Cubismo y constructivismo

Capi Corrales Rodrigáñez

Departamento de Álgebra
Facultad de Ciencias Matemáticas
Universidad Complutense de Madrid
E-28040 Madrid, Spain
capi@mat.ucm.es

Para Juan Tarrés, compañero de viaje durante años en el Seminario de Historia de las Matemáticas y en el Curso de Verano Arte y Matemáticas de la UNED.

ABSTRACT

Cubismo y constructivismo ilustran dos maneras muy distintas de pensar y trabajar el espacio a principios del siglo XX. En este artículo seguimos el rastro de ambas maneras de hacer en las matemáticas de la época.

Cubism and constructivism illustrate two different ways of thinking and working with space at the beginning of the 20th century. In this article we trace them both in the mathematics of the period.

Key words: History of geometry and painting. Cubism. Constructivism.

2010 Mathematics Subject Classification: 01A99.

1. Introducción: Los dos caminos abiertos por Cantor

Cuando en 1988 me incorporé al Departamento de Álgebra de la Facultad de Matemáticas de la UCM, Mariano Martínez, que había sido profesor mío durante el último año de carrera, me sugirió asistir a las reuniones del grupo de trabajo formado por el subconjunto del Seminario de Historia que se leía los textos. Desde que en 1979 Mariano lo fundase (con él mismo y Miguel Ángel Gómez Villegas como únicos miembros), la forma del Seminario había ido variando en función de los intereses de quienes lo formaban en cada momento. Cuando yo me incorporé, el Seminario tenía dos secciones, por así decirlo; la del grupo que leía los textos matemáticos originales (en aquel momento, libros y artículos sobre el tema del infinito) y la del grupo que leía cuentos (estaban, entonces, con Chejov). El primer grupo lo formaban José Luis Caramés, Mariano Martínez, Carlos Fernández Pérez, Juan Tarrés y Miguel Ángel Gómez Villegas, y el segundo los mismos más Feliciana Serrano y Juan Tejada. Tras unas semanas de prueba me quedé en el de los textos matemáticos, al que, cuando le interesaban los deberes que nos ponía Mariano, asistía también Fernando Bombal.

Porque era Mariano quien elegía los temas, hacía fotocopias para todos de libros y artículos y organizaba los horarios de las reuniones semanales en las que nos juntábamos en un aula para reflexionar en grupo sobre lo que íbamos leyendo. Una veces con más entusiasmo y otras con menos, unas veces con más rapidez y otras con menos, durante años leímos, debatimos y disfrutamos. En mi caso, además de matemáticas, escuchando a Luis Caramés aprendí a cazar ideas con paciencia, gracias a Mariano Martínez constaté que es una estupidez contentarse con reproducciones pudiendo disfrutar de los originales, Carlos Fernández Pérez y Miguel Ángel Gómez Villegas me ilustraron en el arte del *bienhacer* –que parte del principio de que todo, hasta amotinarse ante los temas propuestos por Mariano, se puede hacer si se hace bien– y, *last but not least*, de la mano de Juan Tarrés pude poner dentro de un marco matemático preciso algunas de las reflexiones e investigaciones que, sobre el imaginario del espacio en nuestra cultura, entonces me ocupaban. Cuando me incorporé al Seminario, Juan y Mariano me animaron a poner en limpio las notas que a lo largo de más de veinte años había ido tomando sobre el tema y, con Feliciana Serrano, me ayudaron a darles estructura de texto ([4]). En el caso de Tarrés, tanto sus escritos sobre la historia de la topología general y de la teoría de las dimensiones ([27] y [28]), como las observaciones que sobre las matemáticas de esa época le escuché en sus intervenciones en el Seminario, me resultaron esenciales para entender el papel jugado por las matemáticas del siglo XIX en el desarrollo de la idea de espacio que subyace en mucha de la pintura europea de principios del siglo XX.

Algunos años después, ambos fuimos ponentes en el curso de verano sobre Arte y Matemáticas que desde 2001 (Sanlúcar de Barrameda) hasta 2007 (Mérida) Antonio Costa e Ignacio Garijo organizaron para la UNED. Los pintores pintan cuadros y los matemáticos hacemos matemáticas y, por lo general, los pintores no saben hacer matemáticas ni los matemáticos sabemos pintar. Sin embargo, como Tarrés y yo intentamos poner de manifiesto en el curso, hay un terreno común a ambas artes. Desde ese terreno común, en mis ponencias yo ilustraba con cuadros concretos aspectos de la historia y evolución recientes de algunos conceptos matemáticos, como por ejemplo el de espacio. En el coloquio que siguió a mi primera intervención en 2001, Ignacio Garijo me retó a ir en la otra dirección y utilizar las matemáticas para explicar algo sobre pintura. La siguiente vez que nos vimos insistió en el tema –era insistón– y esa vez le contesté, "Dame tiempo y te contaré matemáticamente la diferencia entre los cubistas parisinos y los constructivistas moscovitas. Estoy en ello".

Comencemos por consultar una de las enciclopedias de arte más utilizadas actualmente por la ciudadanía.

> Constructivismo. El referente inicial del movimiento está en las primeras investigaciones sobre soporte escultórico que realiza Tatlin influido por el cubismo de Picasso, que contempla en París en 1913 y 1914. La consecuencia inmediata, a su vuelta a Rusia, es la construcción de una serie de maquetas en madera, metal cartón y vidrio, sin referencia posible al entorno objetivo. Desaparece lo anecdótico en busca de la pureza del arte y adquieren protagonismo las formas geométricas y el espacio frente a la masa. El resultado es un conjunto de fuerzas dinámicas en tensión e interdependientes que se definen como constructivistas. Rodtchenko se une a las exploraciones escultóricas abstractas de Tatlin en 1916, Gavo y Pevsner lo hacen en 1917, mientras Exter y Popova se incorporan con la

pintura. (www.masdearte.com, 9 de abril de 2012)

Crecí en una familia numerosa y mi padre solía llevarnos a museos los fines de semana, una manera barata de entretenernos. Gracias a su astucia, aprendimos a distinguir dos tipos de cuadros abstractos, los que, de manera más o menos obvia, representan cosas de la vida real y los que no lo hacen. Cuando encontrábamos un lienzo del primer tipo, quien identificase primero el objeto codificado en él (así lo describía mi padre, que era ingeniero) ganaba un duro. Con aquel juego comprendimos que no es lo mismo hacer abstracción a partir de la realidad (como se hace en matemáticas) que abstraerse de ella. Puesto que los cuadros cubistas representan objetos de la vida cotidiana y los constructivistas no, parece lógico suponer que cubismo y constructivismo son fruto de maneras distintas de mirar y trabajar y tienen objetivos distintos. Sin embargo, las afirmaciones rotundas (i.e., sin argumento lógico que las sustente) de que el cubismo está en el origen del constructivismo como la que leemos en masdearte.com, siguen siendo lugar común de la literatura popular de divulgación y los manuales educativos. Por eso decidí aprovechar la ocasión, aceptar el reto que Ignacio me lanzaba y buscar en las matemáticas de principios del siglo XX, rastro de las dos distintas maneras de mirar y trabajar que, a mi juicio, ilustran cubismo y constructivismo.

Desafortunadamente, para cuando en 2009 un amigo me puso en las manos la última pieza que necesitaba para completar el *puzzle* ([12]), Ignacio Garijo no estaba ya con nosotros. Estas páginas recogen el relato que le habría contado de estar aún aquí, y que pude empezar a tejer en 2002 gracias a Juan Tarrés, cuyos artículos ya mencionados, en los que encontré las primeras pistas, me sirvieron como bastidor (figurado) sobre el que montar el rompecabezas.

Una de las cosas importantes que aprendí en los años que participé en el Seminario de Historia es que, tanto para para leer matemáticas como para hacer matemáticas, hay que atreverse a pensar de otra manera.

> Por lo que tengo entendido, la primera vez que Gabriel García Márquez abrió La metamorfósis de Kafka, era un adolescente y estaba tumbado en un sofá. Al leer
>
> > Cuando Gregor Samsa despertó una mañana de un sueño inquieto, se encontró en la cama convertido en un monstruoso insecto,...
>
> García Márquez se cayó del sofá, estupefacto ante la revelación de que ¡está permitido escribir así! Con frecuencia me ha ocurrido, y seguro que a todos los matemáticos les pasa lo mismo, que al enterarme de alguna idea maravillosa que alguien ha tenido, me he caído del sofá (en sentido figurativo) como García Márquez, mientras pensaba con asombro, "¡No había caído en la cuenta de que estuviese permitido hacer eso!"(Mazur en [19, págs 65, 69].)

Los artículos de Juan Tarrés [27] y [28] suponen un excelente mapa con el que adentrarse en el territorio recorrido por aquellos exploradores del espacio matemático que en el siglo XIX se atrevieron a pensar y mirar en derredor de otra manera, la lectura de cuyos textos nos da la –emocionante– oportunidad de ver a través de sus ojos. Al llegar a Cantor, Tarrés nos expone sus ideas en torno a las dimensiones y en torno a los conjuntos infinitos. Rastreándolas de la mano de los textos de Tarrés encontré, inesperadamente, un marco plausible para las distintas maneras de hacer de cubistas y constructivistas. Como intentaré ilustrar en las dos secciones siguientes, dentro de ese territorio común a matemáticas y pintura, el cubismo comparte vecindad con las ideas de Georg Cantor (1845-1918) en torno a la cuestión de las dimensiones y el constructivismo con la cuestión de los conjuntos infinitos.

2. La cuestión de las dimensiones

Antes de adentrarnos en el terreno, desplegamos el mapa, lo estudiamos y elegimos un itinerario a seguir.

> A principios del siglo XIX, cualquier teoría que incluyera consideraciones de tipo espacial estaba condicionada por el propio espacio físico, lo que conllevaba la imposibilidad de generalización más allá del espacio geométrico tridimensional. Constituyó un gran paso adelante, sin el que difícilmente se podría haber llegado a la implantación de los espacios abstractos, el estudio de espacios de dimensión superior a tres, iniciado por Gauss (y proseguido por otros autores como Grassmann y Riemann) a los que se podían generalizar las ideas básicas de la Geometría. Se rompió de esta manera el cerco que representaba el espacio geométrico y se entraba en consideraciones que llevaban implícitos espacios cuyos elementos no podían representarse; éste fue, a nuestro juicio, un paso importante para el establecimiento de los espacios abstractos. [...] Unos años antes, en 1874, el propio Cantor se había planteado la cuestión siguiente: "¿Se puede poner una superficie en correspondencia biunívoca con los puntos de una línea?". Pese a que Cantor consideró la pregunta poco menos que absurda ("...pues es evidente que dos variables independientes no pueden reducirse a una") se propuso dar una demostración de la imposibilidad de dicha correspondencia. Con gran sorpresa por su parte, en octubre de 1877 comunica a R. Dedekind que ha encontrado una biyección entre los puntos de un segmento y los de un cubo de dimensión p. Este otro hecho dio pie a plantearse la cuestión de la definición del concepto de dimensión de una figura, que estaba en conexión con el estudio de los hiperespacios que estudiaban Gauss, Grassmann y Riemann, y que hasta entonces se entendía como el número de coordenadas independientes necesarias para determinar cada uno de sus puntos (Tarrés en [28, págs. 192-193]).

Hay mucha maneras que recorrer el camino que lleva de Carl Friedrich Gauss (1777-1855) a Cantor en esta cuestión. El que se propone a continuación está construido a partir de una selección de las obras propuestas por Tarrés.

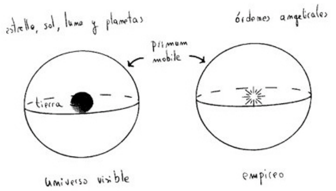
> Si no se consideran las superficies como contornos de cuerpos, sino como cuerpos, una de cuyas dimensiones es infinitamente pequeña, y también se las considera flexibles, pero no extensibles, entonces nos vemos llevados a considerar las propiedades absolutas que aún se conservan al deformar las superficies sin romperlas, estirarlas ni plegarlas (Gauss, 1828, en [11]).

> Atribuimos a un objeto variación continua cuando es posible una transición continua de una determinación del mismo a otra. La totalidad de las determinaciones (o también parte de ellas, entre las que sea posible una transición continua) constituyen entonces una variedad extensa continua, y cada una de ellas se llama punto de esa variedad. [...] El concepto de variedad de múltiples dimensiones subsiste independientemente de nuestras intuiciones espaciales. El espacio, el plano, la línea, son sólo los ejemplos más intuitivos de una variedad de tres, dos o una dimensión. Aún sin tener la menor intuición espacial, podríamos desarrollar toda la geometría. [...] Si bien podríamos deducir analíticamente todas las proposiciones sobre variedades de más de tres dimensiones,

> sería con mucho preferible el basar la teoría de las variedades de más dimensiones directamente sobre la geometría. Quiero desarrollar esto solamente para las variedades de 4 dimensiones. [...] Una variedad de 4 dimensiones es aquí, pues, algo que contiene en sí infinitos espacios. Pero nunca podemos contemplar más que lo que está en un mismo espacio. Cuando diga, en lo sucesivo, que dos construcciones no están en el mismo espacio, quiere ello decir que no puedo contemplar ambas a la vez, no puedo hacerme absolutamente ninguna imagen de su lugar recíproco, sólo puedo extraer conclusiones lógicas a partir de las premisas que hago sobre ellas, y es un requisito esencial para la comprensión de lo que sigue, el atenerse sólo a estas conclusiones lógicas. [...] Queremos ocuparnos de una espacialidad de cuatro dimensiones. Se trata de una espacialidad continua de mayor extensión que todo el espacio infinito. Ciertamente, con nuestra intuición no podemos abarcar más que todo el espacio infinito, pero podemos desplazarnos a través de diversos espacios, uno tras otro. Quiero decir con ello: me imagino primero todo el espacio infinito, después me imagino otra vez todo el espacio infinito, pero pensando que todos los puntos que ahora contemplo son distintos de los puntos que contemplaba antes (Riemann, 1852/53, en [25, págs. 93-95]).

El modelo de variedad de 4 dimensiones propuesto por Bernhard Riemann (1826-1866) –la hiperesfera–, se entiende fácilmente si pensamos en la construcción de mapas. Desde el descubrimiento de las Américas, el mapamundi se dibuja con frecuencia sobre dos círculos, cada uno de ellos representa la mitad de la esfera terrestre y su circunferencia el círculo máximo terrestre común a ambos. Cuando vemos el mapa de los dos hemisferios, para representar la Tierra no tenemos más que (mentalmente) pegarlos por su circunferencia exterior y soplar hasta inflarlos. Ahora imaginemos que tenemos delante de nuevo dos círculos, pero esta vez, sin embargo, cada uno de ellos representa una esfera completa, con la Tierra colocada en el centro de la de la izquierda, que tiene en su interior todo lo que hoy en día podemos ver del Universo a través de telescopios. A continuación, imaginemos una civilización lejana, más allá del alcance de nuestra tecnología, situada en el centro de la esfera de la derecha, cuyo interior contiene todo lo que pueden alcanzar mirando a través de sus lentes. Hay varias posibilidades teóricas: que las esferas se encuentren muy lejos una de otra con mucho universo entre ellas, que tengan partes en común, con galaxias observables para ambas civilizaciones o, según propone Riemann, que no se corten y que, de hecho, juntas constituyan todo el universo, como los dos hemisferios del mapa de la Tierra juntos conforman el globo terráqueo. No tenemos más que imaginar que podemos pegar las esferas una con otra a lo largo del borde. Este borde exterior sería la *esfera ecuatorial*, que divide el universo en dos partes: el viejo, el que conocemos o podremos conocer, y el nuevo, el que nunca podremos comprender.

Incluso hoy en día, siglo y medio más tarde y pese a saber gracias al trabajo de Albert Einstein que es plausible que el universo sea como lo imaginó Riemann, para reproducirnos en la cabeza su espléndida visión sigue siendo imprescindible atreverse a pensar de otra manera. Hay una anécdota de David Hilbert (1862-1943) muy contada en entornos matemáticos. Parece que un día se dio cuenta de que uno de sus alumnos había dejado de asistir a clase, y preguntó por él. Le dijeron que había dejado la carrera para convertirse en poeta. Hilbert comentó: "Una decisión excelente; no tenía imaginación suficiente como para ser matemático". Pues bien, aunque probablemente a Hilbert le sorprendería saberlo, no fue un matemático, sino un poeta, el primero en describir el universo como una hiperesfera ([22]). En Paraíso ([1]), Dante Alighieri (1265-1321) describe el universo como formado por dos esferas que comparten superficie, a la que Dante llama Primer Motor. La primera de ellas comprende el universo visible y contiene, a su vez, una serie de cielos o esferas menores transparentes y concéntricas, con la Tierra en su centro. Del otro lado del Primer Motor está el Empíreo, el Paraíso propiamente dicho, que Dante imagina como una segunda esfera con varios órdenes de ángeles girando en esferas concéntricas alrededor de un centro donde un punto de luz ilumina con intensidad casi cegadora.



> La aparición de los hipersepacios provoca la necesidad de establecer una definición rigurosa de la idea de dimensión de un espacio. A principios de los años 1870 se admitía como tal el número de coordenadas independientes para determinar un punto arbitrario del mismo. (Tarrés en [28, pág. 200]).

Leamos algunos extractos de la correspondencia entre Cantor y Richard Dedekind (1831-1916) a este respecto (en [5, pág. 578]).

> Cantor a Dedekind, 5 de enero de 1874. ¿Es posible establecer una correspondencia entre un cuadrado (supongamos un cuadrado en el que incluimos sus lados) y un segmento (supongamos un segmento con sus extremos incluidos) de tal manera que a cada punto de la superficie corresponde un punto del segmento y, recíprocamente, a cada punto del segmento le corresponde un punto de la superficie? En este momento me parece que la respuesta a esta pregunta –por mucho que uno esté tan tentado de responder “no”, que la demostración parezca superflua– ofrece grandes dificultades.
>
> Cantor a Dedekind, 29 de junio de 1877. Su última respuesta a nuestro trabajo fue tan inesperada y nueva que, por decirlo de alguna manera, no seré capaz de recuperar la compostura hasta que no haya recibido de usted, querido amigo, una decisión sobre su validez. Mientras no lo haya confirmado sólo puedo decir: *lo veo pero no lo creo* [cursivas en francés en el original]. [...] La distinción entre dominios de dimensiones diferentes deberá ser buscada de forma muy distinta que el característico número de sus coordenadas.
>
> Dedekind a Cantor, 2 de julio de 1877. He comprobado su demostración una vez más, y no encuentro ninguna laguna en ella; estoy convencido de que su interesante teorema es verdad y y le felicito, [...] Pero ahora creo posible, provisionalmente, el siguiente teorema: dada una correspondencia biunívoca entre los puntos de una variedad continua A de dimensión a por un lado, y los puntos de una variedad continua B de dimensión b por otro, entonces la correspondencia en cuestión, si a y b son desiguales, es necesariamente discontinua.

Ni Cantor ni Dedekind pudieron demostrar la última afirmación de Dedekind, que se convirtió en motor direccional de mucha de la investigación matemática de la época.

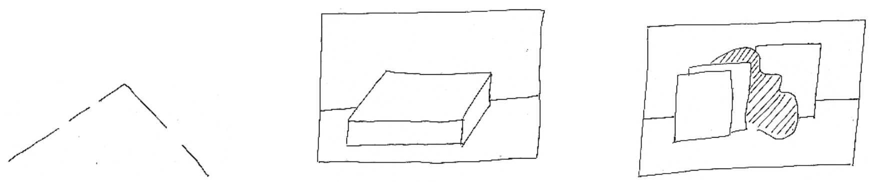
> A este respecto, en 1878, Dedekind estableció la conjetura de que toda aplicación biunívoca entre figuras de dimensiones distintas ha de ser necesariamente discontinua. Este enunciado se conoce como el teorema de la invariancia de la dimensión y no fue demostrado hasta el año 1911, por Brouwer y Lebesgue, independientemente uno de otro. Los diferentes intentos de demostración de este enunciado aportaron nuevas ideas con influencia evidente en la teoría de los espacios abstractos (Tarrés en [28, pág. 193].

La preocupación por la cuestión de las dimensiones fue, de hecho, bastante general en la Europa ilustrada de este período.

> Todo a lo largo del siglo XIX, el hecho de que el espacio cognitivo es tridimensional fue un problema recurrente, aun si ligeramente marginal, dentro de la entonces llamada Teoría del Conocimiento. Es ilustrativo que las artes plásticas comenzasen un programa para desenfatizar la tridimensionalidad (o, de hecho, cualquier dimensionalidad) del espacio, un programa que culminó con los logros de Cézanne (Bochner en [2, pág. 232]).

Los intentos de Cézanne por construir objetos tridimensionales sin echar mano de trucos tales como la perspectiva, el claroscuro o las gradaciones de color, le llevan a enfrentarse con la desagradable deformación, una lucha que, según sus escritos, le hizo sufrir toda su vida. Aunque Cézanne no consiguiese representar sin deformación en las formas objetos tridimensionales sobre la superficie del lienzo (lo que no es de sorprender, puesto que Leonard Euler había demostrado en el siglo dieciocho que es imposible hacerlo [1]), gracias a sus intentos aprendió a liberarse (y liberar de paso a los pintores que le siguieron) de *la tiranía de la tridimensionalidad.*

A fin de "construir" los objetos, Cézanne combina constantemente en sus lienzos lo bidimensional y lo tridimensional y, utilizando líneas entrecortadas, colores sólidos o planos, sigue simultáneamente varias estrategias que podemos identificar en casi todos sus cuadros ([17]).



i) Raramente encontramos líneas continuas dibujadas alrededor de un objeto. Con colores fuertes y líneas negras y gruesas, Cézanne da profundidad al cuadro y obtiene volúmenes, tridimensionalidad. Pero hay muchos lugares en los que las líneas se pierden, se diluyen con el fondo o simplemente están pintadas a trozos. Estas líneas que desaparecen y se disuelven ponen de manifiesto la bidimensionalidad del lienzo.

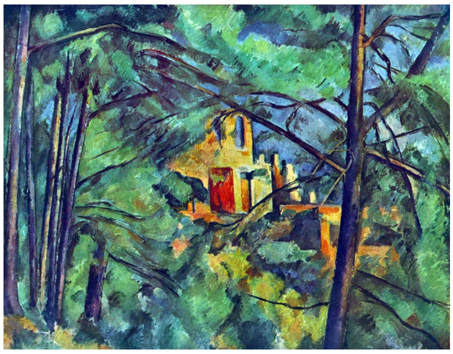
ii) Planos verticales que se mueven hacia el fondo de la escena nos llevan de nuevo a los cuadros planos. Con líneas construye planos, con planos volúmenes.

[1] Leonard Euler, *De raepresentatione superficiei spahericae super plano*, 1778

iii) Además, Cézanne no intenta describir la materia de la que están hechos los objetos. Les da a todos la misma textura plana y, a veces, como en los cielos y montañas de su serie de cuadros sobre Mont Sante Victoire, utiliza incluso el mismo tipo de pinceladas y colores para todo (algo que también encontramos en muchos cuadros impresionistas). Antes de este período, la pintura intentaba adaptarse al tacto y la textura de los distintos objetos, manteniendo lo duro como duro, lo blando como blando, lo intocable como intocable. Esto está muy relacionado con establecer la diferencia entre objeto y fondo, entre el espacio como algo exterior y el objeto como lo que habita en el espacio. Gradualmente en pintura, como en matemáticas, "cuerpos" y "espacio intermedio entre cuerpos" van siendo considerados como equivalentes.

iv) También observamos en los cuadros de Cézanne que los tamaños nunca varían de acuerdo con las reglas perspectivas. Profundidad y tridimensionalidad se obtienen, por un lado, compensando los volúmenes de tal manera que respeta la bidimensionalidad del lienzo y, por otro, variando la distancia entre planos verticales.

Todas estas estrategias se pueden apreciar muy bien en sus series sobre Mont Saint Victoire y Chateau Noir.



La mayor parte de estas características del trabajo de Cézanne las encontramos llevadas al extremo en los cuadros cubistas,

> Cézanne fue mi solo y único maestro. Él fue la madre de todos nosotros (en *Picasso speaks*, Mario Zayas, The Arts, NY 1923, págs. 315-326).

Equipados con las herramientas y estructuras desarrolladas por Cézanne, los cubistas encararon la tarea de*construir* objetos tridimensionales sobre el lienzo del cuadro. Al ser las superficies de la mayor parte de los objetos reales localmente euclídeas –y, como tales, variedades de Riemann–, la solución cubista tiene sentido desde un punto de vista geométrico: construir los volúmenes mediante el encolado de planos.

Veamos el cuadro de Picasso considerado como un primer paso hacia el cubismo, realizado en 1907.

A simple vista se reconoce la influencia de Cézanne, tanto en la construcción de estructuras para representar los objetos como en el juego entre las dos y tres dimensiones. Sin embargo, si miramos con más atención observamos algo más en el trabajo de Picasso en este cuadro. El ojo del pintor se mueve alrededor de la escena y refleja sobre el lienzo varios puntos de vista. Además, en el cuadro aparecen combinados distintos niveles de abstracción, logrando así darnos simultáneamente información sobre distintos aspectos de lo que se representa.

Las frutas, por ejemplo, están representadas de manera más o menos realista, pero aparecen envueltas en unas formas abstractas *à la Cézanne* que sugieren un trozo de tela blanca. Lo mismo ocurre con las figuras: los dedos y algunas cabezas están pintados con mucha precisión, mientras que otras partes de los cuerpos –algunas caras, muslos y hombros, por ejemplo– ni tan siquiera están en armonía con el resto del cuerpo del que forman parte. Distintos niveles de abstracción aparecen tejidos juntos, y de esta manera nuestros ojos reciben mayor cantidad de información. Una información que no se percibe de inmediato: es necesario decodificarla primero, recorriendo los distintos niveles de abstracción que el pintor, a su vez, recorrió. Arthur I. Miller, catedrático de Historia y Filosofía de la Ciencia de London University College, nos da una pista de cómo hacerlo. Miller ha documentado exhaustivamente ([20]) la influencia que en la elaboración de este cuadro tuvo el libro de Henri Poincaré (1854-1912) *La ciencia y la hipótesis* (1902) y, especialmente, la sección titulada “El mundo de cuatro dimensiones”del capítulo IV, “El espacio y la geometría”.

> Lo mismo que un mundo no euclidiano, se puede representar un mundo de cuatro dimensiones. Las imágenes de los objetos exteriores vienen a pintarse sobre la retina, que es un cuadro de dos dimensiones; *son perspectivas.* Pero como esos objetos son móviles y como también lo es nuestro ojo, vemos sucesivamente distintas perspectivas de un mismo cuerpo, tomadas desde varios puntos de vista. Comprendemos de este modo cómo la idea de un espacio de tres dimensiones ha podido nacer del espectáculo de esas perspectivas, aunque cada una de ellas sólo tenga dos dimensiones, porque ellas se suceden según ciertas leyes. Y bien, lo mismo que se puede hacer sobre un plano la perspectiva de una figura de tres dimensiones, se puede hacer la de una figura de cuatro dimensiones, sobre un cuadro de tres (o de dos) dimensiones. Esto no es más que un juego para el geómetra. También se pueden tomar muchas perspectivas de una figura desde muchos puntos de vista diferentes. Podemos fácilmente representarnos esas perspectivas, puesto que no tienen más que tres dimensiones (Poincaré, 1902, en [23, pág. 72].

> Cuando los objetos descompuestos en fragmentos aparecieron en mis cuadros hacia 1909, esto para mí fue una manera de acercarme más al objeto,... La fragmentación me ayudaba a establecer el espacio y el movimiento en el espacio (Picasso en *Braque*, Edwin Mullins, Thames and Hudson, Londres 1968, p. 55).

En 1911 Picasso pintó *Hombre con clarinete* (Museo Thyssen-Bornemisza de Madrid), considerado una de las piezas claves del cubismo.
En él, todas las perspectivas que el pintor combina para representar la figura, están tomadas desde delante de ésta; más a la izquierda, más a la derecha, más arriba o más abajo, pero siempre frente a la figura.
Con el tiempo, Picasso llegó a pulir sus herramientas hasta el punto de poder dar la vuelta a toda la figura y hacerlo combinando tan sólo cinco planos con los que describe cinco puntos de vista colocados a izquierda, derecha, delante detrás y sobre la imagen. Veamos dos ejemplos.

En el primero de estos cuadros, *Mujer sentada acodada* (1939, Museo Reina Sofía de Madrid), el plano en que Picasso describe uno de los ojos de la mujer y su mano derecha está situado delante de la figura, el plano que recoge el otro ojo y uno de los orificios nasales está a su izquierda, el segundo orificio nasal y la boca aparecen dibujados sobre un plano a su derecha, la parte azul del sombrero está vista por detrás, desde la espalda de la mujer y la parte roja desde arriba, sobre la coronilla.

Las claves para decodificar el segundo cuadro, *Las meninas* (1957, Museo Picasso de Barcelona), las encontramos en el lienzo de Velázquez. María Agustina Sarmiento, la niña del búcaro, sostiene una bandeja en su mano. Las líneas oscuras de su fondo nos indican que la bandeja está descrita tal y como la ve la propia Ma. Agustina. En la mano aparecen dibujadas las almohadillas del pulgar y de la palma, detalles que en la escena de Velázquez sólo el propio pintor podría percibir. El pelo enmarca perfectamente el rostro de Sarmiento y el contorno de ambos aparece completo, como sólo puede verlos la infanta, a la que Ma. Agustina mira de frente. En el ojo izquierdo hay tres claves esenciales: el trazo horizontal de la izquierda, la acumulación de grises a la derecha y el lugar donde está dibujada la pupila. Estas claves indican que el ojo está visto desde el costado derecho de la joven, esto es, desde el lugar que ocupan los reyes y los espectadores en el cuadro de Velázquez. Finalmente, el perfil –ojo derecho y nariz– aparece en el cuadro de Picasso descrito como lo ve el visitante que aparece por la puerta del fondo en el de Velázquez.

En ambos cuadros el pintor utiliza las estructuras subyacentes que estudió Cézanne para, utilizando las palabras de Poincaré, representar en cinco planos distintos, cinco perspectivas distintas de una figura tridimensional. Al elegir las perspectivas de frente, desde arriba, desde atrás, desde la izquierda y desde la derecha, consigue dar una vuelta completa alrededor de la figura.

3. La cuestión de los conjuntos infinitos

> En general, entiendo por una variedad o conjunto cualquier Multiplicidad [2] que pueda ser pensada como un Uno, i.e., cualquier colección de elementos determinados que puedan ser aunados en un todo por una ley, y con esto creo definir algo similar al $\varepsilon\iota\delta o\zeta$ o $\varepsilon\iota\delta o\omega$ Platónicos (Cantor, carta a Dedekind del 5 de noviembre de 1882).

Antes de adentrarnos en el nuevo territorio, consultemos de nuevo nuestro mapa.

> En el último cuarto del siglo XIX, un hecho trascendental vino a marcar la evolución de todas las ideas que de alguna manera iban conformando lo que tendría que ser la Topología de Conjuntos: los trabajos de Georg Cantor que dieron lugar al nacimiento de la Teoría de Conjuntos de Puntos. Estos trabajos se publicaron en los Matematische Annalen en una serie de seis artículos entre los años 1879 y 1884 y que, en palabras de E. Zermelo, constituyen la quintaesencia del trabajo de su autor. El objetivo principal de estos artículos es el estudio de los conjuntos lineales de puntos, o subconjuntos de la recta numérica, así como el de los conjuntos de puntos de lo que Cantor llamaba el continuo aritmético de dimensión n. En ellos aparecen plasmadas las ideas fundamentales de punto límite, conjunto derivado, conjunto cerrado, etc., destinadas a dar soporte a las teorías axiomáticas de los espacios abstractos, surgidas a comienzos del siglo XX. [...] La aparición de los trabajos de Cantor, junto con la propia dinámica de las Matemáticas de la época, llevó consigo que de manera inmediata surgieran trabajos de diversa índole en los que se consideraban conjuntos de objetos distintos de los puntos de un espacio aritmético, pero a los que se pueden aplicar los conceptos introducidos por Cantor de manera análoga a como éste lo hace en los conjuntos lineales de puntos. Tales trabajos constituyen la transición entre las teorías de Cantor y los espacios abstractos propiamente dichos (Tarrés en [28, págs. 193, 205]

Tras esta introducción, el texto de Tarrés nos invita a un recorrido desde Cantor hasta Felix Hausdorff (1868-1942) a través de los conjuntos de Giulio Ascoli, cuyos puntos son curvas (1883), los de Vito Volterra, cuyos puntos son funciones (1887), los de Jacques Hadamard, cuyos puntos son funciones continuas en el intervalo $[0, 1]$ (1897) y los de Émil Borel, cuyos puntos son líneas y planos (1903). Estos trabajos llevarán, –de la mano de Maurice Fréchet (1906), Fredrik Riesz (1908) y, finalmente, Hermann Weyl, que en 1913 introduce los entornos de un punto para dar una estructura al espacio abstracto–, a las primeras definiciones de espacios abstractos, cuyos puntos son, en palabras de Fréchet, "elementos de naturaleza arbitraria (números, curvas, punto, etc)". Todas estas definiciones, sin embargo, seguían aún muy ligadas a una estructura euclídea del espacio o del plano (en el caso de Weyl). En 1914, Hausdorff,

[2] *Mannigfaltigkeit, Manifold*

atreviéndose a pensar de otra manera, dio el paso definitivo de desligar la noción de espacio del imaginario euclídeo (en [14], pág. 257).

Ascoli, Volterra, Hadamard, Borel, Fréchet, Reisz, Weyl, Hausdorff,... No hay moscovitas en la lista. Sin embargo, los lienzos de los pintores constructivistas ilustran con toda claridad, que en el Moscú de principios del siglo XX había artistas que miraban y trabajaban el espacio de manera análoga a como lo estaban haciendo ellos. ¿De quien aprendieron matemáticas y qué tipo de matemáticas aprendieron los constructivistas?

Los constructivistas surgieron en la sede de la gran utopía educativa rusa, los Talleres Superiores Artísticos y Técnicos del Estado en Moscú (los Vkhutemas, 1920-1932). Investigando en los pocos documentos que han sobrevivido, encontramos que sólo aparece mencionado un matemático entre el profesorado, Pável Florenski (1882-1937), que impartía una asignatura titulada Teoría del espacio. Pude localizar enseguida algunos de sus apuntes para las clases que impartía en los Vkhutemas ([7], [8] y [9]), pero durante mucho tiempo me fue imposible encontrar datos sobre su relación con la comunidad matemática rusa. Pasé años buscando y dando la lata con el tema a todas mis amistades, hasta que durante una visita a Cambridge durante la fiesta de Acción de Gracias de 2009, Barry Mazur me dijo "Acabo de leer un libro en que se menciona a ese Florenski de quien tanto hablas. Igual encuentras las pistas que buscas", y me puso en las manos una copia de [12].

En el libro de Graham y Kantor aprendí que Florenski había sido compañero de estudios en la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Moscú de Nikolai Luzin (1883-1950) y Boris Bugaev (1880-1934). Juntos asistían, entre otras, a las clases de Nikolai Vasilievich Bugaev (1837-1903) –padre de Boris–, que inicialmente trabajó en análisis relacionado con la teoría de números y acabó especializándose en las funciones discontinuas.

> La discontinuidad es una manifestación de individualidad independiente y de autonomía. La discontinuidad interviene en cuestiones de causas finales y en problemas éticos y estéticos.(Nikolai Vasilevich Bugaev, ICM Zurich, 1897)

Florenski, Luzin y Bugaev (hijo) mantuvieron su amistad –y una estrecha y abundante relación epistolar– de por vida, Al acabar los estudios, Boris Bugaev se dedicó, con mucho éxito, a la poesía, que escribía con el seudónimo de Andrey Bely, Florenski dejó también la investigación matemática –aunque no la docencia–, se ordenó sacerdote de la Iglesia Ortodoxa Rusa (parece que fue miembro prominente de la secta de los *Adoradores del Nombre* que, a base de repetir una y otra vez el nombre –o la oración– de Jesús, entraban en un trance durante el que afirmaban experimentar a dios). Nikolai Luzin fue el único de los tres que, bajo la dirección de Dmitri Fedorovich Egorov (1869-1931), que había sido también alumno de Nikolai Bugaev, se dedicó a la investigación matemática. Siguiendo los pasos de este último, Egorov y Luzin investigaron fundamentalmente en análisis (funciones, teoría de la medida, etc), utilizando la teoría de los conjuntos transfinitos de Cantor, que conocieron a través de los trabajos de los matemáticos franceses durante sus visitas a París.

La reacción a los conjuntos infinitos de Cantor en Francia no había sido uniforme. Hubo quien desconfiaba de ellos,

> Ainsi, ces nombres de la 2^e et surtout de la 3^e classe ont un peu l'air d'une forme sans matiére ce qui répugne á l'esprit francais (Poincaré, 1883, en carta a Mittag-Leffler, [15, pág. 278]).

hubo quien no les encontraba utilidad,

> L'impression que nous produisent les mémoires de Mr Cantor est désolante; leur lecture nous semble à tous un véritable suplice, et en rendanthommage à on mérite, en reconnaissat quil a ouvert comme un nouveau champ de recherches, personne de nous n'est tenté de le suivre. Il nous est impossible, parmi les résultats qui sont suceptibles de compréhension, d'en voir un seul ayant un *intérèt actuel*; la correspondance entre les points d'une ligne et d'une surface nous laisse absolument indifferénts, et nous pensons que cette remarque, tant qu'on n'en aura point déduit quelque chose, résulte de considérations tellement arbitraires, que l'auteur aurait mieux fait de la garder et d'attendre (Hermite, 1883, en [15, pág. 209]).

y también hubo quienes, como Émil Borel (1871-1956), René-Louis Baire (1874-1932) o Henri Lebesgue (1875-1941), utilizaron sin reparos las herramientas desarrolladas por Cantor para resolver problemas importantes pendientes en las matemáticas del momento.

En 1984, por ejemplo, Borel utilizó en su tesis la teoría de conjuntos para demostrar un resultado clave sobre recubrimientos de un intervalo fijo por sucesiones infinitas de intervalos pequeños (Teorema de Heine-Borel). Esta idea supuso el primer paso del trabajo que le llevaría hasta la futura medida de Borel, concepto desarrollado después por Lebesgue. En 1898 utilizó de nuevo la teoría de conjuntos en otro problema distinto: dar respuesta a la pregunta ¿cómo determinar la longitud de una circunferencia si conocemos la longitud de un segmento? En vez de seguir la estela de Eudoxo y Arquímedes, Borel utilizó conjuntos, dando lugar a una nueva idea, la de *conjuntos de Borel*, a los que se les puede asignar una medida.

Por su parte, Baire, alumno de Borel, tras viajar a Italia en 1898 con una beca para trabajar con Vito Volterra –que utilizaba la teoría de conjuntos en análisis matemático–, defendió en 1989 su tesis con título *Clasificación de casi todas las funciones continuas y discontinuas de una variable real* –considerada por los especialistas una obra maestra y el primer paso hacia la teoría descriptiva de conjuntos–, en la que consiguió clasificar las funciones discontinuas que son límites de funciones continuas. Su trabajo fue descrito por Arnaud Denjoy (1884-1974), amigo de Borel, Baire y Luzin, de la siguiente manera.

> Para adivinar el enunciado preciso se necesitaban verdaderos poderes de observación, pero para demostrarlo se necesitaba utilizar en un contexto nuevo la teoría de los conjuntos transfinitos de Cantor.

Éste y los subsecuentes trabajos de Baire en el tema, fueron el punto de partida de Lebesgue en su tesis de 1902. Con su medida de Lebesgue y su integral (que logró definir para todas las funciones discontinuas acotadas que había introducido Baire), Lebesgue extendió la noción de conjuntos de Borel (los conjuntos medibles-Lebesgue incluyen a los medibles-Borel) con éxito inmediato. Unos años después, y de nuevo utilizando la teoría de conjuntos, Lebesgue demostró en su artículo *Sur les fonctions représentables analytiquement* de 1905, que existe una función en cada clase de la clasificación de Baire (resultado que utilizarán once años después Alexandrov y Hausdorff para demostrar que entre los conjuntos de Borel de la recta real no los hay que contradigan la Hipótesis del Continuo).

La situación cambió drásticamente cuando en 1904 Hilbert recibió una carta de Zermelo que incluía, en el marco de una demostración del Principio de Buena Ordenación que Cantor había enunciado en 1883 (todo conjunto puede ser bien ordenado), un enunciado explícito del Axioma de Elección. Muchos de los matemáticos de la época que llevaban años utilizando de forma implícita el Axioma de Elección, reaccionaron con hostilidad a la propuesta de Zermelo. Como si, al caer en la cuenta de lo que estaban haciendo, les hubiese entrado el vértigo de repente y se hubiesen caído al suelo.

Resulta muy ilustrativo, en este sentido, el intercambio de cartas en 1905 entre Borel, Baire, Lebesgue y Hadamard sobre la Teoría de Conjuntos de Cantor y el Axioma de Elección (AE), recogido por el último en [13]. En 1898, Borel había utilizado el AE en su demostración de que todo conjunto infinito tiene un subconjunto numerable ([21, pág. 9]). Por otro lado, la clasificación de Baire de las funciones reales era esencialmente equivalente a la de los conjuntos de Borel para $\mathbb{R}$, y la existencia de una función que se escapase a la jerarquía de Baire estaba íntimamente ligada a la existencia un conjunto no medible-Borel; para demostrar la existencia de tal conjunto, se necesita el AE ([21, pág. 68]). Finalmente, Lebesgue utilizó el AE en la parte más importante de su tesis, al introducir la –después llamada– medida de Lebesgue. Lebesgue buscaba una función m sobre los subconjuntos acotados de $\mathbb{R}^n$ de forma que para todo conjunto acotado A de $\mathbb{R}^n$, $m(A)$ fuese un número no negativo con tres propiedades: $m(A)$ es positivo para algún conjunto A, conjuntos congruentes[3] tienen igual medida y la medida de la unión numerable de conjuntos disjuntos es la suma de sus medidas respectivas (i.e. m es numerablemente aditiva). Para resolver este problema introdujo los *conjuntos medibles*, que extendían las familias de Borel y Baire y le permitieron definir la integral de Lebesgue. Pues bien, su demostración de que la medida de Lebesgue es numerablemente aditiva requiere, de manera inevitable, utilizar el AE ([21, pág. 69]). Estos usos sin reparo –y otros muchos[4]–, de la elección infinita, no impidieron que, confrontados con su enunciado explícito en la carta de Zermelo, Borel, Baire y Lebesgue se pronunciasen abiertamente en contra de que tal elección fuese considerada lícita en matemáticas. Sorprende especialmente la virulencia con que se manifiesta Lebesgue, considerando que el AE es crucial en su trabajo [5].

> Para mí, progreso en esta cuestión consistiría en delimitar el dominio de lo definible. Y, a pesar de las apariencias, en el análisis último todo debe ser reducido a lo finito (Baire, [13, pág. 264], [21, pág. 313]).

> Hacer una elección puede ser escribir o nombrar el elemento elegido. Hacer una infinidad de elecciones no puede ser escribir o nombrar los elementos elegidos, uno a uno; la vida es demasiado corta. Por lo tanto se ha de decir qué significa hacer las elecciones. En general, entendemos por esto que se da una regla que define los elementos elegidos. Para mí, como para Hadamard, esta regla es igualmente indispensable sea la infinitud numerable o no (Lebesgue,[13, pág. 268], [21, pág. 316])

[3]Dos conjuntos de $\mathbb{R}^n$ son congruentes si podemos ir de uno a otro mediante alguna traslación por un elemento de $\mathbb{R}^n$.

[4]Ver el capítulo *Implicit uses by Future Critics* en [21, págs. 64- 76]

[5]Ver su carta a Borel, [13, págs. 264-269] en el francés original, [21, págs. 314-317] en traducción al inglés.

Entre las dudas suscitadas por el Axioma de Elección (1904), la crisis suscitada por la paradoja de Russell (publicada en 1903) y el antagonismo de Poincaré, Picard, Hermite, etc., la teoría de conjuntos fue poco a poco desterrada de la corriente principal de la investigación matemática en Francia. Sin embargo, antes de que aquello ocurriera, Egorov (que viajó a París en 1903) y Luzin (que lo hizo en 1905 y, de nuevo, en 1913) habían tomado el relevo. Partiendo, entre otros, de los trabajos de Borel, Baire y Lebesgue, montaron un seminario de investigación en la Universidad de Moscú conocido con el nombre de Lusitania, embrión de la Escuela Matemática de Moscú (fundada por Lusin y Egorov en 1921) del que formaron parte, entre otros y además de Lusin y Egorov, Shnirelman, Bari, Urhyson, Sierpinski y Suslin.

Egorov investigó, fundamentalmente, análisis armónico (potenciales, sistemas triplemente ortogonales, teoría de la medida). El teorema de Egorov (1910) afirma que si una sucesión $\{f_n\}$ de funciones medibles converge puntualmente a una función f, las restricciones de las f_n al complementario de un conjunto de medida tan pequeña como se quiera convergen uniformemente a la restricción de f. Luzin, por su parte, llegó a ser uno de los matemáticos más importantes del siglo XX e investigó fundamentalmente en teoría descriptiva de conjuntos y análisis funcional (*point-set topology*). En 1912 resolvió la conjetura de Fatou al construir una serie trigonométrica que diverge en casi todo punto (con coeficientes que convergen monótonamente a cero), en 1918 descubrió y definió los conjuntos analíticos y en 1919 estudió propiedades de contorno de funciones analíticas (comportamiento bajo aplicaciones conformes). Pese a las reservas que en sus cartas de 1905 había expresado, Lebesgue escribió en 1913,

> Exigences mathématiques et exigences philosophiques sont constamment associées, on peut meme dire fondues. M. Luzin examine les questions d'un point de vue philosophique et aboutit ainsi à des résultats mathématiques: originalité sans précédent! (Lebesgue, Prefacio al libro de Luzin [18, págs. ix, xi]).

Durante las conferencias sobre filosofía y matemáticas que en 1932 impartió en la Universidad de Yale, Hermann Wey leyó,

> La matemática es la ciencia de lo infinito, su objetivo la comprensión simbólica de lo infinito con medios humanos, esto es, finitos. El gran logro de los griegos ha sido haber hecho el contraste entre lo finito y lo infinito fructífero para el conocimiento de la realidad. Viniendo del Oriente, la intuición religiosa del infinito, el $\alpha\pi\alpha\iota\rho o\nu$, se asentó en el alma griega. Esta tensión entre lo finito y lo infinito y su conciliación, se convierte en motor direccional de la investigación griega (Hermann Weyl, *The open world: three lectures on the metaphysical implications of science*, Yale University Press, 1932)

Ya sea porque, como sugiere Weyl –e intentan argumentar Graham y Kantor en su libro ya mencionado–, viniendo del Oriente –como el propio Cantor, habría que añadir– la intuición religiosa del infinito se asentó en el alma rusa, ya sea porque, como Gauss, Riemann o Hausdorff, se atrevieron a pensar de otra manera, el caso es que Egorov y Luzin investigaron toda su vida en torno a lo infinito y la discontinuidad.

La amistad inicial entre Luzin y Florenski pronto se había extendido a Egorov, como las cartas entre ambos demuestran ([12]). No sorprende, pues, que leyendo las notas tomadas por Florenski para sus clases en [7] y [9], encontremos que las ideas geométricas que sustentan las matemáticas de Egorov y Luzin sustenten, a su vez, muchas de las ideas que sobre el espacio transmitió Florenski en sus clases de los Vkhutemas. Durante los años en que estuvo prisionero (desde 1933 hasta su ejecución en 1937) Pável Florenski mantuvo una correspondencia regular y abundante con su familia. En una carta que escribió en 1937 a su hijo Kirill desde el campo de concentración de las Solovski, Florenski elabora a vuela pluma una lista de sus intereses que comienza de la siguiente manera.

> *En Matemáticas:* 1) Los conceptos matemáticos como constitutivos de la filosofía (discontinuidad, funciones, etc.). 2) La teoría de los conjuntos y la teoría de las funciones de variable real. 3) Los imaginarios geométricos. 4) La individualidad de los números (número, forma). 5) El estudio de las curvas *in concreto*. 6) Los métodos de análisis de la forma. *En filosofía e historia de la filosofía...* (Florenski, en [10, pág. 18]).

Veamos, a continuación, algunos párrafos ilustrativos extraídos de sus apuntes para las clases que impartió en los Vkhutemas entre 1921 y 1924.

> La estructura del espacio está caracterizada por su curvatura. Me siento muy culpable por el hecho de molestarles con conceptos matemáticos, pero no veo otro camino para acercarme a los problemas estéticos. Aquello que ha sido elaborado en la matemática contemporánea puede ser transferido completamente al terreno de la estética. Desgraciadamente, no podemos limitarnos a conceptos propios de la estética. Por eso el concepto de curvatura me obliga a importunarles ahora con la matemática (Florenski [10, pág. 291]).

> Hablando en términos geométricos, ¿qué significa, entonces, representar alguna realidad? Significa poner los puntos del espacio representado en correlación con los de algún otro espacio, en este caso el del plano. Pero la realidad es por lo menos tridimensional. Incluso si prescindimos de la cuarta dimensión del tiempo, sin la cual el arte es imposible, el plano es sólo bidimensional. ¿Es posible semejante correspondencia? ¿Es posible reflejar una imagen de cuatro dimensiones, o tres para una mayor sencillez, en una superficie bidimensional? ¿Tendrá ésta suficientes puntos de correspondencia para los puntos de la imagen? O, hablando matemáticamente, ¿puede compararse la potencia de la imagen tridimensional con la de la bidimensional? La respuesta que se impone naturalmente es: "Por supuesto que no". "Por supuesto que no, ya que dentro de una imagen tridimensional hay una multitud infinita de secciones bidimensionales y, por tanto, su potencia es infinitamente mayor que la potencia de cada sección por separado."Sin embargo, la investigación atenta de esta cuestión en la teoría de conjuntos de puntos muestra que la respuesta no es tan sencilla como parece a primera vista; es más, la respuesta tan aparentemente natural que hemos dado no puede darse por correcta. Más concretamente, la potencia de cualquier imagen tridimensional, o incluso multidimensional, es la misma que la potencia de cualquier imagen bidimensional, o incluso unidimensional. Se puede representar una realidad de tres y cuatro dimensiones sobre el plano, y no sólo sobre el plano, sino sobre cualquier segmento de una línea recta o curva. Es incluso posible establecer la imagen a través de una cantidad infinita de correspondencias tanto aritméticas o analíticas como geométricas. Como modelo de lo primero puede servir el método de Georg Cantor, y de las segundas, la curva de Peano y la curva de Hilbert. [...] Con el método de Cantor la imagen se traslada punto por punto, de manera que cualquier punto de la imagen se corresponde *sólo con un* punto de la representación y, al revés, cada punto de esta última refleja sólo un punto de lo que representa. En este sentido, la correspondencia cantoriana

> satisface el concepto más común de la representación. Su otra característica se aleja extraordinariamente, sin embargo, de esta última: como ocurre con el resto de las correspondencias recíprocamente iguales, ésta no guarda las relaciones de vecindad con los puntos, no respeta su orden y sus proporciones, es decir, no puede ser continua. [...] Por otro lado, la correspondencia de Peano, Hilbert, etc., no puede ser recíprocamente igual, como fue demostrado por Lűroth, Jurgens y los demás, de modo que un punto de la línea no siempre se representa con un solo punto del cuadrado y, además, esta correspondencia no es del todo continua. En otras palabras, la representación de un cuadrado sobre una línea, o de un volumen sobre una superficie, traslada *todos* los puntos, pero es incapaz de transmitir la *forma* de lo representado como algo entero, como un objeto internamente determinado en su estructura: *se transmite el contenido del espacio pero no su organización.* Para representar un espacio con *todo* su contenido de puntos es preciso, hablando metafóricamente, *o bien*, pulverizarlo hasta dejarlo convertido en un polvo infinitamente fino y, una vez bien mezclado, *esparcirlo* por la superficie de la representación, de manera que de su organización inicial no quede ni rastro; *o bien* laminarlo en capas, de modo que no quede nada de su forma original, para luego colocar estos estratos *repitiendo* los mismos elementos de la forma y por el otro lado, encajando recíprocamente estos elementos los unos dentro de los otros. [...] No hay manera de colocar la cáscara, o un trozo de la cáscara de un huevo, sobre la superficie de mármol de una mesa si no es destruyendo su forma, reduciéndola a polvo fino; por la misma razón que no se puede *representar*, en sentido estricto, un huevo sobre papel o lienzo. [...] En resumen: *es posible representar un espacio sobre una superficie pero sólo destruyendo la forma de lo representado.* Mientras tanto precisamente la forma y sólo la forma es el objeto del arte plástico. Por consiguiente, queda dictada la sentencia final de la pintura y, en general, de las artes plásticas, pues si éstas pretenden ofrecer un simulacro de la realidad, *el naturalismo es, sencillamente, imposible* ([7, págs. 84-89]).

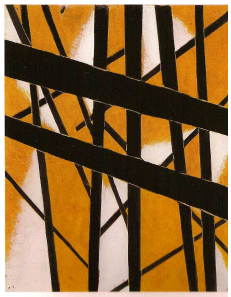
Si el naturalismo es imposible, ¿cuál ha de ser el objetivo del pintor? ¿qué puede representar en su lienzo?

> La tarea del artista es organizar un cierto absoluto, un cierto todo cerrado en sí mismo, y la base de este absoluto es el espacio.Y de esto se deduce que el espacio de la obra de arte debe, necesariamente, ser cerrado en sí mismo ([10, pág. 286]).

> Finalmente, todo el sentido del arte se reduce a la organización del espacio.[...] Esquemáticamente, se puede decir que distribuyendo el color, la tinta, sobre la tela, se presenta una nueva realidad. Nace un nuevo espacio ([10, pág. 296]).

Desde 1921 hasta 1924, Pável Florenski tuvo a su cargo en los Vkhutemas la asignatura *Teoría del espacio*. En la misma escuela trabajaba la pintora constructivista Lyobov Popova, que impartió desde que éstos se abriesen en 1920 la asignatura básica troncal *La influencia máxima del color*. Popova escribió en 1921 ([24, pág. 166]) el siguiente texto como comentario a su obra.





1. La representación, en cuanto resultado de la producción artística, es un objetivo que ha satisfecho las necesidades prácticas desde el Renacimiento hasta hace muy poco (la pintura de caballete, los iconos, los frescos, las esculturas situadas en lugares públicos, en cortes y palacios, la arquitectura como objeto visual, etcétera). 2. El análisis de los elementos formales del arte, que se ha convertido en el objetivo de la producción en las últimas décadas, ha supuesto una crisis en el arte pictórico. 3. El auténtico arte debería ser la síntesis resultante de este análisis: en Alemania y los países culturalmente afines, se expresa a través de aproximaciones emocionales, psicológicas y metafísicas a los objetivos del arte; en Francia, la síntesis se reduce a adquirir cierta destreza en el manejo de los materiales como consecuencia del estudio analítico. 4. En Rusia, como resultado de las condiciones sociales y políticas que estamos experimentando, el objetivo de la nueva síntesis es la *organización*. La organización es el principio en que se basa toda actividad creativa, incluida la composición artística. 5. La era en la que acaba de adentrarse el hombre contemporáneo se caracteriza por el florecimiento de la industrial, y por este motivo, la organización de los elementos de la producción artística debe establecer una relación con el orden de los componentes materiales de la vida, es decir, con la industria y con lo que se denomina producción. 6. Una producción industrial específica, en la que la creatividad artística desempeñe una función, no tendrá nada que ver con la antigua aproximación estética al objeto, en la medida en que se dejará de prestar atención a la decoración del objeto por medio de técnicas artísticas (artes aplicadas), y la organización se convertirá en el principio directo de la creación de los objetos prácticos, incluso cotidianos 7. Por tanto, el "arte figurativo"–la pintura, la escultura y hasta la arquitectura (ya que hasta ahora en arquitectura la imagen visual ha suplantado a la construcción espacial práctica)– ya no desempeña función alguna, ya no es necesario para la conciencia de nuestra época, y todo lo que el arte puede ofrecer debe considerarse sencillamente como un salto atrás. 8. Por esta razón, las formas figurativas de cualquier tipo, como la pintura de caballete, el dibujo, el grabado, la escultura, etc., sólo serán útiles si (1) representan una fase experimental destinada a la búsqueda de las nuevas técnicas que se precisan, y (2) en la medida en que actúen como proyecciones complementarias y esquemas de construcción.

4. Conclusión

Cuenta Daniel-Henry Khanweiler ([16, pág. 44]), galerista de los cubistas en París, que Picasso le dijo, "En un cuadro de Rafael es imposible medir la distancia que hay entre la punta de la nariz y la boca. Yo quiero pintar cuadros en los que esto sea posible". Claramente, los constructivistas no.

5. Agradecimientos

A Mariano Martínez y Juan Tarrés, por la generosidad con la que, una vez más, me han dejado hacer uso de sus textos y sus palabras sobre las matemáticas del siglo XIX. A Barry Mazur y Horacio Fernández por su ayuda localizando los textos matemáticos de Pável Florensky. A José Ruiz por su ayuda localizando las cartas de Pável Florenski desde la cárcel y los textos matemáticos anteriores a 1904 en que se hizo uso implícito del Axioma de Elección. Y, muy especialmente, José Manuel Gamboa e Ignacio Luengo por sus correcciones, observaciones y comentarios a la primera versión de este texto.

Referencias

[1] Dante Alighieri 1312-1321, *La Divina Comedia, Paraíso*, traducción al castellano de Angel Crespo, Planeta 1990, págs. 395-591.

[2] Solomon Bochner, *El papel de la matemática en el desarrollo de la ciencia* (1966). Traducción al castellano de Mariano Martínez, Alianza Universidad 689, 1991.

[3] Georg Cantor, Richard Dedekind, *Correspondencia epistolar en torno al concepto de dimensión*, en [5].

[4] Capi Corrales, *Contando el espacio*, mobcoop ediciones, Madrid 2000.

[5] John Fauvel, Jeremy Gray, *The History of Mathematics: a reader?*, The Open University, (1987).

[6] José Ferreirós, *Riemanniana Selecta*, Ediciones del CSIC, Madrid 2000.

[7] Pável Florenski, *La perspectiva invertida* (1920). Siruela, 2005.

[8] Pável Florenski, *Lo spazio e il tempo nell'arte* (1924). Adelphi Edizioni, Milano 1995.

[9] Pável Florenski, *Lezioni al Vchutemas anno accademico 1923/24*, en [8],págs. 243-332.

[10] Pável Florenski, *Cartas de la prisión y de los campos*, Ediciones Universidad de Navarra, 2005.

[11] Carl Friedrich Gauss, *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, 1828, Werke, vol 4, sec. 13.

[12] Loren Graham, Jean-Michel Kantor, *Naming Infinity. A true story of religious mysticism and mathematical creativity.* Harvard University Press 2009.

[13] Jacques Hadamard, *Cinq lettres sur la théorie des ensembles*, Bulletin de la SMF, tomo 33 (1905), págs. 261-273.

[14] Felix Hausdorff, *Grundzűge der Mengenlehre* (1914), edición en inglés, Chelsea P.C., NYC 1957.

[15] Charles Hermite, *Lettres de Charles Hermite a. Gősta Mittag-Leffler (1874-1883)*, Cahiers du Seminaire d'histoire des mathématiques, 5 (1984), págs. 49-285.

[16] Daniel-Henry Kahnweiler, *El camino hacia el cubismo* (1920), Quaderns Crema, Barcelona 1997.

[17] Erle Loran, *Cézanne's Composition* (1943), University of California Press 1963.

[18] Nicolas Luzin, *Leçons sur les ensembles analytiques et leurs applications*, Gauthier-Villars, Paris, 1930.

[19] Barry Mazur, *Imaginning numbers* (particularly the square root of minus fifteen), Farra, Syraus and Giroux 2003.

[20] Arthut I. Miller, *Einstein, Picasso: Space, Time and the Beauty that Causes Havoc*, Basic Books 2001.

[21] Gregory H. Moore, *Zermelo's Axiom of Choice. Its origins, development and influence*, Springer-Verlag, 1982.

[22] Mark A. Petersen, *Dante and the 3-sphere*, American Journal of Physics 47 (1979), págs. 1031-1035.

[23] Henri Poincaré, *La ciencia y la hipótesis* (1902), Ediciones Austral 1963 (3a. edición).

[24] Lyubov Popova, *Comentarios a los dibujos*, en "Rodchenko y Popova: definiendo el constructivismo", Ediciones MNCA Reina Sofía 2009.

[25] Bernhard Riemann, *Fragmentos sobre variedades y geometría*, 1852/53, en [6], págs. 93-95.

[26] Bernhard Riemann, *Sobre las hipótesis en que se funda la geometría* (Lección de habilitación como profesor, 1854; publicada en 1868), en [6], págs. 2-18.

[27] Juan Tarrés, *Historia de la teoría de la dimensión*, en "Seminario de Historia de la Matemática I", Universidad Complutense, Madrid 1991, págs. 59-96.

[28] Juan Tarrés, *La Topología General desde sus comienzos hasta Hausdorff*, en "Historia de la Matemática en el sigo XIX", Edición de la Real Academia de las Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Madrid 1994, págs. 191-211.