tengo que cambiarlos.

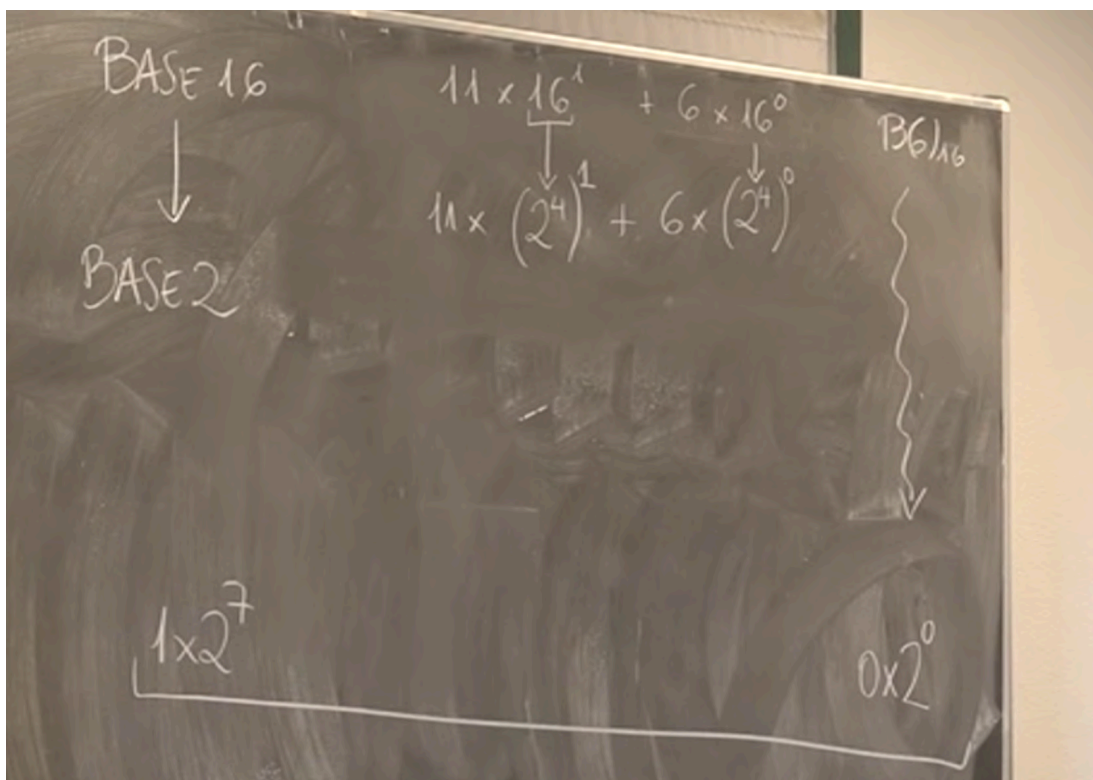
F: Este 16 ponlo como $(2^4)^1$ y este 16 ponlo como $(2^4)^0$. ¿Vale? Yo tengo una expresión polinomial en base 16, quiero llegar a una expresión polinomial en base 2, y él me dice: «yo veo claro el cambio, 16 es 2^4 , cada vez que veas un 16

Comentario 15: Pero lo de polinomial lo ha dicho ella por primera vez. Es verdad que un número en una base es simplemente una descomposición en un polinomio en función de las potencias de una base. Entonces, eso de polinomio no sé si es que lo ha..., acaba de aparecer.

ponlo como 2^4 ». Vale, y entonces resulta que aquí tengo 11 grupos de esto y aquí tengo

Comentario 16: 6 [lo dice sin parar el vídeo].

6 de estos. ¿El 11 y el 6... los puedo dejar?



A: No, los pasas a base 2.

F: Los paso a base 2. ¿Sé pasar 11 a base 2?

A: Sí.

Comentario 17: Ha dicho que no los puedo dejar pero no sé si el pasarlo a base 2 ha sido iniciativa suya o iniciativa del alumno. No lo sé.

F: Vale, vamos a escribir 11 en base 2.

A: 1, 0, 1, 1.

F: 1×2^3 , ¿no?

A: Sí.

F: Más...

A: Cero.

F: 0×2^2 . De momento llevo ocho. Más...

A: Uno.

F: 1×2^1 . Ya llevo 10...

A: Más uno.

F: Más 1×2^0 . Ahí ya tengo 11, ¿vale?

Comentario 18: Este 0×2^2 lo ha puesto él... Yo... Normalmente si no está..., con no

ponerlo... Es muy mono...

Esta es una manera de escribir 11. ¿Cómo? Como potencias de 2.

Comentario 19: Sí, es verdad que es 1, 0, 1, 1, pero... Cuando tú vas a descomponer ese no lo pones y ya está [lo dice sin parar el vídeo].

Expresión polinomial del 11 en base 2, como potencias de 2, ¿vale? Y esto va multiplicado... 2 elevado a la 4 y luego lo elevo a la 1, ¿cuánto me queda...? 2^4 es $2 \times 2 \times 2 \times 2$ y luego eso lo elevo a la 1, es decir, que lo copio una vez, o sea que me queda...

Comentario 20: Queda muy matemático decir 16 a la 1, queda muy matemático. En la vida normalmente decimos 16 [se ríe]. Pero ella quiere forzar que eso es una escritura polinómica y entonces quiere que aparezca el 2 elevado a 1; como aquí también, me ha hecho gracia, 16^0 [se ríe] y ahora lo vuelve a escribir aquí; y aquí igual, el 1 este lo ha mantenido aquí [se refiere al 1 de 16^1]. Pero eso es una elegancia que solo la vemos algunos, o sea, que solo la vemos desde el punto de vista de las matemáticas. A un alumno eso..., dice: «para qué me pone esto [señala $(2^4)^1$] y para qué me pone esto [señala $(2^4)^0$]». Pero es verdad que lo quiere hacer así [se ríe]. Igual que este cero [señala 0×2^2]. Quiere forzar, quiere forzar que salga sola. Ahora va a empezar y por distributivas...

A: 2^4 .

F: 2^4 . Más... El 6, ¿lo dejo?

A: No.

F: No. ¿Cómo escribo 6 en base 2?

A: 1×2^2 .

F: 1×2^2 , que son 4.

A: 1×2^1 .

F: 1×2^1 ... Y 0×2^0 [lo va escribiendo todo en la pizarra]. Ahí pone 6, una manera más chula, ¿no?, de poner 6

Comentario 21: Chulísima, vamos. Mañana yo voy a pedir 6 huevos y lo voy a pedir así [se ríe]. Es muy chula desde nuestro punto de vista. Porque quiere que esto se vea 1, 1, 0, ¿entiendes?, pero es verdad que esto son elegancias... Y ahora, cállate, que va a poner «por 2^0 ».

como potencias de 2, ¿no?, como un polinomio con potencias de 2. Vale, y luego estaba por... Y ahora tengo $(2^4)^0$. ¿Eso qué es?

A: Uno.

F: Uno. ¿Y si lo quiero poner como potencias de 2?

A: 2^0 .

F: 2^0 , muy bien. 2^0 [lo escribe en la pizarra]. Mira qué contenta estoy,

Comentario 22: Está contenta ella [se ríe]. Como matemáticos nos hemos puesto muy contentos al ver esto. Es gracioso.

porque $2^0 \times 2^0$ es 2^0 y el coeficiente es 0, que es este.

Comentario 23: Esa conexión la ha hecho ella. A ella le ha parecido... Vamos, me da la sensación de que muchos alumnos dicen: «pues yo tampoco estoy tan contento...». Es decir, es verdad que es un 0 y efectivamente quiere decir que va a haber un 0 ahí.

Y $2^4 \times 2^3$ es 2^7 y el coeficiente es 1, que es este.

Comentario 24: Es que sigo sin saber si es que esto ya lo tenía el ejercicio, no lo sé. Debe de ser que sí, debe de ser que empezaba por 1 y acababa por 0. Debe de ser que el ejercicio en algún momento lo decía.

Pues como que ya casi lo tengo, ¿no? ¿Sí o no?

A: Sí...

BASE 16

BASE 2

$$11 \times 16^1 + 6 \times 16^0$$

$$11 \times (2^4)^1 + 6 \times (2^4)^0$$

$$[1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0] \times 2^4 + [1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0] \times 2^0$$

$$1 \times 2^7$$

$$0 \times 2^6$$

F: Vale, y ahora... Venga, ¿cuál será el coeficiente...? Venga, vamos a poner aquí 2^6 , paso a la siguiente varilla del ábaco, ¿eh? ¿Cuál será el coeficiente de 2^6 ?

A: Cero.

F: Cero, porque ¿cómo consigo yo 2^6 ?

Comentario 25: Fíjate qué escritura ha dejado escrita, ¿eh? [señala al hueco que ha dejado entre el signo «+» y el signo «x» en la siguiente expresión: $1 \times 2^7 + \quad \times 2^6$]. Porque está esperando un coeficiente aquí [en el hueco]. Lo que pasa es que está cogiendo y ahora va a escribir todas las potencias, sean 0 o no. Otra alternativa..., bueno, lo hubiese podido hacer y luego haberlo reorganizado.

$2^4 \times 2^2$, ¿no? 2^4 es $2 \times 2 \times 2 \times 2$, 2^2 es 2×2 , ya tengo ahí los seis doses, ¿vale?, que está aquí,

Comentario 26: Tiene que recordar que al multiplicar potencias de la misma base se suman los exponentes, lo tiene que recordar, me sorprende.

y el coeficiente cero. ¿Por aquí puedo llegar a 2^6 ?

A: No.

F: No, pues ala. 0×2^6 . Genial, porque era lo que me había salido antes. Ahora, más...

Comentario 27: Es que antes..., no sé. Debe de ser que la escritura la tienen.

Siguiente varilla del ábaco, 2^5 . ¿Dónde consigo yo 2^5 ? Aquí [señala el corchete de la derecha] como mucho llego a 2^2 , me olvido de esto. $2^4 \times 2^1$ [señalando el corchete de la izquierda] es 2^5 , ¿no?

A: Sí.

F: Vale, ¿y qué coeficiente lleva?

A: 1.

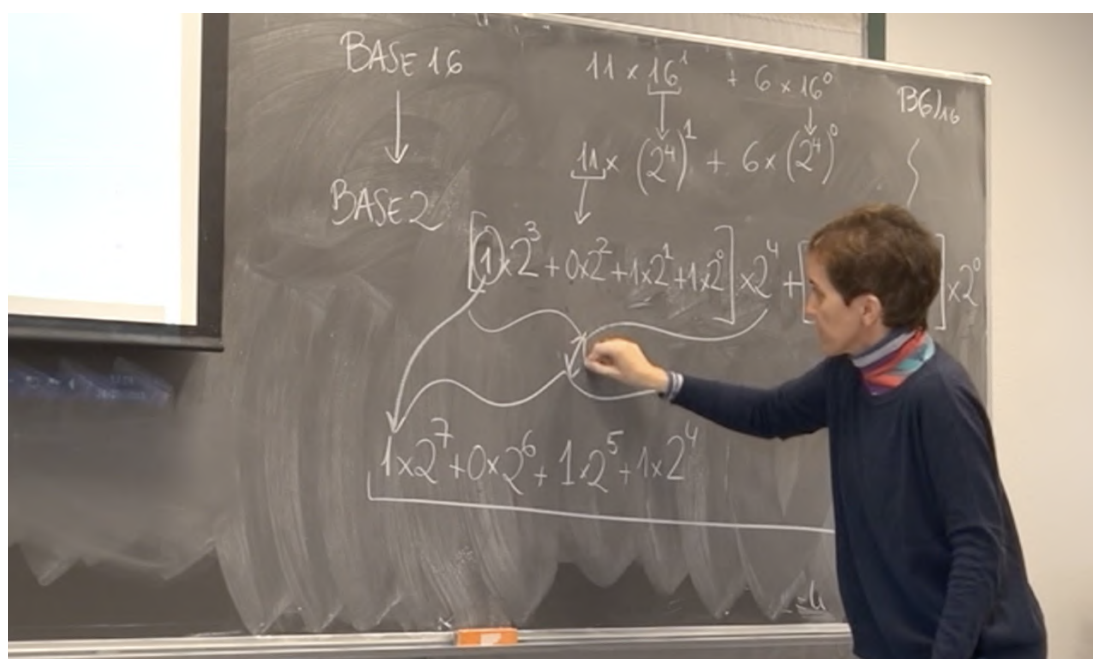
F: 1. ¿Y era el qué tenía que llevar?

A: Sí.

F: Sí, vamos bien. Y ahora, 2^4 , ¿cómo consigo 2^4 ?

A: Con 2^0 ...

F: $2^4 \times 2^0$, ¿no? Tengo aquí cuatro copias del 2 y aquí ninguna, pues tengo cuatro copias del 2 multiplicándose por sí mismo, y el coeficiente 1. 1×2^4 [lo escribe en la pizarra]. Oye, mira, todo esto se ha convertido en esto. Lo veis, ¿no?



¿Qué es lo que he hecho? Propiedad distributiva. Voy multiplicando el 2^4 por cada uno de los sumandos, ¿vale? Muy bien.

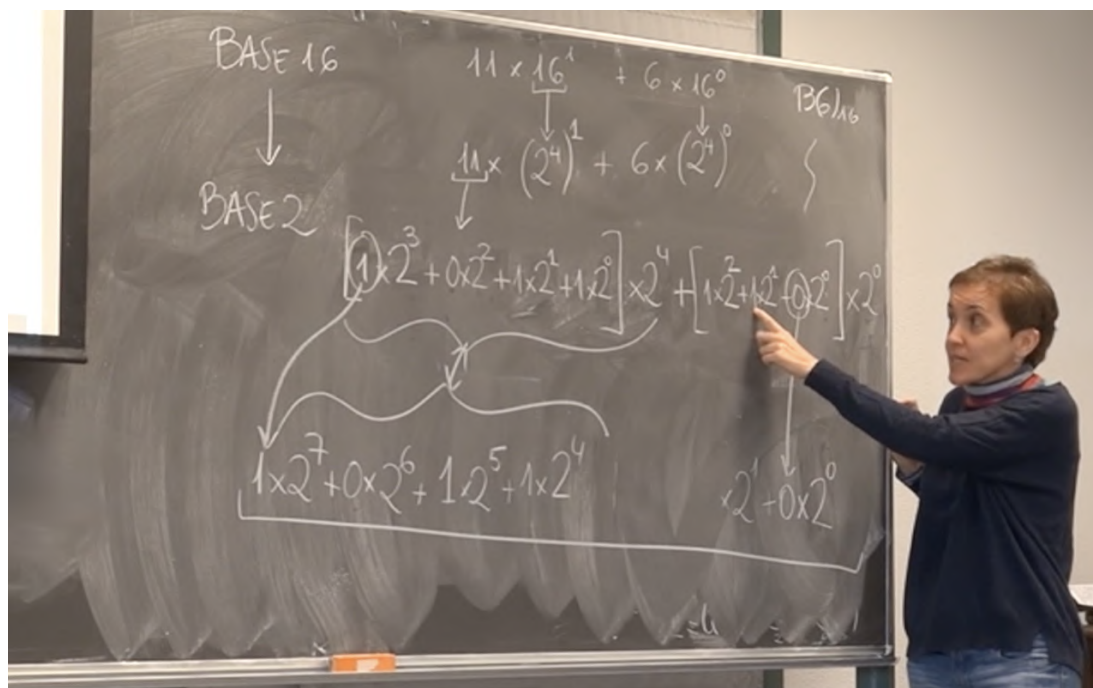
Comentario 28: Bueno, está explicando los cálculos que está haciendo. Y cuando ha llegado aquí, pues ahora lo ha puesto... [señala las llaves y la flecha]. En fin, usa la

pizarra de una manera bastante matemática, es decir, bueno esto viene de aquí, esto tal... Ahora acaba de decir el nombre de la propiedad, que es la distributiva; y bueno, lo podría haber dicho, pero es ahora cuando lo ha dicho. El ejercicio está muy medido para que..., ella quiere obtener toda una escritura polinómica en función de las potencias de 2, aunque sea un poquito artificial con estos ceros ahí [señala al 0×2^6], porque cuando yo lo hago pues eso no saldría, pero claro, sí es verdad que si luego lo quiero poner..., quiero de ahí pasar directamente a la escritura posicional, entonces sí, el cero hay que mantenerlo. Entonces, lo quiere hacer forzando eso. Ahora el problema, bueno, no lo va a tener porque no va a llegar nunca a la potencia de 2^4 [señala al corchete de la derecha]; porque de aquí [señala al corchete de la derecha] también podrías incorporar alguna a aquí [corchete de la izquierda], pero no, no sale.

Y ahora, tiro por aquí, voy desde aquí [señala el 2^0 de la parte inferior derecha de la pizarra]. 2^0 , muy bien. Siguiente varilla del ábaco, 2^1 . ¿Qué coeficiente tiene 2^1 ?

A: 1.

F: 1, que está aquí [lo señala], ¿vale?

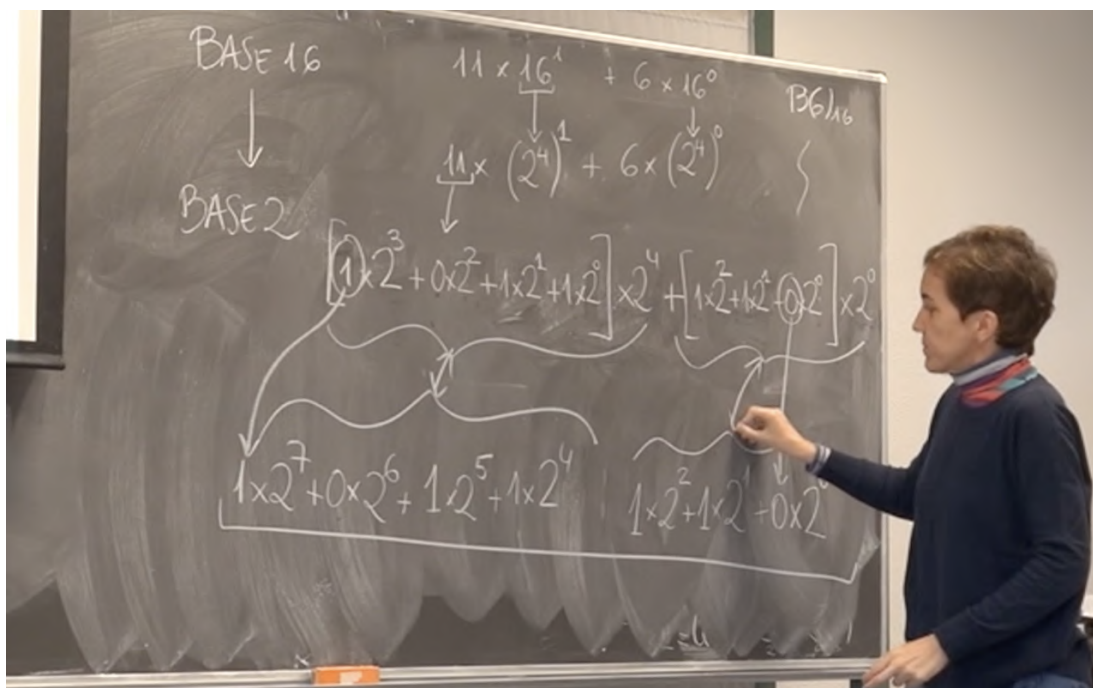


Porque sería $2^1 \times 2^0$, que es 2^1 , y lleva un 1 delante, un 1 [lo escribe abajo]. Voy bien. Y ahora, $2^0 \times 2^2$, 2^2 [lo escribe abajo], va con un 1 [lo escribe abajo].

Comentario 29: Se ha dejado este hueco [señala a un hueco que ha dejado tras 1×2^4]. O sea, ya ha previsto que ahí va a haber un 2^3 , que no hay en ningún lado [señala a los corchetes], pero tiene que estar, tiene que reservarle el hueco, entonces lo ha dejado y todo.

A mí se me hubiera pegado todo ahí [se ríe]. Lo ha previsto.

O sea que esto que tengo aquí se convierte en esto que tengo aquí.



Y ahora, Pablo, ¿qué te pasó?

A: Que como... Que claro, los iba a juntar, pero dije: «me falta el 2^3 ».

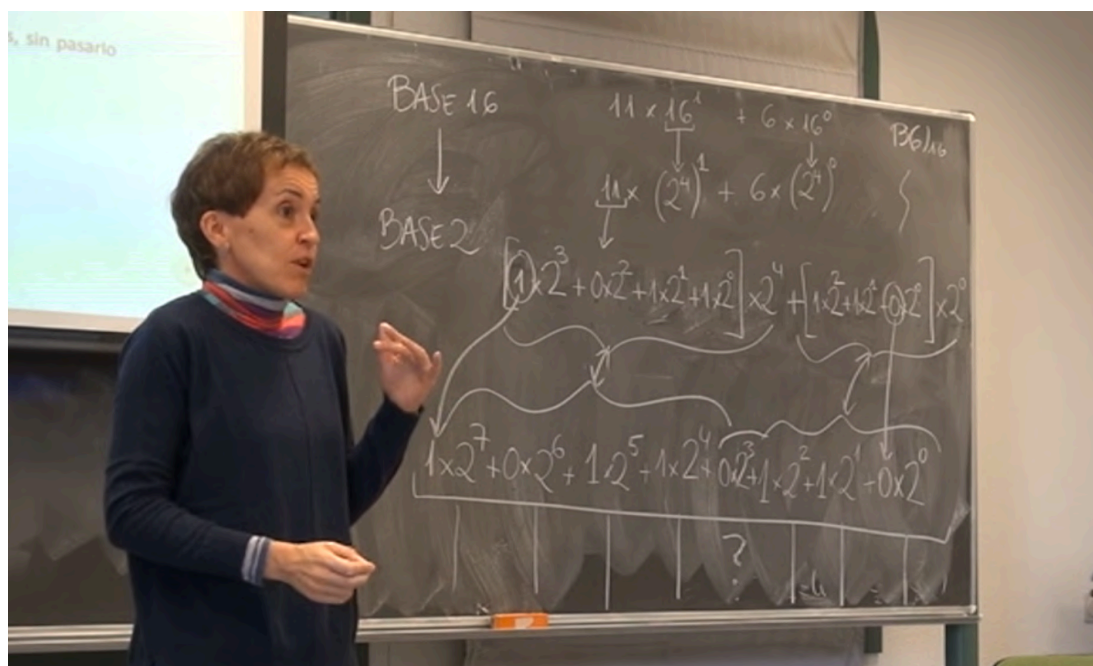
F: Me falta el 2^3 . Pablo dice: «varilla del ábaco del 2^7 , 2^6 , 2^5 , 2^4 , ¡uy!

Comentario 30: Ah, es que hay un ábaco en medio, es que eso no lo sabía [lo dice sin parar el vídeo].

2^2 , 2^1 , 2^0 ». «¡Uy!», dice Pablo [y dibuja una interrogación en la posición del 2^3].

A: Pues si no hay, un cero.

F: Pues se pone el 0, ya está. Lo pongo aquí: «+ 0×2^3 », y esto lo englobo aquí.



¿Qué es lo que pasa? Que escribo el 6 de una forma muy especial. Yo escribo el 6..., acordaos que esto era mi 6 [señala $1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0$], ¿eh?, esto era el 6, que es este 6 [señala el de un nivel anterior, más arriba en la pizarra], ¿vale? Yo he escrito el 6 como $1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0$, pero también puedo escribir el 6... $0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0$. No es lo estándar, porque como los ceros ahí no aportan mucho, pues no es lo estándar, pero si no me quiero olvidar de una de las varillas y no quiero tener un problema, como tenía Pablo, pues yo añadido ahí para escribir el 6 de otra forma, ¿vale? Entonces, moraleja que cuentan los *youtubers*, por ejemplo David Calle, dice: «vamos a pasar de base 16 a base 2, ¿qué se hace chavales? Mirad, ¿veis este 11 que está aquí? [señala el de arriba de la pizarra], pues escribís este 11 en base 2: 1, 0, 1, 1 [señala los coeficientes de la expresión polinómica de la parte inferior de la pizarra]; ¿veis este 6 que está aquí? [señala el de arriba de la pizarra], pues lo escribís en base 2, pero cuidadín chavales, que hay que poner cuatro, ¿por qué?, porque 16 es 2^4 ».

Comentario 31: Esa expresión, esa norma, como norma general, me parece lo menos intuitivo que existe. Es decir, sí, es así, es una norma que efectivamente... Pero me parece muy poco, muy poco intuitivo, muy poco intuitivo. Quiero decir..., digo lo que dice el youtuber ese [se ríe]. Sí, lleva razón, pero me parece mucho más..., está mejor explicado y trabajado aquí [señala la pizarra] que hacer una regla general que bajo mi punto de vista no tiene... Aquí lo que ha hecho Nuria es intentar justificar efectivamente cómo se puede hacer de una manera más directa, ¿no? Todo viene por esto, ¿no? [señala que 16 es 2^4],

por darse cuenta de eso.

Y entonces dice: «vamos a escribir 6 en base 2 con cuatro: 0, 1, 1, 0». Y dice: «y ahora lo juntáis, fin». A mí no me vale porque yo no soy David Calle, yo no estoy de *youtuber*, *influencer*, *superfamosa* ayudando a los chavales a aprobar exámenes, que es un trabajo muy digno

Comentario 32: Está justamente diciendo eso, está justificando que efectivamente esas reglas así generales absolutamente automáticas, si no se entienden... Es lo que les está explicando; me parece una muy buena llamada.

y que está bien, y además el tío es un *crack*, muy suelto, lo hace muy bien; yo estoy formando maestros, entonces tenéis que entender cómo hemos pasado de aquí [señala la parte superior de la pizarra] a aquí [señala la parte inferior de la pizarra]

Comentario 33: Volvemos a la meta... Es decir, no les está diciendo que aprendan esto por se, si no que les está diciendo que aprendan esto porque luego son ellos los que tienen que formar y, por tanto, a ella no le interesa que sepan hacerlo, sino que sepan cómo se hace o por qué se hace. Más allá de formar maestros, es una consideración que tendría que estar en matemáticas en todos los órdenes, no solo en los maestros; en los maestros, desde luego, todavía más.

a través de esto [señala la parte media de la pizarra]. Entonces, la pregunta es: ¿se puede pasar de base 16 a base 2 sin pasar por base 10?

Comentario 34: Esa pregunta ya la había contestado antes: sí. Otra cosa es que no sabíamos.

Sí. Lo acabamos de hacer, ¿no? Es que me miráis con una cara... ¿Y por qué se puede? ¿Qué pasa si yo esto [el ejercicio] os lo doy en base 15 y, en vez de en base 16, todo el problema es en base 15?

A: Que sería $2^4 + 2^0$.

F: ¿ $2^4 + 2^0$ es 15?

A: O sea, no..., perdón. $2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0$.

Comentario 35: Lo ha hecho muy rápido la alumna. Efectivamente es $16 - 1$ y eso es todo unos antes del 16. Ha sido muy rápida.

F: Vale, y entonces tendría que ir haciendo todas las distributivas, todo el follón, ahí. ¿Y David Calle me podría dar el algoritmo...? Escribes, imaginaos el mismo número, ¿eh?,

Comentario 36: Quiere que le digan que pasa porque con 16 es 2^4 y entonces pasa esto. Porque efectivamente cuando tú pones la base..., claro, si en vez de 2^4 es 2^3 más 2^2 y tal, ya la distributiva se hace tal..., y no hay un algoritmo, en el sentido... Es que, ella insiste, es que me parece que es irrelevante saber eso como algoritmo.

B6, en vez de en base 16, en base 15. ¿David Calle me puede decir...? Aquí tengo el 15, ¿no?, aquí tengo el 15 [los escribe encima de los 16], y David Calle me dice: «escribe esto [señala el 11] en base 2, escribe esto [señala el 6] en base 2, con tres y medio dígitos o cuatro dígitos o... tres dígitos, y lo pones junto. ¿Valdría ese algoritmo?

A: No.

F: No. ¿Vale? O sea, que poder se puede pasar, vas con paciencia escribiendo cada una de las expresiones que aparecen, pero un paso directo solo se puede cuando una base es potencia de la otra base,

Comentario 37: Ahí está, lo acaba de decir.

que es lo que hemos visto con 16, que es potencia de 2, que es 2^4 . ¿Está claro hasta aquí? ¿Sí?

Comentario 38: Me hace gracia cuando se para y hace esos silencios. Que yo imagino que... Yo creo que está pensando que no debe de estar claro para todos y entonces se queda ahí como pausada. Me da esa sensación, que está ahí y está haciéndolo, lo está haciendo, lo ha detallado hasta el final, el 0, el 1..., que yo estoy convencido que en la intimidad de tu hoja no haces todo eso, porque no lo puedes hacer, ¿no?, no lo haces. Y cuando les pregunta si está claro, yo creo que está reticente, diciendo: «bueno, vamos a suponer que está claro».

TRANSCRIPCIÓN DEL VÍDEO 3

Fragmento 1

[F = Formadora del vídeo]. [Comentarios de Marcos presentados en recuadros].

F: Entonces, la idea es..., el ejercicio 4, que está proyectado en la pantalla,

Comentario 1: Qué frío [lo dice sin parar el vídeo; lo dice, con un tono de broma, porque ve a la formadora con abrigo].

es el ejercicio 4 de la última hoja, de la hoja del dossier 2, con el que vamos a trabajar ya esta semana, ¿vale? En ese ejercicio hay cuatro operaciones, cuatro problemas, cuatro operaciones. Tenéis que hacer las cuatro operaciones..., representarlas de distintas maneras. Voy a poner en la pizarra de cuántas maneras, ¿vale? Entonces, acordaos que nosotros estamos trabajando con material manipulativo [escribe en la pizarra «Manipulativo»], ¿vale? Entonces, en primer lugar tenéis que representar esta suma $[210 + 543]$, esta suma $[315 + 429]$, esta resta $[135 - 24]$ y esta resta $[704 - 45]$, por partes [va señalando en el PDF proyectado en la pantalla], ¿no?,

Comentario 2: A ver, que vea, que no lo veo. O sea, que se trata de representar las sumas, ¿representar u obtenerlas? No lo sé, ahora lo dirá.

empezáis con la primera... Tenéis que representarlo [escribe en la pizarra] con ábaco vertical, después en el sorobán y después con los multibase, ¿vale? Y tenéis que tener las tres representaciones del proceso

Comentario 3: Escribe todo en la pizarra. Qué maravilla. Me encanta. Yo también lo intento, pero me sale fatal, lo escribo fatal. Pero lo escribe..., clásica, clásica, de mates, normal, de escribir todo en la pizarra y bien, que se lea. Me encanta.

delante para saber comparar cada dos, ¿vale?, para saber entender cómo se traduce una en otra. Lo que no quiero es que me digáis: « $210 + 543$ son 753; Nuria, te he representado 743*

Comentario 4: Sí, les deja claro que lo que tienen que representar es el proceso de la suma, no el resultado, no la suma. Es decir, yo te he sumado, te lo sumo..., es que los alumnos son bastante dados a eso, sobre todo cuando tienen un ese manipulativo, porque tienden a

pensar que... Yo..., interpreto..., porque a mí también me ha pasado, es decir, les das un ábaco que supuestamente es una ayuda para hacer eso y se lo toman como un obstáculo para hacerlo porque ellos están muy cómodos como lo hacen con los números. Entonces, claro, la tentación que tienen es resolverlo con los números, con la técnica usual, y luego escribirla. Al principio, por lo menos al principio, no se dan cuenta que el ábaco hace eso mucho más rápido que si lo hacen con los números. Entonces aquí, claro, ya está advirtiéndolo, «cuidado, necesito que me digáis...». Lo que no sé es si la palabra «representar» es lo más..., porque yo, cuando ha dicho «representar» también me ha dejado un poquito..., pero lo que quiere es que le representen cómo hacer la suma [enfatisa «cómo»].

en el ábaco vertical, en el sorobán y en los bloques multibase». No quiero la representación del resultado, quiero la representación del proceso, de la suma, de la idea «suma».

Comentario 5: Claro, es que..., ¿la representación gráfica o la ejecución con un ábaco?

¿En qué os tenéis que basar?, en la definición de la suma que vimos el otro día, ¿no?, que es: elijo un representante de uno, elijo un representante del otro y hago la unión, agrupo, junto, como lo queráis pensar, ¿vale?

Comentario 6: Bueno, ha dado una..., ha dado la definición conjuntista de la suma. Es uno de los modelos de la suma, lo ha debido de coger porque debe de ser que esto debe de estar hecho..., les ha debido de dar la suma..., la definición matemática, y se la ha dado a partir de la unión conjuntista. No es la única.

Entonces, hay que representar el proceso, el proceso, no solo el resultado final de ese proceso. Entonces, tenéis que representar el proceso de tres maneras en el sistema de representación manipulativo [señala lo que ha escrito antes en la pizarra], ¿vale?

Comentario 7: Yo imagino que eso queda claro, imagino. Yo vuelvo otra vez a las consignas. A mí me preocupa cuando en las consignas no está claro lo que yo tengo que hacer. ¿Cómo represento un proceso? Imagino que ellos ya lo han hecho, ya lo han debido de hacer en algún caso, por eso ella lo dice... Porque lo mejor para el ábaco es manipularlo y luego efectivamente... ¿Cómo represento yo que muevo una bola? Yo no lo sé. Me imagino que lo habrán hecho antes.

Y en paralelo [empieza a escribir en la pizarra] tenéis que representar el proceso en el sistema de representación simbólico-numérico;

Comentario 8: Con los números [lo dice sin parar el vídeo].

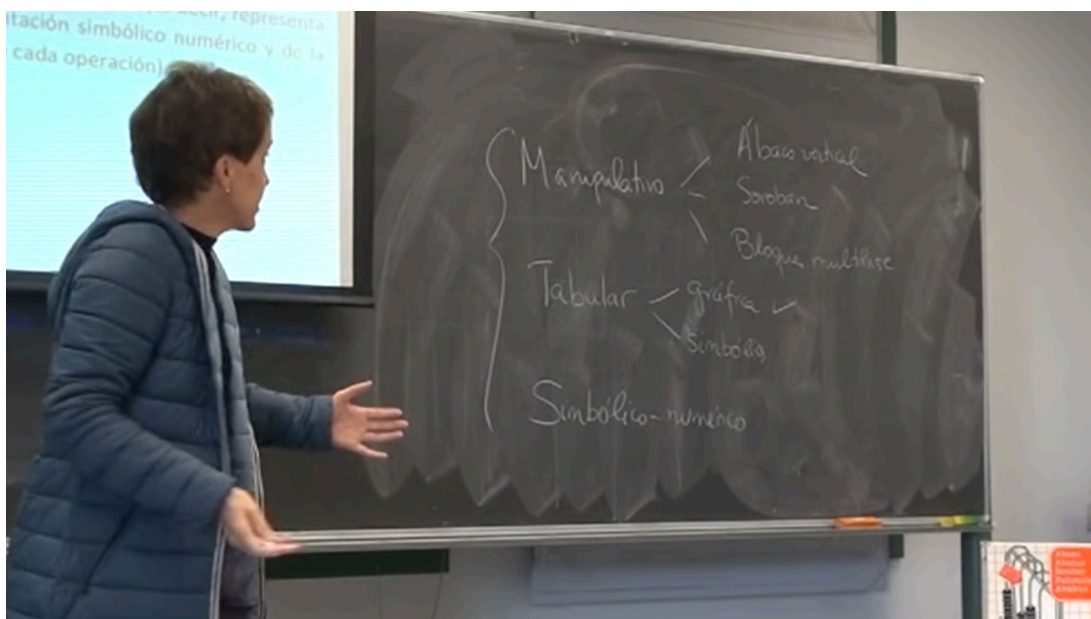
el enunciado está dado en ese sistema de representación, ¿vale?, esto es sistema de representación simbólico-numérico, pues tenéis que representar el proceso, las dos sumas y las dos restas, en ese sistema, ¿vale?

Comentario 9: Yo creo que usa la palabra «representar» y lo que quiere decir es «tienes que hacerlo en ese sistema de representación». Por lo menos a mí también me llama a engaño. O sea, «representar» da la sensación de que quieres que te represente el proceso o quieres que te haga el proceso en ese sistema de representación, porque lo que vamos a hacer aquí [señala en la pantalla «simbólico-numérico»] es hacer la suma en el registro simbólico-numérico; es un tratamiento dentro de un registro, no hay una conversión. Entonces, yo creo que es lo que quiere decir. Imagino que vamos a ver cómo se hace, ¿no?

Y luego, en medio [escribe en la pizarra], hay una representación que es formato tabla o tabular, de la que no he hablado explícitamente, pero que me gustaría que construyerais vosotros, ¿vale? Necesito que construyáis, por ejemplo, esta suma [señala $210 + 543$], que la hagáis en tabla, con una tabla, como se os ocurra a vosotros

Comentario 10: Muy difusa la consigna otra vez. Porque yo sé lo que ella quiere, yo sé qué tabla quiere, pero porque yo la sé, pero no sé yo si así con esa consigna, si no han trabajado antes con alguna tabla sumando y tal, no sé qué es lo que van..., no lo sé, voy a ver. Yo sé lo que quiere, yo sé lo que quiere, pero...

diseñar la tabla, ¿vale? La tabla [escribe en la pizarra] puede ser más gráfica, puede tener características gráficas, o puede tener características más simbólicas; a mí me va a interesar más la que tenga características más gráficas, luego ya veremos en detalle cómo, pero tenéis que intentar construirlo vosotros sin que yo os haya hablado de eso explícitamente, ¿vale?



Entonces, paso 1, aquí [señala la parte de representación manipulativa de la pizarra], en paralelo paso 2, simbólico-numérico [lo señala en la pizarra] y luego ya,

Comentario 11: Recapitula todo lo que tienen que hacer. Claro, no quiere dar..., tiene un problema. Tiene un problema porque..., yo sé lo que quiere y por qué lo quiere, porque es una buena herramienta que puede ser como una buena transición, ¿no?, de pasar de uno a otro y justificarlo y que responde bien a cómo lo hacemos... No quiere decir cómo se hace porque quiere que los alumnos la construyan, pero claro, está asumiendo riesgos de que no queda muy claro qué es lo que tienen que hacer, no cómo lo tienen que hacer, sino qué es lo que tienen que hacer. O sea, si yo soy alumno suyo, yo no sé qué tabla quiere. Sé lo que quiere con gráfica y simbólica, lo tengo muy claro y sé la tabla que... Pero si soy un alumno suyo, no sé lo que quiere con «tabla». No lo sé...

según vayáis trabajando los cuatro ejemplos, igual ya se os va ocurriendo cómo representarlo con una tabla y cómo trabajar con una tabla ese tipo de operaciones.

Comentario 12: Ahora les da otra pista, dice: «bueno, cuando lo hagáis de la otra manera, igual os sale qué tabla hacer». Ella misma ha detectado que la consigna está un poquito «complicada». Porque estas cosas al final siempre se resuelven, por lo menos en mi experiencia, cuando das una consigna así y que no sabes darla o no eres capaz de darla mucho más precisa para que sea suficiente y que él sepa lo que tiene que hacer — digo con

nuestros alumnos – , esperas que alguien lo haga y cuando alguien lo dice, «¿veis?!», entonces estás así... Pero es verdad que ella misma está viendo, «bueno, ya veremos, yo quiero esta y tal, lo podéis hacer así, prefiero esta [señala a la gráfica]...». Está bordeando la cuestión porque es verdad que no quiere dar más información porque si da más información lo hace ella. Eso es absolutamente correcto, es decir, yo también lo intento hacer así.

¿Está claro? Yo me voy a pasar por las mesas y me vais preguntando todas las dudas que os surjan. No voy a pedir que me mandéis nada, ¿vale?, porque todavía no he revisado las últimas fotos que me habéis mandado, con lo cual estoy un poco desbordada; como no sois muchos, yo voy por vuestros puestos. Ahora bien, en el grupo anterior han decidido grabar pequeños vídeos o hacer fotos de los procesos que iban construyendo

Comentario 13: O sea que no es «representar», es hacerlo con el ábaco y están grabando. Es que yo, cuando ha dicho «representar», me he imaginado un ábaco, dibujando las bolitas. Y claro, cómo se representa que muevo una bolita aquí, o que muevo una aquí y quito tres de aquí...

por llevárselo como material para estudiar, a mí me parece una buena idea, pero ya vosotros hacéis lo que queráis, a mí no me lo tenéis que mandar, pero si queréis, una vez que hayáis construido, por ejemplo, con el ábaco japonés, imaginaos, esta resta de aquí [señala el PDF en la pantalla], y decís: «ah, pues nos vamos a grabar», uno lo hace otro lo graba y lo tenéis de recuerdo, ¿no?,

Comentario 14: Ahora he entendido que lo que dice es «representar», efectivamente, es hacerlo con el ábaco, resolverlo con el ábaco, usar el ábaco, y el ábaco es un sistema de representación como otro cualquiera. Vale, vale, vale. Entonces, claro, ¿cómo lo retienes?, sí, tenemos el vídeo... Me parece muy buena idea que lo hagan así.

para cuando tengáis que estudiar. ¿Cómo voy a pedir yo eso en el examen? Pues no lo puedo pedir porque no puedo llevar un sorobán para cada uno porque tengo un día, 2 horas y media o 3, para haceros el examen final de la asignatura; pero para mí esto es muy importante, entonces yo voy a pedir que me representéis gráficamente, gráficamente, vuestro proceso de respuesta con un ábaco vertical, con un sorobán o con los bloques multibase, que es lo que yo

luego voy a hacer aquí en la sesión final de discusión cuando acabemos esta hora de clase.

Comentario 15: Les está dando una pista... Les está dando una cuestión sobre cómo examinar. Me resulta curioso que les diga que eso lo hace porque ella necesita luego evaluarlo. Porque es verdad que para evaluar si saben usar un ábaco pues es cuestión de... «haz esto, dime tú cómo lo haces», ¿no? Ya advierte que no lo puede hacer porque no podría hacerlo, y entonces les dice cómo va a examinar. El paso a la representación gráfica de un proceso..., bueno, les ha advertido que eso es lo que van a tener que hacer. Bueno, me resulta curioso porque se adelanta a que los alumnos pregunten: «¿y esto cómo lo vas a preguntar en el examen?» [se ríe], pregunta clásica. Pero bueno, es curioso, me resulta curioso.

Yo no voy a coger el ábaco aquí, lo voy a poner delante de todos y tal —podría hacerlo, pero no lo voy a hacer—, lo voy a hacer representando gráficamente el material manipulativo y así es como lo voy a pedir el día del examen, porque os voy a dar un cuadernillo y lo tenéis que hacer gráfico, ¿vale? Bueno, pues empezad, están escritas en un orden muy concreto, empezad a hacerlas en ese orden y luego ya discutimos sobre por qué

Comentario 16: Me imagino que el orden es una variable y habrá querido que en las sumas o en las operaciones entren en juego distintos usos del ábaco, distintas propiedades de los ábacos, claro. O sea que las ha elegido ya hasta con un orden.

están puestas en ese orden, ¿vale?

Fragmento 2

[F = Formadora del vídeo]. [A = Alumnos (A1, A2 y A3)]. [Comentarios de Marcos presentados en recuadros].

A1: Estamos rayados con la última resta.

F: Vale, a ver, empezad.

Comentario 1: Esta es alumna mía [se ríe; señala a una chica del vídeo].

A1: Son 704 – 45.

F: Vale.

A1: Entonces, aquí no le podemos restar 5.

Comentario 2: O sea, está planteando una resta... Está diciendo la niña que tiene que restar, ¿no? No sé qué número es... Uno, dos, tres... El 704 creo que es, si no cuento mal, el 704. Y para restar aquí [señala la varilla de las unidades], en el ábaco lo normal es que si no puedes restar aquí, añades aquí las que faltan [se refiere todo el rato a la varilla de las unidades]. Pero aquí no hay [señala la varilla de las decenas]. Ha cogido un número con el que, incluso con el ábaco, ya tienes que tener ciertas precauciones. Claro, no debe de ser el primero, imagino, porque si es el primero, si no han visto nunca un ábaco, les va a hacer un lío. Claro, porque si tienes que quitar 5 [unidades], quitas una [señala la varilla de las decenas] y metes aquí 5 [señala la varilla de las unidades], por eso el ábaco es tan rápido, porque no tienes que hacer nada, solo tienes que saber las descomposiciones de 10 y 5 y te sale, pero claro, el tema es que aquí no hay [señala la varilla de las decenas], entonces tienes que tener un protocolo de acción, no vaya a ser que se te olvide. Está muy elegido ese número, si es como primer número..., muy fuerte, a ver qué hacen.



F: Así tal cual está, puedes restar..., ¿cuántas puedes quitar?

A1: Cuatro.

F: Cuatro, vale, sí.

A1: Entonces voy a suponer que aquí [señala la varilla de las decenas] hay un 1.

Comentario 3: Se supone. No hay, no hay [lo dice sin parar el vídeo].

A2: No, que hay 10.

A1: Que hay 10, para que sea 14...

F: A ver, olvídate de los «suponer». Tú dices: «tengo que quitar 5», ¿no?, quito 1, quito 2, quito 3, quito 4 [quita cuentas de la varilla de las unidades] y ahora ponme aquí más para que yo quite, tal y como está.



- A1: Habría que poner 10 y quitamos 1.
- F: Pero ¿cómo me ponéis..., cómo me ponéis ahí? A ver Pablo.
- A2: ¿Que lo ponga?
- F: No, no, que me digas... Yo aquí [señala la varilla de las centenas] tengo ahora mismo 700, ¿no? Escribe 700 de otra forma para que yo tenga bolas...
- A1: Aaaaah, hay que añadir una aquí [señala la varilla de las decenas].
- F: Venga, a ver.
- A2: [El alumno A2 quita una cuenta de la varilla de las centenas y la pone en la de las decenas].
- F: ¿Aquí sigue poniendo 700?

Comentario 4: Ha sido muy bueno, claro, o sea, les ha presentado..., o sea, está en una fase muy preliminar del ábaco, yo creía que estaba ya más avanzado, cuando les ha puesto ese número. Y no, no, porque en el ábaco no se hace quitando de una en una, eso es en las fases preliminares. Entonces ella lo que quiere ahora es que ellos hagan todos los cambios de manera que aquí obtengan 10 [en la varilla de las unidades], que quiten uno de aquí [señala la varilla de las centenas], no que la quiten, que la transformen en 10 de aquí [señala la varilla de las decenas], luego quitan una de aquí [señala la varilla de las decenas] y la transforman en 10 de aquí [señala la varilla de las unidades]. Entonces quiere que hagan eso. Pero cuando tú usas el ábaco, lo que se hace es..., quitar 5, si no puedes, inmediatamente quitar una de aquí [de la varilla de las decenas] y añadir las que hagan falta [en la varilla de las unidades], ¿no? Pero no, parece que es una esa preliminar, lo que quiere ver es que ellos vayan manipulando..., vayan materializando los cambios con el ábaco. Muy curioso lo que ha hecho el alumno, «¿quieres una aquí [en la varilla de las decenas]?, pues te pongo una aquí [quitando una bola de la varilla de las centenas]» [se ríe]; menos mal que lo ha quitado pronto el muchacho.

- A1: No, no, no, hay que poner una nueva aquí [vuelve a poner la cuenta en la varilla de las centenas —la que había puesto en la varilla de las decenas el alumno A2— y pone una nueva en la varilla de las decenas].
- F: A ver [quita la cuenta de la varilla de las decenas].

Comentario 5: Cada vez que el alumno lo hace mal, Nuria lo quita [se ríe]. No les deja que arrastren el error, porque es que con el ábaco se te puede liar..., es verdad, luego ya no sabes dónde están... No les dice por qué lo quita, pero les dice: «esperad». Me hace gracia.

Teníamos 704, hemos quitado 4, tengo 700, ¿vale?

A1: Sí.

F: Ahora, escribe 700 de otra forma para poder quitar otra.

Comentario 6: La pregunta es muy difícil: 700 de otra forma. De la mejor forma que sé escribir 700 es 700. Ella quiere que escriba..., que quite un 100 y que tenga 600 y 10 decenas, 6 centenas y 10 decenas, pero así no lo escribo. Yo creo que no quiere usar la palabra «descomponlo» de otra manera, para que tengas unidades para que puedas quitar alguna; eso no lo quiere decir, entonces... [se ríe], cada vez que le hacen así [poner una bola de forma incorrecta], la quita.

A1: Pues...

F: ¿Cómo podéis escribir 700 de otra forma?

Comentario 7: Es que la pregunta es muy difícil. ¿Cómo puedes escribir 700 de otra forma...?

A1: Que aquí [señala la varilla de las decenas] haya 9...

F: Venga.

Comentario 8: Ella [la alumna] dice 9 porque está ya avanzando lo que va a quedar cuando quite 10, cuando quite una de 10. Pero la respuesta correcta no es sea, la respuesta correcta es: «quito una de aquí [señala la varilla de las centenas] y meto aquí 10 [señala la varilla de las decenas]». ¿Vale? Cuidado, no ha resuelto el problema, porque el problema es que tengo que quitar de aquí una [de la varilla de las unidades]. Entonces tengo que quitar de aquí una [de la varilla de las decenas] y poner aquí 10 [en la varilla de las unidades]. La niña lo está avanzando, pero...

A1: Y aquí [señala la varilla de las unidades]..., 9.

F: A ver, para que haya aquíííí... [señala la varilla de las decenas], vamos a ver,

Comentario 9: No quiere decir cuántas hay [se ríe]. «Para que haya aquíííí... unidades».

¿cómo consigo aquí decenas? Sin cambiar el número...

A1: Si quito esta... [quita una cuenta de la varilla de las centenas].



F: Venga, muy bien.

A1: Pongo aquí 10 [señala la varilla de las decenas].

F: Venga, dale.

Comentario 10: Ya le ha dado, ya le han contestado. Le han contestado lo que ella estaba buscando desde el principio.

A1: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10.

A3: ¡Ah, vale!

Comentario 11: Y ahora esta se acaba de dar cuenta.



F: ¿Ahora aquí pone 700?

- A1: Sí.
 F: ¿Y cómo está escrito 700?
 A3: Mal.

Comentario 12: Mal [se ríe], ha dicho la alumna «mal» [se ríe y da palmas]. Claro, es que así no lo escribimos [se ríe].

- F: 6×10^2 , ¿no?, 6×100 , más...
 A2: 10×10^1 .
 F: 10×10^1 , muy bien. Ahora, ¿puedo quitar aquí [señala la varilla de las unidades] que quería quitar una? ¿Tengo?
 A1: No.
 F: No, ¿cómo puedo volver a escribir 700 para tener aquí [varilla de las unidades]?
 A1: Pues quito de estas [quita una cuenta de la varilla de las decenas] y añado 10 aquí [señala la varilla de las unidades].
 F: Vale, venga.



- F: Vale, ¿y ahora puedes quitar la que te faltaba por quitar?
 A1: [La estudiante A1 quita una cuenta de la varilla de las unidades].
 F: Ya está.

Comentario 13: Ah, ¿el color da igual? A mí me pone malo que mezclen los colores [se ríe]. Sí, yo, por ejemplo, lo hubiera... Pero vamos, es una... Yo es que uso más el ábaco chino, que son todas iguales, pero bueno... Lo que ha hecho ha sido, mediante preguntas... Es muy docente, muy docente, porque no tenemos tiempo, y eso nos pasa a

todos, no tenemos tiempo a que esto lo hagan ellos solos... Entonces, ella lo que hace es, mediante la pregunta, con un toque didáctico, claro, porque eres tú la que estás ahí..., aquí lo hacemos mucho, porque tienes que cubrir ciertos contenidos y, entonces, es verdad que aceleramos el proceso... Es verdad que lo han hecho bastante rápido, por lo menos esta chica [señala a una alumna en la pantalla]. Y es verdad que ella ha estado supervisando, pero les ha dejado hacer a ellos. Es verdad que cuando se equivocaban, no les dejaba que siguieran en el error, pero es que si no, no llegamos... Al final ha conseguido lo que ella quería; ya está satisfecha.

Ya habéis quitado 5 y teníais que quitar 45, ¿no? ¿Cuánto os falta por quitar?

A1: Sí, ahora aquí [señala la varilla de las decenas] hay que quitar 4.

F: Pues ya está, ¿no?

Comentario 14: Ahora siguen restando, imagino, ¿no?

A1: Ah, vale, vale. Gracias.

Comentario 15: Me hace gracia que dicen «gracias». O sea, son conscientes de que ha habido una intervención, son conscientes. Pero lo han descubierto ellos, yo creo que es una buena...



F: ¿Entonces qué habéis hecho para reescribir el 700...?

Comentario 16: Ella insiste en cómo escribir los 700.

O sea, yo tenía 700 ahí, tenía aquí 700 [deja el ábaco con 7 cuentas en la varilla de las centenas], ¿qué habéis hecho?

A2: Como es sistema decimal, pues aquí [señala la varilla de las decenas] hay 10, porque... representamos un 0, pues quitar una de aquí [varilla de las centenas] y ponerle las 10 aquí [varilla de las decenas] para luego restarlas aquí [varilla de las unidades].

F: O sea que habéis..., ¿agrupado o desagrupado?

A1: Desagrupado.

A2: Aquí desagrupado.

F: Desagrupado.

Comentario 17: Ahora ya lo está reinterpretando en los términos de nuestro sistema convencional, se lo está reinterpretando, es decir, está ella reescribiendo lo que han dicho... Podríamos decir que es una especie de institucionalización de lo que han hecho, o sea, de darle un carácter más oficial a lo que han hecho, pero vamos, siempre partiendo de la idea de que son ellos los que lo han hecho, y es verdad, que son ellos los que lo han hecho. Estamos un poco simulando de manera acelerada lo que sería una situación en una clase de primaria, que el trabajo debería ser mucho más del alumno y tú deberías hacer la tarea..., pero es verdad que, claro, le pasa lo que nos pasa a muchos, y es que no puedes reproducir exactamente las actividades de primaria aquí porque estos no son niños de primaria, son maestros, tienen mucho más, se supone, y lo tienen, mucho más conocimiento y mucha más madurez. Pero la verdad es que ha simulado muy bien el proceso y cómo lo han hecho y ahora ella simplemente lo está reescribiendo, digamos en términos mucho más matemáticos, ¿no?

Habéis desagrupado una centena en 10 decenas y luego una decena la habéis desagrupado en 10 unidades.

Comentario 18: No sé si existe el verbo «desagrupar», pero... Será «descomponer», no sé [se ríe]. Está mejor usado «desagrupar».

A1: Vale, es que cuando tú lo haces en papel no haces esto así.

F: Ah, pues dime entonces qué es lo que haces en papel.

A1: Claro, lo haces muy mental.

Comentario 19: Acaba de descubrir la chica que cuando lo hace con papel lo hace parecido.

O sea, en verdad sí que haces eso, pero... bueno, ya me has entendido.

F: No, no, pero lo tienes que explicar porque luego os he pedido que lo hagáis simbólico...

A1: Ya, ya, ya.

F: Entonces, simbólico tienes que explicarlo conectado con esto.

A1: Vale, vale.

Comentario 20: Está usando el ábaco como una manera de explicar, no tanto..., fíjate, lo está usando más que como elemento didáctico para usar con los niños..., sino también para que los alumnos de aquí descubran realmente ellos qué están haciendo cuando están restando.

Fragmento 3

[F = Formadora del vídeo]. [A = Alumnos]. [Comentarios de Marcos presentados en recuadros].

F: Vamos a corregir uno, el primero, ¿vale?

Comentario 1: *Qué frío tiene que tener, no se ha quitado el abrigo en todo el rato [se ríe].*

Me dan $210 + 543$,

Comentario 2: *Ha cogido uno sin llevadas... No sé qué juego le va a dar... Ha cogido uno sin llevadas, es una suma... Con el ábaco se hace metiendo 3 o metiendo 4 o metiendo 5. No tiene mayor historia. Imagino que será el primero.*

¿vale?, con símbolos. Voy a representarlo..., vamos a empezar con manipulativo y voy a ejemplificar con el sorobán, que es el que parece que más trabajo cuesta, ¿vale? Entonces, en el sorobán, cuando lo representéis gráficamente el día del examen, o ahora en vuestro cuaderno si tenéis que tomar notas, es muy importante marcar la barra del medio, porque la proximidad de las bolas a la barra del medio es la que te indica qué número está representando, ¿vale?

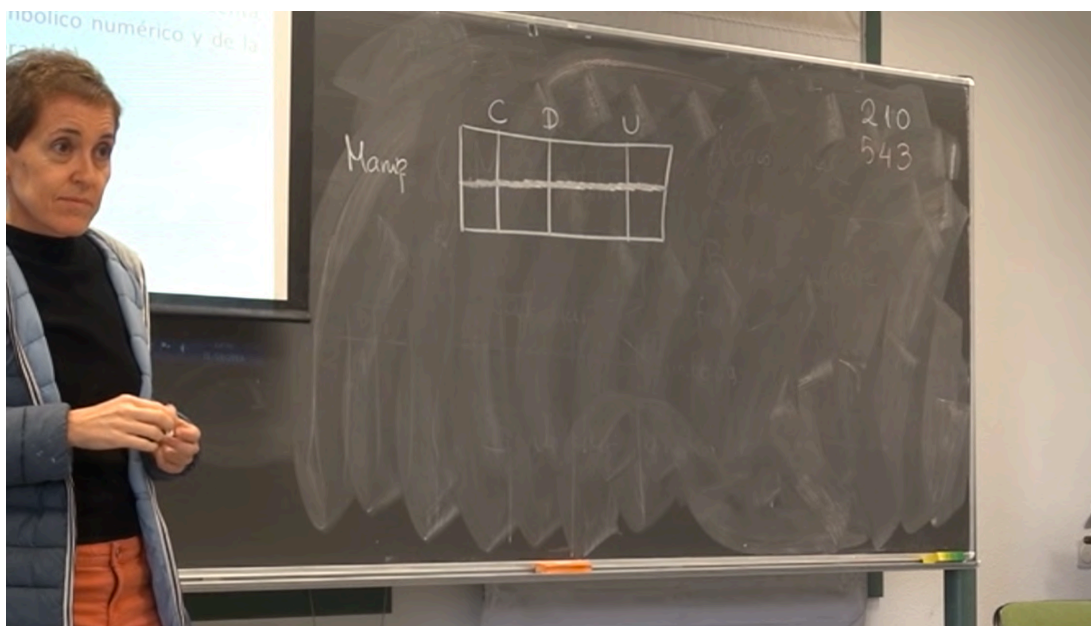
Comentario 3: *¿El sorobán es el japonés? [Se le indica que sí].*

Y ahora, dado el problema que me han planteado, ¿cuántas varillas pensáis que necesito escribir?

A: Tres.

Comentario 4: *Bueno, claro, como es el japonés, sí que va a tener que hacer cambios con el 5 [señala las decenas 4 y 1], es decir, sí que va a haber agrupaciones. No sé si va a sumar $210 + 543$ o al revés.*

F: ¿Tres varillas? Pongo una varilla, dos varillas, tres varillas. Esta, unidades, decenas, centenas. Esta la pongo un poco más gorda para que se note que es la barra de madera del medio, ¿vale? Y ahora, ¿cómo dibujo 210 ?



A: Pues 0 unidades.

Comentario 5: Me hace gracia que dice «cómo dibujo» en vez de «cómo represento» o «cómo escribo». Dice «cómo dibujo», me hace gracia porque quiere hacerles ver que es un registro gráfico, pero es una escritura del número también. Yo digo «escribo», no digo «dibujo», pero bueno, me hace gracia.

F: 0, o sea que aquí no pongo nada pegado a la barra, ¿no? [señala la varilla de las unidades]. ¿Aquí? [señala la varilla de las decenas].

A: 1 decena.

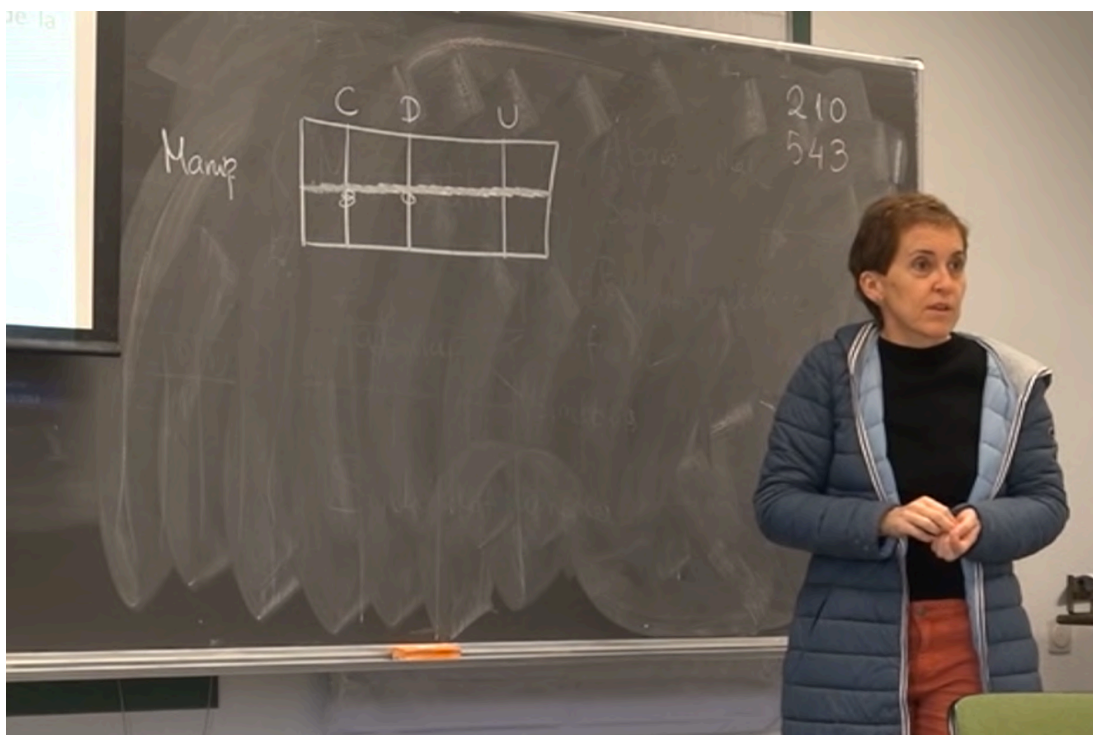
F: Una pegada a la barra, ¿arriba o abajo?

A: Abajo.

F: Abajo, o sea que aquí va una.

A: Y 2 centenas pegadas a la barra de abajo.

F: Pegadas a la barra, abajo. Una y dos, ahí está. Eso es 210.



Y ahora, tengo que sumar 543,

Comentario 6: Ya ha quedado claro qué es lo que va a hacer. Lo podía hacer al revés también.

es decir, que tengo que añadir 543 unidades ahí. Aprovecho la estructura, ¿vale? Entonces, añado 3 unidades, en la varilla de las unidades, que son 3 aquí abajo, ¿no?, 1, 2 y 3 [las dibuja en la varilla de las unidades]. Después añado 4 decenas, en la varilla... 1, 2,

Comentario 7: Y aquí es donde va a tener que hacer el cambio porque el sorobán no tiene 5 aquí [señala la parte bajo la barra horizontal de madera en la pizarra], tiene 4.

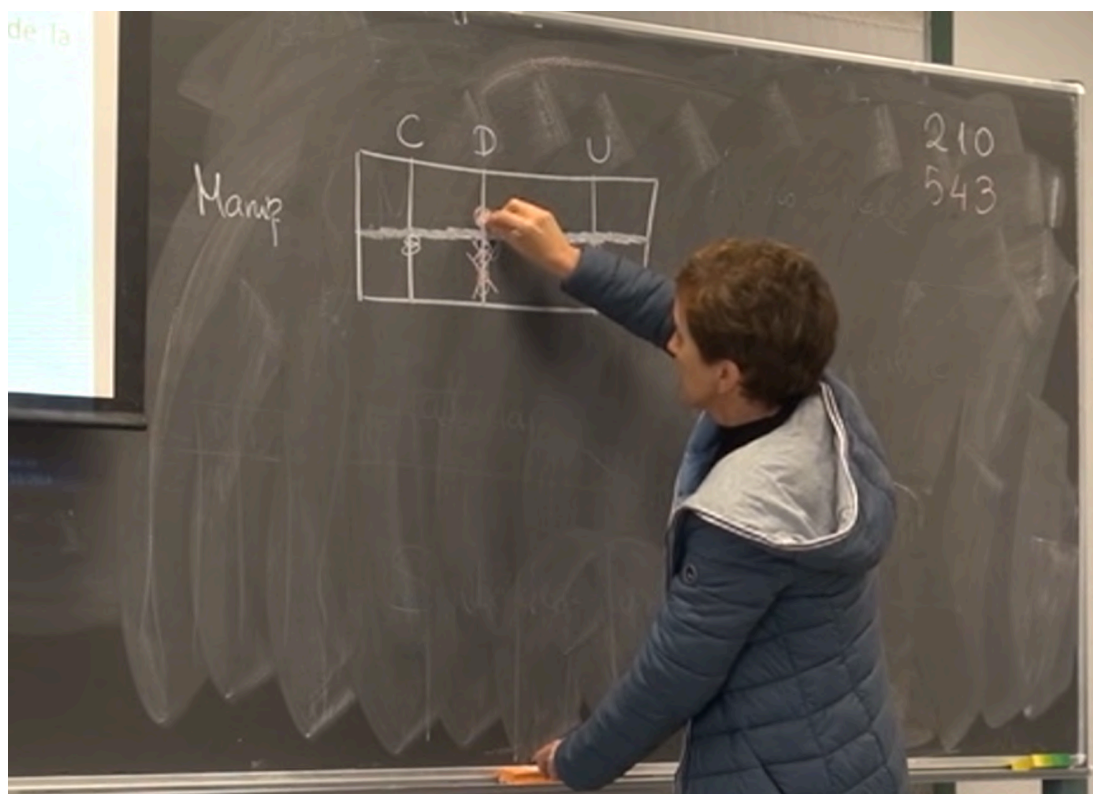
3, 4, ¿vale? [las dibuja en la varilla de las decenas], 4 decenas.

A: Pero cambiamos...

F: Pero...

A: Bajamos una de arriba y quitamos las de abajo.

F: Porque no tenéis 4, ¿vale?, ya no había suficientes, ¿por qué?, porque las bolas de arriba valen 5, entonces decís: «no pasa nada, estas, como eran 4 y 1, 5, se representan ahí arriba», ¿vale?



Y luego, 5..., tengo que añadir 5 centenas,

Comentario 8: No sé cómo lo va a hacer, si va a poner directamente la bola esta [señala la parte sobre la barra horizontal de madera] o va a internar... [señala la parte bajo la barra horizontal de madera].

¿cómo lo hago?

A: Pues 1 arriba.

F: Una de arriba la bajo directamente o podría ir: «1, 2, 3, ya tengo 5, las subo ahí, 4, 5» [va señalando en la varilla de las centenas], ¿vale?

Comentario 9: Este último proceso es muy laborioso. Todos los alumnos le han dicho eso... [el anterior proceso]. Ella quiere mantener la idea de que va subiendo de una en una, que no sé por qué lo intenta tanto, pero lo intenta siempre. Pero si es añadir 5, los alumnos entienden perfectamente que si esta vale 5 [señala la parte sobre la barra horizontal de madera], la meto y punto. Ella quiere insistir en que el proceso es de uno en uno. Luego, el ábaco cuando se utiliza no es así tampoco, se van metiendo de golpe las cuentas.

Puedo hacerlo de dos formas distintas. Pero si aprovecho la estructura del ábaco, de manera que las bolas de arriba valen 5, como tengo que añadir 5, pues

directamente ya añadido ahí esas 5 [dibuja una bola en la varilla de las centenas, en la parte superior, pegada a la barra horizontal], ¿vale?

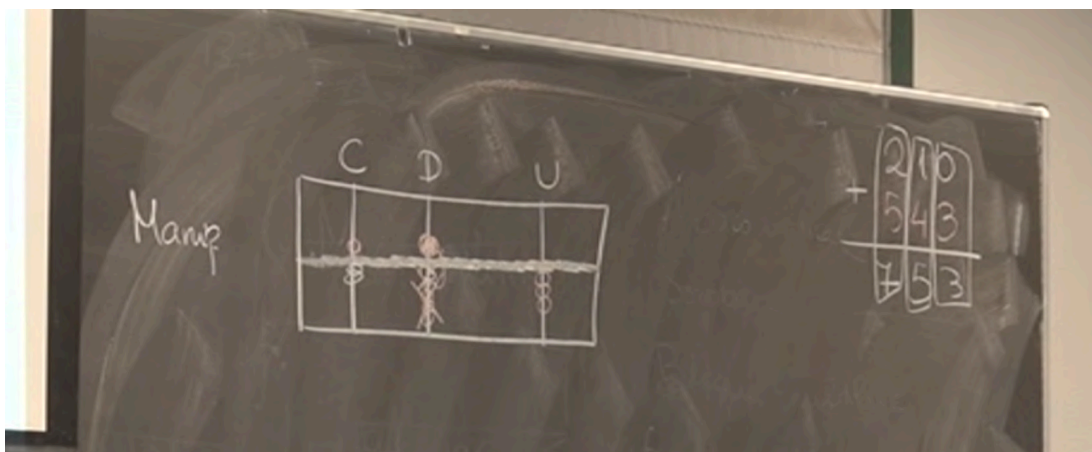
Comentario 10: Sí, pero es que además le gusta, aunque no aproveche la estructura, cuando mete dos aquí [señala la barra vertical de las centenas bajo la barra horizontal de madera], dice: «una y otra»; puedes meter las dos directamente. Ella quiere hacerlo de una en una, porque imagino que querrá...

Entonces, [representa ahora el resultado en la suma con el algoritmo tradicional de forma simbólico-numérica a partir de lo que ha obtenido en la representación con el sorobán] me quedan 5 y 2, 7, aquí me quedan 5, y aquí me quedaban 3. Entonces, si yo lo represento así y voy sumando por columnas, tal cual he ido haciendo en el ábaco, tengo 0 unidades y 3 unidades, 3 unidades, 1 unidad y 4 unidades, 5 unidades, perdón, decenas, 2 centenas y 5 centenas, 7 centenas. Vertical, lo he colocado vertical por parecerme a la estructura del ábaco, ¿no?,

Comentario 11: No, lo has colocado vertical porque lo colocamos vertical, para precisamente hacer eso.

para tener en cuenta la «posicionalidad», ¿vale?, del sistema.

Comentario 12: De hecho, el ábaco, yo creo que los chinos, muchos, lo usan así [hace con la mano como que gira el ábaco 90 grados], por una ventaja, porque si tú lo pones así [en la posición que se presenta en la pizarra], se caen las bolas, si lo pones así [girado 90 grados], las bolas no se caen. Entonces lo hacen así y usan el pulgar y los índices, y van haciendo así... [mueve la mano]. O sea, que... el ponerlo vertical tú [la formadora] lo has puesto así por eso, pero los ábacos chinos yo los he visto usar también de otra manera [se ríe]. Lo que pasa es que lo que está haciendo aquí ella, yo no sé si los alumnos..., porque ella ahora mismo está representando ahí, pero dentro de la tarea que tenían que hacer era que vieran la correspondencia entre las dos maneras [sorobán y simbólico].



Entonces, he traducido al simbólico

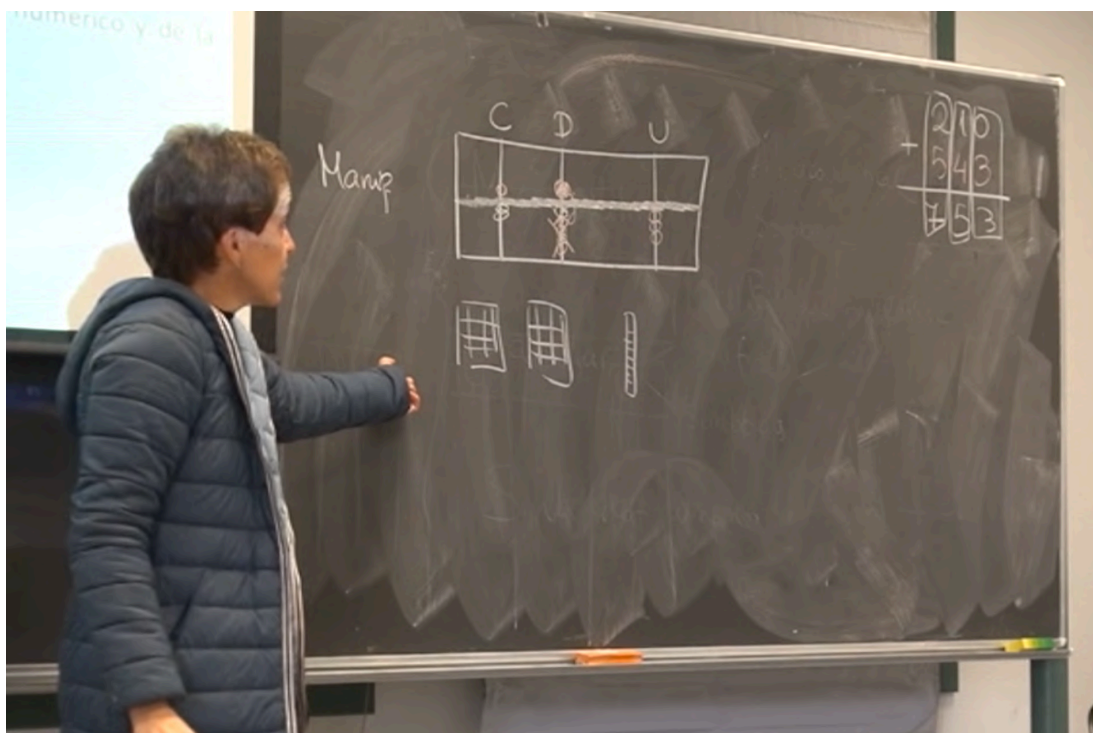
Comentario 13: Ha hecho la traducción ella.

lo que he hecho aquí manipulativamente al escribir en simbólico en columnas y represento con cada columna cada una de estas [señala las varillas del sorobán de la pizarra]. Y luego, la escritura, sí que tengo que tener en cuenta que estos son 5 [señala las decenas de la suma en simbólico] con lo cual van arriba [en el sorobán] y esto son 7 [señala las centenas de la suma en simbólico], pues son 5 y 2 [en el sorobán], ¿vale?

Bloques multibase, bloques multibase, pongo aquí 210, ¿no?, que son 1 y 2 placas de 100 y 10, una decena;

Comentario 14: Me da la sensación de que lo está resolviendo ella. No da la sensación de que los alumnos sean los que le vayan diciendo lo que tiene que hacer.

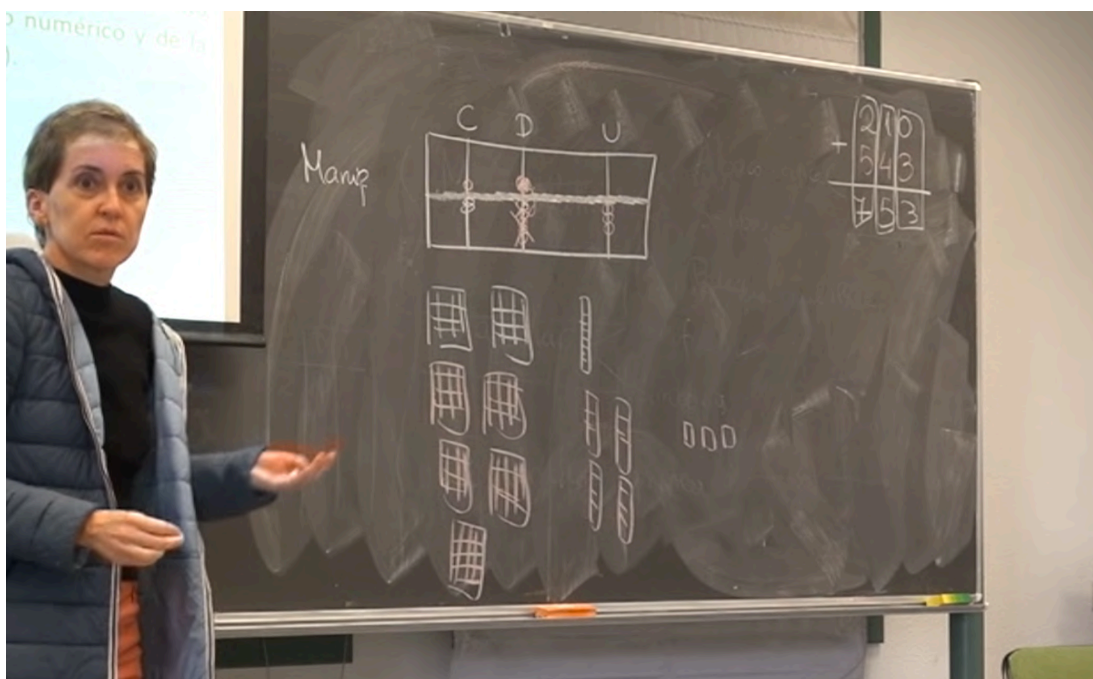
este es el 210.



Y ahora agrupo 543;

Comentario 15: En este no tiene nada que hacer, en este simplemente añadir las unidades que faltan y ya está, no va a tener que hacer ninguna descomposición.

una, dos, tres, cuatro y cinco [dibuja 5 placas de 100 unidades], añado, ¿vale?, 500. 40: una, dos, tres, cuatro [barras de 10]; y 3: uno, dos y tres [unidades]. Y ahora lo pongo todo junto. ¿Vale?



Y digo: «aquí tengo 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 [placas de 100]»,

Comentario 16: Lo ha puesto ella todo junto, dice: «ahora lo pongo todo junto», no, ya lo has puesto todo junto. Es verdad que tú lo puedes juntar todo y luego organizas, es mucho más básico que cualquiera de los otros sistemas que tiene.

¿necesito agrupar? [Rodea con una línea todas las placas de 100].

A: No.

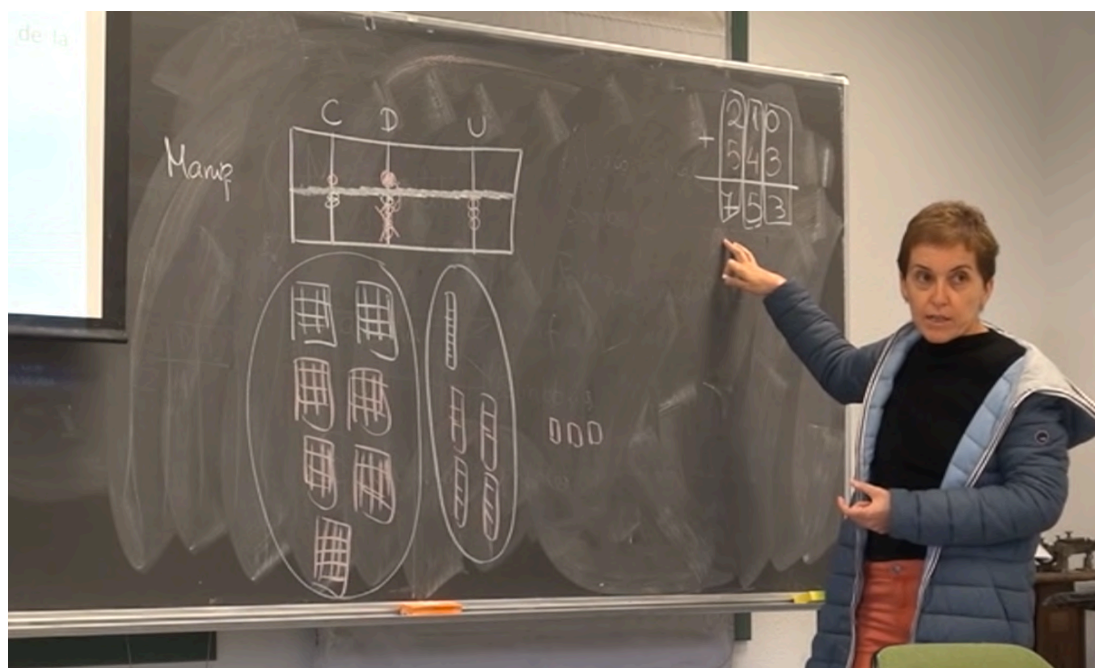
F: No necesito agrupar. Aquí tengo 1, 2, 3, 4, 5, 6, 5, ¿necesito agrupar estos 5 de alguna manera? [Rodea con una línea todas las barras de 10]. No porque es base 10. Y aquí tengo 3, ¿vale?

Comentario 17: No le ha hecho el circulito a esos 3 [la formadora ha ido rodeando el conjunto de las placas de 100 y el de las barras de 10, pero no el de las unidades]. No ha querido. Lo iba a hacer, pero no lo ha hecho.

O sea, que me vuelve a salir 2, 4, 6, 7 [centenas; señala la suma en simbólico], 2, 4, 5 [decenas], 5 [señala la suma en simbólico] y 3. Y veo la conexión de uno con otro, ¿vale? ¿Está claro hasta aquí?

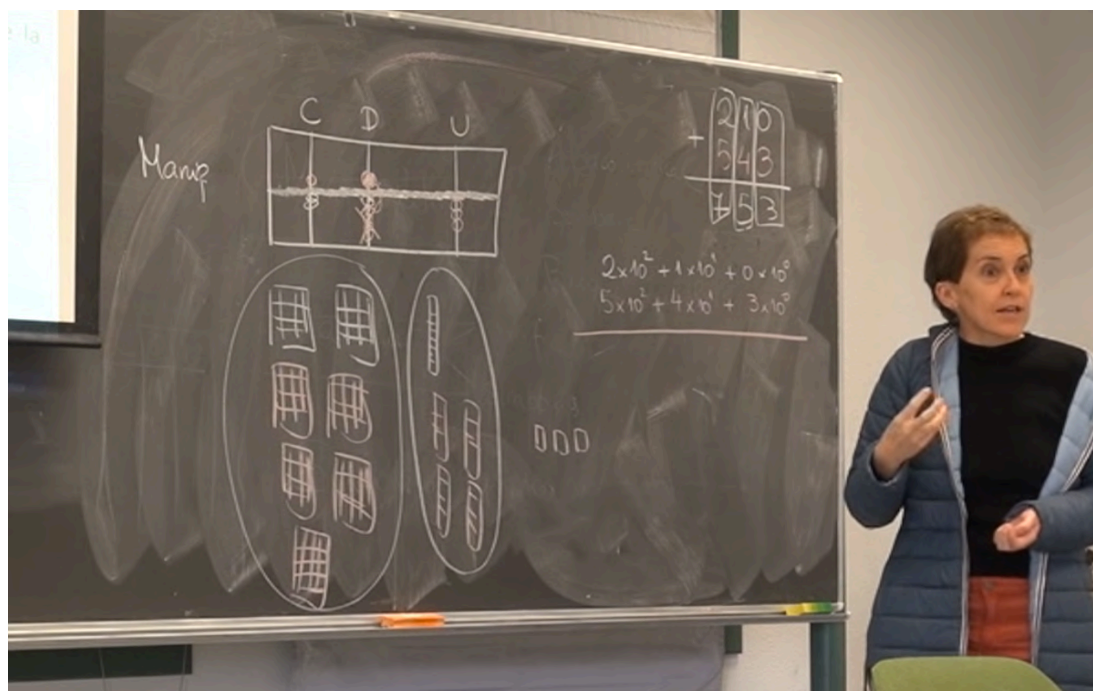
A: Sí, eso sí.

Comentario 18: Me hace gracia cómo pregunta si está claro, lo pregunta con muy poca convicción [se ríe].



F: El que quiera escribirlo simbólico-numérico de otra manera en la que se vea la «posicionalidad» del sistema, podría escribirlo de la siguiente forma:

$2 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 0 \times 10^0$, ese es el primer sumando; segundo sumando, $5 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 3 \times 10^0$; y sumo.



Y ahora, al sumar, utilizo la propiedad conmutativa, para colocar los sumandos en el orden que quiero,

Comentario 19: Y la distributiva [lo dice sin parar el vídeo].

y asociativa, para ir organizando, ¿vale? O sea, que este [señala 5×10^2] —que, si lo coloco seguido, estaría aquí el cuarto [señala detrás de 0×10^0]— lo quiero colocar el segundo para agruparlo con este [señala 2×10^2],

Comentario 20: Ahora se está remontando a todo un proceso... Me da la sensación de que los alumnos dicen...: «Claro, sumas esto con esto, esto con esto...». Claro, ella está siendo muy matemática, en el sentido de decir «yo lo pongo seguido y luego estoy aplicando la conmutativa para agrupar y luego la asociativa porque voy a hacer primero este, después este, después este...». Esas propiedades..., me da la sensación de que son tan evidentes para los alumnos que ni se dan cuenta que están ahí detrás, pero ella lo está remarcando, lo está remarcando. Yo creo que ella lo está intentando ver para justificar el porqué de esta escritura [señala el algoritmo simbólico tradicional].

este [señala 4×10^1] —que estaría el quinto [señala detrás de 0×10^0]— lo coloco el tercero para agruparlo con este [señala 1×10^1], y este [señala 3×10^0] lo agrupo con este [señala 0×10^0]. Y ahora, al agrupar, ya me quedan 5 y 2, propiedad

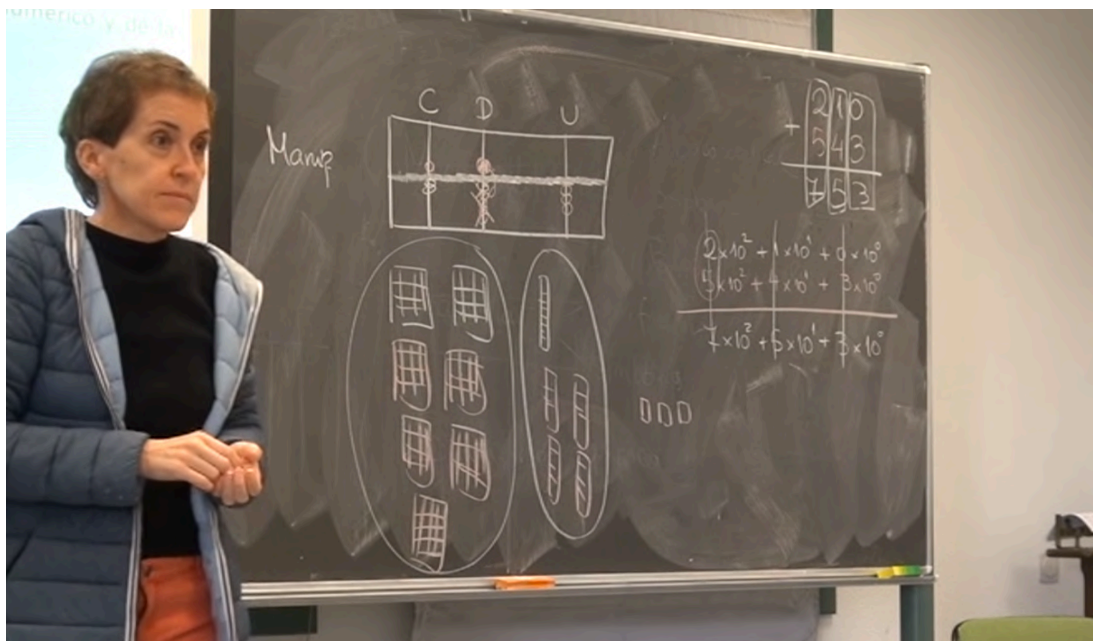
distributiva, 7×10^2 más, 4 y 1, 5×10^1 más, 0 y 3, 3×10^0 . Pero ahí estoy utilizando la asociatividad de la suma, la conmutatividad de la suma y la distributiva de la suma y el producto de números enteros, ¿vale?

Comentario 21: Nunca he sabido si es..., creo que es del producto respecto de la suma [se ríe]. Yo digo del producto respecto de la suma, ella ha dicho de la suma y el producto, punto [se ríe].

Pero si lo coloco así, veo esto, esto y eso [señala los coeficientes que acompañan a 10^2 , 10^1 y 10^0], que es lo mismo que esto, esto y eso [señala el 7, 5 y 3 del resultado de la suma en la forma simbólico-numérica], que es lo mismo que esto, esto y esto [señala los bloques multibase en la pizarra] y que es lo mismo que 1, 2 y 3 varillas [señala las varillas del sorobán en la pizarra].

Comentario 22: Bueno, aquí lo ha colocado así porque ha querido, o sea, aquí ella..., el material no te lo dice, es decir, es una decisión agruparlo así, ¿no? [señala los bloques multibase], porque luego obviamente lo hace. Pero, por ejemplo, este es obligatorio hacerlo así [señala el sorobán], porque si no, no puedes; y este también [señala el algoritmo simbólico tradicional]; pero este no [señala los bloques multibase], sin embargo ella ya lo ha agrupado y entonces ha hecho el paralelismo. Pero el paralelismo me da la sensación de que lo ha hecho ella; los alumnos no han dicho nada, no sé si lo tienen hecho así.

¿Está claro hasta aquí?



A: Sí.

F: Ahora, ¿qué diferencia hay entre esto y la siguiente suma que me plantean ahí [en el PDF proyectado en la pantalla]? $316 + 429$.

A: Que me paso de unidades y tengo que pasar a las decenas.

F: Que cuando agrupo aquí, por ejemplo [bloques multibase], o cuando agrupo aquí [sorobán], o cuando agrupo aquí [expresiones de sumas y productos de potencias de 10],

Comentario 23: Claro, ahora ya ha aparecido..., está secuenciado, hay una secuenciación clara, primero pone un caso que explica, que le va a permitir fácilmente ver lo que quiere, cómo lo hace y tal, y todo el paralelismo, y ahora empieza a funcionar el sistema de numeración, a condicionar el sistema de numeración a la técnica de la suma. Aquí no lo condiciona [se refiere al ejemplo que se ha desarrollado], porque esto que ha hecho aquí [señala las expresiones de sumas y productos de potencias de 10 de la pizarra] es una «frivolité» [se ríe], absoluta, quiero decir, está bien hecho, está perfecto, muy matemático, pero es una «frivolité», los alumnos no necesitan hacer eso. Claro, ahora es cuando nos vamos a encontrar que las potencias las voy a tener que redistribuir porque al sumar una me van a dar potencias que antes no estaban. La secuenciación es evidente y es clara.

aquí aparecen más de 10 [señala al 3 de 3×10^1]. En algún sitio aparecen más de 10,

Comentario 24: Claro [lo dice sin parar el vídeo].

por ejemplo, cuando tengo 9 unidades y 6 unidades, aquí aparecerían 15 fichitas pequeñas [bloques multibase], aquí tendría que representar 15 [sorobán] y aquí aparecería 15×10^0 . Pero como estamos en base 10, no puedo dejarlo así, tengo que agrupar, tengo que agrupar.

Comentario 25: Está haciendo todo esto para... Yo lo que no sé es si lo está haciendo para explicarles a los alumnos cómo funciona el sistema o para que... — lo estará haciendo para las dos cosas, imagino, ¿no? —, y también para que ellos sepan cómo tratar esto luego en primaria. Tiene esa doble... Pero por un lado, tampoco hay que desdeñar que está intentando que los de aquí entiendan por qué hace eso. Se supone que los alumnos de aquí saben por qué se suma así [señala el algoritmo simbólico tradicional y las expresiones de sumas y productos de potencias de 10]. Ella está haciendo esa doble lectura, ¿no?, porque, por ejemplo, esto [señala los bloques multibase] no es para alumnos de aquí en ningún

caso, ¿no?, pero está intentando justificarles por qué lo hacemos así [vuelve a señalar el algoritmo simbólico tradicional y las expresiones de sumas y productos de potencias de 10].

Entonces, agrupo 10 y dejo 5, y las 10 que agrupo las paso al siguiente valor, es decir, pego 10 fichas y construyo una barra [bloques multibase], agrupo 10 y me sale otra bola aquí en el ábaco, aquí abajo [parte baja de la varilla de las decenas], o agrupo 10 y me sale uno más aquí [en 5×10^1] y aquí [en 3×10^0]

Comentario 26: O aquí [señala las expresiones de sumas y productos de potencias de 10] «me llevo», que es la expresión coloquial que hacemos.

dejo las que se quedaban sueltas, las 5, ¿vale? O sea, que la única diferencia es que aquí, después de representar cada cantidad y de ir poniendo por orden el valor de cada una, tengo que agrupar

Comentario 27: Tengo que «reagrupar».

porque en algunos sitios tengo 10 o más, ¿vale? Es la única diferencia.

Y ahora, si quisiéramos representar esto en formato tabla, como tenía Martín, ¿no? ¿Cuántas columnas pondré yo en la tabla?, ¿qué me pide el cuerpo? Tengo que dibujar una tabla, ¿vale?, vamos a dibujar una tabla [comienza a dibujarla en la pizarra], con filas y columnas, ¿cuántas columnas pongo?

A: Tres.

F: Tres, ¿por qué tres?

A: Centenas, decenas y unidades.

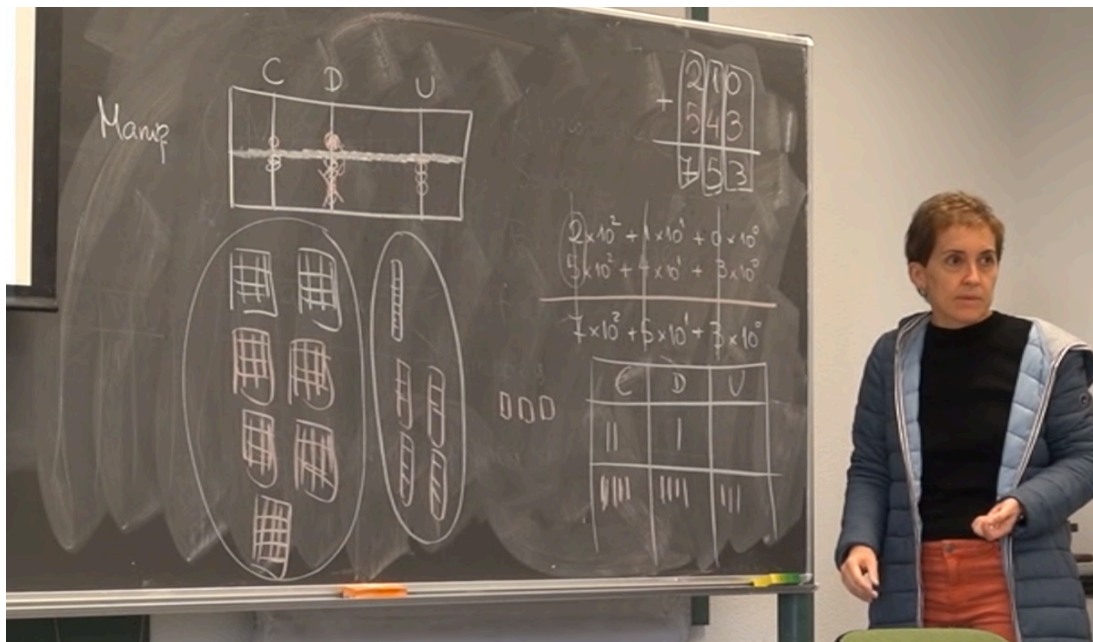
F: Unidades, decenas y centenas, ¿vale? Y entonces, represento el primer número, 210: 1, 2, 1, eso es 210 [pone dos rayas en la primera casilla de las centenas y una en la primera de las decenas]. Represento el segundo número, 500:

Comentario 28: Es un formato de tabla que ella ha asumido. Yo hasta que no la he visto no sé exactamente... Esto lo puedes hacer con barrotos o lo puedes hacer con cualquier otra cosa, ¿no?, pero vamos, que ese formato de tabla surja de manera natural cuando tú dices: «haced una tabla», a mí me cuesta mucho pensarlo.

1, 2, 3, 4, 5; 40: 1..., bueno, en rosa, ya puestos...,

Comentario 29: Esta es la que aprieta a color y luego no se borra bien [se ríe].

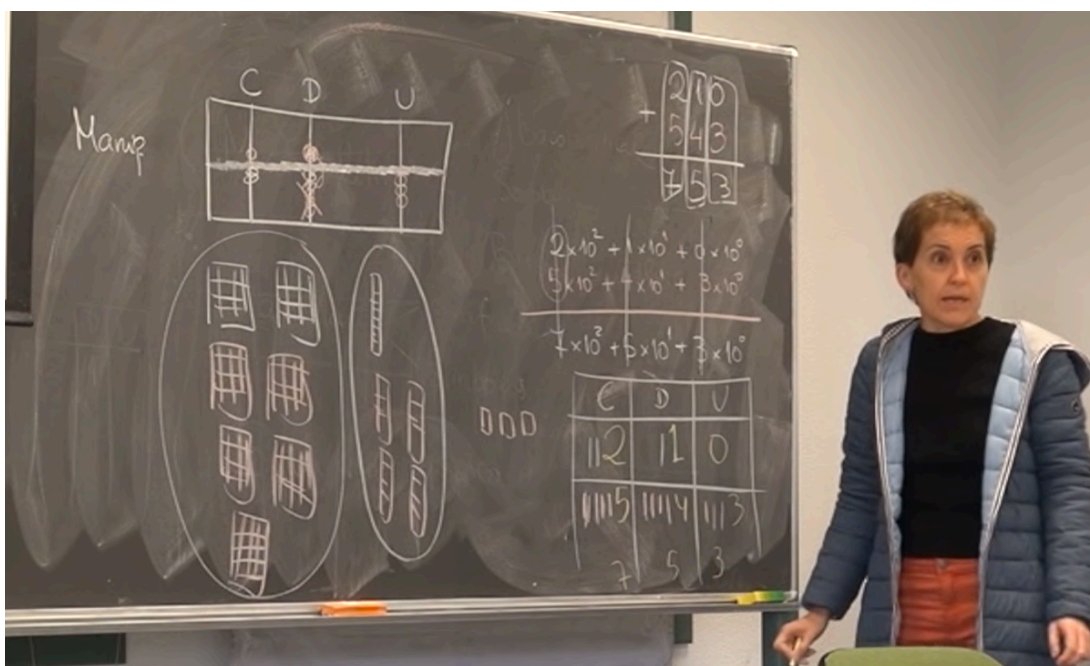
1, 2, 3, 4, 5; 40: 1, 2, 3, 4; y 3: 1, 2, 3. Y agrupo: ¿cuántas unidades tengo al final?, 3, ¿cuántas decenas tengo al final?, 5, ¿cuántas centenas tengo al final?, 7, fin.



Este sistema de representación es icónico-gráfico porque he representado aquí las cantidades con palitos, pero tiene una estructura especial porque está en una tabla, ¿vale? Entonces, vamos a decir que es un sistema de representación tabular-gráfico. Si en vez de poner aquí gráficos, yo hubiera dicho:

Comentario 30: Números [lo dice sin parar el vídeo].

«oye, mira, no me lío con los gráficos, ya puestos, como ya controlo mejor los símbolos, pues voy a poner aquí 210 y aquí abajo voy a poner 543 y luego ya sumo: 4 y 1, 5; 5 y 2, 7; 3 y 0, 3», ¿vale?



Sería tabular, tiene una estructura tabular, no es puramente simbólico-numérico, tiene una estructura tabular, pero con números dentro, tabular-numérico, ¿vale?

Comentario 31: Claro, ahora está explicando lo que ellos tenían que haber hecho, lo cual yo creo que me reafirma en la idea de que efectivamente esa consigna quedaba ahí un poquito..., y ella lo sabe, que quedaba..., lo de hacer la tabla..., no ha dado más indicaciones porque no quería darlas, porque no debía darlas didácticamente, pero se daba cuenta de que efectivamente era poco..., de hecho ahora lo está ella proporcionando. Me gustaría saber si algún alumno ha hecho algo parecido, porque aquí no lo veo, pero vamos, tampoco es... Me parece que son cosas que un alumno de aquí basta con que lo muestre para entender efectivamente qué se ha hecho, no tiene tampoco mucha...

Entonces, yo voy pasando de lo más concreto, que sería: «mi madre me ha dado 316 euros y mi abuela 429, ¿cuántos euros tengo en total?», después paso a manipular, con ábacos verticales, con ábacos japoneses, con bloques multibase...,

Comentario 32: Ahora sí que está dando una indicación de índole didáctica para la práctica de los alumnos fuera, o sea, no lo que estaba haciendo aquí [señala las expresiones de sumas y productos de potencias de 10], ¿no?, sino que ahora está explicándoles cuál es el proceso... Yo lo que pasa es que aquí..., cuando dice que son absolutamente físicos, manipulativos, los euros..., los euros es un sistema simbólico igual que este; si tú tienes 300 tal, tú no tienes 300 moneditas de 1 euro, tienes un billete de 100, tal y cual, es decir, al final también el euro se puede componer con un sistema así... No es más manipulativo

el euro que esto [señala los bloques multibase], es verdad que hay un contexto, pero no es más manipulativo, ¿no? De hecho, es más evolucionado que esto [señala de nuevo los bloques multibase], porque aquí se ven, aquí hay 100 de estos... [en los bloques multibase]. Y ahora lo que les está dando son indicaciones efectivamente de cuál sería la progresión correcta para hacerlo en clase.

y cuando interiorizo bien eso, digo: «ostras, venga, lo voy a poner en una tabla gráfica y voy a indicar lo que me indica cada varilla o lo que me indica cada agrupamiento de los bloques multibase, que es posición, en las columnas de una tabla, y ahí voy a poder marcarlo con símbolos». Esta tabla con símbolos se llama tablero de posición, porque tengo las posiciones indicadas —unidades, decenas y centenas—, y es uno de los recursos que más utilizan en el método famoso este Singapur, que habréis visto o habréis oído hablar de él, ¿vale? Entonces, ¿qué están haciendo?, están haciendo una transición de los más concreto, pasando por lo manipulativo, hacia lo abstracto, que sería..., esto es lo más abstracto [señala las expresiones de sumas y productos de potencias de 10]

Comentario 33: Yo no creo que esto [señala el sorobán] sea más concreto que esto [señala el tablero de posición]. Esto sí [señala los bloques multibase]. Entonces ella está haciendo ahí... [hace un movimiento con el bolígrafo a lo largo de las diferentes representaciones, como de transición], pero... estos ábacos [el sorobán] no están pensados para enseñar, estos ábacos están pensados para trabajar, para obtener resultados, no están pensados para que tú aprendas a..., no. Es como esto [señala el algoritmo simbólico tradicional], esto está pensado para que funcione, no para que lo aprendas. Esto [los bloques multibase] no, esto está pensado para aprender, entonces esto sí es más manipulativo; y eso [los tableros de posición] también, bueno, tiene un punto intermedio. Pero la idea está clara, ir de lo manipulativo a lo más abstracto. No sé si esto es una alternativa o no [se ríe].

y esto es lo abstracto que se trabaja en primaria [señala la suma hecha en el registro de representación simbólico-numérico], ¿vale? Pero no trabajan directamente con esto, vamos pasando..., concreto, concreto, concreto, concreto [de forma manipulativa], voy intentando abstraer un poco, pero tengo mis gráficos que me ayudan a visualizar lo que estoy haciendo [de forma tabular], y finalmente mi objetivo es escribirlo simbólico-numéricamente,

Comentario 34: Eso es un objetivo didáctico, está claro que lo que les está proponiendo es

que efectivamente su objetivo, el objetivo de ellos, no como personas cuando sumen, sino como maestros, es que los alumnos aprendan esto, entonces les está explicando cuál podría ser una alternativa de una progresión – que nos preocupa mucho siempre a los docentes hacer las cosas con una progresión adecuada –, que a veces no siempre es de lo fácil a lo difícil, a veces tienes que presentar cosas difíciles para generar desequilibrios para que ellos tengan que actuar, pero en este momento está bien porque efectivamente entender eso [el algoritmo simbólico tradicional], así, de manera directa, requiere conocer todo esto [todo lo planteado en la pizarra]; está bien.

de forma abstracta, ya al final. ¿Cómo habéis trabajado mayoritariamente vosotros en primaria cuando estabais haciendo sumas de este estilo? ¿Desde aquí [señala lo manipulativo] o desde el final [señala lo simbólico-numérico]?

A: Desde el final...

A: Yo con las de centenas, decenas y unidades, las cajas...

F: Las cajas estas también os suenan, los tableros de posición, pero ¿y qué poníais en las posiciones, palitos o los números ya?

A: Los números directamente.

F: Los números directamente, o sea, que estabais trabajando la fase inicial, de la suma, la estabais trabajando directamente con lo simbólico, que es la fase final,

Comentario 35: Ahora está intentando que ellos vean personalmente cómo han sufrido todo este proceso y que realmente rescaten, efectivamente, si las dificultades que ellos han tenido son dificultades que ellos pueden luego resolver con otras vías, ¿no? Claro, el problema que tienes aquí es que te puedes encontrar un alumno que diga: «pues yo lo aprendí así y lo aprendí bien» [se ríe]. Y es verdad, pasa; de hecho, muchas veces los que mejor van no son los que más juego te dan aquí.

¿lo veis?

A: Jolín, sí.

F: Vale, pues ala, ya está.

ANEXO 5

Transcripción de los comentarios de Daniel en la fase 1

Nota: El texto presentado entre corchetes en la transcripción se corresponde con información incluida por el investigador.

TRANSCRIPCIÓN DEL VÍDEO 1

Fragmento 1

[F = Formadora del vídeo]. [Comentarios de Daniel presentados en recuadros].

F: Bueno, entonces os voy a dar el guion y empezáis a trabajar y, al final, los últimos 15 minutos, hacemos la puesta en común. El guion de la actividad aparece aquí en el campus, pone la fecha, ¿vale?, «actividad para la sesión del 19 de septiembre». Lo voy a leer porque está en inglés, por si alguno tuviera alguna dificultad, lo leo y os ponéis a trabajar, ¿vale?

Todo el mundo en la mesa tiene un montón de palillos y varias cintas de estas, ¿no?, elásticas. Si alguien necesita más cintas me las pide, palillos no, son los que os he puesto, ¿vale?, es con lo que tenéis que trabajar. El problema es que yo he comprado una caja de palillos en Supeco y resulta que mis compañeros lo compran en Mercadona y me dicen que las cajas de palillos que ponen 800 palillos del Mercadona traen más y que les sale a cuenta, y que cuando van a comprar materiales —porque a veces tenemos que comprar nosotros los materiales— pues que merece la pena. Yo no pude ir a Mercadona, fui a Supeco, pone que son 800, pero no sé si me han timado o no me han timado. Entonces, para hacer un control de calidad, hacer una estimación, que luego, bueno, los que hayáis hecho Matemáticas de Ciencias Sociales pues sabéis hacer un contraste de hipótesis y tal, pero bueno, lo primero que tengo que hacer es hacer una estimación de cuántos hay, ¿no? Entonces, los he repartido para no contarlos yo y la idea es ver cuántos hay.

Comentario 1: Está planteando la actividad, enfocándola..., bueno, poniéndola en el contexto de una actividad que podría ser cotidiana y asegurándose de que toda la clase entiende lo que van a hacer.

Entonces, el guion de la actividad, tal y como aparece aquí... [espera a que cargue el ordenador]. Aquí está el guion. Esta actividad —esperad que la amplíe un poco— está escaneada de un libro muy bueno que utilizan en los últimos años en Estados Unidos para formar profesores de primaria. Lo bueno del libro es que, además de los contenidos teóricos, más de la mitad del libro son actividades para llevar al aula-taller como estamos haciendo aquí, ¿vale? Entonces, una de las actividades iniciales para el trabajo con el número, que es con lo que estamos empezando nosotros, es esta de los palillos, ¿vale?

Entonces, aquí la pregunta es «cuántos», cuántos palillos, ¿no?, que es lo que os he preguntado a vosotros, ¿no?, cuántos. Entonces, cada grupo participando en esta actividad tiene un montón de palillos y luego tiene algo para atarlos, ¿no?, *rubber bands*, pues cintas de estas elásticas. Los materiales ya los tenéis. El objetivo de la actividad es ayudaros a entender el desarrollo de la escritura de los números tal y como los utilizamos nosotros en nuestro sistema de numeración, ¿vale? Entonces, primero, organiza los palillos de forma que visualmente puedas ver más o menos cuántos hay; usa las bandas elásticas, si te ayudan, para organizarlos de manera que así, de un vistazo, puedas decir cuántos tienes, primero los cuentas, lo organizas, piensas cómo organizarlo, pero la cosa es que la organización que tú tengas en la mesa te permita de un vistazo recordar cuántos hay sin necesidad de haberlo apuntado, ¿no?, y que, si yo me paso por allí, me podáis decir: «mira, hay no sé cuántos, porque...», lo veo porque lo hemos organizado así», ¿vale?

Comentario 2: Sigue presentando la actividad, intentando dirigir un poco a que entiendan los alumnos qué es lo que queremos que hagan, porque es muy posible que los alumnos no entiendan de qué están hablando, en el sentido de que se pongan a contar y demás..., y la docente pues quiere que, sin decirles claramente lo que tienen que hacer —que no debería hacerlo, supongo—, pues que intenten entender qué tipo de actividad se espera de ellos durante la clase, ¿no?

Luego, reflexiona sobre si la manera en la que lo has organizado corresponde a cómo escribirías tú luego los numerales para representar esa cantidad de palillos. Después, tienes que juntar tus palillos con los de un grupo de al lado, ¿vale?, por ejemplo, vosotros con vosotros y así, cada dos grupos tienen que juntar los

palillos que tienen y decidir cuántos tienen en común, ¿vale?, cuántos tienen en total. Y al final, tenemos que juntarlos todos y de una forma ágil, sin tener que volver a contarlos todos, tenemos que saber cuántos palillos hay en total en la clase repartidos, ¿vale? O sea que, primero, cada grupo tiene que saber cuántos tiene y tiene que generar una estrategia para, de manera rápida, mirar en la mesa y ver cuántos hay; después, reflexionar sobre si la manera en la que lo coloca cuando uno luego escribe, imaginaos, «tengo 72, pues cómo se escribe 72: siete, dos», pues la manera en la que lo coloco me ayuda con la escritura o no, no tiene por qué, se reflexiona un poco sobre eso; y cuando hayáis terminado esa parte, llamáis al grupo de al lado y decís: «venga, vamos a ver cuántos tenemos en total, visualmente, cómo lo organizasteis vosotros, cómo lo organicé yo, a ver cómo lo tengo», ¿vale?; y luego todos. Tenéis un cuarto de hora, ¿vale?

Comentario 3: Sigue dirigiendo, es difícil apreciar cuánto hace falta esa dirección, en el sentido de cuánto se ha trabajado antes en una clase anterior un contenido parecido a este, ¿no?, si se ha trabajado más o menos pues hacen falta más o menos detalles de ese estilo para llevar al alumno entre el conteo y la notación posicional, que es lo que estamos haciendo, ¿no?

Fragmento 2

[F = Formadora del vídeo]. [A = Alumnos]. [Comentarios de Daniel presentados en recuadros].

- F: Necesito saber si habéis tenido que llegar a algún acuerdo entre los grupos o...
- A: Sí, claro, todo ha sido un consenso, todo ha sido un consenso.
- F: Ah, vale, ha sido un consenso. ¿Qué acuerdo habéis tenido que...?
- A: Hemos explicado cada uno pues lo que significaba cada..., cada gomita.
- F: Y, por ejemplo, ¿vosotros de cuánto en cuánto lo habíais agrupado? Eráis los de 15, 10, 5, ¿no?
- A: Sí.
- F: ¿Y vosotros?
- A: 20, 10 y 4.
- F: 20, 10 y 4. Entonces, ¿habéis tenido que llegar a algún acuerdo alguno para reordenar?
- A: No, porque nos ha venido muy bien.
- F: ¿Os ha venido bien?
- A: Es que hemos sido muy inteligentes cogiendo el amarillo para los grandes [se refiere a gomas elásticas de color amarillo].
- F: Ahora los grandes de qué son, ¿de 20?
- A: De 20 y de 15, aquí están mezclados. ¿O los tenemos que reorganizar?



F: Esto es superinteligente, ¿no? O sea, yo veo aquí..., digo: «en los amarillos, algunos tienen 20 y algunos tienen 15, búscate la vida Nuria».

A: Pero son amarillos.

Comentario 1: Está pidiendo la información de lo que han hecho los alumnos, no juzgando para que salga toda la información sin dirigirles demasiado a lo que quería, que seguramente no era esto, y entonces está consiguiendo que los alumnos cuenten lo que se les ha ocurrido, que parece que no hay mucho trabajado antes porque están saliendo estrategias que creo que muestran que antes no se ha trabajado, debe de ser el primer trabajo sobre el tema, una de las primeras actividades sobre el tema, notación posicional.

F: Ya, pero entonces yo no sé... Yo digo: «vale, yo puedo ver 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 grupos amarillos», ¿no? Y ahora digo: «como mucho serán 160, si son todos de 20, pero...

Comentario 2: Ahora está tratando de razonar sobre la estrategia que han propuesto los alumnos, tratando de que ellos, los alumnos, se den cuenta de los problemas que tiene lo que han..., en lugar, claro, en lugar de decirles: «pues esto está mal porque pasa esto», tratando de describir lo que está pasando y que sean los alumnos los que se den cuenta de por qué no es del todo buena idea lo que están haciendo, claro.

no necesariamente son 160, pueden ser menos».

A: Bueno, pero como no lo sabes...

F: ¿Entonces cómo sé cuántos hay?

A: Te lo estamos diciendo, tienes que confiar en nosotros.

F: No, en matemáticas la confianza no vale, uno tiene que...

A: Es que no sé, no lo entiendo. ¿Lo tenemos que reorganizar?

F: Vosotros ya sabéis cuántos palillos tenéis, pero ahora, visualmente, tenéis que poder contarme a mí cómo sabéis que hay ese número de palillos, ¿no?

A: Ah, pues habría que... ¿Y no podemos quitar las gomas y reorganizarlo?

F: Sí, sí, sí, yo no dije que no pudierais quitar las gomas.

A: Aaaaah.

F: ¿Alguien dijo que no se podían quitar?

A: Y nosotros diciendo que no se podían quitar las gomas...

F: Y una duda más. Alguno de vosotros..., por separado, ¿no?, cuando lo teníais..., habéis escrito la cantidad que teníais, ¿no? Eh, 109 teníais uno...

- A: 104 y 85.
- F: Por ejemplo, el 85 se escribe con un 8 y un 5. Ese 8 y ese 5, ¿estaban representados de alguna forma en...?
- A: No.
- F: No, vale. Y vosotros, la misma pregunta con lo vuestro.
- A: No.
- F: No había un patrón en cómo lo habíais representado, vale, ok.

Comentario 3: Sigue tratando de que conecten la actividad con la notación posicional, con un éxito relativo porque es algo que a los alumnos les cuesta, nunca lo han pensado, pero sigue tratando de que los alumnos se den cuenta sin contárselo ella, claro, es lo que... el objetivo de la actividad.

- A: ¿Pero quieres que busquemos?
- F: Quiero que reflexionéis sobre eso, pero ahora lo vamos a poner en común, ¿vale?
- A: Vale.
- F: ¿Ha sido operativo el que ellos hayan hecho 15, 10, 5... y vosotras tuvieras 20...? ¿Eso ha ayudado a la hora de ponerlo en común?
- A: No, porque ahora hay que hacerlo otra vez.
- F: Ahora hay que volverlo a hacer...

Fragmento 3

[F = Formadora del vídeo]. [A = Alumnos]. [Comentarios de Daniel presentados en recuadros].

F: Me tenéis que decir cuántos palillos había en cada grupo inicialmente, antes de juntaros dos grupos, ¿vale? Entonces, por ejemplo, vosotros.

A: 87.

F: 87 [lo escribe en la pizarra]. Estamos de acuerdo, yo utilizo la escritura estándar que vosotros habéis visto en primaria, secundaria, bachillerato y al llegar aquí, ¿vale? Escritura estándar de nuestro sistema de numeración en nuestro contexto. Ese grupo, 87. ¿Cómo habíais hecho los grupos?

A: Pues hemos hecho, eh..., tres grupos de 20.

F: Tres grupos de 20, ¿cómo lo puedo poner? [Escribe un 3 en la pizarra].

A: Eh..., tres rosas.

A: 3 x 20.

F: ¿Tres rosas?

A: Sí.

A: No.

F: Si pongo tres rosas... ¿Todo el mundo que ha utilizado gomitas rosas ha atado 20?

A: No.

Comentario 1: Bueno, ahora está tratando, ahora en gran grupo, ¿no?, con toda la clase, igual que hacía antes en el pequeño, preguntando por cómo..., qué estrategias han desarrollado los alumnos, también sin juzgarla para que, si no es adecuada, vayan viendo los alumnos si es adecuada o no y por qué.

F: ¿Otras personas que han atado 20 han usado otro color?

A: Sí.

F: Uf, el color no me vale. ¿Cómo lo pongo?

A: 20 x 3.

A: 3 x 20.

F: 3 grupos de 20, ¿no? 3 x 20. [Escribe 3 x 20]. Y luego...

A: Pon en el 3 «color rosa» o algo así. Entre paréntesis.

- F: Vale, vale. [Pinta una raya rosa sobre el 20]. Y luego... Esto son 60.
- A: 9×3 .
- F: Y luego 9 grupos de 3, ¿no? [Escribe + 9]. ¿O 3 grupos de 9? [Borra el 9].
- A: 3×9 .
- F: 3 grupos de 9 y el 9 lo habéis puesto de otro color, ¿vale? [Escribe 3×9].
- A: Sí.
- F: ¿Alguien más ha utilizado grupos de 20?
- A: Nosotros.
- F: Varios. ¿Alguien más ha utilizado grupos de 9? [Destaca con la voz el número 9].
- A: Nosotras.

Comentario 2: Ahora ya estaría preguntando, tratando de reunir, o de resumir, o de hacer un listado, ¿no?, de todas las estrategias que han salido para tener una lista de todas las que han salido y bueno, a ver qué hace ahora, sigamos con eso.

- F: Vosotras, vale, y vosotras también, vale. Siguiendo equipo, vosotras.
- A: Nosotras, 90.
- F: En total, 90. [Escribe 90 en la pizarra].
- A: 4 de 20 y 1 de 10.
- F: [Escribe $4 \times 20 + 1 \times 10$]. Vale, o sea que de momento han utilizado grupos de 20, grupos de 10, grupos de 9, ¿vale?



En esta escritura [señala lo que ha escrito en la pizarra] yo veo 3 grupos de 20, 3 grupos de 9, pero aquí [señala el 87] no veo un 3 y un 3. Yo aquí veo 4 grupos

de 20, 1 grupo de 10, pero aquí [señala el 90] no veo 4, 1. Con lo cual, parece que tampoco habíais encontrado vosotros un patrón entre cómo escribo la cantidad total con símbolos numéricos y visualmente qué veo en los palillos, ¿vale?

Comentario 3: Está tratando de conectar los problemas de la notación posicional y de los grupos que han hecho los alumnos.

De momento, la transcripción de lo que veo en los palillos simbólico-numéricamente la tengo aquí a la derecha [señala el $3 \times 20 + 3 \times 9$ y el $4 \times 20 + 1 \times 10$], pero no veo ninguna relación con esto [señala el 87 y el 90]. Yo aquí estoy haciendo trampa porque estoy metiendo operaciones, nosotros ahora no estamos con las operaciones, estamos solo con el número, con la escritura del número, eso es lo que estamos trabajando, ¿no? Pero para ayudar a ver esa conexión de los palillos hacia lo simbólico-numérico, pongo, escribo eso de transición para ir copiando lo que me decís, ¿no?, porque tardo más, tardo más en dibujar los palillos, las gomitas rosas, no sé qué, podría sacar la foto de la cámara y ponerlo rápido, ¿no?, pero..., bueno, lo escribo, lo transcribo así. Ahora, otro grupo. Vosotros dos ya estáis, que luego, luego... Ah, venga, ya que estamos aquí [dibuja una llave a la derecha de lo que ya ha escrito en la pizarra]. ¿A qué consenso... habéis llegado...?

A: Pues 7 grupos de 20...

F: Muy bien, 7 grupos de 20 [señala el 3 y el 4]. Han visto rápido y han dicho: «bien, los dos hemos agrupado, sin habernos copiado, en grupos de 20, con lo cual automáticamente tenemos 7 grupos de 20» [escribe 7×20].

A: Luego, ellos los 27 de 3×9 ...

F: Sí.

Comentario 4: Ahora va a explorar esa estrategia, esas agrupaciones que han hecho, a ver cómo de manejable es o si se puede sumar con ella, ¿no?, si se puede calcular qué tienen entre los dos grupos para tratar de que los alumnos se den cuenta de las ventajas que tiene pues ponernos de acuerdo en hacer siempre grupos de 10, ¿no?, que va a ser el final de la sesión, supongo.

A: ... los han dividido en 2 de 10 para que se junten con los nuestros de 10.

F: ¿Y por qué no habéis hecho vosotros... separar este de 10 [señala el 10 de 1×10] en 1 de 9 y 1 de 1?

- A: Porque se quedaría 1 solo y luego...
- F: Bueno, pobrecillo, ¿no? No pasa nada.
- A: Y porque es más fácil sumar de 10 en 10 que de 9 en 9.
- A: Para ponerle la goma a 1...
- F: Para ponerle la goma a 1... Bueno... Eso... Puede ser una justificación, pero tampoco muy potente... Me gusta más lo que ha dicho ella, o ella...
- A: Que es más fácil sumar de 10 en 10 que de 9 en 9.
- F: ¿Por qué será más fácil sumar de 10 en 10 que de 9 en 9 para nosotros? [Hablan varios alumnos a la vez]. ¿Por qué es más fácil sumar para nosotros de 10 en 10 y no de 9 en 9? [Hablan varios alumnos a la vez].

Comentario 5: Ahora está tratando, con la suma de 9 en 9 y de 10 en 10, que se den cuenta los alumnos de..., bueno, de cómo dependemos de la notación posicional. Y en mi experiencia..., la tenemos tan asumida la notación posicional que a los alumnos les cuesta darse cuenta y les está costando, como se ve en el vídeo, la docente está tratando de que se den cuenta y los alumnos creo que ni siquiera están entendiendo la pregunta en este momento.

Porque tenemos 10 dedos, por ejemplo, ¿no? Porque estamos más acostumbrados a 10, 20, 30, 40... [mueve las manos con los dedos estirados], ¿no?, como que nuestro sistema de numeración parece que...

- A: Porque en verdad solo sumas de 1 en 1 y luego le pones un 0, entonces...
- F: Solo sumas de 1 en 1, elabora eso. Estamos en clase de matemáticas, ¿qué es 1, 1...?
- A: Pues por ejemplo, si tienes 30, pues 1 más 1 más 1, 3, como es 10, pues le pones el 0 y ya tienes los 30.
- F: ¿3 qué?
- A: 3 grupos de 10.
- F: 3 grupos de 10, muy bien. 3 grupos de 10, vale. [Vuelve a la pizarra a terminar lo que empezó a escribir].

Comentario 6: Y sigue tratando de que descubran la suma en grupos de 10, que ya un alumno se está dando cuenta de la conexión con este tema.

- A: 3 de 20, 3 de 10 y 1 de 7.

F: [Escribe, después de 7×20 , 3 10]. 3 de 10, llegasteis a romper estos [señala 3×9] en 2 de 10 más 7 sueltos, ¿no? [escribe $2 \times 10 + 7$ encima de 3×9]. Y entonces estos dos [señala 2×10] con este [señala 1×10] 3 y 7 palillos ahí sueltos [escribe, después de $7 \times 20 + 3 \times 10$, 7×1], ¿vale? Ahora, la cantidad total, ¿cuánto es? [señala el 87 y el 90].

A: 177.

F: 1, 7, 7 [escribe 177 a la izquierda del 87 y del 90]. ¿Hay aquí 1, 7, 7 por algún lado? [señala el 7 de 7×20 , al 3 de 3×10 y al 7 de 7×1]. Este [señala el 7 de 7×1] parece que hay aquí, ¿no? Pero lo otro... no me cuadra mucho todavía... Vale, otros dos grupos.

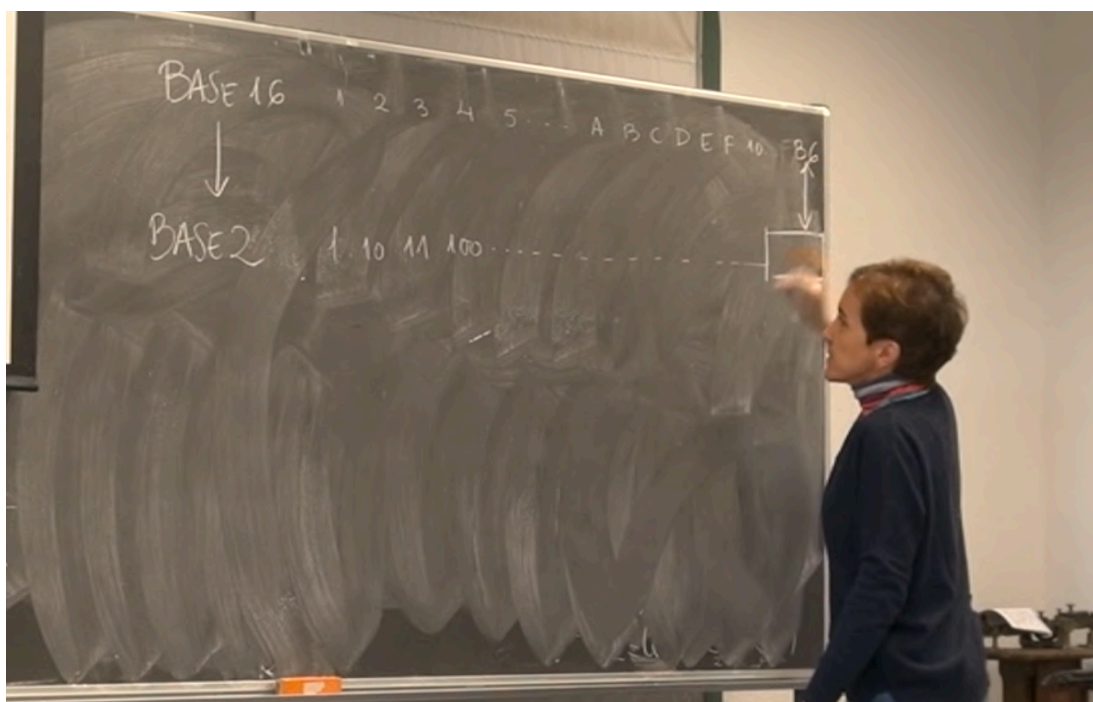


TRANSCRIPCIÓN DEL VÍDEO 2

[F = Formadora del vídeo]. [A = Alumnos]. [Comentarios de Daniel presentados en recuadros].

- F: Como me piden pasar de base 16 a base 2 directamente [escribe en la pizarra], pues Martín dice: «yo escribo aquí la secuencia 1, 2, 3, 4, 5..., A, B, C, D [dice 10, 11, 12, 13, señalando A, B, C, D], 14, 15 [escribiendo E, F], uno, cero [10]..., así hasta el B6», ¿vale? Y luego aquí en paralelo, voy uno [1], uno, cero [10], uno, uno [11], uno, cero, cero [100]..., hasta que pille aquí el que sea y ya está.

Comentario 1: Vale, está planteando el problema, bueno, han planteado ya el problema de hecho y está escribiendo la primera solución que parece que ha dado un alumno. El problema parece que es pasar directamente un número expresado en base 16 a un número en base 2 y ha expuesto, siguiendo la instrucción del alumno – sin juzgar tampoco –, una primera solución que es la fuerza bruta, digamos, de escribirlo todo en las dos bases y ver cuál..., contar en las dos bases, vamos.



No he pasado por base 10, que es lo que me dice Nuria. Con lo cual, superado.
¿Pero qué pasó?

- A: Que es muy largo.

- F: Que es muy largo. Y que hasta en su casa, teniendo semanas, ha dicho: «paso». Tenías tiempo suficiente, porque había tiempo suficiente en dos semanas a

hacerlo, pero... es largo y además un coñazo, con lo cual ha dicho: «paso». Con la idea Nuria ya se hace una idea de que lo he pensado, es un procedimiento válido, pero no ha sido eficaz, ¿vale?, entonces nosotros tenemos que seguir pensando porque tendremos que buscar alguna estrategia que sea eficaz. [Da la palabra a una alumna].

A: ¿Se podría hacer la división?

F: ¿Qué división?

A: La de B6 entre 2. Es que no sé cómo plantearlo.

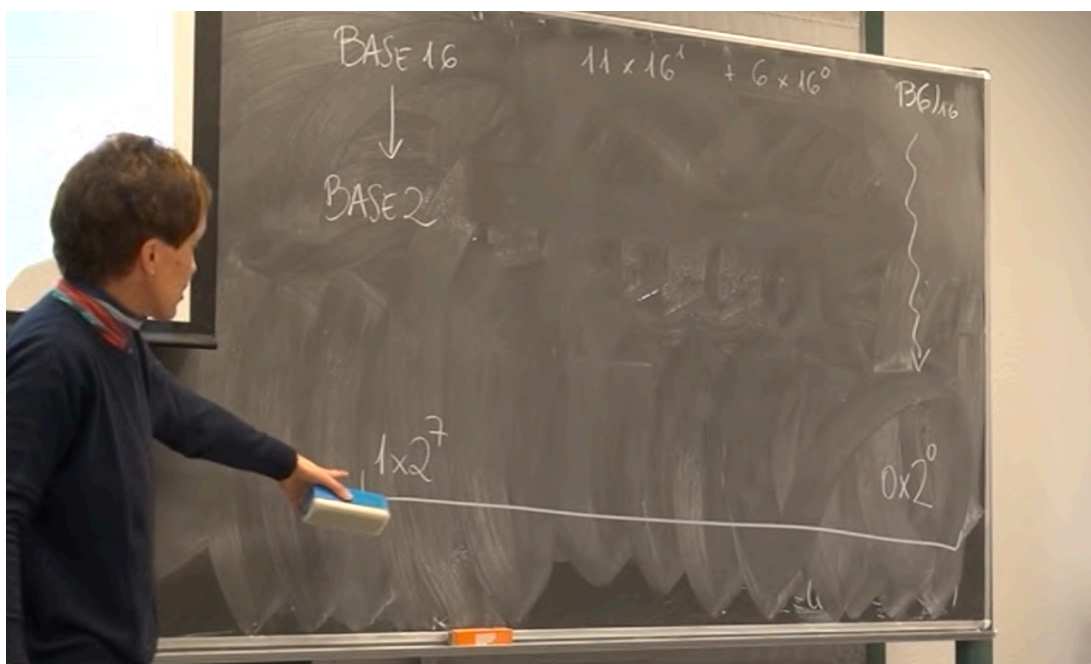
F: Ella dice: «oye, mira Nuria, cuando tú pasas de base 10 a base 2 haces grupos de 2 y divides de 2 en 2; pues ahora lo mismo, si estoy en B6 a base 2, divide entre 2». Pero aquí estoy escribiendo en base 16... [En la pizarra ha escrito B6 entre 2, con la caja]. Podríamos intentar hacerlo, pero... ¿sabemos hacerlo... o cómo va esto?

Comentario 2: Está explorado una alternativa que le da otro alumno, tratando de –sin decir en un primer momento si va a funcionar o no– que los alumnos sean los que digan si creen que puede funcionar o no.

¿O mentalmente para hacerlo me vais a pasar a base 10, y hacéis la división en base 10 –que es lo que sabéis hacer–, y luego otra vez volvemos y entonces hacemos trampa porque pasamos por base 10? Si sabéis dividir un número en base 16 entre 2, si sabéis hacer esta división en base 16 –yo lo tendría que pensar, ¿eh?, así a capón no lo sé hacer, pero si lo pienso...–, si sabéis hacer eso, valdría.



- F: Venga, vamos a poner el punto de partida, ¿no? El punto de partida es que tenemos 11×16^1 , ¿no?, más 6×16^0 . Este es mi B6 en base 16. Y yo quiero llegar aquí a... Me acuerdo de que empezaba en 1×2^7 y a acababa en 0×2^0 , ¿vale?

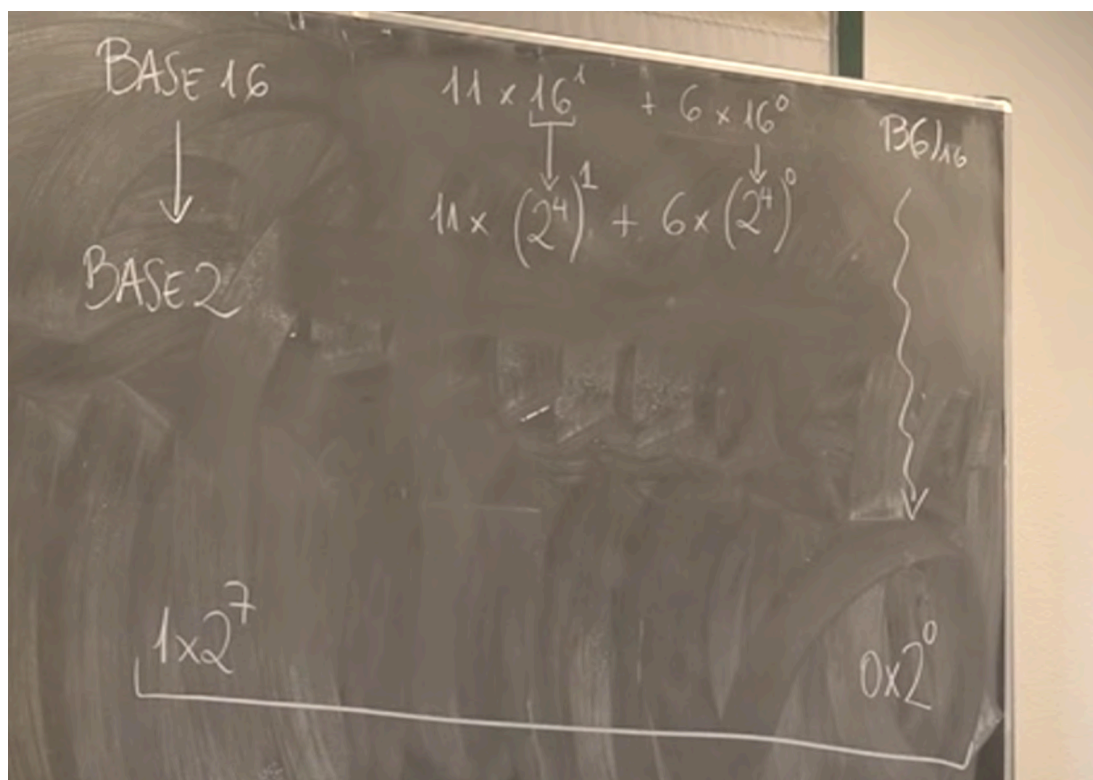


Entonces yo quiero pasar de ahí [señala la parte superior de la pizarra] a aquí [señala la parte inferior]. Si lo consigo, ya lo tengo en base 2, ¿no? Ya solo cojo los coeficientes de las potencias de 2 y ya lo tengo.

Comentario 4: Vale, ahora como un alumno dio una idea pues ha tratado de tirar del hilo un poco de esa idea para que..., facilitar un poco que los alumnos sigan, a ver si esto ha servido para que algún alumno vea por dónde van las cosas, ¿no? Ya ha quedado claro el comentario que decía antes [el propio Daniel], efectivamente interpretar en base 16 la expresión que ha puesto pues es una estrategia permitida para hacer el problema, claro, que es lo que suponía... Y veamos cómo sigue.

Entonces, Pablo dice: «cambia este 16», ¿no, Pablo?

- A: Sí.
- F: Este 16 ponlo como $(2^4)^1$ y este 16 ponlo como $(2^4)^0$. ¿Vale? Yo tengo una expresión polinomial en base 16, quiero llegar a una expresión polinomial en base 2, y él me dice: «yo veo claro el cambio, 16 es 2^4 , cada vez que veas un 16 ponlo como 2^4 ». Vale, y entonces resulta que aquí tengo 11 grupos de esto y aquí tengo 6 de estos. ¿El 11 y el 6... los puedo dejar?



- A: No, los pasas a base 2.
- F: Los paso a base 2. ¿Sé pasar 11 a base 2?
- A: Sí.
- F: Vale, vamos a escribir 11 en base 2.
- A: 1, 0, 1, 1.
- F: 1×2^3 , ¿no?
- A: Sí.
- F: Más...
- A: Cero.
- F: 0×2^2 . De momento llevo ocho. Más...
- A: Uno.
- F: 1×2^1 . Ya llevo 10...
- A: Más uno.
- F: Más 1×2^0 . Ahí ya tengo 11, ¿vale?

Comentario 5: Siguiendo la idea del alumno, traduciendo al alumno – que estaba dando la notación en binario –, la docente la traduce a la expresión en potencias de base 2, una expresión polinomial. Y bueno, haciendo un poco entre los dos..., supongo que rellenando las lagunas que a lo mejor la manipulación algebraica esta le cuesta al alumno..., le está ayudando a escribir más claro quizá en la pizarra algebraicamente lo que el alumno está

diciendo, la idea que el alumno está exponiendo.

Esta es una manera de escribir 11. ¿Cómo? Como potencias de 2. Expresión polinomial del 11 en base 2, como potencias de 2, ¿vale? Y esto va multiplicado... 2 elevado a la 4 y luego lo elevo a la 1, ¿cuánto me queda...? 2^4 es $2 \times 2 \times 2 \times 2$ y luego eso lo elevo a la 1, es decir, que lo copio una vez, o sea que me queda...

A: 2^4 .

F: 2^4 . Más... El 6, ¿lo dejo?

A: No.

F: No. ¿Cómo escribo 6 en base 2?

A: 1×2^2 .

F: 1×2^2 , que son 4.

A: 1×2^1 .

F: 1×2^1 ... Y 0×2^0 [lo va escribiendo todo en la pizarra]. Ahí pone 6, una manera más chula, ¿no?, de poner 6 como potencias de 2, ¿no?, como un polinomio con potencias de 2. Vale, y luego estaba por... Y ahora tengo $(2^4)^0$. ¿Eso qué es?

A: Uno.

F: Uno. ¿Y si lo quiero poner como potencias de 2?

A: 2^0 .

F: 2^0 , muy bien. 2^0 [lo escribe en la pizarra]. Mira qué contenta estoy, porque $2^0 \times 2^0$ es 2^0 y el coeficiente es 0, que es este. Y $2^4 \times 2^3$ es 2^7 y el coeficiente es 1, que es este. Pues como que ya casi lo tengo, ¿no? ¿Sí o no?

A: Sí...

Comentario 6: Sigue desarrollando la parte algebraica, que es lo que a los alumnos seguramente les cuesta, tratando de que los alumnos se vayan dando cuenta de lo que está pasando. Si tuviera que conjeturar, diría que los alumnos aquí con las cuentas se han perdido la mayoría y por eso les está costando a la mayoría de los alumnos seguir lo que está pasando. Y por eso la docente ahora interviene más, me parece, que hace un rato al principio del vídeo, ¿no?

BASE 16

↓

BASE 2

$$11 \times 16^1 + 6 \times 16^0$$

$$\downarrow$$

$$11 \times (2^4)^1 + 6 \times (2^4)^0$$

$$\downarrow$$

$$[1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0] \times 2^4 + [1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0] \times 2^0$$

$$\downarrow$$

$$1 \times 2^7$$

$$\downarrow$$

$$0 \times 2^0$$

$\boxed{1 \times 2^7 + 0 \times 2^0}$

F: Vale, y ahora... Venga, ¿cuál será el coeficiente...? Venga, vamos a poner aquí 2^6 , paso a la siguiente varilla del ábaco, ¿eh? ¿Cuál será el coeficiente de 2^6 ?

A: Cero.

F: Cero, porque ¿cómo consigo yo 2^6 ? $2^4 \times 2^2$, ¿no? 2^4 es $2 \times 2 \times 2 \times 2$, 2^2 es 2×2 , ya tengo ahí los seis doses, ¿vale?, que está aquí, y el coeficiente cero. ¿Por aquí puedo llegar a 2^6 ?

A: No.

F: No, pues ala. 0×2^6 . Genial, porque era lo que me había salido antes. Ahora, más... Siguiendo varilla del ábaco, 2^5 . ¿Dónde consigo yo 2^5 ? Aquí [señala el corchete de la derecha] como mucho llego a 2^2 , me olvido de esto. $2^4 \times 2^1$ [señalando el corchete de la izquierda] es 2^5 , ¿no?

A: Sí.

F: Vale, ¿y qué coeficiente lleva?

A: 1.

F: 1. ¿Y era el qué tenía que llevar?

A: Sí.

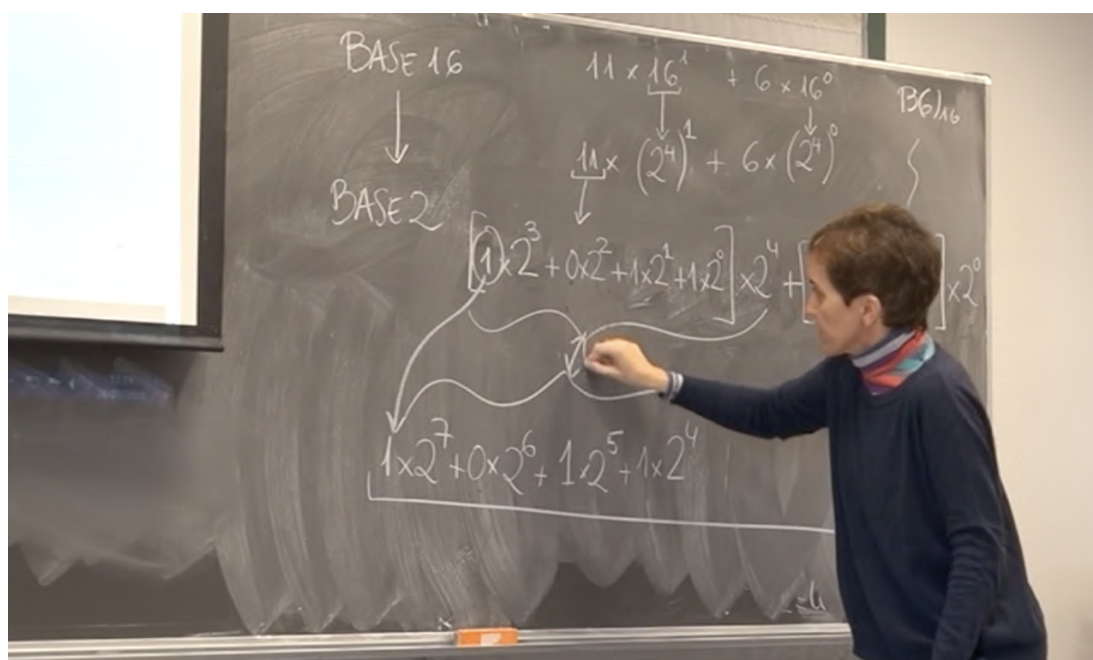
Comentario 7: Sigue haciendo la cuenta, haciendo el álgebra..., la aritmética, que no hay

letras, la aritmética, pero con un componente algebraico fuerte y creo que los alumnos, se oye siempre al mismo, o sea, los alumnos realmente..., no sé hasta qué punto están siguiendo..., y no sé hasta qué punto la docente está..., es consciente de ello o está ya resignada a que los alumnos..., bueno, pocos alumnos siguen esto pero ya hay que terminar el ejercicio, claro.

F: Sí, vamos bien. Y ahora, 2^4 , ¿cómo consigo 2^4 ?

A: Con 2^0 ...

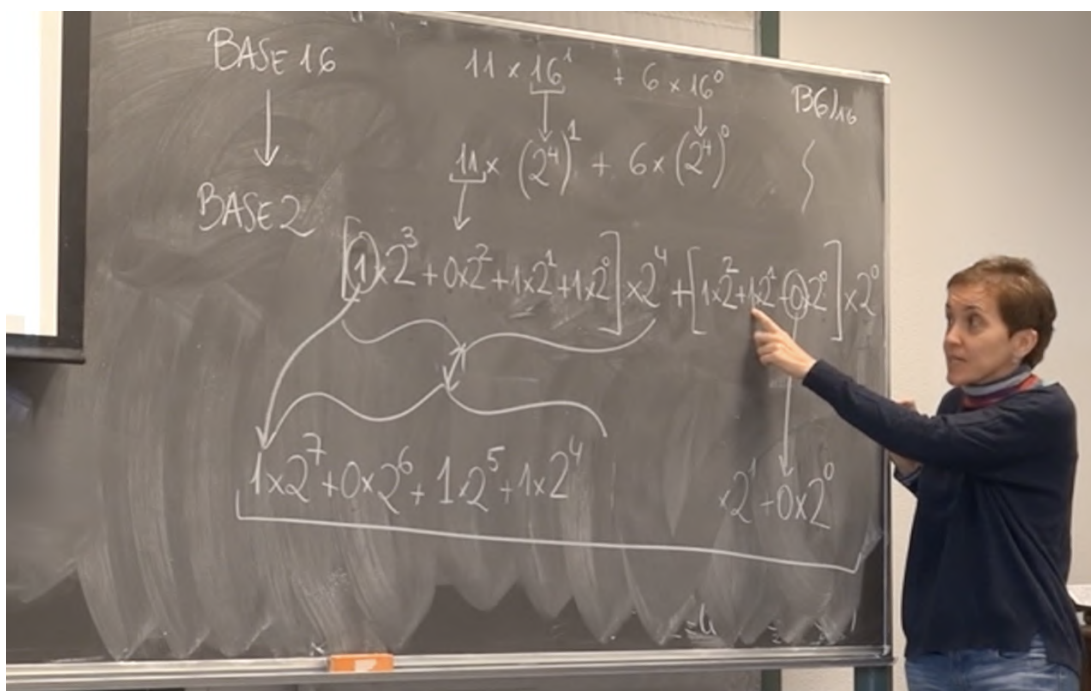
F: $2^4 \times 2^0$, ¿no? Tengo aquí cuatro copias del 2 y aquí ninguna, pues tengo cuatro copias del 2 multiplicándose por sí mismo, y el coeficiente 1. 1×2^4 [lo escribe en la pizarra]. Oye, mira, todo esto se ha convertido en esto. Lo veis, ¿no?



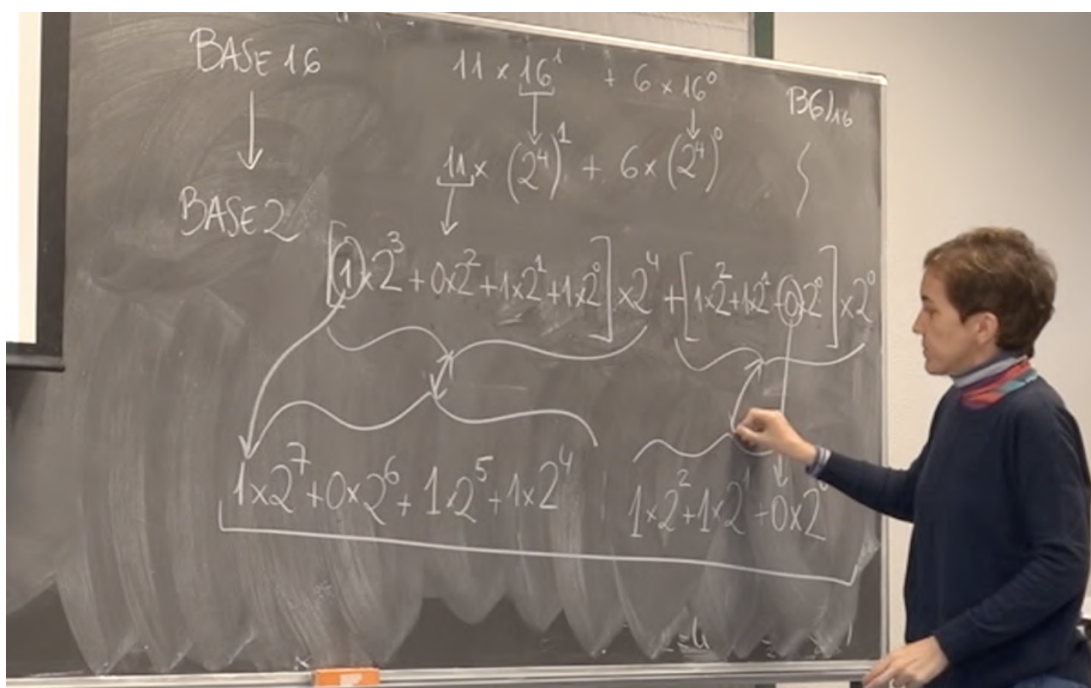
¿Qué es lo que he hecho? Propiedad distributiva. Voy multiplicando el 2^4 por cada uno de los sumandos, ¿vale? Muy bien. Y ahora, tiro por aquí, voy desde aquí [señala el 2^0 de la parte inferior derecha de la pizarra]. 2^0 , muy bien. Siguiendo varilla del ábaco, 2^1 . ¿Qué coeficiente tiene 2^1 ?

A: 1.

F: 1, que está aquí [lo señala], ¿vale?



Porque sería $2^1 \times 2^0$, que es 2^1 , y lleva un 1 delante, un 1 [lo escribe abajo]. Voy bien. Y ahora, $2^0 \times 2^2$, 2^2 [lo escribe abajo], va con un 1 [lo escribe abajo]. O sea que esto que tengo aquí se convierte en esto que tengo aquí.



Y ahora, Pablo, ¿qué te pasó?

A: Que como... Que claro, los iba a juntar, pero dije: «me falta el 2^3 ».

F: Me falta el 2^3 . Pablo dice: «varilla del ábaco del 2^7 , 2^6 , 2^5 , 2^4 , ¡uy!

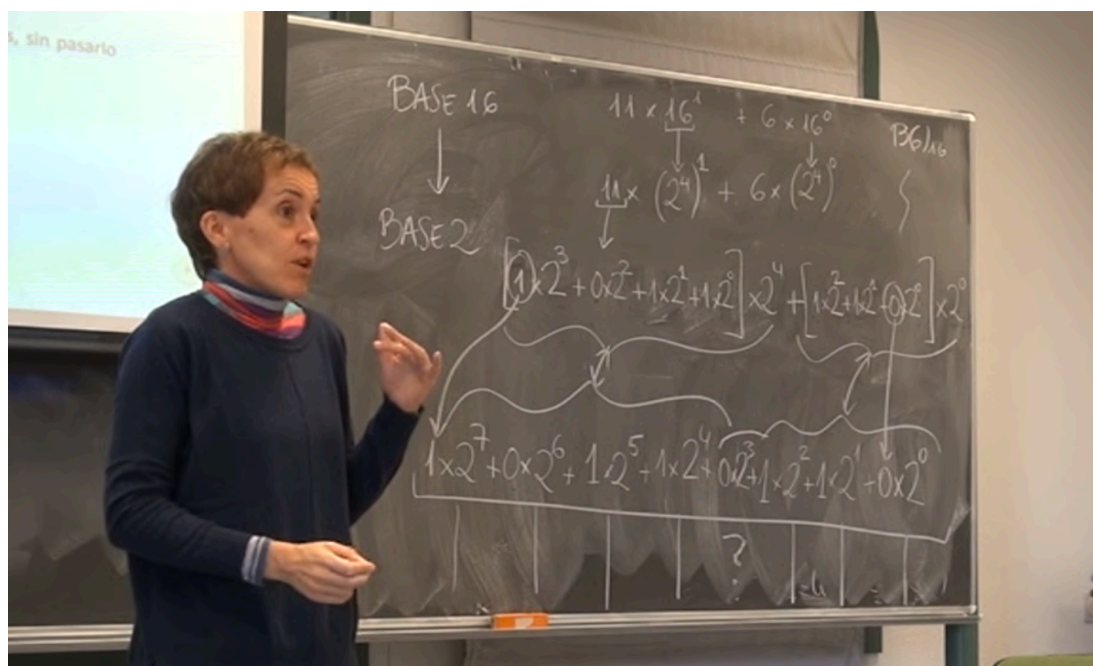
Comentario 8: Vuelve a preguntar al alumno, Pablo, que es el que presentó la solución, para tratar de que interprete la expresión que tiene ahí, y si tiene algún problema el

alumno con el 2^3 , tratar de que le diga cuál es el problema o si ha sabido el alumno resolverlo, ¿no?

$2^2, 2^1, 2^0$. «¡Uy!», dice Pablo [y dibuja una interrogación en la posición del 2^3].

A: Pues si no hay, un cero.

F: Pues se pone el 0, ya está. Lo pongo aquí: «+ 0×2^3 », y esto lo englobo aquí.



¿Qué es lo que pasa? Que escribo el 6 de una forma muy especial. Yo escribo el 6..., acordaos que esto era mi 6 [señala $1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0$], ¿eh?, esto era el 6, que es este 6 [señala el de un nivel anterior, más arriba en la pizarra], ¿vale? Yo he escrito el 6 como $1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0$, pero también puedo escribir el 6... $0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0$. No es lo estándar, porque como los ceros ahí no aportan mucho, pues no es lo estándar, pero si no me quiero olvidar de una de las varillas y no quiero tener un problema, como tenía Pablo, pues yo añado ahí para escribir el 6 de otra forma, ¿vale? Entonces, moraleja que cuentan los *youtubers*, por ejemplo David Calle, dice: «vamos a pasar de base 16 a base 2, ¿qué se hace chavales? Mirad, ¿veis este 11 que está aquí? [señala el de arriba de la pizarra], pues escribís este 11 en base 2: 1, 0, 1, 1 [señala los coeficientes de la expresión polinómica de la parte inferior de la pizarra]; ¿veis este 6 que está aquí? [señala el de arriba de la pizarra], pues lo escribís en base 2, pero cuidadín chavales, que hay que poner cuatro, ¿por qué?, porque 16 es 2^4 ». Y entonces dice:

«vamos a escribir 6 en base 2 con cuatro: 0, 1, 1, 0». Y dice: «y ahora lo juntáis, fin».

Comentario 9: Ahora está interpretando la receta que existirá, claro, para el que hace esto, de cómo pasar de base 16 a base 2 en términos de la cuenta que han hecho en la pizarra, para explicar a los alumnos de dónde viene esa receta que..., bueno, no sé cómo de conocida es, claro, este problema ya es bastante más específico que... el que a lo mejor está en YouTube con el famoso David Calle, no sé.

A mí no me vale porque yo no soy David Calle, yo no estoy de *youtuber*, *influencer*, superfamosa ayudando a los chavales a aprobar exámenes, que es un trabajo muy digno y que está bien, y además el tío es un *crack*, muy suelto, lo hace muy bien; yo estoy formando maestros, entonces tenéis que entender cómo hemos pasado de aquí [señala la parte superior de la pizarra] a aquí [señala la parte inferior de la pizarra] a través de esto [señala la parte media de la pizarra]. Entonces, la pregunta es: ¿se puede pasar de base 16 a base 2 sin pasar por base 10? Sí. Lo acabamos de hacer, ¿no? Es que me miráis con una cara... ¿Y por qué se puede?

Comentario 10: Bueno, ahora la docente está tratando de que los alumnos entiendan la diferencia entre lo que es una receta, que aplican mecánicamente, y lo que es entender de dónde viene esa receta, que es un trabajo muy complicado e importante a la vez.

¿Qué pasa si yo esto [el ejercicio] os lo doy en base 15 y, en vez de en base 16, todo el problema es en base 15?

A: Que sería $2^4 + 2^0$.

F: ¿ $2^4 + 2^0$ es 15?

A: O sea, no..., perdón. $2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0$.

F: Vale, y entonces tendría que ir haciendo todas las distributivas, todo el follón, ahí. ¿Y David Calle me podría dar el algoritmo...? Escribes, imaginaos el mismo número, ¿eh?, B6, en vez de en base 16, en base 15. ¿David Calle me puede decir...? Aquí tengo el 15, ¿no?, aquí tengo el 15 [los escribe encima de los 16], y David Calle me dice: «escribe esto [señala el 11] en base 2, escribe esto [señala el 6] en base 2, con tres y medio dígitos o cuatro dígitos o... tres dígitos, y lo pones junto. ¿Valdría ese algoritmo?

A: No.

Comentario 11: Y ahora está tratando de que se den cuenta de uno de los valores más importantes de entender qué es lo que se está haciendo, cuando hay un caso diferente, pues si se puede aplicar o no, ¿no? Lo que han hecho en base 16, ¿se puede traducir a base 15? Pues cuando entiendes lo que has hecho, te puedes dar cuenta de que no se puede; si solo conoces la receta, pues es muy posible que lo apliques mal, que es un error común.

F: No. ¿Vale? O sea, que poder se puede pasar, vas con paciencia escribiendo cada una de las expresiones que aparecen, pero un paso directo solo se puede cuando una base es potencia de la otra base, que es lo que hemos visto con 16, que es potencia de 2, que es 2^4 . ¿Está claro hasta aquí? ¿Sí?

Comentario 12: La docente trata de dar la oportunidad de que surjan preguntas al comprobar si está claro o no. Sin ver a los alumnos es difícil juzgar, claro, si las hay o no.

TRANSCRIPCIÓN DEL VÍDEO 3

Fragmento 1

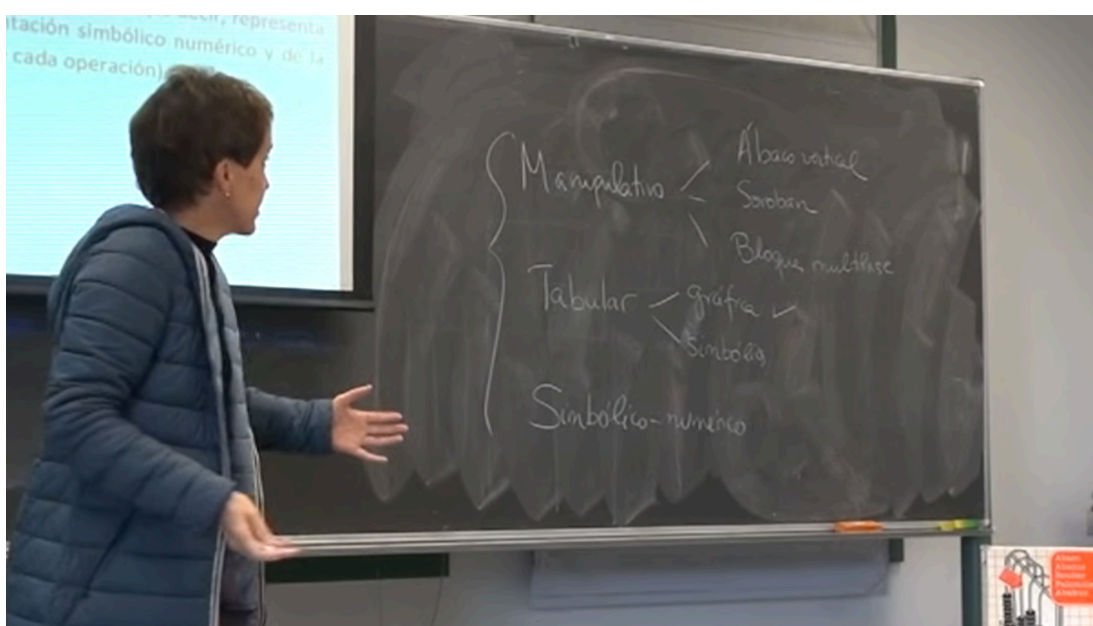
[F = Formadora del vídeo]. [Comentarios de Daniel presentados en recuadros].

- F: Entonces, la idea es..., el ejercicio 4, que está proyectado en la pantalla, es el ejercicio 4 de la última hoja, de la hoja del dossier 2, con el que vamos a trabajar ya esta semana, ¿vale? En ese ejercicio hay cuatro operaciones, cuatro problemas, cuatro operaciones. Tenéis que hacer las cuatro operaciones..., representarlas de distintas maneras. Voy a poner en la pizarra de cuántas maneras, ¿vale? Entonces, acordaos que nosotros estamos trabajando con material manipulativo [escribe en la pizarra «Manipulativo»], ¿vale? Entonces, en primer lugar tenéis que representar esta suma $[210 + 543]$, esta suma $[315 + 429]$, esta resta $[135 - 24]$ y esta resta $[704 - 45]$, por partes [va señalando en el PDF proyectado en la pantalla], ¿no?, empezáis con la primera... Tenéis que representarlo [escribe en la pizarra] con ábaco vertical, después en el sorobán y después con los multibase, ¿vale? Y tenéis que tener las tres representaciones del proceso delante para saber comparar cada dos, ¿vale?, para saber entender cómo se traduce una en otra. Lo que no quiero es que me digáis: « $210 + 543$ son 753; Nuria, te he representado 743* en el ábaco vertical, en el sorobán y en los bloques multibase». No quiero la representación del resultado, quiero la representación del proceso, de la suma, de la idea «suma».

Comentario 1: La docente está planteando la actividad para que quede claro lo que se quiere, porque cuesta que entiendan que no quiero el resultado, quiero que me expliquen, que me representen en este caso con los materiales el proceso, es algo que a los alumnos les cuesta entender y, por tanto, está prestando especial atención a clarificar eso, que quiere que se centren en eso, no en el resultado.

¿En qué os tenéis que basar?, en la definición de la suma que vimos el otro día, ¿no?, que es: elijo un representante de uno, elijo un representante del otro y hago la unión, agrupo, junto, como lo queráis pensar, ¿vale? Entonces, hay que representar el proceso, el proceso, no solo el resultado final de ese proceso. Entonces, tenéis que representar el proceso de tres maneras en el sistema de representación manipulativo [señala lo que ha escrito antes en la pizarra], ¿vale?

Y en paralelo [empieza a escribir en la pizarra] tenéis que representar el proceso en el sistema de representación simbólico-numérico; el enunciado está dado en ese sistema de representación, ¿vale?, esto es sistema de representación simbólico-numérico, pues tenéis que representar el proceso, las dos sumas y las dos restas, en ese sistema, ¿vale? Y luego, en medio [escribe en la pizarra], hay una representación que es formato tabla o tabular, de la que no he hablado explícitamente, pero que me gustaría que construyerais vosotros, ¿vale? Necesito que construyáis, por ejemplo, esta suma [señala $210 + 543$], que la hagáis en tabla, con una tabla, como se os ocurra a vosotros diseñar la tabla, ¿vale? La tabla [escribe en la pizarra] puede ser más gráfica, puede tener características gráficas, o puede tener características más simbólicas; a mí me va a interesar más la que tenga características más gráficas, luego ya veremos en detalle cómo, pero tenéis que intentar construirlo vosotros sin que yo os haya hablado de eso explícitamente, ¿vale?



Entonces, paso 1, aquí [señala la parte de representación manipulativa de la pizarra], en paralelo paso 2, simbólico-numérico [lo señala en la pizarra] y luego ya, según vayáis trabajando los cuatro ejemplos, igual ya se os va ocurriendo cómo representarlo con una tabla y cómo trabajar con una tabla ese tipo de operaciones.

Comentario 2: Pues ha seguido explicando la actividad, de manera más completa que

antes, con los tres niveles de representación que quiere, incluyendo uno que no han trabajado previamente... Eh... Sigamos.

¿Está claro? Yo me voy a pasar por las mesas y me vais preguntando todas las dudas que os surjan. No voy a pedir que me mandéis nada, ¿vale?, porque todavía no he revisado las últimas fotos que me habéis mandado, con lo cual estoy un poco desbordada; como no sois muchos, yo voy por vuestros puestos. Ahora bien, en el grupo anterior han decidido grabar pequeños vídeos o hacer fotos de los procesos que iban construyendo por llevárselo como material para estudiar, a mí me parece una buena idea, pero ya vosotros hacéis lo que queráis, a mí no me lo tenéis que mandar, pero si queréis, una vez que hayáis construido, por ejemplo, con el ábaco japonés, imaginaos, esta resta de aquí [señala el PDF en la pantalla], y decís: «ah, pues nos vamos a grabar», uno lo hace otro lo graba y lo tenéis de recuerdo, ¿no?, para cuando tengáis que estudiar. ¿Cómo voy a pedir yo eso en el examen? Pues no lo puedo pedir porque no puedo llevar un sorobán para cada uno porque tengo un día, 2 horas y media o 3, para haceros el examen final de la asignatura; pero para mí esto es muy importante, entonces yo voy a pedir que me representéis gráficamente, gráficamente, vuestro proceso de respuesta con un ábaco vertical, con un sorobán o con los bloques multibase, que es lo que yo luego voy a hacer aquí en la sesión final de discusión cuando acabemos esta hora de clase.

Comentario 3: Bueno, sigue tratando de describir y de avisar a los alumnos de que, aunque esto no se pueda evaluar, por la dificultad que comenta..., no se pueda evaluar directamente tal y como lo van a hacer aquí, sí va a encontrar una manera de evaluarlo para que el alumno pues esté más motivado también con el tema de la evaluación en esta clase práctica.

Yo no voy a coger el ábaco aquí, lo voy a poner delante de todos y tal —podría hacerlo, pero no lo voy a hacer—, lo voy a hacer representando gráficamente el material manipulativo y así es como lo voy a pedir el día del examen, porque os voy a dar un cuadernillo y lo tenéis que hacer gráfico, ¿vale? Bueno, pues empezad, están escritas en un orden muy concreto, empezad a hacerlas en ese orden y luego ya discutimos sobre por qué están puestas en ese orden, ¿vale?

Fragmento 2

[F = Formadora del vídeo]. [A = Alumnos (A1, A2 y A3)]. [Comentarios de Daniel presentados en recuadros].

- A1: Estamos rayados con la última resta.
 F: Vale, a ver, empezad.
 A1: Son 704 - 45.
 F: Vale.
 A1: Entonces, aquí no le podemos restar 5.



- F: Así tal cual está, puedes restar..., ¿cuántas puedes quitar?
 A1: Cuatro.
 F: Cuatro, vale, sí.
 A1: Entonces voy a suponer que aquí [señala la varilla de las decenas] hay un 1.
 A2: No, que hay 10.
 A1: Que hay 10, para que sea 14...

Comentario 1: Ahora está pidiendo que la alumna le cuente lo que está haciendo, para detectar la dificultad. Ha detectado la dificultad y ahora va a tratar de intervenir para que la alumna..., los alumnos, el grupo, traten de resolver la actividad por ellos mismos, la dificultad, quiero decir, a ver.

F: A ver, olvídate de los «suponer». Tú dices: «tengo que quitar 5», ¿no?, quito 1, quito 2, quito 3, quito 4 [quita cuentas de la varilla de las unidades] y ahora ponme aquí más para que yo quite, tal y como está.



A1: Habría que poner 10 y quitamos 1.

F: Pero ¿cómo me ponéis..., cómo me ponéis ahí? A ver Pablo.

A2: ¿Que lo ponga?

F: No, no, que me digas... Yo aquí [señala la varilla de las centenas] tengo ahora mismo 700, ¿no? Escribe 700 de otra forma para que yo tenga bolas...

A1: Aaaaah, hay que añadir una aquí [señala la varilla de las decenas].

F: Venga, a ver.

A2: [El alumno A2 quita una cuenta de la varilla de las centenas y la pone en la de las decenas].

F: ¿Aquí sigue poniendo 700?

A1: No, no, no, hay que poner una nueva aquí [vuelve a poner la cuenta en la varilla de las centenas —la que había puesto en la varilla de las decenas el alumno A2— y pone una nueva en la varilla de las decenas].

Comentario 2: La docente está siguiendo las instrucciones que le dan para ver si funciona o no, tratando de que los alumnos se den cuenta de la dificultad del ábaco. Me está quedando muy claro en el vídeo que el ábaco es menos didáctico que los bloques de base 10, pero eso quizá no viene a cuento, pero no me resisto a no decirlo.

- F: A ver [quita la cuenta de la varilla de las decenas]. Teníamos 704, hemos quitado 4, tengo 700, ¿vale?
- A1: Sí.
- F: Ahora, escribe 700 de otra forma para poder quitar otra.
- A1: Pues...
- F: ¿Cómo podéis escribir 700 de otra forma?
- A1: Que aquí [señala la varilla de las decenas] haya 9...
- F: Venga.
- A1: Y aquí [señala la varilla de las unidades]..., 9.
- F: A ver, para que haya aquíiiii... [señala la varilla de las decenas], vamos a ver, ¿cómo consigo aquí decenas? Sin cambiar el número...
- A1: Si quito esta... [quita una cuenta de la varilla de las centenas].



- F: Venga, muy bien.
- A1: Pongo aquí 10 [señala la varilla de las decenas].
- F: Venga, dale.

Comentario 3: Ha tratado de que la alumna se dé cuenta del cambio de centenas a decenas. El alumno todavía no se da cuenta, por la cara que veo. Y están tratando la dificultad de agrupar centenas y decenas en el ábaco.

- A1: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10.
- A3: ¡Ah, vale!



F: ¿Ahora aquí pone 700?

A1: Sí.

F: ¿Y cómo está escrito 700?

A3: Mal.

F: 6×10^2 , ¿no?, 6×100 , más...

A2: 10×10^1 .

F: 10×10^1 , muy bien. Ahora, ¿puedo quitar aquí [señala la varilla de las unidades] que quería quitar una? ¿Tengo?

A1: No.

F: No, ¿cómo puedo volver a escribir 700 para tener aquí [varilla de las unidades]?

A1: Pues quito de estas [quita una cuenta de la varilla de las decenas] y añado 10 aquí [señala la varilla de las unidades].

F: Vale, venga.

Comentario 4: Ahora ha seguido tratando de guiar lo mínimo posible a que la alumna viera cómo repetir esto con las decenas y las unidades y consiguiendo que los alumnos entiendan el procedimiento.



- F: Vale, ¿y ahora puedes quitar la que te faltaba por quitar?
- A1: [La estudiante A1 quita una cuenta de la varilla de las unidades].
- F: Ya está. Ya habéis quitado 5 y teníais que quitar 45, ¿no? ¿Cuánto os falta por quitar?
- A1: Sí, ahora aquí [señala la varilla de las decenas] hay que quitar 4.
- F: Pues ya está, ¿no?
- A1: Ah, vale, vale. Gracias.



- F: ¿Entonces qué habéis hecho para reescribir el 700...? O sea, yo tenía 700 ahí, tenía aquí 700 [deja el ábaco con 7 cuentas en la varilla de las centenas], ¿qué habéis hecho?

A2: Como es sistema decimal, pues aquí [señala la varilla de las decenas] hay 10, porque... representamos un 0, pues quitar una de aquí [varilla de las centenas] y ponerle las 10 aquí [varilla de las decenas] para luego restarlas aquí [varilla de las unidades].

F: O sea que habéis..., ¿agrupado o desagrupado?

A1: Desagrupado.

A2: Aquí desagrupado.

F: Desagrupado.

Comentario 5: Ahora está tratando de que los alumnos analicen lo que han hecho para formalizarlo un poco más, para entender globalmente lo que han hecho, para darle sentido al procedimiento.

Habéis desagrupado una centena en 10 decenas y luego una decena la habéis desagrupado en 10 unidades.

A1: Vale, es que cuando tú lo haces en papel no haces esto así.

F: Ah, pues dime entonces qué es lo que haces en papel.

A1: Claro, lo haces muy mental. O sea, en verdad sí que haces eso, pero... bueno, ya me has entendido.

Comentario 6: La docente está preguntando..., bueno, la alumna ha tomado la iniciativa, diciendo que eso no es lo que hace en papel, ¿no?, y la docente está tratando de que la alumna piense en la relación que hay entre lo que han hecho con el ábaco y lo que..., el algoritmo tradicional, que no sabemos cuál es –a ver si ahora lo dicen–, cuál es la versión del tradicional o qué algoritmo de la resta usa la alumna, ¿no?, o en cuál está pensando.

F: No, no, pero lo tienes que explicar porque luego os he pedido que lo hagáis simbólico...

A1: Ya, ya, ya.

F: Entonces, simbólico tienes que explicarlo conectado con esto.

A1: Vale, vale.

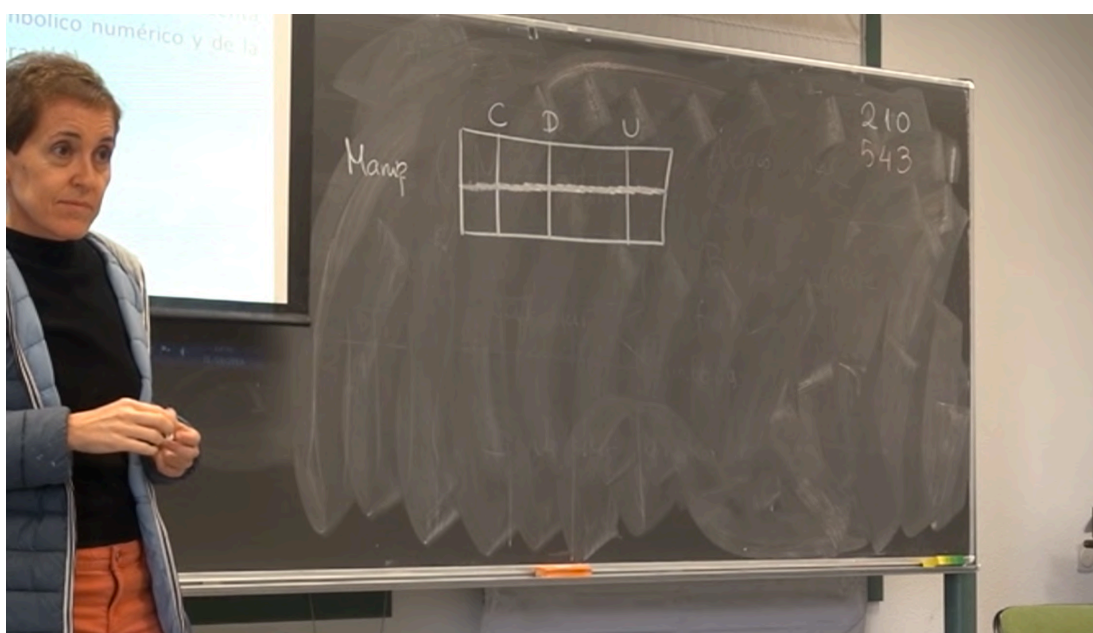
Fragmento 3

[F = Formadora del vídeo]. [A = Alumnos]. [Comentarios de Daniel presentados en recuadros].

F: Vamos a corregir uno, el primero, ¿vale? Me dan $210 + 543$, ¿vale?, con símbolos. Voy a representarlo..., vamos a empezar con manipulativo y voy a ejemplificar con el sorobán, que es el que parece que más trabajo cuesta, ¿vale? Entonces, en el sorobán, cuando lo representéis gráficamente el día del examen, o ahora en vuestro cuaderno si tenéis que tomar notas, es muy importante marcar la barra del medio, porque la proximidad de las bolas a la barra del medio es la que te indica qué número está representando, ¿vale? Y ahora, dado el problema que me han planteado, ¿cuántas varillas pensáis que necesito escribir?

A: Tres.

F: ¿Tres varillas? Pongo una varilla, dos varillas, tres varillas. Esta, unidades, decenas, centenas. Esta la pongo un poco más gorda para que se note que es la barra de madera del medio, ¿vale? Y ahora, ¿cómo dibujo 210?



A: Pues 0 unidades.

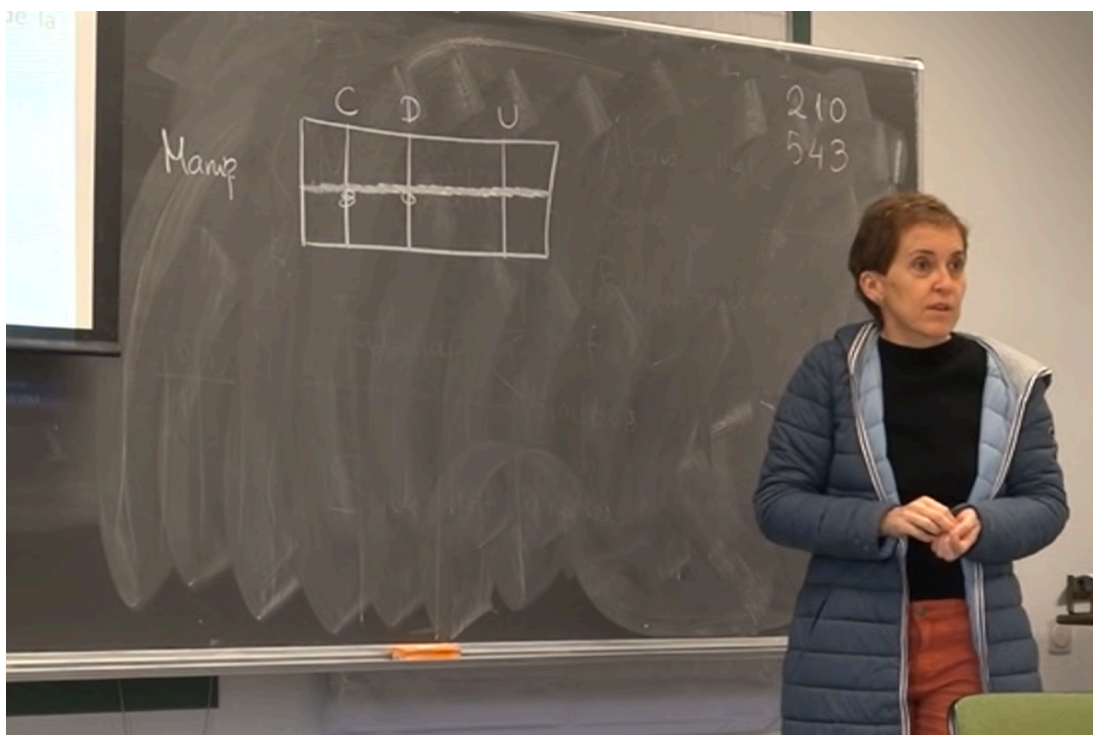
F: 0, o sea que aquí no pongo nada pegado a la barra, ¿no? [señala la varilla de las unidades]. ¿Aquí? [señala la varilla de las decenas].

A: 1 decena.

F: Una pegada a la barra, ¿arriba o abajo?

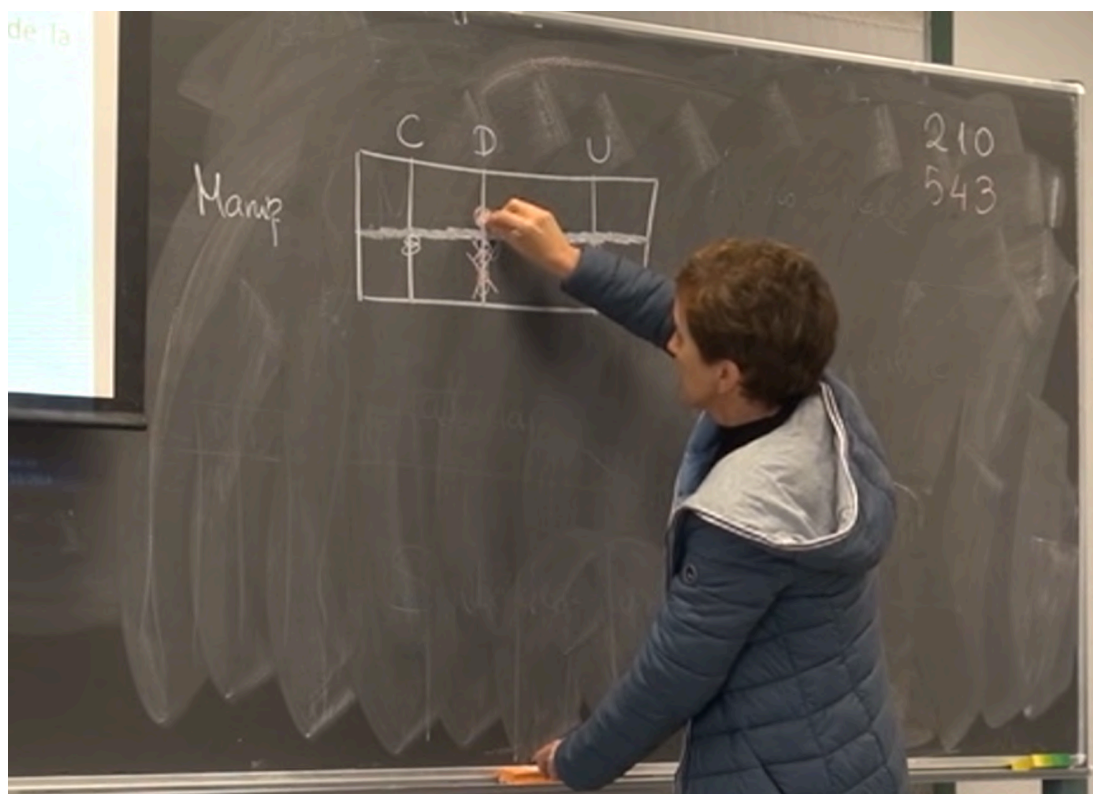
A: Abajo.

- F: Abajo, o sea que aquí va una.
- A: Y 2 centenas pegadas a la barra de abajo.
- F: Pegadas a la barra, abajo. Una y dos, ahí está. Eso es 210.



Y ahora, tengo que sumar 543, es decir, que tengo que añadir 543 unidades ahí. Aprovecho la estructura, ¿vale? Entonces, añado 3 unidades, en la varilla de las unidades, que son 3 aquí abajo, ¿no?, 1, 2 y 3 [las dibuja en la varilla de las unidades]. Después añado 4 decenas, en la varilla... 1, 2, 3, 4, ¿vale? [las dibuja en la varilla de las decenas], 4 decenas.

- A: Pero cambiamos...
- F: Pero...
- A: Bajamos una de arriba y quitamos las de abajo.
- F: Porque no tenéis 4, ¿vale?, ya no había suficientes, ¿por qué?, porque las bolas de arriba valen 5, entonces decís: «no pasa nada, estas, como eran 4 y 1, 5, se representan ahí arriba», ¿vale?



Y luego, 5..., tengo que añadir 5 centenas, ¿cómo lo hago?

A: Pues 1 arriba.

F: Una de arriba la bajo directamente o podría ir: «1, 2, 3, ya tengo 5, las subo ahí, 4, 5» [va señalando en la varilla de las centenas], ¿vale? Puedo hacerlo de dos formas distintas. Pero si aprovecho la estructura del ábaco, de manera que las bolas de arriba valen 5, como tengo que añadir 5, pues directamente ya añado ahí esas 5

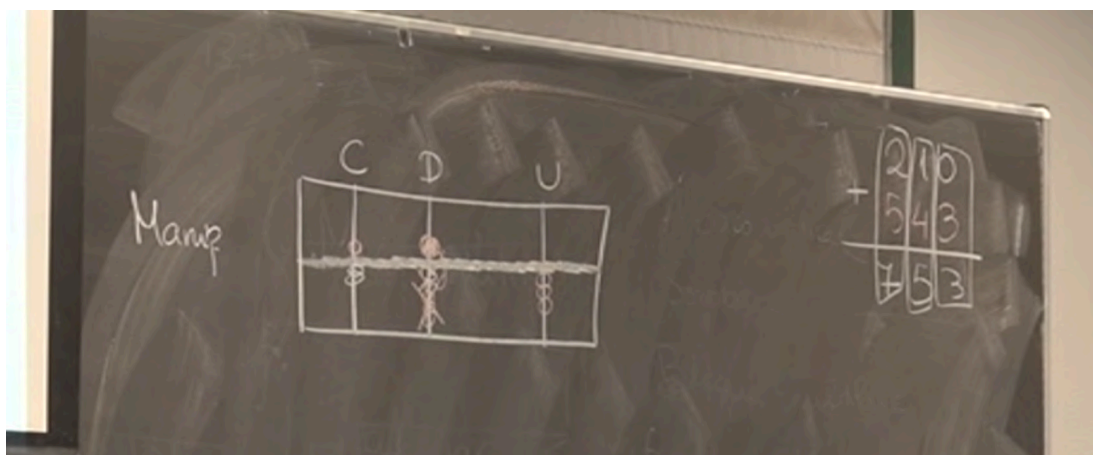
Comentario 1: La docente está traduciendo la suma en el sorobán. Estoy más callado porque el sorobán no me parece adecuado para entender lo que está pasando. Hace una suma en la que no hay agrupamientos, en el sorobán sí, claro, entonces es un ejercicio más del manejo del sorobán que del algoritmo de la suma, me parece.

[dibuja una bola en la varilla de las centenas, en la parte superior, pegada a la barra horizontal], ¿vale?

Entonces, [representa ahora el resultado en la suma con el algoritmo tradicional de forma simbólico-numérica a partir de lo que ha obtenido en la representación con el sorobán] me quedan 5 y 2, 7, aquí me quedan 5, y aquí me quedaban 3. Entonces, si yo lo represento así y voy sumando por columnas, tal cual he ido haciendo en el ábaco, tengo 0 unidades y 3 unidades, 3 unidades, 1 unidad y

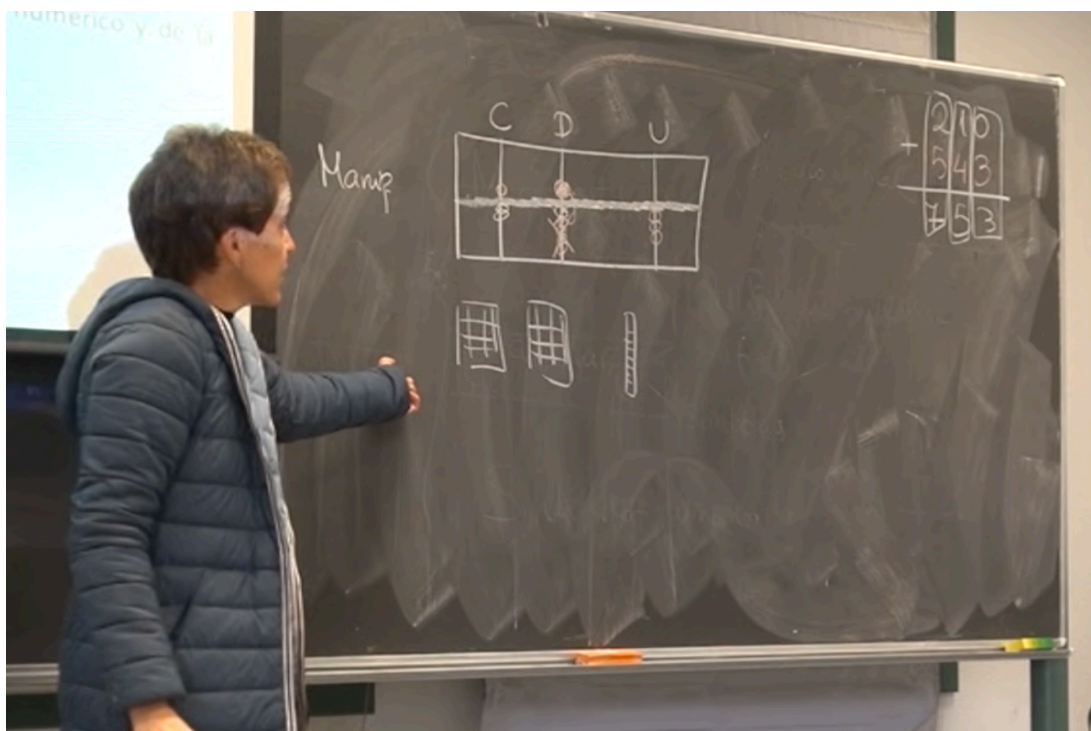
4 unidades, 5 unidades, perdón, decenas, 2 centenas y 5 centenas, 7 centenas. Vertical, lo he colocado vertical por parecerme a la estructura del ábaco, ¿no?, para tener en cuenta la «posicionalidad», ¿vale?, del sistema.

Comentario 2: La docente ahora trata de escribir, de conectar el algoritmo en columna, en vertical, el tradicional..., con la representación del ábaco para conectar esas dos representaciones.



Entonces, he traducido al simbólico lo que he hecho aquí manipulativamente al escribir en simbólico en columnas y represento con cada columna cada una de estas [señala las varillas del sorobán de la pizarra]. Y luego, la escritura, sí que tengo que tener en cuenta que estos son 5 [señala las decenas de la suma en simbólico] con lo cual van arriba [en el sorobán] y esto son 7 [señala las centenas de la suma en simbólico], pues son 5 y 2 [en el sorobán], ¿vale?

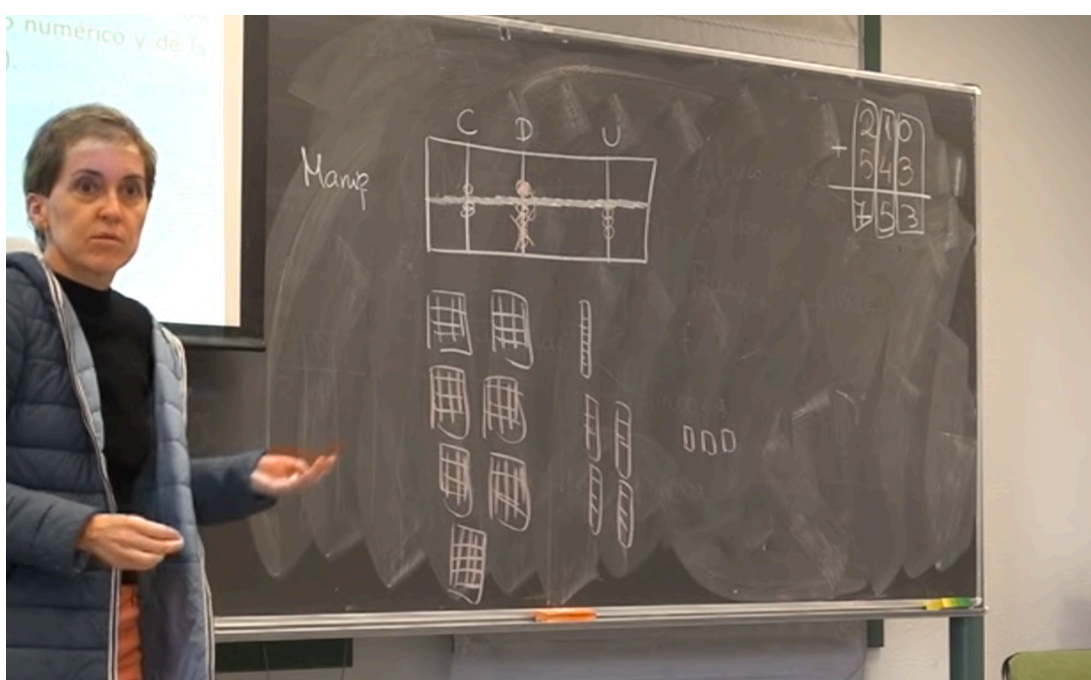
Bloques multibase, bloques multibase, pongo aquí 210, ¿no?, que son 1 y 2 placas de 100 y 10, una decena; este es el 210.



Y ahora agrupo 543; una, dos, tres, cuatro y cinco [dibuja 5 placas de 100 unidades], añado, ¿vale?, 500. 40: una, dos, tres, cuatro [barras de 10]; y 3: uno, dos y tres [unidades].

Comentario 3: Ahora está representando con bloques de base 10... Eh... Está dando menos margen a que participen los alumnos, seguramente porque el ejercicio es demasiado sencillo para que los alumnos tengan algo que decir.

Y ahora lo pongo todo junto. ¿Vale?



Y digo: «aquí tengo 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 [placas de 100]», ¿necesito agrupar? [Rodea con una línea todas las placas de 100].

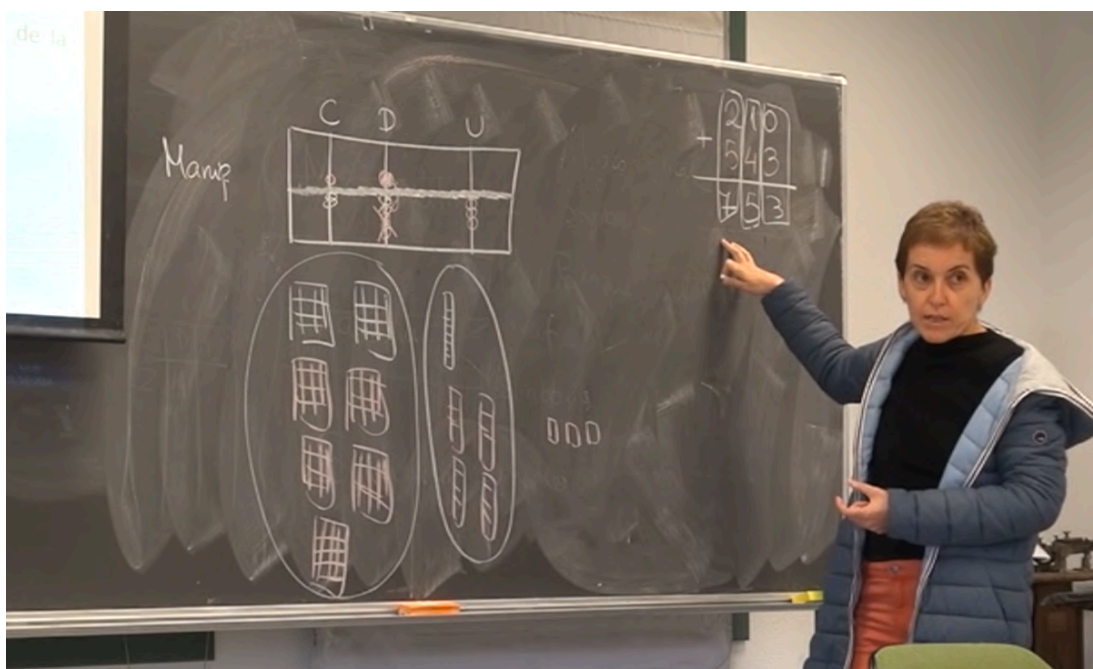
A: No.

F: No necesito agrupar. Aquí tengo 1, 2, 3, 4, 5, 6, 5, ¿necesito agrupar estos 5 de alguna manera? [Rodea con una línea todas las barras de 10]. No porque es base 10. Y aquí tengo 3, ¿vale? O sea, que me vuelve a salir 2, 4, 6, 7 [centenas; señala la suma en simbólico], 2, 4, 5 [decenas], 5 [señala la suma en simbólico] y 3.

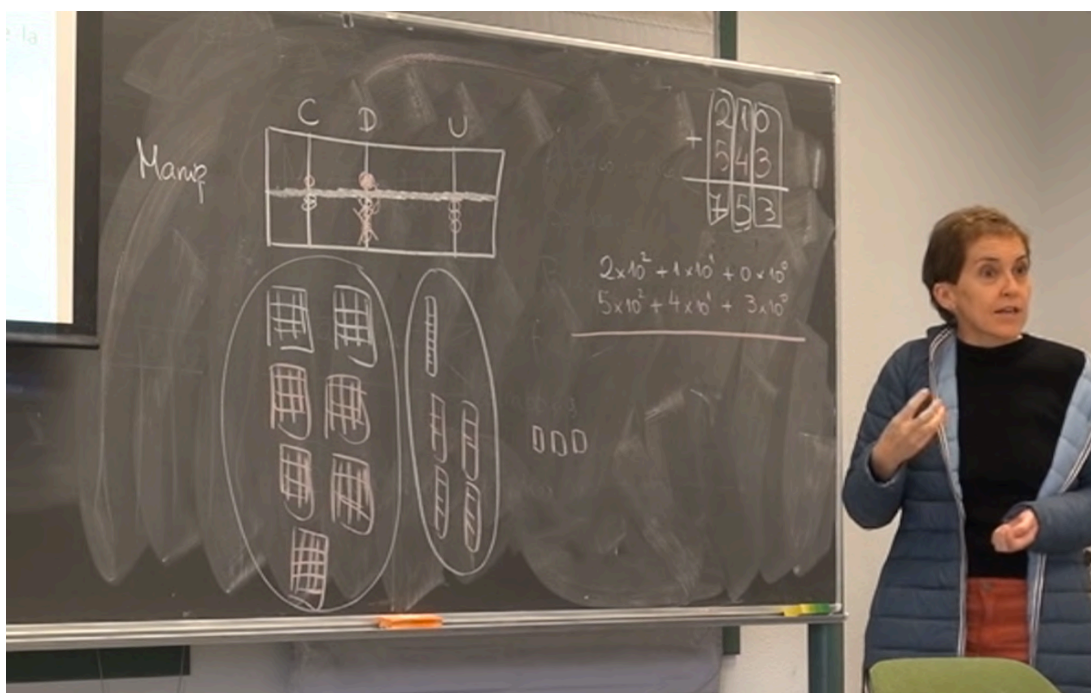
Comentario 4: Conecta los algoritmos, bueno, la representación en base 10 con el algoritmo en vertical, pero con los bloques en base 10 trabaja de izquierda a derecha y eso podría haber sido un problema si hubiera habido reagrupamientos. No sé si lo va a mencionar o no, por qué trabaja ahí de izquierda a derecha en lugar de derecha a izquierda como en el simbólico.

Y veo la conexión de uno con otro, ¿vale? ¿Está claro hasta aquí?

A: Sí, eso sí.



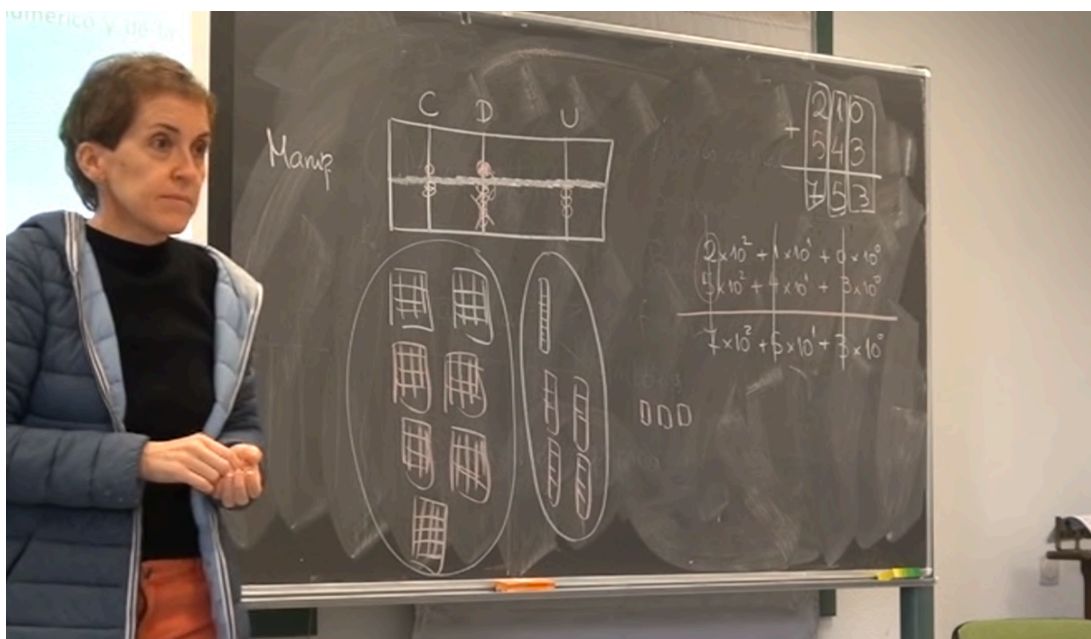
F: El que quiera escribirlo simbólico-numérico de otra manera en la que se vea la «posicionalidad» del sistema, podría escribirlo de la siguiente forma: $2 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 0 \times 10^0$, ese es el primer sumando; segundo sumando, $5 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 3 \times 10^0$; y sumo.



Y ahora, al sumar, utilizo la propiedad conmutativa, para colocar los sumandos en el orden que quiero, y asociativa, para ir organizando, ¿vale? O sea, que este [señala 5×10^2] —que, si lo coloco seguido, estaría aquí el cuarto [señala detrás de 0×10^0]— lo quiero colocar el segundo para agruparlo con este [señala 2×10^2], este [señala 4×10^1] —que estaría el quinto [señala detrás de 0×10^0]— lo coloco el tercero para agruparlo con este [señala 1×10^1], y este [señala 3×10^0] lo agrupo con este [señala 0×10^0]. Y ahora, al agrupar, ya me quedan 5 y 2, propiedad distributiva, 7×10^2 más, 4 y 1, 5×10^1 más, 0 y 3, 3×10^0 . Pero ahí estoy utilizando la asociatividad de la suma, la conmutatividad de la suma y la distributiva de la suma y el producto de números enteros, ¿vale?

Comentario 5: Y ahora está haciendo un algoritmo de suma polinómica, de agrupación polinómica, que no sé si pega con los anteriores, no sé si aporta demasiado a los maestros esa interpretación. De nuevo, tanto simbolismo..., no alcanzo a ver la intención.

Pero si lo coloco así, veo esto, esto y eso [señala los coeficientes que acompañan a 10^2 , 10^1 y 10^0], que es lo mismo que esto, esto y eso [señala el 7, 5 y 3 del resultado de la suma en la forma simbólico-numérica], que es lo mismo que esto, esto y esto [señala los bloques multibase en la pizarra] y que es lo mismo que 1, 2 y 3 varillas [señala las varillas del sorobán en la pizarra]. ¿Está claro hasta aquí?



- A: Sí.
- F: Ahora, ¿qué diferencia hay entre esto y la siguiente suma que me plantean ahí [en el PDF proyectado en la pantalla]? $316 + 429$.
- A: Que me paso de unidades y tengo que pasar a las decenas.
- F: Que cuando agrupo aquí, por ejemplo [bloques multibase], o cuando agrupo aquí [sorobán], o cuando agrupo aquí [expresiones de sumas y productos de potencias de 10], aquí aparecen más de 10 [señala al 3 de 3×10^1]. En algún sitio aparecen más de 10,

Comentario 6: Ha preguntado, ¿no?, qué diferencia hay con la siguiente, que es un ejemplo ya en el que hacen falta reagrupamientos, para ver la diferencia, a ver si en el vídeo lo hace, no queda una cosa puramente descriptiva aquí..., porque puede ser un caso más interesante que este, vamos a ver.

por ejemplo, cuando tengo 9 unidades y 6 unidades, aquí aparecerían 15 fichitas pequeñas [bloques multibase], aquí tendría que representar 15 [sorobán] y aquí aparecería 15×10^0 . Pero como estamos en base 10, no puedo dejarlo así, tengo que agrupar, tengo que agrupar. Entonces, agrupo 10 y dejo 5, y las 10 que agrupo las paso al siguiente valor, es decir, pego 10 fichas y construyo una barra [bloques multibase], agrupo 10 y me sale otra bola aquí en el ábaco, aquí abajo [parte baja de la varilla de las decenas], o agrupo 10 y me sale uno más aquí [en 5×10^1] y aquí [en 3×10^0] dejo las que se quedaban sueltas, las 5, ¿vale? O sea, que la única diferencia es que aquí, después de representar cada cantidad y de ir

poniendo por orden el valor de cada una, tengo que agrupar porque en algunos sitios tengo 10 o más, ¿vale? Es la única diferencia.

Y ahora, si quisiéramos representar esto en formato tabla, como tenía Martín, ¿no?

Comentario 7: Eh..., no me queda claro si esto lo ha hecho para que los alumnos lo hagan después o para dejarlo ahí el ejercicio, porque creo que ha hecho el no interesante y deja sin hacer el interesante, quizá porque lo van a hacer los alumnos después, claro, no lo sé.

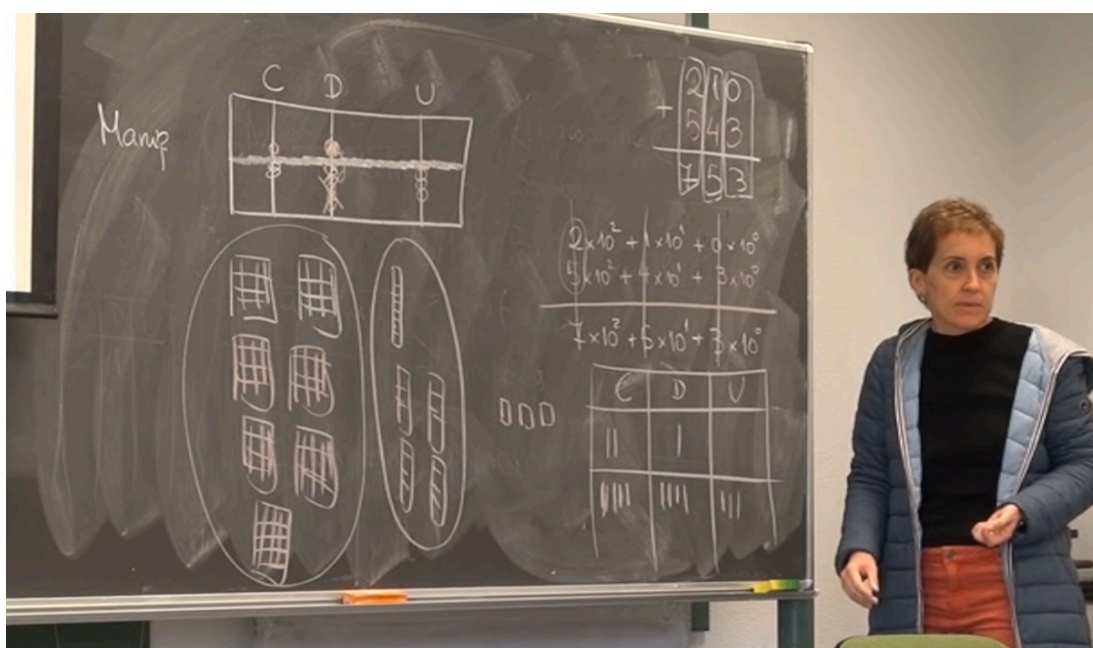
¿Cuántas columnas pondré yo en la tabla?, ¿qué me pide el cuerpo? Tengo que dibujar una tabla, ¿vale?, vamos a dibujar una tabla [comienza a dibujarla en la pizarra], con filas y columnas, ¿cuántas columnas pongo?

A: Tres.

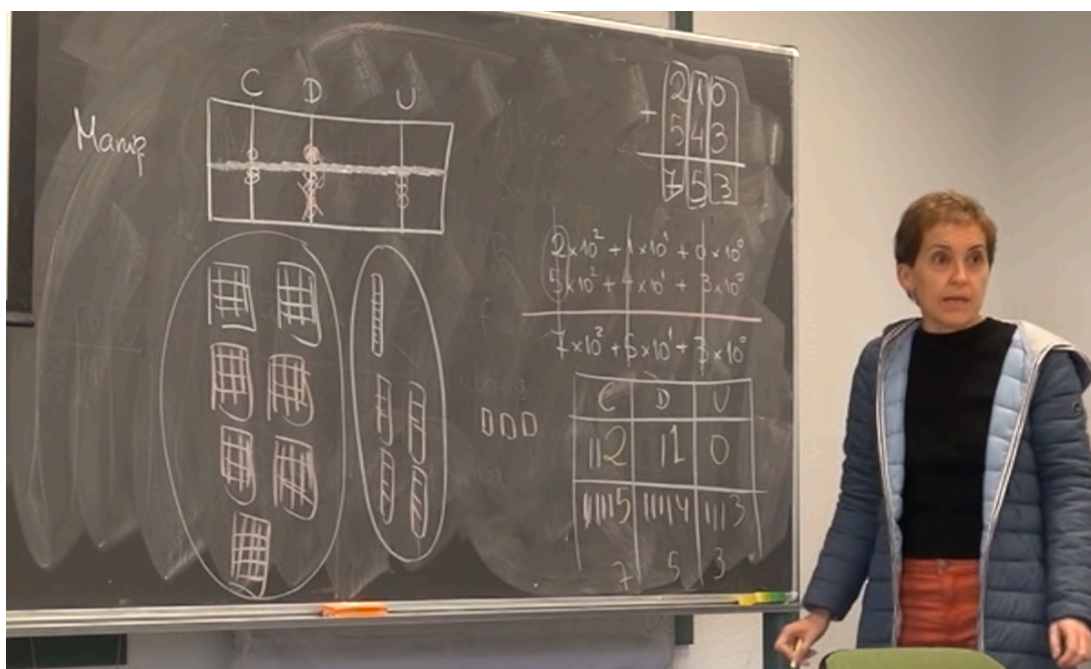
F: Tres, ¿por qué tres?

A: Centenas, decenas y unidades.

F: Unidades, decenas y centenas, ¿vale? Y entonces, represento el primer número, 210: 1, 2, 1, eso es 210 [pone dos rayas en la primera casilla de las centenas y una en la primera de las decenas]. Represento el segundo número, 500: 1, 2, 3, 4, 5; 40: 1..., bueno, en rosa, ya puestos..., 1, 2, 3, 4, 5; 40: 1, 2, 3, 4; y 3: 1, 2, 3. Y agrupo: ¿cuántas unidades tengo al final?, 3, ¿cuántas decenas tengo al final?, 5, ¿cuántas centenas tengo al final?, 7, fin.



Este sistema de representación es icónico-gráfico porque he representado aquí las cantidades con palitos, pero tiene una estructura especial porque está en una tabla, ¿vale? Entonces, vamos a decir que es un sistema de representación tabular-gráfico. Si en vez de poner aquí gráficos, yo hubiera dicho: «oye, mira, no me lío con los gráficos, ya puestos, como ya controlo mejor los símbolos, pues voy a poner aquí 210 y aquí abajo voy a poner 543 y luego ya sumo: 4 y 1, 5 y 2, 7 y 0, 3», ¿vale?



Sería tabular, tiene una estructura tabular, no es puramente simbólico-numérico,

Comentario 8: Aquí está analizando las diferentes formas de representar la información de la suma en una tabla, ¿no?, que hay matices, claro, si lo hace pues simbólico o lo hace..., no recuerdo el nombre, para la taxonomía soy muy malo, pero bueno, diferentes maneras de representarlo dentro del formato tabla.

tiene una estructura tabular, pero con números dentro, tabular-numérico, ¿vale? Entonces, yo voy pasando de lo más concreto, que sería: «mi madre me ha dado 316 euros y mi abuela 429, ¿cuántos euros tengo en total?», después paso a manipular, con ábacos verticales, con ábacos japoneses, con bloques multibase..., y cuando interiorizo bien eso, digo: «ostras, venga, lo voy a poner en una tabla gráfica y voy a indicar lo que me indica cada varilla o lo que me indica cada agrupamiento de los bloques multibase, que es posición, en las columnas de una tabla, y ahí voy a poder marcarlo con símbolos». Esta tabla con símbolos se llama

tablero de posición, porque tengo las posiciones indicadas —unidades, decenas y centenas—, y es uno de los recursos que más utilizan en el método famoso este Singapur, que habréis visto o habréis oído hablar de él, ¿vale? Entonces, ¿qué están haciendo?, están haciendo una transición de los más concreto, pasando por lo manipulativo, hacia lo abstracto, que sería..., esto es lo más abstracto [señala las expresiones de sumas y productos de potencias de 10] y esto es lo abstracto que se trabaja en primaria [señala la suma hecha en el registro de representación simbólico-numérico], ¿vale? Pero no trabajan directamente con esto, vamos pasando..., concreto, concreto, concreto, concreto [de forma manipulativa], voy intentando abstraer un poco, pero tengo mis gráficos que me ayudan a visualizar lo que estoy haciendo [de forma tabular], y finalmente mi objetivo es escribirlo simbólico-numéricamente, de forma abstracta, ya al final.

Comentario 9: Ahora está describiendo todo el proceso, la secuencia de la suma, ¿no?, lo concreto, pictórico, abstracto, para que tengan una visión global de la ruta de aprendizaje de un alumno cuando está aprendiendo a sumar en primaria.

¿Cómo habéis trabajado mayoritariamente vosotros en primaria cuando estabais haciendo sumas de este estilo? ¿Desde aquí [señala lo manipulativo] o desde el final [señala lo simbólico-numérico]?

A: Desde el final...

A: Yo con las de centenas, decenas y unidades, las cajas...

F: Las cajas estas también os suenan, los tableros de posición, pero ¿y qué poníais en las posiciones, palitos o los números ya?

A: Los números directamente.

F: Los números directamente, o sea, que estabais trabajando la fase inicial, de la suma, la estabais trabajando directamente con lo simbólico, que es la fase final, ¿lo veis?

A: Jolín, sí.

F: Vale, pues ala, ya está.

ANEXO 6

Transcripción de los comentarios de Jorge en la fase 1

Nota: El texto presentado entre corchetes en la transcripción se corresponde con información incluida por el investigador.

TRANSCRIPCIÓN DEL VÍDEO 1

Fragmento 1

[F = Formadora del vídeo]. [Comentarios de Jorge presentados en recuadros].

F: Bueno, entonces os voy a dar el guion y empezáis a trabajar y, al final, los últimos 15 minutos, hacemos la puesta en común. El guion de la actividad aparece aquí en el campus, pone la fecha, ¿vale?, «actividad para la sesión del 19 de septiembre». Lo voy a leer porque está en inglés, por si alguno tuviera alguna dificultad, lo leo y os ponéis a trabajar, ¿vale?

Todo el mundo en la mesa tiene un montón de palillos y varias cintas de estas, ¿no?, elásticas. Si alguien necesita más cintas me las pide, palillos no, son los que os he puesto, ¿vale?, es con lo que tenéis que trabajar. El problema es que yo he comprado una caja de palillos en Supeco y resulta que mis compañeros lo compran en Mercadona y me dicen que las cajas de palillos que ponen 800 palillos del Mercadona traen más y que les sale a cuenta, y que cuando van a comprar materiales —porque a veces tenemos que comprar nosotros los materiales— pues que merece la pena. Yo no pude ir a Mercadona, fui a Supeco, pone que son 800, pero no sé si me han timado o no me han timado. Entonces, para hacer un control de calidad, hacer una estimación, que luego, bueno, los que hayáis hecho Matemáticas de Ciencias Sociales pues sabéis hacer un contraste de hipótesis y tal, pero bueno, lo primero que tengo que hacer es hacer una estimación de cuántos hay, ¿no? Entonces, los he repartido para no contarlos yo y la idea es ver cuántos hay.

Comentario 1: El ambiente de la clase parece un poco ruidoso, poca atención, parecen bastantes mesas; puedo verme reflejado en varios momentos. Y bueno, ha hecho una introducción de los requisitos, los pasos, las tareas que se les va a pedir... Les ha dado las

instrucciones de la actividad, que estaban en inglés. Y ha introducido un poco la actividad – que parece de aritmética para primaria –, les pone en situación con una especie de anécdota o de historia relacionada con ellos para tratar de engancharlos con el problema, con lo que tienen que hacer, que va a ser contar o tratar de estimar; les pone en una situación real, como la del supermercado, para ver si les atrae la atención, motiva un poco la actividad. Los alumnos están divididos en grupos y ella tiene el apoyo del aula virtual.

Entonces, el guion de la actividad, tal y como aparece aquí... [espera a que cargue el ordenador]. Aquí está el guion. Esta actividad –esperad que la amplíe un poco– está escaneada de un libro muy bueno que utilizan en los últimos años en Estados Unidos para formar profesores de primaria. Lo bueno del libro es que, además de los contenidos teóricos, más de la mitad del libro son actividades para llevar al aula-taller como estamos haciendo aquí, ¿vale? Entonces, una de las actividades iniciales para el trabajo con el número, que es con lo que estamos empezando nosotros, es esta de los palillos, ¿vale?

Comentario 2: Da un contexto a la actividad y da una referencia buena. Es una clase práctica, con lo cual la referencia parece también un libro práctico con actividades que pueden ser de su interés para su futura práctica; parece una referencia no tan teórica, sino algo más práctica. Sigue sin captar mucho la atención de los alumnos.

Entonces, aquí la pregunta es «cuántos», cuántos palillos, ¿no?, que es lo que os he preguntado a vosotros, ¿no?, cuántos. Entonces, cada grupo participando en esta actividad tiene un montón de palillos y luego tiene algo para atarlos, ¿no?, *rubber bands*, pues cintas de estas elásticas. Los materiales ya los tenéis. El objetivo de la actividad es ayudaros a entender el desarrollo de la escritura de los números tal y como los utilizamos nosotros en nuestro sistema de numeración, ¿vale? Entonces, primero, organiza los palillos de forma que visualmente puedas ver más o menos cuántos hay; usa las bandas elásticas, si te ayudan, para organizarlos de manera que así, de un vistazo, puedas decir cuántos tienes, primero los cuentas, lo organizas, piensas cómo organizarlo, pero la cosa es que la organización que tú tengas en la mesa te permita de un vistazo recordar cuántos hay sin necesidad de haberlo apuntado, ¿no?, y que, si yo me paso por allí, me podáis decir: «mira, hay no sé cuántos, porque..., lo veo porque lo hemos organizado así», ¿vale? Luego, reflexiona sobre si la manera en la que lo has

organizado corresponde a cómo escribirías tú luego los numerales para representar esa cantidad de palillos. Después, tienes que juntar tus palillos con los de un grupo de al lado, ¿vale?, por ejemplo, vosotros con vosotros y así, cada dos grupos tienen que juntar los palillos que tienen y decidir cuántos tienen en común, ¿vale?, cuántos tienen en total. Y al final, tenemos que juntarlos todos y de una forma ágil, sin tener que volver a contarlos todos, tenemos que saber cuántos palillos hay en total en la clase repartidos, ¿vale? O sea que, primero, cada grupo tiene que saber cuántos tiene y tiene que generar una estrategia para, de manera rápida, mirar en la mesa y ver cuántos hay; después, reflexionar sobre si la manera en la que lo coloca cuando uno luego escribe, imaginaos, «tengo 72, pues cómo se escribe 72: siete, dos», pues la manera en la que lo coloco me ayuda con la escritura o no, no tiene por qué, se reflexiona un poco sobre eso; y cuando hayáis terminado esa parte, llamáis al grupo de al lado y decís: «venga, vamos a ver cuántos tenemos en total, visualmente, cómo lo organizasteis vosotros, cómo lo organicé yo, a ver cómo lo tengo», ¿vale?; y luego todos.

Comentario 3: En principio, queda más o menos clara la actividad; está bien, está interesante [se ríe]. El manejo lo hace a través de..., supongo que tiene detrás una pantalla en la que van leyendo ellos también..., no sé si en las mesas tienen un guion para que ellos vayan siguiendo... o lo saben, porque veo alumnos que están como mirando a otro lado y no sé si saben de antemano lo que tienen que hacer y ella lo ha explicado, o directamente está explicando... Pero bueno, ya tienen el material, a lo mejor sí saben ya lo que tienen que hacer en la actividad. En principio yo creo que la actividad es libre; está mirando el reloj, yo creo que va a dejarles un rato para que trabajen. En principio, las órdenes de la actividad están. Y ahora a ver qué hace [se ríe].

Tenéis un cuarto de hora, ¿vale?

Comentario 4: Marca el tiempo, es importante el tiempo, marca el tiempo para que sepan el tiempo que tienen para cada parte de la actividad.

Fragmento 2

[F = Formadora del vídeo]. [A = Alumnos]. [Comentarios de Jorge presentados en recuadros].

- F: Necesito saber si habéis tenido que llegar a algún acuerdo entre los grupos o...
- A: Sí, claro, todo ha sido un consenso, todo ha sido un consenso.
- F: Ah, vale, ha sido un consenso. ¿Qué acuerdo habéis tenido que...?
- A: Hemos explicado cada uno pues lo que significaba cada..., cada gomita.
- F: Y, por ejemplo, ¿vosotros de cuánto en cuánto lo habíais agrupado? Eráis los de 15, 10, 5, ¿no?
- A: Sí.
- F: ¿Y vosotros?
- A: 20, 10 y 4.
- F: 20, 10 y 4. Entonces, ¿habéis tenido que llegar a algún acuerdo alguno para reordenar?
- A: No, porque nos ha venido muy bien.
- F: ¿Os ha venido bien?
- A: Es que hemos sido muy inteligentes cogiendo el amarillo para los grandes [se refiere a gomas elásticas de color amarillo].
- F: Ahora los grandes de qué son, ¿de 20?
- A: De 20 y de 15, aquí están mezclados. ¿O los tenemos que reorganizar?



F: Esto es superinteligente, ¿no? O sea, yo veo aquí..., digo: «en los amarillos, algunos tienen 20 y algunos tienen 15, búscate la vida Nuria».

A: Pero son amarillos.

Comentario 1: Trabaja un poco con preguntas, parece que es cuando se han juntado dos grupos, entonces por medio de preguntas está pidiendo que expliquen ellos cómo lo han hecho y qué acuerdos ha habido. Les ha preguntado por los colores, incita un poco a los alumnos a que expliquen el porqué, qué es lo que han hecho. El tono que tiene parece bastante distendido, está bastante bien, ¿no? Bueno, hay una incongruencia, unos han cogido hatillos de 20, otros, de 15..., así que bueno, que vean que ahí está la manera de ir aprendiendo, ir comparando con los demás y llegar a esos consensos es muy importante; incitar a que justifiquen es importante.

F: Ya, pero entonces yo no sé... Yo digo: «vale, yo puedo ver 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 grupos amarillos», ¿no? Y ahora digo: «como mucho serán 160, si son todos de 20, pero... no necesariamente son 160, pueden ser menos».

A: Bueno, pero como no lo sabes...

F: ¿Entonces cómo sé cuántos hay?

A: Te lo estamos diciendo, tienes que confiar en nosotros.

F: No, en matemáticas la confianza no vale, uno tiene que...

A: Es que no sé, no lo entiendo. ¿Lo tenemos que reorganizar?

F: Vosotros ya sabéis cuántos palillos tenéis, pero ahora, visualmente, tenéis que poder contarme a mí cómo sabéis que hay ese número de palillos, ¿no?

Comentario 2: Ahí está bien porque incide en esta justificación, ¿no?, que es lo que hay que transmitir, que en las matemáticas está esa parte de saber justificar los resultados o cómo funcionan las cosas, en este caso el sistema decimal, o el sistema al que lleguen, da igual, lo que estén trabajando. Y bueno, ahí les descubre un poco esa parte en la que ha visto que los dos grupos tienen alguna incongruencia y vuelve a hacerles la pregunta, pide una justificación más clara de ese razonamiento, una conclusión de ese número, que lo expliquen visualmente, ¿no?, también les guía un poco... Ahora los alumnos saben que tendría que ser de una manera visual.

A: Ah, pues habría que... ¿Y no podemos quitar las gomas y reorganizarlo?

F: Sí, sí, sí, yo no dije que no pudierais quitar las gomas.

A: Aaaaah.

- F: ¿Alguien dijo que no se podían quitar?
- A: Y nosotros diciendo que no se podían quitar las gomas...
- F: Y una duda más. Alguno de vosotros..., por separado, ¿no?, cuando lo teníais..., habéis escrito la cantidad que teníais, ¿no? Eh, 109 teníais uno...
- A: 104 y 85.
- F: Por ejemplo, el 85 se escribe con un 8 y un 5. Ese 8 y ese 5, ¿estaban representados de alguna forma en...?
- A: No.
- F: No, vale. Y vosotros, la misma pregunta con lo vuestro.
- A: No.
- F: No había un patrón en cómo lo habíais representado, vale, ok.

Comentario 3: Está guiándolos hacia lo importante, ¿no?, que es que descubran el sistema decimal. Entonces está relacionando un poco la parte manipulativa con lo que es el sistema, los números, un poco la teoría... Ahí liga la práctica con la teoría... Es donde los alumnos verán de otra forma lo que son los números, verán cuál es el proceso y los hatillos los verán de una manera distinta. Vuelve a preguntarles, les guía de otra manera, les da una pista para que, además de que lo pongan en común, lo relacionen con el número, con la posición, con el sistema posicional.

- A: ¿Pero quieres que busquemos?
- F: Quiero que reflexionéis sobre eso, pero ahora lo vamos a poner en común, ¿vale?
- A: Vale.
- F: ¿Ha sido operativo el que ellos hayan hecho 15, 10, 5... y vosotras tuvieras 20...? ¿Eso ha ayudado a la hora de ponerlo en común?
- A: No, porque ahora hay que hacerlo otra vez.
- F: Ahora hay que volverlo a hacer...

Comentario 4: Al final yo creo que se han dado cuenta de que la estrategia que habían seguido inicialmente no era óptima y entonces tienen que reorganizar esa estrategia. Ya irán mejor [se ríe].

Fragmento 3

[F = Formadora del vídeo]. [A = Alumnos]. [Comentarios de Jorge presentados en recuadros].

F: Me tenéis que decir cuántos palillos había en cada grupo inicialmente, antes de juntaros dos grupos, ¿vale? Entonces, por ejemplo, vosotros.

A: 87.

F: 87 [lo escribe en la pizarra]. Estamos de acuerdo, yo utilizo la escritura estándar que vosotros habéis visto en primaria, secundaria, bachillerato y al llegar aquí, ¿vale? Escritura estándar de nuestro sistema de numeración en nuestro contexto. Ese grupo, 87. ¿Cómo habíais hecho los grupos?

A: Pues hemos hecho, eh..., tres grupos de 20.

F: Tres grupos de 20, ¿cómo lo puedo poner? [Escribe un 3 en la pizarra].

A: Eh..., tres rosas.

A: 3 x 20.

F: ¿Tres rosas?

A: Sí.

A: No.

F: Si pongo tres rosas... ¿Todo el mundo que ha utilizado gomitas rosas ha atado 20?

A: No.

F: ¿Otras personas que han atado 20 han usado otro color?

A: Sí.

F: Uf, el color no me vale. ¿Cómo lo pongo?

Comentario 1: Bueno, está recapitulando, está poniendo en común lo que han hecho todos los grupos. Pide la opinión a los alumnos, se verbaliza, pero a la hora de ir escribiendo creo que lo va a intentar escribir de manera formal, entonces está parando un poco y modulando un poco las respuestas de los alumnos, comparando las respuestas de unos con las de otros, guiándoles para formalizar lo que son 3 grupos de 10 [dice de 10, pero son de 20]... Está poniendo en común las ideas de todo el grupo, asentando un poco las ideas después del trabajo.*

A: 20 x 3.

- A: 3×20 .
- F: 3 grupos de 20, ¿no? 3×20 . [Escribe 3×20]. Y luego...
- A: Pon en el 3 «color rosa» o algo así. Entre paréntesis.
- F: Vale, vale. [Pinta una raya rosa sobre el 20]. Y luego... Esto son 60.
- A: 9×3 .
- F: Y luego 9 grupos de 3, ¿no? [Escribe $+ 9$]. ¿O 3 grupos de 9? [Borra el 9].
- A: 3×9 .
- F: 3 grupos de 9 y el 9 lo habéis puesto de otro color, ¿vale? [Escribe 3×9].
- A: Sí.

Comentario 2: Está adaptándose a las respuestas de los alumnos, a la notación en rosa que han utilizado, a los grupos que han hecho... Entre todos van a construir el argumento.

- F: ¿Alguien más ha utilizado grupos de 20?
- A: Nosotros.
- F: Varios. ¿Alguien más ha utilizado grupos de 9? [Destaca con la voz el número 9].
- A: Nosotras.
- F: Vosotras, vale, y vosotras también, vale. Siguiendo equipo, vosotras.
- A: Nosotras, 90.
- F: En total, 90. [Escribe 90 en la pizarra].
- A: 4 de 20 y 1 de 10.
- F: [Escribe $4 \times 20 + 1 \times 10$]. Vale, o sea que de momento han utilizado grupos de 20, grupos de 10, grupos de 9, ¿vale?



En esta escritura [señala lo que ha escrito en la pizarra] yo veo 3 grupos de 20, 3 grupos de 9, pero aquí [señala el 87] no veo un 3 y un 3. Yo aquí veo 4 grupos de 20, 1 grupo de 10, pero aquí [señala el 90] no veo 4, 1. Con lo cual, parece que tampoco habíais encontrado vosotros un patrón entre cómo escribo la cantidad total con símbolos numéricos y visualmente qué veo en los palillos, ¿vale? De momento, la transcripción de lo que veo en los palillos simbólico-numéricamente la tengo aquí a la derecha [señala el $3 \times 20 + 3 \times 9$ y el $4 \times 20 + 1 \times 10$], pero no veo ninguna relación con esto [señala el 87 y el 90]. Yo aquí estoy haciendo trampa porque estoy metiendo operaciones, nosotros ahora no estamos con las operaciones, estamos solo con el número, con la escritura del número, eso es lo que estamos trabajando, ¿no? Pero para ayudar a ver esa conexión de los palillos hacia lo simbólico-numérico, pongo, escribo eso de transición para ir copiando lo que me decís, ¿no?, porque tardo más, tardo más en dibujar los palillos, las gomitas rosas, no sé qué, podría sacar la foto de la cámara y ponerlo rápido, ¿no?, pero..., bueno, lo escribo, lo transcribo así. Ahora, otro grupo. Vosotros dos ya estáis, que luego, luego... Ah, venga, ya que estamos aquí [dibuja una llave a la derecha de lo que ya ha escrito en la pizarra]. ¿A qué consenso... habéis llegado...?

A: Pues 7 grupos de 20...

F: Muy bien, 7 grupos de 20 [señala el 3 y el 4]. Han visto rápido y han dicho: «bien, los dos hemos agrupado, sin habernos copiado, en grupos de 20, con lo cual automáticamente tenemos 7 grupos de 20» [escribe 7×20].

A: Luego, ellos los 27 de 3×9 ...

F: Sí.

A: ... los han dividido en 2 de 10 para que se junten con los nuestros de 10.

F: ¿Y por qué no habéis hecho vosotros... separar este de 10 [señala el 10 de 1×10] en 1 de 9 y 1 de 1?

A: Porque se quedaría 1 solo y luego...

Comentario 3: Bueno, les está guiando de nuevo; la pregunta esa que les había lanzado al principio... Está intentando ver cómo los alumnos han llegado a ese acuerdo y ver cómo explican el acuerdo al que han llegado. Ella les pone ante alguna contradicción, les pregunta por qué han elegido un método y no otro, por qué este método es bueno, por qué habéis descartado otra estrategia... Me gusta bastante la actividad [se ríe], a ver si la hago

yo también. Está muy bien porque va guiándoles para ver cuál es la estrategia óptima, pero no quiere darla y quiere que se lance desde todo el grupo. Ahora está analizando lo que ha hecho un grupo, para ver pros y contras... Y claro, la estrategia no es la óptima... Les tira mucho de la lengua, ¿vale?

F: Bueno, pobrecillo, ¿no? No pasa nada.

A: Y porque es más fácil sumar de 10 en 10 que de 9 en 9.

A: Para ponerle la goma a 1...

F: Para ponerle la goma a 1... Bueno... Eso... Puede ser una justificación, pero tampoco muy potente... Me gusta más lo que ha dicho ella, o ella...

A: Que es más fácil sumar de 10 en 10 que de 9 en 9.

F: ¿Por qué será más fácil sumar de 10 en 10 que de 9 en 9 para nosotros? [Hablan varios alumnos a la vez]. ¿Por qué es más fácil sumar para nosotros de 10 en 10 y no de 9 en 9? [Hablan varios alumnos a la vez]. Porque tenemos 10 dedos, por ejemplo, ¿no? Porque estamos más acostumbrados a 10, 20, 30, 40... [mueve las manos con los dedos estirados], ¿no?,

Comentario 4: Después de esas preguntas, alguien ha dado un argumento bueno y ella ha parado, no da la solución, sino que sigue preguntando para intentar que entre todos vayan haciendo suya esa buena idea o estrategia que ha habido. Está guiando hacia esa estrategia... Coge la estrategia de un alumno y sigue haciendo preguntas, buscando el porqué.

como que nuestro sistema de numeración parece que...

A: Porque en verdad solo sumas de 1 en 1 y luego le pones un 0, entonces...

F: Solo sumas de 1 en 1, elabora eso. Estamos en clase de matemáticas, ¿qué es 1, 1...?

A: Pues por ejemplo, si tienes 30, pues 1 más 1 más 1, 3, como es 10, pues le pones el 0 y ya tienes los 30.

F: ¿3 qué?

A: 3 grupos de 10.

F: 3 grupos de 10, muy bien. 3 grupos de 10, vale. [Vuelve a la pizarra a terminar lo que empezó a escribir].

A: 3 de 20, 3 de 10 y 1 de 7.

- F: [Escribe, después de 7×20 , 3×10]. 3 de 10, llegasteis a romper estos [señala 3×9] en 2 de 10 más 7 sueltos, ¿no? [escribe $2 \times 10 + 7$ encima de 3×9]. Y entonces estos dos [señala 2×10] con este [señala 1×10] 3 y 7 palillos ahí sueltos [escribe, después de $7 \times 20 + 3 \times 10$, 7×1], ¿vale? Ahora, la cantidad total, ¿cuánto es? [señala el 87 y el 90].
- A: 177.
- F: 1, 7, 7 [escribe 177 a la izquierda del 87 y del 90]. ¿Hay aquí 1, 7, 7 por algún lado? [señala el 7 de 7×20 , al 3 de 3×10 y al 7 de 7×1]. Este [señala el 7 de 7×1] parece que hay aquí, ¿no? Pero lo otro... no me cuadra mucho todavía... Vale, otros dos grupos.

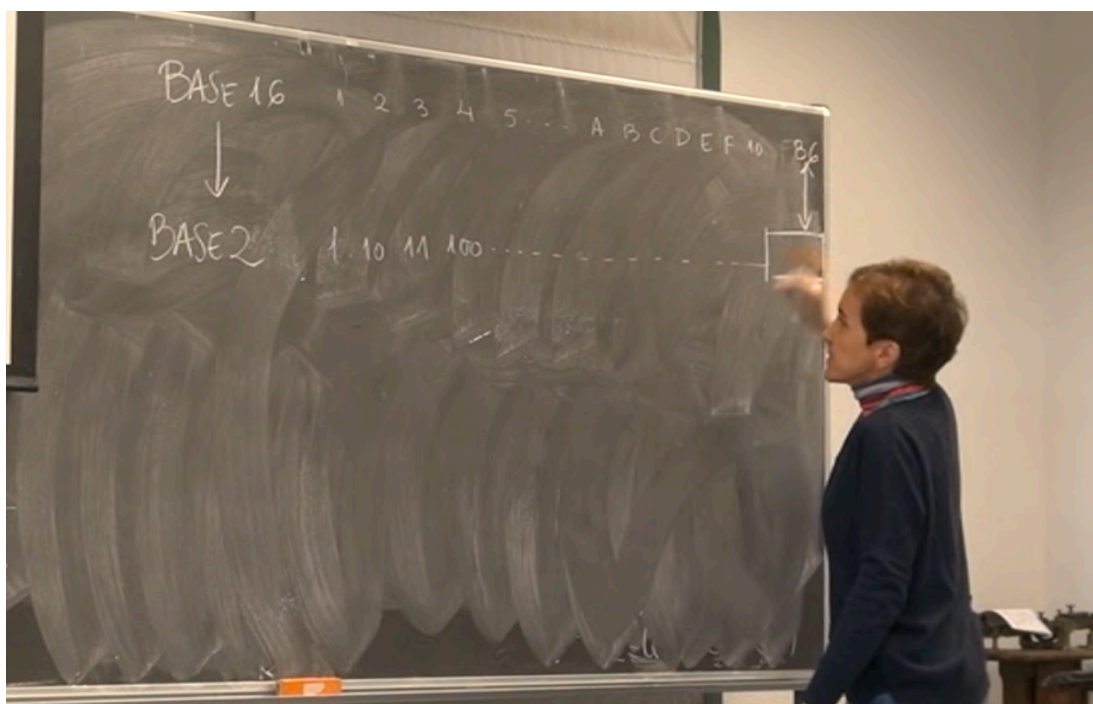
Comentario 5: Bueno, ha terminado recapitulando lo que quería, que fueran viendo cada valor posicional. Está bien porque dice: «bueno, todavía no hemos terminado» [se ríe]. Aún queda trabajo...



TRANSCRIPCIÓN DEL VÍDEO 2

[F = Formadora del vídeo]. [A = Alumnos]. [Comentarios de Jorge presentados en recuadros].

- F: Como me piden pasar de base 16 a base 2 directamente [escribe en la pizarra], pues Martín dice: «yo escribo aquí la secuencia 1, 2, 3, 4, 5..., A, B, C, D [dice 10, 11, 12, 13, señalando A, B, C, D], 14, 15 [escribiendo E, F], uno, cero [10]..., así hasta el B6», ¿vale? Y luego aquí en paralelo, voy uno [1], uno, cero [10], uno, uno [11], uno, cero, cero [100]..., hasta que pille aquí el que sea y ya está.



No he pasado por base 10, que es lo que me dice Nuria. Con lo cual, superado. ¿Pero qué pasó?

- A: Que es muy largo.

- F: Que es muy largo. Y que hasta en su casa, teniendo semanas, ha dicho: «paso». Tenías tiempo suficiente, porque había tiempo suficiente en dos semanas a hacerlo, pero... es largo y además un coñazo, con lo cual ha dicho: «paso». Con la idea Nuria ya se hace una idea de que lo he pensado, es un procedimiento válido, pero no ha sido eficaz, ¿vale?,

Comentario 1: Parece un ejercicio que les ha pedido y está analizando un poco una respuesta que ha dado un estudiante, una estrategia que tampoco es óptima de la resolución del ejercicio. Entonces, yo creo que ha explicado cuál ha sido la estrategia de ese

alumno, ha dicho cómo se resolvería, en la pizarra, de forma clara, y llega de nuevo al momento en el que se ve que esta estrategia no es óptima. Entonces, se para, pregunta «qué hacemos»... Tiene un tono distendido, está bien. Y bueno, esperamos a ver qué hace [se ríe].

entonces nosotros tenemos que seguir pensando porque tendremos que buscar alguna estrategia que sea eficaz. [Da la palabra a una alumna].

A: ¿Se podría hacer la división?

F: ¿Qué división?

A: La de B6 entre 2. Es que no sé cómo plantearlo.

F: Ella dice: «oye, mira Nuria, cuando tú pasas de base 10 a base 2 haces grupos de 2 y divides de 2 en 2; pues ahora lo mismo, si estoy en B6 a base 2, divide entre 2». Pero aquí estoy escribiendo en base 16... [En la pizarra ha escrito B6 entre 2, con la caja]. Podríamos intentar hacerlo, pero... ¿sabemos hacerlo... o cómo va esto?

Comentario 2: El problema está ahí, no lo resuelve, vuelve a dejarlo en el aire. Es otra estrategia de otra alumna en la que había que dividir por la base..., está intentando llegar realmente a cómo hacerlo, ¿no? Entonces, esa es otra estrategia de otra alumna, la vuelve a escribir, vuelve a ver las limitaciones... Me veo también reflejado en muchos momentos [se ríe].

¿O mentalmente para hacerlo me vais a pasar a base 10, y hacéis la división en base 10 —que es lo que sabéis hacer—, y luego otra vez volvemos y entonces hacemos trampa porque pasamos por base 10? Si sabéis dividir un número en base 16 entre 2, si sabéis hacer esta división en base 16 —yo lo tendría que pensar, ¿eh?, así a capón no lo sé hacer, pero si lo pienso... —, si sabéis hacer eso, valdría.



Pero esto lo vamos a ver en el dossier 3, ¿eh?, multiplicación y división. Nosotros tenemos herramientas para dividir en base 10 y sabemos cómo hacer restas sucesivas y el algoritmo tradicional de la cajita que habéis ido haciendo... Podríamos abordarlo, por eso abordamos los problemas de..., el anterior, ¿no?, de pasar de base 10 a base 2. Pero el de base 16 a base 2 hay que dividir en base 16. Sumar en base 16 lo sé hacer, restar en base 16 me cuesta un poco pero lo sé hacer, multiplicar en base 16 también podría hacerlo, con lo cual dividir podría hacerlo, pero... no me atrevo a hacerlo sin manos, hoy. Otra forma.

Comentario 3: Les está haciendo pensar el problema, incluso avanza un poco que verán detalles más adelante, pero bueno, está dejando un problema en el aire, lo cual está muy bien en matemáticas. Bueno, en esta puesta en común la idea es construir un poco entre todos, es la manera para que ellos se involucren un poco en resolver el problema, ¿no? Que habría que salir de las recetas..., esta asignatura sí que va mucho de eso, que salgan todas esas recetas que tienen en la cabeza y que las han olvidado y que vean por qué funciona cada una, que puedan hacerlo sin necesidad de acordarse de la receta, que vean cómo funciona todo, ¿no? Entonces, ese trabajo me gusta, es importante. Entonces, está elaborando a partir de lo que va saliendo.

A: Fijándote en que 16 es 2^4 .

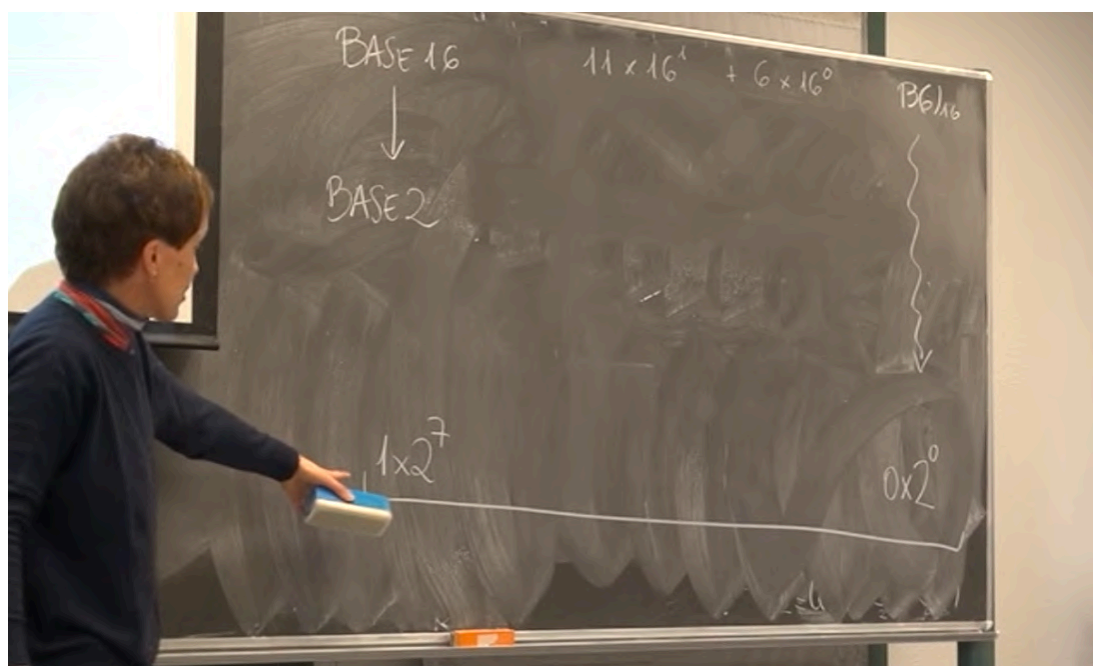
F: Fijándome en que 16 es 2^4 . Me lo voy a apuntar aquí [borra la pizarra y lo escribe].

A: Yo lo hice así, pero luego algo no me cuadraba.

F: Muy bien, vale.

A: Luego hice, 11...

F: Venga, vamos a poner el punto de partida, ¿no? El punto de partida es que tenemos 11×16^1 , ¿no?, más 6×16^0 . Este es mi B6 en base 16. Y yo quiero llegar aquí a... Me acuerdo de que empezaba en 1×2^7 y a acababa en 0×2^0 , ¿vale?



Entonces yo quiero pasar de ahí [señala la parte superior de la pizarra] a aquí [señala la parte inferior]. Si lo consigo, ya lo tengo en base 2, ¿no? Ya solo cojo los coeficientes de las potencias de 2 y ya lo tengo. Entonces, Pablo dice: «cambia este 16», ¿no, Pablo?

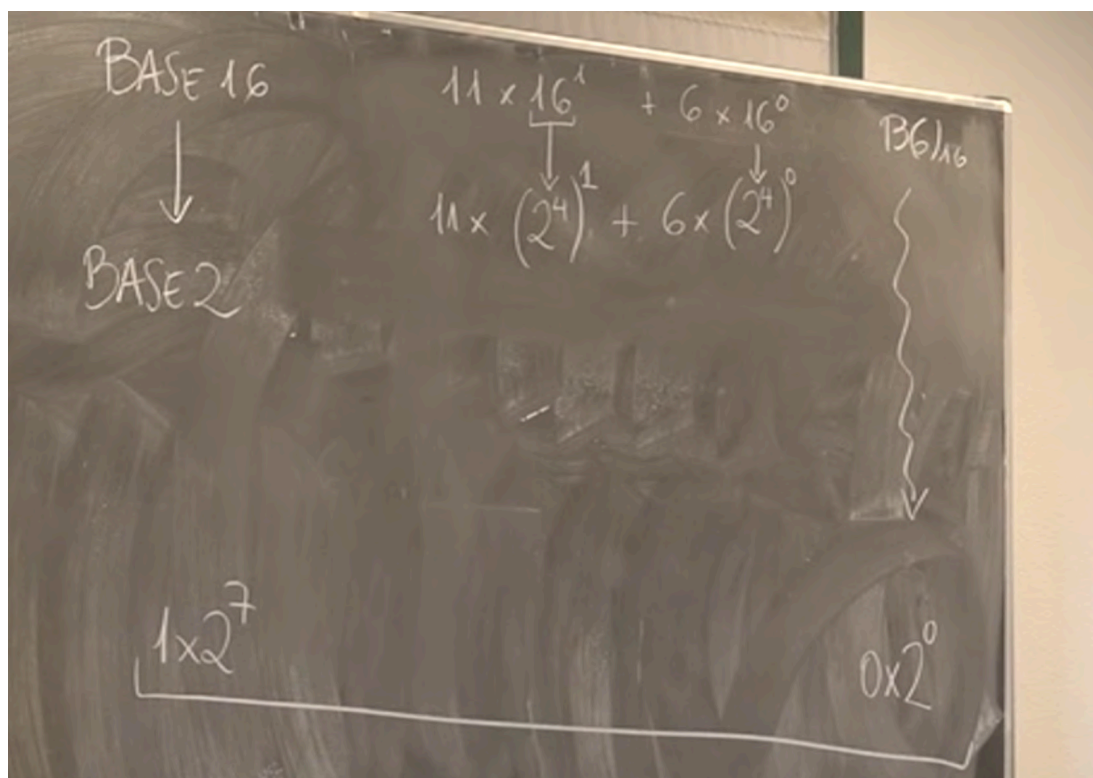
A: Sí.

F: Este 16 ponlo como $(2^4)^1$ y este 16 ponlo como $(2^4)^0$. ¿Vale? Yo tengo una expresión polinomial en base 16, quiero llegar a una expresión polinomial en base 2, y él me dice: «yo veo claro el cambio, 16 es 2^4 , cada vez que veas un 16 ponlo como 2^4 ».

Comentario 4: De nuevo está cogiendo la idea de un alumno y está elaborando a partir de ella. Involucra también a ese alumno, así los alumnos lo ven más cercano, está abriendo mucho la clase, los alumnos se ven involucrados en las ideas de unos y de otros, alguien va proponiendo una cosa, se va entendiendo entre todos que no funciona esa estrategia... Y esta estrategia, por lo que dice la profesora, «ah, mira, lo voy a apuntar», se nota que es una buena idea; el alumno va a interpretar que ese dato es importante. Además, la profesora empieza a elaborar, el uso de la pizarra está bastante bien, grande... Bueno, de

nuevo es bastante lento, sí deja tiempo para pensar, va añadiendo poco a poco los datos para ir resolviendo el problema, haciendo referencia al alumno. Sigamos, vamos a ver el final [se ríe].

Vale, y entonces resulta que aquí tengo 11 grupos de esto y aquí tengo 6 de estos.
¿El 11 y el 6... los puedo dejar?



- A: No, los pasas a base 2.
- F: Los paso a base 2. ¿Sé pasar 11 a base 2?
- A: Sí.
- F: Vale, vamos a escribir 11 en base 2.
- A: 1, 0, 1, 1.
- F: 1×2^3 , ¿no?
- A: Sí.
- F: Más...
- A: Cero.
- F: 0×2^2 . De momento llevo ocho. Más...
- A: Uno.
- F: 1×2^1 . Ya llevo 10...
- A: Más uno.

- F: Más 1×2^0 . Ahí ya tengo 11, ¿vale? Esta es una manera de escribir 11. ¿Cómo? Como potencias de 2. Expresión polinomial del 11 en base 2, como potencias de 2, ¿vale? Y esto va multiplicado... 2 elevado a la 4 y luego lo elevo a la 1, ¿cuánto me queda...? 2^4 es $2 \times 2 \times 2 \times 2$ y luego eso lo elevo a la 1, es decir, que lo copio una vez, o sea que me queda...
- A: 2^4 .
- F: 2^4 . Más... El 6, ¿lo dejo?
- A: No.
- F: No. ¿Cómo escribo 6 en base 2?
- A: 1×2^2 .
- F: 1×2^2 , que son 4.
- A: 1×2^1 .
- F: 1×2^1 ... Y 0×2^0 [lo va escribiendo todo en la pizarra]. Ahí pone 6, una manera más chula, ¿no?, de poner 6 como potencias de 2, ¿no?, como un polinomio con potencias de 2. Vale, y luego estaba por... Y ahora tengo $(2^4)^0$. ¿Eso qué es?
- A: Uno.
- F: Uno. ¿Y si lo quiero poner como potencias de 2?
- A: 2^0 .
- F: 2^0 , muy bien. 2^0 [lo escribe en la pizarra].

Comentario 5: Estos argumentos más algebraicos les cuesta mucho, en general. Entonces, bueno, está preguntando todo el rato – aunque hay veces que no, que lo hace ella –, espera que alguien... del público, iba a decir [se ríe], que algún alumno conteste. Es un solo alumno, parece, entonces, bueno... Cada paso lo está dando un poco algún alumno, no está ella escribiendo el argumento para que ellos lo copien, sino que esas preguntas hacen que ellos piensen y eso ya es un trabajo que hacen, ¿no?, autónomo, lleguen o no..., pero bueno. Hace pausas, lo cual es importante en estos argumentos porque en general les cuesta mucho, ¿vale?, es un alumnado al que esta parte le cuesta mucho, a algunos.

Mira qué contenta estoy, porque $2^0 \times 2^0$ es 2^0 y el coeficiente es 0, que es este. Y $2^4 \times 2^3$ es 2^7 y el coeficiente es 1, que es este. Pues como que ya casi lo tengo, ¿no? ¿Sí o no?

- A: Sí...

BASE 16

BASE 2

$$11 \times 16^1 + 6 \times 16^0$$

$$11 \times (2^4)^1 + 6 \times (2^4)^0$$

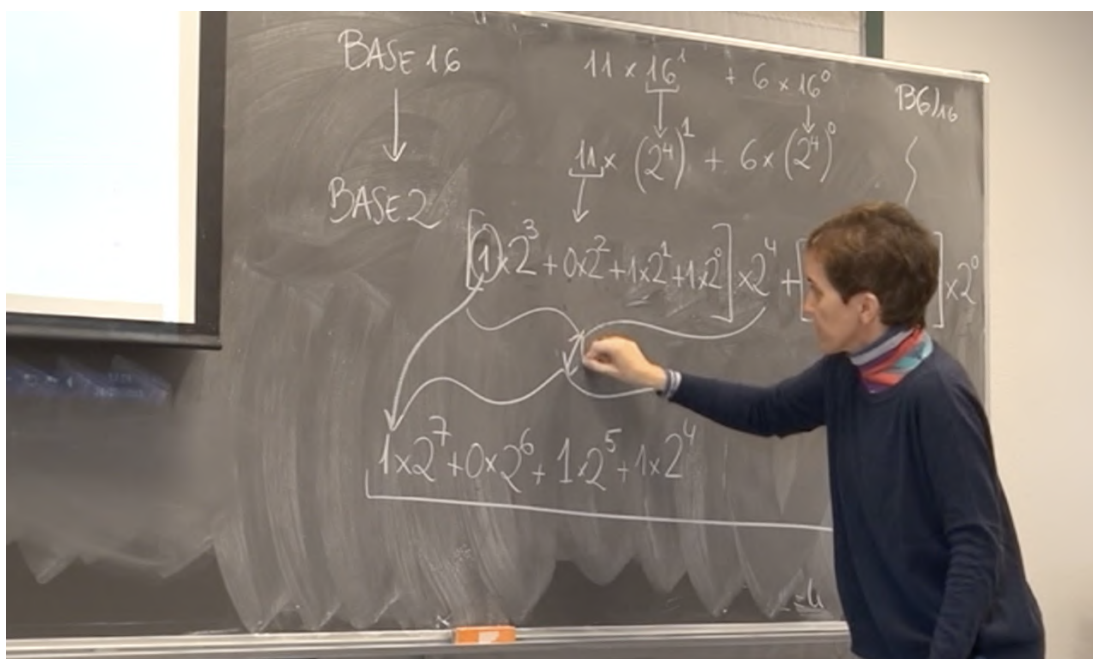
$$[1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0] \times 2^4 + [1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0] \times 2^0$$

$$1 \times 2^7 + 0 \times 2^0$$

$B6_{16}$

- F: Vale, y ahora... Venga, ¿cuál será el coeficiente...? Venga, vamos a poner aquí 2^6 , paso a la siguiente varilla del ábaco, ¿eh? ¿Cuál será el coeficiente de 2^6 ?
- A: Cero.
- F: Cero, porque ¿cómo consigo yo 2^6 ? $2^4 \times 2^2$, ¿no? 2^4 es $2 \times 2 \times 2 \times 2$, 2^2 es 2×2 , ya tengo ahí los seis doses, ¿vale?, que está aquí, y el coeficiente cero. ¿Por aquí puedo llegar a 2^6 ?
- A: No.
- F: No, pues ala. 0×2^6 . Genial, porque era lo que me había salido antes. Ahora, más... Siguiendo varilla del ábaco, 2^5 . ¿Dónde consigo yo 2^5 ? Aquí [señala el corchete de la derecha] como mucho llego a 2^2 , me olvido de esto. $2^4 \times 2^1$ [señalando el corchete de la izquierda] es 2^5 , ¿no?
- A: Sí.
- F: Vale, ¿y qué coeficiente lleva?
- A: 1.
- F: 1. ¿Y era el qué tenía que llevar?
- A: Sí.
- F: Sí, vamos bien. Y ahora, 2^4 , ¿cómo consigo 2^4 ?
- A: Con 2^0 ...

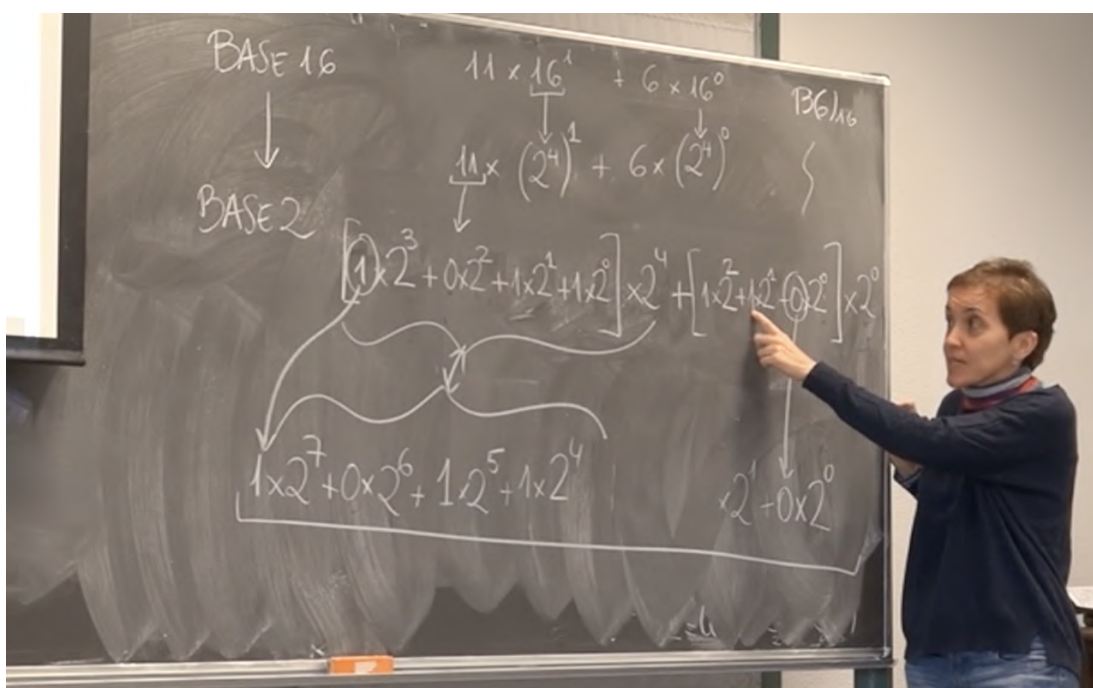
F: $2^4 \times 2^0$, ¿no? Tengo aquí cuatro copias del 2 y aquí ninguna, pues tengo cuatro copias del 2 multiplicándose por sí mismo, y el coeficiente 1. 1×2^4 [lo escribe en la pizarra]. Oye, mira, todo esto se ha convertido en esto. Lo veis, ¿no?



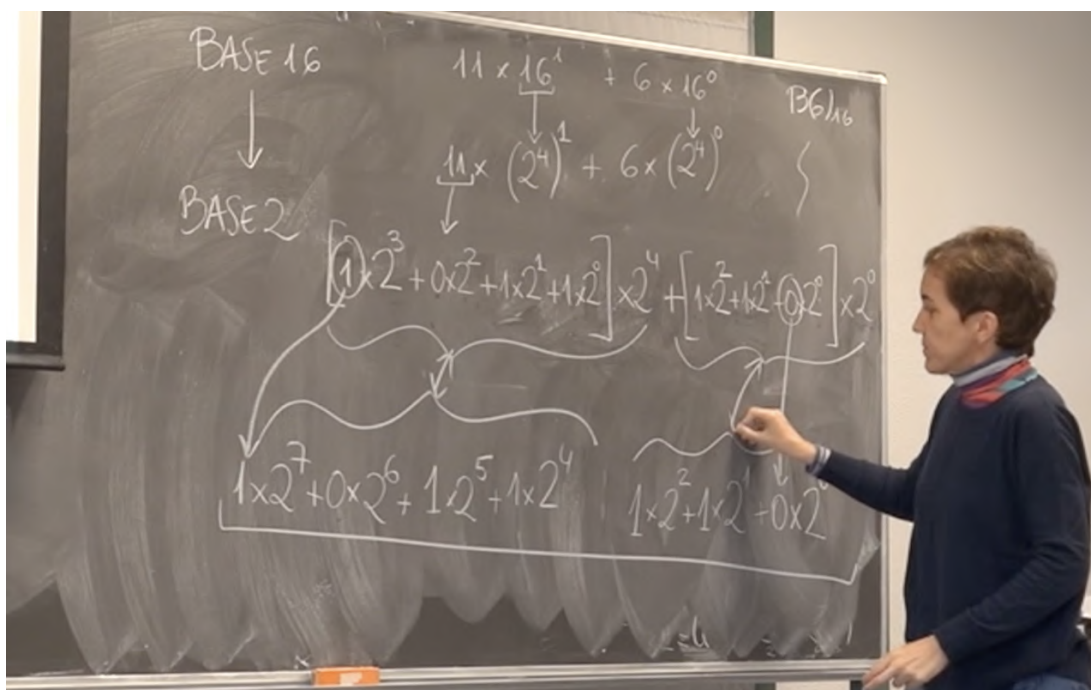
¿Qué es lo que he hecho? Propiedad distributiva. Voy multiplicando el 2^4 por cada uno de los sumandos, ¿vale? Muy bien. Y ahora, tiro por aquí, voy desde aquí [señala el 2^0 de la parte inferior derecha de la pizarra]. 2^0 , muy bien. Siguiendo varilla del ábaco, 2^1 . ¿Qué coeficiente tiene 2^1 ?

A: 1.

F: 1, que está aquí [lo señala], ¿vale?



Porque sería $2^1 \times 2^0$, que es 2^1 , y lleva un 1 delante, un 1 [lo escribe abajo]. Voy bien. Y ahora, $2^0 \times 2^2$, 2^2 [lo escribe abajo], va con un 1 [lo escribe abajo]. O sea que esto que tengo aquí se convierte en esto que tengo aquí.

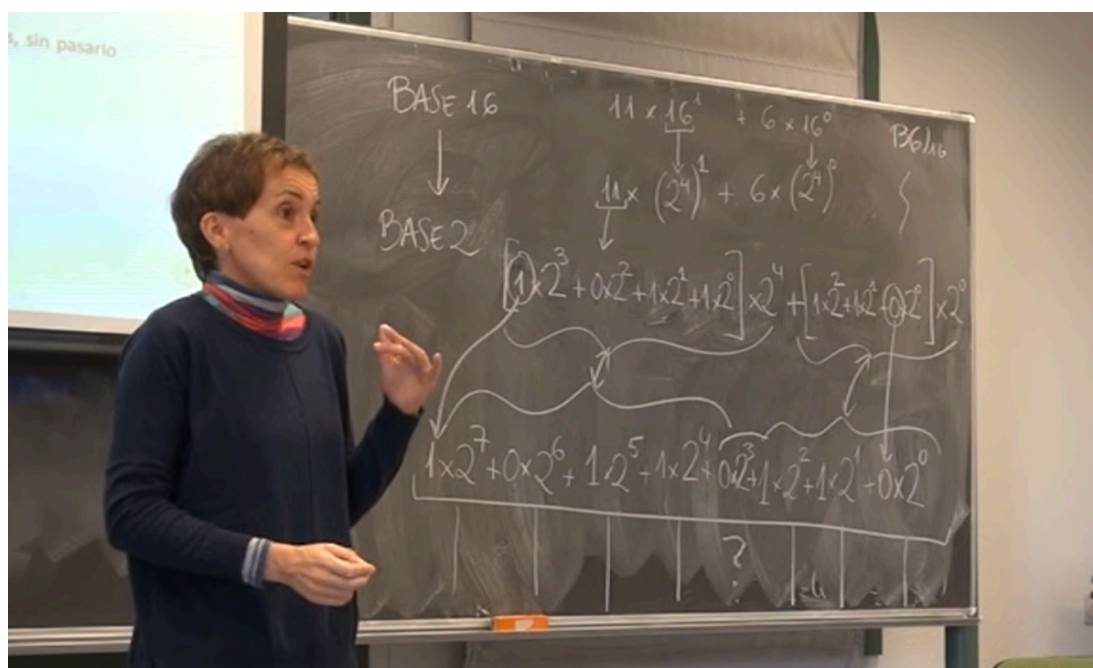


Y ahora, Pablo, ¿qué te pasó?

- A: Que como... Que claro, los iba a juntar, pero dije: «me falta el 2^3 ».
- F: Me falta el 2^3 . Pablo dice: «varilla del ábaco del 2^7 , 2^6 , 2^5 , 2^4 , ¡uy!, 2^2 , 2^1 , 2^0 ». «¡Uy!», dice Pablo [y dibuja una interrogación en la posición del 2^3].
- A: Pues si no hay, un cero.
- F: Pues se pone el 0, ya está.

Comentario 6: Ahí, yo creo, por el murmullo, que los estudiantes iban entendiendo mucho mejor. Ha acelerado la explicación; la está relacionando con la teoría. Se notaba que los alumnos iban siguiéndola, se escuchaban voces que iban asintiendo más, ¿no? Es bastante clara, yo creo, cómo va relacionando, las propiedades que va usando, va recordando cada parte de la teoría... Y luego, sí que lo ha vuelto a relacionar con otro alumno, no sé si era una pregunta anterior..., bueno, una de las varillas..., o a lo mejor fue un error que tuvo un alumno y que ahora yo creo que lo ve claro, ¿no? No sé si lo estoy interpretando bien, no sé si fue de antes... Pero bueno, como ha dicho: «qué pasaba con ese 2^3 , esa cifra que no tenías antes...». Entonces, yo creo que, con esa idea de compartir soluciones y estrategias que hacen los alumnos, después de esta explicación ha quedado..., y él ha asentido, de hecho lo ha contestado él, o sea que... Ahí estaba haciendo también relación al alumno.

Lo pongo aquí: «+ 0 x 2³», y esto lo englobo aquí.



¿Qué es lo que pasa? Que escribo el 6 de una forma muy especial. Yo escribo el 6..., acordaos que esto era mi 6 [señala $1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0$], ¿eh?, esto era el 6, que es este 6 [señala el de un nivel anterior, más arriba en la pizarra], ¿vale? Yo he escrito el 6 como $1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0$, pero también puedo escribir el 6... $0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0$. No es lo estándar, porque como los ceros ahí no aportan mucho, pues no es lo estándar, pero si no me quiero olvidar de una de las varillas y no quiero tener un problema, como tenía Pablo, pues yo añado ahí para escribir el 6 de otra forma, ¿vale? Entonces, moraleja que cuentan los *youtubers*, por ejemplo David Calle, dice: «vamos a pasar de base 16 a base 2, ¿qué se hace chavales? Mirad, ¿veis este 11 que está aquí? [señala el de arriba de la pizarra], pues escribís este 11 en base 2: 1, 0, 1, 1 [señala los coeficientes de la expresión polinómica de la parte inferior de la pizarra]; ¿veis este 6 que está aquí? [señala el de arriba de la pizarra], pues lo escribís en base 2, pero cuidadín chavales, que hay que poner cuatro, ¿por qué?, porque 16 es 2⁴». Y entonces dice: «vamos a escribir 6 en base 2 con cuatro: 0, 1, 1, 0». Y dice: «y ahora lo juntáis, fin». A mí no me vale porque yo no soy David Calle, yo no estoy de *youtuber*, *influencer*, superfamosa ayudando a los chavales a aprobar exámenes, que es un trabajo muy digno y que está bien, y además el tío es un *crack*, muy suelto, lo hace muy bien; yo estoy formando maestros, entonces tenéis que entender cómo

hemos pasado de aquí [señala la parte superior de la pizarra] a aquí [señala la parte inferior de la pizarra] a través de esto [señala la parte media de la pizarra].

Comentario 7: Ha relacionado también las varillas, algo manipulativo que ellos pueden ver. O sea, que da la teoría con esa visualización o esa parte que también se puede trabajar; todo el rato hace referencia a eso, que está bien. Y luego, esto del youtuber, pero bueno, les ha dado una receta que les da el youtuber, pero está incidiendo en que el maestro tiene que aprender también el porqué, no aprender una receta.

Entonces, la pregunta es: ¿se puede pasar de base 16 a base 2 sin pasar por base 10? Sí. Lo acabamos de hacer, ¿no? Es que me miráis con una cara... ¿Y por qué se puede? ¿Qué pasa si yo esto [el ejercicio] os lo doy en base 15 y, en vez de en base 16, todo el problema es en base 15?

A: Que sería $2^4 + 2^0$.

F: ¿ $2^4 + 2^0$ es 15?

A: O sea, no..., perdón. $2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0$.

F: Vale, y entonces tendría que ir haciendo todas las distributivas, todo el follón, ahí. ¿Y David Calle me podría dar el algoritmo...? Escribes, imaginaos el mismo número, ¿eh?, B6, en vez de en base 16, en base 15. ¿David Calle me puede decir...? Aquí tengo el 15, ¿no?, aquí tengo el 15 [los escribe encima de los 16], y David Calle me dice: «escribe esto [señala el 11] en base 2, escribe esto [señala el 6] en base 2, con tres y medio dígitos o cuatro dígitos o... tres dígitos, y lo pones junto. ¿Valdría ese algoritmo?

A: No.

F: No. ¿Vale?

Comentario 8: Ahí, mediante otra pregunta, está viendo si afianza que entender el algoritmo, entender el proceso, es más importante que la receta. Entonces, ha cambiado el..., ha hecho una pregunta y una alumna se ha lanzado... Y bueno, a partir de esa respuesta, intenta que vean eso, ha intentado ver que en ese caso no valdría la receta, ¿no? Les ha vuelto a hacer otra pregunta y yo creo que en este caso una chica ha contestado muy rápido.

O sea, que poder se puede pasar, vas con paciencia escribiendo cada una de las expresiones que aparecen, pero un paso directo solo se puede cuando una base es

potencia de la otra base, que es lo que hemos visto con 16, que es potencia de 2, que es 2^4 . ¿Está claro hasta aquí? ¿Sí?

Comentario 9: No sé si lo han entendido todos [se ríe].

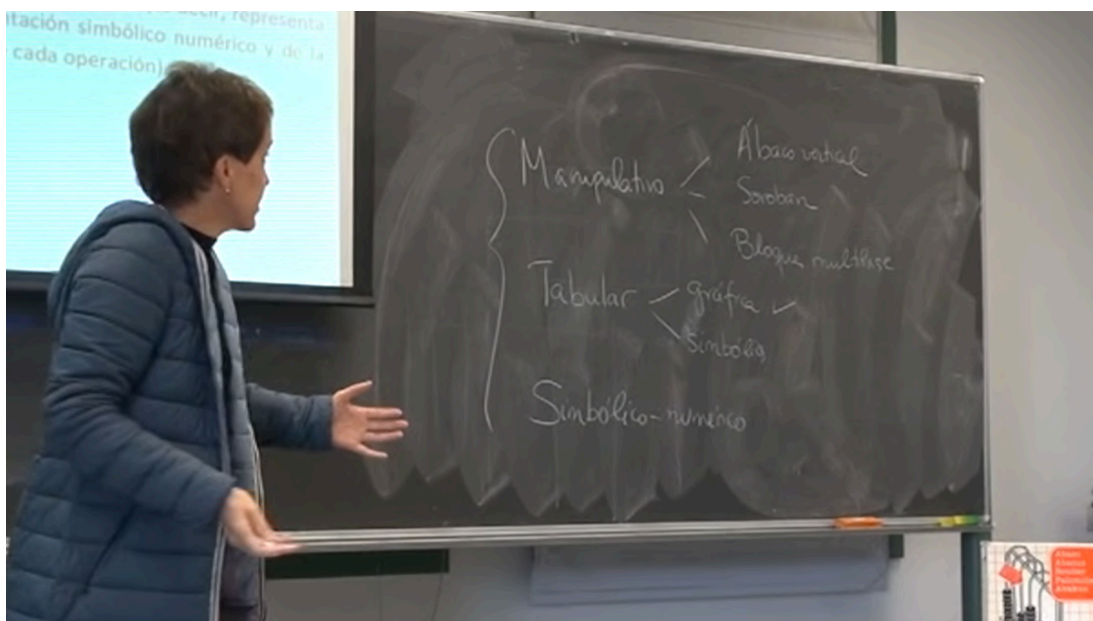
TRANSCRIPCIÓN DEL VÍDEO 3

Fragmento 1

[F = Formadora del vídeo]. [Comentarios de Jorge presentados en recuadros].

- F: Entonces, la idea es..., el ejercicio 4, que está proyectado en la pantalla, es el ejercicio 4 de la última hoja, de la hoja del dossier 2, con el que vamos a trabajar ya esta semana, ¿vale? En ese ejercicio hay cuatro operaciones, cuatro problemas, cuatro operaciones. Tenéis que hacer las cuatro operaciones..., representarlas de distintas maneras. Voy a poner en la pizarra de cuántas maneras, ¿vale? Entonces, acordaos que nosotros estamos trabajando con material manipulativo [escribe en la pizarra «Manipulativo»], ¿vale? Entonces, en primer lugar tenéis que representar esta suma $[210 + 543]$, esta suma $[315 + 429]$, esta resta $[135 - 24]$ y esta resta $[704 - 45]$, por partes [va señalando en el PDF proyectado en la pantalla], ¿no?, empezáis con la primera... Tenéis que representarlo [escribe en la pizarra] con ábaco vertical, después en el sorobán y después con los multibase, ¿vale? Y tenéis que tener las tres representaciones del proceso delante para saber comparar cada dos, ¿vale?, para saber entender cómo se traduce una en otra. Lo que no quiero es que me digáis: « $210 + 543$ son 753; Nuria, te he representado 743* en el ábaco vertical, en el sorobán y en los bloques multibase». No quiero la representación del resultado, quiero la representación del proceso, de la suma, de la idea «suma». ¿En qué os tenéis que basar?, en la definición de la suma que vimos el otro día, ¿no?, que es: elijo un representante de uno, elijo un representante del otro y hago la unión, agrupo, junto, como lo queráis pensar, ¿vale? Entonces, hay que representar el proceso, el proceso, no solo el resultado final de ese proceso. Entonces, tenéis que representar el proceso de tres maneras en el sistema de representación manipulativo [señala lo que ha escrito antes en la pizarra], ¿vale? Y en paralelo [empieza a escribir en la pizarra] tenéis que representar el proceso en el sistema de representación simbólico-numérico; el enunciado está dado en ese sistema de representación, ¿vale?, esto es sistema de representación simbólico-numérico, pues tenéis que representar el proceso, las dos sumas y las dos restas, en ese sistema, ¿vale? Y luego, en medio [escribe en la pizarra], hay una representación que es formato tabla o tabular, de la que no he hablado explícitamente, pero que me gustaría que construyerais vosotros, ¿vale?

Necesito que construyáis, por ejemplo, esta suma [señala $210 + 543$], que la hagáis en tabla, con una tabla, como se os ocurra a vosotros diseñar la tabla, ¿vale? La tabla [escribe en la pizarra] puede ser más gráfica, puede tener características gráficas, o puede tener características más simbólicas; a mí me va a interesar más la que tenga características más gráficas, luego ya veremos en detalle cómo, pero tenéis que intentar construirlo vosotros sin que yo os haya hablado de eso explícitamente, ¿vale?



Entonces, paso 1, aquí [señala la parte de representación manipulativa de la pizarra], en paralelo paso 2, simbólico-numérico [lo señala en la pizarra] y luego ya, según vayáis trabajando los cuatro ejemplos, igual ya se os va ocurriendo cómo representarlo con una tabla y cómo trabajar con una tabla ese tipo de operaciones. ¿Está claro? Yo me voy a pasar por las mesas y me vais preguntando todas las dudas que os surjan. No voy a pedir que me mandéis nada, ¿vale?, porque todavía no he revisado las últimas fotos que me habéis mandado, con lo cual estoy un poco desbordada; como no sois muchos, yo voy por vuestros puestos.

Comentario 1: Bueno, son las instrucciones, está bien, me gusta mucho la actividad. Es interesante, relaciona mucho la teoría que han visto, da las órdenes bastante claras, qué es lo que pide de ellos, con el material delante...; en fin, yo creo que queda bastante claro. Después, me ha gustado que deje algo libre, que no lo ha explicado, que ellos lo hagan; esta

parte de la tabla, que ellos lo hagan, me parece interesante. La actividad está bien presentada y, bueno, ella va a dejarles que vayan trabajando, poniendo mucho énfasis, que está muy bien, en lo que es el proceso, más que presentarles aquí «esto es un ábaco y juega con él»; lo importante, el trabajo con lo manipulativo tiene que estar relacionado con los aspectos básicos del sistema posicional, de las operaciones..., o sea, que va muy enfocado a que trabajen los conceptos, más que la manipulación de por sí, ¿no? Está comentando algo también sobre las entregas y tal, pero bueno.

Ahora bien, en el grupo anterior han decidido grabar pequeños vídeos o hacer fotos de los procesos que iban construyendo por llevárselo como material para estudiar, a mí me parece una buena idea, pero ya vosotros hacéis lo que queráis, a mí no me lo tenéis que mandar, pero si queréis, una vez que hayáis construido, por ejemplo, con el ábaco japonés, imaginaos, esta resta de aquí [señala el PDF en la pantalla], y decís: «ah, pues nos vamos a grabar», uno lo hace otro lo graba y lo tenéis de recuerdo, ¿no?, para cuando tengáis que estudiar. ¿Cómo voy a pedir yo eso en el examen? Pues no lo puedo pedir porque no puedo llevar un sorobán para cada uno porque tengo un día, 2 horas y media o 3, para haceros el examen final de la asignatura; pero para mí esto es muy importante, entonces yo voy a pedir que me representéis gráficamente, gráficamente, vuestro proceso de respuesta con un ábaco vertical, con un sorobán o con los bloques multibase, que es lo que yo luego voy a hacer aquí en la sesión final de discusión cuando acabemos esta hora de clase. Yo no voy a coger el ábaco aquí, lo voy a poner delante de todos y tal —podría hacerlo, pero no lo voy a hacer—, lo voy a hacer representando gráficamente el material manipulativo y así es como lo voy a pedir el día del examen, porque os voy a dar un cuadernillo y lo tenéis que hacer gráfico, ¿vale? Bueno, pues empezad, están escritas en un orden muy concreto, empezad a hacerlas en ese orden y luego ya discutimos sobre por qué están puestas en ese orden, ¿vale?

Comentario 2: Lo relaciona con el examen, que es un poco lo que les va a evaluar. En ese sentido, eso les va a poner muy alerta. Las instrucciones son claras, quieren construir un poco esa manera de representar..., también por optimizar en el examen... En principio, la actividad ya está presentada y no ha habido dudas.

Fragmento 2

[F = Formadora del vídeo]. [A = Alumnos (A1, A2 y A3)]. [Comentarios de Jorge presentados en recuadros].

- A1: Estamos rayados con la última resta.
 F: Vale, a ver, empezad.
 A1: Son 704 - 45.
 F: Vale.
 A1: Entonces, aquí no le podemos restar 5.



- F: Así tal cual está, puedes restar..., ¿cuántas puedes quitar?
 A1: Cuatro.
 F: Cuatro, vale, sí.
 A1: Entonces voy a suponer que aquí [señala la varilla de las decenas] hay un 1.
 A2: No, que hay 10.
 A1: Que hay 10, para que sea 14...
 F: A ver, olvídate de los «suponer». Tú dices: «tengo que quitar 5», ¿no?, quito 1, quito 2, quito 3, quito 4 [quita cuentas de la varilla de las unidades] y ahora ponme aquí más para que yo quite, tal y como está.



- A1: Habría que poner 10 y quitamos 1.
- F: Pero ¿cómo me ponéis..., cómo me ponéis ahí? A ver Pablo.
- A2: ¿Que lo ponga?
- F: No, no, que me digas... Yo aquí [señala la varilla de las centenas] tengo ahora mismo 700, ¿no? Escribe 700 de otra forma para que yo tenga bolas...
- A1: Aaaaah, hay que añadir una aquí [señala la varilla de las decenas].
- F: Venga, a ver.
- A2: [El alumno A2 quita una cuenta de la varilla de las centenas y la pone en la de las decenas].
- F: ¿Aquí sigue poniendo 700?
- A1: No, no, no, hay que poner una nueva aquí [vuelve a poner la cuenta en la varilla de las centenas —la que había puesto en la varilla de las decenas el alumno A2— y pone una nueva en la varilla de las decenas].
- F: A ver [quita la cuenta de la varilla de las decenas]. Teníamos 704, hemos quitado 4, tengo 700, ¿vale?
- A1: Sí.
- F: Ahora, escribe 700 de otra forma para poder quitar otra.
- A1: Pues...
- F: ¿Cómo podéis escribir 700 de otra forma?
- A1: Que aquí [señala la varilla de las decenas] haya 9...
- F: Venga.
- A1: Y aquí [señala la varilla de las unidades]..., 9.

F: A ver, para que haya aquíiii... [señala la varilla de las decenas], vamos a ver, ¿cómo consigo aquí decenas? Sin cambiar el número...

A1: Si quito esta... [quita una cuenta de la varilla de las centenas].



F: Venga, muy bien.

A1: Pongo aquí 10 [señala la varilla de las decenas].

F: Venga, dale.

Comentario 1: Aquí ha visto enseguida que estaban atascados. Yo creo que la alumna sí que sabía..., bueno, estaba intentando seguir el proceso de «tengo que quitar una», pero no había. Entonces, ahí ha tenido que empezar a dar alguna pista; ella, directamente, muy visual, les ha quitado las cuatro primeras y ha dicho: «bueno, ¿y ahora qué hacemos?». Ahí sí que ven la manera de «cómo generamos otra», ¿no? La profesora no contesta, para, está haciendo que el otro alumno también... Pero bueno, han seguido bastante atascados, ha tenido que decir un par de ideas, ¿no? La chica parece que sabe que tiene que ir pasando una, pero todavía no tienen claro qué es pasar una, que se transforme en diez...; todavía no lo tienen muy asentado. De nuevo, parecido a lo otro, ¿no? En cuanto hay alguna idea, «venga, vamos a probarla», ¿no?, se propone una cosa, se ve qué ocurre, si ve que no llegan, dirige; apoya mucho eso, ¿no?, «a ver, ¿cómo hacemos?», se queda en silencio, dan una idea y les dice que tiren por ahí a ver qué tal; está guiando para que lleguen.

A1: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10.

A3: ¡Ah, vale!

Comentario 2: Ahí ya lo han encontrado [lo dice sin parar el vídeo].



F: ¿Ahora aquí pone 700?

A1: Sí.

F: ¿Y cómo está escrito 700?

A3: Mal.

F: 6×10^2 , ¿no?, 6×100 , más...

A2: 10×10^1 .

F: 10×10^1 , muy bien.

Comentario 3: Está relacionándolo siempre con la parte algebraica, la representación del número, su equivalencia con la posición y con la representación numérica, ¿no? Trabaja siempre con una razón, el material con un sentido, le tiene que dar un sentido a entender la estructura de los números.

Ahora, ¿puedo quitar aquí [señala la varilla de las unidades] que quería quitar una? ¿Tengo?

A1: No.

F: No, ¿cómo puedo volver a escribir 700 para tener aquí [varilla de las unidades]?

A1: Pues quito de estas [quita una cuenta de la varilla de las decenas] y añado 10 aquí [señala la varilla de las unidades].

F: Vale, venga.



F: Vale, ¿y ahora puedes quitar la que te faltaba por quitar?

A1: [La estudiante A1 quita una cuenta de la varilla de las unidades].

F: Ya está. Ya habéis quitado 5 y teníais que quitar 45, ¿no? ¿Cuánto os falta por quitar?

A1: Sí, ahora aquí [señala la varilla de las decenas] hay que quitar 4.

F: Pues ya está, ¿no?

A1: Ah, vale, vale. Gracias.

Comentario 4: En el fondo ella va preguntando, ellos son quienes al final van a responder. Ahí, la cara del chaval está diciendo que lo ha visto, ¿no? Ha intervenido para desatascar ese momento, pero han llegado a entenderlo. No sé esta chica que está de espaldas [se ríe].



- F: ¿Entonces qué habéis hecho para reescribir el 700...? O sea, yo tenía 700 ahí, tenía aquí 700 [deja el ábaco con 7 cuentas en la varilla de las centenas], ¿qué habéis hecho?
- A2: Como es sistema decimal, pues aquí [señala la varilla de las decenas] hay 10, porque... representamos un 0, pues quitar una de aquí [varilla de las centenas] y ponerle las 10 aquí [varilla de las decenas] para luego restarlas aquí [varilla de las unidades].
- F: O sea que habéis..., ¿agrupado o desagrupado?
- A1: Desagrupado.
- A2: Aquí desagrupado.
- F: Desagrupado. Habéis desagrupado una centena en 10 decenas y luego una decena la habéis desagrupado en 10 unidades.
- A1: Vale, es que cuando tú lo haces en papel no haces esto así.
- F: Ah, pues dime entonces qué es lo que haces en papel.
- A1: Claro, lo haces muy mental. O sea, en verdad sí que haces eso, pero... bueno, ya me has entendido.

Comentario 5: Les pregunta que hagan el razonamiento entero, les hace una pregunta para que lo vuelvan a hacer, que vean cómo ha sido el proceso. Más o menos lo tenían un poco, pero formalizarlo y verbalizarlo..., poco a poco, ella ha ayudado un poquito ahí..., está afianzando un poco ese proceso. La chica esta ha visto esa relación con cómo lo hace en el papel, que es muy mecánico; al principio, no le ha visto relación, pero luego ya sí. Está bien.

- F: No, no, pero lo tienes que explicar porque luego os he pedido que lo hagáis simbólico...
- A1: Ya, ya, ya.
- F: Entonces, simbólico tienes que explicarlo conectado con esto.
- A1: Vale, vale.

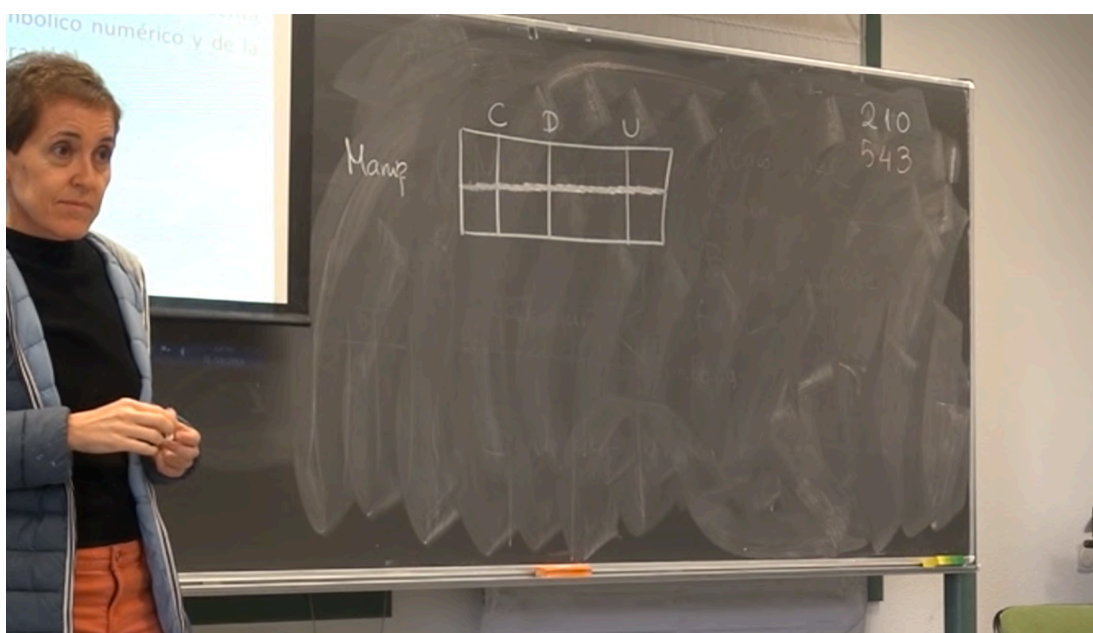
Fragmento 3

[F = Formadora del vídeo]. [A = Alumnos]. [Comentarios de Jorge presentados en recuadros].

F: Vamos a corregir uno, el primero, ¿vale? Me dan $210 + 543$, ¿vale?, con símbolos. Voy a representarlo..., vamos a empezar con manipulativo y voy a ejemplificar con el sorobán, que es el que parece que más trabajo cuesta, ¿vale? Entonces, en el sorobán, cuando lo representéis gráficamente el día del examen, o ahora en vuestro cuaderno si tenéis que tomar notas, es muy importante marcar la barra del medio, porque la proximidad de las bolas a la barra del medio es la que te indica qué número está representando, ¿vale? Y ahora, dado el problema que me han planteado, ¿cuántas varillas pensáis que necesito escribir?

A: Tres.

F: ¿Tres varillas? Pongo una varilla, dos varillas, tres varillas. Esta, unidades, decenas, centenas. Esta la pongo un poco más gorda para que se note que es la barra de madera del medio, ¿vale? Y ahora, ¿cómo dibujo 210?



A: Pues 0 unidades.

F: 0, o sea que aquí no pongo nada pegado a la barra, ¿no? [señala la varilla de las unidades]. ¿Aquí? [señala la varilla de las decenas].

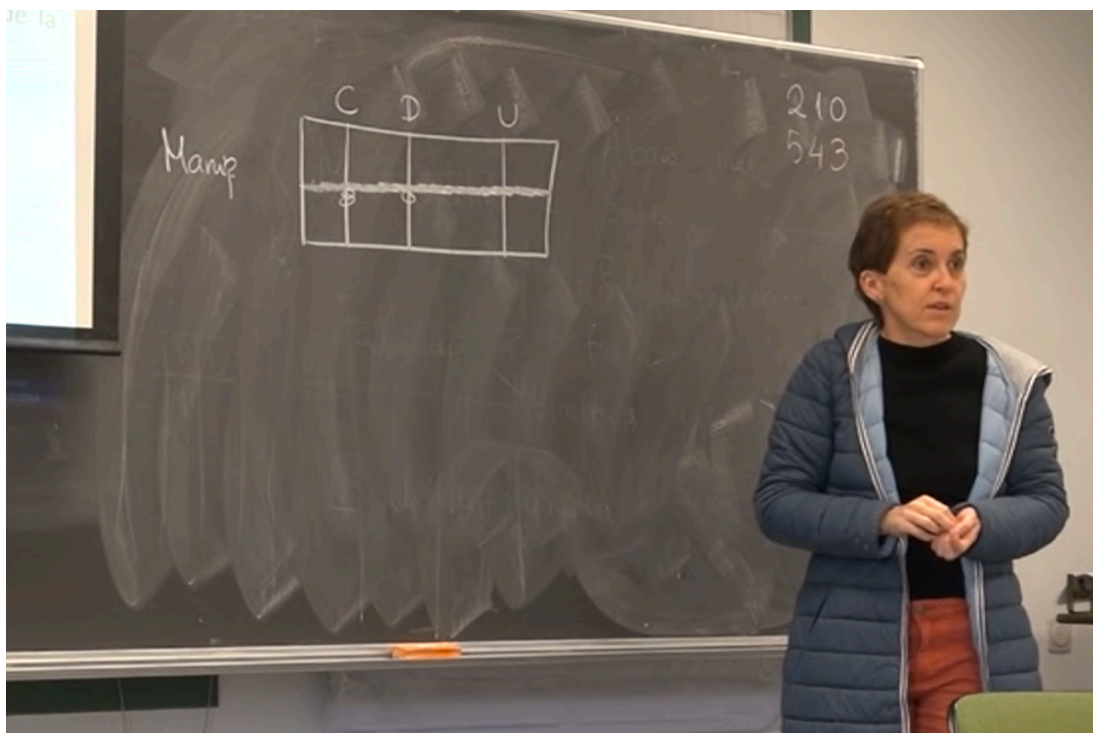
A: 1 decena.

F: Una pegada a la barra, ¿arriba o abajo?

A: Abajo.

- F: Abajo, o sea que aquí va una.
- A: Y 2 centenas pegadas a la barra de abajo.
- F: Pegadas a la barra, abajo. Una y dos, ahí está. Eso es 210.

Comentario 1: En la explicación, de nuevo, va pidiendo la participación de los alumnos, es decir, lo plantea de manera visual, pero hace que algún alumno vaya dándole los pasos que va escribiendo.

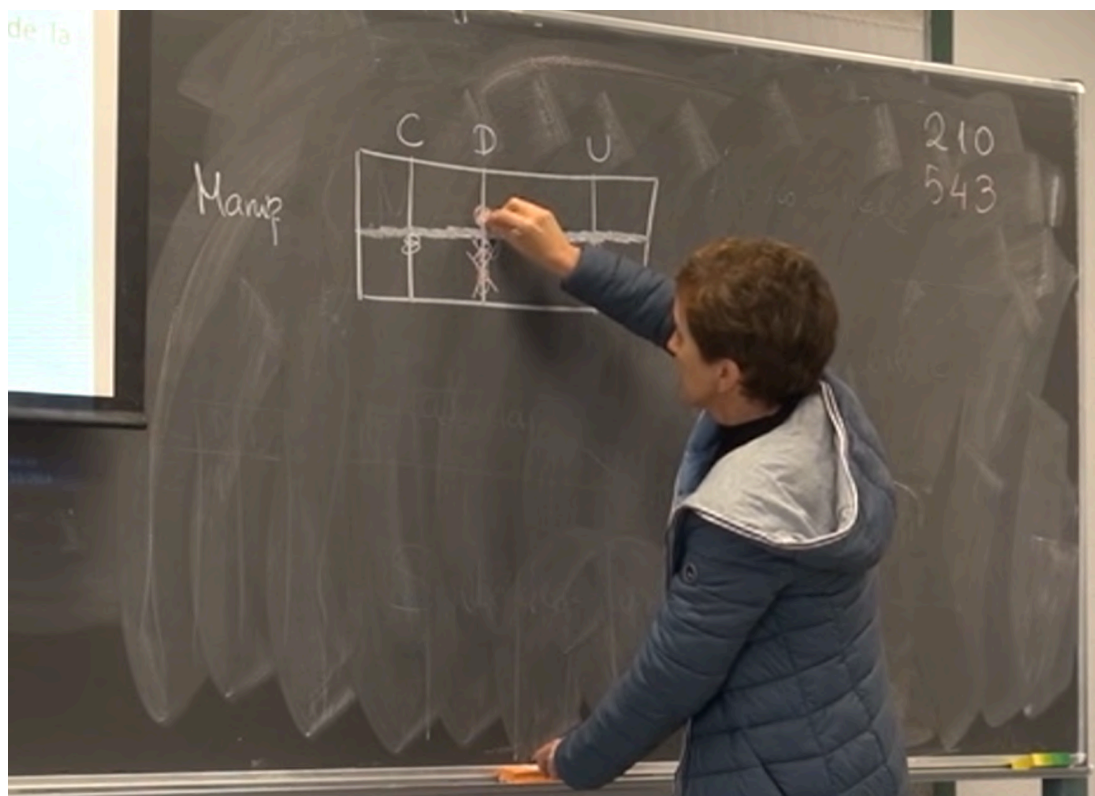


Y ahora, tengo que sumar 543, es decir, que tengo que añadir 543 unidades ahí. Aprovecho la estructura, ¿vale? Entonces, añado 3 unidades, en la varilla de las unidades, que son 3 aquí abajo, ¿no?, 1, 2 y 3 [las dibuja en la varilla de las unidades]. Después añado 4 decenas, en la varilla... 1, 2, 3, 4, ¿vale? [las dibuja en la varilla de las decenas], 4 decenas.

- A: Pero cambiamos...
- F: Pero...
- A: Bajamos una de arriba y quitamos las de abajo.
- F: Porque no tenéis 4, ¿vale?, ya no había suficientes, ¿por qué?, porque las bolas de arriba valen 5, entonces decís: «no pasa nada, estas, como eran 4 y 1, 5, se representan ahí arriba», ¿vale?

Comentario 2: Ahí, por ejemplo, ha escrito algo que no estaba bien en el fondo esperando que algún alumno le corrigiese de alguna manera. Sigue con un proceso muy natural y

espera un poco... y algún alumno le ha... Y bueno, le refuerza; toda la clase va siguiendo el hilo, ellos van corriéndole a ella, ella les corrige a ellos...

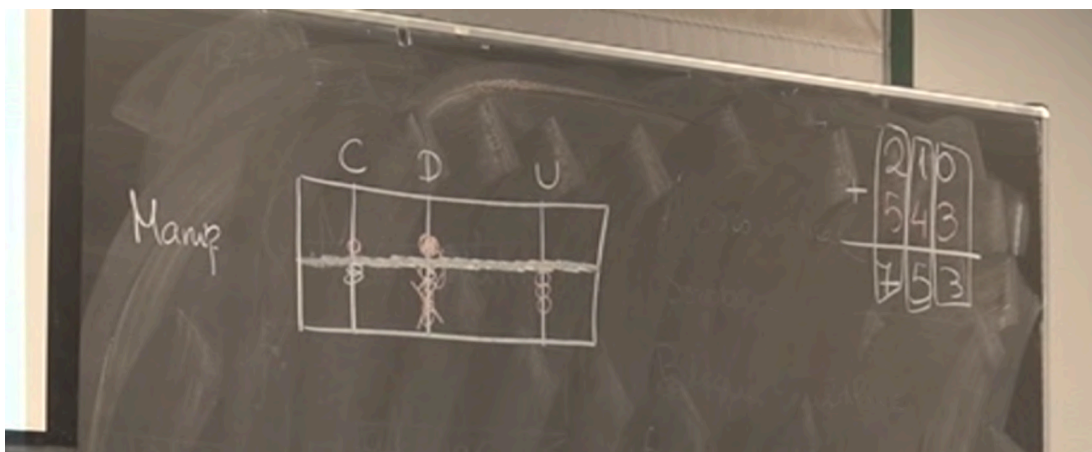


Y luego, 5..., tengo que añadir 5 centenas, ¿cómo lo hago?

A: Pues 1 arriba.

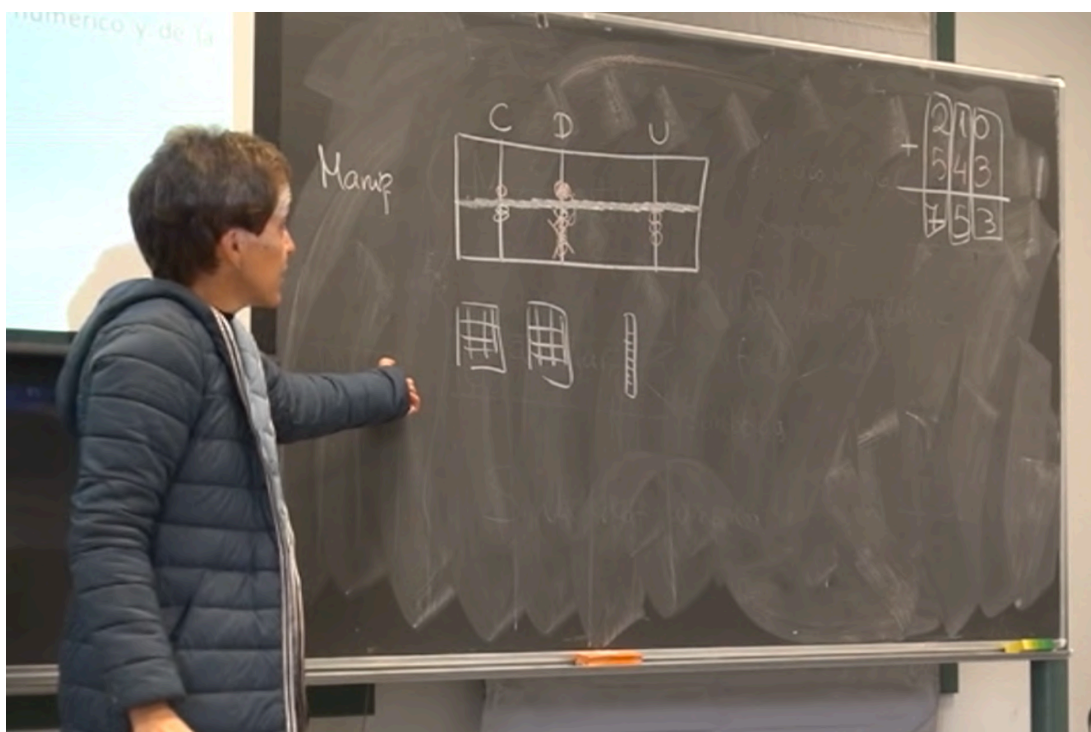
F: Una de arriba la bajo directamente o podría ir: «1, 2, 3, ya tengo 5, las subo ahí, 4, 5» [va señalando en la varilla de las centenas], ¿vale? Puedo hacerlo de dos formas distintas. Pero si aprovecho la estructura del ábaco, de manera que las bolas de arriba valen 5, como tengo que añadir 5, pues directamente ya añado ahí esas 5 [dibuja una bola en la varilla de las centenas, en la parte superior, pegada a la barra horizontal], ¿vale?

Entonces, [representa ahora el resultado en la suma con el algoritmo tradicional de forma simbólico-numérica a partir de lo que ha obtenido en la representación con el sorobán] me quedan 5 y 2, 7, aquí me quedan 5, y aquí me quedaban 3. Entonces, si yo lo represento así y voy sumando por columnas, tal cual he ido haciendo en el ábaco, tengo 0 unidades y 3 unidades, 3 unidades, 1 unidad y 4 unidades, 5 unidades, perdón, decenas, 2 centenas y 5 centenas, 7 centenas. Vertical, lo he colocado vertical por parecerme a la estructura del ábaco, ¿no?, para tener en cuenta la «posicionalidad», ¿vale?, del sistema.

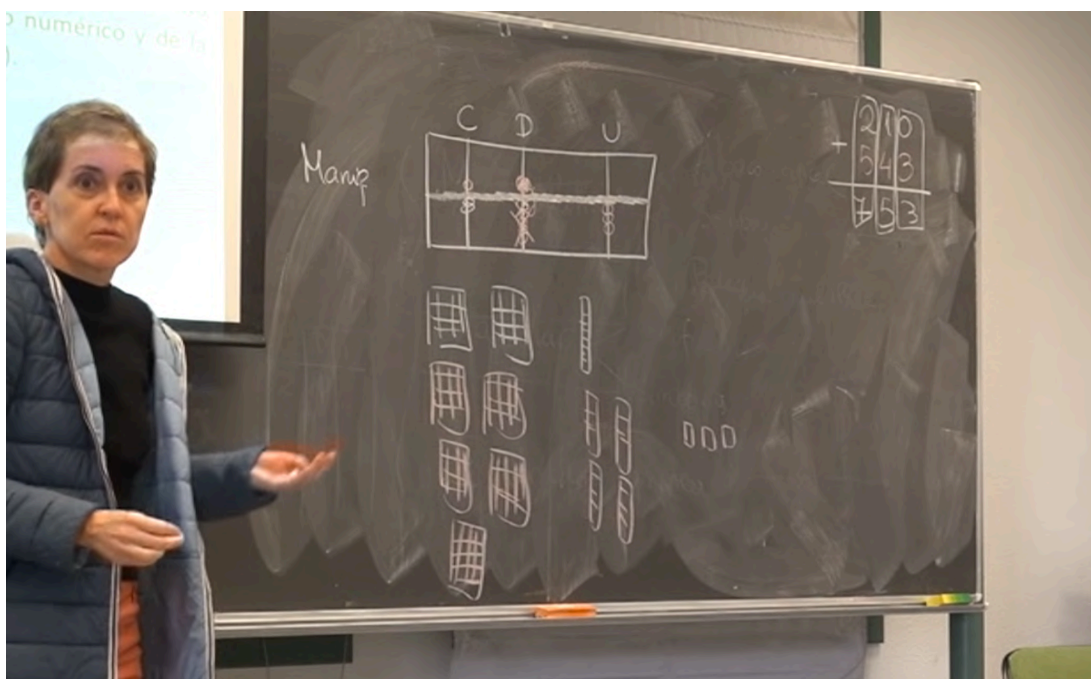


Entonces, he traducido al simbólico lo que he hecho aquí manipulativamente al escribir en simbólico en columnas y represento con cada columna cada una de estas [señala las varillas del sorobán de la pizarra]. Y luego, la escritura, sí que tengo que tener en cuenta que estos son 5 [señala las decenas de la suma en simbólico] con lo cual van arriba [en el sorobán] y esto son 7 [señala las centenas de la suma en simbólico], pues son 5 y 2 [en el sorobán], ¿vale?

Bloques multibase, bloques multibase, pongo aquí 210, ¿no?, que son 1 y 2 placas de 100 y 10, una decena; este es el 210.



Y ahora agrupo 543; una, dos, tres, cuatro y cinco [dibuja 5 placas de 100 unidades], añado, ¿vale?, 500. 40: una, dos, tres, cuatro [barras de 10]; y 3: uno, dos y tres [unidades]. Y ahora lo pongo todo junto. ¿Vale?

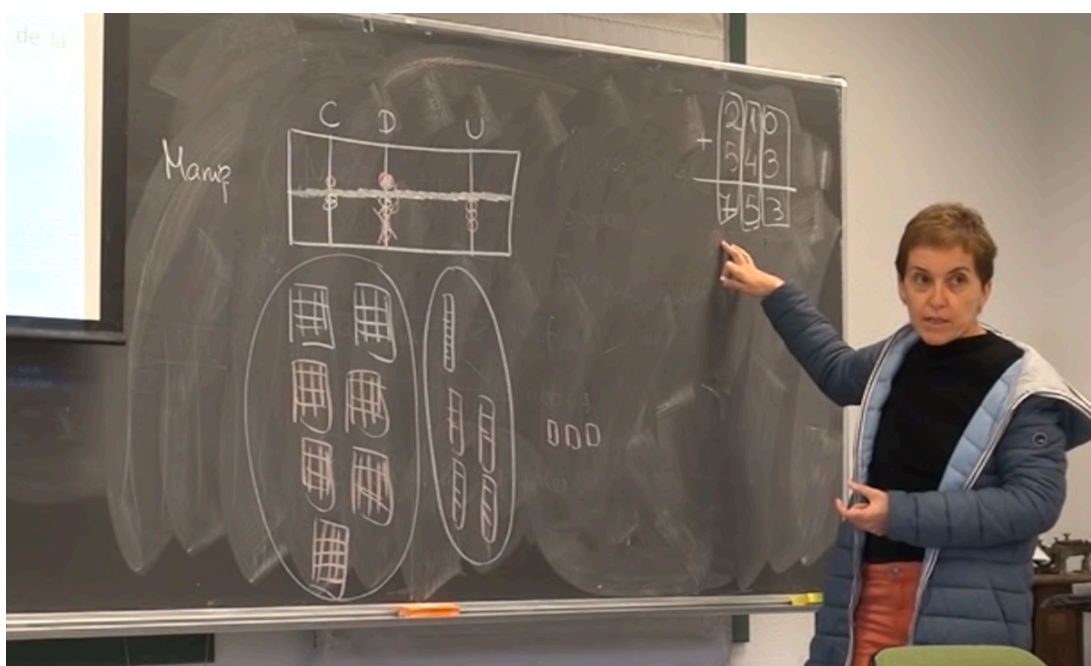


Y digo: «aquí tengo 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 [placas de 100]», ¿necesito agrupar? [Rodea con una línea todas las placas de 100].

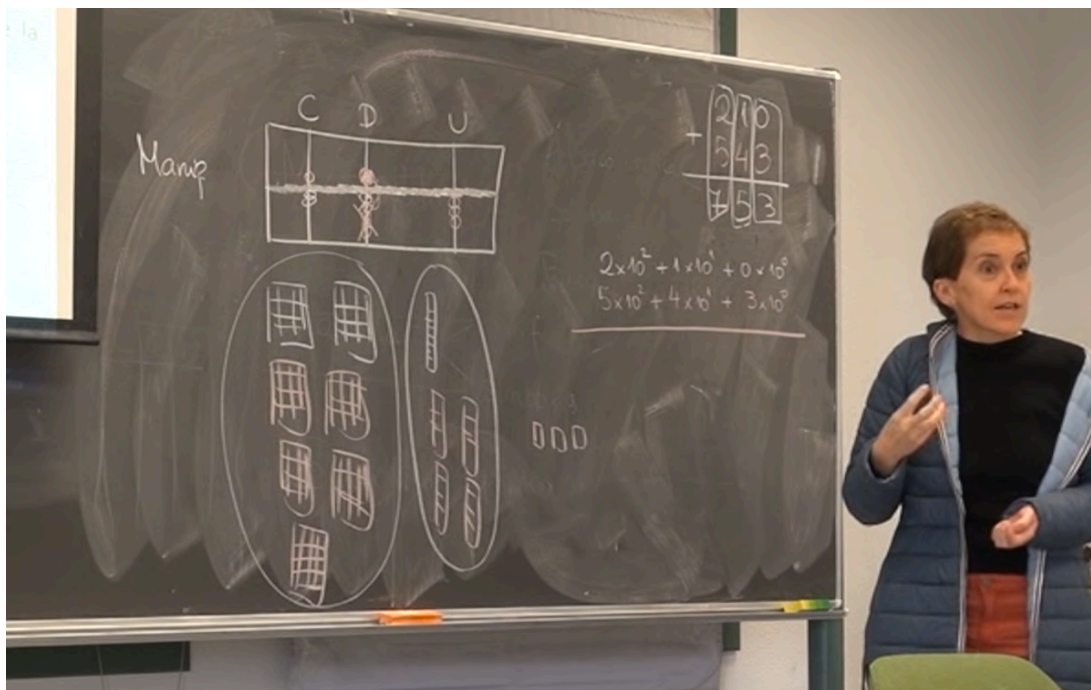
A: No.

F: No necesito agrupar. Aquí tengo 1, 2, 3, 4, 5, 6, 5, ¿necesito agrupar estos 5 de alguna manera? [Rodea con una línea todas las barras de 10]. No porque es base 10. Y aquí tengo 3, ¿vale? O sea, que me vuelve a salir 2, 4, 6, 7 [centenas; señala la suma en simbólico], 2, 4, 5 [decenas], 5 [señala la suma en simbólico] y 3. Y veo la conexión de uno con otro, ¿vale? ¿Está claro hasta aquí?

A: Sí, eso sí.



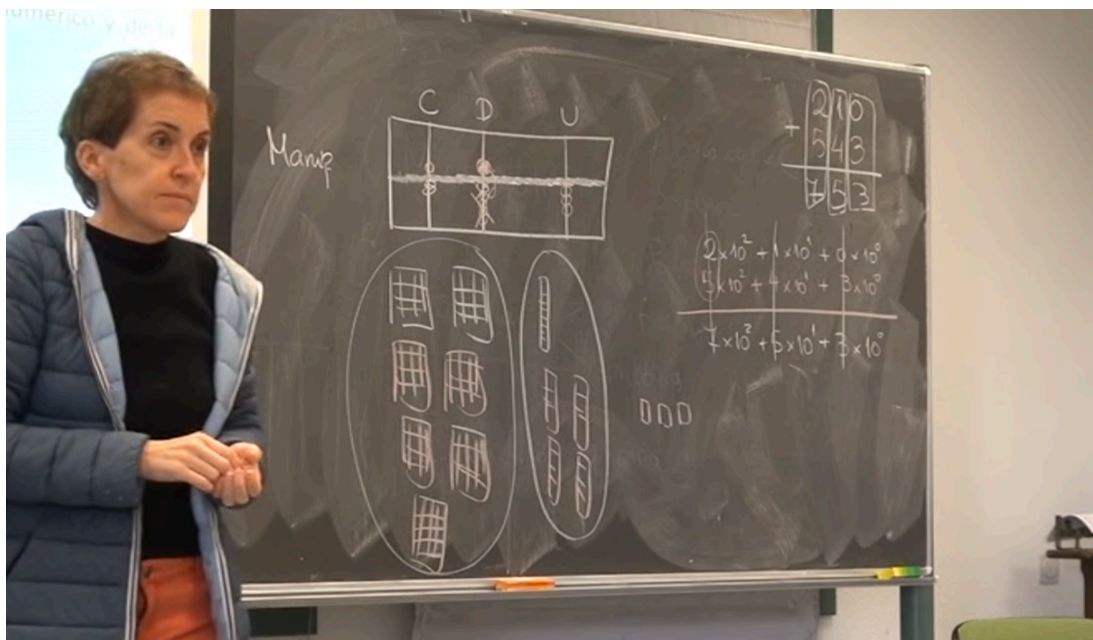
F: El que quiera escribirlo simbólico-numérico de otra manera en la que se vea la «posicionalidad» del sistema, podría escribirlo de la siguiente forma: $2 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 0 \times 10^0$, ese es el primer sumando; segundo sumando, $5 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 3 \times 10^0$; y sumo.



Y ahora, al sumar, utilizo la propiedad conmutativa, para colocar los sumandos en el orden que quiero, y asociativa, para ir organizando, ¿vale? O sea, que este [señala 5×10^2] —que, si lo coloco seguido, estaría aquí el cuarto [señala detrás de 0×10^0]— lo quiero colocar el segundo para agruparlo con este [señala 2×10^2], este [señala 4×10^1] —que estaría el quinto [señala detrás de 0×10^0]— lo coloco el tercero para agruparlo con este [señala 1×10^1], y este [señala 3×10^0] lo agrupo con este [señala 0×10^0]. Y ahora, al agrupar, ya me quedan 5 y 2, propiedad distributiva, 7×10^2 más, 4 y 1, 5×10^1 más, 0 y 3, 3×10^0 . Pero ahí estoy utilizando la asociatividad de la suma, la conmutatividad de la suma y la distributiva de la suma y el producto de números enteros, ¿vale?

Comentario 3: Bueno, en esta parte de la explicación ha estado relacionando bastante bien lo que es la operación con la parte visual. Lo va haciendo bastante claro, yo creo, ha parado después de cada explicación, ha preguntado si lo entendían, si había dudas; parece que está todo bastante claro en los dos casos. Y luego, lo está relacionando con la parte más simbólica del algoritmo. En principio, aquí la explicación está siendo una explicación normal.

Pero si lo coloco así, veo esto, esto y eso [señala los coeficientes que acompañan a 10^2 , 10^1 y 10^0], que es lo mismo que esto, esto y eso [señala el 7, 5 y 3 del resultado de la suma en la forma simbólico-numérica], que es lo mismo que esto, esto y esto [señala los bloques multibase en la pizarra] y que es lo mismo que 1, 2 y 3 varillas [señala las varillas del sorobán en la pizarra]. ¿Está claro hasta aquí?



- A: Sí.
- F: Ahora, ¿qué diferencia hay entre esto y la siguiente suma que me plantean ahí [en el PDF proyectado en la pantalla]? $316 + 429$.
- A: Que me paso de unidades y tengo que pasar a las decenas.
- F: Que cuando agrupo aquí, por ejemplo [bloques multibase], o cuando agrupo aquí [sorobán], o cuando agrupo aquí [expresiones de sumas y productos de potencias de 10], aquí aparecen más de 10 [señala al 3 de 3×10^1]. En algún sitio aparecen más de 10, por ejemplo, cuando tengo 9 unidades y 6 unidades, aquí aparecerían 15 fichitas pequeñas [bloques multibase], aquí tendría que representar 15 [sorobán] y aquí aparecería 15×10^0 . Pero como estamos en base 10, no puedo dejarlo así, tengo que agrupar, tengo que agrupar. Entonces, agrupo 10 y dejo 5, y las 10 que agrupo las paso al siguiente valor, es decir, pego 10 fichas y construyo una barra [bloques multibase], agrupo 10 y me sale otra bola aquí en el ábaco, aquí abajo [parte baja de la varilla de las decenas], o agrupo 10 y me sale uno más aquí [en 5×10^1] y aquí [en 3×10^0] dejo las que se quedaban sueltas, las 5, ¿vale? O sea, que la única diferencia es que aquí, después de representar cada cantidad

y de ir poniendo por orden el valor de cada una, tengo que agrupar porque en algunos sitios tengo 10 o más, ¿vale? Es la única diferencia.

Comentario 4: Bueno, en cuanto al estilo, remarca muchas veces lo importante con la voz. Yo creo que está bien porque cuando remarca las cosas importantes, para, remarca bastante bien. De nuevo, pregunta, hay un momento en el que cambia, ¿no?, la llevada o no... Ha preguntado, ha visto que alguien ha contestado enseguida, con lo cual yo creo que parecía claro que veían la diferencia. Está remarcando mucho la correspondencia entre las tres. A mí me está quedando claro [se ríe].

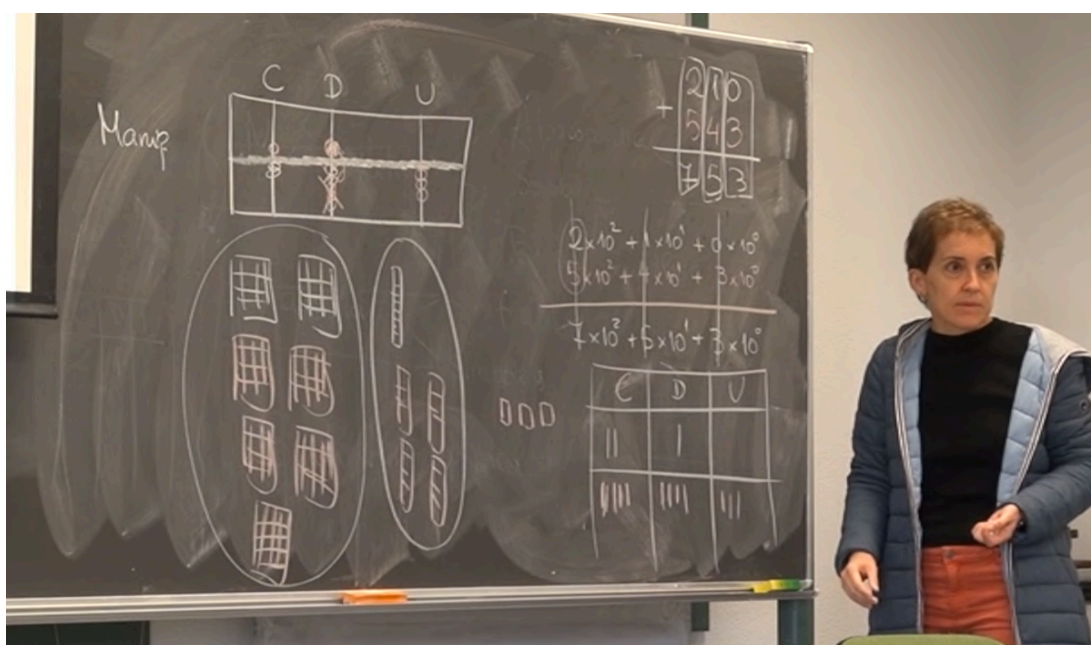
Y ahora, si quisiéramos representar esto en formato tabla, como tenía Martín, ¿no? ¿Cuántas columnas pondré yo en la tabla?, ¿qué me pide el cuerpo? Tengo que dibujar una tabla, ¿vale?, vamos a dibujar una tabla [comienza a dibujarla en la pizarra], con filas y columnas, ¿cuántas columnas pongo?

A: Tres.

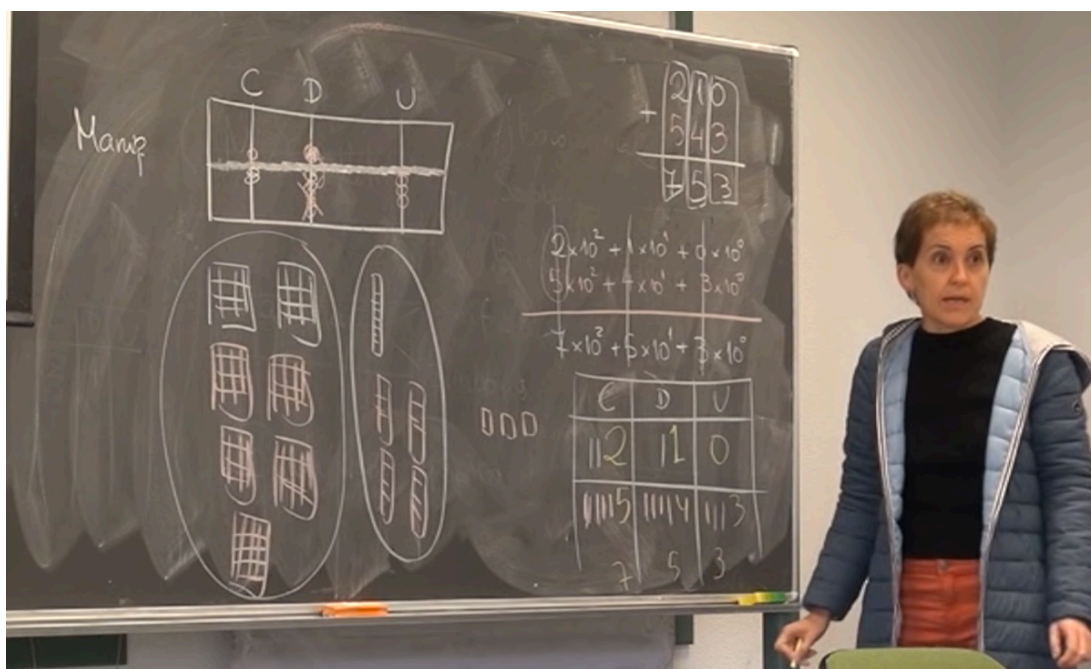
F: Tres, ¿por qué tres?

A: Centenas, decenas y unidades.

F: Unidades, decenas y centenas, ¿vale? Y entonces, represento el primer número, 210: 1, 2, 1, eso es 210 [pone dos rayas en la primera casilla de las centenas y una en la primera de las decenas]. Represento el segundo número, 500: 1, 2, 3, 4, 5; 40: 1..., bueno, en rosa, ya puestos..., 1, 2, 3, 4, 5; 40: 1, 2, 3, 4; y 3: 1, 2, 3. Y agrupo: ¿cuántas unidades tengo al final?, 3, ¿cuántas decenas tengo al final?, 5, ¿cuántas centenas tengo al final?, 7, fin.



Este sistema de representación es icónico-gráfico porque he representado aquí las cantidades con palitos, pero tiene una estructura especial porque está en una tabla, ¿vale? Entonces, vamos a decir que es un sistema de representación tabular-gráfico. Si en vez de poner aquí gráficos, yo hubiera dicho: «oye, mira, no me lío con los gráficos, ya puestos, como ya controlo mejor los símbolos, pues voy a poner aquí 210 y aquí abajo voy a poner 543 y luego ya sumo: 4 y 1, 5; 5 y 2, 7; 3 y 0, 3», ¿vale?



Sería tabular, tiene una estructura tabular, no es puramente simbólico-numérico, tiene una estructura tabular, pero con números dentro, tabular-numérico, ¿vale? Entonces, yo voy pasando de lo más concreto, que sería: «mi madre me ha dado 316 euros y mi abuela 429, ¿cuántos euros tengo en total?», después paso a manipular, con ábacos verticales, con ábacos japoneses, con bloques multibase..., y cuando interiorizo bien eso, digo: «ostras, venga, lo voy a poner en una tabla gráfica y voy a indicar lo que me indica cada varilla o lo que me indica cada agrupamiento de los bloques multibase, que es posición, en las columnas de una tabla, y ahí voy a poder marcarlo con símbolos». Esta tabla con símbolos se llama tablero de posición, porque tengo las posiciones indicadas —unidades, decenas y centenas—, y es uno de los recursos que más utilizan en el método famoso este Singapur, que habréis visto o habréis oído hablar de él, ¿vale? Entonces, ¿qué están haciendo?, están haciendo una transición de los más concreto, pasando por lo manipulativo, hacia lo abstracto, que sería..., esto es lo más abstracto [señala

las expresiones de sumas y productos de potencias de 10] y esto es lo abstracto que se trabaja en primaria [señala la suma hecha en el registro de representación simbólico-numérico], ¿vale? Pero no trabajan directamente con esto, vamos pasando..., concreto, concreto, concreto, concreto [de forma manipulativa], voy intentando abstraer un poco, pero tengo mis gráficos que me ayudan a visualizar lo que estoy haciendo [de forma tabular], y finalmente mi objetivo es escribirlo simbólico-numéricamente, de forma abstracta, ya al final.

Comentario 5: Yo creo que ahora ha recapitulado. Les ha comentado la tabla; yo pensaba que iba a trabajar con ellos porque les había ofrecido que ellos hicieran esa tabla, pero no ha habido un trabajo de ver cómo se les había ocurrido a ellos o no; yo creo que la tabla la quería trabajar ahora, yo creo que darles un poco la tabla..., bueno, lo había entendido mal, que trabajaran ellos un poco de qué manera podríamos representar en una tabla... Entonces, bueno, la recapitulación que ha hecho está muy bien porque le da un sentido a todo lo que están haciendo y de alguna manera le da un porqué, el trabajo de primaria con el problema concreto, cómo lo van formalizando para visualizarlo, el potencial que tiene visualizarlo, y luego al final el porqué de esa tabla. Le da un poco sentido a eso que van a hacer, a eso que les va a pedir en el examen, etcétera. Ha recapitulado y luego ha dicho lo de Singapur, ha entrado en esa tabla, le está dando propiedades, etcétera.

¿Cómo habéis trabajado mayoritariamente vosotros en primaria cuando estabais haciendo sumas de este estilo? ¿Desde aquí [señala lo manipulativo] o desde el final [señala lo simbólico-numérico]?

A: Desde el final...

A: Yo con las de centenas, decenas y unidades, las cajas...

F: Las cajas estas también os suenan, los tableros de posición, pero ¿y qué poníais en las posiciones, palitos o los números ya?

A: Los números directamente.

F: Los números directamente, o sea, que estabais trabajando la fase inicial, de la suma, la estabais trabajando directamente con lo simbólico, que es la fase final, ¿lo veis?

A: Jolín, sí.

F: Vale, pues ala, ya está.

Comentario 6: Esta parte es muy interesante, relacionarlo con su práctica es muy

importante. Ver la idea que tienen ellos de cómo han trabajado hasta ahora, porque es darle una vista muy distinta, ¿no? Les ha preguntado de nuevo qué pensaban..., les ha englobado..., les ha hecho el cuadro más grande, que es la idea. Creo que está muy bien, que vean un poco lo que trabajarán luego con los alumnos y cómo han trabajado y todo lo que hay detrás, ¿no? Le da otra visión.

ANEXO 7

Transcripción de los comentarios de Lucas en la fase 1

Nota: El texto presentado entre corchetes en la transcripción se corresponde con información incluida por el investigador.

TRANSCRIPCIÓN DEL VÍDEO 1

Fragmento 1

[F = Formadora del vídeo]. [Comentarios de Lucas presentados en recuadros].

F: Bueno, entonces os voy a dar el guion y empezáis a trabajar y, al final, los últimos 15 minutos, hacemos la puesta en común. El guion de la actividad aparece aquí en el campus, pone la fecha, ¿vale?, «actividad para la sesión del 19 de septiembre». Lo voy a leer porque está en inglés, por si alguno tuviera alguna dificultad, lo leo y os ponéis a trabajar, ¿vale?

Todo el mundo en la mesa tiene un montón de palillos y varias cintas de estas, ¿no?, elásticas. Si alguien necesita más cintas me las pide, palillos no, son los que os he puesto, ¿vale?, es con lo que tenéis que trabajar.

<i>Comentario 1: Vale, explica a los alumnos qué es lo que tienen en la mesa y para qué lo van a necesitar a lo largo de la tarea.</i>

El problema es que yo he comprado una caja de palillos en Supeco y resulta que mis compañeros lo compran en Mercadona y me dicen que las cajas de palillos que ponen 800 palillos del Mercadona traen más y que les sale a cuenta, y que cuando van a comprar materiales —porque a veces tenemos que comprar nosotros los materiales— pues que merece la pena. Yo no pude ir a Mercadona, fui a Supeco, pone que son 800, pero no sé si me han timado o no me han timado. Entonces, para hacer un control de calidad, hacer una estimación, que luego, bueno, los que hayáis hecho Matemáticas de Ciencias Sociales pues sabéis hacer un contraste de hipótesis y tal, pero bueno, lo primero que tengo que hacer es hacer una estimación de cuántos hay, ¿no? Entonces, los he repartido para no contarlos yo y la idea es ver cuántos hay.

Comentario 2: Está motivando un poco el problema. Está contando una historia de los palillos para intentar que los alumnos se sientan atraídos por la actividad que van a hacer. Es como la consigna que ella da inicial antes de empezar la actividad que contextualiza un poco lo que van a hacer. Y se ha inventado pues la historia del Supeco y del Mercadona.

Entonces, el guion de la actividad, tal y como aparece aquí... [espera a que cargue el ordenador]. Aquí está el guion. Esta actividad —esperad que la amplió un poco— está escaneada de un libro muy bueno que utilizan en los últimos años en Estados Unidos para formar profesores de primaria. Lo bueno del libro es que, además de los contenidos teóricos, más de la mitad del libro son actividades para llevar al aula-taller como estamos haciendo aquí, ¿vale? Entonces, una de las actividades iniciales para el trabajo con el número, que es con lo que estamos empezando nosotros, es esta de los palillos, ¿vale?

Comentario 3: Bueno, ahí claramente informa a los alumnos de dónde ha sacado la actividad para que no piensen que es una actividad que ella se ha inventado y que es una actividad pues que está contrastada y que viene publicada en un libro. Y bueno, simplemente les informa sobre ello. Primero la contextualiza y después informa de que la actividad es una actividad que es válida, porque está publicada, y que se hace en varias escuelas o en varias Universidades de Educación Primaria. Esto claramente es Matemáticas I y va a hablar del número.

Entonces, aquí la pregunta es «cuántos», cuántos palillos, ¿no?, que es lo que os he preguntado a vosotros, ¿no?, cuántos. Entonces, cada grupo participando en esta actividad tiene un montón de palillos y luego tiene algo para atarlos, ¿no?, *rubber bands*, pues cintas de estas elásticas. Los materiales ya los tenéis. El objetivo de la actividad es ayudaros a entender el desarrollo de la escritura de los números tal y como los utilizamos nosotros en nuestro sistema de numeración, ¿vale? Entonces, primero, organiza los palillos de forma que visualmente puedas ver más o menos cuántos hay; usa las bandas elásticas, si te ayudan, para organizarlos de manera que así, de un vistazo, puedas decir cuántos tienes, primero los cuentas, lo organizas, piensas cómo organizarlo, pero la cosa es que la organización que tú tengas en la mesa te permita de un vistazo recordar cuántos hay sin necesidad de haberlo apuntado, ¿no?, y que, si yo me paso por allí, me podáis decir: «mira, hay no sé cuántos, porque..., lo veo porque lo hemos

organizado así», ¿vale? Luego, reflexiona sobre si la manera en la que lo has organizado corresponde a cómo escribirías tú luego los numerales para representar esa cantidad de palillos. Después, tienes que juntar tus palillos con los de un grupo de al lado, ¿vale?,

Comentario 4: Bueno, a lo largo de todo este paso está dando la estrategia que tienen que seguir los grupos para resolver el problema. Cuando está dando la estrategia, aunque la va leyendo de un guion que tiene en el ordenador, pues no mira al ordenador, mira a los alumnos y escenifica con las manos, que es importante cuando uno está dando una clase, no tener las manos guardadas en los bolsillos, ni tener las manos puestas encima de la mesa; ella va explicando, cuando habla de escribir pues mueve la mano, como que está escribiendo; es decir, que tiene como una conversación con el grupo-clase.

por ejemplo, vosotros con vosotros y así, cada dos grupos tienen que juntar los palillos que tienen y decidir cuántos tienen en común, ¿vale?, cuántos tienen en total. Y al final, tenemos que juntarlos todos y de una forma ágil, sin tener que volver a contarlos todos, tenemos que saber cuántos palillos hay en total en la clase repartidos, ¿vale? O sea que, primero, cada grupo tiene que saber cuántos tiene y tiene que generar una estrategia para, de manera rápida, mirar en la mesa y ver cuántos hay; después, reflexionar sobre si la manera en la que lo coloca cuando uno luego escribe, imaginaos, «tengo 72, pues cómo se escribe 72: siete, dos», pues la manera en la que lo coloco me ayuda con la escritura o no, no tiene por qué, se reflexiona un poco sobre eso; y cuando hayáis terminado esa parte, llamáis al grupo de al lado y decís: «venga, vamos a ver cuántos tenemos en total, visualmente, cómo lo organizasteis vosotros, cómo lo organicé yo, a ver cómo lo tengo», ¿vale?; y luego todos. Tenéis un cuarto de hora, ¿vale?

Comentario 5: Vale, hasta aquí no tengo más que decir; lo que te he comentado antes.

Fragmento 2

[F = Formadora del vídeo]. [A = Alumnos]. [Comentarios de Lucas presentados en recuadros].

- F: Necesito saber si habéis tenido que llegar a algún acuerdo entre los grupos o...
- A: Sí, claro, todo ha sido un consenso, todo ha sido un consenso.
- F: Ah, vale, ha sido un consenso. ¿Qué acuerdo habéis tenido que...?
- A: Hemos explicado cada uno pues lo que significaba cada..., cada gomita.
- F: Y, por ejemplo, ¿vosotros de cuánto en cuánto lo habíais agrupado? Eráis los de 15, 10, 5, ¿no?
- A: Sí.
- F: ¿Y vosotros?
- A: 20, 10 y 4.
- F: 20, 10 y 4. Entonces, ¿habéis tenido que llegar a algún acuerdo alguno para reordenar?
- A: No, porque nos ha venido muy bien.
- F: ¿Os ha venido bien?
- A: Es que hemos sido muy inteligentes cogiendo el amarillo para los grandes [se refiere a gomas elásticas de color amarillo].
- F: Ahora los grandes de qué son, ¿de 20?
- A: De 20 y de 15, aquí están mezclados. ¿O los tenemos que reorganizar?



F: Esto es superinteligente, ¿no? O sea, yo veo aquí..., digo: «en los amarillos, algunos tienen 20 y algunos tienen 15, búscate la vida Nuria».

A: Pero son amarillos.

F: Ya, pero entonces yo no sé... Yo digo: «vale, yo puedo ver 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 grupos amarillos», ¿no? Y ahora digo: «como mucho serán 160, si son todos de 20, pero... no necesariamente son 160, pueden ser menos».

A: Bueno, pero como no lo sabes...

Comentario 1: Bueno, aquí los alumnos están dando una argumentación de por qué ellos han organizado..., bueno, son dos grupos que están juntos ya y están dando una argumentación de por qué han agrupado los palillos con la gomitas amarillas y azules. Entonces la profesora les pregunta, se da cuenta de que no es muy inteligente esa agrupación que han hecho y les está haciendo reflexionar sobre que esa agrupación quizá no es la agrupación óptima, aunque no parecen muy convencidos de la explicación que la profesora está dando al respecto.

F: ¿Entonces cómo sé cuántos hay?

A: Te lo estamos diciendo, tienes que confiar en nosotros.

F: No, en matemáticas la confianza no vale, uno tiene que...

A: Es que no sé, no lo entiendo. ¿Lo tenemos que reorganizar?

F: Vosotros ya sabéis cuántos palillos tenéis, pero ahora, visualmente, tenéis que poder contarme a mí cómo sabéis que hay ese número de palillos, ¿no?

A: Ah, pues habría que... ¿Y no podemos quitar las gomas y reorganizarlo?

F: Sí, sí, sí, yo no dije que no pudierais quitar las gomas.

A: Aaaaah.

F: ¿Alguien dijo que no se podían quitar?

A: Y nosotros diciendo que no se podían quitar las gomas...

F: Y una duda más. Alguno de vosotros..., por separado, ¿no?, cuando lo teníais..., habéis escrito la cantidad que teníais, ¿no? Eh, 109 teníais uno...

A: 104 y 85.

F: Por ejemplo, el 85 se escribe con un 8 y un 5. Ese 8 y ese 5, ¿estaban representados de alguna forma en...?

A: No.

F: No, vale. Y vosotros, la misma pregunta con lo vuestro.

A: No.

F: No había un patrón en cómo lo habíais representado, vale, ok.

Comentario 2: Bueno, ahí la profesora intenta llevar un poco también la conversación de los alumnos a lo que ella busca. Entonces, ella lo que busca es que la notación de decena y unidad tenga que ver con las agrupaciones que han hecho con los palillos. Entonces, se da cuenta que en uno de los folios hay anotado un número y entonces intenta comprobar que esa agrupación que han hecho los alumnos de los palillos tiene algo que ver con la noción del sistema numérico decimal, que es a lo que ella lo quiere extrapolar al final; no sé si muy exitosamente.

A: ¿Pero quieres que busquemos?

F: Quiero que reflexionéis sobre eso, pero ahora lo vamos a poner en común, ¿vale?

A: Vale.

F: ¿Ha sido operativo el que ellos hayan hecho 15, 10, 5... y vosotras tuvieras 20...?
¿Eso ha ayudado a la hora de ponerlo en común?

A: No, porque ahora hay que hacerlo otra vez.

F: Ahora hay que volverlo a hacer...

Comentario 3: Bueno, ahí hace un comentario para que sean conscientes de que lo han agrupado fatal. Entonces ellos son conscientes y son conscientes de que tienen que volverlo a hacer porque no son capaces, sin volver a contar los palillos, de ver cuántos palillos hay en cada una de las cuerdas, ¿no?

Fragmento 3

[F = Formadora del vídeo]. [A = Alumnos]. [Comentarios de Lucas presentados en recuadros].

F: Me tenéis que decir cuántos palillos había en cada grupo inicialmente, antes de juntaros dos grupos, ¿vale? Entonces, por ejemplo, vosotros.

A: 87.

F: 87 [lo escribe en la pizarra]. Estamos de acuerdo, yo utilizo la escritura estándar que vosotros habéis visto en primaria, secundaria, bachillerato y al llegar aquí, ¿vale? Escritura estándar de nuestro sistema de numeración en nuestro contexto. Ese grupo, 87. ¿Cómo habíais hecho los grupos?

A: Pues hemos hecho, eh..., tres grupos de 20.

F: Tres grupos de 20, ¿cómo lo puedo poner? [Escribe un 3 en la pizarra].

A: Eh..., tres rosas.

A: 3×20 .

F: ¿Tres rosas?

A: Sí.

A: No.

F: Si pongo tres rosas... ¿Todo el mundo que ha utilizado gomitas rosas ha atado 20?

A: No.

Comentario 1: Bueno, ahora el objetivo de Nuria es encontrar diferentes descomposiciones del 87. En este caso quiere poner el 87 en función de los grupos utilizando productos y sumas. Entonces está viendo «¿cuántas gomitas tenéis de 20?», «¿pues tenéis 3?», pues el objetivo es poner « $3 \times 20 + \dots$ », pues tendrá que ver si tienen alguna de 10, alguna de 5..., y me imagino que su objetivo inicial es descomponer 87 de varias formas en función de los agrupamientos que hayan hecho los diferentes grupos.

F: ¿Otras personas que han atado 20 han usado otro color?

A: Sí.

F: Uf, el color no me vale. ¿Cómo lo pongo?

A: 20×3 .

A: 3×20 .

- F: 3 grupos de 20, ¿no? 3×20 . [Escribe 3×20]. Y luego...
- A: Pon en el 3 «color rosa» o algo así. Entre paréntesis.
- F: Vale, vale. [Pinta una raya rosa sobre el 20]. Y luego... Esto son 60.
- A: 9×3 .
- F: Y luego 9 grupos de 3, ¿no? [Escribe $+ 9$]. ¿O 3 grupos de 9? [Borra el 9].
- A: 3×9 .

Comentario 2: Se escucha ahí antes a un alumno que no tiene mucha idea de la jerarquía de las operaciones, «ahí tienes que poner un paréntesis», se le escucha de fondo.

- F: 3 grupos de 9 y el 9 lo habéis puesto de otro color, ¿vale? [Escribe 3×9].
- A: Sí.
- F: ¿Alguien más ha utilizado grupos de 20?
- A: Nosotros.
- F: Varios. ¿Alguien más ha utilizado grupos de 9? [Destaca con la voz el número 9].
- A: Nosotras.
- F: Vosotras, vale, y vosotras también, vale. Siguiendo equipo, vosotras.
- A: Nosotras, 90.
- F: En total, 90. [Escribe 90 en la pizarra].
- A: 4 de 20 y 1 de 10.
- F: [Escribe $4 \times 20 + 1 \times 10$]. Vale, o sea que de momento han utilizado grupos de 20, grupos de 10, grupos de 9, ¿vale?



En esta escritura [señala lo que ha escrito en la pizarra] yo veo 3 grupos de 20, 3 grupos de 9, pero aquí [señala el 87] no veo un 3 y un 3. Yo aquí veo 4 grupos de 20, 1 grupo de 10, pero aquí [señala el 90] no veo 4, 1. Con lo cual, parece que tampoco habíais encontrado vosotros un patrón entre cómo escribo la cantidad total con símbolos numéricos y visualmente qué veo en los palillos, ¿vale? De momento, la transcripción de lo que veo en los palillos simbólico-numéricamente la tengo aquí a la derecha [señala el $3 \times 20 + 3 \times 9$ y el $4 \times 20 + 1 \times 10$], pero no veo ninguna relación con esto [señala el 87 y el 90]. Yo aquí estoy haciendo trampa porque estoy metiendo operaciones,

Comentario 3: Ahora intenta hacerles ver que quizá para comprender mejor la notación del número lo más lógico hubiese sido que hubiesen hecho agrupaciones de 10. Entonces, si hubiesen hecho agrupaciones de 10, pues quizá verían que en el 87 tendrían 8 grupos de 10 y tendrían 7 palillos sueltos y en el 90 pues tendrían 9 agrupaciones de 10; y que quizá eso tendría más sentido porque tendría más relación con el concepto de número escrito en el sistema de numeración decimal. Ahí intenta llegar, yo creo, con su explicación y con las preguntas que les lanza. Les intenta hacer ver que hacer grupos de 20 y hacer grupos de 9..., no van a ver, haciendo ese tipo de agrupaciones, de dónde sale el 8 y de dónde sale el 7 del 87.

nosotros ahora no estamos con las operaciones, estamos solo con el número, con la escritura del número, eso es lo que estamos trabajando, ¿no? Pero para ayudar a ver esa conexión de los palillos hacia lo simbólico-numérico, pongo, escribo eso de transición para ir copiando lo que me decís, ¿no?, porque tardo más, tardo más en dibujar los palillos, las gomitas rosas, no sé qué, podría sacar la foto de la cámara y ponerlo rápido, ¿no?, pero..., bueno, lo escribo, lo transcribo así. Ahora, otro grupo. Vosotros dos ya estáis, que luego, luego... Ah, venga, ya que estamos aquí [dibuja una llave a la derecha de lo que ya ha escrito en la pizarra]. ¿A qué consenso... habéis llegado...?

A: Pues 7 grupos de 20...

F: Muy bien, 7 grupos de 20 [señala el 3 y el 4]. Han visto rápido y han dicho: «bien, los dos hemos agrupado, sin habernos copiado, en grupos de 20, con lo cual automáticamente tenemos 7 grupos de 20» [escribe 7×20].

A: Luego, ellos los 27 de 3×9 ...

F: Sí.

- A: ... los han dividido en 2 de 10 para que se junten con los nuestros de 10.
- F: ¿Y por qué no habéis hecho vosotros... separar este de 10 [señala el 10 de 1×10] en 1 de 9 y 1 de 1?
- A: Porque se quedaría 1 solo y luego...
- F: Bueno, pobrecillo, ¿no? No pasa nada.
- A: Y porque es más fácil sumar de 10 en 10 que de 9 en 9.
- A: Para ponerle la goma a 1...

Comentario 4: Y con este diálogo, pues el objetivo final, imagino, de la profesora es que los alumnos lleguen a..., que lleguen por ellos mismos a la idea de que si todos tuviésemos un criterio para saber cómo organizar los palillos, el conteo – al unir los grupos – sería más fácil. Como no había un consenso – unos los hicieron de 20, otros los hicieron de 9, otros los hicieron de 10 –, pues entonces cuando se juntan los grupos pues tienen que reagrupar. Entonces, si todos supiésemos que tenemos que hacer paquetes de 10 o paquetes de 100 o paquetes de 1000, pues entonces todos hubiésemos contado rápidamente los palillos; para eso surge el sistema numérico decimal, la base 10, ¿no?, que es a lo que ella va a llegar al final, imagino.

- F: Para ponerle la goma a 1... Bueno... Eso... Puede ser una justificación, pero tampoco muy potente... Me gusta más lo que ha dicho ella, o ella...
- A: Que es más fácil sumar de 10 en 10 que de 9 en 9.
- F: ¿Por qué será más fácil sumar de 10 en 10 que de 9 en 9 para nosotros? [Hablan varios alumnos a la vez]. ¿Por qué es más fácil sumar para nosotros de 10 en 10 y no de 9 en 9? [Hablan varios alumnos a la vez]. Porque tenemos 10 dedos, por ejemplo, ¿no? Porque estamos más acostumbrados a 10, 20, 30, 40... [mueve las manos con los dedos estirados], ¿no?, como que nuestro sistema de numeración parece que...
- A: Porque en verdad solo sumas de 1 en 1 y luego le pones un 0, entonces...
- F: Solo sumas de 1 en 1, elabora eso. Estamos en clase de matemáticas, ¿qué es 1, 1...?
- A: Pues por ejemplo, si tienes 30, pues 1 más 1 más 1, 3, como es 10, pues le pones el 0 y ya tienes los 30.
- F: ¿3 qué?
- A: 3 grupos de 10.

- F: 3 grupos de 10, muy bien. 3 grupos de 10, vale. [Vuelve a la pizarra a terminar lo que empezó a escribir].
- A: 3 de 20, 3 de 10 y 1 de 7.
- F: [Escribe, después de 7×20 , 3×10]. 3 de 10, llegasteis a romper estos [señala 3×9] en 2 de 10 más 7 sueltos, ¿no? [escribe $2 \times 10 + 7$ encima de 3×9]. Y entonces estos dos [señala 2×10] con este [señala 1×10] 3 y 7 palillos ahí sueltos [escribe, después de $7 \times 20 + 3 \times 10$, 7×1], ¿vale? Ahora, la cantidad total, ¿cuánto es? [señala el 87 y el 90].
- A: 177.
- F: 1, 7, 7 [escribe 177 a la izquierda del 87 y del 90]. ¿Hay aquí 1, 7, 7 por algún lado? [señala el 7 de 7×20 , al 3 de 3×10 y al 7 de 7×1]. Este [señala el 7 de 7×1] parece que hay aquí, ¿no? Pero lo otro... no me cuadra mucho todavía... Vale, otros dos grupos.



TRANSCRIPCIÓN DEL VÍDEO 2

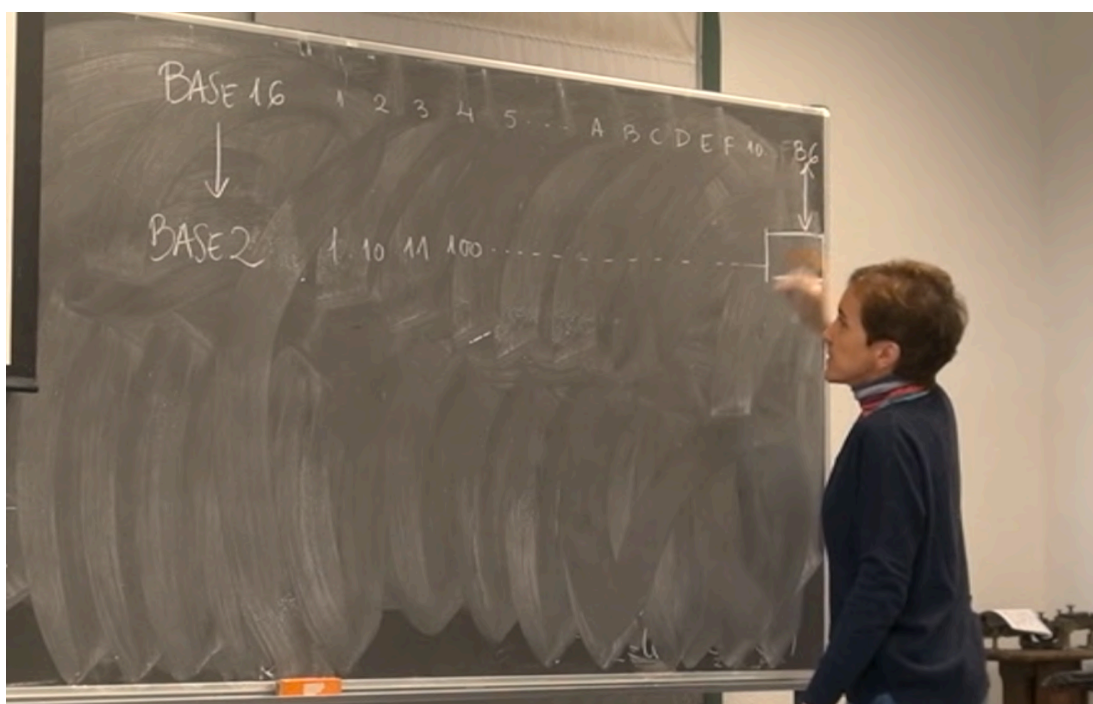
[F = Formadora del vídeo]. [A = Alumnos]. [Comentarios de Lucas presentados en recuadros].

Comentario 1: Bueno, la profesora está borrando la pizarra para dejar la pizarra limpia antes de empezar la clase [lo dice sin parar el vídeo].

F: Como me piden pasar de base 16 a base 2 directamente [escribe en la pizarra], pues Martín dice: «yo escribo aquí la secuencia 1, 2, 3, 4, 5..., A, B, C, D [dice 10, 11, 12, 13, señalando A, B, C, D], 14, 15 [escribiendo E, F], uno, cero [10]...,

Comentario 2: Está explicando una forma de hacer un cambio de base [lo dice sin parar el vídeo].

así hasta el B6», ¿vale? Y luego aquí en paralelo, voy uno [1], uno, cero [10], uno, uno [11], uno, cero, cero [100]..., hasta que pille aquí el que sea y ya está.



No he pasado por base 10, que es lo que me dice Nuria. Con lo cual, superado. ¿Pero qué pasó?

A: Que es muy largo.

F: Que es muy largo. Y que hasta en su casa, teniendo semanas, ha dicho: «paso». Tenías tiempo suficiente, porque había tiempo suficiente en dos semanas a hacerlo, pero...

Comentario 3: Aunque el vídeo comienza antes de que ella le lance la pregunta a este chico, pues antes de explicar cómo se pasa de base 16 a base 2, es decir, de una base a otra base, pues está, imagino, haciendo una lluvia de preguntas. Entonces ha preguntado a un alumno y hay un alumno que le ha debido de decir que para pasar de base 16 a base 2 pues se pasa elemento a elemento. Entonces ella ha intentado hacerle ver que es posible, pero es muy largo.

es largo y además un coñazo, con lo cual ha dicho: «paso». Con la idea Nuria ya se hace una idea de que lo he pensado, es un procedimiento válido, pero no ha sido eficaz, ¿vale?, entonces nosotros tenemos que seguir pensando porque tendremos que buscar alguna estrategia que sea eficaz. [Da la palabra a una alumna].

A: ¿Se podría hacer la división?

F: ¿Qué división?

A: La de B6 entre 2. Es que no sé cómo plantearlo.

F: Ella dice: «oye, mira Nuria, cuando tú pasas de base 10 a base 2 haces grupos de 2 y divides de 2 en 2; pues ahora lo mismo, si estoy en B6 a base 2, divide entre 2». Pero aquí estoy escribiendo en base 16... [En la pizarra ha escrito B6 entre 2, con la caja]. Podríamos intentar hacerlo, pero... ¿sabemos hacerlo... o cómo va esto? ¿O mentalmente para hacerlo me vais a pasar a base 10, y hacéis la división en base 10 —que es lo que sabéis hacer—, y luego otra vez volvemos y entonces hacemos trampa porque pasamos por base 10? Si sabéis dividir un número en base 16 entre 2, si sabéis hacer esta división en base 16 —yo lo tendría que pensar, ¿eh?, así a capón no lo sé hacer, pero si lo pienso... —, si sabéis hacer eso, valdría.

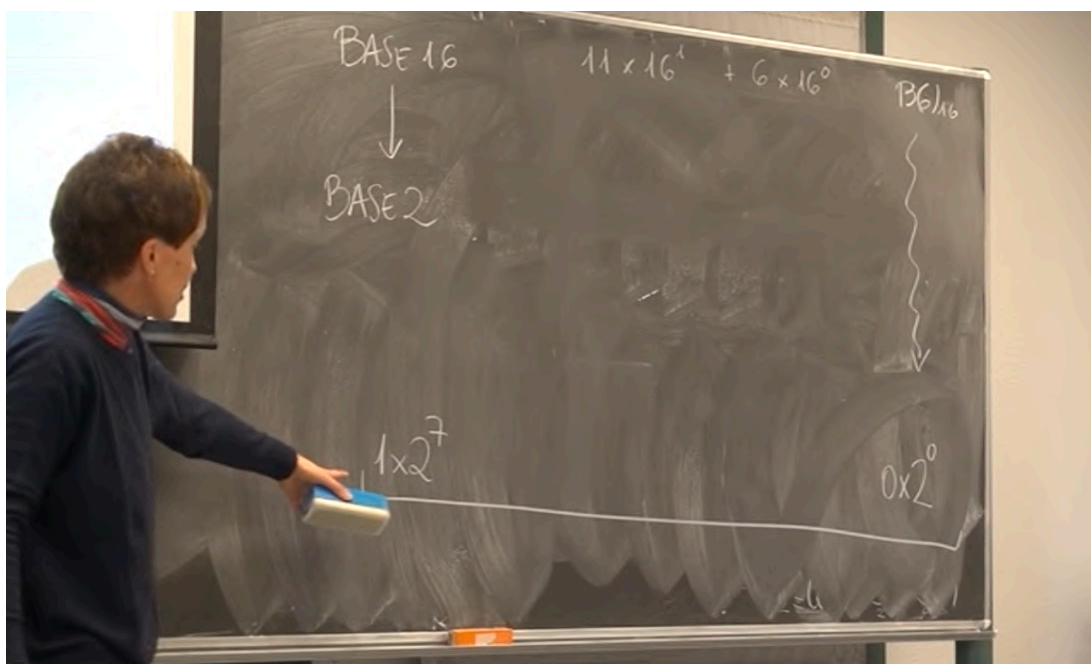
Comentario 4: Está argumentando que el razonamiento de la chica sería válido pero que en la práctica no se hace [lo dice sin parar el vídeo].



Pero esto lo vamos a ver en el dossier 3, ¿eh?, multiplicación y división. Nosotros tenemos herramientas para dividir en base 10 y sabemos cómo hacer restas sucesivas y el algoritmo tradicional de la cajita que habéis ido haciendo... Podríamos abordarlo, por eso abordamos los problemas de..., el anterior, ¿no?, de pasar de base 10 a base 2. Pero el de base 16 a base 2 hay que dividir en base 16. Sumar en base 16 lo sé hacer, restar en base 16 me cuesta un poco pero lo sé hacer, multiplicar en base 16 también podría hacerlo, con lo cual dividir podría hacerlo, pero... no me atrevo a hacerlo sin manos, hoy. Otra forma.

Comentario 5: Vale, continúa con la lluvia de preguntas para ver si los alumnos..., alguno de ellos se va aproximando cada vez más al procedimiento genérico, que es el que ella va a contar [lo dice sin parar el vídeo].

- A: Fijándote en que 16 es 2^4 .
- F: Fijándome en que 16 es 2^4 . Me lo voy a apuntar aquí [borra la pizarra y lo escribe].
- A: Yo lo hice así, pero luego algo no me cuadraba.
- F: Muy bien, vale.
- A: Luego hice, 11...
- F: Venga, vamos a poner el punto de partida, ¿no? El punto de partida es que tenemos 11×16^1 , ¿no?, más 6×16^0 . Este es mi B6 en base 16. Y yo quiero llegar aquí a... Me acuerdo de que empezaba en 1×2^7 y acababa en 0×2^0 , ¿vale?



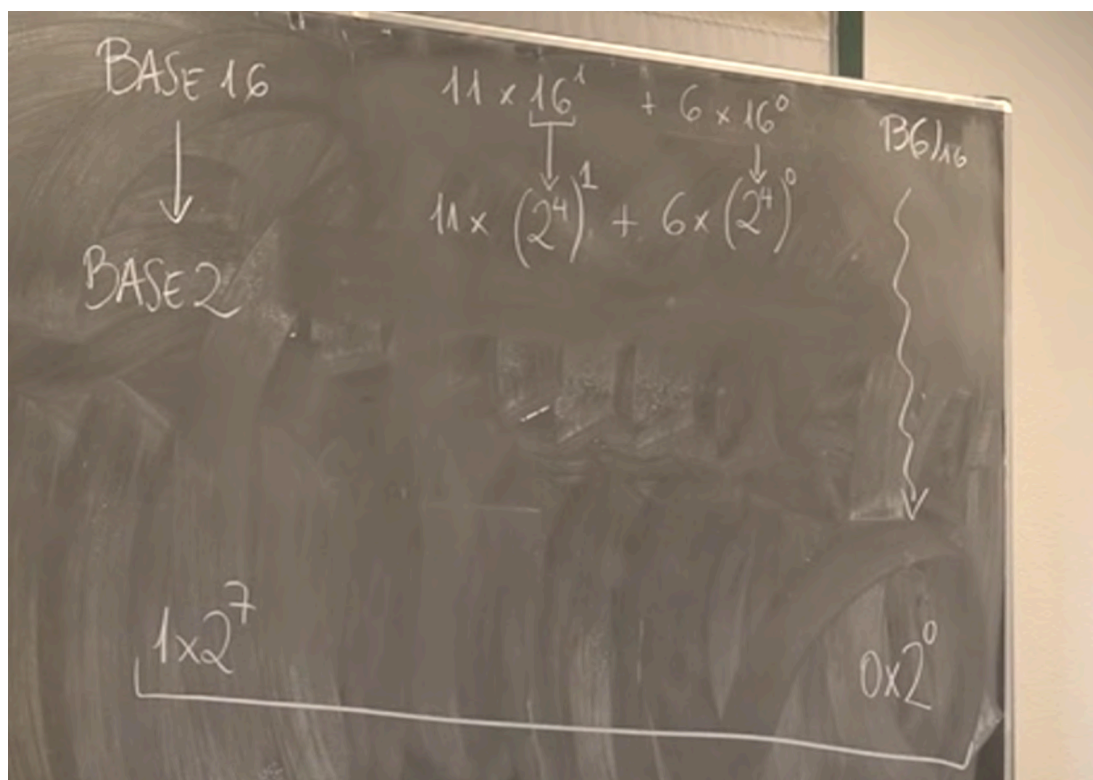
Entonces yo quiero pasar de ahí [señala la parte superior de la pizarra] a aquí [señala la parte inferior]. Si lo consigo, ya lo tengo en base 2, ¿no? Ya solo cojo los coeficientes de las potencias de 2 y ya lo tengo. Entonces, Pablo dice: «cambia este 16», ¿no, Pablo?

A: Sí.

F: Este 16 ponlo como $(2^4)^1$ y este 16 ponlo como $(2^4)^0$. ¿Vale?

Comentario 6: Bueno, está siguiendo un poco el argumento del chico, transformándolo ella a lo que le interesa para que los alumnos empiecen a ver que descomponiendo el 16 en potencias de 2 va a poder pasar fácilmente al final de base 16 a base 2, por eso lo ha escrito en la pizarra. Los argumentos anteriores eran más..., no los va a utilizar, y por eso ha escrito poco o no ha escrito. Y ahora ha decidido borrar la pizarra y escribirlo bien porque detecta que le puede valer para la explicación que ella va a hacer final.

Yo tengo una expresión polinomial en base 16, quiero llegar a una expresión polinomial en base 2, y él me dice: «yo veo claro el cambio, 16 es 2^4 , cada vez que veas un 16 ponlo como 2^4 ». Vale, y entonces resulta que aquí tengo 11 grupos de esto y aquí tengo 6 de estos. ¿El 11 y el 6... los puedo dejar?



A: No, los pasas a base 2.

F: Los paso a base 2. ¿Sé pasar 11 a base 2?

A: Sí.

F: Vale, vamos a escribir 11 en base 2.

A: 1, 0, 1, 1.

F: 1×2^3 , ¿no?

A: Sí.

F: Más...

A: Cero.

F: 0×2^2 . De momento llevo ocho. Más...

A: Uno.

F: 1×2^1 . Ya llevo 10...

A: Más uno.

F: Más 1×2^0 . Ahí ya tengo 11, ¿vale? Esta es una manera de escribir 11. ¿Cómo? Como potencias de 2. Expresión polinomial del 11 en base 2, como potencias de 2, ¿vale? Y esto va multiplicado... 2 elevado a la 4 y luego lo elevo a la 1, ¿cuánto me queda...? 2^4 es $2 \times 2 \times 2 \times 2$ y luego eso lo elevo a la 1, es decir, que lo copio una vez, o sea que me queda...

A: 2^4 .

F: 2⁴. Más... El 6, ¿lo dejo?

A: No.

F: No. ¿Cómo escribo 6 en base 2?

A: 1×2^2 .

F: 1×2^2 , que son 4.

A: 1×2^1 .

F: 1×2^1 ... Y 0×2^0 [lo va escribiendo todo en la pizarra]. Ahí pone 6, una manera más chula, ¿no?, de poner 6 como potencias de 2, ¿no?, como un polinomio con potencias de 2. Vale, y luego estaba por... Y ahora tengo $(2^4)^0$. ¿Eso qué es?

A: Uno.

F: Uno. ¿Y si lo quiero poner como potencias de 2?

A: 2^0 .

F: 2^0 , muy bien. 2^0 [lo escribe en la pizarra].

Comentario 7: Bueno, está buscando escribir lo que ella quiere con la «ayuda» [hace el gesto de las comillas con las manos] de los alumnos, que algo aportan. Está haciéndoles creer que son ellos los que están dando la respuesta, cuando realmente está explicando ella la conversión por el método que ella quiere [lo dice sin parar el vídeo].

Mira qué contenta estoy, porque $2^0 \times 2^0$ es 2^0 y el coeficiente es 0, que es este. Y $2^4 \times 2^3$ es 2^7 y el coeficiente es 1, que es este. Pues como que ya casi lo tengo, ¿no? ¿Sí o no?

A: Sí...

BASE 16

↓

BASE 2

$$11 \times 16^1 + 6 \times 16^0$$

$$\downarrow$$

$$11 \times (2^4)^1 + 6 \times (2^4)^0$$

$$\downarrow$$

$$[1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0] \times 2^4 + [1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0] \times 2^0$$

$$\downarrow$$

$$1 \times 2^7$$

$$\downarrow$$

$$0 \times 2^0$$

$\boxed{1 \times 2^7 + 0 \times 2^0}$

F: Vale, y ahora... Venga, ¿cuál será el coeficiente...? Venga, vamos a poner aquí 2^6 , paso a la siguiente varilla del ábaco, ¿eh? ¿Cuál será el coeficiente de 2^6 ?

A: Cero.

F: Cero, porque ¿cómo consigo yo 2^6 ? $2^4 \times 2^2$, ¿no? 2^4 es $2 \times 2 \times 2 \times 2$, 2^2 es 2×2 , ya tengo ahí los seis doses, ¿vale?, que está aquí, y el coeficiente cero. ¿Por aquí puedo llegar a 2^6 ?

A: No.

F: No, pues ala. 0×2^6 . Genial, porque era lo que me había salido antes. Ahora, más... Siguiendo varilla del ábaco, 2^5 . ¿Dónde consigo yo 2^5 ? Aquí [señala el corchete de la derecha] como mucho llego a 2^2 , me olvido de esto. $2^4 \times 2^1$ [señalando el corchete de la izquierda] es 2^5 , ¿no?

A: Sí.

F: Vale, ¿y qué coeficiente lleva?

A: 1.

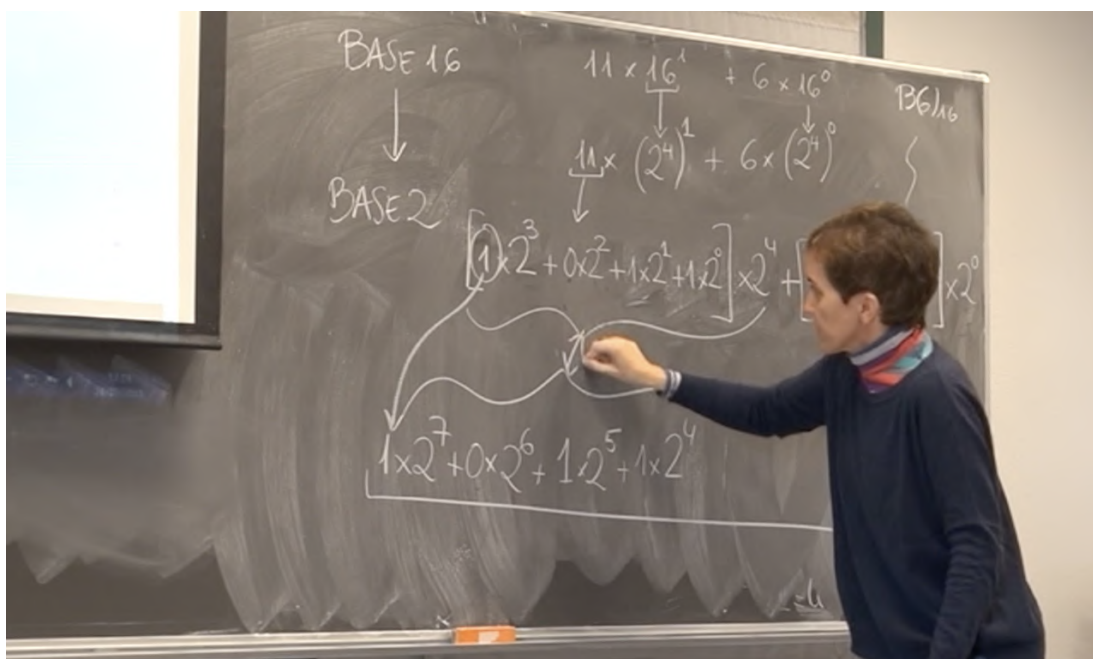
F: 1. ¿Y era el qué tenía que llevar?

A: Sí.

F: Sí, vamos bien. Y ahora, 2^4 , ¿cómo consigo 2^4 ?

A: Con 2^0 ...

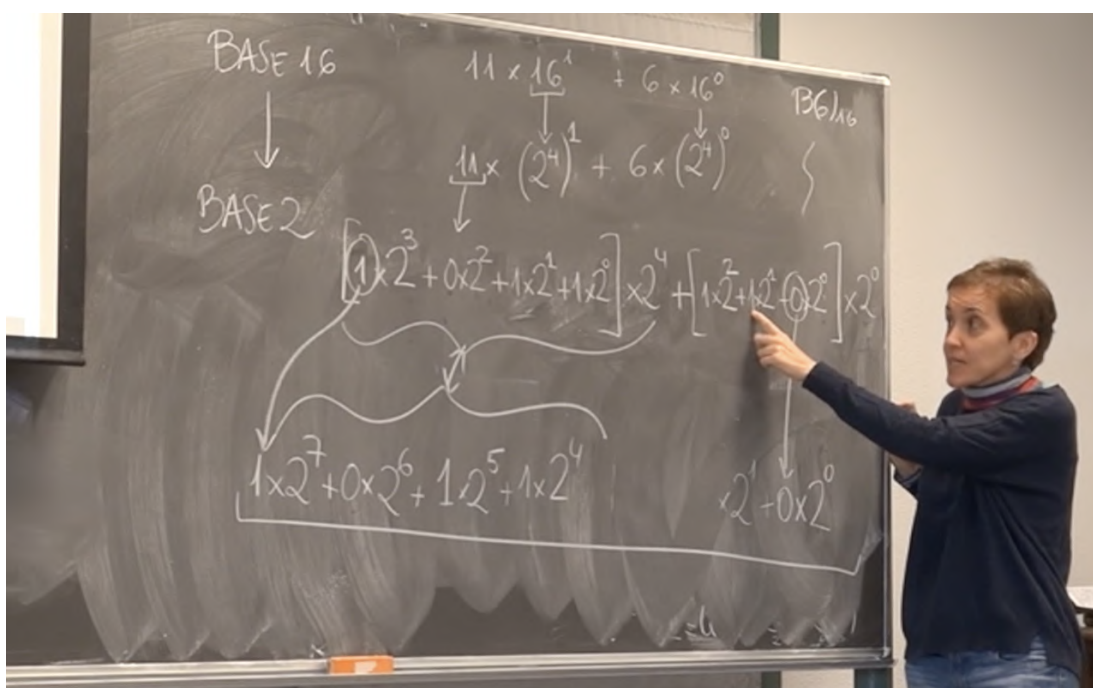
F: $2^4 \times 2^0$, ¿no? Tengo aquí cuatro copias del 2 y aquí ninguna, pues tengo cuatro copias del 2 multiplicándose por sí mismo, y el coeficiente 1. 1×2^4 [lo escribe en la pizarra]. Oye, mira, todo esto se ha convertido en esto. Lo veis, ¿no?



¿Qué es lo que he hecho? Propiedad distributiva. Voy multiplicando el 2^4 por cada uno de los sumandos, ¿vale? Muy bien. Y ahora, tiro por aquí, voy desde aquí [señala el 2^0 de la parte inferior derecha de la pizarra]. 2^0 , muy bien. Siguiendo varilla del ábaco, 2^1 . ¿Qué coeficiente tiene 2^1 ?

A: 1.

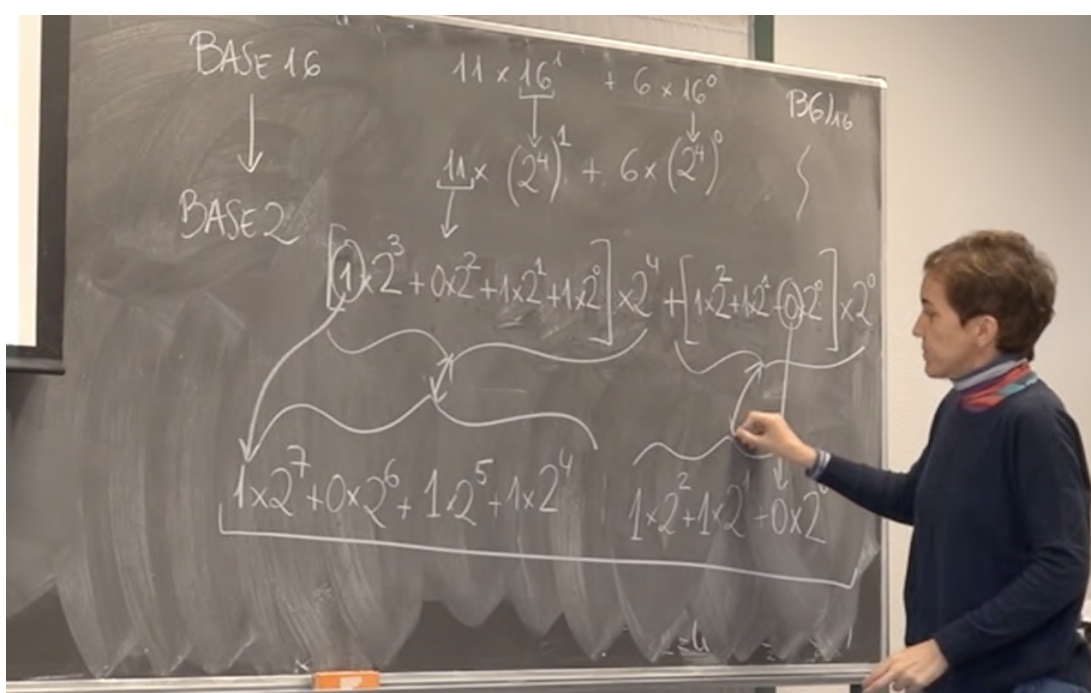
F: 1, que está aquí [lo señala], ¿vale?



Porque sería $2^1 \times 2^0$, que es 2^1 , y lleva un 1 delante, un 1 [lo escribe abajo]. Voy bien.

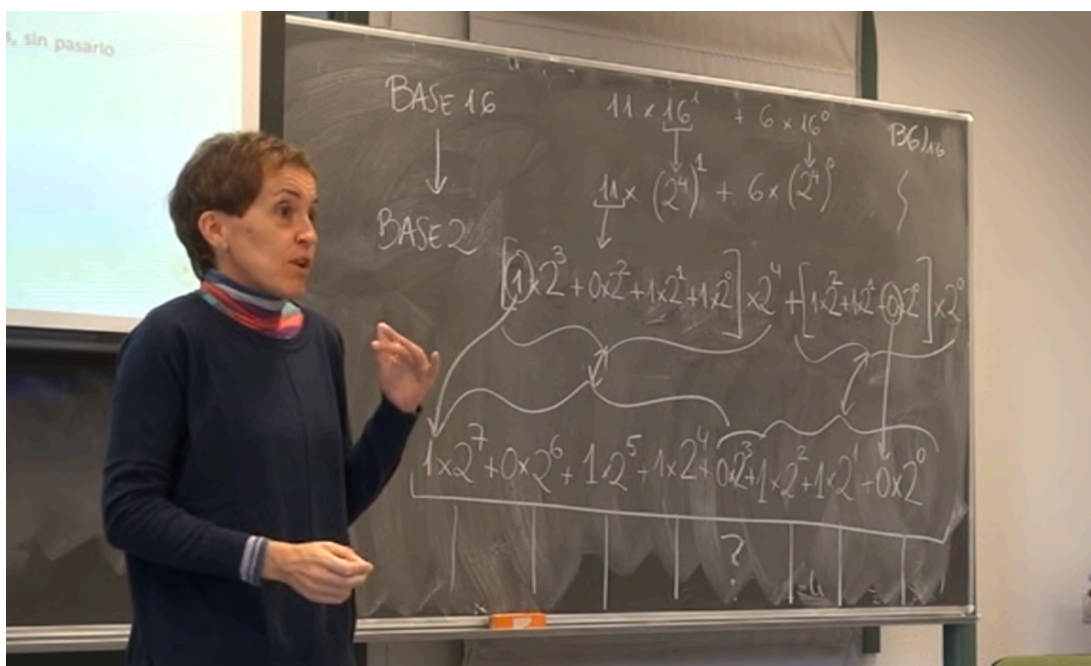
Comentario 8: Vale, continuamente cuando hace referencias en la pizarra busca la complicidad de los alumnos y va señalando en la pizarra mientras escribe; es una técnica bastante habitual de cualquier profesor de matemáticas que escribe en la pizarra, ir señalando en la pizarra y buscar la complicidad de los alumnos para escribir lo que uno quiere escribir en el fondo.

Y ahora, $2^0 \times 2^2$, 2^2 [lo escribe abajo], va con un 1 [lo escribe abajo]. O sea que esto que tengo aquí se convierte en esto que tengo aquí.



Y ahora, Pablo, ¿qué te pasó?

- A: Que como... Que claro, los iba a juntar, pero dije: «me falta el 2^3 ».
- F: Me falta el 2^3 . Pablo dice: «varilla del ábaco del 2^7 , 2^6 , 2^5 , 2^4 , ¡uy!, 2^2 , 2^1 , 2^0 ». «¡Uy!», dice Pablo [y dibuja una interrogación en la posición del 2^3].
- A: Pues si no hay, un cero.
- F: Pues se pone el 0, ya está. Lo pongo aquí: «+ 0×2^3 », y esto lo englobo aquí.



¿Qué es lo que pasa? Que escribo el 6 de una forma muy especial. Yo escribo el 6..., acordaos que esto era mi 6 [señala $1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0$], ¿eh?, esto era el 6, que es este 6 [señala el de un nivel anterior, más arriba en la pizarra], ¿vale? Yo he escrito el 6 como $1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0$, pero también puedo escribir el 6... $0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0$. No es lo estándar, porque como los ceros ahí no aportan mucho, pues no es lo estándar, pero si no me quiero olvidar de una de las varillas y no quiero tener un problema, como tenía Pablo, pues yo añadido ahí para escribir el 6 de otra forma, ¿vale? Entonces, moraleja que cuentan los *youtubers*, por ejemplo David Calle, dice: «vamos a pasar de base 16 a base 2, ¿qué se hace chavales? Mirad, ¿veis este 11 que está aquí? [señala el de arriba de la pizarra], pues escribís este 11 en base 2: 1, 0, 1, 1 [señala los coeficientes de la expresión polinómica de la parte inferior de la pizarra]; ¿veis este 6 que está aquí? [señala el de arriba de la pizarra], pues lo escribís en base 2, pero cuidadín chavales, que hay que poner cuatro, ¿por qué?, porque 16 es 2^4 ».

Comentario 9: Bueno, ahora les está dando un truquito, el truquito..., que dudo mucho que los alumnos lleguen a comprender el porqué, pero que les puede servir para realizar el ejercicio de forma rápida, y es que cada vez que haya que pasar de base 16 a base 2, basta con descomponer el número en potencias de 16, pasar el primer número a base 2, y los primeros 4 dígitos serán los primeros 4 dígitos del número y los últimos 4 serán los últimos 4 del número, puesto que 16 es 2^4 . Lo que pasa es que ese argumento que ella intenta trasladar posiblemente se quede en el algoritmo que pueda aprender el alumno

para hacerlo rápido porque no van a entender lo que subyace detrás de ese paso rápido de la base 16 a la base 2.

Y entonces dice: «vamos a escribir 6 en base 2 con cuatro: 0, 1, 1, 0». Y dice: «y ahora lo juntáis, fin». A mí no me vale

Comentario 10: Bueno, es positivo que no le valga [lo dice sin parar el vídeo].

porque yo no soy David Calle, yo no estoy de *youtuber*, *influencer*, *superfamosa* ayudando a los chavales a aprobar exámenes, que es un trabajo muy digno y que está bien, y además el tío es un *crack*, muy suelto, lo hace muy bien;

Comentario 11: ¿Vale para pasar de base 8 a base 2? A lo mejor debería haberlo comentado. ¿Vale para pasar de base 4 a base 2? ¿Vale para pasar de base 32 a base 2?

yo estoy formando maestros, entonces tenéis que entender cómo hemos pasado de aquí [señala la parte superior de la pizarra] a aquí [señala la parte inferior de la pizarra] a través de esto [señala la parte media de la pizarra].

Comentario 12: ¿Y de base 15 a base 2? Ahí ya tiene que buscar otra técnica [lo dice sin parar el vídeo].

Entonces, la pregunta es: ¿se puede pasar de base 16 a base 2 sin pasar por base 10? Sí. Lo acabamos de hacer, ¿no? Es que me miráis con una cara...

Comentario 13: Hay un porcentaje importante de la clase que posiblemente se haya perdido en todo este razonamiento porque ahí hay mucha suma y mucha potencia y..., pues estos chavales de Matemáticas y su Didáctica I pues todavía no están muy ágiles en las propiedades de los números y de las potencias; posiblemente se hayan perdido en esta argumentación, hace falta hacer muchos más ejemplos.

¿Y por qué se puede? ¿Qué pasa si yo esto [el ejercicio] os lo doy en base 15 y, en vez de en base 16, todo el problema es en base 15?

A: Que sería $2^4 + 2^0$.

Comentario 14: Madre mía [se ríe; lo dice sin parar el vídeo].

F: ¿ $2^4 + 2^0$ es 15?

A: O sea, no..., perdón. $2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0$.

Comentario 15: Intenta extrapolar, ellos han visto una técnica y ellos creen que esta

técnica vale para pasar cualquier número en cualquier base a base 2, y no es válido. Imagino que el objetivo de ella ahora es explicar que este procedimiento solamente sirve para pasar números en bases potencias de 2 a base 2.

- F: Vale, y entonces tendría que ir haciendo todas las distributivas, todo el follón, ahí. ¿Y David Calle me podría dar el algoritmo...? Escribes, imaginaos el mismo número, ¿eh?, B6, en vez de en base 16, en base 15.

Comentario 16: Pues no [lo dice sin parar el vídeo].

¿David Calle me puede decir...? Aquí tengo el 15, ¿no?, aquí tengo el 15 [los escribe encima de los 16], y David Calle me dice: «escribe esto [señala el 11] en base 2, escribe esto [señala el 6] en base 2, con tres y medio dígitos o cuatro dígitos o... tres dígitos, y lo pones junto. ¿Valdría ese algoritmo?

- A: No.

- F: No. ¿Vale? O sea, que poder se puede pasar, vas con paciencia escribiendo cada una de las expresiones que aparecen, pero un paso directo solo se puede cuando una base es potencia de la otra base,

Comentario 17: Bueno, ahí ha concluido y ha aumentado el tono de voz para dejar claro que de toda su argumentación..., es decir, lo que acaba de decir importante, importante, es esto; este procedimiento solo vale cuando uno pasa de una base a otra siempre y cuando la primera es potencia – y por eso lo ha dicho en alto – de la otra.

que es lo que hemos visto con 16, que es potencia de 2, que es 2^4 .

Comentario 18: Quizá... Eh... Lleva 13 minutos –no es una crítica, simplemente una argumentación –, es un vídeo en el que lleva 13 minutos realizando un ejercicio; quizá, podría en esos 13 minutos haber hecho 2 o 3, dándoles menos juego a los alumnos, hacer por ejemplo el mismo paso que ha hecho de base 16 a base 2, hacer un paso de base 8 a base 2 y justificar por qué no puede pasar de base 15 a base 2, en vez de dar tanto pie a los alumnos –que ha ralentizado quizá mucho el desarrollo del ejercicio –, podría haber hecho 3 ejercicios en estos 13 con 56 minutos que llevamos.

¿Está claro hasta aquí? ¿Sí?

Comentario 19: Bueno, pregunta: «¿está claro?», se da cuenta de que no e imagino que sigue haciendo ejercicios al respecto [se ríe].

TRANSCRIPCIÓN DEL VÍDEO 3

Fragmento 1

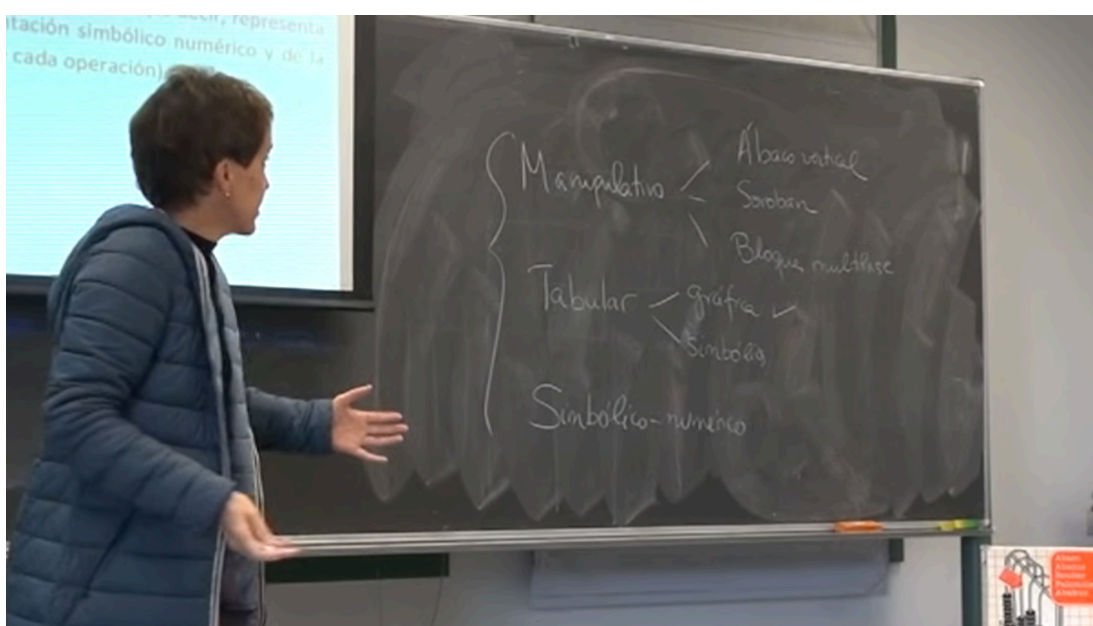
[F = Formadora del vídeo]. [Comentarios de Lucas presentados en recuadros].

- F: Entonces, la idea es..., el ejercicio 4, que está proyectado en la pantalla, es el ejercicio 4 de la última hoja, de la hoja del dossier 2, con el que vamos a trabajar ya esta semana, ¿vale? En ese ejercicio hay cuatro operaciones, cuatro problemas, cuatro operaciones. Tenéis que hacer las cuatro operaciones..., representarlas de distintas maneras. Voy a poner en la pizarra de cuántas maneras, ¿vale? Entonces, acordaos que nosotros estamos trabajando con material manipulativo [escribe en la pizarra «Manipulativo»], ¿vale? Entonces, en primer lugar tenéis que representar esta suma $[210 + 543]$, esta suma $[315 + 429]$, esta resta $[135 - 24]$ y esta resta $[704 - 45]$, por partes [va señalando en el PDF proyectado en la pantalla], ¿no?, empezáis con la primera... Tenéis que representarlo [escribe en la pizarra] con ábaco vertical, después en el sorobán y después con los multibase, ¿vale? Y tenéis que tener las tres representaciones del proceso delante para saber comparar cada dos, ¿vale?, para saber entender cómo se traduce una en otra. Lo que no quiero es que me digáis: « $210 + 543$ son 753; Nuria, te he representado 743* en el ábaco vertical, en el sorobán y en los bloques multibase». No quiero la representación del resultado, quiero la representación del proceso, de la suma, de la idea «suma».

Comentario 1: Pues igual prácticamente que en el vídeo 1, está explicando en qué consiste el ejercicio, ha escrito en la pizarra, para que se quede ahí escrito, los tres materiales con los que quiere que se representen y está diciendo lo que prevé que va a aparecer y lo que no quiere que aparezca, que es encontrar el resultado y no encontrar el procedimiento en los materiales.

¿En qué os tenéis que basar?, en la definición de la suma que vimos el otro día, ¿no?, que es: elijo un representante de uno, elijo un representante del otro y hago la unión, agrupo, junto, como lo queráis pensar, ¿vale? Entonces, hay que representar el proceso, el proceso, no solo el resultado final de ese proceso. Entonces, tenéis que representar el proceso de tres maneras en el sistema de representación manipulativo [señala lo que ha escrito antes en la pizarra], ¿vale?

Y en paralelo [empieza a escribir en la pizarra] tenéis que representar el proceso en el sistema de representación simbólico-numérico; el enunciado está dado en ese sistema de representación, ¿vale?, esto es sistema de representación simbólico-numérico, pues tenéis que representar el proceso, las dos sumas y las dos restas, en ese sistema, ¿vale? Y luego, en medio [escribe en la pizarra], hay una representación que es formato tabla o tabular, de la que no he hablado explícitamente, pero que me gustaría que construyerais vosotros, ¿vale? Necesito que construyáis, por ejemplo, esta suma [señala $210 + 543$], que la hagáis en tabla, con una tabla, como se os ocurra a vosotros diseñar la tabla, ¿vale? La tabla [escribe en la pizarra] puede ser más gráfica, puede tener características gráficas, o puede tener características más simbólicas; a mí me va a interesar más la que tenga características más gráficas, luego ya veremos en detalle cómo, pero tenéis que intentar construirlo vosotros sin que yo os haya hablado de eso explícitamente, ¿vale?



Entonces, paso 1, aquí [señala la parte de representación manipulativa de la pizarra], en paralelo paso 2, simbólico-numérico [lo señala en la pizarra] y luego ya, según vayáis trabajando los cuatro ejemplos, igual ya se os va ocurriendo cómo representarlo con una tabla y cómo trabajar con una tabla ese tipo de operaciones.

Comentario 2: Bueno, pues nada, ha dejado escritos en la pizarra pues los tres métodos

con los que quiere que representen las restas, en este caso. Como prevé que alguno de ellos pues cuando pase un rato va a decir: «¿y cómo más había que representarlo?», pues por eso lo ha escrito, lo ha dejado escrito en la pizarra para que no se olvide. Y bueno, insiste, ¿no?, dentro del tabular, pues que como les deja la vía libre para que lo hagan como quieran, pues les explica que no usen muchos números, ¿no?, que intenten hacerlo de forma gráfica que es como ella al final lo va a intentar explicar.

¿Está claro? Yo me voy a pasar por las mesas y me vais preguntando todas las dudas que os surjan. No voy a pedir que me mandéis nada, ¿vale?, porque todavía no he revisado las últimas fotos que me habéis mandado, con lo cual estoy un poco desbordada; como no sois muchos, yo voy por vuestros puestos. Ahora bien, en el grupo anterior han decidido grabar pequeños vídeos o hacer fotos de los procesos que iban construyendo por llevárselo como material para estudiar, a mí me parece una buena idea, pero ya vosotros hacéis lo que queráis, a mí no me lo tenéis que mandar, pero si queréis, una vez que hayáis construido, por ejemplo, con el ábaco japonés, imaginaos, esta resta de aquí [señala el PDF en la pantalla], y decís: «ah, pues nos vamos a grabar», uno lo hace otro lo graba y lo tenéis de recuerdo, ¿no?, para cuando tengáis que estudiar. ¿Cómo voy a pedir yo eso en el examen? Pues no lo puedo pedir porque no puedo llevar un sorobán para cada uno porque tengo un día, 2 horas y media o 3, para haceros el examen final de la asignatura; pero para mí esto es muy importante, entonces yo voy a pedir que me representéis gráficamente, gráficamente, vuestro proceso de respuesta con un ábaco vertical, con un sorobán o con los bloques multibase, que es lo que yo luego voy a hacer aquí en la sesión final de discusión cuando acabemos esta hora de clase.

Comentario 3: Bueno, ahí da respuesta a la pregunta típica de «esto lo estamos haciendo, pero está claro que no lo puedes preguntar en el examen, ¿no?, ¿cómo me vas a preguntar esto?, para que yo sepa cómo estudiármelo», bueno, pues se anticipa y explica cómo lo va a preguntar para que, sabiendo ellos cómo va a ser evaluado, sepan ellos qué necesitan hacer, si necesitan hacer un vídeo, si necesitan tomar apuntes..., para luego poderse estudiar en su casa, puesto que no van a tener los materiales en sus casas.

Yo no voy a coger el ábaco aquí, lo voy a poner delante de todos y tal —podría hacerlo, pero no lo voy a hacer—, lo voy a hacer representando gráficamente el

material manipulativo y así es como lo voy a pedir el día del examen, porque os voy a dar un cuadernillo y lo tenéis que hacer gráfico, ¿vale? Bueno, pues empezad, están escritas en un orden muy concreto, empezad a hacerlas en ese orden y luego ya discutimos sobre por qué están puestas en ese orden, ¿vale?

Comentario 4: Bueno, ha acabado la parte 1, esta parte 1 es la explicación de la actividad.

Fragmento 2

[F = Formadora del vídeo]. [A = Alumnos (A1, A2 y A3)]. [Comentarios de Lucas presentados en recuadros].

- A1: Estamos rayados con la última resta.
 F: Vale, a ver, empezad.
 A1: Son 704 - 45.
 F: Vale.
 A1: Entonces, aquí no le podemos restar 5.



- F: Así tal cual está, puedes restar..., ¿cuántas puedes quitar?
 A1: Cuatro.
 F: Cuatro, vale, sí.
 A1: Entonces voy a suponer que aquí [señala la varilla de las decenas] hay un 1.
 A2: No, que hay 10.
 A1: Que hay 10, para que sea 14...
 F: A ver, olvídate de los «suponer». Tú dices: «tengo que quitar 5», ¿no?, quito 1, quito 2, quito 3, quito 4 [quita cuentas de la varilla de las unidades] y ahora ponme aquí más para que yo quite, tal y como está.



- A1: Habría que poner 10 y quitamos 1.
- F: Pero ¿cómo me ponéis..., cómo me ponéis ahí? A ver Pablo.
- A2: ¿Que lo ponga?
- F: No, no, que me digas... Yo aquí [señala la varilla de las centenas] tengo ahora mismo 700, ¿no? Escribe 700 de otra forma para que yo tenga bolas...
- A1: Aaaaah, hay que añadir una aquí [señala la varilla de las decenas].
- F: Venga, a ver.
- A2: [El alumno A2 quita una cuenta de la varilla de las centenas y la pone en la de las decenas].
- F: ¿Aquí sigue poniendo 700?
- A1: No, no, no, hay que poner una nueva aquí [vuelve a poner la cuenta en la varilla de las centenas —la que había puesto en la varilla de las decenas el alumno A2— y pone una nueva en la varilla de las decenas].
- F: A ver [quita la cuenta de la varilla de las decenas]. Teníamos 704, hemos quitado 4, tengo 700, ¿vale?
- A1: Sí.
- F: Ahora, escribe 700 de otra forma para poder quitar otra.
- A1: Pues...
- F: ¿Cómo podéis escribir 700 de otra forma?
- A1: Que aquí [señala la varilla de las decenas] haya 9...

Comentario 1: Bueno, los chavales no sé si han llamado a la profesora o la profesora se ha

acercado a la mesa para ver si son capaces de hacer esa suma con el ábaco. Y bueno, ellos no saben hacer la suma y ella les está dando pistas para que sepan hacerla; en concreto, les está dando pistas para saber cómo quitar fichas en una varilla en la que no hay fichas, les está diciendo que escriban el número de otra forma, que escriban el 700 pues quitando una de las centenas y poniendo 10 en las decenas y después tendrán que quitar una de las decenas y poner 10 en las unidades y entonces ya podrán quitar. Porque la otra chica lo que le dice es: «no puedo quitar más»; pues ella le está dando la estrategia que tienen que seguir, les está dando pistas sobre la estrategia que tienen que seguir para poder hacer la resta.

F: Venga.

A1: Y aquí [señala la varilla de las unidades]..., 9.

F: A ver, para que haya aquíííí... [señala la varilla de las decenas], vamos a ver, ¿cómo consigo aquí decenas? Sin cambiar el número...

A1: Si quito esta... [quita una cuenta de la varilla de las centenas].



F: Venga, muy bien.

A1: Pongo aquí 10 [señala la varilla de las decenas].

F: Venga, dale.

A1: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10.

A3: ¡Ah, vale!

Comentario 2: La chica ya ha llegado a lo que tiene que hacer, le ha costado, le ha costado un poquito, pero ya ha llegado [se ríe]. Bueno, no ha llegado todavía, todavía no tiene

unidades. A ver si sabe extrapolar, Nuria intentará que sepa extrapolar lo que ha hecho de las centenas a las decenas, de las decenas a las unidades [lo dice sin parar el vídeo].



F: ¿Ahora aquí pone 700?

A1: Sí.

F: ¿Y cómo está escrito 700?

A3: Mal.

F: 6×10^2 , ¿no?, 6×100 , más...

A2: 10×10^1 .

F: 10×10^1 , muy bien. Ahora, ¿puedo quitar aquí [señala la varilla de las unidades] que quería quitar una? ¿Tengo?

A1: No.

F: No, ¿cómo puedo volver a escribir 700 para tener aquí [varilla de las unidades]?

A1: Pues quito de estas [quita una cuenta de la varilla de las decenas] y añado 10 aquí [señala la varilla de las unidades].

F: Vale, venga.

Comentario 3: Bueno, parece que sí, que la chica ha sabido extrapolar en este caso [lo dice sin parar el vídeo].



- F: Vale, ¿y ahora puedes quitar la que te faltaba por quitar?
- A1: [La estudiante A1 quita una cuenta de la varilla de las unidades].
- F: Ya está. Ya habéis quitado 5 y teníais que quitar 45, ¿no? ¿Cuánto os falta por quitar?
- A1: Sí, ahora aquí [señala la varilla de las decenas] hay que quitar 4.
- F: Pues ya está, ¿no?
- A1: Ah, vale, vale. Gracias.



- F: ¿Entonces qué habéis hecho para reescribir el 700...? O sea, yo tenía 700 ahí, tenía aquí 700 [deja el ábac con 7 cuentas en la varilla de las centenas], ¿qué habéis hecho?

A2: Como es sistema decimal, pues aquí [señala la varilla de las decenas] hay 10, porque... representamos un 0, pues quitar una de aquí [varilla de las centenas] y ponerle las 10 aquí [varilla de las decenas] para luego restarlas aquí [varilla de las unidades].

F: O sea que habéis..., ¿agrupado o desagrupado?

A1: Desagrupado.

A2: Aquí desagrupado.

Comentario 4: Bueno, ella ahora lo que intenta es que los alumnos le den una explicación matemática de lo que han hecho, es decir, que ella intenta sacarles que han escrito el número en una representación distinta que les permite hacer la resta, es decir, que diferentes escrituras del mismo, o diferentes representaciones gráficas del mismo en el ábaco, pues representan el mismo número y algunas de ellas les permiten hacer la resta. Entonces, vamos a ver qué es lo que dice al final el chico.

F: Desagrupado. Habéis desagrupado una centena en 10 decenas y luego una decena la habéis desagrupado en 10 unidades.

A1: Vale, es que cuando tú lo haces en papel no haces esto así.

F: Ah, pues dime entonces qué es lo que haces en papel.

Comentario 5: Bueno, la chica ahora ha soltado que cuando ella resta en el papel pues no hace esto, bueno, pues habrá que ver qué cree ella que hace cuando lo hace en el papel [se ríe].

A1: Claro, lo haces muy mental. O sea, en verdad sí que haces eso, pero... bueno, ya me has entendido.

F: No, no, pero lo tienes que explicar porque luego os he pedido que lo hagáis simbólico...

A1: Ya, ya, ya.

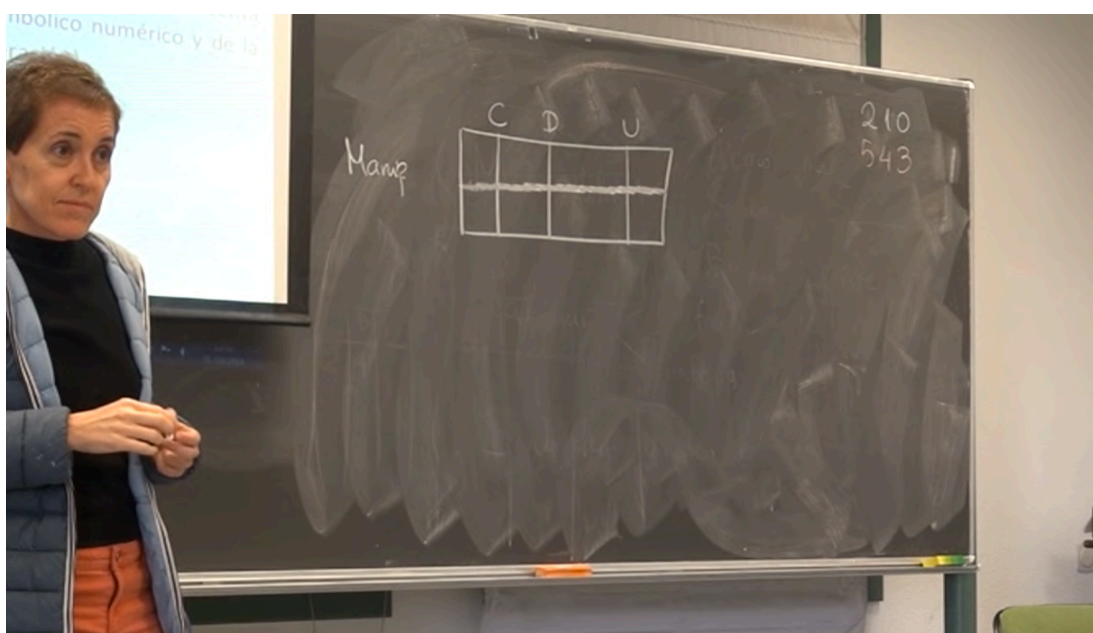
F: Entonces, simbólico tienes que explicarlo conectado con esto.

A1: Vale, vale.

Fragmento 3

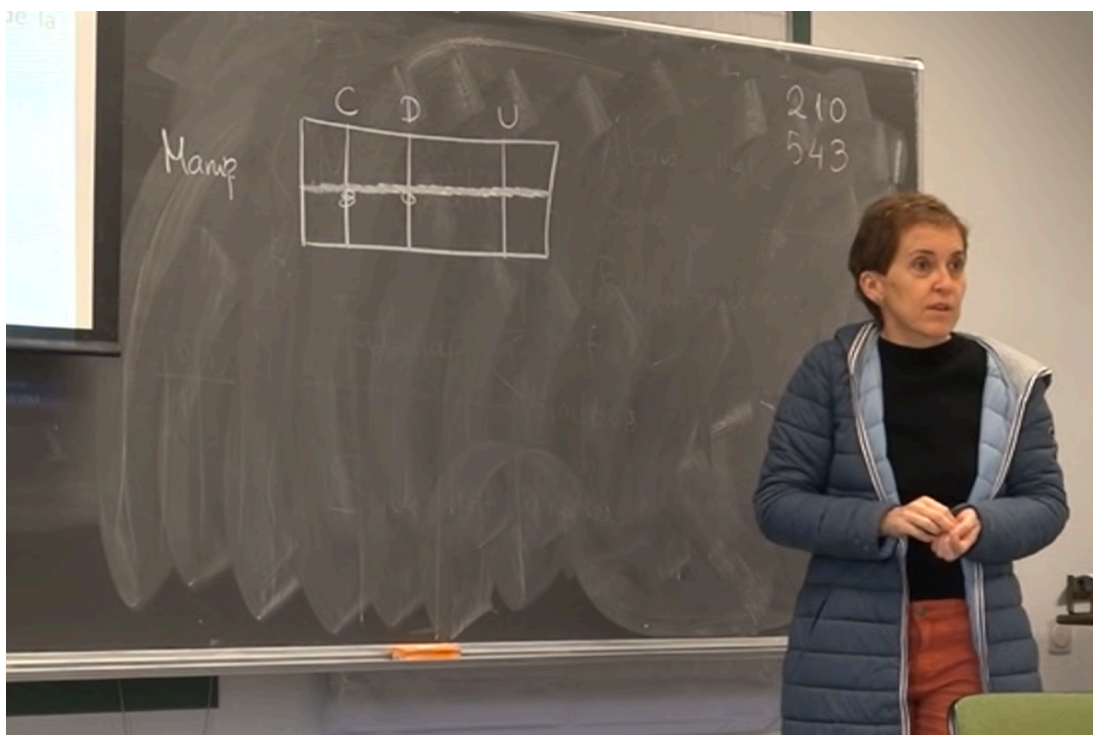
[F = Formadora del vídeo]. [A = Alumnos]. [Comentarios de Lucas presentados en recuadros].

- F: Vamos a corregir uno, el primero, ¿vale? Me dan $210 + 543$, ¿vale?, con símbolos. Voy a representarlo..., vamos a empezar con manipulativo y voy a ejemplificar con el sorobán, que es el que parece que más trabajo cuesta, ¿vale? Entonces, en el sorobán, cuando lo representéis gráficamente el día del examen, o ahora en vuestro cuaderno si tenéis que tomar notas, es muy importante marcar la barra del medio, porque la proximidad de las bolas a la barra del medio es la que te indica qué número está representando, ¿vale? Y ahora, dado el problema que me han planteado, ¿cuántas varillas pensáis que necesito escribir?
- A: Tres.
- F: ¿Tres varillas? Pongo una varilla, dos varillas, tres varillas. Esta, unidades, decenas, centenas. Esta la pongo un poco más gorda para que se note que es la barra de madera del medio, ¿vale? Y ahora, ¿cómo dibujo 210?



- A: Pues 0 unidades.
- F: 0, o sea que aquí no pongo nada pegado a la barra, ¿no? [señala la varilla de las unidades]. ¿Aquí? [señala la varilla de las decenas].
- A: 1 decena.
- F: Una pegada a la barra, ¿arriba o abajo?
- A: Abajo.

- F: Abajo, o sea que aquí va una.
 A: Y 2 centenas pegadas a la barra de abajo.
 F: Pegadas a la barra, abajo. Una y dos, ahí está. Eso es 210.

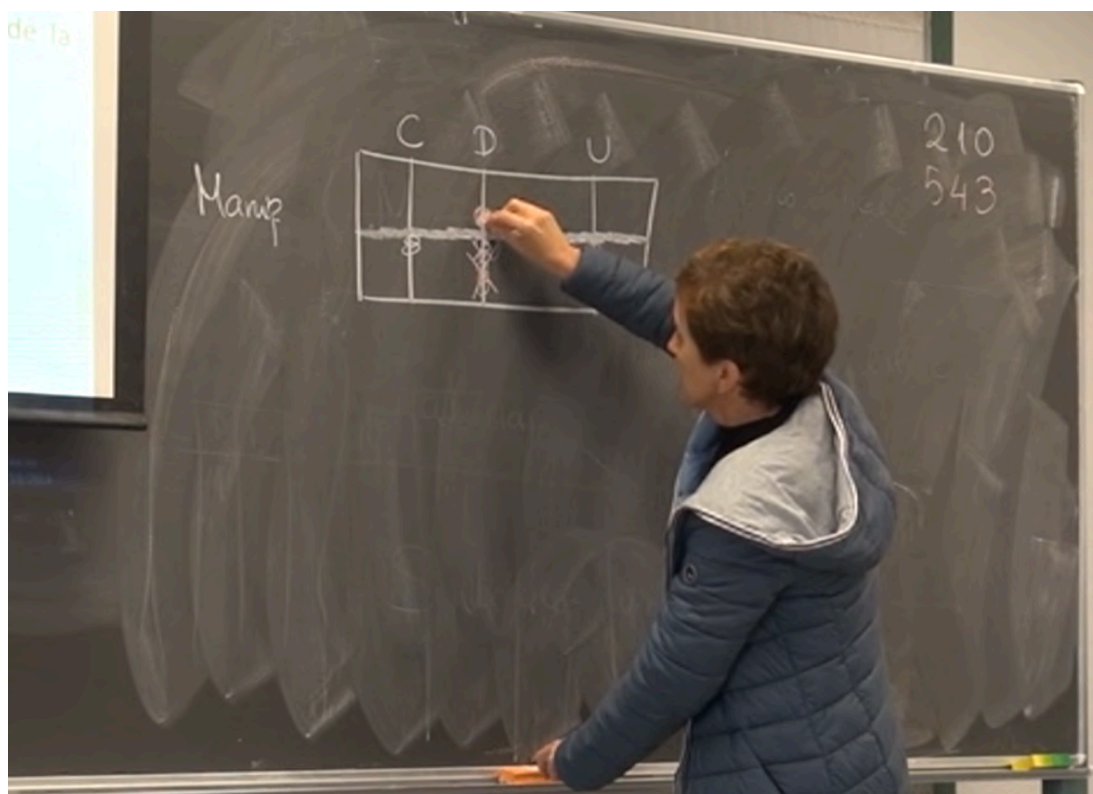


Y ahora, tengo que sumar 543, es decir, que tengo que añadir 543 unidades ahí.

Comentario 1: Bueno, pues como en los ejemplos anteriores, ella está buscando la complicidad de los alumnos, es decir, ella está buscando que entre todos los alumnos pues le digan cómo ella tiene que proceder, siempre escribiendo lo que ella quiere.

Aprovecho la estructura, ¿vale? Entonces, añado 3 unidades, en la varilla de las unidades, que son 3 aquí abajo, ¿no?, 1, 2 y 3 [las dibuja en la varilla de las unidades]. Después añado 4 decenas, en la varilla... 1, 2, 3, 4, ¿vale? [las dibuja en la varilla de las decenas], 4 decenas.

- A: Pero cambiamos...
 F: Pero...
 A: Bajamos una de arriba y quitamos las de abajo.
 F: Porque no tenéis 4, ¿vale?, ya no había suficientes, ¿por qué?, porque las bolas de arriba valen 5, entonces decís: «no pasa nada, estas, como eran 4 y 1, 5, se representan ahí arriba», ¿vale?



Y luego, 5..., tengo que añadir 5 centenas, ¿cómo lo hago?

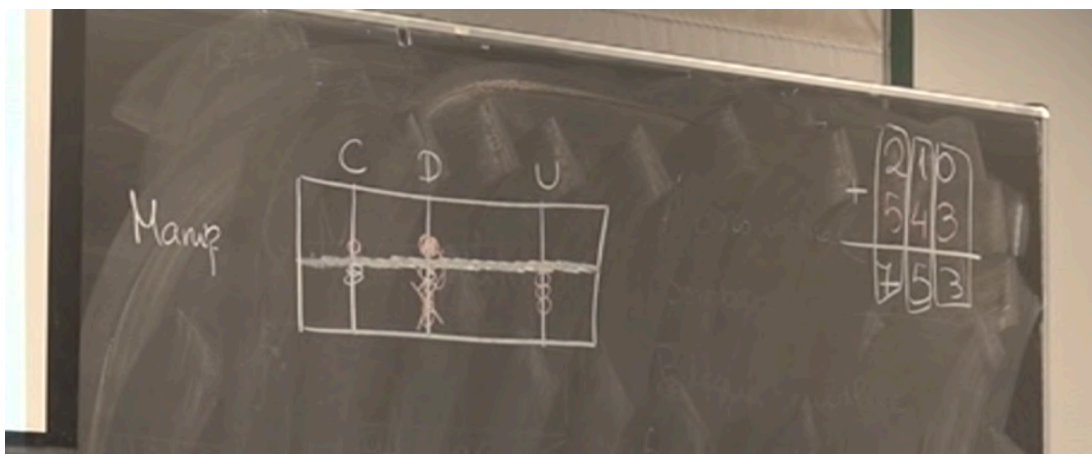
A: Pues 1 arriba.

F: Una de arriba la bajo directamente o podría ir: «1, 2, 3, ya tengo 5, las subo ahí, 4, 5» [va señalando en la varilla de las centenas], ¿vale? Puedo hacerlo de dos formas distintas. Pero si aprovecho la estructura del ábaco, de manera que las bolas de arriba valen 5, como tengo que añadir 5, pues directamente ya añado ahí esas 5 [dibuja una bola en la varilla de las centenas, en la parte superior, pegada a la barra horizontal], ¿vale?

Entonces, [representa ahora el resultado en la suma con el algoritmo tradicional de forma simbólico-numérica a partir de lo que ha obtenido en la representación con el sorobán] me quedan 5 y 2, 7, aquí me quedan 5, y aquí me quedaban 3.

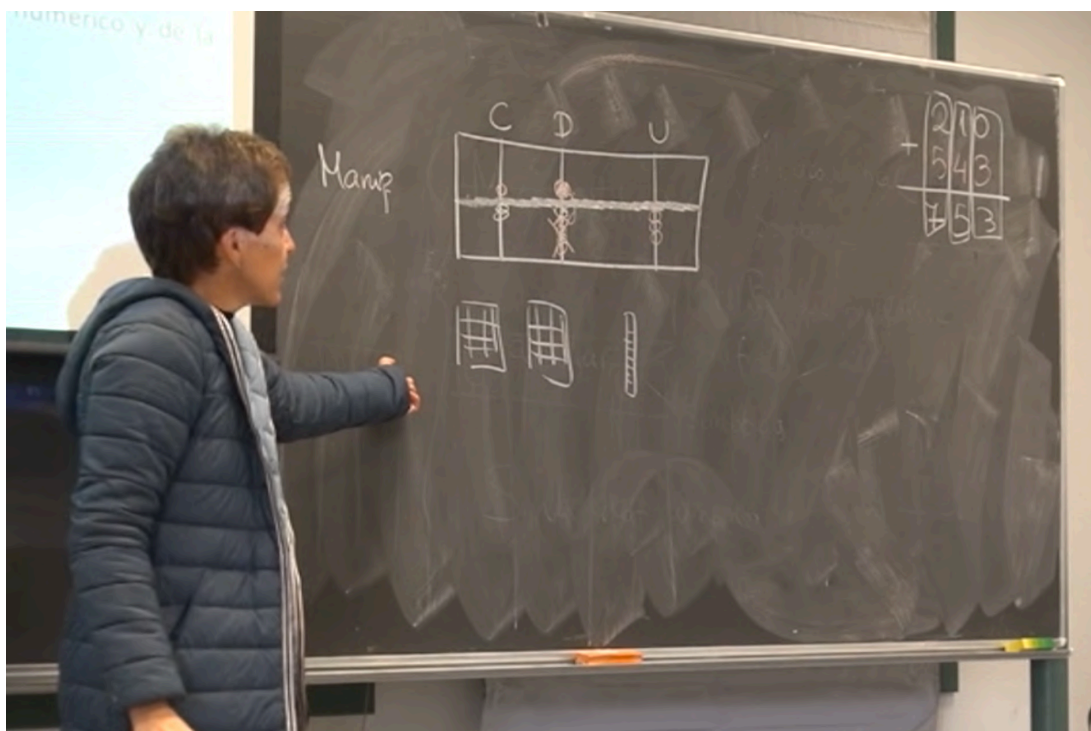
Comentario 2: Bueno, cuando ha pintado la bola correspondiente al 5 en las decenas la ha coloreado. Da igual colorearla o no colorearla, ¿no?, pero yo hubiese actuado igual ya para todas, pues ya cuando pinto la bola de las centenas que vale 5 también la coloreo, es decir, la pongo negra si vale 5 para distinguirlas – aunque está arriba, se nota que está arriba, que vale 5 –, pero para que no surja la duda de «¿por qué la de arriba no está coloreada en las centenas y sí está coloreada en las decenas?».

Entonces, si yo lo represento así y voy sumando por columnas, tal cual he ido haciendo en el ábaco, tengo 0 unidades y 3 unidades, 3 unidades, 1 unidad y 4 unidades, 5 unidades, perdón, decenas, 2 decenas y 5 decenas, 7 decenas. Vertical, lo he colocado vertical por parecerme a la estructura del ábaco, ¿no?, para tener en cuenta la «posicionalidad», ¿vale?, del sistema.

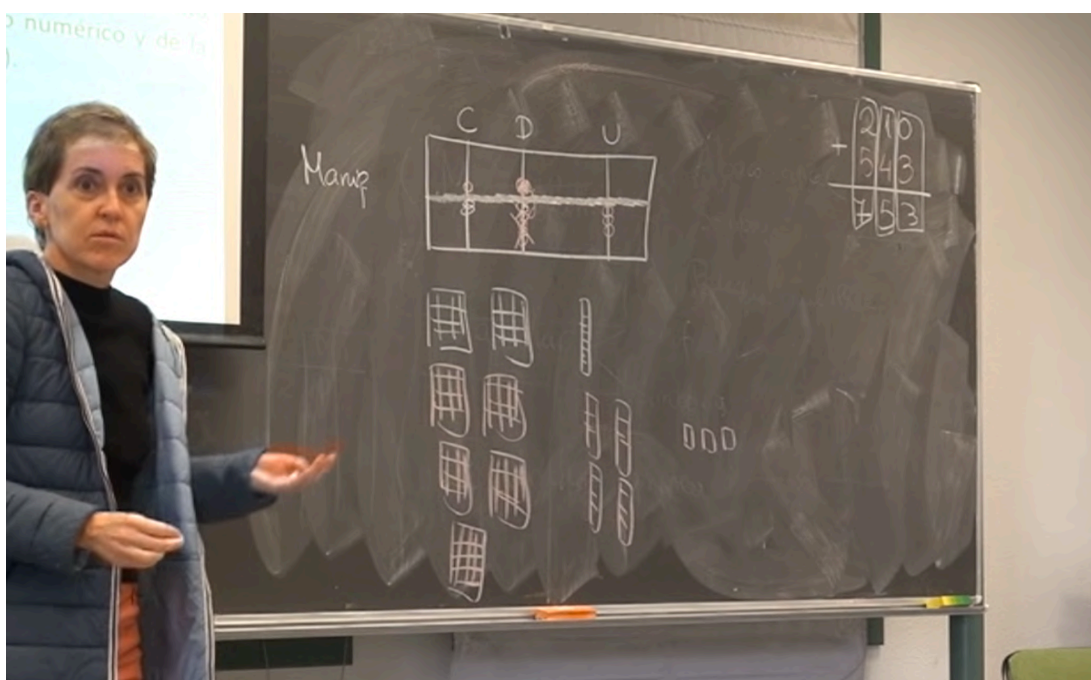


Entonces, he traducido al simbólico lo que he hecho aquí manipulativamente al escribir en simbólico en columnas y represento con cada columna cada una de estas [señala las varillas del sorobán de la pizarra]. Y luego, la escritura, sí que tengo que tener en cuenta que estos son 5 [señala las decenas de la suma en simbólico] con lo cual van arriba [en el sorobán] y esto son 7 [señala las centenas de la suma en simbólico], pues son 5 y 2 [en el sorobán], ¿vale?

Bloques multibase, bloques multibase, pongo aquí 210, ¿no?, que son 1 y 2 placas de 100 y 10, una decena; este es el 210.



Y ahora agrupo 543; una, dos, tres, cuatro y cinco [dibuja 5 placas de 100 unidades], añado, ¿vale?, 500. 40: una, dos, tres, cuatro [barras de 10]; y 3: uno, dos y tres [unidades]. Y ahora lo pongo todo junto. ¿Vale?



Y digo: «aquí tengo 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 [placas de 100]», ¿necesito agrupar? [Rodea con una línea todas las placas de 100].

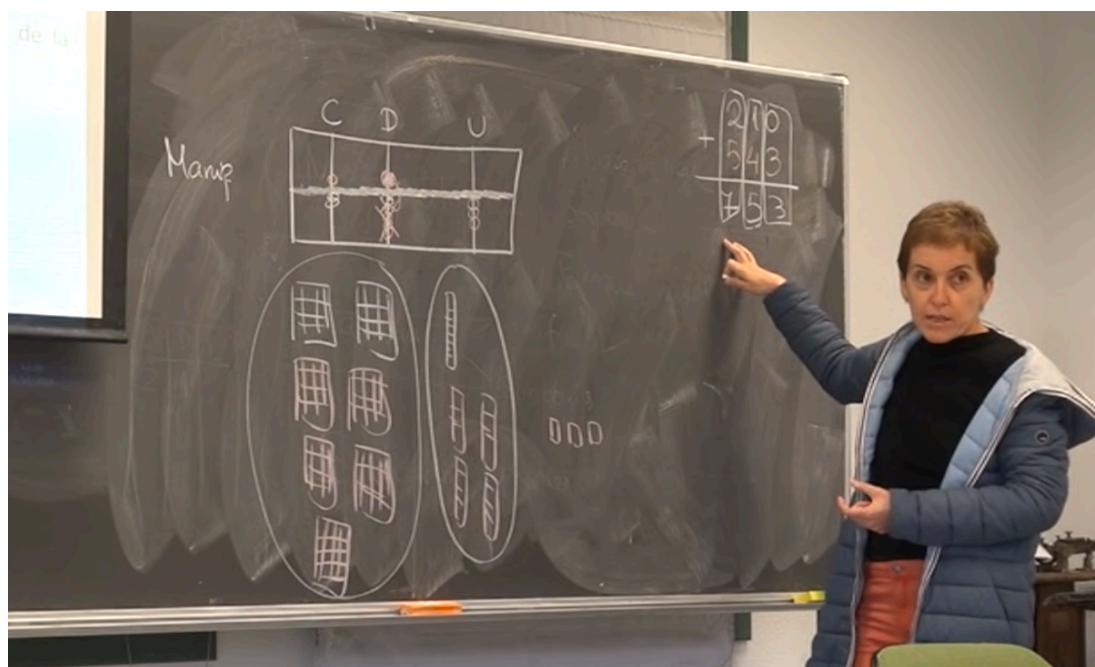
A: No.

F: No necesito agrupar.

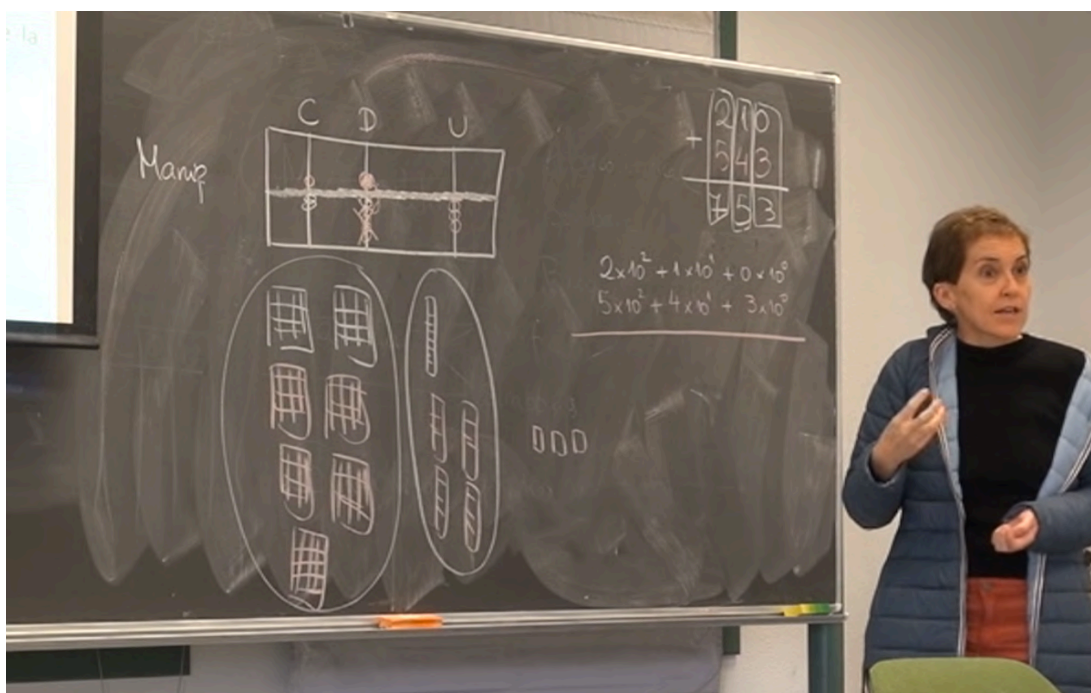
Comentario 3: Hace algo muy bien, que es poner los bloques multibase..., los de 100 debajo de los de 100, los de 10 debajo de los de 10..., porque ahora pues hace un círculo en cada uno de ellos y basta con contar para tener el 753; lo hace intencionalmente desde el principio.

Aquí tengo 1, 2, 3, 4, 5, 6, 5, ¿necesito agrupar estos 5 de alguna manera? [Rodea con una línea todas las barras de 10]. No porque es base 10. Y aquí tengo 3, ¿vale? O sea, que me vuelve a salir 2, 4, 6, 7 [centenas; señala la suma en simbólico], 2, 4, 5 [decenas], 5 [señala la suma en simbólico] y 3. Y veo la conexión de uno con otro, ¿vale? ¿Está claro hasta aquí?

A: Sí, eso sí.



F: El que quiera escribirlo simbólico-numérico de otra manera en la que se vea la «posicionalidad» del sistema, podría escribirlo de la siguiente forma: $2 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 0 \times 10^0$, ese es el primer sumando; segundo sumando, $5 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 3 \times 10^0$; y sumo.

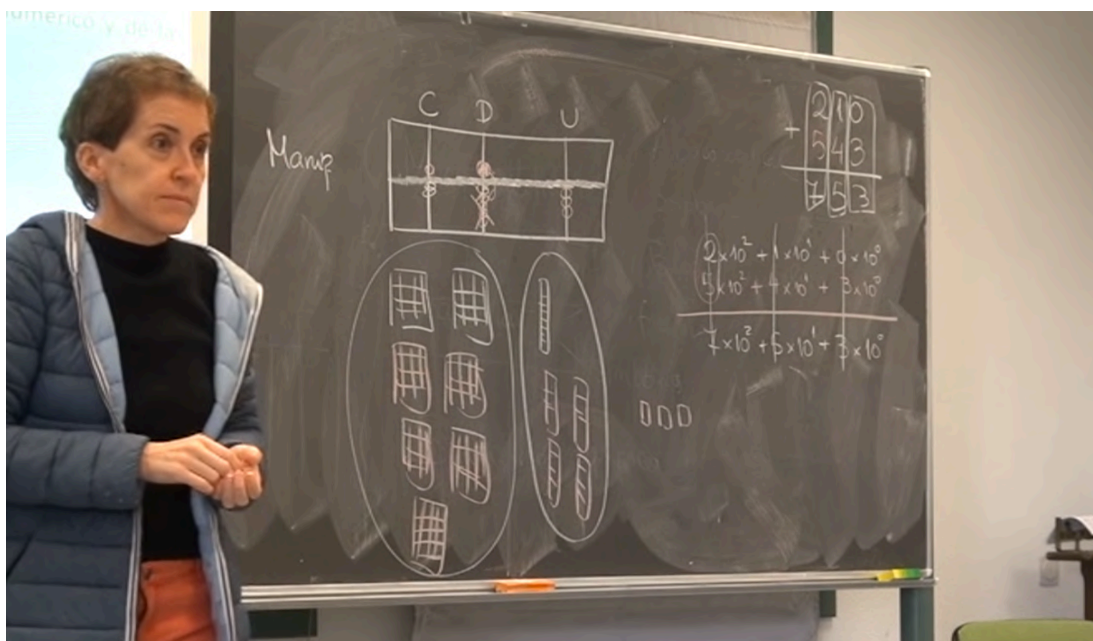


Y ahora, al sumar, utilizo la propiedad conmutativa, para colocar los sumandos en el orden que quiero, y asociativa, para ir organizando, ¿vale? O sea, que este [señala 5×10^2] —que, si lo coloco seguido, estaría aquí el cuarto [señala detrás de 0×10^0]— lo quiero colocar el segundo para agruparlo con este [señala 2×10^2], este [señala 4×10^1] —que estaría el quinto [señala detrás de 0×10^0]— lo coloco el tercero para agruparlo con este [señala 1×10^1], y este [señala 3×10^0] lo agrupo con este [señala 0×10^0]. Y ahora, al agrupar, ya me quedan 5 y 2, propiedad distributiva, 7×10^2 más, 4 y 1, 5×10^1 más, 0 y 3, 3×10^0 .

Comentario 4: Bueno, ahora intenta que asocien que la suma que se hace normalmente con el algoritmo pues en el fondo es utilizar el sistema numérico decimal con las potencias de 10. Y bueno, hace alusión a la propiedad conmutativa y a la asociativa, aunque posiblemente ahora mismo ahí los alumnos no saben muy bien qué está diciendo, pero lo que realmente está diciendo es que el 2 lo agrupo con el 5 y multiplicaría al 10^2 , es decir, que podríamos sacar factor común ese 10^2 y multiplicar el $2 + 5$. Es decir, eso que a ella ahora mismo no le interesa..., pues ha soltado así el nombre de las propiedades pues para que los alumnos sepan realmente por qué puedo hacer esa suma.

Pero ahí estoy utilizando la asociatividad de la suma, la conmutatividad de la suma y la distributiva de la suma y el producto de números enteros, ¿vale? Pero si lo coloco así, veo esto, esto y eso [señala los coeficientes que acompañan a 10^2 , 10^1 y 10^0], que es lo mismo que esto, esto y eso [señala el 7, 5 y 3 del resultado de

la suma en la forma simbólico-numérica], que es lo mismo que esto, esto y esto [señala los bloques multibase en la pizarra] y que es lo mismo que 1, 2 y 3 varillas [señala las varillas del sorobán en la pizarra]. ¿Está claro hasta aquí?



- A: Sí.
- F: Ahora, ¿qué diferencia hay entre esto y la siguiente suma que me plantean ahí [en el PDF proyectado en la pantalla]? $316 + 429$.
- A: Que me paso de unidades y tengo que pasar a las decenas.
- F: Que cuando agrupo aquí, por ejemplo [bloques multibase], o cuando agrupo aquí [sorobán], o cuando agrupo aquí [expresiones de sumas y productos de potencias de 10], aquí aparecen más de 10 [señala al 3 de 3×10^1]. En algún sitio aparecen más de 10, por ejemplo, cuando tengo 9 unidades y 6 unidades, aquí aparecerían 15 fichitas pequeñas [bloques multibase], aquí tendría que representar 15 [sorobán] y aquí aparecería 15×10^0 . Pero como estamos en base 10, no puedo dejarlo así, tengo que agrupar, tengo que agrupar. Entonces, agrupo 10 y dejo 5, y las 10 que agrupo las paso al siguiente valor, es decir, pego 10 fichas y construyo una barra [bloques multibase], agrupo 10 y me sale otra bola aquí en el ábaco, aquí abajo [parte baja de la varilla de las decenas], o agrupo 10 y me sale uno más aquí [en 5×10^1] y aquí [en 3×10^0] dejo las que se quedaban sueltas, las 5, ¿vale? O sea, que la única diferencia es que aquí, después de representar cada cantidad y de ir poniendo por orden el valor de cada una,

Comentario 5: Bueno, ahora está viendo las diferencias, está haciendo alusión a la

diferencia entre el ejemplo 1 y el ejemplo 2, es decir, les está dejando ya claro que..., bueno, que los alumnos ya lo han hecho, ¿no?, pero les está dejando claro que no ha puesto dos ejemplos iguales. Ha puesto un ejemplo en el que no se pasa de 10 ningún dígito en la suma y ha puesto otro en el que sí, y entonces se las habrán tenido que apañar cuando han hecho las sumas con el material, pues como antes con el ábaco, para transformar el número en otra representación del mismo que les permita dar el resultado final de la suma.

tengo que agrupar porque en algunos sitios tengo 10 o más, ¿vale? Es la única diferencia.

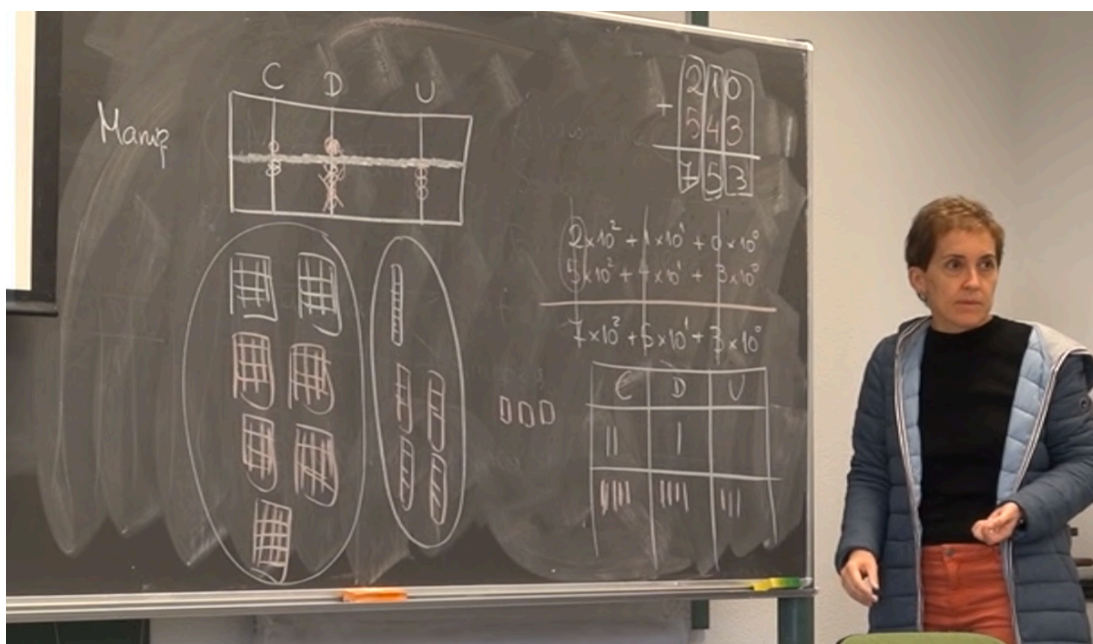
Y ahora, si quisiéramos representar esto en formato tabla, como tenía Martín, ¿no? ¿Cuántas columnas pondré yo en la tabla?, ¿qué me pide el cuerpo? Tengo que dibujar una tabla, ¿vale?, vamos a dibujar una tabla [comienza a dibujarla en la pizarra], con filas y columnas, ¿cuántas columnas pongo?

A: Tres.

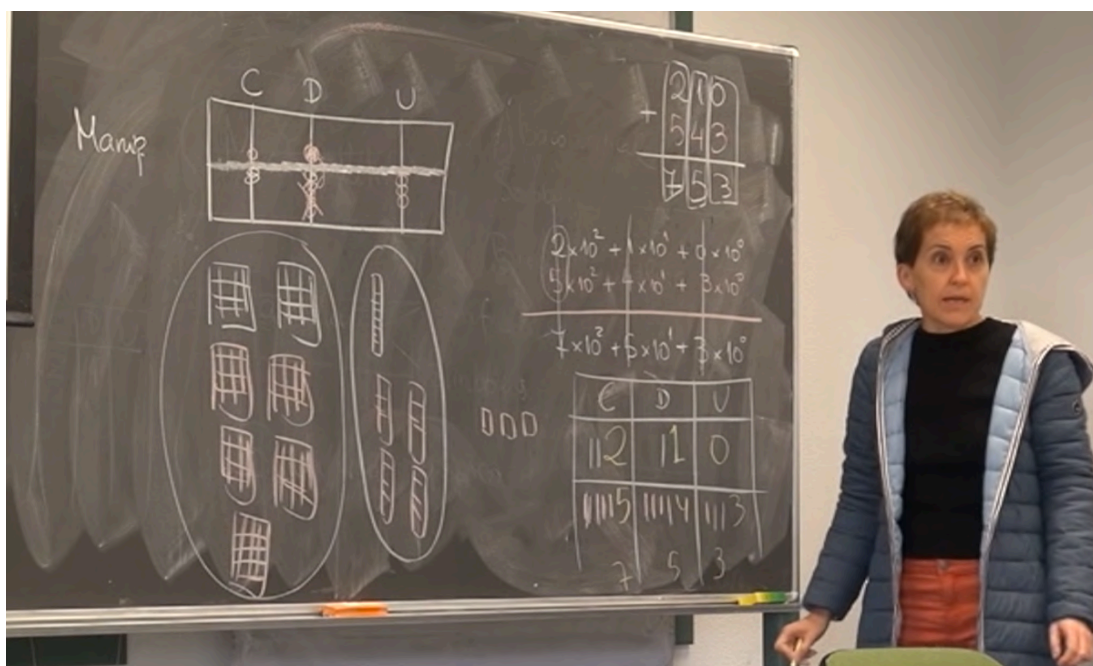
F: Tres, ¿por qué tres?

A: Centenas, decenas y unidades.

F: Unidades, decenas y centenas, ¿vale? Y entonces, represento el primer número, 210: 1, 2, 1, eso es 210 [pone dos rayas en la primera casilla de las centenas y una en la primera de las decenas]. Represento el segundo número, 500: 1, 2, 3, 4, 5; 40: 1..., bueno, en rosa, ya puestos..., 1, 2, 3, 4, 5; 40: 1, 2, 3, 4; y 3: 1, 2, 3. Y agrupo: ¿cuántas unidades tengo al final?, 3, ¿cuántas decenas tengo al final?, 5, ¿cuántas centenas tengo al final?, 7, fin.



Este sistema de representación es icónico-gráfico porque he representado aquí las cantidades con palitos, pero tiene una estructura especial porque está en una tabla, ¿vale? Entonces, vamos a decir que es un sistema de representación tabular-gráfico. Si en vez de poner aquí gráficos, yo hubiera dicho: «oye, mira, no me lío con los gráficos, ya puestos, como ya controlo mejor los símbolos, pues voy a poner aquí 210 y aquí abajo voy a poner 543 y luego ya sumo: 4 y 1, 5; 5 y 2, 7; 3 y 0, 3», ¿vale?



Sería tabular, tiene una estructura tabular, no es puramente simbólico-numérico, tiene una estructura tabular, pero con números dentro, tabular-numérico, ¿vale?

Comentario 6: Bueno, pues ahí les está explicando pues qué nombre tendrían los sistemas de representación en forma tabular. Imagino que no insistirá sobre ello, pero simplemente para que les suene y, como sí ha dicho, el que va a pedir es el sistema de representación tabular-gráfico.

Entonces, yo voy pasando de lo más concreto, que sería: «mi madre me ha dado 316 euros y mi abuela 429, ¿cuántos euros tengo en total?», después paso a manipular, con ábacos verticales, con ábacos japoneses, con bloques multibase..., y cuando interiorizo bien eso, digo: «ostras, venga, lo voy a poner en una tabla gráfica y voy a indicar lo que me indica cada varilla o lo que me indica cada agrupamiento de los bloques multibase, que es posición, en las columnas de una tabla, y ahí voy a poder marcarlo con símbolos». Esta tabla con símbolos se llama tablero de posición, porque tengo las posiciones indicadas —unidades, decenas y centenas—, y es uno de los recursos que más utilizan en el método famoso este Singapur, que habréis visto o habréis oído hablar de él, ¿vale?

Comentario 7: Bueno, ahora les está explicando la secuencia didáctica que a su juicio sería la idónea para explicar las sumas, utilizando materiales para finalmente llegar a realizar la suma numéricamente.

Entonces, ¿qué están haciendo?, están haciendo una transición de los más concreto, pasando por lo manipulativo, hacia lo abstracto, que sería..., esto es lo más abstracto [señala las expresiones de sumas y productos de potencias de 10] y esto es lo abstracto que se trabaja en primaria [señala la suma hecha en el registro de representación simbólico-numérico], ¿vale? Pero no trabajan directamente con esto, vamos pasando..., concreto, concreto, concreto, concreto [de forma manipulativa], voy intentando abstraer un poco, pero tengo mis gráficos que me ayudan a visualizar lo que estoy haciendo [de forma tabular], y finalmente mi objetivo es escribirlo simbólico-numéricamente,

Comentario 8: Lo repite, porque está repitiendo otra vez lo mismo, porque lo considera importante; que cuando expliquen sumas en primaria, pues que no lo hagan directamente con el algoritmo, sino que utilicen estos materiales, si es que disponen de ellos.

de forma abstracta, ya al final. ¿Cómo habéis trabajado mayoritariamente vosotros en primaria cuando estabais haciendo sumas de este estilo?

Comentario 9: Y ahora pues a lo que irá es a que posiblemente no hayan trabajado ellos nunca con materiales o muy poco con materiales y que posiblemente, pues por esa razón, pues la chica de antes decía que cuando ella restaba no hace lo mismo que hace con el ábaco.

¿Desde aquí [señala lo manipulativo] o desde el final [señala lo simbólico-numérico]?

A: Desde el final...

A: Yo con las de centenas, decenas y unidades, las cajas...

F: Las cajas estas también os suenan, los tableros de posición, pero ¿y qué poníais en las posiciones, palitos o los números ya?

A: Los números directamente.

F: Los números directamente, o sea, que estabais trabajando la fase inicial, de la suma, la estabais trabajando directamente con lo simbólico, que es la fase final, ¿lo veis?

A: Jolín, sí.

F: Vale, pues ala, ya está.

ANEXO 8

Transcripción de los comentarios de Pablo en la fase 1

Nota: El texto presentado entre corchetes en la transcripción se corresponde con información incluida por el investigador.

TRANSCRIPCIÓN DEL VÍDEO 1

Fragmento 1

[F = Formadora del vídeo]. [Comentarios de Pablo presentados en recuadros].

F: Bueno, entonces os voy a dar el guion y empezáis a trabajar y, al final, los últimos 15 minutos, hacemos la puesta en común. El guion de la actividad aparece aquí en el campus, pone la fecha, ¿vale?, «actividad para la sesión del 19 de septiembre».

Comentario 1: Aquí estoy detectando una actividad de enseñanza; está explicando la actividad que quiere hacer con ellos con la intención de que la realicen correctamente; está explicando la actividad, está dando las instrucciones.

Lo voy a leer porque está en inglés, por si alguno tuviera alguna dificultad, lo leo y os ponéis a trabajar, ¿vale?

Todo el mundo en la mesa tiene un montón de palillos y varias cintas de estas, ¿no?, elásticas. Si alguien necesita más cintas me las pide, palillos no, son los que os he puesto, ¿vale?, es con lo que tenéis que trabajar.

Comentario 2: Está continuando con las instrucciones y está indicando los materiales que van a utilizar. Todo es explicación de la actividad de momento.

El problema es que yo he comprado una caja de palillos en Supeco y resulta que mis compañeros lo compran en Mercadona y me dicen que las cajas de palillos que ponen 800 palillos del Mercadona traen más y que les sale a cuenta, y que cuando van a comprar materiales —porque a veces tenemos que comprar nosotros los materiales— pues que merece la pena. Yo no pude ir a Mercadona, fui a Supeco, pone que son 800, pero no sé si me han timado o no me han timado. Entonces, para hacer un control de calidad, hacer una estimación, que luego,

bueno, los que hayáis hecho Matemáticas de Ciencias Sociales pues sabéis hacer un contraste de hipótesis y tal, pero bueno, lo primero que tengo que hacer es hacer una estimación de cuántos hay, ¿no? Entonces, los he repartido para no contarlos yo y la idea es ver cuántos hay.

Comentario 3: Está contextualizando la actividad en una situación cotidiana para intentar motivar a los alumnos y captar su interés.

Entonces, el guion de la actividad, tal y como aparece aquí... [espera a que cargue el ordenador]. Aquí está el guion. Esta actividad –esperad que la amplíe un poco– está escaneada de un libro muy bueno que utilizan en los últimos años en Estados Unidos para formar profesores de primaria. Lo bueno del libro es que, además de los contenidos teóricos, más de la mitad del libro son actividades para llevar al aula-taller como estamos haciendo aquí, ¿vale?

Comentario 4: Es una actividad de enseñanza, está dando una referencia bibliográfica y justificando por qué es buena para ellos; esto lo detecto como una práctica de enseñanza.

Entonces, una de las actividades iniciales para el trabajo con el número, que es con lo que estamos empezando nosotros, es esta de los palillos, ¿vale?

Entonces, aquí la pregunta es «cuántos», cuántos palillos, ¿no?, que es lo que os he preguntado a vosotros, ¿no?, cuántos. Entonces, cada grupo participando en esta actividad tiene un montón de palillos y luego tiene algo para atarlos, ¿no?, *rubber bands*, pues cintas de estas elásticas. Los materiales ya los tenéis. El objetivo de la actividad es ayudaros a entender el desarrollo de la escritura de los números tal y como los utilizamos nosotros en nuestro sistema de numeración, ¿vale? Entonces, primero, organiza los palillos de forma que visualmente puedas ver más o menos cuántos hay; usa las bandas elásticas, si te ayudan, para organizarlos de manera que así, de un vistazo, puedas decir cuántos tienes, primero los cuentas, lo organizas, piensas cómo organizarlo, pero la cosa es que la organización que tú tengas en la mesa te permita de un vistazo recordar cuántos hay sin necesidad de haberlo apuntado, ¿no?, y que, si yo me paso por allí, me podáis decir: «mira, hay no sé cuántos, porque...», lo veo porque lo hemos organizado así», ¿vale? Luego, reflexiona sobre si la manera en la que lo has organizado corresponde a cómo escribirías tú luego los numerales para

representar esa cantidad de palillos. Después, tienes que juntar tus palillos con los de un grupo de al lado, ¿vale?, por ejemplo, vosotros con vosotros y así, cada dos grupos tienen que juntar los palillos que tienen y decidir cuántos tienen en común, ¿vale?, cuántos tienen en total. Y al final, tenemos que juntarlos todos y de una forma ágil, sin tener que volver a contarlos todos, tenemos que saber cuántos palillos hay en total en la clase repartidos, ¿vale? O sea que, primero, cada grupo tiene que saber cuántos tiene y tiene que generar una estrategia para, de manera rápida, mirar en la mesa y ver cuántos hay; después, reflexionar sobre si la manera en la que lo coloca cuando uno luego escribe, imaginaos, «tengo 72, pues cómo se escribe 72: siete, dos», pues la manera en la que lo coloco me ayuda con la escritura o no, no tiene por qué, se reflexiona un poco sobre eso; y cuando hayáis terminado esa parte, llamáis al grupo de al lado y decís: «venga, vamos a ver cuántos tenemos en total, visualmente, cómo lo organizasteis vosotros, cómo lo organicé yo, a ver cómo lo tengo», ¿vale?; y luego todos.

Comentario 5: Aquí ha habido muchas cosas. Ha planteado la actividad; ha indicado los objetivos; ha indicado con mucha libertad cómo hacer la actividad para luego comparar métodos entre unos grupos y otros... Y la justificación es..., lo que ha dicho, el trabajo con el numeral. Y la metodología, en ese sentido, entiendo que es adecuada, que está dejando libertad a todos los grupos para trabajar de distintas formas para luego comparar las distintas técnicas que ha elaborado cada uno para ver cuál es mejor y cuál es peor.

Tenéis un cuarto de hora, ¿vale?

Fragmento 2

[F = Formadora del vídeo]. [A = Alumnos]. [Comentarios de Pablo presentados en recuadros].

- F: Necesito saber si habéis tenido que llegar a algún acuerdo entre los grupos o...
- A: Sí, claro, todo ha sido un consenso, todo ha sido un consenso.
- F: Ah, vale, ha sido un consenso. ¿Qué acuerdo habéis tenido que...?
- A: Hemos explicado cada uno pues lo que significaba cada..., cada gomita.
- F: Y, por ejemplo, ¿vosotros de cuánto en cuánto lo habíais agrupado? Eráis los de 15, 10, 5, ¿no?
- A: Sí.
- F: ¿Y vosotros?
- A: 20, 10 y 4.
- F: 20, 10 y 4.

Comentario 1: Ahí está abriendo un debate entre los distintos métodos que han utilizado los grupos para que puedan los alumnos comparar las distintas estrategias que han usado y reflexionar sobre cuál es mejor y cuál tiene alguna deficiencia.

- Entonces, ¿habéis tenido que llegar a algún acuerdo alguno para reordenar?
- A: No, porque nos ha venido muy bien.
- F: ¿Os ha venido bien?
- A: Es que hemos sido muy inteligentes cogiendo el amarillo para los grandes [se refiere a gomas elásticas de color amarillo].
- F: Ahora los grandes de qué son, ¿de 20?
- A: De 20 y de 15, aquí están mezclados. ¿O los tenemos que reorganizar?



- F: Esto es superinteligente, ¿no? O sea, yo veo aquí..., digo: «en los amarillos, algunos tienen 20 y algunos tienen 15, búscate la vida Nuria».
- A: Pero son amarillos.
- F: Ya, pero entonces yo no sé... Yo digo: «vale, yo puedo ver 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 grupos amarillos», ¿no?

Comentario 2: Está haciendo reflexionar al grupo sobre el método que ha utilizado y haciéndoles reflexionar sobre si es lo mejor o no.

- Y ahora digo: «como mucho serán 160, si son todos de 20, pero... no necesariamente son 160, pueden ser menos».
- A: Bueno, pero como no lo sabes...
- F: ¿Entonces cómo sé cuántos hay?
- A: Te lo estamos diciendo, tienes que confiar en nosotros.
- F: No, en matemáticas la confianza no vale, uno tiene que...
- A: Es que no sé, no lo entiendo. ¿Lo tenemos que reorganizar?
- F: Vosotros ya sabéis cuántos palillos tenéis, pero ahora, visualmente, tenéis que poder contarme a mí cómo sabéis que hay ese número de palillos, ¿no?
- A: Ah, pues habría que... ¿Y no podemos quitar las gomas y reorganizarlo?
- F: Sí, sí, sí, yo no dije que no pudierais quitar las gomas.
- A: Aaaaah.
- F: ¿Alguien dijo que no se podían quitar?
- A: Y nosotros diciendo que no se podían quitar las gomas...

Comentario 3: Está, digamos, reexplicando la actividad; por lo visto, los alumnos no habían entendido todos los detalles de la actividad y está reexplicando algún detalle para que los alumnos mejoren su táctica de conteo.

F: Y una duda más. Alguno de vosotros..., por separado, ¿no?, cuando lo teníais..., habéis escrito la cantidad que teníais, ¿no? Eh, 109 teníais uno...

A: 104 y 85.

F: Por ejemplo, el 85 se escribe con un 8 y un 5. Ese 8 y ese 5, ¿estaban representados de alguna forma en...?

A: No.

F: No, vale. Y vosotros, la misma pregunta con lo vuestro.

A: No.

F: No había un patrón en cómo lo habíais representado, vale, ok.

Comentario 4: Ahí está intentando relacionar nuestro sistema numérico decimal con la técnica de conteo que están utilizando los alumnos, intentando que reflexionen sobre los dos métodos que están utilizando, tanto el de los alumnos como nuestro sistema numérico decimal.

A: ¿Pero quieres que busquemos?

F: Quiero que reflexionéis sobre eso, pero ahora lo vamos a poner en común, ¿vale?

A: Vale.

F: ¿Ha sido operativo el que ellos hayan hecho 15, 10, 5... y vosotras tuvieras 20...? ¿Eso ha ayudado a la hora de ponerlo en común?

A: No, porque ahora hay que hacerlo otra vez.

F: Ahora hay que volverlo a hacer...

Fragmento 3

[F = Formadora del vídeo]. [A = Alumnos]. [Comentarios de Pablo presentados en recuadros].

F: Me tenéis que decir cuántos palillos había en cada grupo inicialmente, antes de juntaros dos grupos, ¿vale? Entonces, por ejemplo, vosotros.

A: 87.

F: 87 [lo escribe en la pizarra]. Estamos de acuerdo, yo utilizo la escritura estándar que vosotros habéis visto en primaria, secundaria, bachillerato y al llegar aquí, ¿vale? Escritura estándar de nuestro sistema de numeración en nuestro contexto. Ese grupo, 87. ¿Cómo habíais hecho los grupos?

A: Pues hemos hecho, eh..., tres grupos de 20.

F: Tres grupos de 20, ¿cómo lo puedo poner? [Escribe un 3 en la pizarra].

A: Eh..., tres rosas.

A: 3×20 .

F: ¿Tres rosas?

A: Sí.

A: No.

F: Si pongo tres rosas... ¿Todo el mundo que ha utilizado gomitas rosas ha atado 20?

A: No.

F: ¿Otras personas que han atado 20 han usado otro color?

A: Sí.

F: Uf, el color no me vale. ¿Cómo lo pongo?

A: 20×3 .

A: 3×20 .

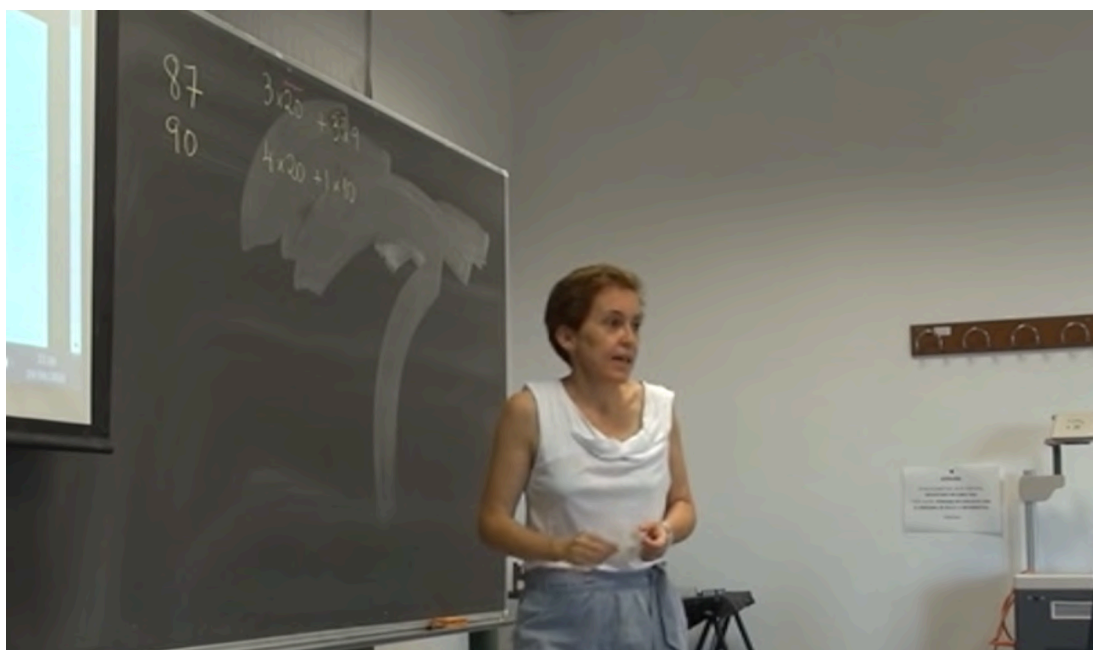
F: 3 grupos de 20, ¿no? 3×20 . [Escribe 3×20]. Y luego...

Comentario 1: Está ahora comparando los distintos métodos de conteo de los grupos y viendo la dificultad que tienen en la representación al no haber usado todos los grupos un criterio común.

A: Pon en el 3 «color rosa» o algo así. Entre paréntesis.

F: Vale, vale. [Pinta una raya rosa sobre el 20]. Y luego... Esto son 60.

- A: 9×3 .
- F: Y luego 9 grupos de 3, ¿no? [Escribe + 9]. ¿O 3 grupos de 9? [Borra el 9].
- A: 3×9 .
- F: 3 grupos de 9 y el 9 lo habéis puesto de otro color, ¿vale? [Escribe 3×9].
- A: Sí.
- F: ¿Alguien más ha utilizado grupos de 20?
- A: Nosotros.
- F: Varios. ¿Alguien más ha utilizado grupos de 9? [Destaca con la voz el número 9].
- A: Nosotras.
- F: Vosotras, vale, y vosotras también, vale. Siguiendo equipo, vosotras.
- A: Nosotras, 90.
- F: En total, 90. [Escribe 90 en la pizarra].
- A: 4 de 20 y 1 de 10.
- F: [Escribe $4 \times 20 + 1 \times 10$]. Vale, o sea que de momento han utilizado grupos de 20, grupos de 10, grupos de 9, ¿vale?



En esta escritura [señala lo que ha escrito en la pizarra] yo veo 3 grupos de 20, 3 grupos de 9, pero aquí [señala el 87] no veo un 3 y un 3. Yo aquí veo 4 grupos de 20, 1 grupo de 10, pero aquí [señala el 90] no veo 4, 1. Con lo cual, parece que tampoco habíais encontrado vosotros un patrón entre cómo escribo la cantidad total con símbolos numéricos y visualmente qué veo en los palillos, ¿vale? De momento, la transcripción de lo que veo en los palillos simbólico-numéricamente

la tengo aquí a la derecha [señala el $3 \times 20 + 3 \times 9$ y el $4 \times 20 + 1 \times 10$], pero no veo ninguna relación con esto [señala el 87 y el 90].

Comentario 2: En este momento está haciendo reflexionar a los alumnos sobre el valor que tienen las cifras de nuestro sistema numérico decimal y que no tienen ninguna relación con las técnicas de conteo que han utilizado ellos para contar los palillos.

Yo aquí estoy haciendo trampa porque estoy metiendo operaciones, nosotros ahora no estamos con las operaciones, estamos solo con el número, con la escritura del número, eso es lo que estamos trabajando, ¿no? Pero para ayudar a ver esa conexión de los palillos hacia lo simbólico-numérico, pongo, escribo eso de transición para ir copiando lo que me decís, ¿no?, porque tardo más, tardo más en dibujar los palillos, las gomitas rosas, no sé qué, podría sacar la foto de la cámara y ponerlo rápido, ¿no?, pero..., bueno, lo escribo, lo transcribo así. Ahora, otro grupo. Vosotros dos ya estáis, que luego, luego... Ah, venga, ya que estamos aquí [dibuja una llave a la derecha de lo que ya ha escrito en la pizarra]. ¿A qué consenso... habéis llegado...?

A: Pues 7 grupos de 20...

F: Muy bien, 7 grupos de 20 [señala el 3 y el 4]. Han visto rápido y han dicho: «bien, los dos hemos agrupado, sin habernos copiado, en grupos de 20, con lo cual automáticamente tenemos 7 grupos de 20» [escribe 7×20].

A: Luego, ellos los 27 de 3×9 ...

F: Sí.

A: ... los han dividido en 2 de 10 para que se junten con los nuestros de 10.

F: ¿Y por qué no habéis hecho vosotros... separar este de 10 [señala el 10 de 1×10] en 1 de 9 y 1 de 1?

A: Porque se quedaría 1 solo y luego...

F: Bueno, pobrecillo, ¿no? No pasa nada.

A: Y porque es más fácil sumar de 10 en 10 que de 9 en 9.

A: Para ponerle la goma a 1...

F: Para ponerle la goma a 1... Bueno... Eso... Puede ser una justificación, pero tampoco muy potente... Me gusta más lo que ha dicho ella, o ella...

A: Que es más fácil sumar de 10 en 10 que de 9 en 9.

- F: ¿Por qué será más fácil sumar de 10 en 10 que de 9 en 9 para nosotros? [Hablan varios alumnos a la vez]. ¿Por qué es más fácil sumar para nosotros de 10 en 10 y no de 9 en 9? [Hablan varios alumnos a la vez].

Comentario 3: Aquí, en todo este proceso, está haciendo reflexionar a los alumnos sobre nuestro sistema numérico decimal; les está preguntando por qué es más fácil sumar de 10 en 10 que de 9 en 9. Todo esto está relacionado con todas las agrupaciones que están haciendo y las que van a hacer ahora para sumar los dos grupos de palillos.

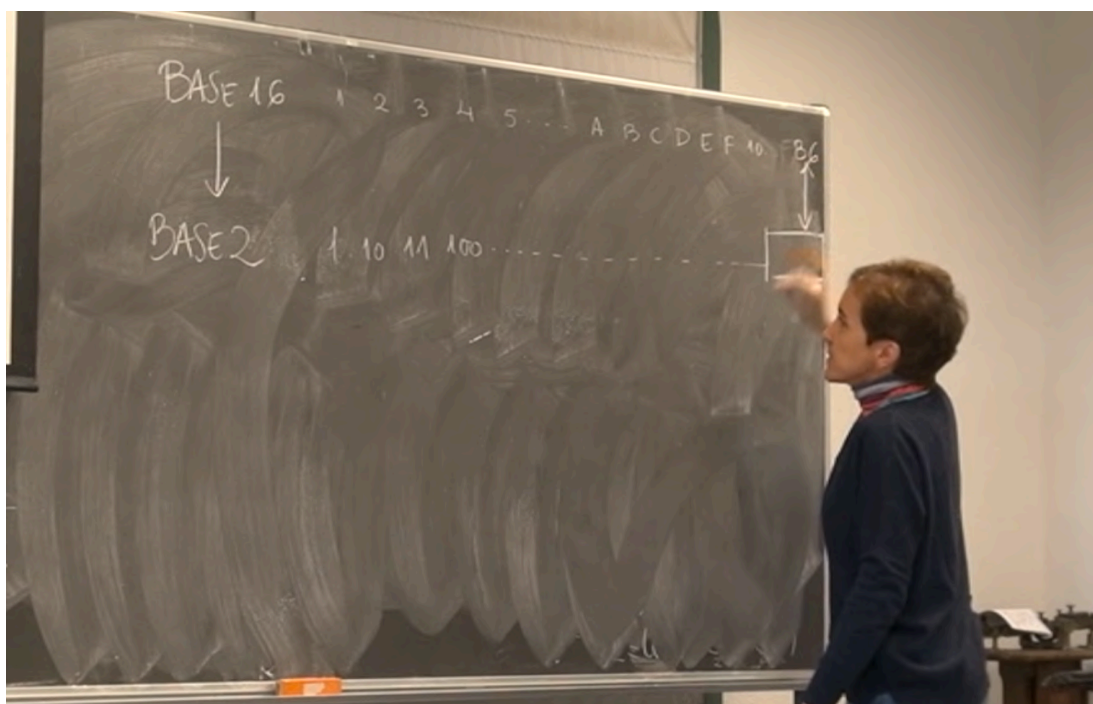
- Porque tenemos 10 dedos, por ejemplo, ¿no? Porque estamos más acostumbrados a 10, 20, 30, 40... [mueve las manos con los dedos estirados], ¿no?, como que nuestro sistema de numeración parece que...
- A: Porque en verdad solo sumas de 1 en 1 y luego le pones un 0, entonces...
- F: Solo sumas de 1 en 1, elabora eso. Estamos en clase de matemáticas, ¿qué es 1, 1...?
- A: Pues por ejemplo, si tienes 30, pues 1 más 1 más 1, 3, como es 10, pues le pones el 0 y ya tienes los 30.
- F: ¿3 qué?
- A: 3 grupos de 10.
- F: 3 grupos de 10, muy bien. 3 grupos de 10, vale. [Vuelve a la pizarra a terminar lo que empezó a escribir].
- A: 3 de 20, 3 de 10 y 1 de 7.
- F: [Escribe, después de 7×20 , 3 10]. 3 de 10, llegasteis a romper estos [señala 3×9] en 2 de 10 más 7 sueltos, ¿no? [escribe $2 \times 10 + 7$ encima de 3×9]. Y entonces estos dos [señala 2×10] con este [señala 1×10] 3 y 7 palillos ahí sueltos [escribe, después de $7 \times 20 + 3 \times 10$, 7×1], ¿vale? Ahora, la cantidad total, ¿cuánto es? [señala el 87 y el 90].
- A: 177.
- F: 1, 7, 7 [escribe 177 a la izquierda del 87 y del 90]. ¿Hay aquí 1, 7, 7 por algún lado? [señala el 7 de 7×20 , al 3 de 3×10 y al 7 de 7×1]. Este [señala el 7 de 7×1] parece que hay aquí, ¿no? Pero lo otro... no me cuadra mucho todavía... Vale, otros dos grupos.



TRANSCRIPCIÓN DEL VÍDEO 2

[F = Formadora del vídeo]. [A = Alumnos]. [Comentarios de Pablo presentados en recuadros].

- F: Como me piden pasar de base 16 a base 2 directamente [escribe en la pizarra], pues Martín dice: «yo escribo aquí la secuencia 1, 2, 3, 4, 5..., A, B, C, D [dice 10, 11, 12, 13, señalando A, B, C, D], 14, 15 [escribiendo E, F], uno, cero [10]..., así hasta el B6», ¿vale? Y luego aquí en paralelo, voy uno [1], uno, cero [10], uno, uno [11], uno, cero, cero [100]..., hasta que pille aquí el que sea y ya está.



No he pasado por base 10, que es lo que me dice Nuria. Con lo cual, superado. ¿Pero qué pasó?

Comentario 1: Aquí está planteando el problema. El problema es pasar un número de base 16 a base 2 y está buscando el método más eficiente de hacerlo.

- A: Que es muy largo.
- F: Que es muy largo. Y que hasta en su casa, teniendo semanas, ha dicho: «paso». Tenías tiempo suficiente, porque había tiempo suficiente en dos semanas a hacerlo, pero... es largo y además un coñazo, con lo cual ha dicho: «paso». Con la idea Nuria ya se hace una idea de que lo he pensado, es un procedimiento válido, pero no ha sido eficaz, ¿vale?, entonces nosotros tenemos que seguir pensando

Comentario 2: Está haciendo reflexionar a los alumnos sobre que una cosa es resolver un problema y otra es resolverlo de una forma eficiente o eficaz.

porque tendremos que buscar alguna estrategia que sea eficaz. [Da la palabra a una alumna].

A: ¿Se podría hacer la división?

F: ¿Qué división?

A: La de B6 entre 2. Es que no sé cómo plantearlo.

F: Ella dice: «oye, mira Nuria, cuando tú pasas de base 10 a base 2 haces grupos de 2 y divides de 2 en 2; pues ahora lo mismo, si estoy en B6 a base 2, divide entre 2». Pero aquí estoy escribiendo en base 16... [En la pizarra ha escrito B6 entre 2, con la caja]. Podríamos intentar hacerlo, pero... ¿sabemos hacerlo... o cómo va esto? ¿O mentalmente para hacerlo me vais a pasar a base 10, y hacéis la división en base 10 —que es lo que sabéis hacer—, y luego otra vez volvemos y entonces hacemos trampa porque pasamos por base 10? Si sabéis dividir un número en base 16 entre 2, si sabéis hacer esta división en base 16 —yo lo tendría que pensar, ¿eh?, así a capón no lo sé hacer, pero si lo pienso... —, si sabéis hacer eso, valdría.

Comentario 3: Está planteando una propuesta de una alumna y está haciendo reflexionar sobre si sabríamos hacerlo o no, las dificultades que tiene ese método, que puede ser válido, pero las dificultades que tiene hacerlo y si merece la pena explorar ese camino.



Pero esto lo vamos a ver en el dossier 3, ¿eh?, multiplicación y división. Nosotros tenemos herramientas para dividir en base 10 y sabemos cómo hacer restas sucesivas y el algoritmo tradicional de la cajita que habéis ido haciendo... Podríamos abordarlo, por eso abordamos los problemas de..., el anterior, ¿no?, de pasar de base 10 a base 2. Pero el de base 16 a base 2 hay que dividir en base 16. Sumar en base 16 lo sé hacer, restar en base 16 me cuesta un poco pero lo sé hacer, multiplicar en base 16 también podría hacerlo, con lo cual dividir podría hacerlo, pero... no me atrevo a hacerlo sin manos, hoy. Otra forma.

A: Fijándote en que 16 es 2^4 .

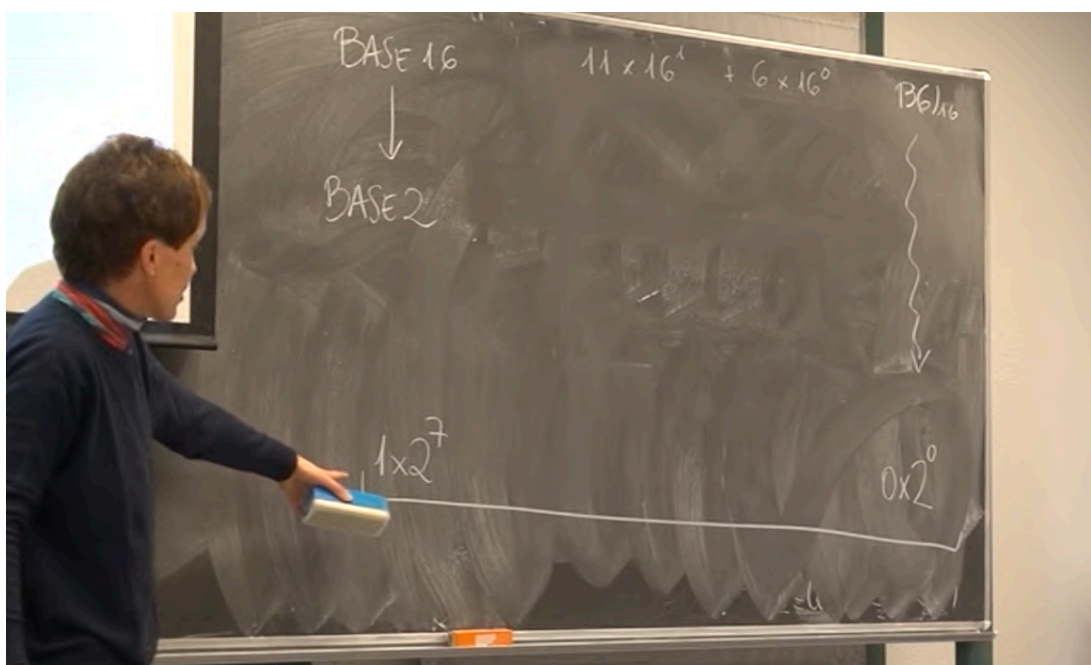
F: Fijándome en que 16 es 2^4 . Me lo voy a apuntar aquí [borra la pizarra y lo escribe].

A: Yo lo hice así, pero luego algo no me cuadraba.

F: Muy bien, vale.

A: Luego hice, $11...$

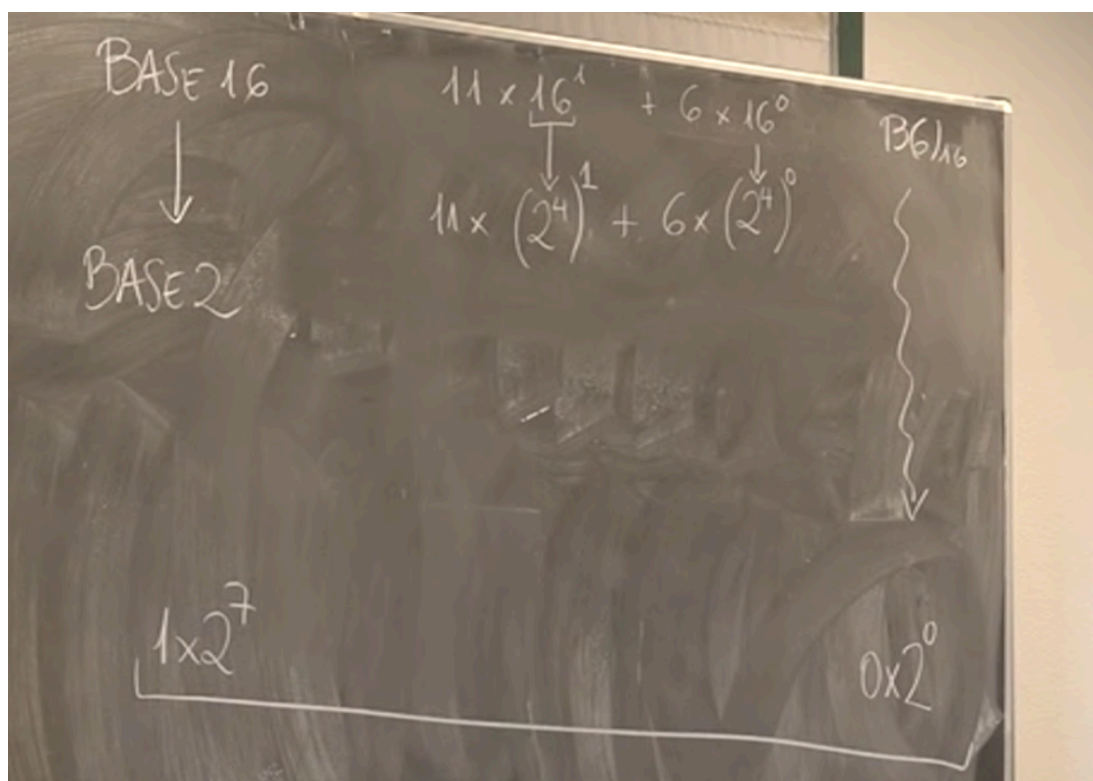
F: Venga, vamos a poner el punto de partida, ¿no? El punto de partida es que tenemos 11×16^1 , ¿no?, más 6×16^0 . Este es mi B6 en base 16. Y yo quiero llegar aquí a... Me acuerdo de que empezaba en 1×2^7 y acababa en 0×2^0 , ¿vale?



Entonces yo quiero pasar de ahí [señala la parte superior de la pizarra] a aquí [señala la parte inferior]. Si lo consigo, ya lo tengo en base 2, ¿no? Ya solo cojo los coeficientes de las potencias de 2 y ya lo tengo. Entonces, Pablo dice: «cambia este 16», ¿no, Pablo?

A: Sí.

F: Este 16 ponlo como $(2^4)^1$ y este 16 ponlo como $(2^4)^0$. ¿Vale? Yo tengo una expresión polinomial en base 16, quiero llegar a una expresión polinomial en base 2, y él me dice: «yo veo claro el cambio, 16 es 2^4 , cada vez que veas un 16 ponlo como 2^4 ». Vale, y entonces resulta que aquí tengo 11 grupos de esto y aquí tengo 6 de estos. ¿El 11 y el 6... los puedo dejar?



A: No, los pasas a base 2.

Comentario 4: Está intentando que los alumnos descubran la forma de pasar de base 16 a base 2, está intentando que descubran el método. Aquí yo creo que está avanzando un poquito, es decir, no les está haciendo dar estos pasos ellos mismos, no sé si es porque lo han trabajado antes o no, pero yo aquí me habría esperado a que los alumnos hubiesen llegado a este tipo de expresión ellos solos.

F: Los paso a base 2. ¿Sé pasar 11 a base 2?

A: Sí.

F: Vale, vamos a escribir 11 en base 2.

A: 1, 0, 1, 1.

F: 1×2^3 , ¿no?

A: Sí.

- F: Más...
- A: Cero.
- F: 0×2^2 . De momento llevo ocho. Más...
- A: Uno.
- F: 1×2^1 . Ya llevo 10...
- A: Más uno.
- F: Más 1×2^0 . Ahí ya tengo 11, ¿vale? Esta es una manera de escribir 11. ¿Cómo? Como potencias de 2. Expresión polinomial del 11 en base 2, como potencias de 2, ¿vale? Y esto va multiplicado... 2 elevado a la 4 y luego lo elevo a la 1, ¿cuánto me queda...? 2^4 es $2 \times 2 \times 2 \times 2$ y luego eso lo elevo a la 1, es decir, que lo copio una vez, o sea que me queda...
- A: 2^4 .
- F: 2^4 . Más... El 6, ¿lo dejo?
- A: No.
- F: No. ¿Cómo escribo 6 en base 2?
- A: 1×2^2 .
- F: 1×2^2 , que son 4.
- A: 1×2^1 .
- F: 1×2^1 ... Y 0×2^0 [lo va escribiendo todo en la pizarra]. Ahí pone 6, una manera más chula, ¿no?, de poner 6 como potencias de 2, ¿no?, como un polinomio con potencias de 2. Vale, y luego estaba por... Y ahora tengo $(2^4)^0$. ¿Eso qué es?
- A: Uno.
- F: Uno. ¿Y si lo quiero poner como potencias de 2?
- A: 2^0 .
- F: 2^0 , muy bien. 2^0 [lo escribe en la pizarra]. Mira qué contenta estoy, porque $2^0 \times 2^0$ es 2^0 y el coeficiente es 0, que es este. Y $2^4 \times 2^3$ es 2^7 y el coeficiente es 1, que es este. Pues como que ya casi lo tengo, ¿no? ¿Sí o no?
- A: Sí...

Comentario 5: En todo este proceso está realizando la transformación aritmética para resolver el problema. Lo está haciendo despacio, con todos los pasos, justificando todos los pasos e intuyo que ahora va a dejar que los alumnos intenten descubrir el resultado final después de estos procedimientos aritméticos.

BASE 16

↓

BASE 2

$$11 \times 16^1 + 6 \times 16^0$$

$$\downarrow$$

$$11 \times (2^4)^1 + 6 \times (2^4)^0$$

$$\downarrow$$

$$[1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0] \times 2^4 + [1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0] \times 2^0$$

$$\downarrow$$

$$1 \times 2^7$$

$$\downarrow$$

$$0 \times 2^0$$

$\{$

F: Vale, y ahora... Venga, ¿cuál será el coeficiente...? Venga, vamos a poner aquí 2^6 , paso a la siguiente varilla del ábaco, ¿eh? ¿Cuál será el coeficiente de 2^6 ?

A: Cero.

Comentario 6: Aquí ha hecho una anotación importante, está relacionando todo esto con el instrumento del ábaco, que supongo que lo habrán trabajado anteriormente.

F: Cero, porque ¿cómo consigo yo 2^6 ? $2^4 \times 2^2$, ¿no? 2^4 es $2 \times 2 \times 2 \times 2$, 2^2 es 2×2 , ya tengo ahí los seis doses, ¿vale?, que está aquí, y el coeficiente cero. ¿Por aquí puedo llegar a 2^6 ?

A: No.

F: No, pues ala. 0×2^6 . Genial, porque era lo que me había salido antes. Ahora, más... Siguiente varilla del ábaco, 2^5 . ¿Dónde consigo yo 2^5 ? Aquí [señala el corchete de la derecha] como mucho llego a 2^2 , me olvido de esto. $2^4 \times 2^1$ [señalando el corchete de la izquierda] es 2^5 , ¿no?

A: Sí.

F: Vale, ¿y qué coeficiente lleva?

A: 1.

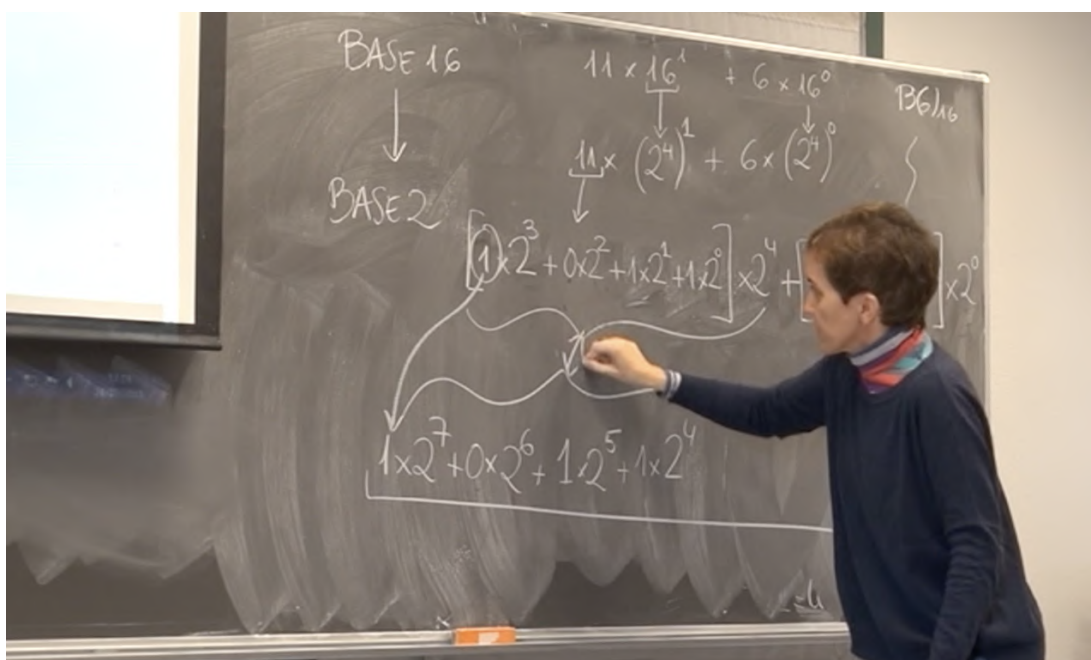
F: 1. ¿Y era el qué tenía que llevar?

A: Sí.

F: Sí, vamos bien. Y ahora, 2^4 , ¿cómo consigo 2^4 ?

A: Con 2^0 ...

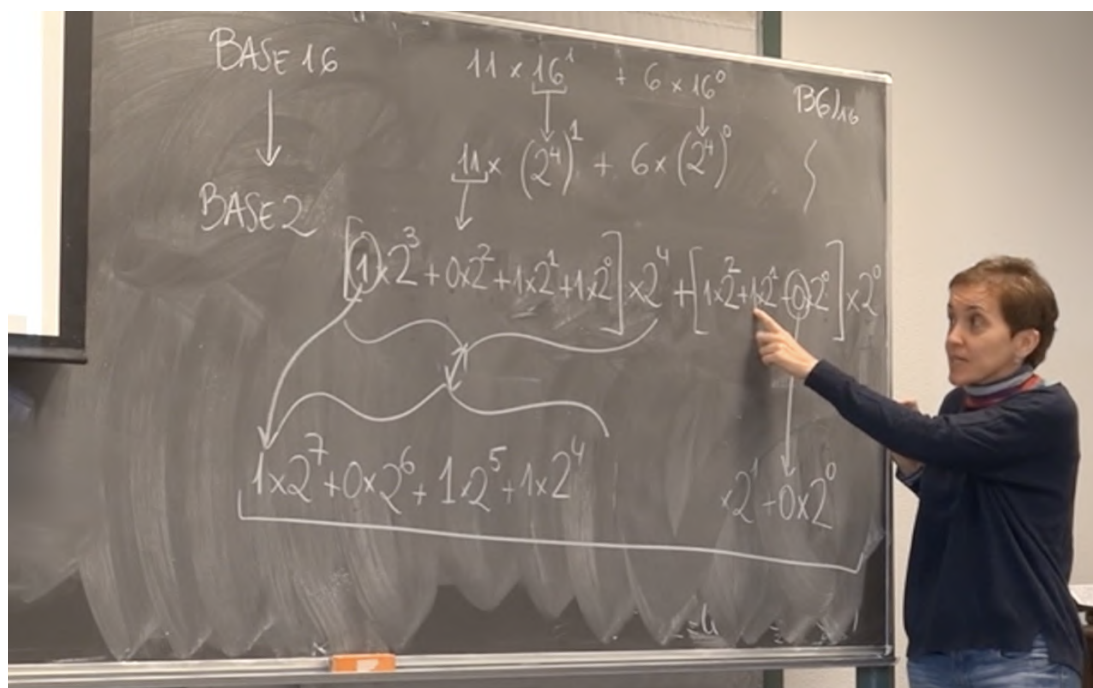
F: $2^4 \times 2^0$, ¿no? Tengo aquí cuatro copias del 2 y aquí ninguna, pues tengo cuatro copias del 2 multiplicándose por sí mismo, y el coeficiente 1. 1×2^4 [lo escribe en la pizarra]. Oye, mira, todo esto se ha convertido en esto. Lo veis, ¿no?



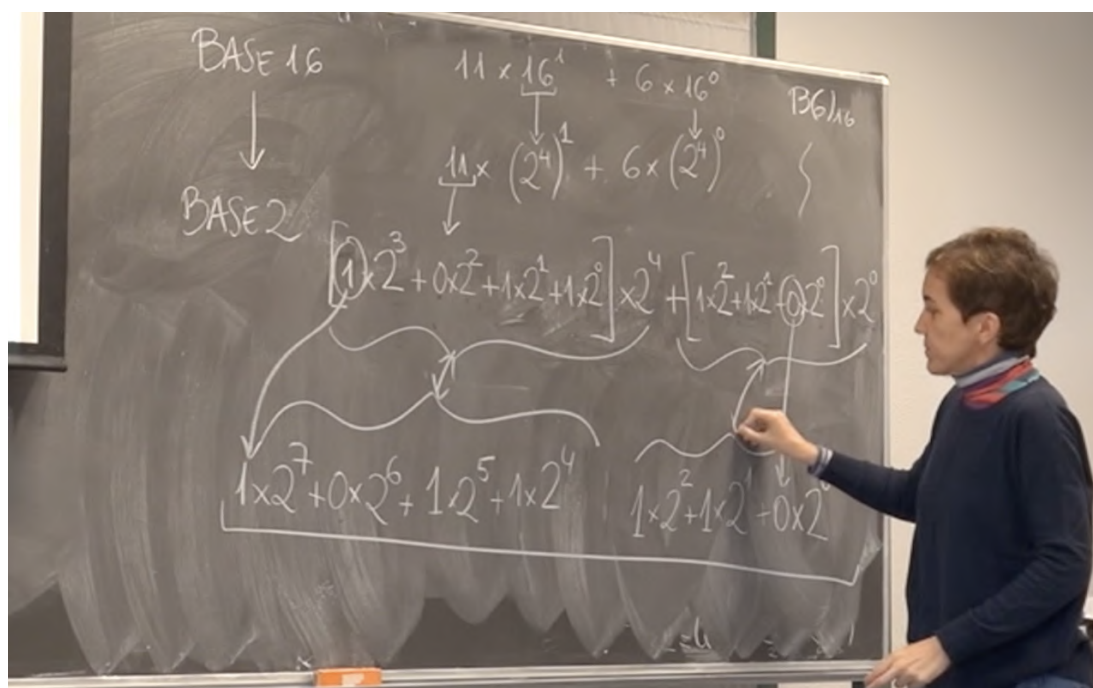
¿Qué es lo que he hecho? Propiedad distributiva. Voy multiplicando el 2^4 por cada uno de los sumandos, ¿vale? Muy bien. Y ahora, tiro por aquí, voy desde aquí [señala el 2^0 de la parte inferior derecha de la pizarra]. 2^0 , muy bien. Siguiendo varilla del ábaco, 2^1 . ¿Qué coeficiente tiene 2^1 ?

A: 1.

F: 1, que está aquí [lo señala], ¿vale?



Porque sería $2^1 \times 2^0$, que es 2^1 , y lleva un 1 delante, un 1 [lo escribe abajo]. Voy bien. Y ahora, $2^0 \times 2^2$, 2^2 [lo escribe abajo], va con un 1 [lo escribe abajo]. O sea que esto que tengo aquí se convierte en esto que tengo aquí.



Y ahora, Pablo, ¿qué te pasó?

A: Que como... Que claro, los iba a juntar, pero dije: «me falta el 2^3 ».

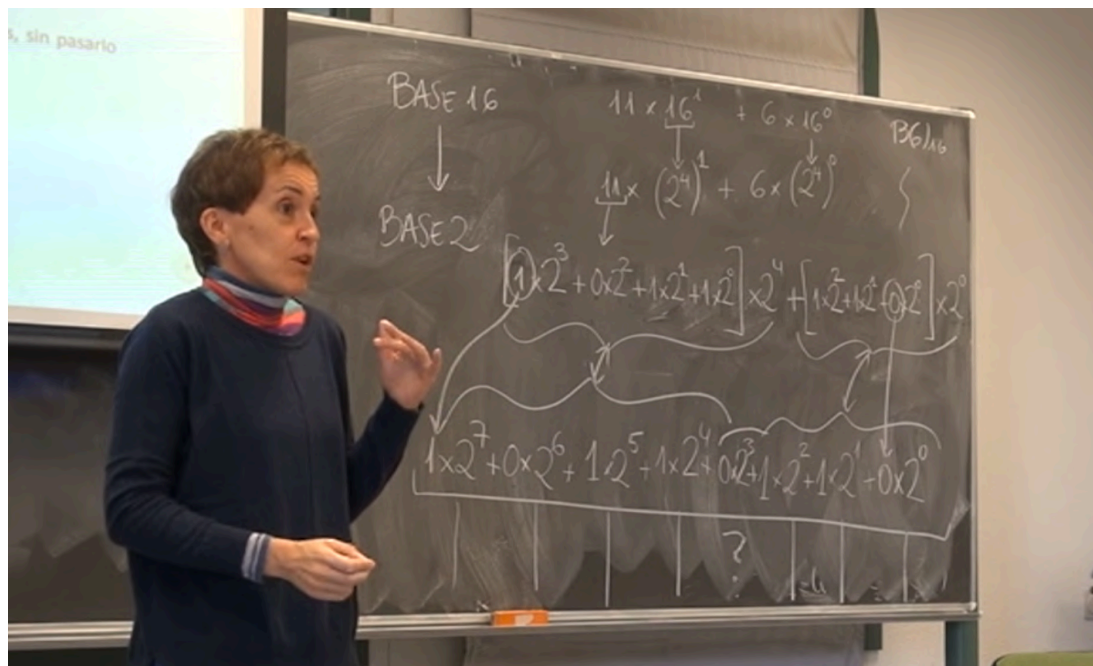
Comentario 7: Todo este procedimiento está relacionado con la propiedad distributiva, que también se habrá estudiado antes, y ahora está intentando ver los problemas que les habrán surgido a los alumnos al realizar este procedimiento, por eso le está preguntando a

un alumno qué le ha ocurrido.

F: Me falta el 2^3 . Pablo dice: «varilla del ábaco del $2^7, 2^6, 2^5, 2^4$, ¡uy!, $2^2, 2^1, 2^0$ ». «¡Uy!», dice Pablo [y dibuja una interrogación en la posición del 2^3].

A: Pues si no hay, un cero.

F: Pues se pone el 0, ya está. Lo pongo aquí: « $+ 0 \times 2^3$ », y esto lo englobo aquí.



¿Qué es lo que pasa? Que escribo el 6 de una forma muy especial. Yo escribo el 6..., acordaos que esto era mi 6 [señala $1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0$], ¿eh?, esto era el 6, que es este 6 [señala el de un nivel anterior, más arriba en la pizarra], ¿vale? Yo he escrito el 6 como $1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0$, pero también puedo escribir el 6... $0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0$. No es lo estándar, porque como los ceros ahí no aportan mucho, pues no es lo estándar, pero si no me quiero olvidar de una de las varillas y no quiero tener un problema, como tenía Pablo, pues yo añado ahí para escribir el 6 de otra forma, ¿vale?

Comentario 8: Aquí, en todo el último minuto, lo que está haciendo es algo que solemos hacer mucho los profesores de matemáticas, que es anticiparnos a problemas que..., o explicar a los alumnos problemas frecuentes que pueden suceder, como aquí es que no aparezca una determinada potencia en este cambio de base, y decirles cómo se resuelve esa situación habitual.

Entonces, moraleja que cuentan los *youtubers*, por ejemplo David Calle,

Comentario 9: Aquí utiliza una especie de motivación con un personaje que para ellos es conocido para captar la atención de los alumnos.

dice: «vamos a pasar de base 16 a base 2, ¿qué se hace chavales? Mirad, ¿veis este 11 que está aquí? [señala el de arriba de la pizarra], pues escribís este 11 en base 2: 1, 0, 1, 1 [señala los coeficientes de la expresión polinómica de la parte inferior de la pizarra]; ¿veis este 6 que está aquí? [señala el de arriba de la pizarra], pues lo escribís en base 2, pero cuidadín chavales, que hay que poner cuatro, ¿por qué?, porque 16 es 2^4 ». Y entonces dice: «vamos a escribir 6 en base 2 con cuatro: 0, 1, 1, 0». Y dice: «y ahora lo juntáis, fin». A mí no me vale

Comentario 10: Está criticando los métodos de una persona relevante en el mundo de las matemáticas de los alumnos, criticando un método porque obviamente no justifica, es decir, solo da lo que se llaman «recetas». Entonces está diciendo a los alumnos que no caigan en las recetas en sí, sino en la justificación de por qué esos resultados son así, que profundicen en sus conocimientos de matemáticas, en por qué eso es así, no solo cómo se hace, sino por qué se hace así.

porque yo no soy David Calle, yo no estoy de *youtuber*, *influencer*, *superfamosa* ayudando a los chavales a aprobar exámenes, que es un trabajo muy digno y que está bien, y además el tío es un *crack*, muy suelto, lo hace muy bien; yo estoy formando maestros, entonces tenéis que entender cómo hemos pasado de aquí [señala la parte superior de la pizarra] a aquí [señala la parte inferior de la pizarra] a través de esto [señala la parte media de la pizarra]. Entonces, la pregunta es: ¿se puede pasar de base 16 a base 2 sin pasar por base 10? Sí. Lo acabamos de hacer, ¿no? Es que me miráis con una cara... ¿Y por qué se puede? ¿Qué pasa si yo esto [el ejercicio] os lo doy en base 15 y, en vez de en base 16, todo el problema es en base 15?

A: Que sería $2^4 + 2^0$.

F: ¿ $2^4 + 2^0$ es 15?

Comentario 11: Ahora está replanteando el problema, ha hecho un cambio en el problema para que los alumnos reflexionen con ese cambio si se podría resolver de la misma forma o no.

A: O sea, no..., perdón. $2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0$.

F: Vale, y entonces tendría que ir haciendo todas las distributivas, todo el follón, ahí. ¿Y David Calle me podría dar el algoritmo...? Escribes, imaginaos el mismo número, ¿eh?, B6, en vez de en base 16, en base 15. ¿David Calle me puede decir...? Aquí tengo el 15, ¿no?, aquí tengo el 15 [los escribe encima de los 16], y David Calle me dice: «escribe esto [señala el 11] en base 2, escribe esto [señala el 6] en base 2, con tres y medio dígitos o cuatro dígitos o... tres dígitos, y lo pones junto. ¿Valdría ese algoritmo?

A: No.

F: No. ¿Vale? O sea, que poder se puede pasar, vas con paciencia escribiendo cada una de las expresiones que aparecen, pero un paso directo solo se puede cuando una base es potencia de la otra base,

Comentario 12: En este momento está justificando lo que ha dicho anteriormente, por qué hay que profundizar sobre los métodos de cambio de base y no quedarse con recetas que solo son válidas en determinados casos.

que es lo que hemos visto con 16, que es potencia de 2, que es 2^4 . ¿Está claro hasta aquí? ¿Sí?

TRANSCRIPCIÓN DEL VÍDEO 3

Fragmento 1

[F = Formadora del vídeo]. [Comentarios de Pablo presentados en recuadros].

- F: Entonces, la idea es..., el ejercicio 4, que está proyectado en la pantalla, es el ejercicio 4 de la última hoja, de la hoja del dossier 2, con el que vamos a trabajar ya esta semana, ¿vale? En ese ejercicio hay cuatro operaciones, cuatro problemas, cuatro operaciones. Tenéis que hacer las cuatro operaciones..., representarlas de distintas maneras. Voy a poner en la pizarra de cuántas maneras, ¿vale? Entonces, acordaos que nosotros estamos trabajando con material manipulativo [escribe en la pizarra «Manipulativo»], ¿vale?

Comentario 1: Ahora está planteando la actividad, está planteando lo que van a hacer.

Entonces, en primer lugar tenéis que representar esta suma $[210 + 543]$, esta suma $[315 + 429]$, esta resta $[135 - 24]$ y esta resta $[704 - 45]$, por partes [va señalando en el PDF proyectado en la pantalla], ¿no?, empezáis con la primera... Tenéis que representarlo [escribe en la pizarra] con ábaco vertical, después en el sorobán y después con los multibase, ¿vale? Y tenéis que tener las tres representaciones del proceso delante para saber comparar cada dos, ¿vale?, para saber entender cómo se traduce una en otra.

Comentario 2: Está relacionando distintos instrumentos, supongo que será el objetivo de la actividad, está relacionando una misma actividad con tres métodos para realizarla.

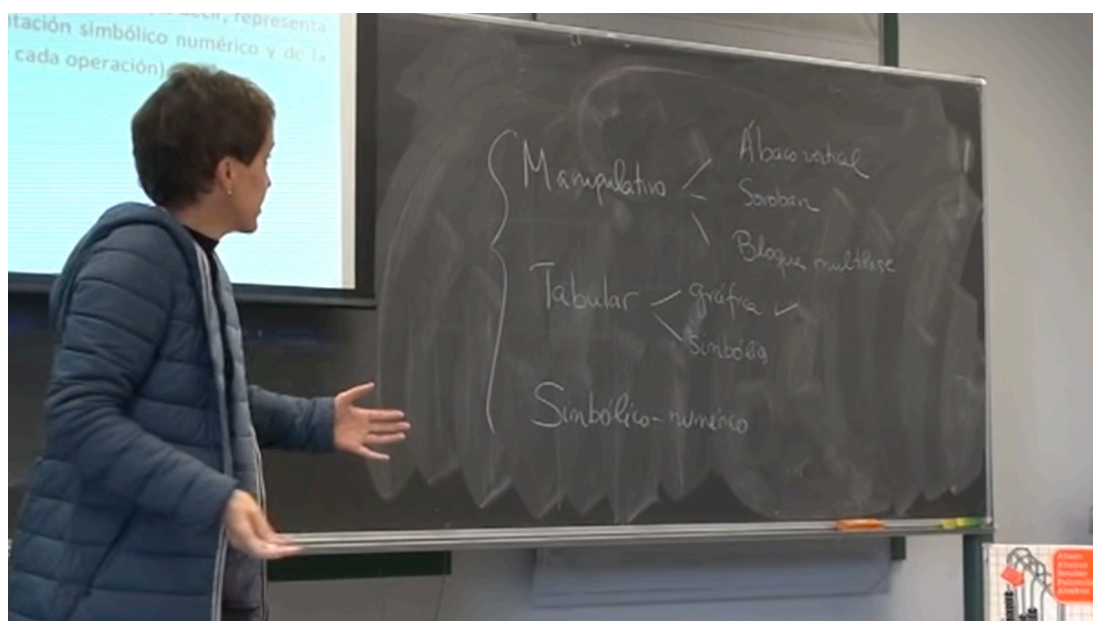
Lo que no quiero es que me digáis: « $210 + 543$ son 753; Nuria, te he representado 743* en el ábaco vertical, en el sorobán y en los bloques multibase». No quiero la representación del resultado, quiero la representación del proceso, de la suma, de la idea «suma». ¿En qué os tenéis que basar?, en la definición de la suma que vimos el otro día, ¿no?, que es: elijo un representante de uno, elijo un representante del otro y hago la unión, agrupo, junto, como lo queráis pensar, ¿vale? Entonces, hay que representar el proceso, el proceso, no solo el resultado final de ese proceso.

Comentario 3: Está haciendo hincapié, como en el vídeo anterior, en que lo importante es el procedimiento, no solo el resultado final.

Entonces, tenéis que representar el proceso de tres maneras en el sistema de representación manipulativo [señala lo que ha escrito antes en la pizarra], ¿vale? Y en paralelo [empieza a escribir en la pizarra] tenéis que representar el proceso en el sistema de representación simbólico-numérico; el enunciado está dado en ese sistema de representación, ¿vale?, esto es sistema de representación simbólico-numérico, pues tenéis que representar el proceso, las dos sumas y las dos restas, en ese sistema, ¿vale? Y luego, en medio [escribe en la pizarra], hay una representación que es formato tabla o tabular, de la que no he hablado explícitamente, pero que me gustaría que construyerais vosotros, ¿vale? Necesito que construyáis, por ejemplo, esta suma [señala $210 + 543$], que la hagáis en tabla, con una tabla, como se os ocurra a vosotros diseñar la tabla, ¿vale? La tabla [escribe en la pizarra] puede ser más gráfica, puede tener características gráficas, o puede tener características más simbólicas; a mí me va a interesar más

Comentario 4: Está dando alternativas a la realización de una determinada actividad, aunque ahora parece, donde lo hemos cortado, que ella tiene mayor preferencia por una de las dos, pero bueno, está dando alternativas de cómo puede ser la tabla.

la que tenga características más gráficas, luego ya veremos en detalle cómo, pero tenéis que intentar construirlo vosotros sin que yo os haya hablado de eso explícitamente, ¿vale?



Entonces, paso 1, aquí [señala la parte de representación manipulativa de la pizarra], en paralelo paso 2, simbólico-numérico [lo señala en la pizarra] y luego ya, según vayáis trabajando los cuatro ejemplos, igual ya se os va ocurriendo cómo representarlo con una tabla y cómo trabajar con una tabla ese tipo de operaciones. ¿Está claro? Yo me voy a pasar por las mesas y me vais preguntando todas las dudas que os surjan. No voy a pedir que me mandéis nada, ¿vale?, porque todavía no he revisado las últimas fotos que me habéis mandado, con lo cual estoy un poco desbordada; como no sois muchos, yo voy por vuestros puestos. Ahora bien, en el grupo anterior han decidido grabar pequeños vídeos o hacer fotos de los procesos que iban construyendo por llevárselo como material para estudiar, a mí me parece una buena idea, pero ya vosotros hacéis lo que queráis, a mí no me lo tenéis que mandar, pero si queréis, una vez que hayáis construido, por ejemplo, con el ábaco japonés, imaginaos, esta resta de aquí [señala el PDF en la pantalla], y decís: «ah, pues nos vamos a grabar», uno lo hace otro lo graba y lo tenéis de recuerdo, ¿no?, para cuando tengáis que estudiar. ¿Cómo voy a pedir yo eso en el examen?

Comentario 5: Está indicando ahora mismo cómo los alumnos pueden sacar provecho de esta práctica. Aparte de la realización..., pues bueno, no está pidiendo que se lo manden, pero sí que es importante que ellos recuerden y está dándoles las alternativas de que se hagan un vídeo o una foto para recordar eso.

Pues no lo puedo pedir porque no puedo llevar un sorobán para cada uno porque tengo un día, 2 horas y media o 3, para haceros el examen final de la asignatura; pero para mí esto es muy importante, entonces yo voy a pedir que me representéis gráficamente, gráficamente, vuestro proceso de respuesta con un ábaco vertical, con un sorobán o con los bloques multibase, que es lo que yo luego voy a hacer aquí en la sesión final de discusión cuando acabemos esta hora de clase. Yo no voy a coger el ábaco aquí, lo voy a poner delante de todos y tal —podría hacerlo, pero no lo voy a hacer—, lo voy a hacer representando gráficamente el material manipulativo y así es como lo voy a pedir el día del examen, porque os voy a dar un cuadernillo y lo tenéis que hacer gráfico, ¿vale? Bueno, pues empezad, están escritas en un orden muy concreto, empezad a hacerlas en ese orden y luego ya discutimos sobre por qué están puestas en ese orden, ¿vale?

Fragmento 2

[F = Formadora del vídeo]. [A = Alumnos (A1, A2 y A3)]. [Comentarios de Pablo presentados en recuadros].

- A1: Estamos rayados con la última resta.
 F: Vale, a ver, empezad.
 A1: Son 704 - 45.
 F: Vale.
 A1: Entonces, aquí no le podemos restar 5.



- F: Así tal cual está, puedes restar..., ¿cuántas puedes quitar?
 A1: Cuatro.
 F: Cuatro, vale, sí.
 A1: Entonces voy a suponer que aquí [señala la varilla de las decenas] hay un 1.
 A2: No, que hay 10.
 A1: Que hay 10, para que sea 14...
 F: A ver, olvídate de los «suponer». Tú dices: «tengo que quitar 5», ¿no?, quito 1, quito 2, quito 3, quito 4 [quita cuentas de la varilla de las unidades] y ahora ponme aquí más para que yo quite, tal y como está.



A1: Habría que poner 10 y quitamos 1.

F: Pero ¿cómo me ponéis..., cómo me ponéis ahí? A ver Pablo.

A2: ¿Que lo ponga?

F: No, no, que me digas... Yo aquí [señala la varilla de las centenas] tengo ahora mismo 700, ¿no? Escribe 700 de otra forma para que yo tenga bolas...

A1: Aaaaah, hay que añadir una aquí [señala la varilla de las decenas].

F: Venga, a ver.

A2: [El alumno A2 quita una cuenta de la varilla de las centenas y la pone en la de las decenas].

F: ¿Aquí sigue poniendo 700?

Comentario 1: Está justificando cómo se hace el algoritmo de la resta; al hilo de lo que decía antes, no basta con la regla, sino que hay que justificar por qué esa regla es así y lo está haciendo con el ábacó vertical y solucionando los problemas que están teniendo los grupos de alumnos con la resta que les ha puesto.

A1: No, no, no, hay que poner una nueva aquí [vuelve a poner la cuenta en la varilla de las centenas —la que había puesto en la varilla de las decenas el alumno A2— y pone una nueva en la varilla de las decenas].

F: A ver [quita la cuenta de la varilla de las decenas]. Teníamos 704, hemos quitado 4, tengo 700, ¿vale?

A1: Sí.

F: Ahora, escribe 700 de otra forma para poder quitar otra.

A1: Pues...

F: ¿Cómo podéis escribir 700 de otra forma?

A1: Que aquí [señala la varilla de las decenas] haya 9...

F: Venga.

A1: Y aquí [señala la varilla de las unidades]..., 9.

F: A ver, para que haya aquíííí... [señala la varilla de las decenas], vamos a ver, ¿cómo consigo aquí decenas? Sin cambiar el número...

A1: Si quito esta... [quita una cuenta de la varilla de las centenas].



F: Venga, muy bien.

A1: Pongo aquí 10 [señala la varilla de las decenas].

F: Venga, dale.

A1: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10.

A3: ¡Ah, vale!



F: ¿Ahora aquí pone 700?

A1: Sí.

F: ¿Y cómo está escrito 700?

A3: Mal.

Comentario 2: Aquí está mostrando las equivalencias entre centenas y decenas y, posteriormente, imagino que mostrará la equivalencia entre decenas y unidades.

F: 6×10^2 , ¿no?, 6×100 , más...

A2: 10×10^1 .

F: 10×10^1 , muy bien. Ahora, ¿puedo quitar aquí [señala la varilla de las unidades] que quería quitar una? ¿Tengo?

A1: No.

F: No, ¿cómo puedo volver a escribir 700 para tener aquí [varilla de las unidades]?

A1: Pues quito de estas [quita una cuenta de la varilla de las decenas] y añado 10 aquí [señala la varilla de las unidades].

F: Vale, venga.



- F: Vale, ¿y ahora puedes quitar la que te faltaba por quitar?
- A1: [La estudiante A1 quita una cuenta de la varilla de las unidades].
- F: Ya está. Ya habéis quitado 5 y teníais que quitar 45, ¿no? ¿Cuánto os falta por quitar?
- A1: Sí, ahora aquí [señala la varilla de las decenas] hay que quitar 4.
- F: Pues ya está, ¿no?
- A1: Ah, vale, vale. Gracias.



- F: ¿Entonces qué habéis hecho para reescribir el 700...? O sea, yo tenía 700 ahí, tenía aquí 700 [deja el ábaco con 7 cuentas en la varilla de las centenas], ¿qué habéis hecho?

Comentario 3: Ahora Nuria está haciendo reflexionar a todos los alumnos sobre el procedimiento para comprobar si realmente han entendido todo lo que han hecho.

- A2: Como es sistema decimal, pues aquí [señala la varilla de las decenas] hay 10, porque... representamos un 0, pues quitar una de aquí [varilla de las centenas] y ponerle las 10 aquí [varilla de las decenas] para luego restarlas aquí [varilla de las unidades].
- F: O sea que habéis..., ¿agrupado o desagrupado?
- A1: Desagrupado.
- A2: Aquí desagrupado.
- F: Desagrupado. Habéis desagrupado una centena en 10 decenas y luego una decena la habéis desagrupado en 10 unidades.
- A1: Vale, es que cuando tú lo haces en papel no haces esto así.
- F: Ah, pues dime entonces qué es lo que haces en papel.
- A1: Claro, lo haces muy mental. O sea, en verdad sí que haces eso, pero... bueno, ya me has entendido.
- F: No, no, pero lo tienes que explicar porque luego os he pedido que lo hagáis simbólico...

Comentario 4: Aquí le está haciendo reflexionar a la alumna sobre lo que hace ella en papel y lo que significa numéricamente lo que hace ella en papel.

- A1: Ya, ya, ya.
- F: Entonces, simbólico tienes que explicarlo conectado con esto.
- A1: Vale, vale.

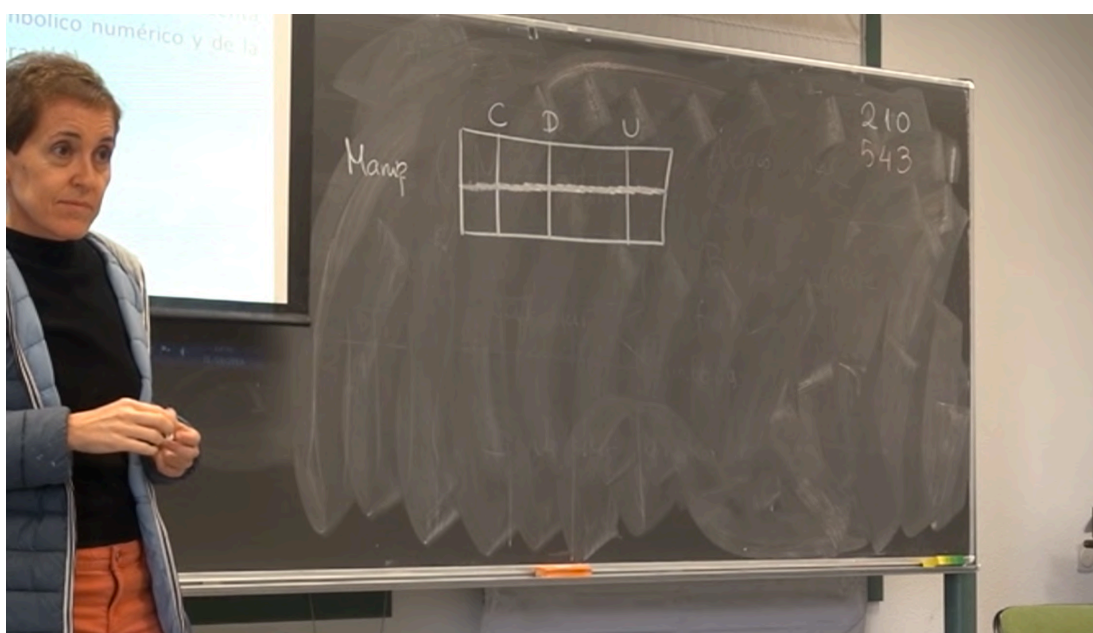
Fragmento 3

[F = Formadora del vídeo]. [A = Alumnos]. [Comentarios de Pablo presentados en recuadros].

F: Vamos a corregir uno, el primero, ¿vale? Me dan $210 + 543$, ¿vale?, con símbolos. Voy a representarlo..., vamos a empezar con manipulativo y voy a ejemplificar con el sorobán, que es el que parece que más trabajo cuesta, ¿vale? Entonces, en el sorobán, cuando lo representéis gráficamente el día del examen, o ahora en vuestro cuaderno si tenéis que tomar notas, es muy importante marcar la barra del medio, porque la proximidad de las bolas a la barra del medio es la que te indica qué número está representando, ¿vale? Y ahora, dado el problema que me han planteado, ¿cuántas varillas pensáis que necesito escribir?

A: Tres.

F: ¿Tres varillas? Pongo una varilla, dos varillas, tres varillas. Esta, unidades, decenas, centenas. Esta la pongo un poco más gorda para que se note que es la barra de madera del medio, ¿vale? Y ahora, ¿cómo dibujo 210?



A: Pues 0 unidades.

F: 0, o sea que aquí no pongo nada pegado a la barra, ¿no? [señala la varilla de las unidades]. ¿Aquí? [señala la varilla de las decenas].

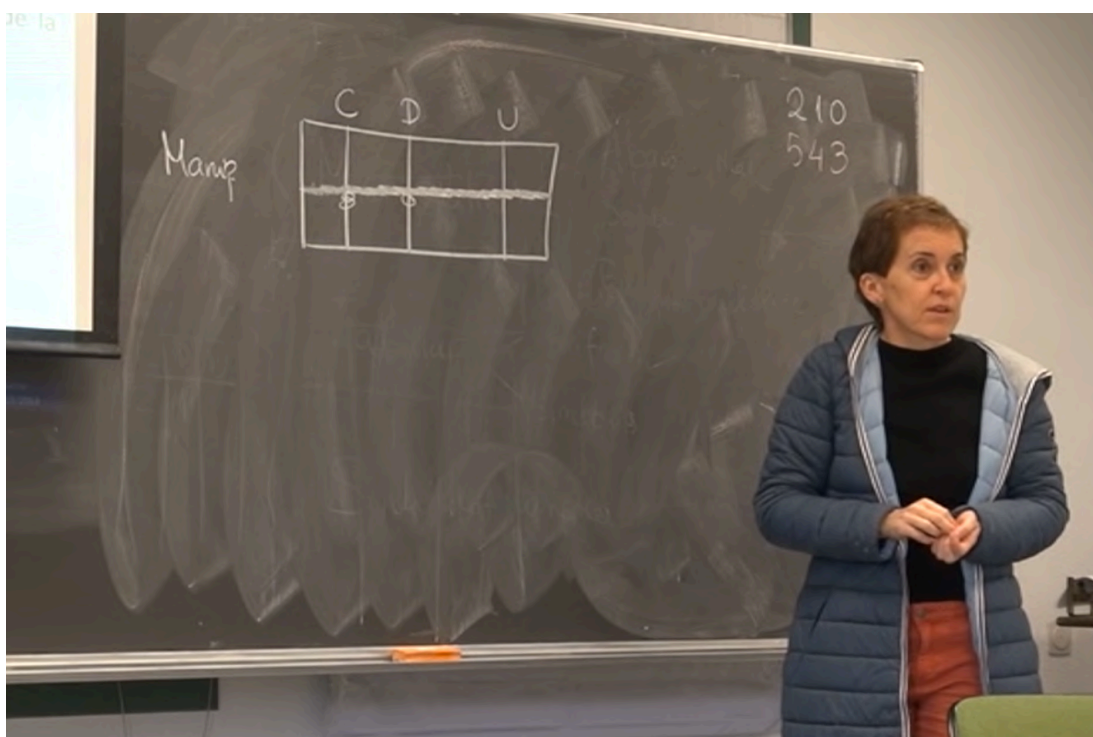
A: 1 decena.

F: Una pegada a la barra, ¿arriba o abajo?

A: Abajo.

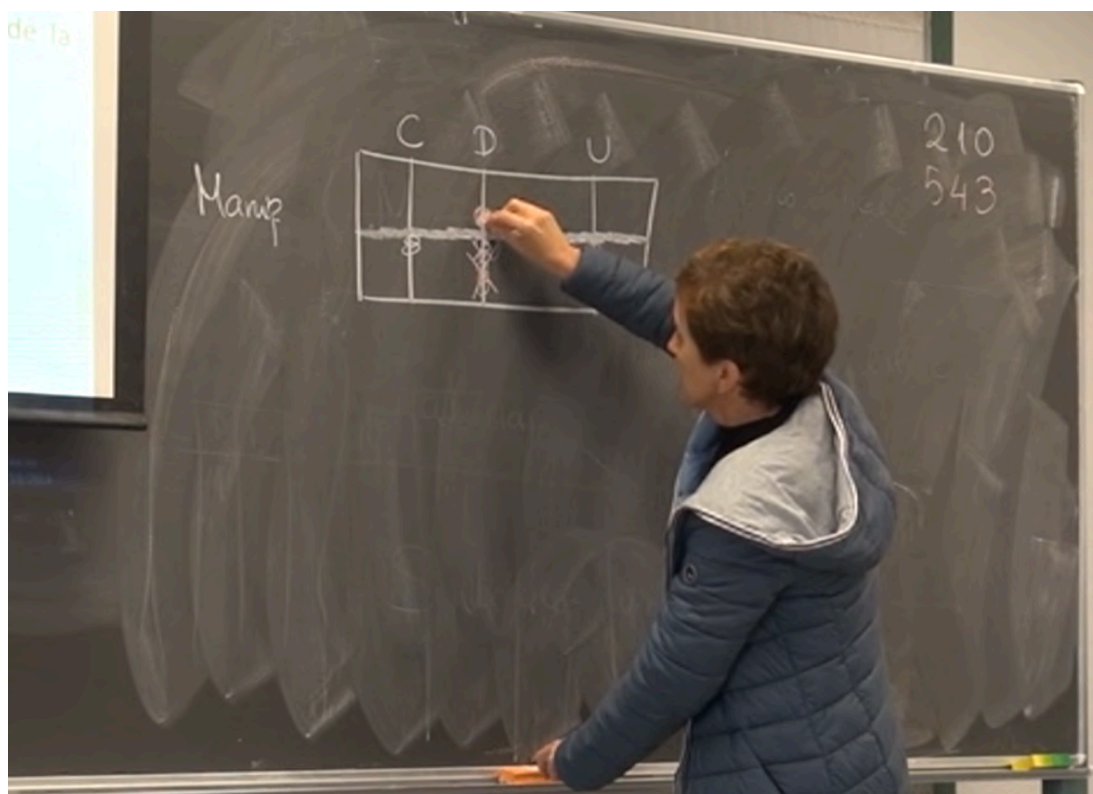
- F: Abajo, o sea que aquí va una.
- A: Y 2 centenas pegadas a la barra de abajo.
- F: Pegadas a la barra, abajo. Una y dos, ahí está. Eso es 210.

Comentario 1: Está intentando resolver una suma y está dejando a los alumnos que lo vayan planteando ellos solos. Solo les está haciendo una indicación de cómo deben representarlo gráficamente en un ejercicio escrito para que quede clara la representación. Pero está dejando que ellos lleven la resolución del ejercicio.



Y ahora, tengo que sumar 543, es decir, que tengo que añadir 543 unidades ahí. Aprovecho la estructura, ¿vale? Entonces, añado 3 unidades, en la varilla de las unidades, que son 3 aquí abajo, ¿no?, 1, 2 y 3 [las dibuja en la varilla de las unidades]. Después añado 4 decenas, en la varilla... 1, 2, 3, 4, ¿vale? [las dibuja en la varilla de las decenas], 4 decenas.

- A: Pero cambiamos...
- F: Pero...
- A: Bajamos una de arriba y quitamos las de abajo.
- F: Porque no tenéis 4, ¿vale?, ya no había suficientes, ¿por qué?, porque las bolas de arriba valen 5, entonces decís: «no pasa nada, estas, como eran 4 y 1, 5, se representan ahí arriba», ¿vale?



Y luego, 5..., tengo que añadir 5 centenas, ¿cómo lo hago?

A: Pues 1 arriba.

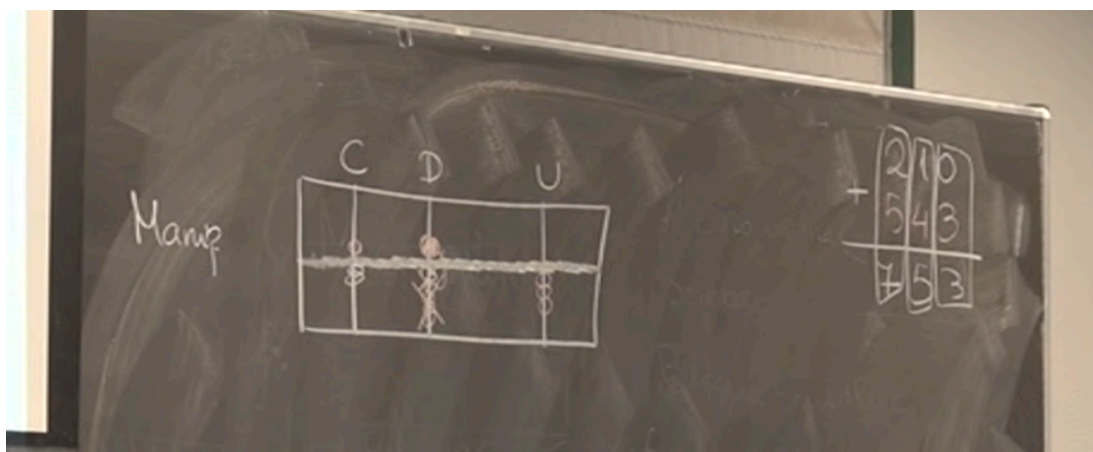
F: Una de arriba la bajo directamente o podría ir: «1, 2, 3, ya tengo 5, las subo ahí, 4, 5» [va señalando en la varilla de las centenas], ¿vale? Puedo hacerlo de dos formas distintas.

Comentario 2: Está mostrando distintas alternativas de cómo indicar esa suma gráficamente en la pizarra, indicando preferencia de algunas representaciones a la hora de ser más eficiente.

Pero si aprovecho la estructura del ábaco, de manera que las bolas de arriba valen 5, como tengo que añadir 5, pues directamente ya añadido ahí esas 5 [dibuja una bola en la varilla de las centenas, en la parte superior, pegada a la barra horizontal], ¿vale?

Entonces, [representa ahora el resultado en la suma con el algoritmo tradicional de forma simbólico-numérica a partir de lo que ha obtenido en la representación con el sorobán] me quedan 5 y 2, 7, aquí me quedan 5, y aquí me quedaban 3. Entonces, si yo lo represento así y voy sumando por columnas, tal cual he ido haciendo en el ábaco, tengo 0 unidades y 3 unidades, 3 unidades, 1 unidad y 4 unidades, 5 unidades, perdón, decenas, 2 centenas y 5 centenas, 7 centenas.

Vertical, lo he colocado vertical por parecerme a la estructura del ábaco, ¿no?, para tener en cuenta la «posicionalidad», ¿vale?, del sistema.

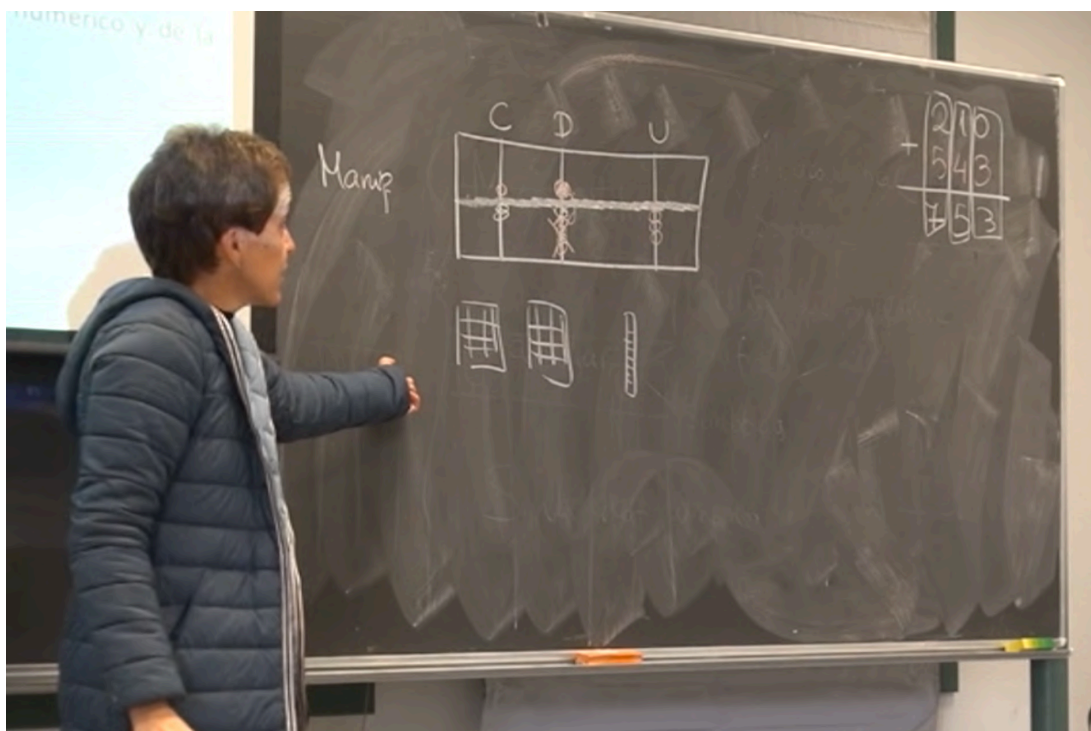


Entonces, he traducido al simbólico lo que he hecho aquí manipulativamente al escribir en simbólico en columnas y represento con cada columna cada una de estas [señala las varillas del sorobán de la pizarra].

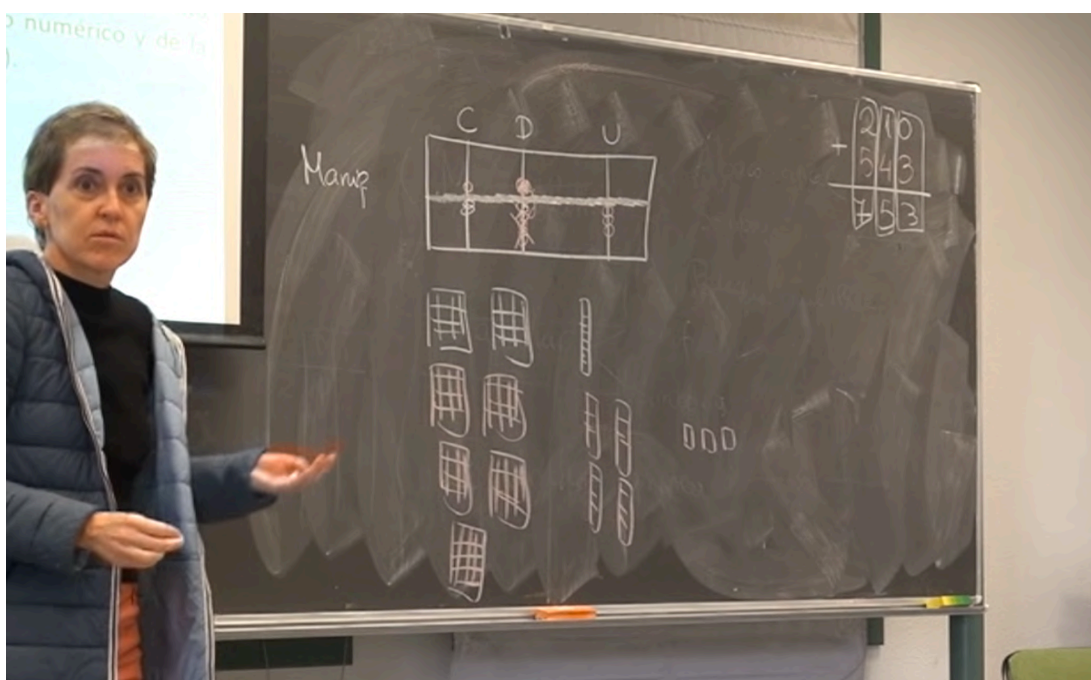
Comentario 3: Aquí está haciendo la relación entre lo simbólico y lo manipulativo para que entiendan el valor del material y su relación con lo simbólico, que es a lo que están acostumbrados ellos a trabajar.

Y luego, la escritura, sí que tengo que tener en cuenta que estos son 5 [señala las decenas de la suma en simbólico] con lo cual van arriba [en el sorobán] y esto son 7 [señala las centenas de la suma en simbólico], pues son 5 y 2 [en el sorobán], ¿vale?

Bloques multibase, bloques multibase, pongo aquí 210, ¿no?, que son 1 y 2 placas de 100 y 10, una decena; este es el 210.



Y ahora agrupo 543; una, dos, tres, cuatro y cinco [dibuja 5 placas de 100 unidades], añado, ¿vale?, 500. 40: una, dos, tres, cuatro [barras de 10]; y 3: uno, dos y tres [unidades]. Y ahora lo pongo todo junto. ¿Vale?

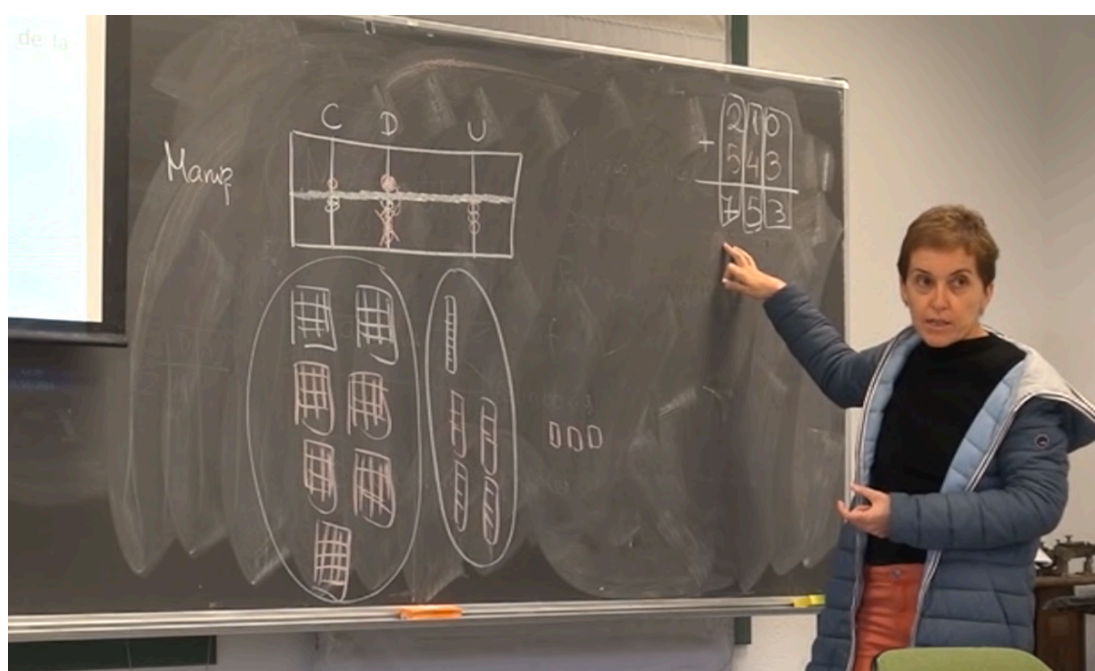


Y digo: «aquí tengo 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 [placas de 100]», ¿necesito agrupar? [Rodea con una línea todas las placas de 100].

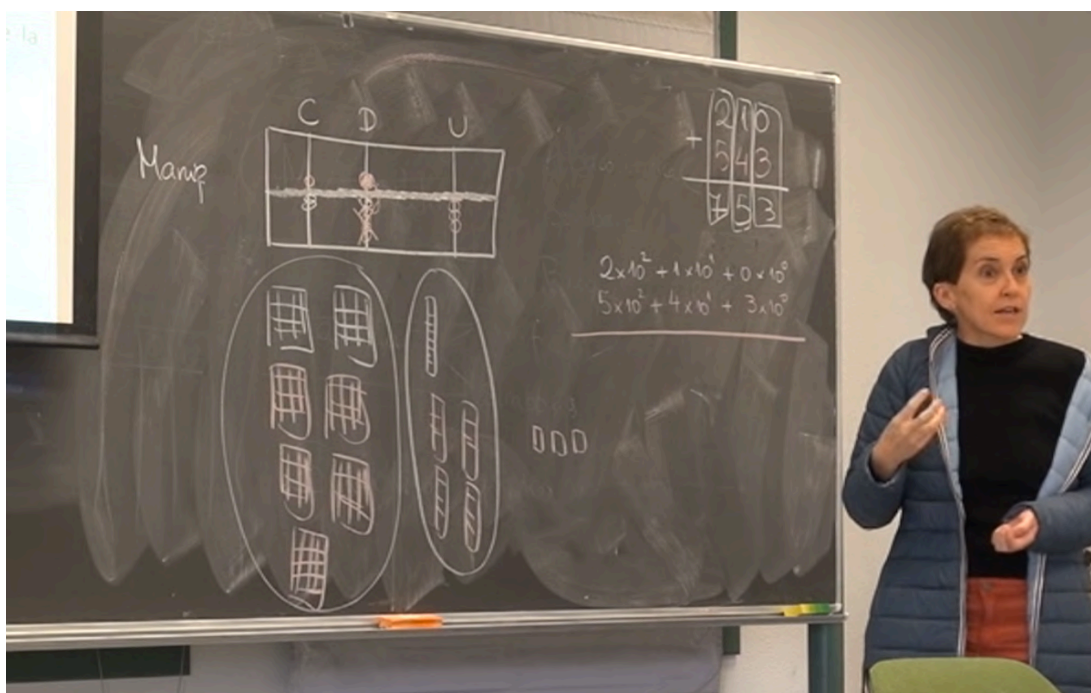
A: No.

- F: No necesito agrupar. Aquí tengo 1, 2, 3, 4, 5, 6, 5, ¿necesito agrupar estos 5 de alguna manera? [Rodea con una línea todas las barras de 10]. No porque es base 10. Y aquí tengo 3, ¿vale? O sea, que me vuelve a salir 2, 4, 6, 7 [centenas; señala la suma en simbólico], 2, 4, 5 [decenas], 5 [señala la suma en simbólico] y 3. Y veo la conexión de uno con otro, ¿vale? ¿Está claro hasta aquí?
- A: Sí, eso sí.

Comentario 4: Aquí ha hecho lo mismo, pero con bloques multibase. Está haciendo la traducción del simbólico al manipulativo con bloques multibase y está haciendo hincapié en el hecho de que en esta suma en concreto no es necesario agrupar.



- F: El que quiera escribirlo simbólico-numérico de otra manera en la que se vea la «posicionalidad» del sistema, podría escribirlo de la siguiente forma: $2 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 0 \times 10^0$, ese es el primer sumando; segundo sumando, $5 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 3 \times 10^0$; y sumo.



Y ahora, al sumar, utilizo la propiedad conmutativa, para colocar los sumandos en el orden que quiero, y asociativa, para ir organizando, ¿vale? O sea, que este [señala 5×10^2] —que, si lo coloco seguido, estaría aquí el cuarto [señala detrás de 0×10^0]— lo quiero colocar el segundo para agruparlo con este [señala 2×10^2], este [señala 4×10^1] —que estaría el quinto [señala detrás de 0×10^0]— lo coloco el tercero para agruparlo con este [señala 1×10^1], y este [señala 3×10^0] lo agrupo con este [señala 0×10^0]. Y ahora, al agrupar, ya me quedan 5 y 2, propiedad distributiva, 7×10^2 más, 4 y 1, 5×10^1 más, 0 y 3, 3×10^0 . Pero ahí estoy utilizando la asociatividad de la suma, la conmutatividad de la suma y la distributiva de la suma y el producto de números enteros, ¿vale?

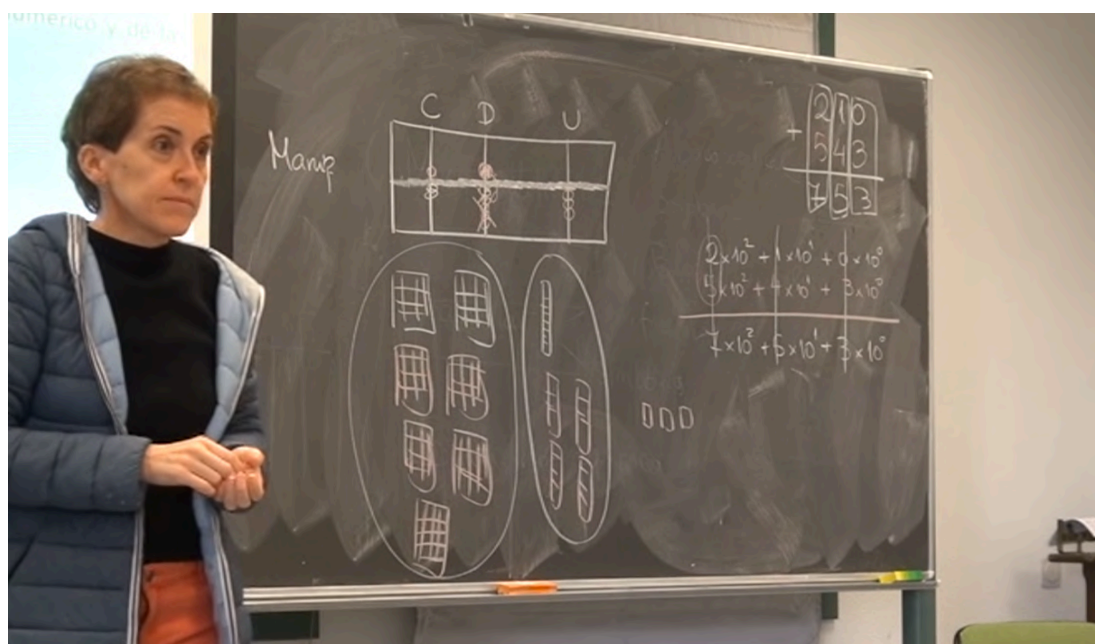
Comentario 5: En todo este proceso está reflexionando sobre el valor posicional de cada cifra en nuestro sistema de numeración; cómo resolver esa suma de una forma menos eficiente, pero sí recalcando el valor posicional de cada cifra.

Pero si lo coloco así, veo esto, esto y eso [señala los coeficientes que acompañan a 10^2 , 10^1 y 10^0], que es lo mismo que esto, esto y eso [señala el 7, 5 y 3 del resultado de la suma en la forma simbólico-numérica], que es lo mismo que esto, esto y esto [señala los bloques multibase en la pizarra] y que es lo mismo que 1, 2 y 3 varillas [señala las varillas del sorobán en la pizarra].

Comentario 6: Ahora está relacionando los cuatro métodos con los que ha realizado la

suma y justificando que, obviamente, sale el mismo resultado, pero de formas distintas.

¿Está claro hasta aquí?



- A: Sí.
- F: Ahora, ¿qué diferencia hay entre esto y la siguiente suma que me plantean ahí [en el PDF proyectado en la pantalla]? $316 + 429$.
- A: Que me paso de unidades y tengo que pasar a las decenas.
- F: Que cuando agrupo aquí, por ejemplo [bloques multibase], o cuando agrupo aquí [sorobán], o cuando agrupo aquí [expresiones de sumas y productos de potencias de 10], aquí aparecen más de 10 [señala al 3 de 3×10^1]. En algún sitio aparecen más de 10, por ejemplo, cuando tengo 9 unidades y 6 unidades, aquí aparecerían 15 fichitas pequeñas [bloques multibase], aquí tendría que representar 15 [sorobán] y aquí aparecería 15×10^0 . Pero como estamos en base 10, no puedo dejarlo así, tengo que agrupar, tengo que agrupar. Entonces, agrupo 10 y dejo 5,

Comentario 7: Ahora está planteando el problema de una suma donde hay que agrupar, hay que agrupar unidades, hay que agrupar decenas, o lo que toque, y el significado que tiene lo que los alumnos saben como «llevarse una», qué significa eso, cómo se resolvería.

y las 10 que agrupo las paso al siguiente valor, es decir, pego 10 fichas y construyo una barra [bloques multibase], agrupo 10 y me sale otra bola aquí en el ábaco, aquí abajo [parte baja de la varilla de las decenas], o agrupo 10 y me sale uno más aquí [en 5×10^1] y aquí [en 3×10^0] dejo las que se quedaban sueltas, las

5, ¿vale? O sea, que la única diferencia es que aquí, después de representar cada cantidad y de ir poniendo por orden el valor de cada una, tengo que agrupar porque en algunos sitios tengo 10 o más, ¿vale? Es la única diferencia.

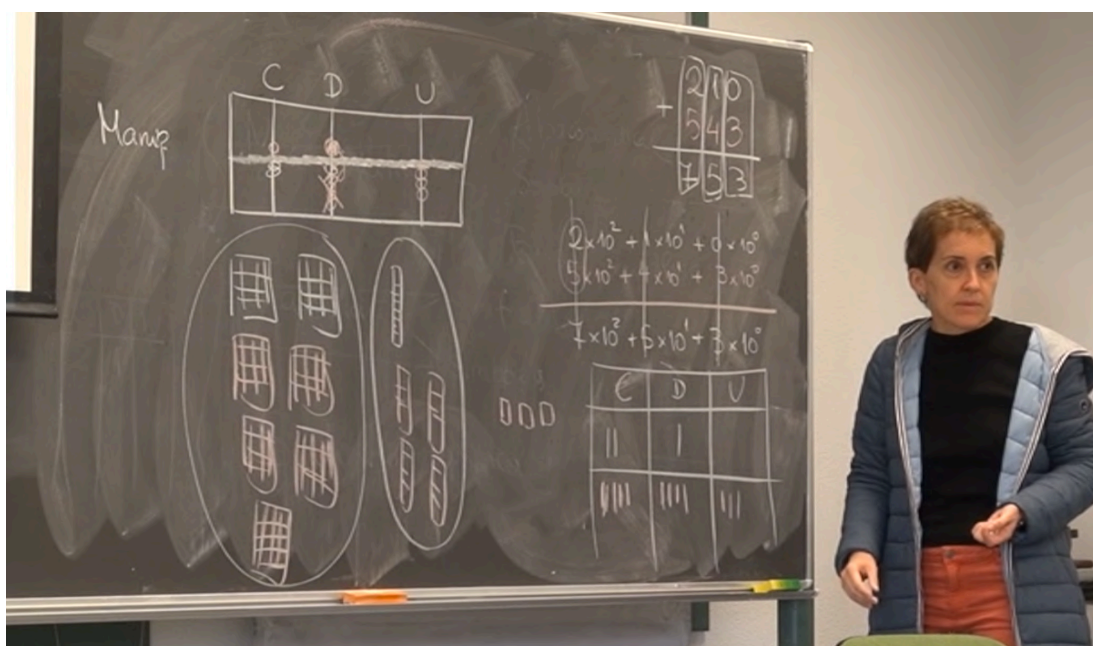
Y ahora, si quisiéramos representar esto en formato tabla, como tenía Martín, ¿no? ¿Cuántas columnas pondré yo en la tabla?, ¿qué me pide el cuerpo? Tengo que dibujar una tabla, ¿vale?, vamos a dibujar una tabla [comienza a dibujarla en la pizarra], con filas y columnas, ¿cuántas columnas pongo?

A: Tres.

F: Tres, ¿por qué tres?

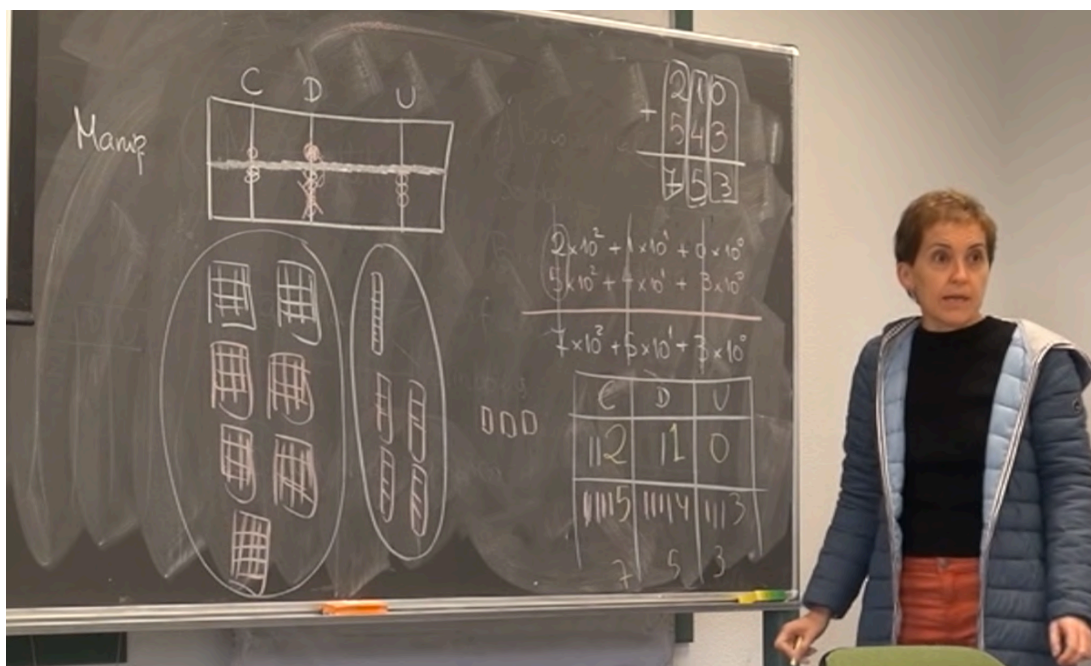
A: Centenas, decenas y unidades.

F: Unidades, decenas y centenas, ¿vale? Y entonces, represento el primer número, 210: 1, 2, 1, eso es 210 [pone dos rayas en la primera casilla de las centenas y una en la primera de las decenas]. Represento el segundo número, 500: 1, 2, 3, 4, 5; 40: 1..., bueno, en rosa, ya puestos..., 1, 2, 3, 4, 5; 40: 1, 2, 3, 4; y 3: 1, 2, 3. Y agrupo: ¿cuántas unidades tengo al final?, 3, ¿cuántas decenas tengo al final?, 5, ¿cuántas centenas tengo al final?, 7, fin.



Este sistema de representación es icónico-gráfico porque he representado aquí las cantidades con palitos, pero tiene una estructura especial porque está en una tabla, ¿vale? Entonces, vamos a decir que es un sistema de representación tabular-gráfico. Si en vez de poner aquí gráficos, yo hubiera dicho: «oye, mira, no me lío con los gráficos, ya puestos, como ya controlo mejor los símbolos, pues

voy a poner aquí 210 y aquí abajo voy a poner 543 y luego ya sumo: 4 y 1, 5; 5 y 2, 7; 3 y 0, 3», ¿vale?



Sería tabular, tiene una estructura tabular, no es puramente simbólico-numérico, tiene una estructura tabular, pero con números dentro, tabular-numérico, ¿vale? Entonces, yo voy pasando de lo más concreto, que sería: «mi madre me ha dado 316 euros y mi abuela 429, ¿cuántos euros tengo en total?», después paso a manipular, con ábacos verticales, con ábacos japoneses, con bloques multibase..., y cuando interiorizo bien eso, digo: «ostras, venga, lo voy a poner en una tabla gráfica y voy a indicar lo que me indica cada varilla o lo que me indica cada agrupamiento de los bloques multibase, que es posición, en las columnas de una tabla, y ahí voy a poder marcarlo con símbolos». Esta tabla con símbolos se llama tablero de posición, porque tengo las posiciones indicadas —unidades, decenas y centenas—, y es uno de los recursos que más utilizan en el método famoso este Singapur, que habréis visto o habréis oído hablar de él, ¿vale? Entonces, ¿qué están haciendo?, están haciendo una transición de lo más concreto, pasando por lo manipulativo, hacia lo abstracto, que sería..., esto es lo más abstracto [señala las expresiones de sumas y productos de potencias de 10] y esto es lo abstracto que se trabaja en primaria [señala la suma hecha en el registro de representación simbólico-numérico], ¿vale?

Comentario 8: Aquí está explicando la transición de todo lo que va desde lo contextual, una situación cotidiana cómo se puede traducir a un lenguaje manipulativo, simbólico,

tabular... Está relacionando todas las situaciones con las que ha trabajado en esta clase.

Pero no trabajan directamente con esto, vamos pasando..., concreto, concreto, concreto, concreto [de forma manipulativa], voy intentando abstraer un poco, pero tengo mis gráficos que me ayudan a visualizar lo que estoy haciendo [de forma tabular], y finalmente mi objetivo es escribirlo simbólico-numéricamente, de forma abstracta, ya al final. ¿Cómo habéis trabajado mayoritariamente vosotros en primaria cuando estabais haciendo sumas de este estilo? ¿Desde aquí [señala lo manipulativo] o desde el final [señala lo simbólico-numérico]?

A: Desde el final...

A: Yo con las de centenas, decenas y unidades, las cajas...

F: Las cajas estas también os suenan, los tableros de posición, pero ¿y qué poníais en las posiciones, palitos o los números ya?

A: Los números directamente.

Comentario 9: Está haciendo que los alumnos recuerden sus métodos para ver cómo les enseñaron a ellos y si fue la mejor forma o no, si se puede mejorar la forma como les enseñaron a ellos. Y anteriormente, que no lo he dicho, ha hecho referencia al método Singapur para que les suene y tengan referencia de cómo se trabaja con ese método, cuál de estos escenarios es el que más se asemeja al método Singapur.

F: Los números directamente, o sea, que estabais trabajando la fase inicial, de la suma, la estabais trabajando directamente con lo simbólico, que es la fase final, ¿lo veis?

A: Jolín, sí.

F: Vale, pues ala, ya está.

ANEXO 9

Transcripción de los comentarios de Raquel en la fase 1

Nota: El texto presentado entre corchetes en la transcripción se corresponde con información incluida por el investigador.

TRANSCRIPCIÓN DEL VÍDEO 1

Fragmento 1

[F = Formadora del vídeo]. [Comentarios de Raquel presentados en recuadros].

F: Bueno, entonces os voy a dar el guion y empezáis a trabajar y, al final, los últimos 15 minutos, hacemos la puesta en común. El guion de la actividad aparece aquí en el campus, pone la fecha, ¿vale?, «actividad para la sesión del 19 de septiembre». Lo voy a leer porque está en inglés, por si alguno tuviera alguna dificultad, lo leo y os ponéis a trabajar, ¿vale?

Todo el mundo en la mesa tiene un montón de palillos y varias cintas de estas, ¿no?, elásticas. Si alguien necesita más cintas me las pide, palillos no, son los que os he puesto, ¿vale?, es con lo que tenéis que trabajar. El problema es que yo he comprado una caja de palillos en Supeco

Comentario 1: Vale, te cuento. Está proponiendo una actividad. Está comentando lo que van a hacer y hasta ese momento pues es lo más natural. Se comenta, vamos a hacer esto, aquí tenéis el material y esto es lo que vamos a hacer. Hasta ahí, ¿vale?

y resulta que mis compañeros lo compran en Mercadona y me dicen que las cajas de palillos que ponen 800 palillos del Mercadona traen más y que les sale a cuenta, y que cuando van a comprar materiales —porque a veces tenemos que comprar nosotros los materiales— pues que merece la pena. Yo no pude ir a Mercadona, fui a Supeco, pone que son 800, pero no sé si me han timado o no me han timado. Entonces, para hacer un control de calidad, hacer una estimación, que luego, bueno, los que hayáis hecho Matemáticas de Ciencias Sociales pues sabéis hacer un contraste de hipótesis y tal, pero bueno, lo primero que tengo que hacer es hacer una estimación de cuántos hay, ¿no? Entonces, los he repartido para no contarlos yo y la idea es ver cuántos hay.

Entonces, el guion de la actividad, tal y como aparece aquí... [espera a que cargue el ordenador].

Comentario 2: Vale, les acaba de explicar un poquito en qué consiste y lo que tienen que trabajar, ¿vale? Lo normal... Lo que yo he observado es que lo ha relacionado mucho con una actividad natural del día a día. Lo ha trasladado pues a cualquier sitio que habitualmente los alumnos pueden ir y eso les... Vamos a ver, cómo te lo voy a explicar yo... Les conecta más con su entorno más inmediato, ¿vale?, entonces, si tú en clase cuando vas a plantear una actividad partes de los intereses de los alumnos y de su entorno y ellos identifican una actividad habitual que suelen hacer, si voy a tal sitio..., pues están más receptivos y abiertos a la actividad, ¿vale?

Aquí está el guion. Esta actividad —esperad que la amplíe un poco— está escaneada de un libro muy bueno que utilizan en los últimos años en Estados Unidos para formar profesores de primaria. Lo bueno del libro es que, además de los contenidos teóricos, más de la mitad del libro son actividades para llevar al aula-taller como estamos haciendo aquí, ¿vale? Entonces, una de las actividades iniciales para el trabajo con el número, que es con lo que estamos empezando nosotros, es esta de los palillos, ¿vale?

Entonces, aquí la pregunta es «cuántos», cuántos palillos, ¿no?, que es lo que os he preguntado a vosotros, ¿no?, cuántos. Entonces, cada grupo participando en esta actividad tiene un montón de palillos y luego tiene algo para atarlos, ¿no?, *rubber bands*, pues cintas de estas elásticas. Los materiales ya los tenéis. El objetivo de la actividad es ayudaros a entender el desarrollo de la escritura de los números tal y como los utilizamos nosotros en nuestro sistema de numeración, ¿vale?

Comentario 3: Vale, eh... Acaba de marcar el objetivo para que los alumnos sepan realmente para qué les va a servir esa sesión y qué se pretende sacar en concreto de esa sesión. Les acaba de marcar..., la finalidad de esta actividad es que consigáis tal cosa, ¿vale?

Entonces, primero, organiza los palillos de forma que visualmente puedas ver más o menos cuántos hay; usa las bandas elásticas, si te ayudan, para organizarlos de manera que así, de un vistazo, puedas decir cuántos tienes,

primero los cuentas, lo organizas, piensas cómo organizarlo, pero la cosa es que la organización que tú tengas en la mesa te permita de un vistazo recordar cuántos hay sin necesidad de haberlo apuntado, ¿no?, y que, si yo me paso por allí, me podáis decir: «mira, hay no sé cuántos, porque..., lo veo porque lo hemos organizado así», ¿vale? Luego, reflexiona sobre si la manera en la que lo has organizado corresponde a cómo escribirías tú luego los numerales para representar esa cantidad de palillos. Después, tienes que juntar tus palillos con los de un grupo de al lado, ¿vale?, por ejemplo, vosotros con vosotros y así, cada dos grupos tienen que juntar los palillos que tienen y decidir cuántos tienen en común, ¿vale?, cuántos tienen en total. Y al final, tenemos que juntarlos todos y de una forma ágil, sin tener que volver a contarlos todos, tenemos que saber cuántos palillos hay en total en la clase repartidos, ¿vale? O sea que, primero, cada grupo tiene que saber cuántos tiene y tiene que generar una estrategia para, de manera rápida, mirar en la mesa y ver cuántos hay; después, reflexionar sobre si la manera en la que lo coloca cuando uno luego escribe, imaginaos, «tengo 72, pues cómo se escribe 72: siete, dos», pues la manera en la que lo coloco me ayuda con la escritura o no, no tiene por qué, se reflexiona un poco sobre eso; y cuando hayáis terminado esa parte, llamáis al grupo de al lado y decís: «venga, vamos a ver cuántos tenemos en total, visualmente, cómo lo organizasteis vosotros, cómo lo organicé yo, a ver cómo lo tengo», ¿vale?; y luego todos.

Comentario 4: Vale, les acaba de repetir por segunda vez todo lo que tienen que ir haciendo. Habitualmente se enmarca, se van diciendo las actividades, primero hacéis esto, luego esto, luego esto..., y se asegura por segunda vez, repitiendo otra vez todos los pasos, que los alumnos lo han escuchado y lo han entendido, ¿vale?

Tenéis un cuarto de hora, ¿vale?

Comentario 5: Y termina diciendo el tiempo que tienen de trabajo, ¿vale?

Fragmento 2

[F = Formadora del vídeo]. [A = Alumnos]. [Comentarios de Raquel presentados en recuadros].

- F: Necesito saber si habéis tenido que llegar a algún acuerdo entre los grupos o...
- A: Sí, claro, todo ha sido un consenso, todo ha sido un consenso.
- F: Ah, vale, ha sido un consenso. ¿Qué acuerdo habéis tenido que...?
- A: Hemos explicado cada uno pues lo que significaba cada..., cada gomita.
- F: Y, por ejemplo, ¿vosotros de cuánto en cuánto lo habíais agrupado? Eráis los de 15, 10, 5, ¿no?
- A: Sí.
- F: ¿Y vosotros?
- A: 20, 10 y 4.
- F: 20, 10 y 4. Entonces, ¿habéis tenido que llegar a algún acuerdo alguno para reordenar?
- A: No, porque nos ha venido muy bien.
- F: ¿Os ha venido bien?
- A: Es que hemos sido muy inteligentes cogiendo el amarillo para los grandes [se refiere a gomas elásticas de color amarillo].
- F: Ahora los grandes de qué son, ¿de 20?
- A: De 20 y de 15, aquí están mezclados. ¿O los tenemos que reorganizar?



- F: Esto es superinteligente, ¿no? O sea, yo veo aquí..., digo: «en los amarillos, algunos tienen 20 y algunos tienen 15, búscate la vida Nuria».
- A: Pero son amarillos.
- F: Ya, pero entonces yo no sé... Yo digo: «vale, yo puedo ver 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 grupos amarillos», ¿no? Y ahora digo: «como mucho serán 160, si son todos de 20, pero... no necesariamente son 160, pueden ser menos».
- A: Bueno, pero como no lo sabes...
- F: ¿Entonces cómo sé cuántos hay?
- A: Te lo estamos diciendo, tienes que confiar en nosotros.
- F: No, en matemáticas la confianza no vale, uno tiene que...
- A: Es que no sé, no lo entiendo. ¿Lo tenemos que reorganizar?
- F: Vosotros ya sabéis cuántos palillos tenéis, pero ahora, visualmente, tenéis que poder contarme a mí cómo sabéis que hay ese número de palillos, ¿no?
- A: Ah, pues habría que... ¿Y no podemos quitar las gomas y reorganizarlo?
- F: Sí, sí, sí, yo no dije que no pudierais quitar las gomas.
- A: Aaaaah.

Comentario 1: Están trabajando en cooperativo. Entonces, cuando se trabaja en grupos cooperativos, después de mandar todas las tareas que tienen que hacer, la profesora se va rotando por los grupos, depende de la actividad, en este caso ella va rotando por los grupos comprobando si ellos están interpretando bien y pueden llegar a alcanzar bien el objetivo que ella les ha propuesto al principio. Entonces, dialoga con ellos, porque ella ha percibido que ha habido un pequeño error, pero no se lo dice, sino que lo que intenta es que sean ellos los que organicen de nuevo para que consigan hacerlo solos, que no sea ella, es decir, «no está así, se hace así». Lo que pretende es que sean ellos, ¿vale?

- F: ¿Alguien dijo que no se podían quitar?
- A: Y nosotros diciendo que no se podían quitar las gomas...
- F: Y una duda más. Alguno de vosotros..., por separado, ¿no?, cuando lo teníais..., habéis escrito la cantidad que teníais, ¿no? Eh, 109 teníais uno...
- A: 104 y 85.
- F: Por ejemplo, el 85 se escribe con un 8 y un 5. Ese 8 y ese 5, ¿estaban representados de alguna forma en...?
- A: No.
- F: No, vale. Y vosotros, la misma pregunta con lo vuestro.

A: No.

F: No había un patrón en cómo lo habíais representado, vale, ok.

A: ¿Pero quieres que busquemos?

F: Quiero que reflexionéis sobre eso, pero ahora lo vamos a poner en común, ¿vale?

A: Vale.

F: ¿Ha sido operativo el que ellos hayan hecho 15, 10, 5... y vosotras tuvieras 20...?

¿Eso ha ayudado a la hora de ponerlo en común?

A: No, porque ahora hay que hacerlo otra vez.

F: Ahora hay que volverlo a hacer...

Comentario 2: Claro, al final les hace preguntas para hacerlos razonar y entender, es decir, «dónde ha estado vuestro error», pero siempre de forma positiva se lo suele decir, que es lo normal. «Vosotros pensáis que tal...». Entonces es positiva a la hora de hablar con ellos, les ayuda a razonar y a que se pongan de acuerdo, que se detecta que no ha habido un buen acuerdo en el grupo, por eso no ha funcionado. Ella lo ha detectado, pero se acerca e intenta que ellos lo puedan solventar, ¿vale?

Fragmento 3

[F = Formadora del vídeo]. [A = Alumnos]. [Comentarios de Raquel presentados en recuadros].

- F: Me tenéis que decir cuántos palillos había en cada grupo inicialmente, antes de juntaros dos grupos, ¿vale? Entonces, por ejemplo, vosotros.
- A: 87.
- F: 87 [lo escribe en la pizarra]. Estamos de acuerdo, yo utilizo la escritura estándar que vosotros habéis visto en primaria, secundaria, bachillerato y al llegar aquí, ¿vale? Escritura estándar de nuestro sistema de numeración en nuestro contexto. Ese grupo, 87. ¿Cómo habíais hecho los grupos?
- A: Pues hemos hecho, eh..., tres grupos de 20.
- F: Tres grupos de 20, ¿cómo lo puedo poner? [Escribe un 3 en la pizarra].
- A: Eh..., tres rosas.
- A: 3×20 .
- F: ¿Tres rosas?
- A: Sí.
- A: No.
- F: Si pongo tres rosas... ¿Todo el mundo que ha utilizado gomitas rosas ha atado 20?
- A: No.
- F: ¿Otras personas que han atado 20 han usado otro color?
- A: Sí.
- F: Uf, el color no me vale. ¿Cómo lo pongo?
- A: 20×3 .
- A: 3×20 .
- F: 3 grupos de 20, ¿no? 3×20 . [Escribe 3×20]. Y luego...
- A: Pon en el 3 «color rosa» o algo así. Entre paréntesis.
- F: Vale, vale. [Pinta una raya rosa sobre el 20]. Y luego... Esto son 60.
- A: 9×3 .
- F: Y luego 9 grupos de 3, ¿no? [Escribe + 9]. ¿O 3 grupos de 9? [Borra el 9].
- A: 3×9 .
- F: 3 grupos de 9 y el 9 lo habéis puesto de otro color, ¿vale? [Escribe 3×9].

- A: Sí.
- F: ¿Alguien más ha utilizado grupos de 20?
- A: Nosotros.
- F: Varios. ¿Alguien más ha utilizado grupos de 9? [Destaca con la voz el número 9].
- A: Nosotras.
- F: Vosotras, vale, y vosotras también, vale.

Comentario 1: Ahí ha dicho 9 y, si te has dado cuenta, lo ha dicho un poco más fuerte de lo normal, porque están hablando entre ellos. Entonces, ella lo ha hecho para volver a captar la atención, ¿vale? Entonces, cuando se cambia el tono de esa manera, que no se grita pero se cambia el tono, la intención es que vuelvan a captar y la atiendan y la escuchen a ella.

Siguiente equipo, vosotras.

- A: Nosotras, 90.
- F: En total, 90. [Escribe 90 en la pizarra].
- A: 4 de 20 y 1 de 10.
- F: [Escribe $4 \times 20 + 1 \times 10$]. Vale, o sea que de momento han utilizado grupos de 20, grupos de 10, grupos de 9, ¿vale?



En esta escritura [señala lo que ha escrito en la pizarra] yo veo 3 grupos de 20, 3 grupos de 9, pero aquí [señala el 87] no veo un 3 y un 3. Yo aquí veo 4 grupos de 20, 1 grupo de 10, pero aquí [señala el 90] no veo 4, 1. Con lo cual, parece que tampoco habíais encontrado vosotros un patrón entre cómo escribo la cantidad

total con símbolos numéricos y visualmente qué veo en los palillos, ¿vale? De momento, la transcripción de lo que veo en los palillos simbólico-numéricamente la tengo aquí a la derecha [señala el $3 \times 20 + 3 \times 9$ y el $4 \times 20 + 1 \times 10$], pero no veo ninguna relación con esto [señala el 87 y el 90]. Yo aquí estoy haciendo trampa porque estoy metiendo operaciones, nosotros ahora no estamos con las operaciones, estamos solo con el número, con la escritura del número, eso es lo que estamos trabajando, ¿no? Pero para ayudar a ver esa conexión de los palillos hacia lo simbólico-numérico, pongo, escribo eso de transición para ir copiando lo que me decís, ¿no?, porque tardo más, tardo más en dibujar los palillos, las gomitas rosas, no sé qué, podría sacar la foto de la cámara y ponerlo rápido, ¿no?, pero..., bueno, lo escribo, lo transcribo así. Ahora, otro grupo. Vosotros dos ya estáis, que luego, luego... Ah, venga, ya que estamos aquí [dibuja una llave a la derecha de lo que ya ha escrito en la pizarra]. ¿A qué consenso... habéis llegado...?

A: Pues 7 grupos de 20...

F: Muy bien, 7 grupos de 20 [señala el 3 y el 4]. Han visto rápido y han dicho: «bien, los dos hemos agrupado, sin habernos copiado, en grupos de 20, con lo cual automáticamente tenemos 7 grupos de 20» [escribe 7×20].

A: Luego, ellos los 27 de 3×9 ...

F: Sí.

A: ... los han dividido en 2 de 10 para que se junten con los nuestros de 10.

F: ¿Y por qué no habéis hecho vosotros... separar este de 10 [señala el 10 de 1×10] en 1 de 9 y 1 de 1?

A: Porque se quedaría 1 solo y luego...

F: Bueno, pobrecillo, ¿no? No pasa nada.

A: Y porque es más fácil sumar de 10 en 10 que de 9 en 9.

A: Para ponerle la goma a 1...

F: Para ponerle la goma a 1... Bueno... Eso... Puede ser una justificación, pero tampoco muy potente... Me gusta más lo que ha dicho ella, o ella...

A: Que es más fácil sumar de 10 en 10 que de 9 en 9.

F: ¿Por qué será más fácil sumar de 10 en 10 que de 9 en 9 para nosotros? [Hablan varios alumnos a la vez]. ¿Por qué es más fácil sumar para nosotros de 10 en 10 y no de 9 en 9? [Hablan varios alumnos a la vez].

Comentario 2: Vale, en esta parte, está muy bien porque luego por grupos les está preguntando y está sintetizando y llegando a la conclusión para ver si ellos realmente han adquirido el objetivo que se estaba trabajando en la clase. Entonces, la mejor manera es que sean los alumnos los que vayan aportando toda esa síntesis y ese razonamiento, ¿vale?

Porque tenemos 10 dedos, por ejemplo, ¿no? Porque estamos más acostumbrados a 10, 20, 30, 40... [mueve las manos con los dedos estirados], ¿no?, como que nuestro sistema de numeración parece que...

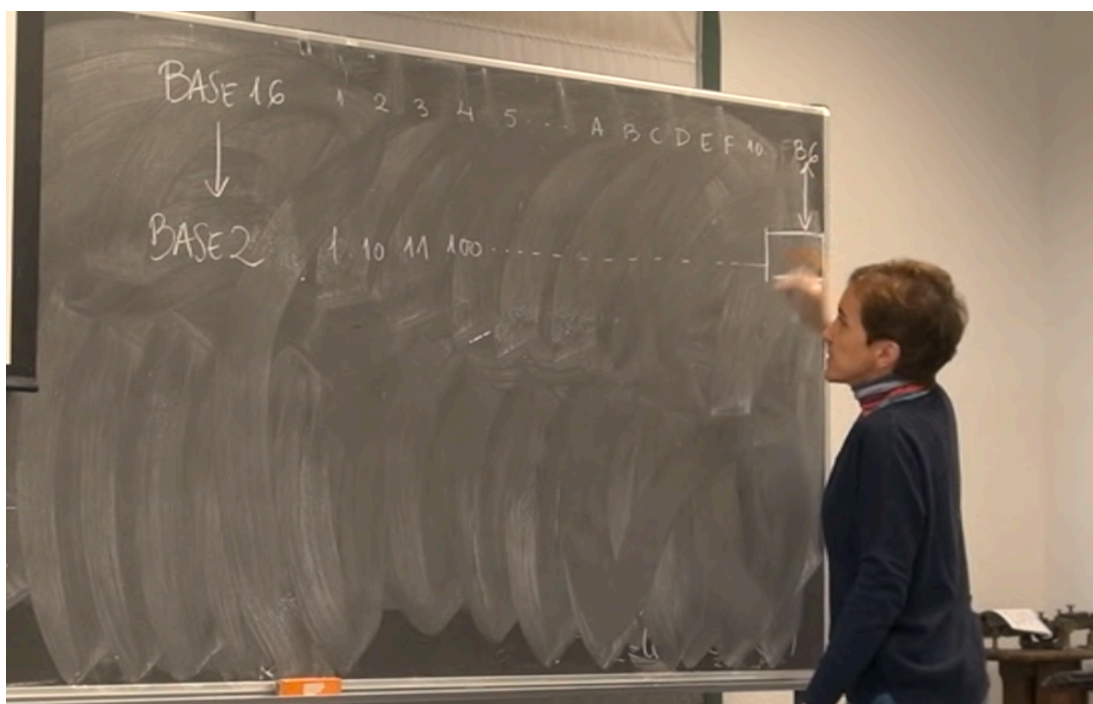
- A: Porque en verdad solo sumas de 1 en 1 y luego le pones un 0, entonces...
- F: Solo sumas de 1 en 1, elabora eso. Estamos en clase de matemáticas, ¿qué es 1, 1...?
- A: Pues por ejemplo, si tienes 30, pues 1 más 1 más 1, 3, como es 10, pues le pones el 0 y ya tienes los 30.
- F: ¿3 qué?
- A: 3 grupos de 10.
- F: 3 grupos de 10, muy bien. 3 grupos de 10, vale. [Vuelve a la pizarra a terminar lo que empezó a escribir].
- A: 3 de 20, 3 de 10 y 1 de 7.
- F: [Escribe, después de 7×20 , 3 10]. 3 de 10, llegasteis a romper estos [señala 3×9] en 2 de 10 más 7 sueltos, ¿no? [escribe $2 \times 10 + 7$ encima de 3×9]. Y entonces estos dos [señala 2×10] con este [señala 1×10] 3 y 7 palillos ahí sueltos [escribe, después de $7 \times 20 + 3 \times 10$, 7×1], ¿vale? Ahora, la cantidad total, ¿cuánto es? [señala el 87 y el 90].
- A: 177.
- F: 1, 7, 7 [escribe 177 a la izquierda del 87 y del 90]. ¿Hay aquí 1, 7, 7 por algún lado? [señala el 7 de 7×20 , al 3 de 3×10 y al 7 de 7×1]. Este [señala el 7 de 7×1] parece que hay aquí, ¿no? Pero lo otro... no me cuadra mucho todavía... Vale, otros dos grupos.



TRANSCRIPCIÓN DEL VÍDEO 2

[F = Formadora del vídeo]. [A = Alumnos]. [Comentarios de Raquel presentados en recuadros].

- F: Como me piden pasar de base 16 a base 2 directamente [escribe en la pizarra], pues Martín dice: «yo escribo aquí la secuencia 1, 2, 3, 4, 5..., A, B, C, D [dice 10, 11, 12, 13, señalando A, B, C, D], 14, 15 [escribiendo E, F], uno, cero [10]..., así hasta el B6», ¿vale? Y luego aquí en paralelo, voy uno [1], uno, cero [10], uno, uno [11], uno, cero, cero [100]..., hasta que pille aquí el que sea y ya está.



No he pasado por base 10, que es lo que me dice Nuria. Con lo cual, superado.
¿Pero qué pasó?

- A: Que es muy largo.

- F: Que es muy largo. Y que hasta en su casa, teniendo semanas, ha dicho: «paso». Tenías tiempo suficiente, porque había tiempo suficiente en dos semanas a hacerlo, pero... es largo y además un coñazo, con lo cual ha dicho: «paso». Con la idea Nuria ya se hace una idea de que lo he pensado, es un procedimiento válido, pero no ha sido eficaz, ¿vale?, entonces nosotros tenemos que seguir pensando porque tendremos que buscar alguna estrategia que sea eficaz. [Da la palabra a una alumna].

- A: ¿Se podría hacer la división?

F: ¿Qué división?

A: La de B6 entre 2. Es que no sé cómo plantearlo.

F: Ella dice: «oye, mira Nuria, cuando tú pasas de base 10 a base 2 haces grupos de 2 y divides de 2 en 2; pues ahora lo mismo, si estoy en B6 a base 2, divide entre 2». Pero aquí estoy escribiendo en base 16... [En la pizarra ha escrito B6 entre 2, con la caja]. Podríamos intentar hacerlo, pero... ¿sabemos hacerlo... o cómo va esto? ¿O mentalmente para hacerlo me vais a pasar a base 10, y hacéis la división en base 10 —que es lo que sabéis hacer—, y luego otra vez volvemos y entonces hacemos trampa porque pasamos por base 10? Si sabéis dividir un número en base 16 entre 2, si sabéis hacer esta división en base 16 —yo lo tendría que pensar, ¿eh?, así a capón no lo sé hacer, pero si lo pienso... —, si sabéis hacer eso, valdría.

Comentario 1: Vale, eh... Está intentando sacar de los alumnos que ellos solos lleguen al razonamiento de cómo se puede realizar eso, ¿vale? Entonces, ella habla de tal manera que sean ellos los que razonen, «si yo sé hacer esto y sé hacer esto, ¿cómo puedo yo llegar a conseguir lo que ella me está pidiendo?», ¿vale?



Pero esto lo vamos a ver en el dossier 3, ¿eh?, multiplicación y división. Nosotros tenemos herramientas para dividir en base 10 y sabemos cómo hacer restas sucesivas y el algoritmo tradicional de la cajita que habéis ido haciendo... Podríamos abordarlo, por eso abordamos los problemas de..., el anterior, ¿no?, de pasar de base 10 a base 2. Pero el de base 16 a base 2 hay que dividir en

base 16. Sumar en base 16 lo sé hacer, restar en base 16 me cuesta un poco pero lo sé hacer, multiplicar en base 16 también podría hacerlo, con lo cual dividir podría hacerlo, pero... no me atrevo a hacerlo sin manos, hoy. Otra forma.

A: Fijándote en que 16 es 2^4 .

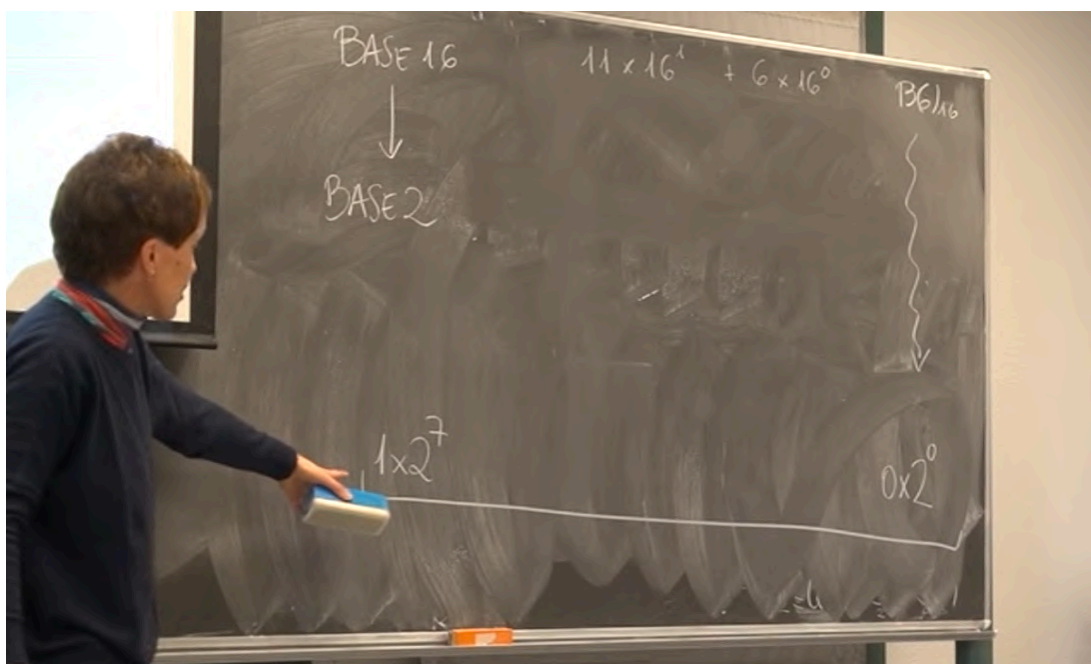
F: Fijándome en que 16 es 2^4 . Me lo voy a apuntar aquí [borra la pizarra y lo escribe].

A: Yo lo hice así, pero luego algo no me cuadraba.

F: Muy bien, vale.

A: Luego hice, 11...

F: Venga, vamos a poner el punto de partida, ¿no? El punto de partida es que tenemos 11×16^1 , ¿no?, más 6×16^0 . Este es mi B6 en base 16. Y yo quiero llegar aquí a... Me acuerdo de que empezaba en 1×2^7 y a acababa en 0×2^0 , ¿vale?



Entonces yo quiero pasar de ahí [señala la parte superior de la pizarra] a aquí [señala la parte inferior]. Si lo consigo, ya lo tengo en base 2, ¿no? Ya solo cojo los coeficientes de las potencias de 2 y ya lo tengo. Entonces, Pablo dice: «cambia este 16», ¿no, Pablo?

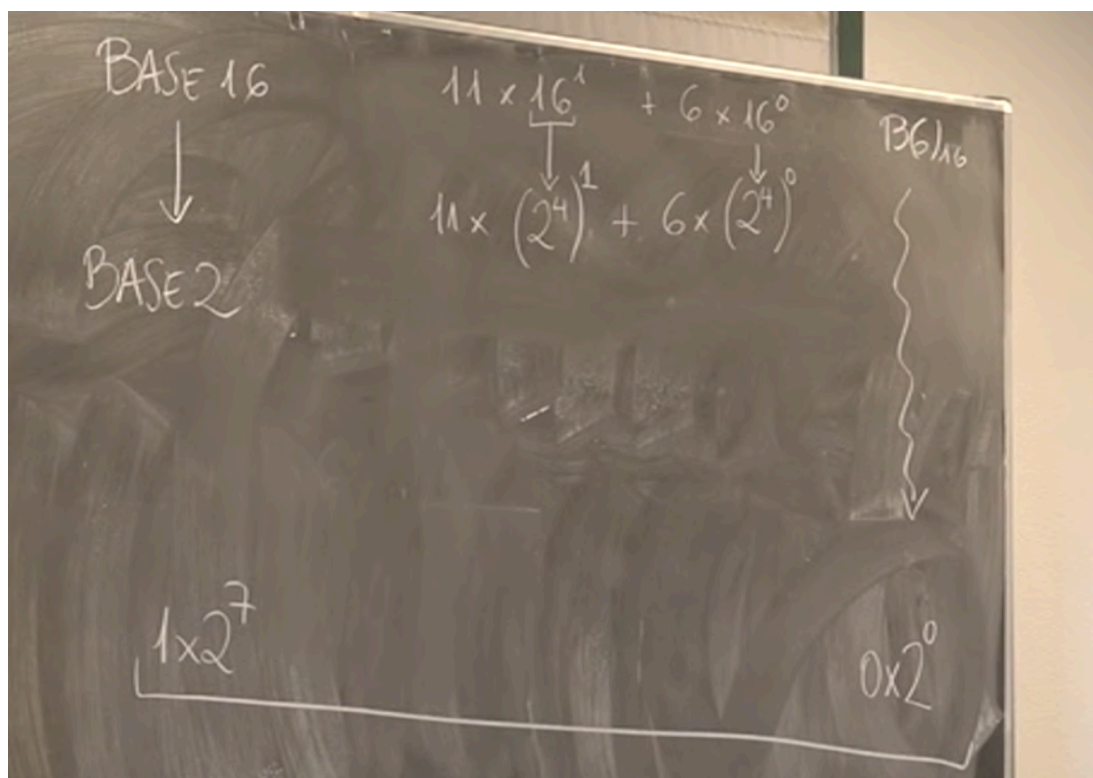
A: Sí.

F: Este 16 ponlo como $(2^4)^1$ y este 16 ponlo como $(2^4)^0$.

Comentario 2: Visualmente les está organizado a los niños [a los futuros maestros] la información, ¿vale? Depende del contenido, del concepto que se trabaje, pues la forma más adecuada para que ellos se organicen y puedan llegar a entender es visualizárselo y

esquematzárselo. Es lo que yo estoy viendo.

¿Vale? Yo tengo una expresión polinomial en base 16, quiero llegar a una expresión polinomial en base 2, y él me dice: «yo veo claro el cambio, 16 es 2^4 , cada vez que veas un 16 ponlo como 2^4 ». Vale, y entonces resulta que aquí tengo 11 grupos de esto y aquí tengo 6 de estos. ¿El 11 y el 6... los puedo dejar?



- A: No, los pasas a base 2.
- F: Los paso a base 2. ¿Sé pasar 11 a base 2?
- A: Sí.
- F: Vale, vamos a escribir 11 en base 2.
- A: 1, 0, 1, 1.
- F: 1×2^3 , ¿no?
- A: Sí.
- F: Más...
- A: Cero.
- F: 0×2^2 . De momento llevo ocho. Más...
- A: Uno.
- F: 1×2^1 . Ya llevo 10...
- A: Más uno.

- F: Más 1×2^0 . Ahí ya tengo 11, ¿vale? Esta es una manera de escribir 11. ¿Cómo? Como potencias de 2. Expresión polinomial del 11 en base 2, como potencias de 2, ¿vale? Y esto va multiplicado... 2 elevado a la 4 y luego lo elevo a la 1, ¿cuánto me queda...? 2^4 es $2 \times 2 \times 2 \times 2$ y luego eso lo elevo a la 1, es decir, que lo copio una vez, o sea que me queda...
- A: 2^4 .
- F: 2^4 . Más... El 6, ¿lo dejo?
- A: No.
- F: No. ¿Cómo escribo 6 en base 2?
- A: 1×2^2 .
- F: 1×2^2 , que son 4.
- A: 1×2^1 .
- F: 1×2^1 ... Y 0×2^0 [lo va escribiendo todo en la pizarra]. Ahí pone 6,

Comentario 3: Cuando ha escrito 11, ella ha empezado a escuchar a un alumno y ha sido él quien lo ha iniciado, pero ella ha detectado que le estaba costando y ha sido ella la que ha terminado. Y en esta parte, ha dejado que sea un alumno en voz alta el que vaya marcando y ella ha ido escribiendo; también ella sabía que eso le iba a costar menos trabajo, ¿vale?

- una manera más chula, ¿no?, de poner 6 como potencias de 2, ¿no?, como un polinomio con potencias de 2. Vale, y luego estaba por... Y ahora tengo $(2^4)^0$. ¿Eso qué es?
- A: Uno.
- F: Uno. ¿Y si lo quiero poner como potencias de 2?
- A: 2^0 .
- F: 2^0 , muy bien. 2^0 [lo escribe en la pizarra]. Mira qué contenta estoy, porque $2^0 \times 2^0$ es 2^0 y el coeficiente es 0, que es este. Y $2^4 \times 2^3$ es 2^7 y el coeficiente es 1, que es este. Pues como que ya casi lo tengo, ¿no? ¿Sí o no?
- A: Sí...

BASE 16

$11 \times 16^1 + 6 \times 16^0$

BASE 2

$11 \times (2^4)^1 + 6 \times (2^4)^0$

$[1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0] \times 2^4 + [1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0] \times 2^0$

1×2^7

0×2^0

F: Vale, y ahora... Venga, ¿cuál será el coeficiente...? Venga, vamos a poner aquí 2^6 , paso a la siguiente varilla del ábaco, ¿eh? ¿Cuál será el coeficiente de 2^6 ?

A: Cero.

F: Cero, porque ¿cómo consigo yo 2^6 ? $2^4 \times 2^2$, ¿no?

Comentario 4: Les ha dado la introducción para llegar a aquí [señala en la pantalla 1×2^7 y 0×2^0] y ahora ellos lo han visto y son ellos los que van sacando. Pero ella les ha dado el inicio, ¿vale?, ha arrancado y ha tirado de ellos, ¿vale?

2^4 es $2 \times 2 \times 2 \times 2$, 2^2 es 2×2 , ya tengo ahí los seis doses, ¿vale?, que está aquí, y el coeficiente cero. ¿Por aquí puedo llegar a 2^6 ?

A: No.

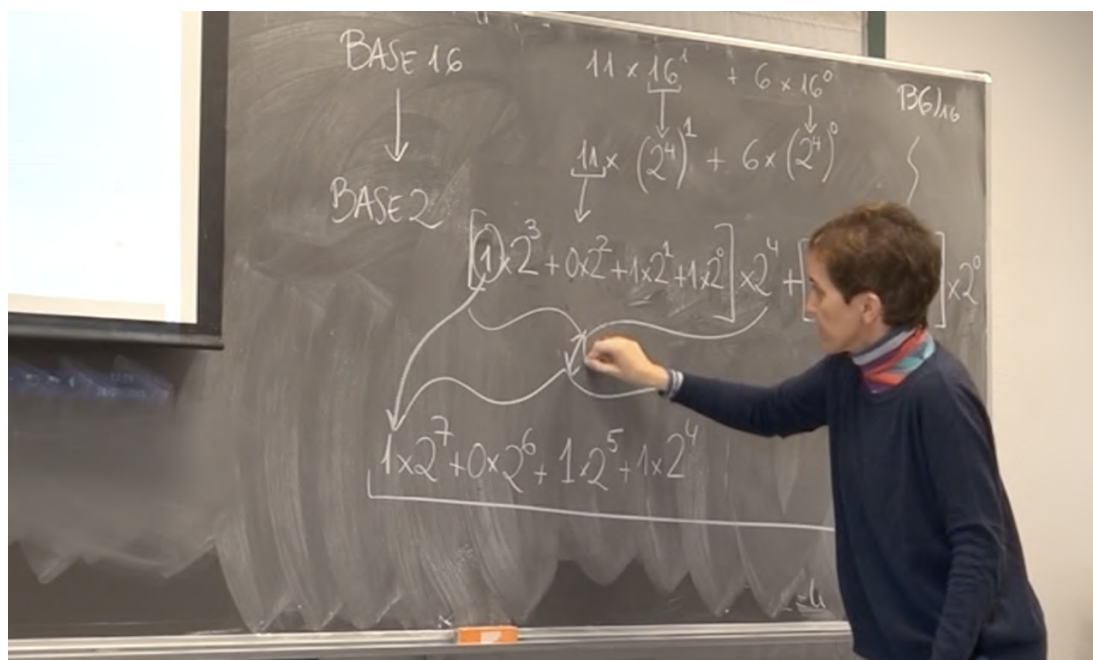
F: No, pues ala. 0×2^6 . Genial, porque era lo que me había salido antes. Ahora, más... Siguiendo varilla del ábaco, 2^5 . ¿Dónde consigo yo 2^5 ? Aquí [señala el corchete de la derecha] como mucho llego a 2^2 , me olvido de esto. $2^4 \times 2^1$ [señalando el corchete de la izquierda] es 2^5 , ¿no?

A: Sí.

F: Vale, ¿y qué coeficiente lleva?

A: 1.

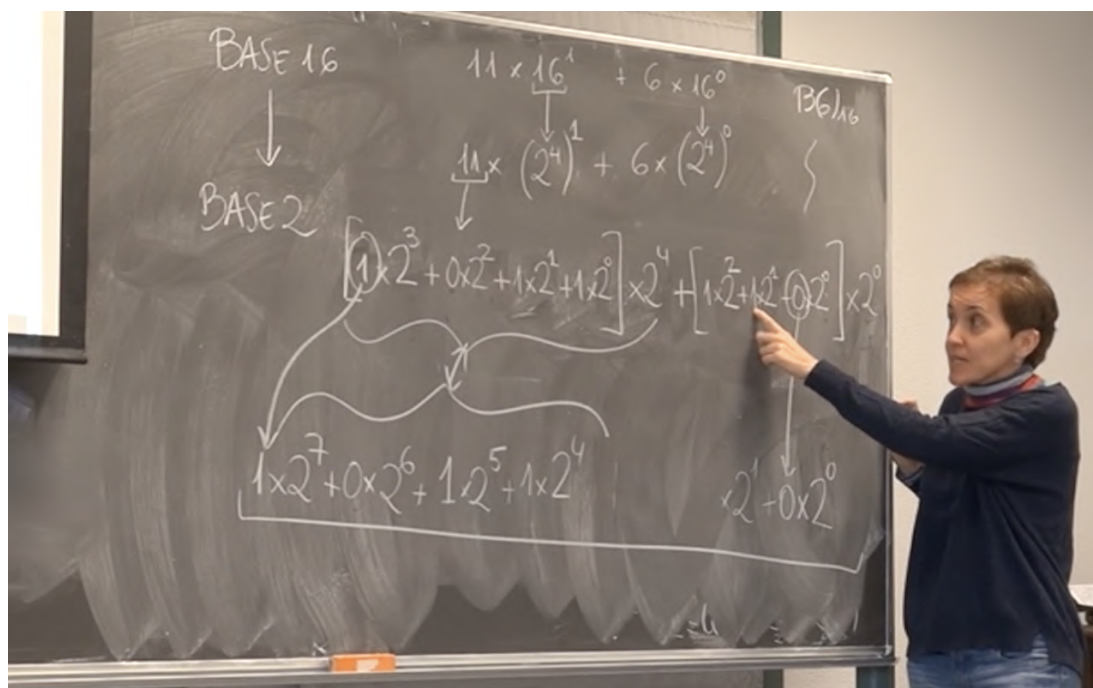
- F: 1. ¿Y era el qué tenía que llevar?
- A: Sí.
- F: Sí, vamos bien. Y ahora, 2^4 , ¿cómo consigo 2^4 ?
- A: Con 2^0 ...
- F: $2^4 \times 2^0$, ¿no? Tengo aquí cuatro copias del 2 y aquí ninguna, pues tengo cuatro copias del 2 multiplicándose por sí mismo, y el coeficiente 1. 1×2^4 [lo escribe en la pizarra]. Oye, mira, todo esto se ha convertido en esto. Lo veis, ¿no?



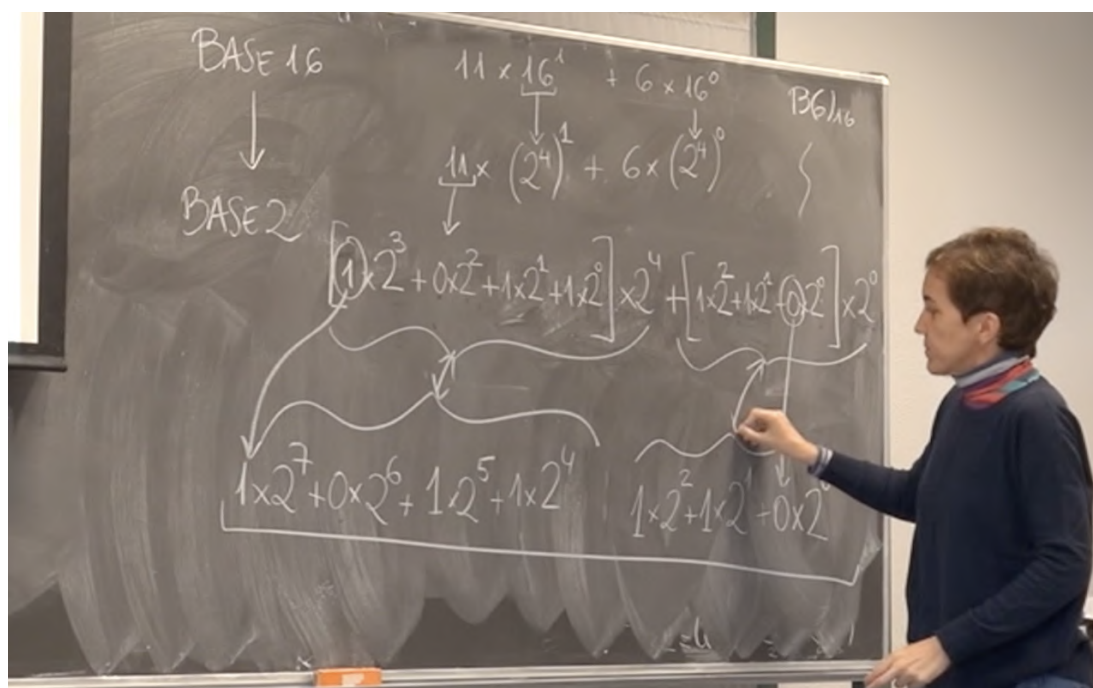
¿Qué es lo que he hecho? Propiedad distributiva. Voy multiplicando el 2^4 por cada uno de los sumandos, ¿vale? Muy bien.

Comentario 5: Vale, les acaba de recordar la estrategia que ha usado, ¿vale? Aunque no les ha preguntado a ellos qué estrategia o qué..., pero... ¿vale? Pero sí es bueno comentarlo, porque son conceptos que ellos tienen, pero muchas veces se escapan. Dice: «pues aquí, aplicamos otra vez esta propiedad», ¿vale?

- Y ahora, tiro por aquí, voy desde aquí [señala el 2^0 de la parte inferior derecha de la pizarra]. 2^0 , muy bien. Siguiente varilla del ábaco, 2^1 . ¿Qué coeficiente tiene 2^1 ?
- A: 1.
- F: 1, que está aquí [lo señala], ¿vale?



Porque sería $2^1 \times 2^0$, que es 2^1 , y lleva un 1 delante, un 1 [lo escribe abajo]. Voy bien. Y ahora, $2^0 \times 2^2$, 2^2 [lo escribe abajo], va con un 1 [lo escribe abajo]. O sea que esto que tengo aquí se convierte en esto que tengo aquí.



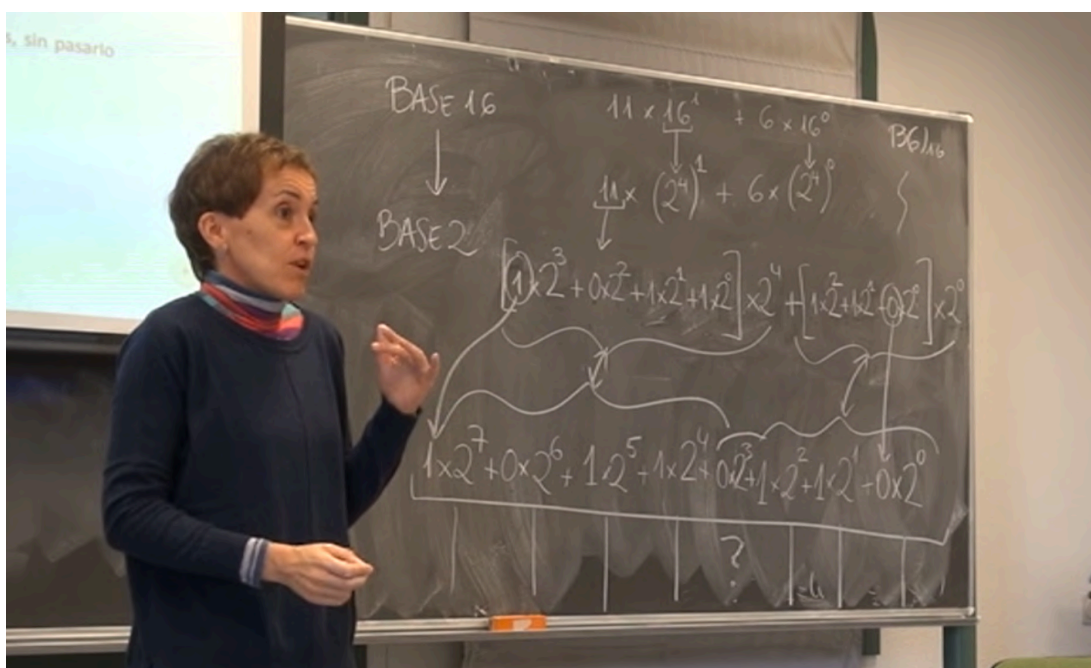
Y ahora, Pablo, ¿qué te pasó?

A: Que como... Que claro, los iba a juntar, pero dije: «me falta el 2^3 ».

F: Me falta el 2^3 . Pablo dice: «varilla del ábaco del 2^7 , 2^6 , 2^5 , 2^4 , ¡uy!, 2^2 , 2^1 , 2^0 ». «¡Uy!», dice Pablo [y dibuja una interrogación en la posición del 2^3].

A: Pues si no hay, un cero.

F: Pues se pone el 0, ya está. Lo pongo aquí: «+ 0 x 2³», y esto lo englobo aquí.



¿Qué es lo que pasa? Que escribo el 6 de una forma muy especial. Yo escribo el 6..., acordaos que esto era mi 6 [señala $1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0$], ¿eh?, esto era el 6, que es este 6 [señala el de un nivel anterior, más arriba en la pizarra], ¿vale? Yo he escrito el 6 como $1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0$, pero también puedo escribir el 6... $0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0$. No es lo estándar, porque como los ceros ahí no aportan mucho, pues no es lo estándar, pero si no me quiero olvidar de una de las varillas y no quiero tener un problema, como tenía Pablo, pues yo añado ahí para escribir el 6 de otra forma, ¿vale? Entonces, moraleja que cuentan los *youtubers*, por ejemplo David Calle, dice: «vamos a pasar de base 16 a base 2, ¿qué se hace chavales? Mirad, ¿veis este 11 que está aquí? [señala el de arriba de la pizarra], pues escribís este 11 en base 2: 1, 0, 1, 1 [señala los coeficientes de la expresión polinómica de la parte inferior de la pizarra]; ¿veis este 6 que está aquí? [señala el de arriba de la pizarra], pues lo escribís en base 2, pero cuidadín chavales, que hay que poner cuatro, ¿por qué?, porque 16 es 2^4 ». Y entonces dice: «vamos a escribir 6 en base 2 con cuatro: 0, 1, 1, 0». Y dice: «y ahora lo juntáis, fin». A mí no me vale

Comentario 6: Les acaba de resumir todo el proceso, es como una síntesis, qué hemos aprendido, qué hemos sacado de todo esto. Se lo acaba de verbalizar todo el proceso seguido, ¿vale?

porque yo no soy David Calle, yo no estoy de *youtuber*, *influencer*, superfamosa ayudando a los chavales a aprobar exámenes, que es un trabajo muy digno y que está bien, y además el tío es un *crack*, muy suelto, lo hace muy bien; yo estoy formando maestros, entonces tenéis que entender cómo hemos pasado de aquí [señala la parte superior de la pizarra] a aquí [señala la parte inferior de la pizarra] a través de esto [señala la parte media de la pizarra]. Entonces, la pregunta es: ¿se puede pasar de base 16 a base 2 sin pasar por base 10? Sí. Lo acabamos de hacer, ¿no? Es que me miráis con una cara... ¿Y por qué se puede? ¿Qué pasa si yo esto [el ejercicio] os lo doy en base 15 y, en vez de en base 16, todo el problema es en base 15?

A: Que sería $2^4 + 2^0$.

F: ¿ $2^4 + 2^0$ es 15?

A: O sea, no..., perdón. $2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0$.

F: Vale, y entonces tendría que ir haciendo todas las distributivas, todo el follón, ahí. ¿Y David Calle me podría dar el algoritmo...? Escribes, imaginaos el mismo número, ¿eh?, B6, en vez de en base 16, en base 15. ¿David Calle me puede decir...? Aquí tengo el 15, ¿no?, aquí tengo el 15 [los escribe encima de los 16], y David Calle me dice: «escribe esto [señala el 11] en base 2, escribe esto [señala el 6] en base 2, con tres y medio dígitos o cuatro dígitos o... tres dígitos, y lo pones junto. ¿Valdría ese algoritmo?

A: No.

F: No. ¿Vale? O sea, que poder se puede pasar, vas con paciencia escribiendo cada una de las expresiones que aparecen, pero un paso directo solo se puede cuando una base es potencia de la otra base, que es lo que hemos visto con 16, que es potencia de 2, que es 2^4 . ¿Está claro hasta aquí? ¿Sí?

Comentario 7: Vale, eh... Insiste mucho, insiste en si lo entienden, lo vuelve a explicar y lo vuelve a explicar, que es bastante importante. Cuando se dan unas clases, al final de matemáticas, primero recibe mucho de ellos, ve que lo están comprendiendo, y al final vuelve a insistir, esto, esto y esto, ¿vale?

TRANSCRIPCIÓN DEL VÍDEO 3

Fragmento 1

[F = Formadora del vídeo]. [Comentarios de Raquel presentados en recuadros].

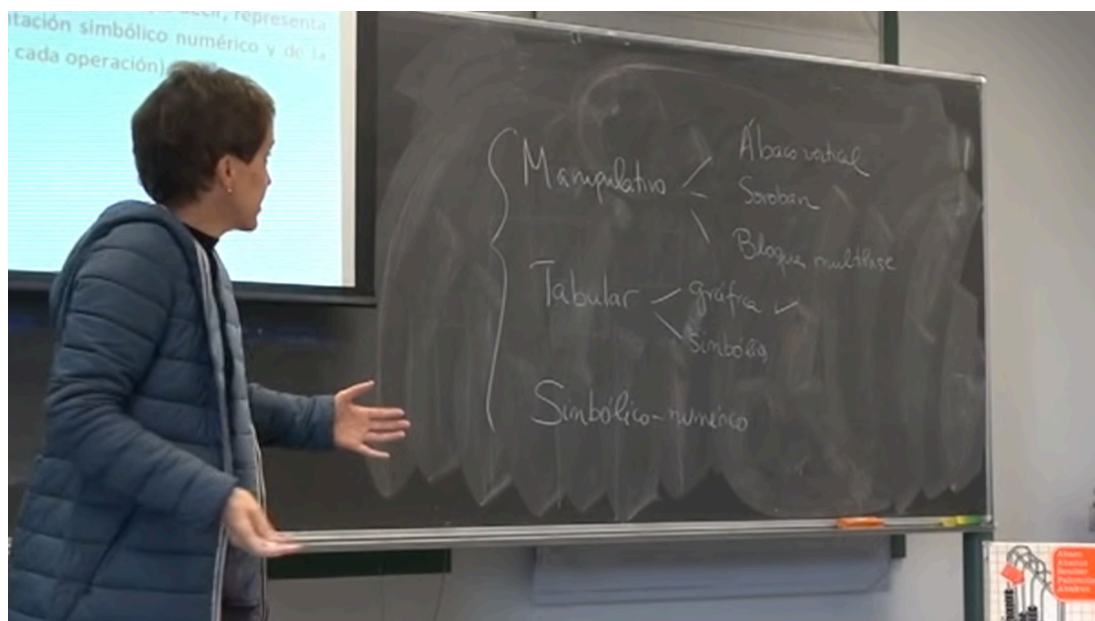
- F: Entonces, la idea es..., el ejercicio 4, que está proyectado en la pantalla, es el ejercicio 4 de la última hoja, de la hoja del dossier 2, con el que vamos a trabajar ya esta semana, ¿vale? En ese ejercicio hay cuatro operaciones, cuatro problemas, cuatro operaciones. Tenéis que hacer las cuatro operaciones..., representarlas de distintas maneras. Voy a poner en la pizarra de cuántas maneras, ¿vale? Entonces, acordaos que nosotros estamos trabajando con material manipulativo [escribe en la pizarra «Manipulativo»], ¿vale? Entonces, en primer lugar tenéis que representar esta suma $[210 + 543]$, esta suma $[315 + 429]$, esta resta $[135 - 24]$ y esta resta $[704 - 45]$, por partes [va señalando en el PDF proyectado en la pantalla], ¿no?, empezáis con la primera... Tenéis que representarlo [escribe en la pizarra] con ábaco vertical, después en el sorobán y después con los multibase, ¿vale? Y tenéis que tener las tres representaciones del proceso delante para saber comparar cada dos, ¿vale?, para saber entender cómo se traduce una en otra. Lo que no quiero es que me digáis: « $210 + 543$ son 753; Nuria, te he representado 743* en el ábaco vertical, en el sorobán y en los bloques multibase». No quiero la representación del resultado, quiero la representación del proceso, de la suma, de la idea «suma». ¿En qué os tenéis que basar?, en la definición de la suma que vimos el otro día, ¿no?, que es: elijo un representante de uno, elijo un representante del otro y hago la unión, agrupo, junto, como lo queráis pensar, ¿vale? Entonces, hay que representar el proceso, el proceso, no solo el resultado final de ese proceso. Entonces, tenéis que representar el proceso de tres maneras en el sistema de representación manipulativo [señala lo que ha escrito antes en la pizarra], ¿vale?

Comentario 1: Me gusta porque lo importante es que si los niños entienden el proceso, el concepto lo tienen más que adquirido. Entonces, si un profesor consigue que sus alumnos entiendan todo el proceso, que es de lo que se trata, van a ser unos buenos formadores, unos buenos profesores. Si yo simplemente aprendo y hago la suma, ¿cómo consigo yo transmitir cómo se hace la suma? Entonces, esta parte está muy..., me parece muy buena

esta parte, ¿vale?

Y en paralelo [empieza a escribir en la pizarra] tenéis que representar el proceso en el sistema de representación simbólico-numérico; el enunciado está dado en ese sistema de representación, ¿vale?, esto es sistema de representación simbólico-numérico, pues tenéis que representar el proceso, las dos sumas y las dos restas, en ese sistema, ¿vale? Y luego, en medio [escribe en la pizarra], hay una representación que es formato tabla o tabular, de la que no he hablado explícitamente, pero que me gustaría que construyerais vosotros, ¿vale? Necesito que construyáis, por ejemplo, esta suma [señala $210 + 543$], que la hagáis en tabla, con una tabla, como se os ocurra a vosotros diseñar la tabla, ¿vale? La tabla [escribe en la pizarra] puede ser más gráfica, puede tener características gráficas, o puede tener características más simbólicas; a mí me va a interesar más la que tenga características más gráficas, luego ya veremos en detalle cómo, pero tenéis que intentar construirlo vosotros sin que yo os haya hablado de eso explícitamente, ¿vale?

Comentario 2: Está fomentando la creatividad de los alumnos, ¿vale? Ahí es creatividad a tope, si lo tienes bien adquirido y lo puedes llegar a conseguir. Porque cuanto más creativos sean, más se va a sacar de ellos, ¿vale?



Entonces, paso 1, aquí [señala la parte de representación manipulativa de la pizarra], en paralelo paso 2, simbólico-numérico [lo señala en la pizarra] y luego

ya, según vayáis trabajando los cuatro ejemplos, igual ya se os va ocurriendo cómo representarlo con una tabla y cómo trabajar con una tabla ese tipo de operaciones. ¿Está claro? Yo me voy a pasar por las mesas y me vais preguntando todas las dudas que os surjan. No voy a pedir que me mandéis nada, ¿vale?, porque todavía no he revisado las últimas fotos que me habéis mandado, con lo cual estoy un poco desbordada; como no sois muchos, yo voy por vuestros puestos. Ahora bien, en el grupo anterior han decidido grabar pequeños vídeos o hacer fotos de los procesos que iban construyendo por llevárselo como material para estudiar, a mí me parece una buena idea, pero ya vosotros hacéis lo que queráis, a mí no me lo tenéis que mandar, pero si queréis, una vez que hayáis construido, por ejemplo, con el ábaco japonés, imaginaos, esta resta de aquí [señala el PDF en la pantalla], y decís: «ah, pues nos vamos a grabar», uno lo hace otro lo graba y lo tenéis de recuerdo, ¿no?, para cuando tengáis que estudiar. ¿Cómo voy a pedir yo eso en el examen? Pues no lo puedo pedir porque no puedo llevar un sorobán para cada uno porque tengo un día, 2 horas y media o 3, para haceros el examen final de la asignatura; pero para mí esto es muy importante, entonces yo voy a pedir que me representéis gráficamente, gráficamente, vuestro proceso de respuesta con un ábaco vertical, con un sorobán o con los bloques multibase, que es lo que yo luego voy a hacer aquí en la sesión final de discusión cuando acabemos esta hora de clase. Yo no voy a coger el ábaco aquí, lo voy a poner delante de todos y tal —podría hacerlo, pero no lo voy a hacer—, lo voy a hacer representando gráficamente el material manipulativo y así es como lo voy a pedir el día del examen, porque os voy a dar un cuadernillo y lo tenéis que hacer gráfico, ¿vale? Bueno, pues empezad, están escritas en un orden muy concreto, empezad a hacerlas en ese orden y luego ya discutimos sobre por qué están puestas en ese orden, ¿vale?

Fragmento 2

[F = Formadora del vídeo]. [A = Alumnos (A1, A2 y A3)]. [Comentarios de Raquel presentados en recuadros].

- A1: Estamos rayados con la última resta.
 F: Vale, a ver, empezad.
 A1: Son 704 - 45.
 F: Vale.
 A1: Entonces, aquí no le podemos restar 5.



- F: Así tal cual está, puedes restar..., ¿cuántas puedes quitar?
 A1: Cuatro.
 F: Cuatro, vale, sí.
 A1: Entonces voy a suponer que aquí [señala la varilla de las decenas] hay un 1.
 A2: No, que hay 10.
 A1: Que hay 10, para que sea 14...
 F: A ver, olvídate de los «suponer». Tú dices: «tengo que quitar 5», ¿no?, quito 1, quito 2, quito 3, quito 4 [quita cuentas de la varilla de las unidades] y ahora ponme aquí más para que yo quite, tal y como está.



- A1: Habría que poner 10 y quitamos 1.
- F: Pero ¿cómo me ponéis..., cómo me ponéis ahí? A ver Pablo.
- A2: ¿Que lo ponga?
- F: No, no, que me digas... Yo aquí [señala la varilla de las centenas] tengo ahora mismo 700, ¿no? Escribe 700 de otra forma para que yo tenga bolas...
- A1: Aaaaah, hay que añadir una aquí [señala la varilla de las decenas].
- F: Venga, a ver.
- A2: [El alumno A2 quita una cuenta de la varilla de las centenas y la pone en la de las decenas].
- F: ¿Aquí sigue poniendo 700?
- A1: No, no, no, hay que poner una nueva aquí [vuelve a poner la cuenta en la varilla de las centenas —la que había puesto en la varilla de las decenas el alumno A2— y pone una nueva en la varilla de las decenas].
- F: A ver [quita la cuenta de la varilla de las decenas]. Teníamos 704, hemos quitado 4, tengo 700, ¿vale?
- A1: Sí.
- F: Ahora, escribe 700 de otra forma para poder quitar otra.
- A1: Pues...
- F: ¿Cómo podéis escribir 700 de otra forma?
- A1: Que aquí [señala la varilla de las decenas] haya 9...
- F: Venga.
- A1: Y aquí [señala la varilla de las unidades]..., 9.

F: A ver, para que haya aquíiii... [señala la varilla de las decenas], vamos a ver, ¿cómo consigo aquí decenas? Sin cambiar el número...

A1: Si quito esta... [quita una cuenta de la varilla de las centenas].



F: Venga, muy bien.

A1: Pongo aquí 10 [señala la varilla de las decenas].

F: Venga, dale.

A1: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10.

A3: ¡Ah, vale!



F: ¿Ahora aquí pone 700?

A1: Sí.

F: ¿Y cómo está escrito 700?

A3: Mal.

F: 6×10^2 , ¿no?, 6×100 , más...

A2: 10×10^1 .

F: 10×10^1 , muy bien. Ahora, ¿puedo quitar aquí [señala la varilla de las unidades] que quería quitar una? ¿Tengo?

A1: No.

F: No, ¿cómo puedo volver a escribir 700 para tener aquí [varilla de las unidades]?

A1: Pues quito de estas [quita una cuenta de la varilla de las decenas] y añado 10 aquí [señala la varilla de las unidades].

F: Vale, venga.



F: Vale, ¿y ahora puedes quitar la que te faltaba por quitar?

A1: [La estudiante A1 quita una cuenta de la varilla de las unidades].

F: Ya está. Ya habéis quitado 5 y teníais que quitar 45, ¿no? ¿Cuánto os falta por quitar?

A1: Sí, ahora aquí [señala la varilla de las decenas] hay que quitar 4.

F: Pues ya está, ¿no?

A1: Ah, vale, vale. Gracias.



F: ¿Entonces qué habéis hecho para reescribir el 700...? O sea, yo tenía 700 ahí, tenía aquí 700 [deja el ábac con 7 cuentas en la varilla de las centenas], ¿qué habéis hecho?

A2: Como es sistema decimal, pues aquí [señala la varilla de las decenas] hay 10, porque... representamos un 0, pues quitar una de aquí [varilla de las centenas] y ponerle las 10 aquí [varilla de las decenas] para luego restarlas aquí [varilla de las unidades].

F: O sea que habéis..., ¿agrupado o desagrupado?

A1: Desagrupado.

A2: Aquí desagrupado.

F: Desagrupado. Habéis desagrupado una centena en 10 decenas y luego una decena la habéis desagrupado en 10 unidades.

A1: Vale, es que cuando tú lo haces en papel no haces esto así.

F: Ah, pues dime entonces qué es lo que haces en papel.

Comentario 1: Vale. Como veía que le estaba costando mucho trabajo, le ha ayudado; normal. Le ha ayudado a razonar, a ver qué podemos hacer y tal. Y cuando han terminado y lo han visto bien, ha ido otra vez para atrás y dice: «pues ahora me volvéis a explicar lo que habéis hecho», ¿vale?

A1: Claro, lo haces muy mental. O sea, en verdad sí que haces eso, pero... bueno, ya me has entendido.

F: No, no, pero lo tienes que explicar porque luego os he pedido que lo hagáis simbólico...

A1: Ya, ya, ya.

F: Entonces, simbólico tienes que explicarlo conectado con esto.

A1: Vale, vale.

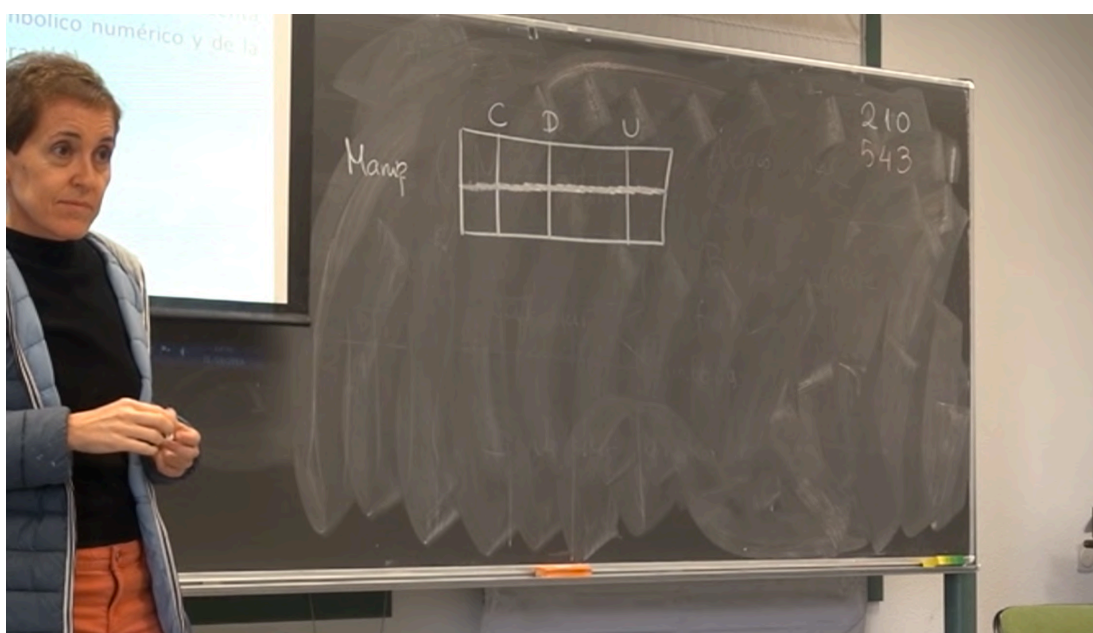
Fragmento 3

[F = Formadora del vídeo]. [A = Alumnos]. [Comentarios de Raquel presentados en recuadros].

F: Vamos a corregir uno, el primero, ¿vale? Me dan $210 + 543$, ¿vale?, con símbolos. Voy a representarlo..., vamos a empezar con manipulativo y voy a ejemplificar con el sorobán, que es el que parece que más trabajo cuesta, ¿vale? Entonces, en el sorobán, cuando lo representéis gráficamente el día del examen, o ahora en vuestro cuaderno si tenéis que tomar notas, es muy importante marcar la barra del medio, porque la proximidad de las bolas a la barra del medio es la que te indica qué número está representando, ¿vale? Y ahora, dado el problema que me han planteado, ¿cuántas varillas pensáis que necesito escribir?

A: Tres.

F: ¿Tres varillas? Pongo una varilla, dos varillas, tres varillas. Esta, unidades, decenas, centenas. Esta la pongo un poco más gorda para que se note que es la barra de madera del medio, ¿vale? Y ahora, ¿cómo dibujo 210?



A: Pues 0 unidades.

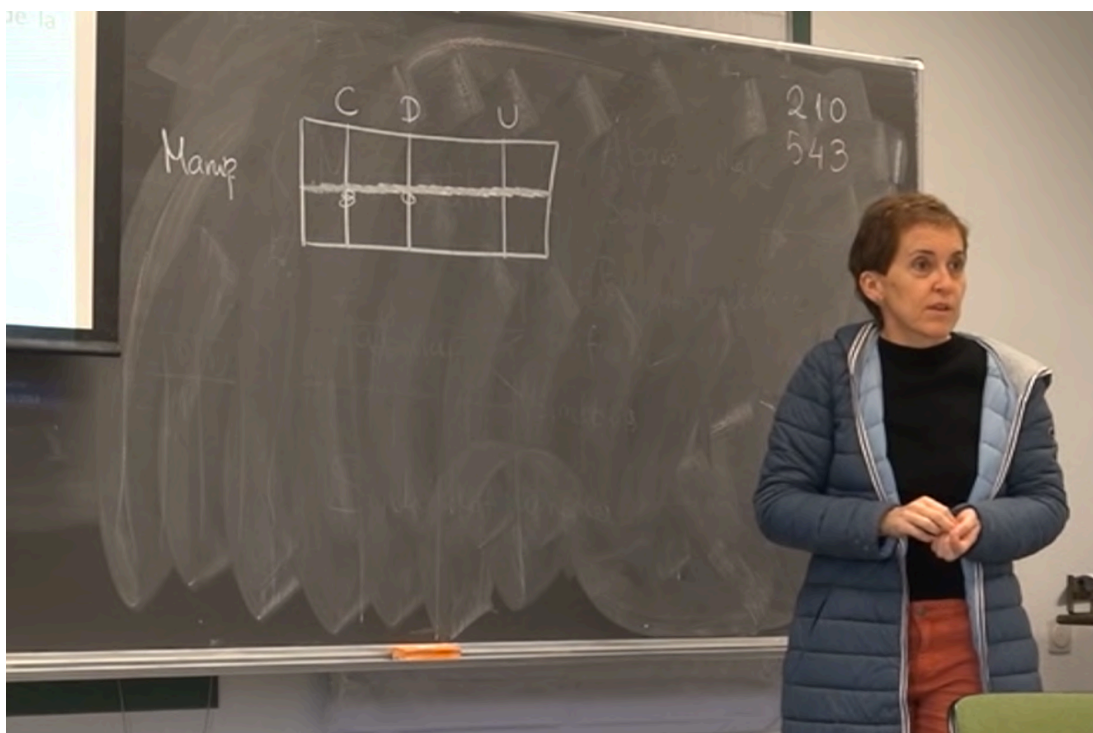
F: 0, o sea que aquí no pongo nada pegado a la barra, ¿no? [señala la varilla de las unidades]. ¿Aquí? [señala la varilla de las decenas].

A: 1 decena.

F: Una pegada a la barra, ¿arriba o abajo?

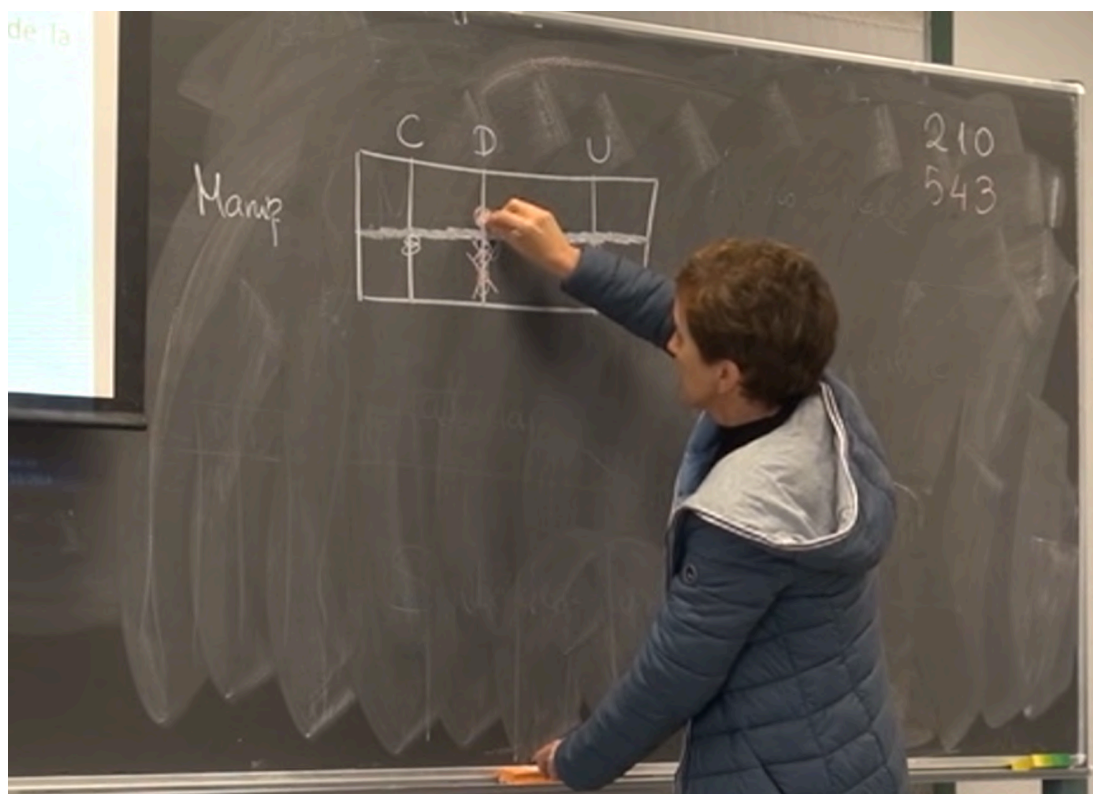
A: Abajo.

- F: Abajo, o sea que aquí va una.
 A: Y 2 centenas pegadas a la barra de abajo.
 F: Pegadas a la barra, abajo. Una y dos, ahí está. Eso es 210.



Y ahora, tengo que sumar 543, es decir, que tengo que añadir 543 unidades ahí. Aprovecho la estructura, ¿vale? Entonces, añado 3 unidades, en la varilla de las unidades, que son 3 aquí abajo, ¿no?, 1, 2 y 3 [las dibuja en la varilla de las unidades]. Después añado 4 decenas, en la varilla... 1, 2, 3, 4, ¿vale? [las dibuja en la varilla de las decenas], 4 decenas.

- A: Pero cambiamos...
 F: Pero...
 A: Bajamos una de arriba y quitamos las de abajo.
 F: Porque no tenéis 4, ¿vale?, ya no había suficientes, ¿por qué?, porque las bolas de arriba valen 5, entonces decís: «no pasa nada, estas, como eran 4 y 1, 5, se representan ahí arriba», ¿vale?

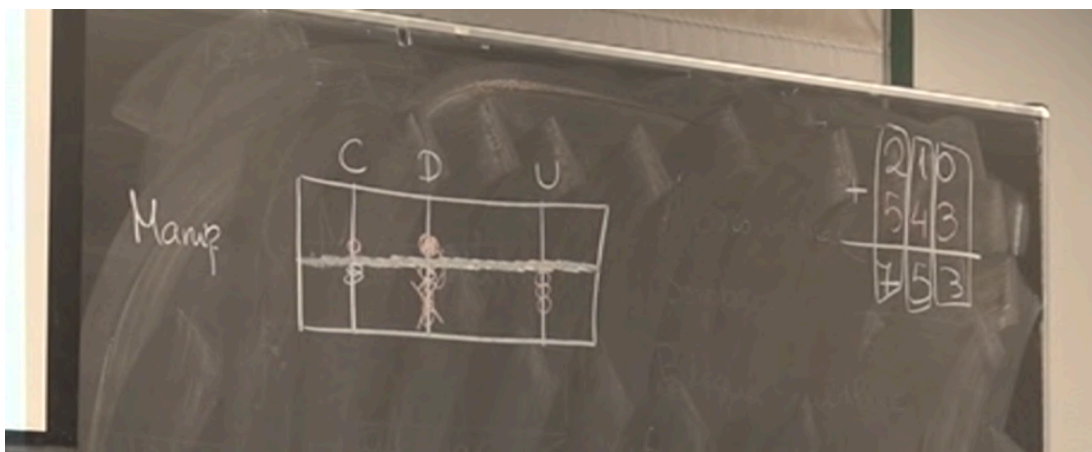


Y luego, 5..., tengo que añadir 5 centenas, ¿cómo lo hago?

A: Pues 1 arriba.

F: Una de arriba la bajo directamente o podría ir: «1, 2, 3, ya tengo 5, las subo ahí, 4, 5» [va señalando en la varilla de las centenas], ¿vale? Puedo hacerlo de dos formas distintas. Pero si aprovecho la estructura del ábaco, de manera que las bolas de arriba valen 5, como tengo que añadir 5, pues directamente ya añado ahí esas 5 [dibuja una bola en la varilla de las centenas, en la parte superior, pegada a la barra horizontal], ¿vale?

Entonces, [representa ahora el resultado en la suma con el algoritmo tradicional de forma simbólico-numérica a partir de lo que ha obtenido en la representación con el sorobán] me quedan 5 y 2, 7, aquí me quedan 5, y aquí me quedaban 3. Entonces, si yo lo represento así y voy sumando por columnas, tal cual he ido haciendo en el ábaco, tengo 0 unidades y 3 unidades, 3 unidades, 1 unidad y 4 unidades, 5 unidades, perdón, decenas, 2 centenas y 5 centenas, 7 centenas. Vertical, lo he colocado vertical por parecerme a la estructura del ábaco, ¿no?, para tener en cuenta la «posicionalidad», ¿vale?, del sistema.

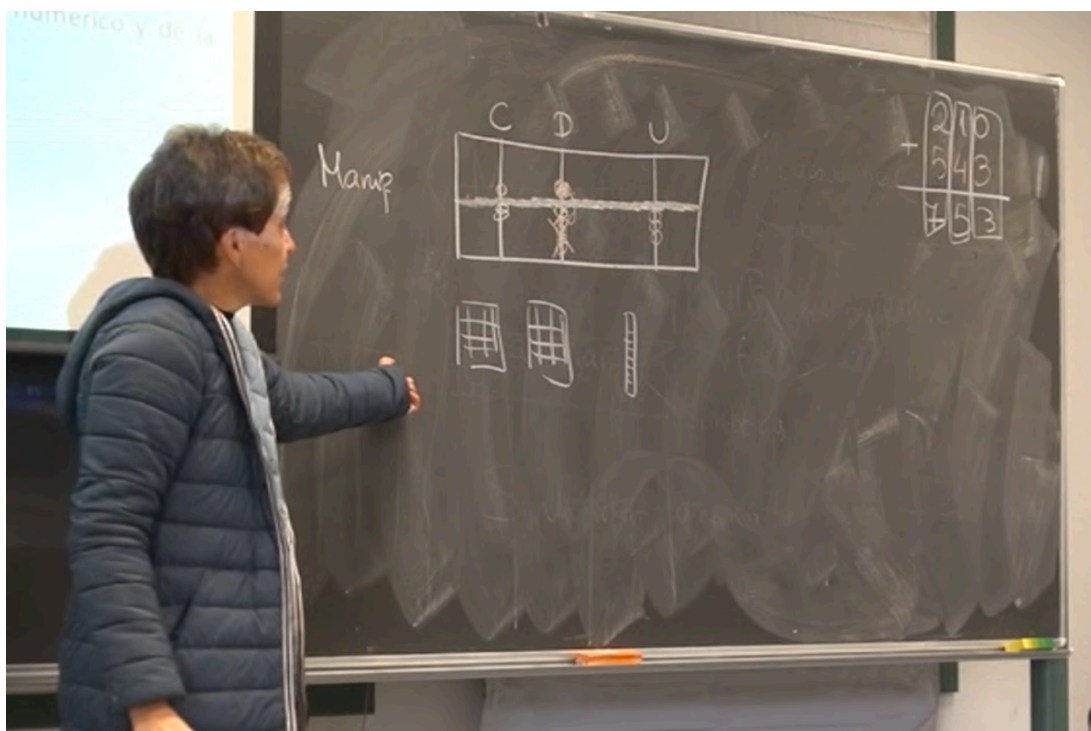


Entonces, he traducido al simbólico lo que he hecho aquí manipulativamente al escribir en simbólico en columnas y represento con cada columna cada una de estas [señala las varillas del sorobán de la pizarra].

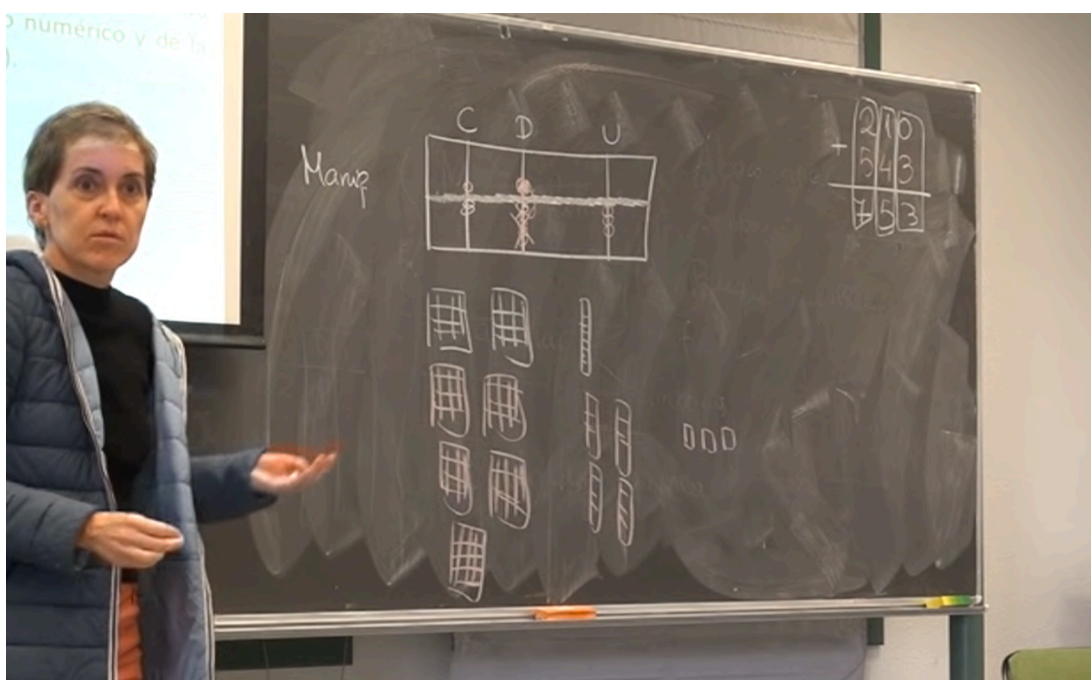
Comentario 1: Vale. Cuando los niños aprenden, como primero se utiliza muchísimo el material manipulativo, si la estructura del material manipulativo se corresponde con la forma simbólica, a los niños luego no les cuesta trabajo hacer esa transcripción. Por eso, se lo está explicando muy bien. Ese es el proceso que tienen que seguir, ¿vale?

Y luego, la escritura, sí que tengo que tener en cuenta que estos son 5 [señala las decenas de la suma en simbólico] con lo cual van arriba [en el sorobán] y esto son 7 [señala las centenas de la suma en simbólico], pues son 5 y 2 [en el sorobán], ¿vale?

Bloques multibase, bloques multibase, pongo aquí 210, ¿no?, que son 1 y 2 placas de 100 y 10, una decena; este es el 210.



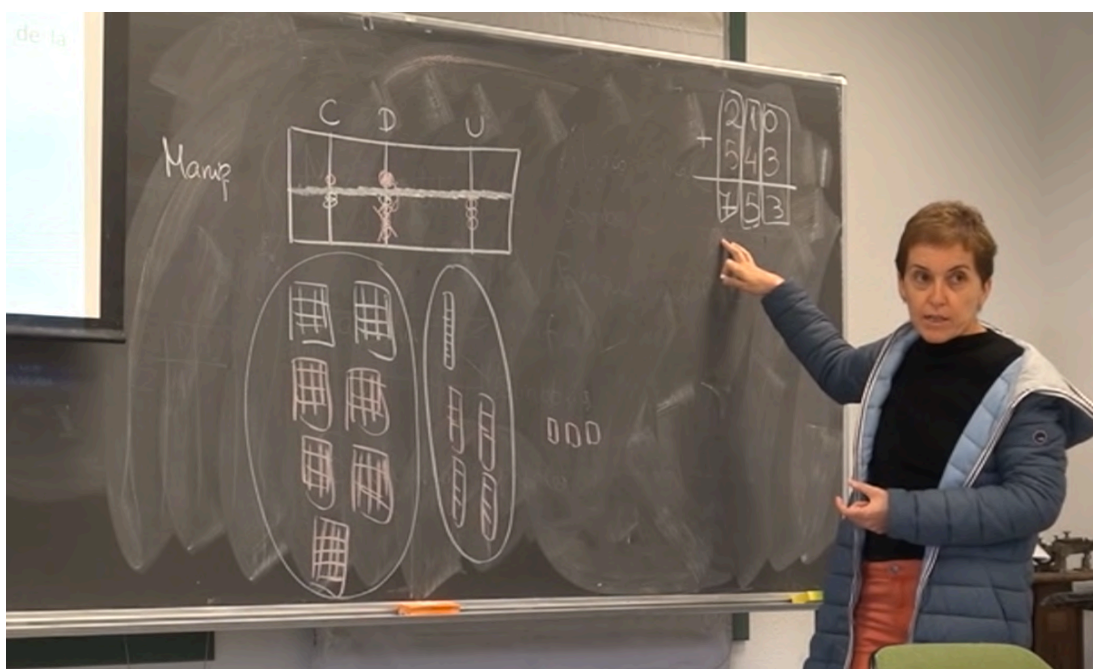
Y ahora agrupo 543; una, dos, tres, cuatro y cinco [dibuja 5 placas de 100 unidades], añado, ¿vale?, 500. 40: una, dos, tres, cuatro [barras de 10]; y 3: uno, dos y tres [unidades]. Y ahora lo pongo todo junto. ¿Vale?



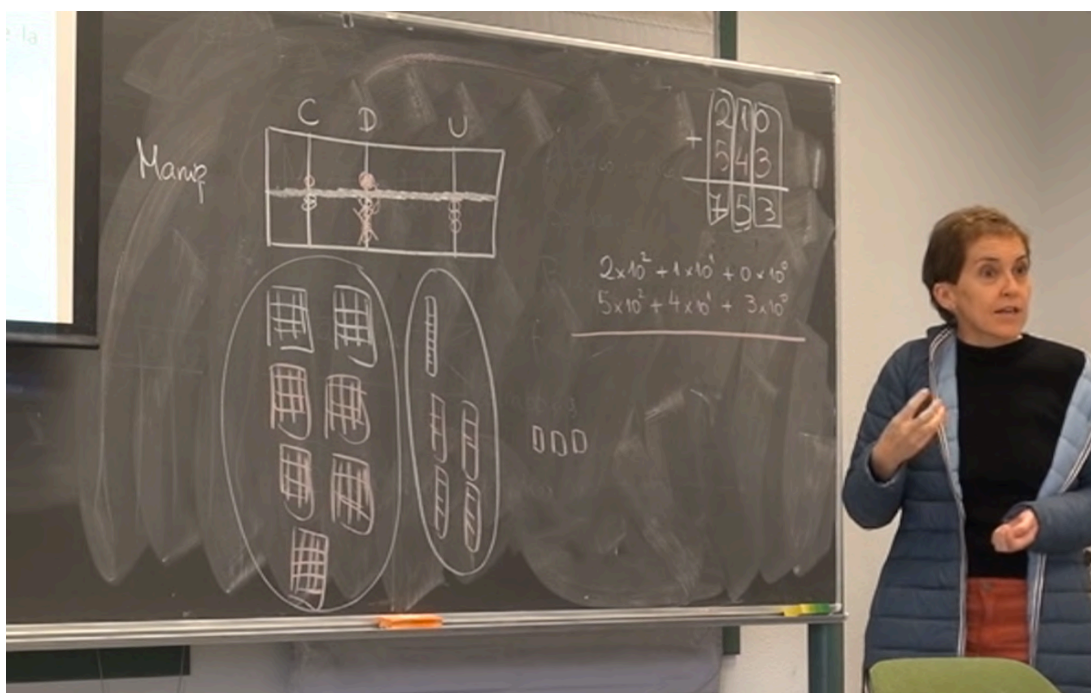
Y digo: «aquí tengo 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 [placas de 100]», ¿necesito agrupar? [Rodea con una línea todas las placas de 100].

A: No.

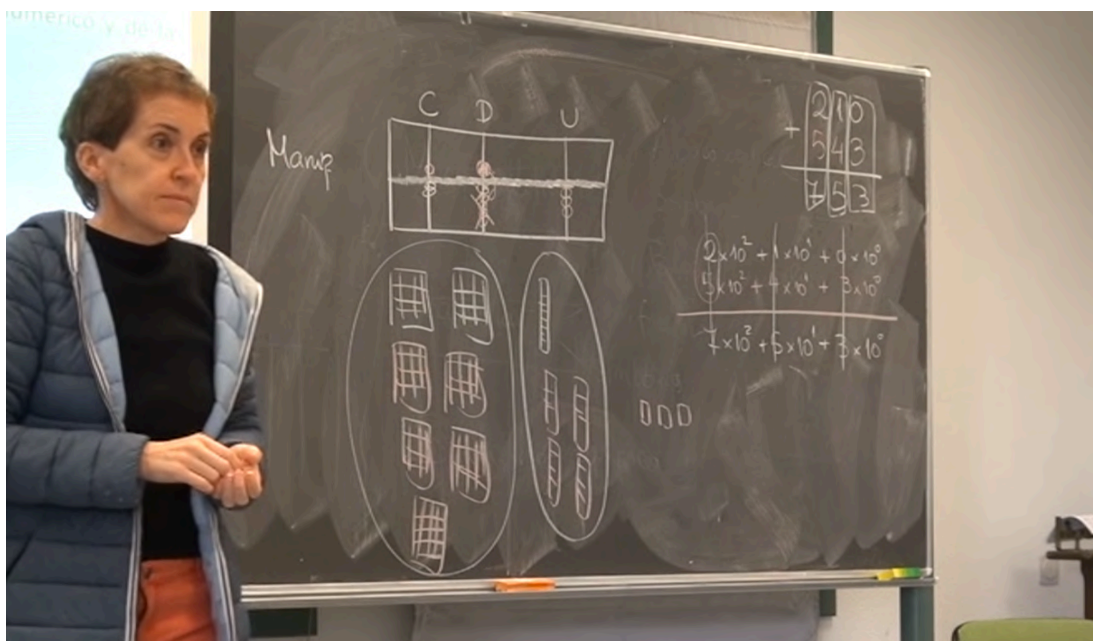
- F: No necesito agrupar. Aquí tengo 1, 2, 3, 4, 5, 6, 5, ¿necesito agrupar estos 5 de alguna manera? [Rodea con una línea todas las barras de 10]. No porque es base 10. Y aquí tengo 3, ¿vale? O sea, que me vuelve a salir 2, 4, 6, 7 [centenas; señala la suma en simbólico], 2, 4, 5 [decenas], 5 [señala la suma en simbólico] y 3. Y veo la conexión de uno con otro, ¿vale? ¿Está claro hasta aquí?
- A: Sí, eso sí.



- F: El que quiera escribirlo simbólico-numérico de otra manera en la que se vea la «posicionalidad» del sistema, podría escribirlo de la siguiente forma: $2 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 0 \times 10^0$, ese es el primer sumando; segundo sumando, $5 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 3 \times 10^0$; y sumo.



Y ahora, al sumar, utilizo la propiedad conmutativa, para colocar los sumandos en el orden que quiero, y asociativa, para ir organizando, ¿vale? O sea, que este [señala 5×10^2] —que, si lo coloco seguido, estaría aquí el cuarto [señala detrás de 0×10^0]— lo quiero colocar el segundo para agruparlo con este [señala 2×10^2], este [señala 4×10^1] —que estaría el quinto [señala detrás de 0×10^0]— lo coloco el tercero para agruparlo con este [señala 1×10^1], y este [señala 3×10^0] lo agrupo con este [señala 0×10^0]. Y ahora, al agrupar, ya me quedan 5 y 2, propiedad distributiva, 7×10^2 más, 4 y 1, 5×10^1 más, 0 y 3, 3×10^0 . Pero ahí estoy utilizando la asociatividad de la suma, la conmutatividad de la suma y la distributiva de la suma y el producto de números enteros, ¿vale? Pero si lo coloco así, veo esto, esto y eso [señala los coeficientes que acompañan a 10^2 , 10^1 y 10^0], que es lo mismo que esto, esto y eso [señala el 7, 5 y 3 del resultado de la suma en la forma simbólico-numérica], que es lo mismo que esto, esto y esto [señala los bloques multibase en la pizarra] y que es lo mismo que 1, 2 y 3 varillas [señala las varillas del sorobán en la pizarra]. ¿Está claro hasta aquí?



- A: Sí.
- F: Ahora, ¿qué diferencia hay entre esto y la siguiente suma que me plantean ahí [en el PDF proyectado en la pantalla]? $316 + 429$.
- A: Que me paso de unidades y tengo que pasar a las decenas.
- F: Que cuando agrupo aquí, por ejemplo [bloques multibase], o cuando agrupo aquí [sorobán], o cuando agrupo aquí [expresiones de sumas y productos de potencias de 10], aquí aparecen más de 10 [señala al 3 de 3×10^1]. En algún sitio aparecen más de 10, por ejemplo, cuando tengo 9 unidades y 6 unidades, aquí aparecerían 15 fichitas pequeñas [bloques multibase], aquí tendría que representar 15 [sorobán] y aquí aparecería 15×10^0 . Pero como estamos en base 10, no puedo dejarlo así, tengo que agrupar, tengo que agrupar. Entonces, agrupo 10 y dejo 5, y las 10 que agrupo las paso al siguiente valor, es decir, pego 10 fichas y construyo una barra [bloques multibase], agrupo 10 y me sale otra bola aquí en el ábaco, aquí abajo [parte baja de la varilla de las decenas], o agrupo 10 y me sale uno más aquí [en 5×10^1] y aquí [en 3×10^0] dejo las que se quedaban sueltas, las 5, ¿vale? O sea, que la única diferencia es que aquí, después de representar cada cantidad y de ir poniendo por orden el valor de cada una, tengo que agrupar porque en algunos sitios tengo 10 o más, ¿vale? Es la única diferencia.

Comentario 2: Después de mostrarles las diferentes formas, cuando les está explicando la otra [suma, con agrupamientos] se lo está remarcando y lo está dejando muy claro para evitar confusiones, que los alumnos tengan las cosas claras, ¿vale? Además lo remarca

bastante, ¿vale?, insiste mucho.

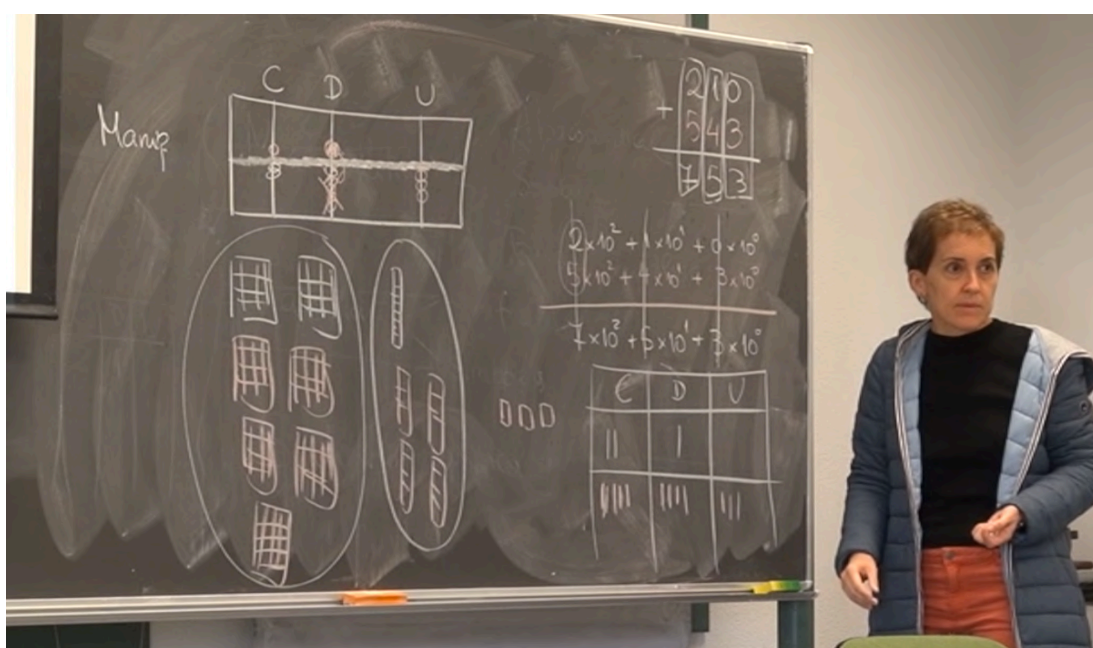
Y ahora, si quisiéramos representar esto en formato tabla, como tenía Martín, ¿no? ¿Cuántas columnas pondré yo en la tabla?, ¿qué me pide el cuerpo? Tengo que dibujar una tabla, ¿vale?, vamos a dibujar una tabla [comienza a dibujarla en la pizarra], con filas y columnas, ¿cuántas columnas pongo?

A: Tres.

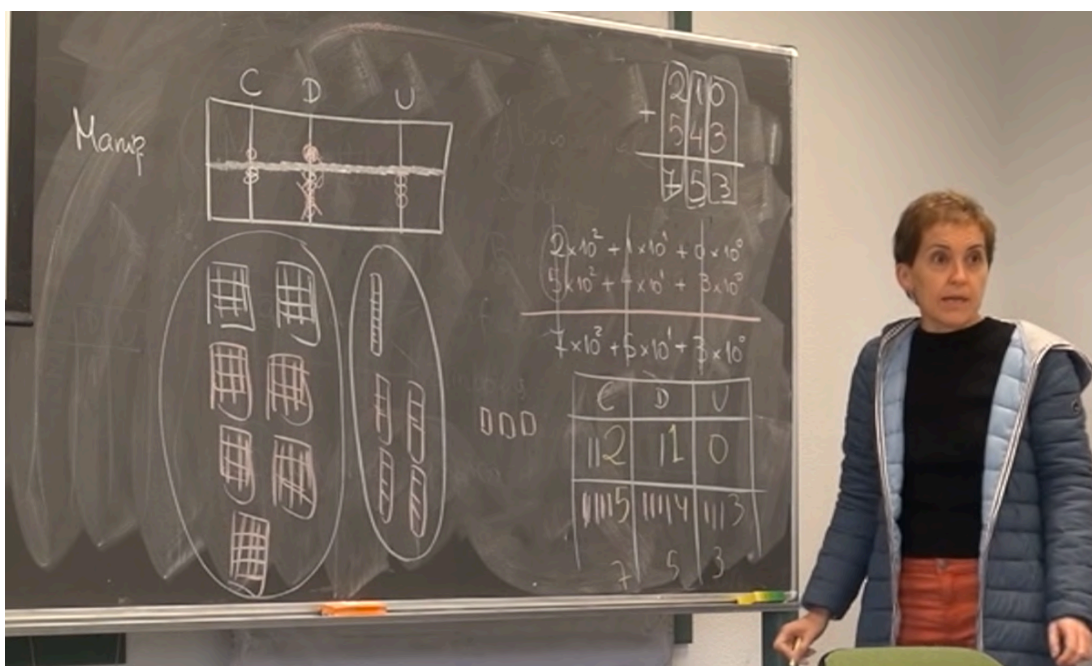
F: Tres, ¿por qué tres?

A: Centenas, decenas y unidades.

F: Unidades, decenas y centenas, ¿vale? Y entonces, represento el primer número, 210: 1, 2, 1, eso es 210 [pone dos rayas en la primera casilla de las centenas y una en la primera de las decenas]. Represento el segundo número, 500: 1, 2, 3, 4, 5; 40: 1..., bueno, en rosa, ya puestos..., 1, 2, 3, 4, 5; 40: 1, 2, 3, 4; y 3: 1, 2, 3. Y agrupo: ¿cuántas unidades tengo al final?, 3, ¿cuántas decenas tengo al final?, 5, ¿cuántas centenas tengo al final?, 7, fin.



Este sistema de representación es icónico-gráfico porque he representado aquí las cantidades con palitos, pero tiene una estructura especial porque está en una tabla, ¿vale? Entonces, vamos a decir que es un sistema de representación tabular-gráfico. Si en vez de poner aquí gráficos, yo hubiera dicho: «oye, mira, no me lío con los gráficos, ya puestos, como ya controlo mejor los símbolos, pues voy a poner aquí 210 y aquí abajo voy a poner 543 y luego ya sumo: 4 y 1, 5; 5 y 2, 7; 3 y 0, 3», ¿vale?



Sería tabular, tiene una estructura tabular, no es puramente simbólico-numérico, tiene una estructura tabular, pero con números dentro, tabular-numérico, ¿vale? Entonces, yo voy pasando de lo más concreto, que sería: «mi madre me ha dado 316 euros y mi abuela 429, ¿cuántos euros tengo en total?», después paso a manipular, con ábacos verticales, con ábacos japoneses, con bloques multibase..., y cuando interiorizo bien eso, digo: «ostras, venga, lo voy a poner en una tabla gráfica y voy a indicar lo que me indica cada varilla o lo que me indica cada agrupamiento de los bloques multibase, que es posición, en las columnas de una tabla, y ahí voy a poder marcarlo con símbolos». Esta tabla con símbolos se llama tablero de posición, porque tengo las posiciones indicadas —unidades, decenas y centenas—, y es uno de los recursos que más utilizan en el método famoso este Singapur, que habréis visto o habréis oído hablar de él, ¿vale? Entonces, ¿qué están haciendo?, están haciendo una transición de lo más concreto, pasando por lo manipulativo, hacia lo abstracto, que sería..., esto es lo más abstracto [señala las expresiones de sumas y productos de potencias de 10] y esto es lo abstracto que se trabaja en primaria [señala la suma hecha en el registro de representación simbólico-numérico], ¿vale? Pero no trabajan directamente con esto, vamos pasando..., concreto, concreto, concreto, concreto [de forma manipulativa], voy intentando abstraer un poco, pero tengo mis gráficos que me ayudan a visualizar lo que estoy haciendo [de forma tabular], y finalmente mi objetivo es escribirlo simbólico-numéricamente, de forma abstracta, ya al final.

Comentario 3: Ahí, simplemente está poniendo de manifiesto el proceso de aprendizaje de los niños en primaria, ¿vale?, y les está haciendo ver a ellos que tienen que llegar a ese proceso. Ellos, sus alumnos, se tienen ahora mismo que situar como si fueran alumnos pequeños. Entonces, yo necesito aprender, y ella tiene que enseñarles todo ese proceso, porque es ese proceso mismo el que ellos tienen que llegar luego a aprender. Y es que lo está..., se lo está transmitiendo y se lo está vivenciando la verdad es que... espectacular, ¿eh?, me ha gustado mucho.

¿Cómo habéis trabajado mayoritariamente vosotros en primaria cuando estabais haciendo sumas de este estilo? ¿Desde aquí [señala lo manipulativo] o desde el final [señala lo simbólico-numérico]?

A: Desde el final...

A: Yo con las de centenas, decenas y unidades, las cajas...

F: Las cajas estas también os suenan, los tableros de posición, pero ¿y qué poníais en las posiciones, palitos o los números ya?

A: Los números directamente.

F: Los números directamente, o sea, que estabais trabajando la fase inicial, de la suma, la estabais trabajando directamente con lo simbólico, que es la fase final, ¿lo veis?

A: Jolín, sí.

F: Vale, pues ala, ya está.

ANEXO 10

Eventos e interpretaciones de Marcos en la fase 1

Nota 1: Cada evento e interpretación se presenta junto con el comentario del que se ha extraído, así como con la etiqueta que lo identifica y el código que se le ha asignado. No obstante, no todos los comentarios presentan eventos o interpretaciones, bien por no contener ninguno, bien por haberse trasladado la información al respecto a otro comentario que aborde el mismo asunto, por lo que algunos eventos e interpretaciones pueden contener información de comentarios distintos del que acompañan. La traslación de información entre comentarios no se indica para no complejizar el documento.

Nota 2: El texto presentado entre corchetes en algunos eventos e interpretaciones se corresponde con información incluida por el investigador.

VÍDEO 1

Fragmento 1

Comentario 1

Bueno, está dando..., está explicando lo que va a hacer. Está diciendo en qué va a consistir..., les está un poco preparando el trabajo. No tiene mayor historia...

- M1.1-1.1. Está explicando lo que van a hacer [E, D].

Comentario 2

Era verano, eso lo interpreto [lo dice sin parar el vídeo; lo dice porque ve a Nuria en manga corta y un poco en plan de broma].

Comentario 3

Bueno, ya está dando la consigna y está explicando el material. Por ejemplo, limita los palillos; imagino que porque tendrá que hacer algo en lo cual la cantidad de palillos debe de ser relevante, porque eso sí, las gomas, dice que no, pero los palillos ya les ha avisado que no les va a dar más, que solo necesitan esos, imagino que porque necesita..., no sé lo que va a hacer, pero ya lo ha limitado. Y bueno, lo va a traducir, eso me parece que es un hecho..., al estar en inglés, lo va a traducir. No sé yo si en castellano ella lo leería o lo explicaría, pero bueno, ha dicho que lo va a traducir, imagino que no solo lo traducirá sino que dará..., negociará la consigna, o sea, tendrá

que asegurarse que los alumnos han entendido bien lo que tienen que hacer, si no, no se puede hacer nada.

- M3.1-1.1. Presenta el material: palillos y gomas [E, 2].
- M3.2-1.1. Limita el número de palillos, pero no el de gomas [E, 3].
 - M3.2-1.1(I)1. La cantidad de palillos debe de ser relevante en la consigna, en lo que vayan a tener que hacer [I, M].
- M3.3-1.1. Dice que va a traducir al español el texto que está en inglés [E, D].

Comentario 4

Bueno, está dando un contexto. Al principio yo he creído que era simplemente una explicación ingenua de tal, pero no, imagino que el saber cuántos hay debe de formar parte del trabajo y entonces está intentando dar una justificación más allá de la actividad didáctica, está intentando contextualizar. Entonces, está diciendo, efectivamente: «quiero ver, quiero controlar cuántos hay», ¿de acuerdo? No ha dicho..., podría haber dicho: «bueno, se trata de saber cuántos hay», sin más, no, ha intentado darle una explicación que yo al principio me he creído que era de verdad, o sea, que es que realmente tenía un problema con que fueran los palillos de un sitio o de otro, pero vamos...

- M4.1-1.1. Está dando un contexto, intentando dar una justificación más allá de la actividad didáctica [E, 2].

Comentario 5

Está dando la fuente de donde viene y yo creo que lo está haciendo también con ánimo de que muchos puedan consultar la fuente, pero vamos, ella ha avisado efectivamente de dónde lo ha sacado y cuál es el objetivo de la fuente. La fuente tiene un objetivo, que era formar docentes, pero bueno, se lo está avisando, imagino que con la intención de que quien quiera pueda consultarlo..., ¿vale? Porque si no, no tendría que decir..., «pues está en tal sitio» y punto.

- M5.1-1.1. Está dando la fuente de la que ha sacado la actividad, así como el objetivo de la fuente, que es formar docentes [E, 2].
 - M5.1-1.1(I)1. Para que los alumnos que quieran puedan consultar la fuente [I, D].

Comentario 6

Y está diciendo en qué parte del currículum estaría correcto este trabajo. Está diciendo: «pues en la parte inicial, de construcción del número...», y demás.

- M6.1-1.1. Dice que se va a trabajar la construcción del número [E, 3].
 - M6.1-1.1(I)1. Por lo tanto, se está haciendo referencia al currículo [I, M].

Comentario 7

La consigna, o sea, el objetivo del alumno está muy claro, es decir, tienen que saber cuántos palillos hay. Ahora imagino que establecerá las condiciones o cómo tal..., pero desde luego, ha dejado bien claro..., desde luego no tiene ninguna ambigüedad, tienen que saber cuántos palillos hay. Imagino que será una actividad en la que los palillos son muchos y un conteo sencillo no debe de ser la mejor estrategia, imagino que tendrá algún tipo de...

- M7.1-1.1. Establece el objetivo del alumno: saber cuántos palillos hay [E, 2].
 - M7.1-1.1(I)1. Dada la cantidad de palillos, un conteo sencillo no será la mejor estrategia [I, M].

Comentario 8

Gomas [lo dice sin parar el vídeo].

Comentario 9

Ha decidido declarar cuál es el objetivo didáctico de esta actividad con estos alumnos. Me da la sensación de que es con estos alumnos, ¿de acuerdo? Lo que desconozco es si la actividad es una actividad para llevar – bueno, ahora lo veré –, para llevar con alumnos más pequeños y lo que estamos es reproduciendo la actividad con los futuros maestros o es una actividad destinada al futuro maestro directamente. En cualquier caso, me da la sensación de que lo que dice, lo que está estableciendo es por qué ha presentado la actividad con ellos, ¿de acuerdo? Por ejemplo, con los..., bueno, con los alumnos... No, no voy a hacer eso, voy a seguir con esa alternativa.

- M9.1-1.1. Declara el objetivo didáctico de la actividad con estos alumnos, los futuros maestros [E, 1].
 - M9.1-1.1(I)1. Lo que no se sabe aún es si se trata de una actividad para realizarla con alumnos más pequeños, y estamos reproduciendo la actividad con los futuros maestros, o si es una actividad destinada al futuro maestro directamente [I, D].

Comentario 10

No solo traduce, está complementando la consigna, lo que se llama en Teoría de Situaciones «la negociación de la consigna». Tiene que quedar muy claro cuál es el objetivo. El objetivo del alumno ella lo ha dicho, pero ahora está estableciendo cuáles son las condiciones para hacerlo,

¿no?, cuáles son..., qué es lo que está permitido, o en este caso «sugerencia», y eso forma parte de una negociación, el alumno tiene que tener muy claro qué es lo que puede hacer, ¿de acuerdo? Entonces, ahí no solo está traduciendo. Está también..., «de un vistazo», ya ha usado varias expresiones cuyo objetivo es efectivamente incidir en los objetivos que ella quiere, ¿no?

- M10.1-1.1. Está complementando la consigna, sin limitarse a traducir: dice que no tomen notas y que, simplemente con cierta organización, de un vistazo, sepan establecer cuántos hay de una manera rápida [E, 3].
 - M10.1-1.1(I)1. Lo que se llama en Teoría de Situaciones «la negociación de la consigna»; el objetivo del alumno ella lo ha dicho, pero ahora está estableciendo cuáles son las condiciones para hacerlo, lo que está permitido, y eso forma parte de una negociación; el alumno tiene que tener muy claro qué es lo que puede hacer [I, M].

Comentario 11

¿Ves? Ahora está estableciendo pequeñas cosas, es decir, el objetivo es saber cuántos hay, pero no de cualquier manera. Me dice que no apunte y que yo, simplemente con cierta organización, sepa establecer cuántos hay de una manera rápida.

Comentario 12

Imagino que lo que quiere es provocar el uso de agrupamientos, agrupamientos recursivos, para hacer una correspondencia con el sistema de numeración. Porque está diciendo que reflexionen..., ya es un objetivo de otra índole, ¿no?, es decir, pensar cómo lo he hecho. Ya no es hacerlo, sino es pensar cómo lo he hecho y si eso tiene relación con tal... Es un objetivo que..., ese ya se sale de..., ese ya es muy didáctico, ese ya se sale un poco de un supuesto «adidactismo» que en principio podría presentar la actividad, es decir, «tenemos que saber cuántos hay», no, tenemos que pensar cómo lo hacemos, es decir, ya tiene otra..., otra tarea, tiene trampa [lo dice con un tono de broma].

- M12.1-1.1. Dice a los alumnos que reflexionen para ver si hay una correspondencia entre los agrupamientos y el sistema de numeración [E, 3].
 - M12.1-1.1(I)1. Pretende provocar el uso de agrupamientos recursivos para que aparezca esa correspondencia con el sistema de numeración [I, M].
 - M12.1-1.1(I)2. El objetivo de la actividad es muy didáctico, se sale un poco de un supuesto «adidactismo» que en principio podría presentar la

actividad, ya que no se trata solamente de saber «cuántos hay», sino de pensar cómo se hace [I, M].

Comentario 13

Ahí ya hay una tarea, ya es juntar, una cosa es saber yo los que tengo y otra cosa es saber, con cierta facilidad, si junto dos distribuciones, saber cuántos hay en total. Ahí hay un intento de ver si la escritura permite la composición. Si es una buena estructura, puede asimilar perfectamente otro grupo, si no, no. Yo creo que lo hace porque nuestro sistema de numeración está diseñado porque efectivamente funciona bien algorítmicamente; es decir, desde el punto de técnicas operatorias es muy cómodo. Y claro, si tú haces una organización basada en eso, pues vas a tener las mismas facilidades. Imagino que querrá..., no lo sé, vamos a ver si va por ahí.

- M13.1-1.1. Presenta ya una tarea: saber cuántos [palillos] hay al juntar dos distribuciones [E, 3].
 - M13.1-1.1(I)1. Se pretende ver si la escritura permite la composición; dependiendo de si se han hecho o no buenas estructuras, se puede asimilar bien otro grupo o no. Nuestro sistema de numeración funciona bien algorítmicamente, es cómodo desde el punto de vista de técnicas operatorias, y si haces una buena organización [de los palillos] basada en eso, vas a tener las mismas facilidades [I, M].

Comentario 14

Queremos ver si esa distribución se puede ir heredando y puede funcionar; si es buena, lo va a hacer. Entonces, es una manera de ver..., es una manera de rechazar otras distribuciones que pueden ser buenas de cara a saber cuántos hay, pero que no van a ser buenas cuando ellos compongan. Y sobre todo hay un hecho, la distribución tiene que ser común; si unos hacen grupos de 6 y otros grupos de 8, cuando los juntes tengo un verdadero problema. Con lo cual ya les está, sin decírselo, les está obligando a que tomen una..., a que la manera de agruparlo tenga cierta..., sean isomorfas, tengan un cierto isomorfismo, si no, al juntarlo no vamos a tener nada. Entonces, es una manera muy... O sea, me gusta esa idea, es decir, sin decirlo estás obligando a que «señores, tenemos que ponernos de acuerdo en cómo agrupamos». Está bien.

- M14.1(i)-1.1. Evento implícito en el comentario [E, 1].

Transcripción del vídeo: Y al final, tenemos que juntarlos todos y de una forma ágil, sin tener que volver a contarlos todos, tenemos que saber cuántos palillos hay en total en la clase repartidos, ¿vale?

- M14.1(i)-1.1(I)1. Se trata de ver si la distribución se puede ir heredando y puede funcionar; si es buena, lo va a hacer; algunas distribuciones pueden ser buenas para saber cuántos [palillos] hay, pero puede que no lo sean cuando compongan y se tendrán que rechazar. La distribución tiene que ser común; si unos hacen grupos de 6 y otros grupos de 8, cuando los junten habrá un problema; por ello, aunque ella no se lo dice, la situación les obliga a que se pongan de acuerdo en cómo agrupar, debe haber cierto isomorfismo [I, M].

Comentario 15

Recapitula [lo dice sin parar el vídeo].

- M15.1-1.1. Recapitula [las instrucciones de la consigna] [E, D].

Comentario 16

Ahí está incidiendo en eso. Eh..., bueno, yo creo que da demasiadas pistas [se ríe]. Si cuando lo haces..., si tú lo vas haciendo, el hecho de que la instrucción no sea igual es muy rico, es muy rico. Yo creo que lo hace para que haya cierto isomorfismo. Pero bueno, yo es que aquí..., es alternativa. Si no surge, es muy bueno, porque entonces piensas qué ha pasado. Eso sí, tardan más, claro. Quiero decir, también hay que entender que estamos aquí, estamos con una clase...

- M16.1-1.1. Está dando pistas [E, 1].
 - M16.1-1.1(I)1. Pretende que haya cierto isomorfismo [en los agrupamientos], pero si se dan menos indicaciones y no surge, es muy bueno, ya que entonces se puede pensar qué ha pasado; eso sí, se tarda más, claro [I, M].

Comentario 17

Ahora les da el tiempo.

- M17.1-1.1. Da el tiempo a los alumnos [para hacer la tarea] [E, D].

Fragmento 2

Comentario 1

¿De cuánto ha dicho, de 15? O sea que ella les pregunta ya sobre si se han tenido que poner de acuerdo. Realmente en el acuerdo está gran parte de las decisiones. Entonces ella está preguntando. Dicen que sí, que se han puesto de acuerdo. Uno lo había hecho con 15, qué raro.

- M1.1-1.2. Pregunta a los alumnos si han tenido que ponerse de acuerdo [E, 2].

Comentario 2

¿Otros lo habían hecho en 20, 10 y 4?

Comentario 3

Lo que pasa es que..., sí está bien, claro, tú has dado libertad absoluta, claro... Eh... Los grupos de 20 luego no se cuentan bien, o sea, se cuentan, pero..., en fin. Lo han hecho...

Comentario 4

Han juntado de distintos... Pues eso les ha debido de saltar...

Comentario 5

Lo que no sé es quién les ha dicho que usen las gomas del mismo color. Esa indicación no estaba. O sea, que ellos han decidido usar el amarillo en los grandes, pero en dos grupos distintos, no lo sé... Ahí no soy capaz de...

Comentario 6

[Se ríe]. Ella ahora mismo les está sometiendo a sus propias contradicciones. Es una cosa bastante típica en clase de matemáticas, dicen cosas, ellos están muy orgullosos porque lo han hecho, porque lo han hecho ellos, el «yo ya me entiendo», pero claro, cuando llega un agente externo como el profesor, entonces se empiezan a ver las cosas que no funcionan. Y entonces aquí les está poniendo de manifiesto cómo, si no se ponen de acuerdo en los grupos, eso va a ser intratable. Y se lo está preguntado, entonces alguno ya ha salido diciendo: «bueno, ya nosotros sabemos lo que hacemos», y entonces ella obviamente les dice eso..., no hay..., quiero decir..., lo hace simplemente para que ellos vean la contradicción y a ver si proponen alguna manera de mejorarlo.

Comentario 7

La consigna tiene ese punto ambiguo. Decir que visualmente lo ves..., o sea, que visualmente es fácil..., no está muy determinado. Y es verdad que el juego está ahí, ellos pueden decir «yo lo veo» y tú no les puedes decir que no lo ven. Entonces, sí que efectivamente ella intenta poner de manifiesto la ventaja que tiene el ponerse de acuerdo, pero yo creo que se está encontrando cierta resistencia; creo que es porque si la consigna sí era muy sencilla – es decir, hay que saber cuántos hay –, no era igual de sencilla para decidir qué se entiende por una distribución que lo muestre fácil. El hecho de juntarse, sin que tú lo digas, obliga a eso; pero estos incluso están aguantando juntándose con grupos distintos, lo cual sí es sorprendente. Pero es verdad que solo decir «yo lo necesito ver», esa consigna no deja muy claro qué es lo que está bien y qué es lo que está mal. Entonces yo creo que estamos teniendo ese problema aquí, me da esa sensación.

- M7.1-1.2. Pregunta a los alumnos sobre sus contradicciones, dando a continuación una consigna: hay que saber cuántos palillos hay visualmente [E, 2].
 - M7.1-1.2(I)1. Se trata de algo bastante típico en clase de matemáticas, cuando llega un agente externo como el profesor, es cuando los alumnos empiezan a ver las cosas que no funcionan [I, M].
 - M7.1-1.2(I)2. Para que los alumnos vean la contradicción, que traten de proponer alguna manera de mejorarlo y que vean la ventaja que tiene ponerse de acuerdo al hacer grupos, porque eso va a ser intratable si no se ponen de acuerdo en los grupos [I, M].
 - M7.1-1.2(I)3. Aunque la consigna es muy sencilla, saber cuántos [palillos] hay, no es igual de sencillo decidir qué se entiende por una distribución que lo muestre visualmente de un modo fácil; esto es algo ambiguo, no se deja claro qué es lo que está bien y qué es lo que está mal [I, M].

Comentario 8

Ahora acaban de ver que efectivamente el acuerdo pasa..., ellos no habían entendido que el acuerdo podía hacer reformular otra vez el trabajo. Entonces «aaaaah», ahora parece ser que... Vamos a ver.

Comentario 9

Es que es verdad que las..., es muy importante, esto es muy importante, cuando das las consignas, tienen que dejar muy claro lo que se puede y lo que no se puede hacer, porque luego te

encuentras estas cosas. Y es verdad, eso nos pasa a todos. Porque es verdad que te crees que no va a tal..., y al final...

- M9.1(i)-1.2. *Evento implícito en el comentario [E, 1].*

Transcripción del vídeo: ¿Alguien dijo que no se podían quitar?

- M9.1(i)-1.2(I)1. Cuando se da una consigna, es importante dejar claro lo que se puede y lo que no se puede hacer; si no se deja claro, lo cual nos pasa a veces a todos, los alumnos pueden tener dudas sobre lo que hacer [I, D].

Comentario 10

Forma parte de la consigna que no está... Claro, ella les ha dicho que esa facilidad en la distribución tenga que ver con la escritura usual que tenemos. De alguna manera está intentando que utilicen la agrupación decimal, porque es la que se ajusta. Pero efectivamente, como no quiere decirlo, simplemente tienen que descubrirlo ellos, está diciendo: «y tiene que ver con eso...». Volvemos a tener que alguno te puede decir: «sí, yo tengo 4 de 20 que son 80», y no le puedes decir que no. Es decir, ¿8 de 10 es más cómodo? Para ti, profe, sí, porque lo has decidido, pero... Es verdad que esa consigna tiene eso..., eso quizá se resuelva cuando tengan que juntarse, porque tienen que ponerse de acuerdo en una, pero, claro, pueden ir todos al 20. Y luego cómo agrupen los agrupamientos, cuando haya más a ver qué hacen con los grupos grandes, si los agrupan a su vez o los grupos grandes ya..., eso ya depende de la cantidad.

- M10.1-1.2. *Pregunta a los alumnos si la distribución que han hecho [del 85] tiene que ver con la escritura usual que tenemos [E, 3].*
 - M10.1-1.2(I)1. Porque quiere, sin decirlo explícitamente, que utilicen la agrupación decimal. Sin embargo, el agrupamiento de 10 es muy pequeño, aunque sea muy cómodo; de hecho, en las unidades de medida, que también son decimales, no usamos el decímetro, el decámetro, el decagramo... [I, M].
 - M10.1-1.2(I)2. Algún alumno podría decir que él ha hecho 4 grupos de 20, que son 80; ¿se le puede decir que 8 grupos de 10 es más cómodo que 4 de 20? Esto tendría que ver con la consigna [I, M].

Comentario 11

Claro, le contestan que no [lo dice sin parar el vídeo].

Comentario 12

A ellos les ha preocupado hacer un agrupamiento, lo han cogido de 20... Es verdad que el agrupamiento de 10 es muy pequeño..., cuando tienes cosas..., es verdad, aunque sea muy cómodo porque nosotros usamos..., de hecho por eso en las unidades de medida, que también son decimales, sin embargo nos las saltamos, usamos el kilo y tal y no usamos de 10 en 10, el decímetro no lo usamos..., el decámetro, el decagramo y todas esas cosas no las usamos porque son muy pocos, entonces es verdad que el agrupamiento de 10 es pequeño y aquí se está viendo. Entonces..., es más, podrían haber dicho: «mira, aquí hay 50», yo sé que hay 50 y los cuento en un momentín... Han cogido 20, que no han cogido 30, ¿por qué 20?, hombre, es un divisor de 100, 2 es divisor de 10, entonces también es más fácil, o sea, no ha sido tampoco..., no han cogido grupos de 70, grupos de 30 que, efectivamente, al no tener relación con 100 te genera problemas; han cogido 20 que no está mal... De hecho, bueno..., los franceses usan la base 20 de vez en cuando, con el cuatro 20 [se ríe].

Comentario 13

Por ejemplo, en Francia te hubieran dicho que está bien, se cuenta muy bien. Porque 80 es quatre-vingts, entonces dicen «cuatro 20», o sea, que ahí... [se ríe]. Y escriben 8, no escriben cuatro 20, o sea, que...

Comentario 14

Ha vuelto a hacerles emerger sus contradicciones para que las arreglen. Pero siempre..., no propone ella nunca la solución, intenta que sean ellos los que lleguen. A veces es más fácil y otras veces más complicado y te hace intervenir a ti más, pero es verdad que siempre intenta que sean ellos –bueno, y yo creo que lo consigue–, que sean ellos los que tomen las decisiones en lo importante.

- M14.1-1.2. Pregunta a los alumnos por sus contradicciones, sin dar la solución [E, 1].
 - M14.1-1.2(I)1. Para que los alumnos arreglen sus contradicciones por sí mismos, siendo ellos quienes tomen las decisiones en lo importante, lo cual a veces es más fácil y otras es necesario intervenir más [I, M].

Fragmento 3

Comentario 1

Bueno ahora me imagino que va a recapitular todos y a ver cómo lo han hecho y demás.

- M1.1-1.3. Va a recapitular y a comprobar cómo lo ha hecho cada grupo [E, 1].

Comentario 2

Bueno, dice esto porque está trabajando el sistema de numeración. Un alumno no entiende que le estén diciendo que escribe 87..., ¿cómo lo quieres escribir si no? [se ríe]. Pero como está trabajando eso, dice: «lo estoy escribiendo así, tal...»; es muy típico, es muy típico de nosotros. Pero el alumno tiene que estar pensando: «¿de qué otra manera lo vas a escribir, muchacha?» [se ríe].

- M2.1-1.3. Menciona eso [que usa la escritura estándar] en relación con el sistema de numeración [E, 2].
 - M2.1-1.3(I)1. Hacer este tipo de comentarios es típico de nosotros [los formadores de matemáticas] [I, M].

Comentario 3

Me ha saltado..., digo: «¿cómo va a escribir los grupos de 20?». Cuando se ha ido a escribirlo, digo: «a ver qué va a hacer», porque esa decisión es muy importante, a ver cómo lo escribe. Entonces, ahora lo está preguntando, «a ver cómo lo escribo».

- M3.1-1.3. Pregunta a los alumnos cómo escribe los grupos de 20 [E, 3].

Comentario 4

Ahí le ha dicho uno 3×20 y no le ha hecho caso. Dice «tres rosas», otro habrá usado las gomas rosas y ha dicho tres rosas, pero ¿has oído uno que ha dicho 3×20 ? Debe de ser que ella no lo ha oído.

- M4.1-1.3. Sigue la clase sin atender a la propuesta de un alumno [3×20] [E, D].
 - M4.1-1.3(I)1. Porque no ha debido de oír al alumno [I, D].

Comentario 5

Claro. Y todas no habrán hecho grupos de 20, es decir, que efectivamente está diciéndoles que el color no es lo relevante.

- M5.1-1.3. Dice a los alumnos que el color [de las gomas] no es relevante porque no todos los alumnos han empleado el mismo color para hacer grupos de 20 [E, 3].

Comentario 6

Como ves, ha seleccionado el que ella quiere.

Comentario 7

Insisten en el rosa [lo dice sin parar el vídeo].

Comentario 8

Ha puesto rosa, ¿no? [lo dice sin parar el vídeo].

- M8.1-1.3. Pone [una raya] rosa [sobre el 20] [E, M].

Comentario 9

Son 60 porque lo dice ella, nadie lo ha dicho [se ríe].

- M9.1-1.3. Dice que son 60 [3 x 20] sin que nadie lo haya dicho antes [E, M].

Comentario 10

Buena pregunta, 3 grupos de 9 o 9 grupos de 3.

- M10.1-1.3. Pregunta si pone 3 grupos de 9 o 9 grupos de 3 [E, 3].

Comentario 11

Lo que está es proponiendo escrituras..., está haciendo descomposiciones del 87, ¿de acuerdo? Pero no son expresiones que me permitan hacer agrupamientos regulares, está poniendo 3 de 9 y 3 de 60 [dice de 60, pero son de 20] y de hecho ninguno deja... Lo que yo no sé, si hubiera puesto un número primo..., porque puedes pensar que aquí [señala a la pantalla] hay unidades de 9 y luego unidades de 20 [señala a la pantalla], un sistema no regular, puede funcionar; lo que pasa es que no hay unidades elementales, claro, si el número es primo, tiene que haberlas. A lo mejor haber cogido un número primo hubiese dado un juego a lo mejor..., no lo sé. También es verdad que no sé si ella ha contado previamente los que ha puesto. Pero claro, aquí, 87 no es primo, con lo cual le ha salido. Entonces, a lo mejor..., no lo sé si alguno lo hace; o sea, no sé si alguno ha tenido que dejar palillos sueltos.*

- M11.1-1.3. Está descomponiendo el 87, empleando 3 grupos de 20 y 3 grupos de 9 [E, 3].

- M11.1-1.3(I)1. Las expresiones que está empleando no permiten hacer agrupamientos regulares; un sistema no regular puede funcionar, pero no hay unidades elementales, ya que 87 no es primo [I, M].
- M11.1-1.3(I)2. Escribe la forma que le interesa [3 x 20] [I, M].

Comentario 12

Hay varios con grupos de 9, pues es raro. O encajan muy bien los números, como es este caso, o es un agrupamiento que da un juego fatal. Es un agrupamiento muy incómodo [se ríe].

Comentario 13

Tampoco es primo [lo dice sin parar el vídeo].

Comentario 14

Este le ha gustado más [se ríe], me da a mí la sensación. Ahora, aparecen muchos 20... Yo creo, no lo sé, pero imagino que la cantidad de palillos de cada grupo igual ella lo ha pensado, porque desde luego es una variable didáctica en el sentido de Teoría de Situaciones, porque claro, 90 está muy claro, el 10 va a estar.

- M14.1-1.3. Escribe el 90, un número que no es primo [E, 1].
 - M14.1-1.3(I)1. La cantidad de palillos de cada grupo, que a lo mejor ella la ha pensado, es una variable didáctica en el sentido de la Teoría de Situaciones; con el 90 está muy claro, el 10 va a estar [I, M].

Comentario 15

Yo estoy convencido de que esa parte del patrón con el número es una parte de la consigna que ha quedado muy... detrás. Muchas veces los alumnos, cuando das una consigna, se quedan con un objetivo, y otro objetivo –que para ti puede ser importante, menos o más– puede que no les preocupe, es secundario. Ellos han conseguido lo que tú les has dicho; el que se parezca o no a lo otro... les ha parecido..., por lo que veo, me parece que no le ha preocupado a ninguno. También es verdad que con números pequeños tampoco es tan «traboso», si fueran números más grandes... Pero claro, tampoco les vas a dar quinientos y pico palillos...

Comentario 16

Pero de momento esa preocupación solo la tiene ella [se ríe].

Comentario 17

Bueno, no lo ve..., en esta [señala en la pantalla $4 \times 20 + 1 \times 10$] se le ve un poco, lo que pasa que efectivamente no está..., aquí tiene grupos..., lo que pasa que no está exactamente como está ahí, pero... Este [señala el $3 \times 20 + 3 \times 9$] sí que no tiene mucha relación, pero el segundo... El segundo lo ves y de un vistazo sabes lo que hay, que es lo que tú le has dicho que haga.

Comentario 18

Esa observación es de otra categoría. O sea, hasta ahora la actividad podría ser trasladable a los alumnos tal y como lo está diciendo, pero ya les ha dicho que ella lo que quiere..., ya es un objetivo didáctico, o sea, ya es un objetivo de didáctica de las matemáticas, es que a partir de ahí los alumnos establezcan conexiones con el sistema de numeración; pero efectivamente en la actividad de los palillos no estaba presente. O sea, que ha trasladado la actividad a la vez que les hace pensar por qué esa actividad puede ser interesante. Es como una discusión de doble naturaleza.

- M18.1-1.3. Indica el objetivo que tenían que alcanzar los alumnos: establecer la conexión entre los palillos y el sistema de numeración [E, M].
 - M18.1-1.3(I)1. Hasta el momento la actividad podría ser trasladable a los alumnos [de primaria], pero ahora ya se aprecia un objetivo de didáctica de las matemáticas para estos alumnos [futuros maestros] que en la actividad no estaba presente; ha trasladado la actividad a la vez que les hace pensar sobre por qué puede ser interesante; es una discusión de doble naturaleza [I, M].
 - M18.1-1.3(I)2. Cuando se les da una consigna a los alumnos, muchas veces estos se quedan con un objetivo, y otro objetivo —que para el formador puede ser importante— puede que lo vean como secundario; por eso, no ha aparecido ningún patrón, aunque también es cierto que con números pequeños la actividad no es tan liosa, pero no es factible darles cientos de palillos [I, M].
 - M18.1-1.3(I)3. En la primera expresión [$3 \times 20 + 3 \times 9$] sí que no se ve la relación, pero en la segunda [$4 \times 20 + 1 \times 10$] de un vistazo sabes lo que hay, que es lo que ha pedido la formadora que hagan los alumnos [I, M].

Comentario 19

Está diciendo que ella lo está escribiendo por una cuestión de economía, ¿de acuerdo? Está intentando ver... Es verdad que da una alternativa, que a lo mejor con los niños habrá que hacer, bueno, pues voy a ponerlo tal y como ellos lo han hecho, ¿no?

- M19.1-1.3. Está diciendo que lo escribe en la pizarra por una cuestión de tiempo, aunque también comenta alternativas [E, 1].

Comentario 20

Estos se han juntado [lo dice sin parar el vídeo].

Comentario 21

Eso le ha gustado, porque como han hecho un agrupamiento..., y está intentando efectivamente ver que cuando los agrupamientos son iguales es muy cómodo.

- M21.1(i)-1.3. Evento implícito en el comentario [E, 1].
Transcripción: *Muy bien, 7 grupos de 20 [señala al 3 y al 4].*
 - M21.1(i)-1.3(I)1. Le ha gustado porque los alumnos han hecho un agrupamiento y ella lo que intenta hacer ver es que es muy cómodo trabajar con agrupamientos iguales [I, M].

Comentario 22

Además han salido 20, y en eso me aventuro, porque para contar, cuando tú cuentas, cuando llegas a 20, los números del 1 al 20 son más cortos al hablarlos, entonces volver a decir 21, 22..., ¿por qué no han salido grupos?, porque hasta 20 se cuenta muy rápido. De hecho, es irregular hasta el 15, y luego 16, 17, 18... es un poquito más largo, pero paras en 20. Y es una estrategia bastante frecuente que cuando tienes más de 20 vuelves a empezar por 1, con lo cual quizá por eso hayan salido de 20, porque se cuentan muy fácil, hasta 20 se cuentan muy rápido. Y es curioso, porque si no se han puesto de acuerdo, que hayan salido los dos de 20 tiene que tener algún tipo de razón de ese tipo.

Comentario 23

Bueno, han impuesto...

Comentario 24

«Se quedaría uno solo», ¿has visto cómo le molesta? Porque la consigna parecía que era agrupar.

Comentario 25

A ella le gusta el 10, pero dice: «¿y por qué no habéis cogido el 9?», está intentando ver que le expliquen: «hombre, 10 es más cómodo...», y fíjate por dónde han salido, que se quedaría uno suelto.

- M25.1-1.3. Pregunta a los alumnos por qué no han hecho un grupo de 9, mostrando preferencia por la propuesta de una alumna [E, 3].
 - M25.1-1.3(I)1. Porque pretende que le expliquen por qué es más cómodo hacer grupos de 10 [I, M].

Comentario 26

Claro, busca eso. Te gusta a ti más... Pero bueno, es verdad que...

Comentario 27

Está intentando que hagan explícita..., efectivamente, que sumar con unidades en las que no hay..., el cero, es muy fácil, es más rápido. No es la regla de los ceros, porque esa es para el producto, pero vamos..., una especie de eso, igual. Entonces, efectivamente... La alumna se lo ha dicho, ella lo ha interpretado bien, sabía lo que quería decir, pero no estaba bien dicho. Entonces, le está diciendo que lo diga.

- M27.1-1.3. Dice a una alumna que elabore mejor la idea que está expresando [E, 1].
 - M27.1-1.3(I)1. Porque quiere que la alumna haga explícito que es más fácil y rápido sumar cuando «no hay» unidades, sino que hay un cero en las unidades; no es la regla de los ceros, porque esa es para el producto, pero es algo parecido [I, M].

Comentario 28

Ahora quiere que diga decenas.

Comentario 29

Ah, bueno, se ha quedado con grupos de 10, está bien [lo dice sin parar el vídeo].

- M29.1-1.3. Acepta la respuesta de la alumna de «grupos de 10» en vez de «decenas» [E, M].

Comentario 30

Al final han llegado a 7 sueltos [lo dice sin parar el vídeo].

Comentario 31

Fíjate que antes les molestaba quedar uno suelto, pero esos 7 sueltos parece que no les ha molestado. O sea, que no solo era ese el problema.

Comentario 32

Fuerza, lo quiere forzar [se ríe]. Tampoco lo hay aquí [señala el $3 \times 20 + 3 \times 9$ y el $4 \times 20 + 1 \times 10$], con lo cual es raro que salga ahí, pero ella insiste.

- M32.1(i)-1.3. Evento implícito en el comentario [E, 1].
Transcripción del vídeo: 1, 7, 7 [escribe 177 a la izquierda del 87 y del 90]. ¿Hay aquí 1, 7, 7 por algún lado? [señala al 7 de 7×20 , al 3 de 3×10 y al 7 de 7×1].
 - M32.1(i)-1.3(I)1. Quiere forzar que salga una relación, pero es raro que salga ahí cuando tampoco la había aquí [señala el $3 \times 20 + 3 \times 9$ y el $4 \times 20 + 1 \times 10$] [I, M].

Comentario 33

No, lo que a mí me parece más curioso es por qué los grupos de 10 que tienes, cuando los sumas, 2 de 10 lo tienes que convertir en 1 de 20, para seguir con la misma mecánica, pero eso no ha salido.

VÍDEO 2

Comentario 1

Aquí hacía más frío [se ríe; lo dice por la ropa de Nuria, ya de manga larga; lo dice sin parar el vídeo].

Comentario 2

Bueno, está diciendo... Me imagino que será que está dando cómo lo ha hecho Martín, debe de ser algún alumno, digo yo.

Comentario 3

Ah, vale, ok. O sea, ha añadido el 9..., al llegar al 9 ha añadido más símbolos, como es base 16 necesitas 16 símbolos, bueno el 0 y 15 más, y le sale... A ver..., 1, 2, 3, 4, 5, 6..., sí, correcto, ha hecho eso, y luego el uno, cero [10] que es el 16 y B6, ¿no? Vale, que será..., $12 \times 16 + 6$, imagino que será eso.

Comentario 4

O sea, lo está intentando hacer directamente sin pasar por la base 10. Reproduce los números y luego cuentas en base 16 y cuentas en base 2, y obviamente los números tienen que ser lo mismo, este es el 1, este es el 2, este es el 3, el 4, el 5 y el resto pues igual [va señalando el número en base 16 con su correspondiente en base 2 en la pantalla], lo que pasa que así te mueres [se ríe]. Porque fíjate, tiene B de 16 y 6. Ese es el 78, si tiene que llegar hasta el 78... No, no, más, 6×16 son 96, 102...

- M4.1-2. Plantea que no hay que pasar por base 10 [E, 2].
- M4.2-2. Está explicando cómo lo ha hecho un alumno, Martín, reproduciendo los números y luego contando en base 16 y en base 2, añadiendo más símbolos en base 16 después del 9 [E, 2].
 - M4.2-2(I)1. Se trata de una forma muy larga, porque fíjate que tiene B de 16 y 6 [I, M].
 - M4.2-2(I)2. En base 16 se necesitan 16 símbolos, el 0 y 15 más [I, M].

Comentario 5

El principio de economía es un principio siempre, lo dice muy coloquialmente, pero es el principio de economía, que en matemáticas es brutal, es decir, siempre que tienes dos estrategias tienes que

buscar una que sea más económica, por comodidad, pero sobre todo porque tendrás menos errores. Ahí [señala a la pizarra del vídeo] es muy fácil equivocarse, ¿eh?

Comentario 6

Creo que sí que es eficaz, pero no es eficiente, ¿no? ¿Tú sabes la diferencia entre eficaz y eficiente? O sea, eficaz es porque lo ha sacado el resultado. No lo sé, es que siempre confundo qué es eficaz y qué es eficiente. Ella está dando el principio de economía, lo está enunciando de una manera muy rápida, para que los alumnos se den cuenta, ¿no?

- M6.1-2. Dice coloquialmente que es una forma muy larga [el procedimiento del alumno], por lo que hay que buscar otra manera que sea eficaz [E, 2].
 - M6.1-2(I)1. Se trata del principio de economía, que en matemáticas es brutal, es decir, siempre que tienes dos estrategias tienes que buscar una que sea más económica, por comodidad, pero sobre todo porque tendrás menos errores, y trata de que los alumnos se den cuenta; en este ejercicio es muy fácil equivocarse [I, M].
 - M6.1-2(I)2. Creo que sí es eficaz [el procedimiento del alumno], porque se obtiene el resultado, pero no eficiente [I, M].

Comentario 7

Ahora está sacando otra vez..., está buscando otra manera de hacerlo.

Comentario 8

Es otro alumno que le ha propuesto hacer lo que se hace de base 10 a otra base y es esto y luego ir cogiendo los restos. Pero claro, ahí lo tengo en base 16 y entonces dice: «bueno, si supiéramos hacer eso en base 16, también nos saldría».

- M8.1-2. Busca otra manera de hacerlo, siguiendo la propuesta de un alumno, que consistiría en hacer lo mismo que cuando se pasa de base 10 a otra base, dividiendo en base 16 [E, 3].
- M8.2-2. Pregunta si sabrían hacer la división en base 16, haciendo ver que estaría bien hecho, pero que sería complicado [E, 3].

Comentario 9

Está viendo otro sistema, pero efectivamente aquí este [señala en la pizarra la anterior estrategia] era lento y este lo que pasa es que no se sabe. Se puede entender que está bien hecho, pero a ver quién es el castizo que se pone a dividir eso en base 16.

Comentario 10

¿Qué ha dicho, sin manos? O sea..., es que no sé la consigna, la consigna no sé exactamente cuál es. Es simplemente pasar el número B6 de 16 a 2, no sé si tiene alguna otra restricción.

- M10.1-2. Dice que no se atreve a hacerlo «sin manos» [E, D].
 - M10.1-2(I)1. Como no sé cuál es exactamente la consigna, si es simplemente pasar el número B6 de [base] 16 a 2, no sé si se refiere a alguna restricción [I, M].

Comentario 11

No sé si este ejercicio, por lo que veo, parece ser que sí lo han hecho en casa, está mandado para casa y ahora está intentando ver cuál es..., está intentando, ella tiene un procedimiento..., porque, claro, 16 es una potencia de 2, con lo cual el cambio de base va a ser... Pero claro, me imagino que estará esperando a ver si alguien le da alguna pista para que ella relance, tome eso y pueda... Porque ya han salido dos maneras y no le ha gustado ninguna [se ríe].

- M11.1-2. Intenta que le digan otra manera [E, M].
 - M11.1-2(I)1. Parece que se trata de un ejercicio que ha mandado previamente para casa y está esperando a que alguien le diga que 16 es una potencia de 2 para desarrollar ese procedimiento, puesto que ya han salido dos formas de resolverlo y aún «no le ha gustado» ninguna [I, M].

Comentario 12

¿Era 11 o 12? Ah, sí, claro, lo he hecho yo mal. Entonces no es el número que yo he dicho, me he equivocado, claro, claro.

Comentario 13

Es que ya lo tiene... No lo sé..., si lo tiene... No sé por qué pone esto. No sé si ya lo ha calculado y está viendo cómo lo han hecho o que realmente ha calculado... No sé. No sé por qué la primera cifra de este número en base 2 empieza por 2^7 , o sea, que tiene ocho cifras en base 2, no lo sé si es que ya lo han obtenido, no lo sé. Ella desde luego... No sabe las demás cifras... Es que no sé el enunciado del ejercicio, entonces no tengo más datos.

- M13.1-2. Escribe el comienzo del desarrollo: escribe 11, etc., y al final escribe la primera cifra del número en base 2, la cual acompaña a 2^7 [E, 1].
 - M13.1-2(I)1. No sé si ya lo ha calculado y está viendo cómo lo han hecho los alumnos o si lo ha calculado ahora... Parece que no sabe las demás cifras... Al no saber el enunciado del ejercicio, no tengo más datos [I, M].

- o M13.1-2(I)2. Si empieza en 2^7 , tiene ocho cifras en base 2 [I, M].

Comentario 14

Sí, pero ahora faltan..., los coeficientes de aquí [señala la parte inferior de la pizarra] en base 2 solo pueden ser 0 y 1 y aquí [señala la parte superior de la pizarra] son del 0 al 15, con lo cual, sí, las bases [de las potencias] las cambia bien, pero los coeficientes también tengo que cambiarlos.

Comentario 15

Pero lo de polinomial lo ha dicho ella por primera vez. Es verdad que un número en una base es simplemente una descomposición en un polinomio en función de las potencias de una base. Entonces, eso de polinomio no sé si es que lo ha..., acaba de aparecer.

- M15.1-2. Indica que hay que cambiar las bases, introduciendo además por primera vez el concepto de expresión polinomial [E, 2].
 - o M15.1-2(I)1. Un número en una base es simplemente una descomposición en un polinomio en función de las potencias de una base [I, M].
 - o M15.1-2(I)2. Los coeficientes en base 2 solo pueden ser 0 y 1 y aquí [en base 16] son del 0 al 15; por ello, hay que cambiar las bases [de las potencias], pero también los coeficientes [I, M].

Comentario 16

6 [lo dice sin parar el vídeo].

Comentario 17

Ha dicho que no los puedo dejar pero no sé si el pasarlo a base 2 ha sido iniciativa suya o iniciativa del alumno. No lo sé.

- M17.1-2. Dice que [el 11 y el 6] hay que pasarlos a base 2 [E, M].
 - o M17.1-2(I)1. No sé si el hecho de pasarlos a base 2 es iniciativa de ella o del alumno [I, D].

Comentario 18

Este 0×2^2 lo ha puesto él... Yo... Normalmente si no está..., con no ponerlo... Es muy mono...

Comentario 19

Sí, es verdad que es 1, 0, 1, 1, pero... Cuando tú vas a descomponer ese no lo pones y ya está [lo dice sin parar el vídeo].

- M19.1-2. Llega a 1, 0, 1, 1 siguiendo las indicaciones del alumno, escribiendo también el 0×2^2 [E, 2].
 - M19.1-2(I)1. Si no está..., si es un cero, yo normalmente no lo pongo; cuando vas a descomponer, no lo pones y ya está [I, M].

Comentario 20

Queda muy matemático decir 16 a la 1, queda muy matemático. En la vida normalmente decimos 16 [se ríe]. Pero ella quiere forzar que eso es una escritura polinómica y entonces quiere que aparezca el 2 elevado a 1; como aquí también, me ha hecho gracia, 16^0 [se ríe] y ahora lo vuelve a escribir aquí; y aquí igual, el 1 este lo ha mantenido aquí [se refiere al 1 de 16^1]. Pero eso es una elegancia que solo la vemos algunos, o sea, que solo la vemos desde el punto de vista de las matemáticas. A un alumno eso..., dice: «para qué me pone esto [señala $(2^4)^1$] y para qué me pone esto [señala $(2^4)^0$]». Pero es verdad que lo quiere hacer así [se ríe]. Igual que este cero [señala 0×2^2]. Quiere forzar, quiere forzar que salga sola. Ahora va a empezar y por distributivas...

- M20.1-2. Dice que 16 [2^4] lo eleva a la 1 [E, 1].
 - M20.1-2(I)1. Queda muy matemático decir 16 a la 1, ya que en la vida normalmente decimos 16, pero ella quiere forzar que eso sea una escritura polinómica y entonces quiere que aparezca elevado a 1; lo mismo ocurre cuando escribe 16^0 . Es una elegancia que solo la vemos desde el punto de vista de las matemáticas y los alumnos se pueden preguntar para qué ponerlo así [I, M].

Comentario 21

Chulísima, vamos. Mañana yo voy a pedir 6 huevos y lo voy a pedir así [se ríe]. Es muy chula desde nuestro punto de vista. Porque quiere que esto se vea 1, 1, 0, ¿entiendes?, pero es verdad que esto son elegancias... Y ahora, cállate, que va a poner «por 2^0 ».

- M21.1-2. Escribe 1, 1, 0, diciendo que ha escrito 6 de una manera más chula [E, 1].
 - M21.1-2(I)1. Es muy chula desde el punto de vista matemático, porque quiere que esto se vea como 1, 1, 0, pero es verdad que esto son elegancias [I, M].

Comentario 22

Está contenta ella [se ríe]. Como matemáticos nos hemos puesto muy contentos al ver esto. Es gracioso.

Comentario 23

Esa conexión la ha hecho ella. A ella le ha parecido... Vamos, me da la sensación de que muchos alumnos dicen «pues yo tampoco estoy tan contento...». Es decir, es verdad que es un 0 y efectivamente quiere decir que va a haber un 0 ahí.

Comentario 24

Es que sigo sin saber si es que esto ya lo tenía el ejercicio, no lo sé. Debe de ser que sí, debe de ser que empezaba por 1 y acababa por 0. Debe de ser que el ejercicio en algún momento lo decía.

- M24.1-2. Dice que está contenta por encontrar una conexión entre el 0 [coeficiente de 2^0 de la parte de arriba] y el 0 final del resultado, así como entre el 1 [coeficiente de 2^3 de la parte de arriba] y el 1 inicial del resultado [E, 3].
 - M24.1-2(I)1. Está contenta porque como matemáticos nos ponemos contentos al ver esto [la conexión que ha aparecido] [I, M].
 - M24.1-2(I)2. Sigo sin saber si es que esta información ya estaba en el ejercicio. Debe de ser que sí, que el ejercicio en algún momento decía que el resultado empezaba por 1 y acababa por 0 [I, M].

Comentario 25

Fíjate qué escritura ha dejado escrita, ¿eh? [señala al hueco que ha dejado entre el signo «+» y el signo «x» en la siguiente expresión: $1 \times 2^7 + x 2^6$]. Porque está esperando un coeficiente aquí [en el hueco]. Lo que pasa es que está cogiendo y ahora va a escribir todas las potencias, sean 0 o no. Otra alternativa..., bueno, lo hubiese podido hacer y luego haberlo reorganizado.

- M25.1-2. Deja un espacio en la escritura [E, M].
 - M25.1-2(I)1. Porque está esperando un coeficiente en el espacio [I, M].

Comentario 26

Tiene que recordar que al multiplicar potencias de la misma base se suman los exponentes, lo tiene que recordar, me sorprende.

- M26.1-2. Recuerda a los alumnos que al multiplicar potencias de la misma base se suman los exponentes [E, 3].

Comentario 27

Es que antes..., no sé. Debe de ser que la escritura la tienen.

- M27.1-2. Dice que era lo que le había salido antes [E, M].
 - M27.1-2(I)1. Porque debe de ser que la escritura la tienen [I, M].

Comentario 28

Bueno, está explicando los cálculos que está haciendo. Y cuando ha llegado aquí, pues ahora lo ha puesto... [señala las llaves y la flecha]. En fin, usa la pizarra de una manera bastante matemática, es decir, bueno esto viene de aquí, esto tal... Ahora acaba de decir el nombre de la propiedad, que es la distributiva; y bueno, lo podría haber dicho, pero es ahora cuando lo ha dicho. El ejercicio está muy medido para que..., ella quiere obtener toda una escritura polinómica en función de las potencias de 2, aunque sea un poquito artificial con estos ceros ahí [señala al 0×2^6], porque cuando yo lo hago pues eso no saldría, pero claro, sí es verdad que si luego lo quiero poner..., quiero de ahí pasar directamente a la escritura posicional, entonces sí, el cero hay que mantenerlo. Entonces, lo quiere hacer forzando eso. Ahora el problema, bueno, no lo va a tener porque no va a llegar nunca a la potencia de 2^4 [señala al corchete de la derecha]; porque de aquí [señala al corchete de la derecha] también podrías incorporar alguna a aquí [corchete de la izquierda], pero no, no sale.

- M28.1-2. Está explicando los cálculos que está haciendo, señalando en la pizarra de dónde sale la escritura polinómica en función de las potencias de 2 que han obtenido [E, 2].
 - M28.1-2(I)1. Se trata de una manera bastante matemática de usar la pizarra [I, M].
 - M28.1-2(I)2. Es un ejercicio que está muy medido para obtener la escritura polinómica, aunque sea un poquito artificial con estos ceros ahí [0×2^6], porque cuando yo lo hago, eso no saldría, pero es verdad que hay que mantener el cero si luego quiero pasar de ahí directamente a la escritura posicional [I, M].
- M28.2-2. Dice el nombre de una propiedad, que es la distributiva [E, 3].

Comentario 29

Se ha dejado este hueco [señala a un hueco que ha dejado tras 1×2^4]. O sea, ya ha previsto que ahí va a haber un 2^3 , que no hay en ningún lado [señala a los corchetes], pero tiene que estar, tiene que reservarle el hueco, entonces lo ha dejado y todo. A mí se me hubiera pegado todo ahí [se ríe]. Lo ha previsto.

- M29.1-2. Deja un hueco [después de 1×2^4] [E, M].
 - M29.1-2(I)1. Porque ha previsto que ahí va a haber un 2^3 , que no hay en ningún lado, pero que tiene que estar, tiene que reservarle el hueco [I, M].

Comentario 30

Ah, es que hay un ábaco en medio, es que eso no lo sabía [lo dice sin parar el vídeo].

- M30.1-2. Menciona en una ocasión el recurso del ábaco [E, 2].

Comentario 31

Esa expresión, esa norma, como norma general, me parece lo menos intuitivo que existe. Es decir, sí, es así, es una norma que efectivamente... Pero me parece muy poco, muy poco intuitivo, muy poco intuitivo. Quiero decir..., digo lo que dice el youtuber ese [se ríe]. Sí, lleva razón, pero me parece mucho más..., está mejor explicado y trabajado aquí [señala la pizarra] que hacer una regla general que bajo mi punto de vista no tiene... Aquí lo que ha hecho Nuria es intentar justificar efectivamente cómo se puede hacer de una manera más directa, ¿no? Todo viene por esto, ¿no? [señala que 16 es 2^4], por darse cuenta de eso.

- M31.1-2. Explica la regla general que daría un youtuber para resolver el ejercicio de una manera más directa [E, 2].

Comentario 32

Está justamente diciendo eso, está justificando que efectivamente esas reglas así generales absolutamente automáticas, si no se entienden... Es lo que les está explicando; me parece una muy buena llamada.

Comentario 33

Volvemos a la meta... Es decir, no les está diciendo que aprendan esto per se, si no que les está diciendo que aprendan esto porque luego son ellos los que tienen que formar y, por tanto, a ella no le interesa que sepan hacerlo, sino que sepan cómo se hace o por qué se hace. Más allá de formar maestros, es una consideración que tendría que estar en matemáticas en todos los órdenes, no solo en los maestros; en los maestros, desde luego, todavía más.

- M33.1-2. Dice que las reglas generales, si no se entienden, no valen, ya que está formando a maestros, haciendo ver que hay que saber cómo o por qué funciona la regla [E, 3].
 - M33.1-2(I)1. Más allá de formar a maestros, es una consideración que tendría que estar en matemáticas en todos los órdenes, no solo en los maestros; en los maestros, desde luego, todavía más [I, M].

Comentario 34

Esa pregunta ya la había contestado antes: sí. Otra cosa es que no sabíamos.

- M34.1-2. Plantea una pregunta a los alumnos [E, 1].

Comentario 35

Lo ha hecho muy rápido la alumna. Efectivamente es $16 - 1$ y eso es todo unos antes del 16. Ha sido muy rápida.

Comentario 36

Quiere que le digan que pasa porque con 16 es 2^4 y entonces pasa esto. Porque efectivamente cuando tú pones la base..., claro, si en vez de 2^4 es 2^3 más 2^2 y tal, ya la distributiva se hace tal..., y no hay un algoritmo, en el sentido... Es que, ella insiste, es que me parece que es irrelevante saber eso como algoritmo.

- M36.1(i)-2. Evento implícito en el comentario [E, 1].
Transcripción del vídeo: ¿Y David Calle me podría dar el algoritmo...? [Para pasar de base 15 a base 2].
 - M36.1(i)-2(I)1. Quiere que le digan que el algoritmo funciona porque 16 es 2^4 ; con la otra base, hay que hacer distributivas... y no hay un algoritmo [I, M].

Comentario 37

Ahí está, lo acaba de decir.

- M37.1-2. Acaba de decir eso [E, 1].

Comentario 38

Me hace gracia cuando se para y hace esos silencios. Que yo imagino que... Yo creo que está pensando que no debe de estar claro para todos y entonces se queda ahí como pausada. Me da esa sensación, que está ahí y está haciéndolo, lo está haciendo, lo ha detallado hasta el final, el 0, el 1..., que yo estoy convencido que en la intimidad de tu hoja no haces todo eso, porque no lo puedes hacer, ¿no?, no lo haces. Y cuando les pregunta si está claro, yo creo que está reticente, diciendo: «bueno, vamos a suponer que está claro».

- M38.1-2. Pregunta a los alumnos si está claro, manteniéndose luego en silencio [E, D].
 - M38.1-2(I)1. Porque debe de estar pensando que no está claro para todos [I, D].

VÍDEO 3

Fragmento 1

Comentario 1

Qué frío [lo dice sin parar el vídeo; lo dice porque ve a Nuria con el abrigo].

Comentario 2

A ver, que vea, que no lo veo. O sea, que se trata de representar las sumas, ¿representar u obtenerlas? No lo sé, ahora lo diré.

- M2.1-3.1. Dice que hay que representar unas sumas [E, 1].

Comentario 3

Escribe todo en la pizarra. Qué maravilla. Me encanta. Yo también lo intento, pero me sale fatal, lo escribo fatal. Pero lo escribe..., clásica, clásica, de mates, normal, de escribir todo en la pizarra y bien, que se lea. Me encanta.

- M3.1-3.1. Escribe todo en la pizarra [E, D].
 - M3.1-3.1(I)1. Es clásico de los profesores de matemáticas escribir todo en la pizarra para que se lea bien [I, M].

Comentario 4

Sí, les deja claro que lo que tienen que representar es el proceso de la suma, no el resultado, no la suma. Es decir, yo te he sumado, te lo sumo..., es que los alumnos son bastante dados a eso, sobre todo cuando tienen un ese manipulativo, porque tienden a pensar que... Yo..., interpreto..., porque a mí también me ha pasado, es decir, les das un ábaco que supuestamente es una ayuda para hacer eso y se lo toman como un obstáculo para hacerlo porque ellos están muy cómodos como lo hacen con los números. Entonces, claro, la tentación que tienen es resolverlo con los números, con la técnica usual, y luego escribirla. Al principio, por lo menos al principio, no se dan cuenta que el ábaco hace eso mucho más rápido que si lo hacen con los números. Entonces aquí, claro, ya está advirtiéndolo, «cuidado, necesito que me digáis...». Lo que no sé es si la palabra «representar» es lo más..., porque yo, cuando ha dicho «representar» también me ha dejado un poquito..., pero lo que quiere es que le representen cómo hacer la suma [enfatisa «cómo»].

- M4.1-3.1. Dice a los alumnos que tienen que representar el proceso de la suma, no el resultado, con material manipulativo [E, 3].

- o M4.1-3.1(I)1. Porque los alumnos tienden a realizar la suma con números, con la técnica usual, y a representar luego el resultado; les das un ábaco que supuestamente es una ayuda para hacer eso y se lo toman como un obstáculo para hacerlo porque ellos están muy cómodos haciéndolo con los números y no se dan cuenta de que el ábaco hace eso mucho más rápido [I, M].
- o M4.1-3.1(I)2. No sé si con representar se refiere a la representación gráfica o a la ejecución con el ábaco. Cuando se da una consigna, debe estar claro lo que se tiene que hacer: ¿qué se entiende por representar un proceso? Se puede suponer que los alumnos ya lo han trabajado antes y por eso la formadora lo dice así; ¿cómo represento que muevo una bola? [I, M].

Comentario 5

Claro, es que..., ¿la representación gráfica o la ejecución con un ábaco?

Comentario 6

Bueno, ha dado una..., ha dado la definición conjuntista de la suma. Es uno de los modelos de la suma, lo ha debido de coger porque debe de ser que esto debe de estar hecho..., les ha debido de dar la suma..., la definición matemática, y se la ha dado a partir de la unión conjuntista. No es la única.

- M6.1-3.1. Da a los alumnos la definición conjuntista de la suma [E, 3].
 - o M6.1-3.1(I)1. Es una de las definiciones de la suma, no es la única; les ha debido de dar anteriormente esa definición matemática a partir de la unión conjuntista [I, M].

Comentario 7

Yo imagino que eso queda claro, imagino. Yo vuelvo otra vez a las consignas. A mí me preocupa cuando en las consignas no está claro lo que yo tengo que hacer. ¿Cómo represento un proceso? Imagino que ellos ya lo han hecho, ya lo han debido de hacer en algún caso, por eso ella lo dice... Porque lo mejor para el ábaco es manipularlo y luego efectivamente... ¿Cómo represento yo que muevo una bola? Yo no lo sé. Me imagino que lo habrán hecho antes.

Comentario 8

Con los números [lo dice sin parar el vídeo].

Comentario 9

Yo creo que usa la palabra «representar» y lo que quiere decir es «tienes que hacerlo en ese sistema de representación». Por lo menos a mí también me llama a engaño. O sea, «representar» da la sensación de que quieres que te represente el proceso o quieres que te haga el proceso en ese sistema de representación, porque lo que vamos a hacer aquí [señala en la pantalla «simbólico-numérico»] es hacer la suma en el registro simbólico-numérico; es un tratamiento dentro de un registro, no hay una conversión. Entonces, yo creo que es lo que quiere decir. Imagino que vamos a ver cómo se hace, ¿no?

- M9.1-3.1. Dice que hay que representar la suma en el registro simbólico-numérico [E, 3].
 - M9.1-3.1(I)1. Cuando usa la palabra «representar», quizás lo que quiere decir es que hay que hacerlo en ese sistema de representación; con «representar» da la sensación de que quiere que haga el proceso en ese sistema de representación, porque lo que vamos a hacer es la suma en el registro simbólico-numérico; es un tratamiento dentro de un registro, no hay una conversión [I, M].

Comentario 10

Muy difusa la consigna otra vez. Porque yo sé lo que ella quiere, yo sé qué tabla quiere, pero porque yo la sé, pero no sé yo si así con esa consigna, si no han trabajado antes con alguna tabla sumando y tal, no sé qué es lo que van..., no lo sé, voy a ver. Yo sé lo que quiere, yo sé lo que quiere, pero...

Comentario 11

Recapitula todo lo que tienen que hacer. Claro, no quiere dar..., tiene un problema. Tiene un problema porque..., yo sé lo que quiere y por qué lo quiere, porque es una buena herramienta que puede ser como una buena transición, ¿no?, de pasar de uno a otro y justificarlo y que responde bien a cómo lo hacemos... No quiere decir cómo se hace porque quiere que los alumnos la construyan, pero claro, está asumiendo riesgos de que no queda muy claro qué es lo que tienen que hacer, no cómo lo tienen que hacer, sino qué es lo que tienen que hacer. O sea, si yo soy alumno suyo, yo no sé qué tabla quiere. Sé lo que quiere con gráfica y simbólica, lo tengo muy claro y sé la tabla que... Pero si soy un alumno suyo, no sé lo que quiere con «tabla». No lo sé...

- M11.1-3.1. Pide a los alumnos que construyan una tabla, que puede tener características gráficas o simbólicas [E, 3].

- M11.1-3.1(I)1. Es una buena herramienta que puede servir como transición para pasar de uno a otro [sistemas de representación] y justificarlo, y que responde bien a cómo lo hacemos [I, M].
- M11.1-3.1(I)2. Como no quiere decir cómo se hace la tabla, porque quiere que los alumnos la construyan, está asumiendo riesgos porque no queda muy clara la consigna; puede que los alumnos no sepan qué es lo que tienen que hacer si no han trabajado antes con alguna tabla sumando [I, M].
- M11.2-3.1. Recapitula lo que los alumnos tienen que hacer [E, D].

Comentario 12

Ahora les da otra pista, dice «bueno, cuando lo hagáis de la otra manera, igual os sale qué tabla hacer». Ella misma ha detectado que la consigna está un poquito «complicada». Porque estas cosas al final siempre se resuelven, por lo menos en mi experiencia, cuando das una consigna así y que no sabes darla o no eres capaz de darla mucho más precisa para que sea suficiente y que él sepa lo que tiene que hacer – digo con nuestros alumnos –, esperas que alguien lo haga y cuando alguien lo dice, «¡¿veis?!», entonces estás así... Pero es verdad que ella misma está viendo, «bueno, ya veremos, yo quiero esta y tal, lo podéis hacer así, prefiero esta [señala a la gráfica]...». Está bordeando la cuestión porque es verdad que no quiere dar más información porque si da más información lo hace ella. Eso es absolutamente correcto, es decir, yo también lo intento hacer así.

- M12.1-3.1. Da una pista a los alumnos al decir que cuando lo vayan haciendo a lo mejor les sale cómo hacer la tabla [E, M].
 - M12.1-3.1(I)1. Porque ella misma ha detectado que la consigna es un poquito «complicada»; no obstante, cuando no se da información demasiado precisa y no llega a ser suficiente para que los alumnos sepan qué tienen que hacer, solemos esperar a que algún alumno lo haga para hacerlo ver a los demás [I, M].
- M12.2-3.1. Indica que prefiere un tipo de tabla a otra [E, M].

Comentario 13

O sea que no es «representar», es hacerlo con el ábaco y están grabando. Es que yo, cuando ha dicho «representar», me he imaginado un ábaco, dibujando las bolitas. Y claro, cómo se representa que muevo una bolita aquí, o que muevo una aquí y quito tres de aquí...

Comentario 14

Ahora he entendido que lo que dice es «representar», efectivamente, es hacerlo con el ábaco, resolverlo con el ábaco, usar el ábaco, y el ábaco es un sistema de representación como otro cualquiera. Vale, vale, vale. Entonces, claro, ¿cómo lo retienes?, sí, tenemos el vídeo... Me parece muy buena idea que lo hagan así.

- M14.1-3.1. Plantea que pueden grabar lo que hagan en vídeo [E, D].
 - M14.1-3.1(I)1. Ahora se entiende que con «representar» se refiere a hacerlo con el ábaco, a resolverlo con el ábaco, que es un sistema de representación como otro cualquiera, no a ir dibujando los movimientos que se hagan de las bolitas [I, M].

Comentario 15

Les está dando una pista... Les está dando una cuestión sobre cómo examinar. Me resulta curioso que les diga que eso lo hace porque ella necesita luego evaluarlo. Porque es verdad que para evaluar si saben usar un ábaco pues es cuestión de... «haz esto, dime tú cómo lo haces», ¿no? Ya advierte que no lo puede hacer porque no podría hacerlo, y entonces les dice cómo va a examinar. El paso a la representación gráfica de un proceso..., bueno, les ha advertido que eso es lo que van a tener que hacer. Bueno, me resulta curioso porque se adelanta a que los alumnos pregunten: «¿y esto cómo lo vas a preguntar en el examen?» [se ríe], pregunta clásica. Pero bueno, es curioso, me resulta curioso.

- M15.1-3.1. Explica a los alumnos que les pedirá que pasen el proceso a una representación gráfica para examinar lo que están viendo [E, 2].
 - M15.1-3.1(I)1. Al explicar cómo examinará se está adelantando a la pregunta clásica de los alumnos: «¿y esto cómo lo vas a preguntar en el examen?» [I, D].

Comentario 16

Me imagino que el orden es una variable y habrá querido que en las sumas o en las operaciones entren en juego distintos usos del ábaco, distintas propiedades de los ábacos, claro. O sea que las ha elegido ya hasta con un orden.

- M16.1-3.1. Establece un orden concreto para hacer las sumas [E, 3].
 - M16.1-3.1(I)1. El orden es una variable y habrá querido que en las sumas o en las operaciones entren en juego distintos usos y propiedades del ábaco [I, M].

Fragmento 2

Comentario 1

Esta es alumna mía [se ríe; señala a una chica del vídeo].

Comentario 2

O sea, está planteando una resta... Está diciendo la niña que tiene que restar, ¿no? No sé qué número es... Uno, dos, tres... El 704 creo que es, si no cuento mal, el 704. Y para restar aquí [señala la varilla de las unidades], en el ábaco lo normal es que si no puedes restar aquí, añades aquí las que faltan [se refiere todo el rato a la varilla de las unidades]. Pero aquí no hay [señala la varilla de las decenas]. Ha cogido un número con el que, incluso con el ábaco, ya tienes que tener ciertas precauciones. Claro, no debe de ser el primero, imagino, porque si es el primero, si no han visto nunca un ábaco, les va a hacer un lío. Claro, porque si tienes que quitar 5 [unidades], quitas 1 [señala la varilla de las decenas] y metes aquí 5 [señala la varilla de las unidades], por eso el ábaco es tan rápido, porque no tienes que hacer nada, solo tienes que saber las descomposiciones de 10 y 5 y te sale, pero claro, el tema es que aquí no hay [señala la varilla de las decenas], entonces tienes que tener un protocolo de acción, no vaya a ser que se te olvide. Está muy elegido ese número, si es como primer número..., muy fuerte, a ver qué hacen.

- M2.1-3.2. Trabaja con los alumnos una resta: tienen 704 y hay que quitarle 5 [E, M].
 - M2.1-3.2(I)1. En el ábaco, si no puedes restar aquí [en la varilla de las unidades], añades las que te faltan; el ábaco es muy rápido porque basta con saber las descomposiciones de 10 y 5, pero en este caso tampoco hay aquí [en la varilla de las decenas]; el número está muy elegido, por lo que hay que tener un protocolo de acción, ciertas precauciones. Supongo que no es la primera vez que usan el ábaco, porque si no se van a hacer un lío [I, M].

Comentario 3

Se supone. No hay, no hay [lo dice sin parar el vídeo].

Comentario 4

Ha sido muy bueno, claro, o sea, les ha presentado..., o sea, está en una fase muy preliminar del ábaco, yo creía que estaba ya más avanzado, cuando les ha puesto ese número. Y no, no, porque en el ábaco no se hace quitando de una en una, eso es en las fases preliminares. Entonces ella lo que

quiere ahora es que ellos hagan todos los cambios de manera que aquí obtengan 10 [en la varilla de las unidades], que quiten uno de aquí [señala la varilla de las centenas], no que la quiten, que la transformen en 10 de aquí [señala la varilla de las decenas], luego quitan una de aquí [señala la varilla de las decenas] y la transforman en 10 de aquí [señala la varilla de las unidades]. Entonces quiere que hagan eso. Pero cuando tú usas el ábaco, lo que se hace es..., quitar 5, si no puedes, inmediatamente quitar una de aquí [de la varilla de las decenas] y añadir las que hagan falta [en la varilla de las unidades], ¿no? Pero no, parece que es una esa preliminar, lo que quiere ver es que ellos vayan manipulando..., vayan materializando los cambios con el ábaco. Muy curioso lo que ha hecho el alumno, «¿quieres una aquí [en la varilla de las decenas]?, pues te pongo una aquí [quitando una bola de la varilla de las centenas]» [se ríe]; menos mal que lo ha quitado pronto el muchacho.

- M4.1-3.2. Dice a los alumnos que escriban 700 de otra forma [E, 2].
 - M4.1-3.2(I)1. Ella no quiere decir que lo descompongan, pero sin decirlo lo que quiere es que hagan todos los cambios de manera que aquí obtengan 10 [en la varilla de las unidades], que quiten uno de aquí [señala la varilla de las centenas], que la transformen en 10 de aquí [señala la varilla de las decenas], dando lugar a 6 centenas y 10 decenas, luego que quiten una de aquí [indica la varilla de las decenas] y la transformen en 10 de aquí [señala la varilla de las unidades]. Pero cuando se usa el ábaco, si no puedes quitar 5 [en las unidades], quitas una de aquí [en las decenas] y añades solo las que hagan falta [en las unidades]. Por eso, están en una fase muy preliminar del ábaco. Lo que quiere es vayan manipulando, que vayan materializando los cambios [I, M].

Comentario 5

Cada vez que el alumno lo hace mal, Nuria lo quita [se ríe]. No les deja que arrastren el error, porque es que con el ábaco se te puede liar..., es verdad, luego ya no sabes dónde están... No les dice por qué lo quita, pero les dice: «esperad». Me hace gracia.

- M5.1-3.2. Quita cuentas del ábaco cuando un alumno las coloca mal, sin decirles por qué las quita [E, M].
 - M5.1-3.2(I)1. Para no dejar que los alumnos arrastren el error, ya que con el ábaco se puede liar el proceso si se arrastran errores [I, M].

Comentario 6

La pregunta es muy difícil: 700 de otra forma. De la mejor forma que sé escribir 700 es 700. Ella quiere que escriba..., que quite un 100 y que tenga 600 y 10 decenas, 6 centenas y 10 decenas, pero así no lo escribo. Yo creo que no quiere usar la palabra «descomponlo» de otra manera, para que tengas unidades para que puedas quitar alguna; eso no lo quiere decir, entonces... [se ríe], cada vez que le hacen así [poner una bola de forma incorrecta], la quita.

Comentario 7

Es que la pregunta es muy difícil. ¿Cómo puedes escribir 700 de otra forma...?

Comentario 8

Ella [la alumna] dice 9 porque está ya avanzando lo que va a quedar cuando quite 10, cuando quite una de 10. Pero la respuesta correcta no es sea, la respuesta correcta es: «quito una de aquí [señala la varilla de las centenas] y meto aquí 10 [señala la varilla de las decenas]». ¿Vale? Cuidado, no ha resuelto el problema, porque el problema es que tengo que quitar de aquí una [de la varilla de las unidades]. Entonces tengo que quitar de aquí una [de la varilla de las decenas] y poner aquí 10 [en la varilla de las unidades]. La niña lo está avanzando, pero...

Comentario 9

No quiere decir cuántas hay [se ríe]. «Para que haya aquíííí... unidades».

- M9.1-3.2. Dice: «Para que haya aquíííí...» [E, 1].
 - M9.1-3.2(I)1. Porque no quiere decir cuántas [cuentas] hay [I, M].

Comentario 10

Ya le ha dado, ya le han contestado. Le han contestado lo que ella estaba buscando desde el principio.

Comentario 11

Y ahora esta se acaba de dar cuenta.

Comentario 12

Mal [se ríe], ha dicho la alumna «mal» [se ríe y da palmas]. Claro, es que así no lo escribimos [se ríe].

Comentario 13

Ah, ¿el color da igual? A mí me pone malo que mezclen los colores [se ríe]. Sí, yo, por ejemplo, lo hubiera... Pero vamos, es una... Yo es que uso más el ábaco chino, que son todas iguales, pero bueno... Lo que ha hecho ha sido, mediante preguntas... Es muy docente, muy docente, porque no tenemos tiempo, y eso nos pasa a todos, no tenemos tiempo a que esto lo hagan ellos solos... Entonces, ella lo que hace es, mediante la pregunta, con un toque didáctico, claro, porque eres tú la que estás ahí..., aquí lo hacemos mucho, porque tienes que cubrir ciertos contenidos y, entonces, es verdad que aceleramos el proceso... Es verdad que lo han hecho bastante rápido, por lo menos esta chica [señala a una alumna en la pantalla]. Y es verdad que ella ha estado supervisando, pero les ha dejado hacer a ellos. Es verdad que cuando se equivocaban, no les dejaba que siguieran en el error, pero es que si no, no llegamos... Al final ha conseguido lo que ella quería; ya está satisfecha.

- M13.1-3.2. Plantea preguntas a los alumnos con un carácter didáctico, supervisando el trabajo que realizan [E, 1].
 - M13.1-3.2(I)1. Para tratar de acelerar el proceso, ya que no hay tiempo para que lo hagan ellos solos al tener que cubrir ciertos contenidos; es algo que nos pasa a todos [I, D].
- M13.2-3.2. Permite que usen cuentas de distintos colores en una misma varilla [E, M].

Comentario 14

Ahora siguen restando, imagino, ¿no?

Comentario 15

Me hace gracia que dicen «gracias». O sea, son conscientes de que ha habido una intervención, son conscientes. Pero lo han descubierto ellos, yo creo que es una buena...

Comentario 16

Ella insiste en cómo escribir los 700.

Comentario 17

Ahora ya lo está reinterpretando en los términos de nuestro sistema convencional, se lo está reinterpretando, es decir, está ella reescribiendo lo que han dicho... Podríamos decir que es una especie de institucionalización de lo que han hecho, o sea, de darle un carácter más oficial a lo que han hecho, pero vamos, siempre partiendo de la idea de que son ellos los que lo han hecho, y es verdad, que son ellos los que lo han hecho. Estamos un poco simulando de manera acelerada lo

que sería una situación en una clase de primaria, que el trabajo debería ser mucho más del alumno y tú deberías hacer la tarea..., pero es verdad que, claro, le pasa lo que nos pasa a muchos, y es que no puedes reproducir exactamente las actividades de primaria aquí porque estos no son niños de primaria, son maestros, tienen mucho más, se supone, y lo tienen, mucho más conocimiento y mucha más madurez. Pero la verdad es que ha simulado muy bien el proceso y cómo lo han hecho y ahora ella simplemente lo está reescribiendo, digamos en términos mucho más matemáticos, ¿no?

- M17.1-3.2. Está reinterpretando, en los términos de nuestro sistema convencional, en términos más matemáticos, lo que han hecho los alumnos, haciendo ver que han desagrupado [E, 2].
 - M17.1-3.2(I)1. Es una especie de institucionalización de lo que han hecho, o sea, de darle un carácter más oficial, siempre partiendo de la idea de que son ellos los que lo han hecho [I, M].
 - M17.1-3.2(I)2. Se ha hecho una simulación de manera acelerada de lo que sería una situación en una clase de primaria, donde el trabajo debería ser mucho más del alumno, pero aquí [en la facultad] no puedes reproducir exactamente las actividades de primaria porque estos no son niños de primaria, son maestros, tienen mucho más conocimiento y mucha más madurez [I, M].

Comentario 18

No sé si existe el verbo «desagrupar», pero... Será «descomponer», no sé [se ríe]. Está mejor usado «desagrupar».

Comentario 19

Acaba de descubrir la chica que cuando lo hace con papel lo hace parecido.

Comentario 20

Está usando el ábaco como una manera de explicar, no tanto..., fíjate, lo está usando más que como elemento didáctico para usar con los niños..., sino también para que los alumnos de aquí descubran realmente ellos qué están haciendo cuando están restando.

- M20.1(i)-3.2. Evento implícito en el comentario [E, 1].

Transcripción del vídeo: Entonces, simbólico tienes que explicarlo conectado con esto.

- o M20.1(i)-3.2(I)1. Emplea el ábaco no solo como un elemento didáctico para usar con los niños [de primaria], sino para que los alumnos descubran realmente qué están haciendo cuando están restando [I, M].

Fragmento 3

Comentario 1

Qué frío tiene que tener, no se ha quitado el abrigo en todo el rato [se ríe].

Comentario 2

Ha cogido uno sin llevadas... No sé qué juego le va a dar... Ha cogido uno sin llevadas, es una suma... Con el ábaco se hace metiendo 3 o metiendo 4 o metiendo 5. No tiene mayor historia. Imagino que será el primero.

- M2.1-3.3. Plantea una suma sin llevadas [E, 2].
 - M2.1-3.3(I)1. Imagino que será el primer ejemplo al tratarse de una suma sin llevadas. Con el ábaco se hace metiendo 3 o metiendo 4 o metiendo 5, no tiene mayor historia, por lo que no sé qué juego va a dar [I, M].

Comentario 3

¿El sorobán es el japonés? [Se le indica que sí].

- M3.1-3.3. Está usando el sorobán para hacer la suma [E, 2].
 - M3.1-3.3(I)1. Como se trata del ábaco japonés, sí que va a tener que hacer cambios con el 5 [señala las decenas] al sumar $210 + 543$; sí que va a haber agrupaciones [I, M].

Comentario 4

Bueno, claro, como es el japonés, sí que va a tener que hacer cambios con el 5 [señala las decenas 4 y 1], es decir, sí que va a haber agrupaciones. No sé si va a sumar $210 + 543$ o al revés.

Comentario 5

Me hace gracia que dice «cómo dibujo» en vez de «cómo represento» o «cómo escribo». Dice «cómo dibujo», me hace gracia porque quiere hacerles ver que es un registro gráfico, pero es una escritura del número también. Yo digo «escribo», no digo «dibujo», pero bueno, me hace gracia.

- M5.1-3.3. Dice «cómo dibujo» [E, 1].
 - M5.1-3.3(I)1. Porque quiere hacer ver a los alumnos que está empleando un registro gráfico; yo digo «escribo» porque es una escritura del número también [I, M].

Comentario 6

Ya ha quedado claro qué es lo que va a hacer. Lo podía hacer al revés también.

- M6.1-3.3. Está sumando $210 + 543$ en ese orden [E, 1].
 - M6.1-3.3(I)1. Es posible hacer la suma al revés también [I, M].

Comentario 7

Y aquí es donde va a tener que hacer el cambio porque el sorobán no tiene 5 aquí [señala la parte bajo la barra horizontal de madera en la pizarra], tiene 4.

- M7.1(i)-3.3. Evento implícito en el comentario [E, 1].

Transcripción del vídeo: Después añadido 4 decenas, en la varilla...

- M7.1(i)-3.3(I)1. En la varilla de las decenas es donde va a tener que hacer un cambio porque el sorobán no tiene 5 cuentas en la parte de abajo, tiene 4 [I, M].

Comentario 8

No sé cómo lo va a hacer, si va a poner directamente la bola esta [señala la parte sobre la barra horizontal de madera] o va a internar... [señala la parte bajo la barra horizontal de madera].

Comentario 9

Este último proceso es muy laborioso. Todos los alumnos le han dicho eso... [el anterior proceso]. Ella quiere mantener la idea de que va subiendo de una en una, que no sé por qué lo intenta tanto, pero lo intenta siempre. Pero si es añadir 5, los alumnos entienden perfectamente que si esta vale 5 [señala la parte sobre la barra horizontal de madera], la meto y punto. Ella quiere insistir en que el proceso es de uno en uno. Luego, el ábaco cuando se utiliza no es así tampoco, se van metiendo de golpe las cuentas.

- M9.1-3.3. Propone un proceso en el que se meten las cuentas de una en una [E, 2].
 - M9.1-3.3(I)1. Ella quiere mantener la idea de que va subiendo de una en una, lo cual es un proceso muy laborioso, pero los alumnos entienden perfectamente que, si hay que añadir 5, basta con meter una de arriba. Cuando se usa el ábaco no se mete de una en una, sino que se meten las cuentas de golpe [I, M].
 - M9.1-3.3(I)2. Se puede poner directamente la bola arriba o intentarlo por debajo [I, M].

Comentario 10

Sí, pero es que además le gusta, aunque no aproveche la estructura, cuando mete dos aquí [señala la barra vertical de las centenas bajo la barra horizontal de madera], dice: «una y otra»; puedes meter las dos directamente. Ella quiere hacerlo de una en una, porque imagino que querrá...

Comentario 11

No, lo has colocado vertical porque lo colocamos vertical, para precisamente hacer eso.

- M11.1-3.3. Dice que lo coloca de forma vertical [la suma] para parecerse a la estructura del ábaco y ver la correspondencia entre las dos maneras, realizando la traducción entre ambas maneras de representación [E, 2].
 - M11.1-3.3(I)1. En realidad, lo coloca de forma vertical porque es como lo colocamos normalmente. De hecho, muchos chinos usan el ábaco en posición horizontal [con las varillas de forma horizontal] porque de ese modo las bolas no se caen y lo pueden manejar con el pulgar y el índice. Ella lo coloca verticalmente [la forma simbólica] porque dentro de la tarea tienen que ver la correspondencia entre las dos maneras [sorobán y simbólico] [E, M].

Comentario 12

De hecho, el ábaco, yo creo que los chinos, muchos, lo usan así [hace con la mano como que gira el ábaco 90 grados], por una ventaja, porque si tú lo pones así [en la posición que se presenta en la pizarra], se caen las bolas, si lo pones así [girado 90 grados], las bolas no se caen. Entonces lo hacen así y usan el pulgar y los índices, y van haciendo así... [mueve la mano]. O sea, que... el ponerlo vertical tú [Nuria] lo has puesto así por eso, pero los ábacos chinos yo los he visto usar también de otra manera [se ríe]. Lo que pasa es que lo que está haciendo aquí ella, yo no sé si los alumnos..., porque ella ahora mismo está representando ahí, pero dentro de la tarea que tenían que hacer era que vieran la correspondencia entre las dos maneras [sorobán y simbólico].

Comentario 13

Ha hecho la traducción ella.

Comentario 14

Me da la sensación de que lo está resolviendo ella. No da la sensación de que los alumnos sean los que le vayan diciendo lo que tiene que hacer.

- M14.1-3.3. Está resolviendo ella el ejercicio sin que los alumnos le vayan diciendo lo que tiene que hacer [E, D].

Comentario 15

En este no tiene nada que hacer, en este simplemente añadir las unidades que faltan y ya está, no va a tener que hacer ninguna descomposición.

- M15.1-3.3. Coloca el material [los bloques multibase] de forma agrupada [E, 2].
 - M15.1-3.3(I)1. En este caso, simplemente hay que añadir las unidades que faltan, no hay que hacer ninguna descomposición [I, M].
 - M15.1-3.3(I)2. Con este material, se puede juntar todo y luego organizarlo; se trata de un sistema mucho más básico que los otros que tiene. Colocar así el material es una decisión que ella toma para poder realizar el paralelismo [con los demás sistemas de representación], ya que el material [los bloques multibase] no te lo exige. En cambio, en este otro material [señala al sorobán] y en este [señala a la suma tradicional] sí es obligatorio [I, M].

Comentario 16

Lo ha puesto ella todo junto, dice: «ahora lo pongo todo junto», no, ya lo has puesto todo junto. Es verdad que tú lo puedes juntar todo y luego organizas, es mucho más básico que cualquiera de los otros sistemas que tiene.

- M16.1-3.3. Dice que lo pone todo junto [las placas, barras y unidades de los bloques multibase] [E, M].

Comentario 17

No le ha hecho el circulito a esos 3 [la formadora ha ido rodeando el conjunto de las placas de 100 y el de las barras de 10, pero no el de las unidades]. No ha querido. Lo iba a hacer, pero no lo ha hecho.

- M17.1-3.3. Deja esos 3 [las 3 unidades] sin rodear [E, M].

Comentario 18

Me hace gracia cómo pregunta si está claro, lo pregunta con muy poca convicción [se ríe].

- M18.1-3.3. Pregunta si está claro lo que han hecho [E, D].

Comentario 19

Y la distributiva [lo dice sin parar el vídeo].

Comentario 20

Ahora se está remontando a todo un proceso... Me da la sensación de que los alumnos dicen...: «Claro, sumas esto con esto, esto con esto...». Claro, ella está siendo muy matemática, en el sentido de decir «yo lo pongo seguido y luego estoy aplicando la conmutativa para agrupar y luego la asociativa porque voy a hacer primero este, después este, después este...». Esas propiedades..., me da la sensación de que son tan evidentes para los alumnos que ni se dan cuenta que están ahí detrás, pero ella lo está remarcando, lo está remarcando. Yo creo que ella lo está intentando ver para justificar el porqué de esta escritura [señala el algoritmo simbólico tradicional].

- M20.1-3.3. Está remarcando a los alumnos las propiedades que están empleando: la conmutativa, la asociativa y la [distributiva] de la suma respecto del producto [E, 3].
 - M20.1-3.3(I)1. Para justificar el porqué de la escritura [del algoritmo tradicional de la suma] [I, M].
 - M20.1-3.3(I)2. Se trata de propiedades que son tan evidentes para los alumnos que ni se dan cuenta de que están ahí detrás [I, M].

Comentario 21

Nunca he sabido si es..., creo que es del producto respecto de la suma [se ríe]. Yo digo del producto respecto de la suma, ella ha dicho de la suma y el producto, punto [se ríe].

Comentario 22

Bueno, aquí lo ha colocado así porque ha querido, o sea, aquí ella..., el material no te lo dice, es decir, es una decisión agruparlo así, ¿no? [señala los bloques multibase], porque luego obviamente lo hace. Pero, por ejemplo, este es obligatorio hacerlo así [señala el sorobán], porque si no, no puedes; y este también [señala el algoritmo simbólico tradicional]; pero este no [señala los bloques multibase], sin embargo ella ya lo ha agrupado y entonces ha hecho el paralelismo. Pero el paralelismo me da la sensación de que lo ha hecho ella; los alumnos no han dicho nada, no sé si lo tienen hecho así.

- M22.1-3.3. Hace el paralelismo [E, 2].

Comentario 23

Claro, ahora ya ha aparecido..., está secuenciado, hay una secuenciación clara, primero pone un caso que explica, que le va a permitir fácilmente ver lo que quiere, cómo lo hace y tal, y todo el paralelismo, y ahora empieza a funcionar el sistema de numeración, a condicionar el sistema de numeración a la técnica de la suma. Aquí no lo condiciona [se refiere al ejemplo que se ha desarrollado], porque esto que ha hecho aquí [señala las expresiones de sumas y productos de potencias de 10 de la pizarra] es una «frivolité» [se ríe], absoluta, quiero decir, está bien hecho, está perfecto, muy matemático, pero es una «frivolité», los alumnos no necesitan hacer eso. Claro, ahora es cuando nos vamos a encontrar que las potencias las voy a tener que redistribuir porque al sumar una me van a dar potencias que antes no estaban. La secuenciación es evidente y es clara.

- M23.1-3.3. Plantea una secuenciación: primero pone un caso, lo explica, ve cómo se hace y realiza el paralelismo [entre los distintos sistemas de representación], y ahora es cuando al sumar van a aparecer potencias que antes no había [E, 3].
 - M23.1-3.3(I)1. Ahora empieza a funcionar el sistema de numeración, se condiciona el sistema de numeración a la técnica de la suma y es cuando va a haber que redistribuir las potencias [I, M].

Comentario 24

Claro [lo dice sin parar el vídeo].

Comentario 25

Está haciendo todo esto para... Yo lo que no sé es si lo está haciendo para explicarles a los alumnos cómo funciona el sistema o para que... – lo estará haciendo para las dos cosas, imagino, ¿no? –, y también para que ellos sepan cómo tratar esto luego en primaria. Tiene esa doble... Pero por un lado, tampoco hay que desdeñar que está intentando que los de aquí entiendan por qué hace eso. Se supone que los alumnos de aquí saben por qué se suma así [señala el algoritmo simbólico tradicional y las expresiones de sumas y productos de potencias de 10]. Ella está haciendo esa doble lectura, ¿no?, porque, por ejemplo, esto [señala los bloques multibase] no es para alumnos de aquí en ningún caso, ¿no?, pero está intentando justificarles por qué lo hacemos así [vuelve a señalar el algoritmo simbólico tradicional y las expresiones de sumas y productos de potencias de 10].

- M25.1-3.3. Indica que ahora hay que agrupar [E, 2].

- o M25.1-3.3(I)1. Trata de que los alumnos entiendan cómo funciona el sistema y también pretende que sepan cómo tratar esto luego en primaria; trata de justificar por qué lo hacemos así [la suma tradicional] [I, M].
- o M25.1-3.3(I)2. La expresión coloquial que empleamos [cuando agrupamos] es la de «me llevo» [I, M].

Comentario 26

O aquí [señala las expresiones de sumas y productos de potencias de 10] «me llevo», que es la expresión coloquial que hacemos.

Comentario 27

Tengo que «reagrupar».

Comentario 28

Es un formato de tabla que ella ha asumido. Yo hasta que no la he visto no sé exactamente... Esto lo puedes hacer con barrotes o lo puedes hacer con cualquier otra cosa, ¿no?, pero vamos, que ese formato de tabla surja de manera natural cuando tú dices: «haced una tabla», a mí me cuesta mucho pensarlo.

- M28.1-3.3. Presenta un formato de tabla que ella ha decidido con barrotes [E, 2].
 - o M28.1-3.3(I)1. Se puede hacer con barrotes o con cualquier otro elemento, pero parece complicado que la tabla que presenta surja de manera natural si la única instrucción es «haced una tabla» [I, M].

Comentario 29

Esta es la que aprieta a color y luego no se borra bien [se ríe].

- M29.1-3.3. Usa tizas de colores [E, D].

Comentario 30

Números [lo dice sin parar el vídeo].

Comentario 31

Claro, ahora está explicando lo que ellos tenían que haber hecho, lo cual yo creo que me reafirma en la idea de que efectivamente esa consigna quedaba ahí un poquito..., y ella lo sabe, que quedaba..., lo de hacer la tabla..., no ha dado más indicaciones porque no quería darlas, porque no debía darlas didácticamente, pero se daba cuenta de que efectivamente era poco..., de hecho ahora lo está ella proporcionando. Me gustaría saber si algún alumno ha hecho algo parecido,

porque aquí no lo veo, pero vamos, tampoco es... Me parece que son cosas que un alumno de aquí basta con que lo muestre para entender efectivamente qué se ha hecho, no tiene tampoco mucha...

- M31.1-3.3. Está explicando la tabla que los alumnos tenían que haber hecho [E, 2].
 - M31.1-3.3(I)1. Porque la consigna que dio al principio no contaba con suficientes indicaciones, lo cual didácticamente era correcto; por lo tanto, ahora ha tenido que proporcionar la tabla ella, lo cual es suficiente para que estos alumnos entiendan lo que se ha hecho [I, M].

Comentario 32

Ahora sí que está dando una indicación de índole didáctica para la práctica de los alumnos fuera, o sea, no lo que estaba haciendo aquí [señala las expresiones de sumas y productos de potencias de 10], ¿no?, sino que ahora está explicándoles cuál es el proceso... Yo lo que pasa es que aquí..., cuando dice que son absolutamente físicos, manipulativos, los euros..., los euros es un sistema simbólico igual que este; si tú tienes 300 tal, tú no tienes 300 moneditas de 1 euro, tienes un billete de 100, tal y cual, es decir, al final también el euro se puede componer con un sistema así... No es más manipulativo el euro que esto [señala los bloques multibase], es verdad que hay un contexto, pero no es más manipulativo, ¿no? De hecho, es más evolucionado que esto [señala de nuevo los bloques multibase], porque aquí se ven, aquí hay 100 de estos... [en los bloques multibase]. Y ahora lo que les está dando son indicaciones efectivamente de cuál sería la progresión correcta para hacerlo en clase.

- M32.1-3.3. Está explicando la progresión didáctica, partiendo de los euros, de lo concreto, y siguiendo con lo manipulativo para llegar a lo abstracto, o sea, su objetivo como maestros [E, 3].
 - M32.1-3.3(I)1. Se trata ya de una indicación, de una progresión, de índole didáctica que les servirá a los alumnos en su práctica fuera [en primaria] para que sus futuros alumnos aprendan lo trabajado. Establecer una progresión adecuada es algo que a los docentes nos preocupa mucho, la cual no siempre va de lo fácil a lo difícil, a veces tienes que presentar cosas difíciles para generar desequilibrios para que los alumnos tengan que actuar. En este caso, para entender eso [señala el algoritmo simbólico tradicional de la suma], es necesario conocer todo lo planteado en la pizarra [I, M].
 - M32.1-3.3(I)2. En realidad, los euros se pueden considerar como un sistema simbólico; si tienes 300, no tienes 300 moneditas de 1 euro, tienes

un billete de 100 y demás, es decir, al final también el euro se puede componer con un sistema, por lo que no es más manipulativo que esto [señala a los bloques multibase], aunque es verdad que en este caso se enmarca en un contexto, pero no por ello es más manipulativo [I, M].

- o M32.1-3.3(I)3. Los ábacos [señala el sorobán] no están pensados para enseñar ni para aprender, sino para trabajar, para obtener resultados, al igual que esto [el algoritmo tradicional de la suma]. En cambio, esto [señala los bloques multibase] sí está pensado para aprender, por lo que es más manipulativo y concreto que el ábaco. Esto otro [señala el tablero de posición] estaría en un punto intermedio [I, M].

Comentario 33

Yo no creo que esto [señala el sorobán] sea más concreto que esto [señala el tablero de posición]. Esto sí [señala los bloques multibase]. Entonces ella está haciendo ahí... [hace un movimiento con el bolígrafo a lo largo de las diferentes representaciones, como de transición], pero... estos ábacos [el sorobán] no están pensados para enseñar, estos ábacos están pensados para trabajar, para obtener resultados, no están pensados para que tú aprendas a..., no. Es como esto [señala el algoritmo simbólico tradicional], esto está pensado para que funcione, no para que lo aprendas. Esto [los bloques multibase] no, esto está pensado para aprender, entonces esto sí es más manipulativo; y eso [los tableros de posición] también, bueno, tiene un punto intermedio. Pero la idea está clara, ir de lo manipulativo a lo más abstracto. No sé si esto es una alternativa o no [se ríe].

Comentario 34

Eso es un objetivo didáctico, está claro que lo que les está proponiendo es que efectivamente su objetivo, el objetivo de ellos, no como personas cuando sumen, sino como maestros, es que los alumnos aprendan esto, entonces les está explicando cuál podría ser una alternativa de una progresión – que nos preocupa mucho siempre a los docentes hacer las cosas con una progresión adecuada –, que a veces no siempre es de lo fácil a lo difícil, a veces tienes que presentar cosas difíciles para generar desequilibrios para que ellos tengan que actuar, pero en este momento está bien porque efectivamente entender eso [el algoritmo simbólico tradicional], así, de manera directa, requiere conocer todo esto [todo lo planteado en la pizarra]; está bien.

Comentario 35

Ahora está intentando que ellos vean personalmente cómo han «sufrido» todo este proceso y que realmente rescaten, efectivamente, si las dificultades que ellos han tenido son dificultades que ellos pueden luego resolver con otras vías, ¿no? Claro, el problema que tienes aquí es que te puedes encontrar un alumno que diga «pues yo lo aprendí así y lo aprendí bien» [se ríe]. Y es verdad, pasa. De hecho, muchas veces los que mejor van no son los que más juego te dan aquí.

- M35.1-3.3. Está preguntando a los alumnos cómo han pasado todo este proceso [el aprendizaje de la suma en primaria] [E, 1].
 - M35.1-3.3(I)1. Para que vean si las dificultades que tuvieron [en primaria] las podrían resolver luego [como maestros] por otras vías [I, M].
 - M35.1-3.3(I)2. El problema que puede surgir aquí es que puede haber un alumno que diga: «pues yo lo aprendí así y lo aprendí bien». Y es verdad, pasa; de hecho, muchas veces los que mejor van no son los que más juego te dan aquí [I, M].

ANEXO 11

Eventos e interpretaciones de Daniel en la fase 1

Nota 1: Cada evento e interpretación se presenta junto con el comentario del que se ha extraído, así como con la etiqueta que lo identifica y el código que se le ha asignado. No obstante, no todos los comentarios presentan eventos o interpretaciones, bien por no contener ninguno, bien por haberse trasladado la información al respecto a otro comentario que aborde el mismo asunto, por lo que algunos eventos e interpretaciones pueden contener información de comentarios distintos del que acompañan. La traslación de información entre comentarios no se indica para no complejizar el documento.

Nota 2: El texto presentado entre corchetes en algunos eventos e interpretaciones se corresponde con información incluida por el investigador.

VÍDEO 1

Fragmento 1

Comentario 1

Está planteando la actividad, enfocándola..., bueno, poniéndola en el contexto de una actividad que podría ser cotidiana y asegurándose de que toda la clase entienda lo que van a hacer.

- D1.1-1.1. Plantea la actividad [E, 1].
- D1.2-1.1. Contextualiza la actividad con una situación que podría ser cotidiana [E, 2].
 - D1.2-1.1(I)1. Para asegurarse de que toda la clase entienda lo que van a hacer [I, D].

Comentario 2

Sigue presentando la actividad, intentando dirigir un poco a que entiendan los alumnos qué es lo que queremos que hagan, porque es muy posible que los alumnos no entiendan de qué están hablando, en el sentido de que se pongan a contar y demás..., y la docente pues quiere que, sin decirles claramente lo que tienen que hacer – que no debería hacerlo, supongo –, pues que intenten entender qué tipo de actividad se espera de ellos durante la clase, ¿no?

- D2.1-1.1. Presenta los primeros pasos a seguir para realizar la actividad, sin decir a los alumnos cómo tienen que hacerlo exactamente [E, 1].

- D2.1-1.1(I)1. Para que los alumnos entiendan qué tienen que hacer, ya que es posible que no entiendan lo que se les pide y que se pongan a contar [I, M].

Comentario 3

Sigue dirigiendo, es difícil apreciar cuánto hace falta esa dirección, en el sentido de cuánto se ha trabajado antes en una clase anterior un contenido parecido a este, ¿no?, si se ha trabajado más o menos pues hacen falta más o menos detalles de ese estilo para llevar al alumno entre el conteo y la notación posicional, que es lo que estamos haciendo, ¿no?

- D3.1-1.1. Dirige a los alumnos en su explicación sobre la actividad con detalles o pistas acerca de cómo realizarla [E, 1].
 - D3.1-1.1(I)1. Si se ha trabajado más o menos el contenido, hacen falta más o menos detalles, más o menos dirección; en este caso, es difícil apreciar cuánto hace falta esa dirección, al no saber cuánto se ha trabajado antes un contenido parecido [I, D].
- D3.2-1.1. Va a trabajar el conteo [E, 3].
- D3.3-1.1. Presenta el objetivo, que es dirigir al alumno a la notación posicional a partir de una actividad de conteo [E, 3].

Fragmento 2

Comentario 1

Está pidiendo la información de lo que han hecho los alumnos, no juzgando para que salga toda la información sin dirigirles demasiado a lo que quería, que seguramente no era esto, y entonces está consiguiendo que los alumnos cuenten lo que se les ha ocurrido, que parece que no hay mucho trabajado antes porque están saliendo estrategias que creo que muestran que antes no se ha trabajado, debe de ser el primer trabajo sobre el tema, una de las primeras actividades sobre el tema, notación posicional.

- D1.1-1.2. Está pidiendo la información de lo que han hecho los alumnos, sin juzgar y sin dirigirlos demasiado hacia lo que ella pedía, que en definitiva es un trabajo sobre notación posicional [E, 1].

Comentario 2

Ahora está tratando de razonar sobre la estrategia que han propuesto los alumnos, tratando de que ellos, los alumnos, se den cuenta de los problemas que tiene lo que han..., en lugar, claro, en lugar de decirles: «pues esto está mal porque pasa esto», tratando de describir lo que está pasando y que sean los alumnos los que se den cuenta de por qué no es del todo buena idea lo que están haciendo, claro.

- D2.1-1.2. Razona sobre la estrategia que han propuesto los alumnos, sin decirles directamente qué es lo que han hecho mal [E, 1].
 - D2.1-1.2(I)1. Para que los alumnos se den cuenta de los problemas que tiene lo que han hecho [I, D].

Comentario 3

Sigue tratando de que conecten la actividad con la notación posicional, con un éxito relativo porque es algo que a los alumnos les cuesta, nunca lo han pensado, pero sigue tratando de que los alumnos se den cuenta sin contárselo ella, claro, es lo que... el objetivo de la actividad.

- D3.1-1.2. Trata de que los alumnos conecten la actividad con la notación posicional, que es el objetivo de la actividad, sin desvelarles dicha conexión [E, 2].
 - D3.1-1.2(I)1. Se trata de algo que a los alumnos les cuesta mucho, ya que nunca lo han pensado [I, M].

Fragmento 3

Comentario 1

Bueno, ahora está tratando, ahora en gran grupo, ¿no?, con toda la clase, igual que hacía antes en el pequeño, preguntando por cómo..., qué estrategias han desarrollado los alumnos, también sin juzgarla para que, si no es adecuada, vayan viendo los alumnos si es adecuada o no y por qué.

- D1.1-1.3. Pregunta a los alumnos, trabajando en gran grupo, qué estrategias han desarrollado, sin juzgarlas [E, 1].
 - D1.1-1.3(I)1. Para que sean los alumnos quienes vayan viendo si sus estrategias son adecuadas o no y por qué [I, M].

Comentario 2

Ahora ya estaría preguntando, tratando de reunir, o de resumir, o de hacer un listado, ¿no?, de todas las estrategias que han salido para tener una lista de todas las que han salido y bueno, a ver qué hace ahora, sigamos con eso.

- D2.1-1.3. Está tratando de reunir, mediante preguntas, las estrategias que han empleado los alumnos [E, M].

Comentario 3

Está tratando de conectar los problemas de la notación posicional y de los grupos que han hecho los alumnos.

- D3.1-1.3. Está tratando de comprobar si existe una conexión entre la notación posicional y los grupos que han hecho los alumnos [E, 3].

Comentario 4

Ahora va a explorar esa estrategia, esas agrupaciones que han hecho, a ver cómo de manejable es o si se puede sumar con ella, ¿no?, si se puede calcular qué tienen entre los dos grupos para tratar de que los alumnos se den cuenta de las ventajas que tiene pues ponernos de acuerdo en hacer siempre grupos de 10, ¿no?, que va a ser el final de la sesión, supongo.

- D4.1-1.3. Está explorando la estrategia que han seguido los alumnos, viendo cómo de manejables son las agrupaciones que han hecho dos grupos de alumnos al juntarse para realizar la suma [E, 2].
 - D4.1-1.3(I)1. Para tratar de que los alumnos se den cuenta de las ventajas que tiene hacer siempre grupos de 10 [I, M].

Comentario 5

Ahora está tratando, con la suma de 9 en 9 y de 10 en 10, que se den cuenta los alumnos de..., bueno, de cómo dependemos de la notación posicional. Y en mi experiencia..., la tenemos tan asumida la notación posicional que a los alumnos les cuesta darse cuenta y les está costando, como se ve en el vídeo, la docente está tratando de que se den cuenta y los alumnos creo que ni siquiera están entendiendo la pregunta en este momento.

- D5.1-1.3. Está preguntando a los alumnos acerca de sumar de 10 en 10 o de 9 en 9, haciéndoles ver cómo dependemos de la notación posicional [E, 3].
 - D5.1-1.3(I)1. En mi experiencia, tenemos tan asumida la notación posicional que es difícil hacer que los alumnos la entiendan realmente [I, M].

Comentario 6

Y sigue tratando de que descubran la suma en grupos de 10, que ya un alumno se está dando cuenta de la conexión con este tema.

VÍDEO 2

Comentario 1

Vale, está planteando el problema, bueno, han planteado ya el problema de hecho y está escribiendo la primera solución que parece que ha dado un alumno. El problema parece que es pasar directamente un número expresado en base 16 a un número en base 2 y ha expuesto, siguiendo la instrucción del alumno – sin juzgar tampoco –, una primera solución que es la fuerza bruta, digamos, de escribirlo todo en las dos bases y ver cuál..., contar en las dos bases, vamos.

- D1.1-2. Está planteando el problema, que consiste en pasar directamente un número expresado en base 16 a un número en base 2 [E, 3].
- D1.2-2. Está escribiendo la solución que parece que ha dado un alumno, sin juzgar, consistente en escribirlo todo en las dos bases y contar en las dos bases [E, 2].

Comentario 2

Está explorado una alternativa que le da otro alumno, tratando de – sin decir en un primer momento si va a funcionar o no – que los alumnos sean los que digan si creen que puede funcionar o no.

- D2.1-2. Está explorando una alternativa que da otro alumno [E, 1].
 - D2.1-2(I)1. Quiere que sean los alumnos quienes digan si creen que puede funcionar la alternativa o no [E, M].
 - D2.1-2(I)2. Sobre la alternativa que se plantea, para mí interpretar que B6 es 11 grupos de 16 y 6 grupos de 1 no es pasar por base 10, pero habrá que ver si lo es para la docente [I, M].

Comentario 3

Deja tiempo, está planteando el problema dejando tiempo para alternativas. Mi problema para tratar de interpretar lo que está haciendo aquí es saber si expresar ese número, el B6..., interpretar que es 11 grupos de 16 y 6 grupos de 6 unidades [dice de 6, pero son de 1 unidad]..., esto es pasar a base 10 o no lo es. Desde mi punto de vista no lo es, pero no sé si la docente opina que sí lo es o no. Igual en el vídeo se resuelve esto más adelante.*

- D3.1-2. Deja tiempo a los alumnos para que propongan formas para solucionar el problema [E, D].

Comentario 4

Vale, ahora como un alumno dio una idea pues ha tratado de tirar del hilo un poco de esa idea para que..., facilitar un poco que los alumnos sigan, a ver si esto ha servido para que algún alumno vea por dónde van las cosas, ¿no? Ya ha quedado claro el comentario que decía antes [el propio Daniel], efectivamente interpretar en base 16 la expresión que ha puesto pues es una estrategia permitida para hacer el problema, claro, que es lo que suponía... Y veamos cómo sigue.

- D4.1-2. Empieza a desarrollar una idea de resolución que ha dado un alumno, permitiendo el empleo de la estrategia consistente en interpretar en base 16 la expresión dada para resolver el problema [E, 1].
 - D4.1-2(I)1. Con el inicio del desarrollo de la resolución trata de que los alumnos empiecen a ver por dónde van las cosas [I, D].

Comentario 5

Siguiendo la idea del alumno, traduciendo al alumno – que estaba dando la notación en binario –, la docente la traduce a la expresión en potencias de base 2, una expresión polinomial. Y bueno, haciendo un poco entre los dos..., supongo que rellenando las lagunas que a lo mejor la manipulación algebraica esta le cuesta al alumno..., le está ayudando a escribir más claro quizá en la pizarra algebraicamente lo que el alumno está diciendo, la idea que el alumno está exponiendo.

- D5.1-2. Traduce la expresión dada en una expresión con potencias de 2, en una expresión polinomial en notación binaria, desarrollando ella la parte algebraica siguiendo la idea planteada por un alumno [E, 3].
 - D5.1-2(I)1. Pretende escribir de un modo más preciso lo que el alumno dice, quizá porque este tenga dificultades o lagunas a la hora de realizar la manipulación algebraica [I, M].

Comentario 6

Sigue desarrollando la parte algebraica, que es lo que a los alumnos seguramente les cuesta, tratando de que los alumnos se vayan dando cuenta de lo que está pasando. Si tuviera que conjeturar, diría que los alumnos aquí con las cuentas se han perdido la mayoría y por eso les está costando a la mayoría de los alumnos seguir lo que está pasando. Y por eso la docente ahora interviene más, me parece, que hace un rato al principio del vídeo, ¿no?

Comentario 7

Sigue haciendo la cuenta, haciendo el álgebra..., la aritmética, que no hay letras, la aritmética, pero con un componente algebraico fuerte y creo que los alumnos, se oye siempre al mismo, o sea, los

alumnos realmente..., no sé hasta qué punto están siguiendo..., y no sé hasta qué punto la docente está..., es consciente de ello o está ya resignada a que los alumnos..., bueno, pocos alumnos siguen esto pero ya hay que terminar el ejercicio, claro.

- D7.1-2. Sigue haciendo la cuenta, desarrollando la parte algebraica, interviniendo más que al principio del vídeo [E, 2].
 - D7.1-2(I)1. En realidad está trabajando la aritmética, ya que no hay letras, pero con un componente algebraico fuerte [I, M].
 - D7.1-2(I)2. La formadora puede que sea consciente de que muchos alumnos probablemente no están comprendiendo el desarrollo algebraico, pues seguramente les cuesta seguir esta parte algebraica, pero sigue con el ejercicio, ya que hay que acabarlo [I, M].

Comentario 8

Vuelve a preguntar al alumno, Pablo, que es el que presentó la solución, para tratar de que interprete la expresión que tiene ahí, y si tiene algún problema el alumno con el 2^3 , tratar de que le diga cuál es el problema o si ha sabido el alumno resolverlo, ¿no?

- D8.1-2. Pregunta al alumno que propuso la estrategia de resolución del ejercicio acerca del problema que tuvo con el 2^3 [E, 2].
 - D8.1-2(I)1. Para que el alumno trate de interpretar la expresión a la que han llegado y diga si ya ha sabido resolverlo [I, M].

Comentario 9

Ahora está interpretando la receta que existirá, claro, para el que hace esto, de cómo pasar de base 16 a base 2 en términos de la cuenta que han hecho en la pizarra, para explicar a los alumnos de dónde viene esa receta que..., bueno, no sé cómo de conocida es, claro, este problema ya es bastante más específico que... el que a lo mejor está en YouTube con el famoso David Calle, no sé.

- D9.1-2. Ahora está interpretando la receta que podría dar un youtuber como David Calle para pasar directamente de base 16 a base 2 [E, 2].
 - D9.1-2(I)1. Para que los alumnos entiendan de dónde saldría dicha receta [I, D].

Comentario 10

Bueno, ahora la docente está tratando de que los alumnos entiendan la diferencia entre lo que es una receta, que aplican mecánicamente, y lo que es entender de dónde viene esa receta, que es un trabajo muy complicado e importante a la vez.

- D10.1-2. Está tratando de que los alumnos entiendan la diferencia entre lo que es una receta, que aplican mecánicamente, y lo que es entender de dónde viene esa receta [E, 2].
 - D10.1-2(I)1. Entender de dónde sale la receta es un trabajo muy importante y complicado a la vez [E, M].

Comentario 11

Y ahora está tratando de que se den cuenta de uno de los valores más importantes de entender qué es lo que se está haciendo, cuando hay un caso diferente, pues si se puede aplicar o no, ¿no? Lo que han hecho en base 16, ¿se puede traducir a base 15? Pues cuando entiendes lo que has hecho, te puedes dar cuenta de que no se puede; si solo conoces la receta, pues es muy posible que lo apliques mal, que es un error común.

- D11.1-2. Pregunta a los alumnos si se podría aplicar la receta para pasar directamente de base 16 a base 2 si lo que se quisiera fuera pasar de base 15 a base 2, incidiendo en que no se podría [E, 3].
 - D11.1-2(I)1. Entender qué es lo que se está haciendo cuando se emplea una receta es uno de los valores más importantes, ya que si no se entiende, no se sabe si se puede aplicar a un caso diferente y es posible que se use mal, lo cual es un error común [de los alumnos] [I, M].

Comentario 12

La docente trata de dar la oportunidad de que surjan preguntas al comprobar si está claro o no. Sin ver a los alumnos es difícil juzgar, claro, si las hay o no.

- D12.1-2. Pregunta a los alumnos si ha quedado claro lo que han visto [E, D].

VÍDEO 3

Fragmento 1

Comentario 1

La docente está planteando la actividad para que quede claro lo que se quiere, porque cuesta que entiendan que no quiero el resultado, quiero que me expliquen, que me representen en este caso con los materiales el proceso, es algo que a los alumnos les cuesta entender y, por tanto, está prestando especial atención a clarificar eso, que quiere que se centren en eso, no en el resultado.

- D1.1-3.1. Está planteando la actividad, que consiste en representar con materiales [las operaciones] [E, 2].
- D1.2-3.1. Pide que representen con los materiales el proceso, no el resultado [E, 3].
 - D1.2-3.1(I)1. A los alumnos les cuesta representar o explicar el proceso seguido, entender que no es lo mismo representar el proceso que el resultado, por lo que presta atención a clarificarlo [I, M].

Comentario 2

Pues ha seguido explicando la actividad, de manera más completa que antes, con los tres niveles de representación que quiere, incluyendo uno que no han trabajado previamente... Eh... Sigamos.

- D2.1-3.1. Completa la explicación de la actividad, especificando una segunda forma de representación que quiere que usen los alumnos [E, 2].
- D2.2-3.1. Completa la explicación de la actividad, especificando una tercera forma de representación que quiere que usen los alumnos, la cual no la han trabajado previamente [E, 1].

Comentario 3

Bueno, sigue tratando de describir y de avisar a los alumnos de que, aunque esto no se pueda evaluar, por la dificultad que comenta..., no se pueda evaluar directamente tal y como lo van a hacer aquí, sí va a encontrar una manera de evaluarlo para que el alumno pues esté más motivado también con el tema de la evaluación en esta clase práctica.

- D3.1-3.1. Avisa a los alumnos de que, aunque lo que van a hacer no lo pueda evaluar en el examen tal y como lo van a hacer en clase, va a evaluarlo de alguna manera [E, 1].
 - D3.1-3.1(I)1. Para que los alumnos estén más motivados con el tema de la evaluación en la clase práctica [I, D].

Fragmento 2

Comentario 1

Ahora está pidiendo que la alumna le cuente lo que está haciendo, para detectar la dificultad. Ha detectado la dificultad y ahora va a tratar de intervenir para que la alumna..., los alumnos, el grupo, traten de resolver la actividad por ellos mismos, la dificultad, quiero decir, a ver.

Comentario 2

La docente está siguiendo las instrucciones que le dan para ver si funciona o no, tratando de que los alumnos se den cuenta de la dificultad del ábaco. Me está quedando muy claro en el vídeo que el ábaco es menos didáctico que los bloques de base 10, pero eso quizá no viene a cuento, pero no me resisto a no decirlo.

- D2.1-3.2. Interactúa con los alumnos, tratando de que piensen sobre la dificultad que tienen a partir de los pasos que ya han dado [E, 1].
 - D2.1-3.2(I)1. Pretende que sean los alumnos quienes resuelvan la actividad por ellos mismos y que vean la dificultad que tiene el uso del ábaco [I, M].

Comentario 3

Ha tratado de que la alumna se dé cuenta del cambio de centenas a decenas. El alumno todavía no se da cuenta, por la cara que veo. Y están tratando la dificultad de agrupar centenas y decenas en el ábaco.

- D3.1-3.2. Trata de que la alumna se dé cuenta del cambio de centenas a decenas, abordando así la dificultad de agrupar centenas y decenas en el ábaco [E, 3].

Comentario 4

Ahora ha seguido tratando de guiar lo mínimo posible a que la alumna viera cómo repetir esto con las decenas y las unidades y consiguiendo que los alumnos entiendan el procedimiento.

- D4.1-3.2. Trata de que la alumna se dé cuenta del cambio de decenas a unidades, consiguiendo que los alumnos lo entiendan, guiando el proceso lo mínimo posible [E, 3].

Comentario 5

Ahora está tratando de que los alumnos analicen lo que han hecho para formalizarlo un poco más, para entender globalmente lo que han hecho, para darle sentido al procedimiento.

- D5.1-3.2. Trata de que los alumnos analicen lo que han hecho [E, 2].

- o D5.1-3.2(I)1. Para formalizarlo un poco más, para entender globalmente lo que han hecho, para darle sentido al procedimiento [I, M].

Comentario 6

La docente está preguntando..., bueno, la alumna ha tomado la iniciativa, diciendo que eso no es lo que hace en papel, ¿no?, y la docente está tratando de que la alumna piense en la relación que hay entre lo que han hecho con el ábaco y lo que..., el algoritmo tradicional, que no sabemos cuál es –a ver si ahora lo dicen–, cuál es la versión del tradicional o qué algoritmo de la resta usa la alumna, ¿no?, o en cuál está pensando.

- D6.1-3.2. Pregunta a la alumna cómo hace ella la resta [en papel], haciéndole ver que tiene que pensar en la relación que hay entre lo que han hecho con el ábaco y el algoritmo tradicional de la resta [E, 3].

Fragmento 3

Comentario 1

La docente está traduciendo la suma en el sorobán. Estoy más callado porque el sorobán no me parece adecuado para entender lo que está pasando. Hace una suma en la que no hay agrupamientos, en el sorobán sí, claro, entonces es un ejercicio más del manejo del sorobán que del algoritmo de la suma, me parece.

- D1.1-3.3. Está haciendo una suma en el sorobán en la que no hay agrupamientos [en base 10] [E, 2].
 - D1.1-3.3(I)1. Al no haber agrupamientos, parece que se trata de un ejercicio más relacionado con el manejo del sorobán que con el algoritmo de la suma [I, M].

Comentario 2

La docente ahora trata de escribir, de conectar el algoritmo en columna, en vertical, el tradicional..., con la representación del ábaco para conectar esas dos representaciones.

- D2.1-3.3. Trata de conectar la escritura del algoritmo tradicional en columna, vertical, con la representación del ábaco [E, 2].

Comentario 3

Ahora está representando con bloques de base 10... Eh... Está dando menos margen a que participen los alumnos, seguramente porque el ejercicio es demasiado sencillo para que los alumnos tengan algo que decir.

- D3.1-3.3. Está representando con bloques de base 10 [la suma] [E, 2].
- D3.2-3.3. Está dando menos margen a que participen los alumnos [E, D].
 - D3.2-3.3(I)1. Porque el ejercicio es demasiado sencillo para que los alumnos tengan algo que decir [I, M].

Comentario 4

Conecta los algoritmos, bueno, la representación en base 10 con el algoritmo en vertical, pero con los bloques en base 10 trabaja de izquierda a derecha y eso podría haber sido un problema si hubiera habido reagrupamientos. No sé si lo va a mencionar o no, por qué trabaja ahí de izquierda a derecha en lugar de derecha a izquierda como en el simbólico.

- D4.1-3.3. Conecta la representación de los bloques en base 10 con el algoritmo vertical [E, 3].

- D4.2-3.3. Trabaja de izquierda a derecha con los bloques en base 10 [E, M].
 - D4.2-3.3(I)1. Trabajar de izquierda a derecha con los bloques en base 10 podría suponer un problema si hay que hacer reagrupamientos [I, M].

Comentario 5

Y ahora está haciendo un algoritmo de suma polinómica, de agrupación polinómica, que no sé si pega con los anteriores, no sé si aporta demasiado a los maestros esa interpretación. De nuevo, tanto simbolismo..., no alcanzo a ver la intención.

- D5.1-3.3. Está haciendo un algoritmo de suma polinómica, de agrupación polinómica [E, 2].

Comentario 6

Ha preguntado, ¿no?, qué diferencia hay con la siguiente, que es un ejemplo ya en el que hacen falta reagrupamientos, para ver la diferencia, a ver si en el vídeo lo hace, no queda una cosa puramente descriptiva aquí..., porque puede ser un caso más interesante que este, vamos a ver.

- D6.1-3.3. Pregunta qué diferencia hay con la siguiente [E, 1].
- D6.2-3.3. Hace ver que en el siguiente ejemplo ya hay que hacer reagrupamientos [E, 2].

Comentario 7

Eh..., no me queda claro si esto lo ha hecho para que los alumnos lo hagan después o para dejarlo ahí el ejercicio, porque creo que ha hecho el no interesante y deja sin hacer el interesante, quizá porque lo van a hacer los alumnos después, claro, no lo sé.

Comentario 8

Aquí está analizando las diferentes formas de representar la información de la suma en una tabla, ¿no?, que hay matices, claro, si lo hace pues simbólico o lo hace..., no recuerdo el nombre, para la taxonomía soy muy malo, pero bueno, diferentes maneras de representarlo dentro del formato tabla.

- D8.1-3.3. Está analizando una forma de representar la información de la suma en una tabla [E, 2].
- D8.2-3.3. Está analizando una segunda forma de representar la información de la suma en una tabla [E, 2].

Comentario 9

Ahora está describiendo todo el proceso, la secuencia de la suma, ¿no?, lo concreto, pictórico, abstracto, para que tengan una visión global de la ruta de aprendizaje de un alumno cuando está aprendiendo a sumar en primaria.

- D9.1-3.3. Está describiendo el proceso o la secuencia de la suma, de lo concreto, pasando por lo pictórico, hasta lo abstracto [E, 3].
 - D9.1-3.3(I)1. Para que los alumnos tengan una visión global de la ruta de aprendizaje de un alumno [de primaria] cuando está aprendiendo a sumar en primaria [I, M].

ANEXO 12

Eventos e interpretaciones de Jorge en la fase 1

Nota 1: Cada evento e interpretación se presenta junto con el comentario del que se ha extraído, así como con la etiqueta que lo identifica y el código que se le ha asignado. No obstante, no todos los comentarios presentan eventos o interpretaciones, bien por no contener ninguno, bien por haberse trasladado la información al respecto a otro comentario que aborde el mismo asunto, por lo que algunos eventos e interpretaciones pueden contener información de comentarios distintos del que acompañan. La traslación de información entre comentarios no se indica para no complejizar el documento.

Nota 2: El texto presentado entre corchetes en algunos eventos e interpretaciones se corresponde con información incluida por el investigador.

VÍDEO 1

Fragmento 1

Comentario 1

El ambiente de la clase parece un poco ruidoso, poca atención, parecen bastantes mesas; puedo verme reflejado en varios momentos. Y bueno, ha hecho una introducción de los requisitos, los pasos, las tareas que se les va a pedir... Les ha dado las instrucciones de la actividad, que estaban en inglés. Y ha introducido un poco la actividad – que parece de aritmética para primaria –, les pone en situación con una especie de anécdota o de historia relacionada con ellos para tratar de engancharlos con el problema, con lo que tienen que hacer, que va a ser contar o tratar de estimar; les pone en una situación real, como la del supermercado, para ver si les atrae la atención, motiva un poco la actividad. Los alumnos están divididos en grupos y ella tiene el apoyo del aula virtual.

- J1.1-1.1. Introduce los pasos que van a seguir en la sesión [E, D].
- J1.2-1.1. Dice que el guion de la actividad está en inglés [E, D].
- J1.3-1.1. Introduce la actividad poniendo a los alumnos en una situación real mediante una historia relacionada con ellos, como la del supermercado [E, 2].
 - J1.3-1.1(I)1. Para tratar de enganchar a los alumnos con el problema y atraer su atención [I, D].
- J1.4-1.1. Introduce un problema de aritmética, que consistirá en contar o tratar de estimar [E, 3].

- J1.4-1.1(I)1. Se trata de una actividad para primaria [I, M].
- J1.5-1.1. Emplea el aula virtual [E, D].

Comentario 2

Da un contexto a la actividad y da una referencia buena. Es una clase práctica, con lo cual la referencia parece también un libro práctico con actividades que pueden ser de su interés para su futura práctica; parece una referencia no tan teórica, sino algo más práctica. Sigue sin captar mucho la atención de los alumnos.

- J2.1-1.1. Da una referencia que dice que es un buen libro con contenido práctico, con actividades [E, 2].
 - J2.1-1.1(I)1. Dar referencias bibliográficas a los alumnos puede ser de interés para la futura práctica de los alumnos [I, D].

Comentario 3

En principio, queda más o menos clara la actividad; está bien, está interesante [se ríe]. El manejo lo hace a través de..., supongo que tiene detrás una pantalla en la que van leyendo ellos también..., no sé si en las mesas tienen un guion para que ellos vayan siguiendo... o lo saben, porque veo alumnos que están como mirando a otro lado y no sé si saben de antemano lo que tienen que hacer y ella lo ha explicado, o directamente está explicando... Pero bueno, ya tienen el material, a lo mejor sí saben ya lo que tienen que hacer en la actividad. En principio yo creo que la actividad es libre; está mirando el reloj, yo creo que va a dejarles un rato para que trabajen. En principio, las órdenes de la actividad están. Y ahora a ver qué hace [se ríe].

Comentario 4

Marca el tiempo, es importante el tiempo, marca el tiempo para que sepan el tiempo que tienen para cada parte de la actividad.

- J4.1-1.1. Indica el tiempo que tienen los alumnos para realizar la actividad [E, D].

Fragmento 2

Comentario 1

Trabaja un poco con preguntas, parece que es cuando se han juntado dos grupos, entonces por medio de preguntas está pidiendo que expliquen ellos cómo lo han hecho y qué acuerdos ha habido. Les ha preguntado por los colores, incita un poco a los alumnos a que expliquen el porqué, qué es lo que han hecho. El tono que tiene parece bastante distendido, está bastante bien, ¿no? Bueno, hay una incongruencia, unos han cogido hatillos de 20, otros, de 15..., así que bueno, que vean que ahí está la manera de ir aprendiendo, ir comparando con los demás y llegar a esos consensos es muy importante; incitar a que justifiquen es importante.

- J1.1-1.2. Está pidiendo a los alumnos, por medio de preguntas, que expliquen a qué acuerdos han tenido que llegar cuando se han juntado los dos grupos [E, 2].
 - J1.1-1.2(I)1. Como ha habido una incongruencia por parte de los alumnos, ya que unos han hecho grupos de 15 y otros de 20, quiere que vean que la manera de aprender está en ir comparando lo que han hecho con los demás y que es importante llegar a consensos [I, M].
- J1.2-1.2. Emplea un tono bastante distendido [E, D].

Comentario 2

Ahí está bien porque incide en esta justificación, ¿no?, que es lo que hay que transmitir, que en las matemáticas está esa parte de saber justificar los resultados o cómo funcionan las cosas, en este caso el sistema decimal, o el sistema al que lleguen, da igual, lo que estén trabajando. Y bueno, ahí les descubre un poco esa parte en la que ha visto que los dos grupos tienen alguna incongruencia y vuelve a hacerles la pregunta, pide una justificación más clara de ese razonamiento, una conclusión de ese número, que lo expliquen visualmente, ¿no?, también les guía un poco... Ahora los alumnos saben que tendría que ser de una manera visual.

- J2.1-1.2. Pregunta a los alumnos por los colores [de las gomas], incitándolos a explicar el porqué de lo que han hecho, descubriéndoles la incongruencia que existe en su forma de agrupar y pidiendo una justificación más clara del razonamiento que han seguido, de la conclusión a la que han llegado, una explicación visual [E, 3].
 - J2.1-1.2(I)1. En matemáticas hay que transmitir que es necesario justificar los resultados, cómo funcionan las cosas; en este caso, el sistema decimal [I, M].

Comentario 3

Está guiándolos hacia lo importante, ¿no?, que es que descubran el sistema decimal. Entonces está relacionando un poco la parte manipulativa con lo que es el sistema, los números, un poco la teoría... Ahí liga la práctica con la teoría... Es donde los alumnos verán de otra forma lo que son los números, verán cuál es el proceso y los hatillos los verán de una manera distinta. Vuelve a preguntarles, les guía de otra manera, les da una pista para que, además de que lo pongan en común, lo relacionen con el número, con la posición, con el sistema posicional.

- J3.1-1.2. Dirige a los alumnos, mediante preguntas sobre las agrupaciones que han hecho, hacia la comprensión de las propiedades del sistema decimal, ligando la parte práctica con la teórica, la parte manipulativa con el sistema decimal, con la posición del número [E, 3].

Comentario 4

Al final yo creo que se han dado cuenta de que la estrategia que habían seguido inicialmente no era óptima y entonces tienen que reorganizar esa estrategia. Ya irán mejor [se ríe].

Fragmento 3

Comentario 1

Bueno, está recapitulando, está poniendo en común lo que han hecho todos los grupos. Pide la opinión a los alumnos, se verbaliza, pero a la hora de ir escribiendo creo que lo va a intentar escribir de manera formal, entonces está parando un poco y modulando un poco las respuestas de los alumnos, comparando las respuestas de unos con las de otros, guiándoles para formalizar lo que son 3 grupos de 10 [dice de 10, pero son de 20]... Está poniendo en común las ideas de todo el grupo, asentando un poco las ideas después del trabajo.*

- J1.1-1.3. Está recapitulando, poniendo en común lo que han hecho los grupos [E, 1].
 - J1.1-1.3(I)1. Para asentar las ideas del trabajo realizado en clase [I, D].
- J1.2-1.3. Pide a los alumnos que verbalicen cómo escribir 3 grupos de 20 y compara sus respuestas [E, 3].
 - J1.2-1.3(I)1. Quiere formalizar lo que verbalizan los alumnos, lo que son 3 grupos de 20 [E, M].

Comentario 2

Está adaptándose a las respuestas de los alumnos, a la notación en rosa que han utilizado, a los grupos que han hecho... Entre todos van a construir el argumento.

- J2.1-1.3. Está construyendo el argumento con los alumnos adaptándose a sus respuestas, a la notación en rosa que han utilizado y a los grupos que han hecho [E, 2].

Comentario 3

Bueno, les está guiando de nuevo; la pregunta esa que les había lanzado al principio... Está intentando ver cómo los alumnos han llegado a ese acuerdo y ver cómo explican el acuerdo al que han llegado. Ella les pone ante alguna contradicción, les pregunta por qué han elegido un método y no otro, por qué este método es bueno, por qué habéis descartado otra estrategia... Me gusta bastante la actividad [se ríe], a ver si la hago yo también. Está muy bien porque va guiándoles para ver cuál es la estrategia óptima, pero no quiere darla y quiere que se lance desde todo el grupo. Ahora está analizando lo que ha hecho un grupo, para ver pros y contras... Y claro, la estrategia no es la óptima... Les tira mucho de la lengua, ¿vale?

- J3.1-1.3. Pregunta a los alumnos a qué acuerdo han llegado [E, 3].

- J3.2-1.3. Pregunta a los alumnos por qué han elegido una estrategia [para reagrupar] y no otra, analizando lo que han hecho [E, 1].
 - J3.2-1.3(I)1. Porque pretende guiarlos para que vean cuál es la estrategia óptima, obteniéndola entre todo el grupo y no dándola ella, viendo los pros y contras de la estrategia que han planteado ellos, la cual no es la óptima [I, M].

Comentario 4

Después de esas preguntas, alguien ha dado un argumento bueno y ella ha parado, no da la solución, sino que sigue preguntando para intentar que entre todos vayan haciendo suya esa buena idea o estrategia que ha habido. Está guiando hacia esa estrategia... Coge la estrategia de un alumno y sigue haciendo preguntas, buscando el porqué.

- J4.1-1.3. Toma la estrategia dada por un alumno, la cual surge tras plantear una serie de preguntas, y continúa preguntando por esa estrategia sin dar la solución [E, 1].
 - J4.1-1.3(I)1. Para tratar de que entre todos los alumnos vayan haciendo suya la idea o estrategia que ha surgido [I, M].

Comentario 5

Bueno, ha terminado recapitulando lo que quería, que fueran viendo cada valor posicional. Está bien porque dice: «bueno, todavía no hemos terminado» [se ríe]. Aún queda trabajo...

- J5.1-1.3. Termina la sesión recapitulando lo que han trabajado, el valor posicional, haciendo ver que aún tienen que trabajar más sobre ello [E, 2].

VÍDEO 2

Comentario 1

Parece un ejercicio que les ha pedido y está analizando un poco una respuesta que ha dado un estudiante, una estrategia que tampoco es óptima de la resolución del ejercicio. Entonces, yo creo que ha explicado cuál ha sido la estrategia de ese alumno, ha dicho cómo se resolvería, en la pizarra, de forma clara, y llega de nuevo al momento en el que se ve que esta estrategia no es óptima. Entonces, se para, pregunta «qué hacemos»... Tiene un tono distendido, está bien. Y bueno, esperamos a ver qué hace [se ríe].

- J1.1-2. Explica en la pizarra cómo se resolvería el ejercicio que ha planteado siguiendo la estrategia que ha propuesto un estudiante [E, 1].
- J1.2-2. Indica que la estrategia planteada por el estudiante no es óptima [E, 2].
- J1.3-2. Emplea un tono distendido al dirigirse a los estudiantes [E, D].

Comentario 2

El problema está ahí, no lo resuelve, vuelve a dejarlo en el aire. Es otra estrategia de otra alumna en la que había que dividir por la base..., está intentando llegar realmente a cómo hacerlo, ¿no? Entonces, esa es otra estrategia de otra alumna, la vuelve a escribir, vuelve a ver las limitaciones... Me veo también reflejado en muchos momentos [se ríe].

- J2.1-2. Escribe otra estrategia dada por una alumna, sin llegar a desarrollarla, que consiste en dividir por la base [E, 2].
 - J2.1-2(I)1. Trata de llegar al modo para hacer el ejercicio viendo varias estrategias propuestas por los alumnos [I, M].

Comentario 3

Les está haciendo pensar el problema, incluso avanza un poco que verán detalles más adelante, pero bueno, está dejando un problema en el aire, lo cual está muy bien en matemáticas. Bueno, en esta puesta en común la idea es construir un poco entre todos, es la manera para que ellos se involucren un poco en resolver el problema, ¿no? Que habría que salir de las recetas..., esta asignatura sí que va mucho de eso, que salgan todas esas recetas que tienen en la cabeza y que las han olvidado y que vean por qué funciona cada una, que puedan hacerlo sin necesidad de acordarse de la receta, que vean cómo funciona todo, ¿no? Entonces, ese trabajo me gusta, es importante. Entonces, está elaborando a partir de lo que va saliendo.

- J3.1-2. Indica contenido que verán más adelante [E, D].

- J3.2-2. Sigue con la puesta en común [de estrategias], elaborando a partir de lo que van proponiendo los alumnos, sin llegar a resolver aún el problema [E, M].
 - J3.2-2(I)1. Porque pretende que todos los alumnos se involucren en la resolución del problema [I, D].
 - J3.2-2(I)2. En matemáticas está bien dejar problemas en el aire y hacer que los alumnos piensen sobre ellos [I, M].
 - J3.2-2(I)3. Esta asignatura trata mucho de ver por qué funcionan las recetas y de que los alumnos puedan hacer los ejercicios sin necesidad de emplearlas, muchas de las cuales ya las han olvidado [I, M].

Comentario 4

De nuevo está cogiendo la idea de un alumno y está elaborando a partir de ella. Involucra también a ese alumno, así los alumnos lo ven más cercano, está abriendo mucho la clase, los alumnos se ven involucrados en las ideas de unos y de otros, alguien va proponiendo una cosa, se va entendiendo entre todos que no funciona esa estrategia... Y esta estrategia, por lo que dice la profesora, «ah, mira, lo voy a apuntar», se nota que es una buena idea; el alumno va a interpretar que ese dato es importante. Además, la profesora empieza a elaborar, el uso de la pizarra está bastante bien, grande... Bueno, de nuevo es bastante lento, sí deja tiempo para pensar, va añadiendo poco a poco los datos para ir resolviendo el problema, haciendo referencia al alumno. Sigamos, vamos a ver el final [se ríe].

- J4.1-2. Dice que va a apuntar la idea de un alumno [para resolver el ejercicio] [E, D].
 - J4.1-2(I)1. Como apunta la idea, esta debe de ser buena y el alumno interpretará que es importante [I, D].
- J4.2-2. Coge de nuevo la idea de un alumno y elabora en la pizarra, escribiendo grande, a partir de ella, añadiendo poco a poco los datos para resolver el problema y dejando tiempo para pensar, involucrando a ese alumno [E, 1].
 - J4.2-2(I)1. Con esa forma de proceder, los alumnos lo ven más cercano, se ven involucrados en las ideas de sus compañeros y van viendo si funcionan las estrategias [I, M].

Comentario 5

Estos argumentos más algebraicos les cuesta mucho, en general. Entonces, bueno, está preguntando todo el rato – aunque hay veces que no, que lo hace ella –, espera que alguien... del

público, iba a decir [se ríe], que algún alumno conteste. Es un solo alumno, parece, entonces, bueno... Cada paso lo está dando un poco algún alumno, no está ella escribiendo el argumento para que ellos lo copien, sino que esas preguntas hacen que ellos piensen y eso ya es un trabajo que hacen, ¿no?, autónomo, lleguen o no..., pero bueno. Hace pausas, lo cual es importante en estos argumentos porque en general les cuesta mucho, ¿vale?, es un alumnado al que esta parte le cuesta mucho, a algunos.

- J5.1-2. Desarrolla los argumentos algebraicos preguntando a los alumnos, aunque a veces los hace ella, y haciendo pausas [E, 2].
 - J5.1-2(I)1. Pretende que los alumnos piensen y realicen un trabajo autónomo, lleguen o no a la solución [I, M].
 - J5.1-2(I)2. A este tipo de alumnado le cuesta mucho desarrollar argumentos algebraicos, por lo que es importante ir preguntando y hacer pausas [I, M].

Comentario 6

Ahí, yo creo, por el murmullo, que los estudiantes iban entendiendo mucho mejor. Ha acelerado la explicación; la está relacionando con la teoría. Se notaba que los alumnos iban siguiéndola, se escuchaban voces que iban asintiendo más, ¿no? Es bastante clara, yo creo, cómo va relacionando, las propiedades que va usando, va recordando cada parte de la teoría... Y luego, sí que lo ha vuelto a relacionar con otro alumno, no sé si era una pregunta anterior..., bueno, una de las varillas..., o a lo mejor fue un error que tuvo un alumno y que ahora yo creo que lo ve claro, ¿no? No sé si lo estoy interpretando bien, no sé si fue de antes... Pero bueno, como ha dicho: «qué pasaba con ese 2^3 , esa cifra que no tenías antes...». Entonces, yo creo que, con esa idea de compartir soluciones y estrategias que hacen los alumnos, después de esta explicación ha quedado..., y él ha asentido, de hecho lo ha contestado él, o sea que... Ahí estaba haciendo también relación al alumno.

- J6.1-2. Acelera la explicación y la relaciona con la teoría, con las propiedades que va usando [E, 2].
- J6.2-2. Pregunta a un alumno qué problema tuvo con la posición del 2^3 [E, 2].

Comentario 7

Ha relacionado también las varillas, algo manipulativo que ellos pueden ver. O sea, que da la teoría con esa visualización o esa parte que también se puede trabajar; todo el rato hace referencia a eso, que está bien. Y luego, esto del youtuber, pero bueno, les ha dado una receta que les da el

youtuber, pero está incidiendo en que el maestro tiene que aprender también el porqué, no aprender una receta.

- J7.1-2. Relaciona en dos ocasiones la teoría con algo manipulativo, con algo que pueden visualizar y con lo que pueden trabajar, como son las varillas [del ábaco vertical] [E, 2].
- J7.2-2. Da una receta [para resolver el ejercicio] que plantearía un *youtuber* [David Calle] [E, 2].
- J7.3-2. Indica que un maestro tiene que aprender por qué funciona la receta [para resolver el ejercicio] [E, 3].

Comentario 8

Ahí, mediante otra pregunta, está viendo si afianza que entender el algoritmo, entender el proceso, es más importante que la receta. Entonces, ha cambiado el..., ha hecho una pregunta y una alumna se ha lanzado... Y bueno, a partir de esa respuesta, intenta que vean eso, ha intentado ver que en ese caso no valdría la receta, ¿no? Les ha vuelto a hacer otra pregunta y yo creo que en este caso una chica ha contestado muy rápido.

- J8.1-2. Plantea una pregunta sobre el algoritmo, sobre la receta vista [para pasar de base 16 a base 2] [E, 1].
 - J8.1-2(I)1. Para hacer ver a los estudiantes que entender el proceso es más importante que saber la receta y que la receta no sirve en todos los casos [I, M].

Comentario 9

No sé si lo han entendido todos [se ríe].

VÍDEO 3

Fragmento 1

Comentario 1

Bueno, son las instrucciones, está bien, me gusta mucho la actividad. Es interesante, relaciona mucho la teoría que han visto, da las órdenes bastante claras, qué es lo que pide de ellos, con el material delante...; en fin, yo creo que queda bastante claro. Después, me ha gustado que deje algo libre, que no lo ha explicado, que ellos lo hagan; esta parte de la tabla, que ellos lo hagan, me parece interesante. La actividad está bien presentada y, bueno, ella va a dejarles que vayan trabajando, poniendo mucho énfasis, que está muy bien, en lo que es el proceso, más que presentarles aquí «esto es un ábaco y juega con él»; lo importante, el trabajo con lo manipulativo tiene que estar relacionado con los aspectos básicos del sistema posicional, de las operaciones..., o sea, que va muy enfocado a que trabajen los conceptos, más que la manipulación de por sí, ¿no? Está comentando algo también sobre las entregas y tal, pero bueno.

- J1.1-3.1. Tiene el material delante cuando da las instrucciones [E, D].
- J1.2-3.1. Pide que hagan una tabla de forma libre, sin decir cómo tiene que ser la tabla [E, 2].
- J1.3-3.1. Pone el énfasis de la actividad en el proceso de las operaciones [E, 3].
 - J1.3-3.1(I)1. Lo importante del trabajo con lo manipulativo es que esté relacionado con los aspectos básicos del sistema posicional, de las operaciones; se pretende un trabajo relacionado con los conceptos, más que con la mera manipulación en sí o con «jugar» con el ábaco [I, M].
- J1.4-3.1. Menciona algo sobre la entrega de la actividad [E, D].

Comentario 2

Lo relaciona con el examen, que es un poco lo que les va a evaluar. En ese sentido, eso les va a poner muy alerta. Las instrucciones son claras, quieren construir un poco esa manera de representar..., también por optimizar en el examen... En principio, la actividad ya está presentada y no ha habido dudas.

- J2.1-3.1. Relaciona lo que van a hacer en clase con lo que les va a pedir en el examen [E, 1].
 - J2.1-3.1(I)1. Para poner a los alumnos alerta [I, D].

Fragmento 2

Comentario 1

Aquí ha visto enseguida que estaban atascados. Yo creo que la alumna sí que sabía..., bueno, estaba intentando seguir el proceso de «tengo que quitar una», pero no había. Entonces, ahí ha tenido que empezar a dar alguna pista; ella, directamente, muy visual, les ha quitado las cuatro primeras y ha dicho: «bueno, ¿y ahora qué hacemos?». Ahí sí que ven la manera de «cómo generamos otra», ¿no? La profesora no contesta, para, está haciendo que el otro alumno también... Pero bueno, han seguido bastante atascados, ha tenido que decir un par de ideas, ¿no? La chica parece que sabe que tiene que ir pasando una, pero todavía no tienen claro qué es pasar una, que se transforme en diez...; todavía no lo tienen muy asentado. De nuevo, parecido a lo otro, ¿no? En cuanto hay alguna idea, «venga, vamos a probarla», ¿no?, se propone una cosa, se ve qué ocurre, si ve que no llegan, dirige; apoya mucho eso, ¿no?, «a ver, ¿cómo hacemos?», se queda en silencio, dan una idea y les dice que tiren por ahí a ver qué tal; está guiando para que lleguen.

- J1.1-3.2. Pregunta: «¿ahora qué hacemos?, tras quitar las cuatro primeras directamente [E, 1].
 - J1.1-3.2(I)1. Porque los alumnos estaban atascados [I, D].
- J1.2-3.2. Guía a los alumnos a partir de las ideas que proponen, dando tiempo para que las exploren, sin dar la respuesta [E, 1].

Comentario 2

Aquí ya lo han encontrado [lo dice sin parar el vídeo].

Comentario 3

Está relacionándolo siempre con la parte algebraica, la representación del número, su equivalencia con la posición y con la representación numérica, ¿no? Trabaja siempre con una razón, el material con un sentido, le tiene que dar un sentido a entender la estructura de los números.

- J3.1-3.2. Relaciona la representación del número [en el ábaco] con la parte algebraica, con la posición, con la representación numérica [E, 3].
 - J3.1-3.2(I)1. Porque pretende emplear el material con un sentido para que los alumnos entiendan la estructura de los números [I, M].

Comentario 4

En el fondo ella va preguntando, ellos son quienes al final van a responder. Ahí, la cara del chaval está diciendo que lo ha visto, ¿no? Ha intervenido para desatascar ese momento, pero han llegado a entenderlo. No sé esta chica que está de espaldas [se ríe].

- J4.1-3.2. Va preguntando a los alumnos, sin dar la respuesta [E, 1].
 - J4.1-3.2(I)1. Para desatascar a los alumnos [I, D].

Comentario 5

Les pregunta que hagan el razonamiento entero, les hace una pregunta para que lo vuelvan a hacer, que vean cómo ha sido el proceso. Más o menos lo tenían un poco, pero formalizarlo y verbalizarlo..., poco a poco, ella ha ayudado un poquito ahí..., está afianzando un poco ese proceso. La chica esta ha visto esa relación con cómo lo hace en el papel, que es muy mecánico; al principio, no le ha visto relación, pero luego ya sí. Está bien.

- J5.1-3.2. Pregunta a los alumnos por el proceso que han seguido para resolver el ejercicio [E, 2].
 - J5.1-3.2(I)1. Para que los alumnos formalicen y verbalicen el razonamiento que han seguido y puedan afianzar el proceso [I, M].

Fragmento 3

Comentario 1

En la explicación, de nuevo, va pidiendo la participación de los alumnos, es decir, lo plantea de manera visual, pero hace que algún alumno vaya dándole los pasos que va escribiendo.

- J1.1-3.3. Plantea de manera visual la explicación [E, 1].
- J1.2-3.3. Pide la participación de los alumnos, pide que vayan dando los pasos que va a ir escribiendo [E, 1].

Comentario 2

Ahí, por ejemplo, ha escrito algo que no estaba bien en el fondo esperando que algún alumno le corrigiese de alguna manera. Sigue con un proceso muy natural y espera un poco... y algún alumno le ha... Y bueno, le refuerza; toda la clase va siguiendo el hilo, ellos van corrigiéndole a ella, ella les corrige a ellos...

- J2.1-3.3. Escribe [en la pizarra] algo que no estaba bien en el fondo y espera [E, 1].
 - J2.1-3.3(I)1. Porque esperaba que algún alumno lo corrigiese [E, D].

Comentario 3

Bueno, en esta parte de la explicación ha estado relacionando bastante bien lo que es la operación con la parte visual. Lo va haciendo bastante claro, yo creo, ha parado después de cada explicación, ha preguntado si lo entendían, si había dudas; parece que está todo bastante claro en los dos casos. Y luego, lo está relacionando con la parte más simbólica del algoritmo. En principio, aquí la explicación está siendo una explicación normal.

- J3.1-3.3. Relaciona, en esta parte de la explicación, la operación, la parte más simbólica del algoritmo, con la parte visual [E, 2].
- J3.2-3.3. Pregunta a los alumnos, después de cada explicación, si lo han entendido, si hay dudas [E, D].

Comentario 4

Bueno, en cuanto al estilo, remarca muchas veces lo importante con la voz. Yo creo que está bien porque cuando remarca las cosas importantes, para, remarca bastante bien. De nuevo, pregunta, hay un momento en el que cambia, ¿no?, la llevada o no... Ha preguntado, ha visto que alguien ha contestado enseguida, con lo cual yo creo que parecía claro que veían la diferencia. Está remarcando mucho la correspondencia entre las tres. A mí me está quedando claro [se ríe].

- J4.1-3.3. Remarca lo importante con la voz [E, D].

- J4.2-3.3. Pregunta por el cambio [E, 1].
- J4.3-3.3. Hace ver que [la suma] incluye llevadas [E, 2].
- J4.4-3.3. Remarca la correspondencia entre las tres [E, 2].

Comentario 5

Yo creo que ahora ha recapitulado. Les ha comentado la tabla; yo pensaba que iba a trabajar con ellos porque les había ofrecido que ellos hicieran esa tabla, pero no ha habido un trabajo de ver cómo se les había ocurrido a ellos o no; yo creo que la tabla la quería trabajar ahora, yo creo que darles un poco la tabla..., bueno, lo había entendido mal, que trabajaran ellos un poco de qué manera podríamos representar en una tabla... Entonces, bueno, la recapitulación que ha hecho está muy bien porque le da un sentido a todo lo que están haciendo y de alguna manera le da un porqué, el trabajo de primaria con el problema concreto, cómo lo van formalizando para visualizarlo, el potencial que tiene visualizarlo, y luego al final el porqué de esa tabla. Le da un poco sentido a eso que van a hacer, a eso que les va a pedir en el examen, etcétera. Ha recapitulado y luego ha dicho lo de Singapur, ha entrado en esa tabla, le está dando propiedades, etcétera.

- J5.1-3.3. Recapitula hablando del trabajo en primaria con el problema concreto, de su formalización para visualizarlo y del porqué de la tabla [E, 1].
 - J5.1-3.3(I)1. Para dar un sentido a lo que se ha hecho en clase y a lo que les va a pedir en el examen [I, D].
- J5.2-3.3. Menciona el método Singapur [E, 2].

Comentario 6

Esta parte es muy interesante, relacionarlo con su práctica es muy importante. Ver la idea que tienen ellos de cómo han trabajado hasta ahora, porque es darle una vista muy distinta, ¿no? Les ha preguntado de nuevo qué pensaban..., les ha englobado..., les ha hecho el cuadro más grande, que es la idea. Creo que está muy bien, que vean un poco lo que trabajarán luego con los alumnos y cómo han trabajado y todo lo que hay detrás, ¿no? Le da otra visión.

- J6.1-3.3. Pregunta a los alumnos cómo lo han trabajado hasta ahora [en primaria] [E, 1].
 - J6.1-3.3(I)1. Relacionar lo visto en clase con su práctica [cuando estudiaron en primaria] es muy importante porque se le da al alumno una visión muy distinta y se le hace ver lo que trabajarán luego con los alumnos [como maestros] y todo lo que hay detrás [I, M].

ANEXO 13

Eventos e interpretaciones de Lucas en la fase 1

Nota 1: Cada evento e interpretación se presenta junto con el comentario del que se ha extraído, así como con la etiqueta que lo identifica y el código que se le ha asignado. No obstante, no todos los comentarios presentan eventos o interpretaciones, bien por no contener ninguno, bien por haberse trasladado la información al respecto a otro comentario que aborde el mismo asunto, por lo que algunos eventos e interpretaciones pueden contener información de comentarios distintos del que acompañan. La traslación de información entre comentarios no se indica para no complejizar el documento.

Nota 2: El texto presentado entre corchetes en algunos eventos e interpretaciones se corresponde con información incluida por el investigador.

VÍDEO 1

Fragmento 1

Comentario 1

Vale, explica a los alumnos qué es lo que tienen en la mesa y para qué lo van a necesitar a lo largo de la tarea.

- L1.1-1.1. Explica a los alumnos qué es lo que tienen en la mesa y que lo van a necesitar a lo largo de la tarea [E, 1].

Comentario 2

Está motivando un poco el problema. Está contando una historia de los palillos para intentar que los alumnos se sientan atraídos por la actividad que van a hacer. Es como la consigna que ella da inicial antes de empezar la actividad que contextualiza un poco lo que van a hacer. Y se ha inventado pues la historia del Supeco y del Mercadona.

- L2.1-1.1. Está dando la consigna inicial [E, 1].
- L2.2-1.1. Contextualiza lo que van a hacer los alumnos, motivando el problema a través de la historia inventada de los palillos del Supeco y del Mercadona [E, 2].
 - L2.2-1.1(I)1. Para intentar que los alumnos se sientan atraídos por la actividad [I, D].

Comentario 3

Bueno, ahí claramente informa a los alumnos de dónde ha sacado la actividad para que no piensen que es una actividad que ella se ha inventado y que es una actividad pues que está contrastada y que viene publicada en un libro. Y bueno, simplemente les informa sobre ello. Primero la contextualiza y después informa de que la actividad es una actividad que es válida, porque está publicada, y que se hace en varias escuelas o en varias Universidades de Educación Primaria. Esto claramente es Matemáticas I y va a hablar del número.

- L3.1-1.1. Informa a los alumnos de dónde ha sacado la actividad, indicando que se emplea en varias Universidades en las que se imparte el grado de Educación Primaria [E, 2].
 - L3.1-1.1(I)1. Para que no piensen que es una actividad que ella se ha inventado y que vean que es una actividad contrastada, que es válida porque está publicada [I, D].
- L3.2-1.1. Va a hablar del número [E, 3].
 - L3.2-1.1(I)1. Por lo tanto, la asignatura que se imparte es Matemáticas I [I, M].

Comentario 4

Bueno, a lo largo de todo este paso está dando la estrategia que tienen que seguir los grupos para resolver el problema. Cuando está dando la estrategia, aunque la va leyendo de un guion que tiene en el ordenador, pues no mira al ordenador, mira a los alumnos y escenifica con las manos, que es importante cuando uno está dando una clase, no tener las manos guardadas en los bolsillos, ni tener las manos puestas encima de la mesa; ella va explicando, cuando habla de escribir pues mueve la mano, como que está escribiendo; es decir, que tiene como una conversación con el grupo-clase.

- L4.1-1.1. Está dando la instrucción que tienen que seguir los grupos para resolver el problema, leyéndola en el ordenador [E, 1].
- L4.2-1.1. Escenifica con las manos, haciendo como que escribe cuando habla de escribir, al dirigirse al grupo-clase [E, D].

Comentario 5

Vale, hasta aquí no tengo más que decir; lo que te he comentado antes.

Fragmento 2

Comentario 1

Bueno, aquí los alumnos están dando una argumentación de por qué ellos han organizado..., bueno, son dos grupos que están juntos ya y están dando una argumentación de por qué han agrupado los palillos con la gomitas amarillas y azules. Entonces la profesora les pregunta, se da cuenta de que no es muy inteligente esa agrupación que han hecho y les está haciendo reflexionar sobre que esa agrupación quizá no es la agrupación óptima, aunque no parecen muy convencidos de la explicación que la profesora está dando al respecto.

- L1.1-1.2. Hace ver a los alumnos, mediante preguntas, que la agrupación que han hecho alumnos no es muy inteligente, que no es la óptima [E, 1].

Comentario 2

Bueno, ahí la profesora intenta llevar un poco también la conversación de los alumnos a lo que ella busca. Entonces, ella lo que busca es que la notación de decena y unidad tenga que ver con las agrupaciones que han hecho con los palillos. Entonces, se da cuenta que en uno de los folios hay anotado un número y entonces intenta comprobar que esa agrupación que han hecho los alumnos de los palillos tiene algo que ver con la noción del sistema numérico decimal, que es a lo que ella lo quiere extrapolar al final; no sé si muy exitosamente.

- L2.1-1.2. Trata de comprobar, a través de preguntas, que la agrupación de los palillos que han hecho los alumnos tiene algo que ver con la noción del sistema numérico decimal, con la notación de decena y unidad, con el número que han anotado [E, 3].

Comentario 3

Bueno, ahí hace un comentario para que sean conscientes de que lo han agrupado fatal. Entonces ellos son conscientes y son conscientes de que tienen que volverlo a hacer porque no son capaces, sin volver a contar los palillos, de ver cuántos palillos hay en cada una de las cuerdas, ¿no?

- L3.1-1.2. Hace un comentario a los alumnos [E, 1].
 - L3.1-1.2(I)1. Para que sean conscientes de que lo han agrupado fatal [I, M].

Fragmento 3

Comentario 1

Bueno, ahora el objetivo de Nuria es encontrar diferentes descomposiciones del 87. En este caso quiere poner el 87 en función de los grupos utilizando productos y sumas. Entonces está viendo «¿cuántas gomas tenéis de 20?», «¿pues tenéis 3?», pues el objetivo es poner « $3 \times 20 + \dots$ », pues tendrá que ver si tienen alguna de 10, alguna de 5..., y me imagino que su objetivo inicial es descomponer 87 de varias formas en función de los agrupamientos que hayan hecho los diferentes grupos.

- L1.1-1.3. Está descomponiendo el 87, preguntando a los alumnos por los agrupamientos que han hecho, comenzando con los 3 grupos de 20 [E, 3].
 - L1.1-1.3(I)1. Su objetivo debe de ser descomponer el 87 de varias formas en función de los agrupamientos que han hecho los diferentes grupos, utilizando productos y sumas con el fin de llegar a expresiones como « 3×20 » [I, M].

Comentario 2

Se escucha ahí antes a un alumno que no tiene mucha idea de la jerarquía de las operaciones, «ahí tienes que poner un paréntesis», se le escucha de fondo.

Comentario 3

Ahora intenta hacerles ver que quizá para comprender mejor la notación del número lo más lógico hubiese sido que hubiesen hecho agrupaciones de 10. Entonces, si hubiesen hecho agrupaciones de 10, pues quizá verían que en el 87 tendrían 8 grupos de 10 y tendrían 7 palillos sueltos y en el 90 pues tendrían 9 agrupaciones de 10; y que quizá eso tendría más sentido porque tendría más relación con el concepto de número escrito en el sistema de numeración decimal. Ahí intenta llegar, yo creo, con su explicación y con las preguntas que les lanza. Les intenta hacer ver que hacer grupos de 20 y hacer grupos de 9..., no van a ver, haciendo ese tipo de agrupaciones, de dónde sale el 8 y de dónde sale el 7 del 87.

- L3.1-1.3. Explica a los alumnos que con las agrupaciones que han hecho, con grupos de 20 y de 9, no van a ver la relación con el 8 ni con el 7 del 87, por lo que no verán la relación con el concepto de número escrito en el sistema de numeración decimal [E, 3].
 - L3.1-1.3(I)1. Para que los alumnos comprendan mejor la notación del número, lo más lógico sería hacer agrupaciones de 10, así se vería que en

el 87 hay 8 grupos de 10 y 7 palillos sueltos, mientras que en el 90 hay 9 grupos de 10 [I, M].

Comentario 4

Y con este diálogo, pues el objetivo final, imagino, de la profesora es que los alumnos lleguen a..., que lleguen por ellos mismos a la idea de que si todos tuviésemos un criterio para saber cómo organizar los palillos, el conteo –al unir los grupos– sería más fácil. Como no había un consenso –unos los hicieron de 20, otros los hicieron de 9, otros los hicieron de 10–, pues entonces cuando se juntan los grupos pues tienen que reagrupar. Entonces, si todos supiésemos que tenemos que hacer paquetes de 10 o paquetes de 100 o paquetes de 1000, pues entonces todos hubiésemos contado rápidamente los palillos; para eso surge el sistema numérico decimal, la base 10, ¿no?, que es a lo que ella va a llegar al final, imagino.

- L4.1-1.3. Mantiene un diálogo con los alumnos [E, 1].
 - L4.1-1.3(I)1. Para que los alumnos lleguen por ellos mismos a la idea de que si todos tuviésemos el mismo criterio para organizar los palillos, el conteo al unir los grupos sería más fácil; para eso surge el sistema numérico decimal, la base 10 [I, M].

VÍDEO 2

Comentario 1

Bueno, la profesora está borrando la pizarra para dejar la pizarra limpia antes de empezar la clase [lo dice sin parar el vídeo].

- L1.1-2. Está borrando la pizarra [E, D]
 - L1.1-2(I)1. Para tener la pizarra limpia antes de empezar la clase [I, D].

Comentario 2

Está explicando una forma de hacer un cambio de base [lo dice sin parar el vídeo].

- L2.1-2. Está empezando a explicar una forma de hacer un cambio de base [E, 1].

Comentario 3

Aunque el vídeo comienza antes de que ella le lance la pregunta a este chico, pues antes de explicar cómo se pasa de base 16 a base 2, es decir, de una base a otra base, pues está, imagino, haciendo una lluvia de preguntas. Entonces ha preguntado a un alumno y hay un alumno que le ha debido de decir que para pasar de base 16 a base 2 pues se pasa elemento a elemento. Entonces ella ha intentado hacerle ver que es posible, pero es muy largo.

- L3.1-2. Intenta hacer ver a un alumno que su propuesta de pasar de una base a otra, de base 16 a base 2, de elemento a elemento es posible, pero que sería muy largo [E, 3].
 - L3.1-2(I)1. Ha debido de hacer antes una lluvia de preguntas para ver cómo pasar de una base a otra [I, D].

Comentario 4

Está argumentando que el razonamiento de la chica sería válido pero que en la práctica no se hace [lo dice sin parar el vídeo].

- L4.1-2. Está argumentando que el razonamiento de la alumna sería válido pero que en la práctica no se hace [E, 2].

Comentario 5

Vale, continúa con la lluvia de preguntas para ver si los alumnos..., alguno de ellos se va aproximando cada vez más al procedimiento genérico, que es el que ella va a contar [lo dice sin parar el vídeo].

- L5.1-2. Continúa con la lluvia de preguntas [E, M].

- L5.1-2(I)1. Para ver si los alumnos se van aproximando cada vez más al procedimiento genérico [I, M].

Comentario 6

Bueno, está siguiendo un poco el argumento del chico, transformándolo ella a lo que le interesa para que los alumnos empiecen a ver que descomponiendo el 16 en potencias de 2 va a poder pasar fácilmente al final de base 16 a base 2, por eso lo ha escrito en la pizarra. Los argumentos anteriores eran más..., no los va a utilizar, y por eso ha escrito poco o no ha escrito. Y ahora ha decidido borrar la pizarra y escribirlo bien porque detecta que le puede valer para la explicación que ella va a hacer final.

- L6.1-2. Escribe en la pizarra el argumento que ha dado un alumno, descomponer 16 en potencias de 2, transformándolo y desarrollándolo más que los argumentos dados antes por otros estudiantes [E, 2].
 - L6.1-2(I)1. Porque le puede valer para que los alumnos vean cómo pasar fácilmente de base 16 a base 2 [I, M].
- L6.2-2. Descompone el 16 en potencias de 2 [E, 3].

Comentario 7

Bueno, está buscando escribir lo que ella quiere con la «ayuda» [hace el gesto de las comillas con las manos] de los alumnos, que algo aportan. Está haciéndoles creer que son ellos los que están dando la respuesta, cuando realmente está explicando ella la conversión por el método que ella quiere [lo dice sin parar el vídeo].

- L7.1-2. Está escribiendo y explicando la conversión con ayuda de los alumnos [E, 1].
 - L7.1-2(I)1. Aunque esté haciendo creer a los alumnos que están dando ellos la respuesta, lo está haciendo como ella quiere [E, D].

Comentario 8

Vale, continuamente cuando hace referencias en la pizarra busca la complicidad de los alumnos y va señalando en la pizarra mientras escribe; es una técnica bastante habitual de cualquier profesor de matemáticas que escribe en la pizarra, ir señalando en la pizarra y buscar la complicidad de los alumnos para escribir lo que uno quiere escribir en el fondo.

- L8.1-2. Va preguntando a los alumnos cuando va señalando en la pizarra lo que escribe [E, D].

- L8.1-2(I)1. Es una técnica bastante habitual de cualquier profesor de matemáticas que escribe en la pizarra, ir señalando en la pizarra y buscar la complicidad de los alumnos, ir preguntándoles [I, M].
- L8.1-2(I)2. En el fondo escribe lo que quiere escribir [I, D].

Comentario 9

Bueno, ahora les está dando un truquito, el truquito..., que dudo mucho que los alumnos lleguen a comprender el porqué, pero que les puede servir para realizar el ejercicio de forma rápida, y es que cada vez que haya que pasar de base 16 a base 2, basta con descomponer el número en potencias de 16, pasar el primer número a base 2, y los primeros 4 dígitos serán los primeros 4 dígitos del número y los últimos 4 serán los últimos 4 del número, puesto que 16 es 2^4 . Lo que pasa es que ese argumento que ella intenta trasladar posiblemente se quede en el algoritmo que pueda aprender el alumno para hacerlo rápido porque no van a entender lo que subyace detrás de ese paso rápido de la base 16 a la base 2.

- L9.1-2. Está dando a los alumnos el truquito: cada vez que haya que pasar de base 16 a base 2, basta con descomponer el número en potencias de 16, pasar el primer número a base 2, y los primeros 4 dígitos serán los primeros 4 dígitos del número, y los últimos 4 serán los últimos 4 del número, puesto que 16 es 2^4 [E, 3].
 - L9.1-2(I)1. Ese argumento que ella intenta trasladar posiblemente se quede en el algoritmo que pueda aprender el alumno para hacerlo rápido porque no van a entender lo que subyace detrás de ese paso rápido de la base 16 a la base 2 [I, M].

Comentario 10

Bueno, es positivo que no le valga [lo dice sin parar el vídeo].

- L10.1-2. Dice que no le vale [la receta] [E, 1].

Comentario 11

¿Vale para pasar de base 8 a base 2? A lo mejor debería haberlo comentado. ¿Vale para pasar de base 4 a base 2? ¿Vale para pasar de base 32 a base 2?

Comentario 12

¿Y de base 15 a base 2? Ahí ya tiene que buscar otra técnica [lo dice sin parar el vídeo].

Comentario 13

Hay un porcentaje importante de la clase que posiblemente se haya perdido en todo este razonamiento porque ahí hay mucha suma y mucha potencia y..., pues estos chavales de Matemáticas y su Didáctica I pues todavía no están muy ágiles en las propiedades de los números y de las potencias; posiblemente se hayan perdido en esta argumentación, hace falta hacer muchos más ejemplos.

Comentario 14

Madre mía [se ríe; lo dice sin parar el vídeo].

Comentario 15

Intenta extrapolar, ellos han visto una técnica y ellos creen que esta técnica vale para pasar cualquier número en cualquier base a base 2, y no es válido. Imagino que el objetivo de ella ahora es explicar que este procedimiento solamente sirve para pasar números en bases potencias de 2 a base 2.

- L15.1(i)-2. Evento implícito en el comentario [E, 1].
Transcripción del vídeo: ¿Qué pasa si yo esto [el ejercicio] os lo doy en base 15 y, en vez de en base 16, todo el problema es en base 15?
 - L15.1(i)-2(I)1. Intenta hacer ver a los alumnos que esa técnica o procedimiento no vale para pasar cualquier número en cualquier base a base 2, sino que solamente sirve para pasar números en bases que sean potencias de 2 a base 2 [I, M].

Comentario 16

Pues no [lo dice sin parar el vídeo].

Comentario 17

Bueno, ahí ha concluido y ha aumentado el tono de voz para dejar claro que de toda su argumentación..., es decir, lo que acaba de decir importante, importante, es esto; este procedimiento solo vale cuando uno pasa de una base a otra siempre y cuando la primera es potencia – y por eso lo ha dicho en alto – de la otra.

- L17.1-2. Concluye diciendo que este procedimiento solo vale cuando uno pasa de una base a otra siempre y cuando la primera es potencia de la otra [E, 3].
- L17.2-2. Aumenta el tono de voz [E, D].

- o L17.2-2(I)1. Para dejar claro que, de toda su argumentación, lo realmente importante es lo que acaba de decir [I, D].

Comentario 18

Quizá... Eh... Lleva 13 minutos – no es una crítica, simplemente una argumentación –, es un vídeo en el que lleva 13 minutos realizando un ejercicio; quizá, podría en esos 13 minutos haber hecho 2 o 3, dándoles menos juego a los alumnos, hacer por ejemplo el mismo paso que ha hecho de base 16 a base 2, hacer un paso de base 8 a base 2 y justificar por qué no puede pasar de base 15 a base 2, en vez de dar tanto pie a los alumnos – que ha ralentizado quizá mucho el desarrollo del ejercicio –, podría haber hecho 3 ejercicios en estos 13 con 56 minutos que llevamos.

- L18.1-2. Lleva 13 minutos realizando un solo ejercicio [E, D].

Comentario 19

Bueno, pregunta: «¿está claro?», se da cuenta de que no e imagino que sigue haciendo ejercicios al respecto [se ríe].

- L19.1-2. Pregunta a los alumnos si está claro [E, D].

VÍDEO 3

Fragmento 1

Comentario 1

Pues igual prácticamente que en el vídeo 1, está explicando en qué consiste el ejercicio, ha escrito en la pizarra, para que se quede ahí escrito, los tres materiales con los que quiere que se representen y está diciendo lo que prevé que va a aparecer y lo que no quiere que aparezca, que es encontrar el resultado y no encontrar el procedimiento en los materiales.

- L1.1-3.1. Está explicando en qué consiste el ejercicio, indicando los tres materiales con los que quiere que representen [las operaciones] [E, 2].
- L1.2-3.1. Dice que quiere que representen el procedimiento, no el resultado [E, 3].

Comentario 2

Bueno, pues nada, ha dejado escritos en la pizarra pues los tres métodos con los que quiere que representen las restas, en este caso. Como prevé que alguno de ellos pues cuando pase un rato va a decir: «¿y cómo más había que representarlo?», pues por eso lo ha escrito, lo ha dejado escrito en la pizarra para que no se olvide. Y bueno, insiste, ¿no?, dentro del tabular, pues que como les deja la vía libre para que lo hagan como quieran, pues les explica que no usen muchos números, ¿no?, que intenten hacerlo de forma gráfica que es como ella al final lo va a intentar explicar.

- L2.1-3.1. Plasma en la pizarra toda la explicación que ha dado sobre la actividad [E, D].
 - L2.1-3.1(I)1. Para que los alumnos no olviden los métodos que tienen que utilizar [I, D].
- L2.2-3.1. Explica un segundo método con el que quiere que los alumnos representen las operaciones [E, 2].
- L2.3-3.1. Explica un tercer método con el que quiere que los alumnos representen las operaciones, consistente en una representación tabular, indicando que pueden hacerlo como quieran [E, 2].
- L2.4-3.1. Dice que prefiere una forma tabular más gráfica frente a una en la que usen números [E, M].

Comentario 3

Bueno, ahí da respuesta a la pregunta típica de «esto lo estamos haciendo, pero está claro que no lo puedes preguntar en el examen, ¿no?, ¿cómo me vas a preguntar esto?, para que yo sepa cómo

estudiármelo», bueno, pues se anticipa y explica cómo lo va a preguntar para que, sabiendo ellos cómo va a ser evaluado, sepan ellos qué necesitan hacer, si necesitan hacer un vídeo, si necesitan tomar apuntes..., para luego podérselo estudiar en su casa, puesto que no van a tener los materiales en sus casas.

- L3.1-3.1. Explica cómo va a preguntar en el examen lo que están viendo [E, 1].
 - L3.1-3.1(I)1. Se anticipa a la pregunta típica de los alumnos para que sepan qué necesitan hacer, como grabar un vídeo o tomar apuntes, para poder estudiar en casa, ya que no tendrán los materiales [I, D].

Comentario 4

Bueno, ha acabado la parte 1, esta parte 1 es la explicación de la actividad.

Fragmento 2

Comentario 1

Bueno, los chavales no sé si han llamado a la profesora o la profesora se ha acercado a la mesa para ver si son capaces de hacer esa suma con el ábaco. Y bueno, ellos no saben hacer la suma y ella les está dando pistas para que sepan hacerla; en concreto, les está dando pistas para saber cómo quitar fichas en una varilla en la que no hay fichas, les está diciendo que escriban el número de otra forma, que escriban el 700 pues quitando una de las centenas y poniendo 10 en las decenas y después tendrán que quitar una de las decenas y poner 10 en las unidades y entonces ya podrán quitar. Porque la otra chica lo que le dice es: «no puedo quitar más»; pues ella le está dando la estrategia que tienen que seguir, les está dando pistas sobre la estrategia que tienen que seguir para poder hacer la resta.

- L1.1-3.2. Está dando pistas a un grupo de alumnos al que se ha acercado sobre la estrategia que han de seguir para hacer la resta en el ábaco y poder quitar fichas en una varilla en la que no hay fichas, diciéndoles que escriban el 700 de otra forma [E, 3].
 - L1.1-3.2(1)1. Para que escriban 700 quitando una de las centenas y poniendo 10 en las decenas y luego quitando una de las decenas y poniendo 10 en las unidades [I, M].

Comentario 2

La chica ya ha llegado a lo que tiene que hacer, le ha costado, le ha costado un poquito, pero ya ha llegado [se ríe]. Bueno, no ha llegado todavía, todavía no tiene unidades. A ver si sabe extrapolar, Nuria intentará que sepa extrapolar lo que ha hecho de las centenas a las decenas, de las decenas a las unidades [lo dice sin parar el vídeo].

Comentario 3

Bueno, parece que sí, que la chica ha sabido extrapolar en este caso [lo dice sin parar el vídeo].

Comentario 4

Bueno, ella ahora lo que intenta es que los alumnos le den una explicación matemática de lo que han hecho, es decir, que ella intenta sacarles que han escrito el número en una representación distinta que les permite hacer la resta, es decir, que diferentes escrituras del mismo, o diferentes representaciones gráficas del mismo en el ábaco, pues representan el mismo número y algunas de ellas les permiten hacer la resta. Entonces, vamos a ver qué es lo que dice al final el chico.

- L4.1-3.2. Pide a los alumnos una explicación matemática de lo que han hecho [E, 2].
 - L4.1-3.2(I)1. Para que vean que el número en una representación distinta les permite hacer la resta, es decir, que diferentes escrituras o diferentes representaciones gráficas del mismo en el ábaco representan el mismo número y algunas de ellas les permiten hacer la resta [I, M].

Comentario 5

Bueno, la chica ahora ha soltado que cuando ella resta en el papel pues no hace esto, bueno, pues habrá que ver qué cree ella que hace cuando lo hace en el papel [se ríe].

Fragmento 3

Comentario 1

Bueno, pues como en los ejemplos anteriores, ella está buscando la complicidad de los alumnos, es decir, ella está buscando que entre todos los alumnos pues le digan cómo ella tiene que proceder, siempre escribiendo lo que ella quiere.

- L1.1-3.3. Va preguntando a los alumnos cómo tiene que proceder [E, 1].
 - L1.1-3.3(I)1. Porque busca la complicidad de los alumnos para escribir en realidad lo que ella quiere [I, D].

Comentario 2

Bueno, cuando ha pintado la bola correspondiente al 5 en las decenas la ha coloreado. Da igual colorearla o no colorearla, ¿no?, pero yo hubiese actuado igual ya para todas, pues ya cuando pinto la bola de las centenas que vale 5 también la coloreo, es decir, la pongo negra si vale 5 para distinguirlas – aunque está arriba, se nota que está arriba, que vale 5 –, pero para que no surja la duda de «¿por qué la de arriba no está coloreada en las centenas y sí está coloreada en las decenas?».

- L2.1-3.3. Colorea la bola correspondiente al 5 en las decenas [E, M].

Comentario 3

Hace algo muy bien que es poner los bloques multibase..., los de 100 debajo de los de 100, los de 10 debajo de los de 10..., porque ahora pues hace un círculo en cada uno de ellos y basta con contar para tener el 753; lo hace intencionalmente desde el principio.

- L3.1-3.3. Pone los bloques multibase de tal forma que los de 100 están debajo de los de 100, los de 10 están debajo de los de 10... [E, 3].
- L3.2-3.3. Hace un círculo a los bloques de 100, a los de 10..., llegando así al 753 [I, M].

Comentario 4

Bueno, ahora intenta que asocien que la suma que se hace normalmente con el algoritmo pues en el fondo es utilizar el sistema numérico decimal con las potencias de 10. Y bueno, hace alusión a la propiedad conmutativa y a la asociativa, aunque posiblemente ahora mismo ahí los alumnos no saben muy bien qué está diciendo, pero lo que realmente está diciendo es que el 2 lo agrupo con el 5 y multiplicaría al 10^2 , es decir, que podríamos sacar factor común ese 10^2 y multiplicar el $2 + 5$.

Es decir, eso que a ella ahora mismo no le interesa..., pues ha soltado así el nombre de las propiedades pues para que los alumnos sepan realmente por qué puedo hacer esa suma.

- L4.1-3.3. Realiza la suma empleando el sistema numérico decimal con las potencias de 10 [E, 2].
 - L4.1-3.3(I)1. Porque quiere que los alumnos asocien la suma que se hace normalmente con el algoritmo con el sistema numérico decimal con las potencias de 10 [I, M].
- L4.2-3.3. Hace alusión a la propiedad conmutativa y a la asociativa [E, 2].
 - L4.2-3.3(I)1. Para que los alumnos sepan realmente por qué se puede hacer esa suma, que sería lo que los alumnos entenderían como sacar factor común [I, M].

Comentario 5

Bueno, ahora está viendo las diferencias, está haciendo alusión a la diferencia entre el ejemplo 1 y el ejemplo 2, es decir, les está dejando ya claro que..., bueno, que los alumnos ya lo han hecho, ¿no?, pero les está dejando claro que no ha puesto dos ejemplos iguales. Ha puesto un ejemplo en el que no se pasa de 10 ningún dígito en la suma y ha puesto otro en el que sí, y entonces se las habrán tenido que apañar cuando han hecho las sumas con el material, pues como antes con el ábaco, para transformar el número en otra representación del mismo que les permita dar el resultado final de la suma.

- L5.1-3.3. Hace ver las diferencias entre las dos sumas, en una no se pasa de 10 ningún dígito y en otra sí se pasa y tiene que transformar el número [E, 2].

Comentario 6

Bueno, pues ahí les está explicando pues qué nombre tendrían los sistemas de representación en forma tabular. Imagino que no insistirá sobre ello, pero simplemente para que les suene y, como sí ha dicho, el que va a pedir es el sistema de representación tabular-gráfico.

- L6.1-3.3. Está explicando a los alumnos el nombre de un sistema de representación en forma tabular [E, 2].
- L6.2-3.3. Está explicando a los alumnos el nombre de un segundo sistema de representación en forma tabular [E, 2].

Comentario 7

Bueno, ahora les está explicando la secuencia didáctica que a su juicio sería la idónea para explicar las sumas, utilizando materiales para finalmente llegar a realizar la suma numéricamente.

- L7.1-3.3. Está explicando a los alumnos la secuencia didáctica que sería idónea para explicar las sumas, utilizando materiales para finalmente llegar a realizar la suma numéricamente [E, 3].
 - L7.1-3.3(I)1. Pretende que cuando los alumnos expliquen las sumas en primaria no empleen directamente el algoritmo, sino los materiales vistos, si es que disponen de ellos, ya que lo considera importante [I, M].

Comentario 8

Lo repite, porque está repitiendo otra vez lo mismo, porque lo considera importante; que cuando expliquen sumas en primaria, pues que no lo hagan directamente con el algoritmo, sino que utilicen estos materiales, si es que disponen de ellos.

Comentario 9

Y ahora pues a lo que irá es a que posiblemente no hayan trabajado ellos nunca con materiales o muy poco con materiales y que posiblemente, pues por esa razón, pues la chica de antes decía que cuando ella restaba no hace lo mismo que hace con el ábaco.

- L9.1(i)-3.3. Evento implícito en el comentario [E, 1].

Transcripción del vídeo: ¿Cómo habéis trabajado mayoritariamente vosotros en primaria cuando estabais haciendo sumas de este estilo?

 - L9.1(i)-3.3(I)1. A lo que irá es a que posiblemente no hayan trabajado nunca o muy poco con materiales [I, M].

ANEXO 14

Eventos e interpretaciones de Pablo en la fase 1

Nota 1: Cada evento e interpretación se presenta junto con el comentario del que se ha extraído, así como con la etiqueta que lo identifica y el código que se le ha asignado. No obstante, no todos los comentarios presentan eventos o interpretaciones, bien por no contener ninguno, bien por haberse trasladado la información al respecto a otro comentario que aborde el mismo asunto, por lo que algunos eventos e interpretaciones pueden contener información de comentarios distintos del que acompañan. La traslación de información entre comentarios no se indica para no complejizar el documento.

Nota 2: El texto presentado entre corchetes en algunos eventos e interpretaciones se corresponde con información incluida por el investigador.

VÍDEO 1

Fragmento 1

Comentario 1

Aquí estoy detectando una actividad de enseñanza; está explicando la actividad que quiere hacer con ellos con la intención de que la realicen correctamente; está explicando la actividad, está dando las instrucciones.

- P1.1-1.1. Está explicando lo que van a hacer [E, D].

Comentario 2

Está continuando con las instrucciones y está indicando los materiales que van a utilizar. Todo es explicación de la actividad de momento.

- P2.1-1.1. Indica los materiales que van a utilizar en la actividad [E, 1].

Comentario 3

Está contextualizando la actividad en una situación cotidiana para intentar motivar a los alumnos y captar su interés.

- P3.1-1.1. Contextualiza la actividad en una situación cotidiana [E, 2].
 - P3.1-1.1(I)1. Para intentar motivar a los alumnos y captar su interés [I, D].

Comentario 4

Es una actividad de enseñanza, está dando una referencia bibliográfica y justificando por qué es buena para ellos; esto lo detecto como una práctica de enseñanza.

- P4.1-1.1. Está dando una referencia bibliográfica, justificando por qué es buena para los alumnos [E, 1].

Comentario 5

Aquí ha habido muchas cosas. Ha planteado la actividad; ha indicado los objetivos; ha indicado con mucha libertad cómo hacer la actividad para luego comparar métodos entre unos grupos y otros... Y la justificación es..., lo que ha dicho, el trabajo con el numeral. Y la metodología, en ese sentido, entiendo que es adecuada, que está dejando libertad a todos los grupos para trabajar de distintas formas para luego comparar las distintas técnicas que ha elaborado cada uno para ver cuál es mejor y cuál es peor.

- P5.1-1.1. Plantea la actividad [E, 1].
- P5.2-1.1. Indica el objetivo [E, 1].
- P5.3-1.1. Indica que los grupos de alumnos tendrán que comparar las técnicas que hayan empleado para realizar la actividad [E, 1].
 - P5.3-1.1(I)1. Para ver qué técnica es mejor y cuál es peor [I, M].
- P5.4-1.1. Dice que van a trabajar con el numeral [E, 3].

Fragmento 2

Comentario 1

Ahí está abriendo un debate entre los distintos métodos que han utilizado los grupos para que puedan los alumnos comparar las distintas estrategias que han usado y reflexionar sobre cuál es mejor y cuál tiene alguna deficiencia.

- P1.1-1.2. Pregunta a los alumnos por los métodos que ha utilizado cada grupo [E, 1].
 - P1.1-1.2(I)1. Para que los alumnos puedan comparar las distintas estrategias que han usado y reflexionar sobre cuál es mejor y cuál tiene alguna deficiencia [I, M].

Comentario 2

Está haciendo reflexionar al grupo sobre el método que ha utilizado y haciéndoles reflexionar sobre si es lo mejor o no.

Comentario 3

Está, digamos, reexplicando la actividad; por lo visto, los alumnos no habían entendido todos los detalles de la actividad y está reexplicando algún detalle para que los alumnos mejoren su táctica de conteo.

- P3.1-1.2. Está volviendo a explicar algún detalle de la actividad [E, 1].
 - P3.1-1.2(I)1. Porque los alumnos no habían entendido todos los detalles de la actividad [I, D].
 - P3.1-1.2(I)2. Para que los alumnos mejoren su táctica de conteo [I, M].

Comentario 4

Ahí está intentando relacionar nuestro sistema numérico decimal con la técnica de conteo que están utilizando los alumnos, intentando que reflexionen sobre los dos métodos que están utilizando, tanto el de los alumnos como nuestro sistema numérico decimal.

- P4.1-1.2. Relaciona la técnica de conteo empleada por los alumnos con la representación en el sistema numérico decimal [E, 2].

Fragmento 3

Comentario 1

Está ahora comparando los distintos métodos de conteo de los grupos y viendo la dificultad que tienen en la representación al no haber usado todos los grupos un criterio común.

- P1.1-1.3. Pregunta por los distintos métodos de conteo que han empleado los grupos de alumnos, poniendo de manifiesto las dificultades que tienen en la representación al no haber usado todos los grupos un criterio común [E, 2].

Comentario 2

En este momento está haciendo reflexionar a los alumnos sobre el valor que tienen las cifras de nuestro sistema numérico decimal y que no tienen ninguna relación con las técnicas de conteo que han utilizado ellos para contar los palillos.

- P2.1-1.3. Explica a los alumnos que no hay relación entre nuestro sistema numérico decimal y las técnicas de conteo que han utilizado para contar los palillos [E, 2].
 - P2.1-1.3(I)1. Para que los alumnos reflexionen sobre el valor que tienen las cifras de nuestro sistema numérico decimal [I, M].

Comentario 3

Aquí, en todo este proceso, está haciendo reflexionar a los alumnos sobre nuestro sistema numérico decimal; les está preguntando por qué es más fácil sumar de 10 en 10 que de 9 en 9. Todo esto está relacionado con todas las agrupaciones que están haciendo y las que van a hacer ahora para sumar los dos grupos de palillos.

- P3.1-1.3. Está preguntando a los alumnos por qué es más fácil sumar de 10 en 10 que de 9 en 9, haciéndoles ver la relación con nuestro sistema numérico decimal [E, 3].
 - P3.1-1.3(I)1. Para que los alumnos reflexionen sobre nuestro sistema numérico decimal y las distintas agrupaciones que están haciendo para sumar los palillos [I, M].

VÍDEO 2

Comentario 1

Aquí está planteando el problema. El problema es pasar un número de base 16 a base 2 y está buscando el método más eficiente de hacerlo.

- P1.1-2. Está planteando el problema, que consiste en pasar un número de base 16 a base 2 [E, 2].
 - P1.1-2(I)1. Debe de estar buscando el método más eficiente de hacerlo [al no tener que pasar por base 10] [I, M].

Comentario 2

Está haciendo reflexionar a los alumnos sobre que una cosa es resolver un problema y otra es resolverlo de una forma eficiente o eficaz.

- P2.1-2. Explica a los alumnos que una cosa es resolver un problema y otra es resolverlo de una forma eficiente o eficaz [E, 2].

Comentario 3

Está planteando una propuesta de una alumna y está haciendo reflexionar sobre si sabríamos hacerlo o no, las dificultades que tiene ese método, que puede ser válido, pero las dificultades que tiene hacerlo y si merece la pena explorar ese camino.

- P3.1-2. Plantea una propuesta que ha hecho una alumna [E, 1].
- P3.2-2. Comenta que la propuesta de la alumna puede ser un método válido, así como las dificultades del mismo [E, 3].

Comentario 4

Está intentando que los alumnos descubran la forma de pasar de base 16 a base 2, está intentando que descubran el método. Aquí yo creo que está avanzando un poquito, es decir, no les está haciendo dar estos pasos ellos mismos, no sé si es porque lo han trabajado antes o no, pero yo aquí me habría esperado a que los alumnos hubiesen llegado a este tipo de expresión ellos solos.

- P4.1-2. Intenta que los alumnos descubran el método para pasar de base 16 a base 2 [E, M].
- P4.2-2. Lleva a cabo los pasos de la resolución sin hacer que sean los alumnos quienes lo resuelvan [E, 1].
 - P4.2-2(I)1. Quizá porque han trabajado el tema anteriormente [I, D].

Comentario 5

En todo este proceso está realizando la transformación aritmética para resolver el problema. Lo está haciendo despacio, con todos los pasos, justificando todos los pasos e intuyo que ahora va a dejar que los alumnos intenten descubrir el resultado final después de estos procedimientos aritméticos.

- P5.1-2. Está realizando la transformación aritmética para resolver el problema, llevando a cabo todos los pasos despacio y justificando cada uno de ellos [E, 2].

Comentario 6

Aquí ha hecho una anotación importante, está relacionando todo esto con el instrumento del ábaco, que supongo que lo habrán trabajado anteriormente.

- P6.1-2. Relaciona en una ocasión el desarrollo aritmético con el ábaco [E, 3].
 - P6.1-2(I)1. Porque habrán trabajado con el ábaco anteriormente [I, D].

Comentario 7

Todo este procedimiento está relacionado con la propiedad distributiva, que también se habrá estudiado antes, y ahora está intentando ver los problemas que les habrán surgido a los alumnos al realizar este procedimiento, por eso le está preguntando a un alumno qué le ha ocurrido.

- P7.1-2. Relaciona el procedimiento de resolución con la propiedad distributiva [E, 3].
 - P7.1-2(I)1. Porque habrán estudiado antes la propiedad [I, D].
- P7.2-2. Pregunta a un alumno qué problema le ha surgido al realizar este procedimiento [E, 1].

Comentario 8

Aquí, en todo el último minuto, lo que está haciendo es algo que solemos hacer mucho los profesores de matemáticas, que es anticiparnos a problemas que..., o explicar a los alumnos problemas frecuentes que pueden suceder, como aquí es que no aparezca una determinada potencia en este cambio de base, y decirles cómo se resuelve esa situación habitual.

- P8.1-2. Explica a los alumnos cómo se resuelve que en este cambio de base no aparezca una determinada potencia [E, 2].
 - P8.1-2(I)1. Anticiparnos y explicar a los alumnos problemas frecuentes que pueden surgir es algo que los profesores de matemáticas solemos hacer mucho [I, M].

Comentario 9

Aquí utiliza una especie de motivación con un personaje que para ellos es conocido para captar la atención de los alumnos.

- P9.1-2. Menciona a un personaje [David Calle] conocido por los alumnos [E, 1].
 - P9.1-2(I)1. Para motivar a los alumnos y captar su atención [I, D].

Comentario 10

Está criticando los métodos de una persona relevante en el mundo de las matemáticas de los alumnos, criticando un método porque obviamente no justifica, es decir, solo da lo que se llaman «recetas». Entonces está diciendo a los alumnos que no caigan en las recetas en sí, sino en la justificación de por qué esos resultados son así, que profundicen en sus conocimientos de matemáticas, en por qué eso es así, no solo cómo se hace, sino por qué se hace así.

- P10.1-2. Indica que a ella no le valdría el método sin justificación que podría dar cierta persona relevante en el mundo de las matemáticas de los alumnos [E, 2].
 - P10.1-2(I)1. Porque quiere que los alumnos no caigan en las «recetas», sino en la justificación de los resultados, que profundicen en sus conocimientos de matemáticas, no solo en cómo se hacen las cosas, sino en por qué se hacen así [I, M].

Comentario 11

Ahora está replanteando el problema, ha hecho un cambio en el problema para que los alumnos reflexionen con ese cambio si se podría resolver de la misma forma o no.

- P11.1-2. Está replanteando el problema haciendo un cambio en el mismo [E, 1].
 - P11.1-2(I)1. Para que los alumnos reflexionen sobre si el problema se podría resolver del mismo modo tras el cambio [I, M].

Comentario 12

En este momento está justificando lo que ha dicho anteriormente, por qué hay que profundizar sobre los métodos de cambio de base y no quedarse con recetas que solo son válidas en determinados casos.

- P12.1-2. Está justificando por qué las «recetas» solo son válidas en determinados casos, por qué hay que profundizar en los métodos de cambio de base [E, 1].

VÍDEO 3

Fragmento 1

Comentario 1

Ahora está planteando la actividad, está planteando lo que van a hacer.

Comentario 2

Está relacionando distintos instrumentos, supongo que será el objetivo de la actividad, está relacionando una misma actividad con tres métodos para realizarla.

- P2.1-3.1. Presenta la actividad y su objetivo, que es emplear tres métodos o instrumentos para resolver la actividad planteada [E, 1].

Comentario 3

Está haciendo hincapié, como en el vídeo anterior, en que lo importante es el procedimiento, no solo el resultado final.

- P3.1-3.1. Está haciendo hincapié en que lo importante es el procedimiento, no solo el resultado final [E, 3].

Comentario 4

Está dando alternativas a la realización de una determinada actividad, aunque ahora parece, donde lo hemos cortado, que ella tiene mayor preferencia por una de las dos, pero bueno, está dando alternativas de cómo puede ser la tabla.

- P4.1-3.1. Está dando opciones sobre cómo puede ser la tabla que tienen que hacer en la actividad [E, 2].
- P4.2-3.1. Muestra preferencia por una de las tablas [E, M].

Comentario 5

Está indicando ahora mismo cómo los alumnos pueden sacar provecho de esta práctica. Aparte de la realización..., pues bueno, no está pidiendo que se lo manden, pero sí que es importante que ellos recuerden y está dándoles las alternativas de que se hagan un vídeo o una foto para recordar eso.

- P5.1-3.1. Indica a los alumnos que pueden grabar un vídeo o hacer fotos a los procesos de la práctica para poder recordar lo que hagan y que les sirva para estudiar [E, D].

- P5.2-3.1. Indica a los alumnos que no tienen que enviarle el trabajo que realicen en clase [E, D].

Fragmento 2

Comentario 1

Está justificando cómo se hace el algoritmo de la resta; al hilo de lo que decía antes, no basta con la regla, sino que hay que justificar por qué esa regla es así y lo está haciendo con el ábaco vertical y solucionando los problemas que están teniendo los grupos de alumnos con la resta que les ha puesto.

- P1.1-3.2. Está tratando de solucionar los problemas que tienen los alumnos con la resta [E, 1].
 - P1.1-3.2(I)1. Pretende hacer ver que no basta con saber la regla para restar, sino que hay que justificar el algoritmo de la resta, para lo cual se apoya en el ábaco vertical [I, M].

Comentario 2

Aquí está mostrando las equivalencias entre centenas y decenas y, posteriormente, imagino que mostrará la equivalencia entre decenas y unidades.

- P2.1-3.2. Está incidiendo en las equivalencias entre centenas y decenas [E, 3].

Comentario 3

Ahora Nuria está haciendo reflexionar a todos los alumnos sobre el procedimiento para comprobar si realmente han entendido todo lo que han hecho.

- P3.1-3.2. Está preguntando a los alumnos sobre el procedimiento que han seguido [E, 2].
 - P3.1-3.2(I)1. Para que los alumnos reflexionen y para comprobar si realmente han entendido todo lo que han hecho [I, D].

Comentario 4

Aquí le está haciendo reflexionar a la alumna sobre lo que hace ella en papel y lo que significa numéricamente lo que hace ella en papel.

- P4.1-3.2. Pide a una alumna que le explique cómo es el proceso, numéricamente, que sigue cuando lo hace en papel [la resta] [E, 1].

Fragmento 3

Comentario 1

Está intentando resolver una suma y está dejando a los alumnos que lo vayan planteando ellos solos. Solo les está haciendo una indicación de cómo deben representarlo gráficamente en un ejercicio escrito para que quede clara la representación. Pero está dejando que ellos lleven la resolución del ejercicio.

- P1.1-3.3. Está intentando resolver una suma, indicando cómo representarla gráficamente en un ejercicio escrito [E, 2].
- P1.2-3.3. Deja que sean los alumnos quienes vayan planteando su resolución [E, 1].

Comentario 2

Está mostrando distintas alternativas de cómo indicar esa suma gráficamente en la pizarra, indicando preferencia de algunas representaciones a la hora de ser más eficiente.

- P2.1-3.3. Está mostrando distintas alternativas para indicar la suma gráficamente en la pizarra [E, 1].

Comentario 3

Aquí está haciendo la relación entre lo simbólico y lo manipulativo para que entiendan el valor del material y su relación con lo simbólico, que es a lo que están acostumbrados ellos a trabajar.

- P3.1-3.3. Está relacionando lo simbólico con lo manipulativo [E, 2].
 - P3.1-3.3(I)1. Para que los alumnos entiendan el valor del material y su relación con lo simbólico, que es con lo que están acostumbrados a trabajar [I, M].

Comentario 4

Aquí ha hecho lo mismo, pero con bloques multibase. Está haciendo la traducción del simbólico al manipulativo con bloques multibase y está haciendo hincapié en el hecho de que en esta suma en concreto no es necesario agrupar.

- P4.1-3.3. Está haciendo la traducción entre el [registro] simbólico y el manipulativo con bloques multibase [E, 3].
- P4.2-3.3. Está haciendo hincapié en que en la suma realizada no es necesario agrupar [E, 2].

Comentario 5

En todo este proceso está reflexionando sobre el valor posicional de cada cifra en nuestro sistema de numeración; cómo resolver esa suma de una forma menos eficiente, pero sí recalcando el valor posicional de cada cifra.

- P5.1-3.3. Está explicando cómo resolver la suma, recalcando el valor posicional de cada cifra en nuestro sistema de numeración [E, 2].

Comentario 6

Ahora está relacionando los cuatro métodos con los que ha realizado la suma y justificando que, obviamente, sale el mismo resultado, pero de formas distintas.

- P6.1-3.3. Está relacionando los cuatro métodos con los que ha realizado la misma suma, haciendo ver que se obtiene el mismo resultado [E, 3].

Comentario 7

Ahora está planteando el problema de una suma donde hay que agrupar, hay que agrupar unidades, hay que agrupar decenas, o lo que toque, y el significado que tiene lo que los alumnos saben como «llevarse una», qué significa eso, cómo se resolvería.

- P7.1-3.3. Está explicando que en esta suma hay que hacer agrupamientos en las unidades [E, 2].
 - P7.1-3.3(I)1. Para ver el significado que tiene lo que los alumnos conocen como «llevarse una» [I, M].

Comentario 8

Aquí está explicando la transición de todo lo que va desde lo contextual, una situación cotidiana cómo se puede traducir a un lenguaje manipulativo, simbólico, tabular... Está relacionando todas las situaciones con las que ha trabajado en esta clase.

- P8.1-3.3. Está relacionando todas las situaciones trabajadas en esta clase, explicando la traducción o transición desde lo contextual, desde una situación cotidiana, hacia un lenguaje manipulativo, simbólico, tabular... [E, 3].

Comentario 9

Está haciendo que los alumnos recuerden sus métodos para ver cómo les enseñaron a ellos y si fue la mejor forma o no, si se puede mejorar la forma como les enseñaron a ellos. Y anteriormente, que no lo he dicho, ha hecho referencia al método Singapur para que les suene y tengan referencia de

cómo se trabaja con ese método, cuál de estos escenarios es el que más se asemeja al método Singapur.

- P9.1-3.3. Pregunta a los alumnos qué métodos que les enseñaron [en primaria, para sumar] [E, 1].
 - P9.1-3.3(I)1. Para ver si fue la mejor forma o no y si se puede mejorar el modo que les enseñaron [para sumar] [I, M].
- P9.2-3.3. Hace referencia al método Singapur [E, 2].
 - P9.2-3.3(I)1. Para que les suene y sepan cómo se trabaja en ese método, cuál de los escenarios vistos se asemeja más a dicho método [I, M].

ANEXO 15

Eventos e interpretaciones de Raquel en la fase 1

Nota 1: Cada evento e interpretación se presenta junto con el comentario del que se ha extraído, así como con la etiqueta que lo identifica y el código que se le ha asignado. No obstante, no todos los comentarios presentan eventos o interpretaciones, bien por no contener ninguno, bien por haberse trasladado la información al respecto a otro comentario que aborde el mismo asunto, por lo que algunos eventos e interpretaciones pueden contener información de comentarios distintos del que acompañan. La traslación de información entre comentarios no se indica para no complejizar el documento.

Nota 2: El texto presentado entre corchetes en algunos eventos e interpretaciones se corresponde con información incluida por el investigador.

VÍDEO 1

Fragmento 1

Comentario 1

Vale, te cuento. Está proponiendo una actividad. Está comentando lo que van a hacer y hasta ese momento pues es lo más natural. Se comenta, vamos a hacer esto, aquí tenéis el material y esto es lo que vamos a hacer. Hasta ahí, ¿vale?

- R1.1-1.1. Explica un poco a los alumnos lo que tienen que hacer [E, D].
- R1.2-1.1. Presenta el material que van a usar [E, 1].

Comentario 2

Vale, les acaba de explicar un poquito en qué consiste y lo que tienen que trabajar, ¿vale? Lo normal... Lo que yo he observado es que lo ha relacionado mucho con una actividad natural del día a día. Lo ha trasladado pues a cualquier sitio que habitualmente los alumnos pueden ir y eso les... Vamos a ver, cómo te lo voy a explicar yo... Les conecta más con su entorno más inmediato, ¿vale?, entonces, si tú en clase cuando vas a plantear una actividad partes de los intereses de los alumnos y de su entorno y ellos identifican una actividad habitual que suelen hacer, si voy a tal sitio..., pues están más receptivos y abiertos a la actividad, ¿vale?

- R2.1-1.1. Explica un poco en qué consiste lo que tienen que trabajar [E, 1].

- R2.2-1.1. Relaciona lo que tienen que hacer con una actividad natural del día a día, con cualquier sitio al que habitualmente pueden ir los alumnos, con su entorno más inmediato [E, 2].
 - R2.2-1.1(I)1. Porque así, partiendo de sus intereses y de su entorno, están más receptivos y abiertos a la actividad [I, D].

Comentario 3

Vale, eh... Acaba de marcar el objetivo para que los alumnos sepan realmente para qué les va a servir esa sesión y qué se pretende sacar en concreto de esa sesión. Les acaba de marcar..., la finalidad de esta actividad es que consigáis tal cosa, ¿vale?

- R3.1-1.1. Acaba de marcar el objetivo de la actividad [E, 1].
 - R3.1-1.1(I)1. Para que los alumnos sepan realmente para qué les va a servir esa sesión y qué se pretende sacar en concreto de la misma [I, D].

Comentario 4

Vale, les acaba de repetir por segunda vez todo lo que tienen que ir haciendo. Habitualmente se enmarca, se van diciendo las actividades, primero hacéis esto, luego esto, luego esto..., y se asegura por segunda vez, repitiendo otra vez todos los pasos, que los alumnos lo han escuchado y lo han entendido, ¿vale?

- R4.1-1.1. Acaba de repetir por segunda vez a los alumnos todos los pasos que tienen que ir haciendo [E, D].
 - R4.1-1.1(I)1. Para asegurarse de que los alumnos lo han escuchado y lo han entendido [I, D].
 - R4.1-1.1(I)2. Es habitual enmarcar [lo que se va a hacer], ir diciendo las actividades a realizar, establecer el orden de lo que hay que hacer... [I, D].

Comentario 5

Y termina diciendo el tiempo que tienen de trabajo, ¿vale?

- R5.1-1.1. Termina diciendo el tiempo que tienen de trabajo [E, D].

Fragmento 2

Comentario 1

Están trabajando en cooperativo. Entonces, cuando se trabaja en grupos cooperativos, después de mandar todas las tareas que tienen que hacer, la profesora se va rotando por los grupos, depende de la actividad, en este caso ella va rotando por los grupos comprobando si ellos están interpretando bien y pueden llegar a alcanzar bien el objetivo que ella les ha propuesto al principio. Entonces, dialoga con ellos, porque ella ha percibido que ha habido un pequeño error, pero no se lo dice, sino que lo que intenta es que sean ellos los que organicen de nuevo para que consigan hacerlo solos, que no sea ella, es decir, «no está así, se hace así». Lo que pretende es que sean ellos, ¿vale?

- R1.1-1.2. Está trabajando en grupo [E, D].
 - R1.1-1.2(I)1. Cuando se trabaja en grupos cooperativos, la profesora va rotando por los grupos para comprobar si los alumnos han interpretado bien lo que tienen que hacer y pueden llegar a alcanzar el objetivo que se les ha propuesto [I, D].
- R1.2-1.2. Hace preguntas a los alumnos, detecta un error que han cometido y lo pone de manifiesto, pero sin explicar exactamente cómo han de proceder [E, 1].
 - R1.2-1.2(I)1. Con las preguntas pretende que sean los propios alumnos los que se organicen para resolver ellos solos la actividad [I, D].

Comentario 2

Claro, al final les hace preguntas para hacerlos razonar y entender, es decir, «dónde ha estado vuestro error», pero siempre de forma positiva se lo suele decir, que es lo normal. «Vosotros pensáis que tal...». Entonces es positiva a la hora de hablar con ellos, les ayuda a razonar y a que se pongan de acuerdo, que se detecta que no ha habido un buen acuerdo en el grupo, por eso no ha funcionado. Ella lo ha detectado, pero se acerca e intenta que ellos lo puedan solventar, ¿vale?

- R2.1-1.2. Habla a los alumnos de forma positiva, haciendo que razonen [E, D].

Fragmento 3

Comentario 1

Ahí ha dicho 9 y, si te has dado cuenta, lo ha dicho un poco más fuerte de lo normal, porque están hablando entre ellos. Entonces, ella lo ha hecho para volver a captar la atención, ¿vale? Entonces, cuando se cambia el tono de esa manera, que no se grita pero se cambia el tono, la intención es que vuelvan a captar y la atiendan y la escuchen a ella.

- R1.1-1.3. Ha dicho 9 un poco más fuerte de lo normal [E, D].
 - R1.1-1.3(I)1. Para volver a captar la atención de los alumnos que están hablando [I, D].

Comentario 2

Vale, en esta parte, está muy bien porque luego por grupos les está preguntando y está sintetizando y llegando a la conclusión para ver si ellos realmente han adquirido el objetivo que se estaba trabajando en la clase. Entonces, la mejor manera es que sean los alumnos los que vayan aportando toda esa síntesis y ese razonamiento, ¿vale?

- R2.1-1.3. Está preguntando a los alumnos por grupos, tratando de llegar a la conclusión [E, 1].
 - R2.1-1.3(I)1. Para que los alumnos sinteticen y razonen el trabajo realizado y poder comprobar así si han adquirido el objetivo de la clase [I, D].

VÍDEO 2

Comentario 1

Vale, eh... Está intentando sacar de los alumnos que ellos solos lleguen al razonamiento de cómo se puede realizar eso, ¿vale? Entonces, ella habla de tal manera que sean ellos los que razonen, «si yo sé hacer esto y sé hacer esto, ¿cómo puedo yo llegar a conseguir lo que ella me está pidiendo?», ¿vale?

- R1.1-2. Pregunta a los alumnos por los razonamientos que llevarían a cabo para realizar lo que se les pide [E, M].
 - R1.1-2(I)1. Para que sean los propios alumnos quienes lleguen por ellos mismos al modo de conseguir lo que se les plantea [I, D].

Comentario 2

Visualmente les está organizado a los niños [a los futuros maestros] la información, ¿vale? Depende del contenido, del concepto que se trabaje, pues la forma más adecuada para que ellos se organicen y puedan llegar a entender es visualizárselo y esquematizárselo. Es lo que yo estoy viendo.

- R2.1-2. Organiza visualmente la información a los niños [a los futuros maestros] [E, 1].
 - R2.1-2(I)1. La esquematización, atendiendo al contenido o concepto que se trabaje, es la forma más adecuada para que los alumnos se organicen y puedan llegar a entender lo que se trabaje [I, D].

Comentario 3

Cuando ha escrito 11, ella ha empezado a escuchar a un alumno y ha sido él quien lo ha iniciado, pero ella ha detectado que le estaba costando y ha sido ella la que ha terminado. Y en esta parte, ha dejado que sea un alumno en voz alta el que vaya marcando y ella ha ido escribiendo; también ella sabía que eso le iba a costar menos trabajo, ¿vale?

- R3.1-2. Escribe lo que un alumno le va diciendo en voz alta cuando escribe el 11 [su desarrollo], siendo ella quien termina [E, 1].
 - R3.1-2(I)1. Porque detecta que le está costando trabajo al alumno [I, D].

Comentario 4

Les ha dado la introducción para llegar a aquí [señala en la pantalla 1×2^7 y 0×2^0] y ahora ellos lo han visto y son ellos los que van sacando. Pero ella les ha dado el inicio, ¿vale?, ha arrancado y ha tirado de ellos, ¿vale?

- R4.1-2. Da a los alumnos la introducción para llegar a eso [1×2^7 y 0×2^0], dejando que continúen ellos [E, 1].

Comentario 5

Vale, les acaba de recordar la estrategia que ha usado, ¿vale? Aunque no les ha preguntado a ellos qué estrategia o qué..., pero... ¿vale? Pero sí es bueno comentarlo, porque son conceptos que ellos tienen, pero muchas veces se escapan. Dice: «pues aquí, aplicamos otra vez esta propiedad», ¿vale?

- R5.1-2. Recuerda a los alumnos la propiedad que ha usado [E, 2].
 - R5.1-2(I)1. Es bueno recordarlo porque son conceptos que tienen los alumnos, pero que muchas veces se les escapan [I, M].

Comentario 6

Les acaba de resumir todo el proceso, es como una síntesis, qué hemos aprendido, qué hemos sacado de todo esto. Se lo acaba de verbalizar todo el proceso seguido, ¿vale?

- R6.1-2. Acaba de resumir a los alumnos de forma verbal todo el proceso que han seguido, en forma de síntesis [E, 1].

Comentario 7

Vale, eh... Insiste mucho, insiste en si lo entienden, lo vuelve a explicar y lo vuelve a explicar, que es bastante importante. Cuando se dan unas clases, al final de matemáticas, primero recibe mucho de ellos, ve que lo están comprendiendo, y al final vuelve a insistir, esto, esto y esto, ¿vale?

- R7.1-2. Pregunta a los alumnos si lo han entendido tras explicarlo varias veces [E, D].
 - R7.1-2(I)1. Cuando se dan clases de matemáticas, es importante asegurarse de que los alumnos van comprendiendo [I, M].

VÍDEO 3

Fragmento 1

Comentario 1

Me gusta porque lo importante es que si los niños entienden el proceso, el concepto lo tienen más que adquirido. Entonces, si un profesor consigue que sus alumnos entiendan todo el proceso, que es de lo que se trata, van a ser unos buenos formadores, unos buenos profesores. Si yo simplemente aprendo y hago la suma, ¿cómo consigo yo transmitir cómo se hace la suma? Entonces, esta parte está muy..., me parece muy buena esta parte, ¿vale?

- R1.1-3.1. Pide a los alumnos que se centren en el proceso de la suma [E, 3].
 - R1.1-3.1(I)1. Si un profesor consigue que sus alumnos entiendan el proceso, adquirirán el concepto y podrán ser buenos profesores; si solo sé hacer la suma, sin entender el proceso, no puedo transmitir cómo hacerla [I, M].

Comentario 2

Está fomentando la creatividad de los alumnos, ¿vale? Ahí es creatividad a tope, si lo tienes bien adquirido y lo puedes llegar a conseguir. Porque cuanto más creativos sean, más se va a sacar de ellos, ¿vale?

- R2.1(i)-3.1. Evento implícito en el comentario [E, 1].

Transcripción del vídeo: La tabla [escribe en la pizarra] puede ser más gráfica, puede tener características gráficas, o puede tener características más simbólicas; a mí me va a interesar más la que tenga características más gráficas, luego ya veremos en detalle cómo, pero tenéis que intentar construirlo vosotros sin que yo os haya hablado de eso explícitamente, ¿vale?

 - R2.1(i)-3.1(I)1. Se fomenta la creatividad de los alumnos; cuanto más creativos sean, más se puede sacar de ellos [I, D].

Fragmento 2*Comentario 1*

Vale. Como veía que le estaba costando mucho trabajo, le ha ayudado; normal. Le ha ayudado a razonar, a ver qué podemos hacer y tal. Y cuando han terminado y lo han visto bien, ha ido otra vez para atrás y dice: «pues ahora me volvéis a explicar lo que habéis hecho», ¿vale?

- R1.1-3.2. Ayuda a un alumno a razonar mediante preguntas [E, 1].
 - R1.1-3.2(I)1. Porque veía que le estaba costando mucho trabajo [I, D].
- R1.2-3.2. Pide a los alumnos, una vez que han terminado y lo han entendido, que le expliquen lo que han hecho [E, 2].

Fragmento 3

Comentario 1

Vale. Cuando los niños aprenden, como primero se utiliza muchísimo el material manipulativo, si la estructura del material manipulativo se corresponde con la forma simbólica, a los niños luego no les cuesta trabajo hacer esa transcripción. Por eso, se lo está explicando muy bien. Ese es el proceso que tienen que seguir, ¿vale?

- R1.1-3.3. Está explicando la correspondencia entre la estructura del material manipulativo y la representación simbólica [de la operación] [E, 2].
 - R1.1-3.3(I)1. Cuando los niños aprenden, como primero se utiliza muchísimo el material manipulativo, si la estructura del material manipulativo se corresponde con la forma simbólica, a los niños luego no les cuesta trabajo hacer esa transcripción [I, M].

Comentario 2

Después de mostrarles las diferentes formas, cuando les está explicando la otra [suma, con agrupamientos] se lo está remarcando y lo está dejando muy claro para evitar confusiones, que los alumnos tengan las cosas claras, ¿vale? Además lo remarca bastante, ¿vale?, insiste mucho.

- R2.1-3.3. Explica otra forma, remarcando mucho sus características [E, 1].
 - R2.1-3.3(I)1. Para que los alumnos no tengan confusiones, para que tengan las cosas claras [I, D].

Comentario 3

Ahí, simplemente está poniendo de manifiesto el proceso de aprendizaje de los niños en primaria, ¿vale?, y les está haciendo ver a ellos que tienen que llegar a ese proceso. Ellos, sus alumnos, se tienen ahora mismo que situar como si fueran alumnos pequeños. Entonces, yo necesito aprender, y ella tiene que enseñarles todo ese proceso, porque es ese proceso mismo el que ellos tienen que llegar luego a aprender. Y es que lo está..., se lo está transmitiendo y se lo está vivenciando la verdad es que... espectacular, ¿eh?, me ha gustado mucho.

- R3.1-3.3. Está poniendo de manifiesto el proceso de aprendizaje de los niños en primaria [E, 2].

ANEXO 16

Listado de *call-outs*

VÍDEO 1

Fragmento 1

C1-1.1. Presenta el material manipulativo con el que los alumnos van a trabajar: palillos y cintas elásticas.

C2-1.1. Establece una restricción en el uso del material: la cantidad de palillos es fija, mientras que la cantidad de cintas elásticas no lo es.

C3-1.1. Contextualiza la actividad planteando que hay que comprobar si la cantidad de palillos que hay en cierta caja es la que se indica en la misma.

C4-1.1. Hace alusión a conocimientos previos de Matemáticas de Ciencias Sociales: el contraste de hipótesis.

C5-1.1. Introduce la actividad a realizar: estimar y contar cuántos palillos hay repartidos en clase.

C6-1.1. Presenta un libro que utilizan en Estados Unidos para formar a profesores de primaria y que contiene muchas actividades para llevar al aula.

C7-1.1. Menciona el contenido matemático que van a trabajar: el número.

C8-1.1. Enuncia el objetivo de la actividad: entender el desarrollo de la escritura de los números en nuestro sistema de numeración.

C9-1.1. Establece la primera instrucción de la consigna: organizar los palillos, empleando las cintas elásticas si son de ayuda, para saber cuántos hay de un vistazo.

C10-1.1. Establece la segunda instrucción de la consigna: reflexionar sobre si hay una correspondencia entre los grupos de palillos hechos y la escritura de los números que representan la cantidad total de palillos.

C11-1.1. Establece la tercera instrucción de la consigna: juntar los palillos cada dos grupos y saber cuántos hay en total.

C12-1.1. Establece la cuarta instrucción de la consigna: juntar todos los palillos de la clase y saber cuántos hay en total de una forma ágil, sin tener que contarlos de nuevo.

C13-1.1. Induce a la reflexión sobre la correspondencia entre la escritura de los números y los grupos de palillos haciendo ver que 72 se escribe con un 7 y un 2.

Fragmento 2

C1-1.2. Pregunta a los alumnos qué agrupaciones habían hecho antes de juntarse los dos grupos de alumnos y si han tenido que llegar a algún acuerdo al juntar los palillos de ambos grupos, incidiendo así en la primera y en la tercera instrucción de la consigna.

C2-1.2. Hace ver, tras preguntar cuántos palillos tienen las agrupaciones con gomas amarillas, que no es útil que con un mismo color se hagan agrupaciones de 15 o 20 palillos indistintamente, agrupaciones distintas, ya que de ese modo no se puede saber cuántos palillos hay visualmente, incidiendo así en la primera instrucción de la consigna.

C3-1.2. Hace ver que en la consigna no se establecía la restricción de que no se pudieran quitar las gomas al juntarse dos grupos de alumnos, es decir, se permitía reorganizar las agrupaciones de palillos.

C4-1.2. Hace hincapié en la correspondencia entre la escritura del número y los grupos de palillos que habían hecho, planteando si el 8 y el 5 del 85 estaban representados en las agrupaciones, incidiendo así en la segunda instrucción de la consigna.

C5-1.2. Pregunta a los alumnos si ha ayudado que cada grupo hiciera agrupaciones distintas a la hora de ponerlas en común, incidiendo así en la tercera instrucción de la consigna.

Fragmento 3

C1-1.3. Pregunta a un grupo de alumnos cuántos palillos tenía antes de juntarse con otro grupo, y escribe en la pizarra que son 87, incidiendo así en la primera instrucción de la consigna.

C2-1.3. Dice que emplea la escritura estándar de nuestro sistema de numeración en nuestro contexto.

C3-1.3. Pregunta cómo puede escribir en la pizarra 3 grupos de 20, que es la agrupación que había hecho un grupo de alumnos.

C4-1.3. Indica que el color de las gomas no sirve para representar agrupaciones, tras preguntar a los alumnos si todos habían usado gomas rosas para los grupos de 20, haciendo ver que no todos los alumnos han empleado el mismo color para la misma agrupación.

C5-1.3. Pregunta si escribe 9 grupos de 3 o 3 grupos de 9.

C6-1.3. Escribe en la pizarra la descomposición que han hecho los alumnos del número 87, empleando grupos de 20 y de 9.

C7-1.3. Escribe en la pizarra la descomposición que han hecho los alumnos del número 90, empleando grupos de 20 y de 10.

C8-1.3. Hace ver a los alumnos que no han encontrado una correspondencia entre cómo se escribe la cantidad total con símbolos numéricos y los grupos de palillos hechos, incidiendo así en la segunda instrucción de la consigna.

C9-1.3. Indica que emplea operaciones para conectar lo manipulativo y lo simbólico-numérico.

C10-1.3. Pregunta por el consenso al que han llegado los dos grupos que han puesto en común sus agrupaciones al juntar sus palillos, incidiendo así en la tercera instrucción de la consigna.

C11-1.3. Explica que los 7 grupos de 20 que han hecho los alumnos provienen de la suma de los 4 grupos que tenían unos y de los 3 que tenían otros, empleando la propiedad distributiva.

C12-1.3. Pregunta por qué no han separado un grupo de 10 en uno de 9 y uno de 1, a raíz de la estrategia seguida por los alumnos, y considera las diferentes respuestas que dan los estudiantes.

C13-1.3. Pregunta por qué es más fácil sumar de 10 en 10 que de 9 en 9, haciendo ver que tiene relación con el sistema de numeración al que estamos acostumbrados.

C14-1.3. Pregunta a una alumna qué quiere decir con «sumar de 1 en 1», pidiendo que elabore la respuesta porque están en clase de matemáticas.

C15-1.3. Transforma los grupos planteados por los alumnos para llegar a tener 3 grupos de 10, es decir, llega a 3×10 a partir de 1×10 y de transformar 3×9 en $2 \times 10 + 7$.

C16-1.3. Hace ver que no hay relación entre los grupos hechos y la escritura del número tras haber juntado todos los palillos de la clase, incidiendo así en la segunda y en la cuarta instrucción de la consigna.

VÍDEO 2

C1-2. Plantea el ejercicio a realizar: pasar de base 16 a base 2 directamente, sin pasar por base 10.

C2-2. Escribe en la pizarra la resolución propuesta por un alumno, que consiste en contar en base 16 hasta B6 y contar en base 2 y ver qué número corresponde en base 2 a B6 en base 16.

C3-2. Hace ver que la primera estrategia de resolución propuesta por un alumno es válida, pero también que es larga y que no es «eficaz», por lo que hay que buscar otra estrategia.

C4-2. Escribe en la pizarra otra resolución propuesta por otra alumna, que consiste en dividir B6 entre 2 en base 16.

C5-2. Hace ver que la segunda estrategia de resolución propuesta por una alumna es válida, pero también que es compleja.

C6-2. Plantea en la pizarra otra resolución propuesta por otro alumno, que consiste en pasar de base 16 a base 2 fijándose en que 16 es 2^4 , escribiendo la expresión de partida, que sería la expresión polinomial de B6 en base 16, así como el inicio y el final de la expresión polinomial en base 2 a la que hay que llegar.

C7-2. Transforma 16^1 y 16^0 en potencias de 2.

C8-2. Escribe la expresión polinomial de 11 en base 2 a partir de los coeficientes que un alumno va diciendo.

C9-2. Explica cómo se realiza la potencia de una potencia, haciendo ver que $(2^4)^1$ es $2 \times 2 \times 2 \times 2$ y que, como está elevado a 1, se copia una sola vez.

C10-2. Escribe la expresión polinomial de 6 en base 2 a partir de los coeficientes que un alumno va diciendo.

C11-2. Hace ver, mediante preguntas a los alumnos, que $(2^4)^0$ es 1 y que en base 2 es 2^0 .

C12-2. Establece una correspondencia entre el último coeficiente del desarrollo polinómico que está haciendo y el del último de la expresión polinómica final del número en base 2, así como entre el primer coeficiente de ambas expresiones.

C13-2. Establece una correspondencia entre las varillas del ábaco y la escritura numérica o potencias en base 2.

C14-2. Explica a los alumnos cómo multiplicar potencias.

C15-2. Desarrolla la expresión $[1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0] \times 2^4$ para llegar a la expresión $1 \times 2^7 + 0 \times 2^6 + 1 \times 2^5 + 1 \times 2^4$, haciendo ver que son equivalentes y empleando la propiedad distributiva.

C16-2. Indica que ha utilizado la propiedad distributiva para llegar a la expresión obtenida.

C17-2. Desarrolla la expresión $[1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0] \times 2^0$ para llegar a la expresión $1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0$, haciendo ver que son equivalentes y empleando la propiedad distributiva.

C18-2. Pregunta a un alumno qué dificultad tuvo al resolver el ejercicio a través del procedimiento planteado en relación con el valor de la posición del 2^3 , haciendo ver que, si no hay un valor para el 2^3 , se pone un 0.

C19-2. Hace ver que el número 6 se puede escribir como $1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0$, pero también como $0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0$ si se quiere indicar la ausencia de grupos de 2^3 .

C20-2. Explica la receta que podría dar un *youtuber* como David Calle para pasar de B6 en base 16 a base 2, que consistiría en escribir el 11 de 11×16^1 y el 6 del 6×16^0 en base 2, ambos con cuatro dígitos al ser 16 igual a 2^4 , y juntarlo.

C21-2. Hace ver que a ella no le vale la receta porque los maestros tienen que entender el proceso pasa transformar un número de una base a otra.

C22-2. Pregunta si se puede pasar de base 16 a base 2 sin pasar por base 10 y por qué se puede.

C23-2. Plantea una variación en el ejercicio que consiste en partir de la base 15 para llegar a la base 2, incidiendo en que no habría un algoritmo para pasar directamente de una base a la otra.

C24-2. Hace explícito que solamente se puede pasar directamente de una base a otra cuando una base es potencia de la otra, como de base 16 a base 2, ya que 16 es 2^4 .

VÍDEO 3

Fragmento 1

C1-3.1. Plantea a los alumnos que tienen que representar las cuatro operaciones del ejercicio, las sumas y las restas, en el registro de representación manipulativo con el ábaco vertical, con el sorobán y con los bloques multibase, comparando cada dos, viendo cómo se traduce de una forma a otra.

C2-3.1. Explica que no quiere que los alumnos representen el resultado, sino que representen el proceso de la suma.

C3-3.1. Indica que los alumnos han de basarse en la definición conjuntista de la suma.

C4-3.1. Dice a los alumnos que tienen que representar el proceso de las sumas y de las restas en el registro de representación simbólico-numérico.

C5-3.1. Pide a los alumnos que realicen una representación tabular de las operaciones como ellos quieran, teniendo en cuenta que puede tener características gráficas o características simbólicas.

C6-3.1. Dice que en el examen final de la asignatura va a pedir que representen el proceso de respuesta con los materiales manipulativos de forma gráfica.

C7-3.1. Indica que las operaciones se presentan en un orden concreto y pide que las hagan en ese orden.

Fragmento 2

C1-3.2. Pregunta varias veces cómo pueden representar el número 700 de otra forma en el ábaco, haciendo ver que tenían 704, que ella ha quitado 4 unidades y que ahora tienen que representar el número 700 de otro modo para poder quitar otra cuenta y restar 5 unidades.

C2-3.2. Pregunta a los alumnos cómo pueden conseguir decenas, señalando la varilla de las decenas en el ábaco, tratando de guiarlos en el proceso de reescritura del 700.

C3-3.2. Hace ver que, tras representar de otra forma el número 700 en el ábaco, ahora tienen $6 \times 10^2 + 10 \times 10^1$, conectando así el registro de representación manipulativo del ábaco con el simbólico-numérico en forma de expresión polinomial con potencias de base 10.

C4-3.2. Pregunta a los alumnos, señalando la varilla del ábaco de las unidades, cómo representar el número 700 de otra forma para obtener cuentas en esa varilla y poder terminar la resta.

C5-3.2. Pide a los alumnos que le expliquen el proceso que han seguido para reescribir el número 700, preguntando si han agrupado o si han desagrupado.

C6-3.2. Explica a los alumnos que han desagrupado una centena en diez decenas y una decena en diez unidades.

C7-3.2. Pide a una alumna que explique cómo hace la resta en papel, haciendo ver que cuando hagan la representación en el registro simbólico-numérico tienen que conectarlo con el ábaco.

Fragmento 3

C1-3.3. Plantea en la pizarra la suma « $210 + 543$ », haciendo ver que la ha representado con símbolos.

C2-3.3. Empieza a realizar la suma con el sorobán, indicando que lo hace gráficamente.

C3-3.3. Señala en la pizarra la correspondencia de cada varilla del sorobán con las unidades, las decenas y las centenas, respectivamente.

C4-3.3. Representa gráficamente el número 210 mientras explica cómo hacerlo mediante preguntas a una alumna.

C5-3.3. Indica que ahora va a sumar 543, a añadir 543 unidades, entendiendo la suma como la unión de conjuntos.

C6-3.3. Hace ver, cuando suma las decenas de 543, que hay que hacer una agrupación auxiliar, representando un grupo de 5 decenas con una cuenta en la parte de arriba, diciendo que las cuentas de arriba valen 5 unidades del valor de la varilla.

C7-3.3. Hace ver, cuando suma las centenas de 543, que se puede poner directamente una cuenta de arriba o ir sumando las centenas de una en una, siendo procesos equivalentes.

C8-3.3. Realiza la suma en el registro de representación simbólico-numérico, empleando el algoritmo tradicional de la suma en vertical.

C9-3.3. Hace ver la correspondencia que hay entre el registro de representación manipulativo, el sorobán y el simbólico-numérico, indicando que cada columna de la suma en la forma simbólica se corresponde con una varilla del ábaco y que ha colocado de forma vertical la suma para parecerse a la estructura del ábaco, teniendo así en cuenta la «posicionalidad» del sistema.

C10-3.3. Empieza a realizar la suma con los bloques multibase de forma gráfica, agrupando en columnas las placas, las barras y las unidades, respectivamente, de cada sumando.

C11-3.3. Pregunta si necesita agrupar a la hora de juntar las centenas, las decenas y las unidades de ambos sumandos, haciendo ver que no porque están trabajando en base 10.

C12-3.3. Hace ver la correspondencia que hay entre los bloques multibase y el registro de representación simbólico-numérico.

C13-3.3. Escribe los sumandos con expresiones polinómicas de potencias de 10, haciendo ver que se trata de otra forma de realizar la suma dentro del registro de representación simbólico-numérico en la que se ve la «posicionalidad» del sistema.

C14-3.3. Indica que para realizar la suma utiliza la propiedad conmutativa de la suma, la propiedad asociativa de la suma y la propiedad distributiva de la suma y el producto de números enteros.

C15-3.3. Hace ver las correspondencias que hay entre el registro de representación simbólico-numérico con expresiones polinomiales y el resto de registros ya representados: la suma simbólica tradicional, los bloques multibase y el sorobán.

C16-3.3. Plantea una secuenciación al proponer ahora una suma en la que hay que hacer reagrupamientos: $316 + 429$.

C17-3.3. Hace ver que en la nueva suma aparecen más de 10 unidades al sumar, por lo que hay que reagrupar al estar en base 10, explicándolo en cada registro de representación plasmado en la pizarra.

C18-3.3. Representa la primera suma con una tabla, con ayuda de un alumno, haciendo ver que se trata de un registro de representación tabular-gráfico: tabular, por haber empleado la estructura de una tabla, y gráfico, por haber representado las cantidades con palitos o rayas.

C19-3.3. Representa de nuevo la primera suma en la tabla, haciendo ver que en esta ocasión se trata de un registro de representación tabular-numérico: tabular, por haber empleado la estructura de una tabla, y numérico, por haber representado las cantidades con símbolos.

C20-3.3. Mantiene plasmados en paralelo los cinco registros de representación que ha empleado para realizar la suma.

C21-3.3. Pone de manifiesto la secuenciación planteada: se parte de lo más concreto, que sería el problema dado en su contexto; luego se pasa a manipular con ábacos verticales,

con ábacos japoneses y con bloques multibase; después se hace la suma en una tabla gráfica y luego en una numérica, las cuales se denominan tableros de posición; y finalmente se llega a lo más abstracto, que sería la suma simbólica con expresiones polinomiales o, en primaria, la suma simbólica tradicional, siendo el objetivo escribir finalmente el proceso de forma abstracta.

C22-3.3. Menciona el método Singapur, haciendo ver que la secuenciación planteada, yendo de lo concreto a lo abstracto, es característica de dicho método.

C23-3.3. Pregunta a los alumnos cómo han trabajado la suma en primaria, haciendo ver que es habitual trabajar la fase inicial de la representación de la suma directamente con lo simbólico, que es la fase final.

ANEXO 17

Conjunto de eventos e interpretaciones de la fase 1 de todos los participantes, integrados en la transcripción de los vídeos en el momento en el que se realizaron los comentarios de los que se extrajeron

Nota: El texto presentado entre corchetes en la transcripción y en algunos eventos e interpretaciones se corresponde con información incluida por el investigador.

VÍDEO 1

Fragmento 1

[F = Formadora del vídeo].

F: Bueno, entonces os voy a dar el guion y empezáis a trabajar y, al final, los últimos 15 minutos, hacemos la puesta en común. El guion de la actividad aparece aquí

- *M1.1-1.1. Está explicando lo que van a hacer [E, D].*

en el campus, pone la fecha, ¿vale?, «actividad para la sesión del 19 de septiembre».

- *P1.1-1.1. Está explicando lo que van a hacer [E, D].*

Lo voy a leer porque está en inglés, por si alguno tuviera alguna dificultad, lo leo y os ponéis a trabajar, ¿vale?

Todo el mundo en la mesa tiene un montón de palillos y varias cintas de estas, ¿no?, elásticas. Si alguien necesita más cintas me las pide, palillos no, son los que os he puesto, ¿vale?,

- *M3.1-1.1. Presenta el material: palillos y gomas [E, 2].*
- *M3.2-1.1. Limita el número de palillos, pero no el de gomas [E, 3].*
 - *M3.2-1.1(I)1. La cantidad de palillos debe de ser relevante en la consigna, en lo que vayan a tener que hacer [I, M].*
- *M3.3-1.1. Dice que va a traducir al español el texto que está en inglés [E, D].*

es con lo que tenéis que trabajar.

- L1.1-1.1. Explica a los alumnos qué es lo que tienen en la mesa y que lo van a necesitar a lo largo de la tarea [E, 1].
- P2.1-1.1. Indica los materiales que van a utilizar en la actividad [E, 1].

El problema es que yo he comprado una caja de palillos en Supeco

- R1.1-1.1. Explica un poco a los alumnos lo que tienen que hacer [E, D].
- R1.2-1.1. Presenta el material que van a usar [E, 1].

y resulta que mis compañeros lo compran en Mercadona y me dicen que las cajas de palillos que ponen 800 palillos del Mercadona traen más y que les sale a cuenta, y que cuando van a comprar materiales —porque a veces tenemos que comprar nosotros los materiales— pues que merece la pena. Yo no pude ir a Mercadona, fui a Supeco, pone que son 800, pero no sé si me han timado o no me han timado. Entonces, para hacer un control de calidad, hacer una estimación,

- M4.1-1.1. Está dando un contexto, intentando dar una justificación más allá de la actividad didáctica [E, 2].

que luego, bueno, los que hayáis hecho Matemáticas de Ciencias Sociales pues sabéis hacer un contraste de hipótesis y tal, pero bueno, lo primero que tengo que hacer es hacer una estimación de cuántos hay, ¿no? Entonces, los he repartido para no contarlos yo y la idea es ver cuántos hay.

- D1.1-1.1. Plantea la actividad [E, 1].
- D1.2-1.1. Contextualiza la actividad con una situación que podría ser cotidiana [E, 2].
 - D1.2-1.1(I)1. Para asegurarse de que toda la clase entienda lo que van a hacer [I, D].
- L2.1-1.1. Está dando la consigna inicial [E, 1].
- L2.2-1.1. Contextualiza lo que van a hacer los alumnos, motivando el problema a través de la historia inventada de los palillos del Supeco y del Mercadona [E, 2].
 - L2.2-1.1(I)1. Para intentar que los alumnos se sientan atraídos por la actividad [I, D].
- P3.1-1.1. Contextualiza la actividad en una situación cotidiana [E, 2].

- P3.1-1.1(I)1. *Para intentar motivar a los alumnos y captar su interés [I, D].*
- J1.1-1.1. *Introduce los pasos que van a seguir en la sesión [E, D].*
- J1.2-1.1. *Dice que el guion de la actividad está en inglés [E, D].*
- J1.3-1.1. *Introduce la actividad poniendo a los alumnos en una situación real mediante una historia relacionada con ellos, como la del supermercado [E, 2].*
 - J1.3-1.1(I)1. *Para tratar de enganchar a los alumnos con el problema y atraer su atención [I, D].*
- J1.4-1.1. *Introduce un problema de aritmética, que consistirá en contar o tratar de estimar [E, 3].*
 - J1.4-1.1(I)1. *Se trata de una actividad para primaria [I, M].*
- J1.5-1.1. *Emplea el aula virtual [E, D].*

Entonces, el guion de la actividad, tal y como aparece aquí... [espera a que cargue el ordenador].

- R2.1-1.1. *Explica un poco en qué consiste lo que tienen que trabajar [E, 1].*
- R2.2-1.1. *Relaciona lo que tienen que hacer con una actividad natural del día a día, con cualquier sitio al que habitualmente pueden ir los alumnos, con su entorno más inmediato [E, 2].*
 - R2.2-1.1(I)1. *Porque así, partiendo de sus intereses y de su entorno, están más receptivos y abiertos a la actividad [I, D].*

Aquí está el guion. Esta actividad —esperad que la amplíe un poco— está escaneada de un libro muy bueno que utilizan en los últimos años en Estados Unidos para formar profesores de primaria.

- M5.1-1.1. *Está dando la fuente de la que ha sacado la actividad, así como el objetivo de la fuente, que es formar docentes [E, 2].*
 - M5.1-1.1(I)1. *Para que los alumnos que quieran puedan consultar la fuente [I, D].*

Lo bueno del libro es que, además de los contenidos teóricos, más de la mitad del libro son actividades para llevar al aula-taller como estamos haciendo aquí, ¿vale?

- *P4.1-1.1. Está dando una referencia bibliográfica, justificando por qué es buena para los alumnos [E, 1].*

Entonces, una de las actividades iniciales para el trabajo con el número, que es con lo que estamos empezando nosotros, es esta de los palillos, ¿vale?

- *M6.1-1.1. Dice que se va a trabajar la construcción del número [E, 3].*
 - *M6.1-1.1(I)1. Por lo tanto, se está haciendo referencia al currículo [I, M].*
- *L3.1-1.1. Informa a los alumnos de dónde ha sacado la actividad, indicando que se emplea en varias Universidades en las que se imparte el grado de Educación Primaria [E, 2].*
 - *L3.1-1.1(I)1. Para que no piensen que es una actividad que ella se ha inventado y que vean que es una actividad contrastada, que es válida porque está publicada [I, D].*
- *L3.2-1.1. Va a hablar del número [E, 3].*
 - *L3.2-1.1(I)1. Por lo tanto, la asignatura que se imparte es Matemáticas I [I, M].*
- *J2.1-1.1. Da una referencia que dice que es un buen libro con contenido práctico, con actividades [E, 2].*
 - *J2.1-1.1(I)1. Dar referencias bibliográficas a los alumnos puede ser de interés para la futura práctica de los alumnos [I, D].*

Entonces, aquí la pregunta es «cuántos», cuántos palillos, ¿no?, que es lo que os he preguntado a vosotros, ¿no?, cuántos.

- *M7.1-1.1. Establece el objetivo del alumno: saber cuántos palillos hay [E, 2].*
 - *M7.1-1.1(I)1. Dada la cantidad de palillos, un conteo sencillo no será la mejor estrategia [I, M].*

Entonces, cada grupo participando en esta actividad tiene un montón de palillos y luego tiene algo para atarlos, ¿no?, *rubber bands*, pues cintas de estas elásticas. Los materiales ya los tenéis. El objetivo de la actividad es ayudaros a entender el desarrollo de la escritura de los números tal y como los utilizamos nosotros en nuestro sistema de numeración, ¿vale?

- *M9.1-1.1. Declara el objetivo didáctico de la actividad con estos alumnos, los futuros maestros [E, 1].*
 - *M9.1-1.1(I)1. Lo que no se sabe aún es si se trata de una actividad para realizarla con alumnos más pequeños, y estamos reproduciendo la actividad con los futuros maestros, o si es una actividad destinada al futuro maestro directamente [I, D].*
- *R3.1-1.1. Acaba de marcar el objetivo de la actividad [E, 1].*
 - *R3.1-1.1(I)1. Para que los alumnos sepan realmente para qué les va a servir esa sesión y qué se pretende sacar en concreto de la misma [I, D].*

Entonces, primero, organiza los palillos de forma que visualmente puedas ver más o menos cuántos hay; usa las bandas elásticas, si te ayudan, para organizarlos de manera que así, de un vistazo, puedas decir

- *M10.1-1.1. Está complementando la consigna, sin limitarse a traducir: dice que no tomen notas y que, simplemente con cierta organización, de un vistazo, sepan establecer cuántos hay de una manera rápida [E, 3].*
 - *M10.1-1.1(I)1. Lo que se llama en Teoría de Situaciones «la negociación de la consigna»; el objetivo del alumno ella lo ha dicho, pero ahora está estableciendo cuáles son las condiciones para hacerlo, lo que está permitido, y eso forma parte de una negociación; el alumno tiene que tener muy claro qué es lo que puede hacer [I, M].*

cuántos tienes, primero los cuentas, lo organizas, piensas cómo organizarlo, pero la cosa es que la organización que tú tengas en la mesa te permita de un vistazo recordar cuántos hay sin necesidad de haberlo apuntado, ¿no?, y que, si yo me paso por allí, me podáis decir: «mira, hay no sé cuántos, porque..., lo veo porque lo hemos organizado así», ¿vale?

- *D2.1-1.1. Presenta los primeros pasos a seguir para realizar la actividad, sin decir a los alumnos cómo tienen que hacerlo exactamente [E, 1].*
 - *D2.1-1.1(I)1. Para que los alumnos entiendan qué tienen que hacer, ya que es posible que no entiendan lo que se les pide y que se pongan a contar [I, M].*

Luego, reflexiona sobre si la manera en la que lo has organizado corresponde a cómo escribirías tú luego los numerales para representar esa cantidad de palillos.

- M12.1-1.1. Dice a los alumnos que reflexionen para ver si hay una correspondencia entre los agrupamientos y el sistema de numeración [E, 3].
 - M12.1-1.1(I)1. Pretende provocar el uso de agrupamientos recursivos para que aparezca esa correspondencia con el sistema de numeración [I, M].
 - M12.1-1.1(I)2. El objetivo de la actividad es muy didáctico, se sale un poco de un supuesto «adidactismo» que en principio podría presentar la actividad, ya que no se trata solamente de saber «cuántos hay», sino de pensar cómo se hace [I, M].

Después, tienes que juntar tus palillos con los de un grupo de al lado, ¿vale?,

- L4.1-1.1. Está dando la instrucción que tienen que seguir los grupos para resolver el problema, leyéndola en el ordenador [E, 1].
- L4.2-1.1. Escenifica con las manos, haciendo como que escribe cuando hablar de escribir, al dirigirse al grupo-clase [E, D].

por ejemplo, vosotros con vosotros y así, cada dos grupos tienen que juntar los palillos que tienen y decidir cuántos tienen en común, ¿vale?, cuántos tienen en total.

- M13.1-1.1. Presenta ya una tarea: saber cuántos [palillos] hay al juntar dos distribuciones [E, 3].
 - M13.1-1.1(I)1. Se pretende ver si la escritura permite la composición; dependiendo de si se han hecho o no buenas estructuras, se puede asimilar bien otro grupo o no. Nuestro sistema de numeración funciona bien algorítmicamente, es cómodo desde el punto de vista de técnicas operatorias, y si haces una buena organización [de los palillos] basada en eso, vas a tener las mismas facilidades [I, M].

Y al final, tenemos que juntarlos todos y de una forma ágil, sin tener que volver a contarlos todos, tenemos que saber cuántos palillos hay en total en la clase repartidos, ¿vale?

- M14.1(i)-1.1. Evento implícito en el comentario [E, 1].
 Transcripción del vídeo: Y al final, tenemos que juntarlos todos y de una forma ágil, sin tener que volver a contarlos todos, tenemos que saber cuántos palillos hay en total en la clase repartidos, ¿vale?

- M14.1(i)-1.1(I)1. *Se trata de ver si la distribución se puede ir heredando y puede funcionar; si es buena, lo va a hacer; algunas distribuciones pueden ser buenas para saber cuántos [palillos] hay, pero puede que no lo sean cuando compongan y se tendrán que rechazar. La distribución tiene que ser común; si unos hacen grupos de 6 y otros grupos de 8, cuando los junten habrá un problema; por ello, aunque ella no se lo dice, la situación les obliga a que se pongan de acuerdo en cómo agrupar, debe haber cierto isomorfismo [I, M].*

O sea que, primero, cada grupo tiene que saber cuántos tiene

- M15.1-1.1. *Recapitula [las instrucciones de la consigna] [E, D].*

y tiene que generar una estrategia para, de manera rápida, mirar en la mesa y ver cuántos hay; después, reflexionar sobre si la manera en la que lo coloca cuando uno luego escribe, imaginaos, «tengo 72, pues cómo se escribe 72: siete, dos», pues la manera en la que lo coloco me ayuda con la escritura o no, no tiene por qué, se reflexiona un poco sobre eso;

- M16.1-1.1. *Está dando pistas [E, 1].*
 - M16.1-1.1(I)1. *Pretende que haya cierto isomorfismo [en los agrupamientos], pero si se dan menos indicaciones y no surge, es muy bueno, ya que entonces se puede pensar qué ha pasado; eso sí, se tarda más, claro [I, M].*

y cuando hayáis terminado esa parte, llamáis al grupo de al lado y decís: «venga, vamos a ver cuántos tenemos en total, visualmente, cómo lo organizasteis vosotros, cómo lo organicé yo, a ver cómo lo tengo», ¿vale?; y luego todos.

- R4.1-1.1. *Acaba de repetir por segunda vez a los alumnos todos los pasos que tienen que ir haciendo [E, D].*
 - R4.1-1.1(I)1. *Para asegurarse de que los alumnos lo han escuchado y lo han entendido [I, D].*
 - R4.1-1.1(I)2. *Es habitual enmarcar [lo que se va a hacer], ir diciendo las actividades a realizar, establecer el orden de lo que hay que hacer... [I, D].*
- P5.1-1.1. *Plantea la actividad [E, 1].*
- P5.2-1.1. *Indica el objetivo [E, 1].*

- P5.3-1.1. Indica que los grupos de alumnos tendrán que comparar las técnicas que hayan empleado para realizar la actividad [E, 1].
 - P5.3-1.1(I)1. Para ver qué técnica es mejor y cuál es peor [I, M].
- P5.4-1.1. Dice que van a trabajar con el numeral [E, 3].

Tenéis un cuarto de hora, ¿vale?

- D3.1-1.1. Dirige a los alumnos en su explicación sobre la actividad con detalles o pistas acerca de cómo realizarla [E, 1].
 - D3.1-1.1(I)1. Si se ha trabajado más o menos el contenido, hacen falta más o menos detalles, más o menos dirección; en este caso, es difícil apreciar cuánto hace falta esa dirección, al no saber cuánto se ha trabajado antes un contenido parecido [I, D].
- D3.2-1.1. Va a trabajar el conteo [E, 3].
- D3.3-1.1. Presenta el objetivo, que es dirigir al alumno a la notación posicional a partir de una actividad de conteo [E, 3].
- M17.1-1.1. Da el tiempo a los alumnos [para hacer la tarea] [E, D].
- R5.1-1.1. Termina diciendo el tiempo que tienen de trabajo [E, D].
- J4.1-1.1. Indica el tiempo que tienen los alumnos para realizar la actividad [E, D].

Fragmento 2

[F = Formadora del vídeo]. [A = Alumnos].

F: Necesito saber si habéis tenido que llegar a algún acuerdo entre los grupos o...

A: Sí, claro, todo ha sido un consenso, todo ha sido un consenso.

F: Ah, vale, ha sido un consenso. ¿Qué acuerdo habéis tenido que...?

A: Hemos explicado cada uno pues lo que significaba cada..., cada gomita.

F: Y, por ejemplo, ¿vosotros de cuánto en cuánto lo habíais agrupado? Erais los de 15, 10, 5, ¿no?

A: Sí.

- M1.1-1.2. *Pregunta a los alumnos si han tenido que ponerse de acuerdo [E, 2].*

F: ¿Y vosotros?

A: 20, 10 y 4.

F: 20, 10 y 4.

- P1.1-1.2. *Pregunta a los alumnos por los métodos que ha utilizado cada grupo [E, 1].*
 - P1.1-1.2(I)1. *Para que los alumnos puedan comparar las distintas estrategias que han usado y reflexionar sobre cuál es mejor y cuál tiene alguna deficiencia [I, M].*

Entonces, ¿habéis tenido que llegar a algún acuerdo alguno para reordenar?

A: No, porque nos ha venido muy bien.

F: ¿Os ha venido bien?

A: Es que hemos sido muy inteligentes cogiendo el amarillo para los grandes [se refiere a gomas elásticas de color amarillo].

F: Ahora los grandes de qué son, ¿de 20?

A: De 20 y de 15, aquí están mezclados. ¿O los tenemos que reorganizar?



F: Esto es superinteligente, ¿no? O sea, yo veo aquí..., digo: «en los amarillos, algunos tienen 20 y algunos tienen 15, búscate la vida Nuria».

A: Pero son amarillos.

- D1.1-1.2. Está pidiendo la información de lo que han hecho los alumnos, sin juzgar y sin dirigirlos demasiado hacia lo que ella pedía, que en definitiva es un trabajo sobre notación posicional [E, M].
- J1.1-1.2. Está pidiendo a los alumnos, por medio de preguntas, que expliquen a qué acuerdos han tenido que llegar cuando se han juntado los dos grupos [E, 2].
 - J1.1-1.2(I)1. Como ha habido una incongruencia por parte de los alumnos, ya que unos han hecho grupos de 15 y otros de 20, quiere que vean que la manera de aprender está en ir comparando lo que han hecho con los demás y que es importante llegar a consensos [I, M].
- J1.2-1.2. Emplea un tono bastante distendido [E, D].

F: Ya, pero entonces yo no sé... Yo digo: «vale, yo puedo ver 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 grupos amarillos», ¿no? Y ahora digo: «como mucho serán 160, si son todos de 20, pero...

- D2.1-1.2. Razona sobre la estrategia que han propuesto los alumnos, sin decirles directamente qué es lo que han hecho mal [E, 1].

- D2.1-1.2(I)1. *Para que los alumnos se den cuenta de los problemas que tiene lo que han hecho [I, D].*

no necesariamente son 160, pueden ser menos».

A: Bueno, pero como no lo sabes...

- L1.1-1.2. *Hace ver a los alumnos, mediante preguntas, que la agrupación que han hecho alumnos no es muy inteligente, que no es la óptima [E, 1].*

F: ¿Entonces cómo sé cuántos hay?

A: Te lo estamos diciendo, tienes que confiar en nosotros.

F: No, en matemáticas la confianza no vale, uno tiene que...

A: Es que no sé, no lo entiendo. ¿Lo tenemos que reorganizar?

F: Vosotros ya sabéis cuántos palillos tenéis, pero ahora, visualmente, tenéis que poder contarme a mí cómo sabéis que hay ese número de palillos, ¿no?

- J2.1-1.2. *Pregunta a los alumnos por los colores [de las gomas], incitándolos a explicar el porqué de lo que han hecho, descubriéndoles la incongruencia que existe en su forma de agrupar y pidiendo una justificación más clara del razonamiento que han seguido, de la conclusión a la que han llegado, una explicación visual [E, 3].*
 - J2.1-1.2(I)1. *En matemáticas hay que transmitir que es necesario justificar los resultados, cómo funcionan las cosas; en este caso, el sistema decimal [I, M].*

A: Ah, pues habría que...

- M7.1-1.2. *Pregunta a los alumnos sobre sus contradicciones, dando a continuación una consigna: hay que saber cuántos palillos hay visualmente [E, 2].*
 - M7.1-1.2(I)1. *Se trata de algo bastante típico en clase de matemáticas, cuando llega un agente externo como el profesor, es cuando los alumnos empiezan a ver las cosas que no funcionan [I, M].*
 - M7.1-1.2(I)2. *Para que los alumnos vean la contradicción, que traten de proponer alguna manera de mejorarlo y que vean la ventaja que tiene ponerse de acuerdo al hacer grupos, porque eso va a ser intratable si no se ponen de acuerdo en los grupos [I, M].*
 - M7.1-1.2(I)3. *Aunque la consigna es muy sencilla, saber cuántos [palillos] hay, no es igual de sencillo decidir qué se entiende por una distribución que lo muestre*

visualmente de un modo fácil; esto es algo ambiguo, no se deja claro qué es lo que está bien y qué es lo que está mal [I, M].

¿Y no podemos quitar las gomas y reorganizarlo?

F: Sí, sí, sí, yo no dije que no pudierais quitar las gomas.

A: Aaaaah.

- R1.1-1.2. *Está trabajando con un grupo [E, D].*
 - R1.1-1.2(I)1. *Cuando se trabaja en grupos cooperativos, la profesora va rotando por los grupos para comprobar si los alumnos han interpretado bien lo que tienen que hacer y pueden llegar a alcanzar el objetivo que se les ha propuesto [I, D].*
- R1.2-1.2. *Hace preguntas a los alumnos, detecta un error que han cometido y lo pone de manifiesto, pero sin explicar exactamente cómo han de proceder [E, 1].*
 - R1.2-1.2(I)1. *Con las preguntas pretende que sean los propios alumnos los que se organicen para resolver ellos solos la actividad [I, D].*

F: ¿Alguien dijo que no se podían quitar?

A: Y nosotros diciendo que no se podían quitar las gomas...

- M9.1(i)-1.2. *Evento implícito en el comentario [E, 1].*
Transcripción del vídeo: ¿Alguien dijo que no se podían quitar?
 - M9.1(i)-1.2(I)1. *Cuando se da una consigna, es importante dejar claro lo que se puede y lo que no se puede hacer; si no se deja claro, lo cual nos pasa a veces a todos, los alumnos pueden tener dudas sobre lo que hacer [I, D].*
- P3.1-1.2. *Está volviendo a explicar algún detalle de la actividad [E, 1].*
 - P3.1-1.2(I)1. *Porque los alumnos no habían entendido todos los detalles de la actividad [I, D].*
 - P3.1-1.2(I)2. *Para que los alumnos mejoren su táctica de conteo [I, M].*

F: Y una duda más. Alguno de vosotros..., por separado, ¿no?, cuando lo teníais..., habéis escrito la cantidad que teníais, ¿no? Eh, 109 teníais uno...

A: 104 y 85.

F: Por ejemplo, el 85 se escribe con un 8 y un 5. Ese 8 y ese 5, ¿estaban representados de alguna forma en...?

- M10.1-1.2. *Pregunta a los alumnos si la distribución que han hecho [del 85] tiene que ver con la escritura usual que tenemos [E, 3].*
 - M10.1-1.2(I)1. *Porque quiere, sin decirlo explícitamente, que utilicen la agrupación decimal. Sin embargo, el agrupamiento de 10 es muy pequeño, aunque sea muy cómodo; de hecho, en las unidades de medida, que también son decimales, no usamos el decímetro, el decámetro, el decagramo... [I, M].*
 - M10.1-1.2(I)2. *Algún alumno podría decir que él ha hecho 4 grupos de 20, que son 80; ¿se le puede decir que 8 grupos de 10 es más cómodo que 4 de 20? Esto tendría que ver con la consigna [I, M].*

A: No.

F: No, vale. Y vosotros, la misma pregunta con lo vuestro.

A: No.

F: No había un patrón en cómo lo habíais representado, vale, ok.

- D3.1-1.2. *Trata de que los alumnos conecten la actividad con la notación posicional, que es el objetivo de la actividad, sin desvelarles dicha conexión [E, 2].*
 - D3.1-1.2(I)1. *Se trata de algo que a los alumnos les cuesta mucho, ya que nunca lo han pensado [I, M].*
- L2.1-1.2. *Trata de comprobar, a través de preguntas, que la agrupación de los palillos que han hecho los alumnos tiene algo que ver con la noción del sistema numérico decimal, con la notación de decena y unidad, con el número que han anotado [E, 3].*
- P4.1-1.2. *Relaciona la técnica de conteo empleada por los alumnos con la representación en el sistema numérico decimal [E, 2].*
- J3.1-1.2. *Dirige a los alumnos, mediante preguntas sobre las agrupaciones que han hecho, hacia la comprensión de las propiedades del sistema decimal, ligando la parte práctica con la teórica, la parte manipulativa con el sistema decimal, con la posición del número [E, 3].*

A: ¿Pero quieres que busquemos?

F: Quiero que reflexionéis sobre eso, pero ahora lo vamos a poner en común, ¿vale?

A: Vale.

F: ¿Ha sido operativo el que ellos hayan hecho 15, 10, 5... y vosotras tuvieras 20...?
¿Eso ha ayudado a la hora de ponerlo en común?

A: No, porque ahora hay que hacerlo otra vez.

F: Ahora hay que volverlo a hacer...

- *M14.1-1.2. Pregunta a los alumnos por sus contradicciones, sin dar la solución [E, 1].*
 - *M14.1-1.2(I)1. Para que los alumnos arreglen sus contradicciones por sí mismos, siendo ellos quienes tomen las decisiones en lo importante, lo cual a veces es más fácil y otras es necesario intervenir más [I, M].*
- *R2.1-1.2. Habla a los alumnos de forma positiva, haciendo que razonen [E, D].*
- *L3.1-1.2. Hace un comentario a los alumnos [E, 1].*
 - *L3.1-1.2(I)1. Para que sean conscientes de que lo han agrupado fatal [I, M].*

Fragmento 3

[F = Formadora del vídeo]. [A = Alumnos].

F: Me tenéis que decir cuántos palillos había en cada grupo inicialmente, antes de juntaros dos grupos, ¿vale? Entonces, por ejemplo, vosotros.

A: 87.

- M1.1-1.3. Va a recapitular y a comprobar cómo lo ha hecho cada grupo [E, 1].

F: 87 [lo escribe en la pizarra]. Estamos de acuerdo, yo utilizo la escritura estándar que vosotros habéis visto en primaria, secundaria,

- M2.1-1.3. Menciona eso [que usa la escritura estándar] en relación con el sistema de numeración [E, 2].
 - M2.1-1.3(I)1. Hacer este tipo de comentarios es típico de nosotros [los formadores de matemáticas] [I, M].

bachillerato y al llegar aquí, ¿vale? Escritura estándar de nuestro sistema de numeración en nuestro contexto. Ese grupo, 87. ¿Cómo habíais hecho los grupos?

A: Pues hemos hecho, eh..., tres grupos de 20.

F: Tres grupos de 20, ¿cómo lo puedo poner? [Escribe un 3 en la pizarra].

- M3.1-1.3. Pregunta a los alumnos cómo escribe los grupos de 20 [E, 3].

A: Eh..., tres rosas.

A: 3 x 20.

F: ¿Tres rosas?

A: Sí.

A: No.

F: Si pongo tres rosas...

- M4.1-1.3. Sigue la clase sin atender a la propuesta de un alumno [3 x 20] [E, D].
 - M4.1-1.3(I)1. Porque no ha debido de oír al alumno [I, D].

¿Todo el mundo que ha utilizado gomitas rosas ha atado 20?

A: No.

- D1.1-1.3. Pregunta a los alumnos, trabajando en gran grupo, qué estrategias han desarrollado, sin juzgarlas [E, 1].
 - D1.1-1.3(I)1. Para que sean los alumnos quienes vayan viendo si sus estrategias son adecuadas o no y por qué [I, M].
- L1.1-1.3. Está descomponiendo el 87, preguntando a los alumnos por los agrupamientos que han hecho, comenzando con los 3 grupos de 20 [E, 3].
 - L1.1-1.3(I)1. Su objetivo debe de ser descomponer el 87 de varias formas en función de los agrupamientos que han hecho los diferentes grupos, utilizando productos y sumas con el fin de llegar a expresiones como «3 x 20» [I, M].

F: ¿Otras personas que han atado 20 han usado otro color?

A: Sí.

F: Uf, el color no me vale.

- M5.1-1.3. Dice a los alumnos que el color [de las gomas] no es relevante porque no todos los alumnos han empleado el mismo color para hacer grupos de 20 [E, 3].

¿Cómo lo pongo?

- J1.1-1.3. Está recapitulando, poniendo en común lo que han hecho los grupos [E, 1].
 - J1.1-1.3(I)1. Para asentar las ideas del trabajo realizado en clase [I, D].
- J1.2-1.3. Pide a los alumnos que verbalicen cómo escribir 3 grupos de 20 y compara sus respuestas [E, 3].
 - J1.2-1.3(I)1. Quiere formalizar lo que verbalizan los alumnos, lo que son 3 grupos de 20 [E, M].

A: 20 x 3.

A: 3 x 20.

F: 3 grupos de 20, ¿no? 3 x 20. [Escribe 3 x 20]. Y luego...

- M8.1-1.3. Pone [una raya] rosa [sobre el 20] [E, M].

A: Pon en el 3 «color rosa» o algo así. Entre paréntesis.

F: Vale, vale. [Pinta una raya rosa sobre el 20]. Y luego... Esto son 60.

A: 9 x 3.

- M9.1-1.3. Dice que son 60 $[3 \times 20]$ sin que nadie lo haya dicho antes [E, M].

F: Y luego 9 grupos de 3, ¿no? [Escribe + 9]. ¿O 3 grupos de 9? [Borra el 9].

A: 3×9 .

- M10.1-1.3. Pregunta si pone 3 grupos de 9 o 9 grupos de 3 [E, 3].

F: 3 grupos de 9 y el 9 lo habéis puesto de otro color, ¿vale? [Escribe 3×9].

A: Sí.

- M11.1-1.3. Está descomponiendo el 87, empleando 3 grupos de 20 y 3 grupos de 9 [E, 3].
 - M11.1-1.3(I)1. Las expresiones que está empleando no permiten hacer agrupamientos regulares; un sistema no regular puede funcionar, pero no hay unidades elementales, ya que 87 no es primo [I, M].
 - M11.1-1.3(I)2. Escribe la forma que le interesa $[3 \times 20]$ [I, M].
- J2.1-1.3. Está construyendo el argumento con los alumnos adaptándose a sus respuestas, a la notación en rosa que han utilizado y a los grupos que han hecho [E, 2].

F: ¿Alguien más ha utilizado grupos de 20?

A: Nosotros.

F: Varios. ¿Alguien más ha utilizado grupos de 9? [Destaca con la voz el número 9].

A: Nosotras.

- D2.1-1.3. Está tratando de reunir, mediante preguntas, las estrategias que han empleado los alumnos [E, M].

F: Vosotras, vale, y vosotras también, vale.

- R1.1-1.3. Ha dicho 9 un poco más fuerte de lo normal [E, D].
 - R1.1-1.3(I)1. Para volver a captar la atención de los alumnos que están hablando [I, D].

Siguiente equipo, vosotras.

A: Nosotras, 90.

F: En total, 90. [Escribe 90 en la pizarra].

A: 4 de 20 y 1 de 10.

F: [Escribe $4 \times 20 + 1 \times 10$].

- M14.1-1.3. Escribe el 90, un número que no es primo [E, 1].
 - M14.1-1.3(I)1. La cantidad de palillos de cada grupo, que a lo mejor ella la ha pensado, es una variable didáctica en el sentido de la Teoría de Situaciones; con el 90 está muy claro, el 10 va a estar [I, M].

Vale, o sea que de momento han utilizado grupos de 20, grupos de 10, grupos de 9, ¿vale?



En esta escritura [señala lo que ha escrito en la pizarra] yo veo 3 grupos de 20, 3 grupos de 9, pero aquí [señala el 87] no veo un 3 y un 3. Yo aquí veo 4 grupos de 20, 1 grupo de 10, pero aquí [señala el 90] no veo 4, 1. Con lo cual, parece que tampoco habíais encontrado vosotros un patrón entre cómo escribo la cantidad total con símbolos numéricos y visualmente qué veo en los palillos, ¿vale?

- D3.1-1.3. Está tratando de comprobar si existe una conexión entre la notación posicional y los grupos que han hecho los alumnos [E, M].

De momento, la transcripción de lo que veo en los palillos simbólico-numéricamente la tengo aquí a la derecha [señala el $3 \times 20 + 3 \times 9$ y el $4 \times 20 + 1 \times 10$], pero no veo ninguna relación con esto [señala el 87 y el 90].

- P2.1-1.3. *Explica a los alumnos que no hay relación entre nuestro sistema numérico decimal y las técnicas de conteo que han utilizado para contar los palillos [E, 2].*
 - P2.1-1.3(I)1. *Para que los alumnos reflexionen sobre el valor que tienen las cifras de nuestro sistema numérico decimal [I, M].*

Yo aquí estoy haciendo trampa porque estoy metiendo operaciones,

- L3.1-1.3. *Explica a los alumnos que con las agrupaciones que han hecho, con grupos de 20 y de 9, no van a ver la relación con el 8 ni con el 7 del 87, por lo que no verán la relación con el concepto de número escrito en el sistema de numeración decimal [E, 3].*
 - L3.1-1.3(I)1. *Para que los alumnos comprendan mejor la notación del número, lo más lógico sería hacer agrupaciones de 10, así se vería que en el 87 hay 8 grupos de 10 y 7 palillos sueltos, mientras que en el 90 hay 9 grupos de 10 [I, M].*

nosotros ahora no estamos con las operaciones, estamos solo con el número, con la escritura del número, eso es lo que estamos trabajando, ¿no? Pero para ayudar a ver esa conexión de los palillos hacia lo simbólico-numérico, pongo, escribo eso de transición

- M18.1-1.3. *Indica el objetivo que tenían que alcanzar los alumnos: establecer la conexión entre los palillos y el sistema de numeración [E, 3].*
 - M18.1-1.3(I)1. *Hasta el momento la actividad podría ser trasladable a los alumnos [de primaria], pero ahora ya se aprecia un objetivo de didáctica de las matemáticas para estos alumnos [futuros maestros] que en la actividad no estaba presente; ha trasladado la actividad a la vez que les hace pensar sobre por qué puede ser interesante; es una discusión de doble naturaleza [I, M].*
 - M18.1-1.3(I)2. *Cuando se les da una consigna a los alumnos, muchas veces estos se quedan con un objetivo, y otro objetivo –que para el formador puede ser importante– puede que lo vean como secundario; por eso, no ha aparecido ningún patrón, aunque también es cierto que con números pequeños la actividad no es tan lisa, pero no es factible darles cientos de palillos [I, M].*
 - M18.1-1.3(I)3. *En la primera expresión $[3 \times 20 + 3 \times 9]$ sí que no se ve la relación, pero en la segunda $[4 \times 20 + 1 \times 10]$ de un vistazo sabes lo que hay, que es lo que ha pedido la formadora que hagan los alumnos [I, M].*

para ir copiando lo que me decís, ¿no?, porque tardo más, tardo más en dibujar los palillos, las gomitas rosas, no sé qué, podría sacar la foto de la cámara y ponerlo rápido, ¿no?, pero..., bueno, lo escribo, lo transcribo así.

- *M19.1-1.3. Está diciendo que lo escribe en la pizarra por una cuestión de tiempo, aunque también comenta alternativas [E, 1].*

Ahora, otro grupo. Vosotros dos ya estáis, que luego, luego... Ah, venga, ya que estamos aquí [dibuja una llave a la derecha de lo que ya ha escrito en la pizarra]. ¿A qué consenso... habéis llegado...?

A: Pues 7 grupos de 20...

F: Muy bien, 7 grupos de 20 [señala el 3 y el 4]. Han visto rápido y han dicho:

- *M21.1(i)-1.3. Evento implícito en el comentario [E, 1].*

Transcripción: Muy bien, 7 grupos de 20 [señala al 3 y al 4].

- *M21.1(i)-1.3(I)1. Le ha gustado porque los alumnos han hecho un agrupamiento y ella lo que intenta hacer ver es que es muy cómodo trabajar con agrupamientos iguales [I, M].*

«bien, los dos hemos agrupado, sin habernos copiado, en grupos de 20, con lo cual automáticamente tenemos 7 grupos de 20» [escribe 7×20].

A: Luego, ellos los 27 de 3×9 ...

F: Sí.

- *D4.1-1.3. Está explorando la estrategia que han seguido los alumnos, viendo cómo de manejables son las agrupaciones que han hecho dos grupos de alumnos al juntarse para realizar la suma [E, 2].*

- *D4.1-1.3(I)1. Para tratar de que los alumnos se den cuenta de las ventajas que tiene hacer siempre grupos de 10 [I, M].*

A: ... los han dividido en 2 de 10 para que se junten con los nuestros de 10.

F: ¿Y por qué no habéis hecho vosotros... separar este de 10 [señala el 10 de 1×10] en 1 de 9 y 1 de 1?

A: Porque se quedaría 1 solo y luego...

- *J3.1-1.3. Pregunta a los alumnos a qué acuerdo han llegado [E, 3].*

- J3.2-1.3. *Pregunta a los alumnos por qué han elegido una estrategia [para reagrupar] y no otra, analizando lo que han hecho [E, 1].*
 - J3.2-1.3(I)1. *Porque pretende guiarlos para que vean cuál es la estrategia óptima, obteniéndola entre todo el grupo y no dándola ella, viendo los pros y contras de la estrategia que han planteado ellos, la cual no es la óptima [I, M].*

F: Bueno, pobrecillo, ¿no? No pasa nada.

- M25.1-1.3. *Pregunta a los alumnos por qué no han hecho un grupo de 9, mostrando preferencia por la propuesta de una alumna [E, 3].*
 - M25.1-1.3(I)1. *Porque pretende que le expliquen por qué es más cómodo hacer grupos de 10 [I, M].*

A: Y porque es más fácil sumar de 10 en 10 que de 9 en 9.

A: Para ponerle la goma a 1...

- L4.1-1.3. *Mantiene un diálogo con los alumnos [E, 1].*
 - L4.1-1.3(I)1. *Para que los alumnos lleguen por ellos mismos a la idea de que si todos tuviésemos el mismo criterio para organizar los palillos, el conteo al unir los grupos sería más fácil; para eso surge el sistema numérico decimal, la base 10 [I, M].*

F: Para ponerle la goma a 1... Bueno... Eso... Puede ser una justificación, pero tampoco muy potente... Me gusta más lo que ha dicho ella, o ella...

A: Que es más fácil sumar de 10 en 10 que de 9 en 9.

F: ¿Por qué será más fácil sumar de 10 en 10 que de 9 en 9 para nosotros? [Hablan varios alumnos a la vez]. ¿Por qué es más fácil sumar para nosotros de 10 en 10 y no de 9 en 9? [Hablan varios alumnos a la vez].

- D5.1-1.3. *Está preguntando a los alumnos acerca de sumar de 10 en 10 o de 9 en 9, haciéndoles ver cómo dependemos de la notación posicional [E, 3].*
 - D5.1-1.3(I)1. *En mi experiencia, tenemos tan asumida la notación posicional que es difícil hacer que los alumnos la entiendan realmente [I, M].*
- R2.1-1.3. *Está preguntando a los alumnos por grupos, tratando de llegar a la conclusión [E, 1].*

- R2.1-1.3(I)1. *Para que los alumnos sintetizen y razonen el trabajo realizado y poder comprobar así si han adquirido el objetivo de la clase [I, D].*
- P3.1-1.3. *Está preguntando a los alumnos por qué es más fácil sumar de 10 en 10 que de 9 en 9, haciéndoles ver la relación con nuestro sistema numérico decimal [E, 3].*
 - P3.1-1.3(I)1. *Para que los alumnos reflexionen sobre nuestro sistema numérico decimal y las distintas agrupaciones que están haciendo para sumar los palillos [I, M].*

Porque tenemos 10 dedos, por ejemplo, ¿no? Porque estamos más acostumbrados a 10, 20, 30, 40... [mueve las manos con los dedos estirados], ¿no?,

- J4.1-1.3. *Toma la estrategia dada por un alumno, la cual surge tras plantear una serie de preguntas, y continúa preguntando por esa estrategia sin dar la solución [E, 1].*
 - J4.1-1.3(I)1. *Para tratar de que entre todos los alumnos vayan haciendo suya la idea o estrategia que ha surgido [I, M].*

como que nuestro sistema de numeración parece que...

A: Porque en verdad solo sumas de 1 en 1 y luego le pones un 0, entonces...

F: Solo sumas de 1 en 1, elabora eso. Estamos en clase de matemáticas, ¿qué es 1, 1...?

A: Pues por ejemplo, si tienes 30, pues 1 más 1 más 1, 3, como es 10,

- M27.1-1.3. *Dice a una alumna que elabore mejor la idea que está expresando [E, 1].*
 - M27.1-1.3(I)1. *Porque quiere que la alumna haga explícito que es más fácil y rápido sumar cuando «no hay» unidades, sino que hay un cero en las unidades; no es la regla de los ceros, porque esa es para el producto, pero es algo parecido [I, M].*

pues le pones el 0 y ya tienes los 30.

F: ¿3 qué?

A: 3 grupos de 10.

F: 3 grupos de 10, muy bien.

- M29.1-1.3. *Acepta la respuesta de la alumna de «grupos de 10» en vez de «decenas» [E, M].*

3 grupos de 10, vale. [Vuelve a la pizarra a terminar lo que empezó a escribir].

A: 3 de 20, 3 de 10 y 1 de 7.

F: [Escribe, después de 7×20 , 3 10]. 3 de 10, llegasteis a romper estos [señala 3×9] en 2 de 10 más 7 sueltos, ¿no? [escribe $2 \times 10 + 7$ encima de 3×9]. Y entonces estos dos [señala 2×10] con este [señala 1×10] 3 y 7 palillos ahí sueltos [escribe, después de $7 \times 20 + 3 \times 10$, 7×1], ¿vale? Ahora, la cantidad total, ¿cuánto es? [señala el 87 y el 90].

A: 177.

F: 1, 7, 7 [escribe 177 a la izquierda del 87 y del 90]. ¿Hay aquí 1, 7, 7 por algún lado? [señala el 7 de 7×20 , al 3 de 3×10 y al 7 de 7×1].

- M32.1(i)-1.3. Evento implícito en el comentario [E, 1].

Transcripción del vídeo: 1, 7, 7 [escribe 177 a la izquierda del 87 y del 90]. ¿Hay aquí 1, 7, 7 por algún lado? [señala al 7 de 7×20 , al 3 de 3×10 y al 7 de 7×1].

- M32.1(i)-1.3(I)1. Quiere forzar que salga una relación, pero es raro que salga ahí cuando tampoco la había aquí [señala el $3 \times 20 + 3 \times 9$ y el $4 \times 20 + 1 \times 10$] [I, M].

Este [señala el 7 de 7×1] parece que hay aquí, ¿no? Pero lo otro... no me cuadra mucho todavía... Vale, otros dos grupos.

- J5.1-1.3. Termina la sesión recapitulando lo que han trabajado, el valor posicional, haciendo ver que aún tienen que trabajar más sobre ello [E, 2].



VÍDEO 2

[F = Formadora del vídeo]. [A = Alumnos].

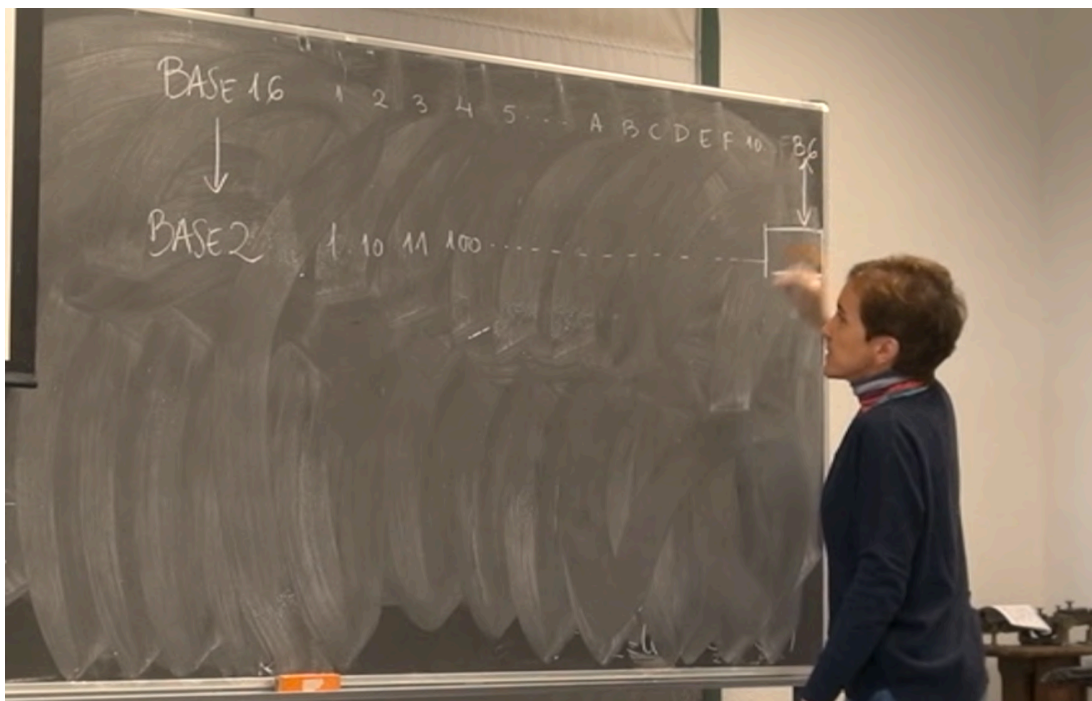
- L1.1-2. Está borrando la pizarra [E, D]
 - L1.1-2(I)1. Para tener la pizarra limpia antes de empezar la clase [I, D].

F: Como me piden pasar de base 16 a base 2 directamente [escribe en la pizarra], pues Martín dice: «yo escribo aquí la secuencia 1, 2, 3, 4, 5..., A, B, C, D [dice 10, 11, 12, 13, señalando A, B, C, D], 14, 15 [escribiendo E, F], uno, cero [10]...,

- L2.1-2. Está empezando a explicar una forma de hacer un cambio de base [E, 1].

así hasta el B6», ¿vale? Y luego aquí en paralelo, voy uno [1], uno, cero [10], uno, uno [11], uno, cero, cero [100]..., hasta que pille aquí el que sea y ya está.

- D1.1-2. Está planteando el problema, que consiste en pasar directamente un número expresado en base 16 a un número en base 2 [E, 3].
- D1.2-2. Está escribiendo la solución que parece que ha dado un alumno, sin juzgar, consistente en escribirlo todo en las dos bases y contar en las dos bases [E, 2].



No he pasado por base 10,

- M4.1-2. Plantea que no hay que pasar por base 10 [E, 2].

- M4.2-2. *Está explicando cómo lo ha hecho un alumno, Martín, reproduciendo los números y luego contando en base 16 y en base 2, añadiendo más símbolos en base 16 después del 9 [E, 2].*
 - M4.2-2(I)1. *Se trata de una forma muy larga, porque fíjate que tiene B de 16 y 6 [I, M].*
 - M4.2-2(I)2. *En base 16 se necesitan 16 símbolos, el 0 y 15 más [I, M].*

que es lo que me dice Nuria. Con lo cual, superado. ¿Pero qué pasó?

- P1.1-2. *Está planteando el problema, que consiste en pasar un número de base 16 a base 2 [E, 2].*
 - P1.1-2(I)1. *Debe de estar buscando el método más eficiente de hacerlo [al no tener que pasar por base 10] [I, M].*

A: Que es muy largo.

F: Que es muy largo. Y que hasta en su casa, teniendo semanas, ha dicho: «paso». Tenías tiempo suficiente, porque había tiempo suficiente en dos semanas a hacerlo, pero...

- L3.1-2. *Intenta hacer ver a un alumno que su propuesta de pasar de una base a otra, de base 16 a base 2, de elemento a elemento es posible, pero que sería muy largo [E, 3].*
 - L3.1-2(I)1. *Ha debido de hacer antes una lluvia de preguntas para ver cómo pasar de una base a otra [I, D].*

es largo y además un coñazo, con lo cual ha dicho: «paso». Con la idea Nuria ya se hace una idea de que lo he pensado, es un procedimiento válido, pero no ha sido eficaz, ¿vale?,

- J1.1-2. *Explica en la pizarra cómo se resolvería el ejercicio que ha planteado siguiendo la estrategia que ha propuesto un estudiante [E, 1].*
- J1.2-2. *Indica que la estrategia planteada por el estudiante no es óptima [E, 2].*
- J1.3-2. *Emplea un tono distendido al dirigirse a los estudiantes [E, D].*

entonces nosotros tenemos que seguir pensando

- P2.1-2. *Explica a los alumnos que una cosa es resolver un problema y otra es resolverlo de una forma eficiente o eficaz [E, 2].*

porque tendremos que buscar alguna estrategia que sea eficaz. [Da la palabra a una alumna].

- M6.1-2. *Dice coloquialmente que es una forma muy larga [el procedimiento del alumno], por lo que hay que buscar otra manera que sea eficaz [E, 2].*
 - M6.1-2(I)1. *Se trata del principio de economía, que en matemáticas es brutal, es decir, siempre que tienes dos estrategias tienes que buscar una que sea más económica, por comodidad, pero sobre todo porque tendrás menos errores, y trata de que los alumnos se den cuenta; en este ejercicio es muy fácil equivocarse [I, M].*
 - M6.1-2(I)2. *Creo que sí es eficaz [el procedimiento del alumno], porque se obtiene el resultado, pero no eficiente [I, M].*

A: ¿Se podría hacer la división?

F: ¿Qué división?

A: La de B6 entre 2. Es que no sé cómo plantearlo.

F: Ella dice: «oye, mira Nuria, cuando tú pasas de base 10 a base 2 haces grupos de 2 y divides de 2 en 2; pues ahora lo mismo, si estoy en B6 a base 2, divide entre 2». Pero aquí estoy escribiendo en base 16... [En la pizarra ha escrito B6 entre 2, con la caja]. Podríamos intentar hacerlo, pero... ¿sabemos hacerlo... o cómo va esto?

- D2.1-2. *Está explorando una alternativa que da otro alumno [E, 1].*
 - D2.1-2(I)1. *Quiere que sean los alumnos quienes digan si creen que puede funcionar la alternativa o no [E, M].*
 - D2.1-2(I)2. *Sobre la alternativa que se plantea, para mí interpretar que B6 es 11 grupos de 16 y 6 grupos de 1 no es pasar por base 10, pero habrá que ver si lo es para la docente [I, M].*
- M8.1-2. *Busca otra manera de hacerlo, siguiendo la propuesta de un alumno, que consistiría en hacer lo mismo que cuando se pasa de base 10 a otra base, dividiendo en base 16 [E, 3].*

- M8.2-2. *Pregunta si sabrían hacer la división en base 16, haciendo ver que estaría bien hecho, pero que sería complicado [E, 3].*
- J2.1-2. *Escribe otra estrategia dada por una alumna, sin llegar a desarrollarla, que consiste en dividir por la base [E, 2].*
 - J2.1-2(I)1. *Trata de llegar al modo para hacer el ejercicio viendo varias estrategias propuestas por los alumnos [I, M].*

¿O mentalmente para hacerlo me vais a pasar a base 10, y hacéis la división en base 10 —que es lo que sabéis hacer—, y luego otra vez volvemos y entonces hacemos trampa porque pasamos por base 10? Si sabéis dividir un número en base 16 entre 2, si sabéis hacer esta división en base 16 —yo lo tendría que pensar, ¿eh?, así a capón no lo sé hacer, pero si lo pienso... —, si sabéis hacer eso, valdría.

- R1.1-2. *Pregunta a los alumnos por los razonamientos que llevarían a cabo para realizar lo que se les pide [E, M].*
 - R1.1-2(I)1. *Para que sean los propios alumnos quienes lleguen por ellos mismos al modo de conseguir lo que se les plantea [I, D].*
- L4.1-2. *Está argumentando que el razonamiento de la alumna sería válido pero que en la práctica no se hace [E, 2].*
- P3.1-2. *Plantea una propuesta que ha hecho una alumna [E, 1].*
- P3.2-2. *Comenta que la propuesta de la alumna puede ser un método válido, así como las dificultades del mismo [E, 3].*



Pero esto lo vamos a ver en el dossier 3, ¿eh?, multiplicación y división. Nosotros tenemos herramientas para dividir en base 10 y sabemos cómo hacer restas sucesivas y el algoritmo tradicional de la cajita que habéis ido haciendo... Podríamos abordarlo, por eso abordamos los problemas de..., el anterior, ¿no?, de pasar de base 10 a base 2. Pero el de base 16 a base 2 hay que dividir en base 16.

- *D3.1-2. Deja tiempo a los alumnos para que propongan formas para solucionar el problema [E, D].*

Sumar en base 16 lo sé hacer, restar en base 16 me cuesta un poco pero lo sé hacer, multiplicar en base 16 también podría hacerlo, con lo cual dividir podría hacerlo, pero... no me atrevo a hacerlo sin manos, hoy.

- *M10.1-2. Dice que no se atreve a hacerlo «sin manos» [E, D].*
 - *M10.1-2(I)1. Como no sé cuál es exactamente la consigna, si es simplemente pasar el número B6 de [base] 16 a 2, no sé si se refiere a alguna restricción [I, M].*

Otra forma.

- *M11.1-2. Intenta que le digan otra manera [E, M].*
 - *M11.1-2(I)1. Parece que se trata de un ejercicio que ha mandado previamente para casa y está esperando a que alguien le diga que 16 es una potencia de 2 para*

desarrollar ese procedimiento, puesto que ya han salido dos formas de resolverlo y aún «no le ha gustado» ninguna [I, M].

- L5.1-2. Continúa con la lluvia de preguntas [E, M].
 - L5.1-2(I)1. Para ver si los alumnos se van aproximando cada vez más al procedimiento genérico [I, M].
- J3.1-2. Indica contenido que verán más adelante [E, D].
- J3.2-2. Sigue con la puesta en común [de estrategias], elaborando a partir de lo que van proponiendo los alumnos, sin llegar a resolver aún el problema [E, M].
 - J3.2-2(I)1. Porque pretende que todos los alumnos se involucren en la resolución del problema [I, D].
 - J3.2-2(I)2. En matemáticas está bien dejar problemas en el aire y hacer que los alumnos piensen sobre ellos [I, M].
 - J3.2-2(I)3. Esta asignatura trata mucho de ver por qué funcionan las recetas y de que los alumnos puedan hacer los ejercicios sin necesidad de emplearlas, muchas de las cuales ya las han olvidado [I, M].

A: Fijándote en que 16 es 2^4 .

F: Fijándome en que 16 es 2^4 . Me lo voy a apuntar aquí [borra la pizarra y lo escribe].

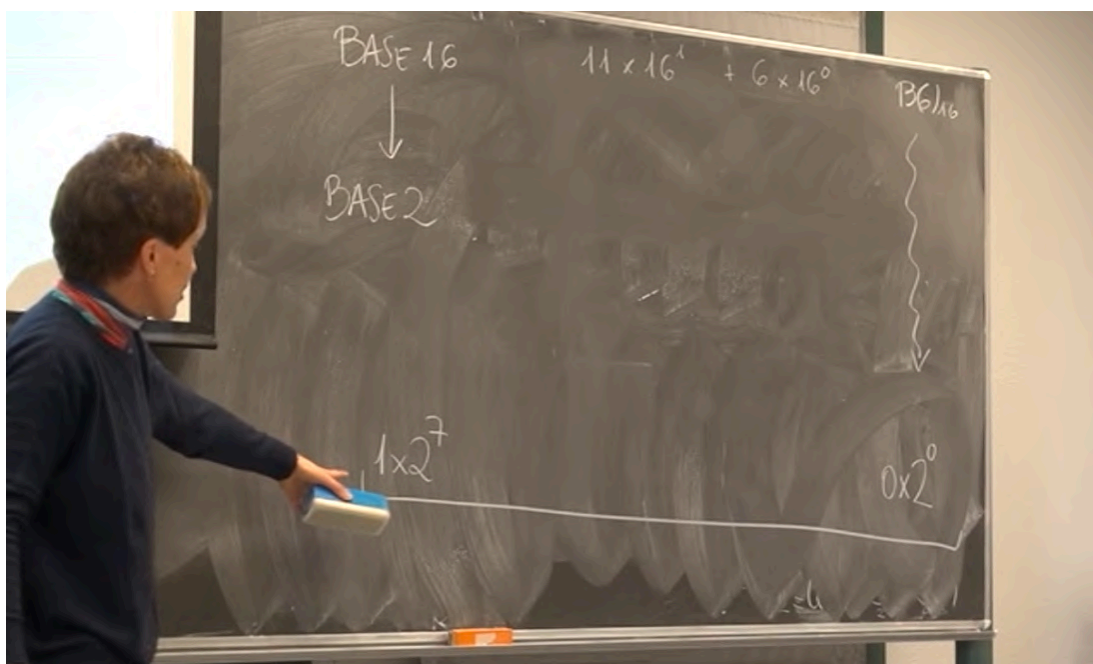
A: Yo lo hice así, pero luego algo no me cuadraba.

F: Muy bien, vale.

A: Luego hice, 11...

F: Venga, vamos a poner el punto de partida, ¿no? El punto de partida es que tenemos 11×16^1 , ¿no?, más 6×16^0 . Este es mi B6 en base 16. Y yo quiero llegar aquí a... Me acuerdo de que empezaba en 1×2^7 y a acababa en 0×2^0 , ¿vale?

- M13.1-2. Escribe el comienzo del desarrollo: escribe 11, etc., y al final escribe la primera cifra del número en base 2, la cual acompaña a 2^7 [E, 1].
 - M13.1-2(I)1. No sé si ya lo ha calculado y está viendo cómo lo han hecho los alumnos o si lo ha calculado ahora... Parece que no sabe las demás cifras... Al no saber el enunciado del ejercicio, no tengo más datos [I, M].
 - M13.1-2(I)2. Si empieza en 2^7 , tiene ocho cifras en base 2 [I, M].



Entonces yo quiero pasar de ahí [señala la parte superior de la pizarra] a aquí [señala la parte inferior]. Si lo consigo, ya lo tengo en base 2, ¿no? Ya solo cojo los coeficientes de las potencias de 2 y ya lo tengo.

- D4.1-2. *Empieza a desarrollar una idea de resolución que ha dado un alumno, permitiendo el empleo de la estrategia consistente en interpretar en base 16 la expresión dada para resolver el problema [E, 1].*
 - D4.1-2(I)1. *Con el inicio del desarrollo de la resolución trata de que los alumnos empiecen a ver por dónde van las cosas [I, D].*

Entonces, Pablo dice: «cambia este 16», ¿no, Pablo?

A: Sí.

F: Este 16 ponlo como $(2^4)^1$ y este 16 ponlo como $(2^4)^0$.

- R2.1-2. *Organiza visualmente la información a los niños [a los futuros maestros] [E, 1].*
 - R2.1-2(I)1. *La esquematización, atendiendo al contenido o concepto que se trabaje, es la forma más adecuada para que los alumnos se organicen y puedan llegar a entender lo que se trabaje [I, D].*

¿Vale?

- L6.1-2. Escribe en la pizarra el argumento que ha dado un alumno, descomponer 16 en potencias de 2, transformándolo y desarrollándolo más que los argumentos dados antes por otros estudiantes [E, 2].
 - L6.1-2(I)1. Porque le puede valer para que los alumnos vean cómo pasar fácilmente de base 16 a base 2 [I, M].
- L6.2-2. Descompone el 16 en potencias de 2 [E, 3].

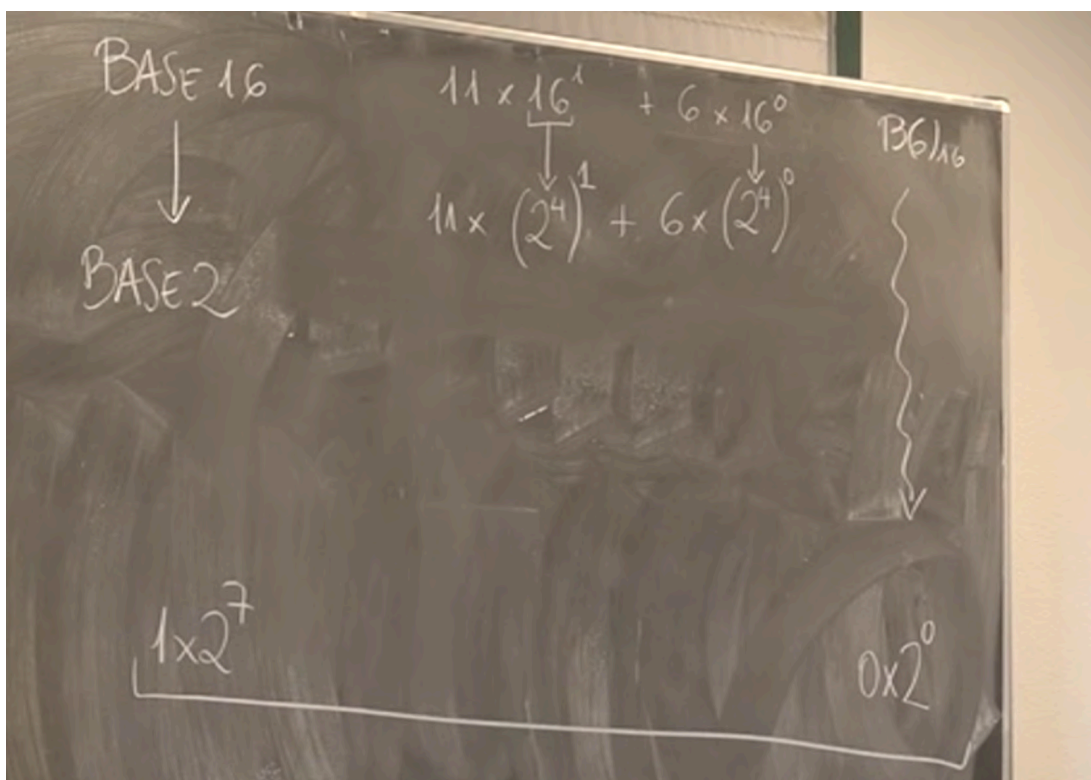
Yo tengo una expresión polinomial en base 16, quiero llegar a una expresión polinomial en base 2, y él me dice: «yo veo claro el cambio, 16 es 2^4 , cada vez que veas un 16

- M15.1-2. Indica que hay que cambiar las bases, introduciendo además por primera vez el concepto de expresión polinomial [E, 2].
 - M15.1-2(I)1. Un número en una base es simplemente una descomposición en un polinomio en función de las potencias de una base [I, M].
 - M15.1-2(I)2. Los coeficientes en base 2 solo pueden ser 0 y 1 y aquí [en base 16] son del 0 al 15; por ello, hay que cambiar las bases [de las potencias], pero también los coeficientes [I, M].

ponlo como 2^4 ».

- J4.1-2. Dice que va a apuntar la idea de un alumno [para resolver el ejercicio] [E, D].
 - J4.1-2(I)1. Como apunta la idea, esta debe de ser buena y el alumno interpretará que es importante [I, D].
- J4.2-2. Coge de nuevo la idea de un alumno y elabora en la pizarra, escribiendo grande, a partir de ella, añadiendo poco a poco los datos para resolver el problema y dejando tiempo para pensar, involucrando a ese alumno [E, 1].
 - J4.2-2(I)1. Con esa forma de proceder, los alumnos lo ven más cercano, se ven involucrados en las ideas de sus compañeros y van viendo si funcionan las estrategias [I, M].

Vale, y entonces resulta que aquí tengo 11 grupos de esto y aquí tengo 6 de estos. ¿El 11 y el 6... los puedo dejar?



A: No, los pasas a base 2.

- P4.1-2. Intenta que los alumnos descubran el método para pasar de base 16 a base 2 [E, M].
- P4.2-2. Lleva a cabo los pasos de la resolución sin hacer que sean los alumnos quienes lo resuelvan [E, 1].
 - P4.2-2(I)1. Quizá porque han trabajado el tema anteriormente [I, D].

F: Los paso a base 2. ¿Sé pasar 11 a base 2?

A: Sí.

- M17.1-2. Dice que [el 11 y el 6] hay que pasarlos a base 2 [E, M].
 - M17.1-2(I)1. No sé si el hecho de pasarlos a base 2 es iniciativa de ella o del alumno [I, D].

F: Vale, vamos a escribir 11 en base 2.

A: 1, 0, 1, 1.

F: 1×2^3 , ¿no?

A: Sí.

F: Más...

A: Cero.

F: 0×2^2 . De momento llevo ocho. Más...

A: Uno.

F: 1×2^1 . Ya llevo 10...

A: Más uno.

F: Más 1×2^0 . Ahí ya tengo 11, ¿vale?

- D5.1-2. Traduce la expresión dada en una expresión con potencias de 2, en una expresión polinomial en notación binaria, desarrollando ella la parte algebraica siguiendo la idea planteada por un alumno [E, 3].
 - D5.1-2(I)1. Pretende escribir de un modo más preciso lo que el alumno dice, quizá porque este tenga dificultades o lagunas a la hora de realizar la manipulación algebraica [I, M].

Esta es una manera de escribir 11. ¿Cómo? Como potencias de 2.

- M19.1-2. Llega a 1, 0, 1, 1 siguiendo las indicaciones del alumno, escribiendo también el 0×2^2 [E, 2].
 - M19.1-2(I)1. Si no está..., si es un cero, yo normalmente no lo pongo; cuando vas a descomponer, no lo pones y ya está [I, M].

Expresión polinomial del 11 en base 2, como potencias de 2, ¿vale? Y esto va multiplicado... 2 elevado a la 4 y luego lo elevo a la 1, ¿cuánto me queda...? 2^4 es $2 \times 2 \times 2 \times 2$ y luego eso lo elevo a la 1, es decir, que lo copio una vez, o sea que me queda...

- M20.1-2. Dice que 16 [2^4] lo eleva a la 1 [E, 1].
 - M20.1-2(I)1. Queda muy matemático decir 16 a la 1, ya que en la vida normalmente decimos 16, pero ella quiere forzar que eso sea una escritura polinómica y entonces quiere que aparezca elevado a 1; lo mismo ocurre cuando escribe 16^0 . Es una elegancia que solo la vemos desde el punto de vista de las matemáticas y los alumnos se pueden preguntar para qué ponerlo así [I, M].

A: 2^4 .

F: 2^4 . Más... El 6, ¿lo dejo?

A: No.

F: No. ¿Cómo escribo 6 en base 2?

A: 1×2^2 .

F: 1×2^2 , que son 4.

A: 1×2^1 .

F: $1 \times 2^1 \dots$ Y 0×2^0 [lo va escribiendo todo en la pizarra]. Ahí pone 6,

- R3.1-2. *Escribe lo que un alumno le va diciendo en voz alta cuando escribe el 11 [su desarrollo], siendo ella quien termina [E, 1].*
 - R3.1-2(I)1. *Porque detecta que le está costando trabajo al alumno [I, D].*

una manera más chula, ¿no?, de poner 6

- M21.1-2. *Escribe 1, 1, 0, diciendo que ha escrito 6 de una manera más chula [E, 1].*
 - M21.1-2(I)1. *Es muy chula desde el punto de vista matemático, porque quiere que esto se vea como 1, 1, 0, pero es verdad que esto son elegancias [I, M].*

como potencias de 2, ¿no?, como un polinomio con potencias de 2. Vale, y luego estaba por... Y ahora tengo $(2^4)^0$. ¿Eso qué es?

A: Uno.

F: Uno. ¿Y si lo quiero poner como potencias de 2?

A: 2^0 .

F: 2^0 , muy bien. 2^0 [lo escribe en la pizarra].

- L7.1-2. *Está escribiendo y explicando la conversión con ayuda de los alumnos [E, 1].*
 - L7.1-2(I)1. *Aunque esté haciendo creer a los alumnos que están dando ellos la respuesta, lo está haciendo como ella quiere [E, D].*
- J5.1-2. *Desarrolla los argumentos algebraicos preguntando a los alumnos, aunque a veces los hace ella, y haciendo pausas [E, 2].*
 - J5.1-2(I)1. *Pretende que los alumnos piensen y realicen un trabajo autónomo, lleguen o no a la solución [I, M].*
 - J5.1-2(I)2. *A este tipo de alumnado le cuesta mucho desarrollar argumentos algebraicos, por lo que es importante ir preguntando y hacer pausas [I, M].*

Mira qué contenta estoy, porque $2^0 \times 2^0$ es 2^0 y el coeficiente es 0, que es este. Y $2^4 \times 2^3$ es 2^7 y el coeficiente es 1, que es este.

- M24.1-2. Dice que está contenta por encontrar una conexión entre el 0 [coeficiente de 2^0 de la parte de arriba] y el 0 final del resultado, así como entre el 1 [coeficiente de 2^3 de la parte de arriba] y el 1 inicial del resultado [E, 3].
 - M24.1-2(I)1. Está contenta porque como matemáticos nos ponemos contentos al ver esto [la conexión que ha aparecido] [I, M].
 - M24.1-2(I)2. Sigo sin saber si es que esta información ya estaba en el ejercicio. Debe de ser que sí, que el ejercicio en algún momento decía que el resultado empezaba por 1 y acababa por 0 [I, M].

Pues como que ya casi lo tengo, ¿no? ¿Sí o no?

A: Sí...

- P5.1-2. Está realizando la transformación aritmética para resolver el problema, llevando a cabo todos los pasos despacio y justificando cada uno de ellos [E, 2].

Handwritten mathematical work on a chalkboard showing the conversion of the base-16 number 136 to base-2. The work includes the expression $11 \times 16^1 + 6 \times 16^0$, its conversion to powers of 2, and the final result $1 \times 2^7 + 0 \times 2^0$.

$$\begin{aligned}
 &\text{BASE 16} \\
 &\downarrow \\
 &\text{BASE 2} \\
 &11 \times 16^1 + 6 \times 16^0 \\
 &\downarrow \\
 &11 \times (2^4)^1 + 6 \times (2^4)^0 \\
 &\downarrow \\
 &[1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0] \times 2^4 + [1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0] \times 2^0 \\
 &\downarrow \quad \downarrow \\
 &1 \times 2^7 \quad 0 \times 2^0
 \end{aligned}$$

F: Vale, y ahora... Venga, ¿cuál será el coeficiente...? Venga, vamos a poner aquí 2^6 , paso a la siguiente varilla del ábaco, ¿eh? ¿Cuál será el coeficiente de 2^6 ?

A: Cero.

- P6.1-2. Relaciona en una ocasión el desarrollo aritmético con el ábaco [E, 3].

- P6.1-2(I)1. Porque habrán trabajado con el ábaco anteriormente [I, D].

F: Cero, porque ¿cómo consigo yo 2^6 ?

- M25.1-2. Deja un espacio en la escritura [E, M].
 - M25.1-2(I)1. Porque está esperando un coeficiente en el espacio [I, M].

$2^4 \times 2^2$, ¿no?

- R4.1-2. Da a los alumnos la introducción para llegar a eso [1×2^7 y 0×2^0], dejando que continúen ellos [E, 1].

2^4 es $2 \times 2 \times 2 \times 2$, 2^2 es 2×2 , ya tengo ahí los seis doses, ¿vale?, que está aquí,

- M26.1-2. Recuerda a los alumnos que al multiplicar potencias de la misma base se suman los exponentes [E, 3].

y el coeficiente cero. ¿Por aquí puedo llegar a 2^6 ?

A: No.

F: No, pues ala. 0×2^6 . Genial, porque era lo que me había salido antes. Ahora, más...

- M27.1-2. Dice que era lo que le había salido antes [E, M].
 - M27.1-2(I)1. Porque debe de ser que la escritura la tienen [I, M].

Siguiente varilla del ábaco, 2^5 . ¿Dónde consigo yo 2^5 ? Aquí [señala el corchete de la derecha] como mucho llego a 2^2 , me olvido de esto. $2^4 \times 2^1$ [señalando el corchete de la izquierda] es 2^5 , ¿no?

A: Sí.

F: Vale, ¿y qué coeficiente lleva?

A: 1.

F: 1. ¿Y era el qué tenía que llevar?

A: Sí.

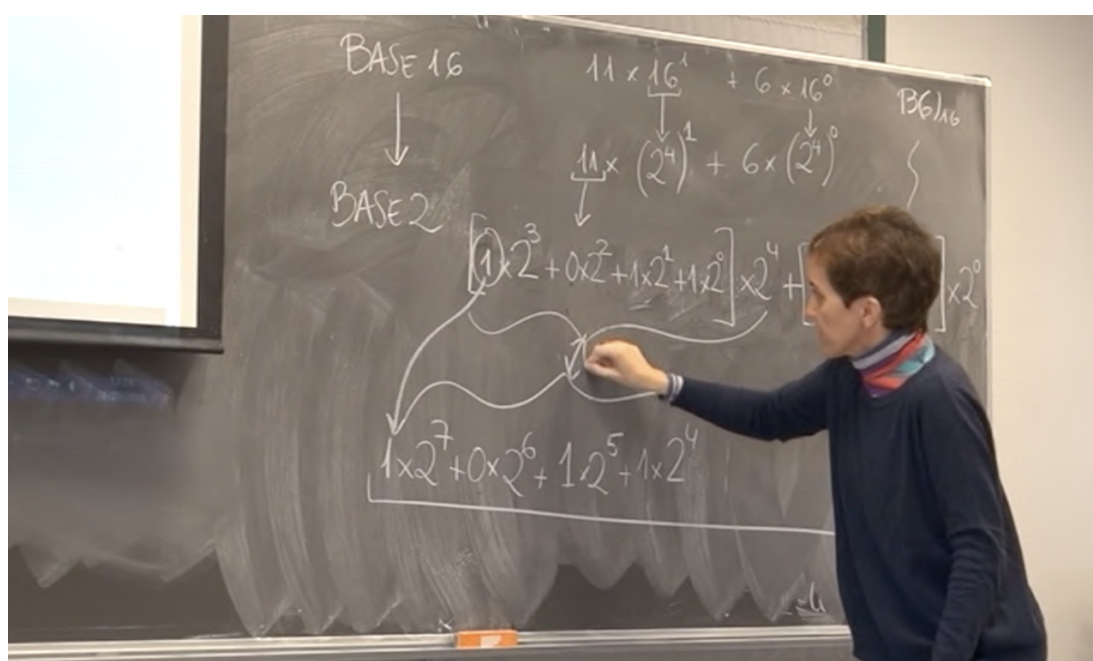
- D7.1-2. Sigue haciendo la cuenta, desarrollando la parte algebraica, interviniendo más que al principio del vídeo [E, 2].

- D7.1-2(I)1. En realidad está trabajando la aritmética, ya que no hay letras, pero con un componente algebraico fuerte [I, M].
- D7.1-2(I)2. La formadora puede que sea consciente de que muchos alumnos probablemente no están comprendiendo el desarrollo algebraico, pues seguramente les cuesta seguir esta parte algebraica, pero sigue con el ejercicio, ya que hay que acabarlo [I, M].

F: Sí, vamos bien. Y ahora, 2^4 , ¿cómo consigo 2^4 ?

A: Con 2^0 ...

F: $2^4 \times 2^0$, ¿no? Tengo aquí cuatro copias del 2 y aquí ninguna, pues tengo cuatro copias del 2 multiplicándose por sí mismo, y el coeficiente 1. 1×2^4 [lo escribe en la pizarra]. Oye, mira, todo esto se ha convertido en esto. Lo veis, ¿no?



¿Qué es lo que he hecho? Propiedad distributiva. Voy multiplicando el 2^4 por cada uno de los sumandos, ¿vale? Muy bien.

- M28.1-2. Está explicando los cálculos que está haciendo, señalando en la pizarra de dónde sale la escritura polinómica en función de las potencias de 2 que han obtenido [E, 2].
 - M28.1-2(I)1. Se trata de una manera bastante matemática de usar la pizarra [I, M].
 - M28.1-2(I)2. Es un ejercicio que está muy medido para obtener la escritura polinómica, aunque sea un poquito artificial con estos ceros ahí $[0 \times 2^6]$, porque

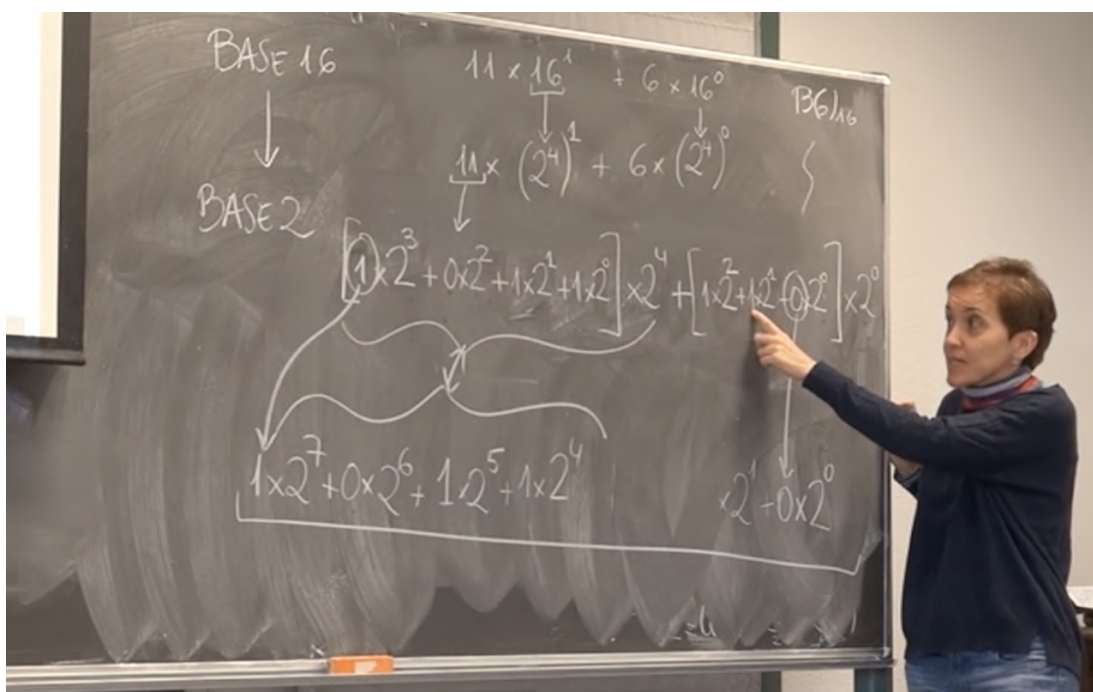
cuando yo lo hago, eso no saldría, pero es verdad que hay que mantener el cero si luego quiero pasar de ahí directamente a la escritura posicional [I, M].

- M28.2-2. Dice el nombre de una propiedad, que es la distributiva [E, 3].
- R5.1-2. Recuerda a los alumnos la propiedad que ha usado [E, 2].
 - R5.1-2(I)1. Es bueno recordarlo porque son conceptos que tienen los alumnos, pero que muchas veces se les escapan [I, M].

Y ahora, tiro por aquí, voy desde aquí [señala el 2^0 de la parte inferior derecha de la pizarra]. 2^0 , muy bien. Siguiente varilla del ábaco, 2^1 . ¿Qué coeficiente tiene 2^1 ?

A: 1.

F: 1, que está aquí [lo señala], ¿vale?



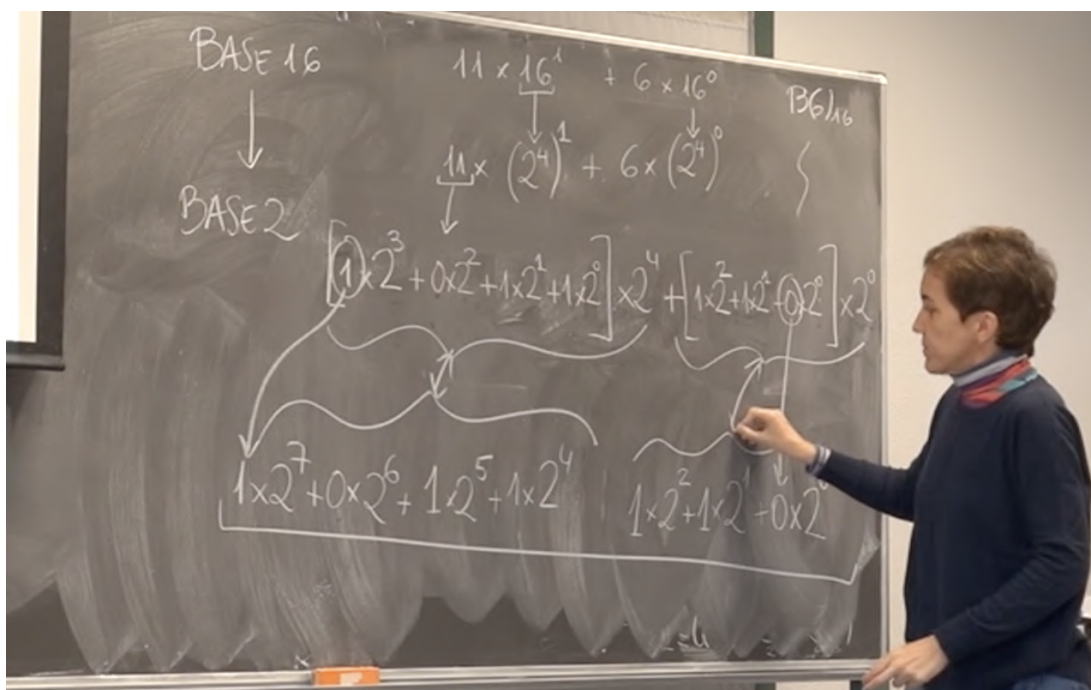
Porque sería $2^1 \times 2^0$, que es 2^1 , y lleva un 1 delante, un 1 [lo escribe abajo]. Voy bien.

- L8.1-2. Va preguntando a los alumnos cuando va señalando en la pizarra lo que escribe [E, D].
 - L8.1-2(I)1. Es una técnica bastante habitual de cualquier profesor de matemáticas que escribe en la pizarra, ir señalando en la pizarra y buscar la complicidad de los alumnos, ir preguntándoles [I, M].
 - L8.1-2(I)2. En el fondo escribe lo que quiere escribir [I, D].

Y ahora, $2^0 \times 2^2$, 2^2 [lo escribe abajo], va con un 1 [lo escribe abajo].

- M29.1-2. Deja un hueco [después de 1×2^4] [E, M].
 - M29.1-2(I)1. Porque ha previsto que ahí va a haber un 2^3 , que no hay en ningún lado, pero que tiene que estar, tiene que reservarle el hueco [I, M].

O sea que esto que tengo aquí se convierte en esto que tengo aquí.



Y ahora, Pablo, ¿qué te pasó?

A: Que como... Que claro, los iba a juntar, pero dije: «me falta el 2^3 ».

- P7.1-2. Relaciona el procedimiento de resolución con la propiedad distributiva [E, 3].
 - P7.1-2(I)1. Porque habrán estudiado antes la propiedad [I, D].
- P7.2-2. Pregunta a un alumno qué problema le ha surgido al realizar este procedimiento [E, 1].

F: Me falta el 2^3 . Pablo dice: «varilla del ábaco del 2^7 , 2^6 , 2^5 , 2^4 , ¡uy!,

- D8.1-2. Pregunta al alumno que propuso la estrategia de resolución del ejercicio acerca del problema que tuvo con el 2^3 [E, 2].
 - D8.1-2(I)1. Para que el alumno trate de interpretar la expresión a la que han llegado y diga si ya ha sabido resolverlo [I, M].
- M30.1-2. Menciona en una ocasión el recurso del ábaco [E, 2].

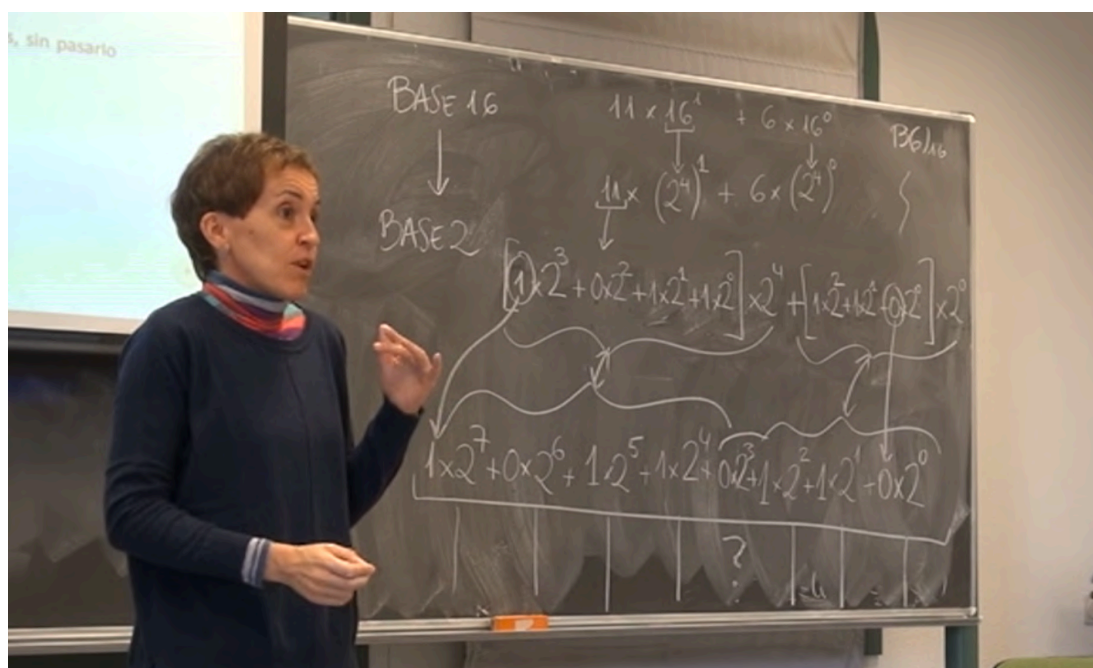
$2^2, 2^1, 2^0$ ». «¡Uy!», dice Pablo [y dibuja una interrogación en la posición del 2^3].

A: Pues si no hay, un cero.

F: Pues se pone el 0, ya está.

- J6.1-2. Acelera la explicación y la relaciona con la teoría, con las propiedades que va usando [E, 2].
- J6.2-2. Pregunta a un alumno qué problema tuvo con la posición del 2^3 [E, 2].

Lo pongo aquí: «+ 0×2^3 », y esto lo englobo aquí.



¿Qué es lo que pasa? Que escribo el 6 de una forma muy especial. Yo escribo el 6..., acordaos que esto era mi 6 [señala $1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0$], ¿eh?, esto era el 6, que es este 6 [señala el de un nivel anterior, más arriba en la pizarra], ¿vale? Yo he escrito el 6 como $1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0$, pero también puedo escribir el 6... $0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0$. No es lo estándar, porque como los ceros ahí no aportan mucho, pues no es lo estándar, pero si no me quiero olvidar de una de las varillas y no quiero tener un problema, como tenía Pablo, pues yo añado ahí para escribir el 6 de otra forma, ¿vale?

- P8.1-2. Explica a los alumnos cómo se resuelve que en este cambio de base no aparezca una determinada potencia [E, 2].

- P8.1-2(I)1. *Anticiparnos y explicar a los alumnos problemas frecuentes que pueden surgir es algo que los profesores de matemáticas solemos hacer mucho [I, M].*

Entonces, moraleja que cuentan los *youtubers*, por ejemplo David Calle,

- P9.1-2. *Menciona a un personaje [David Calle] conocido por los alumnos [E, 1].*
 - P9.1-2(I)1. *Para motivar a los alumnos y captar su atención [I, D].*

dice: «vamos a pasar de base 16 a base 2, ¿qué se hace chavales? Mirad, ¿veis este 11 que está aquí? [señala el de arriba de la pizarra], pues escribís este 11 en base 2: 1, 0, 1, 1 [señala los coeficientes de la expresión polinómica de la parte inferior de la pizarra]; ¿veis este 6 que está aquí? [señala el de arriba de la pizarra], pues lo escribís en base 2, pero cuidadín chavales, que hay que poner cuatro, ¿por qué?, porque 16 es 2^4 ».

- M31.1-2. *Explica la regla general que daría un youtuber para resolver el ejercicio de una manera más directa [E, 2].*
- L9.1-2. *Está dando a los alumnos el truquito: cada vez que haya que pasar de base 16 a base 2, basta con descomponer el número en potencias de 16, pasar el primer número a base 2, y los primeros 4 dígitos serán los primeros 4 dígitos del número, y los últimos 4 serán los últimos 4 del número, puesto que 16 es 2^4 [E, 3].*
 - L9.1-2(I)1. *Ese argumento que ella intenta trasladar posiblemente se quede en el algoritmo que pueda aprender el alumno para hacerlo rápido porque no van a entender lo que subyace detrás de ese paso rápido de la base 16 a la base 2 [I, M].*

Y entonces dice: «vamos a escribir 6 en base 2 con cuatro: 0, 1, 1, 0». Y dice: «y ahora lo juntáis, fin».

- D9.1-2. *Ahora está interpretando la receta que podría dar un youtuber como David Calle para pasar directamente de base 16 a base 2 [E, 2].*
 - D9.1-2(I)1. *Para que los alumnos entiendan de dónde saldría dicha receta [I, D].*

A mí no me vale

- R6.1-2. *Acaba de resumir a los alumnos de forma verbal todo el proceso que han seguido, en forma de síntesis [E, 1].*
- L10.1-2. *Dice que no le vale [la receta] [E, 1].*
- P10.1-2. *Indica que a ella no le valdría el método sin justificación que podría dar cierta persona relevante en el mundo de las matemáticas de los alumnos [E, 2].*
 - P10.1-2(I)1. *Porque quiere que los alumnos no caigan en las «recetas», sino en la justificación de los resultados, que profundicen en sus conocimientos de matemáticas, no solo en cómo se hacen las cosas, sino en por qué se hacen así [I, M].*

porque yo no soy David Calle, yo no estoy de *youtuber*, *influencer*, *superfamosa* ayudando a los chavales a aprobar exámenes, que es un trabajo muy digno y que está bien, y además el tío es un *crack*, muy suelto, lo hace muy bien; yo estoy formando maestros, entonces tenéis que entender cómo hemos pasado de aquí [señala la parte superior de la pizarra] a aquí [señala la parte inferior de la pizarra]

- M33.1-2. *Dice que las reglas generales, si no se entienden, no valen, ya que está formando a maestros, haciendo ver que hay que saber cómo o por qué funciona la regla [E, 3].*
 - M33.1-2(I)1. *Más allá de formar a maestros, es una consideración que tendría que estar en matemáticas en todos los órdenes, no solo en los maestros; en los maestros, desde luego, todavía más [I, M].*

a través de esto [señala la parte media de la pizarra].

- J7.1-2. *Relaciona en dos ocasiones la teoría con algo manipulativo, con algo que pueden visualizar y con lo que pueden trabajar, como son las varillas [del ábaco vertical] [E, 2].*
- J7.2-2. *Da una receta [para resolver el ejercicio] que plantearía un *youtuber* [David Calle] [E, 2].*
- J7.3-2. *Indica que un maestro tiene que aprender por qué funciona la receta [para resolver el ejercicio] [E, 3].*

Entonces, la pregunta es: ¿se puede pasar de base 16 a base 2 sin pasar por base 10?

- M34.1-2. *Plantea una pregunta a los alumnos [E, 1].*

Sí. Lo acabamos de hacer, ¿no? Es que me miráis con una cara... ¿Y por qué se puede?

- D10.1-2. *Está tratando de que los alumnos entiendan la diferencia entre lo que es una receta, que aplican mecánicamente, y lo que es entender de dónde viene esa receta [E, 2].*
 - D10.1-2(I)1. *Entender de dónde sale la receta es un trabajo muy importante y complicado a la vez [E, M].*

¿Qué pasa si yo esto [el ejercicio] os lo doy en base 15 y, en vez de en base 16, todo el problema es en base 15?

A: Que sería $2^4 + 2^0$.

F: ¿ $2^4 + 2^0$ es 15?

- P11.1-2. *Está replanteando el problema haciendo un cambio en el mismo [E, 1].*
 - P11.1-2(I)1. *Para que los alumnos reflexionen sobre si el problema se podría resolver del mismo modo tras el cambio [I, M].*

A: O sea, no..., perdón. $2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0$.

- L15.1(i)-2. *Evento implícito en el comentario [E, 1].*

Transcripción del vídeo: ¿Qué pasa si yo esto [el ejercicio] os lo doy en base 15 y, en vez de en base 16, todo el problema es en base 15?

- L15.1(i)-2(I)1. *Intenta hacer ver a los alumnos que esa técnica o procedimiento no vale para pasar cualquier número en cualquier base a base 2, sino que solamente sirve para pasar números en bases que sean potencias de 2 a base 2 [I, M].*

F: Vale, y entonces tendría que ir haciendo todas las distributivas, todo el follón, ahí. ¿Y David Calle me podría dar el algoritmo...? Escribes, imaginaos el mismo número, ¿eh?,

- M36.1(i)-2. *Evento implícito en el comentario [E, 1].*

Transcripción del vídeo: ¿Y David Calle me podría dar el algoritmo...? [Para pasar de base 15 a base 2].

- M36.1(i)-2(I)1. *Quiere que le digan que el algoritmo funciona porque 16 es 2^4 ; con la otra base, hay que hacer distributivas... y no hay un algoritmo [I, M].*

B6, en vez de en base 16, en base 15. ¿David Calle me puede decir...? Aquí tengo el 15, ¿no?, aquí tengo el 15 [los escribe encima de los 16], y David Calle me dice: «escribe esto [señala el 11] en base 2, escribe esto [señala el 6] en base 2, con tres y medio dígitos o cuatro dígitos o... tres dígitos, y lo pones junto. ¿Valdría ese algoritmo?

A: No.

- D11.1-2. *Pregunta a los alumnos si se podría aplicar la receta para pasar directamente de base 16 a base 2 si lo que se quisiera fuera pasar de base 15 a base 2, incidiendo en que no se podría [E, 3].*
 - D11.1-2(I)1. *Entender qué es lo que se está haciendo cuando se emplea una receta es uno de los valores más importantes, ya que si no se entiende, no se sabe si se puede aplicar a un caso diferente y es posible que se use mal, lo cual es un error común [de los alumnos] [I, M].*

F: No. ¿Vale?

- J8.1-2. *Plantea una pregunta sobre el algoritmo, sobre la receta vista [para pasar de base 16 a base 2] [E, 1].*
 - J8.1-2(I)1. *Para hacer ver a los estudiantes que entender el proceso es más importante que saber la receta y que la receta no sirve en todos los casos [I, M].*

O sea, que poder se puede pasar, vas con paciencia escribiendo cada una de las expresiones que aparecen, pero un paso directo solo se puede cuando una base es potencia de la otra base,

- M37.1-2. *Acaba de decir eso [E, 1].*
- L17.1-2. *Concluye diciendo que este procedimiento solo vale cuando uno pasa de una base a otra siempre y cuando la primera es potencia de la otra [E, 3].*
- L17.2-2. *Aumenta el tono de voz [E, D].*
 - L17.2-2(I)1. *Para dejar claro que, de toda su argumentación, lo realmente importante es lo que acaba de decir [I, D].*
- P12.1-2. *Está justificando por qué las «recetas» solo son válidas en determinados casos, por qué hay que profundizar en los métodos de cambio de base [E, 1].*

que es lo que hemos visto con 16, que es potencia de 2, que es 2^4 .

- L18.1-2. Lleva 13 minutos realizando un solo ejercicio [E, D].

¿Está claro hasta aquí? ¿Sí?

- D12.1-2. Pregunta a los alumnos si ha quedado claro lo que han visto [E, D].
- M38.1-2. Pregunta a los alumnos si está claro, manteniéndose luego en silencio [E, D].
 - M38.1-2(I)1. Porque debe de estar pensando que no está claro para todos [I, D].
- R7.1-2. Pregunta a los alumnos si lo han entendido tras explicarlo varias veces [E, D].
 - R7.1-2(I)1. Cuando se dan clases de matemáticas, es importante asegurarse de que los alumnos van comprendiendo [I, M].
- L19.1-2. Pregunta a los alumnos si está claro [E, D].

VÍDEO 3

Fragmento 1

[F = Formadora del vídeo].

F: Entonces, la idea es..., el ejercicio 4, que está proyectado en la pantalla, es el ejercicio 4 de la última hoja, de la hoja del dossier 2, con el que vamos a trabajar ya esta semana, ¿vale? En ese ejercicio hay cuatro operaciones, cuatro problemas, cuatro operaciones. Tenéis que hacer las cuatro operaciones..., representarlas de distintas maneras. Voy a poner en la pizarra de cuántas maneras, ¿vale? Entonces, acordaos que nosotros estamos trabajando con material manipulativo [escribe en la pizarra «Manipulativo»], ¿vale? Entonces, en primer lugar tenéis que representar esta suma $[210 + 543]$, esta suma $[315 + 429]$, esta resta $[135 - 24]$ y esta resta $[704 - 45]$, por partes [va señalando en el PDF proyectado en la pantalla], ¿no?,

- M2.1-3.1. Dice que hay que representar unas sumas [E, 1].

empezáis con la primera... Tenéis que representarlo [escribe en la pizarra] con ábaco vertical, después en el sorobán y después con los multibase, ¿vale? Y tenéis que tener las tres representaciones del proceso

- M3.1-3.1. Escribe todo en la pizarra [E, D].
 - M3.1-3.1(I)1. Es clásico de los profesores de matemáticas escribir todo en la pizarra para que se lea bien [I, M].

delante para saber comparar cada dos, ¿vale?, para saber entender cómo se traduce una en otra.

- P2.1-3.1. Presenta la actividad y su objetivo, que es emplear tres métodos o instrumentos para resolver la actividad planteada [E, 1].

Lo que no quiero es que me digáis: « $210 + 543$ son 753; Nuria, te he representado 743*

- M4.1-3.1. Dice a los alumnos que tienen que representar el proceso de la suma, no el resultado, con material manipulativo [E, 3].
 - M4.1-3.1(I)1. Porque los alumnos tienden a realizar la suma con números, con la técnica usual, y a representar luego el resultado; les das un ábaco que supuestamente es una ayuda para hacer eso y se lo toman como un obstáculo para hacerlo porque ellos están muy cómodos haciéndolo con los números y no se dan cuenta de que el ábaco hace eso mucho más rápido [I, M].
 - M4.1-3.1(I)2. No sé si con representar se refiere a la representación gráfica o a la ejecución con el ábaco. Cuando se da una consigna, debe estar claro lo que se tiene que hacer: ¿qué se entiende por representar un proceso? Se puede suponer que los alumnos ya lo han trabajado antes y por eso la formadora lo dice así; ¿cómo represento que muevo una bola? [I, M].

en el ábaco vertical, en el sorobán y en los bloques multibase». No quiero la representación del resultado, quiero la representación del proceso, de la suma, de la idea «suma».

- D1.1-3.1. Está planteando la actividad, que consiste en representar con materiales [las operaciones] [E, 2].
- D1.2-3.1. Pide que representen con los materiales el proceso, no el resultado [E, 3].
 - D1.2-3.1(I)1. A los alumnos les cuesta representar o explicar el proceso seguido, entender que no es lo mismo representar el proceso que el resultado, por lo que presta atención a clarificarlo [I, M].
- L1.1-3.1. Está explicando en qué consiste el ejercicio, indicando los tres materiales con los que quiere que representen [las operaciones] [E, 2].
- L1.2-3.1. Dice que quiere que representen el procedimiento, no el resultado [E, 3].

¿En qué os tenéis que basar?, en la definición de la suma que vimos el otro día, ¿no?, que es: elijo un representante de uno, elijo un representante del otro y hago la unión, agrupo, junto, como lo queráis pensar, ¿vale?

- M6.1-3.1. Da a los alumnos la definición conjuntista de la suma [E, 3].

- M6.1-3.1(I)1. *Es una de las definiciones de la suma, no es la única; les ha debido de dar anteriormente esa definición matemática a partir de la unión conjuntista $[I, M]$.*

Entonces, hay que representar el proceso, el proceso, no solo el resultado final de ese proceso.

- P3.1-3.1. *Está haciendo hincapié en que lo importante es el procedimiento, no solo el resultado final $[E, 3]$.*

Entonces, tenéis que representar el proceso de tres maneras en el sistema de representación manipulativo [señala lo que ha escrito antes en la pizarra], ¿vale?

- R1.1-3.1. *Pide a los alumnos que se centren en el proceso de la suma $[E, 3]$.*
 - R1.1-3.1(I)1. *Si un profesor consigue que sus alumnos entiendan el proceso, adquirirán el concepto y podrán ser buenos profesores; si solo sé hacer la suma, sin entender el proceso, no puedo transmitir cómo hacerla $[I, M]$.*

Y en paralelo [empieza a escribir en la pizarra] tenéis que representar el proceso en el sistema de representación simbólico-numérico; el enunciado está dado en ese sistema de representación, ¿vale?, esto es sistema de representación simbólico-numérico, pues tenéis que representar el proceso, las dos sumas y las dos restas, en ese sistema, ¿vale?

- M9.1-3.1. *Dice que hay que representar la suma en el registro simbólico-numérico $[E, 3]$.*
 - M9.1-3.1(I)1. *Cuando usa la palabra «representar», quizás lo que quiere decir es que hay que hacerlo en ese sistema de representación; con «representar» da la sensación de que quiere que haga el proceso en ese sistema de representación, porque lo que vamos a hacer es la suma en el registro simbólico-numérico; es un tratamiento dentro de un registro, no hay una conversión $[I, M]$.*

Y luego, en medio [escribe en la pizarra], hay una representación que es formato tabla o tabular, de la que no he hablado explícitamente, pero que me gustaría que construyerais vosotros, ¿vale? Necesito que construyáis, por ejemplo, esta suma [señala $210 + 543$], que la hagáis en tabla, con una tabla, como se os ocurra a vosotros diseñar la tabla, ¿vale? La tabla [escribe en la pizarra] puede ser más

gráfica, puede tener características gráficas, o puede tener características más simbólicas; a mí me va a interesar más

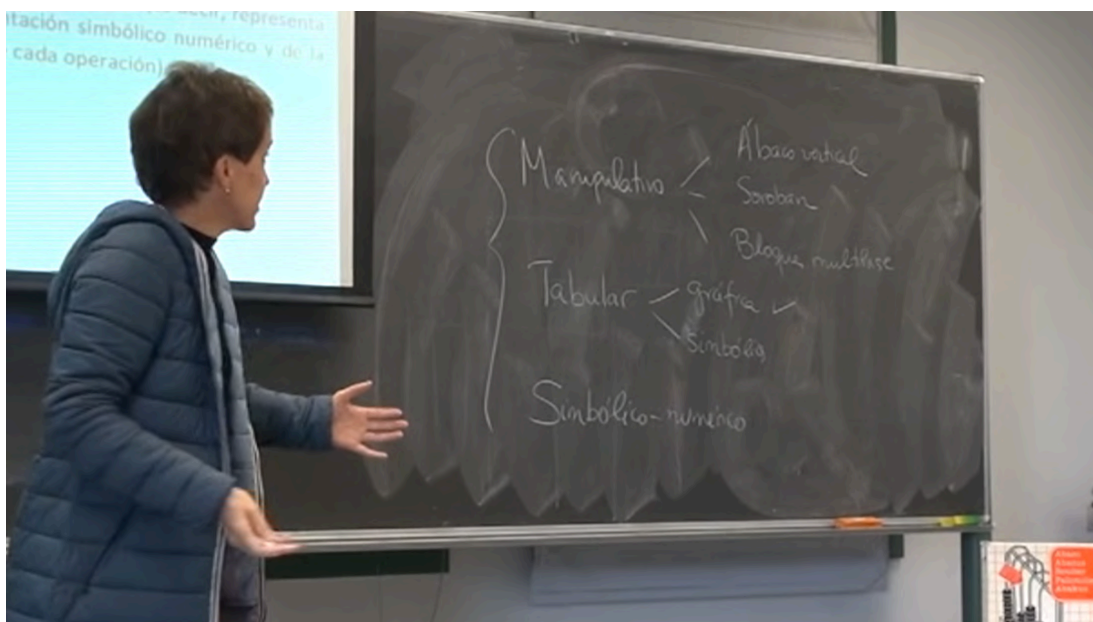
- P4.1-3.1. Está dando opciones sobre cómo puede ser la tabla que tienen que hacer en la actividad [E, 2].
- P4.2-3.1. Muestra preferencia por una de las tablas [E, M].

la que tenga características más gráficas, luego ya veremos en detalle cómo, pero tenéis que intentar construirlo vosotros sin que yo os haya hablado de eso explícitamente, ¿vale?

- R2.1(i)-3.1. Evento implícito en el comentario [E, 1].

Transcripción del vídeo: La tabla [escribe en la pizarra] puede ser más gráfica, puede tener características gráficas, o puede tener características más simbólicas; a mí me va a interesar más la que tenga características más gráficas, luego ya veremos en detalle cómo, pero tenéis que intentar construirlo vosotros sin que yo os haya hablado de eso explícitamente, ¿vale?

- R2.1(i)-3.1(I)1. Se fomenta la creatividad de los alumnos; cuanto más creativos sean, más se puede sacar de ellos [I, D].



Entonces, paso 1, aquí [señala la parte de representación manipulativa de la pizarra], en paralelo paso 2, simbólico-numérico [lo señala en la pizarra] y luego ya,

- M11.1-3.1. *Pide a los alumnos que construyan una tabla, que puede tener características gráficas o simbólicas [E, 3].*
 - M11.1-3.1(I)1. *Es una buena herramienta que puede servir como transición para pasar de uno a otro [sistemas de representación] y justificarlo, y que responde bien a cómo lo hacemos [I, M].*
 - M11.1-3.1(I)2. *Como no quiere decir cómo se hace la tabla, porque quiere que los alumnos la construyan, está asumiendo riesgos porque no queda muy clara la consigna; puede que los alumnos no sepan qué es lo que tienen que hacer si no han trabajado antes con alguna tabla sumando [I, M].*
- M11.2-3.1. *Recapitula lo que los alumnos tienen que hacer [E, D].*

según vayáis trabajando los cuatro ejemplos, igual ya se os va ocurriendo cómo representarlo con una tabla y cómo trabajar con una tabla ese tipo de operaciones.

- D2.1-3.1. *Completa la explicación de la actividad, especificando una segunda forma de representación que quiere que usen los alumnos [E, 2].*
- D2.2-3.1. *Completa la explicación de la actividad, especificando una tercera forma de representación que quiere que usen los alumnos, la cual no la han trabajado previamente [E, 1].*
- M12.1-3.1. *Da una pista a los alumnos al decir que cuando lo vayan haciendo a lo mejor les sale cómo hacer la tabla [E, M].*
 - M12.1-3.1(I)1. *Porque ella misma ha detectado que la consigna es un poquito «complicada»; no obstante, cuando no se da información demasiado precisa y no llega a ser suficiente para que los alumnos sepan qué tienen que hacer, solemos esperar a que algún alumno lo haga para hacerlo ver a los demás [I, M].*
- M12.2-3.1. *Indica que prefiere un tipo de tabla a otra [E, M].*
- L2.1-3.1. *Plasma en la pizarra toda la explicación que ha dado sobre la actividad [E, D].*
 - L2.1-3.1(I)1. *Para que los alumnos no olviden los métodos que tienen que utilizar [I, D].*
- L2.2-3.1. *Explica un segundo método con el que quiere que los alumnos representen las operaciones [E, 2].*

- L2.3-3.1. *Explica un tercer método con el que quiere que los alumnos representen las operaciones, consistente en una representación tabular, indicando que pueden hacerlo como quieran [E, 2].*
- L2.4-3.1. *Dice que prefiere una forma tabular más gráfica frente a una en la que usen números [E, M].*

¿Está claro? Yo me voy a pasar por las mesas y me vais preguntando todas las dudas que os surjan. No voy a pedir que me mandéis nada, ¿vale?, porque todavía no he revisado las últimas fotos que me habéis mandado, con lo cual estoy un poco desbordada; como no sois muchos, yo voy por vuestros puestos.

- J1.1-3.1. *Tiene el material delante cuando da las instrucciones [E, D].*
- J1.2-3.1. *Pide que hagan una tabla de forma libre, sin decir cómo tiene que ser la tabla [E, 2].*
- J1.3-3.1. *Pone el énfasis de la actividad en el proceso de las operaciones [E, 3].*
 - J1.3-3.1(I)1. *Lo importante del trabajo con lo manipulativo es que esté relacionado con los aspectos básicos del sistema posicional, de las operaciones; se pretende un trabajo relacionado con los conceptos, más que con la mera manipulación en sí o con «jugar» con el ábaco [I, M].*
- J1.4-3.1. *Menciona algo sobre la entrega de la actividad [E, D].*

Ahora bien, en el grupo anterior han decidido grabar pequeños vídeos o hacer fotos de los procesos que iban construyendo por llevárselo como material para estudiar, a mí me parece una buena idea, pero ya vosotros hacéis lo que queráis, a mí no me lo tenéis que mandar, pero si queréis, una vez que hayáis construido, por ejemplo, con el ábaco japonés, imaginaos, esta resta de aquí [señala el PDF en la pantalla], y decís: «ah, pues nos vamos a grabar», uno lo hace otro lo graba y lo tenéis de recuerdo, ¿no?,

- M14.1-3.1. *Plantea que pueden grabar lo que hagan en vídeo [E, D].*
 - M14.1-3.1(I)1. *Ahora se entiende que con «representar» se refiere a hacerlo con el ábaco, a resolverlo con el ábaco, que es un sistema de representación como otro cualquiera, no a ir dibujando los movimientos que se hagan de las bolitas [I, M].*

para cuando tengáis que estudiar. ¿Cómo voy a pedir yo eso en el examen?

- *P5.1-3.1. Indica a los alumnos que pueden grabar un vídeo o hacer fotos a los procesos de la práctica para poder recordar lo que hagan y que les sirva para estudiar [E, D].*
- *P5.2-3.1. Indica a los alumnos que no tienen que enviarle el trabajo que realicen en clase [E, D].*

Pues no lo puedo pedir porque no puedo llevar un sorobán para cada uno porque tengo un día, 2 horas y media o 3, para haceros el examen final de la asignatura; pero para mí esto es muy importante, entonces yo voy a pedir que me representéis gráficamente, gráficamente, vuestro proceso de respuesta con un ábaco vertical, con un sorobán o con los bloques multibase, que es lo que yo luego voy a hacer aquí en la sesión final de discusión cuando acabemos esta hora de clase.

- *D3.1-3.1. Avisa a los alumnos de que, aunque lo que van a hacer no lo pueda evaluar en el examen tal y como lo van a hacer en clase, va a evaluarlo de alguna manera [E, 1].*
 - *D3.1-3.1(I)1. Para que los alumnos estén más motivados con el tema de la evaluación en la clase práctica [I, D].*
- *M15.1-3.1. Explica a los alumnos que les pedirá que pasen el proceso a una representación gráfica para examinar lo que están viendo [E, 2].*
 - *M15.1-3.1(I)1. Al explicar cómo examinará se está adelantando a la pregunta clásica de los alumnos: «¿y esto cómo lo vas a preguntar en el examen?» [I, D].*
- *L3.1-3.1. Explica cómo va a preguntar en el examen lo que están viendo [E, 1].*
 - *L3.1-3.1(I)1. Se anticipa a la pregunta típica de los alumnos para que sepan qué necesitan hacer, como grabar un vídeo o tomar apuntes, para poder estudiar en casa, ya que no tendrán los materiales [I, D].*

Yo no voy a coger el ábaco aquí, lo voy a poner delante de todos y tal —podría hacerlo, pero no lo voy a hacer—, lo voy a hacer representando gráficamente el material manipulativo y así es como lo voy a pedir el día del examen, porque os voy a dar un cuadernillo y lo tenéis que hacer gráfico, ¿vale? Bueno, pues empezad, están escritas en un orden muy concreto, empezad a hacerlas en ese orden y luego ya discutimos sobre por qué

- *M16.1-3.1. Establece un orden concreto para hacer las sumas [E, 3].*

- M16.1-3.1(I)1. *El orden es una variable y habrá querido que en las sumas o en las operaciones entren en juego distintos usos y propiedades del ábaco [I, M].*

están puestas en ese orden, ¿vale?

- J2.1-3.1. *Relaciona lo que van a hacer en clase con lo que les va a pedir en el examen [E, 1].*
 - J2.1-3.1(I)1. *Para poner a los alumnos alerta [I, D].*

Fragmento 2

[F = Formadora del vídeo]. [A = Alumnos (A1, A2 y A3)].

A1: Estamos rayados con la última resta.

F: Vale, a ver, empezad.

A1: Son $704 - 45$.

F: Vale.

A1: Entonces, aquí no le podemos restar 5.

- M2.1-3.2. Trabaja con los alumnos una resta: tienen 704 y hay que quitarle 5 [E, M].
 - M2.1-3.2(I)1. En el ábaco, si no puedes restar aquí [en la varilla de las unidades], añades las que te faltan; el ábaco es muy rápido porque basta con saber las descomposiciones de 10 y 5, pero en este caso tampoco hay aquí [en la varilla de las decenas]; el número está muy elegido, por lo que hay que tener un protocolo de acción, ciertas precauciones. Supongo que no es la primera vez que usan el ábaco, porque si no se van a hacer un lío [I, M].



F: Así tal cual está, puedes restar..., ¿cuántas puedes quitar?

A1: Cuatro.

F: Cuatro, vale, sí.

A1: Entonces voy a suponer que aquí [señala la varilla de las decenas] hay un 1.

A2: No, que hay 10.

A1: Que hay 10, para que sea 14...

F: A ver, olvídate de los «suponer». Tú dices: «tengo que quitar 5», ¿no?, quito 1, quito 2, quito 3, quito 4 [quita cuentas de la varilla de las unidades] y ahora ponme aquí más para que yo quite, tal y como está.



A1: Habría que poner 10 y quitamos 1.

F: Pero ¿cómo me ponéis..., cómo me ponéis ahí? A ver Pablo.

A2: ¿Que lo ponga?

F: No, no, que me digas... Yo aquí [señala la varilla de las centenas] tengo ahora mismo 700, ¿no? Escribe 700 de otra forma para que yo tenga bolas...

A1: Aaaaah, hay que añadir una aquí [señala la varilla de las decenas].

F: Venga, a ver.

A2: [El alumno A2 quita una cuenta de la varilla de las centenas y la pone en la de las decenas].

F: ¿Aquí sigue poniendo 700?

- M4.1-3.2. Dice a los alumnos que escriban 700 de otra forma [E, 2].
 - M4.1-3.2(I)1. Ella no quiere decir que lo descompongan, pero sin decirlo lo que quiere es que hagan todos los cambios de manera que aquí obtengan 10 [en la varilla de las unidades], que quiten uno de aquí [señala la varilla de las centenas], que la transformen en 10 de aquí [señala la varilla de las decenas], dando lugar a 6 centenas y 10 decenas, luego que quiten una de aquí [indica la varilla de las decenas] y la transformen en 10 de aquí [señala la varilla de las unidades]. Pero cuando se usa el ábac, si no puedes quitar 5 [en las unidades], quitas una de aquí

[en las decenas] y añades solo las que hagan falta [en las unidades]. Por eso, están en una fase muy preliminar del ábaco. Lo que quiere es vayan manipulando, que vayan materializando los cambios [I, M].

- *P1.1-3.2. Está tratando de solucionar los problemas que tienen los alumnos con la resta [E, 1].*
 - *P1.1-3.2(I)1. Pretende hacer ver que no basta con saber la regla para restar, sino que hay que justificar el algoritmo de la resta, para lo cual se apoya en el ábaco vertical [I, M].*

A1: No, no, no, hay que poner una nueva aquí [vuelve a poner la cuenta en la varilla de las centenas —la que había puesto en la varilla de las decenas el alumno A2— y pone una nueva en la varilla de las decenas].

- *D2.1-3.2. Interactúa con los alumnos, tratando de que piensen sobre la dificultad que tienen a partir de los pasos que ya han dado [E, 1].*
 - *D2.1-3.2(I)1. Pretende que sean los alumnos quienes resuelvan la actividad por ellos mismos y que vean la dificultad que tiene el uso del ábaco [I, M].*

F: A ver [quita la cuenta de la varilla de las decenas].

- *M5.1-3.2. Quita cuentas del ábaco cuando un alumno las coloca mal, sin decirles por qué las quita [E, M].*
 - *M5.1-3.2(I)1. Para no dejar que los alumnos arrastren el error, ya que con el ábaco se puede liar el proceso si se arrastran errores [I, M].*

Teníamos 704, hemos quitado 4, tengo 700, ¿vale?

A1: Sí.

F: Ahora, escribe 700 de otra forma para poder quitar otra.

A1: Pues...

F: ¿Cómo podéis escribir 700 de otra forma?

A1: Que aquí [señala la varilla de las decenas] haya 9...

- *L1.1-3.2. Está dando pistas a un grupo de alumnos al que se ha acercado sobre la estrategia que han de seguir para hacer la resta en el ábaco y poder quitar fichas en una varilla en la que no hay fichas, diciéndoles que escriban el 700 de otra forma [E, 3].*

- L1.1-3.2(1)1. Para que escriban 700 quitando una de las centenas y poniendo 10 en las decenas y luego quitando una de las decenas y poniendo 10 en las unidades [I, M].

F: Venga.

A1: Y aquí [señala la varilla de las unidades]..., 9.

F: A ver, para que haya aquíííí... [señala la varilla de las decenas], vamos a ver,

- M9.1-3.2. Dice: «Para que haya aquíííí...» [E, 1].
 - M9.1-3.2(I)1. Porque no quiere decir cuántas [cuentas] hay [I, M].

¿cómo consigo aquí decenas? Sin cambiar el número...

A1: Si quito esta... [quita una cuenta de la varilla de las centenas].



F: Venga, muy bien.

A1: Pongo aquí 10 [señala la varilla de las decenas].

F: Venga, dale.

- D3.1-3.2. Trata de que la alumna se dé cuenta del cambio de centenas a decenas, abordando así la dificultad de agrupar centenas y decenas en el ábaco [E, 3].
- J1.1-3.2. Pregunta: «¿ahora qué hacemos?, tras quitar las cuatro primeras directamente [E, 1].
 - J1.1-3.2(I)1. Porque los alumnos estaban atascados [I, D].

- J1.2-3.2. Guía a los alumnos a partir de las ideas que proponen, dando tiempo para que las exploren, sin dar la respuesta [E, 1].

A1: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10.

A3: ¡Ah, vale!



F: ¿Ahora aquí pone 700?

A1: Sí.

F: ¿Y cómo está escrito 700?

A3: Mal.

- P2.1-3.2. Está incidiendo en las equivalencias entre centenas y decenas [E, 3].

F: 6×10^2 , ¿no?, 6×100 , más...

A2: 10×10^1 .

F: 10×10^1 , muy bien.

- J3.1-3.2. Relaciona la representación del número [en el ábaco] con la parte algebraica, con la posición, con la representación numérica [E, 3].
 - J3.1-3.2(I)1. Porque pretende emplear el material con un sentido para que los alumnos entiendan la estructura de los números [I, M].

Ahora, ¿puedo quitar aquí [señala la varilla de las unidades] que quería quitar una? ¿Tengo?

A1: No.

- F: No, ¿cómo puedo volver a escribir 700 para tener aquí [varilla de las unidades]?
- A1: Pues quito de estas [quita una cuenta de la varilla de las decenas] y añado 10 aquí [señala la varilla de las unidades].
- F: Vale, venga.

- D4.1-3.2. Trata de que la alumna se dé cuenta del cambio de decenas a unidades, consiguiendo que los alumnos lo entiendan, guiando el proceso lo mínimo posible [E, 3].



- F: Vale, ¿y ahora puedes quitar la que te faltaba por quitar?
- A1: [La estudiante A1 quita una cuenta de la varilla de las unidades].
- F: Ya está.

- M13.1-3.2. Plantea preguntas a los alumnos con un carácter didáctico, supervisando el trabajo que realizan [E, 1].
 - M13.1-3.2(I)1. Para tratar de acelerar el proceso, ya que no hay tiempo para que lo hagan ellos solos al tener que cubrir ciertos contenidos; es algo que nos pasa a todos [I, D].
- M13.2-3.2. Permite que usen cuentas de distintos colores en una misma varilla [E, M].

Ya habéis quitado 5 y teníais que quitar 45, ¿no? ¿Cuánto os falta por quitar?

- A1: Sí, ahora aquí [señala la varilla de las decenas] hay que quitar 4.
- F: Pues ya está, ¿no?
- A1: Ah, vale, vale. Gracias.

- J4.1-3.2. Va preguntando a los alumnos, sin dar la respuesta [E, 1].

- J4.1-3.2(I)1. Para desatascar a los alumnos [I, D].



F: ¿Entonces qué habéis hecho para reescribir el 700...? O sea, yo tenía 700 ahí, tenía aquí 700 [deja el ábac con 7 cuentas en la varilla de las centenas], ¿qué habéis hecho?

- P3.1-3.2. Está preguntando a los alumnos sobre el procedimiento que han seguido [E, 2].
 - P3.1-3.2(I)1. Para que los alumnos reflexionen y para comprobar si realmente han entendido todo lo que han hecho [I, D].

A2: Como es sistema decimal, pues aquí [señala la varilla de las decenas] hay 10, porque... representamos un 0, pues quitar una de aquí [varilla de las centenas] y ponerle las 10 aquí [varilla de las decenas] para luego restarlas aquí [varilla de las unidades].

F: O sea que habéis..., ¿agrupado o desagrupado?

A1: Desagrupado.

A2: Aquí desagrupado.

- L4.1-3.2. Pide a los alumnos una explicación matemática de lo que han hecho [E, 2].
 - L4.1-3.2(I)1. Para que vean que el número en una representación distinta les permite hacer la resta, es decir, que diferentes escrituras o diferentes representaciones gráficas del mismo en el ábac representan el mismo número y algunas de ellas les permiten hacer la resta [I, M].

F: Desagrupado.

- D5.1-3.2. Trata de que los alumnos analicen lo que han hecho [E, 2].
 - D5.1-3.2(I)1. Para formalizarlo un poco más, para entender globalmente lo que han hecho, para darle sentido al procedimiento [I, M].
- M17.1-3.2. Está reinterpretaando, en los términos de nuestro sistema convencional, en términos más matemáticos, lo que han hecho los alumnos, haciendo ver que han desagrupado [E, 2].
 - M17.1-3.2(I)1. Es una especie de institucionalización de lo que han hecho, o sea, de darle un carácter más oficial, siempre partiendo de la idea de que son ellos los que lo han hecho [I, M].
 - M17.1-3.2(I)2. Se ha hecho una simulación de manera acelerada de lo que sería una situación en una clase de primaria, donde el trabajo debería ser mucho más del alumno, pero aquí [en la facultad] no puedes reproducir exactamente las actividades de primaria porque estos no son niños de primaria, son maestros, tienen mucho más conocimiento y mucha más madurez [I, M].

Habéis desagrupado una centena en 10 decenas y luego una decena la habéis desagrupado en 10 unidades.

A1: Vale, es que cuando tú lo haces en papel no haces esto así.

F: Ah, pues dime entonces qué es lo que haces en papel.

- R1.1-3.2. Ayuda a un alumno a razonar mediante preguntas [E, 1].
 - R1.1-3.2(I)1. Porque veía que le estaba costando mucho trabajo [I, D].
- R1.2-3.2. Pide a los alumnos, una vez que han terminado y lo han entendido, que le expliquen lo que han hecho [E, 2].

A1: Claro, lo haces muy mental. O sea, en verdad sí que haces eso, pero... bueno, ya me has entendido.

- D6.1-3.2. Pregunta a la alumna cómo hace ella la resta [en papel], haciéndole ver que tiene que pensar en la relación que hay entre lo que han hecho con el ábaco y el algoritmo tradicional de la resta [E, 3].
- J5.1-3.2. Pregunta a los alumnos por el proceso que han seguido para resolver el ejercicio [E, 2].

- J5.1-3.2(I)1. *Para que los alumnos formalicen y verbalicen el razonamiento que han seguido y puedan afianzar el proceso [I, M].*

F: No, no, pero lo tienes que explicar porque luego os he pedido que lo hagáis simbólico...

- P4.1-3.2. *Pide a una alumna que le explique cómo es el proceso, numéricamente, que sigue cuando lo hace en papel [la resta] [E, 1].*

A1: Ya, ya, ya.

F: Entonces, simbólico tienes que explicarlo conectado con esto.

A1: Vale, vale.

- M20.1(i)-3.2. *Evento implícito en el comentario [E, 1].*

Transcripción del vídeo: Entonces, simbólico tienes que explicarlo conectado con esto.

- M20.1(i)-3.2(I)1. *Emplea el ábaco no solo como un elemento didáctico para usar con los niños [de primaria], sino para que los alumnos descubran realmente qué están haciendo cuando están restando [I, M].*

Fragmento 3

[F = Formadora del vídeo]. [A = Alumnos].

F: Vamos a corregir uno, el primero, ¿vale? Me dan $210 + 543$,

- M2.1-3.3. *Plantea una suma sin llevadas [E, 2].*
 - M2.1-3.3(I)1. *Imagino que será el primer ejemplo al tratarse de una suma sin llevadas. Con el ábaco se hace metiendo 3 o metiendo 4 o metiendo 5, no tiene mayor historia, por lo que no sé qué juego va a dar [I, M].*

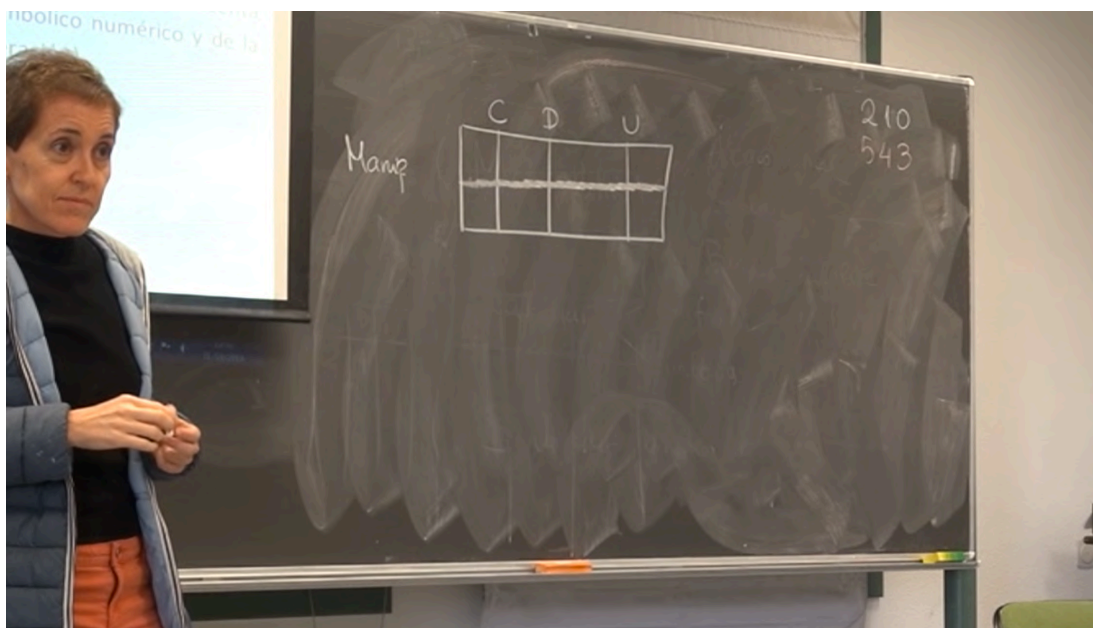
¿vale?, con símbolos. Voy a representarlo..., vamos a empezar con manipulativo y voy a ejemplificar con el sorobán, que es el que parece que más trabajo cuesta, ¿vale? Entonces, en el sorobán, cuando lo representéis gráficamente el día del examen, o ahora en vuestro cuaderno si tenéis que tomar notas, es muy importante marcar la barra del medio, porque la proximidad de las bolas a la barra del medio es la que te indica qué número está representando, ¿vale?

- M3.1-3.3. *Está usando el sorobán para hacer la suma [E, 2].*
 - M3.1-3.3(I)1. *Como se trata del ábaco japonés, sí que va a tener que hacer cambios con el 5 [señala las decenas] al sumar $210 + 543$; sí que va a haber agrupaciones [I, M].*

Y ahora, dado el problema que me han planteado, ¿cuántas varillas pensáis que necesito escribir?

A: Tres.

F: ¿Tres varillas? Pongo una varilla, dos varillas, tres varillas. Esta, unidades, decenas, centenas. Esta la pongo un poco más gorda para que se note que es la barra de madera del medio, ¿vale? Y ahora, ¿cómo dibujo 210?



A: Pues 0 unidades.

- M5.1-3.3. Dice «cómo dibujo» [E, 1].
 - M5.1-3.3(I)1. Porque quiere hacer ver a los alumnos que está empleando un registro gráfico; yo digo «escribo» porque es una escritura del número también [I, M].

F: 0, o sea que aquí no pongo nada pegado a la barra, ¿no? [señala la varilla de las unidades]. ¿Aquí? [señala la varilla de las decenas].

A: 1 decena.

F: Una pegada a la barra, ¿arriba o abajo?

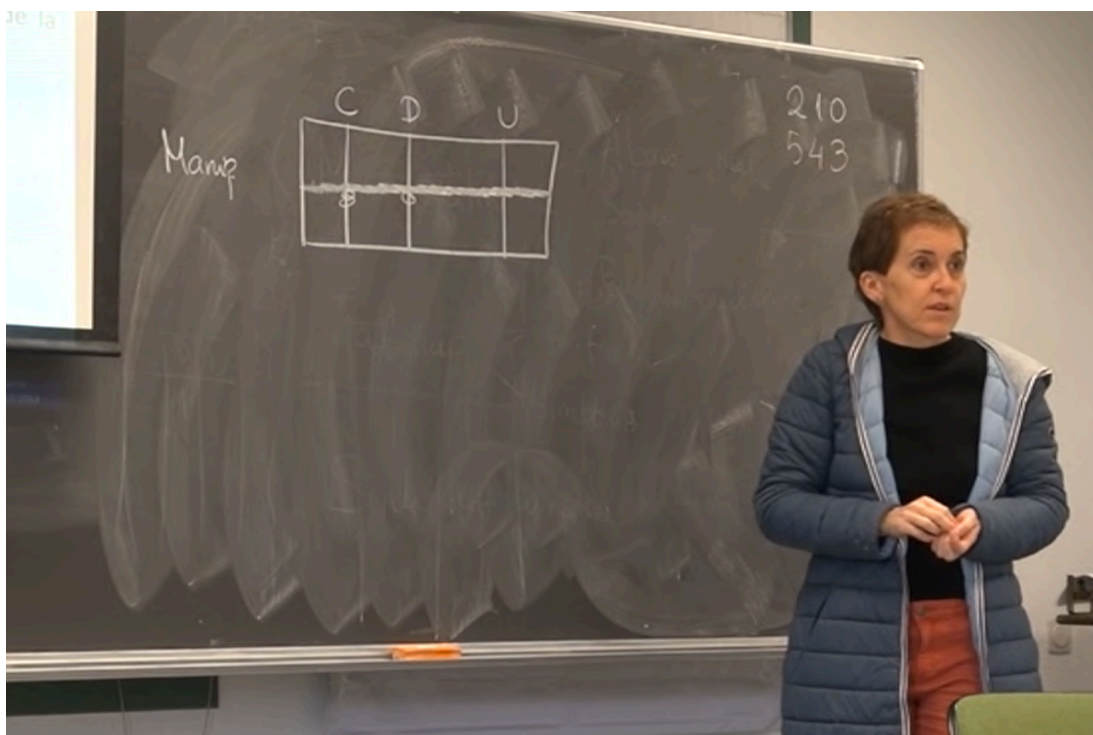
A: Abajo.

F: Abajo, o sea que aquí va una.

A: Y 2 centenas pegadas a la barra de abajo.

F: Pegadas a la barra, abajo. Una y dos, ahí está. Eso es 210.

- P1.1-3.3. Está intentando resolver una suma, indicando cómo representarla gráficamente en un ejercicio escrito [E, 2].
- P1.2-3.3. Deja que sean los alumnos quienes vayan planteando su resolución [E, 1].
- J1.1-3.3. Plantea de manera visual la explicación [E, 1].
- J1.2-3.3. Pide la participación de los alumnos, pide que vayan dando los pasos que va a ir escribiendo [E, 1].



Y ahora, tengo que sumar 543,

- M6.1-3.3. Está sumando $210 + 543$ en ese orden [E, 1].
 - M6.1-3.3(I)1. Es posible hacer la suma al revés también [I, M].

es decir, que tengo que añadir 543 unidades ahí.

- L1.1-3.3. Va preguntando a los alumnos cómo tiene que proceder [E, 1].
 - L1.1-3.3(I)1. Porque busca la complicidad de los alumnos para escribir en realidad lo que ella quiere [I, D].

Aprovecho la estructura, ¿vale? Entonces, añado 3 unidades, en la varilla de las unidades, que son 3 aquí abajo, ¿no?, 1, 2 y 3 [las dibuja en la varilla de las unidades]. Después añado 4 decenas, en la varilla... 1, 2,

- M7.1(i)-3.3. Evento implícito en el comentario [E, 1].

Transcripción del vídeo: Después añado 4 decenas, en la varilla...

- M7.1(i)-3.3(I)1. En la varilla de las decenas es donde va a tener que hacer un cambio porque el sorobán no tiene 5 cuentas en la parte de abajo, tiene 4 [I, M].

3, 4, ¿vale? [las dibuja en la varilla de las decenas], 4 decenas.

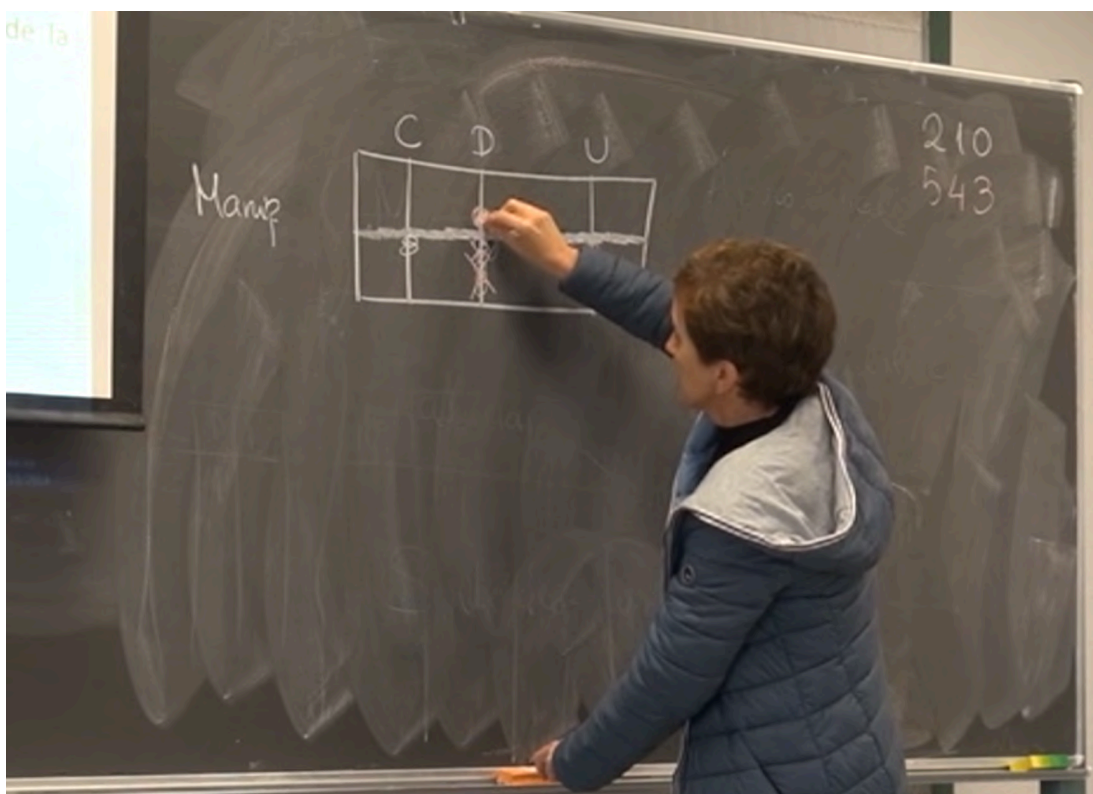
A: Pero cambiamos...

F: Pero...

A: Bajamos una de arriba y quitamos las de abajo.

F: Porque no tenéis 4, ¿vale?, ya no había suficientes, ¿por qué?, porque las bolas de arriba valen 5, entonces decís: «no pasa nada, estas, como eran 4 y 1, 5, se representan ahí arriba», ¿vale?

- J2.1-3.3. *Escribe [en la pizarra] algo que no estaba bien en el fondo y espera [E, 1].*
 - J2.1-3.3(I)1. *Porque esperaba que algún alumno lo corrigiese [E, D].*



Y luego, 5..., tengo que añadir 5 centenas, ¿cómo lo hago?

A: Pues 1 arriba.

F: Una de arriba la bajo directamente o podría ir: «1, 2, 3, ya tengo 5, las subo ahí, 4, 5» [va señalando en la varilla de las centenas], ¿vale?

- M9.1-3.3. *Propone un proceso en el que se meten las cuentas de una en una [E, 2].*
 - M9.1-3.3(I)1. *Ella quiere mantener la idea de que va subiendo de una en una, lo cual es un proceso muy laborioso, pero los alumnos entienden perfectamente que, si hay que añadir 5, basta con meter una de arriba. Cuando se usa el ábaco no se mete de una en una, sino que se meten las cuentas de golpe [I, M].*
 - M9.1-3.3(I)2. *Se puede poner directamente la bola arriba o intentarlo por debajo [I, M].*

Puedo hacerlo de dos formas distintas.

- *P2.1-3.3. Está mostrando distintas alternativas para indicar la suma gráficamente en la pizarra [E, 1].*

Pero si aprovecho la estructura del ábaco, de manera que las bolas de arriba valen 5, como tengo que añadir 5, pues directamente ya añadido ahí esas 5

- *D1.1-3.3. Está haciendo una suma en el sorobán en la que no hay agrupamientos [en base 10] [E, 2].*
 - *D1.1-3.3(I)1. Al no haber agrupamientos, parece que se trata de un ejercicio más relacionado con el manejo del sorobán que con el algoritmo de la suma [I, M].*

[dibuja una bola en la varilla de las centenas, en la parte superior, pegada a la barra horizontal], ¿vale?

Entonces, [representa ahora el resultado en la suma con el algoritmo tradicional de forma simbólico-numérica a partir de lo que ha obtenido en la representación con el sorobán] me quedan 5 y 2, 7, aquí me quedan 5, y aquí me quedaban 3.

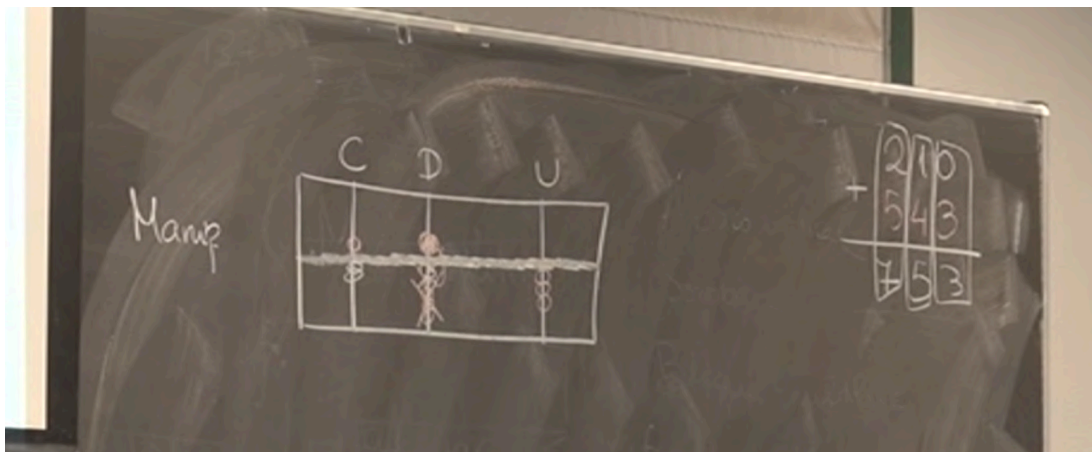
- *L2.1-3.3. Colorea la bola correspondiente al 5 en las decenas [E, M].*

Entonces, si yo lo represento así y voy sumando por columnas, tal cual he ido haciendo en el ábaco, tengo 0 unidades y 3 unidades, 3 unidades, 1 unidad y 4 unidades, 5 unidades, perdón, decenas, 2 centenas y 5 centenas, 7 centenas. Vertical, lo he colocado vertical por parecerme a la estructura del ábaco, ¿no?,

- *M11.1-3.3. Dice que lo coloca de forma vertical [la suma] para parecerse a la estructura del ábaco y ver la correspondencia entre las dos maneras, realizando la traducción entre ambas maneras de representación [E, 2].*
 - *M11.1-3.3(I)1. En realidad, lo coloca de forma vertical porque es como lo colocamos normalmente. De hecho, muchos chinos usan el ábaco en posición horizontal [con las varillas de forma horizontal] porque de ese modo las bolas no se caen y lo pueden manejar con el pulgar y el índice. Ella lo coloca verticalmente [la forma simbólica] porque dentro de la tarea tienen que ver la correspondencia entre las dos maneras [sorobán y simbólico] [E, M].*

para tener en cuenta la «posicionalidad», ¿vale?, del sistema.

- D2.1-3.3. Trata de conectar la escritura del algoritmo tradicional en columna, vertical, con la representación del ábaco [E, 2].



Entonces, he traducido al simbólico lo que he hecho aquí manipulativamente al escribir en simbólico en columnas y represento con cada columna cada una de estas [señala las varillas del sorobán de la pizarra].

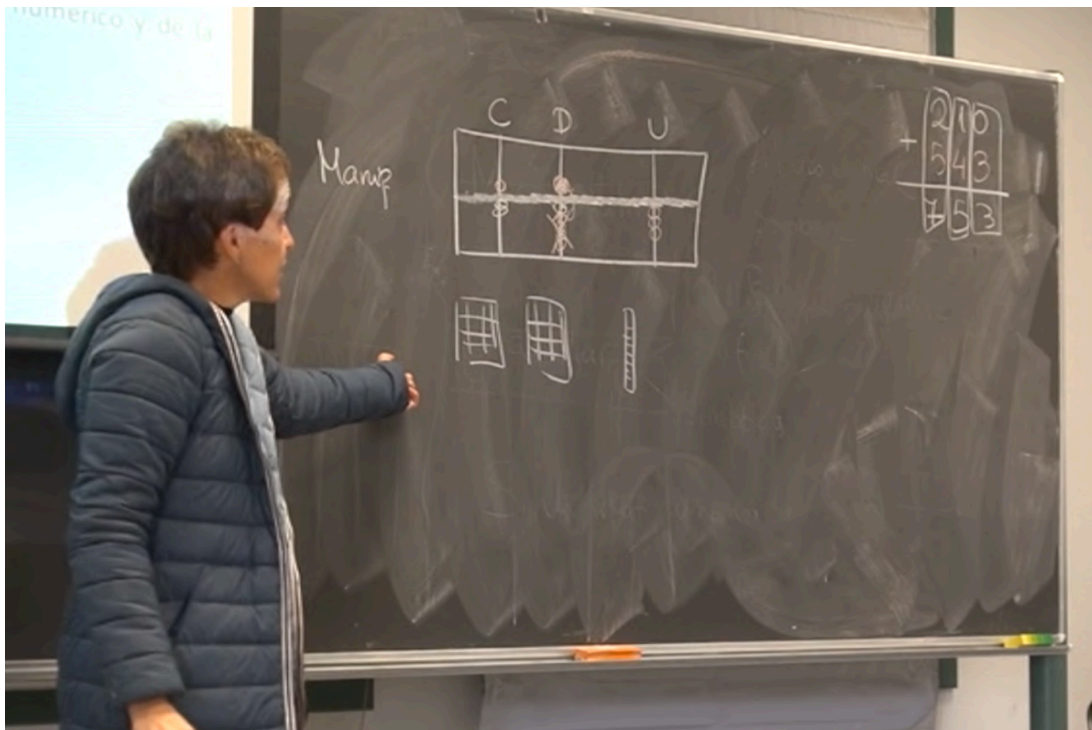
- R1.1-3.3. Está explicando la correspondencia entre la estructura del material manipulativo y la representación simbólica [de la operación] [E, 2].
 - R1.1-3.3(I)1. Cuando los niños aprenden, como primero se utiliza muchísimo el material manipulativo, si la estructura del material manipulativo se corresponde con la forma simbólica, a los niños luego no les cuesta trabajo hacer esa transcripción [I, M].
- P3.1-3.3. Está relacionando lo simbólico con lo manipulativo [E, 2].
 - P3.1-3.3(I)1. Para que los alumnos entiendan el valor del material y su relación con lo simbólico, que es con lo que están acostumbrados a trabajar [I, M].

Y luego, la escritura, sí que tengo que tener en cuenta que estos son 5 [señala las decenas de la suma en simbólico] con lo cual van arriba [en el sorobán] y esto son 7 [señala las centenas de la suma en simbólico], pues son 5 y 2 [en el sorobán], ¿vale?

Bloques multibase, bloques multibase, pongo aquí 210, ¿no?, que son 1 y 2 placas de 100 y 10, una decena;

- M14.1-3.3. Está resolviendo ella el ejercicio sin que los alumnos le vayan diciendo lo que tiene que hacer [E, D].

este es el 210.



Y ahora agrupo 543;

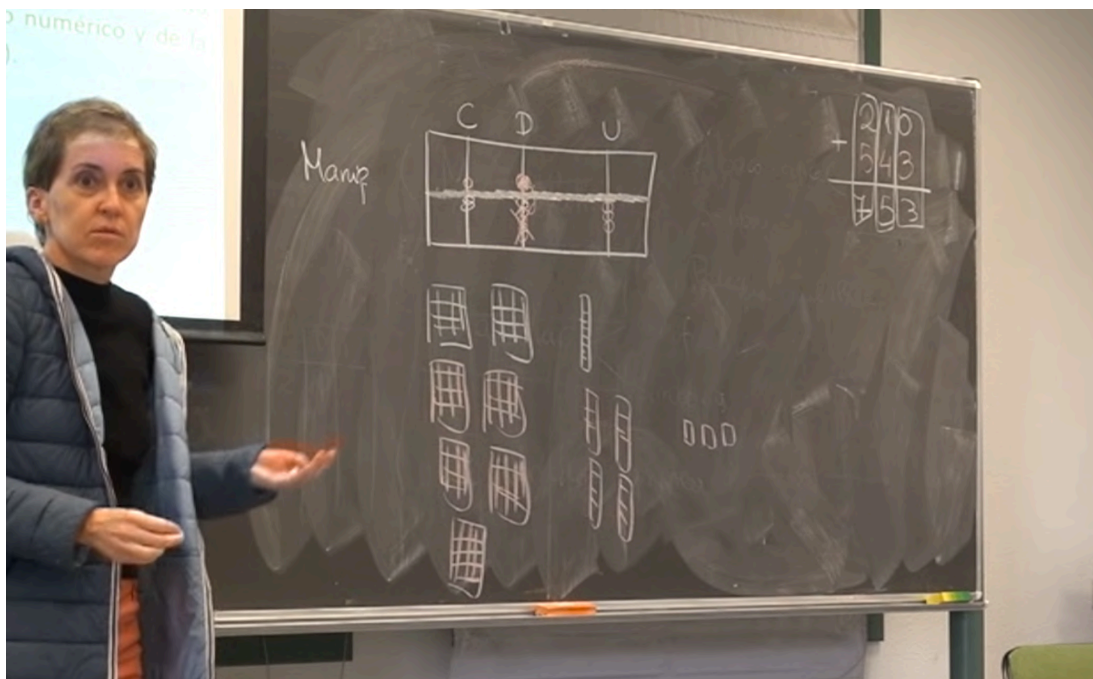
- M15.1-3.3. Coloca el material [los bloques multibase] de forma agrupada [E, 2].
 - M15.1-3.3(I)1. En este caso, simplemente hay que añadir las unidades que faltan, no hay que hacer ninguna descomposición [I, M].
 - M15.1-3.3(I)2. Con este material, se puede juntar todo y luego organizarlo; se trata de un sistema mucho más básico que los otros que tiene. Colocar así el material es una decisión que ella toma para poder realizar el paralelismo [con los demás sistemas de representación], ya que el material [los bloques multibase] no te lo exige. En cambio, en este otro material [señala al sorobán] y en este [señala a la suma tradicional] sí es obligatorio [I, M].

una, dos, tres, cuatro y cinco [dibuja 5 placas de 100 unidades], añadido, ¿vale?, 500. 40: una, dos, tres, cuatro [barras de 10]; y 3: uno, dos y tres [unidades].

- D3.1-3.3. Está representando con bloques de base 10 [la suma] [E, 2].
- D3.2-3.3. Está dando menos margen a que participen los alumnos [E, D].

- D3.2-3.3(I)1. Porque el ejercicio es demasiado sencillo para que los alumnos tengan algo que decir [I, M].

Y ahora lo pongo todo junto. ¿Vale?



Y digo: «aquí tengo 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 [placas de 100]»,

- M16.1-3.3. Dice que lo pone todo junto [las placas, barras y unidades de los bloques multibase] [E, M].

¿necesito agrupar? [Rodea con una línea todas las placas de 100].

A: No.

F: No necesito agrupar.

- L3.1-3.3. Pone los bloques multibase de tal forma que los de 100 están debajo de los de 100, los de 10 están debajo de los de 10... [E, 3].
- L3.2-3.3. Hace un círculo a los bloques de 100, a los de 10..., llegando así al 753 [I, M].

Aquí tengo 1, 2, 3, 4, 5, 6, 5, ¿necesito agrupar estos 5 de alguna manera? [Rodea con una línea todas las barras de 10]. No porque es base 10. Y aquí tengo 3, ¿vale?

- M17.1-3.3. Deja esos 3 [las 3 unidades] sin rodear [E, M].

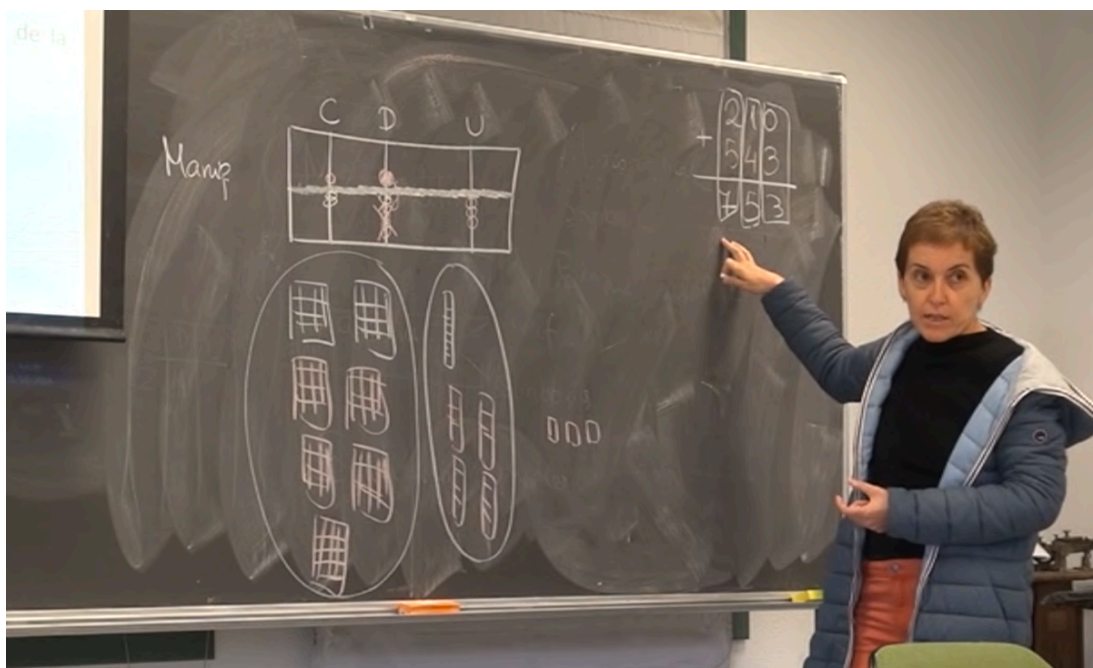
O sea, que me vuelve a salir 2, 4, 6, 7 [centenas; señala la suma en simbólico], 2, 4, 5 [decenas], 5 [señala la suma en simbólico] y 3.

- D4.1-3.3. Conecta la representación de los bloques en base 10 con el algoritmo vertical [E, 3].
- D4.2-3.3. Trabaja de izquierda a derecha con los bloques en base 10 [E, M].
 - D4.2-3.3(1)1. Trabajar de izquierda a derecha con los bloques en base 10 podría suponer un problema si hay que hacer reagrupamientos [I, M].

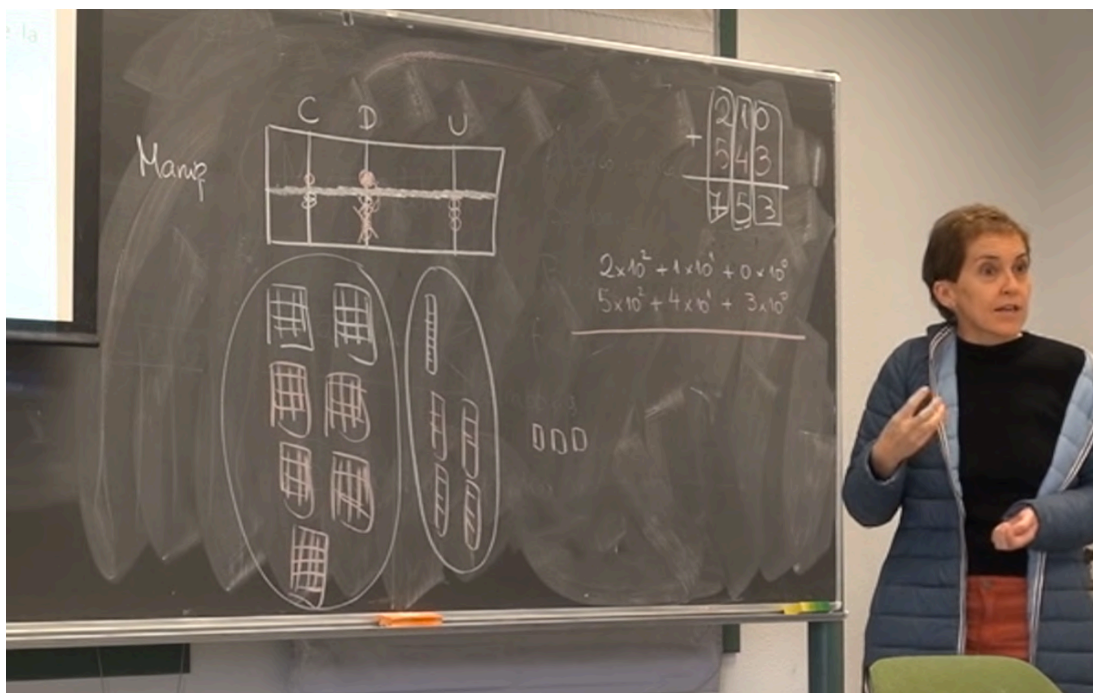
Y veo la conexión de uno con otro, ¿vale? ¿Está claro hasta aquí?

A: Sí, eso sí.

- M18.1-3.3. Pregunta si está claro lo que han hecho [E, D].
- P4.1-3.3. Está haciendo la traducción entre el [registro] simbólico y el manipulativo con bloques multibase [E, 3].
- P4.2-3.3. Está haciendo hincapié en que en la suma realizada no es necesario agrupar [E, 2].



F: El que quiera escribirlo simbólico-numérico de otra manera en la que se vea la «posicionalidad» del sistema, podría escribirlo de la siguiente forma: $2 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 0 \times 10^0$, ese es el primer sumando; segundo sumando, $5 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 3 \times 10^0$; y sumo.



Y ahora, al sumar, utilizo la propiedad conmutativa, para colocar los sumandos en el orden que quiero, y asociativa, para ir organizando, ¿vale? O sea, que este [señala 5×10^2] —que, si lo coloco seguido, estaría aquí el cuarto [señala detrás de 0×10^0]— lo quiero colocar el segundo para agruparlo con este [señala 2×10^2],

- M20.1-3.3. Está remarcando a los alumnos las propiedades que están empleando: la conmutativa, la asociativa y la [distributiva] de la suma respecto del producto [E, 3].
 - M20.1-3.3(I)1. Para justificar el porqué de la escritura [del algoritmo tradicional de la suma] [I, M].
 - M20.1-3.3(I)2. Se trata de propiedades que son tan evidentes para los alumnos que ni se dan cuenta de que están ahí detrás [I, M].

este [señala 4×10^1] —que estaría el quinto [señala detrás de 0×10^0]— lo coloco el tercero para agruparlo con este [señala 1×10^1], y este [señala 3×10^0] lo agrupo con este [señala 0×10^0]. Y ahora, al agrupar, ya me quedan 5 y 2, propiedad distributiva, 7×10^2 más, 4 y 1, 5×10^1 más, 0 y 3, 3×10^0 .

- L4.1-3.3. Realiza la suma empleando el sistema numérico decimal con las potencias de 10 [E, 2].
 - L4.1-3.3(I)1. Porque quiere que los alumnos asocien la suma que se hace normalmente con el algoritmo con el sistema numérico decimal con las potencias de 10 [I, M].

- L4.2-3.3. *Hace alusión a la propiedad conmutativa y a la asociativa [E, 2].*
 - L4.2-3.3(I)1. *Para que los alumnos sepan realmente por qué se puede hacer esa suma, que sería lo que los alumnos entenderían como sacar factor común [I, M].*

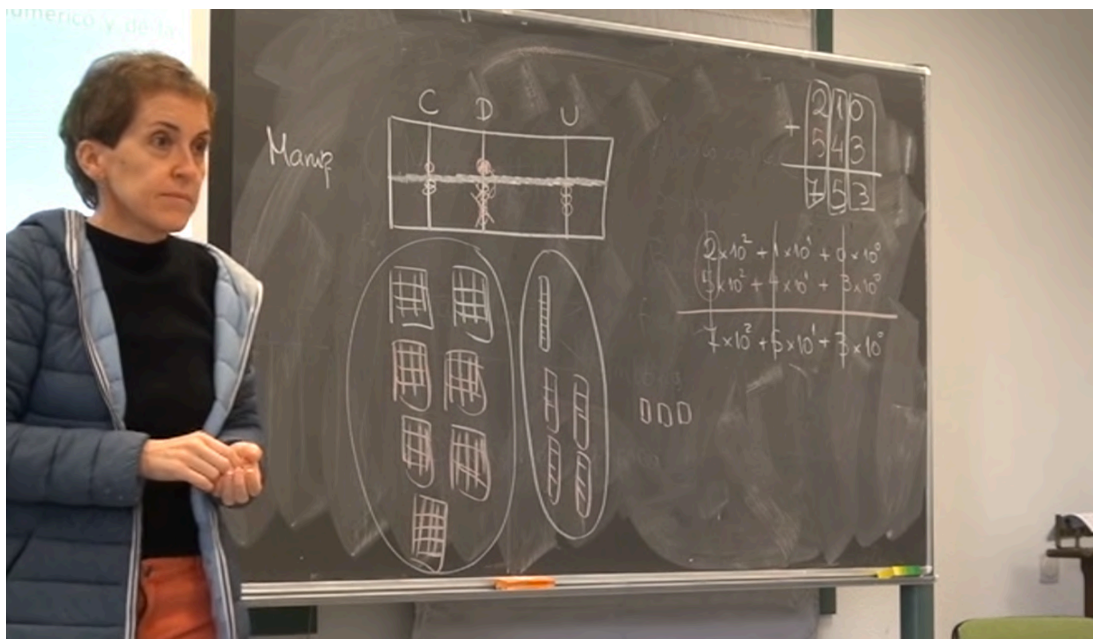
Pero ahí estoy utilizando la asociatividad de la suma, la conmutatividad de la suma y la distributiva de la suma y el producto de números enteros, ¿vale?

- D5.1-3.3. *Está haciendo un algoritmo de suma polinómica, de agrupación polinómica [E, 2].*
- P5.1-3.3. *Está explicando cómo resolver la suma, recalcando el valor posicional de cada cifra en nuestro sistema de numeración [E, 2].*
- J3.1-3.3. *Relaciona, en esta parte de la explicación, la operación, la parte más simbólica del algoritmo, con la parte visual [E, 2].*
- J3.2-3.3. *Pregunta a los alumnos, después de cada explicación, si lo han entendido, si hay dudas [E, D].*

Pero si lo coloco así, veo esto, esto y eso [señala los coeficientes que acompañan a 10^2 , 10^1 y 10^0], que es lo mismo que esto, esto y eso [señala el 7, 5 y 3 del resultado de la suma en la forma simbólico-numérica], que es lo mismo que esto, esto y esto [señala los bloques multibase en la pizarra] y que es lo mismo que 1, 2 y 3 varillas [señala las varillas del sorobán en la pizarra].

- M22.1-3.3. *Hace el paralelismo [E, 2].*
- P6.1-3.3. *Está relacionando los cuatro métodos con los que ha realizado la misma suma, haciendo ver que se obtiene el mismo resultado [E, 3].*

¿Está claro hasta aquí?



- A: Sí.
- F: Ahora, ¿qué diferencia hay entre esto y la siguiente suma que me plantean ahí [en el PDF proyectado en la pantalla]? $316 + 429$.
- A: Que me paso de unidades y tengo que pasar a las decenas.
- F: Que cuando agrupo aquí, por ejemplo [bloques multibase], o cuando agrupo aquí [sorobán], o cuando agrupo aquí [expresiones de sumas y productos de potencias de 10],
- M23.1-3.3. Plantea una secuenciación: primero pone un caso, lo explica, ve cómo se hace y realiza el paralelismo [entre los distintos sistemas de representación], y ahora es cuando al sumar van a aparecer potencias que antes no había [E, 3].
 - M23.1-3.3(I)1. Ahora empieza a funcionar el sistema de numeración, se condiciona el sistema de numeración a la técnica de la suma y es cuando va a haber que redistribuir las potencias [I, M].

aquí aparecen más de 10 [señala al 3 de 3×10^1]. En algún sitio aparecen más de 10,

- D6.1-3.3. Pregunta qué diferencia hay con la siguiente [E, 1].
- D6.2-3.3. Hace ver que en el siguiente ejemplo ya hay que hacer reagrupamientos [E, 2].

por ejemplo, cuando tengo 9 unidades y 6 unidades, aquí aparecerían 15 fichitas pequeñas [bloques multibase], aquí tendría que representar 15 [sorobán] y aquí

aparecería 15×10^0 . Pero como estamos en base 10, no puedo dejarlo así, tengo que agrupar, tengo que agrupar.

- M25.1-3.3. Indica que ahora hay que agrupar [E, 2].
 - M25.1-3.3(I)1. Trata de que los alumnos entiendan cómo funciona el sistema y también pretende que sepan cómo tratar esto luego en primaria; trata de justificar por qué lo hacemos así [la suma tradicional] [I, M].
 - M25.1-3.3(I)2. La expresión coloquial que empleamos [cuando agrupamos] es la de «me llevo» [I, M].

Entonces, agrupo 10 y dejo 5,

- P7.1-3.3. Está explicando que en esta suma hay que hacer agrupamientos en las unidades [E, 2].
 - P7.1-3.3(I)1. Para ver el significado que tiene lo que los alumnos conocen como «llevarse una» [I, M].

y las 10 que agrupo las paso al siguiente valor, es decir, pego 10 fichas y construyo una barra [bloques multibase], agrupo 10 y me sale otra bola aquí en el ábaco, aquí abajo [parte baja de la varilla de las decenas], o agrupo 10 y me sale uno más aquí [en 5×10^1] y aquí [en 3×10^0] dejo las que se quedaban sueltas, las 5, ¿vale? O sea, que la única diferencia es que aquí, después de representar cada cantidad y de ir poniendo por orden el valor de cada una,

- L5.1-3.3. Hace ver las diferencias entre las dos sumas, en una no se pasa de 10 ningún dígito y en otra sí se pasa y tiene que transformar el número [E, 2].

tengo que agrupar porque en algunos sitios tengo 10 o más, ¿vale? Es la única diferencia.

- R2.1-3.3. Explica otra forma, remarcando mucho sus características [E, 1].
 - R2.1-3.3(I)1. Para que los alumnos no tengan confusiones, para que tengan las cosas claras [I, D].
- J4.1-3.3. Remarca lo importante con la voz [E, D].
- J4.2-3.3. Pregunta por el cambio [E, 1].

- J4.3-3.3. *Hace ver que [la suma] incluye llevadas [E, 2].*
- J4.4-3.3. *Remarca la correspondencia entre las tres [E, 2].*

Y ahora, si quisiéramos representar esto en formato tabla, como tenía Martín, ¿no? ¿Cuántas columnas pondré yo en la tabla?, ¿qué me pide el cuerpo? Tengo que dibujar una tabla, ¿vale?, vamos a dibujar una tabla [comienza a dibujarla en la pizarra], con filas y columnas, ¿cuántas columnas pongo?

A: Tres.

F: Tres, ¿por qué tres?

A: Centenas, decenas y unidades.

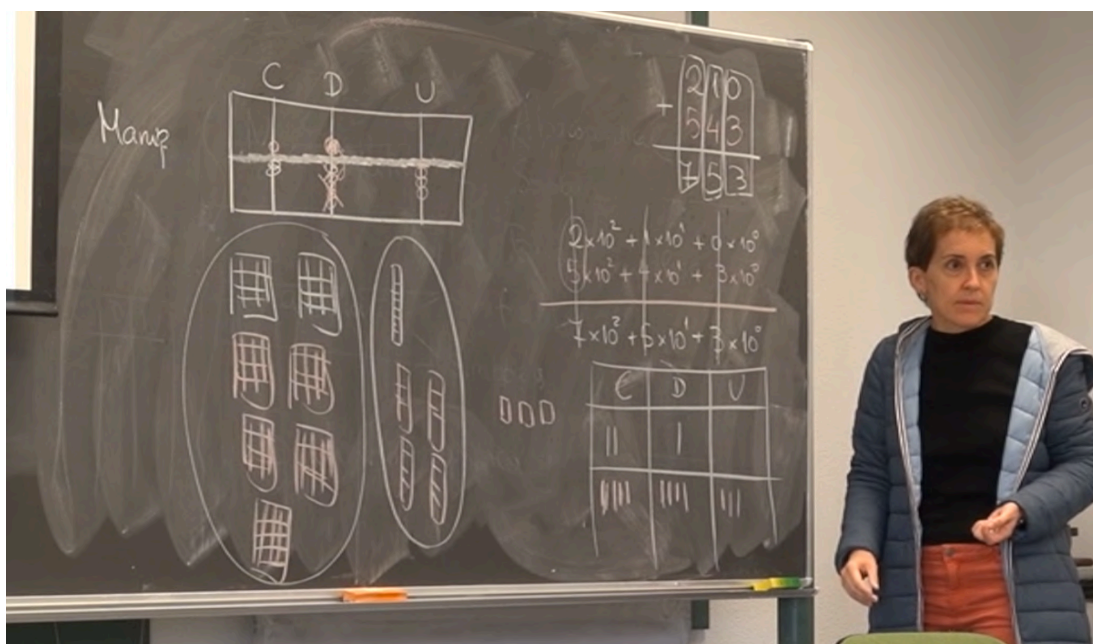
F: Unidades, decenas y centenas, ¿vale? Y entonces, represento el primer número, 210: 1, 2, 1, eso es 210 [pone dos rayas en la primera casilla de las centenas y una en la primera de las decenas]. Represento el segundo número, 500:

- M28.1-3.3. *Presenta un formato de tabla que ella ha decidido con barrotes [E, 2].*
 - M28.1-3.3(I)1. *Se puede hacer con barrotes o con cualquier otro elemento, pero parece complicado que la tabla que presenta surja de manera natural si la única instrucción es «haced una tabla» [I, M].*

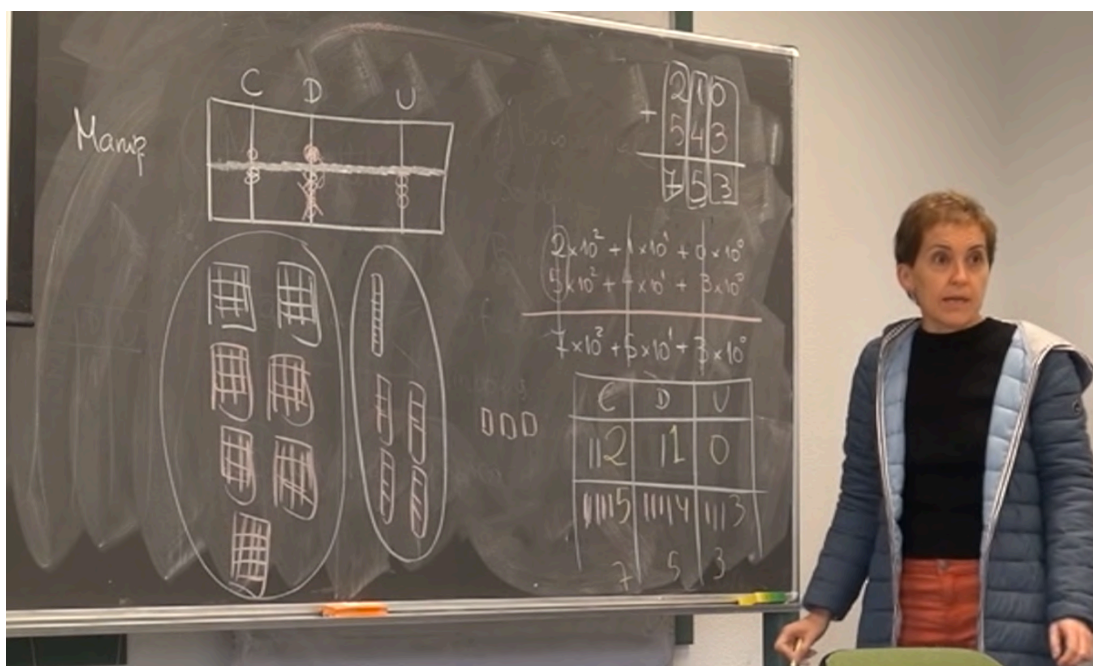
1, 2, 3, 4, 5; 40: 1..., bueno, en rosa, ya puestos....,

- M29.1-3.3. *Usa tizas de colores [E, D].*

1, 2, 3, 4, 5; 40: 1, 2, 3, 4; y 3: 1, 2, 3. Y agrupo: ¿cuántas unidades tengo al final?, 3, ¿cuántas decenas tengo al final?, 5, ¿cuántas centenas tengo al final?, 7, fin.



Este sistema de representación es icónico-gráfico porque he representado aquí las cantidades con palitos, pero tiene una estructura especial porque está en una tabla, ¿vale? Entonces, vamos a decir que es un sistema de representación tabular-gráfico. Si en vez de poner aquí gráficos, yo hubiera dicho: «oye, mira, no me lío con los gráficos, ya puestos, como ya controlo mejor los símbolos, pues voy a poner aquí 210 y aquí abajo voy a poner 543 y luego ya sumo: 4 y 1, 5; 5 y 2, 7; 3 y 0, 3», ¿vale?



Sería tabular, tiene una estructura tabular, no es puramente simbólico-numérico,

- D8.1-3.3. *Está analizando una forma de representar la información de la suma en una tabla [E, 2].*
- D8.2-3.3. *Está analizando una segunda forma de representar la información de la suma en una tabla [E, 2].*

tiene una estructura tabular, pero con números dentro, tabular-numérico, ¿vale?

- M31.1-3.3. *Está explicando la tabla que los alumnos tenían que haber hecho [E, 2].*
 - M31.1-3.3(I)1. *Porque la consigna que dio al principio no contaba con suficientes indicaciones, lo cual didácticamente era correcto; por lo tanto, ahora ha tenido que proporcionar la tabla ella, lo cual es suficiente para que estos alumnos entiendan lo que se ha hecho [I, M].*
- L6.1-3.3. *Está explicando a los alumnos el nombre de un sistema de representación en forma tabular [E, 2].*
- L6.2-3.3. *Está explicando a los alumnos el nombre de un segundo sistema de representación en forma tabular [E, 2].*

Entonces, yo voy pasando de lo más concreto, que sería: «mi madre me ha dado 316 euros y mi abuela 429, ¿cuántos euros tengo en total?», después paso a manipular, con ábacos verticales, con ábacos japoneses, con bloques multibase...,

- M32.1-3.3. *Está explicando la progresión didáctica, partiendo de los euros, de lo concreto, y siguiendo con lo manipulativo para llegar a lo abstracto, o sea, su objetivo como maestros [E, 3].*
 - M32.1-3.3(I)1. *Se trata ya de una indicación, de una progresión, de índole didáctica que les servirá a los alumnos en su práctica fuera [en primaria] para que sus futuros alumnos aprendan lo trabajado. Establecer una progresión adecuada es algo que a los docentes nos preocupa mucho, la cual no siempre va de lo fácil a lo difícil, a veces tienes que presentar cosas difíciles para generar desequilibrios para que los alumnos tengan que actuar. En este caso, para entender eso [señala el algoritmo simbólico tradicional de la suma], es necesario conocer todo lo planteado en la pizarra [I, M].*
 - M32.1-3.3(I)2. *En realidad, los euros se pueden considerar como un sistema simbólico; si tienes 300, no tienes 300 moneditas de 1 euro, tienes un billete de*

100 y demás, es decir, al final también el euro se puede componer con un sistema, por lo que no es más manipulativo que esto [señala a los bloques multibase], aunque es verdad que en este caso se enmarca en un contexto, pero no por ello es más manipulativo [I, M].

- *M32.1-3.3(I)3. Los ábacos [señala el sorobán] no están pensados para enseñar ni para aprender, sino para trabajar, para obtener resultados, al igual que esto [el algoritmo tradicional de la suma]. En cambio, esto [señala los bloques multibase] sí está pensado para aprender, por lo que es más manipulativo y concreto que el ábaco. Esto otro [señala el tablero de posición] estaría en un punto intermedio [I, M].*

y cuando interiorizo bien eso, digo: «ostras, venga, lo voy a poner en una tabla gráfica y voy a indicar lo que me indica cada varilla o lo que me indica cada agrupamiento de los bloques multibase, que es posición, en las columnas de una tabla, y ahí voy a poder marcarlo con símbolos». Esta tabla con símbolos se llama tablero de posición, porque tengo las posiciones indicadas —unidades, decenas y centenas—, y es uno de los recursos que más utilizan en el método famoso este Singapur, que habréis visto o habréis oído hablar de él, ¿vale?

- *L7.1-3.3. Está explicando a los alumnos la secuencia didáctica que sería idónea para explicar las sumas, utilizando materiales para finalmente llegar a realizar la suma numéricamente [E, 3].*
 - *L7.1-3.3(I)1. Pretende que cuando los alumnos expliquen las sumas en primaria no empleen directamente el algoritmo, sino los materiales vistos, si es que disponen de ellos, ya que lo considera importante [I, M].*

Entonces, ¿qué están haciendo?, están haciendo una transición de los más concreto, pasando por lo manipulativo, hacia lo abstracto, que sería..., esto es lo más abstracto [señala las expresiones de sumas y productos de potencias de 10] y esto es lo abstracto que se trabaja en primaria [señala la suma hecha en el registro de representación simbólico-numérico], ¿vale?

- *P8.1-3.3. Está relacionando todas las situaciones trabajadas en esta clase, explicando la traducción o transición desde lo contextual, desde una situación cotidiana, hacia un lenguaje manipulativo, simbólico, tabular... [E, 3].*

Pero no trabajan directamente con esto, vamos pasando..., concreto, concreto, concreto, concreto [de forma manipulativa], voy intentando abstraer un poco, pero tengo mis gráficos que me ayudan a visualizar lo que estoy haciendo [de forma tabular], y finalmente mi objetivo es escribirlo simbólico-numéricamente, de forma abstracta, ya al final.

- *D9.1-3.3. Está describiendo el proceso o la secuencia de la suma, de lo concreto, pasando por lo pictórico, hasta lo abstracto [E, 3].*
 - *D9.1-3.3(I)1. Para que los alumnos tengan una visión global de la ruta de aprendizaje de un alumno [de primaria] cuando está aprendiendo a sumar en primaria [I, M].*
- *R3.1-3.3. Está poniendo de manifiesto el proceso de aprendizaje de los niños en primaria [E, 2].*
- *J5.1-3.3. Recapitula hablando del trabajo en primaria con el problema concreto, de su formalización para visualizarlo y del porqué de la tabla [E, 1].*
 - *J5.1-3.3(I)1. Para dar un sentido a lo que se ha hecho en clase y a lo que les va a pedir en el examen [I, D].*
- *J5.2-3.3. Menciona el método Singapur [E, 2].*

¿Cómo habéis trabajado mayoritariamente vosotros en primaria cuando estabais haciendo sumas de este estilo?

- *L9.1(i)-3.3. Evento implícito en el comentario [E, 1].*
Transcripción del vídeo: ¿Cómo habéis trabajado mayoritariamente vosotros en primaria cuando estabais haciendo sumas de este estilo?
 - *L9.1(i)-3.3(I)1. A lo que irá es a que posiblemente no hayan trabajado nunca o muy poco con materiales [I, M].*

¿Desde aquí [señala lo manipulativo] o desde el final [señala lo simbólico-numérico]?

A: Desde el final...

A: Yo con las de centenas, decenas y unidades, las cajas...

F: Las cajas estas también os suenan, los tableros de posición, pero ¿y qué poníais en las posiciones, palitos o los números ya?

A: Los números directamente.

- P9.1-3.3. *Pregunta a los alumnos qué métodos que les enseñaron [en primaria, para sumar] [E, 1].*
 - P9.1-3.3(I)1. *Para ver si fue la mejor forma o no y si se puede mejorar el modo que les enseñaron [para sumar] [I, M].*
- P9.2-3.3. *Hace referencia al método Singapur [E, 2].*
 - P9.2-3.3(I)1. *Para que les suene y sepan cómo se trabaja en ese método, cuál de los escenarios vistos se asemeja más a dicho método [I, M].*

F: Los números directamente, o sea, que estabais trabajando la fase inicial, de la suma, la estabais trabajando directamente con lo simbólico, que es la fase final,

- M35.1-3.3. *Está preguntando a los alumnos cómo han pasado todo este proceso [el aprendizaje de la suma en primaria] [E, 1].*
 - M35.1-3.3(I)1. *Para que vean si las dificultades que tuvieron [en primaria] las podrían resolver luego [como maestros] por otras vías [I, M].*
 - M35.1-3.3(I)2. *El problema que puede surgir aquí es que puede haber un alumno que diga: «pues yo lo aprendí así y lo aprendí bien». Y es verdad, pasa; de hecho, muchas veces los que mejor van no son los que más juego te dan aquí [I, M].*

¿lo veis?

A: Jolín, sí.

F: Vale, pues ala, ya está.

- J6.1-3.3. *Pregunta a los alumnos cómo lo han trabajado hasta ahora [en primaria] [E, 1].*
 - J6.1-3.3(I)1. *Relacionar lo visto en clase con su práctica [cuando estudiaron en primaria] es muy importante porque se le da al alumno una visión muy distinta y se le hace ver lo que trabajarán luego con los alumnos [como maestros] y todo lo que hay detrás [I, M].*

ANEXO 18

Conjunto de eventos e interpretaciones de la fase 1 de todos los participantes, integrados en la transcripción de los vídeos tras el *call-out* al que cada uno se refiere

Nota 1: En este documento se incluyen todos los eventos e interpretaciones de los participantes agrupándose de dos maneras: por un lado, todos aquellos que se refieren a un call-out se presentan agrupados tras el call-out en cuestión, el cual se introduce cuando tiene lugar en el vídeo y con su correspondiente etiqueta (por ejemplo, C1-3.2, o sea, el primer call-out de la segunda parte vídeo 3); por otro, todos aquellos que no se refieren a un call-out se agrupan con los eventos que traten el mismo aspecto, si los hubiera, y se presentan tras un evento redactado por el investigador que recoge la información que aborda, incluyéndose cuando tiene lugar en el vídeo e introduciéndose también con una etiqueta que lo identifica (por ejemplo, Evento 1-3.2, o sea, el primer evento – no call-out – de la segunda parte del vídeo 3).

Nota 2: El texto presentado entre corchetes en la transcripción y en algunos eventos e interpretaciones se corresponde con información incluida por el investigador.

VÍDEO 1

Fragmento 1

[F = Formadora del vídeo].

F: Bueno, entonces os voy a dar el guion y empezáis a trabajar y, al final, los últimos 15 minutos, hacemos la puesta en común. El guion de la actividad aparece aquí en el campus, pone la fecha, ¿vale?, «actividad para la sesión del 19 de septiembre». Lo voy a leer porque está en inglés, por si alguno tuviera alguna dificultad, lo leo y os ponéis a trabajar, ¿vale?

Evento 1-1.1. Empieza a explicar de forma general lo que se va a hacer en la sesión.

- M1.1-1.1. Está explicando lo que van a hacer [E, D].
- P1.1-1.1. Está explicando lo que van a hacer [E, D].
- J1.1-1.1. Introduce los pasos que van a seguir en la sesión [E, D].
- R1.1-1.1. Explica un poco a los alumnos lo que tienen que hacer [E, D].

Evento 2-1.1. Dice que va a traducir la actividad porque está en inglés.

- M3.3-1.1. Dice que va a traducir al español el texto que está en inglés [E, D].
- J1.2-1.1. Dice que el guion de la actividad está en inglés [E, D].

Evento 3-1.1. Emplea el aula virtual.

- J1.5-1.1. Emplea el aula virtual [E, D].

Todo el mundo en la mesa tiene un montón de palillos y varias cintas de estas, ¿no?, elásticas. Si alguien necesita más cintas me las pide, palillos no, son los que os he puesto, ¿vale?, es con lo que tenéis que trabajar.

C1-1.1. Presenta el material manipulativo con el que los alumnos van a trabajar: palillos y cintas elásticas.

- M3.1-1.1. Presenta el material: palillos y gomas [E, 2].
- L1.1-1.1. Explica a los alumnos qué es lo que tienen en la mesa y que lo van a necesitar a lo largo de la tarea [E, 1].
- P2.1-1.1. Indica los materiales que van a utilizar en la actividad [E, 1].
- R1.2-1.1. Presenta el material que van a usar [E, 1].

C2-1.1. Establece una restricción en el uso del material: la cantidad de palillos es fija, mientras que la cantidad de cintas elásticas no lo es.

- M3.2-1.1. Limita el número de palillos, pero no el de gomas [E, 3].
 - M3.2-1.1(I)1. La cantidad de palillos debe de ser relevante en la consigna, en lo que vayan a tener que hacer [I, M].

El problema es que yo he comprado una caja de palillos en Supeco y resulta que mis compañeros lo compran en Mercadona y me dicen que las cajas de palillos que ponen 800 palillos del Mercadona traen más y que les sale a cuenta, y que cuando van a comprar materiales —porque a veces tenemos que comprar nosotros los materiales— pues que merece la pena. Yo no pude ir a Mercadona, fui a Supeco, pone que son 800, pero no sé si me han timado o no me han timado. Entonces, para hacer un control de calidad, hacer una estimación, que luego, bueno, los que hayáis hecho Matemáticas de Ciencias Sociales pues sabéis hacer un contraste de hipótesis y tal, pero bueno, lo primero que tengo que hacer es

hacer una estimación de cuántos hay, ¿no? Entonces, los he repartido para no contarlos yo y la idea es ver cuántos hay.

C3-1.1. Contextualiza la actividad planteando que hay que comprobar si la cantidad de palillos que hay en cierta caja es la que se indica en la misma.

- M4.1-1.1. Está dando un contexto, intentando dar una justificación más allá de la actividad didáctica [E, 2].
- D1.2-1.1. Contextualiza la actividad con una situación que podría ser cotidiana [E, 2].
 - D1.2-1.1(I)1. Para asegurarse de que toda la clase entienda lo que van a hacer [I, D].
- L2.2-1.1. Contextualiza lo que van a hacer los alumnos, motivando el problema a través de la historia inventada de los palillos del Supeco y del Mercadona [E, 2].
 - L2.2-1.1(I)1. Para intentar que los alumnos se sientan atraídos por la actividad [I, D].
- P3.1-1.1. Contextualiza la actividad en una situación cotidiana [E, 2].
 - P3.1-1.1(I)1. Para intentar motivar a los alumnos y captar su interés [I, D].
- J1.3-1.1. Introduce la actividad poniendo a los alumnos en una situación real mediante una historia relacionada con ellos, como la del supermercado [E, 2].
 - J1.3-1.1(I)1. Para tratar de enganchar a los alumnos con el problema y atraer su atención [I, D].
- R2.2-1.1. Relaciona lo que tienen que hacer con una actividad natural del día a día, con cualquier sitio al que habitualmente pueden ir los alumnos, con su entorno más inmediato [E, 2].
 - R2.2-1.1(I)1. Porque así, partiendo de sus intereses y de su entorno, están más receptivos y abiertos a la actividad [I, D].

C4-1.1. Hace alusión a conocimientos previos de Matemáticas de Ciencias Sociales: el contraste de hipótesis.

No ha sido detectado por ningún formador.

C5-1.1. Introduce la actividad a realizar: estimar y contar cuántos palillos hay repartidos en clase.

- D1.1-1.1. Plantea la actividad [E, 1].
- L2.1-1.1. Está dando la consigna inicial [E, 1].

- J1.4-1.1. *Introduce un problema de aritmética, que consistirá en contar o tratar de estimar [E, 3].*
 - J1.4-1.1(I)1. *Se trata de una actividad para primaria [I, M].*
- R2.1-1.1. *Explica un poco en qué consiste lo que tienen que trabajar [E, 1].*
- P5.1-1.1. *Plantea la actividad [E, 1].*
- M7.1-1.1. *Establece el objetivo del alumno: saber cuántos palillos hay [E, 2].*
 - M7.1-1.1(I)1. *Dada la cantidad de palillos, un conteo sencillo no será la mejor estrategia [I, M].*

Entonces, el guion de la actividad, tal y como aparece aquí... [espera a que cargue el ordenador]. Aquí está el guion. Esta actividad –esperad que la amplíe un poco– está escaneada de un libro muy bueno que utilizan en los últimos años en Estados Unidos para formar profesores de primaria. Lo bueno del libro es que, además de los contenidos teóricos, más de la mitad del libro son actividades para llevar al aula-taller como estamos haciendo aquí, ¿vale? Entonces, una de las actividades iniciales para el trabajo con el número, que es con lo que estamos empezando nosotros, es esta de los palillos, ¿vale?

C6-1.1. Presenta un libro que utilizan en Estados Unidos para formar a profesores de primaria y que contiene muchas actividades para llevar al aula.

- M5.1-1.1. *Está dando la fuente de la que ha sacado la actividad, así como el objetivo de la fuente, que es formar docentes [E, 2].*
 - M5.1-1.1(I)1. *Para que los alumnos que quieran puedan consultar la fuente [I, D].*
- P4.1-1.1. *Está dando una referencia bibliográfica, justificando por qué es buena para los alumnos [E, 1].*
- L3.1-1.1. *Informa a los alumnos de dónde ha sacado la actividad, indicando que se emplea en varias Universidades en las que se imparte el grado de Educación Primaria [E, 2].*
 - L3.1-1.1(I)1. *Para que no piensen que es una actividad que ella se ha inventado y que vean que es una actividad contrastada, que es válida porque está publicada [I, D].*
- J2.1-1.1. *Da una referencia que dice que es un buen libro con contenido práctico, con actividades [E, 2].*

- J2.1-1.1(I)1. *Dar referencias bibliográficas a los alumnos puede ser de interés para la futura práctica de los alumnos [I, D].*

C7-1.1. Menciona el contenido matemático que van a trabajar: el número.

- M6.1-1.1. *Dice que se va a trabajar la construcción del número [E, 3].*
 - M6.1-1.1(I)1. *Por lo tanto, se está haciendo referencia al currículo [I, M].*
- L3.2-1.1. *Va a hablar del número [E, 3].*
 - L3.2-1.1(I)1. *Por lo tanto, la asignatura que se imparte es Matemáticas I [I, M].*
- P5.4-1.1. *Dice que van a trabajar con el numeral [E, 3].*
- D3.2-1.1. *Va a trabajar el conteo [E, 3].*

Entonces, aquí la pregunta es «cuántos», cuántos palillos, ¿no?, que es lo que os he preguntado a vosotros, ¿no?, cuántos. Entonces, cada grupo participando en esta actividad tiene un montón de palillos y luego tiene algo para atarlos, ¿no?, *rubber bands*, pues cintas de estas elásticas. Los materiales ya los tenéis. El objetivo de la actividad es ayudaros a entender el desarrollo de la escritura de los números tal y como los utilizamos nosotros en nuestro sistema de numeración, ¿vale?

C8-1.1. Enuncia el objetivo de la actividad: entender el desarrollo de la escritura de los números en nuestro sistema de numeración.

- M9.1-1.1. *Declara el objetivo didáctico de la actividad con estos alumnos, los futuros maestros [E, 1].*
 - M9.1-1.1(I)1. *Lo que no se sabe aún es si se trata de una actividad para realizarla con alumnos más pequeños, y estamos reproduciendo la actividad con los futuros maestros, o si es una actividad destinada al futuro maestro directamente [I, D].*
- R3.1-1.1. *Acaba de marcar el objetivo de la actividad [E, 1].*
 - R3.1-1.1(I)1. *Para que los alumnos sepan realmente para qué les va a servir esa sesión y qué se pretende sacar en concreto de la misma [I, D].*
- P5.2-1.1. *Indica el objetivo [E, 1].*
- D3.3-1.1. *Presenta el objetivo, que es dirigir al alumno a la notación posicional a partir de una actividad de conteo [E, 3].*

Entonces, primero, organiza los palillos de forma que visualmente puedas ver más o menos cuántos hay; usa las bandas elásticas, si te ayudan, para

organizarlos de manera que así, de un vistazo, puedas decir cuántos tienes, primero los cuentas, lo organizas, piensas cómo organizarlo, pero la cosa es que la organización que tú tengas en la mesa te permita de un vistazo recordar cuántos hay sin necesidad de haberlo apuntado, ¿no?, y que, si yo me paso por allí, me podáis decir: «mira, hay no sé cuántos, porque...», lo veo porque lo hemos organizado así», ¿vale?

C9-1.1. Establece la primera instrucción de la consigna: organizar los palillos, empleando las cintas elásticas si son de ayuda, para saber cuántos hay de un vistazo.

- M10.1-1.1. Está complementando la consigna, sin limitarse a traducir: dice que no tomen notas y que, simplemente con cierta organización, de un vistazo, sepan establecer cuántos hay de una manera rápida [E, 3].
 - M10.1-1.1(I)1. Lo que se llama en Teoría de Situaciones «la negociación de la consigna»; el objetivo del alumno ella lo ha dicho, pero ahora está estableciendo cuáles son las condiciones para hacerlo, lo que está permitido, y eso forma parte de una negociación; el alumno tiene que tener muy claro qué es lo que puede hacer [I, M].
- D2.1-1.1. Presenta los primeros pasos a seguir para realizar la actividad, sin decir a los alumnos cómo tienen que hacerlo exactamente [E, 1].
 - D2.1-1.1(I)1. Para que los alumnos entiendan qué tienen que hacer, ya que es posible que no entiendan lo que se les pide y que se pongan a contar [I, M].

Luego, reflexiona sobre si la manera en la que lo has organizado corresponde a cómo escribirías tú luego los numerales para representar esa cantidad de palillos.

C10-1.1. Establece la segunda instrucción de la consigna: reflexionar sobre si hay una correspondencia entre los grupos de palillos hechos y la escritura de los numerales que representan el total de dichos palillos.

- M12.1-1.1. Dice a los alumnos que reflexionen para ver si hay una correspondencia entre los agrupamientos y el sistema de numeración [E, 3].
 - M12.1-1.1(I)1. Pretende provocar el uso de agrupamientos recursivos para que aparezca esa correspondencia con el sistema de numeración [I, M].

- M12.1-1.1(I)2. *El objetivo de la actividad es muy didáctico, se sale un poco de un supuesto «adidactismo» que en principio podría presentar la actividad, ya que no se trata solamente de saber «cuántos hay», sino de pensar cómo se hace [I, M].*

Después, tienes que juntar tus palillos con los de un grupo de al lado, ¿vale?, por ejemplo, vosotros con vosotros y así, cada dos grupos tienen que juntar los palillos que tienen y decidir cuántos tienen en común, ¿vale?, cuántos tienen en total.

Evento 4-1.1. Escenifica con las manos al dirigirse a los alumnos.

- L4.2-1.1. *Escenifica con las manos, haciendo como que escribe cuando habla de escribir, al dirigirse al grupo-clase [E, D].*

C11-1.1. Establece la tercera instrucción de la consigna: juntar los palillos cada dos grupos y saber cuántos hay en total.

- M13.1-1.1. *Presenta ya una tarea: saber cuántos [palillos] hay al juntar dos distribuciones [E, 3].*
 - M13.1-1.1(I)1. *Se pretende ver si la escritura permite la composición; dependiendo de si se han hecho o no buenas estructuras, se puede asimilar bien otro grupo o no. Nuestro sistema de numeración funciona bien algorítmicamente, es cómodo desde el punto de vista de técnicas operatorias, y si haces una buena organización [de los palillos] basada en eso, vas a tener las mismas facilidades [I, M].*
- P5.3-1.1. *Indica que los grupos de alumnos tendrán que comparar las técnicas que hayan empleado para realizar la actividad [E, 1].*
 - P5.3-1.1(I)1. *Para ver qué técnica es mejor y cuál es peor [I, M].*
- L4.1-1.1. *Está dando la instrucción que tienen que seguir los grupos para resolver el problema, leyéndola en el ordenador [E, 1].*

Y al final, tenemos que juntarlos todos y de una forma ágil, sin tener que volver a contarlos todos, tenemos que saber cuántos palillos hay en total en la clase repartidos, ¿vale?

C12-1.1. Establece la cuarta instrucción de la consigna: juntar todos los palillos de la clase y saber cuántos hay en total de una forma ágil, sin tener que contarlos de nuevo.

- M14.1(i)-1.1. Evento implícito en el comentario [E, 1].

Transcripción del vídeo: Y al final, tenemos que juntarlos todos y de una forma ágil, sin tener que volver a contarlos todos, tenemos que saber cuántos palillos hay en total en la clase repartidos, ¿vale?

- M14.1(i)-1.1(I)1. *Se trata de ver si la distribución se puede ir heredando y puede funcionar; si es buena, lo va a hacer; algunas distribuciones pueden ser buenas para saber cuántos [palillos] hay, pero puede que no lo sean cuando compongan y se tendrán que rechazar. La distribución tiene que ser común; si unos hacen grupos de 6 y otros grupos de 8, cuando los junten habrá un problema; por ello, aunque ella no se lo dice, la situación les obliga a que se pongan de acuerdo en cómo agrupar, debe haber cierto isomorfismo [I, M].*

O sea que, primero, cada grupo tiene que saber cuántos tiene y tiene que generar una estrategia para, de manera rápida, mirar en la mesa y ver cuántos hay; después, reflexionar sobre si la manera en la que lo coloca cuando uno luego escribe, imaginaos, «tengo 72, pues cómo se escribe 72: siete, dos», pues la manera en la que lo coloco me ayuda con la escritura o no, no tiene por qué, se reflexiona un poco sobre eso; y cuando hayáis terminado esa parte, llamáis al grupo de al lado y decís: «venga, vamos a ver cuántos tenemos en total, visualmente, cómo lo organizasteis vosotros, cómo lo organicé yo, a ver cómo lo tengo», ¿vale?; y luego todos.

Evento 5-1.1. Recapitula las instrucciones de la consigna.

- M15.1-1.1. Recapitula [las instrucciones de la consigna] [E, D].
- R4.1-1.1. Acaba de repetir por segunda vez a los alumnos todos los pasos que tienen que ir haciendo [E, D].
 - R4.1-1.1(I)1. *Para asegurarse de que los alumnos lo han escuchado y lo han entendido [I, D].*
 - R4.1-1.1(I)2. *Es habitual enmarcar [lo que se va a hacer], ir diciendo las actividades a realizar, establecer el orden de lo que hay que hacer... [I, D].*

C13-1.1. Induce a la reflexión sobre la correspondencia entre la escritura de los números y los grupos de palillos haciendo ver que 72 se escribe con un 7 y un 2.

- M16.1-1.1. Está dando pistas [E, 1].
 - M16.1-1.1(I)1. Pretende que haya cierto isomorfismo [en los agrupamientos], pero si se dan menos indicaciones y no surge, es muy bueno, ya que entonces se puede pensar qué ha pasado; eso sí, se tarda más, claro [I, M].
- D3.1-1.1. Dirige a los alumnos en su explicación sobre la actividad con detalles o pistas acerca de cómo realizarla [E, 1].
 - D3.1-1.1(I)1. Si se ha trabajado más o menos el contenido, hacen falta más o menos detalles, más o menos dirección; en este caso, es difícil apreciar cuánto hace falta esa dirección, al no saber cuánto se ha trabajado antes un contenido parecido [I, D].

Tenéis un cuarto de hora, ¿vale?

Evento 6-1.1. Indica el tiempo que los alumnos tienen para trabajar.

- M17.1-1.1. Da el tiempo a los alumnos [para hacer la tarea] [E, D].
- R5.1-1.1. Termina diciendo el tiempo que tienen de trabajo [E, D].
- J4.1-1.1. Indica el tiempo que tienen los alumnos para realizar la actividad [E, D].

Fragmento 2

[F = Formadora del vídeo]. [A = Alumnos].

- F: Necesito saber si habéis tenido que llegar a algún acuerdo entre los grupos o...
- A: Sí, claro, todo ha sido un consenso, todo ha sido un consenso.
- F: Ah, vale, ha sido un consenso. ¿Qué acuerdo habéis tenido que...?
- A: Hemos explicado cada uno pues lo que significaba cada..., cada gomita.
- F: Y, por ejemplo, ¿vosotros de cuánto en cuánto lo habíais agrupado? Erais los de 15, 10, 5, ¿no?
- A: Sí.
- F: ¿Y vosotros?
- A: 20, 10 y 4.
- F: 20, 10 y 4. Entonces, ¿habéis tenido que llegar a algún acuerdo alguno para reordenar?
- A: No, porque nos ha venido muy bien.

C1-1.2. Pregunta a los alumnos qué agrupaciones habían hecho antes de juntarse los dos grupos de alumnos y si han tenido que llegar a algún acuerdo al juntar los palillos de ambos grupos, incidiendo así en la primera y en la tercera instrucción de la consigna.

- M1.1-1.2. Pregunta a los alumnos si han tenido que ponerse de acuerdo [E, 2].
- P1.1-1.2. Pregunta a los alumnos por los métodos que ha utilizado cada grupo [E, 1].
 - P1.1-1.2(I)1. Para que los alumnos puedan comparar las distintas estrategias que han usado y reflexionar sobre cuál es mejor y cuál tiene alguna deficiencia [I, M].
- D1.1-1.2. Está pidiendo la información de lo que han hecho los alumnos, sin juzgar y sin dirigirlos demasiado hacia lo que ella pedía, que en definitiva es un trabajo sobre notación posicional [E, 1].
- J1.1-1.2. Está pidiendo a los alumnos, por medio de preguntas, que expliquen a qué acuerdos han tenido que llegar cuando se han juntado los dos grupos [E, 2].
 - J1.1-1.2(I)1. Como ha habido una incongruencia por parte de los alumnos, ya que unos han hecho grupos de 15 y otros de 20, quiere que vean que la manera de aprender está en ir comparando lo que han hecho con los demás y que es importante llegar a consensos [I, M].

- F: ¿Os ha venido bien?
- A: Es que hemos sido muy inteligentes cogiendo el amarillo para los grandes [se refiere a gomas elásticas de color amarillo].
- F: Ahora los grandes de qué son, ¿de 20?
- A: De 20 y de 15, aquí están mezclados. ¿O los tenemos que reorganizar?



- F: Esto es superinteligente, ¿no? O sea, yo veo aquí..., digo: «en los amarillos, algunos tienen 20 y algunos tienen 15, búscate la vida Nuria».
- A: Pero son amarillos.
- F: Ya, pero entonces yo no sé... Yo digo: «vale, yo puedo ver 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 grupos amarillos», ¿no? Y ahora digo: «como mucho serán 160, si son todos de 20, pero... no necesariamente son 160, pueden ser menos».
- A: Bueno, pero como no lo sabes...
- F: ¿Entonces cómo sé cuántos hay?
- A: Te lo estamos diciendo, tienes que confiar en nosotros.
- F: No, en matemáticas la confianza no vale, uno tiene que...
- A: Es que no sé, no lo entiendo. ¿Lo tenemos que reorganizar?
- F: Vosotros ya sabéis cuántos palillos tenéis, pero ahora, visualmente, tenéis que poder contarme a mí cómo sabéis que hay ese número de palillos, ¿no?
- A: Ah, pues habría que...

C2-1.2. Hace ver, tras preguntar cuántos palillos tienen las agrupaciones con gomas amarillas, que no es útil que con un mismo color se hagan agrupaciones

de 15 o 20 palillos indistintamente, agrupaciones distintas, ya que de ese modo no se puede saber cuántos palillos hay visualmente, incidiendo así en la primera instrucción de la consigna.

- D2.1-1.2. Razona sobre la estrategia que han propuesto los alumnos, sin decirles directamente qué es lo que han hecho mal [E, 1].
 - D2.1-1.2(I)1. Para que los alumnos se den cuenta de los problemas que tiene lo que han hecho [I, D].
- L1.1-1.2. Hace ver a los alumnos, mediante preguntas, que la agrupación que han hecho alumnos no es muy inteligente, que no es la óptima [E, 1].
- J2.1-1.2. Pregunta a los alumnos por los colores [de las gomas], incitándolos a explicar el porqué de lo que han hecho, descubriéndoles la incongruencia que existe en su forma de agrupar y pidiendo una justificación más clara del razonamiento que han seguido, de la conclusión a la que han llegado, una explicación visual [E, 3].
 - J2.1-1.2(I)1. En matemáticas hay que transmitir que es necesario justificar los resultados, cómo funcionan las cosas; en este caso, el sistema decimal [I, M].
- M7.1-1.2. Pregunta a los alumnos sobre sus contradicciones, dando a continuación una consigna: hay que saber cuántos palillos hay visualmente [E, 2].
 - M7.1-1.2(I)1. Se trata de algo bastante típico en clase de matemáticas, cuando llega un agente externo como el profesor, es cuando los alumnos empiezan a ver las cosas que no funcionan [I, M].
 - M7.1-1.2(I)2. Para que los alumnos vean la contradicción, que traten de proponer alguna manera de mejorarlo y que vean la ventaja que tiene ponerse de acuerdo al hacer grupos, porque eso va a ser intratable si no se ponen de acuerdo en los grupos [I, M].
 - M7.1-1.2(I)3. Aunque la consigna es muy sencilla, saber cuántos [palillos] hay, no es igual de sencillo decidir qué se entiende por una distribución que lo muestre visualmente de un modo fácil; esto es algo ambiguo, no se deja claro qué es lo que está bien y qué es lo que está mal [I, M].

Evento 1-1.2. Se dirige a los alumnos con un todo distendido.

- J1.2-1.2. Emplea un tono bastante distendido [E, D].

Evento 2-1.2. Está trabajando en grupo.

- R1.1-1.2. Está trabajando en grupo [E, D].

- R1.1-1.2(I)1. Cuando se trabaja en grupos cooperativos, la profesora va rotando por los grupos para comprobar si los alumnos han interpretado bien lo que tienen que hacer y pueden llegar a alcanzar el objetivo que se les ha propuesto [I, D].

¿Y no podemos quitar las gomas y reorganizarlo?

F: Sí, sí, sí, yo no dije que no pudierais quitar las gomas.

A: Aaaaah.

F: ¿Alguien dijo que no se podían quitar?

A: Y nosotros diciendo que no se podían quitar las gomas...

C3-1.2. Hace ver que en la consigna no se establecía la restricción de que no se pudieran quitar las gomas al juntarse dos grupos de alumnos, es decir, se permitía reorganizar las agrupaciones de palillos.

- M9.1(i)-1.2. Evento implícito en el comentario [E, 1].

Transcripción del vídeo: ¿Alguien dijo que no se podían quitar?

- M9.1(i)-1.2(I)1. Cuando se da una consigna, es importante dejar claro lo que se puede y lo que no se puede hacer; si no se deja claro, lo cual nos pasa a veces a todos, los alumnos pueden tener dudas sobre lo que hacer [I, D].
- P3.1-1.2. Está volviendo a explicar algún detalle de la actividad [E, 1].
 - P3.1-1.2(I)1. Porque los alumnos no habían entendido todos los detalles de la actividad [I, D].
 - P3.1-1.2(I)2. Para que los alumnos mejoren su táctica de conteo [I, M].
- R1.2-1.2. Hace preguntas a los alumnos, detecta un error que han cometido y lo pone de manifiesto, pero sin explicar exactamente cómo han de proceder [E, 1].
 - R1.2-1.2(I)1. Con las preguntas pretende que sean los propios alumnos los que se organicen para resolver ellos solos la actividad [I, D].

F: Y una duda más. Alguno de vosotros..., por separado, ¿no?, cuando lo teníais..., habéis escrito la cantidad que teníais, ¿no? Eh, 109 teníais uno...

A: 104 y 85.

F: Por ejemplo, el 85 se escribe con un 8 y un 5. Ese 8 y ese 5, ¿estaban representados de alguna forma en...?

A: No.

F: No, vale. Y vosotros, la misma pregunta con lo vuestro.

A: No.

F: No había un patrón en cómo lo habíais representado, vale, ok.

A: ¿Pero quieres que busquemos?

F: Quiero que reflexionéis sobre eso, pero ahora lo vamos a poner en común, ¿vale?

A: Vale.

C4-1.2. Hace hincapié en la correspondencia entre la escritura del número y los grupos de palillos que habían hecho, planteando si el 8 y el 5 del 85 estaban representados en las agrupaciones, incidiendo así en la segunda instrucción de la consigna.

- M10.1-1.2. Pregunta a los alumnos si la distribución que han hecho [del 85] tiene que ver con la escritura usual que tenemos [E, 3].
 - M10.1-1.2(I)1. Porque quiere, sin decirlo explícitamente, que utilicen la agrupación decimal. Sin embargo, el agrupamiento de 10 es muy pequeño, aunque sea muy cómodo; de hecho, en las unidades de medida, que también son decimales, no usamos el decímetro, el decámetro, el decagramo... [I, M].
 - M10.1-1.2(I)2. Algún alumno podría decir que él ha hecho 4 grupos de 20, que son 80; ¿se le puede decir que 8 grupos de 10 es más cómodo que 4 de 20? Esto tendría que ver con la consigna [I, M].
- D3.1-1.2. Trata de que los alumnos conecten la actividad con la notación posicional, que es el objetivo de la actividad, sin desvelarles dicha conexión [E, 2].
 - D3.1-1.2(I)1. Se trata de algo que a los alumnos les cuesta mucho, ya que nunca lo han pensado [I, M].
- L2.1-1.2. Trata de comprobar, a través de preguntas, que la agrupación de los palillos que han hecho los alumnos tiene algo que ver con la noción del sistema numérico decimal, con la notación de decena y unidad, con el número que han anotado [E, 3].
- P4.1-1.2. Relaciona la técnica de conteo empleada por los alumnos con la representación en el sistema numérico decimal [E, 2].
- J3.1-1.2. Dirige a los alumnos, mediante preguntas sobre las agrupaciones que han hecho, hacia la comprensión de las propiedades del sistema decimal, ligando la parte práctica con la teórica, la parte manipulativa con el sistema decimal, con la posición del número [E, 3].

F: ¿Ha sido operativo el que ellos hayan hecho 15, 10, 5... y vosotras tuvieras 20...? ¿Eso ha ayudado a la hora de ponerlo en común?

A: No, porque ahora hay que hacerlo otra vez.

F: Ahora hay que volverlo a hacer...

C5-1.2. Pregunta a los alumnos si ha ayudado que cada grupo hiciera agrupaciones distintas a la hora de ponerlas en común, incidiendo así en la tercera instrucción de la consigna.

- M14.1-1.2. Pregunta a los alumnos por sus contradicciones, sin dar la solución [E, 1].
 - M14.1-1.2(I)1. Para que los alumnos arreglen sus contradicciones por sí mismos, siendo ellos quienes tomen las decisiones en lo importante, lo cual a veces es más fácil y otras es necesario intervenir más [I, M].
- L3.1-1.2. Hace un comentario a los alumnos [E, 1].
 - L3.1-1.2(I)1. Para que sean conscientes de que lo han agrupado fatal [I, M].

Evento 3-1.2. Habla a los alumnos de forma constructiva.

- R2.1-1.2. Habla a los alumnos de forma positiva, haciendo que razonen [E, D].

Fragmento 3

[F = Formadora del vídeo]. [A = Alumnos].

F: Me tenéis que decir cuántos palillos había en cada grupo inicialmente, antes de juntaros dos grupos, ¿vale? Entonces, por ejemplo, vosotros.

A: 87.

F: 87 [lo escribe en la pizarra].

C1-1.3. Pregunta a un grupo de alumnos cuántos palillos tenía antes de juntarse con otro grupo, y escribe en la pizarra que son 87, incidiendo así en la primera instrucción de la consigna.

- M1.1-1.3. Va a recapitular y a comprobar cómo lo ha hecho cada grupo [E, 1].
- J1.1-1.3. Está recapitulando, poniendo en común lo que han hecho los grupos [E, 1].
 - J1.1-1.3(I)1. Para asentar las ideas del trabajo realizado en clase [I, D].

Estamos de acuerdo, yo utilizo la escritura estándar que vosotros habéis visto en primaria, secundaria, bachillerato y al llegar aquí, ¿vale? Escritura estándar de nuestro sistema de numeración en nuestro contexto.

C2-1.3. Dice que emplea la escritura estándar de nuestro sistema de numeración en nuestro contexto.

- M2.1-1.3. Menciona eso [que usa la escritura estándar] en relación con el sistema de numeración [E, 2].
 - M2.1-1.3(I)1. Hacer este tipo de comentarios es típico de nosotros [los formadores de matemáticas] [I, M].

Ese grupo, 87. ¿Cómo habíais hecho los grupos?

A: Pues hemos hecho, eh..., tres grupos de 20.

F: Tres grupos de 20, ¿cómo lo puedo poner? [Escribe un 3 en la pizarra].

C3-1.3. Pregunta cómo puede escribir en la pizarra 3 grupos de 20, que es la agrupación que había hecho un grupo de alumnos.

- M3.1-1.3. Pregunta a los alumnos cómo escribe los grupos de 20 [E, 3].
- L1.1-1.3. Está descomponiendo el 87, preguntando a los alumnos por los agrupamientos que han hecho, comenzando con los 3 grupos de 20 [E, 3].

- L1.1-1.3(I)1. Su objetivo debe de ser descomponer el 87 de varias formas en función de los agrupamientos que han hecho los diferentes grupos, utilizando productos y sumas con el fin de llegar a expresiones como «3 x 20» [I, M].
- J1.2-1.3. Pide a los alumnos que verbalicen cómo escribir 3 grupos de 20 y compara sus respuestas [E, 3].
 - J1.2-1.3(I)1. Quiere formalizar lo que verbalizan los alumnos, lo que son 3 grupos de 20 [E, M].

A: Eh..., tres rosas.

A: 3 x 20.

F: ¿Tres rosas?

A: Sí.

A: No.

Evento 1-1.3. Sigue la clase sin atender a la propuesta de «3 x 20» que ha dado un alumno.

- M4.1-1.3. Sigue la clase sin atender a la propuesta de un alumno [3 x 20] [E, D].
 - M4.1-1.3(I)1. Porque no ha debido de oír al alumno [I, D].

F: Si pongo tres rosas... ¿Todo el mundo que ha utilizado gomitas rosas ha atado 20?

A: No.

F: ¿Otras personas que han atado 20 han usado otro color?

A: Sí.

F: Uf, el color no me vale.

C4-1.3. Indica que el color de las gomas no sirve para representar agrupaciones, tras preguntar a los alumnos si todos habían usado gomas rosas para los grupos de 20, haciendo ver que no todos los alumnos han empleado el mismo color para la misma agrupación.

- M5.1-1.3. Dice a los alumnos que el color [de las gomas] no es relevante porque no todos los alumnos han empleado el mismo color para hacer grupos de 20 [E, 3].
- D1.1-1.3. Pregunta a los alumnos, trabajando en gran grupo, qué estrategias han desarrollado, sin juzgarlas [E, 1].

- D1.1-1.3(I)1. Para que sean los alumnos quienes vayan viendo si sus estrategias son adecuadas o no y por qué [I, M].
- P1.1-1.3. Pregunta por los distintos métodos de conteo que han empleado los grupos de alumnos, poniendo de manifiesto las dificultades que tienen en la representación al no haber usado todos los grupos un criterio común [E, 2].

¿Cómo lo pongo?

A: 20×3 .

A: 3×20 .

F: 3 grupos de 20, ¿no? 3×20 . [Escribe 3×20]. Y luego...

A: Pon en el 3 «color rosa» o algo así. Entre paréntesis.

F: Vale, vale. [Pinta una raya rosa sobre el 20].

Evento 2-1.3. Pinta una raya rosa sobre el número 20 a petición de un alumno.

- M8.1-1.3. Pone [una raya] rosa [sobre el 20] [E, M].

Y luego... Esto son 60.

Evento 3-1.3. Indica que 3×20 son 60 sin que ningún alumno lo haya dicho antes.

- M9.1-1.3. Dice que son 60 [3×20] sin que nadie lo haya dicho antes [E, M].

A: 9×3 .

F: Y luego 9 grupos de 3, ¿no? [Escribe + 9]. ¿O 3 grupos de 9? [Borra el 9].

C5-1.3. Pregunta si escribe 9 grupos de 3 o 3 grupos de 9.

- M10.1-1.3. Pregunta si pone 3 grupos de 9 o 9 grupos de 3 [E, 3].

A: 3×9 .

F: 3 grupos de 9 y el 9 lo habéis puesto de otro color, ¿vale? [Escribe 3×9].

A: Sí.

C6-1.3. Escribe en la pizarra la descomposición que han hecho los alumnos del número 87, empleando grupos de 20 y de 9.

- M11.1-1.3. Está descomponiendo el 87, empleando 3 grupos de 20 y 3 grupos de 9 [E, 3].

- M11.1-1.3(I)1. Las expresiones que está empleando no permiten hacer agrupamientos regulares; un sistema no regular puede funcionar, pero no hay unidades elementales, ya que 87 no es primo [I, M].
- M11.1-1.3(I)2. Escribe la forma que le interesa [3 x 20] [I, M].
- J2.1-1.3. Está construyendo el argumento con los alumnos adaptándose a sus respuestas, a la notación en rosa que han utilizado y a los grupos que han hecho [E, 2].

F: ¿Alguien más ha utilizado grupos de 20?

A: Nosotros.

F: Varios. ¿Alguien más ha utilizado grupos de 9? [Destaca con la voz el número 9].

A: Nosotras.

Evento 4-1.3. Pregunta a los alumnos quiénes han empleado grupos de 20 o grupos de 9.

- D2.1-1.3. Está tratando de reunir, mediante preguntas, las estrategias que han empleado los alumnos [E, M].

Evento 5-1.3. Eleva el volumen de la voz cuando dice «nueve».

- R1.1-1.3. Ha dicho 9 un poco más fuerte de lo normal [E, D].
 - R1.1-1.3(I)1. Para volver a captar la atención de los alumnos que están hablando [I, D].

F: Vosotras, vale, y vosotras también, vale. Siguiendo equipo, vosotras.

A: Nosotras, 90.

F: En total, 90. [Escribe 90 en la pizarra].

A: 4 de 20 y 1 de 10.

F: [Escribe $4 \times 20 + 1 \times 10$].

C7-1.3. Escribe en la pizarra la descomposición que han hecho los alumnos del número 90, empleando grupos de 20 y de 10.

- M14.1-1.3. Escribe el 90, un número que no es primo [E, 1].
 - M14.1-1.3(I)1. La cantidad de palillos de cada grupo, que a lo mejor ella la ha pensado, es una variable didáctica en el sentido de la Teoría de Situaciones; con el 90 está muy claro, el 10 va a estar [I, M].

Vale, o sea que de momento han utilizado grupos de 20, grupos de 10, grupos de 9, ¿vale?



En esta escritura [señala lo que ha escrito en la pizarra] yo veo 3 grupos de 20, 3 grupos de 9, pero aquí [señala el 87] no veo un 3 y un 3. Yo aquí veo 4 grupos de 20, 1 grupo de 10, pero aquí [señala el 90] no veo 4, 1. Con lo cual, parece que tampoco habíais encontrado vosotros un patrón entre cómo escribo la cantidad total con símbolos numéricos y visualmente qué veo en los palillos, ¿vale? De momento, la transcripción de lo que veo en los palillos simbólico-numéricamente la tengo aquí a la derecha [señala el $3 \times 20 + 3 \times 9$ y el $4 \times 20 + 1 \times 10$], pero no veo ninguna relación con esto [señala el 87 y el 90].

C8-1.3. Hace ver a los alumnos que no han encontrado una correspondencia entre cómo se escribe la cantidad total con símbolos numéricos y los grupos de palillos hechos, incidiendo así en la segunda instrucción de la consigna.

- M18.1-1.3. Indica el objetivo que tenían que alcanzar los alumnos: establecer la conexión entre los palillos y el sistema de numeración [E, 3].
 - M18.1-1.3(I)1. Hasta el momento la actividad podría ser trasladable a los alumnos [de primaria], pero ahora ya se aprecia un objetivo de didáctica de las matemáticas para estos alumnos [futuros maestros] que en la actividad no estaba presente; ha trasladado la actividad a la vez que les hace pensar sobre por qué puede ser interesante; es una discusión de doble naturaleza [I, M].

- M18.1-1.3(I)2. Cuando se les da una consigna a los alumnos, muchas veces estos se quedan con un objetivo, y otro objetivo –que para el formador puede ser importante– puede que lo vean como secundario; por eso, no ha aparecido ningún patrón, aunque también es cierto que con números pequeños la actividad no es tan lisa, pero no es factible darles cientos de palillos [I, M].
- M18.1-1.3(I)3. En la primera expresión $[3 \times 20 + 3 \times 9]$ sí que no se ve la relación, pero en la segunda $[4 \times 20 + 1 \times 10]$ de un vistazo sabes lo que hay, que es lo que ha pedido la formadora que hagan los alumnos [I, M].
- D3.1-1.3. Está tratando de comprobar si existe una conexión entre la notación posicional y los grupos que han hecho los alumnos [E, 3].
- P2.1-1.3. Explica a los alumnos que no hay relación entre nuestro sistema numérico decimal y las técnicas de conteo que han utilizado para contar los palillos [E, 2].
 - P2.1-1.3(I)1. Para que los alumnos reflexionen sobre el valor que tienen las cifras de nuestro sistema numérico decimal [I, M].
- L3.1-1.3. Explica a los alumnos que con las agrupaciones que han hecho, con grupos de 20 y de 9, no van a ver la relación con el 8 ni con el 7 del 87, por lo que no verán la relación con el concepto de número escrito en el sistema de numeración decimal [E, 3].
 - L3.1-1.3(I)1. Para que los alumnos comprendan mejor la notación del número, lo más lógico sería hacer agrupaciones de 10, así se vería que en el 87 hay 8 grupos de 10 y 7 palillos sueltos, mientras que en el 90 hay 9 grupos de 10 [I, M].

Yo aquí estoy haciendo trampa porque estoy metiendo operaciones, nosotros ahora no estamos con las operaciones, estamos solo con el número, con la escritura del número, eso es lo que estamos trabajando, ¿no? Pero para ayudar a ver esa conexión de los palillos hacia lo simbólico-numérico, pongo, escribo eso de transición para ir copiando lo que me decís, ¿no?, porque tardo más, tardo más en dibujar los palillos, las gomitas rosas, no sé qué, podría sacar la foto de la cámara y ponerlo rápido, ¿no?, pero..., bueno, lo escribo, lo transcribo así.

C9-1.3. Indica que emplea operaciones para conectar lo manipulativo y lo simbólico-numérico.

- M19.1-1.3. Está diciendo que lo escribe en la pizarra por una cuestión de tiempo, aunque también comenta alternativas [E, 1].

Ahora, otro grupo. Vosotros dos ya estáis, que luego, luego... Ah, venga, ya que estamos aquí [dibuja una llave a la derecha de lo que ya ha escrito en la pizarra]. ¿A qué consenso... habéis llegado...?

C10-1.3. Pregunta por el consenso al que han llegado los dos grupos que han puesto en común sus agrupaciones al juntar sus palillos, incidiendo así en la tercera instrucción de la consigna.

- J3.1-1.3. Pregunta a los alumnos a qué acuerdo han llegado [E, 3].

A: Pues 7 grupos de 20...

F: Muy bien, 7 grupos de 20 [señala el 3 y el 4]. Han visto rápido y han dicho: «bien, los dos hemos agrupado, sin habernos copiado, en grupos de 20, con lo cual automáticamente tenemos 7 grupos de 20» [escribe 7×20].

C11-1.3. Explica que los 7 grupos de 20 que han hecho los alumnos provienen de la suma de los 4 grupos que tenían unos y de los 3 que tenían otros, empleando la propiedad distributiva.

- M21.1(i)-1.3. Evento implícito en el comentario [E, 1].

Transcripción: Muy bien, 7 grupos de 20 [señala al 3 y al 4].

- M21.1(i)-1.3(I)1. Le ha gustado porque los alumnos han hecho un agrupamiento y ella lo que intenta hacer ver es que es muy cómodo trabajar con agrupamientos iguales [I, M].
- D4.1-1.3. Está explorando la estrategia que han seguido los alumnos, viendo cómo de manejables son las agrupaciones que han hecho dos grupos de alumnos al juntarse para realizar la suma [E, 2].
 - D4.1-1.3(I)1. Para tratar de que los alumnos se den cuenta de las ventajas que tiene hacer siempre grupos de 10 [I, M].

A: Luego, ellos los 27 de 3×9 ...

F: Sí.

A: ... los han dividido en 2 de 10 para que se junten con los nuestros de 10.

F: ¿Y por qué no habéis hecho vosotros... separar este de 10 [señala el 10 de 1×10] en 1 de 9 y 1 de 1?

A: Porque se quedaría 1 solo y luego...

F: Bueno, pobrecillo, ¿no? No pasa nada.

A: Y porque es más fácil sumar de 10 en 10 que de 9 en 9.

A: Para ponerle la goma a 1...

F: Para ponerle la goma a 1... Bueno... Eso... Puede ser una justificación, pero tampoco muy potente... Me gusta más lo que ha dicho ella, o ella...

C12-1.3. Pregunta por qué no han separado un grupo de 10 en uno de 9 y uno de 1, a raíz de la estrategia seguida por los alumnos, y considera las diferentes respuestas que dan los estudiantes.

- J3.2-1.3. Pregunta a los alumnos por qué han elegido una estrategia [para reagrupar] y no otra, analizando lo que han hecho [E, 1].
 - J3.2-1.3(I)1. Porque pretende guiarlos para que vean cuál es la estrategia óptima, obteniéndola entre todo el grupo y no dándola ella, viendo los pros y contras de la estrategia que han planteado ellos, la cual no es la óptima [I, M].
- M25.1-1.3. Pregunta a los alumnos por qué no han hecho un grupo de 9, mostrando preferencia por la propuesta de una alumna [E, 3].
 - M25.1-1.3(I)1. Porque pretende que le expliquen por qué es más cómodo hacer grupos de 10 [I, M].
- L4.1-1.3. Mantiene un diálogo con los alumnos [E, 1].
 - L4.1-1.3(I)1. Para que los alumnos lleguen por ellos mismos a la idea de que si todos tuviésemos el mismo criterio para organizar los palillos, el conteo al unir los grupos sería más fácil; para eso surge el sistema numérico decimal, la base 10 [I, M].

A: Que es más fácil sumar de 10 en 10 que de 9 en 9.

F: ¿Por qué será más fácil sumar de 10 en 10 que de 9 en 9 para nosotros? [Hablan varios alumnos a la vez]. ¿Por qué es más fácil sumar para nosotros de 10 en 10 y no de 9 en 9? [Hablan varios alumnos a la vez]. Porque tenemos 10 dedos, por ejemplo, ¿no? Porque estamos más acostumbrados a 10, 20, 30, 40... [mueve las manos con los dedos estirados], ¿no?, como que nuestro sistema de numeración parece que...

C13-1.3. Pregunta por qué es más fácil sumar de 10 en 10 que de 9 en 9, haciendo ver que tiene relación con el sistema de numeración al que estamos acostumbrados.

- D5.1-1.3. Está preguntando a los alumnos acerca de sumar de 10 en 10 o de 9 en 9, haciéndoles ver cómo dependemos de la notación posicional [E, 3].
 - D5.1-1.3(I)1. En mi experiencia, tenemos tan asumida la notación posicional que es difícil hacer que los alumnos la entiendan realmente [I, M].
- R2.1-1.3. Está preguntando a los alumnos por grupos, tratando de llegar a la conclusión [E, 1].
 - R2.1-1.3(I)1. Para que los alumnos sinteticen y razonen el trabajo realizado y poder comprobar así si han adquirido el objetivo de la clase [I, D].
- P3.1-1.3. Está preguntando a los alumnos por qué es más fácil sumar de 10 en 10 que de 9 en 9, haciéndoles ver la relación con nuestro sistema numérico decimal [E, 3].
 - P3.1-1.3(I)1. Para que los alumnos reflexionen sobre nuestro sistema numérico decimal y las distintas agrupaciones que están haciendo para sumar los palillos [I, M].
- J4.1-1.3. Toma la estrategia dada por un alumno, la cual surge tras plantear una serie de preguntas, y continúa preguntando por esa estrategia sin dar la solución [E, 1].
 - J4.1-1.3(I)1. Para tratar de que entre todos los alumnos vayan haciendo suya la idea o estrategia que ha surgido [I, M].

A: Porque en verdad solo sumas de 1 en 1 y luego le pones un 0, entonces...

F: Solo sumas de 1 en 1, elabora eso. Estamos en clase de matemáticas, ¿qué es 1, 1...?

A: Pues por ejemplo, si tienes 30, pues 1 más 1 más 1, 3, como es 10, pues le pones el 0 y ya tienes los 30.

F: ¿3 qué?

C14-1.3. Pregunta a una alumna qué quiere decir con «sumar de 1 en 1», pidiendo que elabore la respuesta porque están en clase de matemáticas.

- M27.1-1.3. Dice a una alumna que elabore mejor la idea que está expresando [E, 1].
 - M27.1-1.3(I)1. Porque quiere que la alumna haga explícito que es más fácil y rápido sumar cuando «no hay» unidades, sino que hay un cero en las unidades; no es la regla de los ceros, porque esa es para el producto, pero es algo parecido [I, M].

A: 3 grupos de 10.

F: 3 grupos de 10, muy bien.

Evento 6-1.3: Acepta la respuesta de una alumna que dice «grupos de 10» en vez de «decenas».

- M29.1-1.3. Acepta la respuesta de la alumna de «grupos de 10» en vez de «decenas» [E, M].

3 grupos de 10, vale. [Vuelve a la pizarra a terminar lo que empezó a escribir].

A: 3 de 20, 3 de 10 y 1 de 7.

F: [Escribe, después de 7×20 , 3 10]. 3 de 10, llegasteis a romper estos [señala 3×9] en 2 de 10 más 7 sueltos, ¿no? [escribe $2 \times 10 + 7$ encima de 3×9]. Y entonces estos dos [señala 2×10] con este [señala 1×10] 3 y 7 palillos ahí sueltos [escribe, después de $7 \times 20 + 3 \times 10$, 7×1], ¿vale?

C15-1.3. Transforma los grupos planteados por los alumnos para llegar a tener 3 grupos de 10, es decir, llega a 3×10 a partir de 1×10 y de transformar 3×9 en $2 \times 10 + 7$.

No ha sido detectado por ningún formador.

Ahora, la cantidad total, ¿cuánto es? [señala el 87 y el 90].

A: 177.

F: 1, 7, 7 [escribe 177 a la izquierda del 87 y del 90]. ¿Hay aquí 1, 7, 7 por algún lado? [señala el 7 de 7×20 , al 3 de 3×10 y al 7 de 7×1]. Este [señala el 7 de 7×1] parece que hay aquí, ¿no? Pero lo otro... no me cuadra mucho todavía... Vale, otros dos grupos.

C16-1.3. Hace ver que no hay relación entre los grupos hechos y la escritura del número tras haber juntado todos los palillos de la clase, incidiendo así en la segunda y en la cuarta instrucción de la consigna.

- M32.1(i)-1.3. Evento implícito en el comentario [E, 1].

Transcripción del vídeo: 1, 7, 7 [escribe 177 a la izquierda del 87 y del 90]. ¿Hay aquí 1, 7, 7 por algún lado? [señala al 7 de 7×20 , al 3 de 3×10 y al 7 de 7×1].

- M32.1(i)-1.3(I)1. Quiere forzar que salga una relación, pero es raro que salga ahí cuando tampoco la había aquí [señala el $3 \times 20 + 3 \times 9$ y el $4 \times 20 + 1 \times 10$] [I, M].

- J5.1-1.3. Termina la sesión recapitulando lo que han trabajado, el valor posicional, haciendo ver que aún tienen que trabajar más sobre ello [E, 2].



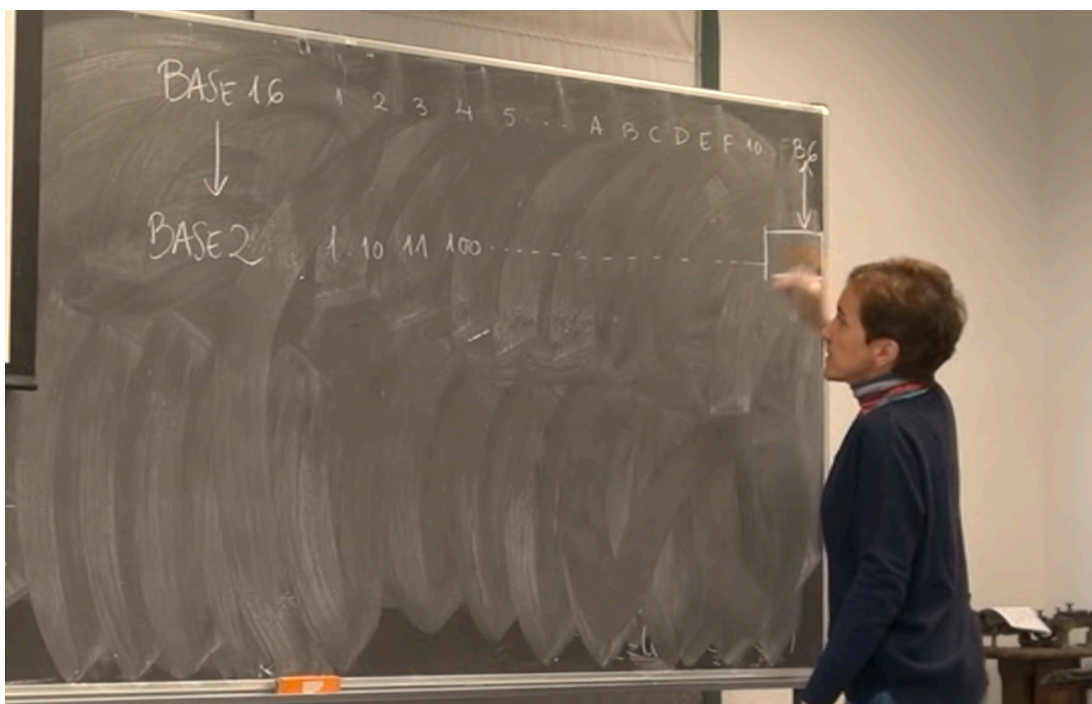
VÍDEO 2

[F = Formadora del vídeo]. [A = Alumnos].

Evento 1-2: Borra la pizarra antes de comenzar la clase.

- L1.1-2. Está borrando la pizarra [E, D]
 - L1.1-2(I)1. Para tener la pizarra limpia antes de empezar la clase [I, D].

F: Como me piden pasar de base 16 a base 2 directamente [escribe en la pizarra], pues Martín dice: «yo escribo aquí la secuencia 1, 2, 3, 4, 5..., A, B, C, D [dice 10, 11, 12, 13, señalando A, B, C, D], 14, 15 [escribiendo E, F], uno, cero [10]..., así hasta el B6», ¿vale? Y luego aquí en paralelo, voy uno [1], uno, cero [10], uno, uno [11], uno, cero, cero [100]..., hasta que pille aquí el que sea y ya está.



No he pasado por base 10, que es lo que me dice Nuria. Con lo cual, superado.

C1-2. Plantea el ejercicio a realizar: pasar de base 16 a base 2 directamente, sin pasar por base 10.

- D1.1-2. Está planteando el problema, que consiste en pasar directamente un número expresado en base 16 a un número en base 2 [E, 3].
- P1.1-2. Está planteando el problema, que consiste en pasar un número de base 16 a base 2 [E, 2].

- P1.1-2(I)1. *Debe de estar buscando el método más eficiente de hacerlo [al no tener que pasar por base 10] [I, M].*
- M4.1-2. *Plantea que no hay que pasar por base 10 [E, 2].*

C2-2. *Escribe en la pizarra la resolución propuesta por un alumno, que consiste en contar en base 16 hasta B6 y contar en base 2 y ver qué número corresponde en base 2 a B6 en base 16.*

- L2.1-2. *Está empezando a explicar una forma de hacer un cambio de base [E, 1].*
- D1.2-2. *Está escribiendo la solución que parece que ha dado un alumno, sin juzgar, consistente en escribirlo todo en las dos bases y contar en las dos bases [E, 2].*
- J1.1-2. *Explica en la pizarra cómo se resolvería el ejercicio que ha planteado siguiendo la estrategia que ha propuesto un estudiante [E, 1].*
- M4.2-2. *Está explicando cómo lo ha hecho un alumno, Martín, reproduciendo los números y luego contando en base 16 y en base 2, añadiendo más símbolos en base 16 después del 9 [E, 2].*
 - M4.2-2(I)1. *Se trata de una forma muy larga, porque fíjate que tiene B de 16 y 6 [I, M].*
 - M4.2-2(I)2. *En base 16 se necesitan 16 símbolos, el 0 y 15 más [I, M].*

¿Pero qué pasó?

A: Que es muy largo.

F: Que es muy largo. Y que hasta en su casa, teniendo semanas, ha dicho: «paso». Tenías tiempo suficiente, porque había tiempo suficiente en dos semanas a hacerlo, pero... es largo y además un coñazo, con lo cual ha dicho: «paso». Con la idea Nuria ya se hace una idea de que lo he pensado, es un procedimiento válido, pero no ha sido eficaz, ¿vale?, entonces nosotros tenemos que seguir pensando porque tendremos que buscar alguna estrategia que sea eficaz.

C3-2. *Hace ver que la primera estrategia de resolución propuesta por un alumno es válida, pero también que es larga y que no es «eficaz», por lo que hay que buscar otra estrategia.*

- L3.1-2. *Intenta hacer ver a un alumno que su propuesta de pasar de una base a otra, de base 16 a base 2, de elemento a elemento es posible, pero que sería muy largo [E, 3].*

- L3.1-2(I)1. *Ha debido de hacer antes una lluvia de preguntas para ver cómo pasar de una base a otra [I, D].*
- J1.2-2. *Indica que la estrategia planteada por el estudiante no es óptima [E, 2].*
- P2.1-2. *Explica a los alumnos que una cosa es resolver un problema y otra es resolverlo de una forma eficiente o eficaz [E, 2].*
- M6.1-2. *Dice coloquialmente que es una forma muy larga [el procedimiento del alumno], por lo que hay que buscar otra manera que sea eficaz [E, 2].*
 - M6.1-2(I)1. *Se trata del principio de economía, que en matemáticas es brutal, es decir, siempre que tienes dos estrategias tienes que buscar una que sea más económica, por comodidad, pero sobre todo porque tendrás menos errores, y trata de que los alumnos se den cuenta; en este ejercicio es muy fácil equivocarse [I, M].*
 - M6.1-2(I)2. *Creo que sí es eficaz [el procedimiento del alumno], porque se obtiene el resultado, pero no eficiente [I, M].*

Evento 2-2: Emplea un tono distendido al dirigirse a los estudiantes.

- J1.3-2. *Emplea un tono distendido al dirigirse a los estudiantes [E, D].*

[Da la palabra a una alumna].

A: ¿Se podría hacer la división?

F: ¿Qué división?

A: La de B6 entre 2. Es que no sé cómo plantearlo.

F: Ella dice: «oye, mira Nuria, cuando tú pasas de base 10 a base 2 haces grupos de 2 y divides de 2 en 2; pues ahora lo mismo, si estoy en B6 a base 2, divide entre 2». Pero aquí estoy escribiendo en base 16... [En la pizarra ha escrito B6 entre 2, con la caja]. Podríamos intentar hacerlo, pero... ¿sabemos hacerlo... o cómo va esto? ¿O mentalmente para hacerlo me vais a pasar a base 10, y hacéis la división en base 10 —que es lo que sabéis hacer—, y luego otra vez volvemos y entonces hacemos trampa porque pasamos por base 10? Si sabéis dividir un número en base 16 entre 2, si sabéis hacer esta división en base 16 —yo lo tendría que pensar, ¿eh?, así a capón no lo sé hacer, pero si lo pienso... —, si sabéis hacer eso, valdría.



Pero esto lo vamos a ver en el dossier 3, ¿eh?, multiplicación y división. Nosotros tenemos herramientas para dividir en base 10 y sabemos cómo hacer restas sucesivas y el algoritmo tradicional de la cajita que habéis ido haciendo... Podríamos abordarlo, por eso abordamos los problemas de..., el anterior, ¿no?, de pasar de base 10 a base 2. Pero el de base 16 a base 2 hay que dividir en base 16. Sumar en base 16 lo sé hacer, restar en base 16 me cuesta un poco pero lo sé hacer, multiplicar en base 16 también podría hacerlo, con lo cual dividir podría hacerlo, pero... no me atrevo a hacerlo sin manos, hoy.

C4-2. Escribe en la pizarra otra resolución propuesta por otra alumna, que consiste en dividir B6 entre 2 en base 16.

- D2.1-2. Está explorando una alternativa que da otro alumno [E, 1].
 - D2.1-2(I)1. Quiere que sean los alumnos quienes digan si creen que puede funcionar la alternativa o no [E, M].
 - D2.1-2(I)2. Sobre la alternativa que se plantea, para mí interpretar que B6 es 11 grupos de 16 y 6 grupos de 1 no es pasar por base 10, pero habrá que ver si lo es para la docente [I, M].
- M8.1-2. Busca otra manera de hacerlo, siguiendo la propuesta de un alumno, que consistiría en hacer lo mismo que cuando se pasa de base 10 a otra base, dividiendo en base 16 [E, 3].
- J2.1-2. Escribe otra estrategia dada por una alumna, sin llegar a desarrollarla, que consiste en dividir por la base [E, 2].

- J2.1-2(I)1. Trata de llegar al modo para hacer el ejercicio viendo varias estrategias propuestas por los alumnos [I, M].
- P3.1-2. Plantea una propuesta que ha hecho una alumna [E, 1].

C5-2. Hace ver que la segunda estrategia de resolución propuesta por una alumna es válida, pero también que es compleja.

- M8.2-2. Pregunta si sabrían hacer la división en base 16, haciendo ver que estaría bien hecho, pero que sería complicado [E, 3].
- L4.1-2. Está argumentando que el razonamiento de la alumna sería válido pero que en la práctica no se hace [E, 2].
- P3.2-2. Comenta que la propuesta de la alumna puede ser un método válido, así como las dificultades del mismo [E, 3].

Evento 3-2: Pregunta a los alumnos por los razonamientos que llevarían a cabo para realizar lo que se les pide.

- R1.1-2. Pregunta a los alumnos por los razonamientos que llevarían a cabo para realizar lo que se les pide [E, M].
 - R1.1-2(I)1. Para que sean los propios alumnos quienes lleguen por ellos mismos al modo de conseguir lo que se les plantea [I, D].

Evento 4-2: Posibilita que los alumnos piensen en el problema mediante pausas en su discurso.

- D3.1-2. Deja tiempo a los alumnos para que propongan formas para solucionar el problema [E, D].

Evento 5-2: Dice que hoy no va a hacer la división en base 16 «sin manos» [sin haberlo preparado previamente].

- M10.1-2. Dice que no se atreve a hacerlo «sin manos» [E, D].
 - M10.1-2(I)1. Como no sé cuál es exactamente la consigna, si es simplemente pasar el número B6 de [base] 16 a 2, no sé si se refiere a alguna restricción [I, M].

Evento 6-2: Menciona el contenido que estudiarán más adelante en la asignatura.

- J3.1-2. Indica contenido que verán más adelante [E, D].

Otra forma.

Evento 7-2: Pide a los alumnos otra estrategia para resolver el ejercicio.

- M11.1-2. Intenta que le digan otra manera [E, M].
 - M11.1-2(I)1. Parece que se trata de un ejercicio que ha mandado previamente para casa y está esperando a que alguien le diga que 16 es una potencia de 2 para desarrollar ese procedimiento, puesto que ya han salido dos formas de resolverlo y aún «no le ha gustado» ninguna [I, M].
- L5.1-2. Continúa con la lluvia de preguntas [E, M].
 - L5.1-2(I)1. Para ver si los alumnos se van aproximando cada vez más al procedimiento genérico [I, M].
- J3.2-2. Sigue con la puesta en común [de estrategias], elaborando a partir de lo que van proponiendo los alumnos, sin llegar a resolver aún el problema [E, M].
 - J3.2-2(I)1. Porque pretende que todos los alumnos se involucren en la resolución del problema [I, D].
 - J3.2-2(I)2. En matemáticas está bien dejar problemas en el aire y hacer que los alumnos piensen sobre ellos [I, M].
 - J3.2-2(I)3. Esta asignatura trata mucho de ver por qué funcionan las recetas y de que los alumnos puedan hacer los ejercicios sin necesidad de emplearlas, muchas de las cuales ya las han olvidado [I, M].
- P4.1-2. Intenta que los alumnos descubran el método para pasar de base 16 a base 2 [E, M].

A: Fijándote en que 16 es 2^4 .

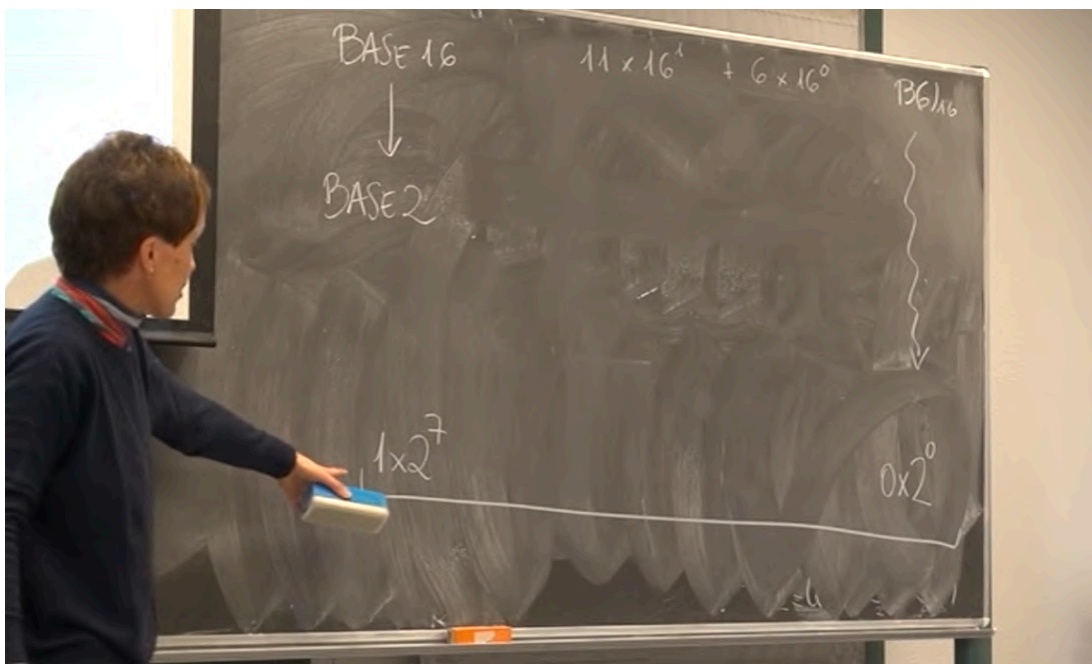
F: Fijándome en que 16 es 2^4 . Me lo voy a apuntar aquí [borra la pizarra y lo escribe].

A: Yo lo hice así, pero luego algo no me cuadraba.

F: Muy bien, vale.

A: Luego hice, 11...

F: Venga, vamos a poner el punto de partida, ¿no? El punto de partida es que tenemos 11×16^1 , ¿no?, más 6×16^0 . Este es mi B6 en base 16. Y yo quiero llegar aquí a... Me acuerdo de que empezaba en 1×2^7 y acababa en 0×2^0 , ¿vale?



Entonces yo quiero pasar de ahí [señala la parte superior de la pizarra] a aquí [señala la parte inferior]. Si lo consigo, ya lo tengo en base 2, ¿no? Ya solo cojo los coeficientes de las potencias de 2 y ya lo tengo.

Evento 8-2: Dice que va a apuntar en la pizarra la idea de un alumno.

- J4.1-2. Dice que va a apuntar la idea de un alumno [para resolver el ejercicio] [E, D].
 - J4.1-2(I)1. Como apunta la idea, esta debe de ser buena y el alumno interpretará que es importante [I, D].

C6-2. Plantea en la pizarra otra resolución propuesta por otro alumno, que consiste en pasar de base 16 a base 2 fijándose en que 16 es 2^4 , escribiendo la expresión de partida, que sería la expresión polinomial de B6 en base 16, así como el inicio y el final de la expresión polinomial en base 2 a la que hay que llegar.

- M13.1-2. Escribe el comienzo del desarrollo: escribe 11, etc., y al final escribe la primera cifra del número en base 2, la cual acompaña a 2^7 [E, 1].
 - M13.1-2(I)1. No sé si ya lo ha calculado y está viendo cómo lo han hecho los alumnos o si lo ha calculado ahora... Parece que no sabe las demás cifras... Al no saber el enunciado del ejercicio, no tengo más datos [I, M].
 - M13.1-2(I)2. Si empieza en 2^7 , tiene ocho cifras en base 2 [I, M].

- D4.1-2. *Empieza a desarrollar una idea de resolución que ha dado un alumno, permitiendo el empleo de la estrategia consistente en interpretar en base 16 la expresión dada para resolver el problema [E, 1].*
 - D4.1-2(I)1. *Con el inicio del desarrollo de la resolución trata de que los alumnos empiecen a ver por dónde van las cosas [I, D].*
- R2.1-2. *Organiza visualmente la información a los niños [a los futuros maestros] [E, 1].*
 - R2.1-2(I)1. *La esquematización, atendiendo al contenido o concepto que se trabaje, es la forma más adecuada para que los alumnos se organicen y puedan llegar a entender lo que se trabaje [I, D].*
- J4.2-2. *Coge de nuevo la idea de un alumno y elabora en la pizarra, escribiendo grande, a partir de ella, añadiendo poco a poco los datos para resolver el problema y dejando tiempo para pensar, involucrando a ese alumno [E, 1].*
 - J4.2-2(I)1. *Con esa forma de proceder, los alumnos lo ven más cercano, se ven involucrados en las ideas de sus compañeros y van viendo si funcionan las estrategias [I, M].*
- P4.2-2. *Lleva a cabo los pasos de la resolución sin hacer que sean los alumnos quienes lo resuelvan [E, 1].*
 - P4.2-2(I)1. *Quizá porque han trabajado el tema anteriormente [I, D].*
- L6.1-2. *Escribe en la pizarra el argumento que ha dado un alumno, descomponer 16 en potencias de 2, transformándolo y desarrollándolo más que los argumentos dados antes por otros estudiantes [E, 2].*
 - L6.1-2(I)1. *Porque le puede valer para que los alumnos vean cómo pasar fácilmente de base 16 a base 2 [I, M].*

Entonces, Pablo dice: «cambia este 16», ¿no, Pablo?

A: Sí.

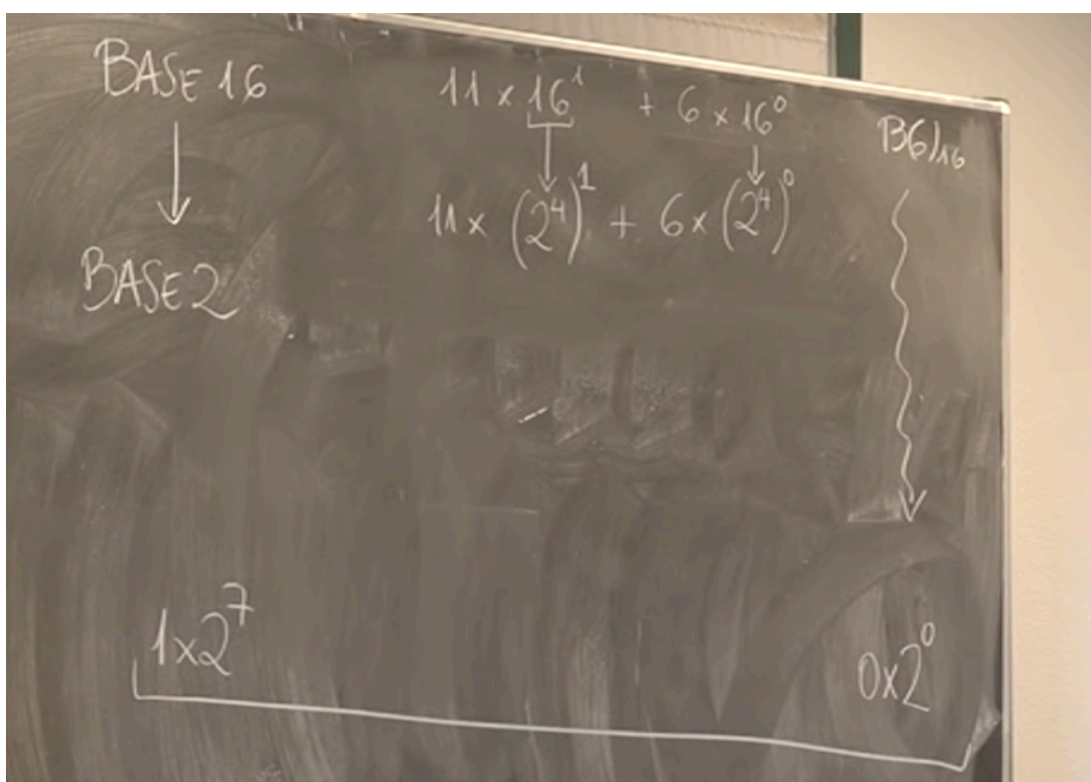
F: Este 16 ponlo como $(2^4)^1$ y este 16 ponlo como $(2^4)^0$. ¿Vale? Yo tengo una expresión polinomial en base 16, quiero llegar a una expresión polinomial en base 2, y él me dice: «yo veo claro el cambio, 16 es 2^4 , cada vez que veas un 16 ponlo como 2^4 ».

C7-2. Transforma 16^1 y 16^0 en potencias de 2, incidiendo en que para pasar de base 16 a base 2 hay que fijarse en que 16 es 2^4 .

- L6.2-2. *Descompone el 16 en potencias de 2 [E, 3].*

- M15.1-2. Indica que hay que cambiar las bases, introduciendo además por primera vez el concepto de expresión polinomial [E, 2].
 - M15.1-2(I)1. Un número en una base es simplemente una descomposición en un polinomio en función de las potencias de una base [I, M].
 - M15.1-2(I)2. Los coeficientes en base 2 solo pueden ser 0 y 1 y aquí [en base 16] son del 0 al 15; por ello, hay que cambiar las bases [de las potencias], pero también los coeficientes [I, M].

Vale, y entonces resulta que aquí tengo 11 grupos de esto y aquí tengo 6 de estos.
¿El 11 y el 6... los puedo dejar?



A: No, los pasas a base 2.

F: Los paso a base 2.

Evento 9-2. Pregunta si el 11 y el 6 hay que pasarlos a base 2.

- M17.1-2. Dice que [el 11 y el 6] hay que pasarlos a base 2 [E, M].
 - M17.1-2(I)1. No sé si el hecho de pasarlos a base 2 es iniciativa de ella o del alumno [I, D].

¿Sé pasar 11 a base 2?

A: Sí.

- F: Vale, vamos a escribir 11 en base 2.
- A: 1, 0, 1, 1.
- F: 1×2^3 , ¿no?
- A: Sí.
- F: Más...
- A: Cero.
- F: 0×2^2 . De momento llevo ocho. Más...
- A: Uno.
- F: 1×2^1 . Ya llevo 10...
- A: Más uno.
- F: Más 1×2^0 . Ahí ya tengo 11, ¿vale? Esta es una manera de escribir 11. ¿Cómo? Como potencias de 2. Expresión polinomial del 11 en base 2, como potencias de 2, ¿vale?

C8-2. Escribe la expresión polinomial de 11 en base 2 a partir de los coeficientes que un alumno va diciendo.

- R3.1-2. Escribe lo que un alumno le va diciendo en voz alta cuando escribe el 11 [su desarrollo], siendo ella quien termina [E, 1].
 - R3.1-2(I)1. Porque detecta que le está costando trabajo al alumno [I, D].
- D5.1-2. Traduce la expresión dada en una expresión con potencias de 2, en una expresión polinomial en notación binaria, desarrollando ella la parte algebraica siguiendo la idea planteada por un alumno [E, 3].
 - D5.1-2(I)1. Pretende escribir de un modo más preciso lo que el alumno dice, quizá porque este tenga dificultades o lagunas a la hora de realizar la manipulación algebraica [I, M].
- M19.1-2. Llega a 1, 0, 1, 1 siguiendo las indicaciones del alumno, escribiendo también el 0×2^2 [E, 2].
 - M19.1-2(I)1. Si no está..., si es un cero, yo normalmente no lo pongo; cuando vas a descomponer, no lo pones y ya está [I, M].

Y esto va multiplicado... 2 elevado a la 4 y luego lo elevo a la 1, ¿cuánto me queda...? 2^4 es $2 \times 2 \times 2 \times 2$ y luego eso lo elevo a la 1, es decir, que lo copio una vez, o sea que me queda...

A: 2^4 .

F: 2^4 .

C9-2. Explica cómo se realiza la potencia de una potencia, haciendo ver que $(2^4)^1$ es $2 \times 2 \times 2 \times 2$ y que, como está elevado a 1, se copia una sola vez.

- M20.1-2. Dice que $16 [2^4]$ lo eleva a la 1 [E, 1].
 - M20.1-2(I)1. Queda muy matemático decir 16 a la 1, ya que en la vida normalmente decimos 16, pero ella quiere forzar que eso sea una escritura polinómica y entonces quiere que aparezca elevado a 1; lo mismo ocurre cuando escribe 16^0 . Es una elegancia que solo la vemos desde el punto de vista de las matemáticas y los alumnos se pueden preguntar para qué ponerlo así [I, M].

Más... El 6, ¿lo deajo?

A: No.

F: No. ¿Cómo escribo 6 en base 2?

A: 1×2^2 .

F: 1×2^2 , que son 4.

A: 1×2^1 .

F: 1×2^1 ... Y 0×2^0 [lo va escribiendo todo en la pizarra]. Ahí pone 6, una manera más chula, ¿no?, de poner 6 como potencias de 2, ¿no?, como un polinomio con potencias de 2.

C10-2. Escribe la expresión polinomial de 6 en base 2 a partir de los coeficientes que un alumno va diciendo.

- M21.1-2. Escribe 1, 1, 0, diciendo que ha escrito 6 de una manera más chula [E, 1].
 - M21.1-2(I)1. Es muy chula desde el punto de vista matemático, porque quiere que esto se vea como 1, 1, 0, pero es verdad que esto son elegancias [I, M].
- L7.1-2. Está escribiendo y explicando la conversión con ayuda de los alumnos [E, 1].
 - L7.1-2(I)1. Aunque esté haciendo creer a los alumnos que están dando ellos la respuesta, lo está haciendo como ella quiere [E, D].
- J5.1-2. Desarrolla los argumentos algebraicos preguntando a los alumnos, aunque a veces los hace ella, y haciendo pausas [E, 2].
 - J5.1-2(I)1. Pretende que los alumnos piensen y realicen un trabajo autónomo, lleguen o no a la solución [I, M].

- J5.1-2(I)2. *A este tipo de alumnado le cuesta mucho desarrollar argumentos algebraicos, por lo que es importante ir preguntando y hacer pausas [I, M].*
- P5.1-2. *Está realizando la transformación aritmética para resolver el problema, llevando a cabo todos los pasos despacio y justificando cada uno de ellos [E, 2].*
- D7.1-2. *Sigue haciendo la cuenta, desarrollando la parte algebraica, interviniendo más que al principio del vídeo [E, 2].*
 - D7.1-2(I)1. *En realidad está trabajando la aritmética, ya que no hay letras, pero con un componente algebraico fuerte [I, M].*
 - D7.1-2(I)2. *La formadora puede que sea consciente de que muchos alumnos probablemente no están comprendiendo el desarrollo algebraico, pues seguramente les cuesta seguir esta parte algebraica, pero sigue con el ejercicio, ya que hay que acabarlo [I, M].*

Vale, y luego estaba por... Y ahora tengo $(2^4)^0$. ¿Eso qué es?

A: Uno.

F: Uno. ¿Y si lo quiero poner como potencias de 2?

A: 2^0 .

F: 2^0 , muy bien. 2^0 [lo escribe en la pizarra].

C11-2. *Hace ver, mediante preguntas a los alumnos, que $(2^4)^0$ es 1 y que en base 2 es 2^0 .*

No ha sido detectado por ningún formador.

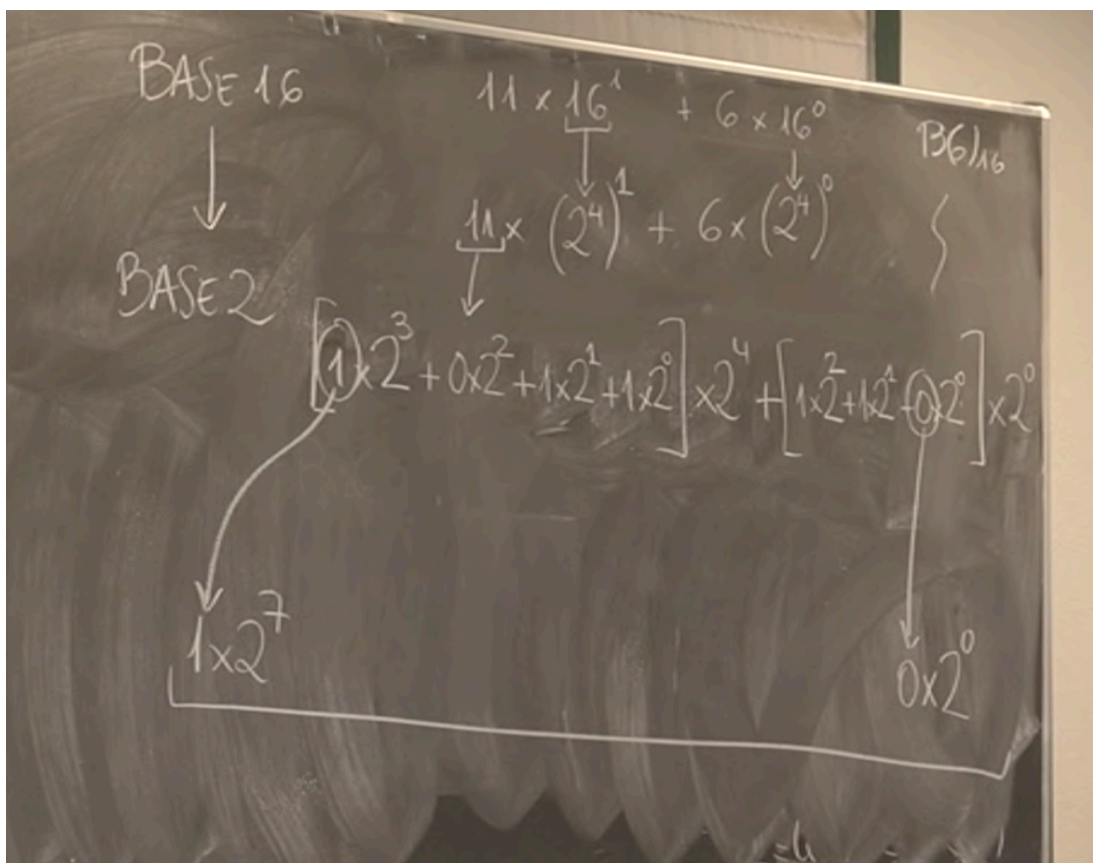
Mira qué contenta estoy, porque $2^0 \times 2^0$ es 2^0 y el coeficiente es 0, que es este. Y $2^4 \times 2^3$ es 2^7 y el coeficiente es 1, que es este. Pues como que ya casi lo tengo, ¿no? ¿Sí o no?

A: Sí...

C12-2. *Establece una correspondencia entre el último coeficiente del desarrollo polinómico que está haciendo y el del último de la expresión polinómica final del número en base 2, así como entre el primer coeficiente de ambas expresiones.*

- M24.1-2. *Dice que está contenta por encontrar una conexión entre el 0 [coeficiente de 2^0 de la parte de arriba] y el 0 final del resultado, así como entre el 1 [coeficiente de 2^3 de la parte de arriba] y el 1 inicial del resultado [E, 3].*

- M24.1-2(I)1. Está contenta porque como matemáticos nos ponemos contentos al ver esto [la conexión que ha aparecido] [I, M].
- M24.1-2(I)2. Sigo sin saber si es que esta información ya estaba en el ejercicio. Debe de ser que sí, que el ejercicio en algún momento decía que el resultado empezaba por 1 y acababa por 0 [I, M].
- R4.1-2. Da a los alumnos la introducción para llegar a eso [1×2^7 y 0×2^0], dejando que continúen ellos [E, 1].



F: Vale, y ahora... Venga, ¿cuál será el coeficiente...? Venga, vamos a poner aquí 2^6 , paso a la siguiente varilla del ábaco, ¿eh? ¿Cuál será el coeficiente de 2^6 ?

A: Cero.

C13-2. Establece una correspondencia entre las varillas del ábaco y la escritura numérica o potencias en base 2.

- P6.1-2. Relaciona en una ocasión el desarrollo aritmético con el ábaco [E, 3].
 - P6.1-2(I)1. Porque habrán trabajado con el ábaco anteriormente [I, D].
- M30.1-2. Menciona en una ocasión el recurso del ábaco [E, 2].
- J7.1-2. Relaciona en dos ocasiones la teoría con algo manipulativo, con algo que pueden visualizar y con lo que pueden trabajar, como son las varillas [del ábaco vertical] [E, 2].

Evento 10-2: Deja un espacio para un coeficiente entre 1×2^7 y 2^6 .

- M25.1-2. *Deja un espacio en la escritura [E, M].*
 - M25.1-2(I)1. *Porque está esperando un coeficiente en el espacio [I, M].*

F: Cero, porque ¿cómo consigo yo 2^6 ? $2^4 \times 2^2$, ¿no? 2^4 es $2 \times 2 \times 2 \times 2$, 2^2 es 2×2 , ya tengo ahí los seis doses, ¿vale?, que está aquí, y el coeficiente cero. ¿Por aquí puedo llegar a 2^6 ?

A: No.

F: No, pues ala. 0×2^6 . Genial, porque era lo que me había salido antes.

Evento 11-2: Dice que el resultado obtenido, 0×2^6 , es el que habían alcanzado anteriormente.

- M27.1-2. *Dice que era lo que le había salido antes [E, M].*
 - M27.1-2(I)1. *Porque debe de ser que la escritura la tienen [I, M].*

Ahora, más... Siguiente varilla del ábaco, 2^5 . ¿Dónde consigo yo 2^5 ? Aquí [señala el corchete de la derecha] como mucho llego a 2^2 , me olvido de esto. $2^4 \times 2^1$ [señalando el corchete de la izquierda] es 2^5 , ¿no?

A: Sí.

F: Vale, ¿y qué coeficiente lleva?

A: 1.

F: 1. ¿Y era el qué tenía que llevar?

A: Sí.

F: Sí, vamos bien. Y ahora, 2^4 , ¿cómo consigo 2^4 ?

A: Con 2^0 ...

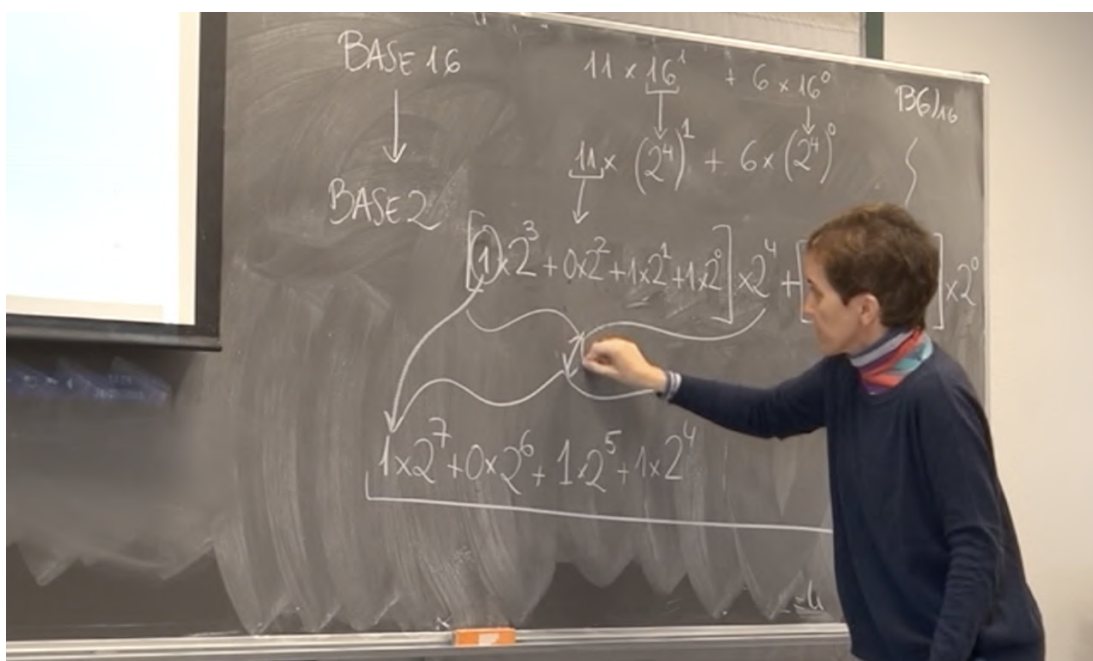
F: $2^4 \times 2^0$, ¿no? Tengo aquí cuatro copias del 2 y aquí ninguna, pues tengo cuatro copias del 2 multiplicándose por sí mismo, y el coeficiente 1. 1×2^4 [lo escribe en la pizarra]. Oye, mira, todo esto se ha convertido en esto. Lo veis, ¿no?

C14-2. Explica a los alumnos cómo multiplicar potencias.

- M26.1-2. *Recuerda a los alumnos que al multiplicar potencias de la misma base se suman los exponentes [E, 3].*

C15-2. Desarrolla la expresión $[1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0] \times 2^4$ para llegar a la expresión $1 \times 2^7 + 0 \times 2^6 + 1 \times 2^5 + 1 \times 2^4$, haciendo ver que son equivalentes y empleando la propiedad distributiva.

- M28.1-2. Está explicando los cálculos que está haciendo, señalando en la pizarra de dónde sale la escritura polinómica en función de las potencias de 2 que han obtenido [E, 2].
 - M28.1-2(I)1. Se trata de una manera bastante matemática de usar la pizarra [I, M].
 - M28.1-2(I)2. Es un ejercicio que está muy medido para obtener la escritura polinómica, aunque sea un poquito artificial con estos ceros ahí $[0 \times 2^6]$, porque cuando yo lo hago, eso no saldría, pero es verdad que hay que mantener el cero si luego quiero pasar de ahí directamente a la escritura posicional [I, M].



¿Qué es lo que he hecho? Propiedad distributiva. Voy multiplicando el 2^4 por cada uno de los sumandos, ¿vale? Muy bien.

C16-2. Indica que ha utilizado la propiedad distributiva para llegar a la expresión obtenida.

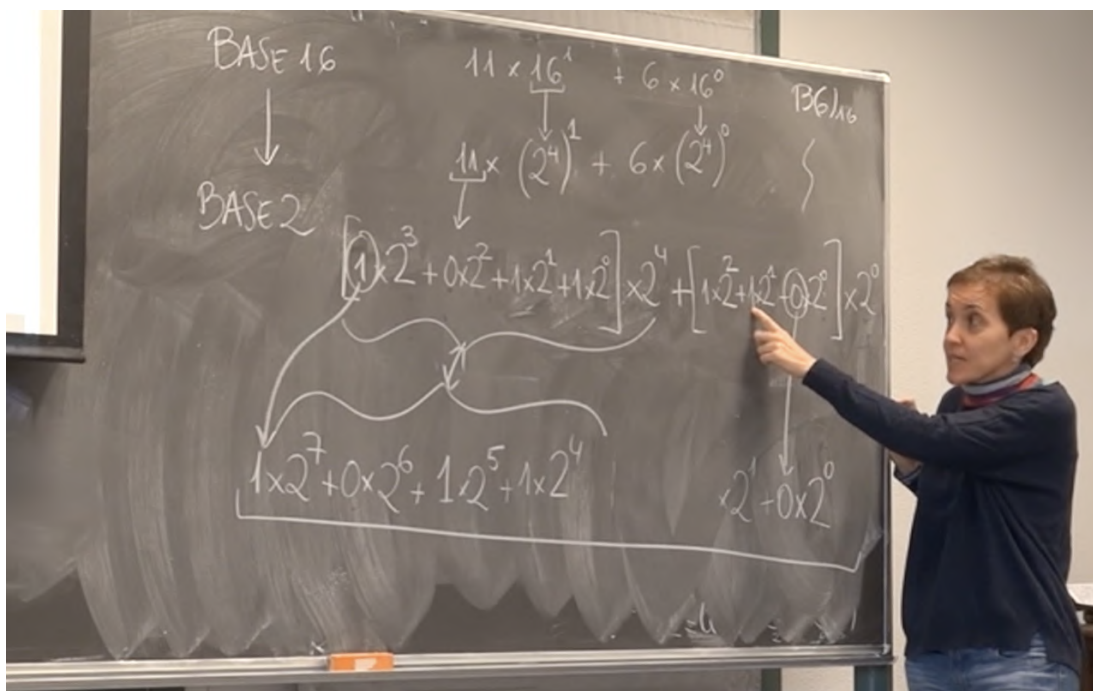
- M28.2-2. Dice el nombre de una propiedad, que es la distributiva [E, 3].
- R5.1-2. Recuerda a los alumnos la propiedad que ha usado [E, 2].
 - R5.1-2(I)1. Es bueno recordarlo porque son conceptos que tienen los alumnos, pero que muchas veces se les escapan [I, M].
- P7.1-2. Relaciona el procedimiento de resolución con la propiedad distributiva [E, 3].
 - P7.1-2(I)1. Porque habrán estudiado antes la propiedad [I, D].

- J6.1-2. Acelera la explicación y la relaciona con la teoría, con las propiedades que va usando [E, 2].

Y ahora, tiro por aquí, voy desde aquí [señala el 2^0 de la parte inferior derecha de la pizarra]. 2^0 , muy bien. Siguiente varilla del ábaco, 2^1 . ¿Qué coeficiente tiene 2^1 ?

A: 1.

F: 1, que está aquí [lo señala], ¿vale?



Porque sería $2^1 \times 2^0$, que es 2^1 , y lleva un 1 delante, un 1 [lo escribe abajo]. Voy bien. Y ahora, $2^0 \times 2^2$, 2^2 [lo escribe abajo], va con un 1 [lo escribe abajo]. O sea que esto que tengo aquí se convierte en esto que tengo aquí.

C17-2. Desarrolla la expresión $[1 x 2^2 + 1 x 2^1 + 0 x 2^0] x 2^0$ para llegar a la expresión $1 x 2^2 + 1 x 2^1 + 0 x 2^0$, haciendo ver que son equivalentes y empleando la propiedad distributiva.

No ha sido detectado por ningún formador.

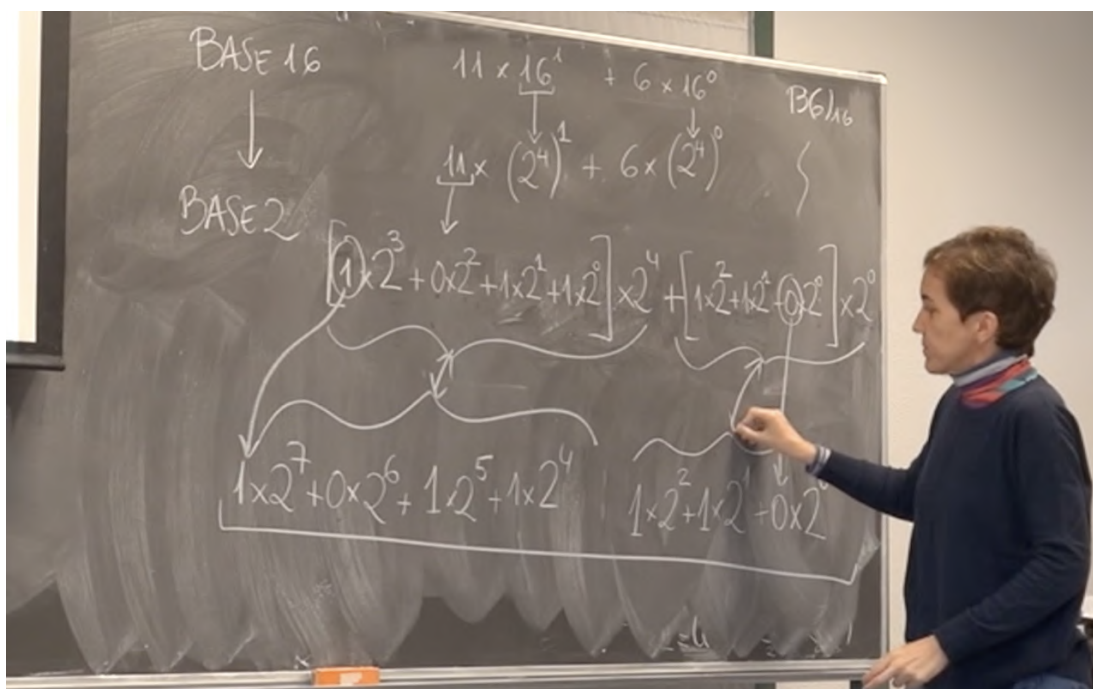
Evento 12-2: Señala en la pizarra lo que va escribiendo, preguntando a los alumnos sobre lo que señala.

- L8.1-2. Va preguntando a los alumnos cuando va señalando en la pizarra lo que escribe [E, D].

- L8.1-2(I)1. Es una técnica bastante habitual de cualquier profesor de matemáticas que escribe en la pizarra, ir señalando en la pizarra y buscar la complicidad de los alumnos, ir preguntándoles [I, M].
- L8.1-2(I)2. En el fondo escribe lo que quiere escribir [I, D].

Evento 13-2: Ha dejado un espacio en la pizarra entre 1×2^4 y 1×2^2 .

- M29.1-2. Deja un hueco [después de 1×2^4] [E, M].
 - M29.1-2(I)1. Porque ha previsto que ahí va a haber un 2^3 , que no hay en ningún lado, pero que tiene que estar, tiene que reservar el hueco [I, M].



Y ahora, Pablo, ¿qué te pasó?

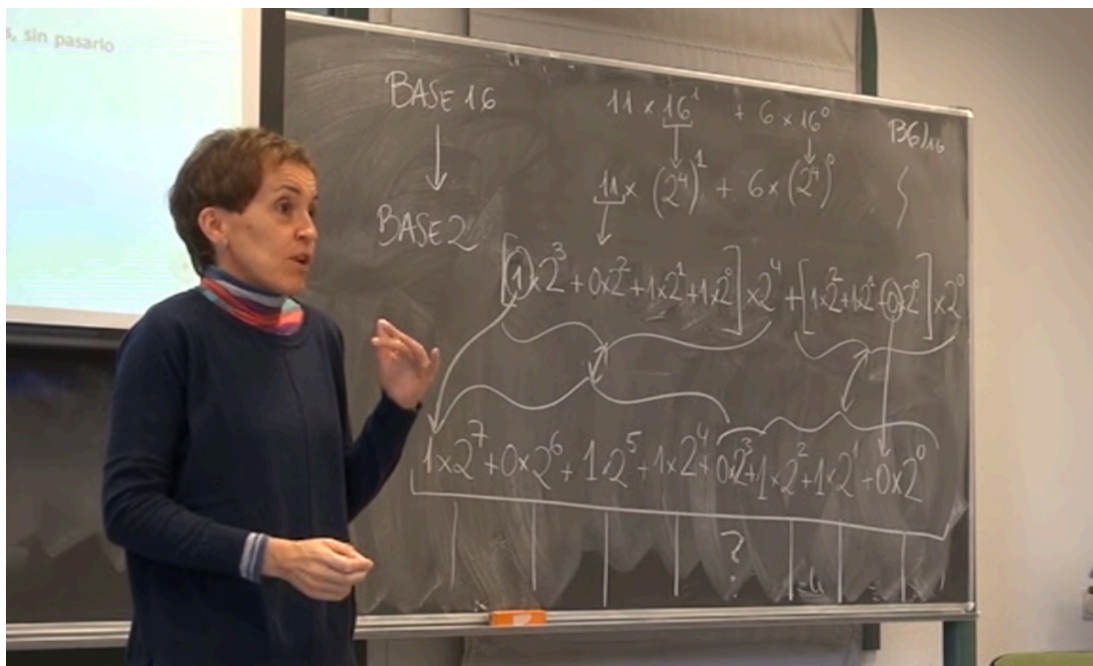
- A: Que como... Que claro, los iba a juntar, pero dije: «me falta el 2^3 ».
- F: Me falta el 2^3 . Pablo dice: «varilla del ábaco del $2^7, 2^6, 2^5, 2^4$, ¡uy!, $2^2, 2^1, 2^0$ ». «¡Uy!», dice Pablo [y dibuja una interrogación en la posición del 2^3].
- A: Pues si no hay, un cero.
- F: Pues se pone el 0, ya está.

C18-2. Pregunta a un alumno qué dificultad tuvo al resolver el ejercicio a través del procedimiento planteado en relación con el valor de la posición del 2^3 , haciendo ver que, si no hay un valor para el 2^3 , se pone un 0.

- P7.2-2. Pregunta a un alumno qué problema le ha surgido al realizar este procedimiento [E, 1].

- D8.1-2. *Pregunta al alumno que propuso la estrategia de resolución del ejercicio acerca del problema que tuvo con el 2^3 [E, 2].*
 - D8.1-2(I)1. *Para que el alumno trate de interpretar la expresión a la que han llegado y diga si ya ha sabido resolverlo [I, M].*
- J6.2-2. *Pregunta a un alumno qué problema tuvo con la posición del 2^3 [E, 2].*

Lo pongo aquí: «+ 0×2^3 », y esto lo englobo aquí.



¿Qué es lo que pasa? Que escribo el 6 de una forma muy especial. Yo escribo el 6..., acordaos que esto era mi 6 [señala $1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0$], ¿eh?, esto era el 6, que es este 6 [señala el de un nivel anterior, más arriba en la pizarra], ¿vale? Yo he escrito el 6 como $1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0$, pero también puedo escribir el 6... $0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0$. No es lo estándar, porque como los ceros ahí no aportan mucho, pues no es lo estándar, pero si no me quiero olvidar de una de las varillas y no quiero tener un problema, como tenía Pablo, pues yo añadido ahí para escribir el 6 de otra forma, ¿vale?

C19-2. Hacer ver que el número 6 se puede escribir como $1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0$, pero también como $0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0$ si se quiere indicar la ausencia de grupos de 2^3 .

- P8.1-2. *Explica a los alumnos cómo se resuelve que en este cambio de base no aparezca una determinada potencia [E, 2].*

- P8.1-2(I)1. *Anticiparnos y explicar a los alumnos problemas frecuentes que pueden surgir es algo que los profesores de matemáticas solemos hacer mucho [I, M].*

Entonces, moraleja que cuentan los *youtubers*, por ejemplo David Calle, dice: «vamos a pasar de base 16 a base 2, ¿qué se hace chavales? Mirad, ¿veis este 11 que está aquí? [señala el de arriba de la pizarra], pues escribís este 11 en base 2: 1, 0, 1, 1 [señala los coeficientes de la expresión polinómica de la parte inferior de la pizarra]; ¿veis este 6 que está aquí? [señala el de arriba de la pizarra], pues lo escribís en base 2, pero cuidadín chavales, que hay que poner cuatro, ¿por qué?, porque 16 es 2^4 ». Y entonces dice: «vamos a escribir 6 en base 2 con cuatro: 0, 1, 1, 0». Y dice: «y ahora lo juntáis, fin».

C20-2. Explica la receta que podría dar un youtuber como David Calle para pasar de B6 en base 16 a base 2, que consistiría en escribir el 11 de 11×16^1 y el 6 del 6×16^0 en base 2, ambos con cuatro dígitos al ser 16 igual a 2^4 , y juntarlo.

- M31.1-2. *Explica la regla general que daría un youtuber para resolver el ejercicio de una manera más directa [E, 2].*
- L9.1-2. *Está dando a los alumnos el truco: cada vez que haya que pasar de base 16 a base 2, basta con descomponer el número en potencias de 16, pasar el primer número a base 2, y los primeros 4 dígitos serán los primeros 4 dígitos del número, y los últimos 4 serán los últimos 4 del número, puesto que 16 es 2^4 [E, 3].*
 - L9.1-2(I)1. *Ese argumento que ella intenta trasladar posiblemente se quede en el algoritmo que pueda aprender el alumno para hacerlo rápido porque no van a entender lo que subyace detrás de ese paso rápido de la base 16 a la base 2 [I, M].*
- D9.1-2. *Ahora está interpretando la receta que podría dar un youtuber como David Calle para pasar directamente de base 16 a base 2 [E, 2].*
 - D9.1-2(I)1. *Para que los alumnos entiendan de dónde saldría dicha receta [I, D].*
- J7.2-2. *Da una receta [para resolver el ejercicio] que plantearía un youtuber [David Calle] [E, 2].*
- P9.1-2. *Menciona a un personaje [David Calle] conocido por los alumnos [E, 1].*
 - P9.1-2(I)1. *Para motivar a los alumnos y captar su atención [I, D].*
- R6.1-2. *Acaba de resumir a los alumnos de forma verbal todo el proceso que han seguido, en forma de síntesis [E, 1].*

A mí no me vale porque yo no soy David Calle, yo no estoy de *youtuber*, *influencer*, superfamosa ayudando a los chavales a aprobar exámenes, que es un trabajo muy digno y que está bien, y además el tío es un *crack*, muy suelto, lo hace muy bien; yo estoy formando maestros, entonces tenéis que entender cómo hemos pasado de aquí [señala la parte superior de la pizarra] a aquí [señala la parte inferior de la pizarra] a través de esto [señala la parte media de la pizarra].

C21-2. Hace ver que a ella no le vale la receta porque los maestros tienen que entender el proceso para transformar un número de una base a otra.

- L10.1-2. Dice que no le vale [la receta] [E, 1].
- P10.1-2. Indica que a ella no le valdría el método sin justificación que podría dar cierta persona relevante en el mundo de las matemáticas de los alumnos [E, 2].
 - P10.1-2(I)1. Porque quiere que los alumnos no caigan en las «recetas», sino en la justificación de los resultados, que profundicen en sus conocimientos de matemáticas, no solo en cómo se hacen las cosas, sino en por qué se hacen así [I, M].
- M33.1-2. Dice que las reglas generales, si no se entienden, no valen, ya que está formando a maestros, haciendo ver que hay que saber cómo o por qué funciona la regla [E, 3].
 - M33.1-2(I)1. Más allá de formar a maestros, es una consideración que tendría que estar en matemáticas en todos los órdenes, no solo en los maestros; en los maestros, desde luego, todavía más [I, M].
- J7.3-2. Indica que un maestro tiene que aprender por qué funciona la receta [para resolver el ejercicio] [E, 3].
- D10.1-2. Está tratando de que los alumnos entiendan la diferencia entre lo que es una receta, que aplican mecánicamente, y lo que es entender de dónde viene esa receta [E, 2].
 - D10.1-2(I)1. Entender de dónde sale la receta es un trabajo muy importante y complicado a la vez [E, M].

Entonces, la pregunta es: ¿se puede pasar de base 16 a base 2 sin pasar por base 10? Sí. Lo acabamos de hacer, ¿no? Es que me miráis con una cara... ¿Y por qué se puede?

C22-2. Pregunta si se puede pasar de base 16 a base 2 sin pasar por base 10 y por qué se puede.

- M34.1-2. *Plantea una pregunta a los alumnos [E, 1].*

¿Qué pasa si yo esto [el ejercicio] os lo doy en base 15 y, en vez de en base 16, todo el problema es en base 15?

A: Que sería $2^4 + 2^0$.

F: ¿ $2^4 + 2^0$ es 15?

A: O sea, no..., perdón. $2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0$.

F: Vale, y entonces tendría que ir haciendo todas las distributivas, todo el follón, ahí. ¿Y David Calle me podría dar el algoritmo...? Escribes, imaginaos el mismo número, ¿eh?, B6, en vez de en base 16, en base 15. ¿David Calle me puede decir...? Aquí tengo el 15, ¿no?, aquí tengo el 15 [los escribe encima de los 16], y David Calle me dice: «escribe esto [señala el 11] en base 2, escribe esto [señala el 6] en base 2, con tres y medio dígitos o cuatro dígitos o... tres dígitos, y lo pones junto. ¿Valdría ese algoritmo?

A: No.

F: No. ¿Vale?

C23-2. *Plantea una variación en el ejercicio que consiste en partir de la base 15 para llegar a la base 2, incidiendo en que no habría un algoritmo para pasar directamente de una base a la otra.*

- P11.1-2. *Está replanteando el problema haciendo un cambio en el mismo [E, 1].*
 - P11.1-2(I)1. *Para que los alumnos reflexionen sobre si el problema se podría resolver del mismo modo tras el cambio [I, M].*
- L15.1(i)-2. *Evento implícito en el comentario [E, 1].*

Transcripción del vídeo: ¿Qué pasa si yo esto [el ejercicio] os lo doy en base 15 y, en vez de en base 16, todo el problema es en base 15?

- L15.1(i)-2(I)1. *Intenta hacer ver a los alumnos que esa técnica o procedimiento no vale para pasar cualquier número en cualquier base a base 2, sino que solamente sirve para pasar números en bases que sean potencias de 2 a base 2 [I, M].*
- M36.1(i)-2. *Evento implícito en el comentario [E, 1].*

Transcripción del vídeo: ¿Y David Calle me podría dar el algoritmo...? [Para pasar de base 15 a base 2].

 - M36.1(i)-2(I)1. *Quiere que le digan que el algoritmo funciona porque 16 es 2^4 ; con la otra base, hay que hacer distributivas... y no hay un algoritmo [I, M].*

- D11.1-2. *Pregunta a los alumnos si se podría aplicar la receta para pasar directamente de base 16 a base 2 si lo que se quisiera fuera pasar de base 15 a base 2, incidiendo en que no se podría [E, 3].*
 - D11.1-2(I)1. *Entender qué es lo que se está haciendo cuando se emplea una receta es uno de los valores más importantes, ya que si no se entiende, no se sabe si se puede aplicar a un caso diferente y es posible que se use mal, lo cual es un error común [de los alumnos] [I, M].*
- J8.1-2. *Plantea una pregunta sobre el algoritmo, sobre la receta vista [para pasar de base 16 a base 2] [E, 1].*
 - J8.1-2(I)1. *Para hacer ver a los estudiantes que entender el proceso es más importante que saber la receta y que la receta no sirve en todos los casos [I, M].*

O sea, que poder se puede pasar, vas con paciencia escribiendo cada una de las expresiones que aparecen, pero un paso directo solo se puede cuando una base es potencia de la otra base, que es lo que hemos visto con 16, que es potencia de 2, que es 2^4 .

C24-2. Hace explícito que solamente se puede pasar directamente de una base a otra cuando una base es potencia de la otra, como de base 16 a base 2, ya que 16 es 2^4 .

- M37.1-2. *Acaba de decir eso [E, 1].*
- L17.1-2. *Concluye diciendo que este procedimiento solo vale cuando uno pasa de una base a otra siempre y cuando la primera es potencia de la otra [E, 3].*
- P12.1-2. *Está justificando por qué las «recetas» solo son válidas en determinados casos, por qué hay que profundizar en los métodos de cambio de base [E, 1].*

Evento 14-2: Eleva el volumen de la voz cuando dice «potencia».

- L17.2-2. *Aumenta el tono de voz [E, D].*
 - L17.2-2(I)1. *Para dejar claro que, de toda su argumentación, lo realmente importante es lo que acaba de decir [I, D].*

Evento 15-2: Dedicar 13 minutos a la realización de un solo ejercicio.

- L18.1-2. *Lleva 13 minutos realizando un solo ejercicio [E, D].*

¿Está claro hasta aquí? ¿Sí?

Evento 16-2: Pregunta a los alumnos si está claro lo que han visto hasta el momento.

- D12.1-2. *Pregunta a los alumnos si ha quedado claro lo que han visto [E, D].*
- M38.1-2. *Pregunta a los alumnos si está claro, manteniéndose luego en silencio [E, D].*
 - M38.1-2(I)1. *Porque debe de estar pensando que no está claro para todos [I, D].*
- R7.1-2. *Pregunta a los alumnos si lo han entendido tras explicarlo varias veces [E, D].*
 - R7.1-2(I)1. *Cuando se dan clases de matemáticas, es importante asegurarse de que los alumnos van comprendiendo [I, M].*
- L19.1-2. *Pregunta a los alumnos si está claro [E, D].*

VÍDEO 3

Fragmento 1

[F = Formadora del vídeo].

- F: Entonces, la idea es..., el ejercicio 4, que está proyectado en la pantalla, es el ejercicio 4 de la última hoja, de la hoja del dossier 2, con el que vamos a trabajar ya esta semana, ¿vale? En ese ejercicio hay cuatro operaciones, cuatro problemas, cuatro operaciones. Tenéis que hacer las cuatro operaciones..., representarlas de distintas maneras. Voy a poner en la pizarra de cuántas maneras, ¿vale? Entonces, acordaos que nosotros estamos trabajando con material manipulativo [escribe en la pizarra «Manipulativo»], ¿vale? Entonces, en primer lugar tenéis que representar esta suma $[210 + 543]$, esta suma $[315 + 429]$, esta resta $[135 - 24]$ y esta resta $[704 - 45]$, por partes [va señalando en el PDF proyectado en la pantalla], ¿no?, empezáis con la primera... Tenéis que representarlo [escribe en la pizarra] con ábaco vertical, después en el sorobán y después con los multibase, ¿vale? Y tenéis que tener las tres representaciones del proceso delante para saber comparar cada dos, ¿vale?, para saber entender cómo se traduce una en otra.

C1-3.1. Plantea a los alumnos que tienen que representar las cuatro operaciones del ejercicio, las sumas y las restas, en el registro de representación manipulativo con el ábaco vertical, con el sorobán y con los bloques multibase, comparando cada dos, viendo cómo se traduce de una forma a otra.

- M2.1-3.1. Dice que hay que representar unas sumas [E, 1].
- P2.1-3.1. Presenta la actividad y su objetivo, que es emplear tres métodos o instrumentos para resolver la actividad planteada [E, 1].
- D1.1-3.1. Está planteando la actividad, que consiste en representar con materiales [las operaciones] [E, 2].
- L1.1-3.1. Está explicando en qué consiste el ejercicio, indicando los tres materiales con los que quiere que representen [las operaciones] [E, 2].

Evento 1-3.1: Escribe en la pizarra todo lo que explica.

- M3.1-3.1. Escribe todo en la pizarra [E, D].

- M3.1-3.1(I)1. Es clásico de los profesores de matemáticas escribir todo en la pizarra para que se lea bien [I, M].

Lo que no quiero es que me digáis: «210 + 543 son 753; Nuria, te he representado 743* en el ábaco vertical, en el sorobán y en los bloques multibase». No quiero la representación del resultado, quiero la representación del proceso, de la suma, de la idea «suma».

C2-3.1. Explica que no quiere que los alumnos representen el resultado, sino que representen el proceso de la suma.

- M4.1-3.1. Dice a los alumnos que tienen que representar el proceso de la suma, no el resultado, con material manipulativo [E, 3].
 - M4.1-3.1(I)1. Porque los alumnos tienden a realizar la suma con números, con la técnica usual, y a representar luego el resultado; les das un ábaco que supuestamente es una ayuda para hacer eso y se lo toman como un obstáculo para hacerlo porque ellos están muy cómodos haciéndolo con los números y no se dan cuenta de que el ábaco hace eso mucho más rápido [I, M].
 - M4.1-3.1(I)2. No sé si con representar se refiere a la representación gráfica o a la ejecución con el ábaco. Cuando se da una consigna, debe estar claro lo que se tiene que hacer: ¿qué se entiende por representar un proceso? Se puede suponer que los alumnos ya lo han trabajado antes y por eso la formadora lo dice así; ¿cómo represento que muevo una bola? [I, M].
- L1.2-3.1. Dice que quiere que representen el procedimiento, no el resultado [E, 3].
- P3.1-3.1. Está haciendo hincapié en que lo importante es el procedimiento, no solo el resultado final [E, 3].
- R1.1-3.1. Pide a los alumnos que se centren en el proceso de la suma [E, 3].
 - R1.1-3.1(I)1. Si un profesor consigue que sus alumnos entiendan el proceso, adquirirán el concepto y podrán ser buenos profesores; si solo sé hacer la suma, sin entender el proceso, no puedo transmitir cómo hacerla [I, M].
- J1.3-3.1. Pone el énfasis de la actividad en el proceso de las operaciones [E, 3].
 - J1.3-3.1(I)1. Lo importante del trabajo con lo manipulativo es que esté relacionado con los aspectos básicos del sistema posicional, de las operaciones; se pretende un trabajo relacionado con los conceptos, más que con la mera manipulación en sí o con «jugar» con el ábaco [I, M].

- D1.2-3.1. *Pide que representen con los materiales el proceso, no el resultado [E, 3].*
 - D1.2-3.1(I)1. *A los alumnos les cuesta representar o explicar el proceso seguido, entender que no es lo mismo representar el proceso que el resultado, por lo que presta atención a clarificarlo [I, M].*

¿En qué os tenéis que basar?, en la definición de la suma que vimos el otro día, ¿no?, que es: elijo un representante de uno, elijo un representante del otro y hago la unión, agrupo, junto, como lo queráis pensar, ¿vale?

C3-3.1. Indica que los alumnos han de basarse en la definición conjuntista de la suma.

- M6.1-3.1. *Da a los alumnos la definición conjuntista de la suma [E, 3].*
 - M6.1-3.1(I)1. *Es una de las definiciones de la suma, no es la única; les ha debido de dar anteriormente esa definición matemática a partir de la unión conjuntista [I, M].*

Entonces, hay que representar el proceso, el proceso, no solo el resultado final de ese proceso. Entonces, tenéis que representar el proceso de tres maneras en el sistema de representación manipulativo [señala lo que ha escrito antes en la pizarra], ¿vale? Y en paralelo [empieza a escribir en la pizarra] tenéis que representar el proceso en el sistema de representación simbólico-numérico; el enunciado está dado en ese sistema de representación, ¿vale?, esto es sistema de representación simbólico-numérico, pues tenéis que representar el proceso, las dos sumas y las dos restas, en ese sistema, ¿vale?

C4-3.1. Dice a los alumnos que tienen que representar el proceso de las sumas y de las restas en el registro de representación simbólico-numérico.

- M9.1-3.1. *Dice que hay que representar la suma en el registro simbólico-numérico [E, 3].*
 - M9.1-3.1(I)1. *Cuando usa la palabra «representar», quizás lo que quiere decir es que hay que hacerlo en ese sistema de representación; con «representar» da la sensación de que quiere que haga el proceso en ese sistema de representación, porque lo que vamos a hacer es la suma en el registro simbólico-numérico; es un tratamiento dentro de un registro, no hay una conversión [I, M].*
- D2.1-3.1. *Completa la explicación de la actividad, especificando una segunda forma de representación que quiere que usen los alumnos [E, 2].*

- L2.2-3.1. *Explica un segundo método con el que quiere que los alumnos representen las operaciones [E, 2].*

Y luego, en medio [escribe en la pizarra], hay una representación que es formato tabla o tabular, de la que no he hablado explícitamente, pero que me gustaría que construyerais vosotros, ¿vale? Necesito que construyáis, por ejemplo, esta suma [señala $210 + 543$], que la hagáis en tabla, con una tabla, como se os ocurra a vosotros diseñar la tabla, ¿vale? La tabla [escribe en la pizarra] puede ser más gráfica, puede tener características gráficas, o puede tener características más simbólicas;

C5-3.1. Pide a los alumnos que realicen una representación tabular de las operaciones como ellos quieran, teniendo en cuenta que puede tener características gráficas o características simbólicas.

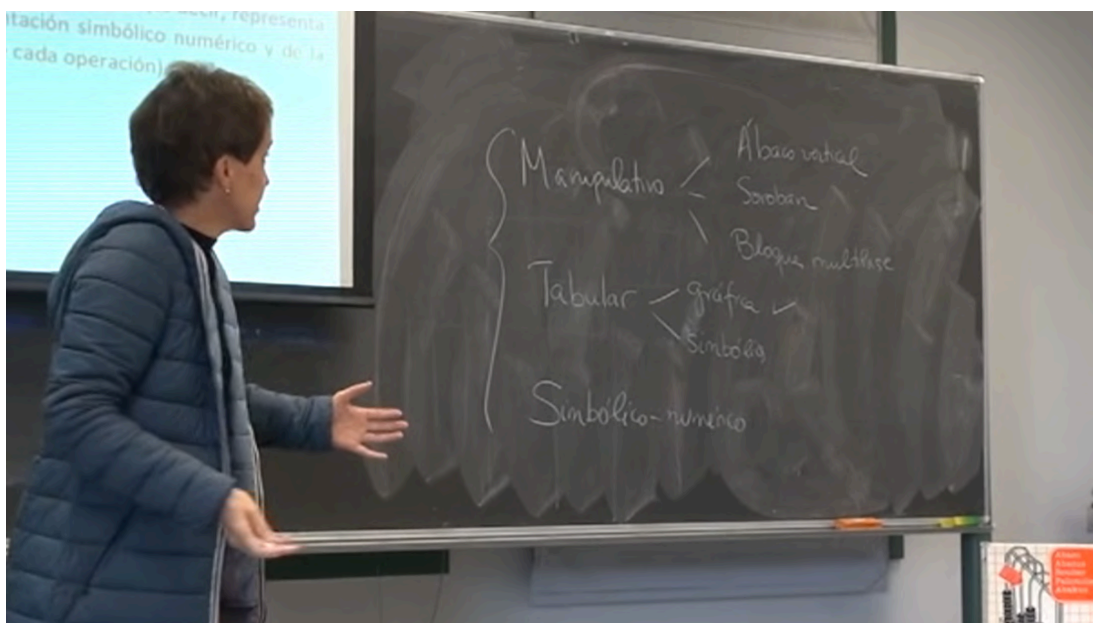
- R2.1(i)-3.1. *Evento implícito en el comentario [E, 1].*
Transcripción del vídeo: La tabla [escribe en la pizarra] puede ser más gráfica, puede tener características gráficas, o puede tener características más simbólicas; a mí me va a interesar más la que tenga características más gráficas, luego ya veremos en detalle cómo, pero tenéis que intentar construirlo vosotros sin que yo os haya hablado de eso explícitamente, ¿vale?
 - R2.1(i)-3.1(I)1. *Se fomenta la creatividad de los alumnos; cuanto más creativos sean, más se puede sacar de ellos [I, D].*
- M11.1-3.1. *Pide a los alumnos que construyan una tabla, que puede tener características gráficas o simbólicas [E, 3].*
 - M11.1-3.1(I)1. *Es una buena herramienta que puede servir como transición para pasar de uno a otro [sistemas de representación] y justificarlo, y que responde bien a cómo lo hacemos [I, M].*
 - M11.1-3.1(I)2. *Como no quiere decir cómo se hace la tabla, porque quiere que los alumnos la construyan, está asumiendo riesgos porque no queda muy clara la consigna; puede que los alumnos no sepan qué es lo que tienen que hacer si no han trabajado antes con alguna tabla sumando [I, M].*
- J1.2-3.1. *Pide que hagan una tabla de forma libre, sin decir cómo tiene que ser la tabla [E, 2].*

- P4.1-3.1. Está dando opciones sobre cómo puede ser la tabla que tienen que hacer en la actividad [E, 2].
- L2.3-3.1. Explica un tercer método con el que quiere que los alumnos representen las operaciones, consistente en una representación tabular, indicando que pueden hacerlo como quieran [E, 2].
- D2.2-3.1. Completa la explicación de la actividad, especificando una tercera forma de representación que quiere que usen los alumnos, la cual no la han trabajado previamente [E, 1].

a mí me va a interesar más la que tenga características más gráficas, luego ya veremos en detalle cómo, pero tenéis que intentar construirlo vosotros sin que yo os haya hablado de eso explícitamente, ¿vale?

Evento 2-3.1: Muestra preferencia por la tabla de características gráficas.

- M12.2-3.1. Indica que prefiere un tipo de tabla a otra [E, M].
- P4.2-3.1. Muestra preferencia por una de las tablas [E, M].
- L2.4-3.1. Dice que prefiere una forma tabular más gráfica frente a una en la que usen números [E, M].



Entonces, paso 1, aquí [señala la parte de representación manipulativa de la pizarra], en paralelo paso 2, simbólico-numérico [lo señala en la pizarra] y luego ya, según vayáis trabajando los cuatro ejemplos, igual ya se os va ocurriendo

cómo representarlo con una tabla y cómo trabajar con una tabla ese tipo de operaciones.

Evento 3-3.1: Indica que al realizar la representación en el registro manipulativo y en el simbólico-numérico en paralelo, se les puede ocurrir cómo hacer la tabla con el tipo de operaciones del ejercicio.

- M12.1-3.1. Da una pista a los alumnos al decir que cuando lo vayan haciendo a lo mejor les sale cómo hacer la tabla [E, M].
 - M12.1-3.1(I)1. Porque ella misma ha detectado que la consigna es un poquito «complicada»; no obstante, cuando no se da información demasiado precisa y no llega a ser suficiente para que los alumnos sepan qué tienen que hacer, solemos esperar a que algún alumno lo haga para hacerlo ver a los demás [I, M].

Evento 4-3.1: Recapitula los pasos de la actividad que tienen que hacer los alumnos.

- M11.2-3.1. Recapitula lo que los alumnos tienen que hacer [E, D].

Evento 5-3.1: Deja por escrito en la pizarra toda su explicación.

- L2.1-3.1. Plasma en la pizarra toda la explicación que ha dado sobre la actividad [E, D].
 - L2.1-3.1(I)1. Para que los alumnos no olviden los métodos que tienen que utilizar [I, D].

Evento 6-3.1: Tiene un ábaco sobre la mesa mientras explica las instrucciones de la actividad a los alumnos.

- J1.1-3.1. Tiene el material delante cuando da las instrucciones [E, D].

¿Está claro? Yo me voy a pasar por las mesas y me vais preguntando todas las dudas que os surjan. No voy a pedir que me mandéis nada, ¿vale?, porque todavía no he revisado las últimas fotos que me habéis mandado, con lo cual estoy un poco desbordada; como no sois muchos, yo voy por vuestros puestos.

Evento 7-3.1: Indica que no va a pedir que le manden el trabajo que realicen hoy en clase.

- J1.4-3.1. Menciona algo sobre la entrega de la actividad [E, D].
- P5.2-3.1. Indica a los alumnos que no tienen que enviarle el trabajo que realicen en clase [E, D].

Ahora bien, en el grupo anterior han decidido grabar pequeños vídeos o hacer fotos de los procesos que iban construyendo por llevárselo como material para estudiar, a mí me parece una buena idea, pero ya vosotros hacéis lo que queráis, a mí no me lo tenéis que mandar, pero si queréis, una vez que hayáis construido, por ejemplo, con el ábaco japonés, imaginaos, esta resta de aquí [señala el PDF en la pantalla], y decís: «ah, pues nos vamos a grabar», uno lo hace otro lo graba y lo tenéis de recuerdo, ¿no?, para cuando tengáis que estudiar.

Evento 8-3.1: Indica a los alumnos que pueden hacer fotos o grabar vídeos de los procesos que vayan construyendo para tenerlo como material para estudiar.

- M14.1-3.1. Plantea que pueden grabar lo que hagan en vídeo [E, D].
 - M14.1-3.1(I)1. Ahora se entiende que con «representar» se refiere a hacerlo con el ábaco, a resolverlo con el ábaco, que es un sistema de representación como otro cualquiera, no a ir dibujando los movimientos que se hagan de las bolitas [I, M].
- P5.1-3.1. Indica a los alumnos que pueden grabar un vídeo o hacer fotos a los procesos de la práctica para poder recordar lo que hagan y que les sirva para estudiar [E, D].

¿Cómo voy a pedir yo eso en el examen? Pues no lo puedo pedir porque no puedo llevar un sorobán para cada uno porque tengo un día, 2 horas y media o 3, para haceros el examen final de la asignatura; pero para mí esto es muy importante, entonces yo voy a pedir que me representéis gráficamente, gráficamente, vuestro proceso de respuesta con un ábaco vertical, con un sorobán o con los bloques multibase, que es lo que yo luego voy a hacer aquí en la sesión final de discusión cuando acabemos esta hora de clase. Yo no voy a coger el ábaco aquí, lo voy a poner delante de todos y tal —podría hacerlo, pero no lo voy a hacer—, lo voy a hacer representando gráficamente el material manipulativo y así es como lo voy a pedir el día del examen, porque os voy a dar un cuadernillo y lo tenéis que hacer gráfico, ¿vale?

C6-3.1. Dice que en el examen final de la asignatura va a pedir que representen el proceso de respuesta con los materiales manipulativos de forma gráfica.

- D3.1-3.1. Avisa a los alumnos de que, aunque lo que van a hacer no lo pueda evaluar en el examen tal y como lo van a hacer en clase, va a evaluarlo de alguna manera [E, 1].
 - D3.1-3.1(I)1. Para que los alumnos estén más motivados con el tema de la evaluación en la clase práctica [I, D].

- M15.1-3.1. *Explica a los alumnos que les pedirá que pasen el proceso a una representación gráfica para examinar lo que están viendo [E, 2].*
 - M15.1-3.1(I)1. *Al explicar cómo examinará se está adelantando a la pregunta clásica de los alumnos: «¿y esto cómo lo vas a preguntar en el examen?» [I, D].*
- L3.1-3.1. *Explica cómo va a preguntar en el examen lo que están viendo [E, 1].*
 - L3.1-3.1(I)1. *Se anticipa a la pregunta típica de los alumnos para que sepan qué necesitan hacer, como grabar un vídeo o tomar apuntes, para poder estudiar en casa, ya que no tendrán los materiales [I, D].*
- J2.1-3.1. *Relaciona lo que van a hacer en clase con lo que les va a pedir en el examen [E, 1].*
 - J2.1-3.1(I)1. *Para poner a los alumnos alerta [I, D].*

Bueno, pues empezad, están escritas en un orden muy concreto, empezad a hacerlas en ese orden y luego ya discutimos sobre por qué están puestas en ese orden, ¿vale?

C7-3.1. Indica que las operaciones se presentan en un orden concreto y pide que las hagan en ese orden.

- M16.1-3.1. *Establece un orden concreto para hacer las sumas [E, 3].*
 - M16.1-3.1(I)1. *El orden es una variable y habrá querido que en las sumas o en las operaciones entren en juego distintos usos y propiedades del ábaco [I, M].*

Fragmento 2

[F = Formadora del vídeo]. [A = Alumnos (A1, A2 y A3)].

- A1: Estamos rayados con la última resta.
 F: Vale, a ver, empezad.
 A1: Son $704 - 45$.
 F: Vale.
 A1: Entonces, aquí no le podemos restar 5.

Evento 1-3.2: Trabaja con los alumnos una resta: $704 - 45$.

- M2.1-3.2. Trabaja con los alumnos una resta: tienen 704 y hay que quitarle 5 [E, M].
 - M2.1-3.2(I)1. En el ábaco, si no puedes restar aquí [en la varilla de las unidades], añades las que te faltan; el ábaco es muy rápido porque basta con saber las descomposiciones de 10 y 5, pero en este caso tampoco hay aquí [en la varilla de las decenas]; el número está muy elegido, por lo que hay que tener un protocolo de acción, ciertas precauciones. Supongo que no es la primera vez que usan el ábaco, porque si no se van a hacer un lío [I, M].



- F: Así tal cual está, puedes restar..., ¿cuántas puedes quitar?
 A1: Cuatro.
 F: Cuatro, vale, sí.
 A1: Entonces voy a suponer que aquí [señala la varilla de las decenas] hay un 1.
 A2: No, que hay 10.

A1: Que hay 10, para que sea 14...

F: A ver, olvídate de los «suponer». Tú dices: «tengo que quitar 5», ¿no?, quito 1, quito 2, quito 3, quito 4 [quita cuentas de la varilla de las unidades] y ahora ponme aquí más para que yo quite, tal y como está.



A1: Habría que poner 10 y quitamos 1.

F: Pero ¿cómo me ponéis..., cómo me ponéis ahí? A ver Pablo.

A2: ¿Que lo ponga?

F: No, no, que me digas... Yo aquí [señala la varilla de las centenas] tengo ahora mismo 700, ¿no? Escribe 700 de otra forma para que yo tenga bolas...

A1: Aaaaah, hay que añadir una aquí [señala la varilla de las decenas].

F: Venga, a ver.

A2: [El alumno A2 quita una cuenta de la varilla de las centenas y la pone en la de las decenas].

F: ¿Aquí sigue poniendo 700?

A1: No, no, no, hay que poner una nueva aquí [vuelve a poner la cuenta en la varilla de las centenas —la que había puesto en la varilla de las decenas el alumno A2— y pone una nueva en la varilla de las decenas].

F: A ver [quita la cuenta de la varilla de las decenas]. Teníamos 704, hemos quitado 4, tengo 700, ¿vale?

A1: Sí.

F: Ahora, escribe 700 de otra forma para poder quitar otra.

A1: Pues...

F: ¿Cómo podéis escribir 700 de otra forma?

C1-3.2. Pregunta varias veces cómo pueden representar el número 700 de otra forma en el ábaco, haciendo ver que tenían 704, que ella ha quitado 4 unidades y que ahora tienen que representar el número 700 de otro modo para poder quitar otra cuenta y restar 5 unidades.

- M4.1-3.2. Dice a los alumnos que escriban 700 de otra forma [E, 2].
 - M4.1-3.2(I)1. Ella no quiere decir que lo descompongan, pero sin decirlo lo que quiere es que hagan todos los cambios de manera que aquí obtengan 10 [en la varilla de las unidades], que quiten uno de aquí [señala la varilla de las centenas], que la transformen en 10 de aquí [señala la varilla de las decenas], dando lugar a 6 centenas y 10 decenas, luego que quiten una de aquí [indica la varilla de las decenas] y la transformen en 10 de aquí [señala la varilla de las unidades]. Pero cuando se usa el ábaco, si no puedes quitar 5 [en las unidades], quitas una de aquí [en las decenas] y añades solo las que hagan falta [en las unidades]. Por eso, están en una fase muy preliminar del ábaco. Lo que quiere es vayan manipulando, que vayan materializando los cambios [I, M].
- J1.1-3.2. Pregunta: «¿ahora qué hacemos?, tras quitar las cuatro primeras directamente [E, 1].
 - J1.1-3.2(I)1. Porque los alumnos estaban atascados [I, D].
- P1.1-3.2. Está tratando de solucionar los problemas que tienen los alumnos con la resta [E, 1].
 - P1.1-3.2(I)1. Pretende hacer ver que no basta con saber la regla para restar, sino que hay que justificar el algoritmo de la resta, para lo cual se apoya en el ábaco vertical [I, M].
- D2.1-3.2. Interactúa con los alumnos, tratando de que piensen sobre la dificultad que tienen a partir de los pasos que ya han dado [E, 1].
 - D2.1-3.2(I)1. Pretende que sean los alumnos quienes resuelvan la actividad por ellos mismos y que vean la dificultad que tiene el uso del ábaco [I, M].
- L1.1-3.2. Está dando pistas a un grupo de alumnos al que se ha acercado sobre la estrategia que han de seguir para hacer la resta en el ábaco y poder quitar fichas en una varilla en la que no hay fichas, diciéndoles que escriban el 700 de otra forma [E, 3].

- L1.1-3.2(1)1. Para que escriban 700 quitando una de las centenas y poniendo 10 en las decenas y luego quitando una de las decenas y poniendo 10 en las unidades [I, M].
- R1.1-3.2. Ayuda a un alumno a razonar mediante preguntas [E, 1].
 - R1.1-3.2(I)1. Porque veía que le estaba costando mucho trabajo [I, D].

Evento 2-3.2: Quita la cuenta que una alumna ha puesto en la varilla de las decenas del ábaco.

- M5.1-3.2. Quita cuentas del ábaco cuando un alumno las coloca mal, sin decirles por qué las quita [E, M].
 - M5.1-3.2(I)1. Para no dejar que los alumnos arrastren el error, ya que con el ábaco se puede liar el proceso si se arrastran errores [I, M].

A1: Que aquí [señala la varilla de las decenas] haya 9...

F: Venga.

A1: Y aquí [señala la varilla de las unidades]..., 9.

F: A ver, para que haya aquíííí... [señala la varilla de las decenas], vamos a ver, ¿cómo consigo aquí decenas? Sin cambiar el número...

A1: Si quito esta... [quita una cuenta de la varilla de las centenas].



F: Venga, muy bien.

A1: Pongo aquí 10 [señala la varilla de las decenas].

F: Venga, dale.

C2-3.2. Pregunta a los alumnos cómo pueden conseguir decenas, señalando la varilla de las decenas en el ábaco, tratando de guiarlos en el proceso de reescritura del 700.

- D3.1-3.2. Trata de que la alumna se dé cuenta del cambio de centenas a decenas, abordando así la dificultad de agrupar centenas y decenas en el ábaco [E, 3].
- P2.1-3.2. Está incidiendo en las equivalencias entre centenas y decenas [E, 3].
- J1.2-3.2. Guía a los alumnos a partir de las ideas que proponen, dando tiempo para que las exploren, sin dar la respuesta [E, 1].
- M9.1-3.2. Dice: «Para que haya aquíííí...» [E, 1].
 - M9.1-3.2(I)1. Porque no quiere decir cuántas [cuentas] hay [I, M].

A1: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10.

A3: ¡Ah, vale!



F: ¿Ahora aquí pone 700?

A1: Sí.

F: ¿Y cómo está escrito 700?

A3: Mal.

F: 6×10^2 , ¿no?, 6×100 , más...

A2: 10×10^1 .

F: 10×10^1 , muy bien.

C3-3.2. Hace ver que, tras representar de otra forma el número 700 en el ábaco, ahora tienen $6 \times 10^2 + 10 \times 10^1$, conectando así el registro de representación

manipulativo del ábaco con el simbólico-numérico en forma de expresión polinomial con potencias de base 10.

- J3.1-3.2. Relaciona la representación del número [en el ábaco] con la parte algebraica, con la posición, con la representación numérica [E, 3].
 - J3.1-3.2(I)1. Porque pretende emplear el material con un sentido para que los alumnos entiendan la estructura de los números [I, M].

Ahora, ¿puedo quitar aquí [señala la varilla de las unidades] que quería quitar una? ¿Tengo?

A1: No.

F: No, ¿cómo puedo volver a escribir 700 para tener aquí [varilla de las unidades]?

A1: Pues quito de estas [quita una cuenta de la varilla de las decenas] y añado 10 aquí [señala la varilla de las unidades].

F: Vale, venga.



Vale, ¿y ahora puedes quitar la que te faltaba por quitar?

A1: [La estudiante A1 quita una cuenta de la varilla de las unidades].

F: Ya está. Ya habéis quitado 5 y teníais que quitar 45, ¿no? ¿Cuánto os falta por quitar?

A1: Sí, ahora aquí [señala la varilla de las decenas] hay que quitar 4.

F: Pues ya está, ¿no?

A1: Ah, vale, vale. Gracias.

C4-3.2. Pregunta a los alumnos, señalando la varilla del ábaco de las unidades, cómo representar el número 700 de otra forma para obtener cuentas en esa varilla y poder terminar la resta.

- D4.1-3.2. Trata de que la alumna se dé cuenta del cambio de decenas a unidades, consiguiendo que los alumnos lo entiendan, guiando el proceso lo mínimo posible [E, 3].
- M13.1-3.2. Plantea preguntas a los alumnos con un carácter didáctico, supervisando el trabajo que realizan [E, 1].
 - M13.1-3.2(I)1. Para tratar de acelerar el proceso, ya que no hay tiempo para que lo hagan ellos solos al tener que cubrir ciertos contenidos; es algo que nos pasa a todos [I, D].
- J4.1-3.2. Va preguntando a los alumnos, sin dar la respuesta [E, 1].
 - J4.1-3.2(I)1. Para desatascar a los alumnos [I, D].

Evento 3-3.2: Permite que los alumnos empleen cuentas de distintos colores en una misma varilla del ábaco.

- M13.2-3.2. Permite que usen cuentas de distintos colores en una misma varilla [E, M].



- F: ¿Entonces qué habéis hecho para reescribir el 700...? O sea, yo tenía 700 ahí, tenía aquí 700 [deja el ábac con 7 cuentas en la varilla de las centenas], ¿qué habéis hecho?
- A2: Como es sistema decimal, pues aquí [señala la varilla de las decenas] hay 10, porque... representamos un 0, pues quitar una de aquí [varilla de las centenas] y

ponerle las 10 aquí [varilla de las decenas] para luego restarlas aquí [varilla de las unidades].

F: O sea que habéis..., ¿agrupado o desagrupado?

A1: Desagrupado.

A2: Aquí desagrupado.

C5-3.2. Pide a los alumnos que le expliquen el proceso que han seguido para reescribir el número 700, preguntando si han agrupado o si han desagrupado.

- P3.1-3.2. Está preguntando a los alumnos sobre el procedimiento que han seguido [E, 2].
 - P3.1-3.2(I)1. Para que los alumnos reflexionen y para comprobar si realmente han entendido todo lo que han hecho [I, D].
- L4.1-3.2. Pide a los alumnos una explicación matemática de lo que han hecho [E, 2].
 - L4.1-3.2(I)1. Para que vean que el número en una representación distinta les permite hacer la resta, es decir, que diferentes escrituras o diferentes representaciones gráficas del mismo en el ábaco representan el mismo número y algunas de ellas les permiten hacer la resta [I, M].
- D5.1-3.2. Trata de que los alumnos analicen lo que han hecho [E, 2].
 - D5.1-3.2(I)1. Para formalizarlo un poco más, para entender globalmente lo que han hecho, para darle sentido al procedimiento [I, M].
- R1.2-3.2. Pide a los alumnos, una vez que han terminado y lo han entendido, que le expliquen lo que han hecho [E, 2].
- J5.1-3.2. Pregunta a los alumnos por el proceso que han seguido para resolver el ejercicio [E, 2].
 - J5.1-3.2(I)1. Para que los alumnos formalicen y verbalicen el razonamiento que han seguido y puedan afianzar el proceso [I, M].

F: Desagrupado. Habéis desagrupado una centena en 10 decenas y luego una decena la habéis desagrupado en 10 unidades.

C6-3.2. Explica a los alumnos que han desagrupado una centena en diez decenas y una decena en diez unidades.

- M17.1-3.2. Está reinterpretaando, en los términos de nuestro sistema convencional, en términos más matemáticos, lo que han hecho los alumnos, haciendo ver que han desagrupado [E, 2].

- M17.1-3.2(I)1. *Es una especie de institucionalización de lo que han hecho, o sea, de darle un carácter más oficial, siempre partiendo de la idea de que son ellos los que lo han hecho [I, M].*
- M17.1-3.2(I)2. *Se ha hecho una simulación de manera acelerada de lo que sería una situación en una clase de primaria, donde el trabajo debería ser mucho más del alumno, pero aquí [en la facultad] no puedes reproducir exactamente las actividades de primaria porque estos no son niños de primaria, son maestros, tienen mucho más conocimiento y mucha más madurez [I, M].*

A1: Vale, es que cuando tú lo haces en papel no haces esto así.

F: Ah, pues dime entonces qué es lo que haces en papel.

A1: Claro, lo haces muy mental. O sea, en verdad sí que haces eso, pero... bueno, ya me has entendido.

F: No, no, pero lo tienes que explicar porque luego os he pedido que lo hagáis simbólico...

A1: Ya, ya, ya.

F: Entonces, simbólico tienes que explicarlo conectado con esto.

A1: Vale, vale.

C7-3.2. Pide a una alumna que explique cómo hace la resta en papel, haciendo ver que cuando hagan la representación en el registro simbólico-numérico tienen que conectarlo con el ábaco.

- D6.1-3.2. *Pregunta a la alumna cómo hace ella la resta [en papel], haciéndole ver que tiene que pensar en la relación que hay entre lo que han hecho con el ábaco y el algoritmo tradicional de la resta [E, 3].*
- P4.1-3.2. *Pide a una alumna que le explique cómo es el proceso, numéricamente, que sigue cuando lo hace en papel [la resta] [E, 1].*
- M20.1(i)-3.2. *Evento implícito en el comentario [E, 1].*

Transcripción del vídeo: Entonces, simbólico tienes que explicarlo conectado con esto.

- M20.1(i)-3.2(I)1. *Emplea el ábaco no solo como un elemento didáctico para usar con los niños [de primaria], sino para que los alumnos descubran realmente qué están haciendo cuando están restando [I, M].*

Fragmento 3

[F = Formadora del vídeo]. [A = Alumnos].

F: Vamos a corregir uno, el primero, ¿vale? Me dan $210 + 543$, ¿vale?, con símbolos.

C1-3.3. Plantea en la pizarra la suma « $210 + 543$ », haciendo ver que la ha representado con símbolos.

- M2.1-3.3. Plantea una suma sin llevadas [E, 2].
 - M2.1-3.3(I)1. Imagino que será el primer ejemplo al tratarse de una suma sin llevadas. Con el ábaco se hace metiendo 3 o metiendo 4 o metiendo 5, no tiene mayor historia, por lo que no sé qué juego va a dar [I, M].

Voy a representarlo..., vamos a empezar con manipulativo y voy a ejemplificar con el sorobán, que es el que parece que más trabajo cuesta, ¿vale? Entonces, en el sorobán, cuando lo representéis gráficamente el día del examen, o ahora en vuestro cuaderno si tenéis que tomar notas, es muy importante marcar la barra del medio, porque la proximidad de las bolas a la barra del medio es la que te indica qué número está representando, ¿vale?

C2-3.3. Empieza a realizar la suma con el sorobán, indicando que lo hace gráficamente.

- M3.1-3.3. Está usando el sorobán para hacer la suma [E, 2].
 - M3.1-3.3(I)1. Como se trata del ábaco japonés, sí que va a tener que hacer cambios con el 5 [señala las decenas] al sumar $210 + 543$; sí que va a haber agrupaciones [I, M].
- P1.1-3.3. Está intentando resolver una suma, indicando cómo representarla gráficamente en un ejercicio escrito [E, 2].
- J1.1-3.3. Plantea de manera visual la explicación [E, 1].
- D1.1-3.3. Está haciendo una suma en el sorobán en la que no hay agrupamientos [en base 10] [E, 2].
 - D1.1-3.3(I)1. Al no haber agrupamientos, parece que se trata de un ejercicio más relacionado con el manejo del sorobán que con el algoritmo de la suma [I, M].

Y ahora, dado el problema que me han planteado, ¿cuántas varillas pensáis que necesito escribir?

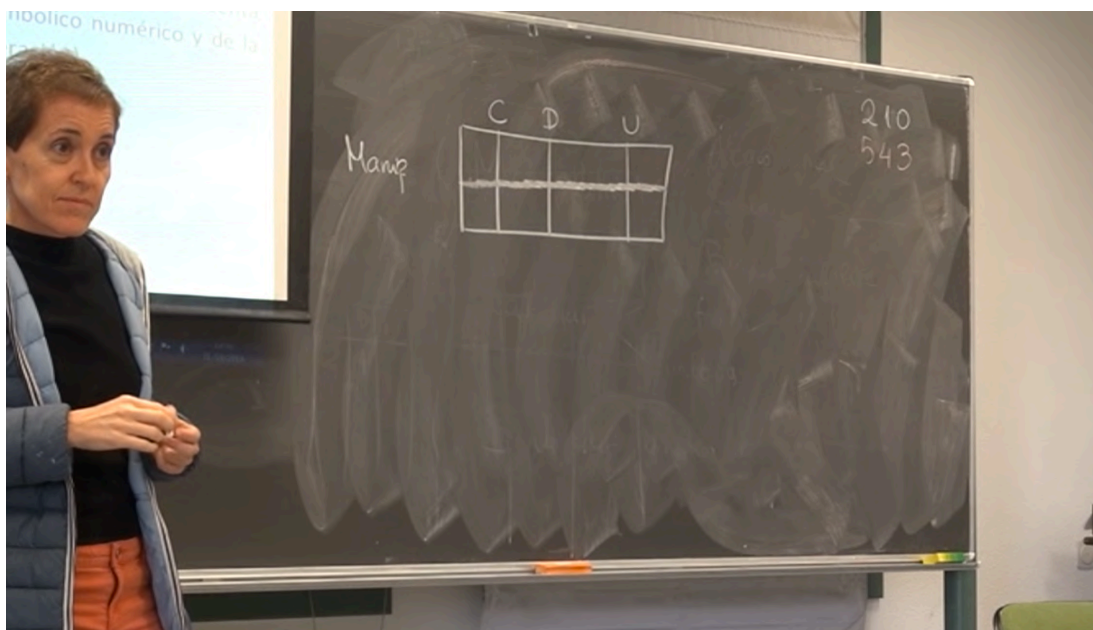
A: Tres.

F: ¿Tres varillas? Pongo una varilla, dos varillas, tres varillas. Esta, unidades, decenas, centenas.

C3-3.3. Señala en la pizarra la correspondencia de cada varilla del sorobán con las unidades, las decenas y las centenas, respectivamente.

No ha sido detectado por ningún formador.

Esta la pongo un poco más gorda para que se note que es la barra de madera del medio, ¿vale? Y ahora, ¿cómo dibujo 210?



A: Pues 0 unidades.

F: 0, o sea que aquí no pongo nada pegado a la barra, ¿no? [señala la varilla de las unidades]. ¿Aquí? [señala la varilla de las decenas].

A: 1 decena.

F: Una pegada a la barra, ¿arriba o abajo?

A: Abajo.

F: Abajo, o sea que aquí va una.

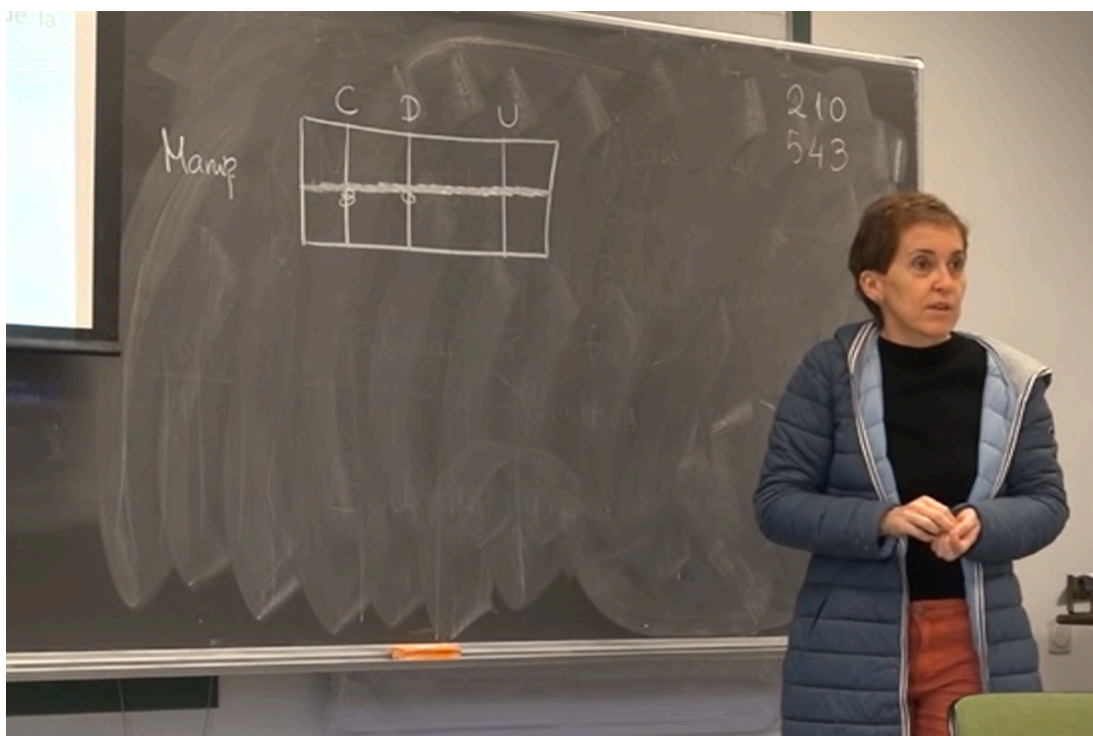
A: Y 2 centenas pegadas a la barra de abajo.

F: Pegadas a la barra, abajo. Una y dos, ahí está. Eso es 210.

C4-3.3. Representa gráficamente el número 210, explicando cómo hacerlo con ayuda de una alumna, tras preguntar cómo dibuja dicho número.

- M5.1-3.3. Dice «cómo dibujo» [E, 1].

- M5.1-3.3(I)1. Porque quiere hacer ver a los alumnos que está empleando un registro gráfico; yo digo «escribo» porque es una escritura del número también [I, M].
- J1.2-3.3. Pide la participación de los alumnos, pide que vayan dando los pasos que va a ir escribiendo [E, 1].
- L1.1-3.3. Va preguntando a los alumnos cómo tiene que proceder [E, 1].
 - L1.1-3.3(I)1. Porque busca la complicidad de los alumnos para escribir en realidad lo que ella quiere [I, D].
- P1.2-3.3. Deja que sean los alumnos quienes vayan planteando su resolución [E, 1].



Y ahora, tengo que sumar 543, es decir, que tengo que añadir 543 unidades ahí.

C5-3.3. Indica que ahora va a sumar 543, a añadir 543 unidades, entendiendo la suma como la unión de conjuntos.

- M6.1-3.3. Está sumando $210 + 543$ en ese orden [E, 1].
 - M6.1-3.3(I)1. Es posible hacer la suma al revés también [I, M].

Aprovecho la estructura, ¿vale? Entonces, añado 3 unidades, en la varilla de las unidades, que son 3 aquí abajo, ¿no?, 1, 2 y 3 [las dibuja en la varilla de las unidades]. Después añado 4 decenas, en la varilla... 1, 2, 3, 4, ¿vale? [las dibuja en la varilla de las decenas], 4 decenas.

A: Pero cambiamos...

F: Pero...

A: Bajamos una de arriba y quitamos las de abajo.

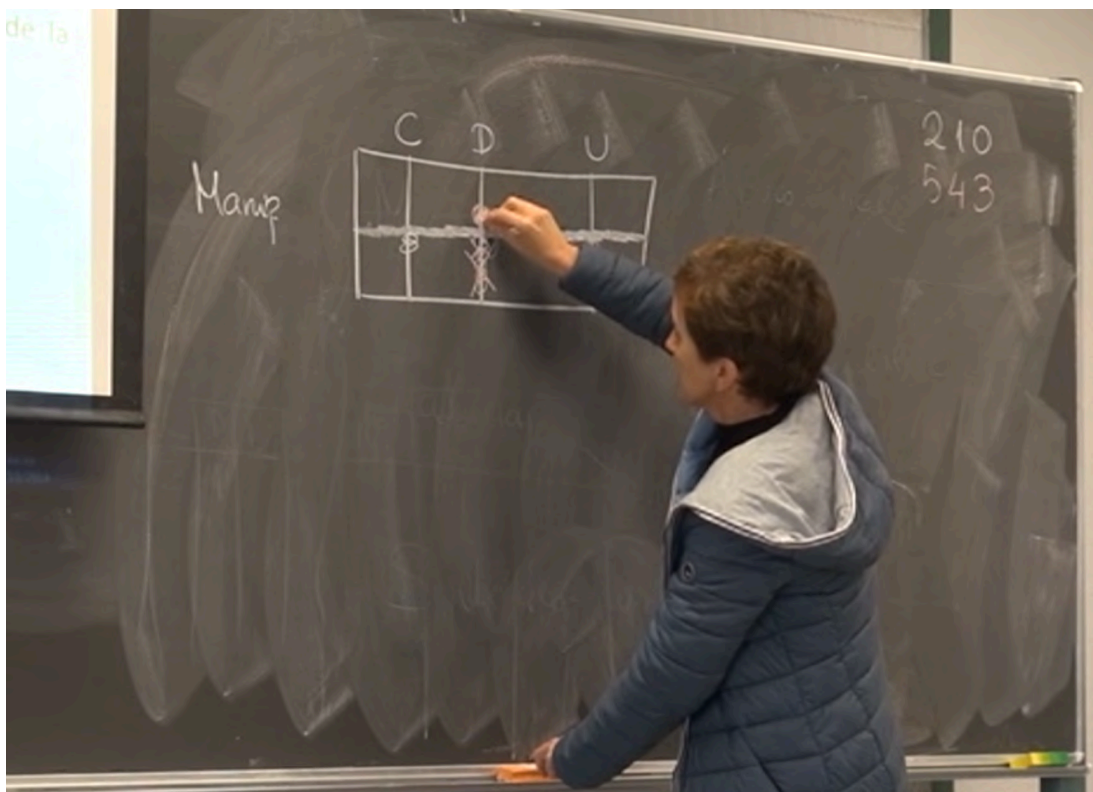
F: Porque no tenéis 4, ¿vale?, ya no había suficientes, ¿por qué?, porque las bolas de arriba valen 5, entonces decís: «no pasa nada, estas, como eran 4 y 1, 5, se representan ahí arriba», ¿vale?

C6-3.3. Hace ver, cuando suma las decenas de 543, que hay que hacer una agrupación auxiliar, representando un grupo de 5 decenas con una cuenta en la parte de arriba, diciendo que las cuentas de arriba valen 5 unidades del valor de la varilla.

- J2.1-3.3. Escribe [en la pizarra] algo que no estaba bien en el fondo y espera [E, 1].
 - J2.1-3.3(I)1. Porque esperaba que algún alumno lo corrigiese [E, D].
- M7.1(i)-3.3. Evento implícito en el comentario [E, 1].

Transcripción del vídeo: Después añadido 4 decenas, en la varilla...

- M7.1(i)-3.3(I)1. En la varilla de las decenas es donde va a tener que hacer un cambio porque el sorobán no tiene 5 cuentas en la parte de abajo, tiene 4 [I, M].



Y luego, 5..., tengo que añadir 5 centenas, ¿cómo lo hago?

A: Pues 1 arriba.

- F: Una de arriba la bajo directamente o podría ir: «1, 2, 3, ya tengo 5, las subo ahí, 4, 5» [va señalando en la varilla de las centenas], ¿vale? Puedo hacerlo de dos formas distintas. Pero si aprovecho la estructura del ábaco, de manera que las bolas de arriba valen 5, como tengo que añadir 5, pues directamente ya añadido ahí esas 5 [dibuja una bola en la varilla de las centenas, en la parte superior, pegada a la barra horizontal], ¿vale?

C7-3.3. Hace ver, cuando suma las centenas de 543, que se puede poner directamente una cuenta de arriba o ir sumando las centenas de una en una.

- M9.1-3.3. Propone un proceso en el que se meten las cuentas de una en una [E, 2].
 - M9.1-3.3(I)1. Ella quiere mantener la idea de que va subiendo de una en una, lo cual es un proceso muy laborioso, pero los alumnos entienden perfectamente que, si hay que añadir 5, basta con meter una de arriba. Cuando se usa el ábaco no se mete de una en una, sino que se meten las cuentas de golpe [I, M].
 - M9.1-3.3(I)2. Se puede poner directamente la bola arriba o intentarlo por debajo [I, M].
- P2.1-3.3. Está mostrando distintas alternativas para indicar la suma gráficamente en la pizarra [E, 1].

Evento 1-3.3: Colorea el interior de la cuenta que dibuja en la parte superior de la varilla de las decenas que equivale a 5 decenas.

- L2.1-3.3. Colorea la bola correspondiente al 5 en las decenas [E, M].

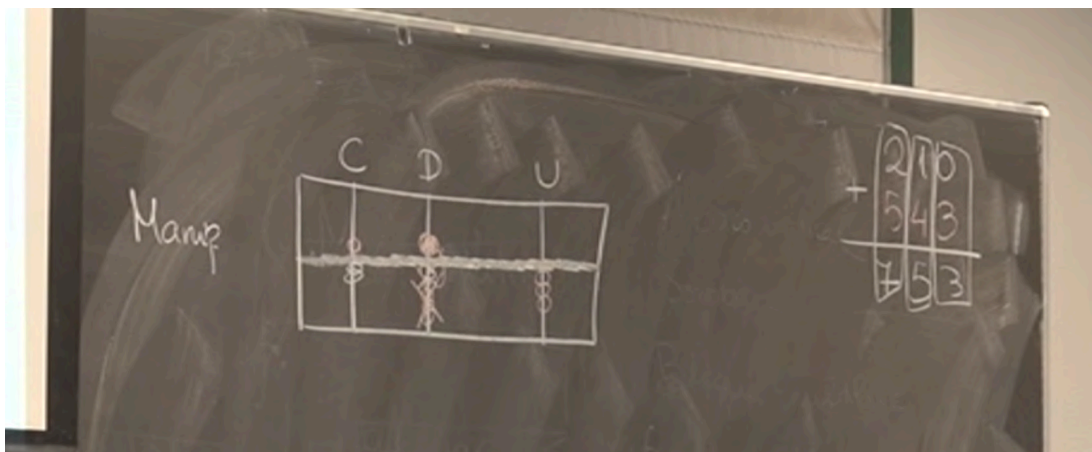
Entonces, [representa ahora el resultado en la suma con el algoritmo tradicional de forma simbólico-numérica a partir de lo que ha obtenido en la representación con el sorobán] me quedan 5 y 2, 7, aquí me quedan 5, y aquí me quedaban 3.

C8-3.3. Realiza la suma en el registro de representación simbólico-numérico, empleando el algoritmo tradicional de la suma en vertical.

No ha sido detectado por ningún formador.

Entonces, si yo lo represento así y voy sumando por columnas, tal cual he ido haciendo en el ábaco, tengo 0 unidades y 3 unidades, 3 unidades, 1 unidad y 4 unidades, 5 unidades, perdón, decenas, 2 centenas y 5 centenas, 7 centenas.

Vertical, lo he colocado vertical por parecerme a la estructura del ábaco, ¿no?, para tener en cuenta la «posicionalidad», ¿vale?, del sistema.



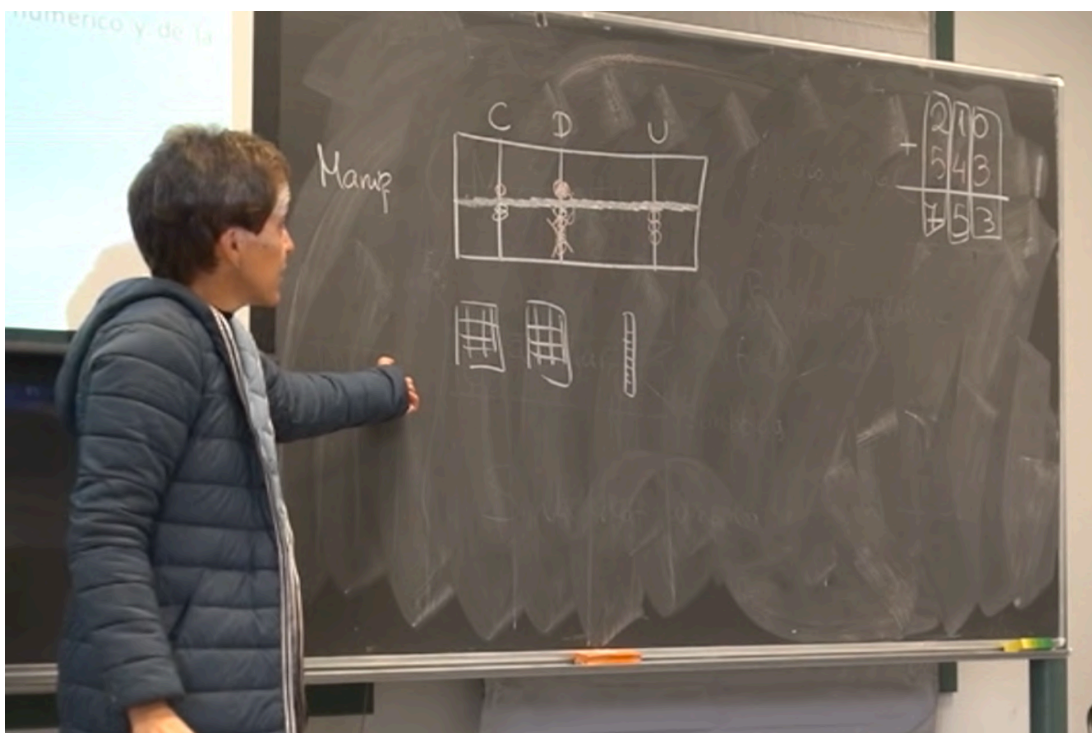
Entonces, he traducido al simbólico lo que he hecho aquí manipulativamente al escribir en simbólico en columnas y represento con cada columna cada una de estas [señala las varillas del sorobán de la pizarra]. Y luego, la escritura, sí que tengo que tener en cuenta que estos son 5 [señala las decenas de la suma en simbólico] con lo cual van arriba [en el sorobán] y esto son 7 [señala las centenas de la suma en simbólico], pues son 5 y 2 [en el sorobán], ¿vale?

C9-3.3. Hace ver la correspondencia que hay entre el registro de representación manipulativo, el sorobán y el simbólico-numérico, indicando que cada columna de la suma en la forma simbólica se corresponde con una varilla del ábaco y que ha colocado de forma vertical la suma para parecerse a la estructura del ábaco, teniendo así en cuenta la «posicionalidad» del sistema.

- M11.1-3.3. Dice que lo coloca de forma vertical [la suma] para parecerse a la estructura del ábaco y ver la correspondencia entre las dos maneras, realizando la traducción entre ambas maneras de representación [E, 2].
 - M11.1-3.3(I)1. En realidad, lo coloca de forma vertical porque es como lo colocamos normalmente. De hecho, muchos chinos usan el ábaco en posición horizontal [con las varillas de forma horizontal] porque de ese modo las bolas no se caen y lo pueden manejar con el pulgar y el índice. Ella lo coloca verticalmente [la forma simbólica] porque dentro de la tarea tienen que ver la correspondencia entre las dos maneras [sorobán y simbólico] [E, M].
- D2.1-3.3. Trata de conectar la escritura del algoritmo tradicional en columna, vertical, con la representación del ábaco [E, 2].

- R1.1-3.3. Está explicando la correspondencia entre la estructura del material manipulativo y la representación simbólica [de la operación] [E, 2].
 - R1.1-3.3(I)1. Cuando los niños aprenden, como primero se utiliza muchísimo el material manipulativo, si la estructura del material manipulativo se corresponde con la forma simbólica, a los niños luego no les cuesta trabajo hacer esa transcripción [I, M].
- P3.1-3.3. Está relacionando lo simbólico con lo manipulativo [E, 2].
 - P3.1-3.3(I)1. Para que los alumnos entiendan el valor del material y su relación con lo simbólico, que es con lo que están acostumbrados a trabajar [I, M].

Bloques multibase, bloques multibase, pongo aquí 210, ¿no?, que son 1 y 2 placas de 100 y 10, una decena; este es el 210.



Y ahora grupo 543; una, dos, tres, cuatro y cinco [dibuja 5 placas de 100 unidades], añado, ¿vale?, 500. 40: una, dos, tres, cuatro [barras de 10]; y 3: uno, dos y tres [unidades].

C10-3.3. Empieza a realizar la suma con los bloques multibase de forma gráfica, agrupando en columnas las placas, las barras y las unidades, respectivamente, de cada sumando.

- D3.1-3.3. Está representando con bloques de base 10 [la suma] [E, 2].
- M15.1-3.3. Coloca el material [los bloques multibase] de forma agrupada [E, 2].

- M15.1-3.3(I)1. *En este caso, simplemente hay que añadir las unidades que faltan, no hay que hacer ninguna descomposición [I, M].*
- M15.1-3.3(I)2. *Con este material, se puede juntar todo y luego organizarlo; se trata de un sistema mucho más básico que los otros que tiene. Colocar así el material es una decisión que ella toma para poder realizar el paralelismo [con los demás sistemas de representación], ya que el material [los bloques multibase] no te lo exige. En cambio, en este otro material [señala al sorobán] y en este [señala a la suma tradicional] sí es obligatorio [I, M].*
- L3.1-3.3. *Pone los bloques multibase de tal forma que los de 100 están debajo de los de 100, los de 10 están debajo de los de 10... [E, 3].*

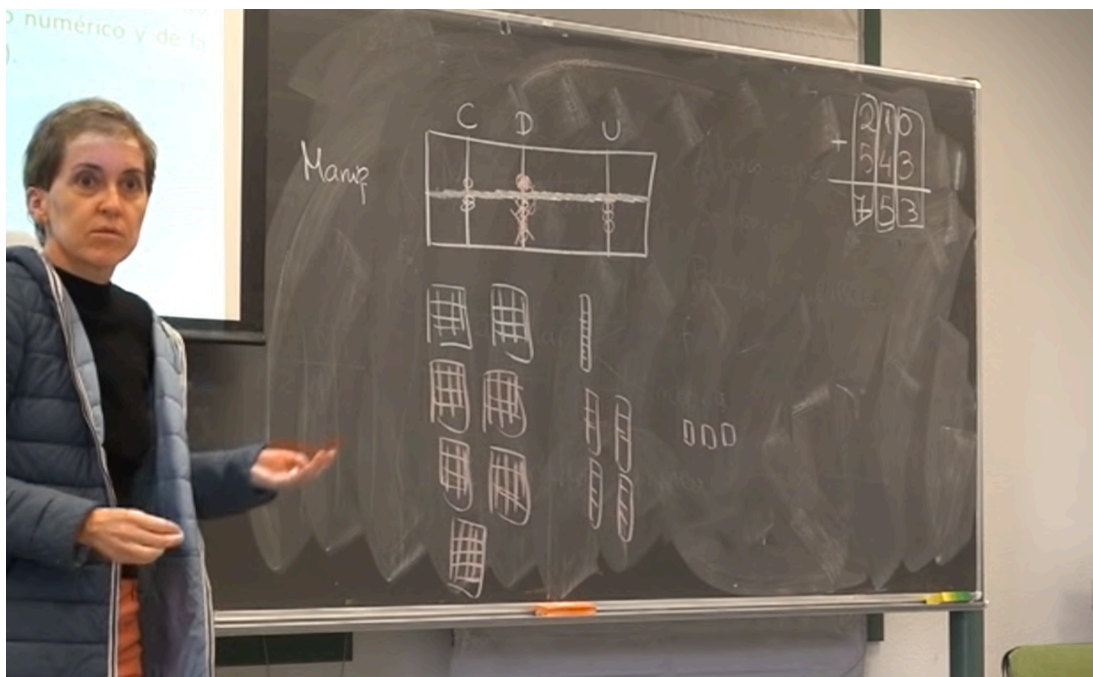
Evento 2-3.3: Avanza sin la colaboración de los alumnos.

- M14.1-3.3. *Está resolviendo ella el ejercicio sin que los alumnos le vayan diciendo lo que tiene que hacer [E, D].*
- D3.2-3.3. *Está dando menos margen a que participen los alumnos [E, D].*
 - D3.2-3.3(I)1. *Porque el ejercicio es demasiado sencillo para que los alumnos tengan algo que decir [I, M].*

Y ahora lo pongo todo junto. ¿Vale?

Evento 3-3.3: Indica que pone todo junto, las placas, las barras y las unidades de ambos sumandos con los bloques multibase.

- M16.1-3.3. *Dice que lo pone todo junto [las placas, barras y unidades de los bloques multibase] [E, M].*



Y digo: «aquí tengo 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 [placas de 100]», ¿necesito agrupar? [Rodea con una línea todas las placas de 100].

A: No.

F: No necesito agrupar. Aquí tengo 1, 2, 3, 4, 5, 6, 5, ¿necesito agrupar estos 5 de alguna manera? [Rodea con una línea todas las barras de 10]. No porque es base 10. Y aquí tengo 3, ¿vale?

C11-3.3. Pregunta si necesita agrupar a la hora de juntar las centenas, las decenas y las unidades de ambos sumandos, haciendo ver que no porque están trabajando en base 10.

- P4.2-3.3. Está haciendo hincapié en que en la suma realizada no es necesario agrupar [E, 2].

Evento 4-3.3: Rodea en la pizarra las placas de 100 de ambos sumandos y, por otro lado, las barras de 10 de ambos sumandos.

- L3.2-3.3. Hace un círculo a los bloques de 100, a los de 10..., llegando así al 753 [I, M].
- M17.1-3.3. Deja esos 3 [las 3 unidades] sin rodear [E, M].

Evento 5-3.3: Trabaja de izquierda a derecha con los bloques multibase.

- D4.2-3.3. Trabaja de izquierda a derecha con los bloques en base 10 [E, M].
 - D4.2-3.3(I)1. Trabajar de izquierda a derecha con los bloques en base 10 podría suponer un problema si hay que hacer reagrupamientos [I, M].

O sea, que me vuelve a salir 2, 4, 6, 7 [centenas; señala la suma en simbólico], 2, 4, 5 [decenas], 5 [señala la suma en simbólico] y 3. Y veo la conexión de uno con otro, ¿vale?

C12-3.3. Hace ver la correspondencia que hay entre los bloques multibase y el registro de representación simbólico-numérico.

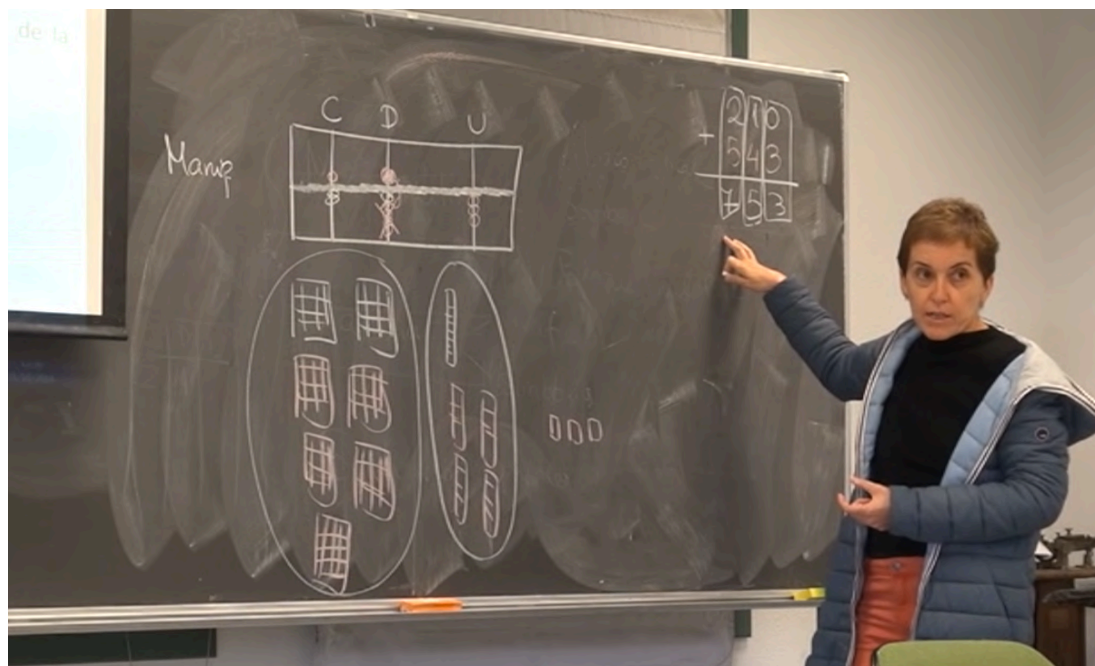
- D4.1-3.3. Conecta la representación de los bloques en base 10 con el algoritmo vertical [E, 3].
- P4.1-3.3. Está haciendo la traducción entre el [registro] simbólico y el manipulativo con bloques multibase [E, 3].
- J3.1-3.3. Relaciona, en esta parte de la explicación, la operación, la parte más simbólica del algoritmo, con la parte visual [E, 2].

¿Está claro hasta aquí?

A: Sí, eso sí.

Evento 6-3.3: Pregunta si está claro lo que han hecho hasta el momento.

- M18.1-3.3. Pregunta si está claro lo que han hecho [E, D].
- J3.2-3.3. Pregunta a los alumnos, después de cada explicación, si lo han entendido, si hay dudas [E, D].

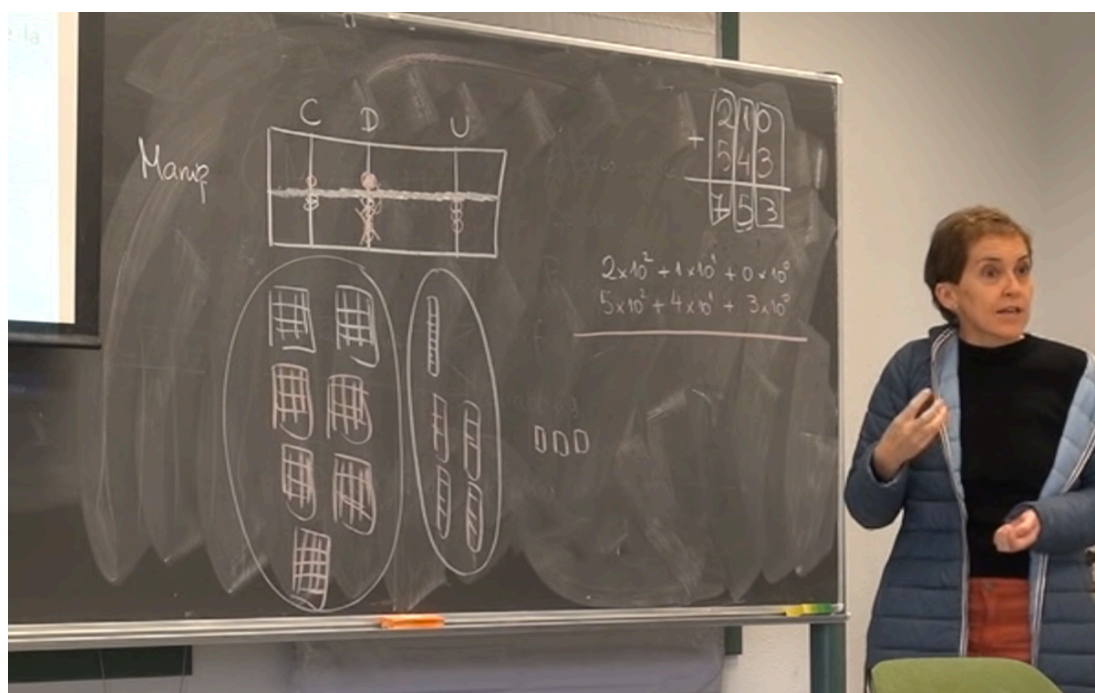


F: El que quiera escribirlo simbólico-numérico de otra manera en la que se vea la «posicionalidad» del sistema, podría escribirlo de la siguiente forma:

$2 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 0 \times 10^0$, ese es el primer sumando; segundo sumando, $5 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 3 \times 10^0$; y sumo.

C13-3.3. *Escribe los sumandos con expresiones polinómicas de potencias de 10, haciendo ver que se trata de otra forma de realizar la suma dentro del registro de representación simbólico-numérico en la que se ve la «posicionalidad» del sistema.*

- L4.1-3.3. Realiza la suma empleando el sistema numérico decimal con las potencias de 10 [E, 2].
 - L4.1-3.3(I)1. Porque quiere que los alumnos asocien la suma que se hace normalmente con el algoritmo con el sistema numérico decimal con las potencias de 10 [I, M].
- D5.1-3.3. Está haciendo un algoritmo de suma polinómica, de agrupación polinómica [E, 2].
- P5.1-3.3. Está explicando cómo resolver la suma, recalando el valor posicional de cada cifra en nuestro sistema de numeración [E, 2].



Y ahora, al sumar, utilizo la propiedad conmutativa, para colocar los sumandos en el orden que quiero, y asociativa, para ir organizando, ¿vale? O sea, que este [señala 5×10^2] —que, si lo coloco seguido, estaría aquí el cuarto [señala detrás de 0×10^0]— lo quiero colocar el segundo para agruparlo con este [señala 2×10^2], este [señala 4×10^1] —que estaría el quinto [señala detrás de 0×10^0]— lo coloco el

tercero para agruparlo con este [señala 1×10^1], y este [señala 3×10^0] lo agrupo con este [señala 0×10^0]. Y ahora, al agrupar, ya me quedan 5 y 2, propiedad distributiva, 7×10^2 más, 4 y 1, 5×10^1 más, 0 y 3, 3×10^0 . Pero ahí estoy utilizando la asociatividad de la suma, la conmutatividad de la suma y la distributiva de la suma y el producto de números enteros, ¿vale?

C14-3.3. Indica que para realizar la suma utiliza la propiedad conmutativa de la suma, la propiedad asociativa de la suma y la propiedad distributiva de la suma y el producto de números enteros.

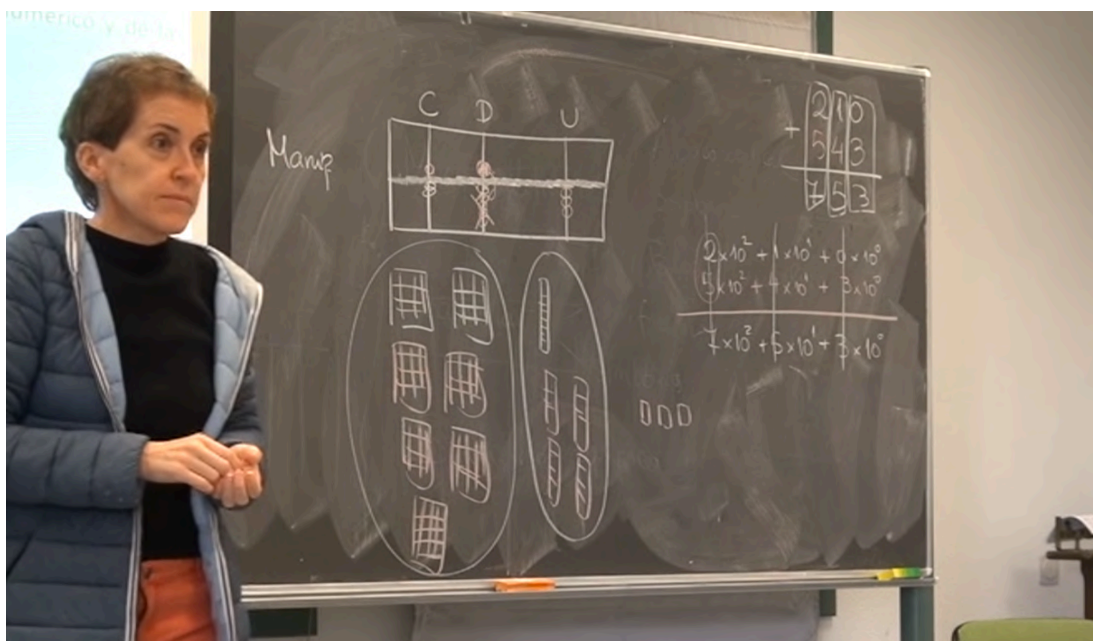
- M20.1-3.3. Está remarcando a los alumnos las propiedades que están empleando: la conmutativa, la asociativa y la [distributiva] de la suma respecto del producto [E, 3].
 - M20.1-3.3(I)1. Para justificar el porqué de la escritura [del algoritmo tradicional de la suma] [I, M].
 - M20.1-3.3(I)2. Se trata de propiedades que son tan evidentes para los alumnos que ni se dan cuenta de que están ahí detrás [I, M].
- L4.2-3.3. Hace alusión a la propiedad conmutativa y a la asociativa [E, 2].
 - L4.2-3.3(I)1. Para que los alumnos sepan realmente por qué se puede hacer esa suma, que sería lo que los alumnos entenderían como sacar factor común [I, M].

Pero si lo coloco así, veo esto, esto y eso [señala los coeficientes que acompañan a 10^2 , 10^1 y 10^0], que es lo mismo que esto, esto y eso [señala el 7, 5 y 3 del resultado de la suma en la forma simbólico-numérica], que es lo mismo que esto, esto y esto [señala los bloques multibase en la pizarra] y que es lo mismo que 1, 2 y 3 varillas [señala las varillas del sorobán en la pizarra].

C15-3.3. Hace ver las correspondencias que hay entre el registro de representación simbólico-numérico con expresiones polinomiales y el resto de registros ya representados: la suma simbólica tradicional, los bloques multibase y el sorobán.

- P6.1-3.3. Está relacionando los cuatro métodos con los que ha realizado la misma suma, haciendo ver que se obtiene el mismo resultado [E, 3].
- J4.4-3.3. Remarca la correspondencia entre las tres [E, 2].
- M22.1-3.3. Hace el paralelismo [E, 2].

¿Está claro hasta aquí?



A: Sí.

F: Ahora, ¿qué diferencia hay entre esto y la siguiente suma que me plantean ahí [en el PDF proyectado en la pantalla]? $316 + 429$.

C16-3.3. Plantea una secuenciación al proponer ahora una suma en la que hay que hacer reagrupamientos: $316 + 429$.

- M23.1-3.3. Plantea una secuenciación: primero pone un caso, lo explica, ve cómo se hace y realiza el paralelismo [entre los distintos sistemas de representación], y ahora es cuando al sumar van a aparecer potencias que antes no había [E, 3].
 - M23.1-3.3(I)1. Ahora empieza a funcionar el sistema de numeración, se condiciona el sistema de numeración a la técnica de la suma y es cuando va a haber que redistribuir las potencias [I, M].
- D6.1-3.3. Pregunta qué diferencia hay con la siguiente [E, 1].
- J4.2-3.3. Pregunta por el cambio [E, 1].

A: Que me paso de unidades y tengo que pasar a las decenas.

F: Que cuando agrupo aquí, por ejemplo [bloques multibase], o cuando agrupo aquí [sorobán], o cuando agrupo aquí [expresiones de sumas y productos de potencias de 10], aquí aparecen más de 10 [señala al 3 de 3×10^1]. En algún sitio aparecen más de 10, por ejemplo, cuando tengo 9 unidades y 6 unidades, aquí aparecerían 15 fichitas pequeñas [bloques multibase], aquí tendría que representar 15 [sorobán] y aquí aparecería 15×10^0 . Pero como estamos en base 10, no puedo

dejarlo así, tengo que agrupar, tengo que agrupar. Entonces, agrupo 10 y dejo 5, y las 10 que agrupo las paso al siguiente valor, es decir, pego 10 fichas y construyo una barra [bloques multibase], agrupo 10 y me sale otra bola aquí en el ábaco, aquí abajo [parte baja de la varilla de las decenas], o agrupo 10 y me sale uno más aquí [en 5×10^1] y aquí [en 3×10^0] dejo las que se quedaban sueltas, las 5, ¿vale? O sea, que la única diferencia es que aquí, después de representar cada cantidad y de ir poniendo por orden el valor de cada una, tengo que agrupar porque en algunos sitios tengo 10 o más, ¿vale? Es la única diferencia.

C17-3.3. Hace ver que en la nueva suma aparecen más de 10 unidades al sumar, por lo que hay que reagrupar al estar en base 10, explicándolo en cada registro de representación plasmado en la pizarra.

- L5.1-3.3. *Hace ver las diferencias entre las dos sumas, en una no se pasa de 10 ningún dígito y en otra sí se pasa y tiene que transformar el número [E, 2].*
- R2.1-3.3. *Explica otra forma, remarcando mucho sus características [E, 1].*
 - R2.1-3.3(I)1. *Para que los alumnos no tengan confusiones, para que tengan las cosas claras [I, D].*
- P7.1-3.3. *Está explicando que en esta suma hay que hacer agrupamientos en las unidades [E, 2].*
 - P7.1-3.3(I)1. *Para ver el significado que tiene lo que los alumnos conocen como «llevarse una» [I, M].*
- D6.2-3.3. *Hace ver que en el siguiente ejemplo ya hay que hacer reagrupamientos [E, 2].*
- M25.1-3.3. *Indica que ahora hay que agrupar [E, 2].*
 - M25.1-3.3(I)1. *Trata de que los alumnos entiendan cómo funciona el sistema y también pretende que sepan cómo tratar esto luego en primaria; trata de justificar por qué lo hacemos así [la suma tradicional] [I, M].*
 - M25.1-3.3(I)2. *La expresión coloquial que empleamos [cuando agrupamos] es la de «me llevo» [I, M].*
- J4.3-3.3. *Hace ver que [la suma] incluye llevadas [E, 2].*

Evento 7-3.3: Eleva el volumen de la voz cuando dice «agrupar».

- J4.1-3.3. *Remarca lo importante con la voz [E, D].*

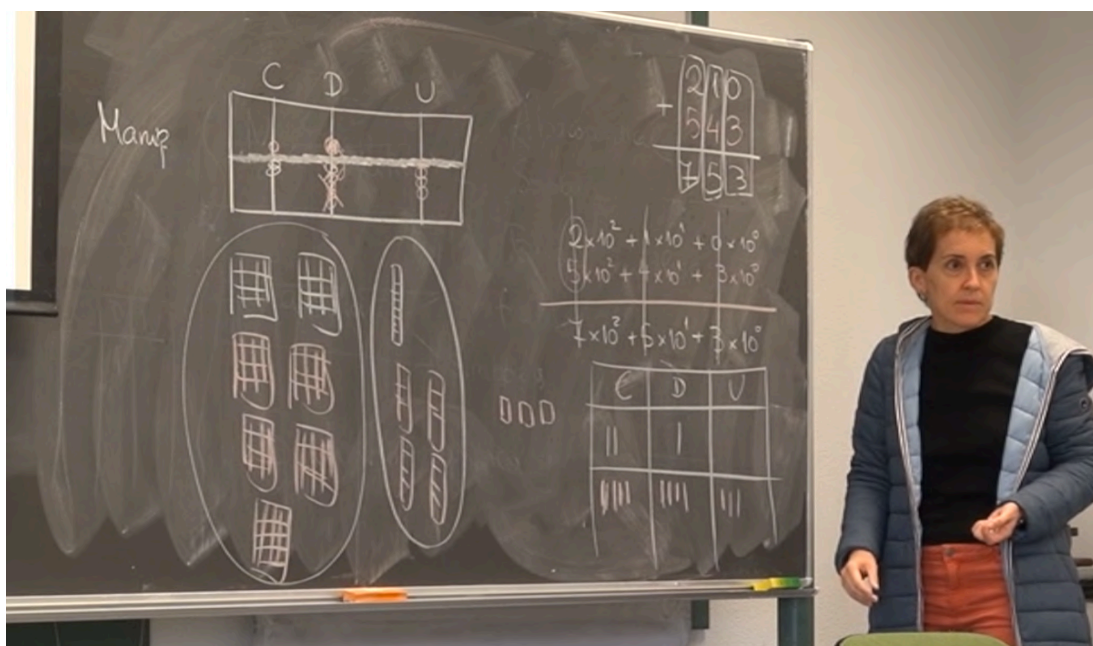
Y ahora, si quisiéramos representar esto en formato tabla, como tenía Martín, ¿no? ¿Cuántas columnas pondré yo en la tabla?, ¿qué me pide el cuerpo? Tengo que dibujar una tabla, ¿vale?, vamos a dibujar una tabla [comienza a dibujarla en la pizarra], con filas y columnas, ¿cuántas columnas pongo?

A: Tres.

F: Tres, ¿por qué tres?

A: Centenas, decenas y unidades.

F: Unidades, decenas y centenas, ¿vale? Y entonces, represento el primer número, 210: 1, 2, 1, eso es 210 [pone dos rayas en la primera casilla de las centenas y una en la primera de las decenas]. Represento el segundo número, 500: 1, 2, 3, 4, 5; 40: 1..., bueno, en rosa, ya puestos..., 1, 2, 3, 4, 5; 40: 1, 2, 3, 4; y 3: 1, 2, 3. Y agrupo: ¿cuántas unidades tengo al final?, 3, ¿cuántas decenas tengo al final?, 5, ¿cuántas centenas tengo al final?, 7, fin.



Este sistema de representación es icónico-gráfico porque he representado aquí las cantidades con palitos, pero tiene una estructura especial porque está en una tabla, ¿vale? Entonces, vamos a decir que es un sistema de representación tabular-gráfico.

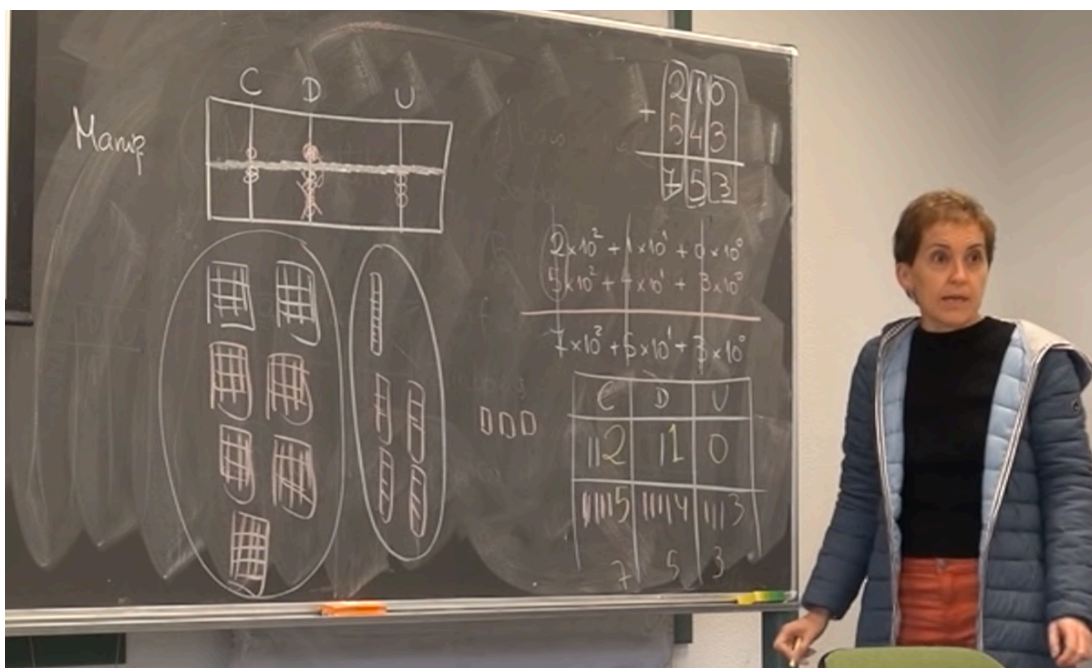
C18-3.3. Representa la primera suma con una tabla, con ayuda de un alumno, haciendo ver que se trata de un registro de representación tabular-gráfico: tabular, por haber empleado la estructura de una tabla, y gráfico, por haber representado las cantidades con palitos o rayas.

- M28.1-3.3. *Presenta un formato de tabla que ella ha decidido con barrotes [E, 2].*
 - M28.1-3.3(I)1. *Se puede hacer con barrotes o con cualquier otro elemento, pero parece complicado que la tabla que presenta surja de manera natural si la única instrucción es «haced una tabla» [I, M].*
- D8.1-3.3. *Está analizando una forma de representar la información de la suma en una tabla [E, 2].*
- L6.1-3.3. *Está explicando a los alumnos el nombre de un sistema de representación en forma tabular [E, 2].*

Evento 8-3.3: Emplea tizas de colores al dibujar la tabla.

- M29.1-3.3. *Usa tizas de colores [E, D].*

Si en vez de poner aquí gráficos, yo hubiera dicho: «oye, mira, no me lío con los gráficos, ya puestos, como ya controlo mejor los símbolos, pues voy a poner aquí 210 y aquí abajo voy a poner 543 y luego ya sumo: 4 y 1, 5; 5 y 2, 7; 3 y 0, 3», ¿vale?



Sería tabular, tiene una estructura tabular, no es puramente simbólico-numérico, tiene una estructura tabular, pero con números dentro, tabular-numérico, ¿vale?

C19-3.3. Representa de nuevo la primera suma en la tabla, haciendo ver que en esta ocasión se trata de un registro de representación tabular-numérico: tabular,

por haber empleado la estructura de una tabla, y numérico, por haber representado las cantidades con símbolos.

- M31.1-3.3. Está explicando la tabla que los alumnos tenían que haber hecho [E, 2].
 - M31.1-3.3(I)1. Porque la consigna que dio al principio no contaba con suficientes indicaciones, lo cual didácticamente era correcto; por lo tanto, ahora ha tenido que proporcionar la tabla ella, lo cual es suficiente para que estos alumnos entiendan lo que se ha hecho [I, M].
- D8.2-3.3. Está analizando una segunda forma de representar la información de la suma en una tabla [E, 2].
- L6.2-3.3. Está explicando a los alumnos el nombre de un segundo sistema de representación en forma tabular [E, 2].

C20-3.3. Mantiene plasmados en paralelo los cinco registros de representación que ha empleado para realizar la suma.

No ha sido detectado por ningún formador.

Entonces, yo voy pasando de lo más concreto, que sería: «mi madre me ha dado 316 euros y mi abuela 429, ¿cuántos euros tengo en total?», después paso a manipular, con ábacos verticales, con ábacos japoneses, con bloques multibase..., y cuando interiorizo bien eso, digo: «ostras, venga, lo voy a poner en una tabla gráfica y voy a indicar lo que me indica cada varilla o lo que me indica cada agrupamiento de los bloques multibase, que es posición, en las columnas de una tabla, y ahí voy a poder marcarlo con símbolos». Esta tabla con símbolos se llama tablero de posición, porque tengo las posiciones indicadas —unidades, decenas y centenas—, y es uno de los recursos que más utilizan en el método famoso este Singapur, que habréis visto o habréis oído hablar de él, ¿vale? Entonces, ¿qué están haciendo?, están haciendo una transición de los más concreto, pasando por lo manipulativo, hacia lo abstracto, que sería..., esto es lo más abstracto [señala las expresiones de sumas y productos de potencias de 10] y esto es lo abstracto que se trabaja en primaria [señala la suma hecha en el registro de representación simbólico-numérico], ¿vale? Pero no trabajan directamente con esto, vamos pasando..., concreto, concreto, concreto, concreto [de forma manipulativa], voy intentando abstraer un poco, pero tengo mis gráficos que me ayudan a visualizar

lo que estoy haciendo [de forma tabular], y finalmente mi objetivo es escribirlo simbólico-numéricamente, de forma abstracta, ya al final.

C21-3.3. Pone de manifiesto la secuenciación planteada: se parte de lo más concreto, que sería el problema dado en su contexto; luego se pasa a manipular con ábacos verticales, con ábacos japoneses y con bloques multibase; después se hace la suma en una tabla gráfica y luego en una numérica, las cuales se denominan tableros de posición; y finalmente se llega a lo más abstracto, que sería la suma simbólica con expresiones polinomiales o, en primaria, la suma simbólica tradicional, siendo el objetivo escribir finalmente el proceso de forma abstracta.

- M32.1-3.3. Está explicando la progresión didáctica, partiendo de los euros, de lo concreto, y siguiendo con lo manipulativo para llegar a lo abstracto, o sea, su objetivo como maestros [E, 3].
 - M32.1-3.3(I)1. Se trata ya de una indicación, de una progresión, de índole didáctica que les servirá a los alumnos en su práctica fuera [en primaria] para que sus futuros alumnos aprendan lo trabajado. Establecer una progresión adecuada es algo que a los docentes nos preocupa mucho, la cual no siempre va de lo fácil a lo difícil, a veces tienes que presentar cosas difíciles para generar desequilibrios para que los alumnos tengan que actuar. En este caso, para entender eso [señala el algoritmo simbólico tradicional de la suma], es necesario conocer todo lo planteado en la pizarra [I, M].
 - M32.1-3.3(I)2. En realidad, los euros se pueden considerar como un sistema simbólico; si tienes 300, no tienes 300 moneditas de 1 euro, tienes un billete de 100 y demás, es decir, al final también el euro se puede componer con un sistema, por lo que no es más manipulativo que esto [señala a los bloques multibase], aunque es verdad que en este caso se enmarca en un contexto, pero no por ello es más manipulativo [I, M].
 - M32.1-3.3(I)3. Los ábacos [señala el sorobán] no están pensados para enseñar ni para aprender, sino para trabajar, para obtener resultados, al igual que esto [el algoritmo tradicional de la suma]. En cambio, esto [señala los bloques multibase] sí está pensado para aprender, por lo que es más manipulativo y concreto que el ábaco. Esto otro [señala el tablero de posición] estaría en un punto intermedio [I, M].

- L7.1-3.3. Está explicando a los alumnos la secuencia didáctica que sería idónea para explicar las sumas, utilizando materiales para finalmente llegar a realizar la suma numéricamente [E, 3].
 - L7.1-3.3(I)1. Pretende que cuando los alumnos expliquen las sumas en primaria no empleen directamente el algoritmo, sino los materiales vistos, si es que disponen de ellos, ya que lo considera importante [I, M].
- P8.1-3.3. Está relacionando todas las situaciones trabajadas en esta clase, explicando la traducción o transición desde lo contextual, desde una situación cotidiana, hacia un lenguaje manipulativo, simbólico, tabular... [E, 3].
- D9.1-3.3. Está describiendo el proceso o la secuencia de la suma, de lo concreto, pasando por lo pictórico, hasta lo abstracto [E, 3].
 - D9.1-3.3(I)1. Para que los alumnos tengan una visión global de la ruta de aprendizaje de un alumno [de primaria] cuando está aprendiendo a sumar en primaria [I, M].
- R3.1-3.3. Está poniendo de manifiesto el proceso de aprendizaje de los niños en primaria [E, 2].
- J5.1-3.3. Recapitula hablando del trabajo en primaria con el problema concreto, de su formalización para visualizarlo y del porqué de la tabla [E, 1].
 - J5.1-3.3(I)1. Para dar un sentido a lo que se ha hecho en clase y a lo que les va a pedir en el examen [I, D].

C22-3.3. Menciona el método Singapur, haciendo ver que la secuenciación planteada, yendo de lo concreto a lo abstracto, es característica de dicho método.

- J5.2-3.3. Menciona el método Singapur [E, 2].
- P9.2-3.3. Hace referencia al método Singapur [E, 2].
 - P9.2-3.3(I)1. Para que les suene y sepan cómo se trabaja en ese método, cuál de los escenarios vistos se asemeja más a dicho método [I, M].

¿Cómo habéis trabajado mayoritariamente vosotros en primaria cuando estabais haciendo sumas de este estilo? ¿Desde aquí [señala lo manipulativo] o desde el final [señala lo simbólico-numérico]?

A: Desde el final...

A: Yo con las de centenas, decenas y unidades, las cajas...

- F: Las cajas estas también os suenan, los tableros de posición, pero ¿y qué poníais en las posiciones, palitos o los números ya?
- A: Los números directamente.
- F: Los números directamente, o sea, que estabais trabajando la fase inicial, de la suma, la estabais trabajando directamente con lo simbólico, que es la fase final, ¿lo veis?
- A: Jolín, sí.
- F: Vale, pues ala, ya está.

C23-3.3. Pregunta a los alumnos cómo han trabajado la suma en primaria, haciendo ver que es habitual trabajar la fase inicial de la representación de la suma directamente con lo simbólico, que es la fase final.

- L9.1(i)-3.3. Evento implícito en el comentario [E, 1].
Transcripción del vídeo: ¿Cómo habéis trabajado mayoritariamente vosotros en primaria cuando estabais haciendo sumas de este estilo?
 - L9.1(i)-3.3(I)1. A lo que irá es a que posiblemente no hayan trabajado nunca o muy poco con materiales [I, M].
- P9.1-3.3. Pregunta a los alumnos qué métodos que les enseñaron [en primaria, para sumar] [E, 1].
 - P9.1-3.3(I)1. Para ver si fue la mejor forma o no y si se puede mejorar el modo que les enseñaron [para sumar] [I, M].
- M35.1-3.3. Está preguntando a los alumnos cómo han pasado todo este proceso [el aprendizaje de la suma en primaria] [E, 1].
 - M35.1-3.3(I)1. Para que vean si las dificultades que tuvieron [en primaria] las podrían resolver luego [como maestros] por otras vías [I, M].
 - M35.1-3.3(I)2. El problema que puede surgir aquí es que puede haber un alumno que diga: «pues yo lo aprendí así y lo aprendí bien». Y es verdad, pasa; de hecho, muchas veces los que mejor van no son los que más juego te dan aquí [I, M].
- J6.1-3.3. Pregunta a los alumnos cómo lo han trabajado hasta ahora [en primaria] [E, 1].
 - J6.1-3.3(I)1. Relacionar lo visto en clase con su práctica [cuando estudiaron en primaria] es muy importante porque se le da al alumno una visión muy distinta y se le hace ver lo que trabajarán luego con los alumnos [como maestros] y todo lo que hay detrás [I, M].

ANEXO 19

Listado de *call-outs* con elementos fundamentales

VÍDEO 1

Fragmento 1

C1-1.1. Presenta el material manipulativo con el que los alumnos van a trabajar: palillos y cintas elásticas.

- Material manipulativo.
- Palillos y cintas elásticas.

C2-1.1. Establece una restricción en el uso del material: la cantidad de palillos es fija, mientras que la cantidad de cintas elásticas no lo es.

- Cantidad de palillos fija.
- Cantidad de cintas elásticas no fija.

C3-1.1. Contextualiza la actividad planteando que hay que comprobar si la cantidad de palillos que hay en cierta caja es la que se indica en la misma.

- Contexto.
- Comprobar si en la caja hay la cantidad de palillos indicada.

C4-1.1. Hace alusión a conocimientos previos de Matemáticas de Ciencias Sociales: el contraste de hipótesis.

- Conocimientos de matemáticas de Ciencias Sociales.
- Contraste de hipótesis.

C5-1.1. Introduce la actividad a realizar: estimar y contar cuántos palillos hay repartidos en clase.

- Estimar
- Contar.

C6-1.1. Presenta un libro que utilizan en Estados Unidos para formar a profesores de primaria y que contiene muchas actividades para llevar al aula.

- Formar a profesores de primaria.
- Actividades para llevar al aula.

C7-1.1. Menciona el contenido matemático que van a trabajar: el número.

- El número.

C8-1.1. Enuncia el objetivo de la actividad: entender el desarrollo de la escritura de los números en nuestro sistema de numeración.

- Escritura de los números.
- Sistema de numeración.

C9-1.1. Establece la primera instrucción de la consigna: organizar los palillos, empleando las cintas elásticas si son de ayuda, para saber cuántos hay de un vistazo.

- Organizar.
- Saber cuántos hay de un vistazo.

C10-1.1. Establece la segunda instrucción de la consigna: reflexionar sobre si hay una correspondencia entre los grupos de palillos hechos y la escritura de los números que representan la cantidad total de palillos.

- Correspondencia.
- Grupos y escritura.

C11-1.1. Establece la tercera instrucción de la consigna: juntar los palillos cada dos grupos y saber cuántos hay en total.

- Juntar.
- Saber cuántos hay en total.

C12-1.1. Establece la cuarta instrucción de la consigna: juntar todos los palillos de la clase y saber cuántos hay en total de una forma ágil, sin tener que contarlos de nuevo.

- Juntar.
- Saber cuántos hay en total sin contarlos de nuevo.

C13-1.1. Induce a la reflexión sobre la correspondencia entre la escritura de los números y los grupos de palillos haciendo ver que 72 se escribe con un 7 y un 2.

- Correspondencia entre escritura y grupos.
- El 72 como 7 y 2.

Fragmento 2

C1-1.2. Pregunta a los alumnos qué agrupaciones habían hecho antes de juntarse los dos grupos de alumnos y si han tenido que llegar a algún acuerdo al juntar los palillos de ambos grupos, incidiendo así en la primera y en la tercera instrucción de la consigna.

- Agrupaciones iniciales.
- Llegar a un acuerdo.

C2-1.2. Hace ver, tras preguntar cuántos palillos tienen las agrupaciones con gomas amarillas, que no es útil que con un mismo color se hagan agrupaciones de 15 o 20 palillos indistintamente, agrupaciones distintas, ya que de ese modo no se puede saber cuántos palillos hay visualmente, incidiendo así en la primera instrucción de la consigna.

- No es útil hacer agrupaciones distintas con gomas de un mismo color.
- Se tiene que poder saber cuántos palillos hay visualmente.

C3-1.2. Hace ver que en la consigna no se establecía la restricción de que no se pudieran quitar las gomas al juntarse dos grupos de alumnos, es decir, se permitía reorganizar las agrupaciones de palillos.

- Se pueden quitar las gomas o reorganizar las agrupaciones.

C4-1.2. Hace hincapié en la correspondencia entre la escritura del número y los grupos de palillos que habían hecho, planteando si el 8 y el 5 del 85 estaban representados en las agrupaciones, incidiendo así en la segunda instrucción de la consigna.

- Correspondencia.
- Escritura y grupos.

C5-1.2. Pregunta a los alumnos si ha ayudado que cada grupo hiciera agrupaciones distintas a la hora de ponerlas en común, incidiendo así en la tercera instrucción de la consigna.

- Agrupaciones distintas.
- Poner las agrupaciones en común (argumentación).

Fragmento 3

C1-1.3. Pregunta a un grupo de alumnos cuántos palillos tenía antes de juntarse con otro grupo, y escribe en la pizarra que son 87, incidiendo así en la primera instrucción de la consigna.

- Cuántos palillos.
- Escribe 87.

C2-1.3. Dice que emplea la escritura estándar de nuestro sistema de numeración en nuestro contexto.

- Escritura en nuestro sistema de numeración.

C3-1.3. Pregunta cómo puede escribir en la pizarra 3 grupos de 20, que es la agrupación que había hecho un grupo de alumnos.

- Cómo escribir 3 grupos de 20.

C4-1.3. Indica que el color de las gomas no sirve para representar agrupaciones, tras preguntar a los alumnos si todos habían usado gomas rosas para los grupos de 20, haciendo ver que no todos los alumnos han empleado el mismo color para la misma agrupación.

- El color no sirve para representar las agrupaciones.
- No todos los alumnos han empleado el mismo color para la misma agrupación.

C5-1.3. Pregunta si escribe 9 grupos de 3 o 3 grupos de 9.

- Escribir 9 grupos de 3 o 3 grupos de 9.

C6-1.3. Escribe en la pizarra la descomposición que han hecho los alumnos del número 87, empleando grupos de 20 y de 9.

- Descomponer un número o hacer grupos.
- Grupos de 20 y de 9.

C7-1.3. Escribe en la pizarra la descomposición que han hecho los alumnos del número 90, empleando grupos de 20 y de 10.

- Descomponer un número o hacer grupos.
- Grupos de 20 y de 10.

C8-1.3. Hace ver a los alumnos que no han encontrado una correspondencia entre cómo se escribe la cantidad total con símbolos numéricos y los grupos de palillos hechos, incidiendo así en la segunda instrucción de la consigna.

- Correspondencia.
- Número escrito, o cantidad con símbolos numéricos, y los grupos.

C9-1.3. Indica que emplea operaciones para conectar lo manipulativo y lo simbólico-numérico.

- Operaciones.
- Correspondencia entre lo manipulativo y lo simbólico-numérico.

C10-1.3. Pregunta por el consenso al que han llegado los dos grupos que han puesto en común sus agrupaciones al juntar sus palillos, incidiendo así en la tercera instrucción de la consigna.

- Consenso (argumentación).

C11-1.3. Explica que los 7 grupos de 20 que han hecho los alumnos provienen de la suma de los 4 grupos que tenían unos y de los 3 que tenían otros, empleando la propiedad distributiva.

- Propiedad distributiva.
- Suma de grupos de 20 o iguales.

C12-1.3. Pregunta por qué no han separado un grupo de 10 en uno de 9 y uno de 1, a raíz de la estrategia seguida por los alumnos, y considera las diferentes respuestas que dan los estudiantes.

- Usar grupos de 9.

C13-1.3. Pregunta por qué es más fácil sumar de 10 en 10 que de 9 en 9, haciendo ver que tiene relación con el sistema de numeración al que estamos acostumbrados.

- Más fácil sumar de 10 en 10.
- Sistema de numeración.

C14-1.3. Pregunta a una alumna qué quiere decir con «sumar de 1 en 1», pidiendo que elabore la respuesta porque están en clase de matemáticas.

- Qué quiere decir «sumar de 1 en 1».
- Necesidad de argumentar en matemáticas.

C15-1.3. Transforma los grupos planteados por los alumnos para llegar a tener 3 grupos de 10, es decir, llega a 3×10 a partir de 1×10 y de transformar 3×9 en $2 \times 10 + 7$.

- Transforma las agrupaciones para obtener grupos de 10.

C16-1.3. Hace ver que no hay relación entre los grupos hechos y la escritura del número tras haber juntado todos los palillos de la clase, incidiendo así en la segunda y en la cuarta instrucción de la consigna.

- Ausencia de correspondencia entre los grupos y la escritura del número.

VÍDEO 2

C1-2. Plantea el ejercicio a realizar: pasar de base 16 a base 2 directamente, sin pasar por base 10.

- De base 16 a base 2.
- Directamente o sin pasar por base 10.

C2-2. Escribe en la pizarra la resolución propuesta por un alumno, que consiste en contar en base 16 hasta B6 y contar en base 2 y ver qué número corresponde en base 2 a B6 en base 16.

- Contar en las dos bases.
- Correspondencia.

C3-2. Hace ver que la primera estrategia de resolución propuesta por un alumno es válida, pero también que es larga y que no es «eficaz», por lo que hay que buscar otra estrategia.

- Estrategia de resolución válida.
- Estrategia de resolución larga o no «eficaz».

C4-2. Escribe en la pizarra otra resolución propuesta por otra alumna, que consiste en dividir B6 entre 2 en base 16.

- Dividir entre 2 en base 16.

C5-2. Hace ver que la segunda estrategia de resolución propuesta por una alumna es válida, pero también que es compleja.

- Estrategia de resolución válida.
- Estrategia de resolución compleja.

C6-2. Plantea en la pizarra otra resolución propuesta por otro alumno, que consiste en pasar de base 16 a base 2 fijándose en que 16 es 2^4 , escribiendo la expresión de partida, que sería la expresión polinomial de B6 en base 16, así como el inicio y el final de la expresión polinomial en base 2 a la que hay que llegar.

- Relación entre la base 16 y la base 2: 16 como 2^4 .

- Escritura del número en base 16 y en base 2.

C7-2. Transforma 16^1 y 16^0 en potencias de 2.

- Transformar 16 en potencias de 2.

C8-2. Escribe la expresión polinomial de 11 en base 2 a partir de los coeficientes que un alumno va diciendo.

- Expresión polinomial.
- Escritura en base 2.

C9-2. Explica cómo se realiza la potencia de una potencia, haciendo ver que $(2^4)^1$ es $2 \times 2 \times 2 \times 2$ y que, como está elevado a 1, se copia una sola vez.

- Potencia de una potencia.

C10-2. Escribe la expresión polinomial de 6 en base 2 a partir de los coeficientes que un alumno va diciendo.

- Expresión polinomial.
- Escritura en base 2.

C11-2. Hace ver, mediante preguntas a los alumnos, que $(2^4)^0$ es 1 y que en base 2 es 2^0 .

- 1 como 2^0 .

C12-2. Establece una correspondencia entre el último coeficiente del desarrollo polinómico que está haciendo y el del último de la expresión polinómica final del número en base 2, así como entre el primer coeficiente de ambas expresiones.

- Correspondencia entre coeficientes.

C13-2. Establece una correspondencia entre las varillas del ábaco y la escritura numérica o potencias en base 2.

- Correspondencia entre el ábaco y la escritura.

C14-2. Explica a los alumnos cómo multiplicar potencias.

- Multiplicar potencias.

C15-2. Desarrolla la expresión $[1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0] \times 2^4$ para llegar a la expresión $1 \times 2^7 + 0 \times 2^6 + 1 \times 2^5 + 1 \times 2^4$, haciendo ver que son equivalentes y empleando la propiedad distributiva.

- Correspondencia entre expresiones.
- Propiedad distributiva.

C16-2. Indica que ha utilizado la propiedad distributiva para llegar a la expresión obtenida.

- Indica que ha utilizado la propiedad distributiva.

C17-2. Desarrolla la expresión $[1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0] \times 2^0$ para llegar a la expresión $1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0$, haciendo ver que son equivalentes y empleando la propiedad distributiva.

- Correspondencia entre expresiones.
- Propiedad distributiva.

C18-2. Pregunta a un alumno qué dificultad tuvo al resolver el ejercicio a través del procedimiento planteado en relación con el valor de la posición del 2^3 , haciendo ver que, si no hay un valor para el 2^3 , se pone un 0.

- Dificultad con el valor de la posición del 2^3 .
- Escribir un 0.

C19-2. Hace ver que el número 6 se puede escribir como $1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0$, pero también como $0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0$ si se quiere indicar la ausencia de grupos de 2^3 .

- Correspondencia entre dos expresiones.
- Expresar la ausencia de grupos de una potencia.

C20-2. Explica la receta que podría dar un *youtuber* como David Calle para pasar de B6 en base 16 a base 2, que consistiría en escribir el 11 de 11×16^1 y el 6 del 6×16^0 en base 2, ambos con cuatro dígitos al ser 16 igual a 2^4 , y juntarlo.

- Receta.

- Escribir en base 2 los coeficientes de la expresión en base 16.

C21-2. Hace ver que a ella no le vale la receta porque los maestros tienen que entender el proceso para transformar un número de una base a otra.

- Los maestros tienen que entender el proceso.

C22-2. Pregunta si se puede pasar de base 16 a base 2 sin pasar por base 10 y por qué se puede.

- ¿Se puede pasar de base 16 a base 2 sin pasar por base 10?
- ¿Por qué se puede pasar de base 16 a base 2 sin pasar por base 10?

C23-2. Plantea una variación en el ejercicio que consiste en partir de la base 15 para llegar a la base 2, incidiendo en que no habría un algoritmo para pasar directamente de una base a la otra.

- Partir de la base 15.
- Algoritmo para pasar directamente de una base a otra.

C24-2. Hace explícito que solamente se puede pasar directamente de una base a otra cuando una base es potencia de la otra, como de base 16 a base 2, ya que 16 es 2^4 .

- Paso directo cuando una base es potencia de la otra.

VÍDEO 3

Fragmento 1

C1-3.1. Plantea a los alumnos que tienen que representar las cuatro operaciones del ejercicio, las sumas y las restas, en el registro de representación manipulativo con el ábaco vertical, con el sorobán y con los bloques multibase, comparando cada dos, viendo cómo se traduce de una forma a otra.

- Registro de representación manipulativo o ábaco, sorobán y bloques multibase.
- Comparar la representación cada dos materiales.

C2-3.1. Explica que no quiere que los alumnos representen el resultado, sino que representen el proceso de la suma.

- Proceso.

C3-3.1. Indica que los alumnos han de basarse en la definición conjuntista de la suma.

- Definición conjuntista de la suma.

C4-3.1. Dice a los alumnos que tienen que representar el proceso de las sumas y de las restas en el registro de representación simbólico-numérico.

- Registro de representación simbólico-numérico.

C5-3.1. Pide a los alumnos que realicen una representación tabular de las operaciones como ellos quieran, teniendo en cuenta que puede tener características gráficas o características simbólicas.

- Representación tabular.
- Características gráficas o simbólicas.

C6-3.1. Dice que en el examen final de la asignatura va a pedir que representen el proceso de respuesta con los materiales manipulativos de forma gráfica.

- Representación gráfica de la respuesta con el material manipulativo.

C7-3.1. Indica que las operaciones se presentan en un orden concreto y pide que las hagan en ese orden.

- Orden de las operaciones.

Fragmento 2

C1-3.2. Pregunta varias veces cómo pueden representar el número 700 de otra forma en el ábaco, haciendo ver que tenían 704, que ella ha quitado 4 unidades y que ahora tienen que representar el número 700 de otro modo para poder quitar otra cuenta y restar 5 unidades.

- Representar el número de otra forma.
- Quitar una cuenta más.

C2-3.2. Pregunta a los alumnos cómo pueden conseguir decenas, señalando la varilla de las decenas en el ábaco, tratando de guiarlos en el proceso de reescritura del 700.

- Obtener decenas.

C3-3.2. Hace ver que, tras representar de otra forma el número 700 en el ábaco, ahora tienen $6 \times 10^2 + 10 \times 10^1$, conectando así el registro de representación manipulativo del ábaco con el simbólico-numérico en forma de expresión polinomial con potencias de base 10.

- Registro simbólico-numérico o expresión polinomial.
- Correspondencia.

C4-3.2. Pregunta a los alumnos, señalando la varilla del ábaco de las unidades, cómo representar el número 700 de otra forma para obtener cuentas en esa varilla y poder terminar la resta.

- Obtener unidades.

C5-3.2. Pide a los alumnos que le expliquen el proceso que han seguido para reescribir el número 700, preguntando si han agrupado o si han desagrupado.

- Proceso.
- Agrupar, desagrupar.

C6-3.2. Explica a los alumnos que han desagrupado una centena en diez decenas y una decena en diez unidades.

- Desagrupar centenas y decenas.

C7-3.2. Pide a una alumna que explique cómo hace la resta en papel, haciendo ver que cuando hagan la representación en el registro simbólico-numérico tienen que conectarlo con el ábaco.

- Conexión entre el registro simbólico-numérico y el manipulativo.

Fragmento 3

C1-3.3. Plantea en la pizarra la suma « $210 + 543$ », haciendo ver que la ha representado con símbolos.

- Suma con símbolos.

C2-3.3. Empieza a realizar la suma con el sorobán, indicando que lo hace gráficamente.

- Representación gráfica de la respuesta con el sorobán.

C3-3.3. Señala en la pizarra la correspondencia de cada varilla del sorobán con las unidades, las decenas y las centenas, respectivamente.

- Correspondencia entre las varillas y cada unidad o valor de posición.

C4-3.3. Representa gráficamente el número 210 mientras explica cómo hacerlo mediante preguntas a una alumna.

- Representar el número.

C5-3.3. Indica que ahora va a sumar 543, a añadir 543 unidades, entendiendo la suma como la unión de conjuntos.

- Sumar como añadir.
- Unión de conjuntos.

C6-3.3. Hace ver, cuando suma las decenas de 543, que hay que hacer una agrupación auxiliar, representando un grupo de 5 decenas con una cuenta en la parte de arriba, diciendo que las cuentas de arriba valen 5 unidades del valor de la varilla.

- Agrupamiento auxiliar.
- Las cuentas de arriba valen 5.

C7-3.3. Hace ver, cuando suma las centenas de 543, que se puede poner directamente una cuenta de arriba o ir sumando las centenas de una en una, siendo procesos equivalentes.

- Una cuenta de arriba, cuentas de una en una.
- Procesos equivalentes.

C8-3.3. Realiza la suma en el registro de representación simbólico-numérico, empleando el algoritmo tradicional de la suma en vertical.

- Registro de representación simbólico-numérico.
- Algoritmo tradicional.

C9-3.3. Hace ver la correspondencia que hay entre el registro de representación manipulativo, el sorobán y el simbólico-numérico, indicando que cada columna de la suma en la forma simbólica se corresponde con una varilla del ábaco y que ha colocado de forma vertical la suma para parecerse a la estructura del ábaco, teniendo así en cuenta la «posicionalidad» del sistema.

- Correspondencia entre la representación manipulativa y la simbólico-numérica.
- «Posicionalidad».

C10-3.3. Empieza a realizar la suma con los bloques multibase de forma gráfica, agrupando en columnas las placas, las barras y las unidades, respectivamente, de cada sumando.

- Bloques multibase.
- Agrupación.

C11-3.3. Pregunta si necesita agrupar a la hora de juntar las centenas, las decenas y las unidades de ambos sumandos, haciendo ver que no porque están trabajando en base 10.

- No es necesario agrupar.
- Base 10.

C12-3.3. Hace ver la correspondencia que hay entre los bloques multibase y el registro de representación simbólico-numérico.

- Correspondencia entre los bloques multibase y el registro de representación simbólico-numérico.

C13-3.3. Escribe los sumandos con expresiones polinómicas de potencias de 10, haciendo ver que se trata de otra forma de realizar la suma dentro del registro de representación simbólico-numérico en la que se ve la «posicionalidad» del sistema.

- Expresiones polinómicas o potencias de 10.
- «Posicionalidad».

C14-3.3. Indica que para realizar la suma utiliza la propiedad conmutativa de la suma, la propiedad asociativa de la suma y la propiedad distributiva de la suma y el producto de números enteros.

- Propiedad conmutativa, asociativa y distributiva o propiedades de la suma y el producto.

C15-3.3. Hace ver las correspondencias que hay entre el registro de representación simbólico-numérico con expresiones polinomiales y el resto de registros ya representados: la suma simbólica tradicional, los bloques multibase y el sorobán.

- Correspondencia.
- Cuatro registros de representación.

C16-3.3. Plantea una secuenciación al proponer ahora una suma en la que hay que hacer reagrupamientos: $316 + 429$.

- Secuenciación.
- Reagrupamientos.

C17-3.3. Hace ver que en la nueva suma aparecen más de 10 unidades al sumar, por lo que hay que reagrupar al estar en base 10, explicándolo en cada registro de representación plasmado en la pizarra.

- Reagrupar.
- Distintos registros de representación.

C18-3.3. Representa la primera suma con una tabla, con ayuda de un alumno, haciendo ver que se trata de un registro de representación tabular-gráfico: tabular, por haber empleado la estructura de una tabla, y gráfico, por haber representado las cantidades con palitos o rayas.

- Tabular-gráfico.

C19-3.3. Representa de nuevo la primera suma en la tabla, haciendo ver que en esta ocasión se trata de un registro de representación tabular-numérico: tabular, por haber empleado la estructura de una tabla, y numérico, por haber representado las cantidades con símbolos.

- Tabular-numérico.

C20-3.3. Mantiene plasmados en paralelo los cinco registros de representación que ha empleado para realizar la suma.

- Registros de representación en paralelo.

C21-3.3. Pone de manifiesto la secuenciación planteada: se parte de lo más concreto, que sería el problema dado en su contexto; luego se pasa a manipular con ábacos verticales, con ábacos japoneses y con bloques multibase; después se hace la suma en una tabla gráfica y luego en una numérica, las cuales se denominan tableros de posición; y finalmente se llega a lo más abstracto, que sería la suma simbólica con expresiones polinomiales o, en primaria, la suma simbólica tradicional, siendo el objetivo escribir finalmente el proceso de forma abstracta.

- Secuenciación.
- Se inicia con lo concreto y se termina con lo abstracto.

C22-3.3. Menciona el método Singapur, haciendo ver que la secuenciación planteada, yendo de lo concreto a lo abstracto, es característica de dicho método.

- La secuenciación planteada es propia del método Singapur.

C23-3.3. Pregunta a los alumnos cómo han trabajado la suma en primaria, haciendo ver que es habitual trabajar la fase inicial de la representación de la suma directamente con lo simbólico, que es la fase final.

- Fase final de la representación de la suma como fase inicial.

ANEXO 20

Instrucciones para los participantes en la fase 2

INSTRUCCIONES

A continuación, voy a leerte las instrucciones que tienes que seguir para la realización de esta fase del proceso de recogida de datos (fase 2). Si te surge alguna duda mientras te las leo, puedes interrumpirme y preguntarme lo que estimes oportuno.

Hasta el momento, ya has completado la fase inicial —en la que cumplimentaste un cuestionario *online* con preguntas relativas a tu formación académica y a tu experiencia docente—, así como la fase 1 —en la cual visionaste y analizaste un conjunto de vídeos—. Así pues, la fase que vamos a llevar a cabo hoy es la fase 2.

La tarea que ahora se te va a encomendar es similar a la que tuviste que realizar en la fase previa, para lo cual vas a volver a visionar el mismo conjunto de tres vídeos, que se corresponden con fragmentos de diferentes clases de matemáticas y su didáctica impartidas por una formadora en la Universidad a futuros maestros de Educación Primaria.

Durante el visionado de cada vídeo, tendrás que llevar a cabo de forma oral las siguientes dos **TAREAS**:

1.º Identificar todas las situaciones o acciones relativas a la práctica de enseñanza de la formadora. No se trata de mencionar todo lo que notes que hace la formadora —por ejemplo, no hay que indicar que se ha rascado un brazo, aunque lo veas—, sino de identificar todos los hechos o aspectos que pienses que tienen relación con su práctica de enseñanza. Los hechos que señales pueden ser relevantes, importantes, inusuales en una clase..., así como ser habituales, no tener demasiada relevancia... Lo que importa es que se centren en la práctica de enseñanza de la formadora y que menciones todos los que detectes, es decir, que no omitas ninguno que percibas. Cabe decir que se puede hacer alusión a los alumnos del vídeo, pero siempre con el foco puesto en la acción de la formadora que haya provocado la intervención de los alumnos, con la intención de identificar o interpretar un evento sobre su práctica de enseñanza.

2.º Interpretar las situaciones o acciones que hayas detectado. Es decir, se pretende que interpretes los aspectos relativos a la práctica de enseñanza de la formadora que hayas identificado: por qué crees que han tenido lugar, por qué piensas que han ocurrido como han sucedido, cuál crees que es la intención de la formadora con su acción, etcétera. Se trata de que des explicaciones y de que reflexiones en torno a los eventos que hayas descrito. Dichas interpretaciones han de ir dirigidas a entender mejor la práctica de enseñanza de la formadora y tienes que procurar que sean lo más completas y fundamentadas que puedas —en tu propia experiencia, en distintos marcos teóricos, etcétera—.

Es posible que identifiques eventos que quizá no puedas explicar o sobre los que no puedas reflexionar. En tal caso, simplemente indicarás lo detectado sin necesidad de interpretarlo.

Asimismo, no se te pide que propongas prácticas de enseñanza alternativas, o sea, no tienes que plantear alternativas a las acciones de la formadora del vídeo.

Hasta aquí, las instrucciones descritas son básicamente como las de la fase previa. Para la esta fase, se incluyen dos nuevas indicaciones:

a) Por un lado, *todos los eventos que identifiques, así como las interpretaciones que aportes*, además de estar relacionados con la práctica de enseñanza de la formadora, *tienen que referirse a aspectos matemáticos*, incluyendo en dicha categoría todo lo que tenga que ver tanto con las matemáticas como con la didáctica de las matemáticas. Por lo tanto, no debes mencionar los aspectos de la práctica de enseñanza de la formadora relativos a la didáctica general.

Entenderemos que un evento o una interpretación pertenece a la categoría matemática cuando menciones de forma explícita elementos matemáticos y/o didáctico-matemáticos y estos formen parte de la idea central del evento o interpretación. Por el contrario, entenderemos que pertenece a la categoría didáctica cuando no explícites elementos matemáticos ni didáctico-matemáticos, así como cuando sí los explícites pero no formen parte de la idea central del evento o de la interpretación.

Para entender mejor esta explicación, podemos analizar los siguientes ejemplos de eventos:

- i. *La formadora propone un problema en el que hay que calcular la suma de los ángulos internos de un pentágono.*
- ii. *La formadora eleva el volumen de la voz al leer el resultado de la suma.*
- iii. *La formadora plantea un ejercicio.*
- iv. *La formadora emplea el ordenador y el proyector de la clase.*

En el primer ejemplo, se incluyen elementos matemáticos que forman parte de la idea central del evento, es decir, del problema propuesto; por ello, sería un evento de la categoría matemática. En el segundo, aunque se incluye la idea de «suma», el foco se pone en que se eleva el volumen de la voz, lo cual pertenecería al ámbito de la didáctica general; por ello, sería un evento de la categoría didáctica. En el tercero, no se explicitan elementos matemáticos ni didáctico-matemáticos, aunque el ejercicio propuesto pudiera contenerlos; por ello, sería un evento de la categoría didáctica, aunque se podría haber situado en la matemática si se hubieran explicitado las características matemáticas del ejercicio. Y en el cuarto, no hay elementos matemáticos ni didáctico-matemáticos, poniéndose el foco en aspectos de didáctica general; por ende, sería un evento de la categoría didáctica.

Así pues, los eventos y las interpretaciones pueden ser clasificados en una de estas dos categorías: o en la matemática o en la didáctica. En esta ocasión, se te pide que te centres en aportar eventos e interpretaciones pertenecientes a la categoría matemática. En este sentido, has de ser cuidadoso con el modo en el que enuncies los eventos e interpretaciones que plantees, explicitando los elementos matemáticos y/o didáctico-matemáticos oportunos.

b) Por otro lado, a la hora de analizar el vídeo, puedes hacerlo apoyándote en las siguientes categorías (con el foco en la categoría matemática): ***contenidos***, ***objetivos***, ***tareas*** e ***interacciones con los estudiantes***. Dichas categorías las podemos entender en líneas generales del siguiente modo:

- *Contenidos*: ideas, conceptos y procedimientos matemáticos, así como aspectos metamatemáticos, asociados al tema de la lección.
- *Objetivos*: propósitos que estarían detrás de las acciones o decisiones del docente.
- *Tareas*: características de los problemas o ejercicios planteados por el docente.
- *Interacciones con los estudiantes*: retroalimentación del docente hacia los alumnos.

Es posible que, a lo largo de los vídeos, puedas detectar eventos relativos a la práctica de enseñanza de la formadora, en la categoría matemática, que no tengan que ver con estas categorías. En tal caso, también has de indicar dichos eventos y tratar de interpretarlos. Las cuatro categorías propuestas no pretenden ser exhaustivas ni suponer una limitación en la amplitud de los aspectos que puedas detectar e interpretar, sino un apoyo para guiar tu atención al analizar los vídeos.

Para llevar a cabo las dos tareas que se acaban de describir, además de atender a todos los matices planteados para identificar eventos e interpretarlos, tendrás que seguir las siguientes **INDICACIONES**:

1. Los comentarios los irás haciendo durante el visionado de los vídeos. Antes de realizar cualquier comentario, deberás indicarme que pare la reproducción del vídeo. Podrás hacer tantos comentarios como quieras, por lo que será posible parar el vídeo tantas veces como sea necesario. Cada vez que se pause la reproducción, puedes tomarte el tiempo que necesites para organizar tus ideas y, posteriormente, indicar el evento detectado y, si es posible, la interpretación sobre el mismo.

2. Además, no se podrá retroceder en el vídeo, es decir, no se podrá ver más de una vez ninguna parte de la grabación.

Por otro lado, al realizar tus comentarios sobre la práctica de enseñanza de la formadora, has de tener presentes las siguientes **CONSIDERACIONES**:

1. No se trata de juzgar o criticar el trabajo que realiza la docente, sino de reflexionar en torno a sus acciones, lo cual no quiere decir que no se puedan indicar, por ejemplo, errores por parte de la formadora, siempre que se trate de explicarlos y se haga sin juzgarla o criticarla.

2. Asumimos que la profesora actúa siempre en beneficio de todos sus estudiantes.

3. Los vídeos que se proponen no pretenden demostrar ni la mejor ni la peor práctica de enseñanza, sino que suponen ejemplos de clases reales que han de servir para poder reflexionar sobre la práctica de enseñanza mostrada.

Por último, te comunico que vas a visionar un total de tres vídeos —los mismos que en la fase 1—, cuyas duraciones aproximadas son de 13, 14 y 21 minutos, respectivamente, y que durante la reproducción de los vídeos yo me voy a limitar a escuchar tus comentarios, no voy a mantener una conversación contigo sobre el contenido del vídeo ni voy a hacerte preguntas sobre tus observaciones. Recuerda también que esta sesión está siendo grabada en vídeo para poder estudiar luego toda la información que aportes en tus análisis.

Así pues, estas son las instrucciones para poder realizar la fase 2. ¿Tienes alguna duda o cuestión al respecto? En la siguiente página, se plantean las principales ideas de las instrucciones de forma resumida para que las tengas presentes durante toda la realización de esta fase.

RESUMEN DE LAS INSTRUCCIONES

- *¿Dónde debes poner la atención al visionar los vídeos?*

En la ***práctica de enseñanza de la formadora***. Puedes hacer comentarios sobre los alumnos, pero solo si el foco está puesto en la formadora.

- *¿Qué tareas debes realizar durante la reproducción de los vídeos?*

1.º Identificar ***eventos*** sobre la práctica de enseñanza de la formadora. No has de omitir ningún evento que detectes sobre su práctica de enseñanza.

2.º Dar ***interpretaciones*** sobre los eventos detectados. Las explicaciones o reflexiones que propongamos deben ser lo más completas y fundamentadas que puedas.

- *¿Qué tipo de eventos e interpretaciones sobre la práctica de enseñanza de la formadora tienes que aportar y cómo?*

Has de centrarte en los ***eventos e interpretaciones de la categoría matemática***, para lo cual debes ***explicitar los elementos matemáticos y/o didáctico-matemáticos*** presentes en los eventos que detectes y en las interpretaciones que des.

- *¿En qué categorías te puedes apoyar para centrar tu atención en lo matemático y en la práctica de enseñanza de la formadora?*

Puedes apoyarte en las siguientes categorías: ***contenidos, objetivos, tareas e interacciones con los alumnos***. Han de servir para guiar tu atención, pero no han de limitar los eventos e interpretaciones que puedas aportar, por lo que puedes prestar atención también a otros aspectos, siempre desde el punto de vista de la categoría matemática.

- *¿Qué tienes que hacer antes de realizar un comentario?*

Debes ***pedir que se detenga la reproducción del vídeo*** para que puedas hacer tu comentario pausadamente y sin que el vídeo siga avanzando.

- *¿Qué no tienes que hacer durante el visionado de los vídeos?*

Realizar comentarios relativos a la categoría didáctica (didáctica general); proponer alternativas sobre la práctica de enseñanza de la formadora; realizar críticas o juicios sobre la práctica de enseñanza de la formadora.

ANEXO 21

Transcripción de los comentarios de Marcos en la fase 2

Nota: El texto presentado entre corchetes en la transcripción se corresponde con información incluida por el investigador.

TRANSCRIPCIÓN DEL VÍDEO 1

Fragmento 1

[F = Formadora del vídeo]. [Comentarios de Marcos presentados en recuadros].

F: Bueno, entonces os voy a dar el guion y empezáis a trabajar y, al final, los últimos 15 minutos, hacemos la puesta en común. El guion de la actividad aparece aquí en el campus, pone la fecha, ¿vale?, «actividad para la sesión del 19 de septiembre». Lo voy a leer porque está en inglés, por si alguno tuviera alguna dificultad, lo leo y os ponéis a trabajar, ¿vale?

Todo el mundo en la mesa tiene un montón de palillos y varias cintas de estas, ¿no?, elásticas. Si alguien necesita más cintas me las pide, palillos no, son los que os he puesto, ¿vale?, es con lo que tenéis que trabajar.

Comentario 1: Hay una cantidad de palillos... El número de palillos está fijado, con lo cual imagino que ese dato es relevante, y ya ha avisado de que sí que pueden pedir gomas; ha avisado de que el número de palillos es fijo. Yo imagino, es una interpretación, que está fijo porque la cantidad es relevante para lo que va a estudiar. Podría ser fijo y al azar, pero yo creo que está prefijado de una manera consciente, lo que se llama en Teoría de Situaciones «variable didáctica», porque interesará que dicha cantidad cumpla una serie de condiciones para hacer emerger ciertas estrategias. Lo que no ha dicho es si todos tienen la misma cantidad, pero eso ya lo veremos.

El problema es que yo he comprado una caja de palillos en Supeco y resulta que mis compañeros lo compran en Mercadona y me dicen que las cajas de palillos que ponen 800 palillos del Mercadona traen más y que les sale a cuenta, y que cuando van a comprar materiales —porque a veces tenemos que comprar nosotros los materiales— pues que merece la pena. Yo no pude ir a Mercadona, fui a Supeco, pone que son 800, pero no sé si me han timado o no me han timado.

Entonces, para hacer un control de calidad, hacer una estimación, que luego, bueno, los que hayáis hecho Matemáticas de Ciencias Sociales pues sabéis hacer un contraste de hipótesis y tal, pero bueno, lo primero que tengo que hacer es hacer una estimación de cuántos hay, ¿no? Entonces, los he repartido para no contarlos yo y la idea es ver cuántos hay.

Comentario 2: Intenta dar una contextualización que se justifique por los conocimientos pragmáticos del mundo [se ríe], es decir, no tiene una razón matemática el hecho de saber los palillos. Ha buscado un contexto que, como son alumnos ya adultos, tiene menos relevancia, pero es verdad que, efectivamente, un contexto... Bueno, aunque diga 800, me interesa elegir las cajas que cuando cuento tienen más... Digamos que da una justificación extramatemática en este caso, una justificación del conocimiento del mundo..., de por qué me interesa contarlos. Eso forma parte de contextualizar las cosas y de que los objetivos sean asumidos por el alumno, es decir, le hace partícipe... Repito, en este caso, que son alumnos universitarios, yo creo que no está de más, pero tampoco es muy relevante. Desde luego, sí que sería muy importante cuando los niños son más pequeños. Además, esta tarea se puede llevar a cabo en primaria, es decir, está reproduciendo una tarea que se puede hacer con niños de primaria con futuros maestros. De alguna manera les va a hacer pasar por procesos similares a los que van a pasar los alumnos... Y creo que lo que ha hecho es repartir todos los palillos de la caja. Ella ha dicho una cantidad, dice que son 800, pero como los ha repartido, creo que es una cantidad que no juega un papel importante en las estrategias que los alumnos van a utilizar. Ah, y eso sí, ahora les dice que no cuenten, les dice que estimen, les da una tarea distinta que tradicionalmente no está muy presente, es decir, los alumnos de matemáticas generalmente piensan que hay que obtener los resultados precisos, cuando en la realidad en casi ningún caso los resultados son precisos. Entonces, ella lo fuerza aquí: «quiero que estiméis primero». Incluso les hace un recordatorio, para aquellos que han trabajado matemáticas en Bachillerato de Ciencias Sociales, para que recuerden o movilicen un poco dentro de su historia académica conocimientos que ya les suenan. Es relevante lo de estimar porque no es una actividad frecuente.

Entonces, el guion de la actividad, tal y como aparece aquí... [espera a que cargue el ordenador]. Aquí está el guion. Esta actividad —esperad que la amplíe un poco— está escaneada de un libro muy bueno que utilizan en los últimos años en Estados Unidos para formar profesores de primaria. Lo bueno del libro es que,

además de los contenidos teóricos, más de la mitad del libro son actividades para llevar al aula-taller como estamos haciendo aquí, ¿vale? Entonces, una de las actividades iniciales para el trabajo con el número, que es con lo que estamos empezando nosotros, es esta de los palillos, ¿vale?

Comentario 3: Bueno, hace referencia a un material, en este caso un libro, y de alguna manera les incita diciéndoles que es muy bueno y demás, incluso les va a proponer una actividad de ese libro, con la intención de que se animen a usar el libro. No sé si es algo didáctico general, pero como en este caso se trata de la enseñanza de las matemáticas...

Entonces, aquí la pregunta es «cuántos», cuántos palillos, ¿no?, que es lo que os he preguntado a vosotros, ¿no?, cuántos. Entonces, cada grupo participando en esta actividad tiene un montón de palillos y luego tiene algo para atarlos, ¿no?, *rubber bands*, pues cintas de estas elásticas. Los materiales ya los tenéis. El objetivo de la actividad es ayudarlos a entender el desarrollo de la escritura de los números tal y como los utilizamos nosotros en nuestro sistema de numeración, ¿vale?

Comentario 4: Hace explícito el objetivo. Esto sí que es una diferencia entre una actividad hecha con alumnos nuestra y una actividad hecha en primaria. En primaria, los niños se podrían enfrentar a este tipo de trabajo y no declararles cuál es el objetivo matemático que está detrás, sino simplemente ver si emergen las estrategias que justifiquen ese contenido, ¿no? Aquí, sin embargo, sí se lo explicita; estamos hablando de alumnos que son futuros maestros. Entonces, les dice que el objetivo de esto es que ellos reflexionen o constaten cómo son las características de los sistemas de numeración.

Entonces, primero, organiza los palillos de forma que visualmente puedas ver más o menos cuántos hay; usa las bandas elásticas, si te ayudan, para organizarlos de manera que así, de un vistazo, puedas decir cuántos tienes,

Comentario 5: Ella ya les da indicaciones de que agrupen; es una decisión didáctica. Está claro que el agrupamiento es una buena decisión en estos casos. Ella no quiere dejar que eso surja en un entorno adidáctico, sino que ella lo explicita: «haced grupos de manera que los grupos nos permitan de un vistazo saber cuántos hay». Es más, los anima a que se ayuden con la goma; la goma es una explicitación del agrupamiento, luego podemos hablar de palillos y gomas... Ella ya propone que hagan agrupamientos, porque puede

haber algún grupo suicida que se ponga a contar de uno en uno sin ningún tipo de organización; es una decisión que ella ha tomado. Estamos con alumnos que van a ser maestros, entonces se les dice más o menos cómo tienen que trabajar.

primero los cuentas, lo organizas, piensas cómo organizarlo, pero la cosa es que la organización que tú tengas en la mesa te permita de un vistazo recordar cuántos hay sin necesidad de haberlo apuntado, ¿no?,

Comentario 6: Fíjate en que el objetivo lo ha cambiado; el objetivo ya no es contarlos, el objetivo es organizarlos. Yo, claro, me voy mucho a la Teoría de Situaciones: mientras que en un medio puramente adidáctico, la organización es necesaria para saber cuántos y, por tanto, con decir «cuéntalos, tú verás cómo te organizas...» es suficiente, aquí no, aquí el objetivo lo ha cambiado, el objetivo ya no es saber cuántos, que es un objetivo último, sino organizarlos, y de hecho lo está diciendo: «el objetivo es que lo organicéis de manera que sepáis cuántos hay». El objetivo inicial, que era saber cuántos, ahora ha quedado en un segundo plano.

y que, si yo me paso por allí, me podáis decir: «mira, hay no sé cuántos, porque..., lo veo porque lo hemos organizado así», ¿vale? Luego, reflexiona sobre si la manera en la que lo has organizado corresponde a cómo escribirías tú luego los numerales para representar esa cantidad de palillos.

Comentario 7: Aquí da una indicación ya «de redondo y con asas» [se ríe]. Dice: «piensa si se ajusta a cómo los escribimos nosotros». Claro, nosotros los escribimos con agrupamiento decimal, base 10 y demás, decenas, centenas y demás. Aquí ya está dando una indicación muy clara de que quiere que esto tenga transcendencia en la escritura numérica. Y luego aparece también otra idea: en nuestro sistema de numeración no solo se agrupa, sino que se hacen agrupaciones de agrupaciones; el algoritmo de la numeración se basa en la idea de agrupamiento recursivo, no solo se agrupa de 10 en 10, sino que luego se agrupa de 10 en 10 los grupos de 10; de ahí salen las potencias, ¿no? Entonces, ella les está diciendo que vean si «esto se parece a esto». Esto puede provocar que algunos en los agrupamientos ya vayan pensando: «si ha dicho que reflexionemos sobre eso, pues es que algo tiene que ver y por tanto vamos a intentar...». Lo que está claro es que aquel que haga agrupamientos compatibles o que tengan cierta coordinación con el sistema de numeración, luego el conteo le será mucho más fácil; aquel que haga grupos de 17, es incuestionable que puede funcionar, pero de cara luego a leer los números como los

leemos, pues no le va a funcionar bien. En lugar de dejar esto en un medio adidáctico para que ellos lo constaten y cambien de estrategia, ella ya da la indicación. Mi interpretación es que estamos con maestros, entonces vamos a ir avanzando para que ellos entiendan cómo..., pero transponer esta actividad a niños, que se podría perfectamente, requeriría unos tratamientos sobre los objetivos distintos; pero aquí estamos con maestros.

Después, tienes que juntar tus palillos con los de un grupo de al lado, ¿vale?, por ejemplo, vosotros con vosotros y así, cada dos grupos tienen que juntar los palillos que tienen y decidir cuántos tienen en común, ¿vale?, cuántos tienen en total.

Comentario 8: Está muy claro que con este giro que tiene la actividad –porque al principio era solo cada grupo–, con el giro de compartir los palillos y sobre todo compartir los agrupamientos, prevalecen los agrupamientos que sean iguales. Será más cómodo hacer el conteo otra vez juntando los grupos con otro grupo que haya hecho grupos iguales o también compatibles, múltiplos..., que también te puede resultar útil. Pero si unos han hecho grupos de 15 y otros de 17, cuando los junten no les va a dar información. Entonces, ya le ha dado un giro, antes de empezar les ha dicho que tengan cuidado... ¿Cuál es el objetivo? Yo creo que es que el agrupamiento que hagan sea común o tenga algún tipo de relación. Y si a esto le añades que dice que pensemos en cómo eso tiene transcendencia en cómo escribimos los números, pues creo que, sin decírselo, el objetivo es que hagan grupos de 10 o grupos que sean compatibles con el sistema de numeración.

Y al final, tenemos que juntarlos todos y de una forma ágil, sin tener que volver a contarlos todos, tenemos que saber cuántos palillos hay en total en la clase repartidos, ¿vale? O sea que, primero, cada grupo tiene que saber cuántos tiene y tiene que generar una estrategia para, de manera rápida, mirar en la mesa y ver cuántos hay; después, reflexionar sobre si la manera en la que lo coloca cuando uno luego escribe, imaginaos, «tengo 72, pues cómo se escribe 72: siete, dos», pues la manera en la que lo coloco me ayuda con la escritura o no, no tiene por qué, se reflexiona un poco sobre eso; y cuando hayáis terminado esa parte, llamáis al grupo de al lado y decís: «venga, vamos a ver cuántos tenemos en total, visualmente, cómo lo organizasteis vosotros, cómo lo organicé yo, a ver cómo lo tengo», ¿vale?; y luego todos. Tenéis un cuarto de hora, ¿vale?

Fragmento 2

[F = Formadora del vídeo]. [A = Alumnos]. [Comentarios de Marcos presentados en recuadros].

F: Necesito saber si habéis tenido que llegar a algún acuerdo entre los grupos o...

A: Sí, claro, todo ha sido un consenso, todo ha sido un consenso.

F: Ah, vale, ha sido un consenso. ¿Qué acuerdo habéis tenido que...?

Comentario 1: Ella les pregunta si han llegado a un acuerdo entre los grupos, hay una interacción clara. Les dice que le expliquen cómo lo han hecho para poder obtener la cantidad entre los dos grupos. No se ve cómo ha trabajado cada grupo de manera independiente; aquí hay una dinámica de la gestión de la clase..., porque el trabajo es en grupo, pero dicho trabajo depende de lo que hagan los otros grupos, entonces no sé si ha habido algún tipo de comunicación entre los grupos o simplemente se ha pensado que quizá como 10 es la mejor solución todos los iban a hacer así sin tener que ponerse de acuerdo; sin embargo, estos sí que dicen que han llegado a un consenso, a un acuerdo. Entonces, no sé si ha habido un trabajo previo, se han juntado y han vuelto a trabajar, que es como por ejemplo se organizan las situaciones de formulación en Teoría de Situaciones, es decir, se deja que trabajen y luego se interactúa, se produce la comunicación, y si se produce un fracaso, se vuelve otra vez hacia atrás. Aquí no sé yo cómo lo han hecho, pero sí que dicen que ha habido un consenso.

A: Hemos explicado cada uno pues lo que significaba cada..., cada gomita.

Comentario 2: Me hace gracia que dicen: «lo que significaba cada gomita». Ya hay un intento de darle una entidad, es curioso. Es algo que no tenía que decir, porque es lo que decían los alumnos, pero la formadora también les dijo lo de las gomitas, les insistió bastante, y esa idea la han asumido.

F: Y, por ejemplo, ¿vosotros de cuánto en cuánto lo habíais agrupado? Eráis los de 15, 10, 5, ¿no?

A: Sí.

F: ¿Y vosotros?

A: 20, 10 y 4.

F: 20, 10 y 4.

Comentario 3: Ya estamos viendo que no están siendo decimales; 20, 15, 4...

Entonces, ¿habéis tenido que llegar a algún acuerdo alguno para reordenar?

A: No, porque nos ha venido muy bien.

F: ¿Os ha venido bien?

A: Es que hemos sido muy inteligentes cogiendo el amarillo para los grandes [se refiere a gomas elásticas de color amarillo].

F: Ahora los grandes de qué son, ¿de 20?

A: De 20 y de 15, aquí están mezclados. ¿O los tenemos que reorganizar?



F: Esto es superinteligente, ¿no? O sea, yo veo aquí..., digo: «en los amarillos, algunos tienen 20 y algunos tienen 15, búscate la vida Nuria».

A: Pero son amarillos.

Comentario 4: Aquí Nuria les está enfrentando al problema que tienen con haber cogido agrupamientos distintos. Además, han asumido cosas que en la consigna no estaba, que todos los grupos de la misma cantidad iban a ser con gomas del mismo color; que yo sepa, Nuria les dijo: «aquí tenéis gomas de colores, usadlas...». Es verdad que es una manera bastante habitual de marcar los distintos agrupamientos de forma que de un vistazo sepas qué naturaleza o qué orden tiene cada agrupamiento, al igual que en un sistema de numeración: en el nuestro se hace con la posición, en otros con el tipo de letras, etc. Y bueno, ellos lo hacen así. Lo que sí me hace gracia es que ellos están intentando defender el 15 y el 20, y Nuria es la que les dice: «vale, yo veo unos amarillos que son de 15 y otros que son de 20»; les está devolviendo el problema haciendo ver que así es un lío.

- F: Ya, pero entonces yo no sé... Yo digo: «vale, yo puedo ver 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 grupos amarillos», ¿no? Y ahora digo: «como mucho serán 160, si son todos de 20, pero... no necesariamente son 160, pueden ser menos».
- A: Bueno, pero como no lo sabes...
- F: ¿Entonces cómo sé cuántos hay?
- A: Te lo estamos diciendo, tienes que confiar en nosotros.
- F: No, en matemáticas la confianza no vale, uno tiene que...

Comentario 5: Nuria les dice que cómo lo sabemos, que el máximo serán 160 y el mínimo serán 15×8 , 120, y el chaval dice que tiene que confiar en ellos, lo cual es una respuesta muy interesante, es el «yo ya me entiendo». Sin embargo, en matemáticas necesitamos que los conocimientos sean totalmente explicitables y que no dependan de la interpretación, en este caso, de los productores del agrupamiento. Entonces, ahí Nuria pone la cara de decir: «bueno, las matemáticas no se basan en la fe, se basan en los hechos». Y aunque parezca que no, es una discusión muy matemática lo que hay detrás; «no, si ya nosotros nos aclaramos...», «sí, pero es que no te tienes que aclarar tú...»; la idea es que sea un conocimiento absolutamente explicitable y que pueda funcionar en una comunidad, que es para lo que hacemos las matemáticas.

- A: Es que no sé, no lo entiendo. ¿Lo tenemos que reorganizar?
- F: Vosotros ya sabéis cuántos palillos tenéis, pero ahora, visualmente, tenéis que poder contarme a mí cómo sabéis que hay ese número de palillos, ¿no?
- A: Ah, pues habría que... ¿Y no podemos quitar las gomas y reorganizarlo?

Comentario 6: Claro, aquí se da una cosa y es que ellos han resuelto su problema, que es saber cuántos palillos hay. El segundo objetivo que marca Nuria, el de que quede visualmente claro, para ellos es más difuso y ambiguo, e incluso es un objetivo más difícil de ver si se ha obtenido o no. Aquí Nuria piensa que no se ha obtenido, porque ella dice que no se aclara, pero ellos están muy tranquilos de que ellos saben los que hay y por tanto lo han obtenido. Esto tiene una transcendencia importante, sobre todo en Teoría de Situaciones, porque la situación tiene que sancionarse a sí misma; entonces, mientras que el objetivo de saber cuántos hay es fácilmente sancionable, se puede evaluar, el objetivo de que quede clara la distribución y me ayude a saber cuántos hay está generando problemas de materialización del objetivo. La discusión que se está dando ahí..., ya hay uno que dice: «entonces, ¿qué tenemos que...?, ¿tenemos que...?»; hay una discusión en la que Nuria

entiende que no se alcanza el objetivo, pero en la que para algunos sí que se ha alcanzado, y cuando ocurre eso no es fácil seguir [se ríe].

F: Sí, sí, sí, yo no dije que no pudierais quitar las gomas.

A: Aaaaah.

F: ¿Alguien dijo que no se podían quitar?

A: Y nosotros diciendo que no se podían quitar las gomas...

Comentario 7: Ahora ha quedado claro que ellos pueden rehacer otra vez los grupos. Esto pasa muchas veces con la negociación de la consigna, hay veces que cuando la consigna no deja claro..., sobre todo los objetivos, necesita mucha negociación, y esto es un ejemplo claro de que la ha tenido que negociar cuando la actividad no está terminada, porque esto es una primera fase de acción, pero sí está comenzada. Ahora ya han respirado: «ah, podemos rehacerlos»; vale, los van a rehacer.

F: Y una duda más. Alguno de vosotros..., por separado, ¿no?, cuando lo teníais..., habéis escrito la cantidad que teníais, ¿no? Eh, 109 teníais uno...

A: 104 y 85.

F: Por ejemplo, el 85 se escribe con un 8 y un 5. Ese 8 y ese 5, ¿estaban representados de alguna forma en...?

A: No.

Comentario 8: Va a saco [se ríe]. Ella lo dijo: «intentad ver cómo tal y cual». Han hecho caso omiso. A ver, esto es una interpretación que hago; el agrupamiento de 10, que es en el que se basa el sistema de numeración, cuando nosotros materializamos las colecciones, cuando son colecciones manipulables, no es tan útil, y me explico: es un agrupamiento relativamente pequeño. El hecho de usar 10, y eso es una reflexión matemática, viene de que tenemos 10 dedos, no viene de otra razón. Matemáticamente puede haber razones para usar un número frente a otro en dos sentidos: por un lado, el tamaño, y por otro, el número de divisores. 10 solo tiene 2 y 5, no es un gran número. 12 nos habría dado un sistema de numeración mucho más cómodo, los tercios y los cuartos serían números con parte fraccionaria finita... Con el 10, solo nos queda 2 y 5; un número tan sencillo como la tercera parte de una unidad nos genera un número que no es finito. Eso por un lado. Pero desde un punto de vista manipulable, es pequeño. De hecho, esto se ve mucho en las unidades de las magnitudes, que también van de 10 en 10, pero el uso social no lo hace de 10 en 10; usamos el metro y usamos el centímetro, el decímetro desaparece. ¿Por qué?

Porque aunque por regularidad nos interesa, a la hora de manipular es un grupo demasiado pequeño. Entonces, claro, si usáramos grupos más grandes, el sistema de numeración requeriría un símbolo para cada...; hasta 10, tenemos símbolos distintos. Entonces, cuando el agrupamiento se hace muy pequeño, el sistema se automatiza mejor, la base binaria es la más automática, no habría que saberse tablas, pero, claro, se hacen números muy grandes, cosas demasiado pesadas; si se hace muy grande, los algoritmos de cálculo serían odiosos, porque imagínate que tuviéramos que sabernos el repertorio de las tablas hasta el 20 si usáramos base 20, sería horroroso, tendría una cantidad de resultados que habría que memorizar... Entonces, bueno, el 10, que además coincide con los dedos, pues tal... Pero es verdad que, cuando se trata de colecciones manipulables, el 10 es muy pequeño, da la sensación de que no merece la pena; de hecho, no lo han hecho. Y claro, Nuria sí que quiere...: «¿y qué pasa con el 8 y el 5...». Yo creo que aquí hay una confrontación con el interés matemático de respetar el 10, porque así escribo los números, y por otro lado la comodidad o economía en la manipulación que hace que de 10 en 10 los grupos son demasiado pequeños. Pero es que lo hacemos siempre, es decir, hablamos de metros y kilómetros..., con los gramos no usamos los cambios decimales, aunque los tenemos disponibles, porque son muy pequeños... Y, claro, aquí estamos intentando hacer converger los dos intereses y, claro, surge eso. A Nuria lo único que le queda es decir: «¿y tiene relación el 8 y el 5?», y dicen: «pues no». Y ella se lo dijo, creo que era el tercer objetivo, pero ellos se han quedado con el primero, que era saber cuántos hay, han asumido el segundo, que es hacer los grupos, pero ya el tercero..., han pensado que es un lujo que no tienen que permitirse [se ríe]. Esto es una interpretación.

F: No, vale. Y vosotros, la misma pregunta con lo vuestro.

A: No.

F: No había un patrón en cómo lo habíais representado, vale, ok.

A: ¿Pero quieres que busquemos?

F: Quiero que reflexionéis sobre eso, pero ahora lo vamos a poner en común, ¿vale?

A: Vale.

F: ¿Ha sido operativo el que ellos hayan hecho 15, 10, 5... y vosotras tuvieras 20...?
¿Eso ha ayudado a la hora de ponerlo en común?

A: No, porque ahora hay que hacerlo otra vez.

F: Ahora hay que volverlo a hacer...

Comentario 9: Les quiere poner de manifiesto que ellos mismos lleguen a la idea de si les ha ayudado o no. Y creo que les ha preguntado si los han escrito de alguna manera especial o algo así, es decir, ella ya va buscando la escritura del sistema de numeración, que son tantas unidades de cada orden, que es como se escriben los números. Y ahora hay otro problema, ahora hay que reflexionar; define reflexionar... Volvemos otra vez a los objetivos... Claro, estos son adultos y tú se lo puedes plantear, pero es verdad que son objetivos bastante difusos, es decir, que es muy difícil saber si se ha alcanzado o no. Lo que pasa que la reflexión imagino que la dirigirá ella, dará pautas para hacerla.

Fragmento 3

[F = Formadora del vídeo]. [A = Alumnos]. [Comentarios de Marcos presentados en recuadros].

F: Me tenéis que decir cuántos palillos había en cada grupo inicialmente, antes de juntaros dos grupos, ¿vale? Entonces, por ejemplo, vosotros.

A: 87.

F: 87 [lo escribe en la pizarra]. Estamos de acuerdo, yo utilizo la escritura estándar que vosotros habéis visto en primaria, secundaria, bachillerato y al llegar aquí, ¿vale? Escritura estándar de nuestro sistema de numeración en nuestro contexto.

Comentario 1: Los alumnos dirán: «¿y para qué nos lo dice eso? Pues como se escribe el 87. ¿Se escribe de otra manera?». Claro, ellos están contando palillos y Nuria está intentando que generen o reflexionen sobre el sistema de numeración y entonces dice: «El 87...». Esa explicación es su justificación, ella avisa, pero muchos dirán: «no esperábamos que lo escribieras de otra manera» [se ríe].

Ese grupo, 87. ¿Cómo habíais hecho los grupos?

A: Pues hemos hecho, eh..., tres grupos de 20.

F: Tres grupos de 20, ¿cómo lo puedo poner? [Escribe un 3 en la pizarra].

A: Eh..., tres rosas.

A: 3 x 20.

F: ¿Tres rosas?

A: Sí.

A: No.

F: Si pongo tres rosas... ¿Todo el mundo que ha utilizado gomitas rosas ha atado 20?

A: No.

F: ¿Otras personas que han atado 20 han usado otro color?

A: Sí.

F: Uf, el color no me vale. ¿Cómo lo pongo?

A: 20 x 3.

A: 3 x 20.

F: 3 grupos de 20, ¿no? 3 x 20. [Escribe 3 x 20]. Y luego...

- A: Pon en el 3 «color rosa» o algo así. Entre paréntesis.
- F: Vale, vale. [Pinta una raya rosa sobre el 20]. Y luego... Esto son 60.
- A: 9×3 .
- F: Y luego 9 grupos de 3, ¿no? [Escribe + 9]. ¿O 3 grupos de 9? [Borra el 9].
- A: 3×9 .
- F: 3 grupos de 9 y el 9 lo habéis puesto de otro color, ¿vale? [Escribe 3×9].
- A: Sí.

Comentario 2: Es gracioso que digan «3 rosas» y demás. Ella quiere confrontar que no pueden usar el color, dentro del grupo lo pueden usar, pero en cuanto se trata de una escritura general, común, pues eso es común a cualquier unidad, a cualquier grupo... Obviamente, estas cosas son arbitrarias pero tienen que estar convenidas, si no hay convenio, ocurren estas cosas. Pero me hace gracia que cuando dice: « 3×20 », ellos dicen: «pero pon rosa», y ella ha puesto rosa arriba [se ríe]. Y luego sí que es curioso el resultado que hay aquí, que ella no ha hecho ningún comentario, en el cual no han hecho todos los grupos que podían, de 20 podrían haber hecho 4 y han hecho solo 3 y luego los otros 27... A mí me da la sensación, y es una interpretación que hago, que les preocupa que queden unidades sueltas y entonces han decidido hacer grupos de 3, y 27 es divisible entre 3 y les sale 9 grupos completos de 3. Claro, eso, de cara a construir la numeración, es una muy mala estrategia, pero bueno, es lo que ha surgido. Es una interpretación que hago, no han cogido 4 grupos de 20, o sea, no han sido exhaustivos ahí, pero yo creo que les ha interesado porque luego con los 27 que les han quedado han hecho grupos, no les ha quedado ninguno suelto.

- F: ¿Alguien más ha utilizado grupos de 20?
- A: Nosotros.
- F: Varios. ¿Alguien más ha utilizado grupos de 9? [Destaca con la voz el número 9].
- A: Nosotras.
- F: Vosotras, vale, y vosotras también, vale.

Comentario 3: Por ejemplo, ha habido varios grupos de 20. Es bastante sensato porque es lo que te decía antes, el 10 es pequeño, el 20 ya tiene un tamaño interesante para hacer un grupo y tiene mucha relación con el 10, es fácilmente traducible; no han cogido grupos de 21, que desde el punto de vista de cantidad les habría dado el mismo resultado, pero, claro, a la hora de traducir habría sido mucho más conflictivo, ¿no? Traducir es simplemente

hacer esa multiplicación.

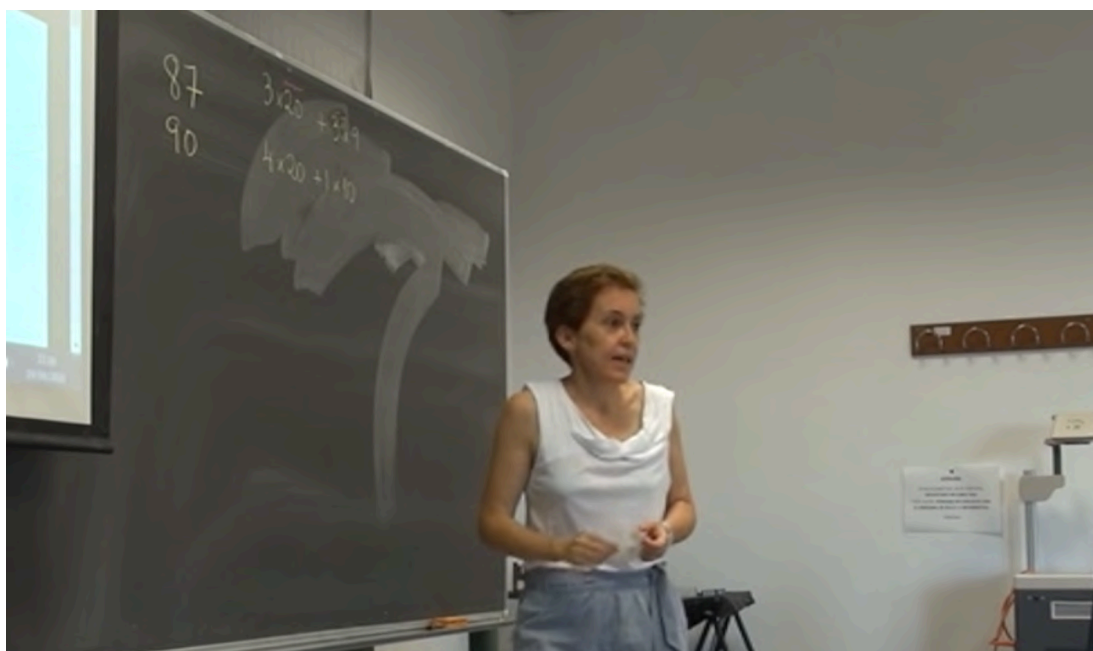
Siguiente equipo, vosotras.

A: Nosotras, 90.

F: En total, 90. [Escribe 90 en la pizarra].

A: 4 de 20 y 1 de 10.

F: [Escribe $4 \times 20 + 1 \times 10$]. Vale, o sea que de momento han utilizado grupos de 20, grupos de 10, grupos de 9, ¿vale?



En esta escritura [señala lo que ha escrito en la pizarra] yo veo 3 grupos de 20, 3 grupos de 9, pero aquí [señala el 87] no veo un 3 y un 3. Yo aquí veo 4 grupos de 20, 1 grupo de 10, pero aquí [señala el 90] no veo 4, 1. Con lo cual, parece que tampoco habíais encontrado vosotros un patrón entre cómo escribo la cantidad total con símbolos numéricos y visualmente qué veo en los palillos, ¿vale? De momento, la transcripción de lo que veo en los palillos simbólico-numéricamente la tengo aquí a la derecha [señala el $3 \times 20 + 3 \times 9$ y el $4 \times 20 + 1 \times 10$], pero no veo ninguna relación con esto [señala el 87 y el 90]. Yo aquí estoy haciendo trampa porque estoy metiendo operaciones, nosotros ahora no estamos con las operaciones, estamos solo con el número, con la escritura del número, eso es lo que estamos trabajando, ¿no?

Comentario 4: Ese problema que pone Nuria de manifiesto yo creo que para ellos es un lujo, es decir, bueno..., «yo he resuelto el problema...». Efectivamente, la discusión que

está planteando Nuria es una discusión que para ella tiene mucho sentido, pero yo creo que para ellos el objetivo sobre generar un tipo de escritura particular ha quedado muy atrás. Entonces, bueno, ella dice: «4, 1, tal...».

Pero para ayudar a ver esa conexión de los palillos hacia lo simbólico-numérico, pongo, escribo eso de transición para ir copiando lo que me decís, ¿no?, porque tardo más, tardo más en dibujar los palillos, las gomitas rosas, no sé qué, podría sacar la foto de la cámara y ponerlo rápido, ¿no?, pero..., bueno, lo escribo, lo transcribo así.

Comentario 5: Ahora está dando una explicación sobre registros de representación y está avisando de que ella no está escribiendo exactamente lo que le están diciendo, sino que lo está traduciendo. Ahí Duval está detrás, es decir, está escribiendo simbólico-numérico, pero si tuviera que expresarlo tal y como ellos lo han hecho, tendría que decir «3 rosas» y tal o, como dice ella, todavía más elemental, con una foto de los agrupamientos. Es una reflexión sobre distintos registros de representación.

Ahora, otro grupo. Vosotros dos ya estáis, que luego, luego... Ah, venga, ya que estamos aquí [dibuja una llave a la derecha de lo que ya ha escrito en la pizarra]. ¿A qué consenso... habéis llegado...?

A: Pues 7 grupos de 20...

F: Muy bien, 7 grupos de 20 [señala el 3 y el 4]. Han visto rápido y han dicho: «bien, los dos hemos agrupado, sin habernos copiado, en grupos de 20, con lo cual automáticamente tenemos 7 grupos de 20» [escribe 7×20].

A: Luego, ellos los 27 de 3×9 ...

F: Sí.

A: ... los han dividido en 2 de 10 para que se junten con los nuestros de 10.

F: ¿Y por qué no habéis hecho vosotros... separar este de 10 [señala el 10 de 1×10] en 1 de 9 y 1 de 1?

A: Porque se quedaría 1 solo y luego...

F: Bueno, pobrecillo, ¿no? No pasa nada.

Comentario 6: Ves cómo les cuesta dejar sueltos [se ríe]. Como la consigna era hacer grupos... Esto tiene un calado fuerte, ¿eh?, porque para muchos incluso en la división, en la división euclídea, el resto es como si fuera un residuo, y no, es un resultado más, ¿no? Entonces, bueno, aquí también les pasa un poco. Nuria les enfrenta a eso: «¿por qué os

habéis adaptado a 10 y no os habéis adaptado a 9?», y dicen: «porque queda uno suelto». De todas maneras, en el otro quedan 7 sueltos...

A: Y porque es más fácil sumar de 10 en 10 que de 9 en 9.

A: Para ponerle la goma a 1...

F: Para ponerle la goma a 1... Bueno... Eso... Puede ser una justificación, pero tampoco muy potente... Me gusta más lo que ha dicho ella, o ella...

Comentario 7: Es una justificación, otra cosa es que no nos guste [se ríe], pero es un argumento. Efectivamente, si se trata de hacer grupos, pues a hacer grupos. Y, claro, al igual que no les gustan los conjuntos unitarios, pues los grupos de 1... Fíjate cómo a veces la manipulación da lugar a un juego difícil, ¿no?

A: Que es más fácil sumar de 10 en 10 que de 9 en 9.

F: ¿Por qué será más fácil sumar de 10 en 10 que de 9 en 9 para nosotros? [Hablan varios alumnos a la vez]. ¿Por qué es más fácil sumar para nosotros de 10 en 10 y no de 9 en 9? [Hablan varios alumnos a la vez]. Porque tenemos 10 dedos, por ejemplo, ¿no? Porque estamos más acostumbrados a 10, 20, 30, 40... [mueve las manos con los dedos estirados], ¿no?, como que nuestro sistema de numeración parece que...

A: Porque en verdad solo sumas de 1 en 1 y luego le pones un 0, entonces...

F: Solo sumas de 1 en 1, elabora eso. Estamos en clase de matemáticas, ¿qué es 1, 1...?

A: Pues por ejemplo, si tienes 30, pues 1 más 1 más 1, 3, como es 10, pues le pones el 0 y ya tienes los 30.

F: ¿3 qué?

A: 3 grupos de 10.

F: 3 grupos de 10, muy bien.

Comentario 8: Esto es un ejercicio de mayéutica total, ¿eh?, es decir, está intentando que hablen y cuando llegan a la contradicción de qué pasa con 1 y tal... Claro, ella no quiere dar todas las claves, porque, efectivamente, «¿por qué sumamos mejor de 10 en 10?», pues porque la base es decimal, esa es la explicación matemática clara. Entonces, ella está intentando...: «10, 20, 30..., claro, eso lo manejamos mejor...». De alguna manera, está haciéndoles ver esa ventaja, cosa que ellos han constatado, ya han dicho que de 10 en 10 es más fácil. Entonces, ella les quiere hacer reflexionar mediante una interacción, pregunta-

respuesta, hasta que lleguen a contradicciones.

3 grupos de 10, vale. [Vuelve a la pizarra a terminar lo que empezó a escribir].

A: 3 de 20, 3 de 10 y 1 de 7.

F: [Escribe, después de 7×20 , 3 10]. 3 de 10, llegasteis a romper estos [señala 3×9] en 2 de 10 más 7 sueltos, ¿no? [escribe $2 \times 10 + 7$ encima de 3×9]. Y entonces estos dos [señala 2×10] con este [señala 1×10] 3 y 7 palillos ahí sueltos [escribe, después de $7 \times 20 + 3 \times 10$, 7×1], ¿vale? Ahora, la cantidad total, ¿cuánto es? [señala el 87 y el 90].

A: 177.

F: 1, 7, 7 [escribe 177 a la izquierda del 87 y del 90]. ¿Hay aquí 1, 7, 7 por algún lado? [señala el 7 de 7×20 , al 3 de 3×10 y al 7 de 7×1]. Este [señala el 7 de 7×1] parece que hay aquí, ¿no? Pero lo otro... no me cuadra mucho todavía... Vale, otros dos grupos.

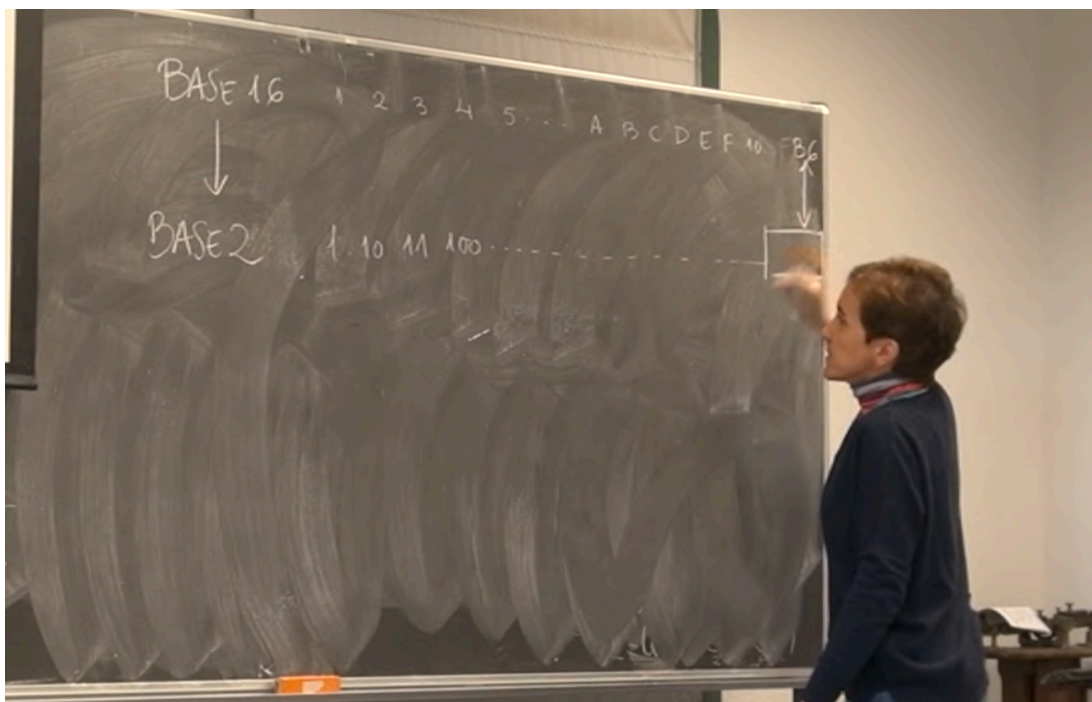
Comentario 9: Bueno, al final sí que hay 7 sueltos, pero son 7 sueltos, imagino que le habrán puesto una gomita a los 7. Al final, la idea de agrupamiento ha prevalecido sobre la idea de la sistematización que buscaba Nuria. Y, bueno, también la idea es cómo a la hora de coordinar dos grupos, y en este caso sumar – porque aquí aparece la suma de dos cantidades –, la suma obviamente depende del sistema de numeración, entonces cuando se utilizan agrupamientos distintos la suma es una locura... Entonces, ha querido utilizar esa idea.



TRANSCRIPCIÓN DEL VÍDEO 2

[F = Formadora del vídeo]. [A = Alumnos]. [Comentarios de Marcos presentados en recuadros].

- F: Como me piden pasar de base 16 a base 2 directamente [escribe en la pizarra], pues Martín dice: «yo escribo aquí la secuencia 1, 2, 3, 4, 5..., A, B, C, D [dice 10, 11, 12, 13, señalando A, B, C, D], 14, 15 [escribiendo E, F], uno, cero [10]..., así hasta el B6», ¿vale? Y luego aquí en paralelo, voy uno [1], uno, cero [10], uno, uno [11], uno, cero, cero [100]..., hasta que pille aquí el que sea y ya está.



No he pasado por base 10, que es lo que me dice Nuria. Con lo cual, superado.

Comentario 1: Hecho: está reproduciendo la estrategia que ha usado un grupo para pasar de 16 a 2 sin pasar por base 10, y lo que ha hecho es contar, ha ido contando en base 16 y contando en base 2, y cuando cuenta la misma cantidad, pues el resultado es el mismo número escrito en las dos bases, y está analizando un poquito lo que conlleva esa estrategia. Hombre, es una estrategia que obviamente se tendrá que poner rápidamente como ineficaz porque es muy lenta; no hace una traducción, sino que cuenta de una manera y cuenta de otra.

¿Pero qué pasó?

- A: Que es muy largo.

F: Que es muy largo. Y que hasta en su casa, teniendo semanas, ha dicho: «paso». Tenías tiempo suficiente, porque había tiempo suficiente en dos semanas a hacerlo, pero... es largo y además un coñazo, con lo cual ha dicho: «paso». Con la idea Nuria ya se hace una idea de que lo he pensado, es un procedimiento válido, pero no ha sido eficaz, ¿vale?, entonces nosotros tenemos que seguir pensando porque tendremos que buscar alguna estrategia que sea eficaz. [Da la palabra a una alumna].

A: ¿Se podría hacer la división?

F: ¿Qué división?

A: La de B6 entre 2. Es que no sé cómo plantearlo.

Comentario 2: Bueno, yo identifico aquí que está simplemente preguntando y recordando cómo lo han hecho, debe de ser un ejercicio que ha mandado para casa. Ella ha puesto de manifiesto la poca eficacia de este sistema y hay un debate que ella ha lanzado respecto a un trabajo que tienen hecho, un trabajo sobre cambio de base, un trabajo matemático. Entonces está retomando las estrategias. La interpretación: está claro, es decir, quiere llegar a generar una estrategia compartida por todos para un ejercicio que consiste en pasar una cantidad, no sé exactamente cuál es –hombre, B6 se podría calcular–, de base 16 a base 2, pero con la idea de obtener una estrategia general, no solo para cambiar con esos dos números, ¿no?

F: Ella dice: «oye, mira Nuria, cuando tú pasas de base 10 a base 2 haces grupos de 2 y divides de 2 en 2; pues ahora lo mismo, si estoy en B6 a base 2, divide entre 2». Pero aquí estoy escribiendo en base 16... [En la pizarra ha escrito B6 entre 2, con la caja]. Podríamos intentar hacerlo, pero... ¿sabemos hacerlo... o cómo va esto? ¿O mentalmente para hacerlo me vais a pasar a base 10, y hacéis la división en base 10 –que es lo que sabéis hacer–, y luego otra vez volvemos y entonces hacemos trampa porque pasamos por base 10? Si sabéis dividir un número en base 16 entre 2, si sabéis hacer esta división en base 16 –yo lo tendría que pensar, ¿eh?, así a capón no lo sé hacer, pero si lo pienso... –, si sabéis hacer eso, valdría.

Comentario 3: Efectivamente, le han dicho otra, es una estrategia que a mí me cuesta pensar que la hayan hecho... Vamos a ver. Hecho: está reproduciendo una estrategia que han dicho y está analizando qué posibilidades tiene esa estrategia. Yo interpreto que me

cuesta mucho pensar que esta estrategia se haya hecho. Otra cosa es que hayan trasladado o traducido la estrategia clásica de base 10 a otra base, que es esa, la de dividir entre la nueva base y ver los grupos que van quedando, bueno, son los restos los que se escriben, que son los elementos que van quedando sueltos, ¿no? Pero, como ella dice, hace falta saber dividir en base 16. Entonces, otra vez está intentando poner de manifiesto la ineficacia de esta estrategia. Se pone como ejemplo ella: «yo podría hacerlo si me empeño...». Desde luego no es una estrategia sencilla.



Pero esto lo vamos a ver en el dossier 3, ¿eh?, multiplicación y división. Nosotros tenemos herramientas para dividir en base 10 y sabemos cómo hacer restas sucesivas y el algoritmo tradicional de la cajita que habéis ido haciendo... Podríamos abordarlo, por eso abordamos los problemas de..., el anterior, ¿no?, de pasar de base 10 a base 2. Pero el de base 16 a base 2 hay que dividir en base 16. Sumar en base 16 lo sé hacer, restar en base 16 me cuesta un poco pero lo sé hacer, multiplicar en base 16 también podría hacerlo, con lo cual dividir podría hacerlo, pero... no me atrevo a hacerlo sin manos, hoy.

Comentario 4: Efectivamente, el paso de una base a otra..., pasar por base 10 es... Claro, aquí ha cogido base 16, que es una potencia de 2, con lo cual el cambio de base... Ella está intentando que surjan estrategias que no necesiten utilizar..., es una interpretación que hago, ella está contando que es difícil porque no podemos trasponer directamente la técnica que tenemos de base 10. Y luego les está diciendo algo que yo creo que es muy importante, que es que los algoritmos que tenemos son algoritmos que se basan en el

sistema de numeración, si cambia el sistema de numeración, cambian los algoritmos, que seguramente no es una reflexión que muchos alumnos traigan. Entonces lo que Nuria quiere con este ejercicio está muy claro, el ejercicio es pasar de base 16 a 2 un número, y lo que está intentando es que reflexionen sobre la relevancia o el papel central que juega el sistema de numeración en cualquier técnica de cálculo. Y con el hecho de que haya cogido base 16, que es 2^4 , imagino que querrá profundizar en la idea de base al cambiar el agrupamiento... Pero, eso sí, si hubiera cogido una base que no tuviera nada que ver con 2, pues este ejercicio imagino que no sería abordable.

Otra forma.

A: Fijándote en que 16 es 2^4 .

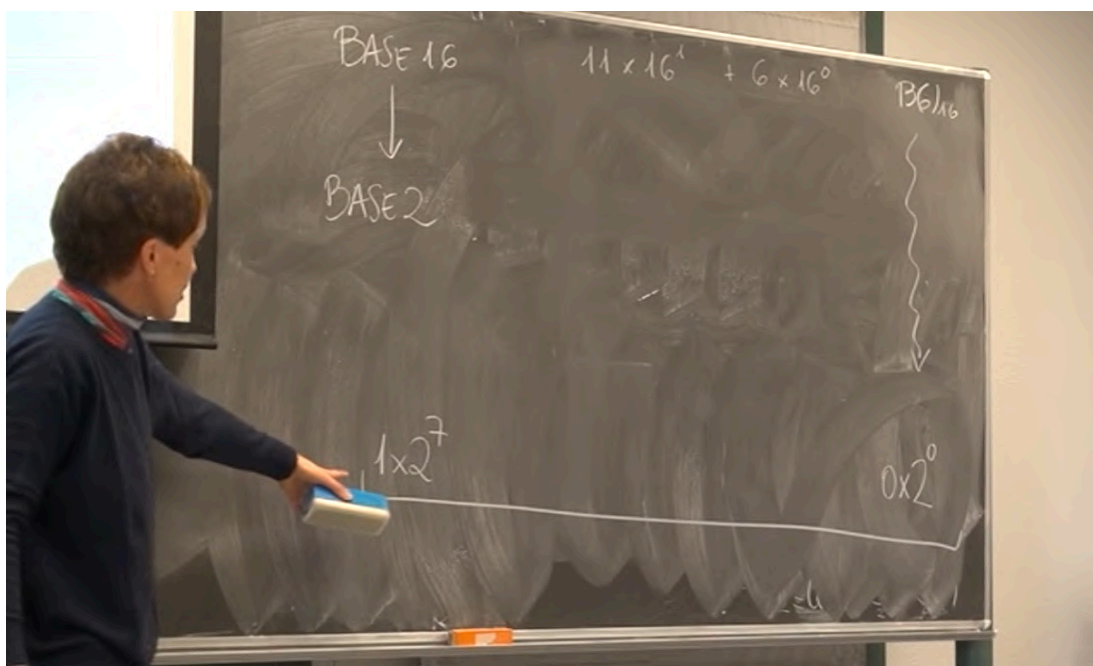
F: Fijándome en que 16 es 2^4 . Me lo voy a apuntar aquí [borra la pizarra y lo escribe].

A: Yo lo hice así, pero luego algo no me cuadraba.

F: Muy bien, vale.

A: Luego hice, 11...

F: Venga, vamos a poner el punto de partida, ¿no? El punto de partida es que tenemos 11×16^1 , ¿no?, más 6×16^0 . Este es mi B6 en base 16. Y yo quiero llegar aquí a... Me acuerdo de que empezaba en 1×2^7 y acababa en 0×2^0 , ¿vale?

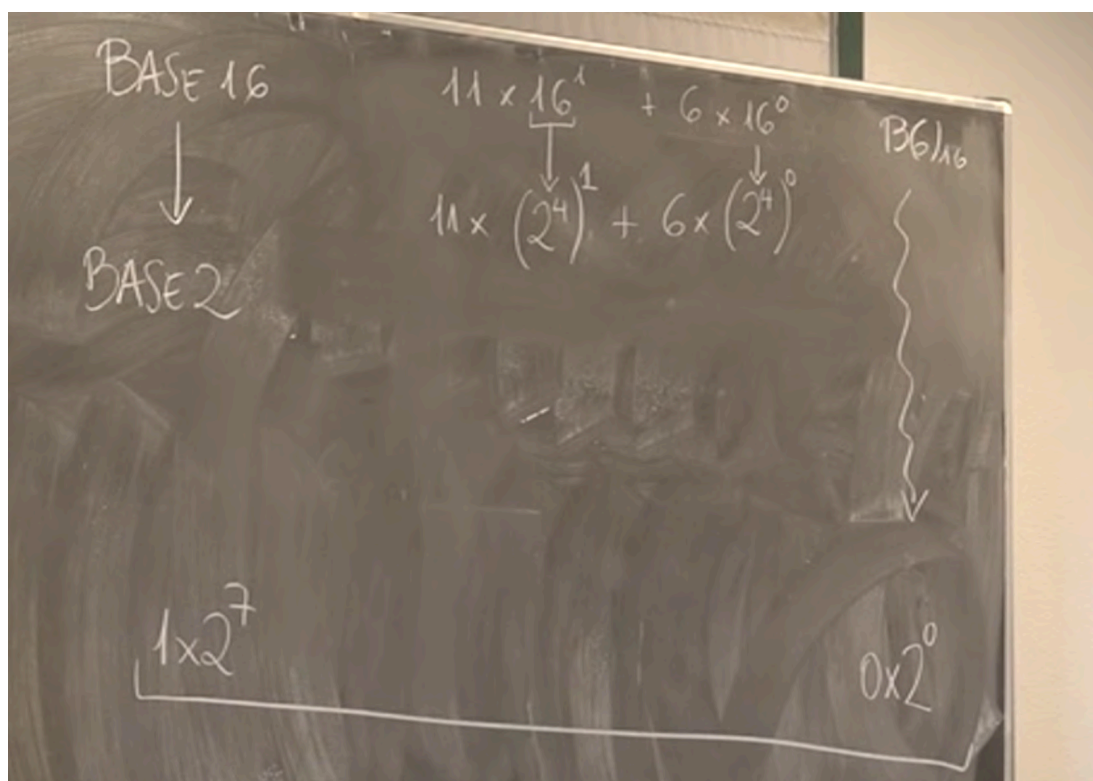


Entonces yo quiero pasar de ahí [señala la parte superior de la pizarra] a aquí [señala la parte inferior]. Si lo consigo, ya lo tengo en base 2, ¿no? Ya solo cojo los

coeficientes de las potencias de 2 y ya lo tengo. Entonces, Pablo dice: «cambia este 16», ¿no, Pablo?

A: Sí.

F: Este 16 ponlo como $(2^4)^1$ y este 16 ponlo como $(2^4)^0$. ¿Vale? Yo tengo una expresión polinomial en base 16, quiero llegar a una expresión polinomial en base 2, y él me dice: «yo veo claro el cambio, 16 es 2^4 , cada vez que veas un 16 ponlo como 2^4 ». Vale, y entonces resulta que aquí tengo 11 grupos de esto y aquí tengo 6 de estos. ¿El 11 y el 6... los puedo dejar?



A: No, los pasas a base 2.

F: Los paso a base 2. ¿Sé pasar 11 a base 2?

A: Sí.

F: Vale, vamos a escribir 11 en base 2.

A: 1, 0, 1, 1.

Comentario 5: Bueno, hay un hecho aquí muy claro que es la gestión que hace de la pizarra. Es una gestión que, aunque puede ser de didáctica general, está muy marcada para poder ir elaborando un proceso de un cambio de base, de base 16 a base 2, lo está haciendo por pasos horizontales... ¿La interpretación cuál es? Bueno, pues esto son escrituras polinómicas, que pueden ser relativamente farragosas para los alumnos, y de esta manera entiendo que el proceso gana en claridad y sobre todo en capacidad visual, es

decir, se va a ver mejor cómo se va haciendo el proceso de transformación. Me llama la atención el $(2^4)^0$, me hace gracia [se ríe], pero bueno, efectivamente, cuando las escrituras polinómicas en las que se basan las escrituras de los sistemas de numeración..., pues efectivamente son las potencias de la base y la última es elevado a 0; pero tengo que decir que me ha hecho gracia. Pero bueno, que está ahí, eso es 1, ahora cuando transforme el 6 a base 2 se encontrará con eso.

F: 1×2^3 , ¿no?

A: Sí.

F: Más...

A: Cero.

F: 0×2^2 . De momento llevo ocho. Más...

A: Uno.

F: 1×2^1 . Ya llevo 10...

A: Más uno.

F: Más 1×2^0 . Ahí ya tengo 11, ¿vale?

Comentario 6: Es curioso que ella escribe el polinomio incluso con las unidades que no existen. Es verdad que la escritura de 11 en base 2 será 1, 0, 1, 1, y ese 0 es 0×2^2 , pero en la escritura polinómica no es obligatorio hacerlo. ¿Por qué lo hace ella? Pues para ver de dónde viene y poner de manifiesto que la escritura son los coeficientes de las potencias y ella ahora va a necesitar todos los coeficientes de las potencias para hacer la escritura. No es imprescindible, ya que un polinomio no tiene por qué tener monomios de todas las potencias, pero ella lo pone con el 0 porque, efectivamente, traducir eso a una escritura de un sistema de numeración posicional... Porque, cuidado, la escritura polinómica no es la escritura del sistema de numeración; una vez que yo tengo la descomposición polinómica, yo puedo escribirlo con distintos sistemas de numeración. El nuestro es posicional y el posicional exige el 0, por eso aparece el 0; si no fuera posicional, el 0 no existiría. Entonces, interpreto que pone ese 0 porque luego va a hacer eso, por eso salen escrituras tan curiosas.

Esta es una manera de escribir 11. ¿Cómo? Como potencias de 2. Expresión polinomial del 11 en base 2, como potencias de 2, ¿vale? Y esto va multiplicado... 2 elevado a la 4 y luego lo elevo a la 1, ¿cuánto me queda...? 2^4 es $2 \times 2 \times 2 \times 2$ y luego eso lo elevo a la 1, es decir, que lo copio una vez, o sea que me queda...

- A: 2^4 .
- F: 2^4 . Más... El 6, ¿lo dejo?
- A: No.
- F: No. ¿Cómo escribo 6 en base 2?
- A: 1×2^2 .
- F: 1×2^2 , que son 4.
- A: 1×2^1 .
- F: 1×2^1 ... Y 0×2^0 [lo va escribiendo todo en la pizarra]. Ahí pone 6, una manera más chula, ¿no?, de poner 6 como potencias de 2, ¿no?, como un polinomio con potencias de 2.

Comentario 7: Lo de la manera más chula de poner 6... [se ríe]. Me hace gracia cómo insiste en escribir los números en una expresión polinómica en función de la base. Interpreto que lo que pone de manifiesto es que esto son simplemente escrituras, que igual de válido es el 6 que el 1, 1, 0 que sería en base 2, que en definitiva es el mismo número; de hecho, dice que mola más el 1, 1, 0 que el 6 [se ríe]. Es interesante esa intención para poner de manifiesto que simplemente el número va por un lado y la escritura va por otro.

Vale, y luego estaba por... Y ahora tengo $(2^4)^0$. ¿Eso qué es?

- A: Uno.
- F: Uno. ¿Y si lo quiero poner como potencias de 2?
- A: 2^0 .
- F: 2^0 , muy bien. 2^0 [lo escribe en la pizarra]. Mira qué contenta estoy, porque $2^0 \times 2^0$ es 2^0 y el coeficiente es 0, que es este.

Comentario 8: Es que no sé por qué el 1, el primero, del 2^7 y el 0×2^0 ya los tenían, no sé si es que ya los tenían o no los tenían. Es que cuando he visto el 1×2^7 he pensado: «ya saben que la máxima potencia va a ser 2^7 ». Eso lo desconozco, por eso no hago ninguna interpretación; debe de ser que en el ejercicio estaba, empezaría por 1 y acabaría en 0 y se daría el número de cifras, porque si no, eso no sé de dónde sale.

Y $2^4 \times 2^3$ es 2^7 y el coeficiente es 1, que es este. Pues como que ya casi lo tengo, ¿no? ¿Sí o no?

- A: Sí...

BASE 16

↓

BASE 2

$$11 \times 16^1 + 6 \times 16^0$$

$$\downarrow$$

$$11 \times (2^4)^1 + 6 \times (2^4)^0$$

$$\downarrow$$

$$[1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0] \times 2^4 + [1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0] \times 2^0$$

$$\downarrow$$

$$1 \times 2^7$$

$$\downarrow$$

$$0 \times 2^0$$

F: Vale, y ahora... Venga, ¿cuál será el coeficiente...? Venga, vamos a poner aquí 2^6 , paso a la siguiente varilla del ábaco, ¿eh? ¿Cuál será el coeficiente de 2^6 ?

A: Cero.

F: Cero, porque ¿cómo consigo yo 2^6 ? $2^4 \times 2^2$, ¿no? 2^4 es $2 \times 2 \times 2 \times 2$, 2^2 es 2×2 , ya tengo ahí los seis doses, ¿vale?, que está aquí,

Comentario 9: Me hace gracia... Bueno. Hecho: recuerda que 2^4 es $2 \times 2 \times 2 \times 2$ y tal... Y otro hecho, lo voy a juntar: identifica cada orden de unidad con una varilla del ábaco. Interpretación: está en todo momento haciendo que el alumno tenga claro..., que tenga los conocimientos o recursos necesarios para situar todo eso que está haciendo, porque eso ahora mismo, desde un punto de vista de producto de potencias, se podría hacer perfectamente: propiedad distributiva, tal, cual... Pero no, por un lado recuerda mucho lo de 2^4 , es decir, lo que es una potencia y, luego, me ha hecho gracia lo de la varilla del ábaco, es decir, quiere que los alumnos tengan claro que esto va a ser las distintas unidades que tengan de un número; lo digo porque no suelen estar acostumbrados a trabajar con escrituras polinómicas en función de un número. La idea del teorema fundamental de la numeración es que todo número se puede escribir como un polinomio y sus coeficientes son únicos, lo cual no es algo que ellos manejen mucho. Por eso yo creo

que hace siempre ese recuerdo constante de lo que está escribiendo.

y el coeficiente cero. ¿Por aquí puedo llegar a 2^6 ?

A: No.

F: No, pues ala. 0×2^6 . Genial, porque era lo que me había salido antes. Ahora, más... Siguiendo varilla del ábaco, 2^5 . ¿Dónde consigo yo 2^5 ? Aquí [señala el corchete de la derecha] como mucho llego a 2^2 , me olvido de esto. $2^4 \times 2^1$ [señalando el corchete de la izquierda] es 2^5 , ¿no?

A: Sí.

F: Vale, ¿y qué coeficiente lleva?

A: 1.

F: 1. ¿Y era el qué tenía que llevar?

A: Sí.

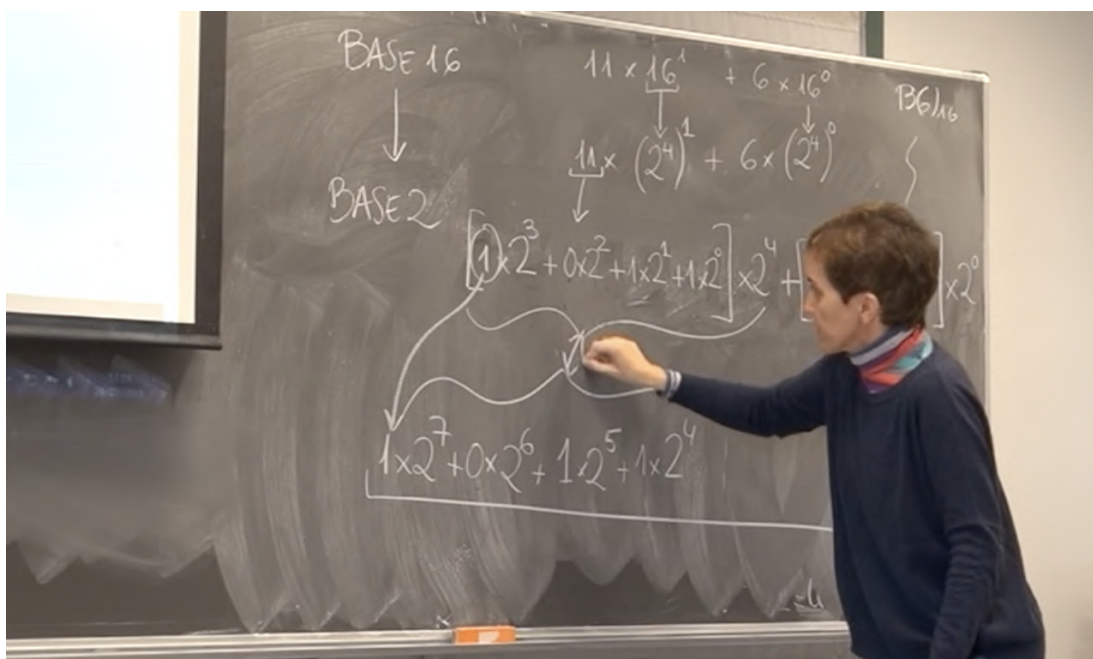
F: Sí, vamos bien. Y ahora, 2^4 , ¿cómo consigo 2^4 ?

A: Con 2^0 ...

F: $2^4 \times 2^0$, ¿no? Tengo aquí cuatro copias del 2 y aquí ninguna, pues tengo cuatro copias del 2 multiplicándose por sí mismo, y el coeficiente 1. 1×2^4 [lo escribe en la pizarra].

Comentario 10: Ella va haciendo, va aplicando la distributiva y demás, está intentando escribir eso. Me llama la atención el $2^4 \times 2^0$, aquí tengo 4 doses y aquí no tengo ninguno, luego tengo 4, es decir, está multiplicando..., al final es cuántos doses hay, ¿no? Pero..., oralmente suena muy raro, porque si no tengo ninguno... Es decir, claro, esto es un tema de que el 0 está en el exponente, no está en la base. Está claro lo que está diciendo, es intachable, pero oralmente suena un poco raro, y es todo por haber arrastrado el 2^0 , que yo entiendo que lo quiera poner, pero claro...

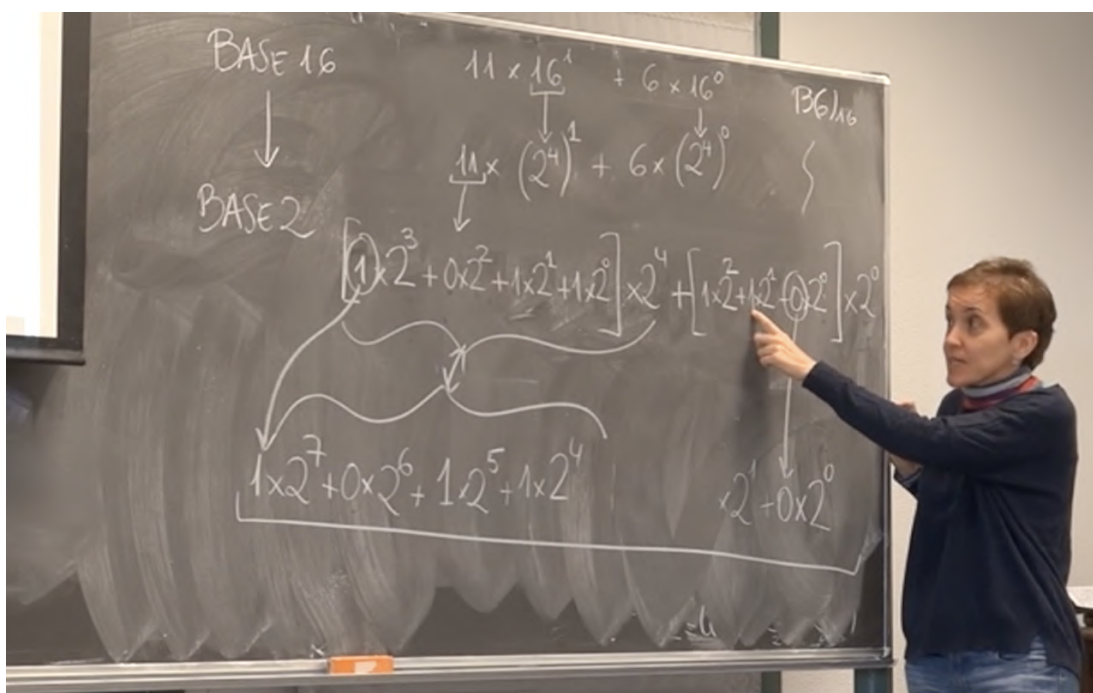
Oye, mira, todo esto se ha convertido en esto. Lo veis, ¿no?



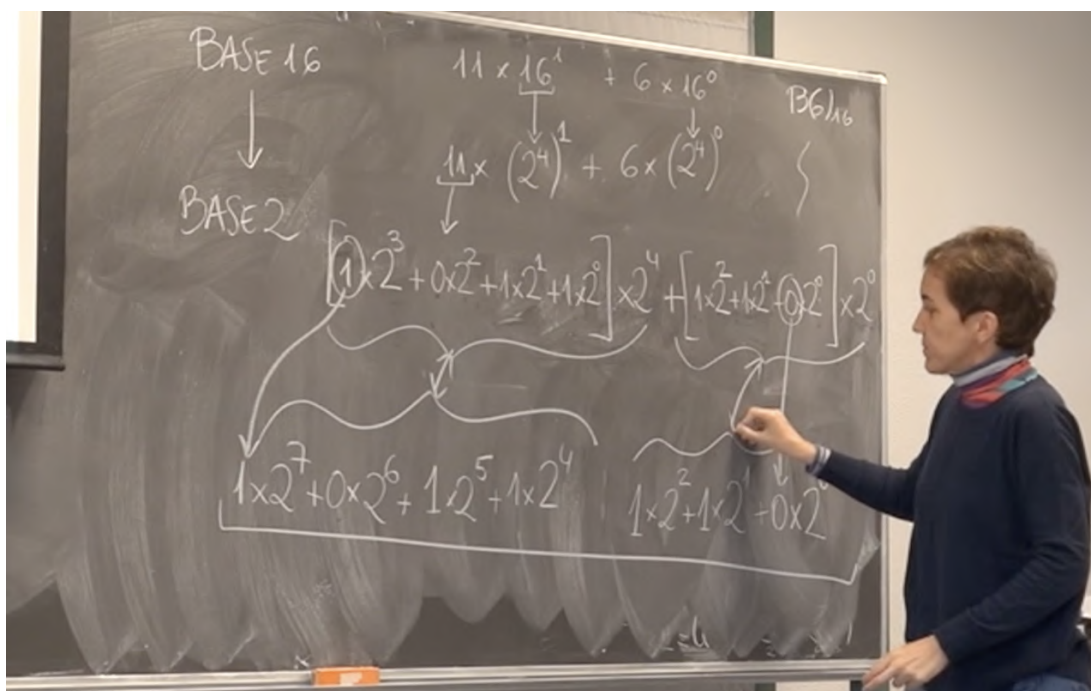
¿Qué es lo que he hecho? Propiedad distributiva. Voy multiplicando el 2^4 por cada uno de los sumandos, ¿vale? Muy bien. Y ahora, tiro por aquí, voy desde aquí [señala el 2^0 de la parte inferior derecha de la pizarra]. 2^0 , muy bien. Siguiendo varilla del ábaco, 2^1 . ¿Qué coeficiente tiene 2^1 ?

A: 1.

F: 1, que está aquí [lo señala], ¿vale?



Porque sería $2^1 \times 2^0$, que es 2^1 , y lleva un 1 delante, un 1 [lo escribe abajo]. Voy bien. Y ahora, $2^0 \times 2^2$, 2^2 [lo escribe abajo], va con un 1 [lo escribe abajo]. O sea que esto que tengo aquí se convierte en esto que tengo aquí.



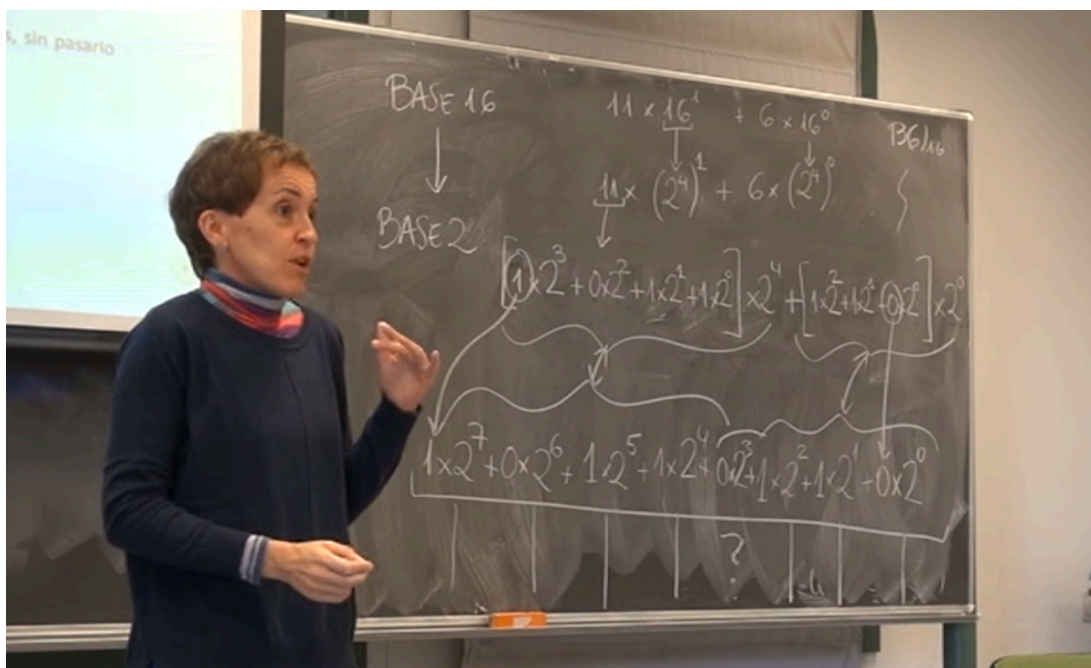
Y ahora, Pablo, ¿qué te pasó?

A: Que como... Que claro, los iba a juntar, pero dije: «me falta el 2^3 ».

F: Me falta el 2^3 . Pablo dice: «varilla del ábaco del 2^7 , 2^6 , 2^5 , 2^4 , ¡uy!, 2^2 , 2^1 , 2^0 ». «¡Uy!», dice Pablo [y dibuja una interrogación en la posición del 2^3].

A: Pues si no hay, un cero.

F: Pues se pone el 0, ya está. Lo pongo aquí: «+ 0×2^3 », y esto lo englobo aquí.



¿Qué es lo que pasa? Que escribo el 6 de una forma muy especial. Yo escribo el 6..., acordaos que esto era mi 6 [señala $1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0$], ¿eh?, esto era el 6,

que es este 6 [señala el de un nivel anterior, más arriba en la pizarra], ¿vale? Yo he escrito el 6 como $1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0$, pero también puedo escribir el 6... $0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0$.

Comentario 11: [Se ríe]. Sí, yo puedo escribir 27 como 000000027 siempre. Entiendo por qué lo hace. Me parece que, ya interpreto, el hecho de usar las varillas es para que todos piensen que en cada varilla tiene que haber siempre un coeficiente, una cifra. Con lo cual, si hay una varilla que no está, hay que guardarle el hueco, ¿no?, es la esencia de los sistemas de numeración posicionales, y está ahí puesto. Mi interpretación es que es mejor la primera explicación que ha dado que esta segunda [se ríe]. Y también interpreto una cosa: imagino que las cantidades están elegidas para que ocurra esto, es decir, para que haya una potencia que no esté explícita y haya que tomar una decisión sobre qué hacer con ella; un hecho didáctico interesante es que las cantidades plantean esta aparente dificultad. No se solapan en ningún caso, se podrían haber solapado, podría haber habido potencias de 2 en las que interviniesen cantidades de los distintos órdenes de la base 16, pero aquí no ha ocurrido. Pero sí que es interesante que se ha quedado con un hueco en medio. Yo interpreto que está hecho aposta, porque la discusión que surge es una discusión rica e interesante. Y en esa discusión, prefiero la explicación de las varillas que la de poner el 0 delante de la expresión, aunque también es una posibilidad.

No es lo estándar, porque como los ceros ahí no aportan mucho, pues no es lo estándar, pero si no me quiero olvidar de una de las varillas y no quiero tener un problema, como tenía Pablo, pues yo añado ahí para escribir el 6 de otra forma, ¿vale? Entonces, moraleja que cuentan los *youtubers*, por ejemplo David Calle, dice: «vamos a pasar de base 16 a base 2, ¿qué se hace chavales? Mirad, ¿veis este 11 que está aquí? [señala el de arriba de la pizarra], pues escribís este 11 en base 2: 1, 0, 1, 1 [señala los coeficientes de la expresión polinómica de la parte inferior de la pizarra]; ¿veis este 6 que está aquí? [señala el de arriba de la pizarra], pues lo escribís en base 2, pero cuidadín chavales, que hay que poner cuatro, ¿por qué?, porque 16 es 2^4 ». Y entonces dice: «vamos a escribir 6 en base 2 con cuatro: 0, 1, 1, 0». Y dice: «y ahora lo juntáis, fin». A mí no me vale porque yo no soy David Calle, yo no estoy de *youtuber*, *influencer*, superfamosa ayudando a los chavales a aprobar exámenes, que es un trabajo muy digno y que está bien, y además el tío es un *crack*, muy suelto, lo hace muy bien; yo estoy formando maestros, entonces tenéis que entender cómo hemos pasado de aquí [señala la

parte superior de la pizarra] a aquí [señala la parte inferior de la pizarra] a través de esto [señala la parte media de la pizarra].

Comentario 12: Esto es una reflexión ya..., no sé si metamatemática, del proceso. Ella contrapone dos procedimientos, los dos válidos en cuanto al resultado, pero que como siempre el primero se basa en una receta, que anima a aprenderla de memoria y de manera irreflexiva, y ella aquí insiste en que hay que entender el proceso, de dónde viene. Efectivamente, el resultado tiene que ser el mismo si los procedimientos son correctos, pero en lo que insiste, y es una reflexión metamatemática, es en que el conocimiento que tienen que tener los alumnos de las matemáticas es un conocimiento distinto al simple uso, o a una concepción meramente utilitarista; es decir, cualquier docente, cuando se acerca a las matemáticas, siempre se tiene que preocupar de cómo se aprende eso, ¿no? Yo creo que aquí Nuria intenta provocar esa reflexión y parte de un contexto que puede ser cercano, como es el de David Calle, que debe de ser un youtuber que hace muchos ejercicios para que los niños aprueben, dejando bien claro que no es su objetivo. Es una reflexión que es matemática pero un poco metamatemática, es decir, aquí estamos justificando por qué pasa eso, ¿no?, que es lo que realmente a un maestro más le interesa.

Entonces, la pregunta es: ¿se puede pasar de base 16 a base 2 sin pasar por base 10? Sí. Lo acabamos de hacer, ¿no? Es que me miráis con una cara... ¿Y por qué se puede? ¿Qué pasa si yo esto [el ejercicio] os lo doy en base 15 y, en vez de en base 16, todo el problema es en base 15?

A: Que sería $2^4 + 2^0$.

F: ¿ $2^4 + 2^0$ es 15?

A: O sea, no..., perdón. $2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0$.

F: Vale, y entonces tendría que ir haciendo todas las distributivas, todo el follón, ahí. ¿Y David Calle me podría dar el algoritmo...? Escribes, imaginaos el mismo número, ¿eh?, B6, en vez de en base 16, en base 15. ¿David Calle me puede decir...? Aquí tengo el 15, ¿no?, aquí tengo el 15 [los escribe encima de los 16], y David Calle me dice: «escribe esto [señala el 11] en base 2, escribe esto [señala el 6] en base 2, con tres y medio dígitos o cuatro dígitos o... tres dígitos, y lo pones junto. ¿Valdría ese algoritmo?

A: No.

F: No. ¿Vale? O sea, que poder se puede pasar, vas con paciencia escribiendo cada una de las expresiones que aparecen, pero un paso directo solo se puede cuando

una base es potencia de la otra base, que es lo que hemos visto con 16, que es potencia de 2, que es 2^4 . ¿Está claro hasta aquí? ¿Sí?

Comentario 13: Para terminar, les hace ver que han de huir de esas recetas y que la base 16 funciona porque es 2^4 . Con base 15, ¿se podría hacer?; sí. Pero, obviamente, no habría una receta sencilla para juntar y tal.

TRANSCRIPCIÓN DEL VÍDEO 3

Fragmento 1

[F = Formadora del vídeo]. [Comentarios de Marcos presentados en recuadros].

- F: Entonces, la idea es..., el ejercicio 4, que está proyectado en la pantalla, es el ejercicio 4 de la última hoja, de la hoja del dossier 2, con el que vamos a trabajar ya esta semana, ¿vale? En ese ejercicio hay cuatro operaciones, cuatro problemas, cuatro operaciones. Tenéis que hacer las cuatro operaciones..., representarlas de distintas maneras. Voy a poner en la pizarra de cuántas maneras, ¿vale? Entonces, acordaos que nosotros estamos trabajando con material manipulativo [escribe en la pizarra «Manipulativo»], ¿vale? Entonces, en primer lugar tenéis que representar esta suma $[210 + 543]$, esta suma $[315 + 429]$,

Comentario 1: Bueno, está dando un enunciado matemático... Y detecto un fenómeno que es que habla de hacer la operación y de representarla. Al principio dice «hacer» e inmediatamente ha cambiado a «representarla». Interpreto que lo que a ella le interesa es ver cómo los algoritmos cambian en función del material que se esté utilizando. Pero detecto que ha cambiado, no es lo mismo «hacer» que «representar».

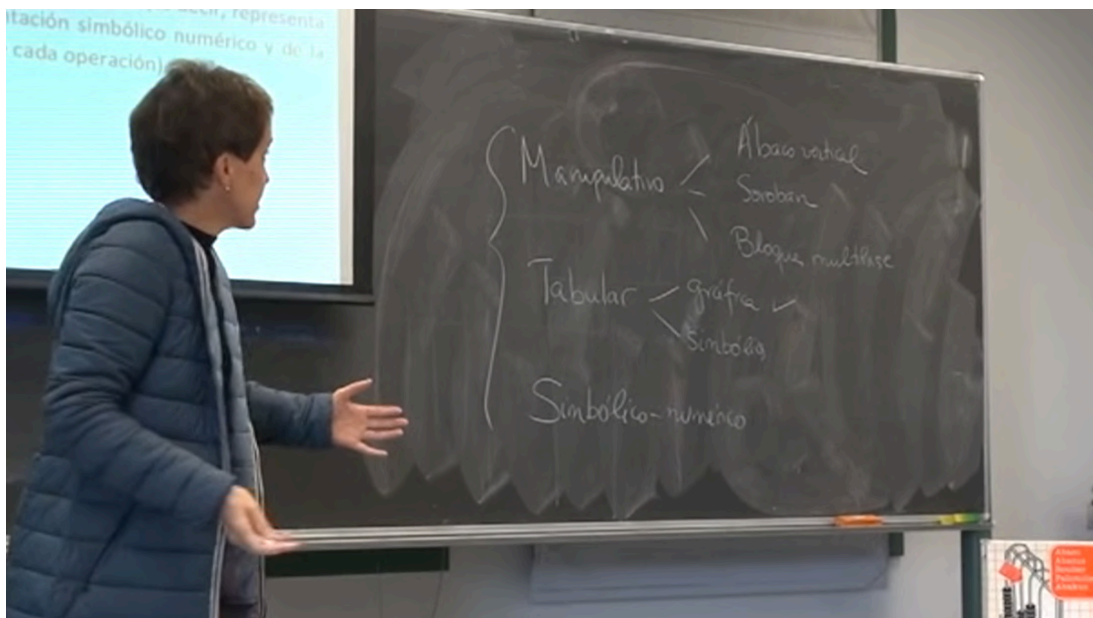
esta resta $[135 - 24]$ y esta resta $[704 - 45]$, por partes [va señalando en el PDF proyectado en la pantalla], ¿no?, empezáis con la primera... Tenéis que representarlo [escribe en la pizarra] con ábaco vertical, después en el sorobán y después con los multibase, ¿vale? Y tenéis que tener las tres representaciones del proceso delante para saber comparar cada dos, ¿vale?, para saber entender cómo se traduce una en otra. Lo que no quiero es que me digáis: « $210 + 543$ son 753; Nuria, te he representado 743* en el ábaco vertical, en el sorobán y en los bloques multibase». No quiero la representación del resultado, quiero la representación del proceso, de la suma, de la idea «suma». ¿En qué os tenéis que basar?, en la definición de la suma que vimos el otro día, ¿no?, que es: elijo un representante de uno, elijo un representante del otro y hago la unión, agrupo, junto, como lo queráis pensar, ¿vale? Entonces, hay que representar el proceso, el proceso, no solo el resultado final de ese proceso. Entonces, tenéis que representar el proceso de tres maneras en el sistema de representación manipulativo [señala lo que ha escrito antes en la pizarra], ¿vale? Y en paralelo [empieza a escribir en la pizarra]

tenéis que representar el proceso en el sistema de representación simbólico-numérico; el enunciado está dado en ese sistema de representación, ¿vale?, esto es sistema de representación simbólico-numérico, pues tenéis que representar el proceso, las dos sumas y las dos restas, en ese sistema, ¿vale? Y luego, en medio [escribe en la pizarra], hay una representación que es formato tabla o tabular, de la que no he hablado explícitamente, pero que me gustaría que construyerais vosotros, ¿vale? Necesito que construyáis, por ejemplo, esta suma [señala $210 + 543$], que la hagáis en tabla, con una tabla, como se os ocurra a vosotros diseñar la tabla, ¿vale?

Comentario 2: Bueno, yo creo que es muy ambiciosa. Vamos a ver. Fenómeno: está dando un enunciado, que es complejo porque no es tanto resolver una suma o una resta sino resolverlo de una manera determinada. Usa el verbo «representar» en vez de «realizar»... Yo cuando hago una suma en simbólico-numérico, estoy haciendo la suma, no la estoy representando. Es verdad que la hago en un sistema de representación... Vamos a ver, ella quiere poner de manifiesto los distintos registros de representación, interpreto que lo que quiere hacer es eso, además está muy claro. El manipulativo y el simbólico los pone como dos extremos, y dentro del manipulativo da tres posibilidades con distintos materiales manipulativos, y ahora ha introducido también, que me ha llamado la atención, el tabular entre medias sin dar ningún tipo de indicación. Yo sé lo que quiere, pero interpreto que los alumnos van a intentar hacer algo porque lo quiere la profesora, no sé si me explico... El simbólico-numérico lo saben hacer, para el manipulativo tienen el material y para el tabular les ha dicho: «como vosotros queráis». Ese «como vosotros queráis» seguro que tendrá trampa [se ríe]; un alumno entiende que eso no es «como yo quiera», sino que tiene que responder a algo. Entonces, el evento es que está presentando un enunciado matemático sobre unas sumas y demás, e interpreto que el objetivo que quiere es estudiar cómo se puede representar. Además, ha marcado otra tarea, la ha dejado caer, que es que luego de dos en dos vean cómo se traduce. Yo interpreto que es una consigna que no está clara, es decir, «cómo se traduce» no sé si tiene una respuesta fácil, no sé si tiene una respuesta que digas: «esta es correcta, esta no es correcta». Entonces, creo que luego al final el ejercicio va a versar sobre muchos comentarios y análisis que tendrán que hacer sobre las respuestas que hagan más que sobre las mismas respuestas.

La tabla [escribe en la pizarra] puede ser más gráfica, puede tener características gráficas, o puede tener características más simbólicas; a mí me va a interesar más

la que tenga características más gráficas, luego ya veremos en detalle cómo, pero tenéis que intentar construirlo vosotros sin que yo os haya hablado de eso explícitamente, ¿vale?



Entonces, paso 1, aquí [señala la parte de representación manipulativa de la pizarra], en paralelo paso 2, simbólico-numérico [lo señala en la pizarra] y luego ya, según vayáis trabajando los cuatro ejemplos, igual ya se os va ocurriendo cómo representarlo con una tabla y cómo trabajar con una tabla ese tipo de operaciones.

Comentario 3: Ya ha explicado qué quiere de tabla, pero lo ha explicado y bajo mi punto de vista a mí me lo ha complicado, quiero decir, yo sé lo que quiere, sé que quiere usar la tabla como ese elemento intermediario entre una esa manipulativa y el simbólico-numérico. Y dentro de la tabla, pues puede ser una tabla ya prácticamente simbólico-numérica o puede ser una tabla gráfica como hay en muchos manuales. Lo que yo interpreto es que no sé yo si con la consigna los alumnos tienen claro qué es lo que tienen que hacer. Entiendo cuál es el objetivo, pero no sé si esto puede salir de manera natural sin dar indicaciones, porque ya lo ha dicho ella: «esto no lo he dicho nunca».

¿Está claro? Yo me voy a pasar por las mesas y me vais preguntando todas las dudas que os surjan. No voy a pedir que me mandéis nada, ¿vale?, porque todavía no he revisado las últimas fotos que me habéis mandado, con lo cual estoy un poco desbordada; como no sois muchos, yo voy por vuestros puestos.

Ahora bien, en el grupo anterior han decidido grabar pequeños vídeos o hacer fotos de los procesos que iban construyendo por llevárselo como material para estudiar, a mí me parece una buena idea, pero ya vosotros hacéis lo que queráis, a mí no me lo tenéis que mandar, pero si queréis, una vez que hayáis construido, por ejemplo, con el ábaco japonés, imaginaos, esta resta de aquí [señala el PDF en la pantalla], y decís: «ah, pues nos vamos a grabar», uno lo hace otro lo graba y lo tenéis de recuerdo, ¿no?, para cuando tengáis que estudiar.

Comentario 4: Detecto otro evento y es que ahora ya no usa ni «hacer» ni «representar», ahora dice «construir». ¿Cómo interpreto yo esto? Ella quiere poner el foco, el objetivo, en el proceso, no en el resultado. Entonces, en ese proceso si tú dices «hacer», estás poniendo énfasis en el resultado, por eso usa «representar» y ahora ha aparecido otro verbo que es «construir». Ya tenemos tres verbos para eso.

¿Cómo voy a pedir yo eso en el examen? Pues no lo puedo pedir porque no puedo llevar un sorobán para cada uno porque tengo un día, 2 horas y media o 3, para haceros el examen final de la asignatura; pero para mí esto es muy importante, entonces yo voy a pedir que me representéis gráficamente, gráficamente, vuestro proceso de respuesta con un ábaco vertical, con un sorobán o con los bloques multibase, que es lo que yo luego voy a hacer aquí en la sesión final de discusión cuando acabemos esta hora de clase. Yo no voy a coger el ábaco aquí, lo voy a poner delante de todos y tal —podría hacerlo, pero no lo voy a hacer—, lo voy a hacer representando gráficamente el material manipulativo y así es como lo voy a pedir el día del examen, porque os voy a dar un cuadernillo y lo tenéis que hacer gráfico, ¿vale? Bueno, pues empezad, están escritas en un orden muy concreto, empezad a hacerlas en ese orden y luego ya discutimos sobre por qué están puestas en ese orden, ¿vale?

Fragmento 2

[F = Formadora del vídeo]. [A = Alumnos (A1, A2 y A3)]. [Comentarios de Marcos presentados en recuadros].

- A1: Estamos rayados con la última resta.
 F: Vale, a ver, empezad.
 A1: Son 704 - 45.
 F: Vale.
 A1: Entonces, aquí no le podemos restar 5.



- F: Así tal cual está, puedes restar..., ¿cuántas puedes quitar?
 A1: Cuatro.
 F: Cuatro, vale, sí.
 A1: Entonces voy a suponer que aquí [señala la varilla de las decenas] hay un 1.
 A2: No, que hay 10.
 A1: Que hay 10, para que sea 14...
 F: A ver, olvídate de los «suponer». Tú dices: «tengo que quitar 5», ¿no?, quito 1, quito 2, quito 3, quito 4 [quita cuentas de la varilla de las unidades] y ahora ponme aquí más para que yo quite, tal y como está.



- A1: Habría que poner 10 y quitamos 1.
- F: Pero ¿cómo me ponéis..., cómo me ponéis ahí? A ver Pablo.
- A2: ¿Que lo ponga?
- F: No, no, que me digas... Yo aquí [señala la varilla de las centenas] tengo ahora mismo 700, ¿no? Escribe 700 de otra forma para que yo tenga bolas...
- A1: Aaaaah, hay que añadir una aquí [señala la varilla de las decenas].
- F: Venga, a ver.
- A2: [El alumno A2 quita una cuenta de la varilla de las centenas y la pone en la de las decenas].
- F: ¿Aquí sigue poniendo 700?
- A1: No, no, no, hay que poner una nueva aquí [vuelve a poner la cuenta en la varilla de las centenas —la que había puesto en la varilla de las decenas el alumno A2— y pone una nueva en la varilla de las decenas].
- F: A ver [quita la cuenta de la varilla de las decenas]. Teníamos 704, hemos quitado 4, tengo 700, ¿vale?
- A1: Sí.
- F: Ahora, escribe 700 de otra forma para poder quitar otra.
- A1: Pues...
- F: ¿Cómo podéis escribir 700 de otra forma?

Comentario 1: Bueno, estamos asistiendo a un proceso habitual de discusión entre un grupo de alumnos o un alumno que tiene dificultades en una tarea y la profesora, que

quiere provocar discusión para que los alumnos sean capaces de resolverlo sin que ella les dé el resultado, sin que ella les dé el procedimiento. Interpreto que los números están elegidos para que pase eso, es decir, está el 704 y al restar 5 obviamente no tiene unidades, pero es que no tienen unidades y tampoco tienen unidades inmediatamente superiores; será consciente y será intencionado para provocar la discusión, que es lo que se está en este momento intentando, sobre los cambios que hay que hacer, los acarreo famosos que luego surgen en los algoritmos clásicos, entre unidades para que materialicen las unidades necesarias para poder restar. Estamos ante un proceso de discusión sobre el procedimiento y ella da indicaciones, es decir, no deja a los alumnos que ellos solos lo hagan. Interpreto que está intentando que los alumnos sepan descomponer las unidades necesarias para poder sacarlas.

A1: Que aquí [señala la varilla de las decenas] haya 9...

F: Venga.

A1: Y aquí [señala la varilla de las unidades]..., 9.

F: A ver, para que haya aquíííí... [señala la varilla de las decenas], vamos a ver, ¿cómo consigo aquí decenas? Sin cambiar el número...

A1: Si quito esta... [quita una cuenta de la varilla de las centenas].



F: Venga, muy bien.

A1: Pongo aquí 10 [señala la varilla de las decenas].

F: Venga, dale.

A1: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10.

A3: ¡Ah, vale!



F: ¿Ahora aquí pone 700?

A1: Sí.

F: ¿Y cómo está escrito 700?

A3: Mal.

F: 6×10^2 , ¿no?, 6×100 , más...

A2: 10×10^1 .

F: 10×10^1 , muy bien. Ahora, ¿puedo quitar aquí [señala la varilla de las unidades] que quería quitar una? ¿Tengo?

A1: No.

F: No, ¿cómo puedo volver a escribir 700 para tener aquí [varilla de las unidades]?

A1: Pues quito de estas [quita una cuenta de la varilla de las decenas] y añado 10 aquí [señala la varilla de las unidades].

F: Vale, venga.



- F: Vale, ¿y ahora puedes quitar la que te faltaba por quitar?
- A1: [La estudiante A1 quita una cuenta de la varilla de las unidades].
- F: Ya está. Ya habéis quitado 5 y teníais que quitar 45, ¿no? ¿Cuánto os falta por quitar?
- A1: Sí, ahora aquí [señala la varilla de las decenas] hay que quitar 4.
- F: Pues ya está, ¿no?
- A1: Ah, vale, vale. Gracias.



- F: ¿Entonces qué habéis hecho para reescribir el 700...? O sea, yo tenía 700 ahí, tenía aquí 700 [deja el ábaco con 7 cuentas en la varilla de las centenas], ¿qué habéis hecho?

A2: Como es sistema decimal, pues aquí [señala la varilla de las decenas] hay 10, porque... representamos un 0, pues quitar una de aquí [varilla de las centenas] y ponerle las 10 aquí [varilla de las decenas] para luego restarlas aquí [varilla de las unidades].

F: O sea que habéis..., ¿agrupado o desagrupado?

A1: Desagrupado.

A2: Aquí desagrupado.

F: Desagrupado. Habéis desagrupado una centena en 10 decenas

Comentario 2: Bueno, Nuria está reinterpretaando, leyendo en términos matemáticos lo que los alumnos han hecho, les ha dicho que están descomponiendo, desagrupando, para que luego puedan mediante la manipulación hacer uso de la definición de resta, que en este caso es retirar cosas, ¿no? Les ha dejado, mediante una manera guiada, hacerlo. Interpreto que lo que está haciendo es que primero ellos lo hagan, es verdad que son adultos y por tanto tampoco es necesario que lo hagan de manera tan autónoma, incluso hay una que dice: «¡ah, sí!», o sea, que se da cuenta en ese momento, y esperar al final para dar los nombres: la centena, la decena, se está descomponiendo... Es decir, de alguna manera está dejando que ellos personalmente elaboren el procedimiento y luego al final es una cuestión de dar nombres a lo que se ha hecho, lo cual es algo clásico en Teoría de Situaciones: se empieza actuando y al final se atribuyen los nombres. Y, efectivamente, es la docente quien tiene que dar los nombres. También es verdad que estos alumnos, por la edad que tienen, son nombres que tendrían que haber manejado sin ninguna duda, pero bueno, es lo que tenemos.

y luego una decena la habéis desagrupado en 10 unidades.

A1: Vale, es que cuando tú lo haces en papel no haces esto así.

F: Ah, pues dime entonces qué es lo que haces en papel.

A1: Claro, lo haces muy mental. O sea, en verdad sí que haces eso, pero... bueno, ya me has entendido.

F: No, no, pero lo tienes que explicar

Comentario 3: Aquí hay una interacción alumno-profesor muy clara. Yo interpreto que lo que a Nuria le interesa es que los alumnos elaboren la relación entre estos procesos manipulativos y el proceso simbólico, que tienen automatizado y, por tanto, como con todos los procesos automatizados, casi nunca se es muy reflexivo. Entonces, la alumna se

ha referido a cómo lo hacen escrito y Nuria ha «cogido el guante» enseguida y ha dicho: «explica cómo hacemos eso por escrito». El objetivo que yo creo que tiene es que los alumnos hagan esa comparación que decía en la consigna que tenían que hacer y, como aquí le ha surgido, dentro de la interacción lo ha aprovechado muy bien. ¿Qué habría pasado si nadie hubiera dicho eso? Pues no lo sé [se ríe].

porque luego os he pedido que lo hagáis simbólico...

A1: Ya, ya, ya.

F: Entonces, simbólico tienes que explicarlo conectado con esto.

A1: Vale, vale.

Fragmento 3

[F = Formadora del vídeo]. [A = Alumnos]. [Comentarios de Marcos presentados en recuadros].

F: Vamos a corregir uno, el primero, ¿vale? Me dan $210 + 543$,

Comentario 1: Es que, claro, estos eventos... El evento: se va a poner a hacer una suma, el ejercicio es hacer la suma e imagino que la va a hacer con distintos... No sé si lo va a hacer solo simbólico o lo que sea... Pero vamos, como evento es ese. ¿Para qué? Pues imagino que para obtener esas correspondencias entre los distintos procedimientos. Todo esto está detrás de un objetivo que es que los niños, bueno, nuestros alumnos, no los niños, entiendan por qué sumamos como sumamos, o por qué restamos como restamos, y que a la vez cojan técnicas para provocar que los niños de primaria también conozcan el porqué de todos estos algoritmos.

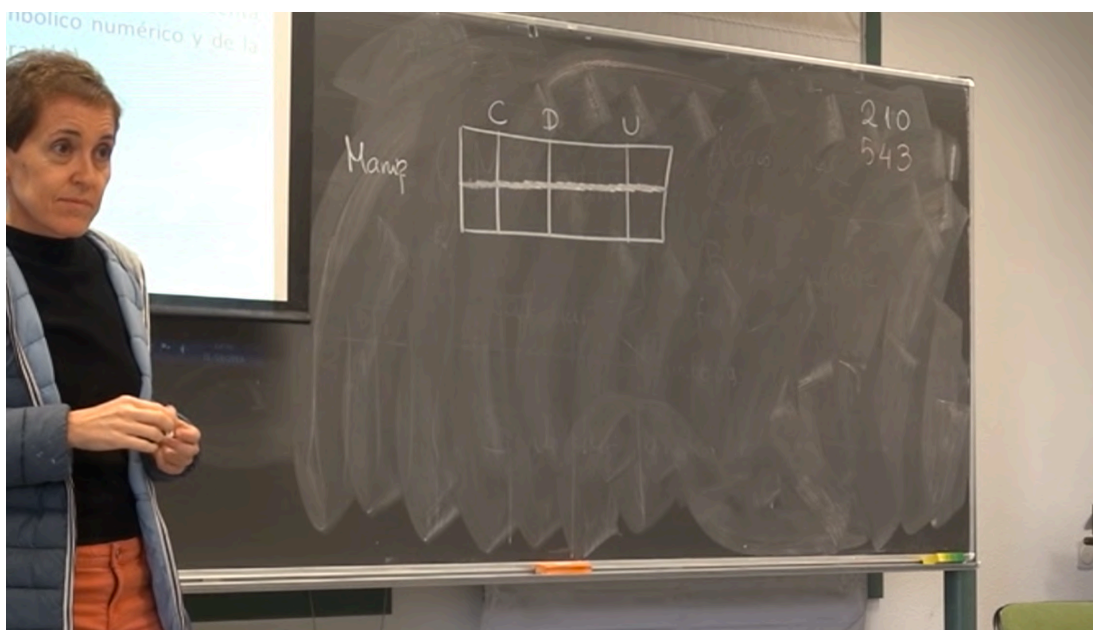
¿vale?, con símbolos. Voy a representarlo..., vamos a empezar con manipulativo y voy a ejemplificar con el sorobán, que es el que parece que más trabajo cuesta, ¿vale? Entonces, en el sorobán, cuando lo representéis gráficamente el día del examen, o ahora en vuestro cuaderno si tenéis que tomar notas, es muy importante marcar la barra del medio, porque la proximidad de las bolas a la barra del medio es la que te indica qué número está representando, ¿vale? Y ahora, dado el problema que me han planteado, ¿cuántas varillas pensáis que necesito escribir?

A: Tres.

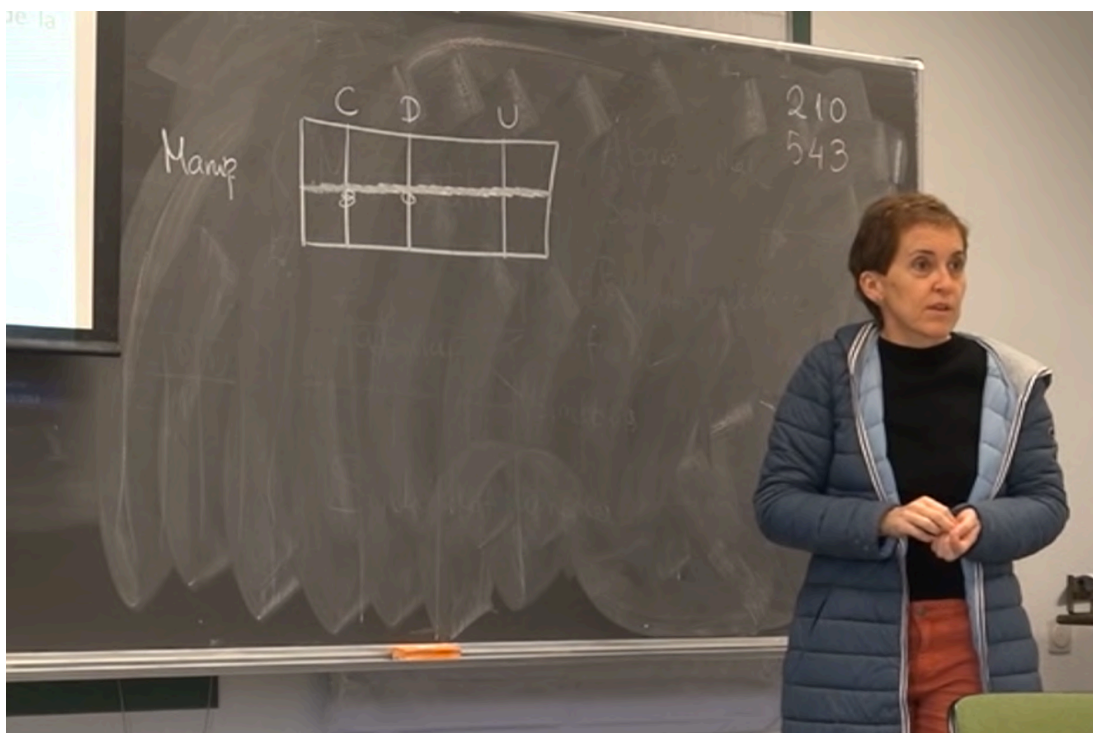
F: ¿Tres varillas? Pongo una varilla, dos varillas, tres varillas. Esta, unidades, decenas, centenas.

Comentario 2: Evento: va a resolverlo, hace una representación que les dice cómo lo tienen que hacer, y les está haciendo preguntas sobre cuántas varillas, con qué condiciones tiene que construir el sorobán. Yo interpreto que hubiese sido interesante... Bueno, no, porque eso son cosas que yo habría hecho... Que hubiera puesto una cuarta [varilla] aunque no la hubiera necesitado para escribirlos, porque habría generado reflexiones quizá más... Bueno, estos números no tienen llevadas. Lo que sí tienen..., el sorobán tiene 5 y 1, tiene un agrupamiento auxiliar, entonces es un número solo pensado para trabajar el cambio entre los agrupamientos auxiliares de cada unidad, pero no hay acarreo entre unidades.

Esta la pongo un poco más gorda para que se note que es la barra de madera del medio, ¿vale? Y ahora, ¿cómo dibujo 210?



- A: Pues 0 unidades.
- F: 0, o sea que aquí no pongo nada pegado a la barra, ¿no? [señala la varilla de las unidades]. ¿Aquí? [señala la varilla de las decenas].
- A: 1 decena.
- F: Una pegada a la barra, ¿arriba o abajo?
- A: Abajo.
- F: Abajo, o sea que aquí va una.
- A: Y 2 centenas pegadas a la barra de abajo.
- F: Pegadas a la barra, abajo. Una y dos, ahí está. Eso es 210.



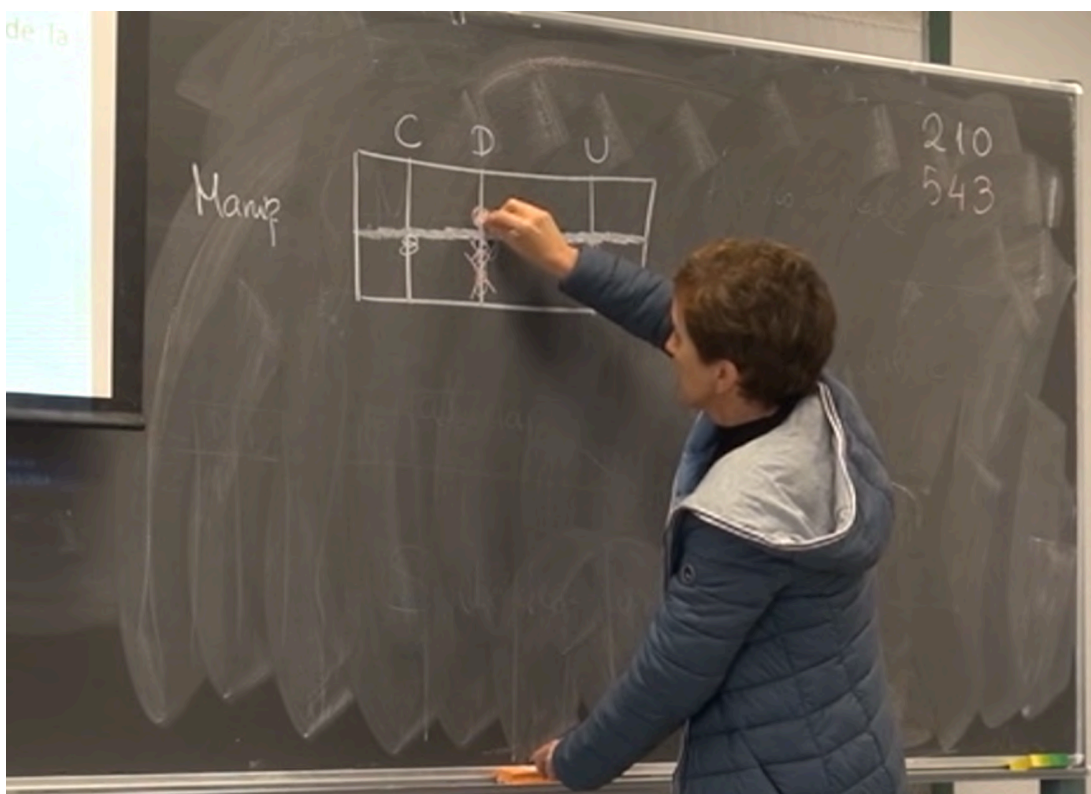
Y ahora, tengo que sumar 543, es decir, que tengo que añadir 543 unidades ahí. Aprovecho la estructura, ¿vale? Entonces, añado 3 unidades, en la varilla de las unidades, que son 3 aquí abajo, ¿no?, 1, 2 y 3 [las dibuja en la varilla de las unidades]. Después añado 4 decenas, en la varilla... 1, 2, 3, 4, ¿vale? [las dibuja en la varilla de las decenas], 4 decenas.

A: Pero cambiamos...

F: Pero...

A: Bajamos una de arriba y quitamos las de abajo.

F: Porque no tenéis 4, ¿vale?, ya no había suficientes, ¿por qué?, porque las bolas de arriba valen 5, entonces decís: «no pasa nada, estas, como eran 4 y 1, 5, se representan ahí arriba», ¿vale?



Y luego, 5..., tengo que añadir 5 centenas, ¿cómo lo hago?

A: Pues 1 arriba.

F: Una de arriba la bajo directamente o podría ir: «1, 2, 3, ya tengo 5, las subo ahí, 4, 5» [va señalando en la varilla de las centenas], ¿vale? Puedo hacerlo de dos formas distintas. Pero si aprovecho la estructura del ábaco, de manera que las bolas de arriba valen 5, como tengo que añadir 5, pues directamente ya añadido ahí esas 5 [dibuja una bola en la varilla de las centenas, en la parte superior, pegada a la barra horizontal], ¿vale?

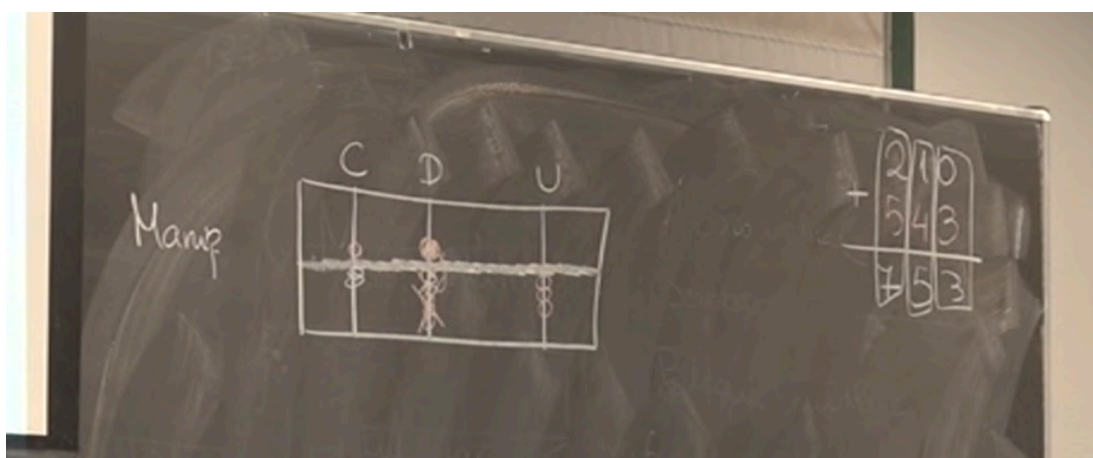
Entonces, [representa ahora el resultado en la suma con el algoritmo tradicional de forma simbólico-numérica a partir de lo que ha obtenido en la representación con el sorobán] me quedan 5 y 2, 7, aquí me quedan 5, y aquí me quedaban 3. Entonces, si yo lo represento así y voy sumando por columnas,

Comentario 3: El evento: está haciendo la suma con la representación en el ábaco japonés, en el sorobán, y luego lo ha hecho con el registro simbólico-numérico, ayudándose de los alumnos. Y lo que interpreto es que quiere que vean el paralelismo que existe entre un proceso y otro. Imagino que lo ha hecho sin llevadas para que ese paralelismo sea como más evidente. Ella hace referencia a uno de los problemas clásicos de la suma, que es juntar; añadir, como ella dice. Es verdad que la suma no es solo eso, pero es uno de los

elementos, además ella lo dice: «recordad la operación suma que era la unión de los conjuntos...». Entonces, yo interpreto que coge modelos muy sencillos para ver ese paralelismo. Bueno, ya digo que el único cambio que ha tenido que hacer aquí es el cambio de 5 a 1, lo que se llama agrupamiento auxiliar, que lo tiene este ábaco. Simplemente, el objeto que tiene el agrupamiento auxiliar es no tener que contar, son números visuales y se «subitizan» las cantidades sin necesidad de contar. Es la única discusión que aquí ha surgido, más allá del 5, que bueno, ella quiere hacerlo de uno en uno, pero los alumnos le dicen: «no, no, coge la de 5, lo metes y déjate de problemas» [se ríe]. Ella lo quiere hacer como más así..., pero ellos dicen: «no, eso ya lo controlamos, no hace falta» [se ríe].

tal cual he ido haciendo en el ábaco, tengo 0 unidades y 3 unidades, 3 unidades, 1 unidad y 4 unidades, 5 unidades, perdón, decenas, 2 centenas y 5 centenas, 7 centenas. Vertical, lo he colocado vertical por parecerme a la estructura del ábaco, ¿no?, para tener en cuenta la «posicionalidad», ¿vale?, del sistema.

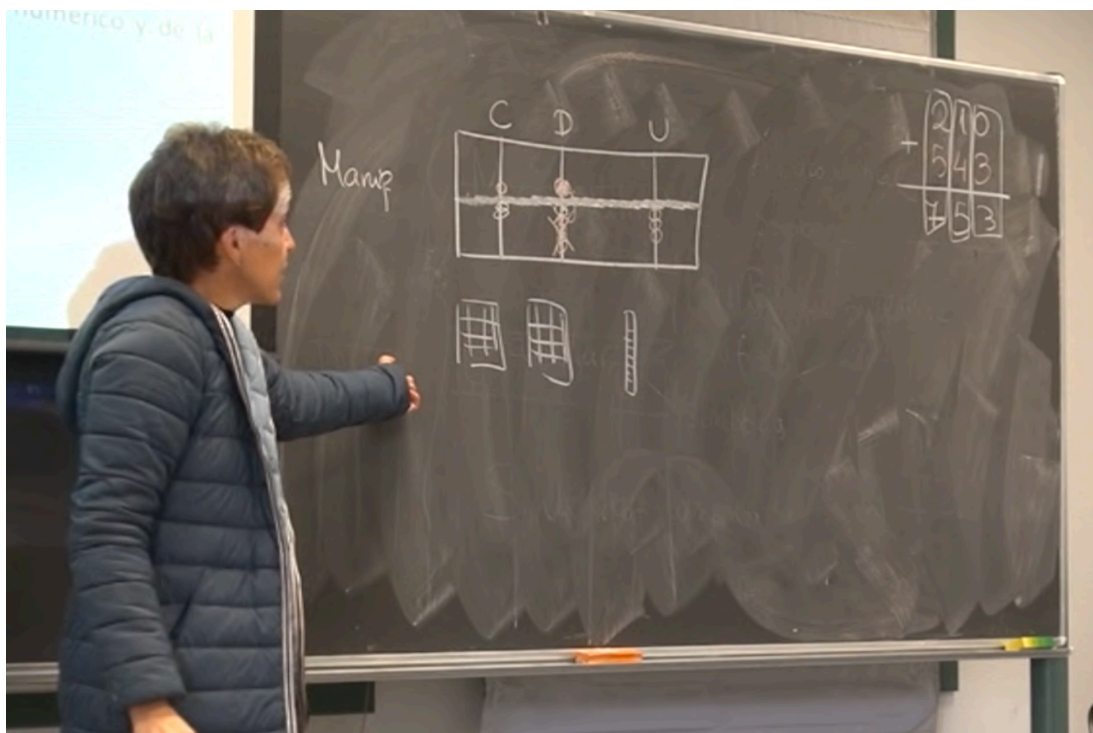
Comentario 4: Les está explicando el paralelismo y dice que lo ha puesto vertical para parecerse a la estructura del ábaco. Bueno, lo ha colocado vertical como lo colocamos siempre, es la manera tradicional de sumar. Quiere insistir tanto en la equivalencia con el ábaco que incluso llega a justificar la disposición de los números que ponemos nosotros. El ábaco hay veces que lo utilizan así [hace un gesto indicando que lo sitúan con las varillas en horizontal y no en vertical como lo ha dibujado la formadora], por lo menos los chinos [se ríe]. Pero bueno, lo ha querido usar de esa manera. Bueno, siempre se nos ha dicho que lo ponemos así [vertical] para que coincidan las unidades... Pero bueno, con eso remarca eso, ¿no?



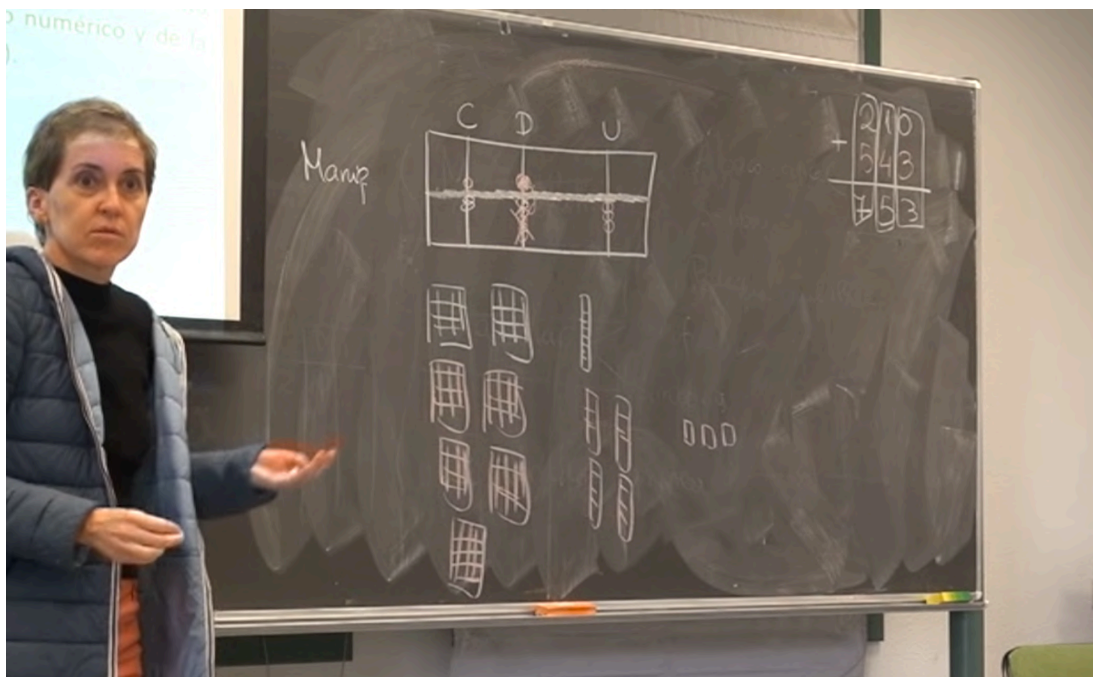
Entonces, he traducido al simbólico lo que he hecho aquí manipulativamente al escribir en simbólico en columnas y represento con cada columna cada una de

estas [señala las varillas del sorobán de la pizarra]. Y luego, la escritura, sí que tengo que tener en cuenta que estos son 5 [señala las decenas de la suma en simbólico] con lo cual van arriba [en el sorobán] y esto son 7 [señala las centenas de la suma en simbólico], pues son 5 y 2 [en el sorobán], ¿vale?

Bloques multibase, bloques multibase, pongo aquí 210, ¿no?, que son 1 y 2 placas de 100 y 10, una decena; este es el 210.



Y ahora agrupo 543; una, dos, tres, cuatro y cinco [dibuja 5 placas de 100 unidades], añado, ¿vale?, 500. 40: una, dos, tres, cuatro [barras de 10]; y 3: uno, dos y tres [unidades]. Y ahora lo pongo todo junto. ¿Vale?



Y digo: «aquí tengo 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 [placas de 100]», ¿necesito agrupar? [Rodea con una línea todas las placas de 100].

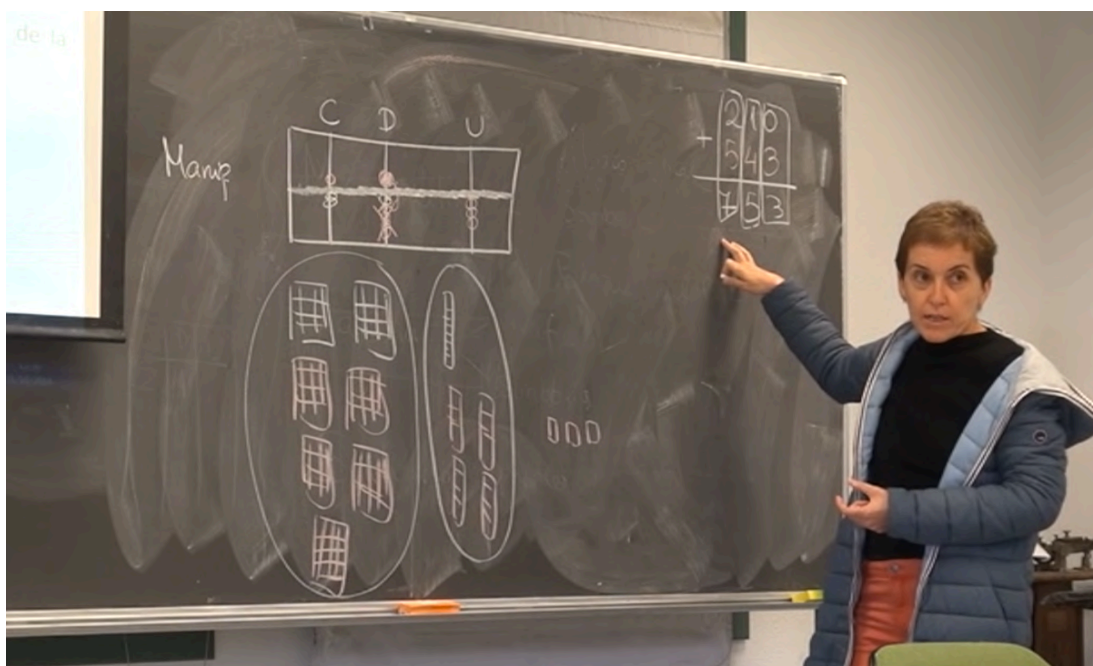
A: No.

F: No necesito agrupar. Aquí tengo 1, 2, 3, 4, 5, 6, 5, ¿necesito agrupar estos 5 de alguna manera? [Rodea con una línea todas las barras de 10]. No porque es base 10. Y aquí tengo 3, ¿vale? O sea, que me vuelve a salir 2, 4, 6, 7 [centenas; señala la suma en simbólico], 2, 4, 5 [decenas], 5 [señala la suma en simbólico] y 3. Y veo la conexión de uno con otro, ¿vale?

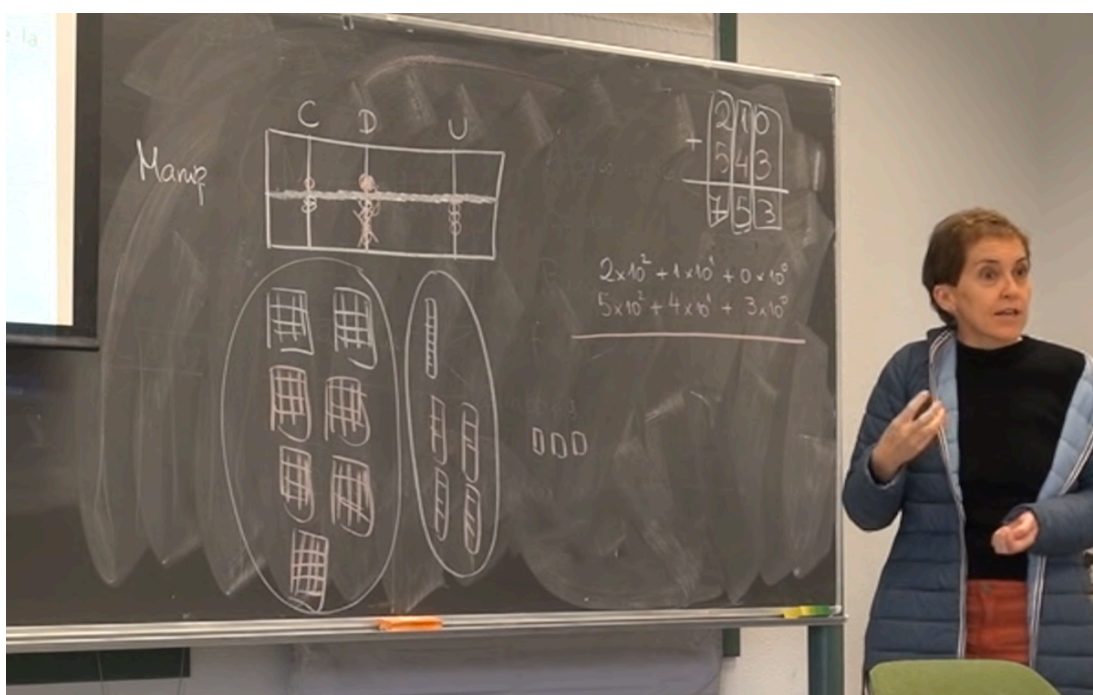
Comentario 5: Hecho: ahora lo hace con los bloques multibase y, cada vez que lo hace, establece el paralelismo con el proceso simbólico. Está claro que el objetivo es establecer paralelismos entre... Interpretación: quiere ver que se puede representar el algoritmo de muchas maneras distintas, porque es que son algoritmos distintos, y que simplemente es un problema de traducción; Duval en estado puro.

¿Está claro hasta aquí?

A: Sí, eso sí.



- F: El que quiera escribirlo simbólico-numérico de otra manera en la que se vea la «posicionalidad» del sistema, podría escribirlo de la siguiente forma: $2 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 0 \times 10^0$, ese es el primer sumando; segundo sumando, $5 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 3 \times 10^0$; y sumo.



Y ahora, al sumar, utilizo la propiedad conmutativa, para colocar los sumandos en el orden que quiero, y asociativa, para ir organizando, ¿vale? O sea, que este [señala 5×10^2] —que, si lo coloco seguido, estaría aquí el cuarto [señala detrás de 0×10^0]— lo quiero colocar el segundo para agruparlo con este [señala 2×10^2],

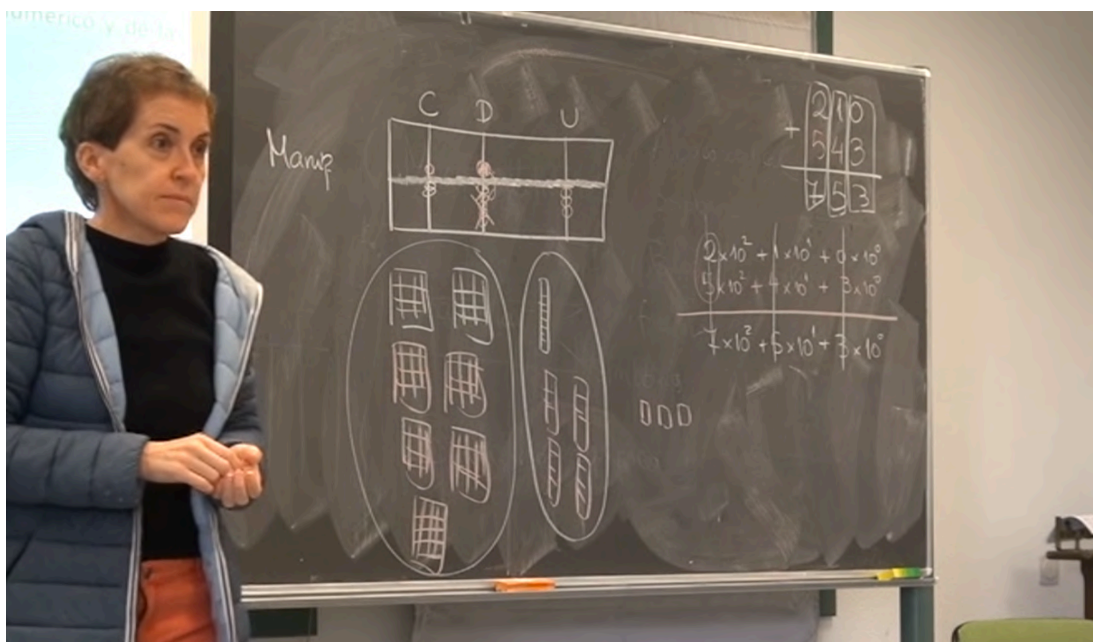
Comentario 6: Bueno, está intentando hacer el proceso con la escritura polinómica y yo interpreto que lo que quiere es justificar todo este proceso, como si no quedara justificado ya con todo lo que está haciendo, ¿no? Le falta decir que la propiedad distributiva la va a necesitar al final, porque $2 \times 10^2 + 5 \times 10^2$ es 7×10^2 , es decir, que no solo usa la asociativa y la conmutativa, también habrá que hacer la distributiva. Y luego hay algo con lo que disiento desde el punto de vista didáctico; no sé si es el momento de decirlo, porque tú [se refiere a mí, investigador que está con él viendo el vídeo] has dicho si hay errores o no..., ¿me lo dices? [Se le indica que puede decirlo]. Eso que está haciendo no es precisamente lo posicional, lo posicional es lo de arriba [la suma tradicional]. Yo podría escribir ese número en cualquier sistema y respondería a esa escritura polinómica. Por un lado está la escritura polinómica y por otro lado está el tipo de sistema. El sistema que nosotros usamos es regular y posicional, pero, por ejemplo, si usáramos un sistema decimal como el chino, que es multiplicativo y no es posicional, la descomposición polinómica sería la misma. Con lo cual, decirle posicional cuando escribo la polinómica yo creo que no es del todo... Otra cosa es que diga: «bueno, puedo usarlo y luego veo cómo agrupo», ¿vale?, y me justifica por qué lo hago de la otra manera; digamos que sería otro proceso distinto, pero no le añade «posicionalidad» al proceso. Lo que le añade mucha «posicionalidad» es el sorobán, el ábaco japonés, ese sí, porque no queda más remedio... Sin embargo, por ejemplo, los bloques multibase, tú puedes juntarlos todos y luego separarlos, ahí la posición... Los bloques multibase se comportan como un sistema aditivo y en los sistemas aditivos la posición no es nada relevante. Ahora, cuando tú escribes eso [la expresión polinómica], eso vale para cualquier sistema, entonces no creo que añada nada posicional. Ahora lo que quiere es mostrar el proceso de cómo sería más cómodo y entonces lo que sí que va a justificar [de la expresión polinomial] es por qué guardar las posiciones es útil, eso sí.

este [señala 4×10^1] —que estaría el quinto [señala detrás de 0×10^0]— lo coloco el tercero para agruparlo con este [señala 1×10^1], y este [señala 3×10^0] lo agrupo con este [señala 0×10^0]. Y ahora, al agrupar, ya me quedan 5 y 2, propiedad distributiva, 7×10^2 más, 4 y 1, 5×10^1 más, 0 y 3, 3×10^0 . Pero ahí estoy utilizando la asociatividad de la suma, la conmutatividad de la suma y la distributiva de la suma y el producto de números enteros, ¿vale? Pero si lo coloco así, veo esto, esto y eso [señala los coeficientes que acompañan a 10^2 , 10^1 y 10^0], que es lo mismo

que esto, esto y eso [señala el 7, 5 y 3 del resultado de la suma en la forma simbólico-numérica],

Comentario 7: Me parece muy interesante... Bueno, lo que está haciendo ahora es establecer paralelismos. Interpreto que le interesa mucho que los alumnos entiendan cuáles son las propiedades que sustentan las técnicas de cálculo. Me parece que es muy importante hacer eso para que sepan que esas propiedades hay que trabajarlas. Parece que la conmutativa, la asociativa y la distributiva son nombres que se añaden cuando uno estudia matemáticas, un poquito ya mayor, pero sin embargo son propiedades que hay que tener operativas para poder justificar los procedimientos que usamos. No se entiende ninguna técnica de cálculo ni, por supuesto, el producto sin las propiedades que ha enunciado; no tendríamos esas técnicas. Por tanto, me parece muy importante, interpreto que es una muy buena decisión explicar esas propiedades, porque luego didácticamente van a tener mucha transcendencia.

que es lo mismo que esto, esto y esto [señala los bloques multibase en la pizarra] y que es lo mismo que 1, 2 y 3 varillas [señala las varillas del sorobán en la pizarra]. ¿Está claro hasta aquí?



- A: Sí.
- F: Ahora, ¿qué diferencia hay entre esto y la siguiente suma que me plantean ahí [en el PDF proyectado en la pantalla]? $316 + 429$.
- A: Que me paso de unidades y tengo que pasar a las decenas.

F: Que cuando agrupo aquí, por ejemplo [bloques multibase], o cuando agrupo aquí [sorobán], o cuando agrupo aquí [expresiones de sumas y productos de potencias de 10], aquí aparecen más de 10 [señala al 3 de 3×10^1]. En algún sitio aparecen más de 10,

Comentario 8: Bueno, aquí simplemente estamos asistiendo a qué ocurre cuando hay que llevarse, cuando se produce el acarreo entre unidades. Entonces, lo está haciendo mediante preguntas que ellos contestan, «que me paso y demás». Interpreto que quiere ver cómo se comporta ese tipo de reagrupamiento que hay que hacer en cada uno de los sistemas de representación que está utilizando. Pero, vuelvo a decir, lo que ella quiere ver es que todos los procesos son el mismo y es equivalente al que hacemos de una manera mucho más automatizada en nuestro cálculo simbólico, en nuestra técnica de cálculo usual.

por ejemplo, cuando tengo 9 unidades y 6 unidades, aquí aparecerían 15 fichitas pequeñas [bloques multibase], aquí tendría que representar 15 [sorobán] y aquí aparecería 15×10^0 . Pero como estamos en base 10, no puedo dejarlo así, tengo que agrupar, tengo que agrupar. Entonces, agrupo 10 y dejo 5, y las 10 que agrupo las paso al siguiente valor, es decir, pego 10 fichas y construyo una barra [bloques multibase], agrupo 10 y me sale otra bola aquí en el ábaco, aquí abajo [parte baja de la varilla de las decenas], o agrupo 10 y me sale uno más aquí [en 5×10^1] y aquí [en 3×10^0] dejo las que se quedaban sueltas, las 5, ¿vale? O sea, que la única diferencia es que aquí, después de representar cada cantidad y de ir poniendo por orden el valor de cada una, tengo que agrupar porque en algunos sitios tengo 10 o más, ¿vale? Es la única diferencia.

Y ahora, si quisiéramos representar esto en formato tabla, como tenía Martín, ¿no? ¿Cuántas columnas pondré yo en la tabla?, ¿qué me pide el cuerpo? Tengo que dibujar una tabla, ¿vale?, vamos a dibujar una tabla [comienza a dibujarla en la pizarra], con filas y columnas, ¿cuántas columnas pongo?

A: Tres.

F: Tres, ¿por qué tres?

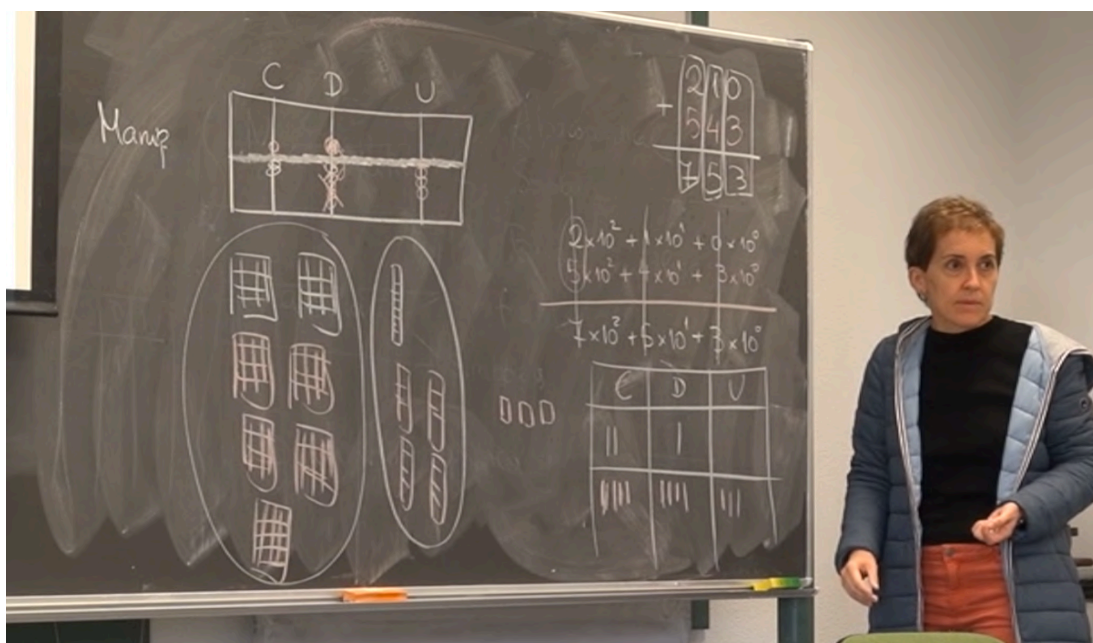
A: Centenas, decenas y unidades.

F: Unidades, decenas y centenas, ¿vale? Y entonces, represento el primer número, 210: 1, 2, 1, eso es 210 [pone dos rayas en la primera casilla de las centenas y una en la primera de las decenas]. Represento el segundo número, 500: 1, 2, 3, 4, 5; 40:

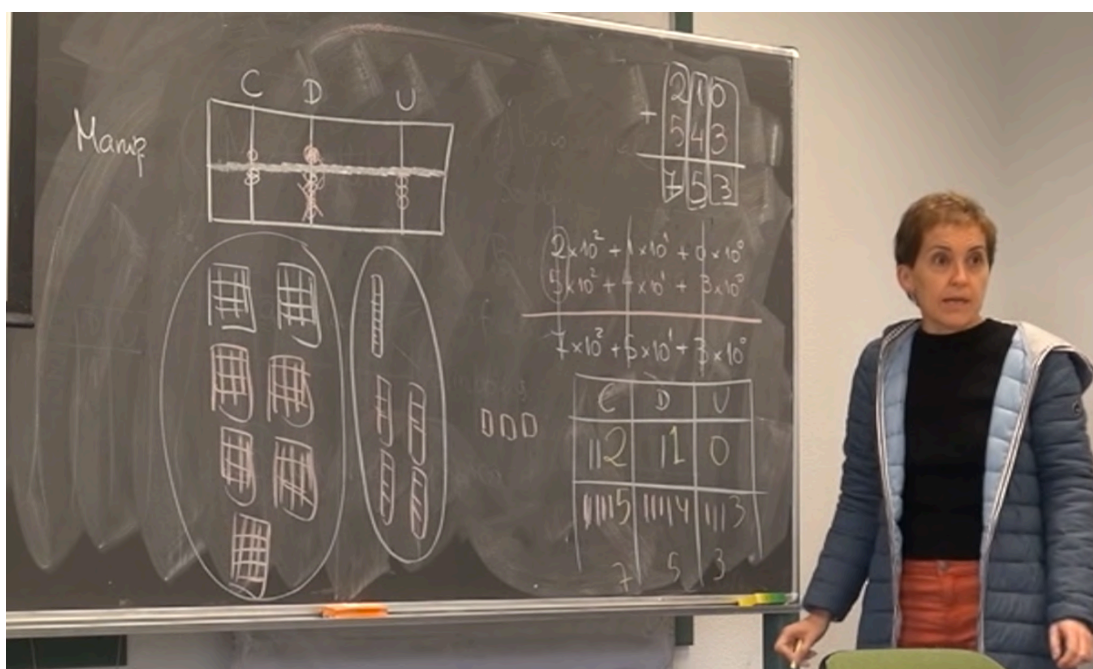
1..., bueno, en rosa, ya puestos..., 1, 2, 3, 4, 5; 40: 1, 2, 3, 4; y 3: 1, 2, 3. Y agrupo: ¿cuántas unidades tengo al final?, 3, ¿cuántas decenas tengo al final?, 5, ¿cuántas centenas tengo al final?, 7, fin.

Comentario 9: Bueno, ahora está simplemente haciendo una tabla. Ahora ya me he aclarado yo qué tabla quiere. Porque también, así como lo está haciendo, podría ser escribir 2, 1, 0, o sea, los números; como ella sabía que eso podía ocurrir, ha dicho que la prefería más gráfica. Yo aquí interpreto una cosa interesante: en realidad aquí solamente hay dos tipos de..., no sé si de algoritmos, sobre todo con las llevadas. Cuando ella cuenta de pasada lo de las llevadas, efectivamente, en el caso simbólico y en el caso del ábaco no se ve el cambio, es un cambio que yo produzco porque sé que el sistema funciona así. Me explico: sé que la varilla donde están las decenas..., cada bola vale 10 veces la unidad, pero eso no se ve, no hay una percepción de ese valor. Lo mismo ocurre en un sistema posicional, que se basa en eso, los símbolos son los mismos, pero solo la posición le da un valor distinto; pero es algo que yo debo conocer de inicio. Sin embargo, tanto en los bloques multibase como en la tabla, yo sí observo que si tuviera, por ejemplo, 10 varillas, físicamente son equivalentes a una tabla; la manipulación te pone de manifiesto los cambios que hay que hacer, mientras que en el otro soy yo el que debe conocer los cambios que existen. Entonces, el hecho de haber presentado..., primero, en cada «sistema» lo ha hecho de dos maneras: ábaco y simbólico, multibase y la tabla, pero sí que hay una frontera importante entre esos dos sistemas, y es que en uno los cambios los marca la percepción, mientras que en otro la percepción no te los marca, sino que eres tú el que debe conocer que hay un cambio entre las distintas columnas, ya sean las columnas de los números, las posiciones, o las varillas del ábaco. Sin embargo, en las otras no... Bueno, la tabla estaría a mitad de camino, porque efectivamente cada varilla..., sí, sería parecido al ábaco, porque los cambios no se perciben, se saben. Es en los multibase cuando perceptivamente se ve, físicamente se ve que la tabla está hecha como con 10 varillas... De hecho, el material Montessori de los multibase está hecho con bolitas con alambres y se ve que la tabla está hecha con 10 varillas, se pueden contar las 100 bolitas, y la de 1000 es un cubo y se pueden contar las 1000. Es decir, se observa cómo físicamente el agrupamiento es compatible, se ve. Entonces, bueno, interpreto que lo que aquí quiere ver es que el alumno tenga estrategias para que el niño, cuando tenga que construir procesos más simbólicos, pueda tener siempre el recurso, en este caso, de la percepción, que te lo da; eso sí, hay que hacer luego los puentes para que se abandone, esto es incomodísimo, tener que

pintar 5 tablitas de esas y tal es muy incómodo, ¿no?



Este sistema de representación es icónico-gráfico porque he representado aquí las cantidades con palitos, pero tiene una estructura especial porque está en una tabla, ¿vale? Entonces, vamos a decir que es un sistema de representación tabular-gráfico. Si en vez de poner aquí gráficos, yo hubiera dicho: «oye, mira, no me lío con los gráficos, ya puestos, como ya controlo mejor los símbolos, pues voy a poner aquí 210 y aquí abajo voy a poner 543 y luego ya sumo: 4 y 1, 5 y 2, 7; 3 y 0, 3», ¿vale?



Sería tabular, tiene una estructura tabular, no es puramente simbólico-numérico, tiene una estructura tabular, pero con números dentro, tabular-numérico, ¿vale?

Comentario 10: Bueno, está explicando los distintos sistemas tabulares, tanto el simbólico como el gráfico. De alguna manera, lo tabular, y así lo interpreto, lo marca como un paso intermedio al proceso simbólico, y así lo ha hecho, aquí se observa claramente. Si nos damos cuenta, en el simbólico normal, el 5 que está puesto en las centenas en el número de abajo y el 5 que aparece en las decenas no se diferencian en nada, solo la posición. Sin embargo, en la tabla, se diferencian en que un 5 lleva una D arriba y el otro lleva una C arriba, es decir, hay una C y una D que dicen lo que son. Me puedes decir: «hombre, también están puestos en un orden». Sí, pero no es solo la posición lo que marca el valor, sino la C, la D y la unidad. Entonces, es un paso intermedio. Sin embargo, los bloques multibase es un sistema puramente aditivo, con lo cual interpreto que la evolución que ella ha presentado aquí es una evolución muy interesante entre cómo se suma en un sistema aditivo, que se suma como en los bloques multibase, cómo se sumaría en un sistema multiplicativo, como sería el tabular, y cómo se suma en un sistema posicional, que es el nuestro. El ábaco es puramente posicional también, pero en vez de tener símbolos para los distintos órdenes, tiene un sistema aditivo pequeñito en cada orden, pero no es lo más relevante. Interpreto que hay un intento de mostrar cómo funciona cada sistema para que el alumno tenga recursos para luego, cuando vaya a clase, sepa adaptar qué tipo de sistema puede utilizar para que los alumnos de primaria construyan de manera satisfactoria los algoritmos clásicos de las operaciones.

Entonces, yo voy pasando de lo más concreto, que sería: «mi madre me ha dado 316 euros y mi abuela 429, ¿cuántos euros tengo en total?», después paso a manipular, con ábacos verticales, con ábacos japoneses, con bloques multibase..., y cuando interiorizo bien eso, digo: «ostras, venga, lo voy a poner en una tabla gráfica y voy a indicar lo que me indica cada varilla o lo que me indica cada agrupamiento de los bloques multibase, que es posición, en las columnas de una tabla, y ahí voy a poder marcarlo con símbolos». Esta tabla con símbolos se llama tablero de posición, porque tengo las posiciones indicadas —unidades, decenas y centenas—, y es uno de los recursos que más utilizan en el método famoso este Singapur, que habréis visto o habréis oído hablar de él, ¿vale? Entonces, ¿qué están haciendo?, están haciendo una transición de lo más concreto, pasando por lo manipulativo, hacia lo abstracto, que sería..., esto es lo más abstracto [señala

las expresiones de sumas y productos de potencias de 10] y esto es lo abstracto que se trabaja en primaria [señala la suma hecha en el registro de representación simbólico-numérico], ¿vale?

Comentario 11: Bueno, está poniendo de manifiesto todo el proceso, toda la evolución: manipulativo, tabular, simbólico. Incluso les da indicaciones de que, efectivamente, es verdad que el método Singapur hace tablas para todo, usa muchas tablas; y bueno, está bien, es una manera de organizar la información. Interpreto que lo hace porque la idea es que el alumno conozca de dónde vienen las técnicas y cómo se adaptan al sistema; hace una progresión adecuada para que el alumno tenga recursos y pueda construir sus técnicas de cálculo, porque no se trata de que tú enseñes la técnica, sino de que el alumno la construya; es la única manera de conseguir un aprendizaje significativo del cálculo. No tiene sentido enseñar un algoritmo sin saber cómo funciona; no están para eso las matemáticas. Sin embargo, creo que hay una diferencia que ella no hace: yo no creo que tenga el mismo nivel manipulativo el ábaco que los bloques multibase. El ábaco es un sistema posicional, en las dos representaciones tipo ábaco que ha hecho ya se marca la posición con las mismas bolas, aunque estén en sitios distintos. Sin embargo, los bloques multibase no, los bloques multibase son un sistema puramente aditivo, con lo cual la percepción te dice el agrupamiento. En los bloques multibase cada unidad es distinta, cada unidad representa físicamente la cantidad de unidades totales que tiene. Esto, traducido en términos de sistemas de numeración, es: sistemas aditivos, sistemas multiplicativos y sistemas posicionales. Por eso, dentro de esa manipulación yo también haría alguna gradación, es decir, los manipulativos no son todos equivalentes. No obstante, la progresión es perfecta para llegar al simbólico.

Pero no trabajan directamente con esto, vamos pasando..., concreto, concreto, concreto, concreto [de forma manipulativa], voy intentando abstraer un poco, pero tengo mis gráficos que me ayudan a visualizar lo que estoy haciendo [de forma tabular], y finalmente mi objetivo es escribirlo simbólico-numéricamente, de forma abstracta, ya al final. ¿Cómo habéis trabajado mayoritariamente vosotros en primaria cuando estabais haciendo sumas de este estilo? ¿Desde aquí [señala lo manipulativo] o desde el final [señala lo simbólico-numérico]?

A: Desde el final...

A: Yo con las de centenas, decenas y unidades, las cajas...

- F: Las cajas estas también os suenan, los tableros de posición, pero ¿y qué poníais en las posiciones, palitos o los números ya?
- A: Los números directamente.
- F: Los números directamente, o sea, que estabais trabajando la fase inicial, de la suma, la estabais trabajando directamente con lo simbólico, que es la fase final, ¿lo veis?
- A: Jolín, sí.
- F: Vale, pues ala, ya está.

Comentario 12: Bueno, ya para terminar, evento: les está remarcando un hecho y es que el proceso de la enseñanza clásica empieza con el último trabajo y luego pasa un tiempo para adiestrar al alumno en ese trabajo. Interpreto que ella está defendiendo que el proceso debe ser distinto, es decir, ese es el estadio final, que es donde los alumnos tienen que llegar. Si empezamos por el final, y así lo interpreto, y en esto entran todas las teorías de aprendizaje, corremos un gran riesgo de que no se produzca el aprendizaje significativo. Es lo que yo interpreto que quiere hacer ver con esto.

ANEXO 22

Transcripción de los comentarios de Daniel en la fase 2

Nota: El texto presentado entre corchetes en la transcripción se corresponde con información incluida por el investigador.

TRANSCRIPCIÓN DEL VÍDEO 1

Fragmento 1

[F = Formadora del vídeo]. [Comentarios de Daniel presentados en recuadros].

F: Bueno, entonces os voy a dar el guion y empezáis a trabajar y, al final, los últimos 15 minutos, hacemos la puesta en común. El guion de la actividad aparece aquí en el campus, pone la fecha, ¿vale?, «actividad para la sesión del 19 de septiembre». Lo voy a leer porque está en inglés, por si alguno tuviera alguna dificultad, lo leo y os ponéis a trabajar, ¿vale?

Todo el mundo en la mesa tiene un montón de palillos y varias cintas de estas, ¿no?, elásticas. Si alguien necesita más cintas me las pide, palillos no, son los que os he puesto, ¿vale?, es con lo que tenéis que trabajar.

Comentario 1: La formadora enuncia los materiales que tienen los alumnos en la mesa con el propósito de que sepan desde el primer momento que los materiales manipulativos van a ser un objeto central, importante, de trabajo durante la sesión.

El problema es que yo he comprado una caja de palillos en Supeco y resulta que mis compañeros lo compran en Mercadona y me dicen que las cajas de palillos que ponen 800 palillos del Mercadona traen más y que les sale a cuenta, y que cuando van a comprar materiales —porque a veces tenemos que comprar nosotros los materiales— pues que merece la pena. Yo no pude ir a Mercadona, fui a Supeco, pone que son 800, pero no sé si me han timado o no me han timado. Entonces, para hacer un control de calidad, hacer una estimación, que luego, bueno, los que hayáis hecho Matemáticas de Ciencias Sociales pues sabéis hacer un contraste de hipótesis y tal, pero bueno, lo primero que tengo que hacer es hacer una estimación de cuántos hay, ¿no? Entonces, los he repartido para no contarlos yo y la idea es ver cuántos hay.

Comentario 2: La formadora plantea el problema, que va a ser contar cuántos palillos hay en las cajas que ha distribuido, y lo contextualiza, con la idea de comprobar si cajas de diferentes distribuidores van a tener la misma cantidad o no. Entonces, contextualiza la actividad, que es contar los palillos de las cajas.

Entonces, el guion de la actividad, tal y como aparece aquí... [espera a que cargue el ordenador]. Aquí está el guion. Esta actividad –esperad que la amplíe un poco– está escaneada de un libro muy bueno que utilizan en los últimos años en Estados Unidos para formar profesores de primaria. Lo bueno del libro es que, además de los contenidos teóricos, más de la mitad del libro son actividades para llevar al aula-taller como estamos haciendo aquí, ¿vale? Entonces, una de las actividades iniciales para el trabajo con el número, que es con lo que estamos empezando nosotros, es esta de los palillos, ¿vale?

Comentario 3: La formadora contextualiza la actividad que ha propuesto comentando que es parte de un libro de formación matemática de maestros de Estados Unidos.

Entonces, aquí la pregunta es «cuántos», cuántos palillos, ¿no?, que es lo que os he preguntado a vosotros, ¿no?, cuántos. Entonces, cada grupo participando en esta actividad tiene un montón de palillos y luego tiene algo para atarlos, ¿no?, *rubber bands*, pues cintas de estas elásticas. Los materiales ya los tenéis. El objetivo de la actividad es ayudaros a entender el desarrollo de la escritura de los números tal y como los utilizamos nosotros en nuestro sistema de numeración, ¿vale?

Comentario 4: La formadora presenta el objetivo de la actividad; creo que trata de que entiendan que agrupar palillos es una estrategia que deben explorar los alumnos y también la contextualiza en el objeto de estudio, que es la escritura de números grandes.

Entonces, primero, organiza los palillos de forma que visualmente puedas ver más o menos cuántos hay; usa las bandas elásticas, si te ayudan, para organizarlos de manera que así, de un vistazo, puedas decir cuántos tienes, primero los cuentas, lo organizas, piensas cómo organizarlo, pero la cosa es que la organización que tú tengas en la mesa te permita de un vistazo recordar cuántos hay sin necesidad de haberlo apuntado, ¿no?, y que, si yo me paso por

allí, me podáis decir: «mira, hay no sé cuántos, porque...», lo veo porque lo hemos organizado así», ¿vale?

Comentario 5: Complementa lo anterior sugiriendo qué quiere decir con agrupar, que agrupar quiere decir que sea más fácil detectar la cantidad de palillos que hay en la mesa con los grupos que han hecho sin necesidad de registrar el número con los símbolos usuales, sino solo viendo los grupos de palillos que han hecho.

Luego, reflexiona sobre si la manera en la que lo has organizado corresponde a cómo escribirías tú luego los numerales para representar esa cantidad de palillos. Después, tienes que juntar tus palillos con los de un grupo de al lado, ¿vale?, por ejemplo, vosotros con vosotros y así, cada dos grupos tienen que juntar los palillos que tienen y decidir cuántos tienen en común, ¿vale?, cuántos tienen en total. Y al final, tenemos que juntarlos todos y de una forma ágil, sin tener que volver a contarlos todos, tenemos que saber cuántos palillos hay en total en la clase repartidos, ¿vale?

Comentario 6: Finalmente, amplía la actividad para que los alumnos tengan presente que esa agrupación que están haciendo no solo les tiene que permitir contar cuántos palillos tienen ellos, sino después, cuando unan palillos con los grupos restantes, tiene que ser sencillo, eficiente, contar cuántos palillos hay en común, sumar, vamos...

O sea que, primero, cada grupo tiene que saber cuántos tiene y tiene que generar una estrategia para, de manera rápida, mirar en la mesa y ver cuántos hay; después, reflexionar sobre si la manera en la que lo coloca cuando uno luego escribe, imaginaos, «tengo 72, pues cómo se escribe 72: siete, dos», pues la manera en la que lo coloco me ayuda con la escritura o no, no tiene por qué, se reflexiona un poco sobre eso; y cuando hayáis terminado esa parte, llamáis al grupo de al lado y decís: «venga, vamos a ver cuántos tenemos en total, visualmente, cómo lo organizasteis vosotros, cómo lo organicé yo, a ver cómo lo tengo», ¿vale?; y luego todos.

Comentario 7: La formadora termina de dar la información dando un ejemplo concreto de la escritura en notación posicional de base 10, el 72 como siete, dos.

Tenéis un cuarto de hora, ¿vale?

Fragmento 2

[F = Formadora del vídeo]. [A = Alumnos]. [Comentarios de Daniel presentados en recuadros].

- F: Necesito saber si habéis tenido que llegar a algún acuerdo entre los grupos o...
- A: Sí, claro, todo ha sido un consenso, todo ha sido un consenso.
- F: Ah, vale, ha sido un consenso. ¿Qué acuerdo habéis tenido que...?
- A: Hemos explicado cada uno pues lo que significaba cada..., cada gomita.
- F: Y, por ejemplo, ¿vosotros de cuánto en cuánto lo habíais agrupado? Eráis los de 15, 10, 5, ¿no?
- A: Sí.
- F: ¿Y vosotros?
- A: 20, 10 y 4.
- F: 20, 10 y 4. Entonces, ¿habéis tenido que llegar a algún acuerdo alguno para reordenar?
- A: No, porque nos ha venido muy bien.
- F: ¿Os ha venido bien?
- A: Es que hemos sido muy inteligentes cogiendo el amarillo para los grandes [se refiere a gomas elásticas de color amarillo].
- F: Ahora los grandes de qué son, ¿de 20?
- A: De 20 y de 15, aquí están mezclados. ¿O los tenemos que reorganizar?

Comentario 1: La formadora pregunta, entiendo que ya es la fase 2 en la que dos grupos juntan sus palillos, para que expliquen las estrategias que han usado para agrupar, para que los alumnos expliciten de qué tamaño han hecho los grupos y para que traten de explicar el porqué, por qué han elegido esos tamaños y ahora analizar cómo funciona.



- F: Esto es superinteligente, ¿no? O sea, yo veo aquí..., digo: «en los amarillos, algunos tienen 20 y algunos tienen 15, búscate la vida Nuria».
- A: Pero son amarillos.
- F: Ya, pero entonces yo no sé... Yo digo: «vale, yo puedo ver 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 grupos amarillos», ¿no? Y ahora digo: «como mucho serán 160, si son todos de 20, pero... no necesariamente son 160, pueden ser menos».
- A: Bueno, pero como no lo sabes...
- F: ¿Entonces cómo sé cuántos hay?
- A: Te lo estamos diciendo, tienes que confiar en nosotros.

Comentario 2: La formadora describe la estrategia que han usado los alumnos para que vean si es adecuada o no, porque los grupos parecen ser de diferentes tamaños, y para que los alumnos traten de detectar las ventajas o los inconvenientes de la estrategia que han seguido.

- F: No, en matemáticas la confianza no vale, uno tiene que...
- A: Es que no sé, no lo entiendo. ¿Lo tenemos que reorganizar?
- F: Vosotros ya sabéis cuántos palillos tenéis, pero ahora, visualmente, tenéis que poder contarme a mí cómo sabéis que hay ese número de palillos, ¿no?
- A: Ah, pues habría que... ¿Y no podemos quitar las gomas y reorganizarlo?
- F: Sí, sí, sí, yo no dije que no pudierais quitar las gomas.
- A: Aaaaah.
- F: ¿Alguien dijo que no se podían quitar?

- A: Y nosotros diciendo que no se podían quitar las gomas...
- F: Y una duda más. Alguno de vosotros..., por separado, ¿no?, cuando lo teníais..., habéis escrito la cantidad que teníais, ¿no? Eh, 109 teníais uno...
- A: 104 y 85.
- F: Por ejemplo, el 85 se escribe con un 8 y un 5. Ese 8 y ese 5, ¿estaban representados de alguna forma en...?
- A: No.
- F: No, vale. Y vosotros, la misma pregunta con lo vuestro.
- A: No.
- F: No había un patrón en cómo lo habíais representado, vale, ok.

Comentario 3: La formadora les anima a que vuelvan a hacer el agrupamiento para arreglar el problema detectado y después trata de que los alumnos se centren en la conexión entre las agrupaciones que han hecho y la representación simbólica, la notación posicional usual, de las cantidades que previamente habían contado para que empiecen a reflexionar, para que se den cuenta de si puede haber una conexión entre las agrupaciones que hacen y cómo se representa luego el número en la base 10, en la notación posicional usual.

- A: ¿Pero quieres que busquemos?
- F: Quiero que reflexionéis sobre eso, pero ahora lo vamos a poner en común, ¿vale?
- A: Vale.
- F: ¿Ha sido operativo el que ellos hayan hecho 15, 10, 5... y vosotras tuvieras 20...? ¿Eso ha ayudado a la hora de ponerlo en común?
- A: No, porque ahora hay que hacerlo otra vez.
- F: Ahora hay que volverlo a hacer...

Comentario 4: La formadora les pregunta explícitamente por los diferentes tamaños de los grupos, que eran variados, de 10, 15 y 20, llegan a la conclusión de que no ha sido operativo y les plantea entonces la pregunta de cómo hay que volver a hacerlo para que funcione mejor.

Fragmento 3

[F = Formadora del vídeo]. [A = Alumnos]. [Comentarios de Daniel presentados en recuadros].

F: Me tenéis que decir cuántos palillos había en cada grupo inicialmente, antes de juntaros dos grupos, ¿vale? Entonces, por ejemplo, vosotros.

A: 87.

F: 87 [lo escribe en la pizarra]. Estamos de acuerdo, yo utilizo la escritura estándar que vosotros habéis visto en primaria, secundaria, bachillerato y al llegar aquí, ¿vale? Escritura estándar de nuestro sistema de numeración en nuestro contexto. Ese grupo, 87. ¿Cómo habíais hecho los grupos?

A: Pues hemos hecho, eh..., tres grupos de 20.

F: Tres grupos de 20, ¿cómo lo puedo poner? [Escribe un 3 en la pizarra].

A: Eh..., tres rosas.

A: 3×20 .

F: ¿Tres rosas?

A: Sí.

A: No.

F: Si pongo tres rosas... ¿Todo el mundo que ha utilizado gomitas rosas ha atado 20?

A: No.

F: ¿Otras personas que han atado 20 han usado otro color?

A: Sí.

F: Uf, el color no me vale. ¿Cómo lo pongo?

A: 20×3 .

A: 3×20 .

F: 3 grupos de 20, ¿no? 3×20 . [Escribe 3×20]. Y luego...

Comentario 1: Bueno, paramos, aquí lo difícil es decir cuándo parar. La formadora pregunta al primer grupo cuántos palillos tiene y observa que se anota como 87 y les hace reflexionar a los alumnos sobre por qué escribe así el 87, que está usando la notación posicional usual. Y a la vez les conecta con la agrupación que han hecho, que son 3 grupos de 20, y les pregunta cómo escribir esos 3 grupos de 20, con la idea de que los alumnos piensen en cómo representar eso desde el punto de vista matemático, representar con

símbolos matemáticos 3 grupos de 20.

- A: Pon en el 3 «color rosa» o algo así. Entre paréntesis.
- F: Vale, vale. [Pinta una raya rosa sobre el 20]. Y luego... Esto son 60.
- A: 9×3 .
- F: Y luego 9 grupos de 3, ¿no? [Escribe + 9]. ¿O 3 grupos de 9? [Borra el 9].
- A: 3×9 .
- F: 3 grupos de 9 y el 9 lo habéis puesto de otro color, ¿vale? [Escribe 3×9].
- A: Sí.
- F: ¿Alguien más ha utilizado grupos de 20?
- A: Nosotros.
- F: Varios. ¿Alguien más ha utilizado grupos de 9? [Destaca con la voz el número 9].
- A: Nosotras.
- F: Vosotras, vale, y vosotras también, vale.

Comentario 2: La formadora pregunta a todos los grupos para tratar de recoger la estrategia sobre qué tamaño de grupos han utilizado. Parece que han utilizado grupos de 20 y grupos de 9, y no dice nada sobre si alguien ha utilizado grupos de 10, lo que es llamativo.

Siguiente equipo, vosotras.

- A: Nosotras, 90.
- F: En total, 90. [Escribe 90 en la pizarra].
- A: 4 de 20 y 1 de 10.
- F: [Escribe $4 \times 20 + 1 \times 10$]. Vale, o sea que de momento han utilizado grupos de 20, grupos de 10, grupos de 9, ¿vale?



En esta escritura [señala lo que ha escrito en la pizarra] yo veo 3 grupos de 20, 3 grupos de 9, pero aquí [señala el 87] no veo un 3 y un 3. Yo aquí veo 4 grupos de 20, 1 grupo de 10, pero aquí [señala el 90] no veo 4, 1. Con lo cual, parece que tampoco habíais encontrado vosotros un patrón entre cómo escribo la cantidad total con símbolos numéricos y visualmente qué veo en los palillos, ¿vale?

Comentario 3: Después de preguntar a otro grupo, ya aparece un grupo de 10, y entonces anota la representación usual de, por ejemplo, el 90 con los grupos que han utilizado, que son 4 grupos de 20 y 1 grupo de 10, con la idea de que los alumnos reflexionen sobre la conexión, o la falta de conexión – en este caso –, entre la notación en base 10, la usual, y cuando uno hace grupos de 20.

De momento, la transcripción de lo que veo en los palillos simbólico-numéricamente la tengo aquí a la derecha [señala el $3 \times 20 + 3 \times 9$ y el $4 \times 20 + 1 \times 10$], pero no veo ninguna relación con esto [señala el 87 y el 90]. Yo aquí estoy haciendo trampa porque estoy metiendo operaciones, nosotros ahora no estamos con las operaciones, estamos solo con el número, con la escritura del número, eso es lo que estamos trabajando, ¿no? Pero para ayudar a ver esa conexión de los palillos hacia lo simbólico-numérico, pongo, escribo eso de transición para ir copiando lo que me decís, ¿no?, porque tardo más, tardo más en dibujar los palillos, las gomitas rosas, no sé qué, podría sacar la foto de la cámara y ponerlo rápido, ¿no?, pero..., bueno, lo escribo, lo transcribo así.

Comentario 4: La formadora aclara el significado de las expresiones que ha puesto, como 3 aspa 20 más 3 aspa 9, que eso es simplemente una representación abstracta, que quizá no sea la multiplicación usual – no está claro –, de la situación que ha visto, que son 3 grupos de 20 palillos, por un lado, y 3 grupos de 9 palillos, por otro, como forma de transcribir lo que han hecho los alumnos con los materiales, con los palillos.

Ahora, otro grupo. Vosotros dos ya estáis, que luego, luego... Ah, venga, ya que estamos aquí [dibuja una llave a la derecha de lo que ya ha escrito en la pizarra]. ¿A qué consenso... habéis llegado...?

A: Pues 7 grupos de 20...

F: Muy bien, 7 grupos de 20 [señala el 3 y el 4]. Han visto rápido y han dicho: «bien, los dos hemos agrupado, sin habernos copiado, en grupos de 20, con lo cual automáticamente tenemos 7 grupos de 20» [escribe 7×20].

A: Luego, ellos los 27 de 3×9 ...

F: Sí.

A: ... los han dividido en 2 de 10 para que se junten con los nuestros de 10.

F: ¿Y por qué no habéis hecho vosotros... separar este de 10 [señala el 10 de 1×10] en 1 de 9 y 1 de 1?

A: Porque se quedaría 1 solo y luego...

F: Bueno, pobrecillo, ¿no? No pasa nada.

A: Y porque es más fácil sumar de 10 en 10 que de 9 en 9.

A: Para ponerle la goma a 1...

F: Para ponerle la goma a 1... Bueno... Eso... Puede ser una justificación, pero tampoco muy potente... Me gusta más lo que ha dicho ella, o ella...

A: Que es más fácil sumar de 10 en 10 que de 9 en 9.

F: ¿Por qué será más fácil sumar de 10 en 10 que de 9 en 9 para nosotros? [Hablan varios alumnos a la vez]. ¿Por qué es más fácil sumar para nosotros de 10 en 10 y no de 9 en 9? [Hablan varios alumnos a la vez]. Porque tenemos 10 dedos, por ejemplo, ¿no? Porque estamos más acostumbrados a 10, 20, 30, 40... [mueve las manos con los dedos estirados], ¿no?, como que nuestro sistema de numeración parece que...

A: Porque en verdad solo sumas de 1 en 1 y luego le pones un 0, entonces...

F: Solo sumas de 1 en 1, elabora eso. Estamos en clase de matemáticas, ¿qué es 1, 1...?

Comentario 5: La formadora analiza la escritura que había hecho en grupos de 20, y también en grupos de 10 y de 9, viendo cómo esa estructura ayuda en algún caso, y no ayuda en otro, a sumar; van a sumar esas dos cantidades, comprueban que los grupos de 20 se suman bien y luego pasa a debatir la problemática que surge cuando tienen que combinar grupos de 10 y grupos de 9. Pregunta a los alumnos alternativas para que expongan alternativas que hayan pensado y trata de que los alumnos piensen por qué sumar grupos de 10 nos resulta sencillo, ¿no?, entiendo que con la idea de profundizar en esa dirección de ver cuáles son las ventajas de estructurar o de organizar los palillos en grupos de 10, porque los grupos de 10 coinciden con la estructura de nuestro sistema posicional.

- A: Pues por ejemplo, si tienes 30, pues 1 más 1 más 1, 3, como es 10, pues le pones el 0 y ya tienes los 30.
- F: ¿3 qué?
- A: 3 grupos de 10.
- F: 3 grupos de 10, muy bien. 3 grupos de 10, vale. [Vuelve a la pizarra a terminar lo que empezó a escribir].
- A: 3 de 20, 3 de 10 y 1 de 7.
- F: [Escribe, después de 7×20 , 3 10]. 3 de 10, llegasteis a romper estos [señala 3×9] en 2 de 10 más 7 sueltos, ¿no? [escribe $2 \times 10 + 7$ encima de 3×9]. Y entonces estos dos [señala 2×10] con este [señala 1×10] 3 y 7 palillos ahí sueltos [escribe, después de $7 \times 20 + 3 \times 10$, 7×1], ¿vale? Ahora, la cantidad total, ¿cuánto es? [señala el 87 y el 90].
- A: 177.
- F: 1, 7, 7 [escribe 177 a la izquierda del 87 y del 90]. ¿Hay aquí 1, 7, 7 por algún lado? [señala el 7 de 7×20 , al 3 de 3×10 y al 7 de 7×1]. Este [señala el 7 de 7×1] parece que hay aquí, ¿no? Pero lo otro... no me cuadra mucho todavía... Vale, otros dos grupos.

Comentario 6: Finalmente, termina conectando la estructura que habían puesto con los grupos de palillos con la notación en base 10, para el tema de las unidades y los grupos de 10 que aparecen. Y termina el vídeo con la problemática de qué hacer con los grupos de 20, que aparecen como grupos de 20, y cómo eso no coincide con la notación posicional, para explorar con los alumnos cómo arreglar ese problema o cómo llegar finalmente a la

solución que conocemos, que es hacer siempre grupos de 10 o de potencias de 10.

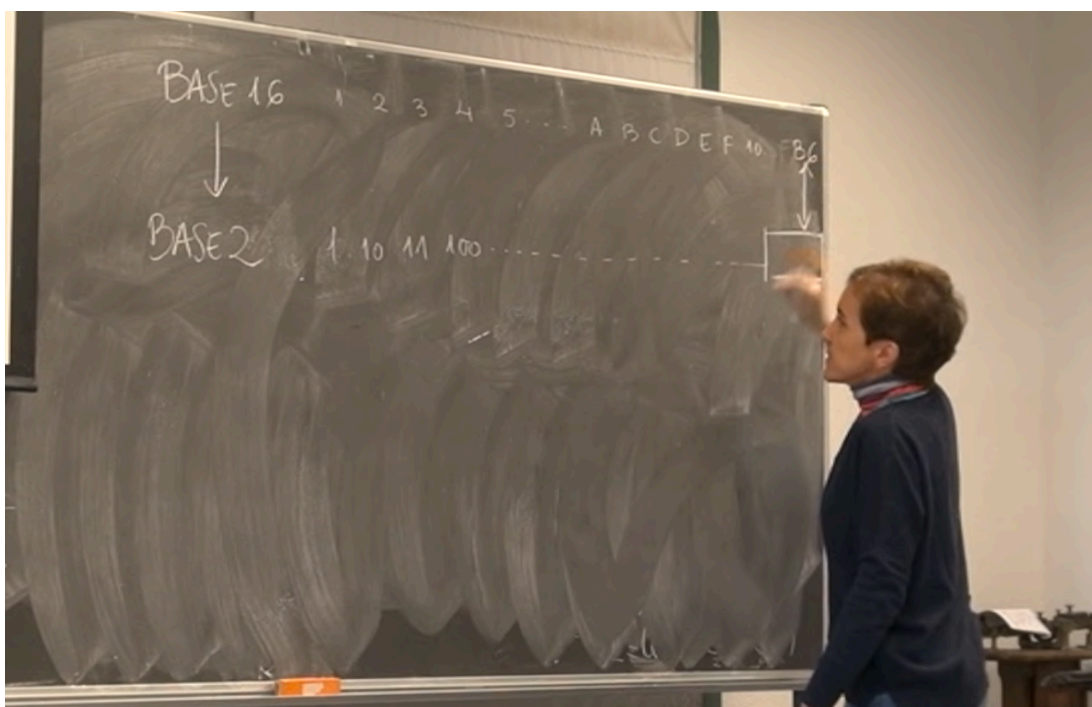


TRANSCRIPCIÓN DEL VÍDEO 2

[F = Formadora del vídeo]. [A = Alumnos]. [Comentarios de Daniel presentados en recuadros].

- F: Como me piden pasar de base 16 a base 2 directamente [escribe en la pizarra], pues Martín dice: «yo escribo aquí la secuencia 1, 2, 3, 4, 5..., A, B, C, D [dice 10, 11, 12, 13, señalando A, B, C, D], 14, 15 [escribiendo E, F], uno, cero [10]..., así hasta el B6», ¿vale? Y luego aquí en paralelo, voy uno [1], uno, cero [10], uno, uno [11], uno, cero, cero [100]..., hasta que pille aquí el que sea y ya está.

Comentario 1: La formadora enuncia el problema, que es pasar un número de base 16 a base 2, con una primera estrategia, que podríamos describir como fuerza bruta, ¿no?, que sería escribir todos los números en base 16 hasta el que me dan, que es el B6, y hacer lo mismo en base 2, en binario, y cuando llegamos al B6, pues lo tenemos pasado a base 2, exponiendo que los alumnos se planteen que haya mejores maneras de hacerlo.



No he pasado por base 10, que es lo que me dice Nuria. Con lo cual, superado. ¿Pero qué pasó?

- A: Que es muy largo.

- F: Que es muy largo. Y que hasta en su casa, teniendo semanas, ha dicho: «paso». Tenías tiempo suficiente, porque había tiempo suficiente en dos semanas a hacerlo, pero... es largo y además un coñazo, con lo cual ha dicho: «paso». Con la

idea Nuria ya se hace una idea de que lo he pensado, es un procedimiento válido, pero no ha sido eficaz, ¿vale?, entonces nosotros tenemos que seguir pensando porque tendremos que buscar alguna estrategia que sea eficaz.

Comentario 2: La formadora explicita ahora ese contraste entre un algoritmo o un procedimiento de fuerza bruta, que funciona, pero que es muy largo, e introduce que queremos buscar uno que sea eficaz, en cierto sentido, además de correcto, por supuesto.

[Da la palabra a una alumna].

A: ¿Se podría hacer la división?

F: ¿Qué división?

A: La de B6 entre 2. Es que no sé cómo plantearlo.

F: Ella dice: «oye, mira Nuria, cuando tú pasas de base 10 a base 2 haces grupos de 2 y divides de 2 en 2; pues ahora lo mismo, si estoy en B6 a base 2, divide entre 2». Pero aquí estoy escribiendo en base 16... [En la pizarra ha escrito B6 entre 2, con la caja]. Podríamos intentar hacerlo, pero... ¿sabemos hacerlo... o cómo va esto? ¿O mentalmente para hacerlo me vais a pasar a base 10, y hacéis la división en base 10 —que es lo que sabéis hacer—, y luego otra vez volvemos y entonces hacemos trampa porque pasamos por base 10?

Comentario 3: La formadora ha preguntado otra estrategia y un alumno ha propuesto hacer la división, es decir, pasar de base 16 a base 2 haciendo grupos de 2. Entonces, la formadora empieza el procedimiento, con la idea de que los alumnos sean conscientes de la dificultad de ese procedimiento, que consiste en dividir en base 16, que parece que es algo que no se han planteado y que no está claro que sean capaces de hacer, porque parece que una restricción del ejercicio que sale ahora es que hay que hacer el cambio sin pasar por base 10, hay que hacer el cambio de manera directa.

Si sabéis dividir un número en base 16 entre 2, si sabéis hacer esta división en base 16 —yo lo tendría que pensar, ¿eh?, así a capón no lo sé hacer, pero si lo pienso... —, si sabéis hacer eso, valdría.



Pero esto lo vamos a ver en el dossier 3, ¿eh?, multiplicación y división.

Comentario 4: Ha explicitado la dificultad, que es dividir un número que está en base 16 entre 2 y expresar el resultado en base 2, que es algo que no han visto y que en este momento del desarrollo de la asignatura no parece sencillo.

Nosotros tenemos herramientas para dividir en base 10 y sabemos cómo hacer restas sucesivas y el algoritmo tradicional de la cajita que habéis ido haciendo... Podríamos abordarlo, por eso abordamos los problemas de..., el anterior, ¿no?, de pasar de base 10 a base 2. Pero el de base 16 a base 2 hay que dividir en base 16. Sumar en base 16 lo sé hacer, restar en base 16 me cuesta un poco pero lo sé hacer, multiplicar en base 16 también podría hacerlo, con lo cual dividir podría hacerlo, pero... no me atrevo a hacerlo sin manos, hoy. Otra forma.

A: Fijándote en que 16 es 2^4 .

F: Fijándome en que 16 es 2^4 . Me lo voy a apuntar aquí [borra la pizarra y lo escribe].

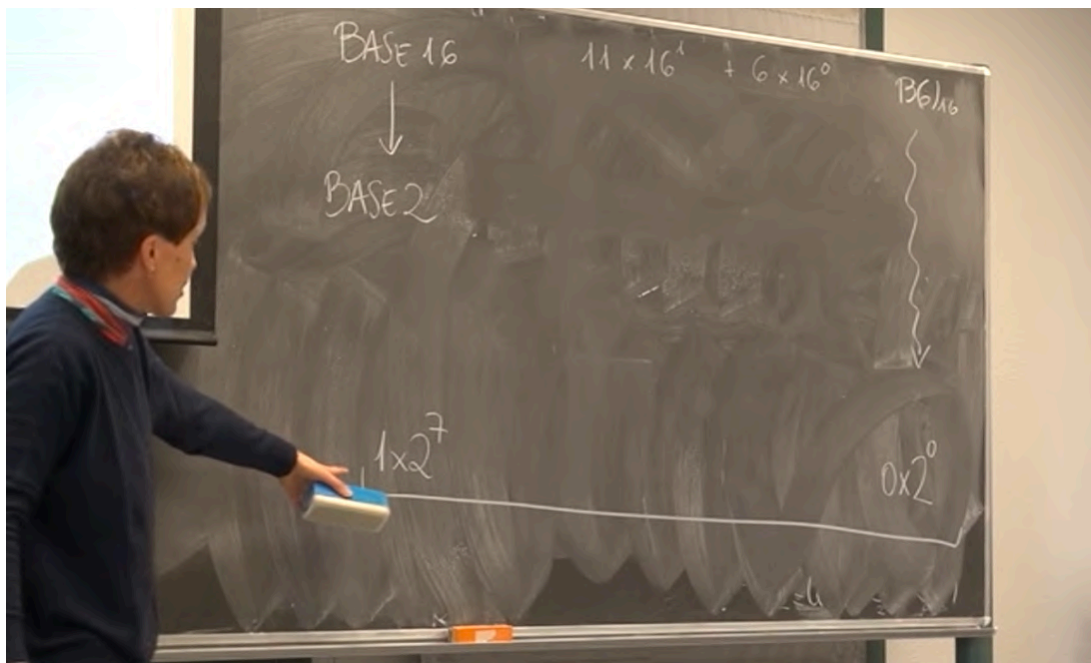
Comentario 5: La formadora..., después de esperar un poco para que saliera otra alternativa, un alumno propone una conexión entre la base 2 y la base 16, que es que 16 es 2^4 , y la formadora va a explorar esa posibilidad para ver si por ahí se consigue dar una solución al ejercicio.

A: Yo lo hice así, pero luego algo no me cuadraba.

F: Muy bien, vale.

A: Luego hice, 11...

F: Venga, vamos a poner el punto de partida, ¿no? El punto de partida es que tenemos 11×16^1 , ¿no?, más 6×16^0 . Este es mi B6 en base 16. Y yo quiero llegar aquí a... Me acuerdo de que empezaba en 1×2^7 y a acababa en 0×2^0 , ¿vale?



Entonces yo quiero pasar de ahí [señala la parte superior de la pizarra] a aquí [señala la parte inferior]. Si lo consigo, ya lo tengo en base 2, ¿no? Ya solo cojo los coeficientes de las potencias de 2 y ya lo tengo.

Comentario 6: La formadora explicita el ejercicio en otro lenguaje, que es el lenguaje de expresar la base 16 como grupos de 16 y potencias de 16, y lo mismo con la base 2, expresar la cantidad en grupos de 2 y de potencias de 2, reflejando en la pizarra la información que tenemos en este momento: sabemos la potencia más grande de 2 que va a aparecer y sabemos que el número es par. Entonces, la idea es que los alumnos tengan otra visión del problema y que entiendan que hay que pasar de las potencias de 16 a las potencias de 2.

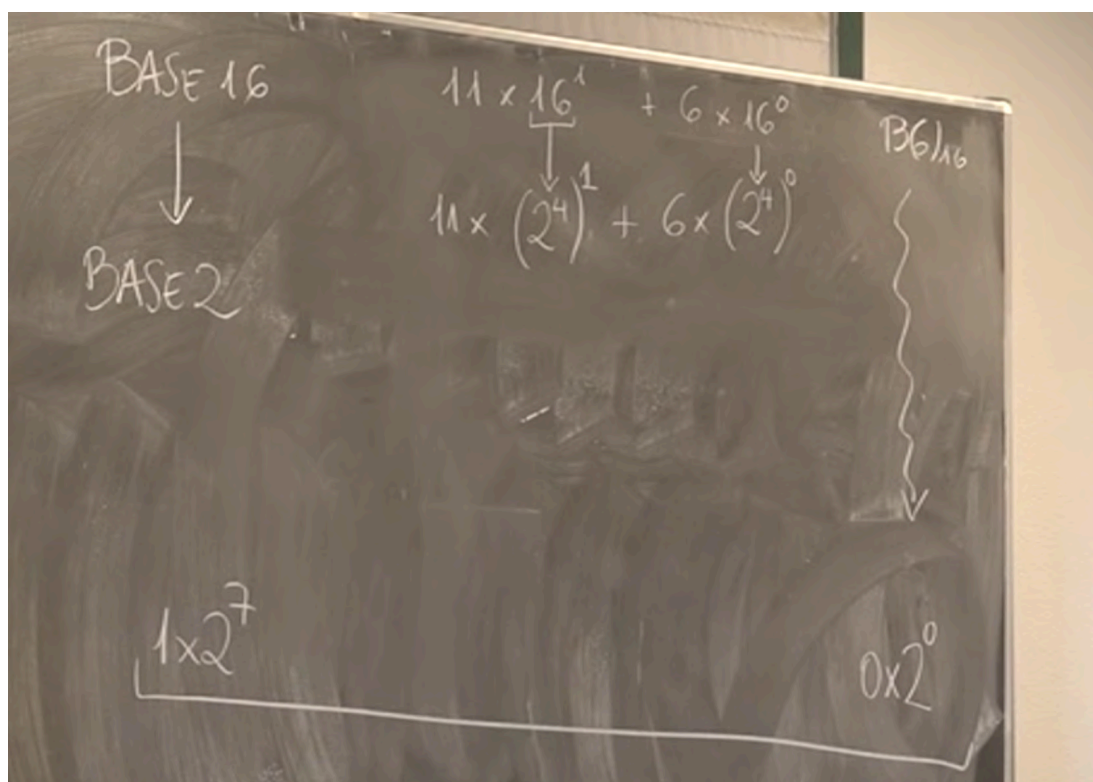
Entonces, Pablo dice: «cambia este 16», ¿no, Pablo?

A: Sí.

F: Este 16 ponlo como $(2^4)^1$ y este 16 ponlo como $(2^4)^0$. ¿Vale? Yo tengo una expresión polinomial en base 16, quiero llegar a una expresión polinomial en base 2, y él me dice: «yo veo claro el cambio, 16 es 2^4 , cada vez que veas un 16 ponlo como 2^4 ».

Comentario 7: *Procede con la primera etapa, la etapa que se obtiene simplemente sustituyendo 16 como 2^4 , para ver que es una primera etapa del proceso que tiene que hacer y para explorar que, claro, eso no va a ser suficiente, vamos a ver por qué no va a ser suficiente.*

Vale, y entonces resulta que aquí tengo 11 grupos de esto y aquí tengo 6 de estos.
¿El 11 y el 6... los puedo dejar?



- A: No, los pasas a base 2.
- F: Los paso a base 2. ¿Sé pasar 11 a base 2?
- A: Sí.
- F: Vale, vamos a escribir 11 en base 2.
- A: 1, 0, 1, 1.
- F: 1×2^3 , ¿no?
- A: Sí.
- F: Más...
- A: Cero.
- F: 0×2^2 . De momento llevo ocho. Más...
- A: Uno.
- F: 1×2^1 . Ya llevo 10...

- A: Más uno.
- F: Más 1×2^0 . Ahí ya tengo 11, ¿vale? Esta es una manera de escribir 11. ¿Cómo? Como potencias de 2. Expresión polinomial del 11 en base 2, como potencias de 2, ¿vale? Y esto va multiplicado... 2 elevado a la 4 y luego lo elevo a la 1, ¿cuánto me queda...? 2^4 es $2 \times 2 \times 2 \times 2$ y luego eso lo elevo a la 1, es decir, que lo copio una vez, o sea que me queda...
- A: 2^4 .
- F: 2^4 . Más... El 6, ¿lo dejo?
- A: No.
- F: No. ¿Cómo escribo 6 en base 2?
- A: 1×2^2 .
- F: 1×2^2 , que son 4.
- A: 1×2^1 .
- F: 1×2^1 ... Y 0×2^0 [lo va escribiendo todo en la pizarra].

Comentario 8: Bueno, es buen momento supongo para parar. Desde la expresión anterior que teníamos, 11 grupos de 2^4 y 6 grupos de $(2^4)^0$ unidades, la formadora observa que podemos escribir el 11 y el 6 como potencias de 2, como una expresión polinómica en base 2, que es algo que los alumnos saben hacer, le comentan, y entonces obtiene una expresión en la que ya solo aparece una cierta cantidad de potencias de 2 con los coeficientes, que siempre son 0 o 1, por supuesto.

Ahí pone 6, una manera más chula, ¿no?, de poner 6 como potencias de 2, ¿no?, como un polinomio con potencias de 2. Vale, y luego estaba por... Y ahora tengo $(2^4)^0$. ¿Eso qué es?

- A: Uno.
- F: Uno. ¿Y si lo quiero poner como potencias de 2?
- A: 2^0 .
- F: 2^0 , muy bien. 2^0 [lo escribe en la pizarra].

Comentario 9: Aquí aparece el problema del $(2^4)^0$ que la docente les plantea porque sabe, supongo, que el elevar a 0 muchas veces crea un problema, no se llega a distinguir si los alumnos lo tienen claro o no, parece que sí, que los alumnos entienden que eso es 1 y que 1, por tanto, se puede poner como 2^0 , o sea, que $(2^4)^0$ es 2^0 simplemente.

Mira qué contenta estoy, porque $2^0 \times 2^0$ es 2^0 y el coeficiente es 0, que es este. Y $2^4 \times 2^3$ es 2^7 y el coeficiente es 1, que es este. Pues como que ya casi lo tengo, ¿no?

Comentario 10: En este momento observa que es buena idea comprobar que vamos por buen camino, en el sentido de que lo que yo conocía ya de la expresión, que empezaba por 1 y terminaba por 0, coincide con la expresión que tengo en este momento, es decir, que por lo que hemos hecho hasta ahora parece que vamos por buena dirección.

¿Sí o no?

A: Sí...

BASE 16

BASE 2

$$11 \times 16^1 + 6 \times 16^0$$

$$11 \times (2^4)^1 + 6 \times (2^4)^0$$

$$[1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0] \times 2^4 + [1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0] \times 2^0$$

$$1 \times 2^7 + 0 \times 2^0$$

$B6_{16}$

F: Vale, y ahora... Venga, ¿cuál será el coeficiente...? Venga, vamos a poner aquí 2^6 , paso a la siguiente varilla del ábaco, ¿eh? ¿Cuál será el coeficiente de 2^6 ?

A: Cero.

F: Cero, porque ¿cómo consigo yo 2^6 ? $2^4 \times 2^2$, ¿no? 2^4 es $2 \times 2 \times 2 \times 2$, 2^2 es 2×2 , ya tengo ahí los seis doses, ¿vale?, que está aquí, y el coeficiente cero. ¿Por aquí puedo llegar a 2^6 ?

A: No.

F: No, pues ala. 0×2^6 . Genial, porque era lo que me había salido antes. Ahora, más... Siguiendo varilla del ábaco, 2^5 . ¿Dónde consigo yo 2^5 ? Aquí [señala el

corchete de la derecha] como mucho llego a 2^2 , me olvido de esto. $2^4 \times 2^1$ [señalando el corchete de la izquierda] es 2^5 , ¿no?

A: Sí.

F: Vale, ¿y qué coeficiente lleva?

A: 1.

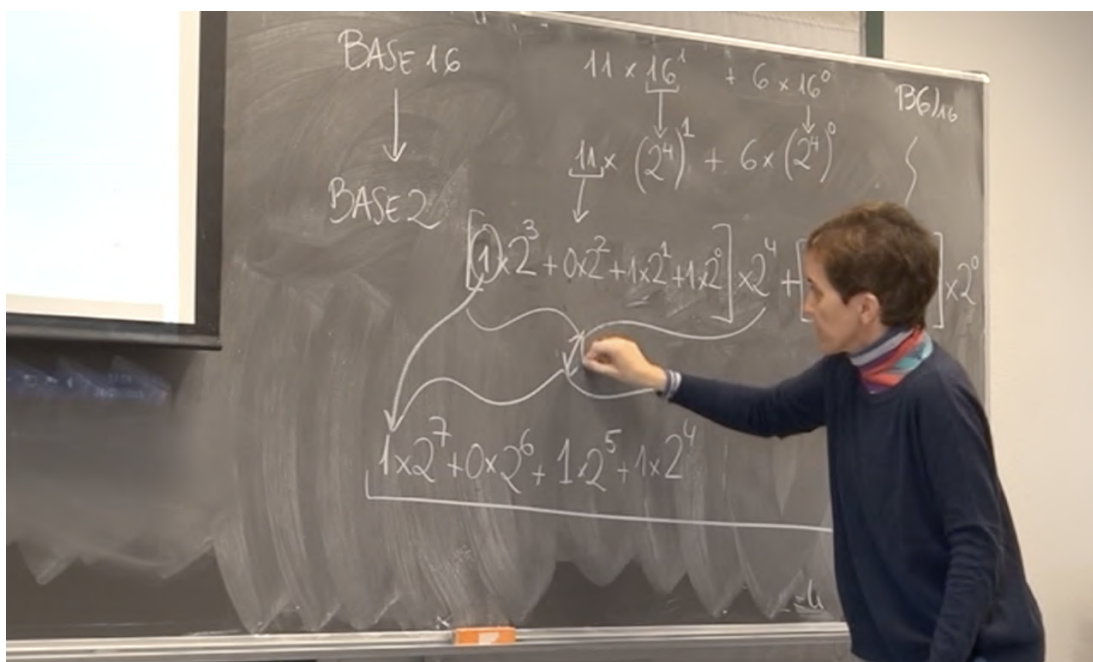
F: 1. ¿Y era el qué tenía que llevar?

A: Sí.

F: Sí, vamos bien. Y ahora, 2^4 , ¿cómo consigo 2^4 ?

A: Con 2^0 ...

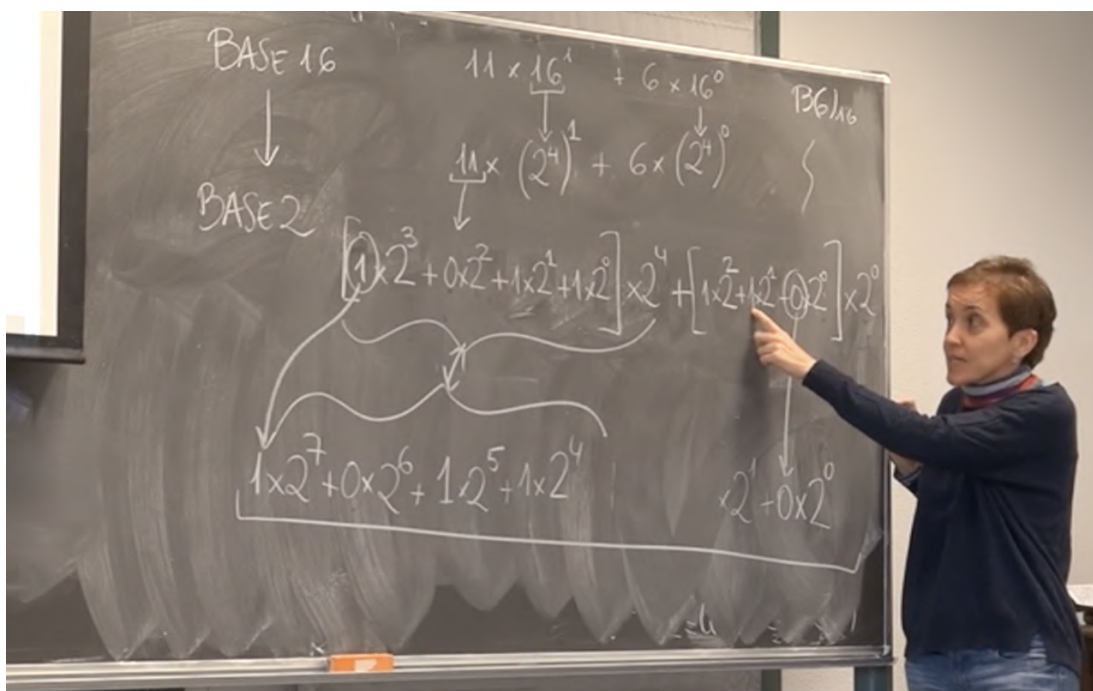
F: $2^4 \times 2^0$, ¿no? Tengo aquí cuatro copias del 2 y aquí ninguna, pues tengo cuatro copias del 2 multiplicándose por sí mismo, y el coeficiente 1. 1×2^4 [lo escribe en la pizarra]. Oye, mira, todo esto se ha convertido en esto. Lo veis, ¿no?



¿Qué es lo que he hecho? Propiedad distributiva. Voy multiplicando el 2^4 por cada uno de los sumandos, ¿vale? Muy bien. Y ahora, tiro por aquí, voy desde aquí [señala el 2^0 de la parte inferior derecha de la pizarra]. 2^0 , muy bien. Siguiendo varilla del ábaco, 2^1 . ¿Qué coeficiente tiene 2^1 ?

A: 1.

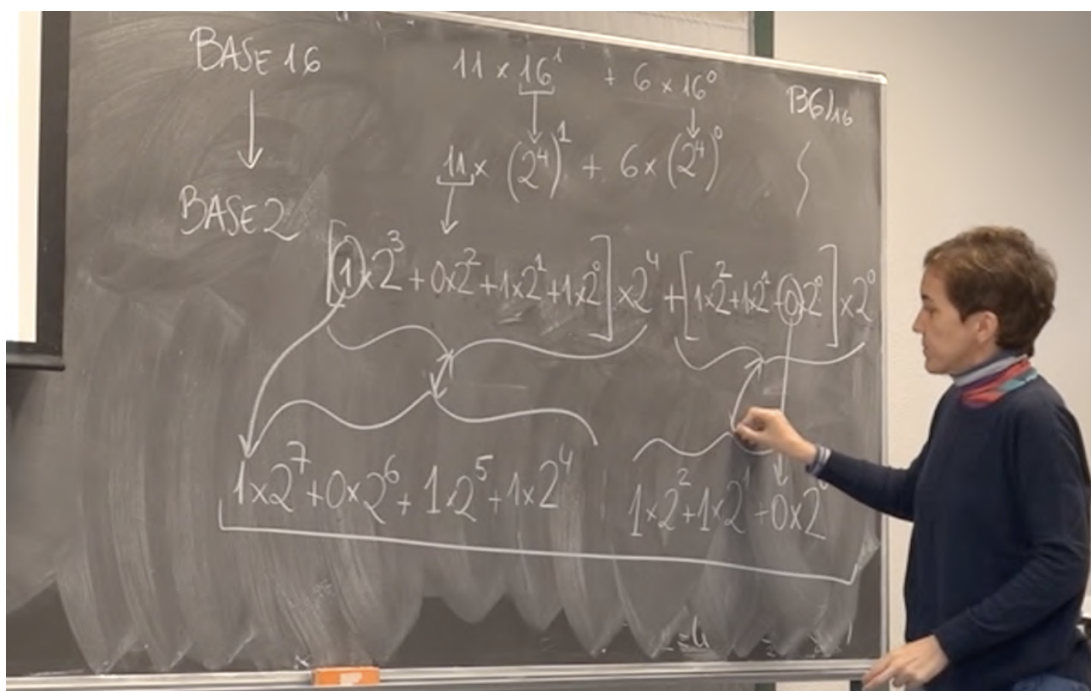
F: 1, que está aquí [lo señala], ¿vale?



Porque sería $2^1 \times 2^0$, que es 2^1 , y lleva un 1 delante, un 1 [lo escribe abajo]. Voy bien.

Comentario 11: Bueno, paramos... En todo este rato, es un procedimiento largo, pero creo que se puede describir de manera única. La formadora reorganiza la expresión anterior para escribirla con potencias de 2 y lo hace recolectando las potencias de 2 correspondientes y poniendo cuidado en que los alumnos entiendan cómo multiplicar potencias de 2 sin recurrir a recetas del tipo: «sumo los exponentes», sino que observen por qué $2^2 \times 2^4$ es 2^6 , ¿no?, porque aparecen 6 doses en esas potencias, enfatizando eso por encima de reglas que los alumnos conocen de secundaria, pero que a lo mejor no llegan a comprender del todo. Es un proceso largo que trata de organizar para que entiendan de dónde sale cada potencia; procede de manera ordenada.

Y ahora, $2^0 \times 2^2$, 2^2 [lo escribe abajo], va con un 1 [lo escribe abajo]. O sea que esto que tengo aquí se convierte en esto que tengo aquí.



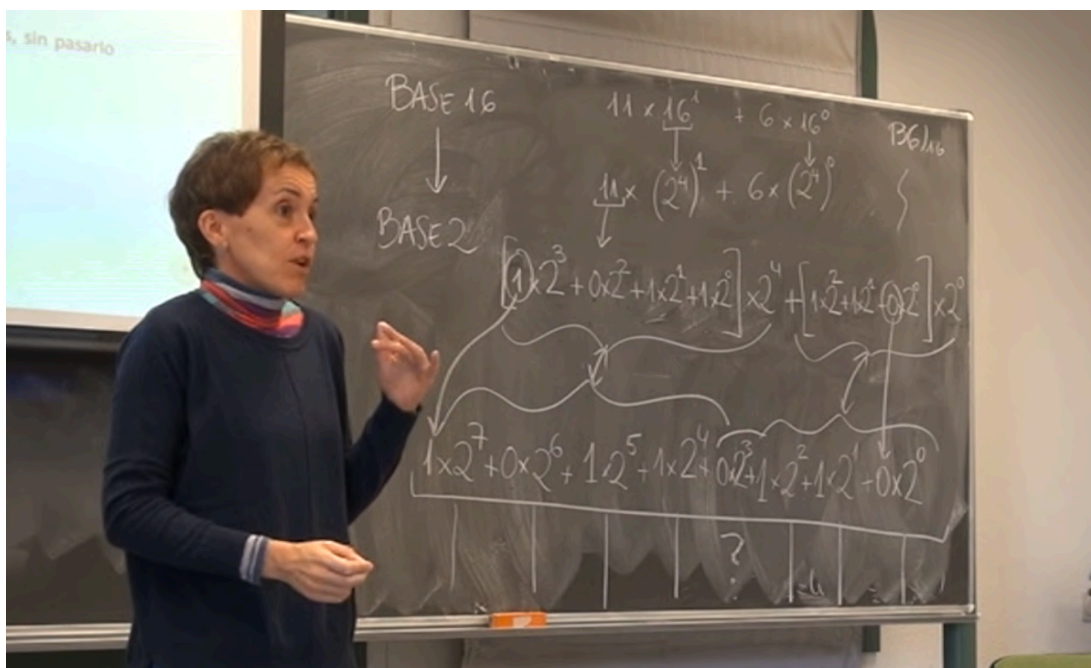
Y ahora, Pablo, ¿qué te pasó?

A: Que como... Que claro, los iba a juntar, pero dije: «me falta el 2^3 ».

F: Me falta el 2^3 . Pablo dice: «varilla del ábaco del 2^7 , 2^6 , 2^5 , 2^4 , ¡uy!, 2^2 , 2^1 , 2^0 ». «¡Uy!», dice Pablo [y dibuja una interrogación en la posición del 2^3].

A: Pues si no hay, un cero.

F: Pues se pone el 0, ya está. Lo pongo aquí: «+ 0×2^3 », y esto lo englobo aquí.



¿Qué es lo que pasa? Que escribo el 6 de una forma muy especial. Yo escribo el 6..., acordaos que esto era mi 6 [señala $1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0$], ¿eh?, esto era el 6,

que es este 6 [señala el de un nivel anterior, más arriba en la pizarra], ¿vale? Yo he escrito el 6 como $1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0$, pero también puedo escribir el 6... $0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0$.

Comentario 12: La formadora analiza una pequeña dificultad que aparece con la expresión obtenida, que es que no aparecen potencias cúbicas de 2, 2^3 , y trata de que los alumnos entiendan que eso solo corresponde a la expresión del 6, que 6 no tiene grupos de 2^3 y que entiendan que hay una forma muy sencilla de arreglarlo, que es escribir que 0 grupos de 2^3 es lo mismo que decir que no hay grupos de 2^3 , entonces que no haya grupos de una cierta potencia pues nunca es un problema.

No es lo estándar, porque como los ceros ahí no aportan mucho, pues no es lo estándar, pero si no me quiero olvidar de una de las varillas y no quiero tener un problema, como tenía Pablo, pues yo añado ahí para escribir el 6 de otra forma, ¿vale? Entonces, moraleja que cuentan los *youtubers*, por ejemplo David Calle, dice: «vamos a pasar de base 16 a base 2, ¿qué se hace chavales? Mirad, ¿veis este 11 que está aquí? [señala el de arriba de la pizarra], pues escribís este 11 en base 2: 1, 0, 1, 1 [señala los coeficientes de la expresión polinómica de la parte inferior de la pizarra]; ¿veis este 6 que está aquí? [señala el de arriba de la pizarra], pues lo escribís en base 2, pero cuidadín chavales, que hay que poner cuatro, ¿por qué?, porque 16 es 2^4 ». Y entonces dice: «vamos a escribir 6 en base 2 con cuatro: 0, 1, 1, 0». Y dice: «y ahora lo juntáis, fin».

Comentario 13: La formadora resume el procedimiento que han obtenido, que se podría formular en términos de receta memorística, cómo expresar cada coeficiente de la base 16 en base 2 y ponerlo en ciertas posiciones, con la idea seguramente de que los alumnos reflexionen sobre la diferencia entre un procedimiento que tenía sentido, que es el que ha hecho antes, y la receta o el procedimiento mecánico, el algoritmo, que uno puede programar, que resume lo anterior, pero que si uno lo hace de manera mecánica, no sabe lo que está haciendo, claro; con referencia a lo que se convierte muchas veces la enseñanza de las matemáticas, con la idea de que es algo que se debería evitar o con la esperanza de que los alumnos entiendan los inconvenientes de ese tipo de recetas memorísticas, creo.

A mí no me vale porque yo no soy David Calle, yo no estoy de *youtuber*, *influencer*, superfamosa ayudando a los chavales a aprobar exámenes, que es un trabajo muy digno y que está bien, y además el tío es un *crack*, muy suelto, lo

hace muy bien; yo estoy formando maestros, entonces tenéis que entender cómo hemos pasado de aquí [señala la parte superior de la pizarra] a aquí [señala la parte inferior de la pizarra] a través de esto [señala la parte media de la pizarra]. Entonces, la pregunta es: ¿se puede pasar de base 16 a base 2 sin pasar por base 10? Sí. Lo acabamos de hacer, ¿no? Es que me miráis con una cara... ¿Y por qué se puede? ¿Qué pasa si yo esto [el ejercicio] os lo doy en base 15 y, en vez de en base 16, todo el problema es en base 15?

Comentario 14: La docente quiere que los alumnos reflexionen sobre qué tienen de particular la base 16 y la base 2, por qué se puede hacer esa forma mecánica de pasar de base 16 a base 2, planteando una pregunta alternativa, qué ocurriría si, en vez de ser base 16, fuera base 15, tratando de que los alumnos detecten la diferencia y, por tanto, qué es lo que no funciona con la base 15 en todo lo que han hecho.

A: Que sería $2^4 + 2^0$.

F: ¿ $2^4 + 2^0$ es 15?

A: O sea, no..., perdón. $2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0$.

F: Vale, y entonces tendría que ir haciendo todas las distributivas, todo el follón, ahí. ¿Y David Calle me podría dar el algoritmo...? Escribes, imaginaos el mismo número, ¿eh?, B6, en vez de en base 16, en base 15. ¿David Calle me puede decir...? Aquí tengo el 15, ¿no?, aquí tengo el 15 [los escribe encima de los 16], y David Calle me dice: «escribe esto [señala el 11] en base 2, escribe esto [señala el 6] en base 2, con tres y medio dígitos o cuatro dígitos o... tres dígitos, y lo pones junto. ¿Valdría ese algoritmo?

A: No.

F: No. ¿Vale? O sea, que poder se puede pasar, vas con paciencia escribiendo cada una de las expresiones que aparecen, pero un paso directo solo se puede cuando una base es potencia de la otra base, que es lo que hemos visto con 16, que es potencia de 2, que es 2^4 .

Comentario 15: La docente termina resumiendo la situación: por qué con base 15 se puede pasar, pero haciendo todos los cálculos intermedios, pero no hay un procedimiento limpio, directo, como con la base 16; y la razón es que 16 es una potencia de 2, resumiendo que eso se puede hacer cuando una de las bases es potencia de la otra.

¿Está claro hasta aquí? ¿Sí?

TRANSCRIPCIÓN DEL VÍDEO 3

Fragmento 1

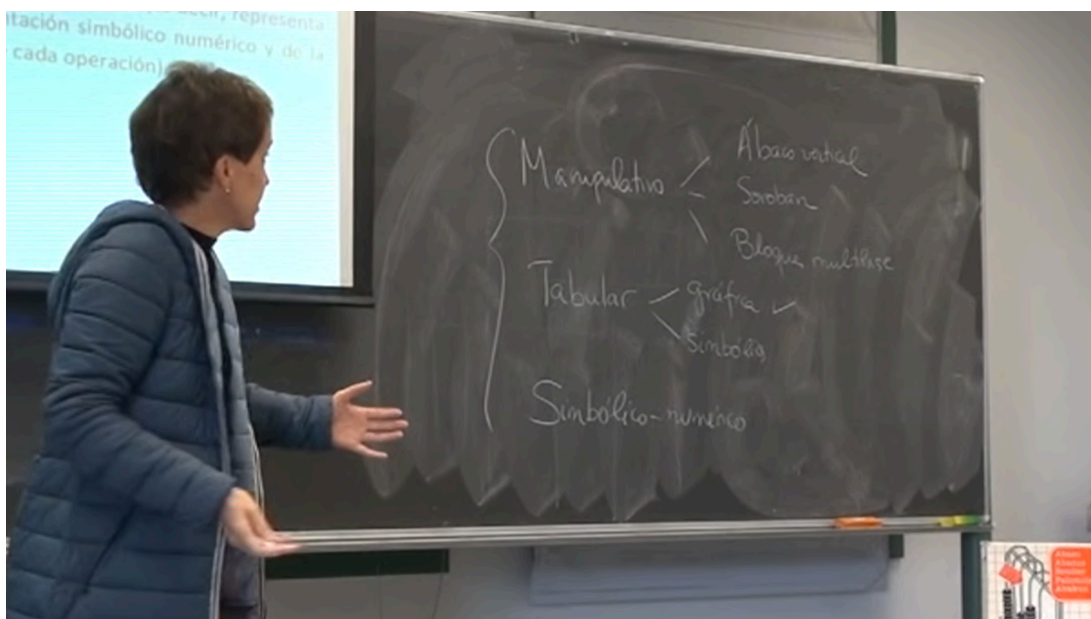
[F = Formadora del vídeo]. [Comentarios de Daniel presentados en recuadros].

- F: Entonces, la idea es..., el ejercicio 4, que está proyectado en la pantalla, es el ejercicio 4 de la última hoja, de la hoja del dossier 2, con el que vamos a trabajar ya esta semana, ¿vale? En ese ejercicio hay cuatro operaciones, cuatro problemas, cuatro operaciones. Tenéis que hacer las cuatro operaciones..., representarlas de distintas maneras. Voy a poner en la pizarra de cuántas maneras, ¿vale? Entonces, acordaos que nosotros estamos trabajando con material manipulativo [escribe en la pizarra «Manipulativo»], ¿vale? Entonces, en primer lugar tenéis que representar esta suma $[210 + 543]$, esta suma $[315 + 429]$, esta resta $[135 - 24]$ y esta resta $[704 - 45]$, por partes [va señalando en el PDF proyectado en la pantalla], ¿no?, empezáis con la primera... Tenéis que representarlo [escribe en la pizarra] con ábaco vertical, después en el sorobán y después con los multibase, ¿vale? Y tenéis que tener las tres representaciones del proceso delante para saber comparar cada dos, ¿vale?, para saber entender cómo se traduce una en otra. Lo que no quiero es que me digáis: « $210 + 543$ son 753; Nuria, te he representado 743* en el ábaco vertical, en el sorobán y en los bloques multibase». No quiero la representación del resultado, quiero la representación del proceso, de la suma, de la idea «suma». ¿En qué os tenéis que basar?, en la definición de la suma que vimos el otro día, ¿no?, que es: elijo un representante de uno, elijo un representante del otro y hago la unión, agrupo, junto, como lo queráis pensar, ¿vale? Entonces, hay que representar el proceso, el proceso, no solo el resultado final de ese proceso.

Comentario 1: Parece que ya la formadora empieza planteando la actividad, que es una actividad con material manipulativo, con tres tipos de material manipulativo: los ábacos, el ábaco vertical, usual, el sorobán y los bloques de base 10, haciendo énfasis en una cosa importante, que es que quiere que representen el proceso, porque es una confusión común de los estudiantes el representar la suma, el resultado, están muy acostumbrados a los resultados, entonces la formadora enfatiza mucho que quiere que se represente el proceso, no el resultado de esa suma.

Entonces, tenéis que representar el proceso de tres maneras en el sistema de representación manipulativo [señala lo que ha escrito antes en la pizarra], ¿vale? Y en paralelo [empieza a escribir en la pizarra] tenéis que representar el proceso en el sistema de representación simbólico-numérico; el enunciado está dado en ese sistema de representación, ¿vale?, esto es sistema de representación simbólico-numérico, pues tenéis que representar el proceso, las dos sumas y las dos restas, en ese sistema, ¿vale? Y luego, en medio [escribe en la pizarra], hay una representación que es formato tabla o tabular, de la que no he hablado explícitamente, pero que me gustaría que construyerais vosotros, ¿vale? Necesito que construyáis, por ejemplo, esta suma [señala $210 + 543$], que la hagáis en tabla, con una tabla, como se os ocurra a vosotros diseñar la tabla, ¿vale? La tabla [escribe en la pizarra] puede ser más gráfica, puede tener características gráficas, o puede tener características más simbólicas; a mí me va a interesar más la que tenga características más gráficas, luego ya veremos en detalle cómo, pero tenéis que intentar construirlo vosotros sin que yo os haya hablado de eso explícitamente, ¿vale?

Comentario 2: Ya termina de plantear el ejercicio; además de la representación manipulativa, quiere la representación usual simbólico-numérica y una intermedia, que no está descrita previamente, que quiere que los alumnos improvisen o traten de generar por sus propios medios, que llama tabular, que puede tener componentes gráficos o simbólicos, con lo cual este proceso es muy parecido a las tres etapas de Jerome Bruner, más conocidas como el famoso CPA de Singapur.



Entonces, paso 1, aquí [señala la parte de representación manipulativa de la pizarra], en paralelo paso 2, simbólico-numérico [lo señala en la pizarra] y luego ya, según vayáis trabajando los cuatro ejemplos, igual ya se os va ocurriendo cómo representarlo con una tabla y cómo trabajar con una tabla ese tipo de operaciones. ¿Está claro? Yo me voy a pasar por las mesas y me vais preguntando todas las dudas que os surjan. No voy a pedir que me mandéis nada, ¿vale?, porque todavía no he revisado las últimas fotos que me habéis mandado, con lo cual estoy un poco desbordada; como no sois muchos, yo voy por vuestros puestos. Ahora bien, en el grupo anterior han decidido grabar pequeños vídeos o hacer fotos de los procesos que iban construyendo por llevárselo como material para estudiar, a mí me parece una buena idea, pero ya vosotros hacéis lo que queráis, a mí no me lo tenéis que mandar, pero si queréis, una vez que hayáis construido, por ejemplo, con el ábaco japonés, imaginaos, esta resta de aquí [señala el PDF en la pantalla], y decís: «ah, pues nos vamos a grabar», uno lo hace otro lo graba y lo tenéis de recuerdo, ¿no?, para cuando tengáis que estudiar. ¿Cómo voy a pedir yo eso en el examen? Pues no lo puedo pedir porque no puedo llevar un sorobán para cada uno porque tengo un día, 2 horas y media o 3, para haceros el examen final de la asignatura; pero para mí esto es muy importante, entonces yo voy a pedir que me representéis gráficamente, gráficamente, vuestro proceso de respuesta con un ábaco vertical, con un sorobán o con los bloques multibase, que es lo que yo luego voy a hacer aquí en la sesión

final de discusión cuando acabemos esta hora de clase. Yo no voy a coger el ábaco aquí, lo voy a poner delante de todos y tal —podría hacerlo, pero no lo voy a hacer—, lo voy a hacer representando gráficamente el material manipulativo y así es como lo voy a pedir el día del examen, porque os voy a dar un cuadernillo y lo tenéis que hacer gráfico, ¿vale? Bueno, pues empezad, están escritas en un orden muy concreto, empezad a hacerlas en ese orden y luego ya discutimos sobre por qué están puestas en ese orden, ¿vale?

Comentario 3: Hace una observación sobre el orden, que la secuencia didáctica es importante, las operaciones están puestas, se entiende, de más fáciles a menos fáciles, y les observa que es importante seguir ese mismo orden.

Fragmento 2

[F = Formadora del vídeo]. [A = Alumnos (A1, A2 y A3)]. [Comentarios de Daniel presentados en recuadros].

- A1: Estamos rayados con la última resta.
 F: Vale, a ver, empezad.
 A1: Son 704 - 45.
 F: Vale.
 A1: Entonces, aquí no le podemos restar 5.



- F: Así tal cual está, puedes restar..., ¿cuántas puedes quitar?
 A1: Cuatro.
 F: Cuatro, vale, sí.
 A1: Entonces voy a suponer que aquí [señala la varilla de las decenas] hay un 1.
 A2: No, que hay 10.
 A1: Que hay 10, para que sea 14...
 F: A ver, olvídate de los «suponer». Tú dices: «tengo que quitar 5», ¿no?, quito 1, quito 2, quito 3, quito 4 [quita cuentas de la varilla de las unidades] y ahora ponme aquí más para que yo quite, tal y como está.



- A1: Habría que poner 10 y quitamos 1.
- F: Pero ¿cómo me ponéis..., cómo me ponéis ahí? A ver Pablo.
- A2: ¿Que lo ponga?
- F: No, no, que me digas... Yo aquí [señala la varilla de las centenas] tengo ahora mismo 700, ¿no? Escribe 700 de otra forma para que yo tenga bolas...
- A1: Aaaaah, hay que añadir una aquí [señala la varilla de las decenas].
- F: Venga, a ver.
- A2: [El alumno A2 quita una cuenta de la varilla de las centenas y la pone en la de las decenas].
- F: ¿Aquí sigue poniendo 700?
- A1: No, no, no, hay que poner una nueva aquí [vuelve a poner la cuenta en la varilla de las centenas —la que había puesto en la varilla de las decenas el alumno A2— y pone una nueva en la varilla de las decenas].
- F: A ver [quita la cuenta de la varilla de las decenas]. Teníamos 704, hemos quitado 4, tengo 700, ¿vale?
- A1: Sí.

Comentario 1: Paramos... porque esto se va a alargar seguramente... La docente dialoga con los alumnos sobre cómo restar la cantidad... 704, empezando por quitar 5 unidades, y aparece el problema de que hay 4 y no podemos quitar 5, y empiezan a dialogar sobre cómo reorganizar la cantidad 704 para poder proceder con la resta. Queda patente en los alumnos la dificultad de comprensión, que les cuesta entender el ábaco, y cómo las fichas

en diferentes posiciones del ábaco tienen diferentes significados y, por tanto, qué hay que hacer para mover fichas de un palo del ábaco al otro.

- F: Ahora, escribe 700 de otra forma para poder quitar otra.
- A1: Pues...
- F: ¿Cómo podéis escribir 700 de otra forma?
- A1: Que aquí [señala la varilla de las decenas] haya 9...
- F: Venga.
- A1: Y aquí [señala la varilla de las unidades]..., 9.
- F: A ver, para que haya aquíiii... [señala la varilla de las decenas], vamos a ver, ¿cómo consigo aquí decenas? Sin cambiar el número...
- A1: Si quito esta... [quita una cuenta de la varilla de las centenas].



- F: Venga, muy bien.
- A1: Pongo aquí 10 [señala la varilla de las decenas].
- F: Venga, dale.
- A1: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10.
- A3: ¡Ah, vale!



F: ¿Ahora aquí pone 700?

A1: Sí.

F: ¿Y cómo está escrito 700?

A3: Mal.

F: 6×10^2 , ¿no?, 6×100 , más...

A2: 10×10^1 .

F: 10×10^1 , muy bien.

Comentario 2: La docente, dialogando con los alumnos, ha logrado que entiendan la reagrupación o cómo funciona el ábaco, que 1 ficha de la barra de las centenas se convierte en 10 fichas en la barra de las decenas y que eso corresponde a representar el número 700 como 6 centenas y 10 decenas, para proseguir de esa manera con la operación de resta que estaban trabajando.

Ahora, ¿puedo quitar aquí [señala la varilla de las unidades] que quería quitar una? ¿Tengo?

A1: No.

F: No, ¿cómo puedo volver a escribir 700 para tener aquí [varilla de las unidades]?

A1: Pues quito de estas [quita una cuenta de la varilla de las decenas] y añado 10 aquí [señala la varilla de las unidades].

F: Vale, venga.



- F: Vale, ¿y ahora puedes quitar la que te faltaba por quitar?
- A1: [La estudiante A1 quita una cuenta de la varilla de las unidades].
- F: Ya está. Ya habéis quitado 5 y teníais que quitar 45, ¿no? ¿Cuánto os falta por quitar?
- A1: Sí, ahora aquí [señala la varilla de las decenas] hay que quitar 4.
- F: Pues ya está, ¿no?
- A1: Ah, vale, vale. Gracias.



- F: ¿Entonces qué habéis hecho para reescribir el 700...? O sea, yo tenía 700 ahí, tenía aquí 700 [deja el ábaco con 7 cuentas en la varilla de las centenas], ¿qué habéis hecho?

A2: Como es sistema decimal, pues aquí [señala la varilla de las decenas] hay 10, porque... representamos un 0, pues quitar una de aquí [varilla de las centenas] y ponerle las 10 aquí [varilla de las decenas] para luego restarlas aquí [varilla de las unidades].

F: O sea que habéis..., ¿agrupado o desagrupado?

A1: Desagrupado.

A2: Aquí desagrupado.

F: Desagrupado. Habéis desagrupado una centena en 10 decenas y luego una decena la habéis desagrupado en 10 unidades.

Comentario 3: Después de terminar la operación con las decenas, la docente trata de que los alumnos reflexionen sobre el proceso en su conjunto para que tengan una visión general de lo que han hecho y cómo lo que están haciendo para esta resta es desagrupar centenas en decenas y decenas en unidades; un proceso, el de desagrupar, que en el ábaco no tengo claro que se vea bien, parece que a los alumnos les cuesta entenderlo.

A1: Vale, es que cuando tú lo haces en papel no haces esto así.

F: Ah, pues dime entonces qué es lo que haces en papel.

A1: Claro, lo haces muy mental. O sea, en verdad sí que haces eso, pero... bueno, ya me has entendido.

F: No, no, pero lo tienes que explicar porque luego os he pedido que lo hagáis simbólico...

A1: Ya, ya, ya.

F: Entonces, simbólico tienes que explicarlo conectado con esto.

A1: Vale, vale.

Comentario 4: Finalmente, con el mismo grupo, ante la pregunta de una alumna que lo relaciona con cómo lo hacen en papel, con el método tradicional, el simbólico-numérico, pues la docente les pide que reflexionen sobre la conexión entre los dos, que era una parte fundamental del ejercicio, ¿no?, cómo conectar lo que han hecho con el ábaco con lo que hacen tradicionalmente cuando hacen la operación con lápiz y papel.

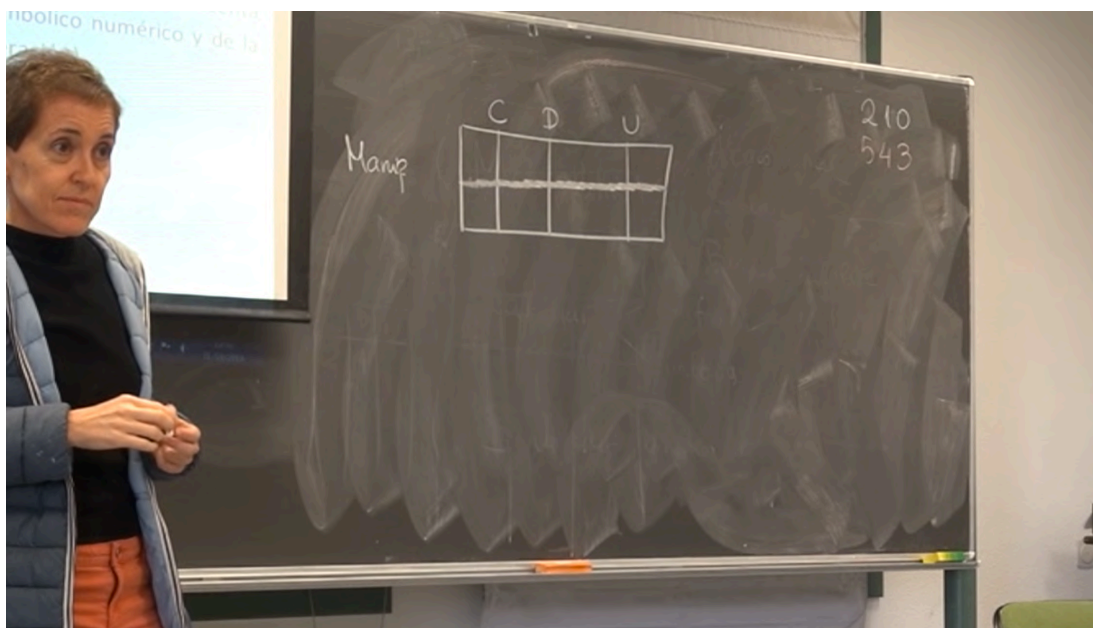
Fragmento 3

[F = Formadora del vídeo]. [A = Alumnos]. [Comentarios de Daniel presentados en recuadros].

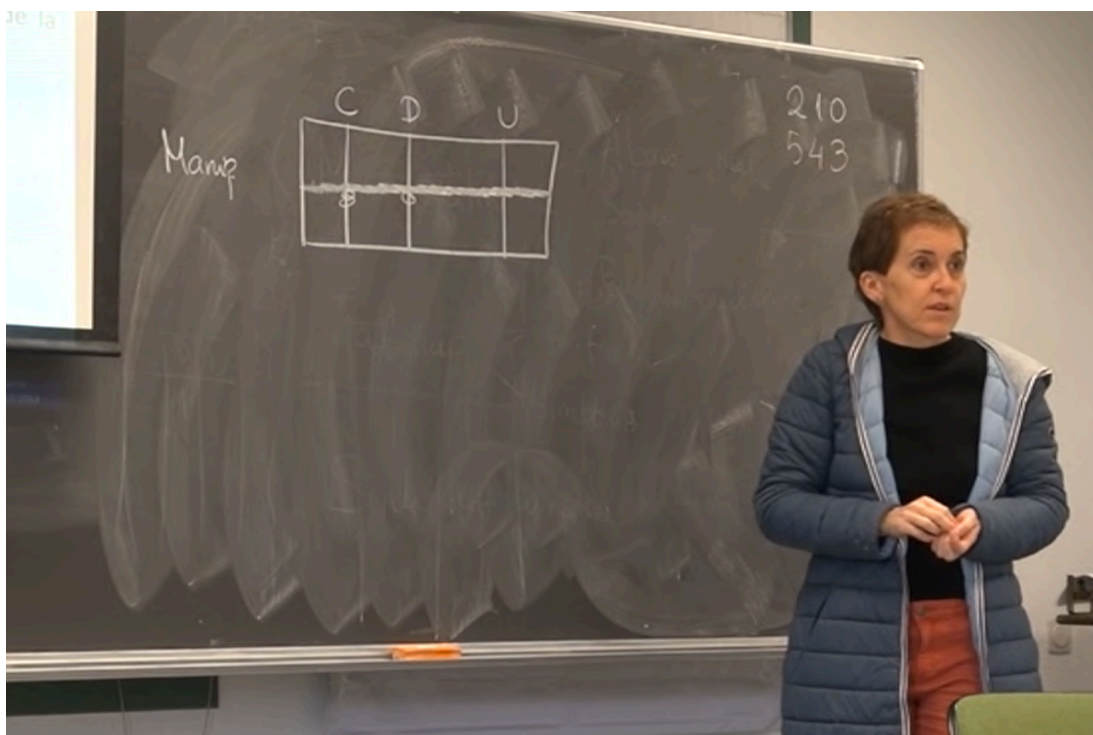
- F: Vamos a corregir uno, el primero, ¿vale? Me dan $210 + 543$, ¿vale?, con símbolos. Voy a representarlo..., vamos a empezar con manipulativo y voy a ejemplificar con el sorobán, que es el que parece que más trabajo cuesta, ¿vale? Entonces, en el sorobán, cuando lo representéis gráficamente el día del examen, o ahora en vuestro cuaderno si tenéis que tomar notas, es muy importante marcar la barra del medio, porque la proximidad de las bolas a la barra del medio es la que te indica qué número está representando, ¿vale? Y ahora, dado el problema que me han planteado, ¿cuántas varillas pensáis que necesito escribir?

Comentario 1: Van a empezar a corregir una de las tareas y la docente la formula en lenguaje simbólico-numérico; es la suma $210 + 543$. Y la forma manipulativa que va a resolver con el grupo es la del sorobán porque menciona que ha sido la representación manipulativa que más dificultades les ha provocado a los alumnos, que más les ha costado, durante el periodo de trabajo. Les pregunta cómo colocar las varillas del sorobán para representar esas cantidades, que parece ser una de las claves, o la manera de empezar, para representar las cantidades en el sorobán.

- A: Tres.
- F: ¿Tres varillas? Pongo una varilla, dos varillas, tres varillas. Esta, unidades, decenas, centenas. Esta la pongo un poco más gorda para que se note que es la barra de madera del medio, ¿vale? Y ahora, ¿cómo dibujo 210?



- A: Pues 0 unidades.
- F: 0, o sea que aquí no pongo nada pegado a la barra, ¿no? [señala la varilla de las unidades]. ¿Aquí? [señala la varilla de las decenas].
- A: 1 decena.
- F: Una pegada a la barra, ¿arriba o abajo?
- A: Abajo.
- F: Abajo, o sea que aquí va una.
- A: Y 2 centenas pegadas a la barra de abajo.
- F: Pegadas a la barra, abajo. Una y dos, ahí está. Eso es 210.



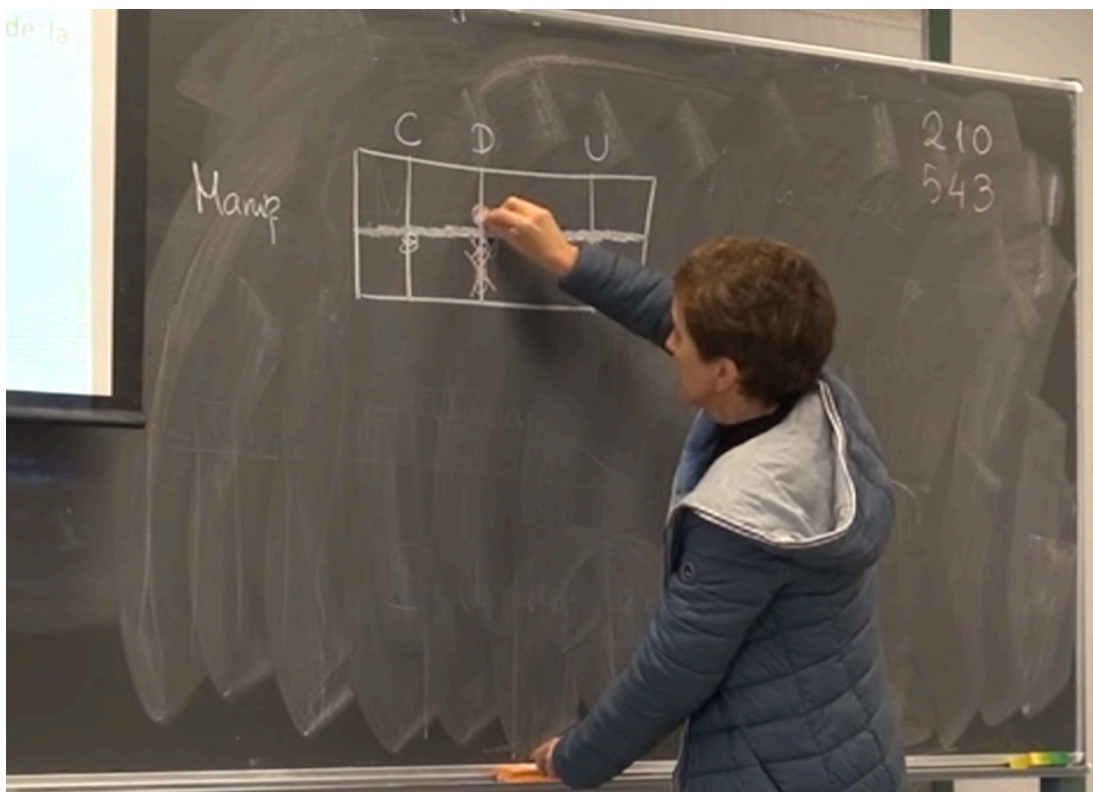
Y ahora, tengo que sumar 543, es decir, que tengo que añadir 543 unidades ahí. Aprovecho la estructura, ¿vale? Entonces, añado 3 unidades, en la varilla de las unidades, que son 3 aquí abajo, ¿no?, 1, 2 y 3 [las dibuja en la varilla de las unidades]. Después añado 4 decenas, en la varilla... 1, 2, 3, 4, ¿vale? [las dibuja en la varilla de las decenas], 4 decenas.

A: Pero cambiamos...

F: Pero...

A: Bajamos una de arriba y quitamos las de abajo.

F: Porque no tenéis 4, ¿vale?, ya no había suficientes, ¿por qué?, porque las bolas de arriba valen 5, entonces decís: «no pasa nada, estas, como eran 4 y 1, 5, se representan ahí arriba», ¿vale?



Y luego, 5..., tengo que añadir 5 centenas, ¿cómo lo hago?

A: Pues 1 arriba.

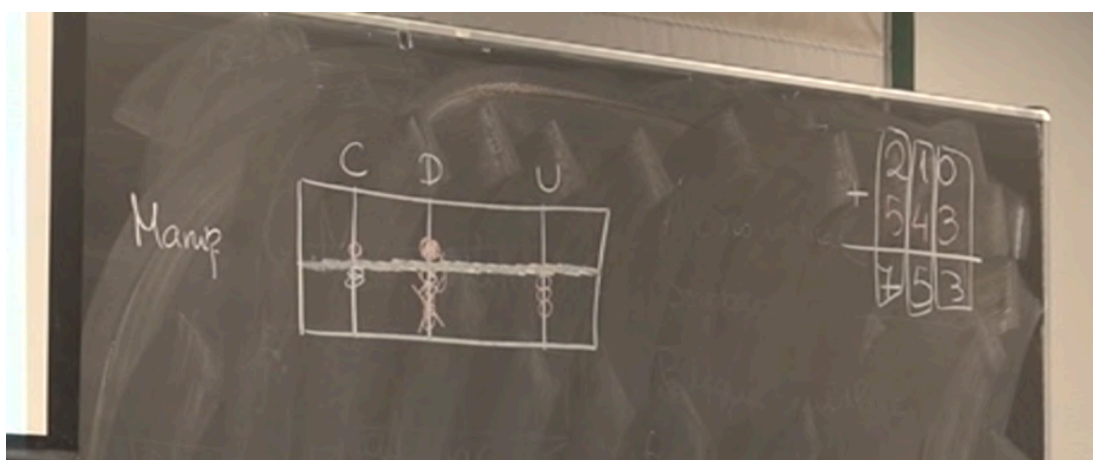
F: Una de arriba la bajo directamente o podría ir: «1, 2, 3, ya tengo 5, las subo ahí, 4, 5» [va señalando en la varilla de las centenas], ¿vale? Puedo hacerlo de dos formas distintas. Pero si aprovecho la estructura del ábaco, de manera que las bolas de arriba valen 5, como tengo que añadir 5, pues directamente ya añado ahí esas 5 [dibuja una bola en la varilla de las centenas, en la parte superior, pegada a la barra horizontal], ¿vale?

Comentario 2: En este proceso, la formadora ha preguntado a los alumnos sobre cómo representar la suma que teníamos en el sorobán que ya estaba diseñado y, entonces, van representando unidades, decenas y centenas con el cuidado de que las bolas en la parte inferior son unidades y las bolas de la parte superior tienen un valor de 5. Va preguntando a los alumnos para que vayan reflejando en el sorobán no solo unidades, decenas y centenas, sino también los grupos de 5 que aparecen cuando van haciendo la suma.

Entonces, [representa ahora el resultado en la suma con el algoritmo tradicional de forma simbólico-numérica a partir de lo que ha obtenido en la representación con el sorobán] me quedan 5 y 2, 7, aquí me quedan 5, y aquí me quedaban 3.

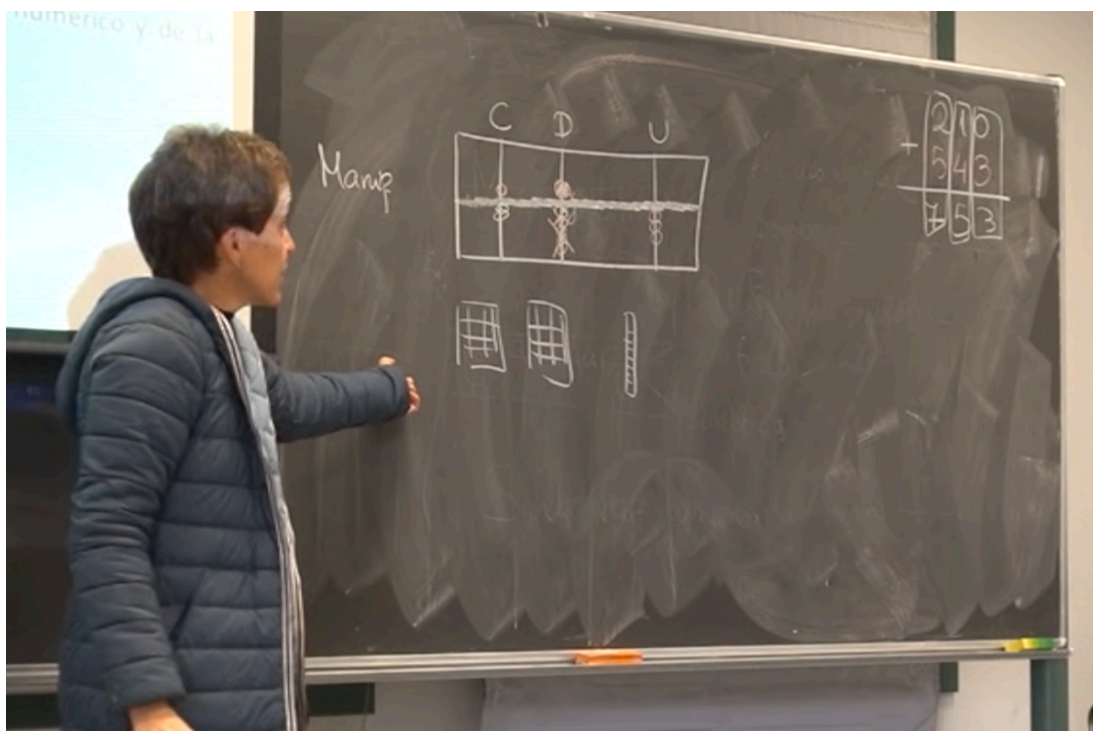
Entonces, si yo lo represento así y voy sumando por columnas, tal cual he ido haciendo en el ábaco, tengo 0 unidades y 3 unidades, 3 unidades, 1 unidad y 4 unidades, 5 unidades, perdón, decenas, 2 decenas y 5 decenas, 7 decenas. Vertical, lo he colocado vertical por parecerme a la estructura del ábaco, ¿no?, para tener en cuenta la «posicionalidad», ¿vale?, del sistema.

Comentario 3: Ahora la formadora traslada el resultado del sorobán a la notación simbólica tradicional para conectar las dos estrategias y para que los alumnos comprendan por qué sumamos unidades, decenas y centenas en esta suma, que es una suma relativamente sencilla porque es una suma sin reagrupamientos.



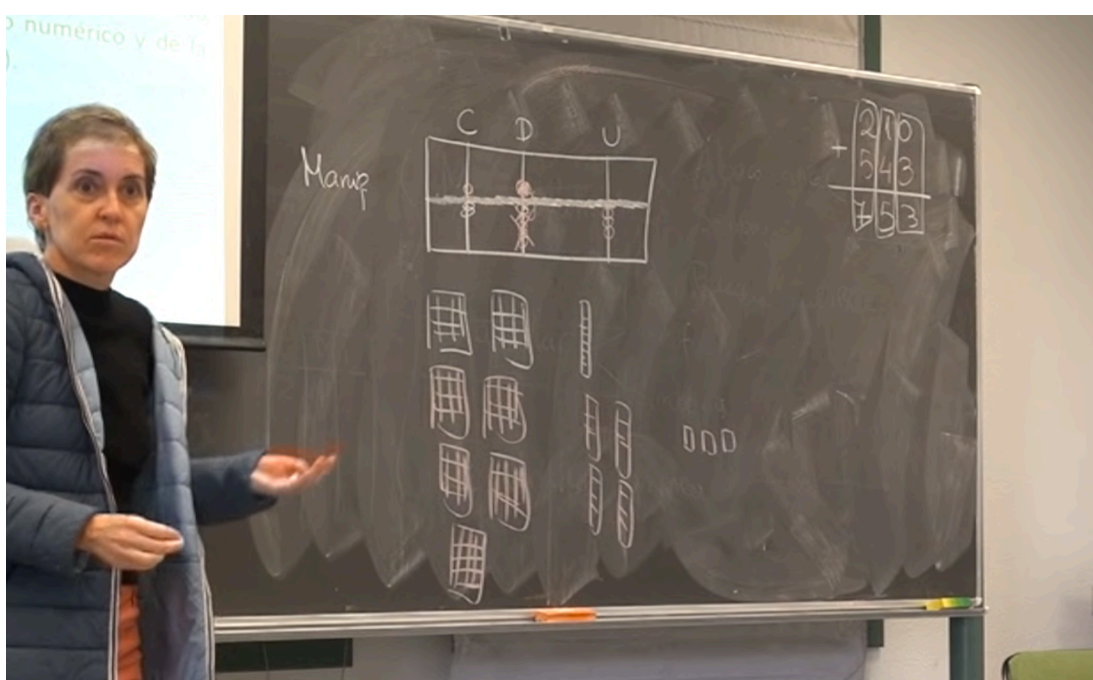
Entonces, he traducido al simbólico lo que he hecho aquí manipulativamente al escribir en simbólico en columnas y represento con cada columna cada una de estas [señala las varillas del sorobán de la pizarra]. Y luego, la escritura, sí que tengo que tener en cuenta que estos son 5 [señala las decenas de la suma en simbólico] con lo cual van arriba [en el sorobán] y esto son 7 [señala las centenas de la suma en simbólico], pues son 5 y 2 [en el sorobán], ¿vale?

Bloques multibase, bloques multibase, pongo aquí 210, ¿no?, que son 1 y 2 placas de 100 y 10, una decena; este es el 210.



Y ahora agrupo 543; una, dos, tres, cuatro y cinco [dibuja 5 placas de 100 unidades], añado, ¿vale?, 500. 40: una, dos, tres, cuatro [barras de 10]; y 3: uno, dos y tres [unidades]. Y ahora lo pongo todo junto. ¿Vale?

Comentario 4: Ahora la docente representa con bloques de base 10, con una representación gráfica de los bloques de base 10, las mismas cantidades de la suma anterior para representar ahora la suma, el proceso de reunir todos los bloques para representar la suma.

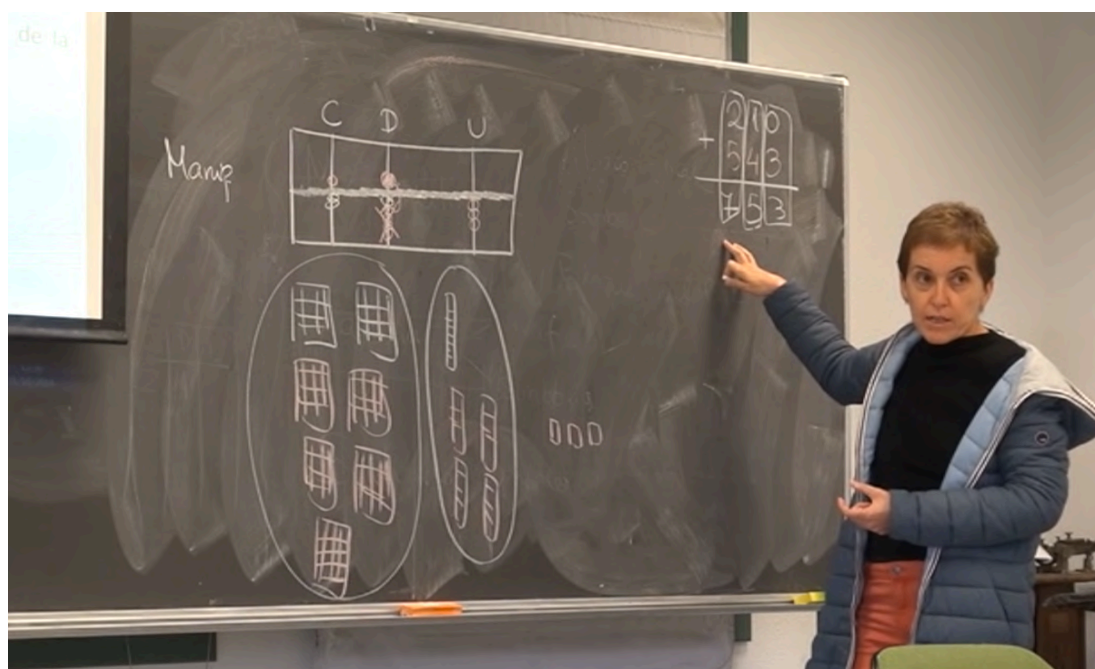


Y digo: «aquí tengo 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 [placas de 100]», ¿necesito agrupar? [Rodea con una línea todas las placas de 100].

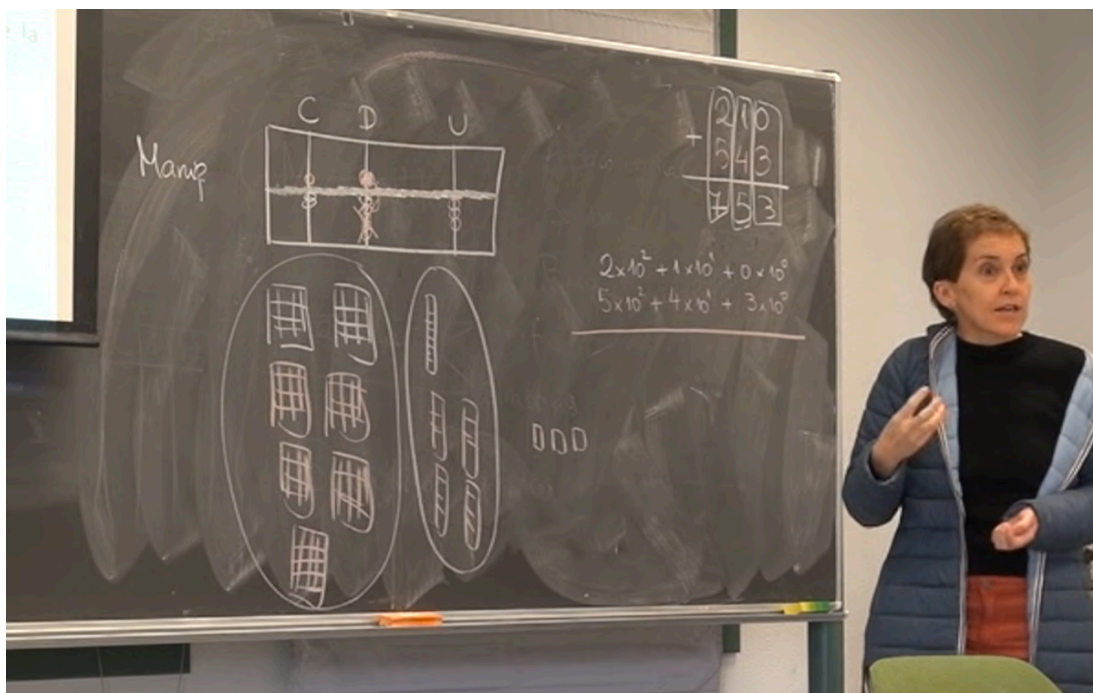
A: No.

F: No necesito agrupar. Aquí tengo 1, 2, 3, 4, 5, 6, 5, ¿necesito agrupar estos 5 de alguna manera? [Rodea con una línea todas las barras de 10]. No porque es base 10. Y aquí tengo 3, ¿vale? O sea, que me vuelve a salir 2, 4, 6, 7 [centenas; señala la suma en simbólico], 2, 4, 5 [decenas], 5 [señala la suma en simbólico] y 3. Y veo la conexión de uno con otro, ¿vale? ¿Está claro hasta aquí?

A: Sí, eso sí.



F: El que quiera escribirlo simbólico-numérico de otra manera en la que se vea la «posicionalidad» del sistema, podría escribirlo de la siguiente forma: $2 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 0 \times 10^0$, ese es el primer sumando; segundo sumando, $5 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 3 \times 10^0$; y sumo.



Y ahora, al sumar, utilizo la propiedad conmutativa, para colocar los sumandos en el orden que quiero, y asociativa, para ir organizando, ¿vale? O sea, que este [señala 5×10^2] —que, si lo coloco seguido, estaría aquí el cuarto [señala detrás de 0×10^0]— lo quiero colocar el segundo para agruparlo con este [señala 2×10^2],

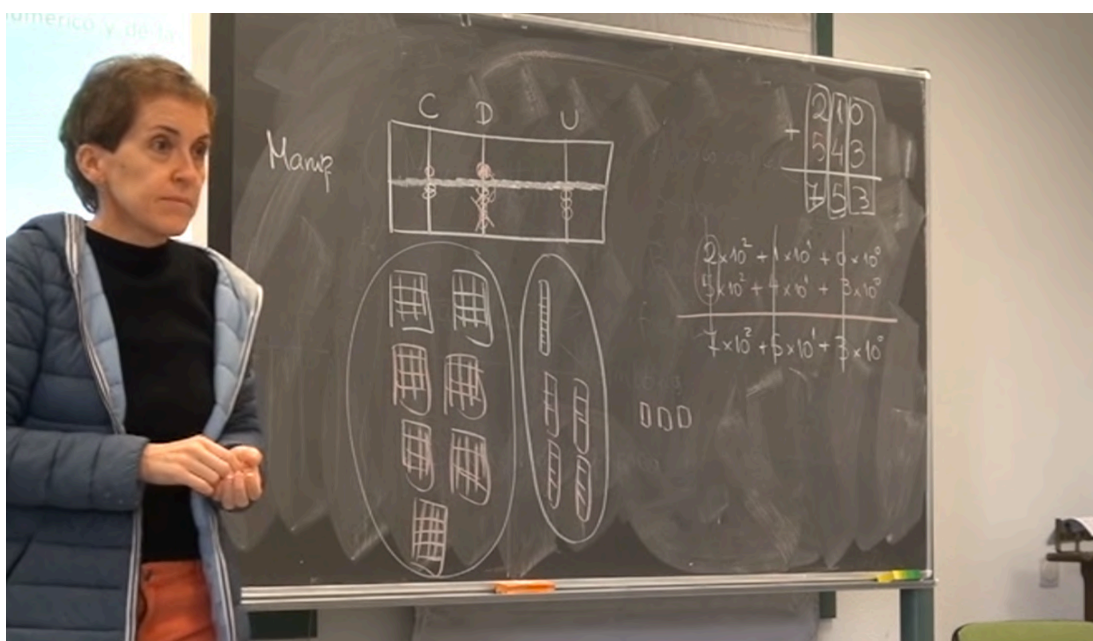
Comentario 5: La formadora representa la suma ahora con la expresión polinómica de los números: 210 como 2×10^2 más un grupo de 10 más 0 unidades, y lo mismo la otra, y habla de que eso es para ver la estructura posicional. También la estructura posicional se puede ver, me parece, si uno cuando suma enfatiza bien que hace 3 unidades, y 4 y 1 son 5 decenas, y 5 y 2 son 7 centenas. Y la representación que hace es puramente simbólica en términos de potencias y en términos de la expresión polinómica de los números, una alternativa a la anterior, que sería más verbal.

este [señala 4×10^1] —que estaría el quinto [señala detrás de 0×10^0]— lo coloco el tercero para agruparlo con este [señala 1×10^1], y este [señala 3×10^0] lo agrupo con este [señala 0×10^0]. Y ahora, al agrupar, ya me quedan 5 y 2, propiedad distributiva, 7×10^2 más, 4 y 1, 5×10^1 más, 0 y 3, 3×10^0 . Pero ahí estoy utilizando la asociatividad de la suma, la conmutatividad de la suma y la distributiva de la suma y el producto de números enteros, ¿vale?

Comentario 6: Se puede justificar la suma en la forma polinómica con propiedades de la suma y el producto, por supuesto. Y una alternativa, creo que más comprensible, no solo

en primaria sino para los estudiantes de Magisterio, quizá sería hablar simplemente de que yo sumo decenas con decenas, y sumo unidades con unidades..., pero no puedo sumar decenas con centenas, ¿no? Las dos alternativas, la del lenguaje natural y la de las propiedades de la suma y la resta escritas de forma simbólica.

Pero si lo coloco así, veo esto, esto y eso [señala los coeficientes que acompañan a 10^2 , 10^1 y 10^0], que es lo mismo que esto, esto y eso [señala el 7, 5 y 3 del resultado de la suma en la forma simbólico-numérica], que es lo mismo que esto, esto y esto [señala los bloques multibase en la pizarra] y que es lo mismo que 1, 2 y 3 varillas [señala las varillas del sorobán en la pizarra]. ¿Está claro hasta aquí?



- A: Sí.
- F: Ahora, ¿qué diferencia hay entre esto y la siguiente suma que me plantean ahí [en el PDF proyectado en la pantalla]? $316 + 429$.
- A: Que me paso de unidades y tengo que pasar a las decenas.
- F: Que cuando agrupo aquí, por ejemplo [bloques multibase], o cuando agrupo aquí [sorobán], o cuando agrupo aquí [expresiones de sumas y productos de potencias de 10], aquí aparecen más de 10 [señala al 3 de 3×10^1].

Comentario 7: La formadora plantea la siguiente suma, que es una suma donde aparece un fenómeno nuevo. Pregunta a los alumnos para ver si lo han detectado y, efectivamente, una alumna lo ha detectado. Han detectado que cuando aparecen 10 o más de una cierta unidad – unidades, decenas o centenas –, hay un fenómeno nuevo que hay que tratar,

que es el reagrupamiento.

En algún sitio aparecen más de 10, por ejemplo, cuando tengo 9 unidades y 6 unidades, aquí aparecerían 15 fichitas pequeñas [bloques multibase], aquí tendría que representar 15 [sorobán] y aquí aparecería 15×10^0 . Pero como estamos en base 10, no puedo dejarlo así, tengo que agrupar, tengo que agrupar. Entonces, agrupo 10 y dejo 5, y las 10 que agrupo las paso al siguiente valor, es decir, pego 10 fichas y construyo una barra [bloques multibase], agrupo 10 y me sale otra bola aquí en el ábaco, aquí abajo [parte baja de la varilla de las decenas], o agrupo 10 y me sale uno más aquí [en 5×10^1] y aquí [en 3×10^0] dejo las que se quedaban sueltas, las 5, ¿vale?

Comentario 8: La formadora habla de creo que eran 9 y 6 unidades y describe en los cuatro sistemas que está usando de representación –la notación vertical usual, la notación polinómica, el sorobán y los bloques de base 10– cómo representaría el proceso de que tengo 9 y 6, 15 unidades, las cuales se agrupan en 1 decena y 5 unidades para que los alumnos comparen las cuatro formas de representación, que es uno de los objetivos fundamentales de la actividad.

O sea, que la única diferencia es que aquí, después de representar cada cantidad y de ir poniendo por orden el valor de cada una, tengo que agrupar porque en algunos sitios tengo 10 o más, ¿vale? Es la única diferencia.

Y ahora, si quisiéramos representar esto en formato tabla, como tenía Martín, ¿no? ¿Cuántas columnas pondré yo en la tabla?, ¿qué me pide el cuerpo? Tengo que dibujar una tabla, ¿vale?, vamos a dibujar una tabla [comienza a dibujarla en la pizarra], con filas y columnas, ¿cuántas columnas pongo?

A: Tres.

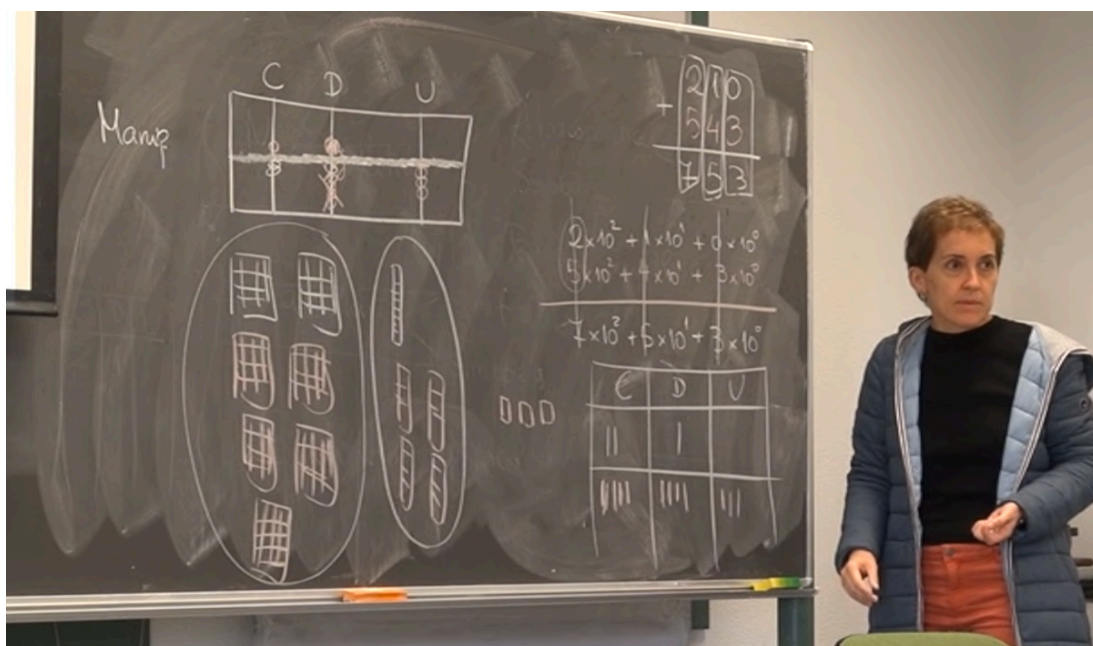
F: Tres, ¿por qué tres?

A: Centenas, decenas y unidades.

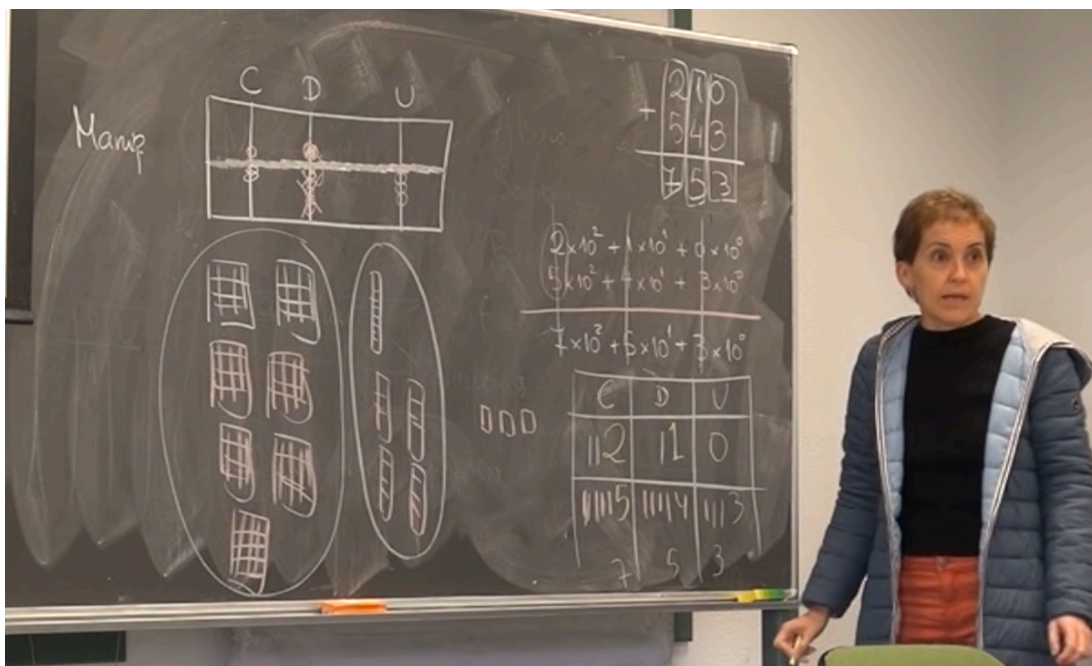
F: Unidades, decenas y centenas, ¿vale? Y entonces, represento el primer número, 210: 1, 2, 1, eso es 210 [pone dos rayas en la primera casilla de las centenas y una en la primera de las decenas]. Represento el segundo número, 500: 1, 2, 3, 4, 5; 40: 1..., bueno, en rosa, ya puestos..., 1, 2, 3, 4, 5; 40: 1, 2, 3, 4; y 3: 1, 2, 3. Y agrupo:

¿cuántas unidades tengo al final?, 3, ¿cuántas decenas tengo al final?, 5, ¿cuántas centenas tengo al final?, 7, fin.

Comentario 9: Ahora aparece la notación intermedia que habían introducido, la tabla, que es una versión de tabla de valor posicional donde representan unidades, decenas y centenas, y se representan con un palote para cada una, con lo cual es una representación intermedia, más parecida al ábaco, cuando se puede hacer una versión más parecida a los bloques de base 10 de esa tabla, ¿no? Pero ya se dijo al principio que los alumnos podían improvisar esa tabla, ya que no se había tratado antes en clase, y ha salido esta versión.



Este sistema de representación es icónico-gráfico porque he representado aquí las cantidades con palitos, pero tiene una estructura especial porque está en una tabla, ¿vale? Entonces, vamos a decir que es un sistema de representación tabular-gráfico. Si en vez de poner aquí gráficos, yo hubiera dicho: «oye, mira, no me lío con los gráficos, ya puestos, como ya controlo mejor los símbolos, pues voy a poner aquí 210 y aquí abajo voy a poner 543 y luego ya sumo: 4 y 1, 5; 5 y 2, 7; 3 y 0, 3», ¿vale?



Sería tabular, tiene una estructura tabular, no es puramente simbólico-numérico, tiene una estructura tabular, pero con números dentro, tabular-numérico, ¿vale?

Comentario 10: Tratando de seguir con la clasificación de los sistemas de representación, distingue una forma tabular-gráfica y otra tabular-numérica, dependiendo de si los símbolos que ponemos dentro de la tabla son números o tienen un carácter más gráfico.

Entonces, yo voy pasando de lo más concreto, que sería: «mi madre me ha dado 316 euros y mi abuela 429, ¿cuántos euros tengo en total?», después paso a manipular, con ábacos verticales, con ábacos japoneses, con bloques multibase..., y cuando interiorizo bien eso, digo: «ostras, venga, lo voy a poner en una tabla gráfica y voy a indicar lo que me indica cada varilla o lo que me indica cada agrupamiento de los bloques multibase, que es posición, en las columnas de una tabla, y ahí voy a poder marcarlo con símbolos». Esta tabla con símbolos se llama tablero de posición, porque tengo las posiciones indicadas —unidades, decenas y centenas—, y es uno de los recursos que más utilizan en el método famoso este Singapur, que habréis visto o habréis oído hablar de él, ¿vale? Entonces, ¿qué están haciendo?, están haciendo una transición de lo más concreto, pasando por lo manipulativo, hacia lo abstracto, que sería..., esto es lo más abstracto [señala las expresiones de sumas y productos de potencias de 10] y esto es lo abstracto que se trabaja en primaria [señala la suma hecha en el registro de representación simbólico-numérico], ¿vale? Pero no trabajan directamente con esto, vamos

pasando..., concreto, concreto, concreto, concreto [de forma manipulativa], voy intentando abstraer un poco, pero tengo mis gráficos que me ayudan a visualizar lo que estoy haciendo [de forma tabular], y finalmente mi objetivo es escribirlo simbólico-numéricamente, de forma abstracta, ya al final.

Comentario 11: La docente resume la actividad, desde la propuesta original, que era calcular una suma escribiendo el proceso, empezando con la fase concreta, representando con los materiales, el ábaco y los bloques de base 10, después las tablas en sus diferentes versiones, para terminar con el procedimiento simbólico, la suma en vertical y las expresiones polinómicas. Entonces, está dando un resumen de las diferentes versiones para calcular esa suma, un resumen de la ruta didáctica de los alumnos, ¿no?, cómo empezar con material manipulativo les ayuda a la comprensión y cómo el final del proceso es la representación puramente simbólica en vertical, y cómo esto es parte de lo que menciona, de la metodología Singapur, que es más o menos así, efectivamente.

¿Cómo habéis trabajado mayoritariamente vosotros en primaria cuando estabais haciendo sumas de este estilo? ¿Desde aquí [señala lo manipulativo] o desde el final [señala lo simbólico-numérico]?

A: Desde el final...

A: Yo con las de centenas, decenas y unidades, las cajas...

F: Las cajas estas también os suenan, los tableros de posición, pero ¿y qué poníais en las posiciones, palitos o los números ya?

A: Los números directamente.

F: Los números directamente, o sea, que estabais trabajando la fase inicial, de la suma, la estabais trabajando directamente con lo simbólico, que es la fase final, ¿lo veis?

A: Jolín, sí.

F: Vale, pues ala, ya está.

Comentario 12: Finalmente, la formadora pregunta por los recuerdos de los alumnos como alumnos de primaria para que reflexionen sobre cómo ellos aprendieron a sumar y cómo lo tradicional en España suele ser que empezamos muy cerca de la fase final, de la suma en vertical. Una alumna mencionaba que usaba una tabla de valor posicional, pero nada de material manipulativo, que es lo que me parece que es excepcional en España, usar material manipulativo, sobre todo cuando hablamos de Magisterio, que estudiaron

primaria hace más de 10 años.

ANEXO 23

Transcripción de los comentarios de Jorge en la fase 2

Nota: El texto presentado entre corchetes en la transcripción se corresponde con información incluida por el investigador.

TRANSCRIPCIÓN DEL VÍDEO 1

Fragmento 1

[F = Formadora del vídeo]. [Comentarios de Jorge presentados en recuadros].

F: Bueno, entonces os voy a dar el guion y empezáis a trabajar y, al final, los últimos 15 minutos, hacemos la puesta en común. El guion de la actividad aparece aquí en el campus, pone la fecha, ¿vale?, «actividad para la sesión del 19 de septiembre». Lo voy a leer porque está en inglés, por si alguno tuviera alguna dificultad, lo leo y os ponéis a trabajar, ¿vale?

Todo el mundo en la mesa tiene un montón de palillos y varias cintas de estas, ¿no?, elásticas. Si alguien necesita más cintas me las pide, palillos no, son los que os he puesto, ¿vale?, es con lo que tenéis que trabajar. El problema es que yo he comprado una caja de palillos en Supeco y resulta que mis compañeros lo compran en Mercadona y me dicen que las cajas de palillos que ponen 800 palillos del Mercadona traen más y que les sale a cuenta, y que cuando van a comprar materiales —porque a veces tenemos que comprar nosotros los materiales— pues que merece la pena. Yo no pude ir a Mercadona, fui a Supeco, pone que son 800, pero no sé si me han timado o no me han timado. Entonces, para hacer un control de calidad, hacer una estimación, que luego, bueno, los que hayáis hecho Matemáticas de Ciencias Sociales pues sabéis hacer un contraste de hipótesis y tal, pero bueno, lo primero que tengo que hacer es hacer una estimación de cuántos hay, ¿no? Entonces, los he repartido para no contarlos yo y la idea es ver cuántos hay.

Comentario 1: Ahí les plantea un problema a los alumnos. Tienen un montón de palillos, los ha repartido, y les ha planteado que los calculen, que estimen entre todos cuántos palillos hay. Es un poco la tarea matemática que tienen que hacer.

Entonces, el guion de la actividad, tal y como aparece aquí... [espera a que cargue el ordenador]. Aquí está el guion. Esta actividad —esperad que la amplíe un poco— está escaneada de un libro muy bueno que utilizan en los últimos años en Estados Unidos para formar profesores de primaria. Lo bueno del libro es que, además de los contenidos teóricos, más de la mitad del libro son actividades para llevar al aula-taller como estamos haciendo aquí, ¿vale?

Comentario 2: Bueno, no sé si es muy de didáctica, pero está recomendando una referencia que es justo aplicada un poco a ellos como futuros maestros que tiene actividades para ellos. Entonces, bueno..., no es que tenga contenido matemático, pero bueno, es una referencia relacionada con el tema que está viendo, de donde ha sacado también el... Así que bueno, para su práctica docente también puede servirles. No sé si es didáctica general... Es una referencia con recursos de apoyo para llevar al aula.

Entonces, una de las actividades iniciales para el trabajo con el número, que es con lo que estamos empezando nosotros, es esta de los palillos, ¿vale?

Entonces, aquí la pregunta es «cuántos», cuántos palillos, ¿no?, que es lo que os he preguntado a vosotros, ¿no?, cuántos.

Comentario 3: Es más bien de didáctica... Recuerda otra vez el... Yo creo que es importante que quede claro el ejercicio, ¿vale? También lo tienen escrito, así que, bueno, la tarea... Pero bueno, podría ser más general... Pero vamos, el problema que se establece lo tienen escrito para que quede bien especificado, ¿no?, el problema matemático que tienen que resolver.

Entonces, cada grupo participando en esta actividad tiene un montón de palillos y luego tiene algo para atarlos, ¿no?, *rubber bands*, pues cintas de estas elásticas. Los materiales ya los tenéis. El objetivo de la actividad es ayudarlos a entender el desarrollo de la escritura de los números tal y como los utilizamos nosotros en nuestro sistema de numeración, ¿vale? Entonces, primero, organiza los palillos de forma que visualmente puedas ver más o menos cuántos hay; usa las bandas elásticas, si te ayudan, para organizarlos de manera que así, de un vistazo, puedas decir cuántos tienes,

Comentario 4: Ha puesto un poco en contexto el objetivo de la tarea que van a hacer, ¿no?, que en el fondo es entender el sistema decimal, cómo están escritos... Y la actividad

es una tarea en la que van a ir contando y agrupando... Y el objetivo final matemático es entender el sistema decimal. También está planteando las estrategias sugeridas para resolver el problema.

primero los cuentas, lo organizas, piensas cómo organizarlo, pero la cosa es que la organización que tú tengas en la mesa te permita de un vistazo recordar cuántos hay sin necesidad de haberlo apuntado, ¿no?, y que, si yo me paso por allí, me podáis decir: «mira, hay no sé cuántos, porque..., lo veo porque lo hemos organizado así», ¿vale? Luego, reflexiona sobre si la manera en la que lo has organizado corresponde a cómo escribirías tú luego los numerales para representar esa cantidad de palillos.

Comentario 5: Está un poco guiando las estrategias que puedan ir realizando, cada uno de los ejercicios, que cada uno tiene su objetivo. El primero era un poco la estrategia de usar los hatillos y la manera un poco de comunicar el resultado; y después, que reflexionaran un poco sobre lo que están haciendo, que es importante también.

Después, tienes que juntar tus palillos con los de un grupo de al lado, ¿vale?, por ejemplo, vosotros con vosotros y así, cada dos grupos tienen que juntar los palillos que tienen y decidir cuántos tienen en común, ¿vale?, cuántos tienen en total. Y al final, tenemos que juntarlos todos y de una forma ágil, sin tener que volver a contarlos todos, tenemos que saber cuántos palillos hay en total en la clase repartidos, ¿vale? O sea que, primero, cada grupo tiene que saber cuántos tiene y tiene que generar una estrategia para, de manera rápida, mirar en la mesa y ver cuántos hay; después, reflexionar sobre si la manera en la que lo coloca cuando uno luego escribe, imaginaos, «tengo 72, pues cómo se escribe 72: siete, dos», pues la manera en la que lo coloco me ayuda con la escritura o no, no tiene por qué, se reflexiona un poco sobre eso; y cuando hayáis terminado esa parte, llamáis al grupo de al lado y decís: «venga, vamos a ver cuántos tenemos en total,

Comentario 6: Bueno, la estrategia..., lo que hace también es eso, el primer paso de los grupos es que vean cómo pueden expresar el número de palillos que les ha tocado, después que lo pongan en común con los otros compañeros, que reflexionen sobre el objetivo que tenía la actividad de cómo expresarlo, y al final poner en común, que la actividad, el aprendizaje, sea un poco colectivo, y también la manera de cómo unir todos esos palillos, cómo después van a representar, ¿no?, que se les va a plantear como otro problema.

Entonces, yo creo que está generando comunicación entre ellos para que puedan ver la estrategia que cada uno ha usado para resolver el problema y, luego, la estrategia común se hace con el grupo entero; es un poco el objetivo que tiene.

visualmente, cómo lo organizasteis vosotros, cómo lo organicé yo, a ver cómo lo tengo», ¿vale?; y luego todos. Tenéis un cuarto de hora, ¿vale?

Fragmento 2

[F = Formadora del vídeo]. [A = Alumnos].

- F: Necesito saber si habéis tenido que llegar a algún acuerdo entre los grupos o...
- A: Sí, claro, todo ha sido un consenso, todo ha sido un consenso.
- F: Ah, vale, ha sido un consenso. ¿Qué acuerdo habéis tenido que...?
- A: Hemos explicado cada uno pues lo que significaba cada..., cada gomita.
- F: Y, por ejemplo, ¿vosotros de cuánto en cuánto lo habíais agrupado? Eráis los de 15, 10, 5, ¿no?
- A: Sí.
- F: ¿Y vosotros?
- A: 20, 10 y 4.

Comentario 1: Parece que son dos grupos que se han unido y está preguntando qué estrategias han utilizado; está haciendo que verbalicen, que le expliquen las estrategias que han usado, y los alumnos le están explicando cómo lo han hecho.

- F: 20, 10 y 4. Entonces, ¿habéis tenido que llegar a algún acuerdo alguno para reordenar?
- A: No, porque nos ha venido muy bien.
- F: ¿Os ha venido bien?
- A: Es que hemos sido muy inteligentes cogiendo el amarillo para los grandes [se refiere a gomas elásticas de color amarillo].
- F: Ahora los grandes de qué son, ¿de 20?
- A: De 20 y de 15, aquí están mezclados. ¿O los tenemos que reorganizar?



F: Esto es superinteligente, ¿no? O sea, yo veo aquí..., digo: «en los amarillos, algunos tienen 20 y algunos tienen 15, búscate la vida Nuria».

A: Pero son amarillos.

Comentario 2: Está analizando, entendiendo, cómo lo han resuelto. Entonces, los hatillos de 20... Es un poco la idea que ellos han buscado para resolverlo y ella les está haciendo reflexionar sobre si es adecuado o no. Ella misma está entendiendo un poco el proceso que han seguido y está preguntándoles...

F: Ya, pero entonces yo no sé... Yo digo: «vale, yo puedo ver 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 grupos amarillos», ¿no? Y ahora digo: «como mucho serán 160, si son todos de 20, pero... no necesariamente son 160, pueden ser menos».

A: Bueno, pero como no lo sabes...

Comentario 3: Ahí... Ha encontrado... No sabe... Me ha parecido como que no todos los hatillos tenían 20, ¿no? Entonces ella ha visto ahí un problema para luego utilizarlos para generalizar. Entonces, les pregunta: «Bueno, si yo tengo todos estos hatillos, tampoco sé si al final tengo...». Les plantea una pregunta a ellos para que se den cuenta de que a lo mejor tienen que rehacer un poco la manera en la que lo han hecho. Está haciéndoles preguntas para ver la validez de su método, de la estrategia que han utilizado.

F: ¿Entonces cómo sé cuántos hay?

A: Te lo estamos diciendo, tienes que confiar en nosotros.

F: No, en matemáticas la confianza no vale, uno tiene que...

- A: Es que no sé, no lo entiendo. ¿Lo tenemos que reorganizar?
- F: Vosotros ya sabéis cuántos palillos tenéis, pero ahora, visualmente, tenéis que poder contarme a mí cómo sabéis que hay ese número de palillos, ¿no?

Comentario 4: El objetivo de la actividad también es que acaben dando una solución a través de un razonamiento. Entonces, enfatiza qué quiere realmente de cada grupo, no solo resolver el problema, sino explicar el porqué del problema. La profesora les ha mostrado un poco la limitación de la manera en la que lo han hecho. Ella pone un poco el objetivo que ellos tienen al final que conseguir, tienen que conseguir esa ordenación, esa manera buena que luego sea útil para representar el número, y después que puedan explicarlo, que su respuesta final sea a través de un argumento matemático.

- A: Ah, pues habría que... ¿Y no podemos quitar las gomas y reorganizarlo?
- F: Sí, sí, sí, yo no dije que no pudierais quitar las gomas.
- A: Aaaaah.
- F: ¿Alguien dijo que no se podían quitar?
- A: Y nosotros diciendo que no se podían quitar las gomas...
- F: Y una duda más. Alguno de vosotros..., por separado, ¿no?, cuando lo teníais..., habéis escrito la cantidad que teníais, ¿no? Eh, 109 teníais uno...
- A: 104 y 85.
- F: Por ejemplo, el 85 se escribe con un 8 y un 5. Ese 8 y ese 5, ¿estaban representados de alguna forma en...?
- A: No.

Comentario 5: Los alumnos se han enfocado a lo mejor en una estrategia, en resolver la pregunta de contarlos y agruparlos... Ella está de nuevo guiando un poco para lo que es el final de la actividad, para el objetivo que dijo al principio, que es la representación del número, y entonces les está guiando, les está diciendo que no solo tienen que ordenar o hacer los hatillos de una manera correcta, sino que tienen que relacionarlo con la escritura, con cómo realmente escribimos el 85; está guiándolos para que el número de hatillos represente exactamente la posición... Está haciéndoles ver el objetivo y que conecten las dos cosas y sigan hacia el objetivo de la actividad.

- F: No, vale. Y vosotros, la misma pregunta con lo vuestro.
- A: No.
- F: No había un patrón en cómo lo habíais representado, vale, ok.

A: ¿Pero quieres que busquemos?

F: Quiero que reflexionéis sobre eso, pero ahora lo vamos a poner en común, ¿vale?

A: Vale.

Comentario 6: Lo deja abierto... Solo les hace la pregunta... De hecho un alumno se queda parado un poco y le pregunta: «pero tenemos que hacer eso, ¿no?». O sea, que ese punto de la reflexión, que era el segundo punto de la actividad... No es que diga: «lo tenéis que hacer», sino que lo deja abierto para que ellos reflexionen y vuelvan otra vez a reflexionar sobre el ejercicio. Bueno, el trabajo yo creo que tienen que continuarlo.

F: ¿Ha sido operativo el que ellos hayan hecho 15, 10, 5... y vosotras tuvieras 20...?
¿Eso ha ayudado a la hora de ponerlo en común?

Comentario 7: Vuelve otra vez a la estrategia que han utilizado para resolver el problema. Les hace reflexionar sobre si, en relación con ese problema final, esa manera ha sido útil. A través de preguntas, los guía y les hace pensar para llegar a la solución.

A: No, porque ahora hay que hacerlo otra vez.

F: Ahora hay que volverlo a hacer...

Fragmento 3

[F = Formadora del vídeo]. [A = Alumnos].

F: Me tenéis que decir cuántos palillos había en cada grupo inicialmente, antes de juntaros dos grupos, ¿vale? Entonces, por ejemplo, vosotros.

A: 87.

F: 87 [lo escribe en la pizarra]. Estamos de acuerdo, yo utilizo la escritura estándar que vosotros habéis visto en primaria, secundaria, bachillerato y al llegar aquí, ¿vale? Escritura estándar de nuestro sistema de numeración en nuestro contexto. Ese grupo, 87. ¿Cómo habíais hecho los grupos?

A: Pues hemos hecho, eh..., tres grupos de 20.

F: Tres grupos de 20, ¿cómo lo puedo poner? [Escribe un 3 en la pizarra].

A: Eh..., tres rosas.

A: 3×20 .

F: ¿Tres rosas?

A: Sí.

A: No.

F: Si pongo tres rosas... ¿Todo el mundo que ha utilizado gomitas rosas ha atado 20?

A: No.

Comentario 1: Aquí está hablando de la representación del número. A través de uno de los resultados de un grupo, está poniendo en común alguna de las estrategias que han realizado. Entonces, está viendo cómo la manera de agrupar, de hacer los grupos, se va a relacionar con los números, ¿no? Entonces, a través de un ejemplo, está explicando cómo van a representar, la representación decimal posicional de los números.

F: ¿Otras personas que han atado 20 han usado otro color?

A: Sí.

F: Uf, el color no me vale. ¿Cómo lo pongo?

A: 20×3 .

A: 3×20 .

F: 3 grupos de 20, ¿no? 3×20 . [Escribe 3×20]. Y luego...

A: Pon en el 3 «color rosa» o algo así. Entre paréntesis.

- F: Vale, vale. [Pinta una raya rosa sobre el 20]. Y luego... Esto son 60.
- A: 9×3 .
- F: Y luego 9 grupos de 3, ¿no? [Escribe + 9]. ¿O 3 grupos de 9? [Borra el 9].
- A: 3×9 .
- F: 3 grupos de 9 y el 9 lo habéis puesto de otro color, ¿vale? [Escribe 3×9].
- A: Sí.
- F: ¿Alguien más ha utilizado grupos de 20?
- A: Nosotros.
- F: Varios. ¿Alguien más ha utilizado grupos de 9? [Destaca con la voz el número 9].
- A: Nosotras.
- F: Vosotras, vale, y vosotras también, vale. Siguiendo equipo, vosotras.
- A: Nosotras, 90.
- F: En total, 90. [Escribe 90 en la pizarra].
- A: 4 de 20 y 1 de 10.
- F: [Escribe $4 \times 20 + 1 \times 10$].

Comentario 2: Está representando los grupos que han hecho, distintas formas de representar los números que han alcanzado. Es contenido que supongo que habrán trabajado antes. Está plasmando la representación que han tenido dos grupos; no sé si es lo que ellos tenían en mente o está afianzando una manera de expresar lo que habían alcanzado y poner en común lo que han hecho. Está describiendo qué agrupaciones ha hecho cada grupo para alcanzar esos números.

Vale, o sea que de momento han utilizado grupos de 20, grupos de 10, grupos de 9, ¿vale?



En esta escritura [señala lo que ha escrito en la pizarra] yo veo 3 grupos de 20, 3 grupos de 9, pero aquí [señala el 87] no veo un 3 y un 3. Yo aquí veo 4 grupos de 20, 1 grupo de 10, pero aquí [señala el 90] no veo 4, 1. Con lo cual, parece que tampoco habíais encontrado vosotros un patrón entre cómo escribo la cantidad total con símbolos numéricos y visualmente qué veo en los palillos, ¿vale?

Comentario 3: Está mirando la conexión, cuál es nuestra manera de expresar en base 10, en grupos de 10... Está haciendo ver que las estrategias que han hecho los alumnos para llegar al 87 y al 90..., pues están agrupando, pero en otro sistema. Entonces, en este momento, ellos ya van a ver claramente que la agrupación de 20, aunque han llegado al 87, no es como nosotros estamos escribiendo el número, qué representa el 8 y el 7.

De momento, la transcripción de lo que veo en los palillos simbólico-numéricamente la tengo aquí a la derecha [señala el $3 \times 20 + 3 \times 9$ y el $4 \times 20 + 1 \times 10$], pero no veo ninguna relación con esto [señala el 87 y el 90]. Yo aquí estoy haciendo trampa porque estoy metiendo operaciones, nosotros ahora no estamos con las operaciones, estamos solo con el número, con la escritura del número, eso es lo que estamos trabajando, ¿no? Pero para ayudar a ver esa conexión de los palillos hacia lo simbólico-numérico, pongo, escribo eso de transición para ir copiando lo que me decís, ¿no?, porque tardo más, tardo más en dibujar los palillos, las gomitas rosas, no sé qué, podría sacar la foto de la cámara y ponerlo rápido, ¿no?, pero..., bueno, lo escribo, lo transcribo así.

Comentario 4: Ahí ha hecho una explicación de la conexión, que es un poco lo que está trabajando en la actividad; explica las matemáticas que hay detrás.

Ahora, otro grupo. Vosotros dos ya estáis, que luego, luego... Ah, venga, ya que estamos aquí [dibuja una llave a la derecha de lo que ya ha escrito en la pizarra]. ¿A qué consenso... habéis llegado...?

A: Pues 7 grupos de 20...

F: Muy bien, 7 grupos de 20 [señala el 3 y el 4]. Han visto rápido y han dicho: «bien, los dos hemos agrupado, sin habernos copiado, en grupos de 20, con lo cual automáticamente tenemos 7 grupos de 20» [escribe 7×20].

A: Luego, ellos los 27 de 3×9 ...

F: Sí.

A: ... los han dividido en 2 de 10 para que se junten con los nuestros de 10.

F: ¿Y por qué no habéis hecho vosotros...

Comentario 5: Aquí es la otra parte. Al tener dividido en grupos, cada uno de distintos números, después tienen que sumarlo, entonces ahí verían que han agrupado distinto y que han tenido un problema a la hora de sumarlo. Entonces, está comparando los dos y está viendo qué estrategias han utilizado para hacerlo. Ahí han visto que han desagrupado los números, unos tenían grupos de 9 y, otros, de 10, entonces el de 9 lo han reordenado para hacerlo de 10. Entonces, ella está diciendo: «¿por qué no lo habíais hecho de primeras?»; va intentando llegar al número 10, ¿vale?, sería la estrategia que está sugiriendo. Está haciendo ver que la estrategia no ha sido óptima.

separar este de 10 [señala el 10 de 1×10] en 1 de 9 y 1 de 1?

A: Porque se quedaría 1 solo y luego...

F: Bueno, pobrecillo, ¿no? No pasa nada.

A: Y porque es más fácil sumar de 10 en 10 que de 9 en 9.

A: Para ponerle la goma a 1...

F: Para ponerle la goma a 1... Bueno... Eso... Puede ser una justificación, pero tampoco muy potente... Me gusta más lo que ha dicho ella, o ella...

Comentario 6: Ahí es una puesta en común. Ella ha preguntado: «bueno, ¿por qué no habéis hecho..., qué problemas encontráis en esta estrategia?». Una alumna ha dicho: «es que es más sencillo si todo está en 10». Entonces, ahí ha reforzado un poco esa manera de

hacerlo. Está bien, por un lado van a ver que están agrupando distinto, pero que hay una manera de agruparlo que va a ser... Ha reforzado a la alumna que ha dado con esa estrategia. Y dice que no hay problema cuando están sueltos [los palillos]...

A: Que es más fácil sumar de 10 en 10 que de 9 en 9.

F: ¿Por qué será más fácil sumar de 10 en 10 que de 9 en 9 para nosotros? [Hablan varios alumnos a la vez]. ¿Por qué es más fácil sumar para nosotros de 10 en 10 y no de 9 en 9?

Comentario 7: Esa pregunta es bastante clave. Tal y como está hecho el sistema decimal, es un poco la clave; y es por eso la posición de los números, cómo sumamos... Ha parado, lo ha vuelto a repetir..., o sea, realmente los está guiando hacia el sistema decimal, a los grupos de 10.

[Hablan varios alumnos a la vez]. Porque tenemos 10 dedos, por ejemplo, ¿no? Porque estamos más acostumbrados a 10, 20, 30, 40... [mueve las manos con los dedos estirados], ¿no?, como que nuestro sistema de numeración parece que...

A: Porque en verdad solo sumas de 1 en 1 y luego le pones un 0, entonces...

F: Solo sumas de 1 en 1, elabora eso. Estamos en clase de matemáticas, ¿qué es 1, 1...?

A: Pues por ejemplo, si tienes 30, pues 1 más 1 más 1, 3, como es 10, pues le pones el 0 y ya tienes los 30.

F: ¿3 qué?

A: 3 grupos de 10.

F: 3 grupos de 10, muy bien. 3 grupos de 10, vale.

Comentario 8: Aquí, con el diálogo intenta que expliquen siempre todo lo que... Cuando hace alguna pregunta y algún alumno contesta, tiene que explicar el porqué, ¿no?, eso es muy importante. Pregunta el porqué, tratando de llegar a la idea con el grupo y las aportaciones de los alumnos.

[Vuelve a la pizarra a terminar lo que empezó a escribir].

A: 3 de 20, 3 de 10 y 1 de 7.

F: [Escribe, después de 7×20 , 3×10]. 3 de 10, llegasteis a romper estos [señala 3×9] en 2 de 10 más 7 sueltos, ¿no? [escribe $2 \times 10 + 7$ encima de 3×9]. Y entonces estos dos [señala 2×10] con este [señala 1×10] 3 y 7 palillos ahí sueltos [escribe,

después de $7 \times 20 + 3 \times 10, 7 \times 1$], ¿vale? Ahora, la cantidad total, ¿cuánto es? [señala el 87 y el 90].

A: 177.

F: 1, 7, 7 [escribe 177 a la izquierda del 87 y del 90]. ¿Hay aquí 1, 7, 7 por algún lado? [señala el 7 de 7×20 , al 3 de 3×10 y al 7 de 7×1]. Este [señala el 7 de 7×1] parece que hay aquí, ¿no? Pero lo otro... no me cuadra mucho todavía... Vale, otros dos grupos.

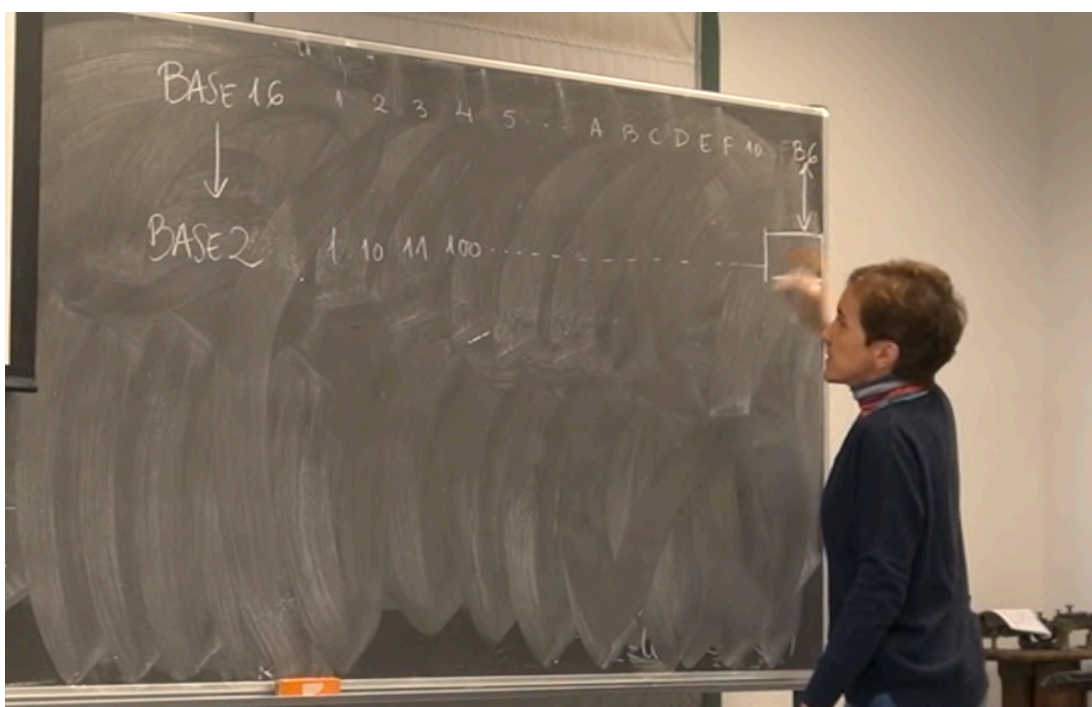
Comentario 9: Ahí es donde ha visto la conexión con la..., el sumar, ¿no?, el sumar los dos números... Quiere ver que al final el número que aparece pues también es el... Y es el objetivo, ¿no?, que vean que esos números que aparecen en la descomposición son los de la escritura. Ahí les deja continuar con el problema.



TRANSCRIPCIÓN DEL VÍDEO 2

[F = Formadora del vídeo]. [A = Alumnos].

F: Como me piden pasar de base 16 a base 2 directamente [escribe en la pizarra], pues Martín dice: «yo escribo aquí la secuencia 1, 2, 3, 4, 5..., A, B, C, D [dice 10, 11, 12, 13, señalando A, B, C, D], 14, 15 [escribiendo E, F], uno, cero [10]..., así hasta el B6», ¿vale? Y luego aquí en paralelo, voy uno [1], uno, cero [10], uno, uno [11], uno, cero, cero [100]..., hasta que pille aquí el que sea y ya está.



No he pasado por base 10, que es lo que me dice Nuria. Con lo cual, superado.

Comentario 1: Está explicando un problema, pasar de base 16 a base 2. Parece una estrategia de alguien, alguno de los alumnos ha dicho que podemos colocar los números, hay que llegar al B6, y ver con una correspondencia uno a uno cuál sería. Es una estrategia que ha propuesto, se podría hacer, pero a lo mejor no es la más directa. Bueno, ha establecido el problema matemático y una posible resolución.

¿Pero qué pasó?

A: Que es muy largo.

F: Que es muy largo. Y que hasta en su casa, teniendo semanas, ha dicho: «paso». Tenías tiempo suficiente, porque había tiempo suficiente en dos semanas a hacerlo, pero... es largo y además un coñazo, con lo cual ha dicho: «paso».

Comentario 2: Yo creo que les enfrenta a los alumnos... Quiere resolver un problema y, bueno, es una manera de hacerlo a partir de lo que conocen de cómo son los números en base 16 y en base 2, sería una manera de hacerlo, pero es muy larga, muy tediosa. Entonces, la idea es pensar cuál sería una estrategia que nos ahorre todo esto, ¿no? Es algo que lanza para la reflexión, ¿no?

Con la idea Nuria ya se hace una idea de que lo he pensado, es un procedimiento válido, pero no ha sido eficaz, ¿vale?, entonces nosotros tenemos que seguir pensando porque tendremos que buscar alguna estrategia que sea eficaz. [Da la palabra a una alumna].

A: ¿Se podría hacer la división?

F: ¿Qué división?

A: La de B6 entre 2. Es que no sé cómo plantearlo.

F: Ella dice: «oye, mira Nuria,

Comentario 3: Se lanza la pregunta de cómo se podría resolver, un alumno propone una estrategia y el profesor va a elaborar un poco esa estrategia para ver si funcionará o no. Entonces, va a representar en la pizarra, va a continuar un poco con el argumento del alumno, con las ideas que van surgiendo, guiando. El objetivo también es que se vean los distintos acercamientos que puede haber para resolver, qué puede aportar uno, otro..., y al final llegar entre todos a la solución. Es importante conocer las distintas estrategias para resolver un problema y decidir cuál puede ser óptima en cada caso.

cuando tú pasas de base 10 a base 2 haces grupos de 2 y divides de 2 en 2; pues ahora lo mismo, si estoy en B6 a base 2, divide entre 2». Pero aquí estoy escribiendo en base 16... [En la pizarra ha escrito B6 entre 2, con la caja]. Podríamos intentar hacerlo, pero... ¿sabemos hacerlo... o cómo va esto?

Comentario 4: Es la estrategia propuesta por la alumna. Entonces, yo creo que eso hace que los demás alumnos piensen en esa estrategia. Y ella está desarrollando un poco cuál sería..., bueno, va a hacerlo, pero se encuentra con otro problema que hay que resolver para seguir esa... Entonces, bueno, les vuelve a plantear si es factible o no, cómo podemos hacer esto cuando los números no están en la misma base, ¿no? Está viendo cómo sería la estrategia propuesta por la alumna y los problemas que se encuentra con esa idea.

¿O mentalmente para hacerlo me vais a pasar a base 10, y hacéis la división en base 10 —que es lo que sabéis hacer—, y luego otra vez volvemos y entonces hacemos trampa porque pasamos por base 10?

Comentario 5: Esta es otra estrategia, otra manera de hacerlo que todos los alumnos sabrían hacer o que posiblemente usarían, que es pasarlo todo a base 10 y luego ir a la base que buscan, o sea, pasar por la base 10. Pero el objetivo del ejercicio es hacerlo sin pasar por la base 10. El objetivo que está teniendo es ver cómo pueden hacerlo sin pasar por base 10.

Si sabéis dividir un número en base 16 entre 2, si sabéis hacer esta división en base 16 —yo lo tendría que pensar, ¿eh?, así a capón no lo sé hacer, pero si lo pienso... —, si sabéis hacer eso, valdría.

Comentario 6: En principio la estrategia es adecuada y dice que se puede hacer, y que, si lo hacen así, el resultado saldría. Pero claro, en principio no sabrían cómo hacerlo.



Pero esto lo vamos a ver en el dossier 3, ¿eh?, multiplicación y división. Nosotros tenemos herramientas para dividir en base 10 y sabemos cómo hacer restas sucesivas y el algoritmo tradicional de la cajita que habéis ido haciendo... Podríamos abordarlo, por eso abordamos los problemas de..., el anterior, ¿no?, de pasar de base 10 a base 2. Pero el de base 16 a base 2 hay que dividir en base 16. Sumar en base 16 lo sé hacer, restar en base 16 me cuesta un poco pero lo

sé hacer, multiplicar en base 16 también podría hacerlo, con lo cual dividir podría hacerlo, pero... no me atrevo a hacerlo sin manos, hoy.

Comentario 7: Ahí está explicando cuál es el problema, ¿no?, porque el algoritmo tradicional está en la misma base, lo está comparando con lo que ellos saben, con lo usual, que es la división en base 10 con la cajita. Intenta que vean qué sería una división con distintas bases; que vean que no es un problema que ahora mismo puedan intentar hacer. Está buscando que, con las herramientas que tienen, vean cómo lo resolverían.

Otra forma.

A: Fijándote en que 16 es 2^4 .

F: Fijándome en que 16 es 2^4 . Me lo voy a apuntar aquí [borra la pizarra y lo escribe].

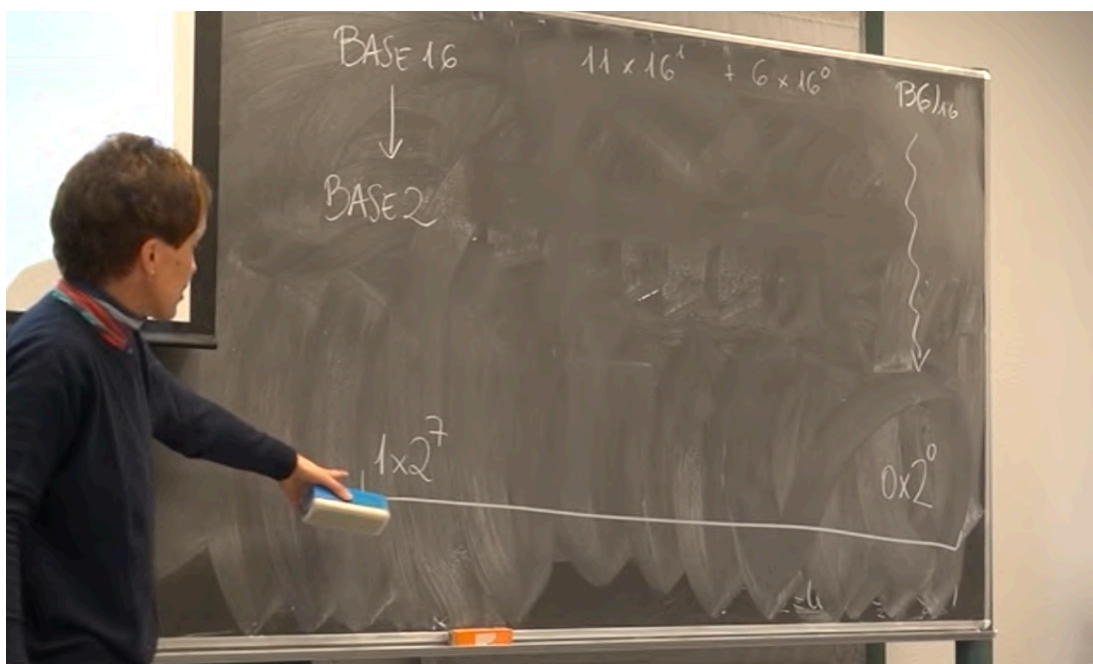
Comentario 8: Vale, ha habido otra idea de otro alumno y está borrando la pizarra. Va a elaborar a partir de esa idea. De nuevo, es un poco ir desarrollando las ideas de los alumnos y poco a poco ir creando esa estrategia... Ir conociendo más sobre el problema, ¿no? Yo creo que las aportaciones de los alumnos y las distintas maneras de abordarlo es bastante enriquecedor a la hora de aprender a resolver problemas de distintas formas y ver cuáles van a funcionar, cuáles se pueden generalizar y cuáles no.

A: Yo lo hice así, pero luego algo no me cuadraba.

F: Muy bien, vale.

A: Luego hice, 11...

F: Venga, vamos a poner el punto de partida, ¿no? El punto de partida es que tenemos 11×16^1 , ¿no?, más 6×16^0 . Este es mi B6 en base 16. Y yo quiero llegar aquí a... Me acuerdo de que empezaba en 1×2^7 y acababa en 0×2^0 , ¿vale?



Entonces yo quiero pasar de ahí [señala la parte superior de la pizarra] a aquí [señala la parte inferior]. Si lo consigo, ya lo tengo en base 2, ¿no? Ya solo cojo los coeficientes de las potencias de 2 y ya lo tengo. Entonces, Pablo dice: «cambia este 16», ¿no, Pablo?

A: Sí.

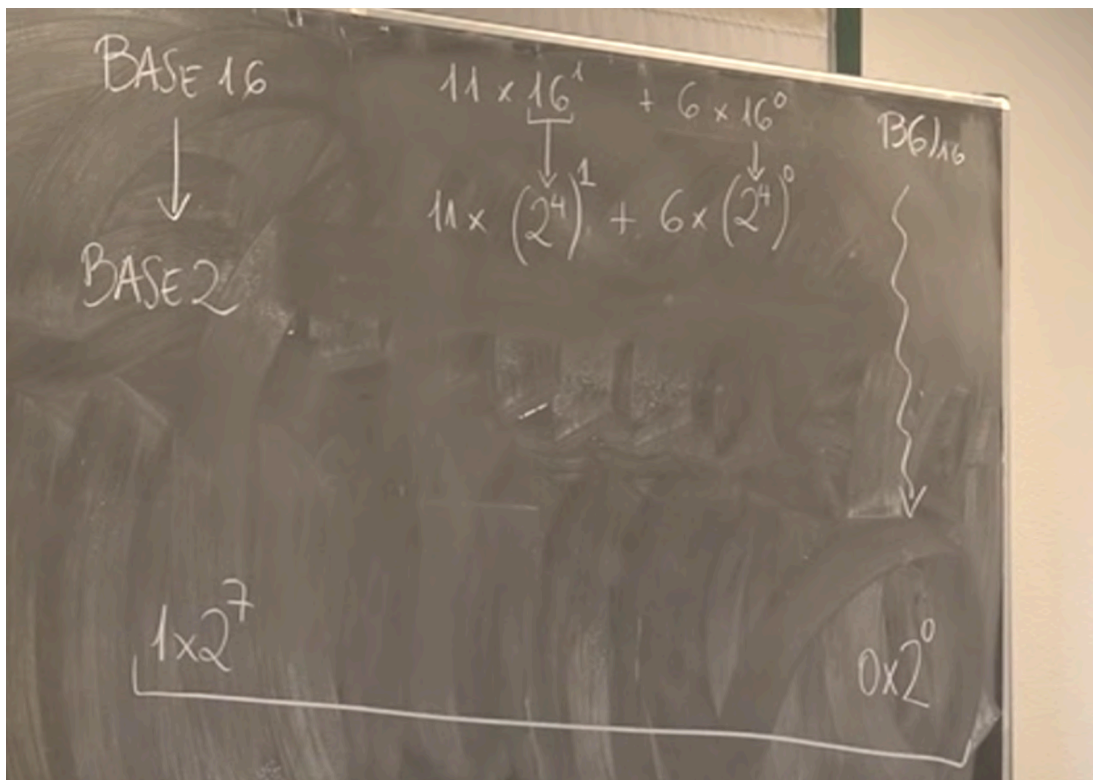
F: Este 16 ponlo como $(2^4)^1$ y este 16 ponlo como $(2^4)^0$.

Comentario 9: Está elaborando el... Ha vuelto a escribir el problema... Ha explicado un poco todo el objetivo del problema, ¿no?, que es pasar ese número... Ya ha explicado la descomposición del número, cuál es la forma del número que quieren encontrar, ¿no? Entonces, va a desarrollar a partir de esta descomposición cómo va a ir apareciendo... Yo creo que era el objetivo que ella quería ver, el 2^4 , pasar a grupos de 2. Entonces va a resolverlo.

¿Vale? Yo tengo una expresión polinomial en base 16, quiero llegar a una expresión polinomial en base 2, y él me dice: «yo veo claro el cambio, 16 es 2^4 , cada vez que veas un 16 ponlo como 2^4 ». Vale, y entonces resulta que aquí tengo 11 grupos de esto y aquí tengo 6 de estos. ¿El 11 y el 6... los puedo dejar?

Comentario 10: Aquí de nuevo la idea parece... Les ha expuesto como el objetivo, una manera de resolverlo, es decir, si yo tengo..., en base 16, con potencias de 16, hago otro con potencias de 2 y con esta idea transforma a grupos de 2. Entonces, esto plantea un nuevo problema, que es qué hacemos con el 11 y el 6. Entonces les vuelve a preguntar,

para no resolverlo ella, «qué hacemos con el 11 y con el 6». Yo creo que esa idea ya la tendrán, ya han visto el cambio a expresar todo en potencias de 2, así que ahora ya yo creo que les será más sencillo encontrar la manera de... O por lo menos un alumno lo ha hecho, yo creo que lo estaba explicando, ¿no?



- A: No, los pasas a base 2.
- F: Los paso a base 2. ¿Sé pasar 11 a base 2?
- A: Sí.
- F: Vale, vamos a escribir 11 en base 2.
- A: 1, 0, 1, 1.
- F: 1×2^3 , ¿no?
- A: Sí.
- F: Más...
- A: Cero.
- F: 0×2^2 . De momento llevo ocho. Más...
- A: Uno.
- F: 1×2^1 . Ya llevo 10...
- A: Más uno.

- F: Más 1×2^0 . Ahí ya tengo 11, ¿vale? Esta es una manera de escribir 11. ¿Cómo? Como potencias de 2. Expresión polinomial del 11 en base 2, como potencias de 2, ¿vale? Y esto va multiplicado... 2 elevado a la 4 y luego lo elevo a la 1, ¿cuánto me queda...?

Comentario 11: Los contenidos matemáticos del problema sí que están apareciendo. Continúa un poco la idea, ¿no?, está reforzando un poco las partes claves de... Bueno, la expresión en base 2 es una expresión polinomial en potencias de 2, ¿no? Les repite un poco los conceptos clave de la expresión de cada número en cada base. Entonces, utilizando esa idea, al final se llega al objetivo. También vuelve a preguntar, vuelve a reforzarlo, vuelve a decir: «el 11 se escribe así, es el mismo número, pero reescrito con otras potencias», ¿no?

2^4 es $2 \times 2 \times 2 \times 2$ y luego eso lo elevo a la 1, es decir, que lo copio una vez, o sea que me queda...

- A: 2^4 .
 F: 2^4 . Más... El 6, ¿lo dejo?
 A: No.
 F: No. ¿Cómo escribo 6 en base 2?
 A: 1×2^2 .
 F: 1×2^2 , que son 4.
 A: 1×2^1 .
 F: 1×2^1 ... Y 0×2^0 [lo va escribiendo todo en la pizarra].

Comentario 12: Ahí tampoco lo resuelve ella, ¿no? Lo está resolviendo un alumno. Entonces ella se para, es un poco la estrategia que seguiría a la hora de resolverlo en papel, habría que pararse cuando llegas al 6, y dice: «¿qué hago con el 6?». Entonces, ella para... En el fondo, bueno, aunque lo va escribiendo, va formalizando lo que dice un alumno, pero va parando según el proceso que seguiría a lo mejor alguna persona para resolverlo. Y va ordenando, va haciendo de manera grande y clara en la pizarra la resolución.

Ahí pone 6, una manera más chula, ¿no?, de poner 6 como potencias de 2, ¿no?, como un polinomio con potencias de 2. Vale, y luego estaba por... Y ahora tengo $(2^4)^0$. ¿Eso qué es?

- A: Uno.
 F: Uno. ¿Y si lo quiero poner como potencias de 2?

A: 2^0 .

F: 2^0 , muy bien. 2^0 [lo escribe en la pizarra]. Mira qué contenta estoy, porque $2^0 \times 2^0$ es 2^0 y el coeficiente es 0, que es este. Y $2^4 \times 2^3$ es 2^7 y el coeficiente es 1, que es este. Pues como que ya casi lo tengo, ¿no?

Comentario 13: Ahí va conectando un poco adónde quiere llegar en el problema, con lo que ellos saben de que empezaba por 1 y acababa en 0, que es algo que buscaban. Entonces, ver cómo en la mitad del proceso va funcionando, ¿no?, y el objetivo se va cumpliendo, voy haciéndolo bien, tiene todo el sentido, ¿no? Es decir, probar en cada paso que tiene sentido el argumento. Entonces, va comprobando que va bien y ya solamente tiene que hacer al final las operaciones para llegar a la solución.

¿Sí o no?

A: Sí...

BASE 16

$$11 \times 16^1 + 6 \times 16^0$$

BASE 2

$$11 \times (2^4)^1 + 6 \times (2^4)^0$$

$$[1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0] \times 2^4 + [1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0] \times 2^0$$

$$1 \times 2^7 + 0 \times 2^6 + 1 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0$$

F: Vale, y ahora... Venga, ¿cuál será el coeficiente...? Venga, vamos a poner aquí 2^6 , paso a la siguiente varilla del ábaco, ¿eh? ¿Cuál será el coeficiente de 2^6 ?

A: Cero.

F: Cero, porque ¿cómo consigo yo 2^6 ? $2^4 \times 2^2$, ¿no? 2^4 es $2 \times 2 \times 2 \times 2$, 2^2 es 2×2 , ya tengo ahí los seis doses, ¿vale?, que está aquí, y el coeficiente cero. ¿Por aquí puedo llegar a 2^6 ?

A: No.

F: No, pues ala. 0×2^6 .

Comentario 14: Ahí está recordando cómo multiplicar potencias. Está mirando cómo ir construyendo al final cada uno de los términos, el 2^6 , 2^5 , 2^4 ..., y de paso recuerda un poco las operaciones que hay. Entonces, primero ha preguntado cuál sería el coeficiente, le han dicho cuál es directamente; a lo mejor los alumnos lo han visto, pero ella ha hecho el cálculo y lo ha desarrollado un poco.

Genial, porque era lo que me había salido antes. Ahora, más... Siguiendo varilla del ábaco, 2^5 .

Comentario 15: Está relacionándolo con el ábaco, o sea, que a lo mejor han trabajado con un ábaco. Entonces, con un material manipulativo está viendo esa relación con lo que les ha salido, por eso yo creo que sabían lo de los números. O sea, que ha habido un trabajo anterior manipulativo y ahora están viendo el desarrollo algebraico, con las operaciones.

¿Dónde consigo yo 2^5 ? Aquí [señala el corchete de la derecha] como mucho llego a 2^2 , me olvido de esto. $2^4 \times 2^1$ [señalando el corchete de la izquierda] es 2^5 , ¿no?

A: Sí.

F: Vale, ¿y qué coeficiente lleva?

A: 1.

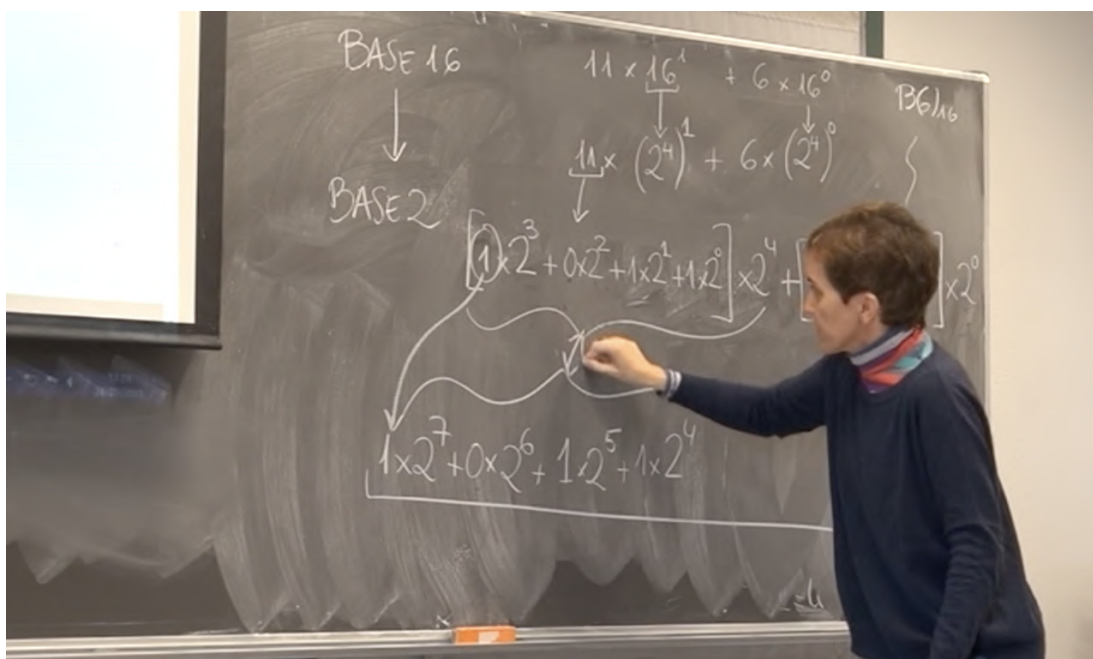
F: 1. ¿Y era el qué tenía que llevar?

A: Sí.

F: Sí, vamos bien. Y ahora, 2^4 , ¿cómo consigo 2^4 ?

A: Con 2^0 ...

F: $2^4 \times 2^0$, ¿no? Tengo aquí cuatro copias del 2 y aquí ninguna, pues tengo cuatro copias del 2 multiplicándose por sí mismo, y el coeficiente 1. 1×2^4 [lo escribe en la pizarra]. Oye, mira, todo esto se ha convertido en esto. Lo veis, ¿no?



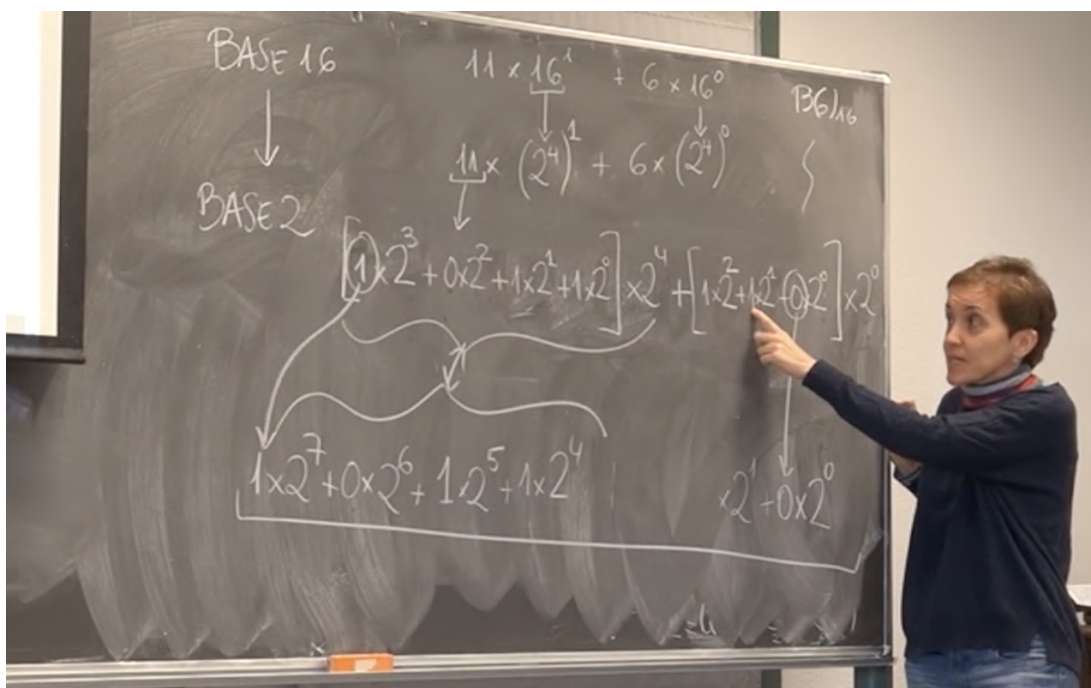
¿Qué es lo que he hecho? Propiedad distributiva. Voy multiplicando el 2^4 por cada uno de los sumandos, ¿vale?

Comentario 16: Bueno, son pasos de operaciones aritméticas que recuerdan. Ahí ha visto una equivalencia, que vean un poco el desarrollo en la pizarra. También recuerda la propiedad que hace que eso se pueda hacer, cómo los dos números son el mismo, cómo pasa de uno a otro de manera sencilla, quitándole gravedad [se ríe].

Muy bien. Y ahora, tiro por aquí, voy desde aquí [señala el 2^0 de la parte inferior derecha de la pizarra]. 2^0 , muy bien. Siguiendo varilla del ábaco, 2^1 . ¿Qué coeficiente tiene 2^1 ?

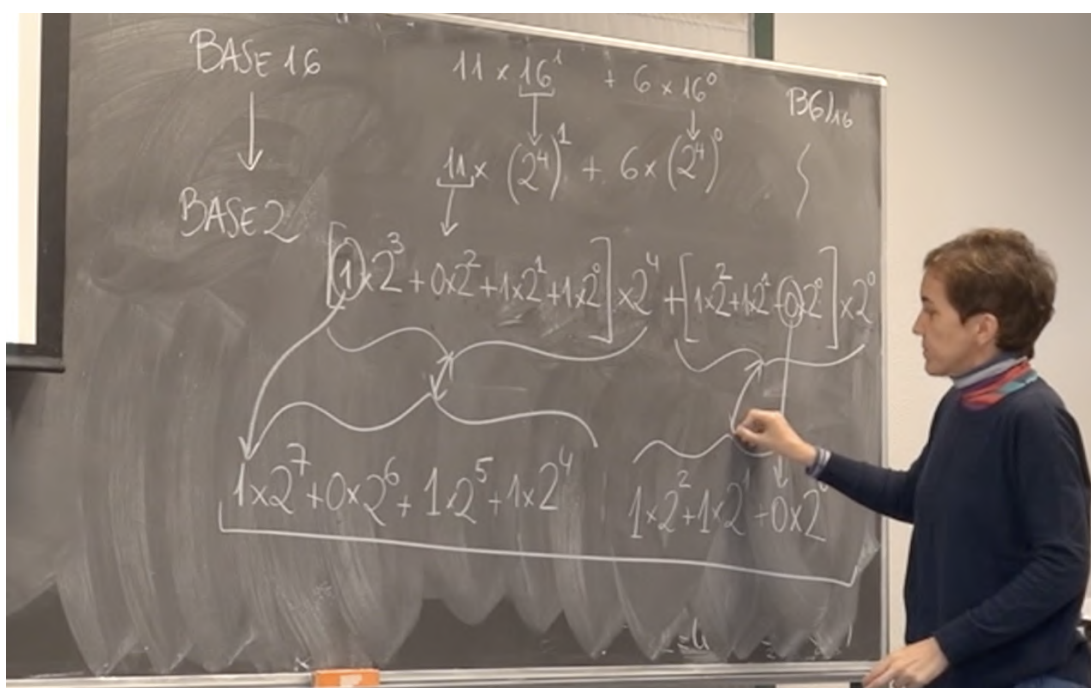
A: 1.

F: 1, que está aquí [lo señala], ¿vale?



Porque sería $2^1 \times 2^0$, que es 2^1 , y lleva un 1 delante, un 1 [lo escribe abajo]. Voy bien. Y ahora, $2^0 \times 2^2$, 2^2 [lo escribe abajo], va con un 1 [lo escribe abajo]. O sea que esto que tengo aquí se convierte en esto que tengo aquí.

Comentario 17: También está haciendo hincapié en el coeficiente, que es al final el importante, ¿no? En cada paso va explicando siempre el coeficiente, quién va con él, la manera de entender cómo expresar al final el número final.

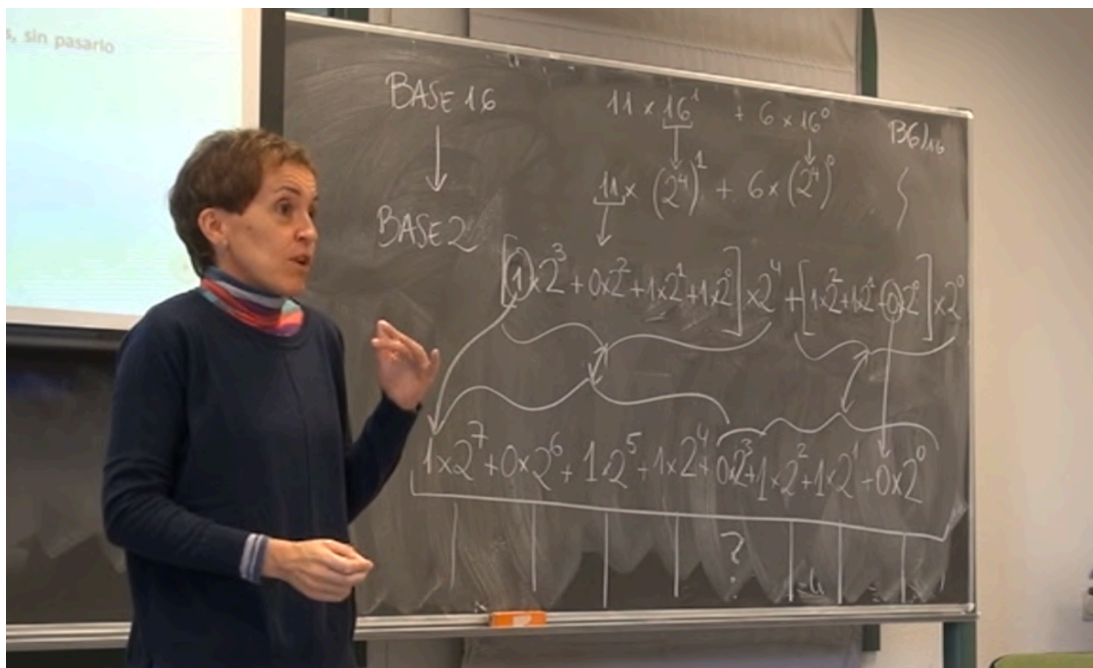


Y ahora, Pablo, ¿qué te pasó?

- A: Que como... Que claro, los iba a juntar, pero dije: «me falta el 2^3 ».
- F: Me falta el 2^3 . Pablo dice: «varilla del ábaco del $2^7, 2^6, 2^5, 2^4$, ¡uy!, $2^2, 2^1, 2^0$ ». «¡Uy!», dice Pablo [y dibuja una interrogación en la posición del 2^3].
- A: Pues si no hay, un cero.
- F: Pues se pone el 0, ya está.

Comentario 18: Ahí se puede llegar al error de no incluir uno de los dígitos, que sería el 0, ¿no? Para entender ese 0, lo está relacionando con el ábaco; el ábaco tenía las varillas, entonces cada una representaba esa posición. Entonces, ¿qué hacemos al no haber ese 2^3 ? Ese punto es importante para que vean que tienen que escribir un 0 en el número. Entonces, ahí ha parado. Creo que un alumno no contó con él; entonces, ha aprovechado para ver qué pongo aquí, «si no tengo uno, entonces es 0», ¿no? La manera de que ellos lo entiendan ha sido llevarlo a las varillas, al material manipulativo; o también, de manera algebraica, ver que ese coeficiente es 0, ¿no? Está conectando los dos para que se entienda bien.

Lo pongo aquí: «+ 0×2^3 », y esto lo englobo aquí.



¿Qué es lo que pasa? Que escribo el 6 de una forma muy especial. Yo escribo el 6..., acordaos que esto era mi 6 [señala $1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0$], ¿eh?, esto era el 6, que es este 6 [señala el de un nivel anterior, más arriba en la pizarra], ¿vale? Yo he escrito el 6 como $1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0$, pero también puedo escribir el 6... $0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0$. No es lo estándar, porque como los ceros ahí no

aportan mucho, pues no es lo estándar, pero si no me quiero olvidar de una de las varillas y no quiero tener un problema, como tenía Pablo, pues yo añado ahí para escribir el 6 de otra forma, ¿vale? Entonces, moraleja que cuentan los *youtubers*, por ejemplo David Calle, dice: «vamos a pasar de base 16 a base 2, ¿qué se hace chavales? Mirad, ¿veis este 11 que está aquí? [señala el de arriba de la pizarra], pues escribís este 11 en base 2: 1, 0, 1, 1 [señala los coeficientes de la expresión polinómica de la parte inferior de la pizarra]; ¿veis este 6 que está aquí? [señala el de arriba de la pizarra], pues lo escribís en base 2, pero cuidadín chavales, que hay que poner cuatro, ¿por qué?, porque 16 es 2^4 ». Y entonces dice: «vamos a escribir 6 en base 2 con cuatro: 0, 1, 1, 0». Y dice: «y ahora lo juntáis, fin». A mí no me vale

Comentario 19: Ha recapitulado un poco cómo lo han hecho; la idea de que cualquier número lo puede escribir..., pues por ejemplo de esa manera que ha hecho ahí. Y un poco viendo la relación con las varillas..., pues cómo hacerlo. Y luego ha mencionado... un vídeo, que sería a lo mejor una receta de cómo hacer ese..., el algoritmo que a lo mejor al final se puede aprender, ¿no?, que sería coger el número 11, pasarlo a base 2, te da 4 dígitos, como es 2^4 lo pones..., etcétera. Entonces, bueno, no sé si va a decir que no le vale porque..., bueno, ellos han visto el porqué de ese algoritmo y por qué hay que colocarlo cuatro más allá y demás, lo que están aprendiendo es por qué funciona, ahora mismo ya saben por qué funciona ese algoritmo.

porque yo no soy David Calle, yo no estoy de *youtuber*, *influencer*, *superfamosa* ayudando a los chavales a aprobar exámenes, que es un trabajo muy digno y que está bien, y además el tío es un *crack*, muy suelto, lo hace muy bien; yo estoy formando maestros, entonces tenéis que entender cómo hemos pasado de aquí [señala la parte superior de la pizarra] a aquí [señala la parte inferior de la pizarra] a través de esto [señala la parte media de la pizarra]. Entonces, la pregunta es: ¿se puede pasar de base 16 a base 2 sin pasar por base 10? Sí. Lo acabamos de hacer, ¿no? Es que me miráis con una cara... ¿Y por qué se puede?

Comentario 20: Sigue un poco con lo que estaba comentando, y también coincido en que es lo que tienen que aprender los maestros, el porqué. Y un poco por qué aparecía en eso, ¿no?, en la forma de reescribir justo el paso ese, haciendo eso y haciendo operaciones se alcanza, ¿no? Esa idea les va a servir para generalizarla y para saber por qué funciona, y

no solo para pasar a base 2, sino a cualquier otra base. Entonces, eso tiene más valor para un futuro maestro y es de hecho lo que necesita saber, más que aplicar una receta.

¿Qué pasa si yo esto [el ejercicio] os lo doy en base 15 y, en vez de en base 16, todo el problema es en base 15?

A: Que sería $2^4 + 2^0$.

F: ¿ $2^4 + 2^0$ es 15?

A: O sea, no..., perdón. $2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0$.

F: Vale, y entonces tendría que ir haciendo todas las distributivas, todo el follón, ahí. ¿Y David Calle me podría dar el algoritmo...? Escribes, imaginaos el mismo número, ¿eh?, B6, en vez de en base 16, en base 15. ¿David Calle me puede decir...? Aquí tengo el 15, ¿no?, aquí tengo el 15 [los escribe encima de los 16], y David Calle me dice: «escribe esto [señala el 11] en base 2, escribe esto [señala el 6] en base 2, con tres y medio dígitos o cuatro dígitos o... tres dígitos, y lo pones junto.

Comentario 21: Aquí está viendo las limitaciones de basarse en recetas o en fórmulas que realmente no se están entendiendo. Por ejemplo, no funciona en el caso que está poniendo. Sin embargo, entender el paso, el porqué de esto, hace que se pueda utilizar, que se pueda generalizar, ¿no? Está viendo cómo esta idea sencilla les permite resolver todo tipo de problemas y entienden en profundidad realmente cuál es el paso, ¿no? Y a la hora de enseñarlo será en lo que incidan, en transmitir estas ideas, más que transmitir esa fórmula, sino transmitir esta idea, que es realmente la más potente, la que es útil. Está desmontando al youtuber [se ríe].

¿Valdría ese algoritmo?

A: No.

F: No. ¿Vale? O sea, que poder se puede pasar, vas con paciencia escribiendo cada una de las expresiones que aparecen, pero un paso directo solo se puede cuando una base es potencia de la otra base, que es lo que hemos visto con 16, que es potencia de 2, que es 2^4 .

Comentario 22: Es interesante que vean hasta qué punto funciona esa fórmula, si el método que daba el youtuber funciona para... Y entonces ha dado la condición para que... Y ahora mismo lo ven, ellos mismos han visto hasta qué punto funciona esa fórmula y cuál sería el proceso para otra fórmula, ¿no? Y eso sí que tiene bastante valor para el

futuro docente, ver hasta qué punto funcionan los algoritmos, estrategias..., para incidir luego en ellas.

¿Está claro hasta aquí? ¿Sí?

TRANSCRIPCIÓN DEL VÍDEO 3

Fragmento 1

[F = Formadora del vídeo].

F: Entonces, la idea es..., el ejercicio 4, que está proyectado en la pantalla, es el ejercicio 4 de la última hoja, de la hoja del dossier 2, con el que vamos a trabajar ya esta semana, ¿vale? En ese ejercicio hay cuatro operaciones, cuatro problemas, cuatro operaciones. Tenéis que hacer las cuatro operaciones..., representarlas de distintas maneras. Voy a poner en la pizarra de cuántas maneras, ¿vale? Entonces, acordaos que nosotros estamos trabajando con material manipulativo [escribe en la pizarra «Manipulativo»], ¿vale? Entonces, en primer lugar tenéis que representar esta suma $[210 + 543]$, esta suma $[315 + 429]$, esta resta $[135 - 24]$ y esta resta $[704 - 45]$, por partes [va señalando en el PDF proyectado en la pantalla], ¿no?, empezáis con la primera... Tenéis que representarlo [escribe en la pizarra] con ábaco vertical, después en el sorobán y después con los multibase, ¿vale? Y tenéis que tener las tres representaciones del proceso delante para saber comparar cada dos, ¿vale?, para saber entender cómo se traduce una en otra. Lo que no quiero es que me digáis: « $210 + 543$ son 753; Nuria, te he representado 743* en el ábaco vertical, en el sorobán y en los bloques multibase». No quiero la representación del resultado, quiero la representación del proceso, de la suma, de la idea «suma».

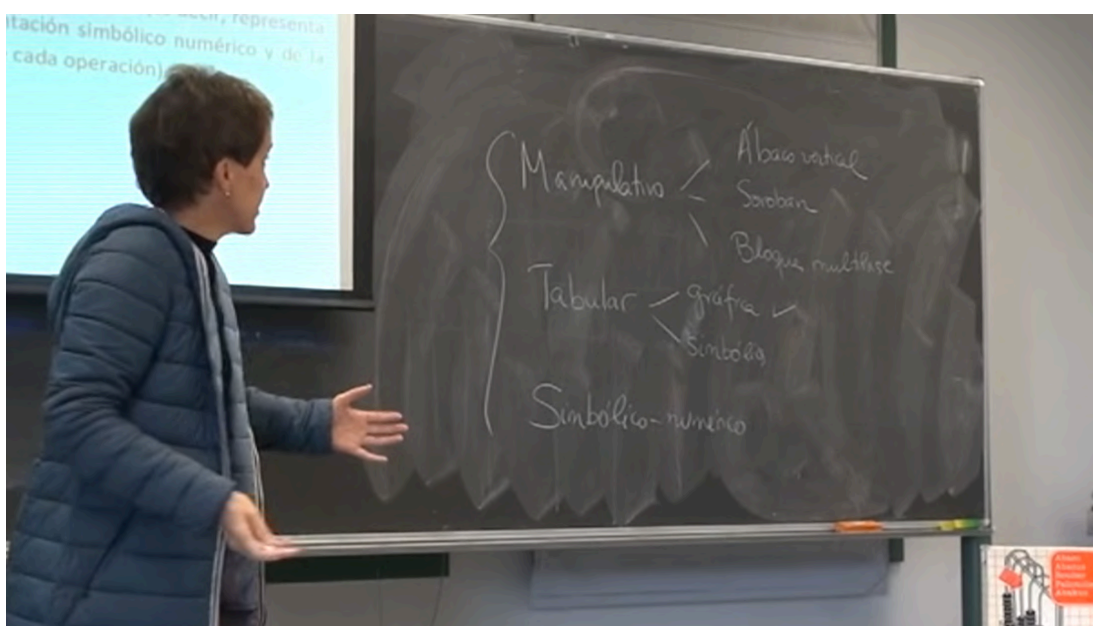
Comentario 1: Bueno, ha presentado el problema; el problema es de representación de números con distintos materiales y, después de representar números, cómo sumar con ellos. El objetivo es que vean qué proceso han seguido para sumar. Establece el problema y cuál es el objetivo, que no quiere simplemente el resultado, sino que también expliquen paso a paso cómo han llegado a la suma, a las operaciones que tengan que hacer.

¿En qué os tenéis que basar?, en la definición de la suma que vimos el otro día, ¿no?, que es: elijo un representante de uno, elijo un representante del otro y hago la unión, agrupo, junto, como lo queráis pensar, ¿vale? Entonces, hay que representar el proceso, el proceso, no solo el resultado final de ese proceso. Entonces, tenéis que representar el proceso de tres maneras en el sistema de representación manipulativo [señala lo que ha escrito antes en la pizarra], ¿vale?

Y en paralelo [empieza a escribir en la pizarra] tenéis que representar el proceso en el sistema de representación simbólico-numérico; el enunciado está dado en ese sistema de representación, ¿vale?, esto es sistema de representación simbólico-numérico, pues tenéis que representar el proceso, las dos sumas y las dos restas, en ese sistema, ¿vale? Y luego, en medio [escribe en la pizarra], hay una representación que es formato tabla o tabular, de la que no he hablado explícitamente, pero que me gustaría que construyerais vosotros, ¿vale? Necesito que construyáis, por ejemplo, esta suma [señala $210 + 543$], que la hagáis en tabla, con una tabla, como se os ocurra a vosotros diseñar la tabla, ¿vale?

Comentario 2: El objetivo es la representación en distintos sistemas de representación, ver la relación con cómo se puede hacer de manera simbólica, y después deja libertad para que ellos creen un sistema nuevo de representación. Entonces, bueno, con cada una de las sumas, ver que es la misma suma pero con distintas representaciones, ¿no?, y su conexión. Y luego deja abierta esa forma, que ellos creen una nueva forma para que vean que existen todo tipo de formas de representar.

La tabla [escribe en la pizarra] puede ser más gráfica, puede tener características gráficas, o puede tener características más simbólicas; a mí me va a interesar más la que tenga características más gráficas, luego ya veremos en detalle cómo, pero tenéis que intentar construirlo vosotros sin que yo os haya hablado de eso explícitamente, ¿vale?



Entonces, paso 1, aquí [señala la parte de representación manipulativa de la pizarra], en paralelo paso 2, simbólico-numérico [lo señala en la pizarra] y luego ya, según vayáis trabajando los cuatro ejemplos, igual ya se os va ocurriendo cómo representarlo con una tabla y cómo trabajar con una tabla ese tipo de operaciones.

Comentario 3: El tercer ejercicio es más reflexivo, entonces van a tener que reflexionar sobre cuál es la manera más adecuada de representar. Está bien porque van a tener que comparar distintos sistemas y ver un poco esa forma, ¿no? Da un poco las guías de cómo hacerlo, pero da libertad. Y van a ver los pros y contras de cada uno de los sistemas.

¿Está claro? Yo me voy a pasar por las mesas y me vais preguntando todas las dudas que os surjan. No voy a pedir que me mandéis nada, ¿vale?, porque todavía no he revisado las últimas fotos que me habéis mandado, con lo cual estoy un poco desbordada; como no sois muchos, yo voy por vuestros puestos. Ahora bien, en el grupo anterior han decidido grabar pequeños vídeos o hacer fotos de los procesos que iban construyendo por llevárselo como material para estudiar, a mí me parece una buena idea, pero ya vosotros hacéis lo que queráis, a mí no me lo tenéis que mandar, pero si queréis, una vez que hayáis construido, por ejemplo, con el ábaco japonés, imaginaos, esta resta de aquí [señala el PDF en la pantalla], y decís: «ah, pues nos vamos a grabar», uno lo hace otro lo graba y lo tenéis de recuerdo, ¿no?, para cuando tengáis que estudiar. ¿Cómo voy a pedir yo eso en el examen? Pues no lo puedo pedir porque no puedo llevar un sorobán para cada uno porque tengo un día, 2 horas y media o 3, para haceros el examen final de la asignatura; pero para mí esto es muy importante, entonces yo voy a pedir que me representéis gráficamente, gráficamente, vuestro proceso de respuesta con un ábaco vertical, con un sorobán o con los bloques multibase, que es lo que yo luego voy a hacer aquí en la sesión final de discusión cuando acabemos esta hora de clase. Yo no voy a coger el ábaco aquí, lo voy a poner delante de todos y tal —podría hacerlo, pero no lo voy a hacer—, lo voy a hacer representando gráficamente el material manipulativo y así es como lo voy a pedir el día del examen,

Comentario 4: Aunque se lo pone como obligación del examen..., pero sí que van a ver la utilidad de representarlo de alguna manera, ¿no? Que ellos mismos construyan y que

puedan utilizarlo en un examen..., eso les va a servir para el examen... Aunque es un poco obligatorio, pero así de paso ven la utilidad de representar, ¿no?

porque os voy a dar un cuadernillo y lo tenéis que hacer gráfico, ¿vale? Bueno, pues empezad, están escritas en un orden muy concreto, empezad a hacerlas en ese orden y luego ya discutimos sobre por qué están puestas en ese orden, ¿vale?

Fragmento 2

[F = Formadora del vídeo]. [A = Alumnos (A1, A2 y A3)].

- A1: Estamos rayados con la última resta.
 F: Vale, a ver, empezad.
 A1: Son 704 - 45.
 F: Vale.
 A1: Entonces, aquí no le podemos restar 5.



- F: Así tal cual está, puedes restar..., ¿cuántas puedes quitar?
 A1: Cuatro.
 F: Cuatro, vale, sí.
 A1: Entonces voy a suponer que aquí [señala la varilla de las decenas] hay un 1.
 A2: No, que hay 10.
 A1: Que hay 10, para que sea 14...

Comentario 1: Ahora mismo están haciendo una operación, una resta, y la alumna tiene dudas. Entonces, está diciendo un poco cómo puede hacer para quitarle..., porque solo puede quitar 4 de esa fila. Bueno, están intentando hacer la resta con la llevada, pero claro, no puedo coger ninguna de la fila anterior, de la posición anterior. Entonces, ahí no sabía cómo hacerlo, le ha preguntado, ella [la formadora] ha esperado para que en grupo..., la pregunta quede en el aire... Y bueno, de hecho uno de los compañeros dice la manera de hacerlo, ¿no? Bueno, un poco la comunicación entre ellos.

- F: A ver, olvídate de los «suponer». Tú dices: «tengo que quitar 5», ¿no?, quito 1, quito 2, quito 3, quito 4 [quita cuentas de la varilla de las unidades] y ahora ponme aquí más para que yo quite, tal y como está.



- A1: Habría que poner 10 y quitamos 1.
 F: Pero ¿cómo me ponéis..., cómo me ponéis ahí? A ver Pablo.
 A2: ¿Que lo ponga?
 F: No, no, que me digas... Yo aquí [señala la varilla de las centenas] tengo ahora mismo 700, ¿no? Escribe 700 de otra forma para que yo tenga bolas...
 A1: Aaaaah, hay que añadir una aquí [señala la varilla de las decenas].
 F: Venga, a ver.
 A2: [El alumno A2 quita una cuenta de la varilla de las centenas y la pone en la de las decenas].

Comentario 2: Ha sido muy visual, ¿no? Ha visto cuál era el problema, yo tengo que quitarle 5..., entonces de manera muy visual ha quitado 4 y..., «tengo que quitar otra más, ¿cómo lo hago?, hay que poner aquí más...». Entonces es esa idea, muy visual, manipulativa, de cómo hacer la llevada, ¿no? Cómo expresar el mismo número utilizando la siguiente fila, la de las decenas. El compañero ya lo había visto y la chica ya lo ha visto bien. Ha sido muy visual, que es un poco el objetivo del material, ¿no?

- F: ¿Aquí sigue poniendo 700?

- A1: No, no, no, hay que poner una nueva aquí [vuelve a poner la cuenta en la varilla de las centenas —la que había puesto en la varilla de las decenas el alumno A2— y pone una nueva en la varilla de las decenas].
- F: A ver [quita la cuenta de la varilla de las decenas]. Teníamos 704, hemos quitado 4, tengo 700, ¿vale?
- A1: Sí.
- F: Ahora, escribe 700 de otra forma para poder quitar otra.
- A1: Pues...
- F: ¿Cómo podéis escribir 700 de otra forma?
- A1: Que aquí [señala la varilla de las decenas] haya 9...
- F: Venga.
- A1: Y aquí [señala la varilla de las unidades]..., 9.
- F: A ver, para que haya aquíííí... [señala la varilla de las decenas], vamos a ver, ¿cómo consigo aquí decenas? Sin cambiar el número...

Comentario 3: Está relacionándolo con la idea de escribir de otra manera, agrupar de otra manera los números para llegar a... Que es un poco la llevada, ¿no?, que tienes que reagrupar un poco los grupos para poder ir pasando a otro..., ¿no?, tienes que reagrupar. Entonces, está diciendo «cómo reescribir el 700 de otra manera», es la pista que le ha dado, aunque la alumna al principio simplemente ha puesto una, pero no ha visto todavía la equivalencia de que hay que quitar 1 de las centenas y se convierte en 10 en la siguiente, ¿no? Entonces, mediante preguntas, «cómo lo consigo, pero que el número se mantenga», ¿no?, que eso es lo importante.

- A1: Si quito esta... [quita una cuenta de la varilla de las centenas].



F: Venga, muy bien.

A1: Pongo aquí 10 [señala la varilla de las decenas].

F: Venga, dale.

A1: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10.

A3: ¡Ah, vale!

Comentario 4: «Ah, vale» [se ríe]. Yo creo que ha surtido efecto. Igual, ¿no?, ya he quitado 4, tenemos 700, hay que quitar otro, pero tengo que reescribirlo, agruparlo de distinta manera para poder quitarlo. Entonces, yo creo que ha surtido efecto.



F: ¿Ahora aquí pone 700?

A1: Sí.

- F: ¿Y cómo está escrito 700?
- A3: Mal.
- F: 6×10^2 , ¿no?, 6×100 , más...
- A2: 10×10^1 .
- F: 10×10^1 , muy bien. Ahora, ¿puedo quitar aquí [señala la varilla de las unidades] que quería quitar una? ¿Tengo?
- A1: No.
- F: No, ¿cómo puedo volver a escribir 700 para tener aquí [varilla de las unidades]?
- A1: Pues quito de estas [quita una cuenta de la varilla de las decenas] y añado 10 aquí [señala la varilla de las unidades].
- F: Vale, venga.

Comentario 5: Está conectando..., o sea, ese hecho, «bueno, necesito reescribir de otra manera», lo ha reescrito... Entonces, está viendo, y ha confirmado con el alumno, cómo se escribe, pues 6×10 a la..., etcétera. Y ahora, ¿cómo hacemos? Está relacionando cuál es el proceso algebraico, la representación del número. Y ahora, llega el problema en el que tengo 10 en una, con lo cual, cómo puedo representar ese número... Entonces, va a representarlo de otra manera y ya después verán que solamente hay que quitarle uno más.



- F: Vale, ¿y ahora puedes quitar la que te faltaba por quitar?
- A1: [La estudiante A1 quita una cuenta de la varilla de las unidades].
- F: Ya está. Ya habéis quitado 5 y teníais que quitar 45, ¿no? ¿Cuánto os falta por quitar?

A1: Sí, ahora aquí [señala la varilla de las decenas] hay que quitar 4.

F: Pues ya está, ¿no?

A1: Ah, vale, vale. Gracias.

Comentario 6: Bueno, entonces eso es la llevada; primero ha tenido que quitar 5 unidades y luego quitar las 4 decenas ha sido bastante directo. Yo creo que toda la explicación ha sido muy visual y se ha entendido muy bien. Y lo ha conectado con lo que han visto antes de la llevada, ¿no?



F: ¿Entonces qué habéis hecho para reescribir el 700...? O sea, yo tenía 700 ahí, tenía aquí 700 [deja el ábaco con 7 cuentas en la varilla de las centenas], ¿qué habéis hecho?

A2: Como es sistema decimal, pues aquí [señala la varilla de las decenas] hay 10, porque... representamos un 0, pues quitar una de aquí [varilla de las centenas] y ponerle las 10 aquí [varilla de las decenas] para luego restarlas aquí [varilla de las unidades].

F: O sea que habéis..., ¿agrupado o desagrupado?

A1: Desagrupado.

A2: Aquí desagrupado.

F: Desagrupado. Habéis desagrupado una centena en 10 decenas y luego una decena la habéis desagrupado en 10 unidades.

Comentario 7: Ahí ha parado y ha hecho que ellos verbalicen, que expliquen lo que han entendido con palabras. Como la explicación era ambigua, ella ha reforzado que lo que han

hecho es desagrupar, que se puede realizar esa resta porque se va desagrupando. Ha reforzado la parte clave del proceso.

A1: Vale, es que cuando tú lo haces en papel no haces esto así.

F: Ah, pues dime entonces qué es lo que haces en papel.

A1: Claro, lo haces muy mental. O sea, en verdad sí que haces eso, pero... bueno, ya me has entendido.

F: No, no, pero lo tienes que explicar porque luego os he pedido que lo hagáis simbólico...

A1: Ya, ya, ya.

F: Entonces, simbólico tienes que explicarlo conectado con esto.

Comentario 8: Ahí la alumna lo ha relacionado con el papel, con cómo hacían esa llevada. Es un poco también el objetivo de esta actividad, que vean ellos cómo manipulativamente, así como algebraicamente, de las dos maneras, ¿no?, cómo tienen esa conexión. Entonces, ella lo pregunta y dice que tiene que explicar el porqué. Esta alumna está muy cerquita de tener muy conectadas las dos formas, la visual y la algebraica.

A1: Vale, vale.

Fragmento 3

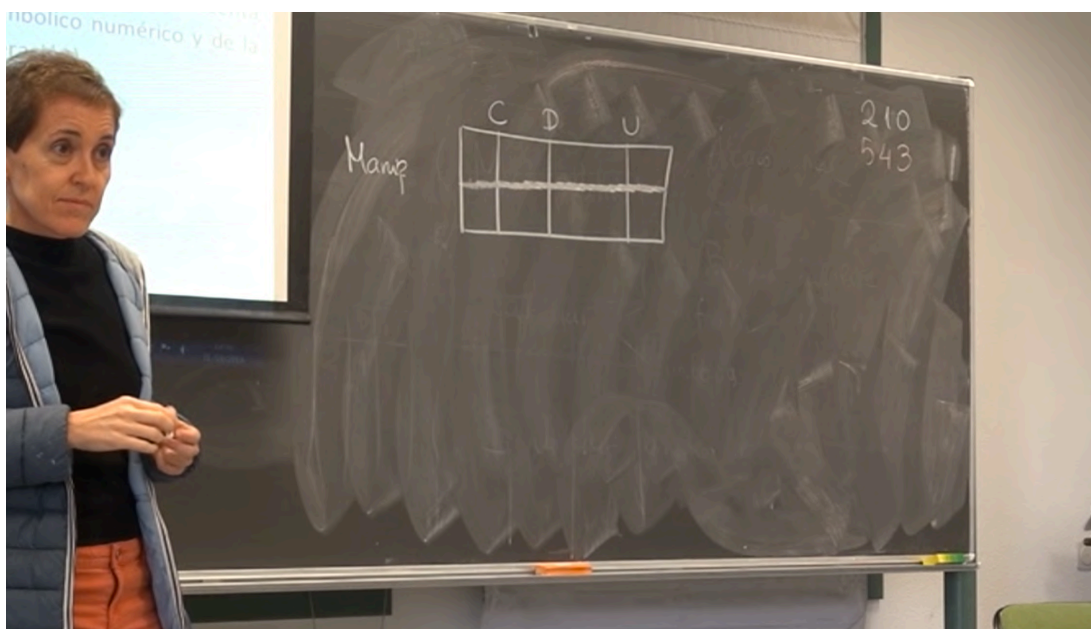
[F = Formadora del vídeo]. [A = Alumnos].

F: Vamos a corregir uno, el primero, ¿vale? Me dan $210 + 543$, ¿vale?, con símbolos. Voy a representarlo..., vamos a empezar con manipulativo y voy a ejemplificar con el sorobán, que es el que parece que más trabajo cuesta, ¿vale? Entonces, en el sorobán, cuando lo representéis gráficamente el día del examen, o ahora en vuestro cuaderno si tenéis que tomar notas, es muy importante marcar la barra del medio, porque la proximidad de las bolas a la barra del medio es la que te indica qué número está representando, ¿vale? Y ahora, dado el problema que me han planteado, ¿cuántas varillas pensáis que necesito escribir?

A: Tres.

Comentario 1: Va a resolver uno de los problemas y va a explicar cómo es la representación con uno de los materiales manipulativos. De nuevo, va a resolverlos con los alumnos a través de preguntas que ellos van a ir respondiendo, creando la solución.

F: ¿Tres varillas? Pongo una varilla, dos varillas, tres varillas. Esta, unidades, decenas, centenas. Esta la pongo un poco más gorda para que se note que es la barra de madera del medio, ¿vale? Y ahora, ¿cómo dibujo 210?

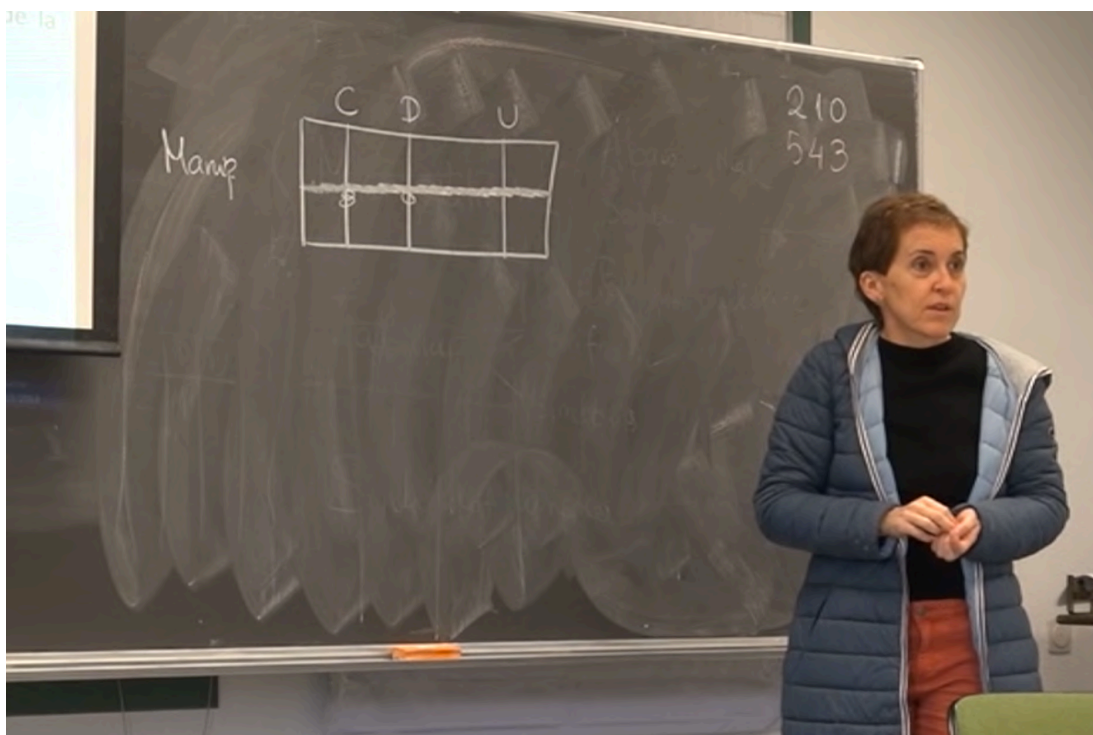


A: Pues 0 unidades.

F: 0, o sea que aquí no pongo nada pegado a la barra, ¿no? [señala la varilla de las unidades]. ¿Aquí? [señala la varilla de las decenas].

- A: 1 decena.
- F: Una pegada a la barra, ¿arriba o abajo?
- A: Abajo.
- F: Abajo, o sea que aquí va una.
- A: Y 2 centenas pegadas a la barra de abajo.
- F: Pegadas a la barra, abajo. Una y dos, ahí está. Eso es 210.

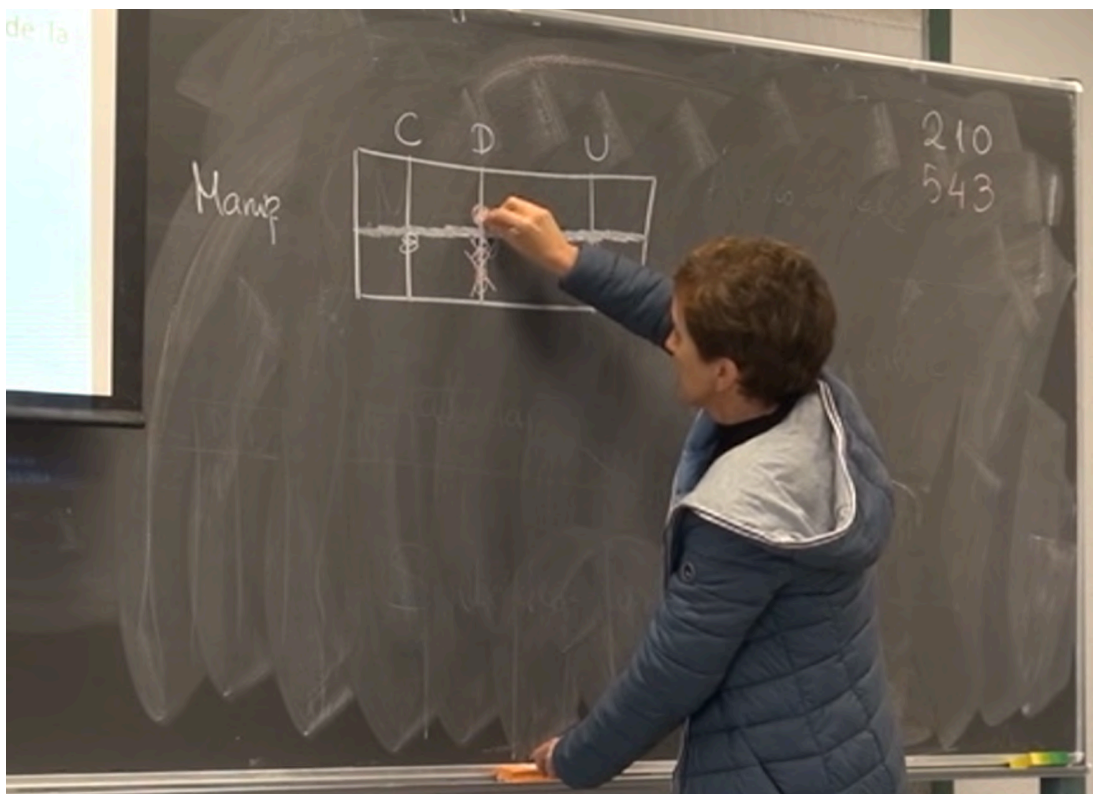
Comentario 2: Ahí está explicando la manera de representar el número con ese material manipulativo, cuántas varillas hay, dónde se coloca cada una de las posiciones...



Y ahora, tengo que sumar 543, es decir, que tengo que añadir 543 unidades ahí. Aprovecho la estructura, ¿vale? Entonces, añado 3 unidades, en la varilla de las unidades, que son 3 aquí abajo, ¿no?, 1, 2 y 3 [las dibuja en la varilla de las unidades]. Después añado 4 decenas, en la varilla... 1, 2, 3, 4, ¿vale? [las dibuja en la varilla de las decenas], 4 decenas.

- A: Pero cambiamos...
- F: Pero...
- A: Bajamos una de arriba y quitamos las de abajo.
- F: Porque no tenéis 4, ¿vale?, ya no había suficientes, ¿por qué?, porque las bolas de arriba valen 5, entonces decís: «no pasa nada, estas, como eran 4 y 1, 5, se representan ahí arriba», ¿vale?

Comentario 3: Ahora va a la suma, cómo se van sumando números, el concepto de sumar, el de añadir. Entonces, va viendo cómo se iría añadiendo. Entonces, los alumnos van viendo la manera de representar 4 más, pues sube uno arriba, ¿vale? Van representando un poco... Ven cómo se puede representar el hecho de sumar en este material.



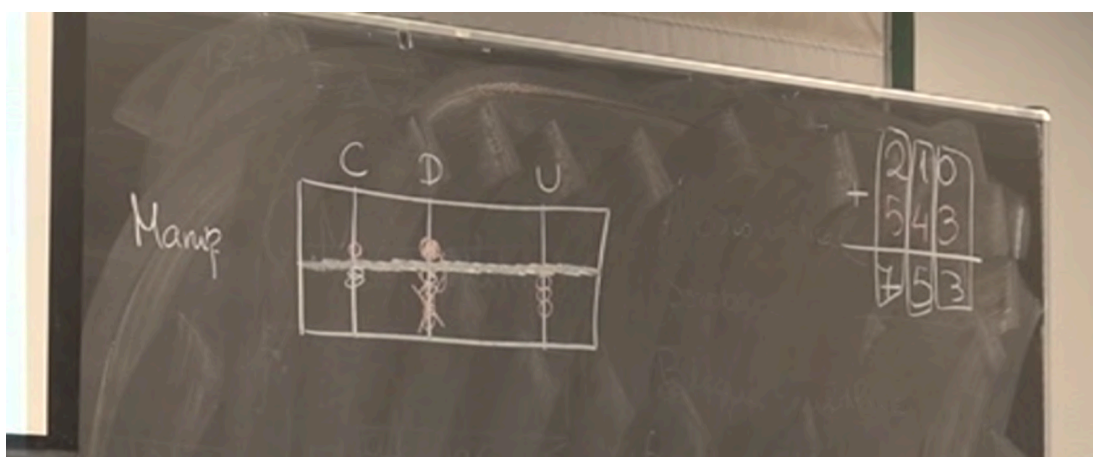
Y luego, 5..., tengo que añadir 5 centenas, ¿cómo lo hago?

A: Pues 1 arriba.

F: Una de arriba la bajo directamente o podría ir: «1, 2, 3, ya tengo 5, las subo ahí, 4, 5» [va señalando en la varilla de las centenas], ¿vale? Puedo hacerlo de dos formas distintas. Pero si aprovecho la estructura del ábaco, de manera que las bolas de arriba valen 5, como tengo que añadir 5, pues directamente ya añadido ahí esas 5 [dibuja una bola en la varilla de las centenas, en la parte superior, pegada a la barra horizontal], ¿vale?

Comentario 4: Ahí ven la equivalencia, pero bueno, es un poco la característica de este material, ¿no?, que van 5..., pues dos maneras de representarlo, o directamente va uno arriba o no... O sea, que se va viendo la equivalencia y un poco el uso que se puede hacer; conociendo el ábaco, es la manera de ir representando esa suma.

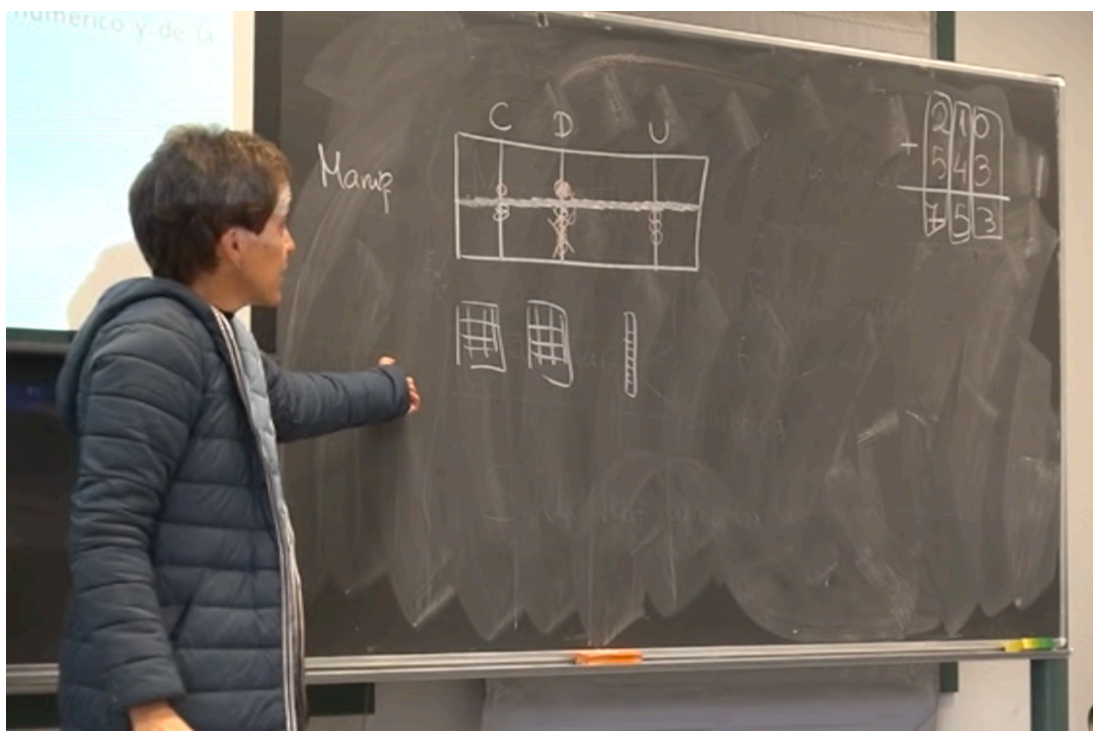
Entonces, [representa ahora el resultado en la suma con el algoritmo tradicional de forma simbólico-numérica a partir de lo que ha obtenido en la representación con el sorobán] me quedan 5 y 2, 7, aquí me quedan 5, y aquí me quedaban 3. Entonces, si yo lo represento así y voy sumando por columnas, tal cual he ido haciendo en el ábaco, tengo 0 unidades y 3 unidades, 3 unidades, 1 unidad y 4 unidades, 5 unidades, perdón, decenas, 2 decenas y 5 decenas, 7 decenas. Vertical, lo he colocado vertical por parecerme a la estructura del ábaco, ¿no?, para tener en cuenta la «posicionalidad», ¿vale?, del sistema.



Entonces, he traducido al simbólico lo que he hecho aquí manipulativamente al escribir en simbólico en columnas y represento con cada columna cada una de estas [señala las varillas del sorobán de la pizarra]. Y luego, la escritura, sí que tengo que tener en cuenta que estos son 5 [señala las decenas de la suma en simbólico] con lo cual van arriba [en el sorobán] y esto son 7 [señala las centenas de la suma en simbólico], pues son 5 y 2 [en el sorobán], ¿vale?

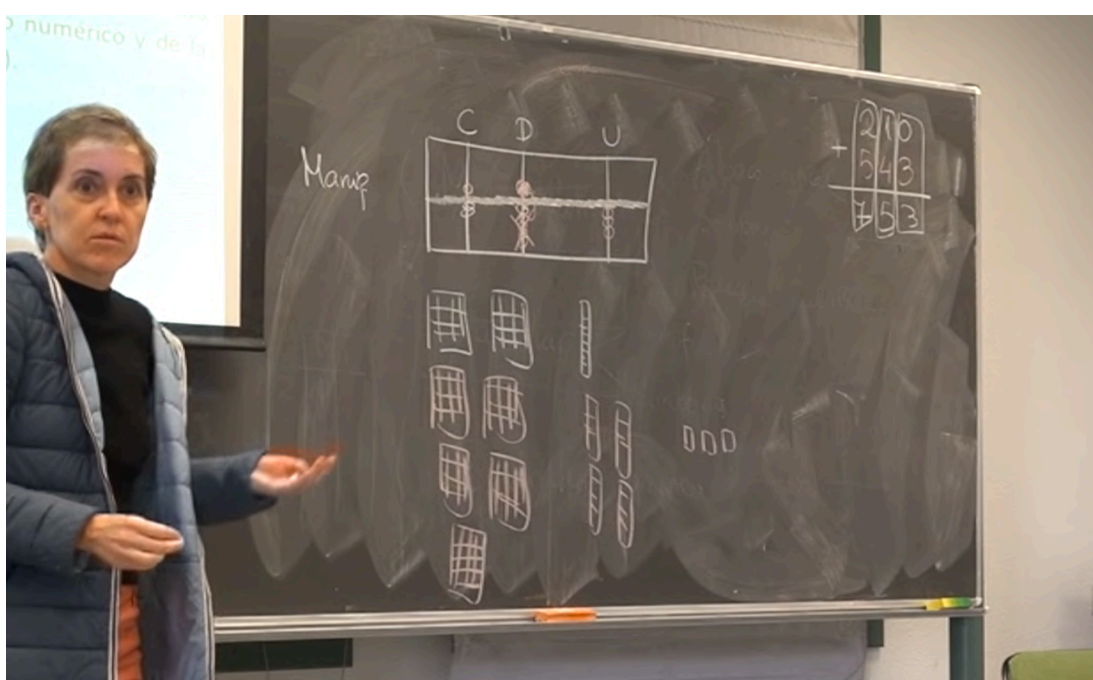
Comentario 5: Ahí está mostrando la relación entre el simbólico y la representación del material, reforzando la idea de posición de las unidades, las decenas y las centenas, el sistema posicional, y la particularidad de cómo se usa este material, que se colocan las de 5 arriba y las de 1 abajo, ¿no?, o sea, un poco ver la relación entre las dos.

Bloques multibase, bloques multibase, pongo aquí 210, ¿no?, que son 1 y 2 placas de 100 y 10, una decena; este es el 210.



Y ahora agrupo 543; una, dos, tres, cuatro y cinco [dibuja 5 placas de 100 unidades], añado, ¿vale?, 500. 40: una, dos, tres, cuatro [barras de 10]; y 3: uno, dos y tres [unidades]. Y ahora lo pongo todo junto. ¿Vale?

Comentario 6: Ahora ha pasado al siguiente material; cómo representa cada uno de los bloques multibase, pues son esas placas, las planchas..., las centenas, las decenas..., pues las va colocando y es la misma idea de ir añadiendo para sumar y ahora ver cómo los agrupa con este nuevo material.



Y digo: «aquí tengo 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 [placas de 100]», ¿necesito agrupar? [Rodea con una línea todas las placas de 100].

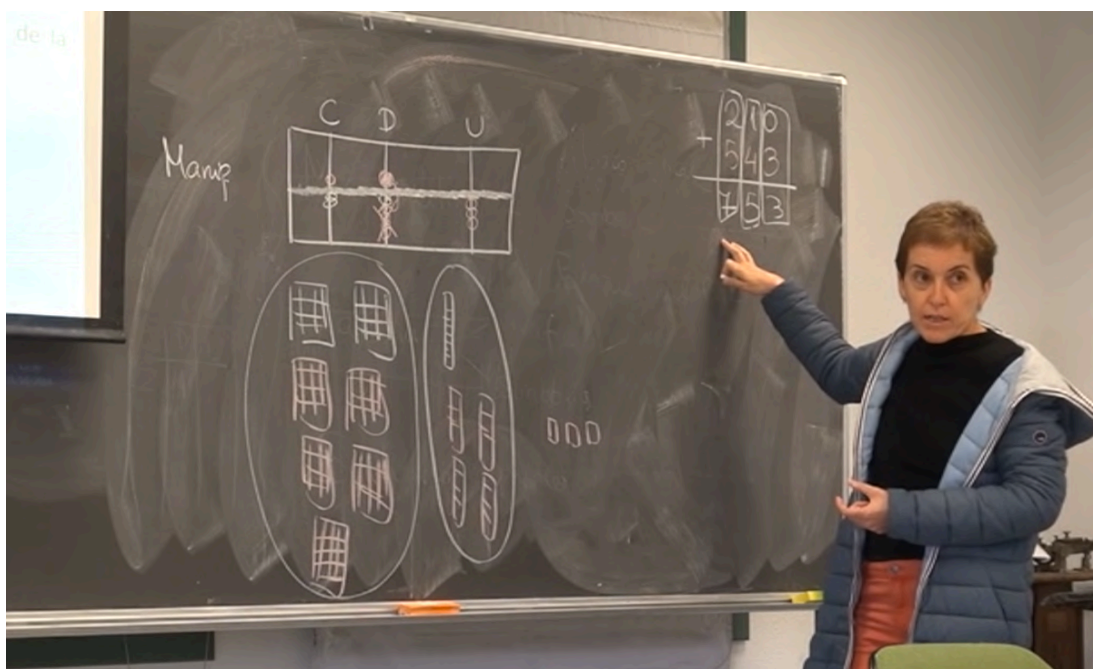
A: No.

F: No necesito agrupar. Aquí tengo 1, 2, 3, 4, 5, 6, 5, ¿necesito agrupar estos 5 de alguna manera? [Rodea con una línea todas las barras de 10]. No porque es base 10. Y aquí tengo 3, ¿vale? O sea, que me vuelve a salir 2, 4, 6, 7 [centenas; señala la suma en simbólico], 2, 4, 5 [decenas], 5 [señala la suma en simbólico] y 3.

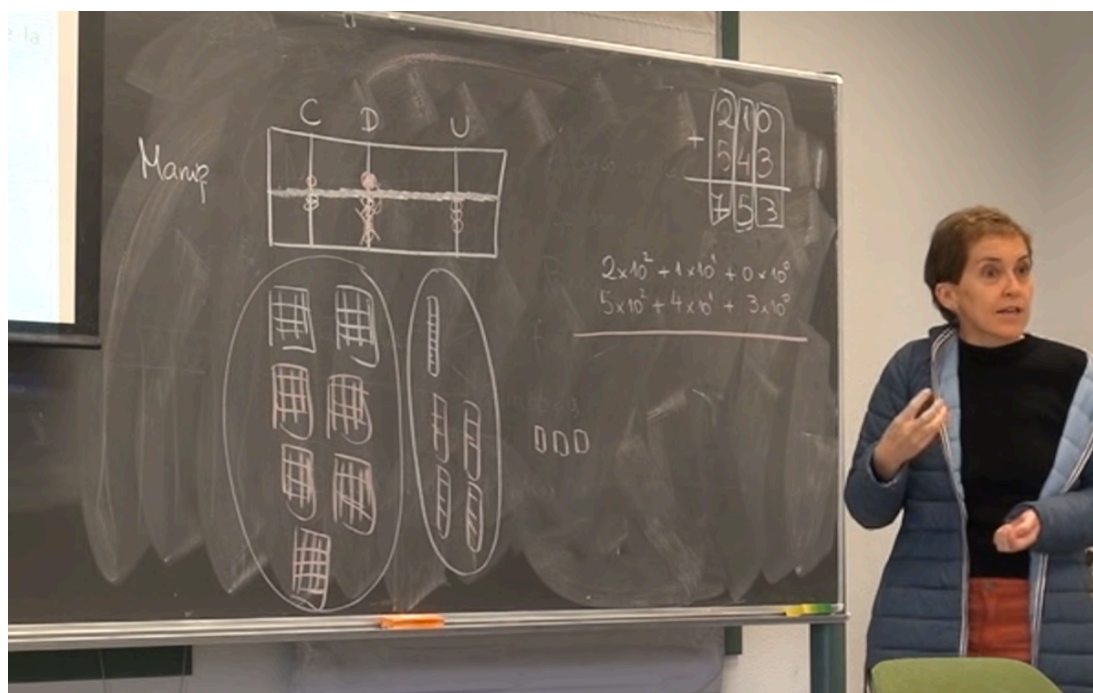
Comentario 7: Ahí habla de agrupar, porque es un poco la llevada, si consigues 10 de algunos de los grupos, cómo agrupar. Entonces está viendo que esta suma no tiene llevada, por eso habla siempre de la suma de las columnas. Entonces, ahí no se ve cómo sería construir un bloque del siguiente, pero vamos, ahí ve que la estrategia sería ver si tengo que agrupar o no después de añadir.

Y veo la conexión de uno con otro, ¿vale? ¿Está claro hasta aquí?

A: Sí, eso sí.



F: El que quiera escribirlo simbólico-numérico de otra manera en la que se vea la «posicionalidad» del sistema, podría escribirlo de la siguiente forma: $2 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 0 \times 10^0$, ese es el primer sumando; segundo sumando, $5 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 3 \times 10^0$; y sumo.



Y ahora, al sumar, utilizo la propiedad conmutativa, para colocar los sumandos en el orden que quiero, y asociativa, para ir organizando, ¿vale?

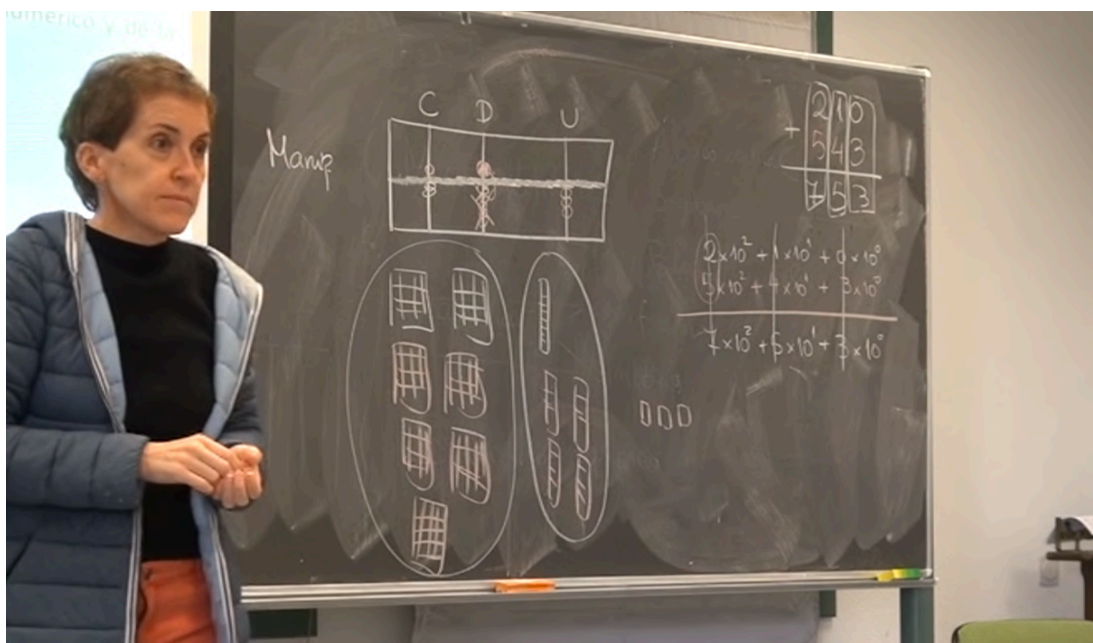
Comentario 8: Ahí está explicando el porqué, o sea, el 210 realmente está representando..., se está agrupando por el sistema posicional decimal, pues el número realmente tiene 0..., ¿vale?, pues cada una de las potencias de 10, ¿no? Entonces está viendo un poco por qué funciona, por qué va haciendo los grupos, por qué están colocados de esa forma. Entonces, va a colocar en la pizarra las tres para crear la unión de las tres, ¿no?; tanto el material manipulativo como todo, pues está viendo este proceso... Y por qué funciona es esta expresión en potencias de 10 y luego cómo voy sumando y haciendo la propiedad distributiva, que ha dicho, para ir haciendo las agrupaciones de los números.

O sea, que este [señala 5×10^2] —que, si lo coloco seguido, estaría aquí el cuarto [señala detrás de 0×10^0]— lo quiero colocar el segundo para agruparlo con este [señala 2×10^2], este [señala 4×10^1] —que estaría el quinto [señala detrás de 0×10^0]— lo coloco el tercero para agruparlo con este [señala 1×10^1], y este [señala 3×10^0] lo agrupo con este [señala 0×10^0]. Y ahora, al agrupar, ya me quedan 5 y 2, propiedad distributiva, 7×10^2 más, 4 y 1, 5×10^1 más, 0 y 3, 3×10^0 . Pero ahí estoy utilizando la asociatividad de la suma, la conmutatividad de la suma y la distributiva de la suma y el producto de números enteros, ¿vale? Pero si lo coloco así, veo esto, esto y eso [señala los coeficientes que acompañan a 10^2 , 10^1 y 10^0], que es lo mismo que esto, esto y eso [señala el 7, 5 y 3 del resultado de

la suma en la forma simbólico-numérica], que es lo mismo que esto, esto y esto [señala los bloques multibase en la pizarra] y que es lo mismo que 1, 2 y 3 varillas [señala las varillas del sorobán en la pizarra].

Comentario 9: Ahí les ha explicado... Ahí ya se ve esa conexión con todas las formas. Y luego, pues la llevada, verlo y tal... Sería supongo el siguiente paso. Pero al final verían eso, que la base de todo en matemáticas está ahí, en la propiedad distributiva y en la descomposición del número.

¿Está claro hasta aquí?



- A: Sí.
- F: Ahora, ¿qué diferencia hay entre esto y la siguiente suma que me plantean ahí [en el PDF proyectado en la pantalla]? $316 + 429$.
- A: Que me paso de unidades y tengo que pasar a las decenas.
- F: Que cuando agrupo aquí, por ejemplo [bloques multibase], o cuando agrupo aquí [sorobán], o cuando agrupo aquí [expresiones de sumas y productos de potencias de 10], aquí aparecen más de 10 [señala al 3 de 3×10^1]. En algún sitio aparecen más de 10, por ejemplo, cuando tengo 9 unidades y 6 unidades, aquí aparecerían 15 fichitas pequeñas [bloques multibase], aquí tendría que representar 15 [sorobán] y aquí aparecería 15×10^0 . Pero como estamos en base 10, no puedo dejarlo así, tengo que agrupar, tengo que agrupar. Entonces, agrupo 10 y dejo 5, y las 10 que agrupo las paso al siguiente valor, es decir, pego 10 fichas y construyo una barra [bloques multibase], agrupo 10 y me sale otra bola aquí en el ábaco,

aquí abajo [parte baja de la varilla de las decenas], o agrupo 10 y me sale uno más aquí [en 5×10^1] y aquí [en 3×10^0] dejo las que se quedaban sueltas, las 5, ¿vale?

Comentario 10: De esta forma tan visual, con esta conexión, solamente el hecho de plantearnos qué pasaría si vemos una llevada, pues a partir de ahí yo creo que los alumnos... Está explicando... Ya se ve claramente cómo las agrupaciones van cambiando, la propiedad distributiva... Van viendo un poco en los tres ámbitos cómo va cambiando el juego, ¿no? A partir de aquí ven cómo se generaliza en las tres maneras de entenderlo.

O sea, que la única diferencia es que aquí, después de representar cada cantidad y de ir poniendo por orden el valor de cada una, tengo que agrupar porque en algunos sitios tengo 10 o más, ¿vale? Es la única diferencia.

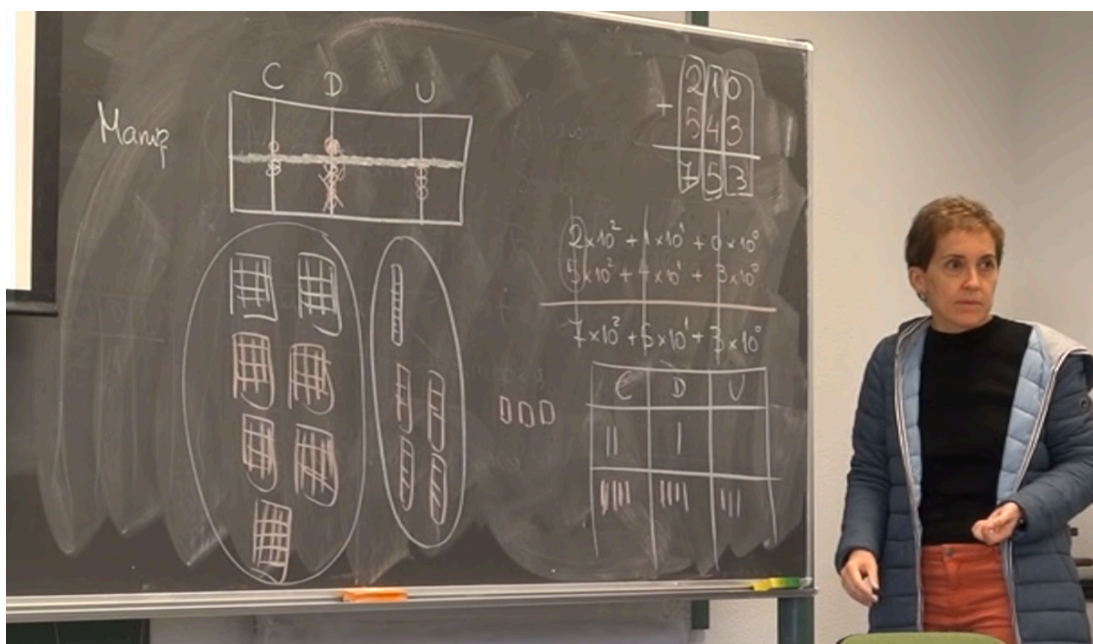
Y ahora, si quisiéramos representar esto en formato tabla, como tenía Martín, ¿no? ¿Cuántas columnas pondré yo en la tabla?, ¿qué me pide el cuerpo? Tengo que dibujar una tabla, ¿vale?, vamos a dibujar una tabla [comienza a dibujarla en la pizarra], con filas y columnas, ¿cuántas columnas pongo?

A: Tres.

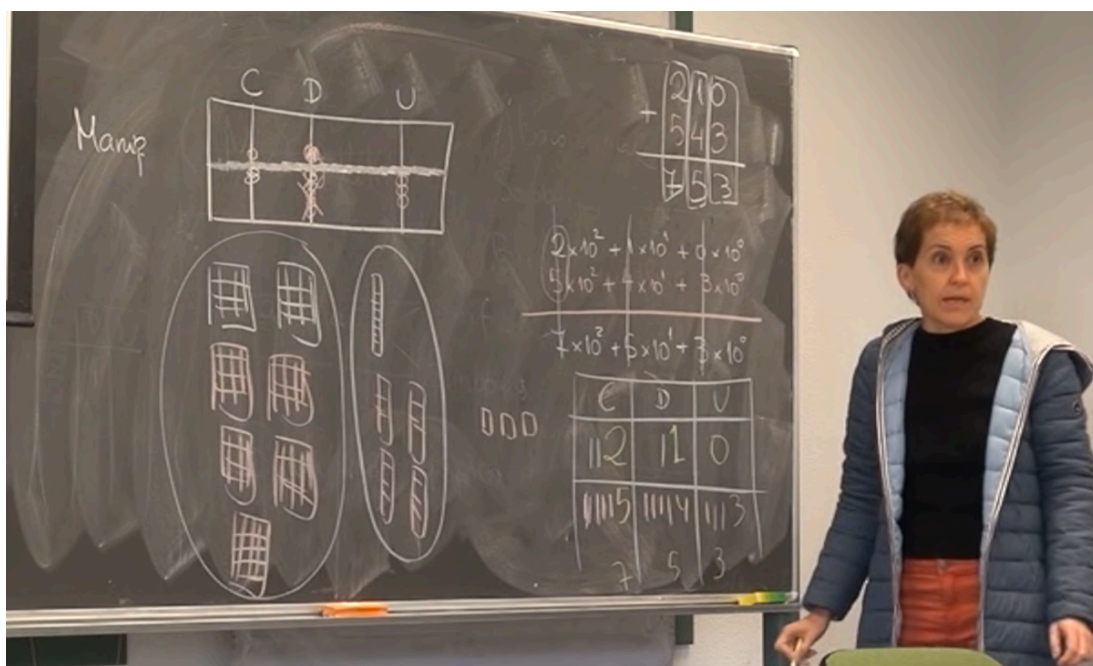
F: Tres, ¿por qué tres?

A: Centenas, decenas y unidades.

F: Unidades, decenas y centenas, ¿vale? Y entonces, represento el primer número, 210: 1, 2, 1, eso es 210 [pone dos rayas en la primera casilla de las centenas y una en la primera de las decenas]. Represento el segundo número, 500: 1, 2, 3, 4, 5; 40: 1..., bueno, en rosa, ya puestos..., 1, 2, 3, 4, 5; 40: 1, 2, 3, 4; y 3: 1, 2, 3. Y agrupo: ¿cuántas unidades tengo al final?, 3, ¿cuántas decenas tengo al final?, 5, ¿cuántas centenas tengo al final?, 7, fin.



Este sistema de representación es icónico-gráfico porque he representado aquí las cantidades con palitos, pero tiene una estructura especial porque está en una tabla, ¿vale? Entonces, vamos a decir que es un sistema de representación tabular-gráfico. Si en vez de poner aquí gráficos, yo hubiera dicho: «oye, mira, no me lío con los gráficos, ya puestos, como ya controlo mejor los símbolos, pues voy a poner aquí 210 y aquí abajo voy a poner 543 y luego ya sumo: 4 y 1, 5; 5 y 2, 7; 3 y 0, 3», ¿vale?



Sería tabular, tiene una estructura tabular, no es puramente simbólico-numérico, tiene una estructura tabular, pero con números dentro, tabular-numérico, ¿vale?

Entonces, yo voy pasando de lo más concreto, que sería: «mi madre me ha dado 316 euros y mi abuela 429, ¿cuántos euros tengo en total?», después paso a manipular, con ábacos verticales, con ábacos japoneses, con bloques multibase..., y cuando interiorizo bien eso, digo: «ostras, venga, lo voy a poner en una tabla gráfica y voy a indicar lo que me indica cada varilla o lo que me indica cada agrupamiento de los bloques multibase, que es posición, en las columnas de una tabla, y ahí voy a poder marcarlo con símbolos». Esta tabla con símbolos se llama tablero de posición, porque tengo las posiciones indicadas —unidades, decenas y centenas—, y es uno de los recursos que más utilizan en el método famoso este Singapur, que habréis visto o habréis oído hablar de él, ¿vale?

Comentario 11: Está explicando otro tipo de representación, con tabla. Está viendo toda la equivalencia entre todo... La parte gráfica... ha dicho iconos, ¿no? Está viendo otra manera de hacer, poniendo de relieve el método Singapur, o sea, que está con una explicación de formas de representar, ¿no?, todas válidas y complementarias.

Entonces, ¿qué están haciendo?, están haciendo una transición de los más concreto, pasando por lo manipulativo, hacia lo abstracto, que sería..., esto es lo más abstracto [señala las expresiones de sumas y productos de potencias de 10] y esto es lo abstracto que se trabaja en primaria [señala la suma hecha en el registro de representación simbólico-numérico], ¿vale? Pero no trabajan directamente con esto, vamos pasando..., concreto, concreto, concreto, concreto [de forma manipulativa], voy intentando abstraer un poco, pero tengo mis gráficos que me ayudan a visualizar lo que estoy haciendo [de forma tabular], y finalmente mi objetivo es escribirlo simbólico-numéricamente, de forma abstracta, ya al final.

Comentario 12: Ahí ya ha hecho el proceso un poco que se va siguiendo en primaria, cómo se va introduciendo esta representación...; cómo se llega al final a lo más abstracto, que es el final, que es la operación que aparece en primaria; lo abstracto, que es el conocimiento que aprenden los maestros que está detrás de todo; y cómo el proceso que va haciendo manipulativo de representación va llegando hasta eso, ¿no? Y cómo históricamente se ha ido llegando también por ese proceso. Ha hecho un poco el camino como se va aprendiendo en el aula.

¿Cómo habéis trabajado mayoritariamente vosotros en primaria cuando estabais haciendo sumas de este estilo? ¿Desde aquí [señala lo manipulativo] o desde el final [señala lo simbólico-numérico]?

A: Desde el final...

A: Yo con las de centenas, decenas y unidades, las cajas...

F: Las cajas estas también os suenan, los tableros de posición, pero ¿y qué poníais en las posiciones, palitos o los números ya?

A: Los números directamente.

F: Los números directamente, o sea, que estabais trabajando la fase inicial, de la suma, la estabais trabajando directamente con lo simbólico, que es la fase final, ¿lo veis?

A: Jolín, sí.

F: Vale, pues ala, ya está.

Comentario 13: Ahí han visto realmente cuál es la fase en la que se enseña, ¿no?, con la que han aprendido ellos y con la que se enseña. Están viendo todo el proceso que ha llevado históricamente a construir el sistema decimal y cómo funciona el sistema decimal. Se ha mostrado todo el camino y qué es lo que se enseña, los algoritmos y todo el proceso que hay detrás.

ANEXO 24

Transcripción de los comentarios de Lucas en la fase 2

Nota: El texto presentado entre corchetes en la transcripción se corresponde con información incluida por el investigador.

TRANSCRIPCIÓN DEL VÍDEO 1

Fragmento 1

[F = Formadora del vídeo]. [Comentarios de Lucas presentados en recuadros].

F: Bueno, entonces os voy a dar el guion y empezáis a trabajar y, al final, los últimos 15 minutos, hacemos la puesta en común. El guion de la actividad aparece aquí en el campus, pone la fecha, ¿vale?, «actividad para la sesión del 19 de septiembre». Lo voy a leer porque está en inglés, por si alguno tuviera alguna dificultad, lo leo y os ponéis a trabajar, ¿vale?

Todo el mundo en la mesa tiene un montón de palillos y varias cintas de estas, ¿no?, elásticas. Si alguien necesita más cintas me las pide, palillos no, son los que os he puesto, ¿vale?, es con lo que tenéis que trabajar. El problema es que yo he comprado una caja de palillos en Supeco y resulta que mis compañeros lo compran en Mercadona y me dicen que las cajas de palillos que ponen 800 palillos del Mercadona traen más y que les sale a cuenta, y que cuando van a comprar materiales —porque a veces tenemos que comprar nosotros los materiales— pues que merece la pena. Yo no pude ir a Mercadona, fui a Supeco, pone que son 800, pero no sé si me han timado o no me han timado. Entonces, para hacer un control de calidad, hacer una estimación, que luego, bueno, los que hayáis hecho Matemáticas de Ciencias Sociales pues sabéis hacer un contraste de hipótesis y tal, pero bueno, lo primero que tengo que hacer es hacer una estimación de cuántos hay, ¿no? Entonces, los he repartido para no contarlos yo y la idea es ver cuántos hay.

Comentario 1: La formadora está introduciendo a los alumnos en la actividad, que es una actividad matemática porque les está pidiendo que cuenten el número de palillos que tienen. Les ha hablado también de los objetos con los que van a tener que hacer la

actividad, que son palillos y gomas. Ha aludido a un conocimiento matemático, que a lo mejor piensa que alguno puede tener si ha cursado las matemáticas de las Ciencias Sociales, al hablar de los contrastes de hipótesis; aunque nada van a tener con esto, ha hecho alusión a un conocimiento matemático que posiblemente algunos tengan. Y ahora se dispone a comenzar la actividad.

Entonces, el guion de la actividad, tal y como aparece aquí... [espera a que cargue el ordenador]. Aquí está el guion. Esta actividad –esperad que la amplíe un poco– está escaneada de un libro muy bueno que utilizan en los últimos años en Estados Unidos para formar profesores de primaria. Lo bueno del libro es que, además de los contenidos teóricos, más de la mitad del libro son actividades para llevar al aula-taller como estamos haciendo aquí, ¿vale? Entonces, una de las actividades iniciales para el trabajo con el número, que es con lo que estamos empezando nosotros, es esta de los palillos, ¿vale?

Entonces, aquí la pregunta es «cuántos», cuántos palillos, ¿no?, que es lo que os he preguntado a vosotros, ¿no?, cuántos. Entonces, cada grupo participando en esta actividad tiene un montón de palillos y luego tiene algo para atarlos, ¿no?, *rubber bands*, pues cintas de estas elásticas. Los materiales ya los tenéis. El objetivo de la actividad es ayudaros a entender el desarrollo de la escritura de los números tal y como los utilizamos nosotros en nuestro sistema de numeración, ¿vale?

Comentario 2: La docente ha dejado claro cuál es el objetivo matemático de la actividad a todos los alumnos, que es que entiendan la escritura del número, que entiendan por qué se escribe el número de una determinada manera. Ha hecho alusión a ello para que los alumnos lo conozcan.

Entonces, primero, organiza los palillos de forma que visualmente puedas ver más o menos cuántos hay; usa las bandas elásticas, si te ayudan, para organizarlos de manera que así, de un vistazo, puedas decir cuántos tienes, primero los cuentas, lo organizas, piensas cómo organizarlo, pero la cosa es que la organización que tú tengas en la mesa te permita de un vistazo recordar cuántos hay sin necesidad de haberlo apuntado, ¿no?, y que, si yo me paso por allí, me podáis decir: «mira, hay no sé cuántos, porque..., lo veo porque lo hemos

organizado así», ¿vale? Luego, reflexiona sobre si la manera en la que lo has organizado corresponde a cómo escribirías tú luego los numerales para representar esa cantidad de palillos. Después, tienes que juntar tus palillos con los de un grupo de al lado, ¿vale?, por ejemplo, vosotros con vosotros y así, cada dos grupos tienen que juntar los palillos que tienen y decidir cuántos tienen en común, ¿vale?, cuántos tienen en total. Y al final, tenemos que juntarlos todos y de una forma ágil, sin tener que volver a contarlos todos, tenemos que saber cuántos palillos hay en total en la clase repartidos, ¿vale? O sea que, primero, cada grupo tiene que saber cuántos tiene y tiene que generar una estrategia para, de manera rápida, mirar en la mesa y ver cuántos hay; después, reflexionar sobre si la manera en la que lo coloca cuando uno luego escribe, imaginaos, «tengo 72, pues cómo se escribe 72: siete, dos», pues la manera en la que lo coloco me ayuda con la escritura o no, no tiene por qué, se reflexiona un poco sobre eso;

Comentario 3: Ahí, a mi juicio, ha transmitido un conocimiento matemático a los alumnos. Les ha dejado entrever que la escritura del número 72 puede tener que ver algo con cómo tienen que agrupar los palillos, les ha dado una instrucción... no implícita, sino..., bueno, no sé cómo decirlo, en la que se ve que quizá los tengan que agrupar de 10 en 10, que agruparlos de 10 en 10 quizá sea una buena opción. No tengo muy claro que los alumnos hayan pillado esto bien, pero ella ha intentado que los alumnos vean que el sistema numérico decimal es muy cómodo y que quizá agruparlos de 10 en 10 les va a ayudar, por eso ha hablado del 72, el 7 y el 2, que lo ha repetido, ¿no? No sé si es realmente así como quieres que vaya haciendo las intervenciones [se refiere a mí, investigador que está con él viendo el vídeo]. No sé si este tipo de comentarios son los que... No estoy diciendo, por ejemplo, «contenido: pues la profesora quiere que los alumnos comprendan el porqué del sistema numérico decimal»; no te lo estoy diciendo así... «Tarea: pues la tarea es que con un conjunto de palillos, que no saben cuántos hay, porque tienen muchos, pues que establezcan una agrupación que les permita contar visualmente y entonces la tarea consiste en que se den cuenta de que agrupar de 10 en 10 es muy cómodo y por eso... el sistema numérico decimal». Pero no estoy indicando qué es contenido, qué es objetivo, qué es tarea... No es necesario, ¿no? [Se le indica que no hace falta que categorice cada evento e interpretación que haga].

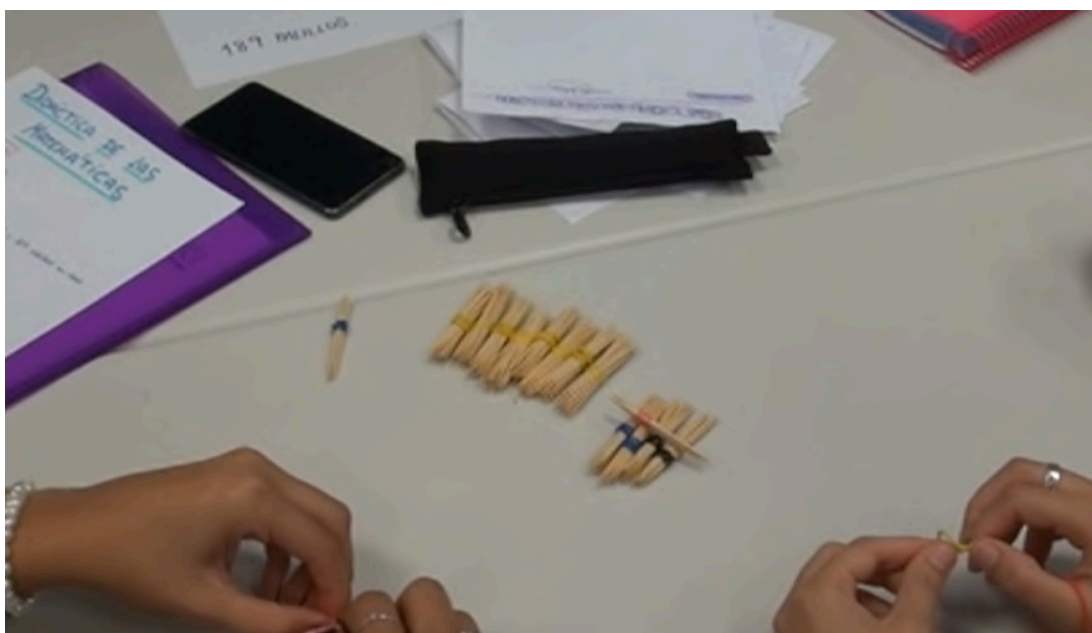
y cuando hayáis terminado esa parte, llamáis al grupo de al lado y decís: «venga, vamos a ver cuántos tenemos en total, visualmente, cómo lo organizasteis

vosotros, cómo lo organicé yo, a ver cómo lo tengo», ¿vale?; y luego todos. Tenéis un cuarto de hora, ¿vale?

Fragmento 2

[F = Formadora del vídeo]. [A = Alumnos]. [Comentarios de Lucas presentados en recuadros].

- F: Necesito saber si habéis tenido que llegar a algún acuerdo entre los grupos o...
- A: Sí, claro, todo ha sido un consenso, todo ha sido un consenso.
- F: Ah, vale, ha sido un consenso. ¿Qué acuerdo habéis tenido que...?
- A: Hemos explicado cada uno pues lo que significaba cada..., cada gomita.
- F: Y, por ejemplo, ¿vosotros de cuánto en cuánto lo habíais agrupado? Eráis los de 15, 10, 5, ¿no?
- A: Sí.
- F: ¿Y vosotros?
- A: 20, 10 y 4.
- F: 20, 10 y 4. Entonces, ¿habéis tenido que llegar a algún acuerdo alguno para reordenar?
- A: No, porque nos ha venido muy bien.
- F: ¿Os ha venido bien?
- A: Es que hemos sido muy inteligentes cogiendo el amarillo para los grandes [se refiere a gomas elásticas de color amarillo].
- F: Ahora los grandes de qué son, ¿de 20?
- A: De 20 y de 15, aquí están mezclados. ¿O los tenemos que reorganizar?



- F: Esto es superinteligente, ¿no? O sea, yo veo aquí..., digo: «en los amarillos, algunos tienen 20 y algunos tienen 15, búscate la vida Nuria».
- A: Pero son amarillos.
- F: Ya, pero entonces yo no sé... Yo digo: «vale, yo puedo ver 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 grupos amarillos», ¿no? Y ahora digo: «como mucho serán 160, si son todos de 20, pero... no necesariamente son 160, pueden ser menos».
- A: Bueno, pero como no lo sabes...
- F: ¿Entonces cómo sé cuántos hay?
- A: Te lo estamos diciendo, tienes que confiar en nosotros.
- F: No, en matemáticas la confianza no vale, uno tiene que...

Comentario 1: La docente les ha preguntado cómo lo han organizado, los alumnos están explicando cómo lo han hecho y ella les está haciendo ver que esa agrupación no es lógica porque, si barajas esos paquetes amarillos que han hecho, pues no van a saber cuántos palillos hay. Su objetivo va claramente encaminado a que todos los paquetes tengan el mismo número de palillos o que, por lo menos, todos los paquetes que tengan la goma del mismo color tengan el mismo número de palillos; a ser preferible, 10. Luego a lo mejor habla de otro sistema de numeración y dice que no necesariamente tiene que haber 10 en cada paquete, pero su objetivo es que ellos vean que es muy importante para el conteo que el número de palillos que uno coge y mete en una goma debería ser el mismo. Es un contenido matemático aunque no lo parezca a simple vista; su objetivo es hacerles ver que eso es importante para que luego puedan contar.

- A: Es que no sé, no lo entiendo. ¿Lo tenemos que reorganizar?
- F: Vosotros ya sabéis cuántos palillos tenéis, pero ahora, visualmente, tenéis que poder contarme a mí cómo sabéis que hay ese número de palillos, ¿no?
- A: Ah, pues habría que... ¿Y no podemos quitar las gomas y reorganizarlo?
- F: Sí, sí, sí, yo no dije que no pudierais quitar las gomas.
- A: Aaaaah.
- F: ¿Alguien dijo que no se podían quitar?
- A: Y nosotros diciendo que no se podían quitar las gomas...
- F: Y una duda más. Alguno de vosotros..., por separado, ¿no?, cuando lo teníais..., habéis escrito la cantidad que teníais, ¿no? Eh, 109 teníais uno...
- A: 104 y 85.

F: Por ejemplo, el 85 se escribe con un 8 y un 5. Ese 8 y ese 5, ¿estaban representados de alguna forma en...?

A: No.

F: No, vale. Y vosotros, la misma pregunta con lo vuestro.

A: No.

F: No había un patrón en cómo lo habíais representado, vale, ok.

Comentario 2: Como ha visto que no se están enterando mucho de lo que tienen que hacer [se ríe], no se han enterado de que lo que se busca es que visualmente se vea cuántos hay... Ellos tienen anotado cuántos hay y entonces lo dicen, pero como no se han enterado, vuelve a decirles: «oye, ¿ese 8 y ese 5 de los 85 palillos que tienes no lo has utilizado para nada?, ¿quizá ese 8 no significa que tienes que tener 8 paquetes de algo y ese 5 son 5 que te quedan sueltos?». Ella quiere que los alumnos lleguen a agrupar de 10 en 10 sin que ella se lo llegue a decir, pero ya está dando otra vez la misma pista que dio antes; ya empieza a dejarlo cada vez más claro porque ve que los alumnos no se enteran con esa primera instrucción [se ríe].

A: ¿Pero quieres que busquemos?

F: Quiero que reflexionéis sobre eso, pero ahora lo vamos a poner en común, ¿vale?

A: Vale.

F: ¿Ha sido operativo el que ellos hayan hecho 15, 10, 5... y vosotras tuvieras 20...? ¿Eso ha ayudado a la hora de ponerlo en común?

A: No, porque ahora hay que hacerlo otra vez.

F: Ahora hay que volverlo a hacer...

Comentario 3: Esa pregunta no es una pregunta accidental. Otra vez vuelve a insistir. Les ha dicho, sin decírselo, que monten todos los paquetes con el mismo número de palillos para que luego puedan tener un conteo más rápido. No se lo ha dicho, pero se lo ha dejado entrever. Y eso tiene que ver justo con lo que va a querer mostrar después ella que tiene que ver con el sistema numérico, posiblemente decimal; no recuerdo si era eso lo que contó o no [se refiere a que no recuerda lo que ocurrirá en el vídeo, ya que lo vio en la fase anterior], o si luego habló del binario, del octal... Lo veremos ahora en la parte 3.

Fragmento 3

[F = Formadora del vídeo]. [A = Alumnos]. [Comentarios de Lucas presentados en recuadros].

F: Me tenéis que decir cuántos palillos había en cada grupo inicialmente, antes de juntaros dos grupos, ¿vale? Entonces, por ejemplo, vosotros.

A: 87.

F: 87 [lo escribe en la pizarra]. Estamos de acuerdo, yo utilizo la escritura estándar que vosotros habéis visto en primaria, secundaria, bachillerato y al llegar aquí, ¿vale? Escritura estándar de nuestro sistema de numeración en nuestro contexto. Ese grupo, 87. ¿Cómo habíais hecho los grupos?

A: Pues hemos hecho, eh..., tres grupos de 20.

F: Tres grupos de 20, ¿cómo lo puedo poner? [Escribe un 3 en la pizarra].

A: Eh..., tres rosas.

A: 3 x 20.

F: ¿Tres rosas?

A: Sí.

A: No.

F: Si pongo tres rosas... ¿Todo el mundo que ha utilizado gomitas rosas ha atado 20?

A: No.

F: ¿Otras personas que han atado 20 han usado otro color?

A: Sí.

F: Uf, el color no me vale. ¿Cómo lo pongo?

A: 20 x 3.

A: 3 x 20.

F: 3 grupos de 20, ¿no? 3 x 20. [Escribe 3 x 20]. Y luego...

A: Pon en el 3 «color rosa» o algo así. Entre paréntesis.

F: Vale, vale. [Pinta una raya rosa sobre el 20]. Y luego... Esto son 60.

A: 9 x 3.

F: Y luego 9 grupos de 3, ¿no? [Escribe + 9]. ¿O 3 grupos de 9? [Borra el 9].

A: 3 x 9.

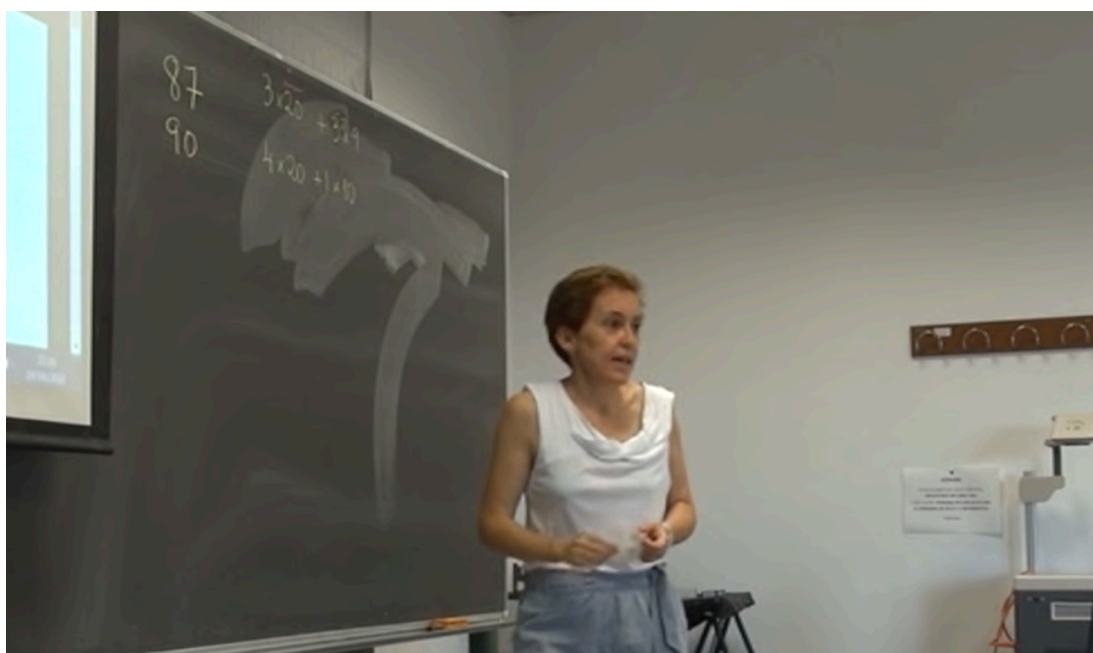
F: 3 grupos de 9 y el 9 lo habéis puesto de otro color, ¿vale? [Escribe 3 x 9].

- A: Sí.
- F: ¿Alguien más ha utilizado grupos de 20?
- A: Nosotros.
- F: Varios. ¿Alguien más ha utilizado grupos de 9? [Destaca con la voz el número 9].
- A: Nosotras.
- F: Vosotras, vale, y vosotras también, vale.

Comentario 1: Esto también es matemático total. Ella empieza un poco a escribir matemáticamente qué quiere conseguir con esos paquetes. Está intentando hacer una extrapolación de los paquetes al significado del número. No ha escrito de forma accidental el $3 \times 20 + 3 \times 9$, lo está escribiendo porque busca encontrar la escritura del número.

Siguiente equipo, vosotras.

- A: Nosotras, 90.
- F: En total, 90. [Escribe 90 en la pizarra].
- A: 4 de 20 y 1 de 10.
- F: [Escribe $4 \times 20 + 1 \times 10$]. Vale, o sea que de momento han utilizado grupos de 20, grupos de 10, grupos de 9, ¿vale?



En esta escritura [señala lo que ha escrito en la pizarra] yo veo 3 grupos de 20, 3 grupos de 9, pero aquí [señala el 87] no veo un 3 y un 3. Yo aquí veo 4 grupos de 20, 1 grupo de 10, pero aquí [señala el 90] no veo 4, 1. Con lo cual, parece que tampoco habíais encontrado vosotros un patrón entre cómo escribo la cantidad total con símbolos numéricos y visualmente qué veo en los palillos, ¿vale? De

momento, la transcripción de lo que veo en los palillos simbólico-numéricamente la tengo aquí a la derecha [señala el $3 \times 20 + 3 \times 9$ y el $4 \times 20 + 1 \times 10$], pero no veo ninguna relación con esto [señala el 87 y el 90].

Comentario 2: Otra vez, igual, intenta que los alumnos vean que es importante que la escritura del número se adecúe a lo que han hecho con los palillos. Otra vez busca el sistema numérico decimal, busca que ellos sean capaces de darse cuenta de que quizá era mejor que hubiesen puesto 8 paquetes de 10, 9 paquetes de 10..., para que todos hubiesen podido contar, para utilizar un sistema universal. Es la tercera vez ya que hace alusión a esto en grupo, ¿no? Y no parece que todavía lo estén sistematizando [se ríe]. Pero vamos, ella va introduciéndose cada vez más a lo que quiere realmente explicar, que lo veremos ahora.

Yo aquí estoy haciendo trampa porque estoy metiendo operaciones, nosotros ahora no estamos con las operaciones, estamos solo con el número, con la escritura del número, eso es lo que estamos trabajando, ¿no? Pero para ayudar a ver esa conexión de los palillos hacia lo simbólico-numérico, pongo, escribo eso de transición para ir copiando lo que me decís, ¿no?, porque tardo más, tardo más en dibujar los palillos, las gomitas rosas, no sé qué, podría sacar la foto de la cámara y ponerlo rápido, ¿no?, pero..., bueno, lo escribo, lo transcribo así. Ahora, otro grupo. Vosotros dos ya estáis, que luego, luego... Ah, venga, ya que estamos aquí [dibuja una llave a la derecha de lo que ya ha escrito en la pizarra]. ¿A qué consenso... habéis llegado...?

A: Pues 7 grupos de 20...

F: Muy bien, 7 grupos de 20 [señala el 3 y el 4]. Han visto rápido y han dicho: «bien, los dos hemos agrupado, sin habernos copiado, en grupos de 20, con lo cual automáticamente tenemos 7 grupos de 20» [escribe 7×20].

A: Luego, ellos los 27 de 3×9 ...

F: Sí.

A: ... los han dividido en 2 de 10 para que se junten con los nuestros de 10.

F: ¿Y por qué no habéis hecho vosotros... separar este de 10 [señala el 10 de 1×10] en 1 de 9 y 1 de 1?

A: Porque se quedaría 1 solo y luego...

F: Bueno, pobrecillo, ¿no? No pasa nada.

A: Y porque es más fácil sumar de 10 en 10 que de 9 en 9.

- A: Para ponerle la goma a 1...
- F: Para ponerle la goma a 1... Bueno... Eso... Puede ser una justificación, pero tampoco muy potente... Me gusta más lo que ha dicho ella, o ella...
- A: Que es más fácil sumar de 10 en 10 que de 9 en 9.
- F: ¿Por qué será más fácil sumar de 10 en 10 que de 9 en 9 para nosotros? [Hablan varios alumnos a la vez]. ¿Por qué es más fácil sumar para nosotros de 10 en 10 y no de 9 en 9? [Hablan varios alumnos a la vez]. Porque tenemos 10 dedos, por ejemplo, ¿no? Porque estamos más acostumbrados a 10, 20, 30, 40... [mueve las manos con los dedos estirados], ¿no?, como que nuestro sistema de numeración parece que...

Comentario 3: En la interacción con los alumnos, busca que justifiquen de forma adecuada por qué es mejor hacer paquetes de 10 que paquetes de 9. Vuelve otra vez a lo mismo, vuelve a intentar que aparezca en ellos la necesidad de agrupar de 10 en 10 porque es a lo que estamos acostumbrados cuando manejamos números, se agrupan de 10 en 10, ¿no? Busca otra vez esto en la interacción con los alumnos.

- A: Porque en verdad solo sumas de 1 en 1 y luego le pones un 0, entonces...
- F: Solo sumas de 1 en 1, elabora eso. Estamos en clase de matemáticas, ¿qué es 1, 1...?
- A: Pues por ejemplo, si tienes 30, pues 1 más 1 más 1, 3, como es 10, pues le pones el 0 y ya tienes los 30.
- F: ¿3 qué?
- A: 3 grupos de 10.
- F: 3 grupos de 10, muy bien. 3 grupos de 10, vale. [Vuelve a la pizarra a terminar lo que empezó a escribir].
- A: 3 de 20, 3 de 10 y 1 de 7.
- F: [Escribe, después de 7×20 , 3 10]. 3 de 10, llegasteis a romper estos [señala 3×9] en 2 de 10 más 7 sueltos, ¿no? [escribe $2 \times 10 + 7$ encima de 3×9]. Y entonces estos dos [señala 2×10] con este [señala 1×10] 3 y 7 palillos ahí sueltos [escribe, después de $7 \times 20 + 3 \times 10$, 7×1], ¿vale? Ahora, la cantidad total, ¿cuánto es? [señala el 87 y el 90].
- A: 177.
- F: 1, 7, 7 [escribe 177 a la izquierda del 87 y del 90]. ¿Hay aquí 1, 7, 7 por algún lado? [señala el 7 de 7×20 , al 3 de 3×10 y al 7 de 7×1]. Este [señala el 7 de 7×1]

parece que hay aquí, ¿no? Pero lo otro... no me cuadra mucho todavía... Vale, otros dos grupos.

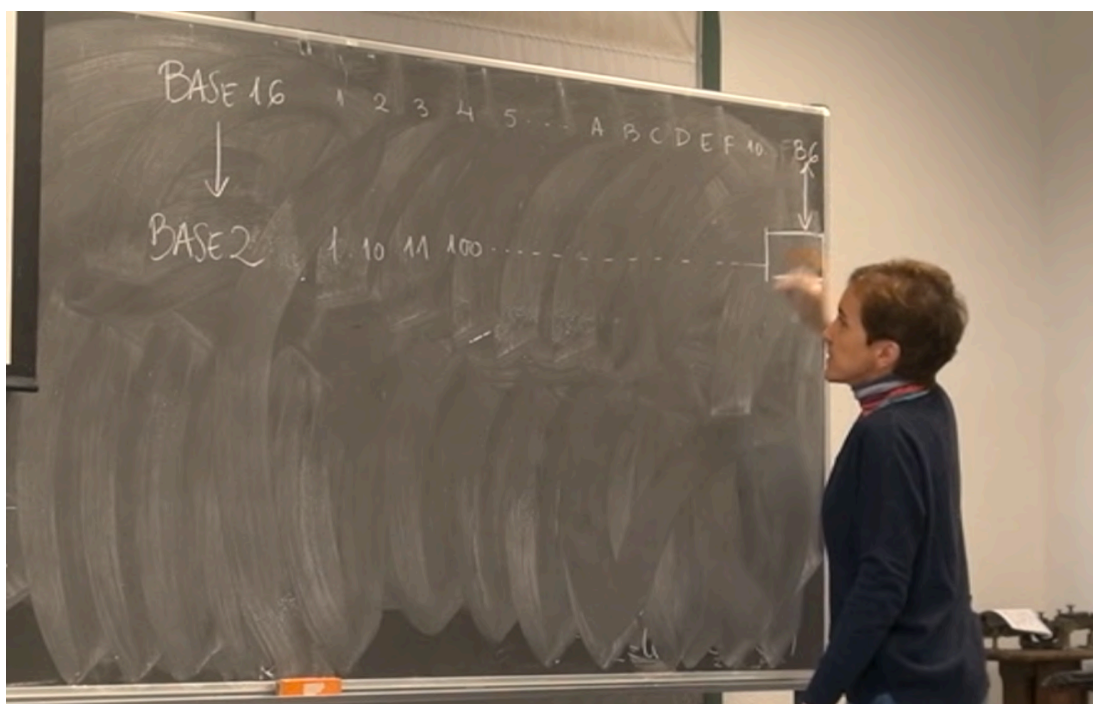
Comentario 4: Otra vez, ya al final del vídeo, ha intentado hacer ver al grupo-clase que la escritura del número es importante a la hora de agrupar palillos, buscando otra vez lo mismo, ¿no?, que surja en ellos la idea de que el sistema numérico decimal es el sistema universal porque es el más cómodo.



TRANSCRIPCIÓN DEL VÍDEO 2

[F = Formadora del vídeo]. [A = Alumnos]. [Comentarios de Lucas presentados en recuadros].

- F: Como me piden pasar de base 16 a base 2 directamente [escribe en la pizarra], pues Martín dice: «yo escribo aquí la secuencia 1, 2, 3, 4, 5..., A, B, C, D [dice 10, 11, 12, 13, señalando A, B, C, D], 14, 15 [escribiendo E, F], uno, cero [10]..., así hasta el B6», ¿vale? Y luego aquí en paralelo, voy uno [1], uno, cero [10], uno, uno [11], uno, cero, cero [100]..., hasta que pille aquí el que sea y ya está.



No he pasado por base 10, que es lo que me dice Nuria. Con lo cual, superado. ¿Pero qué pasó?

- A: Que es muy largo.

- F: Que es muy largo. Y que hasta en su casa, teniendo semanas, ha dicho: «paso». Tenías tiempo suficiente, porque había tiempo suficiente en dos semanas a hacerlo, pero... es largo y además un coñazo, con lo cual ha dicho: «paso». Con la idea Nuria ya se hace una idea de que lo he pensado, es un procedimiento válido, pero no ha sido eficaz, ¿vale?, entonces nosotros tenemos que seguir pensando porque tendremos que buscar alguna estrategia que sea eficaz. [Da la palabra a una alumna].

- A: ¿Se podría hacer la división?

F: ¿Qué división?

A: La de B6 entre 2. Es que no sé cómo plantearlo.

F: Ella dice: «oye, mira Nuria, cuando tú pasas de base 10 a base 2 haces grupos de 2 y divides de 2 en 2; pues ahora lo mismo, si estoy en B6 a base 2, divide entre 2». Pero aquí estoy escribiendo en base 16... [En la pizarra ha escrito B6 entre 2, con la caja]. Podríamos intentar hacerlo, pero... ¿sabemos hacerlo... o cómo va esto?

Comentario 1: Está buscando en la interacción con los alumnos que encuentren una estrategia óptima para poder pasar de base 16 a base 2. Primero ha explicado un mecanismo que funciona, pero ha explicado que es muy largo y tedioso, y ahora está buscando junto con los alumnos una manera de poder hacer esto algo más cómoda.

¿O mentalmente para hacerlo me vais a pasar a base 10, y hacéis la división en base 10 —que es lo que sabéis hacer—, y luego otra vez volvemos y entonces hacemos trampa porque pasamos por base 10? Si sabéis dividir un número en base 16 entre 2, si sabéis hacer esta división en base 16 —yo lo tendría que pensar, ¿eh?, así a capón no lo sé hacer, pero si lo pienso... —, si sabéis hacer eso, valdría.



Pero esto lo vamos a ver en el dossier 3, ¿eh?, multiplicación y división. Nosotros tenemos herramientas para dividir en base 10 y sabemos cómo hacer restas sucesivas y el algoritmo tradicional de la cajita que habéis ido haciendo... Podríamos abordarlo, por eso abordamos los problemas de..., el anterior, ¿no?,

de pasar de base 10 a base 2. Pero el de base 16 a base 2 hay que dividir en base 16. Sumar en base 16 lo sé hacer, restar en base 16 me cuesta un poco pero lo sé hacer, multiplicar en base 16 también podría hacerlo, con lo cual dividir podría hacerlo, pero... no me atrevo a hacerlo sin manos, hoy. Otra forma.

A: Fijándote en que 16 es 2^4 .

F: Fijándome en que 16 es 2^4 . Me lo voy a apuntar aquí [borra la pizarra y lo escribe].

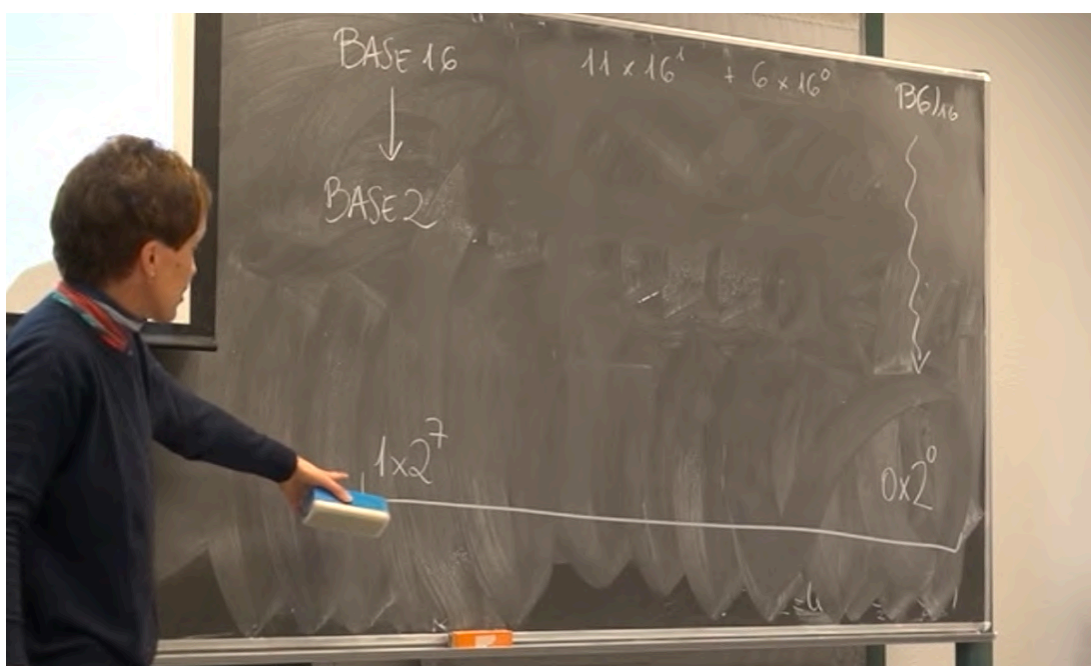
A: Yo lo hice así, pero luego algo no me cuadraba.

F: Muy bien, vale.

Comentario 2: En la interacción con los alumnos ha obtenido algo que ella piensa que puede servir y entonces lo ha dejado anotado en la pizarra [se refiere a que ha escrito «16 = 2^4 »] para poderlo utilizar un poco más adelante posiblemente.

A: Luego hice, 11...

F: Venga, vamos a poner el punto de partida, ¿no? El punto de partida es que tenemos 11×16^1 , ¿no?, más 6×16^0 . Este es mi B6 en base 16. Y yo quiero llegar aquí a... Me acuerdo de que empezaba en 1×2^7 y a acababa en 0×2^0 , ¿vale?

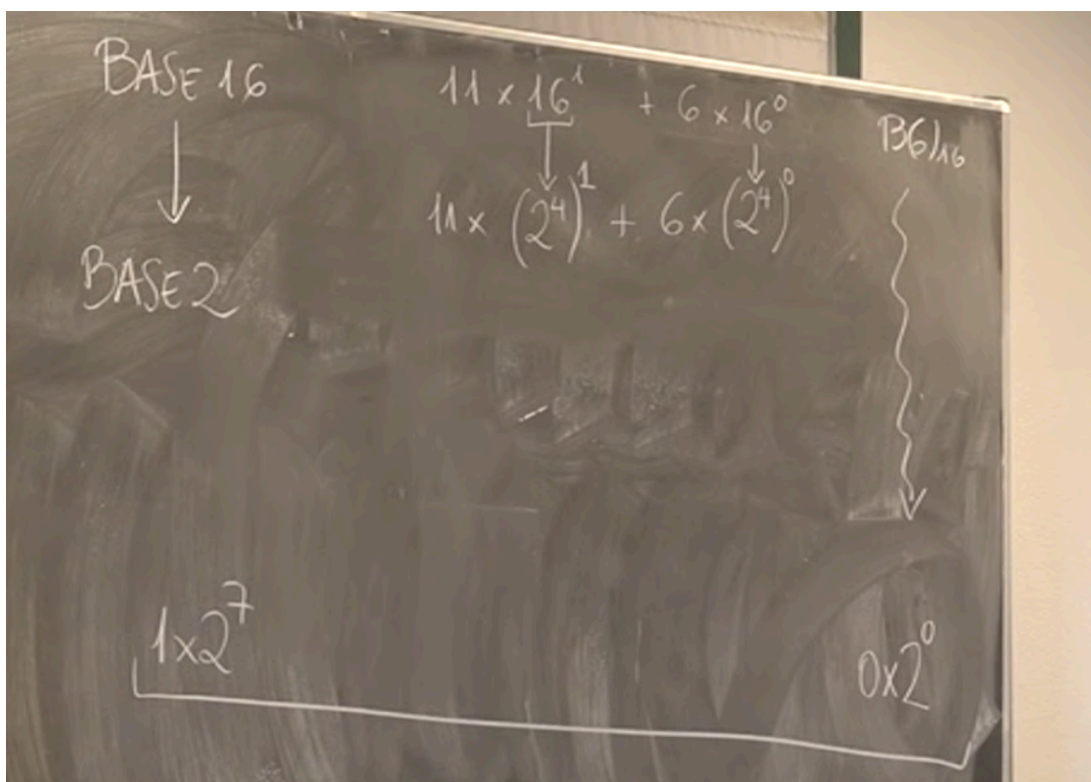


Entonces yo quiero pasar de ahí [señala la parte superior de la pizarra] a aquí [señala la parte inferior]. Si lo consigo, ya lo tengo en base 2, ¿no? Ya solo cojo los coeficientes de las potencias de 2 y ya lo tengo. Entonces, Pablo dice: «cambia este 16», ¿no, Pablo?

A: Sí.

F: Este 16 ponlo como $(2^4)^1$ y este 16 ponlo como $(2^4)^0$. ¿Vale? Yo tengo una expresión polinomial en base 16, quiero llegar a una expresión polinomial en base 2, y él me dice: «yo veo claro el cambio, 16 es 2^4 , cada vez que veas un 16 ponlo como 2^4 ». Vale, y entonces resulta que aquí tengo 11 grupos de esto y aquí tengo 6 de estos. ¿El 11 y el 6... los puedo dejar?

Comentario 3: Ha utilizado lo que le ha dicho el chaval que ha intervenido, que 16 se puede poner en potencias como 2^4 , y en su intento de escribir el B6 en base 16 como base 2, pues está transformando el 16 en potencias de 2, está intentando que los alumnos vean mediante transformaciones cómo van a poder escribir ese número en potencias de 2. Ya se ha cargado los 16, ya tiene potencias de 2, y ahora va a ir posiblemente a por el 11 y a por el 6, a descomponerlo de alguna manera para poderlo tener en potencias de 2. Así podrá expresar el número en base 2, es decir, como productos de coeficientes por potencias de 2, siendo los coeficientes solamente unos y ceros. Y a eso se va a dedicar ahora, entiendo, vamos a ver. Pero vamos, está allanando el camino con esa notación que ha escrito ahora: « $11 \times (2^4)^1 + 6 \times (2^4)^0$ ».



A: No, los pasas a base 2.

F: Los paso a base 2. ¿Sé pasar 11 a base 2?

- A: Sí.
- F: Vale, vamos a escribir 11 en base 2.
- A: 1, 0, 1, 1.
- F: 1×2^3 , ¿no?
- A: Sí.
- F: Más...
- A: Cero.
- F: 0×2^2 . De momento llevo ocho. Más...
- A: Uno.
- F: 1×2^1 . Ya llevo 10...
- A: Más uno.
- F: Más 1×2^0 . Ahí ya tengo 11, ¿vale? Esta es una manera de escribir 11. ¿Cómo? Como potencias de 2. Expresión polinomial del 11 en base 2, como potencias de 2, ¿vale? Y esto va multiplicado... 2 elevado a la 4 y luego lo elevo a la 1, ¿cuánto me queda...? 2^4 es $2 \times 2 \times 2 \times 2$ y luego eso lo elevo a la 1, es decir, que lo copio una vez, o sea que me queda...
- A: 2^4 .
- F: 2^4 . Más... El 6, ¿lo dejo?
- A: No.
- F: No. ¿Cómo escribo 6 en base 2?
- A: 1×2^2 .
- F: 1×2^2 , que son 4.
- A: 1×2^1 .
- F: 1×2^1 ... Y 0×2^0 [lo va escribiendo todo en la pizarra]. Ahí pone 6, una manera más chula, ¿no?, de poner 6 como potencias de 2, ¿no?, como un polinomio con potencias de 2. Vale, y luego estaba por... Y ahora tengo $(2^4)^0$.

Comentario 4: Ha escrito... Está traduciendo los coeficientes que tiene ahí, el 11 y el 6, los ha puesto en base 2 y ahora su objetivo va a ser aplicar la propiedad distributiva para tener ya finalmente el número, que estaba inicialmente escrito en base 16, en base 2. El objetivo matemático que busca es que los alumnos vean que haciendo transformaciones se puede llegar a pasar de base 16 a base 2 de forma cómoda. Entonces, ha procurado escribir de forma adecuada el número para llegar a ese objetivo; ya lo tiene casi. Lo busca en la interacción con los alumnos, ella va preguntando a los alumnos, les hace ver como que lo

están descubriendo ellos, aunque realmente va ella guiando todo el proceso.

¿Eso qué es?

A: Uno.

F: Uno. ¿Y si lo quiero poner como potencias de 2?

A: 2^0 .

F: 2^0 , muy bien. 2^0 [lo escribe en la pizarra]. Mira qué contenta estoy, porque $2^0 \times 2^0$ es 2^0 y el coeficiente es 0, que es este. Y $2^4 \times 2^3$ es 2^7 y el coeficiente es 1, que es este. Pues como que ya casi lo tengo, ¿no? ¿Sí o no?

A: Sí...

BASE 16

↓

BASE 2

$$11 \times 16^1 + 6 \times 16^0$$

$$\downarrow$$

$$11 \times (2^4)^1 + 6 \times (2^4)^0$$

$$\downarrow$$

$$[1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0] \times 2^4 + [1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0] \times 2^0$$

$$\downarrow$$

$$1 \times 2^7$$

$$\downarrow$$

$$0 \times 2^0$$

F: Vale, y ahora... Venga, ¿cuál será el coeficiente...? Venga, vamos a poner aquí 2^6 , paso a la siguiente varilla del ábaco, ¿eh? ¿Cuál será el coeficiente de 2^6 ?

A: Cero.

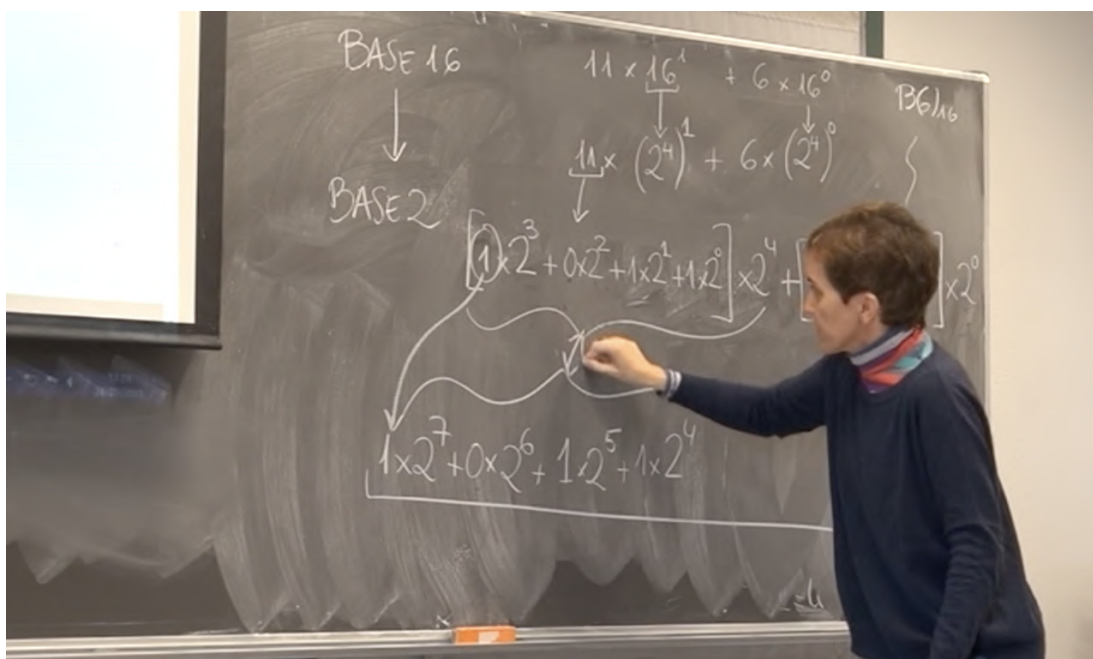
Comentario 5: Ahora ha hecho un símil, posiblemente haya hecho alguna práctica previa con materiales manipulativos con los alumnos, en concreto con el ábaco, y ha hecho un símil con los coeficientes de las potencias de 2; cada vez que se cambia de potencia, pues estamos cambiando de varilla del ábaco, para que ellos vean que el material tiene que ver

con la escritura, es decir, intenta conectar la escritura numérica con el material que han utilizado.

- F: Cero, porque ¿cómo consigo yo 2^6 ? $2^4 \times 2^2$, ¿no? 2^4 es $2 \times 2 \times 2 \times 2$, 2^2 es 2×2 , ya tengo ahí los seis doses, ¿vale?, que está aquí, y el coeficiente cero. ¿Por aquí puedo llegar a 2^6 ?
- A: No.
- F: No, pues ala. 0×2^6 . Genial, porque era lo que me había salido antes. Ahora, más... Siguiendo varilla del ábaco, 2^5 . ¿Dónde consigo yo 2^5 ? Aquí [señala el corchete de la derecha] como mucho llego a 2^2 , me olvido de esto. $2^4 \times 2^1$ [señalando el corchete de la izquierda] es 2^5 , ¿no?
- A: Sí.
- F: Vale, ¿y qué coeficiente lleva?
- A: 1.
- F: 1. ¿Y era el qué tenía que llevar?
- A: Sí.
- F: Sí, vamos bien. Y ahora, 2^4 , ¿cómo consigo 2^4 ?
- A: Con 2^0 ...
- F: $2^4 \times 2^0$, ¿no? Tengo aquí cuatro copias del 2 y aquí ninguna, pues tengo cuatro copias del 2 multiplicándose por sí mismo, y el coeficiente 1. 1×2^4 [lo escribe en la pizarra]. Oye, mira, todo esto se ha convertido en esto.

Comentario 6: Con la notación que tiene en la pizarra, con las cuentas que ha realizado, está explicando la distributiva del producto con respecto de la suma. Ha remarcado, para que los alumnos no se pierdan con los cálculos, que las cuentas que ha hecho del 11×16^1 se corresponden con lo que tiene dentro del corchete por 2^4 y que se corresponde con lo que tiene en la llave abajo, y ahora pondrá un «más» y seguirá explicando la propiedad distributiva con lo que tiene en la derecha.

Lo veis, ¿no?



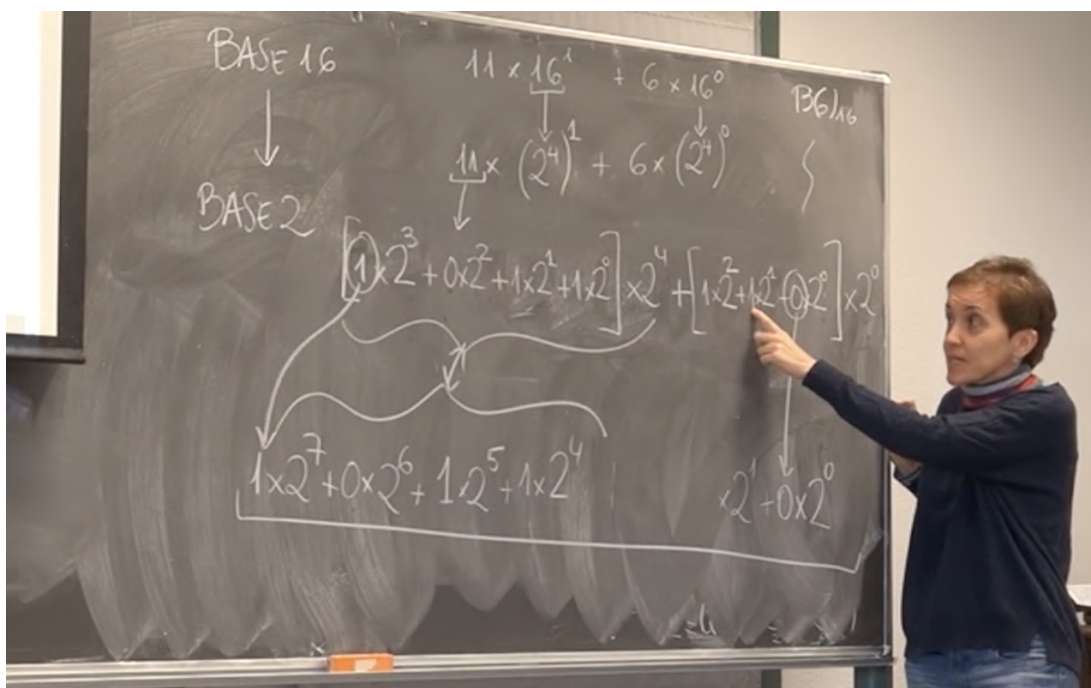
¿Qué es lo que he hecho? Propiedad distributiva. Voy multiplicando el 2^4 por cada uno de los sumandos, ¿vale?

Comentario 7: No había dicho el nombre hasta ahora, ahora ya lo ha soltado. Ha conectado lo que está haciendo con una propiedad de los números naturales que posiblemente ya les haya contado, si es que está ahora hablándoles de cambio de base. Entonces les ha hecho ver que esto es una propiedad que ya conocen.

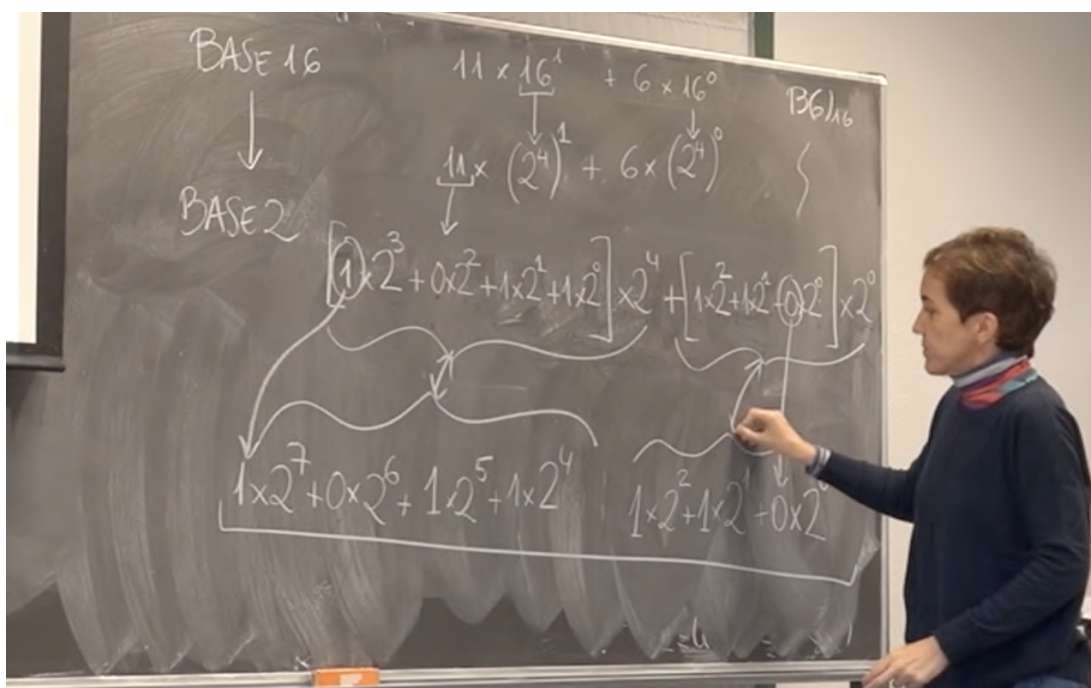
Muy bien. Y ahora, tiro por aquí, voy desde aquí [señala el 2^0 de la parte inferior derecha de la pizarra]. 2^0 , muy bien. Siguiendo varilla del ábaco, 2^1 . ¿Qué coeficiente tiene 2^1 ?

A: 1.

F: 1, que está aquí [lo señala], ¿vale?



Porque sería $2^1 \times 2^0$, que es 2^1 , y lleva un 1 delante, un 1 [lo escribe abajo]. Voy bien. Y ahora, $2^0 \times 2^2$, 2^2 [lo escribe abajo], va con un 1 [lo escribe abajo]. O sea que esto que tengo aquí se convierte en esto que tengo aquí.



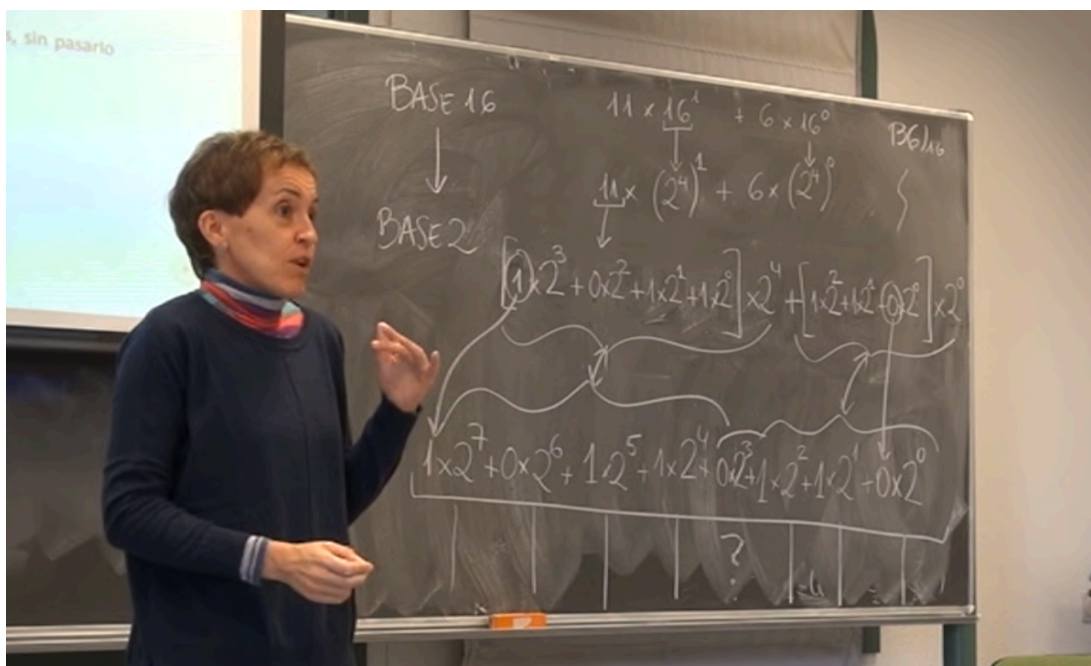
Y ahora, Pablo, ¿qué te pasó?

A: Que como... Que claro, los iba a juntar, pero dije: «me falta el 2^3 ».

F: Me falta el 2^3 . Pablo dice: «varilla del ábaco del 2^7 , 2^6 , 2^5 , 2^4 , ¡uy!, 2^2 , 2^1 , 2^0 ». «¡Uy!», dice Pablo [y dibuja una interrogación en la posición del 2^3].

A: Pues si no hay, un cero.

F: Pues se pone el 0, ya está. Lo pongo aquí: «+ 0 x 2³», y esto lo englobo aquí.



¿Qué es lo que pasa? Que escribo el 6 de una forma muy especial. Yo escribo el 6..., acordaos que esto era mi 6 [señala $1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0$], ¿eh?, esto era el 6, que es este 6 [señala el de un nivel anterior, más arriba en la pizarra], ¿vale? Yo he escrito el 6 como $1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0$, pero también puedo escribir el 6... $0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0$. No es lo estándar, porque como los ceros ahí no aportan mucho, pues no es lo estándar, pero si no me quiero olvidar de una de las varillas y no quiero tener un problema, como tenía Pablo, pues yo añado ahí para escribir el 6 de otra forma, ¿vale?

Comentario 8: Ha hecho lo mismo que antes, ha seleccionado con llaves lo de arriba y con llaves lo de abajo. Se está preparando ahí abajo unas cajas para poner el número escrito, no sé si lo hará, pero parece que lo tiene preparado para escribir ahí el 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1 y el 0, para que quede ese número en base 2. Ha organizado bastante bien la pizarra para que le quepa todo sin necesidad de borrar. Y bueno, ha obtenido lo que quería. Y ahora vamos a ver qué continúa diciendo.

Entonces, moraleja que cuentan los *youtubers*, por ejemplo David Calle, dice: «vamos a pasar de base 16 a base 2, ¿qué se hace chavales? Mirad, ¿veis este 11 que está aquí? [señala el de arriba de la pizarra], pues escribís este 11 en base 2: 1, 0, 1, 1 [señala los coeficientes de la expresión polinómica de la parte inferior de la pizarra]; ¿veis este 6 que está aquí? [señala el de arriba de la pizarra], pues lo

escribís en base 2, pero cuidadín chavales, que hay que poner cuatro, ¿por qué?, porque 16 es 2^4 ». Y entonces dice: «vamos a escribir 6 en base 2 con cuatro: 0, 1, 1, 0». Y dice: «y ahora lo juntáis, fin». A mí no me vale porque yo no soy David Calle, yo no estoy de *youtuber*, *influencer*, superfamosa ayudando a los chavales a aprobar exámenes, que es un trabajo muy digno y que está bien,

Comentario 9: Ahora les ha contado una regla nemotécnica que tiene mucho que ver con el contenido matemático y que tiene de trasfondo que 16 es 2^4 . Entonces, les ha explicado que basta con que escriban un coeficiente en base 2 utilizando cuatro cifras y el otro coeficiente en base 2 utilizando cuatro cifras y que las solapen. Y ha hecho alusión a David Calle y les ha explicado que es un youtuber para llamar quizá un poco la atención sobre el contenido matemático que a ella le interesa. Está diciendo que a ella no le vale, porque quiere que lo justifiquen en el examen, pero en el fondo sí le vale que lo aprendan así, aunque no se lo vaya a puntuar al máximo, es decir, quiere que sepan hacerlo al menos para poder comprobar si lo que han hecho manipulando el número les coincide con lo que David Calle dice que pueden hacer para obtener el número en base 2 de forma rápida.

y además el tío es un *crack*, muy suelto, lo hace muy bien; yo estoy formando maestros, entonces tenéis que entender cómo hemos pasado de aquí [señala la parte superior de la pizarra] a aquí [señala la parte inferior de la pizarra] a través de esto [señala la parte media de la pizarra]. Entonces, la pregunta es: ¿se puede pasar de base 16 a base 2 sin pasar por base 10? Sí. Lo acabamos de hacer, ¿no? Es que me miráis con una cara... ¿Y por qué se puede? ¿Qué pasa si yo esto [el ejercicio] os lo doy en base 15 y, en vez de en base 16, todo el problema es en base 15?

A: Que sería $2^4 + 2^0$.

F: ¿ $2^4 + 2^0$ es 15?

Comentario 10: Ha lanzado una pregunta para que los alumnos reflexionen, para intentar interaccionar con ellos: ¿se puede pasar de base 16 a base 2?, pues la respuesta es que sí; ¿se puede pasar de cualquier base a cualquier base sin pasar por base 10? Pues intenta ver qué opinan los alumnos y está argumentando con ellos. Esta chica ha hecho una aportación que no le va a conducir a nada... Está intentando hacerles ver por qué sí se puede pasar de base 16 a base 2 de forma rápida y por qué pasar de base 15 a base 2 no es

tan rápido, habría que realizar bastantes más cálculos.

A: O sea, no..., perdón. $2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0$.

F: Vale, y entonces tendría que ir haciendo todas las distributivas, todo el follón, ahí. ¿Y David Calle me podría dar el algoritmo...? Escribes, imaginaos el mismo número, ¿eh?, B6, en vez de en base 16, en base 15. ¿David Calle me puede decir...? Aquí tengo el 15, ¿no?, aquí tengo el 15 [los escribe encima de los 16], y David Calle me dice: «escribe esto [señala el 11] en base 2, escribe esto [señala el 6] en base 2, con tres y medio dígitos o cuatro dígitos o... tres dígitos, y lo pones junto. ¿Valdría ese algoritmo?

A: No.

F: No. ¿Vale? O sea, que poder se puede pasar, vas con paciencia escribiendo cada una de las expresiones que aparecen, pero un paso directo solo se puede cuando una base es potencia de la otra base,

Comentario 11: Ahí ha dado un contenido..., algo importante. ¿Cuándo se puede pasar de una base a otra de forma inmediata? Pues cuando una base es potencia de la otra base. Para llegar a eso podría haberlo contado al principio y después hacer ejemplos, pero ha decidido primero poner un ejemplo, que vean que puede ser sencillo pasar de base 16 a base 2. Después les ha preguntado qué harían con un número en base 15, se han perdido un poco, se podría pasar a base 2, pero es ciertamente muy laborioso. Y ahora les está diciendo que a lo mejor pasar de base 8 a base 2 pues también puede ser rápido, ¿no?, pasar de base 4 a base 2 también puede ser rápido; se puede pasar de una base a otra siempre y cuando una puedas ponerla como potencia de la otra; esto, que es un resultado importante, lo ha enunciado como consecuencia de un ejercicio que ha resuelto con ellos. Cuando hace aserciones de este tipo, que ella considera importantes, alza la voz; lo que pasa es que no te lo estoy comentando porque me has dicho que no... [se refiere a mí, investigador que está con él viendo el vídeo], esto no es relevante en este caso, ¿no? [Se le indica que puede comentarlo si considera que tiene relación con aspectos matemáticos o didáctico-matemáticos de la práctica de enseñanza de la formadora]. Bueno, en este caso sí tiene relación. Cuando da un resultado importante, alza la voz. Incluso, cuando quiere conseguir que los alumnos asocien que algo que está diciendo puede tener relación con la solución del ejercicio, alza la voz; como cuando decía: «el 72, el 7 y el 2 [lo dice subiendo el volumen], ¿tiene algo que ver con las gomas?»; pues también alzaba la voz. Es una

técnica que utiliza generalmente Nuria cuando quiere enfatizar algo que es importante matemáticamente para los alumnos.

que es lo que hemos visto con 16, que es potencia de 2, que es 2^4 . ¿Está claro hasta aquí? ¿Sí?

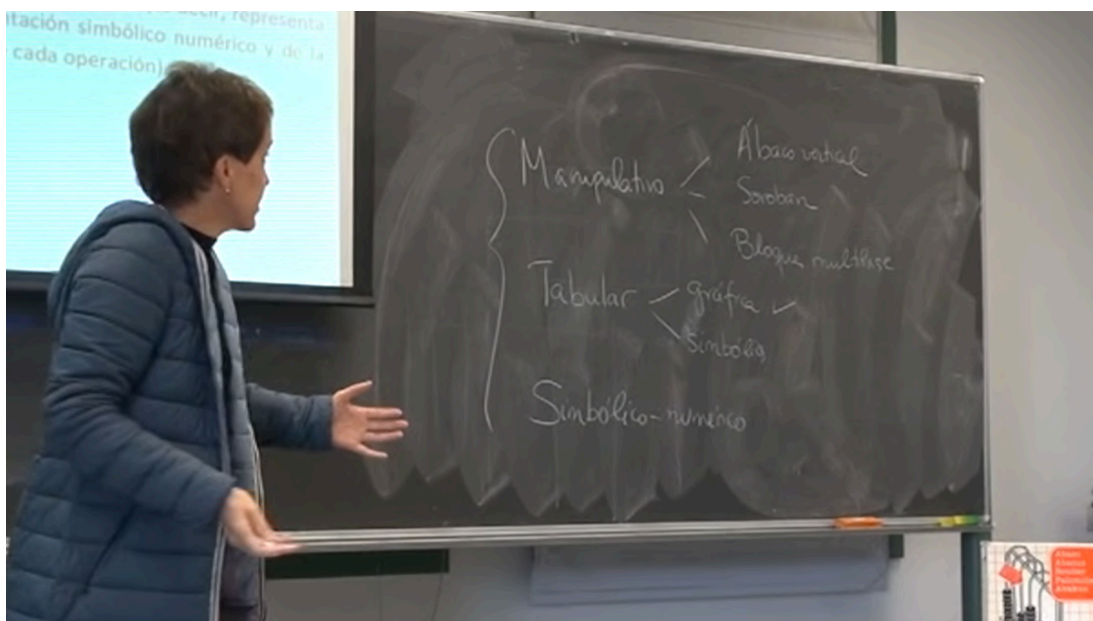
TRANSCRIPCIÓN DEL VÍDEO 3

Fragmento 1

[F = Formadora del vídeo]. [Comentarios de Lucas presentados en recuadros].

- F: Entonces, la idea es..., el ejercicio 4, que está proyectado en la pantalla, es el ejercicio 4 de la última hoja, de la hoja del dossier 2, con el que vamos a trabajar ya esta semana, ¿vale? En ese ejercicio hay cuatro operaciones, cuatro problemas, cuatro operaciones. Tenéis que hacer las cuatro operaciones..., representarlas de distintas maneras. Voy a poner en la pizarra de cuántas maneras, ¿vale? Entonces, acordaos que nosotros estamos trabajando con material manipulativo [escribe en la pizarra «Manipulativo»], ¿vale? Entonces, en primer lugar tenéis que representar esta suma $[210 + 543]$, esta suma $[315 + 429]$, esta resta $[135 - 24]$ y esta resta $[704 - 45]$, por partes [va señalando en el PDF proyectado en la pantalla], ¿no?, empezáis con la primera... Tenéis que representarlo [escribe en la pizarra] con ábaco vertical, después en el sorobán y después con los multibase, ¿vale? Y tenéis que tener las tres representaciones del proceso delante para saber comparar cada dos, ¿vale?, para saber entender cómo se traduce una en otra. Lo que no quiero es que me digáis: « $210 + 543$ son 753; Nuria, te he representado 743* en el ábaco vertical, en el sorobán y en los bloques multibase». No quiero la representación del resultado, quiero la representación del proceso, de la suma, de la idea «suma». ¿En qué os tenéis que basar?, en la definición de la suma que vimos el otro día, ¿no?, que es: elijo un representante de uno, elijo un representante del otro y hago la unión, agrupo, junto, como lo queráis pensar, ¿vale? Entonces, hay que representar el proceso, el proceso, no solo el resultado final de ese proceso. Entonces, tenéis que representar el proceso de tres maneras en el sistema de representación manipulativo [señala lo que ha escrito antes en la pizarra], ¿vale? Y en paralelo [empieza a escribir en la pizarra] tenéis que representar el proceso en el sistema de representación simbólico-numérico; el enunciado está dado en ese sistema de representación, ¿vale?, esto es sistema de representación simbólico-numérico, pues tenéis que representar el proceso, las dos sumas y las dos restas, en ese sistema, ¿vale? Y luego, en medio [escribe en la pizarra], hay una representación que es formato tabla o tabular, de la que no he hablado explícitamente, pero que me gustaría que construyerais vosotros, ¿vale?

Necesito que construyáis, por ejemplo, esta suma [señala $210 + 543$], que la hagáis en tabla, con una tabla, como se os ocurra a vosotros diseñar la tabla, ¿vale? La tabla [escribe en la pizarra] puede ser más gráfica, puede tener características gráficas, o puede tener características más simbólicas; a mí me va a interesar más la que tenga características más gráficas, luego ya veremos en detalle cómo, pero tenéis que intentar construirlo vosotros sin que yo os haya hablado de eso explícitamente, ¿vale?



Entonces, paso 1, aquí [señala la parte de representación manipulativa de la pizarra], en paralelo paso 2, simbólico-numérico [lo señala en la pizarra] y luego ya, según vayáis trabajando los cuatro ejemplos, igual ya se os va ocurriendo cómo representarlo con una tabla y cómo trabajar con una tabla ese tipo de operaciones. ¿Está claro?

Comentario 1: Bueno, va a utilizar la clase para algo muy potente, que es para representar en este caso sumas y restas mediante diferentes sistemas de representación. Les ha dado, por lo que parece, tres materiales: el ábaco vertical, el sorobán y los bloques multibase, y quiere que sean capaces de representar cómo [enfatiza «cómo»] se hace la suma de esos dos números con esos materiales, que además hagan la suma con el sistema de representación simbólico-numérico que ya conocen y que de alguna forma interpreten qué puede significar para ellos hacer una suma con tablas. Si conectan esas tres formas de representar la suma, entonces habrán aprendido a sumar de verdad. Si la clase se

desenvuelve correctamente, desde luego habrá servido para mucho. Y ese esquema que ha hecho en la pizarra está bien porque lo va a dejar, posiblemente. Lo que ella quiere ver es que una suma, una resta, una operación matemática, se puede expresar mediante distintos sistemas de representación, y ahí los ha dejado. Lo que llevamos hasta este minuto 3.37, todo es matemático, ¿no?, está dando unas instrucciones matemáticas del proceso que quiere que hagan y además de lo que ella quiere que aprendan.

Yo me voy a pasar por las mesas y me vais preguntando todas las dudas que os surjan. No voy a pedir que me mandéis nada, ¿vale?, porque todavía no he revisado las últimas fotos que me habéis mandado, con lo cual estoy un poco desbordada; como no sois muchos, yo voy por vuestros puestos. Ahora bien, en el grupo anterior han decidido grabar pequeños vídeos o hacer fotos de los procesos que iban construyendo por llevárselo como material para estudiar, a mí me parece una buena idea, pero ya vosotros hacéis lo que queráis, a mí no me lo tenéis que mandar, pero si queréis, una vez que hayáis construido, por ejemplo, con el ábaco japonés, imaginaos, esta resta de aquí [señala el PDF en la pantalla], y decís: «ah, pues nos vamos a grabar», uno lo hace otro lo graba y lo tenéis de recuerdo, ¿no?, para cuando tengáis que estudiar. ¿Cómo voy a pedir yo eso en el examen? Pues no lo puedo pedir porque no puedo llevar un sorobán para cada uno porque tengo un día, 2 horas y media o 3, para haceros el examen final de la asignatura; pero para mí esto es muy importante, entonces yo voy a pedir que me representéis gráficamente, gráficamente, vuestro proceso de respuesta con un ábaco vertical, con un sorobán o con los bloques multibase, que es lo que yo luego voy a hacer aquí en la sesión final de discusión cuando acabemos esta hora de clase. Yo no voy a coger el ábaco aquí, lo voy a poner delante de todos y tal —podría hacerlo, pero no lo voy a hacer—, lo voy a hacer representando gráficamente el material manipulativo y así es como lo voy a pedir el día del examen,

Comentario 2: Alude al examen porque cuando uno alude al examen ya todo el mundo escucha, ¿no? Y les ha explicado qué es lo que para ella es importante, vuelve a incidir en que no es importante que representen el número final, sino que representen el proceso, y entonces les ha dicho que les va a preguntar esto en el examen y que les va a preguntar de forma gráfica que vayan indicando cómo van realizando ese proceso. Les ha indicado que

pueden grabar vídeos para luego recordarlo bien, que esto es algo importante y que además es algo que lo va a preguntar de la única forma que lo puede preguntar. Quiere que entiendan que representar sumas y restas con material manipulativo es algo matemáticamente interesante porque les va a enseñar cómo se suma de verdad. Y vuelve a alzar la voz otra vez cuando ha dicho eso, ¿no?, es una técnica que utiliza ella generalmente parece, ¿no?, cuando dice algo importante, alza la voz; algún alumno un poco ágil podría tenerlo en cuenta para ir anotando estas cosas, porque se le nota bastante cuando va a decir algo que es trascendente.

porque os voy a dar un cuadernillo y lo tenéis que hacer gráfico, ¿vale? Bueno, pues empezad, están escritas en un orden muy concreto, empezad a hacerlas en ese orden y luego ya discutimos sobre por qué están puestas en ese orden, ¿vale?

Fragmento 2

[F = Formadora del vídeo]. [A = Alumnos (A1, A2 y A3)]. [Comentarios de Lucas presentados en recuadros].

- A1: Estamos rayados con la última resta.
 F: Vale, a ver, empezad.
 A1: Son 704 - 45.
 F: Vale.
 A1: Entonces, aquí no le podemos restar 5.



- F: Así tal cual está, puedes restar..., ¿cuántas puedes quitar?
 A1: Cuatro.
 F: Cuatro, vale, sí.
 A1: Entonces voy a suponer que aquí [señala la varilla de las decenas] hay un 1.
 A2: No, que hay 10.
 A1: Que hay 10, para que sea 14...
 F: A ver, olvídate de los «suponer». Tú dices: «tengo que quitar 5», ¿no?, quito 1, quito 2, quito 3, quito 4 [quita cuentas de la varilla de las unidades] y ahora ponme aquí más para que yo quite, tal y como está.



- A1: Habría que poner 10 y quitamos 1.
- F: Pero ¿cómo me ponéis..., cómo me ponéis ahí? A ver Pablo.
- A2: ¿Que lo ponga?
- F: No, no, que me digas... Yo aquí [señala la varilla de las centenas] tengo ahora mismo 700, ¿no? Escribe 700 de otra forma para que yo tenga bolas...
- A1: Aaaaah, hay que añadir una aquí [señala la varilla de las decenas].
- F: Venga, a ver.
- A2: [El alumno A2 quita una cuenta de la varilla de las centenas y la pone en la de las decenas].
- F: ¿Aquí sigue poniendo 700?
- A1: No, no, no, hay que poner una nueva aquí [vuelve a poner la cuenta en la varilla de las centenas —la que había puesto en la varilla de las decenas el alumno A2— y pone una nueva en la varilla de las decenas].
- F: A ver [quita la cuenta de la varilla de las decenas]. Teníamos 704, hemos quitado 4, tengo 700, ¿vale?
- A1: Sí.
- F: Ahora, escribe 700 de otra forma para poder quitar otra.
- A1: Pues...
- F: ¿Cómo podéis escribir 700 de otra forma?
- A1: Que aquí [señala la varilla de las decenas] haya 9...
- F: Venga.
- A1: Y aquí [señala la varilla de las unidades]..., 9.

F: A ver, para que haya aquíiii... [señala la varilla de las decenas], vamos a ver, ¿cómo consigo aquí decenas? Sin cambiar el número...

A1: Si quito esta... [quita una cuenta de la varilla de las centenas].



F: Venga, muy bien.

A1: Pongo aquí 10 [señala la varilla de las decenas].

F: Venga, dale.

Comentario 1: Está intentando hacerles ver cómo hacer la resta con el ábacó vertical y está intentando que transformen, una vez que han quitado las unidades, que ahí sí que no había ningún problema... Pues el objetivo es que intenta hacer ver al chico cómo, para seguir realizando la resta, necesita a partir de una unidad de orden superior conseguir diez unidades de orden inferior, porque, si no, no va a poder coger y hacer esa resta; por eso le está diciendo todo el rato: «¿cómo puedes escribir este número de otra forma?». «De otra forma» significa que utilice el sistema numérico decimal para decir: «quito una centena y meto diez decenas, quito una decena y meto diez unidades, con eso puedo seguir restado». Cómo expresar un número de diferentes formas es lo que ella les intenta hacer ver para que puedan hacer la resta con el ábacó. Esto es matemático también, porque aunque les esté enseñando a hacer restas con el ábacó, les está enseñando a restar, es decir, por qué se resta como se resta con el algoritmo; se resta como se resta con el algoritmo porque nosotros hacemos esto que se hace con el ábacó.

A1: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10.

A3: ¡Ah, vale!



F: ¿Ahora aquí pone 700?

A1: Sí.

F: ¿Y cómo está escrito 700?

A3: Mal.

F: 6×10^2 , ¿no?, 6×100 , más...

A2: 10×10^1 .

F: 10×10^1 , muy bien. Ahora, ¿puedo quitar aquí [señala la varilla de las unidades] que quería quitar una? ¿Tengo?

A1: No.

F: No, ¿cómo puedo volver a escribir 700 para tener aquí [varilla de las unidades]?

Comentario 2: Cuando les ha dicho: «¿cómo está aquí escrito 700?», el chico ha dicho: «sí, aquí hay 6 y ahí hay 10», y ella ha dicho: «bien, hay $6 \times 10^2 + 10 \times 10^1$ ». Es decir, ha intentado conectar el ábaco con el sistema de numeración decimal, es decir, la forma aritmética, la forma numérica, con la forma manipulativa.

A1: Pues quito de estas [quita una cuenta de la varilla de las decenas] y añado 10 aquí [señala la varilla de las unidades].

F: Vale, venga.



- F: Vale, ¿y ahora puedes quitar la que te faltaba por quitar?
- A1: [La estudiante A1 quita una cuenta de la varilla de las unidades].
- F: Ya está. Ya habéis quitado 5 y teníais que quitar 45, ¿no? ¿Cuánto os falta por quitar?
- A1: Sí, ahora aquí [señala la varilla de las decenas] hay que quitar 4.
- F: Pues ya está, ¿no?
- A1: Ah, vale, vale. Gracias.



- F: ¿Entonces qué habéis hecho para reescribir el 700...? O sea, yo tenía 700 ahí, tenía aquí 700 [deja el ábaco con 7 cuentas en la varilla de las centenas], ¿qué habéis hecho?

A2: Como es sistema decimal, pues aquí [señala la varilla de las decenas] hay 10, porque... representamos un 0, pues quitar una de aquí [varilla de las centenas] y ponerle las 10 aquí [varilla de las decenas] para luego restarlas aquí [varilla de las unidades].

F: O sea que habéis..., ¿agrupado o desagrupado?

A1: Desagrupado.

A2: Aquí desagrupado.

F: Desagrupado. Habéis desagrupado una centena en 10 decenas y luego una decena la habéis desagrupado en 10 unidades.

A1: Vale, es que cuando tú lo haces en papel no haces esto así.

F: Ah, pues dime entonces qué es lo que haces en papel.

Comentario 3: La chica cree que hace en papel algo distinto a lo que está haciendo en el ábaco, claramente. Entonces, Nuria le ha dicho: «¿qué haces en papel?»; intenta hacerle ver que es lo mismo, que restar en papel es equivalente a restar con el ábaco.

A1: Claro, lo haces muy mental. O sea, en verdad sí que haces eso, pero... bueno, ya me has entendido.

F: No, no, pero lo tienes que explicar porque luego os he pedido que lo hagáis simbólico...

A1: Ya, ya, ya.

F: Entonces, simbólico tienes que explicarlo conectado con esto.

A1: Vale, vale.

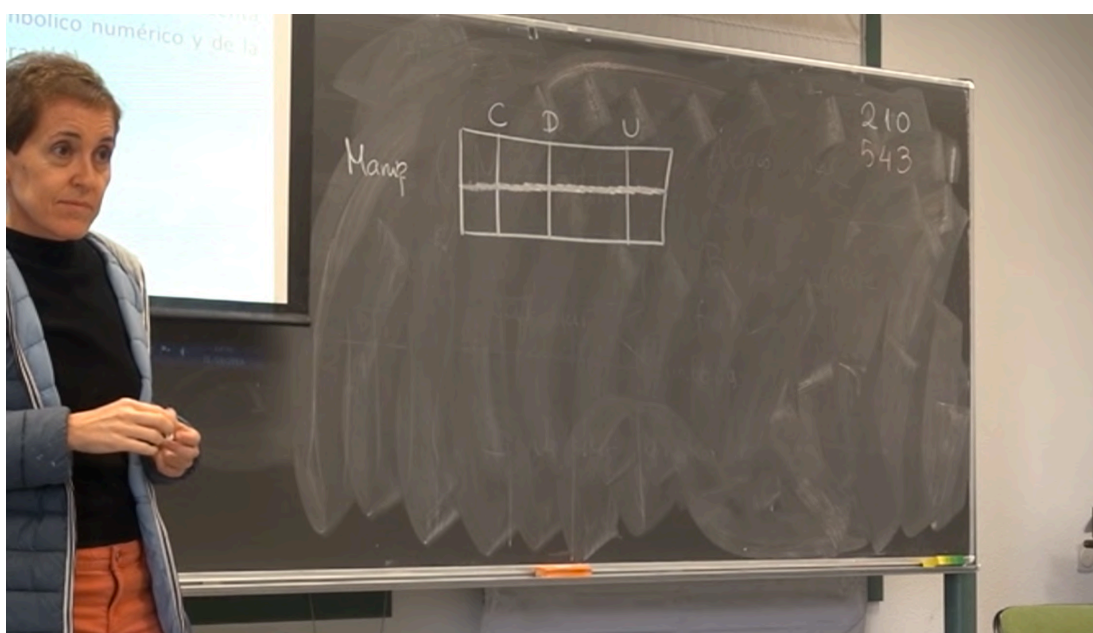
Fragmento 3

[F = Formadora del vídeo]. [A = Alumnos]. [Comentarios de Lucas presentados en recuadros].

F: Vamos a corregir uno, el primero, ¿vale? Me dan $210 + 543$, ¿vale?, con símbolos. Voy a representarlo..., vamos a empezar con manipulativo y voy a ejemplificar con el sorobán, que es el que parece que más trabajo cuesta, ¿vale? Entonces, en el sorobán, cuando lo representéis gráficamente el día del examen, o ahora en vuestro cuaderno si tenéis que tomar notas, es muy importante marcar la barra del medio, porque la proximidad de las bolas a la barra del medio es la que te indica qué número está representando, ¿vale? Y ahora, dado el problema que me han planteado, ¿cuántas varillas pensáis que necesito escribir?

A: Tres.

F: ¿Tres varillas? Pongo una varilla, dos varillas, tres varillas. Esta, unidades, decenas, centenas. Esta la pongo un poco más gorda para que se note que es la barra de madera del medio, ¿vale? Y ahora, ¿cómo dibujo 210?



A: Pues 0 unidades.

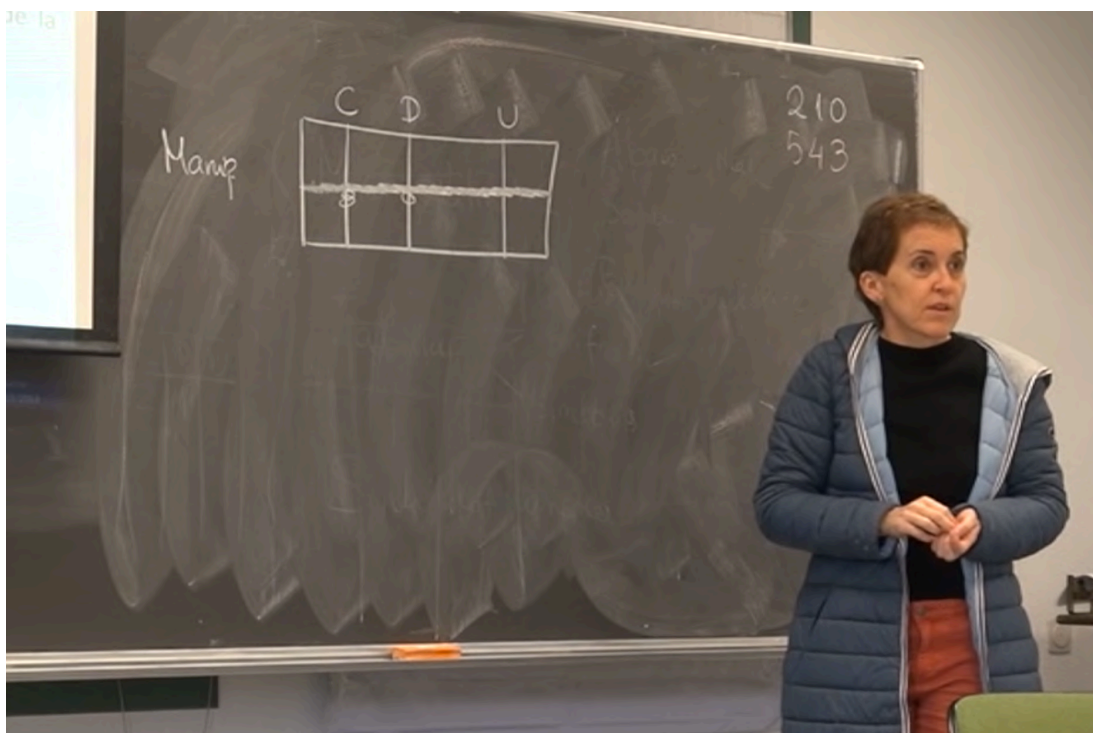
F: 0, o sea que aquí no pongo nada pegado a la barra, ¿no? [señala la varilla de las unidades]. ¿Aquí? [señala la varilla de las decenas].

A: 1 decena.

F: Una pegada a la barra, ¿arriba o abajo?

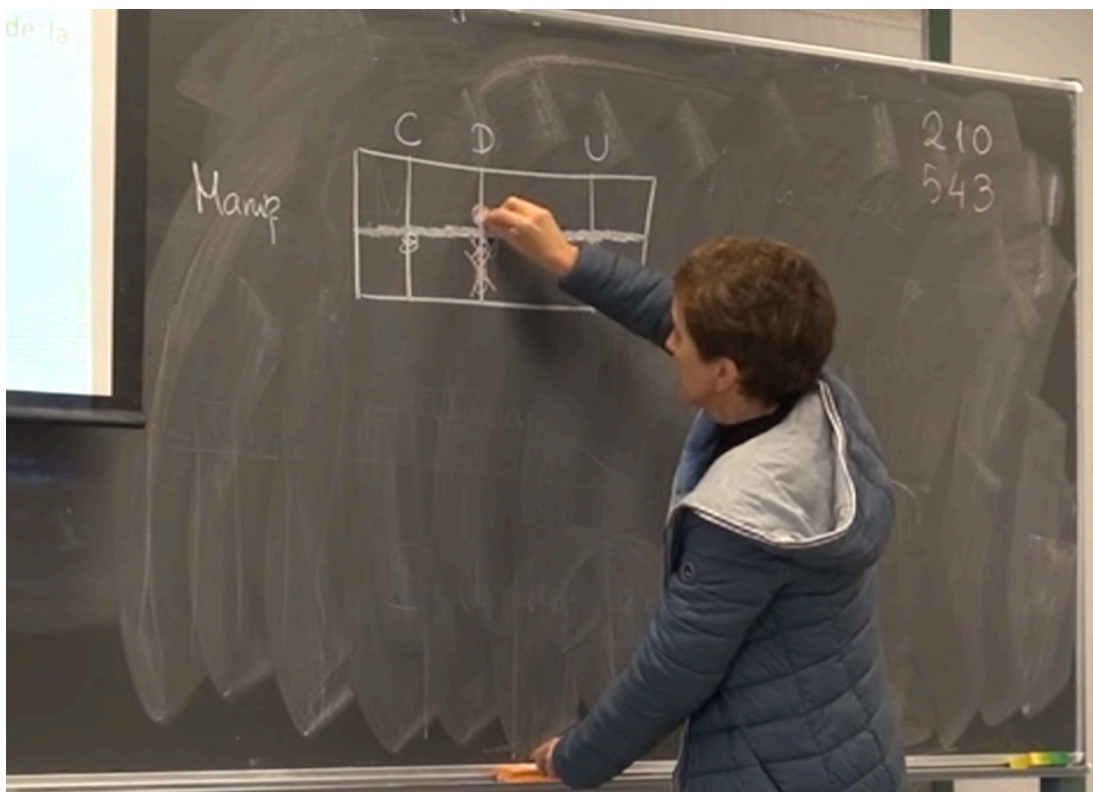
A: Abajo.

- F: Abajo, o sea que aquí va una.
- A: Y 2 centenas pegadas a la barra de abajo.
- F: Pegadas a la barra, abajo. Una y dos, ahí está. Eso es 210.



Y ahora, tengo que sumar 543, es decir, que tengo que añadir 543 unidades ahí. Aprovecho la estructura, ¿vale? Entonces, añado 3 unidades, en la varilla de las unidades, que son 3 aquí abajo, ¿no?, 1, 2 y 3 [las dibuja en la varilla de las unidades]. Después añado 4 decenas, en la varilla... 1, 2, 3, 4, ¿vale? [las dibuja en la varilla de las decenas], 4 decenas.

- A: Pero cambiamos...
- F: Pero...
- A: Bajamos una de arriba y quitamos las de abajo.
- F: Porque no tenéis 4, ¿vale?, ya no había suficientes, ¿por qué?, porque las bolas de arriba valen 5, entonces decís: «no pasa nada, estas, como eran 4 y 1, 5, se representan ahí arriba», ¿vale?



Y luego, 5..., tengo que añadir 5 centenas, ¿cómo lo hago?

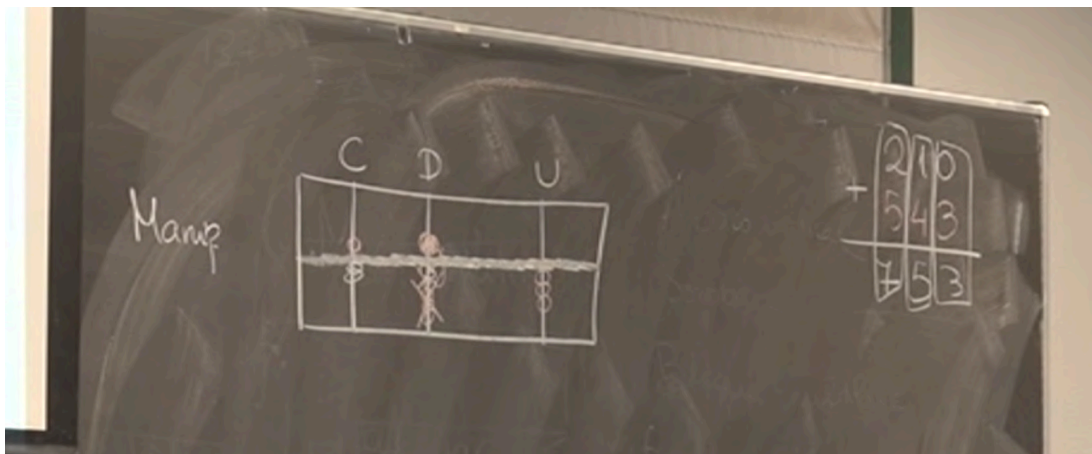
A: Pues 1 arriba.

F: Una de arriba la bajo directamente o podría ir: «1, 2, 3, ya tengo 5, las subo ahí, 4, 5» [va señalando en la varilla de las centenas], ¿vale? Puedo hacerlo de dos formas distintas. Pero si aprovecho la estructura del ábaco, de manera que las bolas de arriba valen 5, como tengo que añadir 5, pues directamente ya añado ahí esas 5 [dibuja una bola en la varilla de las centenas, en la parte superior, pegada a la barra horizontal], ¿vale?

Comentario 1: Es un poco parecido a la conversación que ha tenido con los chicos antes cuando ha hablado del ábaco vertical [se refiere al fragmento 2 de este vídeo]. Está un poco explicando..., antes era una resta, ahora es una suma... Está intentando que vean cómo tienen que ir utilizando el sorobán, en este caso, para hacer esa suma, jugando con las unidades, con las decenas y con las centenas, y con la dificultad que plantea el sorobán con esa varilla central..., que solamente tienes 5 bolitas y cuando tienes 5 tienes que subirte una arriba.

Entonces, [representa ahora el resultado en la suma con el algoritmo tradicional de forma simbólico-numérica a partir de lo que ha obtenido en la representación con el sorobán] me quedan 5 y 2, 7, aquí me quedan 5, y aquí me quedaban 3.

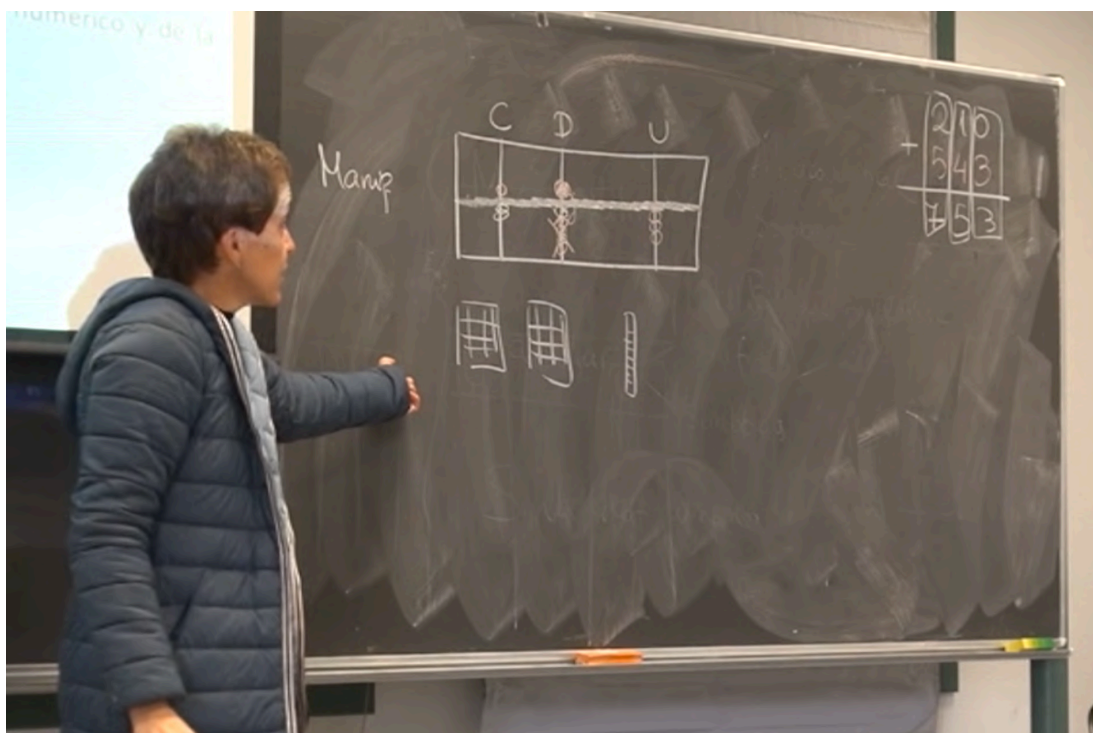
Entonces, si yo lo represento así y voy sumando por columnas, tal cual he ido haciendo en el ábaco, tengo 0 unidades y 3 unidades, 3 unidades, 1 unidad y 4 unidades, 5 unidades, perdón, decenas, 2 decenas y 5 decenas, 7 decenas. Vertical, lo he colocado vertical por parecerme a la estructura del ábaco, ¿no?, para tener en cuenta la «posicionalidad», ¿vale?, del sistema.



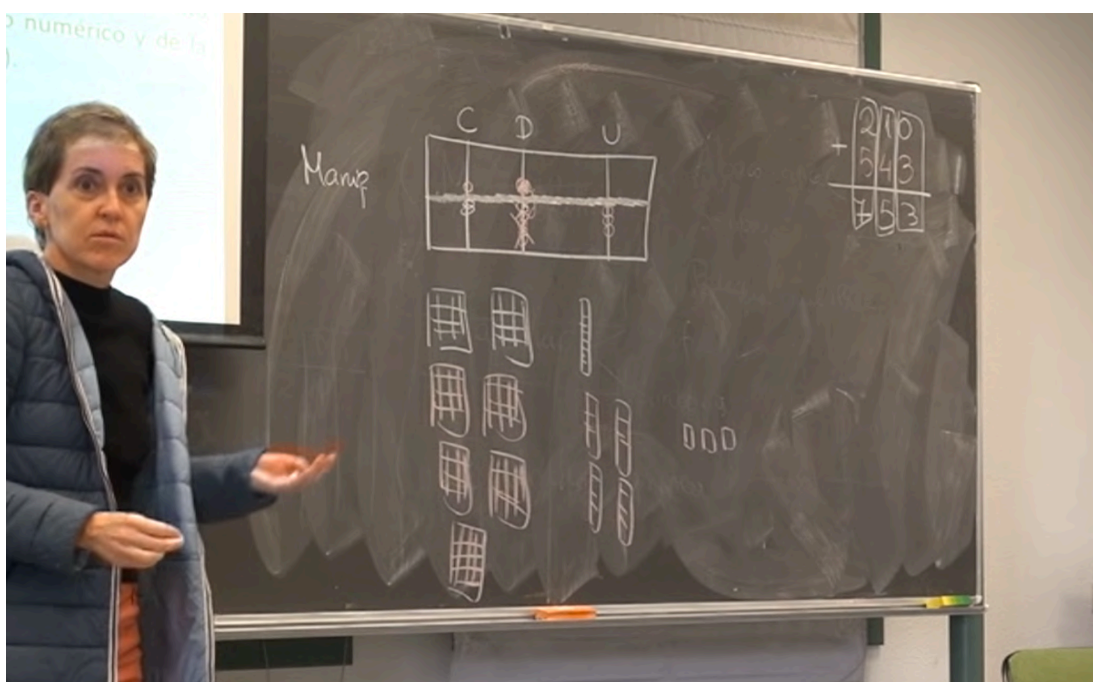
Entonces, he traducido al simbólico lo que he hecho aquí manipulativamente al escribir en simbólico en columnas y represento con cada columna cada una de estas [señala las varillas del sorobán de la pizarra]. Y luego, la escritura, sí que tengo que tener en cuenta que estos son 5 [señala las decenas de la suma en simbólico] con lo cual van arriba [en el sorobán] y esto son 7 [señala las centenas de la suma en simbólico], pues son 5 y 2 [en el sorobán], ¿vale?

Bloques multibase, bloques multibase, pongo aquí 210, ¿no?, que son 1 y 2 placas de 100 y 10, una decena; este es el 210.

Comentario 2: No te lo he dicho antes, pero bueno, es otra vez lo mismo. Ha conectado, una vez que ha realizado la suma con el sistema de representación numérico, pues ha intentado ver que el 753 es lo mismo que tiene en el sorobán, es el 5 más los 2 de abajo, en las centenas, que es un 7, el 5 de las decenas, que es el 50, y el 3 que tiene abajo en las unidades, que es el 3. Es decir, a partir del 210, sumando ese 543, obtiene ese 753 de forma equivalente a como realiza la suma en el sistema numérico. Y ahora va a empezar con los bloques multibase, vamos a ver cómo lo hace.



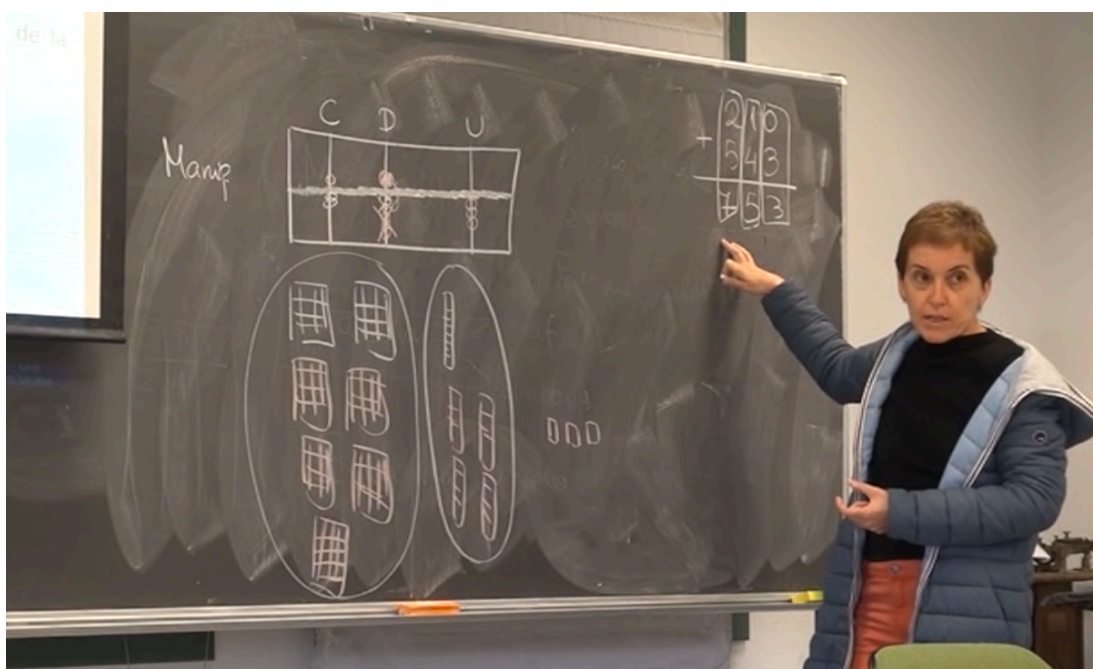
Y ahora agrupo 543; una, dos, tres, cuatro y cinco [dibuja 5 placas de 100 unidades], añado, ¿vale?, 500. 40: una, dos, tres, cuatro [barras de 10]; y 3: uno, dos y tres [unidades]. Y ahora lo pongo todo junto. ¿Vale?



Y digo: «aquí tengo 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 [placas de 100]», ¿necesito agrupar? [Rodea con una línea todas las placas de 100].

A: No.

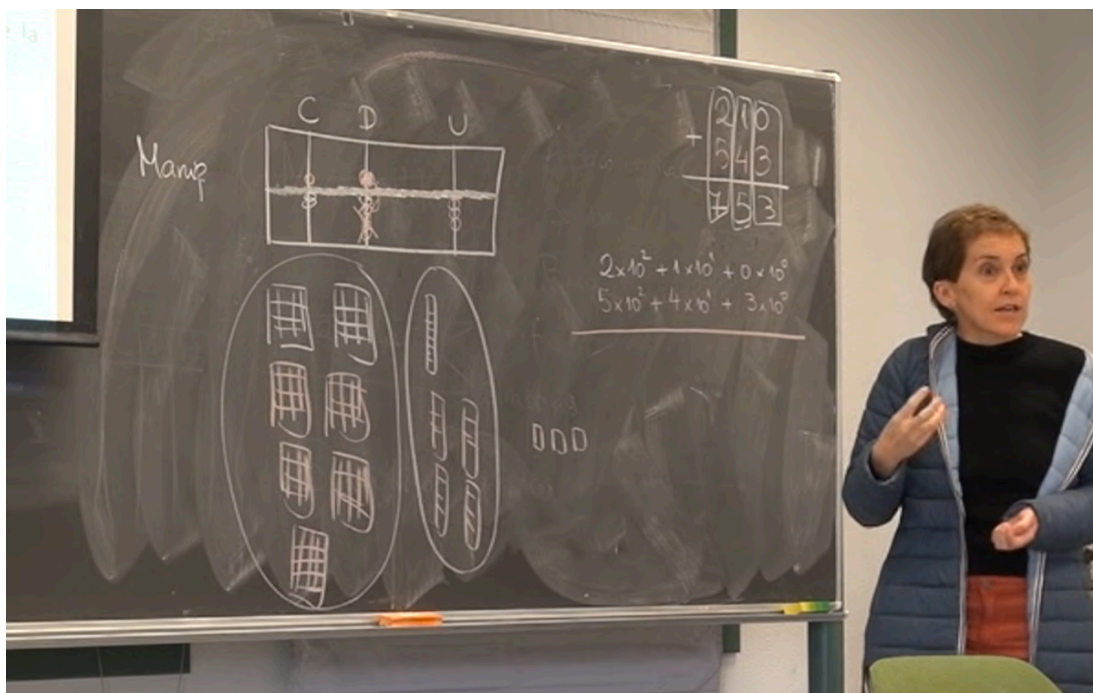
- F: No necesito agrupar. Aquí tengo 1, 2, 3, 4, 5, 6, 5, ¿necesito agrupar estos 5 de alguna manera? [Rodea con una línea todas las barras de 10]. No porque es base 10. Y aquí tengo 3, ¿vale? O sea, que me vuelve a salir 2, 4, 6, 7 [centenas; señala la suma en simbólico], 2, 4, 5 [decenas], 5 [señala la suma en simbólico] y 3. Y veo la conexión de uno con otro, ¿vale? ¿Está claro hasta aquí?
- A: Sí, eso sí.



- F: El que quiera escribirlo simbólico-numérico de otra manera en la que se vea la «posicionalidad» del sistema, podría escribirlo de la siguiente forma: $2 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 0 \times 10^0$, ese es el primer sumando;

Comentario 3: Ha explicado cómo se haría con los bloques multibase, que es bastante más sencillo, y ahora intenta conectar todo esto otra vez con la escritura del número como potencias de 10, va a ver cómo puede sumar, me imagino que lo va a hacer así, cómo puede sumar el 210, con esa escritura que está poniendo, el 543, con la misma escritura que está poniendo, y agrupando potencias de 10 le va a salir el 753, es decir, va a utilizar otro sistema de representación para realizar la suma; vamos a ver si es eso lo que hace o no, pero tiene toda la pinta.

segundo sumando, $5 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 3 \times 10^0$; y sumo.



Y ahora, al sumar, utilizo la propiedad conmutativa, para colocar los sumandos en el orden que quiero, y asociativa, para ir organizando, ¿vale?

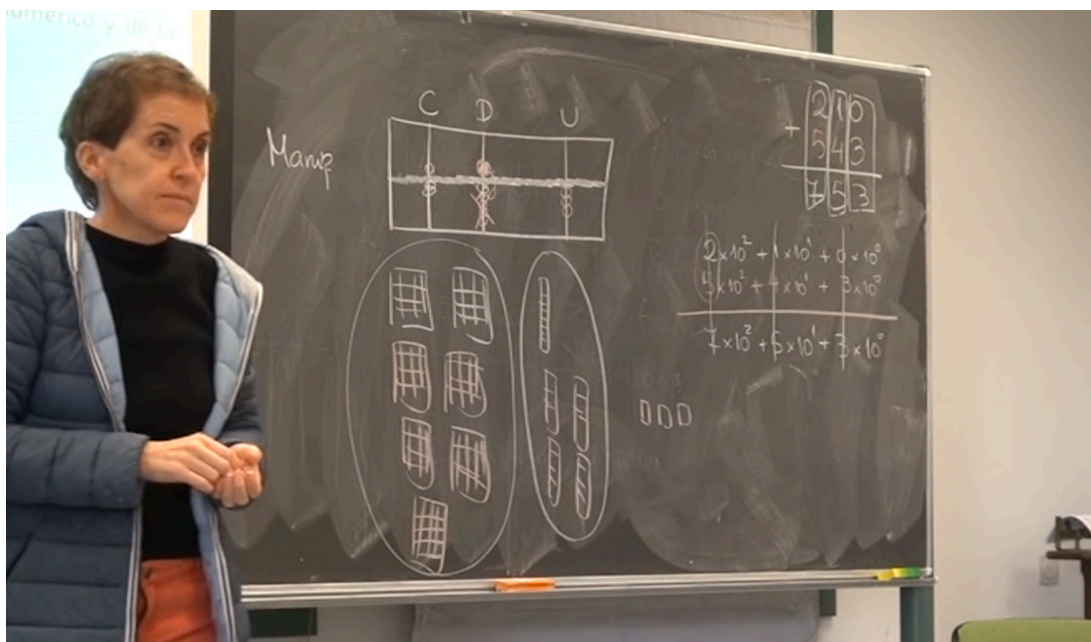
Comentario 4: Conecta las propiedades que ha explicado de los naturales con lo que va a hacer ahora, las propiedades que ya habrá explicado, la conmutativa y la asociativa; y ha alzado la voz: «utilizo la propiedad conmutativa, la asociativa...» [lo dice aumentando el volumen de la voz], porque es en el fondo lo que va a hacer para ir agrupando potencias de 10 con potencias de 10 y tener la suma que busca.

O sea, que este [señala 5×10^2] —que, si lo coloco seguido, estaría aquí el cuarto [señala detrás de 0×10^0]— lo quiero colocar el segundo para agruparlo con este [señala 2×10^2], este [señala 4×10^1] —que estaría el quinto [señala detrás de 0×10^0]— lo coloco el tercero para agruparlo con este [señala 1×10^1], y este [señala 3×10^0] lo agrupo con este [señala 0×10^0]. Y ahora, al agrupar, ya me quedan 5 y 2, propiedad distributiva, 7×10^2 más, 4 y 1, 5×10^1 más, 0 y 3, 3×10^0 . Pero ahí estoy utilizando la asociatividad de la suma, la conmutatividad de la suma y la distributiva de la suma y el producto de números enteros, ¿vale?

Comentario 5: Dice que utiliza la distributiva, aunque ahí que utiliza la distributiva..., no lo ven tan claro. Quizá hubiese sido bueno que les hubiese puesto que sumasen 270 con 543 para que viesen claro cómo hay que utilizar la distributiva para agrupar y tener a partir de 10 unidades de orden inferior 1 de orden superior. Ha dicho que se utiliza la

distributiva, en efecto, pero no se ve con esa suma tan sencilla, ¿no?

Pero si lo coloco así, veo esto, esto y eso [señala los coeficientes que acompañan a 10^2 , 10^1 y 10^0], que es lo mismo que esto, esto y eso [señala el 7, 5 y 3 del resultado de la suma en la forma simbólico-numérica], que es lo mismo que esto, esto y esto [señala los bloques multibase en la pizarra] y que es lo mismo que 1, 2 y 3 varillas [señala las varillas del sorobán en la pizarra]. ¿Está claro hasta aquí?



A: Sí.

F: Ahora, ¿qué diferencia hay entre esto y la siguiente suma que me plantean ahí [en el PDF proyectado en la pantalla]? $316 + 429$.

A: Que me paso de unidades y tengo que pasar a las decenas.

Comentario 6: Hace dos ejemplos, uno sin llevadas, y ahora viene otro con llevadas, y ahora buscará esa estrategia... Todo esto que ha resuelto imagino que se lo va a volver a pedir ahora a los alumnos para que lo hagan ellos, ¿no? Me extrañaba que dejase esto así, simplemente con una suma sin llevadas.

F: Que cuando agrupo aquí, por ejemplo [bloques multibase], o cuando agrupo aquí [sorobán], o cuando agrupo aquí [expresiones de sumas y productos de potencias de 10], aquí aparecen más de 10 [señala al 3 de 3×10^1]. En algún sitio aparecen más de 10, por ejemplo, cuando tengo 9 unidades y 6 unidades, aquí aparecerían 15 fichitas pequeñas [bloques multibase], aquí tendría que representar 15 [sorobán] y aquí aparecería 15×10^0 . Pero como estamos en base 10, no puedo

dejarlo así, tengo que agrupar, tengo que agrupar. Entonces, agrupo 10 y dejo 5, y las 10 que agrupo las paso al siguiente valor, es decir, pego 10 fichas y construyo una barra [bloques multibase], agrupo 10 y me sale otra bola aquí en el ábaco, aquí abajo [parte baja de la varilla de las decenas], o agrupo 10 y me sale uno más aquí [en 5×10^1] y aquí [en 3×10^0] dejo las que se quedaban sueltas, las 5, ¿vale? O sea, que la única diferencia es que aquí, después de representar cada cantidad y de ir poniendo por orden el valor de cada una, tengo que agrupar porque en algunos sitios tengo 10 o más, ¿vale? Es la única diferencia.

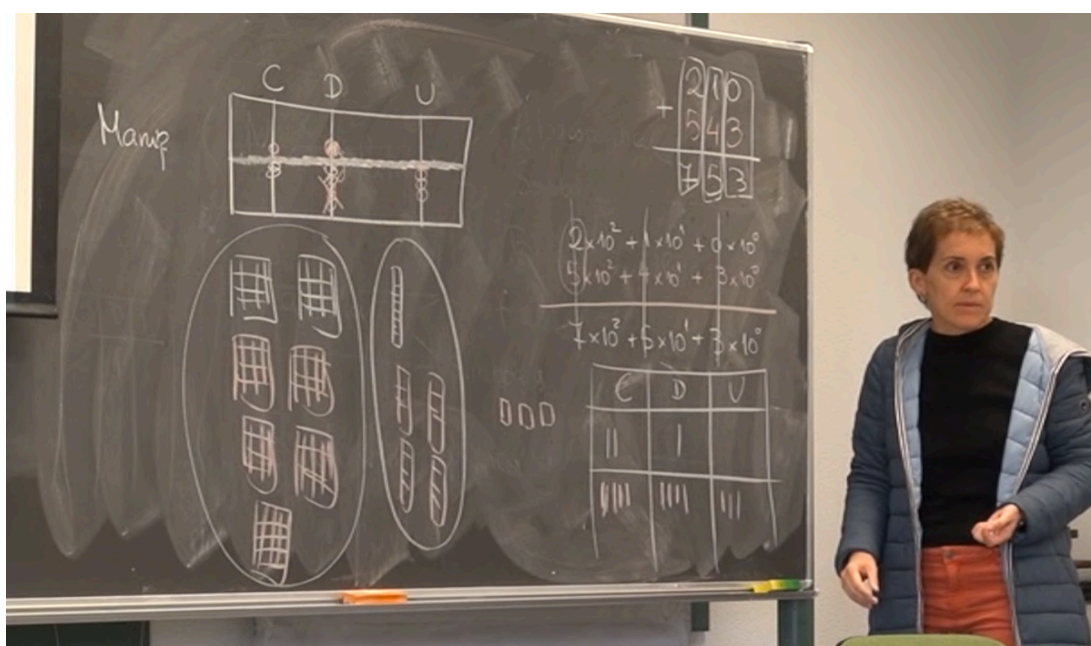
Y ahora, si quisiéramos representar esto en formato tabla, como tenía Martín, ¿no? ¿Cuántas columnas pondré yo en la tabla?, ¿qué me pide el cuerpo? Tengo que dibujar una tabla, ¿vale?, vamos a dibujar una tabla [comienza a dibujarla en la pizarra], con filas y columnas, ¿cuántas columnas pongo?

A: Tres.

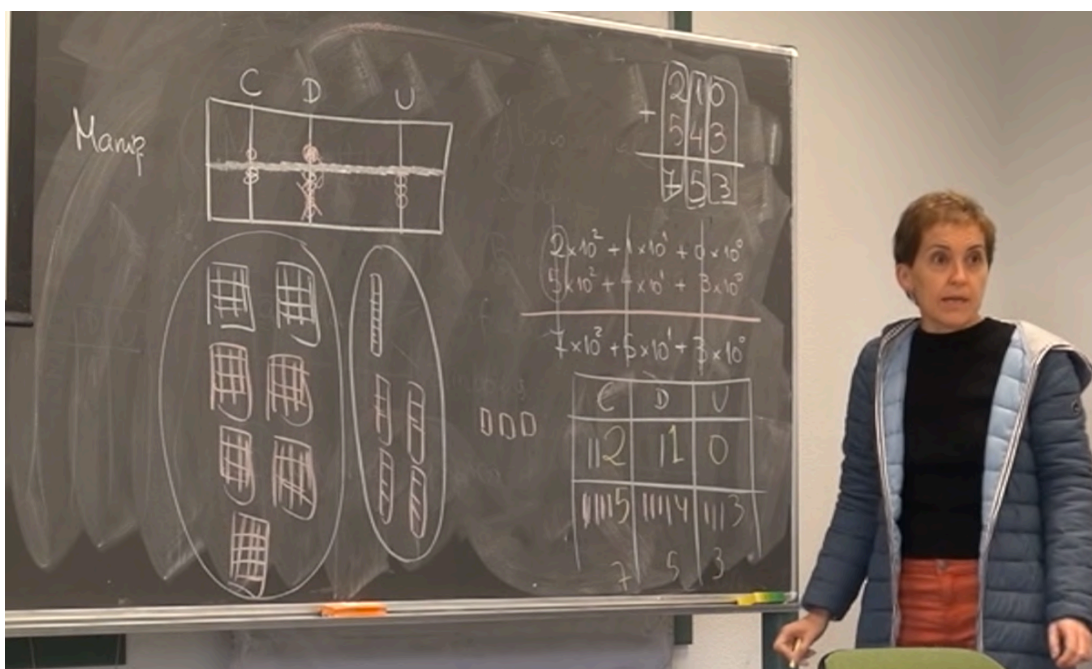
F: Tres, ¿por qué tres?

A: Centenas, decenas y unidades.

F: Unidades, decenas y centenas, ¿vale? Y entonces, represento el primer número, 210: 1, 2, 1, eso es 210 [pone dos rayas en la primera casilla de las centenas y una en la primera de las decenas]. Represento el segundo número, 500: 1, 2, 3, 4, 5; 40: 1..., bueno, en rosa, ya puestos..., 1, 2, 3, 4, 5; 40: 1, 2, 3, 4; y 3: 1, 2, 3. Y agrupo: ¿cuántas unidades tengo al final?, 3, ¿cuántas decenas tengo al final?, 5, ¿cuántas centenas tengo al final?, 7, fin.



Este sistema de representación es icónico-gráfico porque he representado aquí las cantidades con palitos, pero tiene una estructura especial porque está en una tabla, ¿vale? Entonces, vamos a decir que es un sistema de representación tabular-gráfico. Si en vez de poner aquí gráficos, yo hubiera dicho: «oye, mira, no me lío con los gráficos, ya puestos, como ya controlo mejor los símbolos, pues voy a poner aquí 210 y aquí abajo voy a poner 543 y luego ya sumo: 4 y 1, 5; 5 y 2, 7; 3 y 0, 3», ¿vale?



Sería tabular, tiene una estructura tabular, no es puramente simbólico-numérico, tiene una estructura tabular, pero con números dentro, tabular-numérico, ¿vale?

Comentario 7: Bueno, pues ahí tiene en la pizarra esa suma realizada con un conjunto bastante amplio de sistemas de representación; primero con el sorobán, después con los bloques multibase, después con el sistema numérico, después con el sistema numérico utilizando las potencias de 10, después ha utilizado el sistema de representación tabular-gráfico y por último ha utilizado el sistema tabular-numérico, es decir, tiene en la pizarra todo un despliegue de diferentes sistemas de representación para realizar la misma suma. A esto es a lo que quería ella llegar.

Entonces, yo voy pasando de lo más concreto, que sería: «mi madre me ha dado 316 euros y mi abuela 429, ¿cuántos euros tengo en total?», después paso a manipular, con ábacos verticales, con ábacos japoneses, con bloques multibase..., y cuando interiorizo bien eso, digo: «ostras, venga, lo voy a poner en una tabla

gráfica y voy a indicar lo que me indica cada varilla o lo que me indica cada agrupamiento de los bloques multibase, que es posición, en las columnas de una tabla, y ahí voy a poder marcarlo con símbolos». Esta tabla con símbolos se llama tablero de posición, porque tengo las posiciones indicadas —unidades, decenas y centenas—, y es uno de los recursos que más utilizan en el método famoso este Singapur, que habréis visto o habréis oído hablar de él, ¿vale? Entonces, ¿qué están haciendo?, están haciendo una transición de lo más concreto, pasando por lo manipulativo, hacia lo abstracto, que sería..., esto es lo más abstracto [señala las expresiones de sumas y productos de potencias de 10] y esto es lo abstracto que se trabaja en primaria [señala la suma hecha en el registro de representación simbólico-numérico], ¿vale? Pero no trabajan directamente con esto, vamos pasando..., concreto, concreto, concreto, concreto [de forma manipulativa], voy intentando abstraer un poco, pero tengo mis gráficos que me ayudan a visualizar lo que estoy haciendo [de forma tabular], y finalmente mi objetivo es escribirlo simbólico-numéricamente, de forma abstracta, ya al final. ¿Cómo habéis trabajado mayoritariamente vosotros en primaria cuando estabais haciendo sumas de este estilo? ¿Desde aquí [señala lo manipulativo] o desde el final [señala lo simbólico-numérico]?

A: Desde el final...

A: Yo con las de centenas, decenas y unidades, las cajas...

F: Las cajas estas también os suenan, los tableros de posición, pero ¿y qué poníais en las posiciones, palitos o los números ya?

A: Los números directamente.

F: Los números directamente, o sea, que estabais trabajando la fase inicial, de la suma, la estabais trabajando directamente con lo simbólico, que es la fase final, ¿lo veis?

A: Jolín, sí.

F: Vale, pues ala, ya está.

Comentario 8: Ha conectado los sistemas de representación y les ha hecho ver que normalmente al final sí que se trabaja fundamentalmente la suma con el algoritmo y poco más, ¿no? Les ha hecho ver que quizá es mejor empezar con sistemas de representación manipulativos.

ANEXO 25

Transcripción de los comentarios de Pablo en la fase 2

Nota: El texto presentado entre corchetes en la transcripción se corresponde con información incluida por el investigador.

TRANSCRIPCIÓN DEL VÍDEO 1

Fragmento 1

[F = Formadora del vídeo]. [Comentarios de Pablo presentados en recuadros].

F: Bueno, entonces os voy a dar el guion y empezáis a trabajar y, al final, los últimos 15 minutos, hacemos la puesta en común. El guion de la actividad aparece aquí en el campus, pone la fecha, ¿vale?, «actividad para la sesión del 19 de septiembre». Lo voy a leer porque está en inglés, por si alguno tuviera alguna dificultad, lo leo y os ponéis a trabajar, ¿vale?

Todo el mundo en la mesa tiene un montón de palillos y varias cintas de estas, ¿no?, elásticas. Si alguien necesita más cintas me las pide, palillos no, son los que os he puesto, ¿vale?, es con lo que tenéis que trabajar. El problema es que yo he comprado una caja de palillos en Supeco y resulta que mis compañeros lo compran en Mercadona y me dicen que las cajas de palillos que ponen 800 palillos del Mercadona traen más y que les sale a cuenta, y que cuando van a comprar materiales —porque a veces tenemos que comprar nosotros los materiales— pues que merece la pena. Yo no pude ir a Mercadona, fui a Supeco, pone que son 800, pero no sé si me han timado o no me han timado. Entonces, para hacer un control de calidad, hacer una estimación, que luego, bueno, los que hayáis hecho Matemáticas de Ciencias Sociales pues sabéis hacer un contraste de hipótesis y tal, pero bueno, lo primero que tengo que hacer es hacer una estimación de cuántos hay, ¿no? Entonces, los he repartido para no contarlos yo y la idea es ver cuántos hay.

Comentario 1: Acaba de plantear la actividad, los objetivos... Es un problema aritmético en el que tendrán que contar los palillos para ver si la publicidad de la caja es correcta, ¿no? Está explicando el problema, con las características matemáticas... Es la

interpretación que doy yo a este evento, a lo que acaba de hacer ahora mismo.

Entonces, el guion de la actividad, tal y como aparece aquí... [espera a que cargue el ordenador]. Aquí está el guion. Esta actividad –esperad que la amplíe un poco– está escaneada de un libro muy bueno que utilizan en los últimos años en Estados Unidos para formar profesores de primaria. Lo bueno del libro es que, además de los contenidos teóricos, más de la mitad del libro son actividades para llevar al aula-taller como estamos haciendo aquí, ¿vale? Entonces, una de las actividades iniciales para el trabajo con el número, que es con lo que estamos empezando nosotros, es esta de los palillos, ¿vale?

Entonces, aquí la pregunta es «cuántos», cuántos palillos, ¿no?, que es lo que os he preguntado a vosotros, ¿no?, cuántos.

Comentario 2: Bueno, pues aquí, igual, está planteando el problema, en el campo de la aritmética, de «cuántos», cómo contar los palillos que vienen en la caja.

Entonces, cada grupo participando en esta actividad tiene un montón de palillos y luego tiene algo para atarlos, ¿no?, *rubber bands*, pues cintas de estas elásticas. Los materiales ya los tenéis. El objetivo de la actividad es ayudaros a entender el desarrollo de la escritura de los números tal y como los utilizamos nosotros en nuestro sistema de numeración, ¿vale?

Comentario 3: Ha descrito la tarea anteriormente y ahora está estableciendo los objetivos de la misma, de lo que pretende con esta tarea, cuyos elementos matemáticos, como ha dicho, serán el número y supongo que será trabajar los sistemas de numeración.

Entonces, primero, organiza los palillos de forma que visualmente puedas ver más o menos cuántos hay; usa las bandas elásticas, si te ayudan, para organizarlos de manera que así, de un vistazo, puedas decir cuántos tienes, primero los cuentas, lo organizas, piensas cómo organizarlo, pero la cosa es que la organización que tú tengas en la mesa te permita de un vistazo recordar cuántos hay sin necesidad de haberlo apuntado, ¿no?, y que, si yo me paso por allí, me podáis decir: «mira, hay no sé cuántos, porque...», lo veo porque lo hemos organizado así», ¿vale? Luego, reflexiona sobre si la manera en la que lo has organizado corresponde a cómo escribirías tú luego los numerales para representar esa cantidad de palillos. Después, tienes que juntar tus palillos con

los de un grupo de al lado, ¿vale?, por ejemplo, vosotros con vosotros y así, cada dos grupos tienen que juntar los palillos que tienen y decidir cuántos tienen en común, ¿vale?, cuántos tienen en total. Y al final, tenemos que juntarlos todos y de una forma ágil, sin tener que volver a contarlos todos, tenemos que saber cuántos palillos hay en total en la clase repartidos, ¿vale? O sea que, primero, cada grupo tiene que saber cuántos tiene y tiene que generar una estrategia para, de manera rápida, mirar en la mesa y ver cuántos hay; después, reflexionar sobre si la manera en la que lo coloca cuando uno luego escribe, imaginaos, «tengo 72, pues cómo se escribe 72: siete, dos», pues la manera en la que lo colocó me ayuda con la escritura o no, no tiene por qué, se reflexiona un poco sobre eso; y cuando hayáis terminado esa parte, llamáis al grupo de al lado y decís: «venga, vamos a ver cuántos tenemos en total, visualmente, cómo lo organizasteis vosotros, cómo lo organicé yo, a ver cómo lo tengo», ¿vale?; y luego todos.

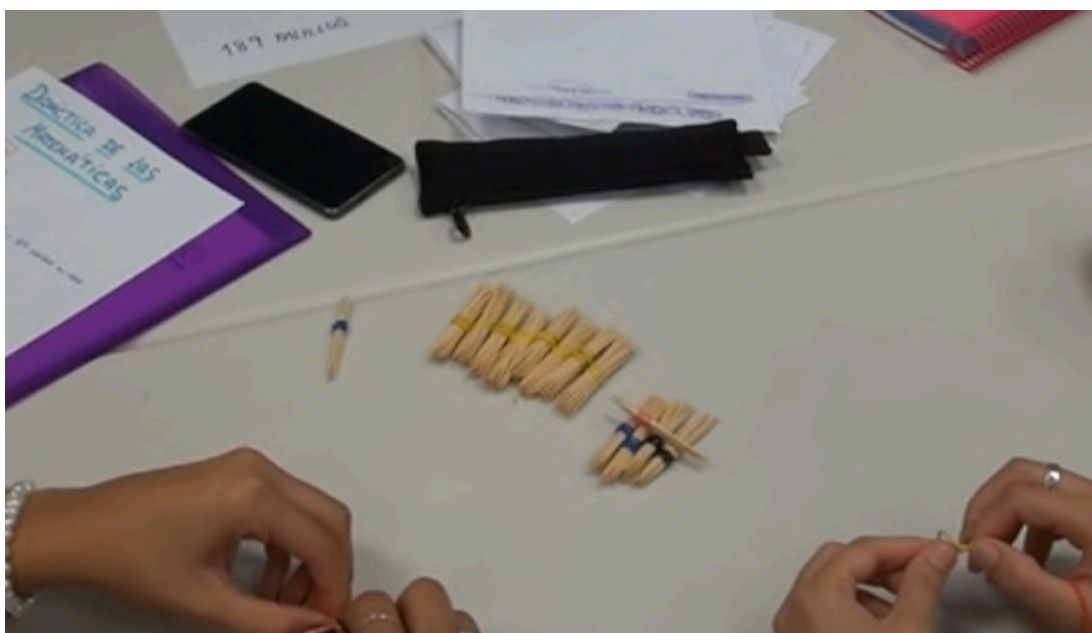
Comentario 4: Lo que acaba de decir va encaminado a la descripción de la tarea. El objetivo es trabajar los sistemas de numeración, que cada grupo establezca su propio sistema de numeración, que lo compare con el del grupo con el que va a trabajar, con el del grupo de al lado, y vean las ventajas y deficiencias de uno y de otro a la hora de ver cuántos palillos hay en total para ver cuál es el óptimo.

Tenéis un cuarto de hora, ¿vale?

Fragmento 2

[F = Formadora del vídeo]. [A = Alumnos]. [Comentarios de Pablo presentados en recuadros].

- F: Necesito saber si habéis tenido que llegar a algún acuerdo entre los grupos o...
- A: Sí, claro, todo ha sido un consenso, todo ha sido un consenso.
- F: Ah, vale, ha sido un consenso. ¿Qué acuerdo habéis tenido que...?
- A: Hemos explicado cada uno pues lo que significaba cada..., cada gomita.
- F: Y, por ejemplo, ¿vosotros de cuánto en cuánto lo habíais agrupado? Eráis los de 15, 10, 5, ¿no?
- A: Sí.
- F: ¿Y vosotros?
- A: 20, 10 y 4.
- F: 20, 10 y 4. Entonces, ¿habéis tenido que llegar a algún acuerdo alguno para reordenar?
- A: No, porque nos ha venido muy bien.
- F: ¿Os ha venido bien?
- A: Es que hemos sido muy inteligentes cogiendo el amarillo para los grandes [se refiere a gomas elásticas de color amarillo].
- F: Ahora los grandes de qué son, ¿de 20?
- A: De 20 y de 15, aquí están mezclados. ¿O los tenemos que reorganizar?



F: Esto es superinteligente, ¿no? O sea, yo veo aquí..., digo: «en los amarillos, algunos tienen 20 y algunos tienen 15, búscate la vida Nuria».

A: Pero son amarillos.

Comentario 1: Está interaccionando con los alumnos para ver las deficiencias que han tenido a la hora de agruparlo, ya que ha dicho que los agrupamientos amarillos eran unos de 15 y otros de 20 y, claro, eso no es óptimo para contarlos luego, para saber cuántos hay. Entonces está interactuando con los alumnos mostrándoles las deficiencias que han tenido a la hora de elegir el mismo color para distintos agrupamientos.

F: Ya, pero entonces yo no sé... Yo digo: «vale, yo puedo ver 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 grupos amarillos», ¿no? Y ahora digo: «como mucho serán 160, si son todos de 20, pero... no necesariamente son 160, pueden ser menos».

A: Bueno, pero como no lo sabes...

F: ¿Entonces cómo sé cuántos hay?

A: Te lo estamos diciendo, tienes que confiar en nosotros.

F: No, en matemáticas la confianza no vale, uno tiene que...

A: Es que no sé, no lo entiendo. ¿Lo tenemos que reorganizar?

F: Vosotros ya sabéis cuántos palillos tenéis, pero ahora, visualmente, tenéis que poder contarme a mí cómo sabéis que hay ese número de palillos, ¿no?

A: Ah, pues habría que... ¿Y no podemos quitar las gomas y reorganizarlo?

F: Sí, sí, sí, yo no dije que no pudierais quitar las gomas.

A: Aaaaah.

F: ¿Alguien dijo que no se podían quitar?

A: Y nosotros diciendo que no se podían quitar las gomas...

F: Y una duda más. Alguno de vosotros..., por separado, ¿no?, cuando lo teníais..., habéis escrito la cantidad que teníais, ¿no? Eh, 109 teníais uno...

A: 104 y 85.

F: Por ejemplo, el 85 se escribe con un 8 y un 5. Ese 8 y ese 5, ¿estaban representados de alguna forma en...?

A: No.

F: No, vale. Y vosotros, la misma pregunta con lo vuestro.

A: No.

F: No había un patrón en cómo lo habíais representado, vale, ok.

Comentario 2: Ahora está relacionando su sistema de numeración, el que ellos han empleado, con el sistema de numeración decimal que usamos nosotros y está haciéndoles ver que no tiene relación, con la intención de que busquen relacionar la escritura del número con los agrupamientos que han hecho.

A: ¿Pero quieres que busquemos?

F: Quiero que reflexionéis sobre eso, pero ahora lo vamos a poner en común, ¿vale?

A: Vale.

F: ¿Ha sido operativo el que ellos hayan hecho 15, 10, 5... y vosotras tuvieras 20...?
¿Eso ha ayudado a la hora de ponerlo en común?

A: No, porque ahora hay que hacerlo otra vez.

F: Ahora hay que volverlo a hacer...

Fragmento 3

[F = Formadora del vídeo]. [A = Alumnos]. [Comentarios de Pablo presentados en recuadros].

F: Me tenéis que decir cuántos palillos había en cada grupo inicialmente, antes de juntaros dos grupos, ¿vale? Entonces, por ejemplo, vosotros.

A: 87.

F: 87 [lo escribe en la pizarra]. Estamos de acuerdo, yo utilizo la escritura estándar que vosotros habéis visto en primaria, secundaria, bachillerato y al llegar aquí, ¿vale? Escritura estándar de nuestro sistema de numeración en nuestro contexto. Ese grupo, 87. ¿Cómo habíais hecho los grupos?

A: Pues hemos hecho, eh..., tres grupos de 20.

F: Tres grupos de 20, ¿cómo lo puedo poner? [Escribe un 3 en la pizarra].

A: Eh..., tres rosas.

A: 3 x 20.

F: ¿Tres rosas?

A: Sí.

A: No.

F: Si pongo tres rosas... ¿Todo el mundo que ha utilizado gomitas rosas ha atado 20?

A: No.

F: ¿Otras personas que han atado 20 han usado otro color?

A: Sí.

F: Uf, el color no me vale. ¿Cómo lo pongo?

Comentario 1: Aquí está intentando hacer ver que la utilización del mismo símbolo tiene que significar lo mismo para todos, ya que la goma rosa no ha significado lo mismo en el grupo 1, en el grupo 2, en el grupo 3... porque han utilizado distintos criterios. Entonces busca que el símbolo signifique lo mismo en todos los grupos.

A: 20 x 3.

A: 3 x 20.

F: 3 grupos de 20, ¿no? 3 x 20. [Escribe 3 x 20]. Y luego...

A: Pon en el 3 «color rosa» o algo así. Entre paréntesis.

- F: Vale, vale. [Pinta una raya rosa sobre el 20]. Y luego... Esto son 60.
- A: 9×3 .
- F: Y luego 9 grupos de 3, ¿no? [Escribe + 9]. ¿O 3 grupos de 9? [Borra el 9].
- A: 3×9 .
- F: 3 grupos de 9 y el 9 lo habéis puesto de otro color, ¿vale? [Escribe 3×9].
- A: Sí.
- F: ¿Alguien más ha utilizado grupos de 20?
- A: Nosotros.
- F: Varios. ¿Alguien más ha utilizado grupos de 9? [Destaca con la voz el número 9].
- A: Nosotras.
- F: Vosotras, vale, y vosotras también, vale. Siguiendo equipo, vosotras.
- A: Nosotras, 90.
- F: En total, 90. [Escribe 90 en la pizarra].
- A: 4 de 20 y 1 de 10.
- F: [Escribe $4 \times 20 + 1 \times 10$].

Comentario 2: Está viendo la descomposición que ha hecho cada grupo, el sistema numérico que cada grupo ha utilizado. El primer grupo ha utilizado grupos de 20 y de 9 y el segundo grupo ha empleado grupos de 20 y de 10. Está viendo la descomposición que ha utilizado cada grupo. Con cada grupo, para números no iguales, pero similares, han utilizado descomposiciones distintas y que no tienen que ver, como ha dicho antes en la interacción [se refiere al fragmento 2 de este vídeo], con la escritura del número, con el numeral.

Vale, o sea que de momento han utilizado grupos de 20, grupos de 10, grupos de 9, ¿vale?



En esta escritura [señala lo que ha escrito en la pizarra] yo veo 3 grupos de 20, 3 grupos de 9, pero aquí [señala el 87] no veo un 3 y un 3. Yo aquí veo 4 grupos de 20, 1 grupo de 10, pero aquí [señala el 90] no veo 4, 1. Con lo cual, parece que tampoco habíais encontrado vosotros un patrón entre cómo escribo la cantidad total con símbolos numéricos y visualmente qué veo en los palillos, ¿vale? De momento, la transcripción de lo que veo en los palillos simbólico-numéricamente la tengo aquí a la derecha [señala el $3 \times 20 + 3 \times 9$ y el $4 \times 20 + 1 \times 10$], pero no veo ninguna relación con esto [señala el 87 y el 90]. Yo aquí estoy haciendo trampa porque estoy metiendo operaciones, nosotros ahora no estamos con las operaciones, estamos solo con el número, con la escritura del número, eso es lo que estamos trabajando, ¿no? Pero para ayudar a ver esa conexión de los palillos hacia lo simbólico-numérico, pongo, escribo eso de transición para ir copiando lo que me decís, ¿no?, porque tardó más, tardó más en dibujar los palillos, las gomitas rosas, no sé qué, podría sacar la foto de la cámara y ponerlo rápido, ¿no?, pero..., bueno, lo escribo, lo transcribo así.

Comentario 3: Bueno, me estoy repitiendo, creo que antes me he anticipado. Está haciendo ver la nula relación que hay entre los grupos, la cantidad de grupos que han formado, con la escritura del número; está haciendo hincapié en eso, intentando que busquen una forma de agrupar que sí que tenga una relación con el número escrito.

Ahora, otro grupo. Vosotros dos ya estáis, que luego, luego... Ah, venga, ya que estamos aquí [dibuja una llave a la derecha de lo que ya ha escrito en la pizarra]. ¿A qué consenso... habéis llegado...?

A: Pues 7 grupos de 20...

F: Muy bien, 7 grupos de 20 [señala el 3 y el 4]. Han visto rápido y han dicho: «bien, los dos hemos agrupado, sin habernos copiado, en grupos de 20, con lo cual automáticamente tenemos 7 grupos de 20» [escribe 7×20].

A: Luego, ellos los 27 de 3×9 ...

F: Sí.

A: ... los han dividido en 2 de 10 para que se junten con los nuestros de 10.

F: ¿Y por qué no habéis hecho vosotros... separar este de 10 [señala el 10 de 1×10] en 1 de 9 y 1 de 1?

A: Porque se quedaría 1 solo y luego...

F: Bueno, pobrecillo, ¿no? No pasa nada.

A: Y porque es más fácil sumar de 10 en 10 que de 9 en 9.

A: Para ponerle la goma a 1...

F: Para ponerle la goma a 1... Bueno... Eso... Puede ser una justificación, pero tampoco muy potente... Me gusta más lo que ha dicho ella, o ella...

A: Que es más fácil sumar de 10 en 10 que de 9 en 9.

F: ¿Por qué será más fácil sumar de 10 en 10 que de 9 en 9 para nosotros? [Hablan varios alumnos a la vez]. ¿Por qué es más fácil sumar para nosotros de 10 en 10 y no de 9 en 9? [Hablan varios alumnos a la vez]. Porque tenemos 10 dedos, por ejemplo, ¿no? Porque estamos más acostumbrados a 10, 20, 30, 40... [mueve las manos con los dedos estirados], ¿no?, como que nuestro sistema de numeración parece que...

A: Porque en verdad solo sumas de 1 en 1 y luego le pones un 0, entonces...

F: Solo sumas de 1 en 1, elabora eso. Estamos en clase de matemáticas, ¿qué es 1, 1...?

A: Pues por ejemplo, si tienes 30, pues 1 más 1 más 1, 3, como es 10, pues le pones el 0 y ya tienes los 30.

F: ¿3 qué?

A: 3 grupos de 10.

F: 3 grupos de 10, muy bien. 3 grupos de 10, vale. [Vuelve a la pizarra a terminar lo que empezó a escribir].

Comentario 4: Acaba de hacerles ver las ventajas que tiene el sistema de numeración decimal. Más que las ventajas... Culturalmente estamos acostumbrados a sumar de 10 en 10, ¿y por qué es más fácil?, por el sistema de numeración que usamos; y ahí es donde intenta hacer ver qué agrupamientos serían más sencillos, qué forma de agrupar los palillos sería más sencilla para poder contarlos de un vistazo, como se planteaba inicialmente.

A: 3 de 20, 3 de 10 y 1 de 7.

F: [Escribe, después de 7×20 , 3 10]. 3 de 10, llegasteis a romper estos [señala 3×9] en 2 de 10 más 7 sueltos, ¿no? [escribe $2 \times 10 + 7$ encima de 3×9]. Y entonces estos dos [señala 2×10] con este [señala 1×10] 3 y 7 palillos ahí sueltos [escribe, después de $7 \times 20 + 3 \times 10$, 7×1], ¿vale? Ahora, la cantidad total, ¿cuánto es? [señala el 87 y el 90].

A: 177.

F: 1, 7, 7 [escribe 177 a la izquierda del 87 y del 90]. ¿Hay aquí 1, 7, 7 por algún lado? [señala el 7 de 7×20 , al 3 de 3×10 y al 7 de 7×1]. Este [señala el 7 de 7×1] parece que hay aquí, ¿no? Pero lo otro... no me cuadra mucho todavía... Vale, otros dos grupos.



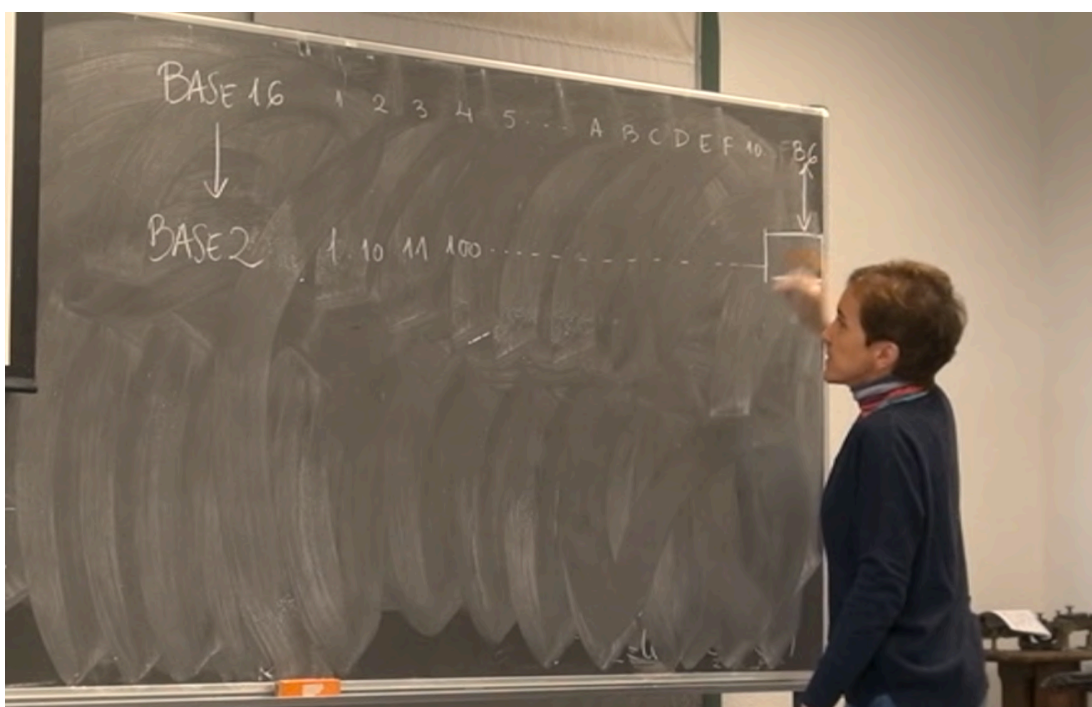
TRANSCRIPCIÓN DEL VÍDEO 2

[F = Formadora del vídeo]. [A = Alumnos]. [Comentarios de Pablo presentados en recuadros].

F: Como me piden pasar de base 16 a base 2 directamente [escribe en la pizarra], pues Martín dice:

Comentario 1: Está planteando un problema de cambio de base de sistema de numeración; es el planteamiento inicial del problema.

«yo escribo aquí la secuencia 1, 2, 3, 4, 5..., A, B, C, D [dice 10, 11, 12, 13, señalando A, B, C, D], 14, 15 [escribiendo E, F], uno, cero [10]..., así hasta el B6», ¿vale? Y luego aquí en paralelo, voy uno [1], uno, cero [10], uno, uno [11], uno, cero, cero [100]..., hasta que pille aquí el que sea y ya está.



No he pasado por base 10, que es lo que me dice Nuria. Con lo cual, superado.
¿Pero qué pasó?

A: Que es muy largo.

F: Que es muy largo.

Comentario 2: Está planteando una posible resolución del problema para pasar un número de base 16 a base 2. Pero, claro, está haciendo ver a los alumnos que esa solución no es la óptima, intentando resolver este mismo problema de una forma más eficiente.

Y que hasta en su casa, teniendo semanas, ha dicho: «paso». Tenías tiempo suficiente, porque había tiempo suficiente en dos semanas a hacerlo, pero... es largo y además un coñazo, con lo cual ha dicho: «paso». Con la idea Nuria ya se hace una idea de que lo he pensado, es un procedimiento válido, pero no ha sido eficaz, ¿vale?, entonces nosotros tenemos que seguir pensando porque tendremos que buscar alguna estrategia que sea eficaz. [Da la palabra a una alumna].

A: ¿Se podría hacer la división?

F: ¿Qué división?

A: La de B6 entre 2. Es que no sé cómo plantearlo.

F: Ella dice: «oye, mira Nuria, cuando tú pasas de base 10 a base 2 haces grupos de 2 y divides de 2 en 2; pues ahora lo mismo, si estoy en B6 a base 2, divide entre 2». Pero aquí estoy escribiendo en base 16... [En la pizarra ha escrito B6 entre 2, con la caja]. Podríamos intentar hacerlo, pero... ¿sabemos hacerlo... o cómo va esto? ¿O mentalmente para hacerlo me vais a pasar a base 10, y hacéis la división en base 10 —que es lo que sabéis hacer—, y luego otra vez volvemos y entonces hacemos trampa porque pasamos por base 10? Si sabéis dividir un número en base 16 entre 2, si sabéis hacer esta división en base 16 —yo lo tendría que pensar, ¿eh?, así a capón no lo sé hacer, pero si lo pienso... —, si sabéis hacer eso, valdría.

Comentario 3: Ahora estamos con otra posible solución, pero, igual, estamos analizando si es fácil, si es difícil, si es óptima... Y, claro, es una forma de hacerlo que podría ser válida, pero que no es nada fácil. Estamos intentando buscar otra solución más sencilla.



Pero esto lo vamos a ver en el dossier 3, ¿eh?, multiplicación y división. Nosotros tenemos herramientas para dividir en base 10 y sabemos cómo hacer restas sucesivas y el algoritmo tradicional de la cajita que habéis ido haciendo... Podríamos abordarlo, por eso abordamos los problemas de..., el anterior, ¿no?, de pasar de base 10 a base 2. Pero el de base 16 a base 2 hay que dividir en base 16. Sumar en base 16 lo sé hacer, restar en base 16 me cuesta un poco pero lo sé hacer, multiplicar en base 16 también podría hacerlo, con lo cual dividir podría hacerlo, pero... no me atrevo a hacerlo sin manos, hoy. Otra forma.

Comentario 4: Les está haciendo ver que todos sabemos dividir en base 10, pero les está haciendo ver la dificultad de dividir un número en base 16 entre 2, para que vean que ese método que ha planteado la alumna no es muy sencillo, la dificultad que presenta la división en base 16.

A: Fijándote en que 16 es 2^4 .

F: Fijándome en que 16 es 2^4 . Me lo voy a apuntar aquí [borra la pizarra y lo escribe].

Comentario 5: Ahora un alumno ha dado con la relación entre las dos bases, la relación entre la base 2 y la base 16, que es que 16 es 2^4 .

A: Yo lo hice así, pero luego algo no me cuadraba.

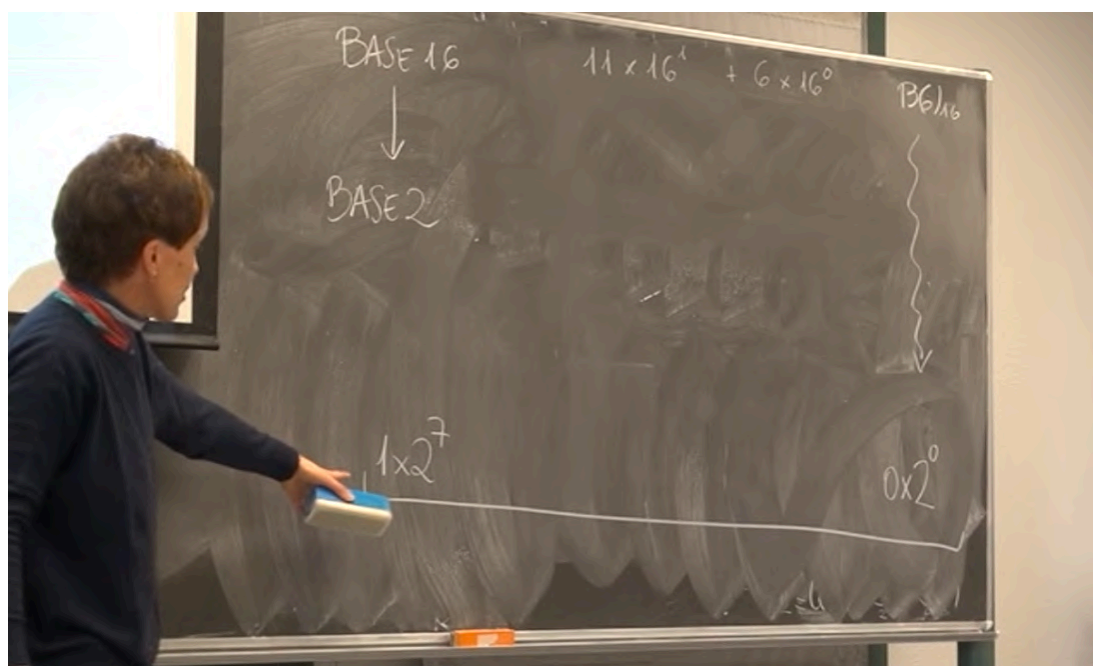
F: Muy bien, vale.

A: Luego hice, 11...

F: Venga, vamos a poner el punto de partida, ¿no? El punto de partida es que tenemos 11×16^1 , ¿no?, más 6×16^0 . Este es mi B6 en base 16.

Comentario 6: Está descomponiendo el número B6 en la base 16, para hacer las manipulaciones necesarias para poder transformarlo a base 2.

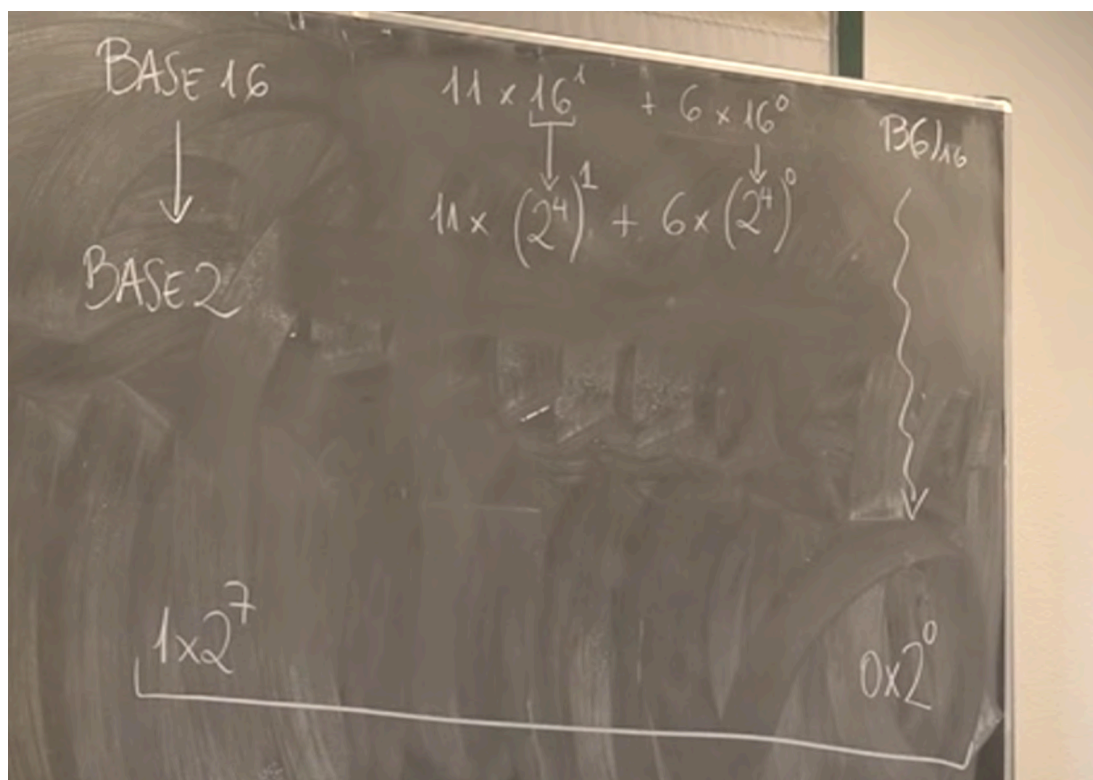
Y yo quiero llegar aquí a... Me acuerdo de que empezaba en 1×2^7 y a acababa en 0×2^0 , ¿vale?



Entonces yo quiero pasar de ahí [señala la parte superior de la pizarra] a aquí [señala la parte inferior]. Si lo consigo, ya lo tengo en base 2, ¿no? Ya solo cojo los coeficientes de las potencias de 2 y ya lo tengo. Entonces, Pablo dice: «cambia este 16», ¿no, Pablo?

A: Sí.

F: Este 16 ponlo como $(2^4)^1$ y este 16 ponlo como $(2^4)^0$. ¿Vale? Yo tengo una expresión polinomial en base 16, quiero llegar a una expresión polinomial en base 2, y él me dice: «yo veo claro el cambio, 16 es 2^4 , cada vez que veas un 16 ponlo como 2^4 ». Vale, y entonces resulta que aquí tengo 11 grupos de esto y aquí tengo 6 de estos. ¿El 11 y el 6... los puedo dejar?



A: No, los pasas a base 2.

F: Los paso a base 2. ¿Sé pasar 11 a base 2?

A: Sí.

F: Vale, vamos a escribir 11 en base 2.

A: 1, 0, 1, 1.

F: 1×2^3 , ¿no?

Comentario 7: Ahora está transformando los coeficientes, en este caso 11 y 6, en base 16 a base 2 para cumplir el objetivo de transformar a base 2 el número, para obtener la expresión en sistema binario.

A: Sí.

F: Más...

A: Cero.

F: 0×2^2 . De momento llevo ocho. Más...

A: Uno.

F: 1×2^1 . Ya llevo 10...

A: Más uno.

F: Más 1×2^0 . Ahí ya tengo 11, ¿vale? Esta es una manera de escribir 11. ¿Cómo? Como potencias de 2. Expresión polinomial del 11 en base 2, como potencias de 2,

¿vale? Y esto va multiplicado... 2 elevado a la 4 y luego lo elevo a la 1, ¿cuánto me queda...? 2^4 es $2 \times 2 \times 2 \times 2$ y luego eso lo elevo a la 1, es decir, que lo copio una vez, o sea que me queda...

A: 2^4 .

F: 2^4 . Más... El 6, ¿lo dejo?

A: No.

F: No. ¿Cómo escribo 6 en base 2?

A: 1×2^2 .

F: 1×2^2 , que son 4.

A: 1×2^1 .

F: 1×2^1 ... Y 0×2^0 [lo va escribiendo todo en la pizarra]. Ahí pone 6, una manera más chula, ¿no?, de poner 6 como potencias de 2, ¿no?, como un polinomio con potencias de 2. Vale, y luego estaba por... Y ahora tengo $(2^4)^0$. ¿Eso qué es?

A: Uno.

F: Uno. ¿Y si lo quiero poner como potencias de 2?

A: 2^0 .

F: 2^0 , muy bien. 2^0 [lo escribe en la pizarra]. Mira qué contenta estoy, porque $2^0 \times 2^0$ es 2^0 y el coeficiente es 0, que es este.

Comentario 8: Ahora ya empieza a relacionar esa expresión que ha obtenido al transformar los coeficientes a base 2 con la expresión final que quiere obtener, empezando a relacionar los coeficientes finales con esa expresión.

Y $2^4 \times 2^3$ es 2^7 y el coeficiente es 1, que es este. Pues como que ya casi lo tengo, ¿no? ¿Sí o no?

A: Sí...

Comentario 9: Ahora está interaccionando con los alumnos para ver si realmente están comprendiendo la idea que está intentando mostrar de la relación de los coeficientes con la relación final que quiere obtener.

BASE 16

↓

BASE 2

$$11 \times 16^1 + 6 \times 16^0$$

$$\downarrow$$

$$11 \times (2^4)^1 + 6 \times (2^4)^0$$

$$\downarrow$$

$$[1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0] \times 2^4 + [1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0] \times 2^0$$

$$\downarrow$$

$$1 \times 2^7$$

$$\downarrow$$

$$0 \times 2^0$$

F: Vale, y ahora... Venga, ¿cuál será el coeficiente...? Venga, vamos a poner aquí 2^6 , paso a la siguiente varilla del ábaco, ¿eh? ¿Cuál será el coeficiente de 2^6 ?

Comentario 10: Aquí acaba de relacionar lo que están haciendo, las expresiones aritméticas, con el instrumento del ábaco; supongo que anteriormente habrán trabajado con el ábaco.

A: Cero.

F: Cero, porque ¿cómo consigo yo 2^6 ? $2^4 \times 2^2$, ¿no? 2^4 es $2 \times 2 \times 2 \times 2$, 2^2 es 2×2 , ya tengo ahí los seis doses, ¿vale?, que está aquí, y el coeficiente cero. ¿Por aquí puedo llegar a 2^6 ?

A: No.

F: No, pues ala. 0×2^6 . Genial, porque era lo que me había salido antes. Ahora, más... Siguiente varilla del ábaco, 2^5 . ¿Dónde consigo yo 2^5 ? Aquí [señala el corchete de la derecha] como mucho llego a 2^2 , me olvido de esto. $2^4 \times 2^1$ [señalando el corchete de la izquierda] es 2^5 , ¿no?

A: Sí.

F: Vale, ¿y qué coeficiente lleva?

A: 1.

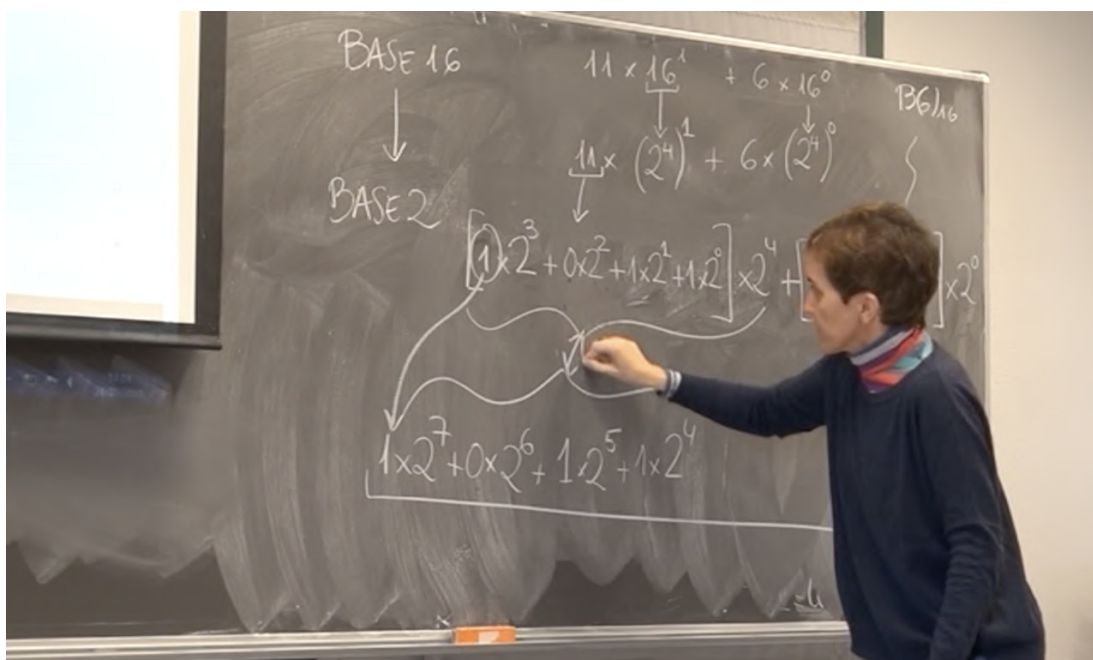
F: 1. ¿Y era el qué tenía que llevar?

A: Sí.

F: Sí, vamos bien. Y ahora, 2^4 , ¿cómo consigo 2^4 ?

A: Con 2^0 ...

F: $2^4 \times 2^0$, ¿no? Tengo aquí cuatro copias del 2 y aquí ninguna, pues tengo cuatro copias del 2 multiplicándose por sí mismo, y el coeficiente 1. 1×2^4 [lo escribe en la pizarra]. Oye, mira, todo esto se ha convertido en esto. Lo veis, ¿no?



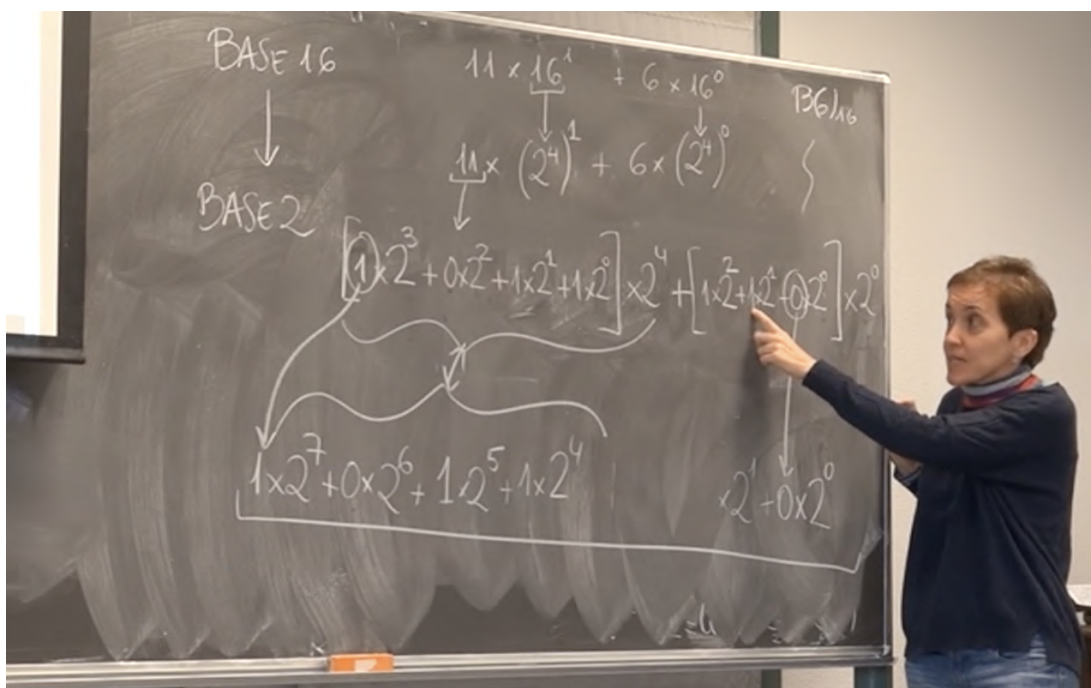
¿Qué es lo que he hecho? Propiedad distributiva. Voy multiplicando el 2^4 por cada uno de los sumandos, ¿vale? Muy bien.

Comentario 11: Ahora acaba de relacionar lo que acaba de hacer con una propiedad básica de los números que es la propiedad distributiva.

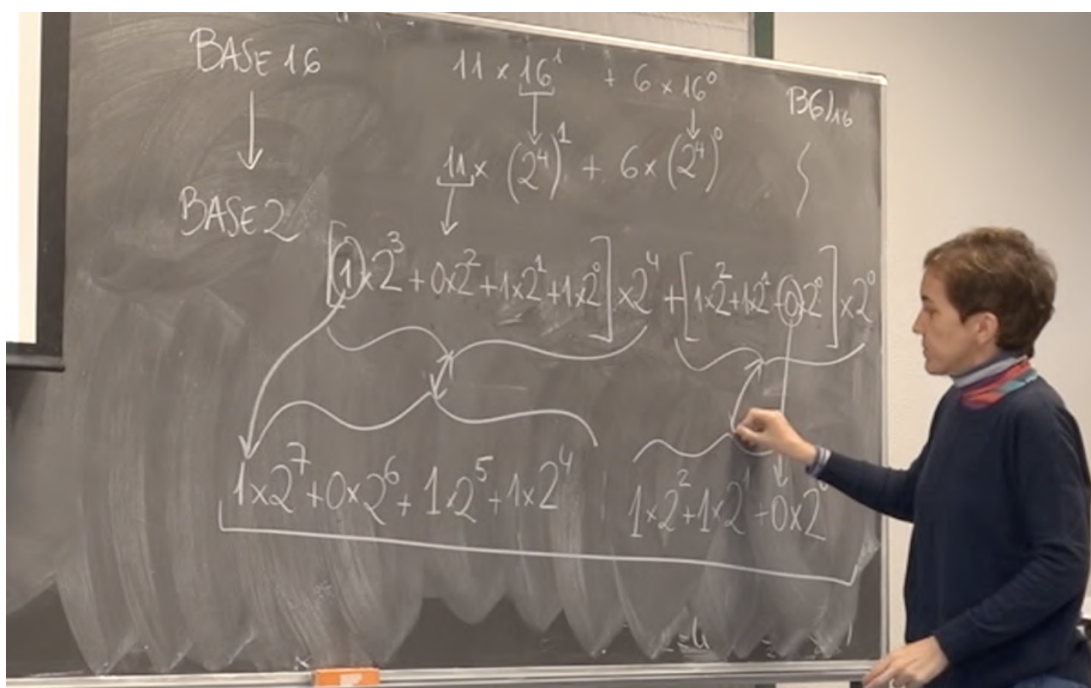
Y ahora, tiro por aquí, voy desde aquí [señala el 2^0 de la parte inferior derecha de la pizarra]. 2^0 , muy bien. Siguiente varilla del ábaco, 2^1 . ¿Qué coeficiente tiene 2^1 ?

A: 1.

F: 1, que está aquí [lo señala], ¿vale?



Porque sería $2^1 \times 2^0$, que es 2^1 , y lleva un 1 delante, un 1 [lo escribe abajo]. Voy bien. Y ahora, $2^0 \times 2^2$, 2^2 [lo escribe abajo], va con un 1 [lo escribe abajo]. O sea que esto que tengo aquí se convierte en esto que tengo aquí.



Y ahora, Pablo, ¿qué te pasó?

A: Que como... Que claro, los iba a juntar, pero dije: «me falta el 2^3 ».

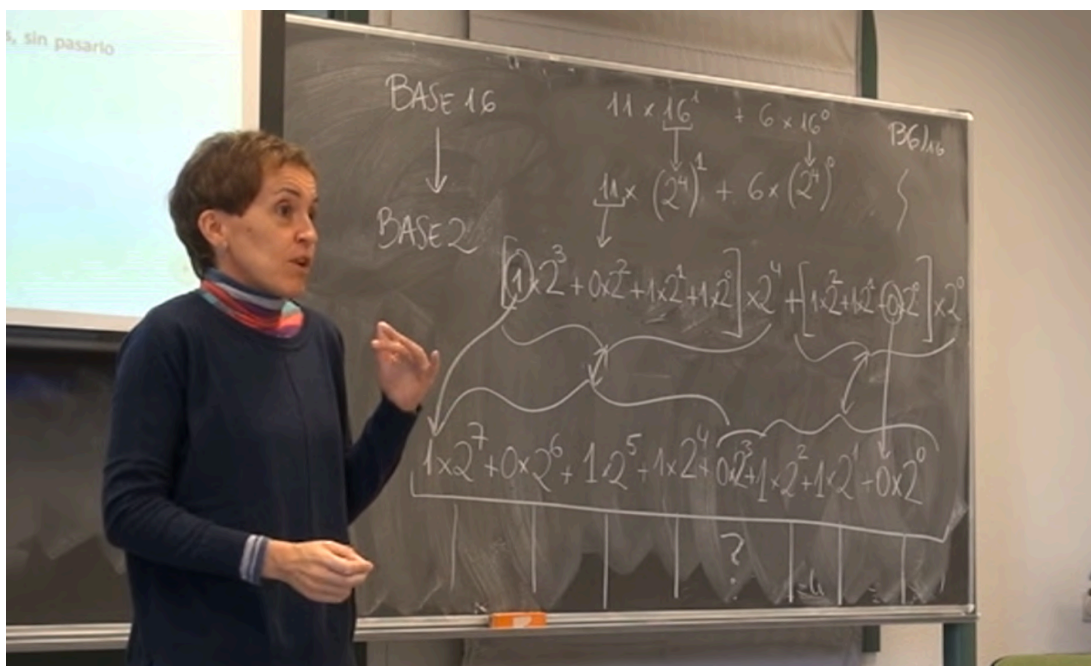
F: Me falta el 2^3 . Pablo dice: «varilla del ábaco del 2^7 , 2^6 , 2^5 , 2^4 , ¡uy!, 2^2 , 2^1 , 2^0 ». «¡Uy!», dice Pablo [y dibuja una interrogación en la posición del 2^3].

A: Pues si no hay, un cero.

F: Pues se pone el 0, ya está.

Comentario 12: Está resolviendo o aclarando el problema de que no haya salido el coeficiente de 2^3 . Está interactuando con los alumnos, tratando de resolver lo que pasa en esa situación, justificando que, si no aparece el coeficiente de 2^3 , se pone un 0 en la descomposición en base 2, en la expresión binaria.

Lo pongo aquí: «+ 0 x 2^3 », y esto lo englobo aquí.



¿Qué es lo que pasa? Que escribo el 6 de una forma muy especial. Yo escribo el 6..., acordaos que esto era mi 6 [señala $1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0$], ¿eh?, esto era el 6, que es este 6 [señala el de un nivel anterior, más arriba en la pizarra], ¿vale? Yo he escrito el 6 como $1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0$, pero también puedo escribir el 6... $0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0$. No es lo estándar, porque como los ceros ahí no aportan mucho, pues no es lo estándar, pero si no me quiero olvidar de una de las varillas y no quiero tener un problema, como tenía Pablo, pues yo añadido ahí para escribir el 6 de otra forma, ¿vale?

Comentario 13: Está analizando la equivalencia de cómo escribir un número de distintas formas incluso en un mismo sistema de numeración.

Entonces, moraleja que cuentan los *youtubers*, por ejemplo David Calle, dice: «vamos a pasar de base 16 a base 2, ¿qué se hace chavales? Mirad, ¿veis este 11 que está aquí? [señala el de arriba de la pizarra], pues escribís este 11 en base 2: 1, 0, 1, 1 [señala los coeficientes de la expresión polinómica de la parte inferior de la

pizarra]; ¿veis este 6 que está aquí? [señala el de arriba de la pizarra], pues lo escribís en base 2, pero cuidadín chavales, que hay que poner cuatro, ¿por qué?, porque 16 es 2^4 ». Y entonces dice: «vamos a escribir 6 en base 2 con cuatro: 0, 1, 1, 0». Y dice: «y ahora lo juntáis, fin».

Comentario 14: Aquí está comentando y criticando las recetas que se dan para resolver un problema sin profundizar en el método de por qué esto es así. Está haciendo ver a los alumnos que lo importante no es tanto el resultado sino el procedimiento de cómo llegamos al resultado.

A mí no me vale porque yo no soy David Calle, yo no estoy de *youtuber*, *influencer*, superfamosa ayudando a los chavales a aprobar exámenes, que es un trabajo muy digno y que está bien, y además el tío es un *crack*, muy suelto, lo hace muy bien; yo estoy formando maestros, entonces tenéis que entender cómo hemos pasado de aquí [señala la parte superior de la pizarra] a aquí [señala la parte inferior de la pizarra] a través de esto [señala la parte media de la pizarra]. Entonces, la pregunta es: ¿se puede pasar de base 16 a base 2 sin pasar por base 10? Sí. Lo acabamos de hacer, ¿no? Es que me miráis con una cara...

Comentario 15: Ahora está recordándoles el problema inicial, porque llevamos mucho tiempo trabajando, realizando cálculos y transformaciones, que era saber si se puede transformar un número de base 16 a base 2 sin tener que pasar por base 10, viendo que la respuesta es «sí», en este problema.

¿Y por qué se puede? ¿Qué pasa si yo esto [el ejercicio] os lo doy en base 15 y, en vez de en base 16, todo el problema es en base 15?

A: Que sería $2^4 + 2^0$.

F: ¿ $2^4 + 2^0$ es 15?

Comentario 16: Acaba de hacer una modificación del problema. Tenemos un problema inicial, que ya hemos resuelto, y ahora está modificando el problema, ha cambiado un dato, para ver cómo influye esa modificación en la resolución, para ver si se puede aplicar el mismo método de resolución o no.

A: O sea, no..., perdón. $2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0$.

F: Vale, y entonces tendría que ir haciendo todas las distributivas, todo el follón, ahí. ¿Y David Calle me podría dar el algoritmo...? Escribes, imaginaos el mismo

número, ¿eh?, B6, en vez de en base 16, en base 15. ¿David Calle me puede decir...? Aquí tengo el 15, ¿no?, aquí tengo el 15 [los escribe encima de los 16], y David Calle me dice: «escribe esto [señala el 11] en base 2, escribe esto [señala el 6] en base 2, con tres y medio dígitos o cuatro dígitos o... tres dígitos, y lo pones junto. ¿Valdría ese algoritmo?

A: No.

F: No. ¿Vale?

Comentario 17: Ahora está haciendo ver lo que ha comentado antes, que las recetas muchas veces valen para un caso concreto, pero en cuanto hacemos una modificación en un dato del problema, como en este caso, pues ya no valdría.

O sea, que poder se puede pasar, vas con paciencia escribiendo cada una de las expresiones que aparecen, pero un paso directo solo se puede cuando una base es potencia de la otra base, que es lo que hemos visto con 16, que es potencia de 2, que es 2^4 .

Comentario 18: Ahora acaba de generalizar el problema, es decir, la solución que ha dado para pasar de base 16 a base 2, ha generalizado el problema para ver cuándo este método funciona, en qué casos funciona.

¿Está claro hasta aquí? ¿Sí?

TRANSCRIPCIÓN DEL VÍDEO 3

Fragmento 1

[F = Formadora del vídeo]. [Comentarios de Pablo presentados en recuadros].

- F: Entonces, la idea es..., el ejercicio 4, que está proyectado en la pantalla, es el ejercicio 4 de la última hoja, de la hoja del dossier 2, con el que vamos a trabajar ya esta semana, ¿vale? En ese ejercicio hay cuatro operaciones, cuatro problemas, cuatro operaciones. Tenéis que hacer las cuatro operaciones..., representarlas de distintas maneras. Voy a poner en la pizarra de cuántas maneras, ¿vale? Entonces, acordaos que nosotros estamos trabajando con material manipulativo [escribe en la pizarra «Manipulativo»], ¿vale? Entonces, en primer lugar tenéis que representar esta suma $[210 + 543]$, esta suma $[315 + 429]$, esta resta $[135 - 24]$ y esta resta $[704 - 45]$, por partes [va señalando en el PDF proyectado en la pantalla], ¿no?, empezáis con la primera... Tenéis que representarlo [escribe en la pizarra] con ábaco vertical, después en el sorobán y después con los multibase, ¿vale? Y tenéis que tener las tres representaciones del proceso delante para saber comparar cada dos, ¿vale?, para saber entender cómo se traduce una en otra.

Comentario 1: Aquí está indicando la tarea, que parece ser que consiste en expresar varias operaciones con varios materiales, con el objetivo de comparar esa misma operación con los distintos materiales que están utilizando en clase.

Lo que no quiero es que me digáis: « $210 + 543$ son 753; Nuria, te he representado 743* en el ábaco vertical, en el sorobán y en los bloques multibase». No quiero la representación del resultado, quiero la representación del proceso, de la suma, de la idea «suma».

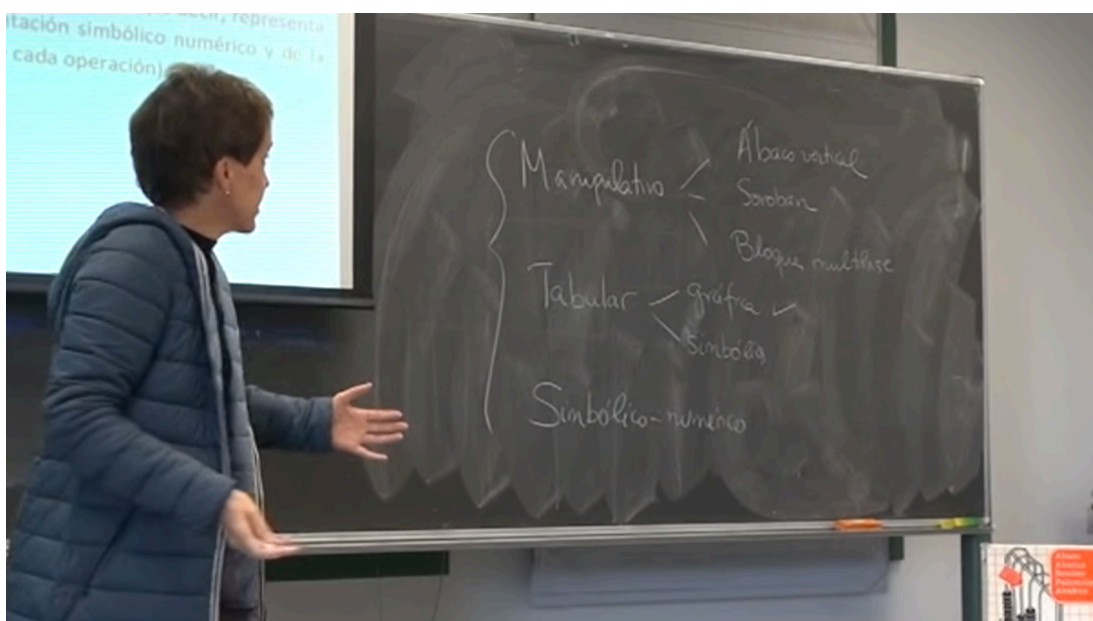
Comentario 2: Igual que en el vídeo anterior, está haciendo ver que lo que interesa es el procedimiento de la operación, cómo se llega al resultado, no que representen el resultado en cada instrumento.

¿En qué os tenéis que basar?, en la definición de la suma que vimos el otro día, ¿no?, que es: elijo un representante de uno, elijo un representante del otro y hago la unión, agrupo, junto, como lo queráis pensar, ¿vale? Entonces, hay que representar el proceso, el proceso, no solo el resultado final de ese proceso.

Entonces, tenéis que representar el proceso de tres maneras en el sistema de representación manipulativo [señala lo que ha escrito antes en la pizarra], ¿vale? Y en paralelo [empieza a escribir en la pizarra] tenéis que representar el proceso en el sistema de representación simbólico-numérico; el enunciado está dado en ese sistema de representación, ¿vale?, esto es sistema de representación simbólico-numérico, pues tenéis que representar el proceso, las dos sumas y las dos restas, en ese sistema, ¿vale?

Comentario 3: Ahora les está poniendo una nueva tarea, que consiste en realizar también esas operaciones con el lenguaje simbólico-numérico para que puedan comparar ambos procedimientos.

Y luego, en medio [escribe en la pizarra], hay una representación que es formato tabla o tabular, de la que no he hablado explícitamente, pero que me gustaría que construyerais vosotros, ¿vale? Necesito que construyáis, por ejemplo, esta suma [señala $210 + 543$], que la hagáis en tabla, con una tabla, como se os ocurra a vosotros diseñar la tabla, ¿vale? La tabla [escribe en la pizarra] puede ser más gráfica, puede tener características gráficas, o puede tener características más simbólicas; a mí me va a interesar más la que tenga características más gráficas, luego ya veremos en detalle cómo, pero tenéis que intentar construirlo vosotros sin que yo os haya hablado de eso explícitamente, ¿vale?



Entonces, paso 1, aquí [señala la parte de representación manipulativa de la pizarra], en paralelo paso 2, simbólico-numérico [lo señala en la pizarra] y luego ya, según vayáis trabajando los cuatro ejemplos, igual ya se os va ocurriendo cómo representarlo con una tabla y cómo trabajar con una tabla ese tipo de operaciones.

Comentario 4: Ahora acaba de indicarles también que lo hagan en forma de tabla, y lo interesante, por lo menos a mi parecer, es que no lo han trabajado en clase, es decir, deja que ellos intenten descubrir la forma de representar esas operaciones por ellos mismos sin haberlo trabajado previamente en clase.

¿Está claro? Yo me voy a pasar por las mesas y me vais preguntando todas las dudas que os surjan. No voy a pedir que me mandéis nada, ¿vale?, porque todavía no he revisado las últimas fotos que me habéis mandado, con lo cual estoy un poco desbordada; como no sois muchos, yo voy por vuestros puestos. Ahora bien, en el grupo anterior han decidido grabar pequeños vídeos o hacer fotos de los procesos que iban construyendo por llevárselo como material para estudiar, a mí me parece una buena idea, pero ya vosotros hacéis lo que queráis, a mí no me lo tenéis que mandar, pero si queréis, una vez que hayáis construido, por ejemplo, con el ábaco japonés, imaginaos, esta resta de aquí [señala el PDF en la pantalla], y decís: «ah, pues nos vamos a grabar», uno lo hace otro lo graba y lo tenéis de recuerdo, ¿no?, para cuando tengáis que estudiar. ¿Cómo voy a pedir yo eso en el examen? Pues no lo puedo pedir porque no puedo llevar un sorobán para cada uno porque tengo un día, 2 horas y media o 3, para haceros el examen final de la asignatura; pero para mí esto es muy importante, entonces yo voy a pedir que me representéis gráficamente, gráficamente, vuestro proceso de respuesta con un ábaco vertical, con un sorobán o con los bloques multibase, que es lo que yo luego voy a hacer aquí en la sesión final de discusión cuando acabemos esta hora de clase. Yo no voy a coger el ábaco aquí, lo voy a poner delante de todos y tal —podría hacerlo, pero no lo voy a hacer—, lo voy a hacer representando gráficamente el material manipulativo y así es como lo voy a pedir el día del examen, porque os voy a dar un cuadernillo y lo tenéis que hacer gráfico, ¿vale? Bueno, pues empezad, están escritas en un orden muy concreto, empezad a hacerlas en ese orden y luego ya discutimos sobre por qué están puestas en ese orden, ¿vale?

Fragmento 2

[F = Formadora del vídeo]. [A = Alumnos (A1, A2 y A3)]. [Comentarios de Pablo presentados en recuadros].

- A1: Estamos rayados con la última resta.
 F: Vale, a ver, empezad.
 A1: Son 704 - 45.
 F: Vale.
 A1: Entonces, aquí no le podemos restar 5.



- F: Así tal cual está, puedes restar..., ¿cuántas puedes quitar?
 A1: Cuatro.
 F: Cuatro, vale, sí.
 A1: Entonces voy a suponer que aquí [señala la varilla de las decenas] hay un 1.
 A2: No, que hay 10.
 A1: Que hay 10, para que sea 14...
 F: A ver, olvídate de los «suponer». Tú dices: «tengo que quitar 5», ¿no?, quito 1, quito 2, quito 3, quito 4 [quita cuentas de la varilla de las unidades] y ahora ponme aquí más para que yo quite, tal y como está.



A1: Habría que poner 10 y quitamos 1.

F: Pero ¿cómo me ponéis..., cómo me ponéis ahí? A ver Pablo.

A2: ¿Que lo ponga?

F: No, no, que me digas... Yo aquí [señala la varilla de las centenas] tengo ahora mismo 700, ¿no? Escribe 700 de otra forma para que yo tenga bolas...

A1: Aaaaah, hay que añadir una aquí [señala la varilla de las decenas].

F: Venga, a ver.

A2: [El alumno A2 quita una cuenta de la varilla de las centenas y la pone en la de las decenas].

F: ¿Aquí sigue poniendo 700?

A1: No, no, no, hay que poner una nueva aquí [vuelve a poner la cuenta en la varilla de las centenas —la que había puesto en la varilla de las decenas el alumno A2— y pone una nueva en la varilla de las decenas].

Comentario 1: Todo lo que está haciendo ahora es para ver la problemática de qué pasa en una resta cuando..., en este caso teníamos en las unidades 4 y hay que restarle 5, teníamos 0 decenas, entonces... para ver, para comprender el procedimiento, está utilizando un material manipulativo para comprender el procedimiento y huir de las típicas recetas que se usan, para que el alumno entienda el algoritmo de la resta.

F: A ver [quita la cuenta de la varilla de las decenas]. Teníamos 704, hemos quitado 4, tengo 700, ¿vale?

A1: Sí.

- F: Ahora, escribe 700 de otra forma para poder quitar otra.
- A1: Pues...
- F: ¿Cómo podéis escribir 700 de otra forma?
- A1: Que aquí [señala la varilla de las decenas] haya 9...
- F: Venga.
- A1: Y aquí [señala la varilla de las unidades]..., 9.
- F: A ver, para que haya aquíííí... [señala la varilla de las decenas], vamos a ver, ¿cómo consigo aquí decenas? Sin cambiar el número...
- A1: Si quito esta... [quita una cuenta de la varilla de las centenas].



- F: Venga, muy bien.
- A1: Pongo aquí 10 [señala la varilla de las decenas].
- F: Venga, dale.
- A1: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10.
- A3: ¡Ah, vale!

Comentario 2: Aquí está interactuando con los alumnos para ver las equivalencias entre..., pues en este caso va a decir 1 centena, que son 10 decenas, y bueno, ahora verá que una decena son 10 unidades para ya resolver el problema que teníamos con esta resta.



F: ¿Ahora aquí pone 700?

A1: Sí.

F: ¿Y cómo está escrito 700?

A3: Mal.

F: 6×10^2 , ¿no?, 6×100 , más...

A2: 10×10^1 .

F: 10×10^1 , muy bien. Ahora, ¿puedo quitar aquí [señala la varilla de las unidades] que quería quitar una? ¿Tengo?

A1: No.

F: No, ¿cómo puedo volver a escribir 700 para tener aquí [varilla de las unidades]?

A1: Pues quito de estas [quita una cuenta de la varilla de las decenas] y añado 10 aquí [señala la varilla de las unidades].

F: Vale, venga.



- F: Vale, ¿y ahora puedes quitar la que te faltaba por quitar?
- A1: [La estudiante A1 quita una cuenta de la varilla de las unidades].
- F: Ya está. Ya habéis quitado 5 y teníais que quitar 45, ¿no? ¿Cuánto os falta por quitar?
- A1: Sí, ahora aquí [señala la varilla de las decenas] hay que quitar 4.
- F: Pues ya está, ¿no?
- A1: Ah, vale, vale. Gracias.



- F: ¿Entonces qué habéis hecho para reescribir el 700...? O sea, yo tenía 700 ahí, tenía aquí 700 [deja el ábaco con 7 cuentas en la varilla de las centenas], ¿qué habéis hecho?

Comentario 3: Está interactuando con los alumnos para recordar todo el procedimiento que han utilizado para resolver el problema inicial que tenían de no poder quitar 5 unidades a un número que tenía 4.

- A2: Como es sistema decimal, pues aquí [señala la varilla de las decenas] hay 10, porque... representamos un 0, pues quitar una de aquí [varilla de las centenas] y ponerle las 10 aquí [varilla de las decenas] para luego restarlas aquí [varilla de las unidades].
- F: O sea que habéis..., ¿agrupado o desagrupado?
- A1: Desagrupado.
- A2: Aquí desagrupado.
- F: Desagrupado. Habéis desagrupado una centena en 10 decenas y luego una decena la habéis desagrupado en 10 unidades.
- A1: Vale, es que cuando tú lo haces en papel no haces esto así.
- F: Ah, pues dime entonces qué es lo que haces en papel.
- A1: Claro, lo haces muy mental. O sea, en verdad sí que haces eso, pero... bueno, ya me has entendido.

Comentario 4: Está interactuando con la alumna para hacerle ver la relación que hay entre lo que hace en papel con lo que acaban de hacer ahora manipulativamente.

- F: No, no, pero lo tienes que explicar porque luego os he pedido que lo hagáis simbólico...
- A1: Ya, ya, ya.
- F: Entonces, simbólico tienes que explicarlo conectado con esto.
- A1: Vale, vale.

Fragmento 3

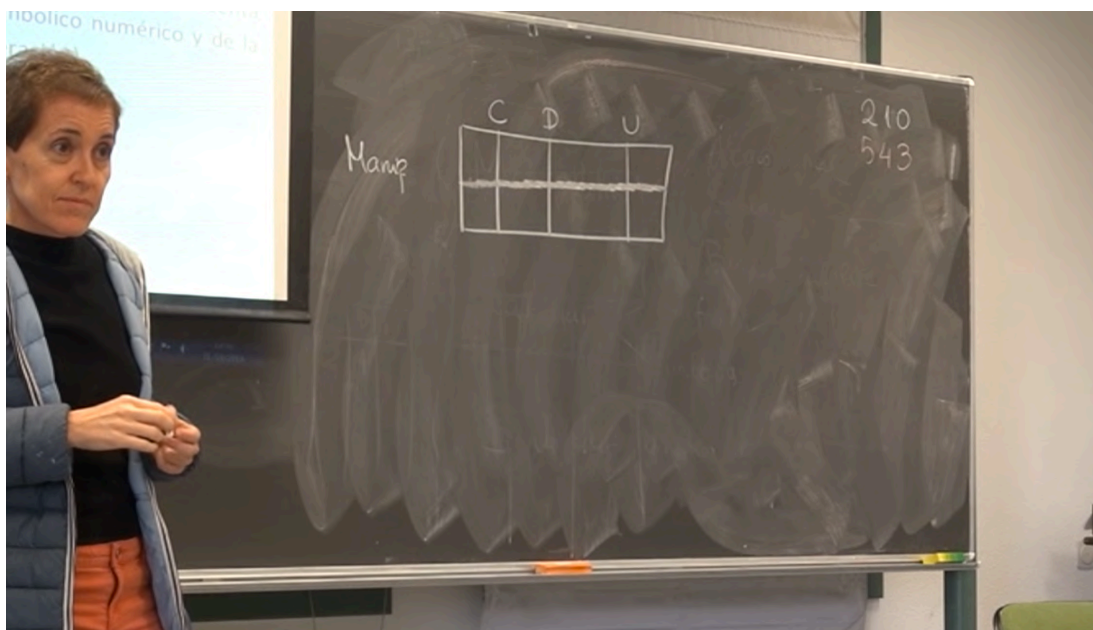
[F = Formadora del vídeo]. [A = Alumnos]. [Comentarios de Pablo presentados en recuadros].

- F: Vamos a corregir uno, el primero, ¿vale? Me dan $210 + 543$, ¿vale?, con símbolos. Voy a representarlo..., vamos a empezar con manipulativo y voy a ejemplificar con el sorobán, que es el que parece que más trabajo cuesta, ¿vale? Entonces, en el sorobán, cuando lo representéis gráficamente el día del examen, o ahora en vuestro cuaderno si tenéis que tomar notas,

Comentario 1: Está trabajando la representación gráfica de un elemento manipulativo, ya que, como ha dicho, cuando hagan el examen lo van a tener que hacer así de esta forma gráfica.

es muy importante marcar la barra del medio, porque la proximidad de las bolas a la barra del medio es la que te indica qué número está representando, ¿vale? Y ahora, dado el problema que me han planteado, ¿cuántas varillas pensáis que necesito escribir?

- A: Tres.
- F: ¿Tres varillas? Pongo una varilla, dos varillas, tres varillas. Esta, unidades, decenas, centenas. Esta la pongo un poco más gorda para que se note que es la barra de madera del medio, ¿vale? Y ahora, ¿cómo dibujo 210?



- A: Pues 0 unidades.

F: 0, o sea que aquí no pongo nada pegado a la barra, ¿no? [señala la varilla de las unidades]. ¿Aquí? [señala la varilla de las decenas].

A: 1 decena.

F: Una pegada a la barra, ¿arriba o abajo?

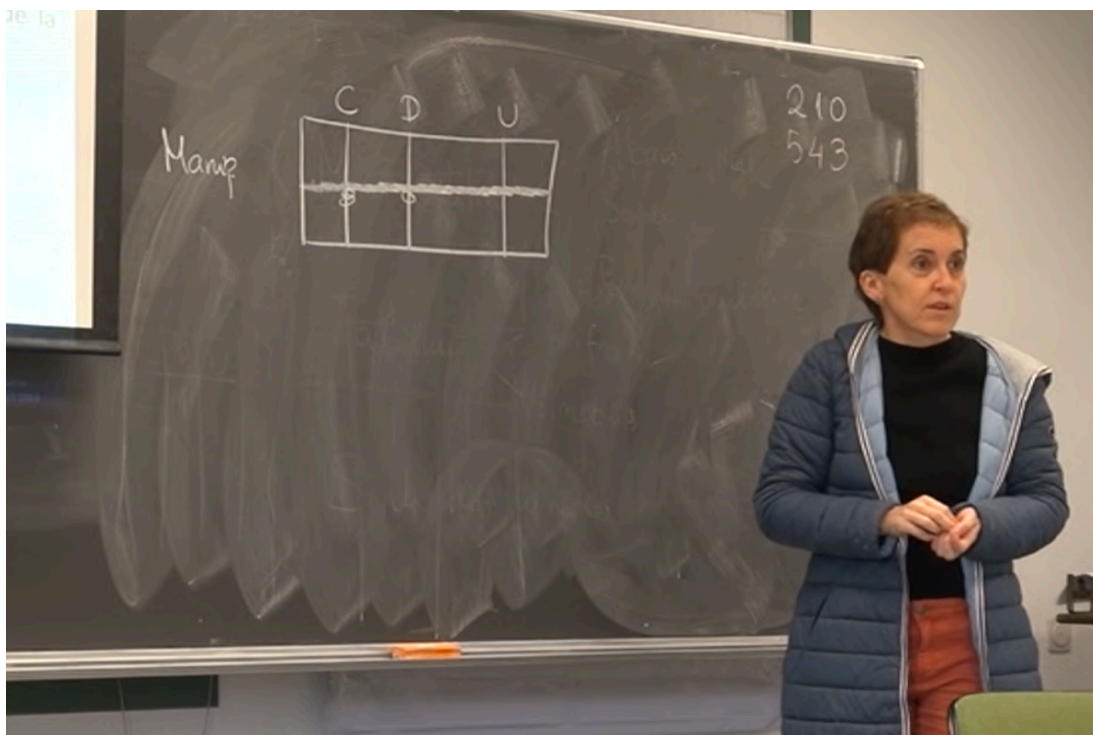
A: Abajo.

Comentario 2: Ahora está trabajando cómo representar los números que... Bueno, el objetivo era sumar esos dos números, $210 + 543$, y ahora está viendo cómo representar en este material esos dos números.

F: Abajo, o sea que aquí va una.

A: Y 2 centenas pegadas a la barra de abajo.

F: Pegadas a la barra, abajo. Una y dos, ahí está. Eso es 210.



Y ahora, tengo que sumar 543, es decir, que tengo que añadir 543 unidades ahí. Aprovecho la estructura, ¿vale? Entonces, añado 3 unidades, en la varilla de las unidades, que son 3 aquí abajo, ¿no?, 1, 2 y 3 [las dibuja en la varilla de las unidades]. Después añado 4 decenas, en la varilla... 1, 2, 3, 4, ¿vale? [las dibuja en la varilla de las decenas], 4 decenas.

Comentario 3: Bueno, no lo he comentado antes, está haciendo hincapié en que hay que sumar, en que hay que añadir, imagino que porque luego harán una resta; entonces hay que añadir, en este caso las unidades, las decenas y las centenas.

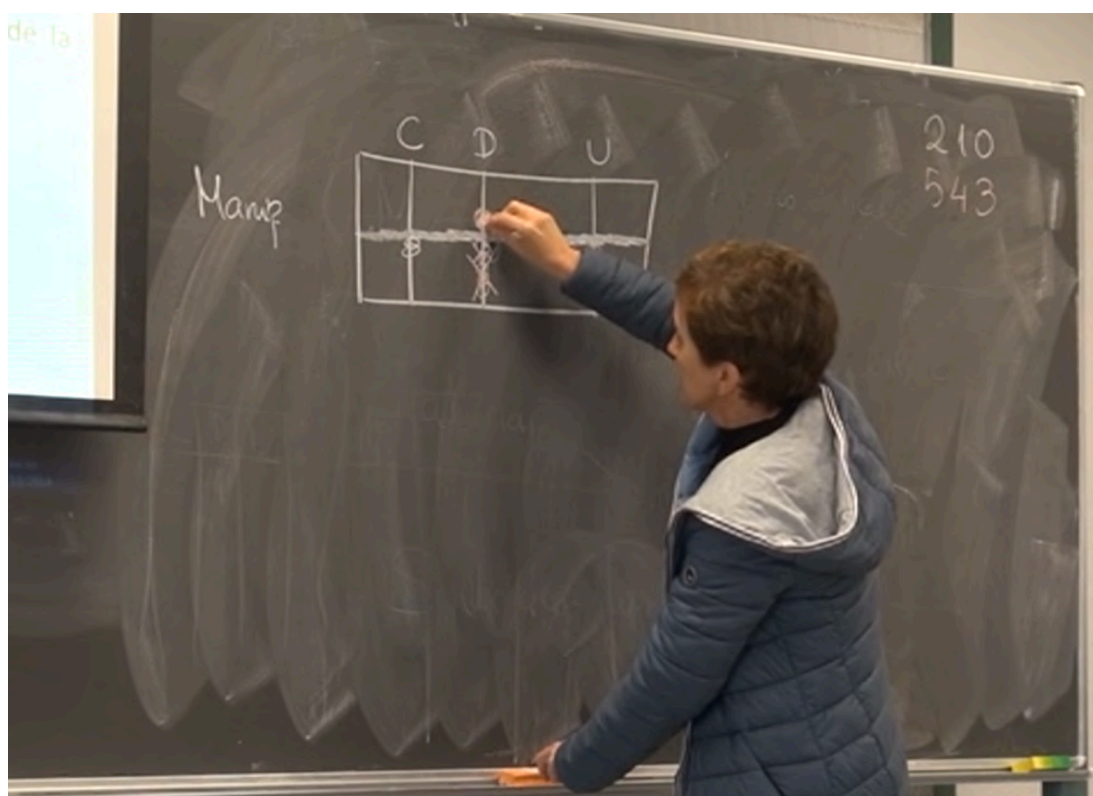
A: Pero cambiamos...

F: Pero...

A: Bajamos una de arriba y quitamos las de abajo.

F: Porque no tenéis 4, ¿vale?, ya no había suficientes, ¿por qué?, porque las bolas de arriba valen 5, entonces decís: «no pasa nada, estas, como eran 4 y 1, 5, se representan ahí arriba», ¿vale?

Comentario 4: Aquí está mostrando la equivalencia, cómo se trabaja con este material.



Y luego, 5..., tengo que añadir 5 centenas, ¿cómo lo hago?

A: Pues 1 arriba.

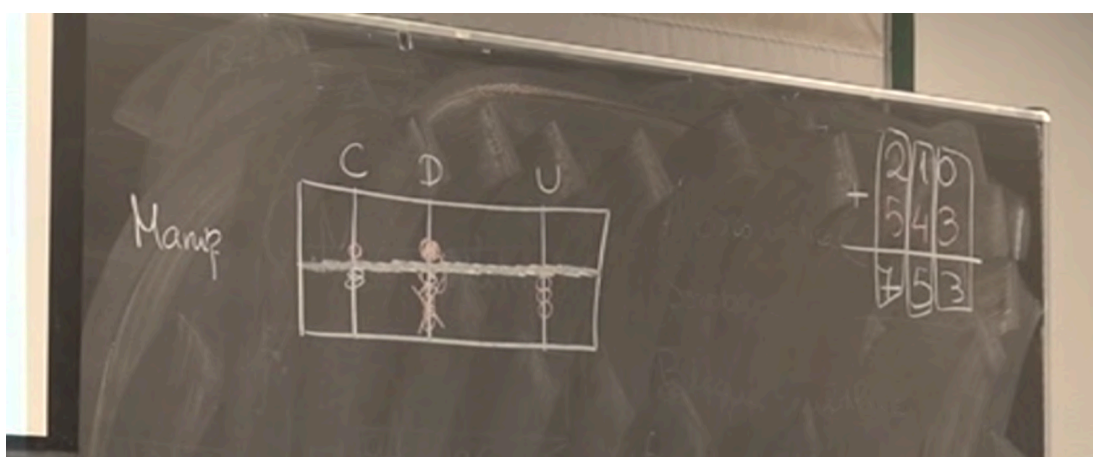
F: Una de arriba la bajo directamente o podría ir: «1, 2, 3, ya tengo 5, las subo ahí, 4, 5» [va señalando en la varilla de las centenas], ¿vale? Puedo hacerlo de dos formas distintas. Pero si aprovecho la estructura del ábaco, de manera que las bolas de arriba valen 5, como tengo que añadir 5, pues directamente ya añadido ahí esas 5 [dibuja una bola en la varilla de las centenas, en la parte superior, pegada a la barra horizontal], ¿vale?

Comentario 5: Acaba de explicar dos formas distintas de hacer lo mismo al trabajar con las centenas, haciendo hincapié en cuál de las dos es más sencilla dado el material que está usando, que es colocar la bola arriba directamente y no ir sumando unidades hasta

agruparlas en 5, dejando luego una arriba y dos abajo. De las dos soluciones, ha visto cuál es la mejor.

Entonces, [representa ahora el resultado en la suma con el algoritmo tradicional de forma simbólico-numérica a partir de lo que ha obtenido en la representación con el sorobán] me quedan 5 y 2, 7, aquí me quedan 5, y aquí me quedaban 3. Entonces, si yo lo represento así y voy sumando por columnas, tal cual he ido haciendo en el ábaco, tengo 0 unidades y 3 unidades, 3 unidades, 1 unidad y 4 unidades, 5 unidades, perdón, decenas, 2 decenas y 5 decenas, 7 decenas. Vertical, lo he colocado vertical por parecerme a la estructura del ábaco, ¿no?, para tener en cuenta la «posicionalidad», ¿vale?, del sistema.

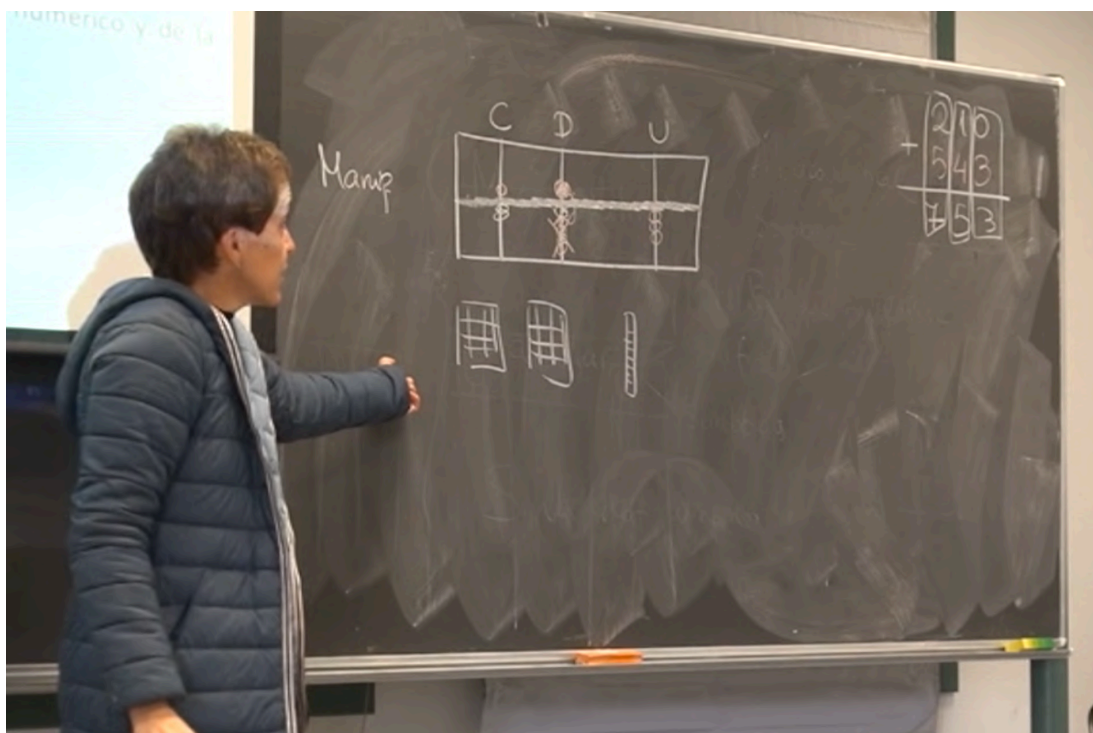
Comentario 6: Ahora está relacionando el material manipulativo con la escritura simbólico-numérica para que vean la relación que hay.



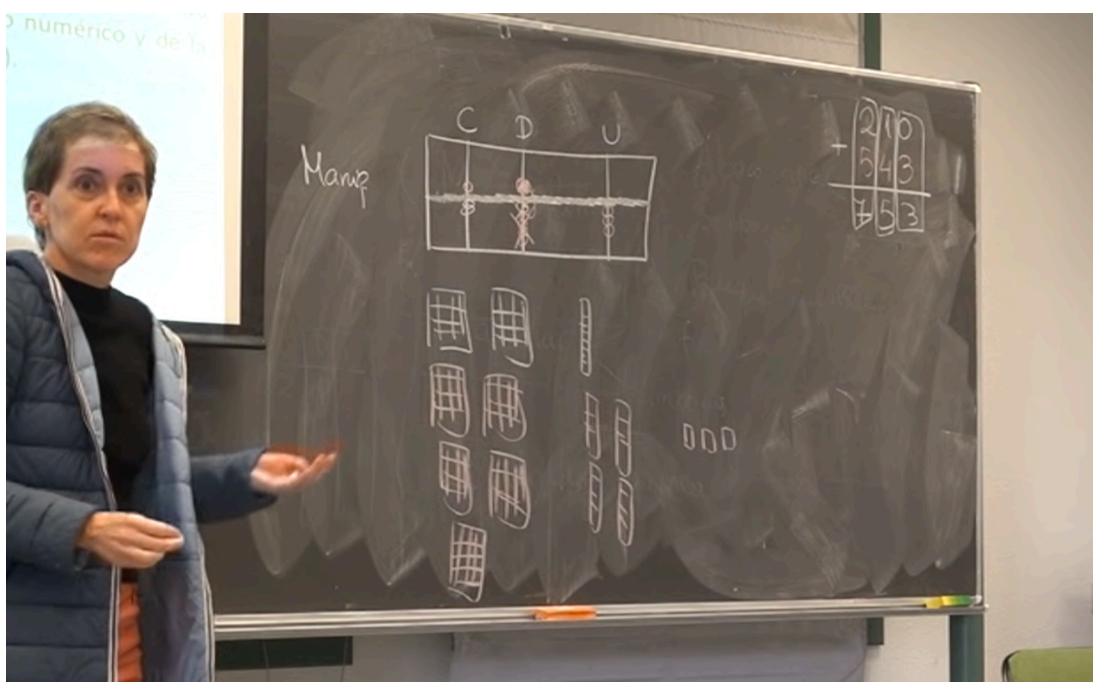
Entonces, he traducido al simbólico lo que he hecho aquí manipulativamente al escribir en simbólico en columnas y represento con cada columna cada una de estas [señala las varillas del sorobán de la pizarra]. Y luego, la escritura, sí que tengo que tener en cuenta que estos son 5 [señala las decenas de la suma en simbólico] con lo cual van arriba [en el sorobán] y esto son 7 [señala las centenas de la suma en simbólico], pues son 5 y 2 [en el sorobán], ¿vale?

Bloques multibase, bloques multibase, pongo aquí 210, ¿no?, que son 1 y 2 placas de 100 y 10, una decena; este es el 210.

Comentario 7: Ahora está utilizando otro material manipulativo, los bloques multibase, y está analizando cómo se representaría cada número de la suma con ese material.



Y ahora agrupo 543; una, dos, tres, cuatro y cinco [dibuja 5 placas de 100 unidades], añado, ¿vale?, 500. 40: una, dos, tres, cuatro [barras de 10]; y 3: uno, dos y tres [unidades]. Y ahora lo pongo todo junto. ¿Vale?



Y digo: «aquí tengo 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 [placas de 100]», ¿necesito agrupar? [Rodea con una línea todas las placas de 100].

A: No.

F: No necesito agrupar. Aquí tengo 1, 2, 3, 4, 5, 6, 5, ¿necesito agrupar estos 5 de alguna manera? [Rodea con una línea todas las barras de 10].

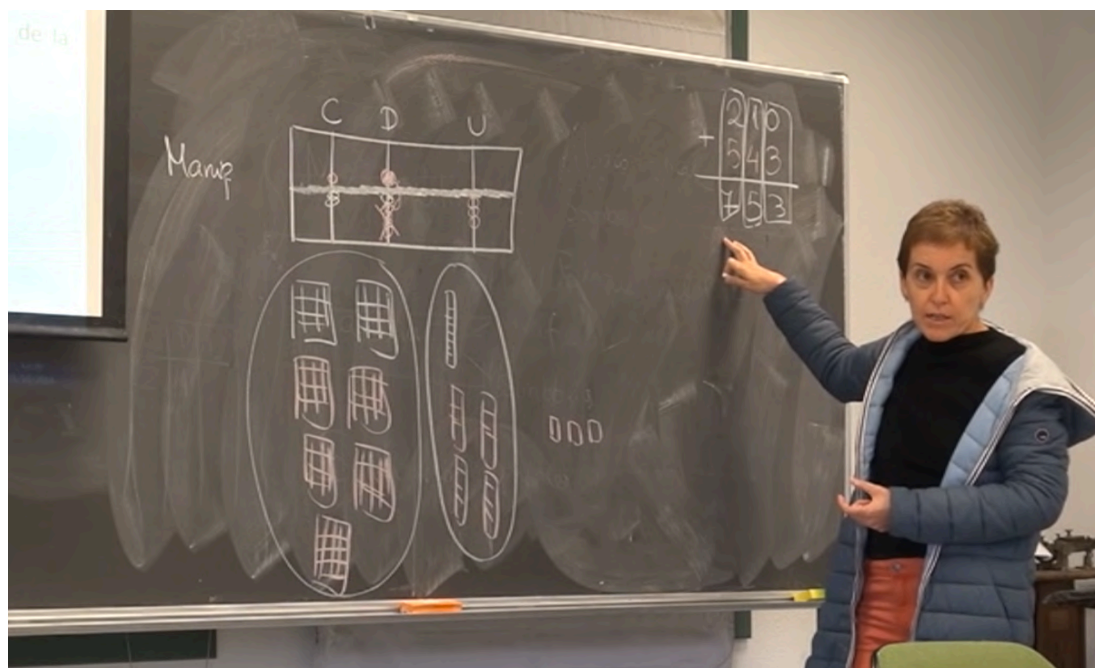
Comentario 8: Aquí está trabajando lo que significa la suma, que viene a ser «unir», está uniendo las centenas, está uniendo las decenas y está uniendo las unidades.

No porque es base 10. Y aquí tengo 3, ¿vale? O sea, que me vuelve a salir 2, 4, 6, 7 [centenas; señala la suma en simbólico], 2, 4, 5 [decenas], 5 [señala la suma en simbólico] y 3. Y veo la conexión de uno con otro, ¿vale?

Comentario 9: Nuevamente está conectando el material manipulativo con la escritura simbólico-numérica.

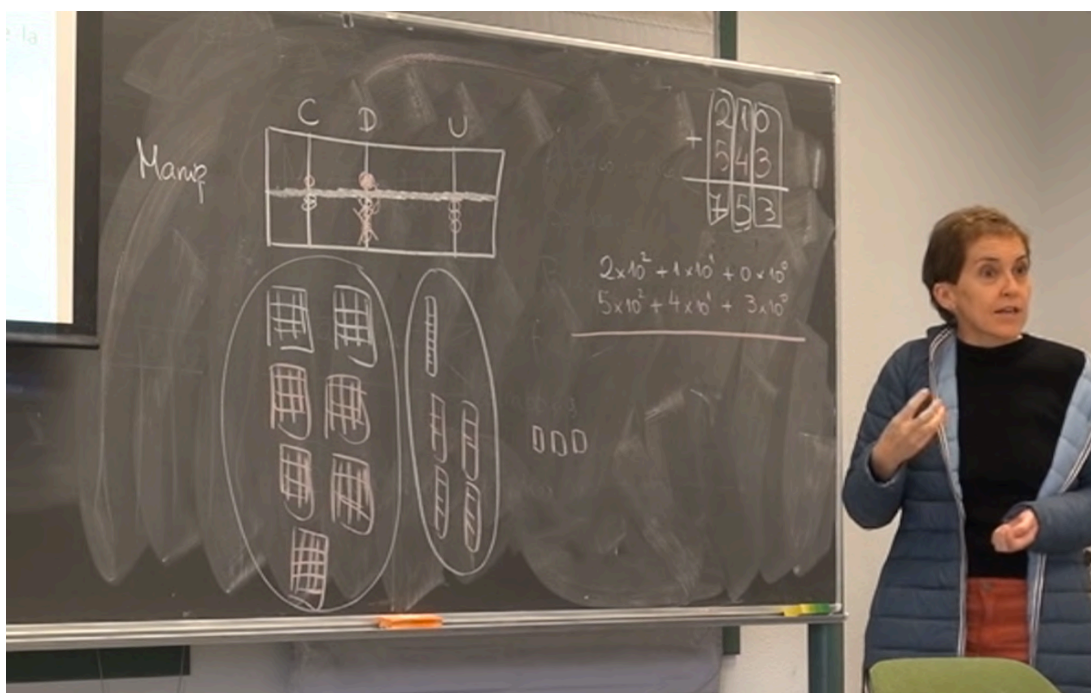
¿Está claro hasta aquí?

A: Sí, eso sí.



F: El que quiera escribirlo simbólico-numérico de otra manera en la que se vea la «posicionalidad» del sistema, podría escribirlo de la siguiente forma: $2 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 0 \times 10^0$, ese es el primer sumando; segundo sumando, $5 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 3 \times 10^0$; y sumo.

Comentario 10: Ahora está conectando la escritura simbólico-numérica abreviada con la descomposición polinómica de los números, viendo su equivalencia.



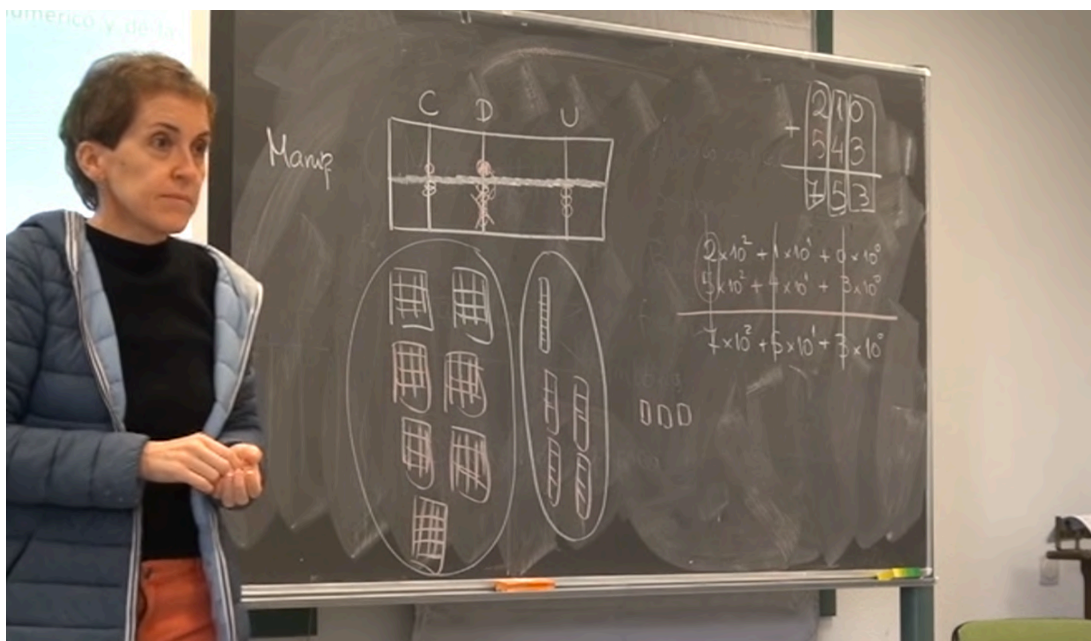
Y ahora, al sumar, utilizo la propiedad conmutativa, para colocar los sumandos en el orden que quiero, y asociativa, para ir organizando, ¿vale?

Comentario 11: Está comentando las dos propiedades aritméticas que va a utilizar para realizar esa operación.

O sea, que este [señala 5×10^2] —que, si lo coloco seguido, estaría aquí el cuarto [señala detrás de 0×10^0]— lo quiero colocar el segundo para agruparlo con este [señala 2×10^2], este [señala 4×10^1] —que estaría el quinto [señala detrás de 0×10^0]— lo coloco el tercero para agruparlo con este [señala 1×10^1], y este [señala 3×10^0] lo agrupo con este [señala 0×10^0]. Y ahora, al agrupar, ya me quedan 5 y 2, propiedad distributiva, 7×10^2 más, 4 y 1, 5×10^1 más, 0 y 3, 3×10^0 . Pero ahí estoy utilizando la asociatividad de la suma, la conmutatividad de la suma y la distributiva de la suma y el producto de números enteros, ¿vale? Pero si lo coloco así, veo esto, esto y eso [señala los coeficientes que acompañan a 10^2 , 10^1 y 10^0], que es lo mismo que esto, esto y eso [señala el 7, 5 y 3 del resultado de la suma en la forma simbólico-numérica], que es lo mismo que esto, esto y esto [señala los bloques multibase en la pizarra] y que es lo mismo que 1, 2 y 3 varillas [señala las varillas del sorobán en la pizarra].

Comentario 12: Acaba de conectar los cuatro métodos, mostrando la equivalencia que hay entre los cuatro métodos con los que ha realizado la suma.

¿Está claro hasta aquí?



A: Sí.

F: Ahora, ¿qué diferencia hay entre esto y la siguiente suma que me plantean ahí [en el PDF proyectado en la pantalla]? $316 + 429$.

A: Que me paso de unidades y tengo que pasar a las decenas.

F: Que cuando agrupo aquí, por ejemplo [bloques multibase], o cuando agrupo aquí [sorobán], o cuando agrupo aquí [expresiones de sumas y productos de potencias de 10], aquí aparecen más de 10 [señala al 3 de 3×10^1].

Comentario 13: Está de nuevo, como en algún vídeo anterior, modificando algún elemento para ver cómo varía el problema y qué solución le podemos dar a esa variación. No recuerdo la suma, pero, por ejemplo, si cuando sumamos nos pasamos porque tenemos más de 9 unidades, cómo resolvemos ese problema con cada uno de los métodos vistos.

En algún sitio aparecen más de 10, por ejemplo, cuando tengo 9 unidades y 6 unidades, aquí aparecerían 15 fichitas pequeñas [bloques multibase], aquí tendría que representar 15 [sorobán] y aquí aparecería 15×10^0 . Pero como estamos en base 10, no puedo dejarlo así, tengo que agrupar, tengo que agrupar. Entonces, agrupo 10 y dejo 5, y las 10 que agrupo las paso al siguiente valor, es decir, pego 10 fichas y construyo una barra [bloques multibase], agrupo 10 y me sale otra bola aquí en el ábaco, aquí abajo [parte baja de la varilla de las decenas], o agrupo 10 y me sale uno más aquí [en 5×10^1] y aquí [en 3×10^0] dejo las que se quedaban sueltas, las 5, ¿vale?

Comentario 14: Ahora está analizando la resolución en cada uno de los cuatro métodos con los que han trabajado los alumnos en clase, viendo las equivalencias entre ellos.

O sea, que la única diferencia es que aquí, después de representar cada cantidad y de ir poniendo por orden el valor de cada una, tengo que agrupar porque en algunos sitios tengo 10 o más, ¿vale? Es la única diferencia.

Y ahora, si quisiéramos representar esto en formato tabla, como tenía Martín, ¿no? ¿Cuántas columnas pondré yo en la tabla?, ¿qué me pide el cuerpo? Tengo que dibujar una tabla, ¿vale?, vamos a dibujar una tabla [comienza a dibujarla en la pizarra], con filas y columnas, ¿cuántas columnas pongo?

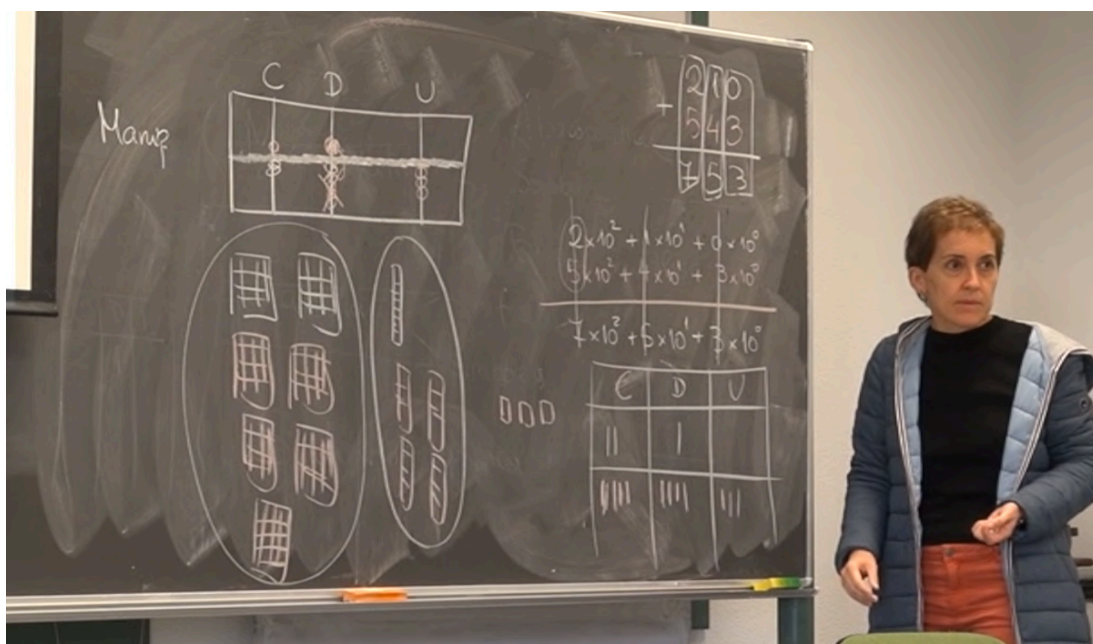
A: Tres.

F: Tres, ¿por qué tres?

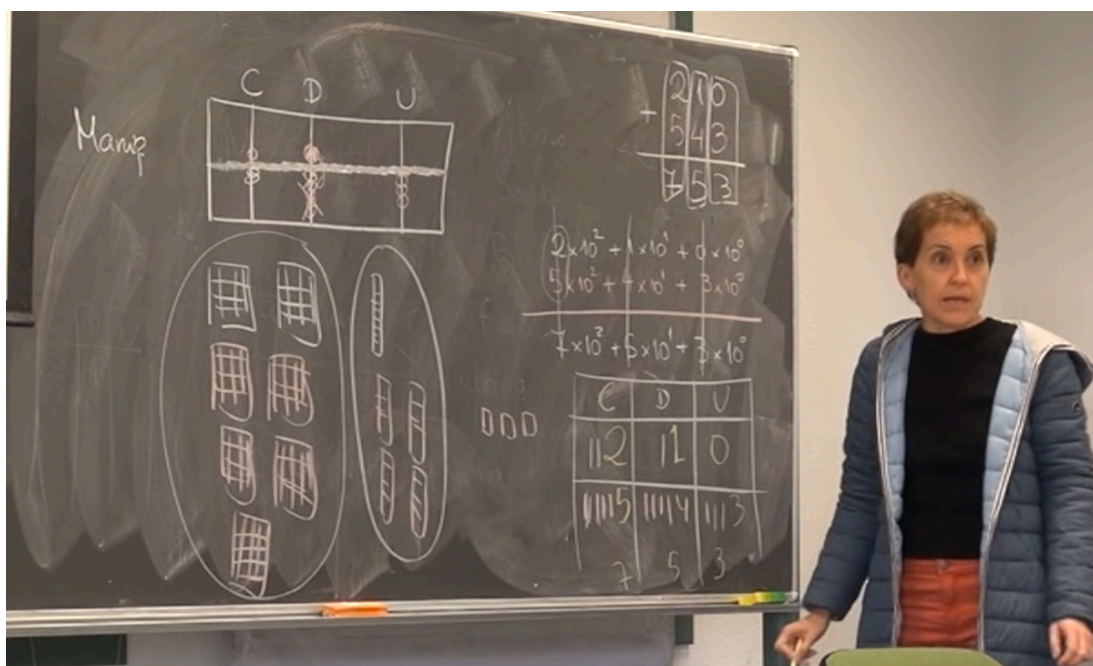
A: Centenas, decenas y unidades.

F: Unidades, decenas y centenas, ¿vale? Y entonces, represento el primer número, 210: 1, 2, 1, eso es 210 [pone dos rayas en la primera casilla de las centenas y una en la primera de las decenas]. Represento el segundo número, 500: 1, 2, 3, 4, 5; 40: 1..., bueno, en rosa, ya puestos..., 1, 2, 3, 4, 5; 40: 1, 2, 3, 4; y 3: 1, 2, 3. Y agrupo: ¿cuántas unidades tengo al final?, 3, ¿cuántas decenas tengo al final?, 5, ¿cuántas centenas tengo al final?, 7, fin.

Comentario 15: Acaba de realizar la suma con un nuevo método, con la tabla, viendo las equivalencias con los otros métodos, viendo que está haciendo lo mismo.



Este sistema de representación es icónico-gráfico porque he representado aquí las cantidades con palitos, pero tiene una estructura especial porque está en una tabla, ¿vale? Entonces, vamos a decir que es un sistema de representación tabular-gráfico. Si en vez de poner aquí gráficos, yo hubiera dicho: «oye, mira, no me lío con los gráficos, ya puestos, como ya controlo mejor los símbolos, pues voy a poner aquí 210 y aquí abajo voy a poner 543 y luego ya sumo: 4 y 1, 5; 5 y 2, 7; 3 y 0, 3», ¿vale?



Sería tabular, tiene una estructura tabular, no es puramente simbólico-numérico, tiene una estructura tabular, pero con números dentro, tabular-numérico, ¿vale?

Comentario 16: Está explicando lo que es una estructura tabular, que se parece mucho al método clásico, pero está haciendo ver que se hace dentro de una tabla y diferenciando una forma numérica de otra icónico-gráfica.

Entonces, yo voy pasando de lo más concreto, que sería: «mi madre me ha dado 316 euros y mi abuela 429, ¿cuántos euros tengo en total?», después paso a manipular, con ábacos verticales, con ábacos japoneses, con bloques multibase..., y cuando interiorizo bien eso, digo: «ostras, venga, lo voy a poner en una tabla gráfica y voy a indicar lo que me indica cada varilla o lo que me indica cada agrupamiento de los bloques multibase, que es posición, en las columnas de una tabla, y ahí voy a poder marcarlo con símbolos». Esta tabla con símbolos se llama tablero de posición, porque tengo las posiciones indicadas –unidades, decenas y centenas–, y es uno de los recursos que más utilizan en el método famoso este Singapur, que habréis visto o habréis oído hablar de él, ¿vale? Entonces, ¿qué están haciendo?, están haciendo una transición de lo más concreto, pasando por lo manipulativo, hacia lo abstracto, que sería..., esto es lo más abstracto [señala las expresiones de sumas y productos de potencias de 10] y esto es lo abstracto que se trabaja en primaria [señala la suma hecha en el registro de representación simbólico-numérico], ¿vale? Pero no trabajan directamente con esto, vamos pasando..., concreto, concreto, concreto, concreto [de forma manipulativa], voy intentando abstraer un poco, pero tengo mis gráficos que me ayudan a visualizar lo que estoy haciendo [de forma tabular],

Comentario 17: Está mostrando la transición que para ella es más adecuada desde un punto de vista didáctico, desde lo manipulativo, pasando por la tabla, hasta la escritura más abstracta, como también se hace en el método Singapur, tal y como menciona.

y finalmente mi objetivo es escribirlo simbólico-numéricamente, de forma abstracta, ya al final. ¿Cómo habéis trabajado mayoritariamente vosotros en primaria cuando estabais haciendo sumas de este estilo? ¿Desde aquí [señala lo manipulativo] o desde el final [señala lo simbólico-numérico]?

A: Desde el final...

A: Yo con las de centenas, decenas y unidades, las cajas...

F: Las cajas estas también os suenan, los tableros de posición, pero ¿y qué poníais en las posiciones, palitos o los números ya?

A: Los números directamente.

Comentario 18: Está haciendo que los alumnos recuerden cómo trabajaron, que reflexionen sobre cómo les enseñaron a ellos a sumar, para ver si consideran que fue la mejor forma, ya desde un punto de vista profesional, pensando en cuando a ellos les toque..., para ver cuál es el método óptimo.

F: Los números directamente, o sea, que estabais trabajando la fase inicial, de la suma, la estabais trabajando directamente con lo simbólico, que es la fase final, ¿lo veis?

A: Jolín, sí.

F: Vale, pues ala, ya está.

ANEXO 26

Transcripción de los comentarios de Raquel en la fase 2

Nota: El texto presentado entre corchetes en la transcripción se corresponde con información incluida por el investigador.

TRANSCRIPCIÓN DEL VÍDEO 1

Fragmento 1

[F = Formadora del vídeo]. [Comentarios de Raquel presentados en recuadros].

F: Bueno, entonces os voy a dar el guion y empezáis a trabajar y, al final, los últimos 15 minutos, hacemos la puesta en común. El guion de la actividad aparece aquí en el campus, pone la fecha, ¿vale?, «actividad para la sesión del 19 de septiembre». Lo voy a leer porque está en inglés, por si alguno tuviera alguna dificultad, lo leo y os ponéis a trabajar, ¿vale?

Todo el mundo en la mesa tiene un montón de palillos y varias cintas de estas, ¿no?, elásticas. Si alguien necesita más cintas me las pide, palillos no, son los que os he puesto, ¿vale?, es con lo que tenéis que trabajar. El problema es que yo he comprado una caja de palillos en Supeco y resulta que mis compañeros lo compran en Mercadona y me dicen que las cajas de palillos que ponen 800 palillos del Mercadona traen más y que les sale a cuenta, y que cuando van a comprar materiales —porque a veces tenemos que comprar nosotros los materiales— pues que merece la pena. Yo no pude ir a Mercadona, fui a Supeco, pone que son 800, pero no sé si me han timado o no me han timado. Entonces, para hacer un control de calidad, hacer una estimación, que luego, bueno, los que hayáis hecho Matemáticas de Ciencias Sociales pues sabéis hacer un contraste de hipótesis y tal, pero bueno, lo primero que tengo que hacer es hacer una estimación de cuántos hay, ¿no? Entonces, los he repartido para no contarlos yo y la idea es ver cuántos hay.

Entonces, el guion de la actividad, tal y como aparece aquí... [espera a que cargue el ordenador]. Aquí está el guion. Esta actividad —esperad que la amplíe un poco— está escaneada de un libro muy bueno que utilizan en los últimos años

en Estados Unidos para formar profesores de primaria. Lo bueno del libro es que, además de los contenidos teóricos, más de la mitad del libro son actividades para llevar al aula-taller como estamos haciendo aquí, ¿vale? Entonces, una de las actividades iniciales para el trabajo con el número, que es con lo que estamos empezando nosotros, es esta de los palillos, ¿vale?

Comentario 1: Sí que me ha gustado lo que acaba de decir. Acaba de nombrar un libro en el que ellos pueden recopilar y buscar más información, y aprender, y eso está bastante bien; referido siempre a la actividad que supongo que van a realizar y a todas las destrezas que quiere que se alcancen.

Entonces, aquí la pregunta es «cuántos», cuántos palillos, ¿no?, que es lo que os he preguntado a vosotros, ¿no?, cuántos. Entonces, cada grupo participando en esta actividad tiene un montón de palillos y luego tiene algo para atarlos, ¿no?, *rubber bands*, pues cintas de estas elásticas. Los materiales ya los tenéis. El objetivo de la actividad es ayudaros a entender el desarrollo de la escritura de los números tal y como los utilizamos nosotros en nuestro sistema de numeración, ¿vale?

Comentario 2: Vale, ahora mismo acaba de nombrar su intención, el objetivo de esta actividad y lo que pretende que ellos alcancen. Está bien, aunque el inicio de la actividad yo lo habría nombrado... Bueno, no se puede decir... [se refiere a que no lo dice porque iba a dar una alternativa].

Entonces, primero, organiza los palillos de forma que visualmente puedas ver más o menos cuántos hay; usa las bandas elásticas, si te ayudan, para organizarlos de manera que así, de un vistazo, puedas decir cuántos tienes, primero los cuentas, lo organizas, piensas cómo organizarlo, pero la cosa es que la organización que tú tengas en la mesa te permita de un vistazo recordar cuántos hay sin necesidad de haberlo apuntado, ¿no?, y que, si yo me paso por allí, me podáis decir: «mira, hay no sé cuántos, porque...», lo veo porque lo hemos organizado así», ¿vale?

Comentario 3: Ahí les está indicando la tarea a realizar, pero con la finalidad de conseguir el objetivo que ella había marcado al principio, ¿vale? Está intentando que los alumnos vayan agrupando y en esa tarea ya va directamente implícito ese objetivo que ella

pretende conseguir.

Luego, reflexiona sobre si la manera en la que lo has organizado corresponde a cómo escribirías tú luego los numerales para representar esa cantidad de palillos. Después, tienes que juntar tus palillos con los de un grupo de al lado, ¿vale?, por ejemplo, vosotros con vosotros y así, cada dos grupos tienen que juntar los palillos que tienen y decidir cuántos tienen en común, ¿vale?, cuántos tienen en total. Y al final, tenemos que juntarlos todos y de una forma ágil, sin tener que volver a contarlos todos, tenemos que saber cuántos palillos hay en total en la clase repartidos, ¿vale? O sea que, primero, cada grupo tiene que saber cuántos tiene y tiene que generar una estrategia para, de manera rápida, mirar en la mesa y ver cuántos hay; después, reflexionar sobre si la manera en la que lo coloca cuando uno luego escribe, imaginaos, «tengo 72, pues cómo se escribe 72: siete, dos», pues la manera en la que lo coloco me ayuda con la escritura o no, no tiene por qué, se reflexiona un poco sobre eso; y cuando hayáis terminado esa parte, llamáis al grupo de al lado y decís: «venga, vamos a ver cuántos tenemos en total, visualmente, cómo lo organizasteis vosotros, cómo lo organicé yo, a ver cómo lo tengo», ¿vale?; y luego todos. Tenéis un cuarto de hora, ¿vale?

Comentario 4: Vale, lo que sí se aprecia muy bien es la finalidad en la metodología matemática, que se intenta inculcar a los niños..., o sea, el objetivo para que luego ellos en su práctica no se dediquen directamente a ir: «los números se escriben así, se agrupan así...», sino que intenta hacerlo de manera mucho más inductiva, o deductiva por parte de los alumnos, para que ellos lleguen a ese concepto; intenta abrirles la mente para que ellos vean cómo los niños, sin conocer la escritura de los números, pueden llegar a entenderlo. Es una metodología muy manipulativa, por supuesto, pero su intención es muy clara, es decir, a los niños no se les va directamente a: «escribe este número, este se escribe así, se agrupa así...», sino que lo tienen que ver muy visual, y eso es lo que ella está pretendiendo en esta tarea.

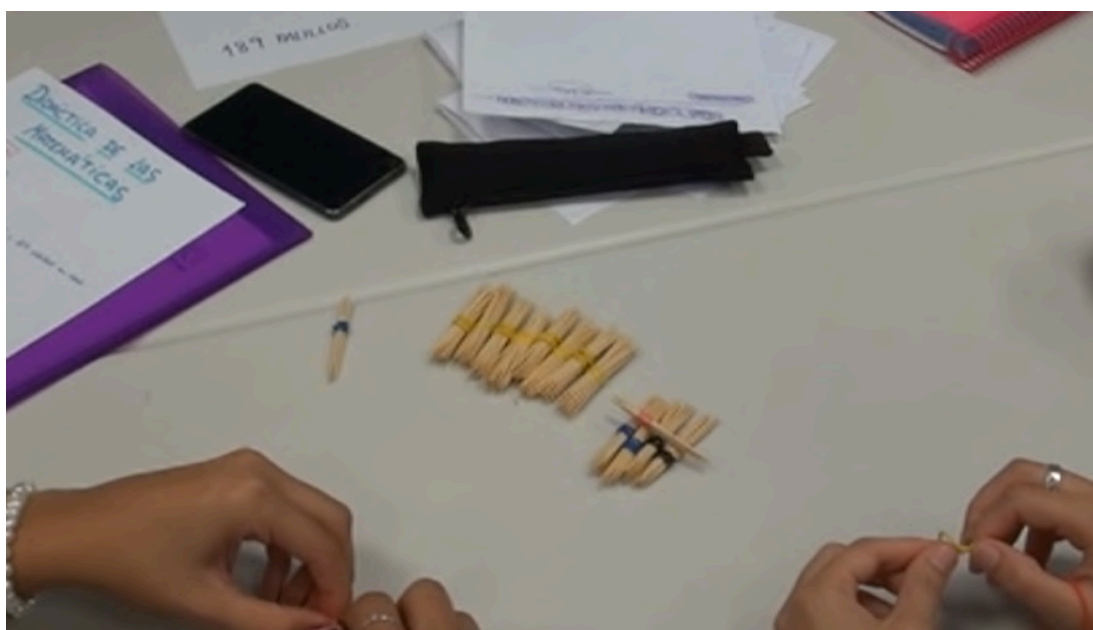
Fragmento 2

[F = Formadora del vídeo]. [A = Alumnos]. [Comentarios de Raquel presentados en recuadros].

- F: Necesito saber si habéis tenido que llegar a algún acuerdo entre los grupos o...
- A: Sí, claro, todo ha sido un consenso, todo ha sido un consenso.
- F: Ah, vale, ha sido un consenso. ¿Qué acuerdo habéis tenido que...?
- A: Hemos explicado cada uno pues lo que significaba cada..., cada gomita.
- F: Y, por ejemplo, ¿vosotros de cuánto en cuánto lo habíais agrupado? Erais los de 15, 10, 5, ¿no?
- A: Sí.
- F: ¿Y vosotros?
- A: 20, 10 y 4.
- F: 20, 10 y 4. Entonces, ¿habéis tenido que llegar a algún acuerdo alguno para reordenar?
- A: No, porque nos ha venido muy bien.
- F: ¿Os ha venido bien?
- A: Es que hemos sido muy inteligentes cogiendo el amarillo para los grandes [se refiere a gomas elásticas de color amarillo].

Comentario 1: Es muy evidente que lo que ella está pretendiendo con esa reunión por grupos es que los niños realmente cuando están aprendiendo cada uno tiene una visión y una organización diferente y entonces eso es lo que les ha mostrado a ellos. Cada uno ha decidido organizarlo de una manera o de otra porque eso es lo que se van a encontrar ellos en el aula y lo que pretende es que se adapten a esa mentalidad y que alcancen ese objetivo de decir: «voy a encontrar un alumno que va a organizar las cosas así», y al final entre todos tienen que llegar a ese acuerdo y a establecer unas normas.

- F: Ahora los grandes de qué son, ¿de 20?
- A: De 20 y de 15, aquí están mezclados. ¿O los tenemos que reorganizar?



- F: Esto es superinteligente, ¿no? O sea, yo veo aquí..., digo: «en los amarillos, algunos tienen 20 y algunos tienen 15, búscate la vida Nuria».
- A: Pero son amarillos.
- F: Ya, pero entonces yo no sé... Yo digo: «vale, yo puedo ver 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 grupos amarillos», ¿no? Y ahora digo: «como mucho serán 160, si son todos de 20, pero... no necesariamente son 160, pueden ser menos».
- A: Bueno, pero como no lo sabes...
- F: ¿Entonces cómo sé cuántos hay?
- A: Te lo estamos diciendo, tienes que confiar en nosotros.
- F: No, en matemáticas la confianza no vale, uno tiene que...
- A: Es que no sé, no lo entiendo. ¿Lo tenemos que reorganizar?
- F: Vosotros ya sabéis cuántos palillos tenéis, pero ahora, visualmente, tenéis que poder contarme a mí cómo sabéis que hay ese número de palillos, ¿no?
- A: Ah, pues habría que... ¿Y no podemos quitar las gomas y reorganizarlo?
- F: Sí, sí, sí, yo no dije que no pudierais quitar las gomas.
- A: Aaaaah.

Comentario 2: Efectivamente, está interactuando ahí muy bien con ellos porque les está haciendo razonar, es decir, «necesito verlo claro, porque tú puedes tener aquí un grupo y otro grupo, pero matemáticamente el concepto de qué número de palillos hay ahí no se aprecia». Eso es lo que les está haciendo ver, no se lo dice, pero se lo hace ver, es decir, tienen que ser ellos quienes lo deduzcan, porque en la metodología matemática lo que se

pretende es que sean ellos los que a base de manipular alcancen ese objetivo que ella quiere, evitando siempre ella decirles las cosas directamente, que sean capaces de razonarlo.

- F: ¿Alguien dijo que no se podían quitar?
- A: Y nosotros diciendo que no se podían quitar las gomas...
- F: Y una duda más. Alguno de vosotros..., por separado, ¿no?, cuando lo teníais..., habéis escrito la cantidad que teníais, ¿no? Eh, 109 teníais uno...
- A: 104 y 85.
- F: Por ejemplo, el 85 se escribe con un 8 y un 5. Ese 8 y ese 5, ¿estaban representados de alguna forma en...?
- A: No.
- F: No, vale. Y vosotros, la misma pregunta con lo vuestro.
- A: No.
- F: No había un patrón en cómo lo habíais representado, vale, ok.
- A: ¿Pero quieres que busquemos?
- F: Quiero que reflexionéis sobre eso, pero ahora lo vamos a poner en común, ¿vale?
- A: Vale.
- F: ¿Ha sido operativo el que ellos hayan hecho 15, 10, 5... y vosotras tuvieras 20...? ¿Eso ha ayudado a la hora de ponerlo en común?
- A: No, porque ahora hay que hacerlo otra vez.
- F: Ahora hay que volverlo a hacer...

Fragmento 3

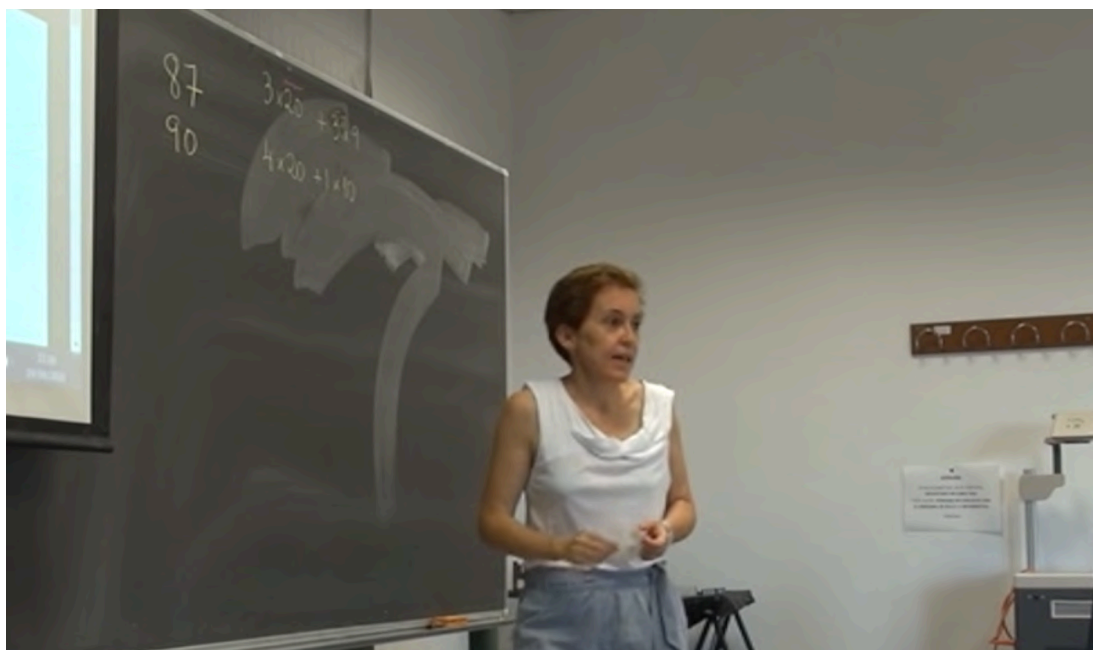
[F = Formadora del vídeo]. [A = Alumnos]. [Comentarios de Raquel presentados en recuadros].

- F: Me tenéis que decir cuántos palillos había en cada grupo inicialmente, antes de juntaros dos grupos, ¿vale? Entonces, por ejemplo, vosotros.
- A: 87.
- F: 87 [lo escribe en la pizarra]. Estamos de acuerdo, yo utilizo la escritura estándar que vosotros habéis visto en primaria, secundaria, bachillerato y al llegar aquí, ¿vale? Escritura estándar de nuestro sistema de numeración en nuestro contexto. Ese grupo, 87. ¿Cómo habíais hecho los grupos?
- A: Pues hemos hecho, eh..., tres grupos de 20.
- F: Tres grupos de 20, ¿cómo lo puedo poner? [Escribe un 3 en la pizarra].
- A: Eh..., tres rosas.
- A: 3×20 .
- F: ¿Tres rosas?
- A: Sí.
- A: No.
- F: Si pongo tres rosas... ¿Todo el mundo que ha utilizado gomitas rosas ha atado 20?
- A: No.
- F: ¿Otras personas que han atado 20 han usado otro color?
- A: Sí.
- F: Uf, el color no me vale. ¿Cómo lo pongo?
- A: 20×3 .
- A: 3×20 .
- F: 3 grupos de 20, ¿no? 3×20 . [Escribe 3×20]. Y luego...
- A: Pon en el 3 «color rosa» o algo así. Entre paréntesis.
- F: Vale, vale. [Pinta una raya rosa sobre el 20]. Y luego... Esto son 60.
- A: 9×3 .
- F: Y luego 9 grupos de 3, ¿no? [Escribe + 9]. ¿O 3 grupos de 9? [Borra el 9].
- A: 3×9 .
- F: 3 grupos de 9 y el 9 lo habéis puesto de otro color, ¿vale? [Escribe 3×9].

- A: Sí.
- F: ¿Alguien más ha utilizado grupos de 20?
- A: Nosotros.
- F: Varios. ¿Alguien más ha utilizado grupos de 9? [Destaca con la voz el número 9].
- A: Nosotras.
- F: Vosotras, vale, y vosotras también, vale. Siguiente equipo, vosotras.
- A: Nosotras, 90.
- F: En total, 90. [Escribe 90 en la pizarra].
- A: 4 de 20 y 1 de 10.
- F: [Escribe $4 \times 20 + 1 \times 10$].

Comentario 1: Lo que está haciendo es cotejar las diferentes posibilidades de los grupos para que ellos vean que se pueden agrupar de diferentes maneras; es el concepto que ella está trabajando ahí: este número lo puedo agrupar así con un grupo y con otro grupo lo puedo agrupar así, ¿vale? Es lo que ella está pretendiendo, porque es lo que se van a encontrar los alumnos en el aula.

Vale, o sea que de momento han utilizado grupos de 20, grupos de 10, grupos de 9, ¿vale?



En esta escritura [señala lo que ha escrito en la pizarra] yo veo 3 grupos de 20, 3 grupos de 9, pero aquí [señala el 87] no veo un 3 y un 3. Yo aquí veo 4 grupos de 20, 1 grupo de 10, pero aquí [señala el 90] no veo 4, 1. Con lo cual, parece que tampoco habíais encontrado vosotros un patrón entre cómo escribo la cantidad

total con símbolos numéricos y visualmente qué veo en los palillos, ¿vale? De momento, la transcripción de lo que veo en los palillos simbólico-numéricamente la tengo aquí a la derecha [señala el $3 \times 20 + 3 \times 9$ y el $4 \times 20 + 1 \times 10$], pero no veo ninguna relación con esto [señala el 87 y el 90]. Yo aquí estoy haciendo trampa porque estoy metiendo operaciones, nosotros ahora no estamos con las operaciones, estamos solo con el número, con la escritura del número, eso es lo que estamos trabajando, ¿no? Pero para ayudar a ver esa conexión de los palillos hacia lo simbólico-numérico, pongo, escribo eso de transición para ir copiando lo que me decís, ¿no?, porque tardo más, tardo más en dibujar los palillos, las gomitas rosas, no sé qué, podría sacar la foto de la cámara y ponerlo rápido, ¿no?, pero..., bueno, lo escribo, lo transcribo así. Ahora, otro grupo. Vosotros dos ya estáis, que luego, luego... Ah, venga, ya que estamos aquí [dibuja una llave a la derecha de lo que ya ha escrito en la pizarra]. ¿A qué consenso... habéis llegado...?

A: Pues 7 grupos de 20...

F: Muy bien, 7 grupos de 20 [señala el 3 y el 4]. Han visto rápido y han dicho: «bien, los dos hemos agrupado, sin habernos copiado, en grupos de 20, con lo cual automáticamente tenemos 7 grupos de 20» [escribe 7×20].

A: Luego, ellos los 27 de 3×9 ...

F: Sí.

A: ... los han dividido en 2 de 10 para que se junten con los nuestros de 10.

F: ¿Y por qué no habéis hecho vosotros... separar este de 10 [señala el 10 de 1×10] en 1 de 9 y 1 de 1?

A: Porque se quedaría 1 solo y luego...

F: Bueno, pobrecillo, ¿no? No pasa nada.

A: Y porque es más fácil sumar de 10 en 10 que de 9 en 9.

A: Para ponerle la goma a 1...

F: Para ponerle la goma a 1... Bueno... Eso... Puede ser una justificación, pero tampoco muy potente... Me gusta más lo que ha dicho ella, o ella...

A: Que es más fácil sumar de 10 en 10 que de 9 en 9.

Comentario 2: En esta interacción es como si estuviera provocando a los alumnos a ese razonamiento al que ella pretende que lleguen, ¿vale? Es lo que se ve claramente. Además, está esperando, sabe que le va a llegar la respuesta, la acaba de obtener, ¿vale?

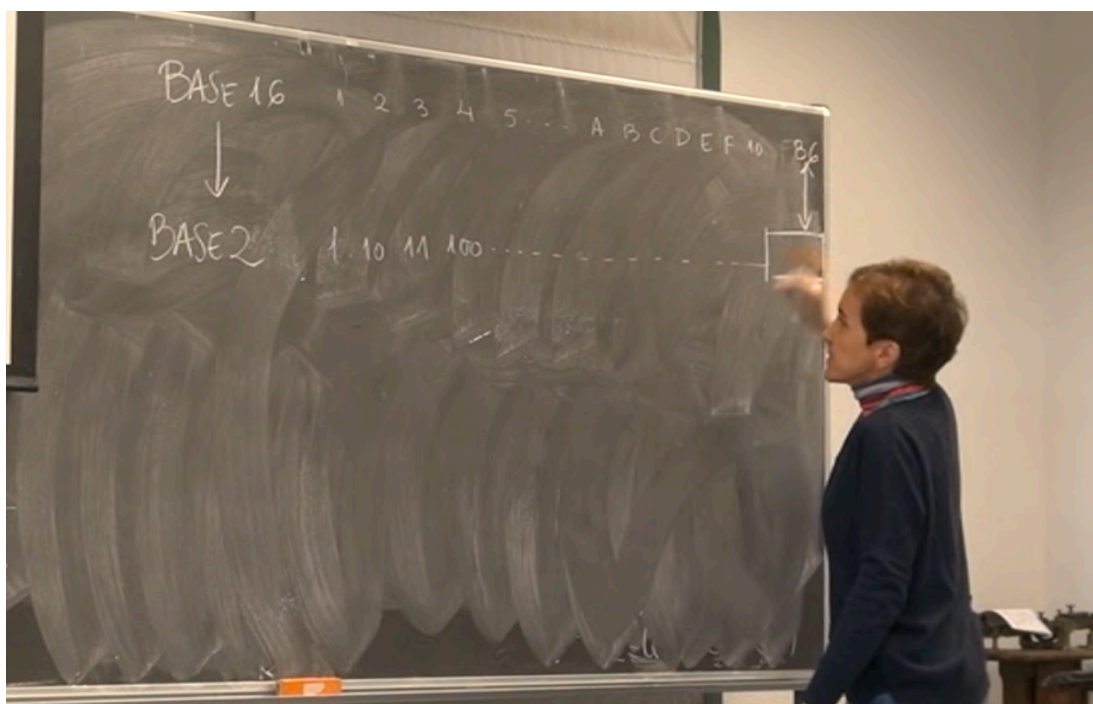
- F: ¿Por qué será más fácil sumar de 10 en 10 que de 9 en 9 para nosotros? [Hablan varios alumnos a la vez]. ¿Por qué es más fácil sumar para nosotros de 10 en 10 y no de 9 en 9? [Hablan varios alumnos a la vez]. Porque tenemos 10 dedos, por ejemplo, ¿no? Porque estamos más acostumbrados a 10, 20, 30, 40... [mueve las manos con los dedos estirados], ¿no?, como que nuestro sistema de numeración parece que...
- A: Porque en verdad solo sumas de 1 en 1 y luego le pones un 0, entonces...
- F: Solo sumas de 1 en 1, elabora eso. Estamos en clase de matemáticas, ¿qué es 1, 1...?
- A: Pues por ejemplo, si tienes 30, pues 1 más 1 más 1, 3, como es 10, pues le pones el 0 y ya tienes los 30.
- F: ¿3 qué?
- A: 3 grupos de 10.
- F: 3 grupos de 10, muy bien. 3 grupos de 10, vale. [Vuelve a la pizarra a terminar lo que empezó a escribir].
- A: 3 de 20, 3 de 10 y 1 de 7.
- F: [Escribe, después de 7×20 , 3 10]. 3 de 10, llegasteis a romper estos [señala 3×9] en 2 de 10 más 7 sueltos, ¿no? [escribe $2 \times 10 + 7$ encima de 3×9]. Y entonces estos dos [señala 2×10] con este [señala 1×10] 3 y 7 palillos ahí sueltos [escribe, después de $7 \times 20 + 3 \times 10$, 7×1], ¿vale? Ahora, la cantidad total, ¿cuánto es? [señala el 87 y el 90].
- A: 177.
- F: 1, 7, 7 [escribe 177 a la izquierda del 87 y del 90]. ¿Hay aquí 1, 7, 7 por algún lado? [señala el 7 de 7×20 , al 3 de 3×10 y al 7 de 7×1]. Este [señala el 7 de 7×1] parece que hay aquí, ¿no? Pero lo otro... no me cuadra mucho todavía... Vale, otros dos grupos.



TRANSCRIPCIÓN DEL VÍDEO 2

[F = Formadora del vídeo]. [A = Alumnos]. [Comentarios de Raquel presentados en recuadros].

- F: Como me piden pasar de base 16 a base 2 directamente [escribe en la pizarra], pues Martín dice: «yo escribo aquí la secuencia 1, 2, 3, 4, 5..., A, B, C, D [dice 10, 11, 12, 13, señalando A, B, C, D], 14, 15 [escribiendo E, F], uno, cero [10]..., así hasta el B6», ¿vale? Y luego aquí en paralelo, voy uno [1], uno, cero [10], uno, uno [11], uno, cero, cero [100]..., hasta que pille aquí el que sea y ya está.



No he pasado por base 10, que es lo que me dice Nuria. Con lo cual, superado. ¿Pero qué pasó?

- A: Que es muy largo.

- F: Que es muy largo. Y que hasta en su casa, teniendo semanas, ha dicho: «paso». Tenías tiempo suficiente, porque había tiempo suficiente en dos semanas a hacerlo, pero... es largo y además un coñazo, con lo cual ha dicho: «paso». Con la idea Nuria ya se hace una idea de que lo he pensado, es un procedimiento válido, pero no ha sido eficaz, ¿vale?, entonces nosotros tenemos que seguir pensando porque tendremos que buscar alguna estrategia que sea eficaz. [Da la palabra a una alumna].

- A: ¿Se podría hacer la división?

F: ¿Qué división?

A: La de B6 entre 2. Es que no sé cómo plantearlo.

F: Ella dice: «oye, mira Nuria, cuando tú pasas de base 10 a base 2 haces grupos de 2 y divides de 2 en 2; pues ahora lo mismo, si estoy en B6 a base 2, divide entre 2». Pero aquí estoy escribiendo en base 16... [En la pizarra ha escrito B6 entre 2, con la caja]. Podríamos intentar hacerlo, pero... ¿sabemos hacerlo... o cómo va esto?

Comentario 1: Ahí lo que está trabajando es el cambio al sistema binario, la forma de escritura de uno a otro. Es lo que está haciendo en ese momento, ¿vale?

¿O mentalmente para hacerlo me vais a pasar a base 10, y hacéis la división en base 10 —que es lo que sabéis hacer—, y luego otra vez volvemos y entonces hacemos trampa porque pasamos por base 10? Si sabéis dividir un número en base 16 entre 2, si sabéis hacer esta división en base 16 —yo lo tendría que pensar, ¿eh?, así a capón no lo sé hacer, pero si lo pienso... —, si sabéis hacer eso, valdría.



sé hacer, multiplicar en base 16 también podría hacerlo, con lo cual dividir podría hacerlo, pero... no me atrevo a hacerlo sin manos, hoy. Otra forma.

A: Fijándote en que 16 es 2^4 .

F: Fijándome en que 16 es 2^4 . Me lo voy a apuntar aquí [borra la pizarra y lo escribe].

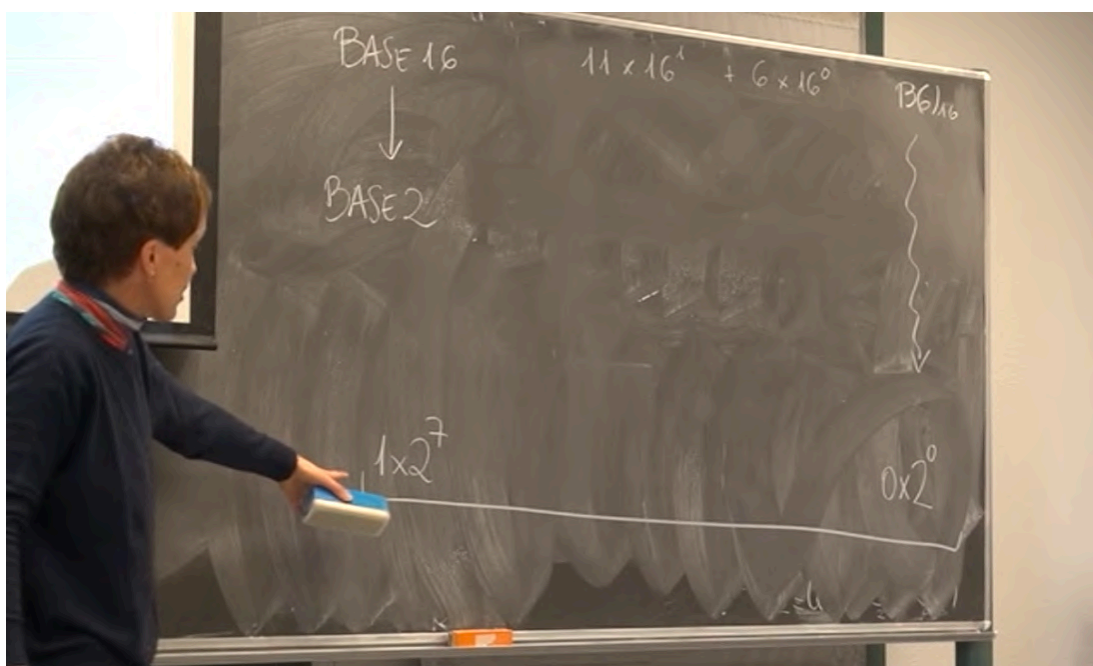
Comentario 2: Vale, metodológicamente está siempre planteando preguntas, que está muy bien, a los alumnos para intentar sacar de ellos todos sus conocimientos para poder aplicarlo a lo que ella está empezando a explicar ahora.

A: Yo lo hice así, pero luego algo no me cuadraba.

F: Muy bien, vale.

A: Luego hice, 11...

F: Venga, vamos a poner el punto de partida, ¿no? El punto de partida es que tenemos 11×16^1 , ¿no?, más 6×16^0 . Este es mi B6 en base 16. Y yo quiero llegar aquí a... Me acuerdo de que empezaba en 1×2^7 y acababa en 0×2^0 , ¿vale?



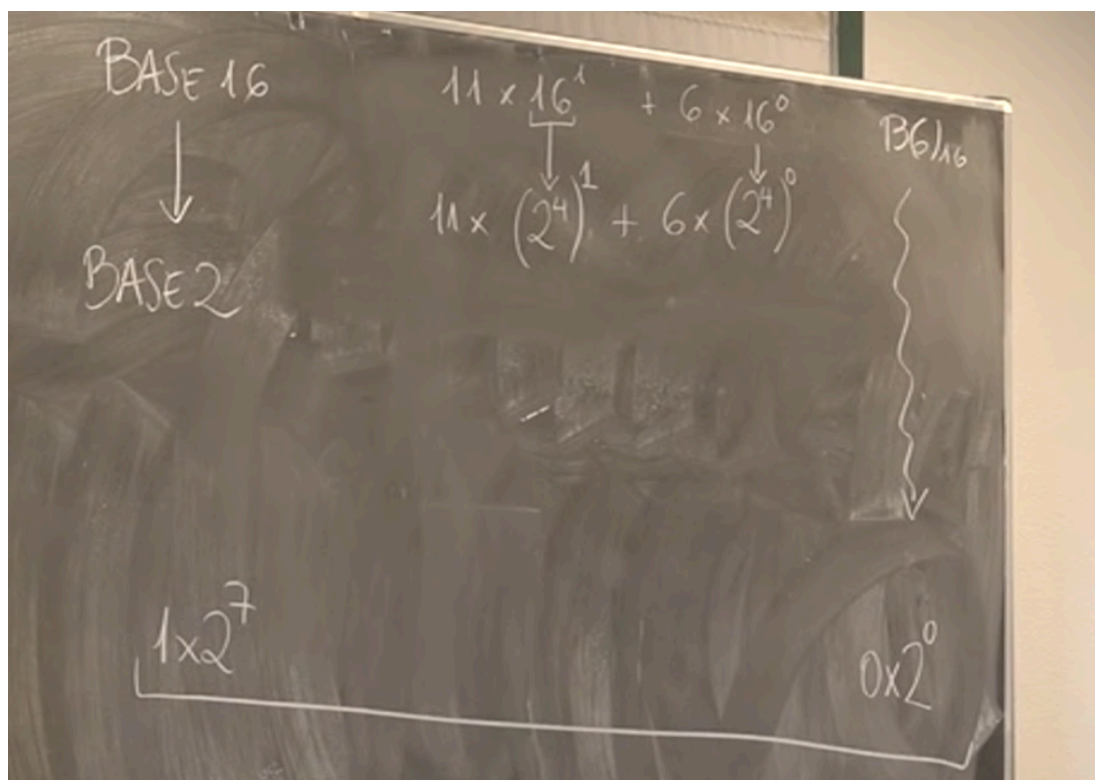
Entonces yo quiero pasar de ahí [señala la parte superior de la pizarra] a aquí [señala la parte inferior]. Si lo consigo, ya lo tengo en base 2, ¿no? Ya solo cojo los coeficientes de las potencias de 2 y ya lo tengo. Entonces, Pablo dice: «cambia este 16», ¿no, Pablo?

A: Sí.

F: Este 16 ponlo como $(2^4)^1$ y este 16 ponlo como $(2^4)^0$. ¿Vale? Yo tengo una expresión polinomial en base 16, quiero llegar a una expresión polinomial en base 2, y él me dice: «yo veo claro el cambio, 16 es 2^4 , cada vez que veas un 16 ponlo como 2^4 ».

Comentario 3: Acaba de contarles el objetivo que ella pretende con esa actividad, se lo acaba de decir directamente a ellos.

Vale, y entonces resulta que aquí tengo 11 grupos de esto y aquí tengo 6 de estos. ¿El 11 y el 6... los puedo dejar?



A: No, los pasas a base 2.

F: Los paso a base 2. ¿Sé pasar 11 a base 2?

A: Sí.

F: Vale, vamos a escribir 11 en base 2.

A: 1, 0, 1, 1.

F: 1×2^3 , ¿no?

A: Sí.

F: Más...

A: Cero.

F: 0×2^2 . De momento llevo ocho. Más...

- A: Uno.
- F: 1×2^1 . Ya llevo 10...
- A: Más uno.
- F: Más 1×2^0 . Ahí ya tengo 11, ¿vale? Esta es una manera de escribir 11. ¿Cómo? Como potencias de 2. Expresión polinomial del 11 en base 2, como potencias de 2, ¿vale? Y esto va multiplicado... 2 elevado a la 4 y luego lo elevo a la 1, ¿cuánto me queda...? 2^4 es $2 \times 2 \times 2 \times 2$ y luego eso lo elevo a la 1, es decir, que lo copio una vez, o sea que me queda...
- A: 2^4 .
- F: 2^4 . Más... El 6, ¿lo dejo?
- A: No.

Comentario 4: En su transcurso y en su dinámica de la clase es muy importante transmitir y verbalizar todo lo que pretende sacar de los alumnos. Es que está constantemente preguntando y sacando la información de ellos, haciéndoles preguntas, para que así asienten mejor el concepto, o sea, los niños van a entender y a interiorizar mejor el concepto, y es lo que ella pretende transmitir, es decir, para poder enseñar necesito sacar de vosotros todo lo que sabéis y que lo relacionéis; se verbaliza, se razona..., y es la metodología que está llevando a cabo, ¿vale?

- F: No. ¿Cómo escribo 6 en base 2?
- A: 1×2^2 .
- F: 1×2^2 , que son 4.
- A: 1×2^1 .
- F: 1×2^1 ... Y 0×2^0 [lo va escribiendo todo en la pizarra]. Ahí pone 6, una manera más chula, ¿no?, de poner 6 como potencias de 2, ¿no?, como un polinomio con potencias de 2. Vale, y luego estaba por... Y ahora tengo $(2^4)^0$. ¿Eso qué es?
- A: Uno.
- F: Uno. ¿Y si lo quiero poner como potencias de 2?
- A: 2^0 .
- F: 2^0 , muy bien. 2^0 [lo escribe en la pizarra]. Mira qué contenta estoy, porque $2^0 \times 2^0$ es 2^0 y el coeficiente es 0, que es este. Y $2^4 \times 2^3$ es 2^7 y el coeficiente es 1, que es este. Pues como que ya casi lo tengo, ¿no? ¿Sí o no?
- A: Sí...

BASE 16

↓

BASE 2

$$11 \times 16^1 + 6 \times 16^0$$

$$\downarrow$$

$$11 \times (2^4)^1 + 6 \times (2^4)^0$$

$$\downarrow$$

$$[1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0] \times 2^4 + [1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0] \times 2^0$$

$$\downarrow$$

$$1 \times 2^7$$

$$\downarrow$$

$$0 \times 2^0$$

$\boxed{1 \times 2^7 + 0 \times 2^0}$

F: Vale, y ahora... Venga, ¿cuál será el coeficiente...? Venga, vamos a poner aquí 2^6 , paso a la siguiente varilla del ábaco, ¿eh? ¿Cuál será el coeficiente de 2^6 ?

A: Cero.

F: Cero, porque ¿cómo consigo yo 2^6 ? $2^4 \times 2^2$, ¿no? 2^4 es $2 \times 2 \times 2 \times 2$, 2^2 es 2×2 , ya tengo ahí los seis doses, ¿vale?, que está aquí, y el coeficiente cero. ¿Por aquí puedo llegar a 2^6 ?

A: No.

F: No, pues ala. 0×2^6 . Genial, porque era lo que me había salido antes. Ahora, más... Siguiendo varilla del ábaco, 2^5 . ¿Dónde consigo yo 2^5 ? Aquí [señala el corchete de la derecha] como mucho llego a 2^2 , me olvidé de esto. $2^4 \times 2^1$ [señalando el corchete de la izquierda] es 2^5 , ¿no?

A: Sí.

F: Vale, ¿y qué coeficiente lleva?

A: 1.

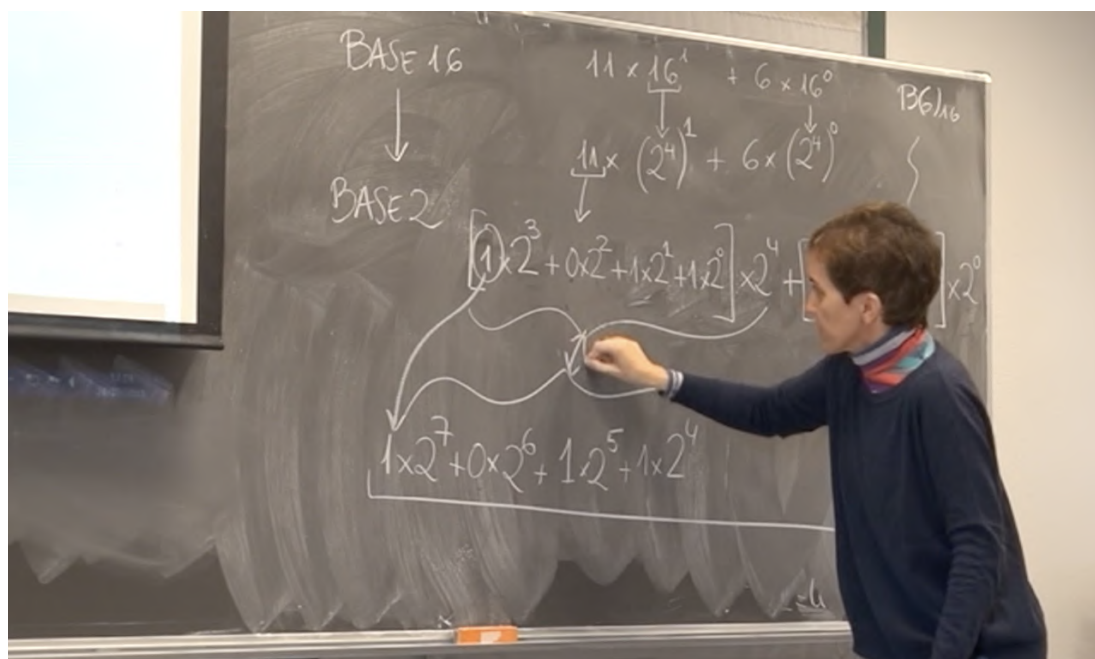
F: 1. ¿Y era el qué tenía que llevar?

A: Sí.

F: Sí, vamos bien. Y ahora, 2^4 , ¿cómo consigo 2^4 ?

A: Con 2^0 ...

F: $2^4 \times 2^0$, ¿no? Tengo aquí cuatro copias del 2 y aquí ninguna, pues tengo cuatro copias del 2 multiplicándose por sí mismo, y el coeficiente 1. 1×2^4 [lo escribe en la pizarra]. Oye, mira, todo esto se ha convertido en esto. Lo veis, ¿no?



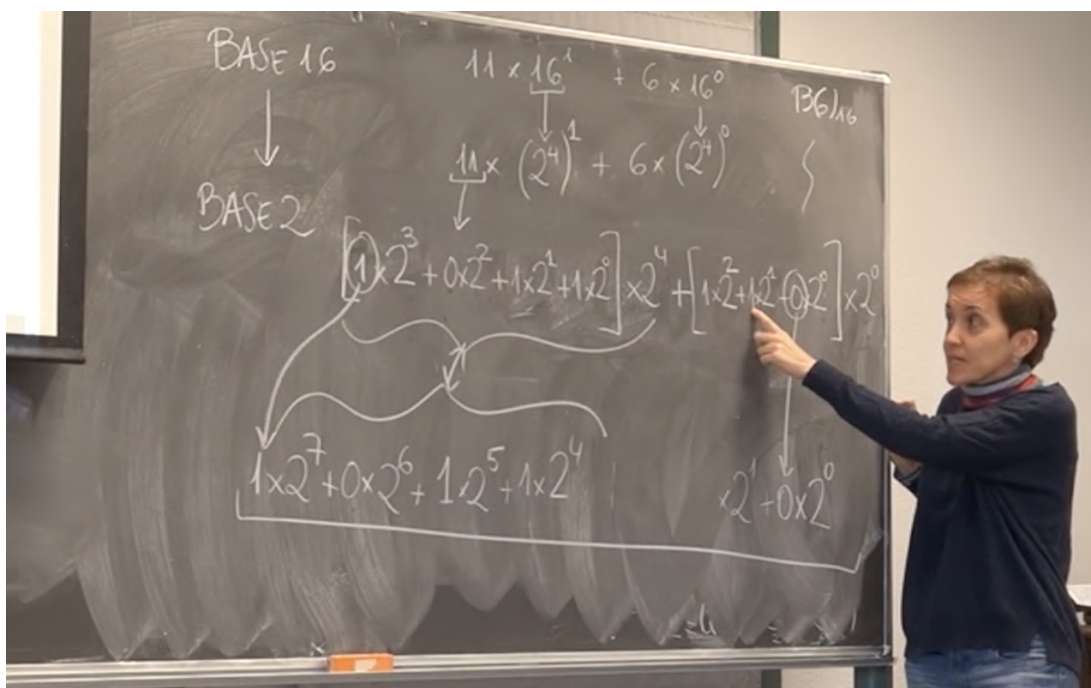
¿Qué es lo que he hecho? Propiedad distributiva.

Comentario 5: Dice que está aplicando la propiedad distributiva.

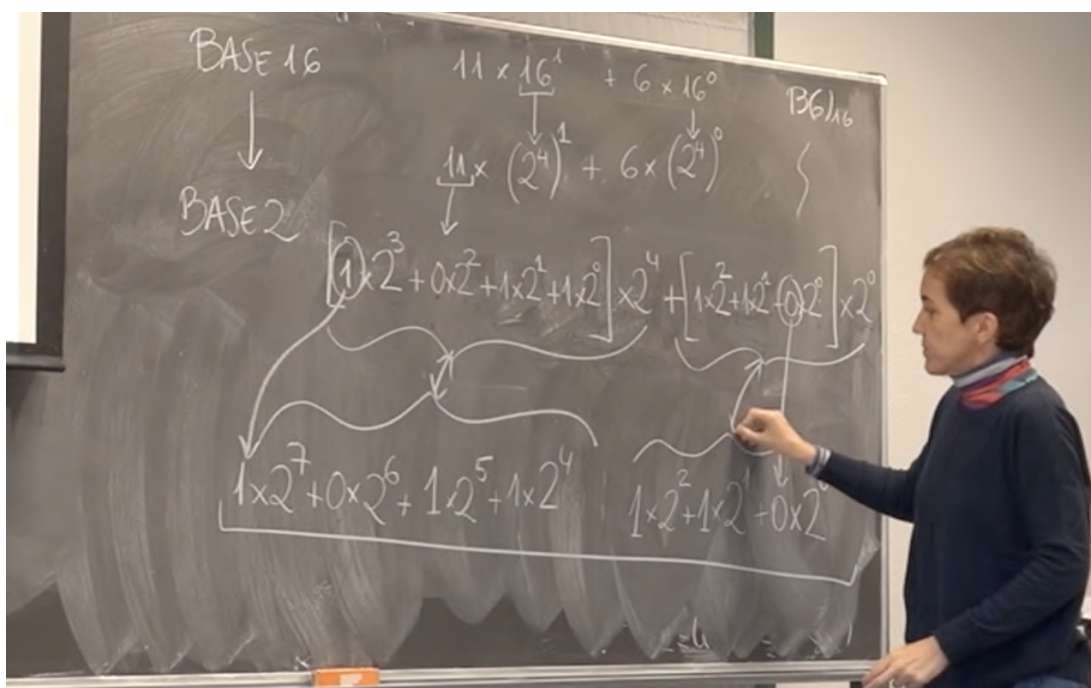
Voy multiplicando el 2^4 por cada uno de los sumandos, ¿vale? Muy bien. Y ahora, tiro por aquí, voy desde aquí [señala el 2^0 de la parte inferior derecha de la pizarra]. 2^0 , muy bien. Siguiente varilla del ábaco, 2^1 . ¿Qué coeficiente tiene 2^1 ?

A: 1.

F: 1, que está aquí [lo señala], ¿vale?



Porque sería $2^1 \times 2^0$, que es 2^1 , y lleva un 1 delante, un 1 [lo escribe abajo]. Voy bien. Y ahora, $2^0 \times 2^2$, 2^2 [lo escribe abajo], va con un 1 [lo escribe abajo]. O sea que esto que tengo aquí se convierte en esto que tengo aquí.



Y ahora, Pablo, ¿qué te pasó?

A: Que como... Que claro, los iba a juntar, pero dije: «me falta el 2^3 ».

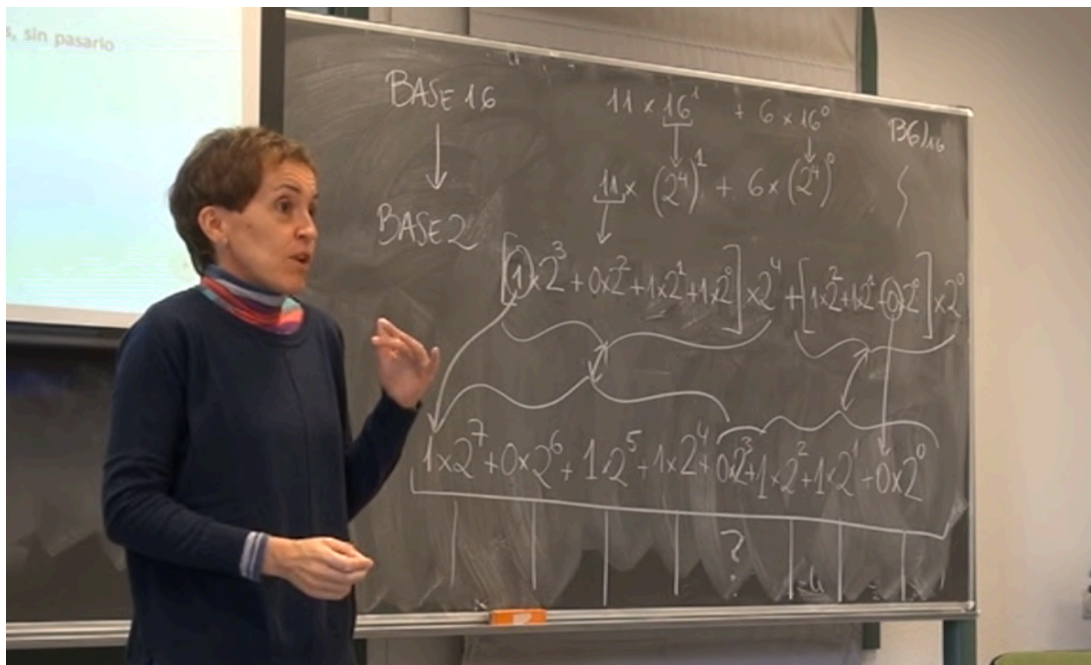
F: Me falta el 2^3 . Pablo dice: «varilla del ábaco del 2^7 , 2^6 , 2^5 , 2^4 , ¡uy!, 2^2 , 2^1 , 2^0 ». «¡Uy!», dice Pablo [y dibuja una interrogación en la posición del 2^3].

A: Pues si no hay, un cero.

F: Pues se pone el 0, ya está.

Comentario 6: Eso es [lo dice sin parar el vídeo].

Lo pongo aquí: «+ 0 x 2³», y esto lo englobo aquí.



¿Qué es lo que pasa? Que escribo el 6 de una forma muy especial. Yo escribo el 6..., acordaos que esto era mi 6 [señala $1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0$], ¿eh?, esto era el 6, que es este 6 [señala el de un nivel anterior, más arriba en la pizarra], ¿vale? Yo he escrito el 6 como $1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0$, pero también puedo escribir el 6... $0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0$. No es lo estándar, porque como los ceros ahí no aportan mucho, pues no es lo estándar, pero si no me quiero olvidar de una de las varillas y no quiero tener un problema, como tenía Pablo, pues yo añado ahí para escribir el 6 de otra forma, ¿vale? Entonces, moraleja que cuentan los *youtubers*, por ejemplo David Calle, dice: «vamos a pasar de base 16 a base 2, ¿qué se hace chavales? Mirad, ¿veis este 11 que está aquí? [señala el de arriba de la pizarra], pues escribís este 11 en base 2: 1, 0, 1, 1 [señala los coeficientes de la expresión polinómica de la parte inferior de la pizarra]; ¿veis este 6 que está aquí? [señala el de arriba de la pizarra], pues lo escribís en base 2, pero cuidadín chavales, que hay que poner cuatro, ¿por qué?, porque 16 es 2⁴». Y entonces dice: «vamos a escribir 6 en base 2 con cuatro: 0, 1, 1, 0». Y dice: «y ahora lo juntáis, fin». A mí no me vale porque yo no soy David Calle, yo no estoy de *youtuber*, *influencer*, superfamosa ayudando a los chavales a aprobar exámenes, que es un

trabajo muy digno y que está bien, y además el tío es un *crack*, muy suelto, lo hace muy bien; yo estoy formando maestros, entonces tenéis que entender cómo hemos pasado de aquí [señala la parte superior de la pizarra] a aquí [señala la parte inferior de la pizarra] a través de esto [señala la parte media de la pizarra]. Entonces, la pregunta es: ¿se puede pasar de base 16 a base 2 sin pasar por base 10? Sí. Lo acabamos de hacer, ¿no?

Comentario 7: Claro [lo dice sin parar el vídeo].

Es que me miráis con una cara... ¿Y por qué se puede? ¿Qué pasa si yo esto [el ejercicio] os lo doy en base 15 y, en vez de en base 16, todo el problema es en base 15?

A: Que sería $2^4 + 2^0$.

F: ¿ $2^4 + 2^0$ es 15?

A: O sea, no..., perdón. $2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0$.

F: Vale, y entonces tendría que ir haciendo todas las distributivas, todo el follón, ahí.

Comentario 8: Claro [lo dice sin parar el vídeo].

¿Y David Calle me podría dar el algoritmo...? Escribes, imaginaos el mismo número, ¿eh?, B6, en vez de en base 16, en base 15. ¿David Calle me puede decir...? Aquí tengo el 15, ¿no?, aquí tengo el 15 [los escribe encima de los 16], y David Calle me dice: «escribe esto [señala el 11] en base 2, escribe esto [señala el 6] en base 2, con tres y medio dígitos o cuatro dígitos o... tres dígitos, y lo pones junto. ¿Valdría ese algoritmo?

A: No.

Comentario 9: No [lo dice sin parar el vídeo].

F: No. ¿Vale? O sea, que poder se puede pasar, vas con paciencia escribiendo cada una de las expresiones que aparecen, pero un paso directo solo se puede cuando una base es potencia de la otra base, que es lo que hemos visto con 16, que es potencia de 2, que es 2^4 .

Comentario 10: Ahí están las propiedades de las potencias, es lo que les está haciendo ver.

¿Está claro hasta aquí? ¿Sí?

TRANSCRIPCIÓN DEL VÍDEO 3

Fragmento 1

[F = Formadora del vídeo]. [Comentarios de Raquel presentados en recuadros].

- F: Entonces, la idea es..., el ejercicio 4, que está proyectado en la pantalla, es el ejercicio 4 de la última hoja, de la hoja del dossier 2, con el que vamos a trabajar ya esta semana, ¿vale? En ese ejercicio hay cuatro operaciones, cuatro problemas, cuatro operaciones. Tenéis que hacer las cuatro operaciones..., representarlas de distintas maneras. Voy a poner en la pizarra de cuántas maneras, ¿vale? Entonces, acordaos que nosotros estamos trabajando con material manipulativo [escribe en la pizarra «Manipulativo»], ¿vale? Entonces, en primer lugar tenéis que representar esta suma $[210 + 543]$, esta suma $[315 + 429]$, esta resta $[135 - 24]$ y esta resta $[704 - 45]$, por partes [va señalando en el PDF proyectado en la pantalla], ¿no?, empezáis con la primera... Tenéis que representarlo [escribe en la pizarra] con ábaco vertical, después en el sorobán

Comentario 1: Vale, lo que creo que va a hacer en esta sesión, porque es bastante evidente, va a ser cómo trabajar la descomposición de los números con los niños pequeños, ¿vale?, para iniciarles a visualizarlo bastante bien. Muy diferente de la sesión anterior [se refiere al vídeo 2], completamente diferente. Y es lo que yo creo, que el contenido que va a trabajar va a ser la descomposición de los números.

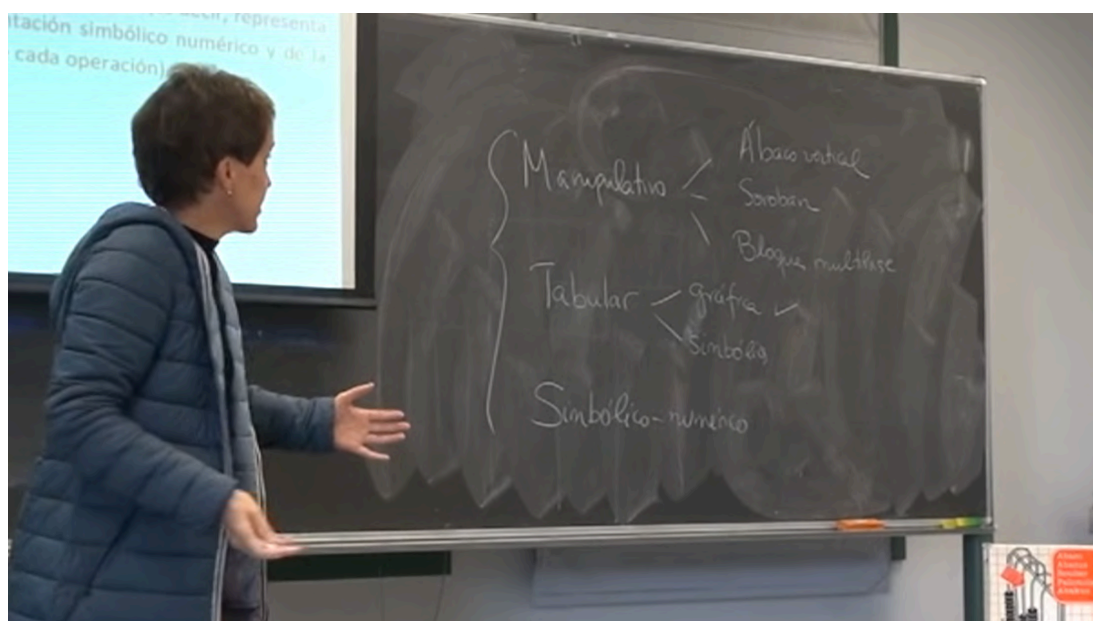
y después con los multibase, ¿vale? Y tenéis que tener las tres representaciones del proceso delante para saber comparar cada dos, ¿vale?, para saber entender cómo se traduce una en otra. Lo que no quiero es que me digáis: « $210 + 543$ son 753; Nuria, te he representado 743^* en el ábaco vertical, en el sorobán y en los bloques multibase». No quiero la representación del resultado, quiero la representación del proceso, de la suma, de la idea «suma». ¿En qué os tenéis que basar?, en la definición de la suma que vimos el otro día, ¿no?, que es: elijo un representante de uno, elijo un representante del otro y hago la unión, agrupo, junto,

Comentario 2: Agrupo [lo dice sin parar el vídeo].

como lo queráis pensar, ¿vale? Entonces, hay que representar el proceso, el proceso, no solo el resultado final de ese proceso.

Comentario 3: Vale, lo que ella pretende es: «quiero que me representéis el proceso», porque es realmente como se van a dar cuenta..., para que ellos tengan entendido ese proceso de suma de los números. Es decir, los niños si lo ven y lo descomponen, van a adquirir fenomenal el concepto de la suma de los números. Por eso, insiste tantísimo en ese proceso; porque es que hay que empezar por ahí para empezar, ¿vale?

Entonces, tenéis que representar el proceso de tres maneras en el sistema de representación manipulativo [señala lo que ha escrito antes en la pizarra], ¿vale? Y en paralelo [empieza a escribir en la pizarra] tenéis que representar el proceso en el sistema de representación simbólico-numérico; el enunciado está dado en ese sistema de representación, ¿vale?, esto es sistema de representación simbólico-numérico, pues tenéis que representar el proceso, las dos sumas y las dos restas, en ese sistema, ¿vale? Y luego, en medio [escribe en la pizarra], hay una representación que es formato tabla o tabular, de la que no he hablado explícitamente, pero que me gustaría que construyerais vosotros, ¿vale? Necesito que construyáis, por ejemplo, esta suma [señala $210 + 543$], que la hagáis en tabla, con una tabla, como se os ocurra a vosotros diseñar la tabla, ¿vale? La tabla [escribe en la pizarra] puede ser más gráfica, puede tener características gráficas, o puede tener características más simbólicas; a mí me va a interesar más la que tenga características más gráficas, luego ya veremos en detalle cómo, pero tenéis que intentar construirlo vosotros sin que yo os haya hablado de eso explícitamente, ¿vale?



Entonces, paso 1, aquí [señala la parte de representación manipulativa de la pizarra], en paralelo paso 2, simbólico-numérico [lo señala en la pizarra] y luego ya, según vayáis trabajando los cuatro ejemplos, igual ya se os va ocurriendo cómo representarlo con una tabla y cómo trabajar con una tabla ese tipo de operaciones. ¿Está claro? Yo me voy a pasar por las mesas y me vais preguntando todas las dudas que os surjan. No voy a pedir que me mandéis nada, ¿vale?, porque todavía no he revisado las últimas fotos que me habéis mandado, con lo cual estoy un poco desbordada; como no sois muchos, yo voy por vuestros puestos. Ahora bien, en el grupo anterior han decidido grabar pequeños vídeos o hacer fotos de los procesos que iban construyendo por llevárselo como material para estudiar, a mí me parece una buena idea, pero ya vosotros hacéis lo que queráis, a mí no me lo tenéis que mandar, pero si queréis, una vez que hayáis construido, por ejemplo, con el ábaco japonés, imaginaos, esta resta de aquí [señala el PDF en la pantalla], y decís: «ah, pues nos vamos a grabar», uno lo hace otro lo graba y lo tenéis de recuerdo, ¿no?, para cuando tengáis que estudiar. ¿Cómo voy a pedir yo eso en el examen? Pues no lo puedo pedir porque no puedo llevar un sorobán para cada uno porque tengo un día, 2 horas y media o 3, para haceros el examen final de la asignatura; pero para mí esto es muy importante, entonces yo voy a pedir que me representéis gráficamente, gráficamente, vuestro proceso de respuesta con un ábaco vertical, con un sorobán o con los bloques multibase, que es lo que yo luego voy a hacer aquí en la sesión

final de discusión cuando acabemos esta hora de clase. Yo no voy a coger el ábaco aquí, lo voy a poner delante de todos y tal —podría hacerlo, pero no lo voy a hacer—, lo voy a hacer representando gráficamente el material manipulativo y así es como lo voy a pedir el día del examen, porque os voy a dar un cuadernillo y lo tenéis que hacer gráfico, ¿vale?

Comentario 4: Evidentemente, como los exámenes son así, su finalidad está muy clara, es decir, ella lo que quiere conseguir es que ellos a través de esta gamificación, que es como metodológicamente se enseña a los niños en matemáticas, lo que quiere es que ellos adquieran muy bien ese juego, esa forma de llevar esa suma a los niños. Luego, como hay que evaluarlo, pues lo está diciendo claramente: «luego, si lo tienes muy claro, me lo puedes representar en un examen gráficamente». Pero es ahora cuando ella va a detectar si van a ser capaces a través de ese juego y esa gamificación, que es lo que están haciendo todo el rato, de entender y poder transmitir ese concepto de la suma. Es en lo que ella está insistiendo muchísimo.

Bueno, pues empezad, están escritas en un orden muy concreto, empezad a hacerlas en ese orden y luego ya discutimos sobre por qué están puestas en ese orden, ¿vale?

Fragmento 2

[F = Formadora del vídeo]. [A = Alumnos (A1, A2 y A3)]. [Comentarios de Raquel presentados en recuadros].

- A1: Estamos rayados con la última resta.
 F: Vale, a ver, empezad.
 A1: Son 704 - 45.
 F: Vale.
 A1: Entonces, aquí no le podemos restar 5.



- F: Así tal cual está, puedes restar..., ¿cuántas puedes quitar?
 A1: Cuatro.
 F: Cuatro, vale, sí.
 A1: Entonces voy a suponer que aquí [señala la varilla de las decenas] hay un 1.
 A2: No, que hay 10.
 A1: Que hay 10, para que sea 14...
 F: A ver, olvídate de los «suponer».

Comentario 1: Está trabajando la suma, quiere que trabajen la suma, pero realmente a través del ábaco lo que está introduciendo a los alumnos es el concepto de la descomposición polinómica de los números para que lleguen a poder sumarlos. Eso es lo que está trabajando ella ahí, ese concepto, ¿vale?

Tú dices: «tengo que quitar 5», ¿no?, quito 1, quito 2, quito 3, quito 4 [quita cuentas de la varilla de las unidades] y ahora ponme aquí más para que yo quite, tal y como está.



- A1: Habría que poner 10 y quitamos 1.
- F: Pero ¿cómo me ponéis..., cómo me ponéis ahí? A ver Pablo.
- A2: ¿Que lo ponga?
- F: No, no, que me digas... Yo aquí [señala la varilla de las centenas] tengo ahora mismo 700, ¿no? Escribe 700 de otra forma para que yo tenga bolas...
- A1: Aaaaah, hay que añadir una aquí [señala la varilla de las decenas].
- F: Venga, a ver.
- A2: [El alumno A2 quita una cuenta de la varilla de las centenas y la pone en la de las decenas].
- F: ¿Aquí sigue poniendo 700?
- A1: No, no, no, hay que poner una nueva aquí [vuelve a poner la cuenta en la varilla de las centenas —la que había puesto en la varilla de las decenas el alumno A2— y pone una nueva en la varilla de las decenas].
- F: A ver [quita la cuenta de la varilla de las decenas]. Teníamos 704, hemos quitado 4, tengo 700, ¿vale?
- A1: Sí.
- F: Ahora, escribe 700 de otra forma para poder quitar otra.
- A1: Pues...
- F: ¿Cómo podéis escribir 700 de otra forma?

A1: Que aquí [señala la varilla de las decenas] haya 9...

F: Venga.

A1: Y aquí [señala la varilla de las unidades]..., 9.

F: A ver, para que haya aquíííí... [señala la varilla de las decenas], vamos a ver, ¿cómo consigo aquí decenas? Sin cambiar el número...

A1: Si quito esta... [quita una cuenta de la varilla de las centenas].



F: Venga, muy bien.

A1: Pongo aquí 10 [señala la varilla de las decenas].

F: Venga, dale.

A1: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10.

A3: ¡Ah, vale!



F: ¿Ahora aquí pone 700?

A1: Sí.

F: ¿Y cómo está escrito 700?

A3: Mal.

F: 6×10^2 , ¿no?, 6×100 , más...

A2: 10×10^1 .

F: 10×10^1 , muy bien. Ahora, ¿puedo quitar aquí [señala la varilla de las unidades] que quería quitar una? ¿Tengo?

A1: No.

F: No, ¿cómo puedo volver a escribir 700 para tener aquí [varilla de las unidades]?

A1: Pues quito de estas [quita una cuenta de la varilla de las decenas] y añado 10 aquí [señala la varilla de las unidades].

F: Vale, venga.



F: Vale, ¿y ahora puedes quitar la que te faltaba por quitar?

A1: [La estudiante A1 quita una cuenta de la varilla de las unidades].

F: Ya está. Ya habéis quitado 5 y teníais que quitar 45, ¿no? ¿Cuánto os falta por quitar?

A1: Sí, ahora aquí [señala la varilla de las decenas] hay que quitar 4.

F: Pues ya está, ¿no?

A1: Ah, vale, vale. Gracias.



- F: ¿Entonces qué habéis hecho para reescribir el 700...? O sea, yo tenía 700 ahí, tenía aquí 700 [deja el ábac con 7 cuentas en la varilla de las centenas], ¿qué habéis hecho?
- A2: Como es sistema decimal, pues aquí [señala la varilla de las decenas] hay 10, porque... representamos un 0, pues quitar una de aquí [varilla de las centenas] y ponerle las 10 aquí [varilla de las decenas] para luego restarlas aquí [varilla de las unidades].
- F: O sea que habéis..., ¿agrupado o desagrupado?
- A1: Desagrupado.
- A2: Aquí desagrupado.
- F: Desagrupado. Habéis desagrupado una centena en 10 decenas

Comentario 2: Vale, cuando interactúa con ellos y les habla, les hace verbalizar y razonar muy bien. Además, utiliza vocabulario muy normal en las aulas con los alumnos, o sea, ese vocabulario que ella acaba de decir, «agrupo», «desagrupo», es vocabulario que luego ellos van a tener que emplear en el aula también, ¿vale? Pero, sobre todo, interactúa con ellos porque ella quiere que le verbalicen realmente todo lo que están haciendo; es la metodología que se emplea realmente en el aula, «el juego es verbalizar, cuéntame qué has hecho, cómo lo hago, cómo no lo hago».

- y luego una decena la habéis desagrupado en 10 unidades.
- A1: Vale, es que cuando tú lo haces en papel no haces esto así.
- F: Ah, pues dime entonces qué es lo que haces en papel.

- A1: Claro, lo haces muy mental. O sea, en verdad sí que haces eso, pero... bueno, ya me has entendido.
- F: No, no, pero lo tienes que explicar porque luego os he pedido que lo hagáis simbólico...
- A1: Ya, ya, ya.
- F: Entonces, simbólico tienes que explicarlo conectado con esto.
- A1: Vale, vale.

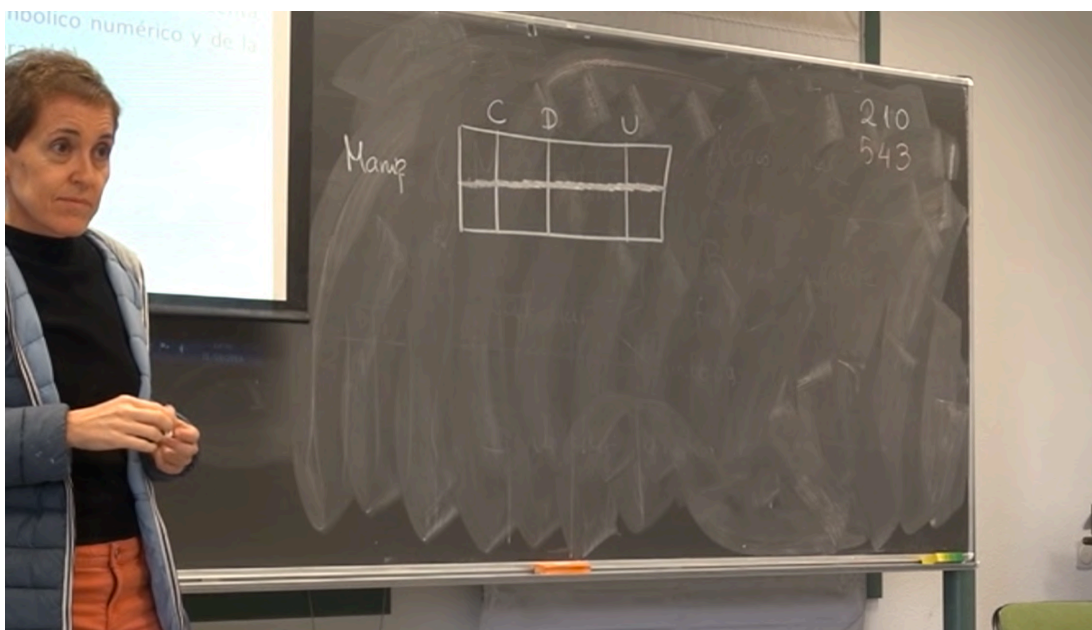
Fragmento 3

[F = Formadora del vídeo]. [A = Alumnos]. [Comentarios de Raquel presentados en recuadros].

F: Vamos a corregir uno, el primero, ¿vale? Me dan $210 + 543$, ¿vale?, con símbolos. Voy a representarlo..., vamos a empezar con manipulativo y voy a ejemplificar con el sorobán, que es el que parece que más trabajo cuesta, ¿vale? Entonces, en el sorobán, cuando lo representéis gráficamente el día del examen, o ahora en vuestro cuaderno si tenéis que tomar notas, es muy importante marcar la barra del medio, porque la proximidad de las bolas a la barra del medio es la que te indica qué número está representando, ¿vale? Y ahora, dado el problema que me han planteado, ¿cuántas varillas pensáis que necesito escribir?

A: Tres.

F: ¿Tres varillas? Pongo una varilla, dos varillas, tres varillas. Esta, unidades, decenas, centenas. Esta la pongo un poco más gorda para que se note que es la barra de madera del medio, ¿vale? Y ahora, ¿cómo dibujo 210?



A: Pues 0 unidades.

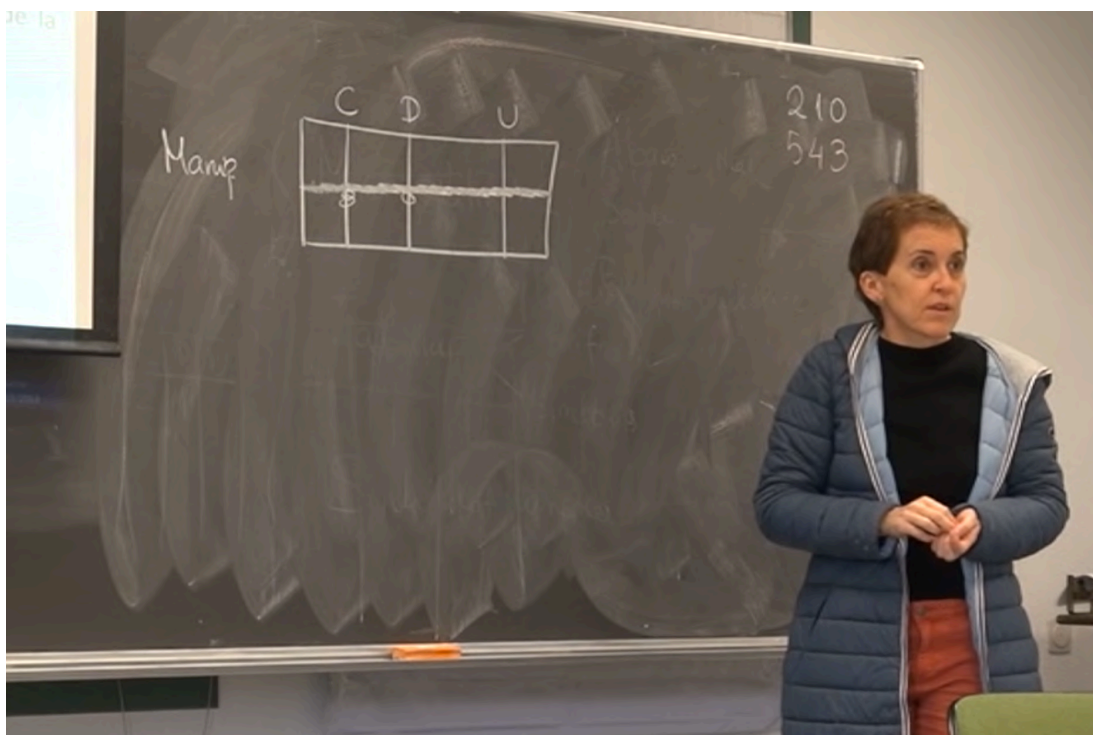
F: 0, o sea que aquí no pongo nada pegado a la barra, ¿no? [señala la varilla de las unidades]. ¿Aquí? [señala la varilla de las decenas].

A: 1 decena.

F: Una pegada a la barra, ¿arriba o abajo?

A: Abajo.

- F: Abajo, o sea que aquí va una.
- A: Y 2 centenas pegadas a la barra de abajo.
- F: Pegadas a la barra, abajo. Una y dos, ahí está. Eso es 210.



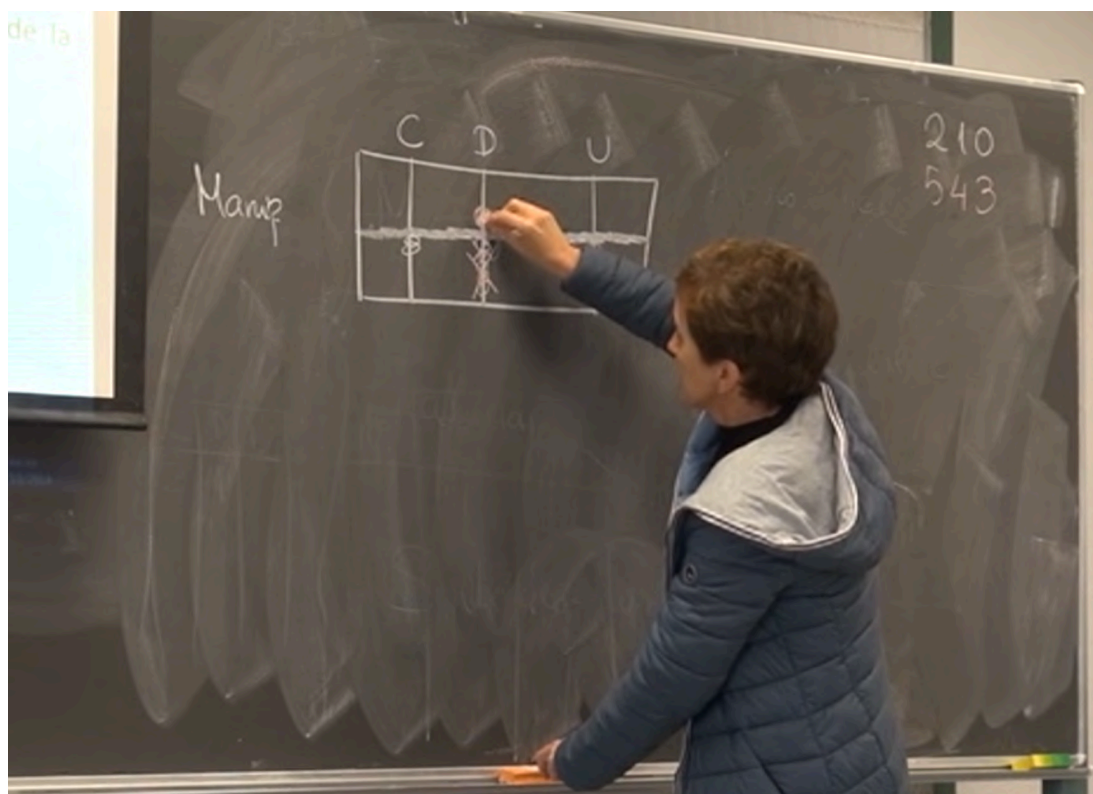
Y ahora, tengo que sumar 543, es decir, que tengo que añadir 543 unidades ahí.

Comentario 1: Está trabajando el concepto de la suma, de la suma con llevada, para llevársela a los niños al aula. Entonces, lo primero que se hace es introducirlo así en el aula, ¿vale?, descomponiendo y agrupando, «te quito, te pongo...», ¿vale? Sobre todo, los niños pequeños, yo te hablo por ejemplo de niños pequeños, de niños de infantil y de 1.º y 2.º de primaria..., para ellos un cálculo mental es muy difícil, pero así, visualmente, descomponiendo y agrupando, es como ellos van adquiriendo la suma, ¿vale?

Aprovecho la estructura, ¿vale? Entonces, añado 3 unidades, en la varilla de las unidades, que son 3 aquí abajo, ¿no?, 1, 2 y 3 [las dibuja en la varilla de las unidades]. Después añado 4 decenas, en la varilla... 1, 2, 3, 4, ¿vale? [las dibuja en la varilla de las decenas], 4 decenas.

- A: Pero cambiamos...
- F: Pero...
- A: Bajamos una de arriba y quitamos las de abajo.

- F: Porque no tenéis 4, ¿vale?, ya no había suficientes, ¿por qué?, porque las bolas de arriba valen 5, entonces decís: «no pasa nada, estas, como eran 4 y 1, 5, se representan ahí arriba», ¿vale?

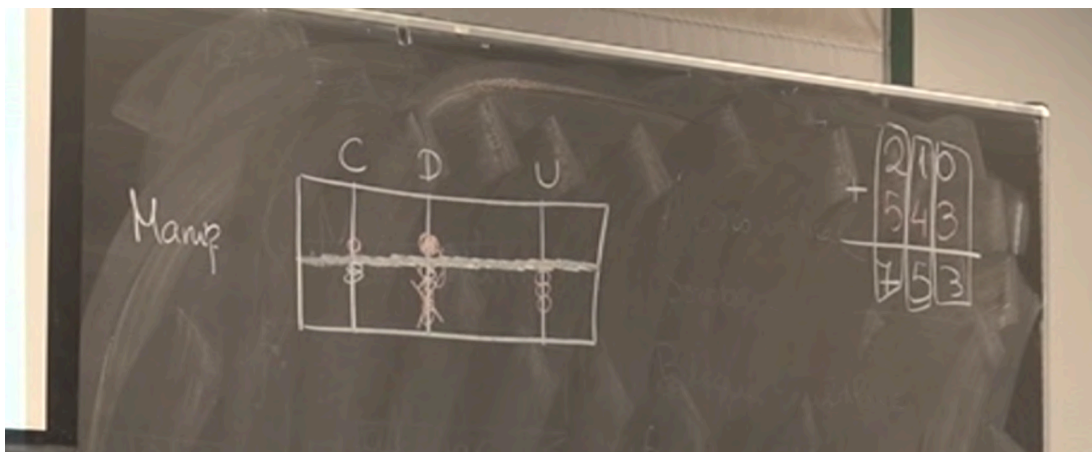


Y luego, 5..., tengo que añadir 5 centenas, ¿cómo lo hago?

- A: Pues 1 arriba.
- F: Una de arriba la bajo directamente o podría ir: «1, 2, 3, ya tengo 5, las subo ahí, 4, 5» [va señalando en la varilla de las centenas], ¿vale? Puedo hacerlo de dos formas distintas. Pero si aprovecho la estructura del ábaco, de manera que las bolas de arriba valen 5, como tengo que añadir 5, pues directamente ya añadido ahí esas 5 [dibuja una bola en la varilla de las centenas, en la parte superior, pegada a la barra horizontal], ¿vale?

Entonces, [representa ahora el resultado en la suma con el algoritmo tradicional de forma simbólico-numérica a partir de lo que ha obtenido en la representación con el sorobán] me quedan 5 y 2, 7, aquí me quedan 5, y aquí me quedaban 3. Entonces, si yo lo represento así y voy sumando por columnas, tal cual he ido haciendo en el ábaco, tengo 0 unidades y 3 unidades, 3 unidades, 1 unidad y 4 unidades, 5 unidades, perdón, decenas, 2 centenas y 5 centenas, 7 centenas.

Vertical, lo he colocado vertical por parecerme a la estructura del ábaco, ¿no?, para tener en cuenta la «posicionalidad», ¿vale?, del sistema.

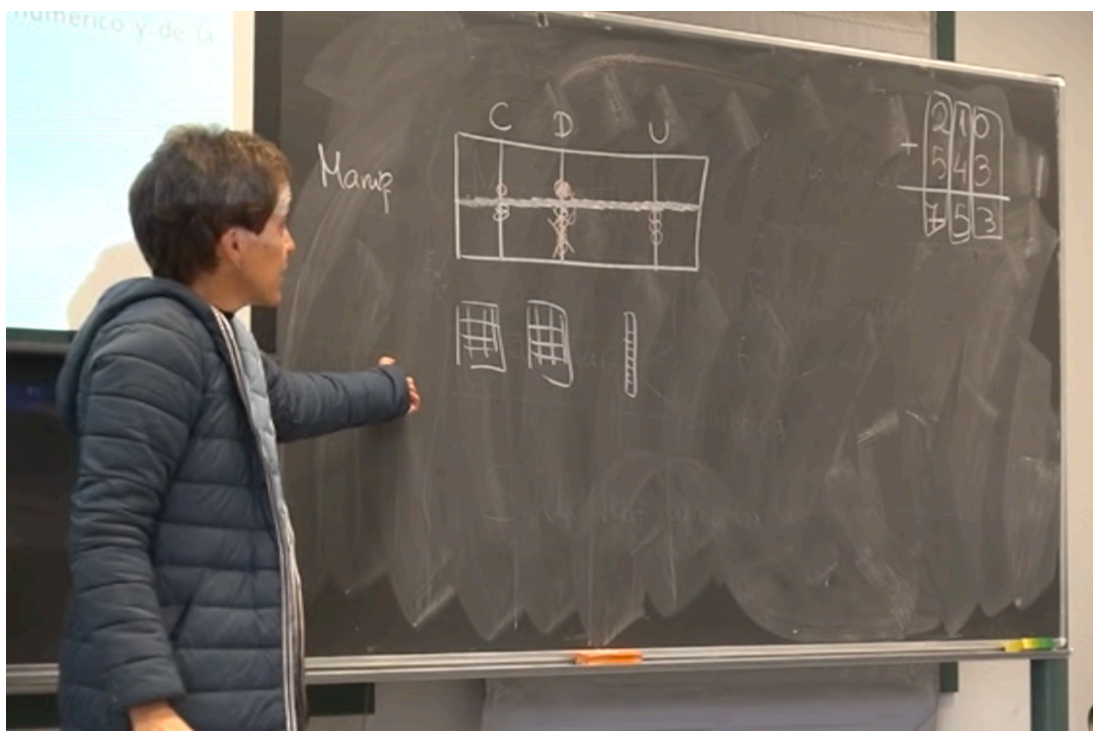


Entonces, he traducido al simbólico lo que he hecho aquí

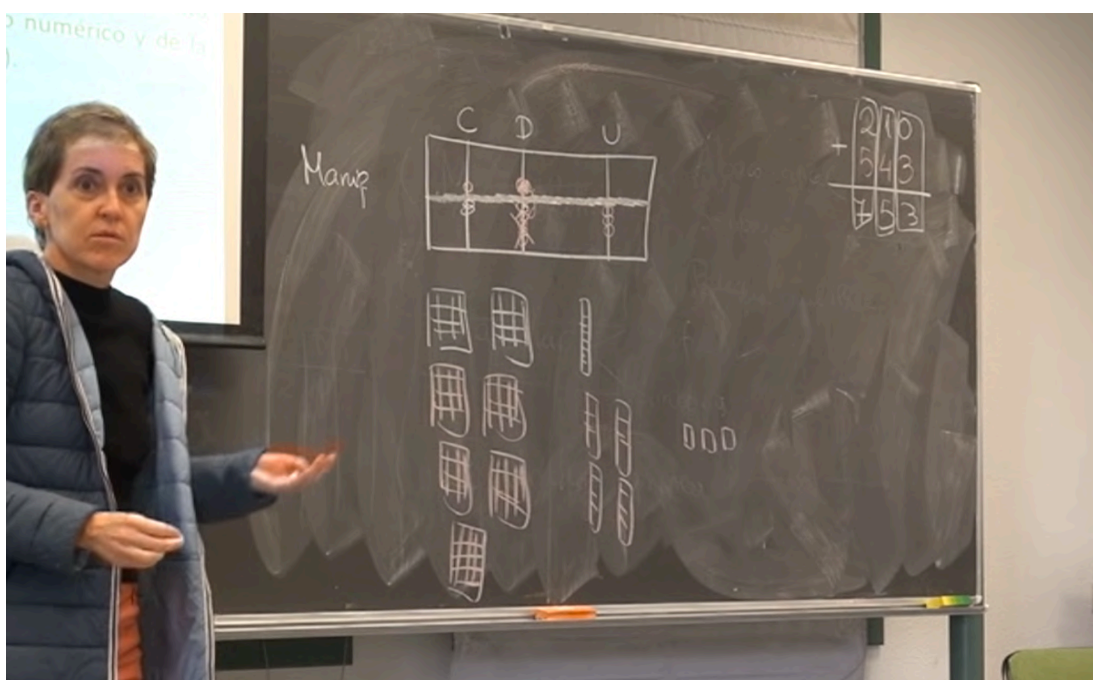
Comentario 2: Gráficamente [lo dice sin parar el vídeo].

manipulativamente al escribir en simbólico en columnas y represento con cada columna cada una de estas [señala las varillas del sorobán de la pizarra]. Y luego, la escritura, sí que tengo que tener en cuenta que estos son 5 [señala las decenas de la suma en simbólico] con lo cual van arriba [en el sorobán] y esto son 7 [señala las centenas de la suma en simbólico], pues son 5 y 2 [en el sorobán], ¿vale?

Bloques multibase, bloques multibase, pongo aquí 210, ¿no?, que son 1 y 2 placas de 100 y 10, una decena; este es el 210.



Y ahora agrupo 543; una, dos, tres, cuatro y cinco [dibuja 5 placas de 100 unidades], añado, ¿vale?, 500. 40: una, dos, tres, cuatro [barras de 10]; y 3: uno, dos y tres [unidades]. Y ahora lo pongo todo junto. ¿Vale?



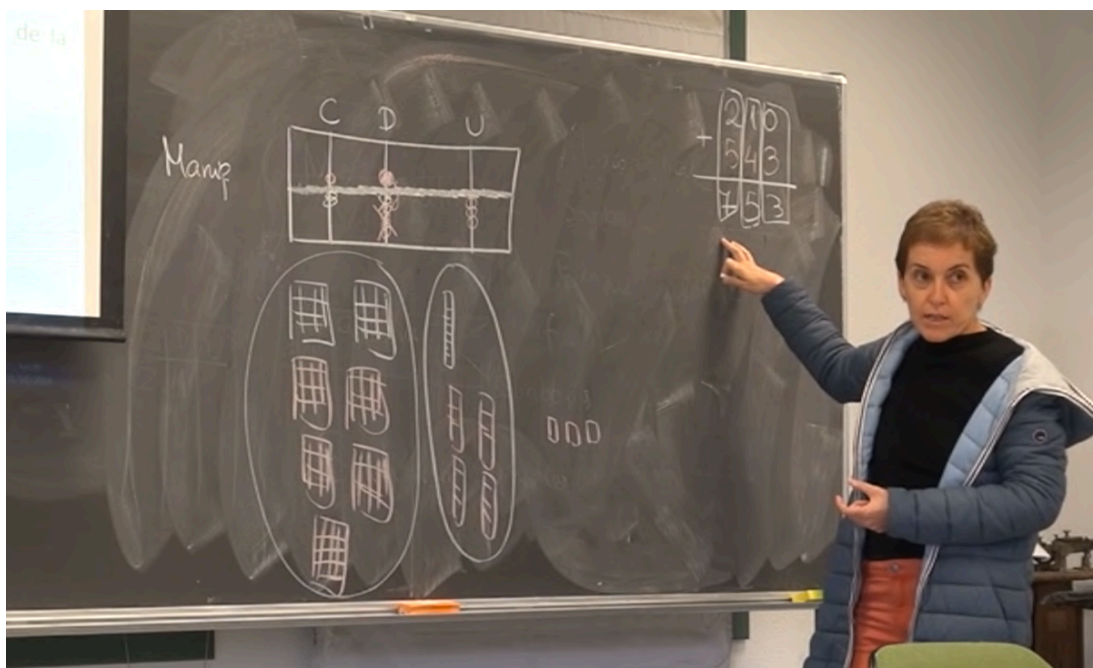
Y digo: «aquí tengo 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 [placas de 100]», ¿necesito agrupar? [Rodea con una línea todas las placas de 100].

A: No.

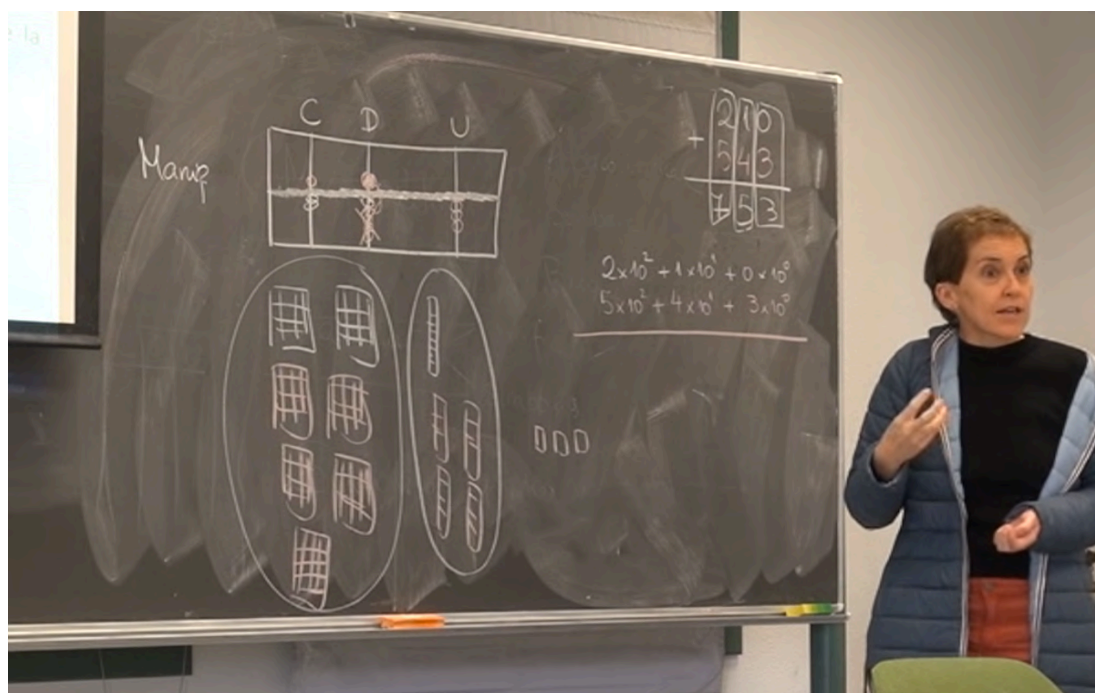
- F: No necesito agrupar. Aquí tengo 1, 2, 3, 4, 5, 6, 5, ¿necesito agrupar estos 5 de alguna manera? [Rodea con una línea todas las barras de 10]. No porque es base 10. Y aquí tengo 3, ¿vale? O sea, que me vuelve a salir 2, 4, 6, 7 [centenas; señala la suma en simbólico], 2, 4, 5 [decenas], 5 [señala la suma en simbólico] y 3. Y veo la conexión de uno con otro, ¿vale? ¿Está claro hasta aquí?

Comentario 3: Está muy bien, porque lo que es el concepto lo representa muy bien gráficamente y es la metodología que hay que emplear para llegar a esa didáctica con los niños, ¿vale? Entonces, con todo muy gráfico es como ellos empiezan a entender todos los conceptos, que es lo que ha dicho ella directamente: «¿necesito agrupar?, no, pues ya tengo los 7». O sea, ahí les introduce el concepto de la suma gráficamente a través del juego sin que se den cuenta.

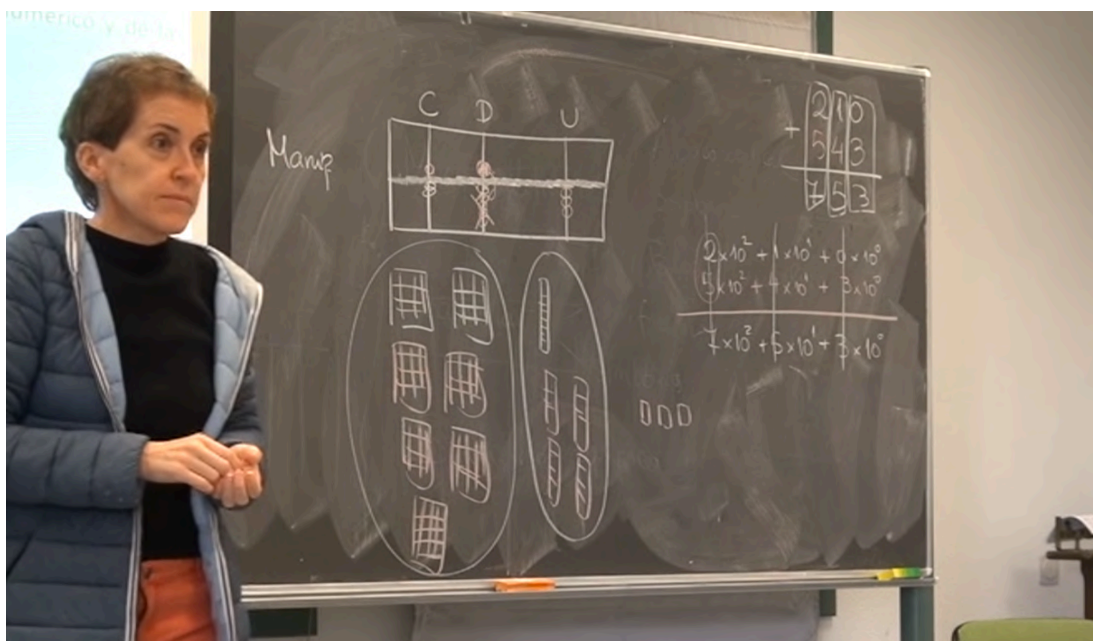
- A: Sí, eso sí.



- F: El que quiera escribirlo simbólico-numérico de otra manera en la que se vea la «posicionalidad» del sistema, podría escribirlo de la siguiente forma: $2 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 0 \times 10^0$, ese es el primer sumando; segundo sumando, $5 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 3 \times 10^0$; y sumo.



Y ahora, al sumar, utilizo la propiedad conmutativa, para colocar los sumandos en el orden que quiero, y asociativa, para ir organizando, ¿vale? O sea, que este [señala 5×10^2] —que, si lo coloco seguido, estaría aquí el cuarto [señala detrás de 0×10^0]— lo quiero colocar el segundo para agruparlo con este [señala 2×10^2], este [señala 4×10^1] —que estaría el quinto [señala detrás de 0×10^0]— lo coloco el tercero para agruparlo con este [señala 1×10^1], y este [señala 3×10^0] lo agrupo con este [señala 0×10^0]. Y ahora, al agrupar, ya me quedan 5 y 2, propiedad distributiva, 7×10^2 más, 4 y 1, 5×10^1 más, 0 y 3, 3×10^0 . Pero ahí estoy utilizando la asociatividad de la suma, la conmutatividad de la suma y la distributiva de la suma y el producto de números enteros, ¿vale? Pero si lo coloco así, veo esto, esto y eso [señala los coeficientes que acompañan a 10^2 , 10^1 y 10^0], que es lo mismo que esto, esto y eso [señala el 7, 5 y 3 del resultado de la suma en la forma simbólico-numérica], que es lo mismo que esto, esto y esto [señala los bloques multibase en la pizarra] y que es lo mismo que 1, 2 y 3 varillas [señala las varillas del sorobán en la pizarra]. ¿Está claro hasta aquí?



A: Sí.

F: Ahora, ¿qué diferencia hay entre esto y la siguiente suma que me plantean ahí [en el PDF proyectado en la pantalla]? $316 + 429$.

A: Que me paso de unidades y tengo que pasar a las decenas.

F: Que cuando agrupo aquí, por ejemplo [bloques multibase], o cuando agrupo aquí [sorobán], o cuando agrupo aquí [expresiones de sumas y productos de potencias de 10], aquí aparecen más de 10 [señala al 3 de 3×10^1]. En algún sitio aparecen más de 10, por ejemplo, cuando tengo 9 unidades y 6 unidades, aquí aparecerían 15 fichitas pequeñas [bloques multibase], aquí tendría que representar 15 [sorobán] y aquí aparecería 15×10^0 . Pero como estamos en base 10, no puedo dejarlo así,

Comentario 4: En base 10, exactamente [lo dice sin parar el vídeo].

tengo que agrupar, tengo que agrupar. Entonces, agrupo 10 y dejo 5, y las 10 que agrupo las paso al siguiente valor, es decir, pego 10 fichas y construyo una barra [bloques multibase], agrupo 10 y me sale otra bola aquí en el ábaco, aquí abajo [parte baja de la varilla de las decenas], o agrupo 10 y me sale uno más aquí [en 5×10^1] y aquí [en 3×10^0] dejo las que se quedaban sueltas, las 5, ¿vale? O sea, que la única diferencia es que aquí, después de representar cada cantidad y de ir poniendo por orden el valor de cada una, tengo que agrupar porque en algunos sitios tengo 10 o más, ¿vale? Es la única diferencia.

Y ahora, si quisiéramos representar esto en formato tabla, como tenía Martín, ¿no? ¿Cuántas columnas pondré yo en la tabla?, ¿qué me pide el cuerpo? Tengo que dibujar una tabla, ¿vale?, vamos a dibujar una tabla [comienza a dibujarla en la pizarra], con filas y columnas, ¿cuántas columnas pongo?

A: Tres.

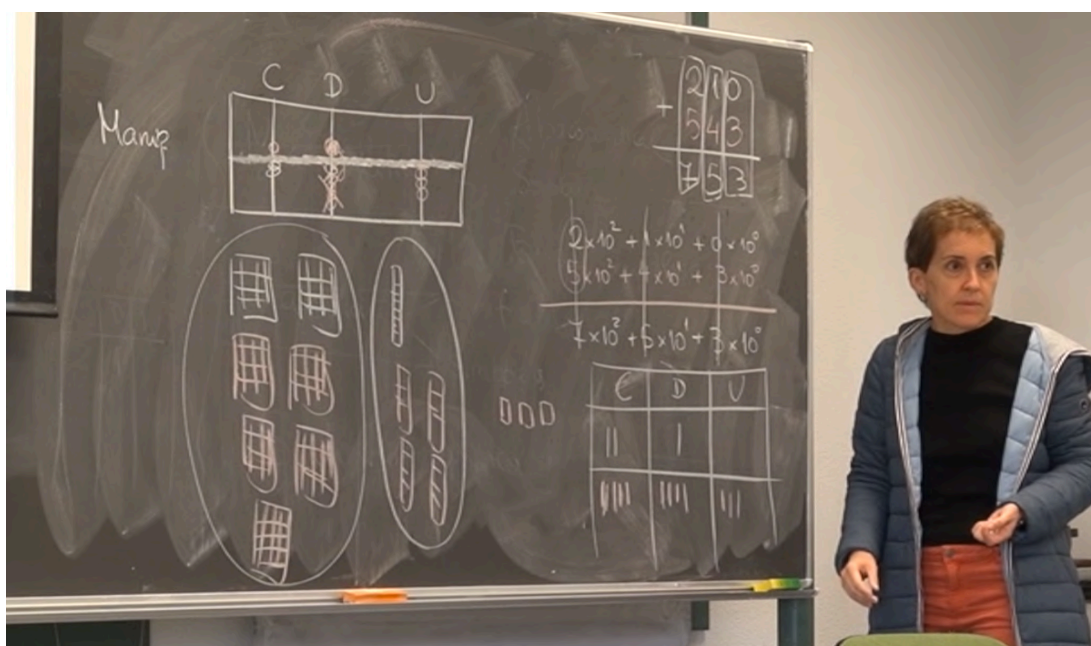
F: Tres, ¿por qué tres?

A: Centenas, decenas y unidades.

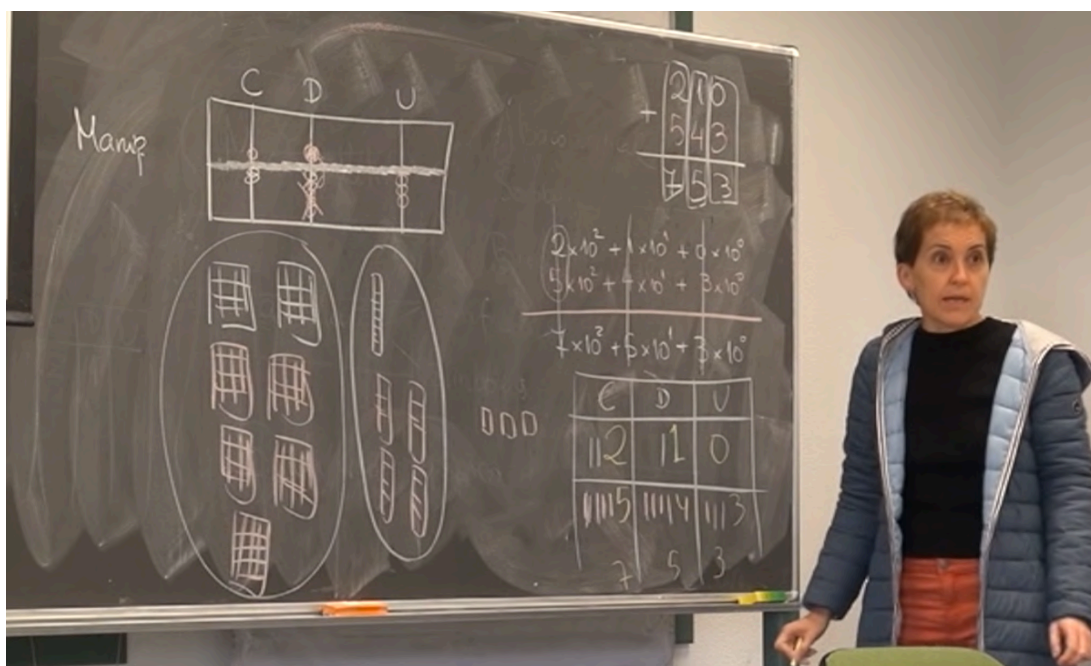
F: Unidades, decenas y centenas, ¿vale? Y entonces, represento el primer número, 210: 1, 2, 1, eso es 210 [pone dos rayas en la primera casilla de las centenas y una en la primera de las decenas]. Represento el segundo número, 500: 1, 2, 3, 4, 5; 40: 1..., bueno, en rosa, ya puestos..., 1, 2, 3, 4, 5; 40: 1, 2, 3, 4; y 3: 1, 2, 3. Y agrupo:

Comentario 5: Agrupo [lo dice sin parar el vídeo].

¿cuántas unidades tengo al final?, 3, ¿cuántas decenas tengo al final?, 5, ¿cuántas centenas tengo al final?, 7, fin.



Este sistema de representación es icónico-gráfico porque he representado aquí las cantidades con palitos, pero tiene una estructura especial porque está en una tabla, ¿vale? Entonces, vamos a decir que es un sistema de representación tabular-gráfico. Si en vez de poner aquí gráficos, yo hubiera dicho: «oye, mira, no me lío con los gráficos, ya puestos, como ya controlo mejor los símbolos, pues voy a poner aquí 210 y aquí abajo voy a poner 543 y luego ya sumo: 4 y 1, 5; 5 y 2, 7; 3 y 0, 3», ¿vale?



Sería tabular, tiene una estructura tabular, no es puramente simbólico-numérico, tiene una estructura tabular, pero con números dentro, tabular-numérico, ¿vale? Entonces, yo voy pasando de lo más concreto, que sería: «mi madre me ha dado 316 euros y mi abuela 429, ¿cuántos euros tengo en total?», después paso a manipular, con ábacos verticales, con ábacos japoneses, con bloques multibase..., y cuando interiorizo bien eso, digo: «ostras, venga, lo voy a poner en una tabla gráfica y voy a indicar lo que me indica cada varilla o lo que me indica cada agrupamiento de los bloques multibase, que es posición, en las columnas de una tabla, y ahí voy a poder marcarlo con símbolos». Esta tabla con símbolos se llama tablero de posición, porque tengo las posiciones indicadas —unidades, decenas y centenas—, y es uno de los recursos que más utilizan en el método famoso este Singapur, que habréis visto o habréis oído hablar de él, ¿vale? Entonces, ¿qué están haciendo?, están haciendo una transición de los más concreto, pasando por lo manipulativo, hacia lo abstracto, que sería..., esto es lo más abstracto [señala las expresiones de sumas y productos de potencias de 10] y esto es lo abstracto que se trabaja en primaria

Comentario 6: Exacto [lo dice sin parar el vídeo].

[señala la suma hecha en el registro de representación simbólico-numérico], ¿vale? Pero no trabajan directamente con esto, vamos pasando..., concreto, concreto, concreto [de forma manipulativa], voy intentando abstraer un

poco, pero tengo mis gráficos que me ayudan a visualizar lo que estoy haciendo [de forma tabular], y finalmente mi objetivo es escribirlo simbólico-numéricamente, de forma abstracta, ya al final.

Comentario 7: Eso es lo que yo te he dicho antes: todo el proceso manipulativo para llegar a ese nivel de abstracción que quiere que consigan los alumnos. Es todo el proceso que ha llevado a través de esta metodología que ha estado aplicando.

¿Cómo habéis trabajado mayoritariamente vosotros en primaria cuando estabais haciendo sumas de este estilo? ¿Desde aquí [señala lo manipulativo] o desde el final [señala lo simbólico-numérico]?

A: Desde el final...

A: Yo con las de centenas, decenas y unidades, las cajas...

F: Las cajas estas también os suenan, los tableros de posición, pero ¿y qué poníais en las posiciones, palitos o los números ya?

A: Los números directamente.

F: Los números directamente, o sea, que estabais trabajando la fase inicial, de la suma, la estabais trabajando directamente con lo simbólico, que es la fase final,

Comentario 8: Que es la fase final, efectivamente [lo dice sin parar el vídeo].

¿lo veis?

A: Jolín, sí.

F: Vale, pues ala, ya está.

ANEXO 27

Eventos e interpretaciones de Marcos en la fase 2

Nota 1: Cada evento e interpretación se presenta junto con el comentario del que se ha extraído, así como con la etiqueta que lo identifica y el código que se le ha asignado. No obstante, no todos los comentarios presentan eventos o interpretaciones, bien por no contener ninguno, bien por haberse trasladado la información al respecto a otro comentario que aborde el mismo asunto, por lo que algunos eventos e interpretaciones pueden contener información de comentarios distintos del que acompañan. La traslación de información entre comentarios no se indica para no complejizar el documento.

Nota 2: El texto presentado entre corchetes en algunos eventos e interpretaciones se corresponde con información incluida por el investigador.

VÍDEO 1

Fragmento 1

Comentario 1

Hay una cantidad de palillos... El número de palillos está fijado, con lo cual imagino que ese dato es relevante, y ya ha avisado de que sí que pueden pedir gomas; ha avisado de que el número de palillos es fijo. Yo imagino, es una interpretación, que está fijo porque la cantidad es relevante para lo que va a estudiar. Podría ser fijo y al azar, pero yo creo que está prefijado de una manera consciente, lo que se llama en Teoría de Situaciones «variable didáctica», porque interesará que dicha cantidad cumpla una serie de condiciones para hacer emerger ciertas estrategias. Lo que no ha dicho es si todos tienen la misma cantidad, pero eso ya lo veremos.

- 2M1.1-1.1. Presenta unos palillos y unas gomas [E, 2].
- 2M1.2-1.1. Indica que el número de palillos es fijo, mientras que el de gomas no lo es [E, 3].
 - 2M1.2-1.1(I)1. Imagino que el número de palillos está fijo porque la cantidad es relevante para lo que va a estudiar. Podría ser fijo y al azar, pero yo creo que está prefijado de una manera consciente, lo que se llama en Teoría de Situaciones «variable didáctica», porque interesará que dicha cantidad cumpla una serie de condiciones para hacer emerger ciertas

estrategias. Lo que no se sabe es si todos tienen la misma cantidad de palillos [I, M].

Comentario 2

Intenta dar una contextualización que se justifique por los conocimientos pragmáticos del mundo [se ríe], es decir, no tiene una razón matemática el hecho de saber los palillos. Ha buscado un contexto que, como son alumnos ya adultos, tiene menos relevancia, pero es verdad que, efectivamente, un contexto... Bueno, aunque diga 800, me interesa elegir las cajas que cuando cuento tienen más... Digamos que da una justificación extramatemática en este caso, una justificación del conocimiento del mundo..., de por qué me interesa contarlos. Eso forma parte de contextualizar las cosas y de que los objetivos sean asumidos por el alumno, es decir, le hace partícipe... Repito, en este caso, que son alumnos universitarios, yo creo que no está de más, pero tampoco es muy relevante. Desde luego, sí que sería muy importante cuando los niños son más pequeños. Además, esta tarea se puede llevar a cabo en primaria, es decir, está reproduciendo una tarea que se puede hacer con niños de primaria con futuros maestros. De alguna manera les va a hacer pasar por procesos similares a los que van a pasar los alumnos... Y creo que lo que ha hecho es repartir todos los palillos de la caja. Ella ha dicho una cantidad, dice que son 800, pero como los ha repartido, creo que es una cantidad que no juega un papel importante en las estrategias que los alumnos van a utilizar. Ah, y eso sí, ahora les dice que no cuenten, les dice que estimen, les da una tarea distinta que tradicionalmente no está muy presente, es decir, los alumnos de matemáticas generalmente piensan que hay que obtener los resultados precisos, cuando en la realidad en casi ningún caso los resultados son precisos. Entonces, ella lo fuerza aquí: «quiero que estiméis primero». Incluso les hace un recordatorio, para aquellos que han trabajado matemáticas en Bachillerato de Ciencias Sociales, para que recuerden o movilicen un poco dentro de su historia académica conocimientos que ya les suenan. Es relevante lo de estimar porque no es una actividad frecuente.

- 2M2.1-1.1. Contextualiza la actividad haciendo alusión a cajas con 800 palillos, es decir, plantea un contexto extramatemático sobre conocimientos pragmáticos del mundo [E, 2].
 - 2M2.1-1.1(I)1. Pretende hacer partícipes a los alumnos, lo cual no es muy relevante con alumnos universitarios, pero sí cuando los alumnos son niños [I, D].
- 2M2.2-1.1. Plantea una tarea: estimar los palillos que ha repartido y contarlos después [E, 3].

- 2M2.2-1.1(I)1. Está reproduciendo con futuros maestros una tarea que puede llevarse a cabo con niños de primaria, por lo que de algún modo va a hacer pasar a los alumnos por procesos similares a los que pasarían los niños de primaria [I, M].
 - 2M2.2-1.1(I)2. Como ha repartido los 800 palillos, creo que dicha cantidad no juega un papel importante en las estrategias que los alumnos van a tener que utilizar [I, M].
 - 2M2.2-1.1(I)3. La tarea de estimar no se plantea habitualmente, los alumnos de matemáticas generalmente piensan que hay que obtener resultados precisos, cuando en la realidad los resultados no son precisos en casi ningún caso [I, M].
- 2M2.3-1.1. Recuerda a los alumnos conocimientos que han podido trabajar en matemáticas en Bachillerato de Ciencias Sociales [E, 2].

Comentario 3

Bueno, hace referencia a un material, en este caso un libro, y de alguna manera les incita diciéndoles que es muy bueno y demás, incluso les va a proponer una actividad de ese libro, con la intención de que se animen a usar el libro. No sé si es algo didáctico general, pero como en este caso se trata de la enseñanza de las matemáticas...

- 2M3.1-1.1. Hace referencia a un libro sobre la enseñanza de las matemáticas del que ha extraído la actividad que va a proponer [E, 1].
 - 2M3.1-1.1(I)1. Con la intención de que los alumnos se animen a usar el libro [I, D].

Comentario 4

Hace explícito el objetivo. Esto sí que es una diferencia entre una actividad hecha con alumnos nuestra y una actividad hecha en primaria. En primaria, los niños se podrían enfrentar a este tipo de trabajo y no declararles cuál es el objetivo matemático que está detrás, sino simplemente ver si emergen las estrategias que justifiquen ese contenido, ¿no? Aquí, sin embargo, sí se lo explicita; estamos hablando de alumnos que son futuros maestros. Entonces, les dice que el objetivo de esto es que ellos reflexionen o constaten cómo son las características de los sistemas de numeración.

- 2M4.1-1.1. Hace explícito el objetivo de la actividad: que los alumnos reflexionen o constaten cómo son las características de los sistemas de numeración [E, 2].

- 2M4.1-1.1(I)1. Esto sí que es una diferencia entre una actividad hecha con alumnos [en la universidad] y una actividad hecha en primaria. En primaria, los niños se podrían enfrentar a este tipo de trabajo y no declararles cuál es el objetivo matemático que está detrás, sino simplemente ver si emergen las estrategias que justifiquen ese contenido [I, M].

Comentario 5

Ella ya les da indicaciones de que agrupen; es una decisión didáctica. Está claro que el agrupamiento es una buena decisión en estos casos. Ella no quiere dejar que eso surja en un entorno adidáctico, sino que ella lo explicita: «haced grupos de manera que los grupos nos permitan de un vistazo saber cuántos hay». Es más, los anima a que se ayuden con la goma; la goma es una explicitación del agrupamiento, luego podemos hablar de palillos y gomas... Ella ya propone que hagan agrupamientos, porque puede haber algún grupo suicida que se ponga a contar de uno en uno sin ningún tipo de organización; es una decisión que ella ha tomado. Estamos con alumnos que van a ser maestros, entonces se les dice más o menos cómo tienen que trabajar.

- 2M5.1-1.1. Dice a los alumnos que tienen que hacer grupos de palillos, que tienen que organizarlos de tal forma que de un vistazo se pueda saber cuántos palillos hay [E, 3].
 - 2M5.1-1.1(I)1. Explicitar que agrupen es una decisión didáctica, ella no quiere dejar que los agrupamientos surjan en un entorno adidáctico, ya que puede haber algún alumno que se ponga a contar los palillos de uno en uno sin ningún tipo de organización; como son futuros maestros, se les dice más o menos cómo tienen que trabajar. En un entorno adidáctico, hablando en términos de la Teoría de Situaciones, sería suficiente con pedir que cuenten los palillos, sin importar la organización, mientras que aquí el objetivo es organizarlos para saber cuántos hay [I, M].
 - 2M5.1-1.1(I)2. La goma es una explicitación del agrupamiento, pudiendo hablar luego de palillos y de gomas [I, M].

Comentario 6

Fíjate en que el objetivo lo ha cambiado; el objetivo ya no es contarlos, el objetivo es organizarlos. Yo, claro, me voy mucho a la Teoría de Situaciones: mientras que en un medio puramente

adidáctico, la organización es necesaria para saber cuántos y, por tanto, con decir «cuéntalos, tú verás cómo te organizas...» es suficiente, aquí no, aquí el objetivo lo ha cambiado, el objetivo ya no es saber cuántos, que es un objetivo último, sino organizarlos, y de hecho lo está diciendo: «el objetivo es que lo organicéis de manera que sepáis cuántos hay». El objetivo inicial, que era saber cuántos, ahora ha quedado en un segundo plano.

Comentario 7

Aquí da una indicación ya «de redondo y con asas» [se ríe]. Dice: «piensa si se ajusta a cómo los escribimos nosotros». Claro, nosotros los escribimos con agrupamiento decimal, base 10 y demás, decenas, centenas y demás. Aquí ya está dando una indicación muy clara de que quiere que esto tenga transcendencia en la escritura numérica. Y luego aparece también otra idea: en nuestro sistema de numeración no solo se agrupa, sino que se hacen agrupaciones de agrupaciones; el algoritmo de la numeración se basa en la idea de agrupamiento recursivo, no solo se agrupa de 10 en 10, sino que luego se agrupa de 10 en 10 los grupos de 10; de ahí salen las potencias, ¿no? Entonces, ella les está diciendo que vean si «esto se parece a esto». Esto puede provocar que algunos en los agrupamientos ya vayan pensando: «si ha dicho que reflexionemos sobre eso, pues es que algo tiene que ver y por tanto vamos a intentar...». Lo que está claro es que aquel que haga agrupamientos compatibles o que tengan cierta coordinación con el sistema de numeración, luego el conteo le será mucho más fácil; aquel que haga grupos de 17, es incuestionable que puede funcionar, pero de cara luego a leer los números como los leemos, pues no le va a funcionar bien. En lugar de dejar esto en un medio adidáctico para que ellos lo constaten y cambien de estrategia, ella ya da la indicación. Mi interpretación es que estamos con maestros, entonces vamos a ir avanzando para que ellos entiendan cómo..., pero transponer esta actividad a niños, que se podría perfectamente, requeriría unos tratamientos sobre los objetivos distintos; pero aquí estamos con maestros.

- 2M7.1-1.1. Dice que piensen si los grupos que han hecho se ajustan a cómo se escribirían en nuestro sistema de numeración [E, 3].
 - 2M7.1-1.1(I)1. Nuestro sistema de numeración se basa en el agrupamiento decimal, en la base 10, en las centenas, decenas, etc., y no solo en hacer agrupaciones, sino en hacer agrupaciones de agrupaciones, el algoritmo de la numeración se basa en la idea de agrupamiento recursivo, no solo se agrupa de 10 en 10, sino que luego se agrupa de 10 en 10 los grupos de 10, dando lugar a las potencias [I, M].

- 2M7.1-1.1(I)2. Pretende que los alumnos hagan grupos de 10 o agrupamientos compatibles o con cierta coordinación con el sistema de numeración para que el conteo sea mucho más fácil; si hacen grupos de 17, puede funcionar, pero no para leer los números como los leemos [I, M].
- 2M7.1-1.1(I)3. Hace esta indicación porque está trabajando con futuros maestros; si la actividad se realizase con niños, los objetivos tendrían que ser distintos [I, M].

Comentario 8

Está muy claro que con este giro que tiene la actividad –porque al principio era solo cada grupo–, con el giro de compartir los palillos y sobre todo compartir los agrupamientos, prevalecen los agrupamientos que sean iguales. Será más cómodo hacer el conteo otra vez juntando los grupos con otro grupo que haya hecho grupos iguales o también compatibles, múltiplos..., que también te puede resultar útil. Pero si unos han hecho grupos de 15 y otros de 17, cuando los junten no les va a dar información. Entonces, ya le ha dado un giro, antes de empezar les ha dicho que tengan cuidado... ¿Cuál es el objetivo? Yo creo que es que el agrupamiento que hagan sea común o tenga algún tipo de relación. Y si a esto le añades que dice que pensemos en cómo eso tiene transcendencia en cómo escribimos los números, pues creo que, sin decírselo, el objetivo es que hagan grupos de 10 o grupos que sean compatibles con el sistema de numeración.

- 2M8.1-1.1. Dice que los grupos tienen que compartir los palillos, los agrupamientos [E, 2].
 - 2M8.1-1.1(I)1. Su objetivo es que hagan un agrupamiento común, por lo que al juntarse dos grupos prevalecerán los agrupamientos que sean iguales, ya que el conteo es más cómodo con agrupamientos iguales, compatibles, múltiplos... [I, M].

Fragmento 2

Comentario 1

Ella les pregunta si han llegado a un acuerdo entre los grupos, hay una interacción clara. Les dice que le expliquen cómo lo han hecho para poder obtener la cantidad entre los dos grupos. No se ve cómo ha trabajado cada grupo de manera independiente; aquí hay una dinámica de la gestión de la clase..., porque el trabajo es en grupo, pero dicho trabajo depende de lo que hagan los otros grupos, entonces no sé si ha habido algún tipo de comunicación entre los grupos o simplemente se ha pensado que quizá como 10 es la mejor solución todos los iban a hacer así sin tener que ponerse de acuerdo; sin embargo, estos sí que dicen que han llegado a un consenso, a un acuerdo. Entonces, no sé si ha habido un trabajo previo, se han juntado y han vuelto a trabajar, que es como por ejemplo se organizan las situaciones de formulación en Teoría de Situaciones, es decir, se deja que trabajen y luego se interactúa, se produce la comunicación, y si se produce un fracaso, se vuelve otra vez hacia atrás. Aquí no sé yo cómo lo han hecho, pero sí que dicen que ha habido un consenso.

- 2M1.1-1.2. Pregunta a los grupos de alumnos si han tenido que llegar a un acuerdo [E, 2].
 - 2M1.1-1.2(I)1. Aquí hay una dinámica de la gestión de la clase: el trabajo es en grupo, pero dicho trabajo depende de lo que hayan hecho los otros grupos. En las situaciones de formulación, en Teoría de Situaciones, se deja que los alumnos trabajen y luego se produce la comunicación; si se produce un fracaso, se vuelve a trabajar. Parece que aquí ya han llegado a un consenso [I, M].

Comentario 2

Me hace gracia que dicen: «lo que significaba cada gomita». Ya hay un intento de darle una entidad, es curioso. Es algo que no tenía que decir, porque es lo que decían los alumnos, pero la formadora también les dijo lo de las gomitas, les insistió bastante, y esa idea la han asumido.

Comentario 3

Ya estamos viendo que no están siendo decimales; 20, 15, 4...

- 2M3.1-1.2. Indica que los alumnos han hecho [grupos de] 20, 15, 4, o sea, no decimales [E, M].

Comentario 4

Aquí Nuria les está enfrentando al problema que tienen con haber cogido agrupamientos distintos. Además, han asumido cosas que en la consigna no estaba, que todos los grupos de la misma cantidad iban a ser con gomas del mismo color; que yo sepa, Nuria les dijo: «aquí tenéis gomas de colores, usadlas...». Es verdad que es una manera bastante habitual de marcar los distintos agrupamientos de forma que de un vistazo sepas qué naturaleza o qué orden tiene cada agrupamiento, al igual que en un sistema de numeración: en el nuestro se hace con la posición, en otros con el tipo de letras, etc. Y bueno, ellos lo hacen así. Lo que sí me hace gracia es que ellos están intentando defender el 15 y el 20, y Nuria es la que les dice: «vale, yo veo unos amarillos que son de 15 y otros que son de 20»; les está devolviendo el problema haciendo ver que así es un lío.

- 2M4.1-1.2. Hace ver a los alumnos que haber hecho agrupamientos distintos, de 15 y de 20, con el mismo color, con el amarillo, puede ser un lío, indicando que en los grupos hechos podría haber 160 [palillos] como máximo, pero que podrían ser menos, y haciendo ver que el objetivo es que visualmente quede claro cuántos palillos hay [E, 3].
 - 2M4.1-1.2(I)1. Aunque no es algo que estuviera presente en la consigna, ella pretende que no usen gomas del mismo color para agrupamientos distintos, ya que es la manera más habitual de marcar los distintos agrupamientos para saber de un vistazo el orden de cada uno, así como en nuestro sistema de numeración empleamos la posición, en otros emplean distintos tipos de letras, etc. [I, M].
 - 2M4.1-1.2(I)2. Aquí se da una situación en la que los alumnos han resuelto el problema, saber cuántos palillos hay, pero la formadora pretendía que quedara claro visualmente cuántos palillos hay, que es un objetivo más ambiguo y difícil para los alumnos. Esto tiene una transcendencia importante, sobre todo en Teoría de Situaciones, porque la situación tiene que sancionarse a sí misma; entonces, mientras que el objetivo de saber cuántos hay es fácilmente sancionable, se puede evaluar, el objetivo de que quede clara la distribución y me ayude a saber cuántos hay está generando problemas de materialización del objetivo [I, M].

Comentario 5

Nuria les dice que cómo lo sabemos, que el máximo serán 160 y el mínimo serán 15×8 , 120, y el chaval dice que tiene que confiar en ellos, lo cual es una respuesta muy interesante, es el «yo ya me entiendo». Sin embargo, en matemáticas necesitamos que los conocimientos sean totalmente explicitables y que no dependan de la interpretación, en este caso, de los productores del agrupamiento. Entonces, ahí Nuria pone la cara de decir: «bueno, las matemáticas no se basan en la fe, se basan en los hechos». Y aunque parezca que no, es una discusión muy matemática lo que hay detrás; «no, si ya nosotros nos aclaramos...», «sí, pero es que no te tienes que aclarar tú...»; la idea es que sea un conocimiento absolutamente explicitable y que pueda funcionar en una comunidad, que es para lo que hacemos las matemáticas.

- 2M5.1-1.2. Hace ver a un alumno que las matemáticas se basan en hechos [E, M].
 - 2M5.1-1.2(I)1. En matemáticas necesitamos que los conocimientos sean totalmente explicitables y que no dependan de la interpretación, en este caso, de los productores del agrupamiento. Los conocimientos matemáticos han de funcionar en una comunidad, es para lo que hacemos las matemáticas [I, M].

Comentario 6

Claro, aquí se da una cosa y es que ellos han resuelto su problema, que es saber cuántos palillos hay. El segundo objetivo que marca Nuria, el de que quede visualmente claro, para ellos es más difuso y ambiguo, e incluso es un objetivo más difícil de ver si se ha obtenido o no. Aquí Nuria piensa que no se ha obtenido, porque ella dice que no se aclara, pero ellos están muy tranquilos de que ellos saben los que hay y por tanto lo han obtenido. Esto tiene una transcendencia importante, sobre todo en Teoría de Situaciones, porque la situación tiene que sancionarse a sí misma; entonces, mientras que el objetivo de saber cuántos hay es fácilmente sancionable, se puede evaluar, el objetivo de que quede clara la distribución y me ayude a saber cuántos hay está generando problemas de materialización del objetivo. La discusión que se está dando ahí..., ya hay uno que dice: «entonces, ¿qué tenemos que...?, ¿tenemos que...?»; hay una discusión en la que Nuria entiende que no se alcanza el objetivo, pero en la que para algunos sí que se ha alcanzado, y cuando ocurre eso no es fácil seguir [se ríe].

Comentario 7

Ahora ha quedado claro que ellos pueden rehacer otra vez los grupos. Esto pasa muchas veces con la negociación de la consigna, hay veces que cuando la consigna no deja claro..., sobre todo los

objetivos, necesita mucha negociación, y esto es un ejemplo claro de que la ha tenido que negociar cuando la actividad no está terminada, porque esto es una primera fase de acción, pero sí está comenzada. Ahora ya han respirado: «ah, podemos rehacerlos»; vale, los van a rehacer.

- 2M7.1-1.2. Hace ver que pueden rehacer otra vez los grupos hechos [E, 3].
 - 2M7.1-1.2(I)1. Se trata de un ejemplo claro de negociación de la consigna: cuando no se dejan claros los objetivos en la consigna, es necesario negociarla; eso es lo que está ocurriendo ahora, momento en el que la actividad está ya comenzada [I, M].

Comentario 8

Va a saco [se ríe]. Ella lo dijo: «intentad ver cómo tal y cual». Han hecho caso omiso. A ver, esto es una interpretación que hago; el agrupamiento de 10, que es en el que se basa el sistema de numeración, cuando nosotros materializamos las colecciones, cuando son colecciones manipulables, no es tan útil, y me explico: es un agrupamiento relativamente pequeño. El hecho de usar 10, y eso es una reflexión matemática, viene de que tenemos 10 dedos, no viene de otra razón. Matemáticamente puede haber razones para usar un número frente a otro en dos sentidos: por un lado, el tamaño, y por otro, el número de divisores. 10 solo tiene 2 y 5, no es un gran número. 12 nos habría dado un sistema de numeración mucho más cómodo, los tercios y los cuartos serían números con parte fraccionaria finita... Con el 10, solo nos queda 2 y 5; un número tan sencillo como la tercera parte de una unidad nos genera un número que no es finito. Eso por un lado. Pero desde un punto de vista manipulable, es pequeño. De hecho, esto se ve mucho en las unidades de las magnitudes, que también van de 10 en 10, pero el uso social no lo hace de 10 en 10; usamos el metro y usamos el centímetro, el decímetro desaparece. ¿Por qué? Porque aunque por regularidad nos interesa, a la hora de manipular es un grupo demasiado pequeño. Entonces, claro, si usáramos grupos más grandes, el sistema de numeración requeriría un símbolo para cada...; hasta 10, tenemos símbolos distintos. Entonces, cuando el agrupamiento se hace muy pequeño, el sistema se automatiza mejor, la base binaria es la más automática, no habría que saberse tablas, pero, claro, se hacen números muy grandes, cosas demasiado pesadas; si se hace muy grande, los algoritmos de cálculo serían odiosos, porque imagínate que tuviéramos que sabernos el repertorio de las tablas hasta el 20 si usáramos base 20, sería horroroso, tendría una cantidad de resultados que habría que memorizar... Entonces, bueno, el 10, que además coincide con los dedos, pues tal... Pero es verdad que, cuando se trata de colecciones manipulables, el 10 es muy pequeño, da la sensación de que no merece la pena; de hecho, no lo han hecho. Y claro, Nuria sí que quiere...: «¿y qué pasa con el 8 y el 5...». Yo creo que aquí hay una

confrontación con el interés matemático de respetar el 10, porque así escribo los números, y por otro lado la comodidad o economía en la manipulación que hace que de 10 en 10 los grupos son demasiado pequeños. Pero es que lo hacemos siempre, es decir, hablamos de metros y kilómetros..., con los gramos no usamos los cambios decimales, aunque los tenemos disponibles, porque son muy pequeños... Y, claro, aquí estamos intentando hacer converger los dos intereses y, claro, surge eso. A Nuria lo único que le queda es decir: «¿y tiene relación el 8 y el 5?», y dicen: «pues no». Y ella se lo dijo, creo que era el tercer objetivo, pero ellos se han quedado con el primero, que era saber cuántos hay, han asumido el segundo, que es hacer los grupos, pero ya el tercero..., han pensado que es un lujo que no tienen que permitirse [se ríe]. Esto es una interpretación.

- 2M8.1-1.2. Pregunta por la relación del 8 y el 5 con los grupos hechos, lo cual tiene que ver con uno de los objetivos que planteó, indicando que tienen que reflexionar sobre ello [E, 3].
 - 2M8.1-1.2(I)1. El agrupamiento de 10, que es en el que se basa el sistema de numeración, no es tan útil cuando materializamos colecciones manipulables, ya que es un agrupamiento relativamente pequeño. El hecho de usar 10 viene de que tenemos 10 dedos, no viene de otra razón. Matemáticamente puede haber razones para usar un número frente a otro en dos sentidos: por un lado, el número de divisores; por otro, el tamaño. En cuanto a los divisores, 10 solo tiene 2 y 5, no es un gran número. El 12 nos habría dado un sistema de numeración mucho más cómodo, los tercios y los cuartos serían números con parte fraccionaria finita. Con el 10, solo nos queda 2 y 5; un número tan sencillo como la tercera parte de una unidad nos genera un número que no es finito. Por otro lado, desde un punto de vista manipulable, el 10 es pequeño. De hecho, esto se ve mucho en las unidades de las magnitudes, que también van de 10 en 10, pero en el uso social no se hace de 10 en 10: usamos el metro y el centímetro, pero el decímetro desaparece porque, aunque por regularidad nos interesa, a la hora de manipular es un grupo demasiado pequeño; lo mismo ocurre con los metros y los gramos, no usamos los cambios decimales. Entonces, si usáramos grupos más grandes, el sistema de numeración requeriría de más símbolos; con el 10, tenemos símbolos distintos hasta el 10. Cuando el agrupamiento se hace muy pequeño, el

sistema se automatiza mejor, la base binaria es la más automática, no habría que saberse tablas, pero, claro, se hacen números muy grandes y los algoritmos de cálculo serían odiosos; imagínate que tuviéramos que sabernos el repertorio de las tablas hasta el 20 si usáramos base 20, sería horrible, tendría una gran cantidad de resultados que habría que memorizar. Entonces, usamos el 10, que además coincide con los dedos. Pero es verdad que, cuando se trata de colecciones manipulables, el 10 es muy pequeño, da la sensación de que no merece la pena usarlo. Yo creo que aquí hay una confrontación con el interés matemático de respetar el 10, porque así escribo los números, y por otro lado la comodidad o economía en la manipulación que hace que de 10 en 10 los grupos sean grupos demasiado pequeños. Se está intentando hacer converger los dos intereses y surge esta situación [I, M].

- o 2M8.1-1.2(I)2. Aunque los alumnos son adultos, el objetivo de «reflexionar» es bastante difuso, es difícil saber si se ha alcanzado o no, pero imagino que ella dirigirá la reflexión o dará unas pautas para hacerla [I, M].

Comentario 9

Les quiere poner de manifiesto que ellos mismos lleguen a la idea de si les ha ayudado o no. Y creo que les ha preguntado si los han escrito de alguna manera especial o algo así, es decir, ella ya va buscando la escritura del sistema de numeración, que son tantas unidades de cada orden, que es como se escriben los números. Y ahora hay otro problema, ahora hay que reflexionar; define reflexionar... Volvemos otra vez a los objetivos... Claro, estos son adultos y tú se lo puedes plantear, pero es verdad que son objetivos bastante difusos, es decir, que es muy difícil saber si se ha alcanzado o no. Lo que pasa que la reflexión imagino que la dirigirá ella, dará pautas para hacerla.

- 2M9.1-1.2. Pregunta si ha ayudado la escritura que han hecho [E, 2].
 - o 2M9.1-1.2(I)1. Porque va buscando la escritura del sistema de numeración, empleando las unidades correspondientes de cada orden, que es como se escriben los números [I, M].

Fragmento 3

Comentario 1

Los alumnos dirán: «¿y para qué nos lo dice eso? Pues como se escribe el 87. ¿Se escribe de otra manera?». Claro, ellos están contando palillos y Nuria está intentando que generen o reflexionen sobre el sistema de numeración y entonces dice: «El 87...». Esa explicación es su justificación, ella avisa, pero muchos dirán: «no esperábamos que lo escribieras de otra manera» [se ríe].

- 2M1.1-1.3. Escribe el número 87 [E, 2].
- 2M1.2-1.3. Explica que escribe el número en nuestro sistema de numeración [E, 3].
 - 2M1.2-1.3(I)1. Pretende que los alumnos reflexionen sobre el sistema de numeración a través de los palillos [I, M].

Comentario 2

Es gracioso que digan «3 rosas» y demás. Ella quiere confrontar que no pueden usar el color, dentro del grupo lo pueden usar, pero en cuanto se trata de una escritura general, común, pues eso es común a cualquier unidad, a cualquier grupo... Obviamente, estas cosas son arbitrarias pero tienen que estar convenidas, si no hay convenio, ocurren estas cosas. Pero me hace gracia que cuando dice: «3 x 20», ellos dicen: «pero pon rosa», y ella ha puesto rosa arriba [se ríe]. Y luego sí que es curioso el resultado que hay aquí, que ella no ha hecho ningún comentario, en el cual no han hecho todos los grupos que podían, de 20 podrían haber hecho 4 y han hecho solo 3 y luego los otros 27... A mí me da la sensación, y es una interpretación que hago, que les preocupa que queden unidades sueltas y entonces han decidido hacer grupos de 3, y 27 es divisible entre 3 y les sale 9 grupos completos de 3. Claro, eso, de cara a construir la numeración, es una muy mala estrategia, pero bueno, es lo que ha surgido. Es una interpretación que hago, no han cogido 4 grupos de 20, o sea, no han sido exhaustivos ahí, pero yo creo que les ha interesado porque luego con los 27 que les han quedado han hecho grupos, no les ha quedado ninguno suelto.

- 2M2.1-1.3. Hace ver que no pueden usar el color, ya que tiene que ser común a cualquier grupo [E, 3].
 - 2M2.1-1.3(I)1. Dentro del grupo se puede usar el color, pero en cuanto se trata de una escritura general, común, pues el color tiene que ser común a cualquier unidad, a cualquier grupo. Obviamente, estas cosas son arbitrarias, pero tienen que estar convenidas [I, M].
- 2M2.2-1.3. Pone [una raya] rosa sobre el 3 x 20 [E, M].

Comentario 3

Por ejemplo, ha habido varios grupos de 20. Es bastante sensato porque es lo que te decía antes, el 10 es pequeño, el 20 ya tiene un tamaño interesante para hacer un grupo y tiene mucha relación con el 10, es fácilmente traducible; no han cogido grupos de 21, que desde el punto de vista de cantidad les habría dado el mismo resultado, pero, claro, a la hora de traducir habría sido mucho más conflictivo, ¿no? Traducir es simplemente hacer esa multiplicación.

Comentario 4

Ese problema que pone Nuria de manifiesto yo creo que para ellos es un lujo, es decir, bueno..., «yo he resuelto el problema...». Efectivamente, la discusión que está planteando Nuria es una discusión que para ella tiene mucho sentido, pero yo creo que para ellos el objetivo sobre generar un tipo de escritura particular ha quedado muy atrás. Entonces, bueno, ella dice: «4, 1, tal...».

- 2M4.1-1.3. Pone de manifiesto un problema sobre la escritura [del número] [E, 1].

Comentario 5

Ahora está dando una explicación sobre registros de representación y está avisando de que ella no está escribiendo exactamente lo que le están diciendo, sino que lo está traduciendo. Ahí Duval está detrás, es decir, está escribiendo simbólico-numérico, pero si tuviera que expresarlo tal y como ellos lo han hecho, tendría que decir «3 rosas» y tal o, como dice ella, todavía más elemental, con una foto de los agrupamientos. Es una reflexión sobre distintos registros de representación.

- 2M5.1-1.3. Explica que está traduciendo lo que los alumnos están diciendo, escribiéndolo en el registro de representación simbólico-numérico y haciendo ver que podría emplear otros registros: emplear una foto, por ejemplo [E, 2].
 - 2M5.1-1.3(I)1. Se trata de una reflexión sobre la traducción que está haciendo basada en los registros de representación de Duval; si tuviera que expresar lo que están diciendo los alumnos tal y como lo han hecho, tendría que decir «3 rosas», etc., en vez de escribirlo simbólico-numéricamente [I, M].

Comentario 6

Ves cómo les cuesta dejar sueltos [se ríe]. Como la consigna era hacer grupos... Esto tiene un calado fuerte, ¿eh?, porque para muchos incluso en la división, en la división euclídea, el resto es como si fuera un residuo, y no, es un resultado más, ¿no? Entonces, bueno, aquí también les pasa un poco. Nuria les enfrenta a eso: «¿por qué os habéis adaptado a 10 y no os habéis adaptado a 9?», y dicen: «porque queda uno suelto». De todas maneras, en el otro quedan 7 sueltos...

- 2M6.1-1.3. Pregunta a los alumnos por qué se han adaptado a los grupos de 10 y no a los de 9 [E, 3].

Comentario 7

Es una justificación, otra cosa es que no nos guste [se ríe], pero es un argumento. Efectivamente, si se trata de hacer grupos, pues a hacer grupos. Y, claro, al igual que no les gustan los conjuntos unitarios, pues los grupos de 1... Fíjate cómo a veces la manipulación da lugar a un juego difícil, ¿no?

Comentario 8

Esto es un ejercicio de mayéutica total, ¿eh?, es decir, está intentando que hablen y cuando llegan a la contradicción de qué pasa con 1 y tal... Claro, ella no quiere dar todas las claves, porque, efectivamente, «¿por qué sumamos mejor de 10 en 10?», pues porque la base es decimal, esa es la explicación matemática clara. Entonces, ella está intentando...: «10, 20, 30..., claro, eso lo manejamos mejor...». De alguna manera, está haciéndoles ver esa ventaja, cosa que ellos han constatado, ya han dicho que de 10 en 10 es más fácil. Entonces, ella les quiere hacer reflexionar mediante una interacción, pregunta-respuesta, hasta que lleguen a contradicciones.

- 2M8.1-1.3. Pregunta por qué se suma mejor de 10 en 10, haciendo ver que nos manejamos mejor con 10, 20, 30..., que tiene que ver con la base decimal [E, 3].
 - 2M8.1-1.3(I)1. Pretende hacer ver a los alumnos, a través de un ejercicio de mayéutica, de un proceso de pregunta-respuesta, la ventaja de emplear la base decimal [I, M].

Comentario 9

Bueno, al final sí que hay 7 sueltos, pero son 7 sueltos, imagino que le habrán puesto una gomita a los 7. Al final, la idea de agrupamiento ha prevalecido sobre la idea de la sistematización que buscaba Nuria. Y, bueno, también la idea es cómo a la hora de coordinar dos grupos, y en este caso sumar — porque aquí aparece la suma de dos cantidades —, la suma obviamente depende del sistema de numeración, entonces cuando se utilizan agrupamientos distintos la suma es una locura... Entonces, ha querido utilizar esa idea.

- 2M9.1(i)-1.3. Evento implícito en el comentario [E, 1].
Transcripción del vídeo: 1, 7, 7 [escribe 177 a la izquierda del 87 y del 90]. ¿Hay aquí 1, 7, 7 por algún lado? [señala al 7 de 7 x 20, al 3 de 3 x 10 y al 7 de 7 x 1]. Este [señala al 7 de 7 x 1] parece que hay aquí, ¿no? Pero lo otro... no me cuadra mucho todavía... Vale, otros dos grupos.

- o 2M9.1(i)-1.3(I)1. Al final, la idea de agrupamiento ha prevalecido sobre la idea de sistematización que buscaba la formadora, lo cual tiene que ver con que los grupos hayan tenido que coordinarse para sumar agrupamientos distintos [I, M].

VÍDEO 2

Comentario 1

Hecho: está reproduciendo la estrategia que ha usado un grupo para pasar de 16 a 2 sin pasar por base 10, y lo que ha hecho es contar, ha ido contando en base 16 y contando en base 2, y cuando cuenta la misma cantidad, pues el resultado es el mismo número escrito en las dos bases, y está analizando un poquito lo que conlleva esa estrategia. Hombre, es una estrategia que obviamente se tendrá que poner rápidamente como ineficaz porque es muy lenta; no hace una traducción, sino que cuenta de una manera y cuenta de otra.

- 2M1.1-2. Plantea que hay que pasar de base 16 a base 2 sin pasar por base 10 [E, 3].
- 2M1.2-2. Está reproduciendo la estrategia de un alumno, que consiste en contar en base 16 y contar en base 2, llegando al resultado escrito en las dos bases cuando se cuenta la misma cantidad [E, 3].
 - 2M1.2-2(I)1. Se trata de una estrategia que no es eficaz porque es muy lenta: no se hace una traducción, sino que se cuenta de una manera y de otra [I, M].

Comentario 2

Bueno, yo identifico aquí que está simplemente preguntando y recordando cómo lo han hecho, debe de ser un ejercicio que ha mandado para casa. Ella ha puesto de manifiesto la poca eficacia de este sistema y hay un debate que ella ha lanzado respecto a un trabajo que tienen hecho, un trabajo sobre cambio de base, un trabajo matemático. Entonces está retomando las estrategias. La interpretación: está claro, es decir, quiere llegar a generar una estrategia compartida por todos para un ejercicio que consiste en pasar una cantidad, no sé exactamente cuál es – hombre, B6 se podría calcular –, de base 16 a base 2, pero con la idea de obtener una estrategia general, no solo para cambiar con esos dos números, ¿no?

- 2M2.1-2. Pone de manifiesto la poca eficacia del sistema, de la estrategia planteada [E, 2].

Comentario 3

Efectivamente, le han dicho otra, es una estrategia que a mí me cuesta pensar que la hayan hecho... Vamos a ver. Hecho: está reproduciendo una estrategia que han dicho y está analizando qué posibilidades tiene esa estrategia. Yo interpreto que me cuesta mucho pensar que esta estrategia se haya hecho. Otra cosa es que hayan trasladado o traducido la estrategia clásica de

base 10 a otra base, que es esa, la de dividir entre la nueva base y ver los grupos que van quedando, bueno, son los restos los que se escriben, que son los elementos que van quedando sueltos, ¿no? Pero, como ella dice, hace falta saber dividir en base 16. Entonces, otra vez está intentando poner de manifiesto la ineficacia de esta estrategia. Se pone como ejemplo ella: «yo podría hacerlo si me empeño...». Desde luego no es una estrategia sencilla.

Comentario 4

Efectivamente, el paso de una base a otra..., pasar por base 10 es... Claro, aquí ha cogido base 16, que es una potencia de 2, con lo cual el cambio de base... Ella está intentando que surjan estrategias que no necesiten utilizar..., es una interpretación que hago, ella está contando que es difícil porque no podemos trasponer directamente la técnica que tenemos de base 10. Y luego les está diciendo algo que yo creo que es muy importante, que es que los algoritmos que tenemos son algoritmos que se basan en el sistema de numeración, si cambia el sistema de numeración, cambian los algoritmos, que seguramente no es una reflexión que muchos alumnos traigan. Entonces lo que Nuria quiere con este ejercicio está muy claro, el ejercicio es pasar de base 16 a 2 un número, y lo que está intentando es que reflexionen sobre la relevancia o el papel central que juega el sistema de numeración en cualquier técnica de cálculo. Y con el hecho de que haya cogido base 16, que es 2^4 , imagino que querrá profundizar en la idea de base al cambiar el agrupamiento... Pero, eso sí, si hubiera cogido una base que no tuviera nada que ver con 2, pues este ejercicio imagino que no sería abordable.

- 2M4.1-2. Analiza una nueva estrategia, consistente en dividir entre la nueva base, en base 16, tal y como se hace al pasar de base 10 a otra base [E, 3].
 - 2M4.1-2(I)1. Se trata de una estrategia que seguramente no hayan podido llevar a cabo los alumnos [I, M].
 - 2M4.1-2(I)2. Pretende que los alumnos reflexionen sobre la relevancia del sistema de numeración en cualquier técnica de cálculo [I, M].
 - 2M4.1-2(I)3. Con el hecho de que haya cogido base 16, que es 2^4 , quiere profundizar en la idea de base al cambiar el agrupamiento, lo cual no sería abordable si hubiera cogido una base que no tuviera nada que ver con 2 [I, M].
- 2M4.2-2. Hace ver que en este caso hace falta saber dividir en base 16, lo cual no es sencillo, y que los algoritmos se basan en el sistema de numeración, por lo que cambian si cambia el sistema de numeración [E, 2].

Comentario 5

Bueno, hay un hecho aquí muy claro que es la gestión que hace de la pizarra. Es una gestión que, aunque puede ser de didáctica general, está muy marcada para poder ir elaborando un proceso de un cambio de base, de base 16 a base 2, lo está haciendo por pasos horizontales... ¿La interpretación cuál es? Bueno, pues esto son escrituras polinómicas, que pueden ser relativamente farragosas para los alumnos, y de esta manera entiendo que el proceso gana en claridad y sobre todo en capacidad visual, es decir, se va a ver mejor cómo se va haciendo el proceso de transformación. Me llama la atención el $(2^4)^0$, me hace gracia [se ríe], pero bueno, efectivamente, cuando las escrituras polinómicas en las que se basan las escrituras de los sistemas de numeración..., pues efectivamente son las potencias de la base y la última es elevado a 0; pero tengo que decir que me ha hecho gracia. Pero bueno, que está ahí, eso es 1, ahora cuando transforme el 6 a base 2 se encontrará con eso.

- 2M5.1-2. Gestiona lo que plantea en la pizarra, presentando los pasos de forma horizontal [E, D].
 - 2M5.1-2(I)1. Pretende que el proceso gane en claridad visual para que los alumnos, que pueden tener dificultades con las escrituras polinómicas, vean mejor cómo se va haciendo el proceso de transformación [I, M].
- 2M5.2-2. Plantea el proceso de transformación de base 16 a base 2 con escrituras polinómicas [E, 2].
- 2M5.3-2. Cambia de base 16 a base 2, elevando a 0 el 2^4 y dejando la escritura $(2^4)^0$ [E, 3].
 - 2M5.3-2(I)1. En las escrituras polinómicas en las que se basan las escrituras de los sistemas de numeración aparecen las potencias de la base y la última está elevada a 0 [I, M].

Comentario 6

Es curioso que ella escribe el polinomio incluso con las unidades que no existen. Es verdad que la escritura de 11 en base 2 será 1, 0, 1, 1, y ese 0 es 0×2^2 , pero en la escritura polinómica no es obligatorio hacerlo. ¿Por qué lo hace ella? Pues para ver de dónde viene y poner de manifiesto que la escritura son los coeficientes de las potencias y ella ahora va a necesitar todos los coeficientes de las potencias para hacer la escritura. No es imprescindible, ya que un polinomio no tiene por qué tener monomios de todas las potencias, pero ella lo pone con el 0 porque, efectivamente, traducir eso a una escritura de un sistema de numeración posicional... Porque, cuidado, la escritura polinómica no es la escritura del sistema de numeración; una vez que yo tengo la descomposición

polinómica, yo puedo escribirlo con distintos sistemas de numeración. El nuestro es posicional y el posicional exige el 0, por eso aparece el 0; si no fuera posicional, el 0 no existiría. Entonces, interpreto que pone ese 0 porque luego va a hacer eso, por eso salen escrituras tan curiosas.

- 2M6.1-2. Escribe el polinomio del 11 en base 2 incluyendo las unidades que no aparecen: 0×2^2 [E, 2].
 - 2M6.1-2(I)1. Pone el 0×2^2 porque 11 en base 2 es 1, 0, 1, 1. Aunque en la escritura polinómica no es obligatorio escribirlo, ya que un polinomio no tiene por qué tener monomios de todas las potencias, lo pone para hacer ver que la escritura se corresponde con todos los coeficientes de las potencias, ya que emplea la escritura de un sistema de numeración posicional. La escritura polinómica no es la escritura del sistema de numeración; una vez que yo tengo la descomposición polinómica, yo puedo escribirlo con distintos sistemas de numeración. El nuestro es posicional y el posicional exige el 0, por eso aparece el 0 [I, M].

Comentario 7

Lo de la manera más chula de poner 6... [se ríe]. Me hace gracia cómo insiste en escribir los números en una expresión polinómica en función de la base. Interpreto que lo que pone de manifiesto es que esto son simplemente escrituras, que igual de válido es el 6 que el 1, 1, 0 que sería en base 2, que en definitiva es el mismo número; de hecho, dice que mola más el 1, 1, 0 que el 6 [se ríe]. Es interesante esa intención para poner de manifiesto que simplemente el número va por un lado y la escritura va por otro.

- 2M7.1-2. Escribe el 6 como una expresión polinómica en función de la base 2, que sería 1, 1, 0 [E, 3].
 - 2M7.1-2(I)1. Pone de manifiesto que se pueden plantear dos escrituras del mismo número, que es igual de válido el 6 que el 1, 1, 0 en base 2, con la intención de hacer ver que el número va por un lado y la escritura por otro [I, M].

Comentario 8

Es que no sé por qué el 1, el primero, del 2^7 y el 0×2^0 ya los tenían, no sé si es que ya los tenían o no los tenían. Es que cuando he visto el 1×2^7 he pensado: «ya saben que la máxima potencia va a ser 2^7 ». Eso lo desconozco, por eso no hago ninguna interpretación; debe de ser que en el ejercicio

estaba, empezaría por 1 y acabaría en 0 y se daría el número de cifras, porque si no, eso no sé de dónde sale.

- 2M8.1(i)-2. Evento implícito en el comentario [E, 1].

Transcripción del vídeo: Mira qué contenta estoy, porque $2^0 \times 2^0$ es 2^0 y el coeficiente es 0, que es este.

- 2M8.1(i)-2(I)1. Debe de ser que el ejercicio decía que el número empezaba con el 1 del 2^7 y terminaba con el 0 del 2^0 , por lo que pueden saber que la máxima potencia va a ser 2^7 [I, M].

Comentario 9

Me hace gracia... Bueno. Hecho: recuerda que 2^4 es $2 \times 2 \times 2 \times 2$ y tal... Y otro hecho, lo voy a juntar: identifica cada orden de unidad con una varilla del ábaco. Interpretación: está en todo momento haciendo que el alumno tenga claro..., que tenga los conocimientos o recursos necesarios para situar todo eso que está haciendo, porque eso ahora mismo, desde un punto de vista de producto de potencias, se podría hacer perfectamente: propiedad distributiva, tal, cual... Pero no, por un lado recuerda mucho lo de 2^4 , es decir, lo que es una potencia y, luego, me ha hecho gracia lo de la varilla del ábaco, es decir, quiere que los alumnos tengan claro que esto va a ser las distintas unidades que tengan de un número; lo digo porque no suelen estar acostumbrados a trabajar con escrituras polinómicas en función de un número. La idea del teorema fundamental de la numeración es que todo número se puede escribir como un polinomio y sus coeficientes son únicos, lo cual no es algo que ellos manejen mucho. Por eso yo creo que hace siempre ese recuerdo constante de lo que está escribiendo.

Comentario 10

Ella va haciendo, va aplicando la distributiva y demás, está intentando escribir eso. Me llama la atención el $2^4 \times 2^0$, aquí tengo 4 doses y aquí no tengo ninguno, luego tengo 4, es decir, está multiplicando..., al final es cuántos doses hay, ¿no? Pero..., oralmente suena muy raro, porque si no tengo ninguno... Es decir, claro, esto es un tema de que el 0 está en el exponente, no está en la base. Está claro lo que está diciendo, es intachable, pero oralmente suena un poco raro, y es todo por haber arrastrado el 2^0 , que yo entiendo que lo quiera poner, pero claro...

- 2M10.1-2. Va haciendo la escritura polinómica, aplicando la propiedad distributiva [E, 2].

- 2M10.1-2(I)1. Se observa la idea del teorema fundamental de la numeración, que es que todo número se puede escribir como un polinomio y sus coeficientes son únicos [I, M].
- 2M10.2-2. Recuerda, a partir de la escritura polinómica que tiene, lo que es una potencia, haciendo ver que 2^4 es $2 \times 2 \times 2 \times 2$, y el producto de potencias, haciendo ver que en $2^4 \times 2^0$ hay 4 doses y ninguno, es decir, 4 doses [E, 3].
 - 2M10.2-2(I)1. Porque los alumnos no suelen estar acostumbrados a trabajar con escrituras polinómicas en función de un número [I, M].

Comentario 11

[Se ríe]. Sí, yo puedo escribir 27 como 000000027 siempre. Entiendo por qué lo hace. Me parece que, ya interpreto, el hecho de usar las varillas es para que todos piensen que en cada varilla tiene que haber siempre un coeficiente, una cifra. Con lo cual, si hay una varilla que no está, hay que guardarle el hueco, ¿no?, es la esencia de los sistemas de numeración posicionales, y está ahí puesto. Mi interpretación es que es mejor la primera explicación que ha dado que esta segunda [se ríe]. Y también interpreto una cosa: imagino que las cantidades están elegidas para que ocurra esto, es decir, para que haya una potencia que no esté explícita y haya que tomar una decisión sobre qué hacer con ella; un hecho didáctico interesante es que las cantidades plantean esta aparente dificultad. No se solapan en ningún caso, se podrían haber solapado, podría haber habido potencias de 2 en las que interviniesen cantidades de los distintos órdenes de la base 16, pero aquí no ha ocurrido. Pero sí que es interesante que se ha quedado con un hueco en medio. Yo interpreto que está hecho aposta, porque la discusión que surge es una discusión rica e interesante. Y en esa discusión, prefiero la explicación de las varillas que la de poner el 0 delante de la expresión, aunque también es una posibilidad.

- 2M11.1-2. Identifica en dos ocasiones cada orden de unidad con una varilla del ábaco [E, 3].
 - 2M11.1-2(I)1. Para que todos piensen que en cada varilla tiene que haber siempre un coeficiente, una cifra; es la esencia de los sistemas de numeración posicionales [I, M].
- 2M11.2-2. Incide en el hecho de que una potencia no está explícita [E, 2].
 - 2M11.2-2(I)1. Imagino que las cantidades están elegidas para que haya una potencia que no esté explícita y haya que tomar una decisión sobre qué hacer con ella. Además, no se solapan en ningún caso, se podrían haber solapado, podría haber habido potencias de 2 en las que

interviniesen cantidades de los distintos órdenes de la base 16, pero aquí no ha ocurrido. Que las cantidades planteen esta aparente dificultad es un hecho didáctico que hace que surja una discusión rica e interesante [I, M].

- 2M11.3(i)-2. *Evento implícito en el comentario* [E, 1].

Transcripción del vídeo: Yo he escrito el 6 como $1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0$, pero también puedo escribir el 6... $0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0$.

- 2M11.3(i)-2(I)1. Y también se puede escribir 27 como 000000027; se entiende por qué lo hace [I, M].

Comentario 12

Esto es una reflexión ya..., no sé si metamatemática, del proceso. Ella contrapone dos procedimientos, los dos válidos en cuanto al resultado, pero que como siempre el primero se basa en una receta, que anima a aprenderla de memoria y de manera irreflexiva, y ella aquí insiste en que hay que entender el proceso, de dónde viene. Efectivamente, el resultado tiene que ser el mismo si los procedimientos son correctos, pero en lo que insiste, y es una reflexión metamatemática, es en que el conocimiento que tienen que tener los alumnos de las matemáticas es un conocimiento distinto al simple uso, o a una concepción meramente utilitarista; es decir, cualquier docente, cuando se acerca a las matemáticas, siempre se tiene que preocupar de cómo se aprende eso, ¿no? Yo creo que aquí Nuria intenta provocar esa reflexión y parte de un contexto que puede ser cercano, como es el de David Calle, que debe de ser un youtuber que hace muchos ejercicios para que los niños aprueben, dejando bien claro que no es su objetivo. Es una reflexión que es matemática pero un poco metamatemática, es decir, aquí estamos justificando por qué pasa eso, ¿no?, que es lo que realmente a un maestro más le interesa.

- 2M12.1-2. Plantea un procedimiento que podría proponer un *youtuber* como David Calle que se basaría en aplicar una receta [E, 2].
 - 2M12.1-2(I)1. Se trata de un proceso válido en cuanto al resultado, pero que se aprende de memoria y se aplica de manera irreflexiva [I, M].
 - 2M12.1-2(I)2. Hace alusión a un *youtuber* para partir de un contexto que puede ser cercano para el alumno [I, D].
- 2M12.2-2. Indica que los alumnos, como futuros maestros de matemáticas, tienen que entender el proceso [E, 3].
 - 2M12.2-2(I)1. Se trata de una reflexión metamatemática que se basa en que el conocimiento que tienen que tener los maestros sobre las matemáticas

debe ser distinto al simple uso o a una concepción meramente utilitarista, por lo que deben preocuparse de cómo se aprende [I, M].

Comentario 13

Para terminar, les hace ver que han de huir de esas recetas y que la base 16 funciona porque es 2^4 . Con base 15, ¿se podría hacer?; sí. Pero, obviamente, no habría una receta sencilla para juntar y tal.

- 2M13.1-2. Plantea el ejercicio con la base 15, haciendo ver que no habría una receta sencilla para ese caso [E, 3].
- 2M13.2-2. Hace explícito que la base 16 funciona porque es 2^4 [E, 2].

VÍDEO 3

Fragmento 1

Comentario 1

Bueno, está dando un enunciado matemático... Y detecto un fenómeno que es que habla de hacer la operación y de representarla. Al principio dice «hacer» e inmediatamente ha cambiado a «representarla». Interpreto que lo que a ella le interesa es ver cómo los algoritmos cambian en función del material que se esté utilizando. Pero detecto que ha cambiado, no es lo mismo «hacer» que «representar».

Comentario 2

Bueno, yo creo que es muy ambiciosa. Vamos a ver. Fenómeno: está dando un enunciado, que es complejo porque no es tanto resolver una suma o una resta sino resolverlo de una manera determinada. Usa el verbo «representar» en vez de «realizar»... Yo cuando hago una suma en simbólico-numérico, estoy haciendo la suma, no la estoy representando. Es verdad que la hago en un sistema de representación... Vamos a ver, ella quiere poner de manifiesto los distintos registros de representación, interpreto que lo que quiere hacer es eso, además está muy claro. El manipulativo y el simbólico los pone como dos extremos, y dentro del manipulativo da tres posibilidades con distintos materiales manipulativos, y ahora ha introducido también, que me ha llamado la atención, el tabular entre medias sin dar ningún tipo de indicación. Yo sé lo que quiere, pero interpreto que los alumnos van a intentar hacer algo porque lo quiere la profesora, no sé si me explico... El simbólico-numérico lo saben hacer, para el manipulativo tienen el material y para el tabular les ha dicho: «como vosotros queráis». Ese «como vosotros queráis» seguro que tendrá trampa [se ríe]; un alumno entiende que eso no es «como yo quiera», sino que tiene que responder a algo. Entonces, el evento es que está presentando un enunciado matemático sobre unas sumas y demás, e interpreto que el objetivo que quiere es estudiar cómo se puede representar. Además, ha marcado otra tarea, la ha dejado caer, que es que luego de dos en dos vean cómo se traduce. Yo interpreto que es una consigna que no está clara, es decir, «cómo se traduce» no sé si tiene una respuesta fácil, no sé si tiene una respuesta que digas: «esta es correcta, esta no es correcta». Entonces, creo que luego al final el ejercicio va a versar sobre muchos comentarios y análisis que tendrán que hacer sobre las respuestas que hagan más que sobre las mismas respuestas.

- 2M2.1-3.1. Plantea un enunciado matemático que consiste en representar unas operaciones, unas sumas y unas restas, en el registro de representación

manipulativo, empleando tres materiales manipulativos distintos y viendo cómo se traduce la representación cada dos materiales [E, 3].

- o 2M2.1-3.1(I)1. Decir que hay que ver «cómo se traduce» no es una consigna clara, ya que no sé si se puede decir que haya respuestas correctas o incorrectas [I, M].
- 2M2.2-3.1. Pide que representen las operaciones en el registro de representación simbólico-numérico [E, 3].
- 2M2.3-3.1. Pide que representen las operaciones en el registro de representación tabular, que sería como un elemento intermediario entre el registro manipulativo y el simbólico, de la forma que los alumnos quieran, indicando que puede tener características simbólico-numéricas o características gráficas [E, 3].
 - o 2M2.3-3.1(I)1. Decir que los alumnos lo hagan como quieran tiene «trampa»; los alumnos entenderán que no lo tienen que hacer como ellos quieran, sino que la forma tabular tiene que responder a algo, pero no creo que tengan claro qué es lo que tienen que hacer tal y como se plantea la consigna [I, M].
 - o 2M2.3-3.1(I)2. En muchos manuales se plantea que las tablas pueden tener características simbólico-numéricas o gráficas [I, M].
- 2M2.4-3.1. Indica que prefiere la tabla con características gráficas [E, M].

Comentario 3

Ya ha explicado qué quiere de tabla, pero lo ha explicado y bajo mi punto de vista a mí me lo ha complicado, quiero decir, yo sé lo que quiere, sé que quiere usar la tabla como ese elemento intermediario entre una esa manipulativa y el simbólico-numérico. Y dentro de la tabla, pues puede ser una tabla ya prácticamente simbólico-numérica o puede ser una tabla gráfica como hay en muchos manuales. Lo que yo interpreto es que no sé yo si con la consigna los alumnos tienen claro qué es lo que tienen que hacer. Entiendo cuál es el objetivo, pero no sé si esto puede salir de manera natural sin dar indicaciones, porque ya lo ha dicho ella: «esto no lo he dicho nunca».

Comentario 4

Detecto otro evento y es que ahora ya no usa ni «hacer» ni «representar», ahora dice «construir». ¿Cómo interpreto yo esto? Ella quiere poner el foco, el objetivo, en el proceso, no en el resultado. Entonces, en ese proceso si tú dices «hacer», estás poniendo énfasis en el resultado, por eso usa

«representar» y ahora ha aparecido otro verbo que es «construir». Ya tenemos tres verbos para eso.

- 2M4.1-3.1. Usa primero el verbo «hacer», cuando dice que hay que hacer las operaciones, pero luego emplea el término «representar» y ahora la palabra «construir» [E, M].
 - 2M4.1-3.1(I)1. Interpreto que a la formadora le interesa ver cómo cambian los algoritmos en función del material que se esté utilizando, poniendo el foco en el proceso; «hacer» pone énfasis en el resultado, pero «representar» y «construir» lo ponen más en el proceso [I, M].
- 2M4.2-3.1. Indica que hay que poner el foco en el proceso de las operaciones, no en el resultado [E, 3].

Fragmento 2

Comentario 1

Bueno, estamos asistiendo a un proceso habitual de discusión entre un grupo de alumnos o un alumno que tiene dificultades en una tarea y la profesora, que quiere provocar discusión para que los alumnos sean capaces de resolverlo sin que ella les dé el resultado, sin que ella les dé el procedimiento. Interpreto que los números están elegidos para que pase eso, es decir, está el 704 y al restar 5 obviamente no tiene unidades, pero es que no tienen unidades y tampoco tienen unidades inmediatamente superiores; será consciente y será intencionado para provocar la discusión, que es lo que se está en este momento intentando, sobre los cambios que hay que hacer, los acarreo famosos que luego surgen en los algoritmos clásicos, entre unidades para que materialicen las unidades necesarias para poder restar. Estamos ante un proceso de discusión sobre el procedimiento y ella da indicaciones, es decir, no deja a los alumnos que ellos solos lo hagan. Interpreto que está intentando que los alumnos sepan descomponer las unidades necesarias para poder sacarlas.

- 2M1.1-3.2. Mantiene un diálogo con un grupo de alumnos que tiene dificultades para realizar una resta, ya que tienen que restar 5 unidades a 704 y no hay unidades suficientes ni unidades inmediatamente superiores, dándoles indicaciones, pero sin decirles ella el procedimiento a realizar [E, 2].
 - 2M1.1-3.2(I)1. Los números deben de estar elegidos para provocar una discusión sobre los cambios que hay que hacer entre unidades, los acarreo que surgen en los algoritmos clásicos, para materializar las unidades necesarias mediante la descomposición del número para poder restar [I, M].

Comentario 2

Bueno, Nuria está reinterpretando, leyendo en términos matemáticos lo que los alumnos han hecho, les ha dicho que están descomponiendo, desagrupando, para que luego puedan mediante la manipulación hacer uso de la definición de resta, que en este caso es retirar cosas, ¿no? Les ha dejado, mediante una manera guiada, hacerlo. Interpreto que lo que está haciendo es que primero ellos lo hagan, es verdad que son adultos y por tanto tampoco es necesario que lo hagan de manera tan autónoma, incluso hay una que dice: «¡ah, sí!», o sea, que se da cuenta en ese momento, y esperar al final para dar los nombres: la centena, la decena, se está descomponiendo... Es decir, de alguna manera está dejando que ellos personalmente elaboren el procedimiento y luego al final es

una cuestión de dar nombres a lo que se ha hecho, lo cual es algo clásico en Teoría de Situaciones: se empieza actuando y al final se atribuyen los nombres. Y, efectivamente, es la docente quien tiene que dar los nombres. También es verdad que estos alumnos, por la edad que tienen, son nombres que tendrían que haber manejado sin ninguna duda, pero bueno, es lo que tenemos.

- 2M2.1-3.2. Reinterpreta en términos matemáticos lo que han hecho los alumnos de forma guiada, haciendo ver que han desagrupado las centenas y las decenas [E, 3].
 - 2M2.1-3.2(I)1. Para que los alumnos puedan hacer uso de la definición de la resta mediante la manipulación, que en este caso consistiría en retirar cosas [I, M].
 - 2M2.1-3.2(I)2. Dejar que los alumnos elaboren el procedimiento y finalmente dar los nombres es algo clásico en Teoría de Situaciones: se empieza actuando y al final se atribuyen los nombres por parte del docente [I, M].
 - 2M2.1-3.2(I)3. Estos alumnos, que ya son adultos, deberían manejar sin problema los nombres vistos, centena, decena..., pero aún tienen dificultades con ello [I, M].

Comentario 3

Aquí hay una interacción alumno-profesor muy clara. Yo interpreto que lo que a Nuria le interesa es que los alumnos elaboren la relación entre estos procesos manipulativos y el proceso simbólico, que tienen automatizado y, por tanto, como con todos los procesos automatizados, casi nunca se es muy reflexivo. Entonces, la alumna se ha referido a cómo lo hacen escrito y Nuria ha «cogido el guante» enseguida y ha dicho: «explica cómo hacemos eso por escrito». El objetivo que yo creo que tiene es que los alumnos hagan esa comparación que decía en la consigna que tenían que hacer y, como aquí le ha surgido, dentro de la interacción lo ha aprovechado muy bien. ¿Qué habría pasado si nadie hubiera dicho eso? Pues no lo sé [se ríe].

- 2M3.1-3.2. Interacciona con una alumna, pidiendo que le explique cómo lo hace por escrito [E, 1].
 - 2M3.1-3.2(I)1. Pretende que los alumnos elaboren la relación entre los procesos manipulativos y el proceso simbólico, que es el que tienen automatizado y que aplican de un modo poco reflexivo [I, M].

Fragmento 3

Comentario 1

Es que, claro, estos eventos... El evento: se va a poner a hacer una suma, el ejercicio es hacer la suma e imagino que la va a hacer con distintos... No sé si lo va a hacer solo simbólico o lo que sea... Pero vamos, como evento es ese. ¿Para qué? Pues imagino que para obtener esas correspondencias entre los distintos procedimientos. Todo esto está detrás de un objetivo que es que los niños, bueno, nuestros alumnos, no los niños, entiendan por qué sumamos como sumamos, o por qué restamos como restamos, y que a la vez cojan técnicas para provocar que los niños de primaria también conozcan el porqué de todos estos algoritmos.

- 2M1.1-3.3. Plantea una suma de forma simbólica [E, 3].
 - 2M1.1-3.3(I)1. Imagino que va a realizar la suma con distintos procedimientos para ver las correspondencias entre ellos con el objetivo de que los alumnos entiendan por qué sumamos como sumamos y que adquieran técnicas para provocar que los niños de primaria también conozcan el porqué de los distintos algoritmos [I, M].

Comentario 2

Evento: va a resolverlo, hace una representación que les dice cómo lo tienen que hacer, y les está haciendo preguntas sobre cuántas varillas, con qué condiciones tiene que construir el sorobán. Yo interpreto que hubiese sido interesante... Bueno, no, porque eso son cosas que yo habría hecho... Que hubiera puesto una cuarta [varilla] aunque no la hubiera necesitado para escribirlos, porque habría generado reflexiones quizá más... Bueno, estos números no tienen llevadas. Lo que sí tienen..., el sorobán tiene 5 y 1, tiene un agrupamiento auxiliar, entonces es un número solo pensado para trabajar el cambio entre los agrupamientos auxiliares de cada unidad, pero no hay acarreo entre unidades.

- 2M2.1-3.3. Empieza a resolver la suma haciendo la representación en el ábaco japonés, en el sorobán [E, 2].
 - 2M2.1-3.3(I)1. Aunque la suma de estos números no tiene llevadas, en el sorobán sí tiene que hacer un agrupamiento auxiliar, así que se ha pensado en unos números para trabajar el cambio entre los agrupamientos auxiliares de cada unidad, pero no hay acarreo entre unidades [I, M].
- 2M2.2-3.3. Pregunta cuántas varillas tiene que poner [E, M].

Comentario 3

El evento: está haciendo la suma con la representación en el ábaco japonés, en el sorobán, y luego lo ha hecho con el registro simbólico-numérico, ayudándose de los alumnos. Y lo que interpreto es que quiere que vean el paralelismo que existe entre un proceso y otro. Imagino que lo ha hecho sin llevadas para que ese paralelismo sea como más evidente. Ella hace referencia a uno de los problemas clásicos de la suma, que es juntar; añadir, como ella dice. Es verdad que la suma no es solo eso, pero es uno de los elementos, además ella lo dice: «recordad la operación suma que era la unión de los conjuntos...». Entonces, yo interpreto que coge modelos muy sencillos para ver ese paralelismo. Bueno, ya digo que el único cambio que ha tenido que hacer aquí es el cambio de 5 a 1, lo que se llama agrupamiento auxiliar, que lo tiene este ábaco. Simplemente, el objeto que tiene el agrupamiento auxiliar es no tener que contar, son números visuales y se «subitizan» las cantidades sin necesidad de contar. Es la única discusión que aquí ha surgido, más allá del 5, que bueno, ella quiere hacerlo de uno en uno, pero los alumnos le dicen: «no, no, coge la de 5, lo metes y déjate de problemas» [se ríe]. Ella lo quiere hacer como más así..., pero ellos dicen: «no, eso ya lo controlamos, no hace falta» [se ríe].

- 2M3.1-3.3. Hace la suma en el registro simbólico-numérico con ayuda de los alumnos [E, 2].
 - 2M3.1-3.3(I)1. Quiere que vean el paralelismo que existe entre un proceso, la representación en el ábaco japonés, y otro, el registro simbólico-numérico, plantando la suma sin llevadas para que el paralelismo sea más evidente [I, M].
- 2M3.2-3.3. Indica que va a juntar, a añadir, entendiendo la suma como la unión de conjuntos [E, 3].
- 2M3.3-3.3. Realiza un agrupamiento auxiliar, un cambio de 5 a 1, propio de este tipo de ábaco [E, 2].
 - 2M3.3-3.3(I)1. El agrupamiento auxiliar permite no tener que contar; se trata de números visibles y se «subitizan» las cantidades sin necesidad de contar [I, M].
- 2M3.4-3.3. Plantea que para añadir 5 [centenas] se puede hacer de una en una [E, 2].

Comentario 4

Les está explicando el paralelismo y dice que lo ha puesto vertical para parecerse a la estructura del ábaco. Bueno, lo ha colocado vertical como lo colocamos siempre, es la manera tradicional de

sumar. Quiere insistir tanto en la equivalencia con el ábaco que incluso llega a justificar la disposición de los números que ponemos nosotros. El ábaco hay veces que lo utilizan así [hace un gesto indicando que lo sitúan con las varillas en horizontal y no en vertical como lo ha dibujado la formadora], por lo menos los chinos [se ríe]. Pero bueno, lo ha querido usar de esa manera. Bueno, siempre se nos ha dicho que lo ponemos así [vertical] para que coincidan las unidades... Pero bueno, con eso remarca eso, ¿no?

- 2M4.1-3.3. Está realizando el paralelismo, haciendo ver que [el algoritmo tradicional de la suma] lo ha puesto vertical para parecerse a la estructura del ábaco [E, 2].
 - 2M4.1-3.3(I)1. Lo ha colocado vertical como lo colocamos siempre, es la manera tradicional de sumar. Siempre se nos ha dicho que lo ponemos así para que coincidan las unidades, etc. Sin embargo, quiere insistir tanto en la equivalencia con el ábaco que incluso llega a justificar la disposición de los números que ponemos nosotros. El ábaco hay veces que lo utilizan así [hace un gesto indicando que lo sitúan con las varillas en horizontal y no en vertical como lo ha dibujado la formadora], por lo menos los chinos. Bueno, con eso intenta remarcar eso [I, M].

Comentario 5

Hecho: ahora lo hace con los bloques multibase y, cada vez que lo hace, establece el paralelismo con el proceso simbólico. Está claro que el objetivo es establecer paralelismos entre...

Interpretación: quiere ver que se puede representar el algoritmo de muchas maneras distintas, porque es que son algoritmos distintos, y que simplemente es un problema de traducción; Duval en estado puro.

- 2M5.1-3.3. Emplea los bloques multibase [E, 2].
- 2M5.2-3.3. Indica el paralelismo entre los bloques multibase y el proceso simbólico [E, 3].
 - 2M5.2-3.3(I)1. Quiere ver que se puede representar el algoritmo de muchas maneras distintas, porque son algoritmos distintos, y que simplemente es un problema de traducción; se basa en Duval [I, M].

Comentario 6

Bueno, está intentando hacer el proceso con la escritura polinómica y yo interpreto que lo que quiere es justificar todo este proceso, como si no quedara justificado ya con todo lo que está

haciendo, ¿no? Le falta decir que la propiedad distributiva la va a necesitar al final, porque $2 \times 10^2 + 5 \times 10^2$ es 7×10^2 , es decir, que no solo usa la asociativa y la conmutativa, también habrá que hacer la distributiva. Y luego hay algo con lo que disiento desde el punto de vista didáctico; no sé si es el momento de decirlo, porque tú [se refiere a mí, investigador que está con él viendo el vídeo] has dicho si hay errores o no..., ¿me lo dices? [Se le indica que puede decirlo]. Eso que está haciendo no es precisamente lo posicional, lo posicional es lo de arriba [la suma tradicional]. Yo podría escribir ese número en cualquier sistema y respondería a esa escritura polinómica. Por un lado está la escritura polinómica y por otro lado está el tipo de sistema. El sistema que nosotros usamos es regular y posicional, pero, por ejemplo, si usáramos un sistema decimal como el chino, que es multiplicativo y no es posicional, la descomposición polinómica sería la misma. Con lo cual, decirle posicional cuando escribo la polinómica yo creo que no es del todo... Otra cosa es que diga: «bueno, puedo usarlo y luego veo cómo agrupo», ¿vale?, y me justifica por qué lo hago de la otra manera; digamos que sería otro proceso distinto, pero no le añade «posicionalidad» al proceso. Lo que le añade mucha «posicionalidad» es el sorobán, el ábaco japonés, ese sí, porque no queda más remedio... Sin embargo, por ejemplo, los bloques multibase, tú puedes juntarlos todos y luego separarlos, ahí la posición... Los bloques multibase se comportan como un sistema aditivo y en los sistemas aditivos la posición no es nada relevante. Ahora, cuando tú escribes eso [la expresión polinómica], eso vale para cualquier sistema, entonces no creo que añada nada posicional. Ahora lo que quiere es mostrar el proceso de cómo sería más cómodo y entonces lo que sí que va a justificar [de la expresión polinomial] es por qué guardar las posiciones es útil, eso sí.

- 2M6.1-3.3. Está haciendo el proceso con la escritura polinómica, indicando que es una forma en la que se ve la «posicionalidad» [E, 3].
 - 2M6.1-3.3(I)1. Porque quiere justificar todo el proceso realizado hasta el momento [I, M].
 - 2M6.1-3.3(I)2. Desde un punto de vista didáctico, no creo que eso que está haciendo sea precisamente lo posicional; lo posicional es lo de arriba [la suma con el algoritmo tradicional]. Yo podría escribir ese número en cualquier sistema y respondería a esa escritura polinómica. Por un lado está la escritura polinómica y por otro lado está el tipo de sistema. El sistema que nosotros usamos es regular y posicional, pero, por ejemplo, si usáramos un sistema decimal como el chino, que es multiplicativo y no es posicional, la descomposición polinómica sería la misma. Con lo cual,

decirle posicional cuando escribo la polinómica yo creo que no es del todo correcto. Otra cosa es que diga: «bueno, puedo usarlo y luego veo cómo agrupo», y así justifica por qué lo hago de la otra manera; digamos que sería otro proceso distinto, pero no le añade «posicionalidad» al proceso. Lo que le añade mucha «posicionalidad» es el sorobán, el ábaco japonés, ese sí, porque no queda más remedio. Sin embargo, por ejemplo, los bloques multibase puedes juntarlos todos y luego separarlos, ahí la posición no es relevante. Los bloques multibase se comportan como un sistema aditivo y en los sistemas aditivos la posición no es nada relevante. Ahora, cuando tú escribes eso [la expresión polinómica], eso vale para cualquier sistema, entonces no creo que añada nada posicional [I, M].

- o 2M6.1-3.3(I)3. Hay que indicar que se tiene que usar la propiedad distributiva para llegar de $2 \times 10^2 + 5 \times 10^2$ a 7×10^2 [I, M].

Comentario 7

Me parece muy interesante... Bueno, lo que está haciendo ahora es establecer paralelismos. Interpreto que le interesa mucho que los alumnos entiendan cuáles son las propiedades que sustentan las técnicas de cálculo. Me parece que es muy importante hacer eso para que sepan que esas propiedades hay que trabajarlas. Parece que la conmutativa, la asociativa y la distributiva son nombres que se añaden cuando uno estudia matemáticas, un poquito ya mayor, pero sin embargo son propiedades que hay que tener operativas para poder justificar los procedimientos que usamos. No se entiende ninguna técnica de cálculo ni, por supuesto, el producto sin las propiedades que ha enunciado; no tendríamos esas técnicas. Por tanto, me parece muy importante, interpreto que es una muy buena decisión explicar esas propiedades, porque luego didácticamente van a tener mucha transcendencia.

- 2M7.1-3.3. Indica que emplea las propiedades asociativa, conmutativa y distributiva [E, 3].
 - o 2M7.1-3.3(I)1. Le interesa mucho que los alumnos entiendan cuáles son las propiedades que sustentan las técnicas de cálculo. Es muy importante hacer eso para que sepan que esas propiedades hay que trabajarlas. Parece que la conmutativa, la asociativa y la distributiva son nombres que se añaden cuando uno estudia matemáticas, un poquito ya mayor, pero sin embargo son propiedades que hay que tener operativas para poder justificar los procedimientos que usamos. No se entiende ninguna técnica

de cálculo ni, por supuesto, el producto sin las propiedades que ha enunciado; no tendríamos esas técnicas. Es una muy buena decisión explicar esas propiedades porque didácticamente van a tener mucha transcendencia [I, M].

- 2M7.2-3.3. Está estableciendo paralelismos [E, 2].

Comentario 8

Bueno, aquí simplemente estamos asistiendo a qué ocurre cuando hay que llevarse, cuando se produce el acarreo entre unidades. Entonces, lo está haciendo mediante preguntas que ellos contestan, «que me paso y demás». Interpreto que quiere ver cómo se comporta ese tipo de reagrupamiento que hay que hacer en cada uno de los sistemas de representación que está utilizando. Pero, vuelvo a decir, lo que ella quiere ver es que todos los procesos son el mismo y es equivalente al que hacemos de una manera mucho más automatizada en nuestro cálculo simbólico, en nuestra técnica de cálculo usual.

- 2M8.1-3.3. Plantea una pregunta sobre un ejemplo [una suma] con llevadas, con acarreo entre unidades [E, 2].
- 2M8.2-3.3. Está viendo cómo se realizan los reagrupamientos en cada uno de los sistemas de representación que está utilizando [E, 3].
 - 2M8.2-3.3(I)1. Lo que quiere ver es que todos los procesos son el mismo y que son equivalentes al que hacemos de una manera mucho más automatizada en nuestro cálculo simbólico, en nuestra técnica de cálculo usual [I, M].
 - 2M8.2-3.3(I)2. En realidad aquí solamente hay dos tipos de «algoritmos», sobre todo con las llevadas. Cuando ella cuenta lo de las llevadas, efectivamente, en el caso del ábaco y en el caso simbólico no se ve el cambio, es un cambio que yo produzco porque sé que el sistema funciona así. Me explico: sé que en la varilla del ábaco donde están las decenas cada bola vale 10 veces la unidad, pero eso no se ve, no hay una percepción de ese valor. Lo mismo ocurre en un sistema posicional, que se basa en eso, los símbolos son los mismos, pero solo la posición le da un valor distinto; pero es algo que yo debo conocer de inicio. La tabla estaría a mitad de camino, aunque los cambios se siguen sin percibir, se tienen que saber. Sin embargo, en los bloques multibase yo sí observo que, por ejemplo, 10 varillas [decenas] son físicamente equivalentes a una tabla [centena]; la

manipulación te pone de manifiesto los cambios que hay que hacer. De hecho, el material Montessori de los multibase está hecho con bolitas con alambres y se ve que la tabla está hecha con 10 varillas, se pueden contar las 100 bolitas, y la de 1000 es un cubo y se pueden contar las 1000. Se observa cómo físicamente el agrupamiento es compatible [I, M].

Comentario 9

Bueno, ahora está simplemente haciendo una tabla. Ahora ya me he aclarado yo qué tabla quiere. Porque también, así como lo está haciendo, podría ser escribir 2, 1, 0, o sea, los números; como ella sabía que eso podía ocurrir, ha dicho que la prefería más gráfica. Yo aquí interpreto una cosa interesante: en realidad aquí solamente hay dos tipos de..., no sé si de algoritmos, sobre todo con las llevadas. Cuando ella cuenta de pasada lo de las llevadas, efectivamente, en el caso simbólico y en el caso del ábaco no se ve el cambio, es un cambio que yo produzco porque sé que el sistema funciona así. Me explico: sé que la varilla donde están las decenas..., cada bola vale 10 veces la unidad, pero eso no se ve, no hay una percepción de ese valor. Lo mismo ocurre en un sistema posicional, que se basa en eso, los símbolos son los mismos, pero solo la posición le da un valor distinto; pero es algo que yo debo conocer de inicio. Sin embargo, tanto en los bloques multibase como en la tabla, yo sí observo que si tuviera, por ejemplo, 10 varillas, físicamente son equivalentes a una tabla; la manipulación te pone de manifiesto los cambios que hay que hacer, mientras que en el otro soy yo el que debe conocer los cambios que existen. Entonces, el hecho de haber presentado..., primero, en cada «sistema» lo ha hecho de dos maneras: ábaco y simbólico, multibase y la tabla, pero sí que hay una frontera importante entre esos dos sistemas, y es que en uno los cambios los marca la percepción, mientras que en otro la percepción no te los marca, sino que eres tú el que debe conocer que hay un cambio entre las distintas columnas, ya sean las columnas de los números, las posiciones, o las varillas del ábaco. Sin embargo, en las otras no... Bueno, la tabla estaría a mitad de camino, porque efectivamente cada varilla..., sí, sería parecido al ábaco, porque los cambios no se perciben, se saben. Es en los multibase cuando perceptivamente se ve, físicamente se ve que la tabla está hecha como con 10 varillas... De hecho, el material Montessori de los multibase está hecho con bolitas con alambres y se ve que la tabla está hecha con 10 varillas, se pueden contar las 100 bolitas, y la de 1000 es un cubo y se pueden contar las 1000. Es decir, se observa cómo físicamente el agrupamiento es compatible, se ve. Entonces, bueno, interpreto que lo que aquí quiere ver es que el alumno tenga estrategias para que el niño, cuando tenga que construir procesos más simbólicos, pueda tener siempre el recurso, en este caso,

de la percepción, que te lo da; eso sí, hay que hacer luego los puentes para que se abandone, esto es incomodísimo, tener que pintar 5 tablitas de esas y tal es muy incómodo, ¿no?

Comentario 10

Bueno, está explicando los distintos sistemas tabulares, tanto el simbólico como el gráfico. De alguna manera, lo tabular, y así lo interpreto, lo marca como un paso intermedio al proceso simbólico, y así lo ha hecho, aquí se observa claramente. Si nos damos cuenta, en el simbólico normal, el 5 que está puesto en las centenas en el número de abajo y el 5 que aparece en las decenas no se diferencian en nada, solo la posición. Sin embargo, en la tabla, se diferencian en que un 5 lleva una D arriba y el otro lleva una C arriba, es decir, hay una C y una D que dicen lo que son. Me puedes decir: «hombre, también están puestos en un orden». Sí, pero no es solo la posición lo que marca el valor, sino la C, la D y la unidad. Entonces, es un paso intermedio. Sin embargo, los bloques multibase es un sistema puramente aditivo, con lo cual interpreto que la evolución que ella ha presentado aquí es una evolución muy interesante entre cómo se suma en un sistema aditivo, que se suma como en los bloques multibase, cómo se sumaría en un sistema multiplicativo, como sería el tabular, y cómo se suma en un sistema posicional, que es el nuestro. El ábaco es puramente posicional también, pero en vez de tener símbolos para los distintos órdenes, tiene un sistema aditivo pequeñito en cada orden, pero no es lo más relevante. Interpreto que hay un intento de mostrar cómo funciona cada sistema para que el alumno tenga recursos para luego, cuando vaya a clase, sepa adaptar qué tipo de sistema puede utilizar para que los alumnos de primaria construyan de manera satisfactoria los algoritmos clásicos de las operaciones.

- 2M10.1-3.3. Realiza una tabla, indicando que se trata de un sistema tabular gráfico [E, 3].
 - 2M10.1-3.3(I)1. Además de este tipo de tabla, cabría la posibilidad de escribir 2, 1, 0, es decir, los números [I, M].
- 2M10.2-3.3. Realiza por último otra tabla, indicando que se trata de un sistema tabular simbólico [E, 3].
 - 2M10.2-3.3(I)1. Plantea lo tabular como un paso intermedio para llegar al proceso simbólico. Si nos damos cuenta, en el simbólico normal, el 5 que está puesto en las centenas en el número de abajo y el 5 que aparece en las decenas no se diferencian en nada, solo en la posición. Sin embargo, en la tabla se diferencian en que un 5 lleva una D arriba y el otro lleva una C arriba, es decir, hay una C y una D que dicen lo que son. Y aunque

también están puestos en un orden, no es solo la posición lo que marca el valor, sino la C, la D y la unidad. Entonces, es un paso intermedio. Sin embargo, los bloques multibase es un sistema puramente aditivo, con lo cual interpreto que la evolución que ella ha presentado aquí es una evolución muy interesante entre cómo se suma en un sistema aditivo, que se suma como en los bloques multibase, cómo se sumaría en un sistema multiplicativo, como sería el tabular, y cómo se suma en un sistema posicional, que es el nuestro. El ábaco es puramente posicional también, pero, en vez de tener símbolos para los distintos símbolos, tiene un sistema aditivo pequeñito en cada orden, pero no es lo más relevante [I, M].

- o 2M10.2-3.3(I)2. Hay un intento de mostrar cómo funciona cada sistema para que el alumno tenga recursos para que luego, cuando vaya a clase, sepa qué tipo de sistema puede utilizar para que los alumnos de primaria construyan de manera satisfactoria los algoritmos clásicos de las operaciones [I, M].

Comentario 11

Bueno, está poniendo de manifiesto todo el proceso, toda la evolución: manipulativo, tabular, simbólico. Incluso les da indicaciones de que, efectivamente, es verdad que el método Singapur hace tablas para todo, usa muchas tablas; y bueno, está bien, es una manera de organizar la información. Interpreto que lo hace porque la idea es que el alumno conozca de dónde vienen las técnicas y cómo se adaptan al sistema; hace una progresión adecuada para que el alumno tenga recursos y pueda construir sus técnicas de cálculo, porque no se trata de que tú enseñes la técnica, sino de que el alumno la construya; es la única manera de conseguir un aprendizaje significativo del cálculo. No tiene sentido enseñar un algoritmo sin saber cómo funciona; no están para eso las matemáticas. Sin embargo, creo que hay una diferencia que ella no hace: yo no creo que tenga el mismo nivel manipulativo el ábaco que los bloques multibase. El ábaco es un sistema posicional, en las dos representaciones tipo ábaco que ha hecho ya se marca la posición con las mismas bolas, aunque estén en sitios distintos. Sin embargo, los bloques multibase no, los bloques multibase son un sistema puramente aditivo, con lo cual la percepción te dice el agrupamiento. En los bloques multibase cada unidad es distinta, cada unidad representa físicamente la cantidad de unidades totales que tiene. Esto, traducido en términos de sistemas de numeración, es: sistemas aditivos, sistemas multiplicativos y sistemas posicionales. Por eso, dentro de esa

manipulación y también haría alguna gradación, es decir, los manipulativos no son todos equivalentes. No obstante, la progresión es perfecta para llegar al simbólico.

- 2M11.1-3.3. Pone de manifiesto todo el proceso, la evolución, la progresión desde lo manipulativo, pasando por lo tabular, para llegar a lo simbólico [E, 3].
 - 2M11.1-3.3(I)1. Lo hace porque la idea es que el alumno conozca de dónde vienen las técnicas y cómo se adaptan al sistema; hace una progresión adecuada para que el alumno tenga recursos y pueda construir sus técnicas de cálculo, porque no se trata de que tú enseñes la técnica, sino de que el alumno la construya; es la única manera de conseguir un aprendizaje significativo del cálculo. No tiene sentido enseñar un algoritmo sin saber cómo funciona; no están para eso las matemáticas [I, M].
 - 2M11.1-3.3(I)2. No creo que tenga el mismo nivel manipulativo el ábaco que los bloques multibase. El ábaco es un sistema posicional, en las dos representaciones tipo ábaco que ha hecho ya se marca la posición con las mismas bolas, aunque estén en sitios distintos. Sin embargo, en los bloques multibase no, bloques multibase es un sistema puramente aditivo, con lo cual la percepción te dice el agrupamiento. En los bloques multibase cada unidad es distinta, cada unidad representa físicamente la cantidad de unidades totales que tiene. Esto, traducido en términos de sistemas de numeración, es: sistemas aditivos, sistemas multiplicativos y sistemas posicionales. Por eso, dentro de esa manipulación habría una gradación, es decir, los manipulativos no son todos equivalentes [I, M].
- 2M11.2-3.3. Menciona el método Singapur, haciendo ver que en él se emplean tablas [E, 2].

Comentario 12

Bueno, ya para terminar, evento: les está remarcando un hecho y es que el proceso de la enseñanza clásica empieza con el último trabajo y luego pasa un tiempo para adiestrar al alumno en ese trabajo. Interpreto que ella está defendiendo que el proceso debe ser distinto, es decir, ese es el estadio final, que es donde los alumnos tienen que llegar. Si empezamos por el final, y así lo interpreto, y en esto entran todas las teorías de aprendizaje, corremos un gran riesgo de que no se produzca el aprendizaje significativo. Es lo que yo interpreto que quiere hacer ver con esto.

- 2M12.1-3.3. Está remarcando un hecho a los alumnos, que consiste en que el proceso de la enseñanza clásica empieza con el último trabajo [el sistema de representación simbólico-numérico] [E, 2].
 - 2M12.1-3.3(I)1. Está defendiendo que el proceso debe ser distinto, es decir, ese es el estadio final, que es donde los alumnos tienen que llegar. Si empezamos por el final, y en esto entran todas las teorías de aprendizaje, corremos un gran riesgo de que no se produzca el aprendizaje significativo [I, M].

ANEXO 28

Eventos e interpretaciones de Daniel en la fase 2

Nota 1: Cada evento e interpretación se presenta junto con el comentario del que se ha extraído, así como con la etiqueta que lo identifica y el código que se le ha asignado. No obstante, no todos los comentarios presentan eventos o interpretaciones, bien por no contener ninguno, bien por haberse trasladado la información al respecto a otro comentario que aborde el mismo asunto, por lo que algunos eventos e interpretaciones pueden contener información de comentarios distintos del que acompañan. La traslación de información entre comentarios no se indica para no complejizar el documento.

Nota 2: El texto presentado entre corchetes en algunos eventos e interpretaciones se corresponde con información incluida por el investigador.

VÍDEO 1

Fragmento 1

Comentario 1

La formadora enuncia los materiales que tienen los alumnos en la mesa con el propósito de que sepan desde el primer momento que los materiales manipulativos van a ser un objeto central, importante, de trabajo durante la sesión.

- 2D1.1-1.1. Enuncia los materiales manipulativos que van a usar los alumnos en la sesión, los palillos [E, 2].
 - 2D1.1-1.1(I)1. Para que los alumnos sepan que los materiales van a ser un objeto central e importante en el trabajo de la sesión [I, D].

Comentario 2

La formadora plantea el problema, que va a ser contar cuántos palillos hay en las cajas que ha distribuido, y lo contextualiza, con la idea de comprobar si cajas de diferentes distribuidores van a tener la misma cantidad o no. Entonces, contextualiza la actividad, que es contar los palillos de las cajas.

- 2D2.1-1.1. Plantea el problema, que consiste en contar cuántos palillos hay en las cajas que ha distribuido [E, 2].
- 2D2.2-1.1. Contextualiza el problema al decir que se trata de comprobar si las cajas de cierto distribuidor tienen la cantidad indicada o no [E, 3].

Comentario 3

La formadora contextualiza la actividad que ha propuesto comentando que es parte de un libro de formación matemática de maestros de Estados Unidos.

- 2D3.1-1.1. Indica que la actividad propuesta forma parte de un libro de formación matemática de maestros de Estados Unidos [E, 2].

Comentario 4

La formadora presenta el objetivo de la actividad; creo que trata de que entiendan que agrupar palillos es una estrategia que deben explorar los alumnos y también la contextualiza en el objeto de estudio, que es la escritura de números grandes.

- 2D4.1-1.1. Presenta el objetivo de la actividad: entender la escritura de los números [E, 2].
 - 2D4.1-1.1(I)1. Pretende que los alumnos entiendan que agrupar palillos es una estrategia que deben explorar [I, M].

Comentario 5

Complementa lo anterior sugiriendo qué quiere decir con agrupar, que agrupar quiere decir que sea más fácil detectar la cantidad de palillos que hay en la mesa con los grupos que han hecho sin necesidad de registrar el número con los símbolos usuales, sino solo viendo los grupos de palillos que han hecho.

- 2D5.1-1.1. Indica que hay que agrupar los palillos de tal forma que se pueda saber la cantidad de palillos que hay sin necesidad de registrar el número con símbolos usuales, sino solamente viendo los grupos de palillos hechos por los alumnos [E, 3].

Comentario 6

Finalmente, amplía la actividad para que los alumnos tengan presente que esa agrupación que están haciendo no solo les tiene que permitir contar cuántos palillos tienen ellos, sino después, cuando unan palillos con los grupos restantes, tiene que ser sencillo, eficiente, contar cuántos palillos hay en común, sumar, vamos...

- 2D6.1-1.1. Indica que han de reunirse cada dos grupos para juntar sus palillos [E, 2].

- 2D6.2-1.1. Indica que, cuando unan los palillos con todos los grupos de la clase, tiene que ser sencillo, eficiente, contar cuántos palillos hay en total, es decir, sumarlos [E, 3].

Comentario 7

La formadora termina de dar la información dando un ejemplo concreto de la escritura en notación posicional de base 10, el 72 como siete, dos.

- 2D7.1-1.1. Da un ejemplo concreto de la escritura en notación posicional de base 10: el 72 como siete, dos [E, 2].

Fragmento 2

Comentario 1

La formadora pregunta, entiendo que ya es la fase 2 en la que dos grupos juntan sus palillos, para que expliquen las estrategias que han usado para agrupar, para que los alumnos expliciten de qué tamaño han hecho los grupos y para que traten de explicar el porqué, por qué han elegido esos tamaños y ahora analizar cómo funciona.

- 2D1.1-1.2. Pide a los alumnos que expliquen las estrategias que han usado para agrupar los palillos una vez que se han juntado dos grupos [E, 2].
 - 2D1.1-1.2(I)1. Pretende que expliciten el tamaño de los grupos que han hecho y por qué han elegido esos tamaños para analizar cómo funciona [I, M].

Comentario 2

La formadora describe la estrategia que han usado los alumnos para que vean si es adecuada o no, porque los grupos parecen ser de diferentes tamaños, y para que los alumnos traten de detectar las ventajas o los inconvenientes de la estrategia que han seguido.

- 2D2.1-1.2. Describe la estrategia que han usado los alumnos, consistente en hacer grupos de diferentes tamaños [E, 1].
 - 2D2.1-1.2(I)1. Para que los alumnos traten de detectar las ventajas y los inconvenientes de la estrategia que han seguido [I, M].

Comentario 3

La formadora les anima a que vuelvan a hacer el agrupamiento para arreglar el problema detectado y después trata de que los alumnos se centren en la conexión entre las agrupaciones que han hecho y la representación simbólica, la notación posicional usual, de las cantidades que previamente habían contado para que empiecen a reflexionar, para que se den cuenta de si puede haber una conexión entre las agrupaciones que hacen y cómo se representa luego el número en la base 10, en la notación posicional usual.

- 2D3.1-1.2. Anima a los alumnos a que vuelvan a hacer el agrupamiento para arreglar el problema detectado [E, 3].
- 2D3.2-1.2. Pregunta a los alumnos si han encontrado alguna conexión entre las agrupaciones que han hecho y la representación del número de forma simbólica en base 10, en la notación posicional usual [E, 3].

Comentario 4

La formadora les pregunta explícitamente por los diferentes tamaños de los grupos, que eran variados, de 10, 15 y 20, llegan a la conclusión de que no ha sido operativo y les plantea entonces la pregunta de cómo hay que volver a hacerlo para que funcione mejor.

- 2D4.1-1.2. Pregunta si ha sido operativo que hicieran grupos de diferentes tamaños: grupos de 10, 15, 20..., indicando que hay que volver a hacerlo para que funcione mejor [E, 2].

Fragmento 3

Comentario 1

Bueno, paramos, aquí lo difícil es decir cuándo parar. La formadora pregunta al primer grupo cuántos palillos tiene y observa que se anota como 87 y les hace reflexionar a los alumnos sobre por qué escribe así el 87, que está usando la notación posicional usual. Y a la vez les conecta con la agrupación que han hecho, que son 3 grupos de 20, y les pregunta cómo escribir esos 3 grupos de 20, con la idea de que los alumnos piensen en cómo representar eso desde el punto de vista matemático, representar con símbolos matemáticos 3 grupos de 20.

- 2D1.1-1.3. Pregunta al primer grupo cuántos palillos tenían, anotando que son 87 [E, 3].
- 2D1.2-1.3. Indica que emplea la notación posicional usual para escribir el 87 [E, 3].
- 2D1.3-1.3. Pregunta a los alumnos cómo escribir los 3 grupos de 20 [E, 3].
 - 2D1.3-1.3(I)1. Pretende que los alumnos piensen cómo representarlo desde el punto de vista matemático, empleando símbolos matemáticos para representar 3 grupos de 20 [I, M].

Comentario 2

La formadora pregunta a todos los grupos para tratar de recoger la estrategia sobre qué tamaño de grupos han utilizado. Parece que han utilizado grupos de 20 y grupos de 9, y no dice nada sobre si alguien ha utilizado grupos de 10, lo que es llamativo.

- 2D2.1-1.3. Pregunta a los alumnos por los tamaños que han empleado para hacer grupos, concretamente por los grupos de 20 y los de 9, sin preguntar si alguien ha empleado grupos de 10 [E, M].

Comentario 3

Después de preguntar a otro grupo, ya aparece un grupo de 10, y entonces anota la representación usual de, por ejemplo, el 90 con los grupos que han utilizado, que son 4 grupos de 20 y 1 grupo de 10, con la idea de que los alumnos reflexionen sobre la conexión, o la falta de conexión – en este caso –, entre la notación en base 10, la usual, y cuando uno hace grupos de 20.

- 2D3.1-1.3. Anota la representación del 90 con los grupos que han utilizado los alumnos: 4 grupos de 20 y 1 grupo de 10 [E, 3].

- 2D3.2-1.3. Incide en la idea de que no hay una conexión entre la notación usual en base 10 y los grupos que han hecho [E, 3].

Comentario 4

La formadora aclara el significado de las expresiones que ha puesto, como 3 aspa 20 más 3 aspa 9, que eso es simplemente una representación abstracta, que quizá no sea la multiplicación usual – no está claro –, de la situación que ha visto, que son 3 grupos de 20 palillos, por un lado, y 3 grupos de 9 palillos, por otro, como forma de transcribir lo que han hecho los alumnos con los materiales, con los palillos.

- 2D4.1-1.3. Aclara el significado de las expresiones que ha puesto, como 2 aspa 20 más 3 aspa 9, haciendo ver que es una representación abstracta de lo que son 3 grupos de 20 palillos y 3 grupos de 9 palillos, una forma de transcribir los que han hecho los alumnos con los materiales [E, 3].

Comentario 5

La formadora analiza la escritura que había hecho en grupos de 20, y también en grupos de 10 y de 9, viendo cómo esa estructura ayuda en algún caso, y no ayuda en otro, a sumar; van a sumar esas dos cantidades, comprueban que los grupos de 20 se suman bien y luego pasa a debatir la problemática que surge cuando tienen que combinar grupos de 10 y grupos de 9. Pregunta a los alumnos alternativas para que expongan alternativas que hayan pensado y trata de que los alumnos piensen por qué sumar grupos de 10 nos resulta sencillo, ¿no?, entiendo que con la idea de profundizar en esa dirección de ver cuáles son las ventajas de estructurar o de organizar los palillos en grupos de 10, porque los grupos de 10 coinciden con la estructura de nuestro sistema posicional.

- 2D5.1-1.3. Analiza la escritura hecha con grupos de 20, haciendo ver que los grupos de 20 se suman bien al sumar las dos cantidades que tienen [E, 2].
- 2D5.2-1.3. Pregunta a los alumnos por qué es más sencillo sumar grupos de 10 que grupos de 9, haciendo ver que los grupos de 10 coinciden con la estructura de nuestro sistema posicional [E, 3].
 - 2D5.2-1.3(I)1. Pretende que los alumnos vean cuáles son las ventajas de estructurar o de organizar los palillos en grupos de 10 [I, M].

Comentario 6

Finalmente, termina conectando la estructura que habían puesto con los grupos de palillos con la notación en base 10, para el tema de las unidades y los grupos de 10 que aparecen. Y termina el vídeo con la problemática de qué hacer con los grupos de 20, que aparecen como grupos de 20, y cómo eso no coincide con la notación posicional, para explorar con los alumnos cómo arreglar ese problema o cómo llegar finalmente a la solución que conocemos, que es hacer siempre grupos de 10 o de potencias de 10.

- 2D6.1-1.3. Conecta la estructura de grupos de palillos que tenían los alumnos con la notación en base 10, dando lugar a los grupos de 10 y a las unidades que aparecen [E, 3].
- 2D6.2-1.3. Hace ver que los grupos que han hecho no coinciden con la notación posicional [E, 3].
 - 2D6.2-1.3(I)1. Para que los alumnos traten de arreglar el problema y lleguen a hacer grupos de 10 o potencias de 10 [I, M].

VÍDEO 2

Comentario 1

La formadora enuncia el problema, que es pasar un número de base 16 a base 2, con una primera estrategia, que podríamos describir como fuerza bruta, ¿no?, que sería escribir todos los números en base 16 hasta el que me dan, que es el B6, y hacer lo mismo en base 2, en binario, y cuando llegamos al B6, pues lo tenemos pasado a base 2, exponiendo que los alumnos se planteen que haya mejores maneras de hacerlo.

- 2D1.1-2. Enuncia el problema a realizar, que consiste en pasar un número de base 16 a base 2 de forma directa, es decir, con la restricción de no pasar por base 10 [E, 3].
- 2D1.2-2. Presenta una primera estrategia de resolución, que consiste en escribir todos los números en base 16 hasta el B6 y hacer lo mismo en base 2, en binario, obteniendo el número en base 2 cuando llegamos al B6 [E, 3].

Comentario 2

La formadora explicita ahora ese contraste entre un algoritmo o un procedimiento de fuerza bruta, que funciona, pero que es muy largo, e introduce que queremos buscar uno que sea eficaz, en cierto sentido, además de correcto, por supuesto.

- 2D2.1-2. Hace ver que el procedimiento empleado funciona, pero que es muy largo, por lo que hay que buscar un algoritmo que sea eficaz [E, 3].

Comentario 3

La formadora ha preguntado otra estrategia y un alumno ha propuesto hacer la división, es decir, pasar de base 16 a base 2 haciendo grupos de 2. Entonces, la formadora empieza el procedimiento, con la idea de que los alumnos sean conscientes de la dificultad de ese procedimiento, que consiste en dividir en base 16, que parece que es algo que no se han planteado y que no está claro que sean capaces de hacer, porque parece que una restricción del ejercicio que sale ahora es que hay que hacer el cambio sin pasar por base 10, hay que hacer el cambio de manera directa.

- 2D3.1-2. Plantea otra estrategia propuesta por un alumno, que consiste en hacer la división en base 16, es decir, pasar de base 16 a base 2 haciendo grupos de 2 [E, 3].
- 2D3.2-2. Incide en la dificultad de la división en base 16 en este momento del desarrollo de la asignatura [E, 2].

Comentario 4

Ha explicitado la dificultad, que es dividir un número que está en base 16 entre 2 y expresar el resultado en base 2, que es algo que no han visto y que en este momento del desarrollo de la asignatura no parece sencillo.

Comentario 5

La formadora..., después de esperar un poco para que saliera otra alternativa, un alumno propone una conexión entre la base 2 y la base 16, que es que 16 es 2^4 , y la formadora va a explorar esa posibilidad para ver si por ahí se consigue dar una solución al ejercicio.

Comentario 6

La formadora explicita el ejercicio en otro lenguaje, que es el lenguaje de expresar la base 16 como grupos de 16 y potencias de 16, y lo mismo con la base 2, expresar la cantidad en grupos de 2 y de potencias de 2, reflejando en la pizarra la información que tenemos en este momento: sabemos la potencia más grande de 2 que va a aparecer y sabemos que el número es par. Entonces, la idea es que los alumnos tengan otra visión del problema y que entiendan que hay que pasar de las potencias de 16 a las potencias de 2.

- 2D6.1-2. Explora otra alternativa dada por un alumno para resolver el ejercicio, que consiste en atender a la conexión entre la base 2 y la base 16 que es que 16 es 2^4 , expresando en la pizarra el número en base 16 como grupos de 16 y potencias de 16 e indicando la potencia más grande que va a aparecer en base 2 y la menor [E, 3].
 - 2D6.1-2(I)1. Con la información que presenta en la pizarra, podemos saber que el número es par [I, M].

Comentario 7

Procede con la primera etapa, la etapa que se obtiene simplemente sustituyendo 16 como 2^4 , para ver que es una primera etapa del proceso que tiene que hacer y para explorar que, claro, eso no va a ser suficiente, vamos a ver por qué no va a ser suficiente.

- 2D7.1-2. Procede con la primera etapa, en la cual sustituye los 16 por 2^4 [E, 3].

Comentario 8

Bueno, es buen momento supongo para parar. Desde la expresión anterior que teníamos, 11 grupos de 2^4 y 6 grupos de $(2^4)^0$ unidades, la formadora observa que podemos escribir el 11 y el 6 como potencias de 2, como una expresión polinómica en base 2, que es algo que los alumnos saben

hacer, le comentan, y entonces obtiene una expresión en la que ya solo aparece una cierta cantidad de potencias de 2 con los coeficientes, que siempre son 0 o 1, por supuesto.

- 2D8.1-2. Escribe el 11 con potencias de 2, como una expresión polinómica en base 2, con la colaboración de los alumnos [E, 3].
- 2D8.2-2. Escribe el 6 con potencias de 2, como una expresión polinómica en base 2, con la colaboración de los alumnos [E, 3].
 - 2D8.2-2(I)1. Los coeficientes que acompañan a las potencias de 2 siempre van a ser 0 o 1 [I, M].

Comentario 9

Aquí aparece el problema del $(2^4)^0$ que la docente les plantea porque sabe, supongo, que el elevar a 0 muchas veces crea un problema, no se llega a distinguir si los alumnos lo tienen claro o no, parece que sí, que los alumnos entienden que eso es 1 y que 1, por tanto, se puede poner como 2^0 , o sea, que $(2^4)^0$ es 2^0 simplemente.

- 2D9.1-2. Plantea a los alumnos el problema del $(2^4)^0$, haciendo ver que eso es 1 y que se puede poner como como 2^0 , o sea, que $(2^4)^0$ es 2^0 [E, 3].
 - 2D9.1-2(I)1. Plantea la cuestión a los alumnos porque seguramente sabe que «elevar a 0» les supone muchas veces un problema [I, M].

Comentario 10

En este momento observa que es buena idea comprobar que vamos por buen camino, en el sentido de que lo que yo conocía ya de la expresión, que empezaba por 1 y terminaba por 0, coincide con la expresión que tengo en este momento, es decir, que por lo que hemos hecho hasta ahora parece que vamos por buena dirección.

- 2D10.1-2. Indica que la expresión que tienen hasta el momento coincide con lo que conocen de la expresión final, es decir, empieza por 1 y termina por 0, haciendo ver que van por buen camino [E, 3].

Comentario 11

Bueno, paramos... En todo este rato, es un procedimiento largo, pero creo que se puede describir de manera única. La formadora reorganiza la expresión anterior para escribirla con potencias de 2 y lo hace recolectando las potencias de 2 correspondientes y poniendo cuidado en que los alumnos entiendan cómo multiplicar potencias de 2 sin recurrir a recetas del tipo: «sumo los exponentes», sino que observen por qué $2^2 \times 2^4$ es 2^6 , ¿no?, porque aparecen 6 doses en esas potencias,

enfaticando eso por encima de reglas que los alumnos conocen de secundaria, pero que a lo mejor no llegan a comprender del todo. Es un proceso largo que trata de organizar para que entiendan de dónde sale cada potencia; procede de manera ordenada.

- 2D11.1-2. Reorganiza la expresión que tenían para reescribirla con potencias de 2, recolectando las potencias de 2 correspondientes [E, 2].
- 2D11.2-2. Explica a los alumnos cómo multiplicar potencias de 2, haciendo que observen que $2^2 \times 2^4$ es 2^6 porque aparecen 6 doses en esas potencias [E, 3].
 - 2D11.2-2(I)1. Pretende con ello enfatizar el proceso por encima de las recetas que los alumnos puedan conocer de secundaria, y que a lo mejor no llegan a comprender, como la de «sumar los exponentes» [I, M].

Comentario 12

La formadora analiza una pequeña dificultad que aparece con la expresión obtenida, que es que no aparecen potencias cúbicas de 2, 2^3 , y trata de que los alumnos entiendan que eso solo corresponde a la expresión del 6, que 6 no tiene grupos de 2^3 y que entiendan que hay una forma muy sencilla de arreglarlo, que es escribir que 0 grupos de 2^3 es lo mismo que decir que no hay grupos de 2^3 , entonces que no haya grupos de una cierta potencia pues nunca es un problema.

- 2D12.1-2. Analiza una dificultad que aparece con la expresión obtenida, que es que no aparecen potencias cúbicas de 2, haciendo ver que se puede arreglar escribiendo un 0 [E, 3].
- 2D12.2-2. Trata de que los alumnos entiendan que 6 no tiene grupos de 2^3 y que se puede escribir un 0×2^3 , que es lo mismo que decir que no hay grupos de 2^3 [E, 3].

Comentario 13

La formadora resume el procedimiento que han obtenido, que se podría formular en términos de receta memorística, cómo expresar cada coeficiente de la base 16 en base 2 y ponerlo en ciertas posiciones, con la idea seguramente de que los alumnos reflexionen sobre la diferencia entre un procedimiento que tenía sentido, que es el que ha hecho antes, y la receta o el procedimiento mecánico, el algoritmo, que uno puede programar, que resume lo anterior, pero que si uno lo hace de manera mecánica, no sabe lo que está haciendo, claro; con referencia a lo que se convierte muchas veces la enseñanza de las matemáticas, con la idea de que es algo que se debería evitar o con la esperanza de que los alumnos entiendan los inconvenientes de ese tipo de recetas memorísticas, creo.

- 2D13.1-2. Explica el procedimiento que han seguido formulándolo en términos de receta memorística, que consistiría en expresar cada coeficiente de la base 16 en base 2 y ponerlos en ciertas posiciones [E, 3].
 - 2D13.1-2(I)1. Su intención es que los alumnos reflexionen sobre la diferencia entre un procedimiento con sentido, como el desarrollado en la sesión, y un procedimiento mecánico, receta o algoritmo, que no se entiende si se aplica de manera mecánica [I, M].
 - 2D13.1-2(I)2. El uso de recetas, algoritmos o procedimientos mecánicos, aplicados sin que los alumnos entiendan lo que hacen, es habitual en la enseñanza de las matemáticas y es algo que se debería evitar por los inconvenientes que tienen [I, M].

Comentario 14

La docente quiere que los alumnos reflexionen sobre qué tienen de particular la base 16 y la base 2, por qué se puede hacer esa forma mecánica de pasar de base 16 a base 2, planteando una pregunta alternativa, qué ocurriría si, en vez de ser base 16, fuera base 15, tratando de que los alumnos detecten la diferencia y, por tanto, qué es lo que no funciona con la base 15 en todo lo que han hecho.

- 2D14.1-2. Pregunta a los alumnos por qué se puede pasar de base 16 a base 2 de forma mecánica, directamente [E, 2].
- 2D14.2-2. Plantea una situación alternativa, preguntando qué ocurriría si el ejercicio estuviera en base 15 en vez de en base 16, haciendo ver que con la base 15 habría que hacer los cálculos intermedios, que no habría un procedimiento directo [E, 3].
 - 2D14.2-2(I)1. Pretende que los alumnos detecten qué es lo que no funciona con la base 15 [I, M].

Comentario 15

La docente termina resumiendo la situación: por qué con base 15 se puede pasar, pero haciendo todos los cálculos intermedios, pero no hay un procedimiento limpio, directo, como con la base 16; y la razón es que 16 es una potencia de 2, resumiendo que eso se puede hacer cuando una de las bases es potencia de la otra.

- 2D15.1-2. Explica que un procedimiento directo se puede hacer cuando una de las bases es potencia de la otra, como con la base 16, que es potencia de 2 [E, 3].

VÍDEO 3

Fragmento 1

Comentario 1

Parece que ya la formadora empieza planteando la actividad, que es una actividad con material manipulativo, con tres tipos de material manipulativo: los ábacos, el ábaco vertical, usual, el sorobán y los bloques de base 10, haciendo énfasis en una cosa importante, que es que quiere que representen el proceso, porque es una confusión común de los estudiantes el representar la suma, el resultado, están muy acostumbrados a los resultados, entonces la formadora enfatiza mucho que quiere que se represente el proceso, no el resultado de esa suma.

- 2D1.1-3.1. Plantea una actividad, que consiste en representar unas sumas con tres tipos de material manipulativo: el ábaco vertical, el sorobán y los bloques de base 10 [E, 2].
- 2D1.2-3.1. Hace hincapié en que representen el proceso de la suma, no solo el resultado [E, 3].
 - 2D1.2-3.1(I)1. Porque es una confusión común de los estudiantes, están acostumbrados a los resultados, no a los procesos [I, M].

Comentario 2

Ya termina de plantear el ejercicio; además de la representación manipulativa, quiere la representación usual simbólico-numérica y una intermedia, que no está descrita previamente, que quiere que los alumnos improvisen o traten de generar por sus propios medios, que llama tabular, que puede tener componentes gráficos o simbólicos, con lo cual este proceso es muy parecido a las tres etapas de Jerome Bruner, más conocidas como el famoso CPA de Singapur.

- 2D2.1-3.1. Indica que los alumnos han de realizar también una representación simbólico-numérica [E, 3].
- 2D2.2-3.1. Termina de plantear el ejercicio, indicando que los alumnos han de realizar una representación intermedia, la cual denomina «tabular» y que puede tener componentes gráficos o simbólicos, que quiere que generen sin haberla trabajado previamente [E, 3].
 - 2D2.2-3.1(I)1. El proceso planteado en el ejercicio es muy parecido a las tres etapas de Jerome Bruner, más conocidas como el CPA de Singapur [I, M].

Comentario 3

Hace una observación sobre el orden, que la secuencia didáctica es importante, las operaciones están puestas, se entiende, de más fáciles a menos fáciles, y les observa que es importante seguir ese mismo orden.

- 2D3.1-3.1. Dice que las operaciones están puestas en un orden y que es importante que sigan dicho orden, dicha secuencia didáctica [E, 3].
 - 2D3.1-3.1(I)1. Se entiende que las operaciones están ordenadas de más fáciles a menos fáciles [I, M].

Fragmento 2

Comentario 1

Paramos... porque esto se va a alargar seguramente... La docente dialoga con los alumnos sobre cómo restar la cantidad... 704, empezando por quitar 5 unidades, y aparece el problema de que hay 4 y no podemos quitar 5, y empiezan a dialogar sobre cómo reorganizar la cantidad 704 para poder proceder con la resta. Queda patente en los alumnos la dificultad de comprensión, que les cuesta entender el ábaco, y cómo las fichas en diferentes posiciones del ábaco tienen diferentes significados y, por tanto, qué hay que hacer para mover fichas de un palo del ábaco al otro.

- 2D1.1-3.2. Dialoga con los estudiantes sobre cómo reorganizar la cantidad 704 para poder proceder con la resta, ya que tienen que quitar 5 unidades, pero solo hay 4 [E, 3].

Comentario 2

La docente, dialogando con los alumnos, ha logrado que entiendan la reagrupación o cómo funciona el ábaco, que 1 ficha de la barra de las centenas se convierte en 10 fichas en la barra de las decenas y que eso corresponde a representar el número 700 como 6 centenas y 10 decenas, para proseguir de esa manera con la operación de resta que estaban trabajando.

- 2D2.1-3.2. Dialoga con los alumnos sobre cómo obtener decenas, como trabajar la reagrupación con el ábaco, haciendo que vean que 1 ficha de la barra de las centenas se convierte en 10 fichas en la barra de las decenas [E, 3].
- 2D2.2-3.2. Explica que han representado el número 700 como 6 centenas y 10 decenas [E, 1].

Comentario 3

Después de terminar la operación con las decenas, la docente trata de que los alumnos reflexionen sobre el proceso en su conjunto para que tengan una visión general de lo que han hecho y cómo lo que están haciendo para esta resta es desagrupar centenas en decenas y decenas en unidades; un proceso, el de desagrupar, que en el ábaco no tengo claro que se vea bien, parece que a los alumnos les cuesta entenderlo.

- 2D3.1-3.2. Pregunta a los alumnos sobre el proceso seguido en su conjunto [E, 2].
 - 2D3.1-3.2(I)1. Para que tengan una visión general de lo que han hecho [I, D].

- 2D3.2-3.2. Hace ver que han desagrupado centenas en decenas y decenas en unidades para poder restar [E, 3].
 - 2D3.2-3.2(I)1. A los alumnos les cuesta entender el ábaco, tienen dificultades para comprender el proceso de desagrupar y que las fichas tienen distintos significados según la posición en los palos [I, M].

Comentario 4

Finalmente, con el mismo grupo, ante la pregunta de una alumna que lo relaciona con cómo lo hacen en papel, con el método tradicional, el simbólico-numérico, pues la docente les pide que reflexionen sobre la conexión entre los dos, que era una parte fundamental del ejercicio, ¿no?, cómo conectar lo que han hecho con el ábaco con lo que hacen tradicionalmente cuando hacen la operación con lápiz y papel.

- 2D4.1-3.2. Pide a los alumnos, a raíz del comentario de una alumna, que reflexionen sobre la conexión que hay entre la operación realizada de forma simbólico-numérica, con lápiz y papel, con el método tradicional, y la operación hecha con el ábaco, lo cual era parte del ejercicio [E, 3].

Fragmento 3

Comentario 1

Van a empezar a corregir una de las tareas y la docente la formula en lenguaje simbólico-numérico; es la suma $210 + 543$. Y la forma manipulativa que va a resolver con el grupo es la del sorobán porque menciona que ha sido la representación manipulativa que más dificultades les ha provocado a los alumnos, que más les ha costado, durante el periodo de trabajo. Les pregunta cómo colocar las varillas del sorobán para representar esas cantidades, que parece ser una de las claves, o la manera de empezar, para representar las cantidades en el sorobán.

- 2D1.1-3.3. Formula en lenguaje simbólico-numérico la suma $210 + 543$ [E, 3].
- 2D1.2-3.3. Comienza a resolver la tarea con la forma manipulativa, concretamente con el sorobán, indicando que es la representación que más les cuesta a los alumnos [E, 2].
- 2D1.3-3.3. Pregunta a los alumnos cómo colocar las varillas del sorobán para representar las cantidades dadas [E, M].

Comentario 2

En este proceso, la formadora ha preguntado a los alumnos sobre cómo representar la suma que teníamos en el sorobán que ya estaba diseñado y, entonces, van representando unidades, decenas y centenas con el cuidado de que las bolas en la parte inferior son unidades y las bolas de la parte superior tienen un valor de 5. Va preguntando a los alumnos para que vayan reflejando en el sorobán no solo unidades, decenas y centenas, sino también los grupos de 5 que aparecen cuando van haciendo la suma.

- 2D2.1-3.3. Pregunta a los alumnos cómo empezar a representar la suma en el sorobán [E, 3].
- 2D2.2-3.3. Representa las unidades, las decenas y las centenas con ayuda de los alumnos, haciendo ver a lo largo de la suma que las bolas de la parte inferior son unidades y que las de la parte superior tienen un valor de 5 [E, 2].

Comentario 3

Ahora la formadora traslada el resultado del sorobán a la notación simbólica tradicional para conectar las dos estrategias y para que los alumnos comprendan por qué sumamos unidades, decenas y centenas en esta suma, que es una suma relativamente sencilla porque es una suma sin reagrupamientos.

- 2D3.1-3.3. Realiza la suma con la notación simbólica tradicional [E, 3].
- 2D3.2-3.3. Conecta la estrategia del sorobán con la de la notación simbólica tradicional [E, 2].
 - 2D3.2-3.3(I)1. Para que los alumnos comprendan por qué sumamos unidades, decenas y centenas en esta suma [I, M].
 - 2D3.2-3.3(I)2. Al tratarse de una suma sin reagrupamientos, la suma es relativamente sencilla [I, M].

Comentario 4

Ahora la docente representa con bloques de base 10, con una representación gráfica de los bloques de base 10, las mismas cantidades de la suma anterior para representar ahora la suma, el proceso de reunir todos los bloques para representar la suma.

- 2D4.1-3.3. Hace una representación gráfica de los bloques de base 10, empleando las mismas cantidades de la suma anterior, tratando de representar el proceso de reunir todos los bloques, el proceso de la suma [E, 3].

Comentario 5

La formadora representa la suma ahora con la expresión polinómica de los números: 210 como 2×10^2 más un grupo de 10 más 0 unidades, y lo mismo la otra, y habla de que eso es para ver la estructura posicional. También la estructura posicional se puede ver, me parece, si uno cuando suma enfatiza bien que hace 3 unidades, y 4 y 1 son 5 decenas, y 5 y 2 son 7 centenas. Y la representación que hace es puramente simbólica en términos de potencias y en términos de la expresión polinómica de los números, una alternativa a la anterior, que sería más verbal.

- 2D5.1-3.3. Representa la suma empleando la expresión polinómica de los números en términos de potencias: el 210 como 2×10^2 más un grupo de 10 más 0 unidades, y del mismo modo con el otro número, haciendo ver que así se ve la estructura posicional [E, 3].

Comentario 6

Se puede justificar la suma en la forma polinómica con propiedades de la suma y el producto, por supuesto. Y una alternativa, creo que más comprensible, no solo en primaria sino para los estudiantes de Magisterio, quizá sería hablar simplemente de que yo sumo decenas con decenas, y sumo unidades con unidades..., pero no puedo sumar decenas con centenas, ¿no? Las dos

alternativas, la del lenguaje natural y la de las propiedades de la suma y la resta escritas de forma simbólica.

- 2D6.1-3.3. Justifica la suma en la forma polinómica con propiedades de la suma y el producto [E, 3].

Comentario 7

La formadora plantea la siguiente suma, que es una suma donde aparece un fenómeno nuevo. Pregunta a los alumnos para ver si lo han detectado y, efectivamente, una alumna lo ha detectado. Han detectado que cuando aparecen 10 o más de una cierta unidad –unidades, decenas o centenas–, hay un fenómeno nuevo que hay que tratar, que es el reagrupamiento.

- 2D7.1-3.3. Plantea la siguiente suma, preguntando a los alumnos si detectan el nuevo fenómeno que aparece en ella [E, 1].

Comentario 8

La formadora habla de creo que eran 9 y 6 unidades y describe en los cuatro sistemas que está usando de representación –la notación vertical usual, la notación polinómica, el sorobán y los bloques de base 10– cómo representaría el proceso de que tengo 9 y 6, 15 unidades, las cuales se agrupan en 1 decena y 5 unidades para que los alumnos comparen las cuatro formas de representación, que es uno de los objetivos fundamentales de la actividad.

- 2D8.1-3.3. Hace ver, con ayuda de una alumna, que hay un nuevo fenómeno que tratar en la suma cuando aparecen 10 o más de una cierta unidad –unidades, decenas o centenas–, que es el reagrupamiento, describiendo en los cuatro sistemas de representación que está usando –la notación vertical usual, la notación polinómica, el sorobán y los bloques de base 10– cómo representaría el proceso de que tengo 9 y 6, 15 unidades, las cuales se agrupan en 1 decena y 5 unidades, siendo un objetivo de la actividad dicha comparación [E, 3].

Comentario 9

Ahora aparece la notación intermedia que habían introducido, la tabla, que es una versión de tabla de valor posicional donde representan unidades, decenas y centenas, y se representan con un palote para cada una, con lo cual es una representación intermedia, más parecida al ábaco, cuando se puede hacer una versión más parecida a los bloques de base 10 de esa tabla, ¿no? Pero ya se dijo al principio que los alumnos podían improvisar esa tabla, ya que no se había tratado antes en clase, y ha salido esta versión.

Comentario 10

Tratando de seguir con la clasificación de los sistemas de representación, distingue una forma tabular-gráfica y otra tabular-numérica, dependiendo de si los símbolos que ponemos dentro de la tabla son números o tienen un carácter más gráfico.

- 2D10.1-3.3. Presenta la notación intermedia que se había introducido [al principio de la sesión], la tabla, concretamente una versión de tabla de valor posicional donde las unidades, decenas y centenas se representan con palotes, dando a dicho sistema de representación el nombre de tabular-gráfico al tener un carácter gráfico [E, 3].
 - 2D10.1-3.3(I)1. La versión que ha surgido de la tabla se parece más al ábaco que a los bloques multibase, pero ya se dijo al principio [de la sesión] que los alumnos podían improvisar la tabla al no haberse tratado antes [I, M].
- 2D10.2-3.3. Presenta otro sistema de representación que denomina tabular-numérico, ya que tiene números dentro de la tabla [E, 3].

Comentario 11

La docente resume la actividad, desde la propuesta original, que era calcular una suma escribiendo el proceso, empezando con la fase concreta, representando con los materiales, el ábaco y los bloques de base 10, después las tablas en sus diferentes versiones, para terminar con el procedimiento simbólico, la suma en vertical y las expresiones polinómicas. Entonces, está dando un resumen de las diferentes versiones para calcular esa suma, un resumen de la ruta didáctica de los alumnos, ¿no?, cómo empezar con material manipulativo les ayuda a la comprensión y cómo el final del proceso es la representación puramente simbólica en vertical, y cómo esto es parte de lo que menciona, de la metodología Singapur, que es más o menos así, efectivamente.

- 2D11.1-3.3. Resume la actividad, desde la propuesta original, que era calcular una suma escribiendo el proceso, empezando con la fase concreta, representando con los materiales, el ábaco y los bloques de base 10, usando después las tablas en sus diferentes versiones, para terminar con el procedimiento simbólico, la suma en vertical y las expresiones polinómicas, es decir, plantea un resumen de la ruta didáctica de los alumnos [E, 3].
- 2D11.2-3.3. Menciona que el proceso seguido es parte de la metodología Singapur [E, 3].

Comentario 12

Finalmente, la formadora pregunta por los recuerdos de los alumnos como alumnos de primaria para que reflexionen sobre cómo ellos aprendieron a sumar y cómo lo tradicional en España suele ser que empezamos muy cerca de la fase final, de la suma en vertical. Una alumna mencionaba que usaba una tabla de valor posicional, pero nada de material manipulativo, que es lo que me parece que es excepcional en España, usar material manipulativo, sobre todo cuando hablamos de Magisterio, que estudiaron primaria hace más de 10 años.

- 2D12.1-3.3. Pregunta a los alumnos cómo aprendieron a sumar cuando eran alumnos de primaria, haciendo ver que lo tradicional suele ser empezar por la fase final, con la suma en vertical [E, 3].
 - 2D12.1-3.3(I)1. Lo excepcional en España es usar material manipulativo, sobre todo cuando hablamos de alumnos de Magisterio, que estudiaron primaria hace más de 10 años [I, M].

ANEXO 29

Eventos e interpretaciones de Jorge en la fase 2

Nota 1: Cada evento e interpretación se presenta junto con el comentario del que se ha extraído, así como con la etiqueta que lo identifica y el código que se le ha asignado. No obstante, no todos los comentarios presentan eventos o interpretaciones, bien por no contener ninguno, bien por haberse trasladado la información al respecto a otro comentario que aborde el mismo asunto, por lo que algunos eventos e interpretaciones pueden contener información de comentarios distintos del que acompañan. La traslación de información entre comentarios no se indica para no complejizar el documento.

Nota 2: El texto presentado entre corchetes en algunos eventos e interpretaciones se corresponde con información incluida por el investigador.

VÍDEO 1

Fragmento 1

Comentario 1

Ahí les plantea un problema a los alumnos. Tienen un montón de palillos, los ha repartido, y les ha planteado que los calculen, que estimen entre todos cuántos palillos hay. Es un poco la tarea matemática que tienen que hacer.

- 2J1.1-1.1. Plantea la tarea a realizar, que consiste en estimar, en calcular un montón de palillos [E, 3].
- 2J1.2-1.1. Reparte unos palillos [E, 1].

Comentario 2

Bueno, no sé si es muy de didáctica, pero está recomendando una referencia que es justo aplicada un poco a ellos como futuros maestros que tiene actividades para ellos. Entonces, bueno..., no es que tenga contenido matemático, pero bueno, es una referencia relacionada con el tema que está viendo, de donde ha sacado también el... Así que bueno, para su práctica docente también puede servirles. No sé si es didáctica general... Es una referencia con recursos de apoyo para llevar al aula.

- 2J2.1-1.1. Recomienda una referencia relacionada con el tema matemático que están viendo, que tiene recursos de apoyo para llevar al aula, dirigida a los alumnos como futuros maestros [E, 3].

- 2J2.1-1.1(I)1. Porque puede servir a los alumnos para su práctica docente [I, D].

Comentario 3

Es más bien de didáctica... Recuerda otra vez el... Yo creo que es importante que quede claro el ejercicio, ¿vale? También lo tienen escrito, así que, bueno, la tarea... Pero bueno, podría ser más general... Pero vamos, el problema que se establece lo tienen escrito para que quede bien especificado, ¿no?, el problema matemático que tienen que resolver.

- 2J3.1-1.1. Recuerda el problema matemático que tienen que resolver, planteándolo también por escrito [proyectado en la pantalla] [E, D].
 - 2J3.1-1.1(I)1. Es importante para que el problema quede bien especificado y claro [I, D].

Comentario 4

Ha puesto un poco en contexto el objetivo de la tarea que van a hacer, ¿no?, que en el fondo es entender el sistema decimal, cómo están escritos... Y la actividad es una tarea en la que van a ir contando y agrupando... Y el objetivo final matemático es entender el sistema decimal. También está planteando las estrategias sugeridas para resolver el problema.

- 2J4.1-1.1. Plantea el objetivo matemático de la tarea: entender la escritura en el sistema decimal [E, 3].
- 2J4.2-1.1. Pide que por grupos cuenten y agrupen los palillos que tienen, que vean cómo pueden expresar el número de palillos que les ha tocado, sugiriendo la estrategia de usar hatillos, teniendo que poder luego comunicar el resultado [E, 2].

Comentario 5

Está un poco guiando las estrategias que puedan ir realizando, cada uno de los ejercicios, que cada uno tiene su objetivo. El primero era un poco la estrategia de usar los hatillos y la manera un poco de comunicar el resultado; y después, que reflexionaran un poco sobre lo que están haciendo, que es importante también.

- 2J5.1-1.1. Pide que reflexionen un poco sobre lo que están haciendo, sobre el objetivo que tenía la actividad de cómo expresar el número de palillos [E, 1].

Comentario 6

Bueno, la estrategia..., lo que hace también es eso, el primer paso de los grupos es que vean cómo pueden expresar el número de palillos que les ha tocado, después que lo pongan en común con los otros compañeros, que reflexionen sobre el objetivo que tenía la actividad de cómo expresarlo, y al final poner en común, que la actividad, el aprendizaje, sea un poco colectivo, y también la manera de cómo unir todos esos palillos, cómo después van a representar, ¿no?, que se les va a plantear como otro problema. Entonces, yo creo que está generando comunicación entre ellos para que puedan ver la estrategia que cada uno ha usado para resolver el problema y, luego, la estrategia común se hace con el grupo entero; es un poco el objetivo que tiene.

- 2J6.1-1.1. Indica que después pongan en común los palillos con otros compañeros [E, 2].
- 2J6.2-1.1. Indica que al final hay que unir todos los palillos con el grupo entero [E, 2].
 - 2J6.2-1.1(I)1. Pretende que el grupo entero de alumnos llegue a una estrategia común para representar la unión de los palillos, generando así un aprendizaje colectivo [I, M].

Fragmento 2

Comentario 1

Parece que son dos grupos que se han unido y está preguntando qué estrategias han utilizado; está haciendo que verbalicen, que le expliquen las estrategias que han usado, y los alumnos le están explicando cómo lo han hecho.

- 2J1.1-1.2. Pregunta a dos grupos de alumnos qué estrategias han utilizado [E, 1].

Comentario 2

Está analizando, entendiendo, cómo lo han resuelto. Entonces, los hatillos de 20... Es un poco la idea que ellos han buscado para resolverlo y ella les está haciendo reflexionar sobre si es adecuado o no. Ella misma está entendiendo un poco el proceso que han seguido y está preguntándoles...

Comentario 3

Ahí... Ha encontrado... No sabe... Me ha parecido como que no todos los hatillos tenían 20, ¿no? Entonces ella ha visto ahí un problema para luego utilizarlos para generalizar. Entonces, les pregunta: «Bueno, si yo tengo todos estos hatillos, tampoco sé si al final tengo...». Les plantea una pregunta a ellos para que se den cuenta de que a lo mejor tienen que rehacer un poco la manera en la que lo han hecho. Está haciéndoles preguntas para ver la validez de su método, de la estrategia que han utilizado.

Comentario 4

El objetivo de la actividad también es que acaben dando una solución a través de un razonamiento. Entonces, enfatiza qué quiere realmente de cada grupo, no solo resolver el problema, sino explicar el porqué del problema. La profesora les ha mostrado un poco la limitación de la manera en la que lo han hecho. Ella pone un poco el objetivo que ellos tienen al final que conseguir, tienen que conseguir esa ordenación, esa manera buena que luego sea útil para representar el número, y después que puedan explicarlo, que su respuesta final sea a través de un argumento matemático.

- 2J4.1-1.2. Explica a los alumnos que no se puede saber cuántos [palillos] tengo al no ser todos los hatillos de 20, haciendo ver que no es un método válido o adecuado, que presenta problemas para generalizar, enfatizando qué quiere de los alumnos, que no sería solo que resuelvan el problema, sino que sepan explicarlo con un argumento matemático [E, 2].

- 2J4.1-1.2(I)1. Quiere que se den cuenta de que a lo mejor tienen que rehacer lo que han hecho para llegar a una ordenación [de los palillos] que sea útil para poder representar el número [I, M].

Comentario 5

Los alumnos se han enfocado a lo mejor en una estrategia, en resolver la pregunta de contarlos y agruparlos... Ella está de nuevo guiando un poco para lo que es el final de la actividad, para el objetivo que dijo al principio, que es la representación del número, y entonces les está guiando, les está diciendo que no solo tienen que ordenar o hacer los hatillos de una manera correcta, sino que tienen que relacionarlo con la escritura, con cómo realmente escribimos el 85; está guiándolos para que el número de hatillos represente exactamente la posición... Está haciéndoles ver el objetivo y que conecten las dos cosas y sigan hacia el objetivo de la actividad.

- 2J5.1-1.2. Pregunta a los alumnos si los hatillos que han hecho tienen relación con la escritura, con cómo escribimos el 85, pidiendo que reflexionen sobre ello, lo cual se corresponde con el segundo punto de la actividad [E, 3].
 - 2J5.1-1.2(I)1. Quiere que los alumnos lleguen al objetivo de la actividad, a la representación del número, a que el número de hatillos represente la posición [I, M].

Comentario 6

Lo deja abierto... Solo les hace la pregunta... De hecho un alumno se queda parado un poco y le pregunta: «pero tenemos que hacer eso, ¿no?». O sea, que ese punto de la reflexión, que era el segundo punto de la actividad... No es que diga: «lo tenéis que hacer», sino que lo deja abierto para que ellos reflexionen y vuelvan otra vez a reflexionar sobre el ejercicio. Bueno, el trabajo yo creo que tienen que continuarlo.

Comentario 7

Vuelve otra vez a la estrategia que han utilizado para resolver el problema. Les hace reflexionar sobre si, en relación con ese problema final, esa manera ha sido útil. A través de preguntas, los guía y les hace pensar para llegar a la solución.

- 2J7.1-1.2. Pregunta si la estrategia que han utilizado para resolver el problema ha sido útil [E, 1].

Fragmento 3

Comentario 1

Aquí está hablando de la representación del número. A través de uno de los resultados de un grupo, está poniendo en común alguna de las estrategias que han realizado. Entonces, está viendo cómo la manera de agrupar, de hacer los grupos, se va a relacionar con los números, ¿no? Entonces, a través de un ejemplo, está explicando cómo van a representar, la representación decimal posicional de los números.

- 2J1.1-1.3. Aborda la estrategia de un grupo para representar un número [E, 1].
 - 2J1.1-1.3(I)1. Pretende llegar a ver la relación entre los grupos y los números, a ver la representación decimal posicional de los números [I, M].

Comentario 2

Está representando los grupos que han hecho, distintas formas de representar los números que han alcanzado. Es contenido que supongo que habrán trabajado antes. Está plasmando la representación que han tenido dos grupos; no sé si es lo que ellos tenían en mente o está afianzando una manera de expresar lo que habían alcanzado y poner en común lo que han hecho. Está describiendo qué agrupaciones ha hecho cada grupo para alcanzar esos números.

- 2J2.1-1.3. Representa los grupos [de palillos] que ha hecho otro grupo de alumnos, plasmando así una forma de representar el número alcanzado [E, 2].
 - 2J2.1-1.3(I)1. Pretende afianzar una manera de expresar lo que habían alcanzado [los agrupamientos], incidiendo en contenido que supongo que habrían trabajado antes, aunque puede que los alumnos no la tuvieran en mente [I, M].

Comentario 3

Está mirando la conexión, cuál es nuestra manera de expresar en base 10, en grupos de 10... Está haciendo ver que las estrategias que han hecho los alumnos para llegar al 87 y al 90..., pues están agrupando, pero en otro sistema. Entonces, en este momento, ellos ya van a ver claramente que la agrupación de 20, aunque han llegado al 87, no es como nosotros estamos escribiendo el número, qué representa el 8 y el 7.

- 2J3.1-1.3. Hace ver que no hay una conexión entre los grupos hechos y los números 87 y 90, que la agrupación de 20, por ejemplo, no se ve en el 8 ni en el 7 del 87 [E, 3].

- 2J3.1-1.3(I)1. Pretende que los alumnos vean que expresamos los números en base 10, en grupos de 10, y que ellos han agrupado en otro sistema [I, M].

Comentario 4

Aquí ha hecho una explicación de la conexión, que es un poco lo que está trabajando en la actividad; explica las matemáticas que hay detrás.

- 2J4.1-1.3. Explica las matemáticas que hay detrás de la conexión [entre lo manipulativo y lo simbólico-numérico] [E, 1].

Comentario 5

Aquí es la otra parte. Al tener dividido en grupos, cada uno de distintos números, después tienen que sumarlo, entonces ahí verían que han agrupado distinto y que han tenido un problema a la hora de sumarlo. Entonces, está comparando los dos y está viendo qué estrategias han utilizado para hacerlo. Ahí han visto que han desagrupado los números, unos tenían grupos de 9 y otros, de 10, entonces el de 9 lo han reordenado para hacerlo de 10. Entonces, ella está diciendo: «¿por qué no lo habíais hecho de primeras?»; va intentando llegar al número 10, ¿vale?, sería la estrategia que está sugiriendo. Está haciendo ver que la estrategia no ha sido óptima.

- 2J5.1-1.3. Está viendo qué estrategia han utilizado para sumar [E, 1].

Comentario 6

Aquí es una puesta en común. Ella ha preguntado: «bueno, ¿por qué no habéis hecho..., qué problemas encontráis en esta estrategia?». Una alumna ha dicho: «es que es más sencillo si todo está en 10». Entonces, ahí ha reforzado un poco esa manera de hacerlo. Está bien, por un lado van a ver que están agrupando distinto, pero que hay una manera de agruparlo que va a ser... Ha reforzado a la alumna que ha dado con esa estrategia. Y dice que no hay problema cuando están sueltos [los palillos]...

- 2J6.1-1.3. Pregunta por qué no han empleado otra estrategia que propone ella, haciendo ver que no hay problema cuando están sueltos [los palillos] y mostrando preferencia por la estrategia dada por una alumna, que se basa en que es más sencillo si todo está con el 10 [E, 1].

Comentario 7

Esa pregunta es bastante clave. Tal y como está hecho el sistema decimal, es un poco la clave; y es por eso la posición de los números, cómo sumamos... Ha parado, lo ha vuelto a repetir..., o sea, realmente los está guiando hacia el sistema decimal, a los grupos de 10.

- 2J7.1-1.3. Plantea una pregunta en dos ocasiones, haciendo referencia al sistema decimal [E, 2].
 - 2J7.1-1.3(I)1. Se trata de una pregunta clave porque trata de guiar a los alumnos hacia el sistema decimal, a los grupos de 10, a que vean la posición de los números y cómo sumamos [I, M].

Comentario 8

Aquí, con el diálogo intenta que expliquen siempre todo lo que... Cuando hace alguna pregunta y algún alumno contesta, tiene que explicar el porqué, ¿no?, eso es muy importante. Pregunta el porqué, tratando de llegar a la idea con el grupo y las aportaciones de los alumnos.

- 2J8.1-1.3. Pide a una alumna que explique el porqué de su idea [E, 1].

Comentario 9

Ahí es donde ha visto la conexión con la..., el sumar, ¿no?, el sumar los dos números... Quiere ver que al final el número que aparece pues también es el... Y es el objetivo, ¿no?, que vean que esos números que aparecen en la descomposición son los de la escritura. Ahí les deja continuar con el problema.

- 2J9.1-1.3. Hace ver que los números que aparecen en la descomposición deberían ser los de la escritura, incidiendo en la [ausencia de] conexión [E, 3].

VÍDEO 2

Comentario 1

Está explicando un problema, pasar de base 16 a base 2. Parece una estrategia de alguien, alguno de los alumnos ha dicho que podemos colocar los números, hay que llegar al B6, y ver con una correspondencia uno a uno cuál sería. Es una estrategia que ha propuesto, se podría hacer, pero a lo mejor no es la más directa. Bueno, ha establecido el problema matemático y una posible resolución.

- 2J1.1-2. Plantea un problema matemático que consiste en pasar de base 16 a base 2 sin pasar por base 10 [E, 3].
- 2J1.2-2. Plantea una estrategia de resolución propuesta por un alumno que consiste en colocar los números en base 16 hasta llegar al B6 y en base 2 y hacer una correspondencia uno a uno para ver cuál sería el resultado [E, 3].
 - 2J1.2-2(I)1. Puede que no sea la resolución más directa [I, M].

Comentario 2

Yo creo que les enfrenta a los alumnos... Quiere resolver un problema y, bueno, es una manera de hacerlo a partir de lo que conocen de cómo son los números en base 16 y en base 2, sería una manera de hacerlo, pero es muy larga, muy tediosa. Entonces, la idea es pensar cuál sería una estrategia que nos ahorre todo esto, ¿no? Es algo que lanza para la reflexión, ¿no?

- 2J2.1-2. Indica que la estrategia propuesta para pasar de base 16 a base 2 es muy larga, muy tediosa [E, M2].
 - 2J2.1-2(I)1. Pretende que piensen una estrategia que ahorre todo esto [I, M].

Comentario 3

Se lanza la pregunta de cómo se podría resolver, un alumno propone una estrategia y el profesor va a elaborar un poco esa estrategia para ver si funcionará o no. Entonces, va a representar en la pizarra, va a continuar un poco con el argumento del alumno, con las ideas que van surgiendo, guiando. El objetivo también es que se vean los distintos acercamientos que puede haber para resolver, qué puede aportar uno, otro..., y al final llegar entre todos a la solución. Es importante conocer las distintas estrategias para resolver un problema y decidir cuál puede ser óptima en cada caso.

- 2J3.1-2. Explica en la pizarra una estrategia propuesta por un alumno, que consiste en hacer una división en una base distinta a la de 10 [E, 2].
 - 2J3.1-2(I)1. El objetivo que se persigue es importante, ya que trata de ver los distintos acercamientos que puede haber para resolver el problema, si funcionan o no, qué aporta cada uno, etc., para finalmente llegar a la solución entre todos, con las herramientas que tienen, y decidir qué estrategia puede ser óptima en cada caso [I, M].
- 2J3.2-2. Indica que se podría hacer la división con distintas bases, pero haciendo ver también la dificultad que supone que los números no estén en la misma base, que ellos saben hacer la división con el algoritmo tradicional de la cajita en base 10, pero que aquí se plantea una división con distintas bases [E, 3].

Comentario 4

Es la estrategia propuesta por la alumna. Entonces, yo creo que eso hace que los demás alumnos piensen en esa estrategia. Y ella está desarrollando un poco cuál sería..., bueno, va a hacerlo, pero se encuentra con otro problema que hay que resolver para seguir esa... Entonces, bueno, les vuelve a plantear si es factible o no, cómo podemos hacer esto cuando los números no están en la misma base, ¿no? Está viendo cómo sería la estrategia propuesta por la alumna y los problemas que se encuentra con esa idea.

Comentario 5

Esta es otra estrategia, otra manera de hacerlo que todos los alumnos sabrían hacer o que posiblemente usarían, que es pasarlo todo a base 10 y luego ir a la base que buscan, o sea, pasar por la base 10. Pero el objetivo del ejercicio es hacerlo sin pasar por la base 10. El objetivo que está teniendo es ver cómo pueden hacerlo sin pasar por base 10.

Comentario 6

En principio la estrategia es adecuada y dice que se puede hacer, y que, si lo hacen así, el resultado saldría. Pero claro, en principio no sabrían cómo hacerlo.

Comentario 7

Ahí está explicando cuál es el problema, ¿no?, porque el algoritmo tradicional está en la misma base, lo está comparando con lo que ellos saben, con lo usual, que es la división en base 10 con la cajita. Intenta que vean qué sería una división con distintas bases; que vean que no es un

problema que ahora mismo puedan intentar hacer. Está buscando que, con las herramientas que tienen, vean cómo lo resolverían.

Comentario 8

Vale, ha habido otra idea de otro alumno y está borrando la pizarra. Va a elaborar a partir de esa idea. De nuevo, es un poco ir desarrollando las ideas de los alumnos y poco a poco ir creando esa estrategia... Ir conociendo más sobre el problema, ¿no? Yo creo que las aportaciones de los alumnos y las distintas maneras de abordarlo es bastante enriquecedor a la hora de aprender a resolver problemas de distintas formas y ver cuáles van a funcionar, cuáles se pueden generalizar y cuáles no.

- 2J8.1-2. Apunta en la pizarra otra idea propuesta por otro alumno, que se basa en el 2⁴, planteando la descomposición del número [del que se parte] y la forma del número que se quiere encontrar, haciendo ver que va a desarrollar a partir de esa descomposición para pasar el número a grupos de 2 [E, 3].
 - 2J8.1-2(I)1. Quiere seguir desarrollando las ideas de los alumnos poco a poco para ir conociendo más sobre el problema; ver distintas maneras de abordarlo es bastante enriquecedor a la hora de aprender a resolver problemas de distintas formas y ver cuáles van a funcionar y cuáles se pueden generalizar [I, M].

Comentario 9

Está elaborando el... Ha vuelto a escribir el problema... Ha explicado un poco todo el objetivo del problema, ¿no?, que es pasar ese número... Ya ha explicado la descomposición del número, cuál es la forma del número que quieren encontrar, ¿no? Entonces, va a desarrollar a partir de esta descomposición cómo va a ir apareciendo... Yo creo que era el objetivo que ella quería ver, el 2⁴, pasar a grupos de 2. Entonces va a resolverlo.

Comentario 10

Aquí de nuevo la idea parece... Les ha expuesto como el objetivo, una manera de resolverlo, es decir, si yo tengo..., en base 16, con potencias de 16, hago otro con potencias de 2 y con esta idea transforma a grupos de 2. Entonces, esto plantea un nuevo problema, que es qué hacemos con el 11 y el 6. Entonces les vuelve a preguntar, para no resolverlo ella, «qué hacemos con el 11 y con el 6». Yo creo que esa idea ya la tendrán, ya han visto el cambio a expresar todo en potencias de 2, así que ahora ya yo creo que les será más sencillo encontrar la manera de... O por lo menos un alumno lo ha hecho, yo creo que lo estaba explicando, ¿no?

- 2J10.1-2. Transforma unas potencias de 16 en unas potencias de 2, en grupos de 2 [E, 3].
- 2J10.2-2. Pregunta qué hacen con el 11 y con el 6 [E, M].
 - 2J10.2-2(I)1. Quiere que lo resuelvan los alumnos, quienes ya tendrán la idea de que hay que expresar todo en potencias de 2, tal y como han visto, por lo que les será sencillo seguir [I, M].

Comentario 11

Los contenidos matemáticos del problema sí que están apareciendo. Continúa un poco la idea, ¿no?, está reforzando un poco las partes claves de... Bueno, la expresión en base 2 es una expresión polinomial en potencias de 2, ¿no? Les repite un poco los conceptos clave de la expresión de cada número en cada base. Entonces, utilizando esa idea, al final se llega al objetivo. También vuelve a preguntar, vuelve a reforzarlo, vuelve a decir: «el 11 se escribe así, es el mismo número, pero reescrito con otras potencias», ¿no?

- 2J11.1-2. Escribe la expresión polinomial en potencias de 2 del 11, haciendo hincapié en los conceptos clave de la expresión, indicando que el 11 se puede escribir con otras potencias, con potencias de 2 en este caso [E, 3].

Comentario 12

Ahí tampoco lo resuelve ella, ¿no? Lo está resolviendo un alumno. Entonces ella se para, es un poco la estrategia que seguiría a la hora de resolverlo en papel, habría que pararse cuando llegas al 6, y dice: «¿qué hago con el 6?». Entonces, ella para... En el fondo, bueno, aunque lo va escribiendo, va formalizando lo que dice un alumno, pero va parando según el proceso que seguiría a lo mejor alguna persona para resolverlo. Y va ordenando, va haciendo de manera grande y clara en la pizarra la resolución.

- 2J12.1-2. Escribe el 6, formalizando lo que dice un alumno y haciendo pausas a lo largo del proceso de resolución [E, 1].
 - 2J12.1-2(I)1. Realizar pausas es la estrategia que se seguiría al resolverlo en papel [I, M].
- 2J12.2-2. Plantea la resolución en la pizarra de forma ordenada, grande y clara [E, D].

Comentario 13

Ahí va conectando un poco adónde quiere llegar en el problema, con lo que ellos saben de que empezaba por 1 y acababa en 0, que es algo que buscaban. Entonces, ver cómo en la mitad del proceso va funcionando, ¿no?, y el objetivo se va cumpliendo, voy haciéndolo bien, tiene todo el sentido, ¿no? Es decir, probar en cada paso que tiene sentido el argumento. Entonces, va comprobando que va bien y ya solamente tiene que hacer al final las operaciones para llegar a la solución.

- 2J13.1-2. Va conectando con lo que buscan en el problema, con que empezaba por 1 y acababa en 0, haciendo ver que el proceso va funcionando, que el argumento tiene sentido [E, 3].
 - 2J13.1-2(I)1. Para llegar a la solución, solamente quedaría hacer esas operaciones [I, M].

Comentario 14

Ahí está recordando cómo multiplicar potencias. Está mirando cómo ir construyendo al final cada uno de los términos, el 2^6 , 2^5 , 2^4 ..., y de paso recuerda un poco las operaciones que hay. Entonces, primero ha preguntado cuál sería el coeficiente, le han dicho cuál es directamente; a lo mejor los alumnos lo han visto, pero ella ha hecho el cálculo y lo ha desarrollado un poco.

- 2J14.1-2. Recuerda cómo multiplicar potencias a raíz de la construcción final que está haciendo de cada término: 2^6 , 2^5 , 2^4 ..., desarrollando los cálculos para llegar al coeficiente del término 2^6 tras preguntar por cuál sería dicho coeficiente [E, 3].

Comentario 15

Está relacionándolo con el ábaco, o sea, que a lo mejor han trabajado con un ábaco. Entonces, con un material manipulativo está viendo esa relación con lo que les ha salido, por eso yo creo que sabían lo de los números. O sea, que ha habido un trabajo anterior manipulativo y ahora están viendo el desarrollo algebraico, con las operaciones.

- 2J15.1-2. Relaciona en tres ocasiones el desarrollo algebraico que les va saliendo, las distintas posiciones, con un material manipulativo, con las varillas del ábaco [E, 3].
 - 2J15.1-2(I)1. Porque puede que previamente hayan trabajado con el ábaco [I, D].

Comentario 16

Bueno, son pasos de operaciones aritméticas que recuerdan. Ahí ha visto una equivalencia, que vean un poco el desarrollo en la pizarra. También recuerda la propiedad que hace que eso se pueda hacer, cómo los dos números son el mismo, cómo pasa de uno a otro de manera sencilla, quitándole gravedad [se ríe].

- 2J16.1-2. Indica una equivalencia, haciendo ver cómo ha pasado de un desarrollo a otro tras realizar las operaciones aritméticas, cómo los dos números son el mismo [E, 2].
- 2J16.2-2. Recuerda la propiedad que ha usado [E, 2].

Comentario 17

También está haciendo hincapié en el coeficiente, que es al final el importante, ¿no? En cada paso va explicando siempre el coeficiente, quién va con él, la manera de entender cómo expresar al final el número final.

- 2J17.1-2. Hace hincapié en los coeficientes en cada paso que va explicando, haciendo ver cómo se llega a la expresión final del número [E, 2].

Comentario 18

Ahí se puede llegar al error de no incluir uno de los dígitos, que sería el 0, ¿no? Para entender ese 0, lo está relacionando con el ábaco; el ábaco tenía las varillas, entonces cada una representaba esa posición. Entonces, ¿qué hacemos al no haber ese 2^3 ? Ese punto es importante para que vean que tienen que escribir un 0 en el número. Entonces, ahí ha parado. Creo que un alumno no contó con él; entonces, ha aprovechado para ver qué pongo aquí, «si no tengo uno, entonces es 0», ¿no? La manera de que ellos lo entiendan ha sido llevarlo a las varillas, al material manipulativo; o también, de manera algebraica, ver que ese coeficiente es 0, ¿no? Está conectando los dos para que se entienda bien.

- 2J18.1-2. Pregunta, a raíz de la dificultad que ha tenido un alumno, qué hacer al no haber valor para el 2^3 , haciendo ver que tienen que escribir un 0 en el número [E, 3].

Comentario 19

Ha recapitulado un poco cómo lo han hecho; la idea de que cualquier número lo puede escribir..., pues por ejemplo de esa manera que ha hecho ahí. Y un poco viendo la relación con las varillas..., pues cómo hacerlo. Y luego ha mencionado... un vídeo, que sería a lo mejor una receta de cómo

hacer ese..., el algoritmo que a lo mejor al final se puede aprender, ¿no?, que sería coger el número 11, pasarlo a base 2, te da 4 dígitos, como es 2^4 lo pones..., etcétera. Entonces, bueno, no sé si va a decir que no le vale porque..., bueno, ellos han visto el porqué de ese algoritmo y por qué hay que colocarlo cuatro más allá y demás, lo que están aprendiendo es por qué funciona, ahora mismo ya saben por qué funciona ese algoritmo.

- 2J19.1-2. Plantea la idea de que cualquier número lo puede escribir, por ejemplo, de la manera que lo ha hecho [con el 6] [E, 1].
- 2J19.2-2. Menciona una receta, un algoritmo que consistiría en coger el número 11, pasarlo a base 2, obtener 4 dígitos, tener en cuenta que trabajamos con 2^4 , etc. [E, 3].

Comentario 20

Sigue un poco con lo que estaba comentando, y también coincido en que es lo que tienen que aprender los maestros, el porqué. Y un poco por qué aparecía en eso, ¿no?, en la forma de reescribir justo el paso ese, haciendo eso y haciendo operaciones se alcanza, ¿no? Esa idea les va a servir para generalizarla y para saber por qué funciona, y no solo para pasar a base 2, sino a cualquier otra base. Entonces, eso tiene más valor para un futuro maestro y es de hecho lo que necesita saber, más que aplicar una receta.

- 2J20.1-2. Dice que a ella no le vale la receta porque los maestros tienen que aprender el porqué, que es lo que han visto a través de las operaciones [E, 3].
 - 2J20.1-2(I)1. La idea que han trabajado [en clase] les va a servir para generalizarla y poder pasar a diferentes bases, no solo a base 2, lo cual tiene más valor para un futuro maestro. Entender el porqué, ver hasta qué punto funcionan los algoritmos, tiene más valor para el futuro docente, necesita saber eso más que la receta en sí y será en lo que tenga que incidir a la hora de enseñar [I, M].

Comentario 21

Aquí está viendo las limitaciones de basarse en recetas o en fórmulas que realmente no se están entendiendo. Por ejemplo, no funciona en el caso que está poniendo. Sin embargo, entender el paso, el porqué de esto, hace que se pueda utilizar, que se pueda generalizar, ¿no? Está viendo cómo esta idea sencilla les permite resolver todo tipo de problemas y entienden en profundidad realmente cuál es el paso, ¿no? Y a la hora de enseñarlo será en lo que incidan, en transmitir estas

ideas, más que transmitir esa fórmula, sino transmitir esta idea, que es realmente la más potente, la que es útil. Está desmontando al youtuber [se ríe].

- 2J21.1-2. Plantea un nuevo caso, incidiendo en las limitaciones de las recetas al hacer ver que la receta anterior no funciona para el nuevo caso [E, 2].

Comentario 22

Es interesante que vean hasta qué punto funciona esa fórmula, si el método que daba el youtuber funciona para... Y entonces ha dado la condición para que... Y ahora mismo lo ven, ellos mismos han visto hasta qué punto funciona esa fórmula y cuál sería el proceso para otra fórmula, ¿no? Y eso sí que tiene bastante valor para el futuro docente, ver hasta qué punto funcionan los algoritmos, estrategias..., para incidir luego en ellas.

- 2J22.1-2. Da la condición [E, 1].

VÍDEO 3

Fragmento 1

Comentario 1

Bueno, ha presentado el problema; el problema es de representación de números con distintos materiales y, después de representar números, cómo sumar con ellos. El objetivo es que vean qué proceso han seguido para sumar. Establece el problema y cuál es el objetivo, que no quiere simplemente el resultado, sino que también expliquen paso a paso cómo han llegado a la suma, a las operaciones que tengan que hacer.

- 2J1.1-3.1. Presenta el problema, que consiste en representar la suma de números con distintos materiales [E, 2].
- 2J1.2-3.1. Dice que tienen que ver y explicar el proceso que han seguido para sumar, no simplemente el resultado [E, 3].

Comentario 2

El objetivo es la representación en distintos sistemas de representación, ver la relación con cómo se puede hacer de manera simbólica, y después deja libertad para que ellos creen un sistema nuevo de representación. Entonces, bueno, con cada una de las sumas, ver que es la misma suma pero con distintas representaciones, ¿no?, y su conexión. Y luego deja abierta esa forma, que ellos creen una nueva forma para que vean que existen todo tipo de formas de representar.

- 2J2.1-3.1. Pide que representen la suma en el sistema de representación simbólico [E, 3].
- 2J2.2-3.1. Pide que creen otro sistema de representación, dando un poco las guías de cómo hacerlo, pero dejando libertad para que lo hagan como ellos quieran [E, 2].
 - 2J2.2-3.1(I)1. Dejando abierta esa forma, pretende que los alumnos vean que existen todo tipo de formas de representar [I, M].
 - 2J2.2-3.1(I)2. P pretende que los alumnos vean la conexión entre las distintas representaciones y que la suma sigue siendo la misma [I, M].

Comentario 3

El tercer ejercicio es más reflexivo, entonces van a tener que reflexionar sobre cuál es la manera más adecuada de representar. Está bien porque van a tener que comparar distintos sistemas y ver

un poco esa forma, ¿no? Da un poco las guías de cómo hacerlo, pero da libertad. Y van a ver los pros y contras de cada uno de los sistemas.

- 2J3.1-3.1. Plantea un tercer ejercicio [E, M].
 - 2J3.1-3.1(I)1. El tercer ejercicio es más reflexivo, ya que tendrán que reflexionar sobre cuál es la manera más adecuada para representar, para lo que tendrán que comparar los distintos sistemas [I, M].

Comentario 4

Aunque se lo pone como obligación del examen..., pero sí que van a ver la utilidad de representarlo de alguna manera, ¿no? Que ellos mismos construyan y que puedan utilizarlo en un examen..., eso les va a servir para el examen... Aunque es un poco obligatorio, pero así de paso ven la utilidad de representar, ¿no?

- 2J4.1-3.1. Indica la forma de representar que tendrán que usar en el examen [E, 1].

Fragmento 2

Comentario 1

Ahora mismo están haciendo una operación, una resta, y la alumna tiene dudas. Entonces, está diciendo un poco cómo puede hacer para quitarle..., porque solo puede quitar 4 de esa fila. Bueno, están intentando hacer la resta con la llevada, pero claro, no puedo coger ninguna de la fila anterior, de la posición anterior. Entonces, ahí no sabía cómo hacerlo, le ha preguntado, ella [la formadora] ha esperado para que en grupo..., la pregunta quede en el aire... Y bueno, de hecho uno de los compañeros dice la manera de hacerlo, ¿no? Bueno, un poco la comunicación entre ellos.

- 2J1.1-3.2. Espera tras la pregunta de un alumno [E, D].
 - 2J1.1-3.2(I)1. Para la pregunta quede en el aire para el grupo de alumnos [I, D].

Comentario 2

Ha sido muy visual, ¿no? Ha visto cuál era el problema, yo tengo que quitarle 5..., entonces de manera muy visual ha quitado 4 y..., «tengo que quitar otra más, ¿cómo lo hago?, hay que poner aquí más...». Entonces es esa idea, muy visual, manipulativa, de cómo hacer la llevada, ¿no? Cómo expresar el mismo número utilizando la siguiente fila, la de las decenas. El compañero ya lo había visto y la chica ya lo ha visto bien. Ha sido muy visual, que es un poco el objetivo del material, ¿no?

- 2J2.1-3.2. Pregunta cómo expresar el número de otra forma, cómo conseguir más [cuentas en el ábaco] tras quitar 4, haciendo ver que hay que quitar 5 [E, 3].
 - 2J2.1-3.2(I)1. Pretende que los alumnos vean cómo hacer la llevada, es decir, cómo expresar el mismo número empleando la siguiente fila, la de las decenas, de una forma visual y manipulativa, que sería el objetivo del material [I, M].

Comentario 3

Está relacionándolo con la idea de escribir de otra manera, agrupar de otra manera los números para llegar a... Que es un poco la llevada, ¿no?, que tienes que reagrupar un poco los grupos para poder ir pasando a otro..., ¿no?, tienes que reagrupar. Entonces, está diciendo «cómo reescribir el 700 de otra manera», es la pista que le ha dado, aunque la alumna al principio simplemente ha puesto una, pero no ha visto todavía la equivalencia de que hay que quitar 1 de las centenas y se

convierte en 10 en la siguiente, ¿no? Entonces, mediante preguntas, «cómo lo consigo, pero que el número se mantenga», ¿no?, que eso es lo importante.

- 2J3.1-3.2. Pregunta cómo se puede escribir 700 de otra manera manteniendo el número [E, 2].
 - o 2J3.1-3.2(I)1. Pretende que agrupen de otra manera, que vean que para hacer la llevada hay que reagrupar, es decir, que una centena se convierte en 10 en la siguiente [unidad] [I, M].

Comentario 4

«Ah, vale» [se ríe]. Yo creo que ha surtido efecto. Igual, ¿no?, ya he quitado 4, tenemos 700, hay que quitar otro, pero tengo que reescribirlo, agruparlo de distinta manera para poder quitarlo. Entonces, yo creo que ha surtido efecto.

Comentario 5

Está conectando..., o sea, ese hecho, «bueno, necesito reescribir de otra manera», lo ha reescrito... Entonces, está viendo, y ha confirmado con el alumno, cómo se escribe, pues 6×10 a la..., etcétera. Y ahora, ¿cómo hacemos? Está relacionando cuál es el proceso algebraico, la representación del número. Y ahora, llega el problema en el que tengo 10 en una, con lo cual, cómo puedo representar ese número... Entonces, va a representarlo de otra manera y ya después verán que solamente hay que quitarle uno más.

- 2J5.1-3.2. Está viendo con los alumnos cómo han reescrito el número, haciendo ver que es 6×10 a la..., es decir, relacionando la representación del número con el proceso algebraico [E, 3].
- 2J5.2-3.2. Pregunta cómo representar el número de otra manera ahora que hay 10 en una [varilla, en la de las decenas] [E, 2].
 - o 2J5.2-3.2(I)1. Cuando se represente de otra manera, se verá que simplemente hay que quitar una [cuenta] más [I, M].

Comentario 6

Bueno, entonces eso es la llevada; primero ha tenido que quitar 5 unidades y luego quitar las 4 decenas ha sido bastante directo. Yo creo que toda la explicación ha sido muy visual y se ha entendido muy bien. Y lo ha conectado con lo que han visto antes de la llevada, ¿no?

Comentario 7

Ahí ha parado y ha hecho que ellos verbalicen, que expliquen lo que han entendido con palabras. Como la explicación era ambigua, ella ha reforzado que lo que han hecho es desagrupar, que se puede realizar esa resta porque se va desagrupando. Ha reforzado la parte clave del proceso.

- 2J7.1-3.2. Pide a los alumnos que verbalicen, que expliquen lo que han entendido [E, 2].
- 2J7.2-3.2. Hace ver que para poder realizar la resta han desagrupado, reforzando así esa parte del proceso [E, 2].

Comentario 8

Ahí la alumna lo ha relacionado con el papel, con cómo hacían esa llevada. Es un poco también el objetivo de esta actividad, que vean ellos cómo manipulativamente, así como algebraicamente, de las dos maneras, ¿no?, cómo tienen esa conexión. Entonces, ella lo pregunta y dice que tiene que explicar el porqué. Esta alumna está muy cerquita de tener muy conectadas las dos formas, la visual y la algebraica.

- 2J8.1-3.2. Dice a una alumna que tiene que explicar cómo lo hace en papel porque tienen que ver la conexión entre la forma manipulativa y la algebraica, que es parte del objetivo de la actividad [E, 3].

Fragmento 3

Comentario 1

Va a resolver uno de los problemas y va a explicar cómo es la representación con uno de los materiales manipulativos. De nuevo, va a resolverlos con los alumnos a través de preguntas que ellos van a ir respondiendo, creando la solución.

- 2J1.1-3.3. Empieza a resolver uno de los problemas mediante la representación de uno de los materiales manipulativos con ayuda de los alumnos [E, 2].

Comentario 2

Ahí está explicando la manera de representar el número con ese material manipulativo, cuántas varillas hay, dónde se coloca cada una de las posiciones...

- 2J2.1-3.3. Pregunta cuántas varillas hay [que poner] [E, M].
- 2J2.2-3.3. Explica la manera de representar un número con este material manipulativo [E, 3].
- 2J2.3-3.3. Indica dónde se coloca cada una de las posiciones [E, 2].

Comentario 3

Ahora va a la suma, cómo se van sumando números, el concepto de sumar, el de añadir. Entonces, va viendo cómo se iría añadiendo. Entonces, los alumnos van viendo la manera de representar 4 más, pues sube uno arriba, ¿vale? Van representando un poco... Ven cómo se puede representar el hecho de sumar en este material.

- 2J3.1-3.3. Plantea ahora la suma, incidiendo en que sumar es añadir [E, 2].
- 2J3.2-3.3. Explica cómo se suma en este material, haciendo ver la manera de representar 4 [decenas] más, indicando que hay que subir una [cuenta] arriba, haciendo ver que las de 5 van arriba y las de 1 van abajo [E, 3].

Comentario 4

Ahí ven la equivalencia, pero bueno, es un poco la característica de este material, ¿no?, que van 5..., pues dos maneras de representarlo, o directamente va uno arriba o no... O sea, que se va viendo la equivalencia y un poco el uso que se puede hacer; conociendo el ábaco, es la manera de ir representando esa suma.

- 2J4.1-3.3. Presenta dos maneras de representar en el ábaco el 5 [en la varilla de las centenas], poniendo una [cuenta] directamente arriba o no, viendo que son equivalentes [E, 2].

Comentario 5

Ahí está mostrando la relación entre el simbólico y la representación del material, reforzando la idea de posición de las unidades, las decenas y las centenas, el sistema posicional, y la particularidad de cómo se usa este material, que se colocan las de 5 arriba y las de 1 abajo, ¿no?, o sea, un poco ver la relación entre las dos.

- 2J5.1-3.3. Muestra la relación entre lo simbólico y la representación del material, reforzando la idea de la posición de las unidades, las decenas y las centenas, es decir, la idea de sistema posicional [E, 3].

Comentario 6

Ahora ha pasado al siguiente material; cómo representa cada uno de los bloques multibase, pues son esas placas, las planchas..., las centenas, las decenas..., pues las va colocando y es la misma idea de ir añadiendo para sumar y ahora ver cómo los agrupa con este nuevo material.

- 2J6.1-3.3. Realiza la suma con los bloques multibase, representando y colocando por columnas las placas o planchas..., las centenas, las decenas..., incidiendo en la idea de agrupar o de añadir para sumar [E, 3].

Comentario 7

Ahí habla de agrupar, porque es un poco la llevada, si consigues 10 de algunos de los grupos, cómo agrupar. Entonces está viendo que esta suma no tiene llevada, por eso habla siempre de la suma de las columnas. Entonces, ahí no se ve cómo sería construir un bloque del siguiente, pero vamos, ahí ve que la estrategia sería ver si tengo que agrupar o no después de añadir.

- 2J7.1-3.3. Hace ver que en esta suma no hay que agrupar porque no hay 10 en ninguno de los grupos, es decir, no hay llevada [E, 3].
 - 2J7.1-3.3(I)1. Aunque en esta suma no se ve cómo sería construir un bloque del siguiente, sí se ve que la estrategia consiste en pensar si hay que agrupar o no después de añadir [I, M].

Comentario 8

Ahí está explicando el porqué, o sea, el 210 realmente está representando..., se está agrupando por el sistema posicional decimal, pues el número realmente tiene 0..., ¿vale?, pues cada una de las potencias de 10, ¿no? Entonces está viendo un poco por qué funciona, por qué va haciendo los grupos, por qué están colocados de esa forma. Entonces, va a colocar en la pizarra las tres para crear la unión de las tres, ¿no?; tanto el material manipulativo como todo, pues está viendo este proceso... Y por qué funciona es esta expresión en potencias de 10 y luego cómo voy sumando y

haciendo la propiedad distributiva, que ha dicho, para ir haciendo las agrupaciones de los números.

- 2J8.1-3.3. Empieza a realizar la suma con expresiones en potencias de 10 [E, 2].
 - 2J8.1-3.3(I)1. Para realizar la suma hay que emplear la propiedad distributiva para ir haciendo las agrupaciones de los números [I, M].

Comentario 9

Ahí les ha explicado... Ahí ya se ve esa conexión con todas las formas. Y luego, pues la llevada, verlo y tal... Sería supongo el siguiente paso. Pero al final verían eso, que la base de todo en matemáticas está ahí, en la propiedad distributiva y en la descomposición del número.

- 2J9.1-3.3. Hace ver que usa la propiedad distributiva y la descomposición del número [E, 2].
- 2J9.2-3.3. Explica la conexión con todas las formas [E, 2].

Comentario 10

De esta forma tan visual, con esta conexión, solamente el hecho de plantearnos qué pasaría si vemos una llevada, pues a partir de ahí yo creo que los alumnos... Está explicando... Ya se ve claramente cómo las agrupaciones van cambiando, la propiedad distributiva... Van viendo un poco en los tres ámbitos cómo va cambiando el juego, ¿no? A partir de aquí ven cómo se generaliza en las tres maneras de entenderlo.

- 2J10.1-3.3. Plantea qué pasaría si hubiera llevadas [E, 2].
- 2J10.2-3.3. Explica en los tres ámbitos [en los diferentes sistemas de representación] que las agrupaciones irían cambiando, entrando en juego la propiedad distributiva [E, 2].

Comentario 11

Está explicando otro tipo de representación, con tabla. Está viendo toda la equivalencia entre todo... La parte gráfica... ha dicho iconos, ¿no? Está viendo otra manera de hacer, poniendo de relieve el método Singapur, o sea, que está con una explicación de formas de representar, ¿no?, todas válidas y complementarias.

- 2J11.1-3.3. Explica otro tipo de representación: la tabla gráfica [E, 3].
 - 2J11.1-3.3(I)1. Las diferentes formas de representar que explica son todas válidas y complementarias [I, M].
- 2J11.2-3.3. Pone de relieve el método Singapur [E, 2].

Comentario 12

Aquí ya ha hecho el proceso un poco que se va siguiendo en primaria, cómo se va introduciendo esta representación...; cómo se llega al final a lo más abstracto, que es el final, que es la operación que aparece en primaria; lo abstracto, que es el conocimiento que aprenden los maestros que está detrás de todo; y cómo el proceso que va haciendo manipulativo de representación va llegando hasta eso, ¿no? Y cómo históricamente se ha ido llegando también por ese proceso. Ha hecho un poco el camino como se va aprendiendo en el aula.

- 2J12.1-3.3. Plantea el proceso que se seguiría en primaria, yendo desde la representación manipulativa hasta lo abstracto, que es el final, la operación que aparece en primaria [E, 3].
 - 2J12.1-3.3(I)1. Lo abstracto es el conocimiento es aprenden los maestros y que está detrás de todo [lo visto en la sesión] [I, M].

Comentario 13

Aquí han visto realmente cuál es la fase en la que se enseña, ¿no?, con la que han aprendido ellos y con la que se enseña. Están viendo todo el proceso que ha llevado históricamente a construir el sistema decimal y cómo funciona el sistema decimal. Se ha mostrado todo el camino y qué es lo que se enseña, los algoritmos y todo el proceso que hay detrás.

- 2J13.1-3.3. Hace ver cuál es la fase que se enseña [en primaria], que es la del algoritmo, incidiendo en cómo aprendieron los alumnos [E, 2].

ANEXO 30

Eventos e interpretaciones de Lucas en la fase 2

Nota 1: Cada evento e interpretación se presenta junto con el comentario del que se ha extraído, así como con la etiqueta que lo identifica y el código que se le ha asignado. No obstante, no todos los comentarios presentan eventos o interpretaciones, bien por no contener ninguno, bien por haberse trasladado la información al respecto a otro comentario que aborde el mismo asunto, por lo que algunos eventos e interpretaciones pueden contener información de comentarios distintos del que acompañan. La traslación de información entre comentarios no se indica para no complejizar el documento.

Nota 2: El texto presentado entre corchetes en algunos eventos e interpretaciones se corresponde con información incluida por el investigador.

VÍDEO 1

Fragmento 1

Comentario 1

La formadora está introduciendo a los alumnos en la actividad, que es una actividad matemática porque les está pidiendo que cuenten el número de palillos que tienen. Les ha hablado también de los objetos con los que van a tener que hacer la actividad, que son palillos y gomas. Ha aludido a un conocimiento matemático, que a lo mejor piensa que alguno puede tener si ha cursado las matemáticas de las Ciencias Sociales, al hablar de los contrastes de hipótesis; aunque nada van a tener con esto, ha hecho alusión a un conocimiento matemático que posiblemente algunos tengan. Y ahora se dispone a comenzar la actividad.

- 2L1.1-1.1. Introduce a los alumnos una actividad matemática consistente en contar el número de palillos que tienen [E, 2].
- 2L1.2-1.1. Habla de los objetos con los que los alumnos van a tener que hacer la actividad: palillos y gomas [E, 2].
- 2L1.3-1.1. Hace alusión a un conocimiento matemático que piensa que algún alumno puede tener si ha cursado matemáticas de Ciencias Sociales: los contrastes de hipótesis [E, 3].

Comentario 2

La docente ha dejado claro cuál es el objetivo matemático de la actividad a todos los alumnos, que es que entiendan la escritura del número, que entiendan por qué se escribe el número de una determinada manera. Ha hecho alusión a ello para que los alumnos lo conozcan.

- 2L2.1-1.1. Indica el objetivo matemático de la actividad, que es que los alumnos entiendan la escritura del número, por qué se escribe el número de una determinada manera [E, 2].

Comentario 3

Ahí, a mi juicio, ha transmitido un conocimiento matemático a los alumnos. Les ha dejado entrever que la escritura del número 72 puede tener que ver algo con cómo tienen que agrupar los palillos, les ha dado una instrucción... no implícita, sino..., bueno, no sé cómo decirlo, en la que se ve que quizá los tengan que agrupar de 10 en 10, que agruparlos de 10 en 10 quizá sea una buena opción. No tengo muy claro que los alumnos hayan pillado esto bien, pero ella ha intentado que los alumnos vean que el sistema numérico decimal es muy cómodo y que quizá agruparlos de 10 en 10 les va a ayudar, por eso ha hablado del 72, el 7 y el 2, que lo ha repetido, ¿no? No sé si es realmente así como quieres que vaya haciendo las intervenciones [se refiere a mí, investigador que está con él viendo el vídeo]. No sé si este tipo de comentarios son los que... No estoy diciendo, por ejemplo, «contenido: pues la profesora quiere que los alumnos comprendan el porqué del sistema numérico decimal»; no te lo estoy diciendo así... «Tarea: pues la tarea es que con un conjunto de palillos, que no saben cuántos hay, porque tienen muchos, pues que establezcan una agrupación que les permita contar visualmente y entonces la tarea consiste en que se den cuenta de que agrupar de 10 en 10 es muy cómodo y por eso... el sistema numérico decimal». Pero no estoy indicando qué es contenido, qué es objetivo, qué es tarea... No es necesario, ¿no? [Se le indica que no hace falta que categorice cada evento e interpretación que haga].

- 2L3.1-1.1. Pide a los alumnos que realicen una agrupación de los palillos que tienen que les permita contarlos visualmente [E, 3].
 - 2L3.1-1.1(I)1. Pretende que los alumnos se den cuenta de que agrupar de 10 en 10 es muy cómodo, que lleguen al sistema numérico decimal [I, M].
- 2L3.2-1.1. Deja entrever a los alumnos que la escritura del número 72 puede tener algo que ver con cómo tienen que agrupar los palillos al hacer hincapié en que el 72 se compone de un 7 y un 2 [E, 3].

Fragmento 2

Comentario 1

La docente les ha preguntado cómo lo han organizado, los alumnos están explicando cómo lo han hecho y ella les está haciendo ver que esa agrupación no es lógica porque, si barajas esos paquetes amarillos que han hecho, pues no van a saber cuántos palillos hay. Su objetivo va claramente encaminado a que todos los paquetes tengan el mismo número de palillos o que, por lo menos, todos los paquetes que tengan la goma del mismo color tengan el mismo número de palillos; a ser preferible, 10. Luego a lo mejor habla de otro sistema de numeración y dice que no necesariamente tiene que haber 10 en cada paquete, pero su objetivo es que ellos vean que es muy importante para el conteo que el número de palillos que uno coge y mete en una goma debería ser el mismo. Es un contenido matemático aunque no lo parezca a simple vista; su objetivo es hacerles ver que eso es importante para que luego puedan contar.

- 2L1.1-1.2. Pregunta a los alumnos cómo han organizado los palillos [E, 2].
- 2L1.2-1.2. Hace ver a los alumnos que la agrupación que han hecho no es lógica porque no se puede saber [a simple vista] cuántos palillos hay al no tener los paquetes amarillos el mismo número de palillos, haciendo hincapié en que visualmente se tiene que poder saber cuántos palillos hay [E, 3].
 - 2L1.2-1.2(I)1. Su objetivo es que los paquetes que tengan la goma del mismo color tengan el mismo número de palillos, preferiblemente 10, y que los alumnos vean la importancia de esto para el conteo, para poder contar [I, M].
 - 2L1.2-1.2(I)2. Es posible también emplear sistemas de numeración en los que no se hagan agrupamientos de 10; a lo mejor lo comenta, pero no es su objetivo [I, M].

Comentario 2

Como ha visto que no se están enterando mucho de lo que tienen que hacer [se ríe], no se han enterado de que lo que se busca es que visualmente se vea cuántos hay... Ellos tienen anotado cuántos hay y entonces lo dicen, pero como no se han enterado, vuelve a decirles: «oye, ¿ese 8 y ese 5 de los 85 palillos que tienes no lo has utilizado para nada?, ¿quizá ese 8 no significa que tienes que tener 8 paquetes de algo y ese 5 son 5 que te quedan sueltos?». Ella quiere que los alumnos lleguen a agrupar de 10 en 10 sin que ella se lo llegue a decir, pero ya está dando otra

vez la misma pista que dio antes; ya empieza a dejarlo cada vez más claro porque ve que los alumnos no se enteran con esa primera instrucción [se ríe].

- 2L2.1-1.2. Pregunta si el 8 y el 5 del 85 lo han utilizado para algo en los paquetes [E, 2].
 - 2L2.1-1.2(I)1. Da una pista a los alumnos para que lleguen a agrupar de 10 en 10 sin que ella se lo llegue a decir, ya que está viendo que los alumnos no se enteran de lo que tienen que hacer únicamente con la primera instrucción [I, M].

Comentario 3

Esa pregunta no es una pregunta accidental. Otra vez vuelve a insistir. Les ha dicho, sin decírselo, que monten todos los paquetes con el mismo número de palillos para que luego puedan tener un conteo más rápido. No se lo ha dicho, pero se lo ha dejado entrever. Y eso tiene que ver justo con lo que va a querer mostrar después ella que tiene que ver con el sistema numérico, posiblemente decimal; no recuerdo si era eso lo que contó o no [se refiere a que no recuerda lo que ocurrirá en el vídeo, ya que lo vio en la fase anterior], o si luego habló del binario, del octal... Lo veremos ahora en la parte 3.

- 2L3.1-1.2. Plantea una pregunta [E, 1].
 - 2L3.1-1.2(I)1. Con la pregunta pretende que hagan los paquetes con el mismo número de palillos para tener un conteo más rápido, lo que tendrá que ver con el sistema numérico decimal [I, M].

Fragmento 3

Comentario 1

Esto también es matemático total. Ella empieza un poco a escribir matemáticamente qué quiere conseguir con esos paquetes. Está intentando hacer una extrapolación de los paquetes al significado del número. No ha escrito de forma accidental el $3 \times 20 + 3 \times 9$, lo está escribiendo porque busca encontrar la escritura del número.

- 2L1.1-1.3. Escribe de forma intencionada $3 \times 20 + 3 \times 9$, haciendo una extrapolación de los paquetes [de palillos] a la escritura del número [E, 3].

Comentario 2

Otra vez, igual, intenta que los alumnos vean que es importante que la escritura del número se adecúe a lo que han hecho con los palillos. Otra vez busca el sistema numérico decimal, busca que ellos sean capaces de darse cuenta de que quizá era mejor que hubiesen puesto 8 paquetes de 10, 9 paquetes de 10..., para que todos hubiesen podido contar, para utilizar un sistema universal. Es la tercera vez ya que hace alusión a esto en grupo, ¿no? Y no parece que todavía lo estén sistematizando [se ríe]. Pero vamos, ella va introduciéndose cada vez más a lo que quiere realmente explicar, que lo veremos ahora.

- 2L2.1-1.3. Hace ver a los alumnos que la escritura del número no se adecúa a los paquetes que han hecho con los palillos [E, 3].
 - 2L2.1-1.3(I)1. Pretende que los alumnos se den cuenta de que habría sido mejor hacer 8 paquetes de 10, 9 paquetes de 10..., es decir, emplear el sistema numérico decimal, un sistema universal, para que todos hubiesen podido contar [I, M].

Comentario 3

En la interacción con los alumnos, busca que justifiquen de forma adecuada por qué es mejor hacer paquetes de 10 que paquetes de 9. Vuelve otra vez a lo mismo, vuelve a intentar que aparezca en ellos la necesidad de agrupar de 10 en 10 porque es a lo que estamos acostumbrados cuando manejamos números, se agrupan de 10 en 10, ¿no? Busca otra vez esto en la interacción con los alumnos.

- 2L3.1-1.3. Pregunta por qué es mejor hacer paquetes de 10 que paquetes de 9 [E, 2].
 - 2L3.1-1.3(I)1. Pretende que aparezca en los alumnos la necesidad de agrupar de 10 en 10 [I, M].

Comentario 4

Otra vez, ya al final del vídeo, ha intentado hacer ver al grupo-clase que la escritura del número es importante a la hora de agrupar palillos, buscando otra vez lo mismo, ¿no?, que surja en ellos la idea de que el sistema numérico decimal es el sistema universal porque es el más cómodo.

- 2L4.1-1.3. Hace ver al grupo-clase que la escritura del número tendría que tener relación con los grupos de palillos [E, 3].
 - 2L4.1-1.3(I)1. Busca que surja en los alumnos la idea de que el sistema numérico decimal es el sistema universal porque es el más cómodo [I, M].

VÍDEO 2

Comentario 1

Está buscando en la interacción con los alumnos que encuentren una estrategia óptima para poder pasar de base 16 a base 2. Primero ha explicado un mecanismo que funciona, pero ha explicado que es muy largo y tedioso, y ahora está buscando junto con los alumnos una manera de poder hacer esto algo más cómoda.

- 2L1.1-2. Trata de que los alumnos encuentren una estrategia para pasar de base 16 a base 2 [E, 2].
- 2L1.2-2. Explica un mecanismo [para resolver el ejercicio] [E, 1].
- 2L1.3-2. Hace ver que el mecanismo planteado funciona, pero que es largo y tedioso, por lo que hay que buscar una estrategia que sea óptima [E, 3].
- 2L1.4-2. Plantea otra manera junto con los alumnos de poder hacer esto [el ejercicio] [E, 1].

Comentario 2

En la interacción con los alumnos ha obtenido algo que ella piensa que puede servir y entonces lo ha dejado anotado en la pizarra [se refiere a que ha escrito « $16 = 2^4$ »] para poderlo utilizar un poco más adelante posiblemente.

Comentario 3

Ha utilizado lo que le ha dicho el chaval que ha intervenido, que 16 se puede poner en potencias como 2^4 , y en su intento de escribir el B6 en base 16 como base 2, pues está transformando el 16 en potencias de 2, está intentando que los alumnos vean mediante transformaciones cómo van a poder escribir ese número en potencias de 2. Ya se ha cargado los 16, ya tiene potencias de 2, y ahora va a ir posiblemente a por el 11 y a por el 6, a descomponerlo de alguna manera para poderlo tener en potencias de 2. Así podrá expresar el número en base 2, es decir, como productos de coeficientes por potencias de 2, siendo los coeficientes solamente unos y ceros. Y a eso se va a dedicar ahora, entiendo, vamos a ver. Pero vamos, está allanando el camino con esa notación que ha escrito ahora: « $11 \times (2^4)^1 + 6 \times (2^4)^0$ ».

- 2L3.1-2. Emplea la propuesta de un alumno, que anotó en la pizarra y que se basa en que 16 se puede poner como 2^4 , para escribir B6 en base 16 como base 2, es decir, como productos de coeficientes por potencias de 2 [E, 3].
 - 2L3.1-2(I)1. Los coeficientes solo pueden ser unos y ceros [I, M].

- 2L3.2-2. Transforma los 16 en potencias de 2, haciendo ver a los alumnos cómo se puede llegar a escribir el número en potencias de 2 mediante esas transformaciones [E, 3].
- 2L3.3-2. Pregunta si el 11 y el 6, en la expresión $11 \times (2^4)^1 + 6 \times (2^4)^0$, hay que descomponerlos para poder tenerlos en potencias de 2 [E, M].

Comentario 4

Ha escrito... Está traduciendo los coeficientes que tiene ahí, el 11 y el 6, los ha puesto en base 2 y ahora su objetivo va a ser aplicar la propiedad distributiva para tener ya finalmente el número, que estaba inicialmente escrito en base 16, en base 2. El objetivo matemático que busca es que los alumnos vean que haciendo transformaciones se puede llegar a pasar de base 16 a base 2 de forma cómoda. Entonces, ha procurado escribir de forma adecuada el número para llegar a ese objetivo; ya lo tiene casi. Lo busca en la interacción con los alumnos, ella va preguntando a los alumnos, les hace ver como que lo están descubriendo ellos, aunque realmente va ella guiando todo el proceso.

- 2L4.1-2. Traduce el 11 a base 2, con ayuda de los alumnos [E, 2].
- 2L4.2-2. Traduce el 6 a base 2, con ayuda de los alumnos [E, 2].
 - 2L4.2-2(I)1. Su objetivo matemático es que los alumnos vean que haciendo transformaciones se puede llegar a pasar de base 16 a base 2 de forma cómoda [I, M].
 - 2L4.2-2(I)2. Realmente ella es quien va guiando todo el proceso y escribiendo el número de forma adecuada para llegar a su objetivo, aunque hace pensar a los alumnos que lo están descubriendo ellos [I, D].

Comentario 5

Ahora ha hecho un símil, posiblemente haya hecho alguna práctica previa con materiales manipulativos con los alumnos, en concreto con el ábaco, y ha hecho un símil con los coeficientes de las potencias de 2; cada vez que se cambia de potencia, pues estamos cambiando de varilla del ábaco, para que ellos vean que el material tiene que ver con la escritura, es decir, intenta conectar la escritura numérica con el material que han utilizado.

- 2L5.1-2. Conecta en una ocasión la escritura numérica, los coeficientes de las potencias de 2, con el ábaco [E, 3].
 - 2L5.1-2(I)1. Posiblemente porque los alumnos hayan hecho alguna práctica con materiales manipulativos previamente [I, D].

- 2L5.1-2(I)2. Quiere que los alumnos vean que el material tiene que ver con la escritura, que se cambia de varilla del ábaco cada vez que se cambia de potencia [I, M].

Comentario 6

Con la notación que tiene en la pizarra, con las cuentas que ha realizado, está explicando la distributiva del producto con respecto de la suma. Ha remarcado, para que los alumnos no se pierdan con los cálculos, que las cuentas que ha hecho del 11×16^1 se corresponden con lo que tiene dentro del corchete por 2^4 y que se corresponde con lo que tiene en la llave abajo, y ahora pondrá un «más» y seguirá explicando la propiedad distributiva con lo que tiene en la derecha.

- 2L6.1-2. Remarca que las cuentas que ha hecho del 11×16^1 se corresponden con lo que tiene dentro del corchete por 2^4 y que se corresponde con lo que tiene en la llave abajo, habiendo empleado la distributiva del producto con respecto de la suma en las cuentas que ha realizado en la pizarra [E, 3].
 - 2L6.1-2(I)1. Para que los alumnos no se pierdan con los cálculos [I, M].

Comentario 7

No había dicho el nombre hasta ahora, ahora ya lo ha soltado. Ha conectado lo que está haciendo con una propiedad de los números naturales que posiblemente ya les haya contado, si es que está ahora hablándoles de cambio de base. Entonces les ha hecho ver que esto es una propiedad que ya conocen.

- 2L7.1-2. Indica que ha empleado la propiedad distributiva del producto con respecto de la suma, conectando lo que está haciendo para realizar el cambio de base con una propiedad de los números naturales [E, 3].

Comentario 8

Ha hecho lo mismo que antes, ha seleccionado con llaves lo de arriba y con llaves lo de abajo. Se está preparando ahí abajo unas cajas para poner el número escrito, no sé si lo hará, pero parece que lo tiene preparado para escribir ahí el 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1 y el 0, para que quede ese número en base 2. Ha organizado bastante bien la pizarra para que le quepa todo sin necesidad de borrar. Y bueno, ha obtenido lo que quería. Y ahora vamos a ver qué continúa diciendo.

- 2L8.1-2. Conecta con llaves lo de arriba y lo de abajo [E, 2].
- 2L8.2-2. Dibuja unas cajas [son en realidad segmentos que representan las varillas de un ábaco] en la parte inferior de la pizarra [E, M].

- 2L8.2-2(I)1. Para poner el número escrito, para escribir 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, dejando así el número en base 2 [I, M].
- 2L8.3-2. Organiza bastante la pizarra [E, D].
 - 2L8.3-2(I)1. Para que quepa toda la información sin necesidad de borrar [I, D].

Comentario 9

Ahora les ha contado una regla nemotécnica que tiene mucho que ver con el contenido matemático y que tiene de trasfondo que 16 es 2^4 . Entonces, les ha explicado que basta con que escriban un coeficiente en base 2 utilizando cuatro cifras y el otro coeficiente en base 2 utilizando cuatro cifras y que las solapen. Y ha hecho alusión a David Calle y les ha explicado que es un youtuber para llamar quizá un poco la atención sobre el contenido matemático que a ella le interesa. Está diciendo que a ella no le vale, porque quiere que lo justifiquen en el examen, pero en el fondo sí le vale que lo aprendan así, aunque no se lo vaya a puntuar al máximo, es decir, quiere que sepan hacerlo al menos para poder comprobar si lo que han hecho manipulando el número les coincide con lo que David Calle dice que pueden hacer para obtener el número en base 2 de forma rápida.

- 2L9.1-2. Cuenta una regla nemotécnica, haciendo alusión al youtuber David Calle, que se basa en que 16 es 2^4 , haciendo ver que basta con escribir los dos coeficientes en base 2 utilizando cuatro cifras para cada uno y juntarlo [E, 3].
 - 2L9.1-2(I)1. Quiere llamar la atención sobre el contenido matemático que a ella le interesa haciendo ver lo que haría un youtuber [I, D].
- 2L9.2-2. Dice que a ella no le vale la regla nemotécnica [E, 1].
 - 2L9.2-2(I)1. Porque quiere que los alumnos lo justifiquen en el examen, aunque en el fondo sí le vale que lo aprendan así, pero no se lo puntuará al máximo, es decir, quiere que al menos sepan hacerlo para poder comprobar si lo que han hecho manipulando el número les coincide con lo que David Calle dice que pueden hacer para obtener el número en base 2 de forma rápida [I, M].

Comentario 10

Ha lanzado una pregunta para que los alumnos reflexionen, para intentar interaccionar con ellos: ¿se puede pasar de base 16 a base 2?, pues la respuesta es que sí; ¿se puede pasar de cualquier base a cualquier base sin pasar por base 10? Pues intenta ver qué opinan los alumnos y está

argumentando con ellos. Esta chica ha hecho una aportación que no le va a conducir a nada... Está intentando hacerles ver por qué sí se puede pasar de base 16 a base 2 de forma rápida y por qué pasar de base 15 a base 2 no es tan rápido, habría que realizar bastantes más cálculos.

- 2L10.1-2. Pregunta si se puede pasar de base 16 a base 2 sin pasar por base 10 [E, 2].
- 2L10.2-2. Pregunta por el cambio desde la base 15 a la base 2 [E, 2].
 - 2L10.2-2(I)1. Para que vean por qué se puede pasar de base 16 a base 2 de forma rápida y por qué para pasar de base 15 a base 2 habría que realizar bastantes más cálculos y no sería tan rápido [I, M].

Comentario 11

Ahí ha dado un contenido..., algo importante. ¿Cuándo se puede pasar de una base a otra de forma inmediata? Pues cuando una base es potencia de la otra base. Para llegar a eso podría haberlo contado al principio y después hacer ejemplos, pero ha decidido primero poner un ejemplo, que vean que puede ser sencillo pasar de base 16 a base 2. Después les ha preguntado qué harían con un número en base 15, se han perdido un poco, se podría pasar a base 2, pero es ciertamente muy laborioso. Y ahora les está diciendo que a lo mejor pasar de base 8 a base 2 pues también puede ser rápido, ¿no?, pasar de base 4 a base 2 también puede ser rápido; se puede pasar de una base a otra siempre y cuando una puedas ponerla como potencia de la otra; esto, que es un resultado importante, lo ha enunciado como consecuencia de un ejercicio que ha resuelto con ellos. Cuando hace aserciones de este tipo, que ella considera importantes, alza la voz; lo que pasa es que no te lo estoy comentando porque me has dicho que no... [se refiere a mí, investigador que está con él viendo el vídeo], esto no es relevante en este caso, ¿no? [Se le indica que puede comentarlo si considera que tiene relación con aspectos matemáticos o didáctico-matemáticos de la práctica de enseñanza de la formadora]. Bueno, en este caso sí tiene relación. Cuando da un resultado importante, alza la voz. Incluso, cuando quiere conseguir que los alumnos asocien que algo que está diciendo puede tener relación con la solución del ejercicio, alza la voz; como cuando decía: «el 72, el 7 y el 2 [lo dice subiendo el volumen], ¿tiene algo que ver con las gomas?»; pues también alzaba la voz. Es una técnica que utiliza generalmente Nuria cuando quiere enfatizar algo que es importante matemáticamente para los alumnos.

- 2L11.1-2. Explica que para pasar de una base a otra de forma inmediata es necesario que una base sea potencia de la otra, llegando así al resultado del ejercicio: primero se ha propuesto un ejemplo sencillo, pasar de base 16 a base 2;

luego se ha preguntado cómo se haría en base 15, viendo que sería más laborioso; y por último se llega al resultado del ejercicio, al contenido final [E, 3].

- o 2L11.1-2(I)1. A partir del resultado importante al que se ha llegado, pretende que los alumnos vean que pasar de base 8 a base 2 o de base 4 a base 2, por ejemplo, también puede ser rápido [I, M].
- 2L11.2-2. Alza la voz cuando hace aserciones que considera importantes [se refiere a cuando la formadora dice que 16 es «potencia» de 2] [E, D].
 - o 2L11.2-2(I)1. Se trata de una técnica que usa la formadora cuando quiere enfatizar algo que matemáticamente es importante para los alumnos [I, M].

VÍDEO 3

Fragmento 1

Comentario 1

Bueno, va a utilizar la clase para algo muy potente, que es para representar en este caso sumas y restas mediante diferentes sistemas de representación. Les ha dado, por lo que parece, tres materiales: el ábaco vertical, el sorobán y los bloques multibase, y quiere que sean capaces de representar cómo [enfatisa «cómo»] se hace la suma de esos dos números con esos materiales, que además hagan la suma con el sistema de representación simbólico-numérico que ya conocen y que de alguna forma interpreten qué puede significar para ellos hacer una suma con tablas. Si conectan esas tres formas de representar la suma, entonces habrán aprendido a sumar de verdad. Si la clase se desenvuelve correctamente, desde luego habrá servido para mucho. Y ese esquema que ha hecho en la pizarra está bien porque lo va a dejar, posiblemente. Lo que ella quiere ver es que una suma, una resta, una operación matemática, se puede expresar mediante distintos sistemas de representación, y ahí los ha dejado. Lo que llevamos hasta este minuto 3.37, todo es matemático, ¿no?, está dando unas instrucciones matemáticas del proceso que quiere que hagan y además de lo que ella quiere que aprendan.

- 2L1.1-3.1. Indica a los alumnos que primero tienen que representar unas sumas y unas restas con tres materiales: el ábaco vertical, el sorobán y los bloques multibase [E, 2].
- 2L1.2-3.1. Dice que hay que representar cómo [enfatisa «cómo»] se hace la suma, el proceso [E, 3].
- 2L1.3-3.1. Indica a los alumnos que además hagan la suma en el sistema de representación simbólico-numérico [E, 3].
- 2L1.4-3.1. Pide a los alumnos que por último hagan la suma con una tabla [E, 2].
 - 2L1.4-3.1(I)1. Conectando las tres formas de representar la suma, los alumnos aprenderán a sumar de verdad [I, M].
 - 2L1.4-3.1(I)2. Pretende hacer ver que una operación se puede expresar mediante distintos sistemas de representación [I, M].
- 2L1.5-3.1. Hace un esquema en la pizarra [E, D].

Comentario 2

Alude al examen porque cuando uno alude al examen ya todo el mundo escucha, ¿no? Y les ha explicado qué es lo que para ella es importante, vuelve a incidir en que no es importante que representen el número final, sino que representen el proceso, y entonces les ha dicho que les va a preguntar esto en el examen y que les va a preguntar de forma gráfica que vayan indicando cómo van realizando ese proceso. Les ha indicado que pueden grabar vídeos para luego recordarlo bien, que esto es algo importante y que además es algo que lo va a preguntar de la única forma que lo puede preguntar. Quiere que entiendan que representar sumas y restas con material manipulativo es algo matemáticamente interesante porque les va a enseñar cómo se suma de verdad. Y vuelve a alzar la voz otra vez cuando ha dicho eso, ¿no?, es una técnica que utiliza ella generalmente parece, ¿no?, cuando dice algo importante, alza la voz; algún alumno un poco ágil podría tenerlo en cuenta para ir anotando estas cosas, porque se le nota bastante cuando va a decir algo que es trascendente.

- 2L2.1-3.1. Dice que en el examen va a pedir a los alumnos que representen el proceso de la suma con el material manipulativo de forma gráfica [E, 3].
 - 2L2.1-3.1(I)1. Quiere que entiendan que representar sumas y restas con material manipulativo es algo matemáticamente interesante porque les va a enseñar cómo se suma de verdad [I, M].
- 2L2.2-3.1. Indica a los alumnos que pueden grabar vídeos [de lo que hagan en clase] para recordarlo luego bien [E, D].
- 2L2.3-3.1. Alza la voz cuando dice eso [«gráficamente»] [E, D].
 - 2L2.3-3.1(I)1. Cuando dice algo importante, alza la voz; es una técnica que utiliza generalmente y que pueden tenerla en cuenta los alumnos para ir anotando las cosas importantes [I, D].

Fragmento 2

Comentario 1

Está intentando hacerles ver cómo hacer la resta con el ábaco vertical y está intentando que transformen, una vez que han quitado las unidades, que ahí sí que no había ningún problema... Pues el objetivo es que intenta hacer ver al chico cómo, para seguir realizando la resta, necesita a partir de una unidad de orden superior conseguir diez unidades de orden inferior, porque, si no, no va a poder coger y hacer esa resta; por eso le está diciendo todo el rato: «¿cómo puedes escribir este número de otra forma?». «De otra forma» significa que utilice el sistema numérico decimal para decir: «quito una centena y meto diez decenas, quito una decena y meto diez unidades, con eso puedo seguir restado». Cómo expresar un número de diferentes formas es lo que ella les intenta hacer ver para que puedan hacer la resta con el ábaco. Esto es matemático también, porque aunque les esté enseñando a hacer restas con el ábaco, les está enseñando a restar, es decir, por qué se resta como se resta con el algoritmo; se resta como se resta con el algoritmo porque nosotros hacemos esto que se hace con el ábaco.

- 2L1.1-3.2. Pregunta a los alumnos cómo pueden escribir el número de otra forma en el ábaco vertical, cómo transformarlo, para continuar con la resta tras haber quitado las unidades [E, 2].
 - 2L1.1-3.2(I)1. Quiere hacer ver que, para poder continuar con la resta, hay transformar una unidad de orden superior en diez unidades de orden inferior, es decir, quitar una centena y meter diez decenas y, luego, quitar una decena y meter diez unidades, usando así el sistema numérico decimal [I, M].
 - 2L1.1-3.2(I)2. Pretende que los alumnos aprendan por qué se resta como se resta con el algoritmo a través del ábaco [I, M].

Comentario 2

Cuando les ha dicho: «¿cómo está aquí escrito 700?», el chico ha dicho: «sí, aquí hay 6 y ahí hay 10», y ella ha dicho: «bien, hay $6 \times 10^2 + 10 \times 10^1$ ». Es decir, ha intentado conectar el ábaco con el sistema de numeración decimal, es decir, la forma aritmética, la forma numérica, con la forma manipulativa.

- 2L2.1-3.2. Hace ver, tras preguntar cómo está escrito el 700, que ahora tienen $6 \times 10^2 + 10 \times 10^1$, conectando el ábaco, la forma manipulativa, con el sistema de numeración decimal, con la forma aritmética o numérica [E, 3].

Comentario 3

La chica cree que hace en papel algo distinto a lo que está haciendo en el ábaco, claramente. Entonces, Nuria le ha dicho: «¿qué haces en papel?»; intenta hacerle ver que es lo mismo, que restar en papel es equivalente a restar con el ábaco.

- 2L3.1-3.2. Pregunta a una alumna, a raíz de un comentario de esta, qué es lo que hace en papel [E, 1].
 - o 2L3.1-3.2(I)1. Quiere que la alumna vea que restar en el papel es equivalente a restar con el ábaco [I, M].

Fragmento 3

Comentario 1

Es un poco parecido a la conversación que ha tenido con los chicos antes cuando ha hablado del ábaco vertical [se refiere al fragmento 2 de este vídeo]. Está un poco explicando..., antes era una resta, ahora es una suma... Está intentando que vean cómo tienen que ir utilizando el sorobán, en este caso, para hacer esa suma, jugando con las unidades, con las decenas y con las centenas, y con la dificultad que plantea el sorobán con esa varilla central..., que solamente tienes 5 bolitas y cuando tienes 5 tienes que subirte una arriba.

- 2L1.1-3.3. Está explicando una suma con el sorobán [E, 2].
- 2L1.2-3.3. Explica la dificultad que plantea el sorobán con la varilla central, haciendo ver que cuando tienes 5 bolitas hay que subir una a la parte de arriba [E, 2].

Comentario 2

No te lo he dicho antes, pero bueno, es otra vez lo mismo. Ha conectado, una vez que ha realizado la suma con el sistema de representación numérico, pues ha intentado ver que el 753 es lo mismo que tiene en el sorobán, es el 5 más los 2 de abajo, en las centenas, que es un 7, el 5 de las decenas, que es el 50, y el 3 que tiene abajo en las unidades, que es el 3. Es decir, a partir del 210, sumando ese 543, obtiene ese 753 de forma equivalente a como realiza la suma en el sistema numérico. Y ahora va a empezar con los bloques multibase, vamos a ver cómo lo hace.

- 2L2.1-3.3. Realiza la suma con el sistema de representación numérico [E, 2].
- 2L2.2-3.3. Conecta el sorobán con el sistema numérico, haciendo ver que el 753 es lo mismo que tiene en el sorobán, es el 5 más los 2 de abajo, en las centenas, que es un 7, el 5 de las decenas, que es el 50, y el 3 que tiene abajo en las unidades, que es el 3, es decir, a partir del 210, sumando 543, obtiene ese 753 de forma equivalente en ambos sistemas [E, 2].

Comentario 3

Ha explicado cómo se haría con los bloques multibase, que es bastante más sencillo, y ahora intenta conectar todo esto otra vez con la escritura del número como potencias de 10, va a ver cómo puede sumar, me imagino que lo va a hacer así, cómo puede sumar el 210, con esa escritura que está poniendo, el 543, con la misma escritura que está poniendo, y agrupando potencias de 10

le va a salir el 753, es decir, va a utilizar otro sistema de representación para realizar la suma; vamos a ver si es eso lo que hace o no, pero tiene toda la pinta.

- 2L3.1-3.3. Explica cómo se haría la suma con bloques multibase [E, 2].
- 2L3.2-3.3. Empieza a realizar la suma en otro sistema de representación, escribiendo los números como potencias de 10 [E, 2].
 - 2L3.2-3.3(I)1. Con la escritura que está usando para sumar 210 y 543, al agrupar las potencias de 10 le va a salir el 753 [I, M].

Comentario 4

Conecta las propiedades que ha explicado de los naturales con lo que va a hacer ahora, las propiedades que ya habrá explicado, la conmutativa y la asociativa; y ha alzado la voz: «utilizo la propiedad conmutativa, la asociativa...» [lo dice aumentando el volumen de la voz], porque es en el fondo lo que va a hacer para ir agrupando potencias de 10 con potencias de 10 y tener la suma que busca.

- 2L4.1-3.3. Indica que, para realizar la suma, emplea la propiedad conmutativa, la asociativa y la distributiva de los números naturales [E, 3].
 - 2L4.1-3.3(I)1. Quizá los alumnos no vean tan claro el uso de la distributiva al tratarse de una suma muy sencilla [I, M].
- 2L4.2-3.3. Alza la voz cuando dice «conmutativa» y «asociativa» [E, D].

Comentario 5

Dice que utiliza la distributiva, aunque ahí que utiliza la distributiva..., no lo ven tan claro. Quizá hubiese sido bueno que les hubiese puesto que sumasen 270 con 543 para que viesen claro cómo hay que utilizar la distributiva para agrupar y tener a partir de 10 unidades de orden inferior 1 de orden superior. Ha dicho que se utiliza la distributiva, en efecto, pero no se ve con esa suma tan sencilla, ¿no?

Comentario 6

Hace dos ejemplos, uno sin llevadas, y ahora viene otro con llevadas, y ahora buscará esa estrategia... Todo esto que ha resuelto imagino que se lo va a volver a pedir ahora a los alumnos para que lo hagan ellos, ¿no? Me extrañaba que dejase esto así, simplemente con una suma sin llevadas.

- 2L6.1-3.3. Plantea un ejemplo con llevadas tras realizar uno sin llevadas [E, 2].

Comentario 7

Bueno, pues ahí tiene en la pizarra esa suma realizada con un conjunto bastante amplio de sistemas de representación; primero con el sorobán, después con los bloques multibase, después con el sistema numérico, después con el sistema numérico utilizando las potencias de 10, después ha utilizado el sistema de representación tabular-gráfico y por último ha utilizado el sistema tabular-numérico, es decir, tiene en la pizarra todo un despliegue de diferentes sistemas de representación para realizar la misma suma. A esto es a lo que quería ella llegar.

- 2L7.1-3.3. Utiliza el sistema de representación tabular gráfico [E, 3].
- 2L7.2-3.3. Utiliza el sistema de representación tabular numérico [E, 3].
- 2L7.3-3.3. Tiene en la pizarra plasmados todos los sistemas de representación que ha empleado para realizar la misma suma [E, 3].

Comentario 8

Ha conectado los sistemas de representación y les ha hecho ver que normalmente al final sí que se trabaja fundamentalmente la suma con el algoritmo y poco más, ¿no? Les ha hecho ver que quizá es mejor empezar con sistemas de representación manipulativos.

- 2L8.1-3.3. Indica a los alumnos que es mejor empezar a trabajar la suma con sistemas de representación manipulativos, usando luego otros sistemas de representación [E, 2].
- 2L8.2-3.3. Hace ver a los alumnos que normalmente se trabaja fundamentalmente con el algoritmo [simbólico] [E, 2].

ANEXO 31

Eventos e interpretaciones de Pablo en la fase 2

Nota 1: Cada evento e interpretación se presenta junto con el comentario del que se ha extraído, así como con la etiqueta que lo identifica y el código que se le ha asignado. No obstante, no todos los comentarios presentan eventos o interpretaciones, bien por no contener ninguno, bien por haberse trasladado la información al respecto a otro comentario que aborde el mismo asunto, por lo que algunos eventos e interpretaciones pueden contener información de comentarios distintos del que acompañan. La traslación de información entre comentarios no se indica para no complejizar el documento.

Nota 2: El texto presentado entre corchetes en algunos eventos e interpretaciones se corresponde con información incluida por el investigador.

VÍDEO 1

Fragmento 1

Comentario 1

Acaba de plantear la actividad, los objetivos... Es un problema aritmético en el que tendrán que contar los palillos para ver si la publicidad de la caja es correcta, ¿no? Está explicando el problema, con las características matemáticas... Es la interpretación que doy yo a este evento, a lo que acaba de hacer ahora mismo.

- 2P1.1-1.1. Presenta los palillos [E, 1].
- 2P1.2-1.1. Plantea que hay que ver si la publicidad de la caja es correcta [E, 1].

Comentario 2

Bueno, pues aquí, igual, está planteando el problema, en el campo de la aritmética, de «cuántos», cómo contar los palillos que vienen en la caja.

- 2P2.1-1.1. Plantea el problema, en el campo de la aritmética, que consiste en contar los palillos de una caja [E, 2].

Comentario 3

Ha descrito la tarea anteriormente y ahora está estableciendo los objetivos de la misma, de lo que pretende con esta tarea, cuyos elementos matemáticos, como ha dicho, serán el número y supongo que será trabajar los sistemas de numeración.

- 2P3.1-1.1. Establece los objetivos de la tarea, cuyos elementos matemáticos son el número y los sistemas de numeración [E, 3].

Comentario 4

Lo que acaba de decir va encaminado a la descripción de la tarea. El objetivo es trabajar los sistemas de numeración, que cada grupo establezca su propio sistema de numeración, que lo compare con el del grupo con el que va a trabajar, con el del grupo de al lado, y vean las ventajas y deficiencias de uno y de otro a la hora de ver cuántos palillos hay en total para ver cuál es el óptimo.

- 2P4.1-1.1. Plantea que cada grupo establezca su propio sistema de numeración para saber cuántos palillos hay [E, 2].
- 2P4.2-1.1. Indica que cada grupo tiene que juntarse con el grupo de al lado para ver cuántos palillos tienen en total [E, 3].
 - 2P4.2-1.1(I)1. Para que comparen los sistemas de numeración establecidos, viendo las ventajas y las deficiencias, y decidir cuál es el óptimo [I, M].

Fragmento 2

Comentario 1

Está interaccionando con los alumnos para ver las deficiencias que han tenido a la hora de agruparlo, ya que ha dicho que los agrupamientos amarillos eran unos de 15 y otros de 20 y, claro, eso no es óptimo para contarlos luego, para saber cuántos hay. Entonces está interactuando con los alumnos mostrándoles las deficiencias que han tenido a la hora de elegir el mismo color para distintos agrupamientos.

- 2P1.1-1.2. Interactúa con los alumnos, incidiendo en las deficiencias que hay en los agrupamientos amarillos que han hecho de 15 y 20 [palillos], haciéndoles ver que no es óptimo emplear el mismo color para distintos agrupamientos [E, 2].

Comentario 2

Ahora está relacionando su sistema de numeración, el que ellos han empleado, con el sistema de numeración decimal que usamos nosotros y está haciéndoles ver que no tiene relación, con la intención de que busquen relacionar la escritura del número con los agrupamientos que han hecho.

- 2P2.1-1.2. Hace ver a los alumnos que no hay relación entre la escritura del número y los agrupamientos que han hecho, relacionando el sistema de numeración empleado por los alumnos con el sistema de numeración decimal [E, 3].

Fragmento 3

Comentario 1

Aquí está intentando hacer ver que la utilización del mismo símbolo tiene que significar lo mismo para todos, ya que la goma rosa no ha significado lo mismo en el grupo 1, en el grupo 2, en el grupo 3... porque han utilizado distintos criterios. Entonces busca que el símbolo signifique lo mismo en todos los grupos.

- 2P1.1-1.3. Hace ver que la utilización de la goma rosa, de un símbolo, tiene que significar lo mismo para todos los grupos, poniendo de manifiesto que los distintos grupos la han empleado con distintos criterios [E, 2].

Comentario 2

Está viendo la descomposición que ha hecho cada grupo, el sistema numérico que cada grupo ha utilizado. El primer grupo ha utilizado grupos de 20 y de 9 y el segundo grupo ha empleado grupos de 20 y de 10. Está viendo la descomposición que ha utilizado cada grupo. Con cada grupo, para números no iguales, pero similares, han utilizado descomposiciones distintas y que no tienen que ver, como ha dicho antes en la interacción [se refiere al fragmento 2 de este vídeo], con la escritura del número, con el numeral.

- 2P2.1-1.3. Está viendo la descomposición que ha hecho un grupo de un número, empleando grupos de 20 y grupos de 9 [E, 3].
 - 2P2.1-1.3(I)1. La descomposición realizada no tiene que ver con la escritura del número, con el numeral [I, M].
- 2P2.2-1.3. Está viendo la descomposición que ha hecho otro grupo de un número, empleando grupos de 20 y grupos de 10 [E, 3].
 - 2P2.2-1.3(I)1. La descomposición realizada no tiene que ver con la escritura del número, con el numeral [I, M].

Comentario 3

Bueno, me estoy repitiendo, creo que antes me he anticipado. Está haciendo ver la nula relación que hay entre los grupos, la cantidad de grupos que han formado, con la escritura del número; está haciendo hincapié en eso, intentando que busquen una forma de agrupar que sí que tenga una relación con el número escrito.

- 2P3.1-1.3. Hace ver a los alumnos que no hay relación entre los grupos que han formado [de palillos] y la escritura del número [E, 3].

Comentario 4

Acaba de hacerles ver las ventajas que tiene el sistema de numeración decimal. Más que las ventajas... Culturalmente estamos acostumbrados a sumar de 10 en 10, ¿y por qué es más fácil?, por el sistema de numeración que usamos; y ahí es donde intenta hacer ver qué agrupamientos serían más sencillos, qué forma de agrupar los palillos sería más sencilla para poder contarlos de un vistazo, como se planteaba inicialmente.

- 2P4.1-1.3. Pregunta por qué es más fácil sumar de 10 en 10, haciendo ver que es a lo que estamos acostumbrados por el sistema de numeración que usamos, el sistema de numeración decimal [E, 3].
 - 2P4.1-1.3(I)1. Intenta hacer ver que sería más sencillo contar los palillos de un vistazo, como se planteaba inicialmente, si los agrupamientos se basaran en el sistema de numeración decimal [I, M].

VÍDEO 2

Comentario 1

Está planteando un problema de cambio de base de sistema de numeración; es el planteamiento inicial del problema.

- 2P1.1-2. Plantea un problema que consiste en pasar de base 16 a base 2 [E, 2].

Comentario 2

Está planteando una posible resolución del problema para pasar un número de base 16 a base 2. Pero, claro, está haciendo ver a los alumnos que esa solución no es la óptima, intentando resolver este mismo problema de una forma más eficiente.

- 2P2.1-2. Plantea una posible resolución del problema [E, 1].
- 2P2.2-2. Hace ver a los alumnos que esa solución no es óptima [E, 2].

Comentario 3

Ahora estamos con otra posible solución, pero, igual, estamos analizando si es fácil, si es difícil, si es óptima... Y, claro, es una forma de hacerlo que podría ser válida, pero que no es nada fácil. Estamos intentando buscar otra solución más sencilla.

Comentario 4

Les está haciendo ver que todos sabemos dividir en base 10, pero les está haciendo ver la dificultad de dividir un número en base 16 entre 2, para que vean que ese método que ha planteado la alumna no es muy sencillo, la dificultad que presenta la división en base 16.

- 2P4.1-2. Plantea otra posible solución, propuesta por una alumna, que consiste en dividir el número en base 16 entre 2 [E, 3].
- 2P4.2-2. Indica que la propuesta de la alumna podría ser válida, pero que no es nada fácil al tener que dividir en base 16 y no en base 10, que es lo que los alumnos saben hacer [E, 3].

Comentario 5

Ahora un alumno ha dado con la relación entre las dos bases, la relación entre la base 2 y la base 16, que es que 16 es 2^4 .

Comentario 6

Está descomponiendo el número B6 en la base 16, para hacer las manipulaciones necesarias para poder transformarlo a base 2.

- 2P6.1-2. Descompone el número B6 en la base 16 [E, 1].
 - 2P6.1-2(I)1. Para poder hacer las manipulaciones necesarias para transformar el número a base 2 [I, M].

Comentario 7

Ahora está transformando los coeficientes, en este caso 11 y 6, en base 16 a base 2 para cumplir el objetivo de transformar a base 2 el número, para obtener la expresión en sistema binario.

- 2P7.1-2. Transforma el coeficiente, el 11, de base 16 a base 2 [E, 2].
- 2P7.2-2. Transforma el coeficiente, el 6, de base 16 a base 2 [E, 2].

Comentario 8

Ahora ya empieza a relacionar esa expresión que ha obtenido al transformar los coeficientes a base 2 con la expresión final que quiere obtener, empezando a relacionar los coeficientes finales con esa expresión.

Comentario 9

Ahora está interaccionando con los alumnos para ver si realmente están comprendiendo la idea que está intentando mostrar de la relación de los coeficientes con la relación final que quiere obtener.

- 2P9.1-2. Hace ver a los alumnos la relación que hay entre la expresión que ha obtenido, al transformar los coeficientes a base 2, y los coeficientes de la expresión final que quiere obtener [E, 3].

Comentario 10

Aquí acaba de relacionar lo que están haciendo, las expresiones aritméticas, con el instrumento del ábaco; supongo que anteriormente habrán trabajado con el ábaco.

- 2P10.1-2. Relaciona en una ocasión lo que están haciendo, las expresiones aritméticas, con el instrumento del ábaco [E, 3].
 - 2P10.1-2(I)1. A lo mejor porque anteriormente han trabajado con el ábaco [I, D].

Comentario 11

Ahora acaba de relacionar lo que acaba de hacer con una propiedad básica de los números que es la propiedad distributiva.

- 2P11.1-2. Relaciona lo que acaba de hacer con una propiedad de los números, la propiedad distributiva [E, 3].

Comentario 12

Está resolviendo o aclarando el problema de que no haya salido el coeficiente de 2^3 . Está interactuando con los alumnos, tratando de resolver lo que pasa en esa situación, justificando que, si no aparece el coeficiente de 2^3 , se pone un 0 en la descomposición en base 2, en la expresión binaria.

- 2P12.1-2. Aborda el problema que le había surgido a un alumno al no aparecer el coeficiente de 2^3 , explicando que, si no aparece un coeficiente, se pone un 0 en la descomposición en base 2 [E, 3].

Comentario 13

Está analizando la equivalencia de cómo escribir un número de distintas formas incluso en un mismo sistema de numeración.

- 2P13.1-2. Está analizando la equivalencia de cómo escribir un número de distintas formas incluso en un mismo sistema de numeración [E, 2].

Comentario 14

Aquí está comentando y criticando las recetas que se dan para resolver un problema sin profundizar en el método de por qué esto es así. Está haciendo ver a los alumnos que lo importante no es tanto el resultado sino el procedimiento de cómo llegamos al resultado.

- 2P14.1-2. Comenta la receta que se emplearía para resolver un problema sin tener que profundizar en el porqué [E, 2].
 - 2P14.1-2(I)1. Quiere hacer ver a los alumnos que lo importante no es tanto el resultado sino el procedimiento de cómo llegamos al resultado [I, M].

Comentario 15

Ahora está recordándoles el problema inicial, porque llevamos mucho tiempo trabajando, realizando cálculos y transformaciones, que era saber si se puede transformar un número de base 16 a base 2 sin tener que pasar por base 10, viendo que la respuesta es «sí», en este problema.

- 2P15.1-2. Pregunta si se puede transformar un número en base 16 a base 2 sin pasar por base 10, haciendo ver que sí se puede [E, 2].

Comentario 16

Acaba de hacer una modificación del problema. Tenemos un problema inicial, que ya hemos resuelto, y ahora está modificando el problema, ha cambiado un dato, para ver cómo influye esa modificación en la resolución, para ver si se puede aplicar el mismo método de resolución o no.

Comentario 17

Ahora está haciendo ver lo que ha comentado antes, que las recetas muchas veces valen para un caso concreto, pero en cuanto hacemos una modificación en un dato del problema, como en este caso, pues ya no valdría.

- 2P17.1-2. Hace una modificación en el problema cambiando un dato, haciendo ver que la receta anterior ya no valdría en este caso [E, 2].
 - 2P17.1-2(I)1. Quiere hacer ver cómo influye la modificación de un dato en la resolución para ver si un mismo método se puede aplicar a distintos casos [I, M].

Comentario 18

Ahora acaba de generalizar el problema, es decir, la solución que ha dado para pasar de base 16 a base 2, ha generalizado el problema para ver cuándo este método funciona, en qué casos funciona.

- 2P18.1-2. Generaliza el problema, es decir, explica por qué se puede pasar de base 16 a base 2 con el método empleado [E, 2].

VÍDEO 3

Fragmento 1

Comentario 1

Aquí está indicando la tarea, que parece ser que consiste en expresar varias operaciones con varios materiales, con el objetivo de comparar esa misma operación con los distintos materiales que están utilizando en clase.

- 2P1.1-3.1. Indica la tarea a realizar, que consiste en expresar varias operaciones con varios materiales y comparar la operación con los distintos materiales utilizados [E, 3].

Comentario 2

Igual que en el vídeo anterior, está haciendo ver que lo que interesa es el procedimiento de la operación, cómo se llega al resultado, no que representen el resultado en cada instrumento.

- 2P2.1-3.1. Indica que quiere que representen el procedimiento de la operación, cómo se llega al resultado [E, 3].

Comentario 3

Ahora les está poniendo una nueva tarea, que consiste en realizar también esas operaciones con el lenguaje simbólico-numérico para que puedan comparar ambos procedimientos.

- 2P3.1-3.1. Dice que tienen que realizar también las operaciones con el lenguaje simbólico-numérico [E, 3].
 - 2P3.1-3.1(I)1. Para que puedan comparar ambos procedimientos [el sistema de representación manipulativo y el simbólico-numérico] [I, M].

Comentario 4

Ahora acaba de indicarles también que lo hagan en forma de tabla, y lo interesante, por lo menos a mi parecer, es que no lo han trabajado en clase, es decir, deja que ellos intenten descubrir la forma de representar esas operaciones por ellos mismos sin haberlo trabajado previamente en clase.

- 2P4.1-3.1. Indica a los alumnos que tienen que representar las operaciones en una tabla, haciendo ver que no han trabajado antes esta forma y que tienen que descubrirla por ellos mismos [E, 2].
- 2P4.2-3.1. Indica que en examen van a tener que hacer la representación gráfica [E, 2].

Fragmento 2

Comentario 1

Todo lo que está haciendo ahora es para ver la problemática de qué pasa en una resta cuando..., en este caso teníamos en las unidades 4 y hay que restarle 5, teníamos 0 decenas, entonces... para ver, para comprender el procedimiento, está utilizando un material manipulativo para comprender el procedimiento y huir de las típicas recetas que se usan, para que el alumno entienda el algoritmo de la resta.

- 2P1.1-3.2. Ayuda a los alumnos con el problema que tienen con una resta en el material manipulativo al tener que restar 5 unidades y teniendo solo 4 y ninguna decena [E, 2]
 - 2P1.1-3.2(I)1. Quiere que los alumnos entiendan el procedimiento, el algoritmo de la resta, a través de un material manipulativo y no mediante recetas [I, M].

Comentario 2

Aquí está interactuando con los alumnos para ver las equivalencias entre..., pues en este caso va a decir 1 centena, que son 10 decenas, y bueno, ahora verá que una decena son 10 unidades para ya resolver el problema que teníamos con esta resta.

- 2P2.1-3.2. Está interactuando con los alumnos [E, 1].
 - 2P2.1-3.2(I)1. Para que vean que 1 centena equivale a 10 decenas [I, M].

Comentario 3

Está interactuando con los alumnos para recordar todo el procedimiento que han utilizado para resolver el problema inicial que tenían de no poder quitar 5 unidades a un número que tenía 4.

- 2P3.1-3.2. Pregunta a los alumnos en qué ha consistido el procedimiento que han utilizado para resolver el problema de no poder quitar 5 unidades a un número que tenía 4 [E, 2].

Comentario 4

Está interactuando con la alumna para hacerle ver la relación que hay entre lo que hace en papel con lo que acaban de hacer ahora manipulativamente.

- 2P4.1-3.2. Interactúa con una alumna sobre lo que esta hace en papel [la resta] [E, 1].

- o 2P4.1-3.2(I)1. Quiere que vea la relación entre lo que han hecho manipulativamente y lo que hace en papel [I, M].

Fragmento 3

Comentario 1

Está trabajando la representación gráfica de un elemento manipulativo, ya que, como ha dicho, cuando hagan el examen lo van a tener que hacer así de esta forma gráfica.

Comentario 2

Ahora está trabajando cómo representar los números que... Bueno, el objetivo era sumar esos dos números, $210 + 543$, y ahora está viendo cómo representar en este material esos dos números.

- 2P2.1-3.3. Indica que va a sumar $210 + 543$ [E, 2].
- 2P2.2-3.3. Trabaja la representación de dos números con un elemento manipulativo de forma gráfica [E, 2].

Comentario 3

Bueno, no lo he comentado antes, está haciendo hincapié en que hay que sumar, en que hay que añadir, imagino que porque luego harán una resta; entonces hay que añadir, en este caso las unidades, las decenas y las centenas.

- 2P3.1-3.3. Hace hincapié en que hay que sumar, en que hay que añadir; unidades, decenas y centenas, en este caso [E, 2].

Comentario 4

Aquí está mostrando la equivalencia, cómo se trabaja con este material.

- 2P4.1-3.3. Está mostrando la equivalencia, cómo se trabaja con el material [E, 1].

Comentario 5

Acaba de explicar dos formas distintas de hacer lo mismo al trabajar con las centenas, haciendo hincapié en cuál de las dos es más sencilla dado el material que está usando, que es colocar la bola arriba directamente y no ir sumando unidades hasta agruparlas en 5, dejando luego una arriba y dos abajo. De las dos soluciones, ha visto cuál es la mejor.

- 2P5.1-3.3. Explica dos formas distintas de hacer lo mismo al trabajar con las centenas, colocar una bola arriba directamente o ir sumando unidades hasta agruparlas en 5, haciendo ver que la primera es mejor dado el material que están usando [E, 3].

Comentario 6

Ahora está relacionando el material manipulativo con la escritura simbólico-numérica para que vean la relación que hay.

- 2P6.1-3.3. Está relacionando el material manipulativo [el sorobán] con la escritura simbólico-numérica [E, 2].

Comentario 7

Ahora está utilizando otro material manipulativo, los bloques multibase, y está analizando cómo se representaría cada número de la suma con ese material.

- 2P7.1-3.3. Utiliza otro material manipulativo, los bloques multibase, viendo cómo representar cada número de la suma con ese material [E, 2].

Comentario 8

Aquí está trabajando lo que significa la suma, que viene a ser «unir», está uniendo las centenas, está uniendo las decenas y está uniendo las unidades.

- 2P8.1-3.3. Está uniendo [rodeando con la tiza] las centenas, las decenas y las unidades, trabajando lo que significa la suma [E, M].

Comentario 9

Nuevamente está conectando el material manipulativo con la escritura simbólico-numérica.

- 2P9.1-3.3. Está conectando el material manipulativo [los bloques multibase] con la escritura simbólico-numérica [E, 3].

Comentario 10

Ahora está conectando la escritura simbólico-numérica abreviada con la descomposición polinómica de los números, viendo su equivalencia.

- 2P10.1-3.3. Realiza la descomposición polinómica de los números, viendo su equivalencia con la escritura simbólico-numérica abreviada [E, 2].

Comentario 11

Está comentando las dos propiedades aritméticas que va a utilizar para realizar esa operación.

- 2P11.1-3.3. Indica las dos propiedades aritméticas que va a utilizar para realizar la operación [E, 3].

Comentario 12

Acaba de conectar los cuatro métodos, mostrando la equivalencia que hay entre los cuatro métodos con los que ha realizado la suma.

- 2P12.1-3.3. Conecta los cuatro métodos empleados para realizar la suma, mostrando la equivalencia entre los mismos [E, 3].

Comentario 13

Está de nuevo, como en algún vídeo anterior, modificando algún elemento para ver cómo varía el problema y qué solución le podemos dar a esa variación. No recuerdo la suma, pero, por ejemplo, si cuando sumamos nos pasamos porque tenemos más de 9 unidades, cómo resolvemos ese problema con cada uno de los métodos vistos.

Comentario 14

Ahora está analizando la resolución en cada uno de los cuatro métodos con los que han trabajado los alumnos en clase, viendo las equivalencias entre ellos.

- 2P14.1-3.3. Plantea una suma en la que se modifica un elemento, preguntando en qué varía [E, 1].
- 2P14.2-3.3. Hace ver, en cada uno de los métodos trabajados en clase por los alumnos, que ahora al sumar tenemos más de 9 unidades [E, 2].

Comentario 15

Acaba de realizar la suma con un nuevo método, con la tabla, viendo las equivalencias con los otros métodos, viendo que está haciendo lo mismo.

Comentario 16

Está explicando lo que es una estructura tabular, que se parece mucho al método clásico, pero está haciendo ver que se hace dentro de una tabla y diferenciando una forma numérica de otra icónico-gráfica.

- 2P16.1-3.3. Realiza la suma con otro método, con una tabla, indicando que tiene características icónico-gráficas, haciendo ver que está haciendo lo mismo que con los otros métodos [E, 3].
- 2P16.2-3.3. Realiza la suma con otro método, con una tabla, indicando que tiene características numéricas, haciendo ver que está haciendo lo mismo que con los otros métodos [E, 3].

Comentario 17

Está mostrando la transición que para ella es más adecuada desde un punto de vista didáctico, desde lo manipulativo, pasando por la tabla, hasta la escritura más abstracta, como también se hace en el método Singapur, tal y como menciona.

- 2P17.1-3.3. Muestra la transición didáctica más adecuada para ella, partiendo de lo manipulativo, pasando por la tabla y llegando finalmente a la escritura más abstracta [E, 3].
- 2P17.2-3.3. Menciona que la transición didáctica planteada se hace también en el método Singapur [E, 3].

Comentario 18

Está haciendo que los alumnos recuerden cómo trabajaron, que reflexionen sobre cómo les enseñaron a ellos a sumar, para ver si consideran que fue la mejor forma, ya desde un punto de vista profesional, pensando en cuando a ellos les toque..., para ver cuál es el método óptimo.

- 2P18.1-3.3. Pide a los alumnos que reflexionen sobre cómo les enseñaron a sumar [E, 1].
 - 2P18.1-3.3(I)1. Para que los alumnos piensen desde un punto de vista profesional, pensando en cuando a ellos les toque [enseñar], cuál es el método óptimo para enseñar a sumar [I, M].

ANEXO 32

Eventos e interpretaciones de Raquel en la fase 2

Nota 1: Cada evento e interpretación se presenta junto con el comentario del que se ha extraído, así como con la etiqueta que lo identifica y el código que se le ha asignado. No obstante, no todos los comentarios presentan eventos o interpretaciones, bien por no contener ninguno, bien por haberse trasladado la información al respecto a otro comentario que aborde el mismo asunto, por lo que algunos eventos e interpretaciones pueden contener información de comentarios distintos del que acompañan. La traslación de información entre comentarios no se indica para no complejizar el documento.

Nota 2: El texto presentado entre corchetes en algunos eventos e interpretaciones se corresponde con información incluida por el investigador.

VÍDEO 1

Fragmento 1

Comentario 1

Sí que me ha gustado lo que acaba de decir. Acaba de nombrar un libro en el que ellos pueden recopilar y buscar más información, y aprender, y eso está bastante bien; referido siempre a la actividad que supongo que van a realizar y a todas las destrezas que quiere que se alcancen.

- 2R1.1-1.1. Menciona un libro referido a la actividad que van a realizar y a las destrezas que quiere que se alcancen [E, 1].
 - 2R1.1.1(I)1. Los alumnos pueden buscar información en el libro y aprender [I, D].

Comentario 2

Vale, ahora mismo acaba de nombrar su intención, el objetivo de esta actividad y lo que pretende que ellos alcancen. Está bien, aunque el inicio de la actividad yo lo habría nombrado... Bueno, no se puede decir... [se refiere a que no lo dice porque iba a dar una alternativa].

- 2R2.1-1.1. Menciona su intención, el objetivo de la actividad, lo que pretende que los alumnos alcancen [E, 1].

Comentario 3

Ahí les está indicando la tarea a realizar, pero con la finalidad de conseguir el objetivo que ella había marcado al principio, ¿vale? Está intentando que los alumnos vayan agrupando y en esa tarea ya va directamente implícito ese objetivo que ella pretende conseguir.

- 2R3.1-1.1. Está indicando la tarea a realizar, que consiste en que los alumnos agrupen, en la cual está implícito el objetivo marcado al principio [de la sesión] [E, 2].

Comentario 4

Vale, lo que sí se aprecia muy bien es la finalidad en la metodología matemática, que se intenta inculcar a los niños..., o sea, el objetivo para que luego ellos en su práctica no se dediquen directamente a ir: «los números se escriben así, se agrupan así...», sino que intenta hacerlo de manera mucho más inductiva, o deductiva por parte de los alumnos, para que ellos lleguen a ese concepto; intenta abrirles la mente para que ellos vean cómo los niños, sin conocer la escritura de los números, pueden llegar a entenderlo. Es una metodología muy manipulativa, por supuesto, pero su intención es muy clara, es decir, a los niños no se les va directamente a: «escribe este número, este se escribe así, se agrupa así...», sino que lo tienen que ver muy visual, y eso es lo que ella está pretendiendo en esta tarea.

- 2R4.1-1.1. Plantea como objetivo que los alumnos piensen cómo se escriben los números y cómo se agrupan [E, 2].
 - 2R4.1-1.1(I)1. Con su metodología matemática pretende que los alumnos, cuando enseñen a los niños en primaria, aborden la escritura de los números de una manera inductiva, empleando una metodología manipulativa, para que los niños lleguen a comprender cómo se agrupan y cómo se escriben los números de una forma visual [E, M].

Fragmento 2

Comentario 1

Es muy evidente que lo que ella está pretendiendo con esa reunión por grupos es que los niños realmente cuando están aprendiendo cada uno tiene una visión y una organización diferente y entonces eso es lo que les ha mostrado a ellos. Cada uno ha decidido organizarlo de una manera o de otra porque eso es lo que se van a encontrar ellos en el aula y lo que pretende es que se adapten a esa mentalidad y que alcancen ese objetivo de decir: «voy a encontrar un alumno que va a organizar las cosas así», y al final entre todos tienen que llegar a ese acuerdo y a establecer unas normas.

- 2R1.1-1.2. Trata de ver si los alumnos han tenido que llegar a un acuerdo para llegar a una organización [de los palillos] [E, 2].
 - 2R1.1-1.2(I)1. Pretende que los alumnos se den cuenta de que en el aula [de matemáticas de primaria] se van a encontrar con que los niños realizan diferentes organizaciones, por lo que tienen que adaptarse a esa mentalidad [I, M].

Comentario 2

Efectivamente, está interactuando ahí muy bien con ellos porque les está haciendo razonar, es decir, «necesito verlo claro, porque tú puedes tener aquí un grupo y otro grupo, pero matemáticamente el concepto de qué número de palillos hay ahí no se aprecia». Eso es lo que les está haciendo ver, no se lo dice, pero se lo hace ver, es decir, tienen que ser ellos quienes lo deduzcan, porque en la metodología matemática lo que se pretende es que sean ellos los que a base de manipular alcancen ese objetivo que ella quiere, evitando siempre ella decirles las cosas directamente, que sean capaces de razonarlo.

- 2R2.1-1.2. Hace ver a los alumnos que en los grupos que han hecho no se aprecia matemáticamente el concepto de qué número de palillos hay, evitando decirles cómo solucionarlo [E, 1].
 - 2R2.1-1.2(I)1. En la metodología matemática lo que se pretende es que sean los alumnos quienes a base de manipular alcancen el objetivo propuesto, tratando de razonarlo ellos mismos [I, M].

Fragmento 3

Comentario 1

Lo que está haciendo es cotejar las diferentes posibilidades de los grupos para que ellos vean que se pueden agrupar de diferentes maneras; es el concepto que ella está trabajando ahí: este número lo puedo agrupar así con un grupo y con otro grupo lo puedo agrupar así, ¿vale? Es lo que ella está pretendiendo, porque es lo que se van a encontrar los alumnos en el aula.

- 2R1.1-1.3. Está viendo los agrupamientos hechos por un grupo [E, 2].
- 2R1.2-1.3. Está viendo los agrupamientos hechos por otro grupo [E, 2].
 - 2R1.2-1.3(I)1. Pretende que los alumnos se den cuenta de que en el aula [de matemáticas de primaria] se van a encontrar con diferentes maneras de agrupar [I, M].

Comentario 2

En esta interacción es como si estuviera provocando a los alumnos a ese razonamiento al que ella pretende que lleguen, ¿vale? Es lo que se ve claramente. Además, está esperando, sabe que le va a llegar la respuesta, la acaba de obtener, ¿vale?

- 2R2.1-1.3. Interactúa con los alumnos a través de preguntas, provocando que razonen [E, 1].

VÍDEO 2

Comentario 1

Ahí lo que está trabajando es el cambio al sistema binario, la forma de escritura de uno a otro. Es lo que está haciendo en ese momento, ¿vale?

- 2R1.1-2. Está trabajando el cambio al sistema binario, la escritura de uno a otro [de una base a otra] [E, 1].

Comentario 2

Vale, metodológicamente está siempre planteando preguntas, que está muy bien, a los alumnos para intentar sacar de ellos todos sus conocimientos para poder aplicarlo a lo que ella está empezando a explicar ahora.

Comentario 3

Acaba de contarles el objetivo que ella pretende con esa actividad, se lo acaba de decir directamente a ellos.

- 2R3.1-2. Cuenta a los alumnos el objetivo que persigue con la actividad [al hacer ver que 16 es 2^4] [E, 1].

Comentario 4

En su transcurso y en su dinámica de la clase es muy importante transmitir y verbalizar todo lo que pretende sacar de los alumnos. Es que está constantemente preguntando y sacando la información de ellos, haciéndoles preguntas, para que así asienten mejor el concepto, o sea, los niños van a entender y a interiorizar mejor el concepto, y es lo que ella pretende transmitir, es decir, para poder enseñar necesito sacar de vosotros todo lo que sabéis y que lo relacionéis; se verbaliza, se razona..., y es la metodología que está llevando a cabo, ¿vale?

- 2R4.1-2. Está constantemente planteando preguntas a los alumnos [E, D].
 - 2R4.1-2(I)1. Su metodología consiste en que los alumnos verbalicen sus conocimientos y razonen para poder asentar mejor los conceptos [I, D].

Comentario 5

Dice que está aplicando la propiedad distributiva.

- 2R5.1-2. Dice que está aplicando la propiedad distributiva [E, 3].

Comentario 6

Eso es [lo dice sin parar el vídeo].

Comentario 7

Claro [lo dice sin parar el vídeo].

Comentario 8

Claro [lo dice sin parar el vídeo].

Comentario 9

No [lo dice sin parar el vídeo].

Comentario 10

Ahí están las propiedades de las potencias, es lo que les está haciendo ver.

- 2R10.1-2. Está haciendo ver propiedades de las potencias $[E, 1]$.

VÍDEO 3

Fragmento 1

Comentario 1

Vale, lo que creo que va a hacer en esta sesión, porque es bastante evidente, va a ser cómo trabajar la descomposición de los números con los niños pequeños, ¿vale?, para iniciarles a visualizarlo bastante bien. Muy diferente de la sesión anterior [se refiere al vídeo 2], completamente diferente. Y es lo que yo creo, que el contenido que va a trabajar va a ser la descomposición de los números.

- 2R1.1(i)-3.1. Evento implícito en el comentario [E, 1].

Transcripción del vídeo: Tenéis que hacer las 4 operaciones..., representarlas de distintas maneras. [...] con material manipulativo...

- 2R1.1(i)-3.1(I)1. Pretende que los alumnos vean cómo trabajar la descomposición de los números con los niños pequeños [I, M].
- 2R1.1(i)-3.1(I)2. Plantea una metodología basada en la gamificación y en el juego, que es como metodológicamente se enseña a los niños en matemáticas, para que los alumnos puedan transmitir el concepto de la suma a los niños [I, M].

Comentario 2

Agrupo [lo dice sin parar el vídeo].

- 2R2.1-3.1. Dice que tienen que agrupar [E, 2].

Comentario 3

Vale, lo que ella pretende es: «quiero que me representéis el proceso», porque es realmente como se van a dar cuenta..., para que ellos tengan entendido ese proceso de suma de los números. Es decir, los niños si lo ven y lo descomponen, van a adquirir fenomenal el concepto de la suma de los números. Por eso, insiste tantísimo en ese proceso; porque es que hay que empezar por ahí para empezar, ¿vale?

- 2R3.1-3.1. Indica a los alumnos que tienen que representar el proceso de la suma [E, 3].
 - 2R3.1-3.1(I)1. Porque así es cómo los alumnos van a entender el proceso de la suma de los números [I, M].

- o 2R3.1-3.1(I)2. Los niños [de primaria] adquieren fenomenal el concepto de la suma de los números si ven el proceso, si lo descomponen; es por donde hay que empezar [I, M].

Comentario 4

Evidentemente, como los exámenes son así, su finalidad está muy clara, es decir, ella lo que quiere conseguir es que ellos a través de esta gamificación, que es como metodológicamente se enseña a los niños en matemáticas, lo que quiere es que ellos adquirieran muy bien ese juego, esa forma de llevar esa suma a los niños. Luego, como hay que evaluarlo, pues lo está diciendo claramente: «luego, si lo tienes muy claro, me lo puedes representar en un examen gráficamente». Pero es ahora cuando ella va a detectar si van a ser capaces a través de ese juego y esa gamificación, que es lo que están haciendo todo el rato, de entender y poder transmitir ese concepto de la suma. Es en lo que ella está insistiendo muchísimo.

- 2R4.1-3.1. Indica que en el examen va a pedir que hagan una representación gráfica [E, 2].

Fragmento 2

Comentario 1

Está trabajando la suma, quiere que trabajen la suma, pero realmente a través del ábaco lo que está introduciendo a los alumnos es el concepto de la descomposición polinómica de los números para que lleguen a poder sumarlos. Eso es lo que está trabajando ella ahí, ese concepto, ¿vale?

- 2R1.1-3.2. Está trabajando una operación con los alumnos a través del ábaco [E, 1].
 - 2R1.1-3.2(I)1. Con el ábaco pretende trabajar el concepto de descomposición polinómica de los números para poder sumarlos [I, M].

Comentario 2

Vale, cuando interactúa con ellos y les habla, les hace verbalizar y razonar muy bien. Además, utiliza vocabulario muy normal en las aulas con los alumnos, o sea, ese vocabulario que ella acaba de decir, «agrupo», «desagrupo», es vocabulario que luego ellos van a tener que emplear en el aula también, ¿vale? Pero, sobre todo, interactúa con ellos porque ella quiere que le verbalicen realmente todo lo que están haciendo; es la metodología que se emplea realmente en el aula, «el juego es verbalizar, cuéntame qué has hecho, cómo lo hago, cómo no lo hago».

- 2R2.1-3.2. Interactúa con los alumnos, preguntando si han agrupado o desagrupado, haciendo que verbalicen y que razonen [E, 3].
 - 2R2.1-3.2(I)1. Es la metodología que se emplea en el aula: el juego es verbalizar, contar lo que se ha hecho, cómo se hace, cómo no se hace [I, M].
 - 2R2.1-3.2(I)2. Ese vocabulario es muy normal en las aulas con los alumnos y es el que luego ellos van a tener que emplear en el aula [de primaria] [I, M].

Fragmento 3

Comentario 1

Está trabajando el concepto de la suma, de la suma con llevada, para llevársela a los niños al aula. Entonces, lo primero que se hace es introducirlo así en el aula, ¿vale?, descomponiendo y agrupando, «te quito, te pongo...», ¿vale? Sobre todo, los niños pequeños, yo te hablo por ejemplo de niños pequeños, de niños de infantil y de 1.º y 2.º de primaria..., para ellos un cálculo mental es muy difícil, pero así, visualmente, descomponiendo y agrupando, es como ellos van adquiriendo la suma, ¿vale?

- 2R1.1-3.3. Está trabajando el concepto de la suma visualmente, gráficamente [E, 2].
 - 2R1.1-3.3(I)1. Lo trabaja visualmente porque es así como hay que introducir la suma en el aula, sobre todo con los niños de infantil y de 1.º y 2.º de primaria, ya que para ellos el cálculo mental puede resultar difícil, pero visualmente van entendiendo la suma, los agrupamientos [I, M].

Comentario 2

Gráficamente [lo dice sin parar el vídeo].

Comentario 3

Está muy bien, porque lo que es el concepto lo representa muy bien gráficamente y es la metodología que hay que emplear para llegar a esa didáctica con los niños, ¿vale? Entonces, con todo muy gráfico es como ellos empiezan a entender todos los conceptos, que es lo que ha dicho ella directamente: «¿necesito agrupar?, no, pues ya tengo los 7». O sea, ahí les introduce el concepto de la suma gráficamente a través del juego sin que se den cuenta.

- 2R3.1-3.3. Pregunta si hay que agrupar, haciendo ver que no es necesario [E, 2].
 - 2R3.1-3.3(I)1. Trata de emplear una metodología basada en el juego y en presentar los conceptos de forma gráfica, como la suma en este caso, ya que es la metodología que hay que emplear con los niños [de primaria] [I, M].

Comentario 4

En base 10, exactamente [lo dice sin parar el vídeo].

- 2R4.1-3.3. Indica que están trabajando en base 10 [E, 1].

Comentario 5

Agrupo [lo dice sin parar el vídeo].

- 2R5.1-3.3. Indica que va a agrupar [E, M].

Comentario 6

Exacto [lo dice sin parar el vídeo].

Comentario 7

Eso es lo que yo te he dicho antes: todo el proceso manipulativo para llegar a ese nivel de abstracción que quiere que consigan los alumnos. Es todo el proceso que ha llevado a través de esta metodología que ha estado aplicando.

- 2R7.1-3.3. Explica todo el proceso manipulativo necesario para llegar al nivel de abstracción al que tienen que llegar los alumnos [E, 2].

Comentario 8

Que es la fase final, efectivamente [lo dice sin parar el vídeo].

- 2R8.1-3.3. Indica que es la fase final [de la suma] [E, 1].

ANEXO 33

Conjunto de eventos e interpretaciones de la fase 2 de todos los participantes, integrados en la transcripción de los vídeos en el momento en el que se realizaron los comentarios de los que se extrajeron

Nota: El texto presentado entre corchetes en la transcripción y en algunos eventos e interpretaciones se corresponde con información incluida por el investigador.

VÍDEO 1

Fragmento 1

[F = Formadora del vídeo].

F: Bueno, entonces os voy a dar el guion y empezáis a trabajar y, al final, los últimos 15 minutos, hacemos la puesta en común. El guion de la actividad aparece aquí en el campus, pone la fecha, ¿vale?, «actividad para la sesión del 19 de septiembre». Lo voy a leer porque está en inglés, por si alguno tuviera alguna dificultad, lo leo y os ponéis a trabajar, ¿vale?

Todo el mundo en la mesa tiene un montón de palillos y varias cintas de estas, ¿no?, elásticas. Si alguien necesita más cintas me las pide, palillos no, son los que os he puesto, ¿vale?, es con lo que tenéis que trabajar.

- 2D1.1-1.1. *Enuncia los materiales manipulativos que van a usar los alumnos en la sesión, los palillos [E, 2].*
 - 2D1.1-1.1(I)1. *Para que los alumnos sepan que los materiales van a ser un objeto central e importante en el trabajo de la sesión [I, D].*
- 2M1.1-1.1. *Presenta unos palillos y unas gomas [E, 2].*
- 2M1.2-1.1. *Indica que el número de palillos es fijo, mientras que el de gomas no lo es [E, 3].*
 - 2M1.2-1.1(I)1. *Imagino que el número de palillos está fijo porque la cantidad es relevante para lo que va a estudiar. Podría ser fijo y al azar, pero yo creo que está prefijado de una manera consciente, lo que se llama en Teoría de Situaciones «variable didáctica», porque interesará que dicha cantidad cumpla una serie de*

condiciones para hacer emerger ciertas estrategias. Lo que no se sabe es si todos tienen la misma cantidad de palillos [I, M].

El problema es que yo he comprado una caja de palillos en Supeco y resulta que mis compañeros lo compran en Mercadona y me dicen que las cajas de palillos que ponen 800 palillos del Mercadona traen más y que les sale a cuenta, y que cuando van a comprar materiales —porque a veces tenemos que comprar nosotros los materiales— pues que merece la pena. Yo no pude ir a Mercadona, fui a Supeco, pone que son 800, pero no sé si me han timado o no me han timado. Entonces, para hacer un control de calidad, hacer una estimación, que luego, bueno, los que hayáis hecho Matemáticas de Ciencias Sociales pues sabéis hacer un contraste de hipótesis y tal, pero bueno, lo primero que tengo que hacer es hacer una estimación de cuántos hay, ¿no? Entonces, los he repartido para no contarlos yo y la idea es ver cuántos hay.

- 2D2.1-1.1. *Plantea el problema, que consiste en contar cuántos palillos hay en las cajas que ha distribuido [E, 2].*
- 2D2.2-1.1. *Contextualiza el problema al decir que se trata de comprobar si las cajas de cierto distribuidor tienen la cantidad indicada o no [E, 3].*
- 2M2.1-1.1. *Contextualiza la actividad haciendo alusión a cajas con 800 palillos, es decir, plantea un contexto extramatemático sobre conocimientos pragmáticos del mundo [E, 2].*
 - 2M2.1-1.1(I)1. *Pretende hacer partícipes a los alumnos, lo cual no es muy relevante con alumnos universitarios, pero sí cuando los alumnos son niños [I, D].*
- 2M2.2-1.1. *Plantea una tarea: estimar los palillos que ha repartido y contarlos después [E, 3].*
 - 2M2.2-1.1(I)1. *Está reproduciendo con futuros maestros una tarea que puede llevarse a cabo con niños de primaria, por lo que de algún modo va a hacer pasar a los alumnos por procesos similares a los que pasarían los niños de primaria [I, M].*
 - 2M2.2-1.1(I)2. *Como ha repartido los 800 palillos, creo que dicha cantidad no juega un papel importante en las estrategias que los alumnos van a tener que utilizar [I, M].*

- 2M2.2-1.1(I)3. *La tarea de estimar no se plantea habitualmente, los alumnos de matemáticas generalmente piensan que hay que obtener resultados precisos, cuando en la realidad los resultados no son precisos en casi ningún caso [I, M].*
- 2M2.3-1.1. *Recuerda a los alumnos conocimientos que han podido trabajar en matemáticas en Bachillerato de Ciencias Sociales [E, 2].*
- 2L1.1-1.1. *Introduce a los alumnos una actividad matemática consistente en contar el número de palillos que tienen [E, 2].*
- 2L1.2-1.1. *Habla de los objetos con los que los alumnos van a tener que hacer la actividad: palillos y gomas [E, 2].*
- 2L1.3-1.1. *Hace alusión a un conocimiento matemático que piensa que algún alumno puede tener si ha cursado matemáticas de Ciencias Sociales: los contrastes de hipótesis [E, 3].*
- 2P1.1-1.1. *Presenta los palillos [E, 1].*
- 2P1.2-1.1. *Plantea que hay que ver si la publicidad de la caja es correcta [E, 1].*
- 2J1.1-1.1. *Plantea la tarea a realizar, que consiste en estimar, en calcular un montón de palillos [E, 3].*
- 2J1.2-1.1. *Reparte unos palillos [E, 1].*

Entonces, el guion de la actividad, tal y como aparece aquí... [espera a que cargue el ordenador]. Aquí está el guion. Esta actividad —esperad que la amplíe un poco— está escaneada de un libro muy bueno que utilizan en los últimos años en Estados Unidos para formar profesores de primaria. Lo bueno del libro es que, además de los contenidos teóricos, más de la mitad del libro son actividades para llevar al aula-taller como estamos haciendo aquí, ¿vale?

- 2J2.1-1.1. *Recomienda una referencia relacionada con el tema matemático que están viendo, que tiene recursos de apoyo para llevar al aula, dirigida a los alumnos como futuros maestros [E, 3].*
 - 2J2.1-1.1(I)1. *Porque puede servir a los alumnos para su práctica docente [I, D].*

Entonces, una de las actividades iniciales para el trabajo con el número, que es con lo que estamos empezando nosotros, es esta de los palillos, ¿vale?

- 2D3.1-1.1. Indica que la actividad propuesta forma parte de un libro de formación matemática de maestros de Estados Unidos [E, 2].
- 2M3.1-1.1. Hace referencia a un libro sobre la enseñanza de las matemáticas del que ha extraído la actividad que va a proponer [E, 1].
 - 2M3.1-1.1(I)1. Con la intención de que los alumnos se animen a usar el libro [I, D].
- 2R1.1-1.1. Menciona un libro referido a la actividad que van a realizar y a las destrezas que quiere que se alcancen [E, 1].
 - 2R1.1-1.1(I)1. Los alumnos pueden buscar información en el libro y aprender [I, D].

Entonces, aquí la pregunta es «cuántos», cuántos palillos, ¿no?, que es lo que os he preguntado a vosotros, ¿no?, cuántos.

- 2P2.1-1.1. Plantea el problema, en el campo de la aritmética, que consiste en contar los palillos de una caja [E, 2].
- 2J3.1-1.1. Recuerda el problema matemático que tienen que resolver, planteándolo también por escrito [proyectado en la pantalla] [E, D].
 - 2J3.1-1.1(I)1. Es importante para que el problema quede bien especificado y claro [I, D].

Entonces, cada grupo participando en esta actividad tiene un montón de palillos y luego tiene algo para atarlos, ¿no?, *rubber bands*, pues cintas de estas elásticas. Los materiales ya los tenéis. El objetivo de la actividad es ayudaros a entender el desarrollo de la escritura de los números tal y como los utilizamos nosotros en nuestro sistema de numeración, ¿vale?

- 2D4.1-1.1. Presenta el objetivo de la actividad: entender la escritura de los números [E, M].
 - 2D4.1-1.1(I)1. Pretende que los alumnos entiendan que agrupar palillos es una estrategia que deben explorar [I, M].

- 2M4.1-1.1. *Hace explícito el objetivo de la actividad: que los alumnos reflexionen o constaten cómo son las características de los sistemas de numeración [E, 2].*
 - 2M4.1-1.1(I)1. *Esto sí que es una diferencia entre una actividad hecha con alumnos [en la universidad] y una actividad hecha en primaria. En primaria, los niños se podrían enfrentar a este tipo de trabajo y no declararles cuál es el objetivo matemático que está detrás, sino simplemente ver si emergen las estrategias que justifiquen ese contenido [I, M].*
- 2R2.1-1.1. *Menciona su intención, el objetivo de la actividad, lo que pretende que los alumnos alcancen [E, 1].*
- 2L2.1-1.1. *Indica el objetivo matemático de la actividad, que es que los alumnos entiendan la escritura del número, por qué se escribe el número de una determinada manera [E, 2].*
- 2P3.1-1.1. *Establece los objetivos de la tarea, cuyos elementos matemáticos son el número y los sistemas de numeración [E, 3].*

Entonces, primero, organiza los palillos de forma que visualmente puedas ver más o menos cuántos hay; usa las bandas elásticas, si te ayudan, para organizarlos de manera que así, de un vistazo, puedas decir cuántos tienes,

- 2M5.1-1.1. *Dice a los alumnos que tienen que hacer grupos de palillos, que tienen que organizarlos de tal forma que de un vistazo se pueda saber cuántos palillos hay [E, 3].*
 - 2M5.1-1.1(I)1. *Explicitar que agrupen es una decisión didáctica, ella no quiere dejar que los agrupamientos surjan en un entorno adidáctico, ya que puede haber algún alumno que se ponga a contar los palillos de uno en uno sin ningún tipo de organización; como son futuros maestros, se les dice más o menos cómo tienen que trabajar. En un entorno adidáctico, hablando en términos de la Teoría de Situaciones, sería suficiente con pedir que cuenten los palillos, sin importar la organización, mientras que aquí el objetivo es organizarlos para saber cuántos hay [I, M].*
 - 2M5.1-1.1(I)2. *La goma es una explicitación del agrupamiento, pudiendo hablar luego de palillos y de gomas [I, M].*
- 2J4.1-1.1. *Plantea el objetivo matemático de la tarea: entender la escritura en el sistema decimal [E, 3].*

- 2J4.2-1.1. *Pide que por grupos cuenten y agrupen los palillos que tienen, que vean cómo pueden expresar el número de palillos que les ha tocado, sugiriendo la estrategia de usar hatillos, teniendo que poder luego comunicar el resultado [E, 2].*

primero los cuentas, lo organizas, piensas cómo organizarlo, pero la cosa es que la organización que tú tengas en la mesa te permita de un vistazo recordar cuántos hay sin necesidad de haberlo apuntado, ¿no?, y que, si yo me paso por allí, me podáis decir: «mira, hay no sé cuántos, porque..., lo veo porque lo hemos organizado así», ¿vale?

- 2D5.1-1.1. *Indica que hay que agrupar los palillos de tal forma que se pueda saber la cantidad de palillos que hay sin necesidad de registrar el número con símbolos usuales, sino solamente viendo los grupos de palillos hechos por los alumnos [E, 3].*
- 2R3.1-1.1. *Está indicando la tarea a realizar, que consiste en que los alumnos agrupen, en la cual está implícito el objetivo marcado al principio [de la sesión] [E, 2].*

Luego, reflexiona sobre si la manera en la que lo has organizado corresponde a cómo escribirías tú luego los numerales para representar esa cantidad de palillos.

- 2M7.1-1.1. *Dice que piensen si los grupos que han hecho se ajustan a cómo se escribirían en nuestro sistema de numeración [E, 3].*
 - 2M7.1-1.1(I)1. *Nuestro sistema de numeración se basa en el agrupamiento decimal, en la base 10, en las centenas, decenas, etc., y no solo en hacer agrupaciones, sino en hacer agrupaciones de agrupaciones, el algoritmo de la numeración se basa en la idea de agrupamiento recursivo, no solo se agrupa de 10 en 10, sino que luego se agrupa de 10 en 10 los grupos de 10, dando lugar a las potencias [I, M].*
 - 2M7.1-1.1(I)2. *Pretende que los alumnos hagan grupos de 10 o agrupamientos compatibles o con cierta coordinación con el sistema de numeración para que el conteo sea mucho más fácil; si hacen grupos de 17, puede funcionar, pero no para leer los números como los leemos [I, M].*
 - 2M7.1-1.1(I)3. *Hace esta indicación porque está trabajando con futuros maestros; si la actividad se realizase con niños, los objetivos tendrían que ser distintos [I, M].*

- 2J5.1-1.1. *Pide que reflexionen un poco sobre lo que están haciendo, sobre el objetivo que tenía la actividad de cómo expresar el número de palillos [E, 1].*

Después, tienes que juntar tus palillos con los de un grupo de al lado, ¿vale?, por ejemplo, vosotros con vosotros y así, cada dos grupos tienen que juntar los palillos que tienen y decidir cuántos tienen en común, ¿vale?, cuántos tienen en total.

- 2M8.1-1.1. *Dice que los grupos tienen que compartir los palillos, los agrupamientos [E, 2].*
 - 2M8.1-1.1(I)1. *Su objetivo es que hagan un agrupamiento común, por lo que al juntarse dos grupos prevalecerán los agrupamientos que sean iguales, ya que el conteo es más cómodo con agrupamientos iguales, compatibles, múltiplos... [I, M].*

Y al final, tenemos que juntarlos todos y de una forma ágil, sin tener que volver a contarlos todos, tenemos que saber cuántos palillos hay en total en la clase repartidos, ¿vale?

- 2D6.1-1.1. *Indica que han de reunirse cada dos grupos para juntar sus palillos [E, 2].*
- 2D6.2-1.1. *Indica que, cuando unan los palillos con todos los grupos de la clase, tiene que ser sencillo, eficiente, contar cuántos palillos hay en total, es decir, sumarlos [E, 3].*

O sea que, primero, cada grupo tiene que saber cuántos tiene y tiene que generar una estrategia para, de manera rápida, mirar en la mesa y ver cuántos hay; después, reflexionar sobre si la manera en la que lo coloca cuando uno luego escribe, imaginaos, «tengo 72, pues cómo se escribe 72: siete, dos», pues la manera en la que lo coloco me ayuda con la escritura o no, no tiene por qué, se reflexiona un poco sobre eso;

- 2L3.1-1.1. *Pide a los alumnos que realicen una agrupación de los palillos que tienen que les permita contarlos visualmente [E, 3].*
 - 2L3.1-1.1(I)1. *Pretende que los alumnos se den cuenta de que agrupar de 10 en 10 es muy cómodo, que lleguen al sistema numérico decimal [I, M].*

- 2L3.2-1.1. *Deja entrever a los alumnos que la escritura del número 72 puede tener algo que ver con cómo tienen que agrupar los palillos al hacer hincapié en que el 72 se compone de un 7 y un 2 [E, 3].*

y cuando hayáis terminado esa parte, llamáis al grupo de al lado y decís: «venga, vamos a ver cuántos tenemos en total,

- 2J6.1-1.1. *Indica que después pongan en común los palillos con otros compañeros [E, 2].*
- 2J6.2-1.1. *Indica que al final hay que unir todos los palillos con el grupo entero [E, 2].*
 - 2J6.2-1.1(I)1. *Pretende que el grupo entero de alumnos llegue a una estrategia común para representar la unión de los palillos, generando así un aprendizaje colectivo [I, M].*

visualmente, cómo lo organizasteis vosotros, cómo lo organicé yo, a ver cómo lo tengo», ¿vale?; y luego todos.

- 2D7.1-1.1. *Da un ejemplo concreto de la escritura en notación posicional de base 10: el 72 como siete, dos [E, 2].*
- 2P4.1-1.1. *Plantea que cada grupo establezca su propio sistema de numeración para saber cuántos palillos hay [E, 2].*
- 2P4.2-1.1. *Indica que cada grupo tiene que juntarse con el grupo de al lado para ver cuántos palillos tienen en total [E, 3].*
 - 2P4.2-1.1(I)1. *Para que comparen los sistemas de numeración establecidos, viendo las ventajas y las deficiencias, y decidir cuál es el óptimo [I, M].*

Tenéis un cuarto de hora, ¿vale?

- 2R4.1-1.1. *Plantea como objetivo que los alumnos piensen cómo se escriben los números y cómo se agrupan [E, 2].*
 - 2R4.1-1.1(I)1. *Con su metodología matemática pretende que los alumnos, cuando enseñen a los niños en primaria, aborden la escritura de los números de una manera inductiva, empleando una metodología manipulativa, para que los niños lleguen a comprender cómo se agrupan y cómo se escriben los números de una forma visual [E, M].*

Fragmento 2

[F = Formadora del vídeo]. [A = Alumnos].

F: Necesito saber si habéis tenido que llegar a algún acuerdo entre los grupos o...

A: Sí, claro, todo ha sido un consenso, todo ha sido un consenso.

F: Ah, vale, ha sido un consenso. ¿Qué acuerdo habéis tenido que...?

- 2M1.1-1.2. *Pregunta a los grupos de alumnos si han tenido que llegar a un acuerdo [E, 2].*
 - 2M1.1-1.2(I)1. *Aquí hay una dinámica de la gestión de la clase: el trabajo es en grupo, pero dicho trabajo depende de lo que hayan hecho los otros grupos. En las situaciones de formulación, en Teoría de Situaciones, se deja que los alumnos trabajen y luego se produce la comunicación; si se produce un fracaso, se vuelve a trabajar. Parece que aquí ya han llegado a un consenso [I, M].*

A: Hemos explicado cada uno pues lo que significaba cada..., cada gomita.

F: Y, por ejemplo, ¿vosotros de cuánto en cuánto lo habíais agrupado? Erais los de 15, 10, 5, ¿no?

A: Sí.

F: ¿Y vosotros?

A: 20, 10 y 4.

- 2J1.1-1.2. *Pregunta a dos grupos de alumnos qué estrategias han utilizado [E, 1].*

F: 20, 10 y 4.

- 2M3.1-1.2. *Indica que los alumnos han hecho [grupos de] 20, 15, 4, o sea, no decimales [E, M].*

Entonces, ¿habéis tenido que llegar a algún acuerdo alguno para reordenar?

A: No, porque nos ha venido muy bien.

F: ¿Os ha venido bien?

A: Es que hemos sido muy inteligentes cogiendo el amarillo para los grandes [se refiere a gomas elásticas de color amarillo].

- 2R1.1-1.2. Trata de ver si los alumnos han tenido que llegar a un acuerdo para llegar a una organización [de los palillos] [E, 2].
 - 2R1.1-1.2(I)1. Pretende que los alumnos se den cuenta de que en el aula [de matemáticas de primaria] se van a encontrar con que los niños realizan diferentes organizaciones, por lo que tienen que adaptarse a esa mentalidad [I, M].

F: Ahora los grandes de qué son, ¿de 20?

A: De 20 y de 15, aquí están mezclados. ¿O los tenemos que reorganizar?

- 2D1.1-1.2. Pide a los alumnos que expliquen las estrategias que han usado para agrupar los palillos una vez que se han juntado dos grupos [E, 2].
 - 2D1.1-1.2(I)1. Pretende que expliciten el tamaño de los grupos que han hecho y por qué han elegido esos tamaños para analizar cómo funciona [I, M].



F: Esto es superinteligente, ¿no? O sea, yo veo aquí..., digo: «en los amarillos, algunos tienen 20 y algunos tienen 15, búscate la vida Nuria».

A: Pero son amarillos.

- 2M4.1-1.2. Hace ver a los alumnos que haber hecho agrupamientos distintos, de 15 y de 20, con el mismo color, con el amarillo, puede ser un lío, indicando que en los grupos hechos podría haber 160 [palillos] como máximo, pero que podrían ser menos, y haciendo ver que el objetivo es que visualmente quede claro cuántos palillos hay [E, 3].
 - 2M4.1-1.2(I)1. Aunque no es algo que estuviera presente en la consigna, ella pretende que no usen gomas del mismo color para agrupamientos distintos, ya

que es la manera más habitual de marcar los distintos agrupamientos para saber de un vistazo el orden de cada uno, así como en nuestro sistema de numeración empleamos la posición, en otros emplean distintos tipos de letras, etc. [I, M].

- *2M4.1-1.2(I)2. Aquí se da una situación en la que los alumnos han resuelto el problema, saber cuántos palillos hay, pero la formadora pretendía que quedara claro visualmente cuántos palillos hay, que es un objetivo más ambiguo y difícil para los alumnos. Esto tiene una transcendencia importante, sobre todo en Teoría de Situaciones, porque la situación tiene que sancionarse a sí misma; entonces, mientras que el objetivo de saber cuántos hay es fácilmente sancionable, se puede evaluar, el objetivo de que quede clara la distribución y me ayude a saber cuántos hay está generando problemas de materialización del objetivo [I, M].*
- *2P1.1-1.2. Interactúa con los alumnos, incidiendo en las deficiencias que hay en los agrupamientos amarillos que han hecho de 15 y 20 [palillos], haciéndoles ver que no es óptimo emplear el mismo color para distintos agrupamientos [E, 2].*

F: Ya, pero entonces yo no sé... Yo digo: «vale, yo puedo ver 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 grupos amarillos», ¿no? Y ahora digo: «como mucho serán 160, si son todos de 20, pero... no necesariamente son 160, pueden ser menos».

A: Bueno, pero como no lo sabes...

F: ¿Entonces cómo sé cuántos hay?

A: Te lo estamos diciendo, tienes que confiar en nosotros.

- *2D2.1-1.2. Describe la estrategia que han usado los alumnos, consistente en hacer grupos de diferentes tamaños [E, 1].*
 - *2D2.1-1.2(I)1. Para que los alumnos traten de detectar las ventajas y los inconvenientes de la estrategia que han seguido [I, M].*

F: No, en matemáticas la confianza no vale, uno tiene que...

- *2M5.1-1.2. Hace ver a un alumno que las matemáticas se basan en hechos [E, M].*
 - *2M5.1-1.2(I)1. En matemáticas necesitamos que los conocimientos sean totalmente explicitables y que no dependan de la interpretación, en este caso, de los productores del agrupamiento. Los conocimientos matemáticos han de funcionar en una comunidad, es para lo que hacemos las matemáticas [I, M].*

- 2L1.1-1.2. *Pregunta a los alumnos cómo han organizado los palillos [E, 2].*
- 2L1.2-1.2. *Hace ver a los alumnos que la agrupación que han hecho no es lógica porque no se puede saber [a simple vista] cuántos palillos hay al no tener los paquetes amarillos el mismo número de palillos, haciendo hincapié en que visualmente se tiene que poder saber cuántos palillos hay [E, 3].*
 - 2L1.2-1.2(I)1. *Su objetivo es que los paquetes que tengan la goma del mismo color tengan el mismo número de palillos, preferiblemente 10, y que los alumnos vean la importancia de esto para el conteo, para poder contar [I, M].*
 - 2L1.2-1.2(I)2. *Es posible también emplear sistemas de numeración en los que no se hagan agrupamientos de 10; a lo mejor lo comenta, pero no es su objetivo [I, M].*

A: Es que no sé, no lo entiendo. ¿Lo tenemos que reorganizar?

F: Vosotros ya sabéis cuántos palillos tenéis, pero ahora, visualmente, tenéis que poder contarme a mí cómo sabéis que hay ese número de palillos, ¿no?

- 2J4.1-1.2. *Explica a los alumnos que no se puede saber cuántos [palillos] tengo al no ser todos los hatillos de 20, haciendo ver que no es un método válido o adecuado, que presenta problemas para generalizar, enfatizando qué quiere de los alumnos, que no sería solo que resuelvan el problema, sino que sepan explicarlo con un argumento matemático [E, 2].*
 - 2J4.1-1.2(I)1. *Quiere que se den cuenta de que a lo mejor tienen que rehacer lo que han hecho para llegar a una ordenación [de los palillos] que sea útil para poder representar el número [I, M].*

A: Ah, pues habría que... ¿Y no podemos quitar las gomas y reorganizarlo?

F: Sí, sí, sí, yo no dije que no pudierais quitar las gomas.

A: Aaaaah.

- 2R2.1-1.2. *Hace ver a los alumnos que en los grupos que han hecho no se aprecia matemáticamente el concepto de qué número de palillos hay, evitando decirles cómo solucionarlo [E, 1].*
 - 2R2.1-1.2(I)1. *En la metodología matemática lo que se pretende es que sean los alumnos quienes a base de manipular alcancen el objetivo propuesto, tratando de razonarlo ellos mismos [I, M].*

F: ¿Alguien dijo que no se podían quitar?

A: Y nosotros diciendo que no se podían quitar las gomas...

- 2M7.1-1.2. *Hace ver que pueden rehacer otra vez los grupos hechos [E, 3].*
 - 2M7.1-1.2(I)1. *Se trata de un ejemplo claro de negociación de la consigna: cuando no se dejan claros los objetivos en la consigna, es necesario negociarla; eso es lo que está ocurriendo ahora, momento en el que la actividad está ya comenzada [I, M].*

F: Y una duda más. Alguno de vosotros..., por separado, ¿no?, cuando lo teníais..., habéis escrito la cantidad que teníais, ¿no? Eh, 109 teníais uno...

A: 104 y 85.

F: Por ejemplo, el 85 se escribe con un 8 y un 5. Ese 8 y ese 5, ¿estaban representados de alguna forma en...?

A: No.

- 2M8.1-1.2. *Pregunta por la relación del 8 y el 5 con los grupos hechos, lo cual tiene que ver con uno de los objetivos que planteó, indicando que tienen que reflexionar sobre ello [E, 3].*
 - 2M8.1-1.2(I)1. *El agrupamiento de 10, que es en el que se basa el sistema de numeración, no es tan útil cuando materializamos colecciones manipulables, ya que es un agrupamiento relativamente pequeño. El hecho de usar 10 viene de que tenemos 10 dedos, no viene de otra razón. Matemáticamente puede haber razones para usar un número frente a otro en dos sentidos: por un lado, el número de divisores; por otro, el tamaño. En cuanto a los divisores, 10 solo tiene 2 y 5, no es un gran número. El 12 nos habría dado un sistema de numeración mucho más cómodo, los tercios y los cuartos serían números con parte fraccionaria finita. Con el 10, solo nos queda 2 y 5; un número tan sencillo como la tercera parte de una unidad nos genera un número que no es finito. Por otro lado, desde un punto de vista manipulable, el 10 es pequeño. De hecho, esto se ve mucho en las unidades de las magnitudes, que también van de 10 en 10, pero en el uso social no se hace de 10 en 10: usamos el metro y el centímetro, pero el decímetro desaparece porque, aunque por regularidad nos interesa, a la hora de manipular es un grupo demasiado pequeño; lo mismo ocurre con los metros y los gramos, no usamos los cambios decimales. Entonces, si usáramos grupos más grandes, el sistema de*

numeración requeriría de más símbolos; con el 10, tenemos símbolos distintos hasta el 10. Cuando el agrupamiento se hace muy pequeño, el sistema se automatiza mejor, la base binaria es la más automática, no habría que saberse tablas, pero, claro, se hacen números muy grandes y los algoritmos de cálculo serían odiosos; imagínate que tuviéramos que sabernos el repertorio de las tablas hasta el 20 si usáramos base 20, sería horroroso, tendría una gran cantidad de resultados que habría que memorizar. Entonces, usamos el 10, que además coincide con los dedos. Pero es verdad que, cuando se trata de colecciones manipulables, el 10 es muy pequeño, da la sensación de que no merece la pena usarlo. Yo creo que aquí hay una confrontación con el interés matemático de respetar el 10, porque así escribo los números, y por otro lado la comodidad o economía en la manipulación que hace que de 10 en 10 los grupos sean grupos demasiado pequeños. Se está intentando hacer converger los dos intereses y surge esta situación [I, M].

- 2M8.1-1.2(I)2. Aunque los alumnos son adultos, el objetivo de «reflexionar» es bastante difuso, es difícil saber si se ha alcanzado o no, pero imagino que ella dirigirá la reflexión o dará unas pautas para hacerla [I, M].
- 2J5.1-1.2. Pregunta a los alumnos si los hatillos que han hecho tienen relación con la escritura, con cómo escribimos el 85, pidiendo que reflexionen sobre ello, lo cual se corresponde con el segundo punto de la actividad [E, 3].
 - 2J5.1-1.2(I)1. Quiere que los alumnos lleguen al objetivo de la actividad, a la representación del número, a que el número de hatillos represente la posición [I, M].

F: No, vale. Y vosotros, la misma pregunta con lo vuestro.

A: No.

F: No había un patrón en cómo lo habíais representado, vale, ok.

- 2D3.1-1.2. Anima a los alumnos a que vuelvan a hacer el agrupamiento para arreglar el problema detectado [E, 3].
- 2D3.2-1.2. Pregunta a los alumnos si han encontrado alguna conexión entre las agrupaciones que han hecho y la representación del número de forma simbólica en base 10, en la notación posicional usual [E, 3].

- 2L2.1-1.2. *Pregunta si el 8 y el 5 del 85 lo han utilizado para algo en los paquetes [E, 2].*
 - 2L2.1-1.2(I)1. *Da una pista a los alumnos para que lleguen a agrupar de 10 en 10 sin que ella se lo llegue a decir, ya que está viendo que los alumnos no se enteran de lo que tienen que hacer únicamente con la primera instrucción [I, M].*
- 2P2.1-1.2. *Hace ver a los alumnos que no hay relación entre la escritura del número y los agrupamientos que han hecho, relacionando el sistema de numeración empleado por los alumnos con el sistema de numeración decimal [E, 3].*

A: ¿Pero quieres que busquemos?

F: Quiero que reflexionéis sobre eso, pero ahora lo vamos a poner en común, ¿vale?

A: Vale.

F: ¿Ha sido operativo el que ellos hayan hecho 15, 10, 5... y vosotras tuvieras 20...? ¿Eso ha ayudado a la hora de ponerlo en común?

- 2J7.1-1.2. *Pregunta si la estrategia que han utilizado para resolver el problema ha sido útil [E, 1].*

A: No, porque ahora hay que hacerlo otra vez.

F: Ahora hay que volverlo a hacer...

- 2D4.1-1.2. *Pregunta si ha sido operativo que hicieran grupos de diferentes tamaños: grupos de 10, 15, 20..., indicando que hay que volver a hacerlo para que funcione mejor [E, 2].*
- 2M9.1-1.2. *Pregunta si ha ayudado la escritura que han hecho [E, 2].*
 - 2M9.1-1.2(I)1. *Porque va buscando la escritura del sistema de numeración, empleando las unidades correspondientes de cada orden, que es como se escriben los números [I, M].*
- 2L3.1-1.2. *Plantea una pregunta [E, 1].*
 - 2L3.1-1.2(I)1. *Con la pregunta pretende que hagan los paquetes con el mismo número de palillos para tener un conteo más rápido, lo que tendrá que ver con el sistema numérico decimal [I, M].*

Fragmento 3

[F = Formadora del vídeo]. [A = Alumnos].

F: Me tenéis que decir cuántos palillos había en cada grupo inicialmente, antes de juntaros dos grupos, ¿vale? Entonces, por ejemplo, vosotros.

A: 87.

F: 87 [lo escribe en la pizarra]. Estamos de acuerdo, yo utilizo la escritura estándar que vosotros habéis visto en primaria, secundaria, bachillerato y al llegar aquí, ¿vale? Escritura estándar de nuestro sistema de numeración en nuestro contexto.

- 2M1.1-1.3. *Escribe el número 87 [E, 2].*
- 2M1.2-1.3. *Explica que escribe el número en nuestro sistema de numeración [E, 3].*
 - 2M1.2-1.3(I)1. *Pretende que los alumnos reflexionen sobre el sistema de numeración a través de los palillos [I, M].*

Ese grupo, 87. ¿Cómo habíais hecho los grupos?

A: Pues hemos hecho, eh..., tres grupos de 20.

F: Tres grupos de 20, ¿cómo lo puedo poner? [Escribe un 3 en la pizarra].

A: Eh..., tres rosas.

A: 3×20 .

F: ¿Tres rosas?

A: Sí.

A: No.

F: Si pongo tres rosas... ¿Todo el mundo que ha utilizado gomitas rosas ha atado 20?

A: No.

- 2J1.1-1.3. *Aborda la estrategia de un grupo para representar un número [E, 1].*
 - 2J1.1-1.3(I)1. *Pretende llegar a ver la relación entre los grupos y los números, a ver la representación decimal posicional de los números [I, M].*

F: ¿Otras personas que han atado 20 han usado otro color?

A: Sí.

F: Uf, el color no me vale. ¿Cómo lo pongo?

- 2P1.1-1.3. *Hace ver que la utilización de la goma rosa, de un símbolo, tiene que significar lo mismo para todos los grupos, poniendo de manifiesto que los distintos grupos la han empleado con distintos criterios [E, 2].*

A: 20×3 .

A: 3×20 .

F: 3 grupos de 20, ¿no? 3×20 . [Escribe 3×20]. Y luego...

- 2D1.1-1.3. *Pregunta al primer grupo cuántos palillos tenían, anotando que son 87 [E, 3].*
- 2D1.2-1.3. *Indica que emplea la notación posicional usual para escribir el 87 [E, 3].*
- 2D1.3-1.3. *Pregunta a los alumnos cómo escribir los 3 grupos de 20 [E, 3].*
 - 2D1.3-1.3(I)1. *Pretende que los alumnos piensen cómo representarlo desde el punto de vista matemático, empleando símbolos matemáticos para representar 3 grupos de 20 [I, M].*

A: Pon en el 3 «color rosa» o algo así. Entre paréntesis.

F: Vale, vale. [Pinta una raya rosa sobre el 20]. Y luego... Esto son 60.

A: 9×3 .

F: Y luego 9 grupos de 3, ¿no? [Escribe $+ 9$]. ¿O 3 grupos de 9? [Borra el 9].

A: 3×9 .

F: 3 grupos de 9 y el 9 lo habéis puesto de otro color, ¿vale? [Escribe 3×9].

A: Sí.

- 2M2.1-1.3. *Hace ver que no pueden usar el color, ya que tiene que ser común a cualquier grupo [E, 3].*
 - 2M2.1-1.3(I)1. *Dentro del grupo se puede usar el color, pero en cuanto se trata de una escritura general, común, pues el color tiene que ser común a cualquier unidad, a cualquier grupo. Obviamente, estas cosas son arbitrarias, pero tienen que estar convenidas [I, M].*
- 2M2.2-1.3. *Pone [una raya] rosa sobre el 3×20 [E, M].*

F: ¿Alguien más ha utilizado grupos de 20?

A: Nosotros.

F: Varios. ¿Alguien más ha utilizado grupos de 9? [Destaca con la voz el número 9].

A: Nosotras.

F: Vosotras, vale, y vosotras también, vale.

- 2D2.1-1.3. *Pregunta a los alumnos por los tamaños que han empleado para hacer grupos, concretamente por los grupos de 20 y los de 9, sin preguntar si alguien ha empleado grupos de 10 [E, M].*
- 2L1.1-1.3. *Escribe de forma intencionada $3 \times 20 + 3 \times 9$, haciendo una extrapolación de los paquetes [de palillos] a la escritura del número [E, 3].*

Siguiente equipo, vosotras.

A: Nosotras, 90.

F: En total, 90. [Escribe 90 en la pizarra].

A: 4 de 20 y 1 de 10.

F: [Escribe $4 \times 20 + 1 \times 10$].

- 2R1.1-1.3. *Está viendo los agrupamientos hechos por un grupo [E, 2].*
- 2R1.2-1.3. *Está viendo los agrupamientos hechos por otro grupo [E, 2].*
 - 2R1.2-1.3(I)1. *Pretende que los alumnos se den cuenta de que en el aula [de matemáticas de primaria] se van a encontrar con diferentes maneras de agrupar [I, M].*
- 2P2.1-1.3. *Está viendo la descomposición que ha hecho un grupo de un número, empleando grupos de 20 y grupos de 9 [E, 3].*
 - 2P2.1-1.3(I)1. *La descomposición realizada no tiene que ver con la escritura del número, con el numeral [I, M].*
- 2P2.2-1.3. *Está viendo la descomposición que ha hecho otro grupo de un número, empleando grupos de 20 y grupos de 10 [E, 3].*
 - 2P2.2-1.3(I)1. *La descomposición realizada no tiene que ver con la escritura del número, con el numeral [I, M].*
- 2J2.1-1.3. *Representa los grupos [de palillos] que ha hecho otro grupo de alumnos, plasmando así una forma de representar el número alcanzado [E, 2].*
 - 2J2.1-1.3(I)1. *Pretende afianzar una manera de expresar lo que habían alcanzado [los agrupamientos], incidiendo en contenido que supongo que habrían trabajado antes, aunque puede que los alumnos no la tuvieran en mente [I, M].*

Vale, o sea que de momento han utilizado grupos de 20, grupos de 10, grupos de 9, ¿vale?



En esta escritura [señala lo que ha escrito en la pizarra] yo veo 3 grupos de 20, 3 grupos de 9, pero aquí [señala el 87] no veo un 3 y un 3. Yo aquí veo 4 grupos de 20, 1 grupo de 10, pero aquí [señala el 90] no veo 4, 1. Con lo cual, parece que tampoco habíais encontrado vosotros un patrón entre cómo escribo la cantidad total con símbolos numéricos y visualmente qué veo en los palillos, ¿vale?

- 2D3.1-1.3. Anota la representación del 90 con los grupos que han utilizado los alumnos: 4 grupos de 20 y 1 grupo de 10 [E, 3].
- 2D3.2-1.3. Incide en la idea de que no hay una conexión entre la notación usual en base 10 y los grupos que han hecho [E, 3].
- 2J3.1-1.3. Hace ver que no hay una conexión entre los grupos hechos y los números 87 y 90, que la agrupación de 20, por ejemplo, no se ve en el 8 ni en el 7 del 87 [E, 3].
 - 2J3.1-1.3(I)1. Pretende que los alumnos vean que expresamos los números en base 10, en grupos de 10, y que ellos han agrupado en otro sistema [I, M].

De momento, la transcripción de lo que veo en los palillos simbólico-numéricamente la tengo aquí a la derecha [señala el $3 \times 20 + 3 \times 9$ y el $4 \times 20 + 1 \times 10$], pero no veo ninguna relación con esto [señala el 87 y el 90].

- 2L2.1-1.3. *Hace ver a los alumnos que la escritura del número no se adecúa a los paquetes que han hecho con los palillos [E, 3].*
 - 2L2.1-1.3(I)1. *Pretende que los alumnos se den cuenta de que habría sido mejor hacer 8 paquetes de 10, 9 paquetes de 10..., es decir, emplear el sistema numérico decimal, un sistema universal, para que todos hubiesen podido contar [I, M].*

Yo aquí estoy haciendo trampa porque estoy metiendo operaciones, nosotros ahora no estamos con las operaciones, estamos solo con el número, con la escritura del número, eso es lo que estamos trabajando, ¿no?

- 2M4.1-1.3. *Pone de manifiesto un problema sobre la escritura [del número] [E, 1].*

Pero para ayudar a ver esa conexión de los palillos hacia lo simbólico-numérico, pongo, escribo eso de transición para ir copiando lo que me decís, ¿no?, porque tardo más, tardo más en dibujar los palillos, las gomitas rosas, no sé qué, podría sacar la foto de la cámara y ponerlo rápido, ¿no?, pero..., bueno, lo escribo, lo transcribo así.

- 2D4.1-1.3. *Aclara el significado de las expresiones que ha puesto, como 2 aspa 20 más 3 aspa 9, haciendo ver que es una representación abstracta de lo que son 3 grupos de 20 palillos y 3 grupos de 9 palillos, una forma de transcribir los que han hecho los alumnos con los materiales [E, 3].*
- 2M5.1-1.3. *Explica que está traduciendo lo que los alumnos están diciendo, escribiéndolo en el registro de representación simbólico-numérico y haciendo ver que podría emplear otros registros: emplear una foto, por ejemplo [E, 2].*
 - 2M5.1-1.3(I)1. *Se trata de una reflexión sobre la traducción que está haciendo basada en los registros de representación de Duval; si tuviera que expresar lo que están diciendo los alumnos tal y como lo han hecho, tendría que decir «3 rosas», etc., en vez de escribirlo simbólico-numéricamente [I, M].*
- 2P3.1-1.3. *Hace ver a los alumnos que no hay relación entre los grupos que han formado [de palillos] y la escritura del número [E, 3].*
- 2J4.1-1.3. *Explica las matemáticas que hay detrás de la conexión [entre lo manipulativo y lo simbólico-numérico] [E, 1].*

Ahora, otro grupo. Vosotros dos ya estáis, que luego, luego... Ah, venga, ya que estamos aquí [dibuja una llave a la derecha de lo que ya ha escrito en la pizarra]. ¿A qué consenso... habéis llegado...?

A: Pues 7 grupos de 20...

F: Muy bien, 7 grupos de 20 [señala el 3 y el 4]. Han visto rápido y han dicho: «bien, los dos hemos agrupado, sin habernos copiado, en grupos de 20, con lo cual automáticamente tenemos 7 grupos de 20» [escribe 7×20].

A: Luego, ellos los 27 de 3×9 ...

F: Sí.

A: ... los han dividido en 2 de 10 para que se junten con los nuestros de 10.

F: ¿Y por qué no habéis hecho vosotros...

- 2J5.1-1.3. *Está viendo qué estrategia han utilizado para sumar [E, 1].*

separar este de 10 [señala el 10 de 1×10] en 1 de 9 y 1 de 1?

A: Porque se quedaría 1 solo y luego...

F: Bueno, pobrecillo, ¿no? No pasa nada.

- 2M6.1-1.3. *Pregunta a los alumnos por qué se han adaptado a los grupos de 10 y no a los de 9 [E, 3].*

A: Y porque es más fácil sumar de 10 en 10 que de 9 en 9.

A: Para ponerle la goma a 1...

F: Para ponerle la goma a 1... Bueno... Eso... Puede ser una justificación, pero tampoco muy potente... Me gusta más lo que ha dicho ella, o ella...

- 2J6.1-1.3. *Pregunta por qué no han empleado otra estrategia que propone ella, haciendo ver que no hay problema cuando están sueltos [los palillos] y mostrando preferencia por la estrategia dada por una alumna, que se basa en que es más sencillo si todo está con el 10 [E, 1].*

A: Que es más fácil sumar de 10 en 10 que de 9 en 9.

- 2R2.1-1.3. *Interactúa con los alumnos a través de preguntas, provocando que razonen [E, 1].*

F: ¿Por qué será más fácil sumar de 10 en 10 que de 9 en 9 para nosotros? [Hablan varios alumnos a la vez]. ¿Por qué es más fácil sumar para nosotros de 10 en 10 y no de 9 en 9?

- 2J7.1-1.3. *Plantea una pregunta en dos ocasiones, haciendo referencia al sistema decimal [E, 2].*
 - 2J7.1-1.3(I)1. *Se trata de una pregunta clave porque trata de guiar a los alumnos hacia el sistema decimal, a los grupos de 10, a que vean la posición de los números y cómo sumamos [I, M].*

[Hablan varios alumnos a la vez]. Porque tenemos 10 dedos, por ejemplo, ¿no? Porque estamos más acostumbrados a 10, 20, 30, 40... [mueve las manos con los dedos estirados], ¿no?, como que nuestro sistema de numeración parece que...

- 2L3.1-1.3. *Pregunta por qué es mejor hacer paquetes de 10 que paquetes de 9 [E, 2].*
 - 2L3.1-1.3(I)1. *Pretende que aparezca en los alumnos la necesidad de agrupar de 10 en 10 [I, M].*

A: Porque en verdad solo sumas de 1 en 1 y luego le pones un 0, entonces...

F: Solo sumas de 1 en 1, elabora eso. Estamos en clase de matemáticas, ¿qué es 1, 1...?

- 2D5.1-1.3. *Analiza la escritura hecha con grupos de 20, haciendo ver que los grupos de 20 se suman bien al sumar las dos cantidades que tienen [E, 2].*
- 2D5.2-1.3. *Pregunta a los alumnos por qué es más sencillo sumar grupos de 10 que grupos de 9, haciendo ver que los grupos de 10 coinciden con la estructura de nuestro sistema posicional [E, 3].*
 - 2D5.2-1.3(I)1. *Pretende que los alumnos vean cuáles son las ventajas de estructurar o de organizar los palillos en grupos de 10 [I, M].*

A: Pues por ejemplo, si tienes 30, pues 1 más 1 más 1, 3, como es 10, pues le pones el 0 y ya tienes los 30.

F: ¿3 qué?

A: 3 grupos de 10.

F: 3 grupos de 10, muy bien.

- 2M8.1-1.3. *Pregunta por qué se suma mejor de 10 en 10, haciendo ver que nos manejamos mejor con 10, 20, 30..., que tiene que ver con la base decimal [E, 3].*
 - 2M8.1-1.3(I)1. *Pretende hacer ver a los alumnos, a través de un ejercicio de mayéutica, de un proceso de pregunta-respuesta, la ventaja de emplear la base decimal [I, M].*

3 grupos de 10, vale.

- 2J8.1-1.3. *Pide a una alumna que explique el porqué de su idea [E, 1].*

[Vuelve a la pizarra a terminar lo que empezó a escribir].

- 2P4.1-1.3. *Pregunta por qué es más fácil sumar de 10 en 10, haciendo ver que es a lo que estamos acostumbrados por el sistema de numeración que usamos, el sistema de numeración decimal [E, 3].*
 - 2P4.1-1.3(I)1. *Intenta hacer ver que sería más sencillo contar los palillos de un vistazo, como se planteaba inicialmente, si los agrupamientos se basaran en el sistema de numeración decimal [I, M].*

A: 3 de 20, 3 de 10 y 1 de 7.

F: [Escribe, después de 7×20 , 3 10]. 3 de 10, llegasteis a romper estos [señala 3×9] en 2 de 10 más 7 sueltos, ¿no? [escribe $2 \times 10 + 7$ encima de 3×9]. Y entonces estos dos [señala 2×10] con este [señala 1×10] 3 y 7 palillos ahí sueltos [escribe, después de $7 \times 20 + 3 \times 10$, 7×1], ¿vale? Ahora, la cantidad total, ¿cuánto es? [señala el 87 y el 90].

A: 177.

F: 1, 7, 7 [escribe 177 a la izquierda del 87 y del 90]. ¿Hay aquí 1, 7, 7 por algún lado? [señala el 7 de 7×20 , al 3 de 3×10 y al 7 de 7×1]. Este [señala el 7 de 7×1] parece que hay aquí, ¿no? Pero lo otro... no me cuadra mucho todavía... Vale, otros dos grupos.

- 2D6.1-1.3. *Conecta la estructura de grupos de palillos que tenían los alumnos con la notación en base 10, dando lugar a los grupos de 10 y a las unidades que aparecen [E, 3].*
- 2D6.2-1.3. *Hace ver que los grupos que han hecho no coinciden con la notación posicional [E, 3].*

- 2D6.2-1.3(I)1. Para que los alumnos traten de arreglar el problema y lleguen a hacer grupos de 10 o potencias de 10 [I, M].
- 2M9.1(i)-1.3. Evento implícito en el comentario [E, 1].
 Transcripción del vídeo: 1, 7, 7 [escribe 177 a la izquierda del 87 y del 90]. ¿Hay aquí 1, 7, 7 por algún lado? [señala al 7 de 7×20 , al 3 de 3×10 y al 7 de 7×1]. Este [señala al 7 de 7×1] parece que hay aquí, ¿no? Pero lo otro... no me cuadra mucho todavía... Vale, otros dos grupos.
 - 2M9.1(i)-1.3(I)1. Al final, la idea de agrupamiento ha prevalecido sobre la idea de sistematización que buscaba la formadora, lo cual tiene que ver con que los grupos hayan tenido que coordinarse para sumar agrupamientos distintos [I, M].
- 2L4.1-1.3. Hace ver al grupo-clase que la escritura del número tendría que tener relación con los grupos de palillos [E, 3].
 - 2L4.1-1.3(I)1. Busca que surja en los alumnos la idea de que el sistema numérico decimal es el sistema universal porque es el más cómodo [I, M].
- 2J9.1-1.3. Hace ver que los números que aparecen en la descomposición deberían ser los de la escritura, incidiendo en la [ausencia de] conexión [E, 3].



VÍDEO 2

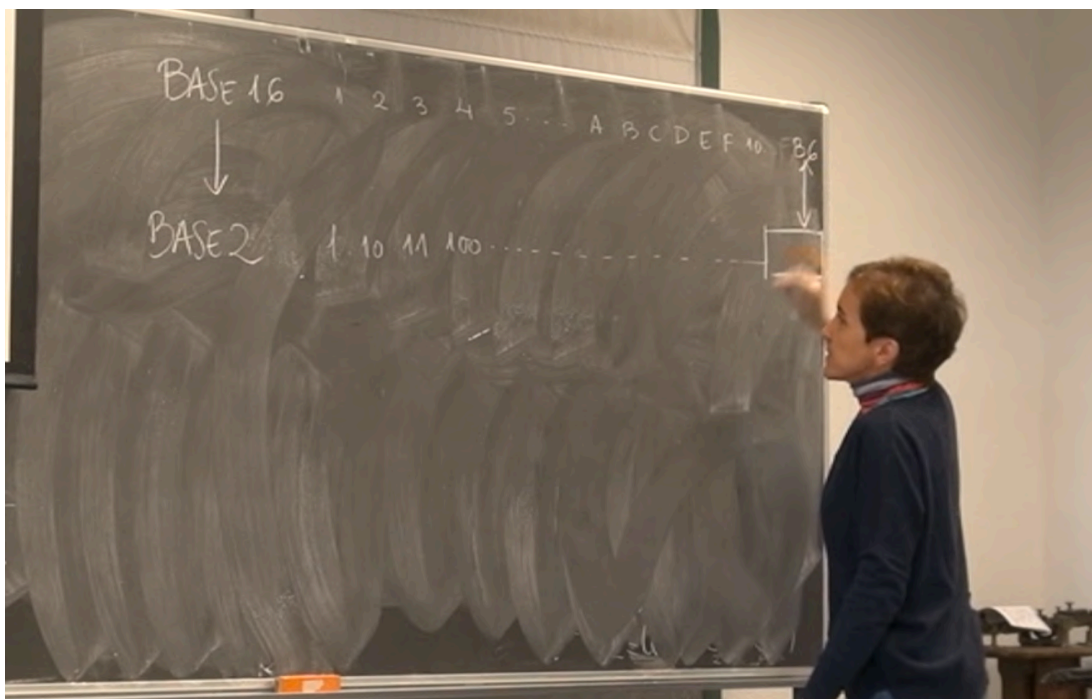
[F = Formadora del vídeo]. [A = Alumnos].

F: Como me piden pasar de base 16 a base 2 directamente [escribe en la pizarra], pues Martín dice:

- 2P1.1-2. Plantea un problema que consiste en pasar de base 16 a base 2 [E, 2].

«yo escribo aquí la secuencia 1, 2, 3, 4, 5..., A, B, C, D [dice 10, 11, 12, 13, señalando A, B, C, D], 14, 15 [escribiendo E, F], uno, cero [10]..., así hasta el B6», ¿vale? Y luego aquí en paralelo, voy uno [1], uno, cero [10], uno, uno [11], uno, cero, cero [100]..., hasta que pille aquí el que sea y ya está.

- 2D1.1-2. Enuncia el problema a realizar, que consiste en pasar un numero de base 16 a base 2 de forma directa, es decir, con la restricción de no pasar por base 10 [E, 3].
- 2D1.2-2. Presenta una primera estrategia de resolución, que consiste en escribir todos los números en base 16 hasta el B6 y hacer lo mismo en base 2, en binario, obteniendo el número en base 2 cuando llegamos al B6 [E, 3].



No he pasado por base 10, que es lo que me dice Nuria. Con lo cual, superado.

- 2M1.1-2. Plantea que hay que pasar de base 16 a base 2 sin pasar por base 10 [E, 3].

- 2M1.2-2. *Está reproduciendo la estrategia de un alumno, que consiste en contar en base 16 y contar en base 2, llegando al resultado escrito en las dos bases cuando se cuenta la misma cantidad [E, 3].*
 - 2M1.2-2(I)1. *Se trata de una estrategia que no es eficaz porque es muy lenta: no se hace una traducción, sino que se cuenta de una manera y de otra [I, M].*
- 2J1.1-2. *Plantea un problema matemático que consiste en pasar de base 16 a base 2 sin pasar por base 10 [E, 3].*
- 2J1.2-2. *Plantea una estrategia de resolución propuesta por un alumno que consiste en colocar los números en base 16 hasta llegar al B6 y en base 2 y hacer una correspondencia uno a uno para ver cuál sería el resultado [E, 3].*
 - 2J1.2-2(I)1. *Puede que no sea la resolución más directa [I, M].*

¿Pero qué pasó?

A: Que es muy largo.

F: Que es muy largo.

- 2P2.1-2. *Plantea una posible resolución del problema [E, 1].*
- 2P2.2-2. *Hace ver a los alumnos que esa solución no es óptima [E, 2].*

Y que hasta en su casa, teniendo semanas, ha dicho: «paso». Tenías tiempo suficiente, porque había tiempo suficiente en dos semanas a hacerlo, pero... es largo y además un coñazo, con lo cual ha dicho: «paso».

- 2J2.1-2. *Indica que la estrategia propuesta para pasar de base 16 a base 2 es muy larga, muy tediosa [E, 2].*
 - 2J2.1-2(I)1. *Pretende que piensen una estrategia que ahorre todo esto [I, M].*

Con la idea Nuria ya se hace una idea de que lo he pensado, es un procedimiento válido, pero no ha sido eficaz, ¿vale?, entonces nosotros tenemos que seguir pensando porque tendremos que buscar alguna estrategia que sea eficaz.

- 2D2.1-2. *Hace ver que el procedimiento empleado funciona, pero que es muy largo, por lo que hay que buscar un algoritmo que sea eficaz [E, 3].*

[Da la palabra a una alumna].

A: ¿Se podría hacer la división?

F: ¿Qué división?

A: La de B6 entre 2. Es que no sé cómo plantearlo.

- 2M2.1-2. *Pone de manifiesto la poca eficacia del sistema, de la estrategia planteada [E, 2].*

F: Ella dice: «oye, mira Nuria,

- 2J3.1-2. *Explica en la pizarra una estrategia propuesta por un alumno, que consiste en hacer una división en una base distinta a la de 10 [E, 2].*
 - 2J3.1-2(I)1. *El objetivo que se persigue es importante, ya que trata de ver los distintos acercamientos que puede haber para resolver el problema, si funcionan o no, qué aporta cada uno, etc., para finalmente llegar a la solución entre todos, con las herramientas que tienen, y decidir qué estrategia puede ser óptima en cada caso [I, M].*
- 2J3.2-2. *Indica que se podría hacer la división con distintas bases, pero haciendo ver también la dificultad que supone que los números no estén en la misma base, que ellos saben hacer la división con el algoritmo tradicional de la cajita en base 10, pero que aquí se plantea una división con distintas bases [E, 3].*

cuando tú pasas de base 10 a base 2 haces grupos de 2 y divides de 2 en 2; pues ahora lo mismo, si estoy en B6 a base 2, divide entre 2». Pero aquí estoy escribiendo en base 16... [En la pizarra ha escrito B6 entre 2, con la caja]. Podríamos intentar hacerlo, pero... ¿sabemos hacerlo... o cómo va esto?

- 2R1.1-2. *Está trabajando el cambio al sistema binario, la escritura de uno a otro [de una base a otra] [E, 1].*
- 2L1.1-2. *Trata de que los alumnos encuentren una estrategia para pasar de base 16 a base 2 [E, 2].*
- 2L1.2-2. *Explica un mecanismo [para resolver el ejercicio] [E, 1].*
- 2L1.3-2. *Hace ver que el mecanismo planteado funciona, pero que es largo y tedioso, por lo que hay que buscar una estrategia que sea óptima [E, 3].*
- 2L1.4-2. *Plantea otra manera junto con los alumnos de poder hacer esto [el ejercicio] [E, 1].*

¿O mentalmente para hacerlo me vais a pasar a base 10, y hacéis la división en base 10 —que es lo que sabéis hacer—, y luego otra vez volvemos y entonces hacemos trampa porque pasamos por base 10?

- 2D3.1-2. *Plantea otra estrategia propuesta por un alumno, que consiste en hacer la división en base 16, es decir, pasar de base 16 a base 2 haciendo grupos de 2 [E, 3].*
- 2D3.2-2. *Incide en la dificultad de la división en base 16 en este momento del desarrollo de la asignatura [E, 2].*

Si sabéis dividir un número en base 16 entre 2, si sabéis hacer esta división en base 16 —yo lo tendría que pensar, ¿eh?, así a capón no lo sé hacer, pero si lo pienso... —, si sabéis hacer eso, valdría.



Pero esto lo vamos a ver en el dossier 3, ¿eh?, multiplicación y división. Nosotros tenemos herramientas para dividir en base 10 y sabemos cómo hacer restas sucesivas y el algoritmo tradicional de la cajita que habéis ido haciendo... Podríamos abordarlo, por eso abordamos los problemas de..., el anterior, ¿no?, de pasar de base 10 a base 2. Pero el de base 16 a base 2 hay que dividir en base 16. Sumar en base 16 lo sé hacer, restar en base 16 me cuesta un poco pero lo sé hacer, multiplicar en base 16 también podría hacerlo, con lo cual dividir podría hacerlo, pero... no me atrevo a hacerlo sin manos, hoy.

- 2M4.1-2. *Analiza una nueva estrategia, consistente en dividir entre la nueva base, en base 16, tal y como se hace al pasar de base 10 a otra base [E, 3].*

- 2M4.1-2(I)1. Se trata de una estrategia que seguramente no hayan podido llevar a cabo los alumnos [I, M].
- 2M4.1-2(I)2. Pretende que los alumnos reflexionen sobre la relevancia del sistema de numeración en cualquier técnica de cálculo [I, M].
- 2M4.1-2(I)3. Con el hecho de que haya cogido base 16, que es 2^4 , quiere profundizar en la idea de base al cambiar el agrupamiento, lo cual no sería abordable si hubiera cogido una base que no tuviera nada que ver con 2 [I, M].
- 2M4.2-2. Hace ver que en este caso hace falta saber dividir en base 16, lo cual no es sencillo, y que los algoritmos se basan en el sistema de numeración, por lo que cambian si cambia el sistema de numeración [E, 2].

Otra forma.

- 2P4.1-2. Plantea otra posible solución, propuesta por una alumna, que consiste en dividir el número en base 16 entre 2 [E, 3].
- 2P4.2-2. Indica que la propuesta de la alumna podría ser válida, pero que no es nada fácil al tener que dividir en base 16 y no en base 10, que es lo que los alumnos saben hacer [E, 3].

A: Fijándote en que 16 es 2^4 .

F: Fijándome en que 16 es 2^4 . Me lo voy a apuntar aquí [borra la pizarra y lo escribe].

- 2J8.1-2. Apunta en la pizarra otra idea propuesta por otro alumno, que se basa en el 2^4 , planteando la descomposición del número [del que se parte] y la forma del número que se quiere encontrar, haciendo ver que va a desarrollar a partir de esa descomposición para pasar el número a grupos de 2 [E, 3].
 - 2J8.1-2(I)1. Quiere seguir desarrollando las ideas de los alumnos poco a poco para ir conociendo más sobre el problema; ver distintas maneras de abordarlo es bastante enriquecedor a la hora de aprender a resolver problemas de distintas formas y ver cuáles van a funcionar y cuáles se pueden generalizar [I, M].

A: Yo lo hice así, pero luego algo no me cuadraba.

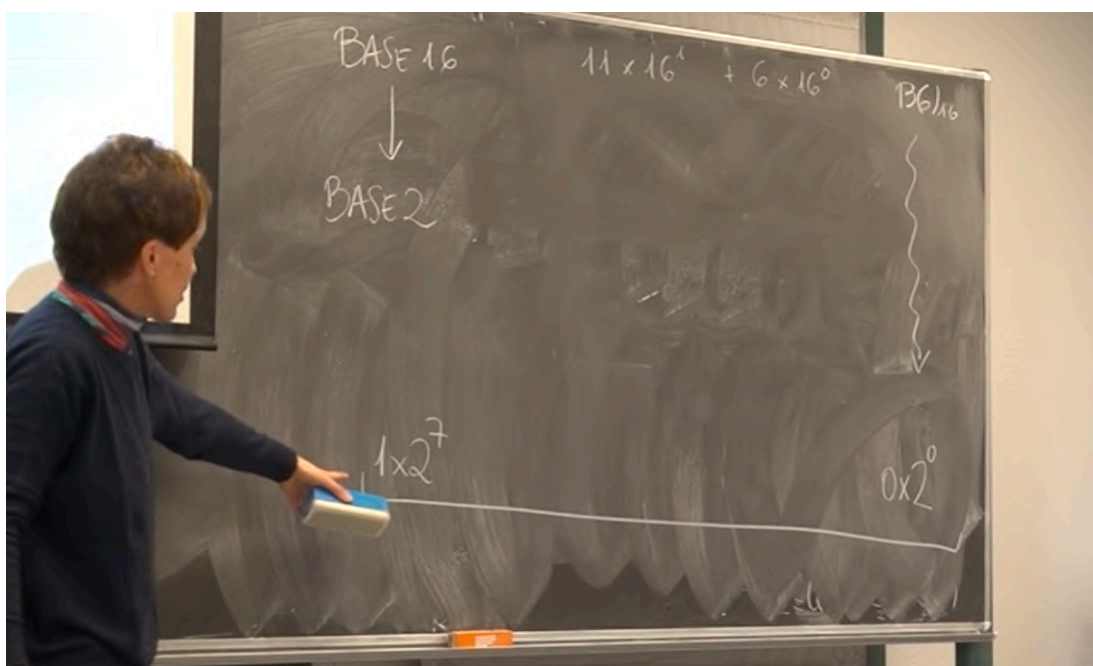
F: Muy bien, vale.

A: Luego hice, 11...

F: Venga, vamos a poner el punto de partida, ¿no? El punto de partida es que tenemos 11×16^1 , ¿no?, más 6×16^0 . Este es mi B6 en base 16.

- 2P6.1-2. Descompone el número B6 en la base 16 [E, 1].
 - 2P6.1-2(I)1. Para poder hacer las manipulaciones necesarias para transformar el número a base 2 [I, M].

Y yo quiero llegar aquí a... Me acuerdo de que empezaba en 1×2^7 y acababa en 0×2^0 , ¿vale?



Entonces yo quiero pasar de ahí [señala la parte superior de la pizarra] a aquí [señala la parte inferior]. Si lo consigo, ya lo tengo en base 2, ¿no? Ya solo cojo los coeficientes de las potencias de 2 y ya lo tengo.

- 2D6.1-2. Explora otra alternativa dada por un alumno para resolver el ejercicio, que consiste en atender a la conexión entre la base 2 y la base 16 que es que 16 es 2^4 , expresando en la pizarra el número en base 16 como grupos de 16 y potencias de 16 e indicando la potencia más grande que va a aparecer en base 2 y la menor [E, 3].
 - 2D6.1-2(I)1. Con la información que presenta en la pizarra, podemos saber que el número es par [I, M].

Entonces, Pablo dice: «cambia este 16», ¿no, Pablo?

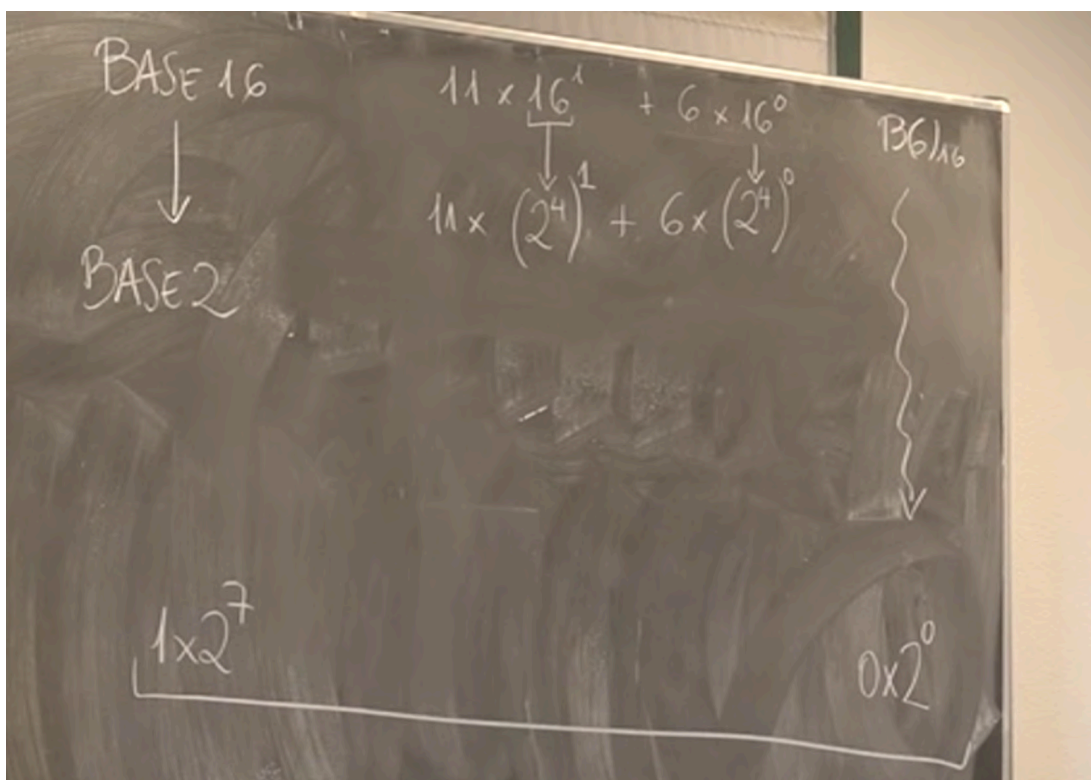
A: Sí.

F: Este 16 ponlo como $(2^4)^1$ y este 16 ponlo como $(2^4)^0$. ¿Vale? Yo tengo una expresión polinomial en base 16, quiero llegar a una expresión polinomial en base 2, y él me dice: «yo veo claro el cambio, 16 es 2^4 , cada vez que veas un 16 ponlo como 2^4 ».

- 2D7.1-2. *Procede con la primera etapa, en la cual sustituye los 16 por 2^4 [E, 3].*
- 2R3.1-2. *Cuenta a los alumnos el objetivo que persigue con la actividad [al hacer ver que 16 es 2^4] [E, 1].*

Vale, y entonces resulta que aquí tengo 11 grupos de esto y aquí tengo 6 de estos. ¿El 11 y el 6... los puedo dejar?

- 2L3.1-2. *Emplea la propuesta de un alumno, que anotó en la pizarra y que se basa en que 16 se puede poner como 2^4 , para escribir B6 en base 16 como base 2, es decir, como productos de coeficientes por potencias de 2 [E, 3].*
 - 2L3.1-2(I)1. *Los coeficientes solo pueden ser unos y ceros [I, M].*
- 2L3.2-2. *Transforma los 16 en potencias de 2, haciendo ver a los alumnos cómo se puede llegar a escribir el número en potencias de 2 mediante esas transformaciones [E, 3].*
- 2L3.3-2. *Pregunta si el 11 y el 6, en la expresión $11 \times (2^4)^1 + 6 \times (2^4)^0$, hay que descomponerlos para poder tenerlos en potencias de 2 [E, M].*
- 2J10.1-2. *Transforma unas potencias de 16 en unas potencias de 2, en grupos de 2 [E, 3].*
- 2J10.2-2. *Pregunta qué hacen con el 11 y con el 6 [E, M].*
 - 2J10.2-2(I)1. *Quiere que lo resuelvan los alumnos, quienes ya tendrán la idea de que hay que expresar todo en potencias de 2, tal y como han visto, por lo que les será sencillo seguir [I, M].*



A: No, los pasas a base 2.

F: Los paso a base 2. ¿Sé pasar 11 a base 2?

A: Sí.

F: Vale, vamos a escribir 11 en base 2.

A: 1, 0, 1, 1.

- 2M5.1-2. Gestiona lo que plantea en la pizarra, presentando los pasos de forma horizontal [E, D].
 - 2M5.1-2(I)1. Pretende que el proceso gane en claridad visual para que los alumnos, que pueden tener dificultades con las escrituras polinómicas, vean mejor cómo se va haciendo el proceso de transformación [I, M].
- 2M5.2-2. Plantea el proceso de transformación de base 16 a base 2 con escrituras polinómicas [E, 2].
- 2M5.3-2. Cambia de base 16 a base 2, elevando a 0 el 2^4 y dejando la escritura $(2^4)^0$ [E, 3].
 - 2M5.3-2(I)1. En las escrituras polinómicas en las que se basan las escrituras de los sistemas de numeración aparecen las potencias de la base y la última está elevada a 0 [I, M].

F: 1×2^3 , ¿no?

- 2P7.1-2. Transforma el coeficiente, el 11, de base 16 a base 2 [E, 2].
- 2P7.2-2. Transforma el coeficiente, el 6, de base 16 a base 2 [E, 2].

A: Sí.

F: Más...

A: Cero.

F: 0×2^2 . De momento llevo ocho. Más...

A: Uno.

F: 1×2^1 . Ya llevo 10...

A: Más uno.

F: Más 1×2^0 . Ahí ya tengo 11, ¿vale?

- 2M6.1-2. Escribe el polinomio del 11 en base 2 incluyendo las unidades que no aparecen: 0×2^2 [E, 2].
 - 2M6.1-2(I)1. Pone el 0×2^2 porque 11 en base 2 es 1, 0, 1, 1. Aunque en la escritura polinómica no es obligatorio escribirlo, ya que un polinomio no tiene por qué tener monomios de todas las potencias, lo pone para hacer ver que la escritura se corresponde con todos los coeficientes de las potencias, ya que emplea la escritura de un sistema de numeración posicional. La escritura polinómica no es la escritura del sistema de numeración; una vez que yo tengo la descomposición polinómica, yo puedo escribirlo con distintos sistemas de numeración. El nuestro es posicional y el posicional exige el 0, por eso aparece el 0 [I, M].

Esta es una manera de escribir 11. ¿Cómo? Como potencias de 2. Expresión polinomial del 11 en base 2, como potencias de 2, ¿vale? Y esto va multiplicado... 2 elevado a la 4 y luego lo elevo a la 1, ¿cuánto me queda...?

- 2J11.1-2. Escribe la expresión polinomial en potencias de 2 del 11, haciendo hincapié en los conceptos clave de la expresión, indicando que el 11 se puede escribir con otras potencias, con potencias de 2 en este caso [E, 3].

2^4 es $2 \times 2 \times 2 \times 2$ y luego eso lo elevo a la 1, es decir, que lo copio una vez, o sea que me queda...

A: 2^4 .

F: 2^4 . Más... El 6, ¿lo deajo?

A: No.

- 2R4.1-2. *Está constantemente planteando preguntas a los alumnos [E, D].*
 - 2R4.1-2(I)1. *Su metodología consiste en que los alumnos verbalicen sus conocimientos y razonen para poder asentar mejor los conceptos [I, D].*

F: No. ¿Cómo escribo 6 en base 2?

A: 1×2^2 .

F: 1×2^2 , que son 4.

A: 1×2^1 .

F: $1 \times 2^1 \dots$ Y 0×2^0 [lo va escribiendo todo en la pizarra].

- 2D8.1-2. *Escribe el 11 con potencias de 2, como una expresión polinómica en base 2, con la colaboración de los alumnos [E, 3].*
- 2D8.2-2. *Escribe el 6 con potencias de 2, como una expresión polinómica en base 2, con la colaboración de los alumnos [E, 3].*
 - 2D8.2-2(I)1. *Los coeficientes que acompañan a las potencias de 2 siempre van a ser 0 o 1 [I, M].*
- 2J12.1-2. *Escribe el 6, formalizando lo que dice un alumno y haciendo pausas a lo largo del proceso de resolución [E, 1].*
 - 2J12.1-2(I)1. *Realizar pausas es la estrategia que se seguiría al resolverlo en papel [I, M].*
- 2J12.2-2. *Plantea la resolución en la pizarra de forma ordenada, grande y clara [E, D].*

Ahí pone 6, una manera más chula, ¿no?, de poner 6 como potencias de 2, ¿no?, como un polinomio con potencias de 2.

- 2M7.1-2. *Escribe el 6 como una expresión polinómica en función de la base 2, que sería 1, 1, 0 [E, 3].*
 - 2M7.1-2(I)1. *Pone de manifiesto que se pueden plantear dos escrituras del mismo número, que es igual de válido el 6 que el 1, 1, 0 en base 2, con la intención de hacer ver que el número va por un lado y la escritura por otro [I, M].*

Vale, y luego estaba por... Y ahora tengo $(2^4)^0$.

- 2L4.1-2. Traduce el 11 a base 2, con ayuda de los alumnos [E, 2].
- 2L4.2-2. Traduce el 6 a base 2, con ayuda de los alumnos [E, 2].
 - 2L4.2-2(I)1. Su objetivo matemático es que los alumnos vean que haciendo transformaciones se puede llegar a pasar de base 16 a base 2 de forma cómoda [I, M].
 - 2L4.2-2(I)2. Realmente ella es quien va guiando todo el proceso y escribiendo el número de forma adecuada para llegar a su objetivo, aunque hace pensar a los alumnos que lo están descubriendo ellos [I, D].

¿Eso qué es?

A: Uno.

F: Uno. ¿Y si lo quiero poner como potencias de 2?

A: 2^0 .

F: 2^0 , muy bien. 2^0 [lo escribe en la pizarra].

- 2D9.1-2. Plantea a los alumnos el problema del $(2^4)^0$, haciendo ver que eso es 1 y que se puede poner como como 2^0 , o sea, que $(2^4)^0$ es 2^0 [E, 3].
 - 2D9.1-2(I)1. Plantea la cuestión a los alumnos porque seguramente sabe que «elevar a 0» les supone muchas veces un problema [I, M].

Mira qué contenta estoy, porque $2^0 \times 2^0$ es 2^0 y el coeficiente es 0, que es este.

- 2M8.1(i)-2. Evento implícito en el comentario [E, 1].
 Transcripción del vídeo: Mira qué contenta estoy, porque $2^0 \times 2^0$ es 2^0 y el coeficiente es 0, que es este.
 - 2M8.1(i)-2(I)1. Debe de ser que el ejercicio decía que el número empezaba con el 1 del 2^7 y terminaba con el 0 del 2^0 , por lo que pueden saber que la máxima potencia va a ser 2^7 [I, M].

Y $2^4 \times 2^3$ es 2^7 y el coeficiente es 1, que es este. Pues como que ya casi lo tengo, ¿no?

- 2D10.1-2. Indica que la expresión que tienen hasta el momento coincide con lo que conocen de la expresión final, es decir, empieza por 1 y termina por 0, haciendo ver que van por buen camino [E, 3].

- 2J13.1-2. Va conectando con lo que buscan en el problema, con que empezaba por 1 y acababa en 0, haciendo ver que el proceso va funcionando, que el argumento tiene sentido [E, 3].
 - 2J13.1-2(I)1. Para llegar a la solución, solamente quedaría hacer esas operaciones [I, M].

¿Sí o no?

A: Sí...

- 2P9.1-2. Hace ver a los alumnos la relación que hay entre la expresión que ha obtenido, al transformar los coeficientes a base 2, y los coeficientes de la expresión final que quiere obtener [E, 3].

Handwritten work on a chalkboard showing the conversion of a base 16 expression to base 2. The work includes the initial expression $11 \times 16^1 + 6 \times 16^0$, its conversion to powers of 2, and the final simplified expression $1 \times 2^7 + 0 \times 2^0$.

$$\begin{aligned}
 &\text{BASE 16} \\
 &\downarrow \\
 &\text{BASE 2} \\
 &11 \times 16^1 + 6 \times 16^0 \\
 &\downarrow \\
 &11 \times (2^4)^1 + 6 \times (2^4)^0 \\
 &\downarrow \\
 &[1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0] \times 2^4 + [1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0] \times 2^0 \\
 &\downarrow \\
 &1 \times 2^7 + 0 \times 2^0
 \end{aligned}$$

F: Vale, y ahora... Venga, ¿cuál será el coeficiente...? Venga, vamos a poner aquí 2^6 , paso a la siguiente varilla del ábaco, ¿eh? ¿Cuál será el coeficiente de 2^6 ?

- 2P10.1-2. Relaciona en una ocasión lo que están haciendo, las expresiones aritméticas, con el instrumento del ábaco [E, 3].
 - 2P10.1-2(I)1. A lo mejor porque anteriormente han trabajado con el ábaco [I, D].

A: Cero.

- 2L5.1-2. Conecta en una ocasión la escritura numérica, los coeficientes de las potencias de 2, con el ábaco [E, 3].
 - 2L5.1-2(I)1. Posiblemente porque los alumnos hayan hecho alguna práctica con materiales manipulativos previamente [I, D].
 - 2L5.1-2(I)2. Quiere que los alumnos vean que el material tiene que ver con la escritura, que se cambia de varilla del ábaco cada vez que se cambia de potencia [I, M].

F: Cero, porque ¿cómo consigo yo 2^6 ? $2^4 \times 2^2$, ¿no? 2^4 es $2 \times 2 \times 2 \times 2$, 2^2 es 2×2 , ya tengo ahí los seis doses, ¿vale?, que está aquí, y el coeficiente cero. ¿Por aquí puedo llegar a 2^6 ?

A: No.

F: No, pues ala. 0×2^6 .

- 2J14.1-2. Recuerda cómo multiplicar potencias a raíz de la construcción final que está haciendo de cada término: 2^6 , 2^5 , 2^4 ..., desarrollando los cálculos para llegar al coeficiente del término 2^6 tras preguntar por cuál sería dicho coeficiente [E, 3].

Genial, porque era lo que me había salido antes. Ahora, más... Siguiente varilla del ábaco, 2^5 .

- 2J15.1-2. Relaciona en tres ocasiones el desarrollo algebraico que les va saliendo, las distintas posiciones, con un material manipulativo, con las varillas del ábaco [E, 3].
 - 2J15.1-2(I)1. Porque puede que previamente hayan trabajado con el ábaco [I, D].

¿Dónde consigo yo 2^5 ? Aquí [señala el corchete de la derecha] como mucho llego a 2^2 , me olvido de esto. $2^4 \times 2^1$ [señalando el corchete de la izquierda] es 2^5 , ¿no?

A: Sí.

F: Vale, ¿y qué coeficiente lleva?

A: 1.

F: 1. ¿Y era el qué tenía que llevar?

A: Sí.

F: Sí, vamos bien. Y ahora, 2^4 , ¿cómo consigo 2^4 ?

A: Con 2^0 ...

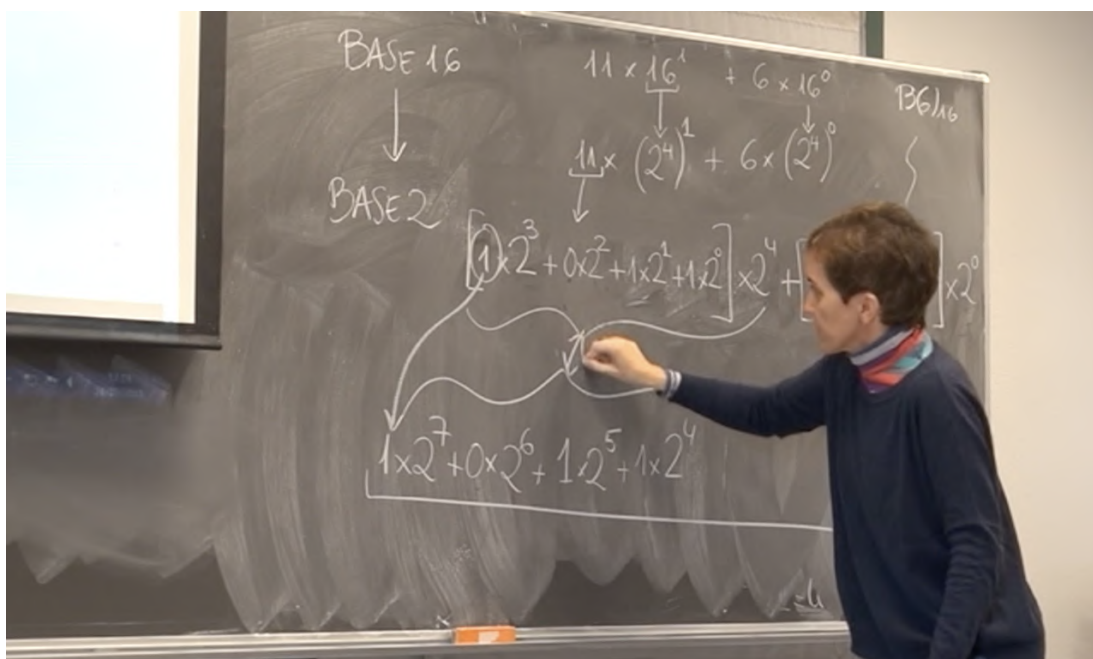
F: $2^4 \times 2^0$, ¿no? Tengo aquí cuatro copias del 2 y aquí ninguna, pues tengo cuatro copias del 2 multiplicándose por sí mismo, y el coeficiente 1. 1×2^4 [lo escribe en la pizarra].

- 2M10.1-2. *Va haciendo la escritura polinómica, aplicando la propiedad distributiva [E, 2].*
 - 2M10.1-2(I)1. *Se observa la idea del teorema fundamental de la numeración, que es que todo número se puede escribir como un polinomio y sus coeficientes son únicos [I, M].*
- 2M10.2-2. *Recuerda, a partir de la escritura polinómica que tiene, lo que es una potencia, haciendo ver que 2^4 es $2 \times 2 \times 2 \times 2$, y el producto de potencias, haciendo ver que en $2^4 \times 2^0$ hay 4 doses y ninguno, es decir, 4 doses [E, 3].*
 - 2M10.2-2(I)1. *Porque los alumnos no suelen estar acostumbrados a trabajar con escrituras polinómicas en función de un número [I, M].*

Oye, mira, todo esto se ha convertido en esto.

- 2L6.1-2. *Remarca que las cuentas que ha hecho del 11×16^1 se corresponden con lo que tiene dentro del corchete por 2^4 y que se corresponde con lo que tiene en la llave abajo, habiendo empleado la distributiva del producto con respecto de la suma en las cuentas que ha realizado en la pizarra [E, 3].*
 - 2L6.1-2(I)1. *Para que los alumnos no se pierdan con los cálculos [I, M].*

Lo veis, ¿no?



¿Qué es lo que he hecho? Propiedad distributiva.

- 2R5.1-2. Dice que está aplicando la propiedad distributiva [E, 3].

Voy multiplicando el 2^4 por cada uno de los sumandos, ¿vale?

- 2L7.1-2. Indica que ha empleado la propiedad distributiva del producto con respecto de la suma, conectando lo que está haciendo para realizar el cambio de base con una propiedad de los números naturales [E, 3].
- 2J16.1-2. Indica una equivalencia, haciendo ver cómo ha pasado de un desarrollo a otro tras realizar las operaciones aritméticas, cómo los dos números son el mismo [E, 2].
- 2J16.2-2. Recuerda la propiedad que ha usado [E, 2].

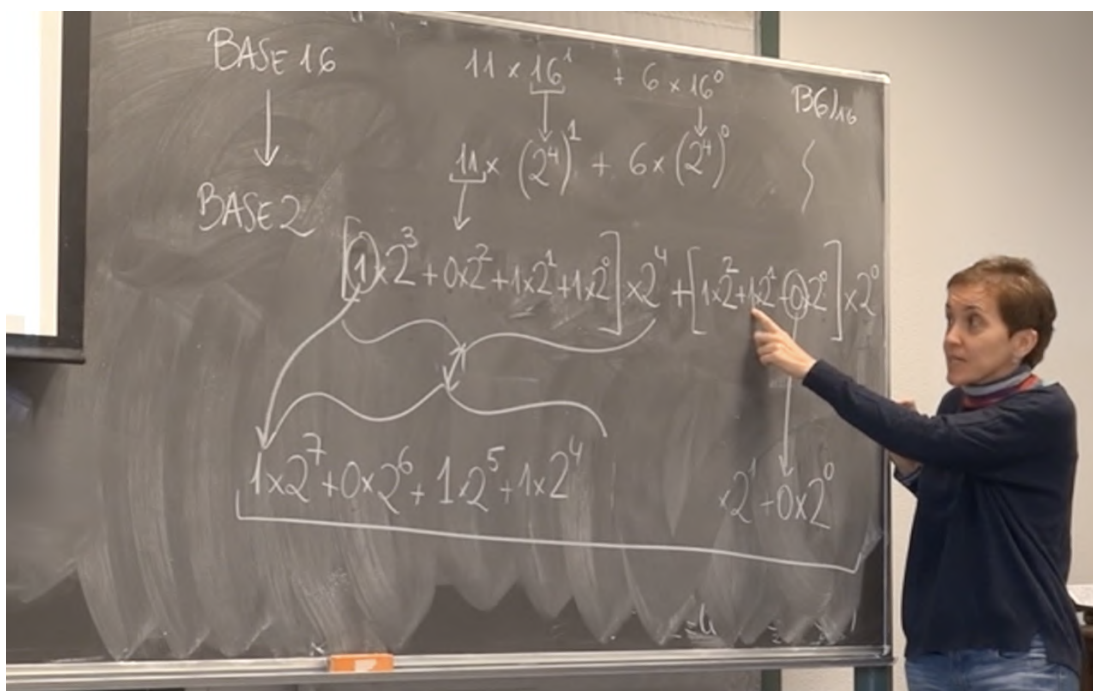
Muy bien.

- 2P11.1-2. Relaciona lo que acaba de hacer con una propiedad de los números, la propiedad distributiva [E, 3].

Y ahora, tiro por aquí, voy desde aquí [señala el 2^0 de la parte inferior derecha de la pizarra]. 2^0 , muy bien. Siguiente varilla del ábaco, 2^1 . ¿Qué coeficiente tiene 2^1 ?

A: 1.

F: 1, que está aquí [lo señala], ¿vale?

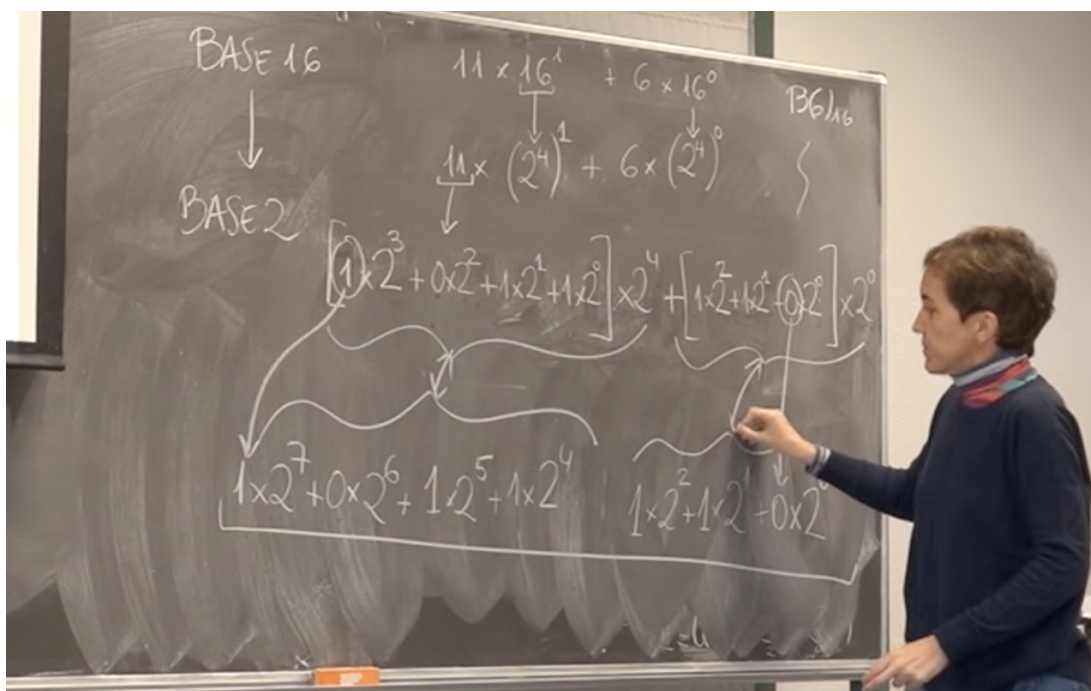


Porque sería $2^1 \times 2^0$, que es 2^1 , y lleva un 1 delante, un 1 [lo escribe abajo]. Voy bien.

- 2D11.1-2. Reorganiza la expresión que tenían para reescribirla con potencias de 2, recolectando las potencias de 2 correspondientes [E, 2].
- 2D11.2-2. Explica a los alumnos cómo multiplicar potencias de 2, haciendo que observen que $2^2 \times 2^4$ es 2^6 porque aparecen 6 doses en esas potencias [E, 3].
 - 2D11.2-2(I)1. Pretende con ello enfatizar el proceso por encima de las recetas que los alumnos puedan conocer de secundaria, y que a lo mejor no llegan a comprender, como la de «sumar los exponentes» [I, M].

Y ahora, $2^0 \times 2^2$, 2^2 [lo escribe abajo], va con un 1 [lo escribe abajo]. O sea que esto que tengo aquí se convierte en esto que tengo aquí.

- 2J17.1-2. Hace hincapié en los coeficientes en cada paso que va explicando, haciendo ver cómo se llega a la expresión final del número [E, 2].



Y ahora, Pablo, ¿qué te pasó?

A: Que como... Que claro, los iba a juntar, pero dije: «me falta el 2^3 ».

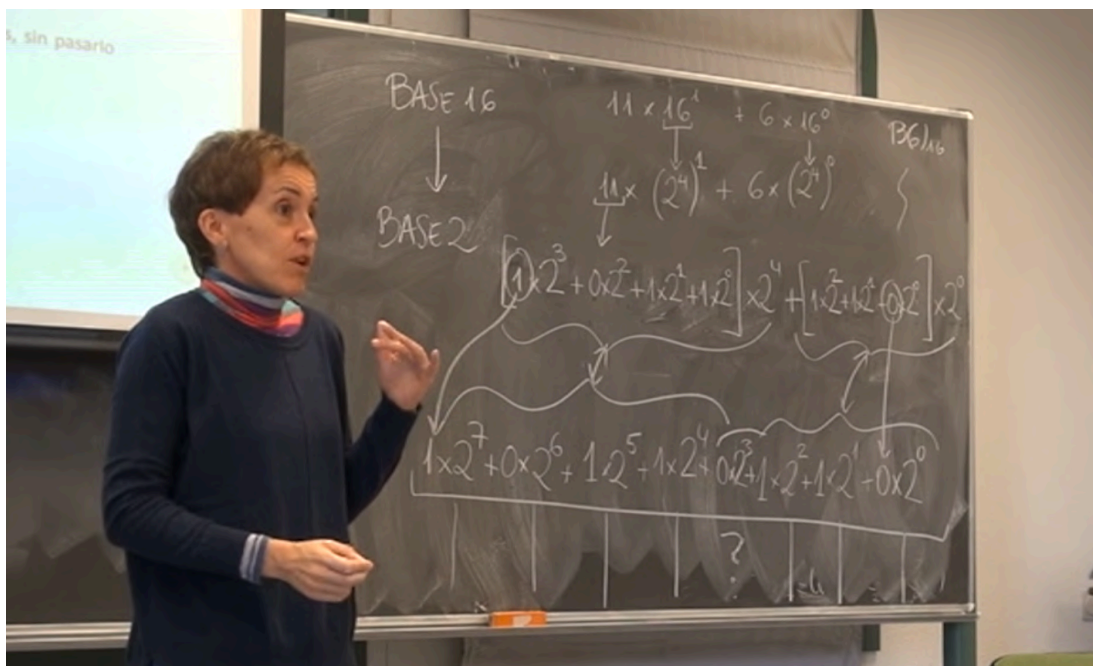
F: Me falta el 2^3 . Pablo dice: «varilla del ábaco del 2^7 , 2^6 , 2^5 , 2^4 , ¡uy!, 2^2 , 2^1 , 2^0 ». «¡Uy!», dice Pablo [y dibuja una interrogación en la posición del 2^3].

A: Pues si no hay, un cero.

F: Pues se pone el 0, ya está.

- 2P12.1-2. Aborda el problema que le había surgido a un alumno al no aparecer el coeficiente de 2^3 , explicando que, si no aparece un coeficiente, se pone un 0 en la descomposición en base 2 [E, 3].
- 2J18.1-2. Pregunta, a raíz de la dificultad que ha tenido un alumno, qué hacer al no haber valor para el 2^3 , haciendo ver que tienen que escribir un 0 en el número [E, 3].

Lo pongo aquí: «+ 0×2^3 », y esto lo englobo aquí.



¿Qué es lo que pasa? Que escribo el 6 de una forma muy especial. Yo escribo el 6..., acordaos que esto era mi 6 [señala $1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0$], ¿eh?, esto era el 6, que es este 6 [señala el de un nivel anterior, más arriba en la pizarra], ¿vale? Yo he escrito el 6 como $1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0$, pero también puedo escribir el 6... $0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0$.

- 2D12.1-2. Analiza una dificultad que aparece con la expresión obtenida, que es que no aparecen potencias cúbicas de 2, haciendo ver que se puede arreglar escribiendo un 0 [E, 3].
- 2D12.2-2. Trata de que los alumnos entiendan que 6 no tiene grupos de 2^3 y que se puede escribir un 0×2^3 , que es lo mismo que decir que no hay grupos de 2^3 [E, 3].
- 2M11.1-2. Identifica en dos ocasiones cada orden de unidad con una varilla del ábaco [E, 3].
 - 2M11.1-2(I)1. Para que todos piensen que en cada varilla tiene que haber siempre un coeficiente, una cifra; es la esencia de los sistemas de numeración posicionales [I, M].
- 2M11.2-2. Incide en el hecho de que una potencia no está explícita [E, 2].
 - 2M11.2-2(I)1. Imagino que las cantidades están elegidas para que haya una potencia que no esté explícita y haya que tomar una decisión sobre qué hacer con ella. Además, no se solapan en ningún caso, se podrían haber solapado, podría haber habido potencias de 2 en las que interviniesen cantidades de los distintos

órdenes de la base 16, pero aquí no ha ocurrido. Que las cantidades planteen esta aparente dificultad es un hecho didáctico que hace que surja una discusión rica e interesante [I, M].

- 2M11.3(i)-2. Evento implícito en el comentario [E, 1].

Transcripción del vídeo: Yo he escrito el 6 como $1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0$, pero también puedo escribir el 6... $0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0$.

- 2M11.3(i)-2(I)1. Y también se puede escribir 27 como 000000027; se entiende por qué lo hace [I, M].

No es lo estándar, porque como los ceros ahí no aportan mucho, pues no es lo estándar, pero si no me quiero olvidar de una de las varillas y no quiero tener un problema, como tenía Pablo, pues yo añadido ahí para escribir el 6 de otra forma, ¿vale?

- 2L8.1-2. Conecta con llaves lo de arriba y lo de abajo [E, 2].
- 2L8.2-2. Dibuja unas cajas [son en realidad segmentos que representan las varillas de un ábaco] en la parte inferior de la pizarra [E, M].
 - 2L8.2-2(I)1. Para poner el número escrito, para escribir 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, dejando así el número en base 2 [I, M].
- 2L8.3-2. Organiza bastante la pizarra [E, D].
 - 2L8.3-2(I)1. Para que quepa toda la información sin necesidad de borrar [I, D].
- 2P13.1-2. Está analizando la equivalencia de cómo escribir un número de distintas formas incluso en un mismo sistema de numeración [E, 2].

Entonces, moraleja que cuentan los youtubers, por ejemplo David Calle, dice: «vamos a pasar de base 16 a base 2, ¿qué se hace chavales? Mirad, ¿veis este 11 que está aquí? [señala el de arriba de la pizarra], pues escribís este 11 en base 2: 1, 0, 1, 1 [señala los coeficientes de la expresión polinómica de la parte inferior de la pizarra]; ¿veis este 6 que está aquí? [señala el de arriba de la pizarra], pues lo escribís en base 2, pero cuidadín chavales, que hay que poner cuatro, ¿por qué?, porque 16 es 2^4 ». Y entonces dice: «vamos a escribir 6 en base 2 con cuatro: 0, 1, 1, 0». Y dice: «y ahora lo juntáis, fin».

- 2D13.1-2. Explica el procedimiento que han seguido formulándolo en términos de receta memorística, que consistiría en expresar cada coeficiente de la base 16 en base 2 y ponerlos en ciertas posiciones [E, 3].
 - 2D13.1-2(I)1. Su intención es que los alumnos reflexionen sobre la diferencia entre un procedimiento con sentido, como el desarrollado en la sesión, y un procedimiento mecánico, receta o algoritmo, que no se entiende si se aplica de manera mecánica [I, M].
 - 2D13.1-2(I)2. El uso de recetas, algoritmos o procedimientos mecánicos, aplicados sin que los alumnos entiendan lo que hacen, es habitual en la enseñanza de las matemáticas y es algo que se debería evitar por los inconvenientes que tienen [I, M].
- 2P14.1-2. Comenta la receta que se emplearía para resolver un problema sin tener que profundizar en el porqué [E, 2].
 - 2P14.1-2(I)1. Quiere hacer ver a los alumnos que lo importante no es tanto el resultado sino el procedimiento de cómo llegamos al resultado [I, M].

A mí no me vale

- 2J19.1-2. Plantea la idea de que cualquier número lo puede escribir, por ejemplo, de la manera que lo ha hecho [con el 6] [E, 1].
- 2J19.2-2. Menciona una receta, un algoritmo que consistiría en coger el número 11, pasarlo a base 2, obtener 4 dígitos, tener en cuenta que trabajamos con 2^4 , etc. [E, 3].

porque yo no soy David Calle, yo no estoy de youtuber, influencer, superfamosa ayudando a los chavales a aprobar exámenes, que es un trabajo muy digno y que está bien,

- 2L9.1-2. Cuenta una regla nemotécnica, haciendo alusión al youtuber David Calle, que se basa en que 16 es 2^4 , haciendo ver que basta con escribir los dos coeficientes en base 2 utilizando cuatro cifras para cada uno y juntarlo [E, 3].
 - 2L9.1-2(I)1. Quiere llamar la atención sobre el contenido matemático que a ella le interesa haciendo ver lo que haría un youtuber [I, D].
- 2L9.2-2. Dice que a ella no le vale la regla nemotécnica [E, 1].

- 2L9.2-2(I)1. *Porque quiere que los alumnos lo justifiquen en el examen, aunque en el fondo sí le vale que lo aprendan así, pero no se lo puntuará al máximo, es decir, quiere que al menos sepan hacerlo para poder comprobar si lo que han hecho manipulando el número les coincide con lo que David Calle dice que pueden hacer para obtener el número en base 2 de forma rápida [I, M].*

y además el tío es un *crack*, muy suelto, lo hace muy bien; yo estoy formando maestros, entonces tenéis que entender cómo hemos pasado de aquí [señala la parte superior de la pizarra] a aquí [señala la parte inferior de la pizarra] a través de esto [señala la parte media de la pizarra].

- 2M12.1-2. *Plantea un procedimiento que podría proponer un youtuber como David Calle que se basaría en aplicar una receta [E, 2].*
 - 2M12.1-2(I)1. *Se trata de un proceso válido en cuanto al resultado, pero que se aprende de memoria y se aplica de manera irreflexiva [I, M].*
 - 2M12.1-2(I)2. *Hace alusión a un youtuber para partir de un contexto que puede ser cercano para el alumno [I, D].*
- 2M12.2-2. *Indica que los alumnos, como futuros maestros de matemáticas, tienen que entender el proceso [E, 3].*
 - 2M12.2-2(I)1. *Se trata de una reflexión metamatemática que se basa en que el conocimiento que tienen que tener los maestros sobre las matemáticas debe ser distinto al simple uso o a una concepción meramente utilitarista, por lo que deben preocuparse de cómo se aprende [I, M].*

Entonces, la pregunta es: ¿se puede pasar de base 16 a base 2 sin pasar por base 10? Sí. Lo acabamos de hacer, ¿no? Es que me miráis con una cara...

- 2P15.1-2. *Pregunta si se puede transformar un número en base 16 a base 2 sin pasar por base 10, haciendo ver que sí se puede [E, 2].*

¿Y por qué se puede?

- 2J20.1-2. *Dice que a ella no le vale la receta porque los maestros tienen que aprender el porqué, que es lo que han visto a través de las operaciones [E, 3].*
 - 2J20.1-2(I)1. *La idea que han trabajado [en clase] les va a servir para generalizarla y poder pasar a diferentes bases, no solo a base 2, lo cual tiene más*

valor para un futuro maestro. Entender el porqué, ver hasta qué punto funcionan los algoritmos, tiene más valor para el futuro docente, necesita saber eso más que la receta en sí y será en lo que tenga que incidir a la hora de enseñar [I, M].

¿Qué pasa si yo esto [el ejercicio] os lo doy en base 15 y, en vez de en base 16, todo el problema es en base 15?

- 2D14.1-2. *Pregunta a los alumnos por qué se puede pasar de base 16 a base 2 de forma mecánica, directamente [E, 2].*
- 2D14.2-2. *Plantea una situación alternativa, preguntando qué ocurriría si el ejercicio estuviera en base 15 en vez de en base 16, haciendo ver que con la base 15 habría que hacer los cálculos intermedios, que no habría un procedimiento directo [E, 3].*
 - 2D14.2-2(I)1. *Pretende que los alumnos detecten qué es lo que no funciona con la base 15 [I, M].*

A: Que sería $2^4 + 2^0$.

F: ¿ $2^4 + 2^0$ es 15?

- 2L10.1-2. *Pregunta si se puede pasar de base 16 a base 2 sin pasar por base 10 [E, 2].*
- 2L10.2-2. *Pregunta por el cambio desde la base 15 a la base 2 [E, 2].*
 - 2L10.2-2(I)1. *Para que vean por qué se puede pasar de base 16 a base 2 de forma rápida y por qué para pasar de base 15 a base 2 habría que realizar bastantes más cálculos y no sería tan rápido [I, M].*

A: O sea, no..., perdón. $2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0$.

F: Vale, y entonces tendría que ir haciendo todas las distributivas, todo el follón, ahí. ¿Y David Calle me podría dar el algoritmo...? Escribes, imaginaos el mismo número, ¿eh?, B6, en vez de en base 16, en base 15. ¿David Calle me puede decir...? Aquí tengo el 15, ¿no?, aquí tengo el 15 [los escribe encima de los 16], y David Calle me dice: «escribe esto [señala el 11] en base 2, escribe esto [señala el 6] en base 2, con tres y medio dígitos o cuatro dígitos o... tres dígitos, y lo pones junto.

- 2J21.1-2. *Plantea un nuevo caso, incidiendo en las limitaciones de las recetas al hacer ver que la receta anterior no funciona para el nuevo caso [E, 2].*

¿Valdría ese algoritmo?

A: No.

F: No. ¿Vale?

- 2P17.1-2. *Hace una modificación en el problema cambiando un dato, haciendo ver que la receta anterior ya no valdría en este caso [E, 2].*
 - 2P17.1-2(I)1. *Quiere hacer ver cómo influye la modificación de un dato en la resolución para ver si un mismo método se puede aplicar a distintos casos [I, M].*

O sea, que poder se puede pasar, vas con paciencia escribiendo cada una de las expresiones que aparecen, pero un paso directo solo se puede cuando una base es potencia de la otra base,

- 2L11.1-2. *Explica que para pasar de una base a otra de forma inmediata es necesario que una base sea potencia de la otra, llegando así al resultado del ejercicio: primero se ha propuesto un ejemplo sencillo, pasar de base 16 a base 2; luego se ha preguntado cómo se haría en base 15, viendo que sería más laborioso; y por último se llega al resultado del ejercicio, al contenido final [E, 3].*
 - 2L11.1-2(I)1. *A partir del resultado importante al que se ha llegado, pretende que los alumnos vean que pasar de base 8 a base 2 o de base 4 a base 2, por ejemplo, también puede ser rápido [I, M].*
- 2L11.2-2. *Alza la voz cuando hace aseveraciones que considera importantes [se refiere a cuando la formadora dice que 16 es «potencia» de 2] [E, D].*
 - 2L11.2-2(I)1. *Se trata de una técnica que usa la formadora cuando quiere enfatizar algo que matemáticamente es importante para los alumnos [I, M].*

que es lo que hemos visto con 16, que es potencia de 2, que es 2^4 .

- 2D15.1-2. *Explica que un procedimiento directo se puede hacer cuando una de las bases es potencia de la otra, como con la base 16, que es potencia de 2 [E, 3].*
- 2R10.1-2. *Está haciendo ver propiedades de las potencias [E, 1].*
- 2P18.1-2. *Generaliza el problema, es decir, explica por qué se puede pasar de base 16 a base 2 con el método empleado [E, 2].*

- 2J22.1-2. *Da la condición [E, 1].*

¿Está claro hasta aquí? ¿Sí?

- 2M13.1-2. *Plantea el ejercicio con la base 15, haciendo ver que no habría una receta sencilla para ese caso [E, 3].*
- 2M13.2-2. *Hace explícito que la base 16 funciona porque es 2^4 [E, 2].*

VÍDEO 3

Fragmento 1

[F = Formadora del vídeo].

F: Entonces, la idea es..., el ejercicio 4, que está proyectado en la pantalla, es el ejercicio 4 de la última hoja, de la hoja del dossier 2, con el que vamos a trabajar ya esta semana, ¿vale? En ese ejercicio hay cuatro operaciones, cuatro problemas, cuatro operaciones. Tenéis que hacer las cuatro operaciones..., representarlas de distintas maneras. Voy a poner en la pizarra de cuántas maneras, ¿vale? Entonces, acordaos que nosotros estamos trabajando con material manipulativo [escribe en la pizarra «Manipulativo»], ¿vale? Entonces, en primer lugar tenéis que representar esta suma $[210 + 543]$, esta suma $[315 + 429]$, esta resta $[135 - 24]$ y esta resta $[704 - 45]$, por partes [va señalando en el PDF proyectado en la pantalla], ¿no?, empezáis con la primera... Tenéis que representarlo [escribe en la pizarra] con ábaco vertical, después en el sorobán

- 2R1.1(i)-3.1. *Evento implícito en el comentario [E, 1].*

Transcripción del vídeo: Tenéis que hacer las 4 operaciones..., representarlas de distintas maneras. [...] con material manipulativo...

- 2R1.1(i)-3.1(I)1. *Pretende que los alumnos vean cómo trabajar la descomposición de los números con los niños pequeños [I, M].*
- 2R1.1(i)-3.1(I)2. *Plantea una metodología basada en la gamificación y en el juego, que es como metodológicamente se enseña a los niños en matemáticas, para que los alumnos puedan transmitir el concepto de la suma a los niños [I, M].*

y después con los multibase, ¿vale? Y tenéis que tener las tres representaciones del proceso delante para saber comparar cada dos, ¿vale?, para saber entender cómo se traduce una en otra.

- 2P1.1-3.1. *Indica la tarea a realizar, que consiste en expresar varias operaciones con varios materiales y comparar la operación con los distintos materiales utilizados [E, 3].*

Lo que no quiero es que me digáis: « $210 + 543$ son 753; Nuria, te he representado 743* en el ábaco vertical, en el sorobán y en los bloques multibase». No quiero la

representación del resultado, quiero la representación del proceso, de la suma, de la idea «suma».

- 2P2.1-3.1. Indica que quiere que representen el procedimiento de la operación, cómo se llega al resultado [E, 3].
- 2J1.1-3.1. Presenta el problema, que consiste en representar la suma de números con distintos materiales [E, 2].
- 2J1.2-3.1. Dice que tienen que ver y explicar el proceso que han seguido para sumar, no simplemente el resultado [E, 3].

¿En qué os tenéis que basar?, en la definición de la suma que vimos el otro día, ¿no?, que es: elijo un representante de uno, elijo un representante del otro y hago la unión, agrupo, junto,

- 2R2.1-3.1. Dice que tienen que agrupar [E, 2].

como lo queráis pensar, ¿vale? Entonces, hay que representar el proceso, el proceso, no solo el resultado final de ese proceso.

- 2D1.1-3.1. Plantea una actividad, que consiste en representar unas sumas con tres tipos de material manipulativo: el ábaco vertical, el sorobán y los bloques de base 10 [E, 2].
- 2D1.2-3.1. Hace hincapié en que representen el proceso de la suma, no solo el resultado [E, 3].
 - 2D1.2-3.1(I)1. Porque es una confusión común de los estudiantes, están acostumbrados a los resultados, no a los procesos [I, M].
- 2R3.1-3.1. Indica a los alumnos que tienen que representar el proceso de la suma [E, 3].
 - 2R3.1-3.1(I)1. Porque así es cómo los alumnos van a entender el proceso de la suma de los números [I, M].
 - 2R3.1-3.1(I)2. Los niños [de primaria] adquieren fenomenal el concepto de la suma de los números si ven el proceso, si lo descomponen; es por donde hay que empezar [I, M].

Entonces, tenéis que representar el proceso de tres maneras en el sistema de representación manipulativo [señala lo que ha escrito antes en la pizarra], ¿vale?

Y en paralelo [empieza a escribir en la pizarra] tenéis que representar el proceso en el sistema de representación simbólico-numérico; el enunciado está dado en ese sistema de representación, ¿vale?, esto es sistema de representación simbólico-numérico, pues tenéis que representar el proceso, las dos sumas y las dos restas, en ese sistema, ¿vale?

- 2P3.1-3.1. *Dice que tienen que realizar también las operaciones con el lenguaje simbólico-numérico [E, 3].*
 - 2P3.1-3.1(I)1. *Para que puedan comparar ambos procedimientos [el sistema de representación manipulativo y el simbólico-numérico] [I, M].*

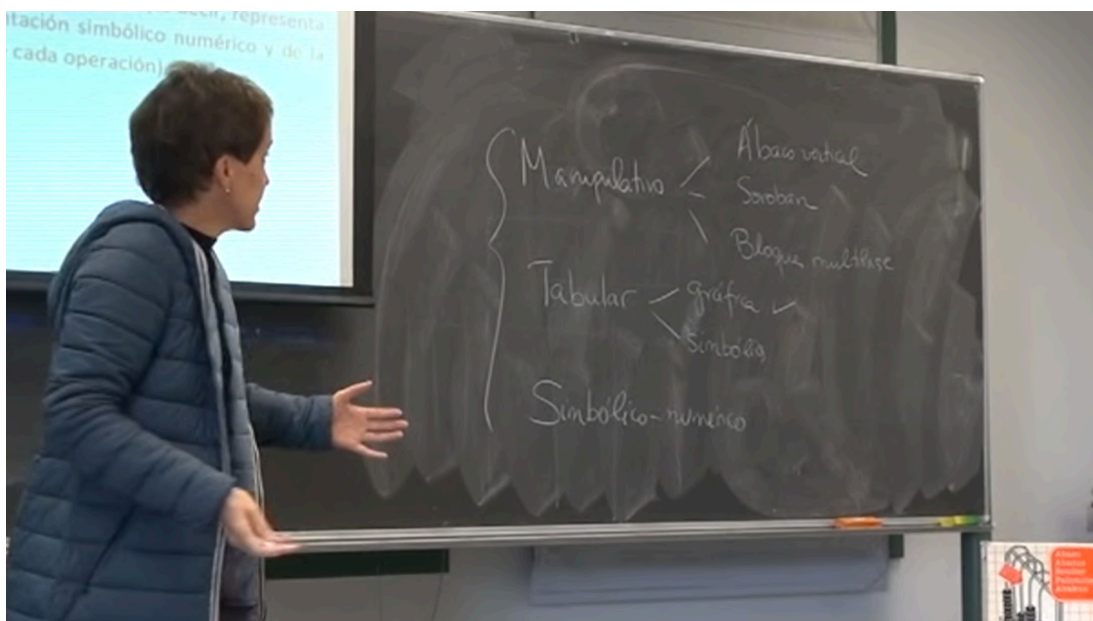
Y luego, en medio [escribe en la pizarra], hay una representación que es formato tabla o tabular, de la que no he hablado explícitamente, pero que me gustaría que construyerais vosotros, ¿vale? Necesito que construyáis, por ejemplo, esta suma [señala $210 + 543$], que la hagáis en tabla, con una tabla, como se os ocurra a vosotros diseñar la tabla, ¿vale?

- 2M2.1-3.1. *Plantea un enunciado matemático que consiste en representar unas operaciones, unas sumas y unas restas, en el registro de representación manipulativo, empleando tres materiales manipulativos distintos y viendo cómo se traduce la representación cada dos materiales [E, 3].*
 - 2M2.1-3.1(I)1. *Decir que hay que ver «cómo se traduce» no es una consigna clara, ya que no sé si se puede decir que haya respuestas correctas o incorrectas [I, M].*
- 2M2.2-3.1. *Pide que representen las operaciones en el registro de representación simbólico-numérico [E, 3].*
- 2M2.3-3.1. *Pide que representen las operaciones en el registro de representación tabular, que sería como un elemento intermediario entre el registro manipulativo y el simbólico, de la forma que los alumnos quieran, indicando que puede tener características simbólico-numéricas o características gráficas [E, 3].*
 - 2M2.3-3.1(I)1. *Decir que los alumnos lo hagan como quieran tiene «trampa»; los alumnos entenderán que no lo tienen que hacer como ellos quieran, sino que la forma tabular tiene que responder a algo, pero no creo que tengan claro qué es lo que tienen que hacer tal y como se plantea la consigna [I, M].*

- 2M2.3-3.1(I)2. *En muchos manuales se plantea que las tablas pueden tener características simbólico-numéricas o gráficas [I, M].*
- 2M2.4-3.1. *Indica que prefiere la tabla con características gráficas [E, M].*
- 2J2.1-3.1. *Pide que representen la suma en el sistema de representación simbólico [E, 3].*
- 2J2.2-3.1. *Pide que creen otro sistema de representación, dando un poco las guías de cómo hacerlo, pero dejando libertad para que lo hagan como ellos quieran [E, 2].*
 - 2J2.2-3.1(I)1. *Dejando abierta esa forma, pretende que los alumnos vean que existen todo tipo de formas de representar [I, M].*
 - 2J2.2-3.1(I)2. *Pretende que los alumnos vean la conexión entre las distintas representaciones y que la suma sigue siendo la misma [I, M].*

La tabla [escribe en la pizarra] puede ser más gráfica, puede tener características gráficas, o puede tener características más simbólicas; a mí me va a interesar más la que tenga características más gráficas, luego ya veremos en detalle cómo, pero tenéis que intentar construirlo vosotros sin que yo os haya hablado de eso explícitamente, ¿vale?

- 2D2.1-3.1. *Indica que los alumnos han de realizar también una representación simbólico-numérica [E, 3].*
- 2D2.2-3.1. *Termina de plantear el ejercicio, indicando que los alumnos han de realizar una representación intermedia, la cual denomina «tabular» y que puede tener componentes gráficos o simbólicos, que quiere que generen sin haberla trabajado previamente [E, 3].*
 - 2D2.2-3.1(I)1. *El proceso planteado en el ejercicio es muy parecido a las tres etapas de Jerome Bruner, más conocidas como el CPA de Singapur [I, M].*



Entonces, paso 1, aquí [señala la parte de representación manipulativa de la pizarra], en paralelo paso 2, simbólico-numérico [lo señala en la pizarra] y luego ya, según vayáis trabajando los cuatro ejemplos, igual ya se os va ocurriendo cómo representarlo con una tabla y cómo trabajar con una tabla ese tipo de operaciones.

- 2P4.1-3.1. Indica a los alumnos que tienen que representar las operaciones en una tabla, haciendo ver que no han trabajado antes esta forma y que tienen que descubrirla por ellos mismos [E, 2].
- 2P4.2-3.1. Indica que en examen van a tener que hacer la representación gráfica [E, 2].
- 2J3.1-3.1. Plantea un tercer ejercicio [E, M].
 - 2J3.1-3.1(I)1. El tercer ejercicio es más reflexivo, ya que tendrán que reflexionar sobre cuál es la manera más adecuada para representar, para lo que tendrán que comparar los distintos sistemas [I, M].

¿Está claro?

- 2L1.1-3.1. Indica a los alumnos que primero tienen que representar unas sumas y unas restas con tres materiales: el ábaco vertical, el sorobán y los bloques multibase [E, 2].
- 2L1.2-3.1. Dice que hay que representar cómo [enfatisa «cómo»] se hace la suma, el proceso [E, 3].

- 2L1.3-3.1. Indica a los alumnos que además hagan la suma en el sistema de representación simbólico-numérico [E, 3].
- 2L1.4-3.1. Pide a los alumnos que por último hagan la suma con una tabla [E, 2].
 - 2L1.4-3.1(I)1. Conectando las tres formas de representar la suma, los alumnos aprenderán a sumar de verdad [I, M].
 - 2L1.4-3.1(I)2. Pretende hacer ver que una operación se puede expresar mediante distintos sistemas de representación [I, M].
- 2L1.5-3.1. Hace un esquema en la pizarra [E, D].

Yo me voy a pasar por las mesas y me vais preguntando todas las dudas que os surjan. No voy a pedir que me mandéis nada, ¿vale?, porque todavía no he revisado las últimas fotos que me habéis mandado, con lo cual estoy un poco desbordada; como no sois muchos, yo voy por vuestros puestos. Ahora bien, en el grupo anterior han decidido grabar pequeños vídeos o hacer fotos de los procesos que iban construyendo por llevárselo como material para estudiar, a mí me parece una buena idea, pero ya vosotros hacéis lo que queráis, a mí no me lo tenéis que mandar, pero si queréis, una vez que hayáis construido, por ejemplo, con el ábaco japonés, imaginaos, esta resta de aquí [señala el PDF en la pantalla], y decís: «ah, pues nos vamos a grabar», uno lo hace otro lo graba y lo tenéis de recuerdo, ¿no?, para cuando tengáis que estudiar.

- 2M4.1-3.1. Usa primero el verbo «hacer», cuando dice que hay que hacer las operaciones, pero luego emplea el término «representar» y ahora la palabra «construir» [E, M].
 - 2M4.1-3.1(I)1. Interpreto que a la formadora le interesa ver cómo cambian los algoritmos en función del material que se esté utilizando, poniendo el foco en el proceso; «hacer» pone énfasis en el resultado, pero «representar» y «construir» lo ponen más en el proceso [I, M].
- 2M4.2-3.1. Indica que hay que poner el foco en el proceso de las operaciones, no en el resultado [E, 3].

¿Cómo voy a pedir yo eso en el examen? Pues no lo puedo pedir porque no puedo llevar un sorobán para cada uno porque tengo un día, 2 horas y media o 3, para haceros el examen final de la asignatura; pero para mí esto es muy importante, entonces yo voy a pedir que me representéis gráficamente,

gráficamente, vuestro proceso de respuesta con un ábaco vertical, con un sorobán o con los bloques multibase, que es lo que yo luego voy a hacer aquí en la sesión final de discusión cuando acabemos esta hora de clase. Yo no voy a coger el ábaco aquí, lo voy a poner delante de todos y tal —podría hacerlo, pero no lo voy a hacer—, lo voy a hacer representando gráficamente el material manipulativo y así es como lo voy a pedir el día del examen,

- 2L2.1-3.1. *Dice que en el examen va a pedir a los alumnos que representen el proceso de la suma con el material manipulativo de forma gráfica [E, 3].*
 - 2L2.1-3.1(I)1. *Quiere que entiendan que representar sumas y restas con material manipulativo es algo matemáticamente interesante porque les va a enseñar cómo se suma de verdad [I, M].*
- 2L2.2-3.1. *Indica a los alumnos que pueden grabar vídeos [de lo que hagan en clase] para recordarlo luego bien [E, D].*
- 2L2.3-3.1. *Alza la voz cuando dice eso [«gráficamente»] [E, D].*
 - 2L2.3-3.1(I)1. *Cuando dice algo importante, alza la voz; es una técnica que utiliza generalmente y que pueden tenerla en cuenta los alumnos para ir anotando las cosas importantes [I, D].*
- 2J4.1-3.1. *Indica la forma de representar que tendrán que usar en el examen [E, 1].*

porque os voy a dar un cuadernillo y lo tenéis que hacer gráfico, ¿vale?

- 2R4.1-3.1. *Indica que en el examen va a pedir que hagan una representación gráfica [E, 2].*

Bueno, pues empezad, están escritas en un orden muy concreto, empezad a hacerlas en ese orden y luego ya discutimos sobre por qué están puestas en ese orden, ¿vale?

- 2D3.1-3.1. *Dice que las operaciones están puestas en un orden y que es importante que sigan dicho orden, dicha secuencia didáctica [E, 3].*
 - 2D3.1-3.1(I)1. *Se entiende que las operaciones están ordenadas de más fáciles a menos fáciles [I, M].*

Fragmento 2

[F = Formadora del vídeo]. [A = Alumnos (A1, A2 y A3)].

- A1: Estamos rayados con la última resta.
 F: Vale, a ver, empezad.
 A1: Son 704 - 45.
 F: Vale.
 A1: Entonces, aquí no le podemos restar 5.



- F: Así tal cual está, puedes restar..., ¿cuántas puedes quitar?
 A1: Cuatro.
 F: Cuatro, vale, sí.
 A1: Entonces voy a suponer que aquí [señala la varilla de las decenas] hay un 1.
 A2: No, que hay 10.
 A1: Que hay 10, para que sea 14...
- 2J1.1-3.2. Espera tras la pregunta de un alumno [E, D].
 - 2J1.1-3.2(I)1. Para la pregunta quede en el aire para el grupo de alumnos [I, D].
- F: A ver, olvídate de los «suponer».
- 2R1.1-3.2. Está trabajando una operación con los alumnos a través del ábac [E, 1].
 - 2R1.1-3.2(I)1. Con el ábac pretende trabajar el concepto de descomposición polinómica de los números para poder sumarlos [I, M].

Tú dices: «tengo que quitar 5», ¿no?, quito 1, quito 2, quito 3, quito 4 [quita cuentas de la varilla de las unidades] y ahora ponme aquí más para que yo quite, tal y como está.



A1: Habría que poner 10 y quitamos 1.

F: Pero ¿cómo me ponéis..., cómo me ponéis ahí? A ver Pablo.

A2: ¿Que lo ponga?

F: No, no, que me digas... Yo aquí [señala la varilla de las centenas] tengo ahora mismo 700, ¿no? Escribe 700 de otra forma para que yo tenga bolas...

A1: Aaaaah, hay que añadir una aquí [señala la varilla de las decenas].

F: Venga, a ver.

A2: [El alumno A2 quita una cuenta de la varilla de las centenas y la pone en la de las decenas].

- 2J2.1-3.2. *Pregunta cómo expresar el número de otra forma, cómo conseguir más [cuentas en el ábaco] tras quitar 4, haciendo ver que hay que quitar 5 [E, 3].*
 - 2J2.1-3.2(I)1. *Pretende que los alumnos vean cómo hacer la llevada, es decir, cómo expresar el mismo número empleando la siguiente fila, la de las decenas, de una forma visual y manipulativa, que sería el objetivo del material [I, M].*

F: ¿Aquí sigue poniendo 700?

A1: No, no, no, hay que poner una nueva aquí [vuelve a poner la cuenta en la varilla de las centenas —la que había puesto en la varilla de las decenas el alumno A2— y pone una nueva en la varilla de las decenas].

- 2P1.1-3.2. *Ayuda a los alumnos con el problema que tienen con una resta en el material manipulativo al tener que restar 5 unidades y teniendo solo 4 y ninguna decena [E, 2]*
 - 2P1.1-3.2(I)1. *Quiere que los alumnos entiendan el procedimiento, el algoritmo de la resta, a través de un material manipulativo y no mediante recetas [I, M].*

F: A ver [quita la cuenta de la varilla de las decenas]. Teníamos 704, hemos quitado 4, tengo 700, ¿vale?

A1: Sí.

- 2D1.1-3.2. *Dialoga con los estudiantes sobre cómo reorganizar la cantidad 704 para poder proceder con la resta, ya que tienen que quitar 5 unidades, pero solo hay 4 [E, 3].*

F: Ahora, escribe 700 de otra forma para poder quitar otra.

A1: Pues...

F: ¿Cómo podéis escribir 700 de otra forma?

- 2M1.1-3.2. *Mantiene un diálogo con un grupo de alumnos que tiene dificultades para realizar una resta, ya que tienen que restar 5 unidades a 704 y no hay unidades suficientes ni unidades inmediatamente superiores, dándoles indicaciones, pero sin decirles ella el procedimiento a realizar [E, 2].*
 - 2M1.1-3.2(I)1. *Los números deben de estar elegidos para provocar una discusión sobre los cambios que hay que hacer entre unidades, los acarreos que surgen en los algoritmos clásicos, para materializar las unidades necesarias mediante la descomposición del número para poder restar [I, M].*

A1: Que aquí [señala la varilla de las decenas] haya 9...

F: Venga.

A1: Y aquí [señala la varilla de las unidades]..., 9.

F: A ver, para que haya aquíííí... [señala la varilla de las decenas], vamos a ver, ¿cómo consigo aquí decenas? Sin cambiar el número...

- 2J3.1-3.2. *Pregunta cómo se puede escribir 700 de otra manera manteniendo el número [E, 2].*
 - 2J3.1-3.2(I)1. *Pretende que agrupen de otra manera, que vean que para hacer la llevada hay que reagrupar, es decir, que una centena se convierte en 10 en la siguiente [unidad] [I, M].*

A1: Si quito esta... [quita una cuenta de la varilla de las centenas].



F: Venga, muy bien.

A1: Pongo aquí 10 [señala la varilla de las decenas].

F: Venga, dale.

- 2L1.1-3.2. *Pregunta a los alumnos cómo pueden escribir el número de otra forma en el ábaco vertical, cómo transformarlo, para continuar con la resta tras haber quitado las unidades [E, 2].*
 - 2L1.1-3.2(I)1. *Quiere hacer ver que, para poder continuar con la resta, hay transformar una unidad de orden superior en diez unidades de orden inferior, es decir, quitar una centena y meter diez decenas y, luego, quitar una decena y meter diez unidades, usando así el sistema numérico decimal [I, M].*
 - 2L1.1-3.2(I)2. *Pretende que los alumnos aprendan por qué se resta como se resta con el algoritmo a través del ábaco [I, M].*

A1: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10.

A3: ¡Ah, vale!

- 2P2.1-3.2. *Está interactuando con los alumnos [E, 1].*
 - 2P2.1-3.2(I)1. *Para que vean que 1 centena equivale a 10 decenas [I, M].*



F: ¿Ahora aquí pone 700?

A1: Sí.

F: ¿Y cómo está escrito 700?

A3: Mal.

F: 6×10^2 , ¿no?, 6×100 , más...

A2: 10×10^1 .

F: 10×10^1 , muy bien.

- 2D2.1-3.2. Dialoga con los alumnos sobre cómo obtener decenas, como trabajar la reagrupación con el ábaco, haciendo que vean que 1 ficha de la barra de las centenas se convierte en 10 fichas en la barra de las decenas [E, 3].
- 2D2.2-3.2. Explica que han representado el número 700 como 6 centenas y 10 decenas [E, 1].

Ahora, ¿puedo quitar aquí [señala la varilla de las unidades] que quería quitar una? ¿Tengo?

A1: No.

F: No, ¿cómo puedo volver a escribir 700 para tener aquí [varilla de las unidades]?

- 2L2.1-3.2. Hace ver, tras preguntar cómo está escrito el 700, que ahora tienen $6 \times 10^2 + 10 \times 10^1$, conectando el ábaco, la forma manipulativa, con el sistema de numeración decimal, con la forma aritmética o numérica [E, 3].

A1: Pues quito de estas [quita una cuenta de la varilla de las decenas] y añado 10 aquí [señala la varilla de las unidades].

F: Vale, venga.

- 2J5.1-3.2. Está viendo con los alumnos cómo han reescrito el número, haciendo ver que es 6×10 a la..., es decir, relacionando la representación del número con el proceso algebraico [E, 3].
- 2J5.2-3.2. Pregunta cómo representar el número de otra manera ahora que hay 10 en una [varilla, en la de las decenas] [E, 2].
 - 2J5.2-3.2(I)1. Cuando se represente de otra manera, se verá que simplemente hay que quitar una [cuenta] más [I, M].



F: Vale, ¿y ahora puedes quitar la que te faltaba por quitar?

A1: [La estudiante A1 quita una cuenta de la varilla de las unidades].

F: Ya está. Ya habéis quitado 5 y teníais que quitar 45, ¿no? ¿Cuánto os falta por quitar?

A1: Sí, ahora aquí [señala la varilla de las decenas] hay que quitar 4.

F: Pues ya está, ¿no?

A1: Ah, vale, vale. Gracias.



F: ¿Entonces qué habéis hecho para reescribir el 700...? O sea, yo tenía 700 ahí, tenía aquí 700 [deja el ábac con 7 cuentas en la varilla de las centenas], ¿qué habéis hecho?

- 2P3.1-3.2. *Pregunta a los alumnos en qué ha consistido el procedimiento que han utilizado para resolver el problema de no poder quitar 5 unidades a un número que tenía 4 [E, 2].*

A2: Como es sistema decimal, pues aquí [señala la varilla de las decenas] hay 10, porque... representamos un 0, pues quitar una de aquí [varilla de las centenas] y ponerle las 10 aquí [varilla de las decenas] para luego restarlas aquí [varilla de las unidades].

F: O sea que habéis..., ¿agrupado o desagrupado?

A1: Desagrupado.

A2: Aquí desagrupado.

F: Desagrupado. Habéis desagrupado una centena en 10 decenas

- 2M2.1-3.2. *Reinterpreta en términos matemáticos lo que han hecho los alumnos de forma guiada, haciendo ver que han desagrupado las centenas y las decenas [E, 3].*
 - 2M2.1-3.2(I)1. *Para que los alumnos puedan hacer uso de la definición de la resta mediante la manipulación, que en este caso consistiría en retirar cosas [I, M].*

- 2M2.1-3.2(I)2. *Dejar que los alumnos elaboren el procedimiento y finalmente dar los nombres es algo clásico en Teoría de Situaciones: se empieza actuando y al final se atribuyen los nombres por parte del docente [I, M].*
- 2M2.1-3.2(I)3. *Estos alumnos, que ya son adultos, deberían manejar sin problema los nombres vistos, centena, decena..., pero aún tienen dificultades con ello [I, M].*
- 2R2.1-3.2. *Interactúa con los alumnos, preguntando si han agrupado o desagrupado, haciendo que verbalicen y que razonen [E, 3].*
 - 2R2.1-3.2(I)1. *Es la metodología que se emplea en el aula: el juego es verbalizar, contar lo que se ha hecho, cómo se hace, cómo no se hace [I, M].*
 - 2R2.1-3.2(I)2. *Ese vocabulario es muy normal en las aulas con los alumnos y es el que luego ellos van a tener que emplear en el aula [de primaria] [I, M].*

y luego una decena la habéis desagrupado en 10 unidades.

- 2D3.1-3.2. *Pregunta a los alumnos sobre el proceso seguido en su conjunto [E, 2].*
 - 2D3.1-3.2(I)1. *Para que tengan una visión general de lo que han hecho [I, D].*
- 2D3.2-3.2. *Hace ver que han desagrupado centenas en decenas y decenas en unidades para poder restar [E, 3].*
 - 2D3.2-3.2(I)1. *A los alumnos les cuesta entender el ábaco, tienen dificultades para comprender el proceso de desagrupar y que las fichas tienen distintos significados según la posición en los palos [I, M].*
- 2J7.1-3.2. *Pide a los alumnos que verbalicen, que expliquen lo que han entendido [E, 2].*
- 2J7.2-3.2. *Hace ver que para poder realizar la resta han desagrupado, reforzando así esa parte del proceso [E, 2].*

A1: Vale, es que cuando tú lo haces en papel no haces esto así.

F: Ah, pues dime entonces qué es lo que haces en papel.

- 2L3.1-3.2. *Pregunta a una alumna, a raíz de un comentario de esta, qué es lo que hace en papel [E, 1].*
 - 2L3.1-3.2(I)1. *Quiere que la alumna vea que restar en el papel es equivalente a restar con el ábaco [I, M].*

A1: Claro, lo haces muy mental. O sea, en verdad sí que haces eso, pero... bueno, ya me has entendido.

- 2P4.1-3.2. *Interactúa con una alumna sobre lo que esta hace en papel [la resta] [E, 1].*
 - 2P4.1-3.2(I)1. *Quiere que vea la relación entre lo que han hecho manipulativamente y lo que hace en papel [I, M].*

F: No, no, pero lo tienes que explicar

- 2M3.1-3.2. *Interacciona con una alumna, pidiendo que le explique cómo lo hace por escrito [E, 1].*
 - 2M3.1-3.2(I)1. *Pretende que los alumnos elaboren la relación entre los procesos manipulativos y el proceso simbólico, que es el que tienen automatizado y que aplican de un modo poco reflexivo [I, M].*

porque luego os he pedido que lo hagáis simbólico...

A1: Ya, ya, ya.

F: Entonces, simbólico tienes que explicarlo conectado con esto.

- 2J8.1-3.2. *Dice a una alumna que tiene que explicar cómo lo hace en papel porque tienen que ver la conexión entre la forma manipulativa y la algebraica, que es parte del objetivo de la actividad [E, 3].*

A1: Vale, vale.

- 2D4.1-3.2. *Pide a los alumnos, a raíz del comentario de una alumna, que reflexionen sobre la conexión que hay entre la operación realizada de forma simbólico-numérica, con lápiz y papel, con el método tradicional, y la operación hecha con el ábaco, lo cual era parte del ejercicio [E, 3].*

Fragmento 3

[F = Formadora del vídeo]. [A = Alumnos].

F: Vamos a corregir uno, el primero, ¿vale? Me dan $210 + 543$,

- 2M1.1-3.3. *Plantea una suma de forma simbólica [E, 3].*
 - 2M1.1-3.3(I)1. *Imagino que va a realizar la suma con distintos procedimientos para ver las correspondencias entre ellos con el objetivo de que los alumnos entiendan por qué sumamos como sumamos y que adquieran técnicas para provocar que los niños de primaria también conozcan el porqué de los distintos algoritmos [I, M].*

¿vale?, con símbolos. Voy a representarlo..., vamos a empezar con manipulativo y voy a ejemplificar con el sorobán, que es el que parece que más trabajo cuesta, ¿vale? Entonces, en el sorobán, cuando lo representéis gráficamente el día del examen, o ahora en vuestro cuaderno si tenéis que tomar notas, es muy importante marcar la barra del medio, porque la proximidad de las bolas a la barra del medio es la que te indica qué número está representando, ¿vale? Y ahora, dado el problema que me han planteado, ¿cuántas varillas pensáis que necesito escribir?

- 2D1.1-3.3. *Formula en lenguaje simbólico-numérico la suma $210 + 543$ [E, 3].*
- 2D1.2-3.3. *Comienza a resolver la tarea con la forma manipulativa, concretamente con el sorobán, indicando que es la representación que más les cuesta a los alumnos [E, 2].*
- 2D1.3-3.3. *Pregunta a los alumnos cómo colocar las varillas del sorobán para representar las cantidades dadas [E, M].*

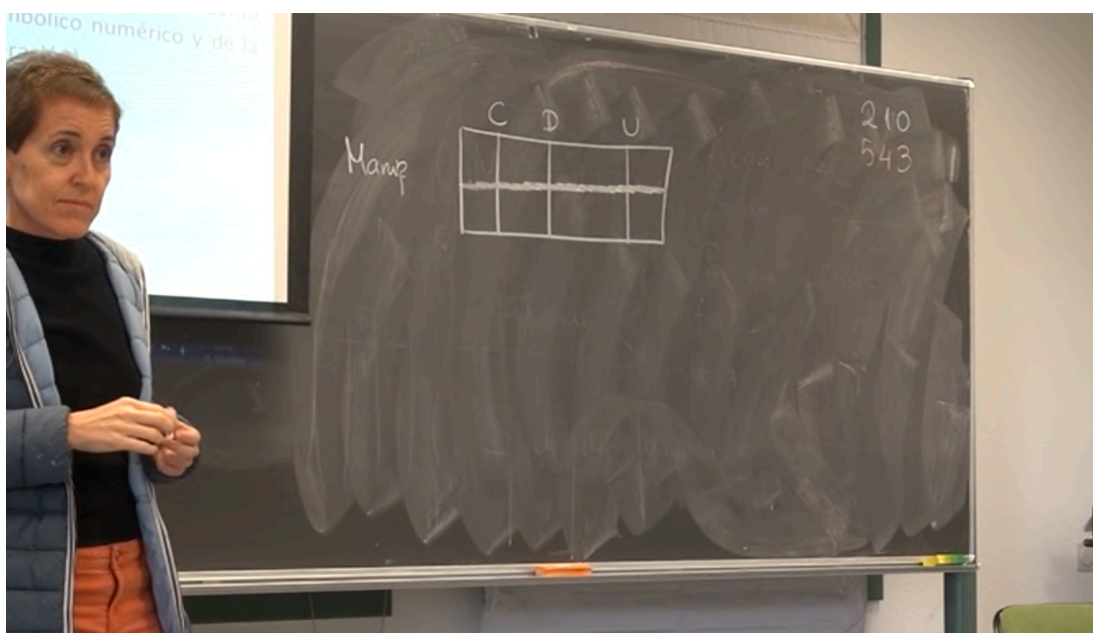
A: Tres.

- 2J1.1-3.3. *Empieza a resolver uno de los problemas mediante la representación de uno de los materiales manipulativos con ayuda de los alumnos [E, 2].*

F: ¿Tres varillas? Pongo una varilla, dos varillas, tres varillas. Esta, unidades, decenas, centenas.

- 2M2.1-3.3. *Empieza a resolver la suma haciendo la representación en el ábaco japonés, en el sorobán [E, 2].*
 - 2M2.1-3.3(I)1. *Aunque la suma de estos números no tiene llevadas, en el sorobán sí tiene que hacer un agrupamiento auxiliar, así que se ha pensado en unos números para trabajar el cambio entre los agrupamientos auxiliares de cada unidad, pero no hay acarreo entre unidades [I, M].*
- 2M2.2-3.3. *Pregunta cuántas varillas tiene que poner [E, M].*

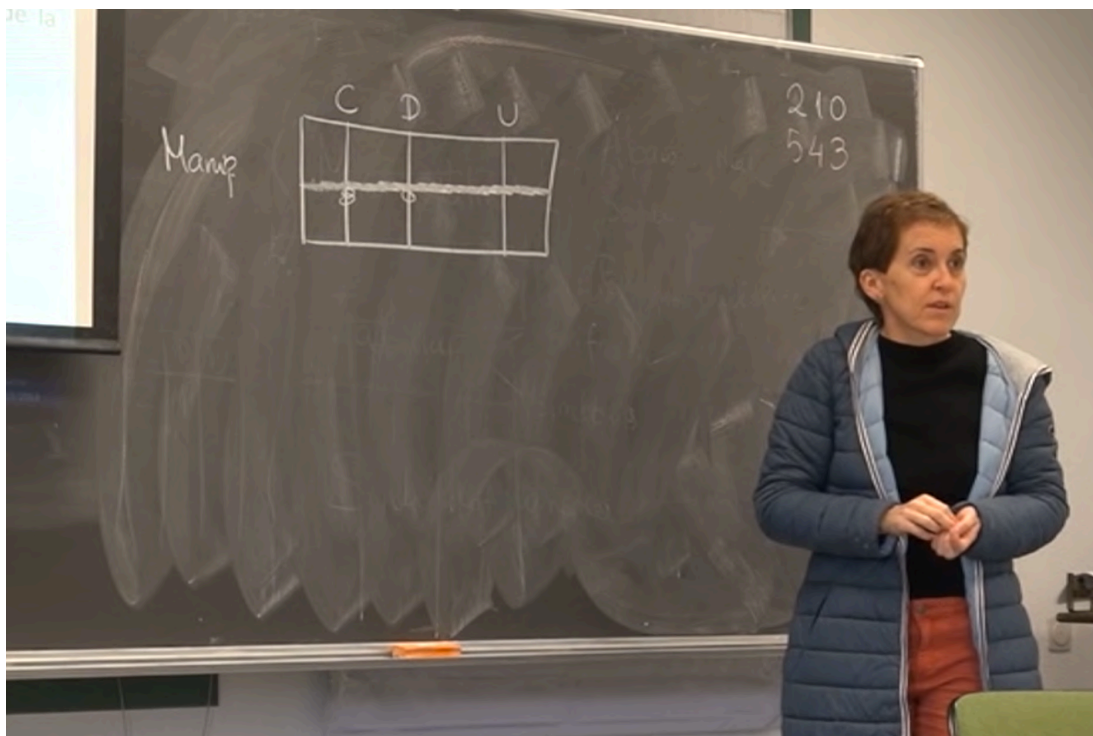
Esta la pongo un poco más gorda para que se note que es la barra de madera del medio, ¿vale? Y ahora, ¿cómo dibujo 210?



- A: Pues 0 unidades.
- F: 0, o sea que aquí no pongo nada pegado a la barra, ¿no? [señala la varilla de las unidades]. ¿Aquí? [señala la varilla de las decenas].
- A: 1 decena.
- F: Una pegada a la barra, ¿arriba o abajo?
- A: Abajo.
- 2P2.1-3.3. *Indica que va a sumar $210 + 543$ [E, 2].*
 - 2P2.2-3.3. *Trabaja la representación de dos números con un elemento manipulativo de forma gráfica [E, 2].*
- F: Abajo, o sea que aquí va una.
- A: Y 2 centenas pegadas a la barra de abajo.

F: Pegadas a la barra, abajo. Una y dos, ahí está. Eso es 210.

- 2J2.1-3.3. *Pregunta cuántas varillas hay [que poner] [E, M].*
- 2J2.2-3.3. *Explica la manera de representar un número con este material manipulativo [E, 3].*
- 2J2.3-3.3. *Indica dónde se coloca cada una de las posiciones [E, 2].*



Y ahora, tengo que sumar 543, es decir, que tengo que añadir 543 unidades ahí.

- 2R1.1-3.3. *Está trabajando el concepto de la suma visualmente, gráficamente [E, 2].*
 - 2R1.1-3.3(I)1. *Lo trabaja visualmente porque es así como hay que introducir la suma en el aula, sobre todo con los niños de infantil y de 1.º y 2.º de primaria, ya que para ellos el cálculo mental puede resultar difícil, pero visualmente van entendiendo la suma, los agrupamientos [I, M].*

Aprovecho la estructura, ¿vale? Entonces, añado 3 unidades, en la varilla de las unidades, que son 3 aquí abajo, ¿no?, 1, 2 y 3 [las dibuja en la varilla de las unidades]. Después añado 4 decenas, en la varilla... 1, 2, 3, 4, ¿vale? [las dibuja en la varilla de las decenas], 4 decenas.

- 2P3.1-3.3. *Hace hincapié en que hay que sumar, en que hay que añadir; unidades, decenas y centenas, en este caso [E, 2].*

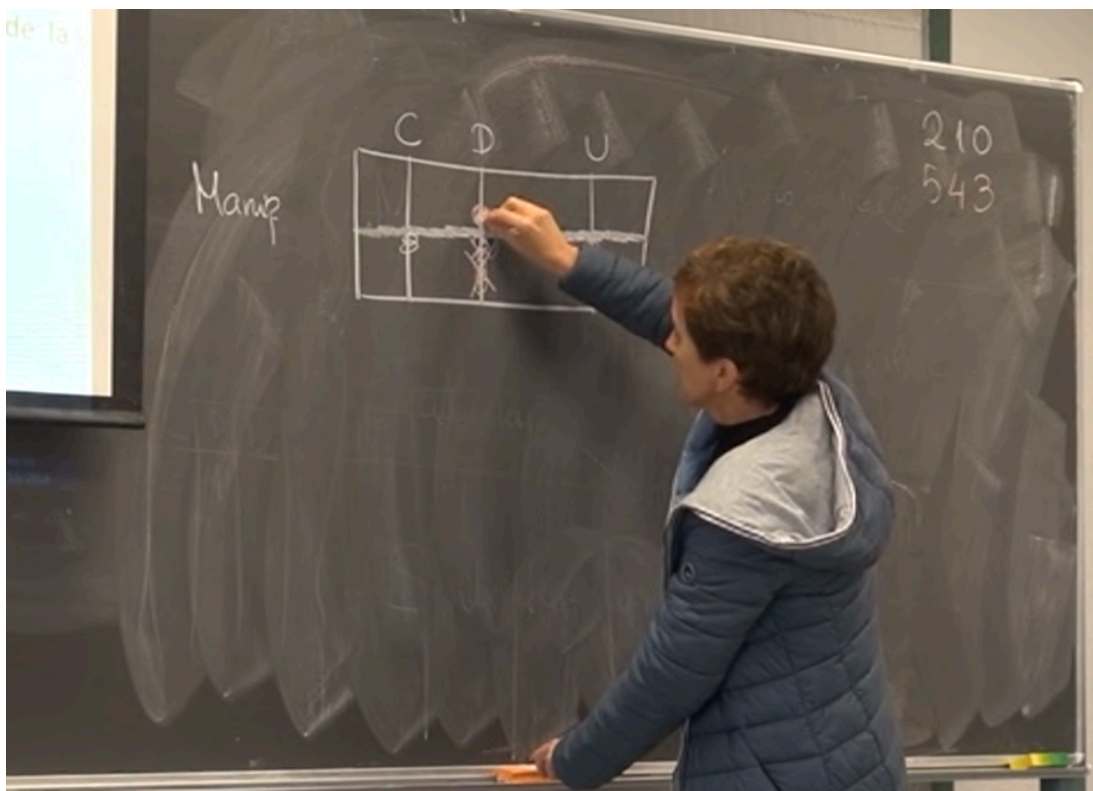
A: Pero cambiamos...

F: Pero...

A: Bajamos una de arriba y quitamos las de abajo.

F: Porque no tenéis 4, ¿vale?, ya no había suficientes, ¿por qué?, porque las bolas de arriba valen 5, entonces decís: «no pasa nada, estas, como eran 4 y 1, 5, se representan ahí arriba», ¿vale?

- 2P4.1-3.3. Está mostrando la equivalencia, cómo se trabaja con el material [E, 1].
- 2J3.1-3.3. Plantea ahora la suma, incidiendo en que sumar es añadir [E, 2].
- 2J3.2-3.3. Explica cómo se suma en este material, haciendo ver la manera de representar 4 [decenas] más, indicando que hay que subir una [cuenta] arriba, haciendo ver que las de 5 van arriba y las de 1 van abajo [E, 3].



Y luego, 5..., tengo que añadir 5 centenas, ¿cómo lo hago?

A: Pues 1 arriba.

F: Una de arriba la bajo directamente o podría ir: «1, 2, 3, ya tengo 5, las subo ahí, 4, 5» [va señalando en la varilla de las centenas], ¿vale? Puedo hacerlo de dos formas distintas. Pero si aprovecho la estructura del ábaco, de manera que las bolas de arriba valen 5, como tengo que añadir 5, pues directamente ya añadido ahí

esas 5 [dibuja una bola en la varilla de las centenas, en la parte superior, pegada a la barra horizontal], ¿vale?

- 2D2.1-3.3. *Pregunta a los alumnos cómo empezar a representar la suma en el sorobán [E, 3].*
- 2D2.2-3.3. *Representa las unidades, las decenas y las centenas con ayuda de los alumnos, haciendo ver a lo largo de la suma que las bolas de la parte inferior son unidades y que las de la parte superior tienen un valor de 5 [E, 2].*
- 2L1.1-3.3. *Está explicando una suma con el sorobán [E, 1].*
- 2L1.2-3.3. *Explica la dificultad que plantea el sorobán con la varilla central, haciendo ver que cuando tienes 5 bolitas hay que subir una a la parte de arriba [E, 1].*
- 2P5.1-3.3. *Explica dos formas distintas de hacer lo mismo al trabajar con las centenas, colocar una bola arriba directamente o ir sumando unidades hasta agruparlas en 5, haciendo ver que la primera es mejor dado el material que están usando [E, 3].*
- 2J4.1-3.3. *Presenta dos maneras de representar en el ábaco el 5 [en la varilla de las centenas], poniendo una [cuenta] directamente arriba o no, viendo que son equivalentes [E, 2].*

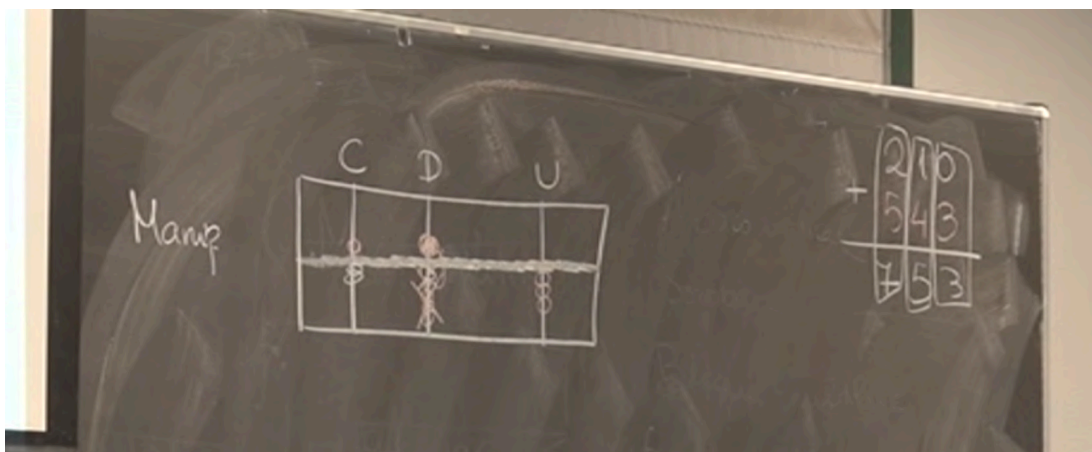
Entonces, [representa ahora el resultado en la suma con el algoritmo tradicional de forma simbólico-numérica a partir de lo que ha obtenido en la representación con el sorobán] me quedan 5 y 2, 7, aquí me quedan 5, y aquí me quedaban 3. Entonces, si yo lo represento así y voy sumando por columnas,

- 2M3.1-3.3. *Hace la suma en el registro simbólico-numérico con ayuda de los alumnos [E, 2].*
 - 2M3.1-3.3(I)1. *Quiere que vean el paralelismo que existe entre un proceso, la representación en el ábaco japonés, y otro, el registro simbólico-numérico, plantando la suma sin llevadas para que el paralelismo sea más evidente [I, M].*
- 2M3.2-3.3. *Indica que va a juntar, a añadir, entendiendo la suma como la unión de conjuntos [E, 3].*
- 2M3.3-3.3. *Realiza un agrupamiento auxiliar, un cambio de 5 a 1, propio de este tipo de ábaco [E, 2].*

- 2M3.3-3.3(I)1. *El agrupamiento auxiliar permite no tener que contar; se trata de números visibles y se «subitizan» las cantidades sin necesidad de contar [I, M].*
- 2M3.4-3.3. *Plantea que para añadir 5 [centenas] se puede hacer de una en una [E, 2].*

tal cual he ido haciendo en el ábaco, tengo 0 unidades y 3 unidades, 3 unidades, 1 unidad y 4 unidades, 5 unidades, perdón, decenas, 2 centenas y 5 centenas, 7 centenas. Vertical, lo he colocado vertical por parecerme a la estructura del ábaco, ¿no?, para tener en cuenta la «posicionalidad», ¿vale?, del sistema.

- 2D3.1-3.3. *Realiza la suma con la notación simbólica tradicional [E, 3].*
- 2D3.2-3.3. *Conecta la estrategia del sorobán con la de la notación simbólica tradicional [E, 2].*
 - 2D3.2-3.3(I)1. *Para que los alumnos comprendan por qué sumamos unidades, decenas y centenas en esta suma [I, M].*
 - 2D3.2-3.3(I)2. *Al tratarse de una suma sin reagrupamientos, la suma es relativamente sencilla [I, M].*
- 2M4.1-3.3. *Está realizando el paralelismo, haciendo ver que [el algoritmo tradicional de la suma] lo ha puesto vertical para parecerse a la estructura del ábaco [E, 2].*
 - 2M4.1-3.3(I)1. *Lo ha colocado vertical como lo colocamos siempre, es la manera tradicional de sumar. Siempre se nos ha dicho que lo ponemos así para que coincidan las unidades, etc. Sin embargo, quiere insistir tanto en la equivalencia con el ábaco que incluso llega a justificar la disposición de los números que ponemos nosotros. El ábaco hay veces que lo utilizan así [hace un gesto indicando que lo sitúan con las varillas en horizontal y no en vertical como lo ha dibujado la formadora], por lo menos los chinos. Bueno, con eso intenta remarcar eso [I, M].*
- 2P6.1-3.3. *Está relacionando el material manipulativo [el sorobán] con la escritura simbólico-numérica [E, 2].*

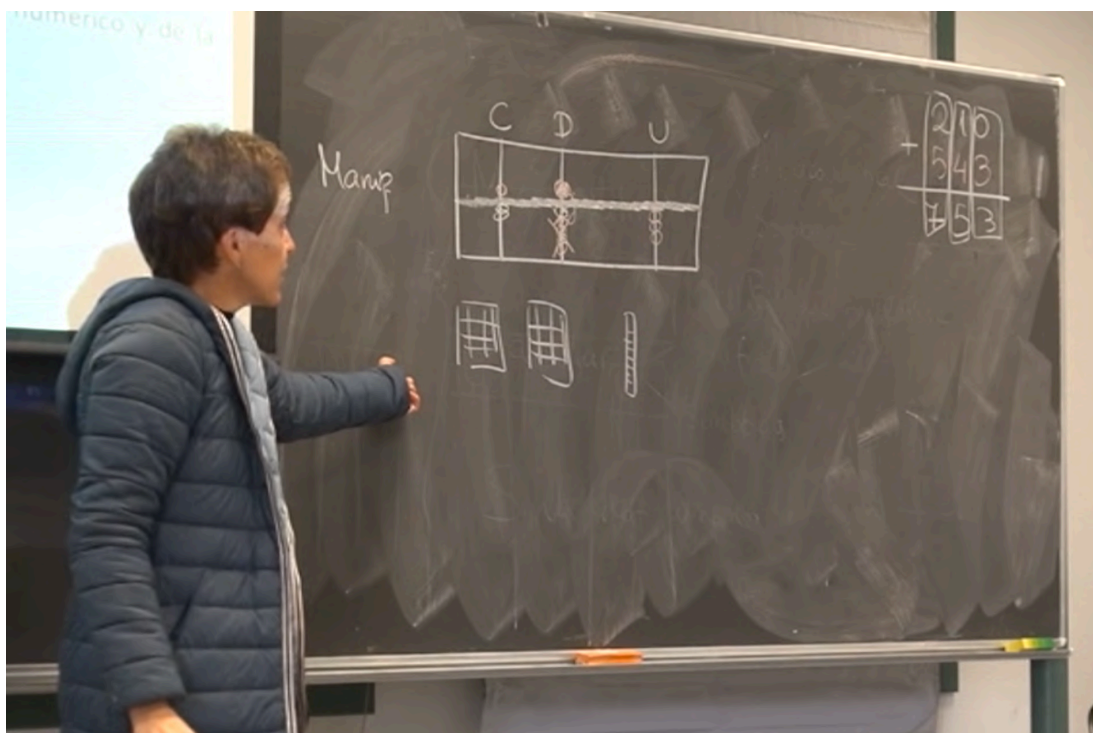


Entonces, he traducido al simbólico lo que he hecho aquí manipulativamente al escribir en simbólico en columnas y represento con cada columna cada una de estas [señala las varillas del sorobán de la pizarra]. Y luego, la escritura, sí que tengo que tener en cuenta que estos son 5 [señala las decenas de la suma en simbólico] con lo cual van arriba [en el sorobán] y esto son 7 [señala las centenas de la suma en simbólico], pues son 5 y 2 [en el sorobán], ¿vale?

- 2J5.1-3.3. Muestra la relación entre lo simbólico y la representación del material, reforzando la idea de la posición de las unidades, las decenas y las centenas, es decir, la idea de sistema posicional [E, 3].

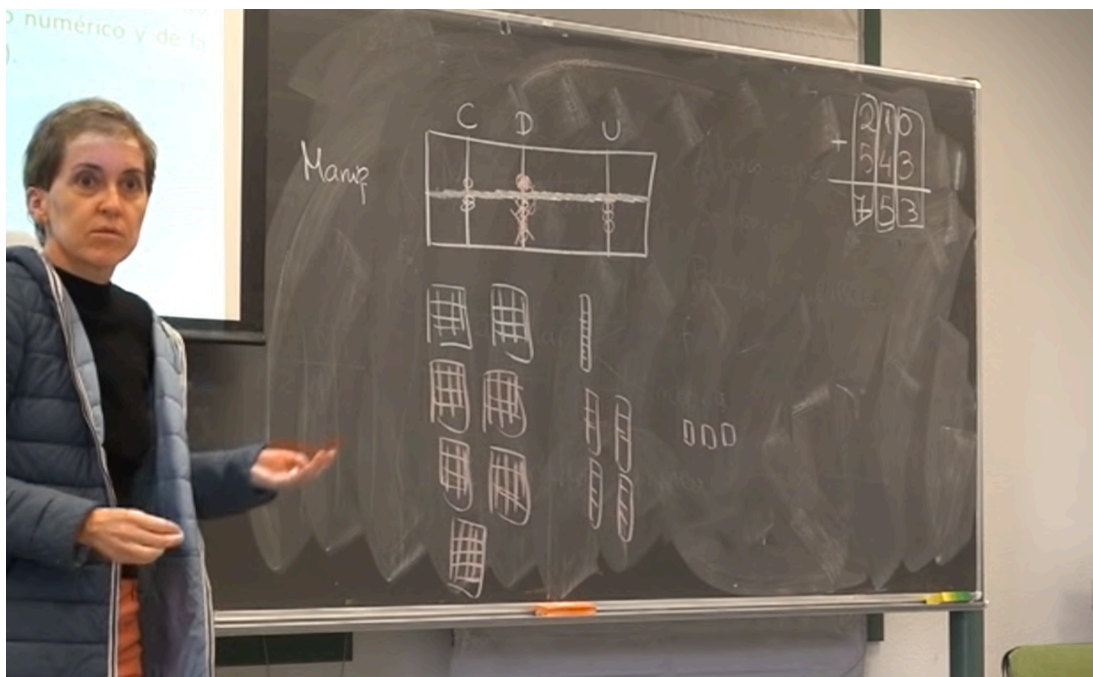
Bloques multibase, bloques multibase, pongo aquí 210, ¿no?, que son 1 y 2 placas de 100 y 10, una decena; este es el 210.

- 2L2.1-3.3. Realiza la suma con el sistema de representación numérico [E, 2].
- 2L2.2-3.3. Conecta el sorobán con el sistema numérico, haciendo ver que el 753 es lo mismo que tiene en el sorobán, es el 5 más los 2 de abajo, en las centenas, que es un 7, el 5 de las decenas, que es el 50, y el 3 que tiene abajo en las unidades, que es el 3, es decir, a partir del 210, sumando 543, obtiene ese 753 de forma equivalente en ambos sistemas [E, 2].
- 2P7.1-3.3. Utiliza otro material manipulativo, los bloques multibase, viendo cómo representar cada número de la suma con ese material [E, 2].



Y ahora agrupo 543; una, dos, tres, cuatro y cinco [dibuja 5 placas de 100 unidades], añado, ¿vale?, 500. 40: una, dos, tres, cuatro [barras de 10]; y 3: uno, dos y tres [unidades]. Y ahora lo pongo todo junto. ¿Vale?

- 2D4.1-3.3. Hace una representación gráfica de los bloques de base 10, empleando las mismas cantidades de la suma anterior, tratando de representar el proceso de reunir todos los bloques, el proceso de la suma [E, 3].
- 2J6.1-3.3. Realiza la suma con los bloques multibase, representando y colocando por columnas las placas o planchas..., las centenas, las decenas..., incidiendo en la idea de agrupar o de añadir para sumar [E, 3].



Y digo: «aquí tengo 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 [placas de 100]», ¿necesito agrupar? [Rodea con una línea todas las placas de 100].

A: No.

F: No necesito agrupar. Aquí tengo 1, 2, 3, 4, 5, 6, 5, ¿necesito agrupar estos 5 de alguna manera? [Rodea con una línea todas las barras de 10].

- 2P8.1-3.3. Está uniendo [rodeando con la tiza] las centenas, las decenas y las unidades, trabajando lo que significa la suma [E, M].

No porque es base 10. Y aquí tengo 3, ¿vale? O sea, que me vuelve a salir 2, 4, 6, 7 [centenas; señala la suma en simbólico], 2, 4, 5 [decenas], 5 [señala la suma en simbólico] y 3.

- 2J7.1-3.3. Hace ver que en esta suma no hay que agrupar porque no hay 10 en ninguno de los grupos, es decir, no hay llevada [E, 3].
 - 2J7.1-3.3(I)1. Aunque en esta suma no se ve cómo sería construir un bloque del siguiente, sí se ve que la estrategia consiste en pensar si hay que agrupar o no después de añadir [I, M].

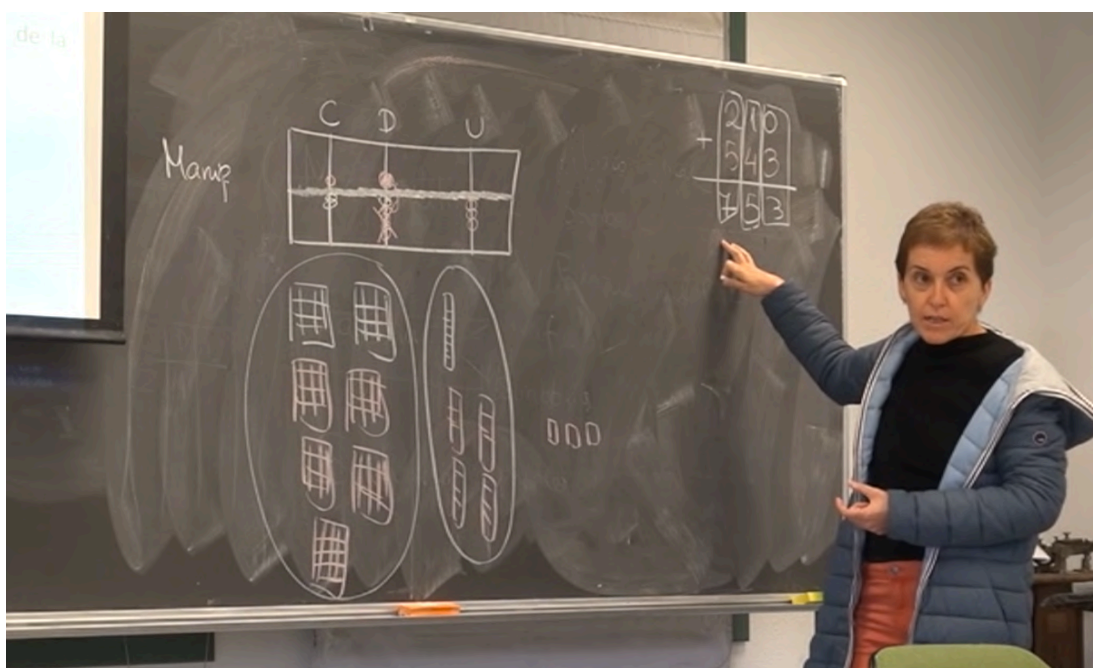
Y veo la conexión de uno con otro, ¿vale?

- 2M5.1-3.3. Emplea los bloques multibase [E, 2].
- 2M5.2-3.3. Indica el paralelismo entre los bloques multibase y el proceso simbólico [E, 3].

- 2M5.2-3.3(I)1. Quiere ver que se puede representar el algoritmo de muchas maneras distintas, porque son algoritmos distintos, y que simplemente es un problema de traducción; se basa en Duval [I, M].
- 2R3.1-3.3. Pregunta si hay que agrupar, haciendo ver que no es necesario [E, 2].
 - 2R3.1-3.3(I)1. Trata de emplear una metodología basada en el juego y en presentar los conceptos de forma gráfica, como la suma en este caso, ya que es la metodología que hay que emplear con los niños [de primaria] [I, M].
- 2P9.1-3.3. Está conectando el material manipulativo [los bloques multibase] con la escritura simbólico-numérica [E, 3].

¿Está claro hasta aquí?

A: Sí, eso sí.

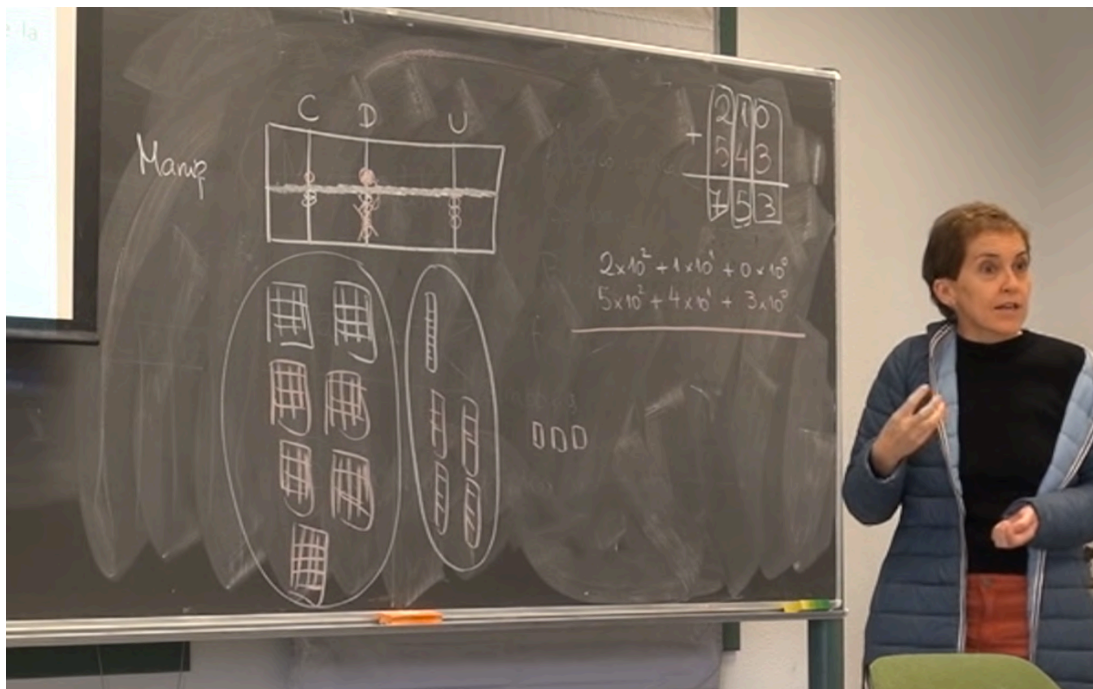


F: El que quiera escribirlo simbólico-numérico de otra manera en la que se vea la «posicionalidad» del sistema, podría escribirlo de la siguiente forma: $2 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 0 \times 10^0$, ese es el primer sumando;

- 2L3.1-3.3. Explica cómo se haría la suma con bloques multibase [E, 2].
- 2L3.2-3.3. Empieza a realizar la suma en otro sistema de representación, escribiendo los números como potencias de 10 [E, 2].
 - 2L3.2-3.3(I)1. Con la escritura que está usando para sumar 210 y 543, al agrupar las potencias de 10 le va a salir el 753 [I, M].

segundo sumando, $5 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 3 \times 10^0$; y sumo.

- 2P10.1-3.3. Realiza la descomposición polinómica de los números, viendo su equivalencia con la escritura simbólico-numérica abreviada [E, 2].



Y ahora, al sumar, utilizo la propiedad conmutativa, para colocar los sumandos en el orden que quiero, y asociativa, para ir organizando, ¿vale?

- 2L4.1-3.3. Indica que, para realizar la suma, emplea la propiedad conmutativa, la asociativa y la distributiva de los números naturales [E, 3].
 - 2L4.1-3.3(I)1. Quizá los alumnos no vean tan claro el uso de la distributiva al tratarse de una suma muy sencilla [I, M].
- 2L4.2-3.3. Alza la voz cuando dice «conmutativa» y «asociativa» [E, D].
- 2P11.1-3.3. Indica las dos propiedades aritméticas que va a utilizar para realizar la operación [E, 3].
- 2J8.1-3.3. Empieza a realizar la suma con expresiones en potencias de 10 [E, 2].
 - 2J8.1-3.3(I)1. Para realizar la suma hay que emplear la propiedad distributiva para ir haciendo las agrupaciones de los números [I, M].

O sea, que este [señala 5×10^2] —que, si lo coloco seguido, estaría aquí el cuarto [señala detrás de 0×10^0]— lo quiero colocar el segundo para agruparlo con este [señala 2×10^2],

- 2D5.1-3.3. Representa la suma empleando la expresión polinómica de los números en términos de potencias: el 210 como 2×10^2 más un grupo de 10 más 0 unidades, y del mismo modo con el otro número, haciendo ver que así se ve la estructura posicional [E, 3].
- 2M6.1-3.3. Está haciendo el proceso con la escritura polinómica, indicando que es una forma en la que se ve la «posicionalidad» [E, 3].
 - 2M6.1-3.3(I)1. Porque quiere justificar todo el proceso realizado hasta el momento [I, M].
 - 2M6.1-3.3(I)2. Desde un punto de vista didáctico, no creo que eso que está haciendo sea precisamente lo posicional; lo posicional es lo de arriba [la suma con el algoritmo tradicional]. Yo podría escribir ese número en cualquier sistema y respondería a esa escritura polinómica. Por un lado está la escritura polinómica y por otro lado está el tipo de sistema. El sistema que nosotros usamos es regular y posicional, pero, por ejemplo, si usáramos un sistema decimal como el chino, que es multiplicativo y no es posicional, la descomposición polinómica sería la misma. Con lo cual, decirle posicional cuando escribo la polinómica yo creo que no es del todo correcto. Otra cosa es que diga: «bueno, puedo usarlo y luego veo cómo agrupo», y así justifica por qué lo hago de la otra manera; digamos que sería otro proceso distinto, pero no le añade «posicionalidad» al proceso. Lo que le añade mucha «posicionalidad» es el sorobán, el ábaco japonés, ese sí, porque no queda más remedio. Sin embargo, por ejemplo, los bloques multibase puedes juntarlos todos y luego separarlos, ahí la posición no es relevante. Los bloques multibase se comportan como un sistema aditivo y en los sistemas aditivos la posición no es nada relevante. Ahora, cuando tú escribes eso [la expresión polinómica], eso vale para cualquier sistema, entonces no creo que añada nada posicional [I, M].
 - 2M6.1-3.3(I)3. Hay que indicar que se tiene que usar la propiedad distributiva para llegar de $2 \times 10^2 + 5 \times 10^2$ a 7×10^2 [I, M].

este [señala 4×10^1] —que estaría el quinto [señala detrás de 0×10^0]— lo coloco el tercero para agruparlo con este [señala 1×10^1], y este [señala 3×10^0] lo agrupo con este [señala 0×10^0]. Y ahora, al agrupar, ya me quedan 5 y 2, propiedad distributiva, 7×10^2 más, 4 y 1, 5×10^1 más, 0 y 3, 3×10^0 . Pero ahí estoy utilizando la asociatividad de la suma, la conmutatividad de la suma y la distributiva de la suma y el producto de números enteros, ¿vale?

- 2D6.1-3.3. *Justifica la suma en la forma polinómica con propiedades de la suma y el producto [E, 3].*

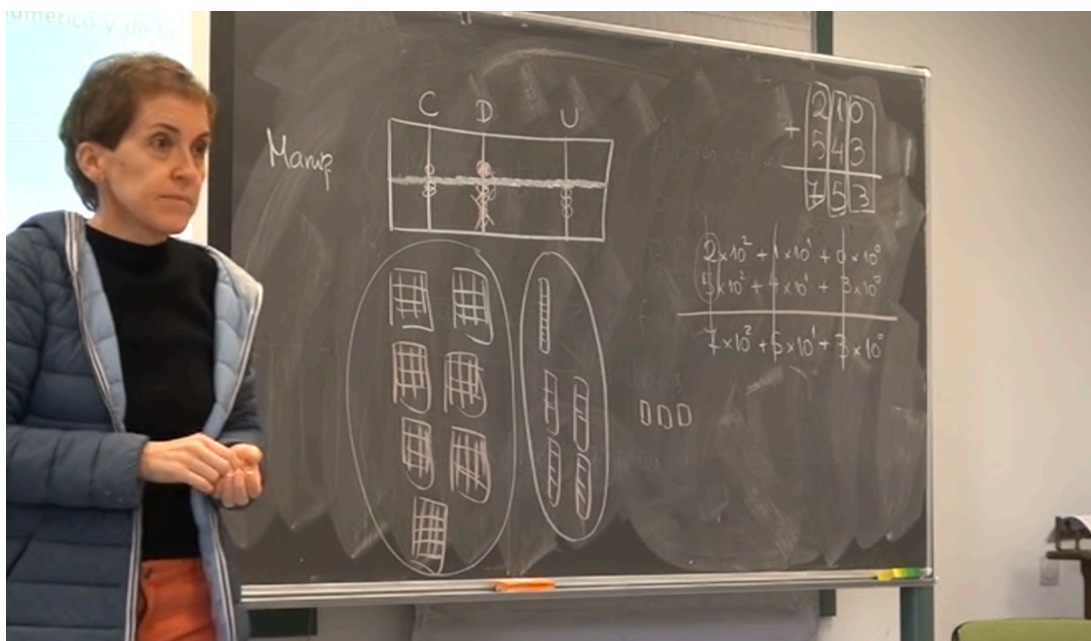
Pero si lo coloco así, veo esto, esto y eso [señala los coeficientes que acompañan a 10^2 , 10^1 y 10^0], que es lo mismo que esto, esto y eso [señala el 7, 5 y 3 del resultado de la suma en la forma simbólico-numérica],

- 2M7.1-3.3. *Indica que emplea las propiedades asociativa, conmutativa y distributiva [E, 3].*
 - 2M7.1-3.3(I)1. *Le interesa mucho que los alumnos entiendan cuáles son las propiedades que sustentan las técnicas de cálculo. Es muy importante hacer eso para que sepan que esas propiedades hay que trabajarlas. Parece que la conmutativa, la asociativa y la distributiva son nombres que se añaden cuando uno estudia matemáticas, un poquito ya mayor, pero sin embargo son propiedades que hay que tener operativas para poder justificar los procedimientos que usamos. No se entiende ninguna técnica de cálculo ni, por supuesto, el producto sin las propiedades que ha enunciado; no tendríamos esas técnicas. Es una muy buena decisión explicar esas propiedades porque didácticamente van a tener mucha transcendencia [I, M].*
- 2M7.2-3.3. *Está estableciendo paralelismos [E, 2].*

que es lo mismo que esto, esto y esto [señala los bloques multibase en la pizarra] y que es lo mismo que 1, 2 y 3 varillas [señala las varillas del sorobán en la pizarra].

- 2P12.1-3.3. *Conecta los cuatro métodos empleados para realizar la suma, mostrando la equivalencia entre los mismos [E, 3].*
- 2J9.1-3.3. *Hace ver que usa la propiedad distributiva y la descomposición del número [E, 2].*
- 2J9.2-3.3. *Explica la conexión con todas las formas [E, 2].*

¿Está claro hasta aquí?



A: Sí.

F: Ahora, ¿qué diferencia hay entre esto y la siguiente suma que me plantean ahí [en el PDF proyectado en la pantalla]? $316 + 429$.

A: Que me paso de unidades y tengo que pasar a las decenas.

- 2L6.1-3.3. Plantea un ejemplo con llevadas tras realizar uno sin llevadas [E, 2].

F: Que cuando agrupo aquí, por ejemplo [bloques multibase], o cuando agrupo aquí [sorobán], o cuando agrupo aquí [expresiones de sumas y productos de potencias de 10], aquí aparecen más de 10 [señala al 3 de 3×10^1].

- 2D7.1-3.3. Plantea la siguiente suma, preguntando a los alumnos si detectan el nuevo fenómeno que aparece en ella [E, 1].

En algún sitio aparecen más de 10,

- 2M8.1-3.3. Plantea una pregunta sobre un ejemplo [una suma] con llevadas, con acarreo entre unidades [E, 2].
- 2M8.2-3.3. Está viendo cómo se realizan los reagrupamientos en cada uno de los sistemas de representación que está utilizando [E, 3].
 - 2M8.2-3.3(I)1. Lo que quiere ver es que todos los procesos son el mismo y que son equivalentes al que hacemos de una manera mucho más automatizada en nuestro cálculo simbólico, en nuestra técnica de cálculo usual [I, M].

- 2M8.2-3.3(I)2. *En realidad aquí solamente hay dos tipos de «algoritmos», sobre todo con las llevadas. Cuando ella cuenta lo de las llevadas, efectivamente, en el caso del ábaco y en el caso simbólico no se ve el cambio, es un cambio que yo produzco porque sé que el sistema funciona así. Me explico: sé que en la varilla del ábaco donde están las decenas cada bola vale 10 veces la unidad, pero eso no se ve, no hay una percepción de ese valor. Lo mismo ocurre en un sistema posicional, que se basa en eso, los símbolos son los mismos, pero solo la posición le da un valor distinto; pero es algo que yo debo conocer de inicio. La tabla estaría a mitad de camino, aunque los cambios se siguen sin percibir, se tienen que saber. Sin embargo, en los bloques multibase yo sí observo que, por ejemplo, 10 varillas [decenas] son físicamente equivalentes a una tabla [centena]; la manipulación te pone de manifiesto los cambios que hay que hacer. De hecho, el material Montessori de los multibase está hecho con bolitas con alambres y se ve que la tabla está hecha con 10 varillas, se pueden contar las 100 bolitas, y la de 1000 es un cubo y se pueden contar las 1000. Se observa cómo físicamente el agrupamiento es compatible [I, M].*

por ejemplo, cuando tengo 9 unidades y 6 unidades, aquí aparecerían 15 fichitas pequeñas [bloques multibase], aquí tendría que representar 15 [sorobán] y aquí aparecería 15×10^0 . Pero como estamos en base 10, no puedo dejarlo así,

- 2R4.1-3.3. *Indica que están trabajando en base 10 [E, 1].*

tengo que agrupar, tengo que agrupar. Entonces, agrupo 10 y dejo 5, y las 10 que agrupo las paso al siguiente valor, es decir, pego 10 fichas y construyo una barra [bloques multibase], agrupo 10 y me sale otra bola aquí en el ábaco, aquí abajo [parte baja de la varilla de las decenas], o agrupo 10 y me sale uno más aquí [en 5×10^1] y aquí [en 3×10^0] dejo las que se quedaban sueltas, las 5, ¿vale?

- 2D8.1-3.3. *Hace ver, con ayuda de una alumna, que hay un nuevo fenómeno que tratar en la suma cuando aparecen 10 o más de una cierta unidad –unidades, decenas o centenas–, que es el reagrupamiento, describiendo en los cuatro sistemas de representación que está usando –la notación vertical usual, la notación polinómica, el sorobán y los bloques de base 10– cómo representaría el proceso de que tengo 9 y 6, 15*

unidades, las cuales se agrupan en 1 decena y 5 unidades, siendo un objetivo de la actividad dicha comparación [E, 3].

- 2P14.1-3.3. Plantea una suma en la que se modifica un elemento, preguntando en qué varía [E, 1].
- 2P14.2-3.3. Hace ver, en cada uno de los métodos trabajados en clase por los alumnos, que ahora al sumar tenemos más de 9 unidades [E, 2].
- 2J10.1-3.3. Plantea qué pasaría si hubiera llevadas [E, 2].
- 2J10.2-3.3. Explica en los tres ámbitos [en los diferentes sistemas de representación] que las agrupaciones irían cambiando, entrando en juego la propiedad distributiva [E, 2].

O sea, que la única diferencia es que aquí, después de representar cada cantidad y de ir poniendo por orden el valor de cada una, tengo que agrupar porque en algunos sitios tengo 10 o más, ¿vale? Es la única diferencia.

Y ahora, si quisiéramos representar esto en formato tabla, como tenía Martín, ¿no? ¿Cuántas columnas pondré yo en la tabla?, ¿qué me pide el cuerpo? Tengo que dibujar una tabla, ¿vale?, vamos a dibujar una tabla [comienza a dibujarla en la pizarra], con filas y columnas, ¿cuántas columnas pongo?

A: Tres.

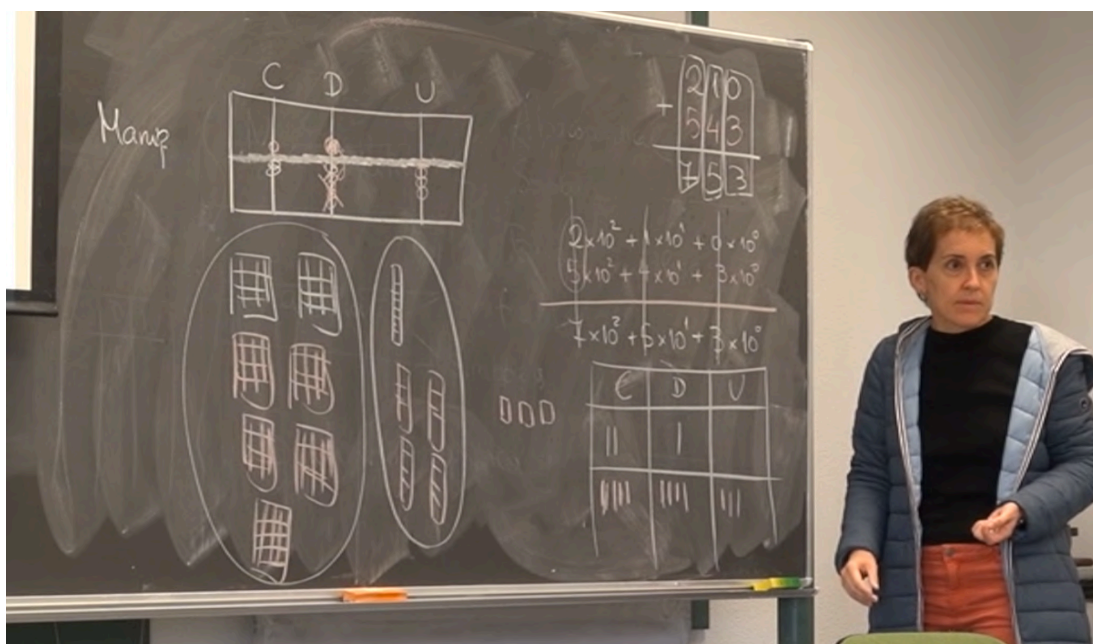
F: Tres, ¿por qué tres?

A: Centenas, decenas y unidades.

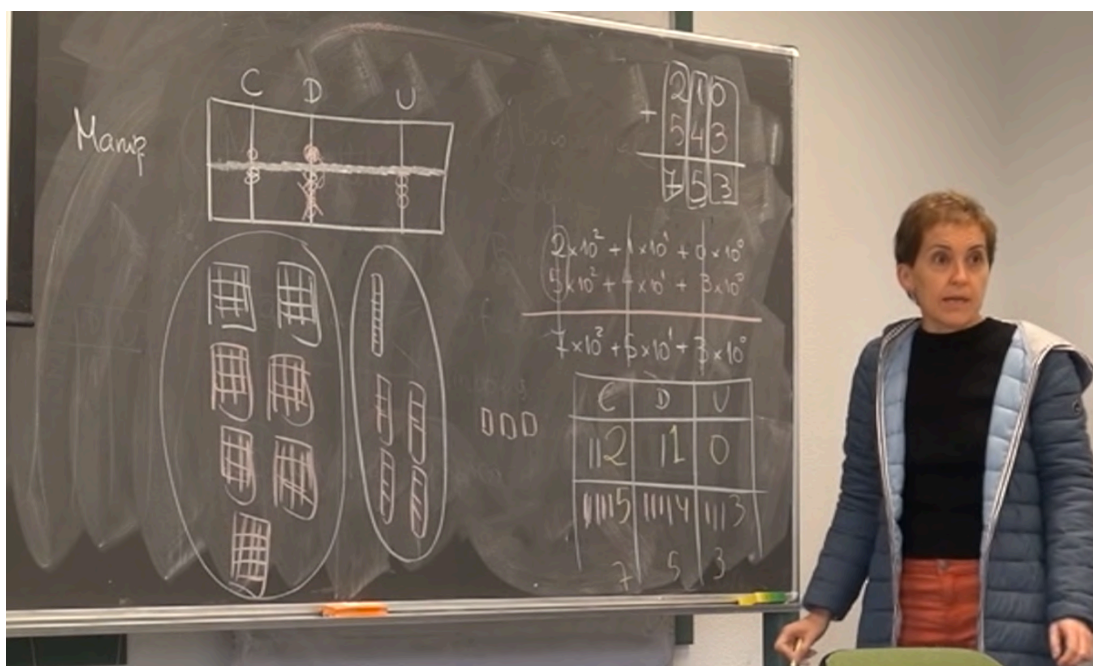
F: Unidades, decenas y centenas, ¿vale? Y entonces, represento el primer número, 210: 1, 2, 1, eso es 210 [pone dos rayas en la primera casilla de las centenas y una en la primera de las decenas]. Represento el segundo número, 500: 1, 2, 3, 4, 5; 40: 1..., bueno, en rosa, ya puestos..., 1, 2, 3, 4, 5; 40: 1, 2, 3, 4; y 3: 1, 2, 3. Y agrupo:

- 2R5.1-3.3. Indica que va a agrupar [E, M].

¿cuántas unidades tengo al final?, 3, ¿cuántas decenas tengo al final?, 5, ¿cuántas centenas tengo al final?, 7, fin.



Este sistema de representación es icónico-gráfico porque he representado aquí las cantidades con palitos, pero tiene una estructura especial porque está en una tabla, ¿vale? Entonces, vamos a decir que es un sistema de representación tabular-gráfico. Si en vez de poner aquí gráficos, yo hubiera dicho: «oye, mira, no me lío con los gráficos, ya puestos, como ya controlo mejor los símbolos, pues voy a poner aquí 210 y aquí abajo voy a poner 543 y luego ya sumo: 4 y 1, 5; 5 y 2, 7; 3 y 0, 3», ¿vale?



Sería tabular, tiene una estructura tabular, no es puramente simbólico-numérico, tiene una estructura tabular, pero con números dentro, tabular-numérico, ¿vale?

- 2D10.1-3.3. *Presenta la notación intermedia que se había introducido [al principio de la sesión], la tabla, concretamente una versión de tabla de valor posicional donde las unidades, decenas y centenas se representan con palotes, dando a dicho sistema de representación el nombre de tabular-gráfico al tener un carácter gráfico [E, 3].*
 - 2D10.1-3.3(I)1. *La versión que ha surgido de la tabla se parece más al ábaco que a los bloques multibase, pero ya se dijo al principio [de la sesión] que los alumnos podían improvisar la tabla al no haberse tratado antes [I, M].*
- 2D10.2-3.3. *Presenta otro sistema de representación que denomina tabular-numérico, ya que tiene números dentro de la tabla [E, 3].*
- 2M10.1-3.3. *Realiza una tabla, indicando que se trata de un sistema tabular gráfico [E, 3].*
 - 2M10.1-3.3(I)1. *Además de este tipo de tabla, cabría la posibilidad de escribir 2, 1, 0, es decir, los números [I, M].*
- 2M10.2-3.3. *Realiza por último otra tabla, indicando que se trata de un sistema tabular simbólico [E, 3].*
 - 2M10.2-3.3(I)1. *Plantea lo tabular como un paso intermedio para llegar al proceso simbólico. Si nos damos cuenta, en el simbólico normal, el 5 que está puesto en las centenas en el número de abajo y el 5 que aparece en las decenas no se diferencian en nada, solo en la posición. Sin embargo, en la tabla se diferencian en que un 5 lleva una D arriba y el otro lleva una C arriba, es decir, hay una C y una D que dicen lo que son. Y aunque también están puestos en un orden, no es solo la posición lo que marca el valor, sino la C, la D y la unidad. Entonces, es un paso intermedio. Sin embargo, los bloques multibase es un sistema puramente aditivo, con lo cual interpreto que la evolución que ella ha presentado aquí es una evolución muy interesante entre cómo se suma en un sistema aditivo, que se suma como en los bloques multibase, cómo se sumaría en un sistema multiplicativo, como sería el tabular, y cómo se suma en un sistema posicional, que es el nuestro. El ábaco es puramente posicional también, pero, en vez de tener símbolos para los distintos símbolos, tiene un sistema aditivo pequeñito en cada orden, pero no es lo más relevante [I, M].*
 - 2M10.2-3.3(I)2. *Hay un intento de mostrar cómo funciona cada sistema para que el alumno tenga recursos para que luego, cuando vaya a clase, sepa qué tipo de*

sistema puede utilizar para que los alumnos de primaria construyan de manera satisfactoria los algoritmos clásicos de las operaciones [I, M].

- 2L7.1-3.3. *Utiliza el sistema de representación tabular gráfico [E, 3].*
- 2L7.2-3.3. *Utiliza el sistema de representación tabular numérico [E, 3].*
- 2L7.3-3.3. *Tiene en la pizarra plasmados todos los sistemas de representación que ha empleado para realizar la misma suma [E, 3].*
- 2P16.1-3.3. *Realiza la suma con otro método, con una tabla, indicando que tiene características icónico-gráficas, haciendo ver que está haciendo lo mismo que con los otros métodos [E, 3].*
- 2P16.2-3.3. *Realiza la suma con otro método, con una tabla, indicando que tiene características numéricas, haciendo ver que está haciendo lo mismo que con los otros métodos [E, 3].*

Entonces, yo voy pasando de lo más concreto, que sería: «mi madre me ha dado 316 euros y mi abuela 429, ¿cuántos euros tengo en total?», después paso a manipular, con ábacos verticales, con ábacos japoneses, con bloques multibase..., y cuando interiorizo bien eso, digo: «ostras, venga, lo voy a poner en una tabla gráfica y voy a indicar lo que me indica cada varilla o lo que me indica cada agrupamiento de los bloques multibase, que es posición, en las columnas de una tabla, y ahí voy a poder marcarlo con símbolos». Esta tabla con símbolos se llama tablero de posición, porque tengo las posiciones indicadas —unidades, decenas y centenas—, y es uno de los recursos que más utilizan en el método famoso este Singapur, que habréis visto o habréis oído hablar de él, ¿vale?

- 2J11.1-3.3. *Explica otro tipo de representación: la tabla gráfica [E, 3].*
 - 2J11.1-3.3(I)1. *Las diferentes formas de representar que explica son todas válidas y complementarias [I, M].*
- 2J11.2-3.3. *Pone de relieve el método Singapur [E, 2].*

Entonces, ¿qué están haciendo?, están haciendo una transición de los más concreto, pasando por lo manipulativo, hacia lo abstracto, que sería..., esto es lo más abstracto [señala las expresiones de sumas y productos de potencias de 10] y

esto es lo abstracto que se trabaja en primaria [señala la suma hecha en el registro de representación simbólico-numérico], ¿vale?

- 2M11.1-3.3. *Pone de manifiesto todo el proceso, la evolución, la progresión desde lo manipulativo, pasando por lo tabular, para llegar a lo simbólico [E, 3].*
 - 2M11.1-3.3(I)1. *Lo hace porque la idea es que el alumno conozca de dónde vienen las técnicas y cómo se adaptan al sistema; hace una progresión adecuada para que el alumno tenga recursos y pueda construir sus técnicas de cálculo, porque no se trata de que tú enseñes la técnica, sino de que el alumno la construya; es la única manera de conseguir un aprendizaje significativo del cálculo. No tiene sentido enseñar un algoritmo sin saber cómo funciona; no están para eso las matemáticas [I, M].*
 - 2M11.1-3.3(I)2. *No creo que tenga el mismo nivel manipulativo el ábaco que los bloques multibase. El ábaco es un sistema posicional, en las dos representaciones tipo ábaco que ha hecho ya se marca la posición con las mismas bolas, aunque estén en sitios distintos. Sin embargo, en los bloques multibase no, bloques multibase es un sistema puramente aditivo, con lo cual la percepción te dice el agrupamiento. En los bloques multibase cada unidad es distinta, cada unidad representa físicamente la cantidad de unidades totales que tiene. Esto, traducido en términos de sistemas de numeración, es: sistemas aditivos, sistemas multiplicativos y sistemas posicionales. Por eso, dentro de esa manipulación habría una gradación, es decir, los manipulativos no son todos equivalentes [I, M].*
- 2M11.2-3.3. *Menciona el método Singapur, haciendo ver que en él se emplean tablas [E, 2].*

Pero no trabajan directamente con esto, vamos pasando..., concreto, concreto, concreto, concreto [de forma manipulativa], voy intentando abstraer un poco, pero tengo mis gráficos que me ayudan a visualizar lo que estoy haciendo [de forma tabular],

- 2P17.1-3.3. *Muestra la transición didáctica más adecuada para ella, partiendo de lo manipulativo, pasando por la tabla y llegando finalmente a la escritura más abstracta [E, 3].*

- 2P17.2-3.3. Menciona que la transición didáctica planteada se hace también en el método Singapur [E, 3].

y finalmente mi objetivo es escribirlo simbólico-numéricamente, de forma abstracta, ya al final.

- 2D11.1-3.3. Resume la actividad, desde la propuesta original, que era calcular una suma escribiendo el proceso, empezando con la fase concreta, representando con los materiales, el ábaco y los bloques de base 10, usando después las tablas en sus diferentes versiones, para terminar con el procedimiento simbólico, la suma en vertical y las expresiones polinómicas, es decir, plantea un resumen de la ruta didáctica de los alumnos [E, 3].
- 2D11.2-3.3. Menciona que el proceso seguido es parte de la metodología Singapur [E, 3].
- 2R7.1-3.3. Explica todo el proceso manipulativo necesario para llegar al nivel de abstracción al que tienen que llegar los alumnos [E, 2].
- 2J12.1-3.3. Plantea el proceso que se seguiría en primaria, yendo desde la representación manipulativa hasta lo abstracto, que es el final, la operación que aparece en primaria [E, 3].
 - 2J12.1-3.3(I)1. Lo abstracto es el conocimiento es aprenden los maestros y que está detrás de todo [lo visto en la sesión] [I, M].

¿Cómo habéis trabajado mayoritariamente vosotros en primaria cuando estabais haciendo sumas de este estilo? ¿Desde aquí [señala lo manipulativo] o desde el final [señala lo simbólico-numérico]?

A: Desde el final...

A: Yo con las de centenas, decenas y unidades, las cajas...

F: Las cajas estas también os suenan, los tableros de posición, pero ¿y qué poníais en las posiciones, palitos o los números ya?

A: Los números directamente.

- 2P18.1-3.3. Pide a los alumnos que reflexionen sobre cómo les enseñaron a sumar [E, 1].
 - 2P18.1-3.3(I)1. Para que los alumnos piensen desde un punto de vista profesional, pensando en cuando a ellos les toque [enseñar], cuál es el método óptimo para enseñar a sumar [I, M].

F: Los números directamente, o sea, que estabais trabajando la fase inicial, de la suma, la estabais trabajando directamente con lo simbólico, que es la fase final,

- 2R8.1-3.3. *Indica que es la fase final [de la suma] [E, 1].*

¿lo veis?

A: Jolín, sí.

F: Vale, pues ala, ya está.

- 2D12.1-3.3. *Pregunta a los alumnos cómo aprendieron a sumar cuando eran alumnos de primaria, haciendo ver que lo tradicional suele ser empezar por la fase final, con la suma en vertical [E, 3].*
 - 2D12.1-3.3(I)1. *Lo excepcional en España es usar material manipulativo, sobre todo cuando hablamos de alumnos de Magisterio, que estudiaron primaria hace más de 10 años [I, M].*
- 2M12.1-3.3. *Está remarcando un hecho a los alumnos, que consiste en que el proceso de la enseñanza clásica empieza con el último trabajo [el sistema de representación simbólico-numérico] [E, 2].*
 - 2M12.1-3.3(I)1. *Está defendiendo que el proceso debe ser distinto, es decir, ese es el estadio final, que es donde los alumnos tienen que llegar. Si empezamos por el final, y en esto entran todas las teorías de aprendizaje, corremos un gran riesgo de que no se produzca el aprendizaje significativo [I, M].*
- 2L8.1-3.3. *Indica a los alumnos que es mejor empezar a trabajar la suma con sistemas de representación manipulativos, usando luego otros sistemas de representación [E, 2].*
- 2L8.2-3.3. *Hace ver a los alumnos que normalmente se trabaja fundamentalmente con el algoritmo [simbólico] [E, 2].*
- 2J13.1-3.3. *Hace ver cuál es la fase que se enseña [en primaria], que es la del algoritmo, incidiendo en cómo aprendieron los alumnos [E, 2].*

ANEXO 34

Conjunto de eventos e interpretaciones de la fase 2 de todos los participantes, integrados en la transcripción de los vídeos tras el *call-out* al que cada uno se refiere

Nota 1: En este documento se incluyen todos los eventos e interpretaciones de los participantes agrupándose de dos maneras: por un lado, todos aquellos que se refieren a un call-out se presentan agrupados tras el call-out en cuestión, el cual se introduce cuando tiene lugar en el vídeo y con su correspondiente etiqueta (por ejemplo, C1-3.2, o sea, el primer call-out de la segunda parte vídeo 3); por otro, todos aquellos que no se refieren a un call-out se agrupan con los eventos que traten el mismo aspecto, si los hubiera, y se presentan tras un evento redactado por el investigador que recoge la información que aborda, incluyéndose cuando tiene lugar en el vídeo e introduciéndose también con una etiqueta que lo identifica (por ejemplo, Evento (2)1-3.2, o sea, el primer evento – no call-out – de la segunda parte del vídeo 3 [el número entre paréntesis indica que pertenece a la fase 2]).

Nota 2: El texto presentado entre corchetes en la transcripción y en algunos eventos e interpretaciones se corresponde con información incluida por el investigador.

VÍDEO 1

Fragmento 1

[F = Formadora del vídeo].

F: Bueno, entonces os voy a dar el guion y empezáis a trabajar y, al final, los últimos 15 minutos, hacemos la puesta en común. El guion de la actividad aparece aquí en el campus, pone la fecha, ¿vale?, «actividad para la sesión del 19 de septiembre». Lo voy a leer porque está en inglés, por si alguno tuviera alguna dificultad, lo leo y os ponéis a trabajar, ¿vale?

Todo el mundo en la mesa tiene un montón de palillos y varias cintas de estas, ¿no?, elásticas. Si alguien necesita más cintas me las pide, palillos no, son los que os he puesto, ¿vale?, es con lo que tenéis que trabajar.

C1-1.1. Presenta el material manipulativo con el que los alumnos van a trabajar: palillos y cintas elásticas.

- 2D1.1-1.1. Enuncia los materiales manipulativos que van a usar los alumnos en la sesión, los palillos [E, 2].
 - 2D1.1-1.1(I)1. Para que los alumnos sepan que los materiales van a ser un objeto central e importante en el trabajo de la sesión [I, D].
- 2M1.1-1.1. Presenta unos palillos y unas gomas [E, 2].
- 2L1.2-1.1. Habla de los objetos con los que los alumnos van a tener que hacer la actividad: palillos y gomas [E, 2].
- 2P1.1-1.1. Presenta los palillos [E, 1].
- 2J1.2-1.1. Reparte unos palillos [E, 1].

C2-1.1. Establece una restricción en el uso del material: la cantidad de palillos es fija, mientras que la cantidad de cintas elásticas no lo es.

- 2M1.2-1.1. Indica que el número de palillos es fijo, mientras que el de gomas no lo es [E, 3].
 - 2M1.2-1.1(I)1. Imagino que el número de palillos está fijo porque la cantidad es relevante para lo que va a estudiar. Podría ser fijo y al azar, pero yo creo que está prefijado de una manera consciente, lo que se llama en Teoría de Situaciones «variable didáctica», porque interesará que dicha cantidad cumpla una serie de condiciones para hacer emerger ciertas estrategias. Lo que no se sabe es si todos tienen la misma cantidad de palillos [I, M].

El problema es que yo he comprado una caja de palillos en Supeco y resulta que mis compañeros lo compran en Mercadona y me dicen que las cajas de palillos que ponen 800 palillos del Mercadona traen más y que les sale a cuenta, y que cuando van a comprar materiales —porque a veces tenemos que comprar nosotros los materiales— pues que merece la pena. Yo no pude ir a Mercadona, fui a Supeco, pone que son 800, pero no sé si me han timado o no me han timado. Entonces, para hacer un control de calidad, hacer una estimación, que luego, bueno, los que hayáis hecho Matemáticas de Ciencias Sociales pues sabéis hacer un contraste de hipótesis y tal, pero bueno, lo primero que tengo que hacer es hacer una estimación de cuántos hay, ¿no? Entonces, los he repartido para no contarlos yo y la idea es ver cuántos hay.

C3-1.1. Contextualiza la actividad planteando que hay que comprobar si la cantidad de palillos que hay en cierta caja es la que se indica en la misma.

- 2D2.2-1.1. Contextualiza el problema al decir que se trata de comprobar si las cajas de cierto distribuidor tienen la cantidad indicada o no [E, 3].
- 2M2.1-1.1. Contextualiza la actividad haciendo alusión a cajas con 800 palillos, es decir, plantea un contexto extramatemático sobre conocimientos pragmáticos del mundo [E, 2].
 - 2M2.1-1.1(I)1. Pretende hacer partícipes a los alumnos, lo cual no es muy relevante con alumnos universitarios, pero sí cuando los alumnos son niños [I, D].
- 2P1.2-1.1. Plantea que hay que ver si la publicidad de la caja es correcta [E, 1].

C4-1.1. Hace alusión a conocimientos previos de Matemáticas de Ciencias Sociales: el contraste de hipótesis.

- 2M2.3-1.1. Recuerda a los alumnos conocimientos que han podido trabajar en matemáticas en Bachillerato de Ciencias Sociales [E, 2].
- 2L1.3-1.1. Hace alusión a un conocimiento matemático que piensa que algún alumno puede tener si ha cursado matemáticas de Ciencias Sociales: los contrastes de hipótesis [E, 3].

C5-1.1. Introduce la actividad a realizar: estimar y contar cuántos palillos hay repartidos en clase.

- 2D2.1-1.1. Plantea el problema, que consiste en contar cuántos palillos hay en las cajas que ha distribuido [E, 2].
- 2M2.2-1.1. Plantea una tarea: estimar los palillos que ha repartido y contarlos después [E, 3].
 - 2M2.2-1.1(I)1. Está reproduciendo con futuros maestros una tarea que puede llevarse a cabo con niños de primaria, por lo que de algún modo va a hacer pasar a los alumnos por procesos similares a los que pasarían los niños de primaria [I, M].
 - 2M2.2-1.1(I)2. Como ha repartido los 800 palillos, creo que dicha cantidad no juega un papel importante en las estrategias que los alumnos van a tener que utilizar [I, M].
 - 2M2.2-1.1(I)3. La tarea de estimar no se plantea habitualmente, los alumnos de matemáticas generalmente piensan que hay que obtener resultados precisos, cuando en la realidad los resultados no son precisos en casi ningún caso [I, M].

- 2L1.1-1.1. *Introduce a los alumnos una actividad matemática consistente en contar el número de palillos que tienen [E, 2].*
- 2J1.1-1.1. *Plantea la tarea a realizar, que consiste en estimar, en calcular un montón de palillos [E, 3].*
- 2P2.1-1.1. *Plantea el problema, en el campo de la aritmética, que consiste en contar los palillos de una caja [E, 2].*

Entonces, el guion de la actividad, tal y como aparece aquí... [espera a que cargue el ordenador]. Aquí está el guion. Esta actividad —esperad que la amplíe un poco— está escaneada de un libro muy bueno que utilizan en los últimos años en Estados Unidos para formar profesores de primaria. Lo bueno del libro es que, además de los contenidos teóricos, más de la mitad del libro son actividades para llevar al aula-taller como estamos haciendo aquí, ¿vale? Entonces, una de las actividades iniciales para el trabajo con el número, que es con lo que estamos empezando nosotros, es esta de los palillos, ¿vale?

C6-1.1. Presenta un libro que utilizan en Estados Unidos para formar a profesores de primaria y que contiene muchas actividades para llevar al aula.

- 2J2.1-1.1. *Recomienda una referencia relacionada con el tema matemático que están viendo, que tiene recursos de apoyo para llevar al aula, dirigida a los alumnos como futuros maestros [E, 3].*
 - 2J2.1-1.1(I)1. *Porque puede servir a los alumnos para su práctica docente [I, D].*
- 2D3.1-1.1. *Indica que la actividad propuesta forma parte de un libro de formación matemática de maestros de Estados Unidos [E, 2].*
- 2M3.1-1.1. *Hace referencia a un libro sobre la enseñanza de las matemáticas del que ha extraído la actividad que va a proponer [E, 1].*
 - 2M3.1-1.1(I)1. *Con la intención de que los alumnos se animen a usar el libro [I, D].*
- 2R1.1-1.1. *Menciona un libro referido a la actividad que van a realizar y a las destrezas que quiere que se alcancen [E, 1].*
 - 2R1.1-1.1(I)1. *Los alumnos pueden buscar información en el libro y aprender [I, D].*

C7-1.1. Menciona el contenido matemático que van a trabajar: el número.

No ha sido detectado por ningún formador.

Entonces, aquí la pregunta es «cuántos», cuántos palillos, ¿no?, que es lo que os he preguntado a vosotros, ¿no?, cuántos. Entonces, cada grupo participando en esta actividad tiene un montón de palillos y luego tiene algo para atarlos, ¿no?, *rubber bands*, pues cintas de estas elásticas. Los materiales ya los tenéis. El objetivo de la actividad es ayudaros a entender el desarrollo de la escritura de los números tal y como los utilizamos nosotros en nuestro sistema de numeración, ¿vale?

C8-1.1. Enuncia el objetivo de la actividad: entender el desarrollo de la escritura de los números en nuestro sistema de numeración.

- 2D4.1-1.1. *Presenta el objetivo de la actividad: entender la escritura de los números [E, 2].*
 - 2D4.1-1.1(I)1. *Pretende que los alumnos entiendan que agrupar palillos es una estrategia que deben explorar [I, M].*
- 2M4.1-1.1. *Hace explícito el objetivo de la actividad: que los alumnos reflexionen o constaten cómo son las características de los sistemas de numeración [E, 2].*
 - 2M4.1-1.1(I)1. *Esto sí que es una diferencia entre una actividad hecha con alumnos [en la universidad] y una actividad hecha en primaria. En primaria, los niños se podrían enfrentar a este tipo de trabajo y no declararles cuál es el objetivo matemático que está detrás, sino simplemente ver si emergen las estrategias que justifiquen ese contenido [I, M].*
- 2R2.1-1.1. *Menciona su intención, el objetivo de la actividad, lo que pretende que los alumnos alcancen [E, 1].*
- 2L2.1-1.1. *Indica el objetivo matemático de la actividad, que es que los alumnos entiendan la escritura del número, por qué se escribe el número de una determinada manera [E, 2].*
- 2P3.1-1.1. *Establece los objetivos de la tarea, cuyos elementos matemáticos son el número y los sistemas de numeración [E, 3].*
- 2J4.1-1.1. *Plantea el objetivo matemático de la tarea: entender la escritura en el sistema decimal [E, 3].*

Evento (2)1-1.1. Recuerda el problema matemático que hay que resolver, planteándolo también por escrito en la pantalla.

- 2J3.1-1.1. *Recuerda el problema matemático que tienen que resolver, planteándolo también por escrito [proyectado en la pantalla] [E, D].*
 - 2J3.1-1.1(I)1. *Es importante para que el problema quede bien especificado y claro [I, D].*

Entonces, primero, organiza los palillos de forma que visualmente puedas ver más o menos cuántos hay; usa las bandas elásticas, si te ayudan, para organizarlos de manera que así, de un vistazo, puedas decir cuántos tienes, primero los cuentas, lo organizas, piensas cómo organizarlo, pero la cosa es que la organización que tú tengas en la mesa te permita de un vistazo recordar cuántos hay sin necesidad de haberlo apuntado, ¿no?, y que, si yo me paso por allí, me podáis decir: «mira, hay no sé cuántos, porque...», lo veo porque lo hemos organizado así», ¿vale?

C9-1.1. Establece la primera instrucción de la consigna: organizar los palillos, empleando las cintas elásticas si son de ayuda, para saber cuántos hay de un vistazo.

- 2M5.1-1.1. *Dice a los alumnos que tienen que hacer grupos de palillos, que tienen que organizarlos de tal forma que de un vistazo se pueda saber cuántos palillos hay [E, 3].*
 - 2M5.1-1.1(I)1. *Explicitar que agrupen es una decisión didáctica, ella no quiere dejar que los agrupamientos surjan en un entorno adidáctico, ya que puede haber algún alumno que se ponga a contar los palillos de uno en uno sin ningún tipo de organización; como son futuros maestros, se les dice más o menos cómo tienen que trabajar. En un entorno adidáctico, hablando en términos de la Teoría de Situaciones, sería suficiente con pedir que cuenten los palillos, sin importar la organización, mientras que aquí el objetivo es organizarlos para saber cuántos hay [I, M].*
 - 2M5.1-1.1(I)2. *La goma es una explicitación del agrupamiento, pudiendo hablar luego de palillos y de gomas [I, M].*
- 2J4.2-1.1. *Pide que por grupos cuenten y agrupen los palillos que tienen, que vean cómo pueden expresar el número de palillos que les ha tocado, sugiriendo la estrategia de usar hatillos, teniendo que poder luego comunicar el resultado [E, 2].*

- 2D5.1-1.1. Indica que hay que agrupar los palillos de tal forma que se pueda saber la cantidad de palillos que hay sin necesidad de registrar el número con símbolos usuales, sino solamente viendo los grupos de palillos hechos por los alumnos [E, 3].
- 2R3.1-1.1. Está indicando la tarea a realizar, que consiste en que los alumnos agrupen, en la cual está implícito el objetivo marcado al principio [de la sesión] [E, 2].
- 2L3.1-1.1. Pide a los alumnos que realicen una agrupación de los palillos que tienen que les permita contarlos visualmente [E, 3].
 - 2L3.1-1.1(I)1. Pretende que los alumnos se den cuenta de que agrupar de 10 en 10 es muy cómodo, que lleguen al sistema numérico decimal [I, M].
- 2P4.1-1.1. Plantea que cada grupo establezca su propio sistema de numeración para saber cuántos palillos hay [E, 2].

Luego, reflexiona sobre si la manera en la que lo has organizado corresponde a cómo escribirías tú luego los numerales para representar esa cantidad de palillos.

C10-1.1. Establece la segunda instrucción de la consigna: reflexionar sobre si hay una correspondencia entre los grupos de palillos hechos y la escritura de los números que representan la cantidad total de palillos.

- 2M7.1-1.1. Dice que piensen si los grupos que han hecho se ajustan a cómo se escribirían en nuestro sistema de numeración [E, 3].
 - 2M7.1-1.1(I)1. Nuestro sistema de numeración se basa en el agrupamiento decimal, en la base 10, en las centenas, decenas, etc., y no solo en hacer agrupaciones, sino en hacer agrupaciones de agrupaciones, el algoritmo de la numeración se basa en la idea de agrupamiento recursivo, no solo se agrupa de 10 en 10, sino que luego se agrupa de 10 en 10 los grupos de 10, dando lugar a las potencias [I, M].
 - 2M7.1-1.1(I)2. Pretende que los alumnos hagan grupos de 10 o agrupamientos compatibles o con cierta coordinación con el sistema de numeración para que el conteo sea mucho más fácil; si hacen grupos de 17, puede funcionar, pero no para leer los números como los leemos [I, M].
 - 2M7.1-1.1(I)3. Hace esta indicación porque está trabajando con futuros maestros; si la actividad se realizase con niños, los objetivos tendrían que ser distintos [I, M].

- 2J5.1-1.1. *Pide que reflexionen un poco sobre lo que están haciendo, sobre el objetivo que tenía la actividad de cómo expresar el número de palillos [E, 1].*
- 2R4.1-1.1. *Plantea como objetivo que los alumnos piensen cómo se escriben los números y cómo se agrupan [E, 2].*
 - 2R4.1-1.1(I)1. *Con su metodología matemática pretende que los alumnos, cuando enseñen a los niños en primaria, aborden la escritura de los números de una manera inductiva, empleando una metodología manipulativa, para que los niños lleguen a comprender cómo se agrupan y cómo se escriben los números de una forma visual [E, M].*

Después, tienes que juntar tus palillos con los de un grupo de al lado, ¿vale?, por ejemplo, vosotros con vosotros y así, cada dos grupos tienen que juntar los palillos que tienen y decidir cuántos tienen en común, ¿vale?, cuántos tienen en total.

C11-1.1. Establece la tercera instrucción de la consigna: juntar los palillos cada dos grupos y saber cuántos hay en total.

- 2M8.1-1.1. *Dice que los grupos tienen que compartir los palillos, los agrupamientos [E, 2].*
 - 2M8.1-1.1(I)1. *Su objetivo es que hagan un agrupamiento común, por lo que al juntarse dos grupos prevalecerán los agrupamientos que sean iguales, ya que el conteo es más cómodo con agrupamientos iguales, compatibles, múltiplos... [I, M].*
- 2D6.1-1.1. *Indica que han de reunirse cada dos grupos para juntar sus palillos [E, 2].*
- 2J6.1-1.1. *Indica que después pongan en común los palillos con otros compañeros [E, 2].*
- 2P4.2-1.1. *Indica que cada grupo tiene que juntarse con el grupo de al lado para ver cuántos palillos tienen en total [E, 3].*
 - 2P4.2-1.1(I)1. *Para que comparen los sistemas de numeración establecidos, viendo las ventajas y las deficiencias, y decidir cuál es el óptimo [I, M].*

Y al final, tenemos que juntarlos todos y de una forma ágil, sin tener que volver a contarlos todos, tenemos que saber cuántos palillos hay en total en la clase repartidos, ¿vale?

C12-1.1. Establece la cuarta instrucción de la consigna: juntar todos los palillos de la clase y saber cuántos hay en total de una forma ágil, sin tener que contarlos de nuevo.

- 2D6.2-1.1. Indica que, cuando unan los palillos con todos los grupos de la clase, tiene que ser sencillo, eficiente, contar cuántos palillos hay en total, es decir, sumarlos [E, 3].
- 2J6.2-1.1. Indica que al final hay que unir todos los palillos con el grupo entero [E, 2].
 - 2J6.2-1.1(I)1. Pretende que el grupo entero de alumnos llegue a una estrategia común para representar la unión de los palillos, generando así un aprendizaje colectivo [I, M].

O sea que, primero, cada grupo tiene que saber cuántos tiene y tiene que generar una estrategia para, de manera rápida, mirar en la mesa y ver cuántos hay; después, reflexionar sobre si la manera en la que lo coloca cuando uno luego escribe, imaginaos, «tengo 72, pues cómo se escribe 72: siete, dos», pues la manera en la que lo coloco me ayuda con la escritura o no, no tiene por qué, se reflexiona un poco sobre eso; y cuando hayáis terminado esa parte, llamáis al grupo de al lado y decís: «venga, vamos a ver cuántos tenemos en total, visualmente, cómo lo organizasteis vosotros, cómo lo organicé yo, a ver cómo lo tengo», ¿vale?; y luego todos.

C13-1.1. Induce a la reflexión sobre la correspondencia entre la escritura de los números y los grupos de palillos haciendo ver que 72 se escribe con un 7 y un 2.

- 2L3.2-1.1. Deja entrever a los alumnos que la escritura del número 72 puede tener algo que ver con cómo tienen que agrupar los palillos al hacer hincapié en que el 72 se compone de un 7 y un 2 [E, 3].
- 2D7.1-1.1. Da un ejemplo concreto de la escritura en notación posicional de base 10: el 72 como siete, dos [E, 2].

Tenéis un cuarto de hora, ¿vale?

Fragmento 2

[F = Formadora del vídeo]. [A = Alumnos].

- F: Necesito saber si habéis tenido que llegar a algún acuerdo entre los grupos o...
- A: Sí, claro, todo ha sido un consenso, todo ha sido un consenso.
- F: Ah, vale, ha sido un consenso. ¿Qué acuerdo habéis tenido que...?
- A: Hemos explicado cada uno pues lo que significaba cada..., cada gomita.
- F: Y, por ejemplo, ¿vosotros de cuánto en cuánto lo habíais agrupado? Erais los de 15, 10, 5, ¿no?
- A: Sí.
- F: ¿Y vosotros?
- A: 20, 10 y 4.
- F: 20, 10 y 4. Entonces, ¿habéis tenido que llegar a algún acuerdo alguno para reordenar?
- A: No, porque nos ha venido muy bien.

C1-1.2. Pregunta a los alumnos qué agrupaciones habían hecho antes de juntarse los dos grupos de alumnos y si han tenido que llegar a algún acuerdo al juntar los palillos de ambos grupos, incidiendo así en la primera y en la tercera instrucción de la consigna.

- 2M1.1-1.2. *Pregunta a los grupos de alumnos si han tenido que llegar a un acuerdo [E, 2].*
 - 2M1.1-1.2(I)1. *Aquí hay una dinámica de la gestión de la clase: el trabajo es en grupo, pero dicho trabajo depende de lo que hayan hecho los otros grupos. En las situaciones de formulación, en Teoría de Situaciones, se deja que los alumnos trabajen y luego se produce la comunicación; si se produce un fracaso, se vuelve a trabajar. Parece que aquí ya han llegado a un consenso [I, M].*
- 2J1.1-1.2. *Pregunta a dos grupos de alumnos qué estrategias han utilizado [E, 1].*
- 2R1.1-1.2. *Trata de ver si los alumnos han tenido que llegar a un acuerdo para llegar a una organización [de los palillos] [E, 2].*
 - 2R1.1-1.2(I)1. *Pretende que los alumnos se den cuenta de que en el aula [de matemáticas de primaria] se van a encontrar con que los niños realizan diferentes organizaciones, por lo que tienen que adaptarse a esa mentalidad [I, M].*

- 2D1.1-1.2. Pide a los alumnos que expliquen las estrategias que han usado para agrupar los palillos una vez que se han juntado dos grupos [E, 2].
 - 2D1.1-1.2(I)1. Pretende que expliciten el tamaño de los grupos que han hecho y por qué han elegido esos tamaños para analizar cómo funciona [I, M].
- 2L1.1-1.2. Pregunta a los alumnos cómo han organizado los palillos [E, 2].

Evento (2)1-1.2. Indica que un grupo de alumnos ha hecho agrupaciones de 20, 10 y 4 palillos.

- 2M3.1-1.2. Indica que los alumnos han hecho [grupos de] 20, 15, 4, o sea, no decimales [E, M].

F: ¿Os ha venido bien?

A: Es que hemos sido muy inteligentes cogiendo el amarillo para los grandes [se refiere a gomas elásticas de color amarillo].

F: Ahora los grandes de qué son, ¿de 20?

A: De 20 y de 15, aquí están mezclados. ¿O los tenemos que reorganizar?



F: Esto es superinteligente, ¿no? O sea, yo veo aquí..., digo: «en los amarillos, algunos tienen 20 y algunos tienen 15, búscate la vida Nuria».

A: Pero son amarillos.

F: Ya, pero entonces yo no sé... Yo digo: «vale, yo puedo ver 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 grupos amarillos», ¿no? Y ahora digo: «como mucho serán 160, si son todos de 20, pero... no necesariamente son 160, pueden ser menos».

- A: Bueno, pero como no lo sabes...
- F: ¿Entonces cómo sé cuántos hay?
- A: Te lo estamos diciendo, tienes que confiar en nosotros.
- F: No, en matemáticas la confianza no vale, uno tiene que...

Evento (2)2-1.2. Indica a los alumnos que en matemáticas la confianza no vale.

- 2M5.1-1.2. *Hace ver a un alumno que las matemáticas se basan en hechos [E, M].*
 - 2M5.1-1.2(I)1. *En matemáticas necesitamos que los conocimientos sean totalmente explicitables y que no dependan de la interpretación, en este caso, de los productores del agrupamiento. Los conocimientos matemáticos han de funcionar en una comunidad, es para lo que hacemos las matemáticas [I, M].*

- A: Es que no sé, no lo entiendo. ¿Lo tenemos que reorganizar?
- F: Vosotros ya sabéis cuántos palillos tenéis, pero ahora, visualmente, tenéis que poder contarme a mí cómo sabéis que hay ese número de palillos, ¿no?
- A: Ah, pues habría que...

C2-1.2. Hace ver, tras preguntar cuántos palillos tienen las agrupaciones con gomas amarillas, que no es útil que con un mismo color se hagan agrupaciones de 15 o 20 palillos indistintamente, agrupaciones distintas, ya que de ese modo no se puede saber cuántos palillos hay visualmente, incidiendo así en la primera instrucción de la consigna.

- 2M4.1-1.2. *Hace ver a los alumnos que haber hecho agrupamientos distintos, de 15 y de 20, con el mismo color, con el amarillo, puede ser un lío, indicando que en los grupos hechos podría haber 160 [palillos] como máximo, pero que podrían ser menos, y haciendo ver que el objetivo es que visualmente quede claro cuántos palillos hay [E, 3].*
 - 2M4.1-1.2(I)1. *Aunque no es algo que estuviera presente en la consigna, ella pretende que no usen gomas del mismo color para agrupamientos distintos, ya que es la manera más habitual de marcar los distintos agrupamientos para saber de un vistazo el orden de cada uno, así como en nuestro sistema de numeración empleamos la posición, en otros emplean distintos tipos de letras, etc. [I, M].*
 - 2M4.1-1.2(I)2. *Aquí se da una situación en la que los alumnos han resuelto el problema, saber cuántos palillos hay, pero la formadora pretendía que quedara claro visualmente cuántos palillos hay, que es un objetivo más ambiguo y difícil para los alumnos. Esto tiene una transcendencia importante, sobre todo en Teoría*

de Situaciones, porque la situación tiene que sancionarse a sí misma; entonces, mientras que el objetivo de saber cuántos hay es fácilmente sancionable, se puede evaluar, el objetivo de que quede clara la distribución y me ayude a saber cuántos hay está generando problemas de materialización del objetivo [I, M].

- *2P1.1-1.2. Interactúa con los alumnos, incidiendo en las deficiencias que hay en los agrupamientos amarillos que han hecho de 15 y 20 [palillos], haciéndoles ver que no es óptimo emplear el mismo color para distintos agrupamientos [E, 2].*
- *2J4.1-1.2. Explica a los alumnos que no se puede saber cuántos [palillos] tengo al no ser todos los hatillos de 20, haciendo ver que no es un método válido o adecuado, que presenta problemas para generalizar, enfatizando qué quiere de los alumnos, que no sería solo que resuelvan el problema, sino que sepan explicarlo con un argumento matemático [E, 2].*
 - *2J4.1-1.2(I)1. Quiere que se den cuenta de que a lo mejor tienen que rehacer lo que han hecho para llegar a una ordenación [de los palillos] que sea útil para poder representar el número [I, M].*
- *2D2.1-1.2. Describe la estrategia que han usado los alumnos, consistente en hacer grupos de diferentes tamaños [E, 1].*
 - *2D2.1-1.2(I)1. Para que los alumnos traten de detectar las ventajas y los inconvenientes de la estrategia que han seguido [I, M].*
- *2L1.2-1.2. Hace ver a los alumnos que la agrupación que han hecho no es lógica porque no se puede saber [a simple vista] cuántos palillos hay al no tener los paquetes amarillos el mismo número de palillos, haciendo hincapié en que visualmente se tiene que poder saber cuántos palillos hay [E, 3].*
 - *2L1.2-1.2(I)1. Su objetivo es que los paquetes que tengan la goma del mismo color tengan el mismo número de palillos, preferiblemente 10, y que los alumnos vean la importancia de esto para el conteo, para poder contar [I, M].*
 - *2L1.2-1.2(I)2. Es posible también emplear sistemas de numeración en los que no se hagan agrupamientos de 10; a lo mejor lo comenta, pero no es su objetivo [I, M].*
- *2R2.1-1.2. Hace ver a los alumnos que en los grupos que han hecho no se aprecia matemáticamente el concepto de qué número de palillos hay, evitando decirles cómo solucionarlo [E, 1].*

- 2R2.1-1.2(I)1. *En la metodología matemática lo que se pretende es que sean los alumnos quienes a base de manipular alcancen el objetivo propuesto, tratando de razonarlo ellos mismos [I, M].*

¿Y no podemos quitar las gomas y reorganizarlo?

F: Sí, sí, sí, yo no dije que no pudierais quitar las gomas.

A: Aaaaah.

F: ¿Alguien dijo que no se podían quitar?

A: Y nosotros diciendo que no se podían quitar las gomas...

C3-1.2. *Hace ver que en la consigna no se establecía la restricción de que no se pudieran quitar las gomas al juntarse dos grupos de alumnos, es decir, se permitía reorganizar las agrupaciones de palillos.*

- 2M7.1-1.2. *Hace ver que pueden rehacer otra vez los grupos hechos [E, 3].*
 - 2M7.1-1.2(I)1. *Se trata de un ejemplo claro de negociación de la consigna: cuando no se dejan claros los objetivos en la consigna, es necesario negociarla; eso es lo que está ocurriendo ahora, momento en el que la actividad está ya comenzada [I, M].*
- 2D3.1-1.2. *Anima a los alumnos a que vuelvan a hacer el agrupamiento para arreglar el problema detectado [E, 3].*

F: Y una duda más. Alguno de vosotros..., por separado, ¿no?, cuando lo teníais..., habéis escrito la cantidad que teníais, ¿no? Eh, 109 teníais uno...

A: 104 y 85.

F: Por ejemplo, el 85 se escribe con un 8 y un 5. Ese 8 y ese 5, ¿estaban representados de alguna forma en...?

A: No.

F: No, vale. Y vosotros, la misma pregunta con lo vuestro.

A: No.

F: No había un patrón en cómo lo habíais representado, vale, ok.

A: ¿Pero quieres que busquemos?

F: Quiero que reflexionéis sobre eso, pero ahora lo vamos a poner en común, ¿vale?

A: Vale.

C4-1.2. Hace hincapié en la correspondencia entre la escritura del número y los grupos de palillos que habían hecho, planteando si el 8 y el 5 del 85 estaban representados en las agrupaciones, incidiendo así en la segunda instrucción de la consigna.

- 2M8.1-1.2. *Pregunta por la relación del 8 y el 5 con los grupos hechos, lo cual tiene que ver con uno de los objetivos que planteó, indicando que tienen que reflexionar sobre ello [E, 3].*
 - 2M8.1-1.2(I)1. *El agrupamiento de 10, que es en el que se basa el sistema de numeración, no es tan útil cuando materializamos colecciones manipulables, ya que es un agrupamiento relativamente pequeño. El hecho de usar 10 viene de que tenemos 10 dedos, no viene de otra razón. Matemáticamente puede haber razones para usar un número frente a otro en dos sentidos: por un lado, el número de divisores; por otro, el tamaño. En cuanto a los divisores, 10 solo tiene 2 y 5, no es un gran número. El 12 nos habría dado un sistema de numeración mucho más cómodo, los tercios y los cuartos serían números con parte fraccionaria finita. Con el 10, solo nos queda 2 y 5; un número tan sencillo como la tercera parte de una unidad nos genera un número que no es finito. Por otro lado, desde un punto de vista manipulable, el 10 es pequeño. De hecho, esto se ve mucho en las unidades de las magnitudes, que también van de 10 en 10, pero en el uso social no se hace de 10 en 10: usamos el metro y el centímetro, pero el decímetro desaparece porque, aunque por regularidad nos interesa, a la hora de manipular es un grupo demasiado pequeño; lo mismo ocurre con los metros y los gramos, no usamos los cambios decimales. Entonces, si usáramos grupos más grandes, el sistema de numeración requeriría de más símbolos; con el 10, tenemos símbolos distintos hasta el 10. Cuando el agrupamiento se hace muy pequeño, el sistema se automatiza mejor, la base binaria es la más automática, no habría que saberse tablas, pero, claro, se hacen números muy grandes y los algoritmos de cálculo serían odiosos; imagínate que tuviéramos que sabernos el repertorio de las tablas hasta el 20 si usáramos base 20, sería horroroso, tendría una gran cantidad de resultados que habría que memorizar. Entonces, usamos el 10, que además coincide con los dedos. Pero es verdad que, cuando se trata de colecciones manipulables, el 10 es muy pequeño, da la sensación de que no merece la pena usarlo. Yo creo que aquí hay una confrontación con el interés matemático de*

respetar el 10, porque así escribo los números, y por otro lado la comodidad o economía en la manipulación que hace que de 10 en 10 los grupos sean grupos demasiado pequeños. Se está intentando hacer converger los dos intereses y surge esta situación [I, M].

- *2M8.1-1.2(I)2. Aunque los alumnos son adultos, el objetivo de «reflexionar» es bastante difuso, es difícil saber si se ha alcanzado o no, pero imagino que ella dirigirá la reflexión o dará unas pautas para hacerla [I, M].*
- *2J5.1-1.2. Pregunta a los alumnos si los hatillos que han hecho tienen relación con la escritura, con cómo escribimos el 85, pidiendo que reflexionen sobre ello, lo cual se corresponde con el segundo punto de la actividad [E, 3].*
 - *2J5.1-1.2(I)1. Quiere que los alumnos lleguen al objetivo de la actividad, a la representación del número, a que el número de hatillos represente la posición [I, M].*
- *2D3.2-1.2. Pregunta a los alumnos si han encontrado alguna conexión entre las agrupaciones que han hecho y la representación del número de forma simbólica en base 10, en la notación posicional usual [E, 3].*
- *2L2.1-1.2. Pregunta si el 8 y el 5 del 85 lo han utilizado para algo en los paquetes [E, 2].*
 - *2L2.1-1.2(I)1. Da una pista a los alumnos para que lleguen a agrupar de 10 en 10 sin que ella se lo llegue a decir, ya que está viendo que los alumnos no se enteran de lo que tienen que hacer únicamente con la primera instrucción [I, M].*
- *2P2.1-1.2. Hace ver a los alumnos que no hay relación entre la escritura del número y los agrupamientos que han hecho, relacionando el sistema de numeración empleado por los alumnos con el sistema de numeración decimal [E, 3].*

F: ¿Ha sido operativo el que ellos hayan hecho 15, 10, 5... y vosotras tuvieras 20...?
¿Eso ha ayudado a la hora de ponerlo en común?

A: No, porque ahora hay que hacerlo otra vez.

F: Ahora hay que volverlo a hacer...

C5-1.2. Pregunta a los alumnos si ha ayudado que cada grupo hiciera agrupaciones distintas a la hora de ponerlas en común, incidiendo así en la tercera instrucción de la consigna.

- *2J7.1-1.2. Pregunta si la estrategia que han utilizado para resolver el problema ha sido útil [E, 1].*

- 2D4.1-1.2. *Pregunta si ha sido operativo que hicieran grupos de diferentes tamaños: grupos de 10, 15, 20..., indicando que hay que volver a hacerlo para que funcione mejor [E, 2].*
- 2M9.1-1.2. *Pregunta si ha ayudado la escritura que han hecho [E, 2].*
 - 2M9.1-1.2(I)1. *Porque va buscando la escritura del sistema de numeración, empleando las unidades correspondientes de cada orden, que es como se escriben los números [I, M].*
- 2L3.1-1.2. *Plantea una pregunta [E, 1].*
 - 2L3.1-1.2(I)1. *Con la pregunta pretende que hagan los paquetes con el mismo número de palillos para tener un conteo más rápido, lo que tendrá que ver con el sistema numérico decimal [I, M].*

Fragmento 3

[F = Formadora del vídeo]. [A = Alumnos].

F: Me tenéis que decir cuántos palillos había en cada grupo inicialmente, antes de juntaros dos grupos, ¿vale? Entonces, por ejemplo, vosotros.

A: 87.

F: 87 [lo escribe en la pizarra].

C1-1.3. Pregunta a un grupo de alumnos cuántos palillos tenía antes de juntarse con otro grupo, y escribe en la pizarra que son 87, incidiendo así en la primera instrucción de la consigna.

- 2D1.1-1.3. Pregunta al primer grupo cuántos palillos tenían, anotando que son 87 [E, 3].
- 2M1.1-1.3. Escribe el número 87 [E, 2].

Estamos de acuerdo, yo utilizo la escritura estándar que vosotros habéis visto en primaria, secundaria, bachillerato y al llegar aquí, ¿vale? Escritura estándar de nuestro sistema de numeración en nuestro contexto.

C2-1.3. Dice que emplea la escritura estándar de nuestro sistema de numeración en nuestro contexto.

- 2M1.2-1.3. Explica que escribe el número en nuestro sistema de numeración [E, 3].
 - 2M1.2-1.3(I)1. Pretende que los alumnos reflexionen sobre el sistema de numeración a través de los palillos [I, M].
- 2D1.2-1.3. Indica que emplea la notación posicional usual para escribir el 87 [E, 3].

Ese grupo, 87. ¿Cómo habíais hecho los grupos?

A: Pues hemos hecho, eh..., tres grupos de 20.

F: Tres grupos de 20, ¿cómo lo puedo poner? [Escribe un 3 en la pizarra].

C3-1.3. Pregunta cómo puede escribir en la pizarra 3 grupos de 20, que es la agrupación que había hecho un grupo de alumnos.

- 2D1.3-1.3. Pregunta a los alumnos cómo escribir los 3 grupos de 20 [E, 3].
 - 2D1.3-1.3(I)1. Pretende que los alumnos piensen cómo representarlo desde el punto de vista matemático, empleando símbolos matemáticos para representar 3 grupos de 20 [I, M].

- A: Eh..., tres rosas.
- A: 3 x 20.
- F: ¿Tres rosas?
- A: Sí.
- A: No.
- F: Si pongo tres rosas... ¿Todo el mundo que ha utilizado gomitas rosas ha atado 20?
- A: No.
- F: ¿Otras personas que han atado 20 han usado otro color?
- A: Sí.
- F: Uf, el color no me vale.

C4-1.3. Indica que el color de las gomas no sirve para representar agrupaciones, tras preguntar a los alumnos si todos habían usado gomas rosas para los grupos de 20, haciendo ver que no todos los alumnos han empleado el mismo color para la misma agrupación.

- 2P1.1-1.3. Hace ver que la utilización de la goma rosa, de un símbolo, tiene que significar lo mismo para todos los grupos, poniendo de manifiesto que los distintos grupos la han empleado con distintos criterios [E, 2].
- 2M2.1-1.3. Hace ver que no pueden usar el color, ya que tiene que ser común a cualquier grupo [E, 3].
 - 2M2.1-1.3(I)1. Dentro del grupo se puede usar el color, pero en cuanto se trata de una escritura general, común, pues el color tiene que ser común a cualquier unidad, a cualquier grupo. Obviamente, estas cosas son arbitrarias, pero tienen que estar convenidas [I, M].

¿Cómo lo pongo?

- A: 20 x 3.
- A: 3 x 20.
- F: 3 grupos de 20, ¿no? 3 x 20. [Escribe 3 x 20]. Y luego...
- A: Pon en el 3 «color rosa» o algo así. Entre paréntesis.
- F: Vale, vale. [Pinta una raya rosa sobre el 20].

Evento (2)1-1.3. Pinta una raya rosa sobre el número 20 a petición de un alumno.

- 2M2.2-1.3. Pone [una raya] rosa sobre el 3 x 20 [E, M].

Y luego... Esto son 60.

A: 9×3 .

F: Y luego 9 grupos de 3, ¿no? [Escribe + 9]. ¿O 3 grupos de 9? [Borra el 9].

C5-1.3. Pregunta si escribe 9 grupos de 3 o 3 grupos de 9.

No ha sido detectado por ningún formador.

A: 3×9 .

F: 3 grupos de 9 y el 9 lo habéis puesto de otro color, ¿vale? [Escribe 3×9].

A: Sí.

C6-1.3. Escribe en la pizarra la descomposición que han hecho los alumnos del número 87, empleando grupos de 20 y de 9.

- 2L1.1-1.3. Escribe de forma intencionada $3 \times 20 + 3 \times 9$, haciendo una extrapolación de los paquetes [de palillos] a la escritura del número [E, 3].
- 2P2.1-1.3. Está viendo la descomposición que ha hecho un grupo de un número, empleando grupos de 20 y grupos de 9 [E, 3].
 - 2P2.1-1.3(I)1. La descomposición realizada no tiene que ver con la escritura del número, con el numeral [I, M].
- 2J1.1-1.3. Aborda la estrategia de un grupo para representar un número [E, 1].
 - 2J1.1-1.3(I)1. Pretende llegar a ver la relación entre los grupos y los números, a ver la representación decimal posicional de los números [I, M].
- 2R1.1-1.3. Está viendo los agrupamientos hechos por un grupo [E, 2].

F: ¿Alguien más ha utilizado grupos de 20?

A: Nosotros.

F: Varios. ¿Alguien más ha utilizado grupos de 9? [Destaca con la voz el número 9].

A: Nosotras.

F: Vosotras, vale, y vosotras también, vale.

Evento (2)2-1.3. Pregunta a los alumnos quiénes han empleado grupos de 20 o grupos de 9.

- 2D2.1-1.3. Pregunta a los alumnos por los tamaños que han empleado para hacer grupos, concretamente por los grupos de 20 y los de 9, sin preguntar si alguien ha empleado grupos de 10 [E, M].

Siguiente equipo, vosotras.

A: Nosotras, 90.

F: En total, 90. [Escribe 90 en la pizarra].

A: 4 de 20 y 1 de 10.

F: [Escribe $4 \times 20 + 1 \times 10$].

C7-1.3. Escribe en la pizarra la descomposición que han hecho los alumnos del número 90, empleando grupos de 20 y de 10.

- 2P2.2-1.3. Está viendo la descomposición que ha hecho otro grupo de un número, empleando grupos de 20 y grupos de 10 [E, 3].
 - 2P2.2-1.3(I)1. La descomposición realizada no tiene que ver con la escritura del número, con el numeral [I, M].
- 2J2.1-1.3. Representa los grupos [de palillos] que ha hecho otro grupo de alumnos, plasmando así una forma de representar el número alcanzado [E, 2].
 - 2J2.1-1.3(I)1. Pretende afianzar una manera de expresar lo que habían alcanzado [los agrupamientos], incidiendo en contenido que supongo que habrían trabajado antes, aunque puede que los alumnos no la tuvieran en mente [I, M].
- 2D3.1-1.3. Anota la representación del 90 con los grupos que han utilizado los alumnos: 4 grupos de 20 y 1 grupo de 10 [E, 3].
- 2R1.2-1.3. Está viendo los agrupamientos hechos por otro grupo [E, 2].
 - 2R1.2-1.3(I)1. Pretende que los alumnos se den cuenta de que en el aula [de matemáticas de primaria] se van a encontrar con diferentes maneras de agrupar [I, M].

Vale, o sea que de momento han utilizado grupos de 20, grupos de 10, grupos de 9, ¿vale?



En esta escritura [señala lo que ha escrito en la pizarra] yo veo 3 grupos de 20, 3 grupos de 9, pero aquí [señala el 87] no veo un 3 y un 3. Yo aquí veo 4 grupos de 20, 1 grupo de 10, pero aquí [señala el 90] no veo 4, 1. Con lo cual, parece que tampoco habíais encontrado vosotros un patrón entre cómo escribo la cantidad total con símbolos numéricos y visualmente qué veo en los palillos, ¿vale? De momento, la transcripción de lo que veo en los palillos simbólico-numéricamente la tengo aquí a la derecha [señala el $3 \times 20 + 3 \times 9$ y el $4 \times 20 + 1 \times 10$], pero no veo ninguna relación con esto [señala el 87 y el 90].

C8-1.3. Hace ver a los alumnos que no han encontrado una correspondencia entre cómo se escribe la cantidad total con símbolos numéricos y los grupos de palillos hechos, incidiendo así en la segunda instrucción de la consigna.

- 2D3.2-1.3. Incide en la idea de que no hay una conexión entre la notación usual en base 10 y los grupos que han hecho [E, 3].
- 2J3.1-1.3. Hace ver que no hay una conexión entre los grupos hechos y los números 87 y 90, que la agrupación de 20, por ejemplo, no se ve en el 8 ni en el 7 del 87 [E, 3].
 - 2J3.1-1.3(I)1. Pretende que los alumnos vean que expresamos los números en base 10, en grupos de 10, y que ellos han agrupado en otro sistema [I, M].
- 2L2.1-1.3. Hace ver a los alumnos que la escritura del número no se adecuaba a los paquetes que han hecho con los palillos [E, 3].

- 2L2.1-1.3(I)1. *Pretende que los alumnos se den cuenta de que habría sido mejor hacer 8 paquetes de 10, 9 paquetes de 10..., es decir, emplear el sistema numérico decimal, un sistema universal, para que todos hubiesen podido contar [I, M].*
- 2M4.1-1.3. *Pone de manifiesto un problema sobre la escritura [del número] [E, 1].*
- 2P3.1-1.3. *Hace ver a los alumnos que no hay relación entre los grupos que han formado [de palillos] y la escritura del número [E, 3].*

Yo aquí estoy haciendo trampa porque estoy metiendo operaciones, nosotros ahora no estamos con las operaciones, estamos solo con el número, con la escritura del número, eso es lo que estamos trabajando, ¿no? Pero para ayudar a ver esa conexión de los palillos hacia lo simbólico-numérico, pongo, escribo eso de transición para ir copiando lo que me decís, ¿no?, porque tardo más, tardo más en dibujar los palillos, las gomitas rosas, no sé qué, podría sacar la foto de la cámara y ponerlo rápido, ¿no?, pero..., bueno, lo escribo, lo transcribo así.

C9-1.3. Indica que emplea operaciones para conectar lo manipulativo y lo simbólico-numérico.

- 2D4.1-1.3. *Aclara el significado de las expresiones que ha puesto, como 2 aspa 20 más 3 aspa 9, haciendo ver que es una representación abstracta de lo que son 3 grupos de 20 palillos y 3 grupos de 9 palillos, una forma de transcribir los que han hecho los alumnos con los materiales [E, 3].*
- 2M5.1-1.3. *Explica que está traduciendo lo que los alumnos están diciendo, escribiéndolo en el registro de representación simbólico-numérico y haciendo ver que podría emplear otros registros: emplear una foto, por ejemplo [E, 2].*
 - 2M5.1-1.3(I)1. *Se trata de una reflexión sobre la traducción que está haciendo basada en los registros de representación de Duval; si tuviera que expresar lo que están diciendo los alumnos tal y como lo han hecho, tendría que decir «3 rosas», etc., en vez de escribirlo simbólico-numéricamente [I, M].*
- 2J4.1-1.3. *Explica las matemáticas que hay detrás de la conexión [entre lo manipulativo y lo simbólico-numérico] [E, 1].*

Ahora, otro grupo. Vosotros dos ya estáis, que luego, luego... Ah, venga, ya que estamos aquí [dibuja una llave a la derecha de lo que ya ha escrito en la pizarra]. ¿A qué consenso... habéis llegado...?

C10-1.3. Pregunta por el consenso al que han llegado los dos grupos que han puesto en común sus agrupaciones al juntar sus palillos, incidiendo así en la tercera instrucción de la consigna.

No ha sido detectado por ningún formador.

A: Pues 7 grupos de 20...

F: Muy bien, 7 grupos de 20 [señala el 3 y el 4]. Han visto rápido y han dicho: «bien, los dos hemos agrupado, sin habernos copiado, en grupos de 20, con lo cual automáticamente tenemos 7 grupos de 20» [escribe 7×20].

C11-1.3. Explica que los 7 grupos de 20 que han hecho los alumnos provienen de la suma de los 4 grupos que tenían unos y de los 3 que tenían otros, empleando la propiedad distributiva.

- 2J5.1-1.3. Está viendo qué estrategia han utilizado para sumar [E, 1].
- 2D5.1-1.3. Analiza la escritura hecha con grupos de 20, haciendo ver que los grupos de 20 se suman bien al sumar las dos cantidades que tienen [E, 2].

A: Luego, ellos los 27 de 3×9 ...

F: Sí.

A: ... los han dividido en 2 de 10 para que se junten con los nuestros de 10.

F: ¿Y por qué no habéis hecho vosotros... separar este de 10 [señala el 10 de 1×10] en 1 de 9 y 1 de 1?

A: Porque se quedaría 1 solo y luego...

F: Bueno, pobrecillo, ¿no? No pasa nada.

A: Y porque es más fácil sumar de 10 en 10 que de 9 en 9.

A: Para ponerle la goma a 1...

F: Para ponerle la goma a 1... Bueno... Eso... Puede ser una justificación, pero tampoco muy potente... Me gusta más lo que ha dicho ella, o ella...

C12-1.3. Pregunta por qué no han separado un grupo de 10 en uno de 9 y uno de 1, a raíz de la estrategia seguida por los alumnos, y considera las diferentes respuestas que dan los estudiantes.

- 2M6.1-1.3. Pregunta a los alumnos por qué se han adaptado a los grupos de 10 y no a los de 9 [E, 3].

- 2J6.1-1.3. *Pregunta por qué no han empleado otra estrategia que propone ella, haciendo ver que no hay problema cuando están sueltos [los palillos] y mostrando preferencia por la estrategia dada por una alumna, que se basa en que es más sencillo si todo está con el 10 [E, 1].*
- 2R2.1-1.3. *Interactúa con los alumnos a través de preguntas, provocando que razonen [E, 1].*

A: Que es más fácil sumar de 10 en 10 que de 9 en 9.

F: ¿Por qué será más fácil sumar de 10 en 10 que de 9 en 9 para nosotros? [Hablan varios alumnos a la vez]. ¿Por qué es más fácil sumar para nosotros de 10 en 10 y no de 9 en 9? [Hablan varios alumnos a la vez]. Porque tenemos 10 dedos, por ejemplo, ¿no? Porque estamos más acostumbrados a 10, 20, 30, 40... [mueve las manos con los dedos estirados], ¿no?, como que nuestro sistema de numeración parece que...

C13-1.3. Pregunta por qué es más fácil sumar de 10 en 10 que de 9 en 9, haciendo ver que tiene relación con el sistema de numeración al que estamos acostumbrados.

- 2J7.1-1.3. *Plantea una pregunta en dos ocasiones, haciendo referencia al sistema decimal [E, 2].*
 - 2J7.1-1.3(I)1. *Se trata de una pregunta clave porque trata de guiar a los alumnos hacia el sistema decimal, a los grupos de 10, a que vean la posición de los números y cómo sumamos [I, M].*
- 2L3.1-1.3. *Pregunta por qué es mejor hacer paquetes de 10 que paquetes de 9 [E, 2].*
 - 2L3.1-1.3(I)1. *Pretende que aparezca en los alumnos la necesidad de agrupar de 10 en 10 [I, M].*
- 2D5.2-1.3. *Pregunta a los alumnos por qué es más sencillo sumar grupos de 10 que grupos de 9, haciendo ver que los grupos de 10 coinciden con la estructura de nuestro sistema posicional [E, 3].*
 - 2D5.2-1.3(I)1. *Pretende que los alumnos vean cuáles son las ventajas de estructurar o de organizar los palillos en grupos de 10 [I, M].*
- 2M8.1-1.3. *Pregunta por qué se suma mejor de 10 en 10, haciendo ver que nos manejamos mejor con 10, 20, 30..., que tiene que ver con la base decimal [E, 3].*

- 2M8.1-1.3(I)1. Pretende hacer ver a los alumnos, a través de un ejercicio de mayéutica, de un proceso de pregunta-respuesta, la ventaja de emplear la base decimal [I, M].
- 2P4.1-1.3. Pregunta por qué es más fácil sumar de 10 en 10, haciendo ver que es a lo que estamos acostumbrados por el sistema de numeración que usamos, el sistema de numeración decimal [E, 3].
 - 2P4.1-1.3(I)1. Intenta hacer ver que sería más sencillo contar los palillos de un vistazo, como se planteaba inicialmente, si los agrupamientos se basaran en el sistema de numeración decimal [I, M].

A: Porque en verdad solo sumas de 1 en 1 y luego le pones un 0, entonces...

F: Solo sumas de 1 en 1, elabora eso. Estamos en clase de matemáticas, ¿qué es 1, 1...?

A: Pues por ejemplo, si tienes 30, pues 1 más 1 más 1, 3, como es 10, pues le pones el 0 y ya tienes los 30.

F: ¿3 qué?

C14-1.3. Pregunta a una alumna qué quiere decir con «sumar de 1 en 1», pidiendo que elabore la respuesta porque están en clase de matemáticas.

- 2J8.1-1.3. Pide a una alumna que explique el porqué de su idea [E, 1].

A: 3 grupos de 10.

F: 3 grupos de 10, muy bien. 3 grupos de 10, vale. [Vuelve a la pizarra a terminar lo que empezó a escribir].

A: 3 de 20, 3 de 10 y 1 de 7.

F: [Escribe, después de 7×20 , 3×10]. 3 de 10, llegasteis a romper estos [señala 3×9] en 2 de 10 más 7 sueltos, ¿no? [escribe $2 \times 10 + 7$ encima de 3×9]. Y entonces estos dos [señala 2×10] con este [señala 1×10] 3 y 7 palillos ahí sueltos [escribe, después de $7 \times 20 + 3 \times 10$, 7×1], ¿vale?

C15-1.3. Transforma los grupos planteados por los alumnos para llegar a tener 3 grupos de 10, es decir, llega a 3×10 a partir de 1×10 y de transformar 3×9 en $2 \times 10 + 7$.

- 2D6.1-1.3. Conecta la estructura de grupos de palillos que tenían los alumnos con la notación en base 10, dando lugar a los grupos de 10 y a las unidades que aparecen [E, 3].

Ahora, la cantidad total, ¿cuánto es? [señala el 87 y el 90].

A: 177.

F: 1, 7, 7 [escribe 177 a la izquierda del 87 y del 90]. ¿Hay aquí 1, 7, 7 por algún lado? [señala el 7 de 7×20 , al 3 de 3×10 y al 7 de 7×1]. Este [señala el 7 de 7×1] parece que hay aquí, ¿no? Pero lo otro... no me cuadra mucho todavía... Vale, otros dos grupos.

C16-1.3. Hace ver que no hay relación entre los grupos hechos y la escritura del número tras haber juntado todos los palillos de la clase, incidiendo así en la segunda y en la cuarta instrucción de la consigna.

- 2D6.2-1.3. Hace ver que los grupos que han hecho no coinciden con la notación posicional [E, 3].
 - 2D6.2-1.3(I)1. Para que los alumnos traten de arreglar el problema y lleguen a hacer grupos de 10 o potencias de 10 [I, M].
- 2M9.1(i)-1.3. Evento implícito en el comentario [E, 1].

Transcripción del vídeo: 1, 7, 7 [escribe 177 a la izquierda del 87 y del 90]. ¿Hay aquí 1, 7, 7 por algún lado? [señala al 7 de 7×20 , al 3 de 3×10 y al 7 de 7×1]. Este [señala al 7 de 7×1] parece que hay aquí, ¿no? Pero lo otro... no me cuadra mucho todavía... Vale, otros dos grupos.

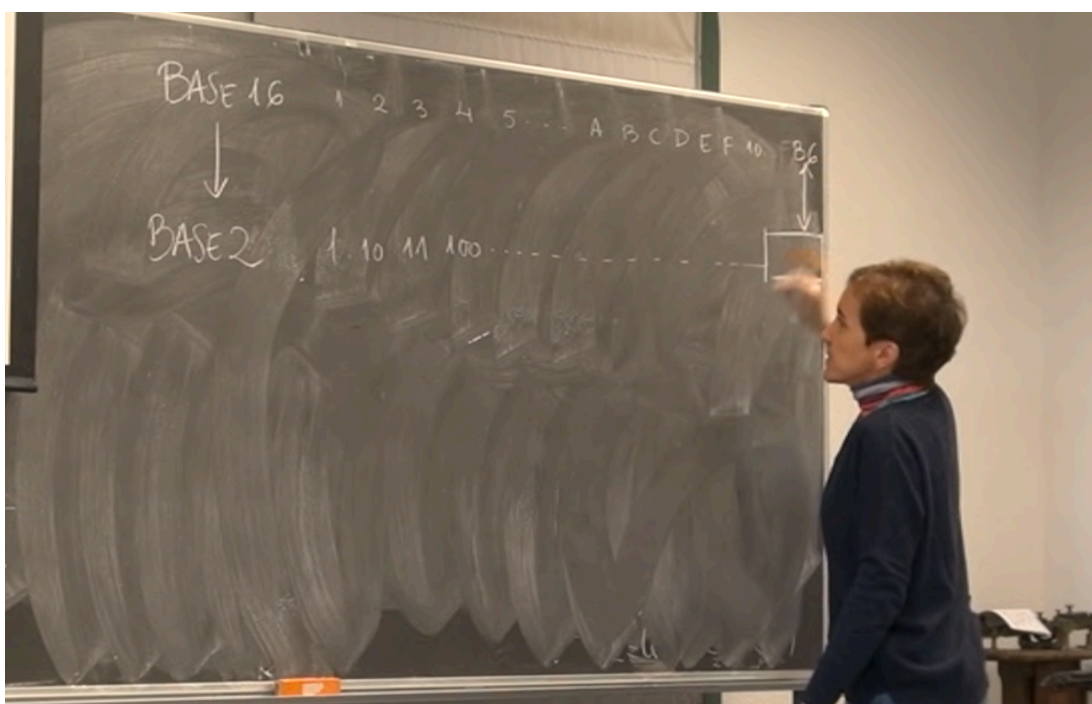
- 2M9.1(i)-1.3(I)1. Al final, la idea de agrupamiento ha prevalecido sobre la idea de sistematización que buscaba la formadora, lo cual tiene que ver con que los grupos hayan tenido que coordinarse para sumar agrupamientos distintos [I, M].
- 2L4.1-1.3. Hace ver al grupo-clase que la escritura del número tendría que tener relación con los grupos de palillos [E, 3].
 - 2L4.1-1.3(I)1. Busca que surja en los alumnos la idea de que el sistema numérico decimal es el sistema universal porque es el más cómodo [I, M].
- 2J9.1-1.3. Hace ver que los números que aparecen en la descomposición deberían ser los de la escritura, incidiendo en la [ausencia de] conexión [E, 3].



VÍDEO 2

[F = Formadora del vídeo]. [A = Alumnos].

F: Como me piden pasar de base 16 a base 2 directamente [escribe en la pizarra], pues Martín dice: «yo escribo aquí la secuencia 1, 2, 3, 4, 5..., A, B, C, D [dice 10, 11, 12, 13, señalando A, B, C, D], 14, 15 [escribiendo E, F], uno, cero [10]..., así hasta el B6», ¿vale? Y luego aquí en paralelo, voy uno [1], uno, cero [10], uno, uno [11], uno, cero, cero [100]..., hasta que pille aquí el que sea y ya está.



No he pasado por base 10, que es lo que me dice Nuria. Con lo cual, superado.

C1-2. Plantea el ejercicio a realizar: pasar de base 16 a base 2 directamente, sin pasar por base 10.

- 2P1.1-2. Plantea un problema que consiste en pasar de base 16 a base 2 [E, 2].
- 2D1.1-2. Enuncia el problema a realizar, que consiste en pasar un numero de base 16 a base 2 de forma directa, es decir, con la restricción de no pasar por base 10 [E, 3].
- 2M1.1-2. Plantea que hay que pasar de base 16 a base 2 sin pasar por base 10 [E, 3].
- 2J1.1-2. Plantea un problema matemático que consiste en pasar de base 16 a base 2 sin pasar por base 10 [E, 3].
- 2R1.1-2. Está trabajando el cambio al sistema binario, la escritura de uno a otro [de una base a otra] [E, 1].

- 2L1.1-2. Trata de que los alumnos encuentren una estrategia para pasar de base 16 a base 2 [E, 2].

C2-2. Escribe en la pizarra la resolución propuesta por un alumno, que consiste en contar en base 16 hasta B6 y contar en base 2 y ver qué número corresponde en base 2 a B6 en base 16.

- 2D1.2-2. Presenta una primera estrategia de resolución, que consiste en escribir todos los números en base 16 hasta el B6 y hacer lo mismo en base 2, en binario, obteniendo el número en base 2 cuando llegamos al B6 [E, 3].
- 2M1.2-2. Está reproduciendo la estrategia de un alumno, que consiste en contar en base 16 y contar en base 2, llegando al resultado escrito en las dos bases cuando se cuenta la misma cantidad [E, 3].
 - 2M1.2-2(I)1. Se trata de una estrategia que no es eficaz porque es muy lenta: no se hace una traducción, sino que se cuenta de una manera y de otra [I, M].
- 2J1.2-2. Plantea una estrategia de resolución propuesta por un alumno que consiste en colocar los números en base 16 hasta llegar al B6 y en base 2 y hacer una correspondencia uno a uno para ver cuál sería el resultado [E, 3].
 - 2J1.2-2(I)1. Puede que no sea la resolución más directa [I, M].
- 2P2.1-2. Plantea una posible resolución del problema [E, 1].
- 2L1.2-2. Explica un mecanismo [para resolver el ejercicio] [E, 1].

¿Pero qué pasó?

A: Que es muy largo.

F: Que es muy largo. Y que hasta en su casa, teniendo semanas, ha dicho: «paso». Tenías tiempo suficiente, porque había tiempo suficiente en dos semanas a hacerlo, pero... es largo y además un coñazo, con lo cual ha dicho: «paso». Con la idea Nuria ya se hace una idea de que lo he pensado, es un procedimiento válido, pero no ha sido eficaz, ¿vale?, entonces nosotros tenemos que seguir pensando porque tendremos que buscar alguna estrategia que sea eficaz.

C3-2. Hace ver que la primera estrategia de resolución propuesta por un alumno es válida, pero también que es larga y que no es «eficaz», por lo que hay que buscar otra estrategia.

- 2P2.2-2. Hace ver a los alumnos que esa solución no es óptima [E, 2].

- 2J2.1-2. Indica que la estrategia propuesta para pasar de base 16 a base 2 es muy larga, muy tediosa [E, 2].
 - 2J2.1-2(I)1. Pretende que piensen una estrategia que ahorre todo esto [I, M].
- 2D2.1-2. Hace ver que el procedimiento empleado funciona, pero que es muy largo, por lo que hay que buscar un algoritmo que sea eficaz [E, 3].
- 2M2.1-2. Pone de manifiesto la poca eficacia del sistema, de la estrategia planteada [E, 2].
- 2L1.3-2. Hace ver que el mecanismo planteado funciona, pero que es largo y tedioso, por lo que hay que buscar una estrategia que sea óptima [E, 3].

[Da la palabra a una alumna].

A: ¿Se podría hacer la división?

F: ¿Qué división?

A: La de B6 entre 2. Es que no sé cómo plantearlo.

F: Ella dice: «oye, mira Nuria, cuando tú pasas de base 10 a base 2 haces grupos de 2 y divides de 2 en 2; pues ahora lo mismo, si estoy en B6 a base 2, divide entre 2». Pero aquí estoy escribiendo en base 16... [En la pizarra ha escrito B6 entre 2, con la caja]. Podríamos intentar hacerlo, pero... ¿sabemos hacerlo... o cómo va esto? ¿O mentalmente para hacerlo me vais a pasar a base 10, y hacéis la división en base 10 —que es lo que sabéis hacer—, y luego otra vez volvemos y entonces hacemos trampa porque pasamos por base 10? Si sabéis dividir un número en base 16 entre 2, si sabéis hacer esta división en base 16 —yo lo tendría que pensar, ¿eh?, así a capón no lo sé hacer, pero si lo pienso... —, si sabéis hacer eso, valdría.



- 2M4.1-2. *Analiza una nueva estrategia, consistente en dividir entre la nueva base, en base 16, tal y como se hace al pasar de base 10 a otra base [E, 3].*
 - 2M4.1-2(I)1. *Se trata de una estrategia que seguramente no hayan podido llevar a cabo los alumnos [I, M].*
 - 2M4.1-2(I)2. *Pretende que los alumnos reflexionen sobre la relevancia del sistema de numeración en cualquier técnica de cálculo [I, M].*
 - 2M4.1-2(I)3. *Con el hecho de que haya cogido base 16, que es 2^4 , quiere profundizar en la idea de base al cambiar el agrupamiento, lo cual no sería abordable si hubiera cogido una base que no tuviera nada que ver con 2 [I, M].*
- 2P4.1-2. *Plantea otra posible solución, propuesta por una alumna, que consiste en dividir el número en base 16 entre 2 [E, 3].*

C5-2. Hace ver que la segunda estrategia de resolución propuesta por una alumna es válida, pero también que es compleja.

- 2J3.2-2. *Indica que se podría hacer la división con distintas bases, pero haciendo ver también la dificultad que supone que los números no estén en la misma base, que ellos saben hacer la división con el algoritmo tradicional de la cajita en base 10, pero que aquí se plantea una división con distintas bases [E, 3].*
- 2D3.2-2. *Incide en la dificultad de la división en base 16 en este momento del desarrollo de la asignatura [E, 2].*
- 2M4.2-2. *Hace ver que en este caso hace falta saber dividir en base 16, lo cual no es sencillo, y que los algoritmos se basan en el sistema de numeración, por lo que cambian si cambia el sistema de numeración [E, 2].*
- 2P4.2-2. *Indica que la propuesta de la alumna podría ser válida, pero que no es nada fácil al tener que dividir en base 16 y no en base 10, que es lo que los alumnos saben hacer [E, 3].*

Otra forma.

A: Fijándote en que 16 es 2^4 .

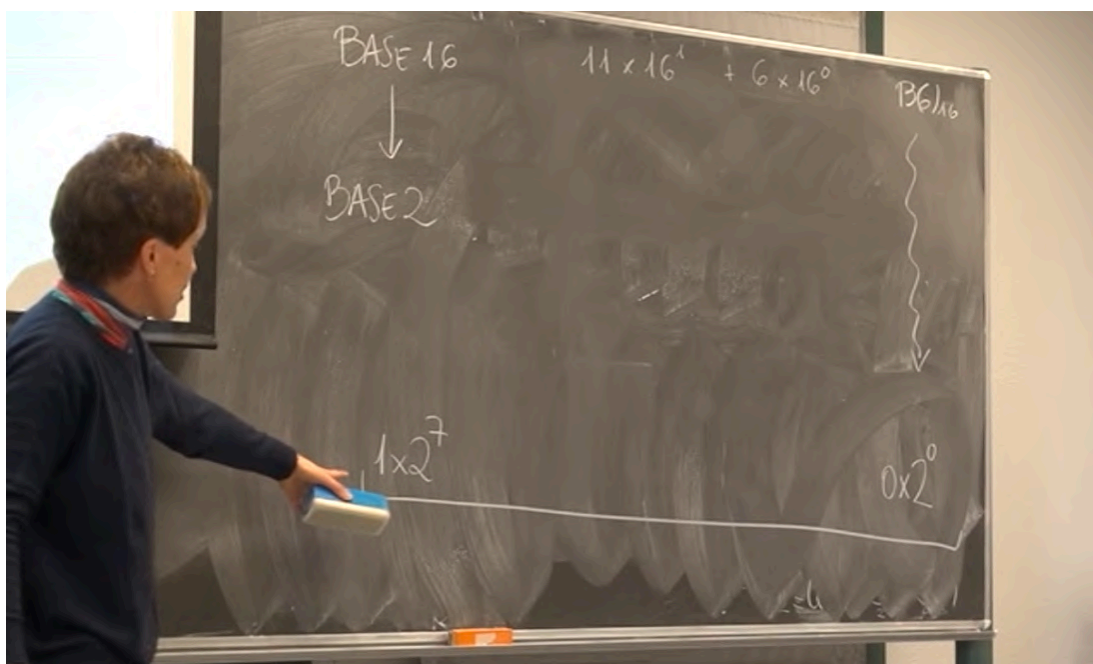
F: Fijándome en que 16 es 2^4 . Me lo voy a apuntar aquí [borra la pizarra y lo escribe].

A: Yo lo hice así, pero luego algo no me cuadraba.

F: Muy bien, vale.

A: Luego hice, 11...

- F: Venga, vamos a poner el punto de partida, ¿no? El punto de partida es que tenemos 11×16^1 , ¿no?, más 6×16^0 . Este es mi B6 en base 16. Y yo quiero llegar aquí a... Me acuerdo de que empezaba en 1×2^7 y a acababa en 0×2^0 , ¿vale?



Entonces yo quiero pasar de ahí [señala la parte superior de la pizarra] a aquí [señala la parte inferior]. Si lo consigo, ya lo tengo en base 2, ¿no? Ya solo cojo los coeficientes de las potencias de 2 y ya lo tengo.

C6-2. *Plantea en la pizarra otra resolución propuesta por otro alumno, que consiste en pasar de base 16 a base 2 fijándose en que 16 es 2^4 , escribiendo la expresión de partida, que sería la expresión polinomial de B6 en base 16, así como el inicio y el final de la expresión polinomial en base 2 a la que hay que llegar.*

- 2J8.1-2. *Apunta en la pizarra otra idea propuesta por otro alumno, que se basa en el 2^4 , planteando la descomposición del número [del que se parte] y la forma del número que se quiere encontrar, haciendo ver que va a desarrollar a partir de esa descomposición para pasar el número a grupos de 2 [E, 3].*
 - 2J8.1-2(I)1. *Quiere seguir desarrollando las ideas de los alumnos poco a poco para ir conociendo más sobre el problema; ver distintas maneras de abordarlo es bastante enriquecedor a la hora de aprender a resolver problemas de distintas formar y ver cuáles van a funcionar y cuáles se pueden generalizar [I, M].*
- 2P6.1-2. *Descompone el número B6 en la base 16 [E, 1].*

- 2P6.1-2(I)1. Para poder hacer las manipulaciones necesarias para transformar el número a base 2 [I, M].
- 2D6.1-2. Explora otra alternativa dada por un alumno para resolver el ejercicio, que consiste en atender a la conexión entre la base 2 y la base 16 que es que 16 es 2^4 , expresando en la pizarra el número en base 16 como grupos de 16 y potencias de 16 e indicando la potencia más grande que va a aparecer en base 2 y la menor [E, 3].
 - 2D6.1-2(I)1. Con la información que presenta en la pizarra, podemos saber que el número es par [I, M].
- 2L3.1-2. Emplea la propuesta de un alumno, que anotó en la pizarra y que se basa en que 16 se puede poner como 2^4 , para escribir B6 en base 16 como base 2, es decir, como productos de coeficientes por potencias de 2 [E, 3].
 - 2L3.1-2(I)1. Los coeficientes solo pueden ser unos y ceros [I, M].
- 2M5.2-2. Plantea el proceso de transformación de base 16 a base 2 con escrituras polinómicas [E, 2].

Entonces, Pablo dice: «cambia este 16», ¿no, Pablo?

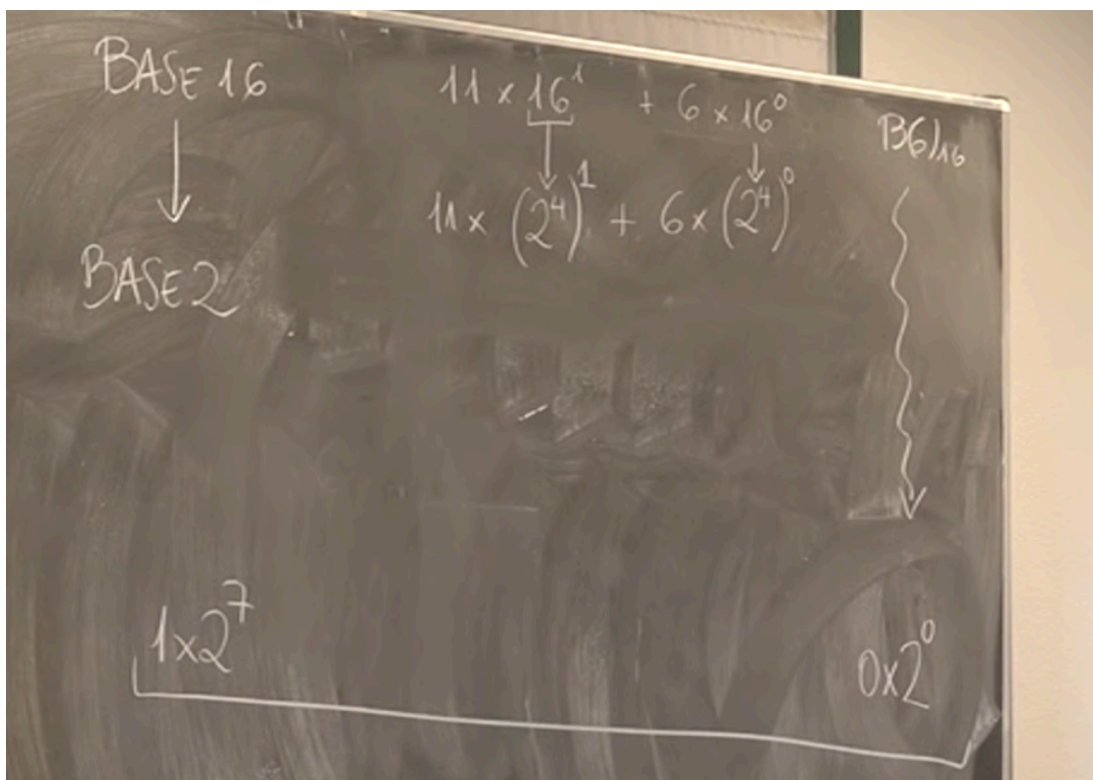
A: Sí.

F: Este 16 ponlo como $(2^4)^1$ y este 16 ponlo como $(2^4)^0$. ¿Vale? Yo tengo una expresión polinomial en base 16, quiero llegar a una expresión polinomial en base 2, y él me dice: «yo veo claro el cambio, 16 es 2^4 , cada vez que veas un 16 ponlo como 2^4 ».

C7-2. Transforma 16^1 y 16^0 en potencias de 2, incidiendo en que para pasar de base 16 a base 2 hay que fijarse en que 16 es 2^4 .

- 2D7.1-2. Procede con la primera etapa, en la cual sustituye los 16 por 2^4 [E, 3].
- 2R3.1-2. Cuenta a los alumnos el objetivo que persigue con la actividad [al hacer ver que 16 es 2^4] [E, 1].
- 2L3.2-2. Transforma los 16 en potencias de 2, haciendo ver a los alumnos cómo se puede llegar a escribir el número en potencias de 2 mediante esas transformaciones [E, 3].
- 2J10.1-2. Transforma unas potencias de 16 en unas potencias de 2, en grupos de 2 [E, 3].
- 2M5.3-2. Cambia de base 16 a base 2, elevando a 0 el 2^4 y dejando la escritura $(2^4)^0$ [E, 3].
 - 2M5.3-2(I)1. En las escrituras polinómicas en las que se basan las escrituras de los sistemas de numeración aparecen las potencias de la base y la última está elevada a 0 [I, M].

Vale, y entonces resulta que aquí tengo 11 grupos de esto y aquí tengo 6 de estos.
¿El 11 y el 6... los puedo dejar?



A: No, los pasas a base 2.

F: Los paso a base 2.

Evento (2)1-2. Pregunta si el 11 y el 6 hay que pasarlos a base 2.

- 2L3.3-2. Pregunta si el 11 y el 6, en la expresión $11 \times (2^4)^1 + 6 \times (2^4)^0$, hay que descomponerlos para poder tenerlos en potencias de 2 [E, M].
- 2J10.2-2. Pregunta qué hacen con el 11 y con el 6 [E, M].
 - 2J10.2-2(I)1. Quiere que lo resuelvan los alumnos, quienes ya tendrán la idea de que hay que expresar todo en potencias de 2, tal y como han visto, por lo que les será sencillo seguir [I, M].

¿Sé pasar 11 a base 2?

A: Sí.

F: Vale, vamos a escribir 11 en base 2.

A: 1, 0, 1, 1.

F: 1×2^3 , ¿no?

A: Sí.

F: Más...

- A: Cero.
 F: 0×2^2 . De momento llevo ocho. Más...
 A: Uno.
 F: 1×2^1 . Ya llevo 10...
 A: Más uno.
 F: Más 1×2^0 . Ahí ya tengo 11, ¿vale?

C8-2. Escribe la expresión polinomial de 11 en base 2 a partir de los coeficientes que un alumno va diciendo.

- 2P7.1-2. Transforma el coeficiente, el 11, de base 16 a base 2 [E, 2].
- 2M6.1-2. Escribe el polinomio del 11 en base 2 incluyendo las unidades que no aparecen: 0×2^2 [E, 2].
 - 2M6.1-2(I)1. Pone el 0×2^2 porque 11 en base 2 es 1, 0, 1, 1. Aunque en la escritura polinómica no es obligatorio escribirlo, ya que un polinomio no tiene por qué tener monomios de todas las potencias, lo pone para hacer ver que la escritura se corresponde con todos los coeficientes de las potencias, ya que emplea la escritura de un sistema de numeración posicional. La escritura polinómica no es la escritura del sistema de numeración; una vez que yo tengo la descomposición polinómica, yo puedo escribirlo con distintos sistemas de numeración. El nuestro es posicional y el posicional exige el 0, por eso aparece el 0 [I, M].
- 2J11.1-2. Escribe la expresión polinomial en potencias de 2 del 11, haciendo hincapié en los conceptos clave de la expresión, indicando que el 11 se puede escribir con otras potencias, con potencias de 2 en este caso [E, 3].
- 2D8.1-2. Escribe el 11 con potencias de 2, como una expresión polinómica en base 2, con la colaboración de los alumnos [E, 3].
- 2L4.1-2. Traduce el 11 a base 2, con ayuda de los alumnos [E, 2].

Esta es una manera de escribir 11. ¿Cómo? Como potencias de 2. Expresión polinomial del 11 en base 2, como potencias de 2, ¿vale? Y esto va multiplicado... 2 elevado a la 4 y luego lo elevo a la 1, ¿cuánto me queda...? 2^4 es $2 \times 2 \times 2 \times 2$ y luego eso lo elevo a la 1, es decir, que lo copio una vez, o sea que me queda...

- A: 2^4 .
 F: 2^4 .

C9-2. Explica cómo se realiza la potencia de una potencia, haciendo ver que $(2^4)^1$ es $2 \times 2 \times 2 \times 2$ y que, como está elevado a 1, se copia una sola vez.

No ha sido detectado por ningún formador.

Más... El 6, ¿lo deajo?

A: No.

Evento (2)2-2: Está constantemente planteando preguntas a los alumnos.

- 2R4.1-2. Está constantemente planteando preguntas a los alumnos [E, D].
 - 2R4.1-2(I)1. Su metodología consiste en que los alumnos verbalicen sus conocimientos y razonen para poder asentar mejor los conceptos [I, D].

F: No. ¿Cómo escribo 6 en base 2?

A: 1×2^2 .

F: 1×2^2 , que son 4.

A: 1×2^1 .

F: 1×2^1 ... Y 0×2^0 [lo va escribiendo todo en la pizarra]. Ahí pone 6, una manera más chula, ¿no?, de poner 6 como potencias de 2, ¿no?, como un polinomio con potencias de 2.

C10-2. Escribe la expresión polinomial de 6 en base 2 a partir de los coeficientes que un alumno va diciendo.

- 2P7.2-2. Transforma el coeficiente, el 6, de base 16 a base 2 [E, 2].
- 2D8.2-2. Escribe el 6 con potencias de 2, como una expresión polinómica en base 2, con la colaboración de los alumnos [E, 3].
 - 2D8.2-2(I)1. Los coeficientes que acompañan a las potencias de 2 siempre van a ser 0 o 1 [I, M].
- 2J12.1-2. Escribe el 6, formalizando lo que dice un alumno y haciendo pausas a lo largo del proceso de resolución [E, 1].
 - 2J12.1-2(I)1. Realizar pausas es la estrategia que se seguiría al resolverlo en papel [I, M].
- 2M7.1-2. Escribe el 6 como una expresión polinómica en función de la base 2, que sería 1, 1, 0 [E, 3].

- 2M7.1-2(I)1. *Pone de manifiesto que se pueden plantear dos escrituras del mismo número, que es igual de válido el 6 que el 1, 1, 0 en base 2, con la intención de hacer ver que el número va por un lado y la escritura por otro [I, M].*
- 2L4.2-2. *Traduce el 6 a base 2, con ayuda de los alumnos [E, 2].*
 - 2L4.2-2(I)1. *Su objetivo matemático es que los alumnos vean que haciendo transformaciones se puede llegar a pasar de base 16 a base 2 de forma cómoda [I, M].*
 - 2L4.2-2(I)2. *Realmente ella es quien va guiando todo el proceso y escribiendo el número de forma adecuada para llegar a su objetivo, aunque hace pensar a los alumnos que lo están descubriendo ellos [I, D].*

Vale, y luego estaba por... Y ahora tengo $(2^4)^0$. ¿Eso qué es?

A: Uno.

F: Uno. ¿Y si lo quiero poner como potencias de 2?

A: 2^0 .

F: 2^0 , muy bien. 2^0 [lo escribe en la pizarra].

C11-2. *Hace ver, mediante preguntas a los alumnos, que $(2^4)^0$ es 1 y que en base 2 es 2^0 .*

- 2D9.1-2. *Plantea a los alumnos el problema del $(2^4)^0$, haciendo ver que eso es 1 y que se puede poner como como 2^0 , o sea, que $(2^4)^0$ es 2^0 [E, 3].*
 - 2D9.1-2(I)1. *Plantea la cuestión a los alumnos porque seguramente sabe que «elevar a 0» les supone muchas veces un problema [I, M].*

Mira qué contenta estoy, porque $2^0 \times 2^0$ es 2^0 y el coeficiente es 0, que es este. Y $2^4 \times 2^3$ es 2^7 y el coeficiente es 1, que es este. Pues como que ya casi lo tengo, ¿no? ¿Sí o no?

A: Sí...

C12-2. *Establece una correspondencia entre el último coeficiente del desarrollo polinómico que está haciendo y el del último de la expresión polinómica final del número en base 2, así como entre el primer coeficiente de ambas expresiones.*

- 2M8.1(i)-2. *Evento implícito en el comentario [E, 1].*

Transcripción del vídeo: Mira qué contenta estoy, porque $2^0 \times 2^0$ es 2^0 y el coeficiente es 0, que es este.

- 2M8.1(i)-2(I)1. Debe de ser que el ejercicio decía que el número empezaba con el 1 del 2^7 y terminaba con el 0 del 2^0 , por lo que pueden saber que la máxima potencia va a ser 2^7 [I, M].
- 2D10.1-2. Indica que la expresión que tienen hasta el momento coincide con lo que conocen de la expresión final, es decir, empieza por 1 y termina por 0, haciendo ver que van por buen camino [E, 3].
- 2J13.1-2. Va conectando con lo que buscan en el problema, con que empezaba por 1 y acababa en 0, haciendo ver que el proceso va funcionando, que el argumento tiene sentido [E, 3].
 - 2J13.1-2(I)1. Para llegar a la solución, solamente quedaría hacer esas operaciones [I, M].
- 2P9.1-2. Hace ver a los alumnos la relación que hay entre la expresión que ha obtenido, al transformar los coeficientes a base 2, y los coeficientes de la expresión final que quiere obtener [E, 3].

BASE 16

$$11 \times 16^1 + 6 \times 16^0$$

↓

BASE 2

$$11 \times (2^4)^1 + 6 \times (2^4)^0$$

$$[1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0] \times 2^4 + [1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0] \times 2^0$$

$$1 \times 2^7 + 0 \times 2^6 + 1 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0$$

F: Vale, y ahora... Venga, ¿cuál será el coeficiente...? Venga, vamos a poner aquí 2^6 , paso a la siguiente varilla del ábaco, ¿eh? ¿Cuál será el coeficiente de 2^6 ?

A: Cero.

C13-2. Establece una correspondencia entre las varillas del ábaco y la escritura numérica o potencias en base 2.

- 2P10.1-2. Relaciona en una ocasión lo que están haciendo, las expresiones aritméticas, con el instrumento del ábaco [E, 3].
 - 2P10.1-2(I)1. A lo mejor porque anteriormente han trabajado con el ábaco [I, D].
- 2L5.1-2. Conecta en una ocasión la escritura numérica, los coeficientes de las potencias de 2, con el ábaco [E, 3].
 - 2L5.1-2(I)1. Posiblemente porque los alumnos hayan hecho alguna práctica con materiales manipulativos previamente [I, D].
 - 2L5.1-2(I)2. Quiere que los alumnos vean que el material tiene que ver con la escritura, que se cambia de varilla del ábaco cada vez que se cambia de potencia [I, M].
- 2J15.1-2. Relaciona en tres ocasiones el desarrollo algebraico que les va saliendo, las distintas posiciones, con un material manipulativo, con las varillas del ábaco [E, 3].
 - 2J15.1-2(I)1. Porque puede que previamente hayan trabajado con el ábaco [I, D].
- 2M11.1-2. Identifica en dos ocasiones cada orden de unidad con una varilla del ábaco [E, 3].
 - 2M11.1-2(I)1. Para que todos piensen que en cada varilla tiene que haber siempre un coeficiente, una cifra; es la esencia de los sistemas de numeración posicionales [I, M].

F: Cero, porque ¿cómo consigo yo 2^6 ? $2^4 \times 2^2$, ¿no? 2^4 es $2 \times 2 \times 2 \times 2$, 2^2 es 2×2 , ya tengo ahí los seis doses, ¿vale?, que está aquí, y el coeficiente cero. ¿Por aquí puedo llegar a 2^6 ?

A: No.

F: No, pues ala. 0×2^6 . Genial, porque era lo que me había salido antes. Ahora, más... Siguiendo varilla del ábaco, 2^5 . ¿Dónde consigo yo 2^5 ? Aquí [señala el corchete de la derecha] como mucho llego a 2^2 , me olvido de esto. $2^4 \times 2^1$ [señalando el corchete de la izquierda] es 2^5 , ¿no?

A: Sí.

F: Vale, ¿y qué coeficiente lleva?

A: 1.

F: 1. ¿Y era el qué tenía que llevar?

A: Sí.

F: Sí, vamos bien. Y ahora, 2^4 , ¿cómo consigo 2^4 ?

A: Con 2^0 ...

F: $2^4 \times 2^0$, ¿no? Tengo aquí cuatro copias del 2 y aquí ninguna, pues tengo cuatro copias del 2 multiplicándose por sí mismo, y el coeficiente 1. 1×2^4 [lo escribe en la pizarra]. Oye, mira, todo esto se ha convertido en esto. Lo veis, ¿no?

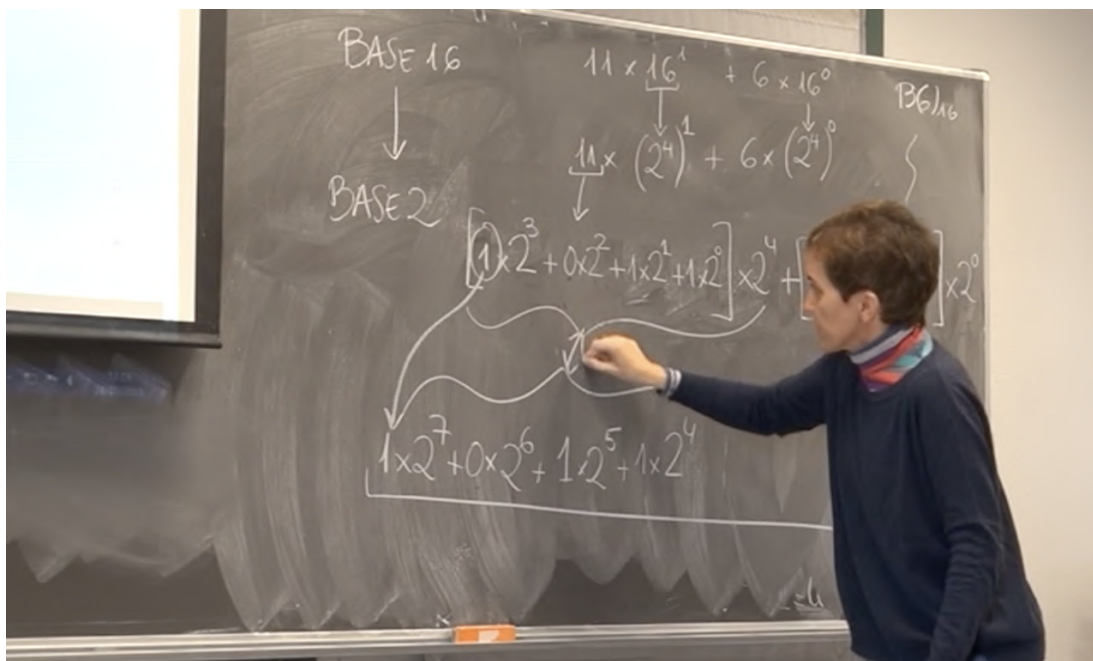
C14-2. Explica a los alumnos cómo multiplicar potencias.

- 2J14.1-2. Recuerda cómo multiplicar potencias a raíz de la construcción final que está haciendo de cada término: 2^6 , 2^5 , 2^4 ..., desarrollando los cálculos para llegar al coeficiente del término 2^6 tras preguntar por cuál sería dicho coeficiente [E, 3].
- 2M10.2-2. Recuerda, a partir de la escritura polinómica que tiene, lo que es una potencia, haciendo ver que 2^4 es $2 \times 2 \times 2 \times 2$, y el producto de potencias, haciendo ver que en $2^4 \times 2^0$ hay 4 doses y ninguno, es decir, 4 doses [E, 3].
 - 2M10.2-2(I)1. Porque los alumnos no suelen estar acostumbrados a trabajar con escrituras polinómicas en función de un número [I, M].
- 2D11.2-2. Explica a los alumnos cómo multiplicar potencias de 2, haciendo que observen que $2^2 \times 2^4$ es 2^6 porque aparecen 6 doses en esas potencias [E, 3].
 - 2D11.2-2(I)1. Pretende con ello enfatizar el proceso por encima de las recetas que los alumnos puedan conocer de secundaria, y que a lo mejor no llegan a comprender, como la de «sumar los exponentes» [I, M].

C15-2. Desarrolla la expresión $[1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0] \times 2^4$ para llegar a la expresión $1 \times 2^7 + 0 \times 2^6 + 1 \times 2^5 + 1 \times 2^4$, haciendo ver que son equivalentes y empleando la propiedad distributiva.

- 2L6.1-2. Remarca que las cuentas que ha hecho del 11×16^1 se corresponden con lo que tiene dentro del corchete por 2^4 y que se corresponde con lo que tiene en la llave abajo, habiendo empleado la distributiva del producto con respecto de la suma en las cuentas que ha realizado en la pizarra [E, 3].
 - 2L6.1-2(I)1. Para que los alumnos no se pierdan con los cálculos [I, M].
- 2J16.1-2. Indica una equivalencia, haciendo ver cómo ha pasado de un desarrollo a otro tras realizar las operaciones aritméticas, cómo los dos números son el mismo [E, 2].
- 2D11.1-2. Reorganiza la expresión que tenían para reescribirla con potencias de 2, recolectando las potencias de 2 correspondientes [E, 2].

- 2M10.1-2. Va haciendo la escritura polinómica, aplicando la propiedad distributiva [E, 2].
 - 2M10.1-2(I)1. Se observa la idea del teorema fundamental de la numeración, que es que todo número se puede escribir como un polinomio y sus coeficientes son únicos [I, M].



¿Qué es lo que he hecho? Propiedad distributiva. Voy multiplicando el 2^4 por cada uno de los sumandos, ¿vale? Muy bien.

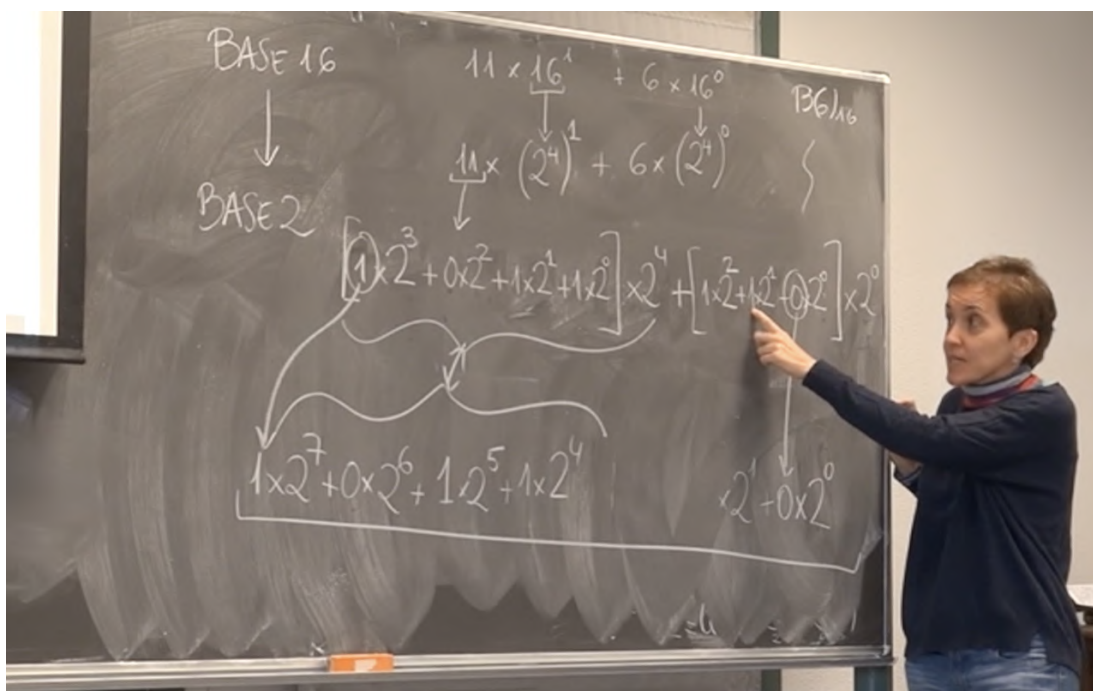
C16-2. Indica que ha utilizado la propiedad distributiva para llegar a la expresión obtenida.

- 2R5.1-2. Dice que está aplicando la propiedad distributiva [E, 3].
- 2L7.1-2. Indica que ha empleado la propiedad distributiva del producto con respecto de la suma, conectando lo que está haciendo para realizar el cambio de base con una propiedad de los números naturales [E, 3].
- 2J16.2-2. Recuerda la propiedad que ha usado [E, 2].
- 2P11.1-2. Relaciona lo que acaba de hacer con una propiedad de los números, la propiedad distributiva [E, 3].

Y ahora, tiro por aquí, voy desde aquí [señala el 2^0 de la parte inferior derecha de la pizarra]. 2^0 , muy bien. Siguiente varilla del ábaco, 2^1 . ¿Qué coeficiente tiene 2^1 ?

A: 1.

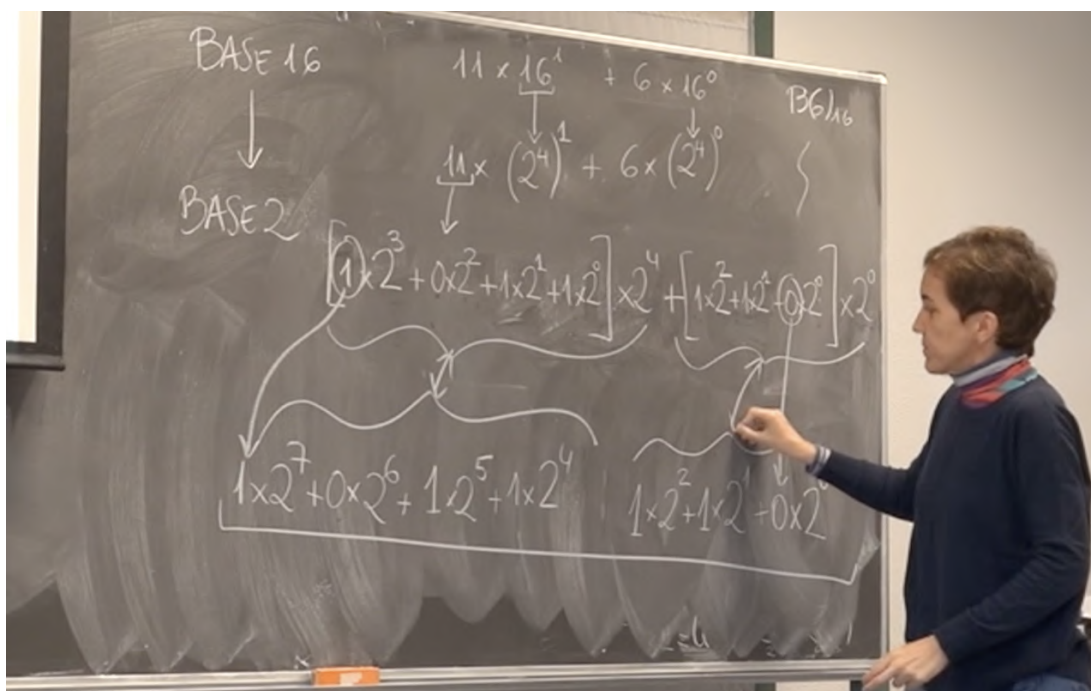
F: 1, que está aquí [lo señala], ¿vale?



Porque sería $2^1 \times 2^0$, que es 2^1 , y lleva un 1 delante, un 1 [lo escribe abajo]. Voy bien. Y ahora, $2^0 \times 2^2$, 2^2 [lo escribe abajo], va con un 1 [lo escribe abajo]. O sea que esto que tengo aquí se convierte en esto que tengo aquí.

C17-2. Desarrolla la expresión $[1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0] \times 2^0$ para llegar a la expresión $1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0$, haciendo ver que son equivalentes y empleando la propiedad distributiva.

- 2J17.1-2. Hace hincapié en los coeficientes en cada paso que va explicando, haciendo ver cómo se llega a la expresión final del número [E, 2].
- 2L8.1-2. Conecta con llaves lo de arriba y lo de abajo [E, 2].



Y ahora, Pablo, ¿qué te pasó?

- A: Que como... Que claro, los iba a juntar, pero dije: «me falta el 2^3 ».
- F: Me falta el 2^3 . Pablo dice: «varilla del ábaco del 2^7 , 2^6 , 2^5 , 2^4 , ¡uy!, 2^2 , 2^1 , 2^0 ». «¡Uy!», dice Pablo [y dibuja una interrogación en la posición del 2^3].
- A: Pues si no hay, un cero.
- F: Pues se pone el 0, ya está.

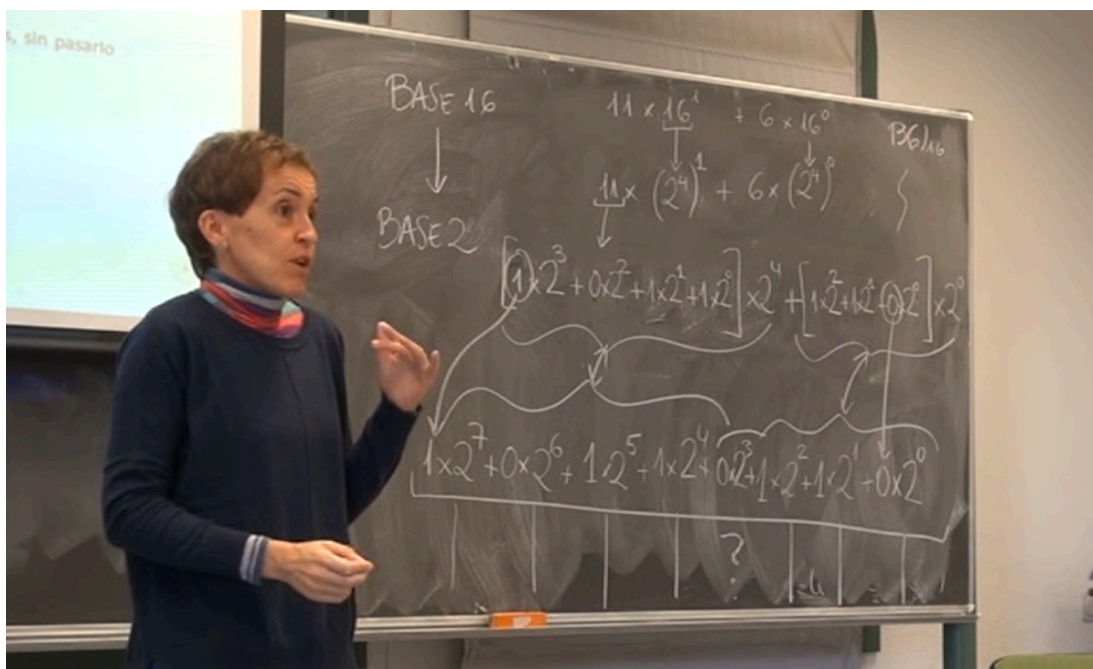
C18-2. Pregunta a un alumno qué dificultad tuvo al resolver el ejercicio a través del procedimiento planteado en relación con el valor de la posición del 2^3 , haciendo ver que, si no hay un valor para el 2^3 , se pone un 0.

- 2P12.1-2. Aborda el problema que le había surgido a un alumno al no aparecer el coeficiente de 2^3 , explicando que, si no aparece un coeficiente, se pone un 0 en la descomposición en base 2 [E, 3].
- 2J18.1-2. Pregunta, a raíz de la dificultad que ha tenido un alumno, qué hacer al no haber valor para el 2^3 , haciendo ver que tienen que escribir un 0 en el número [E, 3].
- 2M11.2-2. Incide en el hecho de que una potencia no está explícita [E, 2].
 - 2M11.2-2(I)1. Imagino que las cantidades están elegidas para que haya una potencia que no esté explícita y haya que tomar una decisión sobre qué hacer con ella. Además, no se solapan en ningún caso, se podrían haber solapado, podría haber habido potencias de 2 en las que interviniesen cantidades de los distintos órdenes de la base 16, pero aquí no ha ocurrido. Que las cantidades planteen esta

aparente dificultad es un hecho didáctico que hace que surja una discusión rica e interesante [I, M].

- 2D12.1-2. Analiza una dificultad que aparece con la expresión obtenida, que es que no aparecen potencias cúbicas de 2, haciendo ver que se puede arreglar escribiendo un 0 [E, 3].

Lo pongo aquí: «+ 0 x 2³», y esto lo englobo aquí.



¿Qué es lo que pasa? Que escribo el 6 de una forma muy especial. Yo escribo el 6..., acordaos que esto era mi 6 [señala $1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0$], ¿eh?, esto era el 6, que es este 6 [señala el de un nivel anterior, más arriba en la pizarra], ¿vale? Yo he escrito el 6 como $1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0$, pero también puedo escribir el 6... $0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0$. No es lo estándar, porque como los ceros ahí no aportan mucho, pues no es lo estándar, pero si no me quiero olvidar de una de las varillas y no quiero tener un problema, como tenía Pablo, pues yo añado ahí para escribir el 6 de otra forma, ¿vale?

C19-2. Hace ver que el número 6 se puede escribir como $1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0$, pero también como $0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0$ si se quiere indicar la ausencia de grupos de 2^3 .

- 2D12.2-2. Trata de que los alumnos entiendan que 6 no tiene grupos de 2^3 y que se puede escribir un 0×2^3 , que es lo mismo que decir que no hay grupos de 2^3 [E, 3].
- 2M11.3(i)-2. Evento implícito en el comentario [E, 1].

Transcripción del vídeo: Yo he escrito el 6 como $1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0$, pero también puedo escribir el 6... $0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0$.

- 2M11.3(i)-2(I)1. *Y también se puede escribir 27 como 000000027; se entiende por qué lo hace [I, M].*
- 2P13.1-2. *Está analizando la equivalencia de cómo escribir un número de distintas formas incluso en un mismo sistema de numeración [E, 2].*
- 2J19.1-2. *Plantea la idea de que cualquier número lo puede escribir, por ejemplo, de la manera que lo ha hecho [con el 6] [E, 1].*

Evento (2)3-2: Dibuja las varillas de un ábaco en la parte inferior de la pizarra.

- 2L8.2-2. *Dibuja unas cajas [son en realidad segmentos que representan las varillas de un ábaco] en la parte inferior de la pizarra [E, M].*
 - 2L8.2-2(I)1. *Para poner el número escrito, para escribir 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, dejando así el número en base 2 [I, M].*

Evento (2)4-2: Plantea la resolución en la pizarra de forma ordenada, grande y clara, organizando los pasos de forma horizontal.

- 2M5.1-2. *Gestiona lo que plantea en la pizarra, presentando los pasos de forma horizontal [E, D].*
 - 2M5.1-2(I)1. *Pretende que el proceso gane en claridad visual para que los alumnos, que pueden tener dificultades con las escrituras polinómicas, vean mejor cómo se va haciendo el proceso de transformación [I, M].*
- 2J12.2-2. *Plantea la resolución en la pizarra de forma ordenada, grande y clara [E, D].*
- 2L8.3-2. *Organiza bastante la pizarra [E, D].*
 - 2L8.3-2(I)1. *Para que quepa toda la información sin necesidad de borrar [I, D].*

Entonces, moraleja que cuentan los youtubers, por ejemplo David Calle, dice: «vamos a pasar de base 16 a base 2, ¿qué se hace chavales? Mirad, ¿veis este 11 que está aquí? [señala el de arriba de la pizarra], pues escribís este 11 en base 2: 1, 0, 1, 1 [señala los coeficientes de la expresión polinómica de la parte inferior de la pizarra]; ¿veis este 6 que está aquí? [señala el de arriba de la pizarra], pues lo escribís en base 2, pero cuidadín chavales, que hay que poner cuatro, ¿por qué?, porque 16 es 2^4 ». Y entonces dice: «vamos a escribir 6 en base 2 con cuatro: 0, 1, 1, 0». Y dice: «y ahora lo juntáis, fin».

C20-2. *Explica la receta que podría dar un youtuber como David Calle para pasar de B6 en base 16 a base 2, que consistiría en escribir el 11 de 11×16^1 y el 6 del 6×16^0 en base 2, ambos con cuatro dígitos al ser 16 igual a 2^4 , y juntarlo.*

- 2D13.1-2. *Explica el procedimiento que han seguido formulándolo en términos de receta memorística, que consistiría en expresar cada coeficiente de la base 16 en base 2 y ponerlos en ciertas posiciones [E, 3].*
 - 2D13.1-2(I)1. *Su intención es que los alumnos reflexionen sobre la diferencia entre un procedimiento con sentido, como el desarrollado en la sesión, y un procedimiento mecánico, receta o algoritmo, que no se entiende si se aplica de manera mecánica [I, M].*
 - 2D13.1-2(I)2. *El uso de recetas, algoritmos o procedimientos mecánicos, aplicados sin que los alumnos entiendan lo que hacen, es habitual en la enseñanza de las matemáticas y es algo que se debería evitar por los inconvenientes que tienen [I, M].*
- 2P14.1-2. *Comenta la receta que se emplearía para resolver un problema sin tener que profundizar en el porqué [E, 2].*
 - 2P14.1-2(I)1. *Quiere hacer ver a los alumnos que lo importante no es tanto el resultado sino el procedimiento de cómo llegamos al resultado [I, M].*
- 2J19.2-2. *Menciona una receta, un algoritmo que consistiría en coger el número 11, pasarlo a base 2, obtener 4 dígitos, tener en cuenta que trabajamos con 2^4 , etc. [E, 3].*
- 2L9.1-2. *Cuenta una regla nemotécnica, haciendo alusión al youtuber David Calle, que se basa en que 16 es 2^4 , haciendo ver que basta con escribir los dos coeficientes en base 2 utilizando cuatro cifras para cada uno y juntarlo [E, 3].*
 - 2L9.1-2(I)1. *Quiere llamar la atención sobre el contenido matemático que a ella le interesa haciendo ver lo que haría un youtuber [I, D].*
- 2M12.1-2. *Plantea un procedimiento que podría proponer un youtuber como David Calle que se basaría en aplicar una receta [E, 2].*
 - 2M12.1-2(I)1. *Se trata de un proceso válido en cuanto al resultado, pero que se aprende de memoria y se aplica de manera irreflexiva [I, M].*
 - 2M12.1-2(I)2. *Hace alusión a un youtuber para partir de un contexto que puede ser cercano para el alumno [I, D].*

A mí no me vale porque yo no soy David Calle, yo no estoy de youtuber, influencer, superfamosa ayudando a los chavales a aprobar exámenes, que es un

trabajo muy digno y que está bien, y además el tío es un *crack*, muy suelto, lo hace muy bien; yo estoy formando maestros, entonces tenéis que entender cómo hemos pasado de aquí [señala la parte superior de la pizarra] a aquí [señala la parte inferior de la pizarra] a través de esto [señala la parte media de la pizarra].

C21-2. Hace ver que a ella no le vale la receta porque los maestros tienen que entender el proceso pasa transformar un número de una base a otra.

- 2L9.2-2. Dice que a ella no le vale la regla nemotécnica [E, 1].
 - 2L9.2-2(I)1. Porque quiere que los alumnos lo justifiquen en el examen, aunque en el fondo sí le vale que lo aprendan así, pero no se lo puntuará al máximo, es decir, quiere que al menos sepan hacerlo para poder comprobar si lo que han hecho manipulando el número les coincide con lo que David Calle dice que pueden hacer para obtener el número en base 2 de forma rápida [I, M].
- 2M12.2-2. Indica que los alumnos, como futuros maestros de matemáticas, tienen que entender el proceso [E, 3].
 - 2M12.2-2(I)1. Se trata de una reflexión metamatemática que se basa en que el conocimiento que tienen que tener los maestros sobre las matemáticas debe ser distinto al simple uso o a una concepción meramente utilitarista, por lo que deben preocuparse de cómo se aprende [I, M].
- 2J20.1-2. Dice que a ella no le vale la receta porque los maestros tienen que aprender el porqué, que es lo que han visto a través de las operaciones [E, 3].
 - 2J20.1-2(I)1. La idea que han trabajado [en clase] les va a servir para generalizarla y poder pasar a diferentes bases, no solo a base 2, lo cual tiene más valor para un futuro maestro. Entender el porqué, ver hasta qué punto funcionan los algoritmos, tiene más valor para el futuro docente, necesita saber eso más que la receta en sí y será en lo que tenga que incidir a la hora de enseñar [I, M].

Entonces, la pregunta es: ¿se puede pasar de base 16 a base 2 sin pasar por base 10? Sí. Lo acabamos de hacer, ¿no? Es que me miráis con una cara... ¿Y por qué se puede?

C22-2. Pregunta si se puede pasar de base 16 a base 2 sin pasar por base 10 y por qué se puede.

- 2P15.1-2. *Pregunta si se puede transformar un número en base 16 a base 2 sin pasar por base 10, haciendo ver que sí se puede [E, 2].*
- 2D14.1-2. *Pregunta a los alumnos por qué se puede pasar de base 16 a base 2 de forma mecánica, directamente [E, 2].*
- 2L10.1-2. *Pregunta si se puede pasar de base 16 a base 2 sin pasar por base 10 [E, 2].*

¿Qué pasa si yo esto [el ejercicio] os lo doy en base 15 y, en vez de en base 16, todo el problema es en base 15?

A: Que sería $2^4 + 2^0$.

F: ¿ $2^4 + 2^0$ es 15?

A: O sea, no..., perdón. $2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0$.

F: Vale, y entonces tendría que ir haciendo todas las distributivas, todo el follón, ahí. ¿Y David Calle me podría dar el algoritmo...? Escribes, imaginaos el mismo número, ¿eh?, B6, en vez de en base 16, en base 15. ¿David Calle me puede decir...? Aquí tengo el 15, ¿no?, aquí tengo el 15 [los escribe encima de los 16], y David Calle me dice: «escribe esto [señala el 11] en base 2, escribe esto [señala el 6] en base 2, con tres y medio dígitos o cuatro dígitos o... tres dígitos, y lo pones junto. ¿Valdría ese algoritmo?

A: No.

F: No. ¿Vale?

C23-2. Plantea una variación en el ejercicio que consiste en partir de la base 15 para llegar a la base 2, incidiendo en que no habría un algoritmo para pasar directamente de una base a la otra.

- 2D14.2-2. *Plantea una situación alternativa, preguntando qué ocurriría si el ejercicio estuviera en base 15 en vez de en base 16, haciendo ver que con la base 15 habría que hacer los cálculos intermedios, que no habría un procedimiento directo [E, 3].*
 - 2D14.2-2(I)1. *Pretende que los alumnos detecten qué es lo que no funciona con la base 15 [I, M].*
- 2L10.2-2. *Pregunta por el cambio desde la base 15 a la base 2 [E, 2].*
 - 2L10.2-2(I)1. *Para que vean por qué se puede pasar de base 16 a base 2 de forma rápida y por qué para pasar de base 15 a base 2 habría que realizar bastantes más cálculos y no sería tan rápido [I, M].*

- 2J21.1-2. *Plantea un nuevo caso, incidiendo en las limitaciones de las recetas al hacer ver que la receta anterior no funciona para el nuevo caso [E, 2].*
- 2P17.1-2. *Hace una modificación en el problema cambiando un dato, haciendo ver que la receta anterior ya no valdría en este caso [E, 2].*
 - 2P17.1-2(I)1. *Quiere hacer ver cómo influye la modificación de un dato en la resolución para ver si un mismo método se puede aplicar a distintos casos [I, M].*
- 2M13.1-2. *Plantea el ejercicio con la base 15, haciendo ver que no habría una receta sencilla para ese caso [E, 3].*

O sea, que poder se puede pasar, vas con paciencia escribiendo cada una de las expresiones que aparecen, pero un paso directo solo se puede cuando una base es potencia de la otra base, que es lo que hemos visto con 16, que es potencia de 2, que es 2^4 .

C24-2. Hace explícito que solamente se puede pasar directamente de una base a otra cuando una base es potencia de la otra, como de base 16 a base 2, ya que 16 es 2^4 .

- 2L11.1-2. *Explica que para pasar de una base a otra de forma inmediata es necesario que una base sea potencia de la otra, llegando así al resultado del ejercicio: primero se ha propuesto un ejemplo sencillo, pasar de base 16 a base 2; luego se ha preguntado cómo se haría en base 15, viendo que sería más laborioso; y por último se llega al resultado del ejercicio, al contenido final [E, 3].*
 - 2L11.1-2(I)1. *A partir del resultado importante al que se ha llegado, pretende que los alumnos vean que pasar de base 8 a base 2 o de base 4 a base 2, por ejemplo, también puede ser rápido [I, M].*
- 2D15.1-2. *Explica que un procedimiento directo se puede hacer cuando una de las bases es potencia de la otra, como con la base 16, que es potencia de 2 [E, 3].*
- 2R10.1-2. *Está haciendo ver propiedades de las potencias [E, 1].*
- 2P18.1-2. *Generaliza el problema, es decir, explica por qué se puede pasar de base 16 a base 2 con el método empleado [E, 2].*
- 2J22.1-2. *Da la condición [E, 1].*
- 2M13.2-2. *Hace explícito que la base 16 funciona porque es 2^4 [E, 2].*

Evento (2)5-2: Eleva el volumen de la voz cuando dice «potencia».

- 2L11.2-2. *Alza la voz cuando hace aserciones que considera importantes [se refiere a cuando la formadora dice que 16 es «potencia» de 2] [E, D].*
 - 2L11.2-2(I)1. *Se trata de una técnica que usa la formadora cuando quiere enfatizar algo que matemáticamente es importante para los alumnos [I, M].*

¿Está claro hasta aquí? ¿Sí?

VÍDEO 3

Fragmento 1

[F = Formadora del vídeo].

- F: Entonces, la idea es..., el ejercicio 4, que está proyectado en la pantalla, es el ejercicio 4 de la última hoja, de la hoja del dossier 2, con el que vamos a trabajar ya esta semana, ¿vale? En ese ejercicio hay cuatro operaciones, cuatro problemas, cuatro operaciones. Tenéis que hacer las cuatro operaciones..., representarlas de distintas maneras. Voy a poner en la pizarra de cuántas maneras, ¿vale? Entonces, acordaos que nosotros estamos trabajando con material manipulativo [escribe en la pizarra «Manipulativo»], ¿vale? Entonces, en primer lugar tenéis que representar esta suma $[210 + 543]$, esta suma $[315 + 429]$, esta resta $[135 - 24]$ y esta resta $[704 - 45]$, por partes [va señalando en el PDF proyectado en la pantalla], ¿no?, empezáis con la primera... Tenéis que representarlo [escribe en la pizarra] con ábaco vertical, después en el sorobán y después con los multibase, ¿vale? Y tenéis que tener las tres representaciones del proceso delante para saber comparar cada dos, ¿vale?, para saber entender cómo se traduce una en otra.

C1-3.1. Plantea a los alumnos que tienen que representar las cuatro operaciones del ejercicio, las sumas y las restas, en el registro de representación manipulativo con el ábaco vertical, con el sorobán y con los bloques multibase, comparando cada dos, viendo cómo se traduce de una forma a otra.

- 2R1.1(i)-3.1. Evento implícito en el comentario [E, 1].
Transcripción del vídeo: Tenéis que hacer las 4 operaciones..., representarlas de distintas maneras. [...] con material manipulativo...
 - 2R1.1(i)-3.1(I)1. Pretende que los alumnos vean cómo trabajar la descomposición de los números con los niños pequeños [I, M].
 - 2R1.1(i)-3.1(I)2. Plantea una metodología basada en la gamificación y en el juego, que es como metodológicamente se enseña a los niños en matemáticas, para que los alumnos puedan transmitir el concepto de la suma a los niños [I, M].
- 2P1.1-3.1. Indica la tarea a realizar, que consiste en expresar varias operaciones con varios materiales y comparar la operación con los distintos materiales utilizados [E, 3].

- 2J1.1-3.1. *Presenta el problema, que consiste en representar la suma de números con distintos materiales [E, 2].*
- 2D1.1-3.1. *Plantea una actividad, que consiste en representar unas sumas con tres tipos de material manipulativo: el ábaco vertical, el sorobán y los bloques de base 10 [E, 2].*
- 2M2.1-3.1. *Plantea un enunciado matemático que consiste en representar unas operaciones, unas sumas y unas restas, en el registro de representación manipulativo, empleando tres materiales manipulativos distintos y viendo cómo se traduce la representación cada dos materiales [E, 3].*
 - 2M2.1-3.1(I)1. *Decir que hay que ver «cómo se traduce» no es una consigna clara, ya que no sé si se puede decir que haya respuestas correctas o incorrectas [I, M].*
- 2L1.1-3.1. *Indica a los alumnos que primero tienen que representar unas sumas y unas restas con tres materiales: el ábaco vertical, el sorobán y los bloques multibase [E, 2].*

Lo que no quiero es que me digáis: « $210 + 543$ son 753; Nuria, te he representado 743* en el ábaco vertical, en el sorobán y en los bloques multibase». No quiero la representación del resultado, quiero la representación del proceso, de la suma, de la idea «suma».

C2-3.1. *Explica que no quiere que los alumnos representen el resultado, sino que representen el proceso de la suma.*

- 2P2.1-3.1. *Indica que quiere que representen el procedimiento de la operación, cómo se llega al resultado [E, 3].*
- 2J1.2-3.1. *Dice que tienen que ver y explicar el proceso que han seguido para sumar, no simplemente el resultado [E, 3].*
- 2D1.2-3.1. *Hace hincapié en que representen el proceso de la suma, no solo el resultado [E, 3].*
 - 2D1.2-3.1(I)1. *Porque es una confusión común de los estudiantes, están acostumbrados a los resultados, no a los procesos [I, M].*
- 2R3.1-3.1. *Indica a los alumnos que tienen que representar el proceso de la suma [E, 3].*
 - 2R3.1-3.1(I)1. *Porque así es cómo los alumnos van a entender el proceso de la suma de los números [I, M].*

- 2R3.1-3.1(I)2. Los niños [de primaria] adquieren fenomenal el concepto de la suma de los números si ven el proceso, si lo descomponen; es por donde hay que empezar [I, M].
- 2L1.2-3.1. Dice que hay que representar cómo [enfatisa «cómo»] se hace la suma, el proceso [E, 3].
- 2M4.2-3.1. Indica que hay que poner el foco en el proceso de las operaciones, no en el resultado [E, 3].

¿En qué os tenéis que basar?, en la definición de la suma que vimos el otro día, ¿no?, que es: elijo un representante de uno, elijo un representante del otro y hago la unión, agrupo, junto, como lo queráis pensar, ¿vale?

C3-3.1. Indica que los alumnos han de basarse en la definición conjuntista de la suma.

- 2R2.1-3.1. Dice que tienen que agrupar [E, 2].

Entonces, hay que representar el proceso, el proceso, no solo el resultado final de ese proceso. Entonces, tenéis que representar el proceso de tres maneras en el sistema de representación manipulativo [señala lo que ha escrito antes en la pizarra], ¿vale? Y en paralelo [empieza a escribir en la pizarra] tenéis que representar el proceso en el sistema de representación simbólico-numérico; el enunciado está dado en ese sistema de representación, ¿vale?, esto es sistema de representación simbólico-numérico, pues tenéis que representar el proceso, las dos sumas y las dos restas, en ese sistema, ¿vale?

C4-3.1. Dice a los alumnos que tienen que representar el proceso de las sumas y de las restas en el registro de representación simbólico-numérico.

- 2P3.1-3.1. Dice que tienen que realizar también las operaciones con el lenguaje simbólico-numérico [E, 3].
 - 2P3.1-3.1(I)1. Para que puedan comparar ambos procedimientos [el sistema de representación manipulativo y el simbólico-numérico] [I, M].
- 2M2.2-3.1. Pide que representen las operaciones en el registro de representación simbólico-numérico [E, 3].
- 2J2.1-3.1. Pide que representen la suma en el sistema de representación simbólico [E, 3].

- 2D2.1-3.1. Indica que los alumnos han de realizar también una representación simbólico-numérica [E, 3].
- 2L1.3-3.1. Indica a los alumnos que además hagan la suma en el sistema de representación simbólico-numérico [E, 3].

Y luego, en medio [escribe en la pizarra], hay una representación que es formato tabla o tabular, de la que no he hablado explícitamente, pero que me gustaría que construyerais vosotros, ¿vale? Necesito que construyáis, por ejemplo, esta suma [señala $210 + 543$], que la hagáis en tabla, con una tabla, como se os ocurra a vosotros diseñar la tabla, ¿vale? La tabla [escribe en la pizarra] puede ser más gráfica, puede tener características gráficas, o puede tener características más simbólicas;

C5-3.1. Pide a los alumnos que realicen una representación tabular de las operaciones como ellos quieran, teniendo en cuenta que puede tener características gráficas o características simbólicas.

- 2M2.3-3.1. Pide que representen las operaciones en el registro de representación tabular, que sería como un elemento intermediario entre el registro manipulativo y el simbólico, de la forma que los alumnos quieran, indicando que puede tener características simbólico-numéricas o características gráficas [E, 3].
 - 2M2.3-3.1(I)1. Decir que los alumnos lo hagan como quieran tiene «trampa»; los alumnos entenderán que no lo tienen que hacer como ellos quieran, sino que la forma tabular tiene que responder a algo, pero no creo que tengan claro qué es lo que tienen que hacer tal y como se plantea la consigna [I, M].
 - 2M2.3-3.1(I)2. En muchos manuales se plantea que las tablas pueden tener características simbólico-numéricas o gráficas [I, M].
- 2J2.2-3.1. Pide que creen otro sistema de representación, dando un poco las guías de cómo hacerlo, pero dejando libertad para que lo hagan como ellos quieran [E, 2].
 - 2J2.2-3.1(I)1. Dejando abierta esa forma, pretende que los alumnos vean que existen todo tipo de formas de representar [I, M].
 - 2J2.2-3.1(I)2. P pretende que los alumnos vean la conexión entre las distintas representaciones y que la suma sigue siendo la misma [I, M].
- 2D2.2-3.1. Termina de plantear el ejercicio, indicando que los alumnos han de realizar una representación intermedia, la cual denomina «tabular» y que puede tener

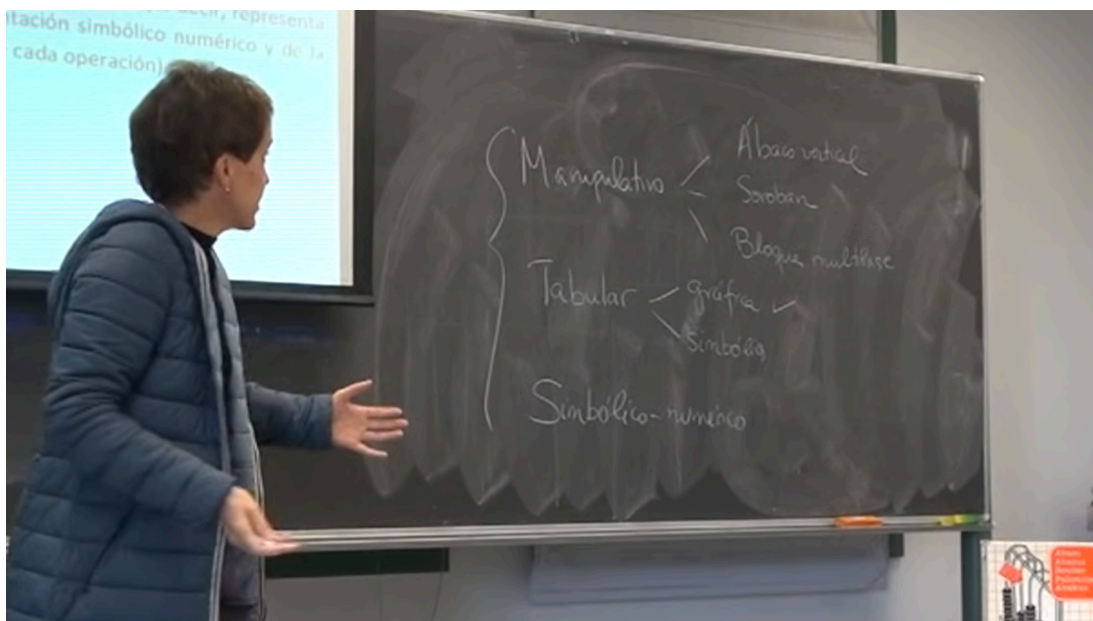
componentes gráficos o simbólicos, que quiere que generen sin haberla trabajado previamente [E, 3].

- 2D2.2-3.1(I)1. El proceso planteado en el ejercicio es muy parecido a las tres etapas de Jerome Bruner, más conocidas como el CPA de Singapur [I, M].
- 2P4.1-3.1. Indica a los alumnos que tienen que representar las operaciones en una tabla, haciendo ver que no han trabajado antes esta forma y que tienen que descubrirla por ellos mismos [E, 2].
- 2L1.4-3.1. Pide a los alumnos que por último hagan la suma con una tabla [E, 2].
 - 2L1.4-3.1(I)1. Conectando las tres formas de representar la suma, los alumnos aprenderán a sumar de verdad [I, M].
 - 2L1.4-3.1(I)2. Pretende hacer ver que una operación se puede expresar mediante distintos sistemas de representación [I, M].

a mí me va a interesar más la que tenga características más gráficas, luego ya veremos en detalle cómo, pero tenéis que intentar construirlo vosotros sin que yo os haya hablado de eso explícitamente, ¿vale?

Evento (2)1-3.1: Muestra preferencia por la tabla de características gráficas.

- 2M2.4-3.1. Indica que prefiere la tabla con características gráficas [E, M].



Entonces, paso 1, aquí [señala la parte de representación manipulativa de la pizarra], en paralelo paso 2, simbólico-numérico [lo señala en la pizarra] y luego ya, según vayáis trabajando los cuatro ejemplos, igual ya se os va ocurriendo

cómo representarlo con una tabla y cómo trabajar con una tabla ese tipo de operaciones.

Evento (2)2-3.1: *Indica que al realizar la representación en el registro manipulativo y en el simbólico-numérico en paralelo, se les puede ocurrir cómo hacer la tabla con el tipo de operaciones del ejercicio.*

- 2J3.1-3.1. Plantea un tercer ejercicio [E, M].
 - 2J3.1-3.1(I)1. El tercer ejercicio es más reflexivo, ya que tendrán que reflexionar sobre cuál es la manera más adecuada para representar, para lo que tendrán que comparar los distintos sistemas [I, M].

¿Está claro?

Evento (2)3-3.1: *Hace un esquema en la pizarra.*

- 2L1.5-3.1. Hace un esquema en la pizarra [E, D].

Yo me voy a pasar por las mesas y me vais preguntando todas las dudas que os surjan. No voy a pedir que me mandéis nada, ¿vale?, porque todavía no he revisado las últimas fotos que me habéis mandado, con lo cual estoy un poco desbordada; como no sois muchos, yo voy por vuestros puestos. Ahora bien, en el grupo anterior han decidido grabar pequeños vídeos o hacer fotos de los procesos que iban construyendo por llevárselo como material para estudiar, a mí me parece una buena idea, pero ya vosotros hacéis lo que queráis, a mí no me lo tenéis que mandar, pero si queréis, una vez que hayáis construido, por ejemplo, con el ábaco japonés, imaginaos, esta resta de aquí [señala el PDF en la pantalla], y decís: «ah, pues nos vamos a grabar», uno lo hace otro lo graba y lo tenéis de recuerdo, ¿no?, para cuando tengáis que estudiar.

Evento (2)4-3.1: *Primero, usa el verbo «hacer»; luego, «representar»; por último, dice «construir».*

- 2M4.1-3.1. Usa primero el verbo «hacer», cuando dice que hay que hacer las operaciones, pero luego emplea el término «representar» y ahora la palabra «construir» [E, M].
 - 2M4.1-3.1(I)1. Interpreto que a la formadora le interesa ver cómo cambian los algoritmos en función del material que se esté utilizando, poniendo el foco en el

proceso; «hacer» pone énfasis en el resultado, pero «representar» y «construir» lo ponen más en el proceso [I, M].

Evento (2)5-3.1: Indica a los alumnos que pueden hacer fotos o grabar vídeos de los procesos que vayan construyendo para tenerlo como material para estudiar.

- 2L2.2-3.1. Indica a los alumnos que pueden grabar vídeos [de lo que hagan en clase] para recordarlo luego bien [E, D].

¿Cómo voy a pedir yo eso en el examen? Pues no lo puedo pedir porque no puedo llevar un sorobán para cada uno porque tengo un día, 2 horas y media o 3, para haceros el examen final de la asignatura; pero para mí esto es muy importante, entonces yo voy a pedir que me representéis gráficamente, gráficamente, vuestro proceso de respuesta con un ábaco vertical, con un sorobán o con los bloques multibase, que es lo que yo luego voy a hacer aquí en la sesión final de discusión cuando acabemos esta hora de clase. Yo no voy a coger el ábaco aquí, lo voy a poner delante de todos y tal —podría hacerlo, pero no lo voy a hacer—, lo voy a hacer representando gráficamente el material manipulativo y así es como lo voy a pedir el día del examen, porque os voy a dar un cuadernillo y lo tenéis que hacer gráfico, ¿vale?

C6-3.1. Dice que en el examen final de la asignatura va a pedir que representen el proceso de respuesta con los materiales manipulativos de forma gráfica.

- 2P4.2-3.1. Indica que en examen van a tener que hacer la representación gráfica [E, 2].
- 2L2.1-3.1. Dice que en el examen va a pedir a los alumnos que representen el proceso de la suma con el material manipulativo de forma gráfica [E, 3].
 - 2L2.1-3.1(I)1. Quiere que entiendan que representar sumas y restas con material manipulativo es algo matemáticamente interesante porque les va a enseñar cómo se suma de verdad [I, M].
- 2J4.1-3.1. Indica la forma de representar que tendrán que usar en el examen [E, 1].
- 2R4.1-3.1. Indica que en el examen va a pedir que hagan una representación gráfica [E, 2].

Evento (2)6-3.1: Eleva el volumen de la voz cuando dice «gráficamente».

- 2L2.3-3.1. Alza la voz cuando dice eso [«gráficamente»] [E, D].

- 2L2.3-3.1(I)1. *Cuando dice algo importante, alza la voz; es una técnica que utiliza generalmente y que pueden tenerla en cuenta los alumnos para ir anotando las cosas importantes [I, D].*

Bueno, pues empezad, están escritas en un orden muy concreto, empezad a hacerlas en ese orden y luego ya discutimos sobre por qué están puestas en ese orden, ¿vale?

C7-3.1. Indica que las operaciones se presentan en un orden concreto y pide que las hagan en ese orden.

- 2D3.1-3.1. *Dice que las operaciones están puestas en un orden y que es importante que sigan dicho orden, dicha secuencia didáctica [E, 3].*
 - 2D3.1-3.1(I)1. *Se entiende que las operaciones están ordenadas de más fáciles a menos fáciles [I, M].*

Fragmento 2

[F = Formadora del vídeo]. [A = Alumnos (A1, A2 y A3)].

- A1: Estamos rayados con la última resta.
 F: Vale, a ver, empezad.
 A1: Son 704 - 45.
 F: Vale.
 A1: Entonces, aquí no le podemos restar 5.



- F: Así tal cual está, puedes restar..., ¿cuántas puedes quitar?

Evento (2)1-3.2: Realiza una pausa tras hacer una pregunta a un alumno.

- 2J1.1-3.2. Espera tras la pregunta de un alumno [E, D].
 - 2J1.1-3.2(I)1. Para la pregunta quede en el aire para el grupo de alumnos [I, D].

- A1: Cuatro.
 F: Cuatro, vale, sí.
 A1: Entonces voy a suponer que aquí [señala la varilla de las decenas] hay un 1.
 A2: No, que hay 10.
 A1: Que hay 10, para que sea 14...
 F: A ver, olvídate de los «suponer». Tú dices: «tengo que quitar 5», ¿no?, quito 1, quito 2, quito 3, quito 4 [quita cuentas de la varilla de las unidades] y ahora ponme aquí más para que yo quite, tal y como está.



- A1: Habría que poner 10 y quitamos 1.
- F: Pero ¿cómo me ponéis..., cómo me ponéis ahí? A ver Pablo.
- A2: ¿Que lo ponga?
- F: No, no, que me digas... Yo aquí [señala la varilla de las centenas] tengo ahora mismo 700, ¿no? Escribe 700 de otra forma para que yo tenga bolas...
- A1: Aaaaah, hay que añadir una aquí [señala la varilla de las decenas].
- F: Venga, a ver.
- A2: [El alumno A2 quita una cuenta de la varilla de las centenas y la pone en la de las decenas].
- F: ¿Aquí sigue poniendo 700?
- A1: No, no, no, hay que poner una nueva aquí [vuelve a poner la cuenta en la varilla de las centenas —la que había puesto en la varilla de las decenas el alumno A2— y pone una nueva en la varilla de las decenas].
- F: A ver [quita la cuenta de la varilla de las decenas]. Teníamos 704, hemos quitado 4, tengo 700, ¿vale?
- A1: Sí.
- F: Ahora, escribe 700 de otra forma para poder quitar otra.
- A1: Pues...
- F: ¿Cómo podéis escribir 700 de otra forma?

C1-3.2. Pregunta varias veces cómo pueden representar el número 700 de otra forma en el ábaco, haciendo ver que tenían 704, que ella ha quitado 4 unidades y

que ahora tienen que representar el número 700 de otro modo para poder quitar otra cuenta y restar 5 unidades.

- 2J2.1-3.2. *Pregunta cómo expresar el número de otra forma, cómo conseguir más [cuentas en el ábaco] tras quitar 4, haciendo ver que hay que quitar 5 [E, 3].*
 - 2J2.1-3.2(I)1. *Pretende que los alumnos vean cómo hacer la llevada, es decir, cómo expresar el mismo número empleando la siguiente fila, la de las decenas, de una forma visual y manipulativa, que sería el objetivo del material [I, M].*
- 2P1.1-3.2. *Ayuda a los alumnos con el problema que tienen con una resta en el material manipulativo al tener que restar 5 unidades y teniendo solo 4 y ninguna decena [E, 2]*
 - 2P1.1-3.2(I)1. *Quiere que los alumnos entiendan el procedimiento, el algoritmo de la resta, a través de un material manipulativo y no mediante recetas [I, M].*
- 2D1.1-3.2. *Dialoga con los estudiantes sobre cómo reorganizar la cantidad 704 para poder proceder con la resta, ya que tienen que quitar 5 unidades, pero solo hay 4 [E, 3].*
- 2M1.1-3.2. *Mantiene un diálogo con un grupo de alumnos que tiene dificultades para realizar una resta, ya que tienen que restar 5 unidades a 704 y no hay unidades suficientes ni unidades inmediatamente superiores, dándoles indicaciones, pero sin decirles ella el procedimiento a realizar [E, 2].*
 - 2M1.1-3.2(I)1. *Los números deben de estar elegidos para provocar una discusión sobre los cambios que hay que hacer entre unidades, los acarreos que surgen en los algoritmos clásicos, para materializar las unidades necesarias mediante la descomposición del número para poder restar [I, M].*
- 2L1.1-3.2. *Pregunta a los alumnos cómo pueden escribir el número de otra forma en el ábaco vertical, cómo transformarlo, para continuar con la resta tras haber quitado las unidades [E, 2].*
 - 2L1.1-3.2(I)1. *Quiere hacer ver que, para poder continuar con la resta, hay transformar una unidad de orden superior en diez unidades de orden inferior, es decir, quitar una centena y meter diez decenas y, luego, quitar una decena y meter diez unidades, usando así el sistema numérico decimal [I, M].*
 - 2L1.1-3.2(I)2. *Pretende que los alumnos aprendan por qué se resta como se resta con el algoritmo a través del ábaco [I, M].*
- 2R1.1-3.2. *Está trabajando una operación con los alumnos a través del ábaco [E, 1].*
 - 2R1.1-3.2(I)1. *Con el ábaco pretende trabajar el concepto de descomposición polinómica de los números para poder sumarlos [I, M].*

A1: Que aquí [señala la varilla de las decenas] haya 9...

F: Venga.

A1: Y aquí [señala la varilla de las unidades]..., 9.

F: A ver, para que haya aquíííí... [señala la varilla de las decenas], vamos a ver, ¿cómo consigo aquí decenas? Sin cambiar el número...

A1: Si quito esta... [quita una cuenta de la varilla de las centenas].



F: Venga, muy bien.

A1: Pongo aquí 10 [señala la varilla de las decenas].

F: Venga, dale.

C2-3.2. Pregunta a los alumnos cómo pueden conseguir decenas, señalando la varilla de las decenas en el ábac, tratando de guiarlos en el proceso de reescritura del 700.

- 2J3.1-3.2. Pregunta cómo se puede escribir 700 de otra manera manteniendo el número [E, 2].
 - 2J3.1-3.2(I)1. Pretende que agrupen de otra manera, que vean que para hacer la llevada hay que reagrupar, es decir, que una centena se convierte en 10 en la siguiente [unidad] [I, M].
- 2P2.1-3.2. Está interactuando con los alumnos [E, 1].
 - 2P2.1-3.2(I)1. Para que vean que 1 centena equivale a 10 decenas [I, M].

- 2D2.1-3.2. Dialoga con los alumnos sobre cómo obtener decenas, como trabajar la reagrupación con el ábaco, haciendo que vean que 1 ficha de la barra de las centenas se convierte en 10 fichas en la barra de las decenas [E, 3].

A1: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10.

A3: ¡Ah, vale!



F: ¿Ahora aquí pone 700?

A1: Sí.

F: ¿Y cómo está escrito 700?

A3: Mal.

F: 6×10^2 , ¿no?, 6×100 , más...

A2: 10×10^1 .

F: 10×10^1 , muy bien.

C3-3.2. Hace ver que, tras representar de otra forma el número 700 en el ábaco, ahora tienen $6 \times 10^2 + 10 \times 10^1$, conectando así el registro de representación manipulativo del ábaco con el simbólico-numérico en forma de expresión polinomial con potencias de base 10.

- 2D2.2-3.2. Explica que han representado el número 700 como 6 centenas y 10 decenas [E, 1].
- 2L2.1-3.2. Hace ver, tras preguntar cómo está escrito el 700, que ahora tienen $6 \times 10^2 + 10 \times 10^1$, conectando el ábaco, la forma manipulativa, con el sistema de numeración decimal, con la forma aritmética o numérica [E, 3].

- 2J5.1-3.2. *Está viendo con los alumnos cómo han reescrito el número, haciendo ver que es 6×10 a la..., es decir, relacionando la representación del número con el proceso algebraico [E, 3].*

Ahora, ¿puedo quitar aquí [señala la varilla de las unidades] que quería quitar una? ¿Tengo?

A1: No.

F: No, ¿cómo puedo volver a escribir 700 para tener aquí [varilla de las unidades]?

A1: Pues quito de estas [quita una cuenta de la varilla de las decenas] y añado 10 aquí [señala la varilla de las unidades].

F: Vale, venga.



F: Vale, ¿y ahora puedes quitar la que te faltaba por quitar?

A1: [La estudiante A1 quita una cuenta de la varilla de las unidades].

F: Ya está. Ya habéis quitado 5 y teníais que quitar 45, ¿no? ¿Cuánto os falta por quitar?

A1: Sí, ahora aquí [señala la varilla de las decenas] hay que quitar 4.

F: Pues ya está, ¿no?

A1: Ah, vale, vale. Gracias.

C4-3.2. *Pregunta a los alumnos, señalando la varilla del ábaco de las unidades, cómo representar el número 700 de otra forma para obtener cuentas en esa varilla y poder terminar la resta.*

- 2J5.2-3.2. *Pregunta cómo representar el número de otra manera ahora que hay 10 en una [varilla, en la de las decenas] [E, 2].*
 - 2J5.2-3.2(I)1. *Cuando se represente de otra manera, se verá que simplemente hay que quitar una [cuenta] más [I, M].*



- F: ¿Entonces qué habéis hecho para reescribir el 700...? O sea, yo tenía 700 ahí, tenía aquí 700 [deja el ábaco con 7 cuentas en la varilla de las centenas], ¿qué habéis hecho?
- A2: Como es sistema decimal, pues aquí [señala la varilla de las decenas] hay 10, porque... representamos un 0, pues quitar una de aquí [varilla de las centenas] y ponerle las 10 aquí [varilla de las decenas] para luego restarlas aquí [varilla de las unidades].
- F: O sea que habéis..., ¿agrupado o desagrupado?
- A1: Desagrupado.
- A2: Aquí desagrupado.

C5-3.2. Pide a los alumnos que le expliquen el proceso que han seguido para reescribir el número 700, preguntando si han agrupado o si han desagrupado.

- 2P3.1-3.2. *Pregunta a los alumnos en qué ha consistido el procedimiento que han utilizado para resolver el problema de no poder quitar 5 unidades a un número que tenía 4 [E, 2].*
- 2R2.1-3.2. *Interactúa con los alumnos, preguntando si han agrupado o desagrupado, haciendo que verbalicen y que razonen [E, 3].*

- 2R2.1-3.2(I)1. *Es la metodología que se emplea en el aula: el juego es verbalizar, contar lo que se ha hecho, cómo se hace, cómo no se hace [I, M].*
- 2R2.1-3.2(I)2. *Ese vocabulario es muy normal en las aulas con los alumnos y es el que luego ellos van a tener que emplear en el aula [de primaria] [I, M].*
- 2D3.1-3.2. *Pregunta a los alumnos sobre el proceso seguido en su conjunto [E, 2].*
 - 2D3.1-3.2(I)1. *Para que tengan una visión general de lo que han hecho [I, D].*
- 2J7.1-3.2. *Pide a los alumnos que verbalicen, que expliquen lo que han entendido [E, 2].*

F: Desagrupado. Habéis desagrupado una centena en 10 decenas y luego una decena la habéis desagrupado en 10 unidades.

C6-3.2. Explica a los alumnos que han desagrupado una centena en diez decenas y una decena en diez unidades.

- 2M2.1-3.2. *Reinterpreta en términos matemáticos lo que han hecho los alumnos de forma guiada, haciendo ver que han desagrupado las centenas y las decenas [E, 3].*
 - 2M2.1-3.2(I)1. *Para que los alumnos puedan hacer uso de la definición de la resta mediante la manipulación, que en este caso consistiría en retirar cosas [I, M].*
 - 2M2.1-3.2(I)2. *Dejar que los alumnos elaboren el procedimiento y finalmente dar los nombres es algo clásico en Teoría de Situaciones: se empieza actuando y al final se atribuyen los nombres por parte del docente [I, M].*
 - 2M2.1-3.2(I)3. *Estos alumnos, que ya son adultos, deberían manejar sin problema los nombres vistos, centena, decena..., pero aún tienen dificultades con ello [I, M].*
- 2D3.2-3.2. *Hace ver que han desagrupado centenas en decenas y decenas en unidades para poder restar [E, 3].*
 - 2D3.2-3.2(I)1. *A los alumnos les cuesta entender el ábaco, tienen dificultades para comprender el proceso de desagrupar y que las fichas tienen distintos significados según la posición en los palos [I, M].*
- 2J7.2-3.2. *Hace ver que para poder realizar la resta han desagrupado, reforzando así esa parte del proceso [E, 2].*

A1: Vale, es que cuando tú lo haces en papel no haces esto así.

F: Ah, pues dime entonces qué es lo que haces en papel.

- A1: Claro, lo haces muy mental. O sea, en verdad sí que haces eso, pero... bueno, ya me has entendido.
- F: No, no, pero lo tienes que explicar porque luego os he pedido que lo hagáis simbólico...
- A1: Ya, ya, ya.
- F: Entonces, simbólico tienes que explicarlo conectado con esto.
- A1: Vale, vale.

C7-3.2. Pide a una alumna que explique cómo hace la resta en papel, haciendo ver que cuando hagan la representación en el registro simbólico-numérico tienen que conectarlo con el ábaco.

- 2L3.1-3.2. Pregunta a una alumna, a raíz de un comentario de esta, qué es lo que hace en papel [E, 1].
 - 2L3.1-3.2(I)1. Quiere que la alumna vea que restar en el papel es equivalente a restar con el ábaco [I, M].
- 2P4.1-3.2. Interactúa con una alumna sobre lo que esta hace en papel [la resta] [E, 1].
 - 2P4.1-3.2(I)1. Quiere que vea la relación entre lo que han hecho manipulativamente y lo que hace en papel [I, M].
- 2M3.1-3.2. Interacciona con una alumna, pidiendo que le explique cómo lo hace por escrito [E, 1].
 - 2M3.1-3.2(I)1. Pretende que los alumnos elaboren la relación entre los procesos manipulativos y el proceso simbólico, que es el que tienen automatizado y que aplican de un modo poco reflexivo [I, M].
- 2J8.1-3.2. Dice a una alumna que tiene que explicar cómo lo hace en papel porque tienen que ver la conexión entre la forma manipulativa y la algebraica, que es parte del objetivo de la actividad [E, 3].
- 2D4.1-3.2. Pide a los alumnos, a raíz del comentario de una alumna, que reflexionen sobre la conexión que hay entre la operación realizada de forma simbólico-numérica, con lápiz y papel, con el método tradicional, y la operación hecha con el ábaco, lo cual era parte del ejercicio [E, 3].

Fragmento 3

[F = Formadora del vídeo]. [A = Alumnos].

F: Vamos a corregir uno, el primero, ¿vale? Me dan $210 + 543$, ¿vale?, con símbolos.

C1-3.3. Plantea en la pizarra la suma « $210 + 543$ », haciendo ver que la ha representado con símbolos.

- 2M1.1-3.3. Plantea una suma de forma simbólica [E, 3].
 - 2M1.1-3.3(I)1. Imagino que va a realizar la suma con distintos procedimientos para ver las correspondencias entre ellos con el objetivo de que los alumnos entiendan por qué sumamos como sumamos y que adquieran técnicas para provocar que los niños de primaria también conozcan el porqué de los distintos algoritmos [I, M].
- 2D1.1-3.3. Formula en lenguaje simbólico-numérico la suma $210 + 543$ [E, 3].
- 2P2.1-3.3. Indica que va a sumar $210 + 543$ [E, 2].

Voy a representarlo..., vamos a empezar con manipulativo y voy a ejemplificar con el sorobán, que es el que parece que más trabajo cuesta, ¿vale? Entonces, en el sorobán, cuando lo representéis gráficamente el día del examen, o ahora en vuestro cuaderno si tenéis que tomar notas, es muy importante marcar la barra del medio, porque la proximidad de las bolas a la barra del medio es la que te indica qué número está representando, ¿vale?

C2-3.3. Empieza a realizar la suma con el sorobán, indicando que lo hace gráficamente.

- 2D1.2-3.3. Comienza a resolver la tarea con la forma manipulativa, concretamente con el sorobán, indicando que es la representación que más les cuesta a los alumnos [E, 2].
- 2J1.1-3.3. Empieza a resolver uno de los problemas mediante la representación de uno de los materiales manipulativos con ayuda de los alumnos [E, 2].
- 2M2.1-3.3. Empieza a resolver la suma haciendo la representación en el ábaco japonés, en el sorobán [E, 2].
 - 2M2.1-3.3(I)1. Aunque la suma de estos números no tiene llevadas, en el sorobán sí tiene que hacer un agrupamiento auxiliar, así que se ha pensado en unos

números para trabajar el cambio entre los agrupamientos auxiliares de cada unidad, pero no hay acarreo entre unidades [I, M].

- 2P2.2-3.3. *Trabaja la representación de dos números con un elemento manipulativo de forma gráfica [E, 2].*
- 2R1.1-3.3. *Está trabajando el concepto de la suma visualmente, gráficamente [E, 2].*
 - 2R1.1-3.3(I)1. *Lo trabaja visualmente porque es así como hay que introducir la suma en el aula, sobre todo con los niños de infantil y de 1.º y 2.º de primaria, ya que para ellos el cálculo mental puede resultar difícil, pero visualmente van entendiendo la suma, los agrupamientos [I, M].*
- 2L1.1-3.3. *Está explicando una suma con el sorobán [E, 2].*

Y ahora, dado el problema que me han planteado, ¿cuántas varillas pensáis que necesito escribir?

A: Tres.

Evento (2)1-3.3: Pregunta a los alumnos cuántas varillas hay que poner.

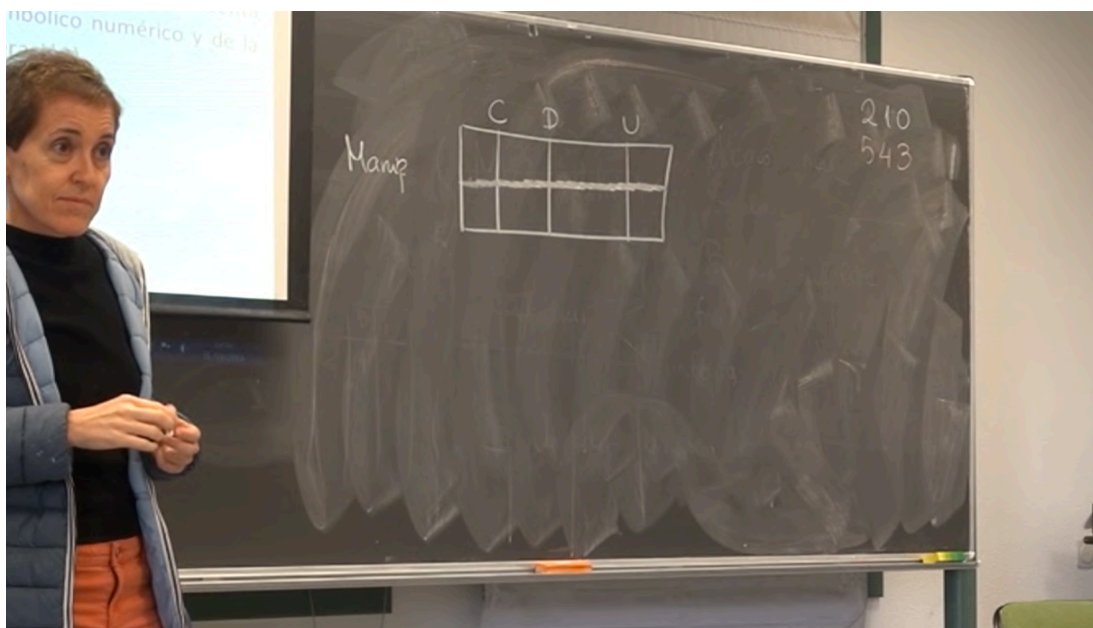
- 2D1.3-3.3. *Pregunta a los alumnos cómo colocar las varillas del sorobán para representar las cantidades dadas [E, M].*
- 2M2.2-3.3. *Pregunta cuántas varillas tiene que poner [E, M].*
- 2J2.1-3.3. *Pregunta cuántas varillas hay [que poner] [E, M].*

F: ¿Tres varillas? Pongo una varilla, dos varillas, tres varillas. Esta, unidades, decenas, centenas.

C3-3.3. Señala en la pizarra la correspondencia de cada varilla del sorobán con las unidades, las decenas y las centenas, respectivamente.

- 2J2.3-3.3. *Indica dónde se coloca cada una de las posiciones [E, 2].*

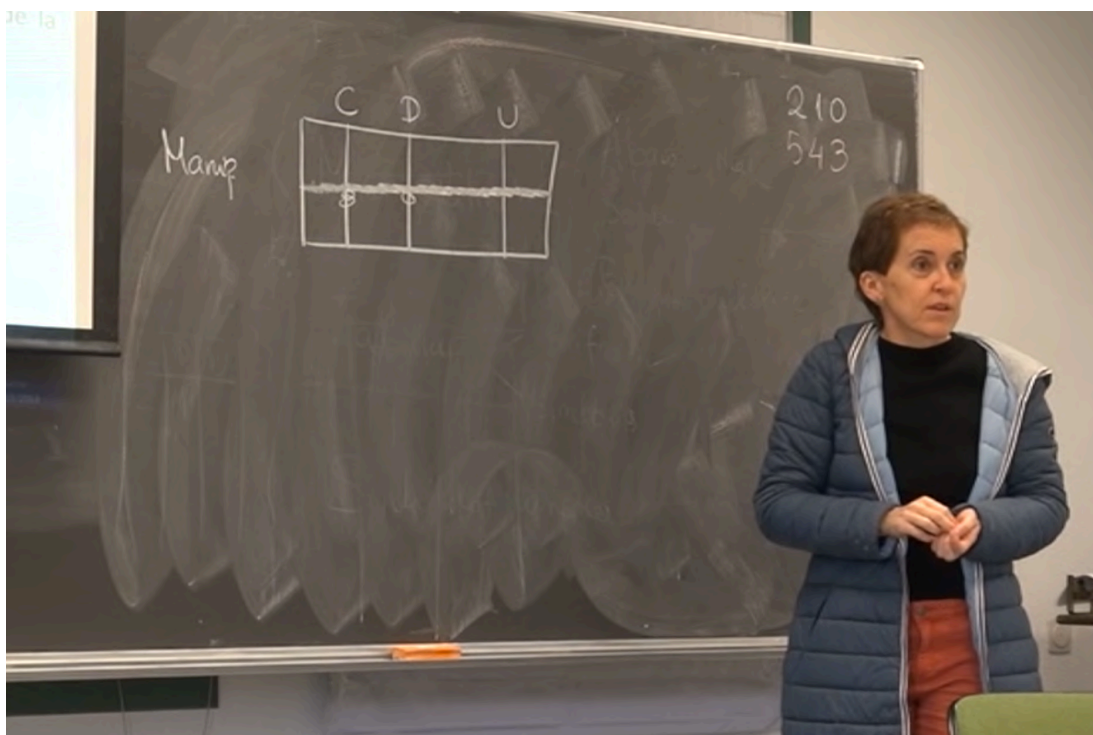
Esta la pongo un poco más gorda para que se note que es la barra de madera del medio, ¿vale? Y ahora, ¿cómo dibujo 210?



- A: Pues 0 unidades.
- F: 0, o sea que aquí no pongo nada pegado a la barra, ¿no? [señala la varilla de las unidades]. ¿Aquí? [señala la varilla de las decenas].
- A: 1 decena.
- F: Una pegada a la barra, ¿arriba o abajo?
- A: Abajo.
- F: Abajo, o sea que aquí va una.
- A: Y 2 centenas pegadas a la barra de abajo.
- F: Pegadas a la barra, abajo. Una y dos, ahí está. Eso es 210.

C4-3.3. Representa gráficamente el número 210, explicando cómo hacerlo con ayuda de una alumna, tras preguntar cómo dibuja dicho número.

- 2J2.2-3.3. Explica la manera de representar un número con este material manipulativo [E, 3].
- 2D2.1-3.3. Pregunta a los alumnos cómo empezar a representar la suma en el sorobán [E, 3].



Y ahora, tengo que sumar 543, es decir, que tengo que añadir 543 unidades ahí.

C5-3.3. Indica que ahora va a sumar 543, a añadir 543 unidades, entendiendo la suma como la unión de conjuntos.

- 2P3.1-3.3. Hace hincapié en que hay que sumar, en que hay que añadir; unidades, decenas y centenas, en este caso [E, 2].
- 2J3.1-3.3. Plantea ahora la suma, incidiendo en que sumar es añadir [E, 2].
- 2M3.2-3.3. Indica que va a juntar, a añadir, entendiendo la suma como la unión de conjuntos [E, 3].

Aprovecho la estructura, ¿vale? Entonces, añado 3 unidades, en la varilla de las unidades, que son 3 aquí abajo, ¿no?, 1, 2 y 3 [las dibuja en la varilla de las unidades]. Después añado 4 decenas, en la varilla... 1, 2, 3, 4, ¿vale? [las dibuja en la varilla de las decenas], 4 decenas.

A: Pero cambiamos...

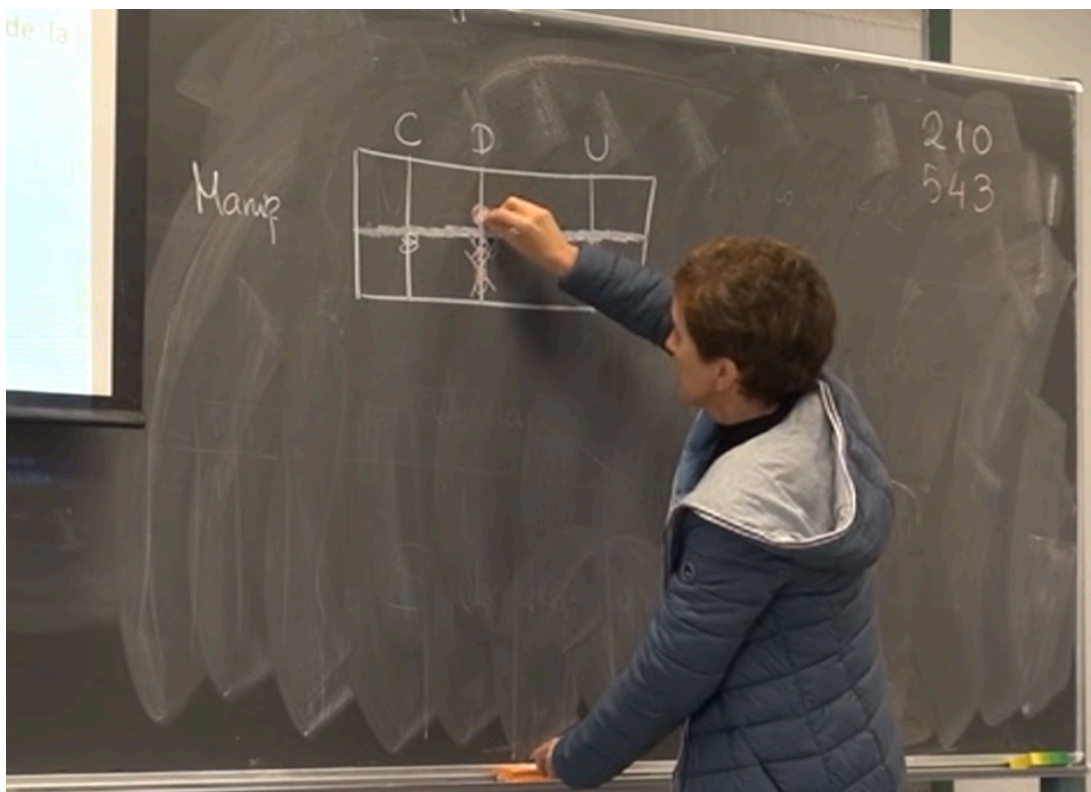
F: Pero...

A: Bajamos una de arriba y quitamos las de abajo.

F: Porque no tenéis 4, ¿vale?, ya no había suficientes, ¿por qué?, porque las bolas de arriba valen 5, entonces decís: «no pasa nada, estas, como eran 4 y 1, 5, se representan ahí arriba», ¿vale?

C6-3.3. *Hace ver, cuando suma las decenas de 543, que hay que hacer una agrupación auxiliar, representando un grupo de 5 decenas con una cuenta en la parte de arriba, diciendo que las cuentas de arriba valen 5 unidades del valor de la varilla.*

- 2P4.1-3.3. *Está mostrando la equivalencia, cómo se trabaja con el material [E, 1].*
- 2J3.2-3.3. *Explica cómo se suma en este material, haciendo ver la manera de representar 4 [decenas] más, indicando que hay que subir una [cuenta] arriba, haciendo ver que las de 5 van arriba y las de 1 van abajo [E, 3].*
- 2L1.2-3.3. *Explica la dificultad que plantea el sorobán con la varilla central, haciendo ver que cuando tienes 5 bolitas hay que subir una a la parte de arriba [E, 2].*
- 2M3.3-3.3. *Realiza un agrupamiento auxiliar, un cambio de 5 a 1, propio de este tipo de ábaco [E, 2].*
 - 2M3.3-3.3(I)1. *El agrupamiento auxiliar permite no tener que contar; se trata de números visibles y se «subitizan» las cantidades sin necesidad de contar [I, M].*
- 2D2.2-3.3. *Representa las unidades, las decenas y las centenas con ayuda de los alumnos, haciendo ver a lo largo de la suma que las bolas de la parte inferior son unidades y que las de la parte superior tienen un valor de 5 [E, 2].*



Y luego, 5..., tengo que añadir 5 centenas, ¿cómo lo hago?

A: Pues 1 arriba.

F: Una de arriba la bajo directamente o podría ir: «1, 2, 3, ya tengo 5, las subo ahí, 4, 5» [va señalando en la varilla de las centenas], ¿vale? Puedo hacerlo de dos formas distintas. Pero si aprovecho la estructura del ábaco, de manera que las bolas de arriba valen 5, como tengo que añadir 5, pues directamente ya añadido ahí esas 5 [dibuja una bola en la varilla de las centenas, en la parte superior, pegada a la barra horizontal], ¿vale?

C7-3.3. Hace ver, cuando suma las centenas de 543, que se puede poner directamente una cuenta de arriba o ir sumando las centenas de una en una.

- 2P5.1-3.3. Explica dos formas distintas de hacer lo mismo al trabajar con las centenas, colocar una bola arriba directamente o ir sumando unidades hasta agruparlas en 5, haciendo ver que la primera es mejor dado el material que están usando [E, 3].
- 2J4.1-3.3. Presenta dos maneras de representar en el ábaco el 5 [en la varilla de las centenas], poniendo una [cuenta] directamente arriba o no, viendo que son equivalentes [E, 2].
- 2M3.4-3.3. Plantea que para añadir 5 [centenas] se puede hacer de una en una [E, 2].

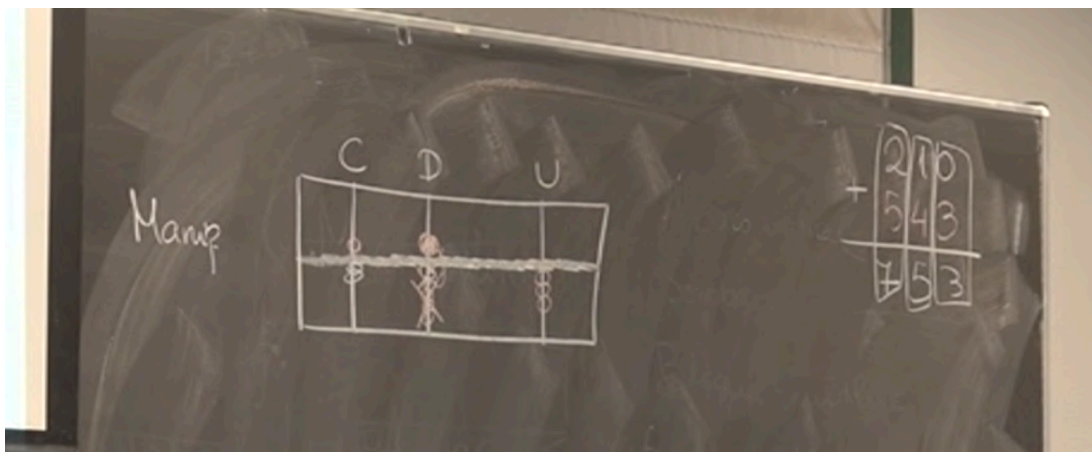
Entonces, [representa ahora el resultado en la suma con el algoritmo tradicional de forma simbólico-numérica a partir de lo que ha obtenido en la representación con el sorobán] me quedan 5 y 2, 7, aquí me quedan 5, y aquí me quedaban 3.

C8-3.3. Realiza la suma en el registro de representación simbólico-numérico, empleando el algoritmo tradicional de la suma en vertical.

- 2M3.1-3.3. Hace la suma en el registro simbólico-numérico con ayuda de los alumnos [E, 2].
 - 2M3.1-3.3(I)1. Quiere que vean el paralelismo que existe entre un proceso, la representación en el ábaco japonés, y otro, el registro simbólico-numérico, plantando la suma sin llevadas para que el paralelismo sea más evidente [I, M].
- 2D3.1-3.3. Realiza la suma con la notación simbólica tradicional [E, 3].
- 2L2.1-3.3. Realiza la suma con el sistema de representación numérico [E, 2].

Entonces, si yo lo represento así y voy sumando por columnas, tal cual he ido haciendo en el ábaco, tengo 0 unidades y 3 unidades, 3 unidades, 1 unidad y 4 unidades, 5 unidades, perdón, decenas, 2 centenas y 5 centenas, 7 centenas.

Vertical, lo he colocado vertical por parecerme a la estructura del ábaco, ¿no?, para tener en cuenta la «posicionalidad», ¿vale?, del sistema.



Entonces, he traducido al simbólico lo que he hecho aquí manipulativamente al escribir en simbólico en columnas y represento con cada columna cada una de estas [señala las varillas del sorobán de la pizarra]. Y luego, la escritura, sí que tengo que tener en cuenta que estos son 5 [señala las decenas de la suma en simbólico] con lo cual van arriba [en el sorobán] y esto son 7 [señala las centenas de la suma en simbólico], pues son 5 y 2 [en el sorobán], ¿vale?

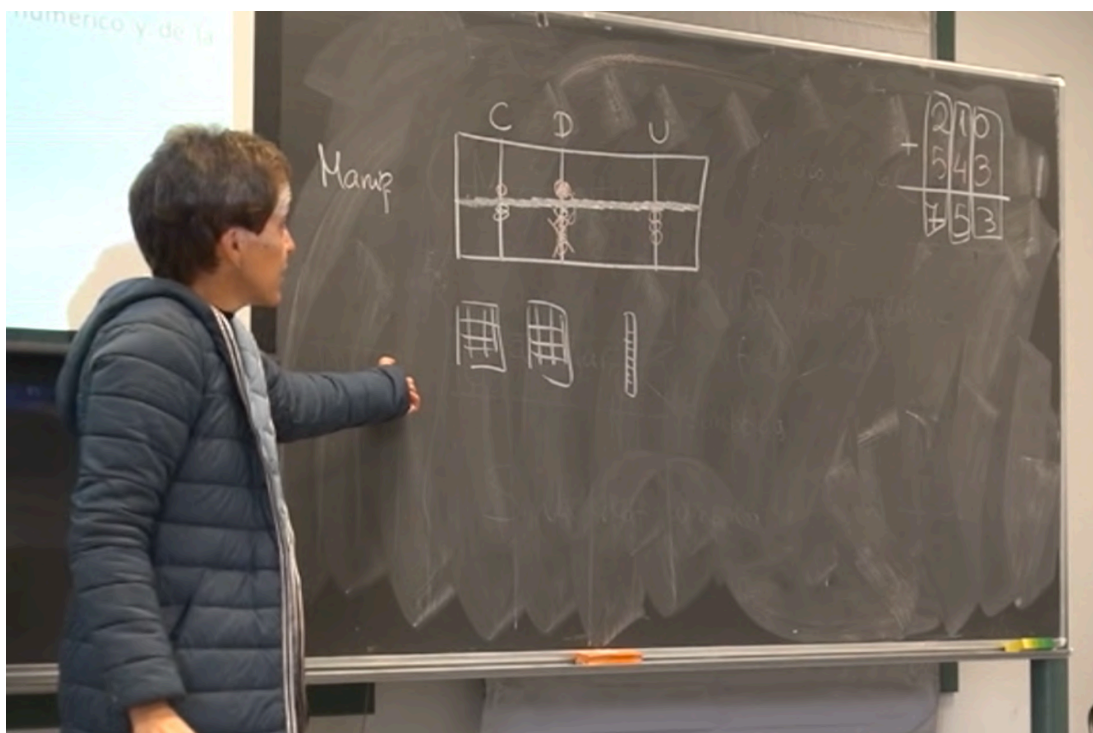
C9-3.3. Hace ver la correspondencia que hay entre el registro de representación manipulativo, el sorobán y el simbólico-numérico, indicando que cada columna de la suma en la forma simbólica se corresponde con una varilla del ábaco y que ha colocado de forma vertical la suma para parecerse a la estructura del ábaco, teniendo así en cuenta la «posicionalidad» del sistema.

- 2D3.2-3.3. Conecta la estrategia del sorobán con la de la notación simbólica tradicional [E, 2].
 - 2D3.2-3.3(I)1. Para que los alumnos comprendan por qué sumamos unidades, decenas y centenas en esta suma [I, M].
 - 2D3.2-3.3(I)2. Al tratarse de una suma sin reagrupamientos, la suma es relativamente sencilla [I, M].
- 2M4.1-3.3. Está realizando el paralelismo, haciendo ver que [el algoritmo tradicional de la suma] lo ha puesto vertical para parecerse a la estructura del ábaco [E, 2].
 - 2M4.1-3.3(I)1. Lo ha colocado vertical como lo colocamos siempre, es la manera tradicional de sumar. Siempre se nos ha dicho que lo ponemos así para que coincidan las unidades, etc. Sin embargo, quiere insistir tanto en la equivalencia

con el ábaco que incluso llega a justificar la disposición de los números que ponemos nosotros. El ábaco hay veces que lo utilizan así [hace un gesto indicando que lo sitúan con las varillas en horizontal y no en vertical como lo ha dibujado la formadora], por lo menos los chinos. Bueno, con eso intenta remarcar eso [I, M].

- 2P6.1-3.3. Está relacionando el material manipulativo [el sorobán] con la escritura simbólico-numérica [E, 2].
- 2J5.1-3.3. Muestra la relación entre lo simbólico y la representación del material, reforzando la idea de la posición de las unidades, las decenas y las centenas, es decir, la idea de sistema posicional [E, 3].
- 2L2.2-3.3. Conecta el sorobán con el sistema numérico, haciendo ver que el 753 es lo mismo que tiene en el sorobán, es el 5 más los 2 de abajo, en las centenas, que es un 7, el 5 de las decenas, que es el 50, y el 3 que tiene abajo en las unidades, que es el 3, es decir, a partir del 210, sumando 543, obtiene ese 753 de forma equivalente en ambos sistemas [E, 2].

Bloques multibase, bloques multibase, pongo aquí 210, ¿no?, que son 1 y 2 placas de 100 y 10, una decena; este es el 210.

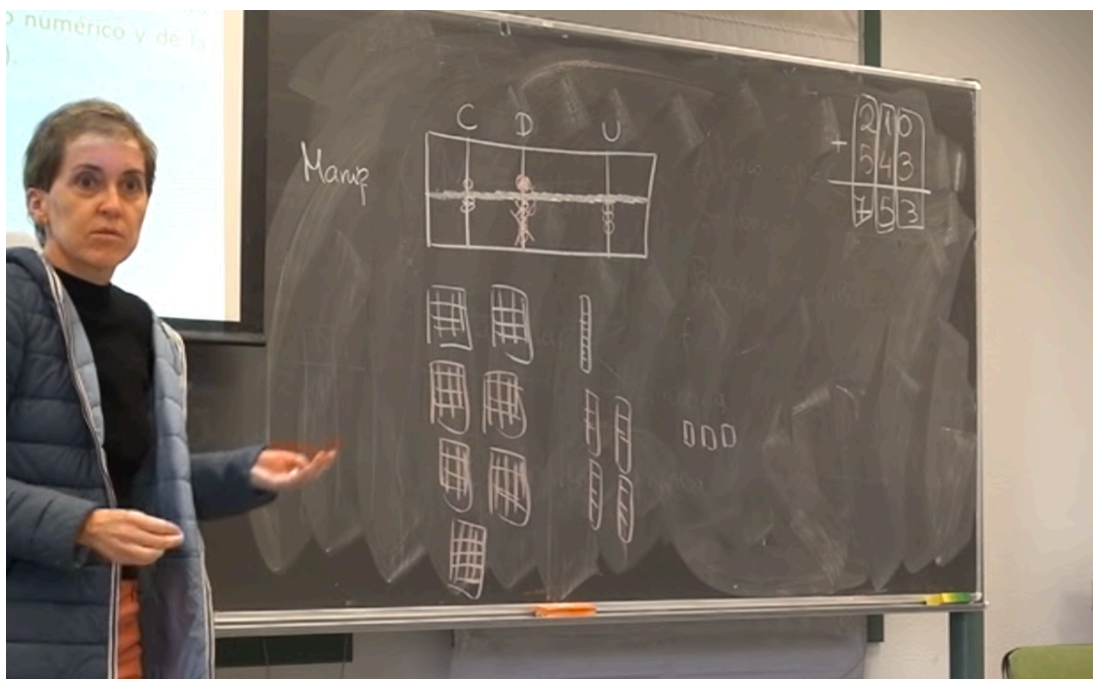


Y ahora agrupo 543; una, dos, tres, cuatro y cinco [dibuja 5 placas de 100 unidades], añado, ¿vale?, 500. 40: una, dos, tres, cuatro [barras de 10]; y 3: uno, dos y tres [unidades].

C10-3.3. Empieza a realizar la suma con los bloques multibase de forma gráfica, agrupando en columnas las placas, las barras y las unidades, respectivamente, de cada sumando.

- 2P7.1-3.3. Utiliza otro material manipulativo, los bloques multibase, viendo cómo representar cada número de la suma con ese material [E, 2].
- 2D4.1-3.3. Hace una representación gráfica de los bloques de base 10, empleando las mismas cantidades de la suma anterior, tratando de representar el proceso de reunir todos los bloques, el proceso de la suma [E, 3].
- 2J6.1-3.3. Realiza la suma con los bloques multibase, representando y colocando por columnas las placas o planchas..., las centenas, las decenas..., incidiendo en la idea de agrupar o de añadir para sumar [E, 3].
- 2M5.1-3.3. Emplea los bloques multibase [E, 2].
- 2L3.1-3.3. Explica cómo se haría la suma con bloques multibase [E, 2].

Y ahora lo pongo todo junto. ¿Vale?



Y digo: «aquí tengo 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 [placas de 100]», ¿necesito agrupar? [Rodea con una línea todas las placas de 100].

A: No.

F: No necesito agrupar. Aquí tengo 1, 2, 3, 4, 5, 6, 5, ¿necesito agrupar estos 5 de alguna manera? [Rodea con una línea todas las barras de 10]. No porque es base 10. Y aquí tengo 3, ¿vale?

C11-3.3. Pregunta si necesita agrupar a la hora de juntar las centenas, las decenas y las unidades de ambos sumandos, haciendo ver que no porque están trabajando en base 10.

- 2J7.1-3.3. Hace ver que en esta suma no hay que agrupar porque no hay 10 en ninguno de los grupos, es decir, no hay llevada [E, 3].
 - 2J7.1-3.3(I)1. Aunque en esta suma no se ve cómo sería construir un bloque del siguiente, sí se ve que la estrategia consiste en pensar si hay que agrupar o no después de añadir [I, M].
- 2R3.1-3.3. Pregunta si hay que agrupar, haciendo ver que no es necesario [E, 2].
 - 2R3.1-3.3(I)1. Trata de emplear una metodología basada en el juego y en presentar los conceptos de forma gráfica, como la suma en este caso, ya que es la metodología que hay que emplear con los niños [de primaria] [I, M].

Evento (2)2-3.3: Rodea en la pizarra las placas de 100 de ambos sumandos y, por otro lado, las barras de 10 de ambos sumandos.

- 2P8.1-3.3. Está uniendo [rodeando con la tiza] las centenas, las decenas y las unidades, trabajando lo que significa la suma [E, M].

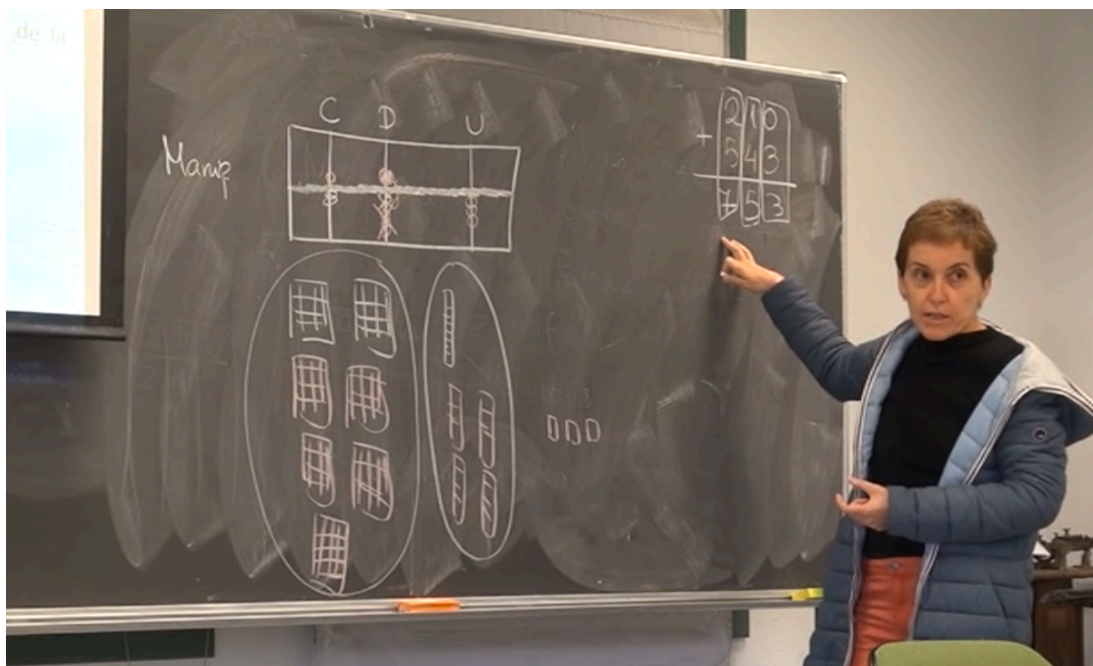
O sea, que me vuelve a salir 2, 4, 6, 7 [centenas; señala la suma en simbólico], 2, 4, 5 [decenas], 5 [señala la suma en simbólico] y 3. Y veo la conexión de uno con otro, ¿vale?

C12-3.3. Hace ver la correspondencia que hay entre los bloques multibase y el registro de representación simbólico-numérico.

- 2M5.2-3.3. Indica el paralelismo entre los bloques multibase y el proceso simbólico [E, 3].
 - 2M5.2-3.3(I)1. Quiere ver que se puede representar el algoritmo de muchas maneras distintas, porque son algoritmos distintos, y que simplemente es un problema de traducción; se basa en Duval [I, M].
- 2P9.1-3.3. Está conectando el material manipulativo [los bloques multibase] con la escritura simbólico-numérica [E, 3].

¿Está claro hasta aquí?

A: Sí, eso sí.

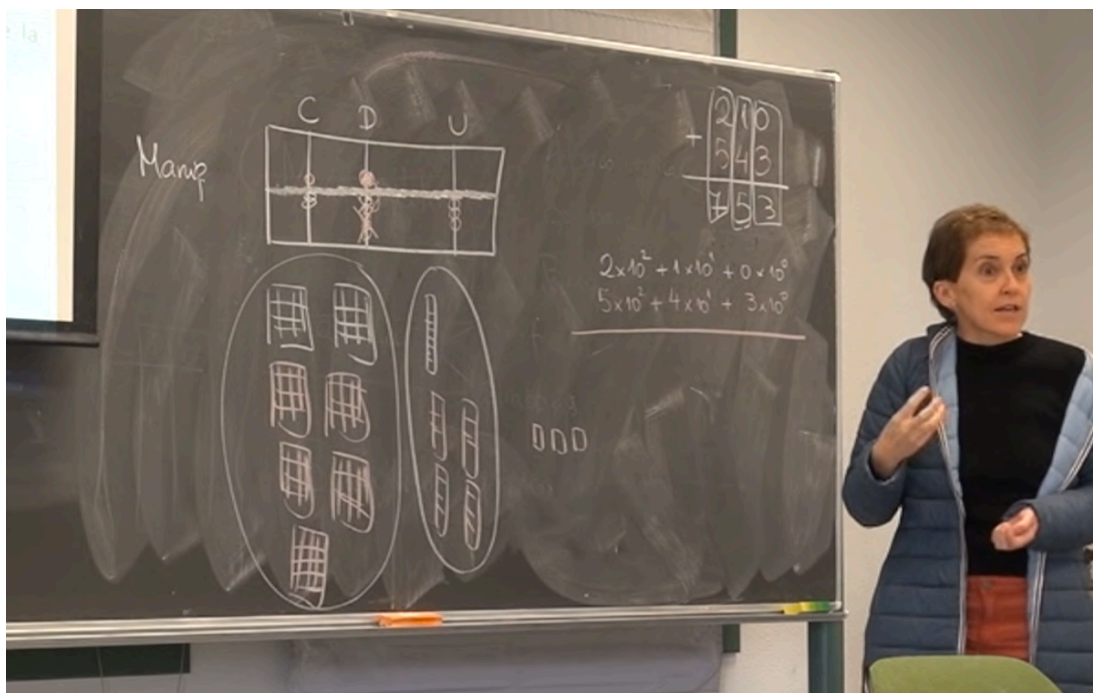


- F: El que quiera escribirlo simbólico-numérico de otra manera en la que se vea la «posicionalidad» del sistema, podría escribirlo de la siguiente forma: $2 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 0 \times 10^0$, ese es el primer sumando; segundo sumando, $5 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 3 \times 10^0$; y sumo.

C13-3.3. Escribe los sumandos con expresiones polinómicas de potencias de 10, haciendo ver que se trata de otra forma de realizar la suma dentro del registro de representación simbólico-numérico en la que se ve la «posicionalidad» del sistema.

- 2L3.2-3.3. Empieza a realizar la suma en otro sistema de representación, escribiendo los números como potencias de 10 [E, 2].
 - 2L3.2-3.3(I)1. Con la escritura que está usando para sumar 210 y 543, al agrupar las potencias de 10 le va a salir el 753 [I, M].
- 2P10.1-3.3. Realiza la descomposición polinómica de los números, viendo su equivalencia con la escritura simbólico-numérica abreviada [E, 2].
- 2J8.1-3.3. Empieza a realizar la suma con expresiones en potencias de 10 [E, 2].
 - 2J8.1-3.3(I)1. Para realizar la suma hay que emplear la propiedad distributiva para ir haciendo las agrupaciones de los números [I, M].
- 2D5.1-3.3. Representa la suma empleando la expresión polinómica de los números en términos de potencias: el 210 como 2×10^2 más un grupo de 10 más 0 unidades, y del mismo modo con el otro número, haciendo ver que así se ve la estructura posicional [E, 3].

- 2M6.1-3.3. *Está haciendo el proceso con la escritura polinómica, indicando que es una forma en la que se ve la «posicionalidad» [E, 3].*
 - 2M6.1-3.3(I)1. *Porque quiere justificar todo el proceso realizado hasta el momento [I, M].*
 - 2M6.1-3.3(I)2. *Desde un punto de vista didáctico, no creo que eso que está haciendo sea precisamente lo posicional; lo posicional es lo de arriba [la suma con el algoritmo tradicional]. Yo podría escribir ese número en cualquier sistema y respondería a esa escritura polinómica. Por un lado está la escritura polinómica y por otro lado está el tipo de sistema. El sistema que nosotros usamos es regular y posicional, pero, por ejemplo, si usáramos un sistema decimal como el chino, que es multiplicativo y no es posicional, la descomposición polinómica sería la misma. Con lo cual, decirle posicional cuando escribo la polinómica yo creo que no es del todo correcto. Otra cosa es que diga: «bueno, puedo usarlo y luego veo cómo agrupo», y así justifica por qué lo hago de la otra manera; digamos que sería otro proceso distinto, pero no le añade «posicionalidad» al proceso. Lo que le añade mucha «posicionalidad» es el sorobán, el ábaco japonés, ese sí, porque no queda más remedio. Sin embargo, por ejemplo, los bloques multibase puedes juntarlos todos y luego separarlos, ahí la posición no es relevante. Los bloques multibase se comportan como un sistema aditivo y en los sistemas aditivos la posición no es nada relevante. Ahora, cuando tú escribes eso [la expresión polinómica], eso vale para cualquier sistema, entonces no creo que añada nada posicional [I, M].*
 - 2M6.1-3.3(I)3. *Hay que indicar que se tiene que usar la propiedad distributiva para llegar de $2 \times 10^2 + 5 \times 10^2$ a 7×10^2 [I, M].*



Y ahora, al sumar, utilizo la propiedad conmutativa, para colocar los sumandos en el orden que quiero, y asociativa, para ir organizando, ¿vale? O sea, que este [señala 5×10^2] —que, si lo coloco seguido, estaría aquí el cuarto [señala detrás de 0×10^0]— lo quiero colocar el segundo para agruparlo con este [señala 2×10^2], este [señala 4×10^1] —que estaría el quinto [señala detrás de 0×10^0]— lo coloco el tercero para agruparlo con este [señala 1×10^1], y este [señala 3×10^0] lo agrupo con este [señala 0×10^0]. Y ahora, al agrupar, ya me quedan 5 y 2, propiedad distributiva, 7×10^2 más, 4 y 1, 5×10^1 más, 0 y 3, 3×10^0 . Pero ahí estoy utilizando la asociatividad de la suma, la conmutatividad de la suma y la distributiva de la suma y el producto de números enteros, ¿vale?

C14-3.3. Indica que para realizar la suma utiliza la propiedad conmutativa de la suma, la propiedad asociativa de la suma y la propiedad distributiva de la suma y el producto de números enteros.

- 2L4.1-3.3. Indica que, para realizar la suma, emplea la propiedad conmutativa, la asociativa y la distributiva de los números naturales [E, 3].
 - 2L4.1-3.3(I)1. Quizá los alumnos no vean tan claro el uso de la distributiva al tratarse de una suma muy sencilla [I, M].
- 2P11.1-3.3. Indica las dos propiedades aritméticas que va a utilizar para realizar la operación [E, 3].

- 2D6.1-3.3. *Justifica la suma en la forma polinómica con propiedades de la suma y el producto [E, 3].*
- 2M7.1-3.3. *Indica que emplea las propiedades asociativa, conmutativa y distributiva [E, 3].*
 - 2M7.1-3.3(I)1. *Le interesa mucho que los alumnos entiendan cuáles son las propiedades que sustentan las técnicas de cálculo. Es muy importante hacer eso para que sepan que esas propiedades hay que trabajarlas. Parece que la conmutativa, la asociativa y la distributiva son nombres que se añaden cuando uno estudia matemáticas, un poquito ya mayor, pero sin embargo son propiedades que hay que tener operativas para poder justificar los procedimientos que usamos. No se entiende ninguna técnica de cálculo ni, por supuesto, el producto sin las propiedades que ha enunciado; no tendríamos esas técnicas. Es una muy buena decisión explicar esas propiedades porque didácticamente van a tener mucha transcendencia [I, M].*
- 2J9.1-3.3. *Hace ver que usa la propiedad distributiva y la descomposición del número [E, 2].*

Evento (2)3-3.3: Eleva el volumen de la voz cuando dice «conmutativa» y «asociativa».

- 2L4.2-3.3. *Alza la voz cuando dice «conmutativa» y «asociativa» [E, D].*

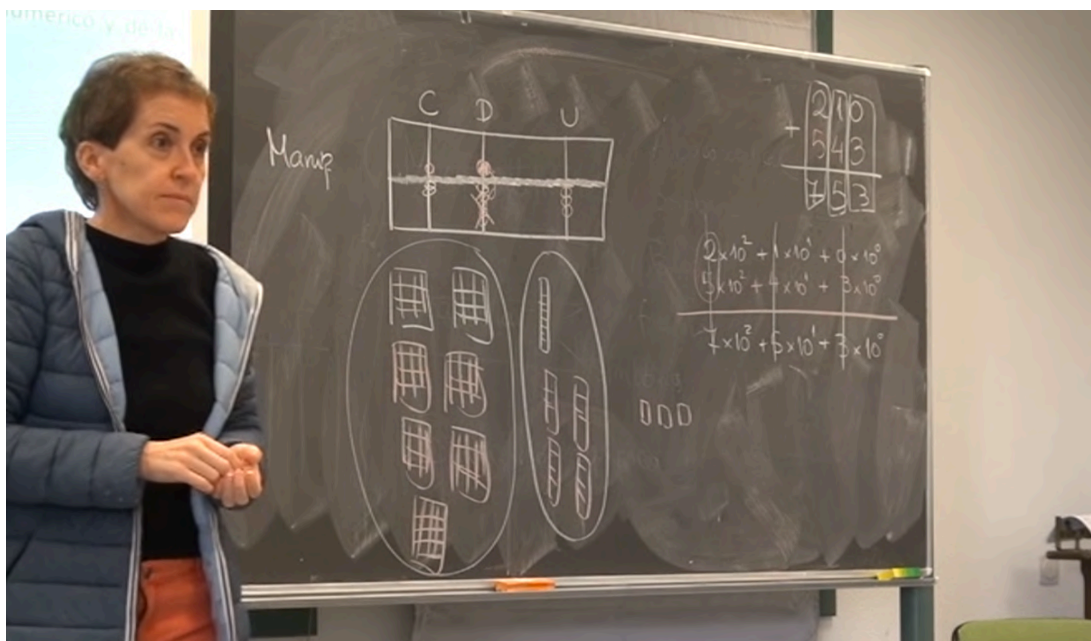
Pero si lo coloco así, veo esto, esto y eso [señala los coeficientes que acompañan a 10^2 , 10^1 y 10^0], que es lo mismo que esto, esto y eso [señala el 7, 5 y 3 del resultado de la suma en la forma simbólico-numérica], que es lo mismo que esto, esto y esto [señala los bloques multibase en la pizarra] y que es lo mismo que 1, 2 y 3 varillas [señala las varillas del sorobán en la pizarra].

C15-3.3. Hace ver las correspondencias que hay entre el registro de representación simbólico-numérico con expresiones polinomiales y el resto de registros ya representados: la suma simbólica tradicional, los bloques multibase y el sorobán.

- 2M7.2-3.3. *Está estableciendo paralelismos [E, 2].*
- 2P12.1-3.3. *Conecta los cuatro métodos empleados para realizar la suma, mostrando la equivalencia entre los mismos [E, 3].*

- 2J9.2-3.3. Explica la conexión con todas las formas [E, 2].

¿Está claro hasta aquí?



A: Sí.

F: Ahora, ¿qué diferencia hay entre esto y la siguiente suma que me plantean ahí [en el PDF proyectado en la pantalla]? $316 + 429$.

C16-3.3. Plantea una secuenciación al proponer ahora una suma en la que hay que hacer reagrupamientos: $316 + 429$.

- 2L6.1-3.3. Plantea un ejemplo con llevadas tras realizar uno sin llevadas [E, 2].
- 2D7.1-3.3. Plantea la siguiente suma, preguntando a los alumnos si detectan el nuevo fenómeno que aparece en ella [E, 1].
- 2M8.1-3.3. Plantea una pregunta sobre un ejemplo [una suma] con llevadas, con acarreo entre unidades [E, 2].
- 2J10.1-3.3. Plantea qué pasaría si hubiera llevadas [E, 2].
- 2P14.1-3.3. Plantea una suma en la que se modifica un elemento, preguntando en qué varía [E, 1].

A: Que me paso de unidades y tengo que pasar a las decenas.

F: Que cuando agrupo aquí, por ejemplo [bloques multibase], o cuando agrupo aquí [sorobán], o cuando agrupo aquí [expresiones de sumas y productos de potencias de 10], aquí aparecen más de 10 [señala al 3 de 3×10^1]. En algún sitio aparecen más de 10, por ejemplo, cuando tengo 9 unidades y 6 unidades, aquí aparecerían

15 fichitas pequeñas [bloques multibase], aquí tendría que representar 15 [sorobán] y aquí aparecería 15×10^0 . Pero como estamos en base 10, no puedo dejarlo así, tengo que agrupar, tengo que agrupar. Entonces, agrupo 10 y dejo 5, y las 10 que agrupo las paso al siguiente valor, es decir, pego 10 fichas y construyo una barra [bloques multibase], agrupo 10 y me sale otra bola aquí en el ábaco, aquí abajo [parte baja de la varilla de las decenas], o agrupo 10 y me sale uno más aquí [en 5×10^1] y aquí [en 3×10^0] dejo las que se quedaban sueltas, las 5, ¿vale? O sea, que la única diferencia es que aquí, después de representar cada cantidad y de ir poniendo por orden el valor de cada una, tengo que agrupar porque en algunos sitios tengo 10 o más, ¿vale? Es la única diferencia.

C17-3.3. Hace ver que en la nueva suma aparecen más de 10 unidades al sumar, por lo que hay que reagrupar al estar en base 10, explicándolo en cada registro de representación plasmado en la pizarra.

- 2M8.2-3.3. Está viendo cómo se realizan los reagrupamientos en cada uno de los sistemas de representación que está utilizando [E, 3].
 - 2M8.2-3.3(I)1. Lo que quiere ver es que todos los procesos son el mismo y que son equivalentes al que hacemos de una manera mucho más automatizada en nuestro cálculo simbólico, en nuestra técnica de cálculo usual [I, M].
 - 2M8.2-3.3(I)2. En realidad aquí solamente hay dos tipos de «algoritmos», sobre todo con las llevadas. Cuando ella cuenta lo de las llevadas, efectivamente, en el caso del ábaco y en el caso simbólico no se ve el cambio, es un cambio que yo produzco porque sé que el sistema funciona así. Me explico: sé que en la varilla del ábaco donde están las decenas cada bola vale 10 veces la unidad, pero eso no se ve, no hay una percepción de ese valor. Lo mismo ocurre en un sistema posicional, que se basa en eso, los símbolos son los mismos, pero solo la posición le da un valor distinto; pero es algo que yo debo conocer de inicio. La tabla estaría a mitad de camino, aunque los cambios se siguen sin percibir, se tienen que saber. Sin embargo, en los bloques multibase yo sí observo que, por ejemplo, 10 varillas [decenas] son físicamente equivalentes a una tabla [centena]; la manipulación te pone de manifiesto los cambios que hay que hacer. De hecho, el material Montessori de los multibase está hecho con bolitas con alambres y se ve que la tabla está hecha con 10 varillas, se pueden contar las 100 bolitas, y la de

1000 es un cubo y se pueden contar las 1000. Se observa cómo físicamente el agrupamiento es compatible [I, M].

- 2R4.1-3.3. *Indica que están trabajando en base 10 [E, 1].*
- 2D8.1-3.3. *Hace ver, con ayuda de una alumna, que hay un nuevo fenómeno que tratar en la suma cuando aparecen 10 o más de una cierta unidad –unidades, decenas o centenas–, que es el reagrupamiento, describiendo en los cuatro sistemas de representación que está usando –la notación vertical usual, la notación polinómica, el sorobán y los bloques de base 10– cómo representaría el proceso de que tengo 9 y 6, 15 unidades, las cuales se agrupan en 1 decena y 5 unidades, siendo un objetivo de la actividad dicha comparación [E, 3].*
- 2J10.2-3.3. *Explica en los tres ámbitos [en los diferentes sistemas de representación] que las agrupaciones irían cambiando, entrando en juego la propiedad distributiva [E, 2].*
- 2P14.2-3.3. *Hace ver, en cada uno de los métodos trabajados en clase por los alumnos, que ahora al sumar tenemos más de 9 unidades [E, 2].*

Y ahora, si quisiéramos representar esto en formato tabla, como tenía Martín, ¿no? ¿Cuántas columnas pondré yo en la tabla?, ¿qué me pide el cuerpo? Tengo que dibujar una tabla, ¿vale?, vamos a dibujar una tabla [comienza a dibujarla en la pizarra], con filas y columnas, ¿cuántas columnas pongo?

A: Tres.

F: Tres, ¿por qué tres?

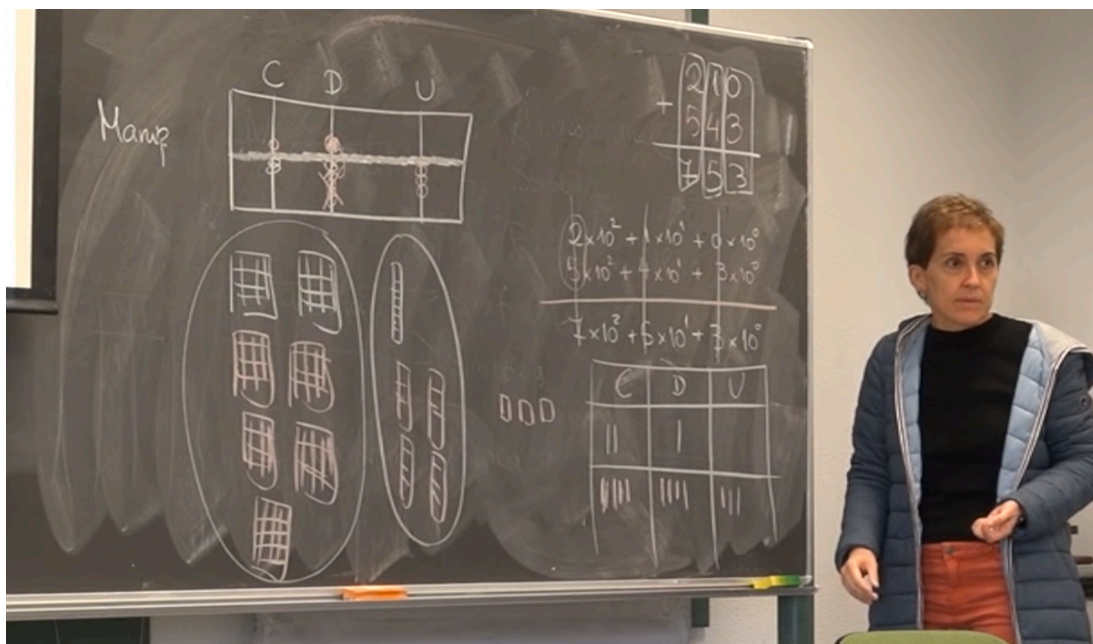
A: Centenas, decenas y unidades.

F: Unidades, decenas y centenas, ¿vale? Y entonces, represento el primer número, 210: 1, 2, 1, eso es 210 [pone dos rayas en la primera casilla de las centenas y una en la primera de las decenas]. Represento el segundo número, 500: 1, 2, 3, 4, 5; 40: 1..., bueno, en rosa, ya puestos..., 1, 2, 3, 4, 5; 40: 1, 2, 3, 4; y 3: 1, 2, 3. Y agrupo:

Evento (2)4-3.3: Indica que ahora agrupa.

- 2R5.1-3.3. *Indica que va a agrupar [E, M].*

¿cuántas unidades tengo al final?, 3, ¿cuántas decenas tengo al final?, 5, ¿cuántas centenas tengo al final?, 7, fin.



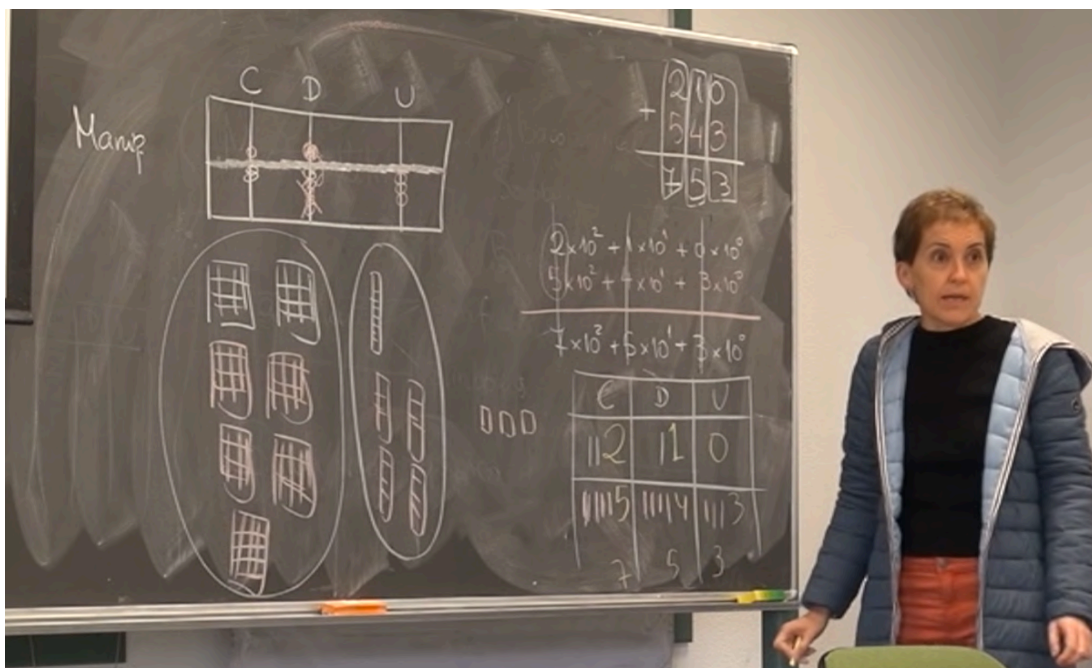
Este sistema de representación es icónico-gráfico porque he representado aquí las cantidades con palitos, pero tiene una estructura especial porque está en una tabla, ¿vale? Entonces, vamos a decir que es un sistema de representación tabular-gráfico.

C18-3.3. Representa la primera suma con una tabla, con ayuda de un alumno, haciendo ver que se trata de un registro de representación tabular-gráfico: tabular, por haber empleado la estructura de una tabla, y gráfico, por haber representado las cantidades con palitos o rayas.

- 2D10.1-3.3. Presenta la notación intermedia que se había introducido [al principio de la sesión], la tabla, concretamente una versión de tabla de valor posicional donde las unidades, decenas y centenas se representan con palotes, dando a dicho sistema de representación el nombre de tabular-gráfico al tener un carácter gráfico [E, 3].
 - 2D10.1-3.3(I)1. La versión que ha surgido de la tabla se parece más al ábaco que a los bloques multibase, pero ya se dijo al principio [de la sesión] que los alumnos podían improvisar la tabla al no haberse tratado antes [I, M].
- 2M10.1-3.3. Realiza una tabla, indicando que se trata de un sistema tabular gráfico [E, 3].
 - 2M10.1-3.3(I)1. Además de este tipo de tabla, cabría la posibilidad de escribir 2, 1, 0, es decir, los números [I, M].
- 2L7.1-3.3. Utiliza el sistema de representación tabular gráfico [E, 3].

- 2P16.1-3.3. Realiza la suma con otro método, con una tabla, indicando que tiene características icónico-gráficas, haciendo ver que está haciendo lo mismo que con los otros métodos [E, 3].
- 2J11.1-3.3. Explica otro tipo de representación: la tabla gráfica [E, 3].
 - 2J11.1-3.3(I)1. Las diferentes formas de representar que explica son todas válidas y complementarias [I, M].

Si en vez de poner aquí gráficos, yo hubiera dicho: «oye, mira, no me lío con los gráficos, ya puestos, como ya controlo mejor los símbolos, pues voy a poner aquí 210 y aquí abajo voy a poner 543 y luego ya sumo: 4 y 1, 5; 5 y 2, 7; 3 y 0, 3», ¿vale?



Sería tabular, tiene una estructura tabular, no es puramente simbólico-numérico, tiene una estructura tabular, pero con números dentro, tabular-numérico, ¿vale?

C19-3.3. Representa de nuevo la primera suma en la tabla, haciendo ver que en esta ocasión se trata de un registro de representación tabular-numérico: tabular, por haber empleado la estructura de una tabla, y numérico, por haber representado las cantidades con símbolos.

- 2D10.2-3.3. Presenta otro sistema de representación que denomina tabular-numérico, ya que tiene números dentro de la tabla [E, 3].
- 2M10.2-3.3. Realiza por último otra tabla, indicando que se trata de un sistema tabular simbólico [E, 3].

- 2M10.2-3.3(I)1. *Plantea lo tabular como un paso intermedio para llegar al proceso simbólico. Si nos damos cuenta, en el simbólico normal, el 5 que está puesto en las centenas en el número de abajo y el 5 que aparece en las decenas no se diferencian en nada, solo en la posición. Sin embargo, en la tabla se diferencian en que un 5 lleva una D arriba y el otro lleva una C arriba, es decir, hay una C y una D que dicen lo que son. Y aunque también están puestos en un orden, no es solo la posición lo que marca el valor, sino la C, la D y la unidad. Entonces, es un paso intermedio. Sin embargo, los bloques multibase es un sistema puramente aditivo, con lo cual interpreto que la evolución que ella ha presentado aquí es una evolución muy interesante entre cómo se suma en un sistema aditivo, que se suma como en los bloques multibase, cómo se sumaría en un sistema multiplicativo, como sería el tabular, y cómo se suma en un sistema posicional, que es el nuestro. El ábaco es puramente posicional también, pero, en vez de tener símbolos para los distintos símbolos, tiene un sistema aditivo pequeñito en cada orden, pero no es lo más relevante [I, M].*
- 2M10.2-3.3(I)2. *Hay un intento de mostrar cómo funciona cada sistema para que el alumno tenga recursos para que luego, cuando vaya a clase, sepa qué tipo de sistema puede utilizar para que los alumnos de primaria construyan de manera satisfactoria los algoritmos clásicos de las operaciones [I, M].*
- 2L7.2-3.3. *Utiliza el sistema de representación tabular numérico [E, 3].*
- 2P16.2-3.3. *Realiza la suma con otro método, con una tabla, indicando que tiene características numéricas, haciendo ver que está haciendo lo mismo que con los otros métodos [E, 3].*

C20-3.3. Mantiene plasmados en paralelo los cinco registros de representación que ha empleado para realizar la suma.

- 2L7.3-3.3. *Tiene en la pizarra plasmados todos los sistemas de representación que ha empleado para realizar la misma suma [E, 3].*

Entonces, yo voy pasando de lo más concreto, que sería: «mi madre me ha dado 316 euros y mi abuela 429, ¿cuántos euros tengo en total?», después paso a manipular, con ábacos verticales, con ábacos japoneses, con bloques multibase..., y cuando interiorizo bien eso, digo: «ostras, venga, lo voy a poner en una tabla gráfica y voy a indicar lo que me indica cada varilla o lo que me indica cada

agrupamiento de los bloques multibase, que es posición, en las columnas de una tabla, y ahí voy a poder marcarlo con símbolos». Esta tabla con símbolos se llama tablero de posición, porque tengo las posiciones indicadas —unidades, decenas y centenas—, y es uno de los recursos que más utilizan en el método famoso este Singapur, que habréis visto o habréis oído hablar de él, ¿vale? Entonces, ¿qué están haciendo?, están haciendo una transición de los más concreto, pasando por lo manipulativo, hacia lo abstracto, que sería..., esto es lo más abstracto [señala las expresiones de sumas y productos de potencias de 10] y esto es lo abstracto que se trabaja en primaria [señala la suma hecha en el registro de representación simbólico-numérico], ¿vale? Pero no trabajan directamente con esto, vamos pasando..., concreto, concreto, concreto, concreto [de forma manipulativa], voy intentando abstraer un poco, pero tengo mis gráficos que me ayudan a visualizar lo que estoy haciendo [de forma tabular], y finalmente mi objetivo es escribirlo simbólico-numéricamente, de forma abstracta, ya al final.

C21-3.3. Pone de manifiesto la secuenciación planteada: se parte de lo más concreto, que sería el problema dado en su contexto; luego se pasa a manipular con ábacos verticales, con ábacos japoneses y con bloques multibase; después se hace la suma en una tabla gráfica y luego en una numérica, las cuales se denominan tableros de posición; y finalmente se llega a lo más abstracto, que sería la suma simbólica con expresiones polinomiales o, en primaria, la suma simbólica tradicional, siendo el objetivo escribir finalmente el proceso de forma abstracta.

- 2M11.1-3.3. Pone de manifiesto todo el proceso, la evolución, la progresión desde lo manipulativo, pasando por lo tabular, para llegar a lo simbólico [E, 3].
 - 2M11.1-3.3(I)1. Lo hace porque la idea es que el alumno conozca de dónde vienen las técnicas y cómo se adaptan al sistema; hace una progresión adecuada para que el alumno tenga recursos y pueda construir sus técnicas de cálculo, porque no se trata de que tú enseñes la técnica, sino de que el alumno la construya; es la única manera de conseguir un aprendizaje significativo del cálculo. No tiene sentido enseñar un algoritmo sin saber cómo funciona; no están para eso las matemáticas [I, M].
 - 2M11.1-3.3(I)2. No creo que tenga el mismo nivel manipulativo el ábaco que los bloques multibase. El ábaco es un sistema posicional, en las dos representaciones

tipo ábaco que ha hecho ya se marca la posición con las mismas bolas, aunque estén en sitios distintos. Sin embargo, en los bloques multibase no, bloques multibase es un sistema puramente aditivo, con lo cual la percepción te dice el agrupamiento. En los bloques multibase cada unidad es distinta, cada unidad representa físicamente la cantidad de unidades totales que tiene. Esto, traducido en términos de sistemas de numeración, es: sistemas aditivos, sistemas multiplicativos y sistemas posicionales. Por eso, dentro de esa manipulación habría una gradación, es decir, los manipulativos no son todos equivalentes [I, M].

- *2P17.1-3.3. Muestra la transición didáctica más adecuada para ella, partiendo de lo manipulativo, pasando por la tabla y llegando finalmente a la escritura más abstracta [E, 3].*
- *2D11.1-3.3. Resume la actividad, desde la propuesta original, que era calcular una suma escribiendo el proceso, empezando con la fase concreta, representando con los materiales, el ábaco y los bloques de base 10, usando después las tablas en sus diferentes versiones, para terminar con el procedimiento simbólico, la suma en vertical y las expresiones polinómicas, es decir, plantea un resumen de la ruta didáctica de los alumnos [E, 3].*
- *2R7.1-3.3. Explica todo el proceso manipulativo necesario para llegar al nivel de abstracción al que tienen que llegar los alumnos [E, 2].*
- *2J12.1-3.3. Plantea el proceso que se seguiría en primaria, yendo desde la representación manipulativa hasta lo abstracto, que es el final, la operación que aparece en primaria [E, 3].*
 - *2J12.1-3.3(I)1. Lo abstracto es el conocimiento es aprenden los maestros y que está detrás de todo [lo visto en la sesión] [I, M].*
- *2L8.1-3.3. Indica a los alumnos que es mejor empezar a trabajar la suma con sistemas de representación manipulativos, usando luego otros sistemas de representación [E, 2].*

C22-3.3. Menciona el método Singapur, haciendo ver que la secuenciación planteada, yendo de lo concreto a lo abstracto, es característica de dicho método.

- *2J11.2-3.3. Pone de relieve el método Singapur [E, 2].*
- *2M11.2-3.3. Menciona el método Singapur, haciendo ver que en él se emplean tablas [E, 2].*

- 2P17.2-3.3. Menciona que la transición didáctica planteada se hace también en el método Singapur [E, 3].
- 2D11.2-3.3. Menciona que el proceso seguido es parte de la metodología Singapur [E, 3].

¿Cómo habéis trabajado mayoritariamente vosotros en primaria cuando estabais haciendo sumas de este estilo? ¿Desde aquí [señala lo manipulativo] o desde el final [señala lo simbólico-numérico]?

A: Desde el final...

A: Yo con las de centenas, decenas y unidades, las cajas...

F: Las cajas estas también os suenan, los tableros de posición, pero ¿y qué poníais en las posiciones, palitos o los números ya?

A: Los números directamente.

F: Los números directamente, o sea, que estabais trabajando la fase inicial, de la suma, la estabais trabajando directamente con lo simbólico, que es la fase final, ¿lo veis?

A: Jolín, sí.

F: Vale, pues ala, ya está.

C23-3.3. Pregunta a los alumnos cómo han trabajado la suma en primaria, haciendo ver que es habitual trabajar la fase inicial de la representación de la suma directamente con lo simbólico, que es la fase final.

- 2P18.1-3.3. Pide a los alumnos que reflexionen sobre cómo les enseñaron a sumar [E, 1].
 - 2P18.1-3.3(I)1. Para que los alumnos piensen desde un punto de vista profesional, pensando en cuando a ellos les toque [enseñar], cuál es el método óptimo para enseñar a sumar [I, M].
- 2R8.1-3.3. Indica que es la fase final [de la suma] [E, 1].
- 2D12.1-3.3. Pregunta a los alumnos cómo aprendieron a sumar cuando eran alumnos de primaria, haciendo ver que lo tradicional suele ser empezar por la fase final, con la suma en vertical [E, 3].
 - 2D12.1-3.3(I)1. Lo excepcional en España es usar material manipulativo, sobre todo cuando hablamos de alumnos de Magisterio, que estudiaron primaria hace más de 10 años [I, M].

- 2M12.1-3.3. Está remarcando un hecho a los alumnos, que consiste en que el proceso de la enseñanza clásica empieza con el último trabajo [el sistema de representación simbólico-numérico] [E, 2].
 - 2M12.1-3.3(I)1. Está defendiendo que el proceso debe ser distinto, es decir, ese es el estadio final, que es donde los alumnos tienen que llegar. Si empezamos por el final, y en esto entran todas las teorías de aprendizaje, corremos un gran riesgo de que no se produzca el aprendizaje significativo [I, M].
- 2L8.2-3.3. Hace ver a los alumnos que normalmente se trabaja fundamentalmente con el algoritmo [simbólico] [E, 2].
- 2J13.1-3.3. Hace ver cuál es la fase que se enseña [en primaria], que es la del algoritmo, incidiendo en cómo aprendieron los alumnos [E, 2].

