

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS



TESIS DOCTORAL

Conjuntos preanalíticos, prenashicos y prealgebraicos

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR

PRESENTADA POR

Tomás Jesús Recio Muñíz

DIRECTOR

Pedro Abellanas

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE MATEMATICAS

CONJUNTOS PREANALITICOS, PREHASHICOS Y
PREALGEBRAICOS.



FT UCM 1970



UNIVERSIDAD COMPLUTENSE



5324960713

FT

UCM

1970

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS
UNIVERSIDAD COMPLUTENSE
MADRID

CONJUNTOS PREANALITICOS, PREHASHICOS Y
PREALGEBRAICOS.

Memoria presentada para optar
al grado de Doctor en Ciencias
Matematicas por
Tomas Jesus Recio Muñiz

6 26797689
i 3179944x

INTRODUCCION.

Los conjuntos semianalíticos y semialgebraicos surgen de manera natural en el estudio de las singularidades de las variedades analíticas y algebraicas en relación con el problema de la estratificación. La idea-sencilla-de dividir un objeto en trozos para proceder inductivamente al estudio del mismo aparece precisada en el sentido hoy en día habitual, en los trabajos de Whitney [1]* y Thom [2]. Básicamente se trata de establecer una partición.

$$X = \bigcup_n E_n$$

de un espacio topológico X , donde cada E_n es una variedad lisa (manifold) llamada estrato. Generalmente E_n es una n -variedad; y para cada n

$$\bigcup_r \{E_r, r \leq n\}$$

es un conjunto cerrado de X . Además -y de manera fundamental para el proceso de inducción sobre los estratos- aparecen condiciones relacionando E_n y su adherencia, y condiciones de regularidad entre los estratos.

Inicialmente, y como consecuencia de sus estudios sobre

* Los números entre corchetes citan en la introducción a pie de página. En el resto de la memoria refieren a la Bibliografía que aparece al final de la misma.

[1] H. WHITNEY. "Tangents to an analytic variety", Ann. of Math. 81 n°3, 1965, pág. 465-549.

[2] R. THOM. "La stabilité topologique des applications polynomiales", L'Enseignement Mathématique 8, 1962, pág. 24-33.

las singularidades de las aplicaciones diferenciables, Whitney [3] construye, para una variedad algebraica real, un proceso de descomposición (splitting process) que elabora como sigue. Supongamos que $V \subseteq \mathbb{R}^n$ es el conjunto de soluciones de las ecuaciones polinómicas

$$f_1(X_1 \dots X_n) = 0, \dots, f_s(X_1 \dots X_n) = 0$$

tales que generan el ideal de V ; esto es

$$J(V) = (f_1, \dots, f_s) \mathbb{R}[X_1 \dots X_n] .$$

Para cada $p \in V$, denotemos $\text{rango}_p(V)$ al número de diferenciales independientes del conjunto

$$\{(df_1)_p, \dots, (df_s)_p\} .$$

Llamemos variedad algebraica parcial (lisa) a un conjunto $M \subseteq \mathbb{R}^n$, tal que existe un número ρ (rango de M) de manera que si $p \in M$, existen ρ polinomios $g_1(X_1 \dots X_n), \dots, g_\rho(X_1 \dots X_n)$ verificando:

- a) Sus diferenciales son independientes en p .
- b) Hay un entorno U de p donde

$$M \cap U = \{x \in U \mid g_1(x) = 0, \dots, g_\rho(x) = 0\}$$

Con esta notación se verifica el

[3] H. WHITNEY. "Elementary structure of real algebraic varieties", Ann. of Math. 66, 1957, pág. 545-556.

TEOREMA 1.

A) Sea $V \subseteq \mathbb{R}^n$ una variedad algebraica real; y sea M_1 el conjunto de los puntos de V donde el rango es máximo. Entonces M_1 es una variedad algebraica parcial lisa cuyo rango es igual al rango máximo de V ; y además $V_1 = V - M_1$ es un conjunto vacío o una subvariedad algebraica propia de V .

B) Tras un número finito de pasos obtenemos

$$V = M_1 \cup M_2 \dots \cup M_s,$$

siendo M_i una variedad parcial lisa para cada i , y $M_i \cap M_j = \emptyset$ si $i \neq j$.

Este proceso de descomposición puede dar lugar a conjuntos conexos; basta para ello probar que la diferencia de dos variedades algebraicas sólo tiene un número finito de componentes conexas y tomar las componentes de los distintos M_i obtenidos.

Ejemplo 2.

Tomemos $V = \{X^2 - ZY^2 = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$. Entonces $V_1 = \{X=0, Y=0\}$, $M_2 = V_1$, obteniendo

$$V = V_1 \cup (V - V_1).$$

Observemos que $\overline{V - V_1}$ no es analítico; su frontera, el semieje Z positivo, tampoco es analítica.

Las anomalías que -con respecto a la teoría analítica- presenta el proceso de descomposición en este y otros ejemplos semejantes hicieron que Whitney abandonase el caso real y explotase su idea en el caso de variedades tanto algebraicas como analíticas complejas. En particular, en sus artículos [1] y [4] explica el motivo de su cambio de enfoque:

"The splitting of a real variety into manifolds... is in general not a stratification as we define it here... In order to carry the theory deeper it was found most useful to go over to complex

varieties where powerful tools are available" ([4], pág. 205).

Así, dada una variedad analítica compleja V (que podemos suponer irreducible) denotemos V_{sp} , y V_{sg} respectivamente al conjunto de los puntos de V regulares o simples y singulares. El proceso anteriormente descrito nos da una partición de V tomando $M_1 = V_{sp}$, $M_2 = (V_{sg})_{sp}$, $M_3 = ((V_{sg})_{sg})_{sp} \dots$ etc. Esta partición no presenta ya las anomalías sugeridas en el ejemplo 2; en efecto, cada miembro de ella es una variedad lisa estricta de acuerdo con la siguiente

Definición 3.

Sea M una variedad lisa contenida en un abierto Ω ; diremos que M es Ω -estricta si su cierre en Ω , \bar{M} y su frontera $\bar{M}-M$ son variedades analíticas en Ω .

Esta condición que no podía exigirse en el caso real tiene un significado más preciso en términos de la "propiedad de la frontera":

Definición 4.

Un conjunto de variedades lisas en Ω tienen la propiedad de la frontera si para cada dos M, M' con $M \neq M'$, se verifica

$$M' \cap \bar{M} \neq \emptyset \implies M' \subseteq \bar{M}, \dim M' < \dim M.$$

Definición 5.

Una estratificación de V es una partición estricta con

[4] H. WHITNEY. "Local properties of analytic varieties" In Differential and Combinatorial Topology (ed. S.S. Cairns). Princeton U.P., 1965, Pág. 205-244.

- C-1: E es el lugar de los ceros (en un abierto de \mathbb{R}^n) de un haz de ideales coherentes.
- C-2: E es la parte real de una variedad analítica compleja.
- C-3: E viene definido globalmente por la anulación de un número finito de funciones analíticas.

Para tales conjuntos E , Whitney-Bruhat [9] construyen una complejificación, que consiste en tomar en un entorno complejo adecuado el mayor ideal coherente nulo sobre E . Con la ayuda de la complejificación se demuestra en [9] un análogo al Teorema 1 citado anteriormente, y una versión (grosso modo) del mismo de naturaleza más geométrica y que enunciamos a continuación.

Teorema 8.

Sea E un conjunto C -analítico de dimensión p ; y sea $V_p(E)$ el conjunto de los puntos de E en un entorno de los cuales E es una subvariedad lisa de dimensión p . Entonces E es unión (no disjunta en general) de $V_p(E)$ y de un subconjunto C -analítico de dimensión estrictamente inferior a p .

A pesar de las propiedades buenas (aproximadas a las del caso complejo) que descubren este y otros teoremas sobre los conjuntos C -analíticos, la idea de Whitney no produce sino resultados parciales. Así, en [4] pág. 228, habla de "failure of certain properties" de la estratificación obtenida, aunque esta sirve a Thom en su artículo [10] sobre la homología de las variedades reales.

* * * *

El camino acertado para la estratificación de las variedades analíticas reales surge con los trabajos de S. Lojasiewicz sobre la división de una distribución por una función analítica real (hipótesis de Schwarz). En [11], siguiendo una vieja idea de

[10] R. Thom. "L'homologie des varietes algebriques reelles", In Differential and Combinatorial Topology (Ed. S.S. Cairns), Princeton U.P., 1965, pág. 225-265.

[11] S. Lojasiewicz. "Sur le probleme de la division", Studia Math. 18 (1959), pág. 87-136.

Osgood [12] , Lojasiewicz construye particiones del conjunto de ceros de una función analítica real en un entorno con ciertas condiciones. Estas particiones no son estratificaciones en el sentido de la definición 5, pero gozan de las buenas propiedades exigidas por Whitney para la inducción en los estratos y de otras que relacionan estratos entre sí y que señalaremos más adelante.

De manera más elaborada, la partición de Lojasiewicz aparece descrita en su memoria [13] sobre los conjuntos semianalíticos. En ella se parte de un conjunto de polinomios distinguidos en R^n , llamados sistema normal de acuerdo con la siguiente:

Definición 9.

Un sistema normal en R^n de polinomios distinguidos consiste en una familia

$$\{H_j^i(x_1 \dots x_i; x_j) \quad 0 \leq i < j \leq n\}$$

de polinomios distinguidos con discriminante

$$D_j^i(x_1 \dots x_i) \neq 0$$

verificando

$$(1) \quad H_K^{K-1} = 0, \quad H_\ell^K = 0 \implies H_\ell^{K-1} = 0$$

$$(2) \quad D_\ell^K = 0 \implies H_K^{K-1} = 0$$

en un entorno de cero.

[12] W.F. OSGOOD. "Lehrbuch der Funktionentheorie", II-1. Leipzig, (1929).

[13] S. LOJASIEWICZ. "Ensembles semianalitiques", Curso policopia do I.H.E.S., (1965), Bures sur Yvette.

Definición 10.

Un entorno de cero $Q = \{|x_i| < \delta_i\}$ es normal (con respecto a un sistema normal dado) si

a) H_j^i son holomorfos y (1), (2) de la definición 9 subsisten en $\{z \in \mathbb{C}^n \mid |z_i| \leq \delta_i\}$.

b) $H_j^i(u, z) = 0 \quad |u_i| < \delta_i \implies |z| < \delta_j$

Definición 11.

Consideremos

$$V^k = \{x \in Q \mid H_n^{n-1} = \dots = H_{k+1}^k = 0, \quad H_k^{k-1} \neq 0\}$$

$$V^n = \{H_n^{n-1} \neq 0\}, \quad V^0 = \{H_n^{n-1} = \dots = H_0^1 = 0\}$$

Entonces $Q = \bigcup V^k$ y cada V^k es una variedad analítica lisa de dimensión k .

Llamamos estratificación normal de Q según $\{H_j^i\}$ a la familia $\eta = \bigcup_{k=0}^n$ {componentes conexas de V^k }.

Las propiedades de esta estratificación (en el sentido preciso de la definición anterior) son suficientemente buenas. En efecto

- 1) η es siempre finita.
- 2) Para cada estrato $\Gamma \in \eta$, $(\bar{\Gamma} - \Gamma) \cap Q$ es reunión de estratos de dimensión inferior a la dimensión de Γ (propiedad de la frontera, definición 4, proposición 6).
- 3) Cada estrato de dimensión k es el grafo de una aplicación analítica de \mathbb{R}^k en \mathbb{R}^{n-k} (esto es: verifica un sistema de ecuaciones de la forma

$$x_j = f_j(x_1 \dots x_k), \quad j=k+1, \dots, n.$$

- 4) Si $\Gamma_0, \Gamma \in \eta$, $\Gamma_0 \subseteq \bar{\Gamma}$, cada subvariedad diferenciable lisa transversal a Γ_0 interseca a Γ (condición de incidencia de Thom [10]).

Pero la idea fundamental de Lojasiewicz (y que aparece ya en [11]) es la de obtener estratificaciones "adaptables" a ciertos conjuntos (o, equivalentemente, a ciertas funciones). Grosso modo, dado un conjunto definido "de una cierta manera" por medio de funciones analíticas, Lojasiewicz construye a partir de estas un sistema normal conveniente tal que la estratificación normal obtenida induzca una partición de dicho conjunto. De manera precisa tenemos la siguiente

Definición 12.

Una partición normal η de Q es compatible con las funciones analíticas $f_1 \dots f_r$ definidas en Q si sobre cada estrato $f_i = 0$ ó $f_i \neq 0$, $i=1 \dots r$.

Usando la teoría de las funciones simétricas, Lojasiewicz [13] prueba que

Teorema 13.

Dadas $f_1 \dots f_r$ funciones analíticas en Q , existe una partición normal compatible con ellas.

Debido a la conexión de los estratos resulta que una función f es cero, mayor que cero, o menor que cero sobre cada estrato de una estratificación compatible con f . De acuerdo con esto, Lojasiewicz es llevado naturalmente al estudio de los conjuntos más generales compatibles con su estratificación: los conjuntos semianalíticos.

Definición 14.

Un subconjunto $M \subseteq \Omega$ abierto de R^n , es semianalítico

en Ω si para cada $x \in \Omega$, existe V_x entorno de x en Ω y funciones analíticas

$$\{f_{ij}\} \quad \{g_{ij}\} \quad i \in I \quad j \in J$$

en número finito, tales que

$$M \cap V_x = \bigcup_{i \in I} \{x \in V_x \mid f_{ij}(x) > 0 \quad g_{ij}(x) = 0 \quad j \in J\}$$

Definición 15.

Una partición normal η de Q es compatible con los conjuntos E_1, \dots, E_r de Q si para cada Γ de η se tiene

$$\Gamma \subseteq E_i \quad \text{ó} \quad \Gamma \cap E_i = \emptyset, \quad i: 1 \dots r.$$

Obtenemos así el

Teorema 16.

Dados E_1, \dots, E_r semianalíticos en $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, para cada $x \in \Omega$ existe un entorno normal y una partición normal compatible con E_1, \dots, E_r .

Este teorema no es la justificación de la importancia de la estratificación de Lojasiewicz, puesto que, como hemos mostrado, Whitney había logrado estratificar algunos objetos reales; la importancia de los conjuntos semianalíticos en la teoría de la estratificación radica en que los estratos así obtenidos son semianalíticos. En efecto, se prueba el

Teorema 17.

Las componentes conexas de un conjunto semianalítico son semianalíticas; en particular los estratos de una estratificación normal son semianalíticos.

Y como corolario tenemos

Corolario 18.

Un conjunto $E \subseteq \Omega$ es semianalítico si y sólo si en todo punto de Ω existe una estratificación compatible con E .

Observamos, pues, que la estratificación de Lojasiewicz está perfectamente adaptada al estudio de los conjuntos semianalíticos. Usando ésta se prueban una serie de propiedades de los conjuntos semianalíticos (c.f. [13], [14] ; o las colecciones de resultados [15], [16]) entre las que destacamos el

Teorema 19.

Sea $S \subseteq \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ semianalítico de dimensión k ; $\text{Sing } E$ el conjunto de los puntos de S no regulares de dimensión k . Entonces $\text{Sing } E$ es semianalítico de dimensión estrictamente menor que k .

Es así posible construir (c.f. [13]) de manera inductiva (semejante a la forma con que Whitney estratificaba en el caso complejo) una estratificación global de un conjunto semianalítico por medio de una familia localmente finita de estratos semianalíticos verificando la condición de la frontera. Más aún, pueden añadirse las condiciones A, B de Whitney (c.f. [1]) entre los estratos. De esta manera quedan extendidos satisfactoriamente los resultados parciales obtenidos por Whitney en el caso real.

-
- [14] H. HIRONAKA. "Subanalytic Sets", In Number Theory, Algebraic Geometry and Commutative Algebra in honour of Y. Akizuki, Kinokunya Publ., (1973)
- [15] S. LOJASIEWICZ. "Stratification des ensembles analytiques avec les propriétés" (A) et (B) de Whitney."
- [16] S. LOJASIEWICZ. "Ensembles semianalytiques", Intern. Congress of Mathematicians, Nice, 1970.

No es sólo en el problema de la estratificación donde la geometría semianalítica prueba ser un marco más adecuado para el estudio de los conjuntos analíticos que la propia geometría analítica. En efecto: los resultados hallados para los conjuntos semianalíticos completan una cantidad de huecos existentes en la geometría real. Veamos algunos ejemplos.

- A) Adoptando la terminología usual (c.f. [17] p.ej.) se demuestra en [13] el siguiente

Teorema 19'

Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto semianalítico, $\text{Sing } E$ el conjunto de sus puntos singulares. Entonces $\text{Sing } E$ es semianalítico de dimensión menor que $\dim E$.

En general, sin embargo, para un conjunto analítico E (incluso C-analítico), $\text{Sing } E$ no tiene por qué ser analítico; y ni siquiera tiene que estar contenido en un conjunto analítico de dimensión menor que dimensión de E (c.f. [17], pág. 106, Ex. 3).

- B) La triangulación efectiva de los conjuntos algebraicos y analíticos ha sido realizada recientemente con métodos semianalíticos por Lojasiewicz [18] (c.f. Hironaka [19]).
- C) El estudio de las propiedades métricas de los conjuntos semianalíticos (p.ej. estar regularmente situados) llevado a la estratificación de Malgrange de un germen analítico real [20] permite a éste demostrar su teorema preparatorio para funciones diferenciables.

-
- [17] R. NARASHIMAN. "Introduction to the theory of analytic spaces", Lecture Notes 25, Springer-Verlag, Berlin, (1966).
- [18] S. LOJASIEWICZ. "Triangulation of algebraic sets". Ann.Scuola Norm.Sup. Pisa, 18 (1964), pág. 449-474.
- [19] H. HIRONAKA. "Triangulation of algebraic sets".
- [20] MALGRANGE. "Ideals of differentiable functions", Oxford U. P., (1966).

- D) El conjunto de puntos no coherentes de un conjunto C-analítico no es en general analítico [21]. Galbiati [22] prueba que dicho conjunto es semianalítico y de codimensión al menos dos.
- E) En el estudio de los conjuntos algebraicos reales, el anillo de polinomios resulta ser un instrumento poco preciso, mientras que el anillo de las funciones analíticas que son a su vez algebraicas sobre los polinomios (llamadas funciones de Nash) podría ser más adecuado (por ejemplo, las componentes conexas de un conjunto algebraico real vienen dadas por un sistema de ecuaciones nashicas y no por un sistema de ecuaciones polinómicas en general).

Consideremos la siguiente

Definición 20.

Sea $S \subseteq \Omega$ abierto de R^n . Diremos que S es un conjunto semianalítico global (respectivamente semináshico global, semialgebraico) si

$$S = \bigcup_{i \in I} \{x \in \Omega \mid g_{ij}(x) > 0, \quad f_{ij}(x) = 0 \quad j \in J\}$$

donde $\{g_{ij}\}$ $\{f_{ij}\}$ $i \in I$, $j \in J$ son un conjunto finito de funciones analíticas en Ω (respectivamente de Nash en Ω , polinómicas).

-
- [21] F. ACQUITASPACE, F. BROGLIA, A. TOGNOLI. "Sull'insieme di non coerenza di un insieme analítico reale", Atti Acad.Naz.Lincei, Rend.Cl.Sci.Fis.Mat.Naturali, Ser. VIII, Vol. LV, Fasc. 1-2, (1973).
- [22] M. GALBIATI. "Stratification et ensemble de non-cohérence d'un espace analytique réel", Invent.Math. 34 (1976), pág. 113-128.

Supongamos que Ω es un conjunto abierto de \mathbb{R}^n semi-algebraico. Usando un importante teorema de Seidemberg [23], Lojasiewicz [13] prueba la siguiente

Proposición 21.

Si $S \subseteq \Omega$ es un conjunto semináshico global, entonces S es semialgebraico.

Así pues, la geometría semialgebraica resulta ser un marco idóneo para el estudio de la geometría algebraica real. Algebraicamente el anillo correspondiente a dicha geometría semialgebraica es el de funciones de Nash globales; el cual, cuando trabajamos en un abierto semialgebraico goza de buenas propiedades (al menos en la fase inicial de estudio del mismo en que nos encontramos c.f. [24], [25]).

Por otra parte los métodos de Lojasiewicz enunciados en términos analíticos son igualmente válidos en el caso algebraico. Así los resultados contenidos en [13] pueden aplicarse a los conjuntos semialgebraicos.

* * * *

Debido a la naturaleza local de la estratificación normal de Lojasiewicz (Definición 11) las proposiciones demostradas por éste para los conjuntos semianalíticos no resultan adecuadamente afinadas al caso en que dichos conjuntos vengan definidos globalmente.

-
- [23] A. SEIDEMBERG. "A new decision method for elementary algebra", Ann. of Math., 60 (1954), pág. 365-374.
- [24] T. MOSTOWSKI. "Some properties of the ring of Nash functions", Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (1970), Vol. III, 2, pág. 245-266.
- [25] J. RISLER. "Sur l'anneau des fonctions de Nash globales", C.R.A.C. Paris, 276 (1973), pág. 1513-1516.

Por otra parte las técnicas de Hironaka (c.f. [14]) basadas en los teoremas de desingularización, dan como resultado la reducción local de las funciones que intervienen en la definición de un conjunto semianalítico a las funciones coordenadas (señalemos además que, por lo que se refiere a tales conjuntos, Hironaka no añade ningún resultado nuevo a los ya conocidos en [13]).

De esta manera en ambos trabajos fundamentales no aparecen estudiados en su contexto global los conjuntos semianalíticos, semináshicos o semialgebraicos globalmente definidos. El estudio de estos conjuntos engloba, como caso particular, al de los conjuntos C-analíticos, náshicos globales (cuya definición es análoga a la de los C-analíticos, sustituyendo las funciones analíticas por las funciones de Nash) y algebraicos reales. La actualidad de éstos se pone de manifiesto en el número de publicaciones recientes dedicadas a los mismos: así los trabajos de la escuela italiana (Acquitaspace, Broglia y Tognoli [21],[26]), (Galbiati [22]) relativos a los espacios analíticos reales que admiten una estructura coherente; o sobre los conjuntos náshicos (Lazzeri-Tognoli [27]) (Tognoli [28]); asimismo los estudios sobre los conjuntos algebraicos reales (Efroymsón [29]), (Dubois-Efroymsón [30]). Igualmente podemos mencionar algunos artículos que desarrollan las propiedades fundamentales de los anillos que dan origen a estos conjuntos (Risler [31]), (Galbiati-Tognoli [32]), (Efroymsón [33]), (Mostowski [29]).

-
- [26] ACQUITASPACE, F, BROGLIA F, TOGNOLI A. "Normalizzazione debole nel caso reale", B.U.M.I.
- [27] LAZZERI, TOGNOLI. "Alcune proprietà degli spazi algebrici", Ann.Scuola Norm.Sup.Pisa (1970), 24, pág. 597-632.
- [29] G. EFROYMSON. "Local reality on algebraic varieties", Journal of Algebra 29, (1974), pág. 133-142.
- [30] D. DUBOIS, G. EFROYMSON. "Algebraic theory of real varieties I", Studies and Essays presented to Y.W.Aren. Taiwan, 1970.
- [28] A. TOGNOLI. "Su una congettura di Nash", Ann.Scuola Norm. Sup.Pisa, (1973), 27, pág. 167-185.
- [31] J. BOCHNAK, J. RISLER. "Le théoreme des zeros pour les variétés analytiques réelles de dimension 2", Ann.Sci. Ec.Norm.Sup. 4^a Ser. T.8, (1975), pág. 353-364.
- [32] M. GALBIATI, A. TOGNOLI. "Alcune proprietà delle varietà algebriche reali", Ann.Scu.Norm.Sup.Pisa, (1973), 27, pág. 359-404.
- [33] G. EFROYMSON. "A Nullstellensatz for Nash Rings", Pacific J. of Math. 54 (1974), pág. 101-112.

En cambio, el estudio a la manera algebraica de las desigualdades analíticas, nánshicas o algebraicas (salvo el caso clásico de las desigualdades lineales algebraicas) es todavía una "terra incognita" según la expresión de Motzkin [34] (1967). En efecto, en este trabajo aparecen planteados una serie de problemas inmediatos por analogía a los más básicos del estudio de los sistemas de ecuaciones.

Si S es el conjunto de soluciones en R^n de un sistema de desigualdades $\Sigma = \{g_k(x_1 \dots x_n) \geq 0\}_{k \in K}$

- 1) ¿A qué otros sistemas Σ' pertenece S ?
 - 2) ¿Cuándo la omisión de una desigualdad da origen a un sistema equivalente?
 - 3) ¿Cuándo $S = R^n$ ó $S = \emptyset$?
 - 4) ¿Cuál es la dimensión de S ?
 - 5) ¿Qué propiedades tiene S ?
- etc...

En este sentido sólo podemos mencionar el reciente artículo de Stengle [35] 1974 (véase también los trabajos más lejanos de Tarki [36] y Robinson [37]) que atañe a alguno de los problemas propuestos, y cuya idea básica tiene alguna similitud con la que emplearemos en esta memoria (y que de manera independiente aparece por primera vez en el artículo de P. Abellanas "R-algebras analíticas valoradas" [38] 1974). Veamos en qué consiste.

Consideremos un abierto $\Omega \subseteq R^n$ (que supondremos conexo

-
- [34] MOTZKIN. "Algebraic inequalities", Inequalities I, (Shisha), (1967), Academic Press, N.York, pág. 199-202.
- [35] G. STENGLE. "A nullstellensatz and a positivstellensatz in semialgebraic geometry", Math. Ann. 207 (1974) pág. 87-97.
- [36] A. TARSKI. "A decision method for elementary algebra and geometry", Berkeley Note, (1951).
- [37] A. ROBINSON. "Introduction to model theory and to the metamathematics of algebra", North.Holland, (1963).
- [38] P. ABELLANAS. "R-álgebras analíticas valoradas", Estudios de Matemática em homenagem ao Prof. A. Almeida Costa, Lisboa, (1974), pág. 83-94.

en general ; y en algunos casos habrá de verificar ciertas condiciones accesorias que aparecen detalladas en la memoria, pero no en la introducción); C_Ω designará el anillo de las funciones reales continuas en Ω y A_Ω será indistintamente el anillo de las funciones analíticas en Ω o nâshicas en Ω o polinômicas. Dadas $f_1 \dots f_r \in A_\Omega$ definimos un homomorfismo de A_Ω álgebras

$$u: A_\Omega[x_1 \dots x_r] \longrightarrow C_\Omega$$

que hace corresponder a cada indeterminada x_i la función continua $|f_i|$. La imagen de este homomorfismo es una A_Ω -álgebra que notaremos indistintamente \tilde{A}_Ω ó $A_\Omega[|f_1| \dots |f_r|]$ y que recibe el nombre ([38]) de R-álgebra analítica (nâshica ó polinômica según los casos) valorada.

Definición 22.

Sea $\tilde{\mathcal{O}}$ un ideal finitamente generado de \tilde{A}_Ω ; sea $S = \sqrt{(\tilde{\mathcal{O}})} = \{x \in \Omega \mid \tilde{g}(x) = 0 \quad \forall \tilde{g} \in \tilde{\mathcal{O}}\}$. Diremos entonces que S es un conjunto preanalítico (respectivamente prenâshico, preálgebraico), siendo A_Ω el anillo de funciones analíticas en Ω (respectivamente de Nash, polinômicas).

En lo sucesivo, y para evitar reiteraciones, nos reduciremos al caso analítico, mencionando explícitamente aquellas propiedades que no se verifiquen también para los casos nâshico y algebraico.

Un primer objetivo de esta memoria es relacionar los conjuntos así definidos con los dados por desigualdades globales según la definición 20, obteniendo la siguiente

Proposición 23. (3.15)

$S \subseteq \Omega \subseteq R^n$ es preanalítico sii existen funciones analíticas en Ω , $\{g_{ij}\} \{f_{ij}\}$ $i \in I$ $j \in J$ en número finito tales que

$$S = \bigcup_{i \in I} \{x \in \Omega \mid g_{ij}(x) = 0 \quad f_{ij}(x) \geq 0\} .$$

$j \in J$

Así el estudio de los conjuntos preanalíticos incluye el de los sistemas de desigualdades en la formulación de Motzkin [34]; Y, más aún, proporciona un sustrato homogéneo para el estudio de las disyunciones de estos sistemas. Este hecho no es irrelevante: por ejemplo, el conjunto de R^2 definido como la unión de soluciones de $X \geq 0$ e $Y \geq 0$ no puede venir dado por un único sistema de desigualdades analíticas (incluyendo posiblemente desigualdades estrictas) como demuestra Lojasiewicz [13]. El posible papel simplificador del uso de las desigualdades estrictas para el estudio de los conjuntos preanalíticos es estudiado en el párrafo 2 de la memoria.

En él aparecen tres lemas de separación:

Lema 24. (2.2) (Lojasiewicz [13])

Sea G_0 abierto acotado de R^n de la forma $G_0 = \{f_1 > 0 \dots f_p > 0\}$ siendo $f_1 \dots f_p$ analíticos en un abierto que contiene a \bar{G}_0 ; sea $Z_0 = \{x \in G_0 \mid f(x) = 0\}$ con g analítica en el mismo abierto. Entonces para cada abierto semianalítico $G \supseteq Z_0$ existen $d, N > 0$ tales que

$$Z_0 \subseteq \{x \in G_0 \mid |g(x)| < d \mid f_1(x) \dots f_p(x) \|^N\} \subseteq G.$$

Lema 25. (2.4) (Abellanas)

Sea $\Omega \subseteq R^n$; A, B dos cerrados semianalíticos de Ω no vacíos y disjuntos. Existe ψ analítica en Ω tal que $\psi(A) > 0$ y $\psi(B) < 0$.

Lema 26. (2.5) (Mostowski [24])

Sea $U \subseteq R^n$ abierto semialgebraico; $A, B \subseteq U$ conjuntos semialgebraicos cerrados y disjuntos. Existe una función de Nash f en U tal que $f(A) > 0$ y $f(B) < 0$.

Como consecuencia de estos lemas obtenemos las siguientes proposiciones:

Proposición 27. (2.3)

Todo conjunto $S \subseteq \Omega \subseteq R^n$ globalmente semianalítico

cerrado y acotado es preanalítico.

Proposición 28. (2.2) (Lojasiewicz [13])

Todo conjunto semianalítico cerrado es localmente preanalítico.

Así pues el estudio de los conjuntos preanalíticos engloba el de las disyunciones de sistemas de desigualdades laxas o estrictas cuando el conjunto de soluciones de éstos es cerrado y acotado.

Este resultado puede afinarse en el siguiente sentido

Proposición 29. (2.11)

Sea $S \subseteq \Omega$ globalmente semianalítico cerrado y simple. (esto es $S = \{x \in \Omega \mid g_i(x) \geq 0 \quad f_i(x) > 0\} \quad i \in I$ finito). Entonces S es preanalítico simple (esto es $S = \{x \in \Omega \mid g_l(x) \geq 0\} \quad l \in L$ finito)

Análogamente se verifica en el caso náshico.

Deducimos de aquí que tanto en el caso analítico como en el náshico, si una disyunción de sistemas de inecuaciones no admite un sistema equivalente de inecuaciones donde algunas pueden ser estrictas. Así estas últimas no poseen realmente ningún papel simplificador. La inexistencia (falsedad) de los lemas separadores en el caso algebraico pone una vez más de manifiesto la conveniencia de estudiar náshicamente los conjuntos semialgebraicos a través de la proposición 21.

Como última consecuencia de estos lemas probamos (2.9) que las componentes conexas de un conjunto preanalítico (prenáshico) son preanalíticas (prenáshicas) globalizando el correspondiente resultado de Lojasiewicz (Teorema 17). Paralelamente, este resultado es válido en el caso C-analítico o náshico global (proposición 2.6).

La formulación en términos algebraicos de los conjuntos preanalíticos hace que podamos preparar unas ecuaciones adecuadas (con respecto a la R-álgebra de definición) para la de conjunto dado.

De manera precisa, dado un ideal $\bar{\alpha}$ de $A_\Omega[|f_1| \dots |f_r|]$, con ciertos $f_1 \dots f_r \in A_\Omega$, tratamos de hallar el ideal $\tilde{J}V(\bar{\alpha})$ de todas las funciones de \tilde{A}_Ω nulas sobre $V(\bar{\alpha})$. La resolución de este problema lleva implícito la consecución del Positivstellensatz (en la terminología de Stengle [35]): caracterizar en términos de $\tilde{\alpha}$ aquellas inecuaciones $f \geq 0$ que se verifican en $V(\bar{\alpha})$. Este positivstellensatz es abordado en el caso de sistemas algebraicos por Motzkin [34] respondiendo parcialmente al mismo con un resultado de A. Robinson [37] que involucra funciones racionales. Stengle mejora en dicho caso este resultado pero sin poder evitar la presencia de las funciones racionales. Nuestro problema incluye el positivstellensatz en el sentido siguiente: dado $S = V(\bar{\alpha})$ preanalítico, y $f \in A_\Omega$, sabremos si $f \geq 0$ se verifica sobre S cuando considerado $\tilde{A}_\Omega = \tilde{A}_\Omega[|f|]$, tenemos $|f| - f \in \tilde{J}V(\bar{\alpha}, \tilde{A}) = \tilde{J}(S)$, donde $\tilde{J}(S)$ es el ideal de las funciones de \tilde{A}_Ω nulas sobre S .

La resolución del mismo ha sido abordada en dos etapas: de una parte considerar el ideal de las funciones de A nulas sobre S , que denotaremos $J(S)$ y $J(V(\bar{\alpha}))$ (nullstellensatz); de otra, calcular $\tilde{J}(V(\bar{\alpha}))$ en términos de estos ideales.

En relación con la primera etapa caracterizamos los conjuntos semianalíticos globales definidos en $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ como sigue:

Proposición 29. (1.8)

Sea $S \subseteq \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto; $S \subseteq \Omega$ es semianalítico global si y sólo si S es la proyección de una hipersuperficie analítica en $\Omega \times \mathbb{R}$ definida por una función analítica que es polinómica respecto a la última variable.

Esta proposición que se obtiene a partir de un resultado de Motzkin [39] y del Teorema de proyección de Seidenberg [23] mejorado por Lojasiewicz [13] tiene la particularidad de ser constructiva. En concreto obtenemos, con la nomenclatura descrita

[39] T.MOTZKIN. "The real solution set..." Inequalities (Shisha) Vol.II, pág. 251-254, Academic Press, New York, (1970).

$$\mathfrak{J}(S) = \mathfrak{J}(H_S) \cap \mathcal{A}_\Omega$$

donde H_S es la hipersuperficie asociada a S en la proyección anterior y $\mathfrak{J}(H_S)$ es el ideal correspondiente en $\mathcal{A}_{\Omega \times \mathbb{R}}$ (sumergiendo \mathcal{A}_Ω en $\mathcal{A}_{\Omega \times \mathbb{R}}$).

Previamente a la segunda etapa debemos introducir alguna notación:

Definición 30.

Dado $\tilde{\mathcal{A}}_\Omega = \mathcal{A}_\Omega [|f_1| \dots |f_r|]$, para cada $i = (i_1 \dots i_r) \in \{1, -1\}^r$ I_i denotará el ideal generado en $\tilde{\mathcal{A}}_\Omega$ por $|f_1| - i_1 f_1, \dots, |f_r| - i_r f_r$. Este ideal será llamado amplio si $\mathcal{V}(I_i)$ tiene interior no vacío; $F \subseteq \{1, -1\}^r$ denota el conjunto de los ideales correspondientes a ideales amplios.

Se verifica entonces la

Proposición 31. (3.16)

$$\tilde{\mathfrak{J}} \mathcal{V}(\tilde{\mathcal{A}}) = \bigcap_{i \in F} (\mathfrak{J} \mathcal{V}(\tilde{\mathcal{A}} + I_i) + I_i).$$

Así pues, la resolución de la primera etapa lleva consigo el conocimiento de $\mathfrak{J} \mathcal{V}(\tilde{\mathcal{A}} + I_i)$ para cada $i \in F$ en función de

$\mathfrak{J}(H_{\mathcal{V}(\tilde{\mathcal{A}} + I_i)})$; este último ideal viene dado por el clásico

Teorema de los ceros de Hilbert en sus versiones analítica, náshica y algebraica reales. Actualmente, tras los trabajos (entre otros) de Risler [31], Mostowski [24] y Risler [40] dicho Teorema es válido en el caso analítico en \mathbb{R}^2 , y de manera general (con las restricciones sobre Ω a las que aludimos en un principio) en los

[40] J. RISLER. "Un theoreme des zeros en geometrie algebrigue et analytique reelles", Lecture Notes 409, Springer-Verlag, Berlin, 1974, pág. 522-531.

casos restantes.

Señalemos por último que los ideales amplios quedan caracterizados algebraicamente en el sentido dado por la

Proposición 32. (3.5)

$$I_i \text{ es amplio sii } I_i \cap A_\Omega = (0)$$

con lo que queda completamente algebrizado el positivstellensatz.

* * * *

Siguiendo la pauta de Lojasiewicz, una definición de dimensión de un conjunto preanalítico S que coincida en particular con la usual en el caso analítico, debe basarse en los puntos regulares que dicho conjunto contenga. Para estos adoptamos la definición clásica:

Definición 33.

Diremos que $p \in S \subseteq \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ es un punto regular de dimensión d si localmente S viene dado por $n-d$ funciones analíticas con diferenciales independientes en p . Definimos dimensión de S , $\dim S$, como la máxima dimensión de los puntos regulares de S . Las mismas definiciones son válidas en el caso náshico o algebraico, sustituyendo las funciones analíticas por las náshicas o polinómicas.

Nuestro objetivo es ahora caracterizar en términos algebraicos la dimensión de un conjunto preanalítico dado. Para ello observamos que, si S está definido en la \mathbb{R} -álgebra \bar{A} , los teoremas del párrafo 3 nos permiten escribir

$$S = \bigcup_{i \in F} V(a_i + I_i)$$

donde a_i es un ideal de A_Ω finitamente generado tal que $V(a_i)$ es el mínimo conjunto C -analítico que contiene a $V(a_i + I_i)$

(la existencia de este mínimo está garantizada en [9]; análogamente, en el caso náshico o algebraico, la existencia de este mínimo

es consecuencia de la noetherianidad del anillo correspondiente de funciones). Entonces $S' = \bigcup_{i \in F} \sqrt{(a_i)}$ es el mínimo conjunto C-analítico que contiene a S.

Deseamos probar la siguiente

Proposición 34. (5.23)

Con la notación señalada anteriormente,

$$\dim S' = \dim S .$$

Para ello, tras la preparación efectuada arriba, el problema queda notablemente reducido a probar la misma cuando $S = \sqrt{(a_i + I_i)}$, $S' = \sqrt{(a_i)}$. El camino más natural consiste en buscar un punto de S regular de dimensión $\dim S'$. Consideramos entonces los puntos regulares de dimensión máxima de S' y demostramos que -puesto que están "suficientemente extendidos"- en alguno de ellos coinciden los gérmenes de S y S'. Esta extensión de los puntos regulares de dimensión máxima de un conjunto C-analítico viene garantizada por el teorema 8 de Bruhat-Whitney [9]. En cambio en el caso algebraico real la situación es más compleja. En efecto: la definición local (Def. 33) de punto regular no se corresponde exactamente con algunas de las definiciones existentes en la escasa literatura sobre el tema (c.f.p.ej. Milnor [41] ó Tognoli [28]). La dificultad de encontrar un estudio sistemático de este punto ha hecho que considerásemos interesante abordarlo, poniendo de manifiesto la relación de nuestra definición de regularidad algebraica con la regularidad náshica y analítica, lo que nos permitirá resolver el caso náshico correspondiente a la proposición 34 (proposiciones 6.12 y 6.13) en el que por falta de desarrollo algebraico global propio del mismo no es posible todavía dar una demostración directa.

[41] J.MILNOR.

"Singular points of complex hypersurfaces".
Annals of Math.Studies 61, Princeton U.P., 1968.

Si S es un conjunto algebraico real irreducible y su anillo de coordenadas tiene dimensión de Krull d probamos la equivalencia siguiente:

Proposición 35. (5.14)

Son equivalentes:

- i) $p \in S$ es regular de dimensión d .
- ii) El anillo local de S en p es regular.

Como consecuencia, la dimensión de S (en el sentido de la definición 33) coincide con d ; esta consecuencia se sigue verificando, a pesar de no ser cierta la proposición, en el caso irreducible (proposición, 5.15).

Asimismo probamos la siguiente proposición (equivalente al Teorema 8 y sugerida por el Teorema 1):

Proposición 36. (5.20)

Si S es un conjunto algebraico real, existe $S' \subsetneq S$ de dimensión estrictamente menor que $\dim S$ tal que $S-S'$ son puntos regulares de S de dimensión máxima.

Como corolarios de estas dos proposiciones establecemos de una parte la validez de la proposición 34 en el caso algebraico, y de otra la caracterización en términos de R -álgebras de la dimensión de un conjunto prealgebraico:

Proposición 37. (5.25)

Sea $S \subseteq \Omega \subseteq R^n$ conjunto prealgebraico definido en $R[x_1 \dots x_n][[f_1 | \dots | f_r]]$ por el ideal $\tilde{J}(S)$. Entonces

$$\dim S = \dim R[x_1 \dots x_n][[f_1 | \dots | f_r]] / \tilde{J}(S)$$

Como hemos indicado, el caso náshico es necesario estudiarlo a través de la localización (así, la dimensión de un conjunto pre

náshico vendrá dada como la máxima dimensión de sus gérmenes). Debido a esto (véase también la proposición 28) desarrollamos en el párrafo 4 una teoría local de las R -álgebras valoradas, sustituyendo \hat{A}_Ω por el anillo de gérmenes de funciones racionales, analíticas o náshicas alrededor de un punto. Las buenas propiedades de las R -álgebras globales se mantienen en su versión local. Podemos así probar que se trata de anillos locales (proposición 4.7); y en el caso analítico y náshico -debido al T.P. de Weierstrass- un resultado de Tougeron [42] nos permite demostrar que dichos anillos locales son, sorprendentemente, álgebras analíticas realmente reducidas (proposición 4.11). Interpretando geoméricamente este hecho obtenemos (proposición 4.13) para cada álgebra local valorada \tilde{A}_Ω una caracterización (o positivstellensatz local) de los ideales de los gérmenes preanalíticos o prenáshicos, donde es posible usar el nullstellensatz de Risler o Mostowski respectivamente.

Señalemos, además, como muestra de las posibilidades de análisis algebraico de ciertos hechos geométricos, que aquellos entramados $f_1 \dots f_r$ que proporcionan para cada $i \in \{1-1\}^r$ un ideal amplio (c.f. def. 30) están caracterizados por dar origen a A -módulos $\tilde{A} = A[|f_1|, \dots, |f_r|]$ libres con 2^r elementos en una base.

En general es posible localizar la teoría de la dimensión desarrollada en los párrafos anteriores (véanse proposiciones 5.2 y 5.4, definición 5.6) así como las proposiciones 34 (véase proposición 5.26) y 37 (proposición 5.27); pudiendo extender esta última al caso analítico (por la noetherianidad del anillo de gérmenes de funciones analíticas). Llegado a este punto, es posible abordar el estudio del caso náshico teniendo en cuenta su condición intermedia entre el caso algebraico y analítico.

Si S_p designa un germen de conjunto en $p \in R^n$ y

[42] J.C. TOUGERON. "Ideaux des fonctions différentiables", Springer-Verlag, Berlin, 1972.

$R[X]_p$, O_n^P y N_n^P los anillos de gérmenes de funciones racionales, analíticas y nâshicas respectivamente, entonces $\mathfrak{J}_P(S_p)$, $\mathfrak{J}_a(S_p)$, $\mathfrak{J}_N(S_p)$ designarán el ideal correspondiente a cada anillo local. Si S_p es algebraico, su regularidad como tal no implica su regularidad analítica; y lo mismo ocurre con la irreducibilidad; más aún, en general $\mathfrak{J}_P(S_p)O_n^P \not\subseteq \mathfrak{J}_a(S_p)$.

Probamos, sin embargo, que $\dim S_p = \dim_P S_p$ (proposición 6.1); y por tanto, usando la versión local de la proposición 34 obtenemos para un germen prenâshico las igualdades

$$\dim_P S_p = \dim_N S_p = \dim_a S_p,$$

donde $\dim_P S_p$ es su dimensión algebraica, como consecuencia de la proposición 21. Así, tanto para un germen nâshico como prenâshico obtenemos las igualdades:

$$\dim_N S_p = \dim N_n / \mathfrak{J}_N(S_p) \quad (\text{proposición 6.4})$$

$$\dim_N S_p = \dim N_n \left[|f_1| \dots |f_r| \right] / \mathfrak{J}_N(S_p) \quad (\text{proposición 6.5})$$

(Versiones particulares de estos resultados aparecen en Lazzeri-Tognoli [27]).

Deducimos ahora la versión global de estas igualdades, obteniendo finalmente (proposiciones 6.12 y 6.13) la contrapartida nâshica de las proposiciones 34 y 36.

Como consecuencia de los métodos desarrollados se estudian en el párrafo 6 aplicaciones de los mismos a dos cuestiones: el buen comportamiento de los gérmenes nâshicos (para los que se prueba la inexistencia de anomalías como las descritas arriba para los gérmenes algebraicos) y, respondiendo a una cuestión de Risler (parcialmente resuelta por Efroymsen [29]), la caracterización de

la extensión de un ideal real al anillo de series formales.

Como tema relevante dentro de la teoría de la dimensión, el párrafo 7 contiene la demostración de la versión preanalítica del Teorema 8 de Whitney-Bruhat, mediante el uso reiterado de la proposición 34:

Proposición 38. (7.2)

Sea $S \subseteq \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ preanalítico. Entonces existe $S' \subsetneq S$ preanalítico de dimensión estrictamente menor que $\dim S$, tal que $S - S'$ es un conjunto de puntos regulares de S de dimensión máxima.

La importancia de esta proposición queda de manifiesto observando el papel que -como hemos indicado en esta introducción- juega su análoga analítica en la estratificación (c.f. corolario 7.4). Por último el párrafo 8 trata de aplicar los resultados obtenidos en el caso local, elaborando en términos de \mathbb{R} -álgebras locales los conceptos de regularidad, irreducibilidad y coherencia de un germen preanalítico, prenáshico o prealgebraico.

* * * *

Esta memoria ha sido realizada bajo la dirección del Prof.D. Pedro Abellanas. Quiero agradecer aquí su generosa ayuda. Asimismo deseo incluir en mi agradecimiento a todos aquellos que por algún motivo intervinieron en la elaboración de este trabajo: mis compañeros del Instituto Jorge Juan del C.S.I.C. (por la creación del ambiente necesario), a Margarita (por combatir con el original) y mi mujer (por combatir con el original y muchas otras cosas).

1.1. Definición.

Sea X un espacio topológico; A, U subconjuntos de X , \mathcal{E}_U una familia de funciones reales definidas en U . Diremos que A está descrito en U por \mathcal{E}_U si

$$A \cap U = \bigcup_{i=1}^p \bigcap_{f=1}^q A_{ij},$$

siendo A_{ij} conjuntos de la forma

$$\{x \in U | f(x) > 0\}, \{x \in U | f(x) < 0\}, \{x \in U | f(x) = 0\}$$

con $f \in \mathcal{E}_U$.

Llamaremos $S(\mathcal{E}_U)$ la familia de conjuntos de X descritos por \mathcal{E}_U en U .

1.2. Definición.

Sea Ω subconjunto abierto de R^n ; f una función analítica real en Ω . Diremos que f es analítico-algebraica o de Nash en el entorno de un punto $x_0 \in \Omega$, si existe un entorno de x_0 en Ω , U_{x_0} , y un polinomio $\omega(X_1 \dots X_n, T) \neq 0$, tal que la función $\omega(X_1 \dots X_n, T)$ es idénticamente nula en U_{x_0} .

Diremos que f es de Nash en Ω , si lo es para cada punto de Ω . Naturalmente si f es de Nash en $x_0 \in \Omega$, f es de Nash en la componente conexa de Ω que contiene a x_0 .

1.3. Definición.

Sea Ω subconjunto abierto de R^n ; $A \subseteq \Omega$ es un conjunto C -analítico (respectivamente analítico-algébrico ó Nash

global, algebraico) si existen $f_1 \dots f_p$ funciones analíticas en Ω (respectivamente, de Nash en Ω ; polinomios en n -variables con coeficientes en \mathbb{R}), tales que

$$A = \{x \in \Omega / f_1(x)=0, \dots, f_p(x)=0\} .$$

1.4. Definición.

Sea Ω abierto de \mathbb{R}^n , $A \subseteq \Omega$, es un conjunto analítico (respectivamente de Nash o analítico algebraico) si para cada $x \in \Omega$, existe un entorno de x en Ω , U_x , tal que $A \cap U_x$ es un conjunto C-analítico (respectivamente Nash global) en U_x .

Nota.

Todo conjunto C-analítico, Nash global, algebraico, analítico o Nash es cerrado en Ω .

1.5. Definición.

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto. $S \subseteq \Omega$ es un conjunto semianalítico global (respectivamente semi Nash global, semialgebraico) si $S \in S(\mathcal{E}_\Omega)$, siendo \mathcal{E}_Ω el anillo de funciones analíticas en Ω (respectivamente, funciones de Nash en Ω , polinomios en n -indeterminadas).

1.6. Definición.

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, abierto; $S \subseteq \Omega$ es un conjunto semianalítico (seminash, localmente semialgebraico), si para cada $x \in \Omega$, existe un entorno de x en Ω , U_x , tal que $S \in S(\mathcal{E}_{U_x})$, siendo \mathcal{E}_{U_x} anillo de funciones analíticas en U_x (respectiva-

mente de Nash en U_x , polinomios en n -indeterminadas).

Nota.

Para un comentario de las definiciones anteriores, vease, por ejemplo, [1], [2], [5], [6], [15] .

Estamos interesados en estudiar algunos conjuntos de los definidos en 1.5; esto es: conjuntos globalmente definidos. Una formulación explícita de aquella definición sería la siguiente:

1.7. Definición.

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto. $S \subseteq \Omega$ es un conjunto semianalítico global (respectivamente, seminash global, semialgebraico) si

$$S = \bigcup_{i \in I} \{x \in \Omega / g_{ij}(x) = 0, f_{ij}(x) > 0, \quad \forall j \in J\}$$

siendo $\{g_{ij}\}, \{f_{ij}\}, i \in I, j \in J$, conjuntos finitos de funciones analíticas en Ω (respectivamente de Nash, polinómicas).

Si reemplazamos cada ecuación $g_{ij} = 0$, por $g_{ij}(x) \geq 0, -g_{ij}(x) \geq 0$; y cada inecuación $f_{ij}(x) > 0$, por $f_{ij}(x) \geq 0, f_{ij}(x) \neq 0$, obviamente cada conjunto S será unión de conjuntos de la forma

$$\{x \in \Omega / g_{ij}(x) \geq 0, f_{ij}(x) \neq 0\},$$

observación que será útil en la demostración de la

1.8. Proposición.

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, abierto; $S \subseteq \Omega$ es un conjunto semianalítico global (respectivamente seminash global, semialgebraico) si y sólo si S es la proyección de una hipersuperficie C-ana

lítica (respectivamente Nash global, algebraica) de $\Omega \times \mathbb{R}$ definida por la anulación de una función polinómica en la última variable.

Demostración.

Se trata esencialmente de un resultado para desigualdades algebraicas dado por Motzkin [3] .

Para demostrar que un conjunto S (que supondremos semianalítico global en lo sucesivo; los otros casos se tratan análogamente) es una proyección de una hipersuperficie dada por una ecuación,

$$\gamma(x,t) = 0$$

donde $\gamma(x,t)$ es un polinomio en t con coeficientes funciones analíticas, basta demostrar que esto se verifica para conjuntos de la forma

$$\{x \in \Omega / g_{ij}(x) \geq 0, f_{ij}(x) \neq 0 \quad j \in J\} .$$

En efecto: puesto que S es en general unión de conjuntos de esta forma, si $\gamma_i(x,t)=0$ es la hipersuperficie asociada a cada uno de ellos, es obvio que

$$S = \bigcup_{i \in I} \{x \in \Omega / g_{ij}(x) \geq 0, f_{ij}(x) \neq 0 \quad j \in J\}$$

es la proyección de la hipersuperficie

$$\prod_{i \in I} \gamma_i(x,t) = 0$$

Ahora bien, en el artículo [3] , Motzkin construye la hipersuperficie $\gamma_i(x,t)=0$, para los conjuntos arriba señalados en el caso de ecuaciones algebraicas, pero cuya extensión a nuestro caso es inmediata.

Recíprocamente (c.f. [2], Lema 3, Nota, pág. 110), la proyección de una hipersuperficie $\gamma(x,t)=0$ polinomial en t , es un conjunto descrito por funciones analíticas en Ω , esto es: globalmente semianalítico, de acuerdo con un resultado fundamental de Seidenberg. c.q.d.

Si $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, es un abierto con determinadas condiciones, que especificaremos más adelante, el conjunto de las funciones de Nash en Ω , que denotaremos por $N(\Omega)$ es un anillo con buenas propiedades, que en general no posee el anillo de funciones analíticas en Ω , A_Ω . Estas buenas propiedades permiten, con la proposición anterior, hablar de un "teorema de los ceros" -en cierto sentido- de los conjuntos seminash globales. Análogamente, describiremos ese teorema para conjuntos semialgebraicos.

Si A_Ω es, indistintamente $N(\Omega)$ ó $R[X_1 \dots X_n]$; y $A_{\Omega \times R}$, $N(\Omega \times R)$ ó $R[X_1 \dots X_n, T]$, existe una inclusión obvia

$$A_\Omega \longrightarrow A_{\Omega \times R}$$

si $V \subseteq \Omega \times R$ es un subconjunto, $\mathcal{J}(V)$ designa el ideal de $A_{\Omega \times R}$ de las funciones que se anulan en cada punto de V , y si

$$\pi: \Omega \times R \longrightarrow \Omega$$

es la proyección usual, es obvio que

$$\mathcal{J}(V) \cap A_\Omega = \mathcal{J}(\pi(V))$$

siendo $\mathcal{J}(\pi(V))$ el ideal de A_Ω de los elementos que se anulan en cada punto de $\pi(V)$

1.9. Definición.

Sea \mathcal{a} ideal de A_Ω ó $A_{\Omega \times R}$. Diremos que \mathcal{a} es real si toda suma de cuadrados de elementos del anillo que pertenezca a \mathcal{a} implica que cada sumando pertenece a \mathcal{a} ;

esto es

$$f_1^2 + \dots + f_r^2 \in \mathcal{A} \implies f_1, \dots, f_r \in \mathcal{A} ;$$

Definimos la quasi-raiz (ó el quasi-radical) de \mathcal{A} , $q \text{ rad } (\mathcal{A})$ como el ideal

$$\{f \mid \exists f_1 \dots f_p \in \mathcal{A}_\Omega \text{ (ó } \mathcal{A}_{\Omega \times \mathbb{R}}) \exists k \in \mathbb{N},$$

$$\sum_{i=1}^p f_i^2 + f^{2k} \in \mathcal{A} \}.$$

siendo p y k , variables con cada f .

De acuerdo con la definición anterior enunciamos el siguiente teorema de Risler [18]

1.10. Teorema.

Sea \mathcal{A} ideal de $\mathbb{R} [X_1 \dots X_n]$. Son equivalentes

- i) Todo polinomio nulo sobre los ceros de \mathcal{A} pertenece a \mathcal{A} .
- ii) \mathcal{A} es real.
ó, equivalentemente
- i') Todo polinomio nulo sobre los ceros de \mathcal{A} pertenece al quasi-radical de \mathcal{A} . Es decir,

$$\mathcal{J} V(\mathcal{A}) = q \text{ rad } \mathcal{A} .$$

La equivalencia entre los dos enunciados del teorema es sencilla de establecer.

Análogamente T. Mostowski ha demostrado, en un trabajo sobre los anillos de funciones de Nash [34] el siguiente Teorema:

1.11. Teorema.

Sea \mathcal{A} ideal de $N(\Omega)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ dominio semi-algebraico.

Entonces son equivalentes:

- i) Toda función de Nash nula sobre los ceros de \mathcal{A} pertenece a \mathcal{A} .
- ii) \mathcal{A} es real.

ó, equivalentemente

- i) Toda función de Nash nula sobre los ceros de \mathcal{A} pertenece al quasi-radical de \mathcal{A} . Es decir

$$\mathcal{J} V(\mathcal{A}) = q \text{ rad } \mathcal{A} .$$

Podemos, pues, enunciar la siguiente

1.2. Proposición.

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto (respectivamente, dominio semialgebraico). $S \subseteq \Omega$ semialgebraico (respectivamente seminash global). Sea $\gamma(x,t)$ una ecuación de la hipersuperficie asociada a S en 1.8.

Entonces

$$\mathcal{J}(S) = \{f \in \mathcal{A}_\Omega / \exists f_1 \dots f_p \in \mathcal{A}_{\Omega \times \mathbb{R}}, k \in \mathbb{N},$$

$$\sum_{i=1}^p f_i^2 + f^{2k} \in (\gamma(x,t))\}$$

Demostración.

Se trata de especificar, de acuerdo con los resultados anteriores, que

$$\mathcal{J}(S) = \mathcal{J}(\pi(\gamma(x,t)=0)) = \mathcal{J}(\gamma(x,t)=0) \cap A_{\Omega}$$

teniendo en cuenta, si S es siminash global, que $\Omega \times R$ es dominio semialgebraico, si Ω lo es. c.q.d.

Otra versión del teorema de los ceros aplicado a conjuntos semialgebraicos, con determinadas condiciones restrictivas puede verse en Stengle [30]. En nuestra versión es preciso señalar que la ecuación $\gamma(x,t)$ asociada a S , puede construirse efectivamente; y que en general existen varias para cada S . De ahí la importancia, como señala Motzkin del estudio de ecuaciones $\gamma(x,t)$ asociadas con buenas propiedades.

La existencia de una proposición como la 1.12 para semianalíticos globales, descansa, según la línea de demostración, en la existencia de un teorema como 1.10 ó 1.11, para el anillo de funciones analíticas sobre un abierto de $R^n \times R$. Dicho teorema existe para $R \times R$ (Risler, 1975) [31], pero su aplicación en nuestro caso sólo serviría para subconjuntos semianalíticos de abiertos de R , cuyo estudio es muy sencillo. No obstante lo enunciaremos:

1.13. Teorema.

Sea $\Omega \subseteq R^2$, $A(\Omega)$ anillo de funciones analíticas en Ω ; son equivalentes las siguientes condiciones para un ideal $\mathcal{C} \subseteq A(\Omega)$

- i) Toda función analítica en Ω nula sobre los ceros de pertenece a \mathcal{C} .
- ii) \mathcal{C} es real.

ó equivalentemente

i') Toda función analítica nula sobre los ceros de \mathcal{C}_α pertenece al quasi radical de \mathcal{C}_α . Es decir

$$\mathcal{J} \nu(\alpha) = q \text{ rad } (\alpha)$$

1.14. Proposición.

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ abierto, S semianalítico global. Sea $\gamma(x,t)$ una ecuación de la hipersuperficie asociada a S en 1.8. Entonces

$$(S) = \{f \in A(\Omega) / \exists f_1 \dots f_p \in A(\Omega \times \mathbb{R}), k \in \mathbb{N},$$

$$\sum_{i=1}^p f_i^2 + f^{2k} \in (\gamma(x,t))\}.$$

Nos referiremos en lo sucesivo a conjuntos globalmente semianalíticos (seminash, semialgebraicos) pero en cuya definición las funciones vienen afectadas solo de símbolos de igualdad o de desigualdad no estricta. Para tales conjuntos cerrados reservaremos el nombre de preanalíticos (prenashicos, prealgebraicos).

2.1. Definición.

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, $S \subseteq \Omega$ es preanalítico (respectivamente, prenashico, prealgebraico) si existen

$$\{g_{ij}\} \{f_{ij}\} \quad i \in I \quad j \in J$$

conjuntos finitos, donde g_{ij}, f_{ij} son funciones analíticas en Ω (respectivamente de Nash, polinomios) tales que

$$S = \bigcup_{i \in I} \{x \in \Omega / g_{ij}(x) = 0, f_{ij}(x) \geq 0 \quad \forall j \in J\}$$

Los conjuntos preanalíticos aparecen en el estudio de conjuntos semianalíticos mas generales; su presencia es debida a los teoremas de separación, que constituyen un tema clásico en el estudio de las desigualdades lineales. Las proposiciones siguientes aplican dichos teoremas.

2.2. Proposición.

Sea $S \subseteq \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto semianalítico (seminash localmente semialgebraico) cerrado. Entonces S es localmente preanalítico (prenashico, prealgebraico).

Demostración.

Usaremos fundamentalmente el siguiente lema de Lojasiewicz [2]

Lema.

Sea G_0 abierto acotado de R^n , de la forma $G_0 = \{f_1 > 0 \dots f_p > 0\}$ siendo $f_1 \dots f_p$ analíticas en un abierto que contiene a \bar{G}_0 ; y sea

$$Z_0 = \{x \in G_0 / g(x) = 0\},$$

siendo $g(x)$ analítica en un abierto que contiene a \bar{G}_0 . Entonces para cada abierto semianalítico $G \supseteq Z_0$, existen $d, N > 0$ tales que

$$Z_0 \subseteq \{x \in G_0 : |g(x)| < d |f_1 \dots f_p(x)|^N\} \subseteq G.$$

Sea $a \in S$; existe, por definición de conjunto semianalítico, un entorno V de a , que podemos tomar esférico de radio ϵ y centro a , tal que si $C(S)$ designa al complementario de S ,

$$C(S) \cap V = \bigcup_{i=0}^p \left[\bigcap_{j=1}^q \{x \in V / f_{ij}(x) > 0\} \cap \{x \in V / g_i(x) = 0\} \right]$$

siendo f_{ij}, g_i funciones analíticas en un entorno de a que contiene a \bar{V} .

Si tomamos

$$f_{i0}(x) = \epsilon^2 - |x-a|^2,$$

obtendremos

$$C(S) \cap V = \bigcup_{i=0}^p \left[\bigcap_{j=0}^q \{x \in V / f_{ij}(x) > 0\} \cap \{x \in V / g_i(x) = 0\} \right]$$

Sea G_i el abierto acotado

$$G_i = \{x \in \Omega / f_{ij}(x) > 0\};$$

$\forall j=0 \dots q$

se trata de un subabierto de V .

Si

$$Z_i = G_i \cap \{g_i(x)=0\},$$

observamos que

$$Z_i \subseteq C(S) \cap V$$

abierto semianalítico; luego, según el lema anterior

$$Z_i \subseteq G_i \cap \{\psi_i(x)>0\} \subseteq G,$$

siendo

$$\psi_i = d_i^2 \prod_{j=0}^q f_{ij}^{2N_i} - g_i^2, \quad \text{con ciertos } d_i, N_i > 0.$$

Así pues,

$$C(S) \cap V = \bigcup_{i=0}^p \left[\bigcap_{j=0}^q \{f_{ij}>0\} \cap \{\psi_i>0\} \right]$$

Luego

$$S \cap V = V - (C(S) \cap V)$$

será preanalítico, puesto que el complementario de un conjunto de la forma $\{f > 0\}$ es de la forma $\{f \leq 0\}$.

La misma demostración sirve para el caso semi-nash o algebraico, dado que los correspondientes anillos de funciones son cerrados para las operaciones efectuadas en la demostración.

c.q.d.

2.3. Proposición.

Sea $S \subseteq \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, globalmente* semianalítico cerrado

* Supondremos que las funciones que lo definen (analíticas, de Nash etc) lo son en un abierto que contiene al cierre de Ω .

y acotado (respectivamente, globalmente seminash, semialgebraico compacto). Entonces S es preanalítico (respectivamente, preanashico, prealgebraico).

Demostración.

Por ser acotado, estará S contenido en una bola V de centro a y radio ϵ . Repitiendo la demostración anterior tendríamos que $S \cap V = S$ es preanalítico en V . Basta intersecar la expresión tipo 2.1. de S así obtenida por $\{f_{i_0} \geq 0\}$ para obtener S como preanalítico de Ω (respectivamente preanashico, prealgebraico). c.q.d.

2.4. Proposición.

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, A, B , dos subconjuntos cerrados de Ω no vacíos y disjuntos. Existe una función ψ analítica en Ω tal que $\psi(A) > 0$, $\psi(B) < 0$.

Demostración.

En las hipótesis de la proposición el lema de Uryshon proporciona una función continua sobre Ω con valores reales f tal que

$$f(A) = 1, \quad f(B) = -1$$

Usando un teorema de aproximación de Whitney [35] podemos garantizar la existencia de una función analítica ψ en Ω tal que

$$\forall x \in \Omega \quad |f(x) - \psi(x)| < \frac{1}{2}$$

se sigue que si $x \in A$, $\psi(x) > \frac{1}{2}$ y si $x \in B$, $\psi(x) < -\frac{1}{2}$

c.q.d.

2.5. Proposición [34]

Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto semialgebraico; $A, B \subseteq U$ conjuntos semialgebraicos cerrados y disjuntos. Existe una función de Nash f en U tal que

$$f(A) > 0, \quad f(B) < 0.$$

2.6. Proposición.

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto (respectivamente abierto semialgebraico). Las componentes conexas de un conjunto C-analítico en Ω (respectivamente Nash global) son C-analíticas (Nash globales).

Demostración.

Siguiendo fundamentalmente una idea de Risler [32], supongamos que S es un conjunto C-analítico y M una componente conexa de S . Entonces, por ser S localmente conexo, $S-M$ es cerrado disjunto de M . Si $S-M \neq \emptyset$ usando 2.4. sea ψ una función analítica en Ω tal que

$$\psi(S-M) > 0, \quad \psi(M) < 0.$$

Por otra parte sean $f_1 \dots f_r$ funciones analíticas en Ω tales que

$$S = \{x \in \Omega / f_1(x) = \dots = f_r(x) = 0\}$$

Consideremos

$$\psi_1 = \sqrt{\sum_{i=1}^r f_i^2 + \psi^2} + \psi.$$

Esta función es analítica en Ω puesto que $\sum_{i=1}^r f_i^2 + \psi^2$ no se anula en ningún punto de Ω (pues $\psi(x) = 0 \implies x \notin S$).

Ahora bien

$$M = \{x \in \Omega / \psi_1(x) = 0\} .$$

como se comprueba inmediatamente. Así pues M es C -analítico.

Si S es Nash global el mismo razonamiento puede usarse para probar que M es Nash global con la ayuda de 2.5. En efecto: en un abierto semialgebraico los conjuntos Nash globales son semialgebraicos; el número de componentes conexas de un conjunto semialgebraico es finito y cada una de ellas es semialgebraica (c.f. [2]).

2.7. Proposición. [32] [33]

Si \mathcal{P} es un ideal primo finitamente generado de funciones analíticas ó Nash de Ω (en este último caso Ω verifica las condiciones expuestas en la proposición anterior), $V(\mathcal{P})$ es conexo.

Demostración.

Sea M una componente conexa de $V(\mathcal{P})$, y con la notación de la proposición anterior consideremos las funciones, si $V(\mathcal{P})-M \neq \emptyset$:

$$\psi_1 = \sqrt{\sum_{i=1}^r f_i^2 + \psi^2} + \psi$$

$$\psi_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^r f_i^2 + \psi^2} - \psi$$

donde $\mathcal{P} = (f_1 \dots f_r)$.

Entonces

$$V(\psi_1) = M, \quad V(\psi_2) = V(\mathcal{P})-M ,$$

luego $\psi_1, \psi_2 \notin \mathcal{P}$.

Pero $\psi_1 \cdot \psi_2 = \sum_{i=1}^r f_i^2 \in \mathcal{P}$. Absurdo.

Luego $V(\mathcal{P}) = M$. c.q.d.

2.8. Observación.

Ninguna de las dos proposiciones anteriores se verifica en el caso algebraico. Consideremos $V(x^2+y^2-x^3) \subseteq \mathbb{R}^2$. Se trata de un conjunto algebraico dado por un ideal primo no conexo (tiene el origen como punto singular aislado). Por otra parte la componente conexa de dimensión 1 no es algebraica.

Así el estudio de los conjuntos algebraicos se realiza mas satisfactoriamente (véase § 6) dentro del anillo de funciones de Nash.

Por otra parte los conjuntos de ceros de funciones de Nash son, como hemos indicado antes, conjuntos semialgebraicos cerrados en determinados abiertos. Esto señala el interés de estudiar estos últimos conjuntos que engloban ambos casos.

2.9. Proposición.

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto (respectivamente abierto semi algebraico) $S \subseteq \Omega$ un conjunto preanalítico (respectivamente prenashico). Entonces las componentes conexas de S son preanalíticas (respectivamente prenashicas).

Demostración.

Sea S preanalítico, M componente conexa; entonces $S-M$ es cerrado (por ser S localmente conexo) y usando la proposición 2.4., deducimos, con la notación de 2.6., que

$$S \cap \{\psi \leq 0\} = M$$

Análogamente se demuestra en el caso prenashico. c.q.d.

2.10. Definición.

Sea $S \subseteq \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$; diremos que S es globalmente semianalítico cerrado simple (respectivamente, globalmente seminash cerrado simple, semialgebraico simple) Si existen $\{g_i\} \{f_i\}$ $i \in I$ conjunto finito de índices, siendo g_i, f_i funciones analíticas en Ω (respectivamente de Nash, polinomiales) tales que

$$S = \{x \in \Omega / g_i(x) \geq 0 \quad f_i(x) > 0\} .$$

2.11. Proposición.

Sea $S \subseteq \Omega$ globalmente semianalítico cerrado simple (respectivamente seminash globalmente y simple, y Ω abierto semialgebraico). Entonces S es preanalítico (respectivamente prenashico) .

Demostración.

Sea

$$S = \{x \in \Omega / g_i(x) \geq 0, f_i(x) > 0\}$$

Sea

$$H = \bigcup_{i \in I} \{x \in \Omega / f_i(x) = 0\} .$$

Entonces $H \cap S = \emptyset$. Sea ψ la función analítica (respectivamente de Nash) dada por 2.4 (2.5) tal que

$$\psi(H) > 0 \quad \psi(S) < 0$$

Entonces S puede escribirse

$$S = \{x \in \Omega / g_i(x) \geq 0 \quad f_i(x) \geq 0 \quad \psi(x) \leq 0\}$$

y por tanto es preanalítico (respectivamente prenashico). c.q.d.

Introducimos en este párrafo un cierto tipo de R -álgebras, cuyas propiedades fundamentales fueron estudiadas por Abellanas en [4].

Estas R -álgebras serán asociadas a los conjuntos preanalíticos, prealgebraicos o prenashicos de manera natural, facilitando un estudio algebraico de tales conjuntos. Independientemente de Abellanas y con el mismo año de publicación que [4] (1974), G. Stengle [30] asocia a los conjuntos prealgebraicos un semianillo. Como es natural dicho semianillo es mucho menos manejable que las R -álgebras que introduciremos, y su creador se limita a construirlo explícitamente a través de unos semianillos que son esencialmente semejantes a nuestras R -álgebras.

Para simplificar supondremos en lo sucesivo que $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ es un dominio; y en el caso de trabajar con funciones de Nash o polinomiales puede suponerse que Ω es un dominio semialgebraico.

A_Ω designará una sub R -álgebra del anillo (R -álgebra) de las funciones analíticas reales en Ω ; y C_Ω designará las funciones continuas en dicho abierto.

3.1. Definición. (Abellanas [4])

Sean $f_1 \dots f_r \in A_\Omega$. Consideremos el homomorfismo de A_Ω -álgebras

$$u: A_\Omega [x_1 \dots x_r] \longrightarrow C_\Omega$$

tal que

$$\begin{array}{ccc} x_1 & \longrightarrow & |f_1| \\ \vdots & & \\ x_r & \longrightarrow & |f_r| \end{array}$$

Diremos que $u(A_\Omega [x_1 \dots x_r])$ es una R -álgebra de A_Ω -funciones

valorada, y será denotada $A_\Omega [|f_1| \dots |f_r|]$, o bien \tilde{A}_Ω si se suponen prefijadas las funciones f_1, \dots, f_r .

Como justificación de la notación empleada observemos que \tilde{A}_Ω contiene una R-subálgebra isomorfa a A_Ω (y que identificaremos con esta). Más aún, \tilde{A}_Ω es un A_Ω -módulo generado por los 2^r -productos $1, |f_1|, \dots, |f_r|, \dots, |f_1| \dots |f_r|$. Dado que en \tilde{A}_Ω , $|f_i|^2 - f_i = 0 \quad \forall i=1, \dots, r$, \tilde{A}_Ω no depende íntegramente de A_Ω . Como consecuencia del teorema de la base de Hilbert, si A_Ω es Noetheriano, \tilde{A}_Ω también es Noetheriano. Asimismo, debido a los clásicos resultados sobre dependencia íntegra, la dimensión de Krull de A_Ω y \tilde{A}_Ω coincide.

Sea $i = (i_1 \dots i_r) \in \{1, -1\}^r$, y designemos por I_i el ideal de \tilde{A}_Ω generado por

$$(|f_1| - i_1 f_1, \dots, |f_r| - i_r f_r).$$

Sea E_i el conjunto de puntos de Ω donde se anulan todas las funciones de I_i , es decir

$$E_i = \{x \in \Omega / i_1 f_1 \geq 0, \dots, i_r f_r \geq 0\}.$$

Se trata de un conjunto preanalítico que denominaremos estado i -ésimo del entramado $\{f_1 \dots f_r\}$. Los ideales I_i y los estados correspondientes juegan un papel fundamental en el estudio algebraico de \tilde{A}_Ω , como aparece de manifiesto en [4]. Sea F el subconjunto de $\{1, -1\}^r$ tal que $i \in F$ sii E_i tiene interior no vacío.

3.2. Definición.

Con la notación anterior, diremos que I_i es un ideal amplio si $i \in F$. Análogamente, E_i es un estado amplio si $i \in F$.

3.3. Proposición.

$$\Omega = \bigcup_{i \in F} E_i$$

Demostración.

Como es obvio

$$\Omega = \bigcup_{i \in \{1, -1\}^r} E_i$$

Sea X un espacio topológico, $B, A \subseteq X$, $\overset{\circ}{B}, \overset{\circ}{A}$ su interior, \bar{B}, \bar{A} su adherencia en X . Entonces

$$\overline{\frac{\overset{\circ}{A}}{B}} = \bar{A} \quad \bar{B}$$

Esta conocida fórmula de cálculo topológico puede generalizarse a una unión finita. Si $X = \Omega$, escribiremos

$$\Omega = \overset{\circ}{\Omega} = \bigcup_{i \in \{1, -1\}^r} \overset{\circ}{E}_i = \bigcup_{i \in \{1, -1\}^r} \bar{E}_i = \bigcup_{i \in F} \overset{\circ}{E}_i \subseteq \bigcup_{i \in F} E_i \subseteq \Omega,$$

luego

$$\Omega = \bigcup_{i \in F} E_i$$

c.q.d.

3.4. Corolario.

En \tilde{A}_Ω se verifica

$$(0) = \bigcap_{i \in F} I_i.$$

Demostración.

Sea $\tilde{g} \in \bigcap_{i \in F} I_i$; probaremos que $\forall p \in \Omega$,

$\tilde{g}(p) = 0$. En efecto, si $p \in \Omega$, $p \in E_{i_0}$, para $i_0 \in F$. Como $\tilde{g} \in I_{i_0}$, $\tilde{g}(p) = 0$. Así $\tilde{g} = 0$. c.q.d.

3.5. Proposición.

I_i , $i \in \{1, -1\}^r$, es amplio sii $I_i \cap A_\Omega = (0)$.

Demostración.

Si I_i es amplio entonces

$$I_i \cap A_\Omega = (0) \quad (\text{c.f. } |4| \text{ § 2 Lema 1}).$$

En efecto, siendo Ω conexo, ninguna función analítica puede anularse en un conjunto de interior no vacío, siendo distinta de cero.

Recíprocamente, veremos que si I_i no es amplio, $f_1 \dots f_r \in I_i \cap A_\Omega$, suponiendo que $f_i \neq 0 \quad \forall i=1 \dots r$ (en otro caso la demostración se reduce a esta); como A_Ω es un dominio de integridad (por ser Ω conexo), $f_1 \dots f_r \neq 0 \in I_i \cap A_\Omega$.

Usaremos el siguiente Lema

3.6. Lema.

Sea $j = (j_1 \dots j_r) \in \{1, -1\}^r$, $j \neq (1, 1, \dots, 1)$.

Sea $C_0 = 1$, y para $1 \leq m \leq r$, C_m sea la suma de todos los productos distintos de m factores que pueden efectuarse con j_1, \dots, j_r . Entonces

$$C_0 + C_1 + \dots + C_r = 0.$$

Demostración del Lema.

Sea p el número de términos positivos en $\{j_1 \dots j_r\}$; $r-p$ por tanto el de negativos. Por hipótesis $p < r$.

El número de sumandos positivos de la suma

$$C_0 + C_1 + \dots + C_r$$

será

$$[1 + \binom{p}{1} + \dots + \binom{p}{p}] \times [1 + \binom{r-p}{2} + \dots + \binom{r-p}{l}]$$

donde $l = r-p$ si este número es par, o $l = r-p-1$ si $r-p$ es impar.

En cualquier caso el primer factor es 2^p y el segundo 2^{r-p-1} ; luego habrá 2^{r-1} sumandos positivos. Como el número total de sumandos es 2^r , es claro que se cancelan los sumandos positivos y negativos. c.q.d.

Sea

$$\hat{g} = f_1 \dots f_r + i_1 |f_1| \cdot f_2 \dots f_r + \dots + i_1 i_2 \dots i_r \cdot |f_1| \dots |f_r|$$

donde $i = (i_1 \dots i_r)$ es tal que I_i no es amplio. Sea $p \in \Omega$; veamos que $\bar{g}(p) = 0$.

En efecto, por la proposición 3.3., p pertenecerá a un estado amplio $E_{i'}$, $i' = (i'_1 \dots i'_r) \in F$.

Entonces

$$|f_1(p)| = i'_1 f_1(p), \dots, |f_r(p)| = i'_r f_r(p).$$

Luego

$$\begin{aligned} \bar{g}(p) &= (f_1 \dots f_r)(p) + i_1 i'_1 (f_1 \dots f_r)(p) + \dots + \\ &+ i_1 i'_1 \dots i_r i'_r (f_1 \dots f_r)(p). \end{aligned}$$

Sea $j = (i_1 i'_1, \dots, i_r i'_r) \in \{1, -1\}^r$ y claramente $j \neq (1, \dots, 1)$,
 pues $i \neq i'$. El lema anterior significa que $\bar{g}(p) = 0$.

Si $\bar{g} = 0$, entonces

$$g \in I_i$$

Luego

$$\begin{aligned} \bar{g} &= f_1 \dots f_r + i_1 (|f_1| - i_1 f_1 + i_1 f_1) + \dots + i_1 i_2 \dots i_r (\\ & (|f_1| - i_1 f_1 + i_1 f_1) \dots (|f_r| - i_r f_r + i_r f_r) = \\ & = 2^r f_1 \dots f_r + \alpha, \end{aligned}$$

siendo $\alpha \in I_i$.

Así $f_1 \dots f_r \in I_i$, y por tanto $f_1 \dots f_r \in I_i \cap A_\Omega$

c.q.d.

Esta proposición y la definición 3.2. conectan con un tema clásico como es el de las desigualdades singulares y no singulares o "slack" (laxas, flojas) (Tucker).

3.7. Definición. [37]

Sean $f_1 \dots f_r \in A_\Omega$ y consideremos el sistema de desigualdades

$$\begin{aligned} f_1(x) &\geq 0 \\ &\vdots \\ f_r(x) &\geq 0 \end{aligned}$$

Sea $g \in A_\Omega$. Diremos que $g(x) \geq 0$ es una desigualdad singular

si $\forall y \in \Omega$, $f_1(y) \geq 0 \dots f_r(y) \geq 0$, se verifica

$$g(y) = 0$$

En otro caso (es decir, $\text{sig}(y) > 0$ para una cierta solución del sistema, y $g(y) \geq 0$ en cualquier caso), se dice que $g(y) \geq 0$ es "slack" o no singular.

Diremos que el sistema de desigualdades es singular si existe $0 \neq g \in \mathcal{A}_\Omega$, tal que $g(x) = 0$ $\forall x$ verificando $f_1(x) \geq 0 \dots f_r(x) \geq 0$.

En otro caso diremos que el sistema es "slack" o no singular.

3.8. Proposición.

Sea $f_1 \dots f_r \in \mathcal{A}_\Omega$, sea $\tilde{\mathcal{A}}_\Omega = \mathcal{A}_\Omega[|f_1| \dots |f_r|]$

El sistema $\{f_1 \geq 0 \dots f_r \geq 0\}$ es singular sii

$I = (|f_1| - f_1, \dots, |f_r| - f_r)$ es no amplio.

Demostración.

Si el sistema es singular, el conjunto

$$\{x \in \Omega | f_1(x) \geq 0 \dots f_r(x) \geq 0\}$$

tiene interior vacío (pues se anula sobre él una función analítica no nula). Así I es no amplio. Recíprocamente, si I no es amplio, existe una función analítica no nula en I (proposición 3.5.), que se hace cero por tanto en el conjunto definido por el sistema; y por tanto este es singular. c.q.d.

Hemos obtenido así una caracterización algebraica de los sistemas singulares vía la proposición 3.5. y una topología, vía la definición de ideal amplio, precisando [30].

3.9. Nota.

Si $f_1 \dots f_r \in \mathcal{A}_\Omega$, y consideramos el sistema

$$\begin{matrix} f_1 & \geq & 0 \\ \vdots & & \\ f_r & \geq & 0 \end{matrix}$$

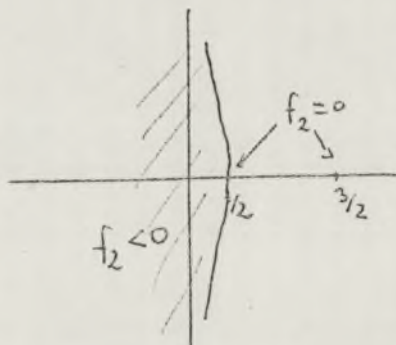
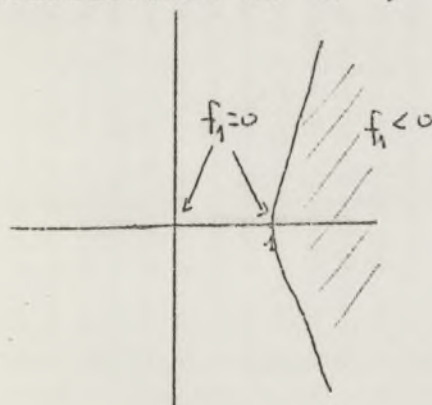
entonces si existe $i = 1 \dots r$, tal que f_i es singular (situación a la que puede reducirse la más general planteada en la definición 3.7), el sistema es singular, y por tanto, en $\bar{\mathcal{A}}_\Omega$, el ideal

$$I = (|f_1| - f_1, \dots, |f_r| - f_r)$$

no es amplio.

El recíproco no es cierto en general* .

Consideremos en \mathbb{R}^2 , $f_1 = x^2 + y^2 - x^3$



$$f_2 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 + \left(x - \frac{3}{2}\right)^3$$

*

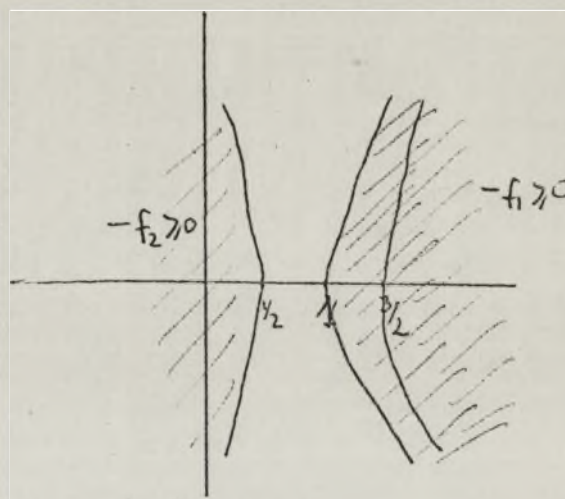
Observemos que si I es no amplio y primo, dado que $f_1 \dots f_r \in I$, $\exists i = 1 \dots r$, tal que $f_i \in I$, esto es, f_i será singular. El recíproco no es cierto.

El sistema

$$-f_1 \geq 0$$

$$-f_2 \geq 0$$

tiene como soluciones los puntos $(0,0)$, $(\frac{3}{2},0)$, y es según la proposición 3.8. singular.



Sin embargo tanto $-f_1$ como $-f_2$ son no singulares ($-f_1 > 0$ en $(\frac{3}{2},0)$, $-f_2 > 0$ en $(0,0)$).

Este fenómeno no aparece en el estudio de desigualdades lineales. En efecto, se verifica la siguiente

3.10. Proposición.

Sean

$$f_1 = a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n, \dots, f_r = a_{r1}x_1 + \dots + a_{rn}x_n$$

polinomios con coeficientes en \mathbb{R} . Entonces existe $i = 1 \dots r$ tal que f_i es singular sii

$$I = (|f_r| - f_r, \dots, |f_r| - f_r) \bar{A}_{\mathbb{R}^n}$$

es no amplio.

Demostración.

Basta demostrar que si I es no amplio, no todas las f_i , $i=1 \dots r$ pueden ser "slack". Supongamos que así fuera. Sean x_1, \dots, x_r soluciones del sistema $f_1 \geq 0 \dots f_r \geq 0$, tales

que $f_1(x_1) > 0, \dots, f_r(x_r) > 0$. En estas condiciones un conocido Lema [37] asegura que la media aritmética de x_1, \dots, x_r es una solución del sistema para la cual todos los polinomios son estrictamente positivos. Así el estado correspondiente a I tendría interior no vacío y sería amplio; Contradicción. c.q.d.

El estudio de las desigualdades y sistemas singulares es abordado en los sistemas de desigualdades lineales (Teoremas de Transposición de Siemke y Gordan), en el de las representaciones racionales ([30]), etc. Observamos que la singularidad viene a indicar la superabundancia de desigualdades (que podrían sustituirse por igualdades) en la definición de un conjunto.

Nuestro propósito al tocar este tema era simplemente observar como las R álgebras valoradas permiten dar criterios algebraicos para determinados hechos geométricos.

Es bien sabido que en el estudio de la geometría propia de las funciones de un anillo (de polinomios, de funciones analíticas, etc.) los ideales primos juegan un papel fundamental. En el caso de las R -álgebras valoradas estos ideales poseen una estructura peculiar.

3.11. Proposición [4] .

Sea \tilde{A}_Ω una R -álgebra valorada, $\tilde{\rho}$ un ideal primo de \tilde{A}_Ω . Sea

$$\rho = \tilde{A}_\Omega \tilde{\rho} \cap A_\Omega$$

el ideal primo contracción de $\tilde{\rho}$ a A_Ω . Existe $j \in F$, tal que

$$\tilde{\rho} = \tilde{A}_\Omega \rho + I_j$$

Recíprocamente, si ρ es primo de A_Ω , e I_j es amplio,

$$\tilde{A}_\Omega \rho + I_j$$

es un ideal primo de \bar{A}_Ω .

3.12. Corolario.

Si I_j es un ideal fundamental de \bar{A}_Ω , I_j es primo.

Demostración.

Basta considerar que el ideal (0) en A_Ω es primo (por ser Ω conexo), y aplicar la proposición anterior.

3.13. Lema.

Sea $\bar{g} \in \bar{A}_\Omega = A_\Omega[|f_1| \dots |f_r|]$. Para cada $i \in \{1, \dots, r\}$ existen $\alpha_i \in I_i$, $g_i \in A_\Omega$, tales que

$$\bar{g} = g_i + \alpha_i$$

Demostración.

Si $\bar{g} \in \bar{A}_\Omega$, podemos escribir

$$\bar{g} = \sum a_{i_1 \dots i_r} |f_1|^{i_1} \dots |f_r|^{i_r}, \quad a_{i_1 \dots i_r} \in A_\Omega.$$

Si sustituimos en dicha expresión $|f_i|$ por

$$|f_i|^{-\ell_i} f_i + \ell_i f_i$$

siendo $\ell = (\ell_i) \in \{1, -1\}^r$, obtenemos

$$\bar{g} = \alpha_\ell + \sum a_{i_1 \dots i_r} \prod \ell_j^{i_j} \cdot f_j = \alpha_\ell + g_\ell,$$

$$\alpha_\ell \in I_\ell, \quad g_\ell \in A_\Omega \quad \text{c.q.d.}$$

3.14. Proposición.

Sea \tilde{a} ideal de $\tilde{A}_\Omega = A_\Omega [|\mathfrak{f}_1| \dots |\mathfrak{f}_r|]$.
Entonces, para cada $i \in \{1, -1\}^r$,

$$\tilde{a} + I_i = (\tilde{a} + I_i) \cap A_\Omega + I_i$$

Si \tilde{a} está finitamente generado, $(\tilde{a} + I_i) \cap A_\Omega$ está finitamente generado como ideal de A_Ω , si I_i es amplio.

Demostración.

Respecto a la primera parte de la proposición, observemos que el conjunto a la derecha de la igualdad está obviamente contenido en el de la izquierda. Por otra parte, si $\tilde{g} \in \tilde{a} + I_i$ entonces $\tilde{g} = \tilde{a} + \alpha_i$, $\tilde{a} \in \tilde{a}$, $\alpha_i \in I_i$; usando el Lema 3.13. podemos escribir

$$\tilde{a} = a_i + \beta_i, \quad \begin{array}{l} a_i \in A_\Omega \\ \beta_i \in I_i \end{array}$$

Luego $\tilde{g} = a + (\alpha_i + \beta_i)$.

Ahora

$$a = \tilde{g} - (\alpha_i + \beta_i) \in \tilde{a} + I_i$$

luego

$$a \in A_\Omega \cap (\tilde{a} + I_i)$$

con lo que queda demostrada la igualdad.

Por otra parte sean $\tilde{g}_1 \dots \tilde{g}_\ell \in \tilde{A}_\Omega$ generadores de \tilde{a} ; si $i \in F$, usando el Lema 3.13, escribimos

$$\tilde{g}_1 = g_1^i + \alpha_i^1, \dots, \tilde{g}_\ell = g_\ell^i + \alpha_i^\ell, \quad \begin{array}{l} g_j^i \in A_\Omega \\ \alpha_i^j \in I_i \end{array}$$

Entonces

$$A_{\Omega}(g_1^1 \dots g_i^{\ell}) = (\tilde{a} + I_i) \cap A_{\Omega}$$

El contenido de derecha a izquierda es inmediato, dado que $g_i^j \in \tilde{a} + I_i$. Por otra parte si $g \in (\tilde{a} + I_i) \cap A_{\Omega}$,

$$g = \sum_{j=1}^{\ell} \bar{h}_j \bar{g}_j + \alpha_i, \quad \alpha_i \in I_i, \quad \bar{h}_j \in \bar{A}_{\Omega}$$

usando nuevamente el Lema 3.13, podemos escribir

$$\forall j=1 \dots \ell, \quad \bar{h}_j = h_j + \beta_i^j, \quad h_j \in A_{\Omega}, \quad \beta_i^j \in I_i$$

Luego

$$\begin{aligned} g &= \sum_{j=1}^{\ell} (h_j + \beta_i^j)(g_i^j + \alpha_i^j) + \alpha_i = \\ &= \sum_{j=1}^{\ell} h_j g_i^j + \gamma_i, \quad \gamma_i \in I_i. \end{aligned}$$

Como $g, \sum_{j=1}^{\ell} h_j g_i^j \in A_{\Omega}$, por ser I_i amplio se sigue (3.5)

$$g = \sum_{j=1}^{\ell} h_j g_i^j$$

c.q.d.

3.15. Proposición.

Un conjunto $S \subseteq \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ (suponemos Ω conexo) es preanalítico sii existe un algebra valorada de funciones analíticas en Ω , y un ideal finitamente generado en dicha algebra, tal que S es el conjunto de ceros comunes a las funciones de dicho ideal. ("Mutatis Mutandis" para conjuntos prealgebraicos o prenashicos).

Demostración.

Si S es preanalítico (2.1), S es de la forma

$$S = \bigcup_{i \in I} \{x \in \Omega \mid g_{ij}(x) = 0, \quad f_{ij}(x) \geq 0 \quad j \in J\}$$

I, J finitos, g_{ij}, f_{ij} analíticos en Ω . Si consideramos el algebra

$$\tilde{A}_\Omega = A_\Omega [|f_{ij}|] \quad \forall i, j$$

S será el lugar de los ceros del ideal

$$\prod_{i \in I} (g_{ij}, |f_{ij}| - f_{ij} \quad j \in J)$$

Recíprocamente, sea $S = \mathcal{V}(\tilde{\mathcal{a}})$ donde $\tilde{\mathcal{a}}$ es un ideal de una cierta algebra valorada

$$\tilde{A}_\Omega = A_\Omega [|f_1| \dots |f_r|] ,$$

finitamente generado, y $\mathcal{V}(\tilde{\mathcal{a}})$ denota el conjunto de puntos de Ω que anulan a todas las funciones de $\tilde{\mathcal{a}}$.

Usando la proposición 3.3, podemos escribir

$$\mathcal{V}(\tilde{\mathcal{a}}) = \mathcal{V}(\tilde{\mathcal{a}}) \cap \Omega = \bigcup_{i \in F} (\mathcal{V}(\tilde{\mathcal{a}}) \cap E_i)$$

donde F es el conjunto de índices i tales que E_i es un estado amplio.

Si $E_i = \mathcal{V}(I_i)$ podemos escribir

$$\mathcal{V}(\tilde{\mathcal{a}}) = \bigcup_{i \in F} \mathcal{V}(\tilde{\mathcal{a}} + I_i)$$

y como consecuencia de 3.14

$$V(\tilde{a}) = \bigcup_{i \in F} V((\tilde{a} + I_i) \cap A_{\Omega + I_i})$$

Como $(\tilde{a} + I_i) \cap A_{\Omega}$ está finitamente generado, si $g_{i1} \dots g_{is}$ son sus generadores, obtendremos finalmente

$$\begin{aligned} S &= \bigcup_{i \in F} \{x \in \Omega \mid g_{ij}(x) = 0, \quad |f_1|^{-i_1} f_1 = 0 \dots |f_r|^{-i_r} f_r = 0\} = \\ &\quad j=1 \dots s \quad (i_1 \dots i_r) = i \in F \\ &= \bigcup_{i \in F} \{x \in \Omega \mid g_{ij}(x) = 0, \quad i_1 f_1 \geq 0 \dots i_r f_r \geq 0\} \\ &\quad j=1 \dots s \quad (i_1 \dots i_r) = i \end{aligned}$$

Luego S es preanalítico. c.q.d.

Dado un conjunto preanalítico S , según esta proposición existen unas funciones f_1, \dots, f_r , de tal manera que S viene definido por los ceros comunes a las funciones de un ideal de $A_{\Omega} [|f_1| \dots |f_r|]$. Diremos entonces que $\{f_1 \dots f_r\}$ son un entramado de definición de S .

A partir de ahora identificaremos los conjuntos preanalíticos y los conjuntos de ceros comunes de los ideales finitamente generados de las algebras analíticas valoradas. Y análogamente, para el caso de funciones de Nash o algebraicas.

Por otra parte, usando los resultados 1.12 y 1.14 podemos escribir una proposición para el caso prenashico o prealgebraico, y para el caso preanalítico restringido a subconjuntos de R^2 , que es análoga al teorema de los ceros de Hilbert en el caso de anillos de funciones valoradas.

3.16. Proposición.

Sea $\tilde{a} \in A_{\Omega}$ anillo de funciones analíticas (de Nash, algebraicas) valoradas. Sea, si $E \subseteq \Omega$, $\mathcal{J}(E)$ el ideal de las funciones analíticas (de Nash, algebraicas) nulas en cada

punto de E, e $\tilde{J}(E)$ el ideal análogo en \tilde{A}_Ω .

Entonces

$$\tilde{J}V(\tilde{a}) = \bigcap_{i \in F} (JV(\tilde{a} + I_i) + I_i).$$

Demostración.

Como en la demostración de 3.15 podemos poner

$$V(\tilde{a}) = \bigcup_{i \in F} V(\tilde{a} + I_i)$$

Así

$$\tilde{J}V(\tilde{a}) = \bigcap_{i \in F} \tilde{J}V(\tilde{a} + I_i).$$

Demostramos que

$$\tilde{J}V(\tilde{a} + I_i) = JV(\tilde{a} + I_i) + I_i$$

Por una parte

$$\tilde{J}V(\tilde{a} + I_i) \supseteq \tilde{a} + I_i \supseteq I_i$$

Además es obvio que

$$\tilde{J}V(\tilde{a} + I_i) \supseteq JV(\tilde{a} + I_i)$$

Sea $\tilde{f} \in \tilde{J}V(\tilde{a} + I_i)$, y escribamos $\tilde{f} = f + \alpha_i$, $f \in \mathcal{A}_\Omega$, $\alpha_i \in I_i$ por el Lema 3.13.

Entonces

$$f = \tilde{f} - \alpha_i \in JV(\tilde{a} + I_i), \text{ puesto que } f \in \mathcal{A}_\Omega,$$

y tanto \tilde{f} por construcción como α_i por pertenecer a I_i se anulan en todos los puntos de $V(\tilde{a} + I_i)$. c.q.d.

Como consecuencia directa de 3.14 podemos transcribir este resultado de la siguiente forma:

3.17. Corolario.

$$\tilde{J}V(\tilde{a}) = \bigcap_{i \in F} (J V((\tilde{a} + I_i) \cap A_{\Omega} + I_i) + I_i).$$

De acuerdo con este corolario el cálculo de $\tilde{J}V(\tilde{a})$ queda reducido al cálculo de

$$J V [(\tilde{a} + I_i) \cap A_{\Omega} + I_i] \quad \text{con } i \in F.$$

Dicho cálculo, cuando A_{Ω} es el anillo de funciones de Nash, ó el anillo de polinomios; ó, si $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, el anillo de funciones analíticas en Ω , corresponde a los resultados 1.12 y 1.14. Observamos, por medio de los resultados del párrafo § 1, que para extender este resultado a las funciones analíticas para abiertos de \mathbb{R}^n , con n cualquiera, se precisa el teorema de los ceros para dichas funciones, teorema aún sin hacer.

Terminamos este párrafo con algunas interpretaciones algebraicas de determinadas propiedades geométricas de los conjuntos preanalíticos (prenashicos, prealgebraicos).

3.18. Proposición.

Sea S preanalítico, definido por el ideal \tilde{a} en el anillo \tilde{A}_{Ω} . Entonces $\overset{\circ}{S} \neq \emptyset$ sii

$$\tilde{a} \cap A_{\Omega} = (0).$$

Análogamente, para prenashicos ó prealgebraicos.

Demostración.

Obviamente, si $\overset{\circ}{S} \neq \emptyset$, ninguna función analítica

distinta de cero puede anularse en S , luego

$$\tilde{a} \cap A_\Omega = (0)$$

Recíprocamente, supongamos que $\tilde{a} \cap A_\Omega = (0)$. Como A_Ω (siendo A_Ω anillo de funciones analíticas, o de Nash, o polinomios) es íntegramente cerrado [c.f. [32]], se sigue por los teoremas de ascenso y descenso que la altura de \tilde{a} es cero; esto es, que \tilde{a} está contenido en I_j , para un cierto $j \in F$, puesto que es los ideales primos son los minimales de \tilde{A}_Ω . Entonces

$$S = \bigvee (\tilde{a}) \supseteq E_j \quad j \in F$$

luego

$$\overset{\circ}{S} \supseteq \overset{\circ}{E}_j \neq \emptyset; \text{ por ser } j \text{ amplio.}$$

c.q.d.

3.19. Proposición.

Sea S preanalítico de interior no vacío. Entonces S es simple sii existe un entramado de definición S , $\{f_1 \dots f_r\}$ tal que

$$S = \bigvee (I_j), \quad j \in F, \quad \text{para un cierto ideal amplio.}$$

Demostración.

De acuerdo con la definición 2.4. Si S es simple y preanalítico existen unas funciones $f_1 \dots f_r$ tales que

$$S = \{x \in \Omega \mid f_1(x) \geq 0 \dots f_r(x) \geq 0\} .$$

En el algebra valorada correspondiente el ideal

$$(|f_1| - f_1 \dots |f_r| - f_r)$$

es amplio, pues $\overset{\circ}{S} \neq \emptyset$.

Recíprocamente si S viene dado por un ideal amplio

$$I_j = (|f_1|^{-j_1} f_1, \dots, |f_r|^{-j_r} f_r) \quad (j_1 \dots j_r) = j \in F$$

entonces

$$S = \{x \in \Omega \mid j_1 f_1 \geq 0 \dots j_r f_r(x) \geq 0\}$$

luego S es simple. c.q.d.

En la proposición anterior puede sustituirse "ideal amplio" por ideal primo. En efecto, todo ideal amplio es primo. Como los ideales primos son de la forma $\mathfrak{a} + I_j$, para un cierto $\mathfrak{a} \subseteq \mathbb{A}_\Omega$, $j \in F$, es obvio que $\bigvee (\mathfrak{a} + I_j)$ es simple.

3.20. Nota.

No es cierto que si S es simple de interior vacío, S venga definido en un cierto entramado por un ideal primo.

En efecto, consideremos $\Omega = R$, $S = \{a\} \cup \{b\}$ siendo $a, b \in R$, $a \neq b$. Entonces S es simple (p.ej. $S = \{x \in R \mid (x-a)^2 + (x-b)^2 = 0\}$). Supongamos que en una cierta algebra valorada $\tilde{\mathbb{A}}_\Omega$, S viniera dado por un ideal primo $\tilde{\rho}$; es decir

$$S = \bigvee (\tilde{\rho}).$$

Si $\tilde{\rho} = \rho + I_i$, donde ρ es primo de \mathbb{A}_Ω , $i \in F$ (Lema 3.11) entonces

$$\bigvee (\rho) \cap \bigvee (I_i) = S$$

y por tanto $\bigvee (\rho) \supseteq S$. Pero por ser ρ primo de \mathbb{A}_Ω , $\bigvee (\rho)$ ha de ser conexo (1.15); luego $\rho = 0$, $S = \bigvee (I_i)$, $\overset{\circ}{S} \neq \emptyset$. Absurdo.

3.21. Proposición.

Sea S preanalítico simple. Entonces existe un algebra valorada \bar{A}_Ω tal que

$$\bar{A}_\Omega / \tilde{J}(S) \cong A_\Omega / J(S)$$

Recíprocamente, si existe un algebra \bar{A}_Ω tal que

$$\bar{A}_\Omega / \tilde{J}(S) \cong A_\Omega / J(S)$$

si la inclusión $A_\Omega \hookrightarrow \bar{A}_\Omega$, y si $S \neq \emptyset$, S es simple.

Demostración.

Si

$$S = \{x \in \Omega \mid g_i(x) = 0, f_i(x) \geq 0 \quad i \in I\}$$

en el algebra

$$\tilde{A}_\Omega = A_\Omega [|f_i|]_{i \in I}$$

S viene dado por el ideal $\tilde{J}(S)$,

$$\begin{aligned} \tilde{J}(S) &= J \vee ((g_i)_{i \in I} \tilde{A}_\Omega + (|f_i| - f_i)_{i \in I} \tilde{A}_\Omega) \cong \\ &\cong [(g_i)_{i \in I} \tilde{A}_\Omega + (|f_i| - f_i)_{i \in I} \tilde{A}_\Omega] \end{aligned}$$

si consideramos la inclusión $A_\Omega \hookrightarrow \tilde{A}_\Omega$, como obviamente $\tilde{J}(S) = J(S) \cap \tilde{A}_\Omega$, dicha inclusión induce un homomorfismo inyectivo de

$$\tilde{A}_\Omega / \tilde{J}(S) \hookrightarrow A_\Omega / J(S)$$

Ahora bien, dicho homomorfismo es además sobreyectivo, puesto que

para cada $i \in I$

$$|f_i| + \tilde{J}(S) = f_i + J(S), \quad f_i \in \mathcal{A}_\Omega.$$

Así tenemos demostrada la primera parte de la proposición anterior.

Recíprocamente, sea $\tilde{\mathcal{A}}_\Omega = \mathcal{A}_\Omega [|f_1|, \dots, |f_r|]$, sea S , $\overset{\circ}{S} \neq \emptyset$, tal que

$$\tilde{\mathcal{A}}_\Omega / \tilde{J}(S) \cong \mathcal{A}_\Omega / J(S)$$

De acuerdo con la proposición 3.16.

$$\tilde{J}(S) = \bigcap_{i \in F} (\alpha_i + I_i)$$

donde α_i es el ideal generado por funciones analíticas. Así pues

$$S = \sqrt{\tilde{J}(S)} = \bigcup_{i \in F} [\sqrt{(\alpha_i)} \cap \sqrt{(I_i)}],$$

y puesto que $\overset{\circ}{S} \neq \emptyset$, $\exists i_0 \in F$ tal que $\sqrt{(\alpha_{i_0})}$ debe tener interior no vacío, y por tanto $\alpha_{i_0} = (0)$.

Sea $i_0 = (i_{0_1}, \dots, i_{0_r})$, y sea $j = (j_1, \dots, j_r) \in F$, $j \neq i_0$; sea $l = 1, \dots, r$, tal que $j_l \neq i_{0_l}$.

Como $\tilde{\mathcal{A}}_\Omega / \tilde{J}(S)$ es isomorfo a $\mathcal{A}_\Omega / J(S)$ vía la inclusión de \mathcal{A}_Ω en $\tilde{\mathcal{A}}_\Omega$, para $|f_l| \in \tilde{\mathcal{A}}_\Omega$, existirá $g_l \in \mathcal{A}_\Omega$, tal que

$$|f_l| - g_l \in \tilde{J}(S)$$

Así pues, para cada $i \in F$

$$|f_l| - g_l \in (\alpha_i + I_i),$$

luego

$$|f_l| - g_l \in \mathfrak{a}_{i_0} + I_{i_0}$$

$$|f_l| - g_l \in \mathfrak{a}_j + I_j$$

Como $|f_l| - i_{o_l} f_l \in \mathfrak{a}_{i_0} + I_{i_0}$, se sigue que

$$-g_l + i_{o_l} f_l \in \mathfrak{a}_{i_0} + I_{i_0}$$

y análogamente

$$-g_l + j_l f_l \in \mathfrak{a}_j + I_j \quad \text{Por ser } I_{i_0}$$

e I_j amplios se sigue que

$$-g_l + i_{o_l} f_l \in \mathfrak{a}_{i_0}$$

$$-g_l + j_l f_l \in \mathfrak{a}_j$$

Luego $i_{o_l} f_l - j_l f_l \in \mathfrak{a}_{i_0} + \mathfrak{a}_j$, y por ser $i_{o_l} \neq j_l$,

$$f_l \in \mathfrak{a}_{i_0} + \mathfrak{a}_j = \mathfrak{a}_j, \text{ pues } \mathfrak{a}_{i_0} = 0.$$

Sea $j \in F$, $j \neq i_0$, entonces

$$V(\mathfrak{a}_j + I_j) = V(\mathfrak{a}_j) \cap V(I_j) \subseteq V(\mathfrak{a}_j) \cap$$

$$\left(\bigcap_{\substack{l=1 \dots r \\ j_l = i_{o_l}}} V(|f_l| - j_l f_l) \right) \subseteq \left[\bigcap_{\substack{l=1 \dots r \\ j_l \neq i_{o_l}}} V(f_l) \right] \cap [$$

$$\left[\bigcap_{\substack{\ell=1 \dots r \\ j_\ell = i_{o_\ell}}} \sqrt{(|f_\ell| - j_\ell f_\ell)} \right] \subseteq \left[\bigcap_{\substack{\ell=1 \dots r \\ j_\ell \neq i_{o_\ell}}} \sqrt{(|f_\ell| - i_{o_\ell} f_\ell)} \right] \cap$$

$$\bigcap_{\substack{\ell=1 \dots r \\ j_\ell = i_{o_\ell}}} \sqrt{(|f_\ell| - i_{o_\ell} f_\ell)} = \sqrt{(I_{i_o})}$$

Luego $S = \bigcap_{i \in F} \sqrt{(\alpha_i + I_i)} = \sqrt{(I_{i_o})}$, y S es simple. c.q.d.

Como correspondientes a las R-algebras de funciones valoradas establecidas en el párrafo anterior, definimos aquí las R-algebras locales de funciones valoradas, adaptadas al estudio local de los conjuntos preanalíticos.

Todos los gérmenes, tanto de funciones como de conjuntos que aparecen sin mención explícita se supondrán en el origen de coordenadas de R^n . C_n designará el anillo de gérmenes de funciones continuas; y A_n designará una sub R-algebra local del anillo O_n de gérmenes de funciones analíticas (por ejemplo, las funciones racionales definidas en el origen, o los gérmenes de funciones de Nash).

Observemos que si f es un germen de C_n , la expresión $|f|$ significa el germen de la función continua obtenida tomando el módulo de un representante de f .

4.1. Definición.

Sean $f_1, \dots, f_r \in A_n$. Consideremos el homomorfismo de A_n -algebras

$$u: A_n [x_1 \dots x_r] \longrightarrow C_n \quad \text{tal que}$$

$$\begin{array}{ccc} x_1 & \longrightarrow & |f_1| \\ \vdots & & \\ x_r & \longrightarrow & |f_r| \end{array}$$

Diremos que $u(A_n [x_1, \dots, x_r])$ es una R-algebra de A_n -funciones valoradas, y será denotada $A_n[|f_1|, \dots, |f_r|]$, ó \tilde{A}_n , si se suponen conocidos los gérmenes f_1, \dots, f_r .

4.2. Observación.

Sea Ω un dominio de R^n que contiene al origen

de coordenadas; A_Ω una subálgebra del álgebra de funciones continuas en Ω , C_Ω ; f_1, \dots, f_r elementos de A_Ω . Consideramos, para abiertos $V \subseteq \Omega$, $0 \in V$, álgebras valoradas de la forma

$$A_V[|f_1|_V, \dots, |f_r|_V] .$$

Si, mediante el procedimiento usual, consideramos el anillo de gérmenes en el origen de funciones del tipo $A_\Omega[|f_1|, \dots, |f_r|]$, observamos que es fácil identificarlo con el anillo

$A_n[|f_1|, \dots, |f_n|]$, donde A_n designa el anillo de gérmenes de funciones del tipo A_Ω . Este último anillo A_n no es local en general: por ejemplo, los gérmenes de funciones polinómicas son polinomios; si es local en el caso de funciones de Nash o analíticas. Así deberemos precisar el caso de conjuntos semialgebraicos en el paso de global a local y recíprocamente.

Por otra parte el procedimiento algebraico para obtener las funciones racionales en el origen a partir de los polinomios consiste en localizar con respecto al ideal de los polinomios que se anulan en el origen. El mismo procedimiento aplicado al anillo de funciones de Nash ó funciones analíticas, no nos da los gérmenes respectivos.

4.3.

Si f_1, \dots, f_r son elementos de C_n , designaremos por $V(f_1, \dots, f_r)$ el germen del conjunto obtenido con los puntos donde se anulen simultáneamente representantes de f_1, \dots, f_r tomados en un entorno adecuado del origen.

La observación anterior conduce a la siguiente

Proposición.

Sea S_0 un germen de conjuntos en el origen de R^n . Entonces S_0 es un germen preanalítico (esto es, existe un representante de S_0 en un entorno de o que es preanalítico) [respec

tivamente, prenashico, prealgebraico] sii existen $g_1, \dots, g_s \in \mathcal{A}_n [|f_1|, \dots, |f_r|]$, donde $f_1, \dots, f_r \in \mathcal{A}_n$, tales que $S_o = V(g_1, \dots, g_s)$, siendo \mathcal{A}_n el anillo de gérmenes de funciones analíticas (respectivamente, de funciones de Nash, anillo de funciones racionales definidas en \mathfrak{o}).

Demostración.

Si S_o es un germen preanalítico, existe un entorno de \mathfrak{o} , Ω , y un conjunto $S \subseteq \Omega$, cuyo germen en \mathfrak{o} es S_o , tal que S es preanalítico en Ω . Por 3.15 existe un álgebra valorada de funciones analíticas en Ω , $\mathcal{A}_\Omega [|f_1|, \dots, |f_r|]$, y un número finito de elementos de dicha algebra $g_1 \dots g_s$ tal que

$$V(g_1 \dots g_s) = S.$$

Si $f_1, \dots, f_r, g_1 \dots g_s$ denotan también los gérmenes de dichas funciones, se sigue que

$$V(g_1 \dots g_s) = S_o, \quad g_1, \dots, g_s \in \mathcal{A}_n [|f_1|, \dots, |f_r|] .$$

Recíprocamente, si $S_o = V(g_1 \dots g_s)$, siendo

$$g_1 \dots g_s \in \mathcal{A}_n [|f_1|, \dots, |f_r|] , \quad f_1 \dots f_r \in \mathcal{A}_n ,$$

podemos tomar un entorno $\Omega \ni \mathfrak{o}$ donde, si $g_1 \dots g_s, f_1 \dots f_r$ denotan representantes de los gérmenes en el abierto Ω , se verifica

$$g_1, \dots, g_s \in \mathcal{A}_\Omega [|f_1|, \dots, |f_r|] , \quad f_1 \dots f_r \in \mathcal{A}_\Omega ,$$

\mathcal{A}_Ω anillo de funciones analíticas en Ω .

Así, $S = V(g_1 \dots g_s)$ es un conjunto preanalítico en Ω , cuyo

germen es $S_{\underline{o}}$.

La demostración es análoga en el caso de funciones de Nash.

Si $S_{\underline{o}}$ es un germen prealgebraico, la primera parte de la demostración sigue siendo válida sin modificación, puesto que podemos considerar sumerjido el anillo de polinomios en el de las funciones racionales definidas en \underline{o} .

Designemos a este por $R[\underline{X}]_{\underline{o}}$, siendo $R[\underline{X}]$ el anillo de polinomios en n -indeterminadas.

Sean $f_1 = \frac{\alpha_1}{\beta_1}, \dots, f_r = \frac{\alpha_r}{\beta_r}$ elementos de $R[\underline{X}]_{\underline{o}}$, donde $\alpha_i,$

$\beta_i \in R[\underline{X}]$, y g_1, \dots, g_s elementos de $R[\underline{X}]_{\underline{o}} [|f_1| \dots |f_r|]$.

Sea $S_{\underline{o}} = \sqrt{(g_1 \dots g_s)}$. La segunda parte de la demostración quedará probada si demostramos que existen

$g'_1 \dots g'_s \in R[\underline{X}] [|\alpha_1| \dots |\alpha_r|]$, tales que $S_{\underline{o}} = \sqrt{(g'_1 \dots g'_s)}$.

Esto se sigue del siguiente lema más general:

4.4. Lema.

Como subconjunto de C_n , $R[\underline{X}] [|\alpha_1| \dots |\alpha_r|]$ está contenido en $R[\underline{X}]_{\underline{o}} [|f_1| \dots |f_r|]$, y todo ideal de este anillo es extensión de un ideal de aquel.

Demostración.

Puesto que $|f_i| = \left| \frac{\alpha_i}{\beta_i} \right| = \left| \frac{\alpha_i}{\beta_i} \right|$ y $\beta_i(\underline{o}) \neq 0$,

se sigue que $|f_i| = \pm \frac{1}{\beta_i} |\alpha_i|$

en un entorno suficientemente pequeño del origen. Así, como sub-

conjuntos de C_n , coinciden

$$R[\underline{X}]_{\underline{o}}[|\alpha_1| \dots |\alpha_n|] \quad \text{y} \quad R[\underline{X}]_{\underline{o}}[|f_1| \dots |f_r|]$$

Como $R[\underline{X}] \hookrightarrow R[\underline{X}]_{\underline{o}}$,

se sigue el contenido del Lema.

Consideremos un ideal de $R[\underline{X}]_{\underline{o}}[|\alpha_1| \dots |\alpha_r|]$,
 generado por $g_1 \dots g_s$. Sean g_1^*, \dots, g_s^* los elementos de
 $R[\underline{X}][|\alpha_1| \dots |\alpha_r|]$ obtenidos multiplicando g_1, \dots, g_s , respec-
 tivamente, por el producto de los denominadores que aparecen en
 sus expresiones. Entonces

$$(g_1 \dots g_s) = (g_1^*, \dots, g_s^*) \quad \text{c.q.d.}$$

4.5.

En lo sucesivo O_n designa el anillo de gérmenes de funciones analíticas, N_n el de funciones de Nash y $R[\underline{X}]_{\underline{o}}$ el anillo de funciones racionales definidas en \underline{o} . A_n designará, cuando se trate de propiedades comunes, cualquiera de estos tres. Las propiedades de N_n pueden verse, p.ej. en [32]. Las R -álgebras locales correspondientes a cada uno de estos anillos serán denotadas \bar{O}_n , \bar{N}_n , $\overline{R[\underline{X}]_{\underline{o}}}$, \bar{A}_n respectivamente. Supondremos también que las funciones $f_1 \dots f_r$ que intervienen en la definición del algebra valorada se anulan en el origen, suposición que no afecta a la generalidad de las proposiciones a demostrar.

Puesto que A_n es noetheriano, \bar{A}_n es noetheriano, por ser A_n -álgebra finitamente generada, Además \bar{A}_n es íntegramente dependiente sobre A_n . La dimensión de Krull de \bar{A}_n es n , como la dimensión de A_n .

Si

$$\bar{A}_n = A_n [|f_1| \dots |f_r|] , \text{ sea } E_i, \text{ para } i \in \{1, -1\}^r ,$$

el germen del conjunto

$$\{i_1 f_1 \geq 0, \dots, i_r f_r \geq 0\} , \quad i = (i_1, \dots, i_r) ;$$

o lo que es lo mismo, con la terminología introducida en 4.3;

$$E_i = \bigvee (|f_1| - i_1 f_1, \dots, |f_r| - i_r f_r)$$

Dicho germen es el estado i-ésimo del entramado $\{f_1, \dots, f_r\}$

Para cada $i \in \{1, -1\}^r$, I_i designará al ideal de A_n , generado por

$$(|f_1| - i_1 f_1, \dots, |f_r| - i_r f_r), \quad i = (i_1 \dots i_r) .$$

Diremos que I_i es amplio si $E_i \neq \emptyset$. Sea F el subconjunto de $\{1, -1\}^r$ tal que $i \in F$ si y sólo si I_i es amplio. En las siguientes consideraciones A_n será O_n ó N_n .

4.6. Proposición.

En A_n se verifica

$$(0) = \bigcap_{i \in F} I_i$$

Demostración.

Sea $g \in \bigcap_{i \in F} I_i$. Tomemos un entorno V_o de o donde estén definidos representantes de f_1, \dots, f_r, g , (que designaremos con el mismo símbolo). Consideramos $A_{V_o} [|f_1|, \dots, |f_r|]$;

tomando $V_{\underline{o}}$ suficientemente pequeño podemos suponer que

$$g \in A_{V_{\underline{o}}} [|f_1|, \dots, |f_r|], \text{ y que}$$

$$g \in \bigcap_{i \in F} I_i, \text{ donde } I_i \text{ designa ahora el ideal co-}$$

rrespondiente a $A_{V_{\underline{o}}} [|f_1|, \dots, |f_r|]$. Por 3.4 g es nula en

$V_{\underline{o}}$, luego su germen en \underline{o} es cero. c.q.d.

Análogamente podríamos demostrar la validez local de las proposiciones relativas a la estructura algebraica de las algebras valoradas, contenidas en el §3. Usaremos de ahora en adelante la versión local de dichas proposiciones refiriéndonos a su enunciado de §3.

4.7. Proposición.

\bar{A}_n es un anillo local.

Demostración.

Sea m el ideal maximal de A_n . Por depender íntegramente \bar{A}_n de A_n , la contracción de un ideal maximal de \bar{A}_n debe ser m y son maximales los ideales de \bar{A}_n con dicha contracción. Así los únicos ideales maximales posibles en \bar{A}_n son de la forma

$$m + I_j, \quad j \in F.$$

Veamos que si $j, j' \in F$, $m + I_j = m + I_{j'}$.

Sea $g \in m + I_j$; por 3.13 podemos escribir $g = \alpha_j + g_j$,

donde $g_j \in m A_n$

$$\alpha_j \in I_j.$$

Sea

$$\alpha_j = \sum_{\ell=1}^r t_\ell (|f_\ell| - j_\ell f_\ell), \quad j = (j_\ell)_{\ell=1 \dots r} \in \{1, -1\}^r$$

$$t_\ell \in \bar{A}_n, \quad \ell=1 \dots r$$

Sea

$$j' = (j'_\ell)_{\ell=1 \dots r} \in \{1, -1\}^r$$

Entonces

$$\alpha_j = \sum_{\ell=1}^r t_\ell (|f_\ell| - j_\ell f_\ell) + \sum_{\ell=1}^r t_\ell (|f_\ell| - j'_\ell f_\ell) +$$

$$j_\ell = j'_\ell \qquad j_\ell \neq j'_\ell$$

$$+ j'_\ell f_\ell - j_\ell f_\ell = \sum_{\ell=1}^r t_\ell (|f_\ell| + j'_\ell f_\ell) + \sum_{\ell=1}^r 2t_\ell j'_\ell f_\ell$$

$$j_\ell \neq j'_\ell$$

Puesto que suponemos que $\forall \ell=1 \dots r, f_\ell \in m \bar{A}_n$ el segundo sumando de la expresión anterior es un elemento de $m \bar{A}_n$.

Así

$$g = g_j + \sum_{\ell=1}^r t_\ell \cdot 2j'_\ell f_\ell + \sum_{\ell=1}^r t_\ell (|f_\ell| - j'_\ell f_\ell) \in m + I_j,$$

$$j_\ell \neq j'_\ell$$

Concluimos que $m + I_j \subseteq m + I_{j'}$, y por simetría se obtiene la igualdad.

4.8. Proposición.

\bar{A}_n es un A_n módulo plano sii \bar{A}_n es anillo de Cohen-Macaulay.

Demostración.

Sea $m = (x_1 \dots x_n) A_n$ el ideal maximal de A_n .
Entonces \tilde{A}_n es A_n módulo plano sii

$$\text{Tor}_1^{A_n}(A_n/m, \tilde{A}_n) = 0.$$

Como $m\tilde{A}_n$ es un ideal primario para el maximal de \tilde{A}_n (lo que se deduce de la demostración anterior) y está generado por n elementos, se sigue que

$$\text{Tor}_1^{A_n}(A_n/m, \tilde{A}_n) = 0$$

sii los generadores $\{x_1, \dots, x_n\}$ de $m\tilde{A}_n$ son una sucesión prima en \tilde{A}_n (c.f. [17]).

Ahora bien, ser Cohen Macaulay es equivalente a la existencia de un sistema de parámetros que sea una sucesión prima ([10]). c.q.d.

4.19. Corolario.

Si para cada $i \in \{1, -1\}^r$, I_i es amplio, se sigue que \tilde{A}_n es plano sobre A_n .

Demostración.

Por ser \tilde{A}_n finitamente generado sobre A_n , la platitude equivale a ser libre (c.f. [20], [21]).

Si $\tilde{A}_n = A_n[|f_1| \dots |f_r|]$, veamos que, en las hipótesis del corolario, \tilde{A}_n tiene una base formada por la familia

$$\{1, |f_1|, \dots, |f_r|, \dots, |f_1| \dots |f_r|\}.$$

Sea $\ell = (\ell_1 \dots \ell_r) \in \{0,1\}^r$, y para cada ℓ , será g_ℓ un elemento de \mathbb{A}_n . Consideremos la expresión

$$\sum_{\ell} g_{\ell} |f_1|^{\ell_1} \dots |f_r|^{\ell_r} = 0$$

Sea $i = (i_1 \dots i_r) \in \{1,-1\}^r$; para cada i se tendrá

$$[1] \quad \sum_{\ell} g_{\ell} i_1^{\ell_1} \dots i_r^{\ell_r} f_1^{\ell_1} \dots f_r^{\ell_r} = 0.$$

Deseamos concluir que para cada ℓ , $g_{\ell} = 0$; y lo demostraremos por inducción en r .

$$\text{Sea } \ell' = (\ell_2 \dots \ell_r) \in \{0,1\}^{r-1}$$

$$i' = (i_2 \dots i_r) \in \{1,-1\}^{r-1}, \quad g_{\ell'} \in \mathbb{A}_n$$

y supongamos que si

$$[2] \quad \sum_{\ell'} g_{\ell'} i_2^{\ell_2} \dots i_r^{\ell_r} f_2^{\ell_2} \dots f_r^{\ell_r} = 0 \quad \forall i'$$

entonces $g_{\ell'} = 0 \quad \forall \ell'$.

$$\text{Sea } \pi : \{0,+1\}^r \longrightarrow \{0,+1\}^{r-1}$$

$$(\ell_1 \dots \ell_r) \longrightarrow (\ell_2 \dots \ell_r)$$

Reescribiendo [1] obtendremos dos sistemas del tipo [2]

$$[3] \quad \sum_{\ell'} \left(\sum_{\ell_1} g_{\ell} f_1^{\ell_1} \cdot 1^{\ell_1} \right) \cdot i_2^{\ell_2} \dots i_r^{\ell_r} f_2^{\ell_2} \dots f_r^{\ell_r} = 0$$

$$\pi(\ell) = \ell'$$

$$[4] \quad \sum_{\ell'} \left(\sum_{\ell_1} g_{\ell} f_1^{\ell_1} \cdot (-1)^{\ell_1} \right) i_2^{\ell_2} \dots i_r^{\ell_r} f_2^{\ell_2} \dots f_r^{\ell_r} = 0$$

$$\pi(\ell) = \ell'$$

Por hipótesis de inducción concluimos que

$$\sum_{\ell} g_{\ell} f_1^{\ell_1} = 0 \quad \forall \ell' \in \{0,1\}^{r-1},$$

$$\pi(\ell) = \ell'$$

y

$$\sum_{\ell} g_{\ell} f_1^{\ell_1} (-1)^{\ell_1} = 0, \quad \forall \ell' \in \{0,1\}^{r-1}$$

$$\pi(\ell) = \ell'$$

Así, para cada ℓ' obtendríamos

$$g_{\ell^0} + g_{\ell^1} f_1 = 0$$

$$g_{\ell^0} + g_{\ell^1} f_1 \cdot -1 = 0$$

siendo $\ell^0 = (0, \ell')$, $\ell^1 = (1, \ell')$.

y por tanto $g_{\ell^0} = 0$, $g_{\ell^1} = 0$ c.q.d.

Nota. 4.10

Un entramado $\{f_1, \dots, f_r\}$ tal que en $\mathcal{A}_n [|f_1| \dots |f_r|]$ para cada $i \in \{1, -1\}^r$, I_i es fundamental queda caracterizado por el hecho de poseer $\overline{\mathcal{A}}_n$ una base de 2^r elementos como \mathcal{A}_n módulo. Tras la demostración anterior, esto se deduce observando [22] que dos bases de \mathcal{A}_n tienen el mismo número de elementos, que coincide con el de un sistema minimal de generadores. Ahora si para algún $i \in \{1, -1\}^r$, I_i

no es amplio, como en 3.5 se verificará

$$f_1 \dots f_r + i_1 |f_1| f_2 \dots f_r + \dots + i_1 \dots i_r |f_1| \dots |f_r| = 0$$

$$i = (i_1 \dots i_r)$$

Luego $\{1, \dots, |f_1| \dots |f_r|\}$ no es un sistema minimal de generadores, y por tanto el cardinal de cualquier base ha de ser menor que 2^r .

4.11. Proposición.

$$\text{Sea } \widehat{\mathcal{O}}_n = \widehat{\mathcal{O}}_n[|f_1| \dots |f_r|], \quad f_1, \dots, f_r \in \mathcal{O}_n.$$

Existe un germen de conjunto analítico en el origen de \mathbb{R}^{n+r} tal que $\widehat{\mathcal{O}}_n$ es isomorfo al anillo local de dicho germen. Análogamente, $\widehat{\mathcal{N}}_n = \widehat{\mathcal{N}}_n[|f_1| \dots |f_r|]$, $f_1, \dots, f_r \in \mathcal{N}_n$ es isomorfo al anillo local de un germen de Nash en el origen de \mathbb{R}^{n+r} .

Demostración.

Realizaremos la demostración para el caso analítico, teniendo en cuenta que tras los resultados de [15] (fundamentalmente el T.P. de Weierstrass para gérmenes de funciones de Nash) la demostración en el caso de funciones de Nash es idéntica.

Consideremos el homomorfismo de \mathcal{O}_n -álgebras

$$\mathcal{O}_n[x_1 \dots x_n] \xrightarrow{u} \mathcal{O}_n[|f_1| \dots |f_n|]$$

que hace corresponder a $x_i, |f_i|$.

Si $i = (i_1 \dots i_r) \in \{1, -1\}^r$, e $i \in F$, consideremos

$$J_i = (x_1 - i_1 f_1, \dots, x_r - i_r f_r) \mathcal{O}_n[x_1 \dots x_n].$$

Adaptando la demostración del Lema 5 de [4] al caso local obtenemos

$$\ker u = \bigcap_{i \in F} J_i .$$

Consideremos el ideal

$$J = \bigcap_{i \in \{1-1\}^r} J_i$$

Como antes, usando un resultado de [4], podemos escribir

$$J = (X_1^2 - f_1^2, \dots, X_r^2 - f_r^2).$$

Así pues

$$O_n[|f_1| \dots |f_r|] \simeq \frac{O_n[X_1 \dots X_r]}{\bigcap_{i \in F} J_i}$$

y puesto que $\forall i \in \{1-1\}^r, J_i \supseteq J$,

$$O_n[|f_1| \dots |f_r|] \simeq \frac{O_n[X_1 \dots X_r] / J}{\bigcap_{i \in F} J_i / J} \simeq \frac{O_n[X_1 \dots X_r] / J}{\bigcap_{i \in F} (J_i / J)}$$

Consideremos

$$O_n[X_1 \dots X_r] / J = O_n[X_1 \dots X_r] / (X_1^2 - f_1^2, \dots, X_r^2 - f_r^2)$$

Si O_n designa el anillo de series convergentes de variables $Y_1 \dots Y_n$ y O_{n+r} el anillo de series convergentes en $n+r$ variables $Y_1 \dots Y_n, X_1 \dots X_r$, el siguiente Lema de Tougeron [17] afirma que $\frac{O_n[X_1 \dots X_r]}{J}$ es un anillo cociente de O_{n+r} .

4.12. Lema. (Tougeron)

"Sean $P_i \in \mathcal{O}_n[X_i]$, para $i = 1 \dots r$, r polinomios distinguidos. Consideremos la inclusión canónica

$$\mathcal{O}_n[X_1 \dots X_r] \hookrightarrow \mathcal{O}_{n+r}$$

y la aplicación φ inducida por ésta entre

$$\frac{\mathcal{O}_n[X_1 \dots X_r]}{(P_1 \dots P_r)} \xrightarrow{\varphi} \frac{\mathcal{O}_{n+r}}{(P_1 \dots P_r)}$$

entonces φ es isomorfismo".

Aplicando este Lema a nuestra situación, siendo $P_i = X_i^2 - f_i^2$, obtenemos

$$\mathcal{O}_n[|f_1| \dots |f_r|] \cong \frac{\mathcal{O}_{n+r} / \varphi(J)}{\bigcap_{i \in F} (\varphi(J_i) / (J))} \cong \frac{\mathcal{O}_{n+r}}{\bigcap_{i \in F} (J_i)}$$

Para obtener la proposición solo queda probar que para cada $i \in F$, $\varphi(J_i)$ es el ideal de un germen analítico en el origen de \mathbb{R}^{n+r} .
Sea

$$h(Y_1 \dots Y_n X_1 \dots X_n) \in \mathcal{O}_{n+r}$$

tal que

$$h(y_1 \dots y_n x_1 \dots x_r) = 0 \quad \forall (y_1 \dots y_n x_1 \dots x_r) \in V(\varphi(J_i))$$

Aplicando reiteradamente el teorema de división de Weierstrass obtendremos

$$h(Y_1 \dots Y_n X_1 \dots X_r) = \alpha_1(X_1^{-i_1} f_1) + \dots + \alpha_r(X_r^{-i_r} f_r) + R(Y_1 \dots Y_n);$$

Luego

$$R(y_1 \dots y_n) = 0 \quad \forall (y_1 \dots y_n, x_1 \dots x_r) \in \bigvee (f(J_i)),$$

y por tanto

$$R(Y_1 \dots Y_n) \equiv 0$$

Así

$$h(y_1 \dots y_n, x_1 \dots x_r) \in f(J_i)$$

c.q.d.

4.13. Proposición.

Sea \mathfrak{a} ideal de $O_{n+r} / \bigcap_{i \in F} f(J_i)$. Son equiva

lentes:

i) $\mathcal{J} [\bigvee(\mathfrak{a}) \cap [x_1 \geq 0 \dots x_r \geq 0]] = \mathfrak{a}$

ii) existe un germen de conjunto preanalítico S_0 tal que $\mathfrak{a} = f(\mathcal{J}(S_0))$.

Se verifica la proposición análoga en el caso de funciones de Nash.

Nota.

Las aplicaciones \mathcal{J} y \bigvee tienen significado diferente en i) y en ii). En el primer caso se refieren a gérmenes de conjuntos en el origen de R^{n+r} y a ideales de $O_{n+r} / \bigcap_{i \in F} f(J_i)$; en el segundo a gérmenes en R^n (que conside-

ramos sumergido en las n-primeras coordenadas de R^{n+r}) y a idea

les en $O_n[|f_1| \dots |f_r|] = \bar{O}_n$. Y análogamente en el caso de funciones de Nash.

Demostración.

Sea \mathfrak{a} ideal de $O_{n+r} / \bigcap_{i \in F} J_i$ verificando i).

Supongamos que \mathfrak{a} está generado por las clases módulo $\bigcap_{i \in F} J_i$

$$\mathfrak{a} = (\tilde{g}_1(Y_1 \dots Y_n X_1 \dots X_r), \dots, \tilde{g}_s(Y_1 \dots Y_n X_1 \dots X_r))$$

Consideremos el ideal de \tilde{O}_n

$$\begin{aligned} \mathfrak{p}^{-1}(\mathfrak{a}) &= \tilde{O}_n(g_1(Y_1 \dots Y_n |f_1| \dots |f_r|), \dots, \\ &, g_s(Y_1 \dots Y_n |f_1| \dots |f_r|)) . \end{aligned}$$

Sea $S_o = V(\mathfrak{p}^{-1}(\mathfrak{a}))$. Entonces

$$J(S_o) = \mathfrak{p}^{-1}(\mathfrak{a}).$$

En efecto, sea

$$h(Y_1 \dots Y_n |f_1| \dots |f_r|) \in \bar{O}_n \cdot J(S_o).$$

Así, si $(Y_1 \dots Y_n)$ verifica

$$\begin{aligned} g_1(y_1 \dots y_n |f_1(y_1 \dots y_n)|, \dots, |f_r(y_1 \dots y_n)|) &= 0 \\ \vdots & \\ g_s(y_1 \dots y_n |f_1(y_1 \dots y_n)|, \dots, |f_r(y_1 \dots y_n)|) &= 0 \end{aligned}$$

entonces

$$h(y_1 \dots y_n | f_1(y_1 \dots y_n) | \dots | f_r(y_1 \dots y_n) |) = 0$$

Consideremos la clase módulo $\bigcap_{i \in F} J_i$,

$$\bar{h}(y_1 \dots y_n x_1 \dots x_r) .$$

Sea

$$(y_1 \dots y_n x_1 \dots x_r) \in V(\alpha) \cap [x_1 \geq 0 \dots x_r \geq 0] .$$

Como

$$V(\alpha) \subseteq \bigcup_{i \in F} V(\varphi_{J_i}), \text{ para } i=1 \dots r \quad x_i = \pm f_i .$$

Si además $x_i \geq 0$, entonces $x_i = |f_i(y_1 \dots y_n)|$.

Así pues

$$\begin{aligned} \bar{g}_1(y_1 \dots y_n x_1 \dots x_r) &= 0 \\ \vdots & \\ \bar{g}_s(y_1 \dots y_n x_1 \dots x_r) &= 0 \end{aligned}$$

implica

$$\begin{aligned} g_1(y_1 \dots y_n | f_1(y_1 \dots y_n) | \dots | f_r(y_1 \dots y_n) |) &= 0 \\ \vdots & \\ g_s(y_1 \dots y_n | f_1(y_1 \dots y_n) | \dots | f_r(y_1 \dots y_n) |) &= 0 \end{aligned}$$

y por tanto

$$h(y_1 \dots y_n | f_1(y_1 \dots y_n) | \dots | f_r(y_1 \dots y_n) |) = 0$$

Luego

$$\bar{h}(y_1 \dots y_n x_1 \dots x_n) = 0,$$

de donde

$$\bar{h}(y_1 \dots y_n x_1 \dots x_n) \in \mathcal{J}(\mathcal{V}(\mathcal{a}) \cap [x_1 \geq 0 \dots x_r \geq 0]) = \mathcal{a}$$

Recíprocamente, supongamos que \mathcal{a} es un ideal de $\mathcal{O}_{n+r} / \bigcap_{i \in F} \mathcal{J}_i$ tal que $\mathcal{a} = \mathcal{f}(\mathcal{J}(S_0))$, siendo $\mathcal{J}(S_0)$ el ideal de un germen de conjunto preanalítico, que supondremos generado por

$$g_1(y_1 \dots y_n |f_1| \dots |f_r|), \dots, g_S(y_1 \dots y_n |f_1| \dots |f_r|) ;$$

y por tanto

$$\mathcal{a} = (\bar{g}_1(y_1 \dots y_n x_1 \dots x_n), \dots, \bar{g}_S(y_1 \dots y_n x_1 \dots x_n))$$

Sea

$$\bar{h}(y_1 \dots y_n x_1 \dots x_n) \in \mathcal{J}(\mathcal{V}(\mathcal{a}) \cap [x_1 \geq 0 \dots x_r \geq 0])$$

Veamos que

$$h(y_1 \dots y_n |f_1| \dots |f_r|) \in \mathcal{J}(S_0);$$

y por tanto que $\bar{h} \in \mathcal{a}$.

Sea $(y_1 \dots y_n) \in S_0$. Entonces

$$\begin{aligned} g_1(y_1 \dots y_n |f_1(y_1 \dots y_n)| \dots |f_r(y_1 \dots y_n)|) &= 0 \\ \vdots & \\ g_S(y_1 \dots y_n |f_1(y_1 \dots y_n)| \dots |f_r(y_1 \dots y_n)|) &= 0 \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} &(y_1 \dots y_n |f_1(y_1 \dots y_n)| \dots |f_r(y_1 \dots y_n)|) \in \\ &\in \mathcal{V}(\mathcal{a}) \cap [x_1 \geq 0 \dots x_r \geq 0] . \end{aligned}$$

Así $\bar{h}(y_1 \dots y_n | f_1(y_1 \dots y_n) | \dots | f_r(y_1 \dots y_n) |) = 0$

c.q.d.

Como hemos indicado en 4.5. las anteriores proposiciones han sido enunciadas y demostradas para el caso preanalítico o prenashico. Por lo que respecta al caso prealgebraico, la dificultad para extenderlas proviene del hecho, ya señalado, que representa la localización de $R[X]$ con respecto al ideal maximal (X) como esencialmente diferente de la operación de considerar gérmenes de polinomios en el origen. Consideremos, para cada entorno abierto V_o del origen de R^n , el anillo A_{V_o} de funciones racionales definidas en todos los puntos de V_o . Entonces $R[X]_{(X)}$ puede interpretarse como anillo de gérmenes en el origen de dichas funciones. De esta manera podemos extender las proposiciones 4.6 a 4.10 al caso en que $A_n = R[X]_o$.

4.14. Observación.

En relación con la proposición 4.13 hemos de constatar que no se verifica el teorema de los ceros real (p.ej. Risler [18]) para las algebras locales de funciones valoradas. En efecto, sea $\bar{A}_n = A_n[|f_1| \dots |f_r|]$ un algebra local valorada, \mathcal{A} un ideal de A_n , e I_ℓ un ideal amplio de \bar{A}_n . Se verifica la siguiente

4.15. Proposición.

La quasiraiz de $\mathcal{A} + I_\ell$ es la suma de I_ℓ y del ideal generado en \bar{A}_n por la quasiraiz de \mathcal{A} (c.f. def. 1.9)

Demostración.

Trivialmente

$$\bar{A}_n(\text{q.rad. } \mathcal{A}) + I_\ell$$

está contenido en $q.\text{rad}(\mathcal{A} + I_\ell)$. Sea $\bar{g} \in q.\text{rad}(\mathcal{A} + I_\ell)$. En
 tonces

$$g^{2K} + \sum_{j=1}^m f_j^2 \in (\mathcal{A} + I_\ell), \quad f_j \in \bar{A}_n$$

Usando 3.13 podemos escribir

$$g_o^{2K} + \sum_{j=1}^m f_{j_o}^2 + h \in (\mathcal{A} + I_\ell), \quad \text{siendo}$$

$$g = g_o + h_o$$

$$g_o, f_{j_o} \in A_n; h, h_o, h_{j_o} \in I_\ell$$

$$\forall j, f_j = f_{j_o} + h_{j_o}$$

Por ser I_ℓ ideal amplio, se sigue que g_o pertenece al quasi-
 radical de \mathcal{A} ; y por tanto $g \in q.\text{rad} \mathcal{A} + I_\ell$ c.q.d.

Consideremos ahora la R-algebra local de gérmenes
 en el origen de R^2 ,

$$\tilde{O}_2 = O_2 [|Y - X^2|] .$$

$$\text{Sea } \mathcal{A} = (Y + X^2) \leq O_2 .$$

Entonces $\mathcal{A} = q.\text{rad} \mathcal{A}$. Así, de acuerdo con la proposición
 anterior

$$q.\text{rad}(\mathcal{A} + (|Y - X^2| - (Y - X^2))) = (\mathcal{A} + (|Y - X^2| - (Y - X^2))) .$$

Sin embargo

$$\mathcal{N}(\mathcal{A} + (|Y - X^2| - (Y - X^2))) = (X, Y, |Y - X^2|)$$

4.16. Observación.

Se comprueba sin dificultad la verificación de las versiones locales de los resultados 3.16 y 3.17; sobre los ideales de los gérmenes de conjuntos preanalíticos, prenashicos o prealgebraicos. Análogamente se mantienen, "mutatis mutandis" los resultados del párrafo §3 sobre conjuntos simples. Por lo que se refiere al contraejemplo 3.20, debe ser sustituido por el germen de un conjunto analítico etc, no irreducible.

5.1. Definición.

Sea $S \subseteq \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ conjunto preanalítico (prenáshico, prealgebraico). Sea $p \in S$. Diremos que p es un punto analítico de S (respectivamente, náshico, algebraico) si el germen de S en p , S_p , es un germen analítico (respectivamente náshico, algebraico).

5.2. Proposición.

Sea S preanalítico. Entonces el conjunto de puntos analíticos es abierto y denso en S . Se verifica la proposición correspondiente al caso náshico o algebraico.

Demostración.

Realizaremos la demostración en el caso analítico. Supongamos que S viene dado en una R -álgebra analítica valorada por las funciones f_1, \dots, f_r , como unión de estados; esto es

$$S = \bigcup_{i \in L} V(I_i), \quad L \subseteq \{1, -1\}^r.$$

Es fácil comprobar que todo conjunto preanalítico puede escribirse de esta manera, por lo que no hay pérdida de generalidad.

Sea p un punto de S , V_p un entorno de p . Demostraremos que $V_p \cap S$ contiene puntos analíticos.

Supongamos que para cada $i \in L$, $p \notin \overline{V(I_i)}$; pues en otro caso es trivial que $V_p \cap S$ contiene puntos analíticos. Así pues en p se anulan algunas de las funciones f_1, \dots, f_r ; sea $f_1(p) = \dots = f_s(p) = 0$, $f_{s+1}(p) > 0, \dots, f_r(p) > 0$;

$1 \leq s \leq r$, tras una posible re-enumeración de las funciones y multiplicación por -1 de alguna de ellas.

Consideremos un subentorno W_p de V_p tal que en todos sus puntos $f_{s+1} > 0 \dots f_r > 0$ y

$$W_p \subseteq \Omega - \left[\bigcup_{i \in L} \overline{V(I_i)} \right].$$

Si en todos los puntos de $W_p \cap S$ se anulan además $f_1 \dots f_s$, p es un punto analítico de S , definido por las ecuaciones $f_1 = 0 \dots f_s = 0$. En efecto, si $p' \in W_p$ verifica

$$f_1(p') = \dots = f_s(p') = 0,$$

se tendrá

$$f_1(p') = 0 \dots f_s(p') = 0 \quad f_{s+1}(p') > 0 \dots f_r(p') > 0$$

luego p' pertenece a cualquier estado al que pertenezca p y por tanto $p' \in S$.

Si hay puntos de $W_p \cap S$ donde no se anulan todas las funciones f_1, \dots, f_s , sabemos que para cada punto al menos una de estas debe anularse. Como el número de funciones es finito, repitiendo el razonamiento anterior en un punto donde se anulen menos funciones que en p (y así sucesivamente) llegaríamos a encontrar tras un número finito de etapas un punto analítico en $V_p \cap S$.

Es trivial, por otra parte, que el conjunto de puntos analíticos es abierto en S . C.q.d.

5.3. Definición.

Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto preanalítico (prenashico, prealgebraico); $p \in S$ es un punto regular de dimensión r si existe un entorno V_p de p , y f_{r+1}, \dots, f_n funciones analíticas en V_p (respectivamente, de Nash, polinomiales) tales que

i) $V_p \cap S = \{x \in V_p \mid f_{r+1}(x) = \dots = f_n(x) = 0\}$

ii) $\{(df_{r+1})_p, \dots, (df_n)_p\}$ son vectores de \mathbb{R}^n linealmente independientes.

5.4. Proposición.

Sea $A \subseteq \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto analítico (respectivamente de Nash, algebraico). Entonces el conjunto de puntos regulares de A es abierto y denso en A .

Demostración.

Es fácil comprobar, en cada caso, que el conjunto de puntos regulares de A es abierto en A . La densidad de este conjunto en el caso analítico es bien conocida (c.f. [6]).

Por otra parte basta resolver el caso algebraico para obtener la densidad en el caso de funciones de Nash, como mostraremos más adelante.

Consideremos entonces que A es un conjunto algebraico, que p es un punto de A , y U_p un entorno de p .

Sea $\mathcal{J}_{U_p}(S)$ el ideal de $R[x_1 \dots x_n]$ formado por los polinomios que se anulan en todos los puntos de $U_p \cap S$. (Observese que aunque S sea irreducible, $\mathcal{J}_{U_p}(S)$ puede contener estrictamente a $\mathcal{J}(S)$). Se verifica que $V(\mathcal{J}_{U_p}(S)) \cap U_p = S \cap U_p$.

Si \mathcal{C} es un ideal de $R[x_1 \dots x_n]$ recordemos el rango de \mathcal{C} en un punto es por definición el rango de la matriz jacobiana de un sistema cualquiera de generadores de \mathcal{C} .

Sea

$$M_1 = \{p' \in U_p \cap S \mid \text{rango}(\mathcal{J}_{U_p}(S))_{p'} = \max\{\text{rango}(\mathcal{J}_{U_p}(S))_{p''}\}\}$$

$$p'' \in S \cap U_p$$

Si ρ es el valor del rango máximo, la demostración del teorema 1 de Whitney [9] aplicada a nuestra situación concluye que todos

los puntos de M_1 son regulares de dimensión $n - \rho$. c.q.d.

5.5. Corolario. ([2],[15])

Sea $S \subseteq \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ preanalítico (prenashico, prealgebraico). El conjunto de puntos regulares de S es abierto y denso en S .

Demostración.

La haremos conjuntamente para el caso analítico y algebraico. Sea $p \in S$, y consideremos un entorno V_p de p . De acuerdo con 5.2 existe un punto analítico (algebraico) en $V_p \cap S$.

Sea p' dicho punto. Si tomamos un entorno $V_{p'} \subseteq V_p$ donde $S \cap V_{p'}$ sea un conjunto analítico (algebraico). Por 5.4 existe un punto regular en $S \cap V_{p'}$.

Resolvamos ahora conjuntamente la proposición 5.4 y su corolario para el caso de funciones de Nash. Si S es un conjunto prenashico, sabemos que localmente es prealgebraico. Así pues, si p es un punto de S , para todo entorno suficientemente pequeño de p habrá un punto regular algebraico (y por tanto de Nash). Concluimos entonces la densidad de los puntos regulares de S .

Es fácil demostrar que, en cualquier caso, los puntos regulares forman un conjunto abierto. c.q.d.

5.6. Definición.

Sea $S \subseteq \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ conjunto preanalítico (prenashico, prealgebraico), $p \in S$. Sea S_p el germen de S en p . Entonces $\dim S_p = \max$ dimensión puntos regulares de S en U , cuando U es un entorno suficientemente pequeño de p .

5.7. Observación.

La definición tiene sentido puesto que hemos proba

do la densidad del conjunto de puntos regulares en S.

5.8. Definición.

Si S es un conjunto preanalítico (prenashico, pre algebraico), definimos

$$\dim S = \max_{p \in S} \{ \dim S_p \}$$

o también $\dim S = \max.$ dimensión de los puntos regulares de S .

5.9. Observación.

a) Sea S el subconjunto algebraico de R^2 de ecuación $x^2 + y^2 - x^3 = 0$. El origen de coordenadas $\underline{0}$ es un punto aislado de S ; y por tanto regular de dimensión cero (siendo $x=0, y=0$ las ecuaciones locales de S en $\underline{0}$, y $\{d(x)\}_{\underline{0}}, \{d(y)\}_{\underline{0}}\}$ vectores independientes).

Por otra parte si localizamos en el origen (esto es, respecto del ideal (\bar{x}, \bar{y})) el anillo $R[X, Y] / (X^2 + Y^2 - X^3)$

el anillo local así obtenido no es regular, como se comprueba con facilidad.

b) Sea S el subconjunto de R^2 de ecuación $y^3 - x^4 + 2x^2y = 0$. Considerado como conjunto analítico, es facil ver que el origen es un punto analítico regular de dimensión 1. [16].

Veremos sin embargo que no es punto regular algebraico.

Trataremos, en las consideraciones siguientes, de analizar estos hechos. Distinguiremos, dado un conjunto S, entre sus puntos regulares analíticos, regulares de Nash ó regulares algebraicos.

Análogamente $\dim_a S, \dim_N S, \dim_p S$ denotaremos la dimensión de S en tanto se considera S como analítico, nashico o algebraico.

5.10. Proposición.

Sea S_p germen analítico real en $p \in \mathbb{R}^n$. Sea O_n^p el anillo local de gérmenes de funciones analíticas en p . Entonces S_p es regular de dimensión d (esto es: p es regular de dimensión d en un representante S , analítico, de S_p) sii $O_n^p / \mathcal{J}(S_p)$ es un anillo local regular de dimensión d .

Si f_{d+1}, \dots, f_n son gérmenes de O_n^p , cuyas diferenciales en p son un conjunto de vectores independientes y S_p tiene como ecuaciones locales $f_{d+1} = 0, \dots, f_n = 0$, entonces

$$\mathcal{J}(S_p) = (f_{d+1}, \dots, f_n) O_n^p$$

Demostración.

Se trata de un resultado bien conocido, cuya demostración incluimos en líneas generales como pauta para las subsiguientes. Tras el teorema de parametrización local sabemos [6] que

$$\dim O_n^p / \mathcal{J}(S_p) = \dim S_p = d$$

Si $O_n^p / \mathcal{J}(S_p)$ es regular de dimensión d , entonces [10] $\mathcal{J}(S_p)$

está generado en O_n^p por $\{f_{d+1}, \dots, f_n\}$ $n-d$ parámetros regulares de O_n^p . Ahora bien, es conocida la equivalencia entre el hecho de ser $n-d$ parámetros regulares y ser $n-d$ gérmenes con diferenciales generando un espacio vectorial de dimensión $n-d$. Así pues S_p es regular de dimensión d .

Recíprocamente, si $S_p = \mathcal{V}(f_{d+1}, \dots, f_n)$, y $\{f_{d+1}, \dots, f_n\}$ son $n-d$ parámetros regulares de O_n^p , se sigue que

$$O_n^P / (f_{d+1} \dots f_n)$$

es un anillo local regular de dimensión d . En el caso complejo, puesto que $(f_{d+1} \dots f_n) O_n^P$ es un ideal primo, se deduce que

$$J(S_p) = (f_{d+1} \dots f_n) O_n^P$$

En nuestro caso real esto no es suficiente. Supongamos que

$$J(S_p) \neq (f_{d+1} \dots f_n) O_n^P$$

Entonces

$$\dim O_n^P / J(S_p) < d .$$

Lo cual contradice la igualdad entre la dimensión algebraica y topológica de un germen analítico obtenida por medio de teorema de parametrización [6] . c.q.d.

5.11.

Sea S_p un germen algebraico de R^n . Con la notación introducida en el §4, designemos por $R[X]_p$, el anillo local

$$R[X_1 \dots X_n]_{(X_1 - p_1, \dots, X_n - p_n)}, \text{ siendo } X = (X_1 \dots X_n) \\ p = (p_1 \dots p_n)$$

$R[X]_p$ es el anillo de gérmenes de funciones racionales definidas en un abierto que contiene a p .

Si consideramos simultáneamente S_p como germen analítico, nashico y algebraico, el ideal de S_p en O_n^P , N_n^P , $R[X]_p$, será denotado respectivamente $J_a(S_p)$, $J_N(S_p)$, $J_p(S_p)$. En general si esta distinción no es precisa, $J(S_p)$ designará el ideal de S_p en $R[X]_p$.

Proposición.

Sea S_p germen algebraico en R^n . S_p es regular de dimensión d sii $R[X]_p / \mathfrak{J}(S_p)$ es un anillo local regular

de dimensión d .

Si $f_{d+1} \dots f_n \in R[X]_p$ son tales que sus diferenciales forman un conjunto de vectores independientes, y si S_p tiene como ecuaciones locales $f_{d+1} = 0 \dots f_n = 0$, entonces

$$\mathfrak{J}(S_p) = (f_{d+1} \dots f_n) R[X]_p .$$

Demostración.

Si $R[X]_p / \mathfrak{J}(S_p)$ es un anillo local regular de dimensión d , $\mathfrak{J}(S_p)$ está generado por $n-d$ parámetros regulares de $R[X]_p$.

Ahora bien, $\mathfrak{J}(S_p)$ está generado en este caso, por $n-d$ parámetros regulares que son funciones polinómicas (identificando $R[X]$ con su imagen en $R[X]_p$, vía la inclusión canónica).

Sean estos f_{d+1}, \dots, f_n . Se sigue, como en la proposición anterior, que S_p es un germen regular de dimensión d .

Recíprocamente, sea S_p germen regular de dimensión d . Entonces S_p es un germen regular analítico de dimensión d . Sean $f_{d+1} \dots f_n$ polinomios tales que $S_p = \{f_{d+1} = 0, \dots, f_n = 0\}_p$ y $\{(df_{d+1})(p), \dots, (df_n)(p)\}$ son $n-d$ vectores independientes. Usando la segunda parte de la proposición anterior concluimos que

$$\mathfrak{J}_a(S_p) = (f_{d+1}, \dots, f_n) O_n^p .$$

Por tanto

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}_a(S_p) \cap R[X]_p &= \mathfrak{J}_p(S_p) = \\ &= (f_{d+1} \dots f_n) O_n^P \cap R[X]_p \end{aligned}$$

Puesto que $R[X]_p$ y O_n^P son anillos locales con la misma compleción, se sigue [21] que O_n^P es plano sobre $R[X]_p$.

Por tanto

$$\mathfrak{J}_p(S_p) = (f_{d+1} \dots f_n) O_n^P \cap R[X]_p = (f_{d+1} \dots f_n) R[X]_p .$$

Se sigue que $R[X]_p / \mathfrak{J}_p(S_p)$ es regular de dimensión d . c.q.d.

5.12. Proposición [15]

Sea S_p germen nashico de R^n . S_p es regular de dimensión d sii $N_n^P / \mathfrak{J}(S_p)$ es local regular de dimensión d .

Si f_{d+1}, \dots, f_n son gérmenes de funciones de Nash en p , con diferenciales independientes, y $S_p = \{f_{d+1} = 0, \dots, f_n = 0\}$, entonces

$$\mathfrak{J}(S_p) = (f_{d+1}, \dots, f_n) N_n^P .$$

Demostración.

La primera parte puede verse en [15], Lema 3, pág. 616. Para la segunda, se repite "verbatim" la demostración anterior. c.q.d.

En la observación 5.9. vimos un ejemplo en el que el origen era regular de acuerdo con nuestra definición, pero cuyo anillo local en el conjunto algebraico correspondiente (¡atención: no el anillo local del germen!) no era regular. Las siguientes proposiciones relacionan ambas situaciones.

5.13. Definición.

Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$ conjunto algebraico real; $\mathfrak{J}(S)$ su ideal en $R[X_1 \dots X_n]$; $p = (p_1 \dots p_n) \in S$. Diremos que p es c-regular si el anillo local

$$\left(R[X_1 \dots X_n] / \mathfrak{J}(S) \right)_{(\bar{x}_1 - p_1, \dots, \bar{x}_n - p_n)}$$

donde $\bar{x}_i = x_i + \mathfrak{J}(S)$, para $i=1 \dots n$, es regular.

5.14. Proposición.

Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$, algebraico real irreducible, $\mathfrak{J}(S)$ su ideal en $R[X_1 \dots X_n]$; d la dimensión de Krull del anillo $R[X_1 \dots X_n] / \mathfrak{J}(S)$.

Se verifica la equivalencia de las siguientes condiciones

- i) $p \in S$ es c-regular.
- ii) $p \in S$ es regular de dimensión máxima en S .

Por tanto $d = \max \{ \dim. \text{ de los puntos regulares de } S \} = \dim S$.

Demostración.

Demostraremos que la condición i) implica la condición ii). Si p es c-regular, se tiene que

$$\begin{aligned} \left(R[X_1 \dots X_n] / \mathfrak{J}(S) \right)_{(\bar{x}_1 - p_1, \dots, \bar{x}_n - p_n)} &= \frac{R[X_1 \dots X_n]_{(X_1 - p_1, \dots, X_n - p_n)}}{\mathfrak{J}(S) R[X_1 \dots X_n]_{(X_1 - p_1, \dots, X_n - p_n)}} \\ &= \frac{R[\bar{X}]_p}{\mathfrak{J}(S) R[\bar{X}]_p} \quad (\text{según la notación de 5.11}), \end{aligned}$$

es un anillo local regular de dimensión d , concluimos, usando las técnicas de las demostraciones anteriores, que

$$R[X]_{p'} / \mathfrak{J}(S)R[X]_p = R[X]_{p'} / \mathfrak{J}(S_p)$$

y por tanto, p es regular de dimensión d . Ahora bien, d es cota superior de la dimensión de los puntos regulares de S ; en efecto, para cada $p' \in S$,

$$\mathfrak{J}(S_{p'}) \supseteq \mathfrak{J}(S)R[X]_{p'}$$

así pues

$$\dim R[X]_{p'} / \mathfrak{J}(S_{p'}) \leq \dim R[X]_{p'} / \mathfrak{J}(S)R[X]_{p'} = d$$

Recíprocamente, supongamos que $p \in S$ es regular de dimensión máxima en S . Veamos que p es entonces regular de dimensión d . Sea S^* la complejificación de S ([9], [7]). Sabemos entonces que el anillo de coordenadas de S y el anillo de coordenadas de S^* tienen la misma dimensión. En el caso complejo un lema de Whitney asegura que el rango máximo de $\mathfrak{J}(S^*)$ en los puntos de S^* es n menos la dimensión del anillo $C[X_1 \dots X_n] / \mathfrak{J}(S^*)$

El mismo Whitney demuestra en [9] que el rango máximo de $\mathfrak{J}(S^*)$ coincide con el rango máximo de $\mathfrak{J}(S)$; y por tanto éste es igual a n menos la dimensión de $R[X_1 \dots X_n] / \mathfrak{J}(S)$.

Ahora bien, el teorema 1 de [9] concluye que los puntos de S de rango máximo son regulares de dimensión n menos el rango. Se sigue que hay puntos regulares de S de dimensión igual a la dimensión de Krull de $R[X_1 \dots X_n] / \mathfrak{J}(S)$; y como hemos

indicado antes, no puede haber puntos regulares de dimensión estrictamente mayor que d .

Veamos por último que si p es regular de dimensión

d, entonces p es c-regular. En efecto: por ser S irreducible, $\mathfrak{J}(S)$ es primo. Si p es regular $\mathfrak{J}(S_p)$ es primo también; Así pues las dimensiones de

$$R[X]_p / \mathfrak{J}(S_p) \quad \text{y de} \quad R[X]_p / \mathfrak{J}(S)R[X]_p$$

no pueden coincidir sino cuando

$$\mathfrak{J}(S)R[X]_p = \mathfrak{J}(S_p)$$

Luego ambos anillos coinciden, y por ser regular deducimos que p es c-regular. c.q.d.

5.15. Observación.

Si S no es irreducible la proposición no se verifica, como veremos en el siguiente contraejemplo:

Sea S el subconjunto de R^2 , unión de los conjuntos algebraicos irreducibles de ecuaciones

$$x^2 + y^2 - x^3 = 0, \quad x = 0.$$

El origen de coordenadas es un punto regular en S , de dimensión 1; pero no es c-regular, pues pertenece a las dos componentes. Por otra parte es fácil comprobar que la máxima dimensión de los puntos regulares de S es 1. En efecto, se verifica la siguiente

5.16. Proposición.

Sea $S \subseteq R^n$ conjunto algebraico real; $\mathfrak{J}(S)$ su ideal en $R[X_1 \dots X_n]$. Entonces

$$\dim R[X_1 \dots X_n]_{\mathfrak{J}(S)} = \text{max. dimensión de los puntos regulares de } S.$$

Esto es: $\dim S = \dim R[X_1 \dots X_n]_{\mathfrak{J}(S)}$

Demostración.

Sean $\{S_i\}_{i=1\dots s}$ las componentes irreducibles de S . En 5.14 hemos visto que

$$\dim S_i = \dim R[X_1 \dots X_n] / \mathfrak{J}(S_i)$$

para cada $i=1\dots s$. Como por otra parte se verifica que

$$\dim R[X_1 \dots X_n] / \mathfrak{J}(S) = \max_{i=1\dots s} \{ \dim R[X_1 \dots X_n] / \mathfrak{J}(S_i) \}$$

concluiremos la proposición si demostramos que $\dim S = \max_{i=1\dots s} \{ \dim S_i \}$

Sea $p \in S$, un punto regular; supongamos que $p \in S_1 \cap \dots \cap S_t$ y $p \notin S_{t+1} \cup \dots \cup S_s$. Consideremos el anillo local regular $R[X]_p / \mathfrak{J}(S_p)$.

Como en $R[X]_p$,

$$\mathfrak{J}(S)R[X]_p = \bigcap_{i=1}^t \mathfrak{J}(S_i)R[X]_p,$$

e

$$\mathfrak{J}(S_p) \supseteq \mathfrak{J}(S)R[X]_p,$$

se sigue que $\exists i_0, 1 \leq i_0 \leq t$, tal que

$$\mathfrak{J}(S_p) \supseteq \mathfrak{J}(S_{i_0})R[X]_p.$$

Entonces $\dim R[X]_p / \mathfrak{J}(S_p) \leq \dim R[X]_p / \mathfrak{J}(S_{i_0})R[X]_p =$

$$= \dim R[X] / \mathfrak{J}(S_{i_0})$$

Por ser S_{i_0} irreducible deducimos que

$$\dim S_p = \dim R[X]_p / \mathfrak{J}(S_p) \leq \dim S_{i_0}$$

Así pues

$$\dim S \leq \max_{i \in 1 \dots s} \{\dim S_i\}$$

Recíprocamente, sea p punto regular de dimensión máxima de S_1 ; donde suponemos que $\dim S_1 \geq \dim S_i \quad \forall i \in 1 \dots s$; y supongamos que $p \in S_1 - \bigcup_{i=2}^s S_i$. Entonces p es regular de S ; y por tanto.

$$\dim S \geq \max_{i=1 \dots s} \{\dim S_i\}$$

Basta probar que existen realmente puntos regulares de dimensión máxima en S_1 que no pertenecen a $S_1 \cap (\bigcup_{i=2}^s S_i)$. Por esto se deduce del teorema 1 de Whitney [9]; en efecto allí se demuestra que $S_1 = V \cup M$, siendo V subconjunto algebraico propio de S_1 y M conjunto de puntos regulares de S_1 de dimensión máxima.

Si $M \subseteq S_1 \cap (\bigcup_{i=2}^s S_i)$, se seguiría

$$S_1 = V \cup (S \cap (\bigcup_{i=2}^s S_i))$$

lo cual es imposible por la irreducibilidad de S_1 . c.q.d.

5.17. Proposición.

Sea S_p germen de conjunto algebraico. Entonces

$$\dim S_p = \dim R[X]_p / \mathfrak{J}(S_p)$$

Demostración.

Asociaremos a todo germen de conjunto algebraico un conjunto algebraico que le representará canónicamente; reduciendo esta proposición a la anterior; con lo cual la demostración de la proposición se resuelve con el siguiente:

5.18. Lema

Existe un único conjunto algebraico S' tal que $S'_p = S_p$, y tal que si S'' es otro conjunto algebraico con $S''_p = S_p$, entonces $S'' \supseteq S'$.

En efecto: consideremos el ideal $\mathcal{J} = \mathcal{J}(S_p) \cap R[X]$. Entonces $\mathcal{J} R[X]_p = \mathcal{J}(S_p)$; así, si $V(\mathcal{J}) = S'$, se verifica $S'_p = S_p$. Además $\mathcal{J}(S') = \mathcal{J}$, pues si $f \in R[X]$ es tal que $f \in \mathcal{J}(S')$, entonces $f \in \mathcal{J}(S_p)$, considerando f sumergido en $R[X]_p$.

$$\text{Luego } f \in \mathcal{J}(S_p) \cap R[X] = \mathcal{J}.$$

Sea S'' otro conjunto algebraico real, tal que $S''_p = S_p$. Entonces

$$\mathcal{J}(S'')R[X]_p \subseteq \mathcal{J}(S_p).$$

y por tanto

$$\mathcal{J}(S'') \subseteq \mathcal{J}(S_p) \cap R[X] = \mathcal{J};$$

luego

$$S'' \supseteq V(\mathcal{J}) = S'.$$

La unicidad de S' es consecuencia inmediata de esta propiedad.

5.19. Corolario.

$$\dim S' = \dim R[X] / \mathfrak{J}(S') = \dim R[X]_P / \mathfrak{J}(S_P)$$

Para terminar la demostración de 5.17 basta comprobar que $\dim S' = \dim S_P$. La desigualdad $\dim S' \geq \dim S_P$ es inmediata. La desigualdad $\dim S_P \geq \dim S'$ es consecuencia de la siguiente

5.10. Proposición.

Sea S conjunto algebraico real. Existe un subconjunto algebraico propio S' de dimensión estrictamente menor que la dimensión de S , tal que $S - S'$ son puntos regulares de S de dimensión máxima.

Demostración.

Si S es irreducible, la proposición se reduce al teorema 1 de Whitney [9]. Sea $S = \bigcup_{i=1}^s S_i$, donde S_i es una componente irreducible de S . Supongamos que $\dim S = \dim S_1 = \dots = \dim S_r$; $\dim S < \dim S_{r+j}$, $j=1, \dots, s-r$. Sea

S'_1, \dots, S'_r la subvariedad propia de S_1, \dots, S_r tal que $S_1 - S'_1, \dots, S_r - S'_r$ son regulares de S_1, \dots, S_r de dimensión máxima. Sea

$$S' = \left(\bigcup_{j=1}^{s-r} S_{r+j} \right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^r S'_i \right) \cup \left(\bigcup_{(i,j) \in \{1, \dots, s\}^2} (S_i \cap S_j) \right)$$

Entonces $\dim S' < \dim S$, y es $S' \subsetneq S$.

Sea $p \in S - S'$. Entonces $p \in S_{i_0} - S'_{i_0}$, para un cierto $1 \leq i_0 \leq r$; y puesto que p no está en la intersección

de S_{i_0} con otra componente, el germen de S en p coincide con el germen de S_{i_0} en p . Por tanto S_p es regular de dimensión máxima.

c.q.d.

La proposición 5.20 que acabamos de probar es la contrapartida de un teorema de Whytney-Bruhat [12] para conjuntos c-analíticos que enunciaremos a continuación (c.f. def. 1.3):

5.21. Proposición. [12]

Sea $S \subseteq \Omega$ un conjunto c-analítico de dimensión d . Sea $V_d(S)$ el conjunto de puntos regulares de dimensión máxima de S . Existe un subconjunto S' propio de S , c-analítico de dimensión estrictamente menor que d , tal que

$$S = V_d(S) \cup S'.$$

5.22.

Vamos a aplicar alguno de los resultados obtenidos a los conjuntos preanalíticos y prealgebraicos.

Sea S preanalítico o prealgebraico. Como consecuencia de 3.15, si S está definido en $\mathcal{A}_\Omega[|f_1| \dots |f_r|]$, para cada $i \in F$ existe un ideal finitamente generado de \mathcal{A}_Ω que denotamos \mathcal{a}_i , tal que

$$S = \bigcup_{i \in F} V(\mathcal{a}_i + I_i).$$

Sea \mathcal{b}_i para cada $i \in F$, un ideal de \mathcal{A}_Ω finitamente generado tal que $V(\mathcal{b}_i)$ es el mínimo conjunto c-analítico ([6]) o el mínimo conjunto algebraico que contiene a $V(\mathcal{a}_i + I_i)$. Entonces $V(\mathcal{b}_i) \subseteq V(\mathcal{a}_i)$ y por tanto, $V(\mathcal{b}_i + I_i) \subseteq V(\mathcal{a}_i + I_i)$

Luego

$$V(\mathcal{b}_i + I_i) = V(\mathcal{a}_i + I_i)$$

Observemos que $S' = \bigcup_{i \in F} V(b_i)$ es el mínimo conjunto c-analítico (respectivamente algebraico) que contiene a S.

En efecto: S' es c-analítico y contiene a S trivialmente, y por otra parte si S'' es c-analítico conteniendo a S, para cada $i \in F$,

$$S'' \supseteq V(b_i + I_i) = V(\alpha_i + I_i)$$

luego

$S'' \supseteq V(b_i)$; y por tanto $S'' \supseteq S'$. Análogamente se vería suponiendo S' algebraico.

5.23. Proposición.

Sea $S \subseteq \Omega$ conjunto prealgebraico (preanalítico). Sea S' el mínimo conjunto algebraico (c-analítico) que lo contiene. Entonces $\dim S = \dim S'$.

Demostración.

Hagamos la demostración para el caso analítico. Sea $p \in S$ punto regular de dimensión máxima. Entonces S_p es un germen analítico y $S_p \subseteq S'_p$. Luego $\dim S_p \leq \dim S'_p$ y por tanto $\dim S \leq \dim S'$.

Supongamos que $S = A \cup B$, siendo A y B preanalíticos. Entonces, como acabamos de ver,

$$\dim S \geq \max \{ \dim A, \dim B \} .$$

Recíprocamente, sea $p \in S$, tal que en un entorno U_p de p, $S \cap U_p$ es regular de dimensión máxima. Sea p' punto de $A \cap U_p$ que sea regular de A de dimensión $\dim A_p$; sea $U_{p'}$ un subentorno de U_p , entorno de p' , tal que $A \cap U_{p'}$ sea regular. Entonces $S \cap U_p = (A \cap U_p) \cup (B \cap U_p) \implies$

$$S \cap U_p \cap U_{p'} = (A \cap U_{p'}) \cup (B \cap U_{p'}) .$$

Sea p'' , punto de B regular de dimensión $B_{p''}$; y $U_{p''}$ entorno de p'' contenido en $U_{p'}$, tal que $B \cap U_{p''}$ sea regular.

Entonces

$$S \cap U_{p''} = (A \cap U_{p''}) \cup (B \cap U_{p''})$$

Es decir $S_{p''} = A_{p''} \cup B_{p''}$, siendo $S_{p''}$, $A_{p''}$, $B_{p''}$ gérmenes analíticos regulares. Luego

$$\dim S_{p''} = \max \{ \dim A_{p''}, \dim B_{p''} \} .$$

Concluimos que

$$\dim S = \max \{ \dim A, \dim B \} .$$

Es inmediata la generalización de este resultado para una unión finita.

Como consecuencia de estas consideraciones la proposición 5.23 quedará probada si demostramos el caso particular en el que $S = \sqrt{(B + I)}$, siendo B ideal finitamente generado de funciones analíticas, con $\sqrt{(B)} = S'$ (y que, por comodidad supondremos que $\sqrt{(B)} = \{g=0\}$; e $I = (|f_1| - f_1, \dots, |f_r| - f_r)$ un ideal del entramado donde está definido S . Aplicando 5.21 descomponemos S' en unión disjunta de S'' , subconjunto c-analítico propio de dimensión menor estrictamente que S' ; y V'_d , conjunto de puntos regulares de dimensión máxima de S' , que supondremos igual a d . Es obvio que $V'_d \cap S \neq \emptyset$.

Si $p \in V'_d \cap S \cap \overline{\sqrt{(I)}}$ observamos que el germen de S' en p coincide con el germen de S en p . Así S tendría puntos regulares de dimensión d ; y por tanto $\dim S = \dim S'$.

Supongamos entonces que $V'_d \cap S \cap \overline{\sqrt{(I)}} = \emptyset$. Se sigue que $V'_d \cap S \subseteq \sqrt{(I)} - \overline{\sqrt{(I)}}$ y por tanto en cada punto de V'_d se anula alguna función del entramado.

Sea $h = \text{mínimo } \{ \text{número de funciones del entramado que } p \in V'_d \cap S \text{ se anulan en } p \}$

Sea C_h el conjunto de combinaciones de $\{1, \dots, r\}$ tomadas de h en h . Entonces

$$V'_d \cap S \subseteq \left[\bigcup_{(j_1 \dots j_h) \in C_h} \{f_{j_1}=0 \dots f_{j_h}=0\} \right] \cap \{g=0\}$$

Conjunto que denotaremos S_h .

Como

$$S \subseteq S' = V'_d \cup S'', \text{ se tiene}$$

$$S \subseteq (V'_d \cap S) \cup S'', \text{ y por tanto}$$

$$S \subseteq S'' \cup S_h, \text{ luego}$$

$$S' \subseteq S'' \cup S_h.$$

Por ser V'_d y S'' disjuntos se sigue que $V'_d \subseteq S_h$.

Sea $p \in V'_d \cap S$, tal que en p se anulan exactamente h funciones, que supondremos por comodidad que son f_1, \dots, f_h .

Puesto que $p \in S \subseteq V(I)$, se tendrá

$$f_{h+1}(p) > 0 \dots \dots f_r(p) > 0.$$

Consideremos un entorno U_p de p donde se mantengan estas desigualdades; en él S viene dado por las ecuaciones $g=0, f_1=0, \dots, f_h=0$, si lo restringimos de manera que su intersección con S esté contenida en $V'_d \cap S$; en efecto si $p' \in U_p$ y $g(p') = 0$,

$f_1(p')=0, \dots, f_h(p')=0$, será además $f_{h+1}(p') > 0 \dots f_r(p') > 0$;
 luego $p' \in S$. Recíprocamente, si $p' \in S \cap U_p \subseteq V'_d \cap S$, tendremos que h funciones del entramado deben anularse en p' por lo menos. Puesto que $f_{h+1}(p') > 0 \dots f_r(p') > 0$, se sigue que $f_1(p')=0, \dots, f_h(p')=0$.

Obviamente, además se tendrá $g(p')=0$. Si restringimos U_p más aún, de manera que $U_p \cap S' \subseteq V'_d$, observamos que en ese entorno S' viene dado también por las ecuaciones $g=0, f_1=0, \dots, f_h=0$. En efecto, puesto que $V'_d \subseteq S_h$, y localmente en $p \in S_h$ tiene como ecuaciones $\{f_1=0 \dots f_h=0, g=0\}$, deducimos que S' en dicho entorno está contenido en el conjunto definido por esas ecuaciones.

Como $S' \supseteq S$, se sigue la igualdad de gérmenes de S' y S en p . Dado que este punto es regular de dimensión máxima de S , concluimos que $\dim S' \leq \dim S$. c.q.d.

5.14. Observación.

La proposición anterior no se verifica en general para conjuntos localmente semialgebraicos o semianalíticos como se pone de manifiesto en el siguiente contraejemplo [6] :

Sea

$$S = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{y \geq n, x = \frac{1}{n}\}$$

S es localmente semialgebraico y semianalítico, de dimensión 1 . Sin embargo el mínimo conjunto analítico que lo contiene es todo el plano \mathbb{R}^2 .

5.25. Corolario.

Sea S conjunto prealgebraico definido en $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ por el ideal $\tilde{J}(S)$ del algebra valorada $R[X][[f_1| \dots | f_r]]$.

Sea $\mathfrak{J}(S)$ el ideal de S en $R[X]$. Entonces

$$\dim R[X] [|f_1| \dots |f_r|] / \overline{\mathfrak{J}(S)} = \dim S .$$

Demostración.

Puesto que $R[X] [|f_1| \dots |f_r|]$ es íntegro sobre $R[X]$,

$$\frac{R[X] [|f_1| \dots |f_r|]}{\overline{\mathfrak{J}(S)}} \text{ es íntegro sobre } R[X] / \mathfrak{J}(S) ;$$

ya que $\mathfrak{J}(S)$ es la contracción a $R[X]$ de $\overline{\mathfrak{J}(S)}$.

Así las dimensiones de Krull de los anillos cocientes respectivos coinciden. Ahora bien, hemos visto que $\dim S = \dim S'$, siendo S' el mínimo conjunto algebraico que contiene a S ; y por tanto se verifica además que $\mathfrak{J}(S) = \mathfrak{J}(S')$. Por otra parte sabemos que

$$\dim R[X] / \mathfrak{J}(S') = \dim S'$$

Luego

$$\begin{aligned} \dim S &= \dim S' = \dim R[X] / \mathfrak{J}(S') = \dim R[X] / \mathfrak{J}(S) = \\ &= \dim R[X] [|f_1| \dots |f_r|] / \overline{\mathfrak{J}(S)} \end{aligned} \quad \text{c.q.d.}$$

5.26. Corolario.

Sea S_p un germen preanalítico (prealgebraico); sea S'_p el mínimo germen analítico (algebraico) que lo contiene. Entonces $\dim S_p = \dim S'_p$.

Demostración.

Sea S_p germen preanalítico y S'_p mínimo germen

analítico que lo contiene. Consideremos un entorno de p , U_p , tal que si S es preanalítico en U_p , S' c-analítico en U_p , y S y S' son representantes de S_p y S'_p respectivamente, se verifique además

$$\dim_{U_p} S = \dim S_p, \quad S \subseteq S'$$

Sea S'' el mínimo conjunto c-analítico que contiene a S en U_p . Se tiene entonces

$$S \subseteq S'' \subseteq S'$$

Por 5.23

$$\dim_{U_p} S = \dim_{U_p} S'' .$$

Luego, como $\dim_{U_p} S'' \geq \dim S''_p$, se sigue que

$$\dim S_p \geq \dim S''_p .$$

Por otra parte de $S'' \supseteq S$ deducimos

$$\dim S''_p \geq \dim S_p$$

y por tanto

$$\dim S''_p = \dim S_p$$

Ahora $S \subseteq S'' \subseteq S'$, luego $S_p \subseteq S''_p \subseteq S'_p$.

Pero por ser S'_p mínimo germen analítico que contiene a S_p , deducimos

$$S''_p = S'_p$$

c.q.d.

5.27. Corolario.

Sea S_p germen preanalítico dado por el ideal $\tilde{J}(S_p)$

en el anillo de funciones valoradas $O_n^p[|f_1| \dots |f_r|]$.
 Sea $\mathfrak{J}(S_p)$ su contracción a O_n^p . Entonces

$$\dim S_p = \dim O_n^p[|f_1| \dots |f_r|] / \tilde{\mathfrak{J}}(S_p)$$

Análogamente, en el caso prealgebraico

$$\dim S_p = \dim R[X]_p[|f_1| \dots |f_r|] / \tilde{\mathfrak{J}}(S_p)$$

Demostración.

La demostración en el caso prealgebraico es idéntica a la demostración del corolario 5.25. El caso prealgebraico se trata de la misma manera, observando que la contracción de $\tilde{\mathfrak{J}}(S_p)$ a $R[X]_p$ es el ideal del mínimo germen algebraico S_p que contiene a S'_p . En efecto, si f es un representante de un elemento de $R[X]_p$ que se anula sobre S'_p , f se anula sobre S_p , luego $f \in \tilde{\mathfrak{J}}(S_p) \cap R[X]_p$.

Recíprocamente, sea $f \in \tilde{\mathfrak{J}}(S_p) \cap R[X]_p$. Sea

$V(f)$ el germen de ecuación local $f=0$. Se trata de un germen algebraico (tomando representantes, la ecuación $f=0$ puede sustituirse por $g=0$, siendo g el numerador de f); luego

$$V(f) \supseteq S'_p. \quad \text{Por tanto } f \in \mathfrak{J}(S'_p).$$

c.q.d.

El caso prenashico ha sido excluído de una gran parte de las proposiciones del párrafo anterior debido a la falta de resultados en el caso de los conjuntos de Nash globales paralelos a los que hemos utilizado en el caso c-analítico o algebraico. Un tratamiento algebraico de tales conjuntos ha comenzado recientemente a esbozarse ([32],[33],[34]). Nosotros emplearemos preferentemente su condición de conjuntos intermedios entre los algebraicos y los c-analíticos; y de manera fundamental su condición de conjuntos prealgebraicos en abiertos con determinadas condiciones. Obtenemos así un estudio más fino de los conjuntos prealgebraicos e incidimos en ciertas cuestiones tratadas por Risler, Efroymsen y Lazzeri-Tognoli.

6.1. Proposición.

Sea S_p un germen algebraico; sea $\mathfrak{J}_p(S_p)$ su ideal en $R[X]_p$. Considerado como germen analítico, sea $\mathfrak{J}_a(S_p)$ su ideal en O_n^p . Entonces

$$\dim R[X]_p / \mathfrak{J}_p(S_p) = \dim O_n^p / \mathfrak{J}_a(S_p)$$

o lo que es lo mismo

$$\dim_p(S_p) = \dim_a(S_p)$$

siendo \dim_p la dimensión como germen algebraico y \dim_a la dimensión como germen analítico (c.f. 5.9, 5.11).

Demostración.

Obviamente $\dim_a(S_p) \geq \dim_p(S_p)$

Dado un ideal \mathfrak{a} de $R[X]_p$ ó O_n^p , denotaremos por $\hat{\mathfrak{a}}$ al ideal extendido a la complección de ambos anillos $R[[X]]$.

Usando propiedades bien conocidas de la complección sabemos que si $\mathfrak{a} \subseteq R[X]_P$, entonces

$$\dim R[X]_P / \mathfrak{a} = \dim R[[X]] / \widehat{\mathfrak{a}} = \dim \mathcal{O}_n^P / \mathfrak{a} \mathcal{O}_n^P$$

puesto que $\widehat{\mathfrak{a}} = \widehat{\mathfrak{a} \mathcal{O}_n^P}$.

Así pues

$$\dim R[X]_P / \mathfrak{J}_P(S_P) = \dim \mathcal{O}_n^P / \mathfrak{J}_P(S_P) \mathcal{O}_n^P$$

y como, en general

$$\mathfrak{J}_P(S_P) \mathcal{O}_n^P \subseteq \mathfrak{J}_a(S_P),$$

se sigue que

$$\dim_P(S_P) = \dim R[X]_P / \mathfrak{J}_P(S_P) \geq \dim \mathcal{O}_n^P / \mathfrak{J}_a(S_P) = \dim_a S_P.$$

c.q.d.

6.2. Corolario.

Sea S un conjunto algebraico. Entonces

$$\dim_P(S) = \dim_a S$$

Demostración.

Basta recordar que

$$\dim_P S = \max_{p \in S} \dim_P S_p \quad \text{y que}$$

$$\dim_a S = \max_{p \in S} \dim_a S_p, \quad \text{y usar la proposición anterior.}$$

c.q.d.

6.3. Corolario. [15]

Sea S_p un germen prenashico. Entonces

$$\dim_P S_p = \dim_N S_p = \dim_a S_p ,$$

donde $\dim_P S_p$ significa la dimensión de S_p considerado como germen de conjunto prealgebraico, $\dim_N S_p$ su dimensión de Nash, y $\dim_a S_p$ la dimensión analítica de S_p .

Demostración.

Obviamente $\dim_P S_p \leq \dim_N S_p \leq \dim_a S_p$.

Sean S'_p y S''_p los mínimos gérmenes algebraicos y analíticos que contienen a S_p . Entonces, de acuerdo con los resultados del párrafo 55,

$$\dim_P S'_p = \dim_P S_p \leq \dim_a S_p = \dim_a S''_p$$

Ahora bien, $S'_p \supseteq S''_p$; luego $\dim_a S'_p \geq \dim_a S''_p$.

Y de acuerdo con 6.1.

$$\dim_a S'_p = \dim_P S'_p$$

c.q.d.

6.4. Corolario. [15]

Sea S_p germen nashico, y sea $\mathcal{J}_N(S_p)$ su ideal en el anillo N_n^P de gérmenes de funciones de Nash. Entonces

$$\dim_N S_p = \dim N_n^P / \mathcal{J}_N(S_p)$$

Demostración.

Si $\dim_N S_p = d$, sabemos que $\dim_a S_p = d$, y por tanto que

$$\dim O_n^P / \mathfrak{J}_a(S_p) = d.$$

Como $\mathfrak{J}_N(S_p) O_n^P \subseteq \mathfrak{J}_a(S_p)$, y

$$\dim N_n^P / \mathfrak{J}_N(S_p) = \dim O_n^P / \mathfrak{J}_N(S_p) O_n^P.$$

(lo cual se demuestra como en 6.1); deducimos que

$$\dim N_n^P / \mathfrak{J}_N(S_p) \geq d.$$

Sea S'_p el mínimo germen algebraico que contiene a S_p . Sabemos que

$$\dim_a S'_p = \dim_a S_p = d.$$

Sea $\mathfrak{J}_P(S'_p)$ el ideal de S'_p en $R[X]_P$.

Entonces

$$\mathfrak{J}_P(S'_p) N_n^P \subseteq \mathfrak{J}_N(S_p)$$

y por tanto

$$d = \dim R[X]_P / \mathfrak{J}_P(S_p) \geq \dim N_n^P / \mathfrak{J}_N(S_p)$$

c.q.d.

6.5. Corolario.

Sea S_p germen prenáshico definido en el álgebra valorada $N_n^P[|f_1| \dots |f_r|]$; sea $\tilde{J}(S_p)$ su ideal en dicha álgebra, e $J(S_p)$ su ideal en N_n^P . Se tiene:

$$\dim_N S_p = \dim N_n^P[|f_1| \dots |f_r|] / \tilde{J}(S_p) = \dim N_n^P / J(S_p)$$

Demostración.

Basta demostrar que

$$\dim_N S_p = \dim N_n^P / J(S_p)$$

Ahora, como consecuencia del corolario anterior si Q_p es el mínimo germen náshico que contiene a S_p , se verifica que

$$\dim_N Q_p = \dim N_n^P / J(S_p)$$

Considerando S_p como germen prealgebraico sabemos que su dimensión coincide con la del mínimo germen algebraico que lo contiene. Sea este Q_p ; por tanto

$$\dim_P Q_p = \dim_P S_p = \dim_N S_p .$$

Análogamente, consideremos Q_p como germen prealgebraico. Entonces, si T_p es el mínimo germen algebraico que lo contiene tendremos

$$\dim_P T_p = \dim_P Q_p = \dim_N Q_p .$$

El corolario se sigue si probamos que $T_p = P_p$.

En efecto: puesto que $P_p \supseteq S_p$, entonces $P_p \supseteq Q_p$ y por tanto $P_p \supseteq T_p$. Por otra parte $T_p \supseteq S_p$, luego $T_p \supseteq P_p$. c.q.d.

6.6.

En la observación 5.9 mostramos el comportamiento extraño de los conjuntos algebraicos en ciertos puntos de apariencia regular pero que no reflejan esta condición. Veremos que el estudio de estos fenómenos por medio de las funciones de Nash es suficientemente afinado; esto es: si un germen náshico (lo cual engloba el caso algebraico y prealgebraico) tiene "aspecto" de germen regular, entonces es un germen náshico regular.

Se trata de la siguiente

Proposición.

Sea S_p germen náshico. Entonces S_p es germen analítico regular sii S_p es germen náshico regular.

Demostración.

Como es natural basta comprobar que S_p es náshico regular si S_p es analítico regular. Puesto que S_p es náshico regular sii el anillo local $N_n^P / \mathfrak{J}_{N(S_p)}$ es regular, demostraremos

que si S_p es germen analítico regular e $\mathfrak{J}_a(S_p)$ es su ideal en O_n^P , siendo por tanto $O_n^P / \mathfrak{J}_a(S_p)$ regular, entonces

$\mathfrak{J}_a(S_p) = \mathfrak{J}_N(S_p) O_n^P$. De aquí, por paso al completado, se sigue la regularidad de S_p como germen náshico.

Más generalmente veremos que se verifica el siguiente

6.7. Lema.

Sea S_p germen náshico; $\mathfrak{J}_N(S_p)$ e $\mathfrak{J}_a(S_p)$

sus ideales en N_n^P y O_n^P respectivamente. Entonces

$$J_{N(S_p)} O_n^P = J_a(S_p).$$

Demostración.

Observemos primeramente que, como consecuencia de la demostración del T.P. de Weierstrass para gérmenes de funciones de Nash, puede deducirse de manera análoga al caso analítico un teorema de parametrización local de un germen náshico. (c.f. [15] para ambos resultados); esto es, dado el anillo local N_n^P/I de un germen náshico, existe un cierto d (que coincide con la dimensión del germen) tal que $N_d^P \longrightarrow N_n^P/I$ es una inclusión íntegra.

Usando la terminología de Nagata [38] diremos que N_n^P es un anillo de Weierstrass (c.f. [38] (44.2, 45.))

Supongamos entonces que S_p es un germen de Nash irreducible; esto es, que $J_{N(S_p)}$ es un ideal primo. Como consecuencia de lo expuesto anteriormente ([38], 45.1) $J_{N(S_p)}$ es analíticamente irreducible, y por tanto, dado que N_n^P y O_n^P tienen la misma complección, $J_{N(S_p)} O_n^P$ es primo.

Si $J_a(S_p) \not\subseteq J_{N(S_p)} O_n^P$ deduciríamos que $\dim_a S_p < \dim_N(S_p)$. Absurdo.

Supongamos ahora que $J_{N(S_p)} N_n^P$ es intersección de ideales primos $\beta_1 \dots \beta_r$. Por plititud

$$J_{N(S_p)} O_n^P = \beta_1 O_n^P \cap \dots \cap \beta_r O_n^P.$$

Por otra parte

$$J_a(S_p) = J_a(\bigvee(\beta_1)) \cap \dots \cap J_a(\bigvee(\beta_r)).$$

Pero como hemos probado

$$J_a(\bigvee(\beta_i)) = \beta_i O_n^P, \quad i=1 \dots r \quad \text{c.q.d.}$$

6.8. Corolario. [15]

Un germen nashico es irreducible como germen nashi
co sii es irreducible como germen analítico. Como consecuencia
las componentes irreducibles nashicas de un germen nashico coinci-
den con sus componentes irreducibles analíticas.

6.9.

Si S_p es un germen nashico, llamaremos compleji-
ficado nashico al mínimo germen nashico complejo que lo contiene.

Análogamente definimos el complejifizado analítico
(c.f. [6] , [15]). Denotaremos estos gérmenes \hat{S}_p y \tilde{S}_p respec-
tivamente. Se verifica entonces la siguiente

6.10. Proposición. [15]

$$\hat{S}_p = \tilde{S}_p$$

Demostración.

Es bien sabido que para calcular un complejificado
(analítico o nashico) de un germen, se procede a extender un sis-
tema de generadores del ideal correspondiente, a un entorno comple-
jo y se halla el germen complejo que verifica las ecuaciones de
estos generadores igualados a cero.

Puesto que según 6.7 es posible generar el ideal
analítico de un germen nashico con funciones de Nash, la proposi-
ción se sigue inmediatamente del proceso de construcción del com-
plejifizado. c.q.d.

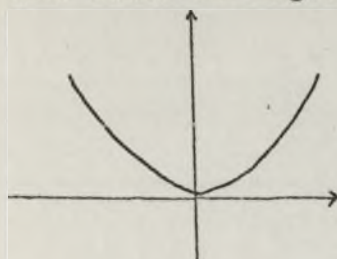
6.11. Ejemplos.

a) Consideremos el germen V_o en el origen de R^2 del con-
junto algebraico V de ecuación

$$y^3 + 2yx^2 - x^4 = 0$$

V_0 es irreducible, y puesto que el origen es un punto de dimensión 1 y su anillo local en V no es regular, V_0 no es un germen algebraico regular.

Podemos sin embargo, resolver y como función analítica de x (c.f. [16]), náshica por tanto. Así V_0 es un germen náshico regular. Por otra parte se tiene

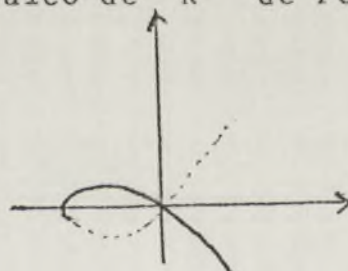


$$\mathcal{J}_N(V_0) \neq \mathcal{J}_P(V_0) \cdot N_2^0$$

2) Sea S el conjunto prealgebraico de \mathbb{R}^2 de relaciones

$$x^2 - y^2 + x^3 = 0$$

$$y \cdot x \geq 0$$



El germen de S en el origen S_0 no es algebraico, pero si es regular náshico, de ecuación

$$x + \sqrt{1-x} = y .$$

6.12.

Dado que el anillo global de funciones de Nash es Noetheriano en un abierto con determinadas condiciones podemos establecer algunos resultados globales análogos a los expuestos en §5 para conjuntos algebraicos y semialgebraicos.

Supondremos en lo sucesivo que $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ es un dominio definido por desigualdades algebraicas. En estas condiciones son aplicables los resultados de [32], [33], [34]. Además supondremos que Ω está acotado.

Proposición.

Sea S un conjunto náshico global contenido en Ω ;

sea $N(\Omega)$ el anillo de funciones de Nash en Ω . Entonces, si $\mathfrak{J}(S)$ es el ideal de S en $N(\Omega)$, $\dim S = \dim N(\Omega) / \mathfrak{J}(S)$

Demostración.

Por ser S nashico global, S es semialgebraico cerrado. Puesto que Ω está acotado, deducimos de los resultados de §2 que S es prealgebraico. Sea S' el mínimo conjunto algebraico que lo contiene.

Sabemos entonces que

$$\dim_p S = \dim_p S'$$

Por otra parte hemos visto anteriormente que $\dim_N S = \dim_p S$. Así pues la proposición queda demostrada si probamos que

$$\frac{\dim R[X]}{\mathfrak{J}(S) \cap R[X]} = \dim \frac{N(\Omega)}{\mathfrak{J}(S)}$$

Es fácil comprobar que el problema queda reducido a demostrar la igualdad anterior en el caso en que $\mathfrak{J}(S)$ es primo.

Sea p un punto cualquiera de Ω y consideremos el ideal maximal asociado a p en $N(\Omega)$; localizando $N(\Omega)$ respecto a este ideal obtenemos $N(\Omega)_p$, anillo que contiene naturalmente a $R[X]_p$.

Consideremos

$$\mathfrak{J}(S).N(\Omega)_p \cap R[X]_p = (\mathfrak{J}(S) \cap R[X])R[X]_p$$

Así, puesto que $N(\Omega)_p$ y $R[X]_p$ tienen la misma henselinización, concluimos [[38] 43.20] que las alturas de $\mathfrak{J}(S).N(\Omega)_p$ y de $(\mathfrak{J}(S) \cap R[X])R[X]_p$ coinciden; luego sus dimensiones.

Tomando $p \in S$ concluimos, tras las consideraciones anteriores, que

$$\begin{aligned} \dim N(\Omega) / \mathfrak{J}(S) &= \dim N(\Omega)_P / \mathfrak{J}(S)N(\Omega)_P = \\ &= \dim R[X]_P / (\mathfrak{J}(S) \cap R[X])R[X]_P = \dim R[X] / \mathfrak{J}(S) \cap R[X] \end{aligned}$$

c.q.d.

6.13. Corolario.

Sea S prealgebraico, definido por medio del algebra valorada $N(\Omega)[[f_1 | \dots | f_r]]$. Entonces, si $\mathfrak{J}(S)$ es el ideal en $N(\Omega)[[f_1 | \dots | f_r]]$ de S ,

$$\dim \frac{N(\Omega)[[f_1 | \dots | f_r]]}{\mathfrak{J}(S)} = \dim S$$

Demostración.

Como antes, considerando S como conjunto prealgebraico, su dimensión coincide con la del mínimo conjunto algebraico S' que lo contiene. Esto es

$$\dim S = \dim S' = \dim R[X] / \mathfrak{J}(S) \cap R[X]$$

Pero

$$\dim \frac{N(\Omega)[[f_1 | \dots | f_r]]}{\mathfrak{J}(S)} = \dim \frac{N(\Omega)}{\mathfrak{J}(S) \cap N(\Omega)}$$

Dado que, como en la proposición anterior

$$\dim \frac{N(\Omega)}{\mathfrak{J}(S) \cap N(\Omega)} = \dim \frac{R[X]}{\mathfrak{J}(S) \cap N(\Omega) \cap R[X]}$$

el corolario se sigue de las diversas igualdades expuestas.

c.q.d.

6.14.

En este y en el párrafo anterior hemos expuesto algunas de las anomalías de los conjuntos algebraicos reales; y cómo su consideración como conjuntos de Nash (semialgebraicos por tanto) permitía su estudio.

Estas anomalías tienen, en general, una doble procedencia: unas devienen del insatisfactorio paso de lo global a lo local (ej: el origen en $x^2 + y^2 - x^3 = 0$, o los puntos del semieje z negativo en $x^2 - zy^2 = 0$).

Otras proceden de la falta de reflejo algebraico local de determinados hechos (ej.: el origen en $y^3 + 2yx^2 - x^4 = 0$).

Las anomalías del primer tipo aparecen, entre otros, en trabajos de Tognoli [13] y Efroymsen [40].

Cerramos este párrafo comentando y ampliando lo allí expuesto a la luz de los resultados aquí obtenidos.

6.15. Definición.

Sea \mathcal{C} un ideal de un anillo arbitrario A . Diremos que \mathcal{C} es un ideal real si

$$\sum_{i=1}^r f_i^2 \in \mathcal{C} \implies \forall i, f_i \in \mathcal{C}$$

6.16. Definición. [40]

Sea V conjunto algebraico de R^n ; $\mathcal{C} \subseteq R[x_1 \dots x_n]$ su ideal; $p \in V$. Diremos que V es localmente real en p si se verifican algunas de las siguientes condiciones equivalentes:

- i) $V \in \mathcal{A}$, $g \in R[X_1 \dots X_n]$ con $g(q) = 0$ si $\|q-p\| < \epsilon$ y $q \in V$; entonces $g \in \mathcal{A}$
- ii) $R[[X_1-p_1, \dots, X_n-p_n]]$ es una intersección de ideales primos, alguno de los cuales es real.
- iii) p es límite de puntos regulares de V en sentido algebraico.
(En [40] aparecen otras condiciones equivalentes).

6.17. Definición. [13]

Con la notación de 6.16, $p \in V$ es un punto casi-regular de V si se verifican alguna de las dos condiciones equivalentes siguientes:

- i) $\mathfrak{J}(V) \mathcal{O}_n^p = \mathfrak{J}_a(V_p)$
- ii) La complejificación analítica del germen V_p coincide con el germen en p de la complejificación algebraica de V . (c.f. [6] [13] [15])

6.18. Proposición.

$p \in V$ es casi-regular sii $\mathfrak{J}(V)R[[X_1-p_1, \dots, X_n-p_n]]$ es real.

Demostración.

Si $p \in V$ es casi regular un resultado de Malgrange [41] muestra que la extensión del ideal $\mathfrak{J}(V)$ al anillo de series formales coincide con el ideal de las series formales nulas sobre V_p (c.f. [39], [42], [13]).

El correspondiente teorema de los ceros debido a

Merrien [39] muestra que dicho ideal es real (se trata, en todo caso, del sentido trivial de la doble implicación de este teorema)

Recíprocamente, supongamos que

$$\mathfrak{J}(V)_R[[X_1^{-p_1}, \dots, X_n^{-p_n}]] ,$$

es real. El teorema de Merrien asegura que este ideal es el de las series formales nulas sobre V_p .

Por platitud $\mathfrak{J}(V)O_n^P$ coincide con la contracción a O_n^P del ideal $\mathfrak{J}(V)_R[[X_1^{-p_1}, \dots, X_n^{-p_n}]]$. Basta entonces demostrar que si $\mathfrak{a} = (g_1 \dots g_s)O_n^P$ es real al ser extendido al anillo de series formales, entonces \mathfrak{a} es real en O_n^P . Supongamos que $f_1, \dots, f_r \in O_n^P$ verifican $\sum_{i=1}^r f_i^2 \in \mathfrak{a} O_n^P$; existirán por hipótesis series formales λ_j^i tales que para cada $i=1 \dots r$

$$f_i = \sum_{j=1}^s \lambda_j^i g_j$$

Así pues f_i pertenece a la contracción a O_n^P de la extensión de \mathfrak{a} ; y por platitud se sigue que $f_i \in \mathfrak{a} O_n^P$. Concluimos de estas consideraciones que $\mathfrak{J}(V)O_n^P$ es real. El teorema de los ceros de Risler [18] asegura entonces que

$$\mathfrak{J}(V)O_n^P = \mathfrak{J}_a(V_p)$$

c.q.d.

6.19.

Observemos que el origen de coordenadas en la curva

$$y^3 + 2yx^2 - x^4 = 0$$

es localmente real, pero no es casi-regular.

Otro tanto pasa en

$$y^4 - x^4 + x^5 = 0 \quad ([40])$$

Por otra parte los puntos del semieje z negativo en la superficie $x^2 - zy^2 = 0$ no son localmente reales; y por tanto no son cuasi regulares. Este hecho no es debido simplemente a la falta de coherencia; $x^2 + y^2 - x^3 = 0$ es una curva coherente pero en la que el origen no es localmente real.

6.20.

Las definiciones 6.16 y 6.17 relacionan el ideal de todo el conjunto algebraico con el comportamiento de este en un entorno de un punto. Si localizamos esta situación observamos, como es natural, que 6.16 es irrelevante en dicho caso.

En efecto, se tiene:

Proposición.

Sea V_p el germen de un conjunto algebraico, $\mathcal{J}(V_p)$ su ideal en $R[X]_p$. Entonces

$$\mathcal{J}(V_p)_R[[X_1^{-p_1}, \dots, X_n^{-p_n}]]$$

es una intersección de ideales primos, alguno de los cuales es real.

Demostración.

El Lema 5.18 asocia de manera canónica a V_p un conjunto algebraico V , cuyo germen en p es V_p , y cuyo ideal $\mathcal{J}(V)$ en $R[X]$ extendido a $R[X]_p$ coincide con $\mathcal{J}(V_p)$. Por la construcción de V , p es localmente real respecto de V (c.f. 6.16. i)).

Así pues

$$\mathcal{J}(V)_R[[X_1^{-p_1}, \dots, X_n^{-p_n}]] = \mathcal{J}(V_p)_R[[X_1^{-p_1}, \dots, X_n^{-p_n}]] \quad ,$$

es intersección de ideales primos, alguno de los cuales es real (6.16. ii)). c.q.d.

La localización de 6.17 daría lugar a la siguiente

6.21. Definición.

Sea $p \in V$, conjunto algebraico. Diremos que p es localmente casi regular si se verifican alguna de las siguientes condiciones equivalentes (equivalencia que se demuestra siguiendo "verbatim" la demostración de Lema 1 de [13]).

i) $J(V_p) \otimes_n^p = J_a(V_p)$

ii) Las complejificaciones analítica y algebraica de V_p coinciden.

6.22. Proposición.

$p \in V$ es localmente casi regular sii

$J(V_p)R[[X_1-p_1, \dots, X_n-p_n]]$ es real.

Demostración.

Como en 6.20, usando el Lema 5.18, queda reducido a la proposición 6.18.

6.23. Observación.

Si $p \in V$ es casi regular y por tanto localmente real. Entonces $J(V)R[X]_p = J(V_p)$; se sigue que $p \in V$ es localmente casi regular.

El recíproco no es cierto; el origen en $x^2 + y^2 - x^3 = 0$ es localmente casi regular, pero no es casi regular. Otro tanto

ocurre con los puntos del semieje z negativo en la superficie $x^2 - zy^2 = 0$. Si un punto es localmente real, coinciden las no ciones de casi regular y localmente casi regular. Así el origen en $y^3 + 2yx^2 - x^4 = 0$ no es localmente casi regular.

En 5.21 hemos enunciado una proposición de Bruhat-Whitney para conjuntos c-analíticos. El objetivo de este párrafo es presentar la versión preanalítica (prealgebraica, preanálitica) de dicha proposición; es decir: la existencia de un conjunto del mismo tipo, que contenga los puntos singulares de un conjunto dado y cuya dimensión sea más pequeña que la de dicho conjunto.

7.1. Proposición.

Sea $S \subseteq \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto preanalítico (respectivamente, prealgebraico); de la forma

$$S = \{x \in \Omega \mid g(x) = 0, f_1(x) \geq 0, \dots, f_r(x) \geq 0\}$$

siendo g, f_1, \dots, f_r funciones analíticas en Ω (respectivamente polinomios) tal que $\{g=0\} = T$ es el mínimo conjunto c-analítico que contiene a S (respectivamente, mínimo conjunto algebraico). Sea d la dimensión de S y V_d el conjunto de los puntos regulares de S de dimensión d ; denotemos $\text{Sing } S = S - V_d$.

Existe un conjunto preanalítico (prealgebraico) S' tal que

$$S \supseteq S' \supseteq \text{Sing } S \quad \text{y} \quad \dim S' \leq \dim S$$

Demostración.

Sabemos, por 5.20 y 5.21, que existe un subconjunto T' de T , c-analítico (algebraico) de dimensión estrictamente menor que $\dim T$, tal que $T - T'$ son puntos regulares de T de dimensión máxima.

Como hemos visto en 5.23

$$\dim T = \dim S$$

y por tanto

$$\dim T' < \dim T \leq \dim S .$$

$J_0 = T' \cap S$ es un conjunto preanalítico (prealgebraico) de dimen-

si3n menor que $\dim S$. Sea $p \in S$, tal que $p \in \text{Sing } S$, $p \notin T' \cap S$; es decir: p es no regular de dimensi3n m1xima en S , y regular de dimensi3n m1xima en T .

Entonces en p se anula alguna funci3n del entramado (pues en otro caso los g3rmenes S_p y T_p coincidir1an, puesto que en un entorno de p tendr1amos $f_1 > 0, \dots, f_r > 0$); supon- gamos que $f_1(p) = 0 \dots f_m(p) = 0$, y $f_{m+1}(p) > 0, \dots, f_r(p) > 0$.

Sea $J^{(1, \dots, m)}$ el conjunto c-anal1tico (algebraico) de- finido por

$$\{f_1(x) = 0, \dots, f_m(x) = 0, \quad g(x) = 0\}.$$

Si $J_p^{(1, \dots, m)}$ fuera un germen regular de dimensi3n $\dim S$, puesto que

$$J_p^{(1, \dots, m)} \subseteq T_p,$$

por hip3tesis obtendr1amos (c.f. [6])

$$T_p = J_p^{(1, \dots, m)}$$

Pero $J_p^{(1, \dots, m)} \subseteq S_p$; luego $T_p = S_p$. Absurdo.

Aplicando de nuevo 5.20 3 5.21 deducimos que p est1 contenido en un subconjunto c-anal1tico (respectivamente, algebrai- co) de S de dimensi3n menor que $\dim S$, que denotaremos $J_{(1, \dots, m)}$

En general, dado $p \in \text{Sing } S$ y $p \notin T' \cap S$, construimos de la manera anterior el conjunto $J_{(\ell_1, \dots, \ell_s)}$ siendo $f_{\ell_1} \dots f_{\ell_s}$ las funciones del entramado que se anulan sobre p . Obviamente el n1mero de estos conjuntos es finito.

La proposici3n se sigue con

$$S' = \bigcup J_{(\ell_1, \dots, \ell_s)} \cup J_0$$

c.q.d.

7.2. Proposición.

Sea $S \subseteq \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ preanalítico (respectivamente, prealgebraico). Existe un conjunto preanalítico S' (prealgebraico) de dimensión estrictamente menor que $\dim S$ tal que

$$S \supseteq S' \supseteq \text{Sing. } S .$$

Demostración.

Por inducción en el número de funciones del entramado (considerando que un conjunto preanalítico (prealgebraico) definido en un entramado con cero funciones es un conjunto c-analítico (algebraico)).

Supongamos cierta la proposición para conjuntos definidos en entramados con $r-1$ funciones. Sea S definido por medio del entramado $\{f_1 \dots f_r\}$. Según sabemos

$$S = \bigcup_{\ell \in F} V(a_\ell + I_\ell) ,$$

con $V(a_\ell)$ el mínimo conjunto c-analítico (algebraico) que contiene a $V(a_\ell + I_\ell)$. Si $\dim S = d$, $d = \max_{\ell \in F} \{\dim V(a_\ell + I_\ell)\}$. Sea $F' \subseteq F$ tal que $\ell \in F'$ sii $d = \dim V(a_\ell + I_\ell)$. Para cada $p \in \text{Sing. } S$, sea $\{\ell_0 \dots \ell_m\}$ el conjunto de los índices de L tales que

$$p \in V(a_{\ell_0} + I_{\ell_0}) \cap \dots \cap V(a_{\ell_m} + I_{\ell_m})$$

Sea $J_o^p = \bigcap_{0 \leq j \leq m} V(a_{\ell_j} + I_{\ell_j})$. Obviamente, cuando p recorre

$\text{Sing } S$ obtenemos solo un número finito de tales conjuntos.

Tiene sentido por tanto considerar el subconjunto preanalítico (prealgebraico) de S

$$J_o = \bigcup_{p \in \text{Sing } S} J_o^p$$

$$\dim J_o^p < d$$

Es claro que $\dim J_0 < d$.

Por otra parte, si $\ell \in F'$, denominaremos J_ℓ el conjunto preanalítico (prealgebraico) contenido en $\sqrt{(a_\ell + I_\ell)}$ garantizado por la proposición anterior tal que $\text{Sing}(\sqrt{(a_\ell + I_\ell)}) \subseteq J_\ell \subseteq \sqrt{(a_\ell + I_\ell)}$, y $\dim J_\ell < d$.

Consideremos $p \in \text{Sing } S$, tal que J_0^P tiene $\dim d$ y tal que p es regular de J_0^P de dimensión d y que, si

$$J_0^P = \bigcap_{0 \leq j \leq m} \sqrt{(a_{\ell_j} + I_{\ell_j})},$$

p es regular en $\sqrt{(a_{\ell_j} + I_{\ell_j})}$ $1 \leq j \leq m$. de dimensión d .

Tomando gérmenes en p , puesto que

$$(J_0^P)_p \subseteq [\sqrt{(a_{\ell_j} + I_{\ell_j})}]_p \quad 0 \leq j \leq m,$$

concluimos que

$$(J_0^P)_p = [\sqrt{(a_{\ell_j} + I_{\ell_j})}]_p \quad 1 \leq j \leq m$$

y por tanto

$$S_p = \bigcup_{0 \leq j \leq m} [\sqrt{(a_{\ell_j} + I_{\ell_j})}]_p = [\sqrt{(a_{\ell_j} + I_{\ell_j})}]_p, \quad 1 \leq j \leq m$$

Así S_p sería regular de dimensión d , contra hipótesis. Se sigue que si $p \in \text{Sing } S$, con J_0^P de dimensión d y p regular de $\dim d$ en cada $\sqrt{(a_{\ell_j} + I_{\ell_j})}$ $1 \leq j \leq m$, entonces

$(J_0^P)_p$ no tiene dimensión d ; esto es, p es singular de J_0^P .

Ahora bien, la proposición que intentamos demostrar es cierta para J_0^P . En efecto, si $m=0$ se trata de la proposición anterior; si $m > 0$ J_0^P es un conjunto preanalítico (prealgebraico) definido por un entramado con menos de r funciones, puesto que podemos

prescindir de aquellas cuyas desigualdades no aparezcan en el mismo sentido en todos los ideales I_{ℓ_j} , $1 \leq j \leq m$.

Sea pues, $J'_0{}^P$ el conjunto preanalítico (prealgebraico) tal que

$$\text{Sing } J_0^P \leq J'_0{}^P \leq J_0^P \quad \text{y } \dim J'_0{}^P < d .$$

Obviamente podemos considerar

$$S' = J_0 \cup J_{\ell} \cup_{\dim J_0^P = d} J'_0{}^P$$

es claro que

$$\dim S' < d \quad \text{y} \quad S \supseteq S' \supseteq \text{Sing } S .$$

c.q.d.

7.3. Corolario.

Sea S conjunto prenáshico definido en un abierto acotado semialgebraico. Sea $\text{Sing } S$ el conjunto de puntos no regulares de dimensión máxima. Existe un conjunto prenáshico S' , tal que

$$S \supseteq S' \supseteq \text{Sing } S \quad \text{y}$$

$$\dim S > \dim S'$$

Demostración.

Si S es prenáshico en un abierto semialgebraico acotado, S es prealgebraico; y sabemos que su dimensión algebraica y de Nash coinciden.

Sea Sing_p^S el conjunto de los puntos no regulares (en sentido algebraico) de dimensión máxima. Sabemos entonces que

$$\text{Sing}_p^S \supseteq \text{Sing } S .$$

Aplicando 7.2 a S y a Sing_p^S , deducimos la existencia de un

conjunto prealgebraico S' de dimensión estrictamente menor que $\dim S$ y tal que $S' \supseteq \text{Sing}_P^S$. c.q.d.

7.4. Corolario.

Sea S preanalítico (prealgebraico, prenáshico en un abierto semialgebraico acotado). Existe una "filtración lisa" de S ; esto es, una familia finita $\{S_i\}_{i=1 \dots s}$, de conjuntos preanalíticos (prealgebraicos, prenáshicos) tales que

- i) $S_1 = S, S_i \supseteq S_{i+1}$
- ii) $\dim S_i > \dim S_{i+1}$
- iii) $S_i - S_{i+1}$ es un conjunto de puntos regulares de dimensión $\dim S_i$.

Demostración.

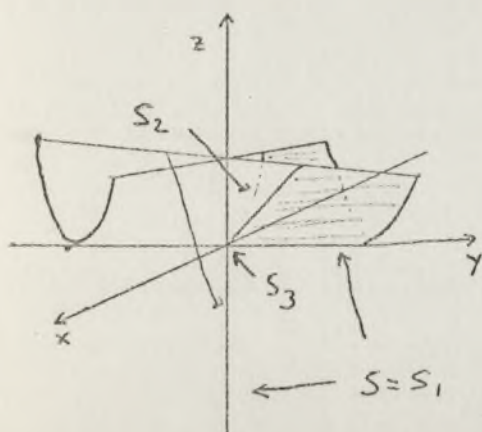
Inductivamente, supuesto construido S_i, S_{i+1} será un subconjunto de S_i preanalítico (prealgebraico, prenáshico) tal que $S_i \supseteq S_{i+1} \supseteq \text{Sing } S_i$; y tal que $\dim S_i > \dim S_{i+1}$.

Dicho conjunto existe según hemos visto en las proposiciones anteriores.

c.q.d.

Ejemplo.

Sea $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 - zy^2 = 0, y-z \geq 0\}$



$$S_1 = S$$

$$S_2 = \left\{ \begin{array}{l} x^2 - zy^2 = 0 \\ y = z \end{array} \right\} \cup \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \\ z \leq 0 \end{array} \right\}$$

$$S_3 = \{x=0 \quad y=0 \quad z=0\}$$

En este párrafo daremos algunos resultados algebraicos sobre la regularidad de un germen preanalítico (prenáshico, prealgebraico), introduciendo los conceptos de irreducibilidad y coherencia.

8.1.

En lo sucesivo A_n designará el anillo de gérmenes en el origen de R^n de funciones analíticas, de Nash, o racionales; f_1, \dots, f_r serán en general elementos de A_n .

La observación 5.22 puede extenderse sin dificultad al caso de gérmenes: si S_0 es un germen preanalítico (respectivamente prenáshico o prealgebraico) dado por el anillo valorado $\tilde{A}_n = A_n[|f_1| \dots |f_r|]$ e $\tilde{J}(S_0)$ es su ideal en \tilde{A}_n , podemos escribir

$$\tilde{J}(S_0) = \bigcap_{j \in F} (a_j + I_j)$$

donde I_j , $j \in F$ es un ideal amplio de \tilde{A}_n , $a_j \in A_n$,

$\tilde{J}V(a_j + I_j) = (a_j + I_j)$ $j \in F$, y a_j es el ideal del mínimo germen de conjunto analítico (náshico, algebraico) que contiene a $V(a_j + I_j)$.

La expresión obtenida puede no ser reducida; esto es:

$$(a_{j_0} + I_{j_0}) \supseteq \bigcap_{\substack{j \in F \\ j \neq j_0}} (a_j + I_j) \quad \text{para cierto } j_0 \in F.$$

Consideraremos expresiones reducidas; supongamos que

$$\tilde{J}(S_0) = \bigcap_{j \in F'} (a_j + I_j)$$

es una de ellas.

Observemos que debido a su construcción se verifica que

para cada $j_0 \in F'$

$$\sqrt{(a_{j_0} + I_{j_0})} \not\subseteq \bigcap_{\substack{j \in F' \\ j \neq j_0}} \sqrt{(a_j + I_j)}$$

Como consecuencia tenemos el siguiente

8.2. Lema.

Dado $j_0 \in F'$, para todo entorno suficientemente pequeño del origen de coordenadas de R^n , existen puntos $p \in V_{j_0}$ tales que $(V_{j_0})_p = S_p$, siendo S, V_{j_0} representantes de S_0 y $\sqrt{(a_{j_0} + I_{j_0})}$, respectivamente en dicho entorno; y $(V_{j_0})_p, S_p$ gérmenes en p .

Demostración.

Puesto que $S_0 = \bigcup_{j \in F'} \sqrt{(a_j + I_j)}$ y $V_{j_0} \in F'$,

$$\sqrt{(a_{j_0} + I_{j_0})} \not\subseteq \bigcap_{\substack{j \in F' \\ j \neq j_0}} \sqrt{(a_j + I_j)},$$

se sigue que para todo entorno suficientemente pequeño, tomando representantes, será:

$$S = \bigcup_{j \in F'} V_j \quad \text{y} \quad V_{j_0} \not\subseteq \bigcup_{\substack{j \in F' \\ j \neq j_0}} V_j$$

puesto que se trata de conjuntos cerrados, si $p \in V_{j_0}$ y $p \notin \bigcup_{\substack{j \in F' \\ j \neq j_0}} V_j$, se sigue que tomando gérmenes en p

$$S_p = (V_{j_0})_p$$

c.q.d.

8.3. Proposición.

Sea S_0 germen preanalítico regular (respectivamente, prenáshico, prealgebraico) definido de forma reducida en el álgebra valorada \tilde{A}_n , por el ideal $\tilde{J}(S_0) = \bigcap_{j \in F'} (a_j + I_j)$. Entonces

- i) Existe un ideal $\rho \subseteq A_n$ tal que $\forall j \in F' \quad a_j \in \rho$
- ii) A_n/ρ es un anillo local regular.

Demostración.

La haremos en el caso preanalítico; de manera análoga resulta en los otros casos.

Si S_0 es preanalítico regular entonces es un germen analítico regular; por tanto existe ρ ideal primo de A_n tal que $\rho = J(S_0)$, y A_n/ρ es local regular. Ahora $J(S_0)$ (ideal de S_0 en O_n) es la contracción de $\tilde{J}(S_0)$ en A_n ; se sigue que $\rho = \bigcap_{j \in F'} a_j$. En general $V(\rho) \supseteq V(a_j) \quad j \in F'$. Veremos que $V(\rho) = \bigcap_{j \in F'} V(a_j)$, de donde concluiremos i). Sea $j_0 \in F'$; supongamos que $V(\rho) \neq V(a_{j_0})$. Entonces $\dim V(\rho) > \dim V(a_{j_0})$. Por otra parte, por regularidad, para todo punto p de un entorno suficientemente pequeño del origen se verifica (tomando representantes)

$$\dim S_p = \dim S_0 = \dim V(\rho)$$

Por otra parte, como consecuencia del Lema 8.2, podemos encontrar un punto p próximo a o donde además se tenga

$$p \in S, \quad S_p = [V(a_{j_0})]_p \cap [V(I_{j_0})]_p$$

y por tanto $S_p = [V(a_{j_0})]_p$.

Obtendríamos

$$\dim S_0 = \dim S_p > \dim V(a_{j_0}) > \dim [V(a_{j_0})]_p$$

y $S_p = [V(a_{j_0})]_p$. Absurdo.

Concluimos que $V(a_{j_0}) = S_0$ c.q.d.

8.4. Proposición.

Sea S_0 un germen preanalítico (prenáshico, prealgebraico) definido en \hat{A}_n por $\tilde{J}(S_0) = \bigcap_{j \in F'} (a_j + I_j)$ de forma reducida.

Si existe un ideal a de A_n tal que

i) $a_j = a \quad \forall j \in F'$

ii) $\bigcap_{j \in F'} (a + I_j) \supseteq \bigcap_{j \in F'} I_j$

Entonces S_0 es analítico (náshico, algebraico). Si además A_n/a es regular, S_0 es regular.

Demostración.

La condición i) indica que

$$S_0 = V(\tilde{J}(S_0)) = \bigcup_{j \in F'} [V(a) \cap V(I_j)] = V(a) \cap \left[\bigcup_{j \in F'} V(I_j) \right]$$

Pero $V(a) \cap \left(\bigcup_{j \in F'} V(I_j) \right) \subseteq \bigcup_{j \in F'} V(I_j)$, por la condición ii).

Puesto que $\bigcup_{j \in F'} V(I_j) = (R^n)_0$, siendo S_0 germen en el origen de R^n , concluimos que

$$S_0 = \mathcal{V}(a)$$

si A_n/a es regular, como $a = \mathcal{J}(\mathcal{V}(a))$, entonces S_0 es regular.

c.q.d.

8.5. Corolario.

Sea S_0 un germen preanalítico (prenáshico, prealgebraico) tal que $\tilde{\mathcal{H}}(S_0) = \bigcap_{j \in F} (a_j + I_j)$ sea ya una forma reducida.

Entonces son equivalentes las siguientes proposiciones:

- i) S_0 es regular.
- ii) Existe $\rho \subseteq A_n$ tal que
 - ii-1) $a_j = \rho \quad \forall j \in F$
 - ii-2) A_n/ρ es regular.

Demostración.

Basta aplicar 8.3 y 8.4 teniendo en cuenta que la condición ii) de esta última proposición se verifica ya que

$$\bigcap_{j \in F} I_j = 0 \quad \text{c.q.d.}$$

8.6. Definición.

Sea S_0 un germen preanalítico (prenáshico, prealgebraico). Diremos que S_0 es irreducible si lo es el mínimo germen S'_0 analítico (náshico, algebraico) que lo contiene. (Recordamos que un germen analítico (náshico, algebraico) es irreducible si no es unión de gérmenes analíticos (náshicos, algebraicos) propiamente contenidos en él. O equivalentemente, si su ideal en el anillo de gérmenes de funciones analíticas (náshicas, racionales) es primo.

8.7.

Se deduce inmediatamente de la definición que la condición

algebraica necesaria y suficiente para que un germen S_0 dado por el ideal $\tilde{S}(S_0)$ en el algebra valorada \tilde{A}_n , sea irreducible es que el ideal contraído $\tilde{S}(S_0) \cap A_n$ sea primo.

Así, si $\tilde{S}(S_0)$ es primo en \tilde{A}_n , se sigue que S_0 es irreducible. El recíproco no es cierto; en efecto si consideramos el germen en el origen de R^2 del conjunto

$$\{x \geq 0\} \cup \{y \geq 0\}$$

observaremos que es irreducible (por ser R^2 el mínimo conjunto analítico que lo contiene); sin embargo no puede venir dado por ningún ideal primo en ningún algebra valorada, puesto que no es simple (def. 2.10).

Dado que cualquier algebra local valorada \tilde{A}_n es noetheriana podemos encontrar para cada germen preanalítico (prenáshico, prealgebraico) una descomposición como unión de gérmenes irreducibles a través de la expresión del ideal del germen en intersección de ideales primos. Esta descomposición depende del algebra valorada donde esté definido el germen. Llamaremos descomposición canónica a la obtenida mediante la siguiente

8.8. Proposición.

Sea S_0 germen preanalítico (prenáshico, prealgebraico), S'_0 el mínimo germen analítico (náshico, algebraico) que contiene a S_0 . Sea $S'_0 = \bigcup_{i=1}^k E_0^i$ una descomposición irredundante de S'_0 en unión de gérmenes irreducibles analíticos (náshicos, algebraicos). Entonces

$$S_0 = S'_0 \cap S_0 = \bigcup_{i=1}^k (E_0^i \cap S_0)$$

es una descomposición irredundante de S_0 en gérmenes preanalíticos (prenáshicos, prealgebraicos) irreducibles.

Demostración.

La haremos en el caso preanalítico.

Es obvio que la descomposición señalada es irredundante; en efecto, si para cierto $1 \leq i_0 \leq k$, se verificase

$$E_e^{i_0} \cap S_0 \subseteq \bigcup_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^k (E_0^i \cap S_0)$$

entonces

$$S_0 \subseteq \bigcup_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^k E_0^i \not\subseteq S'_0$$

por la irredundancia de la descomposición de S'_0 . Así pues S'_0 no sería el mínimo germe analítico que contiene a S_0 . Absurdo.

Veamos que para cada $1 \leq i \leq k$, $E_0^i \cap S_0$ es un germe preanalítico irreducible; comprobando que E_0^i es precisamente el mínimo germe analítico que contiene a $E_0^i \cap S_0$.

Supongamos que fuese V_0^i . Entonces

$$V_0^i \subseteq E_0^i \quad 1 \leq i \leq k$$

y por tanto

$$S_0 = \bigcup_{i=1}^k (E_0^i \cap S_0) \subseteq \bigcup_{i=1}^k V_0^i \subseteq \bigcup_{i=1}^k E_0^i = S'_0.$$

Así pues

$$\bigcup_{i=1}^k V_0^i = S'_0 = \bigcup_{i=1}^k E_0^i$$

Sea $1 \leq i_0 \leq k$; entonces por la irreducibilidad existe $1 \leq i'_0 \leq k$ tal que

$$E_0^{i_0} \subseteq V_0^{i'_0}$$

pero como

$$\begin{aligned} V_0^{i'_0} &\subseteq E_0^{i'_0} && \text{se sigue que} \\ E_0^{i_0} &\subseteq E_0^{i'_0} \end{aligned}$$

Dada la irredundancia de la descomposición de S'_0 tendremos $i_0 = i'_0$ y por tanto

$$E_0^{i_0} = V_0^{i_0}$$

c.q.d.

8.9.

Podemos definir y estudiar análogamente el concepto de irreducibilidad en el caso global. En el caso prealgebraico todo lo expuesto se extiende "mutatis mutandis" dado que el anillo de polinomios es noetheriano. La misma consideración se aplica al caso preanálítico supuesto que el abierto de definición es semialgebraico.

El caso preanalítico presenta algunas diferencias. Si consideramos conjuntos definidos en un abierto de Ω de \mathbb{R}^n y A_Ω el anillo de funciones analíticas definidas en Ω , este anillo no es noetheriano. Sin embargo se sigue verificando la siguiente

Proposición.

Sea S un conjunto c-analítico de Ω . Entonces S no es unión finita de subconjuntos c-analíticos propios sii su ideal $\mathcal{J}(S)$ en A_Ω es primo.

Demostración.

Si $S = S' \cup S''$, $S' \not\subseteq S$, $S'' \not\subseteq S$, entonces

$$\mathcal{J}(S) = \mathcal{J}(S') \cap \mathcal{J}(S'') \text{ e } \mathcal{J}(S') \not\subseteq \mathcal{J}(S),$$

$\mathcal{J}(S'') \supseteq \mathcal{J}(S)$; así $\mathcal{J}(S)$ no es primo.

Recíprocamente supongamos que $\mathcal{J}(S)$ no es primo; sean $f, g \in A_\Omega$, tales que $f \notin \mathcal{J}(S)$, $g \notin \mathcal{J}(S)$ y $f \cdot g \in \mathcal{J}(S)$. Entonces

$$V(\mathcal{J}(S) + (f)) \cup V(\mathcal{J}(S) + (g)) = S$$

y por tanto S es unión de subconjuntos c-analíticos propios.

c.q.d.

Para poder extender 8.7 al caso global debemos señalar que si S es preanalítico en Ω , y S' el mínimo c -analítico que lo contiene, $\mathcal{J}(S')$ coincide con la contracción de $\tilde{\mathcal{J}}(S)$, ideal de S en una cierta algebra valorada, aA_Ω .

En efecto, si $f \in \tilde{\mathcal{J}}(S) \cap A_\Omega$, $V(f) \supseteq S$ y $V(f)$ es c -analítico. Así $V(f) \supseteq S'$ y por tanto $f \in \mathcal{J}(S')$.

Notemos por último que no existe una descomposición finita de un conjunto c -analítico en unión de irreducibles, sino que, en general, la descomposición es numerable [6]. Con esta salvedad podemos obtener en el caso global analítico una análoga a la proposición 8.8.

8.10.

Un germen prealgebraico irreducible no tiene por qué ser irreducible como germen prenáshico o preanalítico. Por ejemplo el germen el origen de $x^2 - y^2 + x^3 = 0$ es algebraicamente irreducible, pero unión de dos gérmenes náshicos.

Veremos que no ocurre otro tanto en el caso prenáshico.

Proposición.

Sea S_0 germen prenáshico. Entonces S_0 es irreducible como germen prenáshico sii es irreducible como germen preanalítico. Sus componentes en la descomposición canónica coinciden en ambos casos.

Demostración.

Supongamos que S_0 es un germen prenáshico irreducible como tal. Sea S'_N el mínimo germen náshico que lo contiene (y que será por tanto náshicamente irreducible); sea S'_A el mínimo germen analítico que lo contiene. En general $S'_A \subseteq S'_N$. Veremos que $S'_A = S'_N$.

En efecto, según hemos visto en el párrafo § 6,

$$\dim_a S'_A = \dim_a S_0 = \dim_N S_0 = \dim_N S'_N = \dim_a S'_N$$

Pero, por 6.8 S'_N es analíticamente irreducible. Se sigue [6] que $S'_A = S'_N$, y por tanto S_0 es analíticamente irreducible.

Sea S_0 un germen prenáshico arbitrario.

Sea $S_0 = \bigcup_{i=1}^k S_0^i$ la descomposición canónica de S_0 en unión de gérmenes prenáshicos irreducibles; entonces S_0^i designará el mínimo germen de conjunto náshico que contiene a S_0^i ; y como hemos demostrado S_0^i es también el mínimo germen analítico que contiene a S_0^i . Se comprueba inmediatamente que $\bigcup_{i=1}^k S_0^i$ es el mínimo germen náshico (y analítico) que contiene a S_0 . Así $S_0 = \bigcup_{i=1}^k S_0^i$ es también la descomposición canónica de S_0 en germen preanalíticos irreducibles.

c.q.d.

8.11. Definición.

Sean E_0, S_0 dos gérmenes de conjuntos en el origen de R^n , tales que $E_0 \subseteq S_0$. Diremos que S_0 es E_0 -analítico coherente (náshico-coherente, algebraico-coherente) si existen: un entorno V de \underline{o} , las funciones analíticas $f_1 \dots f_m$ en V (náshicas, racionales) y los conjuntos S y E , representantes de S_0 y E_0 en V , respectivamente, tales que se verifique

$$\forall p \in E, \quad \mathcal{J}(S_p) = (f_{1_p}, \dots, f_{m_p}) \mathcal{A}_n^p$$

siendo S_p, f_{i_p} los gérmenes de S y f_i en p , \mathcal{A}_n^p el anillo de gérmenes de funciones analíticas (náshicas, racionales) en p , e $\mathcal{J}(S_p)$ el ideal de S_p en \mathcal{A}_n^p .

8.12. Observación.

Si S_0 es E_0 -coherente, ya sea analítico, náshico o algebraico-coherente, las condiciones descritas en la definición anterior se verifican para todo entorno suficientemente pequeño de \underline{o} .

Por otra parte hacemos notar que las funciones racionales que intervienen en la definición anterior pueden sustituirse por polinomios, de manera equivalente.

8.13. Definición.

Sea S_0 germen preanalítico (prenáshico, prealgebraico). Diremos que S_0 es analítico coherente (náshico coherente, algebraico coherente) o simplemente coherente, si de acuerdo con la definición anterior S_0 es S_0 -coherente.

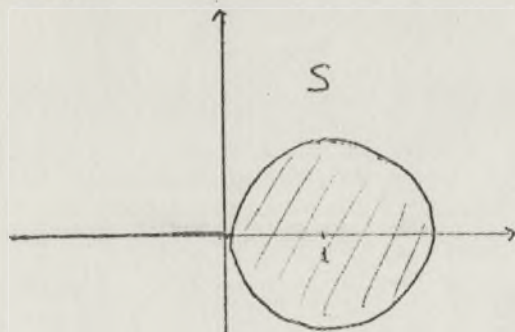
8.14. Nota.

Sea S'_0 el mínimo germen analítico (náshico, algebraico) que contiene a S_0 . Entonces si S_0 es coherente, S'_0 es S_0 -coherente. La recíproca no es cierta: en efecto es necesario además que, tomando representantes S' y S en un cierto entorno de o , para cada $p \in S$, S'_p sea el mínimo germen analítico (náshico, algebraico) que contenga a S_p , como muestran los siguientes ejemplos:

a) Sea S_0 el germen en R^2 del conjunto

$$\{y=0 \quad x \leq 0\} \cup \{(x-1)^2 + y^2 \leq 1\}$$

Entonces S'_0 es el germen de R^2 , que es obviamente coherente como conjunto analítico t por tanto S_0 -coherente. Pero sobre los puntos del semieje x negativo el mínimo conjunto analítico que contiene al germen de S en dicho punto es $\{y=0\}$. Así pues S_0 no es coherente.



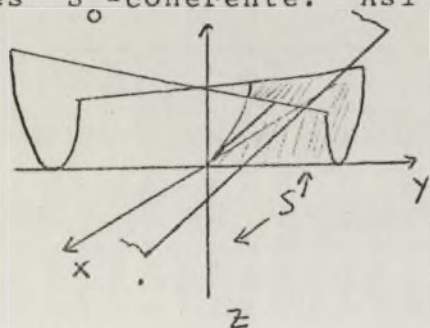
b) Sea S_0 el germen en el origen de \mathbb{R}^3 del conjunto

$$\{x^2 - zy^2 = 0, y - z \geq 0\}$$

S'_0 es el germen de ecuaciones

$$\{x^2 - zy^2 = 0\} .$$

Sobre los puntos del semieje z negativo (que están en S_0) S'_0 no es S_0 -coherente. Así pues S_0 no es coherente.

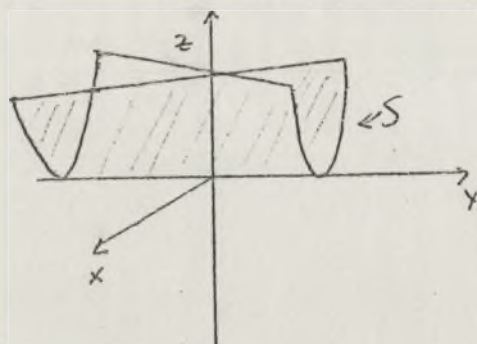


c) Sea S_0 el germen en el origen de \mathbb{R}^3 del conjunto

$$\{x^2 - zy^2 = 0, z \geq 0\}$$

S'_0 tiene como ecuación $\{x^2 - zy^2 = 0\}$

S'_0 es $S_0 - S_0$ -coherente. S_0 es coherente.



8.15. Nota.

Se deduce de una observación de Tognoli-Lazzeri en [15] y de la demostración de la proyección 8.10 que para un germen de conjunto prenáshico, el ser náshico-coherente es equivalente a ser analítico coherente.

8.16. Definición.

Sea S conjunto preanalítico (prenáshico, prealgebraico); $p \in S$ es un punto coherente si S_p es un germen coherente.

8.17. Proposición.

Sea S conjunto preanalítico (prenáshico, prealgebraico). El conjunto de los puntos coherentes de S forma un subconjunto abierto y denso de S .

Demostración.

Como 8.11, 8.13 y 8.16 son definiciones de carácter local es inmediato observar que los puntos coherentes de S son un subconjunto abierto.

Por otra parte observamos que los puntos regulares de S son coherentes. Dada la densidad de los puntos regulares, concluimos "a fortiori" la densidad de los puntos de coherencia.

c.q.d.

8.18.

Para el estudio de las propiedades de los gérmenes coherentes debemos desarrollar una serie de resultados técnicos paralelos a los expuestos por Cartan en [23]. En ellos es fundamental el concepto de complejificaciones de un germen real (c.f. 6.9), cuyas propiedades pueden verse en [23], [6] para el caso analítico, del cual por analogía se deducen para el caso náshico (c.f. [15]) o algebraico. Los enunciados y demostraciones siguientes se referirán al caso analítico, pero se extienden de manera inmediata a los restantes casos.

En lo sucesivo identificaremos de la manera usual R^n con un subconjunto de C^n . Asimismo, si S_0, E_0 son gérmenes de conjuntos en $\underline{0}$, designaremos por S, E a representantes de dichos gérmenes.

8.19. Proposición.

Sea S_0 germen analítico real, E_0 germen de conjunto

tal que $E_0 \subseteq S_0$. Para que S_0 sea E_0 -coherente es condición necesaria y suficiente que exista un entorno de \underline{o} en \mathbb{R}^n proyección de un entorno en \mathbb{C}^n , y un conjunto analítico complejo B en dicho entorno tal que para todo $f \in E$, B_p sea la complejificación de S_p .

Demostración.

La condición es necesaria. En efecto, si S_0 es E_0 coherente existe un entorno de \underline{o} , y funciones analíticas en dicho entorno $f_1 \dots f_m$ tales que, para cada $f \in E$,

$$\mathcal{J}(S_p) = (f_{1_p}, \dots, f_{m_p}) A_n^p.$$

Sea $\bar{f}_1 \dots \bar{f}_m$ extensiones complejas a un entorno de \underline{o} en \mathbb{C}^n , de $f_1 \dots f_m$. Sea B el conjunto analítico en dicho entorno definido por $\bar{f}_1 = 0, \dots, \bar{f}_m = 0$. Para cada $p \in E$, B_p viene dado por la anulaci3n de $\bar{f}_{1_p}, \dots, \bar{f}_{m_p}$, y es por tanto la complejificaci3n de S_p .

La condici3n es suficiente. En efecto, el haz de ideales asociado a B es coherente. Luego existen funciones holomorfas $g_1 \dots g_m$ en un entorno complejo de \underline{o} tales que para cada $p \in E$ $\mathcal{J}(B_p)$ est3 generado por g_{1_p}, \dots, g_{m_p} . Por ser B_p el complejificado de S_p , las partes real e imaginaria de $g_{1_p} \dots g_{m_p}$ generan $\mathcal{J}(S_p)$. As3 pues las partes real e imaginaria de $g_1 \dots g_m$ son las funciones anal3ticas reales que satisfacen la condici3n de coherencia para S_0 . c.q.d.

8.20. Corolario.

Con la notaci3n de la proposici3n anterior si $\underline{o} \in E_0 \subseteq S_0$, obtenemos la siguiente caracterizaci3n:

Sea B conjunto anal3tico complejo en un entorno comple-

jo de \underline{o} , tal que B_o es la complejificación de S_o . Para que S_o sea E_o coherente es necesario y suficiente que exista un entorno real V de \underline{o} tal que $\forall p \in E \subseteq V$, B_p sea la complejificación de un germen analítico real (esto es: que B_p sea un complejificado).

Demostración.

Si S_o es E_o -coherente, de acuerdo con la proposición anterior, B_p será el complejificado de S_p , para $p \in E$. Así pues la condición es necesaria.

La suficiencia se deduce de la siguiente observación. (c.f. [23]): si B_o es la complejificación de S_o y B_p es un germen complejificado, entonces B_p es la complejificación de S_p . El corolario se sigue como consecuencia de la proposición anterior. c.q.d.

8.21. Corolario.

Sean $\{S_o^j\}_{j=1\dots k}$ gérmenes analíticos, $\{E_o^j\}_{j=1\dots k}$ gérmenes de conjuntos tales que $E_o^j \subseteq S_o^j$ $1 \leq j \leq k$.

Supongamos que para cada j , S_o^j es E_o^j -coherente. Entonces $\bigcup_{j=1}^k S_o^j$ es un germen analítico $\bigcap_{j=1}^k E_o^j$ -coherente.

Demostración.

El corolario se deduce inmediatamente de la proposición 8.19 puesto que la complejificación de una unión de gérmenes analíticos es la unión de las complejificaciones de cada uno de los gérmenes. c.q.d.

8.22. Proposición.

Sea S_o germen analítico, E_o germen de conjuntos tal que $\underline{o} \in E_o \subseteq S_o$. Si $S_o = \bigcup_{j=1}^k S_o^j$ es la descomposición irredun-

dante de S_o en componentes irreducibles se verifica la equivalencia entre las siguientes condiciones:

- i) S_o es E_o -coherente.
- ii) S_o^j es $S_o^j \cap E_o$ -coherente, $1 \leq j \leq k$.

Demostración.

Sea B conjunto analítico complejo definido en un entorno de o , tal que B_o es la complejificación de S_o . Sea $B_o = \bigcup_{j=1}^k B_o^j$ la descomposición de B_o en componentes irreducibles; se verifica que para cada j , B_o^j es la complejificación de S_o^j (c.f. [6], [23]). Tomando representantes en un entorno complejo tendremos $B = \bigcup_{j=1}^k B_j$; sabemos entonces que para p suficientemente próximo a o las componentes irreducibles de B_p son las componentes de B_o^j , $1 \leq j \leq k$.

Supongamos que S_o es E_o -coherente. Si $p \in E$, B_p será un germen complejificado, de acuerdo con el corolario 8.20. En particular si $p \in S^j \cap E$, B_p^j será unión de componentes irreducibles de un germen complejificado y por tanto ([23]) B_p^j será un germen complejificado. Usando de nuevo el corolario 8.20 concluimos que S_o^j es $S_o^j \cap E_o$ -coherente, para cada j .

Recíprocamente admitamos que si $1 \leq j \leq k$, S_o^j es $S_o^j \cap E_o$ -coherente. Sea B^j un conjunto analítico complejo definido en un entorno complejo de o tal que para $p \in S^j \cap E$, B_p^j es el complejificado de S_p^j . Sea $B = \bigcup_{j=1}^k B^j$. Probaremos que si $p \in E$, B_p es un complejificado. En efecto, supongamos que $p \in S^1 \cap \dots \cap S^r$ y $p \notin S^{r+1} \cup \dots \cup S^k$.

Entonces B_p^j es un complejificado, por hipótesis, para $1 \leq j \leq r$; y por otra parte $B_p^j = \emptyset$ para $r < j \leq k$. En efecto, si $B_p^j \neq \emptyset$ para algún $j = r+1 \dots k$, entonces $p \in B^j \cap R^n = S^j$

(puesto que $B_o^j \cap R^n = S_o^j$). Absurdo. Así pues

$$B_j = \bigcup_{j=1}^r B_p^j$$

es un germen complejificado, por ser unión de gérmenes complejificados. c.q.d.

8.23. Proposición.

Sea S_o germen analítico irreducible, E_o germen de conjunto tal que $o \in E_o \subseteq S_o$. Si S_o es E_o -coherente, existe un entorno de o tal que para cada punto $p \in E$ en dicho entorno, todas las componentes irreducibles de S_p tienen dimensión igual a la dimensión de S_o .

Demostración.

Sea B el conjunto analítico complejo definido en un entorno de o tal que para cada $p \in E$, B_p es la complejificación de S_p . Así la complejificación de las componentes irreducibles de S_p serán las componentes irreducibles de B_p , que, de acuerdo con una conocida propiedad de los conjuntos analíticos complejos, tienen todas ellas dimensión igual a la dimensión de B_o (c.f. [6]), puesto que este germen es irreducible. Puesto que la dimensión de un germen analítico real coincide con la de su complejificado concluimos la proposición. c.q.d.

8.24. Nota.

Si $o \notin E_o$, la misma demostración aseguraría la igualdad de las dimensiones de las componentes irreducibles de S_p ; pero no garantizaría que dicha dimensión coincida con $\dim S_o$.

8.25. Proposición.

Sea S_o germen preanalítico, $\{S_o^j\}_{j=1 \dots k}$ las componen

tes irreducibles de S_0 en la descomposición canónica. Son equivalentes:

- i) S_0 es coherente.
- ii) S_0^j es coherente para cada $1 \leq j \leq k$

Demostración.

Consideremos el mínimo germe analítico que contiene a S_0 , que denotaremos S'_0 . Sean $\{S_0^{j'}\}_{j=1 \dots k}$ sus componentes irreducibles. Entonces sabemos que

$$S_0^j = S_0^{j'} \cap S_0$$

y que $S_0^{j'}$ es el mínimo germe analítico que contiene a S_0^j .

Puesto que S_0 es coherente si y sólo si S'_0 es S_0 -coherente y en un entorno de \underline{o} , S'_p es el mínimo germe analítico que contiene a S_p (c.f. 8.14), si suponemos la coherencia de S_0 , la proposición 8.22 garantiza, a partir de la S_0 -coherencia de S'_0 , que para cada j , $S_0^{j'}$ es S_0^j -coherente.

Así pues $S_0^{j'}$ será coherente si demostramos además que en un entorno de \underline{o} S'_p es el mínimo germe analítico que contiene a S_p^j .

Observemos primeramente que la dimensión de $S_0^{j_0'} \cap S_0^{j_1'}$ es estrictamente menor que la dimensión de cada miembro de la intersección; y esto es válido para cualesquiera $j_0 \neq j_1$ tales que $1 \leq j_0 \leq k$, $1 \leq j_1 \leq k$. Así pues, en un entorno de cero suficientemente pequeño se seguirá verificando dicha propiedad en aquellos puntos p donde

$$\dim S'_p{}^{j_0} = \dim S_0^{j_0'} \quad \text{y}$$

$$\dim S'_p{}^{j_1} = \dim S_0^{j_1'}$$

Consideremos un entorno de cero en donde, además, se verifique las

condiciones de la definición de coherencia y la propiedad expresada en 8.23.

Sea p un punto de dicho entorno, y supongamos que $p \in S^j$ $1 \leq j \leq s$, y $p \notin S^j$ $s < j \leq k$. Por coherencia el mínimo germen analítico que contiene a S_p es $S'_p = \bigcup_{j=1}^s S_p^j$.

Si $\{V_p^{j,\ell}\}_{\ell=1 \dots m_j}$ son las componentes irreducibles de S_p^j ,

para $1 \leq j \leq s$, resulta que $S'_p = \bigcup_{j=1}^s \bigcup_{\ell=1}^{m_j} V_p^{j,\ell}$ es una descomposición

irredundante de S'_p en factores irreducibles. En efecto si $V_p^{j_0,\ell_0} \subseteq V_p^{j_1,\ell_1}$ donde forzosamente $j_0 \neq j_1$ entonces

$\dim S'_p^{j_0} \cap S'_p^{j_1} = \dim S'_p^{j_0}$. Absurdo.

Podemos entonces repetir la demostración de la proposición 8.8 resultando que $V_p^{j,\ell}$ es el mínimo germen analítico que contiene a $V_p^{j,\ell} \cap S_p$. Deducimos que S'_p^j es el mínimo germen analítico que contiene $S'_p^j \cap S_p = S_p^j$. De esta manera queda demostrada la primera parte de la proposición.

Supongamos ahora que para cada j , $1 \leq j \leq k$, S_o^j es coherente. Entonces S_o^j es S_o^j -coherente, y por tanto -según 8.22- S'_o es S_o -coherente. Por otra parte en un entorno de o se verifica que S'_p^j es el mínimo germen analítico que contiene a S_p^j . Así pues $S'_p = \bigcup_{j=1}^k S'_p^j$ es el mínimo germen que contiene a $S_p = \bigcup_{j=1}^k S_p^j$. c.q.d.

8.26. Proposición.

Sea S_o germen preanalítico irreducible coherente. Entonces existe un entorno de o donde $\dim S_o = \dim S_p$, para todo punto $p \in S$ en dicho entorno.

Demostración.

Por ser S_o irreducible, el mínimo germe analítico S'_o que lo contiene es irreducible. Si consideramos un entorno de o donde se cumplan las condiciones de coherencia y se verifique además la proposición 8.23 referida a S'_o y a S_o , observamos que si $p \in S$ está en dicho entorno se tiene

$$\dim S_p = \dim S'_p = \dim S'_o = \dim S_o$$

puesto que la dimensión de un germe preanalítico coincide con la del mínimo germe analítico que lo contiene.

c.q.d.

8.27.

Si S_o es un germe preanalítico de dimensión d , podemos considerar representantes preanalíticos de S_o en entornos suficientemente pequeños para que las dimensiones de dichos representantes sean d . Consideremos en cada uno de ellos el conjunto de los puntos regulares de dimensión d y tomemos el germe en o de este conjunto. Se comprueba de manera inmediata que dicho germe no depende del representante tomado. Así hablaremos del germe V_d de puntos regulares de S_o de dimensión (d) máxima; $S_o - V_d$ es, por definición, el germe $\text{Sing } S_o$ de puntos singulares (en este sentido más amplio).

Con esta nomenclatura la proposición anterior puede enunciarse diciendo que si S_o es un germe preanalítico coherente existe un entorno de o , donde, tomando representantes, V_d es denso en S . La proposición recíproca es falsa. En efecto si consideramos el cono de ecuación $z(x+y)(x^2 + y^2) - x^4 = 0$ en R^3 , el origen es el único punto singular y sin embargo la coherencia falla en los puntos de la forma $(0,0,z)$, $z \neq 0$ (c.f. [23]).

Obtenemos la siguiente

8.28. Proposición.

Sea S_o germe preanalítico de dimensión d , tal que

tomando representantes en un cierto entorno de $\underline{0}$, V_d es denso en S . Sea S'_0 el mínimo germen analítico que contiene a S_0 , y sea \widehat{S}'_0 su complejificado. Supongamos que para cada $p \in S$ en un cierto entorno complejo de $\underline{0}$ se verifica que $(\widehat{S}')_p$ es irreducible. Entonces S_0 es coherente.

Demostración.

Mostraremos primeramente que S'_0 es S_0 -coherente. Basta para ello probar que $(\widehat{S}')_p$ es un complejificado. En general $(\widehat{S}')_p \supseteq \widehat{(S')_p}$. Ahora por la densidad de V_d , la dimensión de S_p es d , y por tanto la dimensión de S'_p debe ser, como germen analítico que contiene a S_p , mayor o igual a d . Así pues tenemos un germen complejo de dimensión mayor o igual a d contenido en otro irreducible de dimensión d (por la coherencia e irreducibilidad de \widehat{S}'_0 ([23])). Concluimos que

$$\widehat{S}'_p = \widehat{(S')_p}$$

Debemos probar además que S'_p es el mínimo germen analítico que contiene a S_p . Sea S''_p este mínimo germen analítico. Por la densidad de V_d , $\dim S''_p = d$. Además $S''_p \subseteq S'_p$. Pero $\dim S'_p = d$ y S'_p es irreducible, puesto que ambas propiedades se verifican para el complejificado $(\widehat{S}')_p$. Se sigue que

$$S''_p = S'_p$$

c.q.d.

8.29. Proposición.

Sea S_0 germen preanalítico irreducible y coherente definido de forma reducida en el álgebra valorada \widehat{A}_n por el ideal

$$\bar{J}(S_0) = \bigcap_{j \in F'} (a_j + I_j)$$

[8.1] Entonces existe un ideal $\mathcal{C} \subseteq A_n$ tal que para cada $j \in F'$, $\mathcal{C} = \mathcal{C}_j$.

Demostración.

Las hipótesis de irreducibilidad y coherencia son suficientes para garantizar las propiedades fundamentalmente usadas en la demostración 8.3. La demostración de esta proposición sigue "verbatim" de la de aquella.

c.q.d.

8.30.

Aplicamos algunas de las proposiciones dadas a este párrafo al estudio de los gérmenes analíticos. En general, dado un germe analítico S_0 de dimensión d y su complejificado \hat{S}_0 (de dimensión d por tanto), $\text{Sing } \hat{S}_0 \cap \mathbb{R}^n \supseteq \text{Sing } S_0$, pero no se verifica la igualdad (c.f. [24],[25]). En efecto, $\text{Sing } S_0$ no es en general analítico, sino preanalítico, mientras que $\text{Sing } \hat{S}_0 \cap \mathbb{R}^n$ es un germe analítico cuyas ecuaciones son las de los generadores del ideal jacobiano de $\mathfrak{J}(S_0)$. La patología alcanza incluso a la dimensión, puesto de manifiesto en el siguiente ejemplo [23] :

$$S_0 = \{z(x+y)(x^2+y^2)-x^4 = 0\} , \quad \text{Sing } S_0 = \{0\}$$

$$\text{Sing } \hat{S}_0 \cap \mathbb{R}^n = \{x=0, y=0\}$$

Se verifica la siguiente

Proposición.

Sea S_0 germe analítico. Entonces

$$\text{Sing } \hat{S}_0 \cap \mathbb{R}^n = \text{Sing } S_0 \text{ si } S_0 \text{ es}$$

$$V_d \cup \{0\} \text{-coherente.}$$

Demostración.

Supongamos que se verifica el criterio jacobiano; es decir, que

$$\text{Sing } \hat{S}_0 \cap \mathbb{R}^n = \text{Sing } S_0$$

Tomando representantes de S_0 y \widehat{S}_0 , sea $p \in V_d$. Por hipótesis $p \notin \text{Sing } \widehat{S} \cap \mathbb{R}^n$; luego p es regular en \widehat{S} de dimensión máxima. Así $(\widehat{S})_p$ es un germen regular complejo de dimensión d . Sea \widehat{S}_p el complejificado de S_p . Debemos mostrar -según 8.19- que $\widehat{S}_p = (\widehat{S})_p$. Ahora bien, en general se tiene $\widehat{S}_p \subseteq (\widehat{S})_p$, y su dimensión es d en ambos casos. Puesto que $(\widehat{S})_p$ es irreducible, se sigue la igualdad.

Recíprocamente, supongamos que S_0 es $V_d \cup \{0\}$ coherente. Sea \widehat{S}_0 su complejificado. Si $p \in S$ es un punto regular de dimensión máxima, por la coherencia obtenemos

$$(\widehat{S})_p = \widehat{S}_p$$

Como S_p es regular, la proposición quedará demostrada si verificamos que la complejificación de un germen regular es un germen complejo regular. Pero, en efecto, si f_{r+1}, \dots, f_n son gérmenes analíticos tales que $(df_{r+1})_0, \dots, (df_n)_0$ son $n-r$ vectores independientes sobre el cuerpo real, extendiendo dichas funciones a un entorno complejo de 0 obtenemos que $(df_{r+1})_{(0)}, \dots, (df_n)_{(0)}$ son independientes sobre el cuerpo complejo. Pues, siendo $(df_{r+j})_0$ real $1 \leq j \leq n-r$, toda combinación con coeficientes complejos de dichos vectores puede desdoblarse en un par de combinaciones con coeficientes reales, que -por hipótesis- deben ser cero.

c.q.d.

8.31. Proposición.

Sea S_0 germen analítico irreducible de dimensión d , $J = (f_1 \dots f_s)$ su ideal jacobiano. En $\bar{A}_n = \bar{A}_n[|f_1| \dots |f_s|]$ se verifica que si

$$\bar{J}(S_0) = \bigcap_{j \in F'} (\alpha_j + I_j)$$

de forma irredundante, entonces existe $\alpha \in A_n$ tal que $\alpha_j = \alpha$ para $j \in F'$.

Demostración.

Sea $\mathfrak{a} = \mathfrak{J}(S_0)$, ideal de S_0 en A_n . Como es sabido $\mathfrak{a} = \bigcap_{j \in F'} \mathfrak{a}_j$. Puesto que \mathfrak{a} es primo, la proposición quedará demostrada si probamos que $\dim \mathfrak{a}_j = d$, $j \in F'$.

Veremos equivalentemente, que

$$\dim \mathcal{V}(\mathfrak{a}_j + I_j) = d \quad j \in F'.$$

Por ser la descomposición irredundante, sabemos que en un entorno del origen existen p , tan próximos a \mathfrak{o} como queramos, tales que

$$S_p = \mathcal{V}(\mathfrak{a}_j + I_j)_p \quad y$$

$$\mathcal{V}(\mathfrak{a}_{j'} + I_{j'})_p = \emptyset, \quad \text{si } j' \neq j.$$

Concluimos entonces que no todas las funciones $f_1 \dots f_s$ pueden anularse en p . En efecto, en tal caso, como

$$\mathcal{V}(\mathfrak{a}_j + I_j) = S_0 \cap \mathcal{V}(I_j),$$

y $p \in S$, se seguiría que $p \in \mathcal{V}(\mathfrak{a}_j + I_j) \quad \forall j \in F'$. Absurdo

Así pues p es regular de S de dimensión d (aunque no se verifique el criterio jacobiano), y por tanto

$$\dim \mathcal{V}(\mathfrak{a}_j + I_j)_p = \dim S_p = d.$$

c.q.d.

OBRAS CITADAS.

- [1] H. HIRONAKA. "Subanalytic Sets", Number Theory, Algebraic Geometry and Commutative Algebra in honor of Y. Akizuki, Kinokuniya, Tokio, 1973, pág.453-493.
- [2] S. LOJASIEWICZ. "Ensembles semianalytiques", Lecture Note (1965) at I.H.E.S., Bures sur Yvette.
- [3] T.S. MOTZKIN. "The real solution set of a system of algebraic inequalities in the projection of a hypersurface in one more dimension", Inequalities II (Ed. O. Shisha), Academic Press, New York, 1970.
- [4] P. ABELLANAS. "R algebras analíticas valoradas", Estudios de Matemática. Homenagem ao Pr. A. Almeida Costa, Lisboa, 1974.
- [5] A. TOGNOLI. "Proprieta globali degli spazi analitici reali", Ann.Mat. Pura Appl. 75 (4), 1967, pág. 143-218.
- [6] R. NARASHIMAN. "Introduction to the theory of analytic spaces", Lecture Notes 25, Springer-Verlag, Berlin, 1966.
- [7] M. GALBIATI, A. TOGNOLI. "Alcune proprieta delle varieta algebriche reali", Ann. Scuola Norm.Sup.Pisa 27, 1973, pág. 359-404.
- [8] P. SAMUEL. "Méthodes d'algebre abstraite en geometrie algebrique", Springer-Verlag, Berlin, 1967.
- [9] H. WHITNEY. "Elementary structure of real algebraic varieties", Ann. of Math. 66 (1957), pág. 545-556.
- [10] O. ZARISKI-P. SAMUEL. "Commutative Algebra", Van Nostrand, Princeton, 1960.
- [11] J. SERRE. "Geometrie analytique et Geometrie algebrique", II, Ann.Inst.Fourier VI, 1955-56, pág. 1-42.
- [12] BRUHAT-WHITNEY. "Quelques proprietes fondamentales des ensembles analytiques reels", Comm.Math.Helv. 33, 1959, pág. 132-160.
- [13] A. TOGNOLI. "Su una cogettura di Nash", Ann.Scuola Normale Sup. Pisa, 27, 1973, pág. 167-185.
- [14] A. TOGNOLI. "Aproximation theorems and Nash conjecture", Bull.Soc.Math.France. (Supp. June 1974), 38, pág. 53-68.
- [15] A. TOGNOLI-LAZZERI. "Alcune proprieta degli spazi algebrici", Ann.Scuola N.Sup.Pisa, 24, 1970, pág. 597-632.
- [16] J. MILNOR. "Singular points of complex hypersurfaces", Ann. of Math.Studies 61, Princeton U.P., 1968.

- [17] J.C. TOUGERON. "Ideaux des fonctions différentiables", Springer-Verlag, Berlin, 1972.
- [18] J.J. RISLER. "Un theoreme des zeros en geometrie analytique et algebrique reelles", Lecture Notes 409, Springer-Verlag, Berlin, 1974, pág. 522-531.
- [19] W. FENSCH. "Reel analytische Strukturen", Münster, 1966.
- [20] J.P. SERRE. "Algebre Locale et Multiplicités", Lecture Notes 11, Springer-Verlag, Berlin, 1965.
- [21] H. MATSUMURA. "Commutative Algebra", W.A. Benjamin, New York, 1970.
- [22] J.P. LAFON. "Les formalismes fondamentaux de l'algebre commutative", Hermann, Paris, 1974.
- [23] H. CARTAN. "Varietés analytiques réelles et varietés analytiques complexes", Bull.Soc.Math.France 85, 1957, pág. 77-99.
- [24] BRUHAT. "Sur les representations induites des groupes de Lie", Bull.Soc.Math.France, 84, 1950, pág.97-205.
- [25] H. HIRONAKA. "Introduction to real analytic sets and maps", Quaderno dei gruppi di ricerca del C.N.R. Inst. Mat. Leonida Tonelli, Pisa, 1973.
- [26] J. FRISCH. "Points de platitude d'un morphisme analytique complexe", Inventiones Math. 4, 1967, pág.118-138.
- [27] M. HERVE. "Several complex variables. Local theory", Oxford U. Press, Bombay, 1963.
- [28] H. WHITNEY. "Tangents to an analytic variety", Ann. of Math. 81 n°3, 1965, pág. 465-549.
- [29] A. SEIDEMBERG. "A new decision method for elementary algebra", Ann. of Math. 60, 1954, pág. 365-374.
- [30] G. STENGLE. "A nullstellensatz and a positivstellensatz in semialgebraic geometry", Math. Ann. 207, 1974, pág. 87-97.
- [31] J.J. RISLER. "Le theoreme des zeros pour les varietés analytiques réelles de dimension 2", Ann.Sct.E.N.Sup. 4^a Serie, T.8, 1975, pág. 353-364.
- [32] J.J. RISLER. "Sur l'anneau des fonctions de Nash globales", Ann.Sct.E.N.Sup. 4^a Serie, T. 8, 1975, pág. 365-378.
- [33] G. EFROYMSON. "A Nullstellensatz for Nash rings", Pacf.J. of Math. 54, 1974, pág. 101-112.
- [34] T. MOSTOWSKI. "Some properties of the ring of Nash functions", Ann.Scuola N. Sup. Pisa, 1970, Vol. III,2, pág. 245-266.

- [35] R. NARASHIMAN. "Analysis on real and complex manifolds", Masson & Cie, Paris, North-Holland Publ., Amsterdam, 1968.
- [36] D. DUBOIS - G. EFROYMSON. "Algebraic theory of real varieties", Studies and Essays presented to Y.W. Chen, Taiwan, 1970.
- [37] STOER-WITZGALL. "Convexity and Optimization in finite dimension", Springer-Verlag, Berlin, 1970.
- [38] M. NAGATA. "Local rings", Interscience Publishers, N. York, 1962.
- [39] J. MERRIEN. "Un théoreme des zeros pour les ideaux des series formelles a coefficients réels", C.R. Acad.Sc.Paris, T. 276, 1974, pág. 1055.
- [40] G. EFROYMSON. "Local reality on algebraic varieties", J. of Algebra 29, 1974, pág. 132-142.
- [41] B. MALGRANGE. "Ideals of differentiable functions", Oxford U. P., Bombay, 1966.
- [42] J.J. RISLER. "Un théoreme des zeros pour les fonctions differentiables dans le plan", Lecture Not. 409, Springer-Verlag, Berlin, 1974, pág. 603-612.