UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS
Departamento de Álgebra

ESTABILIDAD DEL FIBRADO UNIVERSAL RESTRINGIDO A CONGRUENCIAS

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR

PRESENTADA POR

Sofía Cobo Pablos

Bajo la dirección del doctor
Enrique Arrondo Esteban

Madrid, 2008

- **ISBN: 978-84-692-0089-6**

Estabilidad del fibrado universal restringido a congruencias

por

Sofía Cobo Pablos

Memoria presentada al
Departamento de Álgebra
para optar al grado de
Doctor en Ciencias Matemáticas
por la
Universidad Complutense de Madrid
Enero 2008

Dirigida por el profesor Enrique Arrondo Esteban

Unas pocas líneas no bastan para expresarle a mi director de tesis, profesor Enrique Arrondo, toda mi gratitud. Considero un privilegio el haber realizado una tesis en Geometría Algebraica bajo su dirección y, en el final del camino, no puedo dejar de sentir cierta nostalgia. Su profundo amor por la Matemática y su dedicación total e incondicional a la investigación han sido para mí la mejor demostración de que, *ser matemático*, no es simplemente una profesión, sino una forma de vida.

Ha sido una hermosa experiencia trabajar estos cuatro años en el Departamento de Álgebra de la Facultad de Matemáticas. Quisiera expresar aquí mi sincera gratitud a todos los profesores y doctorandos, que contribuyen a crear un ambiente de trabajo tan agradable. Entre todos ellos, mi hermana Helena merece una mención especial. Hemos compartido en estos años muchos buenos momentos, cursos de doctorado, algún que otro viaje e incluso momentos de desánimo, en los que siempre supo arrancarme una sonrisa.

Siempre recordaré el entusiasmo con que mi padre me explicaba Matemáticas en mi infancia y adolescencia. Él ha sido mi primer maestro: desde aquí, le envío mi emocionado agradecimiento. Mi madre, con su infinita comprensión y entrega, ha sabido crear un hogar acogedor donde *encerrarse* a trabajar no es aburrido, sino una maravilla.

Índice.

Introducción.

El presente trabajo trata sobre familias de dimensión dos de rectas de $\mathbb{P}^3$, llamadas *congruencias*. Se llama *orden* de una congruencia al número de rectas suyas que pasan por un punto general de $\mathbb{P}^3$, y *clase* de una congruencia al número de rectas suyas contenidas en un plano general de $\mathbb{P}^3$. Se dice que una congruencia tiene *bigrado* (a, b) si tiene orden a y clase b. Nótese que, como una recta en $\mathbb{P}^3$ es una recta en $\mathbb{P}^{3^*}$, a partir de cada congruencia se obtiene una *congruencia dual* que tiene bigrado (b, a). Por lo tanto, a y b juegan un papel simétrico.

Un problema que surge de manera natural es determinar para qué valores de a y b existe una congruencia de bigrado (a, b). Si $a = 0$, es fácil ver que cualquier congruencia irreducible es necesariamente un $\beta-$*plano*, es decir, la familia de rectas contenidas en un plano de $\mathbb{P}^3$. En particular, $b = 1$. Por dualidad, $b = 0$ implica que la congruencia es un $\alpha-$*plano*, es decir, la familia de rectas que pasan por un punto de $\mathbb{P}^3$, en cuyo caso $a = 1$. Es un resultado clásico (ver [**K**]) que para $a = 1$ y para cada $b \geq 0$ existe una congruencia irreducible de bigrado $(1, b)$, que puede generalizarse para cada $a \geq 1$. Por lo tanto, el problema de determinar los posibles valores de a y b es trivial si lo planteamos de un modo tan general.

Sin embargo, el problema anterior recobra significación si consideramos las congruencias desde un punto de vista más actual. En primer lugar, el conjunto de las rectas de $\mathbb{P}^3$ está parametrizado por la *Grassmanniana de rectas en* $\mathbb{P}^3$, $\mathbb{G}(1, 3)$, que es una cuádrica lisa de $\mathbb{P}^5$. Podemos entonces identificar una congruencia con una superficie de $\mathbb{G}(1, 3)$. Por ello, además de la irreducibilidad, es también muy natural pedir que la congruencia sea lisa como superficie. Por este motivo, a lo largo de todo este trabajo y de acuerdo con la terminología actual, llamaremos congruencia a una superficie lisa e irreducible de $\mathbb{G}(1, 3)$.

Con esta nueva hipótesis de lisitud, para $a = 1$ sólo existen congruencias de bigrado $(1, b)$ para $b \leq 3$. Si $a = 2$, existen congruencias de bigrado $(2, b)$ exactamente para $b = 1, 2, 3, 6$ y, si $a = 3$, para $b \leq 7$ y $b \neq 0$ (ver [**CDV**] y [**G3**]).

Para a arbitrario, lo que se sabe es aún muy insatisfactorio. En esta dirección, en

[**CDV**] se demuestra que $a \leq max\{4b^2-2, 8b-5\}$ (por simetría, $b \leq max\{4a^2-2, 8a-5\}$) cuando S no es ni un $\alpha-$plano (por simetría, ni un $\beta-$plano). Por otra parte, Gross ha demostrado en [**G1**] que $a \leq O(b^{4/3})$ para toda congruencia de bigrado (a, b). Esta acotación no es la mejor esperada, ya que la mayor diferencia entre orden y clase en los ejemplos conocidos de congruencias aparece en una sucesión de congruencias S_n de bigrados (a_n, b_n) tal que $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$.

Dolgachev y Reider introdujeron un modo de encontrar restricciones para el bigrado de una congruencia mediante fibrados vectoriales, consistente en estudiar la semiestabilidad del fibrado universal cociente de $\mathbb{G}(1,3)$ restringido a S, $Q|_S$. En concreto, en su artículo de 1991 sobre fibrados vectoriales de rango 2 en superficies de Enriques (ver [**DR**]), Dolgachev y Reider enunciaron su famosa conjetura:

Conjetura DR. *Si S es una congruencia no degenerada como superficie de $\mathbb{P}^5$, entonces el fibrado $Q|_S$ es semiestable.*

La hipótesis de que S sea una congruencia no degenerada no es restrictiva, pues es bien sabido (véase Proposición 3.8 de [**AS2**]) que las congruencias degeneradas tienen bigrado o bien de la forma (n, n), o de la forma $(n-1, n)$, o de la forma $(n, n-1)$.

Si suponemos cierta la conjetura anterior, aplicando el Teorema de Bogomolov (que establece la desigualdad ${c_1}^2 \leq 4c_2$ para fibrados semiestables) a $Q|_S$, teniendo en cuenta que $c_1(Q|_S)^2 = a + b$ y que $c_2(Q|_S) = b$, obtendríamos la desigualdad $a \leq 3b$ para toda congruencia de bigrado (a, b) con excepción de los $\alpha-$planos. Por simetría, obtendríamos $b \leq 3a$ para toda congruencia de bigrado (a, b) con excepción de los $\beta-$planos.

Utilizando las técnicas introducidas por Dolgachev y Reider, Gross demostró en [**G1**] que si una congruencia de bigrado (a, b) no es de tipo general, entonces $a \leq 3b$. Sin embargo, la condición "no ser de tipo general" es muy restrictiva pues, como se demuestra en [**AS2**], sólo hay un número finito de familias de congruencias que no son de tipo general.

En este trabajo nos centramos en el estudio de la estabilidad de Q restringido a congruencias de $\mathbb{G}(1,3)$. Un primer paso en esta dirección es estudiar para qué congruencias S el fibrado universal $Q|_S$ es escindido. Con respecto a este problema, en [**AS2**] se demuestra que el fibrado universal Q restringido no es escindido salvo para una cantidad finita de congruencias. El problema análogo para congruencias en la Grassmanniana $\mathbb{G}(1,4)$ (i.e., para familias de dimensión tres de rectas en $\mathbb{P}^4$) fue estudiado posteriormente por Arrondo y Graña en [**AGr**], llegando a la misma conclusión. En el caso de congruencias de Grassmannianas $\mathbb{G}(1,n)$ con $n \geq 4$, Arrondo ha clasificado en [**A1**] las congruencias de $\mathbb{G}(1,n)$ (familias de rectas de $\mathbb{P}^n$ de dimensión $n-1$) para las cuales el fibrado universal $\mathcal{S}$ de rango $n-1$ es escindido.

Un siguiente paso en el problema que nos ocupa es el estudio de la simplicidad del fibrado universal Q restringido. La primera contribución de este trabajo (capítulo 3) es la demostración de que sólo hay cuatro tipos de congruencias en la Grassmanniana $\mathbb{G}(1,3)$ tales que el fibrado Q restringido no es simple. En todos estos casos, $Q|_S$ es escindido, de donde deducimos el sorprendente hecho de que Q restringido no es simple si y sólo si es escindido (véase [**C**]).

Respecto al problema concreto de estudiar la estabilidad de Q restringido a una congruencia de $\mathbb{G}(1,3)$, Gross demuestra en [**G1**] (véase también [**AS2**], Proposición 2.4) que, dada una congruencia S con bigrado (a,b), si $b \geq a$, entonces $Q|_S$ es semiestable. En la demostración de este resultado se encontraba implícita más información, que presentamos completamente en el Teorema 4.4 del capítulo 4. Además, en la Proposición 4.3 del mismo capítulo demostramos que, si S es una congruencia sin curva fundamental y no es racional, entonces $Q|_S$ no puede tener un subhaz lineal con pendiente muy grande.

Estos resultados no nos permiten obtener una conclusión general a la conjetura de Dolgachev y Reider, pero sí deducir una cierta estimación de la pendiente máxima alcanzada por los subhaces lineales de Q restringido a una congruencia. Como esta estimación sólo es significativa cuando $|a-b|$ es pequeño, comprobamos que se verifica la conjetura de Dolgachev y Reider, caso por caso, para las congruencias de grado menor o igual que 9, siguiendo la clasificación de distintos autores, recopilada en [**AS2**]. Además de determinar la estabilidad de Q restringido, estudiamos en cada caso la pendiente máxima que alcanzan los subhaces lineales de Q restringido a cada congruencia de grado menor o igual que 9.

Dentro de la misma familia de congruencias puede ocurrir que la estabilidad de la restricción de Q o la pendiente máxima alcanzada por los subhaces lineales del mismo varíen de una congruencia a otra. Un ejemplo de esta situación es el caso de congruencias de grado par contenidas en un complejo lineal (ver Observación 2.1.13), en el que la restricción de Q a la congruencia general es estable, pero sólo semiestable para algunos casos especiales. Ahora bien, para poder hablar de congruencia general y especial dentro de una misma familia, es necesario que el esquema de Hilbert que parametriza esta familia sea irreducible. Esto sólo está demostrado para las congruencias de grado menor o igual que 9 (véase [**AS2**]), por lo que nuestro estudio se centra en tales congruencias. en concreto, para cada tipo de congruencia S calculamos la pendiente máxima alcanzada por los subhaces lineales de $Q|_S$ cuando S es general. Eventualmente, calculamos también la pendiente máxima para casos especiales. Por tanto, este trabajo es una primera evidencia de la siguiente

Conjetura. *Para cada componente irreducible del esquema de Hilbert de congruencias no degeneradas, la restricción de Q a la congruencia general es semiestable.*

Nótese que, aunque esta conjetura es más débil que la de Dolgachev y Reider, sin embargo ambas implican la misma relación $a \leq 3b$ para todas las congruencias de bigrado (a, b) (excepto para los $\beta-$planos). El motivo es que el bigrado (a, b) permanece constante en todo el esquema de Hilbert.

La estructura de este trabajo es como sigue:

• Dividimos el primer capítulo en tres secciones. En la primera de ellas describimos la Grassmanniana $\mathbb{G}(1, 3)$ de rectas en $\mathbb{P}^3$, estudiamos las subvariedades que caracterizan su anillo de Chow y recordamos la construcción de algunos fibrados vectoriales, como los fibrados universales. En la segunda sección demostramos varios resultados sobre dimensión de grupos de cohomología de fibrados en $\mathbb{G}(1, 3)$ que necesitaremos en capítulos posteriores. Finalmente, en la tercera sección, definimos los conceptos de estabilidad y simplicidad de fibrados vectoriales, demostrando varias propiedades básicas sobre este tema.

• En el capítulo segundo presentamos la teoría de congruencias en $\mathbb{G}(1, 3)$. En la primera sección recordamos las nociones de punto fundamental y curva fundamental, recogiendo resultados ya existentes sobre congruencias contenidas en un complejo lineal (ver Proposición 2.1.9 y Proposición 2.1.11). Demostramos además lemas técnicos sobre superficies racionales y regladas que necesitaremos en el capítulo 6, pues aparecen repetidamente congruencias de ambos tipos. En la segunda sección del capítulo, describimos cada una de las congruencias de grado menor o igual que 9, siguiendo la clasificación recopilada en [**AS2**], completando en algunos casos la descripción geométrica que allí se da.

• En el tercer capítulo clasificamos las congruencias S de $\mathbb{G}(1,3)$ para las que $Q|_S$ no es simple, demostrando como consecuencia que $Q|_S$ no es simple si y sólo si $Q|_S$ no es escindido (ver Teorema 3.1). Dividimos la demostración de este resultado en dos partes, dependiendo de si S tiene recta fundamental o si viene proyectada desde la Grassmanniana $\mathbb{G}(1,4)$. Dedicamos una sección a cada posibilidad.

• En el capítulo cuarto, completamos el resultado de Gross anteriormente mencionado (ver Teorema 4.4) y demostramos que, si S es una congruencia que verifica ciertas condiciones geométricas, entonces $Q|_S$ no puede tener un subhaz lineal con pendiente muy grande (ver Proposición 4.3).

• En el capítulo quinto explicamos un método para calcular dimensiones de sistemas lineales de curvas en $\mathbb{P}^2$ mediante transformaciones de Cremona, que utilizamos para calcular dimensiones de sistemas lineales concretos que aparecen en el capítulo 6.

• Finalmente, en el capítulo sexto estudiamos caso por caso la estabilidad de la restricción de Q a cada congruencia de grado menor que 9. Además, como ya hemos dicho antes, calculamos para cada congruencia general S la pendiente máxima alcanzada por los subhaces lineales de $Q|_S$.

• Finalmente, añadimos como apéndice dos tablas. En la primera de ellas recogemos los resultados de estabilidad que hemos obtenido en el capítulo 6, mientras que en la segunda recogemos resultados parciales sobre las congruencias de grado 10, a fin de dar una idea de las dificultades que aparecen en grado superior.

Capítulo 1. Preliminares.

En este primer capítulo introducimos la variedad ambiente en la que trabajaremos, la Grassmanniana de rectas en $\mathbb{P}^3$. Dedicamos la segunda sección del mismo a los fibrados vectoriales sobre $\mathbb{G}(1,3)$, describiendo, en particular, ambos fibrados universales. También demostramos una serie de resultados sobre la cohomología de los fibrados introducidos en esta sección. Finalmente, en la última sección del capítulo definimos los conceptos fundamentales de *estabilidad* y *simplicidad* de fibrados vectoriales, demostrando a continuación varios resultados básicos sobre fibrados con alguna de las propiedades anteriores.

1.1. Preliminares sobre $\mathbb{G}(1,3)$.

Definición 1.1.1. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo algebraicamente cerrado y de característica cero. Dado un espacio vectorial V sobre $\mathbb{K}$ de dimensión 4, llamaremos $\mathbb{P}^3$ al conjunto $\mathbb{P}(V)$ de hiperplanos de V (o, equivalentemente, al conjunto de cocientes de dimensión 1 de V, o al conjunto de rectas de V^*). A la variedad de todas las rectas de $\mathbb{P}^3$ se le llama *Grassmanniana de rectas de* $\mathbb{P}^3$, y se denota por $\mathbb{G}(1,3)$. Por comodidad, escribiremos $\mathbb{G}$ cuando proceda.

Sea l la recta de $\mathbb{P}^3$ que pasa por dos puntos cuyas coordenadas respecto de alguna referencia son $a = (a_0 : a_1 : a_2 : a_3)$ y $b = (b_0 : b_1 : b_2 : b_3)$, y representémosla de la forma

$$l = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$$

Consideremos la inmersión de Plücker

$$\begin{aligned} \varphi_{1,3} :\ \mathbb{G}(1,3) &\longrightarrow \mathbb{P}^5, \\ L[a,b] &\longmapsto [\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}] \end{aligned}$$

donde $L[a,b]$ es la recta de $\mathbb{P}^3$ generada por los puntos representados por los vectores independientes $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ de V^* y $[\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}]$ indica el punto de $\mathbb{P}(\bigwedge^2 V) = \mathbb{P}^5$ representado por $\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}$. Mediante tal inmersión, la recta l anterior se transforma en el punto de $\mathbb{P}^5$ de coordenadas $(p_{01} : p_{02} : p_{03} : p_{12} : p_{13} : p_{23})$, donde

$p_{01} = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix}$, $p_{02} = \begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ b_0 & b_2 \end{vmatrix}$, $p_{03} = \begin{vmatrix} a_0 & a_3 \\ b_0 & b_3 \end{vmatrix}$, $p_{12} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$, $p_{13} = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}$ y $p_{23} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}$.

De este modo, podemos considerar $\mathbb{G}(1,3)$ como una cuádrica lisa de $\mathbb{P}^5$ de ecuación

$$p_{01}p_{23} - p_{02}p_{13} + p_{03}p_{12} = 0.$$

Existe un isomorfismo natural

$$\mathbb{G}(1,\mathbb{P}^3) \longrightarrow \mathbb{G}(1,\mathbb{P}^{3^*})$$

que aplica cada recta de $\mathbb{P}^3$ en el haz de planos de $\mathbb{P}^3$ que la contienen (que es una recta de $\mathbb{P}^{3^*}$).

Definición 1.1.2. Un *complejo de grado d* es la intersección de $\mathbb{G}(1,3)$ con una hipersuperficie de $\mathbb{P}^5$ de grado d. En particular, si $d = 1$, decimos que el complejo es *lineal*. Hay dos tipos de complejos lineales: *general*, cuando la sección hiperplana es lisa, y *especial*, si es singular. Este último caso está caracterizado porque el complejo lineal consite en el conjunto de rectas de $\mathbb{P}^3$ que cortan a una recta fija.

A continuación enunciamos y demostramos un resultado básico sobre $\mathbb{G}(1,3)$, cuyos corolarios utilizaremos repetidamente en capítulos posteriores:

Lema 1.1.3. *Consideremos $\mathbb{G}(1,3)$ como una cuádrica de $\mathbb{P}^5$, mediante la inmersión de Plücker. Entonces, una recta de $\mathbb{P}^5$ que une dos puntos de $\mathbb{G}(1,3)$ está contenida en $\mathbb{G}(1,3)$ si y sólo si las rectas de $\mathbb{P}^3$ correspondientes a dichos puntos se cortan. En particular, una recta en $\mathbb{G}(1,3)$ es un haz de rectas en $\mathbb{P}^3$.*

Demostración.

Sean l y l' dos rectas de $\mathbb{P}^3$ que no se cortan. Podemos suponer $l = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $l' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, que en $\mathbb{P}^5$ corresponden a los puntos $L = (1:0:0:0:0:0)$ y $L' = (0:0:0:0:0:1)$ por la inmersión de Plücker. Recordando que la ecuación de $\mathbb{G}$ en $\mathbb{P}^5$ es

$$p_{01}p_{23} - p_{02}p_{13} + p_{03}p_{12} = 0,$$

es claro que la recta de $\mathbb{P}^5$ que une los puntos L y L', de ecuaciones

$$p_{02} = p_{03} = p_{12} = p_{13} = 0$$

no está contenida en $\mathbb{G}$.

Recíprocamente, supongamos ahora que l y l' se cortan en un punto. Podemos suponer que $l = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $l' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

La imagen en $\mathbb{P}^5$ de cada una de las rectas anteriores por la inmersión de Plücker es $L = (1:0:0:0:0:0)$ y $L' = (0:1:0:0:0:0)$, respectivamente. La recta de $\mathbb{P}^5$ que une estos dos puntos tiene ecuaciones

$$p_{03} = p_{12} = p_{13} = p_{23} = 0,$$

y está contenida en la cuádrica $\mathbb{G}$.

Veamos ahora que la recta de ecuaciones $p_{03} = p_{12} = p_{13} = p_{23} = 0$ es el haz de rectas de $\mathbb{P}^3$ que pasan por el punto $(1:0:0:0)$ y están contenidas en el plano $\{x_3 = 0\}$, donde denotamos por $(x_0 : x_1 : x_2 : x_3)$ a las coordenadas homogéneas de $\mathbb{P}^3$. En efecto, toda recta de dicho haz puede escribirse de la forma $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_0 & q_1 & 0 \end{pmatrix}$. Existe, por tanto, una correspondencia biunívoca entre puntos $(q_0 : q_1 : 0 : 0 : 0 : 0)$ de la recta $\{p_{03} = p_{12} = p_{13} = p_{23} = 0\}$ de $\mathbb{P}^5$ y rectas $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_0 & q_1 & 0 \end{pmatrix}$ del haz de rectas de $\mathbb{P}^3$ que pasan por el punto $(1:0:0:0)$ y están contenidas en el plano $\{x_3 = 0\}$. $\square$

Definición 1.1.4. Se llama $\alpha-$*plano* al conjunto de rectas de $\mathbb{P}^3$ que pasan por un punto dado. Llamaremos $\beta-$*plano* al conjunto de rectas de $\mathbb{P}^3$ contenidas en un plano dado.

Los $\alpha-$planos y $\beta-$planos son subvariedades de $\mathbb{G}(1,3)$ que se transforman en planos de $\mathbb{P}^5$ bajo la inmersión de Plücker. A partir del Lema 1.1.3, obtenemos útiles propiedades de tales planos:

Corolario 1.1.5. *Un $\alpha-$plano y un $\beta-$plano o bien son disjuntos o bien se cortan en una recta. Además, dos $\alpha-$planos se cortan siempre en un punto, y dos $\beta-$planos también.*

Demostración.

Sea Π_1 el $\alpha-$plano de todas las rectas de $\mathbb{P}^3$ que pasan por un punto p, y sea Π_2 el *beta*$-$plano de todas las rectas de $\mathbb{P}^3$ contenidas en un plano Π. Es obvio que, si p no pertenece al plano Π, entonces Π_1 y Π_2 son disjuntos como planos de $\mathbb{P}^5$. Si, por el contrario, p pertenece a Π, entonces el $\alpha-$plano Π_1 y el $\beta-$plano Π_2 se cortan en el haz de rectas de $\mathbb{P}^3$ que pasan por p. Por el Lema 1.1.3, esto es equivalente a decir que Π_1 y Π_2 como planos de $\mathbb{P}^5$ se cortan en una recta.

El resto del enunciado se demuestra de manera análoga. $\square$

Corolario 1.1.6. *Los únicos planos de $\mathbb{P}^5$ contenidos en la Grassmanniana $\mathbb{G}(1,3)$ son los $\alpha-$planos y los $\beta-$planos.*

Demostración.

Un plano de $\mathbb{P}^5$ contenido en $\mathbb{G}$ es una familia S de dimensión 2 de rectas de $\mathbb{P}^3$ con la propiedad de que todas las rectas de la familia se cortan (Lema 1.1.3).

Consideremos dos rectas de S, y sea p su punto de intersección. Si el resto de las rectas de S pasan por p, entonces S está contenida en el $\alpha-$plano de todas las rectas por p. Como un $\alpha-$plano es una subvariedad irreducible de dimensión 2 y S tiene dimensión 2, necesariamente S es el $\alpha-$plano de todas las rectas por p.

Supongamos ahora que S no es un $\alpha-$plano. Esto significa, considerando de nuevo las dos rectas anteriores, que existe una recta de S que no pasa por p. Como las tres rectas se cortan, existe un plano Π en $\mathbb{P}^3$ que las contiene. Tenemos entonces que S está contenida en el $\beta-$plano de todas las rectas contenidas en el plano Π. Ahora bien, un $\beta-$plano es una subvariedad irreducible de dimensión 2, luego S es necesariamente el $\beta-$plano de todas las rectas contenidas en Π. $\square$

Corolario 1.1.7. *Considerando $\mathbb{G}(1,3)$ como una cuádrica de $\mathbb{P}^5$, dada una recta $L \subset \mathbb{G}(1,3)$, siempre existe un $\beta-$plano que la contiene.*

Demostración.

En efecto, según el resultado anterior, una recta en $\mathbb{G}(1,3)$ es un haz de rectas en $\mathbb{P}^3$. Sea Π el plano que contiene a dicho haz. El conjunto de rectas contenidas en Π es el $\beta-$plano que buscábamos. $\square$

Una propiedad interesante de los $\alpha-$planos y los $\beta-$planos es la siguiente:

Lema 1.1.8. *Sea C una curva plana contenida en $\mathbb{G}(1,3)$ de grado mayor o igual que 3. Entonces C está contenida o bien en un $\alpha-$plano o bien en un $\beta-$plano.*

Demostración.

Sea Π el plano de $\mathbb{P}^5$ que contiene a C, y consideremos una recta L contenida en Π. Entonces $C \cap L \subset \mathbb{G}(1,3) \cap L$. Ahora bien, como C es una curva plana, $\sharp\,(C \cap L) = degC \geq 3$, de donde se tiene necesariamente que $L \subset \mathbb{G}(1,3)$ (porque $\mathbb{G}(1,3)$ es una hipersuperficie cuádrica de $\mathbb{P}^5$). Hemos demostrado por tanto que toda recta de Π está contenida en $\mathbb{G}(1,3)$, luego Π está contenido en $\mathbb{G}(1,3)$. Como los únicos planos de $\mathbb{P}^5$ contenidos en la Grassmaniana $\mathbb{G}(1,3)$ son los $\alpha-$planos y los $\beta-$planos, ya tenemos lo que queríamos. $\square$

Describimos ahora el anillo de Chow $A(\mathbb{G})$ de la Grassmanniana $\mathbb{G}(1,3)$:

$-$ $A^1(\mathbb{G}) = \mathbb{Z}H$, donde H es la clase de la sección hiperplana de $\mathbb{G}$ en $\mathbb{P}^5$. Si el hiperplano es tangente a $\mathbb{G}$ en un punto l, entonces su intersección con $\mathbb{G}$ es un cono cuadrático de vértice l que corresponde al ciclo de Schubert de rectas de $\mathbb{P}^3$ que cortan a la recta L representada por el punto l de $\mathbb{G}$.

$-$ $A^2(\mathbb{G}) = \mathbb{Z}\alpha \oplus \mathbb{Z}\beta$, donde α es la clase de un $\alpha-$*plano* y β es la clase de un $\beta-$*plano.*

$-$ $A^3(\mathbb{G}) = \mathbb{Z}L$, donde L es la clase del haz de rectas de $\mathbb{P}^3$ contenidas en un plano fijo y que pasan por un punto fijo del plano.

$-$ $A^4(\mathbb{G}) = \mathbb{Z}p$, donde p es la clase de un punto de $\mathbb{G}$.

Entonces podemos denotar un ciclo en $A^i(\mathbb{G})$ por un número entero excepto en el caso $i = 2$, donde utilizamos pares de enteros (a, b) para denotar la clase $a\alpha + b\beta$.

La estructura multiplicativa de $A(\mathbb{G})$ está dada por

$$H^2 = \alpha + \beta$$

$$H\alpha = L$$

$$H\beta = L$$

$$HL = p$$

$$\alpha^2 = p$$

$$\beta^2 = p$$

Definimos ahora dos fibrados vectoriales de rango 2 sobre $\mathbb{G}(1,3)$, los llamados *fibrados universales.*

Sea $V^* \times \mathbb{G}(1,3)$ el fibrado trivial sobre $\mathbb{G}(1,3)$. Consideremos el siguiente subfibrado de $V^* \times \mathbb{G}(1,3)$:

$$\begin{array}{c} Q^* := \{(v,l) \in V^* \times \mathbb{G}(1,3) |\ v \in \overrightarrow{l}\} \subset V^* \times \mathbb{G}(1,3) \\ \downarrow \pi \\ \mathbb{G}(1,3) \end{array}$$

donde π es la proyección sobre $\mathbb{G}(1,3)$ y por $\overrightarrow{l}$ denotamos el plano de V^* que define a la recta l de $\mathbb{P}^3$.

Definición 1.1.9. Llamamos *fibrado universal cociente* al fibrado dual de Q^*, de rango 2. Lo denotamos por Q. La fibra de Q en cada $l \in \mathbb{G}(1,3)$ es entonces el cociente de rango 2 de V que define la recta l.

El nombre "universal" deriva de la siguiente propiedad:

Proposición 1.1.10. *Sea X una variedad abstracta, y supongamos que existe un fibrado $\mathbb{F}$ de rango 2 sobre X generado por cuatro secciones globales. Se tiene entonces un morfismo*

$$\varphi : X \longrightarrow \mathbb{G}(1,3)$$

de modo que $\varphi^*Q = \mathbb{F}$. Por tanto, si φ es una inmersión, entonces $\varphi^*Q = Q|_X$, lo que implica que $\mathbb{F} = Q|_X$.

Demostración.

Dualizando el morfismo sobreyectivo de haces

$$\mathcal{O}_X^4 \twoheadrightarrow \mathbb{F}$$

obtenemos en cada punto $x \in X$ la aplicación sobre

$$\mathbb{K}^4 \twoheadrightarrow \mathbb{F}_x,$$

luego $\mathbb{P}(\mathbb{F}_x) \subset \mathbb{P}(\mathbb{K}^4)$.

Por tanto, el morfismo

$$\begin{aligned}\varphi : X &\longrightarrow \mathbb{G}(1,3)\\ x &\longmapsto \mathbb{P}(\mathbb{F}_x)\end{aligned}$$

está bien definido.

Consideremos ahora el fibrado Q^*, dual del fibrado universal cociente de la definición 1.1.9. Tenemos que φ^*Q^* es un fibrado sobre X tal que la fibra en cada punto x es la fibra de Q^* en $\varphi(x)$, esto es,

$$\varphi^*Q^* = \{(x,v)|v \in \pi^{-1}(\varphi(x))\} = \{(x,v)|v \in \overrightarrow{\varphi(x)}\} = \{(x,v)|v \in \mathbb{F}_x^*\}$$

Luego $\varphi^*Q^* = \mathbb{F}^*$. Obviamente, si φ es una inmersión, entonces $\varphi^*Q^* = Q^*|_X$. $\square$

La propiedad anterior muestra la importancia de estudiar $Q|_S$ para una congruencia S, pues a partir de este fibrado puede obtenerse toda la geometría de S.

Definición 1.1.11. Consideremos ahora el fibrado cociente $\mathcal{S} := V^* \times \mathbb{G}(1,3)/Q^*$. Llamamos *subfibrado universal* a su dual $\mathcal{S}^*$. Nótese que $\mathcal{S}$ tiene rango 2.

A partir de ambos fibrados, vistos como haces localmente libres (utilizaremos indistintamente las nociones de fibrado vectorial y de haz localmente libre), se obtiene la *sucesión exacta universal*

$$0 \longrightarrow \mathcal{S}^* \longrightarrow V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{G}} \longrightarrow Q \longrightarrow 0 \tag{1.1}$$

Utilizando la identificación $\mathbb{G}(1,\mathbb{P}^3) \simeq \mathbb{G}(1,\mathbb{P}^{3^*})$, tenemos que la sucesión exacta universal para $\mathbb{G}(1,\mathbb{P}^{3^*})$ es la dual de (1.1), por lo que en la Grassmanniana dual los fibrados $\mathcal{S}$ y Q se intercambian.

Tomando cohomología en la sucesión universal, obtenemos que

$$H^0(Q) = V$$

y que el lugar de ceros de una sección de Q es un $\beta-$plano. Por dualidad, el lugar de ceros de una sección de $\mathcal{S}$ es un $\alpha-$plano.

Teniendo en cuenta que $c_1(Q) = 1$ y $c_1(\mathcal{S}) = 1$ (donde c_1 denota la primera clase de Chern), y que ambos fibrados Q y $\mathcal{S}$ tienen rango 2, se deduce que $Q^* = Q(-1)$ y $\mathcal{S}^* = \mathcal{S}(-1)$.

Recordamos brevemente la construcción de los fibrados $\mathcal{V}$ y $\dot{E}$, definidos por Hernández y Sols en [**HS1**], y que se puede encontrar con más detalle en [**AS2**], §1.3. Si consideramos dos secciones s_1 y s_2 de $\mathcal{S}$ y Q, respectivamente, tales que definen un $\alpha-$plano y un $\beta-$plano disjuntos, la sección (s_1, s_2) del fibrado $\mathcal{S} \oplus Q$ no se anula en ningún punto de $\mathbb{G}(1,3)$. Por ello define un fibrado de rango 3, $\mathcal{V}(1)$, que aparece como un cociente en la sucesión

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{G}} \longrightarrow \mathcal{S} \oplus Q \longrightarrow \mathcal{V}(1) \longrightarrow 0 \qquad (1.2)$$

Dualizando y tensorializando con $\mathcal{O}_{\mathbb{G}}(1)$ la sucesión anterior, obtenemos

$$0 \longrightarrow \mathcal{V}^* \longrightarrow \mathcal{S} \oplus Q \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{G}}(1) \longrightarrow 0 \qquad (1.3)$$

En [**AS2**] se demuestra que $\mathcal{V}^*$ tiene una sección que no se anula en ningún punto de $\mathbb{G}(1,3)$ y de nuevo se tiene una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{G}} \longrightarrow \mathcal{V}^* \longrightarrow \dot{E}(1) \longrightarrow 0 \qquad (1.4),$$

donde $\dot{E}$ es un fibrado de rango 2 con clases de Chern $c_1(\dot{E}) = -1$ y $c_2(\dot{E}) = (1,1)$. Además, $\dot{E}(1)$ tiene una sección que se anula exactamente en la unión disjunta del $\alpha-$plano y $\beta-$plano definidos por las secciones s_1 y s_2 respectivamente.

1.2. Cohomología de fibrados vectoriales en $\mathbb{G}(1,3)$.

Reunimos en esta sección un conjunto de resultados cohomológicos de fibrados en $\mathbb{G}(1,3)$ que necesitaremos en los capítulos sucesivos. En primer lugar, enunciamos cinco resultados cuya demostración puede encontrarse en [**AS2**], §1.

Proposición 1.2.1. *$h^i(\mathcal{O}_{\mathbb{G}}(l)) = 0$ para cada l, con $i = 1,2,3$; $h^0(\mathcal{O}_{\mathbb{G}}(l)) = 0$ si $l < 0$; $h^4(\mathcal{O}_{\mathbb{G}}(l)) = 0$ si $l > -4$.*

Proposición 1.2.2. $h^i(\mathcal{S}(l)) = h^i(Q(l)) = 0$ *excepto para* $i = 0,\ l \geq 0$ *e* $i = 4,\ l \leq -5$.

Proposición 1.2.3. $h^i(\dot{E}(l)) = 0$ *excepto para* $i = 0,\ l \geq 1$*;* $i = 1,\ l = 0$*;* $i = 3,\ l = -3$ *e* $i = 4,\ l \leq -4$.

Proposición 1.2.4. $h^i(\mathcal{S} \otimes Q(l)) = 0$ *excepto para* $i = 0,\ l \geq 0$*;* $i = 1,\ l = -2$*, en que* $h^1(\mathcal{S} \otimes Q(-2)) = 1$*;* $i = 3$*,* $l = -4$*, en que* $h^3(\mathcal{S} \otimes Q(-4)) = 1$*, e* $i = 4,\ l \leq -6$.

Proposición 1.2.5. $h^i(S^2\mathcal{S}(l)) = h^i(S^2Q(l)) = 0$ *excepto para* $i = 0,\ l \geq 0$*;* $i = 2,\ l = -3$*, en que* $h^2(S^2\mathcal{S}(-3)) = h^2(S^2Q(-3)) = 1$*, e* $i = 4,\ l \leq -6$.

Lema 1.2.6. $H^0(Q \otimes Q^*(-1)) = 0$ *y* $H^1(Q \otimes Q^*(-1)) = 0$.

Demostración.

Descomponiendo $Q \otimes Q^*(-1)$ en la suma directa $S^2Q(-2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{G}}(-1)$, tenemos que $H^i(S^2Q(-2)) \oplus H^i(\mathcal{O}_{\mathbb{G}}(-1)) = 0$, para $i = 0, 1$ (véase Proposición 1.2.1 y Proposición 1.2.5). □

Lema 1.2.7. $H^0(Q \otimes S^2Q(-n)) = 0$ *si* $n \geq 2$.

Demostración.

Tomando potencias simétricas en la sucesión universal (1.1), obtenemos

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{O}_{\mathbb{G}}(-1) \arrow[r] & (\mathcal{S}^*)^4 \arrow[rr] \arrow[dr] & & \mathcal{O}_{\mathbb{G}}^{10} \arrow[r] & S^2Q \arrow[r] & 0 \\
 & & & K \arrow[ur] \arrow[dr] & & & \\
 & & 0 \arrow[ur] & & 0 & &
\end{tikzcd} \tag{1.5}$$

Ahora tensorizamos cada una de las sucesiones cortas por $Q(-n)$ y tomamos cohomología. Utilizando la Proposición 1.2.2 y la Proposición 1.2.4, tenemos

$$H^0(Q \otimes S^2Q(-n)) = H^1(K \otimes Q(-n)) = H^1(\mathcal{S}^* \otimes Q(-n))^4 = 0, \text{ si } n \leq 2$$

□

Lema 1.2.8. $H^1(Q \otimes Q^*) = 0$.

Demostración.

Como $Q \otimes Q^* = S^2Q(-1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{G}}$, por la Proposición 1.2.1 y la Proposición 1.2.5 tenemos que $H^1(Q \otimes Q^*) = 0$. $\square$

Lema 1.2.9. $H^1(\mathcal{S}^* \otimes S^2Q(-n)) = 0$ *si* $n \neq 1$.

Demostración.

Tensorizamos cada una de las sucesiones cortas de (1.5) por $\mathcal{S}^*(-n)$. Tomando cohomología y considerando la Proposición 1.2.2, obtenemos

$$H^1(\mathcal{S}^* \otimes S^2Q(-n)) = H^2(K \otimes \mathcal{S}^*(-n)) = H^2(\mathcal{S}^* \otimes \mathcal{S}^*(-n))^4$$

Como $n \neq 1$, concluimos $H^2(\mathcal{S}^* \otimes \mathcal{S}^*(-n)) = 0$ utilizando la Proposición 1.2.1 y la Proposición 1.2.5. $\square$

Lema 1.2.10. $H^1(Q \otimes S^2Q(-n)) = 0$, *para todo* n.

Demostración.

Tensorizamos cada una de las sucesiones cortas de (1.5) por $Q(-n)$, y tomamos cohomología. Por la Proposición 1.2.2 y la Proposición 1.2.4, se tiene $h^3(Q(-n-1)) = 0$ y $H^2(\mathcal{S}^* \otimes Q(-n)) = 0$ respectivamente, luego $H^2(K \otimes Q(-n)) = 0$. Por tanto, como $H^1(Q(-n)) = 0$ (otra vez por la Proposición 1.2.2), se tiene $H^1(S^2Q \otimes Q(-n)) = 0$ para cada n. $\square$

Lema 1.2.11. $H^2(\mathcal{S} \otimes S^2Q(-3)) = 0$.

Demostración.

Tensorizamos la sucesión universal (1.1) por $S^2Q(-2)$,

$$0 \longrightarrow \mathcal{S}^* \otimes S^2Q(-2) \longrightarrow S^2Q(-2)^4 \longrightarrow Q \otimes S^2Q(-2) \longrightarrow 0$$

y tomamos cohomología. Por el Lema 1.2.10 es $H^1(Q \otimes S^2Q(-2)) = 0$. Por otra parte, como $H^2(S^2Q(-2)) = 0$ (Proposición 1.2.5), se tiene que $H^2(\mathcal{S}^* \otimes S^2Q(-2)) = 0$, es decir, $H^2(\mathcal{S} \otimes S^2Q(-3)) = 0$. $\square$

Lema 1.2.12. $H^1(S^2Q \otimes \dot{E}(-2)) = 0.$

Demostración.

Dualizamos la sucesión (1.4), obteniendo

$$0 \longrightarrow \dot{E} \longrightarrow \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{G}} \longrightarrow 0$$

Tensorizando la sucesión anterior por $S^2Q(-2)$ y tomando cohomología,

$$0 = H^0(S^2Q(-2)) \longrightarrow H^1(S^2Q \otimes \dot{E}(-2)) \longrightarrow H^1(S^2Q \otimes \mathcal{V}(-2)) \longrightarrow H^1(S^2Q(-2)) = 0$$

Luego $H^1(S^2Q \otimes \dot{E}(-2)) = H^1(S^2Q \otimes \mathcal{V}(-2))$. Para calcular $H^1(S^2Q \otimes \mathcal{V}(-2))$, tensorizamos la sucesión (1.2) por $S^2Q(-3)$. Tomando cohomología, obtenemos

$$0 \longrightarrow H^1(S^2Q \otimes \mathcal{V}(-2)) \longrightarrow H^2(S^2Q(-3)) \xrightarrow{\psi} H^2(Q \otimes S^2Q(-3))$$

(porque $H^1(\mathcal{S} \otimes S^2Q(-3)) = 0$, $H^1(Q \otimes S^2Q(-3)) = 0$ y $H^2(\mathcal{S} \otimes S^2Q(-3)) = 0$, según los Lemas 1.2.9, 1.2.10 y 1.2.11 respectivamente).

Luego $H^1(S^2Q \otimes \mathcal{V}(-2)) = 0$ si y sólo si ψ es inyectiva. Vamos a probar pues que ψ es inyectiva:

Sea S' el $\beta-$plano (plano de $\mathbb{P}^5$ por la inmersión de Plücker) correspondiente al lugar de ceros de la sección s de Q dada por la segunda coordenada del morfismo $\mathcal{O}_{\mathbb{G}} \longrightarrow \mathcal{S} \oplus Q$ de la sucesión (1.2). Tensorizamos la sucesión

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{G}} \longrightarrow Q \longrightarrow \mathcal{J}_{S'}(1) \longrightarrow 0$$

por $S^2Q(-3)$, donde $\mathcal{O}_{\mathbb{G}} \longrightarrow Q$ corresponde a la sección s:

$$0 \longrightarrow S^2Q(-3) \longrightarrow Q \otimes S^2Q(-3) \longrightarrow S^2Q(-3) \otimes \mathcal{J}_{S'}(1) \longrightarrow 0$$

Tomamos cohomología y consideramos los morfismos

$$H^1(S^2Q(-3) \otimes \mathcal{J}_{S'}(1)) \longrightarrow H^2(S^2Q(-3)) \xrightarrow{\psi} H^2(Q \otimes S^2Q(-3))$$

Entonces ψ es inyectiva si y sólo si $H^1(S^2Q(-3) \otimes \mathcal{J}_{S'}(1)) = 0$. Vamos a demostrar que $H^1(S^2Q(-3) \otimes \mathcal{J}_{S'}(1)) = 0$. Para ello, tensorizamos por $S^2Q(-3)$ la sucesión

$$0 \longrightarrow \mathcal{J}_{S'}(1) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{G}}(1) \longrightarrow \mathcal{O}_{S'}(1) \longrightarrow 0,$$

obteniendo

$$0 \longrightarrow S^2Q(-3) \otimes \mathcal{J}_{S'}(1) \longrightarrow S^2Q(-2) \longrightarrow S^2Q|_{S'}(-2) \longrightarrow 0,$$

donde $Q|_{S'} = \Omega_{\mathbb{P}^2}(2)$.

Entonces, como $H^1(S^2Q(-2)) = 0$ por la Proposición 1.2.5, bastará demostrar que $H^0(S^2Q|_{S'}(-2)) = 0$. En primer lugar, nótese que $S^2Q|_{S'}(-2) = (S^2\Omega_{\mathbb{P}^2})(2)$. Ahora, tomando potencias simétricas en la sucesión de Euler para $\mathbb{P}^2$, obtenemos

$$0 \longrightarrow S^2\Omega_{\mathbb{P}^2}(2) \longrightarrow S^2\mathcal{O}^3_{\mathbb{P}^2} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)^3 \longrightarrow 0$$

Tomando cohomología, se deduce que $H^0(S^2\Omega_{\mathbb{P}^2}(2))$ es el núcleo de la aplicación inyectiva

$$S^2H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)) \longrightarrow H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)) \otimes H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)),$$

luego $H^0(S^2\Omega_{\mathbb{P}^2}(2)) = 0$, lo que completa la demostración. $\square$

Lema 1.2.13. $H^1(Q \otimes Q^* \otimes Q^*(-1)) = 0$.

Demostración.

Escribiendo $Q \otimes Q^* \otimes Q^*(-1)$ como la suma directa $(S^2Q \otimes Q(-3)) \oplus Q(-2)$, tenemos que $H^1(Q \otimes Q^* \otimes Q^*(-1)) = H^1(S^2Q \otimes Q(-3)) \oplus H^1(Q(-2))$, que es cero por el Lema 1.2.10 y la Proposición 1.2.2. $\square$

Lema 1.2.14. $h^2(Q \otimes Q^*(-2)) = 1$.

Demostración.

Como $Q \otimes Q^*(-2) = S^2Q(-3) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{G}}(-2)$, es $H^2(Q \otimes Q^*(-2)) = H^2(S^2Q(-3)) \oplus$ $\oplus H^2(\mathcal{O}_{\mathbb{G}}(-2)) = H^2(S^2Q(-3))$, que es un espacio vectorial de dimensión 1 (Proposición 1.2.5). $\square$

Lema 1.2.15. $h^2(S^2Q \otimes Q(-3)) = 4$.

Demostración.

A partir de $(*)$ obtenemos las sucesiones exactas cortas

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{G}}(-1) \longrightarrow (\mathcal{S}^*)^4 \longrightarrow K \longrightarrow 0 \tag{1}$$

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{G}}^{10} \longrightarrow S^2Q \longrightarrow 0 \tag{2}$$

Tensorizamos la sucesión (2) por $Q(-3)$, y tomamos cohomología. Como $H^2(Q(-3)) = 0$ y $H^3(Q(-3)) = 0$ (ver Proposición 1.2.2), tenemos que

$$H^2(S^2Q \otimes Q(-3)) = H^3(K \otimes Q(-3))$$

Ahora tensorizamos la sucesión (1) por $Q(-3)$ y tomamos cohomología. Aplicando la Proposición 1.2.2, tenemos $H^3(Q(-4)) = 0$ y $H^4(Q(-4)) = 0$. Como $H^3(\mathcal{S} \otimes Q(-4))$ es un espacio vectorial de dimensión 1 (ver Proposición 1.2.4), se tiene que $H^3(K \otimes Q(-3))$ tiene dimensión 4. Luego $H^2(S^2Q \otimes Q(-3))$ también es un espacio vectorial de dimensión 4. $\square$

Lema 1.2.16. $H^2(Q \otimes Q^*(-1)) = 0$.

Demostración.

Basta escribir $Q \otimes Q^*(-1)$ como la suma directa $S^2Q(-2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{G}}(-1)$ y aplicar la Proposición 1.2.5. $\square$

Lema 1.2.17. *Si tensorizamos la sucesión universal* (1.1) *con* $S^2Q(-3)$ *y tomamos cohomología, el morfismo* $H^2(S^2Q(-3))^4 \xrightarrow{\psi} H^2(Q \otimes S^2Q(-3))$ *es un isomorfismo.*

Demostración.

Tensoricemos pues la sucesión universal con $S^2Q(-3)$ y, tras tomar cohomología, consideremos los morfismos

$$H^2(\mathcal{S} \otimes S^2Q(-4)) \longrightarrow H^2(S^2Q(-3))^4 \xrightarrow{\psi} H^2(Q \otimes S^2Q(-3)) \longrightarrow H^3(\mathcal{S} \otimes S^2Q(-4))$$

Aplicando la dualidad de Serre, $H^2(\mathcal{S} \otimes S^2Q(-4)) = H^2(\mathcal{S} \otimes S^2Q(-3))$, que se anula según demostramos en el Lema 1.2.11. Por otra parte (de nuevo por la dualidad de Serre),

$H^3(\mathcal{S} \otimes S^2Q(-4)) = H^1(\mathcal{S} \otimes S^2Q(-3)) = H^1(\mathcal{S}^* \otimes S^2Q(-2)) = 0$, por el Lema 1.2.9. Luego ψ es un isomorfismo. $\square$

1.3. Estabilidad de fibrados vectoriales.

En esta sección recordamos los conceptos de estabilidad para fibrados, con particular atención a las superficies, y demostramos las propiedades básicas que verifican los fibrados estables.

Definición 1.3.1. Dados un haz $\mathbb{F}$ y un divisor H sobre una variedad proyectiva de dimensión r, definimos la *pendiente de* $\mathbb{F}$ *con respecto a* H, $\mu_H(\mathbb{F})$, como el cociente $\frac{c_1(\mathbb{F})\cdot H^{r-1}}{rg(\mathbb{F})}$.

Definición 1.3.2. Decimos que el haz $\mathbb{F}$ es $H-$*semiestable* (resp. $H-$*estable*) si para cada subhaz propio $\mathbb{F}'$ de $\mathbb{F}$ se tiene que $\mu_H(\mathbb{F}') \leq \mu_H(\mathbb{F})$ (resp. $\mu_H(\mathbb{F}') < \mu_H(\mathbb{F})$) o, equivalentemente, si para cada haz cociente $\mathbb{E}$ de $\mathbb{F}$, es $\mu_H(\mathbb{F}) \leq \mu_H(\mathbb{E})$ (resp. $\mu_H(\mathbb{F}) < \mu_H(\mathbb{E})$). Diremos que un haz es $H-$*inestable* si no es ni $H-$estable ni $H-$semiestable.

En caso de que $\mathbb{F}$ sea un fibrado de rango 2, basta considerar subhaces de la forma $\mathbb{F}' = \mathcal{O}(D)$, donde D es un divisor.

Observación 1.3.3. Aplicaremos las definiciones anteriores a subvariedades de $\mathbb{G}(1,3)$, y H será siempre la sección hiperplana de $\mathbb{G}(1,3)$. Por comodidad, escribiremos a partir de ahora $\mu(\mathbb{F})$ en lugar de $\mu_H(\mathbb{F})$. Por el mismo motivo, hablaremos simplemente de *semiestabilidad* en vez de $H-$*semiestabilidad*.

Recordamos ahora sin demostración algunos ejemplos y propiedades básicas de los fibrados estables :

1. *Los fibrados universales $\mathcal{S}$ y $\mathcal{Q}$ son estables.*

2. *El fibrado tangente sobre $\mathbb{P}^2$ es estable.*

3. *Dado un fibrado estable $\mathbb{F}$, su producto simétrico $S^d\mathbb{F}$ también es estable.*

4. *Dados $\mathbb{F}$ fibrado estable y $\mathbb{L}$ fibrado lineal, su producto tensorial $\mathbb{F} \otimes \mathbb{L}$ es estable.*

5. *El fibrado dual de un fibrado estable también es estable.*

Definición 1.3.4. Diremos que un fibrado $\mathbb{F}$ es *simple* si todos sus endomorfismos son multiplicación por una constante, esto es, si la dimensión de $H^0(\mathbb{F} \otimes \mathbb{F}^*)$ es exactamente 1.

Demostramos ahora varios resultados sencillos sobre simplicidad y estabilidad de fibrados vectoriales.

Lema 1.3.5. *Todo morfismo $\varphi : \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{E}$ entre fibrados estables tales que $\mu(\mathbb{F}) \geq \mu(\mathbb{E})$ es de rango máximo.*

Demostración.

Sean $\mathbb{E}$ y $\mathbb{F}$ dos fibrados estables, y consideremos $\varphi : \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{E}$ un morfismo entre ellos.

Supongamos que φ no es ni sobre ni inyectiva. Entonces factoriza según el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} & \mathbb{F} & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{E} & \\ & & \searrow \quad \nearrow & & \\ & & Im\varphi & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ 0 & & & & 0 \end{array}$$

donde $rg(Im\varphi) < rg(\mathbb{E}),\ rg(\mathbb{F})$. Como $\mathbb{F}$ es estable, es $\mu(\mathbb{F}) < \mu(Im\varphi)$. Análogamente, $\mu(Im\varphi) < \mu(\mathbb{E})$ por la estabilidad de $\mathbb{E}$. Como por hipótesis $\mu(\mathbb{F}) \geq \mu(\mathbb{E})$, hemos llegado a una contradicción y φ debe tener rango máximo. □

Lema 1.3.6. *Todo fibrado no simple tiene un endomorfismo no nulo con determinante cero.*

Demostración.

En efecto, dado $\mathbb{F}$ fibrado no simple, consideremos un endomorfismo suyo φ distinto de la multiplicación por una constante. Tenemos que el determinante de $\varphi + \lambda Id$ es un polinomio mónico en λ de grado igual al rango del fibrado $\mathbb{F}$. Si λ_0 es una raíz de dicho polinomio, entonces $\varphi + \lambda_0 Id$ es un endomorfismo de $\mathbb{F}$ con determinante nulo. □

Lema 1.3.7. *Todo fibrado estable es simple.*

Demostración.

Consideremos un fibrado estable $\mathbb{E}$ de rango arbitrario r, y supongamos que no es simple. Entonces, según hemos demostrado en el Lema 1.3.6, existe un endomorfismo suyo no nulo φ con determinante cero. Tenemos, pues, que el haz imagen $\mathcal{L} := Im\varphi$ tiene rango como mucho $r - 1$, que es absurdo por el Lema 1.3.5. Luego $\mathbb{E}$ es simple. □

Lema 1.3.8. *Si un fibrado es escindido, entonces no es simple.*

Demostración.

Sea $\mathbb{F} = \mathbb{F}_1 \oplus \mathbb{F}_2$. Es claro que el fibrado $\mathbb{F} \otimes \mathbb{F}^* = (\mathbb{F}_1 \otimes \mathbb{F}_1^*) \oplus (\mathbb{F}_1 \otimes \mathbb{F}_2^*) \oplus (\mathbb{F}_2 \otimes \mathbb{F}_1^*) \oplus (\mathbb{F}_2 \otimes \mathbb{F}_2^*)$ tiene más de una sección global independiente, por lo que $\mathbb{F}$ no es simple. □

Capítulo 2. Generalidades sobre congruencias.

En este capítulo, introducimos la noción de congruencia de rectas en $\mathbb{P}^3$, tema ampliamente tratado desde finales del siglo XIX. Los geómetras algebraicos clásicos consideraban las congruencias sólo como familias de dimensión 2 de rectas de $\mathbb{P}^3$, y no como superficies sumergidas en $\mathbb{P}^5$ mediante la inmersión de Plücker. Con este punto de vista, lo más natural es clasificar las congruencias según su *orden*, i.e., según el número de rectas suyas que pasan por un punto general de $\mathbb{P}^3$. En este contexto, llamaban punto singular a un punto por el que pasan infinitas rectas (esto es, un *punto fundamental*). Por ello, solían considerar en sus clasificaciones solamente aquellas congruencias con una cantidad finita de puntos "singulares" (i.e., sin *curva fundamental*), aunque como superficies en $\mathbb{P}^5$ dichas congruencias pudieran ser singulares.

Las congruencias de orden 1 y 2 fueron clasificadas por Kummer en [**K**], y Fano clasificó las congruencias de orden 3 (ver [**Fa1**] y [**Fa2**]). La mayoría de estos resultados han sido mejorados con técnicas modernas. En particular, Ran reobtuvo, en un contexto más general, la clasificación de Kummer de las congruencias de orden 1 (ver [**R**]). La clasificación de las congruencias de orden 2, consideradas ya como superficies lisas de $\mathbb{P}^5$, fue reobtenida por Verra en [**V1**] (para una primera aproximación a la clasificación sin la hipótesis de lisitud, ver [**A2**]), mientras que Gross completó la clasificación de orden 3 en [**G3**].

Si contemplamos las congruencias como superficies en $\mathbb{P}^5$, es más interesante clasificarlas según su grado. Siempre con el punto de vista clásico, ya Fano clasificó las congruencias de grado menor o igual que 8 (ver [**Fa3**]). Desde un punto de vista actual, la clasificación de congruencias lisas de grado menor o igual que 6 fue hecha por Hernández y Sols en [**HS2**], la de grado menor o igual que 8 (incluyendo los casos con curva fundamental) por Arrondo y Sols (ver [**AS1**]), y la de grado igual a 9 por Verra (ver [**V2**]). La irreducibilidad del esquema de Hilbert de todas las congruencias de grado menor o igual que 9 está demostrada en [**AS2**]. Finalmente, Gross clasificó en [**G2**] las congruencias de grado 10, aunque sin estudiar la irreducibilidad del esquema de Hilbert.

En este capítulo, recordamos las propiedades fundamentales de las congruencias de rectas en $\mathbb{P}^3$. En una primera sección definimos las nociones principales (invariantes, punto fundamental, congruencia degenerada...), recopilando los resultados más importantes. Dedicamos la segunda sección a la descripción completa de todas las congruencias de grado menor o igual que 9, siguiendo las clasificaciones mencionadas anteriormente.

2.1. Definiciones y propiedades generales.

Definición 2.1.1. Llamamos *congruencia* de rectas en $\mathbb{P}^3$ a una superficie irreducible lisa de $\mathbb{G}(1,3)$.

Definición 2.1.2. Decimos que una congruencia S tiene *bigrado* (a,b) si su clase en $A^2(\mathbb{G})$ es $a\alpha+b\beta$, i.e., si hay a rectas suyas que pasan por un punto general de $\mathbb{P}^3$ y b rectas suyas contenidas en un plano general de $\mathbb{P}^3$. Al número a se le llama *orden* de la congruencia, y al número b *clase*. Llamamos *grado* de la congruencia a su grado como superficie en $\mathbb{P}^5$, esto es, a $d=a+b=H_S^2$, donde H_S denota la sección hiperplana de S.

Notación. A partir de ahora, por comodidad, si no hay posibilidad de confusión, escribiremos H en vez de H_S. Además, cuando hablemos de la estabilidad de $Q|_S$ nos referimos a la estabilidad con respecto a la sección hiperplana H de S, y escribiremos $\mu(D)$ en lugar de $\mu(\mathcal{O}_S(D))=DH$.

Definición 2.1.3. Dada una congruencia S, denotamos la característica de Euler-Poincaré de $\mathcal{O}_S$ por $\chi=1-q+p_g=1+p_a$, donde $q=h^1(\mathcal{O}_S)$ es la *irregularidad* de S, $p_g=h^2(\mathcal{O}_S)$ su *género geométrico* y p_a su *género aritmético*.

Denotamos por π el *género seccional* de S, i.e, el género de la intersección de S con un complejo lineal general. Por la fórmula de adjunción, $2\pi-2=H^2-HK$, donde K denota la clase del divisor canónico de S.

Llamaremos *invariantes* de una congruencia S a su orden, su clase, su grado, su irregularidad, sus géneros geométrico, aritmético y seccional, y su clase canónica.

Observación 2.1.4. Mediante el isomorfismo natural entre $\mathbb{G}(1,\mathbb{P}^3)$ y $\mathbb{G}(1,\mathbb{P}^{3^*})$, si S es una congruencia en $\mathbb{G}(1,\mathbb{P}^3)$ de bigrado (a,b), tenemos una congruencia S^* en $\mathbb{G}(1,\mathbb{P}^{3^*})$, que llamaremos *congruencia dual*. Los invariantes de S^* son los mismos que los de S, excepto el bigrado, que es (b, a). Además, $Q|_{S^*} \simeq \mathcal{S}|_S$ y $\mathcal{S}|_{S^*} \simeq Q|_S$.

Definición 2.1.5. Llamamos *punto fundamental* de una congruencia S a un punto de $\mathbb{P}^3$ por el que pasan infinitas rectas de S. Por ejemplo, en el caso del $\alpha-$plano de rectas por un punto p, el punto p es fundamental. En el caso del $\beta-$plano de rectas contenidas en un plano Π, todos los puntos de Π son fundamentales.

Diremos que una curva de $\mathbb{P}^3$ es una *curva fundamental* para S si todos sus puntos son fundamentales para S. Entonces, si S no es un $\alpha-$plano, una curva es fundamental para S si y sólo si corta a todas las rectas de S. A partir de ahora, llamaremos por comodidad *recta fundamental* de una congruencia S a una recta que corta a todas las rectas de S. Según este convenio, si S es el $\alpha-$plano de las rectas que pasan por un punto p de $\mathbb{P}^3$, cualquier recta que pase por p es fundamental. Si S es el $\beta-$plano de las rectas contenidas en un plano Π de $\mathbb{P}^3$, entonces cualquier recta contenida en Π es fundamental para la congruencia.

Un resultado importante sobre clasificación de congruencias con curva fundamental es el siguiente:

Teorema 2.1.6. *Sea S una congruencia de $\mathbb{G}(1,3)$ con curva fundamental C en $\mathbb{P}^3$. Entonces se tiene una de las siguientes posibilidades (por comodidad del lector, los diferentes tipos de congruencias siguen la numeración de la sección 2.2 próxima):*

a) La curva C es una recta.
b) La congruencia S consiste en las bisecantes a C, que es, o bien una cúbica alabeada, en cuyo caso S es una congruencia de tipo 4), o bien una cuártica elíptica, en cuyo caso S es una congruencia de tipo 15).
c) La congruencia S es una superficie reglada de grado mayor que 2 con bigrado o bien de tipo 3) o de tipo 5), en cuyo caso C es una cónica, o bien de tipo 9), en cuyo caso C es una cúbica plana lisa.
d) La curva C es una cúbica plana lisa y S es un fibrado cónico sobre C, de tipo 25).

Demostración.

Véase [**AG**], págs. 288 – 290. $\square$

Lema 2.1.7. *Sea S una congruencia, y supongamos que existe una sucesión exacta*

$$0 \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow Q|_S \longrightarrow \mathcal{L}' \longrightarrow 0,$$

donde $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}'$ son haces de rango 1. Entonces:

i) Si $h^0(\mathcal{L}') = 2$, S tiene una recta fundamental.

ii) Si $h^0(\mathcal{L}') = 1$, S es un $\alpha-$plano.

Demostración.

i) Supongamos que $h^0(\mathcal{L}') = 2$. En ese caso el haz $\mathcal{L}'$ induce un morfismo de un abierto de S (el abierto en el que $\mathcal{L}'$ es localmente libre) en una recta L, asociando a cada punto p del abierto el punto $\mathbb{P}(\mathcal{L}'_p)$. Por otra parte, proyectivizando el morfismo $Q|_S \twoheadrightarrow \mathcal{L}'$ de la sucesión exacta anterior obtenemos que el punto $\mathbb{P}(\mathcal{L}'_p)$ pertenece a la recta $\mathbb{P}(Q_p)$. Tenemos entonces que cada recta $\mathbb{P}(Q_p)$ del abierto de S anterior corta a L en el punto $\mathbb{P}(\mathcal{L}'_p)$. Tomando clausuras, L es una recta fundamental para S.

ii) Exactamente igual que el apartado anterior, teniendo en cuenta que ahora la dimensión de L es 0, demostramos que todas las rectas de S pasan por L. Entonces S está contenida en el $\alpha-$plano definido por L, lo que implica que S es un $\alpha-$plano, pues $dim S = 2$. $\square$

En el apdo. ii) del lema anterior hemos caracterizado los $\alpha-$planos en términos de la restricción de Q. Vamos a hacer lo mismo con los $\beta-$planos:

Lema 2.1.8. *Sea S una congruencia tal que la aplicación $H^0(Q) \longrightarrow H^0(Q|_S)$ no es inyectiva. Entonces S es un $\beta-$plano.*

Demostración.

Sea φ la aplicación $H^0(Q) \longrightarrow H^0(Q|_S)$. Si φ no es inyectiva, entonces existe una sección s de Q que es cero al restringirla a S. Como el lugar de ceros de s es un $\beta-$plano S'. Entonces $S \subset S'$ y, al ser S y S' superficies irreducibles, entonces necesariamente S es el $\beta-$plano S'. $\square$

El siguiente resultado, clave para el capítulo 3 de esta tesis y cuya demostración puede encontrarse en [**AS2**], determina la estructura y los invariantes de toda congruencia *degenerada*, esto es, contenida en un complejo lineal:

Proposición 2.1.9. *Sea S una congruencia de $\mathbb{G}(1,3)$ contenida en un complejo lineal. Entonces $\mathcal{J}_S$ tiene una de las resoluciones siguientes:*

a) $0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{G}}(-n-1) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{G}}(-1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{G}}(-n) \longrightarrow \mathcal{J}_S \longrightarrow 0$*, y los invariantes de S son* $(a,b) = (n,n)$, $K = (n-3)H$, $\chi = \frac{2n^3-9n^2+13n}{6}$, $q = 0$ *(en particular, S es una intersección completa de un complejo lineal y un complejo de grado n),*

b) $0 \longrightarrow Q(-1-n) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{G}}(-n)^2 \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{G}}(-1) \longrightarrow \mathcal{J}_S \longrightarrow 0$*, y los invariantes de S son* $(a,b) = (n,n-1)$, $\pi = (n-1)(n-2)$, $K^2 = 2n^3 - 15n^2 + 30n - 8$, $\chi = \frac{n^3-6n^2+11n-3}{3}$, $q = 0$ *(en particular, S está ligada a un $\beta-$plano en una intersección completa $(1,n)$),*

c) $0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{G}}(-n)^2 \longrightarrow Q(-n) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{G}}(-1) \longrightarrow \mathcal{J}_S \longrightarrow 0$*, y los invariantes de S son* $(a,b) = (n-1,n)$, $\pi = (n-1)(n-2)$, $K^2 = 2n^3 - 15n^2 + 30n - 8$, $\chi = \frac{n^3-6n^2+11n-3}{3}$, $q = 0$ *(en particular, S está ligada a un $\alpha-$plano en una intersección completa $(1,n)$).*

Demostración.

Ver [**AS2**], Proposición 3.8. □

Observación 2.1.10. En la demostración de la proposición anterior se prueba implícitamente que toda congruencia en el caso *b)* o *c)* tiene recta fundamental. Sin embargo, las congruencias del caso *a)* no tienen necesariamente recta fundamental, ya que son intersección completa de un complejo lineal y de un complejo de grado n, y tienen recta fundamental si y sólo si el complejo lineal es especial.

A partir de la proposición anterior, se obtiene el siguiente resultado sobre los fibrados universales restringidos:

Proposición 2.1.11. *Sea S una congruencia de grado impar contenida en un complejo lineal. Entonces se cumple una de las dos afirmaciones siguientes:*

i) La congruencia está en el caso b) de la Proposición 2.1.9 y existe una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_S((n-3)H - K) \longrightarrow Q|_S \longrightarrow \mathcal{O}_S(K-(n-4)H) \longrightarrow 0,$$

lo que prueba que $Q|_S$ es inestable (ya que $\mu((n-3)H-K)=n$).

ii) *La congruencia está en el caso c) de la Proposición 2.1.9 y existe una sucesión exacta*

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_S((n-3)H-K) \longrightarrow \mathcal{S}|_S \longrightarrow \mathcal{O}_S(K-(n-4)H) \longrightarrow 0,$$

lo que prueba que $\mathcal{S}|_S$ es inestable (ya que $\mu((n-3)H-K)=n$).

Demostración.

Véase [**AS2**], Proposición 3.9. □

Para el caso de congruencias de grado par contenidas en un complejo lineal tenemos en cambio el siguiente resultado, que enunciamos de forma más general:

Proposición 2.1.12. *Sea S una intersección completa general en $\mathbb{G}(1,3)$ de dos complejos de grados d_1 y d_2, con $(d_1,d_2)\neq(1,1),(1,2),(2,1)$. Entonces todo subhaz localmente libre de rango 1 de $Q|_S$ (resp. $\mathcal{S}|_S$) es de la forma $\mathcal{O}_S(dH)$, con $d\leq 0$. En particular, $Q|_S$ (resp. $\mathcal{S}|_S$) es estable.*

Demostración.

Por dualidad, basta demostrar el resultado para $Q|_S$.

En primer lugar, utilizamos un teorema clásico de Noether y Lefschetz (para una prueba moderna, ver [**DK**]), que afirma que si S es una superficie intersección completa general en $\mathbb{P}^n$, entonces $Pic(S)$ está generado por la sección hiperplana, a menos que S sea

a) una superficie cuádrica en $\mathbb{P}^3$,

b) una superficie cúbica en $\mathbb{P}^3$,

c) una intersección completa en $\mathbb{P}^4$ de dos hipersuperficies cuádricas.

Nótese que $(d_1,d_2)=(1,1)$ corresponde al caso *a*), que el caso *b*) no puede darse, porque $degS$ es par, y que $(d_1,d_2)=(1,2),(2,1)$ corresponde al caso *c*). Por tanto, en nuestro caso podemos afirmar que $Pic(S)$ está generado por la sección hiperplana. Entonces, todo haz localmente libre de rango 1 sobre S es de la forma $\mathcal{O}_S(dH)$. Sea $\mathcal{O}_S(dH)$ un subhaz de $Q|_S$. Por reducción al absurdo, si fuera $d\geq 1$, entonces $\mathcal{O}_S(H)\subset$

$\mathcal{O}_S(dH) \subset Q|_S$, luego $h^0(Q^*|_S) = h^0(Q|_S(-H)) \neq 0$. Como $Q|_S$ está generado por sus secciones globales, esto implica que $Q|_S$ es escindido, con $\mathcal{O}_S$ como sumando directo. Entonces tenemos un morfismo sobreyectivo

$$Q|_S \twoheadrightarrow \mathcal{O}_S,$$

luego, por el Lema 2.1.7 (ii), S sería un $\alpha-$plano, que no es una intersección completa en $\mathbb{G}(1,3)$. $\square$

Observación 2.1.13. Nótese que la hipótesis de que la intersección completa sea general es crucial: por ejemplo, si S es una congruencia de grado par con recta fundamental (que es una intersección completa por la Proposición 2.1.9), veremos en el Teorema 4.4 *iii*) que $Q|_S$ es semiestable pero no estable.

Una forma de encontrar subhaces lineales de $Q|_S$ viene dada por el siguiente lema:

Lema 2.1.14. *Sea D una curva en S contenida en un $\beta-$plano. Entonces $\mathcal{O}_S(D)$ es un subhaz de $Q|_S$. Recíprocamente, si $h^0(Q|_S) = 4$ y existe un subhaz $\mathcal{O}_S(D) \subset Q|_S$, con D divisor efectivo, entonces D es una curva contenida en un $\beta-$plano.*

Demostración.

Si D está contenida en un $\beta-$plano, entonces existe una sección s del fibrado universal $Q|_S$ de modo que D está contenida en su lugar de ceros. Tensorizando por $Q|_S$ la sucesión

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_S(-D) \longrightarrow \mathcal{O}_S \longrightarrow \mathcal{O}_D \longrightarrow 0$$

y teniendo en cuenta que s se anula en D, tenemos

$$\begin{array}{c} 0 \longrightarrow Q|_S(-D) \xrightarrow{\varphi} Q|_S \xrightarrow{\psi} Q|_D \longrightarrow 0 \\ \uparrow \cdot s \\ \mathcal{O}_S \end{array}$$

y $\psi(Im(\cdot s)) = 0$. Entonces $Im(\cdot s) \subset Ker\psi = Im\varphi$, luego existe un morfismo $\mathcal{O}_S \longrightarrow Q|_S(-D)$ (no nulo) y, por tanto, $\mathcal{O}_S(D)$ es un subhaz de $Q|_S$.

Recíprocamente, sea $\mathcal{O}_S(D) \subset Q|_S$, con D efectivo. Tenemos entonces una sección s de $Q|_S$ que se anula en la curva D. Como el caso en que S es un $\beta-$plano es trivial, vamos a suponer que S no es un $\beta-$plano. Entonces, por el Lema 2.1.8, la aplicación $H^0(Q) \longrightarrow H^0(Q|_S)$ es inyectiva, luego sobreyectiva (porque $h^0(Q|_S) = 4$, por hipótesis, y $h^0(Q) = 4$). Esto implica que la sección s proviene de un $\beta-$plano. □

Observación 2.1.15. El Lema anterior nos permite redemostrar la Proposición 2.1.11 *i*), en concreto el hecho de que existe un subhaz $\mathcal{O}_S(D)$ de $Q|_S$ con $\mu(D) = n$. En efecto, las congruencias degeneradas de bigrado $(n, n-1)$ están ligadas a un $\beta-$plano en una intersección completa $(1, n)$ (ver Proposición 2.1.9), luego existe una curva de grado n en un $\beta-$plano. Esto último se deduce de un resultado más general que afirma que, si Π es un $\alpha-$plano o un $\beta-$plano ligado a una congruencia S en una intersección completa (d_1, d_2), entonces $\Pi \cap S$ es una curva de grado $d_1 + d_2 - 1$ (para las técnicas básicas de la teoría de liaison, véase [**PS**]).

Veamos que la condición $h^0(Q|_S) = 4$ del Lema 2.1.14 no es muy restrictiva. En efecto, si $h^0(Q|_S) \leq 3$ entonces la aplicación $H^0(Q) \longrightarrow H^0(Q|_S)$ no es inyectiva, luego S es un $\beta-$plano (Lema 2.1.8). Por otra parte, el resultado que enunciamos a continuación muestra que hay sólo un número finito de familias de congruencias para las que la restricción de Q tiene más de cuatro secciones independientes:

Teorema 2.1.16. *Una congruencia S es proyección de una superficie lisa de $\mathbb{G}(1,4)$ (i.e., $h^0(Q|_S) \geq 5$) si y sólo si es de uno de los cinco tipos siguientes (utilizamos de nuevo la numeración de la sección próxima* 2.2*):*

i) *La congruencia* $(2,1)$, *dual de la congruencia de tipo* 3),

ii) *la congruencia* $(2,2)$ *de tipo* 5),

iii) *la superficie de Veronese* $(3,1)$, *dual de la congruencia de tipo* 4),

iv) *la congruencia* $(3,2)$, *dual de la congruencia de tipo* 7),

v) *la congruencia* $(3,3)$ *de tipo* 10).

Demostración.

Véase Teorema 5.1 de [**AS2**]. □

Definición 2.1.17. Sea D un divisor en la congruencia S. Diremos que $\mathcal{O}_S(D)$ es un *subhaz saturado* de $Q|_S$ cuando la correspondiente sección de $Q|_S(-D)$ se anule sólo en un conjunto finito de puntos Z. En ese caso existe una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_S(D) \longrightarrow Q|_S \longrightarrow \mathcal{J}_Z(H-D) \longrightarrow 0 \qquad (2.1.17),$$

y $degZ = c_2(Q|_S(-D)) = c_2(Q|_S) - c_1(Q|_S)D + D^2$.

Observación 2.1.18. Veamos cómo a partir de cualquier subhaz $\mathcal{O}_S(D)$ de $Q|_S$ se puede obtener un subhaz de $Q|_S$ saturado de pendiente mayor.

En efecto, consideremos un subhaz de $Q|_S$, $\mathcal{O}_S(D)$, no saturado, y supongamos que la correspondiente sección s de $Q|_S(-D)$ se anula en una curva D'. Tensorizando por $Q|_S(-D)$ la sucesión

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_S(-D') \longrightarrow \mathcal{O}_S \longrightarrow \mathcal{O}_{D'} \longrightarrow 0$$

y teniendo en cuenta que s se anula en D', tenemos

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \longrightarrow Q|_S(-D-D') & \xrightarrow{\varphi} & Q|_S(-D) & \xrightarrow{\psi} & Q|_{D'}(-D) \longrightarrow 0 \\ & & \uparrow \cdot s & & \\ & & \mathcal{O}_S & & \end{array}$$

y $\psi(Im(\cdot s)) = 0$. Entonces $Im(\cdot s) \subset Ker\psi = Im\varphi$, luego existe un morfismo no nulo, y por tanto inyectivo, $\mathcal{O}_S \longrightarrow Q|_S(-D-D')$. Tenemos pues que $\mathcal{O}_S(D+D')$ es un subhaz de $Q|_S$ y $\mu(D+D') > \mu(D)$. Si la sección anterior de $Q|_S(-D-D')$ se anula en una curva, se repite el proceso hasta conseguir un subhaz de $Q|_S$ saturado de pendiente mayor que la pendiente de $\mathcal{O}_S(D)$. A este subhaz se le llama *saturación* del subhaz $\mathcal{O}_S(D)$.

Como consecuencia de lo anterior, si un subhaz $\mathcal{O}_S(D)$ de $Q|_S$ tiene pendiente máxima, entonces es saturado. Por tanto, a la hora de buscar subhaces con pendiente máxima, podemos suponer siempre que tenemos una sucesión exacta como en (2.1.17).

El siguiente resultado reduce el problema de estudiar si el fibrado universal restringido a una congruencia es simple o no a un cálculo cohomológico:

Lema 2.1.19. *Sea S una congruencia de $\mathbb{G}(1,3)$. Entonces $Q|_S$ es simple si y sólo si $H^1(Q \otimes Q^* \otimes \mathcal{J}_S) = 0$.*

Demostración.

Tensorizando por $Q \otimes Q^*$ la sucesión

$$0 \longrightarrow \mathcal{J}_S \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{G}} \longrightarrow \mathcal{O}_S \longrightarrow 0$$

obtenemos

$$0 \longrightarrow Q \otimes Q^* \otimes \mathcal{J}_S \longrightarrow Q \otimes Q^* \longrightarrow Q|_S \otimes Q^*|_S \longrightarrow 0$$

Tomando cohomología y teniendo en cuenta que $H^0(Q \otimes Q^*) = \mathbb{K}$ (Q es estable, luego simple según el Lema 1.3.7) y que $H^1(Q \otimes Q^*) = 0$ (véase el Lema 1.3.7), tenemos

$$0 \longrightarrow H^0(Q \otimes Q^* \otimes \mathcal{J}_S) \longrightarrow \mathbb{K} \xrightarrow{\psi} H^0(Q|_S \otimes Q^*|_S) \longrightarrow H^1(Q \otimes Q^* \otimes \mathcal{J}_S) \longrightarrow 0$$

La aplicación ψ es inyectiva, porque envía el elemento identidad de $Hom(Q,Q)$ en el elemento identidad de $Hom(Q|_S, Q|_S)$. Entonces $Q|_S$ es simple si y sólo si ψ es sobre, es decir, si y sólo si $H^1(Q \otimes Q^* \otimes \mathcal{J}_S) = 0$. $\square$

Finalmente, terminamos esta sección demostrando tres lemas técnicos, los dos primeros sobre superficies racionales, y el tercero sobre superficies regladas. Los necesitaremos en capítulos posteriores, en que aparecen repetidamente congruencias de ambos tipos.

Lema 2.1.20. *Consideremos la explosión $\widetilde{\mathbb{P}^2}(p_1, ..., p_r)$ de $\mathbb{P}^2$ en r puntos $p_1, ..., p_r$. Si L es el pullback de la clase de una recta en $\mathbb{P}^2$ y $E_1, ..., E_r$ son los divisores excepcionales, existe una biyección entre las curvas del sistema lineal de curvas de grado d en $\mathbb{P}^2$ que pasan por los puntos $p_1, ..., p_r$ con multiplicidades $n_1, ..., n_r$ y las curvas del sistema lineal $|dL - n_1E_1 - ... - n_rE_r|$ en $\widetilde{\mathbb{P}^2}(p_1, ..., p_r)$.*

Demostración.

Sea $\pi : \widetilde{\mathbb{P}^2}(p_1, ..., p_r) \longrightarrow \mathbb{P}^2$ la explosión de $\mathbb{P}^2$ en los puntos $p_1, ..., p_r$, y denotemos por $\mathcal{L}$ al sistema lineal de curvas de grado d en $\mathbb{P}^2$ que pasan por los puntos $p_1, ..., p_r$ con multiplicidades $n_1, ..., n_r$. Dada C curva de $\mathcal{L}$, es bien sabido que la transformada estricta de C es una curva $\widetilde{C}$ del sistema lineal $|dL - n_1E_1 - ... - n_rE_r|$ en $\widetilde{\mathbb{P}^2}(p_1, ..., p_r)$. Recíprocamente, dada $\widetilde{C}$ curva en $|dL - n_1E_1 - ... - n_rE_r|$, se tiene que $\widetilde{C}E_i = n_i$ para cada i, y $\widetilde{C}H = d$. Por tanto, $\pi(\widetilde{C})$ es una curva C del sistema $\mathcal{L}$, de donde se deduce que existe una biyección entre las curvas de $\mathcal{L}$ y las curvas de $|dL - n_1E_1 - ... - n_rE_r|$. $\square$

Por esta razón, a partir de ahora, escribiremos indistintamente C y $\widetilde{C}$, y calcularemos $dim|dL - n_1E_1 - ... - n_rE_r|$ en lugar de $dim\mathcal{L}$.

Lema 2.1.21. *Supongamos que existen enteros positivos $a, n_1, ..., n_r$ que verifican las condiciones*

$$\binom{a+2}{2} - \binom{n_1+1}{2} - ... - \binom{n_r+1}{2} = 6 \qquad 1)$$

$$1 + 2a^2 - 2n_1^2 - ... - 2n_r^2 + 3a - n_1 - ... - n_r \leq 20 \qquad 2)$$

Supongamos que existe una congruencia $S = \widetilde{\mathbb{P}^2}(x_1, ..., x_r)$, con sección hiperplana $H_S = aL - n_1E_1 - ... - n_rE_r$ tal que $h^0(\mathcal{O}_S(1)) = 6$ y $h^1(\mathcal{O}_S(2)) = 0$. Sea $\sum_r$ el conjunto de las superficies abstractas de la forma $\widetilde{\mathbb{P}^2}(y_1, ..., y_r)$. Entonces existe un abierto no vacío de $\sum_r$ formado por superficies $S' = \widetilde{\mathbb{P}^2}(y_1, ..., y_r)$, con $h^0(\mathcal{O}_{S'}(1)) = 6$, donde los puntos $y_1, ..., y_r$ están en posición general, y tal que $\mathcal{O}_{S'}(1)$ define una inmersión en $\mathbb{P}^5$ contenida en una cuádrica lisa.

Demostración.

Sea U_1 el conjunto de las superficies $S' = \widetilde{\mathbb{P}^2}(y_1, ..., y_r)$ de $\sum_r$ con $y_1, ..., y_r$ en posición general. Se tiene que U_1 es un abierto no vacío de $\sum_r$.

Sea $\mathcal{F}$ el abierto de $\sum_r$ formado por todas las superficies $S' = \widetilde{\mathbb{P}^2}(y_1, ..., y_r)$ tales que $H_{S'} = aL - n_1E_1 - ... - n_rE_r$ define una inmersión. Como existe una congruencia S con sección hiperplana $H_S = aL - n_1E_1 - ... - n_rE_r$, $\mathcal{F}$ es no vacío. Además, como $h^0(\mathcal{O}_S(1)) = 6$, por la condición 1), se tiene $h^1(\mathcal{O}_S(1)) = 0$, luego $\mathcal{F}$ contiene un abierto no vacío $\mathcal{F}'$ en que $H_{S'}$ sumerge a S' en $\mathbb{P}^5$.

Sea Δ el conjunto de las superficies $S' = \widetilde{\mathbb{P}^2}(y_1, ..., y_r)$ de $\mathcal{F}'$ que están contenidas en una cuádrica de $\mathbb{P}^5$. El conjunto Δ es un cerrado de $\mathcal{F}'$, luego $\mathcal{F}' \setminus \Delta$ es un abierto de $\sum_r$ (porque $\mathcal{F}'$ es un abierto de $\sum_r$). Queremos ver que $\mathcal{F}' \setminus \Delta = \emptyset$.

Sea U_2 el conjunto de superficies $S' = \widetilde{\mathbb{P}^2}(y_1, ..., y_r)$ de $\sum_r$ tales que $h^1(\mathcal{O}_{S'}(2)) = 0$. Este conjunto es un abierto no vacío (porque contiene a la congruencia S) de $\sum_r$.

Tenemos entonces U_1, U_2 y $\mathcal{F}'$ abiertos no vacíos, luego $U_1 \cap U_2 \cap \mathcal{F}'$ es también un abierto no vacío de $\sum_r$. Además, dada una superficie S' en $U_1 \cap U_2 \cap \mathcal{F}'$, es $h^0(\mathcal{O}_{S'}(2)) \leq 20$ (teniendo en cuenta que S' pertenece a $U_2 \cap \mathcal{F}'$ y la condición 2)), luego $h^0(\mathcal{J}_{S',\mathbb{P}^5}(2)) > 0$. Esto es, toda superficie S' de $U_1 \cap U_2 \cap \mathcal{F}'$ está contenida en una cuádrica de $\mathbb{P}^5$, luego $U_1 \cap U_2 \cap \mathcal{F}' \subset \Delta$. Por tanto, $(U_1 \cap U_2 \cap \mathcal{F}') \bigcap (\mathcal{F}' \backslash \Delta) = \emptyset$ y, como $U_1 \cap U_2 \cap \mathcal{F}' \neq \emptyset$, se sigue que $\mathcal{F}' \backslash \Delta = \emptyset$, i.e., todas las superficies de $\mathcal{F}$ están contenidas en una cuádrica de $\mathbb{P}^5$.

Sea ahora U el conjunto de las superficies $S' = \widetilde{\mathbb{P}^2}(y_1, ..., y_r)$ de $\sum_r$ contenidas en una cuádrica lisa de $\mathbb{P}^5$. Es un abierto no vacío (porque contiene a S) de Δ. Tenemos entonces dos abiertos no vacíos de Δ, $U_1 \cap U_2 \cap \mathcal{F}'$ y U, luego $U_1 \cap U_2 \cap \mathcal{F}' \cap U$ es un abierto no vacío. Identificando una cuádrica lisa de $\mathbb{P}^5$ con $\mathbb{G}(1,3)$, se tiene que existen congruencias $\widetilde{\mathbb{P}^2}(y_1, ..., y_r)$ donde los puntos $y_1, ..., y_r$ están en posición general.

$\square$

Observación 2.1.22. Nótese que la condición 2) anterior es imponer que $\chi(\mathcal{O}_S(2)) \leq 20$.

Recordemos a continuación algunas nociones sobre superficies regladas (siguiendo la notación de [**Ha**]).

Sea X una superficie reglada sobre una curva C, y sea $\pi : X \longrightarrow C$ el morfismo sobreyectivo correspondiente. Es posible (ver [**Ha**], V, Proposición 2.8) escribir $X \simeq \mathbb{P}(\mathcal{E})$, donde $\mathcal{E}$ es un haz localmente libre sobre C con la propiedad de que $H^0(\mathcal{E}) \neq 0$ pero, para cada haz invertible $\mathcal{L}$ sobre C con $deg\mathcal{L} < 0$, es $H^0(\mathcal{E} \otimes \mathcal{L}) = 0$. Se dice que el haz $\mathcal{E}$ es *normalizado*. En este caso, el entero $e = -deg \bigwedge^2 \mathcal{E}$ es un invariante de X, por lo que denotaremos X como X_e. Además, existe una sección $\sigma : C \longrightarrow X_e$ con imagen C_0 tal que $\mathcal{O}_{X_e}(C_0) = \mathcal{O}_{X_e}(1)$ y $C_0^2 = -e$. Además, si f es una fibra de π, se tiene

$$C_0 \cdot f = 1, f^2 = 0$$

Finalmente, las clases numéricas de divisores en X están generadas por C_0 y f, luego cualquier divisor D se puede escribir como $D \equiv pC_0 + qf$, con $p, q \in \mathbb{Z}$, donde $\equiv$ denota equivalencia numérica.

Lema 2.1.23. *Sea S una superficie proyectiva con sección hiperplana H. Supongamos que además S es un fibrado cónico, es decir, que existe $S \xrightarrow{\pi} C$ un morfismo sobreyectivo sobre una curva C cuyas fibras son cónicas (en el espacio proyectivo que contiene a S). Sea r el número de fibras de π que son cónicas degeneradas. Entonces S es la explosión en r puntos de una superficie reglada S' sobre la curva C, y los divisores excepcionales son rectas. Además, con las notaciones anteriores,*

$$H \equiv 2C_0 + qf - E_1 - ... - E_r,$$

con q un número entero.

Demostración.

Supongamos que $\pi^{-1}(p)$ es una cónica degenerada para un punto p de C, es decir, $\pi^{-1}(p) = L_1 \cup L_2$, con L_1 y L_2 rectas. Sea f la clase numérica de la fibra de π. Como $f \cdot L_1 = 0$, entonces $(L_1 + L_2) \cdot L_1 = 0$. Por otra parte, como $L_1 \cdot L_2 = 1$, entonces $L_1^2 = -1$ y L_1 es un divisor excepcional por el Teorema de Castelnuovo. Implotando entonces L_1 seguimos teniendo un morfismo sobre C, pero ahora la fibra de π en p es L_2. Reiterando este proceso tantas veces como fibras degeneradas tenga π, S es la explosión en r puntos de una superficie S' con un morfismo sobreyectivo de S' en C. Como todas las fibras de este morfismo son isomorfas a $\mathbb{P}^1$, S' es una superficie reglada sobre C.

Por lo anterior, $Pic(S) =< C_0, f, E_1, ..., E_r >$, donde $E_1, ...E_r$ son los divisores excepcionales. Como dichos divisores excepcionales son rectas, tenemos que $H \cdot E_i = 1$ para cada i, luego

$$H = pC_0 + qf - E_1 - ... - E_r$$

Como la fibra f es una cónica, entonces necesariamente es $p = 2$, teniendo en cuenta que $C_0 \cdot f = 1$, $f^2 = 0$ y $f \cdot E_i = 0$ para cada i. □

2.2. Congruencias de grado menor o igual que 9.

Presentamos en primer lugar una tabla con todas las congruencias de $\mathbb{G}(1,3)$ de grado menor o igual que 9, tomada de la recopilación de [**AS2**], añadiendo a continuación una breve descripción de cada una de ellas (con algunas mejoras por nuestra parte). En la tabla omitimos en cada caso la congruencia dual, pues, salvo el bigrado, el resto de los invariantes y la sección hiperplana son idénticos. En caso de que una congruencia sea degenerada (esto es, contenida en un complejo lineal), lo especificamos en la tabla.

Con respecto a la notación utilizada, $\widetilde{X}(x_1, ..., x_r)$ denota la explosión de una superficie X en los puntos $x_1, ..., x_r$, siendo $E_1, ..., E_r$ los correspondientes divisores excepcionales. Para superficies racionales o regladas, utilizamos la notación introducida en los lemas 2.1.20 y 2.1.23. Finalmente, i.c (d_1, d_2) indica la intersección completa en $\mathbb{G}(1,3)$ de dos complejos de grados d_1 y d_2.

	(a,b)	π	Descripción	Inmersión en $\mathbb{P}^5$
1)	$(0,1)$	0	$\mathbb{P}^2$	L (degenerada)
2)	$(1,1)$	0	$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$	$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1}(1,2)$ (degenerada)
3)	$(1,2)$	0	$\widetilde{\mathbb{P}^2}(x)$	$2L - E$ (degenerada)
4)	$(1,3)$	0	$\mathbb{P}^2$	$2L$
5)	$(2,2)$	0	$X_e = \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-e))$, con $e = 0, 2$	$C_0 + (2 + \frac{e}{2})f$
6)	$(2,2)$	1	$\widetilde{\mathbb{P}^2}(x_1, ..., x_5)$	$3L - E_1 - ... - E_5$ (degenerada)
7)	$(2,3)$	1	$\widetilde{\mathbb{P}^2}(x_1, ..., x_4)$	$3L - E_1 - ... - E_4$
8)	$(2,3)$	2	$\widetilde{\mathbb{P}^2}(x_1, ..., x_8)$	$4L - 2E_1 - E_2 - ... - E_8$ (degenerada)
9)	$(3,3)$	1	X_0	$C_0 + 3f$
10)	$(3,3)$	1	$\widetilde{\mathbb{P}^2}(x_1, x_2, x_3)$	$3L - E_1 - E_2 - E_3$
11)	$(3,3)$	2	$\widetilde{\mathbb{P}^2}(x_1, ..., x_7)$	$4L - 2E_1 - E_2 - ... - E_7$
12)	$(3,3)$	4	Superficie K3, i.c. $(1,3)$	(degenerada)
13)	$(3,4)$	3	$\widetilde{\mathbb{P}^2}(x_1, ..., x_9)$	$4L - E_1 - ... - E_9$
14)	$(3,4)$	6	Fibración elíptica minimal	(degenerada)
15)	$(2,6)$	3	X_{-1}	$2C_0 + f$
16)	$(3,5)$	4	$\widetilde{\mathbb{P}^2}(x_1, ..., x_{10})$	$6L - 2E_1 - ... - 2E_6 - E_7 - ... - E_{10}$
17)	$(4,4)$	3	$\widetilde{\mathbb{P}^2}(x_1, ..., x_7)$	$6L - 2E_1 - ... - 2E_7$
18)	$(4,4)$	4	$\widetilde{\mathbb{P}^2}(x_1, ..., x_{11})$	$5L - 2E_1 - 2E_2 - E_3 - ... - E_{11}$
19)	$(4,4)$	5	Superficie K3, i.c. $(2,2)$	
20)	$(4,4)$	9	Superficie de tipo general, i.c. $(1,4)$	K (degenerada)
21)	$(3,6)$	5	$\widetilde{\mathbb{P}^2}(x_1, ..., x_{10})$	$7L - 2E_1 - ... - 2E_{10}$
22)	$(4,5)$	5	$\widetilde{\mathbb{P}^2}(x_1, ..., x_{12})$	$6L - 2E_1 - ... - 2E_5 - E_6 - ... - E_{12}$
23)	$(4,5)$	6	$\widetilde{X}(x)$donde X es una superficie K3 de grado 10 en $\mathbb{P}^6$	$H_X - E$
24)	$(4,5)$	12	Superficie de general con $K^2 = 17$	(degenerada)
25)	$(3,6)$	4	Fibrado cónico sobre curva elíptica	$2C_0 + (3 + e)f - E_1 - E_2 - E_3$

Congruencias de tipo 1)

Estas congruencias son, claramente, los $\beta-$planos, que forman una familia lisa de dimensión 3. Los fibrados universales restringidos son $\mathcal{S}|_S = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)$ y $Q|_S = \mathbb{T}_{\mathbb{P}^2}(-1) = \Omega_{\mathbb{P}^2}(2)$ (porque $rgQ|_S = 2$). Nótese que, en el caso dual $(1,0)$, $Q|_S$ no es simple por ser escindido (Lema 1.3.8).

Congruencias de tipo 2)

Consisten en el conjunto de rectas secantes a dos rectas fijas de $\mathbb{P}^3$. Esta descripción geométrica corresponde a las inmersión de $S = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ en $\mathbb{G}(1,3)$ por el fibrado $\mathcal{O}_S(1,0) \oplus$

$\mathcal{O}_S(0,1)$. En efecto, el fibrado lineal $\mathcal{O}_S(1,0)$ transforma S en una recta L_1 de $\mathbb{P}^3$ y $\mathcal{O}_S(0,1)$ en una recta L_2 disjunta con L_1. Así, existe un isomorfismo natural entre S y $L_1 \times L_2$, y la congruencia consiste en las rectas que unen un punto de L_1 con un punto de L_2.

Por tanto, la restricción a S de Q es $\mathcal{O}_S(1,0) \oplus \mathcal{O}_S(0,1)$ y, dualizando, también es $\mathcal{O}_S(1,0) \oplus \mathcal{O}_S(0,1)$ la restricción de $\mathcal{S}$ a S. Igual que en el caso de la congruencia $(1,0)$, $Q|_S$ no es simple por ser escindido (Lema 1.3.8).

Congruencias de tipo 3)

Una congruencia S de este tipo consiste en aquellas rectas que unen un punto de una cónica C con un punto de una recta M de $\mathbb{P}^3$. Además $\mathcal{S}|_S = \mathcal{O}_S(L) \oplus \mathcal{O}_S(L-E)$, por lo que la restricción del fibrado Q a la congruencia dual $(2,1)$ no es simple (ver Lema 1.3.8).

Congruencias de tipo 4)

Las congruencias de este tipo consisten en el conjunto de rectas bisecantes a una cúbica alabeada. El fibrado $\mathcal{S}$ restringido a una congruencia S de tipo 4) es $\mathcal{S}|_S = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)$, luego el fibrado Q restringido a la congruencia dual $(3,1)$ no es simple (Lema 1.3.8).

Congruencias de tipo 5)

La congruencia de este tipo es una superficie reglada sobre $\mathbb{P}^1$. Contrariamente a lo que se afirma en [**HS2**], se puede dar tanto el caso $e=0$ como el caso $e=2$ (ver [**Go**]). Sólo en el caso más general $e=0$ se tiene que $S = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, con sección hiperplana $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1}(1,2)$.

Congruencias de tipo 6)

Esta congruencia es una intersección completa de dos complejos de grados uno y dos, luego existe una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{G}} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{G}}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{G}}(2) \longrightarrow \mathcal{J}_S(3) \longrightarrow 0$$

Las rectas de la congruencia son aquellas que cortan rectas correspondientes (bajo isomorfismos fijados) de tres haces con tres rectas correspondientes concurrentes y coplanares.

Congruencias de tipo 7)

Se tiene una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{G}} \longrightarrow Q(1) \longrightarrow \mathcal{J}_S(3) \longrightarrow 0$$

La congruencia consiste en las rectas que cortan rectas correspondientes de tres haces con tres rectas correspondientes concurrentes.

Congruencias de tipo 8)

Como está contenida en un complejo lineal (tiene, por tanto, recta fundamental), se tienen las sucesiones exactas (véase Proposición 2.1.11)

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_S(3L - E_1 - ... - E_8) \longrightarrow \mathcal{S}|_S \longrightarrow \mathcal{O}_S(L - E_1) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{G}}^2 \longrightarrow Q \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{G}}(2) \longrightarrow \mathcal{J}_S(3) \longrightarrow 0$$

Congruencias de tipo 9)

Está ligada a la unión disjunta de un $\alpha-$plano y un $\beta-$plano en una intersección completa $(2,2)$, esto es, la unión de S, del $\alpha-$plano y del $\beta-$plano anteriores es la intersección completa en $\mathbb{G}(1,3)$ de dos complejos cuadráticos. Por tanto, la resolución del haz de ideales $\mathcal{J}_S$ es

$$0 \longrightarrow \dot{E}(-3) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{G}}(-3) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{G}}(-2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{G}}(-2) \longrightarrow \mathcal{J}_S \longrightarrow 0$$

Vamos a demostrar que existe una cúbica en S contenida en un $\beta-$plano. En efecto, sea S' la unión disjunta de un $\alpha-$plano y un $\beta-$plano ligada a S. Por la Observación 2.1.15, $S \cap S'$ es una curva de grado 3. Ahora bien, como el $\alpha-$plano y el $\beta-$plano son disjuntos, tenemos que S y el $\beta-$plano se cortan en una cúbica.

La sección hiperplana de X_0 en $\mathbb{P}^5$ es $H = C_0 + \mathcal{L}f$, donde $\mathcal{L}$ es un divisor en C de grado 3, donde la sección C_0 y la fibra f verifican las siguientes relaciones:

$$C_0^2 = 0, f^2 = 0, C_0 f = 1$$

Se sabe que la superficie reglada X_0 es el proyectivizado de un fibrado de rango 2 sobre C, $\mathbb{L} \oplus (\mathbb{L} \otimes \mathcal{O}(\mathbf{e}))$, donde $\mathbb{L}$ y $\mathcal{O}(\mathbf{e})$ son fibrados lineales sobre C de grados 3 y 0 respectivamente, con $\mathbf{e} \nsim 0$. Además X_0 tiene dos secciones, C_0 y $C_0 - \mathbf{e}f$, una de las cuales es la cúbica anterior contenida en un $\beta-$plano.

Congruencias de tipo 10)

Se tiene una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{G}} \longrightarrow \dot{E}(2) \longrightarrow \mathcal{J}_S(3) \longrightarrow 0$$

Congruencias de tipo 11)

La resolución del haz de ideales $\mathcal{J}_S$ viene dada por

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{G}}^2 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{G}}(1)^3 \longrightarrow \mathcal{J}_S(3) \longrightarrow 0,$$

y la congruencia consiste en las rectas que cortan rectas correspondientes de tres haces.

Congruencias de tipo 12)

Son intersecciones completas de un complejo lineal y un complejo cúbico. Por tanto, se tiene la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{G}} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{G}}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{G}}(3) \longrightarrow \mathcal{J}_S(4) \longrightarrow 0$$

Congruencias de tipo 13)

La resolución del haz de ideales es

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{G}}(-3)^3 \longrightarrow Q(-3) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{G}}(-2) \longrightarrow \mathcal{J}_S \longrightarrow 0$$

Veamos que se dan las hipótesis del Lema 2.1.21, y por tanto podemos deducir que para la congruencia general de este tipo los puntos $x_1, ..., x_9$ están en posición general. En efecto, es inmediato comprobar que se cumplen las condiciones 1) y 2) del lema. Como

$h^0(\mathcal{J}_S(1)) = 0$ y $h^1(\mathcal{J}_S(1)) = 0$, es claro que $h^0(\mathcal{O}_S(1)) = 6$. Vamos a demostrar ahora que $h^1(\mathcal{O}_S(2)) = 0$.

En primer lugar, teniendo en cuenta que $\mathcal{O}_{\mathbb{G}}(2)$ no tiene cohomología intermedia, obtenemos $h^1(\mathcal{O}_S(2)) = h^2(\mathcal{J}_S(2))$.

Ahora, para calcular $h^2(\mathcal{J}_S(2))$, tensorizamos por $\mathcal{O}_{\mathbb{G}}(2)$ la resolución del haz de ideales de S y tomamos cohomología. Como $h^2(Q(-1)) = 0$ y ni $\mathcal{O}_{\mathbb{G}}$ ni $\mathcal{O}_{\mathbb{G}}(-1)$ tienen cohomología intermedia, resulta $h^2(\mathcal{J}_S(2)) = 0$.

Congruencias de tipo 14)

Por las Proposiciones 3.8 y 3.9 ([**AS2**].

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_S(H-K) \longrightarrow \mathcal{S}|_S \longrightarrow \mathcal{O}_S(K) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{G}}^2 \longrightarrow Q \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{G}}(3) \longrightarrow \mathcal{J}_S(4) \longrightarrow 0$$

Por la Proposición 2.1.9 (ver Observación 2.1.10), S tiene recta fundamental.

Congruencias de tipo 15)

Una congruencia de este tipo consiste en el conjunto de rectas bisecantes a una cuártica elíptica C.

Se tiene la siguiente resolución de $\mathcal{J}_S$:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{G}}^2 \longrightarrow S^2Q \longrightarrow \mathcal{J}_S(3) \longrightarrow 0$$

Denotemos por C_0 a una sección de S, y por f a una fibra del morfismo de S sobre la curva elíptica C. La sección C_0 y la fibra f verifican las siguientes relaciones:

$$C_0^2 = 0, f^2 = 0, C_0 \cdot f = 1$$

Nótese que no existe ningún plano de $\mathbb{P}^3$ que contenga infinitas rectas de S. En efecto, supongamos que existiese un tal plano Π. Al cortar Π con S, los puntos de intersección del plano con la cuártica C que obtenemos son como mucho cuatro, por los que pasan seis bisecantes como máximo. Luego el plano Π contiene, como máximo, seis rectas de S.

Congruencias de tipo 16)

La resolución del haz de ideales $\mathcal{J}_S$ es

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{G}}^4 \longrightarrow Q \oplus Q \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{G}}(1) \longrightarrow \mathcal{J}_S(3) \longrightarrow 0$$

Como ya hemos señalado en la tabla, esta congruencia se obtiene explotando diez puntos de $\mathbb{P}^2$. Veamos que, para la congruencia general de este tipo, dichos puntos están en posición general. En efecto, es claro que se verifican las condiciones 1) y 2) del Lema 2.1.21, y que $h^0(\mathcal{O}_S(1)) = 6$ (pues $h^0(\mathcal{J}_S(1)) = 0$ y $h^1(\mathcal{J}_S(1)) = 0$). Para demostrar que $h^1(\mathcal{O}_S(2)) = 0$, basta tener en cuenta que $h^1(\mathcal{O}_S(2)) = h^2(\mathcal{J}_S(2))$ y tomar cohomología en la sucesión

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{G}}{}^4(-1) \longrightarrow Q^* \oplus Q^* \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{G}} \longrightarrow \mathcal{J}_S(2) \longrightarrow 0$$

Congruencias de tipo 17)

La congruencia S es un cubrimiento doble de la superficie de Veronese en $\mathbb{P}^4$, luego existe una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{G}}^3 \longrightarrow p^*\Omega_{\mathbb{P}^4}(2) \longrightarrow \mathcal{J}_S(3) \longrightarrow 0 \qquad (1),$$

donde p es la restricción a $\mathbb{G}$ de la proyección de $\mathbb{P}^5$ a $\mathbb{P}^4$.

Como $h^0(\mathcal{O}_S(1)) - h^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^5}(1)) = 1$, S es la proyección de una superficie irreducible S' de $\mathbb{P}^6$ del siguiente modo: existe un cono cuadrático Q' en $\mathbb{P}^6$ con un único punto singular p' y que contiene a S', de forma que la proyección $\pi_{p'}$ de $\mathbb{P}^6$ sobre $\mathbb{P}^5$ desde el punto p' es tal que $\pi_{p'}(Q')$ es una cuádrica lisa de $\mathbb{P}^5$ (y, por tanto, isomorfa a $\mathbb{G}(1,3)$) y $\pi_{p'}|_{S'}$ es un isomorfismo con $\pi_{p'}(S') = S$.

Vamos a demostrar a continuación que la única cuádrica de $\mathbb{P}^5$ que contiene a S es $\mathbb{G}(1,3)$. En efecto, tomando cohomología en (1), teniendo en cuenta que $h^0(p^*\Omega_{\mathbb{P}^4}(1)) = 0$ (ver [**AS2**]) y que $h^1(\mathcal{O}_{\mathbb{G}}^3(-1)) = 0$, obtenemos $h^0(\mathcal{J}_{S,\mathbb{G}}(2)) = 0$.

Consideremos ahora las sucesiones

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{J}_{S,\mathbb{P}^5}(2) & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^5}(2) & \longrightarrow & \mathcal{O}_S(2) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{J}_{S,\mathbb{G}}(2) & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\mathbb{G}}(2) & \longrightarrow & \mathcal{O}_S(2) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Por el Lema de la serpiente, tenemos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^5} \longrightarrow \mathcal{J}_{S,\mathbb{P}^5}(2) \longrightarrow \mathcal{J}_{S,\mathbb{G}}(2) \longrightarrow 0$$

Tomando cohomología y utilizando que $h^0(\mathcal{J}_{S,\mathbb{G}}(2)) = 0$, obtenemos $h^0(\mathcal{J}_{S,\mathbb{P}^5}(2)) = 1$ o, equivalentemente, $\mathbb{G}$ es la única cuádrica de $\mathbb{P}^5$ que contiene a S.

Vamos a demostrar ahora que la superficie S' es la intersección de todas las cuádricas de $\mathbb{P}^6$ que la contienen.

En efecto, consideremos la sección hiperplana de S, $H = 6L-2E_1-...-2E_7$, y el divisor $D = 3L-E_1-...-E_7$ en S'. Si denotamos por s_0, s_1 y s_2 las tres secciones independientes de $\mathcal{O}_{S'}(D)$, como $H = 2D$, se tiene que $s_0^2, s_0s_1, s_0s_2, s_1^2, s_1s_2, s_2^2$ son secciones independientes de $\mathcal{O}_{S'}(H)$. Teniendo en cuenta la inmersión de S' en $\mathbb{P}^6$ por el sistema lineal $|H|$, dada por

$$x \longmapsto ({s_0}^2(x) : s_0s_1(x) : s_0s_2(x) : {s_1}^2(x) : s_1s_2(x) : {s_2}^2(x) : t(x))$$

con t una sección cualquiera de $\mathcal{O}_{S'}(H)$, es claro que S' está contenida en

$$Z := \{(x_0 : ... : x_6) \in \mathbb{P}^6 | rg \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ x_1 & x_3 & x_4 \\ x_2 & x_4 & x_5 \end{pmatrix} = 1\}$$

Sea π la proyección de $\mathbb{P}^6$ sobre $\mathbb{P}^5$ desde el punto $(0 : ... : 0 : 1)$. Si llamamos V a la variedad de Veronese en $\mathbb{P}^5$ (imagen de $\mathbb{P}^2$ por una aplicación de Veronese de grado 2), nótese que $Z = \pi^{-1}(V)$, porque

$$V = \{(x_0 : ... : x_5) \in \mathbb{P}^5 | rg \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ x_1 & x_3 & x_4 \\ x_2 & x_4 & x_5 \end{pmatrix} = 1\}$$

Obsérvese ahora que $\pi^{-1}(V)$ es la intersección en $\mathbb{P}^6$ de las cuádricas $x_0x_3-x_1^2$, $x_0x_4-x_1x_2$, $x_0x_5-x_2^2$, $x_1x_4-x_2x_3$, $x_1x_5-x_2x_4$ y $x_3x_5-x_4^2$, singulares en el punto $(0 : ... : 0 : 1)$.

Consideremos ahora la cuádrica Q' desde cuyo vértice p' proyectábamos para obtener S. Nótese que p' no es el punto $(0 : ... : 0 : 1)$. En efecto, si lo fuera, entonces $\pi_{p'} = \pi$, lo que es absurdo porque π no es un isomorfismo de S' en $V = \pi(S')$ (es una aplicación $2:1$). Así pues, S' está contenida en $\pi^{-1}(V)\bigcap Q'$. Como $dimV = 2$, es $dim(\pi^{-1}(V)) = 3$ y, como $degV = 4$, es $deg(\pi^{-1}(V)) = 4$, luego $\pi^{-1}(V)\bigcap Q'$ es una superficie de grado 8. Ahora bien, como S' es una superficie de grado 8, se tiene $S' = \pi^{-1}(V)\bigcap Q'$, lo que demuestra que S' es una intersección de cuádricas que la contienen luego, en particular, es la intersección de todas las cuádricas de $\mathbb{P}^6$ que la contienen.

Por último, nótese que las congruencias de este tipo no verifican las hipótesis del Lema 2.1.21. Sin embargo, con otras hipótesis, se demuestra también que en la congruencia general de este tipo los puntos $x_1, ..., x_7$ están en posición general.

Congruencias de tipo 18)

La resolución del haz de ideales de S es

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{G}}^4 \longrightarrow \mathcal{S} \oplus Q \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{G}}(1) \longrightarrow \mathcal{J}_S(3) \longrightarrow 0$$

Vamos a demostrar que en la congruencia general de este tipo, los once puntos $x_1, ..., x_{11}$ en que explotamos $\mathbb{P}^2$ están en posición general. En efecto, es inmediato ver que se verifican las condiciones 1) y 2) del Lema 2.1.21. Para demostrar que $h^1(\mathcal{O}_S(2)) = 0$, basta tomar cohomología en la sucesión

$$0 \longrightarrow {\mathcal{O}_{\mathbb{G}}}^4 \longrightarrow \mathcal{S}(-1) \oplus Q(-1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{G}} \longrightarrow \mathcal{J}_S(2) \longrightarrow 0,$$

y tener en cuenta que $h^1(\mathcal{O}_S(2)) = h^2(\mathcal{J}_S(2))$.

Congruencias de tipo 19)

Son intersección completa de dos complejos cuadráticos, luego tenemos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{G}} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{G}}(2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{G}}(2) \longrightarrow \mathcal{J}_S(4) \longrightarrow 0$$

Congruencias de tipo 20)

Son intersección completa de un complejo lineal y de uno cuadrático, luego tenemos la resolución del haz de ideales

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{G}} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{G}}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{G}}(4) \longrightarrow \mathcal{J}_S(5) \longrightarrow 0$$

Congruencias de tipo 21)

La resolución del haz de ideales de S es

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{G}}^5 \longrightarrow Q \oplus Q \oplus Q \longrightarrow \mathcal{J}_S(3) \longrightarrow 0$$

Tomando cohomología en la sucesión anterior comprobamos que se cumplen las hipótesis del Lema 2.1.21, luego los puntos $x_1, ..., x_{10}$ están en posición general para la congruencia general de este tipo.

Congruencias de tipo 22)

La resolución de $\mathcal{J}_S$ es

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{G}}^5 \longrightarrow \mathcal{S} \oplus Q \oplus Q \longrightarrow \mathcal{J}_S(3) \longrightarrow 0$$

Demostremos que se cumplen todas las hipótesis del Lema 2.1.21. En efecto, es inmediato comprobar que se cumplen las condiciones 1) y 2) del Lema 2.1.21. Para demostrar que $h^1(\mathcal{O}_S(2)) = 0$, consideremos la sucesión (véase [**AS2**], pág. 55)

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{G}}^5(-1) \longrightarrow \mathcal{S}^* \oplus Q^* \oplus Q^* \longrightarrow \mathcal{J}_{S,\mathbb{G}}(2) \longrightarrow 0$$

Tomando cohomología, obtenemos $h^2(\mathcal{J}_{S,\mathbb{G}}(2)) = 0$. Luego $h^1(\mathcal{O}_S(2)) = 0$, porque $h^1(\mathcal{O}_S(2)) = h^2(\mathcal{J}_{S,\mathbb{G}}(2))$, y los puntos $x_1, ..., x_{12}$ están en posición general en la congruencia general de este tipo.

Congruencias de tipo 23)

La congruencia S de este tipo es la explosión $\widetilde{X}(x)$ en un punto x de una superficie $K3$, X, de grado 10 en $\mathbb{P}^6$, con sección hiperplana $H = H_X - E$, donde H_X es la sección hiperplana de X y E el divisor excepcional.

La resolución de $\mathcal{J}_S$ es

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{G}}(-4) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{G}}(-3) \longrightarrow Q(-3) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{G}}(-2) \longrightarrow \mathcal{J}_S \longrightarrow 0,$$

luego S es no degenerada.

Congruencias de tipo 24)

Las congruencias de este tipo están contenidas en un complejo lineal luego, por la Proposición 2.1.11 se tiene la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_S(2H - K) \longrightarrow \mathcal{S}|_S \longrightarrow \mathcal{O}_S(K - H) \longrightarrow 0$$

La resolución del haz de ideales de S es (véase [**AS2**])

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{G}}^2 \longrightarrow Q \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{G}}(4) \longrightarrow \mathcal{J}_S(5) \longrightarrow 0$$

Congruencias de tipo 25)

La congruencia S de este tipo es un fibrado cónico sobre una cúbica plana lisa C, luego, por el Lema 2.1.23, S es la explosión en r puntos de una superficie reglada S' sobre la curva C. Calculemos r:
Como el género de C es $g_C = 1$, entonces $K_{S'}^2 = 8(1 - g_C) = 0$. Como $K_S = K_{S'} + E_1 + ... + E_r$, entonces $K_S^2 = K_{S'}^2 - r = -r$. Ahora, por la fórmula de puntos dobles para S, tenemos $36 + 9 = 27 + 4(8 - 2) + 2K_S^2$, i.e., $K_S^2 = -3$, luego $r = 3$. Así, S es la explosión de S' en tres puntos.

Por el Lema 2.1.23, sabemos que la sección hiperplana de S es $H \equiv 2C_0 + qf - E_1 - E_2 - E_3$, para algún entero q. Como $9 = H_S^2 = -4e + 4q - 3$, tenemos $q = 3 + e$, y $H_S \equiv 2C_0 + (3 + e)f - E_1 - E_2 - E_3$ (donde $C_0^2 = -e$).

Capítulo 3. Simplicidad del fibrado universal restringido a congruencias de $\mathbb{G}(1,3)$.

En este capítulo clasificamos las congruencias S de $\mathbb{G}(1,3)$ tales que $Q|_S$ no es simple. Dividimos el estudio de un tal $Q|_S$ en tres casos: si $Q|_S$ tiene más de cuatro secciones independientes, entonces la congruencia correspondiente está proyectada desde una superficie de $\mathbb{G}(1,4)$; tales congruencias están clasificadas (ver Teorema 2.1.16). Por otra parte, si $Q|_S$ tiene exactamente cuatro secciones independientes entonces existe una recta fundamental, y las congruencias con esta propiedad también están clasificadas (ver Proposición 2.1.9). Finalmente, si $Q|_S$ tiene menos de cuatro secciones independientes, S es necesariamente un $\beta-$plano, según vimos en el Lema 2.1.8.

Para comenzar, recordemos que en la descripción de congruencias de grado bajo presentada en la sección 2.2 aparecen cuatro ejemplos de congruencias para las que el fibrado universal restringido es escindido, y por tanto no es simple: las congruencias duales de las de tipo 1), las congruencias de tipo 2), las congruencias duales de las de tipo 3) y las congruencias duales de las de tipo 4).

Enunciamos a continuación el Teorema demostrado en esta sección:

Teorema 3.1. *Una congruencia S tiene $Q|_S$ no simple si y sólo si es una de las siguientes:*

a) $S = \mathbb{P}^2$ *y* $Q|_S = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)$ *(un $\alpha-$plano $(1,0)$ dual del tipo 1)),*

b) $S = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ *y* $Q|_S = \mathcal{O}_S(1,0) \oplus \mathcal{O}_S(0,1)$ *((1,1) de tipo 2)),*

c) $S = \widetilde{\mathbb{P}^2}(x)$ *y* $Q|_S = \mathcal{O}_S(L-E) \oplus \mathcal{O}_S(L)$ *((2,1) dual del tipo 3)),*

d) $S = \mathbb{P}^2$ *y* $Q|_S = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)$ *((3,1) dual del tipo 4)).*

En particular, $Q|_S$ no es simple si y sólo si $Q|_S$ es escindido.

Nótese que el resultado anterior mejora la Proposición 5.7 de [**AS2**], donde se demuestra que las congruencias S tales que $Q|_S$ es escindido son exactamente las cuatro anteriores. Sin embargo, sería interesante encontrar una demostración directa de que si $Q|_S$ no es simple entonces es escindido.

El siguiente resultado nos permitirá dividir la demostración del Teorema 3.1 en dos casos, a los que dedicaremos respectivamente las secciones 3.1 y 3.2 del presente capítulo.

Proposición 3.2. *Sea S una congruencia tal que $Q|_S$ no es simple. Entonces, o bien S tiene una recta fundamental, o bien S es la proyección a $\mathbb{G}(1,3)$ de una superficie lisa de $\mathbb{G}(1,4)$.*

Demostración.

Para probar este resultado distinguimos tres casos, según el número de secciones independientes de $Q|_S$:

1. $h^0(Q|_S) \leq 3$, en cuyo caso (ver Lema 2.1.8) S es necesariamente un $\beta-$plano con fibrado universal restringido $Q|_S = \mathbb{T}_{\mathbb{P}^2}(-1)$, que es simple por ser un fibrado estable (ver Lema 1.3.7). Luego, como estamos suponiendo que $Q|_S$ no es simple, este caso no puede darse.

2. $h^0(Q|_S) = 4$ tiene exactamente cuatro secciones linealmente independientes. Vamos a ver que, en este caso, la congruencia tiene una recta fundamental:

Como $Q|_S$ no es simple, podemos elegir algún endomorfismo no nulo con determinante 0 (véase Lema 1.3.6), que llamaremos ψ. Entonces $\mathcal{L} = Im\psi$ es un subhaz de rango 1, y tenemos pues el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} Q|_S & & \xrightarrow{\psi} & & Q|_S \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & \mathcal{L} = Im\psi & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ 0 & & & & 0 \end{array}$$

Supongamos que $h^0(\mathcal{L}) \leq 2$. En ese caso, por el Lema 2.1.7, S tiene una recta fundamental (incluyendo el caso en el que S es un $\alpha-$plano).

Supongamos ahora que $h^0(\mathcal{L}) > 2$. A partir de la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow Q|_S \longrightarrow \mathcal{L}' \longrightarrow 0,$$

donde $\mathcal{L}'$ es el cociente $Q|_S/\mathcal{L}$, obtenemos

$$0 \longrightarrow H^0(\mathcal{L}) \longrightarrow H^0(Q|_S) \xrightarrow{\varphi} H^0(\mathcal{L}')$$

Como $h^0(Q|_S) = 4$ y $h^0(\mathcal{L}) > 2$, es $dimIm\varphi < 2$. Si llamamos $W := Im\varphi$, tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_S^4 & \twoheadrightarrow & Q|_S \\ \downarrow & & \downarrow \\ W \otimes \mathcal{O}_S & \twoheadrightarrow & \mathcal{L}' \end{array}$$

luego para cada p del abierto de S en el que $\mathcal{L}'$ es localmente libre, el punto $\mathbb{P}({\mathcal{L}'}_p)$ de la recta $\mathbb{P}(Q_p)$ de la congruencia es el punto $\mathbb{P}(W)$. Tomando clausura, S está contenida en el $\alpha-$plano de todas las rectas que pasan por el punto $\mathbb{P}(W)$, luego S coincide con dicho $\alpha-$plano.

3. $h^0(Q|_S) \geq 5$ tiene más de cuatro secciones independientes, con lo que S es la proyección de una superficie lisa de la Grassmanniana $\mathbb{G}(1,4)$ de rectas de $\mathbb{P}^4$. $\square$

En la siguiente sección estudiamos el caso en que la congruencia S tiene una recta fundamental. Dedicamos 3.2 a las congruencias que son proyección de una superficie lisa de la Grassmanniana $\mathbb{G}(1,4)$. Finalmente, en la sección 3.3 demostramos el Teorema 3.1. En cada una de las demostraciones, utilizaremos el Lema 2.1.19 para estudiar la simplicidad de $Q|_S$.

3.1. Congruencias con recta fundamental.

El resultado clave en que se basan las demostraciones dadas en esta sección es la Proposición 2.1.9. Recordemos que en dicho resultado se caracterizaban los invariantes y la resolución del haz de ideales $\mathcal{J}_S$ para toda congruencia S con recta fundamental. En particular, una tal S tiene bigrado (n,n), o bien $(n,n-1)$, o bien $(n-1,n)$. En las tres proposiciones siguientes analizamos la simplicidad de $Q|_S$ para cada una de estos tres posibles casos:

Proposición 3.1.1. *Si S es una congruencia de bigrado (n,n) con recta fundamental, entonces $Q|_S$ no es simple si y sólo si $n = 1$ (i.e., caso b) del Teorema 3.1).*

Demostración.

Por la Proposición 2.1.9, $\mathcal{J}_S$ tiene una resolución

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{G}}(-n-1) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{G}}(-1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{G}}(-n) \longrightarrow \mathcal{J}_S \longrightarrow 0 \tag{1}$$

Supongamos que $Q|_S$ no es simple. Entonces $H^1(Q \otimes Q^* \otimes \mathcal{J}_S) \neq 0$ por el Lema 2.1.19.

Tensorizamos la sucesión (1) por $Q \otimes Q^*$ y tomamos cohomología. Como $H^1(Q \otimes Q^*(l)) = 0$ para todo l, entonces $H^2(Q \otimes Q^*(-n-1)) \neq 0$. Como $H^2(Q \otimes Q^*(-n-1)) = H^2(S^2Q(-n-2)) \oplus H^2(\mathcal{O}_{\mathbb{G}}(-n-1)) = H^2(S^2Q(-n-2))$, tenemos que $Q|_S$ es simple si y sólo si $n \neq 1$.

Veamos ahora qué ocurre cuando S tiene bigrado $(n, n-1)$:

Proposición 3.1.2. *Sea S una congruencia de bigrado $(n, n-1)$ con recta fundamental. Entonces $Q|_S$ no es simple si y sólo si $n = 1$ o $n = 2$ (es decir, si y sólo si se da el caso a) o el caso c), respectivamente).*

Demostración.

Por la Proposición 2.1.9(dualizando la congruencia del apartado c) de la misma), sabemos que $\mathcal{J}_S$ tiene una resolución

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{G}}(-n)^2 \longrightarrow \mathcal{S}^*(-n+1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{G}}(-1) \longrightarrow \mathcal{J}_S \longrightarrow 0 \tag{1}$$

Tensorizamos (1) por $Q \otimes Q^*$, y tomamos cohomología. Ahora, por el Lema 2.1.19, $Q|_S$ no es simple si y sólo si $H^1(\mathcal{S}^* \otimes Q \otimes Q^*(-n+1)) \neq 0$ o $H^2(Q \otimes Q^*(-n)) \neq 0$.

En el primer caso, como $H^1(\mathcal{S}^* \otimes Q \otimes Q^*(-n+1)) = H^1(\mathcal{S}^* \otimes S^2Q(-n))$, tenemos que $H^1(\mathcal{S}^* \otimes Q \otimes Q^*(-n+1)) \neq 0$ si y sólo si $n = 1$ (por el Lema 1.2.9).

En el segundo caso, como $H^2(Q \otimes Q^*) = H^2(S^2Q(-n-1))$, tenemos que $H^2(Q \otimes Q^*) \neq 0$ si y sólo si $n = 2$. $\square$

Por último, estudiamos las congruencias de bigrado $(n-1, n)$:

Proposición 3.1.3. *Si es S una congruencia de bigrado $(n-1, n)$ con recta fundamental, entonces $Q|_S$ es simple.*

Demostración.

Aplicando de nuevo la Proposición 2.1.9, sabemos que $\mathcal{J}_S$ tiene una resolución

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{G}}(-n)^2 \longrightarrow Q^*(-n+1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{G}}(-1) \longrightarrow \mathcal{J}_S \longrightarrow 0$$

Tensorizamos la sucesión anterior por $Q \otimes Q^*$ y tomamos cohomología.

En primer lugar, $H^1(Q \otimes Q^* \otimes Q^*(-n+1)) = H^1(S^2Q \otimes Q(-n-1)) = 0$ por el Lema 1.2.10 y, como $H^1(Q \otimes Q^*(-1)) = 0$ según el Lema 1.2.6, entonces

$$H^1(Q \otimes Q^* \otimes Q^*(-n+1)) \oplus H^1(Q \otimes Q^*(-1)) = 0.$$

Por otra parte, $H^2(Q \otimes Q^*(-n)) = H^2(S^2Q(-n-1)) = 0$ si $n \neq 2$ (ver Proposición 1.2.5). Entonces, suponiendo $n \neq 2$, tenemos que $H^1(Q \otimes Q^* \otimes \mathcal{J}_S) = 0$ y que $Q|_S$ es simple por el Lema 2.1.19.

Supongamos ahora que $n = 2$. En este caso, tomamos cohomología en la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow (Q \otimes Q^*(-2))^2 \longrightarrow (Q \otimes Q^* \otimes Q^*(-1)) \oplus (Q \otimes Q^*(-1)) \longrightarrow Q \otimes Q^* \otimes \mathcal{J}_S \longrightarrow 0$$

y consideramos los morfismos

$$H^1(Q \otimes Q^* \otimes Q^*(-1)) \oplus H^1(Q \otimes Q^*(-1)) \longrightarrow H^1(Q \otimes Q^* \otimes \mathcal{J}_S) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow H^2(Q \otimes Q^*(-2))^2 \longrightarrow H^2(Q \otimes Q^* \otimes Q^*(-1)) \oplus H^2(Q \otimes Q^*(-1))$$

Aplicando los Lemas 1.3.9 y 1.2.6 respectivamente, obtenemos $H^1(Q \otimes Q^* \otimes Q^*(-1)) = 0$ y $H^1(Q \otimes Q^*(-1)) = 0$. Aplicando ahora el Lema 1.3.15 y la Proposición 1.1, tenemos la siguiente situación:

$$0 \longrightarrow H^1(Q \otimes Q^* \otimes \mathcal{J}_S) \longrightarrow H^2(S^2Q(-3))^2 \xrightarrow{\varphi} H^2(S^2Q \otimes Q(-3))$$

Ahora bien, la aplicación φ es inyectiva, porque es un sumado directo de la aplicación ψ del Lema 1.3.16, luego $H^1(Q \otimes Q^* \otimes \mathcal{J}_S) = 0$ y $Q|_S$ también es simple en el caso $n = 2$.
□

A partir de las tres proposiciones anteriores, obtenemos directamente el siguiente resultado:

Proposición 3.1.4. *Sea S una congruencia con recta fundamental. Entonces $Q|_S$ no es simple si y sólo si S es una de las congruencias de tipo a), b) o c) del Teorema* 3.1.

3.2. Congruencias proyectadas desde $\mathbb{G}(1,4)$

Las congruencias obtenidas como proyección sobre $\mathbb{G}(1,3)$ de una superficie lisa de $\mathbb{G}(1,4)$ están completamente clasificadas por Arrondo y Sols en el Teorema 2.2.1 (ver Teorema 5.1 de [**AS2**]). Los casos i) y iii) en dicho teorema corresponden a congruencias a) y b) (respectivamente) del Teorema 3.1. En esta sección vemos que, en el resto de los casos, el fibrado $Q|_S$ es simple, con lo que completamos la demostración del Teorema 3.1.

Proposición 3.2.1. *Si S es una congruencia de tipo* 5)*, entonces $Q|_S$ es simple.*

Demostración.

En este caso, demostraremos que $h^0(Q|_S \otimes Q_S^*) = 1$. Para ello, recordemos (ver sección 2.2) que $S = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, $H_S = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1}(1,2)$, y que se tiene la sucesión exacta no escindida

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1}(1,0) \longrightarrow Q|_S \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1}(0,2) \longrightarrow 0 \tag{1}$$

Por ser $Q|_S$ un fibrado vectorial de rango 2 con $c_1(Q|_S) = H_S$ se tiene que $Q^*|_S = Q|_S \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1}(-1,-2)$. Si tensorizamos la sucesión anterior con $Q^*|_S$ y tomamos cohomología, para demostrar que $h^0(Q|_S \otimes Q_S^*) = 1$ bastará ver que $h^0(Q|_S \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1}(0,-2)) = 0$ y que $h^0(Q|_S \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1}(-1,0)) = 1$.

Para ver que $H^0(Q|_S \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1}(0,-2)) = 0$, tensorizamos (1) con $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1}(0,-2)$ y tomamos cohomología. En primer lugar, tenemos que $H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1}(1,-2)) = 0$. En segundo lugar, nótese que la aplicación

$$H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1}) \longrightarrow H^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1}(1,-2))$$

es inyectiva, pues $H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1}) = \mathbb{K}$ y la sucesión exacta (1) no escinde. Tenemos entonces que $H^0(Q|_S \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1}(0,-2)) = 0$.

Para demostrar que $h^0(Q|_S \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1}(-1,0)) = 1$, tensorizamos la sucesión (1) con $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1}(-1,0)$. Tomando cohomología, como $H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1}) = \mathbb{K}$ y $H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1}(-1,2)) = 0$, tenemos que $H^0(Q|_S \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1}(-1,0)) = \mathbb{K}$.

Entonces tenemos

$$0 \longrightarrow H^0(Q|_S \otimes Q^*|_S) \longrightarrow \mathbb{K},$$

de donde se sigue que, necesariamente, $H^0(Q|_S \otimes Q^*|_S) = \mathbb{K}$. Por tanto, $Q|_S$ es simple. $\square$

Proposición 3.2.2. *Si S es una congruencia de tipo 7), entonces $Q|_S$ es simple.*

Demostración.

Recordemos de la sección 2.2 que la resolución del haz de ideales de esta congruencia es la siguiente:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{G}} \longrightarrow \mathcal{S}^*(2) \longrightarrow \mathcal{J}_S(3) \longrightarrow 0$$

Tensorizando la sucesión anterior por $Q \otimes Q^*(-3)$ y tomando cohomología, vemos que $H^1(Q \otimes Q^* \otimes \mathcal{J}_S) = 0$ si y sólo si $H^1(\mathcal{S}^* \otimes Q \otimes Q^*(-1)) = 0$ y $H^2(Q \otimes Q^*(-3)) = 0$.

Por una parte, $H^1(\mathcal{S}^* \otimes Q \otimes Q^*(-1)) = H^1(\mathcal{S}^* \otimes S^2Q(-2)) \oplus H^1(\mathcal{S}^*(-1))$. Por la Proposición 1.2.2 y el Lema 1.2.9, tenemos $H^1(\mathcal{S}^* \otimes Q \otimes Q^*(-1)) = 0$. Por otra parte, $H^2(Q \otimes Q^*(-3)) = H^2(S^2Q(-4)) = 0$ por la Proposición 1.2.5, y ya hemos demostrado entonces que $H^1(Q \otimes Q^* \otimes \mathcal{J}_S) = 0$ y $Q|_S$ es simple (Lema 2.1.19). $\square$

Proposición 3.2.3. *Si S es una congruencia de tipo 10), entonces $Q|_S$ es simple.*

Demostración.

En este caso (ver sección 2.2), la resolución del haz de ideales de S es

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{G}} \longrightarrow \dot{E}(2) \longrightarrow \mathcal{J}_S(3) \longrightarrow 0$$

Para calcular $H^1(Q \otimes Q^* \otimes \mathcal{J}_S)$, tensorizamos la sucesión anterior por $Q \otimes Q^*(-3)$ y tomamos cohomología:

$$H^1(Q \otimes Q^* \otimes \dot{E}(-1)) \longrightarrow H^1(Q \otimes Q^* \otimes \mathcal{J}_S) \longrightarrow H^2(Q \otimes Q^*(-3))$$

Por una parte, $H^1(Q \otimes Q^* \otimes \dot{E}(-1)) = H^1(S^2Q \otimes \dot{E}(-2)) \oplus H^1(\dot{E}(-1)) = 0$ por la Proposición 1.2.3 y el Lema 1.2.12. Por otra parte, $H^2(Q \otimes Q^*(-3)) = 0$ por la Proposición 1.2.1 y 1.2.5, luego $H^1(Q \otimes Q^* \otimes \mathcal{J}_S) = 0$ y $Q|_S$ es simple. $\square$

Por tanto, hemos demostrado la siguiente

Proposición 3.2.4. *Sea S una congruencia proyección sobre $\mathbb{G}(1,3)$ de una superficie lisa de $\mathbb{G}(1,4)$, y supongamos que $Q|_S$ no es simple. Entonces S es una de las congruencias de tipo c) o d) del Teorema* 3.1.

Nótese ahora que el Teorema 3.1 se deduce directamente de la Proposición 3.1.4 y de la Proposición 3.2.4.

Capítulo 4. Estabilidad del fibrado universal restringido a congruencias de $\mathbb{G}(1,3)$.

En su artículo de 1991 sobre fibrados vectoriales de rango 2 en superficies de Enriques (véase [**DR**]), Dolgachev y Reider enunciaron la siguiente conjetura:

Conjetura DR. *Si S es una congruencia no contenida en un complejo lineal, entonces los fibrados universales restringidos $Q|_S$ y $\mathcal{S}|_S$ son semiestables.*

Nótese que la condición "S no contenida en un complejo lineal" es necesaria: si S tiene grado impar y está contenida en un complejo lineal, no se cumple la tesis de la conjetura **DR**, según la Proposición 2.1.11.

El interés de la conjetura de Dolgachev y Reider radica en que, si fuera cierta, se obtendrían cotas muy precisas para el orden y la clase de toda congruencia. En efecto, supongamos la conjetura **DR** cierta. Entonces, aplicando el Teorema de Bogomolov, que establece la desigualdad $c_1^2 \leq 4c_2$ para fibrados semiestables, a $Q|_S$ y a $\mathcal{S}|_S$ obtendríamos, respectivamente, que $a \leq 3b$ y $b \leq 3a$ para toda congruencia de bigrado (a,b) distinta de un $\alpha-$plano o un $\beta-$plano, pues las congruencias contenidas en un complejo lineal tienen bigrado (n,n), $(n,n-1)$ o $(n-1,n)$ (Proposición 2.1.9).

Un primer avance en la resolución de la conjetura viene dado por el siguiente resultado, demostrado independientemente en [**AS2**] y [**G1**]:

Proposición 4.1. *Sea S una congruencia de bigrado (a,b).*

i) Si $a \geq b$, entonces $\mathcal{S}|_S$ es semiestable.

ii) Si $b \geq a$, entonces $Q|_S$ es semiestable.

Demostración.

Véase [**AS2**], Proposición 2.4, o [**G1**], Proposición 3.5. □

En particular, si S es una congruencia de bigrado (n,n) contenida en un complejo lineal, se tiene que $Q|_S$ y $\mathcal{S}|_S$ son semiestables. Como las congruencias de grado impar contenidas en un complejo lineal tienen recta fundamental, la Conjetura **DR** se puede reformular como

Conjetura DR'. *Si S es una congruencia sin recta fundamental, entonces los fibrados universales restringidos $Q|_S$ y $\mathcal{S}|_S$ son semiestables.*

En este capítulo mejoramos la Proposición 4.1 con el Teorema 4.4, utilizando ideas que estaban ya implícitas en la demostración de Gross. Por dualidad, basta estudiar el fibrado $Q|_S$.

A continuación recordamos un resultado sobre estabilidad de fibrados vectoriales, particularizado en el caso de Q restringido a una congruencia:

Lema 4.2. *Sea S una congruencia en $\mathbb{G}(1,3)$ con $Q|_S$ no semiestable. Entonces existe un único subhaz saturado de rango 1 que desestabiliza a $Q|_S$.*

Demostración.
Supongamos $\mathcal{O}_S(D_1)$ y $\mathcal{O}_S(D_2)$ subfibrados lineales saturados de $Q|_S$ que desestabilizan a $Q|_S$, i.e., tales que $D_1H > \frac{H^2}{2}$ y $D_2H > \frac{H^2}{2}$. Tenemos pues dos sucesiones

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_S(D_1) \longrightarrow Q|_S \longrightarrow \mathcal{J}_{Z_1}(H - D_1) \longrightarrow 0$$

y

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_S(D_2) \xrightarrow{s} Q|_S \longrightarrow \mathcal{J}_{Z_2}(H - D_2) \longrightarrow 0$$

Entonces el morfismo composición

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_S(D_2) \xrightarrow{\cdot s} Q|_S \longrightarrow \mathcal{J}_{Z_1}(H - D_1)$$

es nulo, ya que el haz $\mathcal{J}_{Z_1}(H-D_1-D_2)$ no tiene secciones (porque al ser $D_1H,\ D_2H > \frac{H^2}{2}$, entonces $(H - D_1 - D_2)H < 0$). Se tiene por tanto un diagrama

$$\begin{array}{ccccc} 0 \longrightarrow \mathcal{O}_S(D_1) & \longrightarrow & Q|_S & \longrightarrow & \mathcal{J}_{Z_1}(H - D_1) \longrightarrow 0 \\ & \psi \nwarrow & \uparrow & \nearrow 0 & \\ & & \mathcal{O}_S(D_2) & & \end{array}$$

donde ψ es un morfismo de haces no nulo y, por tanto, inyectivo. Simplemente intercambiando D_1 y D_2 se demuestra que existe un morfismo inyectivo $\mathcal{O}_S(D_1) \longrightarrow \mathcal{O}_S(D_2)$, por lo que $\mathcal{O}_S(D_1) \simeq \mathcal{O}_S(D_2)$. $\square$

La siguiente proposición determina una cota para la pendiente $\mu(D)$ de los subfibrados lineales $\mathcal{O}_S(D)$ de $Q|_S$ con pendiente máxima, demostrando además que, cuando $\mu(D)$ está muy cerca de la cota, S es de un tipo muy especial:

Proposición 4.3. *Sea S una congruencia en $\mathbb{G}(1,3)$ de bigrado (a,b), con sección hiperplana H. Supongamos que se tiene la sucesión exacta saturada*

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_S(D) \longrightarrow Q|_S \longrightarrow \mathcal{J}_Z(H-D) \longrightarrow 0 \tag{4.3.1}$$

donde Z es el conjunto de puntos en que se anula una sección del fibrado $Q|_S(-D)$. Entonces $\mu(D) \leq a$. Además,

i) si $\mu(D) = a$, entonces S tiene una curva fundamental.

ii) Si $\mu(D) = a-1$, entonces S es racional, y $h^0(D) = 1$ si $h^0(Q|_S) = 4$.

iii) Si $\mu(D) = a-2$, entonces o bien S es racional, o bien $h^0(D) = 1$.

iv) Si $\mu(D) = a-3$, entonces o bien S es birracional a $\mathbb{P}^2$ o a una superficie reglada elíptica, o bien $h^0(D) = 1$.

Demostración.

Sea $\pi : \widetilde{S} \longrightarrow S$ la explosión de S en Z, y sea $E = \pi^{-1}(Z)$ (por tanto, $E^2 = -degZ$) Consideremos la sucesión

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\widetilde{S}}(D) \longrightarrow \pi^*Q|_S \longrightarrow \mathcal{O}_{\widetilde{S}}(H-D-E) \longrightarrow 0,$$

inducida por (4.3.1). Restringimos a S el epimorfismo universal ${\mathcal{O}_{\mathbb{G}}}^4 \twoheadrightarrow Q$, y levantamos por π el epimorfismo resultante ${\mathcal{O}_S}^4 \twoheadrightarrow Q|_S$. Componiendo dicho morfismo con $\pi^*Q|_S \longrightarrow \mathcal{O}_{\widetilde{S}}(H-D-E)$, se obtiene que $\mathcal{O}_{\widetilde{S}}(H-D-E)$ está generado por sus secciones globales, luego dos curvas generales del sistema lineal $|H-D-E|$ se cortan en $(H-D-E)^2$ puntos. Obsérvese que $(H-D-E)^2 = a - DH$, ya que la condición $DH \leq a-k$ es equivalente a $(H-D)^2 - degZ \geq k$. En efecto, basta tener en cuenta que $H^2 = a+b$, y que $degZ = c_2(Q|_S(-D)) = b - DH + D^2$.

Llamemos φ al morfismo de $\widetilde{S}$ en $\mathbb{P}^3$ dado por las cuatro secciones de $\mathcal{O}_{\widetilde{S}}(H-D-E)$. Se tiene que $dim\varphi(\widetilde{S}) \leq dim\widetilde{S} = dimS = 2$.

Nótese también que $\varphi(\widetilde{S})$ es una superficie de $\mathbb{P}^3$ si y sólo su intersección con una recta genérica de $\mathbb{P}^3$ es no vacía. Esto es equivalente a decir que $\varphi(\widetilde{S})$ es una superficie de $\mathbb{P}^3$ si y sólo si $(H-D)^2 - degZ > 0$. Obsérvese que, en caso de ser $\varphi(\widetilde{S})$ una superficie, es $a - DH = (H-D)^2 - degZ = deg\varphi \cdot deg\varphi(\widetilde{S})$.

i) Supongamos $DH = a$ o, equivalentemente, $(H-D-E)^2 = 0$. Entonces $\varphi(\widetilde{S})$ es o una curva o un punto (no puede ser un conjunto finito de más de un punto porque $\varphi(\widetilde{S})$ es irreducible), por la observación anterior. En el primer caso, $\varphi(\widetilde{S})$ es una curva fundamental para $\widetilde{S}$, luego también para S. En el segundo caso, S es claramente un $\alpha-$plano, luego cualquier recta de S es fundamental.

ii) Supongamos ahora $DH = a-1$, i.e, $deg\varphi \cdot deg\varphi(\widetilde{S}) = 1$. Entonces $deg\varphi = deg\varphi(\widetilde{S}) = 1$ $\varphi(\widetilde{S})$ es un plano y φ una aplicación birracional. Entonces $\widetilde{S}$ es racional, luego S es también racional.

Supongamos que $h^0(Q|_S) = 4$. Nótese en primer lugar que $H^0(\mathcal{O}_S(D)) = H^0(\mathcal{O}_{\widetilde{S}}(D))$ es el núcleo del morfismo $H^0(\pi^*Q|_S) \longrightarrow H^0(H-D-E)$. Ahora, $h^0(Q|_S) = 4$ implica que $H^0(\mathcal{O}_{\widetilde{S}}{}^4) = H^0(\pi^*Q|_S)$, luego $h^0(D)$ es igual al número de planos que contienen a $\varphi(\widetilde{S})$. Como $\varphi(\widetilde{S})$ es un plano, necesariamente $h^0(D) = 1$.

iii) Supongamos $DH = a-2$, esto es, $deg\varphi \cdot deg\varphi(\widetilde{S}) = 2$. Así, obtenemos dos posibilidades:
a) $deg\varphi = 1$, $deg\varphi(\widetilde{S}) = 2$,
b) $deg\varphi = 2$, $deg\varphi(\widetilde{S}) = 1$.

En el caso *a*), tenemos que φ es una aplicación birracional y $\varphi(\widetilde{S})$ una cuádrica, i.e., tenemos que $\widetilde{S}$ es birracional a una cuádrica. Por tanto, $\widetilde{S}$ es racional, lo que implica que S es también racional.

En el caso *b*), $deg\varphi(\widetilde{S}) = 1$ implica que $\varphi(\widetilde{S})$ es un plano, porque tiene dimensión 2. Si $h^0(Q|_S) = 4$, se demuestra exactamente igual que en el caso *ii*) que $h^0(D) = 1$. Si $h^0(Q|_S) \neq 4$, por el Teorema 2.1.16 y el Lema 2.1.8, la congruencia S es racional.

iv) Supongamos $DH = a-3$ o, equivalentemente, $deg\varphi \cdot deg\varphi(\widetilde{S}) = 3$. Entonces se obtienen las posibilidades *a*) $deg\varphi = 1$, $deg\varphi(\widetilde{S}) = 3$,

b) $deg\varphi = 3$, $deg\varphi(\widetilde{S}) = 1$.

En el caso *a*), $\widetilde{S}$ es birracional a una superficie de grado 3 en $\mathbb{P}^3$, i.e., racional o un cono sobre una curva elíptica, luego birracional a $\mathbb{P}^2$ o a una superficie reglada elíptica. Por tanto, lo mismo ocurre para S.

En el caso *b*) se tiene que $\varphi(\widetilde{S})$ es un plano, porque $deg\varphi(\widetilde{S}) = 1$. Si $h^0(Q|_S) = 4$, se demuestra que $h^0(D) = 1$ exactamente igual que en *ii*). Si $h^0(Q|_S) \neq 4$, como en *iii*), la congruencia S es racional.

□

El resultado anterior se traduce, en términos de estabilidad, en el siguiente teorema:

Teorema 4.4. *Sea S una congruencia en $\mathbb{G}(1,3)$ de bigrado (a,b). Entonces $\mu(D) \leq a$, para todo subhaz $\mathcal{O}_S(D)$ de $Q|_S$. En particular, si $b \geq a$ (resp. $b > a$), $Q|_S$ es semiestable (resp. estable). Además,*

i) *Si S no tiene curva fundamental, es $\mu(D) \leq a-1$, para todo subhaz $\mathcal{O}_S(D)$ de $Q|_S$. En particular, si $a \leq b+2$ (resp. $a < b+2$), el fibrado universal $Q|_S$ es semiestable (resp. estable).*

ii) *Si S no es racional y no tiene curva fundamental, es $\mu(D) \leq a-2$, para todo subhaz $\mathcal{O}_S(D)$ de $Q|_S$. En particular, si $a \leq b+4$ (resp. $a < b+4$), el fibrado universal $Q|_S$ es semiestable (resp. estable).*

iii) *Si S tiene curva fundamental plana (en particular, si tiene recta fundamental), entonces existe un subhaz lineal de $Q|_S$ con pendiente igual a a. Por tanto, a es la pendiente máxima que alcanzan los subfibrados lineales de $Q|_S$.*

Demostración.

Nótese que basta demostrar el teorema para un subfibrado lineal de $Q|_S$ con pendiente máxima. Sea $\mathcal{O}_S(D)$, pues, un subfibrado lineal de $Q|_S$ con pendiente máxima. Tenemos entonces una sucesión saturada

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_S(D) \longrightarrow Q|_S \longrightarrow \mathcal{J}_Z(H-D) \longrightarrow 0,$$

con Z conjunto de puntos donde se anula una sección del fibrado $Q|_S(-D)$. Basta aplicarle la Proposición 4.3 al fibrado $\mathcal{O}_S(D)$ para obtener $\mu(D) \leq a$.

En particular, si $a \leq b$ (resp. $a < b$) entonces es $a \leq \frac{a+b}{2} = \mu(Q|_S)$ (resp. $a < \mu(Q|_S)$) luego, como $\mu(D) \leq a$ según acabamos de demostrar, se tiene que $Q|_S$ es semiestable (resp. estable).

Demostramos ahora i), ii) y iii):

i) Supongamos que S no tiene curva fundamental. Entonces, por el apdo. i) de la Proposición 4.3, $\mu(D) \leq a - 1$.

Que $Q|_S$ sea semiestable quiere decir que $\mu(D) \leq \frac{a+b}{2}$. Como $\mu(D) \leq a - 1$, según acabamos de demostrar, y $a - 1 \leq \frac{a+b}{2}$ (resp. $a - 1 < \frac{a+b}{2}$) porque $a \leq b + 2$ (resp. $a < b + 2$), tenemos que $Q|_S$ es semiestable (resp. estable).

ii) Supongamos ahora que S no tiene curva fundamental y que no es racional. En ese caso, por los apdos. i) y ii) de la Proposición 4.3, tenemos que $\mu(D) \leq a - 2$.

Que $Q|_S$ sea semiestable quiere decir que $\mu(D) \leq \frac{a+b}{2}$. Como $\mu(D) \leq a - 2$ y $a - 2 \leq \frac{a+b}{2}$ (resp. $a - 2 < \frac{a+b}{2}$), porque $a \leq b + 4$ (resp. $a < b + 4$), se deduce que $Q|_S$ es semiestable (resp. estable).

iii) Sea C_0 la curva fundamental de S, y consideremos un plano general Π de $\mathbb{P}^3$ que contenga a C_0. Vamos a demostrar que el conjunto C de rectas de S contenidas en el plano Π es una curva de grado a en el plano dual Π^*. Para ello, consideremos una recta general en Π^*, es decir, un haz de rectas de Π con centro un punto general p de Π. Decir que C es una curva de grado a quiere decir que S contienene a rectas del haz. Como C_0 es una curva fundamental para S, todas las rectas de S que pasan por un punto p de Π tienen que cortar a C_0, luego tienen que estar contenidas en el plano Π. Así, como el orden de la congruencia S es a, hay exactamente a rectas de S que pasan por un punto general p, luego C es una curva de grado a. Como C está contenida en el $\beta-$plano de todas las rectas de Π, $\mathcal{O}_S(C)$ es un subhaz de $Q|_S$ con $\mu(C) = a$. La última afirmación de iii) se deduce de que $\mu(D) \leq a$ para todo subfibrado lineal $\mathcal{O}_S(D)$ de $Q|_S$.

$\square$

Capítulo 5. Sistemas lineales de curvas planas.

En este capítulo nos ocupamos del problema de calcular la dimensión de sistemas lineales de curvas en $\mathbb{P}^2$. Con este fin, presentamos en primer lugar un resultado para calcular la dimensión de un sistema lineal de curvas planas por puntos con multiplicidad como mucho 2, más un método para los casos con multiplicidades mayores que 2. Con todo ello, calculamos dimensiones de algunos sistemas lineales particulares que aparecen en el capítulo 6.

Comenzamos estableciendo la siguiente notación: dados $p_1, ..., p_r$ puntos de $\mathbb{P}^2$, denotaremos por $\mathcal{L}_2(d; n_1, ..., n_r) \subset \mathbb{P}(H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d))^*)$ al sistema lineal de curvas planas de grado a que pasan por p_i con multiplicidad n_i, para cada $i = 1, .., r$. Equivalentemente, $\mathcal{L}_2(d; n_1, ..., n_r) = |dL - n_1E_1 - ... - E_r|$, donde $E_1, .., E_r$ son los divisores excepcionales obtenidos al explotar $\mathbb{P}^2(x)$ en $p_1, ..., p_r$. Por comodidad, en caso de que a_i puntos entre $p_1, ..., p_r$ tengan la misma multiplicidad m, escribiremos m^{a_i} en vez de $m, \overset{(a_i}{\ldots}, m$. Si los puntos $p_1, ..., p_r$ están en posición general, diremos que $\mathcal{L}_2(d; n_1, ..., n_r)$ es un *sistema lineal general*.

La dimensión vectorial esperada de $\mathcal{L}_2(d; n_1, ..., n_r)$ es

$$d(\mathcal{L}) = max\{-1, \binom{d+2}{2} - \binom{n_1+1}{2} - ... - \binom{n_r+1}{2} - 1\} \tag{5.1}$$

Dado un sistema lineal de curvas $\mathcal{L}$ de la forma $\mathcal{L}_2(d; n_1, ..., n_r)$, es obvio que su dimensión esperada es menor o igual que su dimensión real.

A continuación, presentamos en forma de lema un primer método para calcular la dimensión de un sistema lineal en un caso particular:

Lema 5.2. *Consideremos diez puntos de $\mathbb{P}^2$ en posición general. El sistema lineal $\mathcal{L} = \mathcal{L}_2(8; 3^4, 2^6)$ tiene la dimensión esperada.*

Demostración.

La dimensión vectorial esperada de $\mathcal{L}$ es 3. Supongamos $dim\mathcal{L} \geq 4$. En particular, si en vez de diez puntos en posición general consideramos otra elección de diez puntos de

$\mathbb{P}^2$, $p_1, ..., p_{10}$, y llamamos $\mathcal{L}'$ al sistema lineal de ócticas con multiplicidad 3 en $p_1, ..., p_4$ y multiplicidad 2 en $p_5, ..., p_{10}$, también $dim\mathcal{L}' \geq 4$.

Consideremos pues $p_1, ..., p_8$ puntos de $\mathbb{P}^2$ en posición general, y sea C_1 la cuártica plana irreducible que tiene multiplicidad 2 en p_1, p_2 y p_3, y que además pasa por los puntos $p_4, ..., p_8$. Elijamos dos puntos p_9 y p_{10} en C_1 de modo que entre los puntos p_4, p_6, p_7, p_8, p_9 y p_{10} no haya tres alineados (basta considerar las seis rectas que unen los puntos p_4, p_6, p_7 y p_8 dos a dos, y elegir p_9 y p_{10} en C_1 fuera de dichas rectas). Con esta elección particular de diez puntos $p_1, ..., p_{10}$, consideremos el sistema lineal $\mathcal{L}'$.

Consideremos la cónica irreducible C_2 que pasa por $p_1, ..., p_5$, y elijamos en ella tres puntos q_1, q_2 y q_3, que no pertenezcan a C_1.

Sea D' una curva de $\mathcal{L}'$ que pase por q_1, q_2, q_3. Como D' y C_1 se cortan en 33 puntos, contando multiplicidades, C_1 es una componente de D' por el Teorema de Bézout (porque C_1 es irreducible). Entonces $D' = C_1 + C_3$, donde C_3 es una cuártica con multiplicidad 2 en p_4 y que pasa por $p_1, p_2, p_3, p_5, ..., p_{10}, q_1, q_2, q_3$. Entonces C_2 y C_3 se cortan al menos en nueve puntos. Por el Teorema de Bézout, esto implica que C_2 es una componente de C_3, luego $C_3 = C_2 + C_4$, con C_4 cónica que pasa por p_4, p_6, p_7, p_8, p_9 y p_{10}. Esto es absurdo, porque los seis puntos anteriores están en posición general. Luego necesariamente es $dim\mathcal{L}' = 3$, lo que implica $dim\mathcal{L} = 3$. □

La demostración anterior es un ejemplo de argumento geométrico. Sin embargo, como veremos en el siguiente lema, hay un camino mucho más corto de demostrar que un sistema lineal general tiene la dimensión esperada: encontrando una elección particular de puntos de modo que el sistema lineal para dichos puntos tenga también la dimensión esperada. Además, de esta forma obtenemos información extra sobre el número de puntos base adicionales del sistema lineal general.

Lema 5.3. *Dados doce puntos de $\mathbb{P}^2$ en posición general, el sistema lineal $\mathcal{L} = \mathcal{L}_2(6; 3, 2^4, 1^7)$ tiene la dimensión esperada. Además, $\mathcal{L}$ tiene como mucho un punto base adicional (i.e., distinto de los doce puntos en posición general).*

Demostración.

La dimensión esperada del sistema lineal $\mathcal{L}$ es 3. Consideremos ahora los puntos $p_1 = (1:0:0)$, $p_2 = (0:1:0)$, $p_3 = (0:0:1)$, $p_4 = (1:1:1)$, $p_5 = (1:2:3)$, $p_6 = (1:5:3)$, $p_7 = (-2:3:4)$, $p_8 = (1:-2:3)$, $p_9 = (2:3:7)$, $p_{10} = (7:3:2)$, $p_{11} = (-7:-3:2)$ y $p_{12} = (5:3:-8)$. La dimensión del sistema lineal $\mathcal{L}'$ de séxticas que tienen multiplicidad 3 en p_1, multiplicidad 2 en $p_2, ..., p_5$, y que además pasan por $p_6, ..., p_{12}$, es 3 (se calcula fácilmente con un programa de ordenador) luego, como $dim\mathcal{L}' \geq dim\mathcal{L} \geq 3$, también es 3 la dimensión del sistema lineal $\mathcal{L}$, para doce puntos generales de $\mathbb{P}^2$.

Ahora, si calculamos el polinomio de Hilbert $P_{I'}$ de $\mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]/I'$, donde I' es el ideal generado por las curvas que generan $\mathcal{L}'$, obtenemos $P_{I'} = 26$. Esto es, todas las curvas del sistema $\mathcal{L}'$ se cortan exactamente en 26 puntos. Como los puntos $p_1, ..., p_{12}$ nos dan ya 25 puntos, contando multiplicidades, entonces $\mathcal{L}'$ tiene exactamente un punto base adicional (en realidad puede demostrarse que no es propiamente otro punto base, sino que corresponde a un esquema soportado en p_1, aunque obviaremos este hecho por ser irrelevante para nuestro objetivo). Como el número de puntos base adicionales de $\mathcal{L}$ es menor o igual que el número de puntos base adicionales de $\mathcal{L}'$ (porque "tener como mucho un punto base adicional" es una condición abierta), se deduce que $\mathcal{L}$ tiene como mucho un punto base adicional. $\square$

Con el mismo modo de proceder del lema anterior, se demuestra lo siguiente:

Lema 5.4. *i) Dados doce puntos de $\mathbb{P}^2$ en posición general, los sistemas lineales $\mathcal{L}_2(5; 1^9, 2^3)$ y $\mathcal{L}_2(4; 1^{12})$ no tienen ningún punto base adicional.*

ii) Dados seis puntos de $\mathbb{P}^2$ en posición general, el sistema lineal $\mathcal{L}_2(3; 1^6)$ no tiene ningún punto base adicional.

iii) Dados diez puntos de $\mathbb{P}^2$ en posición general, los sistemas lineales $\mathcal{L}_2(5; 1^6, 2^4)$, $\mathcal{L}_2(4; 1^9, 2)$, $\mathcal{L}_2(6; 1^3, 2^7)$ y $\mathcal{L}_2(4; 1^{10})$ no tienen ningún punto base adicional.

iv) Dados nueve puntos de $\mathbb{P}^2$ en posición general, el sistema lineal $\mathcal{L}_2(4; 1^8, 2)$ no tiene ningún punto base adicional.

Demostración.

Damos en cada caso los puntos particulares p_i que hemos utilizado para calcular la dimensión del sistema lineal $\mathcal{L}'$:

i) Para el sistema lineal $\mathcal{L}_2(5; 1^9, 2^3)$ hemos utilizado los puntos $p_1 = (1 : 0 : 0)$, $p_2 = (0 : 1 : 0)$, $p_3 = (0 : 0 : 1)$, $p_4 = (1 : 1 : 1)$, $p_5 = (1 : 2 : 1)$, $p_6 = (1 : 5 : 3)$, $p_7 = (-2 : 3 : 4)$, $p_8 = (1 : -2 : 3)$, $p_9 = (2 : 3 : 0)$, $p_{10} = (7 : 3 : 2)$, $p_{11} = (-7 : -3 : 2)$ y $p_{12} = (5 : 3 : -8)$, donde p_3, p_4 y p_5 tienen multiplicidad 2, y el resto 1.

Para el sistema lineal $\mathcal{L}_2(4; 1^{12})$ hemos utilizado los puntos $p_1 = (1 : 0 : 0)$, $p_2 = (0 : 1 : 0)$, $p_3 = (0 : 0 : 1)$, $p_4 = (1 : 1 : 1)$, $p_5 = (1 : 2 : 1)$, $p_6 = (1 : 5 : 3)$, $p_7 = (-2 : 3 : 4)$, $p_8 = (1 : -2 : 3)$, $p_9 = (2 : 3 : 0)$, $p_{10} = (7 : 3 : 2)$, $p_{11} = (-7 : -3 : 2)$ y $p_{12} = (5 : 3 : -8)$.

ii) Para el sistema lineal $\mathcal{L}_2(3; 1^6)$ hemos utilizado los puntos $p_1 = (1 : 0 : 0)$, $p_2 = (0 : 1 : 0)$, $p_3 = (0 : 0 : 1)$, $p_4 = (1 : 1 : 1)$, $p_5 = (1 : 2 : 1)$ y $p_6 = (5 : 3 : -8)$.

iii) Para el sistema lineal $\mathcal{L}_2(5; 1^6, 2^4)$ hemos utilizado los puntos $p_1 = (1 : 0 : 0)$, $p_2 = (0 : 1 : 0)$, $p_3 = (0 : 0 : 1)$, $p_4 = (1 : 1 : 1)$, $p_5 = (1 : 3 : 7)$, $p_6 = (1 : 5 : 3)$, $p_7 = (-1 : 3 : 4)$, $p_8 = (1 : -2 : 3)$, $p_9 = (-2 : -1 : 5)$ y $p_{10} = (-7 : 1 : 2)$, donde los puntos $p_3, ..., p_6$ son dobles.

Para el sistema lineal $\mathcal{L}_2(4; 1^9, 2)$ hemos utilizado los puntos $p_1 = (1 : 0 : 0)$, $p_2 = (0 : 1 : 0)$, $p_3 = (0 : 0 : 1)$, $p_4 = (1 : 1 : 1)$, $p_5 = (1 : 3 : 7)$, $p_6 = (1 : 5 : 3)$, $p_7 = (-1 : 3 : 4)$, $p_8 = (1 : -2 : 3)$, $p_9 = (-2 : -1 : 5)$, $p_{10} = (-7 : 1 : 2)$, donde el punto p_6 es doble.

Para el sistema lineal $\mathcal{L}_2(6; 1^3, 2^7)$ hemos utilizado los puntos $p_1 = (1 : 0 : 0)$, $p_2 = (0 : 1 : 0)$, $p_3 = (0 : 0 : 1)$, $p_4 = (1 : 1 : 1)$, $p_5 = (-4 : 3 : 7)$, $p_6 = (1 : 5 : 3)$, $p_7 = (-1 : 3 : 4)$, $p_8 = (1 : -2 : 3)$, $p_9 = (-2 : -1 : 5)$ y $p_{10} = (-7 : 8 : 2)$, donde los puntos $p_4, ..., p_{10}$ son dobles.

Para el sistema lineal $\mathcal{L}_2(4; 1^{10})$ hemos utilizado los puntos $p_1 = (1 : 0 : 0)$, $p_2 = (0 : 1 : 0)$, $p_3 = (0 : 0 : 1)$, $p_4 = (1 : 1 : 1)$, $p_5 = (-4 : 3 : 7)$, $p_6 = (1 : 5 : 3)$, $p_7 = (-1 : 3 : 4)$, $p_8 = (1 : -2 : 3)$, $p_9 = (-2 : -1 : 5)$ y $p_{10} = (-7 : 8 : 2)$.

iv) Para el sistema lineal $\mathcal{L}_2(4; 1^8, 2)$ hemos utilizado los puntos $p_1 = (0 : 1 : 0)$, $p_2 = (0 : 0 : 1)$, $p_3 = (1 : 1 : 1)$, $p_4 = (-4 : 3 : 7)$, $p_5 = (1 : 5 : 3)$, $p_6 = (-1 : 3 : 4)$, $p_7 = (1 : -2 : 3)$, $p_8 = (-2 : -1 : 5)$ y $p_9 = (-7 : 8 : 2)$, donde el punto p_9 es doble. $\square$

Volvemos de nuevo a estudiar el problema del cálculo de la dimensión de un sistema lineal. El lema que demostramos a continuación (que se deduce de un caso particular de un resultado de Hirschowitz) es un primer paso:

Lema 5.5. *Consideremos r puntos de $\mathbb{P}^2$, $x_1, ..., x_r$, en posición general. Entonces el sistema lineal de curvas planas de un cierto grado d, que pasan por los puntos anteriores con multiplicidad como mucho 2, tiene exactamente la dimensión esperada, con excepción de los casos $\mathcal{L}_2(2; 2^2)$ y $\mathcal{L}_2(4; 2^5)$.*

Demostración.

Dado un sistema lineal no vacío V, si añadimos un punto general la dimensión del sistema lineal resultante es igual a $dimV - 1$. En efecto, consideremos una curva C del sistema V, y sea p un punto que no pertenece a C. Sea a el grado de las curvas de V. Entonces, V no está contenido en el hiperplano H_p de $\mathbb{P}^{\binom{a+2}{2}}$ de curvas de grado a que pasan por p, luego $dim(V \bigcap H_p) = dimV - 1$. Tenemos pues que existe un abierto no vacío de puntos q de $\mathbb{P}^2$ para los que la dimensión de V baja en 1 tras añadir la condición de "pasar por q". Luego la dimensión de V baja en 1 tras añadir la condición de "pasar por un punto general". Por tanto, basta demostrar el lema para el caso en que todas las multiplicidades de los puntos son 2, y esto es exactamente el resultado demostrado por Hirschowitz (ver [**Hi**], Corolario 7.3).

$\square$

Mediante el lema anterior, podemos calcular la dimensión de sistemas lineales con puntos como mucho dobles. En el caso de puntos con multiplicidad mayor, existe una técnica, que introduciremos a continuación, para reducirnos al caso de multiplicidades menores o iguales que 2.

Definición 5.6. Sean q_1, q_2, q_3 tres puntos de $\mathbb{P}^2$ no colineales. Una *transformación de Cremona* centrada en q_1, q_2, q_3 es una aplicación birracional σ de $\mathbb{P}^2$, definida por el sistema lineal de las cónicas que pasan por q_1, q_2, q_3.

Ejemplo 5.7. La transformación cuadrática definida por

$$\sigma(x_0 : x_1 : x_2) := (x_1x_2 : x_0x_2 : x_0x_1) \tag{5.7.1}$$

es una transformación de Cremona centrada en los puntos $(1:0:0), (0:1:0)$ y $(0:0:1)$. Nótese además que $\sigma^2 = id_{\mathbb{P}^2}$.

Dada una transformación de Cremona centrada en tres puntos, mediante un cambio de coordenadas podemos suponer siempre que es de la forma (5.7.1) anterior. Consideremos pues una transformación de Cremona centrada en los puntos $p_1 = (1:0:0)$, $p_2 = (0:1:0)$ y $p_3 = (0:0:1)$, y sea π la explosión de $\mathbb{P}^2$ en dichos puntos. Como σ tiene la forma (5.7.1), es claro que $\sigma \circ \pi$ es la aplicación

$$\phi : \widetilde{\mathbb{P}^2}(p_1, p_2, p_3) \longrightarrow \mathbb{P}^2$$

asociada al sistema lineal $|2L - E_1 - E_2 - E_3|$, donde E_i es el divisor excepcional correspondiente al punto p_i, para $i = 1, 2, 3$. Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} \widetilde{\mathbb{P}^2}(p_1,p_2,p_3) \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "\phi"] & \widetilde{\mathbb{P}^2}(p_1,p_2,p_3) \\ \mathbb{P}^2 \arrow[r, dashed, "\sigma"] & \mathbb{P}^2 \end{tikzcd}$$

Así, como $\phi^{-1}(L) = 2L - E_1 - E_2 - E_3$, teniendo en cuenta que $\sigma^2 = id_{\mathbb{P}^2}$, es claro que $\pi^{-1}\sigma\pi(L) = 2L - E_1 - E_2 - E_3$. Consideremos ahora el divisor excepcional E_1. Se transforma por $\sigma \circ \pi$ en la recta que pasa por p_2 y p_3, $\{x_0 = 0\}$, luego su imagen en $\widetilde{\mathbb{P}^2}(p_1, p_2, p_3)$ por $\pi^{-1}\sigma\pi$ es $L - E_2 - E_3$. Tenemos entonces que la aplicación

$$\widetilde{\mathbb{P}^2}(p_1, p_2, p_3) \longrightarrow \widetilde{\mathbb{P}^2}(p_1, p_2, p_3),$$

$$x \longmapsto \pi^{-1}(\sigma(\pi(x)))$$

que llamaremos σ por un abuso de notación, está bien definida y transforma la recta L en $2L - E_1 - E_2 - E_3$, y cada $L - E_i - E_j$ en el divisor excepcional E_k (donde E_i, E_j y E_k son distintos entre sí).

Demostramos ahora la siguiente

Proposición 5.8. *Sea $\mathcal{L}_2(d; n_1, ..., n_r)$ un sistema lineal de curvas planas por los puntos $p_1, ..., p_r$, y sea σ una transformación de Cremona centrada en los tres primeros puntos del sistema. Entonces*

$$\sigma^*\mathcal{L} = \mathcal{L}_2(d + k; n_1 + k, n_2 + k, n_3 + k, n_4, ..., n_r),$$

donde $k = d - n_1 - n_2 - n_3$. Además se tiene que $dim\sigma^*\mathcal{L} = dim\mathcal{L}$, y la dimensión esperada de $\sigma^*\mathcal{L}$ coincide también con la dimensión esperada de $\mathcal{L}$.

Demostración.

Consideremos una curva $D = dL - n_1E_1 - ... - n_rE_r$ del sistema $\mathcal{L}$, y apliquémosle σ. Por lo que hemos demostrado antes, $\sigma^*D = d(2L - E_1 - E_2 - E_3) - n_1(L - E_2 - E_3) - n_2(L - E_1 - E_3) - n_3(L - E_1 - E_2) - n_4E_4 - ... - n_rE_r = (d + k)L - (n_1 + k)E_1 - (n_2 + k)E_2 - (n_3 + k)E_3 - n_4E_4 - ... - n_rE_r$, donde $k = d - n_1 - n_2 - n_3$.

Nótese ahora que la dimensión de $\mathcal{L}$ no varía al efectuar una transformación birracional σ, porque las curvas de $\mathcal{L}$ están en corrspondencia $1 - 1$ con las curvas de $\sigma^*\mathcal{L}$. Luego es claro que $dim\sigma^*\mathcal{L} = dim\mathcal{L}$. Por último, a partir de (5.1) es inmediato demostrar que $d(\sigma^*\mathcal{L}) = d(\mathcal{L})$.

$\square$

Observación 5.9. Nótese que tras aplicar una transformación de Cremona σ como (5.7.1) a un sistema lineal $\mathcal{L} = \mathcal{L}_2(d; n_1, ..., n_r)$ no vacío, si algún $d - n_i - n_j$ $(1 \leq i < j \leq 3)$ es negativo, obtenemos entonces una multiplicidad negativa en el sistema transformado $\sigma^*\mathcal{L}$. En este caso, la recta que pasa por p_i y p_j es una recta fija del sistema y está contenida $n_i - n_j - d$ veces en el lugar base de $\mathcal{L}$. En efecto, supongamos que $d - n_1 - n_2 < 0$. Si $L_{12} = L - E_1 - E_2$ es la recta que pasa por p_1 y p_2 (nótese que $L_{12}^2 = -1$) y $C = dL - n_1E_1 - ... - n_rE_r$ es una curva cualquiera del sistema, entonces $L_{12} \cdot C = d - n_1 - n_2 < 0$. Esto implica, por el Teorema de Bézout, que L_{12} es una componente de C, y esto para cualquier curva C de $\mathcal{L}$, luego L_{12} es una componente fija de $\mathcal{L}$, y es claro que L_{12} está contenida $n_1 + n_2 - d$ veces en el lugar base de $\mathcal{L}$.

Obsérvese que, si además $d - n_i - n_j \leq -2$ para ciertos i, j, entonces $\mathcal{L}$ tiene dimensión mayor que la esperada. Una célebre conjetura de Gimigliano-Habourne-Hirschowitz establece que, de hecho, la dimensión de $\mathcal{L}$ es mayor que la esperada si y sólo si existe una curva C del sistema, irreducible y reducida, de modo que $C^2 = -1$ y $C\mathcal{L} \leq -2$. La contribución más reciente ha sido hecha por Dumnicki y Jarnicki (ver [**DJ**]), demostrando que la conjetura es cierta para multiplicidades $n_i \leq 11$.

Veamos ahora una aplicación de lo visto anteriormente para el cálculo de dimensiones de sistemas lineales:

Ejemplo 5.10. Consideremos el sistema lineal $\mathcal{L} = \mathcal{L}_2(9; 5, 4, 3^5)$. Tras aplicarle a $\mathcal{L}$ tres transformaciones sucesivas de Cremona (centradas en los tres puntos de mayores multiplicidades), obtenemos el sistema $\mathcal{L}_2(0; -1, -2)$, según la Proposición 5.8. Veámoslo paso a paso, donde señalamos con un asterisco las multiplicidades transformadas al aplicar la Proposición 5.8, esto es, aquellas de la forma $n_i + k$:

$$\mathcal{L}_2(9; 5, 4, 3, 3, 3, 3, 3)$$

$$\mathcal{L}_2(6; 2^*, 1^*, 0^*, 3, 3, 3, 3)$$

$$\mathcal{L}_2(3; 2, 1, 0, 0^*, 0^*, 0^*, 3)$$

$$\mathcal{L}_2(0; -1^*, -2^*, 0, 0, 0, 0, 0^*)$$

Según la Observación 5.9, el sistema transformado $\mathcal{L}_2(0; -1, -2)$ tiene dos rectas fijas, una de ellas contenida una vez en el lugar base, y la otra contenida dos veces. Entonces el sistema $\mathcal{L}_2(0; -1^*, -2^*, 0, 0, 0, 0, 0^*)$ se escribe como $\mathcal{L}_2(0; -1, 0, \overset{(6}{\ldots}, 0) + 2\mathcal{L}_2(0; 0, -1, 0 \overset{(5}{\ldots}, 0)$. Deshaciendo las sucesivas transformaciones de Cremona que hemos aplicado hasta llegar a $\mathcal{L}_2(0; -1, -2)$, obtenemos también dos curvas fijas en el sistema original $\mathcal{L}$. En efecto, como $\sigma^{-1} = \sigma$, tenemos

$$\mathcal{L}_2(0; -1^*, 0^*, 0, 0, 0, 0, 0^*) + 2\mathcal{L}_2(0; 0^*, -1^*, 0, 0, 0, 0, 0^*)$$

$$\mathcal{L}_2(1; 0, 1, 0, 0^*, 0^*, 0^*, 1) + 2\mathcal{L}_2(1; 1, 0, 0, 0^*, 0^*, 0^*, 1)$$

$$\mathcal{L}_2(2; 0^*, 1^*, 0^*, 1, 1, 1, 1) + 2\mathcal{L}_2(2; 1^*, 0^*, 0^*, 1, 1, 1, 1)$$

$$\mathcal{L}_2(3;1,2,1,1,1,1,1)+2\mathcal{L}_2(3;2,1,1,1,1,1,1)$$

Por tanto, se tiene que $\mathcal{L}=C_1+2C_2$, donde $C_1=3L-E_1-2E_2-E_3-...-E_7$ y $C_2=3L-2E_1-E_2-...-E_7$. Observamos entonces que, aunque la dimensión esperada de $\mathcal{L}$ es -1, sin embargo $\mathcal{L}$ es no vacío.

Volvemos ahora a nuestro problema de calcular dimensiones de sistemas lineales particulares cuando alguna multiplicidad sea mayor que 2.

Lema 5.11. *i) Dados diez puntos de $\mathbb{P}^2$ en posición general, los sistemas lineales $\mathcal{L}_2(7;3^4,2^2,1^4)$, $\mathcal{L}_2(9;3^8,2^2)$, $\mathcal{L}_2(10;4,3^9)$ y $\mathcal{L}_2(8;4,3^2,2^7)$ tienen la dimensión esperada.*

ii) Dados nueve puntos de $\mathbb{P}^2$ en posición general, el sistema lineal $\mathcal{L}_2(6;3,2^6,1^2)$ tiene la dimensión esperada.

iii) Dados doce puntos de $\mathbb{P}^2$ en posición general, los sistemas lineales $\mathcal{L}_2(7;3^4,2,1^7)$, $\mathcal{L}_2(5;2^3,1^9)$ y $\mathcal{L}_2(4;1^{12})$ tienen la dimensión esperada.

iv) Dados once puntos de $\mathbb{P}^2$ en posición general, el sistema lineal $\mathcal{L}_2(6;3,2^5,1^5)$.

Demostración.

Consideremos el caso $\mathcal{L}=\mathcal{L}_2(7;3^4,2^2,1^4)$. Mediante dos transformaciones sucesivas de Cremona (centradas siempre en los tres puntos de mayor multiplicidad), obtenemos el sistema lineal $\mathcal{L}'=\mathcal{L}_2(3;1^8)$. Ahora bien, en $\mathcal{L}'$ no hay ninguna multiplicidad mayor que 2, luego podemos aplicar el Lema 5.5 para deducir que $\mathcal{L}'$ tiene la dimensión esperada. Por la Proposición 5.8, esto implica que $\mathcal{L}$ también tiene la dimensión esperada.

Con el resto de los sistemas lineales del lema se procede de igual modo. □

Observación 5.12. Existen resultados más fuertes para demostrar que un sistema lineal $\mathcal{L}=\mathcal{L}_2(d;n_1,...,n_r)$ tiene la dimensión esperada. En primer lugar, damos la siguiente definición:

Definición 5.12.1. *Se dice que un sistema lineal $\mathcal{L}=\mathcal{L}_2(d;n_1,...,n_r)$ está en forma estándar si $n_1\geq...\geq n_r\geq 0$ y $d\geq n_1+n_2+n_3$.*

Ejemplo 5.12.2. Consideremos el sistema lineal $\mathcal{L}=\mathcal{L}_2(6;3,2^5,1^5)$. No está en forma estándar, pero mediante dos transformaciones de Cremona sucesivas, según la Proposición 5.8 obtenemos el sistema lineal equivalente $\mathcal{L}' = \mathcal{L}_2(4; 2, 1^{10})$, que sí está en forma estándar.

No todos los sistemas lineales pueden escribirse en forma estándar aplicando transformaciones de Cremona. Una prueba de ello es el sistema lineal $\mathcal{L}_2(9; 5, 4, 3^5)$ del Ejemplo 5.10.

En la Observación 5.9 enunciábamos la conjetura de Gimigliano, Harbourne y Hirschowitz. Una reformulación equivalente de dicha conjetura es la siguiente:

Conjetura 5.12.3. *Un sistema lineal $\mathcal{L}$ en forma estándar tiene la dimensión esperada.*

Como la conjetura anterior es cierta para multiplicidades $n_i \leq 11$ (ver Observación 5.9), también podríamos haberla utilizado en la demostración del Lema 5.11, ya que todos los sistemas lineales del enunciado pueden escribirse de forma estándar mediante transformaciones de Cremona.

Capítulo 6. Estabilidad del fibrado universal restringido a congruencias de $\mathbb{G}(1,3)$ de grado bajo.

Comenzamos ahora el estudio, caso por caso, de la estabilidad de $Q|_S$ para las congruencias S de la lista de la sección 2.2, conservando la numeración que dábamos allí. Además, determinamos la pendiente máxima alcanzada por los subfibrados lineales de $Q|_S$. En los casos de bigrado (a,b) con $a \neq b$ estudiamos por separado cada congruencia y su dual, pues entonces los fibrados universales restringidos tienen propiedades diferentes.

Finalmente, salvo cuando haya posibilidad de confusión, denotamos indistintamente por S a una congruencia y a su dual (aunque avisando siempre a cuál de ellas nos referimos).

Observación 6.1. En los casos de congruencias racionales utilizaremos frecuentemente la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$(a_1n_1 + ... + a_rn_r)^2 \leq (a_1^2 + ... + a_r^2) \cdot (n_1^2 + ... + n_r^2),$$

donde los a_i y los n_j son números enteros.

Congruencias de tipo 1)

La congruencia S de este tipo es un $\beta-$plano. El fibrado universal restringido es $Q|_S = \mathbb{T}_{\mathbb{P}^2}(-1) = \Omega_{\mathbb{P}^2}(2)$, que es estable. Por el Teorema 4.4, $\mu(D) = 0$ para todo subhaz $\mathcal{O}_S(D)$ de $Q|_S$. Por tanto, 0 es la pendiente máxima que alcanzan los subhaces lineales de $Q|_S$.

Congruencias de tipo $1)^*$

La restricción a la congruencia de bigrado $(1,0)$ del fibrado universal es $Q|_S = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)$, que tiene a $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)$ como subhaz.
$\mu(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)) = L^2 = 1 > \mu(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)) = \frac{1}{2}$, luego $Q|_S$ no es semiestable. Como el fibrado que desestabiliza a $Q|_S$ es único (Lema 4.2), 1 es la pendiente máxima que alcanzan los subhaces lineales de $Q|_S$.

Congruencias de tipo $2)$

La congruencia de este tipo es $S = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, con bigrado $(1, 1)$. El fibrado universal $Q|_S = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1}(1, 0) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1}(0, 1)$ es semiestable, por el Teorema 4.4, con pendiente igual a 1. Como S tiene recta fundamental, por el apdo. *iii*) del Teorema 4.4 sabemos que existe un subhaz lineal de $Q|_S$ con pendiente igual a 1, por lo que $Q|_S$ no es estable. Así, la pendiente máxima que alcanzan los subhaces lineales de $Q|_S$ es 1.

Congruencias de tipo $3)$

La congruencia de este tipo es $S = \widetilde{\mathbb{P}^2}(x)$, de bigrado $(1, 2)$ y con sección hiperplana $H = 2L - E$ en $\mathbb{P}^5$. Por el Teorema 4.4, $Q|_S$ es estable. La pendiente máxima que alcanzan los subhaces lineales de $Q|_S$ es 1, según el apdo. *iii*) del Teorema 4.4, ya que S tiene recta fundamental.

Congruencias de tipo $3)^*$

Como S tiene recta fundamental, por el apdo. *iii*) del Teorema 4.4 sabemos que existe un subhaz lineal de $Q|_S = \mathcal{O}_S(L) \oplus \mathcal{O}_S(L - E)$ con pendiente igual a 2, luego $Q|_S$ no es semiestable (porque $\mu(Q|_S) = \frac{3}{2}$). Por el Lema 4.2, la pendiente máxima que alcanzan los subhaces lineales de $Q|_S$ es 2.

Congruencias de tipo $4)$

En este caso, $S = \mathbb{P}^2$ de bigrado $(1, 3)$, con sección hiperplana $H = 2L$. El fibrado universal restringido a S es estable, por el Teorema 4.4. Sea $\mathcal{O}_S(D)$ un subhaz de $Q|_S$. Entonces $D = aL$, con a un número entero. No puede ser $DH = 1$, porque entonces tendríamos $a = \frac{1}{2}$, que es absurdo. Luego todo subhaz lineal de $Q|_S$ tiene pendiente 0.

Congruencias de tipo $4)^*$

El fibrado universal restringido a la **congruencia dual** $(3, 1)$ es $Q|_S = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)$, que no es estable por ser escindido. Como $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)$ es un subhaz con pendiente $\mu(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)) = L \cdot 2L = 2$ y $\mu(Q|_S) = 2$, $Q|_S$ es semiestable y 2 es la pendiente máxima que alcanzan sus subhaces lineales de $Q|_S$.

Congruencias de tipo 5)

Por el Teorema 4.4, como la congruencia de este tipo tiene una cónica fundamental, sabemos que $Q|_S$ es semiestable, pero no estable, y la pendiente máxima que alcanzan los subhaces lineales de $Q|_S$ 2.

Congruencias de tipo 6)

En este caso, $S = \widetilde{\mathbb{P}^2}(x_1, ..., x_5)$, de bigrado $(2, 2)$ y con sección hiperplana $H = 3L - E_1 - ... - E_5$. Las congruencias de este tipo están contenidas en un complejo lineal.

Si el complejo lineal es general, S no tiene recta fundamental. Como S no tiene curva fundamental, $\mu(D) \leq 1$ para todo subhaz $\mathcal{O}_S(D)$ de $Q|_S$ según el Teorema 4.4, luego $Q|_S$ es estable. Ahora bien, como los fibrados excepcionales E_i son rectas en S, están contenidas en $\beta-$planos (Corolario 1.1.7), luego $\mathcal{O}_S(E_i)$ es un subhaz de $Q|_S$, por el Lema 2.1.14, para cada $i = 1, ..., 5$. Por tanto, si S no tiene recta fundamental, la pendiente máxima que alcanzan los subhaces lineales de $Q|_S$ es 1.

En cambio, si el complejo lineal es especial, entonces S tiene recta fundamental. En ese caso, por el Teorema 4.4, existe un subhaz lineal de $Q|_S$ con pendiente igual a 2. Como $\mu(Q|_S) = 2$, esto implica que $Q|_S$ es semiestable pero no estable, y 2 es la pendiente máxima que alcanzan los subhaces lineales de $Q|_S$.

Congruencias de tipo 7)

En este caso $S = \widetilde{\mathbb{P}^2}(x_1, ..., x_4)$ de bigrado $(2, 3)$, con sección hiperplana $H = 3L - E_1 - ... - E_4$. Por el Teorema 4.4, sabemos que el fibrado universal restringido es estable. Como S no tiene curva fundamental, por el Teorema 4.4 es $\mu(D) \leq 1$ para todo subhaz $\mathcal{O}_S(D)$ de $Q|_S$. Luego 1 es la pendiente máxima que alcanzan los subhaces lineales de $Q|_S$, ya que $\mathcal{O}_S(E_1)$ es un subhaz de $Q|_S$ (ver Corolario 1.1.7 y Lema 2.1.14) con pendiente igual a 1.

Congruencias de tipo $7)^*$

Como S no tiene curva fundamental, $Q|_S$ es estable por el Teorema 4.4, con $\mu(Q|_S) = \frac{5}{2}$. También por el Teorema 4.4 sabemos que $\mu(D) \leq 2$ para todo subhaz $\mathcal{O}_{\mathcal{S}}(D)$ de $Q|_S$.

Demostramos ahora que la mayor pendiente que alcanzan los subhaces lineales de $Q|_S$

es 2, encontrando una cónica de S contenida en un $\beta-$plano. Para ello, consideremos la congruencia dual S^*, de bigrado $(2,3)$. En [**ABT**] (Ejemplo 1.14) se demuestra que S^* contiene exactamente cinco haces de cónicas, cada uno de los cuales contiene al menos una cónica contenida en un $\alpha-$plano. Dualizando de nuevo, tenemos que S tiene alguna cónica contenida en un $\beta-$plano, como queríamos.

Congruencias de tipo 8)

La congruencia de este tipo es $S = \widetilde{\mathbb{P}^2}(x_1, ..., x_8)$, de bigrado $(2,3)$ y con sección hiperplana $H = 4L - 2E_1 - E_2 - ... - E_8$. Por el Teorema 4.4, $Q|_S$ es estable. Como S tiene recta fundamental, por el mismo teorema sabemos que existe un subhaz lineal de $Q|_S$ con pendiente igual a 2. Como $\mu(Q|_S) = \frac{5}{2}$, esto implica que 2 es la mayor pendiente que alcanzan los subhaces lineales de $Q|_S$.

Congruencias de tipo 8)*

Como S tiene recta fundamental, tenemos por el Teorema 4.4 que existe un subhaz lineal de $Q|_S$ con pendiente igual a 3, por lo que $Q|_S$ no es semiestable. Entonces, por el Lema 4.2, la máxima pendiente que alcanzan los subhaces lineales de $Q|_S$ es 3.

Congruencias de tipo 9)

La congruencia S de este tipo es una superficie reglada X_0 sobre una curva elíptica C, de bigrado $(3,3)$. En este caso, el fibrado universal restringido $Q|_S$ es semiestable por el Teorema 4.4.

En la descripción de esta congruencia dada en la sección 2.2, hemos demostrado que existe una cúbica en S contenida en un $\beta-$plano. De esto se deduce que $Q|_S$ no es estable, porque $\mu(Q|_S) = 3$. Por tanto, 3 es la pendiente máxima alcanzada por los subhaces lineales de $Q|_S$.

Congruencias de tipo 10)

En este caso, $S = \widetilde{\mathbb{P}^2}(x_1, x_2, x_3)$ de bigrado $(3,3)$, con sección hiperplana $H = 3L - E_1 - E_2 - E_3$. Como S no tiene curva fundamental, por el Teorema 4.4 sabemos que $Q|_S$ es estable y que la pendiente de cualquier subhaz lineal de $Q|_S$ es menor o igual que 2.

Veamos que $\mathcal{O}_S(L-E_1)$ es un subhaz de $Q|_S$, i.e., vamos a demostrar que el fibrado $Q|_S(-L+E_1)$ tiene secciones:

Por el Teorema de Riemann-Roch, $\chi(Q|_S(-L+E_1))=1$. Por otra parte $h^2(Q|_S(-L+E_1))=h^0(Q|_S(-5L+E_1+2E_2+2E_3))=0$ pues, en caso contrario, $Q|_S$ tendría como subhaz a $\mathcal{O}_S(5L-E_1-2E_2-2E_3)$, que tiene pendiente igual a 10. Esto contradice el que $\mu(D)\leq 2$ para cada subhaz $\mathcal{O}_S(D)$ de $Q|_S$.

Por tanto, $1=\chi(Q|_S(-L+E_1))=h^0(Q|_S(-L+E_1))-h^1(Q|_S(-L+E_1))$, luego $h^0(Q|_S(-L+E_1))=1+h^1(Q|_S(-L+E_1))>0$ y existe un morfismo inyectivo $\mathcal{O}_S(L-E_1)\longrightarrow Q|_S$.

Entonces 2 es la pendiente máxima que alcanzan los subhaces lineales de $Q|_S$.

Congruencias de tipo 11)

La congruencia de este tipo es $S=\widetilde{\mathbb{P}^2}(x_1,...,x_7)$, de bigrado $(3,3)$, con sección hiperplana $H=4L-2E_1-E_2-...-E_7$. Como S no tiene curva fundamental, aplicando el Teorema 4.4 se tiene que $Q|_S$ es estable y que sus subhaces lineales tienen pendiente menor o igual que 2.

Sea $\mathcal{O}_S(D)$ un subhaz de $Q|_S$ con pendiente igual a 2. Por la Proposición 4.3, $D\geq 0$, luego D es una cónica en un $\beta-$plano.

Vamos a demostrar que la congruencia general de este tipo no contiene ninguna cónica que a su vez esté contenida en un $\beta-$plano. En efecto, consideremos S como superficie de $\mathbb{P}^5$, y supongamos que S contiene r cónicas $C_1,...,C_r$, cada una de ellas contenida en un plano $\Pi_1,...,\Pi_r$ respectivamente. Como S no contiene a ninguno de los planos Π_i (porque S es irreducible), para cada i podemos elegir un punto p_i en $\Pi_i\backslash S$. Consideremos ahora el conjunto U_i de cuádricas de $\mathbb{P}^5$ que contienen a S y que además no pasan por el punto p_i. Este conjunto es un abierto del conjunto de todas las cuádricas de $\mathbb{P}^5$ que contienen a S. Además es no vacío, ya que S puede describirse como la intersección de todas las cuádricas de $\mathbb{P}^5$ que la contienen.

Como el conjunto de cuádricas de $\mathbb{P}^5$ que contienen a S es un subespacio lineal de $\mathbb{P}^{20}$, entonces es irreducible, luego la intersección de $U_1\bigcap...\bigcap U_r$ con el conjunto de cuádricas lisas de $\mathbb{P}^5$ que contienen a S es un abierto no vacío. Por tanto, existe una cuádrica $\mathbf{Q}$ en la intersección anterior. Como $\mathbf{Q}\simeq \mathbb{G}(1,3)$, tenemos que $\mathbb{G}(1,3)$ no contiene a ninguno de los planos $\Pi_1, ..., \Pi_r$, que, por tanto, no son ni $\alpha-$planos ni $\beta-$planos. Luego la congruencia general no tiene ninguna cónica contenida en un $\beta-$plano.

Por tanto, para la congruencia general, la pendiente máxima alcanzada por los subhaces lineales de $Q|_S$ es 1 (por ejemplo, E_2 es una recta en S contenida en un $\beta-$plano).

La congruencia especial de este tipo puede tener una, dos o tres cónicas contenidas en un $\beta-$plano (véase Ejemplo 1.15 de [**ABT**]), con lo que la pendiente máxima que alcanzan los subhaces lineales de $Q|_S$ para la congruencia especial es 2.

Congruencias de tipo 12)

En este caso, S es una superficie $K3$, intersección completa en $\mathbb{G}$ de un complejo lineal y un complejo cúbico, de bigrado $(3,3)$.

Si S es general, por la Proposición 2.1.12, la pendiente máxima que alcanzan los subhaces lineales de $Q|_S$ es 0. Por tanto, $Q|_S$ es estable.

Entre los casos de congruencias especiales de este tipo, S puede tener recta fundamental. En ese caso, por el Teorema 4.4, sabemos que existe un subhaz lineal de $Q|_S$ con pendiente igual a 3, por lo que $Q|_S$ no es estable (pero sí semiestable) y 3 es la pendiente máxima que alcanzan los subhaces lineales 1 de $Q|_S$.

Congruencias de tipo 13)

La congruencia general de este tipo es $S = \widetilde{\mathbb{P}^2}(x_1, ..., x_9)$ con $x_1, ..., x_9$ puntos en posición general, de bigrado $(3,4)$, con sección hiperplana $H = 4L - E_1 - ... - E_9$.

Como S no tiene curva fundamental, $Q|_S$ es estable y $\mu(D) \leq 2$ para todo subhaz $\mathcal{O}_S(D)$ de $Q|_S$, por el Teorema 4.4. Veamos que no existen subhaces $\mathcal{O}_S(D)$ de $Q|_S$ con $\mu(D) = 2$, para S general.

En efecto, supongamos que $Q|_S$ tiene un subhaz $\mathcal{O}_S(D)$ con pendiente 2, donde $D = dL - n_1E_1 - ... - n_9E_9$. Entonces tenemos una sucesión saturada como en (2.1.17). Ahora, la condición $DH = 2$ nos queda

$$n_1 + ... + n_9 = 4d - 2 \tag{1}$$

y la condición $degZ = b - DH + D^2 \geq 0$ es

$$n_1^2 + ... + n_9^2 \leq 2 + d^2 \tag{2}$$

Entonces por la Observación 6.1 tenemos

$$(4d-2)^2 \leq 9(n_1^2 + ... + n_9^2) \leq 9(2+d^2),$$

lo que equivale a $7d^2 - 16d - 14 \leq 0$. Por tanto, los únicos valores que puede tomar d son 0, 1 o 2. Excluimos cada uno de estos casos:

• Supongamos que $a = 0$. En ese caso, de las condiciones (1) y (2) anteriores se deduce que $n_i = n_j = -1$ para ciertos i, j y $n_k = 0$ para $k \neq i, j$, y $D = E_i + E_j$. Ahora bien, $\mathcal{O}_S(E_i + E_j)$ no puede ser un subhaz de $Q|_S$, pues por el Lema 2.1.14 D sería una curva contenida en un $\beta-$plano. Pero las rectas E_i y E_j no se cortan, porque $E_i \cdot E_j = 0$, luego no pueden estar contenidas en el mismo plano.

• Supongamos $a = 1$. Ahora las condiciones (1) y (2) nos quedan

$$n_1 + ... + n_9 = 2$$

$$n_1^2 + ... + n_9^2 \leq 3,$$

de donde se deduce que $n_i = n_j = 1$, para ciertos n_i, n_j, y $n_k = 0$ para $k \neq i, j$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, $D = L - E_1 - E_2$, y consideremos la cúbica plana $C = 3L - E_1 - ... - E_9$, que está contenida o en un $\alpha-$plano o en un $\beta-$plano por el Lema 1.1.8. Si estuviera contenida en un $\beta-$plano, obtendríamos una contradicción del hecho de que $\mu(D) \leq 2$ para todo subfibrado lineal $\mathcal{O}_S(D)$ de $Q|_S$. Luego C está contenida en un $\alpha-$plano, que llamaremos Π_1. Sea Π_2 el $\beta-$plano que contiene a D. Como $D \cdot C = 1$, entonces $\Pi_1 \cap \Pi_2 \neq \emptyset$, por lo que según el Corolario 1.1.5, necesariamente ambos planos se cortan en una recta. Luego $< \Pi_1, \Pi_2 >= \mathbb{P}^3$, por lo que existe un haz de hiperplanos en $\mathbb{P}^5$ que contienen a Π_1 y a Π_2. Esto nos lleva a una contradicción, ya que sólo hay un hiperplano de $\mathbb{P}^5$ que contiene a C y a D. En efecto, $H - C - D = E_1 + E_2$, y el fibrado $\mathcal{O}_S(E_1 + E_2)$ tiene sólo una sección.

• Por último, supongamos $a = 2$. A partir de las condiciones (i) y (ii) tenemos que tres de los n_i's son cero y los seis restantes son 1. Supongamos (sin pérdida de generalidad) que $n_7 = n_8 = n_9 = 0$. Entonces $D = 2L - E_1 - ... - E_6$. Ahora bien, por la Proposición 4.3 es $h^0(D) = 1$, luego $D \geq 0$. Esto es absurdo, porque D no es efectivo ($x_1, ..., x_6$ están en posición general).

Como $D = E_1$ es una recta de $\mathbb{P}^5$ contenida en $\mathbb{G}(1,3)$, por el Corolario 1.1.7 existe un β-plano que contiene a E_1. Así, ya tenemos un subhaz de $Q|_S$, $\mathcal{O}_S(E_1)$, con pendiente 1. Entonces 1 es la mayor pendiente que pueden alcanzar los subhaces lineales de $Q|_S$ para la congruencia general.

Congruencias de tipo 13)*

Como S no tiene curva fundamental, aplicando el Teorema 4.4 tenemos que $Q|_S$ es estable y $\mu(D) \leq 3$ para todo subhaz $\mathcal{O}_S(D)$ de $Q|_S$. Vamos ahora a demostrar que la pendiente máxima que alcanzan los subhaces lineales de $Q|_S$ es 3.

En efecto, consideremos la curva $C = 3L - E_1 - ... - E_9$, cúbica plana de $\mathbb{P}^5$. Por el Lema 1.1.8, C está contenida o bien en un α-plano o en un β-plano, que llamaremos Π.

Supongamos que Π es un $\alpha-$plano. Entonces tenemos que $\mathcal{O}_S(C)$ es un subfibrado de $\mathcal{S}|_S$, lo implica que $\mathcal{O}_{S^*}(C)$ es un subfibrado de $Q|_{S^*}$ para la congruencia dual S^* de bigrado $(3,4)$. Ahora bien, esto es absurdo, porque $\mu(C) = 3$ y sabemos que $\mu(D) \leq 2$ para todo subfibrado lineal $\mathcal{O}_{S^*}(D)$ de $Q|_{S^*}$.

Luego C está contenida en un $\beta-$plano, lo que implica que $\mathcal{O}_S(C)$ es un subfibrado de $Q|_S$. Por tanto, como $\mu(C) = 3$, hemos demostrado que 3 es la pendiente máxima que alcanzan los subhaces lineales de $Q|_S$, para cualquier S de tipo 13)*.

Congruencias de tipo 14)

La congruencia S de este tipo es una fibración elíptica minimal de bigrado $(3,4)$. Por el Teorema 4.4, tenemos que $Q|_S$ es estable. Además, como S tiene recta fundamental, 3 es la mayor pendiente que alcanzan los subhaces lineales de $Q|_S$.

Congruencias de tipo 14)*

Al igual que la congruencia de tipo 14), la congruencia de tipo 14)* también tiene recta fundamental luego, por el Teorema 4.4, existe un subhaz $\mathcal{O}_S(D)$ de $Q|_S$ con pendiente igual a 4. Por tanto, $Q|_S$ no es semiestable y 4 es la mayor pendiente que alcanzan los subhaces lineales de $Q|_S$.

Congruencias de tipo 15)

En este caso, S es una superficie reglada minimal X_{-1} sobre una curva elíptica C, y tiene bigrado $(2,6)$. La sección hiperplana de S en $\mathbb{P}^5$ es $H = 2C_0 + \mathcal{L}f$, donde $\mathcal{L}$ es un divisor en C de grado 1.

Por el Teorema 4.4 $Q|_S$ es estable y $\mu(D) \leq 2$ para todo subhaz $\mathcal{O}_S(D)$ de $Q|_S$. Veamos que no existen subhaces $\mathcal{O}_S(D)$ de $Q|_S$ con $\mu(D) = 2$ o $\mu(D) = 1$.

En primer lugar, supongamos por reducción al absurdo que existe un suhaz $\mathcal{O}_S(D)$ de $Q|_S$ con pendiente igual a 2. Tenemos entonces una sucesión exacta saturada como en 2.1.17. El divisor D es de la forma $D \equiv pC_0 + qf$, con p y q enteros, y $H \equiv 2C_0 + f$. Por tanto, de la condición $DH = 2$ obtenemos $p = -2t$ y $q = 1 + 3t$, con t entero, i.e.,

$$D = -2tC_0 + (1 + 3t)f$$

Vamos a calcular ahora el número de puntos de Z:
$degZ = c_2(Q|_S(-D)) = (-4)(t - \frac{1}{2})(t + 1) \geq 0$, por lo que debe ser $t = -1$ o $t = 0$. Excluyamos ambos casos:

• Supongamos que $t = 0$. Entonces $D \equiv f$, i.e., $D \sim \pi^* D'$, con $D' \in Pic(C)$ y $degD' = 1$, donde π es el morfismo de S sobre C. Como C es elíptica, esta última condición es equivalente a que $D' \sim p$, con p punto de C. Entonces $\pi^* D'$ es una fibra de π, y por lo tanto un divisor efectivo. Entonces $h^0(D) > 0$, lo que implica, por el Lema 2.1.14 (recuérdese que estamos suponiendo $\mathcal{O}_S(D) \subset Q|_S$), que existe algún $\beta-$plano que contiene a la curva D, luego existe un plano de $\mathbb{P}^3$ que contiene infinitas rectas de S. Esto es imposible, según demostramos en la descripción de esta congruencia en la sección 2.2.

• Si $t = -1$, entonces $D \equiv 2C_0 - 2f$. Como $c_2(Q|_S(-D)) = 0$, tenemos una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_S(2C_0 - 2f) \longrightarrow Q|_S \longrightarrow \mathcal{O}_S(3f) \longrightarrow 0$$

Como $(H - D)^2 = 9f^2 = 0$, la dimensión de la imagen de S por la aplicación φ asociada a $|H - D|$ es ≤ 1, y dicha imagen es una curva fundamental para S. Además, como $h^0(3f) = 3$, φ es un morfismo de S en $\mathbb{P}^2$, luego la curva $Im\varphi$ es plana. Por otra parte, por la descripción geométrica de S, $Im\varphi$ es necesariamente una cuártica elíptica, que no es plana. Luego $\mathcal{O}_S(2C_0 - 2f)$ no es un subhaz de $Q|_S$, y no existe ningún subhaz lineal de $Q|_S$ con pendiente igual a 2.

Tampoco puede existir un subhaz saturado $\mathcal{O}_S(D)$ de $Q|_S$ con pendiente igual a 1, pues esto implicaría por la Proposición 4.3 que S es racional.

Por tanto, la pendiente máxima que alcanzan los subhaces lineales de $Q|_S$ es 0.

Congruencias de tipo $15)^*$

Por el Teorema 4.4 sabemos que $Q|_S$ es semiestable. Veamos en primer lugar que no existe un subhaz con pendiente igual a 4. En efecto, supongamos por el contrario que existe una sucesión exacta saturada como en (2.1.17) con $\mu(D) = \mu(Q|_S) = 4$, donde D es un divisor de la forma $D \equiv pC_0 + qf$. Entonces $\mu(D) = DH = 3p + 2q = 4$. Resolviendo esta ecuación obtenemos que el divisor D es de la forma $D \equiv -2tC_0 + (2+3t)f$, con $t \in \mathbb{Z}$.

Calculemos ahora el número de puntos de Z:
$degZ = c_2(Q|_S(-D)) = -8t^2 - 8t - 2 = (-8)(t + \frac{1}{2})^2 \geq 0$, que no se cumple para ningún t entero. Luego no existe ningún subhaz lineal de $Q|_S$ con pendiente igual a 4, lo que demuestra la estabilidad del fibrado universal restringido a S.

Vamos a demostrar ahora que $\mathcal{O}_S(C_0)$ es un subhaz de $Q|_S$ probando que la curva C_0 está contenida en un $\beta-$plano. Como C_0 es una sección del morfismo $\pi : S \longrightarrow C$ y la curva C es elíptica, entonces C_0 tiene género 1. Esto implica que C_0 es una cúbica plana en $\mathbb{G}(1,3)$, luego está contenida o bien en un $\alpha-$plano o bien en un $\beta-$plano según el Lema 1.1.8. Supongamos que está contenida en un $\alpha-$plano. Considerando la congruencia dual $(2,6)$, que llamaremos S^*, esto es equivalente a suponer C_0 contenida en un $\beta-$plano, de donde se concluye que $\mathcal{O}_{S^*}(C_0)$ es un subfibrado de $Q|_{S^*}$. Esto es absurdo, porque $\mu(C_0) = 3$ y hemos probado que la pendiente máxima que alcanzan los subhaces de rango 1 de $Q|_{S^*}$ es 0. Luego, como curva de S, C_0 está contenida en un $\beta-$plano, lo que prueba que 3 es la pendiente máxima que alcanzan los subhaces lineal de $Q|_S$.

Congruencias de tipo $16)$

En este caso, $S = \widetilde{\mathbb{P}^2}(x_1, ..., x_{10})$ de bigrado $(5,3)$, con sección hiperplana $H = 6L -$

$2E_1 - ... - 2E_6 - E_7 - ... - E_{10}$. Recuérdese que, según hemos demostrado en la descripción del capítulo 2, la congruencia general de este tipo es tal que los puntos $x_1, ..., x_{10}$ están en posición general.

Por el Teorema 4.4, como S no tiene curva fundamental, es $\mu(D) \leq 4$ para todo subhaz $\mathcal{O}_S(D)$ de $Q|_S$, luego $Q|_S$ es semiestable.

Veamos que, para toda congruencia S de este tipo, $Q|_S$ no tiene subhaces saturados con pendiente igual a 4. En efecto, supongamos que $\mu(D) = \mu(Q|_S) = 4$ para algún subhaz $\mathcal{O}_S(D)$, con $D = dL - n_1E_1 - ... - n_{10}E_{10}$. Imponiendo la igualdad $DH = 4$ junto con la condición $degZ \geq 0$ obtenemos

$$2n_1 + ... + 2n_6 + n_7 + ... + n_{10} = 6d - 4$$

$$n_1^2 + ... + n_{10}^2 \leq d^2 - 1$$

Utilizando ambas condiciones anteriores y la Observación 6.1 tenemos

$$2d^2 - 12d + 11 \leq 0,$$

lo que implica que los únicos valores que puede tomar d son 2, 3 o 4. Excluyamos cada uno de estos casos:

- Si $d = 2$, obtenemos las condiciones incompatibles

$$2n_1 + ... + 2n_6 + n_7 + ... + n_{10} = 8$$

$$n_1^2 + ... + n_{10}^2 \leq 3$$

- Supongamos entonces $d = 3$. En este caso, de las condiciones

$$2n_1 + ... + 2n_6 + n_7 + ... + n_{10} = 14$$

$$n_1^2 + ... + n_{10}^2 \leq 8$$

resultan las curvas $D = 3L - E_1 - ... - E_6 - E_{i_7} - E_{i_8}$, donde $7 \leq i_7 < i_8 \leq 10$. En cualquier caso, D es una cuártica de $\mathbb{P}^5$ de género 1, luego alabeada (si fuera plana, su género sería 3). Por esta razón, D no puede estar contenida en un $\beta-$plano, i.e., $\mathcal{O}_S(D)$ no es un subhaz de $Q|_S$.

• Finalmente, si suponemos $d = 4$, obtenemos las condiciones incompatibles

$$2n_1 + ... + 2n_6 + n_7 + ... + n_{10} = 20$$

$$n_1^2 + ... + n_{10}^2 \leq 15$$

Vamos ahora a demostrar que la pendiente máxima que pueden alcanzar los subhaces lineales de $Q|_S$ es 3. En efecto, sea C la curva $3L - E_1 - ... - E_9$ en S, que es una cúbica plana de $\mathbb{P}^5$. Por el Lema 1.1.8, C está necesariamente contenida o en un α-plano o en un β-plano Π. Supongamos que Π es un α-plano. Entonces, considerando la congruencia dual S^*, tenemos que C está contenida en un $\beta-$plano como curva en S^*, luego $\mathcal{O}_{S^*}(C)$ es un subhaz de $Q|_{S^*}$ por el Lema 2.1.14. Ahora bien, por el Teorema 4.4 (teniendo en cuenta que S^* no tiene curva fundamental y que su bigrado es $(3,5)$), sabemos que $DH \leq 2$ para cualquier subhaz $\mathcal{O}_{S^*}(D)$ de $Q|_{S^*}$. Luego $\mathcal{O}_{S^*}(C)$ no puede ser un subhaz de $Q|_{S^*}$, porque $CH = 3$. Entonces C como curva en S^* no puede estar contenida en ningún $\beta-$plano o, equivalentemente, C como curva en S no puede estar contenida en ningún $\alpha-$plano. Por tanto, C está contenida, como curva de S, en un $\beta-$plano, y 3 es la pendiente máxima que alcanzan los subhaces de rango 1 de $Q|_S$, para cualquier congruencia S de este tipo, lo que implica que $Q|_S$ es estable.

Congruencias de tipo $16)^*$

Como S no tiene curva fundamental, por el Teorema 4.4 es $\mu(D) \leq 2$, para todo subhaz $\mathcal{O}_S(D)$ de $Q|_S$, y $Q|_S$ es estable. Veamos que $Q|_S$ no contiene subhaces con pendiente igual a 2 si S es general.

En efecto, supongamos $\mathcal{O}_S(D)$ subhaz saturado de $Q|_S$ con pendiente igual a 2. Tenemos entonces una sucesión saturada como en (2.1.17), y las condiciones $DH = 2$ y $degZ \geq 0$ nos quedan

$$2n_1 + ... + 2n_6 + n_7 + ... + n_{10} = 6d - 2$$

$$n_1^2 + ... + n_{10}^2 \leq 3 + d^2$$

respectivamente. Utilizando ahora la Observación 6.1, obtenemos $(6d-2)^2 \leq 28(n_1^2 + ... + n_{10}^2) \leq 28(3 + d^2)$, esto es,

$$d^2 - 3d - 10 \leq 0$$

Luego las únicas posibilidades para d son -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 o 5. Como por la Proposición 4.3 es $h^0(D) = 1$, se tiene que D es efectivo, luego $a \geq 0$.

Excluimos ahora cada uno de los casos $d = 0, 1, 2, 3, 4, 5$:

• Supongamos que $a = 0$. Entonces

$$2n_1 + ... + 2n_6 + n_7 + ... + n_{10} = -2$$

$$n_1^2 + ... + n_{10}^2 \leq 3,$$

que tiene como soluciones

i) $D = E_i$, con $1 \leq i \leq 6$,

ii) $D = E_i + E_j$, con $7 \leq i < j \leq 10$,

iii) $D = E_i - E_j + E_k$, con $1 \leq i \leq 6$ y $7 \leq j < k \leq 10$. Estos divisores no son efectivos, luego este caso queda excluido.

En el primer caso, supongamos $D = E_1$ sin pérdida de generalidad. Por lo visto para la congruencia dual $(5, 3)$, sabemos que existe una cúbica $C = 3L - E_1 - ... - E_9$ contenida en un $\alpha-$plano Π_1. Estamos suponiendo que $\mathcal{O}_S(D)$ es un subfibrado de $Q|_S$ luego, como $D \geq 0$, por el Lema 2.1.14 existe un $\beta-$plano Π_2 que contiene a la cónica D. Como $H - C - D = 3L - 2E_1 - E_2 - ... - E_6 - E_{10}$ y los puntos $x_1, ..., x_{10}$ están en posición general, tenemos que $h^0(H - C - D) = 1$. Por tanto, existe un único hiperplano de $\mathbb{P}^5$ que contiene a ambas curvas D y C, luego el espacio lineal generado por Π_1 y Π_2, planos de $\mathbb{P}^5$, es necesariamente un hiperplano. Esto implica que Π_1 y Π_2 se cortan en un punto. Ahora bien, como un $\alpha-$plano y un $\beta-$plano o bien son disjuntos o bien se cortan en una recta (según el Corolario 1.1.5) y Π_1 es un $\alpha-$plano, entonces Π_2 no puede ser un $\beta-$plano. Luego $\mathcal{O}_S(D)$ no es un subhaz de $Q|_S$.

En el segundo caso, la curva D no puede estar contenida en un $\beta-$plano. En efecto, si lo estuviera, las rectas E_i y E_j se cortarían, lo que es absurdo porque $E_i \cdot E_j = 0$. Luego $\mathcal{O}_S(D)$ no es un subhaz de $Q|_S$.

• Suponiendo $d = 1$ tenemos las condiciones

$$2n_1 + ... + 2n_6 + n_7 + ... + n_{10} = 4$$

$$n_1^2 + ... + n_{10}^2 \leq 4,$$

que tienen como soluciones los divisores

i) $D = L - E_i - E_j$, donde $1 \leq i < j \leq 6$,

ii) $D = L - E_{i_1} - ... - E_{i_4}$, donde $7 \leq i_1 < ... < i_4 \leq 10$,

iii) $D = L - 2E_i$, con $1 \leq i \leq 6$,

iv) $D = L - E_i - E_j - E_k$, donde $1 \leq i \leq 6$ y $7 \leq j < k \leq 10$.

v) $D = L + E_{i_1} - E_{i_2} - E_{i_3} - E_{i_4}$, donde $1 \leq i_1 < ... < i_4 \leq 6$.

En el primer caso, supongamos, sin pérdida de generalidad, $D = L - E_1 - E_2$. Tenemos una sucesión exacta como en (2.1.17), con $H - D = 5L - E_1 - E_2 - 2E_3 - ... - 2E_6 - E_7 - ... - E_{10}$ y $degZ = 2$. Esto contradice el Lema 5.4 *iii)*, que afirma que el sistema lineal $|H - D|$ no tiene puntos base adicionales, mientras que Z está contenido en el lugar base. Luego $\mathcal{O}_S(D)$ no es un subhaz de $Q|_S$.

En los casos restantes, como D no es efectivo, de la Proposición 4.3 *ii)* se sigue que $\mathcal{O}_S(D)$ no es un subhaz de $Q|_S$.

• Supongamos ahora $d = 2$. Las soluciones a las condiciones

$$2n_1 + ... + 2n_6 + n_7 + ... + n_{10} = 10$$

$$n_1^2 + ... + n_{10}^2 \leq 7$$

son

i) $D = 2L - E_{i_1} - ... - E_{i_5}$, con $1 \leq i_1 < ... < i_5 \leq 6$,

ii) $D = 2L - E_{i_1} - E_{i_2} - E_{i_3} - E_7 - ... - E_{10}$, con $1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq 6$,

iii) $D = 2L - 2E_{i_1} - E_{i_2} - E_{i_3} - E_{i_4}$, con $1 \leq i_1 \leq 6$ y $1 \leq i_2 < i_3 < i_4 \leq 6$,

iv) $D = 2L - E_{i_1} - ... - E_{i_4} - E_{j_1} - E_{j_2}$, con $1 \leq i_1 < ... < i_4 \leq 6$, $7 \leq j_1 < j_2 \leq 10$.

En el primer caso, supongamos $D = 2L - E_1 - ... - E_5$ sin pérdida de generalidad. Tenemos una sucesión exacta como en (2.1.17), con $H - D = 4L - E_1 - ... - E_5 - 2E_6 -$

$E_7 - ... - E_{10}$ y $degZ = 2$. Esta última condición es absurda porque, según el Lema 5.4 *iii*), el sistema lineal $|H - D|$ no tiene puntos base adicionales, mientras que Z está contenido en el lugar base. Luego $\mathcal{O}_S(D)$ no es un subhaz de $Q|_S$.

En los casos restantes, como D no es efectivo, de la Proposición 4.3 *ii*) se sigue que $\mathcal{O}_S(D)$ no es un subhaz de $Q|_S$.

• Suponiendo $d = 3$, obtenemos las condiciones

$$2n_1 + ... + 2n_6 + n_7 + ... + n_{10} = 16$$

$$n_1^2 + ... + n_{10}^2 \leq 12,$$

cuyas soluciones son

i) $D = 3L - 2E_{i_1} - E_{i_2} - ... - E_{i_6} - E_{j_1} - E_{j_2}$, donde $1 \leq i_1 \leq 6$, $1 \leq i_2 < ... < i_6 \leq 6$, $7 \leq j_1 < j_2 \leq 10$,

ii) $D = 3L - 2E_{i_1} - 2E_{i_2} - E_{i_3} - ... - E_{i_6}$, donde $1 \leq i_1 < i_2 \leq 6$, $1 \leq i_3 < ... < i_6 \leq 6$,

iii) $D = 3L - E_1 - ... - E_{10}$.

Aplicando la Proposición 4.3 *ii*) se deduce que en ninguno de los casos anteriores es $\mathcal{O}_S(D)$ subhaz de $Q|_S$, porque D no es efectivo.

• Suponiendo $d = 4$, obtenemos las condiciones

$$2n_1 + ... + 2n_6 + n_7 + ... + n_{10} = 22$$

$$n_1^2 + ... + n_{10}^2 \leq 19,$$

con soluciones todos los divisores de la forma $D = 4L - 2E_{i_1} - 2E_{i_2} - 2E_{i_3} - E_{i_4} - E_{i_5} - E_{i_6} - E_7 - ... - E_{10}$, donde $1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq 6$, $1 \leq i_4 < i_5 < i_6 \leq 6$. Si $\mathcal{O}_S(D)$ fuera un subhaz de $Q|_S$, por la Proposición 4.3 *ii*) tendríamos que D es efectivo, lo que no es cierto porque $x_1, ..., x_{10}$ están en posición general. Luego $\mathcal{O}_S(D)$ no es un subhaz de $Q|_S$.

• Finalmente, supongamos $d = 5$. La solución a las condiciones

$$2n_1 + ... + 2n_6 + n_7 + ... + n_{10} = 28$$

$$n_1^2 + ... + n_{10}^2 \leq 28$$

es $D = 5L - 2E_1 - ... - 2E_6 - E_7 - ... - E_{10}$. Igual que antes, como D no es efectivo, $\mathcal{O}_S(D)$ no puede ser un subhaz de $Q|_S$.

Hemos probado que no existe ningún subfibrado lineal de $Q|_S$ con pendiente igual a 2. Por tanto, la pendiente máxima que alcanzan los subhaces lineales de $Q|_S$ para S general es 1, porque S contiene rectas, por ejemplo, E_7 (véase Corolario 1.1.7).

Congruencias de tipo 17)

La congruencia de este tipo es $S = \widetilde{\mathbb{P}^2}(x_1, ..., x_7)$, de bigrado $(4, 4)$, con sección hiperplana $H = 6L - 2E_1 - ... - 2E_7$. Como S no tiene curva fundamental, del Teorema 4.4 se deduce que $DH \leq 3$ para todo subhaz $\mathcal{O}_S(D)$ de $Q|_S$, luego $Q|_S$ es estable.

Para determinar la pendiente máxima que alcanzan los subfibrados lineales de $Q|_S$, observemos en primer lugar que no puede haber ningún subfibrado lineal de $Q|_S$ con pendiente impar, ya que DH es siempre par. Veamos que, si S es general, entonces no existen subhaces de $Q|_S$ con pendiente igual a 2, con lo que la pendiente máxima alcanzada por los subhaces de rango 1 de $Q|_S$ será 0. Recordemos antes que para la congruencia general de este tipo los puntos $x_1, ..., x_7$ están en posición general.

Supongamos pues que existe un subhaz $\mathcal{O}_S(D)$ con pendiente igual a 2. Tenemos entonces una sucesión saturada como en (2.1.17), y las condiciones $DH = 2$ y $degZ \geq 0$ son equivalentes a

$$n_1 + ... + n_7 = 3d - 1$$

$$n_1^2 + ... + n_7^2 \leq 2 + d^2$$

Entonces, a partir de la Observación 6.1 obtenemos

$$2d^2 - 6d - 13 \leq 0,$$

luego los únicos valores que puede tomar d son -1, 0, 1, 2, 3 o 4. Veamos que todos los divisores obtenidos para cada valor de a son efectivos.

- Si $d = -1$, obtenemos las condiciones incompatibles

$$n_1 + ... + n_7 = -4$$

$$n_1^2+...+n_7^2 \leq 3$$

• Supongamos $d=0$. Entonces las soluciones a

$$n_1+...+n_7=-1$$

$$n_1^2+...+n_7^2 \leq 2$$

son todos los divisores $D=E_i$, con $i=1,...,7$.

• Si $d=1$, las condiciones

$$n_1+...+n_7=2$$

$$n_1^2+...+n_7^2 \leq 3$$

tienen como soluciones los divisores de la forma $D=L-E_{i_1}-E_{i_2}$, donde $1 \leq i_1 < i_2 \leq 7$.

• Supongamos ahora $d=2$. Obtenemos entonces

$$n_1+...+n_7=5$$

$$n_1^2+...+n_7^2 \leq 6,$$

cuyas soluciones son todos los divisores de la forma $D=2L-E_{i_1}-...-E_{i_5}$, con $1 \leq i_1 < ... < i_5 \leq 7$.

• Si $d=3$, de las condiciones

$$n_1+...+n_7=8$$

$$n_1^2+...+n_7^2 \leq 11$$

obtenemos todos los divisores de la forma $D=3L-2E_{i_1}-E_{i_2}-...-E_{i_7}$, con $1 \leq i_1 \leq 7$, $1 \leq i_2 < ... < i_7 \leq 7$, $i_1 \neq i_j$, para cada $j=2,...,7$.

• Si $d=4$, obtenemos las condiciones incompatibles

$$n_1+...+n_7=11$$

$$n_1^2+...+n_7^2 \leq 18$$

Todos los divisores anteriores son efectivos luego, en total, hemos obtenido 56 cónicas. Denotemos dichas cónicas por $C_1, ..., C_{56}$, y sean $\Pi_1, ..., \Pi_{56}$ los planos de $\mathbb{P}^5$ que las contienen. Queremos ver que, para S general, ninguno de los planos $\Pi_1, ..., \mathbb{P}_{56}$ está contenido en $\mathbb{G}(1,3)$. Recordemos ahora la descripción geométrica de la congruencia S (ver sección 2.2) como proyección sobre $\mathbb{P}^5$ de una superficie S' de $\mathbb{P}^6$. La superficie S' en $\mathbb{P}^6$ también contiene un número finito de cónicas ${C_1}', ..., {C_{56}}'$, contenidas en planos ${\Pi_1}', ..., {\Pi_{56}}'$, donde $\pi_{p'}(C_i') = C_i$ y $\pi_{p'}(\Pi_i') = \Pi_i$. Vamos a demostrar que la proyección general de S' a $\mathbb{P}^5$ da una congruencia tal que $\Pi_1, ..., \Pi_{56}$ no están contenidos en $\mathbb{G}$.

Consideremos el conjunto de todas las cuádricas de $\mathbb{P}^6$ que contienen a S'. Este conjunto es el espacio proyectivo $\mathbb{P}(H^0(\mathcal{J}_{S',\mathbb{P}^6}(2)))$, digamos $\mathbb{P}^N$.

Lema A. *$N \geq 6$.*

Demostración.

Consideremos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathcal{J}_{S',\mathbb{P}^6}(2) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^6}(2) \longrightarrow \mathcal{O}_{S'}(2) \longrightarrow 0 \qquad (1)$$

Como S' se proyecta linealmente sobre S, entonces $h^0(\mathcal{O}_{S'}(2)) = h^0(\mathcal{O}_S(2))$. Calculemos esta última dimensión tomando cohomología en la sucesión

$$0 \longrightarrow \mathcal{J}_{S,\mathbb{G}}(2) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{G}}(2) \longrightarrow \mathcal{O}_S(2) \longrightarrow 0 \qquad (2)$$

En la sección 2.2, cuando describimos geométricamente las congruencias de este tipo, demostramos que $h^0(\mathcal{J}_{S,\mathbb{G}}(2)) = 0$ y que $h^1(\mathcal{J}_{S,\mathbb{G}}(2)) = 1$. Entonces $h^0(\mathcal{O}_{S'}(2)) = h^0(\mathcal{O}_{S'}(2)) = 21$. Tomando ahora cohomología en la sucesión (1) y teniendo en cuenta que $h^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^6}(2)) = 28$, obtenemos $h^0(\mathcal{J}_{S',\mathbb{P}^6}(2)) \geq 7$, esto es, $N \geq 6$. $\square$

Ahora, consideremos el conjunto de todas las cuádricas singulares de $\mathbb{P}^6$ que contienen a S'. Es un subconjunto del $\mathbb{P}^N$ anterior, de la forma $V(F)$, con F un polinomio de grado 7. Sea $F = F_1 \cdot ... \cdot F_s$ la descomposición en irreducibles del polinomio F, y sea $V(F_{i_0})$ una componente irreducible de $V(F)$ que contenga a la cuádrica Q' (recordemos de la sección 2.2 que Q' es la cuádrica de $\mathbb{P}^6$ a partir de la cual obtenemos la congruencia S de partida).

Lema B. *El grado del polinomio* F_{i_0} *es mayor que* 1.

Demostración.

Supongamos, por el contrario, que $degF_{i_0} = 1$, esto es, que $V(F_{i_0})$ es un hiperplano de $\mathbb{P}^N$.

Nótese en primer lugar que, como el conjunto de cuádricas en $\mathbb{P}^6$ con un único punto singular, no perteneciente a la variedad de secantes de S', es un abierto (no vacío, porque Q' es un elemento de dicho conjunto) de $\mathbb{P}^N$, podemos considerar que la cuádrica general de $V(F_{i_0})$ tiene un único punto singular, no perteneciente a la variedad de secantes de S'. Así, es correcto hablar sobre "el vértice de una cuádrica general de $V(F_{i_0})$".

Consideremos ahora el diagrama de incidencia

$$\begin{array}{ccc} & V(F_{i_0}) \times \mathbb{P}^6 \supset I & \\ \pi_1 \swarrow & & \searrow \pi_2 \\ V(F_{i_0}) & & \mathbb{P}^6 \end{array}$$

donde I es el conjunto de los pares (Q'', p'') tales que la cuádrica Q'' es singular en p''.

Como $\pi_1^{-1}(Q') = \{p'\}$, el cerrado $\{Q'' \in V(F_{i_0}) | dim(\pi_1^{-1}(Q'')) \geq 1\}$ es un subconjunto propio de $V(F_{i_0})$, luego la fibra general de π_1 tiene dimensión 0. De aquí concluimos (π_1 es sobre, porque todas las cuádricas de $V(F_{i_0})$ son singulares) que $dimI = N - 1$.

Consideramos ahora $I \xrightarrow{\pi_2} \pi_2(I)$. En la descripción geométrica de S dada en el capítulo 2, demostramos que $\mathbb{G}(1,3)$ es la única cuádrica de $\mathbb{P}^5$ que contiene a S. Esto implica que, por el punto p', vértice de Q', pasa una única cuádrica de $V(F_{i_0})$ singular en p', la propia Q'. Por tanto $\pi_2^{-1}(p') = \{Q'\}$, y de aquí se deduce que la dimensión de la fibra general de π_2 es 0, luego $dim(\pi_2(I)) = N - 1$.

Como $V(F_{i_0})$ es un hiperplano, entonces $T_{Q''}V(F_{i_0}) = V(F_{i_0})$ para cada cuádrica Q'' de $V(F_{i_0})$ con vértice p'', donde por $T_{Q''}V(F_{i_0})$ denotamos el espacio tangente a $V(F_{i_0})$ en Q''. Por otra parte, como $V(F_{i_0})$ es una componente irreducible del conjunto $V(F)$ de cuádricas singulares de $\mathbb{P}^6$ que contienen a S', es $T_{Q''}V(F_{i_0}) = T_{Q''}V(F)$. Como $T_{Q''}V(F)$ es el conjunto de cuádricas de $\mathbb{P}^6$ que pasan por p'' y que contienen a S', entonces $V(F_{i_0})$

es también este conjunto. Entonces, por cada punto de $\pi_2(I)$ pasan todas las cuádricas de $V(F_{i_0})$. Luego $\bigcap_{Q''\in V(F_{i_0})} Q''$ contiene a $\pi_2(I)$, por lo que $dim[\bigcap_{Q''\in V(F_{i_0})} Q''] \geq N-1$.

Como $V(F_{i_0})$ es un hiperplano de $\mathbb{P}^N$, $\mathbb{P}^N$ está generado por $V(F_{i_0})$ y por alguna cuádrica Q''' de $\mathbb{P}^6$. Sabemos que S' es la intersección de todas las cuádricas que la contienen, esto es, de todos los elementos de $\mathbb{P}^N$. Por tanto, $S' = [\bigcap_{Q''\in V(F_{i_0})} Q''] \cap Q'''$, luego $dimS' \geq N-2$, que es absurdo por el Lema A. $\square$

Por tanto $degF_{i_0} > 1$, luego el espacio lineal generado en $\mathbb{P}^N$ por $V(F_{i_0})$ es todo $\mathbb{P}^N$. Entonces $\bigcap_{Q''\in V(F_{i_0})} Q'' = \bigcap_{Q''\in \mathbb{P}^N} Q'' = S'$.

Como S' es una superficie irreducible, no contiene a ninguno de los planos $\Pi_i{}'$. Entonces, para cada $i = 1, ..., 56$, existe un punto $p_i{}'$ en $\Pi_i{}'$ que no pertenece a S', y por tanto tampoco pertenece a a ninguna cuádrica que contenga a S'.

Consideremos el abierto no vacío U_i de cuádricas de $V(F_{i_0})$ que no pasan por el punto $p_i{}'$. Como $V(F_{i_0})$ es irreducible, los abiertos no vacíos $U_1, ..., U_{56}$ y el conjunto de cuádricas de $V(F_{i_0})$ que tienen un único punto singular que no está en la variedad de secantes de S', que es también un abierto no vacío de $V(F_{i_0})$, se cortan. Por tanto, existe una cuádrica Q'' de $\mathbb{P}^6$ que contiene a S', con un único punto singular p'', el cual no pertenece a la variedad de secantes de S', de modo que Q'' no contiene a ninguno de los planos $\Pi_i{}'$ (porque no contiene a ninguno de los puntos $p_i{}'$). Sea Q la base del cono cuádrico Q''. Como Q'' tiene un único punto singular, Q es una cuádrica lisa en $\mathbb{P}^5$, luego $Q \simeq \mathbb{G}(1,3)$. Proyectando $\mathbb{P}^6$ sobre $\mathbb{P}^5$ desde el punto p'' obtenemos, como imagen de S' por la proyección, una congruencia lisa (porque p'' no pertenece a la variedad de secantes de S') T de $\mathbb{G}(1,3)$ que contiene a las cónicas $C_1, ..., C_{56}$. Además, como Q'' no contiene a ninguno de los planos Π'_i, Q tampoco contiene a niguno de los planos Π_i. Esto significa, en particular, que los planos Π_i no son $\beta-$planos. Por tanto, el abierto de las congruencias $(4,4)$ con los mismos invariantes de S que no tienen cónicas en $\beta-$planos es no vacío. Esto es, la congruencia $(4,4)$ con los mismos invariantes de S, general, no tiene cónicas en $\beta-$planos. Luego la pendiente máxima que alcanzan los subhaces lineales de $Q|_S$, para S general, es 0.

Congruencias de tipo 18)

La congruencia de este tipo es $S = \widetilde{\mathbb{P}^2}(x_1, ..., x_{11})$, de bigrado $(4, 4)$ y con sección hiperplana $H = 5L - 2E_1 - 2E_2 - E_3 - ... - E_{11}$.

Como S no tiene curva fundamental, por el Teorema 4.4 se tiene que $Q|_S$ es estable (con pendiente igual a 4) y que $DH \leq 3$ para todo subhaz $\mathcal{O}_S(D)$ de $Q|_S$. Veamos que, si S es general, no existe ningún subhaz lineal de $Q|_S$ con pendiente igual a 3.

En efecto, recordemos en primer lugar (ver sección 2.2) que para la congruencia general de este tipo, los once puntos $x_1, ..., x_{11}$ están en posición general. Supongamos ahora que existe un subhaz saturado $\mathcal{O}_S(D)$ de $Q|_S$ con $DH = 3$. Las condiciones $DH = 3$ y $degZ \geq 0$ nos quedan

$$2n_1 + 2n_2 + n_3 + ... + n_{11} = 5d - 3$$

$$n_1^2 + ... + n_{11}^2 \leq 1 + d^2$$

Aplicando la Observación 6.1 tenemos $4d^2 - 15d - 4 \leq 0$. Así, las únicas posibilidades para d son 0, 1, 2, 3 o 4. Veamos que no se puede dar ninguno de estos casos:

- Suponiendo $d = 0$ obtenemos las condiciones incompatibles

$$2n_1 + 2n_2 + n_3 + ... + n_{11} = -3$$

$$n_1^2 + ... + n_{11}^2 \leq 1$$

- Supongamos pues $d = 1$. En ese caso,

$$2n_1 + 2n_2 + n_3 + ... + n_{11} = 2$$

$$n_1^2 + ... + n_{11}^2 \leq 2,$$

de donde obtenemos las posibilidades

i) $D = L - E_i - E_j$, con $3 \leq i < j \leq 11$,

ii) $D = L - E_i$, con $1 \leq i \leq 2$.

La curva D no puede estar contenida en un $\beta-$plano en ninguno de los dos casos, pues si D fuese una cúbica plana en $\mathbb{P}^5$, tendríamos $p_a(D) = 1$. Ahora bien, $p_a(D) = 0$, luego $\mathcal{O}_S(D)$ no es un subhaz de $Q|_S$. Por tanto, $\mathcal{O}_S(D)$ no es un subhaz de $Q|_S$.

• Si $d = 2$, entonces

$$2n_1 + 2n_2 + n_3 + ... + n_{11} = 7$$

$$n_1^2 + ... + n_{11}^2 \leq 5,$$

que tiene como soluciones todos los divisores de la forma $D = 2L - E_1 - E_2 - E_{i_1} ... - E_{i_3}$, con $3 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq 11$. Como los puntos $x_1, x_2, x_{i_1}, ..., x_{i_3}$ están en posición general, D es irreducible, con $p_a(D) = 0$. Consideremos ahora D como cúbica de $\mathbb{P}^5$, y supongamos D plana. Tenemos en ese caso $p_a(D) = 1$, que es absurdo. Luego D no puede estar contenida en un $\beta-$plano, y $\mathcal{O}_S(D)$ no es un subhaz de $Q|_S$.

• Si suponemos $d = 3$, obtenemos las condiciones

$$2n_1 + 2n_2 + n_3 + ... + n_{11} = 12$$

$$n_1^2 + ... + n_{11}^2 \leq 10,$$

con soluciones todos los divisores de la forma $D = 3L - E_1 - E_2 - E_{i_1} - ... - E_{i_8}$, donde $3 \leq i_1 < ... < i_8 \leq 11$.

Supongamos $D = 3L - E_1 - ... - E_{10}$. Como D no es efectivo (porque $x_1, ...x_{10}$ están en posición general), $\mathcal{O}_S(D)$ no puede ser un subhaz de $Q|_S$ (Proposición 4.3 *ii*)).

• Supongamos ahora $d = 4$. En este caso obtenemos las condiciones

$$2n_1 + 2n_2 + n_3 + ... + n_{11} = 17$$

$$n_1^2 + ... + n_{11}^2 \leq 17,$$

que tienen como solución al divisor $D = 4L - 2E_1 - 2E_2 - E_3 - ... - E_{11}$. Como D no es efectivo, por la Proposición 4.3 *ii*) se tiene que $\mathcal{O}_S(D)$ no es un subhaz de $Q|_S$.

Vamos a probar ahora que existe $\mathcal{O}_S(D) \subset Q|_S$ con $DH = 2$. En efecto, consideremos $D = 3L - E_1 - ... - E_{11}$. Entonces, por el Teorema de Riemann-Roch, $\chi(Q|_S(-D)) = 1$. Por otra parte, $h^2(Q|_S(-D)) = h^0(Q|_S(-H)) = 0$. En efecto, si $h^0(Q|_S(-H)) > 0$, tendríamos $\mathcal{O}_S(H) \hookrightarrow Q|_S$ y $8 = H^2 < \mu(Q|_S) = 4$, por ser $Q|_S$ estable.

Luego $h^0(Q|_S(-D)) = 1 + h^1(Q|_S(-D)) > 0$ y $\mathcal{O}_S(D) \subset Q|_S$, por lo que 2 es la pendiente máxima que alcanzan los subhaces lineales de $Q|_S$ para S general. Nótese que, en este caso, la pendiente máxima se alcanza para un divisor D no efectivo.

Congruencias de tipo 19)

En este caso, S es una superficie $K3$, intersección completa $(2,2,2)$ en $\mathbb{P}^5$, de bigrado $(4,4)$. Como no tiene curva fundamental y no es racional, por el Teorema 4.4 se tiene que $\mu(D) \leq 2$ para todo subhaz $\mathcal{O}_S(D)$ de $Q|_S$. Luego $Q|_S$ es estable y, si S es general, entonces la pendiente máxima alcanzada por los subhaces lineales de $Q|_S$ es 0 (ver Proposición 2.1.12).

Congruencias de tipo 20)

En este caso, S es una intersección completa de un complejo lineal y un complejo cuártico en $\mathbb{G}$, de bigrado $(4,4)$.

Si S es general, por la Proposición 2.1.12, la pendiente máxima que alcanzan los subfibrados lineales de $Q|_S$ es 0. Por tanto, $Q|_S$ es estable.

Entre los casos de congruencias especiales de este tipo, S puede tener recta fundamental. En ese caso, por el Teorema 4.4, sabemos que existe un subhaz lineal de $Q|_S$ con pendiente igual a 4, por lo que $Q|_S$ no es estable (pero sí semiestable) y 4 es la pendiente máxima que alcanzan los subhaces lineales de $Q|_S$.

Congruencias de tipo 21)

Las congruencias de este tipo son de la forma $S = \widetilde{\mathbb{P}^2}(x_1, ..., x_{10})$, de bigrado $(3,6)$ y con sección hiperplana $H = 7L - 2E_1 - ... - 2E_{10}$. Para la congruencia general, los puntos $x_1, ..., x_{10}$ están en posición general.

Como S no tiene curva fundamental, por el Teorema 4.4 sabemos que $DH \leq 2$ para todo subfibrado lineal $\mathcal{O}_S(D)$ de $Q|_S$ y que $Q|_S$ es estable.

Veamos que no existe ningún subhaz $\mathcal{O}_S(D)$ de $Q|_S$ con pendiente igual a 2 si S es general. En efecto, supongamos por el contrario que existe un subhaz $\mathcal{O}_S(D) \subset Q|_S$ con pendiente igual a 2, donde $D = dL - n_1E_1 - ... - n_{10}E_{10}$. Por la Proposición 4.3, D es efectivo. Las condiciones $DH = 2$ y $degZ \geq 0$ nos quedan

$$2n_1 + ... + 2n_{10} = 7d - 2$$

$$n_1^2 + ... + n_{10}^2 \leq 4 + d^2$$

Aplicando la Observación 6.1 obtenemos la desigualdad $9d^2 - 28a - 156 \leq 0$. Así, las únicas posibilidades para d son -2, -1, 0, 1, 2,..., 6. Los casos $d = -1, 1, 3, 5$ dan lugar a condiciones incompatibles, y tampoco puede darse el caso $d = -2$, pues D es efectivo.

- Supongamos $d = 0$. Entonces

$$n_1 + ... + n_{10} = -1$$

$$n_1^2 + ... + n_{10}^2 \leq 4$$

que tiene como soluciones los divisores $D = E_i$, con $1 \leq i \leq 10$. Supongamos $D = E_1$, sin pérdida de generalidad. Veamos que D no puede estar contenida en un $\beta-$plano. En efecto, consideremos la cúbica plana $C = 3L - E_1 - ... - E_9$ que, por el Lema 1.1.8, está contenida o bien en un $\alpha-$plano o bien en un $\beta-$plano. Nótese que, necesariamente, C está contenida en un $\alpha-$plano, porque hemos demostrado que los subfibrados de $Q|_S$ tienen pendiente menor o igual que 2, y $\mu(C) = 3$. Sea Π_1 el $\alpha-$plano que contiene a C, y sea Π_2 el plano de $\mathbb{P}^5$ que contiene a la cónica D.

Aplicando el Lema 5.5 ($x_1, ..., x_{10}$ están en posición general), es $h^0(H - C - D) = 1$, esto es, existe un único hiperplano de $\mathbb{P}^5$ que contiene a C y a D. Esto implica que dicho hiperplano es, necesariamente, el espacio lineal generado por Π_1 y Π_2, luego Π_1 y Π_2 se cortan en un punto. Por tanto, como Π_1 es un $\alpha-$plano, Π_2 no puede ser un $\beta-$plano, ya que un $\alpha-$plano y un $\beta-$plano o bien se cortan en una recta o bien son disjuntos. Luego $\mathcal{O}_S(D)$ no es un subhaz de $Q|_S$.

- Suponiendo $d = 2$, obtenemos las condiciones

$$n_1 + ... + n_{10} = 6$$

$$n_1^2 + ... + n_{10}^2 \leq 8$$

Las soluciones son

$i)$ los divisores de la forma $D = 2L - E_{i_1} - ... - E_{i_6}$, con $1 \leq i_1 < ... < i_6 \leq 10$

$ii)$ los divisores de la forma $D = 2L - 2E_{i_1} - E_{i_2} - ... - E_{i_5}$, donde $1 \leq i_1 \leq 10$ y $1 \leq i_2 < ... < i_5 \leq 10$ (los subíndices son todos distintos).

Como en ambos casos D no es efectivo (porque $x_1, ..., x_{10}$ están en posición general), $\mathcal{O}_S(D)$ no es un subhaz de $Q|_S$ (Proposición 4.3 ii)).

Supongamos ahora $d = 4$. Las condiciones

$$n_1 + ... + n_{10} = 13$$

$$n_1^2 + ... + n_{10}^2 \leq 20$$

tienen como solución todos los divisores de la forma $D = 4L - 2E_{i_1} - 2E_{i_2} - 2E_{i_3} - E_{j_1} - ... - E_{j_7}$, con $1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq 10$, $1 \leq j_1 < ... < j_7 \leq 10$. Como D no es efectivo ($x_1, ..., x_{10}$ están en posición general), $\mathcal{O}_S(D)$ no puede ser un subhaz de $Q|_S$ (Proposición 4.3 ii)).

- Si suponemos $d = 6$ obtenemos las condiciones

$$n_1 + ... + n_{10} = 20$$

$$n_1^2 + ... + n_{10}^2 \leq 40$$

que tienen como solución al divisor $D = 6L - 2E_1 - ... - 2E_{10}$. Como D no es efectivo ($x_1, ..., x_{10}$ en posición general), $\mathcal{O}_S(D)$ no puede ser un subhaz de $Q|_S$ (Proposición 4.3 ii)).

Vamos a demostrar ahora que tampoco existe ningún subhaz de $Q|_S$ con pendiente igual a 1 si S es general. En efecto, supongamos por el contrario que existiera un tal $\mathcal{O}_S(D)$. En este caso obtenemos las condiciones

$$2n_1 + ... + 2n_{10} = 7d - 1$$

$$n_1^2 + ... + n_{10}^2 \leq d^2 + 5$$

por lo que los valores que puede tomar d son $-3, -1, 1, 3$ y 5.

- Comencemos suponiendo $d = -3$. Entonces

$$n_1 + ... + n_{10} = -11$$

$$n_1^2 + ... + n_{10}^2 \leq 14$$

con soluciones $D = -3L + 2E_i + E_{j_1} + ... + E_{j_9}$, donde $1 \leq i \leq 10$ y $1 \leq j_1 < ... < j_9 \leq 10$ ($j_k \neq i$).

Supongamos $D = -3L + 2E_1 + E_2 + ... + E_{10}$, sin pérdida de generalidad. Tenemos una sucesión como en (2.1.17), con $degZ = 1$ y $H - D = 10L - 4E_1 - 3E_2 - ... - 3E_{10}$. Como $\mathcal{O}_S(D)$ no tiene secciones, entonces $h^0(\mathcal{J}_Z(H - D)) \geq 4$. Pero, según el Lema 5.11 *i)*, $\mathcal{O}_S(H - D)$ tiene sólo dos secciones independientes, luego $h^0(\mathcal{J}_Z(H - D)) \leq 2$. Por tanto, $\mathcal{O}_S(D)$ no es un subhaz de $Q|_S$.

- Supongamos ahora $d = -1$. Entonces

$$n_1 + ... + n_{10} = -4$$

$$n_1^2 + ... + n_{10}^2 \leq 6$$

con soluciones

i) $D = -L + E_{i_1} + ... + E_{i_4}$, $1 \leq i_1 < ... < i_4 \leq 10$,
ii) $D = -L + 2E_i + E_j + E_k$, $1 \leq i \leq 10$, $1 \leq j < k \leq 10$.

Consideremos en el primer caso $D = -L + E_1 + ... + E_4$, sin pérdida de generalidad. Tenemos una sucesión como en (2.1.17), con $degZ = 2$ y $H - D = 8L - 3E_1 - ... - 3E_4 - 2E_5 - ... - 2E_{10}$. Como $\mathcal{O}_S(D)$ no tiene secciones, entonces $h^0(\mathcal{J}_Z(H - D)) \geq 4$. Pero $\mathcal{O}_S(H - D)$ tiene sólo tres secciones independientes, según el Lema 5.2 ($x_1, ..., x_{10}$ están en posición general), luego $h^0(\mathcal{J}_Z(H - D)) \leq 3$ y $\mathcal{O}_S(D)$ no es un subhaz de $Q|_S$.

En el segundo caso, supongamos $D = -L + 2E_1 + E_2 + E_3$, sin pérdida de generalidad. Como $h^0(D) = 0$ y $h^0(Q|_S) = 4$, entonces necesariamente $h^0(H - D) \geq 4$. Ahora bien, $h^0(H - D) = 2$ según el Lema 5.11 $i)$ ($x_1, ..., x_{10}$ en posición general), luego $\mathcal{O}_S(D)$ no es un subhaz de $Q|_S$.

- Supongamos $d = 1$. Obtenemos las condiciones

$$n_1 + ... + n_{10} = 3$$

$$n_1^2 + ... + n_{10}^2 \leq 6$$

con soluciones
$i)$ $D = L - E_i - E_j - E_k$, con $1 \leq i < j < k \leq 10$,
$ii)$ $D = L - 2E_i - E_j$, con $1 \leq i, j \leq 10$.

En el primer caso, supongamos que $D = L - E_1 - E_2 - E_3$, sin pérdida de generalidad. Tenemos una sucesión exacta como en (2.1.17), con $H - D = 6L - E_1 - E_2 - E_3 - 2E_4 - ... - 2E_{10}$ y $degZ = 3$. Ahora bien, por el Lema 5.4 $iii)$, el sistema lineal $|H - D|$ no tiene ningún punto base adicional. Entonces, como Z está contenido en el lugar base de $|H - D|$, necesariamente $Z = \emptyset$. Hemos llegado a un absurdo, así que $\mathcal{O}_S(D)$ no puede ser un subhaz de $Q|_S$.

En el segundo caso, supongamos $D = L - 2E_1 - E_2$, sin pérdida de generalidad. Ahora $degZ = 1$ y $H - D = 6L - E_2 - 2E_3 - ... - 2E_{10}$. Como $\mathcal{O}_S(D)$ no tiene secciones, entonces $h^0(\mathcal{J}_Z(H - D)) \geq 4$. Ahora bien, por el Lema 5.5 (los puntos $x_1, ..., x_{10}$ están en posición general), sabemos que $h^0(H - D) = 3$, luego $h^0(\mathcal{J}_Z(H - D)) \leq 3$. Por tanto, $\mathcal{O}_S(D)$ no puede ser un subhaz de $Q|_S$.

- Supongamos $d = 3$. Entonces

$$n_1 + ... + n_{10} = 10$$

$$n_1^2 + ... + n_{10}^2 \leq 14$$

con soluciones
$i)$ $D = 3L - E_1 - ... - E_{10}$,

$ii)$ $D = 3L - 2E_{i_1} - E_{i_2} - ... - E_{i_9}$, con $1 \leq i_1 \leq 10$, $1 \leq i_2 < ... < i_9 \leq 10$,

$iii)$ $D = 3L - 2E_{i_1} - 2E_{i_2} - E_{i_3} - ... - E_{i_8}$, con $1 \leq i_1 < i_2 \leq 10$,$1 \leq i_3 < ... < i_8 \leq 10$.

Consideremos el primer caso, $D = 3L - E_1 - ... - E_{10}$. Se tiene una sucesión exacta como en (2.1.17), con $degZ = 4$ y $H - D = 4L - E_1 - ... - E_{10}$. Por el Lema 5.4 $iii)$, el sistema lineal $|H - D|$ no tiene ningún punto base adicional, luego $Z = \emptyset$. Como hemos llegado a una contradicción, $\mathcal{O}_S(D)$ no puede ser un subhaz de $Q|_S$.

En el caso $ii)$, si suponemos $D = 3L - 2E_1 - E_2 - ... - E_9$ (sin pérdida de generalidad), entonces $degZ = 2$ y $H - D = 4L - E_2 - ... - E_9 - 2E_{10}$ en una sucesión como (2.1.17). Pero por el Lema 5.4 $iv)$, el sistema lineal $|H - D|$ no tiene puntos base adicionales, luego $degZ = 0$. Entonces $\mathcal{O}_S(D)$ no puede ser un subhaz de $Q|_S$, porque hemos llegado a una contradicción.

Supongamos $D = 3L - 2E_1 - 2E_2 - E_3 - ... - E_8$ en el caso $iii)$ (sin pérdida de generalidad). Tenemos una sucesión exacta como en (2.1.17), con $degZ = 0$ y $H - D = 4L - E_3 - ... - E_8 - 2E_9 - 2E_{10}$. Por el Lema 5.5 ($x_1, ..., x_{10}$ están en posición general), $h^0(H - D) = 3$. Ahora bien, como $\mathcal{O}_S(D)$ no tiene secciones, es $h^0(H - D) \geq 4$, que contradice lo anterior. Luego $\mathcal{O}_S(D)$ no es un subhaz de $Q|_S$.

- Finalmente, en el caso $d = 5$ obtenemos el par de condiciones incompatibles

$$n_1 + ... + n_{10} = 17$$

$$n_1^2 + ... + n_{10}^2 \leq 30$$

por lo que no existe ningún subhaz lineal de $Q|_S$ con pendiente igual a 1 si S es general. Por tanto, la mayor pendiente que alcanzan tales subhaces cuando S es general es 0.

Congruencias de tipo 21)*

Como estas congruencias no tienen curva fundamental, por el Teorema 4.4 sabemos que $DH \leq 5$ para todo subhaz $\mathcal{O}_S(D)$ de $Q|_S$. Veamos que no existe ningún subhaz lineal de $Q|_S$ con pendiente igual a 5.

En efecto, supongamos por el contrario que existiera $\mathcal{O}_S(D) \subset Q|_S$ con $DH = 5$. Tenemos entonces una sucesión exacta como en (2.1.17), y las condiciones $DH = 5$ y

$degZ = c_2(Q|_S(-D))$ quedan

$$7d - 2n_1 - ... - 2n_{10} = 5$$

$$n_1^2 + ... + n_{10}^2 \leq d^2 - 2$$

respectivamente. Así, por la Observación 6.1 , obtenemos la desigualdad $9a^2 - 70a + 105 \leq 0$. Esto es absurdo, porque $9a^2 - 70a + 105 > 0$ para todo a. Luego no puede ser $\mu(D) = 5$ para ningún subfibrado $\mathcal{O}_S(D)$ de $Q|_S$, por lo que $Q|_S$ es estable.

Vamos a probar ahora que tampoco existe ningún subhaz lineal de $Q|_S$ con pendiente igual a 4. En efecto, si existiera $\mathcal{O}_S(D) \subset Q|_S$, con pendiente igual a 4, se tendría entonces una sucesión exacta como en (2.1.17), y las condiciones $DH = 4$ y $degZ \geq 0$ quedarían

$$2n_1 + ... + 2n_{10} = 7d - 4$$

$$n_1^2 + ... + n_{10}^2 \leq d^2 - 1$$

Aplicando ahora la Observación 6.1 obtendríamos la desigualdad

$$9d^2 - 56d + 56 \leq 0$$

luego $d = 2, 3, 4$. En todos estos casos se obtienen condiciones incompatibles, luego $\mu(D) \leq 3$, para todo $\mathcal{O}_S(D)$ subhaz de $Q|_S$. Consideremos la cúbica $C = 3L - E_1 - ... - E_9$. Según hemos demostrado en la congruencia dual, C está contenida en un $\beta-$plano como curva en S. Entonces, según el Lema 2.1.14, $\mathcal{O}_S(C)$ es un subfibrado lineal de $Q|_S$ con pendiente igual a 3, y hemos probado que 3 es la pendiente máxima que alcanzan los subfibrados lineales de $Q|_S$, para cualquier congruencia S de este tipo.

Congruencias de tipo 22)

En este caso, S es de la forma $S = \widetilde{\mathbb{P}^2}(x_1, ..., x_{12})$, con bigrado $(5, 4)$ y sección hiperplana $H = 6L - 2E_1 - ... - 2E_5 - E_6 - ... - E_{12}$. Para la congruencia general de este tipo, los puntos $x_1, ..., x_{10}$ están en posición general.

Por el Teorema 4.4, $Q|_S$ es estable y todos sus subhaces lineales tienen pendiente menor o igual que 4, para toda congruencia S de este tipo.

Veamos que no existe ningún subhaz $\mathcal{O}_S(D) \subset Q|_S$ con pendiente igual a 4. En efecto, supongamos por el contrario que existiera $\mathcal{O}_S(D) \subset Q|_S$ subhaz saturado con pendiente igual a 4. Tendríamos entonces una sucesión exacta saturada como en (2.1.17), y las condiciones $DH = 4$ y $degZ \geq 0$ quedarían

$$2n_1 + ... + 2n_5 + n_6 + ... + n_{12} = 6d - 4$$

$$n_1^2 + ... + n_{12}^2 \leq d^2$$

respectivamente. Entonces, aplicando ahora la Observación 6.1, tenemos

$$9d^2 - 48d + 16 \leq 0$$

Por tanto, las únicas posibilidades para d son 1, 2, 3 y 4.

- Si $d = 1$, obtendríamos los subhaces $\mathcal{O}_S(L - E_i)$, con $i = 1, ..., 5$. Como $p_a(D) = 0$, D no puede ser una cuártica plana de $\mathbb{P}^5$, luego $\mathcal{O}_S(D)$ no es un subhaz de $Q|_S$.

- Si $d = 2$, obtendríamos $D = 2L - E_{i_1} - ... - E_{i_4}$, con $1 \leq i_1 < ... < i_4 \leq 5$. Por la misma razón de antes, $\mathcal{O}_S(D)$ no puede ser un subhaz de $Q|_S$.

- Si $d = 3$, obtendríamos las soluciones $D = 3L - E_1 - ... - E_5 - E_{i_1} - ... - E_{i_4}$, con $6 \leq i_1 < ... < i_4 \leq 12$. Como $p_a(D) = 1$, D no puede ser una cuártica plana en $\mathbb{P}^5$. Entonces $\mathcal{O}_S(D)$ no es un subhaz de $Q|_S$.

- Finalmente, el caso $d = 4$ da lugar a condiciones incompatibles.

Veamos que, para la congruencia S general, tampoco existe ningún subhaz lineal de $Q|_S$ con pendiente igual a 3. En efecto, si $D = dL - n_1E_1 - ... - n_{12}E_{12}$ es tal que $\mathcal{O}_S(D)$ es un subhaz de $Q|_S$ con pendiente igual a 3, tendríamos las condiciones

$$2n_1 + ... + 2n_5 + n_6 + ... + n_{12} = 6d - 3$$

$$n_1^2 + ... + n_{12}^2 \leq 1 + d^2$$

Aplicando la Observación 6.1 obtenemos

$$d^2 - 4d - 2 \leq 0$$

que nos da $0, ..., 4$ como posibles valores de d. Los casos $d = 0, 4$ quedan excluidos, pues dan lugar a condiciones incompatilbles. Veamos que el resto de los casos tampoco pueden darse:

- Supongamos $d = 1$. Como solución a las condiciones

$$2n_1 + ... + 2n_5 + n_6 + ... + n_{12} = 3$$

$$n_1^2 + ... + n_{12}^2 \leq 2$$

obtenemos los divisores de la forma $D = L - E_i - E_j$, con $1 \leq i \leq 5$ y $6 \leq j \leq 12$. Como $p_a(D) = 0$, D no puede ser una cúbica plana. Por tanto, $\mathcal{O}_S(D)$ no es un subhaz de $Q|_S$.

- Supongamos ahora $d = 2$. En este caso,

$$2n_1 + ... + 2n_5 + n_6 + ... + n_{12} = 9$$

$$n_1^2 + ... + n_{12}^2 \leq 5$$

que tiene por soluciones a todos los divisores de la forma $D = 2L - E_{i_1} - ... - E_{i_4} - E_j$, con $1 \leq i_1 < ... < i_4 \leq 5$, $6 \leq j \leq 12$. Como $p_a(D) = 0$, D no puede ser una cúbica plana, luego $\mathcal{O}_S(D)$ no es un subhaz de $Q|_S$.

- Si $d = 3$, las soluciones a las condiciones

$$2n_1 + ... + 2n_5 + n_6 + ... + n_{12} = 15$$

$$n_1^2 + ... + n_{12}^2 \leq 10$$

son todos los divisores de la forma $D = 3L - E_1 - ... - E_5 - E_{i_1} - ... - E_{i_5}$, donde $6 \leq i_1 < ... < i_5 \leq 15$.

Supongamos $D = 3L - E_1 - ... - E_{10}$, sin pérdida de generalidad. Entonces $H - D = 3L - E_1 - ... - E_5 - E_{11} - E_{12}$ y, como los puntos $x_1, ..., x_{12}$ están en posición general, es $h^0(H - D) = 3$. Esto es absurdo, teniendo en cuenta que $h^0(D) = 0$ y $h^0(Q|_S) = 4$, luego $\mathcal{O}_S(D)$ no es un subhaz de $Q|_S$.

Por tanto, no existe ningún subhaz lineal de $Q|_S$ con pendiente igual a 3.

Consideremos el divisor $D = 3L - E_1 - ... - E_{11}$. Como $\chi(Q|_S(-D)) = 1$ (por Riemann-Roch) y $h^2(Q|_S(-D)) = h^0(Q|_S(-6L + 2E_1 + ... + 2E_5 + E_6 + ... + E_{11} + 2E_{12})) = 0$ (por la estabilidad de $Q|_S$), se tiene que $h^0(Q|_S(-D)) \geq 1$. Esto implica que $\mathcal{O}_S(D)$ es un subhaz de $Q|_S$, luego la mayor pendiente que alcanzan los subhaces lineales de $Q|_S$ es 2, para la congruencia S general. Nótese que, en este caso, la pendiente máxima se alcanza con un divisor no efectivo.

Congruencias de tipo $22)^*$

Como S no tiene curva fundamental, $Q|_S$ es estable y $DH \leq 3$ para cada $\mathcal{O}_S(D) \subset Q|_S$, por el Teorema 4.4. Vamos a demostrar que, para la congruencia general, no existe ningún subhaz lineal de $Q|_S$ con pendiente igual a 3.

En efecto, supongamos por el contrario que existe $\mathcal{O}_S(D) \subset Q|_S$ tal que $DH = 3$, donde $D = dL - n_1E_1 - ... - n_{12}E_{12}$. Las condiciones $DH = 3$ y $degZ \geq 0$ quedan

$$2n_1 + ... + 2n_5 + n_6 + ... + n_{12} = 6d - 3$$

$$n_1^2 + ... + n_{12}^2 \leq 2 + d^2$$

Entonces, utilizando la Observación 6.1,

$$d^2 - 4d - 5 \leq 0$$

esto es, $d = -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$. El caso $d = -1$ queda excluido, pues da lugar a condiciones incompatibles. Veamos que tampoco pueden darse el resto de los casos.

- Supongamos $d = 0$. En ese caso,

$$2n_1 + ... + 2n_5 + n_6 + ... + n_{12} = -3$$

$$n_1^2 + ... + n_{12}^2 \leq 2$$

Entonces $D = E_i + E_j$, con $1 \leq i \leq 5$ y $6 \leq j \leq 12$. Veamos que $\mathcal{O}_S(D)$ no puede ser un subhaz de $Q|_S$. En efecto, como E_i y E_j son (respectivamente) una cónica y una recta, si D estuviese contenida en un $\beta-$plano (plano de $\mathbb{P}^5$) tendríamos que E_i y E_j se cortan, lo que es absurdo porque $E_i \cdot E_j = 0$.

- Si $d = 1$ tenemos

$$2n_1 + ... + 2n_5 + n_6 + ... + n_{12} = 3$$

$$n_1^2 + ... + n_{12}^2 \leq 3$$

En este caso, las posibilidades para D son
i) $D = L - E_{i_1} - E_{i_2}$, con $1 \leq i_1 \leq 5$ y $6 \leq i_2 \leq 12$,
ii) $D = L - E_{i_1} - E_{i_2} - E_{i_3}$, con $6 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq 12$,
iii) $D = L - E_{i_1} - E_{i_2} + E_{i_3}$, con $1 \leq i_1 < i_2 \leq 5$, $6 \leq i_3 \leq 12$.

En el caso *i)*, es $p_a(D) = 0$. Entonces, si suponemos D contenida en un $\beta-$plano como cúbica de $\mathbb{P}^5$, tenemos que $p_a(D) = 1$, lo que es absurdo. Luego $\mathcal{O}_S(D)$ no es un subhaz de $Q|_S$.

En el caso *ii)* $\mathcal{O}_S(D)$ no puede ser un subhaz de $Q|_S$, porque, como los puntos $x_1, ..., x_{12}$ están en posición general, D no es efectivo (Proposición 4.3 *ii)*).

Finalmente, para el caso *iii)* tampoco puede ser $\mathcal{O}_S(D)$ un subhaz de $Q|_S$. En efecto, un tal D es la unión de una cónica y una recta que no se cortan, y por tanto no pueden estar contenidas en el mismo $\beta-$plano.

- Suponiendo $d = 2$, obtenemos las condiciones

$$2n_1 + ... + 2n_5 + n_6 + ... + n_{12} = 9$$

$$n_1^2 + ... + n_{12}^2 \leq 6$$

con soluciones

$i)$ $D = 2L - E_{i_1} - ... - E_{i_4} - E_j$, con $1 \leq i_1 < ... < i_4 \leq 5$, $6 \leq j \leq 12$,
$ii)$ $D = 2L - E_{i_1} - E_{i_2} - E_{i_3} - E_{j_1} - E_{j_2} - E_{j_3}$, con $1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq 5$, $6 \leq j_1 < j_2 < j_3 \leq 12$.

En el caso $i)$, D es un divisor efectivo. No puede ser una cúbica plana en $\mathbb{P}^5$, porque $p_a(D) = 0$, luego $\mathcal{O}_S(D)$ no es un subhaz de $Q|_S$.

En el caso $ii)$, $\mathcal{O}_S(D)$ no es un subhaz de $Q|_S$ porque, como los puntos $x_1, ..., x_{12}$ están en posición general, D no es efectivo (ver Proposición 4.3 $ii)$).

• Supongamos ahora $d = 3$. Entonces

$$2n_1 + ... + 2n_5 + n_6 + ... + n_{12} = 15$$

$$n_1^2 + ... + n_{12}^2 \leq 11$$

que tiene como soluciones todos los divisores de la forma

$i)$ $D = 3L - E_{i_1} - ... - E_{i_4} - E_6 - ... - E_{12}$, donde $1 \leq i_1 < ... < i_4 \leq 5$,
$ii)$ $D = 3L - E_1 - ... - E_5 - E_{i_1} - ... - E_{i_5}$, con $6 \leq i_1 < ... < i_5 \leq 12$,
$iii)$ $D = 3L - 2E_k - E_{i_1} - ... - E_{i_4} - E_{j_1} - E_{j_2} - E_{j_3}$, donde $1 \leq k \leq 5$, $1 \leq i_1 < ... < i_4 \leq 5$, $6 \leq j_1 < j_2 < j_3 \leq 12$.

En ninguno de los tres casos es $\mathcal{O}_S(D)$ un subfibrado de $Q|_S$. En efecto, si lo fuera, por la Proposición 4.3 (apdo. $ii)$) tendríamos $D \geq 0$, que no es cierto porque $x_1, ..., x_{12}$ están en posición general.

• Supongamos $d = 4$. Entonces obtenemos las condiciones

$$2n_1 + ... + 2n_5 + n_6 + ... + n_{12} = 21$$

$$n_1^2 + ... + n_{12} \leq 18,$$

con soluciones todos los divisores de la forma

$D = 4L - 2E_{i_1} - 2E_{i_2} - E_{j_1} - E_{j_2} - E_{j_3} - E_6 - ... - E_{12}$, donde $1 \leq i_1 < i_2 \leq 5$, $1 \leq j_1 < j_2 \leq 5$, como solución.

Como ninguno de estos divisores es efectivo, pues los puntos $x_1, ..., x_{12}$ están en posición general, $\mathcal{O}_S(D)$ no puede ser un subhaz de $Q|_S$ (Proposición 4.3 *ii*)).

- Finalmente, si $d = 5$, de las condiciones

$$2n_1 + ... + 2n_5 + n_6 + ... + n_{12} = 27$$

$$n_1^2 + ... + n_{12}^2 \leq 27$$

obtenemos $D = 5L - 2E_1 - ... - 2E_5 - E_6 - ... - E_{12}$. Como D no es efectivo ($x_1, ..., x_{12}$ están en posición general), $\mathcal{O}_S(D)$ no puede ser un subhaz de $Q|_S$ (Proposición 4.3 *ii*)).

Veamos ahora que tampoco existe ningún subhaz lineal de $Q|_S$ con pendiente igual a 2 para la congruencia general de este tipo. En efecto, en caso contrario, a partir de las condiciones $DH = 2$ y $degZ = c_2(Q|_S(-D)) \geq 0$, obtendríamos

$$2n_1 + ... + 2n_5 + n_6 + ... + n_{12} = 6d - 2$$

$$n_1^2 + ... + n_{12}^2 \leq 3 + d^2$$

Por la Observación 6.1,

$$9d^2 - 24d - 77 \leq 0$$

i.e., $d = -1, 0, 1, 2, 3, 4$. Excluimos el caso $d = 4$, porque da lugar a condiciones incompatibles. Veamos que tampoco pueden darse el resto de los casos:

- Si $d = -1$, entonces

$$2n_1 + ... + 2n_5 + n_6 + ... + n_{12} = -8$$

$$n_1^2 + ... + n_{12}^2 \leq 4,$$

con soluciones todos los divisores de la forma $D = -L + E_{i_1} + ... + E_{i_4}$, donde $1 \leq i_1 < ... < i_{i_4} \leq 5$.

Supongamos $D = -L + E_1 + E_2 + E_3 + E_4$, sin pérdida de generalidad. Como $\mathcal{O}_S(D)$ no tiene secciones y $h^0(Q|_S) = 4$, entonces $h^0(H - D) \geq 4$, donde $H - D = 7L - 3E_1 - 3E_2 - 3E_3 - 3E_4 - 2E_5 - E_6 - ... - E_{12}$. Ahora bien, $h^0(H - D) = 2$ por el Lema 5.11 *iii)* ($x_1, ..., x_{12}$ están en posición general), luego $\mathcal{O}_S(D)$ no es un subhaz de $Q|_S$.

• Supongamos ahora $d = 0$. Entonces

$$2n_1 + ... + 2n_5 + n_6 + ... + n_{12} = -2$$

$$n_1^2 + ... + n_{12}^2 \leq 3$$

Los posibles divisores que obtenemos son de la forma

i) $D = E_i$, con $1 \leq i \leq 5$,
ii) $D = E_i + E_j$, con $6 \leq i < j \leq 12$,
iii) $D = E_i + E_j - E_k$, con $1 \leq i \leq 5$, $6 \leq j, k \leq 12$.

En el primer caso, supongamos por comodidad $D = E_1$. Entonces $H - D = 6L - 3E_1 - 2E_2 - ... - 2E_5 - E_6 - ... - E_{12}$ y $degZ = 2$. Por el Lema 5.3 (pues los pntos $x_1, ..., x_{12}$ están en posición general), el sistema lineal $|H - D|$ tiene como mucho un punto base adicional, luego Z no puede tener más de un punto. Luego $\mathcal{O}_S(D)$ no es un subhaz de $Q|_S$.

En el segundo caso, D es la unión en $\mathbb{P}^5$ de las rectas E_i y E_j. De aquí se deduce que D no puede estar contenida en un $\beta-$plano, porque en caso contrario E_i y E_j se cortarían, y $E_i \cdot E_j = 0$. Luego $\mathcal{O}_S(D)$ no es un subhaz de $Q|_S$.

En el tercer caso, supongamos $D = E_1 + E_6 - E_7$, sin pérdida de generalidad. Como $h^0(D) = 0$ y $h^0(Q|_S) = 4$, tenemos $h^0(H - D) \geq 4$. Ahora bien, $H - D = 6L - 3E_1 - 2E_2 - ... - 2E_6 - E_8 - ... - E_{12}$ y, por el Lema 5.11 *iv)* (los puntos $x_1, ..., x_{12}$ están en posición general), obtenemos la contradicción $h^0(H - D) = 2$. Luego $\mathcal{O}_S(D)$ no es un subhaz de $Q|_S$.

• Supongamos ahora $d = 1$. Entonces

$$2n_1 + ... + 2n_5 + n_6 + ... + n_{12} = 4$$

$$n_1^2 + ... + n_{12}^2 \leq 4$$

Obtenemos las siguientes posibilidades:

i) $D = L - 2E_i$, con $1 \leq i \leq 5$,
ii) $D = L - E_{i_1} - ... - E_{i_4}$, con $6 \leq i_1 < ... < i_4 \leq 12$,
iii) $D = L - E_{i_1} - E_{i_2} - E_{i_3}$, con $1 \leq i_1 \leq 5$, $6 \leq i_2 < i_3 \leq 12$,
iv) $D = L - E_{i_1} - E_{i_2}$, con $1 \leq i_1 < i_2 \leq 5$,
v) $D = L - E_{i_1} - E_{i_2} - E_{i_3} + E_{i_4}$, donde $1 \leq i_1 < i_2 \leq 5$, $6 \leq i_2 < i_3 \leq 12$.

En *i)*, supongamos $D = L - 2E_1$ sin pérdida de generalidad. Como $h^0(D) = 0$, se tiene $h^0(H - D) \geq 4$. Pero $H - D = 5L - 2E_2 - ... - 2E_5 - E_6 - ... - E_{12}$ y, por el Lema 5.5 ($x_1, ..., x_{12}$ están en posición general), sabemos que $h^0(H - D) = 2$. Luego $\mathcal{O}_S(D)$ no puede ser un subhaz de $Q|_S$.

Supongamos $D = L - E_6 - ... - E_9$ en el caso *ii)*, sin pérdida de generalidad. Como $\mathcal{O}_S(D)$ no tiene secciones, $h^0(H-D) \geq 4$. Esto es absurdo, porque $H-D = 5L-2E_1-...-2E_5 - E_{10} - E_{11} - E_{12}$ y, por el Lema 5.5 ($x_1, ..., x_{12}$ en posición general), $h^0(H - D) = 3$. Por tanto, $\mathcal{O}_S(D)$ no puede ser un subhaz de $Q|_S$.

En el caso *iii)*, supongamos $D = L - E_1 - E_6 - E_7$, sin pérdida de generalidad. Como $\mathcal{O}_S(D)$ no tiene secciones y $h^0(Q|_S) = 4$, entonces $h^0(H - D) \geq 4$. Ahora bien, $H - D = 5L - E_1 - 2E_2 - ... - 2E_5 - E_8 - ... - E_{12}$, y $h^0(H - D) = 3$ por el Lema 5.5 ($x_1, ..., x_{12}$ en posición general). Luego $\mathcal{O}_S(D)$ no es un subhaz de $Q|_S$.

Supongamos $D = L - E_1 - E_2$, para el caso *iv)*. Entonces $H - D = 5L - E_1 - E_2 - 2E_3 - 2E_4 - 2E_5 - E_6 - ... - E_{12}$ y $degZ = 2$. Ahora bien, por el Lema 5.4 *i)*, sabemos que el sistema lineal $|H - D|$ no tiene puntos base adicionales, luego necesariamente $Z = \emptyset$. Por tanto, $\mathcal{O}_S(D)$ no puede ser un subhaz de $Q|_S$.

Finalmente, en el caso $v)$ supongamos $D = L - E_1 - E_2 - E_6 + E_7$, sin pérdida de generalidad. Si suponemos que $\mathcal{O}_S(D)$ es un subhaz de $Q|_S$ llegamos a la misma contradicción que en el caso anterior, porque $h^0(D) = 0$ y, por el Lema 5.5 ($x_1, ..., x_{12}$ en posición general), $h^0(H - D) = 2$.

- Si $d = 2$, tenemos

$$2n_1 + ... + 2n_5 + n_6 + ... + n_{12} = 10$$

$$n_1^2 + ... + n_{12}^2 \leq 7$$

Obtenemos las siguientes posibilidades para D:
$i)$ $D = 2L - E_1 - ... - E_5$,
$ii)$ $D = 2L - E_{i_1} - ... - E_{i_4} - E_{j_1} - E_{j_2}$, donde $1 \leq i_1 < ... < i_4$, $6 \leq j_1 < j_2 \leq 12$,
$iii)$ $D = 2L - E_{i_1} - E_{i_2} - E_{i_3} - E_{j_1} - E_{j_2} - E_{j_3} - E_{j_4}$, donde $1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq 5$, $6 \leq j_1 < ... < j_4 \leq 12$,
$iv)$ $D = 2L - 2E_i - E_{j_1} - E_{j_2} - E_{j_3}$, donde $1 \leq i \leq 5$, $1 \leq j_1 < j_2 < j_3 \leq 5$.

En el caso $i)$, se tiene $H - D = 4L - E_1 - ... - E_{12}$ y $degZ = 2$. Ahora bien, por el Lema 5.4 $i)$, el sistema lineal $|H - D|$ no tiene puntos base adicionales, luego necesariamente $Z = \emptyset$. Por tanto, $\mathcal{O}_S(D)$ no puede ser un subhaz de $Q|_S$.

En el caso $ii)$, supongamos $D = 2L - E_1 - ... - E_4 - E_6 - E_7$, sin pérdida de generalidad. Como $\mathcal{O}_S(D)$ no tiene secciones, entonces $h^0(H - D) \geq 4$. Pero $H - D = 4L - E_1 - ... - E_4 - 2E_5 - E_8 - ... - E_{12}$ y, por el Lema 5.5 ($x_1, ..., x_{12}$ en posición general), $h^0(H - D) = 3$. Luego $\mathcal{O}_S(D)$ no puede ser un subhaz de $Q|_S$.

En el caso $iii)$, supongamos que $D = 2L - E_1 - E_2 - E_3 - E_6 - E_7 - E_8 - E_9$, sin pérdida de generalidad. Suponiendo $\mathcal{O}_S(D)$ subhaz de $Q|_S$ llegamos a un absurdo exactamente igual que antes, porque $h^0(D) = 0$ y, por el Lema 5.5 ($x_1, ..., x_{12}$ en posición general), $h^0(H - D) = 3$.

Finalmente, en el caso $iv)$, supongamos $D = 2L - 2E_1 - E_2 - E_3 - E_4$ sin pérdida de generalidad. Como $h^0(D) = 0$ y, por el Lema 5.5 ($x_1, ..., x_{12}$ en posición general), $h^0(H - D) = 2$, $\mathcal{O}_S(D)$ no puede ser un subhaz de $Q|_S$.

• Supongamos ahora $d = 3$. Entonces

$$2n_1 + ... + 2n_5 + n_6 + ... + n_{12} = 16$$

$$n_1^2 + ... + n_{12}^2 \leq 12$$

Obtenemos las siguientes posibilidades

i) $D = 3L - E_1 - ... - E_5 - E_{i_1} - ... - E_{i_6}$, con $6 \leq i_1 < ... < i_6 \leq 12$,
ii) $D = 3L - 2E_i - E_{i_1} - ... - E_{i_4} - E_{j_1} - ... - E_{j_4}$, con $1 \leq i \leq 5$, $1 \leq i_1 < ... < i_4 \leq 5$, $6 \leq j_1 < ... < j_4 \leq 12$.

Sin pérdida de generalidad, supongamos $D = 3L - E_1 - ... - E_{11}$, en el caso *i)*. Entonces $degZ = 1$ y $H - D = 3L - E_1 - ... - E_5 - E_{12}$. Por el Lema 5.4 *ii)* ($x_1, ..., x_{12}$ en posición general), el sistema lineal $|H - D|$ no puede tener ningún punto base adicional, luego necesariamente $Z = \emptyset$. Esto es absurdo, porque hemos visto que Z tiene un elemento, luego $\mathcal{O}_S(D)$ no es un subhaz de $Q|_S$.

En el caso *ii)*, supongamos $D = 3L - 2E_1 - E_2 - ... - E_9$, sin pérdida de generalidad. Si suponemos que $\mathcal{O}_S(D)$ es un subhaz de $Q|_S$, como $h^0(D) = 0$, entonces $h^0(H - D) \geq 4$. Ahora bien, $H - D = 3L - 2E_1 - E_2 - ... - E_9$, y $h^0(H - D) = 3$ por el Lema 5.5 ($x_1, ..., x_{12}$ en posición general). Luego $\mathcal{O}_S(D)$ no es un subhaz de $Q|_S$.

Consideremos ahora el divisor E_6, que es una recta en S. Por el Corolario 1.1.7, existe un $\beta-$plano que contiene a la recta E_6. Entonces, por el Lema 2.1.14, $\mathcal{O}_S(E_6)$ es un subhaz de $Q|_S$. Luego la mayor pendiente que alcanzan los subfibrados lineales de $Q|_S$ es 1 para la congruencia S general.

Congruencias de tipo 23)

La congruencia S de este tipo es la explosión $\widetilde{X}(x)$ en un punto de X, superficie $K3$ de grado 10. Si X es general, por **[M]** es intersección completa en $\mathbb{P}^9$ de $\mathbb{G}(1,4)$, un $\mathbb{P}^6$ y una hipersuperficie cuádrica, y $Pic(X) = \mathbb{Z}H_X$. El bigrado de S es $(4,5)$, y la sección hiperplana es $H = H_X - E$.

Como no tiene curva fundamental, por el Teorema 4.4 tenemos que $Q|_S$ es estable y que $DH \leq 2$ para todo $\mathcal{O}_S(D)$ subhaz de $Q|_S$.

Vamos a demostrar que, para S general, no existe ningún subhaz lineal con pendiente igual a 2. En efecto, supongamos en caso contrario que existiera un divisor $D = dH_X - nE$ en S con pendiente igual a 2, con $\mathcal{O}_S(D)$ saturado. Resolviendo la ecuación $10d - n = 2$, obtenemos $D = (1+t)H_X - (8+10t)E$, con $t \in \mathbb{Z}$. Consideremos la sucesión saturada (2.1.17), donde

$$degZ = -90t^2 - 140t - 51 \geq 0$$

Como esta desigualdad no tiene ninguna solución entera, no existe ningún subhaz de $Q|_S$ con pendiente igual a 2 para S general.

Por la misma razón que antes, E es una recta en $\mathbb{G}(1,3)$ luego, $\mathcal{O}_S(E) \subset Q|_S$ por el Corolario 1.1.7 y 1 es la pendiente máxima que alcanzan los subfibrados de $Q|_S$, con S general.

Congruencias de tipo 23)*

Como S no tiene curva fundamental, podemos aplicar el Teorema 4.4 para deducir que $Q|_S$ es estable y que $DH \leq 3$ (S no es racional) para cada subhaz $\mathcal{O}_S(D)$ de $Q|_S$. Veamos que, si S es general, entonces no existe ningún subhaz lineal de $Q|_S$ con pendiente igual a 3.

Como ya hemos dicho antes, si X es general, entonces $Pic(X) = \mathbb{Z}H_X$ y, dado un divisor D en $Pic(S)$, es $D = dH_X - nE$. Como $degX = 10$, tenemos que $\mu(D) = DH = 10d - n$.

Si $DH = 3$, resolviendo la ecuación $10a - n = 3$ obtenemos $D = (1+t)H_X - (7+10t)E$, con $t \in \mathbb{Z}$. Tenemos entonces una sucesión saturada como en (2.1.17), donde

$$degZ = -90t^2 - 120t - 38 \geq 0$$

Al no haber solución entera para esta desigualdad, no existe ningún subhaz lineal de $Q|_S$ con pendiente igual a 3 para la congruencia general S.

Suponiendo $DH = 2$ y resolviendo la ecuación $10a - n = 2$, obtenemos $D = (1+t)H_X - (8+10t)E$, con $t \in \mathbb{Z}$. Utilizando la sucesión saturada (2.1.17) obtenemos la desigualdad

$$degZ = -90t^2 - 140t - 52 \geq 0$$

que no tiene solución entera.

Consideremos ahora el divisor E. Como $E \cdot H = 1$, E es una recta en $\mathbb{G}(1,3)$ luego, por el Corolario 1.1.7, existe un $\beta-$plano que la contiene. Así, $\mathcal{O}_S(E) \subset Q|_S$ y 1 es la pendiente máxima que alcanzan los subhaces de $Q|_S$ si S es general.

Congruencias de tipo 24)

En este caso, S es una superficie de tipo general con $K^2 = 17$, con bigrado $(4,5)$ en $\mathbb{G}(1,3)$. La congruencia S de este tipo tiene recta fundamental, por lo que la pendiente máxima que alcanzan los subhaces de rango 1 de $Q|_S$ es 4 (Teorema 4.4). Así, $Q|_S$ es estable.

Congruencias de tipo 24)*

Como S tiene recta fundamental, $Q|_S$ no es semiestable. En efecto, por el Teorema 4.4, existe un subhaz lineal de $Q|_S$ con pendiente igual a 5, mientras que $\mu(Q|_S) = \frac{9}{2}$. Luego 5 es la pendiente máxima que alcanzan los subhaces de rango 1 de $Q|_S$.

Congruencias de tipo 25)

La congruencia S de este tipo es un fibrado cónico sobre una cúbica plana lisa, con bigrado $(3,6)$ en $\mathbb{G}(1,3)$, y pueden tener o no curva fundamental (ver Remark 3.6 de [**AG**]). En ambos casos $Q|_S$ es estable, por el Teorema 4.4.

Supongamos primero que S no tiene curva fundamental. Entonces, como S no es racional, aplicando el Teorema 4.4 sabemos que $DH \leq 1$ para cada subhaz $\mathcal{O}_S(D) \subset Q|_S$. Entonces la pendiente máxima que alcanzan los subhaces de rango 1 de $Q|_S$ es 1, porque cualquier divisor excepcional E_i es una recta en S.

Supongamos ahora que S tiene curva fundamental. Por el Teorema 4.4, tenemos que $DH \leq 3$ para cada $\mathcal{O}_S(D)$ subfibrado lineal de $Q|_S$. Veamos que existe un subhaz lineal de $Q|_S$ con pendiente igual a 3. En efecto, por el Teorema 2.1.6, la curva fundamental de S es una cúbica plana lisa C. Entonces, por el Teorema 4.4 *iii*), existe un subhaz $\mathcal{O}_S(D)$ de $Q|_S$ tal que $DH = 3$.

Congruencias de tipo 25)*

Como S no es racional y no tiene curva fundamental, $Q|_S$ es estable por el Teorema 4.4. Además, de nuevo por el Teorema 4.4, sabemos que $DH \leq 4$ para cada $\mathcal{O}_S(D)$ subhaz de $Q|_S$.

Veamos que no existe ningún subhaz $\mathcal{O}_S(D)$ de $Q|_S$ con pendiente igual a 4. En efecto, supongamos por reducción al absurdo que existe $\mathcal{O}_S(D) \subset Q|_S$ con pendiente igual a 4, donde $D \equiv pC_0 + qf - n_1E_1 - n_2E_2 - n_3E_3$. Entonces D es efectivo, pues S no es racional (Proposición 4.3).

Tenemos entonces una sucesión exacta saturada como en (2.1.17). Se tienen las condiciones $DH = 4$ y $c_2(Q|_S(-D)) \geq 0$:

$$n_1 + n_2 + n_3 = (3-e)p + 2q - 4 \qquad (i)$$

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 \leq -1 - p^2e + 2pq \qquad (ii)$$

A partir de las condiciones $C_0 \cdot H \geq 3$ (porque $p_a(C_0) = p_a(C) = 1$) y $e \geq -1$ (ver [**N**]), obtenemos también

$$e = -1, 0 \qquad (iii)$$

Si aplicamos ahora la desigualdad de Cauchy-Schwarz a las condiciones (i) y (ii), obtenemos

$$(e^2 - 3e + 9)p^2 + [2q(3-2e) - 8(3-e)]p + 4q^2 - 16q + 19 \leq 0 \qquad (iv)$$

• Supongamos $e = 0$. En ese caso, la desigualdad anterior implica $p = 1$, $q = 1, 2$. Sustituyendo estos valores en las condiciones (i) y (ii), obtenemos las curvas (recuérdese que D es efectivo) $D \equiv C_0 + f - E_i$ y $D \equiv C_0 + 2f - E_1 - E_2 - E_3$. Como en todos los casos es $p_a(D) = 1$, no pueden ser cuárticas planas.

• Supongamos ahora $e = -1$. Igual que antes, la desigualdad (iv) implica $p = 1$, $q = 0, 1$. Sustituyendo estos valores en las condiciones (i) y (ii), obtenemos las curvas $D \equiv C_0$ y $D \equiv C_0 + f - E_i - E_j$. En todos los casos es $p_a(D) = 0$, luego D no puede ser una cuártica plana.

Vamos a demostrar ahora que existe una cúbica en un $\beta-$plano para ambos valores de e.

• Si $e = 0$, consideremos la cúbica $D \equiv C_0$. Como $p_a(D) = 1$, D es una cúbica plana. Entonces, por el Lema 1.1.8, D está contenida o bien en un $\alpha-$plano, o bien en un $\beta-$plano. Como la congruencia dual S^* general no tiene cúbicas contenidas en un $\beta-$plano, necesariamente D está contenida en un $\beta-$plano para la congruencia general S.

• Si $e = -1$, sea $\mathcal{E}$ un haz normalizado para la superficie reglada S'. Entonces el haz $\mathcal{E} \otimes \mathcal{L}$, donde $\mathcal{L}$ es cualquier haz sobre S' de grado 0 distinto de $\mathcal{O}_{S'}$, también es normalizado para S'. Por tanto, tenemos que hay infinitos haces normalizados para S', luego infinitas secciones C_0. Elijamos una de estas curvas C_0 de modo que pase por el punto p_1. Entonces el divisor $D \equiv C_0 - E_1$ es efectivo. Como $degD = 3$ y $p_a(D) = 1$, D es una cúbica plana que, por la misma razón que en el caso $e = 0$ anterior, está contenida en un $\beta-$plano para la congruencia S general.

Por tanto, como los divisores excepcionales son rectas, la pendiente máxima que alcanzan los subhaces lineales de $Q|_S$, para S general, es 1.

Apéndice. Tablas de estabilidad.

Para mayor comodidad del lector, adjuntamos a continuación dos tablas que recogen los resultados que hemos obtenido sobre estabilidad de Q restringido a S, donde S es una congruencia de grado menor o igual que 10. En la primera tabla resumimos todos lo resultados conseguidos en el capítulo 6, conservando para cada tipo de congruencia la misma numeración utilizada en todo el trabajo (por tanto, puede ser útil consultar paralelamente la tabla de la sección 2.2 con la descripción de cada congruencia). La columna μ_{max} contiene la pendiente máxima alcanzada por los subhaces lineales de $Q|_S$, para cada congruencia S general de grado menor o igual que 9. Si sabemos que existe alguna congruencia especial en que la pendiente máxima es mayor, especificamos dicha pendiente en la última columna (esta información no pretende en absoluto exhaustiva).

Como una mayor evidencia de la validez de la Conjetura de Dolgachev y Reider, nótese que la restricción de Q a las congruencias no degeneradas de grado 10 es estable, utilizando el Teorema 4.4 y la clasificación explícita de Gross de dichas congruencias (ver [**G2**]).

Como complemento, añadimos entonces una segunda tabla en la que, además de la descripción de las congruencias no degeneradas de grado 10, recogemos otros resultados que se pueden obtener de manera más o menos inmediata. Con respecto a esta segunda tabla, en la columna μ_{max} indicamos en cada caso las posibilidades entre las que se encuentra el valor de la pendiente máxima. En cualquier caso, para que el valor μ_{max} adquiera pleno sentido, el esquema de Hilbert debe ser irreducible, algo que, como ya hemos señalado en el capítulo 2, todavía no ha sido demostrado. En la última columna indicamos el divisor D tal que $\mu(D)$ es la mayor posible que hemos encontrado (por lo que dicho valor $\mu(D)$ es el menor valor posible de μ_{max}). En el caso concreto de la congruencia $(4,6)$ explosión en un punto de una superficie $K3$ y su dual, al indicar las dos posibilidades que hay para D, queremos decir que $\mu_{max} = 2$ si y sólo si $\mathcal{O}_S(E)$ es un subhaz de $Q|_S$; en caso contrario, $\mu_{max} = 0$, y se alcanza con el subhaz $\mathcal{O}_S$.

Tabla de estabilidad para congruencias de grado menor o igual que 9

	(a,b)	π	$\mu(Q\|_S)$	μ_{max}	Estabilidad $Q\|_S$ general	μ_{max} especiales
1)	$(0,1)$	0	1/2	0	Estable	No hay
1)*	$(1,0)$	0	1/2	1	Inestable	No hay
2)	$(1,1)$	0	1	1	Semiestable no estable	No hay
3)	$(1,2)$	0	3/2	1	Estable	No hay
3)*	$(2,1)$	0	3/2	2	Inestable	No hay
4)	$(1,3)$	0	2	0	Estable	No hay
4)*	$(3,1)$	0	2	2	Semiestable	No hay
5)	$(2,2)$	0	2	2	Inestable no estable	No hay
6)	$(2,2)$	1	2	1	Estable	2 sii recta fundamental
7)	$(2,3)$	1	5/2	1	Estable	No hay
7)*	$(3,2)$	1	5/2	2	Estable	No hay
8)	$(2,3)$	2	5/2	2	Estable	No hay
8)*	$(3,2)$	2	5/2	3	Inestable	No hay
9)	$(3,3)$	1	3	3	Semiestable no estable	No hay
10)	$(3,3)$	1	3	2	Estable	No hay
11)	$(3,3)$	2	3	1	Estable	2 si cónica en β-plano
12)	$(3,3)$	4	3	0	Estable	3 si recta fundamental
13)	$(3,4)$	3	7/2	1	Estable	?
13)*	$(4,3)$	3	7/2	3	Estable	No hay
14)	$(3,4)$	6	7/2	3	Estable	No hay
14)*	$(4,3)$	6	7/2	4	Inestable	No hay
15)	$(2,6)$	3	4	0	Estable	No hay
15)*	$(6,2)$	3	4	3	Estable	No hay
16)	$(3,5)$	4	4	3	Estable	?
16)*	$(5,3)$	4	4	1	Estable	?
17)	$(4,4)$	3	4	0	Estable	?
18)	$(4,4)$	4	4	2	Estable	?
19)	$(4,4)$	5	4	0	Estable	?
20)	$(4,4)$	9	4	0	Estable	4 si recta fundamental
21)	$(3,6)$	5	9/2	0	Estable	?
21)*	$(6,3)$	5	9/2	3	Estable	No hay
22)	$(4,5)$	5	9/2	2	Estable	?
22)*	$(5,4)$	5	9/2	1	Estable	?
23)	$(4,5)$	6	9/2	1	Estable	?
23)*	$(5,4)$	6	9/2	1	Estable	?
24)	$(4,5)$	12	9/2	4	Estable	No hay
24)*	$(5,4)$	12	9/2	5	Inestable	No hay
25)	$(3,6)$	4	9/2	1	Estable	3 si curva fundamental
25)*	$(6,3)$	4	9/2	3	Estable	No hay

Tabla de estabilidad para congruencias no degeneradas de grado 10

(a,b)	π	Descripción/ Inmersión	μ_{max}	D
$(3,7)$	6	Superficie de Enriques minimal	0	$\mathcal{O}_S$
$(7,3)$	6	Dual de la anterior	3	20 cúbicas planas ([**DR**])
$(4,6)$	6	$\tilde{\mathbb{P}}^2(x_1,...,x_{12})$ $H = 7L - 2E_1 - ... - 2E_9 - E_{10} - E_{11} - E_{12}$	3	$3L - E_1 - ... - E_9$
$(6,4)$	6	Dual de la anterior	2	$3L - E_1 - ... - E_{10}$
$(4,6)$	7	Explosión de $S' \subset \mathbb{P}^8$ en un punto, con S' K3 de grado 14 y $H_S = H_{S'} - 2E$	$0,2$	$\mathcal{O}_S, E$ (si $\mathcal{O}_S(E) \subset Q\|_S$)
$(6,4)$	7	Dual de la anterior	$0,2$	$\mathcal{O}_S, E$ (si $\mathcal{O}_S(E) \subset Q\|_S$)
$(5,5)$	4	Fibrado cónico sobre curva elíptica, $e = 0$ $H \equiv 2C_0 + 3f - E_1 - E_2$	3	C_0 o $C_0 + f - E_1 - E_2$
$(5,5)$	5	Fibrado cónico sobre curva elíptica ligado a la unión disjunta de un $\alpha-$plano, un $\beta-$plano y tres cuádricas en una i.c. $(3,3)$ $H \equiv 2C_0 + (e+4)f - E_1 - ... - E_6$	$2,3$	Existe cónica en β-plano (usando Obs. 2.1.15)
$(5,5)$	6	Fibrado cónico sobre curva elíptica $H \equiv 2C_0 + (5+e)f - E_1 - ... - E_{10}$	$1,2,3$	E_i
$(5,5)$	6	$\tilde{\mathbb{P}}^2(x_1,...,x_{13})$ $H = 7L - 3E_1 - 2E_2 - ... - 2E_7 -$ $-E_8 - ... - E_{13}$	$1,2,3,4$	E_8
$(5,5)$	7	$\tilde{\mathbb{P}}^2(x_1,...,x_{17})$, ligada a la unión disjunta de un $\alpha-$plano y un $\beta-$plano en una i.c. $(2,3)$ $H = 6L - 2E_1 - 2E_2 - 2E_3 - E_4 - ... - E_{17}$	4	Existe cuártica en β-plano (usando Obs. 2.1.15)
$(5,5)$	7	Explosión de $S' \subset \mathbb{P}^7$ en dos puntos, con S' K3 de grado 12 y $H_S = H_{S'} - E_1 - E_2$	1	E_i
$(5,5)$	8	Superficie elíptica minimal con $p_a = p_g = 2$	$0,1,2,3$	$\mathcal{O}_S$

Bibliografía.

[**A1**] E. Arrondo, *The universal rank–$(n-1)$ bundles on $\mathbb{G}(1,n)$ restricted to subvarieties*, Collect. Math., (49), (1998), 173-183.

[**A2**] E. Arrondo, *Line congruences of low order*, Milan J. Math. 70 (2002), 223-243.

[**ABT**] E. Arrondo, M.Bertolini, C. Turrini, *A focus on focal surfaces*, Assian J. Math., (5), 3 (2001), 535-560.

[**AG**] E. Arrondo, M. Gross, *On smooth surfaces in $\mathbb{G}(1,\mathbb{P}^3)$ with a fundamental curve*, Manuscripta Math., 79 (1993), 283-298.

[**AS1**] E. Arrondo, I. Sols, *Classification of smooth congruences of low degree*, Crelle J. reine angew. Math. 393 (1989), 199-219.

[**AS2**] E. Arrondo, I. Sols, *On congruences of lines in the projective space*, Mém. Soc. Math. France 50 (1992).

[**C**] S. Cobo, *Simplicity of the universal quotient bundle restricted to congruences of lines in $\mathbb{P}^3$*, Advances in Geometry 6 (2006), 467-473.

[**CDV**] F. Cossec, I. Dolgachev, A. Verra, manuscrito no publicado.

[**DJ**] M. Dumnicki, W. Jarnicki, *New effective bounds on the dimension of a linear system in $\mathbb{P}^2$*, J. Symbolic Comput. 42 (2007), 621-635.

[**DK**] P. Deligne, N. Katz, *Groupes de monodromie en géométrie algébrique*, SGA7II, Springer LNM 340 (1973).

[**DR**] I. Dolgachev, I. Reider, *On rank 2 vector bundles with $c_1^2 = 10$ and $c_2 = 3$ on Enriques surfaces*, en *Algebraic Geometry (Chicago, IL)*, Springer LNM 1479 (1991),

[**F**] W. Fulton, *Intersection Theory* Springer-Verlag, Berlin (1984).

[**Fa1**] G. Fano, *Sulle congruenze di rette del terzo ordine prive di linea singolare*, Att. Acc. di Scienze Torino 29 (1894), 474-493.

[**Fa2**] G. Fano, *Nuove ricerche sulle congruenze di rette del* 3° *ordine prive di linea singolare*, Memoria della Reale Acc. di Scienze Torino 51 (2) (1902), 1-79.

[**Fa3**] G. Fano, *Studio di alcuni sistemi di rette considerati come superficie dello spazio a cinque dimensioni*, Annali di Matematica (2) 21, 141-193.

[**G1**] M. Gross, *The distribution of bidegrees of smooth surfaces in* $\mathbb{G}(1,3)$, Math. Ann. 292

(1992), 127-147.

[**G2**] M. Gross, *Surfaces of degree* 10 *in the Grassmannian of lines in* 3$-$*space*, J. reine angew. Math. 436 (1993), 87-127.

[**G3**] M. Gross, *Surfaces of bidegree* $(3, n)$ *in* $Gr(1, \mathbb{P}^3)$, Math. Z. 212 (1993), 73-106.

[**Go**] N. Goldstein, *Scroll surfaces in* $Gr(1, \mathbb{P}^3)$, en *Conference on Algebraic Varieties of small dimension (Turin 1985)*, Rend. Sem. Mat. Univ. Pol., Special Issue (1987), 69-75

[**Ha**] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Springer (1997).

[**Hi**] A. Hirschowitz, *La Métode d'Horace pour l'interpolation à plusieurs variables*, Manuscr. Math., 50 (1985), 337-388.

[**HS1**] R. Hernández, I.Sols, *On a family of rank 3 bundles on* $G(1, 3)$, Crelle J. reine angew. Math., 360 (1985), 124-135.

[**HS2**] R. Hernández, I.Sols, *Line congruences of low degree*, en *Géométrie Algébrique et Applications, II*, Travaux en cours, Hermann, Paris (1987), 141-154.

[**K**] E. E. Kummer, *Über die algebraischen Strahlensysteme insbesondere über die ersten und zweiten Ordnung*, Abh. Akad. Wiss. Berlin, 1886.

[**M**] S. Mukai, *Curve,* $K3$ *surfaces and Fano* 3*-folds of genus* ≤ 10, en *Algebraic Geometry and Commutative Algebra, Vol. I*, Kinokuniya (1987), 357-377.

[**N**] M. Nagata, *On self-intersection number of a section on a ruled surface*, Nagoya Math. J. 37 (1970), 191-196.

[**PS**] C. Peskine, L. Szpiro, *Liaison des variétés algébriques*, Inv. Math. 26 (1974), 271-302.

[**R**] Z. Ran, *Surfaces of order one in grassmannians*, Crelle J. reine angew. Math., 368 (1986), 119-126.

[**V1**] A. Verra, *Geometria della retta in dimensione* 2, manuscrito no publicado (1986).

[**V2**] A. Verra, *Smooth surfaces of degree 9 in* $G(1, 3)$, Manuscripta Math., 62 (1988), 417-435.