ALGUNAS CONJETURAS

Alejandro Francisco Peláez Ruiz-Fornells

Departamento de Economía Aplicada III (Política Económica)

ALGUNAS CONJETURAS

Sería muy difícil poder aportar algo nuevo al hablar de quien, en Política Económica, lo ha sido todo en el ámbito académico y en el servicio al Estado español. Del maestro incansable de docentes e investigadores. De alguien que, increíblemente y para asombro de todos, no parece necesitar el descanso, pues no toma prácticamente vacaciones. Prefiere investigar, escribir.

En mi opinión, lo que distingue al verdadero intelectual es que nunca pierde el deseo, o más bien la necesidad, de aprender. Nunca deja de aprender de todo y de todos, con la sencillez del apasionado del conocimiento. Y esto se convierte en la mejor manera de enseñar. En su lección magistral. Porque arrastra con su ejemplo, a la práctica de actitudes similares. Esto lo ha hecho nuestro profesor Andrés Fernández Díaz. Y ello, sin deshumanizarse, sin perder la cercanía y el afecto, lo cual es verdaderamente difícil.

De él quisiera destacar, y agradezco la oportunidad que se me ofrece, algo de lo que más me ha impresionado; su devoción por el pensamiento abstracto –la Matemática, la Filosofía, la Geometría, la Física- y por la Ópera y la Música. Son diferentes caras de una realidad poliédrica, que transmiten a quien las estudia, algo del misterio que se encuentra más allá de la simple percepción sensorial, o de la comprensión racional. Algo capaz de hacer entrever aquello que queda fuera del alcance de casi todos.

Geometría y Sus Dos Tesoros

Para Kepler, la Sección Áurea y el Teorema de Pitágoras son las dos joyas de la geometría.

Pitágoras de Samos inició a sus discípulos en un saber construido sobre la relación entre la matemática la geometría y la música. En sus enseñanzas, el secreto y el silencio eran requisitos exigidos, motivo por el cual no nos han llegado escritos de su mano y es muy poca la bibliografía sobre él. *"Escucha, serás sabio. El comienzo de la sabiduría es el silencio"*, es frase a él atribuida. Nunca se ha perdido la gran admiración por sus ideas.

Una reciente y elegante generalización, Dijkstra, 1986[1], de su teorema del cuadrado de la hipotenusa de un triángulo rectángulo, permite su extensión a toda clase de triángulos.

Esta aportación establece que el signo de cierta suma algebraica de los ángulos de cualquier triángulo, es siempre el de la simétrica suma algebraica de los cuadrados de los lados opuestos:

$$sign(\alpha + \beta - \gamma) = sign(a^2 + b^2 - c^2)$$

Y en el caso tradicional en que $\gamma = \frac{\pi}{2}$, se verifica:

[1] DIJKSTRA Edsger W. (1986) On the Theorem of Pythagoras EWD 975-0. Department of Computer Sciences The University of Texas at Austin, TX 78712-1188, USA

$$sign(\alpha + \beta - \gamma) = 0 = sign(a^2 + b^2 - c^2)$$

Y:

$$\alpha + \beta - \gamma = 0 = a^2 + b^2 - c^2$$

Pero las ideas pitagóricas y sus apasionantes implicaciones, son capaces de producir una fascinación de la que es muy difícil escapar. Su rastro puede ser detectado en el pensamiento de los grandes de la Filosofía, la Matemática y el Arte. Se encuentra en Platón, Vitrubio, Fra Luca Pacioli[2], Leonardo, Kepler, Descartes, Miguel Ángel o Dalí.

Por ejemplo, en el diálogo *Timeo,* Platón, al explicar la correspondencia entre las ideas y el mundo sensorial, se plantea la existencia de unos principios geométricos, superiores a la realidad sensible de los cuerpos. Superiores a los cuatro elementos de la naturaleza: fuego, tierra, agua y aire. Estos principios eran los de los triángulos. Por encima de ellos, se encuentran todavía los principios numéricos que, como los geométricos, sólo son conocidos por Dios y por un cierto numero de hombres a quienes ama; los pitagóricos. La combinación de estos triángulos en el espacio, da origen a los *sólidos platónicos,* o poliedros regulares, todos ellos, salvo el hexaedro, construidos *"a partir del triángulo más bello; aquél del que se compone el triángulo equilátero"*[3]. Es decir, a partir del escaleno. Pero en el origen de estos cuerpos, se encuentra también la divina proporción: Φ.

En efecto, existe una misma proporción que subyace a la formación de estos sólidos platónicos; la que existe entre la razón de la suma de dos magnitudes a la mayor de ellas y la de la mayor a la menor. Es decir; la Divina Proporción, Sección Áurea o Número de Oro -denominación debida a Leonardo da Vinci-, Φ. Esta letra griega se eligió como la inicial de Fidias, por haberla empleado en la arquitectura del Partenón.

Por ejemplo:

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} \qquad \forall a > b$$

Dividiendo cada término por b y haciendo $\frac{a}{b} = x$, tenemos:

$$x^2 - x - 1 = 0$$

Cuyas dos raíces son:

$$x_1 = 1.618033989... = \Phi \qquad x_2 = -0.618033989...$$

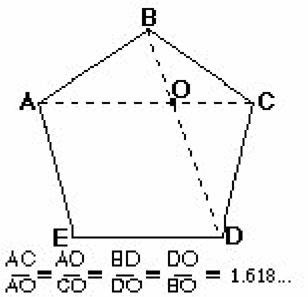
Siendo $x_2 = -\frac{1}{x_1}$

---

[2] En efecto, la aportación de este monje amigo de Leonardo al análisis contable mediante la partida doble, no es de tanta importancia si la comparamos con sus estudios de geometría y matemática.

[3] PLATÓN. *Diálogos*. México, Porrúa, 1984. p. 690

Pues bien; cualesquiera dos magnitudes, cuya relación por cociente sea el valor $x_1 = 1{,}618033989$, se encuentran en proporción áurea.



Y, de modo mucho más sencillo, para un pentágono regular, Φ es la razón entre una diagonal y un lado, $\frac{AC}{AB}$ o también el cociente entre las diagonales y sus segmentos mayores o, entre los segmentos mayor y menor de una misma diagonal, definidos por la intersección con otra.

O, en la sucesión de Fibonacci: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13,…, de razón $n = n_{-1} + n_{-2}$, se verifica que $\frac{n}{n_{-1}} \approx \Phi$, $\forall n \geq 3$

Por doquier en la historia del hombre en su sentido más amplio, es posible encontrar la divina proporción. La construcción de todos los poliedros regulares y su inscripción unos en otros hasta formar un "omnipoliedro" inscrito en una esfera, se guía –como explicó Pacioli[4]- por Φ. El diseño arquitectónico de las grandes obras de la humanidad de todos los tiempos como el Partenón de Fidias, las pirámides de Egipto o el Monasterio de El Escorial, utiliza ampliamente la sección áurea.

El propio universo natural que nos rodea parece configurarse a menudo conforme a esta proporción. Así, innumerables ejemplos revelan esta ley admirable. Por ejemplo la Filotaxia, que estudia en la Botánica, la disposición espacial de ramas, hojas y semillas, encuentra que la separación angular helicoidal, α, de las ramas o de los tallos en numerosas especies vegetales, verifica aproximadamente la ecuación:

$$\alpha = \frac{360}{\Phi^2}$$

Pero, también, en cualquier panal, el cociente entre abejas hembras y machos es aproximadamente Φ. Nuestro propio cuerpo, parece reflejar esta ley. La proporción entre la altura total y la distancia del ombligo al suelo es aproximadamente Φ. Algo semejante ocurre en las proporciones de las partes del rostro.

Además:

$$\frac{dis\tan cia.\mathrm{hom}bro - punta.de.dedos}{dis\tan cia.codo - punta.de.dedos} \approx \Phi$$

La frecuencia cardiaca parece mostrar en el electrocardiógrafo patrones regulares de relación que se aproximan a Φ.

Incluso en la molécula de ADN, un giro de 360 grados de la doble hélice mide 34 *ángstrom* en la dirección del eje. La anchura de la molécula es de entre 20 y 21 *ángstrom*.

$$\frac{34}{21} = 1.6190476 \approx \Phi$$

¿Por qué?

---

[4] Véase PACIOLI DI BORGO, Luca (1509) *De Divina Proportione. La Divina Proporción,* Madrid, Ediciones Akal, S. A. 1987

Los instrumentos musicales, en ocasiones se conforman a la sección áurea. Así, las dimensiones de la caja del violín parecen asemejarse a Φ. La razón de la longitud de la misma –aproximadamente 355mm-, a la máxima anchura de su tercio inferior –alrededor de 206mm-, se acerca a la sección áurea. Quizás Antonio Stradivari o Giuseppe Guarneri del Gesù, la empleasen intencionadamente en sus maravillosos instrumentos.

Pero en la música -para Leibnitz un ejercicio aritmético secreto en que la persona que a ella se entrega ignora estar en realidad manipulando números-, encontramos vestigios de la Divina Proporción.

Música y Astronomía

Para Johannes Kepler en su obra *Harmonices Mundi*[5], la armonía de las esferas, de los planetas, se adaptaba a un modelo matemático. Este astrónomo realizó su trabajo aceptando que la estructura del universo entero y de sus partes debía responder a un esquema de belleza y armonía y, por tanto, podría ser expresado en términos de relaciones matemáticas y geométricas. Se parecería mucho a las ideas platónicas y pitagóricas del universo.

Su aportación fundamental consistió en obtener las tres leyes del movimiento planetario. La primera ley establecía que las órbitas de los planetas eran elipses en las que el sol ocupa uno de los focos. La segunda ley explicaba que el radio vector que une cada planeta con uno de los focos de la elipse, barre áreas iguales en tiempos iguales. Ambas fueron dadas a conocer en el año de 1609. Por su tercera ley, incorporada en 1619 a su *Harmonices Mundi,* sostenía que el cuadrado del periodo de revolución de los planetas en torno al sol, es proporcional al cubo de sus distancias medias al mismo.

$$p^2 = Aa^3 \quad \text{y} \quad \frac{p^2{}_{planeta1}}{a^3} = \frac{p^2{}_{planeta2}}{a^3} = \ldots = \frac{p^2{}_{planetai}}{a^3}$$

Era tal la capacidad mental de este matemático, que en cierta ocasión mientras explicaba geometría, fue cuando intuyó que la relación entre las circunferencias, -o esferas en volumen-, inscrita y circunscrita a un cuadrado regular, -en volumen, un cubo- era también la existente entre las órbitas de Júpiter y Saturno. Y así era en realidad. Posteriormente "vio" que las circunferencias inscrita y circunscrita a un triángulo equilátero -en volumen, un tetraedro-, y a un pentágono -en volumen, un dodecaedro- establecían respectivamente las relaciones entre las órbitas de Marte y Júpiter y de la Tierra y Marte. El icosaedro describe la relación entre las órbitas de Venus y La Tierra. El octaedro, la que existe entre las de Mercurio y Venus. El número que permite obtener, cada uno a partir del otro, los cinco poliedros regulares, no es otro que Φ. De nuevo, retornamos a la divina proporción.

---

[5] KEPLER, J (1619) *Harmonices Mundi* (Traducción al Castellano por José Luis Arántegui Tamayo) En *A Hombros de Gigantes. Las Grandes Obras de la Física y la Astronomía.* HAWKING, Stephen Ed. (2003), Critica, S. L. Barcelona.

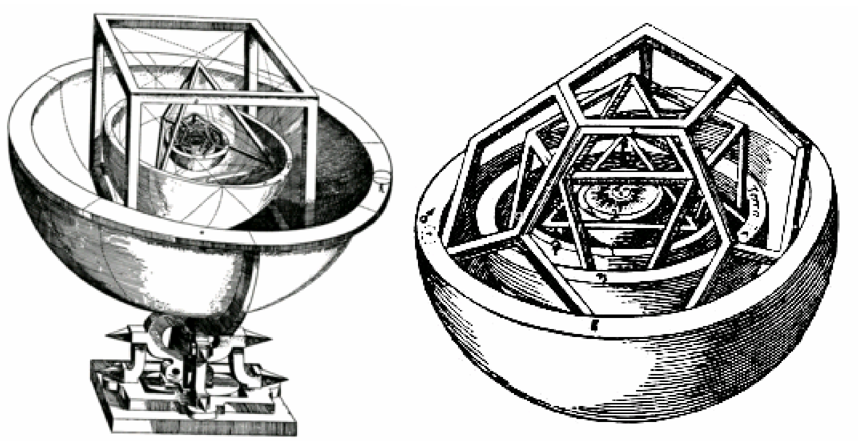
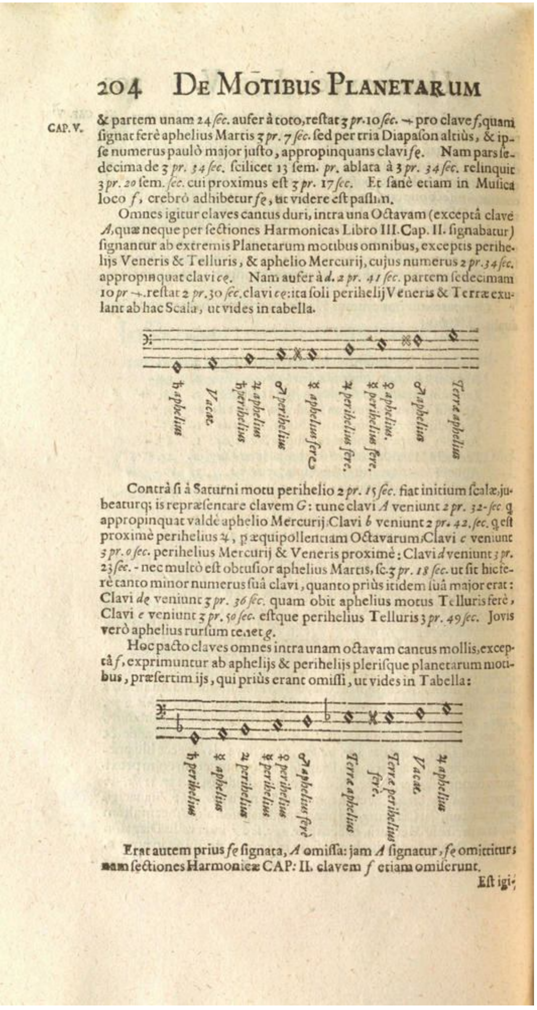


Ilustración y detalle del Sistema Solar, en Mysterium Cosmographicum (1596) de Kepler.

Kepler quedó convencido de haber descubierto el secreto de la creación al hallar la relación entre las órbitas de los seis cuerpos celestes conocidos, a través de los sólidos platónicos. A continuación, asignó a los movimientos de los planetas en su perihelio o en su afelio, las diferentes notas de las escalas musicales mayor y menor.



204 DE MOTIBUS PLANETARUM

CAP. V. & partem unam 24 *ſec.* aufer à toto, reſtat 3 *pr.* 10 *ſec.* + pro clave *f*, quam ſignat ferè aphelius Martis 3 *pr.* 7 *ſec.* ſed per tria Diapaſon altiùs, & ipſe numerus paulò major juſto, appropinquans clavi *fe*. Nam pars ſedecima de 3 *pr.* 34 *ſec.* ſcilicet 13 ſem. *pr.* ablata à 3 *pr.* 34 *ſec.* relinquit 3 *pr.* 20 ſem. *ſec.* cui proximus eſt 3 *pr.* 17 *ſec.* Et ſanè etiam in Muſica loco *f*, crebrò adhibetur *fe*, ut videre eſt paſſim.

Omnes igitur claves cantus duri, intra una Octavam (exceptâ clave *A*, quæ neque per ſectiones Harmonicas Libro III. Cap. II. ſignabatur) ſignantur ab extremis Planetarum motibus omnibus, exceptis perihelijs Veneris & Telluris, & aphelio Mercurij, cujus numerus 2 *pr.* 34 *ſec.* appropinquat clavi *ce*. Nam aufer à *d.* 2 *pr.* 41 *ſec.* partem ſedecimam 10 *pr* +. reſtat 2 *pr.* 30 *ſec.* clavi *ce*: ita ſoli perihelij Veneris & Terræ exulant ab hac Scala, ut vides in tabella.

Contrà ſi à Saturni motu perihelio 2 *pr.* 15 *ſec.* fiat initium ſcalæ, jubeaturq; is repræſentare clavem *G*: tunc clavi *A* veniunt 2 *pr.* 32 *ſec.* q appropinquat valdè aphelio Mercurij; Clavi *b* veniunt 2 *pr.* 42 *ſec.* q eſt proximè perihelius ♃, p æquipollentiam Octavarum; Clavi *c* veniunt 3 *pr.* 0 *ſec.* perihelius Mercurij & Veneris proximè: Clavi *d* veniunt 3 *pr.* 23 *ſec.* - nec multò eſt obtuſior aphelius Martis, ſc. 3 *pr.* 18 *ſec.* ut ſit hic ferè tanto minor numerus ſuâ clavi, quanto priùs itidem ſuâ major erat: Clavi *de* veniunt 3 *pr.* 36 *ſec.* quam obit aphelius motus Telluris ferè, Clavi *e* veniunt 3 *pr.* 50 *ſec.* eſtque perihelius Telluris 3 *pr.* 49 *ſec.* Jovis verò aphelius rurſum tenet *g*.

Hoc pacto claves omnes intra unam octavam cantus mollis, exceptâ *f*, exprimuntur ab aphelijs & perihelijs pleriſque planetarum motibus, præſertim ijs, qui priùs erant omiſſi, ut vides in Tabella:

Erat autem prius *fe* ſignata, *A* omiſſa: jam *A* ſignatur, *fe* omittitur; nam ſectiones Harmonicæ CAP: II. clavem *f* etiam omiſerunt.

Eſt igi-

En la escala mayor, el movimiento de Saturno en afelio, correspondería al *Sol* grave, y correspondería también a la Tierra en afelio pero cinco octavas más alto; *La*, quedaría carente de correspondencia. *Si*, correspondería a Júpiter en afelio y Saturno en perihelio, pero una octava más alto; *Do* a Marte en perihelio, pero cuatro octavas más alto. *Re*, a Júpiter en perihelio, pero una octava más alto. *Mi*, a Venus en afelio y Mercurio en perihelio, pero siete intervalos de octava más alto. *Fa*, pero tres octavas más alto, equivale al movimiento de Marte en afelio y se aproxima mucho al *fa* sostenido. Para obtener las notas de la escala menor, si se comenzase por Saturno en perihelio asociado al *sol* grave, entonces, *la*, sería Mercurio en afelio; *si* bemol, Júpiter en perihelio; *do*, Mercurio y Venus en perihelio; *re*, Marte en afelio; *re* sostenido, o *mi* bemol, la Tierra en afelio, *mi*, la Tierra en perihelio y *sol* agudo, Júpiter en afelio. *Fa* sostenido quedaría sin correspondencia[6].

Escalas musicales mayor y menor, en relación a las órbitas planetarias, en Harmonices Mundi (1619) de Kepler.

[6] Véase KEPLER, J Op. Cit, Libro Quinto, cap. 5

Artes Plásticas

En la historia de la pintura, encontramos infinidad de relatos referidos a obras concretas que dieron mucho que pensar o escribir a sus autores y también a otros. Un ejemplo interesante es la pintura El Ángelus, de Millet. Sobre ella escribió Dalí un completo tratado[7], al quedar profundamente afectado en su primera contemplación de esta obra. Para el pintor catalán el lienzo escondía algún aspecto relacionado con la muerte que, posteriormente, había sido ocultado deliberadamente por su autor.

Verdaderamente obsesionado, en la aplicación rigurosa de su *método paranoico-crítico* pidió un estudio científico del cuadro sugiriendo que lo sumergieran en leche, para así poder conocer la verdad. Sin embargo, sí que fue objeto de un análisis radiológico, que reveló una imagen subyacente, posiblemente de un ataúd pequeño dibujado previamente entre las figuras de los dos campesinos. El pintor debió cambiar de parecer y decidió eliminarlo de la pintura, cubriendo simplemente el lienzo con óleo, allí donde deseaba hacer la corrección. Comoquiera que sea, lo sorprendente es que Dalí pudiese intuir algo adicional en la pintura.

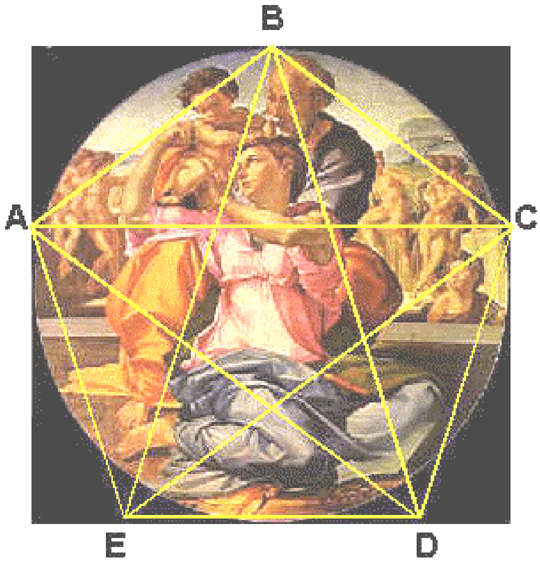
El Ángelus (1859-1860) Jean-François Millet.

Pero los pintores también utilizaron, en innumerables ocasiones, la proporción Φ en sus obras. Leonardo la utilizó en el *Hombre de Vitrubio*, *La Gioconda* y en otras obras.

[7] DALÍ, Salvador (1932-1935) *El Mito Trágico del Ángelus de Millet*, Tusquets 1978 (1ª Edición española), Barcelona

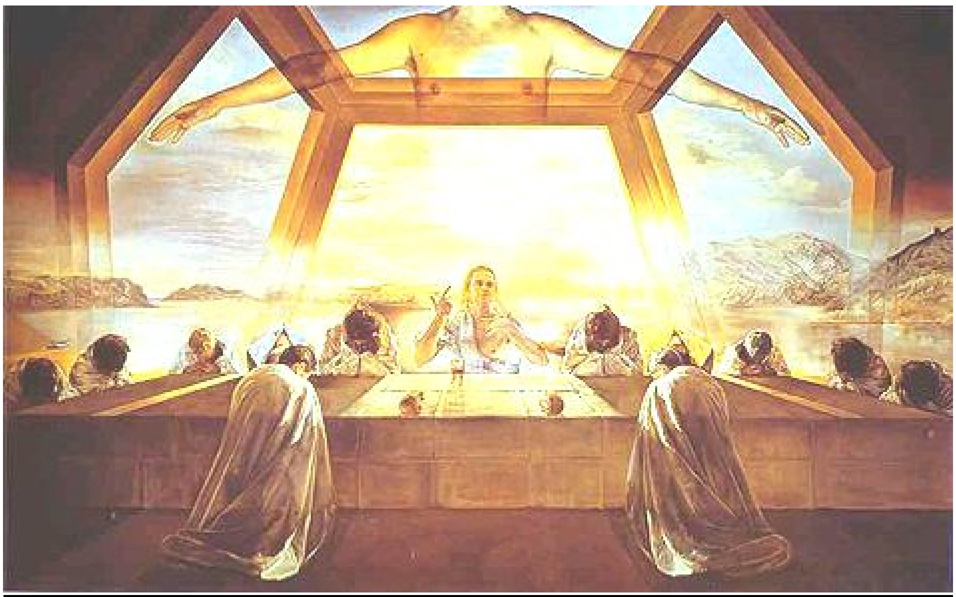
A continuación vemos un ejemplo de la construcción de unos lienzos de Dalí y de Miguel Ángel conforme al pentángulo.

Leda Atómica (1947-1949) Salvador Dalí.



La Sagrada Familia (Tondo Doni) (1503-1504). Miguel Ángel.

Y otro, conforme a la divina proporción en el dodecaedro, que Dalí incluyó queriendo hacerlo explícito en su genial pintura.



El Sacramento de la Última Cena. Salvador Dalí (1955)

En este cuadro, las dimensiones de la mesa se ajustan a las de un rectángulo dorado; la relación por cociente entre sus lados equivale a la sección áurea. En el poliedro que abraza la escena, es posible obtener Φ por varios caminos.

Algunas Conjeturas

¿Quién pudo haber imaginado, antes de la hipótesis de la curvatura del espacio-tiempo, que no fuese una idea delirante el pensar que, si se pone en orbita mediante una cápsula, a uno de dos hermanos mellizos, permaneciendo el otro en tierra, una vez retornado el satélite, el hermano orbitante sería más joven que el hermano orbitado? Pues bien, la paradoja de los mellizos, se ha comprobado con relojes: Se hace girar en órbita un reloj mientras otro se queda en la Tierra. Al regresar al cabo de un período, maravillosamente, el que estaba en órbita ha contado menos tiempo.

Sintiéndome algo más libre con esta coartada proveniente de la Física, ¿me atrevería a hacer alguna conjetura, manejando algún concepto que tenga cabida en el anterior esquema? Para intentar hacerlo, me proveeré además del criterio de demarcación de Popper, de manera que, precisamente por poder ser refutadas, las conjeturas podrían proponerse con legitimidad.

En mi opinión uno de los enigmas más bellos que nos afecta como seres humanos dotados de reflexión, es el que se refiere a la posibilidad o imposibilidad de vincular, unir, o conservar en una misma perspectiva, las dimensiones de nuestra libertad de elección, o libre albedrío, y de aquello a lo que podríamos referirnos como nuestro destino. Es decir, de la observación de un mismo fenómeno –nuestra acción vital inmediata y sus decisiones aparejadas-, desde una perspectiva *ex-ante*, –el instante inmediatamente anterior a la decisión y la acción-, y desde una perspectiva *ex-post*, –posterior a la acción-. Este problema aparece indescifrable, pues ¿Cómo puede estar en el hombre la posibilidad de decidir, de elegir libremente, sustrayéndose pretendidamente a un destino que, situándonos en una perspectiva temporal de futuro o *ex-post*, se encuentra ya establecido?

Lo anterior se conoce como *misterio de la predestinación*. Se ha afirmado frecuentemente que la dimensión temporal es sólo una ilusión que, por el modo en que se desarrolla la vida, resulta necesaria para la aparición de los fenómenos con arreglo a una cronología, a un marco de referencia diacrónico. Pero que en realidad todo existe en todo tiempo y lugar sin distinción de pasado presente o futuro, aquí o allá. Todo es sincrónico. Y sin embargo, esto convive con la posibilidad individual de elegir o conducir a cada momento la propia vida. O, a nivel general, con la posibilidad para la humanidad de conducir o elegir su propia historia. Pero, ¿cómo se puede elegir sobre algo que está predeterminado?

La conjugación de ambas perspectivas, es lo que permite *ver las decisiones particulares individuales* –que se encuentran en manos de la humanidad y obedecen a su voluntad y libre albedrío-, *en la perspectiva atemporal, de resultado final*, -que escapa a su control-. Si las primeras son adoptadas con base en, o en el soporte de, una relativa certeza sobre lo que acontece –pues pertenecen al presente-, las segundas lo son con base en la esperanza, en el soporte de la fe en aquello que ha de acontecer –pues pertenecen al futuro-.

Presente y futuro son los dos extremos de la *flecha del tiempo*, elemento consustancial a nuestra existencia y necesario para que el mundo real sea susceptible de percepción sensorial por nuestra parte. Pero la flecha temporal no necesariamente está dotada de entidad real ni mucho menos definitiva. De hecho, parece poder admitirse que si, tras el *big bang,* se acaba finalmente atravesando un agujero negro y produciéndose, por tanto, un *big crunch*, tendría entonces lugar la reversión del tiempo.

Sería entonces de nuevo recorrida la historia, pero, en esta ocasión, en sentido cronológico inverso. Hasta la concentración infinita de la materia. Por tanto, lo que actualmente tiene soporte en la certeza, pasará eventualmente a tenerlo en la fe y lo que hoy se sustenta en la fe, lo hará en la certeza. La secuencia temporal es ilusoria también en lo que se refiere a su sentido unidireccional. Puede ser recorrida en ambos sentidos.

Ahora bien, en el momento en que la creación atraviese el agujero negro *Sagitario-A,* que se encuentra en el centro de la Vía Láctea, ¿No existe al menos un instante en que, antes de la reversión, el tiempo se ha detenido? ¿Un instante atemporal, único en toda la historia *directa* o *inversa* de la humanidad?

Pues bien, en este instante, coinciden el presente y el futuro. El libre albedrío y la divina predestinación. Este instante, *infinitamente pequeño*, no es otra cosa que *la eternidad.* El hombre llega a su destino en una nueva realidad donde el aquí y ahora es el allá y el después. No hay libre albedrío, pues no hay decisiones que tomar. Todo es inmanente. Todo es eterno. O instantáneo.

Si en un esfuerzo de reflexión al aproximarnos a cuestiones trascendentes, adoptamos decisiones *particulares* -propias de la percepción individual y aparentemente sustentadas en la certeza-, en una perspectiva *de resultado final* -sustentada en el soporte de la esperanza y de la fe-, entonces nos colocamos en una perspectiva *atemporal*, es decir, *de eternidad*. Se trata de la contemplación mística. Ajena al pasado, al presente, al futuro.

Pero la ciencia parece moverse en una afinación semejante. Según la física estadounidense Lisa Randall[8], el problema hoy es la búsqueda de nuevas dimensiones, que con seguridad existen, y se encuentran conectadas al mundo a través de la fuerza gravitatoria. Pero, para investigar en este campo, es necesario encontrar *huellas*. Para esta autora, en la proximidad de los agujeros negros, de gravedad infinita, la geometría del espacio-tiempo, resulta alterada. A través de esta *warped geometry,* la realidad sensible, los objetos, resultan traducidos a una nueva versión, de diferente escala o dimensión. Entonces, es necesario no perder la huella de una realidad que podría pasar inadvertida. De la misma manera en que una sombra, que es una imagen en dos dimensiones, puede corresponder tanto a una persona imitando con sus dedos un perfil que parezca un animal, o al propio animal, que parece la silueta de los dedos de una persona que intenta imitar su perfil. Si se toma el segundo caso por el primero, se podría estar perdiendo una puerta de acceso.

Después de todo, ¿No es la visión infantil la más cercana siempre a la verdad?

---

[8] Lisa Randall en Fundación BBVA, Madrid. Conferencia impartida el 30 de junio de 2007. Véase su obra: *Warped Passages. Unraveling the mysteries of the universe's hidden dimensions.* Scranton, Harper Collins, 2005.

Referencias

DALÍ, Salvador (1932-1935) *El Mito Trágico del "Ángelus" de Millet*, Tusquets (1978 1ª Edición española) Barcelona

DIJKSTRA, Edsger W. (1986) "On the Theorem of Pythagoras" EWD 975-0. Department of Computer Sciences The University of Texas at Austin. Austin, TX 78712-1188, USA.

GHYKA, Matila C. (1978) *El número de Oro. Ritos y Ritmos Pitagóricos en el Desarrollo de la Civilización Occidental*, Poseidón, Buenos Aires.

GHYKA, Matila C. (1983) *Estética de las Proporciones en la Naturaleza y en las Artes* Poseidón, Barcelona.

HAWKING, Stephen Ed. (2003), *A Hombros de Gigantes. Las Grandes Obras de la Física y la Astronomía* (Kepler, J (1619) *Harmonices Mundi*. Traducción al Castellano por José Luis Arántegui Tamayo), Critica, S. L. Barcelona. Kepler

PACIOLI DI BORGO, Luca (1509) *De Divina Proportione. La Divina Proporción*, Madrid, Ediciones Akal, S. A. 1987.

PLATÓN. *Diálogos*. Mexico: Porrúa, 1984.