

**UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID**  
**FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS**



**MODELOS COSMOLÓGICOS ANISÓTROPOS CON  
CONSTANTES VARIABLES: UN ENFOQUE AUTOSIMILAR**

**MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR  
PRESENTADA POR**

**José Antonio Belinchón Callejo**

Bajo la dirección del doctor

Francisco Navarro-Lérida

**Madrid, 2013**

©José Antonio Belinchón Callejo, 2012

Modelos cosmológicos anisótropos con constantes variables.  
Un enfoque autosimilar

José Antonio Belinchón Callejo

Bajo la dirección de

Dr. Francisco Navarro-Lérida



Universidad Complutense de Madrid  
2012



*A mis padres, Maribel y Narciso,  
y a la memoria de mi hermano Juan.*



## Agradecimientos

Es mi deseo expresar mi más profundo agradecimiento a José Luis Contreras, sin cuya intercesión nada de esto hubiese sido posible.

También agradezco el apoyo y ánimo que he recibido a lo largo de todos estos años difíciles a: T. Harko, G. Hall, M. Szydłowski, J.L. Caramés y especialmente a A. Coley, quien me invitó a pasar una pequeña estancia en el Departamento de Matemáticas de la Universidad de Dalhousie. Han sido muchas las personas quienes me han prestado su ayuda, quisiera también mostrar mi agradecimiento a: J.C. Bueno, por sus comentarios críticos y sugerencias, las cuales han mejorado sin duda esta Tesis, a J.M. del Río, por facilitarme referencias de la Academia de Ciencias del Vaticano, y A. Martín, por resolverme dudas con el programa  $\text{\LaTeX}$ .

De igual forma, quisiera agradecer a mi director de Tesis, Francisco Navarro-Lérida, por haberme aceptado como estudiante, por su dedicación, paciencia y guía a lo largo de estos dos años.

Por último, agradezco a mis padres y hermanos, Alberto y Gelu, su apoyo y ayuda.



# Índice general

<b>Resumen</b>	<b>v</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Antecedentes históricos	1
1.2. Valores y límites observacionales	12
1.2.1. La constante gravitatoria	13
1.2.2. La constante cosmológica	14
1.3. Quo Animo	15
<b>2. Métodos matemáticos</b>	<b>17</b>
2.1. Modelos de Bianchi	17
2.2. Medida de la anisotropía. Invariantes de curvatura	19
2.3. Simetrías de un tensor	21
2.3.1. Autosimilaridad	23
2.3.2. Colineaciones de materia	24
2.4. Grupos de Lie	25
<b>3. Resultados teóricos</b>	<b>31</b>
3.1. Relatividad General	31
3.1.1. Algunos modelos de materia	31
3.1.2. Relatividad General con constantes variables	34
3.2. Modelos escalares	37
3.2.1. Modelos escalares	38
3.2.2. Modelos escalares con $G$ variable.	42
3.2.3. Campos de materia y escalares sin interacción	45
3.2.4. Campos de materia y escalares sin interacción y $G$ variable	45
3.2.5. Modelos con interacción	46
3.2.6. Modelo escalar interactuando con un campo de materia y $G$ variable	50
3.3. Teorías tenso-escalares	53
3.3.1. Modelo con $\Lambda$	54
3.3.2. Caso general	57
3.3.3. Modelo camaleón	61
3.3.4. Modelos $f(R, \phi)$	63
3.4. Otras teorías	68
3.4.1. Gravedad conforme (scale invariant)	68
3.4.2. Modelo de Barber	71
<b>4. Modelo Bianchi I</b>	<b>73</b>
4.1. Geometría del modelo	73
4.2. Soluciones clásicas	74
4.2.1. Modelo de vacío	74
4.2.2. Fluido perfecto	75
4.2.3. Fluido perfecto con constantes variables	75
4.3. Modelos escalares	76
4.3.1. Modelo escalar	76

4.3.2.	Modelo escalar con G variable	77
4.3.3.	Modelo escalar sin interacción con un campo de materia	78
4.3.4.	Modelo escalar sin interacción con un campo de materia y G variable	78
4.3.5.	Modelo escalar interactuando con un campo de materia	79
4.3.6.	Modelo escalar interactuando con un campo de materia y G variable	80
4.4.	Modelos tenso-escalares	81
<b>5.</b>	<b>Modelo Bianchi II</b>	<b>83</b>
5.1.	Métrica y ecuaciones de campo	83
5.2.	Soluciones clásicas	84
5.2.1.	Modelo de vacío	84
5.2.2.	Fluido perfecto	85
5.2.3.	Fluido perfecto con constantes variables	86
5.3.	Modelos escalares	88
5.3.1.	Modelo escalar	88
5.3.2.	Modelo escalar con G variable	88
5.3.3.	Modelo escalar sin interacción con un campo de materia	89
5.3.4.	Modelo escalar sin interacción con un campo de materia y G variable	89
5.3.5.	Modelo escalar interactuando con un campo de materia	90
5.3.6.	Modelo escalar interactuando con un campo de materia y G variable	91
5.4.	Modelos tenso-escalares	92
5.4.1.	Modelo con constante cosmológica	92
5.4.2.	Modelo con potencial	97
<b>6.</b>	<b>Modelos tipo Bianchi VI<sub>h</sub> &amp; III</b>	<b>99</b>
6.1.	Métrica e ingredientes geométricos	99
6.2.	Soluciones clásicas	102
6.2.1.	Soluciones de vacío	102
6.2.2.	Soluciones para un fluido perfecto	103
6.2.3.	Fluido perfecto con constantes variables	107
6.3.	Modelos escalares	113
6.3.1.	Modelo escalar	113
6.3.2.	Modelo escalar con G variable	114
6.3.3.	Modelo escalar sin interacción con un campo de materia	115
6.3.4.	Modelo escalar sin interacción con un campo de materia y G variable	119
6.3.5.	Modelo escalar interactuando con un campo de materia	120
6.3.6.	Modelo escalar interactuando con un campo de materia y G variable	123
6.4.	Modelos tenso-escalares	124
6.4.1.	Modelo con constante cosmológica	124
6.4.2.	Modelo con potencial	127
<b>7.</b>	<b>Modelos Bianchi V, BVII y BIX</b>	<b>131</b>
7.1.	Métrica y ecuaciones de campo	131
7.1.1.	Modelo Bianchi V	131
7.1.2.	Bianchi VII	132
7.1.3.	Bianchi IX	134
7.2.	Soluciones clásicas	135
7.2.1.	Soluciones de vacío	135
7.2.2.	Fluido perfecto	135
7.2.3.	Fluido perfecto con constantes variables	136
7.3.	Modelos escalares	138
7.3.1.	Modelo escalar	138
7.3.2.	Modelo escalar con G variable	139
7.3.3.	Modelo escalar sin interacción con un campo de materia	140
7.3.4.	Modelo escalar sin interacción con un campo de materia y G variable	140
7.3.5.	Modelo escalar interactuando con un campo de materia	141
7.3.6.	Modelo escalar interactuando con un campo de materia y G variable	143

7.4. Modelo tenso-escalar . . . . .	144
7.4.1. Modelo BV . . . . .	145
7.4.2. Modelo BVII . . . . .	146
7.4.3. Modelo BIX . . . . .	147
<b>8. Modelo Kantowsky-Sachs</b> . . . . .	<b>149</b>
8.1. Métrica y ecuaciones de campo . . . . .	149
8.2. Soluciones clásicas . . . . .	150
8.2.1. Soluciones de vacío . . . . .	150
8.2.2. Fluido perfecto . . . . .	150
8.2.3. Modelo con constantes variables . . . . .	151
8.3. Modelos escalares . . . . .	151
8.3.1. Modelo escalar . . . . .	151
8.3.2. Modelo escalar con G variable . . . . .	152
8.3.3. Modelo sin interacción con un campo de materia . . . . .	152
8.3.4. Modelo escalar sin interacción con un campo de materia y G variable . . . . .	152
8.3.5. Modelo escalar interactuando con un campo de materia . . . . .	153
8.3.6. Modelo escalar interactuando con un campo de materia y G variable . . . . .	154
8.4. Modelos tenso-escalares . . . . .	155
8.4.1. Modelo con constante cosmológica . . . . .	155
8.4.2. Modelo con potencial . . . . .	156
8.4.3. Modelo camaleón . . . . .	158
8.4.4. Modelo de gravedad inducida . . . . .	161
<b>9. Trabajo futuro</b> . . . . .	<b>163</b>
9.1. Sistemas dinámicos . . . . .	163
9.1.1. Modelo con constante variables . . . . .	164
9.2. Teoría de cuerdas . . . . .	166
9.2.1. Ecuaciones de campo . . . . .	166
9.2.2. Colineaciones de materia . . . . .	168
9.2.3. Ejemplo . . . . .	169
9.3. Modelo de branas . . . . .	170
9.3.1. Ecuaciones de campo . . . . .	170
9.3.2. Colineaciones de materia . . . . .	172
9.3.3. Variación de constantes . . . . .	172
9.3.4. El caso $\mathcal{U} = 0$ . . . . .	174
9.3.5. Colineaciones de materia . . . . .	175
9.3.6. Ejemplo . . . . .	176
<b>10. Conclusiones</b> . . . . .	<b>181</b>
10.1. Conclusiones generales . . . . .	181
10.2. Resultados geométricos . . . . .	182
10.3. Relatividad General . . . . .	183
10.3.1. Soluciones de vacío . . . . .	183
10.3.2. Fluidos perfectos . . . . .	183
10.3.3. Relatividad General con CVT . . . . .	184
10.4. Modelos escalares . . . . .	186
10.4.1. Modelos escalares . . . . .	186
10.4.2. Campo escalar sin interacción con un campo de materia . . . . .	187
10.4.3. Campo escalar interactuando con un campo de materia . . . . .	188
10.5. Modelo escalar con G variable . . . . .	190
10.5.1. Modelos escalares . . . . .	190
10.5.2. Campo escalar sin interacción con un campo de materia . . . . .	191
10.5.3. Campo escalar interactuando con un campo de materia . . . . .	192
10.6. Modelos tenso-escalares . . . . .	194
10.6.1. Modelo con $\Lambda$ . . . . .	194
10.6.2. Modelo con $U$ . . . . .	196

10.7. Otras teorías . . . . .	197
10.7.1. Gravedad conforme . . . . .	197
10.7.2. Modelo de Barber . . . . .	198
<b>A. Bianchi I con <math>G</math> y <math>\Lambda</math> variables</b>	<b>201</b>
A.1. Estudio de la Ec. (A.15) . . . . .	202
A.1.1. Simetría de escala . . . . .	203
A.1.2. Comportamiento exponencial . . . . .	204
A.1.3. Simetría completa . . . . .	204
A.2. Estudio de la Ec (A.13) . . . . .	204
A.2.1. Simetría de escala . . . . .	205
<b>Lista de publicaciones</b>	<b>217</b>

# Resumen

El objetivo de esta Tesis es estudiar la variación de las “*constantes*” físicas universales  $G$  y  $\Lambda$  con respecto al tiempo cosmológico, en modelos homogéneos pero anisótropos, es decir, los denominados modelos de Bianchi, junto con el modelo Kantowski-Sachs. Estudiaremos dicha variación dentro del marco teórico de varias teorías gravitatorias, como son:

- Relatividad General (RG), convenientemente modificada en base a la identidad de Bianchi
- Modelos quintaesencia (SM), considerando además los casos en los que hay interacción con un fluido perfecto
- Diversas teorías tenso-escalares (STT)

El estudiar no solo diversos modelos Bianchi, sino distintas teorías gravitatorias, nos permitirá comparar los resultados obtenidos. Del conjunto de soluciones que podemos obtener de las ecuaciones de campo planteadas nos centraremos, únicamente, en las soluciones autosimilares, ya que este tipo de soluciones corresponde a puntos de equilibrio (desde el punto de vista de los sistemas dinámicos), jugando de esta forma un papel predominante en la dinámica de los modelos cosmológicos tipo Bianchi. De igual forma, tal y como veremos, este tipo de soluciones describe comportamientos asintóticos de soluciones más complejas. Hemos puesto especial énfasis en los aspectos formales de cada uno de los modelos teóricos estudiados, demostrando la forma que pueden adquirir cada una de las magnitudes para que las ecuaciones de campo admitan soluciones autosimilares. Hemos llevado a cabo las demostraciones utilizando los métodos de las colineaciones de materia y de los grupos de Lie. Mientras que el método de las colineaciones de materia se restringe exclusivamente a soluciones autosimilares, con el de grupos de Lie, mucho más potente y general, hemos podido obtener soluciones tipo potencias, en las que las autosimilares están incluidas.

Además, al ser las soluciones encontradas de tipo potencias, esto nos permitirá comparar las diferentes soluciones obtenidas para cada uno de los casos estudiados. Haremos especial hincapié en el estudio de la isotropización de las soluciones obtenidas, de manera que podremos descartar, por no ajustarse a los valores observacionales, aquéllas que no isotropicen, es decir, que tengan los valores de los parámetros de anisotropía no pequeños.

Con respecto al comportamiento de  $G$  y  $\Lambda$ , hemos visto que en cada modelo varían de forma diferente. De *forma genérica* podemos decir:

- En el marco de la RG,  $G$  es una función creciente si  $\Lambda$ , función decreciente, es positiva siendo la solución válida para valores del parámetro de la ecuación de estado  $\gamma \in (-1/3, 1)$
- En los modelos SM,  $\Lambda$  siempre es decreciente y positiva; sin embargo el comportamiento de  $G$  queda, por lo general, indeterminado
- En los dos modelos STT sistemáticamente estudiados,  $G$  y  $\Lambda$  muestran el mismo comportamiento formal que el obtenido dentro del marco de la RG; sin embargo, su comportamiento cualitativo es muy diferente, ya que la constante cosmológica es positiva, i.e.  $\Lambda \geq 0$ , mientras que  $G$  puede ser creciente, constante o decreciente. Ello es debido a la estructura de la ecuaciones de campo, mucho más restrictivas en los modelos tenso-escalares que las de la RG, de esta forma, las soluciones obtenidas son únicamente válidas para entornos reducidos de un valor crítico del parámetro la EdE  $\gamma$
- Todas las soluciones halladas son no inflacionarias, excepto en el caso de los modelos Kantowski-Sachs
- Con respecto a la isotropía de las soluciones, casi todas las soluciones obtenidas isotropizan o son isótropas, es decir, los parámetros de anisotropía toman valores pequeños (próximos a cero) o existen regiones donde son pequeños o cuando son isótropas dichos parámetros son nulos



# Capítulo 1

## Introducción

### Índice del capítulo

---

<b>1.1. Antecedentes históricos</b> . . . . .	<b>1</b>
<b>1.2. Valores y límites observacionales</b> . . . . .	<b>12</b>
1.2.1. La constante gravitatoria . . . . .	13
1.2.2. La constante cosmológica . . . . .	14
<b>1.3. Quo Animo</b> . . . . .	<b>15</b>

---

### 1.1. Antecedentes históricos

Desde una perspectiva actual existen diferentes teorías que predicen la variación de las constantes físicas. Estas teorías se pueden clasificar, de forma genérica, en dos grandes grupos:

- Aquellas que intentan unificar la gravitación con otras interacciones mediante el aumento de las dimensiones del espacio-tiempo. Entre ellas están, la teoría de supercuerdas y las teorías de Kaluza-Klein
- Las basadas en alguna de las versiones del principio de Mach, como las teorías tipo Brans-Dicke, modelos que predicen la variación de las masas fundamentales, la carga del electrón o la velocidad de la luz.

En el límite de bajas energías, las teorías de cuerdas y las de tipo Kaluza-Klein se reducen a las teorías basadas en el principio de Mach [1]-[2].

La idea especulativa de que vivimos en un espacio-tiempo de dimensiones  $4 + D$ , se debe a Kaluza y Klein quienes, en la década de los años 20, construyeron un modelo que unificaba la gravitación y el electromagnetismo. En este modelo, la quinta dimensión corresponde a un círculo cerrado de radio  $R_{KK}$ , y donde la constante de acoplamiento electromagnética y la gravitatoria, se relacionan de la siguiente forma

$$\alpha \sim \frac{G}{R_{KK}^2}. \quad (1.1)$$

Esta teoría se puede extender a más dimensiones y, en todas ellas, siempre aparece la relación,  $\alpha_i \sim GR_{KK}^{-2}$  [3]. Nos podemos preguntar si las dimensiones extra del espacio-tiempo son reales o se deben únicamente al artificio matemático necesario para describir tales teorías. Si son reales, entonces ¿estas dimensiones se expanden o se contraen con el tiempo? Si  $dR_{KK}/dt = R'_{KK} \neq 0$  [4], entonces las constantes de acoplamiento  $\alpha_i$  variarán con el tiempo, es decir, el incorporar la expansión del universo (de 4 dimensiones) en las teorías Kaluza-Klein, conduce de forma natural a  $R'_{KK} \neq 0$  y, por tanto, a la variación de las constantes. Esta pequeña y no estática dimensión extra, proporciona el marco teórico adecuado para discutir la variación de las constantes. De igual forma, el estudio de la variación de las constantes puede probar la existencia de dimensiones extra. Sin embargo, ninguna de estas teorías puede explicar el conjunto de observaciones a nivel cosmológico, en especial en lo referente a los quásares.

En esta Tesis nos centraremos en el estudio de teorías que incorporan el principio de Mach para explicar la posible variación de las constantes. Empezaremos con la descripción, de forma sucinta y no exhaustiva, de algunas

de las propuestas que han surgido a lo largo del siglo XX sobre la variación de las constantes físicas universales [5]-[9].

El primer marco teórico se debe a Milne [10] y [11]. Durante los años 1930-1948, crea un modelo cosmológico con dos escalas de tiempo, una atómica,  $\tau$ , y otra  $t$ , que controla procesos cosmológicos, i.e., a gran escala, de forma que  $\tau = \ln t$ . De su modelo se desprende que  $G \propto t$ , es decir, la constante de gravitación varía con respecto al tiempo cosmológico, verificándose además  $c^3 G^{-1} t = \text{const}$ , ya que las masas de los cuerpos deben permanecer constantes a lo largo de la evolución temporal del universo. De esta relación se desprende que el radio del Universo sigue una ley  $R_U \propto GM/c^2 \sim t$ . A pesar de las objeciones teóricas a su modelo, las contribuciones de Milne al desarrollo de la cosmología moderna son innegables ya que, por ejemplo, propuso el *principio cosmológico* que sirvió de base para trabajos posteriores de Robertson y Walker, quienes llegaron a definir lo que hoy se conoce como la métrica Friedman-Robertson-Walker (FRW). En la actualidad podemos entender el modelo de Milne como un caso particular de un modelo FRW plano, en el que la constante de gravitación varía con el tiempo, tal y como hemos demostrado en un trabajo reciente [12]. Mediante el empleo del análisis dimensional, podemos deducir y generalizar los resultados de Milne dentro del marco de la Relatividad General (RG). Considerando un modelo cuyo contenido de materia está descrito por un fluido perfecto, a partir de la ecuación de conservación, obtenemos la relación entre la densidad de energía y el radio del universo,  $\rho = A_\gamma f^{-3(\gamma+1)}$ , siendo  $A_\gamma$  una constante de integración con dimensiones  $[A_\gamma] = L^{2+3\gamma} M T^{-2}$ , y el parámetro  $\gamma$  proviene de la ecuación de estado  $p = \gamma\rho$ . De esta forma deducimos que  $G(t) \propto A_\gamma c^{5+3\gamma} t^{1+3\gamma}$ , observando que para el caso  $\gamma = 0$  (modelo de Milne)  $G \propto t$ , mientras que el radio del universo sigue la ley  $f(t) \propto ct$ . Si  $\rho$  representa densidad de masa en vez de densidad de energía, entonces se llega a  $G(t) \propto M^{-1} c^3 t^1$ , que coincide con la relación obtenida por Milne.

Entre los años 1937-1939, Dirac [13] formuló su hipótesis de los grandes números (LNH), que ha pasado a la historia como la pieza central de todos los trabajos sobre variación de constantes. En esta primera formulación (basada enteramente en métodos dimensionales y coincidencias numerológicas), obtiene como principal resultado que  $G \propto t^{-1}$ . Años más tarde (1973-75), Dirac reformuló su LNH a la luz de los nuevos datos que habían aparecido, principalmente la radiación cósmica de fondo, intentando reconciliar dicha hipótesis con la Relatividad General. Basándose en el trabajo de Milne (sus dos escalas de tiempos) y considerando la geometría de Weyl en vez de la de Riemann, formula un nuevo modelo cosmológico [14].

Las relaciones adimensionales entre las distintas constantes universales que aparecen en diversas teorías físicas fueron introducidas por Weyl [9] y Eddington [15] quienes apuntaron e interpretaron las “coincidencias numerológicas” que se derivan de tales números adimensionales. El valor de estas constantes depende del sistema de unidades que empleemos para medirlas, pero siempre podemos encontrar relaciones entre ellas para formar así monomios adimensionales (números adimensionales) que son independientes del sistema de unidades en el que se miden. Estos monomios, como la constante de estructura fina  $\alpha$  o la relación que existe entre la masa del electrón y la masa del protón, reflejan propiedades intrínsecas de la naturaleza. Por ejemplo Eddington, en su *Fundamental Theory* [15], considera las siguientes constantes ( $G, c, m_e, m_p, e, \varepsilon_0, \hbar$ ) formando los siguientes números adimensionales

$$\frac{m_e}{m_p}, \quad \alpha = \frac{e^2}{\varepsilon_0 c \hbar}, \quad \alpha_G = \frac{e^2}{\varepsilon_0 G m_p m_e}, \quad (1.2)$$

a partir de los cuales deduce las propiedades del universo, siendo el radio del mismo  $R_U \propto GM/c^2$  (como en la cosmología de Milne). Si tenemos en cuenta que  $M = N m_p$ , siendo  $N$  el número de partículas en el universo, entonces  $\alpha_G \sim N^{1/2}$  o  $m_p \sim \hbar N^{1/2} R_U^{-1} c$ . Esta metodología ha sido utilizada por muchos autores, como Weinberg [16], para determinar la masa del pión.

La idea de Dirac es combinar algunas de estas constantes, sobre todo las que hacen referencia a propiedades microscópicas (Física de partículas), como por ejemplo, la masa del electrón  $m_e$ , la masa del protón  $m_p$ , la carga del electrón  $e$ , con otras macroscópicas que hacen referencia a la Cosmología Relativista, como  $G$  constante de gravitación,  $c$  velocidad de la luz y, como novedad,  $H$  constante de Hubble, cuya inversa nos da cuenta de la edad del universo.

El primer monomio que construye combina las siguientes constantes ( $G, m_e, m_p, e^-, \varepsilon_0$ ). Este monomio establece la relación que hay entre la fuerza eléctrica y la gravitatoria entre un electrón y un protón

$$\pi_1 := \frac{e^2}{\varepsilon_0 G m_p m_e} \approx 10^{40}. \quad (1.3)$$

El segundo de los monomios establece la relación entre dos escalas de tiempo, una, el tiempo que tarda la luz en atravesar el radio clásico del electrón  $t_e$  y la otra escala de tiempo define la edad aproximada del universo  $t_0$

expresada en términos de la “constante” de Hubble  $H$

$$\pi_2 := \frac{e^2 H}{\epsilon_0 m_e c^3} = \frac{t_0}{t_e} \approx 10^{40}. \quad (1.4)$$

El tercer monomio que establece Dirac da cuenta del número de nucleones  $N$  en el universo. Este número es claramente finito para un universo cerrado, pero, para un universo abierto, puede ser infinito. Este número se calcula teniendo en cuenta un volumen con un radio característico ( $c/H$ ) (para este radio la velocidad de recesión de cualquier objeto, una galaxia, es justamente,  $v = Hd$ ). Si  $\rho$  es la densidad de materia en el universo, i.e., dentro de ese volumen con ese radio característico, y  $m_p$  es la masa del protón, entonces,

$$N \approx \frac{4\pi}{3} \left(\frac{c}{H}\right)^3 \frac{\rho}{m_p}, \quad N \approx 10^{78}, \quad (1.5)$$

se observa la siguiente relación entre los tres monomios obtenidos:

$$N^{1/2} \approx \pi_1 \approx \pi_2 \approx 10^{40}. \quad (1.6)$$

Dirac, entonces, intenta dar una explicación a esta tremenda coincidencia. Empieza diciendo que, de los tres monomios el último  $\pi_2$  no puede ser lógicamente constante ya que  $t_0$  continúa creciendo, puesto que da cuenta de la edad aproximada del universo (que asume que empezó en el Big-Bang). Esto significa que la relación que hay entre los tres monomios, “en la actualidad” es una coincidencia, o que los dos monomios deben variar con el tiempo, de tal forma que se preserve siempre la coincidencia entre los tres monomios. Dirac acepta esta última hipótesis y generaliza esta idea denominándola LNH, argumentando que cualquier gran número que hoy sea del orden de magnitud  $(t_0/t_e)^k$  debe ser proporcional a  $t^k$ , con algún coeficiente próximo a la unidad. El coeficiente no tiene que ser constante a lo largo de todo el tiempo, aunque para grandes valores del tiempo cósmico  $t$ , la dependencia temporal puede ser despreciable y, por tanto, el coeficiente puede ser considerado como constante.

Se deduce de la primera relación que:  $\pi_1 \approx t$ . Dirac asume que las cantidades atómicas son constantes en términos de unidades atómicas, las cuales son siempre usadas en experimentos de medidas en los laboratorios y aceleradores. Deduce así que la única “constante” que varía es  $G$  y lo hace de forma inversamente proporcional al tiempo.  $G \approx t^{-1}$ , i.e.,

$$\frac{G'}{G} \approx -\frac{1}{t}. \quad (1.7)$$

Si el valor de la constante de Hubble es constante (la tomamos como constante hoy),  $H_0 \approx 50 \text{ kms}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ , la edad presente del universo  $t_0$ , para  $q_0 = 0$ , es entonces  $t_0 \approx 2,10^{10} \text{ años}$ , estimando entonces que  $G'/G = -5 \cdot 10^{-11} \text{ años}^{-1}$ . Este dato que predice la teoría de Dirac, puede ser comprobado con valores observacionales llevados a cabo por Van Flandern [17] que dan estimaciones del orden  $(G'/G) = (-8 \pm 5)10^{-11} \text{ años}^{-1}$ , (más adelante se comentarán con detenimiento estas observaciones).

Esta predicción de la variación de la “constante”  $G$  es quizá la más importante hecha por Dirac en su LNH. Si esta predicción se verifica (con la suficiente precisión y más allá de ningún género de dudas), no tiene por qué significar que LNH sea verdadera, pero será necesario descartar la teoría de Einstein por otra que interprete o acomode adecuadamente esta variación de  $G$ .

La LNH puede ser usada para mostrar que el universo no puede ser del tipo FRW  $k = 1$ , i.e., modelos que alcanzan una máxima expansión para luego contraerse. Dirac lo argumenta de la siguiente forma: Si el universo tiene un radio máximo, dicho radio se puede expresar en términos de unidades naturales de longitud (por ejemplo el radio clásico del electrón) que dará lugar a un gran número adimensional, constante por definición, pero la regla de la LNH dice que no puede ser constante, por lo que el universo no puede tener un radio máximo. Otro argumento utilizado es el siguiente. Si la curvatura del espacio es positiva, entonces, se trata de un universo cerrado finito, pero sin límites. En consecuencia, la masa total del universo es finita y podemos expresarla en forma de unidades atómicas, formando así otro gran número; pero el tercer monomio de Dirac nos decía que el número de partículas en el universo variaba con la edad de éste,  $N^{1/2} \approx t$ . Pero en este caso, se viola la ley de conservación de la masa, cosa imposible. Dirac concluye entonces que la curvatura del espacio (3-espacio) no puede ser positiva. El argumento que descarta la posibilidad de una curvatura negativa para el espacio es bastante semejante, aunque más intrincada (ver Dirac 1938 [13]). Dirac se queda así con la curvatura cero, i.e., con el Einstein-de Sitter como única posibilidad compatible con su principio fundamental y la ley de conservación de la masa.

La hipótesis de Dirac suscitó muchas críticas. En 1937, Chandrasekhar [18] indicó que la variación de  $G$  debe repercutir en la estructura estelar reflejándose en un exceso en la luminosidad, equilibrio inestable, evolución

estelar, etc. A raíz de este trabajo surgieron otras tantas propuestas en contra de las hipótesis de Dirac. Kothari [19] y Zwicky [20] corroboran los trabajos de Chandrasekhar y, además, ponen de manifiesto que un exceso en la luminosidad del Sol produciría un exceso de calor sobre la Tierra. Deberían existir pruebas geológicas de tales variaciones.

Otra propuesta teórica se debe a Jordan [21] (ver el trabajo de Fierz [22]) quien, partiendo de las ideas de Dirac, construye un modelo basado en coincidencias numerológicas, pero en vez de formar los monomios adimensionales a partir de constantes físicas, lo hace teniendo en cuenta diversas magnitudes físicas como un tiempo característico  $t_*$ , que representa la edad máxima de una estrella  $t_* \sim 10^{17}s$ , el parámetro de Hubble  $H$ , la densidad de masa media del universo  $\rho_U$  y, por último, el radio del universo  $R_U$ . Con estas magnitudes forma los siguientes monomios

$$Ht_*, \quad R_U c^{-1} t_*^{-1}, \quad \gamma' \rho_U c^2 t_*^2, \quad (1.8)$$

siendo  $c$  la velocidad de la luz y  $\gamma' = 8\pi G/c^2$ . Combinando los anteriores números adimensionales, llega a la principal conclusión de que la constante de gravitación debe variar con el tiempo, siguiendo la ley  $G \propto t^{-1}$  (bajo la influencia del trabajo de Dirac), pero a costa de postular procesos de creación de materia, ya que considera que no puede preservarse la conservación de la energía-momento. Con tal resultado estudia los problemas de estructura estelar y sus implicaciones paleontológicas [23].

Años más tarde retoma el problema, pero esta vez proponiendo una teoría basada en una formulación variacional al problema, intentando así dar una fundamentación teórica a sus coincidencias numerológicas. Fue el primero en modificar las ecuaciones de Einstein reemplazando  $G$  por un campo escalar y, aunque su primera formulación fue incorrecta, sus trabajos sirvieron de base y referencia a trabajos posteriores como los de Brans-Dicke o Hoyle-Narlikar. Fue el primero en introducir el concepto de creación continua de materia, creación espontánea y creación ex-nihilo, conceptos éstos luego adoptados en modelos posteriores, como el steady-state cosmology de Bondi et al. Sus dos mayores contribuciones fueron:

- Formular principios variacionales (fundamentar los modelos)
- Establecer criterios geológicos y paleontológicos para chequear tales variaciones

Quizás el modelo teórico más importante que trata de explicar la variación de  $G$  se debe a Brans y Dicke [24]. Estos autores parten del trabajo de Jordan, pero en vez de inspirarse en las coincidencias numerológicas obtenidas por Dirac, basan su trabajo en el denominado *principio de Mach*. Un trabajo clave a este respecto se debe a Sciama [25], quien matematiza dicho principio estableciendo una relación entre la constante de gravitación  $G$  y la distribución uniforme de la masa del universo  $M_U$ , expresándolo de la siguiente forma

$$\frac{GM_U}{R_U c^2} \sim 1, \quad (1.9)$$

siendo  $R_U$  el radio del universo y  $c$  la velocidad de la luz. Dicke, de forma independiente y en fechas posteriores, también llega a las mismas relaciones y conclusiones [26]. De (1.9) podemos extraer la siguiente relación

$$G \sim \frac{R_U c^2}{M_U}, \quad (1.10)$$

que nos indica que la constante de gravitación debe variar, ya que depende del radio del universo y está determinada por la masa de todo el universo. Esta interpretación que hacen del principio de Mach no es compatible con el principio de equivalencia fuerte (en el que se basa la Relatividad General). Así, Brans y Dicke indican que las masas inerciales de las partículas dependerán de su posición en el espacio. El problema surge cuando queremos medir la masa de una partícula, por ejemplo la de un electrón,  $m_e$ . Es necesario definir una unidad de masa independiente, como la masa de Planck  $m_P$ ,  $m_P = (ch/G)^{1/2}$ , y definir una magnitud adimensional  $\chi = m_e m_P^{-1}$ , que, al medir en diferentes puntos del espacio-tiempo, nos indicará cuándo la masa de la partícula varía. Entonces, asumiento que tanto  $c$  como  $h$  deben ser verdaderas constantes (así no se alteran otras teorías físicas) llegan a la conclusión de que o bien  $G$  o bien  $m_e$  deben variar, o ambas a la vez. Ellos consideran que la variación se debe a  $G$ . A partir de la relación (1.10), postulan que la constante de gravitación se comporta como el recíproco de un campo escalar,  $G \sim \phi^{-1}$ , donde  $\phi$  satisface la ecuación de ondas cuya fuente es toda la masa del universo.

Vemos que Brans y Dicke concluyen a través de la aceptación del principio de Mach, que la constante de gravitación debe variar, siendo así sus argumentos completamente diferentes a los utilizados por Dirac en su hipótesis

de los grandes números, basada únicamente en coincidencias numerológicas. Por tanto, el modelo de Brans-Dicke se basa en el principio de Mach, asume que únicamente puede variar  $G$  y verifica el principio de equivalencia débil (apoyado por las evidencias experimentales de Eötvös). En el tercer capítulo de esta Tesis estudiaremos este modelo, así como generalizaciones del mismo.

Otros modelos poco conocidos se deben a Gilbert, quien en los años 1956-1960 formuló distintas propuestas que intentan reconciliar la hipótesis de Dirac con la Relatividad General [27]-[28]. En el primero de ellos [27], inspirándose en el trabajo de Milne, introduce dos escalas de tiempo, una para los fenómenos electromagnéticos y otra para los fenómenos gravitacionales. Partiendo de las ecuaciones de Einstein para un modelo plano y simetrías tipo FRW (el Einstein-de Sitter) calcula el radio del universo, el cual sigue la ley  $R_U \propto t^{2/3}$ . Mediante consideraciones dimensionales establece la relación entre el sistema electromagnético y el gravitatorio (a la Dirac), llegando así a la conclusión de que la constante de gravitación debe variar de la siguiente forma  $G \propto t^{-1}$ . Aunque el planteamiento del modelo es erróneo, parte de las ecuaciones de Einstein con  $G = \text{const.}$  y, sin considerar la ecuación de conservación para el tensor energía-momento, es quizá el primer intento de explicar la variación de las constantes dentro del marco de la Relatividad General.

Años más tarde [28], reconsidera su modelo y, esta vez, establece una formulación variacional, pero en vez de considerar de forma lineal la curvatura escalar  $R$ , lo hace de forma cuadrática (prototipo de modelo  $f(R)$ ), postulando que su acción sea además invariante bajo transformaciones conformes. Las consecuencias principales de este modelo son  $G \propto t^{-1}$  y que las masas de las partículas también varían  $m \propto t^{1/2}$ . Dirac partió de estas consideraciones para formular su modelo en el que reconcilia la Relatividad General con su hipótesis [14].

Existen otras tantas teorías para explicar la posible variación de la constante de gravitación, como las propuestas por Canuto et al y Barber que estudiaremos en el tercer capítulo de esta Tesis.

Hasta el momento, únicamente hemos hecho referencia a teorías o modelos que consideran como variable la constante de gravitación  $G$ . Sin embargo, en la década de los 60 surgió una nueva interpretación del modelo de Dirac, la cual considera que la variación de los monomios no solo es interpretable en  $G$ , sino que existen otras posibilidades como la variación de la carga del electrón  $e$ . De esta forma, la constante de estructura fina también puede variar. Algunas de las propuestas son las siguientes.

Stanyukovich [29] reformula la hipótesis de Dirac imponiendo dos nuevas condiciones, que la energía y la carga del universo se conserven, expresando estas dos condiciones de la siguiente forma

$$\begin{aligned} Nmc^2 &= Mc^2 = E = \text{const.}, \\ Ne^2 &= \text{const.}, \quad N \sim t^2. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Nótese que la segunda expresión no es correcta. A partir de estas dos condiciones obtiene los siguientes resultados

$$\begin{aligned} m &\sim t^{-2}, \quad \hbar \sim t^{-2}, \quad e \sim t^{-1}, \quad G \sim t, \\ R_U &\sim ct, \quad \alpha = \frac{e^2}{\epsilon_0 \hbar c} = \text{const.} \quad \frac{GM^2}{e^2} \sim t^{-1}. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Como podemos notar, se avanza hacia una teoría que explique no solo la variación de unas “constantes”, sino de casi todas. En un segundo trabajo [30], “*intenta*” generalizar las ecuaciones de Einstein incorporando los resultados obtenidos anteriormente; para ello considera además de un fluido perfecto como componente de materia del universo, el tensor de Faraday para, de esta forma, hacer variar la carga del electrón. Sin embargo, en este segundo trabajo no queda claro cómo introduce en las ecuaciones de campo modificadas una  $G$ -variable, y con respecto al principio de conservación, tampoco aclara cómo éstas gobiernan la variación de las constantes.

Gamow [31] critica abiertamente la “*sugerencia*” de Dirac “*basada en coincidencias numerológicas que alguien sugirió en base a una teoría inexistente*”. En base al trabajo de Teller [32], quien también argumentó que la idea de una  $G$ -variable,  $G \sim t^{-1}$ , contradecía evidencias geológicas, ya que la luminosidad del Sol habría sido mucho mayor en el pasado e incluso el radio orbital de la Tierra habría sido mucho menor en el pasado, condiciones que habrían imposibilitado la aparición de la vida en la Tierra (los océanos literalmente se habrían evaporado). Gamow pasa entonces a estudiar detalladamente las ecuaciones que gobiernan la estructura estelar, las ecuaciones del equilibrio hidrodinámico, llegando a la conclusión de que la idea de Dirac es errónea. En una serie de trabajos posteriores [33] reexamina dicha hipótesis y la interpreta de tal forma que la carga del electrón es la que debe variar,  $e^2 \propto t$ . Evita de esta forma la alteración en el radio orbital, pero no así los problemas con la luminosidad del sol, ya que semejante hipótesis tiene una serie de repercusiones de nuevo sobre la estructura estelar, esta vez a través del coeficiente

de opacidad de Kramer (teoría dimensional)  $k$  de tal forma que la luminosidad  $\mathcal{L} \propto k^{-1} \propto e^{-6}$ . Esta propuesta fue rápidamente contestada por Dyson [34] entre otros muchos. Sin embargo, Gamow pone de manifiesto que tal variación debería reflejarse observacionalmente mediante el desplazamiento al rojo en las líneas de absorción de los cuántares. Propone como sugerencia estudiar la variación de la constante de estructura fina.

En 1969, O'Halmon et al. [35] reformulan LNH, de forma que, en vez de considerar la posibilidad de que únicamente varíe una de las constantes, lo hagan varias. Mediante la combinación de los monomios adimensionales de las constantes, llegan a la conclusión de que éstas deben variar de la siguiente forma

$$\frac{e^2}{\epsilon_0 G m_p m_e} \frac{h}{m_e c} \sim t, \quad G \rho \sim t^{-2}, \quad e^2 h^{-1} \sim t^0, \quad m_e m_p^{-1} \sim t^0, \quad (1.13)$$

obteniendo por lo tanto

$$G \sim t, \quad \rho \sim t^{-3}, \quad e^2 \sim t, \quad h \sim t. \quad (1.14)$$

Al igual que en el trabajo de Milne, podemos obtener estos resultados dentro del marco de la RG [12]. Considerando un modelo cuyo contenido de materia está descrito por un fluido perfecto, definiremos la densidad de energía mediante la siguiente ecuación de estado,  $\rho = a\theta^4$ , siendo  $\theta$  la temperatura de la radiación cósmica de fondo y donde  $a = \frac{\pi^2 k_B^4}{15c^3 \hbar^3}$  es la constante de radiación. De esta forma, la ecuación de conservación queda ahora como:

$$4 \frac{\theta'}{\theta} + 3(\gamma + 1)H + \frac{15\Lambda' c^7 \hbar^3}{8\pi^3 G k_B^4 \theta^4} + \frac{G'}{G} - 3 \frac{\hbar'}{\hbar} = 0. \quad (1.15)$$

Si imponemos la condición de conservación para el tensor energía-momento, entonces obtenemos la relación entre la densidad de energía y el radio del universo,  $\rho = A_\gamma f^{-3(\gamma+1)}$ , siendo  $A_\gamma$  una constante de integración con dimensiones  $[A_\gamma] = L^{2+3\gamma} M T^{-2}$ . De esta forma deducimos que

$$\begin{aligned} G(t) &\propto A_\gamma c^{5+3\gamma} t^{1+3\gamma}, & \hbar(t) &\propto A_\gamma c^{-3\gamma} t^{1-3\gamma}, & k_B^{-4} a(t) &\propto A_\omega^{-3} c^{9\gamma-3} t^{9\gamma-3}, \\ e^2(t) \epsilon_0^{-1} &\propto A_\gamma c^{1-3\gamma} t^{1-3\gamma}, & m_i(t) &\propto A_\gamma c^{-2-3\gamma} t^{-3\gamma}, & \rho(t) &\propto A_\gamma (ct)^{-3(\gamma+1)}, & f(t) &\propto ct, \end{aligned} \quad (1.16)$$

pudiendo extrapolar los resultados para otras ecuaciones de estado. En el caso  $\gamma = 0$  (que corresponde al modelo de O'Halmon et al) entonces se obtiene

$$G \propto t, \quad \hbar \propto t, \quad a \propto t^{-3}, \quad e^2 \epsilon_0^{-1} \propto t, \quad m_i \propto \text{const}. \quad (1.17)$$

Mientras que el resultado que obtenemos para el resto de magnitudes es:  $f \propto t$ , y  $\rho \propto t^{-3}$ .

Otras propuestas similares se deben a Kramarouskii y Chechev.[36]. A partir de estas fechas, la relación de trabajos se multiplica. Por ejemplo, y a destacar, está el de Bekenstein [37], quien en base a las propuestas de Gamow, formula un marco teórico bajo las hipótesis de covarianza, invarianza gauge, causalidad e imponiendo, además, que la longitud de Planck sea constante, i.e., que  $G, h$  y  $c$  sean constantes. Mediante formulaciones variacionales deduce las ecuaciones de campo e indica que las predicciones que hace el modelo no se pueden descartar solo en base a experimentos electromagnéticos y que, a nivel cosmológico, éstas coinciden con las experimentales. Por último, mencionar otro trabajo relacionado con las constantes electromagnéticas debido a Sumner [38], quien pone de manifiesto, a través de la construcción de un modelo con simetrías FRW, que  $\epsilon_0$  debe variar en función del radio del universo  $f(t)$ .

Sin embargo, ninguna de estas propuestas considera que la velocidad de la luz pueda variar. Encontramos en los siguientes trabajos algunas de las motivaciones que nos llevan a considerar a la constante de la velocidad de la luz como variable.

Page y Tupper [39] estudian y generalizan las teorías gravitatorias escalares invariantes Lorentz con la velocidad de la luz variable, i.e.,  $c = c(t)$ , propuestas por Whitrow y Morduch, donde estos autores propusieron que  $c$  varía de acuerdo a la relación

$$c^2 + 2\phi = \text{const.}, \quad (1.18)$$

siendo  $\phi$  el potencial gravitatorio,  $\phi = GM/R$ . Mediante formulaciones variacionales establecen las ecuaciones de campo, pasando a probar que las predicciones que hacen estas teorías concuerdan con las de la RG en el desplazamiento al rojo.

Precisamente a partir de las discrepancias observacionales detectadas del cambio en el brillo de las supernovas y la explicación clásica del desplazamiento al rojo (vía efecto Doppler), Bellert [40] propone que tal dificultad puede explicarse a través de la variación de la velocidad de la luz. No se trata pues de un modelo teórico, sino de una explicación puntual a una discrepancia observacional. Pero esta propuesta condujo a Troitskii [41] a formular un modelo cosmológico que explicase tal variación. Parte de la hipótesis de que  $c$  decrece en el tiempo (en base al trabajo de Bellert) y construye una métrica en la que  $c$  varía, pero el radio del universo es constante i.e., un universo estático. Muestra que el modelo conduce a las mismas fórmulas que las de la cosmología estándar, pero que las interpretaciones físicas son completamente diferentes. Para que la variación de  $c$  no conduzca a la variación de las constantes de interacción,  $\alpha$ ,  $\alpha_W$  y  $\alpha_S$ , i.e., variaciones de los espectros atómicos, estabilidad de los núcleos y otras regularidades, entonces permite que otras constantes también varíen de forma sincronizada (hipótesis conspiradora en la terminología de Wesson). De esta forma, la evolución del universo está conectada con la evolución de las constantes físicas y permite explicar, por ejemplo, la alta isotropía observada en la radiación cósmica de fondo y la alta velocidad de escape de los quásares. Sin embargo, en ningún momento deduce las ecuaciones de campo que gobiernen la variación de las constantes, y plantea cierta arbitrariedad a la hora de elegir las ecuaciones de las que deduce la variación de las constantes atómicas. Desde el punto de vista matemático, lo que en realidad hace el autor es imponer que las ecuaciones elegidas sean invariantes bajo cambios de escala, para que las magnitudes adimensionales, como las constantes de interacción, permanezcan constantes bajo estos cambios de escala.

Casi de forma simultánea Petit [42] propone un modelo con simetrías tipo FRW en el que  $c$  varía e impone, además, que todas las longitudes características, como la longitud de Planck, Compton o Jeans, varíen como el radio del universo; de esta forma propone que además de  $c$ , también puedan variar  $G$  y  $h$ . Básicamente Petit obtiene la variación de las constantes bajo la idea de invariancia gauge, ya que en ningún momento plantea ecuaciones de campo que describan la variación de dichas constantes. A diferencia de Troitskii, su modelo no es estático y las constantes de interacción continúan siendo constantes, a través de las relaciones gauge obtenidas. Las relaciones que obtiene son las siguientes

$$G \propto t^{-\frac{2}{3}}, c \propto t^{-1/3}, \hbar \propto t, a \propto t^{-2}, e \propto t^{\frac{1}{3}}, m_i \propto t^{\frac{2}{3}}, \Lambda \propto t^{-4/3}, f \propto t^{2/3}, \rho_m \propto t^{-4/3}. \quad (1.19)$$

En una serie de trabajos posteriores junto a Midy [43] rehacen su propuesta de la siguiente manera. Como la  $c$  varía y aparece en la expresión del tensor métrico, buscamos una función  $f(t)$  que resulte de alguna de las teorías clásicas de la gravitación; tal función no debe depender de hipótesis sobre la escala de referencia en la que está definida. Esto conduce a un problema que no se puede resolver de forma realista a menos que se introduzcan en el modelo más dimensiones. La idea es la siguiente: si uno vive sobre una variedad en la que no se puede encontrar ningún sistema de referencia (de tiempos, longitudes, etc), entonces lo que hace es pensar en que dicha variedad se encuentra sumergida en otra variedad (la variedad ambiente), respecto a la cual pueda referenciarse. Aquí es donde aparecen los modelos de cinco dimensiones (5D). Este procedimiento ya fue desarrollado por Einstein (en base a las teorías de Kaluza-Klein). Recientemente Wesson ha retomado este camino, que parece prometedor. Siempre podemos sumergir un modelo en el que se verifique las ecuaciones de Einstein (4D) en una variedad 5D pero  $Ricc$  plano i.e.  ${}^5Ricc = 0$ . Este hecho se apoya en un teorema debido a Campbell: “Cualquier variedad Riemanniana  $M_n$  puede ser sumergida en otra variedad Riemanniana  $M_{n+1}$  siempre que tenga el tensor de Ricci nulo”. De esta forma obtienen de las ecuaciones de campo, comportamientos exactos de los parámetros cosmológicos  $f, \rho, G, c$  etc... y regresan con estos resultados a sus relaciones gauge, que recalculan, estableciendo así una teoría más consistente desde el punto de vista formal. El modelo propuesto por Midy y Petit no está, obviamente, exento de problemas; por ejemplo, la forma en la que se sumerge la variedad 4D en la variedad ambiente, ya que tal y como se ha puesto de manifiesto, no es única. De igual forma, los autores tampoco proponen ecuaciones dinámicas que gobiernen la variación de las constantes. Se limitan, tal y como Petit hace en sus trabajos previos, a deducir la variación de las constantes a través de relaciones gauge.

Quizás la propuesta teórica más sólida con respecto a la variación de la velocidad de la luz se debe a Albrecht, Magueijo [44] y Barrow [45] (AMB). Consideran que, aunque el modelo cosmológico estándar concuerda bien con las observaciones, sin embargo éste no es capaz de explicar algunos aspectos teóricos, como la homogeneidad, la isotropía, la planitud o la formación de estructuras en el universo primitivo. Los modelos inflacionarios explican razonablemente bien los problemas apuntados anteriormente, pero Albrecht, Magueijo y Barrow sugieren que existen otras formas de explicarlos. Una de ellas es a través de la variación de las constantes, en particular de la variación de la velocidad de la luz. Asumiendo un universo con predominio de radiación y en el que las ecuaciones de Einstein no se vean alteradas por la variación de  $c$ , i.e., la variación de  $c$  no afecta al tensor de curvatura, proponen un modelo en el que  $c$  varía, pero asumen (imponen) que lo haga de forma decreciente. Son conscientes

de los problemas teóricos que conlleva hacer semejante hipótesis, ya que la teoría resultante no es covariante ni invariante Lorentz. Con todas las restricciones impuestas y trabajando con un modelo homogéneo e isótropo, obtienen las ecuaciones de Friedmann habituales y deducen la ecuación que controla la variación de las constantes a partir de las ecuaciones de Friedman obteniendo

$$\left(T_{ij}^m\right)^{ij} = -\rho \frac{G'}{G} + \frac{3Kc^2}{4\pi Gf^2} \frac{c'}{c}, \quad (1.20)$$

siendo  $K$  la curvatura del espacio ( $K = -1, 0, 1$ ) y  $f$  el factor de escala que aparece en la métrica. La constante cosmológica, en este enfoque, aparece en  $T_{ij}^m$ . Siguen este procedimiento para poder llegar a la conclusión de que  $K = 0$ . Básicamente, las dependencias temporales que obtiene Barrow son las siguientes

$$c \sim f^n, \quad G\rho f^{3\gamma} \sim f^{2n+3\gamma-2}, \quad f \sim t^{2/3\gamma}, \quad (1.21)$$

donde en el caso de predominio de materia  $\gamma = 1$ ,  $n \leq -1/2$ .

Rápidamente, el modelo teórico propuesto deriva hacia una teoría que describe la variación de la constante de estructura fina, en base al postulado de que únicamente pueden variar  $c$  y  $h$ , mientras que la carga del electrón  $e$  permanece constante, en contraposición al modelo propuesto por Bekenstein [46]. Otras formulaciones se deben a Moffat y colaboradores [47]. Recientemente Moffat y Magueijo han revisado y criticado las distintas propuestas en [48] poniendo de manifiesto las limitaciones y alcances de cada una de ellas.

Por último y no menos importante, hablaremos ahora de la constante cosmológica  $\Lambda$ . Ésta fue introducida por primera vez por el propio Einstein en 1917 [49], cuando encontró la primera solución a sus ecuaciones. Las dos motivaciones que llevaron a considerar su inclusión fueron las siguientes. En primer lugar, Einstein creía que el espacio era globalmente cerrado, de esta forma podría incorporar el principio de Mach a la solución. En segundo lugar, considerar que el universo era estático (en concordancia con las observaciones de aquella época). Además, la incorporación del término  $\Lambda$ , era compatible con los principios de la Relatividad General, en particular con el principio de conservación para la materia. Hoy sabemos, gracias al teorema de Lovelock [50], que se trata de hecho, de la única combinación posible compatible con las identidades de Bianchi. Al mismo tiempo, de Sitter encontró otra solución a las ecuaciones de campo que no era estática y que incorporaba la constante cosmológica pero era completamente anti-Machiana, al no contener materia, únicamente el término  $\Lambda$ .

Posteriormente, Friedmann y Lemaître encontraron otras soluciones no estáticas a las ecuaciones de Einstein. Estas soluciones tardaron en ser aceptadas, ya que no fue hasta 1929 cuando se aceptó que el universo es expansivo (Hubble). Esto condujo a rechazar el término  $\Lambda$ , a excepción de unos pocos autores, como Eddington, quien la consideró en sus coincidencias numerológicas. No obstante, su consideración resolvía el problema de la edad del universo ya que, en aquella época, el parámetro de Hubble era muy pequeño. Lemaître consideraba que su universo comenzó en una gran explosión, seguida de una expansión decelerada debida a efectos gravitatorios hasta alcanzar el radio de Einstein, momento éste en el que las fuerzas repulsivas debidas a una constante cosmológica "positiva" conducían al universo a una nueva fase expansiva, esta vez acelerada. De esta forma se conseguía resolver el problema de la edad del universo (fijada por la edad de las estrellas). Ya en la década de los 50, al tener un mejor conocimiento de la estructura estelar y mejores datos observacionales sobre el parámetro de Hubble, la constante cosmológica volvió ser descartada del plano teórico, ya que no era necesaria para reconciliar las predicciones teóricas con las observaciones. Años más tarde, en la década de los 60 y, otra vez a raíz de discordancias observacionales, esta vez debido al alto desplazamiento al rojo observado en los quásares, volvió a ser tenida en cuenta y descartada posteriormente en cuanto se mejoraron dichas observaciones.

Sin embargo, Zeldovich [51] puso de manifiesto su importancia al considerar las posibles contribuciones de la densidad de energía del vacío. Curiosamente, parte de los trabajos de Dirac y Eddington y, mediante relaciones dimensionales entre magnitudes cosmológicas y constantes de la física de partículas, llega a establecer la relación entre la constante cosmológica y las partículas elementales,  $\Lambda \sim G^2 m^6 / h^4$ , siendo  $m$  la masa del protón, solo que aquí no varía ninguna de las constantes (recordar que  $[\Lambda] = L^{-2}$ ). De esta forma concluye que no es posible descartar el término  $\Lambda$ , ya que éste es distinto de cero. En el contexto de la teoría cuántica de campos [52], una constante cosmológica corresponde a la densidad de energía del vacío y el valor de  $\Lambda$  corresponde a una pequeñísima densidad de energía. Con el desarrollo del concepto de simetrías, en el modelo estándar de Física de partículas, la idea de expansión y enfriamiento del universo viene acompañada de una serie de transiciones de fase. Cada una de estas transiciones de fase tiene un calor latente, que aparece como contribución a  $\Lambda(t)$  (i.e., a una constante cosmológica "dinámica") o energía oscura [53]. El decrecimiento en valor de esta densidad de energía oscura en cada transición de fase, es mucho mayor que el valor aceptado dentro de la cosmología relativista. Esta nueva

concepción, condujo de forma natural a la creación de los modelos inflacionarios, donde el universo primitivo estaba dominado por una densidad de energía modelada por un campo escalar  $\phi(t)$  cuyo potencial actúa como  $\Lambda$ . De esta forma, en el contexto cosmológico, vemos que  $\Lambda$  ha vuelto a ser tenida en cuenta, esta vez gracias a la Física de partículas. No obstante existe un problema, pues el valor observado de  $\Lambda$  es mucho menor que el teórico. Existen diferentes argumentos teóricos que tratan de explicar esta dificultad, como pone de manifiesto Weinberg en [54]. Por ejemplo, en el contexto de la cosmología cuántica, Sato y colaboradores [55] demuestran que  $\Lambda$  necesariamente debe variar con el tiempo. Con esta argumentación en mente, Chen y Wu [56], mediante consideraciones dimensionales, determinan que la constante cosmológica debe seguir la ley,  $\Lambda \sim R^{-2}$ , siendo  $R$  el radio del universo. La forma más sencilla de aliviar la discrepancia teórico-observacional de la constante cosmológica, ha sido por tanto, considerarla como una función variable decreciente en el tiempo (ver por ejemplo [57], [58], [59] y un reciente sumario debido a Padmanabhan [60]).

A lo largo de los últimos años hemos ido desarrollando varios modelos cosmológicos con los que poder explicar la posible variación de las constantes físicas universales, principalmente  $G$ ,  $c$  y  $\Lambda$ . Resumimos a continuación los principales resultados y diferencias con respecto a los modelos antes expuestos.

Consideramos, en una primera aproximación al problema [61]-[62] y [63], al igual que Albrecht, Magueijo y Barrow, que la variación de  $c$  no afecta al tensor de curvatura y que, por tanto, las ecuaciones de Friedmann continúan siendo válidas. Sin embargo, nosotros no imponemos condiciones de partida sobre el comportamiento de ninguna de las constantes y, sobre todo, en vez de deducir las ecuaciones dinámicas para las constantes a través de las propias ecuaciones de Friedmann, las obtenemos mediante la identidad de Bianchi

$$\left(R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}R\right)^{ij} = 0 = \left(\frac{8\pi G(t)}{c^4(t)}T_{ij} + \Lambda(t)g_{ij}\right)^{ij}. \quad (1.22)$$

A partir de esta ecuación y junto con el principio de conservación  $\left(T_{ij}^m\right)^{ij} = 0$  - de otra forma estaríamos incorporando procesos de creación de materia- deducimos las ecuaciones de campo con las que determinamos el comportamiento de las "constantes". No obstante, entendemos que el enfoque adoptado es fenomenológico, ya que no disponemos de una aproximación variacional. Por lo tanto, considerando que la parte material está descrita por un fluido perfecto ( $p = \gamma\rho$ ), nuestras ecuaciones de campo resultantes son

$$3H^2 = \frac{8\pi G}{c^2}\rho + \Lambda c^2, \quad (1.23)$$

$$2H' + 3H^2 = -\frac{8\pi G}{c^2}p + \Lambda c^2, \quad (1.24)$$

$$\rho' + 3(\gamma + 1)\rho H = 0, \quad (1.25)$$

$$\frac{\Lambda'c^4}{8\pi\rho G} + \frac{G'}{G} - 4\frac{c'}{c} = 0. \quad (1.26)$$

Vemos que la ecuación (1.20) es deducida a partir de las Ecs. (1.23 y 1.24), mientras que nuestras ecuaciones (1.25 y 1.26) han sido deducidas de la Ec. (1.22). De igual forma resaltamos que, mientras que AMB obtienen una ecuación del tipo  $\left(T_{ij}^m\right)^{ij} \neq 0$  (Ec.1.20), en nuestro caso hemos impuesto la condición  $\left(T_{ij}^m\right)^{ij} = 0$  (no consideramos procesos de creación de materia). Nuestro enfoque posee además otra ventaja ya que, teniendo en cuenta la identidad de Bianchi, podemos trabajar con modelos anisótropos, mientras que el método de AMB únicamente se limita a modelos tipo FRW.

Si, por ejemplo, adoptamos la siguiente ecuación de estado para la densidad de energía,  $\rho = a\theta^4$ , entonces podemos calcular la posible variación de otras constantes, como la de Planck. De esta forma, las ecuaciones de conservación (1.25 y 1.26) quedan ahora

$$4\frac{\theta'}{\theta} - 3\left[\frac{c'}{c} + \frac{\hbar'}{\hbar}\right] + 3(\gamma + 1)H = 0 = -\frac{15\Lambda'c^7\hbar^3}{8\pi^3Gk_B^4\theta^4} - \frac{G'}{G} + 4\frac{c'}{c}. \quad (1.27)$$

Teniendo en cuenta el formalismo  $THE\mu$  ideado por Lightman y Lee  $\left(e^2 = \epsilon_0 = \mu_0 = \frac{1}{c}\right)$ , somos capaces de deducir también el comportamiento de las constantes electromagnéticas, llegando así a las siguientes relaciones

$$G \sim t^{\frac{4-6(\gamma+1)}{3(\gamma+1)}}, c \sim t^{\frac{2-3(\gamma+1)}{3(\gamma+1)}}, \Lambda \sim t^{\frac{-4}{3(\gamma+1)}}, \hbar \sim t^{\frac{1-\gamma}{(\gamma+1)}}, m \sim t^{\frac{2}{3(\gamma+1)}}, e^2\epsilon_0^{-2} \sim t^{\frac{8}{3(\gamma+1)}-2}, \quad (1.28)$$

mientras que

$$f \sim t^{\frac{2}{3(\gamma+1)}}, \rho \sim t^{-2}, k_B\theta \sim t^{\frac{2\gamma}{(\gamma+1)}}, a^{-1/4}s \sim t^{\frac{3(1-3\gamma)}{4}}. \quad (1.29)$$

De esta forma, si fijamos la ecuación de estado  $\gamma = 0$  (modelo con predominio de materia), entonces vemos que obtenemos los mismos resultados que Petit (Ec. 1.19) y AMB (Ec. 1.21), pero sin necesidad de imponer, de antemano, ninguna restricción sobre el comportamiento de  $c$ . Además, se verifica la relación  $G/c^2 = \text{const}$ . Recalamos el hecho de que al considerar la variación de  $c$ , entonces  $G$  es decreciente, mientras que en los modelos en los que  $c$  no varía,  $G$  es creciente (ver Ec. 1.17).

Sin embargo, con estas hipótesis no somos capaces de resolver el problema de la entropía del universo, que continúa siendo constante,  $s \propto t^{\frac{3(1-3\gamma)}{4}} = \text{const}$ . Para resolver este problema podemos considerar, por ejemplo, hipótesis suplementarias, como son los procesos de creación adiabática de materia, o los fluidos viscosos [61]-[62] y [63]. Si, por ejemplo, consideramos procesos de creación de materia, entonces existe otra presión adicional definida por la expresión

$$p_c = - \left[ \frac{\rho + p}{3nH} \psi \right], \quad \psi = 3\beta nH, \quad (1.30)$$

de manera que la ecuación de conservación (1.25) queda ahora de la siguiente manera

$$\rho' + 3(\gamma + 1)\rho \frac{f'}{f} = (\gamma + 1)\rho \frac{\psi'}{n} \implies \rho = A_{\gamma,\beta} f^{-3(\gamma+1)(1-\beta)}. \quad (1.31)$$

Rehaciendo todos los cálculos, obtenemos

$$G \sim t^{\frac{2(1-\delta)}{\delta+1}}, c \sim t^{\frac{(1-\delta)}{\delta+1}}, \hbar \sim t^{\frac{5-\delta}{\delta+1}}, \Lambda \sim t^{\frac{-4}{\delta+1}}, \rho \sim t^{-2}, f \sim t^{\frac{2}{\delta+1}}, k_B\theta \sim t^{\frac{4-2\delta}{\delta+1}}, a^{-1/4}s \sim t^{\frac{6}{\delta+1}-\frac{3}{2}}, \quad (1.32)$$

siendo  $\delta = 3(\gamma + 1)(1 - \beta) - 1$ . El caso con un fluido viscoso es análogo.

Sabemos que el comportamiento de la constante de Planck  $h$  ha sido deducido a través de la imposición de una determinada ecuación de estado, y que en el enfoque fenomenológico llevado a cabo, hemos extrapolado los resultados a otras ecuaciones de estado. Para determinar su comportamiento en otro marco teórico, consideramos ahora el de la cosmología cuántica, donde aparece de forma natural al cuantizar las ecuaciones de campo. Con tal propósito consideramos la ecuación de Wheeler-DeWitt [64] que nos permite deducir el comportamiento de las constantes  $G, c, \hbar$  y  $\Lambda$ . Considerando un modelo FRW para un fluido perfecto, la ecuación de Wheeler-DeWitt resulta  $\hat{H}\psi = 0$ , i.e.,

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial f^2} - \frac{9\pi^2 c^6 f^2}{4\hbar^2 G^2} \left( k - \frac{\Lambda f^2}{3} - \frac{8\pi G}{3c^4} A_{\gamma} f^{-1-3\gamma} \right) \right] \psi = 0, \quad (1.33)$$

obteniendo el siguiente comportamiento

$$G \propto f^{1-x}, \quad c \propto f^{(1-x)/2}, \quad \hbar \propto f^{(5-x)/2}, \quad \Lambda \propto f^{-2}, \quad (1.34)$$

donde  $x = 3\gamma + 2$ ; además se observa que  $G/c^2 = B$ , siendo  $B = \text{const}$ . En este caso, las constantes dependen del radio del universo  $f$ , ya que  $t$  no es una magnitud dentro de la teoría. Vemos que hemos obtenido  $\Lambda \propto f^{-2}$  como [55] y [56]. Con estos resultados, calculamos la probabilidad de que el universo haya surgido de la nada,  $|\langle FRW(f_0) | nada \rangle|^2 = P$ , resultando

$$P \simeq \exp \left[ -\frac{2}{\hbar} \int_0^{f_0} \sqrt{2m_p [V(f')]} df' \right], \quad (1.35)$$

donde,  $V(f) = \frac{9\pi^2}{4\hbar^4} f^2 \left( k - \frac{\Lambda f^2}{3} - \frac{8\pi G}{3c^4} A_{\gamma} f^{-1-3\gamma} \right)$ .

Mientras que el método para calcular los anteriores resultados estaba basado únicamente en consideraciones dimensionales (ya que trabajamos en medios homogéneos e isótropos, FRW), nos preguntamos si utilizando otras técnicas de cálculo, podríamos obtener más soluciones. Para ello utilizamos en [65] métodos de similitud, un método ampliamente utilizado en ecuaciones en derivadas parciales, que nos permitiera reducir el número de variables que aparecen en nuestras ecuaciones de campo. Por ejemplo, si consideramos un fluido viscoso con  $G, c$ , y  $\Lambda$  variables, entonces la ecuación a estudiar es [65]

$$\rho' + 3(\gamma + 1)\rho H - 9k_s \rho^s H = - \left[ \frac{\Lambda' c^4}{8\pi G} + \rho \frac{G'}{G} - 4 \frac{c'}{c} \rho \right], \quad (1.36)$$

es decir, se trata de una ecuación diferencial ordinaria (ODE), pero con cinco variables. Si la viscosidad sigue una ley  $\xi \sim k_s \rho^s$ , entonces el método nos lleva a obtener los siguientes monomios:  $\pi_1 = \rho k_s^{-\frac{1}{s}} t^{\frac{-1}{s-1}}$  y  $\pi_2 = \Lambda c^2 t^2$ , con los que reducimos el número de variables de la ecuación de partida (1.36). Teniendo en cuenta el resto de las ecuaciones de campo, llegamos a los siguientes resultados

$$c \sim t^\chi, G \sim t^{b-2+2\chi}, \rho \sim t^{-b}, \Lambda c^2 \sim t^{-2}, f \sim t^D, \quad (1.37)$$

siendo  $b = \frac{1}{s-1}$ , y  $\chi, D \in \mathbb{R}$  (ver [65] para detalles). En el caso particular en que  $s = 1/2$ , i.e.,  $b = 2$ , entonces se observa que se recupera la relación:  $\frac{G}{c^2} = \text{const}$ . Precisamente cuando el parámetro de la viscosidad es  $s = 1/2$ , vemos que éste resulta ser un valor importante dentro de la teoría de los fluidos viscosos, ya que, tal y como demostrábamos en [66] mediante el grupo de renormalización (en su versión desarrollada para el estudio asintótico de ecuaciones de evolución no lineales), las ecuaciones de un modelo FRW viscoso (teoría causal completa) son invariantes bajo transformaciones de escala si  $s = 1/2$ . Estudiando el comportamiento asintótico, mostrábamos que el modelo tendía hacia un modelo plano tipo FRW, pero sin viscosidad, i.e., la solución tiende hacia el punto fijo de las ecuaciones del grupo de renormalización.

El hecho de poder estudiar una ODE mediante técnicas de similaridad (un caso particular de simetrías de escala), nos indica que pueden existir más simetrías y, por tanto, a través de éstas podemos obtener más soluciones. Por ello en [67] y [68] iniciamos el estudio de modelos cosmológicos con constantes variables ( $G, c$  y  $\Lambda$ ) mediante el empleo de grupos de Lie. Las ecuaciones de campo (1.23-1.26) pueden ser combinadas para dar lugar a la siguiente ODE de segundo orden

$$\rho'' = \frac{\rho'^2}{\rho} + A \frac{G}{c^2} \rho^2, \quad (1.38)$$

siendo  $12\pi(\gamma + 1)^2 = A$ . Estudiando las simetrías,  $X = \zeta(t, \rho)\partial_t + \eta(t, \rho)\partial_\rho$ , que admite (1.38), encontrábamos que

$$\zeta(t, \rho) = -2et + a, \quad \eta(t, \rho) = (bt + d)\rho, \quad (1.39)$$

siendo  $a, b, d, e \in \mathbb{R}$ , constantes numéricas, junto con la condición de integración

$$\frac{G'}{G} = 2\frac{c'}{c} + \frac{bt + d - 4e}{2et - a}. \quad (1.40)$$

Las diferentes soluciones que encontramos vienen en función de los posibles valores de las constantes numéricas  $a, b, d, e$ . Si por ejemplo,  $b = 0$  y  $d - 4e = 0$ , lo que corresponde a una simetría de escala, entonces encontramos la siguiente solución

$$G = G_0 t^{-2\alpha}, \quad c = c_0 t^{-\alpha}, \quad \Lambda = \Lambda_0 t^{-2(1-\alpha)}, \quad f = (A_\gamma t)^{\frac{2}{3(\gamma+1)}}, \quad \rho = \rho_0 t^{-2}, \quad (1.41)$$

verificándose la condición de integrabilidad

$$\frac{G'}{G} = 2\frac{c'}{c} \implies \frac{G}{c^2} = \text{const}, \quad (1.42)$$

y siendo  $\alpha = \frac{\lambda}{1+\lambda}$ , con  $\lambda = \Lambda_0/8\pi B\rho_0 \in \mathbb{R}^+$ . Por tanto, demostrábamos que el enfoque dimensional realizado era correcto, ya que una de las soluciones obtenidas, la simetría de escala, coincidía con ella. De igual forma, hacíamos ver que esta solución coincidía con la autosimilar y que otra de las soluciones, que obteníamos a través de otra simetría, coincidía con la cinemática autosimilar.

En trabajos posteriores [69] y [70] consideramos el mismo modelo cosmológico, pero esta vez rebajando las hipótesis de partida, de tal forma que la variación de  $c$  sí afecta al tensor de curvatura y, por tanto, habrá modificaciones en las ecuaciones de Einstein, resultando éstas de la siguiente forma

$$2H' - 2\frac{c'}{c}H + 3H^2 + \frac{Kc^2}{f^2} = -\frac{8\pi G}{c^2}p + \Lambda c^2, \quad (1.43)$$

$$H^2 + \frac{Kc^2}{f^2} = \frac{8\pi G}{3c^2}\rho + \frac{1}{3}\Lambda c^2, \quad (1.44)$$

$$\rho' + 3(\omega + 1)\rho H = -\left(\frac{G'}{G} - 4\frac{c'}{c}\right)\rho - \frac{\Lambda'c^4}{8\pi G}. \quad (1.45)$$

Llevando a cabo un análisis similar al anterior, combinando las ecuaciones de campo (1.43-1.45), obtenemos la siguiente ODE

$$\rho'' = \frac{\rho'^2}{\rho} + \rho' \frac{c'}{c} - 2 \frac{Kc^2}{f^2} \rho + A \frac{G}{c^2} \rho^2, \quad (1.46)$$

donde  $A = 12\pi(\gamma + 1)^2 > 0$ , y  $K$  representa la curvatura del 3-espacio. Si  $K = 0$ , entonces las simetrías de la Ec. (1.46) son:  $\xi = at + b$ ,  $\eta = -2a\rho$ , con las siguientes condiciones de integrabilidad

$$c'' = \frac{c'^2}{c} - \frac{ac'}{at + b}, \quad \frac{G'}{G} = 2 \frac{c'}{c}, \quad \implies \quad \frac{G}{c^2} = \text{const}, \quad (1.47)$$

siendo  $a$  y  $b$  constantes numéricas. La solución encontrada en el caso,  $b = 0$ , (simetría de escala) es la siguiente

$$c(t) = K_2 t^{K_1}, \quad G = K_2^2 t^{2K_1}, \quad \rho \sim t^{-2}, \quad \Lambda \sim t^{-2(1+K_1)}, \quad f = f_0 t^{2/3(\gamma+1)}, \quad (1.48)$$

donde  $K_1 \in (-1, 0)$ . De esta forma demostrábamos que, si consideramos los efectos de la variación de  $c$  en el tensor de curvatura, el resultado desde el punto de vista cualitativo, era el mismo que en el caso de considerar la hipótesis contraria (caso anterior).

El estudio de la radiación cósmica de fondo nos indica que el universo no es del todo isótropo [71] y que, por tanto, el modelo geométrico del modelo estándar, i.e., el FRW no es el más adecuado, ya que éste es isótropo. Ello nos llevó a considerar modelos homogéneos pero anisótropos, como los modelos LRS Bianchi I [72] y [73] donde  $G$ ,  $c$  y  $\Lambda$  son funciones variables en el tiempo. Aunque los cálculos y los resultados eran correctos, hoy sabemos que las conclusiones no lo son, ya que las constantes varían si  $\Lambda < 0$ .

Mientras que los modelos con  $G$  y  $\Lambda$  variables se pueden deducir a partir de formulaciones variacionales, tal y como veremos en el tercer capítulo de esta Tesis, los modelos que además permiten la variación de la velocidad de la luz no han sido formulados a partir de ningún principio de mínima acción. Simplemente, en el enfoque fenomenológico expuesto, se ha introducido *ad hoc* tal variación, reemplazando  $c$  por  $c(t)$  en las ecuaciones de campo y, considerando la identidad de Bianchi, hemos podido deducir las ecuaciones dinámicas que gobiernan la variación de  $G$ ,  $c$  y  $\Lambda$ . Tal y como ha puesto de manifiesto Ellis [74], al entrar  $c$  en muchas de las ecuaciones de la Física moderna, uno necesita considerar los efectos de la variación de la velocidad de la luz sobre todas las ecuaciones de la Física, no solo en un modelo cosmológico. Aunque hoy estamos muy lejos de tener una teoría basada en formulaciones lagrangianas que explique la variación de  $c$ , creemos que el camino a seguir es precisamente éste, i.e., el de construir una teoría lagrangiano-hamiltoniana desde el principio y admitir únicamente aquellas soluciones derivadas del principio de mínima acción (a la Brans-Dicke) sin perder de vista los hechos experimentales, ya que éstos están en la raíz de la Física, más que el puro formalismo. En la actualidad contamos con multitud de evidencias experimentales que podrían apoyar la idea de una pequeña variación de las constantes, tal y como veremos en la siguiente sección.

Por ello, en esta Tesis, estudiaremos principalmente modelos cosmológicos en los que  $G$  y  $\Lambda$  varíen. Por ejemplo, en [75] y [76] estudiábamos, en el contexto de modelos viscosos con simetrías tipo FRW, i.e., modelos homogéneos e isótropos, cómo varían  $G$  y  $\Lambda$ . Mientras que en [75] partíamos de una ecuación de estado muy restrictiva,  $\Pi \sim \rho \sim p$ , i.e., que la presión viscosa  $\Pi$  varía de forma proporcional a la densidad de energía, en [76] imponíamos la condición  $\Lambda \sim H$  (siendo  $H$ , la función de Hubble). En ambos trabajos llegábamos a la conclusión de que  $\Lambda$  es una función positiva y decreciente en el tiempo, mientras que  $G$  es creciente, pero de forma asintótica llega a un valor constante.

## 1.2. Valores y límites observacionales

Mientras que en el primer congreso sobre constantes físicas celebrado en 1983 todas las comunicaciones hacían referencia a propuestas teóricas, en los últimos años, y a raíz de los avances observacionales, en el último congreso, JENAM 2010 [77], la mayor parte de las comunicaciones presentadas versaban sobre aspectos observacionales, en especial sobre la variación de  $\alpha$ , reflejando de esta manera, la evolución de este campo.

En esta sección únicamente mencionaremos algunos de los estudios observacionales referentes a la variación de  $G$  y  $\Lambda$ , que durante los últimos años se han llevado a cabo, encontrando en los trabajos [5]-[9] algunas referencias hasta el año 1990. En particular, Uzan [78] recoge en su trabajo de forma detallada y pormenorizada, los últimos estudios que se están llevando a cabo sobre la variación de las constantes.

### 1.2.1. La constante gravitatoria

Si  $G$  varía, entonces sus efectos afectarán al movimiento de los cuerpos, tales como planetas y púlsares binarios. De igual forma, dicha variación, afectará a la estructura estelar.

Límites provenientes de la mecánica celeste. La medida de la distancia entre Marte y la Tierra se ha podido medir con precisión gracias a las misiones que se han realizado, nos referimos a, Viking landers a Mars (desde Julio 1976 a Julio 1982). Ajustando los parámetros, mediante mínimos cuadrados, se ha calculado el siguiente límite sobre la variación de  $G$  [79]:  $G'/G = (2 \pm 4) \times 10^{-12} \text{yr}^{-1}$ .

De forma similar, midiendo la distancia entre la Tierra y la Luna se ha determinado la siguiente variación:  $G'/G = (0,1 \pm 0,4) \times 10^{-12} \text{yr}^{-1}$  [80] (1969 a 1990),  $G'/G = (1 \pm 8) \times 10^{-12} \text{yr}^{-1}$  [81] (1970 a 1994). Análisis más recientes llegan al siguiente resultado:  $G'/G = (4 \pm 9) \times 10^{-13} \text{yr}^{-1}$  [82] (2004).

Púlsares binarios. El cálculo del periodo,  $P$ , de la órbita de los púlsares binarios proporciona un nuevo test de la variación de  $G$ . Si el periodo orbital viene expresado mediante la relación,  $P = 2\pi \left(\frac{a^3}{Gm}\right)^{1/2}$ , donde,  $a$ , es el semi-eje mayor y  $m$ , es una masa, Nordvedt [83] demostró que la variación de  $G$ , en un límite fenomenológico apropiado, está relacionado con la variación del periodo  $P'/P \sim G'/G$ . De esta forma, mediante la observación de diferentes púlsares se han llegado a establecer los siguientes límites sobre la variación de  $G$ .

1. Observaciones del púlsar binario Hulse-Taylor PSR 1913 + 16, realizadas por Damour et al. [84], concluyen que la variación de  $G$  es del orden:  $G'/G \sim (1,0 \pm 2,3) \times 10^{-11} \text{yr}^{-1}$ , mientras que años más tarde, Damour et al [85], estiman de nuevo que:  $G'/G \sim (1,10 \pm 1,07) \times 10^{-11} \text{yr}^{-1}$
2. Otras observaciones, en este caso del púlsar PSR B1913 + 16, llevadas a cabo por Bisnovatyi-Kogan [86] concluyen con la siguiente estimación:  $G'/G \sim -0,6 \pm 2 \times 10^{-12} \text{yr}^{-1}$ . Kaspi et al. [87], realizan sus observaciones en dos púlsares, concluyendo que:  $G'/G \sim (4 \pm 5) \times 10^{-12} \text{yr}^{-1}$ , para el púlsar PSR B1913 + 16, mientras que:  $G'/G \sim (-9 \pm 18) \times 10^{-12} \text{yr}^{-1}$ , para el pulsar PSR B1855 + 09
3. Verbiest et al. [88] analizan el púlsar PSR J0437-4715 con datos tomados durante 10 años. Con una confianza del 95 %, concluyen que:  $|G'/G| \leq 23 \times 10^{-12} \text{yr}^{-1}$ , resultando ser este estudio uno de los más precisos de los llevados a cabo hasta la fecha

Dinámica estelar. La gravedad juega un papel esencial en la estructura y equilibrio hidrodinámico en el interior de las estrellas. Tal y como expusimos en la anterior sección, la mayor parte de las objeciones hechas a la hipótesis de Dirac provienen de esta teoría. La variación de  $G$  afectará a la luminosidad de las estrellas, lo que indica, por ejemplo, que se quema el hidrógeno a un ritmo mayor del estimado y, por lo tanto, producirá cambios en la estructura interna de las estrellas. A continuación enumeraremos algunos de los estudios que se están realizando y que determinan ciertos límites en la variación de  $G$  :

1. Estudios llevados a cabo por Guenther et al. [89] mediante helio-sismología, establecen un ritmo de cambio para  $G$  del orden:  $G'/G \leq 1,6 \times 10^{-12} \text{yr}^{-1}$ , siendo esta variación consistente con otras observaciones
2. Puesto que las enanas blancas son estrellas más viejas que el Sol ( $\sim 10$  Gyr), su estudio proporcionará mejores límites sobre la variación de  $G$  a escalas cósmicas. A través de la relación obtenida por Chandrasekhar,  $M \sim G^{-3/2} m_p^{-2}$ , la variación de  $G$  reflejará cambios en su estructura y evolución, de tal forma que podría afectar a su ritmo de enfriamiento. Biesiada y Malec [90] establecen el siguiente límite:  $|G'/G| \leq 4,10 \times 10^{-11} \text{yr}^{-1}$ . Otros estudios llevados a cabo por Bennvenuto et al. [91] concluyen que si  $G' < 0$ , entonces,  $-2,5 \times 10^{-10} \text{yr}^{-1} \leq G'/G \leq 0$ , mientras que si  $G' > 0$ , entonces,  $0 \leq G'/G \leq 4,0 \times 10^{-11} \text{yr}^{-1}$ . García-Berro et al. [92], mediante el estudio de la luminosidad, establecen en 1995 que:  $G'/G \leq -(1 \pm 1) \times 10^{-11} \text{yr}^{-1}$ , mientras que en (2011), mediante estudios numéricos, concluyen que:  $G'/G \sim -(1,8) \times 10^{-12} \text{yr}^{-1}$
3. La masa de Chandrasekhar,  $M_{Ch}$ , establece una escala de masas para la evolución de estrellas masivas, incluyendo la formación de estrellas de neutrones (límite de Oppenheimer-Volkoff) en el interior de las supernovas. Mediciones realizadas por Thorsett [93] sobre masas de estrellas de neutrones, establecen el siguiente límite sobre la variación de  $G$ :  $G'/G = (-0,6 \pm 2,0) \times 10^{-12} \text{yr}^{-1}$  (a un nivel de confianza del 68 %) o  $G'/G = (-0,6 \pm 4,2) \times 10^{-12} \text{yr}^{-1}$  (a un nivel de confianza del 95 %)

Jofré et al. [94] estudian cómo la variación de  $G$  produce cambios en el equilibrio hidrodinámico de las estrellas de neutrones. Estos cambios producen alteraciones en la temperatura de la superficie de la estrellas y, mediante observaciones en el ultravioleta, estiman que:  $G'/G = 4 \times 10^{-10} \text{yr}^{-1}$

4. De forma similar, se han utilizado observaciones de supernovas tipo Ia [95] para establecer límites superiores a la variación de  $G$ . A partir de la fórmula de Chandrasekhar, se infiere que la variación de  $G$  también puede afectar a la relación luminosidad-distancia, siendo estos efectos menores que los producidos sobre las masas de las estrellas. En un desplazamiento al rojo,  $z \simeq 0,5$ , Gaztañaga et al. [96] concluyen que:  $G'/G < 10^{-11} \text{yr}^{-1}$
5. Por último consideraremos el trabajo de Degl'Innocenti et al. [97], quienes establecen la siguiente acotación para la variación de  $G$ :  $-35 \times 10^{-12} \text{yr}^{-1} \leq G'/G \leq 7 \times 10^{-12} \text{yr}^{-1}$ , estudiando las masas de las estrellas en los cúmulos globulares. Afirman que el límite superior coincide con los obtenidos mediante estudios de mecánica celeste

*Límites cosmológicos.* Otros estudios basados en la radiación de fondo (CMBR) y la formación de elementos en el universo primitivo (BBN) y la combinación de ambos han sido llevados a cabo por muchos autores. Por ejemplo, un cambio de  $G$  produce un cambio de  $H$  (el parámetro de Hubble),  $H^{-1} \sim G^{-1/2}$  y, por tanto, produce un cambio en el radio del horizonte. De esta forma, un incremento en  $G$  produce un desplazamiento en la posición de los picos del espectro (aumentándolos). De igual forma, la variación de  $G$  afecta al ritmo de expansión del universo y al de formación de elementos: si  $G$  es creciente, este ritmo aumentará, mientras que si  $G$  decrece, entonces el ritmo disminuirá. Martins et al. [98], establecen la relación que existe entre la variación de  $G$  y la constante de estructura fina  $\alpha$  mediante el estudio de las anisotropías de la radiación cósmica de fondo. Umezu et al. [99] combinan el estudio de la radiación cósmica de fondo con el de formación de elementos para determinar límites en la variación de  $G$ .

Al ser nuestro propósito, determinar de forma teórica cómo varía  $G$  ( $G'/G = H$ ), entonces para contrastar nuestros resultados con los experimentales, necesitaremos conocer una buena estimación del parámetro de Hubble. Claramente, esta estimación solo es válida para valores bajos del desplazamiento al rojo, ya que únicamente para este rango de mediciones, el valor medio del parámetro de Hubble,  $\langle H \rangle$ , es válido. En esta Tesis utilizaremos el valor dado por Tegmark et al. [100]

$$t_0 = 14,1_{-0,9}^{+1,0} \times 10^9 \text{yr} = 14,1_{-0,9}^{+1,0} \text{Gyr}, \quad \langle H \rangle = 7,0671378 \times 10^{-11} \text{yr}^{-1},$$

indicando que si consideramos otro valor, por ejemplo, el dado por Zhang et al. [101],  $t_0 = 16,3_{-1,8}^{+2,3} \times 10^9 \text{yr}$ , entonces se obtiene  $\langle H \rangle = 7,0921986 \times 10^{-11} \text{yr}^{-1}$ , es decir, los resultados son muy sensibles al valor de  $\langle H \rangle$  considerado.

### 1.2.2. La constante cosmológica

*Evidencias de  $\Lambda > 0$ .* Desde el punto de vista observacional, el considerar  $\Lambda > 0$  proviene del estudio de la aceleración del universo [95] (SN Ia):

$$\frac{a''}{aH_0^2} = -\frac{1}{2} \left( \Omega_M(1+z)^3 + (1+3w)\Omega_{DE}(1+z)^{3(1+w)} \right) > 0, \quad (1.49)$$

donde  $w$  representa el parámetro de la ecuación de estado de la energía oscura,  $w \equiv p_{DE}/\rho_{DE}$ ,  $\Omega_M$  representa la densidad de masa y  $\Omega_{DE}$  la densidad de la energía oscura. Las mediciones de SN Ia indican que el universo actual se está acelerando, por lo que dicha aceleración debe producirse por la energía oscura con presión negativa ( $w < 0$ ). Desde el punto de vista teórico, vemos que

$$\sum \Omega_i = 1, \quad (1.50)$$

siendo  $\Omega_i \equiv 8\pi G\rho_i/3H_0^2$ , el parámetro de densidad de la  $i$ -th componente de energía,  $\rho_i$ . El parámetro de curvatura se define como,  $\Omega_K \equiv -k/a^2H_0^2$ . Las observaciones nos indican que la densidad de materia es mucho menor que la densidad crítica,  $\Omega_M < 1$ , y que el parámetro de curvatura es próximo a cero i.e.  $\Omega_K \sim 0$  (vivimos en un universo plano). Podemos por tanto, concluir que el universo actual está dominado por una energía oscura  $\Omega_{DE} = 1 - \Omega_M - \Omega_K > 0$ .

*Supernova y  $\Lambda'$ .* El límite actual sobre la ecuación de estado de la energía oscura, obtenido a través de observaciones de supernovas (580 supernovae) es  $|w - 1| \lesssim 0,07$  [102]. Futuras observaciones con un alto desplazamiento al rojo supernovae/galaxias/clusters/BAO podrían poner un nuevo límite para  $w$ , rebajándolo a  $|w - 1| \lesssim 0,01$ . La magnitud de la variación con respecto al tiempo de densidad de energía oscura, se desprende inmediatamente de la ecuación de movimiento:

$$\frac{\rho'_{DE}}{\rho_{DE}} = -3(1+w)H. \quad (1.51)$$

## 1.3. Quo Animo

Como indicamos en la primera sección de este capítulo, la mayoría de los trabajos efectuados sobre la variación de las distintas constantes, lo han hecho sobre la hipótesis de homogeneidad e isotropía de la geometría del espacio-tiempo, i.e., considerando únicamente modelos tipo FRW.

Por lo tanto, el objetivo de la Tesis es estudiar la variación de las “*constantes*” físicas universales  $G$  y  $\Lambda$  con respecto al tiempo cosmológico, en modelos homogéneos pero anisótropos, i.e., los denominados modelos de Bianchi, junto con el modelo Kantowski-Sachs. Estudiaremos dicha variación dentro del marco teórico de varias teorías gravitatorias, como son: la Relatividad General, convenientemente modificada, los modelos quintaesencia y diversas teorías tenso-escalares. El estudiar no solo diversos modelos Bianchi, sino distintas teorías gravitatorias, nos permitirá comparar los resultados obtenidos. Del conjunto de soluciones que podemos obtener de las ecuaciones de campo planteadas nos centraremos, únicamente, en las soluciones autosimilares, ya que este tipo de soluciones, corresponden a puntos de equilibrio (desde el punto de vista de los sistemas dinámicos), jugando de esta forma un papel predominante en la dinámica de los modelos cosmológicos tipo Bianchi. De igual forma, tal y como veremos, este tipo de soluciones describe comportamientos asintóticos de soluciones más complejas. Además, al ser las soluciones de tipo potencias, nos permitirá comparar las diferentes soluciones obtenidas para cada uno de los casos estudiados. Ponemos especial énfasis en el estudio de la isotropización de las soluciones obtenidas, de manera que podremos descartar, por no ajustarse a los valores observacionales, aquellas que no isotropicen, es decir, cuando los valores de los parámetros de anisotropía no son pequeños.

El esquema que vamos a seguir en esta Tesis es el siguiente.

En el segundo capítulo, comenzamos describiendo los modelos Bianchi y los principales métodos para el estudio de la isotropización de las soluciones. Una vez descritos los ingredientes geométricos, pasaremos a explicar los métodos matemáticos utilizados para el estudio de los diferentes modelos teóricos considerados. En primer lugar, las soluciones autosimilares con las que obtendremos restricciones sobre la parte geométrica de los diversos modelos y, en segundo lugar, las colineaciones de materia, con los que obtendremos restricciones sobre las componentes de materia de cada uno de dichos modelos. Como con el método de las colineaciones de materia encontramos ciertas limitaciones y las ecuaciones bajo estudio contienen varias magnitudes, entonces, con el método de los grupos de Lie seremos capaces de determinar el comportamiento exacto de cada una de ellas. Estos métodos matemáticos nos permitan enunciar y demostrar teoremas sobre el comportamiento de cada una de las magnitudes, poniendo así especial interés en aspectos formales de las teorías consideradas, así como en el de encontrar soluciones exactas para cada uno de los modelos.

El tercer capítulo está dedicado a describir los diferentes modelos gravitatorios contemplados en esta Tesis.

- La primera de las teorías consideradas es la Relatividad General. Comenzamos describiendo cómo funcionan los métodos de las colineaciones de materia y los grupos de Lie, y como éstos nos pueden ayudar a determinar ecuaciones de estado, por ejemplo, en fluidos viscosos. En segundo lugar, modificaremos las ecuaciones de campo, de forma que esta teoría pueda describir la posible variación de las constantes  $G$  y  $\Lambda$  y obtendremos la forma que deben seguir cada una de las magnitudes en el marco de las soluciones autosimilares
- Modelos escalares: De manera sistemática, estudiamos la forma que puede adquirir el campo escalar  $\phi$  y su potencial  $V(\phi)$ , en el marco de las soluciones autosimilares. Estos modelos describen de forma natural la variación de  $\Lambda$ , y por tanto, para adecuar la variación de  $G$ , deberemos introducir modificaciones en las ecuaciones de campo y establecer la nueva dependencia funcional de cada una de las magnitudes. Estudiamos, al mismo tiempo, modelos escalares con y sin interacción con un fluido perfecto, así como sus respectivas modificaciones que permitan que  $G$  varíe. Al igual que en los casos anteriormente estudiados, estableceremos teoremas que describan el comportamiento de cada una de las magnitudes. Todos los teoremas son absolutamente genéricos, i.e., válidos para cualquier modelo Bianchi
- En tercer lugar estudiaremos diferentes modelos tenso-escalares. Debido a que existen diversas formas de introducir  $\Lambda$  en las ecuaciones de campo, se hace necesario estudiar por separado cada uno de estos modelos. El método seguido es idéntico al desarrollado en las anteriores secciones. Mediante el estudio de las colineaciones de materia y los grupos de Lie, determinaremos el comportamiento de cada una de las magnitudes, en el contexto, claro está, de las soluciones autosimilares. Del estudio del modelo general, deduciremos tres casos particulares: el de gravedad inducida, un modelo tipo Brans-Dicke con potencial y otro escalar donde  $G$  es constante y describe un modelo fantasma (phantom model) sin necesidad de tener una energía cinética negativa. Considerando modelos más generales, como las denominadas teorías  $f(R, \phi)$ , demostramos que existen soluciones tipo power-law para tales teorías. De igual forma demostramos que para el caso particular

$f(R)$  no existen soluciones ni tipo power-law ni autosimilares, de esta forma no estudiaremos en esta Tesis este tipo de modelos

- Para terminar, estudiaremos otras teorías tenso-escalares que también permiten la variación de  $G$  y  $\Lambda$ . En primer lugar, estudiaremos el modelo de gravedad conforme  $y$ , en segundo lugar, el modelo de Barber (un modelo derivado de la teoría de Brans-Dicke)

En los capítulos 4-8 estudiaremos los modelos Bianchi que admiten soluciones autosimilares. Al no existir soluciones de este tipo para los modelos Bianchi IV y VIII, dichas geometrías han sido excluidas de esta Tesis. Siguiendo el plan trazado en el tercer capítulo, el modelo Bianchi I es estudiado en el capítulo 4. El esquema de trabajo en todos los capítulos es el mismo. Comenzamos deduciendo la métrica y calculando el campo homotético asociado. Bajo las restricciones obtenidas, calculamos los parámetros de anisotropía, pasando así a calcular las soluciones exactas a cada uno de los modelos teóricos expuestos en el tercer capítulo. De esta forma, hemos sido capaces de encontrar nuevas soluciones en algunos de los modelos Bianchi estudiados. En el quinto capítulo estudiamos los modelos Bianchi II, mientras que el sexto capítulo está dedicado al estudio de los modelos Bianchi III y  $VI_h$  (incluido el  $VI_0$ ). En el séptimo capítulo hemos incluido las geometrías Bianchi V,  $VII_h$  y IX. La razón de estudiar estos tres modelos de forma conjunta, tal y como veremos, ha sido que las soluciones autosimilares obtenidas son isótropas (se trata de casos particulares de los modelos FRW). En el octavo capítulo, estudiamos el modelo Kantowski-Sachs, analizando más a fondo los modelos tenso-escalares camaleón y gravedad inducida.

En el noveno capítulo esbozaremos algunas de las propuestas para trabajos futuros. En primer lugar, planteamos las dificultades con las que nos encontramos al estudiar, mediante sistemas dinámicos, los modelos con constantes variables. En segundo lugar, demostramos que las teorías de cuerdas admiten soluciones autosimilares. De esta forma, creemos que este tipo de modelos puede describir, mediante su adecuada modificación, la variación de las constantes  $y$ , por último, estudiamos modelos de branas. Demostramos que este tipo de modelos no admite soluciones autosimilares; sin embargo, si de forma fenomenológica modificamos el modelo para que las constantes puedan variar, demostramos que sí existen soluciones autosimilares. No obstante, indicamos que quizá otros enfoques sean más adecuados.

El décimo capítulo está dedicado a las conclusiones obtenidas a lo largo de toda la Tesis.

Hemos añadido un apéndice donde describimos cómo estudiar, mediante grupos de Lie, la variación de  $G$  y  $\Lambda$ , en el modelo específico de la Relatividad General (modificada) para la geometría Bianchi I.

# Capítulo 2

## Métodos matemáticos

### Índice del capítulo

<b>2.1. Modelos de Bianchi</b> . . . . .	<b>17</b>
<b>2.2. Medida de la anisotropía. Invariantes de curvatura</b> . . . . .	<b>19</b>
<b>2.3. Simetrías de un tensor</b> . . . . .	<b>21</b>
2.3.1. Autosimilaridad . . . . .	23
2.3.2. Colineaciones de materia . . . . .	24
<b>2.4. Grupos de Lie</b> . . . . .	<b>25</b>

### 2.1. Modelos de Bianchi

A lo largo de esta Tesis consideraremos que  $(M, g)$ , variedad diferenciable (conexa, Hausdorff, 4-dimensional) es un espacio-tiempo dotado de una métrica tipo Lorentz  $g$  de signatura  $(-, +, +, +)$ .

Consideramos el espacio  $(M, g)$ . Definimos el grupo de isometrías [103]  $\text{Isom}(M)$  como

$$\text{Isom}(M) = \{ \phi : M \rightarrow M, \quad \phi \text{ isometría} \}, \quad (2.1)$$

donde decimos que  $\phi$  es una isometría si  $\phi^*g = g$ . Si consideramos el hecho de que un campo de Killing  $\xi_i$  ( $\mathcal{L}_{\xi_i}g = 0$ ) genera una isometría, entonces a cada  $\xi$  le corresponde un elemento del álgebra del grupo  $\text{Isom}(M)$ . De esta forma, el conjunto de campos de Killing forman un espacio vectorial de dimensión finita isomorfo al álgebra del grupo  $\text{Isom}(M)$ . Así, decimos que un espacio es homogéneo, si para cada par de puntos  $p, q \in M$  existe una  $\phi \in \text{Isom}(M)$ , tal que  $\phi(p) = q$ . Sabiendo cómo se relacionan las simetrías, los grupos y las álgebras, entonces mostraremos cómo eligiendo un álgebra podemos definir un espacio que posea estas propiedades de simetría el cual, por construcción, será simplemente transitivo.

El grupo de isometrías de una variedad es isomorfo a un grupo de Lie  $G$  y los campos de Killing satisfacen la relación  $[\xi_i, \xi_j] = C_{ij}^k \xi_k$ , donde,  $C_{ij}^k$ , son las constantes de estructura de  $G$ . Por tanto, los grupos de Lie pueden usarse para describir simetrías y, en particular, isometrías. Estudiando simetrías, es útil considerar las bases invariantes. Éstas están formadas por campos vectoriales,  $X_\mu$ , cada uno de los cuales es invariante bajo  $G$ , i.e., la derivada de Lie del campo con respecto a los campos de Killing es nula

$$[\xi_i, X_j] = 0. \quad (2.2)$$

Esta base puede ser construida simplemente imponiendo esta relación en un punto para un conjunto de campos vectoriales independientemente elegidos y utilizando los campos de Killing, entonces extenderla a lo largo de toda la variedad. La condición de integrabilidad para este conjunto de ecuaciones diferenciales (ED) de primer orden equivale a exigir que  $C_{\mu\nu}^\sigma$  sean las constantes de estructura de algún grupo. Los campos invariantes, de hecho, satisfacen la relación

$$[X_i, X_j] = -C_{ij}^k X_k. \quad (2.3)$$

Denotando las formas duales de  $X_i$  por  $\omega^i$ , éstas deben satisfacer la siguiente relación

$$d\omega^k = \frac{1}{2} C_{ij}^k \omega^i \wedge \omega^j. \quad (2.4)$$

Al ser los  $X_i$  invariantes, entonces podemos expresar la métrica como sigue

$$ds^2 = g_{ij}\omega^i \otimes \omega^j, \quad (2.5)$$

para alguna  $g_{ij}$ .

En cosmología, estamos interesados principalmente en las hipersuperficies espaciales 3-dimensionales. Los modelos de Bianchi son modelos cosmológicos que poseen hipersuperficies espaciales homogéneas, es decir, invariantes bajo la acción de un grupo 3-dimensional. Consideraremos espacios-tiempo que pueden ser foliados mediante hipersuperficies espaciales homogéneas  $S_t$ , y por lo tanto  $M = \mathbb{R} \times S_t$ , siendo  $\mathbb{R}$  la variable temporal y cada  $S_t$  es etiquetada con una variable temporal. Si  $\dim \text{Isom}(M) = 6$ , entonces  $S_t$  será un espacio transitivo multiple, i.e., tipo FRW, si  $\dim \text{Isom}(M) = 4$ , los espacios se denominan localmente rotacionales (LRS modelos de Bianchi), mientras que si  $\dim \text{Isom}(M) = 3$ , se denominan modelos de Bianchi, los cuales serán el objeto de estudio de esta Tesis.

La clasificación fue llevada a cabo por Bianchi en 1898 [104] quien clasificó los grupos de Lie 3-paramétricos. Los modelos de Bianchi son espacialmente homogéneos y, por tanto, tienen un grupo de isometrías  $G_3$ , 3-dimensional actuando de forma simplemente transitiva sobre las hipersuperficies espaciales. Los modelos de Bianchi pueden ser construidos de diferentes formas. Estos modelos están basados sobre las propiedades de una tétrada  $\{\mathbf{e}_i\}$  que conmutan con la base de los vectores de Killing  $\{\tilde{\xi}_j\}$ , los cuales generan el grupo de simetrías

$$[\mathbf{e}_i, \tilde{\xi}_j] = 0. \quad (2.6)$$

Aquí hemos tenido en cuenta el hecho de que para los modelos homogéneos, existe una foliación preferente del espacio-tiempo 4-dimensional en un producto de un espacio-tiempo con un Killing temporal y un grupo  $G_3$  3-dimensional de isometrías actuando de forma simplemente transitiva sobre las hipersuperficies espaciales, tales que el Killing temporal conmuta con los campos de Killing con carácter espacial. Consideraremos que los campos temporales son paralelos a la normal de las superficies de homogeneidad. En general, las constantes de estructura de los grupos de simetrías de estas superficies de tiempo constante, son dependientes del tiempo [105]-[106]. Sin embargo, de (2.6) se sigue que entre dos superficies homogéneas las constantes de estructura se preservan mediante transformaciones lineales. Uno es libre de mover la dependencia temporal entre las constantes de estructura y las componentes métricas ajustando la evolución temporal de las tétradas. Podemos elegir poner toda la variación temporal en las componentes espaciales de la métrica de la siguiente forma

$$ds^2 = -dt^2 + \gamma_{kl}(t)(e_i^k(x)dx^i)(e_j^l(x)dx^j), \quad (2.7)$$

donde,  $e_i^k(x)$ , son las 1-formas inversas a la tétrada espacial que tienen las mismas constantes de estructura  $C_{ij}^k$  que el grupo de isometrías y conmuta con el campo unitario normal a las superficies de homogeneidad,  $\mathbf{e}_0: \mathbf{e}_0 = \partial_t$  y  $\mathbf{e}_i = e_i^j \partial_j$ , tal que  $[\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j] = C_{ij}^k \mathbf{e}_k$  y  $[\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_i] = 0$ . Éste será el enfoque que utilizaremos en los diversos capítulos a lo largo de esta Tesis a la hora de construir las diferentes métricas. Otros enfoques están basados en el grupo de automorfismos del grupo de simetrías [107]-[108], o en poner la dependencia temporal en las funciones de conmutación de las bases vectoriales [109].

Daremos ahora una pequeña reseña sobre la clasificación de Bianchi de los distintos grupos  $G_3$ . La parte espacial de las constantes de estructura,  $C_{ij}^k$  puede ser descompuesta en sus partes irreducibles como sigue

$$C_{ij}^k = \epsilon_{ijl} n^{lk} + a_i \delta_j^k - a_j \delta_i^k \quad (2.8)$$

siendo  $n^{ij}$  simétrico. Las identidades de Jacobi pueden escribirse como sigue

$$n^{ij} a_j = 0. \quad (2.9)$$

Sin pérdida de generalidad, podemos elegir la tétrada como sigue,  $n_{ij} = \text{diag}(n_1, n_2, n_3)$ , y fijar,  $a^i = (a, 0, 0)$ , lo cual reduce las identidades de Jacobi a,  $n_1 a = 0$ . Esto nos permite clasificar los posibles grupos de Lie de la siguiente forma. Podemos hacer dos clasificaciones de acuerdo a si  $a = 0$  (Clase A) o no (Clase B). En la tabla adjunta 2.1 exponemos con más detalle dicha clasificación concerniente a los distintos tipos de Bianchi especificados por los diferentes  $n^{ij}$ . Esta clasificación es independiente del enfoque que se haya seguido [110] (ver también [111]-[112] y [113]).

Clase	Tipo	$n_1$	$n_2$	$n_3$	$a$	
A	I	0	0	0	0	$C_{ij}^k = 0$
	II	+	0	0	0	$C_{32}^1 = 1$
	VI <sub>0</sub>	0	+	-	0	$C_{13}^1 = m, C_{23}^2 = -m$
	VII <sub>0</sub>	0	+	+	0	$C_{12}^3 = 1, C_{13}^2 = -1$
	VIII	-	+	+	0	$C_{12}^3 = C_{32}^1 = C_{31}^2 = 1$
	IX	+	+	+	0	$C_{23}^1 = C_{12}^3 = -C_{13}^2 = 1$
B	V	0	0	0	+	$C_{13}^1 = m = C_{23}^2$
	IV	0	0	+	+	$C_{13}^1 = C_{23}^1 = C_{13}^2 = 1$
	VI <sub>h</sub>	0	+	-	+	$C_{13}^1 = m, C_{23}^2 = -n$
	III	0	+	-	$n_2 n_3$	$C_{13}^1 = m$
	VII <sub>h</sub>	0	+	+	+	$C_{12}^2 = h = C_{13}^3, C_{12}^3 = -C_{13}^1 = 1$

Cuadro 2.1: Clasificación de los modelos de Bianchi. Los modelos FRW son casos especiales de: Bianchi IX (cerrado); Bianchi I y Bianchi VII<sub>0</sub> (plano); Bianchi V y Bianchi VII<sub>h</sub> (abierto). En el modelo VI<sub>h</sub>,  $h \equiv a^2/n_2 n_3 < 0$ , mientras que en el modelo VII<sub>h</sub>,  $h \equiv a^2/n_2 n_3 > 0$ . Se observa de igual forma que VI<sub>-1</sub> = III.

## 2.2. Medida de la anisotropía. Invariantes de curvatura

En esta Tesis estudiaremos modelos homogéneos pero anisótropos, ya que, tal y como indican las observaciones recientes, el universo se expande de forma acelerada, donde dicha aceleración está gobernada por una constante cosmológica positiva. De igual forma, se desprende de las observaciones que el universo puede ser “considerado” como homogéneo e isótropo [114]. Así, la mayor parte de los estudios teóricos llevados a cabo consideran únicamente geometrías tipo FRW (homogéneas e isotropas). Sin embargo, análisis posteriores de la CMBR revelan ciertas inconsistencias con respecto a la consideración de “universo isótropo”, ya que dichos estudios han puesto de manifiesto que el universo podría tener direcciones preferidas, lo que implica que el universo no es del todo isótropo [115]. Estudios más recientes de WMAP, utilizando varias técnicas, concluyen de igual forma [116]. Motivados por la asimetría observada a gran escala en la CMBR, Jaffe et al [117] han estudiado el modelo Bianchi VII<sub>h</sub> mostrando que este modelo explica las observaciones WMAP del primer año. Posteriormente, han reanalizado este modelo con los datos WMAP tercer año, llegando a las mismas conclusiones [118]. De esta forma y, en base a los datos observacionales de que disponemos, no podemos descartar el estudio de los modelos homogéneos y anisótropos.

La cuestión sobre la isotropización de los modelos cosmológicos ha sido ampliamente estudiada a lo largo de los últimos años, siendo Hoyle y Narlikar [119] los primeros en formular la denominada conjetura “sin pelo” (no-hair conjecture), la cual podemos expresar de la siguiente manera: *En presencia de una constante cosmológica positiva, todos los modelos expansivos tenderán hacia una solución tipo de Sitter*. Es decir, si consideramos una constante cosmológica, independientemente de las condiciones iniciales, todos los modelos se volverán homogéneos e isotropos. En la formulación de dicha conjetura, no queda muy claro lo que los autores quieren decir con universo expansivo y con tender hacia un estado de Sitter. No se aportó prueba alguna de tal conjetura, encontrándose contraejemplos de modelos expansivos que recolapsan y que nunca tienden hacia una solución tipo de Sitter [120]. Más tarde, Wald [121] dio una prueba de una versión simplificada de dicha conjetura, demostrando que todos los modelos Bianchi, a excepción del BIX, en presencia de una constante cosmológica positiva de forma asintótica muestran un comportamiento tipo de Sitter. Wald considera que la constante cosmológica es una constante verdadera y en su demostración, no hace uso de la identidad de Bianchi, por lo que dicha demostración es independiente de la evolución dinámica de las fuentes de materia. Recientemente, Capozziello y de Ritis [122] han retomado el problema y lo han extendido a un modelo tenso-escalar (particular) donde la constante cosmológica es considerada como una variable más del problema.

En esta sección veremos cómo podemos estudiar el problema de la isotropización de los modelos considerando tres criterios. Para ello empezamos definiendo la 4-velocidad de la siguiente manera:  $u^i = (1, 0, 0, 0)$ , de tal forma que se verifique,  $g(u^i, u^i) = -1$ . De la definición de la 4-velocidad, encontramos las siguientes definiciones; la expansión

$$\theta = u^i_{;i} \quad (2.10)$$

y definimos la función de Hubble,

$$H = \frac{1}{3}\theta. \quad (2.11)$$

Definimos el parámetro de deceleración  $q$ , de la siguiente manera

$$q = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{H} \right) - 1, \quad (2.12)$$

así, decimos que el universo se acelera (solución inflacionaria) si  $q < 0$ , mientras que si  $q \geq 0$ , entonces diremos que la solución obtenida es deflacionaria.

El shear se define como

$$\sigma_{ij} = u_{(i;j)} + \dot{u}_i u_j - \frac{1}{3} \theta h_{ij}, \quad (2.13)$$

siendo

$$h_{ij} = g_{ij} + u_i u_j, \quad \dot{u}_i = u_{i;j} u^j, \quad (2.14)$$

el tensor de proyección y la aceleración, respectivamente. A partir de la definición del shear, definimos el shear al cuadrado como

$$\sigma^2 = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \sigma^{ij}.$$

Isotropización significa, en esencia, que para grandes escalas temporales, i.e., cuando  $t$  es suficientemente grande, y por lo tanto el volumen tiende a infinito, los factores de escala, crecen al mismo ritmo [123].

Para medir la anisotropía de un modelo contamos con los siguientes criterios. El primero consiste en definir el parámetro de anisotropía,  $\mathcal{A}$ , como sigue

$$\mathcal{A} = \frac{2\sigma^2}{3H^2}, \quad (2.15)$$

de forma que diremos que el modelo isotropiza si  $\mathcal{A} \rightarrow 0$  (toma valores próximos a cero), lo cual es equivalente a que el shear tienda a cero, i.e.,  $\sigma^2 \rightarrow 0$ , (ver [124]). El parámetro de anisotropía es adimensional y mide la anisotropía en el flujo de Hubble comparando el shear  $\sigma^2$  con la función de Hubble  $H$ . La anisotropía en la radiación cósmica de fondo nos permite estimar el valor de  $\sigma^2$  en la época actual.

**Ejemplo 2.2.1** *A modo de ejemplo, y para aclarar la notación que utilizaremos a lo largo de la Tesis, consideramos una métrica tipo Bianchi I (ver capítulo 4), i.e.,*

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 dx^2 + b(t)^2 dy^2 + d(t)^2 dz^2,$$

donde  $a$ ,  $b$  y  $d$  representan los factores de escala que únicamente dependerán de la función tiempo  $t$ . De esta manera,  $H$  y  $\sigma^2$ , adquieren la siguiente forma

$$H = \frac{1}{3} \left( \frac{a'}{a} + \frac{b'}{b} + \frac{d'}{d} \right) = \frac{1}{3} \sum_i H_i, \quad \sigma^2 = \frac{1}{3} \left( \sum_i H_i^2 - \sum_{i \neq j} H_i H_j \right)$$

donde  $a' = \frac{da(t)}{dt}$ , etc. Diremos, por tanto, por definición, que un modelo isotropiza si cada factor de escala,  $a/f \rightarrow \text{const} > 0$ ,  $b/f \rightarrow \text{const} > 0$  y  $d/f \rightarrow \text{const} > 0$ , cuando el volumen ( $v = abd$ ) tiende a infinito,  $v \rightarrow \infty$ , siendo,  $f = v^{1/3}$ , el factor de escala medio. Entonces, redefiniendo las coordenadas, podemos hacer  $a/f \rightarrow 1$ ,  $b/f \rightarrow 1$ ,  $d/f \rightarrow 1$  y la métrica será manifiestamente isótropa cuando  $t$  es suficientemente grande.

El segundo medio para medir la anisotropía de un modelo es a través de sus invariantes de curvatura (ver por ejemplo [125, 126, 127] y [128]). Consideraremos los siguientes invariantes, la curvatura de Ricci,

$$I_0 = R_i^i, \quad (2.16)$$

el escalar de Krestchmann

$$I_1 = R_{ijkl} R^{ijkl}, \quad (2.17)$$

la contracción completa del tensor de Ricci,

$$I_2 = R_{ij} R^{ij}. \quad (2.18)$$

el escalar de Weyl,

$$I_3 = C^{abcd} C_{abcd} = I_1 - 2I_2 + \frac{1}{3} I_0^2, \quad (2.19)$$

donde  $C_{abcd}$  es tensor de curvatura de Weyl, así como los invariantes, tanto de la parte eléctrica como de la magnética del tensor de Weyl [129], i.e.,

$$I_4 = E_{ij}E^{ij}, \quad E_{ij} = C_{iljk}u^l u^k, \quad (2.20)$$

$$I_5 = H_{ij}H^{ij}, \quad H_{ij} = \frac{1}{2}\epsilon_{il}^{ef} C_{efjk}u^l u^k. \quad (2.21)$$

Definimos el parámetro de Weyl,  $\mathcal{W}^2$  [129],

$$\mathcal{W}^2 = \frac{I_3}{24H^4}, \quad (2.22)$$

siendo una magnitud adimensional que mide la anisotropía intrínseca del campo gravitatorio [130]. Las observaciones cosmológicas podrían, en principio, dar un límite superior a  $\mathcal{W}^2$ , aunque obtener una cota a esta magnitud está, hoy por hoy, un poco lejos de las presentes observaciones.

Por último, calcularemos la entropía gravitatoria. Desde el punto de vista termodinámico existen evidencias que nos indican que la entropía del universo está incrementando. El incremento de la entropía podría reflejarse en el incremento de anisotropías locales y que, por tanto, el tensor de Weyl refleje este fenómeno. Penrose formuló una conjetura en este sentido, la denominada conjetura del tensor de Weyl (WCC) [131]. Dicha hipótesis está motivada por la necesidad de tener una pequeña entropía en los primeros estadios de la evolución del universo, cuando su contenido de materia estaba en equilibrio termodinámico. Penrose argumenta que la limitación de una baja entropía es debida a la segunda ley de la termodinámica y que está ligada al tensor de curvatura de Weyl.

Wainwright y Anderson [132] han expresado esta conjetura mediante el cociente entre los invariantes de Weyl y Ricci

$$p^2 = \frac{I_3}{I_2}. \quad (2.23)$$

El contenido físico de esta conjetura es el siguiente. En los estados iniciales del universo, éste era homogéneo e isótropo. Rothman y Anninos [133, 134] (ver también [135]) han puesto de manifiesto que las magnitudes  $p^2$  y  $I_3$  son “*locales*”, en contraste con lo que usualmente pensamos de la entropía. Grøn y Hervik ([126, 127]) han introducido una magnitud no-local la cual muestra un comportamiento más prometedor. Esta magnitud está definida en términos del tensor de Weyl pero, “*de forma no local*”.

Para espacios-tiempo autosimilares, Pelavas y Lake ([136]) han puesto de manifiesto que la Ec. (2.23) no es un candidato aceptable para definir la entropía gravitatoria a lo largo de trayectorias homotéticas de un espacio-tiempo autosimilar. De hecho, tampoco lo es cualquier magnitud adimensional (ya que no varía con el tiempo). Se demuestra que la derivada de Lie de cualquier escalar adimensional a lo largo de un campo homotético es nula, y que por tanto, semejantes definiciones no son aceptables como definiciones de la entropía gravitatoria. Sin embargo, Pelavas y Coley [137] han conjeturado que, puesto que los espacios-tiempo autosimilares representan estados de equilibrio o estados asintóticos de equilibrio (desde el punto de vista de los sistemas dinámicos, ya que describen propiedades asintóticas de modelos más generales), la definición y el caso en el que  $p^2 = \text{const.}$ , sea quizá consistente, ya que la entropía no cambia en estos modelos de equilibrio, y quizá, en consecuencia, la definición dada para la entropía gravitatoria sea consistente. Tal y como veremos a lo largo de esta Tesis,  $\mathcal{W}^2$  y  $p^2$  serán magnitudes constantes, ya que al ser adimensionales, permanecen constantes a lo largo de trayectorias homotéticas.

## 2.3. Simetrías de un tensor

Una simetría de un espacio-tiempo  $M$  [138] [139], es un difeomorfismo local  $f : U \rightarrow V$ , donde  $U$  y  $V$  son subvariedades de  $M$ , que preserva alguna característica geométrica de  $M$ . Una definición rigurosa de simetrías en Relatividad General la ha dado Hall (ver cap. 10 de [139]). Considerando que los flujos locales asociados a los campos preservan difeomórficamente las propiedades del espacio-tiempo, podemos decir que un campo vectorial  $X$  sobre un espacio-tiempo  $M$ ,  $X \in \mathfrak{X}(M)$ , preserva un campo tensorial  $T$  sobre  $M$ , i.e.  $T \in \mathcal{T}_n^m(M)$  (o que  $T$  es invariante bajo la acción de un grupo de simetría  $G$  cuyo generador infinitesimal es  $X$ ) si, para el flujo local (difeomorfismo)  $\phi_t$  asociado al campo  $X$ , los tensores  $T$  y  $\phi_t^*(T)$  son iguales sobre el dominio de  $\phi_t$ . Esta condición se puede expresar mediante la derivada de Lie ( $\mathcal{L}$ ) de la siguiente forma

$$\mathcal{L}_X T = 0 \iff \phi_t^*(T) = T. \quad (2.24)$$

Por tanto, una simetría de un espacio-tiempo, es un campo vectorial cuyo flujo local preserva difeomórficamente alguna característica del espacio-tiempo, generalmente una propiedad geométrica. La característica geométrica puede referirse a tensores específicos, tales como el tensor métrico, tensores de curvatura o el tensor energía-momento o a otros aspectos del espacio-tiempo como su estructura geodésica (y su parámetro afín). Nos referiremos a dicho campo como, colineación, campo vectorial de simetría o simplemente simetría. El conjunto de todos los campos de simetría sobre  $M$  forman una álgebra de Lie, bajo la operación del corchete de Lie, tal y como se desprende de la siguiente identidad (abusando de la notación)

$$\mathcal{L}_{[X,Y]}T = \mathcal{L}_X(\mathcal{L}_Y T) - \mathcal{L}_Y(\mathcal{L}_X T) = [\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y]T. \quad (2.25)$$

Algunos de los tipos bien conocidos (y más importantes) de simetrías son los siguientes:

1. Campo de Killing conforme (CKV)  $\zeta^a$  definido por

$$\mathcal{L}_\zeta g_{ab} = 2\psi g_{ab}, \quad (2.26)$$

y como casos particulares

- (a) **Vector de Killing (KV)** cuando  $\psi = 0$ ,
- (b) **Campo homotético (HVF)** cuando  $\psi = \text{const.}$  y
- (c) **Vector de Killing conforme especial (SCKV)** si  $\psi_{;ab} = 0$ .

2. Vector afín conforme propio (ACV) definido por la relación

$$\mathcal{L}_\zeta g_{ab} = 2\psi g_{ab} + 2H_{ab}, \quad (2.27)$$

siendo  $H_{ab;c} = 0$ ,  $\psi_{;ab} \neq 0$ , encontrando como casos particulares

- (a) **Vector afín (AV)** si  $\psi_{;a} = 0$ ,
- (b) **Vector afín conforme especial (SACV)** cuando  $\psi_{;ab} = 0$ .

3. Colineaciones de curvatura (CC) definidas por

$$\mathcal{L}_\zeta R^a_{bcd} = 0. \quad (2.28)$$

4. Colineaciones de Ricci (RC) definidas por

$$\mathcal{L}_\zeta R_{ab} = 0. \quad (2.29)$$

5. **Colineaciones de materia (CM)** si

$$\mathcal{L}_\zeta T_{ab} = 0, \quad (2.30)$$

siendo  $T_{ab}$  el tensor energía-momento de algún campo de materia.

Diremos que una colineación es propia, si ésta no es Killing u homotética.

Las colineaciones pueden ser consideradas como simetrías no noetherianas y pueden ser asociadas con constantes del movimiento y usadas para simplificar la métrica [140]. Por ejemplo, los vectores afines están relacionados con magnitudes conservadas y han sido utilizados para integrar las geodésicas para métricas FRW [141]. Las RCs están relacionadas con la conservación del número de partículas [142] en el contexto de modelos tipo FRW, y la existencia de CCs implica leyes de conservación en campos electromagnéticos [143].

Puesto que el propósito de la Tesis se centra en explotar los conceptos de autosimilaridad y las colineaciones de materia, pasamos a continuación a exponer, con cierto detalle, algunos resultados relevantes concernientes a dichos conceptos.

### 2.3.1. Autosimilaridad

En Relatividad General, el término autosimilaridad puede ser usado de dos formas. Uno hace referencia a propiedades del espacio-tiempo, y el otro, a propiedades de los campos de materia. Éstos no son equivalentes por lo general. La autosimilaridad en Relatividad General fue definida por primera vez por Cahill y Taub (ver [144], y [145]-[149]). La autosimilaridad es definida por la existencia de un campo homotético,  $\mathcal{H} \in \mathfrak{X}(M)$ , en el espacio-tiempo que verifica la ecuación

$$\mathcal{L}_{\mathcal{H}}g_{ij} = 2\alpha g_{ij}, \quad (2.31)$$

donde,  $g_{ij}$ , es el tensor métrico,  $\mathcal{L}_{\mathcal{H}}$  denota la derivada de Lie a lo largo de  $\mathcal{H}$  y  $\alpha$  es una constante. La autosimilaridad se denomina homotecia si  $\alpha \neq 0$ , y si  $\alpha = 0$ , i.e.,  $\mathcal{L}_V g_{ij} = 0$ , entonces  $V$  es un campo de Killing,  $V \in \mathfrak{X}(M)$ .

La homotecia es una propiedad puramente geométrica de un espacio-tiempo, por lo que una magnitud física no tiene por qué tener la propiedad de autosimilaridad. De la Ec. (2.31) se sigue que

$$\mathcal{L}_V R^i{}_{jkl} = 0, \quad (2.32)$$

y, por tanto

$$\mathcal{L}_V R_{ij} = 0, \quad \mathcal{L}_V G_{ij} = 0. \quad (2.33)$$

Un campo,  $V$ , que satisface las anteriores ecuaciones se denomina, colineación de curvatura, colineación de Ricci y colineación de materia respectivamente. Se observa que el campo  $V$  no es necesariamente un campo homotético. En particular, se demuestra que los campos homotéticos son colineaciones, tanto de curvatura como de materia.

A continuación veremos un ejemplo de campo homotético para una métrica particular.

**Ejemplo 2.3.1** *El modelo Bianchi I (BI) viene descrito por la métrica*

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 dx^2 + b(t)^2 dy^2 + d(t)^2 dz^2, \quad (2.34)$$

donde las funciones  $a(t)$ ,  $b(t)$  y  $d(t)$  representan los factores de escala. Considerando un campo  $V = \in \mathfrak{X}(M)$ , con componentes  $(V_i(t, x, y, z))_{i=1}^4$ , entonces de la Ec. (2.31) obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \partial_t V_1 &= 1, \\ a^2 \partial_t V_2 &= \partial_x V_1, \\ b^2 \partial_t V_3 &= \partial_y V_1, \\ d^2 \partial_t V_4 &= \partial_z V_1, \\ a \partial_x V_2 + a' V_1 &= a, \\ b^2 \partial_x V_3 &= -a^2 \partial_y V_2, \\ d^2 \partial_x V_4 &= -a^2 \partial_z V_2, \\ b \partial_y V_3 + b' V_1 &= b, \\ d^2 \partial_y V_4 &= -b^2 \partial_z V_3, \\ d \partial_z V_4 + d' V_1 &= d, \end{aligned}$$

encontrando que el campo homotético para la métrica considera es el siguiente:

$$V = t \partial_t + \left(1 - t \frac{a'}{a}\right) x \partial_x + \left(1 - t \frac{b'}{b}\right) y \partial_y + \left(1 - t \frac{d'}{d}\right) z \partial_z, \quad (2.35)$$

donde  $(\prime = \frac{d}{dt})$ , sii la siguiente EDO es satisfecha

$$aa' + ta a'' - t (a')^2 = 0, \quad (2.36)$$

y lo mismo para las funciones  $b(t)$  y  $d(t)$ . La Ec. (2.36) admite la siguiente solución

$$a(t) = X_0 t^{\beta_1}, \quad (2.37)$$

con  $X_0$  y  $\beta_1 \in \mathbb{R}$ , y fórmulas similares para los factores de escala  $b(t)$  y  $d(t)$ . Es decir, la existencia de un campo homotético para una métrica implica que los factores de escala siguen una ley de tipo potencias.

La importancia de las soluciones autosimilares ha sido puesta de manifiesto por [148], [150] y [151] a través del estudio cualitativo de la dinámica de los modelos espacialmente homogéneos. Partiendo de una formulación hamiltoniana, las ecuaciones de Einstein pueden ser formalmente escritas como  $dx/dt = F(x)$ , siendo  $F$  una función vectorial. Los puntos críticos del sistema son los ceros de la función  $F$ . Sin embargo, los puntos correspondientes a las singularidades iniciales se encuentran en el infinito, i.e., donde alguna componente de  $x$  es infinita. Para evitar este inconveniente, resulta útil introducir unas nuevas variables, en este caso adimensionales,  $\bar{x} = x/N(x)$ , siendo  $N(x)$  una norma de  $x$ , obteniendo así un nuevo sistema,  $d\bar{x}/dt = \bar{F}(\bar{x})$ , denominado regularizado (ver la primera sección del capítulo 9). El propósito de tal transformación es la de hacer que el espacio de fases sea compacto, evitando así que haya puntos en el infinito. De esta forma, el uso de las variables adimensionales se muestra muy útil. En el contexto de las soluciones autosimilares, se demuestra que todas las variables adimensionales son constantes a lo largo de trayectorias homotéticas, i.e., que magnitudes adimensionales son invariantes bajo la acción de una transformación de similaridad. Entonces, las variables adimensionales corresponden a puntos críticos del sistema regularizado [148]. Teniendo en mente estas consideraciones, Wainwright y colaboradores (ver por ejemplo [150] y todas las referencias allí contenidas) han demostrado mediante el estudio cualitativo que todos los puntos críticos del sistema regularizado corresponden a modelos cosmológicos autosimilares. Ésta es la razón por la que el estudio de soluciones autosimilares juega un papel tan importante, ya que este tipo de soluciones describe el comportamiento asintótico de modelos homogéneos más complejos [150]. Coley ha enfatizado este comportamiento [151], indicando que los modelos de Bianchi no sólo se comportan de forma asintótica a soluciones autosimilares en la singularidad inicial, sino que soluciones exactas autosimilares (tipo potencias) pueden también describir el comportamiento asintótico de soluciones más generales, tanto en estadios intermedios de su evolución como en estadios posteriores. Recientemente se ha demostrado que no todos los modelos Bianchi son asintóticamente autosimilares, como por ejemplo los modelos BVII<sub>h</sub> [152]. Hsu y Wainwright [153] han estudiado de forma sistemática el conjunto de soluciones autosimilares para un fluido perfecto.

Otro concepto relacionado con el de autosimilaridad es el de autosimilaridad cinemática. Este concepto ha sido definido en el contexto de fluidos relativistas, como un ejemplo de autosimilaridad incompleta (ver por ejemplo [154]-[160]). Se dice que un espacio-tiempo es cinemáticamente autosimilar si admite un campo vectorial que verifica las siguientes condiciones

$$\mathcal{L}_V h_{ij} = 2\delta h_{ij}, \quad (2.38)$$

$$\mathcal{L}_V u_i = \alpha u_i, \quad (2.39)$$

siendo  $u^i$  la 4-velocidad,  $h_{ij} = g_{ij} + u_i u_j$  la métrica del 3-espacio, y  $\alpha$  y  $\delta$  son constantes. Si  $\delta \neq 0$ , la transformación de similaridad está caracterizada por la relación  $\alpha/\delta$ , también denominada índice de similaridad. Si este índice es uno, entonces el campo  $V$  es homotético. En el contexto de la autosimilaridad cinemática, las homotecias son referidas como autosimilaridades de primer orden. Si  $\alpha = 0$  y  $\delta \neq 0$ , entonces se denomina autosimilaridad de orden cero. Si el índice es distinto de cero o uno, entonces se denomina de segundo orden, pero si  $\alpha \neq 0$  y  $\delta = 0$ , entonces se denomina de orden infinito. El caso particular en el que,  $\delta = \alpha = 0$ , entonces  $V$  es un campo de Killing. En el apéndice, veremos que las soluciones correspondientes a las denominadas simetrías completas coinciden con las soluciones autosimilares de segundo orden, mientras que las simetrías de escala con las autosimilares o de primer orden, pero a lo largo de esta Tesis no trataremos este concepto. La autosimilaridad cinemática ha sido ampliamente estudiada para modelos Bianchi I en [161] y [162]

### 2.3.2. Colineaciones de materia

Cuando uno trata de encontrar soluciones exactas a las ecuaciones de campo de Einstein, un camino muy habitual es el de imponer ciertas simetrías al tensor métrico. Estas simetrías son expresadas mediante los campos de Killing, las cuales conllevan leyes de conservación vía teorema de Noether [163]. Por ejemplo, de los 6 campos de Killing que admite la métrica FRW se puede deducir la conservación del momento angular [164], pero ninguno de ellos es temporal, por lo que no existe conservación de la energía. Sin embargo, de la existencia de un campo de Killing conforme, se desprende la conservación de la energía.

El tensor energía-momento representa la parte de materia de las ecuaciones de Einstein, por lo que el estudio de las colineaciones de materia es más relevante desde el punto de vista físico. El estudio de las simetrías de dicho tensor proporciona leyes de conservación sobre los campos de materia. Conocer cómo se distribuyen los campos de materia en ciertas regiones del espacio-tiempo, puede reflejar ciertas simetrías del tensor métrico; sin embargo, a través del conocimiento de las simetrías del tensor métrico, podemos encontrar las simetrías de los campos de materia.

Tal y como hemos indicado anteriormente, decimos que un campo vectorial  $V \in \mathfrak{X}(M)$ , es una colineación de materia (CM), si la derivada de Lie del tensor energía-momento  $T_{ij}$ , a lo largo de dicho campo es nula, es decir,

$$\mathcal{L}_V T_{ij} = 0. \quad (2.40)$$

Por otro lado, de las ecuaciones de Einstein, también se desprende un interés puramente matemático del estudio de las simetrías de los objetos geométricos, ya que éstos están ligados, mediante las ecuación de Einstein, a los campos de materia. De esta forma, también podemos decir que un campo  $V \in \mathfrak{X}(M)$ , genera una colineación de materia si verifica la ecuación

$$\mathcal{L}_V G_{ij} = 0. \quad (2.41)$$

Resulta obvio que las simetrías del tensor métrico (isometrías) son también simetrías del tensor de Einstein  $G_{ij}$ . Sin embargo, las simetrías del tensor de Ricci (colineadores de Ricci), por lo general, no son simetrías del tensor de Einstein.

El estudio de este tipo de simetrías ha adquirido gran interés en los últimos años (ver por ejemplo [165]-[173]). Por ejemplo, Carot et al. [166] han estudiado las colineaciones de materia, como una propiedad de simetría del tensor energía-momento  $T_{ij}$ , estudiando el álgebra de Lie que generan dichos campos y poniendo especial énfasis en el caso en el que el tensor es degenerado ( $\det(T_{ij}) = 0$ ). Hall et al. [167] han presentado un estudio de la relación existente entre las colineaciones de Ricci y las de materia.

Otros resultados de interés son los siguientes:

**Teorema 2.3.1** *Hall- Rendall [174]. Sea  $M$  un espacio-tiempo. Entonces de forma genérica, si  $V \in \mathfrak{X}(M)$ , es simultáneamente CM y colineación de Weyl, es decir,*

$$\mathcal{L}_V T_{ij} = 0 \quad (\iff \mathcal{L}_V G_{ij} = 0) \quad y \quad \mathcal{L}_\xi C^i_{jkl} = 0$$

entonces, es un campo homotético.

**Observación 2.3.1** *Si  $\zeta^a$  es un campo de Killing (o un campo homotético), entonces se verifica  $\mathcal{L}_\zeta T_{ij} = 0$ ; por tanto, toda isometría es una CM, pero el inverso es falso en general.*

*Diremos que la colineación es propia si no es ni Killing ni homotética, o impropia, si es trivial, es decir, si se trata de un campo de Killing u homotético.*

Nuestro propósito en esta Tesis no es el de estudiar el álgebra de Lie de distintos campos de materia, sino el de utilizar el hecho de que un campo homotético es una colineación de materia y, por lo tanto, a partir de la ecuación  $\mathcal{L}_\mathcal{H} T_{ij} = 0$ , siendo  $\mathcal{H}$  es un campo homotético y  $T_{ij}$  un tensor energía-momento efectivo, buscar las relaciones funcionales entre las distintas magnitudes físicas, de tal forma que las ecuaciones de campo admitan soluciones autosimilares. En el siguiente capítulo demostraremos, por ejemplo, cómo utilizando esta técnica, podemos determinar las ecuaciones de estado, tanto de fluidos perfectos como de viscosos (en el contexto de soluciones autosimilares), o la de determinar la forma de un potencial de una función escalar, sin recurrir a imponer ninguna hipótesis de partida.

## 2.4. Grupos de Lie

Los métodos de simetrías son, probablemente, la forma más sistemática de tratar con soluciones exactas de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO), así como en derivadas parciales (EDP). Desde los trabajos pioneros del propio Lie, no fue hasta la década de los 60, cuando la escuela rusa encabezada por Ovsiannikov [175], se retomó la utilización del método de los grupos de Lie. Posteriormente, Ibragimov [176] continuó los trabajos de su antecesor. En los últimos años (ver, por ejemplo, [177]-[185]) y, a raíz de la utilización y desarrollo del álgebra computacional, estos métodos se han aplicado en diferentes áreas: Mecánica de Fluidos, Relatividad General, etc. Con frecuencia, ecuaciones que surgen de problemas de la Física-Matemática contienen funciones arbitrarias cuya forma funcional no puede ser fijada mediante leyes conocidas. Puesto que el poseer simetrías es justo una propiedad genérica, i.e., no todas las ecuaciones admiten simetrías, las simetrías pueden usarse para clasificar o determinar tales funciones. Esto es lo que se conoce en la literatura como grupo de modelado. La ventaja de utilizar esta técnica es que es sistemática.

Expondremos a continuación solo los elementos que vamos a utilizar en esta Tesis, es decir, las fórmulas de prolongación que nos permiten calcular las simetrías que admite una ODE y las soluciones invariantes.

Podemos decir que una simetría de una EDO, es una transformación invertible que la deja invariante. De entre las simetrías que admite una EDO, aquellas que forman un grupo uni-paramétrico de transformaciones, pueden ser determinadas algorítmicamente mediante el conocido algoritmo de Lie. Resumiremos aquí cómo se obtiene dicho algoritmo (ver por ejemplo [176], [177] y [179]).

Sea  $x = (x_1, \dots, x_n) \in D \subset \mathbb{R}^n$ , un punto. Consideramos el grupo uni-paramétrico de transformaciones

$$x^* = X(x, \varepsilon), \quad (2.42)$$

donde  $\varepsilon \in S \subset \mathbb{R}$ . Si desarrollamos en serie de Taylor la Ec. (2.42) entorno a  $\varepsilon = 0$ , entonces obtenemos la siguiente expresión:

$$x^* = x + \varepsilon (\partial_\varepsilon X(x, \varepsilon))|_{\varepsilon=0} + O(\varepsilon^2), \quad (2.43)$$

donde definimos  $\zeta(x) = (\partial_\varepsilon X)|_{\varepsilon=0}$ . La transformación,  $x + \varepsilon \zeta(x)$ , se denomina transformación infinitesimal del grupo de Lie de transformaciones puntuales (2.42).

**Teorema 2.4.1** Existe una parametrización  $\tau(\varepsilon)$ , tal que la transformación (2.42) es equivalente a la solución del problema de valores iniciales

$$\frac{dx^*}{d\tau} = \zeta(x^*), \quad (2.44)$$

con  $x^* = x$  cuando  $\tau = 0$ .

Este teorema, conocido como el primer teorema de Lie, nos dice que la transformación infinitesimal contiene la información esencial para determinar el grupo uni-paramétrico de transformaciones. Además, nos dice que un grupo uni-paramétrico define un flujo estacionario y que éste, a su vez, define el grupo. Por tanto, en términos de sus infinitesimales  $\zeta(x)$ , el grupo de transformaciones (2.42) queda definido por,  $\frac{dx^*}{d\varepsilon} = \zeta(x^*)$ , con  $x^* = x$ , cuando  $\varepsilon = 0$ .

**Definición 2.4.1** El generador infinitesimal del grupo (2.42) es el operador

$$X = X(x) = \zeta(x) \cdot \nabla = \sum_{i=1}^n \zeta_i(x) \partial_{x_i}. \quad (2.45)$$

**Definición 2.4.2** Sea  $F(x) \in C^\infty$ . Decimos que  $F$  es invariante bajo la acción del grupo (2.42) si  $F(x^*) = F(x)$ .

**Teorema 2.4.2**  $F(x)$  es invariante bajo la acción del grupo (2.42) sii  $XF(x) = 0$ .

Definimos el operador derivada total como

$$D = \partial_x + y_1 \partial_y + y_2 \partial_{y_1} + \dots + y_{l+1} \partial_{y_l}, \quad (2.46)$$

de manera, que para una función diferenciable  $F(x, y, y_1, y_2, \dots, y_l)$ , escribiremos su derivada total,  $DF$ , de la siguiente forma:

$$DF(x, y, y_1, y_2, \dots, y_l) = F_x + y_1 F_y + y_2 F_{y_1} + \dots + y_{l+1} F_{y_l}. \quad (2.47)$$

Consideremos ahora el grupo de transformaciones definido por

$$\begin{aligned} \hat{x} &= X(x, y; \varepsilon) = x + \varepsilon \zeta + O(\varepsilon^2), \\ \hat{y} &= Y(x, y; \varepsilon) = y + \varepsilon \eta + O(\varepsilon^2), \end{aligned} \quad (2.48)$$

donde su generador infinitesimal vienen definido por

$$X = \zeta(x, y) \partial_x + \eta(x, y) \partial_y. \quad (2.49)$$

La  $k$ -ésima extensión de la transformación (2.48) dada por

$$\begin{aligned} \hat{x} &= X(x, y; \varepsilon) = x + \varepsilon \zeta(x, y) + O(\varepsilon^2), \\ \hat{y} &= Y(x, y; \varepsilon) = y + \varepsilon \eta(x, y) + O(\varepsilon^2), \\ \hat{y}_1 &= Y_1(x, y, y_1; \varepsilon) = y_1 + \varepsilon \eta^{(1)}(x, y, y_1) + O(\varepsilon^2), \\ &\vdots \\ \hat{y}_k &= Y_k(x, y, y_1, \dots, y_k; \varepsilon) = y_k + \varepsilon \eta^{(k)}(x, y, y_1, \dots, y_k) + O(\varepsilon^2), \end{aligned}$$

tiene el siguiente generador infinitesimal prolongado (extendido)

$$X^{(k)} = \zeta(x, y) \partial_x + \eta(x, y) \partial_y + \eta^{(1)}(x, y, y_1) \partial_{y_1} + \dots + \eta^{(k)}(x, y, y_1, \dots, y_k) \partial_{y_k}, \quad (2.50)$$

donde las fórmulas explícitas de los infinitesimales  $\eta^{(k)}$  resultan del siguiente teorema.

**Teorema 2.4.3** *Los infinitesimales extendidos  $\eta^{(k)}$  satisfacen la ley de recurrencia*

$$\eta^{(k)}(x, y, y_1, \dots, y_k) = D\eta^{(k-1)}(x, y, y_1, \dots, y_{k-1}) - y_k D\zeta, \quad (2.51)$$

con  $k = 1, 2, \dots$

De esta forma podemos obtener de forma inmediata las fórmulas explícitas de los infinitesimales  $\eta^{(k)}$ , en particular

$$\begin{aligned} \eta^{(1)} &= \eta_x + (\eta_y - \zeta_x)y_1 - \zeta_y y_1^2, \\ \eta^{(2)} &= \eta_{xx} + (2\eta_{xy} - \zeta_{xx})y_1 + (\eta_{yy} - 2\zeta_{xy})y_1^2 - \zeta_{yy}y_1^3 \\ &\quad + (\eta_y - 2\zeta_x - 3\zeta_y y_1)y_2, \\ \eta^{(3)} &= \eta_{xxx} + (3\eta_{xxy} - \zeta_{xxx})y_1 + 3(\eta_{xyy} - \zeta_{xxy})y_1^2 + \\ &\quad (\eta_{yyy} - \zeta_{yy})y_1^3 - \zeta_{yyy}y_1^4 + 3(\eta_{xy} - \zeta_{xx} + \\ &\quad (\eta_{yy} - 3\zeta_{xy})y_1 - 2\zeta_{yy}y_1^2)y_2 - 3\zeta_y y_2^2 + \\ &\quad (\eta_y - 3\zeta_x - 4\zeta_y y_1)y_3, \end{aligned}$$

Aplicamos ahora todos estos resultados a la teoría de ecuaciones diferenciales. Consideramos la EDO de orden  $n$ , definida por

$$y^{(n)} = \omega(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \quad y^{(k)} = \frac{d^k y}{dx^k}, \quad (2.52)$$

donde  $\omega$  es continua en sus variables. Asumimos que la ODE (2.52) admite un grupo uni-paramétrico de transformaciones definido por

$$\hat{x} = x + \varepsilon \zeta + O(\varepsilon^2), \quad \hat{y} = y + \varepsilon \eta + O(\varepsilon^2), \quad (2.53)$$

siendo el generador infinitesimal del grupo:  $X = \zeta(x, y) \partial_x + \eta(x, y) \partial_y$ . Definimos la función

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = y^{(n)} - \omega(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = 0, \quad (2.54)$$

entonces, decimos que  $F$  es invariante bajo la acción del grupo (2.53) sii  $XF = 0$ , es decir, el grupo deja invariante la ODE (2.52).

El siguiente teorema nos proporciona un método para calcular las simetrías que admite una ODE.

**Teorema 2.4.4** *Sea  $X = \zeta(x, y) \partial_x + \eta(x, y) \partial_y$  el generador infinitesimal del grupo (2.53) y sea*

$$X^{(n)} = \zeta(x, y) \partial_x + \eta(x, y) \partial_y + \eta^{(1)}(x, y, y_1) \partial_{y_1} + \dots + \eta^{(n)}(x, y, y_1, \dots, y_n) \partial_{y_n}, \quad (2.55)$$

su prolongación de orden  $n$ . Entonces, el grupo (2.53) deja invariante la ODE (2.52) sii

$$X^{(n)}(y^{(n)} - \omega(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})) = 0, \quad \text{cuando (2.52),} \quad (2.56)$$

i.e. sii  $XF = 0$ .

**Teorema 2.4.5** *Las soluciones de la ecuación  $XF = 0$ , forman un álgebra de Lie.*

Para calcular las simetrías de Lie de la EDO (2.52) tendremos que calcular las  $\eta^{(k)}$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ . Las funciones  $\xi$  y  $\eta$  dependen de  $x$  e  $y$  solo  $y$ , por tanto, de la transformación

$$\eta^{(k)} = D\eta^{(k-1)} - y^{(k)}D\xi. \quad (2.57)$$

donde,  $\eta^{(1)} = D\eta - y'D\xi$ , obtenemos los siguientes resultados:

$$\eta^{(1)} = \eta_x + (\eta_y - \xi_x)y' - \xi_y y'^2, \quad (2.58)$$

$$\eta^{(2)} = \eta_{xx} + (2\eta_{xy} - \xi_{xx})y' + (\eta_{yy} - 2\xi_{xy})y'^2 - \xi_{yy}y'^3 + (\eta_y - 2\xi_x - 3\xi_y y')y'', \quad (2.59)$$

$$\begin{aligned} \eta^{(3)} = & \eta_{xxx} + (3\eta_{xxy} - \xi_{xxx})y' + 3(\eta_{xyy} - \xi_{xxy})y'^2 + (\eta_{yyy} - \xi_{yyy})y'^3 - \xi_{yyy}y'^4 + 3(\eta_{xy} - \xi_{xx} + \\ & (\eta_{yy} - 3\xi_{xy})y' - 2\xi_{yy}y'^2)y'' - 3\xi_y y''^2 + (\eta_y - 3\xi_x - 4\xi_y y')y''', \end{aligned} \quad (2.60)$$

etc.

**Ejemplo 2.4.1** Consideremos la EDO de tercer orden

$$y''' = N(x, y, y', y''). \quad (2.61)$$

Un campo vectorial,  $X = \xi(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial}{\partial y}$ , se llama simetría de (2.61) si y solo si

$$X^{[3]}(y''' - N(x, y, y', y''))|_{(2.61)} = 0, \quad (2.62)$$

donde  $X^{[3]}$  es la tercera prolongación de  $X$  definida por:  $X^{[3]} = X + \sum_{i=1}^3 \eta^{(i)}\partial_{y^{(i)}}$ , donde

$$\begin{aligned} \eta^{(1)} &= \eta_x + (\eta_y - \xi_x)y' - \xi_y y'^2, \\ \eta^{(2)} &= \eta_{xx} + (2\eta_{xy} - \xi_{xx})y' + (\eta_{yy} - 2\xi_{xy})y'^2 - \xi_{yy}y'^3 + (\eta_y - 2\xi_x - 3\xi_y y')y'', \\ \eta^{(3)} &= \eta_{xxx} + (3\eta_{xxy} - \xi_{xxx})y' + 3(\eta_{xyy} - \xi_{xxy})y'^2 + (\eta_{yyy} - \xi_{yyy})y'^3 - \xi_{yyy}y'^4 + 3(\eta_{xy} - \xi_{xx} + \\ & (\eta_{yy} - 3\xi_{xy})y' - 2\xi_{yy}y'^2)y'' - 3\xi_y y''^2 + (\eta_y - 3\xi_x - 4\xi_y y')y''', \end{aligned}$$

$y|_{(2.61)}$  significa evaluada sobre (2.61). El álgebra nos lleva a la conclusión de que (2.62) es equivalente a

$$\eta^{(3)} = \xi N_x + \eta N_y + \eta^{(1)}N_{y'} + \eta^{(2)}N_{y''}. \quad (2.63)$$

Puesto que  $\eta$  y  $\xi$  son independientes de  $y'$  e  $y''$ , entonces la ecuación (2.63) puede ser separada con respecto a potencias de  $y'$  e  $y''$  para obtener un sistema sobredeterminado de ecuaciones lineales en derivadas parciales para  $\eta$  y  $\xi$ . Este sistema es más sencillo de resolver que la EDO original (2.61).

En muchas ocasiones nos encontramos con el problema de obtener EDOs que continuamos sin saber resolver de forma genérica, i.e., no sabemos cuál es la solución más general a dicha ODE. En otros casos, únicamente conocemos una simetría de la EDO y, por tanto, no podemos aplicar todo el método desarrollado aquí para determinar las variables canónicas y obtener así una cuadratura. Sin embargo el conocimiento de una única simetría  $X = \xi\partial_x + \eta\partial_y$  de (2.52) nos permite obtener una solución particular como un invariante del operador  $X$ , es decir, una solución de

$$\frac{dx}{\xi(x, y)} = \frac{dy}{\eta(x, y)} \implies y' = \frac{\eta}{\xi}. \quad (2.64)$$

Esta solución particular se conoce con el nombre de solución invariante (generalización de las soluciones auto-similares obtenidas mediante análisis dimensional [186]-[187]). De esta forma definimos solución invariante de la siguiente manera:

**Definición 2.4.3** Decimos que  $y = \phi(x)$  es una solución invariante de (2.52) si  $y = \phi(x)$  es una curva invariante de  $X$  i.e.  $X(y - \phi) = 0$  y además es solución, particular, de (2.52).

De la definición se sigue que  $y = \phi(x)$  es una solución invariante de (2.52) sii

$$\xi(x, \phi(x))\phi'(x) = \eta(x, \phi(x)), \quad \text{y} \quad \phi^{(n)}(x) = \omega\left(x, \phi(x), \dots, \phi^{(n-1)}(x)\right). \quad (2.65)$$

De forma más general,  $\Phi(x, y) = 0$ , define una solución invariante de (2.52) sii

- $\Phi(x, y) = 0$  es una curva invariante de (2.52), i.e.,  $X\Phi = 0$ , lo que equivale a resolver  $y' = \eta/\xi$
- $\Phi(x, y) = 0$  es solución de de (2.52)

Bluman ([179] 2002) ha desarrollado un método algebraico equivalente al de resolver la EDO de primer orden  $y' = \eta/\xi$  para determinar las soluciones invariantes.



# Capítulo 3

## Resultados teóricos

### Índice del capítulo

---

<b>3.1. Relatividad General</b> . . . . .	<b>31</b>
3.1.1. Algunos modelos de materia . . . . .	31
3.1.2. Relatividad General con constantes variables . . . . .	34
<b>3.2. Modelos escalares</b> . . . . .	<b>37</b>
3.2.1. Modelos escalares . . . . .	38
3.2.2. Modelos escalares con $G$ variable. . . . .	42
3.2.3. Campos de materia y escalares sin interacción . . . . .	45
3.2.4. Campos de materia y escalares sin interacción y $G$ variable . . . . .	45
3.2.5. Modelos con interacción . . . . .	46
3.2.6. Modelo escalar interactuando con un campo de materia y $G$ variable . . . . .	50
<b>3.3. Teorías tenso-escalares</b> . . . . .	<b>53</b>
3.3.1. Modelo con $\Lambda$ . . . . .	54
3.3.2. Caso general . . . . .	57
3.3.3. Modelo camaleón . . . . .	61
3.3.4. Modelos $f(R, \phi)$ . . . . .	63
<b>3.4. Otras teorías</b> . . . . .	<b>68</b>
3.4.1. Gravedad conforme (scale invariant) . . . . .	68
3.4.2. Modelo de Barber . . . . .	71

---

### 3.1. Relatividad General

Las ecuaciones de campo de la Relatividad General (RG) son las siguientes [188],[189],[190]:

$$R_{ij} - \frac{1}{2}Rg_{ij} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{ij} - \Lambda g_{ij}, \quad (3.1)$$

$$T_{ij}{}^{;j} = 0, \quad (3.2)$$

donde  $R_{ij}$  es el tensor de Ricci,  $R$  es la curvatura escalar y  $g_{ij}$  el tensor métrico.  $T_{ij}$  el tensor energía-momento de los distintos tipos de materia y  $G, c$  y  $\Lambda$  representan las constantes de gravitación (Newton), velocidad de la luz y constante cosmológica, respectivamente.

#### 3.1.1. Algunos modelos de materia

##### Fluido perfecto

Definimos el tensor energía-momento de un fluido perfecto como sigue

$$T_{ij} = (\rho + p)u_i u_j + p g_{ij}, \quad (3.3)$$

donde  $\rho$  representa la densidad de energía y  $p$  es la presión. Ambas magnitudes están relacionadas mediante diversas ecuaciones de estado, como por ejemplo, la ecuación de estado  $p = \gamma\rho$ , donde  $\gamma = \text{const.}$ , usualmente considerada  $\gamma \in [-1, 1]$  o la de Chaplygin,  $p = -A\rho^{-n}$ , siendo  $A$  y  $n$  constantes,  $n > 0$ . Sin embargo, las observaciones recientes sugieren que  $\gamma \leq -1$ . De hecho existe cierta incertidumbre, la cual sitúa a  $\gamma$  en un entorno de  $-1$ . La 4-velocidad del fluido viene definida por la magnitud  $u^i$ , siendo ésta paralela al campo normal de la hipersuperficie espacial

$$u^i = (1, 0, 0, 0). \quad (3.4)$$

Este campo también se puede deducir geoméricamente mediante la expresión,  $\mathcal{L}_{\xi_i} u_i = 0$ , siendo  $\xi_i$  los campos de Killing asociados a la métrica correspondiente, verificándose además la relación,  $g(u^i, u^i) = -1$ .

Empezaremos mostrando la ecuación de estado compatible con las soluciones autosimilares. Para ello aplicamos las colineaciones de materia al tensor energía-momento, i.e.,  $\mathcal{L}_{\mathcal{H}}(T_{ij}) = 0$ , entonces deducimos que

$$t\rho' + 2\rho = 0, \quad tp' + 2p = 0, \quad (3.5)$$

y, por tanto, llegamos a la conclusión de que la única forma de la ecuación de estado (EdE) posible en el contexto autosimilar es de la forma

$$\rho = \rho_0 t^{-2}, \quad p = p_0 t^{-2} \quad \implies \quad p = \gamma\rho, \quad \gamma \in \mathbb{R}, \quad (3.6)$$

donde hemos considerado que  $\mathcal{H}$  es un campo homotético. Usualmente se considera que  $\gamma \in [-1, 1]$  pudiendo ser menor que  $-1$  (modelos fantasma). Wainwright ha deducido de forma alternativa este resultado [147].

### Viscosidad Bulk y shear

Podemos, sin embargo, considerar otros modelos de materia como los fluidos viscosos. La razón es la siguiente: mientras que los fluidos perfectos describen de forma satisfactoria la distribución de las galaxias en el universo, no así describen de forma satisfactoria ni la entropía ni el grado de isotropía que se observa, lo cual sugiere que efectos disipativos debieron de tener lugar en un universo primitivo. Además, existen otros procesos como el desacoplamiento de los neutrinos en la era de radiación y el desacoplamiento de la radiación y la materia [16].

Podemos definir el tensor energía-momento de un fluido viscoso de la siguiente manera

$$T_{ij} = (\rho + \bar{p}) u_i u_j + \bar{p} g_{ij} - \eta \mu_{ij}, \quad (3.7)$$

siendo

$$\bar{p} = p - \left( \xi - \frac{2}{3} \eta \right) \theta, \quad \theta = u^i_{;i}, \quad \mu_{ij} = u_{ij} + u_{ji} + u_i u^a u_{j;a} + u_j u^a u_{i;a}, \quad (3.8)$$

donde  $\xi$  representa la viscosidad bulk y  $\eta$  la viscosidad shear.

Utilizaremos el método de las colineaciones de materia para establecer las ecuaciones de estado de las viscosidades en el contexto de soluciones autosimilares. Para ello calcularemos como antes,  $\mathcal{L}_{\mathcal{H}}(T_{ij}) = 0$ , siendo  $\mathcal{H}$  el campo homotético asociado a la métrica. A modo de ejemplo, consideramos una métrica tipo BI, i.e.,  $ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 dx^2 + b(t)^2 dy^2 + d(t)^2 dz^2$ , del que ya conocemos su campo  $\mathcal{H}$ ; éste ya fue deducido en el anterior capítulo. La función  $\theta$  adquiere la siguiente forma para esta métrica:  $\theta = (H_1 + H_2 + H_3)$ .

Desarrollando la ecuación  $\mathcal{L}_{\mathcal{H}}(T_{ij}) = 0$ , obtenemos

$$\begin{aligned} t\rho' + 2\rho = 0, \quad \implies \quad \rho = \rho_0 t^{-2}, \\ - (H_1 + H_2 + H_3) t\xi' + \frac{2}{3} (-2H_1 + H_2 + H_3) t\eta' + (H_1^2 + H_2^2 + H_3^2) t\xi + tp' + 2p - \\ - 2(H_1 + H_2 + H_3) \xi + \frac{4}{3} (-2H_1 + H_2 + H_3) \eta - \frac{2}{3} (-2H_1^2 + H_2^2 + H_3^2) t\eta - \\ - \left( \frac{a''}{a} + \frac{b''}{b} + \frac{d''}{d} \right) t\xi + \frac{2}{3} \left( \frac{a''}{a} + \frac{b''}{b} + \frac{d''}{d} \right) t\eta = 0, \end{aligned} \quad (3.9)$$

y de forma análoga, obtendríamos las componentes (3,3) y (4,4). Reagrupando términos

$$tp' + 2p = 0, \quad (3.10)$$

$$- (H_1 + H_2 + H_3) t\xi' + (H_1^2 + H_2^2 + H_3^2) t\xi - 2(H_1 + H_2 + H_3) \xi - \left( \frac{a''}{a} + \frac{b''}{b} + \frac{d''}{d} \right) t\xi = 0, \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} & \frac{2}{3}(-2H_1 + H_2 + H_3) t\eta' + \frac{4}{3}(-2H_1 + H_2 + H_3) \eta - \\ & - \frac{2}{3}(-2H_1^2 + H_2^2 + H_3^2) t\eta + \frac{2}{3} \left( -2\frac{a''}{a} + \frac{b''}{b} + \frac{d''}{d} \right) t\eta = 0, \end{aligned} \quad (3.12)$$

entonces, de la Ec. (3.10) obtenemos

$$p = p_0 t^{-2}, \quad (3.13)$$

mientras que de la Ec. (3.11)

$$-tA\zeta' + Bt\zeta - 2A\zeta - Ct\zeta = 0. \quad (3.14)$$

Si tenemos en cuenta que  $H_i = a_i t^{-1}$ , entonces  $C = B - A$ , por lo tanto

$$-t\zeta' - \zeta = 0 \quad \implies \quad \zeta = \zeta_0 t^{-1}. \quad (3.15)$$

De igual forma calculamos  $\eta$  a partir de la Ec.(3.12)

$$-t\bar{A}\eta' + \bar{B}t\eta - 2\bar{A}\eta - \bar{C}t\eta = 0, \quad \implies \quad \eta = \eta t^{-1}. \quad (3.16)$$

Concluimos, por lo tanto, que las magnitudes deben comportarse de la siguiente forma

$$p = \gamma\rho \approx t^{-2}, \gamma \in \mathbb{R} \quad \zeta(t) \approx \eta(t) \propto \theta \approx t^{-1}.$$

Observar además que  $[\zeta] = [\eta] = L^{-1}MT^{-3}$ , es decir, tienen igual ecuación dimensional.

En la mayoría de las investigaciones llevadas a cabo [191], es usual “asumir” las siguientes EdE para la viscosidad bulk,  $\zeta(t) = \zeta_0 \rho^s$ , y para la viscosidad shear  $\eta \propto \theta$ , donde  $s$  es una constante a determinar. En nuestro caso hemos obtenido  $s = 1/2$ . Otros estudios han demostrado que es posible obtener soluciones físicamente realistas si  $0 \leq s \leq \frac{1}{2}$  (ver por ejemplo [192]).

### Viscosidad bulk dentro de la teoría causal completa

Quisiéramos ahora demostrar que también podemos utilizar el método de GL para determinar ecuaciones de estado. Consideraremos un fluido viscoso (dentro del marco de la teoría causal completa) y para simplificar los cálculos utilizaremos una métrica tipo FRW,  $ds^2 = c^2 dt^2 - f^2(t) (dx^2 + dy^2 + dz^2)$ , siendo el tensor energía-momento definido de la siguiente forma (ver [193])

$$T_i^k = (\rho + p + \Pi) u_i u^k - (p + \Pi) \delta_i^k, \quad (3.17)$$

donde  $\rho$  es la densidad de energía,  $p$  la presión,  $\Pi$  la presión de la viscosidad bulk y  $u_i$  la 4-velocidad, tal que  $u_i u^i = 1$ . Las ecuaciones de campo son

$$2H' + 3H^2 = -\kappa(p + \Pi), \quad (3.18)$$

$$3H^2 = \kappa\rho, \quad (3.19)$$

$$\rho' + 3\alpha\rho H = -3H\Pi, \quad (3.20)$$

$$\Pi' + \frac{\Pi}{k_\gamma \rho^{\gamma-1}} = -3\rho H - \frac{1}{2}\Pi \left( 3H - W \frac{\rho'}{\rho} \right), \quad (3.21)$$

con  $H = \frac{f'}{f}$ ,  $W = \frac{2\gamma+1}{\gamma+1} = 1 + \frac{\gamma}{\alpha}$ ,  $\alpha = (\gamma+1)$ ,  $\kappa = \frac{8\pi G}{c^2}$ , y donde se han “asumido” (ad hoc) las siguientes ecuaciones de estado, para  $p$ ,  $\zeta$ ,  $T$  y  $\tau$  [193]:  $p = \gamma\rho$ ,  $\zeta = k_s \rho^s$ ,  $T = D_\beta \rho^\beta$ ,  $\tau = \zeta \rho^{-1} = k_s \rho^{s-1}$ , donde  $0 \leq \gamma \leq 1$ , y  $k_s \geq 0$ ,  $D_\beta > 0$ , son constantes dimensionales, y  $s \geq 0$  y  $\beta \geq 0$  son constantes numéricas. Enfatizamos el término “asumido” ya que han sido introducidas sin suficiente motivación termodinámica, tal y como resalta Maartens [193].

Las anteriores ecuaciones de campo pueden combinarse dando lugar a la siguiente EDO

$$H'' - AH^{-1} (H')^2 + 3HH' + CH'H^{2-2s} + MH^3 + EH^{4-2s} = 0, \quad (3.22)$$

la cual será nuestro objeto de estudio mediante GL. El valor de las constantes  $A, C, M$  y  $E$  es el siguiente

$$A = \frac{2\gamma+1}{\gamma+1}, \quad C = \frac{3^{1-s}}{k_s \kappa^{1-s}}, \quad M = \frac{9}{4}(\gamma-1), \quad E = 3^{2-s} \frac{(\gamma+1)}{k_s \kappa^{1-s}}.$$

Si aplicamos el método expuesto en el anterior capítulo, entonces encontramos el siguiente sistema de EDP

$$\xi_{HH}H + A\xi_H = 0, \quad (3.23)$$

$$A\eta + 6\xi_H H^3 + \eta_{HH}H^2 - 2\xi_{tH}H^2 - A\eta_H H + 2C\xi_H H^{4-2s} = 0, \quad (3.24)$$

$$2\eta_{Ht}H - \xi_{tt}H + 3\eta_H H + 3\xi_t H^2 + 3M\xi_H H^4 + C\xi_t H^{3-2s} + 3E\xi_H H^{5-2s} + (2-2s)C\eta H^{2-2s} - 2A\eta_t = 0, \quad (3.25)$$

$$3M\eta_H H + MH^2(2\xi_t - \eta_H) + (4-2\gamma)E\eta H^{2-2s} + C\eta_t H^{1-2s} + (2\xi_t - \eta_H)EH^{3-2s} + \eta_{tt}H^{-1} + 3\eta_t = 0, \quad (3.26)$$

el cual, sin ninguna restricción, admite la siguiente simetría

$$\xi = 1, \eta = 0 \implies X_1 = \partial_t, \quad (3.27)$$

donde  $X_1$  genera un álgebra tipo  $L_1$ , viendo de esta forma que la ecuación no puede ser completamente resuelta mediante este procedimiento. Sin embargo, al estar sólo interesados en soluciones tipo potencias (power-law), en las que las autosimilares están incluidas, entonces podemos imponer que el anterior sistema admita una nueva simetría

$$\xi = t, \quad \eta = -H, \quad (3.28)$$

la simetría de escala, la cual induce como solución invariante,  $H = ht^{-1}$ . Pero esto sólo es posible si  $s = 1/2$ , restricción obtenida de la Ec. (3.25). Por lo tanto,

$$\xi = at + b, \quad \eta = -aH, \quad (3.29)$$

es una simetría de (3.22) sii  $s = 1/2$ , siendo  $a$  y  $b$  constantes numéricas reales. Por lo tanto

$$X_1 = \partial_t, \quad X_2 = t\partial_t - H\partial_H \quad [X_1, X_2] = X_1, \quad (3.30)$$

que genera un álgebra  $L_2$  de tipo III [176]. De esta forma podemos concluir que la única ecuación de estado para la viscosidad bulk compatible con las soluciones tipo power-law es  $s = 1/2$ . Al mismo resultado han llegado otros autores utilizando otras técnicas de estudio como los sistemas dinámicos, Coley et al [194] o Belinchón et al [195] mediante el uso del grupo de renormalización.

Para terminar, resaltamos que la simetría  $X_1$  induce las siguientes variables canónicas

$$y(x) = \frac{1}{H}, \quad x = H, \quad (3.31)$$

y por lo tanto obtenemos la siguiente EDO reducida

$$y' = \left(Mx^3 + Ex^{4-2s}\right)y^3 + \left(3x + Cx^{2-2s}\right)y^2 - A\frac{y}{x}, \quad (3.32)$$

de tipo Abel (ver por ejemplo [196] y [186]). Hasta el momento no se ha conseguido integrar esta ecuación siendo por lo tanto un problema abierto. Recientemente hemos desarrollado otras técnicas de estudio de la ecuación (3.22) mediante el método de factorización y de grupos de Lie. Partiendo de la Ec.(3.22) e introduciendo un cambio de variable, se obtiene una nueva ecuación de segundo orden la cual sí admite una integración completa obteniendo así nuevas soluciones mediante el empleo de funciones hipergeométricas [197].

### 3.1.2. Relatividad General con constantes variables

Tal y como comentamos en la introducción, la idea original de una  $G$  variable se debe en gran medida a Weyl, Eddington y Dirac, siendo este último quien la plasmó en su hipótesis de los grandes números (LNH). El problema surge cuando uno quiere reconciliar tal hipótesis con la RG donde  $G$  es constante [198]. La primera de las formas que veremos en esta Tesis es la que presentamos en esta sección, otra forma de hacerlo es la considerada en la sección dedicada a las teorías tenso-escalares.

La constante cosmológica, sin embargo, ha tenido otra historia. Primero introducida y luego rechazada por el propio Einstein, fue Lemaître quien estudió de forma sistemática los modelos cosmológicos con dicha constante. Luego cayó en el olvido hasta que en la década de los años 70-80 fue recuperada, pero bajo consideraciones cuánticas, tratándola además ya de forma dinámica. En el trabajo de Felten y Isaacman encontramos un gran resumen de todos los modelos hasta el año 1986 [199]. Overduin y Cooperstock [200] revisan y resumen diversos modelos cosmológicos con un término cosmológico variable hasta el año 1998. Precisamente en este año se descubre la expansión acelerada del universo, de tal forma que la explicación más plausible para dicha aceleración consiste en

considerar una nueva forma de materia, la denominada energía oscura. El candidato quizás más sencillo y atractivo desde el punto de vista teórico para esta energía oscura, sea la densidad de energía en un estado de vacío de todos los campos existentes en el universo, es decir, considerar  $\rho_\Lambda = \Lambda/8\pi G$ , donde  $\Lambda$  es la constante cosmológica. Desde el punto de vista observacional, los modelos con una constante cosmológica ( $\Lambda$ CDM) superan “casi” todos los tests observacionales, dando así una buena descripción del universo actual. Sin embargo desde el punto de vista teórico aparecen varias objeciones, como por ejemplo la de tener que introducir de forma fenomenológica la forma de  $\Lambda$  utilizando argumentaciones cuánticas o utilizando el grupo de renormalización [201]. Otra discrepancia existente es el denominado problema de ajuste fino, es decir, la discrepancia entre el valor observado y el teórico para  $\Lambda$ . Una posible solución a este problema consiste en considerar a  $\Lambda$  como variable en el tiempo.

Nuestro propósito es por lo tanto, el de introducir de forma fenomenológica la variación de las constantes  $G$  y  $\Lambda$  dentro del marco de la Relatividad General. La principal idea para contemplar tal variación, es la de considerar las identidades de Bianchi, para de esta forma poder deducir las ecuaciones que gobiernen dicha variación. Varios autores han trabajado sobre esta idea, entre otros Lau [202]. Siguiendo a Soleng [203] partimos de la identidad de Bianchi

$$\left(\frac{8\pi G}{c^4}T_{ij} - \Lambda g_{ij}\right)^{ij} = 0, \quad (3.33)$$

donde,  $g_{ij} = u_i u_j + h_{ij}$ , y  $\theta = u^i_{;i}$ . Definimos ahora el tensor energía-momento para un fluido perfecto,  $T_{ij} = (\rho + p)u_i u_j + p g_{ij}$ , entonces, de las identidades de Bianchi, obtenemos

$$G(\rho' u^i + (\rho + p)u^{i'} + (\rho + p)u^i \theta + p_{,j} h^{ij}) + G' \rho u^i + G_{,j} p h^{ij} - \Lambda_{,j} g^{ij} = 0. \quad (3.34)$$

La ecuación (3.34) la podemos dividir en sus partes paralela y ortogonal, obteniendo

$$G(\rho' + (\rho + p)\theta) + G'\rho + \Lambda' = 0, \quad (3.35)$$

$$G((\rho + p)u^{i'} + p_{,j} h^{ij}) + G_{,j} p h^{ij} - \Lambda_{,j} h^{ij} = 0. \quad (3.36)$$

La forma usual de expresar la conservación de la energía-momento es de la siguiente manera

$$\rho' + (\rho + p)\theta = 0, \quad (3.37)$$

$$u^{i'} + (\rho + p)^{-1} p_{,j} h^{ij} = 0. \quad (3.38)$$

Por tanto, si la energía-momento del fluido se conserva, entonces las siguientes ecuaciones se deben satisfacer:

$$G'\rho + \Lambda' = 0, \quad (3.39)$$

$$G_{,j} p h^{ij} - \Lambda_{,j} h^{ij} = 0. \quad (3.40)$$

La ecuación (3.40) es sólo importante en modelos inhomogéneos. La ecuación (3.39) nos dice que si  $G$  es creciente, entonces  $\Lambda$  debe ser decreciente. Este modelo es incompleto ya que hay más incógnitas que ecuaciones, pero no presenta creación de materia. De esta manera, las ecuaciones de campo para este modelo son las siguientes

$$R_{ij} - \frac{1}{2}R g_{ij} = \frac{8\pi G(t)}{c^4}T_{ij} - \Lambda(t)g_{ij}, \quad (3.41)$$

$$T_{ij}{}^{;j} = 0, \quad (3.42)$$

$$G'\rho + \Lambda' = 0. \quad (3.43)$$

Al mismo resultado se llega mediante una formulación variacional. Krori et al [204] escriben la siguiente acción

$$A = \int d^4x L = \int d^4x \left[ \sqrt{-g} \left( \frac{R}{G} + V(G) \right) + L_m \right] + A', \quad (3.44)$$

donde  $G$  es variable y  $V(G)$  es una función de  $G$ .  $L_m$  representa el lagrangiano de la materia. El término  $A'$  (contratérmino) se introduce siguiendo a Gibbons et al [205] para cancelar términos con segundas derivadas. De la ecuación de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial G} = \nabla^\mu \frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu G)}, \quad (3.45)$$

se obtiene

$$\frac{d}{dG} V(G) = \frac{R}{G}. \quad (3.46)$$

De la variación con respecto a la métrica obtenemos

$$R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}R = GT_{ij} + \left(\frac{1}{2}GV(G)\right)g_{ij}, \quad (3.47)$$

donde  $T_{ij}$  es el tensor de materia que proviene de  $L_m$ . Si escribimos (identificamos)

$$\left(\frac{1}{2}GV(G)\right) := \Lambda, \quad (3.48)$$

entonces recobramos las ecuaciones de campo usuales, es decir,

$$R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}R = GT_{ij} + \Lambda g_{ij}, \quad (3.49)$$

donde si  $G$  es constante, entonces también lo es  $\Lambda$ .

#### Conservación de materia

Tal y como hemos visto en la deducción de las ecuaciones de campo, hemos necesitado hacer una hipótesis sobre la conservación del tensor energía-momento,  $T_{ij}{}^{;j} = 0$ . De esta forma podemos dividir los modelos con constantes variables en dos categorías. La primera de ellas, aquellos modelos que verifican el principio de conservación, i.e.,

$$\left(T_{ij}{}^{;j} = 0\right) \iff \rho' + \rho(1 + \gamma)\theta = 0, \quad (3.50)$$

$$\frac{\Lambda'c^4}{8\pi G\rho} + \frac{G'}{G} = 0, \quad (3.51)$$

los cuales serán uno de los objetivos de estudio de esta Tesis y los segundos, aquellos que no verifican este principio.

#### Creación de materia

En este caso no se verifica el principio de conservación,  $T_{ij}{}^{;j} \neq 0$ , y por lo tanto la ecuación resultante es

$$\rho' + \rho(1 + \gamma)\theta + \frac{\Lambda'c^4}{8\pi G} + \rho\frac{G'}{G} = 0. \quad (3.52)$$

Sin embargo, en este caso, podemos estudiar, no sólo el caso en el que varíen las constantes  $G$  y  $\Lambda$ , sino que permite el estudio de la variación de una sola de las constantes, encontramos los siguientes casos [206].

1. Caso 1. Sólo varía  $\Lambda$ ,

$$\rho' + \rho(1 + \gamma)\theta + \frac{\Lambda'c^4}{8\pi G} = 0, \quad (3.53)$$

también denominado, modelo ( $\Lambda(t)$  CDM).

2. Caso 2. Sólo varía  $G$

$$\rho' + \rho(1 + \gamma)\theta + \rho\frac{G'}{G} = 0, \quad (3.54)$$

3. Caso 3. Varían ambas constantes y por lo tanto la ecuación a estudiar es

$$\dot{\rho} + \rho(1 + \gamma)\theta + \frac{\Lambda'c^4}{8\pi G} + \rho\frac{G'}{G} = 0. \quad (3.55)$$

La posibilidad de relajar la condición de conservación  $T_{ij}{}^{;j} = 0$ , fue sugerida por Rastall [207], quien consideró que la divergencia del tensor energía-momento es proporcional al gradiente de la curvatura escalar,  $T_{ij}{}^{;j} = \lambda R_{,i}$ , de tal forma que las ecuaciones de campo resultantes son equivalentes a las de RG con una  $\Lambda$  variable. Dicha hipótesis no se ha descartado experimentalmente. Todos estos modelos conducen a escenarios cosmológicos en los que o bien existen procesos de creación de materia [208] o bien las masas de las partículas varían en el tiempo [209]-[210]. En esta Tesis no consideraremos ninguno de estos modelos.

### Colineaciones de materia

Nos preguntamos ahora qué posibles formas pueden tomar las funciones  $G$  y  $\Lambda$  para que las ecuaciones de campo admitan soluciones autosimilares. Para ello consideraremos la siguiente ecuación [161]

$$L_V \left( \frac{G(t)}{c^4} T_{ij} - \Lambda(t) g_{ij} \right) = 0, \quad (3.56)$$

donde  $V$  es cierto campo vectorial, i.e.  $V \in \mathfrak{X}(M)$ .

Considerando que  $T_{ij}$  es el tensor energía-momento de un fluido perfecto, encontramos que una colineación no trivial, es de la forma

$$V = V_1 \partial_t + V_1 \left( \frac{V'_1}{V_1} - H_1 \right) x \partial_x + V_1 \left( \frac{V'_1}{V_1} - H_2 \right) y \partial_y + V_1 \left( \frac{V'_1}{V_1} - H_3 \right) z \partial_z, \quad (3.57)$$

por lo tanto, si  $V_1 = t$ , entonces recobramos el campo homotético ordinario  $\mathcal{H}$  (colineación trivial).

De esta forma comprobamos la ecuación utilizando el campo homotético  $\mathcal{H}$

$$L_{\mathcal{H}} \left( \frac{G(t)}{c^4} T_{ij} - \Lambda(t) g_{ij} \right) = 0, \quad (3.58)$$

obteniendo las siguientes ecuaciones

$$\frac{8\pi}{c^4} (t\rho G' + tG\rho' + 2G\rho) = - (t\Lambda' + 2\Lambda), \quad (3.59)$$

$$\frac{8\pi}{c^4} (tpG' + tGp' + 2pG) = (t\Lambda' + 2\Lambda), \quad (3.60)$$

observando, por tanto, que la ecuación original,  $L_{\mathcal{H}} \left( \frac{G(t)}{c^4} T_{ij} - \Lambda(t) g_{ij} \right) = 0$ , puede ser descompuesta de la siguiente forma ( $p \sim \rho$ )

$$L_{\mathcal{H}} \left( \frac{G(t)}{c^4} T_{ij} \right) = 0 = L_{\mathcal{H}} (\Lambda(t) g_{ij}), \quad (3.61)$$

obteniendo así a las siguiente ecuaciones

$$\frac{G'}{G} + \frac{\rho'}{\rho} = -\frac{2}{t} \iff G\rho \approx t^{-2}, \quad (3.62)$$

$$t\Lambda' = -2\Lambda \iff \Lambda = \Lambda_0 t^{-2}. \quad (3.63)$$

Por tanto, las funciones  $G$ ,  $\Lambda$  y  $\rho$  deben comportarse de la siguiente manera

$$G\rho \approx t^{-2}, \quad \Lambda = \Lambda_0 t^{-2}, \quad (3.64)$$

para obtener soluciones autosimilares. Tal y como se observa, el comportamiento de  $G$  y  $\rho$  están relacionados, no pudiéndose decir más sobre su comportamiento individual mediante este procedimiento.

Sin embargo, si tenemos en cuenta las ecuaciones de campo, en particular  $T_{ij}^{;j} = 0$ , entonces llegamos a la conclusión de que las magnitudes deben de comportarse de la siguiente manera

$$\rho \approx t^{-\alpha}, \quad G \approx t^{\alpha-2}, \quad \Lambda = \Lambda_0 t^{-2}, \quad (3.65)$$

siendo  $\alpha = (\gamma + 1)h$ , con  $h = a_1 + a_2 + a_3$  donde los  $(a_i)_{i=1}^3$  son los exponentes de los factores de escala.

## 3.2. Modelos escalares

En la anterior sección hemos estudiado modelos en los que la constante cosmológica era modelizada por la función  $\Lambda(t)$ . En esta sección estudiaremos otra forma de introducir una constante cosmológica efectiva mediante campos escalares. Éstos fueron introducidos por primera vez por Yukawa en 1935 [212]. Existen muchas teorías físicas que predicen la existencia de campos escalares. En cosmología adquirieron gran importancia en el estudio

del universo primitivo, en particular en el estudio de los denominados modelos inflacionarios. Hoy en día, han vuelto a recobrar importancia para intentar explicar la actual aceleración del universo. Los denominados modelos quintaesencia (o modelos con constante cosmológica lentamente decreciente) están descritos por un campo escalar que contribuye a la densidad de energía del universo y predice una constante cosmológica efectiva decreciente consistente con las observaciones actuales sobre la expansión acelerada del universo [213]. El término quintaesencia fue acuñado por primera vez por Caldwell et al [214] para denominar a los modelos escalares con un potencial exponencial responsables de la aceleración del universo, aunque los modelos escalares con otras componentes de materia ya habían sido estudiados en la década de los 80 [215]. El método de los sistemas dinámicos se ha mostrado como una herramienta muy útil para estudiar y entender la dinámica de estos modelos.

En esta sección estudiaremos diversos modelos escalares. De esta forma podremos entender cómo varía la constante cosmológica. Pero, para entender cómo varía la constante de la gravitación, tendremos que formular modelos fenomenológicos que permitan que tal magnitud pueda variar. Calcularemos la posible forma tanto del campo escalar como la del potencial, para que las EC admitan soluciones autosimilares independientemente de la geometría del modelo. El procedimiento será estudiar primero el modelo mediante las colineaciones de materia obteniendo resultados genéricos sobre soluciones autosimilares y luego bajo el método de grupos de Lie con el que podremos generalizar dichos resultados a soluciones tipo potencia (power-law) en las que las autosimilares están contenidas. Estudiamos los siguientes casos:

- El modelo cosmológico escalar estándar con  $G' = 0$ , i.e., donde la constante de gravitación es considerada como constante y formularemos una modificación de dicho modelo para contemplar la posibilidad de una  $G$  variable
- El caso en el que un fluido perfecto no interacciona con un campo escalar, i.e.,  $(T^m)_{i;j}^j = 0 = (T^\phi)_{i;j}^j$ , y su correspondiente generalización considerando la variación de  $G$
- El caso en el que existe interacción entre el fluido perfecto y el campo escalar. Compararemos tres enfoques a priori diferentes
  - El primero propuesto Maia et al [216] donde los autores, siguiendo un enfoque termodinámico, no descomponen la ecuación de conservación, i.e.,  $(T^m)_{i;j}^j = - (T^\phi)_{i;j}^j$
  - El segundo propuesto por Wetterich [217]. En este caso el autor descompone la ecuación de conservación, es decir, la ecuación de Klein-Gordon, y considera una determinada función de acoplamiento entre los campos de materia y escalares,  $q^\phi = \delta\rho_m$ , donde la constante  $\delta$  debe ser negativa, i.e.  $(T^m)_{i;j}^j = -\phi'q^\phi$ ,  $(T^\phi)_{i;j}^j = \phi'q^\phi$ . Bajo la hipótesis de autosimilaridad estudiaremos las diversas formas que puede tomar la función de acoplamiento  $q^\phi$
  - El tercero de los modelos estudiados se debe a Billard et al [218] donde por analogía con el modelo propuesto por Wetterich, pero siguiendo un enfoque totalmente distinto, los autores consideran como función de acoplamiento,  $Q = \delta H\rho_m$ , donde, en este caso la constante  $\delta$  debe ser positiva para satisfacer la segunda ley de la termodinámica, i.e.  $(T^m)_{i;j}^j = Q$ ,  $(T^\phi)_{i;j}^j = -Q$
- Terminaremos el estudio de modelos escalares considerando la generalización de los modelos interactivos con  $G$ -variable. Para este fin descompondremos la ecuación de conservación y consideraremos como función de acoplamiento la función  $Q = \delta H\rho_m$ , con  $\delta > 0$

### 3.2.1. Modelos escalares

Denominamos modelos cosmológicos quintaesencia a aquellos que son descritos por un campo escalar  $\phi$  con un potencial  $V$  y que puede interactuar con otros campos de materia. Las ecuaciones de campo del modelo vienen definidas de la siguiente forma. Definimos la acción

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left( \frac{R}{2G} + L_\phi \right), \quad (3.66)$$

siendo  $L_\phi$  el lagrangiano que define al campo  $\phi$ , i.e.  $L_\phi = -\frac{1}{2}g^{ij}\partial_i\phi\partial_j\phi - V(\phi)$ . Para un campo escalar  $\phi$ , tal que  $\phi = \phi(t)$ , podemos escribir el tensor energía-momento como sigue [219]:

$$T_{ij}^\phi = (p_\phi + \rho_\phi) u_i u_j + p_\phi g_{ij}, \quad (3.67)$$

donde la densidad de energía y la presión del fluido están ahora definidos por

$$\rho_\phi = \frac{1}{2}\phi'^2 + V(\phi), \quad p_\phi = \frac{1}{2}\phi'^2 - V(\phi), \quad (3.68)$$

y la ecuación de conservación toma ahora la forma (la ecuación de Klein-Gordon (KG))

$$\rho'_\phi + (\rho_\phi + p_\phi)\theta = 0 \quad \iff \quad \phi'' + H\phi' + \frac{d}{d\phi}V = 0. \quad (3.69)$$

Por lo tanto, las ecuaciones de campo que describen los modelos escalares son las siguientes

$$G_{ij} = 8\pi GT_{ij}^\phi, \quad \square\phi + V_\phi = 0, \quad (3.70)$$

donde  $V_\phi = \frac{d}{d\phi}V$ .

### Colineaciones de materia

Tal y como sabemos la ecuación que debemos resolver es,  $\mathcal{L}_X T_{ij}^\phi = 0$ , donde  $T_{ij}^\phi$  viene dado por la Ec.(3.67), obteniendo como vector de colineación de materia (CM) el siguiente campo X:

$$X = X_1\partial_t + (X'_1 - X_1H_1)x\partial_x + (X'_1 - X_1H_2)y\partial_y + (X'_1 - X_1H_2)z\partial_z, \quad (3.71)$$

tratándose de una CM propia, y donde se observa que si  $X_1 = t$ , entonces se obtiene el habitual campo homotético.

**Teorema 3.2.1** Las ecuaciones de campo (3.70), admiten soluciones autosimilares si el potencial  $V(\phi)$ , es de la forma  $V(\phi) = V_0 \exp(\kappa\phi)$ , y por lo tanto, el campo escalar es,  $\phi = \ln t$ .

**Demostración.** Consideramos campo homotético,  $\mathcal{H}$ , y mediante la ecuación,  $\mathcal{L}_\mathcal{H} T_{ij}^\phi = 0$ , encontramos que:

$$\rho'_\phi t + 2\rho_\phi = 0, \quad p'_\phi t + 2p_\phi = 0, \quad (3.72)$$

donde se observa que,  $\mathcal{L}_\mathcal{H}\rho = \rho'_\phi t = -2\rho_\phi$ . El resto de las ecuaciones imponen restricciones a los factores de escala. Por lo tanto, de la primera de las ecuaciones,  $\rho'_\phi t = -2\rho_\phi$ , obtenemos la siguiente EDO

$$\left(\phi''\phi' + \frac{dV(\phi)}{d\phi}\phi'\right)t + 2\left(\frac{1}{2}\phi'^2 + V(\phi)\right) = 0. \quad (3.73)$$

Asumiendo que podemos anular cada uno de los términos por separado, entonces

$$t(\phi''\phi') + \phi'^2 = 0, \quad t\frac{dV}{d\phi}\phi' + 2V = 0, \quad (3.74)$$

donde

$$t\phi'' + \phi' = 0 \quad \implies \quad \phi = \kappa \ln t, \quad (3.75)$$

i.e.,  $\mathcal{L}_\mathcal{H}\phi' = 0$ . Con respecto a la segunda ecuación

$$\frac{dV}{d\phi}\kappa + 2V = 0 \quad \implies \quad V = Ke^{-\frac{2}{\kappa}\phi}, \quad (3.76)$$

i.e.,  $\mathcal{L}_\mathcal{H}V = -2V$ . Observamos que de la Ec. (3.75),  $\phi't = \kappa$ .

De igual forma podemos estudiar la ecuación completa (3.73), i.e.,

$$\phi'' + \frac{dV}{d\phi} + \phi't^{-1} + 2V(t\phi')^{-1} = 0, \quad (3.77)$$

para lo que emplearemos el método de grupos de Lie. De esta forma obtenemos el siguiente sistema de EDP

$$t^2 \xi_{\phi\phi} = 0, \quad (3.78)$$

$$t^2 \eta_{\phi\phi} - 2t^2 \xi_{t\phi} + 2t \xi_{\phi} = 0, \quad (3.79)$$

$$2t^2 \eta_{t\phi} - t^2 \xi_{tt} + t \xi_t + 3t^2 \xi_{\phi} \frac{dV}{d\phi} - \xi = 0, \quad (3.80)$$

$$t^2 \eta_{tt} + 8t \xi_{\phi} V + 2t^2 \xi_t \frac{dV}{d\phi} - 2t^2 \eta_{\phi} \frac{dV}{d\phi} + t \eta_t + \eta t^2 \frac{d^2 V}{d\phi^2} = 0, \quad (3.81)$$

$$-2\xi V + 6t \xi_t V + 2t \eta \frac{dV}{d\phi} - 4t \eta_{\phi} V = 0, \quad (3.82)$$

$$t \eta_t V = 0. \quad (3.83)$$

Consideramos la simetría,  $\xi = \alpha t$ ,  $\eta = \delta$ , la cual nos lleva a obtener la siguiente restricción sobre el potencial (de la Ec. (3.81) y (3.82))

$$2 \frac{dV}{d\phi} + \frac{d^2 V}{d\phi^2} = 0, \quad 2V + \frac{dV}{d\phi} = 0, \quad (3.84)$$

cuya solución es

$$V = \exp(-2\phi) \quad \implies \quad \phi = \ln t, \quad (3.85)$$

tal y como queríamos demostrar. ■

Tal y como ha puesto de manifiesto Hall [167] en algunas ocasiones es interesante estudiar las simetrías del tensor  $T_i^j \in \mathcal{T}_1^1(M)$ . En dicho caso obtenemos las siguientes ecuaciones,  $\mathcal{L}_{\mathcal{H}} T_i^j = 0$ ,  $\rho'_{\phi} = 0$ , y  $p'_{\phi} = 0$ , lo que es equivalente a

$$\phi'' = \pm \frac{dV(\phi)}{d\phi}, \quad (3.86)$$

donde, tal y como podemos observar, este enfoque está relacionado con las simetrías variacionales.

Encontramos que la solución a la Ec. (3.86) viene dada por la siguiente expresión

$$t = \int^{\phi} \pm \frac{da}{\sqrt{-2V(a) + C_1}} + C_2, \quad (3.87)$$

pero no somos capaces de obtener más información. Si aplicamos el método de GL a la Ec. (3.86) entonces

$$\xi_{\phi\phi} = 0, \quad (3.88)$$

$$\eta_{\phi\phi} - 2\xi_{t\phi} = 0, \quad (3.89)$$

$$2\eta_{t\phi} - \xi_{tt} + 3\xi_{\phi} \frac{dV}{d\phi} = 0, \quad (3.90)$$

$$\eta_{tt} + 2\xi_t \frac{dV}{d\phi} - \eta_{\phi} \frac{dV}{d\phi} + \eta \frac{d^2 V}{d\phi^2} = 0, \quad (3.91)$$

donde, por ejemplo, la simetría,  $\xi = t$ ,  $\eta = 1$ , nos lleva a obtener, de la Ec. (3.91), la siguiente restricción sobre el potencial  $V$

$$2 \frac{dV}{d\phi} + \frac{d^2 V}{d\phi^2} = 0, \quad (3.92)$$

i.e., la misma solución que en caso anterior:  $V = \exp(-2\phi)$ , y por lo tanto,  $\phi = \ln t$ . En este caso no es posible obtener otra solución.

Los potenciales exponenciales surgen de forma natural en todos los modelos de unificación como las teorías Kaluza-Klein, supergravedad o teorías de cuerdas. La forma exponencial del potencial refleja el hecho de que las derivadas con respecto al tiempo en gravedad implican el logaritmo de las escalas de longitud [220]. Aunque los potenciales exponenciales son interesantes por diferentes razones como las apuntadas anteriormente, éstos poseen sin embargo algunos inconvenientes, como por ejemplo, que no pueden oscilar y por lo tanto la fase de recalentamiento no puede producirse (en el contexto de soluciones inflacionarias), por lo que se cree que representan sólo una aproximación y en consecuencia se deben considerar potenciales más complejos. En el contexto de modelos inflacionarios, los potenciales exponenciales han sido discutidos por ejemplo en [221].

### Método de grupos de Lie

En este caso estudiaremos la ecuación de KG (3.69) mediante el método de GL. En particular buscaremos la posible forma que puede tomar el potencial para que las EC admitan soluciones tipo power-law (y como caso particular autosimilares). Como es habitual en este contexto, la función de Hubble adquiere la siguiente forma  $H = ht^{-1}$ ,  $h \in \mathbb{R}^+$ , por lo que la ecuación de KG a estudiar es la siguiente

$$\phi'' + ht^{-1}\phi' + \frac{dV}{d\phi} = 0. \quad (3.93)$$

**Teorema 3.2.2** *La única forma posible para un potencial,  $V(\phi)$ , para un espacio-tiempo que admite soluciones tipo power-law,  $H = ht^{-1}$ ,  $h \in \mathbb{R}^+$ , es  $V(\phi) = V_0 \exp(\kappa\phi)$  y por lo tanto el campo escalar toma la forma,  $\phi = \ln t$ .*

**Demostración.** El método nos lleva a obtener el siguiente sistema de EDP

$$\xi_{\phi\phi}t^2 = 0, \quad (3.94)$$

$$2ht\xi_{\phi} + t^2\eta_{\phi\phi} - 2t^2\xi_{t\phi} = 0, \quad (3.95)$$

$$3t^2\xi_{\phi}\frac{dV}{d\phi} + ht\xi_t - h\xi + 2t^2\eta_{t\phi} - t^2\xi_{tt} = 0, \quad (3.96)$$

$$t^2\eta\frac{d^2V}{d\phi^2} + t^2\eta_{tt} + 2t^2\xi_t\frac{dV}{d\phi} - t^2\eta_{\phi}\frac{dV}{d\phi} + 3at\eta_t = 0. \quad (3.97)$$

Si imponemos la simetría,  $\xi = \alpha t$ ,  $\eta = \delta$ , entonces su solución invariante es:  $\phi = \frac{\delta}{\alpha} \ln \frac{1}{\alpha}t$ , por lo tanto de la Ec. (3.97), obtenemos la siguiente restricción sobre la función potencial

$$\delta\frac{d^2V}{d\phi^2} + 2\alpha\frac{dV}{d\phi} = 0 \quad \implies \quad V = \beta \exp\left(-2\frac{\alpha}{\delta}\phi\right) + \kappa, \quad \alpha, \beta, \delta, \kappa \in \mathbb{R}. \quad (3.98)$$

De esta forma, redefiniendo las constantes de integración, encontramos que la única forma posible para el campo escalar y la función potencial compatible con las ecuaciones de campo es la siguiente:

$$\phi = \pm\sqrt{\alpha}\ln t, \quad V = \beta \exp\left(\mp\frac{2}{\sqrt{\alpha}}\phi\right), \quad (3.99)$$

tal y como queríamos demostrar. ■

Observar que en este caso es posible encontrar más simetrías, pero las soluciones generadas por ellas no son compatibles con las EC. Por ejemplo, si imponemos la simetría,  $\xi = \alpha t$ ,  $\eta = \delta\phi$ , entonces la Ec. (3.97) resulta

$$\delta\phi\frac{d^2V}{d\phi^2} + (2\alpha - \delta)\frac{dV}{d\phi} = 0, \quad \implies \quad V = \kappa_1\phi^{-\frac{2}{\delta}(\alpha-\delta)} + \kappa_2, \quad (3.100)$$

que es el potencial propuesto por Peebles and Ratra ( $V \approx \phi^{-\alpha}$ ), pero esta solución es incompatible con las EC ya que en el contexto de soluciones autosimilares, los factores de escala siempre se comportan como  $a_i(t) \sim t^{n_i}$ , lo que implica que el tensor de Einstein,  $G_{ij} \sim t^{-2}$ . Pero si  $V \approx \phi^{-\alpha}$ , entonces  $\phi \sim t^{\frac{2}{\alpha+2}}$  y es imposible que  $2 = \frac{2\alpha}{\alpha+2}$ . No obstante veremos que esta solución es compatible con un modelo en el que  $G$  varíe.

De forma inversa podemos establecer el siguiente teorema

**Teorema 3.2.3** *Para un modelo cosmológico con un potencial definido por,  $V = \beta \exp(\mp 2\phi)$ , los factores de escala deben seguir una ley de potencias (power-law), es decir,  $H = ht^{-1}$ .*

**Demostración.** La ecuación de KG en este caso es

$$\phi'' + \phi'H + \frac{d}{d\phi}V = 0, \quad (3.101)$$

donde,  $V = \beta \exp(\mp 2\phi)$ , por lo que estudiaremos las posibles formas de la función  $H(t)$  para obtener una ODE integrable.

El método nos lleva a obtener el siguiente sistema de EDP

$$\xi_{\phi\phi} = 0, \quad (3.102)$$

$$2H\xi_{\phi} + \eta_{\phi\phi} - 2\xi_{t\phi} = 0, \quad (3.103)$$

$$-6e^{-2\phi}\xi_{\phi} + H\xi_t - H'\xi + 2\eta_{t\phi} - \xi_{tt} = 0, \quad (3.104)$$

$$4e^{-2\phi}\eta + \eta_{tt} - 4e^{-2\phi}\xi_t + 2e^{-2\phi}\eta_{\phi} + H\eta_t = 0, \quad (3.105)$$

donde la simetría,  $\xi = t, \eta = 1$ , nos lleva a obtener la solución invariante,  $\phi = \ln t$ , y por lo tanto de la Ec. (3.104) obtenemos que  $H = ht^{-1}, h \in \mathbb{R}$ . ■

Tal y como hemos mencionado anteriormente, este resultado no significa que la solución sea autosimilar, sólo que los factores de escala de la métrica deben seguir una solución de tipo potencias (power-law solution), i.e., son de la forma,  $a_i(t) = a_0 t^{n_i}$ , con  $n_j \in \mathbb{R}^+$  y por lo tanto  $H = ht^{-1}, h \in \mathbb{R}^+$ .

### 3.2.2. Modelos escalares con $G$ variable.

Como hemos visto con los modelos escalares podemos modelizar el comportamiento de una constante cosmológica efectiva a través del potencial del campo escalar, pero nada sabemos de la posible variación de la constante gravitatoria  $G$ . En este caso queremos introducir la hipótesis de la variación de  $G$  en las EC. Para este propósito y siguiendo los mismos pasos que en la sección anterior, consideramos la identidad de Bianchi,  $(G(t)T_{ij}^{\phi})^j = 0$ , obteniendo la siguiente EDO o ecuación de KG modificada

$$G\rho' + G(\rho + p)H = -G'\rho \quad \Longleftrightarrow \quad \phi'' + H\phi' + \frac{dV}{d\phi} = -\frac{G'\rho_{\phi}}{G\phi'}, \quad (3.106)$$

la cual estudiaremos mediante los métodos de las colineaciones de materia y grupos de Lie. Por lo tanto las ecuaciones de campo para este modelo (fenomenológico) son las siguientes

$$G_{ij} = 8\pi G(t)T_{ij}^{\phi}, \quad \square\phi + V_{\phi} = -\frac{G'\rho_{\phi}}{G\phi'}. \quad (3.107)$$

La idea de introducir la hipótesis de la variación de la constante gravitatoria en las ecuaciones de campo, en el contexto de modelos escalares, no es nueva. Por ejemplo en [222] los autores proponen un modelo de energía oscura trabajando bajo la hipótesis de holografía y permitiendo, de forma fenomenológica, que  $G$  varíe. Estos autores sólo trabajan con modelos tipo FRW y deducen la ecuación de conservación resultante a partir de las ecuaciones de Friedmann. En este sentido, nuestra propuesta es más general, válida para cualquier geometría tipo Bianchi y en particular también para los modelos FRW.

#### Método de las colineaciones de materia

Siguiendo los pasos ya expuestos anteriormente, estudiaremos la ecuación,  $\mathcal{L}_{\mathcal{H}}(G(t)T_{ij}^{\phi}) = 0$ , obteniendo las siguientes relaciones.

**Teorema 3.2.4** Las ecuaciones de campo (3.107) admiten soluciones autosimilares si las magnitudes se comportan como

$$\phi = \phi_0 t^{-b}, \quad G = G_0 t^{2b}, \quad V = V_0 t^{-2(b+1)}, \quad H = ht^{-1}, \quad b, h \in \mathbb{R}. \quad (3.108)$$

**Demostración.** De la ecuación,  $\mathcal{L}_{\mathcal{H}}(G(t)T_{ij}^{\phi}) = 0$ , obtenemos la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{\rho'}{\rho} = -\left(\frac{2}{t} + \frac{G'}{G}\right) \quad \Longleftrightarrow \quad G\rho \approx t^{-2}, \quad (3.109)$$

es decir

$$\phi'' = -\frac{dV(\phi)}{d\phi} - \left(\frac{2}{t} + \frac{G'}{G}\right) \left(\frac{1}{2}\phi' + \frac{V(\phi)}{\phi'}\right). \quad (3.110)$$

Para estudiar esta EDO podemos seguir las siguientes tácticas. La primera consiste en estudiar la ecuación completa, i.e., la Ec. (3.110), mientras que la segunda táctica consiste en descomponer la ecuación de la siguiente forma

$$\phi'' = - \left( \frac{1}{t} + \frac{G'}{2G} \right) \phi', \quad (3.111)$$

$$\frac{dV(\phi)}{d\phi} = - \left( \frac{2}{t} + \frac{G'}{G} \right) \frac{V(\phi)}{\phi'}, \quad (3.112)$$

de tal forma que resolviendo (3.111) podremos integrar (3.112). Empezaremos estudiando primero esta segunda posibilidad.

Descomposición. La Ec.(3.111) tiene la siguiente integral

$$\phi = C_1 \int \frac{dt}{t\sqrt{G(t)}} + C_2, \quad (3.113)$$

pero no obtenemos más información. Por ello, pasamos a estudiar dicha ecuación mediante el método de GL. Si estudiamos la Ec. (3.111) mediante GL vemos que admite las siguientes simetrías

$$\xi_{\phi\phi} = 0, \quad (3.114)$$

$$2 \left( \frac{1}{t} + \frac{G'}{2G} \right) \xi_{\phi} + \eta_{\phi\phi} - 2\xi_{t\phi} = 0, \quad (3.115)$$

$$\left( \frac{1}{t} + \frac{G'}{2G} \right) \xi_t + \left( -\frac{1}{t^2} + \frac{G''}{2G} - \frac{G'^2}{2G^2} \right) \xi + \eta_{t\phi} - 2\xi_{tt} = 0, \quad (3.116)$$

$$\left( \frac{1}{t} + \frac{G'}{2G} \right) \eta_t + \eta_{tt} = 0, \quad (3.117)$$

donde la simetría,  $\xi = t, \eta = -b\phi$ , que induce la solución invariante:  $\phi = \phi_0 t^{-b}$ , nos lleva a obtener la siguiente restricción sobre la función  $G(t)$  :

$$G'' = \frac{G'^2}{G} - \frac{G'}{t}, \quad \implies \quad G = G_0 t^k, \quad k \in \mathbb{R}. \quad (3.118)$$

De la relación,  $G\rho \approx t^{-2}$ , deducimos que,  $G\phi'^2 \approx t^{-2}$ , y por lo tanto:  $k = 2b$ . La Ec.(3.112) resulta

$$\frac{dV(\phi)}{d\phi} \frac{\phi'}{V(\phi)} = -2(1+b)t^{-1}, \quad (3.119)$$

cuya integración nos da

$$\ln V = -2(1+b) \ln t \quad \iff \quad V = V_0 t^{-2(b+1)}, \quad (3.120)$$

y en consecuencia, de  $G\rho \approx t^{-2}$ , i.e.  $GV \approx t^{-2}$ , obtenemos que,  $V = t^{-2b-2}$ , llegando así al siguiente resultado

$$V = \phi^\alpha = (t^{-ab}) = t^{-2b-2} \quad \iff \quad \alpha = \frac{2}{b}(b+1). \quad (3.121)$$

La ecuación completa. En este caso estudiamos la ecuación (3.110) mediante GL. El método nos lleva a obtener el siguiente sistema de EDP

$$\xi_{\phi\phi} = 0, \quad (3.122)$$

$$2 \left( \frac{2}{t} + \frac{G'}{G} \right) \xi_{\phi} + 2\eta_{\phi\phi} - 4\xi_{t\phi} = 0, \quad (3.123)$$

$$6V_{\phi}\xi_{\phi} + \left( \frac{2}{t} + \frac{G'}{G} \right) \xi_t + \left( -\frac{2}{t^2} + \frac{G''}{G} - \frac{G'^2}{G^2} \right) \xi + 4\eta_{t\phi} - 2\xi_{tt} = 0, \quad (3.124)$$

$$8 \left( \frac{2}{t} + \frac{G'}{G} \right) V\xi_{\phi} + 4V_{\phi}\xi_t - 2V_{\phi}\eta_{\phi} + \left( \frac{2}{t} + \frac{G'}{G} \right) \eta_t + 2V_{\phi\phi}\eta + 2\eta_{tt} = 0, \quad (3.125)$$

$$\left( \frac{2}{t} + \frac{G'}{G} \right) V_{\phi}\eta + 3 \left( \frac{2}{t} + \frac{G'}{G} \right) V\xi_t - 2 \left( \frac{2}{t} + \frac{G'}{G} \right) V\eta_{\phi} - \left( -\frac{2}{t^2} + \frac{G''}{G} - \frac{G'^2}{G^2} \right) V\xi = 0, \quad (3.126)$$

$$\left( \frac{1}{t} + \frac{G'}{2G} \right) V\eta_t = 0. \quad (3.127)$$

La simetría,  $\xi = t, \eta = -b\phi$ , cuya solución invariante es:  $\phi = \phi_0 t^{-b}$ , nos lleva a obtener las siguientes restricciones sobre la función  $G(t)$ . Ec. (3.126) puede escribirse de la siguiente forma

$$-b \left( \frac{2}{t} + \frac{G'}{G} \right) V_\phi \phi + \left( (2b+3) \left( \frac{2}{t} + \frac{G'}{G} \right) - t \left( -\frac{2}{t^2} + \frac{G''}{G} - \frac{G'^2}{G^2} \right) \right) V = 0, \quad (3.128)$$

mientras que de la Ec. (3.124) obtenemos

$$G'' = \frac{G'^2}{G} - \frac{G'}{t}, \quad \Longrightarrow \quad G = G_0 t^k, \quad k \in \mathbb{R}. \quad (3.129)$$

De la Ec. (3.125) obtenemos

$$V_{\phi\phi} = \frac{2+b}{b} \frac{V_\phi}{\phi} \quad \Longrightarrow \quad V = V_0 \phi^{\frac{2}{b}(b+1)}, \quad (3.130)$$

obteniendo, de esta forma, los mismos resultados que en el caso en el que habíamos descompuesto la ecuación. ■

### Método de grupos de Lie

Estudiamos la Ec. (3.106) mediante el método de grupos de Lie, dicha ecuación puede reescribirse de la siguiente forma

$$\phi'' \phi' + ht^{-1} \phi'^2 + \frac{dV}{d\phi} \phi' + \rho_\phi \frac{G'}{G} = 0, \quad (3.131)$$

donde,  $H = ht^{-1}$ . Como en los casos anteriores, buscamos la forma del potencial,  $V(\phi)$  y de  $G(t)$  para las cuales nuestra ecuación admite soluciones tipo power-law.

**Teorema 3.2.5** *La única forma posible para el potencial,  $V(\phi)$  y la función  $G(t)$ , compatible con soluciones power-law, es  $V(\phi) = V_0 \phi^{-\alpha}$ , y por tanto  $\phi = t^\beta$ , y  $G = \kappa_1 t^g$ , donde  $\alpha, h, g \in \mathbb{R}$ , tal que  $g = 2\alpha$ .*

**Demostración.** Aplicando el método de GL a la Ec. (3.131) obtenemos el siguiente sistema de EDPs

$$\xi_{\phi\phi} = 0, \quad (3.132)$$

$$\eta_{\phi\phi} - 2\xi_{t\phi} + \left( 2ht^{-1} + \frac{G'}{G} \right) \xi_\phi = 0, \quad (3.133)$$

$$2\eta_{t\phi} + \left( \frac{1}{2} \left( \frac{G''}{G} - \left( \frac{G'}{G} \right)^2 \right) - ht^{-2} \right) \xi + 3V_\phi \xi_\phi + \left( ht^{-1} + \frac{G'}{2G} \right) \xi_t - \xi_{tt} = 0, \quad (3.134)$$

$$\eta_{tt} + V_{\phi\phi} \eta + 4 \frac{G'}{G} V \xi_\phi + \left( ht^{-1} + \frac{G'}{2G} \right) \eta_t + 2V_\phi \xi_t - V_\phi \eta_\phi = 0, \quad (3.135)$$

$$\left( \frac{G''}{G} - \left( \frac{G'}{G} \right)^2 \right) V \xi + \frac{G'}{G} V_\phi \eta + 3 \frac{G'}{G} V \xi_t - 2 \frac{G'}{G} V \eta_\phi = 0, \quad (3.136)$$

$$\frac{G'}{G} V \eta_t = 0, \quad (3.137)$$

donde,  $V_\phi = \frac{dV}{d\phi}$ . Si imponemos la simetría,  $\xi = -t, \eta = \alpha\phi$ , y por lo tanto,  $\phi = t^{-\alpha}$ , entonces obtenemos las siguientes restricciones para las funciones  $V$  y  $G$ . De la Ec. (3.134) obtenemos

$$G'' = \frac{G'^2}{G} - \frac{G'}{t} \quad \Longrightarrow \quad G = \kappa_1 t^g, \quad (3.138)$$

mientras que de la Ec. (3.135) obtenemos

$$V_{\phi\phi} \phi - \left( \frac{2}{\alpha} + 1 \right) V_\phi = 0 \quad \Longrightarrow \quad V = \kappa_2 \phi^{2\left(\frac{1}{\alpha}+1\right)}, \quad (3.139)$$

de esta forma, vemos que,  $V = \kappa_2 (t + t_0)^{-2(\alpha+1)}$ . Por lo tanto hemos demostrado que las principales magnitudes se comportan de la siguiente manera

$$\phi = (t + t_0)^{-\alpha}, \quad V = \kappa_2 \phi^{2\left(\frac{1}{\alpha}+1\right)}, \quad V(t) = \kappa_2 (t + t_0)^{-2(\alpha+1)}, \quad G = \kappa_1 (t + t_0)^g, \quad (3.140)$$

con  $g - 2(\alpha + 1) = -2$  y, por lo tanto,  $g = 2\alpha$ . Observar que podemos redefinir las constantes para obtener  $V \approx \phi^{-\alpha}$ . ■

### 3.2.3. Campos de materia y escalares sin interacción

Para generalizar los escenarios anteriormente expuestos, en esta sección consideraremos la combinación de un fluido perfecto y campo escalar, situación que nos permite describir los escenarios de energía oscura y materia oscura.

El tensor energía-momento para un campo de materia, en este caso consideramos un fluido perfecto, viene definido por

$$T_{ij} = T_{ij}^m + T_{ij}^\phi$$

donde,  $T_{ij}^m = (p_m + \rho_m) u_i u_j + p_m g_{ij}$ , y  $T_{ij}^\phi = (p_\phi + \rho_\phi) u_i u_j + p_\phi g_{ij}$ , con,  $\rho_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)$ , y  $p_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi)$ .

La ecuación de conservación es

$$\rho'_m + (\gamma + 1) \rho_m H = -\phi' \left( \phi'' + \phi' H + \frac{d}{d\phi} V \right), \quad (3.141)$$

que al considerar que no existe interacción entre ambos campos, la Ec. (3.141) se descompone en las siguientes

$$\rho'_m + (\gamma + 1) \rho_m H = 0, \quad (3.142)$$

$$\phi'' + \phi' H + \frac{d}{d\phi} V = 0, \quad (3.143)$$

es decir, cada tensor energía-momento es conservado por separado.

Tal y como podemos observar, en este caso no es necesario realizar más cálculos ya que ambas ecuaciones han sido estudiadas en las secciones anteriores. Por lo tanto, las principales magnitudes se comportan como sigue:

$$\phi = \pm \sqrt{\alpha} \ln(t + t_0), \quad V = \beta \exp\left(\mp \frac{2}{\sqrt{\alpha}} \phi\right), \quad \rho = \rho_0 t^{-2}, \quad (3.144)$$

con  $H = ht^{-1}$ ,  $h \in \mathbb{R}$ .

En este caso, el método de las colineaciones de materia no aporta información nueva. Aplicando el método a la ecuación,  $\mathcal{L}_{\mathcal{H}}(T_{ij}^m + T_{ij}^\phi) = 0$ , y teniendo en cuenta las propiedades de la derivada de Lie, entonces podemos descomponer dicha ecuación en las siguientes,  $\mathcal{L}_{\mathcal{H}}(T_{ij}^m) + \mathcal{L}_{\mathcal{H}}(T_{ij}^\phi) = 0$ . Al desarrollar esta ecuación, llegamos a la conclusión, de que podemos estudiar por separado cada uno de los términos, i.e.,  $\mathcal{L}_{\mathcal{H}}(T_{ij}^m) = 0 = \mathcal{L}_{\mathcal{H}}(T_{ij}^\phi)$ , que son las ecuaciones ya analizadas en los casos anteriores.

### 3.2.4. Campos de materia y escalares sin interacción y G variable

En esta sección incorporamos la hipótesis de G variable a las ecuaciones de campo, de tal forma que proponemos un modelo fenomenológico en el que consideramos un campo escalar y un fluido perfecto sin interacción, permitiendo que la constante de gravitación varíe con el tiempo  $t$ . Teniendo en cuenta la identidad de Bianchi obtendremos una nueva ecuación de conservación.

El tensor energía-momento es,  $T^{ij} = T_m^{ij} + T_\phi^{ij}$ , donde  $T^{ij} = (\tilde{p} + \tilde{\rho}) u^i u^j + \tilde{p} g^{ij}$ , y  $\tilde{\rho} = \rho_m + \rho_\phi$  y  $\tilde{p} = p_m + p_\phi$ , por lo tanto aplicando Bianchi obtenemos

$$(8\pi G(t) T_{ij})^{;j} = 0 \iff G\tilde{\rho}' + G(\tilde{p} + \tilde{\rho})H = -G'\tilde{\rho}, \quad (3.145)$$

i.e.

$$\rho'_m + (\rho_m + p_m)H + \phi' \left( \square\phi + \frac{dV}{d\phi} \right) = -\frac{G'}{G} (\rho_m + p_\phi). \quad (3.146)$$

Podemos estudiar la Ec. (3.146) de diversas formas. Una de ellas, quizás la más simple, consiste en descomponer la ecuación de la siguiente forma

$$\rho'_m + (\rho_m + p_m)H = -\frac{G'}{G} \rho_m, \quad (3.147)$$

$$\phi' \left( \square\phi + \frac{dV}{d\phi} \right) = -\frac{G'}{G} \rho_\phi, \quad (3.148)$$

y por lo tanto, al haber sido ya estudiadas ambas ecuaciones, sabemos que las principales magnitudes deben comportarse como sigue:

$$\phi = t^{-\alpha}, \quad V(t) = \kappa_2 t^{-2(\alpha+1)}, \quad G = \kappa_1 t^g, \quad \rho_m = \rho_0 t^{-2(\alpha+1)}, \quad p_m = \gamma \rho_m, \quad (3.149)$$

con  $g = 2\alpha$ , ya que  $G\rho \approx t^{-2}$ .

### 3.2.5. Modelos con interacción

Uno de los principales problemas a resolver dentro de los modelos quintaesencia es el conocido como el problema de la coincidencia, que podemos formular de la siguiente manera. ¿Por qué vivimos en una época en la que las densidades de la energía y materia oscura son comparables? Una posibilidad que responde a este problema es la de considerar que ambas componentes, el campo escalar y el de materia interactúan, formulando así los denominados modelos con interacción “*interacting quintessence*”. En estos modelos, se considera que el campo escalar decae al campo de materia, y por lo tanto, se puede interpretar como un modelo en el que interactúa la materia oscura con la energía oscura. Debido a que desconocemos el comportamiento físico tanto de la materia como de la energía oscura entonces, no hay argumentos físicos que excluyan la posibilidad de la interacción entre ambas. De hecho, recientemente se han encontrado evidencias experimentales que apoyan esta idea. Por ejemplo, Bertolani et al [223] han puesto de manifiesto que en el clúster Abell A6586 existen evidencias experimentales de tal interacción, al igual que Abdalla et al [224]. Por lo tanto, parece razonable considerar la posibilidad de interacción entre el campo escalar y el campo de materia.

Consideraremos varias de las propuestas hechas por diferentes autores. Analizaremos tres modelos a priori distintos y mediante el método de GL, propondremos y justificaremos otras posibilidades.

#### Primer caso

El primero de los modelos considerados se debe a Maia et al [216]. Motivados por los diferentes modelos fenomenológicos que discuten la variación de la constante cosmológica en el contexto de la RG, los autores discuten cómo interpretar, en el marco de los modelos escalares, una  $\Lambda(t)$  variable que decae a un fluido perfecto. Recordamos que en RG la situación era descrita por la ecuación de conservación,  $\rho' + (\rho + p)\theta = \Lambda'/8\pi G$ . La cuestión resulta interesante ya que si la nueva modelización resulta viable, entonces dicha teoría puede implementarse en otros marcos gravitatorios donde la RG no resulte válida, como en regímenes de altas energías. De esta forma e inspirándose en el caso relativista “*clásico*” consideran un modelo en que existe interacción entre el campo escalar y el fluido perfecto, teniendo siempre presentes las leyes de la termodinámica y los procesos de creación de materia [225].

Por tanto las ecuaciones de campo son

$$G_{ij} = 8\pi G T_{ij}, \quad T_{ij} = T_{ij}^m + T_{ij}^\phi, \quad (3.150)$$

junto con la ecuación de conservación

$$\rho'_m + (\gamma + 1)\rho_m H = -\phi' \left( \square\phi + \frac{dV}{d\phi} \right). \quad (3.151)$$

que pasaremos a estudiar mediante GL, deduciendo la forma que pueden tener las principales magnitudes involucradas en el modelo para admitir soluciones tipo power-law y en particular soluciones autosimilares.

**Teorema 3.2.6** *La posible forma de las funciones,  $V$ ,  $\phi$  y  $\rho$ , para que la Ecs. (3.150 y 3.151) admitan soluciones tipo potencia es la siguiente*

$$\phi = \ln t, \quad V = \exp(-2\phi), \quad \rho \approx C_1 t^{-2} + C_2 t^{-r}. \quad (3.152)$$

**Demostración.** Empezamos reescribiendo la ecuación (3.151) de la siguiente manera

$$\rho'_m + r\rho_m t^{-1} = -\phi' \left( \phi'' + h\phi' t^{-1} + \frac{dV}{d\phi} \right), \quad (3.153)$$

con  $r = (\gamma + 1)h$ ,  $H = ht^{-1}$ . La aplicación del método de grupos de Lie nos lleva a obtener

$$t^2 \bar{\xi}_{\phi\phi} = 0, \quad (3.154)$$

$$-2t^2 \bar{\xi}_{t\phi} + 2ht \bar{\xi}_{\phi} + t^2 \eta_{\phi\phi} = 0, \quad (3.155)$$

$$2t^2 \eta_{t\phi} - t^2 \bar{\xi}_{tt} + 3t^2 \bar{\xi}_{\phi} V_{\phi} + th \bar{\xi}_t - h \bar{\xi} = 0, \quad (3.156)$$

$$t^2 \eta V_{\phi\phi} + t^2 \eta_{tt} + 4t \bar{\xi}_{\phi} (t\rho' + r\rho) + t^2 V_{\phi} (2\bar{\xi}_t - \eta_{\phi}) + ht \eta_t = 0, \quad (3.157)$$

$$t\rho' (3t\bar{\xi}_t - 2t\eta_{\phi} + r\bar{\xi}) + r\rho (3t\bar{\xi}_t - 2t\eta_{\phi} - \bar{\xi}) + t^2 \bar{\xi}\rho'' = 0, \quad (3.158)$$

$$\eta_t (r\rho + t\rho') = 0. \quad (3.159)$$

Siguiendo la misma táctica que en los casos anteriores, vemos que si imponemos la siguiente simetría,  $\bar{\xi} = t$ ,  $\eta = 1$ , obtenemos que,  $\phi = \ln t$ , junto con las siguientes restricciones para las funciones  $V$  y  $\rho$ . De la Ec. (3.157) se deduce que el potencial debe ser de la forma:

$$V_{\phi\phi} + 2V_{\phi} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad V = \exp(-2\phi), \quad (3.160)$$

mientras que de (3.158) obtenemos la restricción para la densidad de energía

$$\rho'' = -(3+r) \frac{\rho'}{t} - 2r \frac{\rho}{t^2} \quad \Longleftrightarrow \quad \rho \approx C_1 t^{-2} + C_2 t^{-r}. \quad (3.161)$$

tal y como queríamos probar. ■

Este modelo corresponde a una generalización “matemática” de la teoría de Hoyle-Narlikar [226] y su famoso campo  $C$ -campo de creación de materia donde el campo escalar no tiene potencial, i.e.,  $V = 0$ . Resaltamos el término “matemática” ya que las motivaciones físicas tenidas en cuenta para formular los respectivos modelos son muy diferentes. El modelo de Hoyle y Narlikar es quizás el primero en considerar campos escalares en cosmología.

### Segundo caso

Este modelo fue propuesto por Wetterich [217]. En este caso las ecuaciones de conservación son las siguientes

$$\rho'_m + (\omega + 1) \rho_m H = -\phi' q^{\phi}, \quad (3.162)$$

$$\square\phi + \frac{dV}{d\phi} = q^{\phi}, \quad (3.163)$$

donde  $q^{\phi} = \delta\rho_m$ . Tal y como se observa, si hacemos,  $\delta = 0$ , entonces recobramos el caso en el que no hay interacción entre los campos. La única condición que debe verificar la constante  $\delta$ , es la de ser negativa, i.e.,  $\delta < 0$  [227].

**Teorema 3.2.7** Las ecuaciones de campo (3.150, 3.162 y 3.163) admiten soluciones tipo power-law si las magnitudes  $V$ ,  $\phi$  y  $\rho$  se comportan como

$$\phi = \ln t, \quad V = \exp(-2\phi), \quad \rho = \rho_0 t^{-2}. \quad (3.164)$$

**Demostración.** Estudiando la Ec. (3.163) mediante GL vemos que

$$t^2 \bar{\xi}_{\phi\phi} = 0, \quad (3.165)$$

$$-2t^2 \bar{\xi}_{t\phi} + 2ht \bar{\xi}_{\phi} + t^2 \eta_{\phi\phi} = 0, \quad (3.166)$$

$$3t^2 \bar{\xi}_{\phi} (V_{\phi} - \beta\rho) + th \bar{\xi}_t - h \bar{\xi} + 2t^2 \eta_{t\phi} - t^2 \bar{\xi}_{tt} = 0, \quad (3.167)$$

$$t^2 \eta V_{\phi\phi} + t^2 \eta_{tt} + 2t^2 \bar{\xi}_t (V_{\phi} - \beta\rho) - t^2 \eta_{\phi} (V_{\phi} - \beta\rho) + ht \eta_t - \beta t^2 \bar{\xi}\rho' = 0. \quad (3.168)$$

La simetría,  $\bar{\xi} = t$ ,  $\eta = 1$ , la cual induce la solución invariante  $\phi = \ln t$ , nos lleva a obtener las siguientes restricciones

$$V_{\phi\phi} + 2V_{\phi} = \beta (t\rho' + 2\rho), \quad V = \exp(-2\phi) = \beta\rho \approx t^{-2}. \quad (3.169)$$

Por otro lado, la ecuación  $\rho'_m + (\gamma + 1) \rho_m H = -\phi' q^{\phi}$ , admite la siguiente solución

$$\rho = \exp[-\beta\phi - r \ln t + \beta C_1] = \rho_0 \frac{1}{t^{r+\beta}}, \quad r + \beta = 2, \quad (3.170)$$

tal y como queríamos hacer ver. ■

Nos preguntamos ahora, si la elección de la función  $q^\phi$  es única. Para ello definimos una nueva función de acoplamiento,  $q^\phi = \beta f(t)$ , que depende de una función indeterminada  $f(t)$ , buscando la posible forma de la función  $q^\phi$  compatible con soluciones tipo power-law. Para ello estudiaremos de nuevo la ecuación de KG modificada

$$\square\phi + \frac{dV}{d\phi} = q^\phi, \quad (3.171)$$

donde el método nos lleva a obtener el siguiente sistema de EDP

$$t^2 \xi_{\phi\phi} = 0, \quad (3.172)$$

$$-2t^2 \xi_{t\phi} + 2ht \xi_\phi + t^2 \eta_{\phi\phi} = 0, \quad (3.173)$$

$$3t^2 \xi_\phi (V_\phi - \beta f) + th \xi_t - h \xi + 2t^2 \eta_{t\phi} - t^2 \xi_{tt} = 0, \quad (3.174)$$

$$t^2 \eta_{V_\phi\phi} + t^2 \eta_{tt} + 2t^2 \xi_t (V_\phi - \beta f) - t^2 \eta_\phi (V_\phi - \beta f) + ht \eta_t - \beta t^2 \xi f' = 0, \quad (3.175)$$

y tendremos en cuenta la ecuación

$$\rho'_m + (\gamma + 1) \rho_m H = -\phi' q^\phi, \quad (3.176)$$

que admite la siguiente solución

$$\phi = \int -\frac{\rho' t + r \rho}{\beta t f(t)} dt + C_1, \quad \text{or} \quad \rho = \left( \int -\beta \phi' f(t) t^r dt + C_1 \right) t^{-r}. \quad (3.177)$$

Para preservar el principio de homogeneidad dimensional, observamos que la función,  $f$ , debe tener dimensiones de densidad de energía i.e.,  $[f] = [\rho]$ . La simetría,  $\xi = \alpha t$ ,  $\eta = 1$ , nos lleva a obtener la siguiente restricción sobre la función potencial, de tal forma que de la Ec. (3.175)

$$V_{\phi\phi} + 2\alpha (V_\phi - \beta f) - \beta t^2 \xi f' = 0, \quad (3.178)$$

y por lo tanto

$$V_{\phi\phi} + 2\alpha V_\phi = 0 \quad \implies \quad V = V_0 \exp(-2\alpha\phi), \quad (3.179)$$

$$-2f - t f' = 0 \quad \implies \quad f = t^{-2}. \quad (3.180)$$

Observamos que de hecho, la función  $f$  puede ser de la forma,  $f = At^{-2}$ ,  $A \in \mathbb{R}$ . De esta forma llegamos a que las magnitudes deben ser de la forma  $\phi = \ln t$ ,  $V = \exp(-2\phi)$ ,  $f = f_0 t^{-2}$ . Esto justifica como elección de  $f$ ,  $f = \rho \approx t^{-2}$ , pero podemos considerar otras magnitudes o combinación de magnitudes, como por ejemplo,  $\rho_m + \rho_\phi$ , siempre y cuando se verifique que  $f \approx t^{-2}$ .

### Tercer caso

Este modelo ha sido propuesto por Billard et al [218]. Inspirados por el trabajo de Wetterich, proponen otra forma para la función de acoplamiento, en este caso denotada mediante la letra  $Q$ . Las ecuaciones de conservación  $((T^m)_{i;j}^j = Q$ , y  $(T^\phi)_{i;j}^j = -Q$ ) son

$$\rho'_m + (\omega + 1) \rho_m H = Q, \quad (3.181)$$

$$\phi' \left( \square\phi + \frac{dV}{d\phi} \right) = -Q, \quad (3.182)$$

donde la función de acoplamiento toma ahora la siguiente forma,  $Q = \delta H \rho_m$ . Consideran esta forma para la función de acoplamiento basándose en la existencia de una transformación conforme que lleva la teoría JBD a la escalar (más adelante volveremos sobre este punto). Como en los casos anteriores la energía del campo escalar es transferida al campo de materia. La única restricción a considerar en este modelo es la siguiente:  $\delta > 0$ , de tal forma que la segunda ley de la termodinámica sea satisfecha [228]. Si hacemos  $\delta = 0$ , entonces, como antes, recobramos el modelo no interactivo.

**Teorema 3.2.8** Las ecuaciones de campo (3.150, 3.181 y 3.182) admiten soluciones tipo power-law si la densidad de energía, el campo escalar y el potencial se comportan de la siguiente manera

$$\rho_m = \rho_0 t^{-2}, \quad \phi = \ln t, \quad V = \exp(-2\phi). \quad (3.183)$$

**Demostración.** Estudiamos el siguiente sistema

$$\rho'_m + (\gamma + 1) \rho_m H = \delta H \rho_m, \quad (3.184)$$

$$\phi' \left( \square\phi + \frac{dV}{d\phi} \right) = -\delta H \rho_m. \quad (3.185)$$

Vemos que la Ec. (3.184) se integra fácilmente

$$\rho_m = \rho_0 t^{h(\delta - (\gamma + 1))}, \quad (3.186)$$

y por lo tanto la Ec. (3.185) resulta

$$\phi' \left( \phi'' + h\phi' t^{-1} + \frac{dV}{d\phi} \right) = -A t^a, \quad (3.187)$$

con  $a = h(\delta - (\gamma + 1)) - 1$ ,  $A = \delta h \rho_0$ . El método de los GL nos lleva a obtener el siguiente sistema

$$\xi_{\phi\phi} t^2 = 0, \quad (3.188)$$

$$-2t^2 \xi_{t\phi} + 2ht \xi_{\phi} + t^2 \eta_{\phi\phi} = 0, \quad (3.189)$$

$$3t^2 \xi_{\phi} V_{\phi} + th \xi_t - h \xi + 2t^2 \eta_{t\phi} - t^2 \xi_{tt} = 0, \quad (3.190)$$

$$t^2 \eta V_{\phi\phi} + t^2 \eta_{tt} + 4At^{2+a} \xi_{\phi} V_{\phi} - t^2 \eta_{\phi} V_{\phi} + ht \eta_t + 2t^2 \xi_t V_{\phi} = 0, \quad (3.191)$$

$$3At^{2+a} \xi_t - 2At^{2+a} \eta_{\phi} + aAt^{1+a} \xi = 0, \quad (3.192)$$

$$At^{2+a} \eta_t = 0. \quad (3.193)$$

Si consideramos la simetría,  $\xi = t$ ,  $\eta = 1$ , entonces obtenemos la siguiente restricción sobre la función potencial

$$V_{\phi\phi} + 2\alpha V_{\phi} = 0, \quad \implies \quad V = V_0 \exp(-2\alpha\phi), \quad (3.194)$$

y  $a = -3$ , tal y como queríamos probar. ■

Como hicimos en el segundo caso, nos volvemos a preguntar si la forma de la función de acoplamiento es única o puede generalizarse. Para ello consideraremos la siguiente función de acoplamiento,  $Q = \delta H f(t)$ , donde la función  $f(t)$  es desconocida, en vez de ser la densidad de energía del fluido. Aplicando el mismo procedimiento que en los casos anteriores, estudiaremos las ecuaciones de conservación mediante GL determinando la posible forma de las funciones involucradas compatibles con soluciones tipo power-law. Nuestras ecuaciones a estudiar son las siguientes

$$\rho'_m + (\gamma + 1) \rho_m H = \delta H f(t), \quad (3.195)$$

$$\phi' \left( \square\phi + \frac{dV}{d\phi} \right) = -\delta H f(t), \quad (3.196)$$

observando que la Ec. (3.195)

$$\rho'_m + ((\gamma + 1) \rho_m - \delta f(t)) H = 0, \quad (3.197)$$

admite la siguiente solución

$$\rho = \left( \delta h \int f(t) t^{r-1} dt + C_1 \right) t^{-r}, \quad (3.198)$$

con  $r = h(\gamma + 1)$ , y  $H = ht^{-1}$ . Analizando ahora la Ec. (3.196)

$$\phi' \left( \phi'' + h\phi' t^{-1} + \frac{dV}{d\phi} \right) = -\delta h t^{-1} f(t), \quad (3.199)$$

mediante GL, vemos que:

$$\xi_{\phi\phi} t^2 = 0, \quad (3.200)$$

$$-2t^2 \xi_{t\phi} + 2ht \xi_{\phi} + t^2 \eta_{\phi\phi} = 0, \quad (3.201)$$

$$3t^2 \xi_{\phi} V_{\phi} + th \xi_t - h \xi + 2t^2 \eta_{t\phi} - t^2 \xi_{tt} = 0, \quad (3.202)$$

$$t^2 \eta V_{\phi\phi} + t^2 \eta_{tt} + 4\delta h t f(t) \xi_{\phi} V_{\phi} - t^2 \eta_{\phi} V_{\phi} + ht \eta_t + 2t^2 \xi_t V_{\phi} = 0, \quad (3.203)$$

$$3\delta h t f(t) \xi_t - 2\delta h t f(t) \eta_{\phi} + \delta h (t f'(t) - f) \xi = 0, \quad (3.204)$$

$$\delta h t f(t) \eta_t = 0. \quad (3.205)$$

La simetría,  $\xi = t$ ,  $\eta = 1$ , impone las siguientes restricciones. De las Ecs. (3.203 y 3.204) obtenemos

$$V_{\phi\phi} + 2V_{\phi} = 0, \quad \implies \quad V = V_0 \exp(-2\phi), \quad (3.206)$$

$$t f'(t) + 2f = 0, \quad \implies \quad f = f_0 t^{-2}, \quad (3.207)$$

lo cual nos permite integrar la Ec. (3.198) obteniendo

$$\rho = \left( \delta h \int t^{r-3} dt + C_1 \right) t^{-r}, \quad \implies \quad \rho \approx C_1 t^{-2} + C_2 t^{-r}. \quad (3.208)$$

Por lo tanto hemos obtenido los siguientes resultados

$$\rho_m = \rho_0 t^{-2}, \quad \phi = \ln t, \quad V = \exp(-2\phi), \quad f = f_0 t^{-2}. \quad (3.209)$$

Tal y como se observa, la función,  $f$ , debe comportarse como,  $f = f_0 t^{-2}$ . Este hecho justifica el empleo de  $f = \rho_m$ , como en el caso propuesto por Billard et al, pero nos permite justificar el empleo de otras funciones como las siguientes;  $f = \rho_{\phi} \approx t^{-2}$ , o  $f = \rho_m + \rho_{\phi} \approx t^{-2}$ , etc. Por ejemplo, Wei [229] utiliza la siguiente función de acoplamiento (sin deducción alguna)  $Q = \alpha \rho'_m + 3\beta H \rho_m$ , pasando a estudiar el modelo mediante sistemas dinámicos. Observar que la elección es dimensionalmente homogénea ya que  $[\rho'_m] = [H \rho_m] = T^{-2}$ .

### 3.2.6. Modelo escalar interactuando con un campo de materia y $G$ variable

Consideramos ahora un modelo escalar que interactúa con un fluido perfecto, pero añadimos además, la hipótesis de una constante gravitatoria variando con el tiempo  $t$ . Entonces debemos deducir unas nuevas ecuaciones de conservación teniendo en cuenta la identidad de Bianchi, i.e.,  $\text{div}(G(t)T_{ij}) = 0$ . Para ello empezaremos por reescribir el tensor energía-momento de la siguiente forma

$$T_{ij} = T_{ij}^m + T_{ij}^{\phi}, \quad T^{ij} = (\tilde{p} + \tilde{\rho}) u^i u^j + \tilde{p} g^{ij}, \quad (3.210)$$

donde,  $\tilde{\rho} = \rho_m + \rho_{\phi}$ , y  $\tilde{p} = p_m + p_{\phi}$ . Considerando la identidad de Bianchi,  $(G(t)T_{ij})^{;j} = 0$ , obtenemos

$$G\tilde{\rho}' + G(\tilde{p} + \tilde{\rho})H = -G'\tilde{\rho}, \quad (3.211)$$

i.e.,

$$\rho'_m + \phi''\phi' + \frac{dV}{d\phi}\phi' + H(\phi'^2 + (\rho_m + p_m)) = -\frac{G'}{G} \left( \rho_m + \frac{1}{2}\phi'^2 + V \right). \quad (3.212)$$

Ésta es nuestra nueva ecuación de conservación. Estudiaremos dos casos: el primero consistirá en estudiar la ecuación sin desacoplar (sin descomponer); en el segundo introduciremos una función de acoplamiento, siguiendo así los pasos anteriormente expuestos.

Tal y como expusimos anteriormente, el método de los CM no aporta información alguna a este estudio ya que de la ecuación  $\mathcal{L}_H(G(t)(T_{ij}^m + T_{ij}^{\phi})) = 0$ , llegaríamos a,  $\mathcal{L}_H(G(t)T_{ij}^m) = 0 = \mathcal{L}_H(G(t)T_{ij}^{\phi})$ , casos éstos ya estudiados.

**Caso 1**

En este caso estudiaremos la ecuación entera, i.e., Ec (3.212) que rescribimos de la siguiente manera, teniendo en cuenta que,  $H = ht^{-1}$ , entonces

$$\left(\phi'' + \left(ht^{-1} + \frac{G'}{2G}\right)\phi' + \frac{dV}{d\phi}\right)\phi' + \frac{G'}{G}V + \rho'_m + \left(rt^{-1} + \frac{G'}{G}\right)\rho_m = 0, \quad (3.213)$$

con  $r = (1 + \gamma)h$ . Aplicando el método de GL obtenemos

$$t^2 G^2 \xi_{\phi\phi} = 0, \quad (3.214)$$

$$2t^2 G^2 \eta_{\phi\phi} - 4t^2 G^2 \xi_{t\phi} + 2tG\xi_{\phi} (2hG + tG') = 0, \quad (3.215)$$

$$6tG^2 \xi_{\phi} (\rho + tV_{\phi}) + 4t^2 G^2 \eta_{t\phi} - 2t^2 G^2 \xi_{tt} + \left(-2hG^2 - t^2 G'^2 + t^2 GG''\right) \xi + tG (2hG + tG') \xi_t = 0, \quad (3.216)$$

$$\begin{aligned} &4t^2 G^2 V_{\phi} \xi_t - 2t^2 G^2 V_{\phi} \eta_{\phi} + 2t^2 G^2 \eta_{tt} + 8tG (tG' (V + \rho) + r\rho G + tG\rho') \xi_{\phi} + \\ &+ 2t^2 G^2 V_{\phi\phi} \eta + tG (2hG + tG') \eta_t = 0, \end{aligned} \quad (3.217)$$

$$\begin{aligned} &2t^2 GG' V_{\phi} \eta + 6tG (tG'V + r\rho G + tG'\rho + tG\rho') \xi_t - 4tG (tG'V + r\rho G + tG'\rho + tG\rho') \eta_{\phi} + \\ &+ 2t^2 G \left(G''V + G'\rho' + t^{-1}Gr\rho' + G''\rho + G\rho'' - r\rho Gt^{-2} - G^{-1}G'^2 (V + \rho)\right) \xi = 0, \end{aligned} \quad (3.218)$$

$$2t^2 G^2 \left(\rho + G^{-1}G'V + t^{-1}r\rho + G'\rho\right) \eta_t = 0. \quad (3.219)$$

Imponemos la simetría,  $\xi = t$ ,  $\eta = \alpha\phi$ , que induce la siguiente solución invariante para el campo escalar,  $\phi = t^{\alpha}$ , lo cual nos llevará a obtener restricciones sobre las funciones  $G$ ,  $V$  and  $\rho$ . De la Ec. (3.216) obtenemos la restricción sobre  $G$ ,

$$G'' = \frac{G'^2}{G} - \frac{G'}{t}, \quad \implies \quad G = G_0 t^g. \quad (3.220)$$

De la Ec. (3.217) obtenemos la restricción sobre el potencial

$$V_{\phi\phi} = \left(\frac{\alpha - 2}{\alpha}\right) \frac{V_{\phi}}{\phi}, \quad \implies \quad V(\phi) = V_0 \phi^{\frac{2}{\alpha}(\alpha-1)}. \quad (3.221)$$

Por último, de la Ec. (3.218) y teniendo en cuenta los resultados previos,  $\phi = t^{\alpha}$  and  $V(\phi) = V_0 \phi^{\frac{2}{\alpha}(\alpha-1)} = V_0 t^{2(\alpha-1)}$ , y  $G = G_0 t^g$ , obtenemos la restricción sobre la densidad de energía

$$\rho'' = -c_1 \frac{\rho'}{t} - c_2 \frac{\rho}{t^2} - c_3 t^{2(\alpha-2)}, \quad \implies \quad \rho_m = \rho_0 t^{2(\alpha-1)}. \quad (3.222)$$

Por lo tanto podemos concluir que las principales magnitudes deben comportarse de la siguiente forma (redefiniendo las constantes)

$$\phi = t^{-\alpha}, \quad V(t) = \kappa_2 t^{-2(\alpha+1)}, \quad G = \kappa_1 t^g, \quad \rho_m = \rho_0 t^{-2(\alpha+1)}, \quad p_m = \gamma \rho_m, \quad (3.223)$$

con  $g = 2\alpha$ , ya que debe verificarse la relación,  $G\rho \approx t^{-2}$ .

Si consideramos el caso de un campo escalar en el que el potencial es nulo,  $V = 0$ , entonces el modelo es similar al propuesto por Hoyle y Narlikar [226], pero con  $G$  variable, modelos éstos en los que recientemente han trabajado Bali et al. [230].

**Caso 2**

Como comentamos anteriormente, en este segundo enfoque, descompondremos la Ec. (3.212) introduciendo cierta función de acoplamiento. Las ecuaciones resultantes son las siguientes

$$\rho'_m + (\rho_m + p_m) H + \frac{G'}{G} \rho_m = Q, \quad (3.224)$$

$$\phi'' + \phi' H + \frac{dV}{d\phi} + \frac{G'}{G} \frac{\rho_\phi}{\phi'} = -Q, \quad (3.225)$$

donde,  $Q = \delta H f(t)$ , siendo  $f$  cierta función a determinar. Por simplificar los cálculos, y teniendo en cuenta los resultados previos, podemos suponer que por ejemplo  $f$  se comporte como la densidad de energía, i.e., fijaremos  $f = \rho$ , por lo tanto

$$\rho'_m + (\rho_m + p_m) H + \frac{G'}{G} \rho_m = \delta H \rho_m, \quad (3.226)$$

$$\phi'' + \phi' H + \frac{dV}{d\phi} + \frac{G'}{G} \frac{\rho_\phi}{\phi'} = -\delta H \rho_m, \quad (3.227)$$

pasando a estudiar ambas ecuaciones. El método de Lie aplicado a la Ec. (3.227) nos conduce a obtener el siguiente sistema

$$t^2 G^2 \xi_{\phi\phi} = 0, \quad (3.228)$$

$$2t^2 G^2 \eta_{\phi\phi} - 4t^2 G^2 \xi_{t\phi} + 2t G \xi_\phi (2hG + tG') = 0, \quad (3.229)$$

$$6t G^2 \xi_\phi (\delta h \rho + tV_\phi) + 4t^2 G^2 \eta_{t\phi} - 2t^2 G^2 \xi_{tt} + (-2hG^2 - t^2 G'^2 + t^2 G G'') \xi + tG (2hG + tG') \xi_t = 0, \quad (3.230)$$

$$4t G^2 (\delta h \rho + tV_\phi) \xi_t - 2t G^2 (\delta h \rho - tV_\phi) \eta_\phi + 2G^2 \delta h (t\rho' - \rho) \xi + 2t^2 G^2 \eta_{tt} + 8t^2 G G' V_\phi \xi_\phi + \\ + 2t^2 G^2 V_{\phi\phi} \eta + 2tG (hG + tG') \eta_t = 0, \quad (3.231)$$

$$2t^2 G G' V_{\phi\phi} \eta + 6t^2 G G' V_\phi \xi_t - 4t^2 G G' V_\phi \eta_\phi + 2t^2 V_\phi (G G'' - G'^2) \xi = 0, \quad (3.232)$$

$$t^2 G G' V_\phi \eta_t = 0. \quad (3.233)$$

La simetría,  $\xi = t$ ,  $\eta = \alpha\phi$ , y por lo tanto,  $\phi = t^\alpha$ , nos lleva a obtener las siguientes restricciones. De la Ec. (3.230)

$$G'' = \frac{G'^2}{G} - \frac{G'}{t}, \quad \implies \quad G = G_0 t^8, \quad (3.234)$$

mientras que de las Ec. (3.231) obtenemos la siguiente restricción para el potencial

$$2(\delta h \rho + tV_\phi) - (\delta h \rho - tV_\phi) \alpha + \delta h \left( \rho' - \frac{\rho}{t} \right) t + tV_{\phi\phi} \alpha \phi = 0, \quad (3.235)$$

que podemos descomponer en

$$tV_{\phi\phi} \alpha \phi + (\alpha + 2) tV_\phi = 0, \quad (3.236)$$

$$2\delta h \rho - \alpha \delta h \rho + \delta h \left( \rho' - \frac{\rho}{t} \right) t = 0. \quad (3.237)$$

De la Ec (3.236) obtenemos

$$V_{\phi\phi} = -\frac{(\alpha + 2)}{\alpha} \frac{V_\phi}{\phi}, \quad \implies \quad V = V_0 \phi^{-\frac{2(\alpha+1)}{\alpha}}, \quad (3.238)$$

mientras que de la Ec. (3.237) obtenemos la forma para la densidad de energía

$$(2 - \alpha - 1) \rho + \rho' t = 0, \quad \implies \quad \rho = \rho_0 t^{-(2-\alpha-1)}, \quad (3.239)$$

tal y como ya sabíamos. Observamos que la Ec. (3.226) admite una integración directa

$$\rho'_m + (1 + \gamma - \delta) H \rho_m + \frac{G'}{G} \rho_m = 0, \quad \implies \quad \rho_m G = K t^{-r}, \quad (3.240)$$

con  $r = (1 + \gamma - \delta)$ .

Concluimos por lo tanto, que bajo las hipótesis consideradas, las principales magnitudes del modelo deben comportarse de la siguiente manera

$$\phi = t^{-\alpha}, \quad V(t) = \kappa_2 t^{-2(\alpha+1)}, \quad G = \kappa_1 t^g, \quad \rho_m = \rho_0 t^{-2(\alpha+1)}, \quad p_m = \gamma \rho_m, \quad (3.241)$$

con  $g = 2\alpha$ , al tener que verificarse la relación  $G\rho \approx t^{-2}$ , siendo  $\alpha \in \mathbb{R}$ , una constante a determinar a través de las ecuaciones de campo.

Existen otras alternativas a las aquí tratadas, todas ellas desarrolladas en el marco de geometrías tipo FRW. Por ejemplo, Sheykhi y Setare [231] proponen un modelo interactivo para fluidos viscosos bajo la hipótesis agegráfica “agegraphic principle”. También en el marco de fluidos viscosos, Adabi et al [232] presentan un modelo con la hipótesis holográfica. Por último, Jamil [233] estudia las correcciones a los parámetros “statefinder” debidas a una posible variación de  $G$  en varios modelos para fluidos perfectos bajo las hipótesis de holografía, agegraphic y gases Chaplygin. En todos estos casos, las ecuaciones de conservación son deducidas derivando las ecuaciones de Friedmann de tal forma que la variación de  $G, G'$ , entre en las ecuaciones planteadas.

### 3.3. Teorías tenso-escalares

Las teorías tenso-escalares empezaron con los trabajos pioneros de P. Jordan en 1950 [234]. La teoría de Brans-Dicke [24] (BD) constituye un intento de incorporar el principio de Mach a la RG. Este principio establece que los sistemas de referencia inerciales están determinados por la distribución de la masa del universo. De esta forma, deberemos admitir que existe un espacio absoluto respecto al cual las galaxias lejanas están en reposo y que definen los sistemas inerciales o por el contrario, la inercia es debida a la interacción de las masas de todos los cuerpos en el universo. Brans y Dicke interpretaron que las relaciones inerciales son consecuencia de la distribución de masa del universo alrededor del punto considerado, y por lo tanto, las leyes físicas dependen de la posición. Otra piedra angular en la teoría de Brans-Dicke reside en la hipótesis de Dirac de los grandes números (LNH). La idea de Brans y Dicke estriba en suponer que la variación de las constantes físicas requerida por su interpretación del principio de Mach, se reduce a la variación de la constante gravitatoria. Esta interpretación del principio de Mach resulta incompatible con el principio de equivalencia fuerte que sí es verificada por la RG. Por lo tanto, los modelos de BD generalizan la RG basándose en el principio de equivalencia débil (el único hasta la fecha verificado experimentalmente) e incorpora el principio de Mach. La idea fundamental consiste en describir un mecanismo de interacción entre un cuerpo y el resto del universo (Mach) mediante un campo escalar. Además este campo debe dar cuenta de la variación de la constante gravitatoria. Estas teorías fueron posteriormente generalizadas por P.G. Bergmann [235], K. Nordtverdt [236] y R. T. Wagoner [237]. En los libros de Faraoni [238] y Fujii y Maeda [239] podemos encontrar una recopilación y motivación de todas estas teorías.

Como nuestro propósito se centra en describir la variación tanto de  $G$  como de la constante cosmológica, consideraremos generalizaciones de la teoría de BD. Empezaremos estudiando un modelo que puede considerarse la generalización más sencilla del modelo de BD al contemplar una constante cosmológica dinámica  $\Lambda(\phi)$ . El estudio, como en los casos anteriores, consistirá en la deducción de la posible forma que pueden tomar las distintas magnitudes para que el modelo admita soluciones autosimilares, mediante CM y GL. Consideraremos un modelo más general, en el que el campo escalar es introducido mediante cierta función  $F(\phi)$  y la constante cosmológica es modelizada mediante el potencial  $U$  del campo escalar  $\phi$ . Al igual que en el anterior caso deduciremos las posibles formas que pueden tomar las magnitudes involucradas en el modelo para que éste admita soluciones autosimilares. De esta forma encontramos una familia de modelos tenso-escalares que admiten soluciones autosimilares y que corresponden a modelos bien conocidos en la literatura, como es el modelo de la gravedad inducida. A continuación estudiaremos los modelos tipo camaleón y por último demostraremos que existen soluciones tipo power-law para las denominadas teorías  $f(R, \phi)$  (generalización de los modelos  $F(\phi)$ ). Sin embargo, demostraremos que no existen soluciones ni autosimilares ni de tipo potencias en los modelos  $f(R)$ .

### 3.3.1. Modelo con $\Lambda$

En este caso consideramos el modelo propuesto por Will [240]. La acción viene definida por

$$S = \frac{c^3}{16\pi G_N} \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \phi R - \frac{\omega(\phi) g^{ij} \phi_{,i} \phi_{,j}}{\phi} + 2\phi \Lambda(\phi) \right] + S_{NG}, \quad (3.242)$$

donde, como es habitual,  $g = \det(g_{ij})$ ,  $G_N$  es la constante de Newton, y  $S_{NG}$  es la acción de la materia no-gravitatoria. Las funciones arbitrarias  $\omega(\phi)$  y  $\Lambda(\phi)$  determinarán las diferentes teorías tenso-escalares.  $\Lambda(\phi)$  es una función potencial y desempeña el papel de una constante cosmológica dinámica, mientras que la función,  $\omega(\phi)$ , es una función de acoplamiento (el parámetro de BD).

Las ecuaciones de campo explícitas son

$$R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R = \frac{8\pi}{c^4 \phi} T_{ij} + \Lambda(\phi) g_{ij} + \frac{\omega}{\phi^2} \left( \phi_{,i} \phi_{,j} - \frac{1}{2} g_{ij} \phi_{,l} \phi^{,l} \right) + \frac{1}{\phi} \left( \phi_{;ij} - g_{ij} \square \phi \right), \quad (3.243)$$

y las ecuaciones de conservación son

$$(3 + 2\omega(\phi)) \square \phi = 8\pi T - \frac{d\omega}{d\phi} \phi_{,l} \phi^{,l} - 2\phi \left( \phi \frac{d\Lambda}{d\phi} - \Lambda(\phi) \right), \quad (3.244)$$

$$(T_{ij})^{;j} = 0, \quad (3.245)$$

donde,  $T = T_i^i$ , representa la traza del tensor energía-momento. La constante de gravitación efectiva,  $G_{\text{eff}}(t)$ , está definida por la siguiente expresión

$$G_{\text{eff}}(t) = \left( \frac{2\omega + 4}{2\omega + 3} \right) \frac{G_N}{\phi(t)}, \quad (3.246)$$

donde debemos suponer que  $2\omega + 3 \neq 0$ . El parámetro de BD  $\omega$  viene determinado por las observaciones y, en el caso límite en el que  $\omega \rightarrow \infty$ , entonces, la teoría de BD colapsa a la RG. Las últimas estimaciones [241] sugieren  $\omega \approx 4 \cdot 10^4$ .

Por lo tanto, nuestro objetivo es determinar la forma de las funciones,  $\phi$ ,  $\omega(\phi)$  y  $\Lambda(\phi)$ , para las cuales las ecuaciones de campo admitan soluciones autosimilares. Para ello emplearemos el método de las colineaciones de materia y los grupos de Lie.

#### Colineaciones de materia

Empezaremos por definir un tensor efectivo energía-momento,  $T_{ij}^{\text{eff}}$ ,

$$T_{ij}^{\text{eff}} = \frac{1}{\phi} T_{ij} + \frac{\omega(\phi)}{\phi^2} \left( \phi_{,i} \phi_{,j} - \frac{1}{2} g_{ij} \phi_{,l} \phi^{,l} \right) + \frac{1}{\phi} \left( \phi_{;ij} - g_{ij} \square \phi \right) + \Lambda(\phi) g_{ij}, \quad (3.247)$$

y calcularemos su derivada de Lie respecto de cierto campo homotético  $\mathcal{H}$ , i.e.,

$$\mathcal{L}_{\mathcal{H}} \left( T_{ij}^{\text{eff}} \right) = 0. \quad (3.248)$$

Por simplicidad emplearemos el campo  $\mathcal{H}$  de una métrica FRW (pues no estamos interesados en obtener restricciones sobre los factores de escala, sino sobre las magnitudes del modelo) resaltando que los resultados obtenidos serán válidos para cualquier modelo Bianchi. Por tanto, el campo considerado es el siguiente

$$\mathcal{H} = t\partial_t + (1 - tH) x\partial_x + (1 - tH) y\partial_y + (1 - tH) z\partial_z. \quad (3.249)$$

Para calcular,  $\mathcal{L}_{\mathcal{H}} \left( T_{ij}^{\text{eff}} \right) = 0$ , descomponemos el tensor  $T_{ij}^{\text{eff}}$ , pasando a calcular dicha ecuación bajo la hipótesis  $\mathcal{L}_{\mathcal{H}}(T_i) = 0$ , siendo,  $T_i$ , cada una de las componentes del tensor  $T_{ij}^{\text{eff}}$ . En consecuencia

$$1. T_1 = \phi^{-1} T_{ij},$$

$$\mathcal{L}_{\mathcal{H}} \left( \frac{1}{\phi} T_{ij} \right) = 0, \quad \iff \quad -t\rho\phi' + t\rho'\phi + 2\rho\phi = 0, \quad (3.250)$$

obteniendo

$$\frac{\rho'}{\rho} - \frac{\phi'}{\phi} = -\frac{2}{t} \quad \iff \quad \frac{\rho}{\phi} = t^{-2}. \quad (3.251)$$

$$2. T_2 = \omega(\phi) \phi^{-2} \left( \phi_{,i} \phi_{,j} - \frac{1}{2} g_{ij} \phi_{,l} \phi^{,l} \right)$$

$$\mathcal{L}_{\mathcal{H}} \left( \frac{\omega(\phi)}{\phi^2} \left( \phi_{,i} \phi_{,j} - \frac{1}{2} g_{ij} \phi_{,l} \phi^{,l} \right) \right) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (3.252)$$

$$t \phi_t^2 (\omega_\phi \phi - 2\omega) + 2t\omega \phi_{tt} \phi + 2\omega \phi_t \phi = 0, \quad (3.253)$$

y por lo tanto

$$\phi_{tt} = -\frac{\phi_t^2}{\phi} \left( \frac{\omega_\phi \phi}{2\omega} - 1 \right) - \frac{\phi_t}{t}, \quad (3.254)$$

o

$$\frac{\omega_\phi}{\omega} \phi_t - 2\frac{\phi_t}{\phi} + 2\frac{\phi_{tt}}{\phi_t} = -\frac{2}{t} \quad \frac{\omega'}{\omega} - 2\frac{\phi_t}{\phi} + 2\frac{\phi_{tt}}{\phi_t} = -\frac{2}{t} \quad \Longleftrightarrow \quad \omega(\phi) \frac{\phi_t^2}{\phi^2} = t^{-2}. \quad (3.255)$$

Observar que  $\omega' = \omega_\phi \phi_t$ .

Encontramos la siguiente solución para la Ec. (3.254)

$$\int^\phi \frac{\sqrt{\omega(\phi)}}{\phi} d\phi - C_1 \ln t + C_2 = 0. \quad (3.256)$$

por lo que para determinar la forma de  $\phi$ , deberemos hacer ciertas “hipótesis” sobre la función  $\omega(\phi)$ . Por ejemplo

- $\omega(\phi) = \text{const}$

$$\int^\phi \frac{k}{\phi} d\phi = k \ln \phi, \quad \Longrightarrow \quad \phi = \phi_0 t^n, \quad (3.257)$$

esta es la única solución matemáticamente compatible con la solución autosimilar.

- $\omega(\phi) = \phi^a$

$$\int^\phi \frac{\phi^{a/2}}{\phi} d\phi = \frac{2}{a} \phi^{a/2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{2}{a} \phi^{a/2} = C_1 \ln t \quad \phi = C_1 (\ln t)^{2/a}. \quad (3.258)$$

$$3. T_3 = \phi^{-1} \left( \phi_{,ij} - g_{ij} \square \phi \right)$$

$$\mathcal{L}_{\mathcal{H}} \left( \frac{1}{\phi} \left( \phi_{,ij} - g_{ij} \square \phi \right) \right) = 0, \quad (3.259)$$

i.e.

$$t \left( \phi_{tt} f' + \phi_t f'' - \frac{\phi_t^2}{\phi} f' - \phi_t \frac{f'^2}{f} \right) + 2\phi_t f' = 0, \quad (3.260)$$

$$t \left[ \phi''' + \left( 2H - \frac{\phi'}{\phi} \right) \phi'' - 2H \frac{\phi'^2}{\phi} + 2H' \phi' \right] + 2(\phi'' - 2\phi' H) = 0. \quad (3.261)$$

Recordar que  $H = ht^{-1}$ ,  $h \in \mathbb{R}^+$ . Estas ecuaciones son diferentes para cada uno de los modelos tipo Bianchi y con ellas únicamente obtenemos restricciones sobre los factores de escala, por lo tanto no obtenemos ninguna información sobre el comportamiento de las magnitudes.

$$4. T_4 = \Lambda(\phi) g_{ij},$$

$$\mathcal{L}_{\mathcal{H}} (\Lambda(\phi) g_{ij}) = 0 \quad (3.262)$$

i.e.

$$t\Lambda_\phi \phi' + 2\Lambda = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\Lambda_\phi}{\Lambda} \phi' = -\frac{2}{t} \quad \Longleftrightarrow \quad \Lambda = \Lambda_0 t^{-2}, \quad (3.263)$$

donde  $\Lambda' = \Lambda_\phi \phi'$ .

Tal y como podemos comprobar, con el método de las CM hemos obtenido las siguientes relaciones entre las diferentes magnitudes

$$\rho\phi^{-1} = t^{-2}, \quad \int^{\phi} \frac{\sqrt{\omega(\phi)}}{\phi} d\phi - C_1 \ln t + C_2 = 0, \quad \Lambda = \Lambda_0 t^{-2},$$

y sólo haciendo “hipótesis” sobre el comportamiento de la función  $\omega$ , como por ejemplo,  $\omega = \text{const.}$ , podemos llegar a obtener una solución completa. De esta forma, pasaremos a estudiar mediante la táctica de los GL la ecuación de conservación. Recordamos que con las CM obtenemos exclusivamente soluciones autosimilares mientras, que con el método de los GL, obtenemos soluciones tipo power-law en las que las autosimilares están incluidas.

### Grupos de Lie

En este caso queremos estudiar la Ec. (3.244) mediante el método de GL, i.e., estudiaremos la forma que pueden adoptar las funciones  $\Lambda(\phi)$  y  $\omega(\phi)$  para que dicha ecuación admita una integración completa. Empezaremos por reescribir la ecuación de la siguiente forma

$$(3 + 2\omega(\phi)) (\phi'' + ht^{-1}\phi') = Ct^{-\alpha} + B(\Lambda - \phi\Lambda_{\phi})\phi - \phi'^2\omega_{\phi}, \quad (3.264)$$

donde,  $h = \text{const.}$ ,  $h \in \mathbb{R}^+$ ,  $B = 2$ , y  $C = 8\pi(1 - 3\gamma)\rho_0$ . Observar que en este caso hemos tenido en cuenta la condición suplementaria,  $\text{div } T = 0$ , es decir,  $\rho = \rho_0 t^{-\alpha}$ , donde  $\alpha = (1 + \gamma)h$ , y  $H = ht^{-1}$ , como es habitual.

El método nos lleva a obtener el siguiente sistema de EDP

$$\omega_{\phi}\xi_{\phi} - W\xi_{\phi\phi} = 0, \quad (3.265)$$

$$2ht^{-1}W\xi_{\phi} + W\eta_{\phi\phi} - 2W\xi_{\phi t} - (2W^{-1}\omega_{\phi}^2 - \omega_{\phi\phi})\eta + \omega_{\phi}\eta_{\phi} = 0, \quad (3.266)$$

$$\begin{aligned} & -3(B\phi(\Lambda - \phi\Lambda_{\phi}) + Ct^{-\alpha})\xi_{\phi} + ht^{-2}W(t\xi_t - \xi) + 2W\eta_{t\phi} - \\ & - W\xi_{tt} + 2ht^{-1}\omega_{\phi}(1 - (3 + 2\omega)W^{-1})\eta + 2\omega_{\phi}\eta_t = 0, \end{aligned} \quad (3.267)$$

$$\begin{aligned} & [B(\phi^2\Lambda_{\phi\phi} + \phi\Lambda_{\phi} - \Lambda) + 2\omega_{\phi}W^{-1}(B\phi(\Lambda - \phi\Lambda_{\phi}) + Ct^{-\alpha})]\eta - 2[B\phi(\Lambda - \phi\Lambda_{\phi}) - Ct^{-\alpha}]\xi_t + \\ & + \alpha Ct^{-\alpha-1}\xi + [B\phi(\Lambda - \phi\Lambda_{\phi}) + Ct^{-\alpha}]\eta_{\phi} + ht^{-1}W\eta_t + W\eta_{tt} = 0, \end{aligned} \quad (3.268)$$

con  $W = (3 + 2\omega(\phi))$ . Observar que  $(2\omega + 3)W^{-1} = 1$ , y por lo tanto, la Ec. (3.267) resulta

$$-3(B\phi(\Lambda - \phi\Lambda_{\phi}) + Ct^{-\alpha})\xi_{\phi} + ht^{-2}W(t\xi_t - \xi) + 2W\eta_{t\phi} - W\xi_{tt} + 2\omega_{\phi}\eta_t = 0. \quad (3.269)$$

La simetría,  $\xi = t$ ,  $\eta = n\phi$ , nos permite deducir la siguiente restricción sobre la función,  $\Lambda(\phi)$ . De la Ec. (3.268) obtenemos que

$$\begin{aligned} & [B(\phi^2\Lambda_{\phi\phi} + \phi\Lambda_{\phi} - \Lambda) + 2\omega_{\phi}W^{-1}(B\phi(\Lambda - \phi\Lambda_{\phi}) + Ct^{-\alpha})]n\phi - 2[B\phi(\Lambda - \phi\Lambda_{\phi}) - Ct^{-\alpha}] + \\ & + \alpha Ct^{-\alpha} + [B\phi(\Lambda - \phi\Lambda_{\phi}) + Ct^{-\alpha}]n = 0, \end{aligned} \quad (3.270)$$

por lo tanto

$$Ct^{-\alpha}(\alpha + n - 2 + 2n\omega_{\phi}\phi W^{-1}) = 0, \quad (3.271)$$

y

$$n(\phi^2\Lambda_{\phi\phi} + \phi\Lambda_{\phi} - \Lambda) + (\Lambda - \phi\Lambda_{\phi})(-\alpha) = 0, \quad (3.272)$$

donde hemos tenido en cuenta la Ec. (3.271). De esta forma llegamos a la siguiente EDO para  $\Lambda(\phi)$

$$\Lambda_{\phi\phi} = \left(\frac{n + \alpha}{n}\right) \left(-\frac{\Lambda_{\phi}}{\phi} + \frac{\Lambda}{\phi^2}\right), \quad (3.273)$$

cuya solución general es

$$\Lambda(\phi) = \Lambda_0 \phi^{\frac{-1}{n}(n+\alpha)} + \frac{C_3 n}{2n + \alpha} \phi, \quad (3.274)$$

eligiendo sólo

$$\Lambda(\phi) = \Lambda_0 \phi^{\frac{-1}{n}(n+\alpha)} = \Lambda_0 t^{-(n+\alpha)}, \quad (3.275)$$

ya que el método de las CM nos dice que,  $\Lambda(t) = t^{-2}$ , esto significa que,  $n + \alpha = 2$ .

De igual forma calculamos las restricciones sobre la función  $\omega(\phi)$ ,

$$\omega_\phi \phi W^{-1} = \frac{2 - \alpha - n}{2n}, \quad \omega' = \left( \frac{2 - \alpha - n}{2n} \right) \frac{(3 + 2\omega)}{\phi}, \quad (3.276)$$

cuya solución es

$$\omega(\phi) = \phi^{\frac{-1}{n}(n+\alpha-2)} e^{-2nC_4} - \frac{3}{2} = \omega_n t^{-(n+\alpha-2)} - \frac{3}{2}, \quad \omega_n = \text{const}, \quad (3.277)$$

por lo tanto obtenemos que

$$\omega(\phi) = \text{const.}, \quad n + \alpha = 2. \quad (3.278)$$

De forma alternativa, de la Ec. (3.266) obtenemos

$$\omega_{\phi\phi} = \left( \frac{2 - \alpha - 2n}{n} \right) \frac{\omega_\phi}{\phi}, \quad \implies \quad \omega(\phi) = C_8 + C_9 \phi^{\frac{1}{n}(2-n-\alpha)} = \omega_0 t^{2-n-\alpha}, \quad (3.279)$$

y por lo tanto concluimos que

$$\omega(\phi) = \omega_0 = \text{const}, \quad (3.280)$$

ya que  $2 = n + \alpha$ . De esta forma, podemos formular el siguiente teorema.

**Teorema 3.3.1** *Las ecuaciones de campo (3.243-3.244) admiten soluciones tipo power-law y en particular las autosimilares si las magnitudes físicas se comportan como*

$$\phi = \phi_0 t^n, \quad \Lambda(\phi) = \Lambda_0 \phi^{\frac{-1}{n}(n+\alpha)} = \Lambda_0 t^{-(n+\alpha)},$$

con,  $n + \alpha = 2$ , y por lo tanto,  $\Lambda(t) = \Lambda_0 t^{-2}$ . El parámetro de Brans-Dicke es constante,  $\omega(\phi) = \text{const}$ . y  $\rho = \rho_0 t^{-\alpha}$ , con,  $\alpha = (1 + \gamma)h$ .

### 3.3.2. Caso general

Empezamos definiendo la acción [238]

$$S = \frac{1}{8\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{2} [F(\phi) R - Z(\phi) \phi_{,\alpha} \phi^{,\alpha} - 2U(\phi)] + \mathcal{L}_M \right\}, \quad (3.281)$$

por lo tanto las ecuaciones de campo son

$$FG_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}^{Matter} + Z \left[ \phi_{;\mu} \phi_{;\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \phi_{;\alpha} \phi^{;\alpha} \right] + [F_{;\mu} F_{;\nu} - g_{\mu\nu} \square F] - U(\phi) g_{\mu\nu}, \quad (3.282)$$

junto con la ecuación de conservación

$$2Z \square \phi = F_\phi R - Z_\phi \phi'^2 - 2U_\phi, \quad (3.283)$$

donde  $R$  representa la curvatura escalar. En el modelo de la sección anterior,  $F(\phi) = \phi$ ,  $Z(\phi) = \omega(\phi) / \phi$ , y donde la constante cosmológica dinámica es modelizada mediante el potencial del campo escalar  $U(\phi)$ . Para este modelo, la constante efectiva de gravitación,  $G_{\text{eff}}$ , está definida por la siguiente expresión

$$G_{\text{eff}} = \frac{G_N}{F} \left[ \frac{2Z(\phi)F + 4F_\phi^2}{2Z(\phi)F + 3F_\phi^2} \right]. \quad (3.284)$$

Como en el modelo anterior estudiaremos la forma de las funciones  $\phi$ ,  $F(\phi)$ ,  $Z(\phi)$  y  $U(\phi)$  para que las ecuaciones de campo (3.282-3.283) admitan soluciones autosimilares.

### Colineaciones de materia

Definimos el siguiente tensor energía-momento

$$T_{ij}^{\text{eff}} = \frac{1}{F(\phi)} T_{ij} + \frac{Z(\phi)}{F(\phi)} \left( \phi_{,i} \phi_{,j} - \frac{1}{2} g_{ij} \phi_{,l} \phi^{,l} \right) + \frac{1}{F(\phi)} (F_{,i} F_{,j} - g_{ij} \square F) - \frac{U(\phi)}{F(\phi)} g_{ij}, \quad (3.285)$$

y, como en el caso anterior, estudiaremos la ecuación,  $\mathcal{L}_{\mathcal{H}}(T_{ij}^{\text{eff}}) = 0$ , calculando la derivada de Lie de cada una de sus componentes

$$1. T_1 = F(\phi)^{-1} T_{ij}$$

$$\mathcal{L}_{\mathcal{H}}(F(\phi)^{-1} T_{ij}) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad t\rho F_{\phi} \phi' - t\rho' F - 2\rho F = 0, \quad (3.286)$$

de esta forma, llegamos a obtener, entonces la siguiente relación entre las magnitudes,  $\rho$  y  $F$ ,

$$\frac{F_{\phi}}{F} \phi' - \frac{\rho'}{\rho} = \frac{-2}{t} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\rho}{F} = t^{-2}. \quad (3.287)$$

$$2. T_2 = \frac{Z(\phi)}{F(\phi)} \left( \phi_{,i} \phi_{,j} - \frac{1}{2} g_{ij} \phi_{,l} \phi^{,l} \right)$$

$$\mathcal{L}_{\mathcal{H}} \left( \frac{Z(\phi)}{F(\phi)} \left( \phi_{,i} \phi_{,j} - \frac{1}{2} g_{ij} \phi_{,l} \phi^{,l} \right) \right) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (3.288)$$

$$t\rho F Z_{\phi} \phi'^2 - t Z F_{\phi} \phi'^2 + 2t Z F \phi'' + 2Z F \phi' = 0, \quad (3.289)$$

de esta forma

$$\frac{Z_{\phi}}{Z} \phi' - \frac{F_{\phi}}{F} \phi' + 2 \frac{\phi''}{\phi'} = \frac{-2}{t} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{Z}{F} \phi'^2 = t^{-2}. \quad (3.290)$$

$$3. T_3 = \frac{1}{F(\phi)} (F_{,i} F_{,i} - g_{\mu\nu} \square F). \text{ Esta expresión depende de la métrica y por lo tanto la descartamos.}$$

$$4. T_4 = \frac{U(\phi)}{F(\phi)} g_{\mu\nu}$$

$$\mathcal{L}_{\mathcal{H}} \left( \frac{U(\phi)}{F(\phi)} g_{\mu\nu} \right) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad t\phi' U_{\phi} F - t U F_{\phi} \phi' + 2\phi U = 0, \quad (3.291)$$

por lo tanto, encontramos la siguiente relación entre el potencial,  $U$ , y la función,  $F$ ,

$$\frac{U_{\phi}}{U} \phi' - \frac{F_{\phi}}{F} \phi' = \frac{-2}{t} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{U}{F(\phi)} = t^{-2}. \quad (3.292)$$

Podemos concluir que con el método de CM hemos obtenido las siguientes relaciones

$$\rho F^{-1} = t^{-2}, \quad Z F^{-1} \phi'^2 = t^{-2}, \quad U F^{-1} = t^{-2},$$

pero no hemos obtenido su comportamiento individual, por lo que pasaremos a estudiar el modelo mediante GL para determinar la forma exacta de cada magnitud.

### Grupos de Lie

Para determinar la forma exacta de cada magnitud, estudiaremos la ecuación de conservación

$$2Z \square \phi = F_{\phi} R - Z_{\phi} \phi'^2 - 2U_{\phi}, \quad (3.293)$$

que rescribimos de la siguiente manera

$$2Z (\phi'' + h t^{-1} \phi') = C t^{-2} F_{\phi} - Z_{\phi} \phi'^2 - 2U_{\phi}, \quad (3.294)$$

y donde asumimos que el campo escalar es de la forma,  $\phi = \phi(t)$ . Observar que la curvatura escalar se comporta de la siguiente manera,  $R \approx C t^{-2}$ , con  $C \in \mathbb{R}$ .

Siguiendo el procedimiento habitual, encontramos el siguiente sistema de EDP

$$Z_\phi \xi_\phi - 2Z \xi_{\phi\phi} = 0, \quad (3.295)$$

$$(ZZ_{\phi\phi} - Z_\phi^2) \eta + ZZ_\phi \eta_\phi + 4Z^2 h t^{-1} \xi_\phi + 2Z^2 \eta_{\phi\phi} - 4Z^2 \xi_{t\phi} = 0, \quad (3.296)$$

$$3(2V_\phi - Ct^{-2}F_\phi) \xi_\phi + 2ht^{-2}Z(t\xi_t - \xi) + 4Z\eta_{t\phi} - 2Z\xi_{tt} + 2Z_\phi \eta_t = 0, \quad (3.297)$$

$$\begin{aligned} & [Ct^{-2}(Z_\phi F_\phi - ZF_{\phi\phi}) + 2(ZU_{\phi\phi} - Z_\phi U_\phi)] \eta + Z(Ct^{-2}F_\phi - 2U_\phi) \eta_\phi + \\ & 2Z(2U_\phi - Ct^{-2}F_\phi) \xi_t + 2Ct^{-3}ZF_\phi \xi + 2Z^2(ht^{-1}\eta_t + \eta_{tt}) = 0. \end{aligned} \quad (3.298)$$

La simetría,  $\zeta = t, \eta = n\phi$ , nos lleva a encontrar las siguientes restricciones. De la Ec. (3.357)

$$Z_{\phi\phi} = \frac{Z_\phi^2}{Z} - Z_\phi \frac{\eta_\phi}{\eta}, \quad \implies \quad Z_{\phi\phi} = \frac{Z_\phi^2}{Z} - \frac{Z_\phi}{\phi}, \quad \implies \quad Z(\phi) = Z_0 \phi^{-m}, \quad (3.299)$$

con,  $m \in \mathbb{R}$ . De la Ec. (3.359) obtenemos

$$2(ZU_{\phi\phi} - Z_\phi U_\phi) \eta - 2ZU_\phi \eta_\phi + 4ZU_\phi \xi_t = 0, \quad (3.300)$$

$$Ct^{-2} [(Z_\phi F_\phi - ZF_{\phi\phi}) \eta + ZF_\phi \eta_\phi - 2ZF_\phi \xi_t + 2t^{-1}ZF_\phi \xi] = 0, \quad (3.301)$$

y por lo tanto

$$U_{\phi\phi} = U_\phi \frac{Z_\phi}{Z} + \left(\frac{n-2}{n}\right) \frac{U_\phi}{\phi}, \quad U_{\phi\phi} = \left(\frac{n-2}{n} - m\right) \frac{U_\phi}{\phi}. \quad (3.302)$$

De esta forma

$$U(\phi) = C_2 + U_0 \phi^{-\frac{1}{n}(mn-2n+2)}, \quad (3.303)$$

mientras que

$$F_{\phi\phi} = F_\phi \frac{Z_\phi}{Z} + \frac{F_\phi}{\phi}, \quad F_{\phi\phi} = (1-m) \frac{F_\phi}{\phi}, \quad (3.304)$$

llegamos a

$$F(\phi) = C_1 + F_0 \phi^{2-m}. \quad (3.305)$$

De esta manera podemos resumir todos estos resultados en el siguiente teorema.

**Teorema 3.3.2** Las ecuaciones de campo (3.282-3.283) admiten soluciones power-law (en particular autosimilares) si las magnitudes físicas se comportan de la siguiente forma

$$\phi = \phi_0 t^n, \quad Z(\phi) = Z_0 \phi^{-m} = Z_0 t^{-nm}, \quad (3.306)$$

con

$$\rho = \rho_0 t^{-\alpha}, \quad \alpha = (1+\gamma)h, \quad (3.307)$$

mientras que

$$F(\phi) = C_1 + F_0 \phi^{2-m}, \quad U(\phi) = C_2 + U_0 \phi^{-\frac{1}{n}(mn-2n+2)}. \quad (3.308)$$

Tal y como se observa, hemos obtenido un conjunto de teorías que admiten soluciones tipo power-law (en particular autosimilares). La acción se transforma en

$$S = \frac{1}{8\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{2} [\phi^{2-m} R - \phi^{-m} \phi_{,\alpha} \phi^{,\alpha} - 2U(\phi)] + \mathcal{L}_M \right\}. \quad (3.309)$$

por lo tanto, para diferentes valores de la constante  $m$  obtendremos diferentes teorías. Por ejemplo,

1. Si  $m = 0$ , entonces la acción (3.281) resulta

$$S = \frac{1}{8\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{2} \left[ \phi^2 R - \phi_{,\alpha} \phi^{,\alpha} - 2U(\phi) \right] + \mathcal{L}_M \right\}, \quad (3.310)$$

con

$$\phi = \phi_0 t^n, \quad Z(\phi) = Z_0, \quad F(\phi) = F_0 \phi^2, \quad U(\phi) = U_0 \phi^{\frac{1}{n}(2n-2)}, \quad G_{\text{eff}} \approx \phi^{-2}. \quad (3.311)$$

Este es el modelo de gravitación inducida propuesto por Sakharov [242]. Zee [243] analizó los aspectos cuánticos de esta teoría y, en la aproximación semiclásica, estudió la rotura de simetrías. La idea clave de la teoría es considerar que la constante de la gravitación tiene dimensiones de  $M^{-2}$ , i.e.,  $G_N \sim m_p^{-2}$  ( $m_p$  representa la masa de Planck) al igual que la constante de Fermi,  $G_F \sim m_p^{-2}$  ( $m_p$  representa la masa del protón).  $G_F$  aparece como resultado de la rotura de simetrías y su valor está conectado con el inverso del cuadrado del valor esperado del vacío de los campos.

2. Si  $m = 1$ , entonces la acción (3.281) resulta

$$S = \frac{1}{8\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{2} \left[ \phi R - \frac{\omega}{\phi} \phi_{,\alpha} \phi^{,\alpha} - 2U(\phi) \right] + \mathcal{L}_M \right\}. \quad (3.312)$$

con

$$\phi = \phi_0 t^n, \quad Z(\phi) = Z_0 \phi^{-1}, \quad F(\phi) = F_0 \phi, \quad U(\phi) = U_0 \phi^{\frac{1}{n}(n-2)}, \quad G_{\text{eff}} \approx \phi^{-1}, \quad (3.313)$$

i.e.

$$Z(\phi) = \frac{\omega(\phi)}{\phi}, \quad \omega(\phi) = \text{const.}, \quad (3.314)$$

que es la forma usual de la teoría de JBD con un potencial [238].

3. Si  $m = 2$ , la acción (3.281) se transforma en

$$S = \frac{1}{8\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{2} \left[ R - \frac{\omega}{\phi^2} \phi_{,\alpha} \phi^{,\alpha} - 2U(\phi) \right] + \mathcal{L}_M \right\}, \quad (3.315)$$

con

$$\phi = \phi_0 t^n, \quad Z(\phi) = Z_0 \phi^{-2}, \quad F(\phi) = F_0, \quad U(\phi) = U_0 \phi^{\frac{-2}{n}}, \quad G_{\text{eff}} \approx \text{const.} \quad (3.316)$$

Este es un caso particular de un modelo escalar con,  $G_{\text{eff}} \approx \text{const.}$  Nojiri y Odintsov ([244] y [245]) utilizan una acción similar para describir modelos fantasma (phantom models) sin necesidad de imponer o utilizar campos escalares con extrañas propiedades (como la de tener energía cinética negativa). Recaltar que este modelo es diferente al obtenido por Barker [246].

### Transformaciones conformes

Antes de pasar a considerar otros modelos tenso-escalares, veamos la relación entre estos modelos y los simplemente escalares. Comenzamos considerando la siguiente acción en el marco de Jordan

$$S_J = \frac{1}{8\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \phi \bar{R} - \frac{\omega}{\phi} \phi_{,\bar{\alpha}} \phi^{,\bar{\alpha}} - U(\phi) + \bar{\mathcal{L}}_M \right\}, \quad (3.317)$$

donde  $\phi$  es un campo escalar con una función potencial  $U(\phi)$ ,  $\omega$  el parámetro de BD (constante) y  $\bar{\mathcal{L}}_M$  denota el lagrangiano de la materia. La transformación conforme

$$g_{ij} = \Omega^2 \bar{g}_{ij}, \quad (3.318)$$

donde  $\Omega^2 = G\phi$ , lleva la acción (3.317) al marco de Einstein (ver por ejemplo, [247]-[248]-[249] y [238]). De esta forma obtenemos un nuevo campo escalar definido como sigue

$$\varphi(\phi) = \sqrt{\frac{2\omega+3}{16\pi G}} \ln(\phi), \quad (3.319)$$

por lo que la nueva acción queda ahora definida por

$$S_J = \frac{1}{8\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{2} \left[ \frac{R}{16\pi G} - \frac{1}{2} \varphi_{,\alpha} \varphi^{,\alpha} - V(\varphi) \right] + \mathcal{L}_M \right\}, \quad (3.320)$$

donde

$$V(\varphi) = V(\varphi(\phi)) \exp \left( -8 \sqrt{\frac{\pi G}{2\omega + 3}} \varphi \right), \quad (3.321)$$

es el potencial del campo  $\varphi$ , en el marco de Einstein. Si hacemos variar la acción (3.320) con respecto a la métrica  $g_{ij}$  y al campo  $\varphi$  entonces obtenemos las siguientes ecuaciones de campo

$$G_{ij} = 8\pi G \left( T_{ij}^m + T_{ij}^\varphi \right), \quad (3.322)$$

$$\square \varphi - V_\varphi = -\frac{1}{2} K T^m, \quad (3.323)$$

donde

$$T_{ij}^\varphi = \varphi_{,i} \varphi_{,j} - g_{ij} \left( \frac{1}{2} \varphi_{,\alpha} \varphi^{,\alpha} + V(\varphi) \right), \quad (3.324)$$

con  $K = \sqrt{\frac{16\pi G}{2\omega + 3}} > 0$  (transferencia de energía del campo escalar al campo de materia), y como es habitual  $T^m$  representa la traza del tensor energía-momento de la materia. Como podemos observar, la diferencia esencial entre ambos marcos es la siguiente: En el marco de Einstein, el campo de materia y el campo escalar interactúan, lo que implica que sus respectivos tensores no se conservan de forma separada, tal y como vimos en el estudio de los modelos escalares, si aplicamos la identidad de Bianchi a la Ec. (3.322) entonces

$$\left( T_{ij}^m \right)^{ij} = - \left( T_{ij}^\varphi \right)^{ij} = \frac{1}{2} K T^m \varphi_{,j} \quad (3.325)$$

y que se puede descomponer, tal y como hemos visto, en

$$\left( T_{ij}^m \right)^{ij} = Q, \quad (3.326)$$

$$\left( T_{ij}^\varphi \right)^{ij} = -Q, \quad (3.327)$$

siendo  $Q = \frac{1}{2} K T^m \varphi_{,j}$ . Terminamos señalando que la equivalencia matemática muchas veces no implica equivalencia física tal y como ha sido puesto de manifiesto en [250].

### 3.3.3. Modelo camaleón

Comenzamos planteando la acción que define el modelo de BD camaleón, en la que el campo escalar está mínimamente acoplado con el campo de materia

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left( \phi R - \frac{\omega}{\phi} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - U(\phi) + J(\phi) L_m \right), \quad (3.328)$$

siendo,  $R$ , la curvatura escalar,  $\phi$  es el campo escalar de BD con potencial,  $U(\phi)$ . El campo camaleón,  $\phi$ , no está mínimamente acoplado a la gravedad, y  $\omega$ , es el parámetro de BD (adimensional). El último término en la acción (3.328) indica la interacción entre el lagrangiano de materia,  $L_m$ , y una función arbitraria,  $J(\phi)$ , que depende del campo escalar de BD. El caso límite,  $J(\phi) = 1$ , recobramos la forma usual de la teoría de BD.

Las ecuaciones de campo que se derivan de la acción (3.328) son las siguientes

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{J(\phi)}{\phi} T_{\mu\nu} + \frac{\omega}{\phi^2} \left( \phi_\mu \phi_\nu - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \phi^\alpha \phi_\alpha \right) + \frac{1}{\phi} [\phi_{\mu,\nu} - g_{\mu\nu} \square \phi] - g_{\mu\nu} \frac{U(\phi)}{2\phi}. \quad (3.329)$$

mientras que la ecuación de Klein-Gordon (o ecuación de ondas) para el campo escalar es en este caso

$$(2\omega + 3) \square \phi = T \left( J - \frac{1}{2} \phi J_{,\phi} \right) + (\phi U_{,\phi} - 2U). \quad (3.330)$$

De igual forma, consideramos la ecuación de conservación para la densidad de energía

$$\rho' + (\rho + p)\theta = 0, \quad \theta = u_{;i}^i. \quad (3.331)$$

donde, como es habitual, tendremos en cuenta una EdS para el fluido,  $p = \gamma\rho$ , y por lo tanto la Ec. (3.331) nos lleva a obtener la siguiente relación:  $\rho = \rho_0 t^{-\alpha}$ .

Como en los casos anteriores estudiaremos mediante el método de las CM las relaciones funcionales entre las magnitudes del modelo y la ecuación de ondas mediante el método de los GL para determinar su forma exacta para a obtener soluciones tipo power-law.

### Colineadores de materia

Empezamos definiendo el tensor energía-momento efectivo

$$T_{ij}^{\text{eff}} = \frac{J(\phi)}{\phi} T_{\mu\nu} + \frac{\omega}{\phi^2} \left( \phi_\mu \phi_\nu - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \phi^\alpha \phi_\alpha \right) + \frac{1}{\phi} [\phi_{\mu;\nu} - g_{\mu\nu} \square \phi] - g_{\mu\nu} \frac{U(\phi)}{2\phi}, \quad (3.332)$$

viendo que no es necesario calcular todas las componentes de dicho tensor al haber sido ya calculadas en los anteriores casos. Por lo tanto, si  $T_1 = J(\phi)\phi^{-1}T_{ij}$ , entonces de

$$\mathcal{L}_{\mathcal{H}} \left( \frac{J(\phi)}{\phi} T_{ij} \right) = 0, \quad (3.333)$$

obtenemos

$$tJ_\phi \phi' \rho \phi - t\rho J\phi' + t\rho' J\phi + 2\rho J\phi = 0. \quad (3.334)$$

El álgebra nos permite obtener la siguiente relación funcional

$$\frac{J_\phi \phi'}{J} + \frac{\rho'}{\rho} - \frac{\phi'}{\phi} = -\frac{2}{t} \quad \iff \quad \frac{J}{\phi} \rho = t^{-2}, \quad (3.335)$$

donde,  $J' = J_\phi \phi'$ , no obteniendo más información sobre la forma exacta de las funciones involucradas  $\phi$  y  $J(\phi)$ . Por ello pasamos a estudiar la ecuación de KG mediante el método de los GL.

### Grupos de Lie

En este caso estudiaremos la siguiente ED

$$\phi'' + ht^{-1}\phi' = C \left( J - \frac{1}{2}\phi J_\phi \right) t^{-\alpha} + K(2V - \phi U_\phi), \quad (3.336)$$

con,  $C = \frac{8\pi(1-3\gamma)}{3+2\omega}$ ,  $K = \frac{1}{3+2\omega}$ ,  $h = \text{const.}$ . La aplicación del método nos lleva a obtener el siguiente sistema de EDP

$$\xi_{\phi\phi} = 0, \quad (3.337)$$

$$ht^{-1}\xi_\phi + \eta_{\phi\phi} - 2\xi_{\phi t} = 0, \quad (3.338)$$

$$ht^{-2}(t\xi_t - \xi) + 2\eta_{t\phi} - \xi_{tt} - 3 \left[ Ct^{-\alpha} \left( J - \frac{1}{2}\phi J_\phi \right) + 2U - \phi U_\phi \right] \xi_\phi = 0, \quad (3.339)$$

$$\begin{aligned} & \eta_{tt} + ht^{-1}\eta_t + 2 \left( \phi U_\phi - U - Ct^{-\alpha} \left( J - \frac{1}{2}\phi J_\phi \right) \right) \xi_t + \alpha Ct^{-\alpha-1} \left( J - \frac{1}{2}\phi J_\phi \right) \xi \\ & + \left( 2V - \phi V_\phi + Ct^{-\alpha} \left( J - \frac{1}{2}\phi J_\phi \right) \right) \eta_\phi - \left( \frac{Ct^{-\alpha}}{2} (J_\phi - \phi J_{\phi\phi}) + U_\phi - \phi U_{\phi\phi} \right) \eta = 0. \end{aligned} \quad (3.340)$$

Sabemos por el método de las CM que se debe verificar la relación

$$\frac{J(\phi)}{\phi} \rho = t^{-2}, \quad \implies \quad \frac{J(\phi)}{\phi} = t^{-2+\alpha}. \quad (3.341)$$

El álgebra nos lleva, por lo tanto, a obtener las siguientes ecuaciones para las funciones  $J$  y  $U$ ,

$$Ct^{-\alpha} \left[ \left( J - \frac{1}{2} \phi J_\phi \right) \left( \alpha t^{-1} \xi - 2\xi_t + \eta_\phi \right) - \frac{1}{2} (J_\phi - \phi J_{\phi\phi}) \eta \right] = 0, \quad (3.342)$$

$$(U_\phi - \phi U_{\phi\phi}) \eta + (2U - \phi U_\phi) (-2\xi_t + \eta_\phi) = 0. \quad (3.343)$$

La simetría,  $\xi = t$ ,  $\eta = n\phi$ , impone la siguiente restricción sobre  $U(\phi)$ . De la Ec. (3.343) obtenemos la siguiente EDO

$$U_{\phi\phi} = 2 \left( 1 - \frac{1}{n} \right) \frac{U_\phi}{\phi} + 2 \left( \frac{2}{n} - 1 \right) \frac{U}{\phi^2}, \quad (3.344)$$

cuya solución ya conocemos (calculada previamente), i.e.,  $U(\phi) = U_0 \phi^{\frac{1}{n}(n-2)}$ . Mientras que de la Ec. (3.342) obtenemos la siguiente restricción para la función  $J$ :

$$J_{\phi\phi} = \left( \frac{\alpha + 2n - 2}{n} \right) \frac{J_\phi}{\phi} - 2 \left( \frac{\alpha + n - 2}{n} \right) \frac{J}{\phi^2}, \quad (3.345)$$

cuya solución es

$$J(\phi) = J_0 \phi^{\frac{1}{n}(n+\alpha-2)} + C_2 \phi^2. \quad (3.346)$$

Podemos entonces enunciar el siguiente teorema.

**Teorema 3.3.3** Las Ecs. (3.282-3.283) admiten soluciones tipo power-law si las magnitudes se comportan de la siguiente forma

$$\phi = \phi_0 t^n \quad \implies \quad U(\phi) = U_0 \phi^{\frac{1}{n}(n-2)} = U_0 t^{n-2}, \quad (3.347)$$

con  $\rho = \rho_0 t^{-\alpha}$ ,  $\alpha = (1 + \gamma)h$ , mientras que la función de acoplamiento (camaleónica) es de la forma

$$J(\phi) = J_0 \phi^{\frac{1}{n}(n+\alpha-2)} = J_0 t^{n+\alpha-2}. \quad (3.348)$$

### 3.3.4. Modelos $f(R, \phi)$

Podemos considerar todavía modelos más generales que los hasta ahora discutidos, como por ejemplo, el siguiente

$$S = \frac{1}{8\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{2} [f(\phi, R) - Z(\phi) \phi_{,\alpha} \phi^{,\alpha} - 2U(\phi)] + \mathcal{L}_M \right\}, \quad (3.349)$$

siendo  $f(\phi, R)$  una función indeterminada que depende del campo escalar  $\phi$  y de la curvatura escalar. Estas teorías han surgido como alternativas para intentar explicar la aceleración que experimenta la expansión del universo sin necesidad de invocar a la energía oscura, simplemente modificando las leyes gravitatorias.

Como en los casos anteriormente considerados, estudiaremos la posible forma que pueden adquirir las diversas funciones para que las ecuaciones de campo resultantes admitan soluciones autosimilares.

#### Modelo $f(R, \phi)$

Nuestro propósito es el de describir la teoría gravitatoria tenso-escalar representada por la acción [251]-[252]

$$S = \int d^4x \frac{\sqrt{-g}}{2\beta} [f(\phi, R) - Z(\phi) \phi^{;\mu} \phi_{;\mu} - U(\phi)] + \beta \mathcal{L}_M, \quad (3.350)$$

donde  $R$  es la curvatura escalar,  $\phi$  representa un campo escalar,  $\beta$  es una constante necesaria para fijar unidades y  $\mathcal{L}_M$  es el lagrangiano de materia. Las ecuaciones de campo que se derivan de la acción (3.350) son las siguientes

$$\begin{aligned} FG_{ij} = & \beta T_{ij}^m + Z \left( \phi_{,i} \phi_{,j} - \frac{1}{2} g_{ij} \phi_{,\sigma} \phi^{;\sigma} \right) \\ & + (F_{,ij} - g_{ij} \square F) - U g_{ij} + \frac{1}{2} (f - FR) g_{ij}, \end{aligned} \quad (3.351)$$

siendo  $G_{ij}$  el tensor de Einstein,  $T_{ij}^m$  representa el tensor energía-momento,  $Z = Z(\phi)$ ,  $U = U(\phi)$  y

$$f = f(R, \phi), \quad F = \partial_R f(R, \phi). \quad (3.352)$$

La ecuación de ondas resulta

$$2Z\Box\phi = f_{,\phi} - Z_\phi\phi'^2 - 2U_{,\phi}, \quad (3.353)$$

donde una prima representa la derivada con respecto al tiempo.

Trabajaremos bajo las siguientes hipótesis

$$f = K(R)g(\phi), \quad K = R^r, \quad r \in \mathbb{R}, \quad (3.354)$$

i.e., podemos descomponer en variables separadas la función  $f$ , de tal forma, que la función  $K$  toma esta forma particular, lo cual resulta apropiado al trabajar bajo la hipótesis de autosimilaridad.

**Método de grupos de Lie.** Estudiaremos la Ec. (3.353) mediante el método de los grupos de Lie, i.e., estudiaremos la posible forma que pueden adquirir las funciones  $f = f(R, \phi)$ ,  $Z(\phi)$ ,  $U(\phi)$  y  $\phi$  para que las ecuaciones de campo (3.351 y 3.353) admitan soluciones tipo power-law y en particular soluciones autosimilares. Comenzamos reescribiendo la ecuación de ondas de la siguiente forma

$$2Z(\phi'' + ht^{-1}\phi') = -Kg_\phi + Z_\phi\phi'^2 + 2U_\phi, \quad (3.355)$$

ya que  $H = ht^{-1}$  con  $h \in \mathbb{R}^+$ , y asumiremos además que el campo escalar  $\phi$  es homogéneo, es decir, únicamente depende del tiempo, por tanto,  $\phi = \phi(t)$ . Sabemos de antemano que en el marco de las soluciones autosimilares, la curvatura escalar se comporta de la siguiente manera  $R \sim t^{-2}$  [148], por dicha razón podemos considerar además que,  $K(R) \sim K(t)$ .

Las simetrías que admite la ecuación de ondas están generadas por el siguiente sistema de EDP

$$Z_\phi\zeta_\phi - 2Z\zeta_{\phi\phi} = 0, \quad (3.356)$$

$$(ZZ_{\phi\phi} - Z_\phi^2)\eta + ZZ_\phi\eta_\phi + 4Z^2ht^{-1}\zeta_\phi + 2Z^2\eta_{\phi\phi} - 4Z^2\zeta_{t\phi} = 0, \quad (3.357)$$

$$3(2V_\phi - K(t)g_\phi)\zeta_\phi + 2ht^{-2}Z(t\zeta_t - \zeta) + 4Z\eta_{t\phi} - 2Z\zeta_{tt} + 2Z_\phi\eta_t = 0, \quad (3.358)$$

$$\begin{aligned} [K(Z_\phi g_\phi - Zg_{\phi\phi}) + 2(ZU_{\phi\phi} - Z_\phi U_\phi)]\eta + Z(Kg_\phi - 2U_\phi)\eta_\phi + 2Z(2U_\phi - Kg_\phi)\zeta_t - \\ - K'Zg_\phi\zeta + 2Z^2(ht^{-1}\eta_t + \eta_{tt}) = 0. \end{aligned} \quad (3.359)$$

Imponiendo la simetría,  $\zeta = t$ ,  $\eta = n\phi$ , la cual induce la siguiente solución invariante para el campo escalar,  $\phi = t^n$ , nos lleva a obtener las siguientes restricciones sobre el resto de funciones. De la Ec. (3.357) obtenemos

$$Z_{\phi\phi} = \frac{Z_\phi^2}{Z} - \frac{Z_\phi}{\phi}, \quad \implies \quad Z(\phi) = Z_0\phi^{-m}, \quad (3.360)$$

con,  $m \in \mathbb{R}$ . Ahora, de la Ec. (3.359) obtenemos

$$2(ZU_{\phi\phi} - Z_\phi U_\phi)\eta - 2ZU_\phi\eta_\phi + 4ZU_\phi\zeta_t = 0, \quad (3.361)$$

y

$$(KZ_\phi g_\phi - Zg_{\phi\phi})\eta + KZg_\phi\eta_\phi - 2KZg_\phi\zeta_t - K'Zg_\phi\zeta = 0. \quad (3.362)$$

De esta forma

$$U_{\phi\phi} = \left(\frac{n-2}{n} - m\right)\frac{U_\phi}{\phi}, \quad (3.363)$$

donde hemos tenido en cuenta que  $Z(\phi) = Z_0\phi^{-m}$ , por tanto

$$U(\phi) = U_0\phi^{-\frac{1}{n}(mn-2n+2)}, \quad (3.364)$$

mientras que

$$g_{\phi\phi} = \left(1 - m - \frac{1}{n} \left(2 + t \frac{K'}{K}\right)\right) \frac{g_{\phi}}{\phi}, \quad (3.365)$$

llegando así a la siguiente solución

$$g(\phi) = C_1 + C_2 \phi^A, \quad A = \left(2 - m - \frac{1}{n} \left(2 + t \frac{K'}{K}\right)\right). \quad (3.366)$$

Podemos comparar estos resultados con los obtenidos anteriormente, observando que si  $K = t^{-2}$  (en el marco de las soluciones autosimilares la curvatura de Ricci siempre varía como  $t^{-2}$  [148]), i.e.,  $r = 1$ , entonces

$$2 + t \frac{K'}{K} = 0, \quad (3.367)$$

y por lo tanto

$$g(\phi) = C_1 + C_2 \phi^{2-m}. \quad (3.368)$$

En cualquier otro caso, donde  $K = R^r = t^{-2r}$ , entonces

$$g(\phi) = C_1 + C_2 \phi^{2-m-\frac{2}{n}(1-r)}, \quad (3.369)$$

llegando así a

$$f = K(R) \cdot g(\phi) \approx R^r \left(t^{n(2-m-\frac{2}{n}(1-r))}\right) = f_0 t^{2n-mn-2}, \quad (3.370)$$

$$F = K_R(R) \cdot g(\phi) \approx R^{r-1} \left(t^{n(2-m-\frac{2}{n}(1-r))}\right) = F_0 t^{n(2-m)}. \quad (3.371)$$

Por lo tanto los modelos  $f(R, \phi)$  admiten soluciones tipo power-law y en particular autosimilares. De esta manera podemos enunciar el siguiente teorema.

**Teorema 3.3.4** Las ecuaciones de campo (3.351) y (3.353) bajo las hipótesis (3.354) admiten soluciones tipo power-law (en particular autosimilares) donde las funciones varían de la siguiente forma:

$$\phi = \phi_0 t^n, \quad Z(\phi) = Z_0 \phi^{-m}, \quad U(\phi) = U_0 \phi^{-(mn-2n+2)}, \quad g(\phi) = C_1 + C_2 \phi^A, \quad (3.372)$$

con  $A = \left(2 - m - \frac{1}{n} \left(2 + t \frac{K'}{K}\right)\right)$ , y tanto,

$$f = K(R) \cdot g(\phi) = f_0 t^{2n-mn-2}, \quad F = K_R(R) \cdot g(\phi) = F_0 t^{n(2-m)}, \quad (3.373)$$

con  $K = R^r$ .

### Modelos $f(R)$

Un caso particular del anterior modelo lo constituyen los modelos gravitatorios denominados  $f(R)$  cuya acción es

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} [f(R) + L_m], \quad (3.374)$$

donde,  $R$ , representa la curvatura escalar, y  $L_m$  es el lagrangiano clásico donde están contenidos los diversos campos de materia. Definiendo,  $F \equiv \partial f / \partial R$  ( $f = f(R)$ ), las ecuaciones de campo que se derivan de la acción (3.374) son las siguientes

$$FG_{ij} = T_{ij}^m + F_{;ij} - g_{ij} F_{;\sigma}^{\sigma} + \frac{1}{2} (f - FR) g_{ij}, \quad (3.375)$$

donde,  $G_{ij}$  es el tensor de Einstein, y el resto de las contribuciones han sido absorbidas en  $T_{ij}$ . Si escribimos las ecuaciones gravitatorias de esta forma, entonces,  $T_{ij}$ , puede ser tratado como un tensor energía-momento efectivo, lo cual nos permite usar las ecuaciones estándar de Einstein simplemente reemplazando las magnitudes del fluido por las efectivas. La traza de las ecuaciones de campo es

$$3\Box F + FR - 2f = T, \quad (3.376)$$

siendo  $T$  la traza del tensor energía-momento

La aplicación de los métodos CM y GL nos lleva a obtener los siguientes resultados.

**Colineaciones de materia.** Podemos definir un tensor efectivo energía-momento de la siguiente forma

$$T_{ij}^{\text{eff}} = T_{ij}^m + F_{;ij} - g_{ij}\square F + \frac{1}{2}(f - FR)g_{ij}, \quad (3.377)$$

pasando a calcular la ecuación

$$\mathcal{L}_{\mathcal{H}}T_{\mu\nu}^{\text{eff}} = 0, \quad (3.378)$$

donde  $\mathcal{H}$  representa un campo homotético. Calcularemos la derivada de Lie de cada una de las componentes del tensor efectivo energía-momento, observando que en el marco de las soluciones autosimilares

$$FG_{ij} \approx Ft^{-2}. \quad (3.379)$$

1. Por tanto,  $\mathcal{L}_{\mathcal{H}}T_{ij}^m = 0$ , en componentes resulta

$$\mathcal{L}_{\mathcal{H}}(T_{11}^m) = 0 \quad \rho't = -2\rho \iff \rho = \rho_0 t^{-2}. \quad (3.380)$$

Tal y como podemos observar, existe un conflicto entre este resultado y el hecho de que  $FG_{\mu\nu} \approx Ft^{-2}$ . Esto nos indica que  $F = \text{const.}$ , lo que significa que  $f = R$ .

2.  $\mathcal{L}_{\mathcal{H}}T_{ij}^f = \mathcal{L}_{\mathcal{H}}\left(\frac{1}{2}(f - FR)g_{ij}\right) = 0$ . La primera componente resulta

$$\mathcal{L}_{\mathcal{H}}(T_{11}^f) = 0, \text{ i.e.} \quad t(f' - F'R - FR') = -2(f - FR), \quad (3.381)$$

que podemos escribir como

$$tf_{RR}R'R - 2(f - f_R R) = 0. \quad (3.382)$$

Al ser  $R \approx rt^{-2}$ , entonces

$$-r^2 f_{RR} t^{-4} + r f_R t^{-2} - f = 0, \quad (3.383)$$

si asumimos ahora que  $f = R^a$ , entonces

$$-r^2 a(a-1)(rt^{-2})^{a-2} t^{-4} + ra(rt^{-2})^{a-1} t^{-2} - (rt^{-2})^a = 0, \quad (3.384)$$

simplificando, resulta

$$-(rt^{-2})^a (a-1)^2 = 0, \quad (3.385)$$

i.e., sii  $a = 1$ . Esto significa que la única posibilidad es  $f(R) = R$ , y por lo tanto  $F = \text{const.}$

Con las otras componentes,  $\mathcal{L}_{\mathcal{H}}(T_{1i}^f) = 0$ , únicamente obtenemos restricciones sobre los factores de escala.

3.  $\mathcal{L}_{\mathcal{H}}T_{\mu\nu}^F = 0$ , i.e.

$$\mathcal{L}_{\mathcal{H}}(F_{;ij} - g_{ij}\square F) = 0, \quad (3.386)$$

de esta manera, la primera componente resulta  $\mathcal{L}_{\mathcal{H}}(T_{11}^f) = 0$ ,

$$t(F''H + F'H') = -2HF', \quad (3.387)$$

ahora, teniendo en cuenta que  $H = ht^{-1}$ , entonces

$$F'' + F't^{-1} = 0, \quad (3.388)$$

cuya solución es

$$F = C_4 + C_3 \ln t, \quad (3.389)$$

llegando así a la conclusión de que

$$F = \text{const.} \quad (3.390)$$

ya que en el contexto de las soluciones autosimilares no tiene sentido considerar funciones logarítmicas.

Con respecto a las otras componentes,  $\mathcal{L}_{\mathcal{H}}(T_{22}^f) = 0$ , observar que,  $T_{22}^f = T_{33}^f = T_{44}^f$ , resulta

$$t(F'' + 2F'H)' = -2(F'' + 2F'H), \quad (3.391)$$

por tanto

$$F''' + 2(F''ht^{-1} - ht^{-2}F') = -2(F'' + 2F'ht^{-1})t^{-1}, \quad (3.392)$$

simplificando

$$F''' + 2F''(h+1)t^{-1} = 0, \quad (3.393)$$

cuya solución general es

$$F = C_8 + C_9t^{-2h} + C_{10}t, \quad (3.394)$$

de esta forma  $C_9 = C_{10} = 0$  y  $F = \text{const.}$ , ya que esta solución debe estar en concordancia con las anteriores.

**Método de grupos de Lie.** Estudiamos con detalle la ecuación de ondas

$$3\Box F + FR - 2f = T, \quad (3.395)$$

i.e.,

$$F'' + 3HF' = \frac{1}{3}(FR - T - 2f), \quad (3.396)$$

que reescribimos de la siguiente manera

$$y'' + 3ht^{-1}y' = rt^{-2}y - Ct^{-2} - \frac{2}{3}f, \quad (3.397)$$

donde hemos fijado

$$H = ht^{-1}, \quad R = rt^{-2}, \quad T = Ct^{-2}, \quad F = y, \quad f = f(t). \quad (3.398)$$

La solución general de la Ec. (3.397) es la siguiente

$$y = \frac{1}{3A} \left[ 3A(C_2t^{B_1} + C_1t^{B_2}) - t^{B_1} \int (2t^{D_1}f + 3Ct^{E_1}) dt + t^{B_2} \int (2t^{D_2}f + 3Ct^{E_2}) dt \right], \quad (3.399)$$

donde

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{9(h-1)^2 + 12r}, \\ B_1 &= \frac{1}{6}(3(1-h) + A) & B_2 &= \frac{1}{6}(3(1-h) - A), \\ D_1 &= \frac{1}{6}(3(1+h) - A) & D_2 &= \frac{1}{6}(3(1+h) + A), \\ E_1 &= \frac{1}{6}(3(h-3) + A) & E_2 &= \frac{1}{6}(3(h-3) - A). \end{aligned}$$

Simplificando, obtenemos

$$y = \frac{1}{3A} \left[ 3A(C_2t^{B_1} + C_1t^{B_2}) - \left( \frac{2r}{(D_1-1)} + \frac{3Ct^{A/3}}{(E_1+1)} \right) + \left( \frac{2r}{(D_2-1)} + \frac{3Ct^{-A/3}}{(E_2+1)} \right) \right]. \quad (3.400)$$

Observamos que si en la Ec. (3.397) imponemos,  $y = a = \text{const.}$ , entonces

$$f = \frac{3}{2}(ra - C)t^{-2}, \quad \iff \quad f(R) \approx R \approx t^{-2}, \quad (3.401)$$

la aplicación del método nos lleva a obtener las siguientes simetrías

$$2\tilde{\xi}_{yy}t^2 = 0, \quad (3.402)$$

$$2\tilde{\xi}_y ht + \eta_{yy}t^2 - 2\tilde{\xi}_{ty}t^2 = 0, \quad (3.403)$$

$$\frac{2}{3}\tilde{\xi}_y f t^2 - \tilde{\xi}_y(C - ry) + ht\tilde{\xi}_t - h\tilde{\xi} + 2\eta_{ty}t^2 - t^2\tilde{\xi}_{tt} = 0, \quad (3.404)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}r\eta - \frac{2}{3}\xi_t \left( \frac{2}{3}t^2f + (C - ry) \right) + \frac{1}{3}\eta_y \left( \frac{2}{3}ft^2 + (C - ry) \right) \\ + \frac{2}{3}\xi \left( (C - ry)t^{-1} - \frac{2}{3}f't^2 \right) + ht\eta_t + t^2\eta_{tt} = 0. \end{aligned} \quad (3.405)$$

La simetría,  $(\xi = 1, \eta = 0) \iff y = a = \text{const}$ , es la solución invariante, por lo tanto de la Ec. (3.405) obtenemos que

$$f' = \frac{3}{2}(C - ry)t^{-3}, \quad \implies \quad f = \frac{3}{4t^2}(ra - C), \quad (3.406)$$

lo que significa

$$f(R) \approx R \approx t^{-2}.$$

Concluimos que no existen soluciones tipo power-law y, por lo tanto, no existen soluciones autosimilares en los modelos  $f(R)$ , ya que si,  $\rho \approx t^{-2}$ , el resto de los términos deben verificar las siguientes relaciones funcionales

$$3FH^2 \approx t^{-2}, \quad 3HF' \approx t^{-2}, \quad \frac{1}{2}(FR - f) \approx t^{-2}, \quad (3.407)$$

y por lo tanto,  $f(R) = R$ .

**Teorema 3.3.5** Las ecuaciones de campo (3.375 y 3.376) no admiten soluciones tipo power-law y en particular autosimilares.

**Conclusión 3.3.1** Hemos estudiado bajo la hipótesis de autosimilaridad los modelos gravitatorios  $f(R, \phi)$ , así como, su caso particular  $f(R)$  llegando a la conclusión de que mientras los modelos  $f(R, \phi)$  sí admiten soluciones tipo power-law y en particular autosimilares, si  $f = K(R)g(\phi)$ , y  $K = (R)^t$  (ver teorema 3.3.4), los denominados modelos  $f(R)$  no (ver teorema 3.3.5).

Otra alternativa consiste en estudiar modelos Gauss-Bonnet, donde, en vez de considerar la curvatura escalar, se consideran invariantes de curvatura  $R_{ij}R^{ij}$ , o el invariante de curvatura que se deriva del tensor de curvatura o combinaciones entre varios invariantes.

## 3.4. Otras teorías

### 3.4.1. Gravedad conforme (scale invariant)

Otra teoría alternativa de la gravitación, en la que tanto  $G$  como  $\Lambda$  varían con el tiempo, es la propuesta por Canuto et al. [253] denominada teoría de la gravitación conforme (o scale-covariant o gauge covariante de la gravitación). En esta teoría, las ecuaciones de campo no sólo son invariantes bajo un grupo de transformaciones, sino que además, son invariantes bajo cambios de escala (a la Weyl). Fue Dirac quien revivió la geometría de Weyl, al intentar reconciliar su LNH con la RG, mediante la formulación de una teoría gravitatoria que fuese invariante bajo cambios de escala. A él es debida la idea de introducir dos métricas, una gravitacional y la otra atómica, basándose en ideas originales de la geometría de Weyl en la que los vectores, no sólo cambian de dirección en el transporte paralelo, sino que, además, pueden cambiar de longitud. El formalismo de la teoría ha sido desarrollado por Canuto et al [253], [254], [255], [256], [257], [258], [259] en una serie de trabajos a lo largo de la década de los 80. Un punto particular de la teoría consiste en que no existe una ecuación independiente para la función gauge  $\phi$ , debiendo recurrir a hipótesis “fuera de la teoría” para determinar su forma así como la de la función  $G$ . Dichas hipótesis son, por ejemplo, la de Dirac (LNH) o relaciones obtenidas a partir de la CMBR. Las posibles formas consideradas para la función gauge  $\phi$  son [254],  $\phi(t) = t^\varepsilon$ ,  $\varepsilon = \pm 1, \pm \frac{1}{2}$ , ver también [260], [261] y [262]. El propósito de esta sección es demostrar, que bajo la hipótesis de autosimilaridad, es posible determinar por lo menos la forma de la función gauge  $\phi$  en vez de recurrir a hipótesis físicas externas a la teoría.

#### El modelo y los principales resultados

En la teoría gauge covariante, las ecuaciones de Einstein son válidas en unidades gravitacionales, mientras que las magnitudes físicas están medidas en unidades atómicas (ver Canuto et al. [254]). Los tensores métricos en los dos sistemas están relacionados mediante la transformación conforme

$$\bar{g}_{ij} = \phi^2 g_{ij}, \quad (3.408)$$

donde la barra denota unidades gravitatorias y la métrica sin barra denota unidades atómicas. La función gauge  $\phi$ , ( $0 < \phi < \infty$ ) es, en la formulación más general, una función que depende de todas las coordenadas espacio-temporales. Por lo tanto, teniendo en cuenta esta transformación conforme (ver [263]), Canuto et al. [254] transformaron las habituales ecuaciones de Einstein en las siguientes

$$R_{ij} - \frac{1}{2} R g_{ij} = 8\pi G(\phi) T_{ij}^m - \Lambda(\phi) g_{ij} - T_{ij}^{(\phi)}, \quad (3.409)$$

donde

$$T_{ij}^m = (\rho + p) u_i u_j + p g_{ij}, \quad (3.410)$$

$$T_{ij}^{(\phi)} = \frac{1}{\phi^2} \left( g_{ij} \phi^{,k} \phi_{,k} - 4\phi_{,i} \phi_{,j} \right) + \frac{2}{\phi} \left( \phi_{,ij} - g_{ij} \square \phi \right). \quad (3.411)$$

Aquí,  $R_{ij}$  es el tensor de Ricci,  $R$  la curvatura escalar,  $\Lambda(\phi)$  la “constante” cosmológica,  $G(\phi)$  la “constante” de la gravitación. En este marco, ambas magnitudes,  $\Lambda$  y  $G$ , son consideradas como funciones que dependen del tiempo.  $T_{ij}^m$ , representa el tensor de energía-momento, el cual para un fluido perfecto adquiere la expresión dada por (3.410) donde  $\rho$  es la densidad de energía y  $p$  la presión, relacionadas mediante la ecuación de estado  $p = \gamma\rho$ , con  $\gamma \in (-1, 1]$ , tal y como venimos describiendo en esta Tesis.  $u^i = (1, 0, 0, 0)$  es la 4-velocidad del fluido, i.e. un campo paralelo al campo normal a la hipersuperficie espacial de tal forma que se verifica la relación  $u^i u_i = -1$ . Por simplificar, consideraremos que las magnitudes  $\rho$ ,  $p$  y  $\phi$  dependen sólo del tiempo  $t$ .

La ecuación de conservación, que se deriva de las ecuaciones (3.408) y (3.409), en esta teoría es la siguiente [254]

$$\rho' + (\rho + p) \theta = -\rho \frac{(G\phi)'}{G\phi} - 3p \frac{\phi'}{\phi}, \quad (3.412)$$

donde  $\theta = u^i_{,i}$ , y una coma (') denota diferenciación con respecto a  $t$ .

Nos gustaría resaltar que las ecuaciones de campo aquí expuestas son las correctas, ya que en [253]-[255] los autores las plantean de forma errónea.

Utilizando el método de las colineaciones de materia deduciremos la forma que pueden tomar las magnitudes  $\rho$ ,  $p$ ,  $G$ ,  $\Lambda$  y  $\phi$  para que las ecuaciones de campo admitan soluciones autosimilares. Para tal fin, empezamos definiendo un tensor energía-momento efectivo

$$T_{ij}^{\text{eff}} = 8\pi G(\phi) T_{ij}^m - \Lambda(\phi) g_{ij} - \frac{1}{\phi^2} \left( g_{ij} \phi^{,k} \phi_{,k} - 4\phi_{,i} \phi_{,j} \right) - \frac{2}{\phi} \left( \phi_{,ij} - g_{ij} \square \phi \right), \quad (3.413)$$

y calcularemos la expresión

$$\mathcal{L}_{\mathcal{H}} T_{ij}^{\text{eff}} = 0, \quad (3.414)$$

donde  $\mathcal{H}$  es un campo homotético. Por lo tanto, bajo la hipótesis simplificadora de descomposición, necesitamos calcular las siguientes ecuaciones

$$\mathcal{L}_{\mathcal{H}} \left( G(\phi) T_{ij}^m \right) = 0, \quad (3.415)$$

$$\mathcal{L}_{\mathcal{H}} \left( \Lambda(\phi) g_{ij} \right) = 0, \quad (3.416)$$

$$\mathcal{L}_{\mathcal{H}} \left( T_{ij}^{(\phi)} \right) = 0, \quad (3.417)$$

donde  $T_{ij}^{(\phi)}$  está definido por la Ec. (3.410).

De la Ec. (3.415) obtenemos

$$t \left( G_\phi \phi' \rho + G \rho' \right) = -2G\rho, \quad (3.418)$$

siendo  $G_\phi = \frac{dG}{d\phi}$  y una coma denota diferenciación con respecto a  $t$ . Integrando la Ec. (3.418) resulta

$$\frac{G_\phi}{G} \phi' + \frac{\rho'}{\rho} = -\frac{2}{t} \quad \implies \quad G\rho = t^{-2}. \quad (3.419)$$

De la Ec. (3.416) obtenemos

$$t \Lambda_\phi \phi' = -2\Lambda, \quad (3.420)$$

y por lo tanto

$$\frac{\Lambda_\phi}{\Lambda} \phi' = -\frac{2}{t}, \implies \Lambda(\phi) = \Lambda_0 t^{-2}. \quad (3.421)$$

La Ec. (3.417) puede descomponerse como sigue

$$\mathcal{L}_{\mathcal{H}} \left( \frac{g_{ij} \phi^k \phi_{,k}}{\phi^2} \right) = 0, \quad (3.422)$$

$$\mathcal{L}_{\mathcal{H}} \left( \frac{4\phi_i \phi_j}{\phi^2} \right) = 0, \quad (3.423)$$

$$\mathcal{L}_{\mathcal{H}} \left( \frac{2\phi_{ij}}{\phi} \right) = 0, \quad (3.424)$$

$$\mathcal{L}_{\mathcal{H}} \left( \frac{2}{\phi} g_{ij} \square \phi \right) = 0, \quad (3.425)$$

de tal forma que de la Ec. (3.422) obtenemos

$$\frac{\phi''}{\phi'} - \frac{\phi'}{\phi} = -\frac{1}{t'}, \quad (3.426)$$

cuya solución es

$$\phi(t) = \phi_0 t^\alpha, \quad \phi_0, \alpha \in \mathbb{R}. \quad (3.427)$$

De la Ec. (3.423) obtenemos

$$\frac{\phi''}{\phi'} - \frac{\phi'}{\phi} = -\frac{1}{t'}, \implies \phi(t) = \phi_0 t^\alpha, \quad \phi_0, \alpha \in \mathbb{R}, \quad (3.428)$$

mientras que de la Ec. (3.424) resulta

$$\frac{\phi'''}{\phi''} - \frac{\phi'}{\phi} = -\frac{2}{t'}, \quad (3.429)$$

cuya solución es

$$\phi(t) = C_2 t^{\left(\frac{1}{2} + \frac{c_1}{2}\right)} + C_3 t^{\left(\frac{1}{2} - \frac{c_1}{2}\right)}, \quad C_2, C_3, c_1 \in \mathbb{R}. \quad (3.430)$$

Observamos que (3.430) debe satisfacer (3.426), por lo tanto,  $C_3 = 0$ , llegando así a

$$\phi(t) = \phi_0 t^\varepsilon, \quad \phi_0, \varepsilon \in \mathbb{R}. \quad (3.431)$$

De la Ec. (3.425) no obtenemos información sobre la función gauge, únicamente se obtienen restricciones sobre los factores de escala.

Si tenemos en cuenta la ecuación de conservación

$$\rho' + (\rho + p)\theta = -\rho \left( \frac{G'}{G} + \frac{\phi'}{\phi} \right) - 3p \frac{\phi'}{\phi} \quad (3.432)$$

donde  $\theta = ht^{-1}$  y  $\phi$  está dada por la Ec. (3.431) entonces

$$\frac{\rho'}{\rho} + \frac{G'}{G} = -\frac{A}{t} \quad A = (\gamma + 1)h + (3\gamma + 1)\varepsilon. \quad (3.433)$$

Por lo tanto, de la Ec. (3.419) resulta

$$(\gamma + 1)h + (3\gamma + 1)\varepsilon = 2, \quad (3.434)$$

llegando así a

$$\varepsilon = \frac{2 - h(1 + \gamma)}{3\gamma + 1}, \quad \gamma \neq -\frac{1}{3}, \quad (3.435)$$

observando que el caso especial  $\gamma = -\frac{1}{3}$ , implica  $h = 3, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}$ . De esta forma podemos enunciar el siguiente teorema.

**Teorema 3.4.1** *Bajo la hipótesis de autosimilaridad, las magnitudes deben comportarse de la siguiente manera*

$$\begin{aligned}\phi(t) &= \phi_0 t^\varepsilon, & \phi_0 \in \mathbb{R}, & \quad \varepsilon = \frac{2-h(1+\gamma)}{3\gamma+1}, \\ \Lambda(\phi) &= \Lambda_0 t^{-2}, & G\rho &= t^{-2}.\end{aligned}$$

Sin pérdida alguna de generalidad podemos aplicar este resultado a soluciones tipo power-law y no sólo a las autosimilares. De esta forma podemos deducir que si fijamos la función gauge como  $\phi(t) = \phi_0 t^\varepsilon$ , entonces necesariamente, el resto de las magnitudes deben seguir igualmente leyes de potencia (relaciones tipo power-law) i.e.,  $\Lambda(\phi) = \Lambda_0 t^{-2}$ ,  $G\rho = t^{-2}$ , tal y como se puede ver, simplemente integrando la ecuación de conservación

$$\frac{\rho'}{\rho} + \frac{G'}{G} + (1+\gamma) \left( \frac{a'}{a} + \frac{b'}{b} + \frac{d'}{d} \right) = -\frac{(1+3\gamma)\varepsilon}{t}, \quad (3.436)$$

cuya solución es

$$\rho G a^{(1+\gamma)} b^{(1+\gamma)} d^{(1+\gamma)} = t^{-(1+3\gamma)\varepsilon}. \quad (3.437)$$

El teorema nos dice que la función gauge debe seguir una relación tipo power-law,  $\phi(t) = \phi_0 t^\varepsilon$ , con  $\varepsilon = \frac{2-h(1+\gamma)}{3\gamma+1}$ , pero, desafortunadamente, no tenemos información alguna sobre el comportamiento de  $G$ , ya que sólo hemos obtenido una relación entre la densidad de energía y  $G$ ,  $G\rho = t^{-2}$ . Este hecho quizás constituya una de las mayores desventajas de la teoría, al no tener un sistema completo de ecuaciones. Por lo tanto, para determinar la posible variación de  $G$  es necesario hacer hipótesis (fuera de la teoría) basadas en consideraciones físicas, como la hipótesis de Dirac (LNH), donde  $G \sim t^{-1}$ , o como es usual, tratar de reconciliar la teoría con los datos observacionales sobre CMBR. Atendiendo a esta última consideración se asume la siguiente relación,  $G\phi^2 = const.$ , [255] (ver [261] y [262]) y por lo tanto deducir que  $G \sim t^{-2\varepsilon}$ .

### 3.4.2. Modelo de Barber

Otra teoría alternativa es la formulada por Barber ([264]-[268]). Se trata de formular una teoría en la que se tienen en cuenta procesos de creación continua de materia. Barber ([264]) ha propuesto dos teorías. La primera, es una modificación de la teoría de BD en la que  $\omega = 0$ , pero tal y como ha puesto de manifiesto Brans [269], dicha teoría es insatisfactoria ya que, no sólo está en desacuerdo con los experimentos, sino que además, viola el principio de equivalencia. Tampoco puede ser deducida a partir de ningún principio de mínima acción ya que  $\omega = 0$ . La segunda consiste en una simple modificación de la RG en la que, además de considerar procesos de creación de materia, dentro de los límites observacionales, la constante de gravitación varía con el tiempo, ya que  $G \sim \phi^{-1}$ , siendo  $\phi$  un campo escalar a la BD. En este segundo modelo se “postula” el principio de conservación, donde el campo escalar se acopla a la traza del tensor energía-momento. El propio autor resume todos estos intentos de crear una teoría en su trabajo [268]. Han sido varios los autores que han trabajado en el segundo modelo propuesto por Barber, por ejemplo, Venkateswarlu y Reddy [270] han obtenido soluciones en modelos tipo Bianchi I, mientras que soluciones de vacío utilizando esta métrica, han sido estudiados por Reddy [271]. Pradhan y Vishwakarma han estudiado soluciones para fluidos tanto perfectos como viscosos en modelos inhomogéneos tipo LRS Bianchi I, i.e.,  $\phi = \phi(t, x)$ , [272]-[273]-[274]. Modelos tipo Bianchi II han sido analizados por Shanthi y Rao [275], Ram y Singh [276] y Singh y Kumar [277]. Otras soluciones para modelos Bianchi V han sido encontradas por Venkateswarlu y Reddy [278] mientras que los modelos Bianchi VI<sub>0</sub> han sido estudiados por Reddy y Venkateswarlu [279].

Nuestro propósito es estudiar las posibles formas que pueden tomar las distintas magnitudes involucradas en la teoría para que las ecuaciones de campo resultantes admitan soluciones autosimilares y, de esta forma, analizar cómo puede variar  $G$ ,  $G \sim \phi^{-1}$ , en esta teoría. Por lo tanto tendremos que determinar las posibles formas que puede tomar la función  $\phi$  bajo la hipótesis de autosimilaridad.

#### El modelo y los principales resultados

Las ecuaciones de campo del modelo de Barber son las siguientes

$$R_{ij} - \frac{1}{2} R g_{ij} = \phi^{-1} T_{ij}^m, \quad (3.438)$$

siendo  $\phi$  un campo escalar que satisface (se postula) la siguiente ecuación

$$\square\phi = \lambda T, \quad (3.439)$$

donde,  $G = \phi^{-1}$ . Como en el modelo anteriormente expuesto,  $R_{ij}$  es el tensor de Ricci,  $R$  es la curvatura escalar y  $g_{ij}$  el tensor métrico.  $\phi$  representa el campo escalar de Barber y  $\square\phi$  es el D'Alembertiano.  $T_{ij}^m$  representa el tensor energía-momento del campo de materia, siendo  $T$  su traza.  $\lambda$  es una constante de acoplamiento propia de la teoría. Los experimentos han determinado que  $|\lambda| < 10^{-1}$ . Si consideramos que nuestro modelo contiene un fluido perfecto como campo de materia, entonces su tensor energía-momento viene definido, como siempre, por

$$T_{ij}^m = (\rho + p) u_i u_j + p g_{ij}, \quad (3.440)$$

donde  $\rho$  es la densidad de energía,  $p$  la presión siendo la ecuación de estado  $p = \gamma\rho$ , ( $\gamma \in (-1, 1]$ ). La 4-velocidad del fluido es  $u_i = (1, 0, 0, 0)$ .

Definiendo como tensor energía-momento efectivo

$$T_{ij}^{\text{eff}} = \phi^{-1} T_{ij}^m \quad (3.441)$$

y calculando

$$\mathcal{L}_{\mathcal{H}} T_{ij}^{\text{eff}} = 0, \quad (3.442)$$

donde  $\mathcal{H}$  es un campo homotético, determinaremos las posibles formas que pueden adoptar las magnitudes para que las ecuaciones de campo admitan soluciones autosimilares. Por lo tanto, calculando

$$\mathcal{L}_{\mathcal{H}} (\phi^{-1} T_{ij}^m) = 0, \quad (3.443)$$

obtenemos

$$\rho\phi^{-1} \sim t^{-2}, \quad (3.444)$$

como es de esperar, y por lo tanto, no hemos obtenido información sobre  $\phi$ . Necesitamos tener en consideración la ecuación de conservación,  $\square\phi = \lambda T$ , i.e.,

$$\phi'' + ht^{-1}\phi' = \lambda(\rho - 3p), \quad (3.445)$$

y teniendo en cuenta el resultado obtenido mediante las CM Ec. (3.444) llegamos a

$$\phi'' + ht^{-1}\phi' = \lambda(1 - 3\gamma)\phi t^{-2}, \quad (3.446)$$

cuya solución es

$$\phi(t) = C_1 t^{A_+} + C_2 t^{A_-}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}, \quad (3.447)$$

con

$$A_{\pm} = \frac{1}{2} \left( 1 - h \pm \sqrt{h^2 - 2h + 1 + 4\lambda(1 - 3\gamma)} \right), \quad (3.448)$$

estableciendo así el siguiente teorema.

**Teorema 3.4.2** Las ecuaciones de campo (3.438-3.439) admiten soluciones autosimilares si las magnitudes se comportan como sigue

$$\phi(t) = C_1 t^{A_+} + C_2 t^{A_-}, \quad \rho = \rho_0 (C_1 t^{A_+ - 2} + C_2 t^{A_- - 2}), \quad G = G_0 (C_1 t^{A_+} + C_2 t^{A_-})^{-1}, \quad (3.449)$$

con  $A_{\pm} = \frac{1}{2} \left( 1 - h \pm \sqrt{h^2 - 2h + 1 + 4\lambda(1 - 3\gamma)} \right)$ .

Observamos que una de las dos constantes de integración  $C_1$  o  $C_2$ , puede ser nula, por lo que la solución colapsará a

$$\phi(t) = C_i t^{A_{\pm}}, \quad \rho = \rho_0 C_i t^{A_{\pm} - 2}, \quad G = G_0 (C_i t^{-A_{\pm}}), \quad (3.450)$$

pero no sabemos de antemano cuál anular,  $C_1$ , o  $C_2$  y, por lo tanto, qué  $A_{\pm}$  tomar. La única restricción que podemos hacer en base a la Ec. (3.450) es  $A_{\pm} \in (-\infty, 2)$  para así obtener una densidad de energía decreciente.

# Capítulo 4

## Modelo Bianchi I

### Índice del capítulo

---

<b>4.1. Geometría del modelo</b> . . . . .	73
<b>4.2. Soluciones clásicas</b> . . . . .	74
4.2.1. Modelo de vacío . . . . .	74
4.2.2. Fluido perfecto . . . . .	75
4.2.3. Fluido perfecto con constantes variables . . . . .	75
<b>4.3. Modelos escalares</b> . . . . .	76
4.3.1. Modelo escalar . . . . .	76
4.3.2. Modelo escalar con G variable . . . . .	77
4.3.3. Modelo escalar sin interacción con un campo de materia . . . . .	78
4.3.4. Modelo escalar sin interacción con un campo de materia y G variable . . . . .	78
4.3.5. Modelo escalar interactuando con un campo de materia . . . . .	79
4.3.6. Modelo escalar interactuando con un campo de materia y G variable . . . . .	80
<b>4.4. Modelos tenso-escalares</b> . . . . .	81

---

### 4.1. Geometría del modelo

Los modelos tipo Bianchi I son espacialmente homogéneos y admiten un grupo abeliano de isometrías  $G_3$ , que actúan sobre las hipersuperficies espaciales, generado por los siguientes campos de Killing,  $\xi_1 = \partial_x$ ,  $\xi_2 = \partial_y$ ,  $\xi_3 = \partial_z$ , cuyo álgebra de Lie es

$$[\xi_i, \xi_j] = C_{ij}^k \xi_k, \quad \implies \quad C_{ij}^k = 0. \quad (4.1)$$

Por lo tanto, podemos escribir la métrica de la siguiente forma

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 dx^2 + b(t)^2 dy^2 + d(t)^2 dz^2, \quad (4.2)$$

donde las funciones,  $a(t)$ ,  $b(t)$  y  $d(t)$  son funciones del tiempo cósmico  $t$ . Con esta métrica, las ecuaciones de campo son las siguientes

$$\frac{b'a'}{ba} + \frac{d'a'}{da} + \frac{d'b'}{db} = T_0^0, \quad (4.3)$$

$$\frac{b''}{b} + \frac{d''}{d} + \frac{d'b'}{db} = T_1^1, \quad (4.4)$$

$$\frac{d''}{d} + \frac{a''}{a} + \frac{d'a'}{da} = T_2^2, \quad (4.5)$$

$$\frac{b''}{b} + \frac{a''}{a} + \frac{b'a'}{ba} = T_3^3. \quad (4.6)$$

junto con las ecuaciones de conservación para cada modelo de materia.

Para la métrica (4.2) encontramos el siguiente campo homotético,  $\mathcal{H} \in \mathfrak{X}(M)$ , ( $\mathcal{H} = \mathcal{H}_i(t, x, y, z) \partial_{x_i}$ )<sup>4</sup> <sub>$i=1$</sub> , ([153] y [280])

$$\mathcal{H} = (t + t_0) \partial_t + \left(1 - (t + t_0) \frac{a'}{a}\right) x \partial_x + \left(1 - (t + t_0) \frac{b'}{b}\right) y \partial_y + \left(1 - (t + t_0) \frac{d'}{d}\right) z \partial_z, \quad (4.7)$$

donde los factores de escala se comportan como

$$a = a_0 (t + t_0)^{a_1}, \quad b = b_0 (t + t_0)^{a_2}, \quad d = d_0 (t + t_0)^{a_3}, \quad (a_i)_{i=1}^3 \in \mathbb{R}^+. \quad (4.8)$$

El campo homotético, en consecuencia, se reduce a

$$\mathcal{H} = (t + t_0) \partial_t + (1 - a_1) x \partial_x + (1 - a_2) y \partial_y + (1 - a_3) z \partial_z, \quad (4.9)$$

y la métrica adquiere la siguiente forma

$$ds^2 = -dt^2 + (t + t_0)^{2a_1} dx^2 + (t + t_0)^{2a_2} dy^2 + (t + t_0)^{2a_3} dz^2, \quad (4.10)$$

y por lo tanto definimos,  $H = h(t + t_0)^{-1}$ , with  $h = a_1 + a_2 + a_3$ . Aunque todos los cálculos los hemos realizado con  $(t + t_0)$ , siempre podemos fijar  $t_0 = 0$ , de tal forma que se obtiene la habitual expresión  $H = ht^{-1}$ , etc.

Con estas restricciones el parámetro de deceleración se escribe como

$$q = \frac{3}{h} - 1, \quad (4.11)$$

mientras que los parámetros de anisotropía resultan ser

$$\mathcal{A} = \frac{2(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - a_1 a_2 - a_1 a_3 - a_2 a_3)}{3(a_1 + a_2 + a_3)^2},$$

$$\mathcal{W}^2 = \frac{A}{B}, \quad (4.12)$$

siendo

$$A = (-a_1 a_2 + a_1^2 + a_2^2 - a_1 a_3 - a_2 a_3 + a_3^2 + a_3^2 a_1 a_2 + a_1^2 a_2 a_3 + 2a_1^2 a_2 + 2a_2 a_3^2 + 2a_2^2 a_3 - a_2^3 a_1 + a_2^2 a_1 a_3 - 6a_3 a_1 a_2 - a_3^3 a_1 - a_2^3 a_3 + 2a_1^2 a_3 - a_3^3 a_2 + 2a_1 a_2^2 - a_1^3 a_3 - a_1^3 a_2 + 2a_1 a_3^2 + a_3^4 - 2a_3^3 + a_2^4 - 2a_2^3 + a_1^4 - 2a_1^3),$$

$$B = 36(a_1 + a_2 + a_3)^4,$$

$$C = (a_1 a_2 + a_1^2 + a_2^2 + a_1 a_3 + a_2 a_3 + a_3^2 + a_3^2 a_1 a_2 + a_1^2 a_2 a_3 - 2a_1^2 a_2 - 2a_2 a_3^2 - 2a_2^2 a_3 + a_2^3 a_1 + a_2^2 a_1 a_3 + a_3^3 a_1 + a_3^3 a_3 - 2a_1^2 a_3 + a_3^3 a_2 - 2a_1 a_2^2 + a_1^3 a_3 + a_1^3 a_2 - 2a_1 a_3^2 + a_3^4 - 2a_2^3 + a_1^4 - 2a_1^3 + 2a_2^2 a_3^2 + 2a_2^2 a_1^2 + 2a_1^2 a_3^2).$$

Por último, la entropía gravitatoria se expresa como

$$P^2 = \frac{2A}{3C}. \quad (4.13)$$

## 4.2. Soluciones clásicas

### 4.2.1. Modelo de vacío

Obtenemos, como no podría ser de otro modo, la bien conocida solución de Kasner ( $\mathcal{K}$ ) [281],

$$a_1 + a_2 + a_3 = 1, \quad a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1, \quad (4.14)$$

donde,  $q = 2$ . Por tanto, la solución no es inflacionaria, y la métrica resultante es

$$ds^2 = -dt^2 + (t + t_0)^{2a_1} dx^2 + (t + t_0)^{2a_2} dy^2 + (t + t_0)^{2a_3} dz^2, \quad (4.15)$$

ver, por ejemplo, [153] y Capítulo 9 de [150].

### 4.2.2. Fluido perfecto

La solución que encontramos para este modelo también es bien conocida. Como ya sabemos, el comportamiento de las principales magnitudes viene dado por la Ec. (3.6), por lo que únicamente resta calcular los posibles valores que pueden tomar las constantes de los parámetros de los factores de escala  $(a_i)_{i=1}^3$  y el de la ecuación de estado (EdE)  $\gamma$ . Por lo tanto, resolviendo el sistema algebraico asociado a las ecuaciones de campo (4.3-4.6), junto con la ecuación de conservación,  $T_{i;j}^j = 0$ , donde el tensor energía-momento viene definido por la ecuación (3.3), obtenemos el siguiente resultado

$$a_1 + a_2 + a_3 = 1, \quad a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 < 1, \quad \gamma = 1, \quad (4.16)$$

i.e., hemos obtenido la solución de Jacobs ( $\mathcal{J}$ ) [282], válida sólo para  $\gamma = 1$ . Con estos resultados, la métrica colapsa a la dada por la Ec. (4.15), que como ya sabemos, no es inflacionaria, ya que  $q = 2$ . Los cálculos numéricos llevados a cabo nos muestran además que la solución es isótropa, ya que los dos parámetros de anisotropía son casi nulos, es decir, tanto  $\mathcal{A}$  como  $\mathcal{W}^2$  pueden tomar valores muy próximos a cero. En los siguientes gráficos Figs. (4.1) hemos dibujado los parámetros  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{W}^2$  con la condición  $a_1 + a_2 + a_3 = 1$ ; de esta forma se observa que, cuando  $a_1 \approx a_2 \approx a_3 \approx 1/3$ , entonces,  $\mathcal{A} \rightarrow 0$ ; pero si  $a_1 \approx 1$  mientras que  $a_2 \approx a_3 \approx 0$ , entonces aparece cierta anisotropía en la solución, aunque semejante situación es poco realista pudiendo ser interesante sólo en el estudio de singularidades.

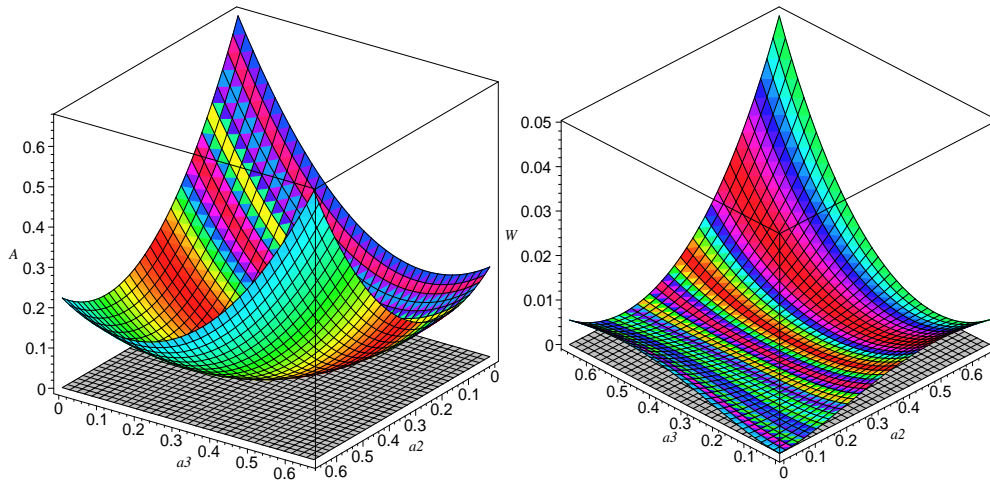


Figura 4.1: Modelo Bianchi I. Solución de Jacobs ( $\mathcal{J}$ ). Parámetro de anisotropía  $\mathcal{A}$  (izquierda) y  $\mathcal{W}^2$  (derecha) bajo la condición  $a_1 = 1 - a_2 - a_3$ .

Con respecto a la entropía gravitatoria,  $P^2$ , vemos en el siguiente gráfico Fig.(4.2) una situación parecida: es decir, cuando  $a_1 \approx a_2 \approx a_3 \approx 1/3$ , entonces  $P^2 \rightarrow 0$ ; pero en los casos límite, como por ejemplo, cuando  $a_1 \approx 1$  mientras que  $a_2 \approx a_3 \approx 0$ , entonces la entropía puede hacerse arbitrariamente grande.

Desde el punto de vista de los sistemas dinámicos, podemos afirmar que la solución es estable (ver [153] y en particular el capítulo 6 de [150]). Esto significa que cualquier solución para un modelo Bianchi I con un fluido perfecto, tiende de forma asintótica hacia una solución tipo Kasner,  $\mathcal{K}$ , en el pasado, i.e. en los primeros estadios de la historia del universo, mientras que tenderá de forma asintótica en el futuro hacia modelos homogéneos e isótropos tipo FRW planos  $\mathcal{F}$ . Todas las soluciones isotropizan tal y como hemos mostrado.

### 4.2.3. Fluido perfecto con constantes variables

El comportamiento de las principales magnitudes para este modelo viene descrito por la Ec. (3.65). Por lo tanto, la solución que hemos encontrado a las ecuaciones de campo Ecs. (4.3-4.6) siendo el tensor energía-momento del fluido perfecto definido por la ecuación (3.3) junto con la ecuación de conservación (3.43), donde  $\alpha = (\gamma + 1)h$ , y  $h = (a_1 + a_2 + a_3)$ , es la siguiente,

$$a_1 + a_2 + a_3 = 1, \quad q = 2, \quad \alpha = (\gamma + 1). \quad (4.17)$$

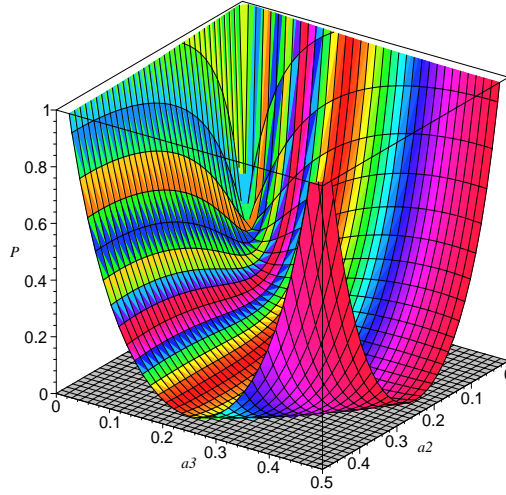


Figura 4.2: Modelo Bianchi I. Solución de Jacobs ( $\mathcal{J}$ ). Gráfico de la entropía gravitatoria,  $P^2$ , bajo la condición  $a_1 = 1 - a_2 - a_3$ .

Como podemos observar, hemos obtenido una solución muy parecida a la anterior, por lo que podemos afirmar que la hipótesis de la variación de las constantes no perturba la solución. Con estos resultados la métrica colapsa a la dada por la Ec. (4.15) y por lo tanto es isótropa y no inflacionaria. La densidad de energía se comporta de la siguiente manera,  $\rho = \rho_0 (t + t_0)^{-\alpha}$ , mientras que la constante gravitatoria  $G$  como:  $G = G_0 (t + t_0)^{\alpha-2}$ , observando que

$$G \approx \begin{cases} \text{decreciente } \forall \gamma \in (-1, 1) \\ \text{constante si } \gamma = 1 \end{cases},$$

mientras que la constante cosmológica sigue la ley  $\Lambda = \Lambda_0 (t + t_0)^{-2}$ , donde,  $\Lambda_0 = A \left(1 - \frac{2}{\gamma+1}\right)$  y  $A = \sum_{i \neq j} a_i a_j > 0$ , de tal forma que

$$\Lambda_0 \approx \begin{cases} \text{negativa } \forall \gamma \in (-1, 1) \\ \text{cero si } \gamma = 1 \end{cases}.$$

Sin imponer ninguna restricción física, podemos afirmar que la solución es válida  $\forall \gamma \in (-1, 1]$ , observando además, que si fijamos  $\gamma = 1$ , entonces la solución se reduce a la de Jacobs con  $G = \text{const.}$  y  $\Lambda = 0$ . Sin embargo, con respecto al comportamiento de  $G$  y  $\Lambda$ , sólo podemos afirmar que “si” tenemos en cuenta las observaciones recientes [95] las cuales sugieren que  $\Lambda_0 > 0$ , entonces la solución no es válida ya que sólo obtenemos  $\Lambda_0 \leq 0$ . Si  $\gamma \in (-1, 1)$  entonces  $G$  es decreciente,  $G = G_0 (t + t_0)^{\alpha-2}$ , y  $\Lambda$  se comporta como una función decreciente y negativa. Con respecto a su comportamiento dinámico, podemos “conjeturar” que esta solución se comporta como la de Jacobs, al comportarse los factores de escala de igual forma.

### 4.3. Modelos escalares

#### 4.3.1. Modelo escalar

En esta ocasión, las ecuaciones del modelo a resolver vienen descritas por las Ecs. (4.3-4.6), y donde el tensor energía-momento del campo escalar está descrito por

$$T_{ij}^{\phi} = (p_{\phi} + \rho_{\phi}) u_i u_j + p_{\phi} g_{ij}, \quad (4.18)$$

siendo

$$\rho_{\phi} = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad p_{\phi} = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi). \quad (4.19)$$

La ecuación de conservación (la ecuación de Klein-Gordon (KG)) resulta

$$\phi'' + H\phi' + \frac{d}{d\phi} V = 0. \quad (4.20)$$

En el capítulo 3 de esta Tesis, demostramos que en el contexto de soluciones autosimilares, el campo escalar y el potencial sólo pueden ser de la forma

$$\phi = \pm\sqrt{\alpha} \ln(t), \quad V = \beta \exp\left(\mp \frac{2}{\sqrt{\alpha}}\phi\right), \quad (4.21)$$

siendo  $\alpha \in \mathbb{R}^+$ , mientras que  $\beta \in \mathbb{R}$ . Teniendo en cuenta estos resultados, la solución que encontramos al modelo es la siguiente

$$\alpha = 2[a_2(1-a_2) + a_3(1-a_3) - a_2a_3], \quad \beta = 0, \quad a_1 + a_2 + a_3 = 1, \quad q = 2. \quad (4.22)$$

Con estos resultados, la métrica se reduce a la dada por la Ec. (4.15), por lo que la solución es isótropa y no inflacionaria. En la Fig. (4.3) adjunta, hemos representado el parámetro  $\alpha$  (sólo puede ser positivo) teniendo en cuenta la condición sobre los parámetros de los factores de escala  $a_1 + a_2 + a_3 = 1$ .

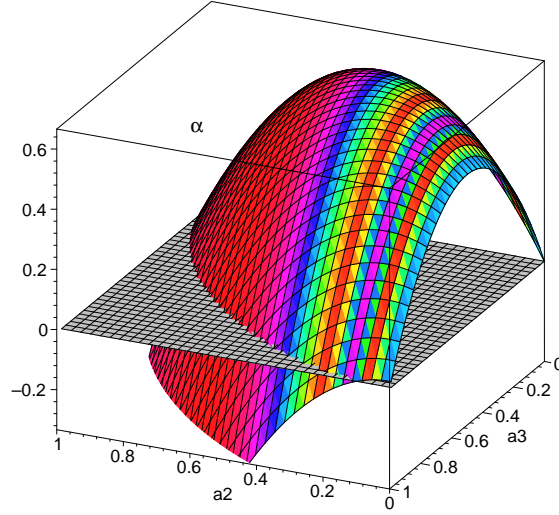


Figura 4.3: Modelo escalar Bianchi I. Gráfica del parámetro  $\alpha$ , teniendo en cuenta la condición  $a_1 + a_2 + a_3 = 1$ .

Tal y como ha sido probado en [284] (ver también [151] donde se resumen todos los resultados) la solución que hemos obtenido es estable desde el punto de vista de los sistemas dinámicos, ya que  $\alpha < 1$ . El potencial, que imita el comportamiento de la constante cosmológica dinámica, es nulo,  $V \sim \Lambda \sim 0$ , por lo que la solución se reduce a un campo escalar sin masa y, por tanto, su comportamiento dinámico tanto hacia el pasado como hacia el futuro es una solución tipo Kasner  $\mathcal{K}$  [284].

### 4.3.2. Modelo escalar con G variable

La única variante con respecto al modelo anterior consiste en introducir la hipótesis de G variable, esto es,  $G = G(t)$ . Por lo tanto las ecuaciones a resolver son (4.3-4.6), mientras que la ecuación de conservación en este caso resulta ser  $(G(t)T^\phi)_{i;j}^j = 0$ , y por lo tanto

$$\phi' \left( \phi'' + H\phi' + \frac{dV}{d\phi} \right) = -\frac{G'}{G} \rho_\phi. \quad (4.23)$$

Tal y como probamos en el tercer capítulo, las principales magnitudes se deben comportar de la siguiente manera

$$\phi = \phi_0 (t + t_0)^{-\alpha}, \quad V = \beta (t + t_0)^{-2(\alpha+1)}, \quad G = G_0 (t + t_0)^{2\alpha}, \quad (4.24)$$

por lo que, para este modelo, encontramos las siguientes soluciones

$$\beta = 0, \quad a_1 + a_2 + a_3 = 1, \quad q = 2, \quad G_0 = \frac{2(a_2 + a_3 - a_2^2 - a_3^2 - a_2a_3)}{\alpha^2}, \quad (4.25)$$

y

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{2} - \frac{a_3 B}{A} \in \left( \frac{1}{3}, \frac{1}{2} \right), & a_2 &= B \in \left( 0, \frac{1}{2} \right), & G_0 &= \frac{A}{a^2}, & \beta &= 0, \\ A &= \frac{1}{4} \left( 1 + 2a_3 + \sqrt{1 + 4a_3 - 12a_3^2} \right), & B &= \frac{1}{4} \left( 1 - 2a_3 + \sqrt{1 + 4a_3 - 12a_3^2} \right), \end{aligned} \quad (4.26)$$

donde  $a_3 \in \left( 0, \frac{1}{2} \right)$ ; además se verifica la relación  $a_1 + a_2 + a_3 = 1$ . Por lo tanto, en ambos casos la métrica se reduce a la dada por la Ec. (4.15), concluyendo de esta forma que ninguna de ellas es inflacionaria,  $q = 2$ , aunque sí son isótropas. En particular, con respecto a la segunda solución, los parámetros de anisotropía toman los siguientes valores:  $\mathcal{A} < 0,16$ , para todo valor de  $a_3 \in \left( 0, \frac{1}{2} \right)$  mientras que  $\mathcal{W}^2 < 0,07$ , siendo por tanto ambos parámetros pequeños o próximos a cero. Obviamente ambos parámetros se anulan cuando  $a_1 \approx a_2 \approx a_3 \approx 1/3$ . La entropía gravitatoria está acotada en este caso, alcanzando un valor máximo cuando  $a_3 = 0$  ó  $a_3 = 1/2$ ,  $P^2 < 1,2$  y siendo nula cuando  $a_3 = 1/3$ . Con las soluciones obtenidas, el parámetro  $\alpha$  es libre, por lo que no podemos conocer cómo se comporta la constante  $G$ ,  $G \sim (t + t_0)^{2\alpha}$ , ya que si  $\alpha < 0$ , entonces  $G$  es decreciente, mientras que si  $\alpha > 0$ , entonces será creciente. Como en el modelo anterior, en éste, encontramos que  $\beta = 0$  (en ambas soluciones), por lo que el potencial es nulo y el campo escalar no tiene masa. Es decir, este tipo de soluciones nos indica que la constante cosmológica es nula.

Desde el punto de vista dinámico podemos “conjeturar”, al haber obtenido la misma dinámica para los factores de escala, que su comportamiento será similar, es decir, que la solución tipo Kasner,  $\mathcal{K}$ , será un atractor tanto pasado como futuro.

### 4.3.3. Modelo escalar sin interacción con un campo de materia

En este modelo la parte geométrica de las ecuaciones de campo está descrita por la ecuaciones (4.3-4.6), mientras que el tensor energía-momento efectivo lo está por (3.3 y 3.67-3.68). Las ecuaciones de conservación a considerar son  $(T^m)_{i;j}^j = 0 = (T^\phi)_{i;j}^j$ . El comportamiento de las magnitudes está descrito por (3.144). Encontramos, por tanto, la siguiente solución

$$\begin{aligned} \beta &= 0, & q &= 2, & \gamma &= 1 & a_1 + a_2 + a_3 &= 1, \\ \alpha &= 2a_2(1 - a_2) + 2a_3(1 - a_3) - 2a_2a_3 - 2\rho_0, \end{aligned} \quad (4.27)$$

con la restricción  $\rho_0 < a_2(1 - a_2) + a_3(1 - a_3) - a_2a_3$ , para así asegurar que  $\alpha$  sea positiva. Vemos que la solución es idéntica a la obtenida en los modelos anteriormente estudiados y, por lo tanto, la solución no es inflacionaria pero sí isótropa, y sólo válida para el parámetro de la ecuación de estado  $\gamma = 1$ . El modelo predice que la constante cosmológica, modelizada por el potencial del campo escalar, es nula ya que  $\beta = 0$  y por lo tanto  $V = 0$ .

### 4.3.4. Modelo escalar sin interacción con un campo de materia y G variable

En este caso consideramos que  $G = G(t)$ , i.e., puede variar con el tiempo, pero no hay interacción entre los campos de materia y el campo escalar. Las ecuaciones de campo a considerar son idénticas a las del modelo anterior, salvo que ahora, las ecuaciones de conservación cambian al permitir que  $G$  varíe, siendo en este caso las siguientes:

$$G\tilde{\rho}' + G(\tilde{p} + \tilde{\rho})H = -G'\tilde{\rho}, \quad (4.28)$$

donde  $\tilde{\rho} = \rho_m + \rho_\phi$ , y  $\tilde{p} = p_m + p_\phi$ , y tal y como explicábamos en el capítulo anterior, la descomponemos en

$$\rho'_m + (\rho_m + p_m)\theta = -\frac{G'}{G}\rho_m, \quad \text{y} \quad \phi' \left( \square\phi + \frac{dV}{d\phi} \right) = -\frac{G'}{G}\rho_\phi. \quad (4.29)$$

Además, sabemos que las magnitudes deben comportarse de la siguiente forma,

$$\phi = \phi_0(t + t_0)^{-\alpha}, \quad V = \beta(t + t_0)^{-2(\alpha+1)}, \quad G = G_0(t + t_0)^{2\alpha}, \quad \rho = \rho_0(t + t_0)^{-2(\alpha+1)}, \quad (4.30)$$

por lo que en este caso, encontramos la siguiente solución

$$\begin{aligned} \beta &= 0, & \gamma &= 1, & a_1 + a_2 + a_3 &= 1, & q &= 2, \\ \rho_0 &= \frac{(a_2 + a_3 - a_2^2 - a_3^2 - a_2a_3)}{G_0} - \frac{\alpha^2}{2}, \end{aligned} \quad (4.31)$$

imponiendo la condición  $\alpha^2 < \frac{2(a_2+a_3-a_2^2-a_3^2-a_2a_3)}{G_0} \equiv K$ , para garantizar así que la densidad de energía sea positiva. Una vez más volvemos a encontrar el mismo resultado para los factores de escala, es decir, sus parámetros deben satisfacer la relación,  $a_1 + a_2 + a_3 = 1$ ; de esta forma, la solución sabemos que es isótropa y no inflacionaria, ya que  $q = 2$  y sólo válida para  $\gamma = 1$ . El parámetro  $\alpha$  vuelve a ser libre y, por tanto, poco podemos decir sobre el comportamiento de  $G$ , que varía como,  $G \sim (t + t_0)^{2\alpha}$ . Del comportamiento de la densidad de energía acotamos  $\alpha$ , imponiendo que  $-1 < \alpha$  por lo que llegamos a la conclusión de que debe variar en el siguiente intervalo  $\alpha \in (-1, \sqrt{K}) \setminus \{0\}$ . De esta forma,  $G$  es decreciente si  $\alpha \in (-1, 0)$ , y creciente si  $0 < \alpha < \sqrt{K}$ . Observar que,  $a_2 + a_3 - a_2^2 - a_3^2 - a_2a_3 \ll 1$ , ya que deben satisfacer la relación,  $a_1 + a_2 + a_3 = 1$ . El modelo, al igual que los otros, predice una constante cosmológica nula, al ser  $\beta = 0$ .

#### 4.3.5. Modelo escalar interactuando con un campo de materia

En esta sección consideraremos la interacción de un campo escalar (cuya función potencial modeliza una constante cosmológica dinámica) con un campo de materia, un fluido perfecto. Como expusimos en el tercer capítulo de esta Tesis, estudiamos tres enfoques.

##### Primer enfoque

En este primer caso, las ecuaciones del modelo son (4.3-4.6) donde los tensores energía-momento del fluido perfecto y del campo escalar están definidos por las Ecs. (3.3 y 3.67-3.68), respectivamente. La ecuación de conservación del modelo es la siguiente

$$\rho'_m + (\omega + 1) \rho_m H = -\phi' \left( \square\phi + \frac{dV}{d\phi} \right). \quad (4.32)$$

Tal y como dedujimos en el anterior capítulo, el comportamiento de las principales magnitudes está descrito en la Ec. (3.144), por lo que resolviendo el sistema algebraico asociado a las ecuaciones de campo, encontramos la siguiente solución

$$\begin{aligned} q &= 2, & a_1 + a_2 + a_3 &= 1, \\ \alpha &= 2 \left( a_2 + a_3 - a_2^2 - a_3^2 - a_2a_3 \right) - \rho_0 (\gamma + 1), \\ \beta &= \frac{\rho_0}{2} (\gamma - 1) \leq 0, & \forall \gamma &\in (-1, 1], \end{aligned} \quad (4.33)$$

debiendo imponer la siguiente restricción sobre el parámetro de la densidad de energía  $\rho_0 < \frac{2(a_2+a_3-a_2^2-a_3^2-a_2a_3)}{(\gamma+1)}$ , para así poder garantizar que  $\alpha$  sea positiva. Vemos que en este caso, no hemos obtenido ninguna restricción sobre el parámetro de la EdE  $\gamma$ , lo cual nos indica que el modelo, en principio, es físicamente realista. Con respecto a los factores de escala vemos que obtenemos la misma solución que en los casos anteriores, es decir, una solución tipo Jabocs donde los parámetros deben cumplir la condición  $a_1 + a_2 + a_3 = 1$ ; de esta forma la métrica colapsa a la dada por la Ec. (4.15), de la cual sabemos que no es inflacionaria,  $q = 2$ , pero sí isótropa. Tal y como podemos observar, si  $\gamma = 1$ , entonces la solución se reduce a la obtenida en el caso en el que no considerábamos interacción. De igual forma, vemos que el potencial,  $V$ , es negativo  $\forall \gamma \in (-1, 1)$  o se anula cuando  $\gamma = 1$ . Puesto que  $V \leq 0$ , entonces llegamos a la conclusión de que el modelo es termodinámicamente inconsistente ya que consideramos el caso en el que hay una transferencia de energía del campo escalar al campo de materia y no al revés, por lo que concluimos que la única posibilidad, termodinámicamente consistente, es considerar que la solución sólo es válida cuando  $\gamma = 1$ , lo que implica  $\beta = 0$ , de tal forma que, como ya hemos puesto de manifiesto, la solución se reduce al caso sin interacción Ecs. (4.27); es decir, no es posible considerar interacción entre el campo escalar y el de materia.

##### Segundo enfoque

Este segundo enfoque se diferencia del anterior únicamente al considerar que la ecuación de conservación se puede descomponer teniendo en cuenta cierta función de acoplamiento, por lo tanto, las ecuaciones de campo son las mismas, así como los tensores energía-momento. En este caso las ecuaciones de conservación a considerar son

las siguientes

$$\rho'_m + (\omega + 1) \rho_m H = -\phi' q^\phi, \quad (4.34)$$

$$\square\phi + \frac{dV}{d\phi} = q^\phi, \quad (4.35)$$

siendo la función de acoplamiento,  $q^\phi = \delta\rho_m$ . Recordemos que, en este enfoque, es esencial para que la solución sea termodinámicamente consistente, considerar que la constante de acoplamiento,  $\delta$ , sea negativa. Al saber de antemano cómo deben comportarse las magnitudes que intervienen en el modelo dadas por la Ec. (3.144), entonces únicamente resta resolver el sistema algebraico asociado, encontrando la siguiente solución

$$\begin{aligned} q &= 2, & a_1 + a_2 + a_3 &= 1, \\ \alpha &= 2 \left( a_2 + a_3 - a_2^2 - a_3^2 - a_2 a_3 \right) - \rho_0 (\gamma + 1), \\ \beta &= \frac{\rho_0}{2} (\gamma - 1), & \delta &= \frac{1 - \gamma}{\sqrt{\alpha}} \geq 0, \quad \forall \gamma \in (-1, 1], \end{aligned} \quad (4.36)$$

que, como podemos ver, es idéntica a la anterior. Esta solución nos dice que tampoco podemos considerar mecanismos de interacción entre el campo escalar y el de materia, ya que  $\delta \geq 0 \forall \gamma \in (-1, 1]$  ( $\delta$  debe ser negativa). Concluimos que la única posibilidad es fijar  $\gamma = 1$ , lo que implica  $\beta = 0$ , y la solución resultante es idéntica a la obtenida en el caso sin interacción. Por lo tanto, esta solución en concordancia con la anterior, nos dice que no es posible considerar interacción entre el campo de materia y el escalar (en el marco de las soluciones autosimilares).

### Tercer enfoque

En este tercer enfoque, la única diferencia con respecto al segundo, consiste en considerar otra función de acoplamiento. Las ecuaciones de conservación son ahora las siguientes

$$\rho'_m + (\omega + 1) \rho_m H = \delta H \rho_m, \quad (4.37)$$

$$\phi' \left( \square\phi + \frac{dV}{d\phi} \right) = -\delta H \rho_m. \quad (4.38)$$

Es importante considerar que debe haber una transferencia de energía del campo escalar al campo de materia y ello se garantiza, en esta ocasión, imponiendo la condición  $\delta > 0$ ; de esta forma no violamos los principios de la termodinámica, como ya expusimos en el tercer capítulo. Encontramos la siguiente solución

$$\begin{aligned} q &= 2, & a_1 + a_2 + a_3 &= 1, \\ \alpha &= 2a_2(1 - a_2) + 2a_3(1 - a_3) - 2a_2a_3 - \rho_0(\gamma + 1), \\ \beta &= \frac{1}{2}\rho_0(\gamma - 1), & \delta &= \gamma - 1 \leq 0, \quad \forall \gamma \in (-1, 1], \end{aligned} \quad (4.39)$$

viendo así que tampoco es posible considerar interacción entre ambos campos, ya que  $\delta = \gamma - 1 \leq 0$ ,  $\forall \gamma \in (-1, 1]$ . La única posibilidad termodinámicamente consistente nos lleva a fijar  $\gamma = 1$ , lo que implica que la solución colapse al caso sin interacción.

De esta forma queda patente que en el contexto de soluciones autosimilares no es posible considerar interacción entre el campo escalar y el de materia, lo cual es consistente con el hecho de obtener soluciones en las que la función potencial (la constante cosmológica) sea nula.

### 4.3.6. Modelo escalar interactuando con un campo de materia y G variable

Las ecuaciones de campo del modelo están descritas por las Ecs. (4.3-4.6). Al igual que en los modelos anteriores, los tensores del campo de materia y del campo escalar son definidos por las Ecs. (3.3 y 3.67-3.68). Al contemplar la posibilidad de que  $G$  varíe, entonces las ecuaciones de conservación son las siguientes

$$\rho'_m + (\rho_m + p_m) H + \frac{G'}{G} \rho_m = \delta H \rho_m, \quad (4.40)$$

$$\phi' \left( \phi'' + \phi' H + \frac{dV}{d\phi} \right) + \frac{G'}{G} \rho_\phi = -\delta H \rho_m. \quad (4.41)$$

donde consideramos que la función de acoplamiento es  $Q = \delta H \rho_m$ . En este modelo las magnitudes deben comportarse de la siguiente manera

$$\phi = \phi_0 (t + t_0)^{-\alpha}, \quad V(t) = \beta (t + t_0)^{-2(\alpha+1)}, \quad G = G_0 (t + t_0)^{2\alpha}, \quad \rho_m = \rho_0 (t + t_0)^{-2(\alpha+1)}. \quad (4.42)$$

Encontramos la siguiente solución

$$\begin{aligned} q &= 2, & a_1 + a_2 + a_3 &= 1, \\ \rho_0 &= \frac{2(a_2 + a_3 - a_2^2 - a_3^2 - a_2 a_3)}{G_0(\gamma + 1)} - \frac{\alpha^2}{(\gamma + 1)}, \\ \beta &= \frac{(a_2 + a_3 - a_2^2 - a_3^2 - a_2 a_3)(1 - \gamma)}{G_0(\gamma + 1)} + \frac{\alpha^2(1 - \gamma)}{2(\gamma + 1)}, \\ \delta &= \gamma - 1 \leq 0, \quad \forall \gamma \in (-1, 1]. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Como en los modelos anteriores, vemos que la solución obtenida es inconsistente desde el punto de vista termodinámico, ya que  $\delta \leq 0$  ( $\delta$  debe ser positiva). De esta forma llegamos a la conclusión de que no es posible considerar ningún mecanismo de interacción, la solución colapsa a la del caso sin interacción y  $G$  variable, donde el potencial del campo escalar es nulo Ecs. (4.31) siendo la solución únicamente válida para  $\gamma = 1$ .

## 4.4. Modelos tenso-escalares

Consideramos tres modelos tenso-escalares. El primero de ellos, con una constante cosmológica dinámica  $\Lambda(\phi)$ , está descrito por las siguientes ecuaciones de campo

$$G_{ij} = \frac{8\pi}{\phi} T_{ij} + \Lambda(\phi) g_{ij} + \frac{\omega}{\phi^2} \left( \phi_{,i} \phi_{,j} - \frac{1}{2} g_{ij} \phi_{,l} \phi^{,l} \right) + \frac{1}{\phi} \left( \phi_{;ij} - g_{ij} \square \phi \right), \quad (4.44)$$

$$(3 + 2\omega(\phi)) \square \phi = 8\pi T - \frac{d\omega}{d\phi} \phi_{,l} \phi^{,l} - 2\phi \left( \phi \frac{d\Lambda}{d\phi} - \Lambda(\phi) \right). \quad (4.45)$$

Recordamos que las magnitudes deben comportarse de la siguiente forma (3.3.1)

$$\phi = \phi_0 (t + t_0)^{\tilde{n}}, \quad \Lambda(\phi) = \Lambda_0 \phi^{-\frac{(\tilde{n}+\alpha)}{\tilde{n}}}, \quad \rho = \rho_0 (t + t_0)^{-\alpha}, \quad G_{\text{eff}}(t) = \left( \frac{2\omega + 4}{2\omega + 3} \right) \frac{G_*}{\phi(t)}, \quad (4.46)$$

con  $\tilde{n} = 2 - \alpha$ , siendo  $\alpha = (1 + \gamma)h$  y por lo tanto  $\Lambda(t) = \Lambda_0 (t + t_0)^{-2}$ . El parámetro de Brans-Dicke es constante, i.e.,  $\omega(\phi) = \text{const}$ .

Teniendo en consideración todos estos resultados, encontramos la siguiente solución a las ecuaciones de campo de este modelo

$$a_1 + a_2 + a_3 = 1, \quad \gamma = 1, \quad (4.47)$$

por lo tanto, la métrica es la dada por la Ec. (4.15), encontrando que la solución no es inflacionaria pero sí isotropa. Además encontramos que

$$\Lambda = 0, \quad \tilde{n} = 0 \implies G_{\text{eff}} = G_0, \quad (4.48)$$

ya que,  $h = 1$  y  $\gamma = 1$ , viendo así, que la solución obtenida coincide con la encontrada en el caso clásico para un fluido perfecto dentro del marco de la Relatividad General Ec. (4.16), donde  $G = \text{const}$  y  $\Lambda = 0$ .

El segundo modelo estudiado es el siguiente. En este caso, en vez de considerar una constante cosmológica dinámica, consideramos una función potencial  $U$  que actúa como tal. Las ecuaciones de campo se deducen a partir de la siguiente acción

$$S = \frac{1}{8\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{2} \left[ \phi R - \frac{\omega}{\phi} \phi_{,\alpha} \phi^{,\alpha} - 2U(\phi) \right] + \mathcal{L}_M \right\}, \quad (4.49)$$

y donde recordamos que las magnitudes deben comportarse de la siguiente forma (3.3.2)

$$\phi = \phi_0 (t + t_0)^{\tilde{n}}, \quad U(\phi) = U_0 \phi^{\frac{1}{\tilde{n}}(\tilde{n}-2)}, \quad G_{\text{eff}} \approx \phi^{-1}, \quad \omega = \text{const}, \quad \rho = \rho_0 (t + t_0)^{-\alpha}, \quad (4.50)$$

con  $\tilde{n} = 2 - \alpha$ , y  $\alpha = (1 + \gamma)h$ . Encontramos la siguiente solución

$$a_1 + a_2 + a_3 = 1, \quad \gamma = 1, \quad (4.51)$$

y por tanto

$$U = 0, \quad \tilde{n} = 0 \implies G_{\text{eff}} = G_0, \quad (4.52)$$

es decir, la misma solución que el modelo anterior.

Para concluir esta sección, estudiaremos finalmente el modelo tenso-escalar denominado gravedad inducida descrito por la acción

$$S = \frac{1}{8\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{2} \left[ \frac{\phi^2}{\omega} R - \phi_{,\alpha} \phi^{,\alpha} - 2U(\phi) \right] + \mathcal{L}_M \right\}, \quad (4.53)$$

donde las magnitudes siguen las leyes (3.311)

$$\phi = \phi_0 (t + t_0)^{\tilde{n}}, \quad U(\phi) = U_0 \phi^{\frac{2}{\tilde{n}}(\tilde{n}-1)}, \quad \omega = \text{const}, \quad G_{\text{eff}} \approx \phi^{-2}, \quad \rho = \rho_0 (t + t_0)^{-\alpha}, \quad (4.54)$$

y donde, en este caso,  $2\tilde{n} = 2 - \alpha$ , y  $\alpha = (1 + \gamma)h$ . Encontramos la siguiente solución

$$a_1 + a_2 + a_3 = 1, \quad \gamma = 1, \quad (4.55)$$

llegando así a la conclusión de que

$$U = 0, \quad \tilde{n} = 0 \implies G_{\text{eff}} = G_0. \quad (4.56)$$

A pesar de haber analizado tres modelos tenso-escalares en los que de forma natural se consideran tanto a  $G$  como a  $\Lambda$  ( $U$ ) como funciones que varían con el tiempo, hemos llegado a la conclusión de que en el contexto autosimilar, las soluciones obtenidas coinciden con la obtenida en el marco de la Relatividad General, donde  $G = \text{const.}$  y  $\Lambda = 0$ , siendo la solución únicamente válida para el valor de la EdE  $\gamma = 1$ .

# Capítulo 5

## Modelo Bianchi II

### Índice del capítulo

<b>5.1. Métrica y ecuaciones de campo</b> . . . . .	<b>83</b>
<b>5.2. Soluciones clásicas</b> . . . . .	<b>84</b>
5.2.1. Modelo de vacío . . . . .	84
5.2.2. Fluido perfecto . . . . .	85
5.2.3. Fluido perfecto con constantes variables . . . . .	86
<b>5.3. Modelos escalares</b> . . . . .	<b>88</b>
5.3.1. Modelo escalar . . . . .	88
5.3.2. Modelo escalar con G variable . . . . .	88
5.3.3. Modelo escalar sin interacción con un campo de materia . . . . .	89
5.3.4. Modelo escalar sin interacción con un campo de materia y G variable . . . . .	89
5.3.5. Modelo escalar interactuando con un campo de materia . . . . .	90
5.3.6. Modelo escalar interactuando con un campo de materia y G variable . . . . .	91
<b>5.4. Modelos tenso-escalares</b> . . . . .	<b>92</b>
5.4.1. Modelo con constante cosmológica . . . . .	92
5.4.2. Modelo con potencial . . . . .	97

### 5.1. Métrica y ecuaciones de campo

Para este modelo, el Bianchi II (BII) el grupo de isometrías que actúa sobre la hipersuperficie espacial  $G_3$ , está generado por los siguientes campos de Killing (KVF),

$$\xi_1 = K\partial_x, \quad \xi_2 = \partial_y, \quad \xi_3 = -Ky\partial_x + \partial_z, \quad (5.1)$$

donde la única constante de estructura no nula es:  $C_{32}^1 = 1$ .

Podemos escribir la métrica de la siguiente forma

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)dx^2 + \left(b^2(t) + K^2z^2a^2(t)\right)dy^2 + 2Ka^2(t)zdx dy + d^2(t)dz^2, \quad (5.2)$$

donde las funciones,  $a(t), b(t), d(t)$ , dependen únicamente del tiempo,  $t$ , y  $K \in \mathbb{R}$  es una constante numérica. Observar que si fijamos  $K = 0$ , entonces la métrica se reduce al caso BI estudiado en el capítulo anterior. Una vez definidos los campos de Killing, podemos determinar el campo de velocidades teniendo en cuenta la relación,  $\mathcal{L}_{\xi_i}u_i = 0$ , por lo que podemos definir la 4-velocidad como sigue:  $u^i = (1, 0, 0, 0)$ , de tal forma que se cumpla la ecuación,  $g(u^i, u^i) = -1$ .

Encontramos que el campo homotético para la métrica (5.2) es el siguiente:

$$\mathcal{H} = t\partial_t + (1 - tH_1)x\partial_x + (1 - tH_2)y\partial_y + (1 - tH_3)z\partial_z, \quad (5.3)$$

donde los factores de escala, como es habitual, se comportan como:

$$a(t) = a_0t^{a_1}, \quad b(t) = b_0t^{a_2}, \quad d(t) = d_0t^{a_3}, \quad (5.4)$$

siendo,  $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ , de tal forma que las constantes  $a_i$  deben verificar la siguiente relación:

$$a_2 + a_3 - a_1 = 1. \quad (5.5)$$

De esta forma el campo homotético se reduce a:

$$\mathcal{H} = t\partial_t + (1 - a_1)x\partial_x + (1 - a_2)y\partial_y + (1 - a_3)z\partial_z. \quad (5.6)$$

Las ecuaciones de campo que genera la métrica son las siguientes

$$\frac{a'}{a} \frac{b'}{b} + \frac{a'}{a} \frac{d'}{d} + \frac{d'}{d} \frac{b'}{b} - \frac{K^2}{4} \frac{a^2}{b^2 d^2} = T_1^1, \quad (5.7)$$

$$\frac{b''}{b} + \frac{d''}{d} + \frac{d'}{d} \frac{b'}{b} - \frac{3K^2}{4} \frac{a^2}{b^2 d^2} = T_1^1, \quad (5.8)$$

$$\frac{d''}{d} + \frac{a''}{a} + \frac{a'}{a} \frac{d'}{d} + \frac{K^2}{4} \frac{a^2}{b^2 d^2} = T_1^1, \quad (5.9)$$

$$\frac{b''}{b} + \frac{a''}{a} + \frac{a'}{a} \frac{b'}{b} + \frac{K^2}{4} \frac{a^2}{b^2 d^2} = T_1^1, \quad (5.10)$$

más la(s) ecuación(es) de conservación de los distintos campos de materia, siendo,  $T_i^j$  es el tensor energía-momento efectivo para cada modelo.

Los parámetros de anisotropía para este modelo se comportan del siguiente modo:

$$\begin{aligned} \theta = u^i_{;i} &= \left( \frac{a'}{a} + \frac{b'}{b} + \frac{d'}{d} \right) = 3H, & H &= \frac{1}{3} (H_1 + H_2 + H_3), \\ q &= \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{H} \right) - 1 = -\frac{2(a_2 + a_3 - 2)}{2(a_2 + a_3) - 1}, \end{aligned} \quad (5.11)$$

por lo que

$$\mathcal{A} = \frac{(a_2 - 1)^2}{(4a_2 - 1)^2}, \quad \mathcal{W}^2 = \frac{(K^2 + 4 - 8a_3 + 4a_3^2)(K^2 + 1 - 2a_3 + a_3^2)}{36(4a_3 - 1)^4}, \quad (5.12)$$

mientras que la entropía gravitatoria

$$p^2 = \frac{16(K^2 - 3K + 3Ka_3 + 4a_3 - 2a_3^2 - 2)(K^2 + 3K - 3Ka_3 + 4a_3 - 2a_3^2 - 2)}{3(528a_3^4 - 1024a_3^3 + 768a_3^2 - 256a_3 + 32 - 16K^2a_3 + 8K^2 + 3K^4)}. \quad (5.13)$$

## 5.2. Soluciones clásicas

### 5.2.1. Modelo de vacío

No existen soluciones autosimilares en el caso de un modelo de vacío, ya que las soluciones encontradas son las siguientes,

$$\begin{aligned} a_1 = a_2 = a_3 = K &= 0, \\ a_1 = 1, \quad a_2 = a_3 = K &= 0, \\ a_1 = -\frac{1}{3}, \quad a_2 = a_3 = \frac{1}{3}, \quad K^2 &= -\frac{4}{9}, \\ a_1 = -\frac{1}{3}, \quad a_2 = a_3 = \frac{1}{3}, \quad K &= 0, \end{aligned} \quad (5.14)$$

careciendo todas ellas de sentido físico o matemático. Observar que las soluciones verifican la condición,  $a_2 + a_3 - a_1 = 1$ .

### 5.2.2. Fluido perfecto

Recordamos que para este modelo, el tensor energía-momento viene definido por,  $T_{ij}$ , siendo  $T_{ij} = (\rho + p)u_i u_j + p g_{ij}$ , y consideramos la ecuación de estado habitual,  $p = \gamma\rho$ ,  $\gamma \in (-1, 1]$ . Las ecuaciones de campo resultantes son:

$$\frac{a' b'}{a b} + \frac{a' d'}{a d} + \frac{d' b'}{d b} - \frac{K^2 a^2}{4 b^2 d^2} = 8\pi G\rho, \quad (5.15)$$

$$\frac{b''}{b} + \frac{d''}{d} + \frac{d' b'}{d b} - \frac{3K^2 a^2}{4 b^2 d^2} = -8\pi G\gamma\rho, \quad (5.16)$$

$$\frac{d''}{d} + \frac{a''}{a} + \frac{a' d'}{a d} + \frac{K^2 a^2}{4 b^2 d^2} = -8\pi G\gamma\rho, \quad (5.17)$$

$$\frac{b''}{b} + \frac{a''}{a} + \frac{a' b'}{a b} + \frac{K^2 a^2}{4 b^2 d^2} = -8\pi G\gamma\rho, \quad (5.18)$$

$$\rho' + \rho(1 + \gamma) \left( \frac{a'}{a} + \frac{b'}{b} + \frac{d'}{d} \right) = 0. \quad (5.19)$$

Sabemos que los factores de escala deben comportarse como,  $a(t) = a_0 t^{a_1}$ ,  $b(t) = b_0 t^{a_2}$ , y  $d(t) = d_0 t^{a_3}$ , donde las constantes  $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^+$ , deben satisfacer la relación,  $a_2 + a_3 - a_1 = 1$ . De la Ec. (5.19), obtenemos el comportamiento de la densidad de energía,  $\rho = \rho_0 t^{-\alpha}$ , donde  $\alpha = h(1 + \gamma) = (a_1 + a_2 + a_3)(1 + \gamma)$ . Encontramos la siguiente solución

$$a_1 = \frac{1 - \gamma}{2(\gamma + 1)}, \quad a_2 = a_3 = \frac{\gamma + 3}{4(\gamma + 1)}, \quad (5.20)$$

viendo que se verifica la condición,  $a_2 + a_3 - a_1 = 1$ , que en este caso se reduce a,  $2a_2 - a_1 = 1$ , y

$$K^2 = \frac{-(3\gamma + 1)(\gamma - 1)}{4(\gamma + 1)^2}, \quad \gamma \in \left( -\frac{1}{3}, 1 \right), \quad (5.21)$$

por lo que  $a_2 \in \left( \frac{1}{2}, 1 \right)$ ,  $a_1 \in (0, 1)$ ,  $K^2 \in (0, 1/4)$ . Esta solución fue encontrada por Collins [285] y recogida en el trabajo de Hsu et al [153]. Si tenemos en cuenta estos resultados, vemos que el campo homotético se escribe ahora como sigue,  $\mathcal{H} = t\partial_t + (1 - a_1)x\partial_x + (1 - a_2)(y\partial_y + z\partial_z)$ .

**Observación 5.2.1** *Tal y como se puede observar, la relación,  $a_2 + a_3 - a_1 = 1$  puede ser obtenida mediante consideraciones dimensionales simplemente mirando las ecuaciones de campo. Vemos que*

$$\frac{a^2}{b^2 d^2} \approx \frac{a_0^2 t^{2a_1}}{b_0^2 t^{2a_2} d_0^2 t^{2a_3}} \approx t^{2a_1 - 2a_2 - 2a_3} \approx t^{-2},$$

*debe tener dimensiones de  $T^{-2}$ , como el resto de factores que aparecen en las ecuaciones campo. Por lo tanto se deduce la relación:  $a_2 + a_3 - a_1 = 1$ .*

De la solución se desprende que dos de los factores de escala son iguales,  $d = b$ , por lo que la métrica queda reducida a la siguiente

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)dx^2 + \left( b^2(t) + K^2 z^2 a^2(t) \right) dy^2 + 2Ka^2(t)zdx dy + b^2(t)dz^2, \quad (5.22)$$

la cual admite un campo de Killing más (5.1)

$$\xi_4 = -K \left( \frac{z^2}{2} - \frac{y^2}{2} \right) \partial_x + z\partial_y - y\partial_z. \quad (5.23)$$

que junto con los otros tres campos generan la siguiente álgebra,  $C_{23}^1 = 1$ ,  $C_{24}^3 = -1$ , y  $C_{34}^2 = 1$ , es decir, la solución pertenece a LRS BII, al poseer 4 campos de Killing en vez de tres.

Concluimos que la solución obtenida es válida  $\forall \gamma \in (-1/3, 1)$ , no siendo inflacionaria, ya que el parámetro de deceleración es positivo en este intervalo

$$q = -4 \frac{a_2 - 1}{4a_2 - 1} = \frac{3}{2} \gamma + \frac{1}{2} > 0, \quad \forall \gamma \in (-1/3, 1). \quad (5.24)$$

Con respecto a la isotropía, podemos considerar que la solución es isótropa  $\forall \gamma \in (-1/3, 1)$ , ya que, si bien el parámetro de anisotropía,  $\mathcal{A}$ , es muy próximo a cero cuando  $\forall \gamma \in (-1/3, 1/3)$

$$\mathcal{A} = \frac{(3\gamma + 1)^2}{64(\gamma + 2)^2} \leq 0,025, \quad (5.25)$$

alcanzando el valor máximo 0,025 cuando  $\gamma \rightarrow 1$ , observar que para tal valor de la EdE  $a_1 \rightarrow 0$  mientras que  $a_2 \rightarrow 1/2$ . Sin embargo,  $\mathcal{W}^2$ , está muy acotado superiormente,  $\mathcal{W}^2 \ll 0,005$ ,  $\forall \gamma \in (-1/3, 1)$ , tal y como podemos observar de la expresión

$$\mathcal{W}^2 = \frac{(3\gamma + 1)^4 (\gamma^2 + 1) (5\gamma^2 + 6\gamma + 5)}{73728 (\gamma + 1)^4}, \quad (5.26)$$

por lo que, siguiendo el criterio de isotropía concluimos que la solución es isótropa. La entropía gravitatoria se comporta de la siguiente forma

$$P^2 = -\frac{64(2\gamma^2 + 3\gamma - 1)(3\gamma + 1)^4(\gamma^2 - 3\gamma - 2)}{3(1747 + 6552\gamma + 13156\gamma^2 + 20232\gamma^3 + 18562\gamma^4 + 5608\gamma^5 - 1660\gamma^6 - 8\gamma^7 + 1347\gamma^8)}, \quad (5.27)$$

siendo  $|P^2| \ll 0,001$ ,  $\forall \gamma \in (-1/3, 1/3)$ ,  $P^2 = 0$  si  $\gamma = 1/3$  y  $P^2 \rightarrow 1,2$  cuando  $\gamma \rightarrow 1$  precisamente donde  $a_1 \rightarrow 0$ .

Con respecto al comportamiento dinámico de la solución, podemos decir siguiendo a [150] que esta solución es un atractor futuro para cualquier otra solución con un fluido perfecto y  $\forall \gamma \in (-1/3, 1)$ . Aquí es donde radica la importancia de este tipo de soluciones, ya que cualquier otro modelo tenderá de forma asintótica a la solución tipo Collins ( $\mathcal{C}$ ). El atractor pasado para estas soluciones es la tipo Kasner ( $\mathcal{K}$ ) descrita en el capítulo anterior.

### 5.2.3. Fluido perfecto con constantes variables

Para este modelo consideraremos las siguientes ecuaciones de campo, donde tanto  $G$  como  $\Lambda$  varían con el tiempo:

$$\frac{a'}{a} \frac{b'}{b} + \frac{a'}{a} \frac{d'}{d} + \frac{d'}{d} \frac{b'}{b} - \frac{K^2}{4} \frac{a^2}{b^2 d^2} = 8\pi G \rho + \Lambda, \quad (5.28)$$

$$\frac{b''}{b} + \frac{d''}{d} + \frac{d'}{d} \frac{b'}{b} - \frac{3K^2}{4} \frac{a^2}{b^2 d^2} = -8\pi G \gamma \rho + \Lambda, \quad (5.29)$$

$$\frac{d''}{d} + \frac{a''}{a} + \frac{a'}{a} \frac{d'}{d} + \frac{K^2}{4} \frac{a^2}{b^2 d^2} = -8\pi G \gamma \rho + \Lambda, \quad (5.30)$$

$$\frac{b''}{b} + \frac{a''}{a} + \frac{a'}{a} \frac{b'}{b} + \frac{K^2}{4} \frac{a^2}{b^2 d^2} = -8\pi G \gamma \rho + \Lambda, \quad (5.31)$$

$$\rho' + \rho \left(1 + \gamma\right) \left(\frac{a'}{a} + \frac{b'}{b} + \frac{d'}{d}\right) = 0, \quad (5.32)$$

$$\Lambda' = -8\pi G' \rho. \quad (5.33)$$

Siguiendo las consideraciones anteriores, sabemos que los factores de escala deben comportarse como sigue:  $a(t) = a_0 t^{a_1}$ ,  $b(t) = b_0 t^{a_2}$ , y  $d(t) = d_0 t^{a_3}$ , donde las constantes,  $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^+$ , de tal forma que la solución sólo será autosimilar si verifican la relación  $a_2 + a_3 - a_1 = 1$ . De la Ec. (5.32) obtenemos el comportamiento de la densidad de energía,  $\rho = \rho_0 t^{-\alpha}$ , donde  $\alpha = (\gamma + 1)h$ , siendo  $h = (a_1 + a_2 + a_3)$ . De la Ec. (5.28) obtenemos:

$$\Lambda = A t^{-2} - 8\pi G \rho_0 t^{-(\gamma+1)h}, \quad (5.34)$$

con  $A = a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3 - \frac{K^2}{4}$ . Considerando las Ecs. (5.33) y (5.34), el álgebra nos lleva a obtener la siguiente expresión para  $G$ :  $G = G_0 t^{\alpha-2}$ , donde  $G_0 = \frac{A}{4\pi \rho_0 (\gamma+1)h}$  y, por tanto, la constante cosmológica se comporta:  $\Lambda = A \left(1 - \frac{2}{\alpha}\right) t^{-2} = \Lambda_0 t^{-2}$ .

Encontramos la siguiente solución

$$a_{1\pm} = \frac{1}{2} \left( 1 \pm \sqrt{1 - 4K^2} \right), \quad a_2 = a_3, \quad a_{2\pm} = \frac{1}{4} \left( 3 \pm \sqrt{1 - 4K^2} \right), \quad K \in \left[ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right] \setminus \{0\}, \quad (5.35)$$

donde  $a_{2+} \in (1/2, 1)$  y  $a_{2-} \in (0, 1/2)$  y donde la relación  $a_1 = 2a_2 - 1 \in (0, 1)$  es satisfecha. No encontramos ninguna restricción matemática para la ecuación de estado, excepto que  $\gamma \neq -1$ . De esta forma vemos que

$$\alpha_{\pm} = (\gamma + 1) \left( 2 \pm \sqrt{1 - 4K^2} \right), \quad (5.36)$$

siendo el valor crítico,  $\alpha = 2$ , cuando

$$\gamma = \left( \sqrt{1 - 4K^2} \mp 2 \right) \frac{\sqrt{1 - 4K^2}}{4K^2 + 3}, \quad (5.37)$$

por lo que  $G$  será creciente y  $\Lambda$  positiva si  $\alpha > 2$ ,  $G$  será constante y  $\Lambda = 0$  si  $\alpha = 2$  y por último  $G$  será una función decreciente y  $\Lambda$  negativa cuando  $\alpha < 2$ , descartando esta última posibilidad por no ajustarse a las observaciones que sugieren  $\Lambda > 0$ . En el siguiente gráfico (5.1), hemos dibujado las dos posibles ramas de  $\alpha_{\pm}$ , representando en color rojo el valor de  $\alpha_+$  y en color azul el de  $\alpha_-$ .

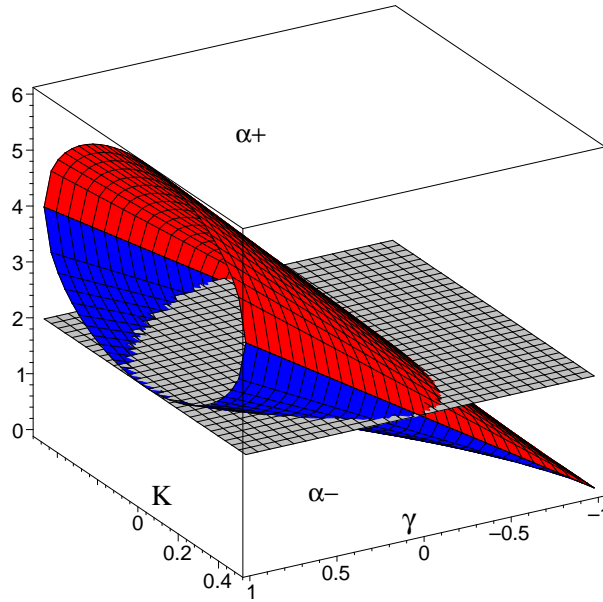


Figura 5.1: Gráfica de los parámetros  $\alpha_{\pm}$ . En rojo  $\alpha_+$ , mientras que en azul está representada  $\alpha_-$ . El plano  $z = 2$  (gris).  $\gamma \in (-1, 1]$ , y  $K \in \left[ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]$ .

Con los valores obtenidos la solución no es inflacionaria,

$$q = \frac{1 - \sqrt{1 - 4K^2}}{2 + \sqrt{1 - 4K^2}}, \quad (5.38)$$

siendo  $q > 0$ ,  $\forall K \in \left[ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right] \setminus \{0\}$ , y es isótropa, ya que ambos parámetros de anisotropía están muy próximos a cero

$$\mathcal{A} = \frac{(1 - \sqrt{1 - 4K^2})^2}{16(2 + \sqrt{1 - 4K^2})^2} \ll 0,015, \quad \mathcal{W}^2 = \frac{(1 - \sqrt{1 - 4K^2})^2 (6K^2 + 1 - \sqrt{1 - 4K^2})^2}{576(2 + \sqrt{1 - 4K^2})^4} \ll 0,0002. \quad (5.39)$$

La entropía gravitatoria está acotada para todo valor de  $K \in \left[ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right] \setminus \{0\}$ ,

$$p^2 = \frac{2 \left( 6K^2 - 3K(1 - \sqrt{1 - 4K^2}) - 1 + \sqrt{1 - 4K^2} \right) \left( 6K^2 + 3K(1 - \sqrt{1 - 4K^2}) - 1 + \sqrt{1 - 4K^2} \right)}{3 \left( 49 + 47\sqrt{1 - 4K^2} - (78\sqrt{1 - 4K^2} + 164)K^2 + 72K^4 \right)}, \quad (5.40)$$

tendiendo a  $-0,106$  precisamente en  $K = \pm \frac{1}{2}$ . En la figura (5.2) hemos representado los tres parámetros ( $\mathcal{A}, \mathcal{W}^2, P^2$ ) en colores rojo, azul y verde respectivamente.

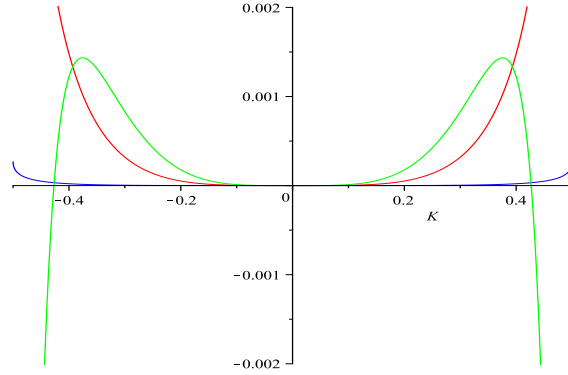


Figura 5.2: Gráfica de los parámetros de anisotropía y entropía gravitatoria  $\mathcal{A}, \mathcal{W}^2, P^2$ .  $\mathcal{A}$  (rojo),  $\mathcal{W}^2$  (azul) y  $P^2$  (verde).  $K \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ .

No podemos conjeturar nada, por el momento, sobre el comportamiento dinámico de la solución, ya que la aquí encontrada y con respecto a los factores de escala, es bien distinta a la obtenida en el caso de un fluido perfecto con constantes “constantes”, debiendo ser estudiada mediante métodos perturbativos u otros métodos de sistemas dinámicos.

## 5.3. Modelos escalares

### 5.3.1. Modelo escalar

Las ecuaciones de campo del modelo vienen descritas por las Ecs. (5.7-5.10) siendo el tensor energía-momento del campo escalar definido por las Ecs. (3.67-3.68), mientras que la ecuación de ondas para el campo viene dada por la Ec. (3.69). Sabemos que el comportamiento de las magnitudes está descrito por Ec. (3.99) por lo que encontramos la siguiente solución

$$a_1 = \frac{1}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - 4K^2}\right), \quad a_2 = a_3 = \frac{1}{4} \left(3 \pm \sqrt{1 - 4K^2}\right), \quad (5.41)$$

$$\alpha_{\pm} = \frac{1}{4} \left(5 \pm 3\sqrt{1 - 4K^2}\right), \quad \beta = 1 \pm \sqrt{1 - 4K^2} - \frac{3}{2}K^2, \quad K \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \setminus \{0\}. \quad (5.42)$$

Como podemos observar, los parámetros de los factores de escala son idénticos a los obtenidos en el caso de un fluido perfecto con constantes variables, por lo que la solución es isótropa y no es inflacionaria.  $\alpha$  y  $\beta$  son siempre positivos para todo valor del parámetro  $K$  definido en el intervalo  $K \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \setminus \{0\}$ , por lo que el modelo predice una constante cosmológica dinámica y positiva, resultado éste concordante con las observaciones recientes.

Con respecto al comportamiento dinámico podemos afirmar que la solución tipo Kasner ( $\mathcal{K}$ ), es un atractor tanto hacia el pasado como hacia el futuro, tal y como han puesto de manifiesto [284] (consultar también [151] para un tratamiento exhaustivo sobre este tipo de modelos). Por tanto, ahora sí podemos conjeturar que la solución obtenida en el modelo de un fluido perfecto con constantes variables se comportará de forma análoga a como lo hace esta solución, ya que los parámetros de los factores de escala son iguales.

### 5.3.2. Modelo escalar con G variable

En este caso consideramos un modelo escalar donde la constante de gravitación varía con el tiempo cósmico,  $t$ . Las ecuaciones del modelo vienen dadas por las Ecs. (5.7-5.10), donde el tensor energía-momento del campo está descrito por las Ec. (3.67-3.68). La ecuación de ondas para el campo escalar cambia con respecto al modelo anterior,

ya que consideramos que  $G$  varía, siendo ahora Ec. (3.106). El comportamiento de las magnitudes está descrito por la Ec. (3.140). Teniendo en cuenta todas estas consideraciones, encontramos la siguiente solución

$$a_1 = \frac{1}{2} \left( 1 \pm \sqrt{1 - 4K^2} \right), \quad a_2 = a_3 = \frac{1}{4} \left( 3 \pm \sqrt{1 - 4K^2} \right), \quad K \in \left[ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right] \setminus \{0\}, \quad (5.43)$$

$$G_0 = \frac{1}{4\alpha^2} \left( 5 \pm 3\sqrt{1 - 4K^2} \right), \quad \beta = \frac{\alpha^2}{2} \left( 1 \pm \sqrt{1 - 4K^2} \right). \quad (5.44)$$

Vemos que el parámetro  $\alpha$  es libre, pudiendo intentar despejar  $\alpha$  en función de  $K$  y  $G_0$

$$\alpha = \pm \frac{\sqrt{\pm G_0 \left( \pm 5 + 3\sqrt{1 - 4K^2} \right)}}{2G_0}, \quad (5.45)$$

pero, tal y como se observa, queda igualmente indeterminado el signo ya que son igualmente válidas las 4 soluciones (hemos supuesto que  $G_0 > 0$ , lo cual es físicamente deseable, y  $K \in \left[ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right] \setminus \{0\}$ ). Con respecto a los factores de escala, la solución encontrada es la misma que en el caso de un fluido perfecto con constantes variables, por lo que las conclusiones a las que allí llegábamos son válidas aquí, es decir, la solución es isótropa y no inflacionaria. El parámetro del potencial del campo escalar,  $\beta$ , es siempre positivo, por lo que el modelo predice que la constante cosmológica es positiva y decreciente si  $\alpha > -1$ . Al ser  $\alpha$  un parámetro libre, entonces no podemos determinar el comportamiento de  $G$ , pudiendo ser decreciente si  $-1 < \alpha < 0$ , o creciente si  $\alpha > 0$ .

### 5.3.3. Modelo escalar sin interacción con un campo de materia

Consideramos en este caso, un modelo en el que un campo escalar no interacciona con un campo de materia (un fluido perfecto). Las ecuaciones del modelo son Ecs. (5.7-5.10), donde los tensores de los campos están definidos por las Ecs. (3.3 y 3.67-3.68). Al no considerar interacción, entonces las ecuaciones de conservación no se acoplan, i.e., vienen definidas por las Ecs.  $(T^m)_{ij}^j = 0 = (T^\phi)_{ij}^j$ . Al conocer de antemano cómo se comportan las magnitudes del modelo, Ec (3.144), encontramos la siguiente solución

$$a_1 = \frac{1 - \gamma}{2(\gamma + 1)}, \quad a_2 = a_3 = \frac{3 + \gamma}{4(\gamma + 1)}, \quad K^2 = \frac{-(3\gamma + 1)(\gamma - 1)}{4(\gamma + 1)^2}, \quad \gamma \in \left( -\frac{1}{3}, 1 \right),$$

$$\rho_0 = \frac{(5 - \gamma - 4\alpha(\gamma + 1))}{4(\gamma + 1)^2}, \quad \beta = \frac{\alpha(1 - \gamma)}{2(\gamma + 1)}. \quad (5.46)$$

En primer lugar resaltamos que la solución es válida para los siguientes valores del parámetro de la EdE,  $\gamma \in \left( -\frac{1}{3}, 1 \right)$ . De igual forma veremos que los parámetros de los factores de escala,  $a_1, a_2$  y  $a_3$ , son idénticos a los obtenidos en el caso de un fluido perfecto (solución clásica) por lo que la solución no es inflacionaria y es isótropa si  $\gamma$  no tiende a 1, si atendemos al primer criterio de isotropía,  $\mathcal{A}$ , mientras que con respecto al segundo  $\mathcal{W}^2$ , podemos afirmar que la solución es isótropa. La única restricción física que encontramos para el parámetro  $\alpha$ , es la siguiente,  $0 < \alpha < \frac{5 - \gamma}{4(\gamma + 1)}$ , ya que la densidad de energía debe ser positiva.

### 5.3.4. Modelo escalar sin interacción con un campo de materia y $G$ variable

La única diferencia con respecto del modelo anterior, consiste en introducir la hipótesis de  $G = G(t)$ , es decir, considerar la constante de gravitación como función del tiempo cósmico. De esta forma, las ecuaciones del modelo son parecidas a las del anterior, con la salvedad de las ecuaciones de conservación que, en este nuevo modelo, vienen descritas por las Ecs. (3.147-3.148). El comportamiento de las soluciones es diferente a las del anterior modelo, siendo en este caso el expuesto en la Ec. (3.149); por lo tanto encontramos la siguiente solución

$$a_1 = \frac{1}{2} \left( 1 \pm \sqrt{1 - 4K^2} \right), \quad a_2 = a_3 = \frac{1}{4} \left( 3 \pm \sqrt{1 - 4K^2} \right), \quad K \in \left[ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right] \setminus \{0\},$$

$$\beta = \frac{\alpha^2}{2} \left( 1 \pm \sqrt{1 - 4K^2} \right), \quad \rho_0 = \frac{13 + (11 - 4\alpha^2 G_0) \sqrt{1 - 4K^2} - 4(3K^2 + 2\alpha^2 G_0)}{8G_0},$$

$$\gamma = -\frac{\sqrt{1 - 4K^2}}{2 + \sqrt{1 - 4K^2}} \iff K^2 = \frac{-(3\gamma + 1)(\gamma - 1)}{4(\gamma + 1)^2}, \quad \gamma \in \left( -\frac{1}{3}, 1 \right). \quad (5.47)$$

Tal y como podemos observar, la solución es válida para todo  $\gamma \in \left(-\frac{1}{3}, 1\right)$  y  $K \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \setminus \{0\}$ . Al haber obtenido para los factores de escala la misma solución que en el caso de un fluido perfecto con constantes variables, entonces sabemos que esta solución no es inflacionaria y que es isótropa. El signo de la constante cosmológica  $\beta$ , es positivo para todo valor de  $K$  perteneciente al intervalo,  $K \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \setminus \{0\}$ . Al ser  $\alpha$  indeterminado, es decir un parámetro libre, entonces no podemos determinar el comportamiento de  $G$ ; la única acotación que obtenemos es  $\alpha \in (-1, \infty) \setminus \{0\}$ , de esta forma el potencial es decreciente, mientras que, para garantizar que la densidad de energía sea positiva, encontramos la siguiente acotación para  $\alpha$ ,

$$\alpha^2 < \frac{(37 - 68K^2) + (35 - 12K^2) \sqrt{1 - 4K^2}}{4G_0 (2 + \sqrt{1 - 4K^2})^2}. \quad (5.48)$$

### 5.3.5. Modelo escalar interactuando con un campo de materia

#### Primer enfoque

En este primer enfoque las ecuaciones de conservación son,  $(T^m)_{i;j}^j = -(T^\phi)_{i;j}^j$  i.e. Ec. (3.151), por tanto, la solución a las ecuaciones de campo (5.7-5.10) con los tensores tanto del campo de materia como del campo escalar definidos por las ecuaciones (3.3 y 3.67-3.68), y teniendo en cuenta que las magnitudes deben comportarse como en Ec. (3.144), es

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - 4K^2}\right), \quad a_2 = a_3 = \frac{1}{4} \left(3 \pm \sqrt{1 - 4K^2}\right), \quad K \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \setminus \{0\}, \\ \alpha &= \frac{1}{4} \left(5 \pm \sqrt{1 - 4K^2}\right) - \rho_0 (\gamma + 1), \quad \beta = 1 \pm \sqrt{1 - 4K^2} - \frac{1}{2} \left(\rho_0 (1 - \gamma) + 3K^2\right), \end{aligned} \quad (5.49)$$

encontrando la siguiente restricción sobre el parámetro de la densidad de energía  $\rho_0 < \frac{5 \pm \sqrt{1 - 4K^2}}{4(\gamma + 1)}$ , ya que  $\alpha$  debe ser positiva. Esta restricción asegura, de igual forma, que  $\beta > 0$ ,  $\forall K \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \setminus \{0\}$ , por lo que la constante cosmológica (dinámica) es positiva y decreciente. Encontramos, de esta forma, que la solución no es inflacionaria, pero sí isótropa. Observar que se trata de la misma solución hallada en casos anteriores. Pero no encontramos ninguna restricción sobre el parámetro de la EdE  $\gamma$ , por lo que podemos afirmar que es válida para todo  $\gamma \in (-1, 1]$ .

#### Segundo enfoque

En este modelo, las ecuaciones de conservación están acopladas mediante cierta función  $Q$ . Los tensores tanto del campo de materia como del campo escalar están definidos por las ecuaciones (3.3 y 3.67-3.68) y, teniendo en cuenta que las magnitudes deben comportarse como en Ec. (3.144), encontramos al resolver las ecuaciones de campo (5.7-5.10), la siguiente solución

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - 4K^2}\right), \quad a_2 = a_3 = \frac{1}{4} \left(3 \pm \sqrt{1 - 4K^2}\right), \quad K \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \setminus \{0\}, \\ \alpha &= \frac{1}{4} \left(5 \pm 3\sqrt{1 - 4K^2}\right) - \rho_0 (\gamma + 1), \quad \beta = 1 \pm \sqrt{1 - 4K^2} - \frac{1}{2} \left(\rho_0 (1 - \gamma) + 3K^2\right), \\ \delta &= \mp \frac{2 \left((\gamma + 1) \sqrt{1 - 4K^2} \pm 2\gamma\right)}{\sqrt{5 \pm 3\sqrt{1 - 4K^2} - 4\rho_0 (\gamma + 1)}}, \end{aligned} \quad (5.50)$$

con  $\rho_0 < \frac{5 \pm \sqrt{1 - 4K^2}}{4(\gamma + 1)}$ . Se trata, por tanto, de la misma solución que la anterior, excepto que en este caso, la solución no es válida para todo valor del parámetro de la EdE, ya que para no violar los principios de la termodinámica, la constante de acoplamiento  $\delta$  debe ser en este modelo negativa. En la siguiente figura (5.3) hemos dibujado las dos posibles soluciones de  $\delta$ , en color rojo está representada  $\delta_-$  y en color verde  $\delta_+$ . Tal y como se observa, la segunda posibilidad,  $\delta_+$ , es mucho más restrictiva que la primera, ya que para ésta,  $\delta_+$  es positiva en función de los parámetros  $(K, \gamma, \rho_0)$ , donde hemos supuesto que  $0 < \rho_0 \ll 1$ . Por tanto, la solución es isótropa y no inflacionaria y sólo para determinados valores de  $(K, \gamma)$  que hacen que el parámetro de la función de acoplamiento  $\delta$ , sea negativo.

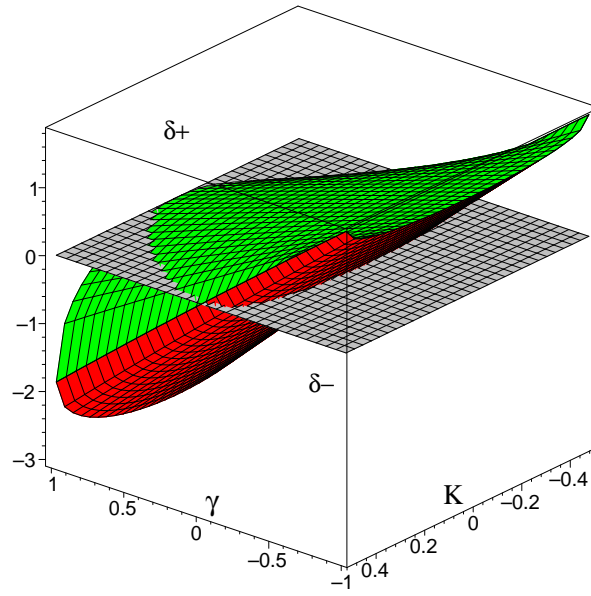


Figura 5.3: Gráficas del parámetro de acoplamiento  $\delta$ .  $\delta_-$  (rojo) y  $\delta_+$  (verde).  $\gamma \in (-1, 1]$ ,  $K \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ ,  $\rho_0 = 1/20$ .

### Tercer enfoque

Para terminar la sección dedicada al estudio de modelos interactivos, estudiaremos, a continuación, el modelo propuesto por Coley. La única diferencia con respecto al anterior modelo es la función de acoplamiento. Por tanto la solución encontrada a las ecuaciones de campo (5.7-5.10) donde las Ecs. (3.3 y 3.67-3.68) definen los diversos campos considerados y siendo las ecuaciones de conservación descritas por las Ecs. (3.181-3.182), es la siguiente

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \frac{1}{2} \left( 1 \pm \sqrt{1 - 4K^2} \right), & a_2 = a_3 &= \frac{1}{4} \left( 3 \pm \sqrt{1 - 4K^2} \right), & K &\in \left[ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right] \setminus \{0\}, \\
 \alpha &= \frac{1}{4} \left( 5 \pm 3\sqrt{1 - 4K^2} \right) - \rho_0 (\gamma + 1), & \beta &= 1 \pm \sqrt{1 - 4K^2} - \frac{1}{2} \left( \rho_0 (1 - \gamma) + 3K^2 \right), \\
 \delta_{\pm} &= \frac{(\gamma + 1) \sqrt{1 - 4K^2} \pm 2\gamma}{\pm 2 + \sqrt{1 - 4K^2}},
 \end{aligned} \tag{5.51}$$

siendo ésta igual a la anterior, excepto en el parámetro de la función de acoplamiento  $\delta$ , por lo que la solución es isótropa y no inflacionaria. Tal y como discutíamos en el capítulo 3, en este modelo la constante  $\delta$  debe ser positiva para preservar los principios de la termodinámica. Por lo tanto, y al igual que en la solución anterior, esta solución no es válida para todo valor del parámetro de la EdE; dicha validez de este intervalo dependerá de  $K$ . El análisis numérico llevado a cabo indica que la solución en el caso  $\delta_+$  es válida si  $\gamma \in \left(-\frac{1}{3}, 1\right)$  y  $K \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \setminus \{0\}$ , mostrando así la analogía con el caso anteriormente estudiado.

### 5.3.6. Modelo escalar interactuando con un campo de materia y G variable

Para terminar el estudio de modelos escalares, consideraremos en esta ocasión un modelo donde el campo escalar interactúa con uno de materia, un fluido perfecto en este caso, y donde además, consideramos la posibilidad de que la constante de gravitación dependa del tiempo cósmico, i.e., sea otra variable dentro del modelo. Las ecuaciones a resolver vienen descritas por las Ecs. (5.7-5.10) junto con las Ecs. (3.3 y 3.67-3.68), que definen los diversos campos considerados y las ecuaciones de conservación acopladas y con  $G$  variable son las Ecs. (3.224-3.225). Consideramos además que la función de acoplamiento es  $Q = \delta H \rho_m$ , por lo que bajo todas estas condiciones, en-

construimos la siguiente solución

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{1}{2} \left( 1 \pm \sqrt{1 - 4K^2} \right), \quad a_2 = a_3 = \frac{1}{4} \left( 3 \pm \sqrt{1 - 4K^2} \right), \quad K \in \left[ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right] \setminus \{0\}, \\
\beta &= \frac{13\gamma + 3 + (11\gamma + 5) \sqrt{1 - 4K^2} - 12K^2 (\gamma + 1)}{8G_0 (\gamma + 1)} + \frac{\alpha^2 (1 - \gamma)}{2}, \\
\rho_0 &= \frac{5 + 3\sqrt{1 - 4K^2}}{4G_0 (\gamma + 1)} - \frac{\alpha^2}{(\gamma + 1)}, \quad \delta = \frac{(\gamma + 1) \sqrt{1 - 4K^2} \pm 2\gamma}{\pm 2 + \sqrt{1 - 4K^2}}.
\end{aligned} \tag{5.52}$$

Vemos que con respecto a los parámetros de los factores de escala la solución es idéntica a las encontradas en los diversos modelos estudiados con anterioridad, por lo que las conclusiones son las mismas. Las únicas restricciones físicas que encontramos son las siguientes:  $\frac{5+3\sqrt{1-4K^2}}{4G_0} > \alpha^2$ , donde suponemos que  $G_0 > 0$ . Por otro lado, la constante de acoplamiento debe ser positiva en este caso, así que teniendo en cuenta el análisis numérico llevado a cabo en la anterior sección, concluimos que la solución es isótropa y no inflacionaria, siendo sólo válida si  $\gamma \in \left(-\frac{1}{3}, 1\right)$  y  $K \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \setminus \{0\}$ , valores éstos que hacen que  $\delta_+$  sea positiva. Por otro lado, la única acotación obtenida para  $\alpha$  es la siguiente,  $\alpha \in \left(-1, \sqrt{\frac{5+3\sqrt{1-4K^2}}{4G_0}}\right) \setminus \{0\}$ ; de esta forma no podemos determinar el comportamiento de la constante de gravitación. Observamos también que con estas acotaciones el parámetro  $\beta$  del potencial es siempre positivo, por lo que el modelo predice una constante cosmológica decreciente y positiva.

## 5.4. Modelos tenso-escalares

### 5.4.1. Modelo con constante cosmológica

Las ecuaciones de campo para este modelo con constante cosmológica son las siguientes

$$\frac{a' b'}{a b} + \frac{a' d'}{a d} + \frac{d' b'}{d b} - \frac{K^2 a^2}{4 b^2 d^2} = 8\pi \frac{\rho}{\phi} + \frac{\omega \phi'^2}{2 \phi^2} - \left( \frac{a'}{a} + \frac{b'}{b} + \frac{d'}{d} \right) \frac{\phi'}{\phi} + \Lambda, \tag{5.53}$$

$$\frac{b''}{b} + \frac{d''}{d} + \frac{d' b'}{d b} - \frac{3K^2 a^2}{4 b^2 d^2} = -8\pi \frac{p}{\phi} - \frac{\phi''}{\phi} - \frac{\omega \phi'^2}{2 \phi^2} - \left( \frac{b'}{b} + \frac{d'}{d} \right) \frac{\phi'}{\phi} + \Lambda, \tag{5.54}$$

$$\frac{K^2 a^2}{b^2 d^2} - \frac{b''}{b} - \frac{d' b'}{d b} + \frac{a''}{a} + \frac{a' d'}{a d} = \left( \frac{b'}{b} - \frac{a'}{a} \right) \frac{\phi'}{\phi}, \tag{5.55}$$

$$\frac{d''}{d} + \frac{a''}{a} + \frac{a' d'}{a d} + \frac{K^2 a^2}{4 b^2 d^2} = -8\pi \frac{p}{\phi} - \frac{\phi''}{\phi} - \frac{\omega \phi'^2}{2 \phi^2} - \left( \frac{a'}{a} + \frac{d'}{d} \right) \frac{\phi'}{\phi} + \Lambda, \tag{5.56}$$

$$\frac{b''}{b} + \frac{a''}{a} + \frac{a' b'}{a b} + \frac{K^2 a^2}{4 b^2 d^2} = -8\pi \frac{p}{\phi} - \frac{\phi''}{\phi} - \frac{\omega \phi'^2}{2 \phi^2} - \left( \frac{a'}{a} + \frac{b'}{b} \right) \frac{\phi'}{\phi} + \Lambda, \tag{5.57}$$

además de las ecuaciones de conservación. En el tercer capítulo demostrábamos cuál debe ser el comportamiento de las magnitudes para obtener soluciones autosimilares, recordando que

$$\phi = \phi_0 (t + t_0)^n, \quad \Lambda(t) = \Lambda_0 (t + t_0)^{-(n+\alpha)}, \quad \omega(\phi) = \text{const.}, \quad \rho = \rho_0 (t + t_0)^{-\alpha},$$

$n + \alpha = 2$ , y  $\alpha = (1 + \gamma)h$ . Encontramos dos soluciones.

**Primera solución**

La primera solución con  $\Lambda = 0$ .

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{-4\omega(\gamma-1)^2 - 3 + \gamma}{8\omega(\gamma^2-1) - 11 + \gamma}, & a_2 = a_3 &= \frac{2\omega(\gamma+3)(\gamma-1) - 7 + \gamma}{8\omega(\gamma^2-1) - 11 + \gamma}, & 2a_2 - a_1 &= 1, \\
\Lambda_0 &= 0, & \forall \gamma &\in \left(-\frac{1}{3}, 1\right), \\
K^2 &= -\frac{2\left(-22 + 36\gamma - 6\gamma^2 + \omega(\gamma-1)(-\gamma - 51\gamma^2 + 9\gamma^3 + 27) + 8\omega^2(3\gamma+1)(\gamma-1)^3\right)}{(8\omega(\gamma^2-1) - 11 + \gamma)^2}, \\
\rho_0 &= -\frac{(\gamma-5)\left(3(-18\gamma + 3\gamma^2 + 11) + 2\omega(-42\gamma + 15\gamma^2 + 23) + 16\omega^2(\gamma-1)^2\right)\phi_0}{8\pi(8\omega(\gamma^2-1) - 11 + \gamma)^2}, \\
\tilde{n} &= -\frac{(3\gamma-1)(\gamma-5)}{8\omega(\gamma^2-1) - 11 + \gamma}, \\
q &= \frac{8(\omega(3\gamma+1)(\gamma-1) - 2)}{16\omega(\gamma-1) + 3\gamma - 17}.
\end{aligned} \tag{5.58}$$

Vemos que, si fijamos el valor del parámetro de Brans-Dicke [241],  $\omega = 4 \cdot 10^4$ , la solución únicamente es válida  $\forall \gamma \in \left(-\frac{1}{3}, 1\right)$ , ya que para estos valores  $K^2 > 0$ , donde los dos parámetros de los factores de escala se comportan de la siguiente manera, tal y como refleja la figura (5.4) verificando además, la condición de autosimilaridad  $2a_2 - a_1 = 1$ .

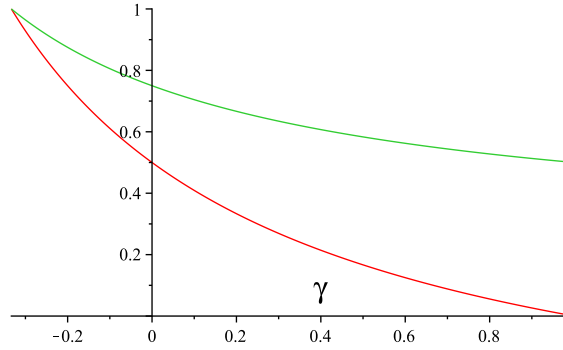


Figura 5.4: Gráfica de los parámetros de los factores de escala:  $a_1$  (rojo),  $a_2$  (verde).  $\gamma \in \left(-\frac{1}{3}, 1\right)$ , y  $\omega = 4 \cdot 10^4$ .

La solución no es inflacionaria, ya que el parámetro de deceleración  $q \in (0, 2)$ , siendo  $q = 0$  cuando  $\gamma = -1/3$  y  $q = 2$  cuando  $\gamma = 1$ , precisamente  $q < 0$  si  $\gamma < -\frac{1}{3}$ . Vemos además que el parámetro de la densidad de energía  $\rho_0$  es nulo cuando  $\gamma = 0,997$ , restringiendo así el intervalo de definición del parámetro de la EdE  $\gamma$ . Con respecto a los parámetros de anisotropía, éstos son

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \frac{(a_2 - 1)^2}{(4a_2 - 1)^2} \ll 0,3, & \forall \gamma &\in \left(-\frac{1}{3}, 1\right), \\
\mathcal{W}^2 &= \frac{(K^2 + 4 - 8a_3 + 4a_3^2)(K^2 + 1 - 2a_3 + a_3^2)}{36(4a_3 - 1)^4} \ll 0,005,
\end{aligned} \tag{5.59}$$

donde el parámetro  $\mathcal{A}$  solo tiende a 0,3 cuando  $\gamma$  se aproxima a 1, i.e.,  $\mathcal{A}(\gamma \rightarrow 1) \rightarrow 0,3$ , para el resto de valores de  $\gamma$ ,  $\mathcal{A} \rightarrow 0$ . Esto es debido a que precisamente, cuando  $\gamma \rightarrow 1$ , existe una “gran diferencia” (0,5) entre los valores de los parámetros de los factores de escala  $a_1$  y  $a_2$ , tal y como refleja la figura (5.4). De esta forma, podemos considerar que la solución es isótropa, ya que ambos parámetros son muy próximos a cero. Resaltamos además,

que la constante cosmológica es nula. La constante de gravitación efectiva se comporta como una función decreciente  $\forall \gamma \in \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ , se hace constante para  $\gamma = \frac{1}{3}$ , ya que para este valor el parámetro  $\tilde{n}$  se anula y es creciente  $\forall \gamma \in \left(\frac{1}{3}, 1\right)$ . Por tanto, la interpretación que podemos hacer de esta solución es la siguiente: el universo comienza con una ecuación de estado  $\gamma = 1$ , momento éste en el que la solución muestra cierta anisotropía,  $a_1 \neq a_2$ , siendo la constante de gravitación creciente en este periodo. A medida que el universo evoluciona,  $\gamma = 1/3$ , la anisotropía decrece y  $G_{eff} = const$ . En etapas posteriores,  $\gamma = 0$  (predominio de materia) o  $\gamma \rightarrow -1/3$  (string era) la anisotropía desaparece  $a_1 = a_2$ , y la constante  $G_{eff}$  se muestra como una función decreciente. En ninguna etapa el modelo es inflacionario, sólo si  $\gamma < -1/3$ , entonces  $q < 0$  y por último,  $\Lambda = 0$ .

### Segunda solución

La segunda solución con  $\Lambda \neq 0$ , es la siguiente

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \frac{1}{4\gamma} \left( \gamma + 1 - \sqrt{9\gamma^2 - 6\gamma + 1 + 16\gamma K^2} \right), & K \in (-1, 1) \setminus \{0\}, & \phi_0 = 1, \\
 a_2 = a_3 &= \frac{1}{8\gamma} \left( 5\gamma + 1 - \sqrt{9\gamma^2 - 6\gamma + 1 + 16\gamma K^2} \right), & 2a_2 - a_1 &= 1, \\
 \Lambda_0 &= -\frac{2\omega(\gamma - 1)(-\gamma + 4a_3(1 + \gamma) - 3)^2 + (-\gamma - (11 + \gamma)a_3 + 7)(-\gamma + 4a_3(1 + \gamma) - 3)}{4(1 + \gamma)}, \\
 \rho_0 &= -\frac{\left( 2(4a_3 - 1)^2 \gamma^2 + (4a_3 - 1)(19a_3 - 11)\gamma + 17 - 59a_3 + 44a_3^2 + 2\omega(-\gamma + 4a_3(1 + \gamma) - 3)^2 \right)}{16\pi(1 + \gamma)}, \\
 \tilde{n} &= \frac{1}{2\gamma} \left( -3\gamma^2 - 1 + \sqrt{16K^2\gamma + 9\gamma^2 - 6\gamma + 1(1 + \gamma)} \right), \\
 q &= \frac{1}{8K^2 + 6} \left( 9\gamma + 3\sqrt{16K^2\gamma + 9\gamma^2 - 6\gamma + 1} - 8K^2 - 3 \right). \tag{5.60}
 \end{aligned}$$

Como podemos observar, resulta complicado interpretar la solución obtenida, ya que todos las constantes de las magnitudes dependen tanto del parámetro de la EdE, como de la constante geométrica  $K$ . Resulta pues preciso realizar un análisis numérico pormenorizado de la solución. Comenzamos representando gráficamente algunos de los parámetros. Fijando el valor del parámetro de Brans-Dicke [241],  $\omega = 4 \cdot 10^4$ , vemos que la solución no es válida para todo valor de  $K$  y  $\gamma$  tal y como demuestra el gráfico (5.5) del parámetro del factor de escala  $a_1$ .

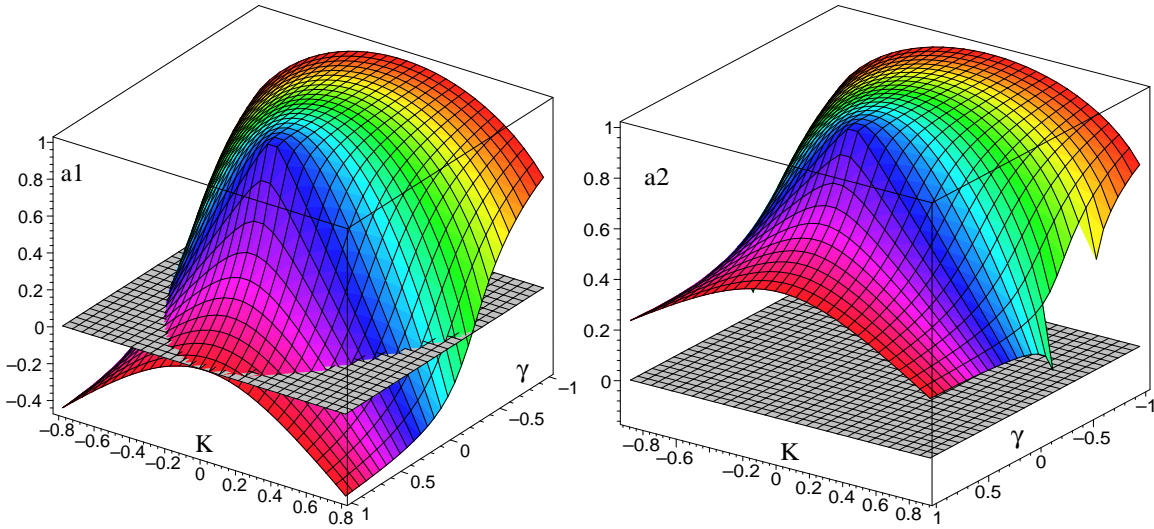


Figura 5.5: Gráfica de los parámetros de los factores de escala  $a_1$  (izquierda) y  $a_2$  (derecha) junto con el plano  $z = 0$ .

De igual forma vemos que la solución nunca es inflacionaria (ver Fig. 5.6), ya que el parámetro de deceleración es positivo para todo valor de  $\gamma$  y  $K$ . El gráfico del parámetro  $\tilde{n}$ , muestra que la constante de gravitación efectiva

$G_{\text{eff}}$  puede ser creciente, decreciente o incluso ser constante (ver Fig. 5.6). Al mismo tiempo, los gráficos de los parámetros de anisotropía (ver Fig. 5.7) nos muestran que la solución sólo puede ser considerada como isotropa si  $|K| < \frac{1}{2}$  y para determinados valores de  $\gamma$ .

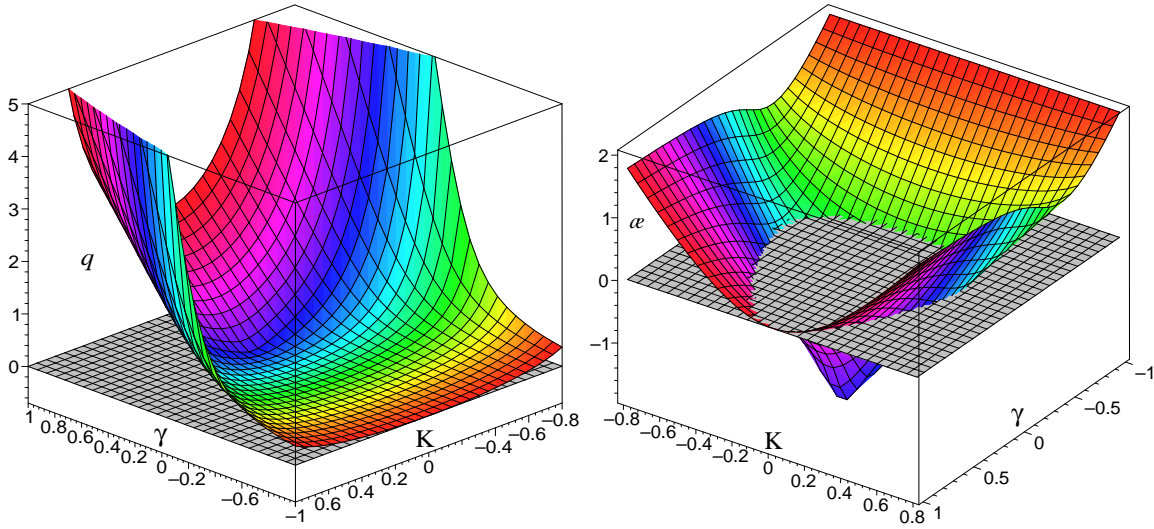


Figura 5.6: Gráficas de los parámetros  $q$  (izquierda) y  $\tilde{n}$  (derecha).

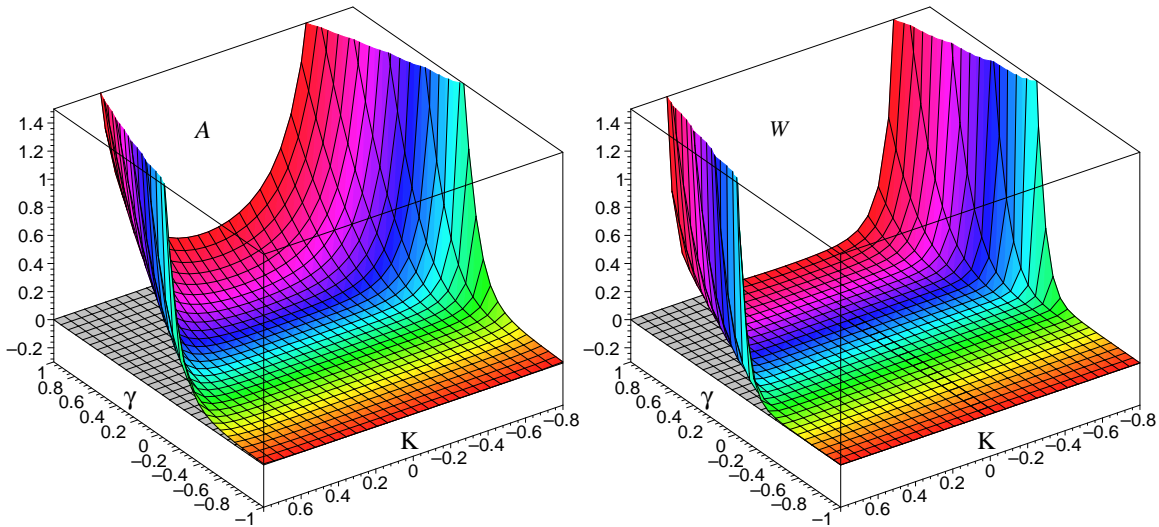


Figura 5.7: Gráficas de los parámetros de anisotropía.  $\mathcal{A}$  (izquierda)  $\mathcal{W}^2$  (derecha).

Estudiaremos un caso particular fijando un valor determinado del parámetro  $K$ ,  $K = 1/5$ . Para tal parámetro, vemos que  $a_1 = 0$ , si  $\gamma = 0,920$ , lo cual implica que la solución, en principio, sólo puede ser válida si  $\gamma < 0,920$ . En la Fig. (5.8) hemos dibujado los parámetros  $a_1$  (azul),  $a_2$  (rojo) y  $q$  (verde), de esta forma vemos que la solución no es inflacionaria y que  $a_1 \rightarrow a_2$  cuando  $\gamma < 0$ .

Con respecto a los parámetros de la densidad de energía  $\rho_0$ , y de la constante cosmológica  $\Lambda_0$ , vemos en la Fig. (5.9) que  $\rho_0$  sólo es positiva en dos pequeños intervalos que coincide en aquellos en los que  $\Lambda_0$  se anula. Estos intervalos para  $\rho_0$  son:  $I_1 = (-0,31671, -0,31179)$  e  $I_2 = (0,842693, 0,8491310)$ , mientras que los de  $\Lambda_0$  son:  $\hat{I}_1 = (-0,31426, -0,31425)$  e  $\hat{I}_2 = (0,8458354, 0,84589565)$ , viendo que  $\hat{I}_1 \subset I_1$  y  $\hat{I}_2 \subset I_2$ . Además, el parámetro  $\tilde{n}$  se anula en dos puntos:  $\gamma_1 = -0,31425$ , y  $\gamma_2 = 0,84589565$ , que coinciden con los extremos de los intervalos  $\hat{I}_1$  e  $\hat{I}_2$  respectivamente. En las figuras (5.9) hemos representado precisamente esta situación.

Por tanto, para el valor de  $K = 1/5$ , la solución sólo es válida en los intervalos  $I_1 \cup I_2$ , donde la densidad de energía es positiva. En dichos intervalos, la constante cosmológica es positiva, excepto en los subintervalos  $\hat{I}_1$  e  $\hat{I}_2$

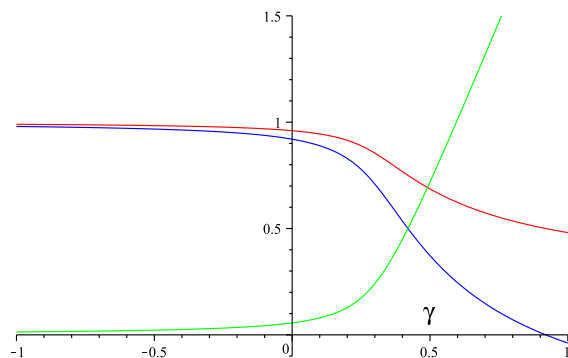


Figura 5.8: Gráficas de los parámetros  $a_1$  (azul),  $a_2$  (rojo) y  $q$  (verde).  $K = 1/5$ .

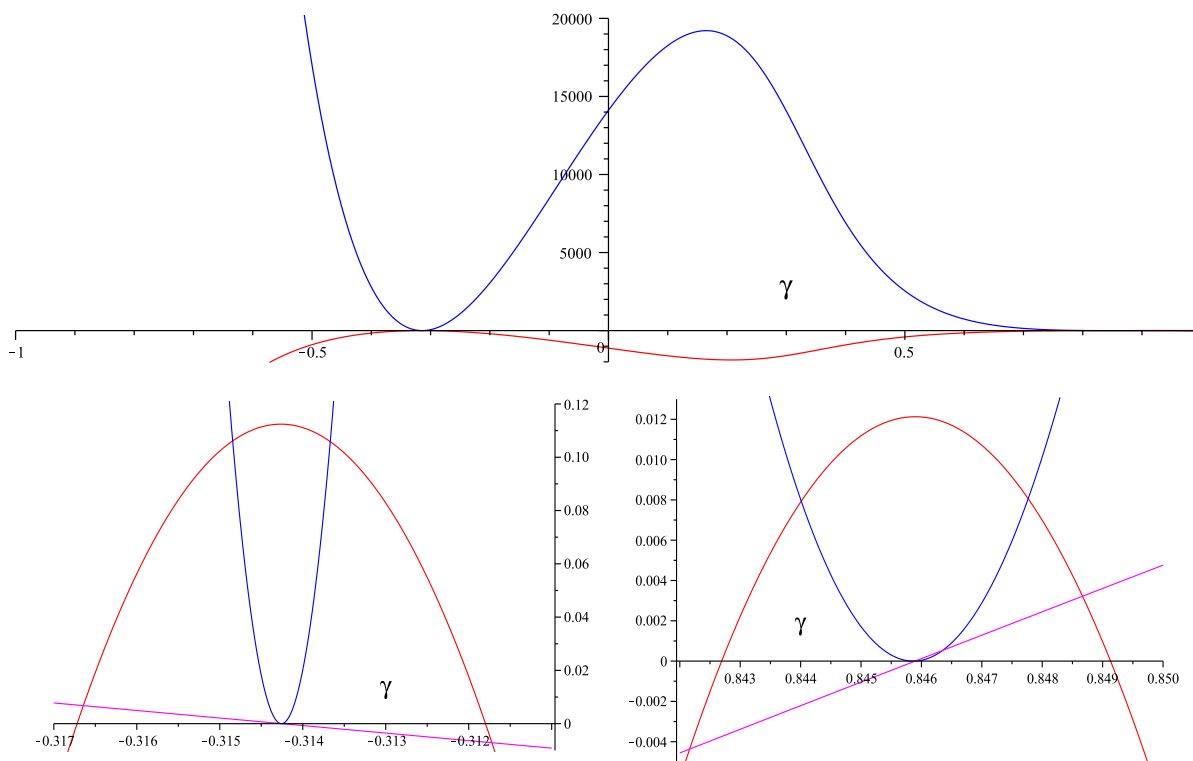


Figura 5.9: Figuras conjuntas.  $\rho_0$  color rojo.  $\Lambda_0$  color azul. Parámetro  $\tilde{n}$  magenta. Intervalo  $I_1$  (izquierda), e intervalo  $I_2$  (derecha).  $K = 1/5$ .

donde es negativa y nula en los extremos de dichos intervalos. Con respecto a la constante gravitatoria efectiva (5.9), vemos que en el primer intervalo  $I_1$ ,  $G_{eff}$  es decreciente si  $\gamma < \gamma_1$ , constante en  $\gamma_1$  y creciente si  $\gamma > \gamma_1$ , para todo  $\gamma \in I_1$ . En el segundo intervalo  $G_{eff}$  es creciente si  $\gamma < \gamma_2$ , constante en  $\gamma_2$  y decreciente si  $\gamma > \gamma_2$ , para todo  $\gamma \in I_2$ .

### 5.4.2. Modelo con potencial

En este caso las ecuaciones de campo son

$$\frac{a' b'}{a b} + \frac{a' d'}{a d} + \frac{d' b'}{d b} - \frac{K^2 a^2}{4 b^2 d^2} = 8\pi \frac{\rho}{\phi} + \frac{\omega \phi'^2}{2 \phi^2} - \left( \frac{a'}{a} + \frac{b'}{b} + \frac{d'}{d} \right) \frac{\phi'}{\phi} + \frac{U}{\phi}, \quad (5.61)$$

$$\frac{b''}{b} + \frac{d''}{d} + \frac{d' b'}{d b} - \frac{3K^2 a^2}{4 b^2 d^2} = -8\pi \frac{p}{\phi} - \frac{\phi''}{\phi} - \frac{\omega \phi'^2}{2 \phi^2} - \left( \frac{b'}{b} + \frac{d'}{d} \right) \frac{\phi'}{\phi} + \frac{U}{\phi}, \quad (5.62)$$

$$\frac{K^2 a^2}{b^2 d^2} - \frac{b''}{b} - \frac{d' b'}{d b} + \frac{a''}{a} + \frac{a' d'}{a d} = \left( \frac{b'}{b} - \frac{a'}{a} \right) \frac{\phi'}{\phi}, \quad (5.63)$$

$$\frac{d''}{d} + \frac{a''}{a} + \frac{a' d'}{a d} + \frac{K^2 a^2}{4 b^2 d^2} = -8\pi \frac{p}{\phi} - \frac{\phi''}{\phi} - \frac{\omega \phi'^2}{2 \phi^2} - \left( \frac{a'}{a} + \frac{d'}{d} \right) \frac{\phi'}{\phi} + \frac{U}{\phi}, \quad (5.64)$$

$$\frac{b''}{b} + \frac{a''}{a} + \frac{a' b'}{a b} + \frac{K^2 a^2}{4 b^2 d^2} = -8\pi \frac{p}{\phi} - \frac{\phi''}{\phi} - \frac{\omega \phi'^2}{2 \phi^2} - \left( \frac{a'}{a} + \frac{b'}{b} \right) \frac{\phi'}{\phi} + \frac{U}{\phi}. \quad (5.65)$$

La solución encontrada es la siguiente

$$\begin{aligned} a_2 = a_3 &= \frac{1}{2} (a_1 + 1), & K^2 &= \frac{1}{3} (a_1 + 1) (3a_1 - 1), \\ U_0 &= \frac{3(5a_1 - 1)(2a_1 - 1)(3a_1 + 1)^2 (a_1 - 1)^2 - 4\omega(5a_1 - 1)(3a_1 + 1)^2 (2a_1 - 1)^2}{12(a_1 - 1)((a_1 + 1)(3a_1 - 2))^2}, \\ \phi_0 &= \frac{3(a_1 - 1)}{(a_1 + 1)(3a_1 - 2)}, & \gamma &= \frac{(3a_1 + 5)(2a_1 - 1)}{3(2a_1 + 1)(a_1 - 1)}, \\ \rho_0 &= \frac{-(1 + 2a_1) \left( (3a_1 + 1)(-13a_1 - 35a_1^2 + 57a_1^3 + 7) + 4\omega(3a_1 + 1)^2 (2a_1 - 1)^2 \right)}{32\pi((a_1 + 1)(3a_1 - 2))^2}, \end{aligned} \quad (5.66)$$

de la expresión de  $\gamma$  despejamos  $a_1$

$$a_1 = \frac{7 + 3\gamma - \sqrt{81\gamma^2 - 150\gamma + 169}}{12(\gamma - 1)}, \quad (5.67)$$

entonces

$$\begin{aligned} \tilde{n} &= \frac{-13 + 2\gamma - 9\gamma^2 + (1 + \gamma)\sqrt{81\gamma^2 - 150\gamma + 169}}{6(\gamma - 1)}, \\ q &= -\frac{1}{42\gamma - 42} \left( 3\gamma - 5\sqrt{81\gamma^2 - 150\gamma + 169} + 47 \right). \end{aligned} \quad (5.68)$$

Por tanto, la solución que encontramos se comporta de la siguiente manera. La solución sólo es válida para un entorno pequeño de  $\gamma_c = 0$ , ya que sólo en este entorno,  $\rho_0 > 0$ . Fijando el valor del parámetro de Brans-Dicke [241],  $\omega = 4 \cdot 10^4$ , vemos que la solución es válida  $\forall \gamma \in (-0,003643, 0,003623) = \mathcal{E}(\gamma_c)$ , donde además  $\phi_0 > 0$ . En dicho intervalo la constante cosmológica se comporta de la siguiente forma:  $U_0 = 0$  sii  $\gamma_1 = -0,0000101$ , y  $\gamma_c = 0$ , de tal forma que  $U_0 \leq 0, \forall \gamma \in (\gamma_1, \gamma_c)$ , siendo positiva en el resto. El parámetro  $\tilde{n}$  se anula en  $\gamma_c = 0$  siendo  $\tilde{n} > 0$  si  $\gamma < 0$  y  $\tilde{n} < 0$  si  $\gamma > 0$ , por lo tanto la constante de gravitación es decreciente si  $\gamma < 0$ , constante si  $\gamma_c = 0$  y crece si  $\gamma > 0, \forall \gamma \in \mathcal{E}(\gamma_c)$ . En la figura adjunta (5.10) mostramos las gráficas de los parámetros  $\rho_0$  (rojo),  $U_0$  (azul) y  $\tilde{n}$  (magenta) en el intervalo  $\mathcal{E}(\gamma_c)$ .

La solución obtenida no es inflacionaria, ya que el parámetro de deceleración es positivo en todo el intervalo. Por último, podemos considerar que la solución es isótropa, ya que los dos parámetros de anisotropía están muy próximos a cero,  $\mathcal{A} \ll 0,016, \mathcal{W}^2 \ll 0,0001$ .

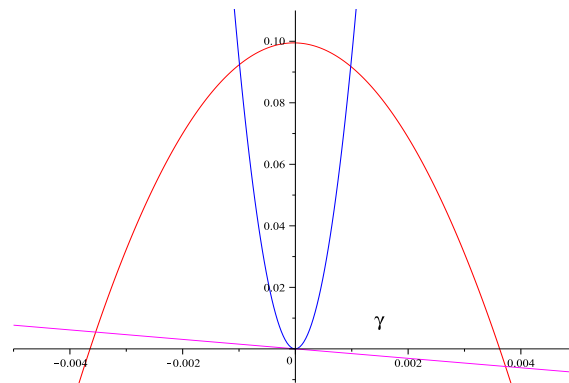


Figura 5.10: Gráficas de los parámetros  $\rho_0$  (rojo),  $U_0$  (azul) y  $\tilde{n}$  (magenta) en el intervalo  $\mathcal{E}(\gamma_c)$ .

# Capítulo 6

## Modelos tipo Bianchi VI<sub>h</sub>&III

### Índice del capítulo

---

<b>6.1. Métrica e ingredientes geométricos</b> . . . . .	<b>99</b>
<b>6.2. Soluciones clásicas</b> . . . . .	<b>102</b>
6.2.1. Soluciones de vacío . . . . .	102
6.2.2. Soluciones para un fluido perfecto . . . . .	103
6.2.3. Fluido perfecto con constantes variables . . . . .	107
<b>6.3. Modelos escalares</b> . . . . .	<b>113</b>
6.3.1. Modelo escalar . . . . .	113
6.3.2. Modelo escalar con G variable . . . . .	114
6.3.3. Modelo escalar sin interacción con un campo de materia . . . . .	115
6.3.4. Modelo escalar sin interacción con un campo de materia y G variable . . . . .	119
6.3.5. Modelo escalar interactuando con un campo de materia . . . . .	120
6.3.6. Modelo escalar interactuando con un campo de materia y G variable . . . . .	123
<b>6.4. Modelos tenso-escalares</b> . . . . .	<b>124</b>
6.4.1. Modelo con constante cosmológica . . . . .	124
6.4.2. Modelo con potencial . . . . .	127

---

### 6.1. Métrica e ingredientes geométricos

Un modelo tipo Bianchi VI es un espacio-tiempo espacialmente homogéneo que admite un grupo de isometrías  $G_3$ , que actúa sobre las hipersuperficies espaciales generadas por los siguiente campos de Killing (KVs),

$$\xi_1 = \partial_x, \quad \xi_2 = \partial_y, \quad \xi_3 = mx\partial_x - ny\partial_y + \partial_z, \quad (6.1)$$

y, por tanto, las constantes de estructura no nulas son:  $C_{13}^1 = m, C_{23}^2 = -n$ . En un sistema de coordenadas la métrica se escribe de la siguiente manera:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)e^{-2mz}dx^2 + b^2(t)e^{2nz}dy^2 + d^2(t)dz^2, \quad (6.2)$$

donde las funciones  $a(t), b(t), d(t)$ , son sólo funciones del tiempo universal  $t$ . Como puede observarse, la métrica (6.2) puede reducirse a los siguientes casos:

1. Si  $m = -n$ , entonces la métrica describe un modelo Bianchi V (la veremos con más detalle en el siguiente capítulo),

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)e^{-2mz}dx^2 + b^2(t)e^{-2mz}dy^2 + d^2(t)dz^2, \quad (6.3)$$

con

$$\xi_1 = \partial_x, \quad \xi_2 = \partial_y, \quad \xi_3 = mx\partial_x + my\partial_y + \partial_z, \quad (6.4)$$

y por tanto  $C_{13}^1 = m = C_{23}^2$ .

2. Si  $n = 0$ , entonces la métrica describe un Bianchi tipo III, siendo su métrica

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)e^{-2mz}dx^2 + b^2(t)dy^2 + d^2(t)dz^2, \quad (6.5)$$

con los siguientes campos de Killing (KVF)

$$\xi_1 = \partial_x, \quad \xi_2 = \partial_y, \quad \xi_3 = mx\partial_x + \partial_z, \quad (6.6)$$

y, por tanto, la única constante de estructura no nula es:  $C_{13}^1 = m$ .

3. Por último, si  $m = n = 0$ , entonces la métrica describe un modelo Bianchi tipo I, ya visto en el capítulo 4, y en consecuencia la métrica es

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)dx^2 + b^2(t)dy^2 + d^2(t)dz^2, \quad (6.7)$$

con los campos de Killing

$$\xi_1 = \partial_x, \quad \xi_2 = \partial_y, \quad \xi_3 = \partial_z, \quad (6.8)$$

siendo  $C_{ij}^k = 0$ , tal y como ya sabemos.

Para la métrica (6.2) encontramos que el campo homotético viene definido por

$$\mathcal{H} = t\partial_t + \left(1 - t\frac{a'}{a}\right)x\partial_x + \left(1 - t\frac{b'}{b}\right)y\partial_y + \left(1 - t\frac{d'}{d}\right)z\partial_z, \quad (6.9)$$

con las siguientes condiciones sobre los factores de escala

$$a(t) = a_0t^{a_1}, \quad b(t) = b_0t^{a_2}, \quad d(t) = d_0t, \quad (6.10)$$

donde  $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$  y podemos fijar sin pérdida de generalidad  $d_0 = 1$ ; de esta forma el campo homotético se puede reescribir como sigue:

$$\mathcal{H} = t\partial_t + (1 - a_1)x\partial_x + (1 - a_2)y\partial_y, \quad (6.11)$$

de tal forma que la métrica (6.2) se reduce a la siguiente:

$$ds^2 = -dt^2 + t^{2a_1}e^{-2mz}dx^2 + t^{2a_2}e^{2nz}dy^2 + t^2dz^2. \quad (6.12)$$

En este capítulo estudiaremos los siguientes casos

1. Modelo Bianchi tipo III (BIII). La métrica del modelo viene definida por cualquiera de las siguientes métricas

$$ds^2 = -dt^2 + t^{2a_1}e^{-2mz}dx^2 + t^2dy^2 + t^2dz^2, \quad (6.13)$$

$$ds^2 = -dt^2 + t^2dx^2 + t^{2a_2}e^{2nz}dy^2 + t^2dz^2, \quad (6.14)$$

es decir, o bien  $m = 0$  y  $a_2 = a_3 = 1$ , o  $n = 0$  y  $a_1 = a_3 = 1$ . Bajo estas condiciones obtenemos

$$q = -\frac{a_1 - 1}{a_1 + 2}, \quad \mathcal{A} = \frac{2(a_2 - 1)^2}{3(2 + a_2)^2},$$

$$\mathcal{W}^2 = \frac{(m - 1 + a_2)^2(m + 1 - a_2)^2}{36(2 + a_2)^4}, \quad p^2 = \frac{(m - 1 + a_2)^2(m + 1 - a_2)^2}{3\left((a_2^2 + 1)^2 + 2a_2(1 - m^2) + m^2(m^2 - 2)\right)}. \quad (6.15)$$

2. Modelo Bianchi tipo BVI<sub>0</sub>. En este caso, la métrica viene definida por

$$ds^2 = -dt^2 + t^{2a_1}e^{-2mz}dx^2 + t^{2a_1}e^{2mz}dy^2 + t^2dz^2, \quad (6.16)$$

con  $m = n$  y  $a_1 = a_2$  y  $a_3 = 1$ . Con estas restricciones las magnitudes cinemáticas del modelo son

$$q = -2\frac{a_1 - 1}{2a_1 + 1}, \quad \mathcal{A} = \frac{2(a_2 - 1)^2}{3(1 + 2a_2)^2},$$

$$\mathcal{W}^2 = \frac{m^2\left(3(a_1 - 1)^2 + m^2\right)}{9(1 + 2a_1)^4}, \quad p^2 = -\frac{4m^2(3(a_1 - 1)^2 - m^2)}{3(3a_1^4 - 2a_1^3 + 2a_1^2 + m^2(-2a_1 + m^2))}. \quad (6.17)$$

También se puede seguir otro camino para definir una métrica del tipo  $BVI_0$ ; se trata de la sugerida por MacCallum et al [113], donde, considerando los siguientes campos de Killing

$$\zeta_1 = \partial_x + mz\partial_y + my\partial_z, \quad \zeta_2 = \partial_y, \quad \zeta_3 = \partial_z, \quad (6.18)$$

el álgebra que generan es:

$$[\zeta_1, \zeta_2] = -m\zeta_3, \quad [\zeta_2, \zeta_3] = 0, \quad [\zeta_3, \zeta_1] = m\zeta_2, \quad (6.19)$$

obteniéndose la siguiente métrica

$$ds^2 = -dt^2 + a^2 dx^2 + \left( b^2 \cosh^2 mx + d^2 \sinh^2 mx \right) dy^2 - 2 \left( b^2 + d^2 \right) \cosh mx \sinh mx dy dz + \left( b^2 \sinh^2 mx + d^2 \cosh^2 mx \right) dz^2. \quad (6.20)$$

Pero tal y como hemos demostrado en [286], con esta métrica, se obtienen unas ecuaciones de campo con las que resulta difícil trabajar, dependiendo de funciones trigonométricas, motivo por el que hemos elegido el primer camino.

3. Por último, el modelo tipo  $BVI_h$  está definido por una métrica del tipo

$$ds^2 = -dt^2 + t^{2a_1} e^{-2mz} dx^2 + t^{2a_2} e^{2nz} dy^2 + t^2 dz^2, \quad (6.21)$$

donde  $m \neq n$ ,  $a_1 \neq a_2$  y  $a_3 = 1$ . Bajo estas condiciones los ingredientes geométricos del modelo son

$$q = -\frac{(a_1 + a_2 - 2)}{a_1 + a_2 + 1}, \quad \mathcal{A} = \frac{2(a_1^2 + a_2^2 + 1 - a_1 a_2 - a_1 - a_2)}{3(a_1 + a_2 + 1)^2}, \quad (6.22)$$

y

$$\begin{aligned} \mathcal{W}^2 = & \frac{1}{36(a_1 + a_2 + 1)^4} \left( -6a_1 mn - 6ma_2 n - a_1^2 mn + a_2 a_1 m^2 - a_2^2 mn + a_2 a_1 n^2 + m^4 + n^4 \right. \\ & - 3a_1^3 + a_1^4 + 4n^2 a_2^2 - 9m^2 a_1 - 6a_2 a_1 - 9n^2 a_2 - 3a_2^3 + a_2^4 + 6mn + 3m^2 a_2 + 3n^2 \\ & + 4m^2 a_1^2 + mn^3 + 3a_1 n^2 + m^3 n + 3m^2 + 8a_2 a_1 mn \\ & \left. - 2m^2 a_2^2 - 2a_1^2 n^2 + 3a_1 a_2^2 + 3a_1^2 a_2 - a_1^3 a_2 - a_2^3 a_1 + 3a_1^2 + 3a_2^2 \right), \quad (6.23) \end{aligned}$$

$$p^2 = \frac{2(a_1 - a_2 + m + n)(a_1 - a_2 - m - n)(a_1^2 - 3a_1 + a_2 a_1 - n^2 - m^2 + 3 + mn - 3a_2 + a_2^2)}{3K}, \quad (6.24)$$

donde

$$\begin{aligned} K = & -2a_1 mn - 2ma_2 n + a_1^2 mn - a_2 a_1 m^2 + a_2^2 mn - a_2 a_1 n^2 + 2a_2^2 a_1^2 + m^4 + n^4 \\ & + 2m^2 n^2 - a_1^3 + a_1^4 - 2n^2 a_2^2 + m^2 a_1 + 2a_2 a_1 + n^2 a_2 - a_2^3 + a_2^4 + 2mn \\ & - m^2 a_2 - n^2 - 2m^2 a_1^2 - mn^3 - a_1 n^2 - m^3 n - m^2 + 4a_2 a_1 mn \\ & - a_1 a_2^2 - a_1^2 a_2 + a_1^3 a_2 + a_2^3 a_1 + a_1^2 + a_2^2. \end{aligned}$$

Al igual que el caso  $BVI_0$ , existe otra alternativa, sugerida por MacCallum et al [113], que no hemos seguido en este caso.

Antes de empezar a calcular los distintos modelos, quisiéramos comentar el hecho bien conocido de que existe otra solución autosimilar de los modelos tipo  $BVI$ , es la denominada solución excepcional tipo  $BVI_{-1/9}$ , cuya métrica viene descrita por la siguiente ecuación (ver [150] pág. 192)

$$ds^2 = -dt^2 + (1 + b^2) t^2 dx^2 + t^{\frac{2}{5}} \exp\left(-\frac{2\sqrt{6}}{5} rx\right) dy^2 + 2bt^{\frac{6}{5}} \exp\left(-\frac{\sqrt{6}}{5} rx\right) dx dy + t^{\frac{6}{5}} \exp\left(\frac{4\sqrt{6}}{5} rx\right) dz^2, \quad (6.25)$$

siendo,  $b^2 = \frac{9}{4}r^2 - 1$ , y el campo homotético

$$\mathcal{H} = t\partial_t + \frac{4}{5}y\partial_y + \frac{2}{5}z\partial_z. \quad (6.26)$$

Esta solución fue encontrada por Wainwright en 1984 (ver [147] pág. 666 Ec. (20)) para un fluido perfecto de tal forma que la solución sólo es válida para la ecuación de estado  $\gamma = \frac{1}{9}$ , y por lo tanto

$$\rho = \frac{27}{25} (1 - r^2) t^{-2}, \quad \gamma = \frac{1}{9}, \quad \frac{2}{3} < r < 1.$$

En el caso límite en el que el parámetro  $r = 1$ , entonces esta solución colapsa a una solución de vacío encontrada por Collinson y French en 1967, con  $r = 1$  y  $b^2 = \frac{5}{4}$  [287].

## 6.2. Soluciones clásicas

### 6.2.1. Soluciones de vacío

Encontramos las siguientes soluciones.

1. Soluciones tipo BIII. Encontramos las siguientes soluciones

$$\begin{aligned} a_2 = n = 0, & \quad a_1 = m = 1, \\ a_2 = n = 1, & \quad a_1 = m = 0, \quad y \\ a_2 = n = 0, & \quad a_1 = 1, \quad m = -1, \end{aligned} \quad (6.27)$$

de tal forma que la métrica se reduce a la siguiente (ver Hsu et al. [153] sección 2.6.3, ver también [150] pág. 193, Ec. (9,7))

$$ds^2 = -dt^2 + t^2 e^{2z} dx^2 + dy^2 + t^2 dz^2. \quad (6.28)$$

y, por tanto, admite los KVF dados por la Ec. (6.6) con  $m = -1$ . Todos los invariantes de curvatura son nulos mostrando así un comportamiento patológico y llegando a la conclusión de que este tipo de soluciones carecen de interés físico, ya que dicha métrica representa un espacio-tiempo homogéneo y plano.

2. Si  $n = m$  entonces la solución es

$$a_2 = a_1 = n = m = 0, \quad (6.29)$$

obteniendo una métrica del tipo

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + t^2 dz^2,$$

tipo Taub, es decir, la forma de Taub para un espacio-tiempo espacialmente homogéneo y plano. Obviamente no describe un modelo tipo BVI<sub>0</sub>.

3. Soluciones tipo BVI<sub>h</sub>, con

$$a_2 = a_2, \quad n = -a_2, \quad a_1 = \frac{1}{2} \left( 1 + \sqrt{-2a_2^2 + 4a_2 + 1} \right) = m, \quad (6.30)$$

donde, obviamente, la solución sólo tiene sentido si,  $a_2 \in \left( 1 - \frac{1}{2}\sqrt{6}, 1 + \frac{1}{2}\sqrt{6} \right)$ . Las soluciones negativas pueden tener sentido en el estudio de singularidades, pero aquí no las consideraremos. Por consiguiente, sólo consideramos el rango positivo donde  $a_2 \in (0, 2,2247)$ , y de esta forma  $a_1 \in (0, 1,35)$ .

De manera equivalente, otra solución de la siguiente forma

$$a_2 = a_2, \quad n = a_2, \quad a_1 = \frac{1}{2} \left( 1 + \sqrt{-2a_2^2 + 4a_2 + 1} \right) = -m,$$

lo cual implica, que la métrica es

$$ds^2 = -dt^2 + t^{2a_1} e^{2a_1 z} dx^2 + t^{2a_2} e^{2a_2 z} dy^2 + t^2 dz^2, \quad (6.31)$$

admitiendo los siguientes campos de killing

$$\xi_1 = \partial_x, \quad \xi_2 = \partial_y, \quad \xi_3 = -a_1 x \partial_x - a_2 \partial_y + \partial_z, \quad (6.32)$$

y, por tanto,  $C_{13}^1 = -a_1, C_{23}^2 = -a_2$ . Esta solución es nueva. Los invariantes de curvatura se comportan de la siguiente forma:  $(I_i)_{i=0}^2$ , son nulos. Las componentes no nulas del tensor de Weyl son:  $C_{txtx} = -(1/2) \mathcal{K} e^{2a_1 z} t^{2(a_1-1)}$ ,  $C_{txxz} = (1/2) \mathcal{K} e^{2a_1 z} t^{2a_1-1}$ ,  $C_{tyty} = (1/2) \mathcal{K} e^{2a_2 z} t^{2(a_2-1)}$ ,  $C_{tyyz} = -(1/2) \mathcal{K} e^{2a_2 z} t^{2a_2-1}$ ,  $C_{xzxz} = -(1/2) \mathcal{K} e^{2a_1 z} t^{2a_1}$ , y  $C_{yzyz} = (1/2) \mathcal{K} e^{2a_2 z} t^{2a_2}$ , donde  $\mathcal{K} = (a_1 - 1 + a_2)(a_1 - a_2)$ . El invariante de Weyl también es nulo,  $I_3 = 0$ , pero, tanto el invariante de la parte eléctrica como el de la magnética no lo son,  $I_4 = (1/2) \mathcal{K}^2 t^{-4}$ , mientras que:  $I_5 = (1/2) \mathcal{K}^2 t^{-4}$ . El parámetro de anisotropía es,  $\mathcal{W}^2 = \mathcal{K}^2 / (6(a_1 + a_2 + 1)^4) = \text{const.}$  y, por último, la entropía gravitatoria es infinita,  $P^2 = \infty$ , tal y como era de esperar, ya que  $I_2 = 0$ . Existe otra solución de este modelo  $\text{BVI}_h$  encontrada por Lifshitz y Khalatnikov en 1963 [288].

## 6.2.2. Soluciones para un fluido perfecto

Recordamos que el tensor energía-momento está definido por:  $T_{ij} = (\rho + p)u_i u_j + p g_{ij}$ , con  $p = \gamma \rho$ ,  $\gamma \in \mathbb{R}$ , generalmente se suele considerar  $\gamma \in (-1, 1]$ . Las ecuaciones de campo para la métrica (6.2) (con  $\Lambda = 0$ ) son las siguientes

$$\frac{a'}{a} \frac{b'}{b} + \frac{a'}{a} \frac{d'}{d} + \frac{d'}{d} \frac{b'}{b} + \frac{K}{d^2} = 8\pi G \rho, \quad (6.33)$$

$$m \left( \frac{a'}{a} - \frac{d'}{d} \right) + n \left( \frac{d'}{d} - \frac{b'}{b} \right) = 0, \quad (6.34)$$

$$\frac{b''}{b} + \frac{d''}{d} + \frac{d'}{d} \frac{b'}{b} - \frac{n^2}{d^2} = -8\pi G \gamma \rho, \quad (6.35)$$

$$\frac{d''}{d} + \frac{a''}{a} + \frac{a'}{a} \frac{d'}{d} - \frac{m^2}{d^2} = -8\pi G \gamma \rho, \quad (6.36)$$

$$\frac{b''}{b} + \frac{a''}{a} + \frac{a'}{a} \frac{b'}{b} + \frac{mn}{d^2} = -8\pi G \gamma \rho, \quad (6.37)$$

$$\rho' + \rho (1 + \gamma) \left( \frac{a'}{a} + \frac{b'}{b} + \frac{d'}{d} \right) = 0, \quad (6.38)$$

donde  $K = (mn - m^2 - n^2)$ . En el capítulo 3 demostrábamos que la solución es de la forma:  $\rho = \rho_0 t^{-\alpha}$ , con  $(1 + \gamma)(a_1 + a_2 + 1) = (1 + \gamma)h = \alpha$ , y donde, en este caso,  $\rho_0 = \frac{A}{8\pi G}$ , con  $A = a_1 a_2 + a_1 + a_2 + K$ . Hemos obtenido las siguientes soluciones.

### Bianchi tipo III

Encontramos que

$$a_1 = 1, \quad a_2 = -\frac{2\gamma}{\gamma + 1}, \quad m = \frac{\sqrt{-(3\gamma + 1)(\gamma - 1)}}{\gamma + 1}, \quad n = 0, \quad (6.39)$$

y, por tanto,

$$q = \frac{1}{2} (3\gamma + 1) > 0, \quad \mathcal{A} = \frac{2(a_2 - 1)^2}{3(2 + a_2)^2} = \frac{1}{6} (3\gamma + 1)^2 = \text{const.}, \in \left( 0, \frac{1}{6} \right). \quad (6.40)$$

De esta forma vemos que la solución no es inflacionaria y podemos considerarla como isótropa, con respecto al primer criterio de isotropía  $\mathcal{A}$ . De la expresión de  $m$ , observamos que la solución sólo tiene sentido si  $\gamma \in \left(-\frac{1}{3}, 1\right)$ , y de esta forma:  $a_1 = 1, a_2 \in (0, 1)$ , sii  $\gamma < 0, m \in (0, 1)$ , y  $(1 + \gamma)(2 + a_2) = \alpha = 2$ , por tanto,  $\rho = \rho_0 t^{-2}$ , de esta forma la métrica se reduce a:

$$ds^2 = -dt^2 + t^2 e^{-2mz} dx^2 + t^{2a_2} dy^2 + t^2 dz^2, \quad (6.41)$$

que representa una métrica tipo BIII. Resaltamos que Ec. (6.41) admite los KVF dados por la Ec. (6.6), siendo la solución únicamente válida si  $\gamma < 0, \gamma \in \left(-\frac{1}{3}, 0\right)$ .

Encontramos que los invariantes de curvatura son,  $(I_i)_{i=0}^2$ :  $I_0 = 2(a_2^2 + a_2 - m^2 + 1)t^{-2}$ ,  $I_1 = 4(a_2^4 - 2a_2^3 + 3a_2^2 + m^4 - 2m^2 + 1)t^{-4}$ , e  $I_2 = 2(a_2^4 + 2a_2^3 + 2a_2 + m^4 - 2m^2 + 1 - 2m^2a_2)t^{-4}$ ; de esta forma, la solución es singular. Las componentes no nulas del tensor de Weyl son las siguientes:  $C_{txtx} = -(1/6)\mathcal{K}e^{-2mz}$ ,  $C_{tyty} = (1/3)\mathcal{K}t^{2(a_2-1)}$ ,  $C_{tztz} = -(1/6)\mathcal{K}$ ,  $C_{xyxy} = (1/6)\mathcal{K}e^{-2mz}t^{2a_2}$ ,  $C_{xzxz} = -(1/3)\mathcal{K}e^{-2mz}t^2$ , y  $C_{yzyz} = (1/6)\mathcal{K}t^{2a_2}$ , donde la constante  $\mathcal{K}$  es,  $\mathcal{K} = (m-1+a_2)(m+1-a_2)$ . El invariante de Weyl es,  $I_3 = (4/3)\mathcal{K}^2t^{-4}$ , mientras que el invariante de la parte eléctrica adquiere la siguiente forma:  $I_4 = (1/6)\mathcal{K}^2t^{-4}$ . El invariante de la parte magnética es nulo. El parámetro de anisotropía resulta

$$\mathcal{W}^2 = \frac{(a_2 - 1 + m)^2 (a_2 - 1 - m)^2}{36(2 + a_2)^4} = \frac{\gamma^2 (3\gamma + 1)^2}{36} = \text{const.} \in (0, 0,0002), \quad (6.42)$$

por lo que podemos afirmar, otra vez, que la solución isotropiza. Por último vemos que la entropía gravitatoria se comporta como sigue:

$$p^2 = \frac{2(a_2 - 1 + m)^2 (a_2 - 1 - m)^2}{3 \left( (a_2^2 + 1)^2 + 2a_2(1 - m^2) + m^2(m^2 - 2) \right)} = \frac{4(3\gamma + 1)^2}{3(3\gamma^2 + 1)} = \text{const.} \in \left(0, \frac{4}{3}\right), \quad (6.43)$$

no mostrando, en este caso, ningún comportamiento patológico.

### Bianchi tipo VI<sub>0</sub>

En este caso, hemos obtenido la solución bien conocida de Collins [285] (ver también, Hsu et al [153] y [150]) aunque una primera solución fue encontrada por Ellis y MacCallum en 1969, para el caso  $\gamma = 0$ . La solución encontrada por Collins es la siguiente

$$a_1 = a_2 = \frac{1 - \gamma}{2(\gamma + 1)}, \quad m = n = \frac{\sqrt{-(3\gamma + 1)(\gamma - 1)}}{2(\gamma + 1)} \in \left(0, \frac{1}{2}\right), \quad (6.44)$$

y, por lo tanto,

$$q = \frac{3}{h} - 1 = \frac{1}{2}(3\gamma + 1) > 0, \quad \forall \gamma \in \left(-\frac{1}{3}, 1\right), \quad (6.45)$$

por lo que la solución no es inflacionaria. La métrica toma la siguiente forma,

$$ds^2 = -dt^2 + t^{2a_1}e^{-2mz}dx^2 + t^{2a_1}e^{2mz}dy^2 + t^2dz^2, \quad (6.46)$$

encontrando que,  $a_2 \in (0, 1)$ ,  $m \in (0, \frac{1}{2})$  y  $(1 + \gamma)(1 + 2a_2) = \alpha = 2$ , de forma que  $\rho = \rho_0 t^{-2}$ . Bajo estos resultados, encontramos que el parámetro de anisotropía se comporta de la siguiente manera,

$$\mathcal{A} = \frac{2(a_2 - 1)^2}{3(1 + 2a_2)^2} = \frac{1}{16}(3\gamma + 1)^2 = \text{const.} \in (0, 1), \quad \forall \gamma \in \left(-\frac{1}{3}, 1\right), \quad (6.47)$$

observándose que  $\mathcal{A} \rightarrow 0$ , cuando  $\gamma \rightarrow -1/3$ , por lo que la solución isotropiza para dicho valor de la ecuación de estado y por el contrario el parámetro  $\mathcal{A}$  es creciente tendiendo a 1 cuando  $\gamma \rightarrow 1$ . Con respecto a los parámetros de curvatura vemos que  $(I_i)_{i=0}^2$ , resultan:  $I_0 = 2(3a_1^2 - m^2)t^{-2}$ ,  $I_1 = 4(3a_1^4 - 4a_1^3 + 4a_1^2 - 2a_1^2m^2 + 3m^4 + 4m^2a_1 - 4m^2)t^{-4}$ , e  $I_2 = 2(3a_1^4 - 2a_1^3 + 2a_1^2 + m^4 - 2m^2a_1)t^{-4}$ . Por tanto, la solución es singular. Las componentes no nulas del tensor de Weyl son:  $C_{txtx} = (1/3)m^2 t^{2(a_1-1)}e^{-2mz}$ ,  $C_{txxz} = m(1 - a_1)t^{2a_1-1}e^{-2mz}$ ,  $C_{tyty} = (1/3)m^2 t^{2(a_1-1)}e^{2mz}$ ,  $C_{tyyz} = m(a_1 - 1)t^{2a_1-1}e^{2mz}$ ,  $C_{tztz} = -(2/3)m^2$ ,  $C_{xyxy} = (2/3)m^2 t^{2(2a_1-1)}$ ,  $C_{xzxz} = -(1/3)t^{2a_1}e^{-2mz}$ , y  $C_{yzyz} = (1/3)t^{2a_1}e^{2mz}$ . El invariante del tensor de Weyl es:  $I_3 = (16/3)(-3a_1^2 + 6a_1 - 3 + m^2)t^{-4}$ , y en consecuencia, el invariante de la parte eléctrica es:  $I_4 = (2/3)m^4 t^{-4}$ , mientras que el de la magnética,  $I_5$ , se comporta como sigue:  $I_5 = 2m^2(a_1 - 1)^2 t^{-4}$ . El parámetro de anisotropía definido a partir del tensor de Weyl es:

$$\mathcal{W}^2 = \frac{m^2(3(a_1 - 1)^2 + m^2)}{9(1 + 2a_1)^4} = -\frac{1}{576}(2\gamma + 1)(\gamma - 1)(3\gamma + 1)^2 = \text{const.} \in (0, 0,12), \quad (6.48)$$

de tal forma que  $\mathcal{W}^2$  tiende a cero en los extremos del intervalo,  $\gamma \in \left(-\frac{1}{3}, 1\right)$ , tomando un valor máximo de 0,12, por lo que podemos afirmar que la solución es isótropa. Por último, la entropía gravitatoria es:

$$P^2 = -\frac{4m^2(3(a_1 - 1)^2 - m^2)}{3(3a_1^4 - 2a_1^3 + 2a_1^2 + m^2(-2a_1 + m^2))} = \frac{2(5\gamma + 1)(3\gamma + 1)^2}{3(\gamma - 1)(3\gamma^2 + 1)} = \text{const.} \in (-\infty, 0,01), \quad (6.49)$$

donde  $P^2 = 0$  si  $\gamma = -1/5, -1/3$ , de forma que  $P^2 < 0 \forall \gamma \in \left(-\frac{1}{5}, 1\right)$  y tendiendo a  $-\infty$  a medida que  $\gamma \rightarrow 1$ .

Tal y como ha sido puesto de manifiesto [150] esta solución es un atractor futuro para otras soluciones de este tipo, mientras que sólo se ha podido "conjeturar" que el atractor pasado para las soluciones tipo VI<sub>0</sub> son las soluciones tipo Kasner. De esta forma, vemos que la solución de Collins juega un papel decisivo.

### Soluciones Bianchi tipo VI<sub>h</sub>

En este caso hemos encontrado dos soluciones

A) La primera solución es

$$a_1 = \frac{1 - a_2(\gamma + 1) - \gamma}{\gamma + 1}, \quad n = \frac{b(a_2(\gamma + 1) + 2\gamma)}{(\gamma + 1)}, \quad m = b(1 - a_2), \quad b = \sqrt{\frac{1 - \gamma}{3\gamma + 1}}, \quad (6.50)$$

observando que la solución sólo es válida si  $\gamma \in \left(-\frac{1}{3}, 1\right)$ , de esta forma,  $b \in (0, \infty)$ . La métrica adquiere, por lo tanto, la siguiente forma

$$ds^2 = -dt^2 + t^{2a_1}e^{-2mz}dx^2 + t^{2a_2}e^{2nz}dy^2 + t^2dz^2, \quad (6.51)$$

donde,  $a_1 = a_1(a_2, \gamma)$ , es decir, depende de dos parámetros. Para poder determinar el comportamiento de todos los parámetros es necesario hacer análisis numéricos. En la siguiente tabla mostramos como varían dichos parámetros en función de los diferentes valores que puede tomar  $\gamma$ ,

$\gamma$	$a_1$	$a_2$	$n$	$m$
1	$-a_2$	$a_2$	0	0
1/3	$\frac{1}{2} - a_2$	(0, 1/2)	$\frac{\sqrt{3}}{6}(2a_2 + 1)$	$\frac{\sqrt{3}}{3}(1 - a_2)$
0	$1 - a_2$	(0, 1)	$a_2$	$1 - a_2$
$\rightarrow (-1/3)^+$	$2 - a_2$	(0, 2)	$n$	$m$

Como podemos observar, el caso,  $\gamma = 1$  carece de sentido físico ya que  $a_1 < 0$ , además de obtener  $m = n = 0$ . Por esta razón descartamos tal valor para la ecuación de estado. Por lo tanto y en principio, la solución sólo es válida si  $\gamma \in \left(-\frac{1}{3}, 1\right)$ , obteniendo de esta forma los siguientes valores:  $(1 + \gamma)(1 + a_1 + a_2) = \alpha = 2$ , entonces  $\rho = \rho_0 t^{-2}$ . De esta forma vemos que la solución no es inflacionaria, ya que el parámetro de deceleración es positivo

$$q = \frac{1}{2}(3\gamma + 1) > 0, \quad \forall \gamma \in \left(-\frac{1}{3}, 1\right). \quad (6.52)$$

Si por ejemplo fijamos el valor del factor de escala ( $a_2 = 1/4$ ), entonces obtenemos los siguientes resultados

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{3 - 5\gamma}{4(\gamma + 1)}, & a_1 = 0 &\iff \gamma = \frac{3}{5}, \\ m &= \frac{3b}{4}, & n &= \frac{(9\gamma + 1)b}{4(\gamma + 1)} & n = 0 &\iff \gamma = -\frac{1}{9}, \\ \mathcal{A} &= \frac{1}{96} (63\gamma^2 + 16\gamma + 7) \in (0,08, 0,4), & & \forall \gamma \in \left(-\frac{1}{3}, \frac{3}{5}\right), \end{aligned} \quad (6.53)$$

por lo que la solución sólo es válida si  $\gamma \in \left(-\frac{1}{3}, \frac{3}{5}\right)$  en vez de en el intervalo  $\left(-\frac{1}{3}, 1\right)$ , además debemos eliminar los puntos en los que  $n = 0$  y  $m = n$ , ya que en dichos puntos, la métrica degenera en una del tipo BIII y BVI<sub>0</sub> respectivamente. Dichos puntos son  $\gamma = -1/9$  y  $\gamma = 1/3$ . Obsérvese que  $m = -n$  (BV) si

$\gamma = -1/3$ , punto ya excluido del intervalo. El segundo parámetro de anisotropía se comporta de la siguiente forma

$$\mathcal{W}^2 = \frac{1080\gamma^5 - 1431\gamma^4 + 180\gamma^3 + 790\gamma^2 + 156\gamma + 9}{9216(3\gamma + 1)} = \text{const.} \in (0, \infty), \quad (6.54)$$

donde, tal y como podemos observar,  $\mathcal{W}^2$  tiende a  $\infty$  únicamente cuando  $\gamma \rightarrow -1/3$ . Si no consideramos un pequeño intervalo de este punto,  $\gamma = -1/3$ ,  $\mathcal{E} \left( -\frac{1}{3} \right)$ , entonces vemos que en el resto del intervalo el parámetro de anisotropía de Weyl está acotada, de forma que  $\mathcal{W}^2 \ll 0,01$ ,  $\forall \gamma \in \left( -\frac{1}{3}, \frac{3}{5} \right) \setminus \mathcal{E} \left( -\frac{1}{3} \right)$ . Así, con los valores numéricos seleccionados, podemos considerar que la solución es isótropa para todo valor de la ecuación de estado  $\gamma \in \left( -\frac{1}{3}, \frac{3}{5} \right) \setminus \mathcal{E} \left( -\frac{1}{3} \right)$ . La entropía gravitatoria se comporta de la siguiente forma

$$p^2 = -\frac{2(3\gamma + 1)(207\gamma^3 + 129\gamma^2 + 53\gamma + 3)(3\gamma - 1 + 6\gamma b + 2b)(-3\gamma + 1 + 6\gamma b + 2b)}{3(1 + 3\gamma^2)(-3 - 14\gamma + 21\gamma^2)^2} = \text{const.} \in (-\infty, \infty), \quad (6.55)$$

tal y como podemos observar la entropía gravitatoria tiene una singularidad en  $\gamma = (1 - \sqrt{7}/7)/3 \approx -0,1706$ . Por tanto, si  $a_2 = 1/4$ , entonces la solución únicamente es válida para  $\forall \gamma \in \left( -\frac{1}{3}, \frac{3}{5} \right) \setminus \left\{ -\frac{1}{9} \right\} \cup \left\{ \frac{1}{3} \right\}$ , siendo la solución no inflacionaria y solamente es isótropa en el intervalo  $\gamma \in \left( -\frac{1}{3}, \frac{3}{5} \right) \setminus \mathcal{E} \left( -\frac{1}{3} \right)$ .

También podríamos despejar la solución en función de los parámetros  $(m, \gamma)$  de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} a_2 &= 1 - \frac{m}{A}, & A &= \sqrt{\frac{1 - \gamma}{(1 + 3\gamma)}}, & \forall \gamma &\in \left( -\frac{1}{3}, \frac{1 - m^2}{3m^2 + 1} \right), & m &\in (-1, 1) \setminus \{0\}, \\ a_1 &= \frac{m}{A} - \frac{2\gamma}{1 + \gamma}, & \forall \gamma &\in \left( -\frac{1}{3}, \gamma_m \right), \\ n &= -m + A \left( \frac{1 + 3\gamma}{1 + \gamma} \right), & \forall \gamma &\in \left( -\frac{1}{3}, 1 \right) \setminus \left\{ \frac{1 - m^2 \pm 2\sqrt{1 - m^2}}{m^2 + 3} \right\} & m &\in (-1, 1) \setminus \{0\}, \end{aligned}$$

simplificando encontramos que

$$\begin{aligned} a_1 &= -\frac{(3\gamma + 1)}{(\gamma - 1)(\gamma + 1)} (m(\gamma + 1) - 2\gamma b) b, & a_2 &= \frac{(3\gamma + 1)}{\gamma - 1} (m - b) b, & n &= -m + \left( \frac{1 + 3\gamma}{1 + \gamma} \right) b, \\ n + m &= \left( \frac{1 + 3\gamma}{1 + \gamma} \right) b \in (0, 1), & \forall \gamma &\in \left( -\frac{1}{3}, 1 \right). \end{aligned}$$

Por ejemplo, si fijamos el parámetro  $m = 1/3$ , entonces vemos que,  $a_1 \in (0, 2)$ ,  $\forall \gamma \in \left( -\frac{1}{3}, 1 \right)$  mientras que  $a_2 \in (0, 1)$ ,  $\forall \gamma \in \left( -\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right)$ , de esta forma la solución solo es válida  $\forall \gamma \in \left( -\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right)$  en vez de  $\forall \gamma \in \left( -\frac{1}{3}, 1 \right)$ . En el intervalo  $\left( -\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right)$ , el primer parámetro de anisotropía  $\mathcal{A} \in (0, 0,4)$ , mientras que el segundo  $\mathcal{W}^2 \in (0, 0,01)$ , por lo que podemos considerar la solución como isótropa.

**B)** La segunda solución es la siguiente

$$\begin{aligned} a_2 &= A, & A &= \frac{-\gamma + \sqrt{-\gamma(3\gamma - 4)}}{2(\gamma + 1)}, & a_1 &= -A + \frac{1 - \gamma}{1 + \gamma}, & n &= \frac{\sqrt{B}}{1 + \gamma}, \\ B &= -\frac{3\gamma^3(1 + A) + \gamma(1 - 3A) - 4\gamma^2}{1 + 3\gamma^2}, & m &= \frac{(A - 1)\sqrt{B}}{A(1 + \gamma) + 2\gamma}, & \forall \gamma &\in \left( -\frac{1}{3}, 0 \right). \end{aligned} \quad (6.56)$$

En primer lugar, resaltar el hecho de que la solución sólo es válida  $\forall \gamma \in \left( -\frac{1}{3}, 0 \right)$ , en vez de  $\forall \gamma \in \left( -\frac{1}{3}, 1 \right)$  como es usual en este tipo de soluciones. Al igual que en el caso anterior, observamos que tampoco es inflacionaria ya que

$$q = \frac{1}{2}(3\gamma + 1) > 0 \quad \forall \gamma \in \left( -\frac{1}{3}, 0 \right). \quad (6.57)$$

En el mismo sentido vemos que la solución isotropiza, ya que los dos parámetros de anisotropía o tienden a cero o son muy próximos a cero. Por último, vemos que la entropía gravitatoria no muestra un comportamiento patológico, manteniendo valores próximos a cero en todo el intervalo de definición.

$$\mathcal{A} = \frac{1}{8} \left( 9\gamma - 3\sqrt{4\gamma - 3\gamma^2 + 2} \right) \in (0, 0,16), \quad \mathcal{W}^2 \in (0, 0,005), \quad P^2 \in (-1/2, 0,1), \quad (6.58)$$

$\forall \gamma \in \left(-\frac{1}{3}, 0\right)$ . Esta solución también es nueva.

Con respecto a la dinámica de estas soluciones tan solo se puede “conjeturar” [150] que los modelos tipo  $VI_h$  son asintóticamente autosimilares, de tal forma que tienden hacia el pasado a la solución tipo Kasner, mientras que la solución autosimilar  $VI_h$  es una atractor en el futuro, mostrándose así la gran importancia de este tipo de soluciones. Únicamente resta demostrar la conjetura, aunque hay evidencias numéricas que la avalan.

### 6.2.3. Fluido perfecto con constantes variables

Las ecuaciones de campo para una métrica dada por Ec. (6.2), con un fluido perfecto como modelo de materia y donde consideramos además que tanto  $G$  como  $\Lambda$  varían con el tiempo cósmico son:

$$\frac{a'}{a} \frac{b'}{b} + \frac{a'}{a} \frac{d'}{d} + \frac{d'}{d} \frac{b'}{b} + \frac{K}{d^2} = 8\pi G\rho + \Lambda, \quad (6.59)$$

$$m \left( \frac{a'}{a} - \frac{d'}{d} \right) + n \left( \frac{d'}{d} - \frac{b'}{b} \right) = 0, \quad (6.60)$$

$$\frac{b''}{b} + \frac{d''}{d} + \frac{d'}{d} \frac{b'}{b} - \frac{n^2}{d^2} = -8\pi G\gamma\rho + \Lambda, \quad (6.61)$$

$$\frac{d''}{d} + \frac{a''}{a} + \frac{a'}{a} \frac{d'}{d} - \frac{m^2}{d^2} = -8\pi G\gamma\rho + \Lambda, \quad (6.62)$$

$$\frac{b''}{b} + \frac{a''}{a} + \frac{a'}{a} \frac{b'}{b} + \frac{mn}{d^2} = -8\pi G\gamma\rho + \Lambda, \quad (6.63)$$

$$\rho' + \rho(1 + \gamma)H = 0, \quad (6.64)$$

$$\Lambda' = -8\pi G'\rho. \quad (6.65)$$

En el tercer capítulo demostramos que las soluciones deben ser de la siguiente forma: la densidad de energía sigue una ley,  $\rho = \rho_0 t^{-\alpha}$ , donde  $\alpha = (\gamma + 1)h$  y  $h = (a_1 + a_2 + 1)$ , tal y como venimos definiendo. Por otro lado, la constante cosmológica es de la forma,  $\Lambda = A \left(1 - \frac{2}{\alpha}\right) t^{-2} = \Lambda_0 t^{-2}$ , donde  $A = a_1 a_2 + a_1 + a_2 + K$ , y  $K = (mn - m^2 - n^2)$ . Por último, indicar que  $G$  sigue una ley del tipo:  $G = G_0 t^{\gamma-2}$ , con  $G_0 = \frac{A}{4\pi\rho_0(\gamma+1)h}$ . Hemos encontrado las siguientes soluciones.

#### Soluciones tipo Bianchi III

La primera solución corresponde a un modelo Bianchi III, donde

$$a_2 = 1, \quad m = 0, \quad n = \sqrt{1 - a_1^2}, \quad (6.66)$$

de forma que,  $a_1 \in (0, 1)$ , y sin restricciones sobre el parámetro de la ecuación de estado  $\gamma$ . Alternativamente tenemos,  $a_1 = \sqrt{1 - n^2}$ ,  $\forall n \in (0, 1)$ . Vemos que

$$q = \frac{1 - a_1}{2 + a_1} > 0 \in \left(0, \frac{1}{2}\right), \quad \mathcal{A} = -\frac{2}{3} \left(2(a_1 - 1) + n^2\right) h^2 \in \left(0, \frac{5}{2}\right), \quad (6.67)$$

por lo que esta solución no es inflacionaria y puede isotropizar. Podemos observar que para determinados valores de  $a_1$ , el parámetro de anisotropía no tiende a cero, aunque está acotado superiormente. La métrica se reduce a

$$ds^2 = -dt^2 + t^{2a_1} dx^2 + t^2 \left( e^{2nz} dy^2 + dz^2 \right), \quad (6.68)$$

observándose que si  $a_1 \rightarrow 1$ , entonces,  $ds^2 = -dt^2 + t^2(dx^2 + dy^2 + dz^2)$ , i.e., se obtiene una métrica tipo FRW, que ya aparecerán en el siguiente capítulo cuando estudiemos los modelos de Bianchi tipo V, VII<sub>h</sub> y IX. Por lo tanto, hemos obtenido el siguiente comportamiento para las principales magnitudes:  $\alpha = (\gamma + 1)h \in (1, 6)$ ,  $h = (a_1 + 2) \in (2, 3)$ , y  $A = a_1 a_2 + a_1 + a_2 + K > 0$ . De esta forma

$$\rho = \rho_0 t^{-\alpha}, \quad \alpha \in (1, 6), \quad (6.69)$$

es una función positiva y decreciente en el tiempo. La constante de gravitación,  $G$ , se comporta como sigue:

$$G = G_0 t^{\alpha-2}, \quad G_0 = \frac{2a_1 + 1 - n^2}{4\pi(\gamma + 1)h}, \quad (6.70)$$

por lo que será creciente si  $\alpha > 2$ , constante si  $\alpha = 2$  y decreciente si  $\alpha < 2$ . La constante cosmológica viene dada por la siguiente expresión

$$\Lambda = A \left(1 - \frac{2}{\alpha}\right) t^{-2}, \quad \Lambda_0 = \frac{(2a_1 + 1 - n^2)(a_1(\gamma + 1) + 2\gamma)}{(\gamma + 1)h}, \quad (6.71)$$

observando que el signo de  $\Lambda_0$  depende de  $\alpha$ . Si  $\alpha < 2$  entonces obtenemos una  $\Lambda$  negativa, se hace cero si  $\alpha = 2$  y se comportará como una función decreciente, pero positiva si  $\alpha > 2$ . Una vez más, se ve la relación entre ambos comportamientos: si  $G$  es creciente entonces  $\Lambda > 0$ ,  $G$  es constante cuando  $\Lambda = 0$ , y  $G$  es decreciente cuando  $\Lambda < 0$ .

Con respecto al comportamiento de los invariantes de curvatura, vemos que  $I_0 = 2(a_1^2 + a_1 + 1 - n^2)t^{-2}$ ,  $I_1 = 4(3a_1^4 - 2a_1^3 + 2a_1^2 + n^4 - 2n^2 + 1)t^{-4}$ , e  $I_2 = 2(a_1^4 + 2a_1^2 + 2a_1 + n^4 - 2n^2 a_1 - 2n^2 + 1)t^{-4}$ ; de esta forma vemos que la solución es singular. Las componentes no nulas del tensor de Weyl son:  $C_{txtx} = (1/3)\mathcal{K}t^{2(a_1-1)}$ ,  $C_{tyty} = -(1/6)\mathcal{K}e^{2nz}$ ,  $C_{tztz} = -(1/6)\mathcal{K}$ ,  $C_{xyxy} = (1/6)\mathcal{K}e^{2nz}t^{2a_1}$ ,  $C_{xzxz} = (1/6)\mathcal{K}t^{2a_1}$ , y  $C_{yzyz} = -(1/3)\mathcal{K}t^2e^{2nz}$ , con  $\mathcal{K} = (n - 1 + a_1)(n + 1 - a_1)$ . El invariante de Weyl resulta,  $I_3 = (4/3)\mathcal{K}^2 t^{-4}$ , mientras que el invariante de la parte eléctrica es:  $I_4 = (1/6)\mathcal{K}^2 t^{-4}$ . El invariante de la parte magnética  $I_5$  es nulo. El segundo parámetro de anisotropía es

$$\mathcal{W}^2 = \frac{\mathcal{K}^2}{36(2 + a_1)^4} = \text{const.} \in (0, 0,00015), \quad (6.72)$$

observar que  $\mathcal{W}^2$  toma valores muy próximos a cero ( $\mathcal{W}^2 \approx 0$ ), por lo que podemos afirmar que el modelo isotropiza. Por último la entropía gravitatoria resulta ser:

$$P^2 = -\frac{\mathcal{K}^2}{3(-2 + 3n^2 - n^4 + a_1(n^2 - 1))} = \text{const} \in \left(0, \frac{3}{2}\right), \quad (6.73)$$

no comportándose de forma patológica. Por tanto, la solución es válida para todo  $\gamma$ , isotropiza y no es inflacionaria.

### Solución tipo BVI<sub>0</sub>

En este caso hemos encontrado la siguiente solución

$$a_2 = a_1, \quad m = n = \sqrt{a_1 - a_1^2} \implies a_1 = \frac{1}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - 4n^2}\right), \quad \forall n \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \setminus \{0\}. \quad (6.74)$$

Por tanto, tenemos los siguientes resultados (por simplicidad tomamos  $a_{1+}$ )

$$q = \frac{-2a_1}{1 + 2a_1} \in \left(0, \frac{1}{2}\right), \quad \mathcal{A} = \frac{-2a_1 + 2n^2}{3(1 + 2a_1)^2} \in (0, 0,05), \quad (6.75)$$

de esta forma vemos que la solución no es inflacionaria y que isotropiza al ser  $\mathcal{A} \ll 1$ . De igual forma vemos que

$$\mathcal{W}^2 = \frac{-n^2(4n^2 + 3\sqrt{1 - 4n^2} - 1)}{18(1 + 2a_1)^4} = \text{const.} \in (0, 0,00016). \quad (6.76)$$

Este parámetro de anisotropía,  $\mathcal{W}^2$ , toma valores muy próximos a cero, por lo que podemos afirmar que la solución isotropiza. La entropía gravitatoria muestra el siguiente comportamiento,

$$p^2 = -\frac{-4n^2 \left(8n^2 + 3\sqrt{1-4n^2} - 1\right)}{3 \left(-3 \left(1 + \sqrt{1-4n^2}\right) + \left(2 + \sqrt{1-4n^2}\right) 6n^2 - n^4\right)} = \text{const} \in (-\infty, 0,008), \quad (6.77)$$

solo tiende a  $-\infty$  cuando  $n \rightarrow \pm\frac{1}{2}$ . El resto de las magnitudes se comporta de la siguiente manera. La densidad de energía,  $\rho = \rho_0 t^{-\alpha}$ , donde  $\alpha = (\gamma + 1)h$ , dependiendo del valor de  $n$ . Por otro lado, la "constante" de gravitación,  $G$ , sabemos que sigue la siguiente ley  $G = G_0 t^{\alpha-2}$ , donde la constante  $G_0$  es

$$G_0 = \frac{3 \left(1 + \sqrt{1-4n^2}\right) - 4n^2}{8\pi (\gamma + 1) h}, \quad (6.78)$$

de esta manera, su comportamiento depende de  $\alpha$ . La constante cosmológica tiene la siguiente expresión

$$\Lambda = A \left(1 - \frac{2}{\alpha}\right) t^{-2}, \quad \Lambda_0 = \frac{\left(3 \left(1 + \sqrt{1-4n^2}\right) - 4n^2\right) \left(\sqrt{1-4n^2} (\gamma + 1) + 2\gamma\right)}{2 (\gamma + 1) h}, \quad (6.79)$$

donde  $A = (a_1 a_2 + a_1 + a_2 + K) > 0$ , siendo  $K = (mn - m^2 - n^2)$ . De esta forma, podemos observar que el comportamiento de  $G$  y el signo de  $\Lambda_0$  están relacionados:  $G$  es creciente cuando  $\Lambda_0 > 0$ ,  $G$  es constante cuando  $\Lambda = 0$  y  $G$  es decreciente cuando  $\Lambda < 0$ . Al depender todas las soluciones del parámetro  $n$ , es difícil determinar el comportamiento exacto. Para aclarar un poco dicho comportamiento, asignamos un valor determinado a  $n$ , por ejemplo,  $n = 1/4$ , de esta forma observamos que  $\Lambda_0 = 0$  cuando  $\gamma_c = -0,3021694793$ , justo donde  $\alpha = 2$ , así  $G$  es creciente y  $\Lambda_0 > 0$  si  $\gamma > \gamma_c$  descartando el resto de valores de  $\gamma$ , ya que para ellos  $\Lambda_0 \leq 0$ , resultado inconsistente con las observaciones.

### Soluciones tipo Bianchi VI<sub>h</sub>

Para este modelo, hemos encontrados dos soluciones.

1. La primera es la siguiente

$$a_1 = \frac{a_2^2 + 1}{a_2 + 1}, \quad m = \sqrt{\frac{a_2^2 + 1 - 2a_2^3}{2a_2 + 1}}, \quad n = \frac{ma_2}{a_2 + 1}, \quad (6.80)$$

siendo la solución, en principio, válida para todo  $\gamma$ . Observamos que la solución sólo tiene sentido físico si  $a_2 \in (0, 1)$ , y, por lo tanto:  $a_1 \in (0,82, 1)$ ,  $m \in (0, 1)$ ,  $n \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$ , de esta forma la métrica queda reducida a la siguiente expresión

$$ds^2 = -dt^2 + t^{2a_1} e^{-2mz} dx^2 + t^{2a_2} e^{2nz} dy^2 + t^2 dz^2. \quad (6.81)$$

Las principales magnitudes se comportan de la siguiente manera:  $\alpha = (\gamma + 1)h \in (0,6, 6)$ ,  $h = (a_1 + a_2 + 1) \in (1,82, 3)$ , y  $A = a_1 a_2 + a_1 + a_2 + K > 0$ , por tanto, la densidad de energía,  $\rho = \rho_0 t^{-\alpha}$ , con  $\alpha \in (0,6, 6)$ , es una función positiva y decreciente.  $G$  se comporta de la siguiente manera

$$G = G_0 t^{\alpha-2}, \quad G_0 = \frac{(1 + a_2 + a_2^2) a_2}{2\pi (\gamma + 1) (a_2 + 1) (2a_2 + 1)} > 0 \quad \forall a_2 \in (0, 1), \quad (6.82)$$

siendo creciente si  $\alpha > 2$ , comportándose como una verdadera constante si  $\alpha = 2$  y decreciente si  $\alpha < 2$ . La constante cosmológica tiene la siguiente expresión

$$\Lambda = A \left(1 - \frac{2}{\alpha}\right) t^{-2}, \quad \Lambda_0 = \frac{4 (\gamma (1 + a_2 + a_2^2) + a_2^2) (1 + a_2 + a_2^2) a_2}{(\gamma + 1) (a_2 + 1)^2 (2a_2 + 1)}, \quad (6.83)$$

donde el signo de  $\Lambda_0$  dependerá del valor de  $\alpha$ . Si  $\alpha < 2$ , entonces obtenemos una  $\Lambda$  negativa; nula si  $\alpha = 2$ ; y positiva si  $\alpha > 2$  (las observaciones únicamente apoyan una  $\Lambda$  positiva). Una vez más se observa que si  $\alpha > 2$ , entonces  $G$  es creciente y  $\Lambda_0 > 0$ . Con respecto al resto de magnitudes vemos que

$$q = -\frac{(2a_2 + 1) (a_2 - 1)}{2 (1 + a_2 + a_2^2)} > 0 \in \left(0, \frac{1}{2}\right), \quad \mathcal{A} = \frac{(a_2 - 1)^2}{6 (1 + a_2 + a_2^2)} \in (0, 0,16), \quad \forall a_2 \in (0, 1), \quad (6.84)$$

por lo que la solución no es inflacionaria e isotropiza ya que  $\mathcal{A} \ll 1$ . En la siguiente tabla vemos como varían las magnitudes asignando valores numéricos concretos a la constante  $a_2$ , por ejemplo, si fijamos  $a_2 = 1/2$ , entonces

$a_2$	$a_1$	$\gamma$	$\alpha$	G	$\Lambda$
1/2	5/6	1	$> 2$	$\nearrow$	$> 0$
1/2	5/6	1/3	$> 2$	$\nearrow$	$> 0$
1/2	5/6	0	$> 2$	$\nearrow$	$> 0$
1/2	5/6	-1/3	$< 2$	$\searrow$	$< 0$

Eligiendo otro valor, se obtienen otros resultados. Los invariantes de curvatura son:  $I_0 = 2K_0t^{-2}$ ,  $I_1 = 4K_1t^{-4}$ , e  $I_2 = 2K_2t^{-4}$ , con  $K_i = K(a_1, a_2, m, n)$  constantes numéricas, por lo que la solución es singular. Las componentes no nulas del tensor de Weyl son:  $C_{txtx} = \mathcal{K}_1t^{2(a_1-1)}e^{-2mz}$ ,  $C_{txxz} = \mathcal{K}_2t^{2a_1-1}e^{-2mz}$ ,  $C_{tyty} = \mathcal{K}_3t^{2(a_1-1)}e^{2nz}$ ,  $C_{tyyz} = \mathcal{K}_4t^{2a_1-1}e^{2nz}$ ,  $C_{tztz} = \mathcal{K}_5$ ,  $C_{xyxy} = \mathcal{K}_6e^{2z(n-m)}t^{2(a_1+a_2+1)}$ ,  $C_{xzxz} = \mathcal{K}_7t^{2a_1}e^{-2mz}$ , y  $C_{yzyz} = \mathcal{K}_8t^{2a_2}e^{2nz}$ , donde  $\mathcal{K}_i = \mathcal{K}(a_1, a_2, m, n)$  son constantes numéricas. El invariante de Weyl resulta,  $I_3 = (4/3)K_3t^{-4}$ , su parte eléctrica,  $I_4 = (1/6)K_4t^{-4}$ , mientras que su parte magnética,  $I_5$ , se comporta como sigue,  $I_5 = (1/6)K_5t^{-4}$ . El parámetro de anisotropía de Weyl es,

$$\mathcal{W}^2 = \frac{-a_2^2(a_2+2)(a_2-1)^2(2a_2^4-2a_2^3-3a_2^2-2a_2-1)}{72(1+a_2+a_2^2)^4(2a_2+1)} \in (0, 0,0005), \forall a_2 \in (0, 1), \quad (6.85)$$

por lo que la solución isotropiza ( $\mathcal{W}^2 \approx 0$ ,  $\forall a_2 \in (0, 1)$ ). La entropía gravitatoria muestra un comportamiento regular encontrando sus valores acotados,  $P^2 \in (-0,6, 0,1)$ ,  $\forall a_2 \in (0, 1)$ .

2. La segunda solución es la siguiente

$$a_1 = \frac{m^2(2-a_2) - a_2(a_2-1)^2}{m^2 + (a_2-1)^2}, \quad a_2 \in (0, 1), \quad n = -\frac{m(m^2-1+a_2^2)}{m^2 + (a_2-1)^2}, \quad (6.86)$$

despejando  $a_2$  de la expresión de  $n$  obtenemos

$$a_2 = \frac{n \pm m\sqrt{-(m+n)^2+1}}{n+m}, \quad (6.87)$$

viendo de esta forma que la siguiente condición debe ser satisfecha

$$(m+n)^2 \leq 1, \quad \forall m, n, \quad m \neq \pm n, \quad m \neq n \neq 0. \quad (6.88)$$

Con este valor de  $a_2$  vemos que

$$a_1 = \frac{(m(1+n^2-m^2) + 2n^3)\sqrt{-(m+n)^2+1} + 2m(m+n)^2 - m\left(- (m+n)^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}{2(m+n)^3}, \quad (6.89)$$

En los siguientes gráficos (ver Figs. (6.1)) hemos representado los parámetros  $a_2$  y  $a_1$  para valores de  $m, n \in [-1, 1]$ , junto con el plano  $a_i = 0$ , (en color gris) para resaltar los valores positivos resultando ser ambos parámetros positivos en el intervalo de definición, tal y como se desprende del análisis de dichas gráficas.

Se observa, además, que  $a_2 = 0$  si  $n = \pm m\sqrt{-(m+n)^2+1}$ , descartando así la posibilidad  $m = n = 0$ , ya que en dicho caso la métrica degenera, dejando de pertenecer al grupo BVI<sub>h</sub>. Una vez obtenidos los valores de los parámetros de los factores de escala,  $a_2$  y  $a_1$ , entonces es fácil calcular el parámetro de deceleración,  $q$ , viendo que tiene la siguiente expresión

$$q = \frac{-(m+m^3+2n^3+3mn^2+4m^2n)\sqrt{-(m+n)^2+1} + 2(m+n)^3 + m\left(- (m+n)^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}{(m+m^3+2n^3+3mn^2+4m^2n)\sqrt{-(m+n)^2+1} + 4(m+n)^3 - m\left(- (m+n)^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}. \quad (6.90)$$

En el siguiente gráfico hemos representado el parámetro de deceleración (ver Fig. (6.2)), viendo de esta forma que la solución obtenida no es inflacionaria ya que  $q > 0$ , para todo valor de  $m, n \in [-1, 1]$ .

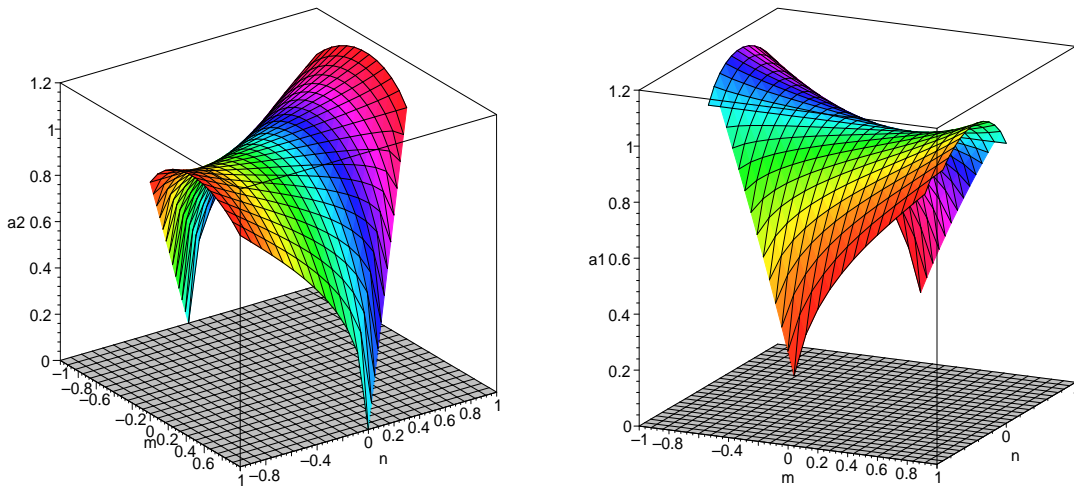


Figura 6.1: Parámetros  $a_2$  y  $a_1$ . Las constantes  $m, n$  varían en  $[-1, 1]$ .

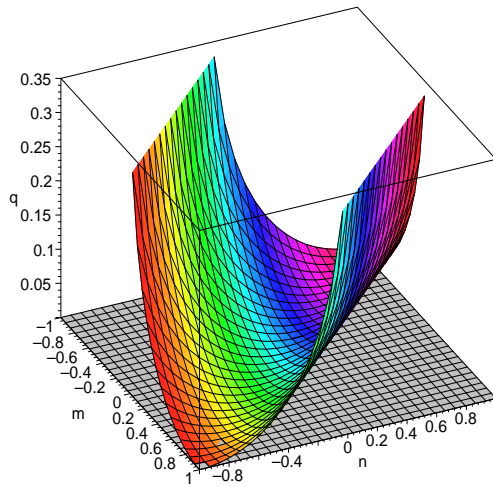


Figura 6.2: El parámetro de deceleración  $q$ . Las constantes  $m, n$  varían en  $[-1, 1]$ .

Tal y como se observa, resulta muy complicado obtener expresiones compactas para el resto de magnitudes. Al depender todas las magnitudes de los parámetros  $m, n$ , entonces representamos gráficamente los parámetros de anisotropía,  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{W}^2$  al igual que la entropía gravitatoria  $P^2$ , para poder interpretar su comportamiento. En las gráficas adjuntas (ver Figs. (6.3.)), hemos representado  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{W}^2$  (junto con el plano  $z = 0$  (gris)), donde un primer análisis de estos gráficos nos indica que la solución es isótropa, al estar los valores tanto de  $\mathcal{A}$  como de  $\mathcal{W}^2$  próximos a cero,  $\mathcal{A} < 0,06$  mientras que  $\mathcal{W}^2 < 0,0004$ , para todo valor de  $m, n \in [-1, 1]$ .

El comportamiento de la entropía gravitatoria lo encontramos en la figura adjunta (6.4) viendo que en este caso,  $P^2 < 0,4$ , para todo valor de  $m, n \in [-1, 1]$ , y no mostrando ningún comportamiento anómalo en ningún punto del intervalo de definición.

De forma análoga, podemos realizar un análisis numérico pormenorizado si por ejemplo, fijamos  $m = 1/2$ , y por lo tanto  $n \in [-3/2, 1/2]$ . Los cálculos llevados a cabo nos muestran que,  $a_2 \in (0, \frac{3}{2})$ ,  $\forall n \in [-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}] \setminus \{0\}$ , mientras que,  $a_1 \in (0, 1,2)$ ,  $\forall n \in (n_c, \frac{1}{2}] \setminus \{0\}$ , siendo  $n_c = -1,437$ , es decir,  $a_1(n) = 0$  si  $n = -1,437$ , de esta forma la solución pasa de ser válida  $\forall n \in [-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}] \setminus \{0\}$ , a ser sólo válida en el intervalo  $(n_c, \frac{1}{2}] \setminus \{0\}$ . El parámetro de deceleración se comporta de la siguiente manera,  $q > 0 \in (0, \frac{1}{2})$ ,  $\forall n \in (n_c, \frac{1}{2}] \setminus \{0\}$ , por tanto, la solución obtenida no es inflacionaria, como ya sabíamos. Con respecto a los parámetros de

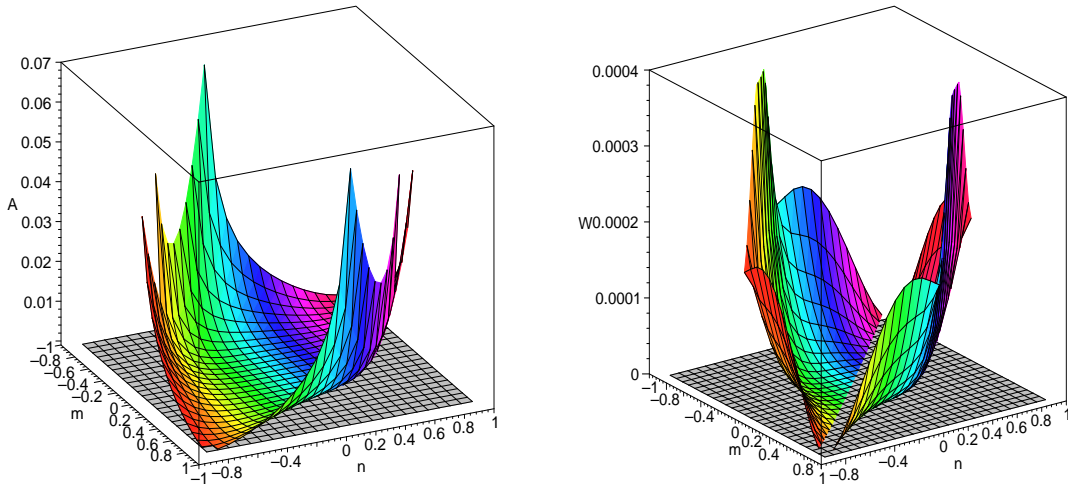


Figura 6.3: Los parámetros de anisotropía,  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{W}$ . Las constantes  $m, n$  varían en  $[-1, 1]$ .

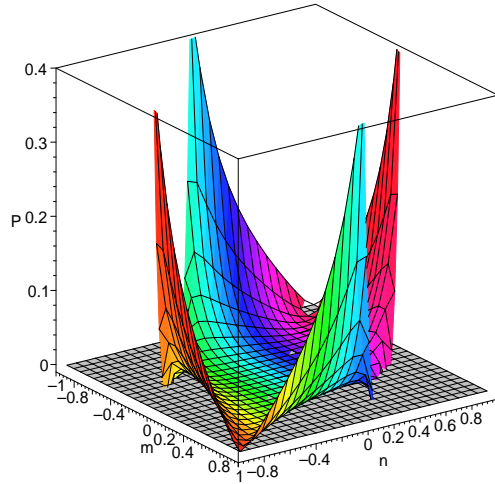


Figura 6.4: La entropía gravitatoria,  $\mathcal{P}$ . Las constantes  $m, n$  varían en  $[-1, 1]$ .

anisotropía vemos que,  $\mathcal{A} \in (0, 0.16)$ ,  $\mathcal{W}^2 \in (0, 0.003)$ ,  $\forall n \in \left(n_c, \frac{1}{2}\right) \setminus \{0\}$ . De esta forma podemos decir que la solución isotropiza (es isótropa) por lo menos para los valores numéricos fijados. De igual forma, vemos que la entropía gravitatoria se comporta de la siguiente forma,  $P^2 \ll 1$ ,  $\forall n \in \left(-1, 2, \frac{1}{2}\right) \setminus \{0\}$ , teniendo una singularidad precisamente en  $n = -1, 2$ , mientras que si  $n$  tiende a los extremos del intervalo entonces  $P^2$  tiende a  $\pm\infty$ .

Falta por calcular el valor de las constantes  $G_0$  y  $\Lambda_0$ , donde recordamos que  $\Lambda = A \left(1 - \frac{2}{\alpha}\right) t^{-2} = \Lambda_0 t^{-2}$ , siendo  $A = a_1 a_2 + a_1 + a_2 + K$ , y  $K = (mn - m^2 - n^2)$ , mientras que,  $G = G_0 t^{\gamma-2}$ , con  $G_0 = \frac{A}{4\pi\rho_0(\gamma+1)h}$ . Estas dos magnitudes dependen no sólo de  $m$  y  $n$ , sino además del parámetro de la EdE  $\gamma$ . En la figura adjunta (ver Figs. (6.5)) hemos representado el comportamiento tanto, de  $\Lambda_0$  como el de  $G_0$ , fijando el valor  $m = 1/2$  y permitiendo que varíen los otros dos parámetros,  $n$  y  $\gamma$ . Vemos que, mientras que  $G_0 > 0$  para todo valor de  $\gamma \in (-1, 1)$  y  $\forall n \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \setminus \{0\}$ , la constante cosmológica sólo es positiva para determinados valores del parámetro de EdE  $\gamma$  y  $n$ .

Análogamente, si además del parámetro  $m$  fijamos, por ejemplo el parámetro,  $n = 1/3$  (teniendo en cuenta la condición  $-1 \leq m + n \leq 1$ ) comprobamos que  $G_0 > 0 \forall \gamma \in (-1, 1]$  mientras que el signo de  $\Lambda_0$  depende de  $\gamma$ , en este caso  $\Lambda_0(\gamma) = 0$  si  $\gamma = -0.21$ . Como en los casos anteriores,  $G$  es creciente cuando  $\Lambda_0 > 0$ ,  $G$  es constante cuando  $\Lambda_0 = 0$  y  $G$  es decreciente cuando  $\Lambda_0 < 0$ .

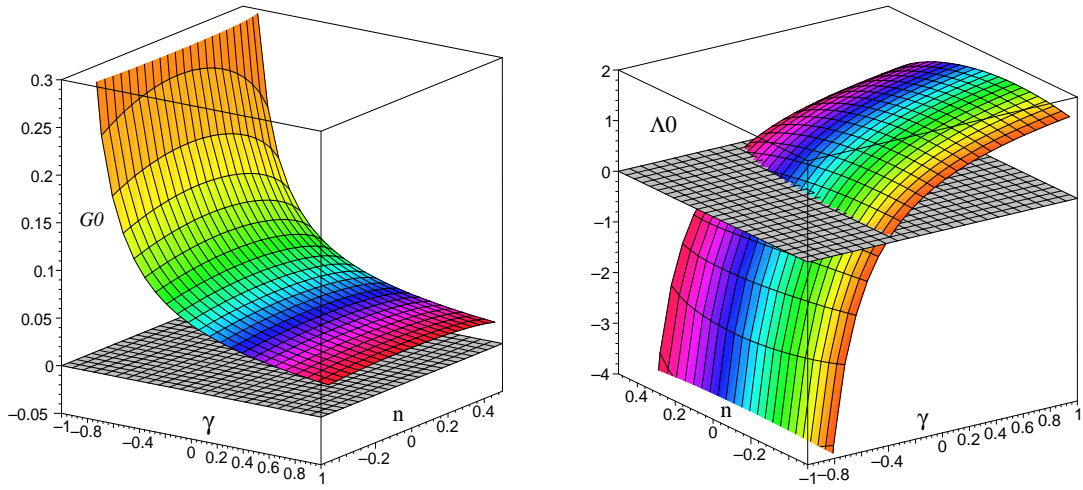


Figura 6.5:  $G_0$ , y  $\Lambda_0$  fijando  $m = 1/2$  y haciendo variar los otros dos parámetros,  $\gamma$  y  $n$ .

Encontramos el caso límite cuando

$$m + n = \pm 1, \quad (6.91)$$

donde, la solución continúa siendo válida y adquiere la siguiente expresión

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 - n, & a_2 &= n, & q &= \frac{1}{2} & \forall n \in (0, 1), \\ \mathcal{A} &= \frac{1}{2}n(n-1) + \frac{1}{6}, & \mathcal{W}^2 &= \frac{n^2(n-1)^2}{36}, & p^2 &= -\frac{2}{3}, \\ G_0 &= \frac{n(1-n)}{2\pi(\gamma+1)}, & \Lambda_0 &= \frac{4\gamma n(1-n)}{(\gamma+1)}, & (\gamma+1)h - 2 &= 2\gamma, \end{aligned} \quad (6.92)$$

por lo que la solución no es inflacionaria e isotropiza  $\forall n \in (0, 1)$ . Vemos que  $G_0 > 0 \forall \gamma \in (-1, 1]$  mientras que el signo de  $\Lambda_0$  depende de  $\gamma$ , en este caso  $\Lambda_0(\gamma) = 0$  si  $\gamma = 0$ . Como en los casos anteriores,  $G$  es creciente cuando  $\Lambda_0 > 0$ ,  $G$  es constante cuando  $\Lambda_0 = 0$  y  $G$  es decreciente cuando  $\Lambda_0 < 0$ .

Antes de terminar esta sección nos gustaría comentar el hecho de que, en esta ocasión, no podemos conjeturar la estabilidad de las soluciones encontradas en ninguno de los casos, ya que todas las soluciones para los parámetros de los factores de escala,  $(a_1, a_2)$  y de la métrica  $(m, n)$  en el caso del modelo con constantes variables son distintas a las encontradas en el modelo con un fluido perfecto. En los modelos BI y BII, los factores de escala siempre mostraban el mismo comportamiento, de forma que, podíamos conjeturar sobre su estabilidad, pero aquí las soluciones obtenidas son bien distintas no permitiéndonos hacer semejante conjetura.

## 6.3. Modelos escalares

### 6.3.1. Modelo escalar

Encontramos las siguientes soluciones

#### Soluciones tipo BIII

Para este modelo la solución obtenida es la siguiente

$$a_1 = \sqrt{1 - n^2}, \quad a_2 = a_3 = 1, \quad n \in (-1, 1) \setminus \{0\}, \quad \alpha = 2a_1, \quad \beta = 1 + a_1 - n^2, \quad (6.93)$$

donde tal y como puede observarse, se trata de la misma que la obtenida en el caso de un fluido perfecto con constantes variables, por lo que la solución no es inflacionaria e isotropiza, para todo valor de  $n \in (-1, 1) \setminus \{0\}$ . Para dichos valores,  $\alpha > 0$ , lo mismo que  $\beta \in (0, 2)$ , por lo que el modelo nos dice que la constante cosmológica es positiva.

**Soluciones tipo BVI<sub>0</sub>**

En este caso la solución encontrada es la siguiente

$$a_1 = a_2 = \frac{1}{2} \left( 1 \pm \sqrt{1 - 4n^2} \right), \quad a_3 = 1, \quad m = n \in \left[ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right] \setminus \{0\}, \quad \alpha = 2a_2, \quad \beta = 2a_2^2, \quad (6.94)$$

que es la misma que la encontrada en el caso de un fluido perfecto con constantes variables. De esta forma, sabemos ya que la solución no es inflacionaria y que isotropiza  $\forall n \in \left[ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right] \setminus \{0\}$ . Los valores de los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  son positivos para estos valores de  $n$ , por lo que podemos decir que el modelo sugiere una constante cosmológica positiva.

**Soluciones tipo BVI<sub>h</sub>**

La solución encontrada para este modelo es la siguiente

$$n = -\frac{m(m^2 - 1 + a_2^2)}{m^2 + (a_2 - 1)^2}, \quad a_1 = \frac{2(a_2^2 + m^2) - a_2(1 + m^2 + a_2^2)}{m^2 + (a_2 - 1)^2},$$

$$\alpha = \frac{2(2a_2^3 + (2a_2 + 1)m^2 - a_2^2(1 + 2m^2 + a_2^2) - m^4)}{m^2 + (a_2 - 1)^2}, \quad \beta = \frac{2m^2(2a_2^3 + (2a_2 + 1)m^2 - a_2^2(1 + 2m^2 + a_2^2) - m^4)}{(m^2 + (a_2 - 1)^2)^2}, \quad (6.95)$$

donde se observa que es igual a la segunda solución encontrada en el caso de un fluido perfecto con constantes variables. Como hicimos en dicho caso, podemos expresar la solución obtenida en función de los dos parámetros de la métrica,  $m$  y  $n$  con la restricción  $(m + n)^2 = 1$ . El análisis numérico realizado nos indica que la solución no es inflacionaria y que isotropiza, al ser muy pequeños los dos parámetros de anisotropía. Al igual que los dos casos anteriores, los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  son positivos, por lo que la solución nos indica una vez más que la constante cosmológica es positiva.

Poco se sabe sobre el comportamiento dinámico de las soluciones con un campo escalar y una métrica tipo BVI<sub>h</sub>. De los análisis realizados, solo se ha podido “conjeturar” que su comportamiento asintótico hacia el pasado es una solución tipo Jacobs donde el campo escalar no tiene potencial, es decir, la solución autosimilar obtenida para un BI. En general este resultado es válido para todos los Bianchis tipo B. De igual forma se “conjetura” con que su comportamiento asintótico en el futuro tiende a un modelo tipo BVI<sub>h</sub> (a una solución autosimilar tipo BVI<sub>h</sub>) que puede o no isotropizar, tal y como pasaba en el caso de un fluido perfecto, donde algunas soluciones eran isótropas y otras, únicamente para valores determinados de la ecuación de estado.

**6.3.2. Modelo escalar con G variable**

Encontramos las siguientes soluciones

**Soluciones tipo BIII**

Para este modelo hemos encontrado la siguiente solución

$$a_1 = a_3 = 1, \quad a_2 = \sqrt{1 - n^2}, \quad \beta = \frac{\alpha^2}{2} \left( 1 + \sqrt{1 - n^2} \right), \quad G_0 = \frac{2\sqrt{1 - n^2}}{\alpha^2}, \quad (6.96)$$

válida  $\forall n \in (-1, 1) \setminus \{0\}$ . Se trata del tipo de solución ya obtenida en el caso escalar, por lo que la solución no es inflacionaria e isotropiza para los valores de  $n$  descritos. Tal y como se observa, la solución para los parámetros  $\beta$  y  $G_0$  depende además de  $\alpha$ . La única restricción que podemos obtener para  $\alpha$  es la siguiente:  $\alpha \in (-1, \infty) \setminus \{0\}$ , ya que, de otra forma, el potencial  $V$  que imita el comportamiento de la constante cosmológica, sería una función creciente (recordar que  $V \sim \beta t^{-2(\alpha+1)}$ ). Con esta restricción sobre  $\alpha$ , lo único que podemos decir sobre el comportamiento de  $G$  es que es creciente si  $\alpha \in (0, \infty)$  y decreciente si  $\alpha \in (-1, 0)$ . Obviamente, el caso  $\alpha = 0$  no lo contemplamos.

**Soluciones tipo BVI<sub>0</sub>**

La solución encontrada para este modelo es la siguiente

$$\begin{aligned} a_1 = a_2 = \frac{1}{2} \left( 1 + \sqrt{1 - 4n^2} \right), \quad a_3 = 1, \\ \alpha = \frac{1}{G_0} \sqrt{G_0 \left( 1 + \sqrt{1 - 4n^2} \right)}, \quad \beta = \frac{1}{2G_0} \left( 1 + \sqrt{1 - 4n^2} \right)^2, \end{aligned} \quad (6.97)$$

con  $m = n \in \left[ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right] \setminus \{0\}$ . Se trata de la misma solución que en el caso escalar, por lo tanto la solución no es inflacionaria e isotropiza. Suponemos que  $G_0 > 0$  por lo que aquí, si podemos afirmar que  $G$  se comporta sólo como una función creciente,  $G \sim \beta t^{2\alpha}$ , mientras que el potencial es positivo y decreciente.

**Soluciones tipo BVI<sub>h</sub>**

En este caso encontramos dos soluciones.

1. La primera de ellas es la siguiente

$$\begin{aligned} n = \frac{m(1 - m^2 - a_2^2)}{m^2 + (a_2 - 1)^2}, \quad a_1 = \frac{2(a_2^2 + m^2) - a_2(1 + m^2 + a_2^2)}{m^2 + (a_2 - 1)^2}, \\ G_0 = \frac{2(2a_2^3 + (2a_2 + 1)m^2 - a_2^2(1 + 2m^2 + a_2^2) - m^4)}{\alpha^2(m^2 + (a_2 - 1)^2)}, \quad \beta = \frac{m^2 \alpha^2}{m^2 + (a_2 - 1)^2}, \end{aligned} \quad (6.98)$$

con  $a_2 = a_2, m = m, \alpha = \alpha$ . Resulta realmente complicado expresar la solución en función de los dos parámetros de la métrica,  $m$  y  $n$ , por lo que es necesario realizar un análisis numérico pormenorizado para ver cuál es el comportamiento de cada parámetro. No obstante, podemos decir que la solución no es inflacionaria y que isotropiza. Si por ejemplo fijamos un valor de  $\alpha = \pm 1$ , y  $m = 1/3$ , (recordar que se debe verificar la condición  $-1 \leq m + n \leq 1$ ), entonces comprobamos que tanto  $G_0$  como  $\beta$  son positivas, pero no podemos decir nada sobre el comportamiento de  $G$ , salvo que es decreciente si  $\alpha \in (-1, 0)$  y creciente si  $\alpha > 0$ .

2. La segunda, se trata del caso límite en el que  $(m + n)^2 = 1$ , es decir

$$a_1 = n + 1, \quad a_2 = -n, \quad m = -(n + 1), \quad \beta = \frac{1}{2}\alpha^2, \quad G_0 = \frac{-4n(n + 1)}{\alpha^2}, \quad \forall n \in (-1, 0), \quad (6.99)$$

o bien

$$a_1 = 1 - n, \quad a_2 = n, \quad m = -(n - 1), \quad \beta = \frac{1}{2}\alpha^2, \quad G_0 = \frac{-4n(n - 1)}{\alpha^2}, \quad \forall n \in (0, 1), \quad (6.100)$$

por lo que la solución no es inflacionaria e isotropiza. El potencial es positivo y solo puede ser decreciente si  $\alpha \in (-1, \infty) \setminus \{0\}$  por lo que tampoco obtenemos información adicional sobre el comportamiento de  $G$ .

**6.3.3. Modelo escalar sin interacción con un campo de materia****Soluciones tipo BIII**

En este caso, hemos encontrado la siguiente solución

$$\begin{aligned} a_1 = -\frac{2\gamma}{\gamma + 1}, \quad a_2 = a_3 = 1, \quad n = \frac{\sqrt{-(3\gamma + 1)(\gamma - 1)}}{2(\gamma + 1)}, \quad \forall \gamma \in \left( -\frac{1}{3}, 0 \right), \\ m = 0, \quad \alpha = -\frac{\gamma(4 + \rho_0(\gamma + 2)) + \rho_0}{(\gamma + 1)}, \quad \beta = \frac{\gamma^2(4 + \rho_0(\gamma + 1)) - \rho_0 - \gamma(4 + \rho_0)}{(\gamma + 1)}, \end{aligned} \quad (6.101)$$

con la siguiente restricción sobre  $\rho_0$

$$\rho_0 < \frac{-4\gamma}{\gamma(\gamma + 2) + 1}, \quad \forall \gamma \in \left( -\frac{1}{3}, 0 \right), \quad (6.102)$$

para garantizar que  $\alpha > 0$  con  $\gamma \in \left(-\frac{1}{3}, 0\right)$ . Se observa que es la misma que la encontrada en la caso de un fluido perfecto. De esta manera, podemos afirmar que la solución no es inflacionaria y que isotropiza, ya que tanto  $\mathcal{A}$  como  $\mathcal{W}^2$  son constantes y toman valores muy pequeños (próximos a cero). Con las restricciones encontradas,  $\beta > 0$ , por lo que el potencial es positivo y decreciente.

### Soluciones tipo BVI<sub>0</sub>

Para este modelo la solución encontrada es

$$\begin{aligned} a_1 = a_2 = \frac{1-\gamma}{2(\gamma+1)}, \quad a_3 = 1, \quad m = n = \frac{\sqrt{-(3\gamma+1)(\gamma-1)}}{2(\gamma+1)}, \\ \alpha = \frac{1}{\gamma+1} \left(1-\gamma-\rho_0(\gamma+1)^2\right), \quad \beta = \frac{(\gamma-1)(\gamma-1+\rho_0(\gamma+1)^2)}{2(\gamma+1)^2}, \end{aligned} \quad (6.103)$$

siendo la solución válida para todo valor de  $\gamma \in \left(-\frac{1}{3}, 1\right)$ . Al igual que en el caso anterior, encontramos la siguiente restricción sobre  $\rho_0$

$$\rho_0 < \frac{1-\gamma}{(\gamma+1)^2} \in (0, 3), \quad \forall \gamma \in \left(-\frac{1}{3}, 1\right), \quad (6.104)$$

de esta forma, garantizamos que  $\alpha > 0$ . Se trata, pues, del mismo tipo de solución que el encontrado en el caso de un fluido perfecto. De esta forma podemos considerar que la solución es isótropa pero no es inflacionaria, ya que el parámetro de deceleración es positivo para todo valor de  $\gamma \in \left(-\frac{1}{3}, 1\right)$ . Con las restricciones encontradas, garantizamos que el potencial es positivo y decreciente ya que  $\beta > 0$ .

### Soluciones tipo BVI<sub>h</sub>

La solución encontrada en este caso (recordar que debe verificarse la condición,  $(T^m)_{ij}^j = 0 = (T^\phi)_{ij}^j$ ), es la siguiente

$$n = -\frac{m(m^2-1+a_2^2)}{m^2+(a_2-1)^2}, \quad a_1 = \frac{2(a_2^2+m^2)-a_2(1+m^2+a_2^2)}{m^2+(a_2-1)^2}, \quad \gamma = \frac{(a_2-1)^2-m^2}{3m^2+(a_2-1)^2}, \quad (6.105)$$

de donde podemos despejar y reescribirla como sigue

$$a_2 = 1 + \frac{m\sqrt{-(\gamma-1)(3\gamma+1)}}{\gamma-1}, \quad (6.106)$$

observando que

$$a_2 = 0, \text{ si } m = \frac{1-\gamma}{\sqrt{-(\gamma-1)(3\gamma+1)}} \text{ ó } \gamma = -\frac{m^2-1}{3m^2+1}, \quad (6.107)$$

$$n = -m + \frac{\sqrt{-(\gamma-1)(3\gamma+1)}}{\gamma+1}, \quad (6.108)$$

$$a_1 = \frac{2\gamma(\gamma-1) + (\gamma+1)m\sqrt{-(\gamma-1)(3\gamma+1)}}{1-\gamma^2}, \quad (6.109)$$

viendo que

$$a_1 = 0, \text{ si } m = \frac{2\gamma(1-\gamma)}{(\gamma+1)\sqrt{-(\gamma-1)(3\gamma+1)}}. \quad (6.110)$$

En las siguientes figuras (ver Figs. (6.6)) hemos representado los parámetros  $a_1$  y  $a_2$ , junto con el plano  $z = 0$  (en color gris). Vemos que existen restricciones, tanto sobre  $\gamma$  como sobre  $m$ , ya que estamos interesados sólo en aquellos valores que hacen que  $a_1$  y  $a_2$  sean positivos.

El parámetro de deceleración es,  $q = \frac{1}{2}(1+3\gamma) > 0, \forall \gamma \in -1/3, 1]$ ; de momento no podemos obtener restricciones sobre  $\gamma$ . Con los valores obtenidos de los factores de escala resulta complicado obtener expresiones compactas para los parámetros de anisotropía,  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{W}^2$ . Por esta razón, para poder determinar su comportamiento,

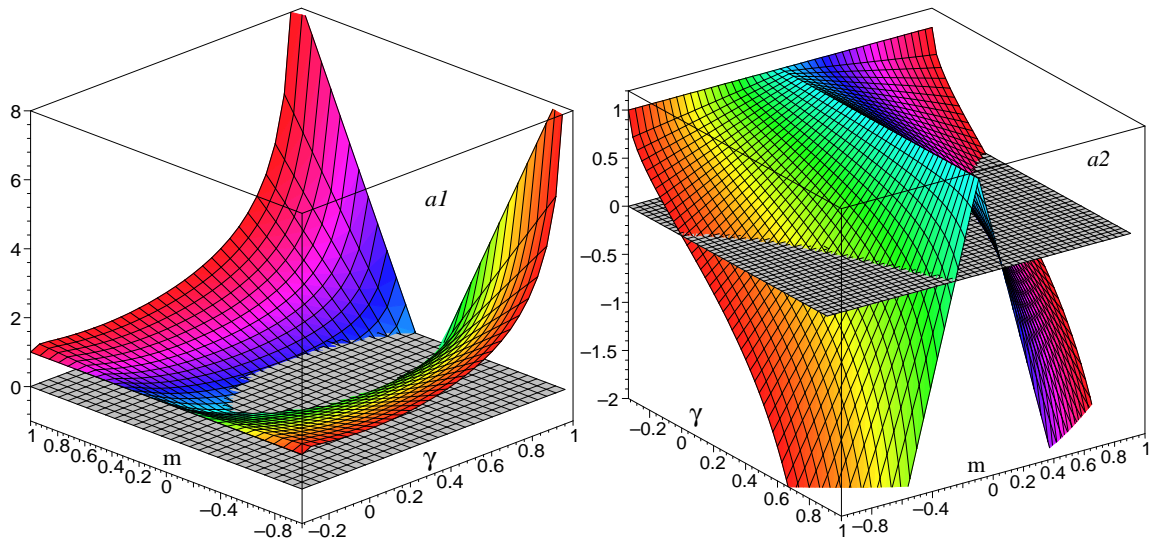


Figura 6.6: Gráficas de los parámetros  $a_1$  y  $a_2$ , junto con el plano  $z = 0$ .  $\gamma \in (-1/3, 1)$ , y  $m \in [-1, 1]$ .

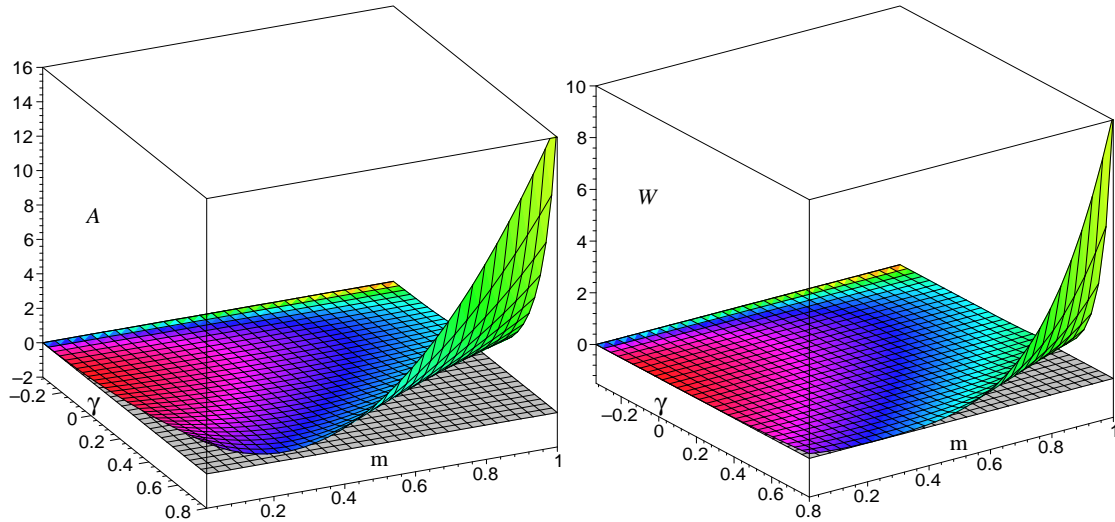


Figura 6.7: Gráficas de los parámetros  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{W}^2$  junto con el plano  $z = 0$ .  $\gamma \in (-1/3, 1)$  y  $m \in (0, 1)$ .

nos limitaremos a estudiar las gráficas de ambas magnitudes (ver Figs. (6.7)). Vemos que sólo podemos considerar la solución como isotrópica para valores restringidos de  $\gamma$  y  $m$  ya que cuando dichos parámetros  $(\gamma, m)$  tienden a 1, tanto  $\mathcal{A}$  como  $\mathcal{W}^2$  toman valores significativamente altos.

Por otro lado, la entropía gravitatoria (cuya expresión matemática hemos omitido por ser extremadamente larga) vemos que se comporta de forma patológica, tal y como podemos observar en el siguiente gráfico (ver Fig. (6.8))

Con respecto a los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$ , vemos que el álgebra nos lleva a obtener la siguiente expresión para  $\alpha$

$$\alpha = \frac{\left(\rho_0 (\gamma - 1) (\gamma + 1)^2 + 4 (\gamma + 1) m \sqrt{-(\gamma - 1) (3\gamma + 1)} - 4m^2 (\gamma + 1)^2 + 4\gamma (\gamma - 1)\right)}{(1 - \gamma^2)}, \quad (6.111)$$

donde  $\alpha = 0$  si

$$\rho_0 = \frac{\left(-4m^2 (\gamma + 1)^2 + 4\gamma (\gamma - 1) + 4m (\gamma + 1) \sqrt{-(\gamma - 1) (3\gamma + 1)}\right)}{(1 - \gamma) (\gamma + 1)^2}; \quad (6.112)$$

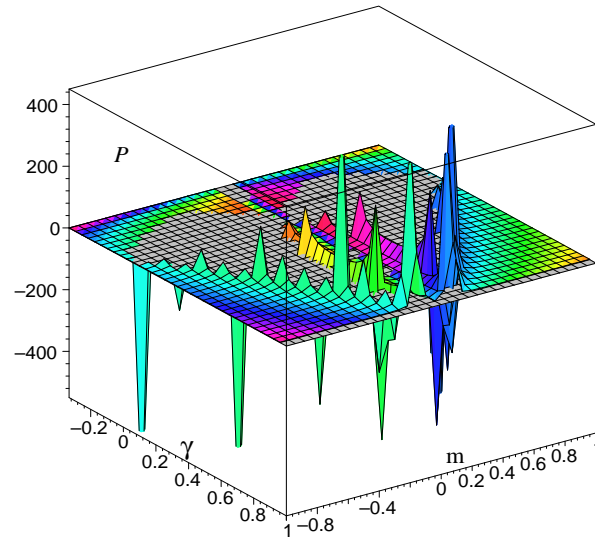


Figura 6.8: Gráfica de la entropía gravitatoria  $\mathcal{P}^2$  junto con el plano  $z = 0$ .  $\gamma \in (-1/3, 1)$ , y  $m \in [-1, 1]$ .

por otra parte encontramos que

$$\beta = \frac{\left(\rho_0(\gamma - 1)(\gamma + 1)^2 + 4(\gamma + 1)m\sqrt{-(\gamma - 1)(3\gamma + 1) - 4m^2(\gamma + 1)^2} + 4\gamma(\gamma - 1)\right)}{2(\gamma + 1)^2}. \quad (6.113)$$

En la figura adjunta (ver Figs. (6.9)) hemos representado los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  junto con el plano  $z = 0$ , para resaltar aquellos valores en los que son positivos. Tal y como se observa, del análisis de dichas gráficas se desprende que existen fuertes restricciones para  $\gamma$  y  $m$ , ya que únicamente estamos interesados en aquellos valores que hacen que  $\alpha$  sea positiva, al igual que aquellos para los que  $\beta > 0$ , ya que el potencial imita el comportamiento de la constante cosmológica.

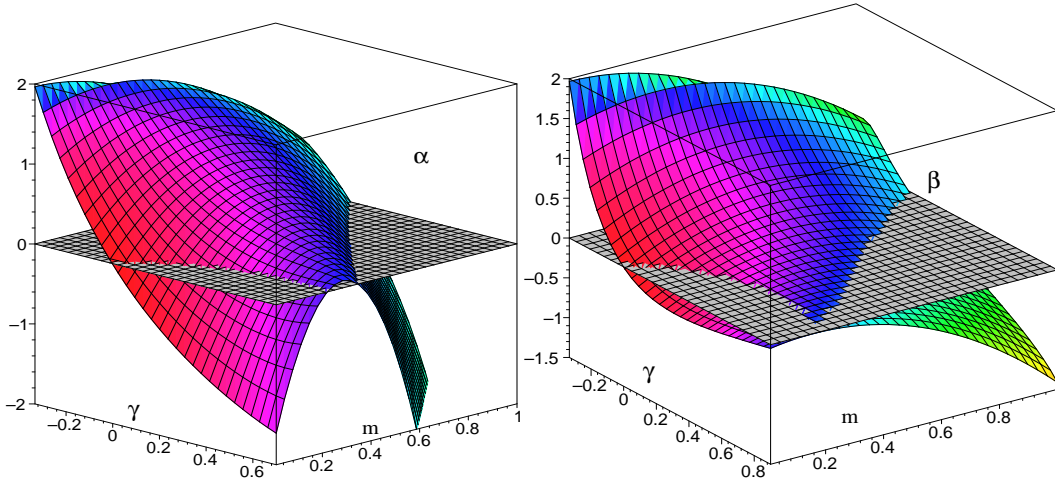


Figura 6.9: Gráficas de los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  junto con el plano  $z = 0$ .  $\gamma \in (-1/3, 1)$ ,  $m \in (0, 1)$  y  $\rho_0 = 1/20$ .

El análisis numérico llevado a cabo nos muestra que, si por ejemplo fijamos un valor para  $m$ ,  $m = 1/2$  y  $\rho_0 = 1/20$ , entonces,  $a_2 > 0 \forall \gamma \in (-1/3, \gamma_c)$  donde  $\gamma_c = 0,428$ , por lo que la solución sólo será válida en este intervalo, ya que  $a_2(\gamma) = 0$ , si  $\gamma_c = 0,428$ . Comprobamos que  $a_1 > 0 \forall \gamma \in (-1/3, \gamma_c)$ , y que  $n \in (-1/2, 1/2)$ . Por otro lado vemos que tanto  $\alpha$  como  $\beta$  son positivas en este intervalo. La solución tampoco es inflacionaria ya que  $q = \frac{1}{2}(1 + 3\gamma) > 0, \forall \gamma \in (-1/3, \gamma_c)$ , y que isotropiza (con los valores numéricos fijados) ya que los dos parámetros de anisotropía toman valores pequeños,  $\mathcal{A} \in (0, 0,4)$ , o muy próximos a cero  $\mathcal{W}^2 \ll 0,01$ , (con

$m = 1/2$  y  $n \in (-1/2, 1/2)$ ). Sin embargo la entropía gravitatoria se comporta de forma bastante patológica, ya que tiende a  $-\infty$  a medida que  $\gamma \rightarrow \gamma_c$ .

### 6.3.4. Modelo escalar sin interacción con un campo de materia y G variable

#### Soluciones tipo BIII

La solución encontrada es la siguiente

$$\begin{aligned} a_2 = a_3 = 1, \quad a_1 = -\frac{2\gamma}{\gamma+1}, \quad n = \frac{\sqrt{-(3\gamma+1)(\gamma-1)}}{\gamma+1}, \quad \gamma \in \left(-\frac{1}{3}, 0\right), \\ \beta = \frac{\alpha^2(1-\gamma)}{2(\gamma+1)}, \quad \rho_0 = -\frac{4\gamma + \alpha^2 G_0(1+\gamma)}{G_0(\gamma+1)^2}, \quad m = 0, \end{aligned} \quad (6.114)$$

con la restricción

$$\left| \frac{4\gamma}{(1+\gamma)G_0} \right| > \alpha^2, \quad (6.115)$$

para poder garantizar  $\rho_0 > 0$ . La solución es similar a la ya hallada en la sección correspondiente al estudio del modelo no interactivo entre la materia y el campo escalar, por lo que las conclusiones son parecidas, esto es, la solución es isótropa y no inflacionaria. El potencial es positivo y decreciente si  $\alpha > -1$ , pero no podemos afirmar nada sobre el comportamiento de  $G$ , ya que la restricción sobre  $\alpha$  no nos dice nada sobre su signo.

#### Soluciones tipo BVI<sub>0</sub>

La solución encontrada es la siguiente

$$\begin{aligned} a_3 = 1, \quad a_1 = a_2 = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1-4n^2}\right) = \frac{1-\gamma}{2(\gamma+1)}, \quad \gamma \in \left(-\frac{1}{3}, 1\right), \\ n = \frac{\sqrt{-(3\gamma+1)(\gamma-1)}}{2(\gamma+1)}, \quad \rho_0 = \frac{1-\omega - \alpha^2 G_0(\gamma+1)}{G_0(\gamma+1)^2}, \quad \beta = \alpha^2 a_2, \end{aligned} \quad (6.116)$$

viendo que la solución sólo está definida en el intervalo  $\gamma \in \left(-\frac{1}{3}, 1\right)$ , de tal forma que para dicho intervalo  $a_1 = a_2 \in (0, 1)$ . La única restricción que imponemos es la siguiente

$$\alpha^2 < \frac{1-\gamma}{G_0(\gamma+1)}, \quad (6.117)$$

de modo que  $\rho_0 > 0$ . La solución encontrada no es inflacionaria pues  $q = \frac{1}{2}(3\gamma+1) > 0, \forall \gamma \in I = \left(-\frac{1}{3}, 1\right)$ , e isotropiza ya que  $\mathcal{A} = \frac{1}{24}(3\gamma+1)^2$ , mientras que  $\mathcal{W}^2 = \frac{(3\gamma+1)^2(\gamma-1)(2\gamma+1)}{576} \rightarrow 0, \forall \gamma \in I$ , es decir, el parámetro de Weyl puede hacerse arbitrariamente pequeño en función del valor que tome  $\gamma$ . La entropía gravitatoria se comporta de la siguiente forma:  $P^2 = \frac{2(3\gamma+1)^2(5\gamma+1)}{3(\gamma-1)(1+3\gamma^2)}$ . No podemos decir nada sobre el comportamiento de  $G$ , ya que no hemos acotado o determinado el signo de  $\alpha$ , lo único que podemos decir con respecto al potencial es que es positivo y decreciente si  $\alpha > -1$ .

#### Soluciones tipo BVI<sub>h</sub>

Para este modelo hemos encontrado la siguiente solución

$$\begin{aligned} a_1 = 1 - \frac{n(3\gamma+1)}{\sqrt{-(3\gamma+1)(\gamma-1)}}, \quad a_2 = \frac{\gamma \left( n(3\gamma+4) - 2\sqrt{-(3\gamma+1)(\gamma-1)} \right)}{(\gamma+1)\sqrt{-(3\gamma+1)(\gamma-1)}}, \quad a_3 = 1, \\ m = -n + \frac{\sqrt{-(3\gamma+1)(\gamma-1)}}{(\gamma+1)}, \quad \beta = \frac{\alpha^2(1-\gamma)}{2(\gamma+1)}, \\ \rho_0 = \frac{4 \left( (\gamma+1)^2 n^2 + \gamma \right) - \gamma^2 (4 + \alpha^2 G_0) - 4n(\gamma+1)\sqrt{-(3\gamma+1)(\gamma-1)}}{G_0(\gamma-1)(\gamma+1)^2}, \end{aligned} \quad (6.118)$$

observando en primer lugar que,  $a_1 = 0$ , si

$$n = \frac{\sqrt{-(\gamma-1)(3\gamma+1)}}{3\gamma+1}, \quad (6.119)$$

mientras que,  $a_2 = 0$ , si

$$n = \frac{2\sqrt{-(\gamma-1)(3\gamma+1)}}{3\gamma+4} \text{ y } \gamma = 0, \quad (6.120)$$

y  $\rho_0 = 0$  si

$$n = \frac{\sqrt{-(3\gamma+1)(\gamma-1)} \pm \sqrt{-(3\gamma+1)(\gamma-1) + \alpha^2\gamma^2 G_0}}{2(\gamma+1)}. \quad (6.121)$$

El análisis numérico llevado a cabo arroja los siguientes resultados. Si fijamos, por ejemplo,  $n = 1/4$ , entonces encontramos que  $a_1 > 0, \forall \gamma \in (-\frac{1}{3}, \gamma_c)$ , donde  $\gamma_c = 0,7894$ , mientras que  $a_2 > 0$  solo en el intervalo  $(-0,2942, 0) = I$ . En este intervalo,  $\rho_0 > 0$  al igual que  $\beta > 0$ . La solución no es inflacionaria ya que  $q > 0$  en  $I$  e isotropiza, ya que  $\mathcal{A} < 0,2 \forall \gamma \in I$  y  $\mathcal{W}^2 \rightarrow 0, \forall \gamma \in I$ , i.e., el parámetro de Weyl toma valores muy próximos a cero. Bajo estas condiciones, la solución sólo es válida en  $I$ . Sin embargo, no podemos decir nada sobre el comportamiento de  $G$ , pues no hemos obtenido ninguna restricción sobre  $\alpha$ . El potencial se comporta como una función positiva y decreciente si  $\alpha \in (-1, \infty) \setminus \{0\}$ .

### 6.3.5. Modelo escalar interactuando con un campo de materia

#### Primer enfoque

No encontramos solución tipo BIII para este modelo. La solución tipo BVI<sub>0</sub> es la siguiente

$$a_1 = a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_3 = 1, \quad m = n = \pm \frac{1}{2}, \quad \alpha = 1 - \rho_0(\gamma + 1), \quad \beta = \frac{1}{2}(1 + \rho_0(\gamma - 1)), \quad (6.122)$$

donde la única condición que debemos imponer es:  $\rho_0 < \frac{1}{\gamma+1}$ . Esta solución no es inflacionaria e isotropiza. Si  $\gamma = 0$ , entonces  $\alpha = 1 - \rho_0$ , y  $\beta = \frac{1}{2}(1 - \rho_0) > 0$ .

Sin embargo, para el caso BVI<sub>h</sub> hemos encontrado las siguientes soluciones.

1. La primera de las soluciones es

$$a_1 = m, \quad a_2 = 1 - m, \quad n = a_2, \quad \alpha = 4m(1 - m) - \rho_0(\gamma + 1), \quad \beta = 2m(1 - m) + \frac{1}{2}\rho_0(\gamma - 1), \quad (6.123)$$

que es válida para todo  $m \in (0, 1)$  y  $\forall \gamma \in (-1, 1]$  con la condición  $\rho_0 < 4m(1 - m) / (\gamma + 1)$ . Tal y como ya sabemos, este tipo de soluciones no es inflacionaria e isotropiza. Bajo estas condiciones  $\beta > 0$ , lo que sugiere una constante cosmológica positiva.

2. La segunda solución es tipo fantasma ya que

$$a_1 = \frac{1}{2} \left( 1 + \sqrt{1 - 4n(1 + n)} \right) = m, \quad a_2 = -n, \quad \alpha = -\rho_0(\gamma + 1), \quad \beta = \frac{1}{2}\rho_0(\gamma - 1), \quad (6.124)$$

de donde  $a_1 \in \mathbb{R}^+ \iff n \in (-1, 207, 0, 207)$ , pero  $a_2 \in \mathbb{R}^+ \iff n < 0$ . Por otro lado, tenemos que  $\alpha > 0 \iff \gamma < -1$ , pero  $\beta < 0$  si  $\gamma < -1$ . La solución no es inflacionaria, ya que

$$q = -\frac{(2n + 3\sqrt{-4n^2 - 4n + 1} + 4n^2 - 5)}{4(n^2 - n + 1)} > 0, \quad \forall n \in (-1, 207, 0). \quad (6.125)$$

De esta manera, la solución sólo es válida si  $n \in (-1, 207, 0)$  y  $\gamma < -1$ , por lo que el potencial es negativo. Si tenemos en cuenta las observaciones recientes que sugieren que  $\Lambda > 0$ , entonces deberíamos descartar esta solución.

### Segundo enfoque

Para este modelo hemos encontrado las siguientes soluciones

#### 1. Solución tipo BIII

$$\begin{aligned} a_1 &= \sqrt{1-n^2}, \quad a_2 = a_3 = 1, \quad n \in (-1, 1) \setminus \{0\}, \\ \alpha &= 2a_1 - \rho_0(\gamma + 1), \quad \beta = a_1(1 + a_1) + \frac{1}{2}\rho_0(\gamma - 1), \quad \delta = -\frac{a_1(\gamma + 1) + 2\gamma}{\sqrt{\alpha}}. \end{aligned} \quad (6.126)$$

Ya sabemos que este tipo de solución no es inflacionaria y que isotropiza. La única restricción que encontramos es la siguiente  $\rho_0 < \frac{2a_1}{(\gamma+1)}$ ; de esta forma aseguramos que  $\alpha > 0$ . Con esta restricción encontramos que  $\beta > 0$  y  $\delta < 0$ , si  $\gamma \in \left(-\frac{1}{3}, 1\right)$ , ya que  $\delta = 0$  si  $\gamma = -\frac{a_1}{a_1+2}$ . Por tanto, la solución es válida si  $n \in (-1, 1) \setminus \{0\}$  y  $\gamma \in \left(-\frac{1}{3}, 1\right)$  con la restricción  $\rho_0 < \frac{2a_1}{(\gamma+1)}$ .

#### 2. Solución tipo BVI<sub>0</sub>

$$\begin{aligned} a_1 = a_2 &= \frac{1}{2} \left(1 \pm \sqrt{1-4n^2}\right) \in (0, 1), \quad a_3 = 1, \quad m = n \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \setminus \{0\}, \\ \alpha &= 2a_1 - \rho_0(\gamma + 1), \quad \beta = 2a_1^2 + \frac{1}{2}\rho_0(\gamma - 1), \quad \delta = -\frac{2a_1 - 1 + \gamma(2a_1 + 1)}{\sqrt{\alpha}}, \end{aligned} \quad (6.127)$$

la única restricción que encontramos es la siguiente:  $\rho_0 < \frac{2a_1}{(\gamma+1)}$ , de esta forma, aseguramos que  $\alpha > 0$ .  $\delta = 0$  si  $\gamma = -\frac{2a_1-1}{2a_1+1}$ , (si  $a_1 \neq \frac{1}{2}$ ). Ya sabemos que este tipo de solución no es inflacionaria y que isotropiza. Por tanto, la solución es válida si  $n \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \setminus \{0\}$  y  $\gamma \in \left(-\frac{1}{3}, 1\right)$  con la restricción  $\rho_0 < \frac{2a_1}{(\gamma+1)}$ .

#### 3. Solución tipo BVI<sub>h</sub>

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{2(a_2^2 + m^2) - a_2(1 + m^2 + a_2^2)}{m^2 + (a_2 - 1)^2}, \quad n = -\frac{m(m^2 - 1 + a_2^2)}{m^2 + (a_2 - 1)^2}, \\ \delta &= \frac{(a_2 - 1)^2(\gamma - 1) + m^2(3\gamma + 1)}{(m^2 + (a_2 - 1)^2)\sqrt{\alpha}}, \quad \alpha = -2m^2 - (\gamma + 1)\rho_0 - \frac{2a_2^2(a_2 - 1)^2}{m^2 + (a_2 - 1)^2}, \\ \beta &= -\frac{(1 - \gamma)\rho_0}{2(m^2 + (a_2 - 1)^2)^2} \left[1 + a_2(a_2 - 2)(2a_2 - a_2^2 - 2) - \right. \\ &\quad \left. -m^2 \left( (m^2 + 2) + 2a_2(a_2 - 2) - 4(-m - a_2 + a_2^2 + m^2)(m - a_2 + a_2^2 + m^2) \right) \right], \end{aligned} \quad (6.128)$$

viendo que

$$\delta = 0 \quad \text{si} \quad \gamma = \frac{(a_2 - 1)^2 - m^2}{(a_2 - 1)^2 + 3m^2}. \quad (6.129)$$

El análisis numérico llevado a cabo nos indica que la solución es válida si  $\gamma \in \left(-\frac{1}{3}, 1\right)$ , bajo las condiciones  $-1 \leq m + n \leq 1$ . Para este tipo de solución ya sabemos que isotropiza y que no es inflacionaria. Para estos parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  son constantes positivas, mientras que  $\delta < 0$  (lo cual es termodinámicamente consistente).

### Tercer enfoque

Para este modelo hemos encontrado las siguientes soluciones

## 1. Tipo BIII

$$\begin{aligned} a_1 &= \sqrt{1-n^2} \in (0,1), & a_2 &= a_3 = 1, & n &\in (-1,1) \setminus \{0\}, \\ \alpha &= 2a_1 - \rho_0(\gamma+1), & \beta &= a_1(a_1+1) + \rho_0(\gamma-1), & \delta &= \frac{a_1}{2+a_1} + \gamma, \end{aligned} \quad (6.130)$$

donde debemos imponer la condición

$$\rho_0 < \frac{2a_1}{(\gamma+1)}. \quad (6.131)$$

Además se observa que

$$\delta = 0 \quad \text{si} \quad \gamma = -\frac{a_1}{a_1+2}, \quad (6.132)$$

por lo que la solución es válida  $\forall \gamma \in \left(-\frac{1}{3}, 1\right)$  y  $n \in (-1,1) \setminus \{0\}$ ; de esta forma  $\alpha, \beta$  y  $\delta$  son constantes positivas. La solución isotropiza y no es inflacionaria.

2. Solución tipo BVI<sub>0</sub>

$$\begin{aligned} a_1 &= a_2 = \frac{(1 \pm \sqrt{1-4n^2})}{2} \in (0,1), & \forall n &\in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \setminus \{0\}, \\ \alpha &= 2a_2 - \rho_0(\gamma+1), & \beta &= 2a_2^2 + \frac{\rho_0}{2}(\gamma-1), & \delta &= \frac{2a_2(\gamma+1) + \gamma - 1}{2a_2 + 1}, \end{aligned} \quad (6.133)$$

con las siguientes restricciones

$$\rho_0 < \frac{2a_2}{(1+\gamma)}, \quad (6.134)$$

$$\delta = 0 \quad \text{si} \quad \gamma = \frac{1-2a_2}{2a_2+1}, \quad (6.135)$$

por lo que la solución es válida  $\forall \gamma \in \left(-\frac{1}{3}, 1\right)$  y  $n \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \setminus \{0\}$ ; de esta forma  $\alpha, \beta$  y  $\delta$  son constantes positivas. Este tipo de soluciones isotropiza y no son inflacionarias.

3. Solución tipo BVI<sub>h</sub>

$$\begin{aligned} n &= -\frac{m(m^2-1+a_2^2)}{m^2+(a_2-1)^2}, & a_1 &= \frac{2(a_2^2+m^2)-a_2(1+m^2+a_2^2)}{m^2+(a_2-1)^2}, \\ \delta &= \frac{(\gamma-(a_2-1)^2 + \gamma a_2(a_2-2) + m^2(1+3\gamma))}{3m^2+(a_2-1)^2}, \\ \alpha &= -\frac{(2a_2^2(a_2-1)^2 + 2m^2(1+m^2) + 4a_2m^2(a_2-1) + \rho_0((\gamma+1)((a_2-1)^2+m^2)))}{m^2+(a_2-1)^2}, \\ \beta &= \frac{2m^2(m-a_2+a_2^2+m^2)(-m-a_2+a_2^2+m^2)}{(m^2+(a_2-1)^2)^2} - \frac{\rho_0(\gamma-1)}{2}. \end{aligned} \quad (6.136)$$

Tal y como podemos observar

$$\delta = 0, \quad \text{si} \quad \gamma = \frac{(a_2-1)^2 - m^2}{a_2(a_2-2) + 3m^2 + 1}.$$

Sabemos que esta solución isotropiza y que no es inflacionaria,  $\forall \gamma \in \left(-\frac{1}{3}, 1\right)$  y  $(n+m)^2 = 1$ ; de esta forma  $\alpha, \beta$  y  $\delta$  son constantes positivas. El análisis numérico nos muestra que los resultados son sensibles a la constante  $\rho_0$  debiendo fijar  $\rho_0 < \frac{1}{4}$ .

### 6.3.6. Modelo escalar interactuando con un campo de materia y G variable

#### Soluciones tipo BIII

No existe solución física para esta métrica.

#### Soluciones tipo BVI<sub>0</sub>

En este modelo la solución encontrada es la siguiente

$$\begin{aligned} a_1 = a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_3 = 1, \quad m = n = \pm \frac{1}{2}, \\ \rho_0 = \frac{1 - \alpha^2 G_0}{(\gamma + 1) G_0}, \quad \beta = \frac{2\gamma + (1 - \gamma)\alpha^2 G_0}{(\gamma + 1) G_0}, \quad \delta = \gamma. \end{aligned} \quad (6.137)$$

Para garantizar que la densidad de energía sea positiva, debemos imponer la restricción,  $\alpha^2 < \frac{1}{G_0}$ . Al mismo tiempo, la constante  $\delta$  debe ser positiva (termodinámicamente consistente), por lo que

$$\delta = 0 \quad \text{si} \quad \gamma = 0. \quad (6.138)$$

De esta forma, llegamos a la conclusión de que la solución únicamente es válida si  $\gamma \in (0, 1]$ . La solución isotropiza y no es inflacionaria. Sin embargo, no hemos obtenido ninguna restricción sobre  $\alpha$  y en consecuencia, no sabemos si  $G$  es creciente o decreciente.  $\beta > 0 \forall \gamma \in (0, 1]$  con la restricción encontrada para  $\alpha$ .

#### Soluciones tipo BVI<sub>n</sub>

Para este modelo hemos encontrado la siguiente solución

$$\begin{aligned} a_1 = 1 + n, \quad a_2 = -n, \quad m = -1 - n, \quad \gamma = \frac{-4n(n+1) - G_0(\alpha^2 + \rho_0)}{G_0\rho_0}, \\ \delta = \gamma, \quad \beta = \frac{-G_0(\alpha^2 + 2\rho_0) - 8n(n+1)}{G_0\rho_0}, \quad n \in (-1, 0). \end{aligned} \quad (6.139)$$

Podemos despejar  $G_0$

$$G_0 = \frac{-4n(n+1)}{(\gamma+1)\rho_0 + \alpha^2}, \quad (6.140)$$

pero no encontramos más restricciones a los parámetros. Por lo tanto, la solución es válida  $\forall \gamma \in (0, 1]$  y  $(n+m)^2 = 1$ , no siendo inflacionaria e isotropiza, como ya sabemos. De igual forma observamos que  $\beta > 0$ , lo que sugiere una constante cosmológica positiva y decreciente siempre y cuando  $\alpha \in (-1, \infty) \setminus \{0\}$ ; pero no podemos determinar el signo de  $\alpha$ , por lo que no podemos afirmar nada sobre el comportamiento de  $G$ , es decir, saber si es creciente o decreciente.

## 6.4. Modelos tenso-escalares

### 6.4.1. Modelo con constante cosmológica

Las ecuaciones de campo para este modelo son las siguientes

$$\frac{a' b'}{a b} + \frac{a' d'}{a d} + \frac{d' b'}{d b} + \frac{K}{d^2} = 8\pi \frac{\rho}{\phi} + \frac{\omega \phi'^2}{2 \phi^2} - \left( \frac{a'}{a} + \frac{b'}{b} + \frac{d'}{d} \right) \frac{\phi'}{\phi} + \Lambda, \quad (6.141)$$

$$m \left( \frac{a'}{a} - \frac{d'}{d} \right) + n \left( \frac{d'}{d} - \frac{b'}{b} \right) = 0, \quad (6.142)$$

$$\frac{b''}{b} + \frac{d''}{d} + \frac{d' b'}{d b} - \frac{n^2}{d^2} = -8\pi \frac{p}{\phi} - \frac{\phi''}{\phi} - \frac{\omega \phi'^2}{2 \phi^2} - \left( \frac{b'}{b} + \frac{d'}{d} \right) \frac{\phi'}{\phi} + \Lambda, \quad (6.143)$$

$$\frac{d''}{d} + \frac{a''}{a} + \frac{a' d'}{a d} - \frac{m^2}{d^2} = -8\pi \frac{p}{\phi} - \frac{\phi''}{\phi} - \frac{\omega \phi'^2}{2 \phi^2} - \left( \frac{a'}{a} + \frac{d'}{d} \right) \frac{\phi'}{\phi} + \Lambda, \quad (6.144)$$

$$\frac{b''}{b} + \frac{a''}{a} + \frac{a' b'}{a b} + \frac{mn}{d^2} = -8\pi \frac{p}{\phi} - \frac{\phi''}{\phi} - \frac{\omega \phi'^2}{2 \phi^2} - \left( \frac{a'}{a} + \frac{b'}{b} \right) \frac{\phi'}{\phi} + \Lambda, \quad (6.145)$$

además de las ecuaciones de conservación. Encontramos las siguientes soluciones.

#### Solución tipo BIII

La solución que hemos encontrado en este caso es

$$\begin{aligned} a_2 &= -\frac{2\gamma(\omega(\gamma-1)-1)}{-\omega(1-\gamma^2)+2(\gamma-1)} \in (0,1), & a_1 &= a_3 = 1, & \Lambda_0 &= 0, & \forall \gamma &\in \left(-\frac{1}{3}, 0\right), \\ m &= \sqrt{\frac{-(a_2-1)^2+A}{\omega}} \in (0,1), & \rho_0 &= -\frac{(2+a_2)B\phi_0}{8\pi\omega(\omega((a_2+1)^2-4)-(a_2-1)^2+A)}, \\ \tilde{n} &= \frac{-2\gamma}{(\gamma-1)} \frac{(3\gamma-1)}{\omega(\gamma+1)+2}, & q &= \frac{-\omega(3\gamma+1)(\gamma-1)+2}{2\omega(1-\gamma)-6\gamma+4}, \end{aligned} \quad (6.146)$$

siendo

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{(a_2-1)^4 + \omega(a_2-1)^2 \left( \omega(1+a_2)^2 + 2(a_2+a_2^2+1) \right)} \\ B &= 2(a_2-1)^3 + \omega(a_2-1) \left( \omega(2\omega(a_2+1)^2 + 3(a_2+1)^2 + 4) + 6 + (a_2+1)^2 \right) \\ &\quad + A(\omega(2\omega(a_2+1) + 5 + a_2) + 2 - 2a_2). \end{aligned}$$

En primer lugar, resaltamos que la constante cosmológica es nula. Fijando el valor del parámetro de Brans-Dicke,  $\omega = 4 \cdot 10^4$ , vemos que la solución es válida  $\forall \gamma \in \left(-\frac{1}{3}, 0\right)$ . La densidad de energía es decreciente siendo  $\rho_0 > 0, \forall \gamma \in \left(-\frac{1}{3}, 0\right)$ . La solución obtenida no es inflacionaria, ya que  $q > 0, \forall \gamma \in \left(-\frac{1}{3}, 0\right)$ ; precisamente  $q < 0$  si  $\gamma < -\frac{1}{3}$ . Con respecto a los parámetros de isotropía, vemos que el primero de ellos,  $\mathcal{A} = \frac{(a_2-1)^2}{(4a_2-1)^2} \in \left[0, \frac{5}{2}\right)$ ,  $\forall \gamma \in \left(-\frac{1}{3}, 0\right)$ , es decir,  $\mathcal{A}$  no es arbitrariamente pequeño en todo el intervalo de definición, precisamente en los extremos del intervalo de definición de  $\gamma$ ,  $\mathcal{A}$  adquiere el valor  $\frac{5}{2}$ , por lo que en dichos puntos la solución no puede considerarse como isótropa. Sin embargo, toma el valor cero para otros valores de  $\gamma$ , de esta manera, en estos puntos la solución sí es isótropa. No obstante, el segundo parámetro de isotropía sí que toma valores arbitrariamente pequeños,  $\mathcal{W}^2 \ll 0,0004$ , por lo que, y con respecto a este segundo criterio, sí podemos afirmar que la solución es isótropa. La constante de Newton se comporta como una función decreciente  $\forall \gamma \in \left(-\frac{1}{3}, 0\right)$ , ya que para estos valores el parámetro  $\tilde{n}$  es positivo. La entropía gravitatoria  $P^2 \in [0, 0,2)$ , en este caso, no muestra un comportamiento patológico, tomando valores muy próximos a cero en todo el intervalo de definición.

**Solución tipo BVI<sub>0</sub>**

La solución del sistema algebraico asociado a las ecuaciones de campo arroja el siguiente resultado

$$\begin{aligned}
a_1 = a_2 &= -\frac{1 - \gamma + \omega(\gamma + 1)^2}{2(\gamma^2 - 1)\omega + \gamma - 3} \in (0, 1), & m = n &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{A - (a_2 - 1)^2}{\omega}} \in \left(0, \frac{1}{2}\right), \\
\Lambda_0 &= 0, & \rho_0 &= \frac{-\phi_0(1 + 2a_2)B}{8\pi\omega(A + 4(a_2^2 - 1)\omega - (a_2 - 1)^2)}, & \forall \gamma &\in \left(-\frac{1}{3}, 1\right), \\
\tilde{n} &= \frac{8\gamma\omega(\gamma + 1) - (3\gamma - 1)(\gamma - 1)}{2\omega(\gamma^2 - 1) + \gamma - 3}, & q &= \frac{2(-\omega(\gamma + 1)(3\gamma - 1) + 2)}{4\omega(\gamma + 1) - 3\gamma + 5},
\end{aligned} \tag{6.147}$$

donde

$$\begin{aligned}
A &= \sqrt{(a_2 - 1)^2(8a_2^2\omega(2\omega + 3) + (a_2 - 1)^2)}, \\
B &= (2\omega(a_2 - 1)(2\omega a_2(7a_2 + 4\omega a_2 + 1) + a_2(4a_2 + 1) + 1) + (a_2 - 1)^3 + A(2\omega(2a_2 + 2\omega a_2 + 1) + 1 - a_2)).
\end{aligned} \tag{6.148}$$

Esta solución es válida para  $\forall \gamma \in \left(-\frac{1}{3}, 1\right)$ , ya que sólo en este entorno,  $\rho_0 > 0$ . Fijando el valor del parámetro de Brans-Dicke,  $\omega = 4 \cdot 10^4$ , vemos que la solución es válida  $\forall \gamma \in \left(-\frac{1}{3}, 1\right)$ . En dicho intervalo la constante cosmológica es nula. El parámetro  $\tilde{n}$  se anula en  $\gamma_c = \frac{1}{3}$  siendo  $\tilde{n} > 0$  en  $\forall \gamma \in \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ ; por tanto, la constante de gravitación es decreciente en este intervalo, constante en  $\gamma_c = \frac{1}{3}$  y creciente en  $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$ . La solución obtenida no es inflacionaria, ya que el parámetro de deceleración es positivo en todo el intervalo. Consideramos que la solución es isotropa, ya que los dos parámetros de anisotropía están muy próximos a cero,  $\mathcal{A} \in (0, 1)$ , únicamente tendiendo a 1 cuando  $\gamma \rightarrow 1$ , mientras que  $\mathcal{W}^2 \ll 0,01$  en todo el intervalo de definición. Sin embargo, la entropía gravitatoria sólo toma valores próximos a cero en un entorno de  $\gamma = -1/3$ , tendiendo a  $-\infty$  en el resto del intervalo.

**Solución tipo BVI<sub>h</sub>**

La solución encontrada en este caso es la siguiente

$$\begin{aligned}
\Lambda_0 &= \frac{1}{3} \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\omega + 2 \left( 1 + \frac{2\omega}{3} \right) \left( (a_1 + a_2)^2 - a_1 - a_2 \right) \right], & \gamma &= \frac{1}{3}, \\
m &= \frac{\sqrt{3}}{3}(a_2 - 1), & n &= \frac{\sqrt{3}}{3}(a_1 - 1), & \phi_0 &= 1, \\
\rho_0 &= -\frac{1}{48\pi} \left( 2\omega \left( -4a_1 - 4a_2 + 4(a_1^2 + 2a_2^2 + 2a_1a_2) + 1 \right) + 2 \left( 7a_1^2 + 7a_2^2 + 8a_1a_2 \right) - 8(a_2 + a_1) - 1 \right), \\
\tilde{n} &= 2 - (\gamma + 1)(a_1 + a_2 + 1), & q &= \frac{3}{(a_1 + a_2 + 1)} - 1.
\end{aligned} \tag{6.149}$$

En primer lugar, resaltamos el hecho de que, en este caso, la “constante” cosmológica es no nula, i.e.,  $\Lambda_0 \neq 0$ , siendo sólo válida la solución para un parámetro de la ecuación de estado en el que,  $\gamma = \frac{1}{3}$ ; de esta forma, la ecuación de ondas para el campo escalar  $\phi$  se simplifica. La solución obtenida depende de dos parámetros,  $a_1$  y  $a_2$ , por lo que es necesario llevar a cabo un análisis numérico. Fijando el parámetro de Brans-Dicke,  $\omega = 4 \cdot 10^4$ , tal y como se desprende de las recientes observaciones, y haciendo variar los parámetros  $a_1$  y  $a_2$  en  $(0, 1)$ , entonces podemos analizar, a través de las figuras adjuntas (ver Fig. 6.10), como se comportan los parámetros  $\Lambda_0, \rho_0$  y  $\tilde{n}$ . Vemos que la densidad de energía sólo es positiva en un “pequeño” intervalo donde, además, la constante cosmológica es positiva excepto en un subintervalo donde es negativa (ver Fig. 6.10).

Si por ejemplo, fijamos  $a_1 = 1/5$ , entonces obtenemos los siguientes resultados. El parámetro de la densidad de energía sólo es positivo,  $\rho_0 > 0$ , si  $a_2 \in (0, 2973605134, 0, 3026282371) = I_1$ , mientras que la constante cosmológica es negativa,  $\Lambda_0 < 0$ , si  $a_2 \in (0, 2999893937, 0, 3000106065) = I_2$ , observándose que  $I_2 \subset I_1$ , siendo positiva o nula,  $\Lambda_0 \geq 0, \forall a_2 \in I_1 \setminus I_2$ . De igual forma, vemos que el parámetro del campo escalar,  $\tilde{n}$ , únicamente se anula,  $\tilde{n} = 0$ ,

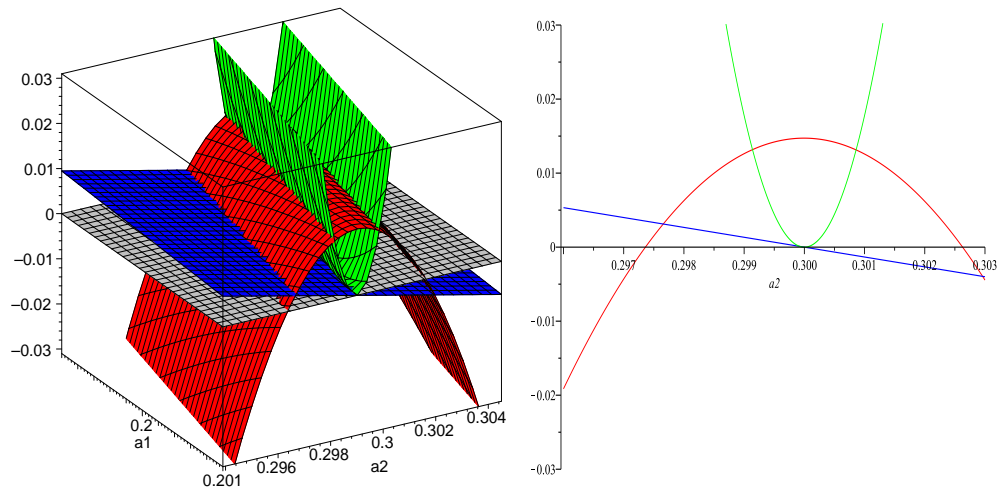


Figura 6.10: Gráfico de los parámetros  $\Lambda_0$  (verde),  $\rho_0$  (rojo),  $\tilde{n}$  (azul). El plano  $z = 0$  (gris). En el gráfico 2D, hemos fijado  $a_1 = 1/5$ , representamos,  $\Lambda_0$  (verde),  $\rho_0$  (rojo),  $\tilde{n}$  (azul) frente a  $a_2$ .

si  $a_2 = 0,3000106065$ ; de esta forma podemos afirmar que  $G$  es decreciente si  $a_2 \in (0,2973605134, 0,3000106065)$ , si  $a_2 = 0,3000106065$ , entonces  $\Lambda_0 = 0$  y  $G = G_0$ , i.e., se comporta como una constante y por último si  $a_2 \in (0,3000106065, 0,3026282371)$ , entonces  $G$  es creciente y  $\Lambda_0 > 0$ .

La solución no es inflacionaria, ya que el parámetro de deceleración es positivo en todo  $I_1$  y podemos considerar que isotropiza, ya que los dos parámetros de anisotropía tienden a cero en dicho intervalo de definición (ver figura adjunta 6.11), únicamente cuando  $a_1$  y  $a_2$  tienden a cero (caso poco realista desde el punto de vista físico) observamos que  $\mathcal{A} \approx 0,6$  mientras que  $\mathcal{W}^2 \approx 0,12$ . La entropía gravitatoria no muestra anomalías siendo  $P^2 \approx -5$  en  $I_1$ , tal y como muestran las figuras adjuntas 6.12.

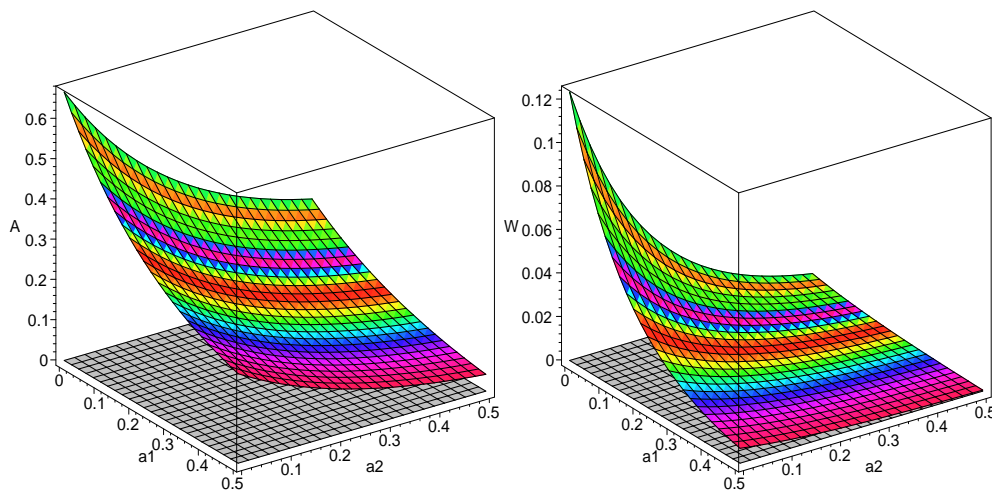


Figura 6.11: Gráficas de los parámetros de anisotropía  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{W}^2$ .

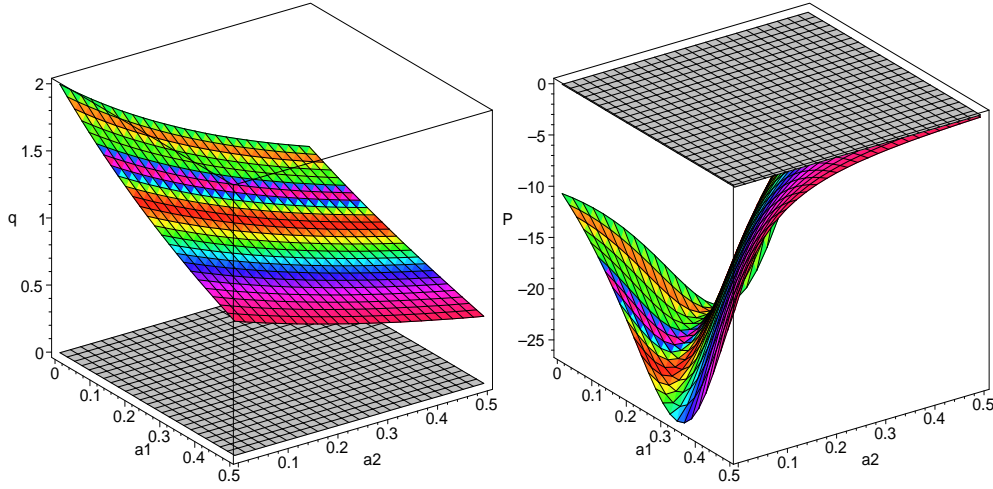


Figura 6.12: Gráficas de los parámetros de deceleración  $q$  y entropía gravitatoria  $P^2$ .

### 6.4.2. Modelo con potencial

Para este modelo, las ecuaciones de campo son las siguientes

$$\frac{a' b'}{a b} + \frac{a' d'}{a d} + \frac{d' b'}{d b} + \frac{K}{d^2} = 8\pi \frac{\rho}{\phi} + \frac{\omega \phi'^2}{2 \phi^2} - \left( \frac{a'}{a} + \frac{b'}{b} + \frac{d'}{d} \right) \frac{\phi'}{\phi} + \frac{U}{\phi}, \quad (6.150)$$

$$m \left( \frac{a'}{a} - \frac{d'}{d} \right) + n \left( \frac{d'}{d} - \frac{b'}{b} \right) = 0, \quad (6.151)$$

$$\frac{b''}{b} + \frac{d''}{d} + \frac{d' b'}{d b} - \frac{n^2}{d^2} = -8\pi \frac{p}{\phi} - \frac{\phi''}{\phi} - \frac{\omega \phi'^2}{2 \phi^2} - \left( \frac{b'}{b} + \frac{d'}{d} \right) \frac{\phi'}{\phi} + \frac{U}{\phi}, \quad (6.152)$$

$$\frac{d''}{d} + \frac{a''}{a} + \frac{a' d'}{a d} - \frac{m^2}{d^2} = -8\pi \frac{p}{\phi} - \frac{\phi''}{\phi} - \frac{\omega \phi'^2}{2 \phi^2} - \left( \frac{a'}{a} + \frac{d'}{d} \right) \frac{\phi'}{\phi} + \frac{U}{\phi}, \quad (6.153)$$

$$\frac{b''}{b} + \frac{a''}{a} + \frac{a' b'}{a b} + \frac{mn}{d^2} = -8\pi \frac{p}{\phi} - \frac{\phi''}{\phi} - \frac{\omega \phi'^2}{2 \phi^2} - \left( \frac{a'}{a} + \frac{b'}{b} \right) \frac{\phi'}{\phi} + \frac{U}{\phi}. \quad (6.154)$$

Además, habrá que tener en cuenta las ecuaciones de conservación, tanto para el campo escalar  $\phi$  como para el campo de materia. Encontramos las siguientes soluciones.

#### Soluciones tipo BIII

En este caso hemos encontrado dos soluciones.

1. Los resultados obtenidos son los siguientes

$$a_1 = a_3 = 1, \quad n = 0, \quad \gamma = \frac{a_2 + m^2 - 1}{(a_2 + 2)(a_2 - 1)}, \quad \phi_0 = \frac{4(a_2 - 1)}{(a_2 + 1)^2 + m^2 - 4},$$

$$U_0 = \frac{2 \left( -\omega (-a_2^2 + m^2 + 1) (a_2^2 + m^2 - 1)^2 - 2m^2 (a_2 - 1)^2 (-a_2 + m^2 - 2) + 2(a_2 + 1) (a_2 + a_2^2 + 1) (a_2 - 1)^3 \right)}{(a_2 - 1) \left( (a_2 + 1)^2 + m^2 - 4 \right)^2},$$

$$\rho_0 = -\frac{(a_2 + 2) \left( \omega (a_2^2 + m^2 - 1)^2 + m^2 (3a_2^2 + m^2 - 3) + 2(a_2 + a_2^2 + 1) (a_2 - 1)^2 \right)}{2\pi \left( (a_2 + 1)^2 + m^2 - 4 \right)^2}, \quad (6.155)$$

de la expresión de  $\gamma$  despejamos  $a_2$ , obteniendo

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{1}{2\gamma} \left( 1 - \gamma \pm \sqrt{\gamma(9\gamma + 4m^2 - 6) + 1} \right), \quad \gamma \neq 0, \\ a_2 &= 1 - m^2, \text{ si } \gamma = 0. \end{aligned} \quad (6.156)$$

Por tanto

$$a_2 = 0, \quad \gamma = \frac{1}{2} (1 - m^2), \quad (6.157)$$

entonces

$$\begin{aligned} \tilde{n} &= -\frac{1}{2\gamma} \left( 1 + 3\gamma^2 + (\gamma + 1) \sqrt{\gamma(9\gamma + 4m^2 - 6) + 1} \right), \\ q &= -\frac{(9\gamma - 3\sqrt{\gamma(9\gamma + 4m^2 - 6)} + 2m^2 - 3)}{2(m^2 - 3)}. \end{aligned} \quad (6.158)$$

De esta forma se observa que, para determinar el comportamiento de las magnitudes, es necesario hacer un pequeño análisis numérico. Si por ejemplo fijamos  $m = 1/5$  y el valor del parámetro de Brans-Dicke,  $\omega = 4 \cdot 10^4$ , vemos que la solución es válida  $\forall \gamma \in (-0,3311865733, -0,3264562742) = \mathcal{E}(\gamma_c)$ , ya que sólo en este entorno  $\rho_0 > 0$ , siendo  $\gamma_c = -0,328$ , donde además  $\phi_0 > 0$ . En dicho intervalo la constante cosmológica se comporta de la siguiente forma:  $U_0 = 0$  si  $\gamma_1 = -0,3288254637$ , y  $\gamma_2 = -0,3288130902$ , de manera que  $\Lambda_0 \leq 0$ ,  $\forall \gamma \in (\gamma_1, \gamma_2)$ , siendo positiva en el resto. El parámetro  $\tilde{n}$  se anula en  $\gamma_2$ , siendo  $\tilde{n} > 0$  si  $\gamma < \gamma_2$  y  $\tilde{n} < 0$  si  $\gamma > \gamma_2$ ; por tanto, la constante de gravitación es decreciente si  $\gamma < \gamma_2$ , constante si  $\gamma = \gamma_2$  y creciente si  $\gamma > \gamma_2$ ,  $\forall \gamma \in \mathcal{E}(\gamma_c)$ . La solución obtenida no es inflacionaria ya que el parámetro de deceleración es positivo en todo el intervalo. Por último, podemos decir que la solución isotropiza ya que los dos parámetros de anisotropía están muy próximos a cero,  $\mathcal{A} \rightarrow 0$ , y  $\mathcal{W}^2 \ll 0,0001$ . De igual forma podemos decir que la entropía gravitatoria toma valores muy próximos a cero en todo el intervalo  $\mathcal{E}(\gamma_c)$ . Tomando otro valor de  $m$  se obtiene una solución parecida, salvo que el intervalo será distinto.

2. La segunda solución es la siguiente,  $U_0 = 0$ .

$$\begin{aligned} a_2 &= -\frac{2\gamma(\omega(\gamma - 1) - 1)}{-\omega(1 - \gamma^2) + 2(\gamma - 1)} \in (0, 1), \quad a_1 = a_3 = 1, \quad U_0 = 0, \quad \forall \gamma \in \left(-\frac{1}{3}, 0\right), \\ m &= \sqrt{\frac{-(a_2 - 1)^2 + A}{\omega}} \in (0, 1), \quad \rho_0 = -\frac{(2 + a_2)B\phi_0}{8\pi\omega(\omega((a_2 + 1)^2 - 4) - (a_2 - 1)^2 + A)}, \\ \tilde{n} &= \frac{-2\gamma}{\gamma - 1} \frac{3\gamma - 1}{\omega(\gamma + 1) + 2}, \quad q = \frac{-\omega(3\gamma + 1)(\gamma - 1) + 2}{2\omega(1 - \gamma) - 6\gamma + 4}, \end{aligned} \quad (6.159)$$

siendo

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{(a_2 - 1)^4 + \omega(a_2 - 1)^2 (\omega(1 + a_2)^2 + 2(a_2 + a_2^2 + 1))}, \\ B &= 2(a_2 - 1)^3 + \omega(a_2 - 1) \left( \omega(2\omega(a_2 + 1)^2 + 3(a_2 + 1)^2 + 4) + 6 + (a_2 + 1)^2 \right) \\ &\quad + A(\omega(2\omega(a_2 + 1) + 5 + a_2) + 2 - 2a_2). \end{aligned} \quad (6.160)$$

Como podemos observar, esta solución es idéntica a la obtenida en el caso con constante cosmológica. La razón es obvia, si  $U_0 = 0$ , entonces las ecuaciones de campo a resolver son las mismas que en el caso  $\Lambda_0 = 0$ , de ahí que se obtenga la misma solución. Por tanto, las conclusiones sobre esta solución son válidas aquí también.

### Solución tipo BVI<sub>0</sub>

Para este modelo hemos encontrado dos soluciones

1. La primera con  $a_1 = a_2$ ,  $a_3 = 1$ ,  $m = n$ , y  $U_0 \neq 0$ , es la siguiente

$$\begin{aligned} U_0 &= \frac{2(a_2^2 + n^2 - a_2) \left( (a_2 - 1)^2 ((3 + 2\omega) a_2^2 - n^2) - 2\omega n^4 \right)}{(a_2^2 + n^2 - 1)^2 (a_2 - 1)}, \\ \rho_0 &= -\frac{(1 + 2a_2) \left( 2\omega (a_2^2 + n^2 - a_2)^2 + 3a_2^2 (a_2 - 1)^2 + n^2 (5a_2^2 - 4a_2 - 1 + 2n^2) \right)}{4\pi (a_2^2 + n^2 - 1)^2}, \\ \phi_0 &= \frac{2(a_2 - 1)}{a_2^2 + n^2 - a_2}, \quad \gamma = \frac{2n^2 + a_2 - 1}{(1 + 2a_2)(a_2 - 1)}, \end{aligned} \quad (6.161)$$

despejando de la expresión  $\gamma$ ,  $a_2$  obtenemos

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{\gamma + 1 \pm \sqrt{\gamma(9\gamma + 16n^2 - 6) + 1}}{4\gamma} \quad \text{si} \quad \gamma \neq 0, \\ a_2 &= 1 - 2n^2 \quad \text{si} \quad \gamma = 0, \end{aligned} \quad (6.162)$$

viendo que

$$a_2 = 0 \quad \text{si} \quad \gamma = 1 - 2n^2, \quad (6.163)$$

y por lo tanto

$$q = -\frac{\left( 3(3\gamma - 1) - 3\sqrt{\gamma(9\gamma + 16n^2 - 6) + 1} + 8n^2 \right)}{8n^2 - 6}, \quad (6.164)$$

$$\tilde{n} = -\frac{1}{2\gamma} \left( 3\gamma^2 + 1 + (1 + \gamma) \sqrt{\gamma(9\gamma + 16n^2 - 6) + 1} \right). \quad (6.165)$$

Si por ejemplo fijamos  $n = 1/3$  y el valor del parámetro de Brans-Dicke,  $\omega = 4 \cdot 10^4$ , vemos que la solución es válida  $\forall \gamma \in (0,12584, 0,12879) = \mathcal{E}(\gamma_c)$ , ya que sólo en este entorno,  $\rho_0 > 0$ , siendo  $\gamma_c = 0,1273$ , donde además  $\phi_0 > 0$ . En dicho intervalo, la constante cosmológica se comporta de la siguiente forma:  $U_0 = 0$  si  $\gamma_1 = 0,127322$ , y  $\gamma_2 = 0,127325$ , de tal forma que  $U_0 \leq 0$ ,  $\forall \gamma \in (\gamma_1, \gamma_2)$ , siendo positiva en el resto. El parámetro  $\tilde{n}$  se anula en  $\gamma_1$  siendo  $\tilde{n} > 0$  si  $\gamma < \gamma_1$  y  $\tilde{n} < 0$  si  $\gamma > \gamma_1$ ; por tanto, la constante de gravitación es decreciente si  $\gamma < \gamma_1$ , constante si  $\gamma = \gamma_1$  y creciente si  $\gamma > \gamma_1$ ,  $\forall \gamma \in \mathcal{E}(\gamma_c)$ . La solución obtenida no es inflacionaria, pues el parámetro de deceleración es positivo en todo el intervalo. Por último, podemos decir que la solución isotropiza, ya que los dos parámetros de anisotropía están muy próximos a cero,  $\mathcal{A} \rightarrow 0$ , y  $\mathcal{W}^2 \ll 0,035$ . De igual forma, podemos decir que la entropía gravitatoria toma valores negativos muy próximos a cero en todo el intervalo  $\mathcal{E}(\gamma_c)$ . Tomando otro valor de  $m$  se obtiene una solución parecida, salvo que el intervalo será otro.

2. La segunda es del tipo  $U_0 = 0$  y, por lo tanto, esta solución es la misma que la obtenida en el caso del modelo de JBD con constante cosmológica, siendo las conclusiones válidas en este caso.

### Solución tipo $BVI_h$

La única solución hallada para este modelo es bastante parecida a la encontrada en el caso del modelo de JBD con constante cosmológica, por lo que aquí encontramos que  $U_0 \neq 0$ , siendo la solución sólo válida para  $\gamma = \frac{1}{3}$ . La solución es la siguiente

$$\begin{aligned} U_0 &= \frac{\phi_0}{6} (2a_1 + 2a_2 - 1)^2 (3 + 2\omega), \quad \gamma = \frac{1}{3}, \\ m &= \frac{\sqrt{3}}{3} (a_2 - 1), \quad n = \frac{\sqrt{3}}{3} (a_1 - 1), \quad \phi_0 = \frac{1}{a_1 + a_2 + 1}, \\ \rho_0 &= -\frac{\phi_0}{16\pi} \left( 2\omega (2a_1 + 2a_2 - 1)^2 + 2 \left( -4a_1 - 4a_2 + 7a_1^2 + 7a_2^2 + 8a_1a_2 \right) - 1 \right), \\ \tilde{n} &= 2 - (\gamma + 1)(a_1 + a_2 + 1), \quad q = \frac{3}{(a_1 + a_2 + 1)} - 1. \end{aligned} \quad (6.166)$$

La solución obtenida depende de dos parámetros,  $a_1$  y  $a_2$ , por lo que es necesario llevar a cabo un análisis numérico. Si por ejemplo, fijamos  $a_1 = 1/4$  y el valor del parámetro de Brans-Dicke,  $\omega = 4 \cdot 10^4$ , entonces obtenemos los siguientes resultados.  $\rho_0 > 0$  si  $a_2 \in (0,2473, 0,2526) = I_1$ , resultando de esta forma, que  $U_0 = 0$  si  $a_2 = 1/4 \subset I_1$ , siendo  $U_0 > 0, \forall a_2 \in I_1 \setminus \{1/4\}$ .  $\tilde{n} = 0$ , si  $a_2 = 1/4$ , de esta manera, podemos afirmar que  $G$  es decreciente si  $a_2 < 1/4$ , si  $a_2 = 1/4$ , entonces  $U_0 = 0$  y  $G = G_0$ , i.e., se comporta como una constante y, por último, si  $a_2 > 1/4$  entonces  $G$  es creciente y  $U_0 > 0$ . La solución no es inflacionaria, ya que el parámetro de deceleración es positivo en todo  $I_1$  e isotropiza, ya que los dos parámetros de anisotropía toman valores muy próximos a cero en dicho intervalo de definición. La entropía gravitatoria no muestra anomalías, siendo  $P^2 \approx -5$  en  $I_1$ .

# Capítulo 7

## Modelos Bianchi V, BVII y BIX

### Índice del capítulo

<b>7.1. Métrica y ecuaciones de campo</b> . . . . .	<b>131</b>
7.1.1. Modelo Bianchi V . . . . .	131
7.1.2. Bianchi VII . . . . .	132
7.1.3. Bianchi IX . . . . .	134
<b>7.2. Soluciones clásicas</b> . . . . .	<b>135</b>
7.2.1. Soluciones de vacío . . . . .	135
7.2.2. Fluido perfecto . . . . .	135
7.2.3. Fluido perfecto con constantes variables . . . . .	136
<b>7.3. Modelos escalares</b> . . . . .	<b>138</b>
7.3.1. Modelo escalar . . . . .	138
7.3.2. Modelo escalar con G variable . . . . .	139
7.3.3. Modelo escalar sin interacción con un campo de materia . . . . .	140
7.3.4. Modelo escalar sin interacción con un campo de materia y G variable . . . . .	140
7.3.5. Modelo escalar interactuando con un campo de materia . . . . .	141
7.3.6. Modelo escalar interactuando con un campo de materia y G variable . . . . .	143
<b>7.4. Modelo tenso-escalar</b> . . . . .	<b>144</b>
7.4.1. Modelo BV . . . . .	145
7.4.2. Modelo BVII . . . . .	146
7.4.3. Modelo BIX . . . . .	147

En este capítulo estudiaremos conjuntamente los modelos Bianchi V, VII<sub>h</sub> y IX. Tal y, como demostraremos, la razón de incluirlos en un mismo capítulo es que las soluciones autosimilares que se obtienen en los tres modelos son muy similares a pesar de describir geometrías muy diferentes. Además, veremos que los tres modelos son isótropos, ya que la solución autosimilar en los tres casos reproduce la geometría tipo FRW para las curvaturas  $K = -1, 0, 1$  respectivamente.

### 7.1. Métrica y ecuaciones de campo

#### 7.1.1. Modelo Bianchi V

Consideramos los siguientes campos de Killing (KVF) (ver por ejemplo [113])

$$\xi_1 = \partial_y, \quad \xi_2 = \partial_z, \quad \xi_3 = \partial_x + my\partial_y + mz\partial_z, \quad (7.1)$$

donde  $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , y, por lo tanto, generan la siguiente álgebra,  $[\xi_i, \xi_j] = C_{ij}^k \xi_k$ , i.e.  $[\xi_1, \xi_2] = 0$ ,  $[\xi_2, \xi_3] = m\xi_1$ , y  $[\xi_1, \xi_3] = m\xi_1$ . Podemos escribir la métrica de la siguiente manera

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 dx^2 + b(t)^2 e^{-2mx} dy^2 + d(t)^2 e^{-2mx} dz^2. \quad (7.2)$$

La parte geométrica (el tensor de Einstein) de las ecuaciones de campo resultantes es

$$\frac{b'a'}{ba} + \frac{d'a'}{da} + \frac{d'b'}{db} - \frac{3m^2}{a^2} = G_0^0, \quad (7.3)$$

$$-2\frac{a'}{a} + \frac{b'}{b} + \frac{d'}{d} = G_2^1, \quad (7.4)$$

$$\frac{b''}{b} + \frac{d''}{d} + \frac{d'b'}{db} - \frac{m^2c^2}{a^2} = G_1^1, \quad (7.5)$$

$$\frac{d''}{d} + \frac{a''}{a} + \frac{d'a'}{da} - \frac{m^2c^2}{a^2} = G_2^2, \quad (7.6)$$

$$\frac{b''}{b} + \frac{a''}{a} + \frac{b'a'}{ba} - \frac{m^2c^2}{a^2} = G_3^3. \quad (7.7)$$

Obtenemos el siguiente campo homotético asociado a la métrica (7.2)

$$\mathcal{H} = t\partial_t + (1 - a_2)y\partial_y + (1 - a_3)z\partial_z, \quad (7.8)$$

junto con las siguientes restricciones sobre los parámetros de los factores de escala:

$$a = a_0t, \quad b = b_0t^{a_2}, \quad d = d_0t^{a_3}, \quad (7.9)$$

i.e.,  $a_1 = 1$  y  $(a_i)_{i=2}^3 \in \mathbb{R}$  y, siguiendo con nuestra notación, definimos entonces,  $H = ht^{-1}$ , donde  $h = 1 + a_2 + a_3$ . De esta forma, el parámetro de deceleración resulta

$$q = \frac{3}{1 + a_2 + a_3} - 1, \quad (7.10)$$

mientras que los parámetros de anisotropía quedan ahora de la siguiente manera

$$\mathcal{A} = \frac{a_2^2 + a_3^2 - a_2a_3 - a_2 - a_3 + 1}{(1 + a_2 + a_3)^2}, \quad \mathcal{W}^2 = \frac{(a_2 - a_3)^2 (a_2^2 + a_3^2 + a_2a_3 - 3(a_2 + a_3 - 1 - m^2))}{36(1 + a_2 + a_3)^4}. \quad (7.11)$$

Por último, la entropía gravitatoria adquiere ahora la siguiente expresión

$$P^2 = \frac{2(a_2 - a_3)^2 (a_2^2 + a_3^2 + a_2a_3 - 3(a_2 + a_3 - 1 - m^2))}{3(a_2^4 + a_3^4 + 6m^4 - a_3^3 - a_2^3 - (6a_3a_2 + 4 + 3a_2^2 + a_3^2 - 2a_2 - 2a_3)m^2 + (a_2 + a_3)^2 + a_2a_3(a_2 + a_3 - 1)(a_2 + a_3))}. \quad (7.12)$$

### 7.1.2. Bianchi VII

La geometría del modelo está descrita por los siguientes campos de Killing

$$\xi_1 = \partial_x + (z - hy)\partial_y - (y + hz)\partial_z, \quad \xi_2 = \partial_y, \quad \xi_3 = \partial_z, \quad (7.13)$$

siendo  $h$  una constante numérica. Si fijamos  $h = 0$ , entonces obtenemos el modelo Bianchi VII<sub>0</sub>. Los campos de Killing generan la siguiente álgebra

$$[\xi_1, \xi_2] = h\xi_2 + \xi_3, \quad [\xi_1, \xi_3] = -\xi_2 + h\xi_3. \quad (7.14)$$

La métrica puede ser escrita de la siguiente forma

$$ds^2 = -dt^2 + a^2dx^2 + e^{2hx} \left( b^2 \cos^2 x + d^2 \sin^2 x \right) dy^2 + 2e^{2hx} \cos x \sin x (d^2 - b^2) dydz + e^{2hx} \left( b^2 \sin^2 x + d^2 \cos^2 x \right) dz^2. \quad (7.15)$$

Las ecuaciones de campo para la métrica (7.15) son por lo tanto

$$\frac{a'}{a} \frac{b'}{b} + \frac{a'}{a} \frac{d'}{d} + \frac{b'}{b} \frac{d'}{d} + \frac{1}{4a^2} \left( 2 - 3h^2 - \frac{d^2}{b^2} - \frac{b^2}{d^2} \right) = 8\pi GT_1^1, \quad (7.16)$$

$$\frac{h^2}{a^2} \left( -2\frac{a'}{a} + \frac{d'}{d} + \frac{b'}{b} \right) = 0 \quad (7.17)$$

$$\frac{b''}{b} + \frac{d''}{d} + \frac{b'}{b} \frac{d'}{d} + \frac{1}{4a^2} \left( -2 - 4h^2 + \frac{d^2}{b^2} + \frac{b^2}{d^2} \right) = -8\pi GT_2^2, \quad (7.18)$$

$$\begin{aligned} & \frac{h}{a^2} \cos x \sin x \left( \frac{d^2}{b^2} - \frac{b^2}{d^2} \right) + \cos^2 x \left( -\frac{b''}{b} + \frac{d''}{d} - \frac{a'}{a} \frac{b'}{b} + \frac{a'}{a} \frac{d'}{d} + \frac{1}{a^2} \left( \frac{d^2}{b^2} - \frac{b^2}{d^2} \right) \right) + \\ & \frac{a''}{a} + \frac{b''}{b} + \frac{a'}{a} \frac{b'}{b} + \frac{1}{4a^2} \left( 2 - 4h^2 + \frac{b^2}{d^2} - \frac{3d^2}{b^2} \right) = -8\pi GT_3^3, \end{aligned} \quad (7.19)$$

$$\frac{h}{a^2} \left[ \cos^2 x \left( \left( \frac{b^2}{d^2} - \frac{d^2}{b^2} \right) \right) + \left( \frac{d^2}{b^2} - 1 \right) \right] + \cos x \sin x \left[ -\frac{b''}{b} + \frac{d''}{d} - \frac{a'}{a} \frac{b'}{b} + \frac{a'}{a} \frac{d'}{d} + \frac{1}{a^2} \left( \frac{d^2}{b^2} - \frac{b^2}{d^2} \right) \right] = 0, \quad (7.20)$$

$$\begin{aligned} & \frac{h}{a^2} \cos x \sin x \left( \frac{b^2}{d^2} - \frac{d^2}{b^2} \right) + \cos^2 x \left( \frac{b''}{b} - \frac{d''}{d} + \frac{a'}{a} \frac{b'}{b} - \frac{a'}{a} \frac{d'}{d} + \frac{1}{a^2} \left( \frac{b^2}{d^2} - \frac{d^2}{b^2} \right) \right) + \\ & \frac{a''}{a} + \frac{d''}{d} + \frac{a'}{a} \frac{d'}{d} + \frac{1}{4a^2} \left( 2 - 4h^2 + \frac{d^2}{b^2} - \frac{3b^2}{d^2} \right) = -8\pi GT_4^4, \end{aligned} \quad (7.21)$$

además de las ecuaciones de conservación para cada uno de los distintos modelos de materia que consideremos.

El campo homotético asociado a la métrica (7.15) es

$$\mathcal{H} = t\partial_t + a_2 y \partial_y + a_2 z \partial_z, \quad (7.22)$$

donde los factores de escala deben comportarse de la siguiente manera

$$a = a_0 t, \quad b = b_0 t^{a_2}, \quad d = d_0 t^{a_2}, \quad a_2 \in \mathbb{R}, \quad (7.23)$$

por lo que las restricciones sobre los parámetros de los factores de escala  $(a_i)_{i=1}^3 \in \mathbb{R}$ , son las siguientes

$$a_1 = 1, \quad a_2 = a_3. \quad (7.24)$$

De esta manera, la métrica se simplifica, adquiriendo ahora la siguiente expresión

$$ds^2 = -dt^2 + t^2 dx^2 + e^{2hx} t^{2a_2} (dy^2 + dz^2), \quad (7.25)$$

donde hemos hecho  $d_0 = b_0$ .

Con estas restricciones el parámetro de deceleración,  $q$ , resulta

$$q = \frac{3}{1 + 2a_2} - 1, \quad (7.26)$$

mientras que el parámetro de anisotropía,  $\mathcal{A}$  toma la siguiente forma

$$\mathcal{A} = \frac{(a_2 - 1)^2}{(1 + 2a_2)^2}. \quad (7.27)$$

Sin embargo, el otro parámetro de anisotropía  $\mathcal{W}^2$  y la entropía gravitatoria,  $P^2$ , son nulos, ya que el tensor de Weyl asociado a la métrica (7.15) también lo es.

### 7.1.3. Bianchi IX

Consideramos los siguientes campos de Killing [113]:

$$\xi_1 = \partial_y, \quad \xi_2 = \cos y \partial_x - \cot x \sin y \partial_y + \frac{\sin y}{\sin x} \partial_z, \quad \xi_3 = -\sin y \partial_x - \cot x \cos y \partial_y + \frac{\cos y}{\sin x} \partial_z,$$

que generan el álgebra,  $[\xi_1, \xi_2] = \xi_3$ ,  $[\xi_1, \xi_3] = -\xi_2$ ,  $[\xi_2, \xi_3] = \xi_1$ . En un sistema apropiado de coordenadas podemos escribir la métrica de la siguiente forma

$$ds^2 = -dt^2 + \left( a^2(t) \sin^2 z + b^2(t) \cos^2 z \right) dx^2 + 2 \left( b^2(t) - a^2(t) \right) \sin z \sin x \cos z dx dy + a^2(t) \sin^2 x \cos^2 z + b^2(t) \sin^2 x \sin^2 z + d^2(t) \cos^2 x \, dy^2 + 2d^2(t) \cos x dy dz + d^2(t) dz^2. \quad (7.28)$$

Las ecuaciones de campo para esta métrica son las siguientes

$$\frac{a'}{a} \frac{b'}{b} + \frac{a'}{a} \frac{d'}{d} + \frac{b'}{b} \frac{d'}{d} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{d^2} \right) - \frac{1}{4} \left( \frac{a^2}{b^2 d^2} + \frac{b^2}{a^2 d^2} + \frac{d^2}{b^2 a^2} \right) = 8\pi G T_1^1, \quad (7.29)$$

$$\frac{a''}{a} - \frac{b''}{b} + \frac{d'}{d} \left( \frac{a'}{a} - \frac{b'}{b} \right) + \left( \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} + \frac{a^2}{b^2 d^2} - \frac{b^2}{a^2 d^2} \right) = 0, \quad (7.30)$$

$$\frac{b''}{b} + \frac{d''}{d} + \frac{b'}{b} \frac{d'}{d} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{b^2} + \frac{1}{d^2} - \frac{1}{a^2} \right) + \frac{1}{4} \left( \frac{b^2}{a^2 d^2} + \frac{d^2}{b^2 a^2} - \frac{3a^2}{b^2 d^2} \right) = -8\pi G T_2^2, \quad (7.31)$$

$$\frac{a''}{a} + \frac{d''}{d} + \frac{a'}{a} \frac{d'}{d} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{d^2} - \frac{1}{b^2} \right) + \frac{1}{4} \left( \frac{a^2}{b^2 d^2} + \frac{d^2}{b^2 a^2} - \frac{3b^2}{a^2 d^2} \right) = -8\pi G T_3^3, \quad (7.32)$$

$$\frac{b''}{b} - \frac{d''}{d} + \frac{a'}{a} \frac{b'}{b} - \frac{a'}{a} \frac{d'}{d} + \left( \frac{1}{b^2} - \frac{1}{d^2} + \frac{b^2}{a^2 d^2} - \frac{d^2}{b^2 a^2} \right) = 0, \quad (7.33)$$

$$\frac{a''}{a} + \frac{b''}{b} + \frac{a'}{a} \frac{b'}{b} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{1}{d^2} \right) + \frac{1}{4} \left( \frac{a^2}{b^2 d^2} + \frac{b^2}{a^2 d^2} - \frac{3d^2}{b^2 a^2} \right) = -8\pi G T_4^4, \quad (7.34)$$

junto con las ecuaciones de conservación

La métrica (7.28) admite el siguiente campo homotético

$$\mathcal{H} = t \partial_t + (1 - a_2) y \partial_y + (1 - a_3) z \partial_z, \quad (7.35)$$

encontrando las siguientes restricciones sobre los factores de escala

$$a = a_0 t, \quad b = b_0 t^{a_2}, \quad d = d_0 t^{a_3}, \quad (7.36)$$

donde las constantes  $(a_i)_{i=1}^3 \in \mathbb{R}$ , son

$$a_1 = 1, \quad a_2, a_3 \in \mathbb{R}. \quad (7.37)$$

El parámetro de deceleración, teniendo en cuenta las restricciones encontradas a través del campo homotético, adquiere por tanto la siguiente expresión

$$q = \frac{3}{1 + a_2 + a_3}, \quad (7.38)$$

mientras que los parámetros de anisotropía son

$$\mathcal{A} = \frac{a_2^2 + a_3^2 + 1 - a_2 - a_3 - a_2 a_3}{(1 + a_2 + a_3)^2}, \quad (7.39)$$

y

$$\begin{aligned} \mathcal{W}^2 = & \frac{-1}{36(1+a_2+a_3)^4} \left[ 6(1-a_2-a_3) + 14a_2a_3 - 4(a_2^2+a_3^2) - 3(a_2^2a_3+a_2a_3^2) + 3(a_2^3+a_3^3) + \right. \\ & a_2^3a_3 + a_2a_3^3 - a_2^4 - a_3^4 - a_2^2t^{2(1-a_3)} - a_3^2t^{2(1-a_2)} - t^{4(a_3-a_2)} - t^{4(2-a_2-a_3)} + 9a_2t^{2(1-a_3)} + 9a_3t^{2(1-a_2)} \\ & + 9a_2t^{2(2-a_2-a_3)} + 9a_3t^{2(2-a_2-a_3)} - 10t^{2(2-a_2-a_3)} - 2t^{2(a_2-a_3)} - t^{2(1-a_3)} - t^{2(1-a_2)} - 2t^{2(a_3-a_2)} \\ & + 6a_3t^{2(a_2-a_3)} - 9a_2t^{2(1-a_2)} + 6a_2t^{2(a_2-a_3)} + t^{2(3-2a_2-a_3)} - 4a_2^2t^{2(2-a_2-a_3)} + 8a_2^2t^{2(1-a_2)} \\ & - 7a_2^2t^{2(a_2-a_3)} - 4a_2^2t^{2(a_3-a_2)} - 4a_3^2t^{2(2-a_2-a_3)} + 8a_3^2t^{2(1-a_3)} - 4a_3^2t^{2(a_2-a_3)} - 7a_3^2t^{2(a_3-a_2)} \\ & + t^{2(1-2a_3+a_2)} - 9a_3t^{2(1-a_3)} + t^{2(3-a_2-2a_3)} + t^{2(1-2a_2+a_3)} - a_3a_2t^{2(2-a_2-a_3)} + 7t^{2(1-a_2)} \\ & \left. + 7t^{2(1-a_3)} - t^{4(a_2-a_3)} + 8a_3a_2(t^{2(a_2-a_3)} + t^{2(a_3-a_2)}) \right]. \end{aligned} \quad (7.40)$$

## 7.2. Soluciones clásicas

### 7.2.1. Soluciones de vacío

**Bianchi V.** Encontramos que la única solución posible a las ecuaciones de campo, para este modelo de vacío, es la siguiente,  $a_2 = a_3 = 1$ , y  $m = \pm 1$ , por lo que los factores de escala adquieren la siguiente forma

$$a = a_0t, \quad b = b_0t, \quad d = d_0t, \quad (7.41)$$

con  $m = \pm 1$ . Con esta solución,  $q = 0$ , es decir, la solución no es inflacionaria. La métrica, por tanto, se reduce a la siguiente

$$ds^2 = -dt^2 + t^2 \left( dx^2 + e^{\pm 2mx} (dy^2 + dz^2) \right), \quad (7.42)$$

la cual admite tres nuevos campos de Killing,  $\xi_4 = -mz\partial_y + my\partial_z$ ,  $\xi_5 = -2mz\partial_x - 2m^2yz\partial_y + (m^2y^2 - m^2z^2 + e^{2mx})\partial_z$ , y  $\xi_6 = 2my\partial_x + (m^2y^2 - m^2z^2 - e^{2mx})\partial_y + 2m^2yz\partial_z$ . Esta métrica se conoce como la forma de Milne para un espacio-tiempo plano (ver por ejemplo el capítulo 9, Ec. (9.8) de [150]).

**Bianchi VII.** Encontramos que la única solución de para este modelo es,  $a_2 = 0$  y  $h = 0$ . De esta forma la métrica queda reducida a la siguiente expresión

$$ds^2 = -dt^2 + t^2 dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (7.43)$$

Esta es la métrica de Taub para un espacio-tiempo plano (ver capítulo 9 Ec. (9.6) de [150] y [153]).

**Bianchi IX.** No existe solución autosimilar de vacío para este modelo.

### 7.2.2. Fluido perfecto

Recordamos que para un fluido perfecto, el tensor energía-momento se define de la siguiente manera:  $T_{ij}^m = (\rho + p)u_iu_j + pg_{ij}$ , donde  $\rho$  es la densidad de energía del fluido,  $p$  es la presión y ambas están relacionadas mediante la ecuación de estado  $p = \gamma\rho$ , ( $\gamma \in (-1, 1]$ ), siendo  $u_i = (1, 0, 0, 0)$  la 4-velocidad. Por el principio de conservación,  $T_{i;j}^j = 0$ , y teniendo en cuenta que los factores de escala ya han sido determinados por las restricciones sobre el campo homotético, sabemos que la densidad de energía se comporta de la siguiente manera  $\rho = \rho_0t^{-2}$ . De esta forma, sólo resta determinar los posibles valores de los parámetros de los factores de escala  $(a_i)_{i=2}^3$ , así como los posibles valores que puede tomar el parámetro de la ecuación de estado  $\gamma$ .

**Modelo BV.** Resolviendo el sistema asociado a las ecuaciones de campo (7.3-7.7), encontramos el siguiente resultado

$$a_1 = a_2 = a_3 = 1, \quad q = 0, \quad \gamma = -\frac{1}{3}, \quad (7.44)$$

donde la solución es válida  $\forall m \in (-1, 1) \setminus \{0\}$ . Por tanto, con estos resultados la métrica resultante se reduce a la dada por la Ec. (7.42). De esta forma podemos decir que la solución no es inflacionaria, ya que,  $q = 0$ , y sólo es válida para,  $\gamma = -\frac{1}{3}$ . Un simple cálculo nos muestra que, tanto los parámetros de anisotropía como la entropía gravitatoria  $P^2$ , son nulos. Observar que los tres parámetros de los factores de escala son idénticos, por lo que la solución es isotrópica. Desde el punto de vista dinámico podemos decir que la solución es estable [150], ya que

representa un modelo tipo FRW con curvatura negativa. Este hecho también ha sido demostrado por Barrow y Sonoda [128].

**Modelo BVII.** Al resolver el sistema asociado a las Ecs. (7.16-7.21) encontramos dos soluciones

1. La primera de ellas sólo es válida para  $h = 0$ , y  $\gamma = 1$ , y donde los factores de escala se comportan de la siguiente manera

$$ds^2 = -dt^2 + t^2 dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad (7.45)$$

siendo esta métrica la misma que la obtenida en la solución de vacío.

2. La segunda solución únicamente válida si  $h = 0$ , y

$$ds^2 = -dt^2 + t^2 (dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (7.46)$$

i.e.,  $a_1 = a_2 = a_3 = 1$ ,  $q = 0$ , y  $\gamma = -\frac{1}{3}$ . Es decir, hemos obtenido una métrica tipo FRW plano, siendo la solución isótropa, ya que los dos parámetros de anisotropía son nulos y no inflacionaria,  $q = 0$ , y sólo válida para la ecuación de estado  $\gamma = -\frac{1}{3}$ .

Resaltamos que en ambos casos sólo hemos obtenido soluciones cuando  $h = 0$ , es decir, sólo existen soluciones autosimilares al modelo VII<sub>0</sub>.

**Modelo BIX.** Las ecuaciones de campo del modelo vienen descritas por las Ecs. (7.29-7.34) y teniendo en cuenta las anteriores consideraciones sobre el modelo de materia, encontramos la siguiente solución

$$a_1 = a_2 = a_3 = 1, \quad q = 0, \quad \gamma = -1/3. \quad (7.47)$$

De esta forma, la métrica (7.28) se reduce a la siguiente expresión:

$$ds^2 = -dt^2 + t^2 (dx^2 + dy^2 + dz^2 + 2 \cos x dy dz), \quad (7.48)$$

la cual admite un nuevo campo de Killing,  $\xi_4 = \partial_z$ . Vemos que la solución autosimilar para el modelo IX en realidad pertenece a la clase LRS IX (al admitir 4 campos de Killing). Al ser los tres parámetros de los factores de escala iguales, la solución es isótropa, los parámetros  $(\mathcal{A}, \mathcal{W}^2)$  se hacen nulos y observamos además, que sólo es válida para el parámetro de la EdE  $\gamma = -1/3$ . La solución obtenida es estable desde el punto de vista dinámico ([151]).

**Conclusión 7.2.1** *Vemos que, a pesar de considerar tres geometrías completamente diferentes, las soluciones autosimilares obtenidas son sólo válidas para la EdE  $\gamma = -1/3$  y que las tres son isótropas ( $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{W}^2$  son nulos), ya que en los tres casos los parámetros de los factores de escala coinciden. De igual forma, vemos que las soluciones son no inflacionarias ( $q = 0$ ) y, por lo tanto, ninguna de ellas puede explicar la reciente aceleración del universo.*

*En el caso del modelo Bianchi V la métrica autosimilar tiene 6 KVF, por lo que, como ya sabemos, las EC generalizan las de un FRW con curvatura negativa. En el caso Bianchi VII<sub>0</sub>, la métrica resultante corresponde a la de un modelo tipo FRW plano, mientras que en caso Bianchi IX, la métrica resultante sólo tiene 4 KVF, sin embargo las EC resultantes generalizan un modelo tipo FRW con curvatura positiva.*

### 7.2.3. Fluido perfecto con constantes variables

En este modelo, variación del anterior, introducimos la hipótesis de la variación de las constantes  $G$  y  $\Lambda$ . Por tanto, el comportamiento de las magnitudes está descrito por la Ec. (3.65), i.e.,  $\rho = \rho_0 t^{-\alpha}$ ,  $G = G_0 t^{\alpha-2}$ , y  $\Lambda = \Lambda_0 t^{-2}$ , donde  $\alpha = h(\gamma + 1) \in \mathbb{R}$ , con  $\rho_0, G_0, \Lambda_0 \in \mathbb{R}$  y las ecuaciones de conservación a considerar son, en este caso, las siguientes  $\rho' + \rho(1 + \gamma)H = 0$ , y  $\Lambda' = -8\pi G'\rho$ .

**Modelo BV**

Bajo estas hipótesis, encontramos la siguiente solución para nuestro modelo

$$a_1 = a_2 = a_3 = 1, \quad q = 0, \quad \alpha = 3(\gamma + 1), \quad (7.49)$$

$$G_0 = \frac{(1 - m^2)}{4\pi\rho_0(\gamma + 1)}, \quad \Lambda_0 = 3 \left(1 - m^2\right) - \frac{(1 - m^2)}{(\gamma + 1)}. \quad (7.50)$$

De esta forma, las magnitudes  $G$  y  $\Lambda$  se comportan de la siguiente manera

$$G \approx \begin{cases} \text{decreciente } \forall \gamma \in (-1, -1/3) \\ \text{constante si } \gamma = -1/3 \\ \text{creciente } \forall \gamma \in (-1/3, 1] \end{cases}, \quad \Lambda_0 \approx \begin{cases} \text{negativa } \forall \gamma \in (-1, -1/3) \\ \text{nula si } \gamma = -1/3 \\ \text{positiva } \forall \gamma \in (-1/3, 1] \end{cases}, \quad (7.51)$$

siendo la solución válida  $\forall \gamma \in (-1, 1]$ , y  $m \in (-1, 1) \setminus \{0\}$ . Con respecto a los factores de escala, vemos que hemos obtenido el mismo resultado que en la anterior solución (fluido perfecto), por lo que la métrica resultante está definida por la Ec. (7.42) llegando así a la conclusión de que esta solución tampoco es inflacionaria e isotrópica y válida  $\forall \gamma \in (-1, 1]$ . Si fijamos el parámetro de la ecuación de estado  $\gamma = -1/3$ , entonces  $G = \text{const.}$  y  $\Lambda = 0$ . Con respecto al comportamiento de  $G$  y  $\Lambda$ , sólo podemos decir que, teniendo en cuenta las observaciones recientes [95] las cuales sugieren  $\Lambda_0 > 0$ , entonces llegamos a la conclusión de que nuestra solución es válida  $\forall \gamma \in (-1/3, 1]$ , lo que implica que  $G$  es una función creciente,  $G = G_0 t^{\alpha-2} \sim t^{3\gamma+1}$ , ya que  $\alpha > 2$ ,  $\forall \gamma \in (-1/3, 1]$ . Con respecto a su comportamiento dinámico podemos “conjeturar” que también es estable, ya que los factores de escala se comportan de igual forma que en el modelo anterior, pudiendo demostrar dicha conjetura mediante un análisis perturbativo.

**Modelo BVII**

La solución que encontramos para este modelo es la siguiente

$$a_1 = a_2 = a_3 = 1, \quad q = 0, \quad \rho = \rho_0 t^{-3(\gamma+1)}, \quad G = G_0 t^{3(\gamma+1)-2}, \quad \Lambda = \Lambda_0 t^{-2}, \quad h = 0, \quad (7.52)$$

$\forall \gamma \in (-1, 1]$ . Una vez más encontramos que la solución autosimilar sólo es válida en el caso VII<sub>0</sub>, i.e.,  $h = 0$ .  $G$  se comporta de la siguiente manera

$$G = G_0 t^{\alpha-2}, \quad G_0 = \frac{A}{4\pi\rho_0(\gamma + 1)\alpha}, \quad (7.53)$$

donde  $A = 2a_2 + a_2^2$ , mientras que la “constante” cosmológica viene dada por:

$$\Lambda = A \left(1 - \frac{2}{\alpha}\right) t^{-2} = \Lambda_0 t^{-2}, \quad (7.54)$$

por lo que su comportamiento es idéntico al descrito anteriormente por la Ec. (7.51). La métrica colapsa a la dada por la Ec. (7.46), por lo que no es inflacionaria y sí isotrópica. La solución es válida  $\forall \gamma \in (-1, 1]$ , y no sólo para  $\gamma = -1/3$ . Precisamente para este valor de la EdE, la solución se reduce a la de un fluido perfecto con  $G = \text{const.}$  y  $\Lambda = 0$ . Como en el caso BV, sólo si consideramos que  $\Lambda > 0$  [95], entonces podemos concluir que  $G$  se comporta como una función creciente.

**Modelo BIX**

Resolviendo el sistema asociado a las ecuaciones de campo (7.29-7.34) encontramos la siguiente solución

$$a_1 = a_2 = a_3 = 1, \quad q = 0, \quad \forall \gamma \in (-1, 1], \\ G_0 = \frac{15}{48\pi\rho_0(\gamma + 1)}, \quad \Lambda = \frac{15}{4} \left(1 - \frac{2}{3(\gamma + 1)}\right) t^{-2}, \quad (7.55)$$

donde vemos que la métrica se reduce a la dada por la Ec. (7.48), por lo que la solución es isotrópica y no inflacionaria y válida para  $\gamma \in (-1, 1]$ . Con respecto al comportamiento de las magnitudes  $G$  y  $\Lambda$ , vemos que es el descrito por la Ec (7.51), por lo que en los tres modelos encontramos el mismo comportamiento.

**Conclusión 7.2.2** Llegamos a la conclusión, en los tres casos, de que la solución es válida  $\forall \gamma \in (-1, 1]$ . En el caso particular en que  $\gamma = -1/3$ , las soluciones colapsan a las obtenidas en el caso anterior en el que  $G = \text{const.}$  y  $\Lambda = 0$ . Si tenemos en cuenta las observaciones recientes, que sugieren que  $\Lambda_0 > 0$ , entonces podemos concluir que las soluciones son sólo válidas para  $\forall \gamma \in (-1/3, 1]$  y, por lo tanto, la "constante" de gravitación varía como,  $G(t) \sim t^{3\gamma+1}$ , comportándose como una función creciente mientras que  $\Lambda \sim t^{-2}$ , es decreciente y positiva. Como en los capítulos anteriores, vemos que el comportamiento de  $G$  y  $\Lambda$  están relacionados, ya que si  $\Lambda > 0$ , entonces  $G$  es creciente, si  $\Lambda = 0$ ,  $G$  es constante y por último, si  $\Lambda < 0$ , entonces  $G$  es decreciente, pero hemos descartado esta posibilidad por no ser consistente observacionalmente.

### 7.3. Modelos escalares

En esta sección estudiaremos los distintos modelos escalares propuestos en el tercer capítulo. Recordamos brevemente que el campo escalar  $\phi$ , sólo depende de  $t$ , i.e.,  $\phi = \phi(t)$ , y que definíamos el tensor energía-momento como el de un fluido perfecto, es decir,  $T_{ij}^\phi = (p_\phi + \rho_\phi) u_i u_j + p_\phi g_{ij}$ , salvo que, en este caso la densidad de energía y la presión se definen como:  $\rho_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)$ , y  $p_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi)$ , donde la función potencial imita el comportamiento de la constante cosmológica. Además, deberemos tener en cuenta la ecuación de conservación (o ecuación de Klein-Gordon (KG)) para el campo escalar.

#### 7.3.1. Modelo escalar

En este modelo, la ecuación de KG es:  $\square\phi + V_\phi = 0$ , y que tanto el campo escalar como el potencial, se comportan como:  $\phi = \pm\sqrt{\alpha} \ln(t)$ ,  $V = \beta \exp\left(\mp\frac{2}{\sqrt{\alpha}}\phi\right)$ , donde  $\alpha \in \mathbb{R}^+$ , y  $\beta \in \mathbb{R}$ .

##### Modelo BV

Bajo las anteriores consideraciones encontramos la siguiente solución

$$a_1 = a_2 = a_3 = 1, \quad q = 0, \quad \forall m \in (-1, 1) \setminus \{0\}, \quad \alpha = \beta = 2(1 - m^2) \in (0, 2). \quad (7.56)$$

Con estos resultados la métrica se reduce a la dada por la Ec. (7.42), lo que implica que el modelo es isótropo y no inflacionario. Poco podemos decir sobre el comportamiento dinámico de la solución ya que, tal y como ha sido probado ([284], ver también [151] para un amplio sumario de todos estos resultados) la solución  $\alpha = 2(1 - m^2)$  queda fuera de dichos estudios. Sin embargo, el análisis de la solución mediante técnicas perturbativas demuestra que la solución es estable.

##### Modelo BVII

Resolviendo el sistema asociado a las ecuaciones de campo resultantes encontramos dos soluciones.

###### 1. Solución de vacío

$$a_1 = 1, \quad a_2 = a_3 = 0, \quad \alpha = \beta = 0, \quad h = 0, \quad (7.57)$$

ya encontrada anteriormente.

###### 2. La segunda solución es no trivial, donde

$$a_1 = a_2 = a_3 = 1, \quad q = 0, \quad \alpha = \beta = 2, \quad h = 0, \quad (7.58)$$

por lo que la métrica se reduce a la dada por la Ec. (7.46) y, por lo tanto, la solución es isótropa y no inflacionaria (tipo BVII<sub>0</sub>). Desde el punto de vista dinámico la solución es estable, tal y como lo prueba el trabajo de Coley ([151]).

**Modelo BIX**

La solución encontrada para este modelo es la siguiente

$$a_1 = a_2 = a_3 = 1, \quad q = 0, \quad \alpha = \beta = \frac{5}{2}, \quad (7.59)$$

llegando así a la conclusión de que la solución obtenida es isótropa y no inflacionaria, ya que la métrica colapsa a la dada por la Ec. (7.48). Al igual que la solución del modelo BVII<sub>0</sub>, ésta también es estable desde el punto de vista de los sistemas dinámicos ([151]) ya que, en nuestra notación,  $\alpha > 2$ .

**7.3.2. Modelo escalar con G variable**

En esta ocasión la ecuación de KG es modificada, al trabajar bajo la hipótesis de G variable, siendo ahora:  $\phi' (\square\phi + V_\phi) = -\frac{G'}{G}\rho_\phi$ , por lo que cambian también la forma del campo escalar y la del potencial, comportándose ahora como:  $\phi = \phi_0 t^{-\alpha}$ ,  $V = \beta t^{-2(\alpha+1)}$ , y  $G = G_0 t^{2\alpha}$ , con  $\alpha, \phi_0, G_0, \beta \in \mathbb{R}$

**Modelo BV.**

La solución encontrada es la siguiente

$$a_1 = a_2 = a_3 = 1, \quad q = 0, \quad (7.60)$$

$\forall m \in (-1, 1) \setminus \{0\}$ , resultando así isótropa y no inflacionaria. Con respecto al campo escalar, el potencial y la "constante" G, vemos que

$$\beta = \alpha^2, \quad G_0 = \frac{2(1-m^2)}{\alpha^2} > 0. \quad (7.61)$$

Sin embargo, con estos resultados no podemos determinar el comportamiento de la magnitud G,  $G \sim t^{2\alpha}$ ,  $\alpha$  ha quedado indeterminada en la solución obtenida. Observar que si  $\alpha \in (-1, \infty) \setminus \{0\}$ , entonces el potencial,  $V(t) \sim t^{-2(\alpha+1)}$ , se comporta como una función decreciente y positiva. De esta forma, G sólo es decreciente en el intervalo  $\alpha \in (-1, 0)$ , y creciente si  $\alpha > 0$ .

**Modelo BVII**

Resolviendo las ecuaciones de campo bajo las hipótesis planteadas encontramos la siguiente solución

$$a_1 = a_2 = a_3 = 1, \quad q = 0, \quad \alpha = 1, \quad \beta = 1, \quad G_0 = 2, \quad h = 0. \quad (7.62)$$

Observamos que obtenemos la misma solución que en los casos anteriores, es decir, únicamente válida para  $h = 0$ , por lo tanto del tipo BVII<sub>0</sub>, isótropa (todos los factores de escala son idénticos) y no inflacionaria ( $q = 0$ ). Sin embargo y a diferencia con el modelo BV, aquí hemos obtenido un valor determinado para  $\alpha$ , siendo  $\alpha = 1$ , por lo que el potencial V es positivo y se comporta como  $V \sim t^{-4}$ , mientras que G, lo hace como  $G \sim t^2$ , i.e. G, es una función creciente. Observar que  $GV \sim t^{-2}$ , mientras que el modelo clásico  $\Lambda \sim t^{-2}$ , es decir, en el enfoque clásico  $\Lambda$  no está multiplicado por G, mientras que en el enfoque escalar V, aparece multiplicado por G.

**Modelo BIX**

Para este modelo encontramos la siguiente solución

$$a_1 = a_2 = a_3 = 1, \quad q = 0, \quad \alpha = 1, \quad \beta = 1, \quad G_0 = \frac{5}{2}, \quad (7.63)$$

que se comporta como la obtenida en el modelo BVII<sub>0</sub>. Vemos que como en las otras soluciones para esta métrica, la solución es isótropa (los parámetros de anisotropía son nulos) y no inflacionaria, ya que la métrica se reduce a la dada por la Ec. (7.48). Al ser  $\alpha = 1$ , el modelo predice que  $G \sim t^2$ , i.e., es creciente, mientras que el potencial se comporta como  $V \sim t^{-4}$ .

### 7.3.3. Modelo escalar sin interacción con un campo de materia

Al no considerar interacción entre el campo escalar y el de materia, entonces las ecuaciones de conservación a considerar son  $(T^m)_{i;j}^j = 0 = (T^\phi)_{i;j}^j$ , por lo que las magnitudes, tal y como demostrábamos en el tercer capítulo, se comportan como  $\phi = \pm\sqrt{\alpha} \ln(t)$ ,  $V = \beta \exp\left(\mp\frac{2}{\sqrt{\alpha}}\phi\right)$  y  $\rho = \rho_0 t^{-2}$ .

#### Modelo BV

Encontramos la siguiente solución

$$a_1 = a_2 = a_3 = 1, \quad q = 0, \quad \gamma = -\frac{1}{3}, \quad \alpha = \beta, \quad \rho_0 = 3 \left(1 - m^2 - \frac{\beta}{2}\right), \quad (7.64)$$

por lo que la solución únicamente es válida para  $\gamma = -\frac{1}{3}$  y  $\forall m \in (-1, 1) \setminus \{0\}$ ; e imponemos la condición  $0 < \beta < 2(1 - m^2)$ , para que la densidad de energía sea positiva; de esta manera, entonces obtenemos que  $\alpha = \beta \in (0, 2)$ . Al ser los parámetros de anisotropía nulos, entonces la solución es isótropa y no inflacionaria, ya que  $q = 0$ .

#### Modelo BVII

La solución hallada sólo es válida para  $h = 0$ , encontrando

$$a_1 = a_2 = a_3 = 1, \quad q = 0, \quad \alpha = \beta = 2 \left(1 - \frac{\rho_0}{3}\right), \quad \rho_0 \in (0, 3), \quad \gamma = -\frac{1}{3}, \quad (7.65)$$

vemos que, como en los casos anteriores, la solución sólo es válida para la EdE  $\gamma = -\frac{1}{3}$ , debiendo imponer la condición  $\rho_0 \in (0, 3)$  para garantizar que  $\alpha > 0$ . La solución es isótropa (FRW plano) y no inflacionaria  $q = 0$ . Si  $\rho_0 \ll 1$ , entonces la solución colapsa a la obtenida en el modelo escalar con  $\alpha = \beta = 2$ .

#### Modelo BIX

Resolviendo el sistema asociado a las ecuaciones de campo, encontramos la siguiente solución

$$a_1 = a_2 = a_3 = 1, \quad q = 0, \quad \alpha = \beta, \quad \rho_0 = \frac{3}{2} \left(\frac{5}{2} - \beta\right), \quad \beta \in \left(0, \frac{5}{2}\right), \quad \gamma = -\frac{1}{3}, \quad (7.66)$$

observando, como en los casos anteriores, que la solución es isótropa y no inflacionaria. Vemos al mismo tiempo, que sólo es válida para  $\gamma = -\frac{1}{3}$  con la restricción  $\beta \in (0, \frac{5}{2})$ .

### 7.3.4. Modelo escalar sin interacción con un campo de materia y G variable

Las ecuaciones de conservación a considerar en este modelo son las siguientes

$$\rho'_m + (\rho_m + p_m)\theta = -\frac{G'}{G}\rho_m, \quad \phi'(\square\phi + V_\phi) = -\frac{G'}{G}\rho_\phi, \quad (7.67)$$

y recordamos que las principales magnitudes, en este caso, deben comportarse de la siguiente manera:  $\phi = \phi_0 t^{-\alpha}$ ,  $V = \beta t^{-2(\alpha+1)}$ ,  $G = G_0 t^{2\alpha}$  y  $\rho = \rho_0 t^{-2(\alpha+1)}$ , siendo  $\alpha$  una constante numérica a determinar.

#### Modelo BV

Con respecto a los parámetros de los factores de escala, la solución hallada es la siguiente

$$a_1 = a_2 = a_3 = 1, \quad q = 0, \quad \forall m \in (-1, 1) \setminus \{0\},$$

i.e., la encontrada en casos anteriores, por lo que la solución es isótropa y no inflacionaria, siendo sólo válida para  $\gamma = -\frac{1}{3}$ . La solución para el resto de los parámetros es la siguiente

$$\beta = \alpha^2, \quad \rho_0 = \frac{3}{G_0} \left(1 - m^2\right) - 3\alpha^2, \quad (7.68)$$

por tanto, para garantizar  $\rho_0 > 0$ , imponemos la condición,  $\alpha^2 < \frac{(1-m^2)}{G_0} \equiv K$ . En esta ocasión, tampoco somos capaces de determinar el comportamiento de  $G$ ,  $G \sim t^{2\alpha}$ , ya que  $\alpha$  queda indeterminada. Sólo al asumir que el potencial,  $V(t) \sim t^{-2(\alpha+1)}$ , imita el comportamiento de  $\Lambda$ , podemos acotar los posibles valores que puede tomar  $\alpha$ , es decir,  $\alpha \in (-1, \sqrt{K}) \setminus \{0\}$ . Por tanto  $G$  es decreciente en el intervalo  $\alpha \in (-1, 0)$ , mientras que se comporta como función creciente si  $\alpha > 0$ .

### Modelo BVII

La solución hallada en este caso, también pertenece a la clase BVII<sub>0</sub>

$$a_1 = a_2 = a_3 = 1, \quad q = 0, \quad \alpha = 1 = \beta, \quad \rho_0 = \frac{3}{G_0} - \frac{3}{2}, \quad \gamma = -\frac{1}{3}, \quad h = 0. \quad (7.69)$$

Encontramos la siguiente restricción a la solución encontrada  $G_0 < 2$  para garantizar,  $\rho_0 > 0$ . Vemos que la solución sólo es válida para  $\gamma = -\frac{1}{3}$  y, con respecto a los factores de escala, la solución vuelve a ser del tipo FRW plano, por lo tanto isótropa y no inflacionaria. Con respecto al comportamiento de  $G$ , vemos que sólo puede ser creciente, pues, en este caso hemos podido determinar el valor del parámetro,  $\alpha$ , siendo  $\alpha = 1$ . La función potencial es positiva y decreciente  $V \sim t^{-4}$ .

### Modelo BIX

Como en las soluciones anteriores para este tipo de geometría, vemos que obtenemos

$$a_1 = a_2 = a_3 = 1, \quad q = 0, \quad \alpha = 1 = \beta, \quad \rho_0 = \frac{3}{4G_0} (5 - 2G_0), \quad \gamma = -\frac{1}{3}, \quad (7.70)$$

imponiendo la restricción,  $G_0 < \frac{5}{2}$ , para así garantizar que la densidad de energía sea positiva  $\rho_0 > 0$ . Por tanto, la solución es isótropa y no inflacionaria siendo sólo válida para el valor del parámetro de la EdE  $\gamma = -\frac{1}{3}$ . Observamos que  $\alpha = 1$ , lo que implica que  $G$  sea sólo creciente,  $G \sim t^2$ , mientras que el potencial es positivo y decreciente.

## 7.3.5. Modelo escalar interactuando con un campo de materia

### Primer enfoque

En este primer enfoque la ecuación clave es la de conservación,  $\rho'_m + (\omega + 1)\rho_m H = -\phi' (\Box\phi + V_\phi)$ , mientras que el comportamiento de las magnitudes, densidad de energía del fluido perfecto, campo escalar y potencial, están descritos por la Ec. (3.144).

**Modelo BV.** Al resolver las ecuaciones asociadas a este modelo, encontramos la siguiente solución

$$a_1 = a_2 = a_3 = 1, \quad q = 0, \quad \alpha = 2(1 - m^2) - \rho_0(\gamma + 1), \quad \beta = 2(1 - m^2) + \frac{\rho_0}{2}(\gamma - 1), \quad (7.71)$$

$\forall m \in (-1, 1) \setminus \{0\}$ , y válida  $\forall \gamma \in (-1, 1]$ , imponiendo la restricción  $\rho_0 < \frac{2(1-m^2)}{(\gamma+1)}$ , para que  $\alpha$  sea positiva. Como podemos observar, la principal diferencia con respecto al modelo sin interacción es que, en esta ocasión, la solución es válida para cualquier valor de la EdE, en vez de únicamente para  $\gamma = -\frac{1}{3}$ , lo cual es físicamente más realista. Sin embargo, la solución encontrada vuelve a ser isótropa y no inflacionaria. Si por ejemplo fijamos  $\gamma = 0$ , (lo que puede representar un modelo de materia oscura interactuando con energía oscura) entonces

$$\beta = 1 - m^2 + \frac{\alpha}{2}, \quad \rho_0 = 2(1 - m^2) - \alpha,$$

con  $\alpha < 2(1 - m^2) \in (0, 2)$ .

**Modelo BVII.** La solución encontrada para esta geometría es la siguiente

$$a_1 = a_2 = a_3 = 1, \quad q = 0, \quad \alpha = 2 - \rho_0(\gamma + 1), \quad \beta = 2 + \frac{1}{2}\rho_0(\gamma - 1), \quad h = 0, \quad (7.72)$$

siendo válida  $\forall \gamma \in (-1, 1]$ , en vez de un único valor de  $\gamma$ . Vemos además que la solución sólo es válida cuando  $h = 0$ , por lo que pertenece a la clase BVII<sub>0</sub>. Debemos imponer la restricción  $\rho_0 < \frac{2}{(\gamma+1)}$ , para que  $\alpha > 0$ . Por tanto la solución es isótropa pero no inflacionaria. Fijando  $\gamma = 0$ , encontramos que

$$\alpha = 2(\beta - 1), \quad \rho_0 = 2(1 - \beta), \quad \forall \beta \in (1, 2).$$

**Modelo BIX.** En este caso obtenemos

$$a_1 = a_2 = a_3 = 1, \quad q = 0, \quad \alpha = \frac{5}{2} - \rho_0(\gamma + 1), \quad \beta = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\rho_0(\gamma - 1), \quad (7.73)$$

con  $\forall \gamma \in (-1, 1]$ , junto con la restricción,  $\rho_0 < \frac{5}{2(\gamma+1)}$ . La métrica, por tanto, colapsa a la dada por la Ec. (7.48), lo que implica, que la solución es isótropa, siendo el parámetro de deceleración  $q = 0$ . En el caso  $\gamma = 0$ , la solución se reduce a

$$\alpha = 2\beta - \frac{5}{2}, \quad \rho_0 = 5 - 2\beta, \quad \forall \beta \in \left(\frac{5}{4}, \frac{5}{2}\right).$$

### Segundo enfoque

En este segundo caso, las ecuaciones de conservación a considerar son las siguientes:  $\rho'_m + (\omega + 1)\rho_m H = -\phi'q^\phi$ , y  $\square\phi + V_\phi = q^\phi$ , donde la función de acoplamiento es  $q^\phi = \delta\rho_m$ , siendo  $\delta < 0$ .

**Modelo BV.** Vemos que la solución sólo es válida si  $\gamma > -1/3$ , y  $\forall m \in (-1, 1) \setminus \{0\}$ , ya que

$$\begin{aligned} a_1 = a_2 = a_3 = 1, \quad q = 0, \quad \beta &= 2(1 - m^2) - \frac{(1 - \gamma)}{2(\gamma + 1)}(2(1 - m^2) - \alpha), \\ \rho_0 &= \frac{2(1 - m^2) - \alpha}{\gamma + 1}, \quad \alpha < 2(1 - m^2) \in (0, 2), \quad \delta = -\frac{1}{\sqrt{\alpha}}(3\gamma + 1), \end{aligned} \quad (7.74)$$

en el primer enfoque, en el que no se considera ninguna función de acoplamiento, la solución era válida  $\forall \gamma \in (-1, 1]$ . Por tanto volvemos a obtener una solución isótropa y no inflacionaria. Si  $\gamma = 0$ , entonces

$$\beta = 1 - m^2 + \frac{\alpha}{2}, \quad \rho_0 = 2(1 - m^2) - \alpha, \quad \delta = -\frac{1}{\sqrt{\alpha}},$$

con  $\alpha < 2(1 - m^2)$ .

**Modelo BVII.** En este caso la solución vuelve a pertenecer a la clase BVII<sub>0</sub>, ya que la solución encontrada sólo es válida para  $h = 0$ , siendo isótropa y no inflacionaria. Encontramos que

$$a_1 = a_2 = a_3 = 1, \quad q = 0, \quad \alpha = 2 - \rho_0(\gamma + 1), \quad \beta = 2 + \frac{1}{2}\rho_0(\gamma - 1), \quad \delta = -\frac{1 + 3\gamma}{\sqrt{2 - \rho_0(\gamma + 1)}}, \quad (7.75)$$

válida  $\forall \gamma \in (-1/3, 1]$ , ( $\delta \leq 0$ ), con la siguiente restricción sobre,  $\rho_0 < \frac{2}{(\gamma+1)}$ . Restringiéndonos al caso  $\gamma = 0$ , encontramos que

$$\delta = -\frac{1}{\sqrt{\alpha}}, \quad \beta = 1 + \frac{\alpha}{2}, \quad \rho_0 = 2 - \alpha,$$

$\forall \alpha \in (0, 2)$ , siendo un resultado muy parecido al obtenido en el modelo BV.

**Modelo BIX.** Encontramos que la solución es válida  $\forall \gamma \in (-1/3, 1]$  junto con

$$a_1 = a_2 = a_3 = 1, \quad q = 0, \quad \alpha = \frac{5}{2} - \rho_0(\gamma + 1), \quad \beta = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\rho_0(\gamma - 1), \quad \delta = -\frac{2(1 + 3\gamma)}{\sqrt{10 - 4\rho_0(\gamma + 1)}}, \quad (7.76)$$

debiendo imponer la siguiente restricción,  $\rho_0 < \frac{5}{2(\gamma+1)}$ , ( $\delta \leq 0$ ). Es decir, la solución no es inflacionaria e isótropa. En el caso  $\gamma = 0$ , observamos que la solución resulta

$$\delta = -\frac{1}{\sqrt{\alpha}}, \quad \beta = \frac{5}{4} + \frac{\alpha}{2}, \quad \rho_0 = \frac{5}{2} - \alpha, \quad \forall \alpha \in \left(0, \frac{5}{2}\right),$$

encontrando así la misma solución que en el anterior enfoque.

**Tercer enfoque**

Recordamos que las ecuaciones de conservación en este tercer enfoque son:  $\rho'_m + (\omega + 1) \rho_m H = Q$ , y  $\phi' (\square\phi + V_\phi) = -Q$ , siendo la función de acoplamiento  $Q = \delta H \rho_m$ , con  $\delta > 0$ .

**Modelo BV.** Bajo las hipótesis planteadas, la solución hallada para esta geometría es la siguiente

$$\begin{aligned} a_1 = a_2 = a_3 = 1, \quad q = 0, \quad \rho_0 = \frac{2(1-m^2) - \alpha}{\gamma + 1}, \quad \alpha < 2(1-m^2), \\ \beta = 2(1-m^2) - \frac{(1-\gamma)}{2(\omega+1)} (2(1-m^2) - \alpha), \quad \delta = \frac{1}{3} + \gamma, \end{aligned} \quad (7.77)$$

viendo de esta forma, que se trata de una solución isótropa (los tres factores de escala son iguales) y no inflacionaria,  $q = 0$ . Resaltamos que hemos obtenido la misma solución que en el segundo enfoque. En este caso, el valor crítico para el parámetro de la EdE  $\gamma$ , es  $\gamma = -1/3$ , por tanto, la solución es válida si  $\gamma > -1/3$ , y  $\forall m \in (-1, 1) \setminus \{0\}$ , de otra forma obtendríamos  $\delta \leq 0$  (lo cual es termodinámicamente inconsistente). Si  $\gamma = 0$  entonces la solución es:

$$\beta = 2(1-m^2) + \frac{\alpha}{2}, \quad \rho_0 = 2(1-m^2) - \alpha, \quad \delta = \frac{1}{3},$$

con  $\alpha < 2(1-m^2)$ . Observamos que, en este caso,  $\gamma = 0$ , obtenemos la misma solución en los tres enfoques.

**Modelo BVII.** La solución encontrada sólo es válida si  $h = 0$ , siendo

$$a_1 = a_2 = a_3 = 1, \quad q = 0, \quad \alpha = 2 - \rho_0(\gamma + 1), \quad \delta = \frac{1}{3} + \gamma, \quad \beta = 2 + \frac{1}{2}\rho_0(\gamma - 1), \quad (7.78)$$

y válida  $\forall \gamma \in (-1/3, 1]$ , ( $\delta \geq 0$ ), imponiendo la restricción,  $\rho_0 < \frac{2}{(\gamma+1)}$ . La solución, al igual que en los casos anteriores, es isótropa y no inflacionaria. Fijando  $\gamma = 0$ , entonces obtenemos

$$\delta = \frac{1}{3}, \quad \beta = 1 + \frac{\alpha}{2}, \quad \rho_0 = 2 - \alpha,$$

$\forall \alpha \in (0, 2)$ , obteniendo así la misma solución en los tres enfoques.

**Modelo BIX.** Encontramos que la solución vuelve a ser isótropa y no inflacionaria ya que

$$a_1 = a_2 = a_3 = 1, \quad q = 0, \quad \alpha = 2 - \frac{5}{2}(\gamma + 1), \quad \delta = \frac{1}{3} + \gamma, \quad \beta = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\rho_0(\gamma - 1), \quad (7.79)$$

con  $\rho_0 = \rho_0$ , e imponemos la restricción,  $\rho_0 < \frac{5}{2(\gamma+1)}$ ,  $\forall \gamma \in (-1/3, 1]$ , ( $\delta \geq 0$ ). En el caso particular en que  $\gamma = 0$ , la solución colapsa a:

$$\delta = \frac{1}{3}, \quad \beta = \frac{5}{2} + \alpha, \quad \rho_0 = \frac{5}{2} - \alpha, \quad \forall \alpha \in \left(0, \frac{5}{2}\right),$$

i.e., idéntica a la obtenida en los tres enfoques.

**Conclusión 7.3.1** La principal diferencia entre los tres enfoques, la obtenemos en el rango de validez del parámetro de la EdE; en el segundo y tercer enfoques la solución sólo es válida si  $\gamma \in (-1/3, 1]$ , mientras que en el primero de los enfoques  $\gamma \in (-1, 1]$ .

**7.3.6. Modelo escalar interactuando con un campo de materia y G variable**

En este modelo  $\rho'_m + (\rho_m + p_m) H + \frac{G'}{G} \rho_m = Q$  y  $\phi' (\square\phi + V_\phi) + \frac{G'}{G} \rho_\phi = -Q$ , con  $Q = \delta H \rho_m$ , y  $\delta > 0$ . En este caso, la solución toma la forma:  $\phi = \phi_0 t^{-\alpha}$ ,  $V(t) = \beta t^{-2(\alpha+1)}$ ,  $G = G_0 t^{2\alpha}$ ,  $\rho_m = \rho_0 t^{-2(\alpha+1)}$ .

**Modelo BV**

La solución que hemos hallado en este caso es la siguiente

$$a_1 = a_2 = a_3 = 1, \quad q = 0, \quad (7.80)$$

donde  $m \in (-1, 1) \setminus \{0\}$ . Por consiguiente, al ser la misma que en los casos anteriores, se trata de una solución isótropa y no inflacionaria. Con respecto a los otros parámetros vemos que

$$\rho_0 = \frac{2(1-m^2) - \alpha^2 G_0}{G_0(1+\gamma)}, \quad \beta = \frac{((6(1-m^2) - G_0\alpha^2)(1+\gamma) - 4(1-m^2) + 2\alpha^2 G_0)}{2G_0(1+\gamma)}, \quad \delta = \gamma + \frac{1}{3}, \quad (7.81)$$

siendo válida  $\forall \gamma \in (-1/3, 1]$  e imponemos la condición  $\alpha^2 < \frac{2(1-m^2)}{G_0} = K$ . En el caso particular en el que  $\gamma = 0$ , entonces

$$\rho_0 = \frac{1}{G_0} [2(1-m^2) - G_0\alpha^2], \quad \beta = \frac{1}{2G_0} [2(1-m^2) + G_0\alpha^2], \quad \delta = \frac{1}{3},$$

encontrando la siguiente restricción,  $\alpha^2 < \frac{2(1-m^2)}{G_0} = K$ , ya que  $\rho_0 > 0$ . No podemos determinar el comportamiento de  $G$ , pues  $G \sim t^{2\alpha}$ . La única restricción sobre  $\alpha$  nos permite afirmar que  $\alpha \in (-1, \sqrt{K}) \setminus \{0\}$ . De esta forma garantizamos que,  $V(t) \sim t^{-2(\alpha+1)}$ , el potencial se comporte como una función decreciente y positiva. Con respecto a  $G$  sólo podemos decir que es decreciente si  $\alpha \in (-1, 0)$ , y creciente si  $\alpha > 0$ .

**Modelo BVII**

Bajo las hipótesis consideradas la solución es,

$$a_1 = a_2 = a_3 = 1, \quad q = 0, \quad \rho_0 = \frac{2 - G_0}{G_0(1+\gamma)}, \quad \beta = \frac{6\gamma + (1-\gamma)G_0 + 2}{2G_0(1+\gamma)}, \quad \alpha = 1, \quad \delta = \gamma + \frac{1}{3}, \quad (7.82)$$

siendo sólo válida si  $h = 0$  y  $\gamma \in (-1/3, 1]$ , e imponiendo la condición  $G_0 < 2$ . La solución, por lo tanto, es isótropa y no inflacionaria. Como en los anteriores casos (en esta geometría)  $\alpha = 1$ , por lo que el modelo predice que  $G$  es una función creciente, mientras que el potencial es decreciente y positivo. Si consideramos la EdE  $\gamma = 0$ , entonces

$$\alpha = 1, \quad \rho_0 = \frac{2 - G_0}{G_0}, \quad \beta = \frac{2 + G_0}{2G_0}, \quad \delta = \frac{1}{3}.$$

**Modelo BIX**

En el último de los modelos estudiados en esta sección, encontramos la siguiente solución

$$a_1 = a_2 = a_3 = 1 \quad q = 0, \quad \alpha = 1, \quad \rho_0 = \frac{5 - 2G_0}{2G_0(1+\gamma)}, \quad \beta = \frac{15\gamma + 2(1-\gamma)G_0 + 5}{4G_0(1+\gamma)}, \quad \delta = \gamma + \frac{1}{3},$$

siendo, por tanto, sólo válida si  $\gamma \in (-1/3, 1]$ . Debemos imponer, además, la condición  $G_0 < 5/2$ , para garantizar así que la densidad de energía sea una magnitud positiva. Al igual que en las soluciones anteriores, ésta también es isótropa y no inflacionaria. Como en el modelo BVII<sub>0</sub> aquí también  $\alpha = 1$ , entonces  $G$  es creciente, mientras que la función potencial es positiva y decreciente. En el caso  $\gamma = 0$ , la solución es

$$\alpha = 1, \quad \rho_0 = \frac{5 - 2G_0}{2G_0}, \quad \beta = \frac{5 + 2G_0}{4G_0}, \quad \delta = \frac{1}{3},$$

la cual es muy parecida a las anteriores.

**7.4. Modelo tenso-escalar**

Las ecuaciones de campo vienen descritas por

$$G_{ij} = \frac{8\pi}{\phi} T_{ij} + \Lambda(\phi) g_{ij} + \frac{\omega}{\phi^2} \left( \phi_{,i} \phi_{,j} - \frac{1}{2} g_{ij} \phi_{,l} \phi^{,l} \right) + \frac{1}{\phi} \left( \phi_{;ij} - g_{ij} \square \phi \right), \quad (7.83)$$

$$(3 + 2\omega(\phi)) \square\phi = 8\pi T - \frac{d\omega}{d\phi} \phi, \phi' - 2\phi \left( \phi \frac{d\Lambda}{d\phi} - \Lambda(\phi) \right), \quad (7.84)$$

mientras que las principales magnitudes, tal y como demostramos en el tercer capítulo, deben comportarse de la siguiente manera

$$\phi = \phi_0 t^{\tilde{n}}, \quad \Lambda(\phi) = \Lambda_0 \phi^{-\frac{(\tilde{n}+\alpha)}{\tilde{n}}}, \quad \omega(\phi) = \text{const.}, \quad \rho = \rho_0 t^{-\alpha}, \quad G_{\text{eff}}(t) \approx \phi(t)^{-1}, \quad (7.85)$$

con  $\tilde{n} + \alpha = 2$ , y  $\alpha = (1 + \gamma)h$ , siendo  $\gamma$  el parámetro de la EdE,  $p = \gamma\rho$ .

#### 7.4.1. Modelo BV

Para este modelo el tensor energía-momento efectivo adquiere la siguiente forma

$$T_0^0 = \frac{8\pi}{\phi} \rho - H \frac{\phi'}{\phi} + \frac{\omega}{2} \left( \frac{\phi'}{\phi} \right)^2 + \Lambda(\phi), \quad (7.86)$$

$$T_1^1 = -\frac{8\pi}{\phi} p - \frac{\phi'}{\phi} \left( \frac{d'}{d} + \frac{b'}{b} \right) - \frac{\omega}{2} \left( \frac{\phi'}{\phi} \right)^2 - \frac{\phi''}{\phi} + \Lambda(\phi), \quad (7.87)$$

$$T_2^2 = -\frac{8\pi}{\phi} p - \frac{\phi'}{\phi} \left( \frac{d'}{d} + \frac{a'}{a} \right) - \frac{\omega}{2} \left( \frac{\phi'}{\phi} \right)^2 - \frac{\phi''}{\phi} + \Lambda(\phi), \quad (7.88)$$

$$T_3^3 = -\frac{8\pi}{\phi} p - \frac{\phi'}{\phi} \left( \frac{a'}{a} + \frac{b'}{b} \right) - \frac{\omega}{2} \left( \frac{\phi'}{\phi} \right)^2 - \frac{\phi''}{\phi} + \Lambda(\phi), \quad (7.89)$$

mientras que las ecuaciones de conservación son

$$(3 + 2\omega(\phi)) \left( \frac{\phi''}{\phi} + H \frac{\phi'}{\phi} \right) - 2 \left( \Lambda - \phi \frac{d\Lambda}{d\phi} \right) = \frac{8\pi}{\phi} (\rho - 3p), \quad (7.90)$$

$$\rho' + (\rho + p)H = 0, \quad (7.91)$$

con  $H = ht^{-1}$ . La solución encontrada para las Ecs. (7.3-7.7) bajo las hipótesis anteriormente planteadas, Ec. (7.85), es la siguiente

$$\begin{aligned} a_1 = a_2 = a_3 = 1, \quad \phi_0 = 1, \quad m \in (-1, 1) \setminus \{0\}, \quad \tilde{n} = -1 - 3\gamma, \\ \rho_0 = -\frac{1}{8\pi(1+\gamma)} \left( (\omega + 1)(3\gamma + 1)^2 + 6\gamma + 2m^2 \right), \\ \Lambda_0 = -\frac{(3\gamma + 1)(2(m^2 - 1) + (\gamma - 1)(3\gamma + 1)\omega)}{2(1 + \gamma)}. \end{aligned} \quad (7.92)$$

Observamos que la solución es isótropa y no inflacionaria siendo válida, en principio, para  $m \in (0, 1)$ , es decir, hemos encontrado el mismo tipo de solución que en los casos anteriores para esta geometría. Con respecto al parámetro de la densidad de energía vemos que  $\rho_0 = 0$ , si

$$\gamma = -\frac{\left( \omega \pm \sqrt{2\omega(1 - m^2) + 3 - 2m^2 + 2} \right)}{3(\omega + 1)}, \quad \forall \omega \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \quad (7.93)$$

mientras que,  $\tilde{n} = 0 \iff \gamma_c = -\frac{1}{3}$ . Si  $\gamma < -1/3$  entonces  $\tilde{n} > 0$  y  $\tilde{n} < 0 \forall \gamma \in (-1/3, 1]$ .

Fijando el valor del parámetro de Brans-Dicke en base a las observaciones recientes  $\omega = 4 \cdot 10^4$  ([241]) y tomando para  $m$  el siguiente valor,  $m = \pm 1/2$  (aunque el resultado no dependa tanto del valor de  $m$  sino del valor de  $\omega$ ), entonces  $\rho_0 > 0 \iff \gamma \in I_1$ , donde  $I_1 = (-0,335382, -0,3313004)$ . Mientras que  $\Lambda_0 > 0, \forall \gamma \in (-1, 1] \setminus I_2$ , siendo  $I_2 = (-0,3333427, -0,333333)$ . Observamos que  $\Lambda_0 = 0$ , si

$$\gamma = -\frac{1}{3}, \quad \gamma = \frac{1}{3\omega} \left( \omega \pm \sqrt{2\omega(2\omega - 3m^2 + 3)} \right),$$

siendo  $\Lambda_0 < 0, \forall \gamma \in I_2$ , con  $I_2 \subset I_1$ . Por tanto, llegamos a la conclusión de que la solución sólo es válida para  $\forall \gamma \in I_1$ , i.e., un pequeño entorno de  $\gamma_c$ ,  $\mathcal{E}(\gamma_c = -\frac{1}{3}) = I_1$ , con  $I_2 \subset I_1$ . De hecho, si observaciones futuras sugiriesen un valor mayor del parámetro de BD, entonces dicho intervalo sería todavía más pequeño, de forma que en el límite,  $I_1 \rightarrow \{-1/3\}$ , siendo este resultado concordante con el hecho de que cuando  $\omega \rightarrow \infty$  la teoría de BD converge a la RG. De esta manera, vemos que, si  $\gamma = \gamma_c$ , entonces  $\rho_0 > 0$  pero  $\Lambda_0 = 0$  y  $\tilde{n} = 0$ , entonces  $\phi = \phi_0$  lo que significa  $G = G_0$  (constante), es decir, para este valor específico, la solución encontrada coincide con la solución del modelo clásico hallada anteriormente. En el siguiente gráfico, Fig.(7.1), representamos la solución obtenida en el intervalo  $I_1$ .

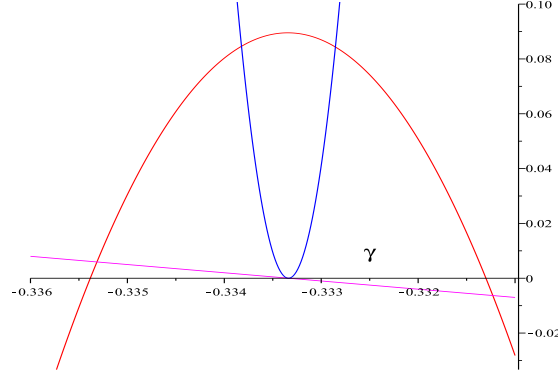


Figura 7.1: Solución al modelo JBD con  $\Lambda = \Lambda(\phi)$ , para el modelo BV en el intervalo  $I_1 = (-0,335382, -0,3313004)$ .  $\rho_0$  (rojo),  $\Lambda_0$  (azul),  $\tilde{n}$  (magenta).

De igual forma podemos comparar la solución de este modelo con la encontrada en la clásica con  $G$  y  $\Lambda$  variando en el tiempo. Vemos que  $\forall \gamma \in I_1$  tal que  $\gamma > \gamma_c$ , entonces  $\tilde{n} < 0$  y por lo tanto  $G_{\text{eff}} \approx \phi^{-1}$ , es creciente, y  $\Lambda$  se comporta como una función decreciente y positiva. Observar que  $\tilde{n} > 0, \forall \gamma \in (-0,335382, \gamma_c)$ ,  $\tilde{n} = 0$  si  $\gamma = \gamma_c$  y  $\tilde{n} < 0 \forall \gamma \in (\gamma_c, -0,3313004)$ .

#### 7.4.2. Modelo BVII

Para esta geometría, el tensor energía-momento adquiere la siguiente expresión

$$T_0^0 = \frac{8\pi}{\phi} \rho - H \frac{\phi'}{\phi} + \frac{\omega}{2} \left( \frac{\phi'}{\phi} \right)^2 + \Lambda(\phi), \quad (7.94)$$

$$T_1^1 = -\frac{8\pi}{\phi} p - \frac{\phi'}{\phi} \left( \frac{d'}{d} + \frac{b'}{b} \right) - \frac{\omega}{2} \left( \frac{\phi'}{\phi} \right)^2 - \frac{\phi''}{\phi} + \Lambda(\phi), \quad (7.95)$$

$$T_2^2 = -\frac{8\pi}{\phi} p - \frac{\phi'}{\phi} \left( \frac{a'}{a} + \frac{b'}{b} \right) - \frac{\omega}{2} \left( \frac{\phi'}{\phi} \right)^2 - \frac{\phi''}{\phi} + \Lambda(\phi), \quad (7.96)$$

$$T_3^3 = \left( \frac{d'}{d} - \frac{b'}{b} \right) \frac{\phi'}{\phi}, \quad (7.97)$$

$$T_3^3 = -\frac{8\pi}{\phi} p - \frac{\phi'}{\phi} \left( \frac{d'}{d} + \frac{a'}{a} \right) - \frac{\omega}{2} \left( \frac{\phi'}{\phi} \right)^2 - \frac{\phi''}{\phi} + \Lambda(\phi), \quad (7.98)$$

siendo las ecuaciones de conservación las dadas por las Ecs (7.90-7.91). Encontramos la siguiente solución

$$\begin{aligned} a_1 = a_2 = a_3 = 1, \quad q = 0, \quad h = 0, \\ \phi_0 = 1, \quad \tilde{n} = -1 - 3\gamma, \\ \rho_0 = -\frac{[\omega(3\gamma+1)^2 + 9\gamma^2 + 12\gamma + 1]}{8\pi(1+\gamma)}, \\ \Lambda_0 = \frac{(3\gamma+1)(2 + \omega(1-\gamma)(3\gamma+1))}{2(1+\gamma)}. \end{aligned} \quad (7.99)$$

Vemos que la solución encontrada sólo es válida para el caso  $h = 0$  y que los tres factores de escala son idénticos por lo que es isótropa y no inflacionaria, como en los anteriores casos. Llevando a cabo un análisis idéntico al realizado para el modelo anterior, encontramos que  $\rho_0 = 0$ , sii

$$\gamma = -\frac{(\omega \pm \sqrt{2\omega + 3} + 2)}{3\omega + 3}, \quad \omega \neq -1, \quad (7.100)$$

mientras que,  $\Lambda_0 = 0$ , sii

$$\gamma = -\frac{1}{3}, \quad \gamma = \frac{\omega \pm \sqrt{2\omega(2\omega + 3)}}{3\omega}, \quad \omega \neq 0. \quad (7.101)$$

Si fijamos  $\omega = 4 \cdot 10^4$ , entonces

$$\begin{aligned} \rho_0 > 0 &\iff \gamma \in I_1, \quad I_1 = (-0,335698, -0,330984), \\ \Lambda_0 < 0 &\iff \gamma \in I_2, \quad I_2 = (-0,333345, -0,333333), \end{aligned} \quad (7.102)$$

de hecho  $\Lambda_0 \geq 0$  si  $\gamma \notin I_2$ . Es decir, tenemos una situación absolutamente análoga a la descrita en el modelo BV (ver Fig. (7.1)) y, por tanto, llegamos a conclusiones análogas en este caso. Vemos que la solución sólo es válida  $\forall \gamma \in I_1$ , un entorno del punto crítico  $\gamma_c$ ,  $\mathcal{E}(\gamma_c = -\frac{1}{3}) = I_1$ , con  $I_2 \subset I_1$ ; pero si consideramos las observaciones ([95]) las cuales sugieren  $\Lambda_0 > 0$ , entonces la solución sólo es válida  $\forall \gamma \in I_1 \setminus I_2$ .

### 7.4.3. Modelo BIX

En este caso el tensor energía-momento efectivo es el siguiente

$$T_1^1 = \frac{8\pi}{\phi} \rho - H \frac{\phi'}{\phi} + \frac{\omega}{2} \left( \frac{\phi'}{\phi} \right)^2 + \Lambda(\phi), \quad (7.103)$$

$$T_2^2 = -\frac{8\pi}{\phi} p - \frac{\phi'}{\phi} \left( \frac{d'}{d} + \frac{b'}{b} \right) - \frac{\omega}{2} \left( \frac{\phi'}{\phi} \right)^2 - \frac{\phi''}{\phi} + \Lambda(\phi), \quad (7.104)$$

$$T_3^3 = -\frac{8\pi}{\phi} p - \frac{\phi'}{\phi} \left( \frac{d'}{d} + \frac{a'}{a} \right) - \frac{\omega}{2} \left( \frac{\phi'}{\phi} \right)^2 - \frac{\phi''}{\phi} + \Lambda(\phi), \quad (7.105)$$

$$T_4^4 = -\frac{8\pi}{\phi} p - \frac{\phi'}{\phi} \left( \frac{a'}{a} + \frac{b'}{b} \right) - \frac{\omega}{2} \left( \frac{\phi'}{\phi} \right)^2 - \frac{\phi''}{\phi} + \Lambda(\phi), \quad (7.106)$$

y las ecuaciones de conservación a considerar son (7.90-7.91). La solución encontrada es la siguiente

$$\begin{aligned} a_1 = a_2 = a_3 = 1, \quad q = 0 \quad \phi_0 = 1, \\ \rho_0 = -\frac{[2\omega(3\gamma + 1)^2 + 18\gamma^2 + 24\gamma + 1]}{16\pi(1 + \gamma)}, \\ \Lambda_0 = \frac{(3\gamma + 1)(5 + 2\omega(1 - \gamma)(3\gamma + 1))}{4(1 + \gamma)}, \end{aligned} \quad (7.107)$$

por lo que la métrica colapsa a la dada por la Ec. (7.48), siendo la solución isótropa y no inflacionaria. En este caso  $\rho_0 = 0$ , sii

$$\gamma = -\frac{(2\omega \pm \sqrt{2(5\omega + 7)} + 4)}{6(\omega + 1)}, \quad \omega \neq -1, \quad (7.108)$$

mientras que el parámetro de la constante cosmológica se anula,  $\Lambda_0 = 0$ , cuando

$$\gamma = -\frac{1}{3}, \quad \gamma = \frac{2\omega \pm \sqrt{2\omega(8\omega + 15)}}{6\omega}, \quad \omega \neq 0. \quad (7.109)$$

Una vez más se pone de manifiesto la analogía entre las soluciones para los distintos modelos. Si consideramos que  $\omega = 4 \cdot 10^4$ , entonces encontramos los siguientes intervalos

$$\begin{aligned} \rho_0 > 0 &\iff \gamma \in I_1 \quad I_1 = (-0,335976878, -0,330706454), \\ \Lambda_0 < 0 &\iff \gamma \in I_2 \quad I_2 = (-0,333348958, -1/3), \end{aligned} \quad (7.110)$$

de esta forma las conclusiones son idénticas a las encontradas en los dos casos.

---

**Conclusión 7.4.1** *Por tanto, en los tres casos concluimos que la solución sólo es válida en un pequeño intervalo de  $\gamma_c$ ,  $\mathcal{E}(\gamma_c = -\frac{1}{3}) = I_1$ . Para  $\gamma_c$ , entonces  $\rho_0 > 0$  pero  $\Lambda_0 = 0$  y  $\tilde{n} = 0$ , lo que implica  $\phi = \phi_0$  y esto significa que  $G = G_0$  (constante), es decir, la solución coincide con la obtenida en el modelo clásico para un fluido perfecto. Si comparamos estas soluciones con las obtenidas en el modelo clásico con constantes variables, vemos que si  $\gamma > \gamma_c, \forall \gamma \in I_1$  entonces  $\tilde{n} < 0$  y al ser  $G_{\text{eff}} \approx \phi^{-1}$  ( $G(t) \sim t^{3\gamma+1}$ ), entonces es creciente, mientras que  $\Lambda$  ( $\Lambda \sim t^{-2}$ ) es positiva y decreciente, tal y como sugieren las observaciones recientes.*

---

Si realizamos un análisis similar al aquí efectuado pero para el modelo descrito por la acción

$$S = \frac{1}{8\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{2} \left[ \phi R - \frac{\omega}{\phi} \phi_{,\alpha} \phi^{,\alpha} - 2U(\phi) \right] + \mathcal{L}_M \right\},$$

entonces llegamos a la misma conclusión, lo cual no es obvio, tal y como hemos puesto de manifiesto a lo largo de esta Tesis.

Para concluir, compararemos nuestros resultados con las observaciones recientes sobre la variación de  $G$ , las cuales estiman la relación  $G'/G$  (ver por ejemplo [222]). Nosotros, en los tres modelos estudiados, hemos obtenido,  $G(t) \sim t^{3\gamma+1}$  y  $G(t) \sim t^2$ ; esto significa que  $G'/G \sim \varepsilon t^{-1}$ , siendo  $\varepsilon = 3\gamma + 1$  o 2. Si consideramos una estimación media para la edad del universo como  $t \sim 10^{17} \text{s} = 3,1536 \times 10^{10} \text{yr}$ , entonces obtenemos los siguientes resultados en función de la EdE  $\gamma$ : Para  $\gamma = 1$ , ( $\varepsilon = 4$ ),  $G'/G \sim 1,2683917 \times 10^{-10} \text{yr}^{-1}$ , para  $\gamma = \frac{1}{3}$ , ( $\varepsilon = 2$ ),  $G'/G \sim 6,3419584 \times 10^{-11} \text{yr}^{-1}$ , para  $\gamma = 0$ , ( $\varepsilon = 1$ ),  $G'/G \sim 3,1709792 \times 10^{-11} \text{yr}^{-1}$ , mientras que para  $\gamma = -0,3$ , ( $\varepsilon \rightarrow 0^+$ ),  $G'/G \sim 3,1709792 \times 10^{-12} \text{yr}^{-1}$ . Observar que estos resultados dependen de la estimación sobre la edad media del universo, i.e., sobre la estimación del parámetro de Hubble. Como podemos ver, nuestros resultados están de acuerdo con los obtenidos para el pulsar binario Hulse-Taylor [85] y [86] y con las observaciones sobre la enana blanca G117-B15A, las cuales sugieren  $|G'/G| \leq 4,10 \times 10^{-11} \text{yr}^{-1}$  [90] pero no concuerdan con las aportadas por supernova tipo IA las cuales sugieren una  $G$  decreciente,  $-1,6 \times 10^{-12} \text{yr}^{-1} < G'/G < 0$  [89].

# Capítulo 8

## Modelo Kantowsky-Sachs

### Índice del capítulo

---

<b>8.1. Métrica y ecuaciones de campo</b> . . . . .	<b>149</b>
<b>8.2. Soluciones clásicas</b> . . . . .	<b>150</b>
8.2.1. Soluciones de vacío . . . . .	150
8.2.2. Fluido perfecto . . . . .	150
8.2.3. Modelo con constantes variables . . . . .	151
<b>8.3. Modelos escalares</b> . . . . .	<b>151</b>
8.3.1. Modelo escalar . . . . .	151
8.3.2. Modelo escalar con G variable . . . . .	152
8.3.3. Modelo sin interacción con un campo de materia . . . . .	152
8.3.4. Modelo escalar sin interacción con un campo de materia y G variable . . . . .	152
8.3.5. Modelo escalar interactuando con un campo de materia . . . . .	153
8.3.6. Modelo escalar interactuando con un campo de materia y G variable . . . . .	154
<b>8.4. Modelos tenso-escalares</b> . . . . .	<b>155</b>
8.4.1. Modelo con constante cosmológica . . . . .	155
8.4.2. Modelo con potencial . . . . .	156
8.4.3. Modelo camaleón . . . . .	158
8.4.4. Modelo de gravedad inducida . . . . .	161

---

### 8.1. Métrica y ecuaciones de campo

Comenzamos considerando los siguientes campos de Killing (KVF) [289],

$$Z_1 = \partial_y, \quad Z_2 = \cot z \cos y \partial_y + \sin y \partial_z, \quad Z_3 = -\cot z \sin y \partial_y + \cos y \partial_z, \quad Z_4 = \partial_x, \quad (8.1)$$

de tal modo que forman la siguiente álgebra

$$[Z_1, Z_2] = Z_3, \quad [Z_2, Z_3] = Z_1, \quad [Z_3, Z_1] = Z_2, \quad [Z_4, Z_i] = 0. \quad (8.2)$$

De esta forma la métrica adquiere la siguiente expresión

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)dx^2 + b^2(t) \left( \sin^2 z dy^2 + dz^2 \right). \quad (8.3)$$

Encontramos que la métrica (8.3) admite el siguiente campo homotético (HVF)

$$\mathcal{H} = t\partial_t + \left(1 - t\frac{a'}{a}\right) x\partial_x + \left(1 - t\frac{b'}{b}\right) y\partial_y + \left(1 - t\frac{b'}{b}\right) z\partial_z, \quad (8.4)$$

donde los factores de escala se comportan de la siguiente forma

$$a(t) = a_0 t^m, \quad y \quad b(t) = b_0 t, \quad \forall m \in \mathbb{R}^+. \quad (8.5)$$

Las ecuaciones de campo para esta métrica son

$$\frac{1}{b^2} + 2\frac{b'a'}{ba} + \left(\frac{b'}{b}\right)^2 = T_1^1, \quad (8.6)$$

$$\frac{1}{b^2} + 2\frac{b''}{b} + \left(\frac{b'}{b}\right)^2 = T_2^2, \quad (8.7)$$

$$\frac{b''}{b} + \frac{b'a'}{ba} + \frac{a''}{a} = T_3^3, \quad (8.8)$$

siendo  $T_i^i$  el tensor energía-momento correspondiente. A estas ecuaciones deberemos añadir la(s) ecuación(es) de conservación correspondientes a cada modelo.

Con las restricciones obtenidas para la métrica, los parámetros de anisotropía vienen dados por

$$\mathcal{A} = \frac{(m-1)^2}{3(m+2)^2}, \quad \mathcal{W}^2 = \frac{(m^2 - 2m + 2)^2}{36(m+2)^4}, \quad (8.9)$$

y la entropía gravitatoria,

$$P^2 = \frac{2(m^2 - 2m + 2)^2}{3(m^4 + 2m^2 + 4m + 4)}. \quad (8.10)$$

## 8.2. Soluciones clásicas

### 8.2.1. Soluciones de vacío

No existen soluciones para este modelo.

### 8.2.2. Fluido perfecto

Recordamos que el tensor energía-momento está definido por,  $T_{ij} = (\rho + p)u_i u_j - pg_{ij}$ , con una ecuación de estado (EdE),  $p = \gamma\rho$ , ( $\gamma = \text{const.}$ ), y que además, consideramos el principio de conservación para el campo de materia, i.e.,  $T_{ij}^{;j} = 0$ . Encontramos la siguiente solución

$$a(t) = a_0 t^{\sqrt{2}}, \quad b(t) = b_0 t, \quad \rho = \rho_0 t^{-2}, \quad (8.11)$$

por tanto, la métrica adquiere la siguiente expresión

$$ds^2 = -dt^2 + t^{2\sqrt{2}} dx^2 + t^2 (\sin^2 z dy^2 + dz^2), \quad (8.12)$$

siendo la solución encontrada únicamente válida para el siguiente valor de la EdE

$$\gamma_c = 1 - \sqrt{2} \approx -0,41421356. \quad (8.13)$$

Con estos resultados vemos que la solución es inflacionaria, ya que el parámetro de deceleración es negativo

$$q = \frac{3}{h} - 1 = 2 - \frac{3}{2}\sqrt{2} < 0, \quad (8.14)$$

mientras que los parámetros de anisotropía toman los siguientes valores

$$\mathcal{A} = \frac{(2 - \sqrt{2})^2}{(2 + \sqrt{2})^2} = 2,9437252 \times 10^{-2}, \quad \mathcal{W}^2 = \frac{11}{2} - \frac{35\sqrt{2}}{9} = 2,8059077 \times 10^{-4}, \quad (8.15)$$

por lo que podemos considerar que la solución es isótropa, al ser ambos valores muy próximos a cero. El valor de la entropía gravitatoria es el siguiente

$$P^2 = \frac{52}{21} - \frac{12\sqrt{2}}{7} = 5,1824369 \times 10^{-2}. \quad (8.16)$$

### 8.2.3. Modelo con constantes variables

En este caso, consideramos que las “constantes”  $G$  y  $\Lambda$  varían con el tiempo, y recordamos que las ecuaciones de campo para este modelo son las siguientes:

$$G_{ij} = G(t)T_{ij} - \Lambda(t)g_{ij}, \quad (G(t)T_{ij} - \Lambda(t)g_{ij})^{ij} = 0, \quad (8.17)$$

donde, además, tendremos en cuenta la condición de conservación para el campo de materia,  $T_{ij}^{;j} = 0$ , evitando así procesos de creación de materia. Encontramos la siguiente solución

$$\begin{aligned} a(t) &= a_0 t^{\sqrt{2}}, & b(t) &= b_0 t, & \rho &= \rho_0 t^{-(\gamma+1)(2+\sqrt{2})} \\ G &= G_0 t^{(\gamma+1)(2+\sqrt{2})-2}, & \Lambda &= \Lambda_0 t^{-2}, \end{aligned} \quad (8.18)$$

donde

$$G \approx \begin{cases} \text{decreciente } \forall \gamma \in [-1, \gamma_c) \\ \text{constante si } \gamma = \gamma_c \\ \text{creciente } \forall \gamma \in (\gamma_c, 1] \end{cases}, \quad \Lambda_0 \approx \begin{cases} \text{negativa } \forall \gamma \in [-1, \gamma_c) \\ \text{nula si } \gamma = \gamma_c \\ \text{positiva } \forall \gamma \in (\gamma_c, 1] \end{cases}, \quad (8.19)$$

siendo  $\gamma_c$ , el valor crítico del parámetro de la EdE dado por la Ec. (8.13). Esta solución, en principio, es válida para todo valor de la EdE  $\gamma$ , i.e., no existen restricciones (matemáticas) para  $\gamma$ . Como en la solución anterior, vemos que volvemos a obtener una solución inflacionaria, ya que el parámetro de deceleración es negativo,  $q < 0$ , y que podemos considerar la solución como isotropa, pues los dos parámetros de anisotropía están muy próximos a cero. Observamos que  $G(\gamma_c) = G_0$ , y  $\Lambda_0(\gamma_c) = 0$ . Teniendo en cuenta las observaciones que sugieren una  $\Lambda > 0$ , entonces llegamos a la conclusión de que la solución solamente tiene sentido físico en el intervalo  $\gamma \in (\gamma_c, 1]$ , donde  $G$  es creciente y  $\Lambda > 0$ .

Vemos que nuestro modelo predice los siguientes valores numéricos para la “constante” de gravitación. Consideramos el cociente,  $G'/G$ ,

$$\frac{G'}{G} \sim \frac{\varepsilon}{t} \approx \frac{\varepsilon}{3,1536} \times 10^{-10} \text{yr}, \quad \varepsilon = (\gamma + 1) (2 + \sqrt{2}) - 2, \quad (8.20)$$

siendo  $t$  un valor estimado de la edad del universo. En la siguiente tabla recogemos los diferentes valores de  $G'/G$ , para diferentes ecuaciones de estado

$\gamma$	$G'/G$
-1/3	$8,7564171 \times 10^{-12} \text{yr}^{-1}$ ,
0	$4,4844419 \times 10^{-11} \text{yr}^{-1}$ ,
1/3	$8,0932417 \times 10^{-11} \text{yr}^{-1}$ ,
1	$1,5310842 \times 10^{-10} \text{yr}^{-1}$ .

De esta forma, los resultados sólo estarían de acuerdo con las observaciones para valores de  $\gamma \leq 0$ . Estos cálculos son muy sensibles a la edad estimada del universo, por lo que si utilizamos otra estimación, los resultados varían.

## 8.3. Modelos escalares

### 8.3.1. Modelo escalar

Para este modelo, las ecuaciones de campo vienen dadas por las Ecs. (8.6-8.8), donde el tensor energía-momento está definido por las Ecs. (3.67-3.68) mientras que la ecuación de conservación viene dada por la Ec. (3.69). Por lo tanto, si consideramos la Ec. (3.99) encontramos el siguiente resultado

$$\alpha = 2\sqrt{2}, \quad \beta = 2 + \sqrt{2}, \quad m = \sqrt{2}, \quad q = 2 - \frac{3}{2}\sqrt{2} < 0, \quad (8.21)$$

viendo que obtenemos la misma solución para los factores de escala y, por lo tanto, la métrica viene expresada por la Ec. (8.12). De esta forma podemos asegurar que la solución encontrada es inflacionaria e isotropa. La solución obtenida,  $\alpha = 2\sqrt{2}$ , es un atractor para otras soluciones, por lo que describe comportamientos asintóticos para éstas, tal y como ha puesto de manifiesto Coley [151]. Vemos que el potencial es positivo, por lo que este modelo predice que la constante cosmológica sea positiva y decreciente  $V \sim \beta t^{-2}$ , tal y como sugieren las observaciones recientes.

### 8.3.2. Modelo escalar con G variable

Al igual que en el caso anterior, las ecuaciones de campo están definidas por las Ecs. (8.6-8.8) con un tensor energía-momento definido por las Ecs. (3.67-3.68), y además, tendremos en cuenta una ecuación de conservación descrita por la EC. (3.106). El comportamiento de las magnitudes involucradas en este modelo está descrito en la Ec. (3.140). Encontramos la siguiente solución

$$\alpha = \alpha, \quad \beta = \frac{1}{2}\alpha^2 (1 + \sqrt{2}), \quad m = \sqrt{2}, \quad q = 2 - \frac{3}{2}\sqrt{2} < 0, \quad G_0 = \frac{2\sqrt{2}}{\alpha^2}, \quad (8.22)$$

de forma que, una vez más, encontramos que los factores de escala se comportan de igual forma que en la solución obtenida para un fluido perfecto, por lo que la métrica se reduce a la Ec. (8.12), asegurando así que la solución es inflacionaria e isótropa. El parámetro  $\alpha$  queda indeterminado, pudiendo tomar valores tanto positivos como negativos excepto  $\alpha = 0$ , i.e.,  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Sin embargo, para que el potencial describa una constante cosmológica positiva y decreciente,  $V \sim t^{-2(\alpha+1)}$ , entonces  $\alpha \in (-1, \infty) \setminus \{0\}$ . Con esta restricción,  $G \sim t^{2\alpha}$ , únicamente es creciente si  $\alpha \in (0, \infty)$ , pudiendo ajustar el valor de  $\alpha$ , teniendo en cuenta los diversos trabajos sobre la variación de  $G$ , es decir, si consideramos que  $G'/G \sim \epsilon t^{-1} \approx \frac{\epsilon}{3,1536} \times 10^{-10} \text{yr}^{-1}$ , siendo  $\epsilon$  en este caso,  $\epsilon = 2\alpha$ , y tomando por ejemplo,  $G'/G \lesssim 4,10 \times 10^{-11} \text{yr}^{-1}$ , entonces  $\alpha = 0,646488$ .

### 8.3.3. Modelo sin interacción con un campo de materia

Las ecuaciones de campo para este modelo están descritas por las ecuaciones (8.6-8.8). Los tensores energía-momento de los campos de materia y escalar están definidos por las Ecs (3.3 y 3.67-3.68). Al no contemplar interacción entre los diversos campos considerados, las ecuaciones de conservación están descritas por las Ecs.  $(T^m)_{i;j}^j = 0 = (T^\phi)_{i;j}^j$ . En el tercer capítulo determinamos el comportamiento de las magnitudes (3.144), por lo que la solución encontrada es la siguiente

$$\begin{aligned} \beta &= 2 + \sqrt{2} - \rho_0 \frac{\sqrt{2}}{2}, & \alpha &= 2\sqrt{2} - \rho_0 (2 + \sqrt{2}), \\ m &= \sqrt{2}, & \gamma &= 1 - \sqrt{2} = \gamma_c, & q &= 2 - \frac{3}{2}\sqrt{2} < 0. \end{aligned} \quad (8.23)$$

Vemos que la solución únicamente es válida para,  $\gamma = 1 - \sqrt{2} = \gamma_c$ , tal y como sucedía en el caso de un fluido perfecto, obteniendo el mismo comportamiento para los factores de escala que en aquella solución, por lo que la solución es inflacionaria e isótropa. Las únicas restricciones físicas que podemos imponer son las siguientes: considerar que  $\rho_0$  sea positivo, i.e.,  $\rho_0 > 0$ , además  $\alpha$  debe ser positivo, por lo tanto,  $\rho_0 < 2\sqrt{2}/(2 + \sqrt{2})$ , mientras que  $\beta$  sólo es positiva si  $\rho_0 < 2(2 + \sqrt{2})/\sqrt{2}$ , por lo que concluimos que,  $\rho_0 < 2\sqrt{2}/(2 + \sqrt{2})$ . Desde el punto de vista de los sistemas dinámicos, Coley (ver [151] pág. 77) ha puesto de manifiesto que este tipo de soluciones (las matter-scaling solutions) son estables y con sentido físico si  $\alpha > 2$ ; de esta forma podemos obtener otra restricción sobre  $\rho_0$ , siendo ahora ésta,  $\rho_0 < (2\sqrt{2} - 2)/(\sqrt{2} + 2)$ .

### 8.3.4. Modelo escalar sin interacción con un campo de materia y G variable

Las ecuaciones de campo para este modelo vienen descritas por las Ecs.(8.6-8.8). Los tensores de los campos de materia y escalar están definidos por las Ecs. (3.3 y 3.67-3.68). Al considerar que no hay interacción y que  $G$  varía con el tiempo, entonces las ecuaciones de conservación quedan definidas por las Ecs. (3.147-3.148). Al saber como se comportan las magnitudes (3.149), entonces la solución encontrada es la siguiente,

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha, & \beta &= \frac{\alpha^2}{2} (1 + \sqrt{2}), & \rho_0 &= \frac{2}{G_0} (1 + \sqrt{2}) - \frac{\alpha^2}{2} (2 + \sqrt{2}), \\ \gamma &= 1 - \sqrt{2} = \gamma_c, & m &= \sqrt{2}, & q &= 2 - \frac{3}{2}\sqrt{2} < 0. \end{aligned} \quad (8.24)$$

Una vez más, observamos que la solución sólo es válida para el parámetro de la EdE  $\gamma_c = 1 - \sqrt{2}$ , y que los factores de escala se comportan como los obtenidos anteriormente, por lo que la métrica viene expresada por la

Ec. (8.12), de forma que la solución es inflacionaria, al ser el parámetro de deceleración negativo, e isótropa, al ser los dos parámetros de anisotropía muy próximos a cero. Observamos que la solución queda indeterminada al depender de  $\alpha$  y  $G_0$ . En primer lugar debemos “suponer” que  $G_0$ , es positivo pasando a imponer alguna restricción al parámetro  $\alpha$ . La única restricción posible viene dada en función de la expresión encontrada para el parámetro  $\rho_0$  que debe ser también positivo, por lo tanto, encontramos que

$$\alpha^2 \leq \frac{4}{G_0} \frac{(1 + \sqrt{2})}{(2 + \sqrt{2})}. \quad (8.25)$$

Resaltamos que la solución encontrada predice un valor  $\beta > 0$ , lo cual concuerda con las observaciones. Además deberemos tener en cuenta que  $\alpha \in (-1, \infty) \setminus \{0\}$ , para que el potencial, que imita el comportamiento de la constante cosmológica, sea decreciente. Pero no podemos afirmar nada sobre el comportamiento de  $G$ , ya que puede ser tanto creciente como decreciente.

### 8.3.5. Modelo escalar interactuando con un campo de materia

#### Primer enfoque

En este primer enfoque, las ecuaciones de campo a tener en cuenta vienen dadas por Ecs. (8.6-8.8) donde los tensores energía-momento de los respectivos campos están definidos por las Ecs. (3.3 y 3.67-3.68). Al considerar interacción entre ambos campos, la ecuación de conservación es (3.151), i.e.,  $(T^m)_{ij}^j = -(T^\phi)_{ij}^j$ . Teniendo en cuenta el comportamiento de las magnitudes Ec. (3.144), encontramos la siguiente solución

$$m = \sqrt{2}, \quad q = 2 - \frac{3}{2}\sqrt{2} < 0, \quad \alpha = 2\sqrt{2} - \rho_0(\gamma + 1), \quad \beta = (2 + \sqrt{2}) - \frac{\rho_0}{2}(1 - \gamma), \quad (8.26)$$

siendo válida para todo valor del parámetro de la EdE  $\gamma$ , i.e.,  $\forall \gamma \in (-1, 1]$ , en vez de para un único valor como en las soluciones anteriores. Igualmente observamos que la métrica colapsa a (8.12), y que, por tanto, la solución es inflacionaria e isótropa. La única restricción sobre  $\rho_0$  que encontramos es la siguiente,

$$0 < \rho_0 < \frac{2\sqrt{2}}{(\gamma + 1)}, \quad \forall \gamma \in (-1, 1], \quad (8.27)$$

ya que  $\alpha$  debe ser positivo. Con esta restricción garantizamos que  $\beta > 0$ , por lo que el potencial es positivo y decreciente.

Si  $\gamma = 0$ , (modelo de materia oscura interactuando con energía oscura) entonces

$$m = \sqrt{2}, \quad \alpha = 2\sqrt{2} - \rho_0, \quad \beta = (2 + \sqrt{2}) - \frac{\rho_0}{2}, \quad (8.28)$$

y por lo tanto  $0 < \rho_0 < 2\sqrt{2}$ .

#### Segundo enfoque

En este segundo enfoque, las ecuaciones a tener en cuenta son Ecs. (8.6-8.8) junto con las Ecs. (3.3 y 3.67-3.68) que definen los tensores de los campos de materia. En este caso, las ecuaciones de conservación están definidas por Ecs. (3.162-3.163). Si tenemos en cuenta que el comportamiento de las magnitudes está descrito por la Ec. (3.144), entonces la solución encontrada es la siguiente,

$$m = \sqrt{2}, \quad q = 2 - \frac{3}{2}\sqrt{2} < 0, \quad \alpha = 2\sqrt{2} - \rho_0(\gamma + 1), \\ \beta = (2 + \sqrt{2}) + \frac{\rho_0}{2}(\gamma - 1), \quad \delta = -\frac{2\gamma + (\gamma + 1)\sqrt{2}}{\sqrt{\alpha}} \leq 0. \quad (8.29)$$

Sorprende ver que hemos encontrado la misma solución que en el caso anterior y que, por lo tanto, la solución es inflacionaria e isótropa; además, deberemos tener en cuenta las mismas restricciones sobre  $\alpha$ . La única diferencia con respecto al anterior enfoque viene determinado por el hecho de que, en este modelo,  $\delta$  debe ser negativo

(para no violar los principios de la termodinámica); por esta razón, encontramos que la solución sólo es válida si  $\gamma \in (\gamma_c, 1]$ , ya que, de otro modo,  $\delta$  podría ser nula, si  $\gamma = \gamma_c$ , o positivo si  $\gamma < \gamma_c$ .

Si  $\gamma = 0$

$$\begin{aligned} m &= \sqrt{2}, & q &= 2 - \frac{3}{2}\sqrt{2} < 0, & \alpha &= 2\sqrt{2} - \rho_0, \\ \beta &= \left(2 + \sqrt{2}\right) - \frac{\rho_0}{2}, & \delta &= -\frac{\sqrt{2\alpha}}{\alpha} \leq 0, \end{aligned} \quad (8.30)$$

viendo de esta forma que  $\alpha > 0$ , si  $2\sqrt{2} > \rho_0$ .

### Tercer enfoque

Si resolvemos las ecuaciones de campo Ecs. (8.6-8.8) siendo los tensores de los campos definidos por las Ecs. (3.3 y 3.67-3.68) junto con las ecuaciones de conservación Ecs.(3.181-3.182) y teniendo en cuenta los resultados de la Ec. (3.144), entonces encontramos la siguiente solución

$$\begin{aligned} m &= \sqrt{2}, & q &= 2 - \frac{3}{2}\sqrt{2} < 0, & \alpha &= 2\sqrt{2} - \rho_0(\gamma + 1), \\ \beta &= \left(2 + \sqrt{2}\right) + \frac{\rho_0}{2}(\gamma - 1), & \delta &= \sqrt{2} + \gamma - 1, \end{aligned} \quad (8.31)$$

siendo ésta igual a la anterior y, por lo tanto, válidas en este caso las conclusiones a las que habíamos llegado en dicho caso. Vemos ahora que,  $\delta$  debe ser positivo, encontrando así que la solución sólo puede ser válida si  $\gamma \in (\gamma_c, 1]$ , donde recordamos que  $\gamma_c = 1 - \sqrt{2}$ .

Si fijamos  $\gamma = 0$ , entonces

$$m = \sqrt{2}, \quad q = 2 - \frac{3}{2}\sqrt{2} < 0, \quad \alpha = 2\sqrt{2} - \rho_0, \quad \beta = \left(2 + \sqrt{2}\right) - \frac{\rho_0}{2}, \quad \delta = \sqrt{2} - 1. \quad (8.32)$$

Vemos por lo tanto que los tres enfoques estudiados son muy similares; la única diferencia entre el primero y los otros dos es la validez del parámetro de la EdE, en el primero encontramos que la solución es válida si  $\gamma \in (-1, 1]$ , mientras que en los otros dos, la solución sólo es válida si  $\gamma \in (\gamma_c, 1]$ .

### 8.3.6. Modelo escalar interactuando con un campo de materia y G variable

La solución encontrada para las ecuaciones de campo (8.6-8.8), junto con las Ecs. (3.3 y 3.67-3.68) que definen los campos de materia y escalar, y las ecuaciones de conservación (3.224-3.225) donde la función de acoplamiento viene dada por la expresión  $Q = \delta H \rho_m$ , es la siguiente

$$\begin{aligned} m &= \sqrt{2}, & q &= 2 - \frac{3}{2}\sqrt{2} < 0, & \delta &= \gamma - 1 + \sqrt{2}, & \forall \gamma &\in (\gamma_c, 1], \\ \rho_0 &= \frac{2\sqrt{2} - \alpha^2 G_0}{G_0(\gamma + 1)}, & \beta &= \frac{1}{G_0(\gamma + 1)} \left( \alpha^2 G_0(1 - \gamma) + 4\gamma(\sqrt{2} + 1) + 4 \right). \end{aligned} \quad (8.33)$$

En primer lugar vemos que la solución sólo es válida si  $\gamma \in (\gamma_c, 1]$ ; de esta forma garantizamos que  $\delta > 0$ . Los factores de escala se comportan como en las soluciones anteriores y, por lo tanto, esta solución también es inflacionaria e isotropa. Una restricción posible sobre  $\alpha$  viene de la definición de  $\rho_0$  que debe ser positiva. De esta forma encontramos que,  $\alpha^2 < \frac{2\sqrt{2}}{G_0}$ . Además, podemos considerar que  $\alpha \in (-1, \infty) \setminus \{0\}$ , para que el potencial sea decreciente. Con esta restricción vemos que  $\beta$  es positivo, lo cual concuerda con las observaciones. Pero no podemos afirmar nada sobre el comportamiento de  $G$  ya que puede ser tanto creciente como decreciente. Si fijamos  $\gamma = 0$ , entonces

$$\begin{aligned} m &= \sqrt{2}, & q &= 2 - \frac{3}{2}\sqrt{2} < 0, & \delta &= -1 + \sqrt{2} \\ \rho_0 &= \frac{2\sqrt{2}}{G_0} - \alpha^2, & \beta &= \frac{2}{G_0} + \frac{\alpha^2}{2}. \end{aligned} \quad (8.34)$$

## 8.4. Modelos tenso-escalares

### 8.4.1. Modelo con constante cosmológica

Recordamos que las ecuaciones de campo para este modelo son las siguientes

$$R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}R = \frac{8\pi}{c^4\phi}T_{ij} + \Lambda(\phi)g_{ij} + \frac{\omega}{\phi^2}\left(\phi_{,i}\phi_{,j} - \frac{1}{2}g_{ij}\phi_{,l}\phi^{,l}\right) + \frac{1}{\phi}\left(\phi_{;ij} - g_{ij}\square\phi\right), \quad (8.35)$$

$$(3 + 2\omega(\phi))\square\phi = 8\pi T - \omega_{\phi}\phi_{,l}\phi^{,l} - 2\phi(\phi\Lambda_{\phi} - \Lambda(\phi)), \quad (8.36)$$

siendo,  $T = T_i^i$ , la traza del tensor energía-momento del campo de materia. La constante efectiva de gravitación,  $G_{\text{eff}}(t)$ , viene definida por la expresión

$$G_{\text{eff}}(t) = \left(\frac{2\omega + 4}{2\omega + 3}\right) \frac{G_*}{\phi(t)}. \quad (8.37)$$

De los resultados obtenidos en el capítulo 3, sabemos que las magnitudes deben comportarse de la siguiente forma:

$$\phi = \phi_0 t^n, \quad \Lambda(\phi) = \Lambda_0 t^{-(n+\alpha)}, \quad \omega(\phi) = \text{const.}, \quad \rho = \rho_0 t^{-\alpha},$$

donde,  $n + \alpha = 2$ ,  $\alpha = (1 + \gamma)h$ , y  $h = 2 + m$ . Teniendo en cuenta todos estos resultados, encontramos la siguiente solución a las ecuaciones de campo planteadas.

Los factores de escala se comportan de la siguiente manera

$$a(t) = a_0 t^m, \quad b(t) = b_0 t, \quad (8.38)$$

con

$$m = \frac{1}{2\gamma}(1 - \gamma - A) \in [1, 2361, 4], \quad \forall \gamma \in \left[-1, \frac{1}{9}\right], \quad (8.39)$$

siendo,  $A = \sqrt{9\gamma^2 - 10\gamma + 1}$ . El parámetro  $m$  no está definido si  $\gamma \in \left(\frac{1}{9}, 1\right)$ . Precisamente  $m(\gamma = 1) = 0$ .

El campo escalar se comporta como sigue

$$\phi = \phi_0 t^n, \quad G_{\text{eff}} \approx \phi^{-1}, \quad (8.40)$$

donde

$$n = \frac{1}{2\gamma}(-1 - 3\gamma^2 + A(1 + \gamma)) \in \left[-\frac{14}{3}, 2\right], \quad \forall \gamma \in \left[-1, \frac{1}{9}\right], \quad (8.41)$$

observando que

$$n > 0, \quad \forall \gamma \in [-1, \gamma_c), \quad n_{\gamma_c} = 0, \quad n < 0, \quad \forall \gamma \in \left(\gamma_c, \frac{1}{9}\right], \quad n_{\gamma=1} = -2.$$

Recordamos que  $\gamma_c$  está definido por la Ec. (8.13). Con respecto a la constante del campo escalar  $\phi_0$ , la solución obtenida es

$$\phi_0 = -\frac{1 + 4\gamma^2 - 7\gamma + A(2\gamma - 1)}{\gamma(-1 + 3\gamma + A)} \in \left[-3, \frac{11}{3}\right], \quad \forall \gamma \in \left[-1, \frac{1}{9}\right], \quad (8.42)$$

viendo que

$$\phi_0 < 0 \quad \forall \gamma \in [-1, \gamma_1), \quad \phi_{0\gamma_1} = 0, \quad \phi_0 > 0, \quad \forall \gamma \in \left(\gamma_1, \frac{1}{9}\right], \quad \phi_{0\gamma=1} = 1,$$

donde  $\gamma_1 = -0,1708203932$ . Por lo tanto, la solución sólo es válida si  $\gamma \in \left(\gamma_1, \frac{1}{9}\right]$  y  $\gamma = 1$ , ya que sólo para estos valores de  $\gamma$ ,  $\phi_0$  es positivo. Con respecto a la constante cosmológica encontramos que

$$\Lambda(\phi) = \Lambda_0 t^{-2}, \quad \Lambda_0 = \Lambda_0(\gamma, \omega), \quad \omega(\phi) = \text{const} \approx 4 \times 10^4,$$

(el valor de  $\omega(\phi)$  lo hemos obtenido de [241]), es decir la constante  $\Lambda_0$  toma una expresión complicada que depende de los parámetros  $\gamma$  y  $\omega$ . El análisis numérico llevado a cabo nos muestra que:  $\Lambda_0 > 0$ ,  $\forall \gamma \in (-1, \gamma_2)$ ,

$\Lambda_{0\gamma_2} = 0$ ,  $\Lambda_0 > 0 \forall \gamma \in (\gamma_2, \gamma_c)$ ,  $\Lambda_{0\gamma_c} = 0$ ,  $\Lambda_0 > 0 \forall \gamma \in (\gamma_c, \frac{1}{9}]$ , y  $\Lambda_{0\gamma=1} = 1$ , siendo  $\gamma_2 = -0,4142736105$ , y  $\gamma_c = -0,4142135624$ . Observamos que  $\gamma_1 \in (\gamma_c, \frac{1}{9}]$ , y por lo tanto  $\Lambda_{0\gamma_1} > 0$ .

La densidad de energía se comporta de la siguiente manera

$$\rho = \rho_0 t^{-\alpha}, \quad \alpha = (1 + \gamma)(m + 2), \quad \rho_0 = \rho_0(\gamma, \omega), \quad (8.43)$$

donde el análisis numérico realizado nos indica que

$$\begin{aligned} \rho_0 > 0 \forall \gamma \in (-1, \gamma_4), \quad \rho_{0\gamma_4} = 0, \quad \rho_0 < 0 \forall \gamma \in (\gamma_4, \gamma_5), \quad \rho_{0\gamma_5} = 0, \\ \rho_0 > 0 \forall \gamma \in (\gamma_5, \gamma_1), \quad \rho_{0\gamma_1} = 0, \quad \rho_0 < 0, \forall \gamma \in \left(\gamma_1, \frac{1}{9}\right], \quad \rho_{0\gamma=1} = -795,8940815, \end{aligned} \quad (8.44)$$

donde  $\gamma_4 = -0,4187505363$ ,  $\gamma_5 = -0,4097441700$ , y  $\gamma_1 = -0,1708203932$ .

De esta forma, llegamos a la conclusión de que la solución encontrada no es física (carece de sentido físico) ya que  $\phi_0 > 0$ ,  $\forall \gamma \in (\gamma_1, \frac{1}{9}]$ , pero  $\rho_0 < 0$ ,  $\forall \gamma \in (\gamma_1, \frac{1}{9}]$ . Resaltamos el hecho de que, precisamente cuando  $\gamma = \gamma_c$ , entonces los parámetros adquieren los siguientes valores numéricos,  $m_{\gamma_c} = \sqrt{2}$ ,  $n_{\gamma_c} = 0$ , y  $\Lambda_{0\gamma_c} = 0$ , tal y como sucedía en la solución encontrada para un fluido perfecto con constantes variables en el marco de la Relatividad General.

### 8.4.2. Modelo con potencial

Las ecuaciones de campo son

$$G_{ij} = \frac{8\pi}{c^4 \phi} T_{ij} + \frac{\omega}{\phi^2} \left( \phi_{,i} \phi_{,j} - \frac{1}{2} g_{ij} \phi_{,l} \phi^{,l} \right) + \frac{1}{\phi} \left( \phi_{;ij} - g_{ij} \square \phi \right) + \frac{U(\phi)}{\phi} g_{ij}, \quad (8.45)$$

$$(3 + 2\omega(\phi)) \square \phi = 8\pi T - \omega \phi_{,l} \phi^{,l} + \phi U_{\phi} - 2U(\phi), \quad (8.46)$$

donde,  $T = T_i^i$ , es la traza del tensor energía-momento. Para este modelo la constante efectiva de gravitación,  $G_{\text{eff}}(t)$ , está definida por

$$G_{\text{eff}}(t) = \left( \frac{2\omega + 4}{2\omega + 3} \right) \frac{G_*}{\phi(t)}. \quad (8.47)$$

Recordamos que en el capítulo 3, habíamos demostrado que las magnitudes deben comportarse de la siguiente forma

$$\phi = \phi_0 t^n \quad U(\phi) = U_0 t^{(n-2)}, \quad G_{\text{eff}} \approx \phi^{-1}, \quad \omega(\phi) = \text{const.} \quad \rho = \rho_0 t^{-\alpha},$$

con  $n + \alpha = 2$ ,  $\alpha = (1 + \gamma)h$ , y  $h = 2 + m$ .

Siguiendo los pasos descritos en el anterior modelo, encontramos la siguiente solución. Los factores de escala siguen las leyes

$$a(t) = a_0 t^m, \quad b(t) = b_0 t, \quad (8.48)$$

con

$$m = \frac{1}{2\gamma} (1 - \gamma - A) \in [1, 2361, 4], \quad \forall \gamma \in \left[-1, \frac{1}{9}\right], \quad (8.49)$$

y  $A = \sqrt{9\gamma^2 - 10\gamma + 1}$ , no estando por lo tanto, definido el parámetro  $m$ ,  $\forall \gamma \in (\frac{1}{9}, 1)$  y  $m(\gamma = 1) = 0$ . Con respecto al campo escalar vemos que

$$\phi = \phi_0 t^n, \quad G_{\text{eff}} \approx \phi^{-1} = G_* t^{-n}, \quad (8.50)$$

siendo en este caso

$$n = \frac{1}{2\gamma} \left( -1 - 3\gamma^2 + A(1 + \gamma) \right) \in \left[ -\frac{14}{3}, 2 \right], \quad \forall \gamma \in \left[ -1, \frac{1}{9} \right], \quad (8.51)$$

observando que

$$n > 0, \forall \gamma \in [-1, \gamma_c), \quad n_{\gamma_c} = 0, \quad n < 0, \forall \gamma \in \left(\gamma_c, \frac{1}{9}\right], \quad n_{\gamma=1} = -2,$$

donde  $\gamma_c$  es el valor crítico de la EdE dado por la Ec. (8.13), mientras que

$$\phi_0 = \frac{4\gamma(3\gamma - 1 + A)}{5\gamma^2 + 4\gamma - 1 + A(\gamma + 1)}, \quad \phi_0 > 0, \quad \forall \gamma \in \left[-1, \frac{1}{9}\right], \quad (8.52)$$

observando que:  $\phi_0(\gamma = 1) = 1$ . De esta forma vemos que la solución sólo tiene sentido físico si  $\gamma \in \left[-1, \frac{1}{9}\right]$  y  $\gamma = 1$ , ya que  $\phi_0$  debe ser positivo. El potencial del campo escalar se comporta de la siguiente manera

$$U(\phi) = U_0 t^{n-2}, \quad U_0 = U_0(\gamma, \omega), \quad \omega(\phi) = \text{const} = 10^4, \quad (8.53)$$

el análisis numérico llevado a cabo nos indica que

$$U_0 > 0 \quad \forall \gamma \in \left(-1, \frac{1}{9}\right] \setminus (\gamma_2, \gamma_c), \quad U_{0\gamma=1} = 1,$$

$$U_{0\gamma_2} = 0, \quad U_0 < 0 \quad \forall \gamma \in (\gamma_2, \gamma_c), \quad U_{0\gamma_c} = 0,$$

siendo  $\gamma_2 = -0,4142736105$ , y  $\gamma_c = -0,4142135624$ . Obsérvese que  $(n - 2) < 0$ . La densidad de energía sigue la siguiente ley

$$\rho = \rho_0 t^{-\alpha}, \quad \alpha = (1 + \gamma)(m + 2), \quad \rho_0 = \rho_0(\gamma, \omega), \quad (8.54)$$

con

$$\rho_0 < 0 \quad \forall \gamma \in \left(-1, \frac{1}{9}\right] \setminus (\gamma_4, \gamma_5), \quad \rho_{0\gamma=-1} = -795,8940815,$$

$$\rho_{0\gamma_4} = 0, \quad \rho_0 > 0 \quad \forall \gamma \in (\gamma_4, \gamma_5), \quad \rho_{0\gamma_5} = 0,$$

donde  $\gamma_4 = -0,4187505363$ , y  $\gamma_5 = -0,4097441700$ .

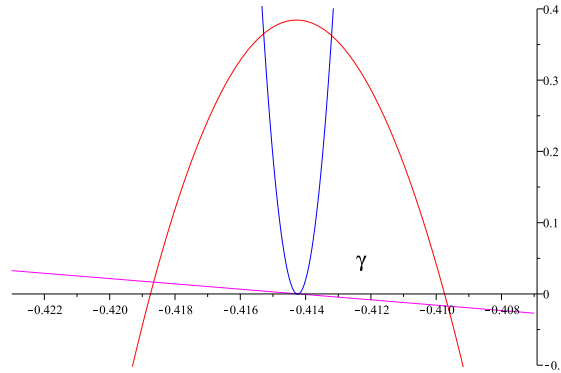


Figura 8.1: Modelo con potencial. La solución sólo es válida en el entorno  $\gamma \in (\gamma_4, \gamma_5)$ .  $\rho_0$  (rojo).  $U_0$  (azul) y  $n$  (magenta).

Por tanto, la solución únicamente tiene sentido físico si  $\gamma \in I = (\gamma_4, \gamma_5) \ni \gamma_c$ , es decir, un pequeño entorno del valor crítico del parámetro de la EdE  $\gamma_c$ , donde la densidad de energía es positiva,  $\rho_0 > 0$ , al igual que el campo escalar  $\phi_0 > 0$ , mientras que el potencial  $U_0 > 0 \quad \forall \gamma \in I \setminus I_c$ , donde  $I_c = (\gamma_2, \gamma_c)$ . En la figura adjunta hemos representado esta situación, ver Fig.(8.1). Vemos que  $G_{\text{eff}}(\gamma)$ , es decreciente si  $\gamma \in (\gamma_4, \gamma_c)$ , constante si  $\gamma = \gamma_c$  y creciente si  $\gamma \in (\gamma_c, \gamma_5)$ . Tal y como sucedía en la anterior situación, el del modelo con constante cosmológica, vemos que si fijamos  $\gamma = \gamma_c$ , entonces,  $m_{\gamma_c} = \sqrt{2}$ ,  $n_{\gamma_c} = 0$ , y  $\Lambda_{0\gamma_c} = 0$ , tal y como sucedía en el modelo con un fluido perfecto con constantes variables. De esta forma, vemos que existe una estrecha relación entre las soluciones obtenidas en dicho marco y las aquí obtenidas, donde  $G_{\text{eff}} \approx t^{-n} = t^{(1+\gamma)h-2}$ , i.e., el mismo resultado que en aquel escenario. De igual manera, observamos que la solución es inflacionaria, ya que  $q < 0$ ,  $\forall \gamma \in (\gamma_4, \gamma_5)$  y que es isótropa, pues los parámetros de anisotropía están muy próximos a cero.

$$\mathcal{A} = \frac{(m-1)^2}{3(m+2)^2} \ll 0,025, \quad \mathcal{W}^2 = \frac{(m^2 - 2m + 2)^2}{36(m+2)^4} \ll 0,01, \quad (8.55)$$

y la entropía gravitatoria,

$$|p^2| = \frac{2(m^2 - 2m + 2)^2}{3(m^4 + 2m^2 + 4m + 4)} \ll 0,02, \quad (8.56)$$

con  $m = \frac{1}{2\gamma}(1 - \gamma - A)$ ,  $A = \sqrt{9\gamma^2 - 10\gamma + 1}$ . Para concluir esta sección, hemos calculado los valores de  $m$  en  $\gamma_4$  y  $\gamma_5$ , siendo:  $m_{\gamma_4} = 1,4117478$  y  $m_{\gamma_5} = 1,4166738$ . Estos valores adquirirán un completo sentido en la próxima sección.

### 8.4.3. Modelo camaleón

Las ecuaciones de campo vienen descritas por las siguientes ecuaciones

$$G_{ij} = \frac{J(\phi)}{\phi} T_{ij} + \frac{\omega}{\phi^2} \left( \phi_{,i} \phi_{,j} - \frac{1}{2} g_{ij} \phi_{,l} \phi^{,l} \right) + \frac{1}{\phi} \left( \phi_{;ij} - g_{ij} \square \phi \right) + \frac{U(\phi)}{\phi} g_{ij}, \quad (8.57)$$

$$(2\omega + 3) \square \phi = T \left( J - \frac{1}{2} \phi J_{\phi} \right) - (\phi U_{\phi} - 2U), \quad (8.58)$$

donde las magnitudes deben comportarse de la siguiente manera

$$\phi = \phi_0 t^n, \quad U(\phi) = U_0 t^{(n-2)}, \quad G_{\text{eff}} \approx \phi^{-1}, \quad \omega(\phi) = \text{const.} \quad \rho = \rho_0 t^{-\alpha}, \quad J(\phi) = J_0 t^{\alpha+n-2}$$

con  $\alpha = (1 + \gamma)h$ , y  $h = 2 + m$ .

Encontramos la siguiente solución. El parámetro  $n$ ;

$$n = -\frac{m^2 - 2}{m - 1}, \quad (8.59)$$

de tal forma que  $n = 0$ , si  $m_c = \pm\sqrt{2} = \pm 1,414213562$ , considerando sólo la solución positiva, entonces,  $m \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ . Observamos que  $n < 0$  si  $m \in [0, 1) \cup (m_{c+}, \infty)$ , y  $n > 0$  si  $m \in (1, m_{c+})$ .

El resto de las magnitudes dependen de los parámetros  $(m, \gamma, \omega)$ , por lo que, para llevar a cabo un análisis numérico, necesitamos fijar el valor de dichos parámetros. Fijando  $\omega = 4 \cdot 10^4$ , entonces hacemos variar  $(m, \gamma)$ . En el figura adjunta (8.2) representamos las magnitudes, densidad de energía  $\rho$  (rojo), campo escalar  $\phi$  (azul), potencial  $U$  (verde), junto con el plano  $z = 0$  (gris), para resaltar los valores positivos de las tres magnitudes para un pequeño intervalo de  $m$ , donde ambas funciones son positivas.

Vemos que la densidad de energía es positiva  $\forall \gamma \in (\gamma_c, 1]$ , siendo negativa cuando  $\gamma < \gamma_c$ . De forma pormenorizada podemos fijar determinados valores para  $\gamma$ ,  $\gamma = 1, 1/3, 0, -1/3$ , i.e., las ecuaciones de estado usuales.

Para  $\gamma = 1$  entonces;  $\phi = \phi_0 t^n$ , y por lo tanto,  $G_{\text{eff}} \approx \phi^{-1} = G_* t^{-n}$ , donde

$$\phi_0 = \phi_0(m, \gamma = 1, \omega \approx 10^4) = -\frac{(10002m^4 - 2m^3 - 60007m^2 + 80010)}{(5001m^4 - m^3 - 9999m^2 - 3m + 2)}, \quad (8.60)$$

entonces

$$\phi_0 = 0, \quad \iff \quad m_1 = 1,414184279, \quad m_2 = 2,000024995, \quad (8.61)$$

y  $\phi_0$  no está definida cuando

$$m_{a_1} = 0,1399429180, \quad m_{a_2} = 1,414180724,$$

de tal forma que  $\phi_0 > 0$  si  $m \in (m_{a_1}, m_{a_2})$ , negativo  $\phi_0 < 0$  si  $m \in (m_{a_2}, m_1)$ , y  $\phi_0 > 0$  si  $m \in (m_1, m_2)$ . La constante del potencial  $U_0$  se comporta de la siguiente manera

$$U_0 = \phi_0 \frac{(m^2 - 2m + 2)}{2(m - 1)^2}, \quad (8.62)$$

por lo tanto  $U_0$  tiene las mismas raíces que  $\phi_0$  y no está definido cuando

$$m_{a_1} = 0,1399429180, \quad m_{a_3} = 1, \quad m_{a_2} = 1,414180724,$$

de tal forma que  $U_0 > 0$  si  $m \in (m_{a_1}, m_{a_2}) \setminus \{m_{a_3}\}$ .  $U_0 < 0$  si  $m \in (m_{a_2}, m_1)$ , y  $U_0 > 0$  si  $m \in (m_1, m_2)$ .

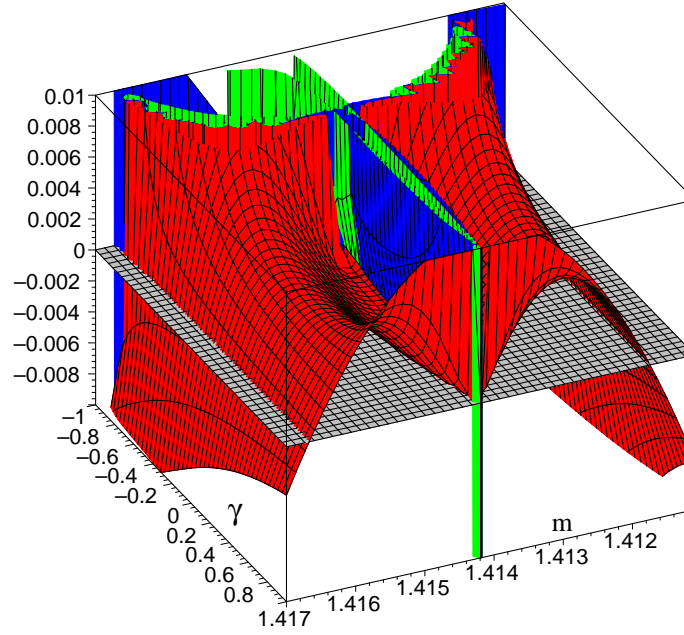


Figura 8.2: Modelo camaleón. Representación de las magnitudes,  $\rho$  (rojo),  $\phi$  (azul),  $U$  (verde) junto con el plano  $z = 0$  (gris).  $m \in [1,411, 1,417]$ ,  $\gamma \in (-1, 1]$ .

Con respecto a la densidad de energía vemos que:  $\rho_0 = \rho_0(m, \gamma = 1, \omega \approx 10^4, J_0 = 10)$  con

$$\rho_0 = \phi_0 \frac{(10002m^4 - 2m^3 - 40003m^2 - 2m + 40006)}{160\pi(5001m^4 - m^3 - 9999m^2 - 3m + 2)(m-1)^2},$$

entonces  $\rho_0 = 0$ , sii

$$m_1 = 1,414184279, \quad m_2 = 2,000024995, \quad m_3 = 1,411747788, \quad m_4 = 1,416673272,$$

y estando no definida si

$$m_{a_1} = 0,1399429180, \quad m_{a_3} = 1, \quad m_{a_2} = 1,414180724.$$

Encontramos que  $\rho_0 < 0$ , si  $m \in (m_{a_1}, m_{a_2}) \setminus \{m_{a_3}\}$ ,  $\rho_0 > 0$ ,  $\forall m \in (m_3, m_4)$  y  $\rho_0 < 0$ , si  $m \in (m_4, m_2)$ . No obstante, un análisis cuidadoso muestra que  $\rho_0$  no está definido cuando  $m_{a_2} = 1,414180724$ , observando que  $m_{a_2} \in (m_3, m_4)$ . Por lo tanto  $\rho_0 > 0$ ,  $\forall m \in (m_3, m_{a_2}) \cup (m_1, m_4)$ , si  $m \in (m_{a_2}, m_1)$  entonces  $\rho_0 < 0$ .

Vemos la relación entre las distintas raíces

$$m_{a_1} = 0,1399429180 < m_{a_3} = 1 < m_3 = 1,411747788 < m_{a_2} = 1,414180724 < \\ < m_1 = 1,414184279 < m_{c_+} = 1,414213562 < m_4 = 1,416673272 < m_2 = 2,000024995.$$

Por consiguiente se concluye que la solución sólo es válida si  $m \in (m_3, m_{a_2}) \cup (m_1, m_4)$ , ya que en dicho intervalo  $\rho_0 > 0$ ,  $\phi_0 > 0$ . En la figura (8.3) hemos representado esta situación. Comparar con la figura anterior (8.2).

Para aclarar los intervalos de definición y poder comparar los resultados, en la siguiente tabla hemos escrito las diferentes raíces,  $r_i$ , de las constantes  $(n, \phi_0, U_0, \rho_0)$  cuando  $\gamma = 1$ :

	$r_1$	$r_2$	$r_3$	$r_4$
$n$			$m_c = 1,414213562$	
$\phi_0$		$m_1 = 1,414184279,$		
$U_0$		$m_1 = 1,414184279,$		
$\rho_0$	$m_3 = 1,411747788$	$m_1 = 1,414184279,$		$m_4 = 1,416673272$

Los casos  $\gamma = 1/3, 0$  y  $-1/3$ , son muy similares. Por ejemplo, si  $\gamma = 1/3$ , el análisis numérico llevado a cabo, resumido en la siguiente tabla, nos muestra las diferentes raíces y los intervalos de definición de las magnitudes

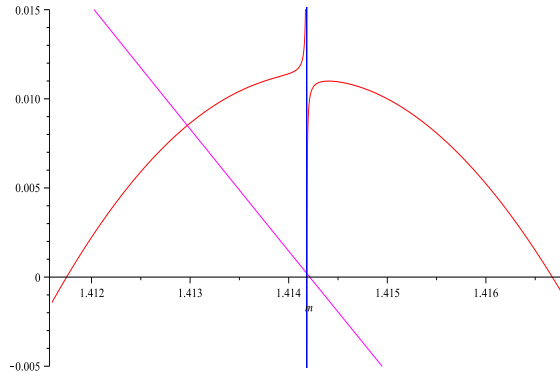


Figura 8.3: Modelo camaleón con  $\gamma = 1$  y  $m \in (m_3, m_4)$ .  $\rho_0$  (rojo).  $U_0$  (azul) y  $n$  (magenta),  $\phi_0$  (verde). Las gráficas de  $\phi_0$  y  $U_0$  aparecen superpuestas.

estudiadas (comparar con la tabla anterior).

	$r_1$	$r_2$	$r_3$	$r_4$
$n$			$m_c = 1,414213562$	
$\phi_0$		$m_1 = 1,414197143$	$m_c = 1,414213562$	
$U_0$		$m_1 = 1,414197143,$	$m_c = 1,414213562$	
$\rho_0$	$m_3 = 1,411747788$	$m_1 = 1,414197143,$	$m_c = 1,414213562$	$m_4 = 1,416673272$

En las figuras adjuntas, ver Figs. (8.4) hemos representado las diversas magnitudes en el intervalo  $m \in (m_3, m_4)$  y en detalle el intervalo  $m \in (m_1, m_c)$ . Observar las analogías con el caso  $\gamma = 1$  y comparar con la Fig. (8.2). Puesto que la densidad de energía y la función escalar deben ser positivas, i.e.  $\rho_0 > 0, \phi_0 > 0$ , entonces la solución sólo es válida en el intervalo  $(m_3, m_1) \cup (m_c, m_4)$ . La función potencial (la constante cosmológica),  $U$ , es positiva,  $U_0 > 0$  si  $(m_3, m_1) \cup (m_c, m_4)$ , pero en dicho intervalo, la constante de gravitación efectiva,  $G_{\text{eff}}$ , puede ser tanto creciente como decreciente.

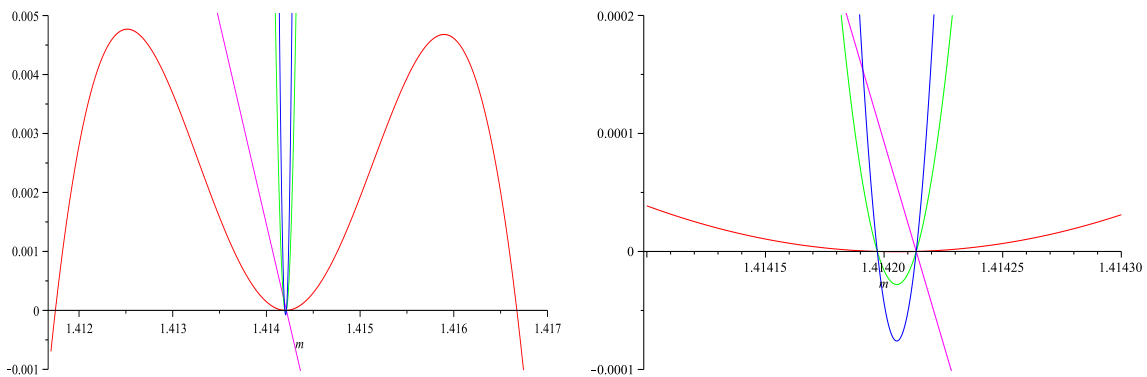


Figura 8.4: Modelo camaleón con  $\gamma = 1/3$  y  $m \in (m_3, m_4)$ .  $\rho_0$  color rojo.  $U_0$  azul y  $n$  color magenta.  $\phi_0$  está representada en color verde. Detalle ampliado del intervalo  $m \in (m_1, m_c)$ .

Por tanto, la solución es válida para todo valor de  $\gamma \in (\gamma_c, 1]$ , mientras que en el modelo estudiado anteriormente, la solución sólo era válida en un pequeño entorno del valor crítico  $\gamma_c$ . Recordamos que en el anterior modelo obteníamos  $m_{\gamma_4} = 1,41174778$  y  $m_{\gamma_5} = 1,41667328$ .

### 8.4.4. Modelo de gravedad inducida

En este caso las ecuaciones de campo son

$$F(\phi) G_{ij} = T_{ij} + \left( \phi_{,i} \phi_{,j} - \frac{1}{2} g_{ij} \phi_{,l} \phi^{,l} \right) + \left( F(\phi)_{;ij} - g_{ij} \square F(\phi) \right) + U(\phi) g_{ij}, \quad (8.63)$$

$$2\square\phi = RF_\phi - 2U_\phi, \quad (8.64)$$

siendo  $R$  la curvatura escalar y  $F(\phi) = \phi^2/4\omega$ . La constante de gravitación efectiva  $G_{\text{eff}}(t)$  viene definida por la siguiente expresión

$$G_{\text{eff}}(t) \approx \frac{G_*}{\phi^2}. \quad (8.65)$$

La curvatura escalar para la métrica (8.3) es:  $R = 2 \left( \frac{a''}{a} + 2\frac{b'a'}{ba} + 2\frac{b''}{b} + \frac{1}{b^2} + \left( \frac{b'}{b} \right)^2 \right)$ . Las magnitudes, tal y como demostramos en el capítulo 3, deben comportarse de la siguiente manera

$$\phi = \phi_0 t^n, \quad U(\phi) = U_0 t^{2(n-1)}, \quad G_{\text{eff}} \approx \phi^{-2}, \quad \omega(\phi) = \text{const.}, \quad \rho = \rho_0 t^{-\alpha},$$

con  $\alpha = (1 + \gamma)h$ , y  $h = 2 + m$ . Teniendo en cuenta todos estos resultados, encontramos la siguiente solución. Los factores de escala son

$$a(t) = a_0 t^m, \quad b(t) = b_0 t, \quad (8.66)$$

con  $m = m(n)$ :

$$m = -n + A, \quad A = \sqrt{2n^2 + n + 2}, \quad (8.67)$$

donde, tal y como podemos observar, si  $n = 0$ , entonces  $m = \sqrt{2}$ . El campo escalar,  $\phi_0 = \phi_0(n, \gamma)$  verifica

$$\phi_0 = \frac{2n [3n^2(1 + \gamma) + n(1 - 2A + \omega(1 + A)(1 + \gamma) - (2A + 1)\gamma) + 3(\gamma + 1)]}{n^3(2 + \omega - \gamma(1 + \omega)) + n^2(\gamma(2 + \omega + A) - \omega - 1) - \gamma(A + 1) - 1}, \quad (8.68)$$

de tal forma que  $\phi_0 = 0$ , si  $\gamma = -1$ , y  $n \neq 0$ . Con respecto al potencial,  $U_0 = U_0(n, \gamma, \omega)$ , hemos encontrado el siguiente valor

$$U_0 = \frac{\phi_0}{\omega(n-1)} \left( n(A-n)(\omega-2) + (n^2+1)(\omega+1) + 3 \right). \quad (8.69)$$

Por último, la densidad de energía,  $\rho_0 = \rho_0(n, \gamma, \omega)$ , se comporta como sigue:

$$\rho_0 = \frac{\phi_0}{2\omega(n-1)} \left[ \phi_0 \left( n\omega - (1+n) + (n-A)(1-n^2) \right) - 2n^3(\omega+1) + 2n^2(-1 + 2(A-n)(1-\omega) - \omega) - 6n \right]. \quad (8.70)$$

Tal y como podemos observar, todos los parámetros dependen de  $(n, \gamma, \omega)$  y, por lo tanto, es necesario estudiar la solución mediante análisis numéricos. Fijando  $\omega \approx 4 \cdot 10^4$ , las soluciones sólo dependen de  $(n, \gamma)$ . En la figura adjunta (8.5) representamos las gráficas conjuntas de los parámetros  $\rho_0$  (rojo)  $U_0$  (azul) y  $\phi_0$  (verde), junto con el plano  $z = 0$  (gris) para resaltar aquellos intervalos en los que los parámetros son positivos,  $n \in [-2, 1]$  y  $\gamma \in [-2, 0]$ .

De esta forma vemos que la solución únicamente tiene sentido físico si  $\gamma < -1$ , ya que para dichos valores, tanto la densidad de energía como la función escalar son positivos; sin embargo el potencial es negativo. Por ejemplo, para  $n = -1$ , obtenemos  $\phi_0 > 0$  y  $\rho_0 > 0$  si  $\gamma < -1$  mientras que  $U_0 < 0$  si  $\gamma < -1$ . Llegando a la misma conclusión si  $n = -2$ . Observar que los casos  $n = 0$  y  $n = 1$  están prohibidos. Por lo tanto, la solución obtenida solo es válida si  $\gamma < -1$ . Sin embargo, para estos valores de la EdE  $U_0 < 0$ , lo cual, está en contradicción con las observaciones.

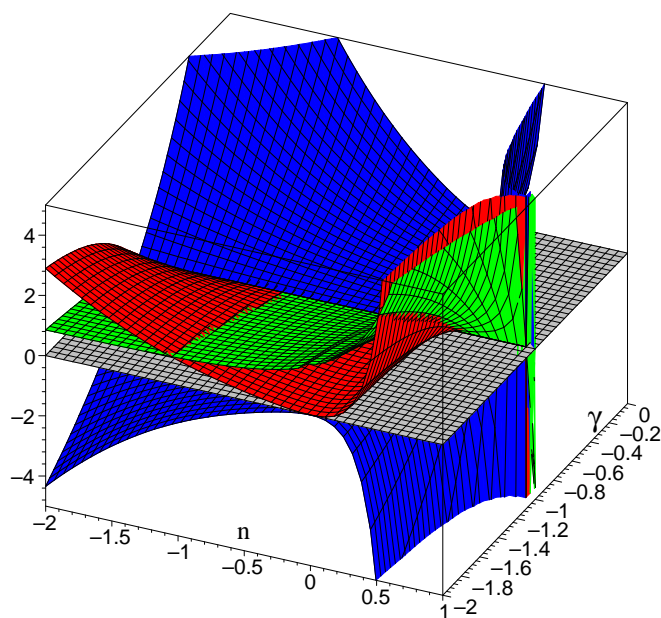


Figura 8.5: Modelo de gravedad inducida. Gráficas de  $\rho_0$  (rojo),  $U_0$  (azul) y  $\phi_0$  (verde), junto con el plano  $z = 0$  (gris),  $n \in [-2, 1]$  y  $\gamma \in [-2, 0]$ .

# Capítulo 9

## Trabajo futuro

### Índice del capítulo

---

<b>9.1. Sistemas dinámicos</b>	<b>163</b>
9.1.1. Modelo con constante variables	164
<b>9.2. Teoría de cuerdas</b>	<b>166</b>
9.2.1. Ecuaciones de campo	166
9.2.2. Colineaciones de materia	168
9.2.3. Ejemplo	169
<b>9.3. Modelo de branas</b>	<b>170</b>
9.3.1. Ecuaciones de campo	170
9.3.2. Colineaciones de materia	172
9.3.3. Variación de constantes	172
9.3.4. El caso $\mathcal{U} = 0$	174
9.3.5. Colineaciones de materia	175
9.3.6. Ejemplo	176

---

### 9.1. Sistemas dinámicos

A lo largo de la Tesis hemos hecho varias conjeturas sobre el comportamiento dinámico y la estabilidad de algunas de las soluciones obtenidas. Como primer trabajo futuro, deberíamos estudiar más a fondo esta cuestión. El método de los sistemas dinámicos aplicado a modelos cosmológicos, se remonta a la década de los 60 con trabajos pioneros llevados a cabo por Bogoyavlenski [290]. Sin ser exhaustivos en la exposición del desarrollo histórico, diremos que trabajos posteriores de Collins [285] (ver también [289] y [291]), ayudaron a entender la dinámica de los modelos tipo Bianchi. Posteriormente, Barrow y colaboradores [292] estudiaron la dinámica de algunos modelos tipo Bianchi, para un fluido perfecto, a la Lyapunov, demostrando bajo qué condiciones se producía la estabilidad de estas soluciones. No fue hasta la década de los 90 cuando, de forma sistemática y utilizando el método de las variables adimensionales, Wainwright y colaboradores estudiaron todos los modelos tipo Bianchi para un fluido perfecto, recopilando todo este trabajo en su famoso libro [150]. Más tarde se generalizó el estudio a modelos más complejos como fluidos viscosos, modelos escalares y otras teorías gravitatorias, como cuerdas, branas, etc, trabajos éstos recopilados en el libro de Coley [151]. Existen otros enfoques alternativos al de las variables adimensionales como el seguido por Szydlowski y colaboradores, quienes a partir de una formulación hamiltoniana de los modelos cosmológicos estudian su estabilidad estructural, a la Smale [293]. En un artículo reciente, Szydlowski [294] enfatiza y resume esta técnica.

Utilizando el método de las variables adimensionales (ver por ejemplo [150] y [295]), veremos que si bien la táctica de sistemas dinámicos funciona bien en los modelos estándares, no así en los modelos con constantes variables. Para ello, estudiaremos el caso más sencillo, el de un fluido perfecto y una métrica tipo FRW, demostrando que no es posible formular un sistema dinámico coherente, al faltar una ligadura. Por tanto, consideramos un fluido perfecto y la métrica FRW,  $ds^2 = -dt^2 + f^2(t) dl_k^2$ , donde  $dl_k^2$  es la métrica del 3-espacio de curvatura constante

y  $f$  el factor de escala. La notación que utilizaremos en esta sección es la siguiente: un punto denotará una derivada respecto al tiempo  $t$  y definiremos el parámetro de Hubble como sigue:  $H = \dot{f}/f$ , por lo que las consabidas ecuaciones de campo pueden escribirse de la siguiente forma:

$$H^2 = \frac{1}{3}\rho - \frac{1}{6}{}^3R + \frac{1}{3}\Lambda, \quad (9.1)$$

$$\frac{\dot{S}}{S} \equiv -qH^2 = -\frac{3\gamma-2}{6}\rho + \frac{1}{3}\Lambda, \quad (9.2)$$

$$\dot{\rho} = -3\gamma H\rho, \quad (9.3)$$

donde,  ${}^3R = 6k/f^2$ , es la curvatura del 3-espacio y  $q$  es el parámetro de deceleración. Si asumimos que  $H \neq 0$ , entonces podemos definir las siguientes variables adimensionales

$$K = \frac{{}^3R}{6H^2}, \quad \Omega = \frac{\rho}{3H^2}, \quad \Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H^2}. \quad (9.4)$$

Vemos que el parámetro de densidad,  $\Omega$ , está relacionado con el de curvatura  $K$  y el de la constante cosmológica  $\Omega_\Lambda$ , mediante la ecuación de *Friedmann*, i.e., la Ec. (9.1):

$$\Omega = 1 + K - \Omega_\Lambda, \quad (9.5)$$

mientras que el parámetro de deceleración puede ser expresado en función de la ecuación de *Raychaudhuri* i.e.:

$$q = \frac{3\gamma-2}{2}\Omega - \Omega_\Lambda = \frac{3\gamma-2}{2}(1+K) - \frac{3\gamma}{2}\Omega_\Lambda. \quad (9.6)$$

Si tenemos en cuenta la condición débil de energía junto con  $\Lambda \geq 0$ , entonces obtenemos de forma inmediata,  $0 \leq \Omega$ ,  $-1 \leq K$ ,  $0 \leq \Omega_\Lambda$ . Si consideramos modelos donde  ${}^3R$  no sea positiva, entonces estas magnitudes son compactas, es decir, están definidas en un intervalo compacto

$$0 \leq \Omega \leq 1, \quad -1 \leq K \leq 0, \quad 0 \leq \Omega_\Lambda \leq 1. \quad (9.7)$$

Introduciendo una nueva variable adimensional definida por,  $(\ )' = \frac{1}{H} \frac{d}{dt} (\ )$ , entonces obtenemos el siguiente sistema

$$H' = -(1+q)H, \quad (9.8)$$

$$K' = 2qK, \quad (9.9)$$

$$\Omega_\Lambda' = 2(1+q)\Omega_\Lambda. \quad (9.10)$$

mientras que, de la ecuación de conservación, obtenemos la siguiente ecuación

$$\Omega' = [2q - (3\gamma - 2)]\Omega. \quad (9.11)$$

De esta forma llegamos al siguiente sistema dinámico:

$$\Omega' = [2(1+q) - 3\gamma]\Omega, \quad (9.12)$$

$$K' = 2qK, \quad (9.13)$$

$$\Omega_\Lambda' = 2(1+q)\Omega_\Lambda. \quad (9.14)$$

Con este sistema podemos investigar el comportamiento de un modelo homogéneo e isótropo con constante cosmológica [150].

### 9.1.1. Modelo con constante variables

Siguiendo esta táctica, pretendemos ahora formular un sistema dinámico análogo, en el caso en el que las constantes sean variables en el tiempo, i.e.,  $G = G(t)$  y  $\Lambda = \Lambda(t)$ . Empezaremos definiendo las variables adimensionales

$$K = \frac{{}^3R}{6H^2}, \quad \Omega = \frac{G\rho}{3H^2}, \quad \Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H^2}. \quad (9.15)$$

por lo que las ecuaciones de campo serán ahora

$$H^2 = \frac{1}{3}G\rho - \frac{1}{6}{}^3R + \frac{1}{3}\Lambda, \quad (9.16)$$

$$\frac{\ddot{S}}{S} = \frac{2-3\gamma}{6}G\rho + \frac{1}{3}\Lambda, \quad (9.17)$$

$$\dot{\rho} = -3\gamma H\rho, \quad (9.18)$$

$$\dot{\Lambda} = -\dot{G}\rho, \quad (9.19)$$

o

$$\dot{\rho} + 3\gamma H\rho = -\frac{\dot{G}}{G}\rho - \frac{\dot{\Lambda}}{G}, \quad (9.20)$$

si no queremos imponer la condición de conservación al tensor energía-momento. De esta forma, tenemos las siguientes posibilidades:

$$(1.) : \begin{cases} \dot{\rho} = -3\gamma H\rho, \\ \dot{\Lambda} = -\dot{G}\rho, \end{cases} \quad (2.) : \dot{\rho} + 3\gamma H\rho = -\frac{\dot{G}}{G}\rho - \frac{\dot{\Lambda}}{G}.$$

1. **Primer caso.** En este caso las ecuaciones del sistema dinámico asociado son

$$\Omega' = \frac{\dot{G}\mu}{3H^3} + [2(1+q) - 3\gamma]\Omega, \quad (9.21)$$

$$K' = 2qK, \quad (9.22)$$

$$\Omega_{\Lambda}' = \frac{\dot{\Lambda}}{3H^3} + 2(1+q)\Omega_{\Lambda}. \quad (9.23)$$

donde

$$\begin{aligned} \Omega' &= \frac{1}{H} \frac{d}{dt} (\Omega) = \frac{1}{3H} \frac{d}{dt} \left( \frac{G\mu}{H^2} \right) = \frac{1}{3H} \left( \frac{\dot{G}\mu}{H^2} + \frac{G\dot{\mu}}{H^2} - G\mu \frac{2H\dot{H}}{H^4} \right) \\ \Omega_{\Lambda}' &= \frac{1}{H} \frac{d}{dt} (\Omega_{\Lambda}) = \frac{1}{H} \frac{d}{dt} \left( \frac{\Lambda}{3H^2} \right) = \frac{\dot{\Lambda}}{3H^3} + \frac{\Lambda}{3H} \left( \frac{-2H\dot{H}}{H^4} \right) \end{aligned}$$

por tanto

$$\Omega' = \left[ \frac{\dot{G}}{GH} + 2(1+q) - 3\gamma \right] \Omega, \quad (9.24)$$

$$K' = 2qK, \quad (9.25)$$

$$\Omega_{\Lambda}' = \left[ \frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda H} + 2(1+q) \right] \Omega_{\Lambda}. \quad (9.26)$$

Sin embargo, no disponemos de ninguna ecuación para  $G$  o para  $\Lambda$ , por lo que el anterior sistema no constituye un sistema dinámico. No obstante, de las relaciones  $\Omega' = 0 = \Omega_{\Lambda}'$ , obtenemos las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} \frac{\dot{G}}{GH} + 2(1+q) - 3\gamma = 0 &\iff G = G_0 S^{3\gamma - 2(1+q)} \\ \frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda H} + 2(1+q) = 0 &\iff \Lambda = \Lambda_0 S^{-2(1+q)} \end{aligned}$$

que sí están en concordancia con resultados previos obtenidos mediante pura integración [296].

2. **Segundo caso.** Las ecuaciones son

$$\dot{\rho} + 3\gamma H\rho = -\frac{\dot{G}}{G}\rho - \frac{\dot{\Lambda}}{G} \quad \Omega = \frac{G\rho}{3H^2}$$

por lo que el sistema asociado es

$$\Omega' = -\frac{\dot{\Lambda}}{3H^3} + [2(1+q) - 3\gamma] \Omega, \quad (9.27)$$

$$K' = 2qK, \quad (9.28)$$

$$\Omega_{\Lambda}' = \left[ \frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda H} + 2(1+q) \right] \Omega_{\Lambda}. \quad (9.29)$$

pero, al igual que antes, no disponemos de ninguna ligadura para  $G$  o para  $\Lambda$ .

De esta forma vemos que es necesario trabajar más si queremos estudiar estos modelos con este tipo de técnicas o quizás estudiar otras alternativas como la de la formulación hamiltoniana.

Antes de terminar esta sección, me gustaría resaltar el hecho de que no todo está hecho en el estudio mediante sistemas dinámicos de los modelos tipo Bianchi. A lo largo de la Tesis, hemos mostrado los resultados ya existentes y, de igual forma, hemos mencionado las conjeturas que, por ejemplo, existen para los modelos BVI, incluso en el caso más sencillo de un fluido perfecto. Precisamente la demostración de estas conjeturas está pendiente de estudio y, sobre todo, en casos más complejos, cuando se estudian modelos escalares, etc. De igual forma, se pueden revisar y ampliar todos los resultados concernientes a soluciones en modelos tenso-escalares, de los que apenas se ha trabajado con métricas tipo FRW [297].

## 9.2. Teoría de cuerdas

En la cosmología actual se acepta el hecho de que el universo está en expansión. Extrapolando hacia el pasado, nos encontramos que los modelos poseen una singularidad inicial en la que altas energías están involucradas y los modelos dejan de funcionar en tal época. De esta forma, vemos que es necesario crear otras teorías que sean capaces de explicar semejantes fenómenos. Una de tales teorías es la de supercuerdas [298]-[299], siendo una candidata a unificar todas las interacciones, incluida la gravitación. Existen cinco teorías de supercuerdas, aunque existen ahora evidencias de que todas ellas están relacionadas y que pueden ser una manifestación de una teoría cuántica más fundamental, denominada M-teoría. Uno de los condicionantes más fuertes para estas teorías de unificación es que deben predecir modelos cosmológicos realistas. De esta forma, es importante investigar si los modelos cosmológicos sugeridos por estas teorías isotropizan y homogeneizan en el futuro, al igual que determinar la validez del régimen de bajas energías. A la luz de recientes observaciones, sabemos que la densidad de energía generada por el vacío puede dominar la dinámica del universo a gran escala en el presente, por lo que es importante preguntarse si estas teorías pueden modelizar estos escenarios tipo “quintaesencia” y no menos importante es preguntarse si la inflación puede ocurrir.

### 9.2.1. Ecuaciones de campo

Una predicción definitiva de la teoría de cuerdas es la existencia de un campo escalar,  $\phi$ , denominado “dilatón” que se acopla directamente con la materia en el sector de Neveu-Schwarz/Neveu-Schwarz (NS/NS), el campo de Kalb-Ramond,  $H_{ij\lambda}$ , y el campo del tensor métrico también denominado “gravitón”. Empezaremos considerando la siguiente acción para cuerdas  $D$ -dimensionales para bajas energías [300]

$$S = \frac{1}{2\kappa_D^2} \int d^D x \sqrt{-g} e^{-\phi} \left[ R + (\nabla\phi)^2 - V - \frac{1}{12} H^2 \right] + \int d^D x \sqrt{-g} \mathcal{L}_{\text{matter}}, \quad (9.30)$$

donde  $\kappa_D^2 = 8\pi G_D$ , y

- $\phi$  es el campo dilatón, que determina la intensidad del acoplo gravitatorio
- $V$ , es el potencial del dilatón, y
- $H^2 = H_{ij\lambda} H^{ij\lambda}$  donde  $H_{ij\lambda} = \partial_{[i} B_{j\lambda]}$

Si variamos la acción con respecto a  $g_{ij}$ ,  $B_{ij}$  y  $\phi$ , entonces encontramos las siguientes ecuaciones

$$R_i^j - \frac{1}{2}g_i^j R = \kappa_D^2 e^\phi T_i^j + \frac{1}{12} \left( 3H_{i\lambda\kappa} H^{j\lambda\kappa} - \frac{1}{2}g_i^j H^2 \right) - \frac{1}{2}g_i^j V - \frac{1}{2}g_i^j (\nabla\phi)^2 + (g_i^j g^{\lambda\kappa} - g_i^\lambda g^{j\kappa}) \nabla_\lambda \nabla_\kappa \phi, \quad (9.31)$$

$$\nabla_\mu \left( e^{-\phi} H^{ij\lambda} \right) = 0, \quad (9.32)$$

$$2\Box\phi + R - (\nabla\phi)^2 - V - \frac{1}{12}H^2 = 0, \quad (9.33)$$

donde  $T_{ij}$  es el tensor energía-momento derivado del lagrangiano de materia.

Las ecuaciones de campo obtenidas son similares a las de Brans-Dicke donde el parámetro de Brans-Dicke se iguala a:  $\omega = -1$ . Estrictamente hablando, esto sólo es cierto en ausencia del campo  $H$  y donde, tal y como sucede en los modelos tipo Brans-Dicke, se asume que el tensor energía-momento de todos los campos está mínimamente acoplado con la métrica  $g_{ij}$ . Sin embargo, considerar  $\omega = -1$ , no es consistente con las observaciones. Mientras que asumimos que el tensor energía-momento de otros campos de materia se conserva con respecto a la métrica, de tal forma que,  $\nabla_i T^{ij} = 0$ , no podemos definir un tensor energía-momento sólo en términos del campo  $H$  que es conservado independientemente del dilatón. Esto es una consecuencia de las ecuaciones del movimiento para  $H$  (Ec. (9.32)), las cuales tienen una dependencia explícita de  $e^\phi$ .  $H_{ij\lambda}$  sólo se acopla mínimamente con la métrica conforme

$$\bar{g}_{ij} = \exp\left(\frac{2\phi}{6-D}\right) g_{ij}, \quad (9.34)$$

la cual se denomina, la  $B$ -métrica, donde encontramos que,  $\bar{\nabla}_i \bar{H}^{ij\lambda} = 0$ , observándose que la 3-forma  $H_{ij\lambda}$ , tiene una definición invariante conforme en términos del potencial  $B_{ij}$ .

Otra métrica, particularmente útil, es la denominada métrica de Einstein [302], definida de la siguiente forma

$$\tilde{g}_{ij} = \exp\left(-\frac{2\phi}{D-2}\right) g_{ij}. \quad (9.35)$$

En este marco, la acción aparece como la acción de Einstein-Hilbert de la Relatividad General escrita en  $D$ -dimensiones, mientras que el dilatón aparece simplemente como un campo de materia, aunque con interacciones,

$$S = \frac{1}{2\kappa_D^2} \int d^D x \sqrt{-\tilde{g}} \left[ \tilde{R} - \frac{1}{D-2} (\tilde{\nabla}\phi)^2 - V \exp\left(\frac{2\phi}{D-2}\right) - \frac{1}{12} \exp\left(-\frac{4\phi}{D-2}\right) \tilde{H}^2 \right] + \int d^D x \sqrt{-\tilde{g}} \exp\left(\frac{D\phi}{D-2}\right) \mathcal{L}_{\text{matter}}. \quad (9.36)$$

Las correspondientes ecuaciones de campo, por tanto, son ahora las siguientes [303]

$$\tilde{R}_{ij} - \frac{1}{2}\tilde{g}_{ij}\tilde{R} = \kappa_D^2 \left( \tilde{T}_{ij} + {}^{(H)}\tilde{T}_{ij} + {}^{(\phi)}\tilde{T}_{ij} + {}^{(V)}\tilde{T}_{ij} \right), \quad (9.37)$$

$$\tilde{\nabla}_i \left( \exp\left(-\frac{4\phi}{D-2}\right) \tilde{H}^{ij\lambda} \right) = 0, \quad (9.38)$$

$$\tilde{\Box}\phi - V \exp\left(\frac{2\phi}{D-2}\right) + \frac{1}{6} \exp\left(-\frac{4\phi}{D-2}\right) \tilde{H}^2 = 0, \quad (9.39)$$

donde

$$\tilde{T}_i^j = \exp\left(\frac{D\phi}{D-2}\right) T_i^j, \quad (9.40)$$

$$\kappa_D^2 {}^{(\phi)}\tilde{T}_i^j = \frac{1}{D-2} \left( \tilde{g}_i^\lambda \tilde{g}^{j\kappa} - \frac{1}{2}\tilde{g}_i^j \tilde{g}^{\lambda\kappa} \right) \phi_{,\lambda} \phi_{,\kappa}, \quad (9.41)$$

$$\kappa_D^2 {}^{(H)}\tilde{T}_i^j = \frac{1}{12} \exp\left(-\frac{4\phi}{D-2}\right) \left( 3\tilde{H}_{i\lambda\kappa} \tilde{H}^{j\lambda\kappa} - \frac{1}{2}\tilde{g}_i^j \tilde{H}^2 \right), \quad (9.42)$$

$$\kappa_D^2 {}^{(V)}\tilde{T}_i^j = -\frac{1}{2} V \exp\left(\frac{2\phi}{D-2}\right) \tilde{g}_i^j, \quad (9.43)$$

son los tensores energía-momento para los campos de materia, dilatón, campo  $H$  y el potencial  $V$ , respectivamente. El tensor energía-momento efectivo (el total) debe verificar las identidades de Bianchi y, por lo tanto, debe tener divergencia nula. En 4-dimensiones, las ecuaciones de movimiento para el campo  $H$ , Ec. (9.38), se resuelven haciendo la siguiente hipótesis sobre dicho campo,

$$\tilde{H}^{ij\lambda} = e^{2\phi} \tilde{\epsilon}^{ij\lambda\kappa} h_{,\kappa}, \quad (9.44)$$

donde  $\tilde{\epsilon}^{\mu\nu\lambda\kappa}$  es la 4-forma antisimétrica (que verifica  $\tilde{\nabla}_\rho \tilde{\epsilon}^{\mu\nu\lambda\kappa} = 0$ ) y de la condición de integrabilidad,  $\partial_{[i} \tilde{H}_{j\lambda\kappa]} = 0$ , obtenemos una nueva ecuación para  $h$  (el axioma)

$$\tilde{\square} h + 2\tilde{\nabla}^i \phi \tilde{\nabla}_i h = 0. \quad (9.45)$$

Por lo tanto,  $h$ , evoluciona como un campo escalar sin masa acoplado al dilatón (excepto en el **B**-marco donde  $\tilde{\square} h = 0$ ). La misma interacción aparece en la ecuación de movimiento para el dilatón (Ec. (9.39), con  $V = 0$ ) como

$$\tilde{\square} \phi = e^{2\phi} (\tilde{\nabla} h)^2. \quad (9.46)$$

De esta forma tenemos tres campos escalares interactuando, cuyos tensores energía-momento vienen dados por las siguientes definiciones

$$\kappa^2 {}^{(\phi)}\tilde{T}_i^j = \frac{1}{2} \left( \tilde{g}_i^\lambda \tilde{g}^{j\kappa} - \frac{1}{2} \tilde{g}_i^j \tilde{g}^{\lambda\kappa} \right) \phi_{,\lambda} \phi_{,\kappa}, \quad (9.47)$$

$$\kappa^2 {}^{(H)}\tilde{T}_i^j = \frac{1}{2} \left( \tilde{g}_i^\lambda \tilde{g}^{j\kappa} - \frac{1}{2} \tilde{g}_i^j \tilde{g}^{\lambda\kappa} \right) e^{2\phi} h_{,\lambda} h_{,\kappa}. \quad (9.48)$$

$$\kappa_D^2 {}^{(V)}\tilde{T}_i^j = -\frac{1}{2} V \exp(\phi) \tilde{g}_i^j. \quad (9.49)$$

y donde se puede asumir que el potencial puede tomar la siguiente forma (tipo exponencial)

$$V(\phi) = \Lambda e^{-\phi}, \quad (9.50)$$

siendo  $\Lambda$  una constante no-negativa (espacio-tiempo de-Sitter). De esta forma, en el marco de Einstein el efecto del potencial imita a la constante cosmológica,  $\tilde{V}(\phi) = \Lambda$ .

### 9.2.2. Colineaciones de materia

Aplicaremos la técnica desarrollada en el tercer capítulo de esta Tesis para determinar la posible forma, si la hay, que pueden tomar las distintas magnitudes para obtener soluciones autosimilares y bajo la hipótesis simplificada de descomposición. Por tanto, fijando  $D = 4$ , los tensores a estudiar son los siguientes:

$$\tilde{T}_i^j = \exp(2\phi) T_i^j, \quad (9.51)$$

$$\kappa_D^2 {}^{(\phi)}\tilde{T}_i^j = \frac{1}{2} \left( \tilde{g}_i^\lambda \tilde{g}^{j\kappa} - \frac{1}{2} \tilde{g}_i^j \tilde{g}^{\lambda\kappa} \right) \phi_{,\lambda} \phi_{,\kappa} \quad (9.52)$$

$$\kappa_D^2 {}^{(H)}\tilde{T}_i^j = \frac{1}{12} \exp(-2\phi) \left( 3\tilde{H}_{i\lambda\kappa} \tilde{H}^{j\lambda\kappa} - \frac{1}{2} \tilde{g}_i^j \tilde{H}^2 \right), \quad (9.53)$$

$$\kappa_D^2 {}^{(V)}\tilde{T}_i^j = -\frac{1}{2} V \exp(\phi) \tilde{g}_i^j. \quad (9.54)$$

de esta forma, tomando un campo homotético genérico,  $\mathcal{H}$ , y despreciando las ecuaciones que conducen a obtener restricciones sobre la métrica, obtenemos las siguientes ecuaciones.

$$1. \quad \tilde{T}_i^j = e^{2\phi} T_i^j,$$

$$\mathcal{L}_{\mathcal{H}} \tilde{T}_{ij} = 0, \quad 2t\rho\phi' + t\rho' + 2\rho = 0. \quad (9.55)$$

$$2. \quad {}^{(\phi)}\tilde{T}_i^j = \frac{1}{4} \phi_i^2 \eta_i^j,$$

$$\mathcal{L}_{\mathcal{H}} {}^{(\phi)}\tilde{T}_{ij} = 0, \quad t\phi'' + \phi' = 0, \quad \iff \quad \phi = C_4 - C_3 \ln t. \quad (9.56)$$

3. Teniendo en cuenta la definición dada para el campo  $H$  entonces tenemos que

$${}^{(H)}\tilde{T}_i^j = \frac{1}{2} \left( \tilde{g}^\lambda \tilde{g}^{\nu\kappa} - \frac{1}{2} \tilde{g}^\nu \tilde{g}^{\lambda\kappa} \right) e^{2\phi} h_{,\lambda} h_{,\kappa} = \frac{1}{4} e^{2\phi} h_t^2 \eta_i^j, \quad (9.57)$$

y por lo tanto

$$\mathcal{L}_{\mathcal{H}}^{(H)} \tilde{T}_{ij} = 0, \quad th' \phi' + th'' + h' = 0. \quad (9.58)$$

4.  ${}^{(V)}\tilde{T}_i^j = \frac{1}{2} \Lambda(t) \eta_i^j$ , donde obviamente estamos suponiendo que  $\Lambda = \Lambda(t)$ , tenemos que

$$\mathcal{L}_{\mathcal{H}}^{(V)} \tilde{T}_{ij} = 0, \quad \frac{1}{2} \Lambda' t + \Lambda = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \Lambda \approx t^{-2}. \quad (9.59)$$

De las Ecs. (9.56) y (9.59) obtenemos

$$\phi = C_\phi \ln t, \quad \Lambda \approx t^{-2} \quad (9.60)$$

y por tanto, de la Ec. (9.58) obtenemos

$$th'' + (C_\phi + 1) h' = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad h = \frac{C_h}{t^{C_\phi}} - \frac{C_8}{C_\phi}, \quad h = h_0 t^{-\phi_0}. \quad (9.61)$$

Por último, la Ec.  $2t\rho\phi' + t\rho' + 2\rho = 0$ , resulta ahora

$$t\rho' + 2(C_\phi + 1)\rho = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \rho = \frac{C_\rho}{t^{2(C_\phi+1)}}. \quad (9.62)$$

De esta manera, podemos resumir todos estos resultados en el siguiente teorema.

**Teorema 9.2.1** *Bajo la hipótesis de autosimilaridad las magnitudes deben comportarse de la siguiente forma:*

$$\rho = \rho_0 t^{-2(\phi_0+1)}, \quad \phi = \phi_0 \ln t, \quad h = h_0 t^{-\phi_0}, \quad \Lambda = \Lambda_0 t^{-2}. \quad (9.63)$$

### 9.2.3. Ejemplo

A modo de ejemplo, escribiremos y resolveremos las ecuaciones escritas en el marco de Einstein para una métrica tipo Bianchi I, i.e.,

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 dx^2 + b(t)^2 dy^2 + d(t)^2 dz^2, \quad (9.64)$$

por lo tanto, las ecuaciones de campo son

$$\frac{a' b'}{a b} + \frac{a' d'}{a d} + \frac{d' b'}{d b} = \kappa^2 e^{2\phi} \rho + \frac{1}{4} \phi_t^2 + \frac{1}{4} e^{2\phi} h_t^2 + \frac{\Lambda}{2}, \quad (9.65)$$

$$\frac{b''}{b} + \frac{d' b'}{d b} + \frac{d''}{d} = -\kappa^2 e^{2\phi} p - \frac{1}{4} \phi_t^2 - \frac{1}{4} e^{2\phi} h_t^2 + \frac{\Lambda}{2}, \quad (9.66)$$

$$\frac{d''}{d} + \frac{a' d'}{a d} + \frac{a''}{a} = -\kappa^2 e^{2\phi} p - \frac{1}{4} \phi_t^2 - \frac{1}{4} e^{2\phi} h_t^2 + \frac{\Lambda}{2}, \quad (9.67)$$

$$\frac{b''}{b} + \frac{a' b'}{a b} + \frac{a''}{a} = -\kappa^2 e^{2\phi} p - \frac{1}{4} \phi_t^2 - \frac{1}{4} e^{2\phi} h_t^2 + \frac{\Lambda}{2}, \quad (9.68)$$

y las ecuaciones de conservación

$$\tilde{\nabla}_\mu \left( \exp(-2\phi) \tilde{H}^{\mu\nu\lambda} \right) = 0, \quad (9.69)$$

$$\tilde{\square} \phi - V \exp(\phi) + \frac{1}{6} \exp(-2\phi) \tilde{H}^2 = 0, \quad (9.70)$$

que ahora pueden reescribirse como sigue

$$\tilde{\square} h + 2\tilde{\nabla}^\mu \phi \tilde{\nabla}_\mu h = 0. \quad (9.71)$$

$$\tilde{\square} \phi - V \exp(\phi) + \frac{1}{6} \exp(-2\phi) \tilde{H}^2 = 0, \quad (9.72)$$

i.e.,

$$h_{tt} + h_t (\theta + 2\phi_t) = 0, \quad (9.73)$$

$$\phi_{tt} + \phi_t \theta + V - e^{2\phi} h_t^2 = 0, \quad (9.74)$$

donde  $\theta = \left( \frac{a'}{a} + \frac{b'}{b} + \frac{d'}{d} \right)$ . Vemos que la EDO,

$$h_{tt} + h_t (\theta + 2\phi_t) = 0,$$

admite la siguiente solución,  $h = C_8 + C_9 t^{1-k}$ , donde  $k = \theta + 2a$ , y para soluciones autosimilares (para un BI)  $\theta_0 = 1$ , comprobando, por ejemplo, que si las magnitudes se comportan como

$$\rho \approx t^{-2(\phi_0+1)}, \quad \phi \approx \phi_0 \ln(t), \quad \Lambda \approx t^{-2}, \quad h \approx t^{-\phi_0}.$$

Entonces

$$\frac{a' b'}{a b} + \frac{a' d'}{a d} + \frac{d' b'}{d b} = \kappa^2 e^{2\phi} \rho + \frac{1}{4} \phi_t^2 + \frac{1}{4} e^{2\phi} h_t^2 + \frac{\Lambda}{2},$$

resultando así que sí son solución a las ecuaciones de campo, ya que

$$e^{2\phi} h_t^2 = t^{2\phi_0} h_t^2 = t^{2\phi_0} h_t^{-2\phi_0-2} \approx t^{-2}, \quad \text{y} \quad \exp(2\phi_0 \ln(t)) = t^{2\phi_0}.$$

Una vez que hemos visto que los modelos de cuerdas admiten soluciones autosimilares, deberíamos construir un modelo en el que las constantes puedan variar y, por lo tanto, aplicar el programa aquí desarrollado a este nuevo modelo para ver cómo varían las constantes.

### 9.3. Modelo de branas

La teoría cosmológica de branas está motivada por avances recientes en la teoría de cuerdas/M-Teoría. En esta teoría, nuestro universo o brana, está modelado por una hipersuperficie, 4D, inmersa en un espacio-tiempo 5D o bulk. Los campos de materia están confinados sobre la brana, mientras que el campo gravitatorio puede propagarse por el bulk. En este nuevo marco teórico, no es necesario que la dimensión extra sea muy pequeña o esté compactificada, tal y como pasa en la teoría de cuerdas, por ejemplo. De esta forma, surgen unas nuevas ecuaciones de campo, que resultan ser unas modificaciones de las de Einstein válidas para altas energías. En particular los modelos de Randall-Sundrum son modelos fenomenológicos relativamente sencillos de tratar, y que recogen rasgos esenciales de las teorías de supergravedad 11D propuestas por Hořava y Witten. Estos modelos de branas permiten investigar fenómenos gravitatorios no lineales. Las ecuaciones de campo sobre la brana difieren de las de Einstein en que éstas están afectadas por fenómenos no locales provenientes del campo gravitatorio libre en el bulk y transmitidos (propagados) vía la proyección del tensor de Weyl y las correcciones que introducen los campos de materia que son significativas para altas energías, i.e., en un periodo próximo a la singularidad inicial.

#### 9.3.1. Ecuaciones de campo

Las ecuaciones de campo inducidas sobre la brana conducen a obtener nuevos términos que llevan efectos sobre la brana. Las ecuaciones son [304, 305]:

$$G_{ij} = \kappa^2 T_{ij}^m + \tilde{\kappa}^4 S_{ij} - \mathcal{E}_{ij} - \Lambda g_{ij}, \quad (9.75)$$

donde  $\kappa^2 = 8\pi/M_p^2$ ,  $\tilde{\kappa}^2 = 8\pi/\tilde{M}_p^3$ , y siendo  $\tilde{M}_p$  la masa de Planck fundamental en 5D, la cual es típicamente mucho menor que la masa de Planck sobre la brana, i.e., en 4D. La constante cosmológica en 5D se denota por,  $\tilde{\Lambda}$ , y se considera como negativa, siendo la única fuente gravitatoria sobre el bulk. La relación entre las constantes es la siguiente

$$\lambda = 6 \frac{\kappa^2}{\tilde{\kappa}^4}, \quad \Lambda = \frac{1}{2} \tilde{\kappa}^2 \left( \tilde{\Lambda} + \frac{1}{6} \tilde{\kappa}^2 \lambda^2 \right), \quad (9.76)$$

siendo  $\lambda$  la tensión de la brana, la cual se asume positiva, para así poder recobrar la gravedad convencional sobre la brana.

Vemos que el bulk introduce correcciones en las ecuaciones de Einstein sobre la brana de dos formas: la primera, los campos de materia introducen correcciones de orden 4 en el tensor energía-momento a través del tensor  $S_{ij}$ ; y la segunda, existen efectos no locales provenientes del campo gravitatorio libre en el bulk transmitidos vía  $\mathcal{E}_{\mu\nu}$ , es decir, la proyección del tensor de Weyl. De esta forma, vemos que las correcciones de materia están definidas por

$$S_{ij} = \frac{1}{12} T_{\alpha}{}^{\alpha} T_{ij} - \frac{1}{4} T_{i\alpha} T^{\alpha}{}_j + \frac{1}{24} g_{ij} \left[ 3 T_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} - (T_{\alpha}{}^{\alpha})^2 \right], \quad (9.77)$$

que se reduce a

$$S_{ij} = \frac{1}{12} \rho^2 u_i u_j + \frac{1}{12} \rho (\rho + 2p) h_{ij}, \quad (9.78)$$

para un fluido perfecto o un campo escalar mínimamente acoplado (o una combinación de ambos) y  $u^i$  es la 4-velocidad comóvil con la materia.  $h_{ij} \equiv g_{ij} + u_i u_j$ , es el tensor de proyección. Las correcciones de orden 4 de la RG estándar serán significativas cuando  $\tilde{\kappa}^4 \rho^2 \gtrsim \kappa^2 \rho$  (i.e., en un régimen de altas energías).

Debido a las propiedades de simetría que posee la proyección, el tensor  $\mathcal{E}_{ij}$  (bulk Weyl tensor) puede descomponerse de forma irreducible con respecto a la 4-velocidad  $u^i$ , de la siguiente forma [306, 307]:

$$\mathcal{E}_{ij} = \frac{-6}{\kappa^2 \lambda} \left[ \mathcal{U} \left( u_i u_j + \frac{1}{3} h_{ij} \right) + \mathcal{P}_{ij} + \mathcal{Q}_i u_j + \mathcal{Q}_j u_i \right], \quad (9.79)$$

donde la constante,  $\frac{-6}{\kappa^2 \lambda}$ , es introducida por consideraciones dimensionales.  $\mathcal{U}$  está definida por

$$\mathcal{U} = -\frac{1}{6} \kappa^2 \lambda \mathcal{E}_{ij} u^i u^j \quad (9.80)$$

siendo una densidad de energía efectiva no local sobre la brana, que proviene del campo gravitatorio libre en el bulk. El término escalar,  $\mathcal{U}$ , también se denomina densidad de energía oscura. Por otro lado, existe una energía anisótropa no local sobre la brana definida por

$$\mathcal{P}_{ij} = -\frac{1}{6} \kappa^2 \lambda \left[ h_i{}^{\alpha} h_j{}^{\beta} - \frac{1}{3} h^{\alpha\beta} h_{ij} \right] \mathcal{E}_{\alpha\beta} \quad (9.81)$$

la cual conlleva efectos vía ondas gravitatorias en el bulk. Por último, definimos el flujo de energía no local sobre la brana de la siguiente forma

$$\mathcal{Q}_i = \frac{1}{6} \kappa^2 \lambda h_i{}^{\alpha} \mathcal{E}_{\alpha\beta} u^{\beta}. \quad (9.82)$$

Si definimos un tensor efectivo energía-momento, entonces podemos reescribir las ecuaciones de campo de la siguiente forma:

$$G_{ij} = \kappa^2 T_{ij}^{\text{tot}} - \Lambda g_{ij}, \quad (9.83)$$

donde

$$T_{ij}^{\text{tot}} = T_{ij}^m + \frac{6}{\lambda} S_{ij} - \frac{1}{\kappa^2} \mathcal{E}_{ij}, \quad (9.84)$$

de esta manera, la densidad de energía total, la presión, el esfuerzo anisótropo (anisotropic stress) y el flujo de energía están definidas mediante [306, 307]

$$\rho^{\text{tot}} = \rho \left( 1 + \frac{\rho}{2\lambda} \right) + \frac{6\mathcal{U}}{\kappa^4 \lambda}, \quad (9.85)$$

$$p^{\text{tot}} = p + \frac{\rho}{2\lambda} (\rho + 2p) + \frac{2\mathcal{U}}{\kappa^4 \lambda}, \quad (9.86)$$

$$\pi_{ij}^{\text{tot}} = \frac{6}{\kappa^4 \lambda} \mathcal{P}_{ij}, \quad (9.87)$$

$$q_i^{\text{tot}} = \frac{6}{\kappa^4 \lambda} \mathcal{Q}_i. \quad (9.88)$$

Para un bulk vacío, se debe verificar que,  $\nabla^j T_{ij} = 0$ . Las identidades de Bianchi sobre la brana implican que

$$\nabla^i \mathcal{E}_{ij} = \frac{6\kappa^2}{\lambda} \nabla^i S_{ij}, \quad (9.89)$$

observándose que

$$\nabla^i S_{ij} = \rho (\rho' + (\rho + p) H) = 0, \quad (9.90)$$

ya que  $\nabla^j T_{ij} = 0$ , y por lo tanto, obtenemos [306, 307]

$$\nabla^i \mathcal{E}_{ij} = \mathcal{U}' + \frac{4}{3}HU = 0. \quad (9.91)$$

Estos son los ingredientes básicos de la teoría de branas. Demostraremos a continuación que, debido a las correcciones que introducen los tensores  $S_{ij}$ , y  $\mathcal{E}_{\mu\nu}$ , sobre las ecuaciones de Einstein, no existen soluciones autosimilares.

### 9.3.2. Colineaciones de materia

En esta sección veremos que no existen soluciones autosimilares en la teoría de branas. Para tal propósito aplicaremos la técnica de las colineaciones de materia al tensor energía-momento, bajo la hipótesis simplificadora de descomposición, mostrando que las magnitudes tienen distintos órdenes de magnitud. Tomando el campo homotético

$$\mathcal{H} = t\partial_t + \sum_{i=1}^3 (1 - tH_i) x_i \partial_{x_i} \quad (9.92)$$

y calculando la derivada de Lie de cada una de las componentes de dicho tensor efectivo (fijando  $\Lambda = 0$ )

$$\mathcal{L}_{\mathcal{H}} T_{ij}^{\text{tot}} = 0$$

obtenemos

$$\mathcal{L}_{\mathcal{H}} T_{ij}^m = 0 \iff \rho' t + 2\rho = 0, \iff \rho = \rho_0 t^{-2}, \quad (9.93)$$

$$\mathcal{L}_{\mathcal{H}} S_{ij} = 0 \iff \rho' t + \rho = 0, \iff \rho = \rho_0 t^{-1}, \quad (9.94)$$

$$\mathcal{L}_{\mathcal{H}} \mathcal{E}_{ij} = 0 \iff \mathcal{U}' t + 2\mathcal{U} = 0, \iff \mathcal{U} = \mathcal{U}_0 t^{-2}, \quad (9.95)$$

donde las Ecs. (9.93 y 9.94) son contradictorias, lo que significa que

$$k_1 t^{-2} = G\rho_0 t^{-2} + \frac{G}{2\lambda} \rho^2 + \mathcal{U}_0 t^{-2}.$$

Además, la Ec. (9.95) es contradictoria con la Ec. (9.91). Por lo tanto concluimos que no existen soluciones autosimilares (ni tipo power-law) para los modelos cosmológicos de branas.

**Teorema 9.3.1** *No existen soluciones autosimilares en modelos cosmológicos de branas.*

### 9.3.3. Variación de constantes

Ya hemos visto que no existen soluciones autosimilares, pero ahora quisiéramos introducir la idea de la variación de las constantes en las ecuaciones de campo de la teoría de branas. Para ello, ideamos el siguiente modelo fenomenológico. Siguiendo la misma idea que en la generalización de la Relatividad General, empezaremos considerando las siguientes ecuaciones de campo

$$G_{ij} = \kappa^2 T_{ij}^{\text{tot}} - \Lambda g_{ij}, \quad (9.96)$$

donde

$$T_{ij}^{\text{tot}} = T_{ij} + \frac{6}{\lambda} S_{ij} - \frac{1}{G^2 \lambda} \mathcal{E}_{ij}, \quad (9.97)$$

con

$$\begin{aligned} T_{ij} &= (\rho + p) u_i u_j + p g_{ij}, \\ S_{ij} &= \frac{1}{12} \rho^2 u_i u_j + \frac{1}{12} \rho (\rho + 2p) h_{ij}, \\ \mathcal{E}_{ij} &= -6 \left[ \mathcal{U} \left( u_i u_j + \frac{1}{3} h_{ij} \right) \right]. \end{aligned} \quad (9.98)$$

Imponemos la condición de divergencia nula para que se sigan verificando las identidades de Bianchi

$$\nabla^j \left( G(t) T_{ij}^{\text{tot}} - \Lambda(t) g_{ij} \right) = 0, \quad (9.99)$$

obteniendo

$$G \left[ (\rho^{\text{tot}})' + (\rho^{\text{tot}} + p^{\text{tot}}) H \right] = G' \rho^{\text{tot}} + \Lambda'(t), \quad (9.100)$$

viendo que

$$\kappa^2 = 8\pi G, \quad \Lambda = \frac{1}{2} k_5^2 \Lambda_5 + G\lambda. \quad (9.101)$$

Si expandimos la Ec. (9.99), entonces obtendremos la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} 0 = & \rho G' + G\rho' + \Lambda' + \frac{G}{\lambda} \left[ \frac{\rho^2}{2} \left( \frac{G'}{G} - \frac{\lambda'}{\lambda} \right) + \rho\rho' \right] + \frac{6}{G\lambda} \left[ \mathcal{U}' - \mathcal{U} \left( \frac{G'}{G} + \frac{\lambda'}{\lambda} \right) \right] + \\ & + \left( G(\rho + p) + \frac{G}{\lambda} \rho(\rho + p) + \frac{8\mathcal{U}}{G\lambda} \right) H, \end{aligned} \quad (9.102)$$

donde definimos,  $H = \frac{a'}{a} + \frac{b'}{b} + \frac{d'}{d}$ . Reordenando términos

$$(G\rho' + G(\rho + p)H + \rho G' + \Lambda') + \frac{G}{\lambda} \rho \left[ \frac{\rho}{2} \left( \frac{G'}{G} - \frac{\lambda'}{\lambda} \right) + \rho' + (\rho + p)H \right] + \frac{6}{G\lambda} \left[ \mathcal{U}' - \mathcal{U} \left( \frac{G'}{G} + \frac{\lambda'}{\lambda} - \frac{4}{3}H \right) \right] = 0.$$

Para intentar obtener ecuaciones de campo más tratables, introducimos las siguientes hipótesis, como en el caso estandar, i.e., asumiremos que  $\nabla^\nu T_{\mu\nu} = 0$ , y por tanto

$$\rho' + (\rho + p)H = 0 = \rho G' + \Lambda',$$

resulta ahora

$$\frac{G}{\lambda} \rho \left[ \frac{\rho}{2} \left( \frac{G'}{G} - \frac{\lambda'}{\lambda} \right) + \rho' + (\rho + p)H \right] = -\frac{6}{G\lambda} \left[ \mathcal{U}' - \mathcal{U} \left( \frac{G'}{G} + \frac{\lambda'}{\lambda} - \frac{4}{3}H \right) \right]. \quad (9.103)$$

De esta forma

$$\frac{G^2 \rho^2}{12} \left( \frac{G'}{G} - \frac{\lambda'}{\lambda} \right) = - \left[ \mathcal{U}' - \mathcal{U} \left( \frac{G'}{G} + \frac{\lambda'}{\lambda} - \frac{4}{3}H \right) \right], \quad (9.104)$$

llegando así a las siguientes ecuaciones de conservación

$$\rho' + (\rho + p)H = 0, \quad (9.105)$$

$$\Lambda' = -\rho G', \quad (9.106)$$

$$\frac{G^2 \rho^2}{12} \left( \frac{G'}{G} - \frac{\lambda'}{\lambda} \right) = - \left[ \mathcal{U}' - \mathcal{U} \left( \frac{G'}{G} + \frac{\lambda'}{\lambda} - \frac{4}{3}H \right) \right]. \quad (9.107)$$

Como podemos observar, si  $G$  y  $\lambda$  son constantes, entonces recobramos las ecuaciones de campo habituales, i.e.,

$$\rho' + (\rho + p)H = 0, \quad y \quad \mathcal{U}' + \frac{4}{3}\mathcal{U}H = 0,$$

pero si las consideramos como variables, entonces teniendo en cuenta las definiciones

$$\Lambda = \frac{k_5^2 \Lambda_5}{2} + G\lambda, \quad k_5^4 = \frac{G}{6\lambda}, \quad (9.108)$$

trataremos de simplificar las Ecs (9.105-9.107), ya que

$$\Lambda' = \left( \frac{k_5^2 \Lambda_5}{2} + G\lambda \right)' = \frac{1}{2} \left( k_5^{2'} \Lambda_5 + k_5^2 \Lambda_5' \right) + G'\lambda + G\lambda',$$

llegando así a dos posibles hipótesis de trabajo

1.  $k_5^2 = \text{const} = \Lambda_5$ , o considerar  $\Lambda_5 = 0$ ,

2.  $k_5^2(t), \Lambda_5(t)$ .

Por tanto, al no disponer de ecuaciones para  $k_5^2(t)$  y  $\Lambda_5(t)$  entonces trabajaremos con la primera de las hipótesis, llegando de esta forma a obtener las siguientes ecuaciones de conservación. Bajo la hipótesis de autosimilaridad (o soluciones tipo potencia) las ecuaciones (9.105-9.107) resultan

$$\rho = \rho_0 t^{-h(\gamma+1)}, \quad (9.109)$$

$$\lambda' = -\frac{G'}{G} \left( \lambda + \rho_0 t^{-h(\gamma+1)} \right), \quad (9.110)$$

$$\frac{\rho_0^2 t^{-2h(\gamma+1)} G G'}{12} \left( 1 + \frac{(\lambda + \rho_0 t^{-h(\gamma+1)})}{\lambda} \right) = -\mathcal{U}' + \mathcal{U} \left( \frac{G'}{G} \left( 1 - \frac{(\lambda + \rho_0 t^{-h(\gamma+1)})}{\lambda} \right) - \frac{4}{3} h t^{-1} \right), \quad (9.111)$$

donde la Ec. (9.110) puede escribirse como

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = -\frac{(\lambda + \rho)}{\lambda} \frac{G'}{G}, \quad (9.112)$$

y admite la siguiente solución

$$\lambda = \frac{\int -G' \rho_0 t^{-h(\gamma+1)} dt}{G} + C_1. \quad (9.113)$$

Por otro lado, simplificando, la Ec.(9.111) resulta

$$\frac{G \rho^2 G'}{12} \left( \left( 2 + \frac{\rho}{\lambda} \right) \right) = -\mathcal{U}' - \mathcal{U} \left( \frac{G'}{G} \frac{\rho}{\lambda} + \frac{4}{3} H \right), \quad (9.114)$$

obteniendo por tanto

$$\frac{\rho_0^2 t^{-2h(\gamma+1)} G G'}{12} \left( 2 + \frac{\rho_0 t^{-h(\gamma+1)}}{\lambda} \right) = -\mathcal{U}' - \mathcal{U} \left( \frac{G'}{G} \frac{\rho_0 t^{-h(\gamma+1)}}{\lambda} + \frac{4}{3} h t^{-1} \right). \quad (9.115)$$

### 9.3.4. El caso $\mathcal{U} = 0$

Bajo esta hipótesis la ecuación de conservación resultante es:  $\nabla^\nu (G(t) T_{\mu\nu}^{\text{tot}} - \Lambda(t) g_{\mu\nu}) = 0$ ,

$$(G\rho' + G(\rho + p)H + \rho G' + \Lambda') + \frac{G}{\lambda} \rho \left[ \frac{\rho}{2} \left( \frac{G'}{G} - \frac{\lambda'}{\lambda} \right) + \rho' + (\rho + p)H \right] = 0. \quad (9.116)$$

Al igual que antes, si asumimos que  $\nabla^j T_{ij} = 0$ , i.e.  $\rho' + (\rho + p)H = 0$ , entonces la ecuación de conservación se reduce a la siguiente

$$\rho G' + \Lambda' + \frac{G}{\lambda} \rho \left[ \frac{\rho}{2} \left( \frac{G'}{G} - \frac{\lambda'}{\lambda} \right) \right] = 0. \quad (9.117)$$

Si tenemos en cuenta las anteriores consideraciones sobre  $\Lambda$ , (i.e., trabajamos bajo la hipótesis  $\Lambda_5 = 0$ ) entonces

$$\Lambda' = (G\lambda)' = G'\lambda + G\lambda', \quad (9.118)$$

y por lo tanto

$$\rho G' + G'\lambda + G\lambda' + \frac{G}{\lambda} \rho \left[ \frac{\rho}{2} \left( \frac{G'}{G} - \frac{\lambda'}{\lambda} \right) \right] = 0, \quad (9.119)$$

con  $\rho = \rho_0 t^{-h(\omega+1)}$ . Simplificando

$$\frac{G'}{G} \left( \frac{\rho}{\lambda} + 1 + \frac{\rho^2}{2\lambda^2} \right) = \left( \frac{\rho^2}{2\lambda^2} - 1 \right) \frac{\lambda'}{\lambda}, \quad (9.120)$$

llegando así a la siguiente ecuación

$$\frac{G'}{G} = \left( \frac{\rho^2 - 2\lambda^2}{2\lambda^2 + 2\lambda\rho + \rho^2} \right) \frac{\lambda'}{\lambda}. \quad (9.121)$$

Si hacemos una nueva hipótesis,  $\rho \approx \lambda$ , entonces

$$\frac{G'}{G} = \left( \frac{\rho_0^2 - 2\lambda_0^2}{2\lambda_0^2 + 2\lambda_0\rho_0 + \rho_0^2} \right) h(\omega + 1) t^{-1}. \quad (9.122)$$

### 9.3.5. Colineaciones de materia

Una vez que hemos planteado las ecuaciones de campo junto con las de conservación, queremos ahora determinar si existen soluciones autosimilares para este nuevo modelo, y de admitirlas, la forma que debe tener cada magnitud. Para ello, calcularemos la derivada de Lie siguiente

$$\mathcal{L}_{\mathcal{H}} \left( G(t) T_{ij}^{\text{tot}} - \Lambda(t) g_{ij} \right) = 0,$$

por lo que, bajo la hipótesis simplificadora de descomposición, obtenemos

$$\mathcal{L}_{\mathcal{H}} (\Lambda(t) g_{ij}) = 0 \iff \Lambda' t + 2\Lambda = 0, \iff \Lambda = \Lambda_0 t^{-2}, \quad (9.123)$$

$$\mathcal{L}_{\mathcal{H}} \left( G(t) T_{ij}^m \right) = 0 \iff \frac{G'}{G} + \frac{\rho'}{\rho} = -\frac{2}{t}, \iff G\rho \approx t^{-2}, \quad (9.124)$$

$$\mathcal{L}_{\mathcal{H}} \left( \frac{G(t)}{\lambda(t)} S_{ij} \right) = 0 \iff \frac{G'}{G} - \frac{\lambda'}{\lambda} + 2\frac{\rho'}{\rho} = -\frac{2}{t}, \iff \frac{G}{\lambda} \rho^2 \approx t^{-2}, \quad (9.125)$$

$$\mathcal{L}_{\mathcal{H}} \left( \frac{\mathcal{E}_{ij}}{G(t)\lambda(t)} \right) = 0 \iff \frac{\mathcal{U}'}{\mathcal{U}} - \frac{G'}{G} - \frac{\lambda'}{\lambda} = -\frac{2}{t}, \iff \frac{\mathcal{U}}{G\lambda} \approx t^{-2}. \quad (9.126)$$

Como podemos observar, no hemos obtenido resultados explícitos para cada magnitud, sino relaciones entre ellas. Sin embargo, es posible refinar más este resultado teniendo en cuenta las siguientes consideraciones. Por ejemplo, de la Ec. (9.125) hemos obtenido la siguiente relación entre magnitudes

$$\frac{G}{\lambda} \rho^2 \approx t^{-2}, \quad (9.127)$$

donde, si tenemos en cuenta la relación obtenida en (9.124), entonces llegamos a

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{\rho'}{\rho} \iff \lambda \approx \rho, \quad (9.128)$$

observándose que  $[\lambda] = [\rho]$ , es decir, son magnitudes con igual ecuación dimensional. Considerando esta relación, entonces de la Ec. (9.126) obtenemos

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_0 t^{-4}, \quad (9.129)$$

ya que  $\lambda \approx \rho$  y  $G\rho \approx t^{-2}$  y por tanto,  $G\lambda \approx t^{-2}$ .

Sin embargo, si suponemos que

$$G \approx \lambda, \quad (9.130)$$

entonces

$$G \approx \lambda \approx \rho \approx t^{-1}, \quad (9.131)$$

que también es un resultado consistente. La Ec. (9.126) nos da

$$\frac{\mathcal{U}}{G\lambda} \approx t^{-2}. \quad (9.132)$$

La constante cosmológica y la de la gravitación vienen definidas por

$$\Lambda = \frac{k_5^2}{2} \left( \Lambda_5 + \frac{k_5^2 \lambda^2}{6} \right), \quad G = \frac{k_5^4 \lambda}{6}, \quad (9.133)$$

entonces

$$\Lambda = \frac{k_5^2 \Lambda_5}{2} + \frac{k_5^4 \lambda^2}{6} = \frac{k_5^2 \Lambda_5}{2} + G\lambda \approx t^{-2} \quad k_5^2 \Lambda_5 \approx t^{-2}, \quad (9.134)$$

siendo otra alternativa considerar,  $\Lambda_5 = 0$ , y por lo tanto

$$\Lambda = G\lambda \approx t^{-2}. \quad (9.135)$$

En conclusión, tenemos dos hipótesis de trabajo

1. H1.  $\lambda \approx \rho$ , ya que  $[\lambda] = [\rho]$ , entonces  $G\rho \approx t^{-2}$  y por tanto  $G\lambda \approx t^{-2}$ ,  $\Lambda = G\lambda \approx t^{-2}$  y  $\mathcal{U} = \mathcal{U}_0 t^{-4}$ .

Esta hipótesis implica que,  $k_5^4(t) \neq \text{const.}$ , ya que  $k_5^4(t) = \frac{G}{6\lambda} \neq \text{const.}$

2. H2.  $G \approx \lambda$ , entonces  $G \approx \lambda \approx \rho \approx t^{-1}$ , y  $\mathcal{U} = \mathcal{U}_0 t^{-4}$ .

Esta hipótesis implica que,  $k_5^4(t) = \text{const.}$

La hipótesis  $G \approx \lambda$  ya ha sido formulada por otros autores (ver por ejemplo [308]-[309]-[310] y [311]), mientras que la hipótesis  $\lambda \approx \rho$ , parece nueva.

### 9.3.6. Ejemplo

#### Caso 1

En este caso consideraremos la hipótesis H1. Por ejemplo, si consideramos la métrica, tipo  $BVI_h$ ,

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)e^{-2mz}dx^2 + b^2(t)e^{2nz}dy^2 + d^2(t)dz^2, \quad (9.136)$$

entonces las ecuaciones de campo son

$$\frac{a'}{a} \frac{b'}{b} + \frac{a'}{a} \frac{d'}{d} + \frac{d'}{d} \frac{b'}{b} + (mn - m^2 - n^2) \frac{1}{d^2} = G\rho + \frac{G}{2\lambda} \rho^2 + \frac{6\mathcal{U}}{G\lambda} + \Lambda, \quad (9.137)$$

$$m \left( \frac{a'}{a} - \frac{d'}{d} \right) + n \left( \frac{d'}{d} - \frac{b'}{b} \right) = 0, \quad (9.138)$$

$$\frac{b''}{b} + \frac{d''}{d} + \frac{d'}{d} \frac{b'}{b} - n^2 \frac{1}{d^2} = -G\gamma\rho - \frac{G}{2\lambda} \rho^2 (1 + 2\gamma) - \frac{2\mathcal{U}}{G\lambda} + \Lambda, \quad (9.139)$$

$$\frac{d''}{d} + \frac{a''}{a} + \frac{a'}{a} \frac{d'}{d} - m^2 \frac{1}{d^2} = -G\gamma\rho - \frac{G}{2\lambda} \rho^2 (1 + 2\gamma) - \frac{2\mathcal{U}}{G\lambda} + \Lambda, \quad (9.140)$$

$$\frac{b''}{b} + \frac{a''}{a} + \frac{a'}{a} \frac{b'}{b} + mn \frac{1}{d^2} = -G\gamma\rho - \frac{G}{2\lambda} \rho^2 (1 + 2\gamma) - \frac{2\mathcal{U}}{G\lambda} + \Lambda, \quad (9.141)$$

$$\rho' + (\gamma + 1) \rho H = 0, \quad \implies \quad \rho = \rho_0 t^{-h(\gamma+1)}, \quad (9.142)$$

$$\frac{G'}{G} (\lambda + \rho) = -\lambda', \quad (9.143)$$

$$\frac{\rho^2 G G'}{12} \left( 2 + \frac{\rho}{\lambda} \right) = -\mathcal{U}' - \mathcal{U} \left( \frac{G'}{G} \frac{\rho}{\lambda} + \frac{4}{3} h t^{-1} \right). \quad (9.144)$$

La solución encontrada es la siguiente

$$a_1 = a_2 = \frac{1}{2} \left( 1 \pm \sqrt{1 - 4n^2} \right), \quad a_3 = 1, \quad m = n, \quad n \in \left( -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \setminus \{0\}, \quad (9.145)$$

y, por lo tanto, la métrica se reduce a

$$ds^2 = -dt^2 + t^{2a_1} e^{-2nz} dx^2 + t^{2a_1} e^{2nz} dy^2 + t^2 dz^2, \quad (9.146)$$

i.e., hemos obtenido una solución tipo  $BVI_0$ .

El comportamiento de las principales magnitudes es el siguiente:

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0 t^{-h(\gamma+1)}, & \rho_0 &= \rho_0 > 0, \\ \lambda &= \lambda_0 t^{-h(\gamma+1)}, & \lambda_0 &= \lambda_0 > 0, \\ G &= G_0 t^{h(\gamma+1)-2}, & G_0 &= \frac{\lambda_0 \left( 1 + \sqrt{1 - 4n^2} \right) \left( 1 + 2\sqrt{1 - 4n^2} \right)}{\left( 4\lambda_0^2 - (1 + 3\gamma) \rho_0^2 + (1 - 3\gamma) \lambda_0 \rho_0 \right)}, \\ \mathcal{U} &= \mathcal{U}_0 t^{-4}, & \mathcal{U}_0 &= \frac{\lambda_0^2 \left( 1 + \sqrt{1 - 4n^2} \right)^2 \left( 1 + 2\sqrt{1 - 4n^2} \right)}{4 \left( 4\lambda_0^2 - (1 + 3\gamma) \rho_0^2 + (1 - 3\gamma) \lambda_0 \rho_0 \right)^2}. \end{aligned} \quad (9.147)$$

Sólo resta estudiar el comportamiento de  $G_0$  y  $\mathcal{U}_0$ , ya que estas constantes deben ser positivas. Por ejemplo, fijando  $\rho_0 = 1/3$ ,  $\lambda_0 = 1$ , y  $n = 1/3$ , entonces vemos que

$$\mathcal{U}_0 > 0 \quad \forall \gamma \in (-1, 1], \quad G_0 > 0 \quad \forall \gamma \in (-1, 1]. \quad (9.148)$$

Si ahora fijamos  $\gamma = 0$ , encontramos que

$$\rho = \rho_0 t^{-h}, \quad \lambda = \lambda_0 t^{-h}, \quad G = G_0 t^{h-2}, \quad \mathcal{U} = \mathcal{U}_0 t^{-4}, \quad (9.149)$$

donde

$$a_2 = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\sqrt{5}}{3} \right), \quad h = (1 + 2a_2) = 2 + \frac{\sqrt{5}}{3} \approx 2,7454, \quad (9.150)$$

y por lo tanto

$$q = \frac{3}{2,7454} - 1 > 0, \quad (9.151)$$

es decir, la solución encontrada, como ya sabemos, no es inflacionaria y podemos considerarla como isótropa.  $G$  es creciente mientras que la tensión de la brana  $\lambda$  es positiva y decreciente, al igual que la densidad de energía y la constante cosmológica, ya que  $\Lambda = G\lambda \approx t^{-2}$ .

## Caso 2

Estudiaremos ahora el caso particular,  $\mathcal{U} = 0$ . Bajo esta hipótesis obtenemos los siguientes resultados

$$a_1 = a_2 = \frac{A}{2B}, \quad m = n = \frac{(-AC)^{1/2}}{2B}, \quad (9.152)$$

es decir, la solución es del tipo  $BVI_0$ . Las principales magnitudes se comportan de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0 t^{-h(\gamma+1)}, & \rho_0 &= \rho_0 > 0, \\ \lambda &= \lambda_0 t^{-h(\gamma+1)}, & \lambda_0 &= \lambda_0 > 0, \\ G &= G_0 t^{h(\gamma+1)-2}, & G_0 &= \frac{\lambda_0 A}{B^2}, \end{aligned} \quad (9.153)$$

siendo

$$\begin{aligned} A &= 2\lambda_0^2 + (1 - \gamma) \lambda_0 \rho_0 + \gamma \rho_0^2, \\ B &= \rho_0 (1 + \gamma) (\rho_0 + \lambda_0), \\ C &= 2\lambda_0^2 - (1 + 3\gamma) \lambda_0 \rho_0 - (2 + 3\gamma) \rho_0^2. \end{aligned} \quad (9.154)$$

De esta manera vemos que la constante  $C$  debe ser negativa,  $C < 0$ , si queremos que  $n \in \mathbb{R}$ . Por tanto,  $C < 0$ , sii

$$\lambda_0 = \frac{1}{4} \rho_0 \left( 1 + 3\gamma \pm \sqrt{3\gamma(3\gamma + 10) + 17} \right), \quad (9.155)$$

de donde se observa de forma inmediata que  $\sqrt{3\gamma(3\gamma + 10) + 17} \in \mathbb{R}$  sii  $\gamma \geq -0,72386$ , llegando así a la conclusión de que la solución únicamente es válida si  $\gamma \in (-0,72386, 1]$ . Si por ejemplo fijamos los siguientes valores numéricos,  $\rho_0 = 1$ , y  $\lambda_0 = \frac{1}{4} \left( 1 + 3\gamma \pm \sqrt{3\gamma(3\gamma + 10) + 17} \right) - 0,01$ , para así asegurarnos de que la condición,  $2\lambda_0^2 < (1 + 3\gamma) \lambda_0 \rho_0 + (2 + 3\gamma) \rho_0^2$ , se verifica, entonces obtenemos los siguientes resultados numéricos

$$a_2 = a_1 \rightarrow 1, \quad \implies \quad h \rightarrow 3, \quad \implies \quad q \rightarrow 0, \quad (9.156)$$

mientras que

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0 t^{-3(\gamma+1)}, & \rho_0 &= \rho_0 > 0, \\ \lambda &= \lambda_0 t^{-3(\gamma+1)}, & \lambda_0 &= \lambda_0 > 0, \\ G &= G_0 t^{3(\gamma+1)-2}, & G_0 &= \frac{\lambda_0 A}{B^2} > 0, \quad \forall \gamma \in (-,6663330003, 1], \end{aligned} \quad (9.157)$$

viendo así que  $G$  también es creciente bajo esta hipótesis.

**Caso 3**

Estudiaremos, por último, un modelo bajo la hipótesis H2 con la siguiente métrica, por ejemplo, tipo  $BVI_0$ , i.e.,

$$ds^2 = -dt^2 + a^2 dx^2 + \left( b^2 \cosh^2 mx + d^2 \sinh^2 mx \right) dy^2 - 2 \left( b^2 + d^2 \right) \cosh mx \sinh mx dy dz + \left( b^2 \sinh^2 mx + d^2 \cosh^2 mx \right) dz^2. \quad (9.158)$$

Las ecuaciones de campo son

$$\frac{a'}{a} \frac{b'}{b} + \frac{a'}{a} \frac{d'}{d} + \frac{d'}{d} \frac{b'}{b} - \left( 2 + \frac{b^2}{d^2} + \frac{d^2}{b^2} \right) \frac{m^2}{4a^2} = G\rho + \frac{G}{2\lambda} \rho^2 + \frac{6\mathcal{U}}{G\lambda} + \Lambda, \quad (9.159)$$

$$\frac{b''}{b} + \frac{d''}{d} + \frac{d'}{d} \frac{b'}{b} + \left( 2 + \frac{b^2}{d^2} + \frac{d^2}{b^2} \right) \frac{m^2}{4a^2} = -G\gamma\rho - \frac{G}{2\lambda} \rho^2 (1 + 2\gamma) - \frac{2\mathcal{U}}{G\lambda} + \Lambda, \quad (9.160)$$

$$\frac{a''}{a} + \frac{b''}{b} + \frac{a'}{a} \frac{b'}{b} - \left( 2 + \frac{3d^2}{b^2} - \frac{b^2}{d^2} \right) \frac{m^2}{4a^2} = -G\gamma\rho - \frac{G}{2\lambda} \rho^2 (1 + 2\gamma) - \frac{2\mathcal{U}}{G\lambda} + \Lambda, \quad (9.161)$$

$$\frac{b^2}{d^2 a^2} - \frac{d^2}{b^2 a^2} + \frac{a'}{a} \frac{b'}{b} - \frac{a'}{a} \frac{d'}{d} - \frac{d''}{d} + \frac{b''}{b} = 0, \quad (9.162)$$

$$\frac{d''}{d} + \frac{a''}{a} + \frac{a'}{a} \frac{d'}{d} - \left( 2 + \frac{3b^2}{d^2} - \frac{d^2}{b^2} \right) \frac{m^2}{4a^2} = -G\gamma\rho - \frac{G}{2\lambda} \rho^2 (1 + 2\gamma) - \frac{2\mathcal{U}}{G\lambda} + \Lambda, \quad (9.163)$$

$$\rho' + (\omega + 1) \rho H = 0, \quad \implies \quad \rho = \rho_0 t^{-h(\gamma+1)}, \quad (9.164)$$

$$\frac{G'}{G} (\lambda + \rho) = -\lambda', \quad (9.165)$$

$$\frac{\rho^2 G G'}{12} \left( 2 + \frac{\rho}{\lambda} \right) = -\mathcal{U}' - \mathcal{U} \left( \frac{G'}{G} \frac{\rho}{\lambda} + \frac{4}{3} h t^{-1} \right). \quad (9.166)$$

Asumiendo las hipótesis H2, encontramos los siguientes resultados

$$a_2 = \frac{-\gamma}{2(\gamma+1)}, \quad m = \frac{\sqrt{-\gamma(3\gamma+2)}}{2(\gamma+1)}, \quad \gamma \in \left( -\frac{2}{3}, 0 \right), \quad (9.167)$$

observando que,  $m \in \mathbb{R}^+ \iff \gamma \in \left( -\frac{2}{3}, 0 \right)$ , mientras que  $a_2 \in \mathbb{R}^+ \iff \gamma \in (-1, 0)$ . Las principales magnitudes se comportan de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0 t^{-1}, & \rho_0 &= \rho_0 > 0, \\ \lambda &= \lambda_0 t^{-1}, & \lambda_0 &= \lambda_0 > 0, \\ G &= G_0 t^{-1}, & G_0 &= \frac{\lambda_0 \gamma (1 + 3\gamma)}{(1 + \gamma)^2 (4\lambda_0^2 - (1 + 3\gamma) \rho_0^2 + (1 - 3\gamma) \lambda_0 \rho_0)}, \\ \mathcal{U} &= \mathcal{U}_0 t^{-4}, & \mathcal{U}_0 &= \frac{\lambda_0^3 \gamma^2 (1 + 3\gamma) (2\lambda_0 + \rho_0)}{4(1 + \gamma)^3 (4\lambda_0^2 - (1 + 3\gamma) \rho_0^2 + (1 - 3\gamma) \lambda_0 \rho_0)^2}. \end{aligned} \quad (9.168)$$

Necesitamos hacer un pequeño análisis numérico para poder determinar el comportamiento de las constantes  $G_0$  y  $\mathcal{U}_0$ . Por tanto, si por ejemplo fijamos los siguientes valores,  $\rho_0 = 1/3$ , y  $\lambda_0 = 1$ , entonces

$$\mathcal{U}_0 > 0 \quad \iff \quad \gamma < -\frac{1}{3}, \quad G_0 > 0 \quad \iff \quad \gamma < -\frac{1}{3},$$

llegando así a la conclusión de que la solución sólo es posible si  $\gamma \in \left( -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3} \right)$ . Obsérvese que, bajo estas hipótesis,  $G$  es una función decreciente.

Como trabajo futuro está claro que el primer paso será encontrar unas ecuaciones de campo que contemplen la variación de las constantes. Aquí tan sólo hemos esbozado una aproximación fenomenológica. En este sentido debemos recalcar el hecho de que este camino ya se ha iniciado. En la formulación propuesta por Gergely (ver por ejemplo [312] y [313]) las ecuaciones de campo son deducidas en 5D en vez de en 4D, como aquí, y considerando

que la tensión de la brana es variable [314]. Los modelos tratados hasta el momento sólo consideran geometrías que sobre la brana reproducen las de FRW, por ejemplo, la de Vaidya anti-de Sitter (VAdS5D). Nada se sabe sobre el comportamiento con geometrías más complejas que reproduzcan los tipo Bianchi sobre las branas. Otro enfoque interesante es el propuesto por P. de Leon [315]-[317]. Inspirado en las teorías Kaluza-Klein, sugiere la posibilidad de que al escribir una métrica en 5D sin considerar coordenadas gaussianas y, por lo tanto, con  $g_{55} = \epsilon\phi$ , siendo  $\phi$  cierta función escalar tal que  $\phi'(t) \neq 0$ , implique la variación de las constantes sobre la brana, i.e., las constantes en 4D (ver también [318] y [319]). Por último, y quizás el enfoque más interesante, sería formular unas ecuaciones de campo para la teoría de branas en el marco de los modelos de Jordan-Brans-Dicke. De esta forma, no sería necesario hacer ninguna hipótesis inicial sobre el comportamiento de ninguna de las constantes, tanto de las constantes en 5D como en las de 4D. Trabajos pioneros en esta dirección son los de Mendes y Mazumdar [320], aunque las geometrías 5D utilizadas sólo reproducen las de FRW en 4D (ver también los trabajos de [321] y [322]).



# Capítulo 10

## Conclusiones

### Índice del capítulo

---

<b>10.1. Conclusiones generales</b> . . . . .	<b>181</b>
<b>10.2. Resultados geométricos</b> . . . . .	<b>182</b>
<b>10.3. Relatividad General</b> . . . . .	<b>183</b>
10.3.1. Soluciones de vacío . . . . .	183
10.3.2. Fluidos perfectos . . . . .	183
10.3.3. Relatividad General con CVT . . . . .	184
<b>10.4. Modelos escalares</b> . . . . .	<b>186</b>
10.4.1. Modelos escalares . . . . .	186
10.4.2. Campo escalar sin interacción con un campo de materia . . . . .	187
10.4.3. Campo escalar interactuando con un campo de materia . . . . .	188
<b>10.5. Modelo escalar con <math>G</math> variable</b> . . . . .	<b>190</b>
10.5.1. Modelos escalares . . . . .	190
10.5.2. Campo escalar sin interacción con un campo de materia . . . . .	191
10.5.3. Campo escalar interactuando con un campo de materia . . . . .	192
<b>10.6. Modelos tenso-escalares</b> . . . . .	<b>194</b>
10.6.1. Modelo con $\Lambda$ . . . . .	194
10.6.2. Modelo con $U$ . . . . .	196
<b>10.7. Otras teorías</b> . . . . .	<b>197</b>
10.7.1. Gravedad conforme . . . . .	197
10.7.2. Modelo de Barber . . . . .	198

---

### 10.1. Conclusiones generales

A lo largo de esta Tesis, hemos estudiado la forma en la que pueden variar las “*constantes*” de gravitación y cosmológica en tres marcos teóricos diferentes:

1. Relatividad General (RG)
2. Modelos escalares (SM)
3. Diversas teorías tenso-escalares (STT)

Del conjunto de soluciones que admiten las diferentes ecuaciones de campo en cada uno de los modelos estudiados, nos hemos centrado en las soluciones autosimilares. Hemos puesto especial énfasis en los aspectos formales de cada uno de los modelos teóricos estudiados, demostrando la forma que pueden adquirir cada una de las magnitudes para que las ecuaciones de campo admitan soluciones autosimilares. Hemos llevado a cabo las demostraciones utilizando los métodos de las colineaciones de materia y grupos de Lie. Mientras que el método de las colineaciones de materia se restringe exclusivamente a soluciones autosimilares, con el de grupos de Lie,

mucho más potente y general, hemos podido obtener soluciones tipo potencias, en las que las autosimilares están incluidas.

Aunque nuestro propósito se ha centrado en el estudio de soluciones autosimilares, con el método de grupos de Lie, tal y como lo hemos empleado aquí, nos permite obtener otras soluciones, simplemente imponiendo otras simetrías. De esta forma, se presenta así un método sistemático que nos permite encontrar otras funciones escalares y sus respectivos potenciales, abriéndose la puerta a otros campos de trabajo.

Con respecto al comportamiento de  $G$  y  $\Lambda$ , hemos visto que en cada modelo varían de forma diferente. De forma genérica podemos decir:

- En el marco de la RG,  $G$  es una función creciente si  $\Lambda$ , función decreciente, es positiva siendo la solución válida para valores del parámetro de la ecuación de estado  $\gamma \in (-1/3, 1)$
- En los modelos SM,  $\Lambda$  siempre es decreciente y positiva; sin embargo el comportamiento de  $G$  queda, por lo general, indeterminado
- En los dos modelos STT sistemáticamente estudiados,  $G$  y  $\Lambda$  muestran el mismo comportamiento formal que el obtenido dentro del marco de la RG. Sin embargo, su comportamiento cualitativo es muy diferente, ya que la cosmológica es  $\Lambda \geq 0$  mientras que  $G$  puede ser creciente, constante o decreciente. Ello es debido a la estructura de la ecuaciones de campo, siendo mucho más restrictivas en los modelos tenso-escalares; de esta forma, las soluciones obtenidas son únicamente válidas para entornos reducidos de un valor crítico del parámetro de la EdE  $\gamma$
- Todas las soluciones halladas son no inflacionarias, excepto en el caso de los modelos Kantowsky-Sachs
- Con respecto a la isotropía de las soluciones, casi todas las soluciones obtenidas isotropizan (los parámetros de anisotropía adquieren valores muy pequeños) o son isótropas ( $\mathcal{W}^2 = \mathcal{A} = 0$ )

A continuación resumimos los principales resultados y detallamos las conclusiones a las que hemos llegado en cada uno de los modelos teóricos estudiados y para cada una de las geometrías consideradas.

## 10.2. Resultados geométricos

Las soluciones homotéticas para cada uno de los modelos son las siguientes:

Modelo	Métrica	Restricciones
BI	$ds^2 = -dt^2 + t^{2a_1} dx^2 + t^{2a_2} dy^2 + t^{2a_3} dz^2$	$a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$
BII	$ds^2 = -dt^2 + t^{2a_1} dx^2 + 2zKt^{2a_1} dx dz + (t^{2a_2} + K^2 z^2 t^{2a_1}) dy^2 + t^{2a_3} dz^2$	$a_2 + a_3 - a_1 = 1$
BIII	$ds^2 = -dt^2 + t^{2a_1} e^{-2mz} dx^2 + t^{2a_2} e^{-2nz} dy^2 + t^2 dz^2$	$a_1, a_2 \in \mathbb{R}, \quad a_3 = 1,$ $m = 0, \text{ ó } n = 0$
BV	$ds^2 = -dt^2 + t^2 dx^2 + t^{2a_2} e^{-2mz} dy^2 + t^{2a_3} e^{-2mz} dz^2$	$a_1 = 1, \quad a_2, a_3 \in \mathbb{R}$
BVI <sub>0</sub>	$ds^2 = -dt^2 + t^{2a_1} e^{-2mz} dx^2 + t^{2a_2} e^{-2nz} dy^2 + t^2 dz^2$	$a_1, a_2 \in \mathbb{R}, \quad a_3 = 1,$ $m = n$
BVI <sub>h</sub>	$ds^2 = -dt^2 + t^{2a_1} e^{-2mz} dx^2 + t^{2a_2} e^{-2nz} dy^2 + t^2 dz^2$	$a_1, a_2 \in \mathbb{R}, \quad a_3 = 1$ $m \neq n$
BVII <sub>h</sub>	$ds^2 = -dt^2 + t^2 dx^2 + e^{hx} t^{2a_2} (dy^2 + dz^2)$	$a_1 = 1, \quad a_2, a_3 \in \mathbb{R}$
BIX	$ds^2 = -dt^2 + (t^2 \sin^2 z + t^{2a_2} \cos^2 z) dx^2 +$ $+ 2(t^{2a_2} - t^2) \sin z \sin x \cos z dx dy +$ $+ (t^2 \sin^2 x \cos^2 z + t^{2a_2} \sin^2 x \sin^2 z + t^{2a_3} \cos^2 x) dy^2 +$ $+ 2t^{2a_3} \cos x dy dz + t^{2a_3} dz^2$	$a_1 = 1, \quad a_2, a_3 \in \mathbb{R}$
KS	$ds^2 = -dt^2 + t^{2a_1} dx^2 + t^2 (\sin^2 z dy^2 + dz^2)$	$a_2 = 1, \quad a_1 \in \mathbb{R}$

$$a = a_0 t^{a_1}, \quad b = b_0 t^{a_2}, \quad d = d_0 t^{a_3}, \quad H = ht^{-1}, \quad h = a_1 + a_2 + a_3.$$

### 10.3. Relatividad General

#### 10.3.1. Soluciones de vacío

En la siguiente tabla resumimos las soluciones encontradas para una de las geometrías estudiadas. Éstas son:

Modelo	Vacío
BI	$a_1 + a_2 + a_3 = 1, a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1, \mathcal{K}$
BII	$a_1 = a_3 = 0, a_2 = 1, \mathcal{K} = 0, \mathcal{T}$
BIII	$a_1 = 1, a_2 = 0, m = 1$
BV	$a_1 = a_2 = a_3 = 1, m = \pm 1, \mathcal{M}$
BVI <sub>0</sub>	$a_1 = a_2 = 0, a_3 = 1, m = n = 0, \mathcal{T}$
BVI <sub>h</sub>	$a_2 = a_2, n = \mp a_2, a_1 = \pm m,$ $a_1 = \frac{1}{2} \left( 1 + \sqrt{-a_2^2 + 4a_2 + 1} \right)$
BVII <sub>h</sub>	$a_1 = 1, a_2 = a_3 = 0, h = 0, \mathcal{T}$
BIX	$\nexists$
KS	$\nexists$

donde  $\mathcal{K}$  significa tipo Kasner,  $\mathcal{T}$  tipo Taub y  $\mathcal{M}$  tipo Milne.

#### 10.3.2. Fluidos perfectos

Las ecuaciones de campo se obtienen a partir de la acción

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{G} R + 2\mathcal{L}_m \right].$$

Dentro del contexto de la autosimilaridad, hemos demostrado que las magnitudes deben comportarse como:

$$\rho = \rho_0 t^{-2}, \quad p = \gamma \rho.$$

Las soluciones para los distintos modelos son las siguientes:

Modelo	Factores de escala	$\gamma$	$q$	Isotropía
BI	$a_1 + a_2 + a_3 = 1, a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 < 1, \mathcal{J}$	$\gamma = 1$	$q = 2$	$\mathcal{W}^2 \ll \mathcal{A} \rightarrow 0$
BII	$a_1 = \frac{1-\gamma}{2(\gamma+1)}, a_2 = a_3 = \frac{\gamma+3}{4(\gamma+1)},$ $\mathcal{K}^2 = \frac{-(3\gamma+1)(\gamma-1)}{4(\gamma+1)^2} \mathcal{C}$	$\gamma \in \left(-\frac{1}{3}, 1\right)$	$q > 0$	$\mathcal{W}^2 \ll \mathcal{A} \rightarrow 0$
BIII	$a_1 = 1, a_2 = -\frac{2\gamma}{\gamma+1}, m = \frac{\sqrt{-(3\gamma+1)(\gamma-1)}}{\gamma+1}$	$\gamma \in \left(-\frac{1}{3}, 0\right)$	$q > 0$	$\mathcal{W}^2 \ll \mathcal{A} \rightarrow 0$
BVI <sub>0</sub>	$a_1 = a_2 = \frac{1-\gamma}{2(\gamma+1)}, m = n = \frac{\sqrt{-(3\gamma+1)(\gamma-1)}}{2(\gamma+1)}$	$\gamma \in \left(-\frac{1}{3}, 1\right)$	$q > 0$	$\mathcal{W}^2 \rightarrow 0$ $\mathcal{A} \in (0, 1)?$
BVI <sub>h</sub>	$a_1 = \frac{1-a_2(\gamma+1)-\gamma}{\gamma+1}, n = \frac{b(a_2(\gamma+1)+2\gamma)}{\gamma+1},$ $m = b(1-a_2), b = \sqrt{\frac{1-\gamma}{3\gamma+1}}$ S2	$\gamma \in \left(-\frac{1}{3}, 1\right)$	$q > 0$	$\mathcal{W}^2 = \mathcal{W}(\gamma, a_2)?$ $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\gamma, a_2)?$
BV	$a_1 = a_2 = a_3 = 1,$ $m \in (-1, 1) \setminus \{0\}, \mathcal{F}_{-1}$	$\gamma = -\frac{1}{3}$	$q = 0$	$\mathcal{W}^2 = \mathcal{A} = 0$
BVII <sub>h</sub>	$a_1 = a_2 = a_3 = 1, h = 0, \mathcal{F}_0$	$\gamma = -\frac{1}{3}$	$q = 0$	$\mathcal{W}^2 = \mathcal{A} = 0$
BIX	$a_1 = a_2 = a_3 = 1, \mathcal{F}_1$	$\gamma = -\frac{1}{3}$	$q = 0$	$\mathcal{W}^2 = \mathcal{A} = 0$
KS	$a_1 = \sqrt{2}, a_2 = 1$	$\gamma = 1 - \sqrt{2}$	$q < 0$	$\mathcal{W}^2 \ll \mathcal{A} \rightarrow 0$

donde  $S_2$  es la segunda solución para esta métrica ( $BVI_h$ )

$$a_2 = A, \quad a_1 = -A + \frac{1-\gamma}{1+\gamma}, \quad n = \frac{\sqrt{B}}{1+\gamma}, \quad m = \frac{(A-1)\sqrt{B}}{A(1+\gamma)+2\gamma},$$

$$A = \frac{-\gamma + \sqrt{-\gamma(3\gamma-4)}}{2(\gamma+1)}, \quad B = -\frac{3\gamma^3(1+A) + \gamma(1-3A) - 4\gamma^2}{1+3\gamma^2},$$

$$\forall \gamma \in \left(-\frac{1}{3}, 0\right), \quad q > 0, \quad \mathcal{W}^2 \ll \mathcal{A} \rightarrow 0.$$

Los símbolos  $\mathcal{J}$ ,  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{F}_0$  y  $\mathcal{F}_\pm$  hacen referencia a las soluciones, bien conocidas, de Jacobs, Collins y Friedmann-Robertson-Walker ( $K = 0, 1, -1$ ), respectivamente.

Por tanto, podemos concluir que:

- Hemos obtenido nuevas soluciones en los casos  $BVI_h$  y Kantowsky-Sachs (KS)
- Hemos demostrado que la única solución homotética para la métrica  $BVII_h$  corresponde al caso  $h = 0$
- Las soluciones obtenidas son únicamente válidas para determinados valores del parámetro de la EdE  $\gamma$
- Todas las soluciones obtenidas son no inflacionarias,  $q > 0$ , excepto el modelo KS, por lo que, si tenemos en cuenta las observaciones recientes, dichas soluciones no pueden describir la aceleración que actualmente experimenta nuestro universo. Describen, como ha sido puesto de manifiesto, estados asintóticos, futuro o pasado de otras soluciones
- Con respecto a la isotropización de las soluciones calculadas, podemos decir, que todas ellas isotropizan a excepción de las que pertenecen al grupo  $BVI_0$  y  $BVI_h$ . En particular, la solución obtenida para la métrica de tipo  $BVI_0$ , hemos visto que la solución puede ser considerada como isótropa con respecto al parámetro de anisotropía de Weyl,  $\mathcal{W}^2$ , sin embargo si  $\gamma \rightarrow -1/3$ , el primer parámetro de anisotropía,  $\mathcal{A} \rightarrow 1$ , en cuyo caso, y con respecto a este parámetro, la solución no puede ser considerada como isótropa en dicho punto,  $\mathcal{A} \in (0, 1)$ ?

Respecto a las soluciones del  $BVI_h$ , la primera de ellas, en general y considerando ambos parámetros de anisotropía, no es isótropa, ya que hemos encontrado que  $\mathcal{W}^2 = \mathcal{W}(\gamma, a_2)$  y  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\gamma, a_2)$ . Sin embargo el análisis numérico realizado, nos muestra que si eliminamos un pequeño entorno del intervalo de definición del parámetro de la EdE  $\gamma$ ,  $\mathcal{E}(-1/3)$ , entonces la solución sí es isótropa, verificándose que  $\mathcal{W}^2 \ll \mathcal{A} \rightarrow 0$ .

Por contra, la segunda solución sí es isótropa, sin ninguna restricción,  $\forall \gamma \in \left(-\frac{1}{3}, 0\right)$

Con los símbolos,  $\mathcal{W}^2 \ll \mathcal{A} \rightarrow 0$ , queremos expresar el hecho, reflejado en los capítulos anteriores, de que  $\mathcal{W}^2$  es mucho menor que  $\mathcal{A}$  y que a su vez, el parámetro  $\mathcal{A}$  toma valores muy próximos a 0 ( $\mathcal{A} \approx 0$ ), al menos en ciertas regiones físicas del espacio de parámetros.

### 10.3.3. Relatividad General con CVT

Las ecuaciones se deducen a partir de la acción

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{2G(t)} R - \Lambda(t) + \mathcal{L}_m \right],$$

mientras que las magnitudes deben seguir las siguientes leyes

$$\rho = \rho_0 t^{-\alpha}, \quad p = \gamma \rho, \quad \alpha = h(\gamma + 1), \quad h = a_1 + a_2 + a_3, \quad G = G_0 t^{\alpha-2}, \quad \Lambda = \Lambda_0 t^{-2}.$$

Las soluciones obtenidas para las diferentes métricas son:

Modelo	Factores de escala	$\gamma$ ( $\Lambda > 0, G \nearrow$ )	$q$	Isotropía
BI	$a_1 + a_2 + a_3 = 1, \quad a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 < 1, \quad \mathcal{J}$	$\gamma_c = 1$	$q = 2$	$\mathcal{W}^2 \ll \mathcal{A} \rightarrow 0$
BII	$a_{1\pm} = \frac{1}{2} \left( 1 \pm \sqrt{1 - 4K^2} \right), \quad a_2 = a_3,$ $a_{2\pm} = \frac{1}{4} \left( 3 \pm \sqrt{1 - 4K^2} \right), \quad K \in \left[ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right] \setminus \{0\}$	$\gamma \in \left( -\frac{1}{3}, 1 \right)$	$q > 0$	$\mathcal{W}^2 \ll \mathcal{A} \rightarrow 0$
BIII	$a_1 = a_1, \quad a_2 = 1, \quad m = 0, \quad n = \sqrt{1 - a_1^2}$	$\gamma \in \left( -\frac{1}{3}, 0 \right)$	$q > 0$	$\mathcal{W}^2 \rightarrow 0,$ $\mathcal{A} \in \left( 0, \frac{5}{2} \right)?$
BVI <sub>0</sub>	$a_1 = a_2 = \frac{1}{2} \left( 1 \pm \sqrt{1 - 4n^2} \right),$ $\forall n = m \in \left( -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \setminus \{0\}$	$\gamma \in \left( -\frac{1}{3}, 1 \right)$	$q > 0$	$\mathcal{W}^2 \ll \mathcal{A} \rightarrow 0$
BVI <sub>h</sub>	$a_1 = \frac{a_2^2 + 1}{a_2 + 1}, \quad m = \sqrt{\frac{a_2^2 + 1 - 2a_2^3}{2a_2 + 1}}, \quad n = \frac{ma_2}{a_2 + 1}$ $a_1 = \frac{m^2(2 - a_2) - a_2(a_2 - 1)^2}{m^2 + (a_2 - 1)^2}, \quad (m + n)^2 \leq 1$	$\gamma \in \left( -\frac{1}{3}, 1 \right)$ $\gamma \in \left( -\frac{1}{3}, 1 \right)$	$\frac{q > 0}{q > 0}$	$\frac{\mathcal{W}^2 \ll \mathcal{A} \rightarrow 0}{\mathcal{W}^2 \ll \mathcal{A} \rightarrow 0}$
BV	$a_1 = a_2 = a_3 = 1, \quad m \in (-1, 1) \setminus \{0\}, \quad \mathcal{F}_{-1}$	$\gamma \in (\gamma_c, 1),$ $\gamma_c = -\frac{1}{3}$	$q = 0$	$\mathcal{W}^2 = \mathcal{A} = 0$
BVII <sub>h</sub>	$a_1 = a_2 = a_3 = 1, \quad h = 0 \quad \mathcal{F}_0$	$\gamma \in (\gamma_c, 1),$ $\gamma_c = -\frac{1}{3}$	$q = 0$	$\mathcal{W}^2 = \mathcal{A} = 0$
BIX	$a_1 = a_2 = a_3 = 1, \quad \mathcal{F}_1$	$\gamma \in (\gamma_c, 1),$ $\gamma_c = -\frac{1}{3}$	$q = 0$	$\mathcal{W}^2 = \mathcal{A} = 0$
KS	$a_1 = \sqrt{2}, \quad a_2 = 1$	$\gamma \in (\gamma_c, 1),$ $\gamma_c = 1 - \sqrt{2}$	$q < 0$	$\mathcal{W}^2 \ll \mathcal{A} \rightarrow 0$

Podemos afirmar, por tanto, que:

- Los factores de escala, en general, son diferentes a los obtenidos en el caso de un fluido perfecto, con constante "constantes". Los casos BI, BV, BVII<sub>h</sub>, BIX y KS coinciden con el caso anteriormente estudiado
  - Hemos demostrado que existe una relación entre el comportamiento de  $G$  y el signo de  $\Lambda$ . Cuando  $\Lambda < 0$  (situación descartada observacionalmente) entonces  $G$  es decreciente. Si  $\Lambda = 0$ , entonces  $G = const.$  y cuando  $\Lambda > 0$ , entonces  $G$  es creciente ( $\nearrow$ )
  - Con respecto al rango de validez del parámetro de la EdE  $\gamma$ , observamos que mientras para las soluciones obtenidas en el caso de un fluido perfecto era tan solo para un valor determinado (en la mayoría de las soluciones) en este caso, para todas las métricas estudiadas encontramos que las soluciones son válidas (matemáticamente) para todo valor de  $\gamma \in (-1, 1)$ . Únicamente considerando las observaciones recientes, que indican  $\Lambda > 0$ , somos capaces de determinar el intervalo de validez (físico) de  $\gamma$ , siendo:  $\gamma \in (\gamma_c, 1)$ , donde  $\gamma_c$  representa el valor donde  $\alpha = 2$ , y por tanto  $\Lambda = 0$  y  $G = const.$
- $\gamma \in \left( -\frac{1}{3}, 1 \right)$  representa que, al depender la solución de parámetros geométricos como  $n$  y  $m$ , el estudio numérico realizado indica que aproximadamente  $\gamma \in \left( -\frac{1}{3}, 1 \right)$
- El modelo BI, sin embargo, se comporta de manera diferente, ya que en él, la solución únicamente es válida si  $\gamma = 1$ , pero precisamente para este valor, obtenemos  $\Lambda = 0$  y  $G = const.$
  - Todas las soluciones (excepto el caso BI) predicen que  $G$  es creciente; de esta manera la relación

$$\frac{G'}{G} \sim \frac{\varepsilon}{t} \approx \frac{\varepsilon}{3,1536} \times 10^{-10} \text{yr}, \quad \varepsilon = \alpha - 2,$$

se ajusta a la mayoría de las observaciones, donde hemos considerado como edad media del universo  $t \sim 10^{17} \text{s} = 3,1536 \times 10^{10} \text{yr}$

- La única solución inflacionaria es la que corresponde al modelo KS, el resto de las soluciones verifica  $q > 0$

- Todas las soluciones obtenidas se puede considerar que isotropizan, encontrando solo en el caso BIII donde para determinados valores, el primer parámetro de isotropía,  $\mathcal{A}$ , no tiende a cero. De igual forma, en todos los casos resulta la relación

$$\mathcal{W}^2 \ll \mathcal{A} \rightarrow 0,$$

por lo que podemos afirmar que

$$\text{si } \mathcal{A} \rightarrow 0 \implies \mathcal{W}^2 \rightarrow 0,$$

pero no así, la implicación inversa, i.e.,

$$\text{si } \mathcal{W}^2 \rightarrow 0 \not\implies \mathcal{A} \rightarrow 0.$$

La razón de estas implicaciones estriba en que, mientras en la definición del parámetro  $\mathcal{A}$  solo están involucradas derivadas de primer orden, en la del parámetro de Weyl  $\mathcal{W}^2$ , las derivadas son de segundo orden

- La única solución homotética para la métrica  $BVII_h$  corresponde al caso  $h = 0$ ; precisamente, esta solución ( $BVII_0$ ) junto con la BV y BIX reproducen las obtenidas para los casos FRW con diferentes curvaturas
- En el apéndice A, hemos demostrado cómo estudiar, en el caso del modelo BI, la variación de  $G$  y  $\Lambda$  de forma alternativa. Construyendo EDOs de segundo y tercer grado, demostramos y comparamos las ventajas y desventajas de cada enfoque. A pesar de obtener el mismo resultado cualitativo, mismos órdenes de magnitud para las magnitudes, los comportamientos cualitativos son diferentes, ya que en el estudio desarrollado en el apéndice, en la integración de las ecuaciones aparecen constantes de integración que dificultan la interpretación cuantitativa de la solución

## 10.4. Modelos escalares

### 10.4.1. Modelos escalares

El modelo está descrito por la acción

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{2G} R - \frac{1}{2} (\nabla\phi)^2 - V(\phi) \right].$$

Los resultados teóricos obtenidos para el campo escalar  $\phi$  y el potencial  $V$ , indican que la única posibilidad compatible con las soluciones autosimilares es

$$\phi = \pm \sqrt{\alpha} \ln(t), \quad V = \beta \exp\left(\mp \frac{2}{\sqrt{\alpha}} \phi\right).$$

De hecho, también hemos demostrado la implicación inversa, es decir, si el campo escalar y el potencial están dados por las anteriores expresiones, entonces los factores de escala siguen una ley de tipo potencias.

Las soluciones obtenidas son las siguientes:

Modelo	Factores de escala	$\alpha, \beta$	$q$	Isotropía
BI	$a_1 + a_2 + a_3 = 1$	$\alpha = 2a_2(1 - a_2) + 2a_3(1 - a_3) - 2a_2a_3,$ $\beta = 0$	$q > 0$	$\mathcal{W}^2 \ll \mathcal{A} \rightarrow 0$
BII	$a_1 = \frac{1}{2} \left( 1 \pm \sqrt{1 - 4K^2} \right),$ $a_2 = a_3 = \frac{1}{4} \left( 3 \pm \sqrt{1 - 4K^2} \right),$ $K \in \left[ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right] \setminus \{0\}$	$\alpha = \frac{1}{4} \left( 5 \pm 3\sqrt{1 - 4K^2} \right),$ $\beta = 1 \pm \sqrt{1 - 4K^2} - \frac{3}{2}K^2$	$q > 0$	$\mathcal{W}^2 \ll \mathcal{A} \rightarrow 0$
BIII	$a_1 = \sqrt{1 - n^2}, a_2 = a_3 = 1,$ $n \in (-1, 1) \setminus \{0\}$	$\alpha = 2a_1, \quad \beta = 1 + a_1 - n^2$	$q > 0$	$\mathcal{W}^2 \rightarrow 0,$ $\mathcal{A} \in (0, \frac{5}{2})?$
BVI <sub>0</sub>	$a_1 = a_2 = \frac{1}{2} \left( 1 \pm \sqrt{1 - 4n^2} \right),$ $a_3 = 1, \quad m = n \in \left[ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right] \setminus \{0\}$	$\alpha = 2a_2, \quad \beta = 2a_2^2$	$q > 0$	$\mathcal{W}^2 \ll \mathcal{A} \rightarrow 0$
BVI <sub>h</sub>	$n = -\frac{m(m^2 - 1 + a_2^2)}{m^2 + (a_2 - 1)^2},$ $a_1 = \frac{2(a_2^2 + m^2) - a_2(1 + m^2 + a_2^2)}{m^2 + (a_2 - 1)^2}$	$\alpha = \frac{2(2a_2^3 + (2a_2 + 1)m^2 - a_2^2(1 + 2m^2 + a_2^2) - m^4)}{m^2 + (a_2 - 1)^2},$ $\beta = \frac{2m^2(2a_2^3 + (2a_2 + 1)m^2 - a_2^2(1 + 2m^2 + a_2^2) - m^4)}{(m^2 + (a_2 - 1)^2)^2}$	$q > 0$	$\mathcal{W}^2 \ll \mathcal{A} \rightarrow 0$
BV	$a_1 = a_2 = a_3 = 1,$ $m \in (-1, 1) \setminus \{0\}, \quad \mathcal{F}_{-1}$	$\alpha = \beta = 2(1 - m^2)$	$q = 0$	$\mathcal{W}^2 = \mathcal{A} = 0$
BVII <sub>h</sub>	$a_1 = a_2 = a_3 = 1,$ $h = 0 \quad \mathcal{F}_0.$	$\alpha = \beta = 2$	$q = 0$	$\mathcal{W}^2 = \mathcal{A} = 0$
BIX	$a_1 = a_2 = a_3 = 1, \quad \mathcal{F}_1$	$\alpha = \beta = \frac{5}{2}$	$q = 0$	$\mathcal{W}^2 = \mathcal{A} = 0$
KS	$a_1 = \sqrt{2}, \quad a_2 = 1,$	$\alpha = 2a_1, \beta = 2 + a_1$	$q < 0$	$\mathcal{W}^2 \ll \mathcal{A} \rightarrow 0$

De esta forma podemos concluir que

- Los factores de escala se comportan de igual forma que en el caso de la RG con constantes variables
- El modelo BI predice que  $\beta = 0$ , por lo que el potencial del campo es nulo. En el caso de la RG con CVT también se obtenía el resultado  $\Lambda = 0$
- En todos los modelos (excepto el BI) se obtiene que  $\beta > 0$ , por lo que las soluciones predicen una constante cosmológica dinámica (decreciente) y positiva (consistente observacionalmente)
- A excepción del modelo KS, todas las soluciones son, no inflacionarias,  $q > 0$ . De esta forma, vemos que dichas soluciones no describen la actual aceleración que experimenta el universo
- Todas las soluciones isotropizan o son isótropas, a excepción del modelo BIII, en el que para determinados valores de  $n$  el parámetro de anisotropía  $\mathcal{A}$  no tiende a cero, pero sí el de Weyl  $\mathcal{W}^2$
- No existe solución autosimilar para el modelo BVII<sub>h</sub>; únicamente en el caso  $h = 0$

#### 10.4.2. Campo escalar sin interacción con un campo de materia

El modelo está descrito por la acción

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{2G} R - \frac{1}{2} (\nabla\phi)^2 - V(\phi) + \mathcal{L}_m \right].$$

Los resultados teóricos obtenidos para el campo escalar  $\phi$  y el potencial  $V$ , indican que la única posibilidad compatible con las soluciones autosimilares es

$$\rho = \rho_0 t^{-2}, \quad p = \gamma\rho. \quad \phi = \pm \sqrt{\alpha} \ln(t), \quad V = \beta \exp\left(\mp \frac{2}{\sqrt{\alpha}}\phi\right).$$

Las soluciones obtenidas son las siguientes:

Modelo	Factores de escala	$\alpha, \beta, \rho_0$	$\gamma$	$q$	Isotropía
BI	$a_1 + a_2 + a_3 = 1$	$\alpha = 2a_2(1 - a_2) + 2a_3(1 - a_3) - 2a_2a_3 - 2\rho_0,$ $\beta = 0$	1	$> 0$	$\mathcal{W}^2 \ll \mathcal{A} \rightarrow 0$
BII	$a_1 = \frac{1-\gamma}{2(\gamma+1)},$ $a_2 = a_3 = \frac{3+\gamma}{4(\gamma+1)},$ $K^2 = \frac{-(3\gamma+1)(\gamma-1)}{4(\gamma+1)^2}$	$\rho_0 = \frac{(5-4\alpha(\gamma+1)-\gamma)}{4(\gamma+1)^2},$ $\beta = \frac{\alpha(1-\gamma)}{2(\gamma+1)}$	$(-\frac{1}{3}, 1)$	$> 0$	$\mathcal{W}^2 \ll \mathcal{A} \rightarrow 0$
BIII	$a_1 = -\frac{2\gamma}{\gamma+1}, a_2 = a_3 = 1,$ $n = \frac{\sqrt{-(3\gamma+1)(\gamma-1)}}{2(\gamma+1)}, m = 0$	$\alpha = -\frac{\gamma(4+\rho_0(\gamma+2)+\rho_0)}{(\omega+1)},$ $\beta = \frac{\gamma^2(4+\rho_0(\gamma+1))-\rho_0-\gamma(4+\rho_0)}{(\gamma+1)}$	$(-\frac{1}{3}, 0)$	$> 0$	$\mathcal{W}^2 \ll \mathcal{A} \rightarrow 0$
BVI <sub>0</sub>	$a_1 = a_2 = \frac{1-\gamma}{2(\omega+1)}, a_3 = 1$ $m = n = \frac{\sqrt{-(3\gamma+1)(\gamma-1)}}{2(\gamma+1)}$	$\alpha = \frac{1}{\gamma+1} (1 - \gamma - \rho_0 (\gamma + 1)^2)$ $\beta = \frac{(\gamma-1)(\gamma-1+\rho_0(\gamma+1)^2)}{2(\gamma+1)^2}$	$(-\frac{1}{3}, 1)$	$> 0$	$\mathcal{W}^2 \ll \mathcal{A} \rightarrow 0$
BVI <sub>h</sub>	$a_1 = \frac{2(a_2^2+m^2)-a_2(1+m^2+a_2^2)}{m^2+(a_2-1)^2}$ $n = -\frac{m(m^2-1+a_2^2)}{m^2+(a_2-1)^2}$	S1	$(-\frac{1}{3}, 1)$	$> 0$	$\mathcal{W}^2 \ll \mathcal{A} \rightarrow 0$
BV	$a_1 = a_2 = a_3 = 1,$ $m \in (-1, 1) \setminus \{0\}, \mathcal{F}_{-1}$	$\alpha = \beta < 2(1 - m^2)$	$-\frac{1}{3}$	0	$\mathcal{W}^2 = \mathcal{A} = 0$
BVII <sub>h</sub>	$a_1 = a_2 = a_3 = 1,$ $h = 0 \mathcal{F}_0$	$\alpha = \beta < 2(1 - \frac{\rho_0}{3})$	$-\frac{1}{3}$	0	$\mathcal{W}^2 = \mathcal{A} = 0$
BIX	$a_1 = a_2 = a_3 = 1, \mathcal{F}_1$	$\alpha = \beta, \beta \in (0, \frac{5}{2})$	$-\frac{1}{3}$	0	$\mathcal{W}^2 = \mathcal{A} = 0$
KS	$a_1 = \sqrt{2}, a_2 = 1$	$\alpha = 2a_1 + \rho_0(a_1 - 2),$ $\beta = 2 + a_1 - \frac{1}{2}\rho_0a_1$	$1 - \sqrt{2}$	$< 0$	$\mathcal{W}^2 \ll \mathcal{A} \rightarrow 0$

donde S1

$$\alpha = \frac{(\rho_0(\gamma-1)(\gamma+1)^2 + 4(\gamma+1)m\sqrt{-(\gamma-1)(3\gamma+1)} - 4m^2(\gamma+1)^2 + 4\gamma(\gamma-1))}{(1-\gamma^2)},$$

$$\beta = \frac{(\rho_0(\gamma-1)(\gamma+1)^2 + 4(\gamma+1)m\sqrt{-(\gamma-1)(3\gamma+1)} - 4m^2(\gamma+1)^2 + 4\gamma(\gamma-1))}{2(\gamma+1)^2}.$$

Concluimos por tanto que:

- Los factores de escala, excepto en el modelo BVI<sub>h</sub>, coinciden con los obtenidos para un fluido perfecto dentro del marco de la RG
- En todos los casos, las soluciones obtenidas predicen que la constante cosmológica es positiva y decreciente,  $\beta > 0$ , a excepción del modelo BI, donde  $\beta = 0$ , i.e.,  $\Lambda = 0$
- Los rangos de validez del parámetro de la EdE  $\gamma$  coinciden con los obtenidos en el caso de un fluido perfecto en RG
- A excepción del modelo KS, ninguna de las soluciones encontradas es inflacionaria
- Todas las soluciones halladas, incluidas las del modelo BVI<sub>h</sub>, isotropizan o son isótropas
- El caso BVII<sub>h</sub> colapsa al modelo BVII<sub>0</sub> ya que la solución encontrada solo es compatible si  $h = 0$

### 10.4.3. Campo escalar interactuando con un campo de materia

Hemos estudiado tres escenarios (enfoques) en los que se considera que el campo escalar interactúa con el campo de materia. Los resultados teóricos en los tres casos son

$$\rho = \rho_0 t^{-2}, \quad p = \gamma\rho \quad \phi = \pm\sqrt{\alpha}\ln(t), \quad V = \beta \exp\left(\mp\frac{2}{\sqrt{\alpha}}\phi\right).$$

También hemos demostrado que otras funciones de acoplamiento pueden ser consideradas y, la forma que pueden adquirir éstas en el contexto de soluciones autosimilares.

Tal y como hemos visto a lo largo de la Tesis, en general podemos decir que las soluciones en los tres casos coinciden, salvo en algunos modelos con respecto al primer enfoque y solo para los casos BIII, BVI<sub>0</sub> y BVI<sub>h</sub>.

En la siguiente tabla, mostramos las soluciones obtenidas para los enfoques segundo y tercero:

Modelo	Factores de escala	$\alpha, \beta, \rho_0$	$\gamma$	$q$	Isotropía
BI	$\nexists$				
BII	$K \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \setminus \{0\}$ $a_1 = \frac{1}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - 4K^2}\right)$ $a_2 = a_3 = \frac{1}{4} \left(3 \pm \sqrt{1 - 4K^2}\right)$	$\alpha = \frac{1}{4} \left(5 \pm 3\sqrt{1 - 4K^2}\right) - \rho_0 (\gamma + 1)$ $\beta = 1 \pm \sqrt{1 - 4K^2} - \frac{3}{2}K^2 + \frac{\rho_0(\gamma-1)}{2}$ $\delta = \frac{(\gamma+1)\sqrt{1-4K^2}+2\gamma}{2+\sqrt{1-4K^2}}$	$\left(-\frac{1}{3}, 1\right)$	$> 0$	$\mathcal{W}^2 \ll \mathcal{A} \rightarrow 0$
BIII	$a_1 = \sqrt{1 - n^2}, a_2 = a_3 = 1$ $n \in (-1, 1) \setminus \{0\}$	$\alpha = 2a_1 - \frac{2\rho_0(1+\delta(1+\frac{a_1}{2}))}{2+a_1}$ $\beta = \frac{2a_1(a_1^2+3a_1+2)+\rho_0(\delta(2+a_1)-2(1+a_1))}{2(2+a_1)}$ $\delta = \frac{a_1}{2+a_1} + \gamma$	$\left(-\frac{1}{3}, 0\right)$	$> 0$	$\mathcal{W}^2 \rightarrow 0,$ $\mathcal{A} \in (0, \frac{5}{2})?$
BVI <sub>0</sub>	$a_1 = a_2 = \frac{(1 \pm \sqrt{1 - 4n^2})}{2}$ $n \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \setminus \{0\}$	$\alpha = 2a_2 - \rho_0 (\gamma + 1)$ $\beta = 2a_2^2 + \frac{\rho_0}{2} (\gamma - 1)$ $\delta = \frac{2a_2(\omega+1)+\omega-1}{2a_2+1}$	$\left(-\frac{1}{3}, 1\right)$	$> 0$	$\mathcal{W}^2 \ll \mathcal{A} \rightarrow 0$
BVI <sub>h</sub>	$a_1 = \frac{2(a_2^2+m^2)-a_2(1+m^2+a_2^2)}{m^2+(a_2-1)^2}$ $n = -\frac{m(m^2-1+a_2^2)}{m^2+(a_2-1)^2},$	S1	$\left(-\frac{1}{3}, 1\right)$	$> 0$	$\mathcal{W}^2 \ll \mathcal{A} \rightarrow 0$
BV	$a_1 = a_2 = a_3 = 1,$ $m \in (-1, 1) \setminus \{0\}, \quad \mathcal{F}_{-1}$	$\alpha < 2(1 - m^2)$ $\beta = 2(1 - m^2) - \frac{(1-\gamma)(2(1-m^2)-\alpha)}{2(\gamma+1)}$ $\delta = \frac{1}{3} + \gamma$	$\left(-\frac{1}{3}, 1\right)$	0	$\mathcal{W}^2 = \mathcal{A} = 0$
BVII <sub>h</sub>	$a_1 = a_2 = a_3 = 1,$ $h = 0 \quad \mathcal{F}_0$	$\alpha = 2 - \rho_0 (\gamma + 1)$ $\beta = 2 + \frac{\rho_0}{2} (\gamma + 1)$ $\delta = \frac{1}{3} + \gamma$	$\left(-\frac{1}{3}, 1\right)$	0	$\mathcal{W}^2 = \mathcal{A} = 0$
BIX	$a_1 = a_2 = a_3 = 1, \quad \mathcal{F}_1$	$\alpha = 2 - \frac{5}{2}(\gamma + 1)$ $\beta = \frac{5}{2} + \frac{\rho_0}{2} (\gamma + 1)$ $\delta = \frac{1}{3} + \gamma$	$\left(-\frac{1}{3}, 1\right)$	0	$\mathcal{W}^2 = \mathcal{A} = 0$
KS	$a_1 = \sqrt{2}, \quad a_2 = 1$	$\alpha = 2a_1 - \rho_0 (\gamma + 1)$ $\beta = 2 + a_1 + \frac{1}{2}\rho_0 (\gamma - 1)$ $\delta = \gamma + \sqrt{2} - 1$	$(1 - \sqrt{2}, 1]$	$< 0$	$\mathcal{W}^2 \ll \mathcal{A} \rightarrow 0$

donde S1

$$\delta = \frac{(a_2 - 1)^2 (\gamma - 1) + m^2 (3\gamma + 1)}{(m^2 + (a_2 - 1)^2) \sqrt{\alpha}}, \quad \alpha = -2m^2 - (\gamma + 1) \rho_0 - \frac{2a_2^2 (a_2 - 1)^2}{m^2 + (a_2 - 1)^2},$$

$$\beta = -\frac{(1 - \gamma) \rho_0}{2 (m^2 + (a_2 - 1)^2)^2} \left[ 1 + a_2 (a_2 - 2) (2a_2 - a_2^2 - 2) - \right.$$

$$\left. -m^2 \left( (m^2 + 2) + 2a_2 (a_2 - 2) - 4 \left( -m - a_2 + a_2^2 + m^2 \right) (m - a_2 + a_2^2 + m^2) \right) \right].$$

De forma que, podemos concluir:

- Con respecto a los factores de escala, observamos que las soluciones halladas coinciden con las del modelo escalar y, por tanto, con las del modelo con constantes variables en el marco de la Relatividad General
- El rango de validez del parámetro de la EdE  $\gamma$  coincide con el obtenido en RG con CVT, siendo más amplio que en el caso sin interacción, donde por ejemplo, para los modelos BIII, BVI<sub>0</sub>, BVI<sub>h</sub> y KS solo era válido para un único valor,  $\gamma_c$  mientras que aquí lo es en  $(\gamma_c, 1)$

- En todos los casos, las soluciones predicen que la constante cosmológica es positiva y decreciente, ya que  $\beta > 0$
- Ninguna de las soluciones hallada es inflacionaria,  $q \geq 0$  a excepción del modelo KS, tal y como sucede en los casos anteriormente estudiados
- De igual forma vemos que todas las soluciones encontradas isotropizan o son isótropas, como en los casos BV, BVII<sub>0</sub>, y BIX
- Para el modelo BI, existe una solución matemática tipo Jacobs con  $\beta = 0$ , pero la hemos descartado desde el punto de vista físico al ser termodinámicamente inconsistente, por lo que concluimos que no existe solución física y que, por lo tanto, en el contexto de las soluciones autosimilares no se puede considerar interacción alguna entre un campo escalar y otro de materia

Sin embargo, con respecto al primer enfoque, encontramos las siguientes diferencias con respecto a los enfoques anteriores: el primero se refiere al rango de validez de la EdE; en este caso y para todos los modelos encontramos que  $\gamma \in (-1, 1)$  a excepción del modelo BI, donde tampoco se pueden considerar interacción entre el campo escalar y el campo de materia, como en los anteriores enfoques (termodinámicamente inconsistente). El segundo concierne a las soluciones para los modelos BIII, BVI<sub>0</sub> y BVI<sub>h</sub>. En la siguiente tabla resumimos las soluciones halladas para dichos modelos.

Modelo	Factores de escala	$\alpha, \beta, \rho_0$	$\gamma$	$q$	Isotropía
BIII	$\nexists$				
BVI <sub>0</sub>	$a_1 = a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_3 = 1,$ $m = n = \pm \frac{1}{2}$	$\alpha = 1 - \rho_0(\gamma + 1),$ $\beta = \frac{1}{2}(1 + \rho_0(\gamma - 1))$	$(-1, 1)$	$> 0$	$\mathcal{W}^2 \ll \mathcal{A} \rightarrow 0$
BVI <sub>h</sub>	$a_1 = m, \quad a_2 = 1 - m$ $n = a_2,$	$\alpha = 4m(1 - m) - \rho_0(\gamma + 1)$ $\beta = 2m(1 - m) + \frac{1}{2}\rho_0(\gamma - 1)$	$(-1, 1)$	$> 0$	$\mathcal{W}^2 \ll \mathcal{A} \rightarrow 0$

Las conclusiones a las que podemos llegar son, por tanto, las siguientes:

- Los factores de escala son distintos que los encontrados en los enfoques segundo y tercero
- No hemos hallado solución matemática al modelo BIII
- $\beta > 0$  y, por lo tanto, predice el mismo comportamiento para la constante cosmológica que en los anteriores enfoques
- $\gamma \in (-1, 1)$ , siendo de esta forma mayor el intervalo de validez que los casos anteriores en los que  $\gamma \in (-\frac{1}{3}, 1)$
- A pesar de ser mayor dicho intervalo, las soluciones halladas continúan siendo no inflacionarias, ya que  $q > 0$
- Ambas soluciones isotropizan

## 10.5. Modelo escalar con $G$ variable

### 10.5.1. Modelos escalares

Consideramos la siguiente ecuación de KG modificada

$$\phi'' + \phi'H + \frac{dV}{d\phi} + \frac{G'\rho_\phi}{G\phi'} = 0.$$

De esta forma, el comportamiento del campo escalar, del potencial y de la constante de gravitación  $G(t)$ , vienen dados por

$$\phi = \phi_0 t^{-\alpha}, \quad V(t) = \beta t^{-2(\alpha+1)}, \quad G = G_0 t^{2\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Las soluciones que hemos hallado para este modelo están resumidas en la siguiente tabla:

Mod.	Factores de escala	$\alpha, \beta$	G	q	Isotropía
BI	$a_1 + a_2 + a_3 = 1$	$\beta = 0$	?	$> 0$	$\mathcal{W}^2 \ll \mathcal{A} \rightarrow 0$
	$a_1 = \frac{1}{2} - \frac{a_3 B}{A}, a_2 = \frac{B}{4}$ $A = \frac{1+2a_3 + \sqrt{1+4a_3-12a_3^2}}{4}$ $B = \frac{1-2a_3 + \sqrt{1+4a_3-12a_3^2}}{4}$	$\beta = 0$	?	$> 0$	$\mathcal{W}^2 \ll \mathcal{A} \rightarrow 0$
BII	$K \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \setminus \{0\},$ $a_1 = \frac{1 \pm \sqrt{1-4K^2}}{2},$ $a_2 = a_3 = \frac{3 \pm \sqrt{1-4K^2}}{4}$	$\beta = \frac{\alpha^2}{2} \left(1 \pm \sqrt{1-4K^2}\right)$	?	$> 0$	$\mathcal{W}^2 \ll \mathcal{A} \rightarrow 0$
BIII	$a_1 = \sqrt{1-n^2}, a_2 = a_3 = 1,$ $n \in (-1, 1) \setminus \{0\}$	$\beta = \frac{\alpha^2}{2} \left(1 + \sqrt{1-n^2}\right)$	?	$> 0$	$\mathcal{W}^2 \rightarrow 0,$ $\mathcal{A} \in (0, \frac{5}{2})?$
BVI <sub>0</sub>	$a_1 = a_2 = \frac{(1 \pm \sqrt{1-4n^2})}{2}, a_3 = 1$ $m = n \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \setminus \{0\}$	$\alpha = \frac{1}{G_0} \sqrt{G_0} \left(1 + \sqrt{1-4n^2}\right)$ $\beta = \frac{1}{2G_0} \left(1 + \sqrt{1-4n^2}\right)^2$	$\nearrow$	$> 0$	$\mathcal{W}^2 \ll \mathcal{A} \rightarrow 0$
BVI <sub>h</sub>	$n = \frac{m(1-m^2-a_2^2)}{m^2+(a_2-1)^2},$ $a_1 = \frac{2(a_2^2+m^2)-a_2(1+m^2+a_2^2)}{m^2+(a_2-1)^2}$	$\beta = \frac{m^2 \alpha^2}{m^2+(a_2-1)^2}$	?	$> 0$	$\mathcal{W}^2 \ll \mathcal{A} \rightarrow 0$
BV	$a_1 = a_2 = a_3 = 1,$ $m \in (-1, 1) \setminus \{0\}, \quad \mathcal{F}_{-1}$	$\beta = \alpha^2$	?	0	$\mathcal{W}^2 = \mathcal{A} = 0$
BVII <sub>h</sub>	$a_1 = a_2 = a_3 = 1,$ $h = 0 \quad \mathcal{F}_0$	$\alpha = 1 = \beta$	$\nearrow$	0	$\mathcal{W}^2 = \mathcal{A} = 0$
BIX	$a_1 = a_2 = a_3 = 1, \quad \mathcal{F}_1$	$\alpha = 1 = \beta$	$\nearrow$	0	$\mathcal{W}^2 = \mathcal{A} = 0$
KS	$a_1 = \sqrt{2}, \quad a_2 = 1$	$\beta = \frac{1}{2} \alpha^2 \left(1 + \sqrt{2}\right)$	?	$< 0$	$\mathcal{W}^2 \ll \mathcal{A} \rightarrow 0$

Las conclusiones a las que podemos llegar son las siguientes:

- En primer lugar resaltar que, con respecto a los factores de escala, las soluciones obtenidas coinciden con las halladas en el caso del modelo escalar y, por lo tanto, llegamos a las mismas conclusiones que allí expusimos con respecto a los parámetros de anisotropía y aceleración, es decir, ninguna solución es inflacionaria, excepto el modelo KS y todas las soluciones isotropizan o son isótropas, encontrando únicamente una solución para el caso BVI<sub>0</sub>, i.e.,  $h = 0$
- Respecto al comportamiento de la constante cosmológica, podemos afirmar que todos los modelos predicen una  $\Lambda$  positiva y decreciente, a excepción del modelo BI, en el que a pesar de haber obtenido dos soluciones, en ambas encontramos que  $\beta = 0$  y, por tanto, no describen el comportamiento de  $\Lambda$
- Solo en tres de los casos estudiados podemos afirmar que la función  $G(t)$  es creciente, BVI<sub>0</sub>, BVII<sub>0</sub> y BIX (i.e., el mismo comportamiento que en el caso de la RG con CVT); en el resto de soluciones, no podemos determinar su comportamiento, ya que las soluciones encontradas dependen del parámetro libre  $\alpha$ . En el mejor de los casos hemos podido encontrar ciertas acotaciones de  $\alpha$ , pero éstas no nos han ayudado a determinar el comportamiento de  $G$

### 10.5.2. Campo escalar sin interacción con un campo de materia

Las ecuaciones de conservación modificadas para este modelo son

$$\rho'_m + (\rho_m + p_m)H + \frac{G'}{G}\rho_m = 0, \quad \phi'' + \phi'H + \frac{dV}{d\phi} + \frac{G'}{G}\frac{\rho_\phi}{\phi'} = 0,$$

y donde las principales magnitudes deben comportarse de la siguiente manera

$$\phi = \phi_0 t^{-\alpha}, \quad V(t) = \beta t^{-2(\alpha+1)}, \quad G = G_0 t^{2\alpha}, \quad \rho = \rho_0 t^{-2},$$

donde,  $H = ht^{-1}$ ,  $p = \gamma\rho$ , y  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$   $h \in \mathbb{R}^+$ .

Las soluciones halladas para el modelo son las siguientes:

Mod.	Factores de escala	$\alpha, \beta, \rho_0$	$\gamma$	$q$	Isotropía	$G$
BI	$a_1 + a_2 + a_3 = 1$	$\beta = 0, \rho_0 > 0$	1	$> 0$	$\mathcal{W}^2 \ll \mathcal{A} \rightarrow 0$	?
BII	$a_1 = \frac{(1 \pm \sqrt{1-4K^2})}{2},$ $a_2 = a_3 = \frac{(3 \pm \sqrt{1-4K^2})}{4}$	$\beta = \frac{\alpha^2(1 \pm \sqrt{1-4K^2})}{2}$ $\rho_0 > 0$	$(-\frac{1}{3}, 1)$	$> 0$	$\mathcal{W}^2 \ll \mathcal{A} \rightarrow 0$	?
BIII	$a_2 = a_3 = 1, a_1 = -\frac{2\gamma}{\gamma+1}$ $n = \frac{\sqrt{-(3\gamma+1)(\gamma-1)}}{\gamma+1}$	$\beta = \frac{\alpha^2(1-\gamma)}{2(\gamma+1)},$ $\rho_0 > 0$	$(-\frac{1}{3}, 0)$	$> 0$	$\mathcal{W}^2 \ll \mathcal{A} \rightarrow 0$	?
BVI <sub>0</sub>	$a_3 = 1, a_1 = a_2 = \frac{1-\gamma}{2(\gamma+1)}$ $n = \frac{\sqrt{-(3\gamma+1)(\gamma-1)}}{2(\gamma+1)}$	$\beta = \alpha^2 \frac{1-\gamma}{2(\gamma+1)}$ $\rho_0 > 0$	$(-\frac{1}{3}, 1)$	$> 0$	$\mathcal{W}^2 \rightarrow 0$ $\mathcal{A} \in (0, 1)$	?
BVI <sub>h</sub>	$a_1 = 1 - \frac{n(3\gamma+1)}{\sqrt{-(3\gamma+1)(\gamma-1)}}, a_3 = 1$ $a_2 = \frac{\gamma(n(3\gamma+4)-2\sqrt{-(3\gamma+1)(\gamma-1)})}{(\gamma+1)\sqrt{-(3\gamma+1)(\gamma-1)}}$ $m = -n + \frac{\sqrt{-(3\gamma+1)(\gamma-1)}}{(\gamma+1)}$	$\beta = \frac{\alpha^2(1-\gamma)}{2(\gamma+1)}$ $\rho_0 > 0$	$\sim (-\frac{1}{3}, 1)$	$> 0$	$\mathcal{W}^2 \ll \mathcal{A} \rightarrow 0$	?
BV	$a_1 = a_2 = a_3 = 1,$ $m \in (-1, 1) \setminus \{0\}$	$\beta = \alpha^2,$ $\rho_0 > 0$	$-\frac{1}{3}$	0	$\mathcal{W}^2 = \mathcal{A} = 0$	?
BVII <sub>h</sub>	$a_1 = a_2 = a_3 = 1, h = 0$	$\alpha = 1 = \beta$ $\rho_0 > 0$	$-\frac{1}{3}$	0	$\mathcal{W}^2 = \mathcal{A} = 0$	$\nearrow$
BIX	$a_1 = a_2 = a_3 = 1$	$\alpha = 1 = \beta$ $\rho_0 > 0$	$-\frac{1}{3}$	0	$\mathcal{W}^2 = \mathcal{A} = 0$	$\nearrow$
KS	$a_1 = \sqrt{2}, a_2 = 1$	$\beta = \frac{\alpha^2}{2}(1 + \sqrt{2}),$ $\rho_0 > 0$	$1 - \sqrt{2}$	$< 0$	$\mathcal{W}^2 \ll \mathcal{A} \rightarrow 0$	?

De esta manera llegamos a las siguientes conclusiones:

- Los factores de escala de la mayoría de las soluciones coinciden con las obtenidas para un fluido perfecto en el marco de la RG; sin embargo, los modelos BII y BVI<sub>h</sub> presentan otras soluciones. La solución del modelo BII coincide con la obtenida en el modelo GR con CVT, mientras que la del BVI<sub>h</sub> es nueva
- En todos los casos  $\beta > 0$ , lo que implica que  $\Lambda$  es una función decreciente y positiva. No obstante, en el modelo BI  $\beta = 0$  (como en todos los casos estudiados), de esta manera, las soluciones autosimilares obtenidas para esta geometría no explican la variación de la constante cosmológica al considerarla nula
- Con respecto al rango de validez del parámetro  $\gamma$ , vemos que estos coinciden con los hallados para el caso de un fluido perfecto. En el caso particular del modelo BVI<sub>h</sub> el análisis numérico llevado a cabo nos permite estimar que  $\sim (-\frac{1}{3}, 1)$  ya que la solución depende de  $m$  y  $n$
- Excepto en el caso del modelo KS, el resto de soluciones son no inflacionarias
- Podemos considerar que todas las soluciones isotropizan o son isótropas a excepción del caso BIII, en el que para determinados valores de  $n$ , el primer parámetro de anisotropía  $\mathcal{A}$  tiende a 1 y, por tanto, la solución no puede considerarse como isótropa
- Por último y respecto al comportamiento de la función  $G(t)$ , las soluciones obtenidas no nos permiten determinar su comportamiento, ya que éstas dependen del parámetro libre  $\alpha$ . Únicamente en los casos BVII<sub>0</sub> y BIX las soluciones predicen que será creciente

### 10.5.3. Campo escalar interactuando con un campo de materia

Solo hemos estudiado un posible caso de interacción entre un campo escalar y uno de materia, siendo las ecuaciones de conservación modificadas

$$\rho'_m + (\rho_m + p_m)H + \frac{G'}{G}\rho_m = Q, \quad \phi'' + \phi'H + \frac{dV}{d\phi} + \frac{G'}{G}\frac{\rho_\phi}{\phi} = -Q, \quad Q = \delta H\rho,$$

y, donde hemos demostrado, que las magnitudes deben comportarse de la siguiente manera

$$\phi = \phi_0 t^{-\alpha}, \quad V(t) = \beta t^{-2(\alpha+1)}, \quad G = G_0 t^{2\alpha}, \quad \rho = \rho_0 t^{-2},$$

siendo  $H = ht^{-1}$ ,  $h \in \mathbb{R}^+$ ,  $p = \gamma\rho$ , y  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

Las soluciones obtenidas son las siguientes:

Mod.	Factores de escala	$\alpha, \beta, \rho_0$	$\gamma$	$q$	Isotropía	$G$
BI	$\#$					
BII	$a_1 = \frac{(1 \pm \sqrt{1-4K^2})}{2}, K \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \setminus \{0\}$ $a_2 = a_3 = \frac{(3 \pm \sqrt{1-4K^2})}{4}$	$\beta = \beta(\gamma, K, G_0, \alpha) > 0$ $\rho_0 = \rho_0(\gamma, K, G_0) > 0$ $\delta = \frac{(\gamma+1)\sqrt{1-4K^2} \pm 2\gamma}{\pm 2 + \sqrt{1-4K^2}}$	$\left(-\frac{1}{3}, 1\right)$	$> 0$	$\mathcal{W}^2 \ll \mathcal{A} \rightarrow 0$	?
BIII	$\#$					
BVI <sub>0</sub>	$a_1 = a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_3 = 1,$ $m = n = \pm \frac{1}{2}$	$\beta = \frac{2\gamma + (1-\gamma)\alpha^2 G_0}{(\gamma+1)G_0}$ $\rho_0 = \frac{1-\alpha^2 G_0}{(\gamma+1)G_0}, \quad \delta = \gamma$	$(0, 1]$	$> 0$	$\mathcal{W}^2 \ll \mathcal{A} \rightarrow 0$	?
BVI <sub>h</sub>	$a_1 = 1 + n, \quad a_2 = -n,$ $m = -1 - n, \quad n \in (-1, 0)$	$\beta = \frac{-G_0(\alpha^2 + 2\rho_0) - 8n(n+1)}{G_0\rho_0}$ $\rho_0 > 0, \quad \delta = \gamma$	$(0, 1]$	$> 0$	$\mathcal{W}^2 \ll \mathcal{A} \rightarrow 0$	?
BV	$a_1 = a_2 = a_3 = 1,$ $m \in (-1, 1) \setminus \{0\}$	$\beta = \beta(\gamma, m, G_0, \alpha) > 0$ $\rho_0 = \rho_0(\gamma, m, G_0) > 0$ $\delta = \gamma + \frac{1}{3}$	$(-1/3, 1]$	0	$\mathcal{W}^2 = \mathcal{A} = 0$	?
BVII <sub>h</sub>	$a_1 = a_2 = a_3 = 1, \quad h = 0$	$\beta = \frac{6\gamma + (1-\gamma)G_0 + 2}{2G_0(1+\gamma)}, \alpha = 1,$ $\rho_0 = \frac{2-G_0}{G_0(1+\gamma)}, \delta = \gamma + \frac{1}{3}$	$(-1/3, 1]$	0	$\mathcal{W}^2 = \mathcal{A} = 0$	$\nearrow$
BIX	$a_1 = a_2 = a_3 = 1$	$\beta = \frac{15\gamma + 2(1-\gamma)G_0 + 5}{4G_0(1+\gamma)}, \alpha = 1,$ $\rho_0 = \frac{5-2G_0}{2G_0(1+\gamma)}, \delta = \gamma + \frac{1}{3}$	$(-1/3, 1]$	0	$\mathcal{W}^2 = \mathcal{A} = 0$	$\nearrow$
KS	$a_1 = \sqrt{2}, \quad a_2 = 1$	$\beta = \frac{\alpha^2 G_0(1-\gamma) + 4\gamma(\sqrt{2}+1) + 4}{G_0(\gamma+1)}$ $\rho_0 = \frac{2\sqrt{2} - \alpha^2 G_0}{G_0(\gamma+1)}$ $\delta = \gamma - 1 + \sqrt{2}$	$(1 - \sqrt{2}, 1]$	$< 0$	$\mathcal{W}^2 \ll \mathcal{A} \rightarrow 0$	?

Las conclusiones a las que hemos llegado son las siguientes:

- No existe solución física para el modelo BI, que sea termodinámicamente consistente, aunque sí existe solución matemática. Hemos visto, por tanto, que no es posible considerar, en ninguno de los modelos estudiados, interacción alguna entre el campo escalar y el de materia, en el contexto de soluciones autosimilares, para este tipo de geometría
- Sin embargo, no existe solución (matemática) para el modelo BIII
- Encontramos en todas las soluciones que  $\beta > 0$ ; de esta forma, las soluciones halladas predicen una constante cosmológica positiva y decreciente en el tiempo
  - Los rangos de validez del parámetro de la EdE  $\gamma$ , en las soluciones BVI<sub>0</sub> y BVI<sub>h</sub> son menores que en los otros casos donde hay interacción, siendo  $\gamma \in (0, 1]$  en vez de  $\gamma \in (-\frac{1}{3}, 1]$ . En el resto de soluciones se obtiene el mismo rango
  - Las soluciones halladas no son inflacionarias, a excepción de la obtenida en el modelo KS
  - Con respecto a la isotropía de las soluciones encontradas vemos que todas ellas isotropizan en todos los casos o son isótropas, como en los modelos BV, BVII<sub>h</sub> ( $h = 0$ ) y BIX
  - En este modelo tampoco somos capaces de determinar el comportamiento de la constante de gravitación  $G(t)$ . La estructura de las ecuaciones de campo, en las que hay más incógnitas que ecuaciones, imposibilita obtener resultados concluyentes. Solo en los modelos BVII<sub>h</sub> ( $h = 0$ ) y BIX podemos concluir que  $G$  es una función creciente

## 10.6. Modelos tenso-escalares

Hemos estudiado diversos modelos tenso-escalares. En el denominado caso general, la acción está descrita por

$$S = \frac{1}{8\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{2} \left[ F(\phi) R - Z(\phi) \phi_{,\alpha} \phi^{,\alpha} - 2U(\phi) \right] + \mathcal{L}_M \right\}.$$

Hemos calculado la forma admisible de las funciones  $F(\phi)$  y  $Z(\phi)$  para que las ecuaciones de campo asociadas admitan soluciones autosimilares. La acción resultante se transforma en

$$S = \frac{1}{8\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{2} \left[ \phi^{2-m} R - \phi^{-m} \phi_{,\alpha} \phi^{,\alpha} - 2U(\phi) \right] + \mathcal{L}_M \right\}.$$

por tanto, para diferentes valores de la constante  $m$  obtenemos diferentes teorías. Los casos expuestos son:

- $m = 0$ , modelo de gravedad inducida
- $m = 1$ , modelo con potencial  $U$
- $m = 2$ , modelo escalar con  $G_{eff} = const.$ . Describe modelos fantasma (phantom models) sin necesidad de imponer una energía cinética negativa

De igual forma hemos estudiado los modelos tenso-escalares tipo camaleón, demostrando la dependencia funcional que debe tener cada magnitud para que las ecuaciones de campo admitan soluciones autosimilares

Por último, hemos demostrado que existen soluciones tipo power-law para las denominadas teorías  $f(R, \phi)$  (generalización de los modelos  $F(\phi) R$ ) bajo la hipótesis de que podemos descomponer en variables separadas la función  $f$ ,  $f = K(R)g(\phi)$ , y donde además, la función  $K$ , adquiere la siguiente forma,  $K = R^r$ ,  $r \in \mathbb{R}$ , lo cual resulta apropiado al trabajar bajo la hipótesis de autosimilaridad. Sin embargo, para el caso particular de estas teorías, las denominadas  $f(R)$ , hemos probado que no existen ni soluciones autosimilares ni tipo power-law.

A continuación resumimos los principales resultados sobre el comportamiento de  $G$  y  $\Lambda$  en los dos modelos tenso-escalares, sistemáticamente estudiados, denominados, modelos con  $\Lambda$  y potencial  $U$  respectivamente.

### 10.6.1. Modelo con $\Lambda$

La acción está descrita por

$$S = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \phi R - \frac{\omega}{\phi} \phi_{,\alpha} \phi^{,\alpha} + 2\phi \Lambda(\phi) + 2\mathcal{L}_M \right],$$

demostrando que las magnitudes deben comportarse de la siguiente manera

$$\phi = \phi_0 t^{\tilde{n}}, \quad G_{eff} \sim t^{\alpha-2}, \quad \Lambda = \Lambda_0 t^{-2}, \quad \omega_{BD} = const., \quad \rho = \rho_0 t^{-\alpha}, \quad \alpha = (1 + \gamma) h,$$

donde  $h = a_1 + a_2 + a_3$ , y  $p = \gamma\rho$ , con  $\gamma \in (-1, 1]$  siendo  $\tilde{n} = 2 - \alpha$ ,  $\alpha = h(\gamma + 1)$ .

Resaltamos que, el comportamiento funcional de las magnitudes es el mismo que el obtenido en el modelo con constantes variables en el marco de la Relatividad General. Sin embargo, hemos mostrado que las soluciones no son iguales y, por tanto, este modelo no predice el mismo comportamiento para  $G$  y  $\Lambda$ .

Las soluciones que hemos obtenido son las siguientes:

Modelo	Factores de escala	$\gamma$	$q$	Isotropía	$\Lambda$	$G$
BI	$a_1 + a_2 + a_3 = 1$	1	$> 0$	$\mathcal{W}^2 \ll \mathcal{A} \rightarrow 0$	0	const
BII	$a_1 = \frac{-4\omega(\gamma-1)^2-3+\gamma}{8\omega(\gamma^2-1)-11+\gamma},$ $a_2 = a_3 = \frac{2\omega(\gamma+3)(\gamma-1)-7+\gamma}{8\omega(\gamma^2-1)-11+\gamma}$	$\left(-\frac{1}{3}, 1\right)$	$> 0$	$\mathcal{W}^2 \ll \mathcal{A} \rightarrow 0$	0	$G \sim G(\gamma)$
	$a_1 = \frac{\gamma+1-\sqrt{9\gamma^2-6\gamma+1+16\gamma K^2}}{4\gamma}$ $a_2 = a_3 = \frac{5\gamma+1-\sqrt{9\gamma^2-6\gamma+1+16\gamma K^2}}{8\gamma}$	$\sim (-1, 1)$	$> 0$	$\mathcal{W}^2 \ll \mathcal{A} \rightarrow 0$	$> 0$	$G(\gamma_c)$
BIII	$a_2 = -\frac{2\gamma(\omega(\gamma-1)-1)}{-\omega(1-\gamma^2)+2(\gamma-1)},$ $a_1 = a_3 = 1, \quad m = m(\gamma, \omega)$	$\left(-\frac{1}{3}, 0\right)$	$> 0$	$\mathcal{W}^2 \rightarrow 0$ $\mathcal{A} \in [0, \frac{5}{2}]?$	0	$\searrow$
BVI <sub>0</sub>	$a_1 = a_2 = -\frac{1-\gamma+\omega(\gamma+1)^2}{2(\gamma^2-1)\omega+\gamma-3}$ $m = n = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{A-(a_2-1)^2}{\omega}}$	$\left(-\frac{1}{3}, 1\right)$	$> 0$	$\mathcal{W}^2 \rightarrow 0$ $\mathcal{A} \in [0, 1]?$	0	$G \sim G(\gamma)$
BVI <sub>h</sub>	$m = \frac{\sqrt{3}}{3}(a_2 - 1),$ $n = \frac{\sqrt{3}}{3}(a_1 - 1)$	$\frac{1}{3}$	$> 0$	$\mathcal{W}^2 \ll \mathcal{A} \rightarrow 0$	$> 0$	$G(\frac{1}{3})$
BV	$a_1 = a_2 = a_3 = 1,$ $m \in (-1, 1) \setminus \{0\}$	$\mathcal{E}(\gamma_c = -\frac{1}{3})$	$> 0$	$\mathcal{W}^2 = \mathcal{A} = 0$	$> 0$	$G(\gamma_c)$
BVII <sub>h</sub>	$a_1 = a_2 = a_3 = 1, \quad h = 0$	$\mathcal{E}(\gamma_c = -\frac{1}{3})$	$> 0$	$\mathcal{W}^2 = \mathcal{A} = 0$	$> 0$	$G(\gamma_c)$
BIX	$a_1 = a_2 = a_3 = 1$	$\mathcal{E}(\gamma_c = -\frac{1}{3})$	$> 0$	$\mathcal{W}^2 = \mathcal{A} = 0$	$> 0$	$G(\gamma_c)$
KS	$\#$					

De esta forma podemos concluir:

- La solución hallada en el modelo BI sí coincide con la del caso GR con CVT, ya que  $\Lambda = 0$  y  $G = \text{const.}$  además la solución solo es válida para  $\gamma = 1$
- En el modelo BII hemos obtenido dos soluciones, ninguna de ellas es inflacionaria y ambas isotropizan
  - En la primera, encontramos que  $\Lambda = 0$ , por tanto, esta solución no describe su dinámica. La solución es válida  $\forall \gamma \in \left(-\frac{1}{3}, 1\right)$ , sin embargo,  $G_{\text{eff}}$  es creciente si  $\gamma \in \left(\frac{1}{3}, 1\right)$ , constante si  $\gamma = \frac{1}{3}$  y decreciente si  $\gamma \in \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$
  - La segunda solución predice, en general, que  $\Lambda > 0$  y, válida  $\forall \gamma \in (-1, 1)$  (numéricamente). Al depender las soluciones del parámetro geométrico entonces se hace necesario analizar la solución numéricamente. Encontramos que en los entornos  $\mathcal{E}(\gamma_c = \gamma_c(K))$  donde la densidad de energía es positiva,  $\Lambda$  lo es, excepto en un pequeño subintervalo,  $I_\Lambda \subset \mathcal{E}(\gamma_c = \gamma_c(K))$ , donde  $\Lambda \leq 0$ . En este intervalo  $G$  es creciente, constante en  $\gamma_c$  y decreciente. El diámetro del entorno  $\mathcal{E}(\gamma_c)$  depende del valor del parámetro de Brans-Dicke  $\omega_{BD}$  de forma que, cuanto mayor sea este parámetro, menor será el diámetro del entorno
- En la solución obtenida para el modelo BIII, encontramos que  $\Lambda = 0$ . El factor de escala  $a_2 \in (0, 1)$  siendo la solución solo válida si  $\gamma \in \left(-\frac{1}{3}, 0\right)$ . De esta forma, cuando  $\gamma \rightarrow -1/3$ , entonces  $a_2 \rightarrow 1$ , encontrando que la solución es isótropa ( $\mathcal{W}^2 \ll \mathcal{A} \rightarrow 0$ ); pero si  $\gamma \rightarrow 0$ , entonces  $a_2 \rightarrow 0$ , no podemos afirmar que es isótropa (con respecto al parámetro  $\mathcal{A}$ ), pero sí en función del parámetro de Weyl, ya que  $\mathcal{W}^2 \rightarrow 0$ . La solución no es inflacionaria. Por último, observamos que  $G_{\text{eff}}$  se comporta de forma decreciente en todo el intervalo de definición, i.e.,  $\forall \gamma \in \left(-\frac{1}{3}, 0\right)$
- En el modelo BVI<sub>0</sub>, la solución hallada indica que la constante cosmológica es nula, i.e.,  $\Lambda = 0$ , siendo ésta válida cuando el parámetro de la EdE  $\gamma$ , pertenece al intervalo  $\left(-\frac{1}{3}, 1\right)$ . No es inflacionaria, pero podemos decir que sí isotropiza, ya que solo cuando  $\gamma \rightarrow 1$ , entonces  $\mathcal{A} \rightarrow 1$ , mientras que si  $\gamma \rightarrow -1/3$ , entonces  $\mathcal{A} \rightarrow 0$ . La constante de gravitación efectiva se comporta de la siguiente manera:  $G_{\text{eff}}$  es creciente si  $\gamma \in \left(\frac{1}{3}, 1\right)$ , constante si  $\gamma = \frac{1}{3}$  y decreciente si  $\gamma \in \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

- Para el modelo  $BVI_h$  la solución obtenida solo es válida si  $\gamma = \frac{1}{3}$ , obteniendo además  $\Lambda \neq 0$ . Al depender la solución de varios parámetros, entonces su análisis se ha realizado numéricamente, llegando de esta forma a la conclusión de que no es inflacionaria y que isotropiza, ya que ambos parámetros tienden a cero. Con respecto al comportamiento de  $\Lambda$  y  $G_{\text{eff}}$  observamos que en el intervalo donde la densidad de energía es positiva  $\mathcal{I}$  (este intervalo depende de los valores de  $(a_1, a_2)$ )  $\Lambda$  es siempre positiva, excepto en un subintervalo  $I_\Lambda$  donde  $\Lambda \leq 0$ ,  $I_\Lambda \subset \mathcal{I}$ . En el intervalo  $\mathcal{I}$ ,  $G_{\text{eff}}$  es creciente y decreciente de tal forma que cuando  $\Lambda = 0$  entonces  $G_{\text{eff}} = \text{const}$ .
- Con respecto a los modelos BV,  $BVII_h$  y BIX, vemos que se comportan de forma similar. En primer lugar resaltar que la solución correspondiente al modelo  $BVII_h$  únicamente es válida cuando  $h = 0$ . Las soluciones son isotropas, ya que los tres factores de escala coinciden, y ninguna de las soluciones es inflacionaria. De igual forma, observamos que dichas soluciones son solo válidas en un pequeño entorno de  $\gamma_c = -1/3$ , i.e.,  $\mathcal{E}(\gamma_c)$ . De esta forma, encontramos que  $\Lambda > 0 \forall \gamma \in \mathcal{E}(\gamma_c)$  excepto en un pequeño subintervalo  $I_\Lambda$  donde  $\Lambda \leq 0$ ,  $I_\Lambda \subset \mathcal{E}(\gamma_c)$ . Precisamente en  $\gamma_c$ ,  $\Lambda = 0$  y  $G_{\text{eff}} = \text{const}$ . Así,  $G_{\text{eff}}$  es creciente si  $\gamma > \gamma_c$  y se comporta de forma decreciente si  $\gamma < \gamma_c, \forall \gamma \in \mathcal{E}(\gamma_c)$ .
- No existe solución física al modelo KS, ya que, en el intervalo en el que  $\rho_0 > 0$ , encontramos que  $\phi_0 < 0$ , descartando así la solución matemática hallada

### 10.6.2. Modelo con $U$

El modelo está descrito por la siguiente acción

$$S = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \phi R - \frac{\omega}{\phi} \phi_{,\alpha} \phi^{,\alpha} - 2U(\phi) + 2\mathcal{L}_M \right],$$

demostrando que las magnitudes, dentro del contexto de autosimilaridad, deben comportarse de la siguiente manera

$$\phi = \phi_0 t^{\tilde{n}}, \quad U = U_0 t^{\tilde{n}-2}, \quad \omega_{BD} = \text{const.}, \quad \rho = \rho_0 t^{-\alpha}, \quad \alpha = (1 + \gamma)h.$$

Las soluciones obtenidas para cada una de las geometrías están resumidas en la siguiente tabla:

Modelo	Factores de escala	$\gamma$	$q$	Isotropía	$U$	$G$
BI	$a_1 + a_2 + a_3 = 1$	1	$> 0$	$\mathcal{W}^2 \ll \mathcal{A} \rightarrow 0$	0	const
BII	$a_2 = a_3 = \frac{1}{2}(a_1 + 1),$ $K^2 = \frac{1}{3}(a_1 + 1)(3a_1 - 1)$	$\mathcal{E}(\gamma_c = 0)$	$> 0$	$\mathcal{W}^2 \ll \mathcal{A} \rightarrow 0$	$> 0$	$G(\gamma_c)$
*BIII	$a_2 = \frac{(1 - \gamma \pm \sqrt{\gamma(9\gamma + 4m^2 - 6) + 1})}{2\gamma}$ $a_1 = a_3 = 1, \quad m = m(\gamma, \omega)$	$\mathcal{E}(\gamma_c)$ $\gamma_c = \gamma_c(m)$	$> 0$	$\mathcal{W}^2 \ll \mathcal{A} \rightarrow 0$	$> 0$	$G(\gamma_c)$
* $BVI_0$	$a_1 = a_2 = \frac{\gamma + 1 \pm \sqrt{\gamma(9\gamma + 16m^2 - 6) + 1}}{4\gamma}$ $a_3 = 1, m = n$	$\mathcal{E}(\gamma_c)$ $\gamma_c = \gamma_c(n)$	$> 0$	$\mathcal{W}^2 \ll \mathcal{A} \rightarrow 0$	$> 0$	$G(\gamma_c)$
$BVI_h$	$m = \frac{\sqrt{3}}{3}(a_2 - 1),$ $n = \frac{\sqrt{3}}{3}(a_1 - 1)$	$\frac{1}{3}$	$> 0$	$\mathcal{W}^2 \ll \mathcal{A} \rightarrow 0$	$> 0$	$G(\frac{1}{3})$
BV	$a_1 = a_2 = a_3 = 1,$ $m \in (-1, 1) \setminus \{0\}$	$\mathcal{E}(\gamma_c = -\frac{1}{3})$	$> 0$	$\mathcal{W}^2 = \mathcal{A} = 0$	$> 0$	$G(\gamma_c)$
$BVII_h$	$a_1 = a_2 = a_3 = 1, \quad h = 0$	$\mathcal{E}(\gamma_c = -\frac{1}{3})$	$> 0$	$\mathcal{W}^2 = \mathcal{A} = 0$	$> 0$	$G(\gamma_c)$
BIX	$a_1 = a_2 = a_3 = 1$	$\mathcal{E}(\gamma_c = -\frac{1}{3})$	$> 0$	$\mathcal{W}^2 = \mathcal{A} = 0$	$> 0$	$G(\gamma_c)$
KS	$a_1 = \sqrt{2}, \quad a_2 = 1$	$\mathcal{E}(\gamma_c = 1 - \sqrt{2})$	$< 0$	$\mathcal{W}^2 \ll \mathcal{A} \rightarrow 0$	$> 0$	$G(\gamma_c)$

En los casos BIII y  $BVI_0$  existen soluciones que coinciden con las del modelo tenso-escalar con  $\Lambda$ .

Las conclusiones a las que podemos llegar son las siguientes:

- El modelo BI no predice variación alguna de  $G$  ni de  $\Lambda$ , ya que la solución obtenida es coincidente con la del modelo tenso-escalar con  $\Lambda$ , y por tanto,  $G_{\text{eff}} = \text{const}$  y  $U = 0$

Para esta geometría, también hemos analizado el modelo tenso-escalar denominado gravedad inducida. La solución hallada es idéntica a la de los otros dos modelos tenso-escalares, obteniendo iguales factores de escala, mismo comportamiento dinámico y siendo  $G = \text{const}$  y  $U = 0$

- La solución que hemos hallado para el modelo BII solo es válida para un pequeño entorno  $\mathcal{E}(\gamma_c)$ , del valor crítico del parámetro de la EdE  $\gamma_c = 0$ . En este entorno, la solución es isótropa y no inflacionaria. La función potencial es positiva, excepto en un subintervalo,  $I_\Lambda$  donde  $U \leq 0$ ,  $I_\Lambda \subset \mathcal{E}$ .  $G$  es creciente si  $\gamma > \gamma_c$ , constante en  $\gamma_c$  ( $\Lambda = 0$ ) y decreciente si  $\gamma < \gamma_c$ . No existe analogía alguna entre esta solución y la del caso con  $\Lambda$
- En el caso BIII, vemos que la solución depende de varios parámetros y, por lo tanto, su interpretación debe realizarse mediante análisis numérico. Fijando un valor de  $m$ , entonces la solución hallada solo es válida para un pequeño entorno de  $\gamma$ , denotado por  $\mathcal{E}(\gamma_c)$ . En dicho entorno tanto la densidad de energía como la función escalar son positivas. La solución es isótropa, ambos parámetros tienden a cero y no es inflacionaria,  $q > 0$ . La función potencial  $U$  es positiva menos en un subintervalo  $I_\Lambda \subset \mathcal{E}$ , donde  $U$  es nula (en los extremos de  $I_\Lambda$ ) o es negativa. Con respecto a la constante de gravitación efectiva, observamos que:  $G$  es creciente si  $\gamma > \gamma_c$ , constante en  $\gamma_c$  ( $U = 0$ ) y decreciente si  $\gamma < \gamma_c$ , para todo posible valor de  $\gamma \in \mathcal{E}$
- Observamos en el modelo BVI<sub>0</sub>, que la solución hallada depende de los parámetros  $(\gamma, n)$  de tal forma que el análisis debe realizarse numéricamente, de forma análoga a la llevada a cabo en el modelo BIII. De esta manera, si fijamos el valor de  $n$ , entonces encontramos que  $\rho_0$  y  $\phi_0$  son positivas solo en un pequeño entorno de  $\gamma_c$ , donde la solución puede considerarse como isótropa pero no es inflacionaria.  $U > 0, \forall \gamma \in \mathcal{E} \setminus I_\Lambda$ , donde  $U \leq 0$  en  $I_\Lambda$ . Por último,  $G_{\text{eff}}$  es creciente si  $\gamma > \gamma_c$ , constante en  $\gamma_c$  ( $U = 0$ ) y decreciente si  $\gamma < \gamma_c$
- La solución obtenida para el modelo geométrico BVI<sub>h</sub> es la misma que la obtenida para el caso con  $\Lambda$ , por tanto, las conclusiones son idénticas
- Los modelos BV, BVII<sub>h</sub> y BIX, se comportan de forma análoga y su solución coincide con la obtenida para el modelo tenso-escalar con  $\Lambda$ , por lo que llegamos aquí a las mismas conclusiones
- En este caso sí encontramos solución física para el modelo KS, siendo ésta únicamente válida en un entorno de  $\mathcal{E}(\gamma_c)$ , donde  $\gamma_c = 1 - \sqrt{2}$ . La situación es análoga a la descrita para los otros modelos.  $U > 0, \forall \gamma \in \mathcal{E} \setminus I_\Lambda$ , donde  $U \leq 0$  en  $I_\Lambda$  y donde  $G_{\text{eff}}$  es creciente si  $\gamma > \gamma_c$ , constante en  $\gamma_c$  (en dicho punto  $U = 0$ ) y decreciente si  $\gamma < \gamma_c$ . Con los valores de los factores de escala obtenidos, podemos afirmar que la solución es isótropa e inflacionaria, ya que  $q < 0$

La solución al modelo camaleón para esta geometría, nos muestra que ésta es válida  $\forall \gamma \in (\gamma_c, 1]$  en vez de un pequeño intervalo en torno al valor crítico  $\gamma_c$ . El análisis numérico realizado, nos indica que, restringiéndonos exclusivamente a los intervalos en los que  $U > 0$ , la constante de gravitación efectiva  $G_{\text{eff}}$  puede ser tanto creciente como decreciente

En el caso de la gravedad inducida, hemos descartado la solución obtenida al considerarla como no física, ya que en los intervalos en los que tanto la densidad de energía como el campo escalar son positivos, la función potencial es negativa (en contradicción con las observaciones)

## 10.7. Otras teorías

### 10.7.1. Gravedad conforme

En el tercer capítulo de la esta Tesis, estudiábamos la teoría de gravitación conforme bajo la hipótesis de autosimilaridad. Recordamos que las ecuaciones de campo que describen el modelo son

$$R_{ij} - \frac{1}{2}Rg_{ij} = 8\pi G(\phi) T_{ij}^m - \Lambda(\phi) g_{ij} - T_{ij}^{(\phi)},$$

donde

$$T_{ij}^m = (\rho + p) u_i u_j + p g_{ij}, \quad T_{ij}^{(\phi)} = \frac{1}{\phi^2} (g_{ij} \phi^{,k} \phi_{,k} - 4\phi_{,i} \phi_{,j}) + \frac{2}{\phi} (\phi_{,ij} - g_{ij} \square \phi).$$

Mediante el método de las colineaciones de materia, deducíamos la forma de cada una de las magnitudes para que las ecuaciones de campo admitieran soluciones autosimilares. En particular deducíamos la forma de la función gauge  $\phi(t)$ ,  $\phi(t) = \phi_0 t^\varepsilon$ , sin invocar condiciones externas basadas en consideraciones físicas. El resultado teórico al que llegábamos es válido para cualquier geometría tipo Bianchi y establece que las magnitudes deben comportarse de la siguiente manera

$$\phi(t) = \phi_0 t^\varepsilon, \quad \phi_0 \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon = \frac{2-h(1+\gamma)}{3\gamma+1}, \quad \Lambda(\phi) = \Lambda_0 t^{-2}, \quad G\rho = t^{-2}.$$

Hemos estudiado la forma en la que pueden variar  $G$  y  $\Lambda$  en los siguiente modelos: Bianchi I, VII<sub>0</sub>, IX y KS, ya que sus métricas no dependen de parámetros geométricos, facilitando así los cálculos.

1. Para el modelo Bianchi I el resultado obtenido es el siguiente:  $h = 1$ , i.e.,  $a_1 + a_2 + a_3 = 1$ , siendo la solución únicamente válida para  $\gamma = 1$ , y donde  $G_0 = \frac{a_2 + a_3 - a_2^2 - a_3^2 - a_2 a_3}{8\pi\rho_0}$ ; esto implica que,  $\varepsilon = \frac{1-\gamma}{3\gamma+1} = 0$ , y por lo tanto, la función gauge  $\phi$  se comporta como una constante,  $\phi = const$ . La constante cosmológica es nula, ya que  $\Lambda_0 = 0$ , y por último  $\rho_0 = \rho_0 > 0$ . Si tenemos en cuenta la condición externa  $G\phi^2 = const.$ , entonces concluimos, de la relación,  $G\rho = t^{-2}$ , que la densidad de energía se comporta como:  $\rho = \rho_0 t^{-2}$ . Es decir, bajo las hipótesis consideradas, la solución hallada colapsa a la de tipo Jacobs, obtenida dentro del marco de la Relatividad General
2. Las soluciones para los modelos Bianchi VII<sub>0</sub> y IX son coincidentes. En ambos casos se obtiene:  $h = 3$ , i.e.,  $a_1 = a_2 = a_3 = 1$ , siendo la solución únicamente válida para el parámetro de la EdE  $\gamma$ ,  $\gamma = -1/3$ , y donde  $\Lambda_0 = 0$ . Por tanto,  $\varepsilon = 0$ , siendo la función gauge constante:  $\phi = const$ . Bajo la hipótesis,  $G\phi^2 = const.$ , llegamos a la conclusión de que la densidad de energía sigue la ley:  $\rho = \rho_0 t^{-2}$ . Como podemos observar, las soluciones obtenidas coinciden con las de un fluido perfecto en el marco de la RG
3. Por último, consideramos el modelo KS. La solución obtenida en este caso es la siguiente:  $h = (2 + \sqrt{2})$ , i.e.,  $a_1 = \sqrt{2}$ , y  $a_2 = 1$ , donde,  $\gamma = 1 - \sqrt{2}$ , y por tanto,  $\varepsilon(\gamma) = \frac{-\sqrt{2} - (2 + \sqrt{2})\gamma}{3\gamma + 1} = 0$ . La solución para el resto de parámetros es:  $G_0 = \frac{\sqrt{2}+1}{4\pi\rho_0}$ , y  $\Lambda_0 = 0$ , donde  $\rho_0 = \rho_0 > 0$ . De nuevo, la solución obtenida coincide con la de un fluido perfecto en el marco de RG

En todos los modelos estudiados hemos obtenido que la función gauge es constante y que la constante cosmológica es nula, siendo la solución solo válida para un determinado valor del parámetro de la ecuación de estado,  $\gamma$ . Sin embargo, al no disponer de una ecuación que describa la variación de  $G$ , únicamente podemos determinar su comportamiento considerando hipótesis externas a la teoría, como  $G\phi^2 = const$ . De esta manera y, bajo esta hipótesis, llegamos a la conclusión de que  $G$  es constante,  $G = G_0$  y, por tanto,  $\rho = \rho_0 t^{-2}$ . Por consiguiente, hemos visto que las soluciones son, en realidad, las obtenidas en el caso de un fluido perfecto en el marco de la RG. Si consideramos otra hipótesis sobre  $G$ , por ejemplo, asumimos la hipótesis de Dirac y por lo tanto suponemos que  $G \approx t^{-1}$ , entonces las conclusiones cambian y la densidad de energía  $\rho$  debe comportarse ahora como  $\rho \approx t^{-1}$ , para que se verifique la relación  $G\rho = t^{-2}$ .

### 10.7.2. Modelo de Barber

Las ecuaciones de campo del modelo son

$$R_{ij} - \frac{1}{2}Rg_{ij} = \phi^{-1}T_{ij}^m, \quad \square\phi = \lambda T, \quad G = \phi^{-1}.$$

Hemos deducido la forma que puede tomar el campo escalar  $\phi$ , para que las ecuaciones de campo admitan soluciones autosimilares. El resultado principal al que hemos llegado es el siguiente

$$\phi(t) = C_1 t^{A_+} + C_2 t^{A_-}, \quad \rho = \rho_0 (C_1 t^{A_+ - 2} + C_2 t^{A_- - 2}), \quad G = G_0 (C_1 t^{A_+} + C_2 t^{A_-})^{-1},$$

con  $A_{\pm} = \frac{1}{2} (1 - h \pm \sqrt{h^2 - 2h + 1 + 4\lambda(1 - 3\gamma)})$ . De esta manera, vemos que hemos obtenido tres posibles formas para,  $\phi$ , ( $\phi, \phi_+, \phi_-$ )

$$\phi(t) = C_1 t^{A_+} + C_2 t^{A_-}, \quad \phi_{\pm}(t) = C_i t^{A_{\pm}},$$

aunque  $\phi$  y  $\phi_+$  presentan el mismo comportamiento cuando  $t$  es suficientemente grande.

Hemos estudiado cómo puede variar  $G$  en esta teoría considerando los siguientes modelos geométricos BI, BVII, BIX y KS. En la siguiente tabla resumimos los principales resultados de cada solución.

Modelo	Factor de escala	$\gamma$	$A_{\pm}$
BI	$a_1 + a_2 + a_3 = 1$	1	$\pm\sqrt{-2\lambda}$
BVII <sub>h</sub>	$a_1 = a_2 = a_3 = 1, h = 0$	$-\frac{1}{3}$	$-1 \pm \sqrt{2\lambda + 1}$
BIX	$a_1 = a_2 = a_3 = 1$	$-\frac{1}{3}$	$-1 \pm \sqrt{2\lambda + 1}$
KS	$a_1 = \sqrt{2}, a_2 = 1$	$1 - \sqrt{2}$	$\frac{1}{2} \left( -1 - \sqrt{2} \pm \sqrt{(12\sqrt{2} - 8)\lambda + 2\sqrt{2} + 3} \right)$

con  $\lambda < 0$ , donde se suele considerar  $\lambda = -0,1$ .

Con estos resultados podemos, ahora, calcular el ratio  $G'/G$ , considerando como edad media del universo  $t \sim 10^{17} \text{s} = 3,1536 \times 10^{10} \text{yr}$ . Los resultados obtenidos son los siguientes

$\frac{G'}{G}$	$A_+$	$A_-$
BI	$1,4181 \times 10^{-11} \text{yr}^{-1}$	$-1,4181 \times 10^{-11} \text{yr}^{-1}$
BVII <sub>h</sub> &BIX	$3,3476 \times 10^{-12} \text{yr}^{-1}$	$6,0071 \times 10^{-11} \text{yr}^{-1}$
KS	$3,0686 \times 10^{-12} \text{yr}^{-1}$	$7,3485 \times 10^{-11} \text{yr}^{-1}$

Para el modelo BI hemos obtenido una solución tipo Jacobs donde  $\gamma = 1$ . Sin embargo, la solución de este modelo nos dice que  $G$  puede ser tanto creciente ( $G_-$ ) como decreciente ( $G, G_+$ ). Recordamos que la solución de los modelos JBD para esta métrica predecían  $G_{\text{eff}} = \text{const}$ . Si comparamos la forma en la que varía  $G$  con las observaciones, vemos que las predicciones del modelo coinciden con algunas de las observaciones recientes. El resto de casos estudiados predice que  $G$  varía de forma creciente, siendo estas predicciones concordantes con las observaciones, excepto en el caso del modelo KS con  $A_-$ . Las soluciones para los modelos BVII<sub>h</sub> y BIX son solo válidas para  $\gamma = -1/3$ , mientras que la solución del KS lo es para  $\gamma = 1 - \sqrt{2}$ . Curiosamente para estos valores de la EdE, como en el caso BI, las soluciones de los modelos tipo JBD predicen  $G_{\text{eff}} = \text{const}$ .



# Apéndice A

## Bianchi I con $G$ y $\Lambda$ variables

En este apéndice mostramos cómo calcular la variación de  $G$  y  $\Lambda$  mediante grupos de Lie, en el caso específico del modelo clásico con constantes variables para el caso Bianchi I. Empezamos recordando que las ecuaciones de campo que definen el modelo son las siguientes

$$\frac{X' Y'}{X Y} + \frac{X' Z'}{X Z} + \frac{Z' Y'}{Z Y} = 8\pi G\rho + \Lambda c^2, \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} + \frac{Z' Y'}{Z Y} = -8\pi G\gamma\rho + \Lambda c^2, \quad (\text{A.2})$$

$$\frac{X''}{X} + \frac{Z''}{Z} + \frac{X' Z'}{X Z} = -8\pi G\gamma\rho + \Lambda c^2, \quad (\text{A.3})$$

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{X' Y'}{X Y} = -8\pi G\gamma\rho + \Lambda c^2, \quad (\text{A.4})$$

$$\rho' + \rho(1 + \gamma)H = 0, \quad (\text{A.5})$$

$$\Lambda' = -8\pi G'\rho, \quad (\text{A.6})$$

donde ( $' = \frac{d}{dt}$ ), y definimos

$$H = \left( \frac{X'}{X} + \frac{Y'}{Y} + \frac{Z'}{Z} \right). \quad (\text{A.7})$$

El propósito es construir una EDO a partir de las ecuaciones de campo del modelo. Para ello consideramos las Ecs. (A.2-A.4) y teniendo en cuenta la Ec. (A.1), entonces obtenemos

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} = -4\pi(1 + 3\gamma)G\rho + \Lambda c^2. \quad (\text{A.8})$$

Ahora, teniendo en cuenta la Ec. (A.5), y elevándola al cuadrado, se deduce

$$\left( \frac{\rho'}{\rho} \right)^2 = (1 + \gamma)^2 H^2, \quad (\text{A.9})$$

ya que

$$H^2 = \left( \left( \frac{X'}{X} \right)^2 + \left( \frac{Y'}{Y} \right)^2 + \left( \frac{Z'}{Z} \right)^2 + 2 \left( \frac{X' Y'}{X Y} + \frac{X' Z'}{X Z} + \frac{Z' Y'}{Z Y} \right) \right). \quad (\text{A.10})$$

Consideramos ahora la Ec. (A.1) obteniendo de esta forma

$$\left( \frac{\rho'}{\rho} \right)^2 = (1 + \gamma)^2 \left( \left( \frac{X'}{X} \right)^2 + \left( \frac{Y'}{Y} \right)^2 + \left( \frac{Z'}{Z} \right)^2 + 16\pi G\rho + 2\Lambda c^2 \right). \quad (\text{A.11})$$

La derivada de  $\rho$  de la Ec. (A.5) puede expresarse en términos de  $G$ ,  $\Lambda$  y  $\rho$  sólo considerando las Ecs. (A.8) y (A.11). De esta forma llegamos a la siguiente expresión

$$\left( \frac{\rho'}{\rho} \right)^2 \frac{2 + \gamma}{(1 + \gamma)^2} - \frac{\rho''}{\rho(1 + \gamma)} = 12\pi G\rho(1 - \gamma) + 3\Lambda c^2. \quad (\text{A.12})$$

Ordenando los términos de la anterior ecuación, vemos que hemos obtenido una ecuación de segundo orden con tres incógnitas.

$$\rho'' = K_1 \frac{(\rho')^2}{\rho} + K_2 G \rho^2 - K_3 \Lambda \rho, \quad (\text{A.13})$$

donde

$$K_1 = \frac{2 + \gamma}{(1 + \gamma)}, \quad K_2 = 12\pi (\gamma^2 - 1), \quad K_3 = 3(1 + \gamma) c^2. \quad (\text{A.14})$$

Observamos que en el caso particular  $\gamma = 1$ , entonces  $K_2 = 0$ , de tal forma que la Ec. (A.13) colapsa a una EDO con dos incógnitas. En este punto, podemos estudiar la ecuación (A.13) mediante GL y obtener la forma de las magnitudes involucradas, de forma que el modelo admita soluciones tipo potencias, o intentar reducir el número de incógnitas.

Si seguimos este último camino, entonces, diferenciando la Ec. (A.12) y teniendo en cuenta la Ec. (A.6) llegamos a la siguiente EDO de tercer orden, pero con solo dos incógnitas

$$\rho''' = K_1 \rho'' \frac{\rho'}{\rho} - K_2 \frac{(\rho')^3}{\rho^2} + K_3 G' \rho^2 - K_4 G \rho' \rho, \quad (\text{A.15})$$

donde

$$K_1 = \frac{5 + 3\gamma}{1 + \gamma}, \quad K_2 = \frac{4 + 2\gamma}{1 + \gamma}, \quad K_3 = 12\pi (1 + \gamma)^2, \quad K_4 = 12\pi (1 - \gamma^2), \quad (\text{A.16})$$

y donde asumimos que  $\gamma \neq -1$ . Como en el caso anterior, vemos que si  $\gamma = 1$ , entonces la Ec. (A.15) se reduce a

$$\rho''' = 4\rho'' \frac{\rho'}{\rho} - 3 \frac{(\rho')^3}{\rho^2} + 48\pi G' \rho^2. \quad (\text{A.17})$$

Por tanto, pasaremos a estudiar las ecuaciones (A.13) y (A.15) mediante GL mostrando que ambos enfoques son idénticos.

## A.1. Estudio de la Ec. (A.15)

Empezaremos estudiando la Ec. (A.15) i.e.

$$\rho''' = K_1 \rho'' \frac{\rho'}{\rho} - K_2 \frac{(\rho')^3}{\rho^2} + K_3 G' \rho^2 - K_4 G \rho' \rho, \quad (\text{A.18})$$

donde las constantes  $(K_i)_{i=1}^4$  están dadas por la Ec. (A.16). En particular, buscamos la forma de  $G(t)$  que haga que las ecuaciones de campo admitan soluciones de tipo potencias.

Siguiendo los pasos descritos en el segundo capítulo, comenzamos calculando el sistema de EDPs que nos permite obtener las simetrías de la ecuación bajo estudio, siendo

$$\rho^3 \xi_\rho = 0, \quad (\text{A.19})$$

$$\rho^3 \xi_{\rho\rho} = 0, \quad (\text{A.20})$$

$$K_1 \rho \eta - K_1 \rho^2 \eta_\rho - 9\rho^3 \xi_{t\rho} + 3\rho^3 \eta_{\rho\rho} = 0, \quad (\text{A.21})$$

$$-K_1 \rho^2 \eta_t + 3\rho^3 \eta_{t\rho} - 3\rho^3 \xi_{tt} = 0, \quad (\text{A.22})$$

$$K_1 \rho^2 \xi_{\rho\rho} + K_2 \rho \xi_\rho - \rho^3 \xi_{\rho\rho\rho} = 0, \quad (\text{A.23})$$

$$2K_2 \rho \eta_\rho - K_1 \rho^2 \eta_{\rho\rho} + 2K_1 \rho^2 \xi_{t\rho} - 2K_2 \eta - 3\rho^3 \xi_{t\rho\rho} + \rho^3 \eta_{\rho\rho\rho} = 0, \quad (\text{A.24})$$

$$3K_2 \rho \eta_t - 2K_1 \rho^2 \eta_{t\rho} + 3K_4 \rho^4 G \xi_\rho + K_1 \rho^2 \xi_{tt} - 3\rho^3 \xi_{tt\rho} + 3\rho^3 \eta_{t\rho\rho} = 0, \quad (\text{A.25})$$

$$K_4 \rho^4 G' \xi + K_4 \rho^3 G \eta + 2K_4 \rho^4 G \xi_t - K_1 \rho^2 \eta_{tt} + 3\rho^3 \eta_{tt\rho} - \rho^3 \xi_{ttt} - 4K_3 \rho^5 G' \xi_\rho = 0, \quad (\text{A.26})$$

$$K_4 \rho^4 G \eta_t + \rho^3 \eta_{ttt} + K_3 \rho^5 G' \eta_\rho - 3K_3 \rho^5 G' \xi_t - K_3 \rho^5 G'' \xi - 2K_3 \rho^4 G' \eta = 0. \quad (\text{A.27})$$

Al estar sólo interesados en las simetrías que nos llevan a obtener soluciones tipo potencias, entonces imponemos la simetría  $X = (at + e) \partial_t + b\rho \partial_\rho$ , i.e.,  $\xi = at + e$ ,  $\eta = b\rho$ , de forma que, al verificar el anterior sistema, podamos obtener restricciones sobre  $G(t)$ . De la Ec. (A.26), obtenemos una primera restricción

$$\frac{G'}{G} = -\frac{b+2a}{at+e}, \quad (\text{A.28})$$

mientras que de la Ec. (A.27) obtenemos la siguiente

$$\frac{G''}{G'} = -\frac{3a+b}{at+e}, \quad (\text{A.29})$$

siendo  $a, b, e \in \mathbb{R}$ . Observamos que  $[a] = [b] = 1$ , i.e. son constantes adimensionales, mientras que  $[e] = T$ , con respecto a una base dimensional  $B = \{L, M, T\}$ . Por lo tanto, pasaremos a estudiar las soluciones que obtenemos en función de las diferentes constantes  $a, b, e$ .

### A.1.1. Simetría de escala

Considerando  $e = 0$ , i.e.,  $(\xi = at, \eta = b\rho)$ , integramos las Ecs. (A.28 y A.29), donde

$$\frac{G'}{G} = -\frac{b+2a}{at}, \quad \implies \quad G = G_0 (t)^{-(2+\frac{b}{a})}, \quad (\text{A.30})$$

$$\frac{G''}{G'} = -\frac{3a+b}{at}, \quad \implies \quad G = C_2 + G_0 (t)^{-(2+\frac{b}{a})}, \quad (\text{A.31})$$

por lo tanto

$$G = G_0 (t)^{-(2+\frac{b}{a})}, \quad (\text{A.32})$$

donde asumimos que  $G_0 > 0$ . La solución invariante que induce la simetría para la densidad de energía es la siguiente

$$\frac{bdt}{at} = \frac{d\rho}{\rho} \quad \implies \quad \rho = \rho_0 t^{b/a}, \quad (\text{A.33})$$

y, por razones físicas, imponemos la condición,  $ab < 0$ , tomando por ejemplo  $b < 0$ . Si hacemos que esta solución verifique la Ec. (A.18) con  $G(t)$  dada por la Ec. (A.32), entonces podemos encontrar el valor de  $\rho_0$ , siendo

$$\rho_0 = -\frac{b}{G_0 12\pi a (1+\gamma)^2}, \quad (\text{A.34})$$

con la única restricción  $\gamma \neq -1$ . Recordamos que  $ab < 0$ , por lo tanto  $\rho_0 > 0$ .

Por último, calculamos  $\Lambda$ . Considerando la ecuación

$$\Lambda' = -8\pi G' \rho = 8\pi \left(2 + \frac{b}{a}\right) \rho_0 G_0 t^{-3}, \quad \implies \quad \Lambda = \Lambda_0 t^{-2}, \quad \Lambda_0 = \frac{1}{3(1+\gamma)^2} \frac{b}{a} \left(2 + \frac{b}{a}\right). \quad (\text{A.35})$$

Vemos que el comportamiento de  $G$  y  $\Lambda$  están relacionadas

$$G \approx \begin{cases} \text{decreciente si } b/a \in (-2, 0), \\ \text{constante si } b/a = -2, \\ \text{creciente si } b/a < -2 \end{cases}, \quad \Lambda_0 \approx \begin{cases} \text{negativa si } b/a \in (-2, 0), \\ \text{nula si } b/a = -2, \\ \text{positiva si } b/a < -2 \end{cases}, \quad (\text{A.36})$$

tal y como habíamos obtenido en el capítulo dedicado al estudio de los modelos Bianchi I. Sin embargo, aquí no somos capaces, con el método seguido, de determinar el valor de la ecuación de estado, o el valor de los parámetros de los factores de escala.

### A.1.2. Comportamiento exponencial

Haciendo  $a = 0$ , entonces  $(\xi = e, \eta = b\rho)$ . Integrando las Ecs. (A.28-A.29) obtenemos

$$\frac{G'}{G} = -\frac{b}{e} \implies G = G_0 \exp\left(-\frac{b}{e}t\right), \quad (\text{A.37})$$

$$\frac{G''}{G'} = -\frac{b}{e} \implies G = C_2 + G_0 \exp\left(-\frac{b}{e}t\right), \quad (\text{A.38})$$

por lo que consideramos

$$G = G_0 \exp\left(-\frac{b}{e}t\right), \quad (\text{A.39})$$

siendo  $G_0 > 0$ . La solución invariante en este caso es

$$\frac{bd t}{e} = \frac{d\rho}{\rho} \implies \rho = \rho_0 \exp\left(\frac{b}{e}t\right) \quad (\text{A.40})$$

imponiendo la restricción,  $eb < 0$ , por ejemplo consideramos  $b < 0$ . Al igual que antes, calculamos el valor de  $\rho_0$ , a partir de la Ec. (A.18), encontrando que  $\rho_0$  es nulo, i.e.,  $\rho_0 = 0$ . Por lo tanto descartamos esta solución.

### A.1.3. Simetría completa

En este caso consideramos todas las constantes i.e.,  $(\xi = at + e, \eta = b\rho)$ . Integrando las restricciones, obtenemos

$$\frac{G'}{G} = -\frac{b+2a}{at+e} \implies G = G_0(at+e)^{-(2a+b)/a}, \quad (\text{A.41})$$

$$\frac{G''}{G'} = -\frac{3a+b}{at+e} \implies G = G_0(at+e)^{-(2a+b)/a}, \quad (\text{A.42})$$

con  $[e] = T$ , que podemos interpretar como un tiempo característico. La solución invariante para la densidad de energía es

$$\rho = \rho_0(at+e)^{b/a}, \quad (\text{A.43})$$

imponiendo la restricción física  $ab < 0$ , considerando, por ejemplo que  $b < 0$ . El valor de la constante  $\rho_0$  resulta en este caso

$$\rho_0 = -\frac{b}{12\pi a G_0 (1+\gamma)^2}, \quad (\text{A.44})$$

con  $\gamma \neq -1$ . En este caso, las soluciones obtenidas son no-singulares cuando  $t \rightarrow 0$  al ser  $e \neq 0$ , y por lo tanto  $\rho \neq \infty$ . De la Ec. (A.6) obtenemos  $\Lambda$

$$\Lambda = \Lambda_0(at+e)^{-2}, \quad \Lambda_0 = \left( \frac{1}{6(1+\gamma)^2} \frac{b(2a+b)}{a^2} \right). \quad (\text{A.45})$$

Tal y como podemos observar, hemos obtenido el mismo comportamiento para  $G$  y  $\Lambda$  que el obtenido en (A.36).

## A.2. Estudio de la Ec (A.13)

Nuestro propósito, ahora, es estudiar la Ec. (A.13) y comparar los resultados con los obtenidos en el estudio de la Ec. (A.15). Por lo tanto, consideramos la ecuación

$$\rho'' = K_1 \frac{(\rho')^2}{\rho} + K_2 G \rho^2 - K_3 \Lambda \rho, \quad (\text{A.46})$$

con,  $K_1 = \frac{2+\gamma}{1+\gamma}$ ,  $K_2 = 12\pi(\gamma^2 - 1)$ ,  $K_3 = 3(1+\gamma)$ . Observamos que en este caso, estamos considerando una EDO de segundo orden con tres incógnitas, la cual parece más sencilla de resolver que la anterior, pero en realidad, tal y como mostraremos, este enfoque tiene más inconvenientes que el anterior, ya que aparecen más constantes de integración, que hacen más difícil predecir el comportamiento de las magnitudes.

Considerando el método estándar, empezamos calculando el siguiente sistema de EDPs

$$K_1 \xi_\rho + \rho \xi_{\rho\rho} = 0, \quad (\text{A.47})$$

$$K_1 (\eta - \rho \eta_\rho) + \rho^2 (\eta_{\rho\rho} - 2\xi_{t\rho}) = 0, \quad (\text{A.48})$$

$$3\rho^3 \xi_\rho (K_3 \Lambda - K_2 \rho G) - 2K_1 \rho \eta_t + 2\rho^2 \eta_{t\rho} - \xi_{tt} \rho^2 = 0, \quad (\text{A.49})$$

$$\eta \rho^2 (K_3 \Lambda - K_2 \rho G) + 2\rho^3 \xi_t (K_3 \Lambda - K_2 \rho G) - \rho^3 \eta_\rho (K_3 \Lambda - K_2 \rho G) + \xi \rho^3 (K_3 \Lambda' - K_2 \rho G') + \rho^2 \eta_{tt} = 0. \quad (\text{A.50})$$

De la Ec. (A.50) obtenemos las siguientes restricciones al imponer la simetría  $X = (at + e) \partial_t + b\rho \partial_\rho$ , (como en el caso anterior)

$$\frac{\Lambda'}{\Lambda} = -\frac{2a}{at + e}, \quad (\text{A.51})$$

$$\frac{G'}{G} = -\frac{b + 2a}{at + e}. \quad (\text{A.52})$$

### A.2.1. Simetría de escala

En este caso, consideramos que  $X = at\partial_t + b\rho\partial_\rho$  y por lo tanto

$$\frac{\Lambda'}{\Lambda} = -\frac{2}{t} \implies \Lambda = \Lambda_0 t^{-2}, \quad \Lambda_0 \in \mathbb{R}, \quad (\text{A.53})$$

$$\frac{G'}{G} = -\frac{b + 2a}{at} \implies G = G_0 t^{-2 - \frac{b}{a}}, \quad G_0 \in \mathbb{R}^+. \quad (\text{A.54})$$

Vemos que tenemos dos constantes de integración,  $\Lambda_0$  y  $G_0$ , pero no tenemos información sobre sus signos; únicamente hemos impuesto que  $G_0 > 0$ . La densidad de energía se comporta de la siguiente manera

$$\frac{dt}{at} = \frac{d\rho}{b\rho} \implies \rho = \rho_0 t^{\frac{b}{a}}, \quad \rho_0 \in \mathbb{R}^+, \quad (\text{A.55})$$

debiendo imponer la condición,  $ab < 0$ , por ejemplo  $b < 0$ , y asumiendo que  $\rho_0 > 0$ . Tal y como se observa se verifica la relación  $G\rho = t^{-2}$ .

De esta forma, el resultado que hemos obtenido es el siguiente

$$\rho \approx t^{\frac{b}{a}}, \quad G \approx t^{-2 - \frac{b}{a}} \begin{cases} \text{creciente si } -b > 2a \\ \text{constante si } -b = 2a \\ \text{decreciente si } -b < 2a \end{cases}, \quad \Lambda = \Lambda_0 t^{-2}, \quad (\text{A.56})$$

pero no tenemos información alguna sobre el signo de  $\Lambda_0$ .

Intentamos ahora obtener más información sobre el valor de las constantes de cada una de las magnitudes. Puesto que  $\rho$  debe verificar la Ec. (A.53) con  $G(t)$  y  $\Lambda(t)$  dadas por las Ecs. (A.53-A.54), encontramos que  $\rho_0$ ,

$$\rho_0 = \frac{ab(1 + \gamma) + b^2 - 3\Lambda_0 a^2(1 + \gamma)^2}{G_0 12\pi a^2(1 + \gamma)^2(1 - \gamma)}, \quad (\text{A.57})$$

con  $\gamma \in (-1, 1)$ , viendo que

$$\rho_0 > 0 \iff b^2 > -ab(1 + \gamma) + 3\Lambda_0 a^2(1 + \gamma)^2, \quad (\text{A.58})$$

con  $ab < 0$ . Además,  $\rho$  debe también verificar la Ec. (A.6), por lo tanto

$$\Lambda' = -8\pi G'\rho \implies -\Lambda_0 = 4\pi \left(2 + \frac{b}{a}\right) G_0 \rho_0 \implies \rho_0 = -\frac{a\Lambda_0}{4\pi G_0(2a + b)}, \quad (\text{A.59})$$

llegando así a

$$\Lambda_0 = -\frac{b}{3a(1 + \gamma)} \left(1 + \frac{b}{3a(1 + \gamma)}\right) \left(\frac{2a + b}{a(1 - \gamma) + 2a + b}\right). \quad (\text{A.60})$$

Tal y como hemos visto, en ambos enfoques, hemos obtenido el mismo orden de magnitud para cada magnitud, pero en este caso, hemos obtenido mucha menos información sobre el comportamiento de las constantes numéricas de cada una de las magnitudes, ya que éstas dependen a su vez de nuevas constantes de integración.



# Bibliografía

- [1] A. Billard y A. Coley. *Mod. Phys. Lett. A* **12**, 2121 (1997).
- [2] S.J. Landau y H. Vucetich. *Astrophys. J.* **570**, 463 (2002).
- [3] W.J. Marciano. *Phys. Rev. Lett.* **52**, 489 (1984).
- [4] A. Chodos y S. Detweiler. *Phys. Rev. D* **21**, 2167 (1980).
- [5] P.S. Wesson. "*Cosmology and Geophysics*". Adam Hilger Ltd. Bristol 1978.
- [6] P.S. Wesson. "*Gravity, Particles and Astrophysics*". Riedel 1980.
- [7] J.V. Narlikar y A.K. Kembhavi. "*Non-standard Cosmologies*". *Foundation of Cosmic Physics*, **6**, 1-186. Gordon and Breach 1980.
- [8] J.V. Narlikar y A.K. Kembhavi. "*Non-standard Cosmologies*". *Handbook of Astronomy, Astrophysics and Geophysics Vol. II* pp(301-497) Edt. Canuto et al. Gordon and Breach 1988.
- [9] J.D. Barrow y F. Tipler. "*The Antropic Cosmological Principle*". Oxford University Press 1996.
- [10] E.A. Milne. "*Relativity, gravitation and the world structure*". Clarendon. Oxford 1935.
- [11] E.A. Milne. "*Kinematic relativity*". Clarendon. Oxford 1948.
- [12] J.A. Belinchón. *Astro. Space. Scien.* **281**, 765 (2002).
- [13] P. Dirac. *Nature* **139**, 323 (1937); P. Dirac. *Proc. Roy. Soc. Lond. A* **165**, 199 (1938).
- [14] P. Dirac. *Proc. Roy. Soc. Lond. A* **333**, 403 (1973); P. Dirac. *Proc. Roy. Soc. Lond. A* **338**, 439 (1974); P. Dirac. "*Physicist Conception of Nature*". J Mehra (Ed). Reidel, Dordercht 1975.
- [15] A.S. Eddington. "*Fundamental Theory*". Cambridge University Press 1946.
- [16] S. Weinberg. "*Gravitation and Cosmology*". Wiley, New York. 1972.
- [17] T.C. Van Flandern. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **170**, 333 (1975).
- [18] S. Chandrasekhar. *Nature* **139**, 757 (1937).
- [19] D.S. Kothari. *Nature* **142**, 354 (1938); *Proc. Roy. Soc. Lond. A* **165**, 486 (1938).
- [20] F. Zwicky. *Phys. Rev.* **55**, 726 (1939); F. Zwicky. *Phys. Rev.* **53**, 315 (1938).
- [21] P. Jordan. *Nature* **164**, 637 (1949).
- [22] M. Fierz. *Helv. Phys. Acta.* **29**, 128 (1956).
- [23] P. Jordan. *Rev. Mod. Phys.* **34**, 596 (1962)
- [24] C. Brans y R. Dicke. *Phys. Rev.* **124**, 924 (1961); C. Brans. PhD Thesis Princeton University NJ 1961.
- [25] D.W. Sciama. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **113**, 34 (1953).
- [26] R. Dicke. *Rev. Mod. Phys.* **29** 355, 363 (1957).
- [27] C. Gilbert. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **116**, 684 (1956).

- [28] C. Gilbert. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **120**, 367 (1960).
- [29] K.P. Stanyukovich. *Sov. Phys. Doklady.* **7**, 1150 (1963).
- [30] K.P. Stanyukovich. *Sov. Phys. Doklady.* **8**, 57 (1963).
- [31] G. Gamow. *Proc. Nac. Aca. Scien.* **57**, 187 (1967).
- [32] E. Teller. *Phys. Rev.* **73**, 801 (1948).
- [33] G. Gamow. *Phys. Rev. Lett.* **19**, 759 (1967); Errata pg. 1000; G. Gamow. *Phys. Rev. Lett.* **19**, 913 (1967).
- [34] F. Dyson. *Phys. Rev. Lett.* **19**, 1291 (1967); A. Peres. *Phys. Rev. Lett.* **19**, 1293 (1967).
- [35] J. O'Hanlon et al. *Prog. Theor. Phys.* **41**, 1596 (1969); J. O'Hanlon et al. *Prog. Theor. Phys.* **43**, 684 (1970).
- [36] Y.M. Kramarovskii et al. *Sov. Phys. Usp.* **13**, 628 (1971); V.P. Chechev et al. *Contemp. Phys.* **13**, 61 (1972); V.P. Chechev et al. *Phys. Lett B* **42**, 261 (1972).
- [37] J.D. Bekenstein. *Phys. Rev. D* **25**, 1527 (1982).
- [38] W.Q. Sumner. *Astrophys. J.* **429**, 491 (1994).
- [39] C. Page y B.O.J. Tupper. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **138**, 67 (1968).
- [40] S. Bellert. *Astro. Space. Scien.* **47**, 263 (1977).
- [41] V.S. Troitskii. *Astro. Space. Scien.* **139**, 389 (1987).
- [42] J-P. Petit. *Mod. Phys. Lett. A* **3**, 1527 (1988); J-P. Petit. *Mod. Phys. Lett. A* **3**, 1733 (1988); J-P. Petit. *Mod. Phys. Lett. A* **4**, 2201 (1989).
- [43] P. Midy y J-P. Petit. *Int. J. Mod. Phys. D* **8**, 271 (1999); J-P. Petit y P. Midy. *Int. J. Mod. Phys. D* **12**, 597 (2003).
- [44] A. Albrech y J. Magueijo. *Phys. Rev. D* **59**, 043515 (1999).
- [45] J.D. Barrow. *Phys. Rev. D* **59**, 043516 (1999).
- [46] J.D. Barrow, H.B. Sandvik y J. Magueijo. *Phys. Rev. D* **65**, 063504 (2002).
- [47] J.W. Moffat. *Int. J. Mod. Phys. D* **2**, 351 (1993); J.W. Moffat. *Found. of Phys.* **23**, 411 (1993); M.A. Clayton y J.W. Moffat. *Phys. Lett. B* **460**, 263 (1999); M.A. Clayton y J.W. Moffat. *Phys. Lett. B* **477**, 269 (2000); M.A. Clayton y J.W. Moffat. *Phys. Lett. B* **506**, 177 (2001).
- [48] J. Magueijo y J.W. Moffat. *Gen. Rel. Grav.* **40**, 1797 (2008).
- [49] N. Straumann. XVIIIth IAP Colloquium: "*Observational and theoretical results on the accelerating universe*". July 1-5 (2002), Paris (France).
- [50] D. Lovelock. *J. Math. Phys.* **12**, 498 (1971).
- [51] Y.B. Zel'dovich. *JETP letters* **6**, 316 (1967); Y.B. Zel'dovich. *Soviet Physics Uspekhi* **11**, 381 (1968).
- [52] L.M. Krauss y M.S. Turner. *Gen. Rel. Grav.* **27**, 1137 (1995).
- [53] P.J.E. Peebles. *Rev. Mod. Phys.* **75**, 559 (2003).
- [54] S. Weinberg. *Rev. Mod. Phys.* **61**, 1 (1989).
- [55] K. Sato et al. "*The quest for the fundamental constants in cosmology*". Ed. por J. Audouze y J. Tran Thanh Van pp. 193. *Proc. Gif sur Yvette, France. Editions Frontières*, 1990.
- [56] W. Chen y Y-S. Wu. *Phys. Rev. D* **41**, 695 (1990).
- [57] M. Özer y M.O. Taha. *Nucl. Phys. B* **287**, 776 (1987).
- [58] P.J.E. Peebles y B. Ratra. *Astrophys. J.* **325**, L17 (1988).
- [59] J.C. Carvalho, J. A. S. Lima e I. Waga. *Phys. Rev. D* **46**, 2404 (1992).
- [60] T. Padmanabhan. *Phys. Rep.* **380**, 235 (2003); T. Padmanabhan. *Gen. Rel. Grav.* **40**, 529 (2008).

- [61] J.A. Belinchón. *Int. J. Theor. Phys.* **39** 1669 (2000).
- [62] J.A. Belinchón. *Gen. Rel. Grav.* **32**, 487 (2000).
- [63] J.A. Belinchón y A. Alfonso-Faus. *Int. J. Mod. Phys D*, **10**, 299 (2001).
- [64] J.A. Belinchón. *Int. J. Mod. Phys. D* **11**, 527 (2002).
- [65] J.A. Belinchón y P. Dávila. *Class. Quantum. Grav.* **17**, 3183 (2000).
- [66] J.A. Belinchón, T. Harko y M. K. Mak. *Class. Quantum. Grav.* **19**, 3003 (2002).
- [67] J.A. Belinchón y I. Chacrabarty. *Int. J. Mod. Phys. D* **12**, 861 (2003).
- [68] J.A. Belinchón y I. Chacrabarty. *Int. J. Mod. Phys. D* **12**, 1113 (2003).
- [69] J.A. Belinchón. *Spacetime & Substance* **6**, 1 (2005).
- [70] J.A. Belinchón y J.L. Caramés. *Spacetime & Substance* **6**, 97 (2005).
- [71] A.R. Pullen y M. Kamionkowski. *Phys. Rev. D* **76**, 103529 (2007); P. Kumar Samal et al. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **385**, 1718 (2008); N. E. Groeneboom y H.K. Eriksen. *Astrophys. J.* **690**, 1807 (2009); C. Armendariz-Picon y L. Pekowsky. *Phys. Rev. Lett.* **102**, 031301 (2009).
- [72] J.A. Belinchón. *Astro. Space. Scien.* **299**, 341 (2005).
- [73] J.A. Belinchón. *Astro. Space. Scien.* **302**, 161 (2006).
- [74] G.F.R. Ellis. *Gen. Rel. Grav.* **39**, 511 (2007).
- [75] J.A. Belinchón, T. Harko y M. K. Mak. *Int. J. Mod. Phys. D* **11**, 1265 (2002).
- [76] J.A. Belinchón, T. Harko y M. K. Mak. *Grav. Cos.* **8**, 319 (2002).
- [77] *"From Varying Couplings to Fundamental Physics"*. Proceedings of Symposium 1 of JENAM 2010. Ed. C. Martins y P. Molaro. Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2011.
- [78] J.-P. Uzan. *Review for Living Reviews in Relativity* **14**, 2 (2011).
- [79] R.W. Hellings et al. *Phys. Rev. Lett.* **51**, 1609 (1983).
- [80] J. Müller, et al. *Astrophys. J.* **382**, L101 (1991).
- [81] J.G. Williams et al. *Phys. Rev. D* **53**, 6730 (1996).
- [82] J.G. Williams et al. *Phys. Rev. Lett.* **93**, 261101 (2004).
- [83] K. Nordtvedt. *Phys. Rev. Lett.* **65**, 953 (1990).
- [84] T. Damour et al. *Phys. Rev. Lett.* **61**, 1151 (1988).
- [85] T. Damour et al. *Astrophys. J.* **366**, 501 (1991).
- [86] G.S. Bisnovatyi-Kogan. *Int. J. Mod. Phys. D* **15**, 1047 (2006).
- [87] V.M. Kaspi, J.H. Taylor y M.F. Ryba, *Astrophys. J.* **428**, 713 (1994).
- [88] J.P.W. Verbiest et al. *Astrophys. J.* **679**, 675 (2008).
- [89] D.B. Guenther et al. *Astrophys. J.* **498**, 871 (1998).
- [90] M. Biesiada y B. Malec. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **350**, 644 (2004).
- [91] O.G. Benvenuto et al. *Phys. Rev. D* **69**, 082002 (2004).
- [92] E. Garcia-Berro et al. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **277**, 801 (1995); E. Garcia-Berro et al. *JCAP* **1105** 021 (2011).
- [93] S.E. Thorsett. *Phys. Rev. Lett.* **77**, 1432 (1996).

- [94] P. Jofré, A. Reisenegger y R. Fernández. Phys. Rev. Lett. **97**, 131102 (2006).
- [95] A.G. Riess *et al.* [Supernova Search Team Collaboration]. Astron. J. **116**, 1009 (1998); S. Perlmutter *et al.* [Supernova Cosmology Project Collaboration]. Astrophys. J. **517**, 565 (1999).
- [96] E. Gaztanaga, E. Garcia-Berro, J. Isern, E. Bravo y I. Dominguez. Phys. Rev. D **65**, 023506 (2002).
- [97] S. D'Innocenti, G. Fiorentini, G. G. Raffelt, B. Ricci y A. Weiss. Astron. Astrophys. **312**, 345 (1996).
- [98] C.J.A.P. Martins *et al.* Phys. Rev. D **82**, 023532 (2010).
- [99] K. Umezu, K. Ichiki y M. Yahiro. Phys. Rev. D **72**, 044010 (2005).
- [100] M. Tegmark *et al.* Phys. Rev. D **69**, 103501 (2004).
- [101] Q.J. Zhang y Y.L. Wu. arXiv:0905.1234 [astro-ph.CO].
- [102] N. Suzuki *et al.* arXiv:1105.3470 [astro-ph.CO].
- [103] A. Arvanitoyeorgos. "An introduction to Lie groups and the geometry of homogeneous spaces." AMS 2003.
- [104] L. Bianchi, Mem. della Soc. It. delle Scienze (detta dei XL) (3) **XI**, 267 (1897). Artículo traducido por R. Jantzen
- [105] A. Taub. Ann. Math. **53**, 472 (1951).
- [106] O. Heckmann y E. Schücking. "Gravitation". Wiley, New York 1962.
- [107] J. Wainwright y G.F.R. Ellis. "Dynamical Systems in Cosmology". Cambridge University Press 1997.
- [108] C. Collins y S. Hawking. Astrophys. J. **180**, 317 (1973).
- [109] G.F.R. Ellis y M. A. H. MacCallum. Commun. Math. Phys. **12**, 108 (1969).
- [110] S.W. Hawking y G.F.R. Ellis. "The Large Scale Structure of Space-Time". Cambridge University Press 1973.
- [111] M. Ryan y L. Shepley. "Homogeneous Relativistic Cosmologies". Princeton University Press 1975.
- [112] A.K. Raychaudhuri. "Theoretical Cosmology". Clarendon Press Oxford 1979.
- [113] H. Stephani, D. Kramer, M. MacCallum *et al.* "Exact Solutions of Einstein's Field Equations". (2nd edn.) Cambridge University Press 2003.
- [114] D.N. Spergel *et al.* Astrophys. J. Suppl. **148**, 175 (2003).
- [115] Bennett C L *et al.* Astrophys. J. Suppl. **148**, 1 (2003).
- [116] D. Schwarz *et al.* Phys. Rev. Lett. **93**, 221301 (2004); P. Vielva *et al.* Astrophys. J. **609**, 22 (2004); H.K. Eriksen *et al.* Astrophys. J. **612**, 64 (2004); F.K. Hansen *et al.* Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **354**, 641 (2004); H.K. Eriksen *et al.* Astrophys. J. **605**, 14 (2004); K. Land y J. Magueijo. Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **357**, 994 (2005); K. Land y J. Magueijo. Phys. Rev. Lett. **95**, 071301 (2005).
- [117] T.R. Jaffe *et al.* Astrophys. J. **629**, L1 (2005); T.R. Jaffe *et al.* Astrophys. J. **643**, 616 (2006); T.R. Jaffe *et al.* Astrophys. J. **644**, 701 (2006).
- [118] T.R. Jaffe *et al.* Astro. Astrophys. **460**, 393 (2006).
- [119] F. Hoyle y J. Narlikar. Proc. Roy. Soc. London A **273**, 1 (1963).
- [120] A.B. Burd y J.D. Barrow. Nucl. Phys. B **308**, 929 (1988).
- [121] R.M. Wald. Phys. Rev. D **28**, 2118 (1983).
- [122] S. Capozziello y R. de Ritis. Gen. Rel. Grav. **29**, 1425 (1997).
- [123] K.A. Bronnikov *et al.* Class. Quantum Grav. **21**, 3389 (2004).
- [124] T. Harko y M.K. Mak. Int. J. Mod. Phys. D **11**, 1171 (2002).
- [125] J. Caminati y R.G. Mclenaghan. J. Math. Phys. **32**, 3135 (1991).
- [126] Ø. Rudjord y Ø. Grøn. Phys. Scripta. **77**, 055901 (2008).

- [127] Ø. Grøn y S. Hervik. gr-qc/0205026.
- [128] J.D. Barrow y S. Hervik. *Class. Quantum Grav.* **19**, 5173 (2002).
- [129] W.C. Lim, A. Coley y S. Hervik. *Class. Quantum Grav.* **24**, 595 (2006).
- [130] J. Wainwright, M.J. Hancock y C. Uggla. *Class. Quantum Grav.* **16** 2577 (1999).
- [131] R. Penrose, in *General Relativity, an Einstein centenary survey*. Eds. S.W. Hawking and W. Israel, Cambridge University Press 1979.
- [132] J. Wainwright y P.J. Anderson. *Gen. Rel. Grav.* **16**, 609 (1984).
- [133] T. Rothman y P. Anninos. *Phys. Lett. A* **224**, 227 (1997).
- [134] T. Rothman. *Gen. Rel. Grav.* **32**, 1185 (2000).
- [135] J. Wainwright et al. *Class. Quantum Grav.* **16**, 2577 (2004).
- [136] N. Pelavas y K. Lake. *Phys. Rev. D* **62**, 044009 (2000).
- [137] N. Pelavas y A. Coley. *Int. J. Theor. Phys.* **45**, 1258 (2006).
- [138] K.L. Duggal y R. Sharma. *"Symmetries of spacetimes and Riemannian Manifolds"*. Kluwer Academic Publisher 1999.
- [139] G.S. Hall. *"Symmetries and Curvature in General Relativity"*. World Scientific Lecture Notes in Physics. Vol. 46 2004.
- [140] A.Z. Petrov. *"Einstein Spaces"*. Pergamon, Oxford University Press 1969.
- [141] S. Hojman, L. Nunez, A. Patino y H. Rago. *J. Math. Phys.* **27**, 281 (1986)
- [142] L.H. Green, L.K. Norris, D.R. Oliver y W.R. Davis. *Gen. Rel. Grav.* **8**, 731 (1977).
- [143] G.H. Katzin, J. Levine y W.R. Davis. *J. Math. Phys.* **10**, 617 (1969).
- [144] M.E. Cahill y A.H. Taub. *Commun. Math. Phys.* **21**, 1 (1971).
- [145] G.I. Barenblatt y Y.B. Zel'dovich. *Ann. Rev. Fluid Mech.* **4**, 285 (1972).
- [146] D.M. Eardley. *Commun. Math. Phys.* **37**, 287 (1974).
- [147] J. Wainwright. *"Self-Similar Solutions of Einstein's Equations"*. Published in *Galaxies, Axisymmetric Systems & Relativity*. ed M.A.H MacCallum CUP (1985); J. Wainwright, *Gen. Rel. Grav.* **16**, 657 (1984).
- [148] K. Rosquits y R. Jantzen. *Class. Quantum Grav.* **2**, L129, (1985). K. Rosquits y R. Jantzen. *"Transitively Self-Similarity Space-Times"*. Proc. Marcel Grossmann Meeting on General Relativity. Ed. Ruffini. Elsevier S.P. (1986). pg 1033.
- [149] B.J. Carr y A. Coley. *Class. Quantum Grav.* **16**, R31 (1999).
- [150] J. Wainwright y G.F.R. Ellis. *"Dynamical Systems in Cosmology"*. Cambridge University Press (1997).
- [151] A. Coley. *"Dynamical Systems and Cosmology"*. Kluwer Academic Publishers (2003).
- [152] J. Wainwright et al. *Class. Quantum Grav.* **15**, 331 (1998).
- [153] L. Hsu y J. Wainwright. *Class. Quantum Grav.* **3**, 1105 (1986).
- [154] B. Carter y R.N. Henriksen. *Ann. Physique Supp.* **14**, 47 (1989).
- [155] B. Carter y R.N. Henriksen. *J. Math. Phys.* **32**, 2580 (1991).
- [156] A. Coley. *Class. Quantum Grav.* **14**, 87 (1997).
- [157] H. Maeda y T. Harada. This is a review for a part of the book *"Progress in General Relativity and Quantum Cosmology Research"* (Nova Science Publ.,2004). arXiv:gr-qc/0405113.
- [158] H. Maeda, T. Harada, H. Iguchi y N. Okuyama. *Prog. Theor. Phys.* **110**, 25 (2003).
- [159] P. M. Benoit y A. Coley. *Class. Quantum Grav.* **15**, 2397 (1998)

- [160] A.M. Sintes. *Class. Quantum Grav.* **15**, 3689 (1998).
- [161] J.A. Belinchón. *Grav. Cos.* **15**, 306 (2009).
- [162] J.A. Belinchón. *Astro. Space. Scien.* **315**, 111 (2008).
- [163] A. Qadir. "*Spacetime Symmetries and their Significance*". Comunicación personal.
- [164] L. Fernandez-Jambrina y R. Lazkoz. *Phys. Rev. D* **74**, 064030 (2006).
- [165] M. Sharif. *Int. J. Mod. Phys. D* **14**, 1675 (2005).
- [166] J. Carot, J. da Costa y E.G.L.R. Vaz. *J. Math. Phys.* **35**, 4832 (1994).
- [167] G. Hall, I. Roy y E.G.L.R. Vaz. *Gen. Rel. Grav.* **28**, 299 (1996).
- [168] J. Carot y J. da Costa. *Procs. of the 6th Canadian Conf. on General Relativity and Relativistic Astrophysics*, Fields Inst. Commun. 15, Amer. Math. Soc. WC Providence, RI 179. (1997).
- [169] İ. Yavuz y U. Camcı. *Gen. Rel. Grav.* **28**, 691 (1996).
- [170] İ. Yavuz et al. *Int. J. Mod. Phys. D* **10**, 751 (2001).
- [171] U. Camcı y A. Barnes. *Class. Quantum Grav.* **19**, 393 (2002).
- [172] M. Sharif. *Nuovo Cimento B* **116**, 673 (2001). M. Sharif. *Astro. Space. Scien.* **278**, 447 (2001).
- [173] M. Tsamparlis y P.S. Apostolopoulos. *Gen. Rel. Grav.* **36**, 47 (2004).
- [174] G. Hall y A.D. Rendall. *J. Math. Phys.* **28**, 1837 (1987).
- [175] L.V. Ovsiannikov. "*Group Analysis of differential Equations*". Academic. Press, N.Y. 1982.
- [176] N.H. Ibragimov. "*Transformations Groups Applied to Mathematical Physics*". D. Reidel Publishing Company 1985; N.H. Ibragimov. "*Elementary Lie Group Analysis and Ordinary Differential Equations*". Jonh Wiley & Sons, 1999; N.H. Ibragimov. "*Introduction to Modern Group Analysis*". Ufa. 2000.
- [177] P.T. Olver. "*Applications of Lie Groups to Differential Equations*". Springer-Verlang, 1993; P.T. Olver. "*Equivalence, Invariants and Symmetry*". Cambridge University Press, 1995.
- [178] B.J. Cantwell, "*Introduction to Symmetry Analysis*". Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [179] G.W. Bluman y J.D. Cole. "*Similarity Methods for Differential Equations*". Springer-Verlang, 1974; G.W. Bluman y S. Kumei. "*Symmetries and Differential Equations*". Springer-Verlang, 1989; G.W. Bluman y S.C. Anco. "*Symmetry and Integration Methods for Differential Equations*". Springer-Verlang, 2002.
- [180] P.E. Hydon. "*Symmetry Methods for Differential Equations*". Cambridge University Press, 2000.
- [181] G. Baumann. "*Symmetry Analysis of Differential Equations with Mathematica*". Springer Telos. 2000.
- [182] H. Stephani. "*Differential Equations. Their Solution Using Symmetries*". Cambridge University Press, 1989.
- [183] G. Emanuel. "*Solution of Ordinary Differential Equations by Continuos Groups*". Chapma&Hall/CRC. 2001.
- [184] J.M. Hill. "*Differential Equations and Group Methods for Scintists and Engineers*". CRC. 1992.
- [185] Willi-Hans Steeb. "*Continuous Symmetries, Lie Algebras, Differential Equations and Computer Algebra*". World Scientific, 2007.
- [186] J.A. Belinchón. "*Similarity versus Symmetries*". gr-qc/0404028.
- [187] J.A. Belinchón. "*Differential Equations through Dimensional Analysis*". physics/0502154.
- [188] C.W. Misner, K.S. Thorne y J.A. Wheeler. "*Gravitation*". H.W. Freeman and Company. 1997
- [189] R. Wald. "*General Relativity*". The University of Chihago Press 1984.
- [190] Ø. Grøn y S. Hervik "*Einstein's General Theory of Relativity with Applications in Cosmology*". Springer 2007.

- [191] D. Pavón, J. Bafaluy y D. Jou. *Class. Quantum Grav.* **8**, 347 (1991); W. Zimdahl. *Phys. Rev. D* **53**, 5483 (1996).
- [192] N.O. Santos et al. *J. Math. Phys.* **26**, 878 (1985).
- [193] R. Maartens. *Class. Quantum Grav.* **12** 1455 (1995); R. Maartens. astro-ph/9609119.
- [194] A. Coley, R.J. van den Hoogen y R. Maartens. *Phys. Rev D* **54**, 1393 (1996).
- [195] J.A. Belinchón, T. Harko y M.K. Mak. *Class. Quantum Grav.* **19**, 3003 (2002).
- [196] A.D. Polyanin y V.F. Zaitsev. *“Handbook of Exact Solutions for ODEs”*. CRC Press (1995).
- [197] O. Cornejo-Pérez y J.A. Belinchón. *“Exact solutions of a Flat Full Causal Bulk viscous FRW cosmological model through factorization”*. arXiv:1204.5938 [gr-qc]. Enviado. (2012).
- [198] J.D. Barrow. Lecture notes. Erice Summer School ‘Current Topics in Astrofundamental Physics’ 4-15 September 1997. arXiv:gr-qc/9711084v1
- [199] J.E. Felten y R. Isaacman. *Rev. Mod. Phys.* **58**, 689 (1986).
- [200] J.M. Overduin y F.I. Cooperstock. *Phys. Rev D* **58**, 043506 (1998).
- [201] J. Shapiro y J. Sola. *J. High Energy Phys.* **2**, 006 (2002).
- [202] Y-K. Lau. *Aust. J. Phys.* **38**, 547 (1985).
- [203] H.H. Soleng. *Astro. Space. Scien.* **136**, 109 (1987).
- [204] K.D. Krori et al. *Gen. Rel. Grav.* **32**, 1439 (2000).
- [205] G.W. Gibbons y S.W. Hawking. *Phys. Rev. D* **15**, 2738 (1977).
- [206] J.A. Belinchón. *Int. J. Mod. Phys A* **23**, 5021 (2008).
- [207] P. Rastall. *Phys. Rev. D* **6**, 3357 (1972).
- [208] I. Prigogine et al. *Gen. Rel. Grav.* **21**, 767 (1989).
- [209] J.D. Bekestein. *Phys. Rev. D.* **15**, 1458 (1977).
- [210] J.S. Alcaniz y J.A.S Lima. *Phys. Rev. D* **72**, 063516 (2005).
- [211] T. Harko y M.K. Mak. *Int. J. Mod. Phys. D* **8**, 607 (1999).
- [212] A.D. Dolgov, M.V. Sazhin y Ya B. Zel’dovich. *“Basics of modern Cosmology”*. Ed. Frontières 1990.
- [213] L. Amendola y S. Tsujikawa. *“Dark Energy. Theory and observations”*. Cambridge University Press 2010.
- [214] R.R. Cadwell et al. *Phys. Rev. Lett.* **80**, 1582 (1998).
- [215] Y. Fujii. *Phys. Rev. D* **26**, 2580 (1982); L.H. Ford. *Rev. D* **35**, 2339 (1987); B. Ratra y P.J.E. Peebles. *Rev. D* **37**, 3405 (1988).
- [216] J.M.F. Maia y J.A.S. Lima. *Phys.Rev. D* **65**, 083513 (2002).
- [217] C. Wetterich. *Astron. Astrophys* **301**, 321 (1995).
- [218] A.P. Billyard y A. Coley. *Phys Rev D* **61**, 083503 (2000).
- [219] G.F.R. Ellis y M.S. Madsen. *Class. Quantum Grav.* **8**, 667 (1991).
- [220] C. Wetterich. *Nucl. Phys. B* **252**, 309 (1988).
- [221] Q. Shafi y C. Wetterich. *Phys. Lett.* **B152**, 51 (1985); *Nucl. Phys.* **B289**, 787 (1987); **B297**, 697 (1988); F. Luchin y S. Matarrese. *Phys. Rev. D* **32** 1316 (1985); J.J. Halliwell. *Phys. Lett. B* **185**, 341 (1987).
- [222] M. Jamil. et al. *Phys. Lett. B* **679**, 172 (2009); J. Lu et al. *JCAP* 1003: 031 (2010).

- [223] O. Bertolami, F. Gil Pedro y M. Le Delliou. Phys. Lett. B **654**, 165 (2007); O. Bertolami, F.G. Pedro y M. Le Delliou. Gen. Rel. Grav. **41**, 2839 (2009).
- [224] E. Abdalla, L. R. Abramo, L. Sodre y B. Wang. Phys. Lett. B **673**, 107 (2009). E. Abdalla, L.R. Abramo y J.C.C. de Souza. Phys. Rev. D **82**, 023508 (2010).
- [225] I. Prigogine et al. Gen. Rel. Grav. **21**, 767 (1989).
- [226] F. Hoyle y J. Narlikar. Proc. Roy. Soc. A **282**, 191 (1964); F. Hoyle y J. Narlikar. Proc. Roy. Soc. A **290**, 162 (1966); J. Narlikar y T. Pradmanabhan. Phys. Rev. D. **32**, 1928 (1985).
- [227] C. Wetterich. Nucl. Phys. B **302**, 668 (1988).
- [228] D. Pavón y B. Wang. Gen. Rel. Grav. **41**, 1 (2009).
- [229] H. Wei. Nucl. Phys. B **845**, 381 (2011).
- [230] R. Bali y R.S. Titekar. Chin. Phys. Lett. **24**, 3290 (2007); R. Bali y M. Kumawat. Int. J. Theor. Phys. **48**, 3410 (2009); R. Bali y M. Kumawat. Int. J. Theor. Phys. **50**, 27 (2011).
- [231] A. Sheykhi y M.R. Setare. Int. J. Theor. Phys. **49**, 2777 (2010).
- [232] F. Adabi, K. Karami, F. Felegary y Z. Azarmi. Res. Astron. Astrophys. **12**, 26 (2012).
- [233] M. Jamil. Int. J. Theor. Phys. **49**, 2829 (2010).
- [234] P. Jordan. *Schwerkraft und Weltall*, Vieweg (Braunschweig) 1955.
- [235] P.G. Bergmann Int. J. Theor. Phys. **1**, 25 (1968).
- [236] K. Nordtvedt, JR. Astrophys. J. **161**, 1059 (1970).
- [237] R.T. Wagoner. Phys. Rev. D **1**, 3209 (1970).
- [238] V. Faraoni. *"Cosmology in Scalar-Tensor Gravity"*. Kluwer Academic Publishers 2004.
- [239] Y. Fujii y K- Maeda. *"The scalar-Tensor Theory of gravitation"*. Cambridge University Press 2003.
- [240] C.M. Will. *"Theory and experiments in gravitational physics"*. Cambridge University Press, revised edition 1993.
- [241] B. Bertotti, L. Iess, y P. Tortora. Nature (London) **425**, 374 (2003).
- [242] A.D. Sakharov. Doklady Akademii Nauk SSSR, **177**, 70 (1967). Ver también, Gen. Rel. Grav. **32**, 365 (2000).
- [243] A. Zee. Phys. Rev. Lett. **42**, 417 (1979); Phys. Rev. Lett. **44**, 703 (1980); Phys. Rev. D **23**, 858 (1981). Phys. Lett. **48**, 183 (1982); Phys. Lett. B **109**, 183 (1982).
- [244] S. Nojiri y S.D. Odintsov. Gen. Rel. Grav. **38**, 1285 (2006).
- [245] S Capozziello, S. Nojiri y S.D. Odintsov. Phys. Lett.B **632**, 597 (2006).
- [246] B.M. Barker. Astrophys. J. **219**, 5 (1978).
- [247] J.P. Mimoso y D. Wands. Phys. Rev. D **51**, 477 (1995).
- [248] A. Coley. Gen. Rel. Grav. **31**, 1295 (1999).
- [249] V. Faraoni et al. Fund. Cos. Phys. **20**, 121 (1998).
- [250] S. Capozziello, S. Nojiri, S.D. Odintsov y A. Troisi. Phys. Lett. B **639**, 135 (2006); S. Nojiri y S.D. Odintsov. Phys. Rev. D **74**, 086005 (2006).
- [251] J-C. Hwang. Phys. Rev. D **53**, 762 (1996).
- [252] F. Perrotta, C. Baccigalupi y S. Matarrese. Phys. Rev. D **61**, 023507 (1999).
- [253] V.M. Canuto, S.H. Hsieh y P.J. Adams. Phys. Rev. Lett. **39**, 429 (1977).
- [254] V.M. Canuto, P.J. Adams, S.H. Hsieh y E. Tsiang. Phys. Rev. D **16**, 1643 (1977).

- [255] V.M. Canuto y S.H. Hsieh. *Astrophys. J.* **224**, 302 (1978).
- [256] V.M. Canuto, S.H. Hsieh y P.J. Adams. *Phys. Rev. D* **18**, 3577 (1978).
- [257] V.M. Canuto y S.H. Hsieh. *Astrophys. J. Suppl. Series.* **41**, 243 (1979).
- [258] V.M. Canuto y S.H. Hsieh. *Mont. Not. R. Astr. Soc.* **188**, 829 (1979).
- [259] V.M. Canuto. *Mont. Not. R. Astr. Soc.* **197**, 1093 (1981).
- [260] Y. Li. *Astro. Space. Scien.* **93**, 255 (1983).
- [261] V.N. Mansfield y S. Malin. *Astrophys. J.* **237**, 349 (1980).
- [262] T. Rothman y R. Matzner. *Astrophys. J.* **257**, 450 (1982).
- [263] L.P. Eisenhart. *"Riemannian Geometry"*. Princeton University Press. (1949).
- [264] G.A. Barber. *Gen. Rel. Grav.* **14**, 117 (1982).
- [265] G.A. Barber. *Astro. Space. Scien.* **282**, 683 (2002).
- [266] G.A. Barber. *New Developments in Quantum Cosmology Research. Horizons in World Physics, Volume 247, pages 155 – 184, Nova Science Publishers, Inc. New York. Self Creation Cosmology - An Alternative Gravitational Theory. (eprint arXiv:gr-qc/0405094.)*
- [267] G.A. Barber. *Astro. Space. Scien.* **305**, 169 (2006).
- [268] G.A. Barber: arXiv:1009.5862.
- [269] C. Brans. *Gen. Rel. Grav.* **19**, 949 (1987).
- [270] R. Venkateswarlu y D.R.K. Reddy. *Astro. Space. Scien.* **168**, 193 (1990).
- [271] D.R.K. Reddy. *Astro. Space. Scien.* **132**, 401 (1987).
- [272] A. Pradhan and A.K. Vishwakarma. *Int. J. Mod. Phys. D* **11**, 1195 (2002).
- [273] A. Pradhan, S. Agarwal y G.P. Singh. *Int. J. Theor. Phys.* **48**, 158 (2009).
- [274] A. Pradhan y H.R. Pandey. *Indian J. Pure Appl. Math.* **35**, 513 (2004).
- [275] K. Shanthi y V.U.M. Rao. *Astro. Space. Scien.* **179**, 147 (1991).
- [276] S. Ram y C.P. Singh. *Astro. Space. Scien.* **257**, 287 (1998).
- [277] C.P. Singh y S. Kumar. *Astro. Space. Scien.* **310**, 31 (2007).
- [278] R. Venkateswarlu y D.R.K. Reddy. *Astro. Space. Scien.* **151**, 353 (1989).
- [279] D.R.K. Reddy y R. Venkateswarlu. *Astro. Space. Scien.* **155**, 135 (1989).
- [280] M. Tsamparlis y P.S. Apostolopoulos. *J. Math. Phys* **41**, 7573 (2000).
- [281] E. Kasner. *Am. J. Math.* **43**, 217 (1921).
- [282] K.C. Jacobs. *Astrophys. J.* **153**, 661 (1968).
- [283] J.A. Belinchón. *Astro. Space. Scien.* **302**, 161 (2006).
- [284] Y. Kitada y Kei-ichi Maeda. *Class. Quantum Grav.* **10**, 703 (1993).
- [285] C.B. Collins. *Commun. Math. Phys.* **23**, 137, (1971).
- [286] J.A. Belinchón ArXiv:1109.2880 [gr-qc].
- [287] C.D. Collison y D.C. French. *J. Math. Phys.* **8**, 701 (1967).
- [288] E.M. Lifshitz e I. Khalatnikov. *Adv. Phys.* **12**, 185 (1963).

- [289] C.B. Collins. *J. Math. Phys.* **18**, 2116 (1977).
- [290] O.I. Bogoyavlenski. *“Methods in the Qualitative Theory of Dynamical Systems in Astrophysics and Gas Dynamics”* (Springer-Verlag, 1985).
- [291] C.B. Collins. *Comm. Math. Phys.* **39**, 131 (1974); C.B. Collins y G.F.R. Ellis. *Phys. Rep.* **56**, 65 (1979).
- [292] J.D. Barrow y D.H. Sonoda. *Phys. Rep.* **139**, 1 (1986).
- [293] S. Smale. *“Mathematics of Time”*. Springer Verlag, New York, 1980.
- [294] M. Szydlowski. *Astro. Space. Scien.* **339**, 389 (2012).
- [295] M. Goliath y G.F.R. Ellis. *Phys. Rev. D* **60**, 023502 (1999).
- [296] J.A. Belinchón. *Int. J. Theor. Phys.* **39**, 1669 (2000).
- [297] E.J. Copeland, A.R. Liddle y D. Wands. *Phys. Rev. D* **57**, 4686 (1998).
- [298] M. Gasperini. *“Elements of String cosmology”*. Cambridge University Press 2007.
- [299] J.E. Lidsey, D. Wands y E.J. Copeland. *Phys. Rep.* **337**, 343 (2000).
- [300] E.J. Copeland, A. Lahiri y D. Wands. *Phys. Rev. D* **50**, 4868 (1994).
- [301] G. Veneziano. *Phys. Lett. B* **265**, 287 (1991).
- [302] R.H. Dicke. *Phys. Rev.* **125**, 2163 (1962).
- [303] G.F.R. Ellis, D.C. Roberts, D. Solomons y P.K.S. Dunsby. *Phys. Rev. D* **62**, 084004 (2000).
- [304] M. Sasaki, T. Shiromizu y K. Maeda. *Phys. Rev. D* **62**, 024008 (2000).
- [305] T. Shiromizu, K. Maeda y M. Sasaki. *Phys. Rev. D* **62**, 024012 (2000).
- [306] R. Maartens. *Phys. Rev. D* **62**, 084023 (2000).
- [307] R. Maartens. *Living Rev. Relativity* **13**, 5 (2010).
- [308] S. Nath, S. Chakraborty y U. Debnath. *JCAP* 0411 012 (2004).
- [309] U. Debnath y S. Chakraborty. arXiv:1104.1673
- [310] L. Amarilla y H. Vucetich. *Int. J. Mod. Phys. A* **18**, 3835 (2010).
- [311] K.A. Bronnikov et al. arXiv: gr-qc/0601114.
- [312] L.Á. Gergely. *Phys. Rev. D* **78**, 084006 (2008).
- [313] L.Á. Gergely. *Phys. Rev. D* **79**, 086007 (2009).
- [314] K.C. Wong et al. *Eur. Phys. J. C.* **68**, 241 (2010).
- [315] P. de Leon. *Mod. Phys. Lett. A* **17**, 2425 (2002).
- [316] P. de Leon. *Class. Quantum Grav.* **20**, 5321 (2003).
- [317] P. de Leon. *Gen. Rel. Grav.* **37**, 53 (2005).
- [318] P. Binetruy, C. Deffayet, U. Ellwanger y D. Langlois. *Phys. Lett. B* **477**, 285 (2000).
- [319] F. Ahmadi, S. Jalalzadeh y H. R. Sepangi. *Phys. Lett. B* **647**, 486 (2007).
- [320] L.E. Mendes y A. Mazumdar. *Phys. Lett. B* **501**, 249 (2001).
- [321] M. Arik y D. Ciftci. *Gen. Rel. Grav.* **37**, 2211 (2005).
- [322] K. Atazadeh, A.M. Ghezelbash y H.R. Sepangi. *Class. Quantum Grav.* **28**, 085013 (2011).

# Lista de publicaciones

Esta Tesis está basada en los siguientes artículos de investigación:

1. J.A. Belinchón.  
*Cosmological Models with Bulk Viscosity in Presence of Adiabatic Matter Creation and Variable  $G$ ,  $c$  and  $\Lambda$ .*  
General Relativity and Gravitation. **32**, 1487 (2000).
2. J.A. Belinchón y P. Dávila.  
*Cosmological Models with Variable "constants". Their Solutions Through Similarity Methods.*  
Classical and Quantum Gravity. **7**, 3183 (2000).
3. J.A. Belinchón, T. Harko y M. K. Mak.  
*Full Cusal Bulk Viscous fluid, Renormalization Group approach.*  
Classical and Quantum Gravity. **19**, 3003 (2002).
4. J.A. Belinchón.  
*About Bianchi I with VSL.*  
Astrophysics and Space Science. **315**, 111 (2008).
5. J.A. Belinchón.  
*Bianchi I with variable  $G$  and  $\Lambda$ . Self-similar approach.*  
Int. Jour. Moder. Phys. **A23**, 5021 (2008).
6. J.A. Belinchón.  
*Bianchi I perfect fluid model with variable  $G$  and  $\Lambda$ .*  
Gravitation & Cosmology. **15**, 306 (2009)
7. J.A. Belinchón.  
*Bianchi II with time varying constants. Self-similar approach.*  
Astro. Space Scien. **323**, 185 (2009). DOI 10.1007/s10509-009-0050-6
8. J.A. Belinchón.  
*Massive cosmic strings in Bianchi type II.*  
Astrophysics and Space Science. **323**, 307 (2009). DOI 10.1007/s10509-009-0065-z
9. J.A. Belinchón.  
*Bianchi VI&III. Self-similar approach.*  
Classical and Quantum Gravity. **26**, 175003 (2009) DOI:10.1088/0264-9381/26/17/175003
10. J.A. Belinchón.  
*Generalized self-similar scalar-tensor theories.*  
Eur. Phys. J. C. **72**, 1866 (2012). DOI 10.1140/epjc/s10052-012-1866-8

11. J.A. Belinchón.  
*(An)Isotropic models in scalar and scalar-tensor cosmologies.*  
Astrophys Space Sci. **338**, 381 (2012). DOI:10.1007/s10509-011-0954-9
12. J.A. Belinchón.  
*Scale-Covariant Theory of Gravitation through Self-Similarity.*  
Chin. Phys. Lett. **29**, 050401 (2012). DOI:10.1088/0256-307X/29/5/050401
13. J.A. Belinchón.  
*Bianchi I in scalar and scalar-tensor cosmologies.*  
Central European Journal of Physics (2012) DOI:10.2478/s11534-012-0087-y
14. J.A. Belinchón.  
*Bianchi VI<sub>0</sub> in Scalar and Scalar-Tensor Cosmologies.* arXiv:1109.2880 [gr-qc].  
Enviado a Journal of Nonlinear Mathematical Physics.
15. O. Pérez-Cornejo y J.A. Belinchón.  
*Exact solutions of a Flat Full Causal Bulk viscous FRW cosmological model through factorization.* arXiv:1204.5938 [gr-qc].
16. J.A. Belinchón.  
*Barber Theory of Gravitation. A self-similar approach.* Enviado
17. J.A. Belinchón.  
 *$f(R, \phi)$  and  $f(R)$  models. A self-similar approach.*  
Enviado a Journal of Mathematics.