

# Continuación de atractores y conjuntos “non-saddle”

Antonio GIRALDO y José SANJURJO

Departamento de Matemática Aplicada  
Facultad de Informática  
Universidad Politécnica de Madrid  
E-28040 Madrid, Spain  
agiraldo@fi.upm.es

Departamento de Geometría y Topología  
Facultad de CC.Matemáticas  
Universidad Complutense de Madrid  
E-28040 Madrid, Spain  
jose\_sanjurjo@mat.ucm.es

*Dedicado al profesor Joan Tarrés.*

## ABSTRACT

En este trabajo expositivo se presentan algunas propiedades dinámicas y topológicas de continuaciones de atractores y conjuntos no-saddle de flujos en variedades. Un caso interesante se produce para el sistema de Lorenz para valores de parámetro cercanos a la situación de preturbulencia. Se presenta un resultado general, motivado por este caso particular.

In this survey we present some dynamical and topological properties of continuations of attractors and non-saddle sets of flows on manifolds. An interesting case occurs for the Lorenz system for parameter values close to the situation of preturbulence. A general result, motivated by this particular case, is presented.

*Key words:* dynamical system, continuation of isolated invariant sets, singular continuation, attractor, cuasi attractor, shape, Lorenz system.

*2010 Mathematics Subject Classification:* 37B25, 37D45.

## 1. Preliminares

En este trabajo expositivo se estudian algunas propiedades, dinámicas y topológicas, de continuación en familias uniparamétricas de flujos. En sistemas dinámicos, no sólo en el marco teórico, sino también al describir fenómenos naturales del mundo real, es frecuente la aparición de espacios con comportamiento local muy complicado (ejemplos típicos son el atractor de Lorenz y los solenoides). Como fue observado por Kennedy y Yorke en [18] “las topologías extrañas son naturales en sistemas dinámicos”. Cuando se trabaja con estos espacios, la teoría de homotopía clásica no es totalmente satisfactoria. La herramientas adecuadas para estudiar propiedades topológicas globales son en este caso la homología y cohomología de Čech [9] y la teoría de la forma, introducida por K.Borsuk [4].

---

Ambos autores subvencionados por la Dirección General de Investigación.

Dado un conjunto compacto invariante  $K$  de un flujo  $\varphi : X \times \mathbb{R} \rightarrow X$  en un espacio métrico localmente compacto  $X$ , se dice que  $K$  es un conjunto invariante aislado si existe un entorno compacto  $N$  de  $K$  en  $X$  tal que  $K$  es el subconjunto invariante máximo de  $N$ . Decimos entonces que  $N$  es un entorno aislante para  $K$ .

Ejemplos particulares de conjuntos invariantes aislados son los atractores y los conjuntos aislados “non-saddle”. Un conjunto compacto  $K \subset X$  es un atractor si existe un entorno  $U$  de  $K$  en  $X$  tal que cada  $x \in U$  cumple que para cada entorno  $V$  de  $K$  en  $X$  existe  $t \in \mathbb{R}_+$  tal que  $\varphi(\{x\} \times [t, \infty)) \subset V$ .  $K$  es un atractor asintóticamente estable si es un atractor tal que cada entorno de  $K$  contiene un entorno positivamente invariante. En este trabajo, todos los atractores se supondrán asintóticamente estables. Por otro lado, un conjunto invariante  $K$  de un flujo  $\varphi : X \times \mathbb{R} \rightarrow X$  es un conjunto non-saddle si para cada entorno  $U$  de  $K$  existe un entorno  $V$  de  $K$  tal que para cada  $x \in V$ ,  $\gamma^+(x) = \varphi(\{x\} \times [0, \infty)) \subset U$  o  $\gamma^-(x) = \varphi(\{x\} \times (-\infty, 0]) \subset U$ . En todo este trabajo consideraremos conjuntos “non-saddle” que además sean conjuntos aislados.

Uno de los hitos de la aplicación de la teoría de la forma a sistemas dinámicos fue la demostración de que todo atractor (asintóticamente estable) de un flujo en un ANR localmente compacto (en particular en una variedad) tiene la forma de un poliedro (finito). Esta propiedad se ha formulado en [3] [14] y [23] en distintos niveles de generalidad (véase también [10, 25] para otros resultados relacionados). En [11] se demostró un resultado análogo para conjuntos “non-saddle”.

Sea  $X$  un espacio métrico localmente compacto y sea  $\varphi_\lambda : X \times \mathbb{R} \rightarrow X$  una familia uniparamétrica de flujos (parametrizada por  $\lambda \in [0, 1]$ ), tal que  $\Phi : X \times I \times \mathbb{R} \rightarrow X \times I$ , dada por  $\Phi(x, \lambda, t) = (\varphi_\lambda(x, t), \lambda)$ , es un flujo en  $X \times I$ . Sean  $K_0 \subset X$  y  $K_1 \subset X$  conjuntos invariantes aislados para  $\varphi_0$  y  $\varphi_1$ , respectivamente. Decimos que  $\varphi$  es una continuación de  $K_0$  a  $K_1$ , o que  $K_1$  es una continuación de  $K_0$ , si existe un conjunto invariante aislado  $K \subset X \times I$  para  $\Phi$  tal que  $K_0 = K \cap (X \times \{0\})$  y  $K_1 = K \cap (X \times \{1\})$ . Esto equivalente a que exista una familia  $K_\lambda$ ,  $\lambda \in [0, 1]$ , con  $K_\lambda$  conjunto invariante aislado para  $\varphi_\lambda$ , tal que, si  $N_{\lambda_0}$  es un entorno aislante para  $K_{\lambda_0}$ , existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $N_{\lambda_0}$  es un entorno aislante para  $K_\lambda$ , para cada  $\lambda \in (\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon) \cap [0, 1]$ .

Una propiedad de un conjunto invariante aislado es robusta si se transmite a los conjuntos cercanos de la continuación. Es bien conocido que la propiedad de ser un atractor es robusta. Esto no es cierto, en general, para conjuntos non-saddle, aunque sí se cumple bajo determinadas condiciones que veremos en la sección 2. Por otra parte, si tenemos una familia uniparamétrica continua de flujos  $\varphi_\lambda : X \times \mathbb{R} \rightarrow X$  ( $\lambda \in [0, 1]$ ) y una familia de atractores  $\{K_\lambda | \lambda \in [0, 1]\}$  relacionados por continuación, puede o no existir un atractor  $K_1$  que complete la continuación. En el resto de las secciones veremos algunos resultados relacionados con esta situación. En particular, en la sección 6, a partir del estudio del sistema de Lorenz para algunos valores clásicos del parámetro, veremos un resultado para el caso de continuaciones de atractores en  $[0, 1]$  que no pueden extenderse a  $[0, 1]$ , sino que experimentan una transición de atractor a repulsor cuando el parámetro toma el valor 1. Mostramos que, bajo hipótesis muy generales, el repulsor tiene la misma forma que los atractores de la continuación.

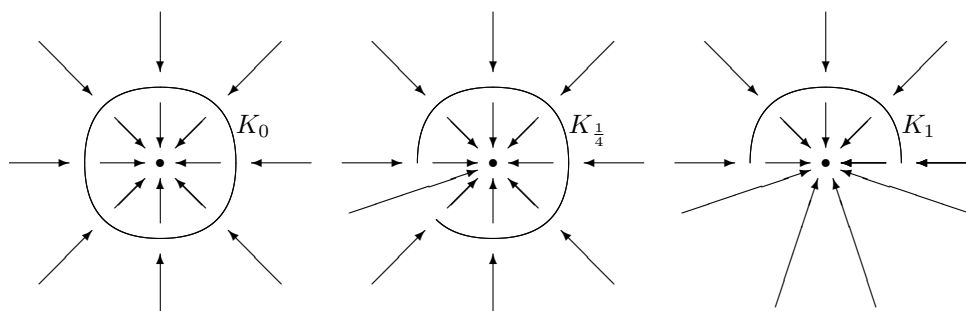
Para obtener información acerca de los resultados básicos de la teoría de la forma recomendamos los libros [4, 7, 19, 6] y el artículo [22]. También utilizamos conceptos y resultados de la teoría del índice Conley [5, 8]. Para la teoría general de sistemas dinámicos recomendamos los libros [2, 27, 1, 20]. Finalmente, recomendamos el libro

[26] y el survey [28] para obtener información general sobre el atractor de Lorenz.

## 2. Propiedades de robustez de continuaciones

Sea  $X$  un espacio métrico localmente compacto y localmente conexo y sea  $\varphi_\lambda : X \times \mathbb{R} \rightarrow X$  una familia uniparamétrica de flujos ( $\lambda \in [0, 1]$ ). Sean  $K_0, K_1 \subset X$  conjuntos invariantes aislados de  $\varphi_0$  y  $\varphi_1$ , respectivamente, relacionados por continuación por  $\varphi$ . Si  $K_0$  es un atractor, existe  $\delta > 0$  tal que  $K_\lambda$  es un atractor, para cada  $\lambda < \delta$ . Nos podemos preguntar si esta propiedad de robustez de atractores también la tienen los conjuntos “non-saddle”. La respuesta es negativa, incluso para los conjuntos “non-saddle” conexos, como se muestra en el ejemplo siguiente.

**Ejemplo 2.1.** Considere la familia de las flujos en el plano dado por las siguientes gráficas



donde, para cada  $\lambda \in [0, 1]$ ,  $K_\lambda$  es un arco de longitud igual a  $2\pi - \lambda\pi$ .

Entonces  $\{K_\lambda\}$  es una continuación de conjuntos invariantes aislados, pero mientras que  $K_0$  es “non-saddle”, ninguno de los  $K_\lambda$  con  $\lambda > 0$  lo es.

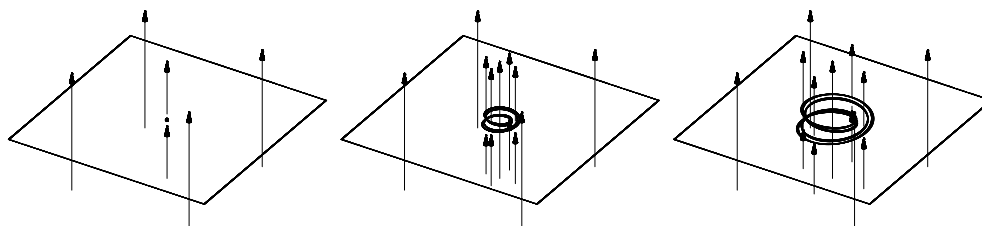
En las siguientes definiciones introducimos algunas nociones de robustez dinámica y topológica para conjuntos invariantes aislados.

**Definición 2.2.** Sea  $\varphi_\lambda : X \times \mathbb{R} \rightarrow X$  una familia uniparamétrica de flujos ( $\lambda \in [0, 1]$ ) en un ANR localmente compacto,  $X$  y supongamos que  $K_0$  es un conjunto aislado “non-saddle” de  $\varphi_0$ . Decimos que:

- i)  $K_0$  es *dinámicamente robusto* si dado  $N$  entorno aislante de  $K_0$  existe  $\delta > 0$  tal que, para cada  $\lambda \in [0, \delta)$ , el subconjunto invariante aislado de  $N$  (para el flujo  $\varphi_\lambda$ ) que tiene  $N$  como un entorno aislante es un conjunto “non-saddle” (no vacío).
- ii)  $K_0$  es *topológicamente robusto* si dado  $N$  entorno aislante de  $K_0$  existe  $\delta > 0$  tal que, para cada  $\lambda \in [0, \delta)$ , el subconjunto invariante aislado de  $N$  (para el flujo  $\varphi_\lambda$ ) que tiene  $N$  como un aislamiento de Vecindad tiene la misma forma que  $K_0$ .

El ejemplo anterior muestra que la robustez topológica no se da en general, pues un conjunto invariante conexo con el tipo de homotopía y la forma de una circunferencia continúa en conjuntos invariantes conexos contractibles. En el ejemplo siguiente se muestra que incluso puede no conservarse la propiedad de tener forma poliédrica.

**Ejemplo 2.3.** Consideramos una familia  $\varphi_\lambda : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4$  ( $\lambda \in I$ ) de flujos en  $\mathbb{R}^4$  tal que, para cada  $\lambda \in I$ , el flujo es transversal a un hiperplano tridimensional y hay un conjunto invariante compacto  $\{K_\lambda\}$  contenido en ese hiperplano, como se muestra en la figura siguiente.



Entonces  $\{K_\lambda\}$  es una continuación de conjuntos invariantes aislados pero, mientras que  $K_0$  tiene la forma de un punto, el resto de  $K_\lambda$  con  $\lambda > 0$  son solenoides con forma no poliédrica.

Para que se tenga la robustez topológica tenemos que imponer una condición adicional de regularidad [24], relacionada con el comportamiento de las órbitas en la frontera del entorno aislante de los conjuntos “non-saddle”, y otra de compatibilidad entre entornos regulares en la continuación. En el caso de familias uniparamétricas diferenciables, estas condiciones adicionales no son necesarias.

**Definición 2.4.** Sea  $\varphi : X \times \mathbb{R} \rightarrow X$  un flujo en un ANR localmente compacto,  $X$ . Un conjunto invariante aislado  $S$  es *regular* si existe un entorno aislante  $N$  tal que si  $x \in N$ ,  $t \geq 0$  y  $\varphi(x, t) \in N$  entonces  $\varphi(\{x\} \times [0, t]) \subset N$ . Esto equivale a decir que las órbitas que dejan  $N$  nunca regresan. Decimos entonces que  $N$  es un entorno aislante regular para  $S$ .

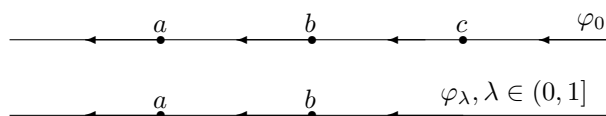
Si  $\varphi_\lambda : X \times \mathbb{R} \rightarrow X$  es una familia uniparamétrica de flujos ( $\lambda \in [0, 1]$ ) y  $K_0$  es un conjunto aislado “non-saddle” regular para  $\varphi_0$ , decimos que  $K_0$  es *regularmente dinámicamente robusto* si para cada entorno aislante  $N$  de  $K_0$  existe  $\delta > 0$  tal que si  $\lambda \in [0, \delta)$ , el subconjunto invariante aislado de  $N$  (en relación con el flujo  $\varphi_\lambda$ ) que tiene  $N$  como un entorno aislante es un conjunto “non-saddle” regular (no vacío) y, además, todos los  $K_\lambda$  ( $0 \leq \lambda < \delta$ ) admiten un entorno aislante regular común.

**Teorema 2.5.** Sea  $\varphi_\lambda : X \times \mathbb{R} \rightarrow X$  una familia uniparamétrica de flujos ( $\lambda \in [0, 1]$ ) en un ANR localmente compacto,  $X$ , y sea  $K_0$  un conjunto invariante aislado conexo “non-saddle” regular de  $\varphi_0$ .

Si  $K_0$  es regularmente dinámicamente robusto,  $K_0$  es topológicamente robusto.

La condición de que  $K_0$  sea un conjunto conexo “non-saddle” es necesaria, como se muestra en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 2.6.** Considérese



Entonces  $K_0 = \{a, c\}$  es “non-saddle” regularmente dinámicamente robusto pero no topológicamente robusto.

Terminamos esta sección con un resultado que relaciona la robustez dinámica regular de un conjunto “non-saddle” y la de su conjunto dual [11]. Dado un conjunto “non-saddle” regular de un flujo  $\varphi : X \times \mathbb{R} \rightarrow X$ , donde  $X$  es un espacio métrico compacto, consideramos el conjunto  $K'$  de todos los puntos  $x \in X$  tales que  $\omega^+(x) \not\subset K$  y  $\omega^-(x) \not\subset K$ . Entonces  $K'$  es también un conjunto aislado “non-saddle” regular llamado dual de  $K$ . Además,  $K'$  es no vacío si  $K \neq X$ .

Para conjuntos “non-saddle” regulares conexos con conjunto dual conexo, la robustez dinámica regular del primero implica la robustez dinámica regular de este último.

**Teorema 2.7.** *Sea  $\varphi_\lambda : X \times \mathbb{R} \rightarrow X$  una familia uniparamétrica de flujos ( $\lambda \in [0, 1]$ ) en un espacio métrico compacto,  $X$ , y supongamos que  $K_0$  es un conjunto “non-saddle” conexo regular tal que su “non-saddle” dual  $K'_0$  es conexo y no vacío.*

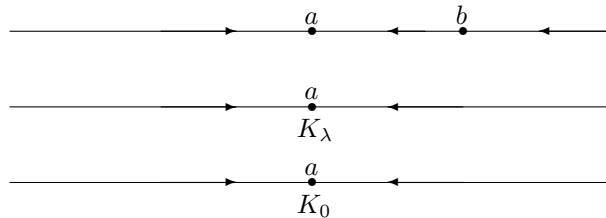
*Supongamos que  $K_0$  es regularmente dinámicamente robusto  $K_0$  y, por tanto, topológicamente robusto. Entonces  $K'_0$  también es regularmente dinámicamente robusto y, por tanto, topológicamente robusto.*

*Además, si  $\{K_\lambda\}_{\lambda \in [0, \delta]}$  es una familia de conjuntos “non-saddle” regulares (con respecto a los flujos  $\{\varphi_\lambda\}_{\lambda \in [0, \delta]}$ ) con un entorno aislante regular común, entonces, la familia  $\{K'_\lambda\}_{\lambda \in [0, \delta]}$  de sus duales comparten también un entorno aislante regular común y, por lo tanto, es una continuación local de  $K'_0$ .*

### 3. Continuaciones de atractores

Si  $\{K_\lambda\}$  es una continuación de conjuntos invariantes aislados tal que  $K_\lambda$  es un atractor, para  $\lambda \in [0, 1)$ ,  $K_1$  no tiene necesariamente que ser un atractor, tal y como se muestra en el ejemplo siguiente.

**Ejemplo 3.1.** Considérese la siguiente familia de flujos que son iguales en un entorno de  $a$ , mientras que lejos de  $a$  se van ralentizando hasta que aparece un nuevo punto fijo  $b$  cuando  $\lambda = 1$ .



Entonces,  $[a, b]$ ,  $\{a, b\}$  y  $\{a\}$  (para  $\lambda = 1$ ) son continuaciones de  $K_0 = \{a\}$ . Se tiene que  $K_\lambda$  es un atractor para  $0 < \lambda < 1$ . Sin embargo, de las tres posibles continuaciones para  $\lambda \rightarrow 1$ ,  $K_0$ ,  $[a, b]$  y  $\{a\}$  son atractores, mientras que  $\{a, b\}$  no lo es.

Este ejemplo motiva el teorema siguiente.

**Teorema 3.2.** *Supongamos que  $\varphi_\lambda : X \times \mathbb{R} \rightarrow X$  es una familia uniparamétrica de flujos ( $\lambda \in [0, 1]$ ) sobre un ANR localmente compacto,  $X$ , y supongamos que  $K_0 \subset X$  es un atractor conexo para  $\varphi_0$ . Sea  $K_1$  relacionado por continuación con  $K_0$ .*

- I) Si  $K_1$  es conexo, entonces  $K_1$  es un atractor y  $\text{Sh}(K_0) = \text{Sh}(K_1)$ .
- II) Si  $K_1$  no es conexo, entonces  $K_1 = K_1^1 \cup K_1^2$  (con  $K_1^1 \cap K_1^2 = \emptyset$ ), donde  $K_1^1$  es un atractor conexo que continúa  $K_0$ , y  $K_1^2$  es un compacto invariante con índice de Conley trivial. Además,  $\text{Sh}(K_0) = \text{Sh}(K_1^1)$ .

**Observación 3.3.** A pesar de tener índice de Conley trivial,  $K_1^2$  puede ser topológicamente muy complicado. Se puede demostrar, por una construcción similar a la del Ejemplo 3.1 que cualquier compacto finito-dimensional  $K$  puede ser sumergido en  $\mathbb{R}^n$ , para un  $n$  adecuado, de tal manera que existe una familia uniparamétrica de flujos  $\varphi_\lambda : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  ( $\lambda \in [0, 1]$ ) tal que  $K_0 = \{0\}$  es un atractor conexo para  $\varphi_0$  y  $K_1 = K_0 \cup K$  (unión disjunta) está relacionado por continuación con  $K_0$ .

#### 4. Continuaciones de atractores a cuasi-atractores

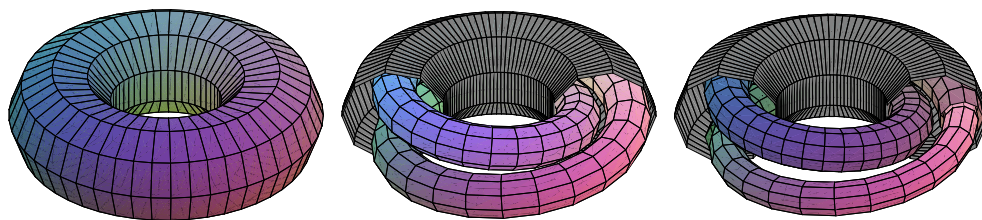
Un cuasi-atractor de un flujo  $\varphi$  es un conjunto invariante compacto, no vacío,  $K$ , que es una intersección de atractores de  $\varphi$ . Se sabe que, para un flujo en el plano, los únicos atractores posibles son compactos con un número finito de componentes, que descompongan el plano en un número finito de componentes (es decir, compactos con la forma de un poliedro finito). La noción de un cuasi-atractor es mucho más general.

**Teorema 4.1.** Cualquier continuo del plano puede ser un cuasi-atractor de un sistema dinámico en  $\mathbb{R}^2$ .

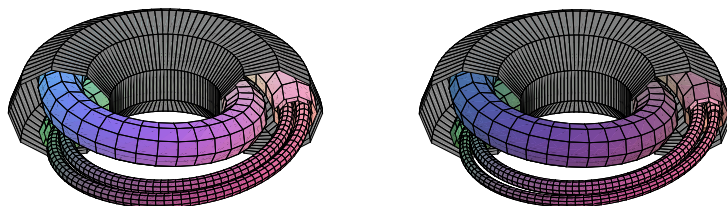
La demostración consiste en expresar un continuo del plano como una intersección decreciente (infinita) de poliedros finitos y construir un flujo que tiene cada uno de esos poliedros finitos como un atractor. Esta misma construcción se puede utilizar para probar que conjuntos más complicados en dimensiones superiores también pueden ser cuasi-atractores, e incluso obtener esos cuasi-atractores como una intersección alternada de atractores y repulsores. En el ejemplo siguiente se ilustra, en el contexto de flujos, algunas situaciones genéricas descritas por Kennedy [17] y Hurley [16].

**Ejemplo 4.2.** Vamos a construir un flujo en  $\mathbb{R}^3$  que tiene un solenoide como cuasi-atractor. Nótese que el solenoide no puede ser un atractor de un flujo, ya que no tiene la forma de un poliedro.

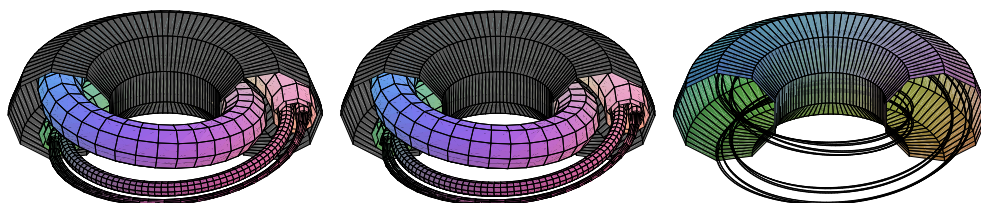
Empezamos con un toro sólido  $T_0$ , un segundo toro sólido  $T_1$  enrollado dos veces dentro del primero, y un tercer toro sólido  $T_2 \subset T_1$  isotópico a  $T_1$ . El flujo tendrá  $T_0$  como un atractor, será estacionario entre  $T_0$  y  $T_1$ , y tendrá  $T_2$  como un repulsor.



Consideramos ahora dos toros sólidos isotópicos  $T_4 \subset T_3$  enrollados dos veces en  $T_2$ . El flujo será estacionario entre  $T_2$  y  $T_3$  y tendrá  $T_4$  como un atractor.



Consideramos ahora dos toros sólidos isotópicos  $T_6 \subset T_5$  enrollados dos veces en  $T_4$ . El flujo será estacionario entre  $T_4$  y  $T_5$  y tendrá  $T_6$  como un repulsor. Continuando este proceso obtenemos un flujo con el solenoide como un cuasi-atractor.



Existe una sucesión decreciente  $\{T_i\}$  de toros tales que  $T_0, T_4, T_8, \dots$  son atractores,  $T_2, T_6, T_{10}, \dots$  son repulsores, y  $\bigcap_{i=0}^{\infty} T_{4i}$  es el solenoide.

En la definición siguiente introducimos una clase de cuasi-atractores que son los que aparecerán como continuaciones de atractores.

**Definición 4.3.** Supongamos que  $\varphi : X \times \mathbb{R} \rightarrow X$  es un flujo en un ANR localmente compacto,  $X$ . Un cuasi-atractor  $K$  de  $\varphi$  se dice que es “tame” si para cada entorno  $U$  de  $K$  en  $X$  existe un atractor  $C \subset U$  tal que la inclusión  $i : K \rightarrow C$  es una equivalencia “shape”.

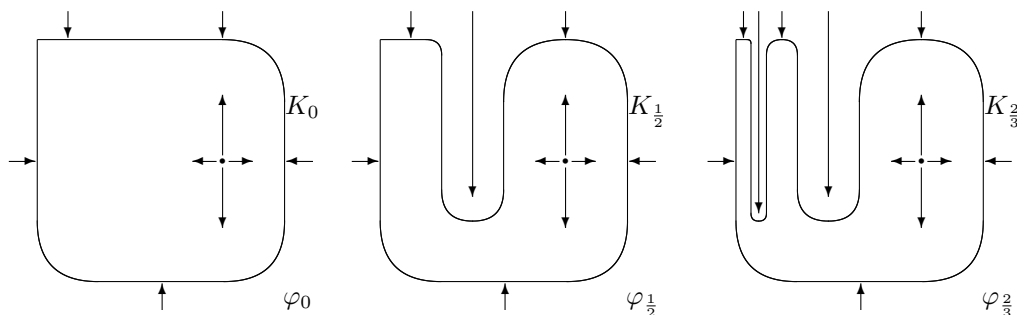
Esto equivale a que exista una sucesión anidada de atractores  $\dots \subset C_{n+1} \subset C_n \subset \dots \subset C_1$  tal que  $K = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$  y la inclusión  $i : K \hookrightarrow C_n$  es una equivalencia “shape” para todo  $n$ .

En contraste con el caso general de los cuasi-atractores, los cuasi-atractores “tame” no pueden tener cualquier forma. Esto es una consecuencia del hecho de que los atractores de flujos en ANRs localmente compactos tienen forma poliédrica [23], lo que obliga a los cuasi-atractores “tame” a tener también forma poliédrica y por lo tanto homología y cohomología de Čech finitamente generadas. El solenoide, por tanto, no

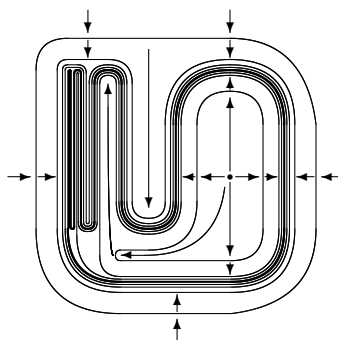
puede ser un cuasi-atractor “tame” de un flujo en una ANR. Por otra parte, además, gozan de una propiedad dinámica interesante relacionada con la noción de persistencia introducida por Hurley [15] (ver [12]).

Como una motivación para los conceptos introducidos en el resto de esta sección, presentamos el ejemplo siguiente basado en el círculo polaco.

**Ejemplo 4.4.** Considérese el siguiente flujo parametrizado  $\varphi_\lambda$  en  $\mathbb{R}^2$ ,  $\lambda \in [0, 1]$ .  $\varphi_0$  consta de una curva cerrada simple  $K_0$  que es un atractor y un punto repulsivo en la componente acotada del complemento de  $K_0$ .  $\varphi_0$  puede ser continuamente deformado de forma que  $\varphi_\lambda$  consiste siempre en una curva cerrada simple  $K_\lambda$ , que es un atractor, y el mismo punto repulsor del caso  $\lambda = 0$ , que siempre se incluye en la componente acotada del complemento de  $K_\lambda$ .



Finalmente  $\varphi_1$  será como sigue



donde hay una sucesión  $K_1^0 \supset K_1^1 \supset K_1^2 \supset \dots$  de anillos tal que:

- $\bigcap_{i=0}^{\infty} K_1^i$  es un círculo polaco,
- los puntos del círculo polaco y los de las fronteras de los  $K_1^i$  son estacionarios,
- $K_1^i$  es un atractor, para cada  $i \geq 0$ ,
- $K_1^i$  es un entorno de  $K_\lambda$ , el atractor de  $\varphi_\lambda$ , para cada  $\lambda$ , con  $\frac{i}{i+1} \leq \lambda < 1$ ,

y existe un punto repulsivo en la componente acotada del complemento de la primera corona de  $K_1^0$ .

Entonces cualquier  $K_1^i$  es una continuación de  $K_0$ , mientras que el círculo polaco, que debería ser la continuación natural, no puede serlo por no ser aislado.

**Definición 4.5.** Sea  $\varphi_\lambda : X \times \mathbb{R} \rightarrow X$  una familia uniparamétrica de flujos ( $\lambda \in [0, 1]$ ) en un espacio métrico localmente compacto  $X$ . Sea  $\{K_\lambda\}$  una continuación de atractores conexos y considérese la familia de todos los atractores  $K_1^i$  que son continuación de  $K_0$ . Si la intersección  $K_1' = \bigcap K_1^i$  no puede reducirse a una intersección finita decimos que el cuasi-atractor  $K_1'$  es una singularidad de la continuación.

Obsérvese que si, por el contrario,  $\bigcap K_1^i$  pudiera reducirse a una intersección finita, entonces  $\bigcap K_1^i$  sería uno de los atractores  $K_1^i$  continuación de  $K_0$ .

**Teorema 4.6.** Sea  $\varphi_\lambda : X \times \mathbb{R} \rightarrow X$  una familia uniparamétrica de flujos ( $\lambda \in [0, 1]$ ) definidos en un ANR localmente compacto,  $X$  (en particular en una variedad), y sea  $\{K_\lambda\}$  una continuación de atractores conexos. Si  $K_1'$  es una singularidad de la continuación,  $K_1'$  es un cuasi-atractor “tame” y  $\text{Sh}(K_1') = \text{Sh}(K_0)$ . En particular,  $K_1'$  es un continuo con forma poliédrica y grupos de homología y cohomología de Čech finitamente generados y sólo una cantidad finita de ellos son no triviales.

## 5. Espectros y esqueletos de continuaciones de un atractor

En esta sección no consideramos una continuación concreta sino todas las posibles continuaciones de un atractor.

**Definición 5.1.** Supongamos que  $\varphi_\lambda : X \times \mathbb{R} \rightarrow X$  es una familia uniparamétrica de flujos ( $\lambda \in [0, 1]$ ) en un espacio métrico localmente compacto  $X$  y supongamos que  $K_0 \subset X$  es un atractor conexo para  $\varphi_0$ . Consideramos

$$\mathcal{K} = \left\{ K_1 \subset X \mid \begin{array}{l} \text{existe una continuación de } K_0 \text{ a } K_1 \\ \text{mediante conjuntos conexos (y por tanto atractores)} \end{array} \right\},$$

y, para cada  $\lambda_0 \in [0, 1]$ ,

$$\mathcal{K}_{\lambda_0} = \left\{ K \subset X \mid \begin{array}{l} \text{existe } \{K_\lambda\} \text{ continuación de } K_0 \\ \text{mediante conjuntos conexos con } K_{\lambda_0} = K \end{array} \right\}.$$

Si  $\mathcal{K}_1 \neq \emptyset$ , entonces  $\mathcal{K}_\lambda \neq \emptyset$ , para cada  $\lambda \in [0, 1]$ , y decimos que  $\tilde{K}_\lambda = \bigcap_{K_\lambda \in \mathcal{K}_\lambda} K_\lambda$  es

el  $\lambda$ -espectro de  $K_0$ . Al 1-espectro  $\tilde{K}_1$ , se le llama, simplemente, *espectro* de  $K_0$ . Por último, la familia  $\{\tilde{K}_\lambda\}_{\lambda \in [0, 1]}$  es el *esqueleto de continuación* de  $K_0$ .

**Observación 5.2.** a) Como ocurría con las singularidades, el espectro de un atractor puede no ser un compacto aislado, aunque es un cuasi-atractor.

b) El espectro de  $K_0$  no tiene por qué ser una singularidad inducida por una continuación  $\{K_\lambda\}$  (ver Remark 2 en [13]).

c) Si  $\mathcal{K}_1 \neq \emptyset$ , entonces  $\tilde{K}_\lambda \neq \emptyset$  para cada  $\lambda \in [0, 1]$ , por lo tanto el esqueleto de la continuación y el espectro de  $K_0$  están bien definidas.

El espectro de un atractor  $K_0$  tiene propiedades topológicas globales similares a las de  $K_0$ .

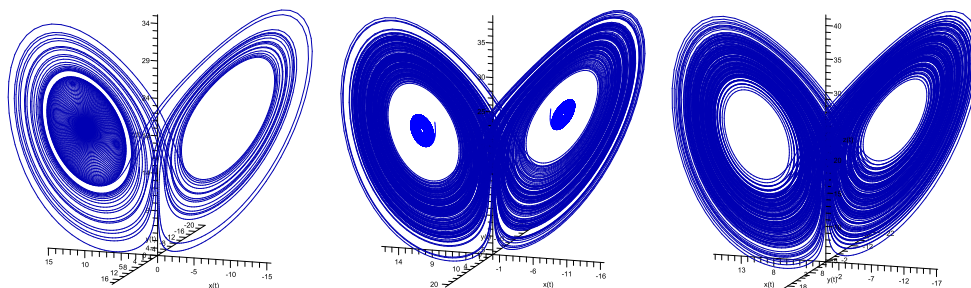
**Teorema 5.3.** Sea  $\varphi_\lambda : X \times \mathbb{R} \rightarrow X$  una familia uniparamétrica de flujos ( $\lambda \in [0, 1]$ ) definidos en un ANR localmente compacto,  $X$  (en particular en una variedad), y sea  $K_0 \subset X$  un atractor conexo de  $\varphi_0$ . Si  $\tilde{K}_1 \neq \emptyset$  es el espectro de  $K_0$  entonces  $\tilde{K}_1$  es un cuasi-atractor "tame" y  $\text{Sh}(\tilde{K}_1) = \text{Sh}(K_0)$ . En particular,  $\tilde{K}_1$  es un continuo con forma poliédrica y grupos de homología y cohomología de Čech finitamente generados y sólo una cantidad finita de ellos son no triviales.

## 6. Continuaciones de atractores no extendibles

En muchas situaciones interesantes, existe una continuación de atractores  $\{K_\lambda \mid 0 \leq \lambda < 1\}$  que no puede extenderse a  $\lambda = 1$ . Un ejemplo paradigmático de dicha evolución puede encontrarse en el sistema de Lorenz, dado por las ecuaciones

$$\frac{dx}{dt} = \sigma(y - x), \quad \frac{dy}{dt} = rx - y - xz, \quad \frac{dz}{dt} = xy - bz.$$

Fijaremos, como suele hacerse en la literatura,  $\sigma = 10$  y  $b = \frac{8}{3}$ , y estudiaremos la evolución del sistema según varía  $r$ , según se describe en [26].



Preturbulencia ( $r = 22$ ), atractor y puntos fijos atractivos ( $r = 24, 5$ ), atractor de Lorenz ( $r = 26$ )

Para cada valor del parámetro  $r$  existe un atractor global  $K_r$ , que puede obtenerse como la intersección de una sucesión anidada de elipsoides topológicos. Consideramos  $\varphi'_r : K_r \times \mathbb{R} \rightarrow K_r$  el flujo restringido a este atractor global  $K_r$ .

Para  $\sigma = 10$  y  $b = \frac{8}{3}$ , el sistema se comporta, según varía  $r$ , de la manera siguiente:

- para  $r = 24.06\dots$  hay un par de puntos fijos atractivos,  $C_1$  y  $C_2$  y, si consideramos el flujo  $\varphi'_r : K_r \times \mathbb{R} \rightarrow K_r$  existe también un repulsor dual de  $\{C_1, C_2\}$  en  $K_r$ , que contiene un conjunto extraño inestable que contiene el origen,
- para  $24,06\dots < r < 24,74\dots$ ,  $C_1$  y  $C_2$  siguen siendo puntos fijos atractivos, pero el conjunto extraño es ahora un atractor  $A_r$ ,
- para  $r = 24,74\dots$ ,  $C_1$  y  $C_2$  son ambos inestables.

Para  $24,06 < r < 24,74$ , hay un par de órbitas periódicas  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  cuyas variedades estables cerca son cilindros que separan el origen de los puntos estacionarios  $C_1$  y  $C_2$ . Las trayectorias que comienzan dentro de uno de estos cilindros convergen al punto

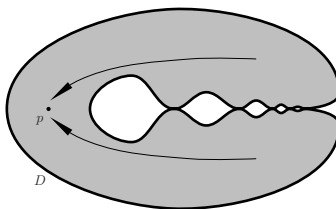
fijo dentro de él, mientras que las trayectorias que comienzan fuera de ellos convergen a  $A_r$ . Sea  $R_r$  el conjunto de puntos de  $K_r$  en el exterior o en la superficie de los cilindros. Entonces  $R_r$  es un repulsor para el flujo restringido  $\varphi'_r : K_r \times \mathbb{R} \rightarrow K_r$ .

Por lo tanto, para  $24,06 < r \leq 24,74$  existe una continuación de atractores de Lorenz  $\{A_r\}$  que no puede extenderse a  $r = 24,06$ . Por otro lado, existe un repulsor  $R_{24,06}$ , tal que  $(A_r)$  converge semicontinua superiormente a él.

Sea  $K'_r = K_r \setminus \{C_1, C_2\}$ , conjunto invariante localmente compacto y consideremos el flujo restringido a este conjunto  $\varphi''_r : K'_r \times \mathbb{R} \rightarrow K'_r$ . Entonces los conjuntos  $R_r$  son conjuntos invariantes compactos maximales para  $\varphi''_r$ .

Por otro lado, la inclusión de un atractor en su región de atracción  $\mathcal{A}(A_r)$  es una equivalencia “shape”. Para  $24,06 < r < 24,74$ , la región de atracción de  $A_r$  para el flujo  $\varphi'_r$  en  $K_r$  es  $\mathcal{A}(A_r) = R_r \setminus (\gamma_1 \cup \gamma_2)$ . Se puede demostrar (ver [13]) que, para  $r$  cercano a 24.74, la inclusión de  $A_r$  en  $\overline{\mathcal{A}(A_r)}$ , la adherencia de su región de atracción, es una equivalencia “shape”. Observe  $\overline{\mathcal{A}(A_r)}$  coincide con el repulsor  $R_r$  definido anteriormente.

Es interesante observar, como se demostró en [21], que si  $K$  es un atractor de un flujo en un espacio localmente compacto, la inclusión de  $K$  en la adherencia de su región de atracción no es, en general, una equivalencia “shape”. Un ejemplo viene dado por el siguiente flujo



que tiene un punto fijo que atrae a todos los puntos del interior del conjunto de sombreado, mientras que los puntos de su frontera son estacionarios. Entonces el punto fijo es un atractor cuya región de atracción tiene forma trivial, pero su adherencia no, ya que divide el plano en un número infinito de componentes [21].

La siguiente definición y el teorema que le sigue está motivada por las propiedades del atractor de Lorenz discutidas anteriormente cuando el flujo se limita a  $K'_r$  (el atractor global menos los dos puntos fijos).

**Definición 6.1.** Sea  $\varphi : X \times \mathbb{R} \rightarrow X$  un flujo en un espacio métrico localmente compacto,  $X$ , y supongamos que  $K \subset X$  es un atractor de  $\varphi$ . Decimos que  $K$  es:

- I) un atractor coherente si la inclusión de  $K$  en la adherencia de su región de atracción es una equivalencia “shape”,
- II) un atractor cuasi-global si la adherencia de su región de atracción es un conjunto invariante compacto que contiene cualquier otro conjunto compacto invariante.

**Teorema 6.2.** Supongamos que  $\varphi_\lambda : X \times \mathbb{R} \rightarrow X$  es una familia uniparamétrica de flujos ( $\lambda \in [0, 1]$ ) en un espacio métrico localmente compacto,  $X$ , y considérese una continuación de atractores conexos  $\{K_\lambda \mid 0 \leq \lambda < 1\}$ . Supongamos que  $\{K_\lambda\}$  converge semicontinua superiormente a  $K_1$  tal que  $K_1$  es un repulsor de  $\varphi_1$ .

Entonces existe  $\delta > 0$  y una familia  $\{K'_\lambda \mid \lambda \in [\delta, 1]\}$  tal que:

- I)  $K'_1 = K_1$ ,
- II)  $K'_\lambda \mid \lambda \in [\delta, 1]$  es una continuación de repulsores,
- III)  $K'_\lambda \supset K_\lambda$ ,

Además, si para algún  $\lambda_0 \in [\delta, 1]$ ,  $K_{\lambda_0}$  es un atractor cuasi-global coherente entonces  $\text{Sh}(K_\lambda) = \text{Sh}(K'_\lambda) = \text{Sh}(K_1)$  para todo  $\lambda \in [\delta, 1]$ .

**Corolario 6.3.** Consideremos el sistema de Lorenz para  $\sigma = 10$ ,  $b = \frac{8}{3}$  y  $24,06 \leq r \leq 24,74$ . Entonces el conjunto extraño que existe para  $r = 24,06$  es un conjunto inestable con la misma forma que los atractores que existen para  $24,06 < r \leq 24,74$ .

## Referencias

- [1] K.T.Alligood, T.D.Sauer and J.A.Yorke, Chaos. An introduction to dynamical systems, Springer, 1996.
- [2] N.P.Bhatia and G.P.Szego, Stability theory of dynamical systems, Grundlehren der Math. Wiss. **161**, Springer-Verlag, Berlin, 1970.
- [3] S.A.Bogatyí and V.I.Gutsu, *On the structure of attracting compacta*, *Differentsial'nye Uravneniya*, **25** (1989), 907–909 (in Russian).
- [4] K.Borsuk, Theory of shape, Monografie Matematyczne **59**, Polish Scientific Publishers, Warszawa, 1975.
- [5] C.C.Conley, Isolated invariant sets and the Morse index, CBMS Regional Conf. Ser. in Math. **38**, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1976.
- [6] J.M.Cordier and T.Porter, Shape theory. Categorical methods of approximation, Ellis Horwood Series: Mathematics and its Applications, Ellis Horwood Ltd, Chichester, 1989.
- [7] J.Dydak and J.Segal, Shape theory: An introduction, Lecture Notes in Math. **688**, Springer-Verlag, Berlin, 1978.
- [8] R.W.Easton, Geometric methods for discrete dynamical systems, Oxford Engineering Science Series **50**, Oxford University Press, New York, 1998.
- [9] S.Eilenberg and N.Steenrod, Foundations of Algebraic Topology, Princeton University Press, Princeton, 1952.
- [10] A.Giraldo and J.M.R.Sanjurjo, *On the global structure of invariant regions of flows with asymptotically stable attractors*, *Math. Z.*, **232** (1999), 739–746.
- [11] A.Giraldo, M.A.Morón, F.R.Ruíz del Portal and J.M.R.Sanjurjo, *Some duality properties of non-saddle sets*, *Topology and its Applications*, **113** (2001), 51–59.
- [12] A.Giraldo and J.M.R.Sanjurjo, *Topological robustness of non-saddle sets*, *Topology and its Applications*, **156** (2009), 1929–1936.
- [13] A.Giraldo and J.M.R.Sanjurjo, *Singular Continuations of Attractors*, *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, **8** (2009), 554–575.
- [14] B.Günther and J.Segal, *Every attractor of a flow on a manifold has the shape of a finite polyhedron*, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **119** (1993), 321–329.
- [15] M.Hurley, *Attractors: Persistence, and density of their basins*, *Tran. Amer. Math. Soc.*, **269** (1982), 247–271.

- [16] M.Hurley, *Properties of attractors of generic homeomorphisms*, Ergod. Th. & Dynam. Sys., **16** (1996), 1297–1310.
- [17] J.A.Kennedy, *The topology of attractors*. Ergod. Th. & Dynam. Sys., **16** (1996), 1311–1322.
- [18] J.A.Kennedy and J.A.Yorke, *Bizarre topology is natural in dynamical systems*, Bull. Amer. Math. Soc., **32** (1995), 309–316.
- [19] S.Mardešić and J.Segal, *Shape theory*. North Holland, Amsterdam, 1982.
- [20] J.C.Robinson, *Infinite-dimensional dynamical systems. An introduction to dissipative parabolic PDEs and the theory of global attractors*, Cambridge Texts in Applied Mathematics, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.
- [21] J.J.Sánchez-Gabites and J.M.R.Sanjurjo, *On the topology of the boundary of a basin of attraction*, Proc. Amer. Math. Soc., **135** (2007), 4087–4098.
- [22] J.M.R.Sanjurjo, *An Intrinsic Description of Shape*, Trans. Amer. Math. Soc., **329** (1992), 625–636.
- [23] J.M.R.Sanjurjo, *Multihomotopy, Čech spaces of loops and shape groups*, Proc. London Math. Soc., **69** (1994), 330–344.
- [24] J.M.R.Sanjurjo, *Lusternik-Schnirelmann category and morse decompositions*, Mathematika, **47** (2000), 299–305.
- [25] J.M.R.Sanjurjo, *Morse equations and unstable manifolds of isolated invariant sets*, Nonlinearity, **16** (2003), 1435–1448.
- [26] C. Sparrow, *Lorenz Equations: Bifurcations, Chaos and Strange Attractors*, Springer, New York, 1982.
- [27] R.Temam, *Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics* (Second edition), Applied Mathematical Sciences **68**, Springer-Verlag, New York, 1997.
- [28] M. Viana, *What’s new on Lorenz strange attractors*, Math. Intelligencer **22** (2000), 6-19.