

21.132



* 5 3 0 9 6 4 7 6 9 4 *
UNIVERSIDAD COMPLUTENSE

Universidad Complutense de Madrid
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática Aplicada



Algunos problemas en ecuaciones en
derivadas parciales relacionados con la
teoría de Control.

Memoria para optar al título de doctor en Ciencias Matemáticas

Presentada por
Angel Manuel Ramos del Olmo

21.132

Dirigida por
Jesús Ildefonso Díaz Díaz

Madrid, Junio de 1996

A la memoria de mi padre

Agradecimientos

Quiero expresar mi más profundo agradecimiento a todas aquellas personas que de alguna manera han contribuido a que esta tesis se hiciese realidad. En primer lugar, quiero dar las gracias al Profesor Jesus Ildefonso Díaz Díaz por su enorme y desinteresada ayuda durante los años de elaboración de esta memoria y sobre todo por haber compartido conmigo su experiencia y conocimientos.

Deseo también expresar mi más sincero agradecimiento al Profesor Jacques Henry, del Intitut National de Recherche en Informatique et en Automatique (INRIA), por acogerme en dos ocasiones en su centro en Paris, tanto por su apoyo científico (mediante su inestimable colaboración en la elaboración de este trabajo y en especial del Capítulo II), como por las atenciones personales recibidas (en especial por trasladarme en su coche durante los frecuentes períodos de huelga de Paris).

Quiero agradecer al Profesor Enrique Zuazua Iriondo, de este departamento y al Profesor Francisco Bernis Carro, de la Universidad Autónoma de Madrid, el tiempo que han dedicado a atender mis cuestiones y las charlas que hemos tenido sobre distintos aspectos del Capítulo I de esta tesis.

Mi agradecimiento también a todos los miembros del Departamento de Matemática Aplicada de la UCM por su grata acogida desde hace ya cinco años, su permanente disponibilidad y sus consejos y aportaciones en materia de "ciencia". En especial a Jose Manuel Vegas Montaner, quien ha seguido de cerca los temas de mis investigaciones, a Rodolfo Bermejo Bermejo, quien tras acogerme en su proyecto de investigación de la DGICYT no ha cesado de darme ánimos y consejos y a todos los becarios, con los que he establecido una gran amistad y entre los que me gustaría destacar a Lourdes Tello del Castillo y Juan Francisco Padial Molina por su constante apoyo.

Es poco el tiempo que llevo formando parte del Departamento de Informática y Automática de la E.S. de Informática de esta Universidad, sin embargo quiero dar las gracias a todos sus miembros por la calida acogida recibida.

Finalmente, agradezco enormemente a mi familia y en especial a mi madre y a mi esposa, su cariño y comprensión, que aunque lejanos de las arduas matemáticas, han sido de un valor inestimable en la elaboración de esta tesis.

Indice

Indice.	i
Introducción.	iii
I Algunos resultados de controlabilidad aproximada para problemas parabólicos semilineales.	1
1 El método de cancelación.	1
1.1 Controles internos no negativos.	2
1.2 Controles sobre la condición tipo Neumann de la frontera.	4
2 Controlabilidad aproximada vía linealización y Teorema de Punto Fijo de Kakutani: caso de controles sobre el flujo en la frontera.	5
2.1 Observación en tiempo T	6
2.2 Observación en la frontera.	21
3 Resultados positivos y negativos para un problema semilineal de orden dos.	26
3.1 Controlabilidad aproximada cuando la no linealidad es de tipo sublineal.	27
3.2 Resultados negativos para un caso superlineal.	35
4 Resultados positivos y negativos para un problema semilineal de orden superior.	37
4.1 Controlabilidad aproximada cuando la no linealidad es de tipo sublineal.	38
4.2 Resultados negativos para un caso superlineal.	48
II Factorización de un problema elíptico.	53
1 Motivación.	53
2 Un problema elíptico en un dominio rectangular bidimensional.	55
2.1 Formulación del problema.	55
2.2 Una formulación equivalente.	59

3	Una justificación en la formulación de la ecuación de Riccati de P y la ecuación de r	61
3.1	Propiedades de P	61
3.2	Dimensión finita en una variable.	64
3.3	Ecuación de Riccati de P^m y ecuación de r^m	75
3.4	Paso al límite.	79
3.5	Ecuación de Riccati de P y ecuación de r	83
3.6	Conclusiones: El método de factorización.	88
4	Problema de control optimal asociado a la ecuación de Riccati de Q y a la ecuación de w	90
5	Relación entre factorización en el caso continuo y factorización en el caso discreto.	94
5.1	Discretización en diferencias finitas del Problema (\mathcal{P}_0).	94
5.2	El método de factorización aplicado al sistema lineal (\mathcal{P}_h).	97
6	Generalización del dominio (I). Coordenadas conformes.	102
6.1	Definiciones y resultados previos.	102
6.2	Formulación del problema.	104
6.3	Cálculo formal.	106
7	Generalización del dominio (II). Coordenadas ortogonales.	108
7.1	Hipótesis sobre el dominio.	108
7.2	Cálculo Formal.	110
7.3	Una formulación alternativa.	112
8	Generalización del dominio (III). Coordenadas no ortogonales.	114
8.1	Hipótesis sobre el dominio.	114
8.2	Cálculo formal.	115

Introducción.

En esta memoria se abordan varios problemas en ecuaciones en derivadas parciales relacionados con la teoría de Control.

En el Capítulo I estudiamos la *controlabilidad aproximada* de algunos problemas parabólicos de segundo orden en los que aparece un término no lineal o bien en la ecuación parabólica o bien en la condición de flujo en la frontera. Abordamos, tanto el caso en el que el control actúa en el *interior* del conjunto $Q := \Omega \times (0, T)$, como el caso en el que el control actúa *sobre la frontera* $\Sigma := \partial\Omega \times (0, T)$ (o sobre un subconjunto \mathcal{O} de Σ). La mayoría de los resultados tratan el control de problemas con *observación final*, i.e., el objetivo es probar que el conjunto $\{y(T, \cdot; v)\}$ generado por los valores de las soluciones en el tiempo T asociados a unos controles v es denso en $L^2(\Omega)$ cuando v recorre el conjunto de controles admisibles. No obstante, también consideramos un problema con *observación en la frontera*. En este caso probamos que, si $\Sigma_1 \subset \Sigma$, entonces el conjunto $\{y(\cdot, \cdot; v)|_{\Sigma_1}\}$ generado por los valores de las soluciones en Σ_1 es un subconjunto denso de $L^2(\Sigma_1)$ cuando v recorre el conjunto de controles correspondiente.

Una parte importante de los problemas tratados en este capítulo están motivados por el trabajo Henry [35]. Los resultados y las técnicas de dicho trabajo han sido pioneros en el estudio de la controlabilidad aproximada de problemas parabólicos de tipo semilineal. Así, por ejemplo, la técnica de aplicar el Teorema de Punto Fijo de Kakutani después de un argumento previo de linealización, fué introducida, al parecer por primera vez, en el citado trabajo.

Las dos primeras secciones de este capítulo utilizan dos métodos distintos para demostrar la propiedad de la controlabilidad aproximada de los problemas considerados. En la Sección 1 se ilustra el llamado *método de cancelación*: el problema de control no lineal se aborda como una perturbación de un problema de control lineal cancelando el término no lineal. Este método lo aplicamos al estudio de la controlabilidad aproximada de dos problemas parabólicos semilineales (veanse los problemas (\mathcal{P}_D) y (\mathcal{P}_N) de la Sección 1). La controlabilidad de estos dos problemas ya se había estudiado en Henry [35], donde se requerían, para el primer problema, ciertas propiedades sobre la función no

lineal. Además, para ambos problemas se tomaban datos iniciales nulos y se obtenía la controlabilidad en el espacio $L^2(\Omega)$. En esta memoria probamos la controlabilidad de esos dos problemas para términos no lineales meramente continuos y no decrecientes, cuando el dato inicial y_0 se supone en $L^\infty(\Omega)$. Además obtenemos la controlabilidad en $L^p(\Omega)$ para cualquier $p \in \mathbb{R}$ tal que $1 < p < \infty$. En el primer problema analizamos también el caso en el que existe una restricción sobre el signo de los controles, lo que con frecuencia sucede en la práctica. Resultados de controlabilidad con este tipo de restricciones ya se habían tratado en Díaz [18] [20] para el problema de obstáculo asociado a la ecuación del calor.

La sección 2 contiene el tratamiento de dos problemas de control diferentes (veanse los problemas (\mathcal{P}_1) y (\mathcal{P}_2)) mediante la aplicación del Teorema de Punto Fijo de Kakutani. Aplicaremos también ciertos argumentos de dualidad para tratar el problema linealizado, introducidos recientemente en Lions [42] y Fabre-Puel-Zuazua [28] [29]. Esta sección contiene diversas mejoras de los resultados de Henry [35]. En particular, formulamos todos los resultados de esta sección bajo una misma condición sobre el comportamiento en el infinito del término no lineal $f(y)$: asumimos que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es *sublineal en el infinito* i.e. existen ciertas constantes no negativas a , b y M tales que

$$|f(s)| \leq a + b|s| \quad \text{para toda } s \in \mathbb{R}, |s| > M.$$

Extendemos, de esta manera, los resultados que sobre estos problemas fueron probados en Henry [35], donde se requería que el dato inicial fuese nulo (en esta memoria se introducen datos iniciales en $L^2(\Omega)$) y que la función f fuese acotada, en el primer problema y que fuese lipschitziana y monótona creciente, en el segundo problema. Además, introducimos en los dos problemas de esta sección un término eventualmente multívoco, dado por un grafo maximal monótono acotado de \mathbb{R}^2 . Este tipo de términos ya fué tratado en Díaz [21] y permite ampliar considerablemente el campo de las aplicaciones.

En las Secciones 3 y 4 mostramos resultados positivos (utilizando el método descrito en la Sección 2) y negativos sobre la controlabilidad aproximada de ciertos problemas parabólicos de orden dos (Sección 3) y de orden superior a dos (Sección 4) según sea el carácter (sublineal o superlineal) de la no linealidad que interviene en el problema. Entre otros objetivos, se logra así mostrar que, en el estudio de la controlabilidad aproximada, lo que más relevante de la no linealidad no es tanto su regularidad sino su comportamiento en el infinito. El resultado positivo de controlabilidad aproximada de la Sección 3 extiende los resultados que aparecen sobre este caso en Fabre-Puel-Zuazua [28] [29], al incluir un término multívoco (como hacemos en la Sección 2) y considerar funciones no lineales de tipo sublineal en el infinito, cuya regularidad consiste en ser continuas y existir su derivada en al menos un punto, en lugar de ser funciones lipschitzianas (como se requiere

en los trabajos citados). Resultados negativos de controlabilidad en problemas de orden dos para linealidades del tipo $f(s) = |s|^{r-1}s$, fueron ya probados en Henry [35] (mediante un contraejemplo debido a A. Bamberger) para el caso unidimensional con control en el flujo, usando un método de energía. Más tarde, en Díaz [18], [20], la optimalidad (de nuevo para el caso $f(s) = |s|^{p-1}s$ pero con controles en la traza sobre la frontera) fué obtenida mostrando la existencia de ciertas *funciones de obstrucción*. De hecho, en Díaz [23] se prueba la controlabilidad aproximada en el caso superlineal para una conveniente subclase de *estados descados*. El resultado negativo de controlabilidad que damos en la Sección 3 considera el problema con controles en el interior del dominio. La controlabilidad aproximada para ecuaciones parabólicas semilineales de orden superior a dos parece no haber sido tratada anteriormente en la literatura.

El segundo capítulo de esta memoria trata sobre la *factorización* de un problema elíptico de orden dos. Un método usual para resolver numéricamente este tipo de problemas, después de su discretización por diferencias finitas o elementos finitos, es factorizar la matriz tridiagonal por bloques que se obtiene en forma LU. Entonces se resuelven dos sistemas lineales de tipo triangular por sustitución. El propósito de este estudio es mostrar que la misma factorización se puede extender al problema infinito dimensional. En este caso, los sistemas de tipo triangular se corresponden con ecuaciones de valor inicial de primer orden.

La Sección 1 comienza a modo de ejemplo, con la resolución de un problema unidimensional. A continuación se aborda el problema de la factorización sobre un dominio bidimensional rectangular. Utilizamos la técnica de *inclusión invariante*, que fué introducida por R. Bellman y sus colaboradores (vease, por ejemplo, Bellman [6], Bellman-Kalaba-Wing [8], Bellman-Dreyfus [7], etc...). Esta técnica consiste en incluir el problema inicial en una familia de problemas de la misma naturaleza, que dependen de un parámetro y que son resueltos por la solución de nuestro problema de forma recursiva. Dicha técnica ha sido muy usada para desacoplar los sistemas resultantes en problemas de Control Optimal asociados a ecuaciones de evolución, ya sean de tipo parabólico (vease las Secciones 4, 5 y 6 de Capítulo 4 de Lions [40]) o de tipo hiperbólico (vease la Sección 5 del Capítulo 4 de Lions [40]). En ese casos, el parámetro de la inclusión es la variable de tiempo. En nuestro problema, incluimos el dominio espacial en una familia de dominios limitados por una frontera "movible" que depende del parámetro. En este proceso introduciremos un operador relacionando la traza de la función desconocida y la traza de su derivada normal sobre la frontera "movible". Se mostrará que este operador satisface una ecuación de tipo Riccati. En la Sección 4 mostraremos que este hecho no es casual, sino que se debe a la equivalencia entre nuestro problema y un problema de control optimal. Otros trabajos en los que aparecen técnicas similares son Balakrishnan-Lions [4], Beusoussan [10], etc...

Ecuaciones de tipo Riccati aparecen y son tratadas en muchos otros trabajos, como por ejemplo, Erzberger-Kim [27], Tzafestas-Nightingale [57], Wang [58], etc...

La motivación de este segundo capítulo de la memoria tiene su punto de partida en el reciente trabajo Henry-Yvon [36], en el que se utilizan de manera únicamente formal estas técnicas de factorización para resolver un problema de control optimal asociado a una ecuación elíptica. Los autores obtienen el control buscado, de una manera explícita, a través de las soluciones del sistema desacoplado que genera el método de factorización y en las que de nuevo aparecen las ecuaciones de tipo Riccati. Uno de los objetivos de este segundo capítulo es dar un tratamiento riguroso a los argumentos de Henry-Yvon [36] mediante el uso de adecuados espacios funcionales.

En la Sección 5 se considera la discretización por diferencias finitas del problema elíptico y se muestra que la aplicación de la técnica de la inclusión invariante sobre el sistema lineal resultante conduce a la factorización LU por bloques de la matriz tridiagonal por bloques que representa al operador de Laplace sobre el rectángulo. Esto dará nuevas interpretaciones de los bloques de la descomposición LU en términos de la relación entre las condiciones de Dirichlet y de Neumann sobre la frontera.

Por último en las Secciones 6, 7 y 8 se generalizan los resultados de secciones anteriores al caso de distintos dominios bidimensionales más generales que el rectángulo, obteniéndose unas nuevas ecuaciones que en ese caso son de formulación más compleja.

Capítulo I

Algunos resultados de controlabilidad aproximada para problemas parabólicos semilineales.

1 El método de cancelación.

El principal objetivo de esta sección es presentar algunos resultados relativos a la controlabilidad aproximada en L^p del problema de Dirichlet semilineal

$$(\mathcal{P}_D) \begin{cases} y_t - \Delta y + f(y) = v & \text{en } Q = \Omega \times (0, T), \\ y = 0 & \text{en } \Sigma = \partial\Omega \times (0, T), \\ y(0) = y_0 & \text{en } \Omega, \end{cases}$$

y el problema de Neumann no lineal

$$(\mathcal{P}_N) \begin{cases} y_t - \Delta y = 0 & \text{en } Q, \\ \frac{\partial y}{\partial \nu} + f(y) = v & \text{en } \Sigma, \\ y(0) = y_0 & \text{en } \Omega, \end{cases}$$

donde Ω es un subconjunto acotado \mathbb{R}^n tal que $\partial\Omega$ es una variedad diferenciable $(n - 1)$ dimensional y Ω está localmente a un lado de $\partial\Omega$, $T > 0$, $Q = \Omega \times (0, T)$, f es una función real continua, $y_0 \in L^\infty(\Omega)$, ν es el vector normal unitario exterior en $\partial\Omega$ y en ambos casos v representa el control.

En el Problema (\mathcal{P}_D) mostraremos una propiedad más fuerte que la usual de controlabilidad aproximada: Para cierta subclase de estados deseados se puede controlar el problema usando exclusivamente controles no negativos. En ambos casos probaremos la

controlabilidad aproximada en L^p para cualquier p tal que $1 < p < \infty$. Los casos límites $p = 1$ y $p = \infty$ pueden también ser tratados con algunas modificaciones técnicas

El tratamiento que daremos a los Problemas (\mathcal{P}_D) y (\mathcal{P}_N) tendrá el mismo programa general: primero probaremos el resultado para un caso lineal asociado y a continuación probaremos el resultado para el caso no lineal por medio de una *técnica de cancelación* ya introducida en Henry [35]. Esta técnica consiste en modificar el control asociado al caso lineal mediante una perturbación que cancela la parte no lineal que aparece en la ecuación o en la condición de la frontera.

1.1 Controles internos no negativos.

A lo largo de la extensa literatura sobre la controlabilidad aproximada de problemas parabólicos no lineales (vease e.g. el survey Díaz [21]) el estudio de la controlabilidad aproximada bajo la restricción de controles no negativos parece haber sido inexplorada antes del trabajo Díaz [20], que lo trata para el problema parabólico de obstáculo.

Hay que poner de relieve que, en contraste con el caso sin restricciones sobre los controles (vease e.g. Henry [35] y Díaz-Fursikov [25]), la existencia de restricciones sobre los controles introduce importantes dificultades adicionales, incluso si los controles v actúan sobre todo el dominio Q .

Comenzaremos considerando el caso lineal, que después usaremos en la prueba del caso no lineal. En el resto del capítulo asumiremos $1 < p < \infty$. Dado un conjunto medible \mathcal{M} de \mathbb{R}^d ($d \geq 1$) definimos como $L_+^p(\mathcal{M}) = \{g \in L^p(\mathcal{M}) : g \geq 0 \text{ p.c.t. punto de } \mathcal{M}\}$.

Teorema 1 Sean $h \in L^p(Q)$, $Y_0 \in L^p(\Omega)$ y $a \in L^\infty(Q)$. Denotamos por $Y(\cdot; v)$ a la solución de

$$(\mathcal{LP}_D) \begin{cases} Y_t - \Delta Y + aY = h + v & \text{en } Q \\ Y = 0 & \text{en } \Sigma \\ Y(0) = Y_0 & \text{en } \Omega. \end{cases}$$

Entonces, si \mathcal{U} es un subconjunto denso de $L_+^p(Q)$, el conjunto $F := \{Y(T; v); v \in \mathcal{U}\}$ es denso en $Y(T; 0) + L_+^p(\Omega)$. \square

Demostración: Por linealidad podemos asumir que $Y_0 \equiv 0$ y $h \equiv 0$. Supongamos que existe $y_d \in L_+^p(\Omega)$ tal que $y_d \notin \overline{F}$ (notese que \overline{F} es un conjunto convexo y cerrado). Entonces, por el Teorema de Hahn-Banach en su forma geométrica (vease, por ejemplo, el Teorema 1.7 de Brezis [13]), podemos separar y_d de \overline{F} , i.e. existe $\alpha \in \mathbb{R}$ y $g \in L^{p'}(\Omega)$ (con $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$) tal que

$$\int_{\Omega} Y(T; v)g dx < \alpha < \int_{\Omega} y_d g dx \quad \text{para todo } v \in \mathcal{U}.$$

Además, si $v \in L_+^p(Q)$ y $\lambda \in \mathbb{R}_+$, entonces, por linealidad, $Y(T, \lambda v) = \lambda Y(T, v) \in \bar{F}$ y por tanto

$$(1.1) \quad \int_{\Omega} Y(T; v) g dx \leq 0 < \alpha < \int_{\Omega} y_d g dx \quad \text{para todo } v \in \mathcal{U}.$$

Ahora, sea $q \in C([0, T] : L^{p'}(\Omega))$ la solución del problema retrógrado auxiliar

$$(1.2) \quad \begin{cases} -q_t - \Delta q + aq = 0 & \text{en } Q \\ q = 0 & \text{en } \Sigma \\ q(T) = g & \text{en } \Omega. \end{cases}$$

Multiplicando en (1.2) por $Y(v)$, con $v \in \mathcal{U}$ arbitrario, obtenemos

$$0 \geq \int_{\Omega} g(x) Y(T, x; v) dx = \int_Q q v dx dt \quad \forall v \in \mathcal{U}.$$

Por la densidad de \mathcal{U} en $L_+^p(Q)$ necesariamente, $q \leq 0$ en Q y $g \leq 0$ en Ω , lo cual contradice (1.1). ■

Ahora estamos preparados para abordar el problema no lineal (\mathcal{P}_D) . Por simplicidad asumiremos que

$$(1.3) \quad f \text{ es una función real continua no decreciente}$$

y que

$$(1.4) \quad y_0 \in L^\infty(\Omega).$$

Teorema 2 *Asumamos (1.3) y (1.4). Si \mathcal{U} es un subconjunto denso de $L_+^p(Q)$ entonces el conjunto $F = \{y(T; v) \text{ solución de } (\mathcal{P}_D); v \in \mathcal{U}\}$ es denso en $y(T; 0) + L_+^p(\Omega)$. □*

Demostración: Como $y_0 \in L^\infty(\Omega)$, por el principio del máximo $y(\cdot; 0) \in L^\infty(Q)$ y $h(\cdot) := -f(y(\cdot; 0)) \in L^\infty(Q)$. Entonces, el Teorema 1, con $Y_0 = 0$, $h = -f(y(\cdot; 0))$ y $a \equiv 0$, implica que existe $w_\varepsilon \in L_+^\infty(Q)$ tal que

$$\|Y(T; w_\varepsilon) - y_d\|_{L^p(\Omega)} < \varepsilon,$$

con $y_d \in y(T; 0) + L_+^p(\Omega)$. Además, de nuevo por el principio del máximo, $f(Y(w_\varepsilon)) \in L^p(Q)$. Ahora, dado $\delta > 0$, sea \tilde{y} la solución del problema auxiliar

$$(\mathcal{P}_D^*) \quad \begin{cases} \tilde{y}_t - \Delta \tilde{y} + f(\tilde{y} + Y(w_\varepsilon)) = f(Y(w_\varepsilon)) + \delta & \text{en } Q \\ \tilde{y} = 0 & \text{en } \Sigma \\ \tilde{y}(0) = 0 & \text{en } \Omega. \end{cases}$$

Entonces, si definimos $y = \tilde{y} + Y(w_\varepsilon)$, podemos fácilmente comprobar que y es la solución de (\mathcal{P}_D) con

$$v_\varepsilon = w_\varepsilon + f(Y(w_\varepsilon)) - f(y(\cdot; 0)) + \delta \in L^p(Q).$$

Además $v_\varepsilon \geq 0$, puesto que f es no decreciente y $Y(\cdot; w_\varepsilon) \geq Y(\cdot; 0) = y(\cdot; 0)$. Usando la densidad de \mathcal{U} y la dependencia continua sobre los datos de la solución de (\mathcal{P}_D^*) , podemos elegir $v \in \mathcal{U}$ tal que $\|v - v_\varepsilon\|_{L^p(Q)} \leq \varepsilon$. Finalmente, aplicando las desigualdades de Hölder y Young, concluimos (para $\delta > 0$ suficientemente pequeño) que

$$\|\tilde{y}(T)\|_{L^p(\Omega)} \leq C_1 \varepsilon$$

y por tanto

$$\|y(T; v) - y_d\|_{L^p(\Omega)} \leq C_2 \varepsilon. \quad \blacksquare$$

Observación 3 En el teorema anterior también es posible abordar el caso en el que f es un grafo maximal monótono β de \mathbb{R}^2 . La prueba de la existencia de solución se puede encontrar, por ejemplo, en Benilan [9] y el Teorema 2 sigue siendo cierto si asumimos que $\beta_+(r) < +\infty$ para todo $r \in D(\beta)$, donde

$$\beta_+(r) := \sup\{b \in \mathbb{R} : b \in \beta(r)\}.$$

Esta hipótesis ocurre en muchos casos: i) El caso de $D(\beta) = \mathbb{R}$ (como, por ejemplo, cuando β es una función continua no decreciente o la función de Heaviside); ii) La condición también se satisface en algunos casos en los que $D(\beta) \neq \mathbb{R}$ tales como, por ejemplo,

$$\beta(r) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } r < 0 \\ (-\infty, 0] & \text{si } r = 0 \\ 0 & \text{si } r > 0. \end{cases}$$

Observación 4 Es fácil ver que el Teorema 1 con la descomposición $Y = Y_+ - Y_-$, donde Y_+ e Y_- son no negativos, implica la controlabilidad aproximada en L^p para el problema lineal sin restricciones sobre los controles. Para el caso no lineal con restricciones en los controles la controlabilidad aproximada en L^p se deduce mediante obvias modificaciones en la demostración del Teorema 2. Por último, señalemos también, que el caso sin restricciones fue abordado ya en Henry [35] sin la hipótesis (1.3), pero bajo una condición adicional sobre el comportamiento de f en el infinito.

1.2 Controles sobre la condición tipo Neumann de la frontera.

En esta sección estudiaremos el Problema (\mathcal{P}_N) . Aplicaremos la técnica de cancelación con el objetivo de probar la controlabilidad aproximada L^p (esta vez con controles sin restricciones).

Teorema 5 *Asumimos (I.3), (I.4). Para cada $v \in L^p(\Sigma)$ denotamos por $y(v)$ a la solución de*

$$(\mathcal{P}_N) \begin{cases} y_t - \Delta y = 0 & \text{en } Q \\ \frac{\partial y}{\partial \nu} + f(y) = v & \text{en } \Sigma \\ y(0) = y_0 & \text{en } \Omega. \end{cases}$$

Entonces, si \mathcal{U} es denso en $L^p(\Sigma)$, el conjunto $F = \{y(T; v); v \in \mathcal{U}\}$ es denso en $L^p(\Omega)$.

□

Demostración: Para cada $y_d \in L^p(\Omega)$ y $\varepsilon > 0$ fijos, usamos la decomposición $y = \tilde{y}_\varepsilon + Y$ con Y la solución del problema lineal asociado

$$(\mathcal{LP}_N) \begin{cases} Y_t - \Delta Y = 0 & \text{en } Q \\ \frac{\partial Y}{\partial \nu} = -f(y(\cdot; 0)) + v_\varepsilon & \text{en } \Sigma \\ Y(0) = y_0 & \text{en } \Omega, \end{cases}$$

para una adecuada v_ε tal que $\|y(T; v_\varepsilon) - y_d\|_{L^p(\Omega)} < \varepsilon$ (la existencia de v_ε se puede probar de nuevo por medio del Teorema de Hahn-Banach; vease Lions [40]). Para $\delta > 0$ sea \tilde{y} la solución del problema no lineal

$$(\mathcal{P}_N^*) \begin{cases} \tilde{y}_t - \Delta \tilde{y} = 0 & \text{en } Q \\ \frac{\partial \tilde{y}}{\partial \nu} + f(\tilde{y} + Y(v_\varepsilon)) = f(Y(v_\varepsilon)) + \delta & \text{en } \Sigma \\ \tilde{y}(0) = 0 & \text{en } \Omega. \end{cases}$$

Entonces, mediante estimaciones L^p a priori, es fácil ver que si $\delta > 0$ es suficientemente pequeño, existe $C > 0$ tal que

$$\|\tilde{y}(T)\|_{L^p(\Omega)} \leq C\varepsilon.$$

Por último, usando la desigualdad triangular, obtenemos el resultado deseado. ■

2 Controlabilidad aproximada vía linealización y Teorema de Punto Fijo de Kakutani: caso de controles sobre el flujo en la frontera.

Esta sección trata algunos resultados de controlabilidad aproximada para problemas parabólicos no lineales a través de un método diferente al de la Sección 1. La idea es aplicar un argumento de punto fijo para un operador multívoco (el Teorema de Punto

Fijo de Kakutani). Consideraremos los dos problemas de control siguientes.

$$(\mathcal{P}_1) \begin{cases} y_t - \Delta y + f(y) + a(x, t)\beta(y) \ni h & \text{en } Q \\ \frac{\partial y}{\partial \nu} = v\chi_{\mathcal{O}} & \text{en } \Sigma \\ y(x, 0) = y_0(x) & \text{en } \Omega, \end{cases}$$

y

$$(\mathcal{P}_2) \begin{cases} y_t - \Delta y + a(x, t)\beta(y) \ni h & \text{en } Q \\ \frac{\partial y}{\partial \nu} + f(y) = 0 & \text{en } \Sigma_1 \\ \frac{\partial y}{\partial \nu} = v & \text{en } \Sigma_2 \\ y(x, 0) = y_0(x) & \text{en } \Omega, \end{cases}$$

donde $\mathcal{O} \subset \Sigma$ y ν es de nuevo el vector normal unitario exterior en $\partial\Omega$. La controlabilidad será considerada bajo diferentes criterios: observación en tiempo T para (\mathcal{P}_1) (Sección 2.1) y observación en Σ_1 para (\mathcal{P}_2) (Sección 2.2). Nuestro método combinará algunas ideas introducidas en Henry [35], Lions [42] and Fabre-Puel-Zuazua [28].

Señalamos que los resultados de controlabilidad son independientes de la unicidad de solución para un control fijo: Así, por ejemplo, si $a(x, t) < 0$ y β es multívoco puede haber pérdida de la unicidad de soluciones (vease Díaz [22]).

2.1 Observación en tiempo T .

Sea \mathcal{O} un subconjunto abierto no vacío de $\Sigma = \partial\Omega \times (0, T)$. Sea $a \in L^\infty(Q)$, y consideremos $h \in L^2(Q)$, $y_0 \in L^2(\Omega)$. Definimos

$$X^1(Q) = \{\varphi : \varphi \in H^{1,2}(Q), \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = 0, \varphi(\cdot, T) \equiv 0\}.$$

Aquí y en lo que sigue usaremos la notación

$$H^{r,s}(Q) = L^2(0, T; H^s(\Omega)) \cap H^r(0, T; L^2(\Omega))$$

para $r, s \in \mathbb{R}$.

Inspirados en Lions-Magenes [45] definimos la noción de solución débil de la siguiente manera

Definición 6 Una función $y \in L^2(Q)$ es una solución débil del Problema (\mathcal{P}_1) si existe $b \in L^2(Q)$ con $b \in \beta(y)$ tal que

$$\begin{aligned} (y, -\varphi_t - \Delta \varphi)_{L^2(Q)} &= (h - f(y) - a(x, t)b, \varphi)_{L^2(Q)} \\ &+ (v\chi_{\mathcal{O}}, \varphi)_{L^2(\Sigma)} + (y_0, \varphi(\cdot, 0))_{L^2(\Omega)} \quad \forall \varphi \in X^1(Q). \end{aligned}$$

Teorema 7 Sea f una función real satisfaciendo las dos condiciones siguientes

$$(1.5) \quad f(\cdot) \text{ es continua y existe } f'(s_0) \text{ para algun } s_0 \in \mathbb{R},$$

$$(1.6) \quad \begin{cases} \text{Existe } M > 0, c_1 > 0, \text{ y } c_2 > 0 \text{ tal que } |f(s)| \leq c_1 + c_2|s|, \\ \text{si } |s| > M. \end{cases}$$

Asumimos también que β es un grafo maximal monótono acotado de \mathbb{R}^2 tal que $D(\beta) = \mathbb{R}$. Entonces el conjunto $F := \{y(T; v) : y(T; v) \text{ es una solución } (\mathcal{P}_1) \text{ con } v \in L^\infty(\mathcal{O})\}$ es denso en $X = L^2(\Omega)$. \square

Antes de comenzar la prueba del Teorema 7 necesitamos algunos resultados previos.

Proposición 8 Sea $a = a(t, x) \in L^\infty(Q)$. Existe una constante $C > 0$ tal que para cada $k \in L^2(\Sigma)$, $h \in L^2(Q)$ y $\omega^0 \in L^2(\Omega)$, la solución ω de

$$(1.7) \quad \begin{cases} \omega_t - \Delta\omega + a(t, x)\omega = h & \text{en } Q \\ \frac{\partial\omega}{\partial\nu} = k & \text{en } \Sigma \\ \omega(0) = \omega^0 & \text{en } \Omega \end{cases}$$

satisface

$$(1.8) \quad \|\omega\|_{H^{1/2,1}(Q)} \leq C_a \left(\|\omega^0\|_{L^2(\Omega)} + \|h\|_{L^2(Q)} + \|k\|_{L^2(\Sigma)} \right).$$

Además, si $\{a_n\} \subset L^\infty(Q)$ con $\sup_{n \in \mathbf{N}} \{\|a_n\|_{L^\infty(Q)}\} < \infty$, entonces podemos elegir $C_{a_n} = C$ independiente de n . \square

La prueba la hacemos en dos pasos.

Lema 9 La conclusión de la Proposición 8 es verdad si $\omega^0 \equiv 0$ y $k \equiv 0$. \square

Demostración del Lema 9. Por densidad podemos elegir una sucesión $a^n \in C^\infty(\bar{Q})$ tal que $a^n \rightarrow a$ en la topología de $L^2(Q)$ y $\{a^n\}$ es uniformemente acotada en la topología de $L^\infty(Q)$. Entonces, si denotamos por ω^n a la solución de

$$\begin{cases} \omega_t^n - \Delta\omega^n + a^n(x, t)\omega^n = h & \text{en } Q \\ \frac{\partial\omega^n}{\partial\nu} = 0 & \text{en } \Sigma \\ \omega^n(0) = 0 & \text{en } \Omega, \end{cases}$$

por resultados bien conocidos (vease, por ejemplo, la Sección 6.1 del Capítulo 4 de Lions-Magenes [46]), $\omega^n \in H^{1,2}(Q)$ y

$$\|\omega^n\|_{H^{1,2}(Q)} \leq C \left(\|h\|_{L^2(Q)} + \|\omega^n\|_{L^2(Q)} \right)$$

con C independiente de n . Además, multiplicando en el problema anterior por ω^n y usando la desigualdad de Young, es fácil deducir que

$$\| \omega^n \|_{L^2(Q)} \leq C' \| h \|_{L^2(Q)}$$

con C' independiente de n . De este modo, si ω es el límite de ω^n en la topología débil de $H^{1,2}(Q)$, a través de la Definición 6 podemos pasar al límite en el problema y deducir que ω es la única solución del problema

$$\begin{cases} \omega_t - \Delta\omega + a(x, t)\omega = h & \text{en } Q \\ \frac{\partial\omega}{\partial\nu} = 0 & \text{en } \Sigma \\ \omega(0) = 0 & \text{en } \Omega \end{cases}$$

y satisface

$$\| \omega \|_{H^{1,2}(Q)} \leq C'' \| h \|_{L^2(Q)}$$

con C'' independiente de n . ■

Demostración de la Proposición 8. Sea $\omega = u + z$, donde u satisface

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = h & \text{en } Q \\ \frac{\partial u}{\partial\nu} = k & \text{en } \Sigma \\ u(0) = \omega_0 & \text{en } \Omega \end{cases}$$

y z es solución de

$$(1.9) \quad \begin{cases} z_t - \Delta z + az = -au & \text{en } Q \\ \frac{\partial z}{\partial\nu} = 0 & \text{en } \Sigma \\ z(0) = 0 & \text{en } \Omega. \end{cases}$$

Entonces tenemos la estimación

$$\| u \|_{H^{1/2,1}(Q)} \leq c_1 \left(\| k \|_{L^2(\Sigma)} + \| \omega_0 \|_{L^2(\Omega)} + \| h \|_{L^2(Q)} \right)$$

(vease, por ejemplo, la Sección 15.1 del Capítulo 4 de Lions-Magenes [46]). Finalmente, si aplicamos el Lema 9, obtenemos que

$$\| z \|_{H^{1/2,1}(Q)} \leq \| z \|_{H^{1,2}(Q)} \leq C \| u \|_{L^2(Q)}. \quad \blacksquare$$

Proposición 10 Si ω es la solución de (1.7), entonces $\omega \in \mathcal{C}([0, T]; L^2(\Omega))$. Además, si $k \in H^{1/4, 1/2}(\Sigma)$, entonces $\omega \in H^{1,2}((\delta, T) \times \Omega)$ para todo $0 < \delta < T$. □

Demostración: Sabemos que $\omega \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$ y, acorde con Lions-Magenes [45] (vease la Proposición 12.1 del Capítulo 1 de dicho libro),

$$\Delta\omega \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)).$$

De este modo

$$\omega_t = h - a(x, t)\omega + \Delta\omega \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)).$$

Además, usando el Teorema 3.1 del Capítulo 1 de Lions-Magenes [45], deducimos que

$$\omega \in \mathcal{C}([0, T]; [H^1(\Omega), H^{-1}(\Omega)]_{1/2}),$$

donde $[X, Y]_\theta$ denota el espacio θ -interpolado entre los espacios de Banach X y Y , si X es un subconjunto denso de Y y $X \subset Y$ es una inyección continua (para más detalle vease, por ejemplo, la Sección 2 del Capítulo 1 de Lions-Magenes [45]). Ahora, usando el Teorema 12.4 del Capítulo 1 de Lions-Magenes [45], se obtiene que $[H^1(\Omega), H^{-1}(\Omega)]_{1/2} = L^2(\Omega)$. Por otro lado, para todo $\delta \in \mathbb{R}$ tal que $0 < \delta < T$, $w(\delta) \in H^1(\Omega)$. De este modo, aplicando el Teorema 6.1 del Capítulo 4 de Lions-Magenes [46], deducimos que si $k \in H^{1/4, 1/2}(\Sigma)$, entonces $\omega \in H^{1,2}((\delta, T) \times \Omega)$. ■

Siguiendo Lions [42] y Fabre-Puel-Zuazua [28], [29], para $\varphi^0 \in L^2(\Omega)$ introducimos el funcional

$$J(\varphi^0) = \frac{1}{2} \left(\int_{\mathcal{O}} |\varphi(x, t)|^2 d\Sigma \right)^2 + \varepsilon |\varphi^0|_{L^2(\Omega)}^2 - \int_{\Omega} y_d \varphi^0 dx,$$

donde $\varphi(x, t)$ es la solución del problema retrógrado

$$(I.10) \quad \begin{cases} -\varphi_t - \Delta\varphi + a(x, t)\varphi = 0 & \text{en } Q \\ \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} = 0 & \text{en } \Sigma \\ \varphi(T) = \varphi^0 & \text{en } \Omega. \end{cases}$$

Observación 11 Señalamos que, si reformulamos el problema en forma no retrógrada, por la Definición 6, una función φ es solución de (I.10) si

$$(\varphi, \psi_t - \Delta\psi + a(x, t)\psi)_{L^2(Q)} = (\psi(T), \varphi^0)_{L^2(\Omega)} \quad \forall \psi \in X^1(Q).$$

Proposición 12 Si \mathcal{O} es un subconjunto abierto no vacío de Σ , $a \in L^\infty(Q)$ y φ satisface

$$\begin{cases} -\varphi_t - \Delta\varphi + a(x, t)\varphi = 0 & \text{en } Q \\ \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} = 0 & \text{en } \Sigma, \end{cases}$$

con $\varphi(T) \in L^2(\Omega)$ y

$$\varphi = 0 \quad \text{en } \mathcal{O},$$

entonces $\varphi \equiv 0$ en Q . □

Demostración: Sea $t^* = \sup\{t \leq T : \exists x \in \partial\Omega \text{ tal que } (x, t) \in \mathcal{O}\}$. Entonces, por un teorema de continuación única (vease Mizohata [49] y Saut-Scheurer [53]) y la unicidad de soluciones de este tipo de problemas, deducimos que $\varphi \equiv 0$ en $Q^* = \Omega \times (0, t^*)$. Finalmente, por resultados de unicidad retrógrada (vease Friedman [31], página 175), se concluye que $\varphi \equiv 0$ en el dominio completo Q . ■

Observación 13 En la demostración de la Proposición 12 podemos aplicar el argumento de continuación única puesto que $\varphi \in L^2(\delta, T; H^2(\Omega))$ para todo $0 < \delta < T$ (vease la Proposición 10).

Las dos proposiciones siguientes son resultados similares a los presentados en Fabre-Puel-Zuazua [29] (en las Proposiciones 2.2 y 2.3 de dicho trabajo) pero adaptados a nuestro caso. Las demostraciones de estos resultados son adaptaciones, a nuestro problema, de las hechas en el trabajo citado y las expondremos solo para comodidad del lector.

Proposición 14 Para todo $\varepsilon > 0$, $y_d \in L^2(\Omega)$ y $a \in L^\infty(Q)$, el funcional $J(\cdot; a, y_d) : L^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ es estrictamente convexo y satisface

$$(I.11) \quad \liminf_{|\varphi^0|_2 \rightarrow \infty} \frac{J(\varphi^0; a, y_d)}{|\varphi^0|_2} \geq \varepsilon.$$

Además $J(\cdot; a, y_d)$ alcanza su mínimo en un único punto $\hat{\varphi}^0 \in L^2(\Omega)$ y

$$(I.12) \quad \hat{\varphi}^0 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad |y_d|_2 \leq \varepsilon. \quad \square$$

Demostración: Si J no satisface (I.11), entonces existirá una sucesión $\{\varphi_n^0\} \subset L^2(\Omega)$ tal que

$$|\varphi_n^0|_2 \rightarrow +\infty \quad \text{y} \quad \frac{\liminf_{n \rightarrow +\infty} J(\varphi_n^0; a, y_d)}{|\varphi_n^0|_2} < \varepsilon.$$

De este modo, si φ_n es la solución de (I.10) con dato inicial φ_n^0 , tenemos que

$$(I.13) \quad \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathcal{O}} \frac{|\varphi_n(x, t)|}{|\varphi_n^0|_2} d\Sigma = 0,$$

puesto que en caso contrario

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{J(\varphi_n^0; a, y_d)}{|\varphi_n^0|_2} &= \liminf_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} |\varphi_n^0|_2 \left(\int_{\mathcal{O}} \frac{|\varphi_n(t, x)|}{|\varphi_n^0|_2} d\Sigma \right)^2 + \varepsilon - \int_{\Omega} y_d \frac{\varphi_n^0}{|\varphi_n^0|_2} dx \right) \\ &\geq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} |\varphi_n^0|_2 \left(\int_{\mathcal{O}} \frac{|\varphi_n(t, x)|}{|\varphi_n^0|_2} d\Sigma \right)^2 + \varepsilon - |y_d|_2 \right) = +\infty. \end{aligned}$$

Al mismo tiempo, $\frac{\varphi_n^0}{|\varphi_n^0|_2}$ tiene norma unitaria y por tanto converge débilmente en $L^2(\Omega)$ a un elemento $\psi^0 \in L^2(\Omega)$. Entonces, por la Proposición 8, $\{\frac{\varphi_n}{|\varphi_n^0|_2}\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge débilmente en $L^2(\Omega)$ a ψ (solución de (I.10) con $\psi(T) = \psi^0$) y, por (I.13) y la propiedad de continuación única de la Proposición 12, $\psi^0 \equiv 0$. Además, como

$$J(\varphi_n^0; a, y_d) \geq |\varphi_n^0|_2 \left(\varepsilon - \int_{\Omega} y_d \frac{\varphi_n^0}{|\varphi_n^0|_2} dx \right),$$

deducimos que

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{J(\varphi_n^0; a, y_d)}{|\varphi_n^0|_2} \geq \varepsilon,$$

lo cual es una contradicción con lo supuesto.

En relación a la prueba de (I.12), usamos que $J(\cdot; a, y_d)$ es estrictamente convexo y continuo en $L^2(\Omega)$ y que

$$\lim_{|\varphi_n^0|_2 \rightarrow +\infty} J(\varphi_n^0; a, y_d) = +\infty.$$

Entonces $J(\cdot; a, y_d)$ alcanza su mínimo en un único punto $\hat{\varphi}^0 \in L^2(\Omega)$ (vease, por ejemplo, Brézis [12]).

Además, si $|y_d|_2 \leq \varepsilon$, entonces

$$\begin{aligned} J(\varphi_n^0; a, y_d) &\geq \varepsilon |\varphi^0|_2 - |y_d|_2 |\varphi^0|_2 \\ &\geq |\varphi^0|_2 (\varepsilon - |y_d|_2) \\ &\geq 0 \quad \forall \varphi^0 \in L^2(\Omega), \end{aligned}$$

lo cual implica que $\hat{\varphi}^0 = 0$.

Recíprocamente, si suponemos que $\hat{\varphi}^0 = 0$ y $\varepsilon < |y_d|_2$, tomamos

$$\gamma = \frac{|y_d|_2 - \varepsilon}{2}$$

y entonces, como

$$|y_d|_2 = \sup_{|\varphi^0|_2=1} \int_{\Omega} y_d \varphi^0 dx,$$

si $\tilde{\varphi}^0 \in L^2(\Omega)$ con $|\tilde{\varphi}^0|_2 = 1$ y $|y_d|_2 - \int_{\Omega} y_d \tilde{\varphi}^0 dx < \frac{\gamma}{2}$, obtenemos para todo $\mu > 0$ que

$$\begin{aligned} J(\mu \tilde{\varphi}^0) &= \frac{\mu^2}{2} \left(\int_{\mathcal{O}} |\tilde{\varphi}(t, x)| d\Sigma \right)^2 + \mu \left(\varepsilon - \int_{\Omega} y_d \tilde{\varphi}^0 dx \right) \\ &< \frac{\mu^2}{2} \left(\int_{\mathcal{O}} |\tilde{\varphi}(t, x)| d\Sigma \right)^2 + \mu \left(\varepsilon - |y_d|_2 + \frac{\gamma}{2} \right) \\ &= \frac{\mu^2}{2} \left(\int_{\mathcal{O}} |\tilde{\varphi}(t, x)| d\Sigma \right)^2 + \mu \left(-2\gamma + \frac{\gamma}{2} \right) \\ &< 0, \text{ si } \mu \text{ es suficientemente pequeño.} \end{aligned}$$

Pero $\hat{\varphi}^0 = 0$ implica que $J(\mu \tilde{\varphi}^0) \geq J(\hat{\varphi}^0) = 0$, lo cual es una contradicción y por tanto $\varepsilon \geq |y_d|_2$. ■

Proposición 15 Sea M la aplicación

$$\begin{aligned} M : L^2(\Omega) \times L^\infty(Q) &\rightarrow L^2(\Omega) \\ (y_d, a) &\rightarrow \hat{\varphi}^0. \end{aligned}$$

Entonces, si K es un subconjunto compacto de $L^2(\Omega)$ y B es un subconjunto acotado de $L^\infty(Q)$, el conjunto $M(K \times B)$ es un subconjunto acotado de $L^2(\Omega)$. \square

Demostración: Con el objeto de llegar a una contradicción asumimos que existe una sucesión $(y_d^n, a_n)_n \subset K \times B \subset L^\infty(Q)$ tal que

$$(I.14) \quad |\hat{\varphi}_n^0|_2 = |M(y_d^n, a_n)|_2 \rightarrow \infty.$$

Ahora, como B es acotado, existe $a \in L^\infty(Q)$ tal que una subsucesión

$$a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a \quad \text{en la topología débil-}^* \text{ de } L^\infty(Q)$$

y, como K es compacto, existe $y_d \in L^2(\Omega)$ tal que una subsucesión

$$y_d^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} y_d \quad \text{en la topología fuerte de } L^2(Q).$$

Veamos que

$$(I.15) \quad \liminf_{|\varphi_n^0|_2 \rightarrow \infty} \frac{J(\varphi_n^0; a_n, y_d)}{|\varphi_n^0|_2} \geq \varepsilon.$$

Si no fuera verdad existiría una sucesión $(\varphi_n^0)_n$ de $L^2(\Omega)$ tal que $|\varphi_n^0|_2 \rightarrow \infty$ y

$$(I.16) \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{J(\varphi_n^0; a_n, y_d)}{|\varphi_n^0|_2} < \varepsilon.$$

A continuación, de una manera similar a la seguida en la demostración de la Proposición 14, tomamos $\tilde{\varphi}_n^0 = \frac{\varphi_n^0}{|\varphi_n^0|_2}$ y denotamos por $\tilde{\varphi}_n$ a la solución de (I.10) respecto a a_n con $\tilde{\varphi}_n(T) = \tilde{\varphi}_n^0$. Como $|\tilde{\varphi}_n^0|_2 = 1$, podemos suponer que $\tilde{\varphi}_n^0$ converge débilmente en $L^2(\Omega)$ a $\tilde{\varphi}^0 \in L^2(\Omega)$.

Como en la demostración de la Proposición 14, es fácil probar que $\tilde{\varphi}_n$ converge en la topología débil de $L^1(\mathcal{O})$ a $\tilde{\varphi}$ (solución de (I.10)) respecto de a y con $\tilde{\varphi}(T) = \tilde{\varphi}^0$. Entonces

$$\int_{\mathcal{O}} |\tilde{\varphi}_n| dx dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

y por tanto

$$\hat{\varphi}^0 = 0.$$

Ahora, si $J_n = \frac{J(\varphi_n^0; a_n, y_d^n)}{|\varphi_n^0|_2}$, entonces

$$J_n \geq \left(\varepsilon - \int_{\Omega} y_d^n \tilde{\varphi}_n^0 dx \right)$$

y, como $\tilde{\varphi}_n^0$ converge en la topología de $L^2(\Omega)$ a 0, tenemos que

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} J_n \geq \varepsilon,$$

lo cual contradice (I.16) y por tanto prueba (I.15).

Finalmente, señalamos que $J(0; a_n, y_d^n) = 0$, con lo que $J(\tilde{\varphi}_n^0; a_n, y_d^n) \leq 0$, lo cual es una contradicción con (I.14) y (I.15). De este modo

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \{|\tilde{\varphi}_n^0\|_2 : n \in \mathbb{N}\} < +\infty. \quad \square$$

Definición 16 Dada $V : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función propia y convexa sobre el espacio de Banach X , se dice que un elemento p_0 de V' pertenece al conjunto $\partial V(x_0)$ (subdiferencial de V en $x_0 \in X$) si

$$V(x_0) - V(x) \leq (p_0, x_0 - x) \quad \forall x \in X.$$

Observación 17 Bajo las condiciones de la Definición 16, x_0 minimiza V sobre X (o sobre un subconjunto convexo de X) si y solo si

$$0 \in \partial V(x_0).$$

Proposición 18 Bajo las anteriores condiciones, si V es una función semicontinua inferiormente, entonces $p_0 \in \partial V(x_0)$ si y solo si

$$(p_0, x) \leq \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{V(x_0 + hx) - V(x_0)}{h} (< +\infty) \quad \forall x \in X. \quad \square$$

Para una demostración vease, por ejemplo, la Proposición 3 (página 187) y el Teorema 16 (página 198) de Aubin-Ekeland [3].

Observación 19 Si V es diferenciable Gateaux, su diferencial coincide con su subdiferencial.

De nuevo, el siguiente lema es un resultado similar al presentado en Fabre-Puel-Zuazua [29] (en la Proposiciones 2.4 de dicho trabajo) pero adaptado a nuestro caso. Como antes, se expondrá la demostración solo para comodidad del lector.

Lema 20 Sean $\varphi^0 \in L^2(\Omega)$, $\varphi^0 \neq 0$, φ la solución de (I.10) con $\varphi(T) = \varphi^0$. Entonces

$$\partial J(\varphi^0; a, y_d) = \{\xi \in L^2(\Omega), \exists v \in \text{sgn}(\varphi)\chi_{\mathcal{O}} \text{ satisfaciendo}$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \xi(x)\theta^0(x)dx &= \left(\int_{\mathcal{O}} |\varphi(t,x)|d\Sigma \right) \left(\int_{\mathcal{O}} v(t,x)\theta(t,x)d\Sigma \right) \\ &\quad + \varepsilon \int_{\Omega} \frac{\varphi^0(x)}{|\varphi^0|_2} \theta^0(x)dx - \int_{\Omega} y_d(x)\theta^0(x)dx \quad \forall \theta^0 \in L^2(\Omega), \end{aligned}$$

donde θ es la solución de (1.10) con $\theta(T) = \theta^0$. \square

Demostración: Introducimos la siguiente notación

$$J(\varphi^0; a, y_d) = \frac{1}{2} \left(\int_{\mathcal{O}} |\varphi(t,x)|d\Sigma \right)^2 + \varepsilon |\varphi^0|_2 - \int_{\Omega} y_d \varphi^0 dx = J_1(\varphi^0) + J_2(\varphi^0) + J_3(\varphi^0).$$

Sea $P := \{(t,x) \in \mathcal{O} \text{ tal que } \varphi(t,x) = 0\}$, y $\xi \in \partial J_1(\varphi^0)$. Como J_1 satisface las hipótesis de la Proposición 18, para cada $\theta^0 \in L^2(\Omega)$ se cumple que

$$\begin{aligned} (\xi, \theta^0) &\leq \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{J_1(\varphi^0 + h\theta^0) - J_1(\varphi^0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{2h} \left[\left(\int_{\mathcal{O}-P} |\varphi + h\theta|d\Sigma \right)^2 - \left(\int_{\mathcal{O}-P} |\varphi|d\Sigma \right)^2 \right] \\ &\quad + \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{2h} \left[\left(\int_P |\varphi + h\theta|d\Sigma \right)^2 - \left(\int_P |\varphi|d\Sigma \right)^2 \right] \\ &\quad + \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \left[\left(\int_{\mathcal{O}-P} |\varphi + h\theta|d\Sigma \right) \cdot \left(\int_P |\varphi + h\theta|d\Sigma \right) \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{2h} \left[\left(\int_{\mathcal{O}-P} (|\varphi| + \text{sgn}(\varphi)h\theta) d\Sigma \right)^2 - \left(\int_{\mathcal{O}-P} |\varphi|d\Sigma \right)^2 \right] \\ &\quad + \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \left[\left(\int_{\mathcal{O}-P} (|\varphi| + \text{sgn}(\varphi)h\theta) d\Sigma \right) \cdot \left(\int_P h|\theta|d\Sigma \right) \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{2h} \left[h^2 \left(\int_{\mathcal{O}-P} \text{sgn}(\varphi)\theta d\Sigma \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + 2h \int_{\mathcal{O}-P} |\varphi|d\Sigma \int_{\mathcal{O}-P} \text{sgn}(\varphi)\theta d\Sigma \right] + \int_{\mathcal{O}} |\varphi|d\Sigma \cdot \int_P |\theta|d\Sigma \\ &= \int_{\mathcal{O}-P} |\varphi|d\Sigma \int_{\mathcal{O}-P} \text{sgn}(\varphi)\theta d\Sigma + \int_{\mathcal{O}} |\varphi|d\Sigma \int_P |\theta|d\Sigma \\ &= \int_{\mathcal{O}} |\varphi|d\Sigma \int_{\mathcal{O}-P} \text{sgn}(\varphi)\theta d\Sigma + \int_{\mathcal{O}} |\varphi|d\Sigma \int_P |\theta|d\Sigma. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\xi \in \partial J_1(\varphi^0) \Leftrightarrow \forall \theta^0 \in L^2(\Omega),$$

$$(1.17) \quad (\xi, \theta^0) \leq |\varphi|_{L^1(\mathcal{O})} \left(\int_{\mathcal{O}-P} \text{sgn}(\varphi(t,x))\theta(t,x)d\Sigma + \int_P |\theta(t,x)|d\Sigma \right).$$

Ahora sea

$$G = \{\theta \in L^1(\mathcal{O}) : \theta \text{ es solución de (1.10) con } \theta^0 \in L^2(\Omega)\}.$$

Entonces, la función $\theta \rightarrow \theta^0 \rightarrow (\xi, \theta^0)$ es una función lineal sobre G y por tanto, aplicando el Teorema de Hahn-Banach, existe una función lineal V sobre $L^1(\mathcal{O})$, tal que

$$\forall \theta^0 \in L^2(\Omega), (\xi, \theta^0) = V(\theta)$$

y para cada $\Theta \in L^1(\mathcal{O})$,

$$(I.18) \quad V(\Theta) \leq |\varphi|_{L^1(\mathcal{O})} \left(\int_{\mathcal{O}-P} \text{sgn}(\varphi(t, x)) \Theta(t, x) d\Sigma + \int_P |\Theta(t, x)| d\Sigma \right).$$

Por (I.18), V es continua sobre $L^1(\mathcal{O})$ y entonces $V \in L^\infty(\mathcal{O})$ y

$$(I.19) \quad \left| \int_{\mathcal{O}} V(t, x) \Theta(t, x) d\mathcal{O} - |\varphi|_{L^1(\mathcal{O})} \int_{\mathcal{O}-P} \text{sgn}(\varphi(t, x)) \Theta(t, x) d\Sigma \right| \leq \\ \leq |\varphi|_{L^1(\mathcal{O})} \int_P |\Theta(t, x)| d\Sigma \quad \forall \Theta \in L^1(\mathcal{O}).$$

Si elegimos $\Theta \in L^1(\mathcal{O})$ con soporte contenido en $\mathcal{O} - P$, tenemos que

$$V = |\varphi|_{L^1(\mathcal{O})} \frac{\varphi}{|\varphi|} \quad \text{casi para todo punto de } \mathcal{O} - P.$$

A continuación, si tomamos $\Theta \in L^1(P)$ tenemos que

$$\left| \int_P V(t, x) \Theta(t, x) d\Sigma \right| \leq |\varphi|_{L^1(\mathcal{O})} \int_P |\Theta(t, x)| d\Sigma,$$

y entonces

$$|V(t, x)| \leq \|V\|_{L^\infty(P)} \leq |\varphi|_{L^1(\mathcal{O})} \quad \text{casi para todo } (x, t) \in P.$$

Esto prueba que existe $v \in \text{sgn}(\varphi)\chi_{\mathcal{O}}$ tal que

$$V = |\varphi|_{L^1(\mathcal{O})} v.$$

Recíprocamente, si $V \in |\varphi|_{L^1(\mathcal{O})} \text{sgn}(\varphi)\chi_{\mathcal{O}}$, entonces

$$\theta^0 \rightarrow \int_{\mathcal{O}} V(t, x) \theta(t, x) d\Sigma$$

es una función lineal continua sobre $L^2(\Omega)$ y por tanto existe un único $\xi \in L^2(\Omega)$ tal que

$$(\xi, \theta^0) = \int_{\mathcal{O}} V(t, x) \theta(t, x) d\Sigma \quad \forall \theta^0 \in L^2(\Omega).$$

Obviamente ξ satisface (I.17) y por tanto $\xi \in \partial J(\varphi^0)$.

Como segundo paso, consideramos

$$J_2(\varphi^0) = \varepsilon \left(\int_{\Omega} |\varphi^0(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Por la Observación 19,

$$\begin{aligned} (\partial J_2(\varphi^0), \theta^0) &= \frac{\varepsilon}{2} \left(\int_{\Omega} |\varphi^0(x)|^2 dx \right)^{-\frac{1}{2}} 2 \int_{\Omega} \varphi^0(x) \theta^0(x) dx \\ &= \varepsilon |\varphi^0|_2^{-1} \int_{\Omega} \varphi^0(x) \theta^0(x) dx. \end{aligned}$$

Finalmente, por linealidad,

$$(\partial J_3(\varphi^0), \theta^0) = - \int_{\Omega} y_d(x) \theta^0(x) dx. \quad \square$$

Ahora estamos preparados para probar una versión lineal del Teorema 7.

Teorema 21 Si $|y_d|_2 > \varepsilon$ y $\hat{\varphi}$ es la solución de (1.10) satisfaciendo $\hat{\varphi}(T) = \hat{\varphi}^0$, entonces existe $v \in \text{sgn}(\hat{\varphi})_{X^0}$ tal que, para cada $h \in L^2(Q)$, la solución de

$$(1.20) \quad \begin{cases} y_t - \Delta y + a(t, x)y = h & \text{en } Q \\ \frac{\partial y}{\partial \nu} = |\hat{\varphi}|_{L^1(\mathcal{O})} v_{X^0} & \text{en } \Sigma \\ y(0) = y_0 & \text{en } \Omega \end{cases}$$

satisface

$$y(T) = y_d - \varepsilon \frac{\hat{\varphi}^0}{|\hat{\varphi}^0|_2},$$

y por tanto $|y(T) - y_d|_2 = \varepsilon$. \square

Observación 22 Si $y_0 \equiv 0$ y $h \equiv 0$, el caso $|y_d| \leq \varepsilon$ se resuelve trivialmente con el control $v \equiv 0$.

Demostración del Teorema 21. Usando la Proposición 15 y por linealidad, podemos suponer que $y_0 \equiv 0$ y $h \equiv 0$. Ahora, gracias a la subdiferenciabilidad de $J(\cdot; a, y_d)$ en $\hat{\varphi}^0$ ($\neq 0$ por (1.12)), sabemos (vease la Observación 17) que

$$0 \in \partial J(\hat{\varphi}^0),$$

que es equivalente, por el Lema 20, a la existencia de $v \in \text{sgn}(\hat{\varphi})_{X^0}$, tal que

$$(1.21) \quad \begin{aligned} -|\hat{\varphi}|_{L^1(\mathcal{O})} \left(\int_{\mathcal{O}} v(x, t) \theta(x, t) dx dt \right) &= \frac{\varepsilon}{|\hat{\varphi}^0|_2} \int_{\Omega} \hat{\varphi}^0(x) \theta^0(x) dx \\ &\quad - \int_{\Omega} y_d(x) \theta^0(x) dx. \end{aligned}$$

Por otro lado, como θ es la solución de (1.10) y y es una función test admisible de $X^1(Q)$, por la Observación 11 tenemos que

$$(1.22) \quad (y(T), \theta^0) = |\hat{\varphi}|_{L^1(\mathcal{O})} \left(\int_{\mathcal{O}} v(x, t) \theta(x, t) dx dt \right).$$

Entonces, por (I.21) y (I.22), se deduce que

$$(y(T), \theta^0) = (y_d - \varepsilon \frac{\hat{\varphi}^0}{|\hat{\varphi}^0|_2}, \theta^0) \quad \forall \theta^0 \in L^2(\Omega)$$

y se concluye que $y(T) = y_d - \varepsilon \frac{\hat{\varphi}^0}{|\hat{\varphi}^0|_2}$. ■

Para el caso no lineal necesitaremos aplicar el Teorema de Punto Fijo de Kakutani para operadores multívocos:

Definición 23 Sean X y Y espacios de Banach y $\Lambda : X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ una función multívoca. Decimos que Λ es hemicontinua superiormente en $x_0 \in X$, si para cada $p \in Y'$, la función

$$x \rightarrow \sigma(\Lambda(x), p) = \sup_{y \in \Lambda(x)} \langle p, y \rangle_{Y' \times Y}$$

es semicontinua superiormente en x_0 . Diremos que la función multivaluada es hemicontinua superiormente sobre un subconjunto K de X si satisface esta propiedad en todos los puntos de K .

Teorema 24 (Teorema de Punto Fijo de Kakutani). Sean $K \subset X$ un subconjunto compacto y convexo y $\Lambda : K \rightarrow K$ una función multivaluada hemicontinua superiormente con valores convexos, cerrados y no vacíos. Entonces existe un punto fijo x_0 de Λ . □

La demostración se puede ver, por ejemplo, en Aubin [2], página 126.

Demostración del Teorema 7. Sean $y_d \in L^2(\Omega)$ y $\varepsilon > 0$ fijos. Definimos

$$g(s) = \begin{cases} \frac{f(s) - f(s_0)}{s - s_0} & s \neq s_0 \\ \frac{f'(s_0)}{1} & s = s_0. \end{cases}$$

Entonces, por las hipótesis hechas sobre f , se cumple que $g \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R})$.

Ahora, usando el Teorema 21, para cada $z \in L^2(Q)$, $b \in \beta(z)$ y $\varepsilon > 0$ se pueden encontrar dos funciones $\varphi(z, b) \in L^2(Q)$ y $v(z, b) \in \text{sgn}(\varphi(z, b))\chi_{\mathcal{O}}$ tales que la solución $y = y_b^z$ de

$$(I.23) \quad \begin{cases} y_t - \Delta y + g(z)y = -f(s_0) + g(z)s_0 - a(x, t)b + h & \text{en } Q \\ \frac{\partial y}{\partial \nu} = u\chi_{\mathcal{O}} & \text{en } \Sigma \\ y(0) = y_0 & \text{en } \Omega, \end{cases}$$

(donde $u = \|\varphi(z, b)\|_{L^1(\mathcal{O})} v(z, b)$) satisface

$$(I.24) \quad |y(T) - y_d|_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon.$$

Ahora, como $g(\cdot)$ es acotado, por las Proposiciones 15 y 8 tenemos que

$$(1.25) \quad \{\|\varphi(z, b)\|_{L^1(\mathcal{O})} v(z, b), z \in L^2(Q), b \in \beta(z)\} \text{ es acotado en } L^\infty(Q).$$

Sea

$$(1.26) \quad M = \sup_{\substack{z \in L^2(Q) \\ b \in \beta(z)}} \|\varphi(z, b)\|_{L^1(\mathcal{O})} < \infty.$$

Obviamente $u = \|\varphi(z, b)\|_{L^1(\mathcal{O})} v(z, b)$ satisface

$$(1.27) \quad \|u\|_{L^\infty(\Sigma)} \leq M.$$

De este modo, si definimos el operador

$$\Lambda : L^2(Q) \rightarrow \mathcal{P}(L^2(Q))$$

por

$$\Lambda(z) = \{y \text{ satisface (I.23), (I.24) con } b \in \beta(z) \text{ y } u \text{ satisfaciendo (I.27)}\},$$

hemos visto que para cada $z \in L^2(Q)$, $\Lambda(z) \neq \emptyset$. Para aplicar el Teorema de Punto Fijo de Kakutani debemos verificar que se satisfacen las siguientes propiedades:

- (i) Existe un subconjunto compacto U de $L^2(Q)$, tal que para cada $z \in L^2(Q)$, $\Lambda(z) \subset U$.
- (ii) Para cada $z \in L^2(Q)$, $\Lambda(z)$ es un subconjunto convexo compacto y no vacío de $L^2(Q)$.
- (iii) Λ es hemicontinua superiormente.

La demostración de que se verifican estas propiedades es como sigue:

(i) Gracias a la Proposición 8 sabemos que existe un subconjunto acotado U de $H^{1/2,1}(Q)$ tal que para cada $z \in L^2(Q)$, $\Lambda(z) \subset U$. Ahora, para ver que podemos tomar U compacto probaremos que el conjunto

$$\mathcal{Y} = \{y \text{ satisface (I.23) con } z \in L^2(Q), b \in \beta(z) \text{ y } u \text{ satisfaciendo (I.27)}\}$$

es un subconjunto relativamente compacto de $L^2(Q)$. Pero esto es fácil de probar usando la Proposición 8 y el hecho de que

$$(1.28) \quad H^{1/2,1}(Q) \subset L^q([0, T]; L^2(\Omega)) \quad \text{con inclusión compacta} \quad \forall q < \infty$$

(vease el Lema 5 (página 78) y el Teorema 3 (página 80) de Simon [55]).

(ii) Ya hemos visto que para cada $z \in L^2(Q)$, $\Lambda(z)$ es un subconjunto no vacío de $L^2(Q)$.

Además, $\Lambda(z)$ es obviamente convexo pues $B(y_d, \varepsilon)$, $\beta(z)$ y $\{u \in L^\infty(\Sigma) : u \text{ satisface (1.27)}\}$ son conjuntos convexos. Por tanto, nos queda por ver que $\Lambda(z)$ es un subconjunto compacto de $L^2(Q)$. En (i) hemos probado que $\Lambda(z) \subset U$ con U compacto. Sea $(y^n)_n$ una sucesión de elementos de $\Lambda(z)$ que converge en $L^2(Q)$ a $y \in U$. Tenemos que probar que $y \in \Lambda(z)$. Sabemos que existen $b^n \in \beta(z)$ y $u^n \in L^\infty(\Sigma)$ satisfaciendo (1.27) tales que

$$(1.29) \quad \begin{cases} y_t^n - \Delta y^n + g(z)y^n = -f(s_0) + g(z)s_0 - ab^n + h & \text{en } Q \\ \frac{\partial y^n}{\partial \nu} = u^n \chi_{\mathcal{O}} & \text{en } \Sigma \\ y^n(0) = y_0 & \text{en } \Omega \\ |y^n(T) - y_d|_2 \leq \varepsilon. \end{cases}$$

Ahora, usando el hecho de que β es un grafo maximal monótono acotado y que los controles u^n son uniformemente acotados, deducimos que $u^n \rightarrow u$ y $b^n \rightarrow b$ en la topología débil de $L^2(\Sigma)$ y de $L^2(Q)$ respectivamente. Además, u satisface (1.27) y, puesto que cualquier grafo maximal monótono es fuertemente-débilmente cerrado (vease la Proposición 3.5 de Barbu [5] (página 75)) sobre cualquier espacio de Banach con dual uniformemente convexo (como, por ejemplo, $L^2(Q)$), deducimos que $b \in \beta(z)$. De este modo, si pasamos al límite en (1.29) obtenemos que

$$\begin{cases} y_t - \Delta y + g(z)y = -f(s_0) + g(z)s_0 - ab + h & \text{en } Q \\ \frac{\partial y}{\partial \nu} = u \chi_{\mathcal{O}} & \text{en } \Sigma \\ y(0) = y_0 & \text{en } \Omega. \end{cases}$$

Veamos que además, $y^n(T)$ converge a $y(T)$ en $L^2(\Omega)$. Sea $\omega^n = y - y^n$ la solución de

$$\begin{cases} \omega_t^n - \Delta \omega^n + g(z)\omega^n = -a(b - b^n) & \text{en } Q \\ \frac{\partial \omega^n}{\partial \nu} = (u - u^n)\chi_{\mathcal{O}} & \text{en } \Sigma \\ \omega^n(0) = 0 & \text{en } \Omega. \end{cases}$$

Ahora, si tomamos $\gamma^n \in H^{1/4, 1/2}(\Sigma)$ tal que $\|\gamma^n - (u - u^n)\chi_{\mathcal{O}}\|_{L^2(\Sigma)} \leq \frac{1}{n}$, entonces $\gamma^n \rightarrow 0$ en la topología débil de $L^2(\Sigma)$ y la solución $\bar{\omega}^n$ de

$$\begin{cases} \bar{\omega}_t^n - \Delta \bar{\omega}^n + g(z)\bar{\omega}^n = A(b - b^n) & \text{en } Q \\ \frac{\partial \bar{\omega}^n}{\partial \nu} = \gamma^n & \text{en } \Sigma \\ \bar{\omega}^n(0) = 0 & \text{en } \Omega \end{cases}$$

satisface $\bar{\omega}^n \in H^{1,2}(Q)$ (vease Lions-Magenes [46]). De este modo si multiplicamos por $\bar{\omega}^n$ e integramos, deducimos que

$$\|\bar{\omega}^n(T)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq k_1 \int_Q |(b - b^n)\bar{\omega}^n| dx dt + k_2 \int_\Sigma |\gamma^n \bar{\omega}^n| dx dt \rightarrow 0 \text{ si } n \rightarrow \infty.$$

De este modo, $\bar{\omega}^n(T)$ converge a 0 en $L^2(\Omega)$ y, usando de nuevo resultados de regularidad (vease de nuevo Lions-Magenes [46]) tenemos que

$$\|\bar{\omega}^n - \omega^n\|_{H^{3/4,3/2}(Q)} \leq k \|\gamma^n - (u - u^n)\chi_{\mathcal{O}}\|_{L^2(\Sigma)}.$$

Finalmente, como $H^{3/4,3/2}(Q) \subset \mathcal{C}([0, T]; L^2(\Omega))$ es una inyección continua (incluso una inyección compacta; vease el Teorema 3 de Simon [55]), obtenemos que

$$\|\bar{\omega}^n(T) - \omega^n(T)\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

Por tanto $\omega^n(T) \rightarrow 0$ en $L^2(\Omega)$, lo que implica que $|y(T) - y_d|_2 \leq \varepsilon$. Esto prueba que $y \in \Lambda(z)$ y concluye la prueba de (ii).

(iii) Tenemos que probar que para cada $z_0 \in L^2(Q)$,

$$\limsup_{z_n \rightarrow z_0} \sigma(\Lambda(z_n), k) \leq \sigma(\Lambda(z_0), k), \quad \forall k \in L^2(Q).$$

Hemos visto en(ii) que $\Lambda(z)$ es un conjunto compacto, lo cual implica que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $y^n \in \Lambda(z_n)$ tal que

$$\sigma(\Lambda(z_n), k) = \int_Q k(t, x) y^n(t, x) dx dt.$$

Ahora, por (i), $(y^n)_n \subset U$ que es un conjunto compacto. Por tanto existe $y \in L^2(Q)$ tal que (después de extraer una subsucesión) $y^n \rightarrow y$ en $L^2(Q)$. Probaremos que $y \in \Lambda(z_0)$. Sabemos que existen $b^n \in \beta(z_n)$ y $u^n \in L^\infty(\Sigma)$ satisfaciendo (1.27) tal que

$$(I.30) \quad \begin{cases} y_t^n - \Delta y^n + g(z_n) y^n = -f(s_0) + g(z_n) - ab^n + h & \text{en } Q \\ \frac{\partial y^n}{\partial \nu} = u^n \chi_{\mathcal{O}} & \text{en } \Sigma \\ y^n(0) = y_0 & \text{en } \Omega \\ |y^n(T) - y_d|_2 \leq \varepsilon. \end{cases}$$

De aquí deducimos que existe $u \in L^\infty(\Sigma)$ satisfaciendo (1.27) tal que $u^n \rightarrow u$ en la topología débil-* de $L^\infty(\Sigma)$. Además, usando que β es un grafo fuertemente-débilmente cerrado y que la ecuación del calor tiene un efecto regularizante (como en la prueba de (ii)), deducimos que y satisface (1.23) y (1.24) con $z = z_0$ para algun $u \in L^\infty(\Sigma)$ satisfaciendo (1.27) y algun $b \in \beta(z_0)$, lo cual implica que $y \in \Lambda(z_0)$. Entonces, para cada $k \in L^2(Q)$,

$$\begin{aligned} \sigma(\Lambda(z_n), k) &= \int_Q k(t, x) y^n(t, x) dx dt \rightarrow \int_Q k(t, x) y(t, x) dx dt \leq \\ &\leq \sup_{\bar{y} \in \Lambda(z_0)} \int_Q k(t, x) \bar{y}(t, x) dx dt = \sigma(\Lambda(z_0), k), \end{aligned}$$

lo cual demuestra que Λ es hemicontinua superiormente y concluye la prueba de (iii).

Finalmente, la restricción de Λ a $K = \text{conv}(U)$ (envoltura convexa de U), que continua siendo un compacto de $L^2(Q)$, satisface las hipótesis del Teorema de Punto Fijo de Kakutani. De este modo, Λ tiene un punto fijo $y \in K$. Además, por construcción, existe un control $u \in L^\infty(\Sigma)$ que satisface (1.27) tal que

$$(1.31) \quad \begin{cases} y_t - \Delta y + f(y) + a(x, t)\beta(y) \ni h & \text{en } Q \\ \frac{\partial y}{\partial \nu} = u\chi_\sigma & \text{en } \Sigma \\ y(0) = y_0 & \text{en } \Omega \\ \|y(T) - y_d\|_2 \leq \varepsilon. \end{cases}$$

Por tanto, y resuelve el problema de controlabilidad aproximada planteado. ■

2.2 Observación en la frontera.

Sea Ω un subconjunto acotado abierto y suficientemente regular de \mathbb{R}^n , $Q = \Omega \times (0, T)$, Σ_1 un subconjunto de $\Sigma = \partial\Omega \times (0, T)$ tal que $\Sigma_2 = \Sigma \setminus \Sigma_1$ tiene interior no vacío, $a(\cdot, \cdot) \in L^\infty(Q)$, f una función real, $h \in L^2(Q)$, $y_0 \in L^2(\Omega)$ y β un grafo maximal monótono acotado de \mathbb{R}^2 tal que $D(\beta) = \mathbb{R}$. En esta sección estudiaremos la controlabilidad aproximada con observación en Σ_1 del problema

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} y_t - \Delta y + a(x, t)\beta(y) \ni h & \text{en } Q \\ \frac{\partial y}{\partial \nu} + f(y) = 0 & \text{en } \Sigma_1 \\ \frac{\partial y}{\partial \nu} = v & \text{en } \Sigma_2 \\ y(x, 0) = y_0(x) & \text{en } \Omega. \end{cases}$$

Aquí definimos las soluciones débiles de (\mathcal{P}) de forma similar a lo hecho en la Sección 2.1.

Teorema 25 *Si f es una función real y continua que verifica*

$$(1.32) \quad |f(s)| \leq c_1 + c_2|s|, \quad \text{si } |s| > M,$$

para algunas constantes positivas c_1 , c_2 y M , entonces el Problema (\mathcal{P}) tiene la propiedad de la controlabilidad aproximada con espacio de controles $\mathcal{U} = L^2(\Sigma_2)$ y observación $y(v)|_{\Sigma_1} \in L^2(\Sigma_1)$. □

Demostración: Sean $y_d \in L^2(\Sigma_1)$ y $\varepsilon > 0$ fijos. Tomamos $0 < \alpha < 1/2$ y

$$K = \{z \in H^{1/2-\alpha/2, 1-\alpha}(Q) : \|z|_{\Sigma_1} - y_d\|_{L^2(\Sigma_1)} \leq \varepsilon\}.$$

Aquí señalamos que, puesto que el operador de traza de $H^{1/2-\alpha/2,1-\alpha}(Q)$ a $L^2(\Sigma)$ es continuo (vease, por ejemplo, la Sección 2.2 del Capítulo 4 de Lions-Magenes [46]), es fácil probar que K es un conjunto cerrado con la topología de $H^{1/2-\alpha/2,1-\alpha}(Q)$ y por tanto es un espacio de Banach. Definimos la aplicación multívoca

$$\mathcal{F} : K \rightarrow \mathcal{P}(K)$$

por

$$\mathcal{F}(z) = \{y_z^b(v) : b \in \beta(z), \|v\|_{L^2(\Sigma_2)} \leq R, \|y_z^b(v)|_{\Sigma_1} - y_d\|_{L^2(\Sigma_1)} \leq \varepsilon\},$$

donde $y_z^b(v)$ es la solución del problema lineal asociado

$$(I.33) \quad \begin{cases} y_t - \Delta y + a(x, t)b = h & \text{en } Q \\ \frac{\partial y}{\partial \nu} + f(z|_{\Sigma_1}) = 0 & \text{en } \Sigma_1 \\ \frac{\partial y}{\partial \nu} = v & \text{en } \Sigma_2 \\ y(x, 0) = y_0(x) & \text{en } \Omega. \end{cases}$$

Por resultados de regularidad (vease Lions-Magenes [46]), como $f(z|_{\Sigma_1}) \in L^2(\Sigma)$ (por (I.32)), se tiene que $y_z^b(v) \in H^{1/2,1}(Q)$ para cada $z \in H^{1/2-\alpha/2,1-\alpha}(Q)$, $b \in \beta(z)$ y $v \in L^2(\Sigma_2)$. Además,

$$(I.34) \quad \|y_z^b(v)\|_{H^{1/2,1}(Q)} \leq C(1 + \|h\|_{L^2(Q)} + \|v\|_{L^2(\Sigma_2)} + \|y_0\|_{L^2(\Omega)})$$

(vease la Proposición 8). Para probar el Teorema 25 usaremos de nuevo el Teorema de Punto Fijo de Kakutani. De este modo, probaremos a continuación las hipótesis que se deben cumplir para poder aplicar ese teorema.

Gracias a (I.34) sabemos que existe un subconjunto acotado \mathcal{V} de $K \cap H^{1/2,1}(Q)$ tal que para cada $z \in K$, $\mathcal{F}(z) \subset \mathcal{V}$. Entonces, usando el hecho de que $H^{1/2,1}(Q) \subset H^{1/2-\alpha/2,1-\alpha}(Q)$ es una inyección compacta y K es un conjunto cerrado, podemos tomar \mathcal{V} siendo un conjunto compacto de K . También es fácil probar que $\mathcal{F}(z)$ es un conjunto convexo para todo $z \in K$. Para ver que $\mathcal{F}(z)$ es un conjunto compacto para cada $z \in K$ suponemos que $(y^n)_n$ es una sucesión de elementos de $\mathcal{F}(z)$ que converge en $H^{1/2-\alpha/2,1-\alpha}(Q)$ a $y \in \mathcal{V}$. Tenemos que probar que $y \in \mathcal{F}(z)$. Sabemos que existen $b^n \in \beta(z)$ y $u^n \in L^2(\Sigma_2)$ satisfaciendo $\|u^n\|_{L^2(\Sigma_2)} \leq R$, tal que

$$(I.35) \quad \begin{cases} y_t^n - \Delta y^n + a(x, t)b^n = h & \text{en } Q \\ \frac{\partial y^n}{\partial \nu} + f(z|_{\Sigma_1}) = 0 & \text{en } \Sigma_1 \\ \frac{\partial y^n}{\partial \nu} = u^n & \text{en } \Sigma_2 \\ y^n(0) = y_0 & \text{en } \Omega \\ \|y^n - y_d\|_{L^2(\Sigma_1)} \leq \varepsilon. \end{cases}$$

Ahora, usando que β es un grafo maximal monótono y que los controles u^n son uniformemente acotados, deducimos que $u^n \rightarrow u$ y $b^n \rightarrow b$ en la topología débil de $L^2(\Sigma_2)$ y de $L^2(Q)$ respectivamente. También u satisface $\|u\|_{L^2(\Sigma_2)} \leq R$ y puesto que cualquier grafo maximal monótono es fuertemente-débilmente cerrado (vease e.g. la Proposición 3.5 de la página 75 de Barbu [5]) sobre cualquier espacio de Banach con dual uniformemente convexo (como, por ejemplo, $L^2(Q)$) tenemos que $b \in \beta(z)$. De este modo, si pasamos al límite en (I.35) (teniendo en cuenta que $f(y^n) \rightarrow f(y)$ en $L^2(\Sigma)$), obtenemos que

$$\begin{cases} y_t - \Delta y + a(x, t)b = h & \text{en } Q \\ \frac{\partial y}{\partial \nu} + f(z|_{\Sigma_1}) = 0 & \text{en } \Sigma_1 \\ \frac{\partial y}{\partial \nu} = u & \text{en } \Sigma_2 \\ y(0) = y_0 & \text{en } \Omega. \end{cases}$$

Además, $\|y^n - y\|_{L^2(\Sigma_1)} \leq \|y^n - y\|_{H^{1/2-\alpha/2, 1-\alpha}(Q)} \rightarrow 0$ y por tanto $\|y - y_d\|_{L^2(\Sigma_1)} \leq \varepsilon$. Para mostrar que $\mathcal{F}(z)$ es un conjunto no vacío usaremos el siguiente lema:

Lema 26 *Consideramos el problema lineal*

$$(\mathcal{LP}) \begin{cases} Y_t - \Delta Y = F & \text{en } Q \\ \frac{\partial Y}{\partial \nu} = G & \text{en } \Sigma_1 \\ \frac{\partial Y}{\partial \nu} = v & \text{en } \Sigma_2 \\ Y(x, 0) = y_0(x) & \text{en } \Omega \\ \|v\|_{L^2(\Sigma_2)} \leq R, \end{cases}$$

donde F y G pertenecen a conjuntos acotados B de $L^2(Q)$ y E de $L^2(\Sigma_1)$ respectivamente. Si $v_{F,G} \in L^2(\Sigma_2)$ es el control óptimo de este problema respecto del funcional

$$J(v) = \int_{\Sigma_1} |Y(v) - y_d|^2 d\Sigma$$

($v_{F,G}$ sabemos que existe por los resultados de compacidad citados anteriormente), entonces para cada $\varepsilon > 0$ podemos tomar R suficientemente con el que se cumpla que

$$\|Y(F, G, v_{F,G}) - y_d\|_{L^2(\Sigma_1)} \leq \varepsilon \quad \text{para todo } F \in B \text{ y } G \in E. \quad \square$$

Demostración: Por linealidad podemos suponer que $y_0 \equiv 0$. Tomamos $\gamma > 0$ suficientemente pequeño. Entonces, si $F \in H^{-(1/4+\gamma), -2(1/4+\gamma)}(Q)$ y $G \in H^{-\gamma, -2\gamma}(\Sigma_1)$, obtenemos (vease, por ejemplo, Lions-Magenes [46]) que la solución $Y(F, G)$ de (\mathcal{LP}) pertenece a $H^{3/4-\gamma, 2(3/4-\gamma)}(Q)$.

Sea $P_R : H^{-(1/4+\gamma), -2(1/4+\gamma)}(Q) \times H^{-\gamma, -2\gamma}(\Sigma_1) \rightarrow L^2(\Sigma_1)$ la aplicación definida por

$$P_R(F \times G) = Y(F, G, v_{F,G})|_{\Sigma_1}.$$

La condición de optimalidad de $v_{F,G}$ es

$$\int_{\Sigma_1} (Y(F, G, v_{F,G}) - y_d) Y(0, 0, v - v_{F,G}) d\Sigma \geq 0 \quad \forall v \in L^2(\Sigma_2), \quad \|v\|_{L^2(\Sigma_2)} \leq R.$$

Entonces, sumando las desigualdades

$$\int_{\Sigma_1} (Y(F_1, G_1, v_{F_1, G_1}) - y_d) Y(0, 0, v_{F_1, G_1} - v_{F_2, G_2}) d\Sigma \leq 0$$

y

$$\int_{\Sigma_1} (Y(F_2, G_2, v_{F_2, G_2}) - y_d) Y(0, 0, v_{F_2, G_2} - v_{F_1, G_1}) d\Sigma \leq 0$$

obtenemos que

$$(I.36) \quad \int_{\Sigma_1} [Y(F_1, G_1, v_{F_1, G_1}) - Y(F_2, G_2, v_{F_2, G_2})] Y(0, 0, v_{F_1, G_1} - v_{F_2, G_2}) d\Sigma \leq 0.$$

Ahora, como

$$Y(F_1, G_1, v_{F_1, G_1}) - Y(F_2, G_2, v_{F_2, G_2}) = Y(F_1 - F_2, G_1 - G_2, 0) + Y(0, 0, v_{F_1, G_1} - v_{F_2, G_2}),$$

usando (I.36) se deduce que

$$\begin{aligned} & \|Y(F_1, G_1, v_{F_1, G_1}) - Y(F_2, G_2, v_{F_2, G_2})\|_{L^2(\Sigma_1)}^2 \\ & \leq \int_{\Sigma_1} [Y(F_1, G_1, v_{F_1, G_1}) - Y(F_2, G_2, v_{F_2, G_2})] Y(F_1 - F_2, G_1 - G_2, 0) d\Sigma. \end{aligned}$$

Por las desigualdades de Hölder y Young concluimos que

$$\begin{aligned} & \|Y(F_1, G_1, v_{F_1, G_1}) - Y(F_2, G_2, v_{F_2, G_2})\|_{L^2(\Sigma_1)}^2 \leq \|Y(F_1 - F_2, G_1 - G_2, 0)\|_{L^2(\Sigma_1)}^2 \\ & \leq \|Y(\cdot; F_1 - F_2, G_1 - G_2, 0)\|_{H^{3/4-\gamma, 2(3/4-\gamma)}(Q)}^2 \\ & \leq C(\|F_1 - F_2\|_{H^{-(1/4+\gamma), -2(1/4+\gamma)}(Q)}^2 + \|G_1 - G_2\|_{H^{-\gamma, -2\gamma}(\Sigma_1)}^2), \end{aligned}$$

donde la constante C es independiente de R . De este modo, P_R es equicontinua y, por el Teorema de Ascoli, $(P_R)_{R>0}$ converge uniformemente sobre los conjuntos compactos de $H^{-(1/4+\gamma), -2(1/4+\gamma)}(Q) \times H^{-\gamma, -2\gamma}(\Sigma_1)$. De este modo, como

$$L^2(Q) \times L^2(\Sigma_1) \subset H^{-(1/4+\gamma), -2(1/4+\gamma)}(Q) \times H^{-\gamma, -2\gamma}(\Sigma_1)$$

con inclusión compacta, concluimos el resultado usando el hecho de que la controlabilidad aproximada del Problema (\mathcal{LP}) implica

$$\lim_{R \rightarrow \infty} P_R(F \times G) = y_d \quad \text{en la topología de } L^2(\Sigma_1). \quad \blacksquare$$

Fin de la demostración del Teorema 25: Aplicando (I.32) y el lema previo podemos tomar R tal que $\mathcal{F}(z)$ es un conjunto no vacío, para todo $z \in K$. Finalmente, para aplicar el Teorema de Punto Fijo de Kakutani, tenemos que probar que \mathcal{F} es hemicontinua superiormente. Por tanto, probaremos que para cada $z_0 \in H^{1/2-\alpha/2, 1-\alpha}(Q)$,

$$\limsup_{z_n \rightarrow z_0} \sigma(\mathcal{F}(z_n), k) \leq \sigma(\mathcal{F}(z_0), k), \quad \forall k \in (H^{1/2-\alpha/2, 1-\alpha}(Q))'.$$

Como ya hemos visto que $\mathcal{F}(z)$ es un conjunto compacto, sabemos que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $y_n \in \mathcal{F}(z_n)$ tal que

$$\sigma(\mathcal{F}(z_n), k) = \langle k, y_n \rangle.$$

Ahora, como $(y_n)_n \subset \mathcal{V}$, sabemos que existe $y \in H^{1/2-\alpha/2, 1-\alpha}(Q)$ tal que (después de extraer una subsucesión) $y_n \rightarrow y$ en la topología de $H^{1/2-\alpha/2, 1-\alpha}(Q)$. Mostraremos que $y \in \mathcal{F}(z_0)$.

Sabemos que existe $b^n \in \beta(z_n)$ y $v^n \in L^2(\Sigma_2)$ satisfaciendo

$$(I.37) \quad \|v\|_{L^2(\Sigma_2)} \leq R,$$

tal que

$$\begin{cases} y_t^n - \Delta y^n + a(x, t)b^n = h & \text{en } Q \\ \frac{\partial y^n}{\partial \nu} + f(z_n) = 0 & \text{en } \Sigma_1 \\ \frac{\partial y^n}{\partial \nu} = v^n & \text{en } \Sigma_2 \\ y^n(x, 0) = y_0(x) & \text{en } \Omega \\ \|y^n - y_d\|_{L^2(\Sigma_1)} \leq \varepsilon. \end{cases}$$

De este modo existe $v \in L^2(\Sigma_2)$ satisfaciendo (I.37) tal que $v^n \rightarrow v$ en la topología débil de $L^2(\Sigma_2)$. Además, usando que β es un grafo acotado fuertemente-débilmente cerrado y que la ecuación del calor tiene un efecto regularizante, deducimos (como antes) que y satisface (I.33) y

$$\|y - y_d\|_{L^2(\Sigma_1)} \leq \varepsilon,$$

con $z = z_0$ para algun $v \in L^2(\Sigma_2)$ satisfaciendo (I.37) y algun $b \in \beta(z_0)$, lo cual implica que $y \in \mathcal{F}(z_0)$. Entonces, para cada $k \in (H^{1/2-\alpha/2, 1-\alpha}(Q))'$ tenemos que

$$\sigma(\mathcal{F}(z_n), k) = \langle k, y^n \rangle \rightarrow \langle k, y \rangle \leq \sup_{\bar{y} \in \mathcal{F}(z_0)} \langle k, \bar{y} \rangle = \sigma(\mathcal{F}(z_0), k),$$

lo que prueba que \mathcal{F} es hemicontinua superiormente. Finalmente, la restricción de \mathcal{F} a $\bar{K} = \text{conv}(\mathcal{V})$ (envoltura convexa de \mathcal{V}), que sigue siendo un conjunto compacto en $H^{1/2-\alpha/2, 1-\alpha}(Q)$, satisface las hipótesis del Teorema de Punto Fijo de Kakutani. Por tanto,

\mathcal{F} tiene un punto fijo $y \in \overline{K}$. Además, por construcción, existe un control $v \in L^2(\Sigma_2)$ satisfaciendo (1.37) tal que

$$\begin{cases} y_t - \Delta y + a(x, t)\beta(y) \ni h & \text{en } Q \\ \frac{\partial y}{\partial \nu} + f(y) = 0 & \text{en } \Sigma_1 \\ \frac{\partial y}{\partial \nu} = v & \text{en } \Sigma_2 \\ y(x, 0) = y_0(x) & \text{en } \Omega \\ \|y - y_d\|_{L^2(\Sigma_1)} \leq \varepsilon. \end{cases}$$

De este modo, y cumple las condiciones del problema de controlabilidad aproximada planteado. ■

3 Resultados positivos y negativos para un problema semilineal de orden dos.

Sea Ω un abierto acotado regular de \mathbb{R}^n , $T > 0$, \mathcal{O} un subconjunto abierto de $Q := \Omega \times (0, T)$, f una función real continua, $A(x, t) \in L^\infty(Q)$ y $\beta(\cdot)$ un grafo maximal monótono acotado de \mathbb{R}^2 tal que $D(\beta) = \mathbb{R}$. El principal objetivo de este capítulo es el estudio de la controlabilidad aproximada del problema parabólico:

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} y_t - \Delta y + f(y) + A(x, t)\beta(y) \ni u\chi_{\mathcal{O}} & \text{en } Q \\ y(x, t) = 0 & \text{en } \Sigma = \partial\Omega \times (0, T) \\ y(x, 0) = y_0(x) & \text{en } \Omega. \end{cases}$$

El Problema (\mathcal{P}) surge en la modelización de diferentes aplicaciones. Cuando $A \equiv 0$ la ecuación semilineal de (\mathcal{P}) es relevante, por ejemplo, en cinética química (vease e.g. Aris [1] y Díaz [19]). Si $A \not\equiv 0$ la ecuación de (\mathcal{P}) puede ser multivaluada. De este modo, si $A > 0$ en Q , el Problema (\mathcal{P}) incluye la larga clase de inecuaciones variacionales parabólicas que surgen en el estudio de muchos y diferentes contextos (para detalles sobre modelización, teoría sobre existencia y unicidad y algunas propiedades cualitativas vease e.g. Duvaut-Lions [26], Brézis [12], Benilan [9] y Díaz [16], [17]). El caso $A < 0$ en Q ha sido estudiado recientemente en el contexto de algunos problemas de combustión (vease Gianni-Hulshof [32]) y también en climatología (veanse Díaz [22], [24], [23]).

En esta sección estudiaremos la controlabilidad aproximada del problema parabólico semilineal (\mathcal{P}) . En una primera parte se muestra esta propiedad bajo una hipótesis de comportamiento asintótico sublineal sobre las no linealidades extendiendo resultados conocidos en la literatura. En una segunda parte se muestra que la propiedad no se verifica si los términos no lineales son estrictamente superlineales.

3.1 Controlabilidad aproximada cuando la no linealidad es de tipo sublineal.

Consideremos, para aclarar las ideas, el caso en el que f es la función definida por

$$(I.38) \quad f(s) = \lambda|s|^{r-1}s.$$

El caso $r = 1$ corresponde al caso lineal. En este caso la controlabilidad aproximada se puede obtener por diferentes métodos: usando el Teorema de Hahn-Banach (Lions [40]), mediante algunos métodos constructivos (Lions [42]) o por un argumento de dualidad (Lions [43]).

En lo que concierne al caso $0 < r < 1$, es interesante mencionar el trabajo Seidman [54], donde se presenta un resultado abstracto cuya aplicabilidad al Problema (\mathcal{P}) ya fué mencionada en Díaz [18]. Sin embargo, tal aplicabilidad es muy sofisticada, por lo que nosotros seguiremos un método diferente.

El principal objetivo de esta sección es obtener un resultado general que se pueda aplicar al caso $0 < r \leq 1$. Seguiremos el método de dualidad introducido en Lions [43] y más tarde mejorado en Fabre-Puel-Zuazua [28], [29] para el caso $\beta \equiv 0$, $\mathcal{O} = \omega \times (0, T)$ con $\omega \subset \Omega$ y f verificando

$$(I.39) \quad f \text{ es una función globalmente Lipschitz y}$$

$$(I.40) \quad |f(s)| \leq a + b|s| \quad \text{si } |s| > M, \text{ para ciertas constantes positivas } a, b \text{ y } M.$$

Nuestro resultado es el siguiente

Teorema 27 *Sea $f(s)$ tal que*

$$(I.41) \quad f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$$

$$(I.42) \quad \begin{cases} \text{existe } M > 0, c_1 > 0, \text{ y } c_2 > 0 \text{ tal que} \\ |f(s)| \leq c_1 + c_2|s|, \text{ si } |s| > M \end{cases}$$

$$(I.43) \quad \text{existe la derivada } f'(s_0) \text{ en algun } s_0 \in \mathbb{R}.$$

Entonces el Problema (\mathcal{P}) tiene la propiedad de la controlabilidad aproximada en el espacio de estados $X = L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$ con el espacio de controles $\mathcal{U} = L^\infty(Q)$. \square

Observación 28 El anterior resultado reemplaza la condición (I.39) por la diferenciabilidad de f en solo un punto (vease condición (I.43)). Este resultado generaliza y desarrolla también el presentado en Díaz [24] para $A \equiv 0$. Aquí consideraremos también el caso multivaluado $A \not\equiv 0$ que más adelante (vease el Corolario 36) veremos que se puede tratar bajo una hipótesis sobre β más general que la condición de acotación.

Observación 29 La condición (1.43) es cierta si, por ejemplo f es Lipschitz en algún intervalo $(a, b) \subset \mathbb{R}$. En realidad, según un resultado bien conocido (vease, por ejemplo, Brezis [12], página 145), existe $f'(s)$ para casi todo punto $s \in (a, b)$. \square

Como caso particular se tiene:

Corolario 30 La conclusión del Teorema 27 es cierta en cada uno de los siguientes casos:

- i) f es una función globalmente Lipschitz,
- ii) f es localmente Lipschitz y satisface (1.42),
- iii) $f(s) = \lambda|s|^{r-1}s$ y $0 < r \leq 1$. \square

Antes de comenzar con la demostración del Teorema 27 necesitamos introducir algunos resultados previos.

Proposición 31 Si M es un subconjunto abierto de Q , $1 < p' < \infty$, $a \in L^\infty(Q)$ y φ satisface

$$\begin{cases} -\varphi_t - \Delta\varphi + a(x, t)\varphi = 0 & \text{en } Q \\ \varphi = 0 & \text{en } \Sigma, \end{cases}$$

$\varphi(T) \in L^{p'}(\Omega)$ y

$$\varphi = 0 \text{ en } M,$$

entonces $\varphi \equiv 0$ in Q . \square

Demostración: Es análoga a la de la Proposición 12. \blacksquare

Proposición 32 (Fabre-Puel-Zuazua [28], [29]) El resultado del Teorema 27 es cierto para el caso lineal con potencial (i.e. con $A \equiv 0$ y reemplazando $f(y)$ por $a(x, t)y$, con $a(x, t) \in L^\infty(Q)$). Además, los controles se pueden elegir de tipo “quasi bang-bang”⁽¹⁾.

\square

Mostraremos a continuación la idea general de la demostración de la Proposición 32 para poder entender mejor la demostración del resultado no lineal. Los autores obtienen el resultado para el caso $\mathcal{O} = \omega \times (0, T)$ pero la prueba para el caso de un abierto general \mathcal{O} de Q se obtiene mediante sencillas modificaciones. Obtienen el resultado minimizando el funcional

$$J(\varphi^0) = \frac{1}{2} \left(\int_{\mathcal{O}} |\varphi(x, t)| dx dt \right)^2 + \varepsilon \|\varphi^0\|_{L^{p'}(\Omega)} - \int_{\Omega} y_d \varphi^0 dx$$

¹Se dice que v es de tipo “quasi bang-bang” si existe una constante C y una función $\varphi(\cdot)$ tal que $v(\cdot) \in C \text{sig } \varphi(\cdot)$.

sobre $L^p(\Omega)$, donde $\varphi(x, t)$ es la solución del problema retrógrado

$$\begin{cases} -\varphi_t - \Delta\varphi + a(x, t)\varphi = 0 & \text{en } Q \\ \varphi = 0 & \text{en } \Sigma \\ \varphi(T) = \varphi^0 & \text{en } \Omega. \end{cases}$$

Ahora, usando la Proposición 31, se prueba la coercitividad del funcional $J(\cdot)$. De este modo, $J(\cdot)$ alcanza su mínimo sobre $L^p(\Omega)$ en un único punto $\hat{\varphi}^0$. Además, si $\hat{\varphi}(x, t)$ es la solución del correspondiente problema retrógrado, a través de la subdiferencial de J se puede mostrar que existe $v \in \text{sgn}(\hat{\varphi}(x, t))\chi_{\mathcal{O}}$ tal que la solución de

$$\begin{cases} y_t - \Delta y + a(x, t)y = |\hat{\varphi}|_{L^1(\mathcal{O})}v\chi_{\mathcal{O}} & \text{en } Q \\ y = 0 & \text{en } \Sigma \\ y(0) = 0 & \text{en } \Omega \end{cases}$$

satisface $\|y(T) - y_d\|_{L^p(\Omega)} \leq \varepsilon$.

Proposición 33 (Fabre-Pucl-Zuazua [28], [29]). Sea M la aplicación

$$\begin{aligned} M : L^p(\Omega) \times L^\infty(Q) &\rightarrow L^p(Q) \\ (y_d, a) &\rightarrow \hat{\varphi}^0. \end{aligned}$$

Entonces, si K es un subconjunto compacto de $L^p(\Omega)$ y B es un subconjunto acotado de $L^\infty(Q)$, el conjunto $M(K \times B)$ es un subconjunto acotado de $L^p(\Omega)$. \square

Proposición 34 Sea $a = a(t, x) \in L^\infty(Q)$. Entonces existe una constante $C > 0$ tal que para cada $k \in L^p(Q)$ y $\omega^0 \in L^p(\Omega)$ la solución ω de

$$\begin{cases} \omega_t - \Delta\omega + a(t, x)\omega = k & \text{en } Q \\ \omega = 0 & \text{en } \Sigma \\ \omega(0) = \omega^0 & \text{en } \Omega \end{cases}$$

satisface

$$(I.44) \quad \|\omega\|_{L^\infty(0, T; L^p(\Omega))} \leq C \left(\|\omega^0\|_{L^p(\Omega)} + \|k\|_{L^p(Q)} \right).$$

Además, si $\omega^0 \equiv 0$ y $a(\cdot, \cdot) \equiv 0$, entonces $\omega \in X^p(0, T)$ y existe una constante $C > 0$ tal que

$$(I.45) \quad \|\omega\|_{X^p(0, T)} \leq C \|k\|_{L^p(Q)},$$

donde

$$X^p(0, T) = L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega)) \cap W^{1,p}(0, T; L^p(\Omega)),$$

y

$$\|\cdot\|_{X^p(0, T)} = \|\cdot\|_{L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega))} + \|\cdot\|_{W^{1,p}(0, T; L^p(\Omega))}. \quad \square$$

Demostración: Para (I.44) vease el Teorema 9.1 de Ladyzenskaja-Solonnikov-Uralceva [39] (página 341) y Pazy [50] (páginas 226-228). Para (I.45) vease Ladyzenskaja-Solonnikov-Uralceva [39] (páginas 341-342). ■

Observación 35 Si $a(\cdot, \cdot) \not\equiv 0$, entonces usando la Proposición 34 y el Lema de Gronwall es fácil probar que $\omega \in X^p(0, T)$ y

$$\|\omega\|_{X^p(0, T)} \leq C_a \|k\|_{L^p(Q)},$$

con $C_a = o(1 + \|a\|_{L^\infty(Q)} \exp(\|a\|_{L^\infty(Q)}))$.

Demostración del Teorema 27. Sean $y_d \in L^p(\Omega)$ y $\varepsilon > 0$ fijos. Definimos

$$g(s) = \begin{cases} \frac{f(s) - f(s_0)}{s - s_0} & s \neq s_0 \\ f'(s_0) & s = s_0 \end{cases} \quad (s_0 \neq 0).$$

Como f satisface (I.41), (I.42) y (I.43) entonces $g \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R})$ pues, si $\hat{M} = \max\{M, |s_0| + 1\}$, entonces, como $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$,

$$\max\{|g(s)| : s \in [-\hat{M}, \hat{M}]\} < \infty.$$

Además, por (I.42),

$$\sup_{|s| > \hat{M}} |g(s)| \leq \sup_{|s| > \hat{M}} \left(\frac{|f(s)|}{|s - s_0|} + \frac{|f(s_0)|}{|s - s_0|} \right) \leq \sup_{|s| > \hat{M}} \left(\frac{c_1 + c_2|s|}{|s - s_0|} \right) + |f(s_0)| < \infty$$

puesto que $|s - s_0| \geq 1$ y $\lim_{|s| \rightarrow \infty} \frac{c_1 + c_2|s|}{|s - s_0|} = c_2$.

Ahora, para cada $z \in L^p(Q)$ y para cada $b \in \beta(z)$ podemos hacer $y = L_b(z) + Y_b(z)$, donde $L = L_b(z)$ es la (única) solución de

$$(I.46) \quad \begin{cases} L_t - \Delta L + g(z)L = -f(s_0) + g(z)s_0 - A(x, t)b & \text{en } Q \\ L = 0 & \text{en } \Sigma \\ L(0) = y_0 & \text{en } \Omega \end{cases}$$

y usando la Proposición 32, para cada $\varepsilon > 0$ se pueden encontrar dos funciones $\varphi(z, b) \in L^{p'}(Q)$ y $v(z, b) \in \text{sgn}(\varphi(z, b))\chi_{\mathcal{O}}$ tal que la solución $Y = Y_b(z)$ de

$$(I.47) \quad \begin{cases} Y_t - \Delta Y + g(z)Y = u\chi_{\mathcal{O}} & \text{en } Q \\ Y = 0 & \text{en } \Sigma \\ Y(0) = 0 & \text{en } \Omega \end{cases}$$

con $u = \|\varphi(z, b)\|_{L^1(\mathcal{O})} v(z, b)$ satisfaga

$$(I.48) \quad \|Y(T) - (y_d - L(T))\|_{L^p(\Omega)} \leq \varepsilon.$$

Ahora, usando la Observación 35 y que

$$(I.49) \quad X_p(0, T) \subset \mathcal{C}([0, T]; L^p(\Omega)) \quad \text{con inclusión compacta}$$

(vease el Lema 4 (página 77) y el Teorema 3 (página 80) de Simon [55]) tenemos que

$$(I.50) \quad \{y_d - L(T) : z \in L^p(Q), b \in \beta(z)\} \text{ es relativamente compacto en } L^p(\Omega).$$

Además, $y = L + Y$ es solución de

$$(I.51) \quad \begin{cases} y_t - \Delta y + g(z)y = -f(s_0) + g(z)s_0 - Ab + u\chi_{\mathcal{O}} & \text{en } Q \\ y = 0 & \text{en } \Sigma \\ y(0) = y_0 & \text{en } \Omega \end{cases}$$

y satisface

$$(I.52) \quad \|y(T) - y_d\|_{L^p(\Omega)} \leq \varepsilon,$$

con $u = \|\varphi(z, b)\|_{L^1(\mathcal{O})} v(z, b)$. Como $g(\cdot)$ es una función acotada, por (I.50) y las Proposiciones 33 y 34 obtenemos que

$$(I.53) \quad \{\|\varphi(z, b)\|_{L^1(\mathcal{O})} v(z, b), z \in L^p(Q), b \in \beta(z)\} \text{ está acotado en } L^\infty(Q)$$

y por tanto

$$(I.54) \quad M = \sup_{\substack{z \in L^p(Q) \\ b \in \beta(z)}} \|\varphi(z, b)\|_{L^1(\mathcal{O})} < \infty.$$

Obviamente $u = \|\varphi(z, b)\|_{L^1(\mathcal{O})} v(z, b)$ satisface

$$(I.55) \quad \|u\|_{L^\infty(Q)} \leq M.$$

De este modo, si definimos el operador

$$\Lambda : L^p(Q) \rightarrow \mathcal{P}(L^p(Q))$$

por

$$\Lambda(z) = \{y \text{ satisface (I.51), (I.52) con } b \in \beta(z) \text{ y } u \text{ satisfaciendo (I.55)}\},$$

hemos visto que para todo $z \in L^p(Q)$, $\Lambda(z) \neq \emptyset$. Para poder aplicar el Teorema de Punto Fijo de Kakutani tenemos que comprobar que se cumplen las siguientes propiedades:

- (i) Existe un subconjunto compacto U de $L^p(Q)$ tal que, para cada $z \in L^p(Q)$, $\Lambda(z) \subset U$.

(ii) Para cada $z \in L^p(Q)$, $\Lambda(z)$ es un subconjunto convexo, compacto y no vacío de $L^p(Q)$.

(iii) Λ es hemicontinua superiormente.

La prueba de estas propiedades es como sigue:

(i) Por la Observación 35 sabemos que existe un subconjunto acotado U de $L^p(Q)$ tal que para cada $z \in L^p(Q)$, $\Lambda(z) \subset U$. Ahora, para ver que podemos elegir U compacto probaremos que el conjunto

$$\mathcal{Y} = \{y \text{ satisface (I.51) con } z \in L^p(Q), b \in \beta(z) \text{ y } u \text{ satisfaciendo (I.55)}\}$$

es un subconjunto relativamente compacto de $L^p(Q)$. Si $y \in \mathcal{Y}$, existe $z \in L^p(Q)$, $b \in \beta(z)$ y $u \in L^\infty(Q)$ satisfaciendo (I.55) tal que $y = u^1 + u^2 + Y$, donde Y está dado por (I.47) y u^1 , u^2 vienen dados por

$$\begin{cases} u_t^1 - \Delta u^1 = -f(s_0) & \text{en } Q \\ u^1 = 0 & \text{en } \Sigma \\ u^1(0) = y_0 & \text{en } \Omega, \\ \begin{cases} u_t^2 - \Delta u^2 + g(z)(u^1 + u^2) = g(z)s_0 - A(x,t)b & \text{en } Q \\ u^2 = 0 & \text{en } \Sigma \\ u^2(0) = 0 & \text{en } \Omega. \end{cases} \end{cases}$$

Como u^1 es un elemento fijo de $L^p(Q)$, $\{g(z)u^1, z \in L^p(Q)\}$ es un subconjunto acotado de $L^p(Q)$. Entonces, por la Observación 35, la solución u^2 permanece en un subconjunto acotado de $X^p(0, T)$ cuando variamos z en $L^p(Q)$. Pero, como $X^p(0, T) \subset L^p(Q)$ con inclusión compacta (según (I.49)), u^2 permanece en un subconjunto compacto K_1 de $L^p(Q)$. Por otra parte, por la Observación 35, $Y(v)$, permanece en un subconjunto acotado de $X^p(0, T)$, y $Y(v) \subset K_2$, con K_2 subconjunto compacto de $L^p(Q)$. De este modo $\mathcal{Y} \subset u^1 + K_1 + K_2$, que es un conjunto relativamente compacto de $L^p(Q)$. Esto concluye la prueba de (i) si tomamos $U = \overline{\mathcal{Y}} \subset L^p(Q)$.

(ii) Ya hemos visto que para cada $z \in L^p(Q)$, $\Lambda(z)$ es un subconjunto no vacío de $L^p(Q)$. Además $\Lambda(z)$ es obviamente convexo, pues $B(y_d, \varepsilon)$, $\beta(z)$ y $\{u \in L^\infty(Q) : \text{satisfaciendo (I.55)}\}$ son conjuntos convexos. Por tanto, tenemos que ver que $\Lambda(z)$ es un subconjunto compacto de $L^p(Q)$. En (i) hemos probado que $\Lambda(z) \subset U$ con U compacto. Sea $(y^n)_n$ una sucesión de elementos de $\Lambda(z)$ que converge en $L^p(Q)$ a $y \in U$. Tenemos que probar que $y \in \Lambda(z)$. Sabemos que existen $b^n \in \beta(z)$ y $u^n \in L^\infty(Q)$ satisfaciendo (I.55) tales que

$$(I.56) \quad \begin{cases} y_t^n - \Delta y^n + g(z)y^n = -f(s_0) + g(z)s_0 - Ab^n + u^n \chi_{\mathcal{O}} & \text{en } Q \\ y^n = 0 & \text{en } \Sigma \\ y^n(0) = y_0 & \text{en } \Omega \\ \|y^n(T) - y_d\|_{L^p(\Omega)} \leq \varepsilon. \end{cases}$$

Ahora, usando que β es un grafo maximal monótono de \mathbb{R}^2 y que los controles u^n son uniformemente acotados, deducimos que $u^n \rightarrow u$ y $b^n \rightarrow b$ en la topología débil de $L^p(Q)$. Además u satisface (I.55) y, puesto que cualquier grafo maximal monótono es fuertemente-débilmente cerrado (vease la Proposición 3.5 (página 75) de Barbu [5]) sobre espacios de Banach cuyos duales topológicos son uniformemente convexos (por ejemplo, $L^p(Q)$ con $1 < p < \infty$) tenemos que $b \in \beta(z)$. De este modo, si pasamos al límite en (I.56) obtenemos:

$$\begin{cases} y_t - \Delta y + g(z)y = -f(s_0) + g(z)s_0 + Ab + u\chi_{\mathcal{O}} & \text{en } Q \\ y = 0 & \text{en } \Sigma \\ y(0) = y_0 & \text{en } \Omega. \end{cases}$$

Además, por el efecto regularizante de la ecuación del calor, $y^n(T)$ converge a $y(T)$ en $L^p(\Omega)$ (usando de nuevo la Observación 35 y el resultado de compacidad (I.49)) y se tiene que $\|y(T) - y_d\|_{L^p(\Omega)} \leq \varepsilon$. Esto prueba que $y \in \Lambda(z)$ y concluye la demostración de (ii).
(iii) Debemos probar que para todo $z_0 \in L^p(Q)$

$$\limsup_{z_n \rightarrow z_0} \sigma(\Lambda(z_n), k) \leq \sigma(\Lambda(z_0), k), \quad \forall k \in L^{p'}(Q).$$

En (ii) hemos visto que $\Lambda(z)$ es un conjunto compacto, lo cual implica que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $y^n \in \Lambda(z_n)$ tal que

$$\sigma(\Lambda(z_n), k) = \int_Q k(t, x)y^n(t, x)dxdt.$$

Ahora, por (i), $(y^n)_n \subset U$ (conjunto compacto). Entonces, existe $y \in L^p(Q)$ tal que (después de extraer una subsucesión) $y^n \rightarrow y$ en $L^p(Q)$. Tenemos que probar que $y \in \Lambda(z_0)$. Sabemos que existen $b^n \in \beta(z_n)$ y $u^n \in L^\infty(Q)$ satisfaciendo (I.55) tales que

$$(I.57) \quad \begin{cases} y_t^n - \Delta y^n + g(z_n)y^n = -f(s_0) + g(z_n)s_0 - Ab^n + u^n\chi_{\mathcal{O}} & \text{en } Q \\ y^n = 0 & \text{en } \Sigma \\ y^n(0) = y_0 & \text{en } \Omega \\ \|y^n(T) - y_d\|_{L^p(\Omega)} \leq \varepsilon. \end{cases}$$

Entonces existe $u \in L^\infty(Q)$ satisfaciendo (I.55) tal que $u_n \rightarrow u$ en la topología débil-* de $L^\infty(Q)$. Por otro lado, usando que β es un grafo acotado, fuertemente-débilmente cerrado y el efecto regularizante de la ecuación del calor, deducimos que y satisface (I.51) y (I.52) con $z = z_0$ para algún $u \in L^\infty(Q)$ satisfaciendo (I.55) y algún $b \in \beta(z_0)$, lo cual implica que $y \in \Lambda(z_0)$. Entonces, para cada $k \in L^{p'}(Q)$,

$$\sigma(\Lambda(z_n), k) = \int_Q k(t, x)y^n(t, x)dxdt \rightarrow \int_Q k(t, x)y(t, x)dxdt \leq$$

$$\leq \sup_{\bar{y} \in \Lambda(z_0)} \int_Q k(t, x) \bar{y}(t, x) dx dt = \sigma(\Lambda(z_0), k),$$

lo cual prueba que Λ es hemicontinua superiormente y concluye la demostración de (iii). Finalmente, si restringimos Λ a $K = \text{conv}(U)$ (envolvente convexa de U), que es un conjunto compacto de $L^p(\Omega)$, se satisfacen las hipótesis del Teorema de Punto Fijo de Kakutani. Entonces, Λ tiene un punto fijo $y \in K$. Además, por construcción, existe un control $u \in L^\infty(Q)$ satisfaciendo (I.55) tal que

$$(I.58) \quad \begin{cases} y_t - \Delta y + f(y) + A(x, t)\beta(y) \ni u \chi_Q & \text{en } Q \\ y = 0 & \text{en } \Sigma \\ y(0) = y_0 & \text{en } \Omega \\ \|y(T) - y_d\|_{L^p(\Omega)} \leq \varepsilon. \end{cases}$$

De este modo, y resuelve el problema de controlabilidad aproximada planteado. ■

Podemos mejorar la condición de acotación sobre β

Corolario 36 Sea $\bar{\beta} : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$ un grafo maximal monótono de \mathbb{R}^2 tal que existen dos constantes positivas c_1 and c_2 tales que

$$|b| \leq c_1 + c_2|r| \quad \forall b \in \bar{\beta}(r),$$

el conjunto de puntos donde $\bar{\beta}$ es multivaluada es, a lo sumo, un conjunto de la forma $\{x_i : i \in \mathbb{Z}\}$,

$$\cdots < x_{-2} < x_{-1} < x_0 < x_1 < x_2 < \cdots,$$

si μ es la medida de Lebesgue en \mathbb{R} , suponemos que

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} \mu(\bar{\beta}(x_i)) < \infty$$

y, finalmente, $\bar{\beta}$ es diferenciable en algun punto x_0 . Entonces, el problema

$$\begin{cases} y_t - \Delta y + \bar{\beta}(y) \ni u \chi_Q & \text{en } Q \\ y(x, t) = 0 & \text{en } \Sigma \\ y(x, 0) = y_0(x) & \text{en } \Omega, \end{cases}$$

tiene la propiedad de la controlabilidad aproximada en el espacio de estados $X = L^p(\Omega)$ ($1 < p < \infty$) con el espacio de controles $\mathcal{U} = L^\infty(Q)$. □

Demostración del Corolario 36. Si $\beta(\cdot)$ es el grafo maximal monótono tal que $\beta(x_0) = \bar{\beta}(x_0)$, $\beta(\cdot)$ es constante sobre cada intervalo (x_i, x_{i+1}) ($i \in \mathbb{Z}$) y $\mu(\beta(x_i)) = \mu(\bar{\beta}(x_i))$ ($i \in \mathbb{Z}$), entonces, β es un operador maximal monótono acotado y $f = \bar{\beta} - \beta$ es una función real no decreciente que satisface las hipótesis del Teorema 27. La demostración se concluye aplicando dicho teorema con $f + \beta = \bar{\beta}$. ■

Observación 37 Parece importante poner de relieve que el Teorema 27 está establecido para cualquier conjunto abierto \mathcal{O} de Q . El caso en el cual el conjunto \mathcal{O} se reduce a un único punto $\{(t_0, x_0)\}$ de Q , o un segmento $(0, T) \times \{x_0\}$, para algún $x_0 \in \Omega$, necesita un tratamiento distinto. Notese que, por ejemplo, cualquier control u con tal soporte no es un elemento del dual del espacio de energía (en particular $u \notin L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$) y el estado asociado $y(t, \cdot : u)$ no se puede encontrar, en general, en el espacio natural $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$. Un resultado muy especial de controlabilidad cuando $\mathcal{O} = (0, T) \times \{x_0\}$ ($N = 1$, f lineal, $A \equiv 0, \dots$) fué el objetivo de los trabajos Lions [44] and Glowinski-Lions [33].

3.2 Resultados negativos para un caso superlineal.

En este caso, el resultado sobre controlabilidad aproximada es, en general, negativo. Por ejemplo, si $f(s) = |s|^{r-1}s$ con $r > 1$, $\mathcal{O} = \omega \times (0, T)$ con ω un subconjunto abierto regular de Ω y $A(\cdot, \cdot) \equiv 0$, entonces veremos que todas las soluciones tienen cotas superior e inferior uniformes (independientes de los controles) sobre $\overline{\Omega} \setminus \overline{\omega}$. Un primer ejemplo se debe a A. Bamberger (vease Henry [35]): Dados $\Omega = (0, 1)$, $r > 1$, y $v \in \mathcal{U} = L^2(0, T)$, consideramos el problema:

$$\begin{cases} y_t - y_{xx} + |y|^{r-1}y = 0 & \text{en } Q \\ y_x(t, 0) = v(t); y(t, 1) = 0 & \text{en } \Sigma \\ y(0) = 0 & \text{en } \Omega. \end{cases}$$

Entonces, si $\Omega_\varepsilon = (\varepsilon, 1)$ ($0 < \varepsilon < 1$), se tiene que

$$\int_{\Omega_\varepsilon} |y(T, x)|^2 dx \leq C_\varepsilon \quad (\text{independientemente de } v). \quad \square$$

En Díaz [18] se desarrolló un método diferente para el caso de control global en la frontera. Aquí adaptamos su demostración al Problema (\mathcal{P}) con $A(\cdot, \cdot) \equiv 0$.

Teorema 38 Supongamos $q > 1$. Sea $u \in \mathcal{U} = L^2(\omega \times (0, T))$ arbitrario y sea $y(x, t : u)$ la correspondiente solución del Problema (\mathcal{P}) con $f(s) = |s|^{q-1}s$ y $A(\cdot, \cdot) \equiv 0$. Entonces

$$|y(x, t : u)| \leq C(r, n) \left(\frac{1}{d(x)^\gamma} + \frac{1}{t^{\frac{\gamma}{2}}} \right) \quad \text{en casi todo } (x, t) \in (\Omega \setminus \overline{\omega}) \times (0, T),$$

con

$$\gamma = \frac{2}{q-1}, \quad \text{y} \quad d(x) = \text{dist}(x, \partial\omega). \quad \square$$

Demostración: Basta demostrar que

$$y(x, t : u) \leq C(r, n) \left(\frac{1}{d(x)^\gamma} + \frac{1}{t^{\frac{\gamma}{2}}} \right) \quad \text{en casi todo } (x, t) \in (\Omega \setminus \overline{\omega}) \times (0, T),$$

(la otra desigualdad se prueba análogamente). Definimos la función

$$Y(x, t) = C(r, n) \left(\frac{1}{d(x)^\gamma} + \frac{1}{t^{\frac{\gamma}{2}}} \right).$$

Ahora, para cada $x_0 \in \Omega \setminus \bar{\omega}$, $t_0 \in (0, T)$ y $k = \frac{d^2(x_0)}{t_0}$, consideramos la función

$$U(t, x) = \frac{C}{(kt - r^2)^\gamma} (= C(kt - (x - x_0)^2)^{-\gamma}),$$

sobre el conjunto

$$S = \{(t, x) \in Q \setminus (\bar{\omega} \times (0, T)) : |x - x_0|^2 < kt, 0 < t \leq t_0\},$$

con $r = |x - x_0|$ y C que eligiéremos más adelante. Siguiendo, por ejemplo, el trabajo Kamin-Peletier-Vázquez [37] mostraremos que si C es suficientemente grand, $U \geq u$ en S . Aquí señalamos que $U = \infty$ en la frontera parabólica de S . Además, si denotamos (por simplicidad) $\psi = kt - r^2$, tenemos que

$$\begin{aligned} L(U) &\equiv U_t - \Delta U + U^q \\ &= -kC\gamma\psi^{-(\gamma+1)} - \operatorname{div}[2\gamma C\psi^{-(\gamma+1)}(x_i - x_{0,i})_i] + C^q\psi^{-\gamma q} \\ &= -kC\gamma\psi^{-(\gamma+1)} - \sum_{i=1}^n [4\gamma C(\gamma+1)\psi^{-(\gamma+2)}(x_i - x_{0,i})^2] - \sum_{i=1}^n [2\gamma C\psi^{-(\gamma+1)}] \\ &\quad + C^q\psi^{-\gamma q} \\ &= -kC\gamma\psi^{-(\gamma+1)} - 4\gamma C(\gamma+1)r^2\psi^{-(\gamma+2)} - 2n\gamma C\psi^{-(\gamma+1)} + C^q\psi^{-\gamma q}. \end{aligned}$$

De este modo, si elegimos C tal que

$$(L.59) \quad \begin{cases} \frac{1}{3}C^{q-1} \geq 4\gamma(\gamma+1)r^2 \\ \frac{1}{3}C^{q-1} \geq 2n\gamma\psi \\ \frac{1}{3}C^{q-1} \geq k\gamma\psi, \end{cases}$$

obtenemos que $L(U) \geq 0$. Ahora, como $r^2 + \psi \leq d^2(x_0) = kt_0$, (L.59) se satisface si

$$C = c(p, n)[d(x_0)^\gamma + k^{\frac{1}{q-1}}d(x_0)^{\frac{2}{q-1}}].$$

Entonces, aplicando el principio del máximo a u y U en S , obtenemos que

$$\begin{aligned} u(t_0, x_0) &\leq U(t_0, x_0) = \frac{C}{(kt_0)^\gamma} = c(p, n) \frac{d(x_0)^\gamma + k^{\frac{1}{q-1}}d(x_0)^{\frac{2}{q-1}}}{(kt_0)^\gamma} = \\ &= c(p, n) \left[\frac{1}{d(x_0)^\gamma} + \frac{k^\gamma t_0^{\frac{1}{q-1}}}{(kt_0)^\gamma} \right] = c(p, n) \left[\frac{1}{d(x_0)^\gamma} + \frac{1}{t_0^{\frac{\gamma}{2}}} \right]. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Corolario 39 Si $q > 1$, el Problema (P) con $f(s) = |s|^{q-1}s$ y $A(\cdot, \cdot) \equiv 0$ no tiene la propiedad de la controlabilidad aproximada. \square

Observación 40 Como ya se indicó en la Introducción de esta memoria, en Díaz [23] se abordó el caso de f superlineal en el infinito bajo algunas condiciones adicionales, mostrándose que si el estado deseado y_d está estrictamente contenido entre las funciones minimal y maximal de obstrucción entonces se sigue cumpliendo la propiedad de controlabilidad aproximada. No es difícil mostrar que una ligera adaptación de su demostración permite obtener un resultado similar en el marco más general del Teorema 27 (ahora para el caso superlineal).

4 Resultados positivos y negativos para un problema semilineal de orden superior.

Sea Ω un abierto acotado y regular de \mathbb{R}^N , $T > 0$, ω un subconjunto abierto y no vacío de Ω , f una función real continua, $A(x, t) \in L^\infty(Q)$ y $\beta(\cdot)$ un grafo maximal monótono acotado de \mathbb{R}^2 tal que $D(\beta) = \mathbb{R}$. En esta sección estudiaremos la propiedad de controlabilidad aproximada del problema de Dirichlet semilineal siguiente:

$$(I.60) \quad \begin{cases} y_t + (-\Delta)^m y + f(y) + A(x, t)\beta(y) = h + v\chi_\omega & \text{en } Q \\ \frac{\partial^j y}{\partial \nu^j} = 0, \quad j = 0, 1, \dots, m-1 & \text{en } \Sigma \\ y(0) = y_0 & \text{en } \Omega, \end{cases}$$

donde v representa el control exterior, χ_ω es la función característica en ω , ν es el vector normal exterior en $\partial\Omega$, $h \in L^2(Q)$ e $y_0 \in L^2(\Omega)$. Debido al factor χ_ω los controles “actúan” sobre el conjunto $\mathcal{O} := \omega \times (0, T)$. Probaremos resultados positivos de controlabilidad (en la Sección 4.1), cuando la no linealidad es de tipo sublineal y resultados negativos de controlabilidad (en la Sección 4.2), cuando la no linealidad es de tipo superlineal. Es posible la extensión de los resultados positivos dados en la sección 4.1 para la ecuación no lineal

$$y_t + (-\Delta)^m y + f((-\Delta)^k y) + A(x, t)\beta(y) = h + v\chi_\omega \quad \text{en } Q,$$

donde k es un entero positivo tal que $2k < m$. Sin embargo, la extensión de los resultados negativos dados en la Sección 4.2 parece mucho más complicada en esta situación, por lo que trataremos solamente el Problema I.60.

4.1 Controlabilidad aproximada cuando la no linealidad es de tipo sublineal.

Mostraremos el siguiente resultado:

Teorema 41 *Asumimos que f satisface las siguientes condiciones: existen dos constantes positivas c_1 y c_2 tales que*

$$(I.61) \quad |f(s)| \leq c_1 + c_2|s| \quad \text{para todo } s \in \mathbb{R}$$

y

$$(I.62) \quad \text{existe } f'(s_0) \text{ para algun } s_0 \in \mathbb{R}.$$

Entonces, el Problema (I.60) tiene la propiedad de la controlabilidad aproximada en tiempo T en el espacio de estados $L^2(\Omega)$ y con el espacio de controles $L^2(\mathcal{O})$. \square

Observación 42 La existencia de soluciones la obtendremos también al demostrar el Teorema 1, mediante el uso del Teorema de Punto Fijo de Kakutani. La unicidad se puede probar fácilmente si f es no decreciente o Lipschitz, pero no es necesario para nuestros argumentos.

Preliminares.

Antes de comenzar con la demostración del Teorema 41 necesitamos introducir algunos resultados previos. Consideramos los espacios

$$V := L^2(0, T; H_0^m(\Omega)) \quad \text{y su dual} \quad V' = L^2(0, T; H^{-m}(\Omega))$$

y denotamos por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ al producto de dualidad entre $H^{-m}(\Omega)$ y $H^m(\Omega)$ y por (\cdot, \cdot) al producto escalar en $L^2(\Omega)$. La norma de V está definida por

$$\|y\|_V^2 = \sum_{j=0}^m \int_Q |D^j y|^2 dx dt,$$

donde

$$(I.63) \quad |D^j y|^2 := \sum_{|\alpha|=j} (D^\alpha y)^2$$

(la suma de todas las derivadas en x de orden j). Por la desigualdad de Poincaré se tiene que

$$(I.64) \quad \|y\|_V^2 \leq C \int_Q |D^m y|^2 dx dt.$$

A continuación resumimos algunas propiedades bien conocidas de estos espacios en los dos siguientes lemas (vease Lions [40] o Lions-Magenes [45], [46] para la demostración del Lema 43, y Lions [40] o Simon [55] para la demostración del Lema 44).

Lema 43 El espacio $\{y \in V : y_t \in V'\}$ está incluido en $C([0, T]; L^2(\Omega))$ y la inclusión es continua. Además, si $y, z \in V$ e $y_t, z_t \in V'$ entonces

$$(1.65) \quad \int_0^T \langle y_t + (-\Delta)^m y, z \rangle dt - \int_0^T \langle -z_t + (-\Delta)^m z, y \rangle dt \\ = (y(T), z(T)) - (y(0), z(0))$$

y

$$(1.66) \quad \int_0^T \langle y_t + (-\Delta)^m y, y \rangle dt = \int_Q |D^m y|^2 dx dt \\ + \frac{1}{2} \int_{\Omega} y(T, x)^2 dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} y(0, x)^2 dx. \quad \square$$

Lema 44 El espacio $\{y \in V : y_t \in V'\}$ está incluido en $L^2(Q)$ y la inclusión es compacta.

□

Antes de tratar el problema no lineal abordaremos el siguiente problema lineal:

$$(1.67) \quad \begin{cases} y_t + (-\Delta)^m y + a(t, x)y = h & \text{en } Q \\ \frac{\partial^j y}{\partial \nu^j} = 0, \quad j = 0, 1, \dots, m-1 & \text{en } \Sigma \\ y(0) = y_0 & \text{en } \Omega. \end{cases}$$

Asumimos $h \in L^2(Q)$, $y_0 \in L^2(\Omega)$ y

$$(1.68) \quad a \in L^\infty(Q) \quad \text{con} \quad \|a\|_{L^\infty(Q)} \leq M.$$

La siguiente proposición recoge algunos resultados básicos sobre el Problema (1.67).

Proposición 45 Existe una única función $y \in V \cap C([0, T]; L^2(\Omega))$ con $y_t \in V'$ que es solución del Problema (1.67). Además, y satisface la estimación

$$(1.69) \quad \|y\|_V + \|y_t\|_{V'} \leq C \left(\|h\|_{L^2(Q)} + \|y_0\|_{L^2(\Omega)} \right),$$

donde la constante C depende solo de M (supuesto que Ω , T y m se mantienen fijos) y C está acotada (al variar M) si M está acotada. Por último, la solución y también satisface que

$$(1.70) \quad y \in L^2(\delta, T; H^{2m}(\Omega)) \quad \text{e} \quad y_t \in L^2((\delta, T) \times \Omega) \quad \text{para todo } \delta \in (0, T). \quad \square$$

Demostración: Definimos y^{n+1} , para cada $n \in \mathbb{N}$, como la solución del problema monótono

$$(P_n) \quad \begin{cases} y_t^{n+1} + (-\Delta)^m y^{n+1} = h - a(t, x)y^n & \text{en } Q \\ \frac{\partial^j y^{n+1}}{\partial \nu^j} = 0, \quad j = 0, 1, \dots, m-1 & \text{en } \Sigma \\ y^{n+1}(0) = y_0 & \text{en } \Omega, \end{cases}$$

donde $y^0(t) := 0$ para todo $t \in [0, T]$. La existencia de una solución $y^n \in V \cap \mathcal{C}([0, T]; L^2(\Omega))$ se puede ver, por ejemplo, en el Teorema 4.1 del Capítulo 3 de Lions-Magenes [45]. De este modo, para todo $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $y^{n+1} - y^n$ es la solución de

$$(I.71) \quad \begin{cases} (y^{n+1} - y^n)_t + (-\Delta)^m (y^{n+1} - y^n) = -a(t, x)(y^n - y^{n-1}) & \text{en } Q \\ \frac{\partial^j (y^{n+1} - y^n)}{\partial \nu^j} = 0 \quad , \quad j = 0, 1, \dots, m-1 & \text{en } \Sigma \\ (y^{n+1} - y^n)(0) = 0 & \text{en } \Omega \end{cases}$$

y por tanto (vease, por ejemplo, el Teorema 6.1 del Capítulo 4 de Lions-Magenes [46])

$$y^{n+1} - y^n \in H^{1,2m}(Q) = H^1(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^{2m}(\Omega))$$

y

$$\| y^{n+1} - y^n \|_{H^{1,2m}(Q)} \leq c_1 \| a(t, x)(y^n - y^{n-1}) \|_{L^2(Q)} .$$

Entonces, como

$$H^{1,2m}(Q) \subset \mathcal{C}([0, T]; H^m(\Omega))$$

es una inclusión continua (vease, por ejemplo, los Teoremas 3.1 y 9.6 del Capítulo 1 de Lions-Magenes [45]), tenemos que

$$\| y^{n+1} - y^n \|_{\mathcal{C}([0, T]; H_0^m(\Omega))} \leq c_2 \| a(t, x)(y^n - y^{n-1}) \|_{L^2(Q)} .$$

Además, c_2 es independiente de T (esto se puede probar fácilmente si multiplicamos en (I.71) por $(y^{n+1} - y^n)$, lo cual implica que

$$\| y^{n+1} - y^n \|_{\mathcal{C}([0, t]; H_0^m(\Omega))} \leq c_2 \| a(t, x)(y^n - y^{n-1}) \|_{L^2((0, t) \times \Omega)}, \quad \text{para todo } t \in [0, T].$$

De este modo,

$$\| (y^{n+1} - y^n)(t) \|_{H_0^m(\Omega)}^2 \leq (c_2 M)^2 \int_0^t \| (y^n - y^{n-1})(\tau) \|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau, \quad \text{para todo } t \in [0, T]$$

y por tanto, si $K = c_2 C^{1/2}$ (C es la Constante de Poincare definida anteriormente), entonces K es independiente de M y

$$\| (y^{n+1} - y^n)(t) \|_{H_0^m(\Omega)}^2 \leq (KM)^2 \int_0^t \| (y^n - y^{n-1})(\tau) \|_{H_0^m(\Omega)}^2 d\tau, \quad \text{para todo } t \in [0, T].$$

Por tanto, para todo $t \in [0, T]$ se tiene que

$$\begin{aligned} \| (y^{n+1} - y^n)(t) \|_{H_0^m(\Omega)}^2 &\leq (K^2 M^2)^{n-1} \int_0^t \int_0^{\tau_1} \dots \int_0^{\tau_{n-1}} \| (y^2 - y^1)(\tau_{n-1}) \|_{H_0^m(\Omega)}^2 d\tau_n \dots d\tau_1 \\ &\leq (K^2 M^2)^{n-1} \int_0^t \int_0^{\tau_1} \dots \int_0^{\tau_{n-1}} \| y^2 - y^1 \|_{\mathcal{C}([0, T]; H_0^m(\Omega))}^2 d\tau_n \dots d\tau_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq (K^2 M^2)^{n-1} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \|y^2 - y^1\|_{C([0,T]; H_0^m(\Omega))} \\ &\leq \frac{(K M^2 T)^{n-1}}{(n-1)!} \|y^2 - y^1\|_{C([0,T]; H_0^m(\Omega))}, \end{aligned}$$

lo cual implica que

$$\|y^{n+1} - y^n\|_{C([0,T]; H_0^m(\Omega))} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

Entonces existe $y \in V \cap C([0, T]; L^2(\Omega))$ tal que

$$y_n \rightarrow y \quad \text{en } V \cap C([0, T]; L^2(\Omega)) \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

Para probar que y es solución de (I.67) observamos que

$$\Delta^m y^n \rightarrow \Delta^m y \quad \text{en } V' \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty,$$

y

$$y_t^n \rightarrow y_t \quad \text{en } V' \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

Esto implica (pasando al límite) que y es solución de (I.67). Además, la desigualdad (I.69) se puede obtener, por ejemplo, multiplicando en (I.67) por y . Ahora, gracias a (I.69) y a la linealidad del Problema (I.67), se deduce la unicidad de solución. Finalmente, como $y(\delta) \in H_0^m(\Omega)$, si tomamos $y(\delta)$ como dato inicial, obtenemos (vease de nuevo el Teorema 6.1 del Capítulo 4 de [46]) que $y \in H^{1,2m}((\delta, T) \times \Omega)$, lo cual es equivalente a la regularidad de (I.70). ■

A continuación, al igual que hemos hecho en las secciones previas a esta, consideramos

$$(I.72) \quad \varepsilon > 0, \quad y_d \in L^2(\Omega), \quad a \in L^\infty(Q)$$

y consideramos el funcional $J = J(\cdot; a, y_d) : L^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$(I.73) \quad J(\varphi^0) = \frac{1}{2} \left(\int_Q |\varphi(t, x)|^2 dx dt \right) + \varepsilon |\varphi^0|_{L^2(\Omega)} - \int_\Omega y_d \varphi^0 dx$$

donde $\varphi(t, x)$ es la solución del problema retrógrado

$$(I.74) \quad \begin{cases} -\varphi_t + (-\Delta)^m \varphi + a(t, x) \varphi = 0 & \text{en } Q \\ \frac{\partial^j \varphi}{\partial \nu^j} = 0, \quad j = 0, 1, \dots, m-1 & \text{en } \Sigma \times (0, T) \\ \varphi(T) = \varphi^0 & \text{en } \Omega \end{cases}$$

Al igual que en las secciones anteriores, necesitaremos una propiedad de *continuación única* para las soluciones del Problema (I.74).

Lema 46 Sea ω un subconjunto abierto no vacío de Ω . Asumimos que

$$\varphi \in L^2(0, T; H_0^m(\Omega)) \cap C([0, T]; L^2(\Omega))$$

es solución de la ecuación de (1.74) en $\mathcal{D}'(Q)$ y que $\varphi \equiv 0$ en $\mathcal{O} = \omega \times (0, T)$. Entonces $\varphi \equiv 0$ en Q . \square

Demostración: Gracias a la Proposición 45 (aplicada con el tiempo en forma retrógrada) deducimos que $\varphi \in L^2(0, T - \delta; H^{2m}(\Omega))$ para todo $\delta \in (0, T)$. Entonces, el Lema 46 se deduce del Teorema 3.2 de Saut-Scheurer [53]. \blacksquare

Los siguientes resultados son, de nuevo, fáciles adaptaciones de los similares dados en Fabre-Puel-Zuazua [28], [29] para problemas de segundo orden.

Proposición 47 Si asumimos la hipótesis (1.72), el funcional $J(\cdot; a, y_d)$ es continuo y estrictamente convexo en $L^2(\Omega)$ y satisface

$$(1.75) \quad \liminf_{|\varphi^0|_2 \rightarrow \infty} \frac{J(\varphi^0; a, y_d)}{|\varphi^0|_2} \geq \varepsilon.$$

Además, $J(\cdot; a, y_d)$ alcanza su mínimo en un único punto $\hat{\varphi}^0 \in L^2(\Omega)$ y

$$(1.76) \quad \hat{\varphi}^0 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad |y_d|_2 \leq \varepsilon. \quad \square$$

Proposición 48 Sea M la aplicación

$$M : L^\infty(Q) \times L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega) \\ (a(t, x), y_d) \rightarrow \hat{\varphi}^0.$$

Entonces, si B es un subconjunto acotado de $L^\infty(Q)$ y K es un subconjunto compacto de $L^2(\Omega)$, el conjunto $M(B \times K)$ es un subconjunto acotado de $L^2(\Omega)$. \square

Lema 49 Para cada $\varphi^0 \in L^2(\Omega)$, $\varphi^0 \neq 0$, si φ es la solución de (1.74), se tiene que

$$\partial J(\varphi^0; a, y_d) = \{ \xi \in L^2(\Omega), \exists v \in \text{sgn}(\varphi) \chi_{\mathcal{O}} \text{ satisfying}$$

$$\int_{\Omega} \xi(x) \theta^0(x) dx = \left(\int_{\mathcal{O}} |\varphi(t, x)| d\Sigma \right) \left(\int_{\mathcal{O}} v(t, x) \theta(t, x) d\Sigma \right) \\ + \varepsilon \int_{\Omega} \frac{\varphi^0(x)}{|\varphi^0|_2} \theta^0(x) dx - \int_{\Omega} y_d(x) \theta^0(x) dx \quad \forall \theta^0 \in L^2(\Omega) \},$$

donde θ es la solución de (1.74) satisfaciendo $\theta(T) = r(\theta^0)$. \square

Controlabilidad Aproximada para un problema lineal asociado.

Teorema 50 Si $|y_d|_2 > \varepsilon$ y $\hat{\varphi}$ es la solución de (1.74) verificando $\hat{\varphi}(T) = \hat{\varphi}^0$, entonces existe $u_a \in L^\infty(Q)$ tal que la solución de

$$(1.77) \quad \begin{cases} y_t + (-\Delta)^m y + a(x, t)y = h + u_a \chi_{\mathcal{O}} & \text{en } Q \\ \frac{\partial^j y}{\partial \nu^j} = \theta \quad (j = 0 \dots (m-1)) & \text{en } \Sigma \\ y(0) = y_0 & \text{en } \Omega \end{cases}$$

verifica

$$y(T) = y_d - \varepsilon \frac{\hat{\varphi}^0}{|\hat{\varphi}^0|_2}$$

y por tanto $|y(T) - y_d|_2 = \varepsilon$. \square

Observación 51 Si $y_0 \equiv 0$, y $h \equiv 0$, el caso $|y_d| \leq \varepsilon$ se resuelve trivialmente con el control $u_a \equiv 0$.

Demostración del Teorema 50. Por linealidad podemos asumir $y_0 \equiv 0$ y $h \equiv 0$, puesto que en otro caso podríamos tomar la solución $y(T : 0)$ del problema con control nulo y despues tomar el nuevo estado deseado $y'_d = y_d - y(T : 0) \in L^2(\Omega)$ para el problema con $y_0 \equiv 0$ y $h \equiv 0$. Ahora, usando la subdiferenciabilidad de $J(\cdot; a, y_d)$ en $\hat{\varphi}^0$ ($\neq 0$ por (1.76)), sabemos (vease la Observación 17) que

$$0 \in \partial J(\hat{\varphi}^0),$$

lo cual es equivalente, por el Lema 49, a la existencia de $v \in \text{sgn}(\hat{\varphi})\chi_{\mathcal{O}}$, tal que

$$(1.78) \quad -|\hat{\varphi}|_{L^1(\mathcal{O})} \left(\int_{\mathcal{O}} v(x, t)\theta(x, t) dx dt \right) = \frac{\varepsilon}{|\hat{\varphi}^0|_2} \int_{\Omega} \hat{\varphi}^0(x)\theta^0(x) dx - \int_{\Omega} y_d(x)\theta^0(x) dx.$$

Ahora, definimos el control u_a como $u_a = |\hat{\varphi}|_{L^1(\mathcal{O})}v$. Observese que

$$(1.79) \quad u_a \in L^\infty(Q), \text{ y } \|u_a\|_{L^\infty(Q)} \leq \|\hat{\varphi}\|_{L^1(\mathcal{O})} \text{ si } k = 0.$$

Entonces, si multiplicamos por θ en (1.77) obtenemos (por (1.74) que

$$(1.80) \quad (y(T), \theta^0)_{L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)} = |\hat{\varphi}|_{L^1(\mathcal{O})} \left(\int_{\mathcal{O}} v(x, t)\theta(x, t) dx dt \right).$$

Finalmente, de (1.78) y (1.80), se deduce que

$$(y(T), \theta^0)_{L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)} = (y_d - \varepsilon \frac{\hat{\varphi}^0}{|\hat{\varphi}^0|_2}, \theta^0)_{L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)} \quad \forall \theta^0 \in L^2(\Omega)$$

y por tanto $y(T) = y_d - \varepsilon \frac{\hat{\varphi}^0}{|\hat{\varphi}^0|_2}$. \blacksquare

Controlabilidad para el problema no lineal.

Para el caso no lineal usaremos (al igual que en los casos de orden dos de las secciones anteriores) el Teorema de Punto Fijo de Kakutani

Demostración del Teorema 41. La aparición de un término multívoco en la ecuación se puede tratar, en la demostración de este teorema, de manera análoga a lo hecho en las demostración de los Teoremas 7, 27 y por tanto, demostraremos el caso en el que $A(x, t) \equiv 0$ (es decir, no aparece ningún término multívoco en la ecuación).

Fijamos $y_d \in L^2(\Omega)$, $\varepsilon > 0$ y definimos

$$g(s) = \frac{f(s) - f(s_0)}{s - s_0}.$$

Entonces, por las hipótesis hechas sobre f tenemos que $g \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$.

Ahora, por el Teorema 50, para cada $z \in L^2(Q)$ y $\varepsilon > 0$ se puede encontrar $\varphi(z) \in L^1(Q)$ y $v(z) \in \text{sgn}(\varphi(z))\chi_{\mathcal{O}}$ tal que la solución $y = y^z$ de

$$(I.81) \quad \begin{cases} y_t + (-\Delta)^m y + g(z)y = h - f(s_0) + g(z)s_0 + u\chi_{\mathcal{O}} & \text{en } Q \\ \frac{\partial^j y}{\partial \nu^j} = 0, \quad j = 0, 1, \dots, m-1 & \text{en } \Sigma \\ y(0) = y_0 & \text{en } \Omega, \end{cases}$$

(donde $u = u_{g(z)}$) satisface

$$(I.82) \quad |y(T) - y_d|_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon.$$

Además el conjunto

$$(I.83) \quad \{ \|\varphi(z)\|_{L^1(\mathcal{O})} v(z), z \in L^2(Q) \} \quad \text{está acotado en } L^\infty(Q)$$

puesto que, siguiendo la demostración del Teorema 50, se observa que $\varphi(z)$ es la solución de (I.74) con valor final $M((g(z), y_d^z))$ (vease la Proposición 48) y potencial $g(z)$, donde $y_d^z = y_d - y^z(T; 0)$, con $y^z(T; 0)$ la solución de (I.81) en tiempo T con el control $u = 0$. De este modo, aplicando el Lema 52, se obtiene que y_d^z pertenece a un conjunto compacto para todo $z \in L^2(Q)$ y por tanto (usando las Proposiciones 48 y 45), obtenemos (I.83).

Para poder seguir con la demostración introducimos el siguiente resultado:

Lema 52 *El conjunto*

$$\{y_d^z, z \in L^2(Q)\},$$

donde y_d^z son las funciones definidas en la demostración del Teorema 41, es relativamente compacto en $L^2(\Omega)$. \square

Demostración del Lema 52. Escribimos las soluciones $y^z(\cdot : 0)$ de

$$\begin{cases} y_t + (-\Delta)^m y + g(z)y = h - f(s_0) + g(z)s_0 & \text{en } Q \\ \frac{\partial^j y}{\partial \nu^j} = 0, \quad j = 0, 1, \dots, m-1 & \text{en } \Sigma \\ y(0) = y_0 & \text{en } \Omega \end{cases}$$

como $y^z(\cdot : 0) = u + v$, donde u es la solución de

$$\begin{cases} u_t + (-\Delta)^m u = h - f(s_0) & \text{en } Q \\ \frac{\partial^j u}{\partial \nu^j} = 0, \quad j = 0, 1, \dots, m-1 & \text{en } \Sigma \\ u(0) = y_0 & \text{en } \Omega \end{cases}$$

y v es la solución de

$$\begin{cases} v_t + (-\Delta)^m v + g(z)(u + v) = g(z)s_0 & \text{en } Q \\ \frac{\partial^j v}{\partial \nu^j} = 0, \quad j = 0, 1, \dots, m-1 & \text{en } \Sigma \\ v(0) = 0 & \text{en } \Omega. \end{cases}$$

Entonces, aplicando la Proposición 45 y los resultados de Lions-Magenes [46] (página 78), obtenemos que existe $K > 0$ independiente de z tal que

$$\|v\|_{H^{1,2m}(Q)} \leq K(1 + \|y_0\|_{L^2(\Omega)} + \|h\|_{L^2(Q)}).$$

Finalmente, como $H^{1,2m}(Q)$ está incluido en $\mathcal{C}([0, T]; L^2(\Omega))$ con inclusión compacta, se concluye el resultado. ■

Fin de la demostración del Teorema 41. Por tanto, sabemos que

$$(1.84) \quad K_1 = \sup_{z \in L^2(0, T; H_0^{2k}(\Omega))} \|\varphi(z)\|_{L^1(\mathcal{O})} < \infty.$$

Entonces, aplicando (1.79), obtenemos la existencia de una constante positiva K_2 independiente de z tal que

$$(1.85) \quad \|u\|_{L^2(Q)} \leq K_2$$

para todo control $u = u_{g(z)}$. De este modo, si definimos el operador

$$\Lambda : L^2(Q) \rightarrow \mathcal{P}(L^2(Q))$$

por

$$\Lambda(z) = \{y \text{ satisfaciendo (1.81), (1.82) para algún } u \text{ satisfaciendo (1.85)}\},$$

hemos visto que para cada $z \in L^2(Q)$, $\Lambda(z) \neq \emptyset$. Para poder aplicar el Teorema del Punto Fijo de Kakutani tenemos que comprobar que se verifican las siguientes propiedades:

- (i) Existe un subconjunto compacto U de $L^2(Q)$ tal que, para cada $z \in L^2(Q)$, $\Lambda(z) \subset U$.
- (ii) Para cada $z \in L^2(Q)$, $\Lambda(z)$ es un subconjunto convexo, compacto y no vacío de $L^2(Q)$.
- (iii) Λ es hemicontinua superiormente.

La prueba de estas propiedades es la siguiente:

- (i) Por la Proposición 45 sabemos que existe un subconjunto acotado U de $\{y \in V : y_t \in V'\}$ tal que para cada $z \in L^2(Q)$, se tiene $\Lambda(z) \subset U$. Ahora, para ver que podemos elegir U compacto, probaremos que el conjunto

$$\mathcal{Y} = \{y \text{ satisfaciendo (I.81) para algún } z \in L^2(Q) \text{ y } u \text{ verificando (I.85)}\}$$

es un subconjunto relativamente compacto de $L^2(Q)$. Pero esto es fácil de probar usando que

$$(I.86) \quad \{y \in V : y_t \in V'\} \subset L^2(Q) \text{ es una inclusión compacta}$$

(vease el Lema 44).

- (ii) Ya hemos probado que para cada $z \in L^2(Q)$, $\Lambda(z)$ es un subconjunto no vacío de $L^2(Q)$. Además, $\Lambda(z)$ es obviamente convexo, pues $B(y_d, \varepsilon)$ y $\{u \in L^2(Q) : \text{satisfaciendo (I.85)}\}$ son conjuntos convexos. Por tanto, tenemos que probar que $\Lambda(z)$ es un subconjunto compacto de $L^2(Q)$. En (i) hemos probado que $\Lambda(z) \subset U$ con U compacto. Sea $(y^n)_n$ una sucesión de elementos de $\Lambda(z)$ que converge en $L^2(Q)$ a $y \in U$. Probaremos que $y \in \Lambda(z)$. Sabemos que existe $u^n \in L^2(Q)$, satisfaciendo (I.85), tal que

$$(I.87) \quad \begin{cases} y_t^n + (-\Delta)^m y^n + g(z)y^n = h - f(s_0) + g(z)s_0 + u^n \chi_{\mathcal{O}} & \text{en } Q \\ \frac{\partial^j y^n}{\partial \nu^j} = 0, \quad j = 0, 1, \dots, m-1 & \text{en } \Sigma \\ y^n(0) = y_0 & \text{en } \Omega \\ |y^n(T) - y_d|_2 \leq \varepsilon. \end{cases}$$

Ahora, usando que los controles u^n están uniformemente acotados, deducimos que $u^n \rightarrow u$ en la topología débil de $L^2(Q)$ y u satisface (I.85). Entonces, si pasamos al límite en (I.87) obtenemos que y verifica

$$\begin{cases} y_t + (-\Delta)^m y + g(z)y = h - f(s_0) + g(z)s_0 + u \chi_{\mathcal{O}} & \text{en } Q \\ \frac{\partial^j y}{\partial \nu^j} = 0, \quad j = 0, 1, \dots, m-1 & \text{en } \Sigma \\ y(0) = y_0 & \text{en } \Omega. \end{cases}$$

Además, $v^n = y - y^n$ es solución de

$$\begin{cases} v_t^n + (-\Delta)^m v^n + g(z)v^n = (u - u^n)\chi_{\mathcal{O}} & \text{en } Q \\ \frac{\partial^j v^n}{\partial \nu^j} = 0, \quad j = 0, 1, \dots, m-1 & \text{en } \Sigma \\ v^n(0) = 0 & \text{en } \Omega \end{cases}$$

y satisface $v^n \in H^{1,2m}(Q)$ (vease [46]). De este modo, v^n es solución en el sentido “fuerte” y, si multiplicamos por v^n e integramos, obtenemos que

$$\|v^n(T)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq k \int_Q (u - u^n)\chi_{\mathcal{O}} v^n dxdt \rightarrow 0 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

Por tanto $y^n(T)$ converge a $y(T)$ en la topología de $L^2(\Omega)$ y $\|y(T) - y_d\|_2 \leq \varepsilon$. Esto prueba que $y \in \Lambda(z)$ y concluye la prueba de la hipótesis (ii).

(iii) Tenemos que probar que para cada $z_0 \in L^2(Q)$ se cumple que

$$\limsup_{z_n \xrightarrow{L^2(Q)} z_0} \sigma(\Lambda(z_n), k) \leq \sigma(\Lambda(z_0), k), \quad \forall k \in L^2(Q).$$

En (ii) hemos visto que $\Lambda(z)$ es un subconjunto compacto de $L^2(Q)$, lo que implica que, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $y^n \in \Lambda(z_n)$ tal que

$$\sigma(\Lambda(z_n), k) = \int_Q k(x, t) y^n(x, t) dxdt.$$

Ahora, por (i), $(y^n)_n \subset U$ (subconjunto compacto). Entonces existe $y \in L^2(Q)$ tal que (después de extraer una subsucesión) $y^n \rightarrow y$ en $L^2(Q)$. Probaremos que $y \in \Lambda(z_0)$. Sabemos que existe $u^n \in L^2(Q)$ satisfaciendo (I.85) tal que

$$(1.88) \quad \begin{cases} y_t^n + (-\Delta)^m y^n + g(z_n)y^n = h - f(s_0) + g(z_n)s_0 + u^n\chi_{\mathcal{O}} & \text{en } Q \\ \frac{\partial^j y^n}{\partial \nu^j} = 0, \quad j = 0, 1, \dots, m-1 & \text{en } \Sigma \\ y^n(0) = y_0 & \text{en } \Omega \\ \|y^n(T) - y_d\|_2 \leq \varepsilon. \end{cases}$$

Entonces existe $u \in L^2(Q)$ satisfaciendo (I.85) tal que $u^n \rightarrow u$ en la topología débil de $L^2(Q)$. Por otro lado, usando el efecto regularizante de la ecuación parabólica lineal (de manera análoga a lo hecho en la prueba de (ii)) y que $g \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$, deducimos que y satisface (I.81) y (I.82), con $z = z_0$, para algún $u \in L^2(Q)$ satisfaciendo (I.85), lo cual implica que $y \in \Lambda(z_0)$. Entonces, para cada $k \in L^2(Q)$,

$$\sigma(\Lambda(z_n), k) = \int_Q k(x, t) y^n(x, t) dxdt \rightarrow \int_Q k(x, t) y(x, t) dxdt$$

$$\leq \sup_{\bar{y} \in \Lambda(z_0)} \int_Q k(x, t) \bar{y}(x, t) dx dt = \sigma(\Lambda(z_0), k),$$

lo cual prueba que Λ es hemicontinua superiormente y concluye la prueba de (iii).

Finalmente, si restringimos Λ a $K = \text{conv}(U)$ (envoltura convexa de U), que es un subconjunto compacto de $L^2(Q)$, se satisfacen las hipótesis del Teorema del Punto Fijo de Kakutani. Entonces, Λ tiene un punto fijo $y \in K$. Además, por construcción, existe un control $u \in L^2(Q)$ satisfaciendo (I.85) tal que

$$(I.89) \quad \begin{cases} y_t + (-\Delta)^m y + f(y) = h + u \chi_O & \text{en } Q \\ \frac{\partial^j y}{\partial \nu^j} = 0, \quad j = 0, 1, \dots, m-1 & \text{en } \Sigma \\ y(0) = y_0 & \text{en } \Omega \\ |y(T) - y_d|_2 \leq \varepsilon. \end{cases}$$

Por tanto, y resuelve el problema de controlabilidad aproximada planteado. ■

4.2 Resultados negativos para un caso superlineal.

En esta sección probaremos un resultado de no controlabilidad aproximada para el caso $k = 0$ y $\bar{\omega} \subset \Omega$.

Teorema 53 *Si $p > 1$, $y_0 \in L^2(\Omega)$ y ω es un subconjunto abierto de Ω tal que $\bar{\omega} \subset \Omega$, el problema*

$$\frac{\begin{cases} y_t + (-\Delta)^m y + |y|^{p-1} y = u \chi_\omega & \text{en } Q \\ y(0) = y_0 & \text{en } \Omega \end{cases}}{\quad}$$

con controles $u \in L^2(Q)$ (o más generalmente con $u \in L^{r'}(Q)$ donde $r = p + 1 > 2$ y por tanto $r' \in (1, 2)$) y cualquier condición de contorno sobre $\partial\Omega$, no verifica, en general, la propiedad de controlabilidad aproximada en un tiempo T prefijado. □

Para probar este teorema utilizaremos algunos resultados que, aunque son conocidos, pasamos a exponer para utilizar su notación.

Desigualdad de Young. Si $a, B \geq 0$, $\varepsilon > 0$ y $q > 1$, entonces

$$(I.90) \quad AB \leq \varepsilon A^q + K(\varepsilon, q) B^{q'} \quad \text{con} \quad \frac{1}{K(\varepsilon, q)} = q' (q\varepsilon)^{q'/q}.$$

Notación. Dada una constante $R > 0$ podemos definir en \mathbb{R}^N las funciones

$$\xi_R(x) = (R^2 - |x|^2)/R \quad \text{si} \quad |x| < R, \quad \xi_R(x) = 0 \quad \text{si} \quad |x| \geq R$$

y las potencias ξ_R^s de las funciones ξ_R , donde $s > 1$ es un número real. Podemos también definir

$$(1.91) \quad d_R(x) = R - |x| \text{ si } |x| < R, \quad d_R(x) = 0 \text{ si } |x| \geq R$$

y entonces se tiene la siguiente relación, para todo $x \in \mathbb{R}^N$.

$$(1.92) \quad d_R(x) \leq \xi_R(x) \leq 2d_R(x).$$

El siguiente resultado fué probado en Bernis [11].

Proposición 54 *Sea $s \geq 2m$ y $R > 0$. Entonces, para cada $\varepsilon > 0$ existe una constante C , que depende solo de N , m , s y ε (y por tanto independiente de R), tal que se verifica la siguiente desigualdad para todo $y \in H_{loc}^m(\mathbb{R}^N)$:*

$$((-\Delta)^m y, \xi_R^s y)_{H_{loc}^{-m}(\mathbb{R}^N) \times H_c^m(\mathbb{R}^N)} \geq (1 - \varepsilon) \int_{\mathbb{R}^N} \xi_R^s |D^m y|^2 dx - C \int_{\mathbb{R}^N} \xi_R^{s-2m} y^2 dx. \quad \square$$

Observación 55 Como $s \geq 2m$, se tiene que $\xi_R^s \in W_c^{2m, \infty}(\mathbb{R}^N)$. Entonces $\xi_R^s \in C_c^m(\mathbb{R}^N)$ (vease e.g. el Corolario IX.13 de [13]) y $\xi_R^s u \in H_c^m(\mathbb{R}^N)$ (vease e.g. la Nota 4 del Capítulo IX de [13]).

Corolario 56 *Sea $s \geq 2m$ y $R > 0$ tal que $\overline{B_R} \subset \Omega$. Entonces, para cada $\varepsilon > 0$, existe una constante C , que depende solo de N , m , s y ε (y por tanto independiente de R), tal que se verifica la siguiente desigualdad para todo $y \in H^m(\Omega)$:*

$$((-\Delta)^m y, \xi_R^s y)_{H^{-m}(\Omega) \times H_0^m(\Omega)} \geq (1 - \varepsilon) \int_{\Omega} \xi_R^s |D^m y|^2 dx - C \int_{\Omega} \xi_R^{s-2m} y^2 dx. \quad \square$$

Demostración: Tomamos $\bar{y} \in H^m(\mathbb{R}^n)$ tal que $\bar{y} = y$ en Ω (la existencia de \bar{y} se puede ver, por ejemplo, en el Teorema IX de Brezis [13]). Entonces, podemos aplicar la Proposición 54 con \bar{y} . De aquí, teniendo en cuenta que $\overline{B_R} \subset \Omega$, obtenemos el resultado.

■

Teorema 57 *Sea $p > 1$, $r = p + 1$, $y_0 \in L^2(\Omega)$ y $u \in L^{r'}(Q)$. Entonces, cualquier solución $y \in L^r(Q) \cap L^2(0, T; H^m(\Omega))$ de*

$$(1.93) \quad \begin{cases} y_t + (-\Delta)^m y + |y|^{p-1} y = u & \text{en } \mathcal{D}'(Q) \\ y(0) = y_0 & \text{en } \Omega, \end{cases}$$

con cualquier condición sobre la frontera $\partial\Omega$, satisface la estimación local

$$\begin{aligned} & \sup_{0 < t < T} \int_{B_R} y(x, t)^2 dx + \int_{B_R \times (0, T)} (|D^m y|^2 + |y|^r) dx dt \\ & \leq K \left(1 + \int_{B_{R_1} \times (0, T)} |u|^{r'} dx dt + \int_{B_{R_1}} y_0^2 dx \right) \end{aligned}$$

si $\overline{B_{R_1}} \subset \Omega$ y $0 < R \leq R_1$. Además, la constante K depende solo de N , m , p , R , R_1 y T .

□

Observación 58 El conjunto de soluciones del problema que aparece en el Teorema 57 no es el conjunto vacío pues, por ejemplo, con condiciones de Dirichlet en la frontera, sabemos que existe una única solución (vease e.g. Lions [41]).

Demostración del Teorema 57. Tomamos $X_r = L^r(Q) \cap L^2(0, T; H_0^m(\Omega))$. Entonces la igualdad en la ecuación de (I.93) es en $X_r' = L^{r'}(Q) + L^2(0, T; H^{-m}(\Omega))$. Ahora, si $s \geq 2m$, podemos multiplicar en (I.93) por $\xi_R^s y$ mediante el producto de dualidad $(\cdot, \cdot)_{X_r' \times X_r}$ y obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{B_R} \xi_R^s y(x, T)^2 dx + ((-\Delta)^m y, \xi_R^s y)_{L^2(0, T; H^{-m}(\Omega)) \times L^2(0, T; H_0^m(\Omega))} + (|y|^{p-1} y, \xi_R^s y)_{L^{r'}(Q) \times L^r(Q)} \\ = \frac{1}{2} \int_{B_R} \xi_R^s y_0(x)^2 dx + (u, \xi_R^s y)_{L^{r'}(Q) \times L^r(Q)}. \end{aligned}$$

Ahora, por el Corolario 56, tenemos que

$$(I.94) \quad \begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{B_R} \xi_R^s y(x, T)^2 dx + \int_{B_R \times (0, T)} \xi_R^s (|D^m y|^2 + |y|^r) dx dt \\ & \leq C \int_{B_R} \xi_R^s y_0(x)^2 dx + C \int_{B_R \times (0, T)} \xi_R^{s-2m} y^2 dx dt + C \int_{B_R \times (0, T)} \xi_R^s u y dx dt. \end{aligned}$$

Por (I.91) y (I.92) sabemos que podemos reemplazar en (I.94) $\xi_R(x)$ por $R - |x|$ (modificando las constantes). Además, si escribimos $s-2m = 2s/r + (s(r-2)/r) - 2m$ y aplicamos la desigualdad de Hölder o la de Young (I.90) con exponentes $q = r/2$ y $q' = r/r - 2$, obtenemos

$$\begin{aligned} & \int_{B_R \times (0, T)} (R - |x|)^{s-2m} y^2 dx dt \\ & \leq \varepsilon \int_{B_R \times (0, T)} (R - |x|)^s |y|^r dx dt + K(\varepsilon, r/2) \int_{B_R \times (0, T)} (R - |x|)^{s-\gamma} dx dt \end{aligned}$$

con

$$\gamma = \frac{2mr}{r-2}.$$

Ahora, si tomamos $s > \gamma - 1$, la última integral es finita e igual a $\tilde{C}R^{s+N-\gamma}$. Por otra parte, podemos aplicar de nuevo (I.90) y obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{B_R \times (0, T)} (R - |x|)^s u y dx dt & \leq \varepsilon \int_{B_R \times (0, T)} (R - |x|)^s |y|^r dx dt \\ & + k(\varepsilon, r) \int_{B_R \times (0, T)} (R - |x|)^s |u|^{r'} dx dt. \end{aligned}$$

De este modo, cambiando las constantes, deducimos que

$$\frac{1}{2} \int_{B_R} (R - |x|)^s y(x, T)^2 dx + \int_{B_R \times (0, T)} (R - |x|)^s (|D^m y|^2 + |y|^r) dx dt$$

$$\leq C \left(\int_{B_R} (R - |x|)^s y_0(x)^2 dx + R^{s+N-\gamma} + \int_{B_R \times (0, T)} (R - |x|)^s |u|^{r'} dx dt \right).$$

Finalmente, reemplazando R por R_1 y teniendo en cuenta que $R_1 - |x| \geq R_1 - R$ y $R_1 - |x| \leq R_1$ si $|x| \leq R$, deducimos el resultado con

$$K = \max \left\{ C \left(\frac{R_1}{R_1 - R} \right)^s, \frac{C R_1^{s+N-\gamma}}{(R_1 - R)^s} \right\}. \quad \blacksquare$$

Demostración del Teorema 53. La conclusión del Teorema 53 es una consecuencia del Teorema 57 pues, si R_1 satisface $\overline{B_{R_1}} \subset \Omega \setminus \omega$, entonces

$$\|y(u; T)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq K(1 + \|y_0\|_{L^2(\Omega)}^2) \quad \forall u \in L^{r'}(Q),$$

con lo que, si tomamos y_d con $\|y_d\|_{L^2(\Omega)}$ suficientemente grande, ningún control será satisfactorio. \blacksquare

Capítulo II

Factorización de un problema elíptico.

1 Motivación.

Una forma usual de resolver numéricamente un problema de tipo elíptico, después de su discretización por diferencias finitas o elementos finitos, es factorizar la matriz del sistema lineal resultante en forma LU y resolver los dos nuevos sistemas lineales, con matriz asociada triangular, por sustitución. El propósito de este capítulo es mostrar que esta factorización se puede extender al caso infinito dimensional. Más concretamente, intentaremos factorizar un problema elíptico de orden dos, reduciéndolo a un sistema de ecuaciones diferenciales desacopladas de primer orden. Para hacer esto seguiremos técnicas de inclusión invariante (veanse las Observaciones 67 y 69). Veamos algunos ejemplos en el caso unidimensional.

Un problema sencillo en dimensión 1. Sean $f \in L^2(0, 1)$, e $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$. Denotamos por y a la solución del problema de contorno

$$\begin{cases} -\frac{d^2y}{dx^2} = f & x \in]0, 1[\\ -\frac{dy}{dx}(0) = y_0 \\ y(1) = y_1. \end{cases}$$

Es bien conocido que $y \in H^2(0, 1) \subset C^1(0, 1)$ y si definimos $\xi = \frac{dy}{dx}$ se deduce que ξ es solución del problema

$$\begin{cases} \frac{d\xi}{dx} = -f & x \in]0, 1[\\ \xi(0) = -y_0 \end{cases}$$

con lo que

$$\xi(x) = -y_0 - \int_0^x f(s)ds.$$

Además se tiene que

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \xi & x \in]0, 1[\\ y(1) = y_1 \end{cases}$$

y finalmente

$$y(x) = y_1 - \int_x^1 \xi(s)ds.$$

Un problema más general en dimensión 1. Con las mismas hipótesis que en el ejemplo anterior, $p, q \in \mathbb{R}$ y $p \neq 0$, denotamos por y a la solución de

$$\begin{cases} -p \frac{d^2 y}{dx^2} + qy = f & x \in]0, 1[\\ \frac{dy}{dx}(0) = y_0 \\ y(1) = y_1. \end{cases}$$

Intentamos hacer la siguiente factorización:

$$A = -p \frac{d^2}{dx^2} + q = -p \left(\frac{d}{dx} + \beta(x) \right) \left(\frac{d}{dx} - \alpha(x) \right),$$

Con α y β a determinar. De este modo, para cada $\varphi \in \mathcal{C}^2((0, 1))$ tenemos que

$$\begin{aligned} A(\varphi) &= -p \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + q\varphi = -p \left(\frac{d^2 \varphi}{dx^2} - \frac{d}{dx}(\alpha\varphi) + \beta \frac{d\varphi}{dx} - \alpha\beta\varphi \right) \\ &= -p \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + p(\alpha - \beta) \frac{d\varphi}{dx} + p \left(\frac{d\alpha}{dx} + \alpha\beta \right) \varphi, \end{aligned}$$

de donde se deduce que necesariamente

$$\begin{cases} \alpha = \beta \\ \frac{d\beta}{dx} + \beta^2 = \frac{q}{p}. \end{cases}$$

Ahora, si elegimos $\beta(0) = 0$ y definimos

$$\xi = -\frac{dy}{dx} + \beta y$$

entonces $\xi(0) = -y_0$ y obtenemos el siguiente sistema desacoplado de primer orden.

$$\begin{cases} \frac{d\beta}{dx} + \beta^2 = \frac{q}{p} & \beta(0) = 0 \\ \frac{d\xi}{dx} + \beta\xi = \frac{f}{p} & \xi(0) = -y_0 \\ \frac{dy}{dx} - \beta y = -\xi & y(1) = y_1. \end{cases}$$

2 Un problema elíptico en un dominio rectangular bidimensional.

2.1 Formulación del problema.

Sean $X = L^2(0, a; H_0^1(0, b)) \cap H^1(0, a; L^2(0, b))$, $f \in L^2((0, a) \times (0, b))$, $y_0 \in H^{-1/2}(0, b)$ e y_a una función suficientemente regular en $(0, b)$. Denotamos por $y \in X$ a la solución del problema

$$(\mathcal{P}_0) \begin{cases} -\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} = f & \text{en } \Omega = (0, a) \times (0, b) \\ y|_{\Gamma_l} = 0 \\ -\frac{\partial y}{\partial x_1}|_{\Gamma_0} = y_0, \quad y|_{\Gamma_a} = y_a. \end{cases}$$

Antes de dar la definición de solución del Problema (\mathcal{P}_0) asociada a esa regularidad sobre los datos necesitamos introducir algunos resultados.

Definición 59 Siguiendo Grisvard [34], para cada $s > 0$ y para cada conjunto abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, denotamos por $\widetilde{H}^s(\Omega)$ al espacio de los elementos $u \in H^s(\Omega)$, tales que $\tilde{u} \in H^s(\mathbb{R}^n)$ (\tilde{u} = extensión por cero de u en el exterior de Ω).

La siguiente observación reúne algunas propiedades básicas sobre los espacios $\widetilde{H}^s(\Omega)$ (vease el Lema 1.3.2.6 de Grisvard [34]).

Observación 60 Para todo $s > 0$, $\widetilde{H}^s(\Omega)$ es un espacio de Banach para la norma

$$\|u\|_{\widetilde{H}^s(\Omega)} = \|\tilde{u}\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}.$$

Además

$$\|u\|_{\widetilde{H}^m(\Omega)} = \|u\|_{H^m(\Omega)}$$

si $s = m$ es un entero, mientras que

$$\|u\|_{\widetilde{H}^s(\Omega)} = \left\{ \|u\|_{H^s(\Omega)}^2 + \sum_{|\alpha|=m} \int_{\Omega} |D^\alpha u(x)|^2 \rho_\sigma(x) dx \right\}^{1/2} \geq \|u\|_{H^s(\Omega)}$$

si $s = m + \sigma$ no es un entero, donde

$$\rho_\sigma(x) = \int_{\Gamma} \frac{dy}{|x-y|^{n+2\sigma}}.$$

Si Ω está acotado y tiene una frontera Lipschitz, existen dos constantes c_1 y c_2 , $c_1 \leq c_2$, tales que

$$c_1 d(x; \Gamma)^{-2\sigma} \leq \rho_\sigma(x) \leq d(x; \Gamma)^{-2\sigma}$$

donde $d(x; \Gamma)$ denota la distancia de x a la frontera Γ de Ω .

Definición 61 Sea Ω un abierto acotado de \mathbb{R}^2 . Se dice que la frontera Γ es un polígono curvilíneo de clase C^m , m entero ≥ 1 (respectivamente $C^{k,\alpha}$, k entero ≥ 1 , $0 < \alpha \leq 1$) si para cada $x \in \Gamma$ existe un entorno V de x en \mathbb{R}^2 y un campo ψ de V en \mathbb{R}^2 tal que

- (a) ψ es inyectivo,
- (b) ψ junto con ψ^{-1} (definido en $\psi(V)$) pertenecen a la clase C^m (respectivamente $C^{k,\alpha}$),
- (c) $\Omega \cap V$ es o bien

$$\{y \in \Omega : \psi_2(y) < 0\},$$

o bien

$$\{y \in \Omega : \psi_1(y) < 0 \text{ y } \psi_2(y) < 0\},$$

o bien

$$\{y \in \Omega : \psi_1(y) < 0 \text{ o } \psi_2(y) < 0\}$$

donde $\psi_j(y)$ denota la componente j -ésima de ψ .

Nota. Rudamente hablando, un polígono curvilíneo es una variedad con borde.

Proposición 62 Sea Ω un abierto acotado de \mathbb{R}^2 cuya frontera es un polígono curvilíneo de clase $C^{1,1}$. Entonces, para cada componente Γ_j de la frontera, el campo

$$u \rightarrow \frac{\partial u}{\partial \nu_j} \Big|_{\Gamma_j},$$

definido en $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ (ν_j es el vector normal exterior en Γ_j), tiene una única extensión continua como operador de $H^1(\Omega) \cap \{v \in H^1(\Omega) : \Delta v \in L^2(\Omega)\}$ en $\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_j)^*$ (espacio dual de $\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_j)$).

Por otra parte, para cada $u \in \{v \in H^1(\Omega) : v|_{\Gamma_k} = 0, \text{ con } k = j+1 \text{ y } k = j-1\}$ se tiene que $u|_{\Gamma_j} \in \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_j)$ y el campo

$$u \rightarrow u|_{\Gamma_j}$$

es lineal y continuo de $\{v \in H^1(\Omega) : v|_{\Gamma_k} = 0, k = j+1, k = j-1\}$ en $\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_j)$. \square

Demostración: Veanse los Teoremas 1.5.3.10 y 1.5.2.3 y el Corolario 1.4.4.10 de Grisvard [34]. \blacksquare

Definición 63 Se dice que una función $y \in X$ es solución de (\mathcal{P}_0) si

$$\int_0^a \int_0^b \left(\frac{\partial y^*}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \frac{\partial y^*}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 = \int_0^a \int_0^b \left(f + \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} \right) \varphi dx_1 dx_2$$

$$- \left\langle y_0 + \frac{\partial v}{\partial x_1} \Big|_{\Gamma_0}, \varphi \Big|_{\Gamma_0} \right\rangle_{\tilde{H}^{1/2}(0,b)^* \times \tilde{H}^{1/2}(0,b)} \quad \forall \varphi \in X_0 = X \cap \{ \varphi \in X : \varphi|_{\Gamma_a} = 0 \},$$

donde $v \in X \cap \{ v \in X : \Delta v \in L^2((0,a) \times (0,b)) \}$ es tal que

$$v|_{\Gamma_l} = 0 \quad y \quad v|_{\Gamma_a} = y_a$$

e $y = y^* + v$ (Notese que v existe por la teoría de trazas).

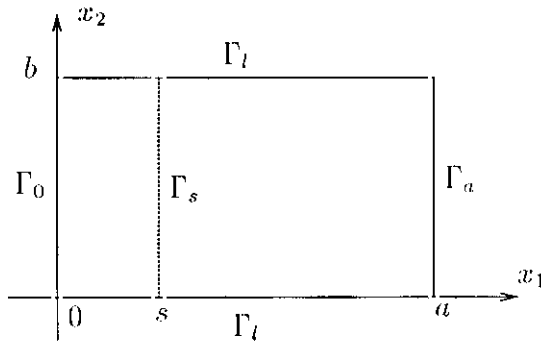


Figura 1: Dominio del problema.

Corolario 64 En el Problema (\mathcal{P}_0) se puede suponer $y_0 \in \tilde{H}^{1/2}(0,b)^*$. \square

Observación 65 Se tiene que $y^* \in Y = X_0 \cap \{ v \in X : \Delta v \in L^2((0,a) \times (0,b)) \}^{(1)}$ es la solución del problema

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} = f + \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} & \text{en } (0,a) \times (0,b) \\ y|_{\Gamma_l} = 0 \\ -\frac{\partial y}{\partial x_1} \Big|_{\Gamma_0} = y_0 + \frac{\partial v}{\partial x_1} \Big|_{\Gamma_0}, \quad y|_{\Gamma_a} = 0. \end{cases}$$

De este modo, en la Sección 3 supondremos que $y_a = 0$.

¹ Es decir, $Y \equiv \{ v \in H^1((0,a) \times (0,b)) : v|_{\Gamma_a} = v|_{\Gamma_l} = 0 \text{ y } \Delta v \in L^2((0,a) \times (0,b)) \}$.

Notación. Para cada $s \in (0, a)$ definimos

$$Y_s = \{v \in H^1((s, a) \times (0, b)) : v|_{\Gamma_a} = v|_{\Gamma_l} = 0 \text{ y } \Delta v \in L^2((s, a) \times (0, b))\}.$$

Definición 66 Para cada $s \in [0, a)$ y $h \in \widetilde{H}^{1/2}(0, b)^*$ definimos $P(s)h = \gamma|_{\Gamma_s}$, donde $\gamma \in Y_s$ es la solución de

$$(II.1) \quad \begin{cases} -\frac{\partial^2 \gamma}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x_2^2} = 0 & \text{en } \Omega_s = (s, a) \times (0, b) \\ \gamma|_{\Gamma_l} = \gamma|_{\Gamma_a} = 0 \\ \frac{\partial \gamma}{\partial x_1}|_{\Gamma_s} = h. \end{cases}$$

También definimos $r(s) = \beta|_{\Gamma_s}$, donde $\beta \in Y_s$ es la solución de

$$\begin{cases} -\frac{\partial^2 \beta}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \beta}{\partial x_2^2} = f & \text{en } \Omega_s = (s, a) \times (0, b) \\ \beta|_{\Gamma_l} = 0; \beta|_{\Gamma_a} = y_a \\ \frac{\partial \beta}{\partial x_1}|_{\Gamma_s} = 0. \end{cases}$$

Finalmente definimos $P(a) \equiv 0$ y $r(a) = 0$.

Observación 67 Para cada $s \in [0, a]$, $P(s) : \widetilde{H}^{1/2}(0, b)^* \rightarrow \widetilde{H}^{1/2}(0, b)$ es un operador lineal y $r(s) \in \widetilde{H}^{1/2}(0, b)$. Además, la solución y de (\mathcal{P}_0) puede factorizarse como

$$(II.2) \quad y(x_1, x_2) = (P(x_1) \frac{\partial y}{\partial x_1}|_{\Gamma_{x_1}})(x_2) + (r(x_1))(x_2).$$

Para probar esto basta observar que, si denotamos por $\mathcal{P}(s, \xi_s)$ a la familia de problemas

$$\mathcal{P}(s, \xi_s) \begin{cases} -\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} = f & \text{en } \Omega_s = (s, a) \times (0, b) \\ y|_{\Gamma_l} = 0; y|_{\Gamma_a} = y_a \\ \frac{\partial y}{\partial x_1}|_{\Gamma_s} = \xi_s, \end{cases}$$

entonces nuestro problema inicial (\mathcal{P}_0) está incluido en esta familia de operadores (observese que $\mathcal{P}_0 = \mathcal{P}(0, -y_0)$) y la solución y del problema (\mathcal{P}_0) resuelve recursivamente toda esta familia de operadores (esta técnica es la que se denomina *inclusión invariante*)

con las condiciones de Neumann $\xi_s = \frac{\partial y}{\partial x_1}|_{\Gamma_s}$.

Cálculo formal. Aquí obtendremos algunas ecuaciones por medio de cálculos formales que más adelante intentaremos justificar. Usando (II.2) y derivando formalmente se obtiene que

$$(II.3) \quad \begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial x_1} &= \frac{dP}{dx_1} \frac{\partial y}{\partial x_1} + P \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} + \frac{\partial r}{\partial x_1} \\ &= \frac{dP}{dx_1} \frac{\partial y}{\partial x_1} - P \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left(P \frac{\partial y}{\partial x_1} + r \right) - Pf + \frac{\partial r}{\partial x_1} \\ &= \left(\frac{dP}{dx_1} - P \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} P - I \right) \frac{\partial y}{\partial x_1} + \frac{\partial r}{\partial x_1} - P \frac{\partial^2 r}{\partial x_2^2} - Pf = 0. \end{aligned}$$

De este modo, como y es arbitrario (hecho que debe ser de alguna manera justificado) deducimos el siguiente sistema desacoplado

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dP}{dx_1} - P \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} P - I = 0 \quad P(a) = 0 \\ \frac{\partial r}{\partial x_1} - P \frac{\partial^2 r}{\partial x_2^2} = Pf \quad r(a) = y_a \\ \frac{\partial \xi}{\partial x_1} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} P \xi = -f - \frac{\partial^2 r}{\partial x_2^2} \quad \xi(0) = -y_0 \\ y = P\xi + r. \end{array} \right.$$

Daremos una justificación de este sistema desacoplado en la Sección 3.

2.2 Una formulación equivalente.

Comenzamos de nuevo con el problema original

$$(\mathcal{P}_0) \left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} = f \quad \text{en } (0, a) \times (0, b) \\ y|_{\Gamma_l} = 0 \\ -\frac{\partial y}{\partial x_1} |_{\Gamma_0} = y_0, \quad y|_{\Gamma_a} = y_a. \end{array} \right.$$

Introducimos la siguiente

Definición 68 Para cada $s \in (0, a]$ y $h \in \widetilde{H}^{1/2}(0, b)$ definimos $Q(s)h = \frac{\partial \gamma}{\partial x_1}|_{\Gamma_s}$, donde γ es la solución de

$$\begin{cases} -\frac{\partial^2 \gamma}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x_2^2} = 0 & \text{en } (0, s) \times (0, b) \\ \gamma|_{\Gamma_l} = 0; \quad \frac{\partial \gamma}{\partial x_1}|_{\Gamma_0} = 0 \\ \gamma|_{\Gamma_s} = h. \end{cases}$$

También definimos $Q(0)h \equiv 0$ y $w(s) = \frac{\partial \beta}{\partial x_1}|_{\Gamma_s}$, donde β es la solución de

$$\begin{cases} -\frac{\partial^2 \beta}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \beta}{\partial x_2^2} = f & \text{en } (0, s) \times (0, b) \\ \beta|_{\Gamma_l} = 0; \quad -\frac{\partial \beta}{\partial x_1}|_{\Gamma_0} = y_0 \\ \beta|_{\Gamma_s} = 0. \end{cases}$$

Observación 69 Para cada $s \in [0, a]$, $Q(s) : \widetilde{H}^{1/2}(0, b) \rightarrow \widetilde{H}^{1/2}(0, b)^*$ es un operador lineal y $w(s) \in \widetilde{H}^{1/2}(0, b)^*$. Además, si y es la solución de (\mathcal{P}_0) entonces

$$\frac{\partial y}{\partial x_1}(x_1, x_2) = (Q(x_1)y|_{\Gamma_{x_1}})(x_2) + (w(x_1))(x_2).$$

Para probar esto basta observar que, si denotamos por $\overline{\mathcal{P}}(s, y_s)$ a la familia de problemas

$$\overline{\mathcal{P}}(s, y_s) \begin{cases} -\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} = f & \text{en } \Omega^s = (0, s) \times (0, b) \\ y|_{\Gamma_l} = 0; \quad -\frac{\partial y}{\partial x_1}|_{\Gamma_0} = y_0, \\ y|_{\Gamma_s} = y_s, \end{cases}$$

entonces nuestro problema inicial (\mathcal{P}_0) está incluido en esta familia de operadores (observese que $\mathcal{P}_0 = \overline{\mathcal{P}}(a, y_a)$) y la solución y del problema (\mathcal{P}_0) resuelve recursivamente toda esta familia de operadores con las condiciones de Dirichlet $y_s = y|_{\Gamma_s}$.

Cálculo formal. Mediante cálculos formales obtenemos

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} y = -\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} y - f = \frac{dQ}{dx_1} y + Q \frac{\partial y}{\partial x_1} + \frac{\partial w}{\partial x_1}.$$

De este modo

$$0 = \left(\frac{dQ}{dx_1} + Q^2 + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) y + \frac{\partial w}{\partial x_1} + Qw + f$$

y, puesto que y es arbitrario, obtenemos la formulación equivalente

$$\begin{cases} \frac{dQ}{dx_1} + Q^2 + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} = 0 & Q(0) = 0 \\ \frac{\partial w}{\partial x_1} + Qw = -f & w(0) = -y_0 \\ -\frac{\partial y}{\partial x_1} + Qy = -w & y(a) = y_a. \end{cases}$$

3 Una justificación en la formulación de la ecuación de Riccati de P y la ecuación de r .

3.1 Propiedades de P .

Las siguientes proposiciones recogen algunas propiedades básicas del operador P .

Proposición 70 *El operador lineal $P(s) : \widetilde{H}^{1/2}(0, b)^* \rightarrow \widetilde{H}^{1/2}(0, b)$ es continuo para todo $s \in [0, a]$. \square*

Demostración: Sea $s \in [0, a]$ (el caso $s = a$ es trivial) y $f \in \widetilde{H}^{1/2}(0, b)^*$. Entonces, si γ es la solución de (II.1), según la Definición 63 obtenemos que

$$\iint_{s,0}^{a,b} |\nabla \gamma|^2 dx_1 dx_2 \leq - \langle h, P(s)h \rangle_{\widetilde{H}^{1/2}(0,b)^* \times \widetilde{H}^{1/2}(0,b)}.$$

De aquí obtenemos el resultado aplicando la desigualdad de Poincaré, la Proposición 62 y la desigualdad de Young. \blacksquare

Ahora, teniendo en cuenta las inyecciones continuas

$$\widetilde{H}^{1/2}(\Omega) \subset H^{1/2}(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^{-1/2}(\Omega) \subset \widetilde{H}^{1/2}(\Omega)^*,$$

obtenemos el siguiente

Corolario 71 *Los operadores lineales*

$$\begin{aligned} P(s) &: H^{-1/2}(0, b) \rightarrow \widetilde{H}^{1/2}(0, b), \\ P(s) &: H^{-1/2}(0, b) \rightarrow H^{1/2}(0, b), \\ P(s) &: L^2(0, b) \rightarrow \widetilde{H}^{1/2}(0, b), \\ P(s) &: L^2(0, b) \rightarrow H^{1/2}(0, b), \\ P(s) &: L^2(0, b) \rightarrow L^2(0, b), \\ & \text{cte...} \end{aligned}$$

son continuos para todo $s \in [0, a]$. \square

Proposición 72 *Existe una constante $C > 0$ tal que*

$$\| P(s)h \|_{L^2(0,b)} \leq C \| h \|_{L^2(0,b)} \quad \text{para todo } h \in L^2(0, b)$$

con C independiente de s . \square

Demostración: Hacemos el cambio de variable $x_1 = s + z_1(a - s)$ ($z_1 \in [0, 1]$) y definimos $\gamma_s(z_1) = \gamma(s + z_1(a - s))$. De este modo,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \gamma_s}{\partial z_1}(z_1, x_2) &= (a - s) \frac{\partial \gamma}{\partial x_1}(s + z_1(a - s), x_2); \quad \frac{\partial^2 \gamma_s}{\partial z_1^2}(z_1, x_2) = (a - s)^2 \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x_1^2}(s + z_1(a - s), x_2) \\ \frac{\partial^2 \gamma_s}{\partial x_2^2}(z_1, x_2) &= \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x_2^2}(s + z_1(a - s), x_2). \end{aligned}$$

Por tanto, γ_s es la solución del problema

$$(II.4) \quad \begin{cases} -\frac{\partial^2 \gamma_s}{\partial z_1^2} - (a - s)^2 \frac{\partial^2 \gamma_s}{\partial x_2^2} = 0 & \text{en } (s, a) \times (0, b) \\ \gamma_s|_{\tilde{\Gamma}_l} = \gamma_s|_{\tilde{\Gamma}_1} = 0 \\ \frac{\partial \gamma_s}{\partial z_1}|_{\tilde{\Gamma}_0} = (a - s)h, \end{cases}$$

donde

$$\tilde{\Gamma}_0 = \{0\} \times (0, b), \quad \tilde{\Gamma}_1 = \{1\} \times (0, b)$$

y

$$\tilde{\Gamma}_l = ((0, 1) \times \{0\}) \cup ((0, 1) \times \{b\}).$$

Entonces, según la teoría de trazas (vease, por ejemplo, el Teorema 2.1 del Capítulo 4 de Lions-Magenes [46]), se tiene que

$$\| P(s)h \|_{L^2(0,b)} = \| \gamma_s|_{\tilde{\Gamma}_0} \|_{L^2(0,b)} \leq c_1 \| \gamma_s \|_{H^1(0,a;L^2(0,b))}$$

y a través de la desigualdad de Poincaré se deduce que

$$(II.5) \quad \| P(s)h \|_{L^2(0,b)} \leq c_2 \left\| \frac{\partial \gamma_s}{\partial z_1} \right\|_{L^2((0,a) \times (0,b))}.$$

Ahora, como γ_s es la solución de (II.4) tenemos que

$$\int_0^1 \int_0^b \left| \frac{\partial \gamma_s}{\partial z_1} \right|^2 dz_1 dx_2 + (a-s) \int_0^1 \int_0^b \left| \frac{\partial \gamma_s}{\partial x_2} \right|^2 dz_1 dx_2 = -(a-s) \int_0^b h \gamma_s |_{\tilde{\Gamma}_0} dx_2.$$

De este modo, por (II.5) y la desigualdad de Hölder, se tiene que

$$\| P(s)h \|_{L^2(0,b)}^2 \leq c_3 \| h \|_{L^2(0,b)} \| P(s)h \|_{L^2(0,b)}$$

y se concluye el resultado aplicando la desigualdad de Young. ■

Proposición 73 *El operador $P(s) : \tilde{H}^{1/2}(0,b)^* \rightarrow \tilde{H}^{1/2}(0,b)$ es autoadjunto, definido negativo e inyectivo para todo $s \in [0, a)$. □*

Demostración: Sea $s \in [0, a]$ y $f, g \in \tilde{H}^{1/2}(0,b)^*$. Tomamos la solución φ de (II.1) con $h = f$ y la solución ψ de (II.1) con $h = g$. De este modo, según la Definición 63,

$$\begin{aligned} - \int_s^a \int_0^b (\nabla \varphi \cdot \nabla \psi) dx_1 dx_2 &= \langle f, P(s)g \rangle_{\tilde{H}^{1/2}(0,b)^* \times \tilde{H}^{1/2}(0,b)} \\ &= \langle g, P(s)f \rangle_{\tilde{H}^{1/2}(0,b)^* \times \tilde{H}^{1/2}(0,b)} \end{aligned}$$

lo cual implica que $P(s)$ es un operador autoadjunto. Para probar que $P(s)$ es definido negativo tomamos de nuevo $f \in \tilde{H}^{1/2}(0,b)^*$ y φ solución de (II.1) con $h = f$. Entonces, por la desigualdad de Poincaré,

$$\langle f, P(s)f \rangle_{\tilde{H}^{1/2}(0,b)^* \times \tilde{H}^{1/2}(0,b)} = - \int_s^a \int_0^b |\nabla \varphi|^2 dx_1 dx_2 \leq -c_1 \| \varphi \|_{H^1((s,a) \times (0,b))}^2.$$

Ahora, como $\Delta \varphi = 0$, por la Proposición 62 se obtenemos que

$$\langle f, P(s)f \rangle_{\tilde{H}^{1/2}(0,b)^* \times \tilde{H}^{1/2}(0,b)} \leq -c_2 \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right\|_{\tilde{H}^{1/2}(0,b)^*}^2 = -c_2 \| f \|_{\tilde{H}^{1/2}(0,b)^*}^2$$

lo cual prueba que $P(s)$ es definido negativo. Finalmente probamos que $P(s)$ es inyectivo poniendo de relieve que, si cambiamos en (II.1) la condición $\frac{\partial \gamma}{\partial x_1}|_{\Gamma_s} = h$ por $\gamma|_{\Gamma_s} = 0$, entonces, por la unicidad de la solución, $\gamma \equiv 0$ y $h = \frac{\partial \gamma}{\partial x_1}|_{\Gamma_s} = 0$. ■

3.2 Dimensión finita en una variable.

Sea $\{w_1, \dots, w_n, \dots\}$ una base de Hilbert de $H_0^1(0, b)$ en el siguiente sentido:

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \forall n \in \mathbb{N}, \|w_n\|_{H_0^1(0,b)} = \left\| \frac{\partial w_n}{\partial x_2} \right\|_{L^2(0,b)} = 1, \\ (b) (w_n, w_m)_{H_0^1(0,b)} = \int_0^b \frac{\partial w_n}{\partial x_2}(x_2) \frac{\partial w_m}{\partial x_2}(x_2) dx_2 = 0 \quad \forall m, n \text{ tal que } m \neq n \text{ y} \\ (c) \text{ Las combinaciones lineales } \sum \lambda_j w_j, \lambda_j \in \mathbb{R} \text{ son densas en } H_0^1(0, b). \\ \text{finita} \end{array} \right.$$

Este tipo de bases existe para todo espacio de Hilbert separable (vease, por ejemplo, el Teorema V.10. de Brezis [13]).

Ahora, si $V^m = \text{span}\{w_1, \dots, w_m\}$, definimos

$$X^m = \{\varphi \in H^1(0, a; V^m) : \varphi|_{\Gamma_a} = 0\}.$$

Proposición 74 $X^m \subset \mathcal{C}([0, a]; V^m)$ es una inyección continua y el conjunto

$$\bigcup_{m \in \mathbb{N}} \{\varphi \in H^1(0, a; V^m) : \varphi|_{\Gamma_a} = 0\}$$

es denso en X_0 (y por tanto también en $L^2((0, a) \times (0, b))$). \square

Demostración: La inyección continua $X^m \subset \mathcal{C}([0, a]; V^m)$ se puede probar fácilmente si tenemos en cuenta que $H^1(0, a) \subset \mathcal{C}([0, a])$ (vease, por ejemplo, el Teorema VIII.2. de Brezis [13]).

Para probar el resultado de densidad ponemos de relieve que $\mathcal{C}^\infty([0, a]; H_0^1(0, b))$ es un subconjunto denso de $H^1(0, a; L^2(0, b)) \cap L^2(0, a; H_0^1(0, b))$ (vease, por ejemplo, el Teorema 2.1 del Capítulo 1 de Lions-Magenes [45]). De este modo, $\{v \in \mathcal{C}^\infty([0, a]; H_0^1(0, b)) : v|_{\Gamma_a} = 0\}$ es un subconjunto denso de X_0 .

Sean $f \in \{v \in \mathcal{C}^\infty([0, a]; H_0^1(0, b)) : v|_{\Gamma_a} = 0\}$ y $\varepsilon > 0$. Probaremos que existe $f^m \in X^m$ tal que

$$\|f - f^m\|_{X_0}^2 < \varepsilon.$$

Como $f \in \mathcal{C}^\infty([0, a]; H_0^1(0, b))$, para todo $\delta > 0$ existe una sucesión $\{a_i\}_{i=0}^{r(\delta)}$, con

$$0 = a_0 < a_1 < \dots < a_{r(\delta)} = a,$$

tal que, para todo $x_1 \in [a_i, a_{i+1}]$ se tiene que

$$\|f(x_1, \cdot) - f(a_i, \cdot)\|_{H_0^1(0,b)} = \left\| \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, \cdot) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_i, \cdot) \right\|_{L^2(0,b)} < \delta$$

y

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \cdot) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_i, \cdot) \right\|_{L^2(0,b)} < \delta.$$

Ahora, para todo $i \in \{1, \dots, r(\delta) - 1\}$ y para todo $x_2 \in [0, b]$,

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_i, x_2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_i + h, x_2) - f(a_i, x_2)}{h}.$$

Entonces existe $\bar{h}_i(x_2) > 0$ tal que

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_i, x_2) - \frac{f(a_i + h, x_2) - f(a_i, x_2)}{h} \right| < \delta$$

para todo $h \in (0, \bar{h}_i(x_2)]$. De este modo, como $\frac{\partial f}{\partial x_1} \in C((0, a) \times (0, b))$, existe una sucesión $\{b_j\}_{j=0}^{s(\delta)}$, con

$$0 = b_0 < b_1 < \dots < b_{s(\delta)} = b,$$

tal que, para todo $(x_1, x_2) \in [a_i, a_{i+1}] \times [b_j, b_{j+1}]$,

$$(II.6) \quad \left| \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_i, b_j) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) \right| < \delta$$

(aquí es posible que debamos introducir más puntos en la sucesión $\{a_i\}_{i=0}^{r(\delta)}$ pero en ese caso volvemos a reenumerar la sucesión). Entonces, si tomamos

$$\bar{h}_i = \min \left\{ \min_{j \in \{1, \dots, s(i)\}} \{\bar{h}_i(b_j)\}, a_{i+1} - a_i \right\},$$

para todo $x_2 \in (0, b)$ y para todo $h < \bar{h}_i$ se tiene que

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_i, x_2) - \frac{f(a_i + h, x_2) - f(a_i, x_2)}{h} \right| \\ & < \left| \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_i, x_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_i, b_j) \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_i, b_j) - \frac{f(a_i + h, b_j) - f(a_i, b_j)}{h} \right| \\ & \quad + \left| \frac{f(a_i + h, b_j) - f(a_i, b_j)}{h} - \frac{f(a_i + h, x_2) - f(a_i, x_2)}{h} \right| \\ & < 2\delta + \sup_{\xi_i \in [a_i, a_{i+1}]} \left| \frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_i, b_j) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_i, x_2) \right| \leq 4\delta \quad (\text{por (II.6)}), \end{aligned}$$

con $j \in \{1, \dots, s(i)\}$ tal que $x_2 \in [b_j, b_{j+1}]$. De este modo, obtenemos que

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_i, \cdot) - \frac{f(a_i + h, \cdot) - f(a_i, \cdot)}{h} \right\|_{L^2(0, b)} < 4\delta b^{1/2} \quad \forall h \leq \bar{h}_i.$$

Entonces, si $a_{i+1} - a_i = \bar{h}_i$, se deduce que

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_i, \cdot) - \frac{f(a_{i+1}, \cdot) - f(a_i, \cdot)}{a_{i+1} - a_i} \right\|_{L^2(0, b)} < 4\delta b^{1/2}.$$

En caso contrario podemos introducir el punto $a_i + \bar{h}_i$ en la sucesión $\{a_i\}_{i=0}^{r(\delta)}$ y reenumerar de nuevo la sucesión. Si seguimos estos pasos en cada intervalo tantas veces como necesitemos, finalmente obtendremos una sucesión $\{a_i\}_{i=0}^{r(\delta)}$ (donde $r(\delta)$ puede ser diferente al inicial $r(\delta)$) tal que, para todo $i \in \{0, \dots, r(\delta)\}$ y para todo $x_1 \in [a_i, a_{i+1}]$ se tiene que

$$(II.7) \quad \|f(x_1, \cdot) - f(a_i, \cdot)\|_{H_0^1(0,b)} = \left\| \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, \cdot) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_i, \cdot) \right\|_{L^2(0,b)} < \delta,$$

$$(II.8) \quad \left\| \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \cdot) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_i, \cdot) \right\|_{L^2(0,b)} < \delta$$

y

$$(II.9) \quad \left\| \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_i, \cdot) - \frac{f(a_{i+1}, \cdot) - f(a_i, \cdot)}{a_{i+1} - a_i} \right\|_{L^2(0,b)} < 4\delta b^{1/2}.$$

Una vez que hemos fijado la sucesión $\{a_i\}_{i=0}^{r(\delta)}$, podemos tomar (por densidad) $m \in \mathbb{N}$ y $f_j^m(a_i) \in \mathbb{R}$, para todo $i \in \{0, \dots, r(\delta)\}$ y para todo $j \in \{1, \dots, m\}$ tal que

$$(II.10) \quad \left\| f(a_i, \cdot) - \sum_{j=1}^m f_j^m(a_i) w_j(\cdot) \right\|_{L^2(0,b)} + \left\| \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_i, \cdot) - \sum_{j=1}^m f_j^m(a_i) \frac{\partial w_j}{\partial x_2}(\cdot) \right\|_{L^2(0,b)} < \delta \inf_{i \in \{0, \dots, r(\delta)-1\}} \{a_{i+1} - a_i\}.$$

Además, para todo $j \in \{1, \dots, m\}$ definimos la función $f_j^m \in H^1(0, a)$ por

$$f_j^m(x_1) = f_j^m(a_i) + \frac{f_j^m(a_{i+1}) - f_j^m(a_i)}{a_{i+1} - a_i} (x_1 - a_i)$$

para todo $x_1 \in [a_i, a_{i+1}]$ y la función $f^m \in X^m$ por

$$f^m(x_1, x_2) = \sum_{j=1}^m f_j^m(x_1) w_j(x_2)$$

para todo $x_1 \in [a_i, a_{i+1}]$. Ahora, por la desigualdad de Poincaré, existe $c > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \|f - f^m\|_{X_0}^2 &\leq c \int_0^a \left\| \frac{\partial f}{\partial x_1} - \frac{\partial f^m}{\partial x_1} \right\|_{L^2(0,b)}^2 dx_1 + c \int_0^a \left\| \frac{\partial f}{\partial x_2} - \frac{\partial f^m}{\partial x_2} \right\|_{L^2(0,b)}^2 dx_1 \\ &\leq I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + I_6, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} I_1 &= c \sum_{i=0}^{r(\delta)-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} \left\| \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \cdot) - \frac{\partial f^m}{\partial x_1}(a_i, \cdot) \right\|_{L^2(0,b)}^2 dx_1, \\ I_2 &= c \sum_{i=0}^{r(\delta)-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} \left\| \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_i, \cdot) - \frac{f(a_{i+1}, \cdot) - f(a_i, \cdot)}{a_{i+1} - a_i} \right\|_{L^2(0,b)}^2 dx_1, \\ I_3 &= c \sum_{i=0}^{r(\delta)-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} \left\| \frac{f(a_{i+1}, \cdot) - f(a_i, \cdot)}{a_{i+1} - a_i} - \sum_{j=1}^m \frac{f_j^m(a_{i+1}) - f_j^m(a_i)}{a_{i+1} - a_i} w_j(\cdot) \right\|_{L^2(0,b)}^2 dx_1, \end{aligned}$$

$$I_4 = c \sum_{i=0}^{r(\delta)-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} \left\| \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, \cdot) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_i, \cdot) \right\|_{L^2(0,b)}^2 dx_1,$$

$$I_5 = c \sum_{i=0}^{r(\delta)-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} \left\| \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_i, \cdot) - \sum_{j=1}^m f_j^m(a_i) \frac{\partial w_j}{\partial x_2}(\cdot) \right\|_{L^2(0,b)}^2 dx_1$$

e

$$I_6 = c \sum_{i=0}^{r(\delta)-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} \left\| \sum_{j=1}^m \frac{f_j^m(a_{i+1}) - f_j^m(a_i)}{a_{i+1} - a_i} (x_1 - a_i) \frac{\partial w_j}{\partial x_2}(\cdot) \right\|_{L^2(0,b)}^2 dx_1.$$

Ahora, $I_1 \leq c\delta^2 a$ (por (II.8)); $I_2 \leq 16c\delta^2 ba$ (por (II.9));

$$\begin{aligned} I_3 &\leq c \sum_{i=0}^{r(\delta)-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} \frac{1}{(a_{i+1} - a_i)^2} \left\| f(a_{i+1}, \cdot) - \sum_{j=1}^m f_j^m(a_{i+1}) w_j(\cdot) \right\|_{L^2(0,b)}^2 dx_1 \\ &\quad + c \sum_{i=0}^{r(\delta)-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} \frac{1}{(a_{i+1} - a_i)^2} \left\| f(a_i, \cdot) - \sum_{j=1}^m f_j^m(a_i) w_j(\cdot) \right\|_{L^2(0,b)}^2 dx_1 \\ &\leq 2c\delta^2 a \quad (\text{por (II.10)}); \end{aligned}$$

$I_4 \leq c\delta^2 a$ (por (II.7)); $I_5 \leq c\delta^2 a$ (por (II.10) e

$$\begin{aligned} I_6 &\leq c \sum_{i=0}^{r(\delta)-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} \frac{1}{(a_{i+1} - a_i)^2} \left\| \sum_{j=1}^m f_j^m(a_{i+1})(x_1 - a_i) \frac{\partial w_j}{\partial x_2}(\cdot) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_{i+1}, \cdot)(x_1 - a_i) \right\|_{L^2(0,b)}^2 dx_1 \\ &\quad + c \sum_{i=0}^{r(\delta)-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} \left\| \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_{i+1}, \cdot) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_i, \cdot) \right\|_{L^2(0,b)}^2 dx_1 \\ &\quad + c \sum_{i=0}^{r(\delta)-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} \frac{1}{(a_{i+1} - a_i)^2} \left\| \sum_{j=1}^m f_j^m(a_i)(x_1 - a_i) \frac{\partial w_j}{\partial x_2}(\cdot) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_i, \cdot)(x_1 - a_i) \right\|_{L^2(0,b)}^2 dx_1 \\ &\leq 3c\delta^2 a \quad (\text{por (II.10) y (II.7)}). \end{aligned}$$

De este modo,

$$\|f - f^m\|_{X_0}^2 \leq 8c\delta^2 a + 16c\delta^2 ba = \delta^2(8ca + 16cba).$$

Finalmente, si tomamos $\delta < \left(\frac{\varepsilon}{8ca + 16cba}\right)^{1/2}$, obtenemos que $\|f - f^m\|_{X_0}^2 < \varepsilon$, lo cual concluye la demostración. ■

Ahora, sea $y^m \in X^m$ la solución de

$$\begin{aligned} \text{(II.11)} \quad &\int_0^a \int_0^b \left(\frac{\partial y^m}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \frac{\partial y^m}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 = \int_0^a \int_0^b f \varphi dx_1 dx_2 + \langle y_0, \varphi|_{\Gamma_0} \rangle_{\tilde{H}^{1/2}(0,b) \times \tilde{H}^{1/2}(0,b)} \\ &= \int_0^a \langle f|_{\Gamma_{x_1}}, \varphi|_{\Gamma_{x_1}} \rangle_{H^{-1}(0,b) \times H_0^1(0,b)} dx_1 + \langle y_0, \varphi|_{\Gamma_0} \rangle_{H^{-1}(0,b) \times H_0^1(0,b)} \quad \forall \varphi \in X^m. \end{aligned}$$

Proposición 75 Para cada $y_0 \in H^{-1}(0, b)$ y para cada $f \in L^2(0, a; H^{-1}(0, b))$ existe una única solución de (H.11). \square

Demostración: Sean φ, ψ dos funciones de X^m . Entonces $\varphi = \sum_{i=1}^m \varphi_i(x_1)w_i(x_2)$, $\psi = \sum_{i=1}^m \psi_i(x_1)w_i(x_2)$ y $\|\varphi\|_{X^m}^2 = \sum_{i=1}^m \|\varphi_i\|_{H^1(0,a)}^2$ (con una expresión similar para ψ). De este modo,

$$a(\varphi, \psi) = \iint_{[0,a] \times [0,b]} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2$$

es una forma bilineal continua en X^m , puesto que

$$a(\varphi, \psi) = \sum_{i,j=1}^m \int_0^a \frac{\partial \varphi_i(x_1)}{\partial x_1} \frac{\partial \psi_j(x_1)}{\partial x_1} a_{ij} dx_1 + \sum_{i=1}^m \int_0^a \varphi_i(x_1) \psi_i(x_1) dx_1,$$

donde

$$a_{ij} = \int_0^b w_i(x_2) w_j(x_2) dx_2 = a_{ji}.$$

Lo cual implica (por la desigualdad de Hölder) que existe $c_1^m > 0$ tal que

$$|a(\varphi, \psi)| \leq c_1^m \|\varphi\|_{X^m} \|\psi\|_{X^m}.$$

Además $a(\cdot, \cdot)$ es una forma coercitiva en X^m , puesto que, si usamos la notación matricial y vectorial

$$A^m = (a_{ij}) \text{ (matriz)}, \quad \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1} \right)_i = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_1} \end{pmatrix} \text{ (vector)},$$

entonces, por el Lema 76, existe $c_2^m > 0$ tal que

$$\begin{aligned} a(\varphi, \varphi) &= \int_0^a \left(\frac{\partial \varphi_i(x_1)}{\partial x_1} \right)_i^T A^m \left(\frac{\partial \varphi_i(x_1)}{\partial x_1} \right)_i dx_1 + \|\varphi\|_{L^2(0,a;V^m)}^2 \\ &\geq \int_0^a \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1} \right)_i^T A^m \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1} \right)_i dx_1 \geq c_2^m \sum_{i=1}^m \left\| \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1} \right\|_{L^2(0,a)}^2 \end{aligned}$$

y, por la desigualdad de Poincaré, existe $c_3^m > 0$ tal que

$$a(\varphi, \varphi) \geq c_3^m \sum_{i=1}^m \|\varphi_i\|_{H^1(0,a)}^2.$$

Por otro lado,

$$L(\varphi) = \int_0^a \langle f|_{\Gamma_{x_1}}, \varphi|_{\Gamma_{x_1}} \rangle_{H^{-1}(0,b) \times H_0^1(0,b)} dx_1 + \langle y_0, \varphi|_{\Gamma_0} \rangle_{H^{-1}(0,b) \times H_0^1(0,b)}$$

es una forma lineal y continua en X^m , puesto que, como $X^m \subset \mathcal{C}([0, a]; V^m)$ es una inyección continua, existe $c_4 > 0$ tal que

$$\begin{aligned} |L(\varphi)| &\leq \|f\|_{L^2(0,a;H^{-1}(0,b))} \|\varphi\|_{L^2(0,a;H_0^1(0,b))} + \|y_0\|_{H^{-1}(0,b)} \|\varphi|_{\Gamma_0}\|_{H_0^1(0,b)} \\ &\leq \|f\|_{L^2(0,a;H^{-1}(0,b))} \|\varphi\|_{L^2(0,a;V^m)} + \|y_0\|_{H^{-1}(0,b)} \|\varphi\|_{\mathcal{C}([0,a];V^m)} \\ &\leq \|f\|_{L^2(0,a;H^{-1}(0,b))} \|\varphi\|_{H^1(0,a;V^m)} + c_4 \|y_0\|_{H^{-1}(0,b)} \|\varphi\|_{H^1(0,a;V^m)}. \end{aligned}$$

Finalmente, el Teorema de Lax-Milgram (vease, por ejemplo, el Corolario V.8. de Brezis [13]) concluye la demostración. ■

Lema 76 *La matriz A^m definida en la demostración de la Proposición 75 es definida positiva.* □

Demostración: Sea h el vector real

$$h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_m \end{pmatrix}, \quad \text{con } h_i \in \mathbb{R} \text{ para todo } i \in \{1, \dots, m\}.$$

Entonces, si definimos $\hat{h}(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^m h_i w_i(x_2)$ (constante en la variable x_1), tenemos que $\hat{h} \in L^2(0, a; V^m)$ y

$$h^T A^m h = \int_0^a \int_0^b \hat{h}^2 dx_1 dx_2 = \|\hat{h}\|_{L^2(0,a;V^m)}^2 \geq 0.$$

Además, $h^T A^m h = 0$ si y solo si $\|\hat{h}\|_{L^2(0,a;V^m)} = 0$, es decir, si y solo si $h = 0$. ■

De este modo, cuando discretizamos en la variable x_1 podemos suponer $y_0 \in H^{-1}(0, b)$ y $f \in L^2(0, a; H^{-1}(0, b))$. Ahora, es fácil probar que, si $y^m(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^m g_i(x_1) w_i(x_2) \in X^m$, entonces el vector $(g_i(x_1))_i$ es solución en \mathbb{R}^m del problema

$$(II.12) \quad \begin{cases} -A^m \left(\frac{\partial^2 g_i}{\partial x_1^2}(x_1) \right)_i + (g_i(x_1))_i = (\langle f|_{\Gamma_{x_1}}, w_i \rangle_{H^{-1}(0,b) \times H_0^1(0,b)})_i, & x_1 \in (0, a), \\ -\left(\frac{\partial g_i}{\partial x_1}(0) \right)_i = (\langle y_0, w_i \rangle_{H^{-1}(0,b) \times H_0^1(0,b)})_i \\ (g_i(a))_i = (0)_i. \end{cases}$$

Por tanto, por resultados de regularidad (puesto que $\langle f|_{\Gamma_{x_1}}, w_i \rangle_{H^{-1}(0,b) \times H_0^1(0,b)} \in L^2(0,a)$ para todo $i \in \{1, \dots, m\}$), tenemos que $g_i \in H^2(0,a) \subset C^1(0,a)$, pues para cada $i \in \{1, \dots, m\}$ $g_i(x_1)$ es solución del problema elíptico

$$\begin{cases} -\frac{\partial^2 g_i}{\partial x_1^2}(x_1) = -c_i^T D^m(g_i(x_1))_i + c_i^T D^m(\langle f|_{\Gamma_{x_1}}, w_i \rangle_{H^{-1}(0,b) \times H_0^1(0,b)})_i & x_1 \in (0, a) \\ -\frac{\partial g_i}{\partial x_1}(0) = \langle y_0, w_i \rangle_{H^{-1}(0,b) \times H_0^1(0,b)} \\ g_i(a) = 0, \end{cases}$$

donde $D^m = (A^m)^{-1}$, c_i es el vector

$$c_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{lugar } i)$$

y por tanto, $-e_i^T D^m(g_i(x_1))_i + e_i^T D^m(\langle f|_{\Gamma_{x_1}}, w_i \rangle_{H^{-1}(0,b) \times H_0^1(0,b)})_i \in L^2(0,a)$.

De este modo,

$$(11.13) \quad \frac{\partial y^m}{\partial x_1}(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial g_i}{\partial x_1}(x_1) w_i(x_2)$$

con $\frac{\partial g_i}{\partial x_1} \in H^1(0,a) \subset C(0,a)$. Ahora, como en el caso general,

$$(11.14) \quad y^m(x_1, x_2) = (P^m(x_1) \frac{\partial y^m}{\partial x_1}|_{\Gamma_{x_1}})(x_2) + (r^m(x_1))(x_2),$$

donde $P^m(s)$ y $r^m(s)$ están definidos de la siguiente manera:

Para cada $s \in [0, a)$ y para cada $h \in H^{-1}(0, b)$ definimos

$$X_s^m = \{\varphi \in H^1(s, a; V^m) : \varphi|_{\Gamma_a} = 0\}$$

y denotamos por $\gamma^m \in X_s^m$ a la solución de

$$\int_s^{a,b} \left(\frac{\partial \gamma^m}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \frac{\partial \gamma^m}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 = - \langle h, \varphi(0, \cdot) \rangle_{H^{-1}(0,b) \times H_0^1(0,b)} \quad \forall \varphi \in X_s^m.$$

Entonces, definimos $P^m(s)h = \gamma_{|\Gamma_s}^m$ y $P^m(a) \equiv 0$. Al mismo tiempo, para cada $f \in L^2(0, a; H^{-1}(0, b))$ definimos $r^m(0) = 0$ y $r^m(s) = \beta_{|\Gamma_s}^m$ para $s \in [0, a)$, donde $\beta^m \in X_s^m$ es la solución de

$$\int_s^a \int_0^b \left(\frac{\partial \beta^m}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \frac{\partial \beta^m}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 = \int_s^a \langle f|_{\Gamma_{x_1}}, \varphi|_{\Gamma_{x_1}} \rangle_{H^{-1}(0,b) \times H_0^1(0,b)} dx_1 \quad \forall \varphi \in X_s^m.$$

Ahora, como $\gamma^m, \beta^m \in X_s^m \subset \mathcal{C}([0, a]; V^m)$, entonces $r^m(s) \in V^m$ y $P^m(s)h \in V^m$ para cada $h \in H^{-1}(0, b)$. Además, $P^m(s) \in \mathcal{L}(H^{-1}(0, b), V^m)$ es un operador autoadjunto para todo $s \in [0, a)$ (esto se puede probar de una forma similar a lo hecho en la Proposición 7.3).

Proposición 77 $\left\{ \frac{\partial^2 w_1}{\partial x_2^2}, \dots, \frac{\partial^2 w_n}{\partial x_2^2}, \dots \right\}$ es una base de Hilbert de $H^{-1}(0, b)$, es decir

$$\begin{cases} (a) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \left\| \frac{\partial w_n}{\partial x_2^2} \right\|_{H^{-1}(0,b)} = 1, \\ (b) \quad \left(\frac{\partial w_n}{\partial x_2^2}, \frac{\partial w_m}{\partial x_2^2} \right)_{H^{-1}(0,b)} = 0 \quad \forall m, n \text{ tal que } m \neq n \text{ y} \\ (c) \quad \sum_{\text{finita}} \lambda_j \frac{\partial^2 w_j}{\partial x_2^2}, \quad \lambda_j \in \mathbb{R} \text{ son densas en } H^{-1}(0, b), \end{cases}$$

donde, para cada $\varphi, \psi \in H^{-1}(0, b)$, consideramos el producto escalar

$$(\varphi, \psi)_{H^{-1}(0,b)} = \left\langle \left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right)^{-1} \varphi, \psi \right\rangle_{H_0^1(0,b) \times H^{-1}(0,b)},$$

con $g = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right)^{-1} \varphi$ definida por

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2} = \varphi & \text{en } (0, b) \\ g(0) = g(b) = 0 \end{cases}$$

y la norma $\| \varphi \|_{H^{-1}(0,b)} = (\varphi, \varphi)_{H^{-1}(0,b)}^{1/2}$ inducida por el producto escalar. \square

Demostración:

(a) y (b) Para todo $n, m \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 w_n}{\partial x_2^2}, \frac{\partial^2 w_m}{\partial x_2^2} \right)_{H^{-1}(0,b)} &= \left\langle - \left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right)^{-1} \frac{\partial^2 w_n}{\partial x_2^2}, \frac{\partial^2 w_m}{\partial x_2^2} \right\rangle_{H_0^1(0,b) \times H^{-1}(0,b)} \\ &= \left\langle -w_n, \frac{\partial^2 w_m}{\partial x_2^2} \right\rangle_{H_0^1(0,b) \times H^{-1}(0,b)} = \int_0^b \frac{\partial w_n}{\partial x_2}(x_2) \frac{\partial w_m}{\partial x_2}(x_2) dx_2 = \delta_{n,m}. \end{aligned}$$

(c) Sea φ un elemento de $H^{-1}(0, b)$. Entonces (vease, por ejemplo, la Proposición VIII.13. de Brezis [13]) existe $\varphi_1 \in L^2(0, b)$ tal que

$$\varphi = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} \text{ (en sentido de distribuciones).}$$

Entonces, para todo elemento $\sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial^2 w_j}{\partial x_2^2}$ tenemos que

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial^2 w_j}{\partial x_2^2} - \varphi \right\|_{H^{-1}(0,b)}^2 &= \left(\sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial^2 w_j}{\partial x_2^2} - \varphi, \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial^2 w_j}{\partial x_2^2} - \varphi \right)_{H^{-1}(0,b)} \\ &= \left\langle -\left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)^{-1} \left[\sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial^2 w_j}{\partial x_2^2} - \varphi \right], \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial^2 w_j}{\partial x_2^2} - \varphi \right\rangle_{H_0^1(0,b) \times H^{-1}(0,b)} \\ &= \left\langle -\left(\sum_{j=1}^m \lambda_j w_j - \left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)^{-1}[\varphi] \right), \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial^2 w_j}{\partial x_2^2} - \varphi \right\rangle_{H_0^1(0,b) \times H^{-1}(0,b)}. \end{aligned}$$

De este modo, por el Lema 78 y la desigualdad de Young, existe $c > 0$ (independiente de m) tal que

$$\left\| \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial^2 w_j}{\partial x_2^2} - \varphi \right\|_{H^{-1}(0,b)}^2 \leq c \left\| \sum_{j=1}^m \lambda_j w_j - \left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)^{-1}[\varphi] \right\|_{H_0^1(0,b)}^2.$$

Esto concluye la demostración si tenemos en cuenta que $\{w_1, w_2, \dots, w_n, \dots\}$ es una base de Hilbert en $H_0^1(0, b)$. ■

Lema 78 La norma $\|\cdot\|_{H^{-1}(0,b)}$ definida en la Proposición 77 es equivalente a la norma usual $|\cdot|_{H^{-1}(0,b)}$ de $H^{-1}(0, b)$ como dual de $H_0^1(0, b)$, es decir la norma

$$|\varphi|_{H^{-1}(0,b)} = \sup_{\|h\|_{H_0^1(0,b)}=1} \langle \varphi, h \rangle_{H^{-1}(0,b), H_0^1(0,b)} \quad \forall \varphi \in H^{-1}(0, b). \quad \square$$

Demostración:

$$\|\varphi\|_{H^{-1}(0,b)}^2 = \left\langle -\left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)^{-1}[\varphi], \varphi \right\rangle_{H_0^1(0,b) \times H^{-1}(0,b)} \leq \left\| \left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)^{-1}[\varphi] \right\|_{H_0^1(0,b)} |\varphi|_{H^{-1}(0,b)}.$$

Ahora (vease, por ejemplo, el Teorema 9.1 del Capítulo 2 de Lions-Magenes [45]) existe $c_1 > 0$ tal que

$$\left\| \left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)^{-1}[\varphi] \right\|_{H_0^1(0,b)} \leq c_1 |\varphi|_{H^{-1}(0,b)}.$$

Respectivamente,

$$|\varphi|_{H^{-1}(0,b)} = \sup_{\|h\|_{H_0^1(0,b)}=1} \langle \varphi, h \rangle_{H^{-1}(0,b), H_0^1(0,b)}$$

y, como antes, existe $\varphi_1 \in L^2(0, b)$ tal que $\varphi = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}$ (en sentido de distribuciones). Entonces

$$|\varphi|_{H^{-1}(0,b)} = \sup_{\|h\|_{H_0^1(0,b)}=1} (\varphi_1, \frac{\partial h}{\partial x_2})_{L^2(0,b)}.$$

Ahora, para cada constante $c_2 > 0$, tenemos (vease, por ejemplo, el Teorema VIII.2. de Brezis [13]) que

$$(c_2, \frac{\partial h}{\partial x_2})_{L^2(0,b)} = c_2(h(b) - h(0)) = 0.$$

De este modo,

$$|\varphi|_{H^{-1}(0,b)} = \sup_{\|h\|_{H_0^1(0,b)}=1} (\varphi_1 + c_2, \frac{\partial h}{\partial x_2})_{L^2(0,b)} \leq \| \varphi_1 + c_2 \|_{L^2(0,b)} \quad \forall c_2 \in \mathbb{R}.$$

Pero

$$\| \varphi \|_{H^{-1}(0,b)}^2 = \langle -(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2})^{-1} [\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}], \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} \rangle_{H_0^1(0,b) \times H^{-1}(0,b)} = (\frac{\partial}{\partial x_2} (\frac{\partial^2}{\partial x_2^2})^{-1} [\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}], \varphi_1)_{L^2(0,b)}$$

y, por definición,

$$\int_0^b \frac{\partial}{\partial x_2} (\frac{\partial^2}{\partial x_2^2})^{-1} [\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}] \frac{\partial \psi}{\partial x_2} dx_2 = \int_0^b \varphi_1 \frac{\partial \psi}{\partial x_2} dx_2,$$

lo cual implica (vease, por ejemplo, el Lema VIII.1. de Brezis [13]) que existe $c_2 \in \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{\partial}{\partial x_2} (\frac{\partial^2}{\partial x_2^2})^{-1} [\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}] = \varphi_1 + c_2.$$

Entonces

$$\| \varphi \|_{H^{-1}(0,b)}^2 = (\frac{\partial}{\partial x_2} (\frac{\partial^2}{\partial x_2^2})^{-1} [\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}], \varphi_1 + c_2)_{L^2(0,b)} = (\varphi_1 + c_2, \varphi_1 + c_2)_{L^2(0,b)} = \| \varphi_1 + c_2 \|_{L^2(0,b)}^2,$$

de donde se concluye que

$$|\varphi|_{H^{-1}(0,b)} \leq \| \varphi \|_{H^{-1}(0,b)} \quad \forall \varphi \in H^{-1}(0, b). \quad \blacksquare$$

Observación 79 Sea V^{-m} el espacio de dimensión finita generado por el conjunto

$$\left\{ \frac{\partial^2 w_1}{\partial x_2^2}, \dots, \frac{\partial^2 w_m}{\partial x_2^2} \right\}.$$

Ponemos de relieve que para cada $h \in H^{-1}(0, b)$ y para cada $s \in [0, a]$

$$P^m(s)h = P^m(s)h^m \quad \text{con } h^m = \sum_{i=1}^m \langle h, w_i \rangle_{H^{-1}(0,b) \times H_0^1(0,b)} \frac{\partial^2 w_i}{\partial x_2^2} \in V^{-m}.$$

Es decir, $h^m = \sum_{i=1}^m (h, \frac{\partial^2 w_i}{\partial x_2^2})_{H^{-1}(0,b)} \frac{\partial^2 w_i}{\partial x_2^2}$ (proyección de h sobre V^{-m}). Podríamos tomar $\{\frac{\partial^2 w_1}{\partial x_2^2}, \dots, \frac{\partial^2 w_m}{\partial x_2^2}\}$ como base de V^{-m} pero, como la matriz A^m es no singular (según el Lema 76),

$$B^{-m} = \left\{ -\sum_{i=1}^m a_{1i} \frac{\partial^2 w_i}{\partial x_2^2}, \dots, -\sum_{i=1}^m a_{mi} \frac{\partial^2 w_i}{\partial x_2^2} \right\}$$

es otra base de V^{-m} . Ahora $P^m(s)|_{V^{-m}} \in \mathcal{L}(V^{-m}, V^m)$ y podemos definir $\overline{P}^m(s)$ como la matriz asociada al operador lineal

$$P^m(s)|_{V^{-m}} : V^{-m} \longrightarrow V^m$$

con respecto a las bases B^{-m} en V^{-m} y $B = \{w_1, \dots, w_m\}$ en V^m .

Entonces, para todo elemento $h = \sum_{i=1}^m h_i \frac{\partial^2 w_i}{\partial x_2^2} \in V^{-m}$ y para todo $s \in [0, a)$, $P^m(s)h$ puede ser representado en notación matricial y vectorial como

$$\overline{P}^m(s) D^m \begin{pmatrix} -h_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ -h_m \end{pmatrix},$$

puesto que

$$\begin{aligned} P^m(s)h &= P^m(s) \left[\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x_2^2}, \dots, \frac{\partial^2 w_m}{\partial x_2^2} \right) \begin{pmatrix} h_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ h_m \end{pmatrix} \right] = P^m(s) \left[\left(\frac{\partial^2 w_i}{\partial x_2^2} \right)_i^T (h_i)_i \right] \\ &= P^m(s) \left[\left(\frac{\partial^2 w_i}{\partial x_2^2} \right)_i^T (-A^m) D^m (-h_i)_i \right] = P^m(s) \left[\left(-\sum_{j=1}^m a_{ij} \frac{\partial^2 w_j}{\partial x_2^2} \right)_i^T D^m (-h_i)_i \right]. \end{aligned}$$

Además, para todo elemento $g = \sum_{i=1}^m g_i w_i \in V^m \subset H^{-1}(0, b)$ y $s \in [0, a)$

$$\begin{aligned} P^m(s)g &= P^m(s) \left(\sum_{i=1}^m - \langle g, w_i \rangle_{H^{-1}(0,b) \times H_0^1(0,b)} \frac{\partial^2 w_i}{\partial x_2^2} \right) \\ &= P^m(s) \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m -g_j a_{ji} \frac{\partial^2 w_i}{\partial x_2^2} \right) = P^m(s) \left(\sum_{j=1}^m g_j \left(-\sum_{i=1}^m a_{ji} \frac{\partial^2 w_i}{\partial x_2^2} \right) \right). \end{aligned}$$

Por tanto, $P^m(s)g$ se puede representar en notación matricial y vectorial como

$$\overline{P}^m(s) \begin{pmatrix} g_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ g_m \end{pmatrix}.$$

(observese la relación entre el operador $\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ sobre V^m y la matriz D^m). De éste modo, la fórmula (II.14) se puede representar como

$$(II.15) \quad \begin{pmatrix} g_1(s) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ g_m(s) \end{pmatrix} = \overline{P}^m(s) \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1(s)}{\partial x_1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{\partial g_m(s)}{\partial x_1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r_1(s) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ r_m(s) \end{pmatrix}.$$

Ahora si denotamos en notación vectorial

$$h = \begin{pmatrix} h_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ h_m \end{pmatrix}$$

para todo $h = \sum_{i=1}^m h_i w_i \in V^m$. Entonces (II.15) se puede escribir como

$$(II.16) \quad y^m(s) = \overline{P}^m(s) \frac{\partial y^m}{\partial x_1} |_{\Gamma_s} + r^m(s)$$

si consideramos $y^m(s)$, $\frac{\partial y^m}{\partial x_1} |_{\Gamma_s}$ y $r^m(s)$ como vectores, o como

$$y^m(s) = P^m(s) \frac{\partial y^m}{\partial x_1} |_{\Gamma_s} + r^m(s)$$

si consideramos $y^m(s)$, $\frac{\partial y^m}{\partial x_1} |_{\Gamma_s}$ y $r^m(s)$ como elementos de V^m .

3.3 Ecuación de Riccati de P^m y ecuación de r^m .

Ahora, si hacemos cálculo formal de una manera similar a lo hecho en (II.3), para cada $\varphi \in L^2(0, a; V^m)$ tenemos que

$$\int_0^a \int_0^b \frac{\partial y^m}{\partial x_1}(s, x_2) \varphi(s, x_2) ds dx_2 = \int_0^a \int_0^b \left(\frac{d\overline{P}^m}{dx_1}(s) \frac{\partial y^m}{\partial x_1} |_{\Gamma_s} \right)(x_2) \varphi(s, x_2) ds dx_2$$

$$+ \int_0^{a,b} (\overline{P}^m(s) \frac{\partial^2 y^m}{\partial x_1^2} |_{\Gamma_s})(x_2) \varphi(s, x_2) ds dx_2 + \int_0^{a,b} (\frac{\partial r^m}{\partial x_1}(s))(x_2) \varphi(s, x_2) ds dx_2.$$

De este modo, usando (II.12), se tiene que

$$\begin{aligned} & \int_0^{a,b} \frac{\partial y^m}{\partial x_1}(s, x_2) \varphi(s, x_2) ds dx_2 = \\ & \int_0^{a,b} (\frac{d\overline{P}^m}{dx_1}(s) \frac{\partial y^m}{\partial x_1} |_{\Gamma_s})(x_2) \varphi(s, x_2) ds dx_2 + \int_0^{a,b} (\overline{P}^m(s) D^m y^m |_{\Gamma_s})(x_2) \varphi(s, x_2) dx_2 \\ & - \int_0^{a,b} (\overline{P}^m(s) D^m \overline{J}_{|\Gamma_s}^m)(x_2) \varphi(s, x_2) ds dx_2 + \int_0^{a,b} (\frac{\partial r^m}{\partial x_1}(s))(x_2) \varphi(s, x_2) ds dx_2, \end{aligned}$$

donde

$$\overline{J}^m(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^m [\langle f |_{\Gamma_{x_1}}, w_i \rangle_{H^{-1}(0,b) \times H_0^1(0,b)}] w_i \in L^2(0, a; V^m).$$

Entonces, por (II.16),

$$\begin{aligned} & \int_0^{a,b} \frac{\partial y^m}{\partial x_1}(s, x_2) \varphi(s, x_2) ds dx_2 = \int_0^{a,b} (\frac{d\overline{P}^m}{dx_1}(s) \frac{\partial y^m}{\partial x_1} |_{\Gamma_s})(x_2) \varphi(s, x_2) ds dx_2 \\ & + \int_0^{a,b} (\overline{P}^m(s) D^m \overline{P}^m(s) \frac{\partial y^m}{\partial x_1} |_{\Gamma_s})(x_2) \varphi(s, x_2) dx_2 + \int_0^{a,b} (\overline{P}^m(s) D^m r^m(s))(x_2) \varphi(s, x_2) ds dx_2 \\ & - \int_0^{a,b} (\overline{P}^m(s) D^m \overline{J}_{|\Gamma_s}^m)(x_2) \varphi(s, x_2) ds dx_2 + \int_0^{a,b} (\frac{\partial r^m}{\partial x_1}(s))(x_2) \varphi(s, x_2) ds dx_2. \end{aligned}$$

De aquí, como $\varphi \in L^2(0, a; V^m)$ es arbitraria, tenemos que

$$\begin{aligned} & \left(\frac{d\overline{P}^m}{dx_1}(s) + \overline{P}^m(s) D^m \overline{P}^m(s) - I \right) \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(s) \\ \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1}(s) \end{pmatrix} \\ & + \begin{pmatrix} \frac{\partial r_1}{\partial x_1}(s) \\ \vdots \\ \frac{\partial r_m}{\partial x_1}(s) \end{pmatrix} + \overline{P}^m(s) D^m \begin{pmatrix} r_1(s) \\ \vdots \\ r_m(s) \end{pmatrix} - \overline{P}^m(s) D^m \begin{pmatrix} \langle f |_{\Gamma_s}, w_1 \rangle_{H^{-1}(0,b) \times H_0^1(0,b)} \\ \vdots \\ \langle f |_{\Gamma_s}, w_m \rangle_{H^{-1}(0,b) \times H_0^1(0,b)} \end{pmatrix} = 0. \end{aligned}$$

Esta igualdad tiene lugar en $L^2(0, a)^m$ y para cada $y^m(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^m g_i(x_1) w_i(x_2)$ solución

de (II.11) (o (II.12)) con $r^m(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^m r_i(x_1) w_i(x_2)$.

Ahora, si elegimos el caso $f \equiv 0$ e $y_0 \in H_0^{-1}$ arbitrario, obtenemos

$$(II.17) \quad \begin{cases} \frac{d\bar{P}^m}{dx_1}(s) + \bar{P}^m(s)D^m\bar{P}^m(s) - I = 0 \\ \bar{P}^m(a) = 0. \end{cases}$$

Entonces, según la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias, se tiene (vease, por ejemplo, el Teorema Fundamental de Existencia y Unicidad en Perko [51], página 73) que existe una solución local \bar{P}^m en $(a - \delta, a)$, para un δ suficientemente pequeño. Además, \bar{P}^m es C^1 de $(a, a - \delta) \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$ (o C^1 de $(a, a - \delta) \rightarrow \mathcal{L}(V^{-m}, V^m)$). De aquí se deduce (vease, por ejemplo, el Teorema 2 de Kato [38]), para el caso de funciones generales f , que r^m es solución de

$$(II.18) \quad \begin{cases} \frac{\partial r^m}{\partial x_1}(s) + \bar{P}^m(s)D^m r^m(s) = \bar{P}^m(s)D^m \bar{f}^m|_{\Gamma_s} \\ r^m(a) = 0 \end{cases}$$

en $(a - \delta, a)$ y que $r^m \in H^1(0, a; \mathbb{R}^m)$ (o $r^m \in H^1(0, a; V^m)$). Además, para estas soluciones y con $s \in (a - \delta, a)$, se satisface (II.16) (o (II.15)).

Lema 80 *Existe una constante $c > 0$ tal que*

$$\|P^m(s)\|_{\mathcal{L}(H^{-1}(0,b), V^m)} \leq C, \quad \|P^m(s)\|_{\mathcal{L}(V^{-m}, V^m)} \leq C \quad \text{y} \quad \|\bar{P}^m(s)\|_{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m} \leq C$$

con C independiente de $s \in [0, a]$ y de $m \in \mathbb{N}$. \square

Demostración: Con la notación usada en la definición de P^m y con $s \in [0, a]$, hacemos el cambio de variable $x_1 = s + z_1(a - s)$, $z_1 \in [0, 1]$ y definimos

$$\gamma_s^m(z_1, x_2) = \gamma^m(s + z_1(a - s), x_2).$$

(seguiremos el método de la demostración de la Proposición 72). De este modo

$$(II.19) \quad \begin{aligned} & \int_0^1 \int_0^b \left| \frac{\partial \gamma_s^m}{\partial z_1} \right|^2 dz_1 dx_2 + (a - s)^2 \int_0^1 \int_0^b \left| \frac{\partial \gamma_s^m}{\partial x_2} \right|^2 dz_1 dx_2 \\ & = - \langle (a - s)h, \gamma_s^m |_{\tilde{\Gamma}_0} \rangle_{H^{-1}(0,b) \times H_0^1(0,b)}. \end{aligned}$$

Ahora,

$$\|P^m(s)h\|_{V^m}^2 = \|\gamma_s^m|_{\tilde{\Gamma}_0}\|_{V^m}^2 \leq \|\gamma_s^m\|_{C([0,1], V^m)}^2 \leq C_1 \|\gamma_s^m\|_{X_s^m}^2 \leq C_2 \int_0^1 \int_0^b \left| \frac{\partial \gamma_s^m}{\partial z_1} \right|^2 dz_1 dx_2$$

y por (II.19) deducimos que

$$\|P^m(s)h\|_{V^m} \leq C \|h\|_{H^{-1}(0,b)}$$

con C independiente de $s \in [0, a]$ (el caso $s = 0$ es trivial) y $m \in \mathbb{N}$. Así, obtenemos que $\|P^m(s)\|_{\mathcal{L}(H^{-1}(0,b), V^m)}$ está uniformemente acotado. Además, como $V^m \subset H^{-1}(0, b)$ es una inyección continua, tenemos que

$$\|P^m(s)h\|_{V^m} \leq \overline{C} \|h\|_{V^m}$$

con C independiente de $s \in [0, a]$. De esta forma $\|P^m(s)\|_{\mathcal{L}(V^{-m}, V^m)}$ está uniformemente acotada o, equivalentemente, $\|\overline{P}^m(s)\|_{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m}$ está uniformemente acotada. ■

Entonces, por el Lema 80, deducimos (aplicando, por ejemplo, el Corolario 2 de Perko [51], página 90) que \overline{P}^m es una solución global de (II.17) y es \mathcal{C}^1 de $[0, a] \rightarrow \mathcal{L}(V^{-m}, V^m)$. De este modo, aplicando de nuevo el Teorema 2 de Kato [38], deducimos que r^m es una solución global de (II.18) y $r^m \in H^1(0, a; V^m)$.

Recíprocamente, si $\overline{P}^m(s) \in \mathcal{C}^1([0, a]; \mathcal{L}(V^{-m}, V^m))$ y $r^m(s) \in H^1(0, a; V^m)$ son soluciones globales de (II.17) y de (II.18) respectivamente y $\hat{y}^m = \sum_{i=1}^m \hat{g}_i w_i$ satisface

$$\begin{cases} \hat{y}^m|_{\Gamma_s} = \overline{P}^m(s) \frac{\partial \hat{y}^m}{\partial x_1}|_{\Gamma_s} + r^m(s) & s \in [0, a] \\ -\frac{\partial \hat{y}^m}{\partial x_1}(0, x_2) = \sum_{i=1}^m \langle y_0, w_i \rangle_{H^{-1}(0,b) \times H_0^1(0,b)} w_i, \end{cases}$$

deducimos (siguiendo los mismos pasos pero en sentido inverso) que \hat{y}^m es solución de (II.11) (o (II.12)) y por tanto, $\hat{y}^m = y^m$. De este modo, hemos probado el siguiente resultado:

Teorema 81 $\overline{P}^m \in \mathcal{C}^1([0, a]; \mathcal{L}(V^{-m}, V^m))$ y $r^m \in H^1(0, a; V^m)$ son soluciones globales de (II.17) y de (II.18) respectivamente. Además se verifica (II.16). □

Ahora, para cada $m \in \mathbb{N}$ y para cada $\varphi \in H_0^1(0, a; V^m)$ tenemos que

$$\begin{aligned} \int_0^a \int_0^b \frac{\partial y^m}{\partial x_1}(x_1, x_2) \varphi(x_1, x_2) dx_1 dx_2 &= \int_0^a \int_0^b \left(\frac{dP^m}{dx_1}(x_1) \frac{\partial y^m}{\partial x_1}|_{\Gamma_{x_1}}(x_2) \right) \varphi(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \\ - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial y^m}{\partial x_1}(x_1, x_2) \frac{\partial}{\partial x_1} [(P^m(x_1) \varphi|_{\Gamma_{x_1}})(x_2)] dx_1 dx_2 &+ \int_0^a \int_0^b \frac{\partial r^m}{\partial x_1}(x_1, x_2) \varphi(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \end{aligned}$$

puesto que, por el Teorema 81, sabemos que todos los términos que aparecen en la última igualdad están bien definidos. Ahora, como $(P^m(x_1) \varphi|_{\Gamma_{x_1}})(x_2) \in X^m$, aplicando (II.11) obtenemos que

$$\begin{aligned} \int_0^a \int_0^b \frac{\partial y^m}{\partial x_1}(x_1, x_2) \varphi(x_1, x_2) dx_1 dx_2 &= \int_0^a \int_0^b \left(\frac{dP^m}{dx_1}(x_1) \frac{\partial y^m}{\partial x_1}|_{\Gamma_{x_1}}(x_2) \right) \varphi(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \\ + \int_0^a \int_0^b \frac{\partial y^m}{\partial x_2}(x_1, x_2) \frac{\partial}{\partial x_2} [(P^m(x_1) \varphi|_{\Gamma_{x_1}})(x_2)] dx_1 dx_2 \end{aligned}$$

$$- \int_0^a \langle f|_{\Gamma_{x_1}}, P^m(x_1)\varphi|_{\Gamma_{x_1}} \rangle_{H^{-1}(0,b) \times H_0^1(0,b)} dx_1 + \int_0^a \int_0^b \frac{\partial r^m}{\partial x_1}(x_1, x_2)\varphi(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

y, usando (II.14), se sigue que

$$\begin{aligned} \int_0^a \int_0^b \frac{\partial y^m}{\partial x_1}(x_1, x_2)\varphi(x_1, x_2) dx_1 dx_2 &= \int_0^a \int_0^b \left(\frac{dP^m}{dx_1}(x_1) \frac{\partial y^m}{\partial x_1} \Big|_{\Gamma_{x_1}} \right)(x_2)\varphi(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \\ &+ \int_0^a \int_0^b \frac{\partial}{\partial x_2} \left[(P^m(x_1) \frac{\partial y^m}{\partial x_1} \Big|_{\Gamma_{x_1}})(x_2) \right] \frac{\partial}{\partial x_2} \left[(P^m(x_1)\varphi|_{\Gamma_{x_1}})(x_2) \right] dx_1 dx_2 \\ &+ \int_0^a \int_0^b \frac{\partial r^m}{\partial x_2}(x_1, x_2) \frac{\partial}{\partial x_2} \left[(P^m(x_1)\varphi|_{\Gamma_{x_1}})(x_2) \right] dx_1 dx_2 \\ - \int_0^a \langle f|_{\Gamma_{x_1}}, P^m(x_1)\varphi|_{\Gamma_{x_1}} \rangle_{H^{-1}(0,b) \times H_0^1(0,b)} dx_1 &+ \int_0^a \int_0^b \frac{\partial r^m}{\partial x_1}(x_1, x_2)\varphi(x_1, x_2) dx_1 dx_2. \end{aligned}$$

De nuevo, como $\varphi \in H_0^1(0, a; V^m)$, $y_0 \in H^{-1}(0, b)$ y $f \in L^2(0, a; H^{-1}(0, b))$ son funciones arbitrarias, usando que P^m es un operador autoadjunto obtenemos que

$$\left[\frac{dP^m}{dx_1}(x_1) - P^m(x_1) \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} P^m(x_1) - I \right] \frac{\partial y^m}{\partial x_1} \Big|_{\Gamma_{x_1}} = 0 \quad \text{en } \mathcal{C}([0, a]; V^m)$$

y

$$\frac{\partial r^m}{\partial x_1}(x_1) - P^m(x_1) \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} r^m(x_1) - P^m(x_1)f|_{\Gamma_{x_1}} = 0 \quad \text{en } L^2(0, a; V^m)$$

para cada $y_0 \in H^{-1}(0, b)$ y $f \in L^2(0, a; H^{-1}(0, b))$. De este modo

$$\left[\frac{dP^m}{dx_1}(x_1) - P^m(x_1) \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} P^m(x_1) - I \right] w_j(x_2) = 0 \quad \text{en } L^2(0, a; V^m) \quad \forall j \in \{1, \dots, m\}$$

y

$$(II.20) \quad \left(\frac{\partial r^m}{\partial x_1}(x_1) - P^m(x_1) \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} r^m(x_1) - P^m(x_1)f|_{\Gamma_{x_1}} \right)(x_2) = 0 \quad \text{en } L^2(0, a; V^m)$$

(aquí queremos señalar de nuevo la relación entre el operador $\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ sobre V^m y la matriz D^m comparando estas ecuaciones con las ecuaciones (II.17) y (II.18)).

3.4 Paso al límite.

Teorema 82 Para cada $s \in [0, a]$ y para cada $h \in \widetilde{H}^{1/2}(0, b)^*$ se tiene que

$$P^m(s)h \rightarrow P(s)h \quad \text{en la topología de } \widetilde{H}^{1/2}(0, b). \quad \square$$

Demostración: Siguiendo con la notación de la Sección 3.2, para cada $s \in [0, a]$ (el caso $s = a$ es trivial) y para cada $h \in \widetilde{H}^{1/2}(0, b)^*$, tenemos que $P^m(s)h = \gamma_{|_{\Gamma_s}}^m$, donde $\gamma^m \in X_s^m$ es la solución de

$$\int_s^a \int_0^b \left(\frac{\partial \gamma^m}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \frac{\partial \gamma^m}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 = - \langle h, \varphi(s, \cdot) \rangle_{\widetilde{H}^{1/2}(0,b)^* \times \widetilde{H}^{1/2}(0,b)} \quad \forall \varphi \in X_s^m.$$

Entonces, tomando el caso particular $\varphi = \gamma^m$ y aplicando la Proposición 62 se deduce fácilmente que

$$\| \gamma^m \|_{H^1((s,a) \times (0,b))} \leq c \| h \|_{\tilde{H}^{1/2}(0,b)^*}.$$

De este modo, existe $z \in H^1((s, a) \times (0, b))$ tal que

$$(II.21) \quad \gamma^m \rightarrow z \quad \text{en la topología débil de } H^1((s, a) \times (0, b)).$$

Ahora, si tomamos $\varphi \in X_s^m$, obtenemos que

$$\iint_{s \int_0^a \int_0^b} \frac{\partial \gamma^m}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx_1 dx_2 + \iint_{s \int_0^a \int_0^b} \frac{\partial \gamma^m}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} dx_1 dx_2 = - \langle h, \varphi(s, \cdot) \rangle_{\tilde{H}^{1/2}(0,b)^* \times \tilde{H}^{1/2}(0,b)}$$

y si pasamos al límite, teniendo en cuenta la Proposición 74, obtenemos que

$$\iint_{s \int_0^a \int_0^b} \frac{\partial z}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx_1 dx_2 + \iint_{s \int_0^a \int_0^b} \frac{\partial z}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} dx_1 dx_2 = - \langle h, \varphi(s, \cdot) \rangle_{\tilde{H}^{1/2}(0,b)^* \times \tilde{H}^{1/2}(0,b)}$$

para cada $\varphi \in X_{s,0} = \{v \in H^1((s, a) \times (0, b)) : v|_{\Gamma_s} = v|_{\Gamma_l} = 0\}$ (esto se puede probar tomando una sucesión $\varphi^k \in X_s^k$ tal que $\varphi^k \rightarrow \varphi$ en la topología de $H^1((s, a) \times (0, b))$). De este modo, z es la solución del problema

$$\begin{cases} -\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} = 0 & \text{en } (0, a) \times (0, b) \\ z|_{\Gamma_l} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial x_1}|_{\Gamma_s} = h, \quad z|_{\Gamma_a} = 0 \end{cases}$$

y por tanto, $P(s)h = z|_{\Gamma_s}$. Ahora podemos deducir que la convergencia en (II.21) es en la topología “fuerte”, puesto que

$$\begin{aligned} & \| \gamma^m - z \|_{H^1((s,a) \times (0,b))} = \\ & = \iint_{s \int_0^a \int_0^b} \frac{\partial(\gamma^m - z)}{\partial x_1} \frac{\partial(\gamma^m - z)}{\partial x_1} dx_1 dx_2 + \iint_{s \int_0^a \int_0^b} \frac{\partial(\gamma^m - z)}{\partial x_2} \frac{\partial(\gamma^m - z)}{\partial x_2} dx_1 dx_2 \\ & = - \langle h, \gamma^m(s, \cdot) \rangle_{\tilde{H}^{1/2}(0,b)^* \times \tilde{H}^{1/2}(0,b)} - \left(\iint_{s \int_0^a \int_0^b} \frac{\partial \gamma^m}{\partial x_1} \frac{\partial z}{\partial x_1} dx_1 dx_2 + \iint_{s \int_0^a \int_0^b} \frac{\partial \gamma^m}{\partial x_2} \frac{\partial z}{\partial x_2} dx_1 dx_2 \right) \\ & \quad - \left(\iint_{s \int_0^a \int_0^b} \frac{\partial z}{\partial x_1} \frac{\partial(\gamma^m - z)}{\partial x_1} dx_1 dx_2 + \iint_{s \int_0^a \int_0^b} \frac{\partial z}{\partial x_2} \frac{\partial(\gamma^m - z)}{\partial x_2} dx_1 dx_2 \right) \\ & = - \left(\iint_{s \int_0^a \int_0^b} \frac{\partial z}{\partial x_1} \frac{\partial(\gamma^m - z)}{\partial x_1} dx_1 dx_2 + \iint_{s \int_0^a \int_0^b} \frac{\partial z}{\partial x_2} \frac{\partial(\gamma^m - z)}{\partial x_2} dx_1 dx_2 \right) \end{aligned}$$

→ 0 cuando m tiende a ∞ .

Finalmente se concluye la demostración del teorema usando el resultado de trazas de la Proposición 62. ■

El resto de esta sección lo dedicaremos al paso al límite de r^m .

Teorema 83 Para cada $s \in [0, a]$ se tiene que

$$r^m(s) \rightarrow r(s) \quad \text{en la topología de } \widetilde{H}^{1/2}(0, b). \quad \square$$

Demostración: Es la misma demostración que en el Teorema 82 pero cambiando γ^m por β^m y teniendo en cuenta la ecuación que satisface β^m . ■

Lema 84 r^m , $(P^m(x_1) \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} r^m(x_1))(x_2)$ y $(P^m(x_1)f|_{\Gamma_{x_1}})(x_2)$ son funciones uniformemente acotadas en $L^2(0, a; H_0^1(0, b))$. □

Demostración: Para todo $x_1 \in [0, a]$ se tiene que

$$\begin{aligned} & \| P^m(x_1) \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} r^m(x_1) \|_{H_0^1(0, b)} = \| P^m(x_1) \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} r^m(x_1) \|_{V^m} \\ & \leq c_1 \| \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} r^m(x_1) \|_{H^{-1}(0, b)} = c_1 \| \frac{\partial}{\partial x_2} r^m(x_1) \|_{L^2(0, b)} = c_1 \| r^m(x_1) \|_{H_0^1(0, b)}. \end{aligned}$$

(aquí hemos usado el Lema 80). De este modo, tenemos que

$$\| P^m(x_1) \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} r^m(x_1) \|_{L^2(0, a; H_0^1(0, b))} \leq c_1 \| r^m \|_{L^2(0, a; V^m)}.$$

Ahora, por el Lema 80, para todo $x_1 \in [0, a]$,

$$\begin{aligned} & \| r^m(x_1) \|_{H_0^1(0, b)} = \| r^m(x_1) \|_{V^m} \leq \| (P^m(x_1) \frac{\partial y^m}{\partial x_1}|_{\Gamma_{x_1}})(x_2) \|_{V^m} + \| y^m|_{\Gamma_{x_1}} \|_{V^m} \\ & \leq \| y^m|_{\Gamma_{x_1}} \|_{V^m} + c_1 \| \frac{\partial y^m}{\partial x_1}|_{\Gamma_{x_1}} \|_{\widetilde{H}^{1/2}(0, b)^*} \leq \| y^m|_{\Gamma_{x_1}} \|_{V^m} + c_1 \| \frac{\partial y^m}{\partial x_1}|_{\Gamma_{x_1}} \|_{H_0^1(0, b)}. \end{aligned}$$

De aquí, utilizando el caso particular $y_0 = 0$, deducimos que

$$(11.22) \quad \| r^m \|_{L^2(0, a; V^m)} \leq c_2 \| y^m \|_{H^1(0, a; V^m)} \leq c_3 \| f \|_{L^2((0, a) \times (0, b))}.$$

Además, de nuevo por el Lema 80, para casi todo $x_1 \in (0, a)$ se tiene que

$$\| (P^m(x_1)f|_{\Gamma_{x_1}})(x_2) \|_{H_0^1(0, b)} = \| (P^m(x_1)f|_{\Gamma_{x_1}})(x_2) \|_{V^m} \leq c_4 \| f|_{\Gamma_{x_1}} \|_{H^{-1}(0, b)}.$$

Entonces, como $f \in L^2(0, a; H^{-1}(0, b))$, se deduce que

$$\| (P^m(x_1)f|_{\Gamma_{x_1}})(x_2) \|_{L^2(0, a; H_0^1(0, b))} \leq c_4 \| f \|_{L^2(0, a; H^{-1}(0, b))}. \quad \blacksquare$$

Corolario 85 *Existe una constante $c > 0$ independiente de f tal que*

$$\| r^m \|_{H^1(0,a;H_0^1(0,b))} \leq c \| f \|_{L^2(0,a;H^{-1}(0,b))}.$$

Además

$$r^m \rightarrow r \quad \text{en la topología de } L^2(0,a; \widetilde{H}^{1/2}(0,b)). \quad \square$$

Demostración: De (II.20) y el Lema 84 se puede deducir fácilmente la existencia de la constante $c > 0$. Entonces, como $H^1(0,a;H_0^1(0,b)) \subset \mathcal{C}([0,a];H_0^1(0,b))$ es una inyección continua, deducimos el resultado aplicando el Teorema 83 y el Teorema de Lebesgue. ■

Corolario 86

$$r^m \rightarrow r \quad \text{en la topología débil de } L^2(0,a;H_0^1(0,b)). \quad \square$$

Demostración: Por el Lema 84 sabemos que existe $v \in L^2(0,a;H_0^1(0,b))$ tal que

$$r^m \rightarrow v \quad \text{en la topología débil de } L^2(0,a;H_0^1(0,b)).$$

Además, por el Corolario 85, sabemos que

$$r^m \rightarrow r \quad \text{en } \mathcal{D}'((0,a) \times (0,b)).$$

Entonces, por la unicidad del límite, $v = r$. ■

Corolario 87

$$r^m \rightarrow r \quad \text{en la topología débil de } H^1(0,a;H_0^1(0,b)). \quad \square$$

Demostración: Por el Corolario 85 sabemos que existe $u \in L^2(0,a;H_0^1(0,b))$ tal que

$$\frac{\partial r^m}{\partial x_1} \rightarrow u \quad \text{en la topología débil de } L^2(0,a;H_0^1(0,b)).$$

Además, por el Corolario 85, deducimos que

$$\frac{\partial r^m}{\partial x_1} \rightarrow \frac{\partial r}{\partial x_1} \quad \text{en } \mathcal{D}'((0,a) \times (0,b)).$$

Entonces $u = \frac{\partial r}{\partial x_1}$. ■

3.5 Ecuación de Riccati de P y ecuación de r .

En esta sección intentaremos dar sentido a la definición de solución de la ecuación de Riccati de P y de la ecuación de r .

Observación 88 Por el Corolario 87 sabemos que $r \in H^1(0, a; H_0^1(0, b))$. Además, por definición, r solo depende de f (es decir, del término de la derecha en la ecuación del Problema (\mathcal{P}_0)) e y_a . Por tanto, podemos poner $r = r_f$ en el caso $y_a = 0$.

Lema 89 $(P(x_1) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} |_{\Gamma_{x_1}})(x_2) \in X_0$ para todo $\varphi \in Y$ y

$$\| (P(x_1) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} |_{\Gamma_{x_1}})(x_2) \|_{H^1((0,a) \times (0,b))} \leq \| \varphi \|_Y . \quad \square$$

Demostración: Para empezar señalamos que φ es solución del problema

$$(\tilde{\mathcal{P}}) \begin{cases} -\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} & \text{en } (0, a) \times (0, b) \\ y|_{\Gamma_i} = 0 \\ -\frac{\partial y}{\partial x_1} |_{\Gamma_0} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} |_{\Gamma_0}, \quad y|_{\Gamma_a} = 0. \end{cases}$$

De una manera similar a lo hecho anteriormente,

$$\varphi(x_1, x_2) = (P(x_1) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} |_{\Gamma_{x_1}})(x_2) + r_{\Delta \varphi}(x_1, x_2)$$

y por tanto,

$$(P(x_1) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} |_{\Gamma_{x_1}})(x_2) = \varphi(x_1, x_2) - r_{\Delta \varphi}(x_1, x_2) \in X_0$$

y, usando el Corolario 85, deducimos que

$$\| (P(x_1) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} |_{\Gamma_{x_1}})(x_2) \|_{H^1((0,a) \times (0,b))} \leq \| \varphi \|_Y . \quad \blacksquare$$

Corolario 90 $(P(x_1) \varphi |_{\Gamma_{x_1}})(x_2) \in X_0$ para todo $\varphi \in V$, donde

$$V = L^2(0, a; H_0^1(0, b)) \cap \{ \psi : \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} \in L^2((0, a) \times (0, b)) \}$$

y

$$\| (P(x_1) \varphi |_{\Gamma_{x_1}})(x_2) \|_{H^1((0,a) \times (0,b))} \leq c \| \varphi \|_V . \quad \square$$

Demostración: Sean $\varphi \in V$ y $v_\varphi(x_1, x_2) = \int_a^{x_1} \varphi(s, x_2) ds$. Entonces $v_\varphi \in Y$ y, de manera similar a lo hecho en la demostración del Lema 89,

$$(H.23) \quad v_\varphi(x_1, x_2) = (P(x_1)\varphi|_{\Gamma_{x_1}})(x_2) + r_{\Delta v_\varphi}(x_1, x_2).$$

Finalmente, obtenemos el resultado aplicando el Lema 89. \blacksquare

Lema 91 *La aplicación*

$$(v, w) \rightarrow \int_0^a \int_0^b (P(x_1) \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} |_{\Gamma_{x_1}})(x_2) \frac{\partial w}{\partial x_1}(x_1, x_2) dx_1 dx_2,$$

con $v, w \in \mathcal{C}^\infty(\overline{(0, a) \times (0, b)}) \cap \{v : v|_{\Gamma_l} = v|_{\Gamma_a} = 0\}$, define, por continuidad, una aplicación bilineal y continua de $Y \times Y \rightarrow \mathbb{R}$. \square

Demostración: Sean $v, w \in \mathcal{C}^\infty(\overline{(0, a) \times (0, b)}) \cap \{v : v|_{\Gamma_l} = v|_{\Gamma_a} = 0\}$. Entonces,

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^a \int_0^b (P(x_1) \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} |_{\Gamma_{x_1}})(x_2) \frac{\partial w}{\partial x_1}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \right| = \\ & = \left| \int_0^a \int_0^b \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}(x_1, x_2) (P(x_1) \frac{\partial w}{\partial x_1} |_{\Gamma_{x_1}})(x_2) dx_1 dx_2 \right| \\ & = \left| \left\langle \frac{\partial v}{\partial x_1}(0, x_2), (P(0) \frac{\partial w}{\partial x_1} |_{\Gamma_0})(x_2) \right\rangle_{\tilde{H}^{1/2}(0, b) \times \tilde{H}^{1/2}(0, b)} \right. \\ & \quad \left. + \int_0^a \int_0^b \frac{\partial v}{\partial x_1}(x_1, x_2) \frac{\partial}{\partial x_1} (P(x_1) \frac{\partial w}{\partial x_1} |_{\Gamma_{x_1}})(x_2) dx_1 dx_2 \right| \\ & \leq c \|v\|_Y \|w\|_Y \end{aligned}$$

(aquí hemos aplicado la Proposición 62 y el Lema 89). De aquí se obtiene el resultado teniendo en cuenta que $\mathcal{C}^\infty(\overline{(0, a) \times (0, b)}) \cap \{v : v|_{\Gamma_l} = v|_{\Gamma_a} = 0\}$ es denso en Y (vease el Lema 1.5.3.9 de Grisvard [34]). \blacksquare

Corolario 92 *La aplicación*

$$(\varphi, \psi) \rightarrow \int_0^a \int_0^b (P(x_1) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} |_{\Gamma_{x_1}})(x_2) \psi(x_1, x_2) dx_1 dx_2,$$

con $\varphi, \psi \in \mathcal{C}^\infty(\overline{(0, a) \times (0, b)}) \cap \{v : v|_{\Gamma_l} = v|_{\Gamma_a} = 0\}$, define, por continuidad, una aplicación bilineal y continua de $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$. \square

Demostración: Basta aplicar el Lema 91 con $v = v_\varphi$ y $w = v_\psi$ (con la notación del Corolario 90). \blacksquare

Lema 93 *La aplicación*

$$(v, w) \rightarrow \int_0^a \int_0^b (P(x_1) \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} |_{\Gamma_{x_1}})(x_2) \frac{\partial w}{\partial x_1}(x_1, x_2) dx_1 dx_2,$$

con $v, w \in C^\infty(\overline{(0, a) \times (0, b)}) \cap \{v : v|_{\Gamma_l} = v|_{\Gamma_a} = 0\}$, define, por continuidad, una aplicación bilineal y continua de $Y \times Y \rightarrow \mathbb{R}$. \square

Demostración: De una manera similar a lo hecho en la demostración del Lema 91, sean $v, w \in C^\infty(\overline{(0, a) \times (0, b)}) \cap \{v : v|_{\Gamma_l} = v|_{\Gamma_a} = 0\}$. Entonces,

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^a \int_0^b (P(x_1) \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} |_{\Gamma_{x_1}})(x_2) \frac{\partial w}{\partial x_1}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \right| = \\ & = \left| \int_0^a \int_0^b \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2}(x_1, x_2) (P(x_1) \frac{\partial w}{\partial x_1} |_{\Gamma_{x_1}})(x_2) dx_1 dx_2 \right| \\ & = \left| \int_0^a \int_0^b \frac{\partial v}{\partial x_2}(x_1, x_2) \frac{\partial}{\partial x_2} (P(x_1) \frac{\partial w}{\partial x_1} |_{\Gamma_{x_1}})(x_2) dx_1 dx_2 \right| \\ & \leq c \|v\|_Y \|w\|_Y \end{aligned}$$

(aquí hemos aplicado el Lema 89). \blacksquare

Lema 94 *La aplicación*

$$(\varphi, \psi) \rightarrow \int_0^a \int_0^b \left(\frac{dP(x_1)}{dx_1} \varphi |_{\Gamma_{x_1}} \right)(x_2) \psi(x_1, x_2) dx_1 dx_2,$$

con $\varphi, \psi \in C^\infty(\overline{(0, a) \times (0, b)}) \cap \{v : v|_{\Gamma_l} = v|_{\Gamma_a} = 0\}$, define, por continuidad, una aplicación bilineal y continua de $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$. \square

Demostración: Veremos que la aplicación

$$(\varphi, \psi) \rightarrow$$

$$\int_0^a \int_0^b \frac{\partial}{\partial x_1} (P(x_1) \varphi |_{\Gamma_{x_1}})(x_2) \psi(x_1, x_2) dx_1 dx_2 - \int_0^a \int_0^b (P(x_1) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} |_{\Gamma_{x_1}})(x_2) \psi(x_1, x_2) dx_1 dx_2,$$

con $\varphi, \psi \in C^\infty(\overline{(0, a) \times (0, b)}) \cap \{v : v|_{\Gamma_l} = v|_{\Gamma_a} = 0\}$, define, por continuidad, una aplicación bilineal y continua de $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$. Aplicando el Corolario 90 y que P es un operador autoadjunto se obtiene que

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^a \int_0^b \frac{\partial}{\partial x_1} (P(x_1) \varphi |_{\Gamma_{x_1}})(x_2) \psi(x_1, x_2) dx_1 dx_2 - \int_0^a \int_0^b (P(x_1) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} |_{\Gamma_{x_1}})(x_2) \psi(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \right| \\ & \leq c_1 \|\varphi\|_V \|\psi\|_V + \left| \int_0^a \int_0^b \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x_1, x_2) (P(x_1) \psi |_{\Gamma_{x_1}})(x_2) dx_1 dx_2 \right| \end{aligned}$$

Finalmente, por la Proposición 62 y el Corolario 90,

$$\begin{aligned} \left| \iint_{\Omega} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} (x_1, x_2) (P(x_1) \psi|_{\Gamma_{x_1}})(x_2) dx_1 dx_2 \right| &= \left| \iint_{\Omega} \varphi(x_1, x_2) \frac{\partial}{\partial x_1} (P(x_1) \psi|_{\Gamma_{x_1}})(x_2) dx_1 dx_2 \right. \\ &\left. + \langle \varphi(0, x_2), P(0) \psi(0, x_2) \rangle_{\tilde{H}^{1/2}(0,b) \times \tilde{H}^{1/2}(0,b)} \right| \leq c_2 \|\varphi\|_V \|\psi\|_V. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Teorema 95 *El operador P es solución de la ecuación de tipo Riccati*

$$\begin{cases} \frac{dP}{dx_1} - P \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} P - I = 0 \\ P(a) = 0 \end{cases}$$

en el siguiente sentido:

$$\begin{cases} \iint_{\Omega} \varphi(x_1, x_2) \psi(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \iint_{\Omega} \left(\frac{dP(x_1)}{dx_1} \varphi|_{\Gamma_{x_1}} \right) (x_2) \psi(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \\ + \iint_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_2} (P(x_1) \varphi|_{\Gamma_{x_1}})(x_2) \frac{\partial}{\partial x_2} (P(x_1) \psi|_{\Gamma_{x_1}})(x_2) dx_1 dx_2 \quad \forall \varphi, \psi \in V. \\ P(a) \equiv 0. \quad \square \end{cases}$$

Demostración: Para cada $\varphi, \psi \in V$ tenemos (usando II.23) que

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \varphi \psi dx_1 dx_2 &= \iint_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_1} (P(x_1) \varphi|_{\Gamma_{x_1}}) \psi dx_1 dx_2 + \iint_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_1} r_{\Delta v_\varphi} \psi dx_1 dx_2 = \\ &= \iint_{\Omega} \frac{dP(x_1)}{dx_1} \varphi|_{\Gamma_{x_1}} \psi dx_1 dx_2 + \iint_{\Omega} P(x_1) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} |_{\Gamma_{x_1}} \psi dx_1 dx_2 + \iint_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_1} r_{\Delta v_\varphi} \psi dx_1 dx_2 \end{aligned}$$

(la última igualdad la hemos obtenido usando el Lema 94 y el Corolario 92). Ahora por el Lema 93

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \varphi \psi dx_1 dx_2 &= \iint_{\Omega} \frac{dP(x_1)}{dx_1} \varphi|_{\Gamma_{x_1}} \psi dx_1 dx_2 - \iint_{\Omega} P(x_1) \frac{\partial^2 v_{\Delta \varphi}}{\partial x_2^2} |_{\Gamma_{x_1}} \psi dx_1 dx_2 \\ &+ \iint_{\Omega} P(x_1) (\Delta v_\varphi) |_{\Gamma_{x_1}} \psi dx_1 dx_2 + \iint_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_1} r_{\Delta v_\varphi} \psi dx_1 dx_2. \end{aligned}$$

Entonces, usando de nuevo II.23 y que P es un operador autoadjunto, deducimos que

$$\begin{aligned} \left\{ \iint_{\Omega} \frac{dP(x_1)}{dx_1} \varphi|_{\Gamma_{x_1}} \psi dx_1 dx_2 + \iint_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_2} (P(x_1) \varphi|_{\Gamma_{x_1}}) \frac{\partial}{\partial x_2} (P(x_1) \psi|_{\Gamma_{x_1}}) dx_1 dx_2 \right. \\ \left. - \iint_{\Omega} \varphi \psi dx_1 dx_2 \right\} + \end{aligned}$$

$$+ \left\{ \int_0^a \int_0^b \frac{\partial}{\partial x_1} r_{\Delta v_\varphi} \psi dx_1 dx_2 + \int_0^a \int_0^b \frac{\partial}{\partial x_2} r_{\Delta v_\varphi} \frac{\partial}{\partial x_2} (P(x_1) \psi |_{\Gamma_{x_1}}) dx_1 dx_2 - \int_0^a \int_0^b P(x_1) (-\Delta v_\varphi) |_{\Gamma_{x_1}} \psi dx_1 dx_2 \right\} = 0.$$

Esto concluye la demostración usando que el segundo término entre corchetes es invariante para todo φ_i tal que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x_2^2}. \quad \blacksquare$$

Otro sentido de solución se puede dar como sigue:

Teorema 96 *El operador lineal P es solución de la ecuación tipo Riccati*

$$\begin{cases} \frac{dP}{dx_1} - P \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} P - I = 0 \\ P(a) = 0 \end{cases}$$

en el siguiente sentido:

$$\begin{cases} \int_0^a \int_0^b \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \psi dx_1 dx_2 = \int_0^a \int_0^b \left(\frac{dP(x_1)}{dx_1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} |_{\Gamma_{x_1}} \right) \psi dx_1 dx_2 \\ + \int_0^a \int_0^b \frac{\partial}{\partial x_2} (P(x_1) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} |_{\Gamma_{x_1}}) \frac{\partial}{\partial x_2} (P(x_1) \psi |_{\Gamma_{x_1}}) dx_1 dx_2 \quad \forall \varphi \in Y, \forall \psi \in V. \\ P(a) \equiv 0. \end{cases}$$

y también

$$\begin{cases} \int_0^a \int_0^b \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \frac{\partial \psi}{\partial x_1} dx_1 dx_2 = \int_0^a \int_0^b \left(\frac{dP(x_1)}{dx_1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} |_{\Gamma_{x_1}} \right) \frac{\partial \psi}{\partial x_1} dx_1 dx_2 \\ + \int_0^a \int_0^b \frac{\partial}{\partial x_2} (P(x_1) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} |_{\Gamma_{x_1}}) \frac{\partial}{\partial x_2} (P(x_1) \frac{\partial \psi}{\partial x_1} |_{\Gamma_{x_1}}) dx_1 dx_2 \quad \forall \varphi, \psi \in Y. \\ P(a) \equiv 0. \quad \square \end{cases}$$

Demostración: Es similar a la del Teorema 95 (vease la demostración del Teorema 97).

■

Teorema 97 *Para cada $f \in L^2((0, a) \times (0, b))$, la función $r = r_f$ definida arriba verifica la ecuación*

$$\begin{cases} \frac{\partial r}{\partial x_1} - P \frac{\partial^2 r}{\partial x_2^2} = Pf \\ r(a) = 0 \end{cases}$$

en el siguiente sentido:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^{a_f} \int_0^b \frac{\partial r_f}{\partial x_1} \psi dx_1 dx_2 + \int_0^{a_f} \int_0^b \frac{\partial r_f}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_2} (P(x_1) \psi |_{\Gamma_{x_1}}) dx_1 dx_2 \\ - \int_0^{a_f} \int_0^b P(x_1) f |_{\Gamma_{x_1}} \psi dx_1 dx_2 = 0 \quad \forall \psi \in V \\ r(a) = 0. \end{array} \right.$$

y también

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^{a_f} \int_0^b \frac{\partial r_f}{\partial x_1} \frac{\partial \psi}{\partial x_1} dx_1 dx_2 + \int_0^{a_f} \int_0^b \frac{\partial r_f}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_2} (P(x_1) \frac{\partial \psi}{\partial x_1} |_{\Gamma_{x_1}}) dx_1 dx_2 \\ - \int_0^{a_f} \int_0^b P(x_1) f |_{\Gamma_{x_1}} \frac{\partial \psi}{\partial x_1} dx_1 dx_2 = 0 \quad \forall \psi \in Y \\ r(a) = 0. \quad \square \end{array} \right.$$

Demostración: Para cada $f \in L^2((0, a) \times (0, b))$ existe $\varphi_1 \in V$ y $\varphi_2 \in Y$ tal que

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_2^2} = f$$

y

$$\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_2^2} = f.$$

Entonces, si seguimos los mismos pasos que en la demostración del Teorema 95 obtenemos la demostración del Teorema 96 y de este problema. ■

3.6 Conclusiones: El método de factorización.

Ahora, si $y \in Y$ es la solución de (\mathcal{P}_0) (con $y_a = 0$) y $\xi = \frac{\partial y}{\partial x_1}$, tenemos el siguiente resultado:

Teorema 98 $\xi = \frac{\partial y}{\partial x_1}$ es solución del problema

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \xi}{\partial x_1} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} P \xi = -f - \frac{\partial^2 r_f}{\partial x_2^2} \\ \xi(0) = -y_0 \end{array} \right.$$

en el siguiente sentido: Existe $y \in Y$ tal que $\xi = \frac{\partial y}{\partial x_1}$ y se cumple que

$$\int_0^{a_f} \int_0^b \xi \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx_1 dx_2 + \int_0^{a_f} \int_0^b \frac{\partial}{\partial x_2} (P(x_1) \xi |_{\Gamma_{x_1}}) \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} dx_1 dx_2 = \int_0^{a_f} \int_0^b f \varphi dx_1 dx_2$$

$$- \int_0^{a_f} \int_0^b \frac{\partial r_f}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} dx_1 dx_2 - \langle y_0, \varphi|_{\Gamma_0} \rangle_{\tilde{H}^{1/2}(0,b) \times \tilde{H}^{1/2}(0,b)} \quad \forall \varphi \in X_0. \quad \square$$

Demostración: Es consecuencia de la definición de solución de (\mathcal{P}_0) y los resultados de las secciones previas, usando que $y|_{\Gamma_{x_1}} = P(x_1)\xi|_{\Gamma_{x_1}} + r_f$. ■

Como conclusión, podemos exponer el siguiente resultado:

Teorema 99 *La solución del Problema (\mathcal{P}_0) (en el caso $y_a \equiv 0$) está unívocamente determinada por las soluciones (en el sentido de los Teoremas 96, 97 y 98) del sistema desacoplado*

$$(II.24) \quad \begin{cases} \frac{dP}{dx_1} - P \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} P - I = 0 & P(a) = 0 \\ \frac{\partial r}{\partial x_1} - P \frac{\partial^2 r}{\partial x_2^2} = Pf & r(a) = 0 \\ \frac{\partial \xi}{\partial x_1} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} P \xi = f - \frac{\partial^2 r}{\partial x_2^2} & \xi(0) = -y_0 \end{cases}$$

mediante la expresión

$$y|_{\Gamma_{x_1}} = P(x_1)\xi|_{\Gamma_{x_1}} + r_f|_{\Gamma_{x_1}}. \quad \square$$

Observación 100 Ponemos de relieve que en el Teorema 99 no decimos nada sobre la unicidad de solución de P , r_f y ξ , sino sobre la unicidad de la función $y|_{\Gamma_{x_1}} = P(x_1)\xi|_{\Gamma_{x_1}} + r_f|_{\Gamma_{x_1}}$ para todo (P, r_f, ξ) solución del sistema (II.24).

Demostración del Teorema 99. Sea (P, r_f, ξ) una solución del sistema (II.24). Probaremos que

$$y|_{\Gamma_{x_1}} = P(x_1)\xi|_{\Gamma_{x_1}} + r_f|_{\Gamma_{x_1}}$$

es solución de (\mathcal{P}_0) (con $y_a = 0$) y por tanto, por unicidad de solución del Problema (\mathcal{P}_0) , concluiremos el resultado.

Ahora, para todo $\varphi \in Y$, si denotamos por I a la expresión

$$I = \int_0^{a_f} \int_0^b \left(\frac{\partial y}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \frac{\partial y}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2,$$

tenemos que

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{a_f} \int_0^b \left(\frac{\partial}{\partial x_1} (P(x_1)\xi|_{\Gamma_{x_1}}) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \frac{\partial r_f}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial x_2} (P(x_1)\xi|_{\Gamma_{x_1}}) \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \frac{\partial r_f}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 \end{aligned}$$

$$= \iint_{\Omega}^{a,b} \left(\frac{dP}{dx_1}(x_1)\xi|_{\Gamma_{x_1}} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + P(x_1) \frac{\partial \xi}{\partial x_1}|_{\Gamma_{x_1}} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \frac{\partial r_f}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial x_2} (P(x_1)\xi|_{\Gamma_{x_1}}) \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \frac{\partial r_f}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2.$$

Aquí ponemos de relieve que todos los términos dentro de la integral están bien definidos (vease el Lema 91). Entonces, por la definición de solución de ξ (vease el Teorema 98), tenemos que

$$I = \iint_{\Omega}^{a,b} \left(\frac{dP}{dx_1}(x_1)\xi|_{\Gamma_{x_1}} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + P(x_1) \frac{\partial \xi}{\partial x_1}|_{\Gamma_{x_1}} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \frac{\partial r_f}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right. \\ \left. + f\varphi - \langle y_0, \varphi|_{\Gamma_0} \rangle_{\tilde{H}^{1/2}(0,b) \times \tilde{H}^{1/2}(0,b)} - \xi \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right) dx_1 dx_2$$

y por los Teoremas 96 y 97,

$$I = \iint_{\Omega}^{a,b} \left(- \frac{\partial}{\partial x_2} (P(x_1)\xi|_{\Gamma_{x_1}}) \frac{\partial}{\partial x_2} (P(x_1) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}|_{\Gamma_{x_1}}) + P(x_1) \frac{\partial \xi}{\partial x_1}|_{\Gamma_{x_1}} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right. \\ \left. + P(x_1) f|_{\Gamma_{x_1}} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - \frac{\partial r_f}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_2} (P(x_1) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}|_{\Gamma_{x_1}}) + f\varphi \right. \\ \left. - \langle y_0, \varphi|_{\Gamma_0} \rangle_{\tilde{H}^{1/2}(0,b) \times \tilde{H}^{1/2}(0,b)} \right) dx_1 dx_2.$$

Ahora, como $(P(x_1) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}|_{\Gamma_{x_1}})(x_2) \in X_0$ (vease el Lema 89), podemos utilizar la función $(P(x_1) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}|_{\Gamma_{x_1}})(x_2)$ como función test en el Teorema 98. Además utilizamos que P es un operador autoadjunto. De este modo,

$$I = \iint_{\Omega}^{a,b} \left(\xi \frac{\partial}{\partial x_1} (P(x_1) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}|_{\Gamma_{x_1}}) + \langle y_0, P(0) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}|_{\Gamma_0} \rangle_{\tilde{H}^{1/2}(0,b) \times \tilde{H}^{1/2}(0,b)} \right. \\ \left. + P(x_1) \frac{\partial \xi}{\partial x_1}|_{\Gamma_{x_1}} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + f\varphi - \langle y_0, \varphi|_{\Gamma_0} \rangle_{\tilde{H}^{1/2}(0,b) \times \tilde{H}^{1/2}(0,b)} \right) dx_1 dx_2.$$

Finalmente, si usamos la fórmula de Green, obtenemos que

$$I = \iint_{\Omega}^{a,b} \left(f\varphi - \langle y_0, \varphi|_{\Gamma_0} \rangle_{\tilde{H}^{1/2}(0,b) \times \tilde{H}^{1/2}(0,b)} \right) dx_1 dx_2,$$

lo cual implica (vease la Definición 63 teniendo en cuenta que Y es un subconjunto denso de X_0) que y es la única solución de (\mathcal{P}_0) y concluye la demostración del Teorema 99. ■

4 Problema de control optimal asociado a la ecuación de Riccati de Q y a la ecuación de w .

En esta sección mostraremos que la aparición de una ecuación tipo Riccati (las cuales surgen, usualmente, como las ecuaciones asociadas en los problemas de control optimal;

vease e.g. la Sección 4 del Capítulo III de Lions [40]) no es por casualidad. Para ello mostraremos la relación entre nuestro problema y un problema de control optimal.

Como hemos hecho la justificación de las ecuaciones de P y r con $y_a = 0$ (por simplicidad), en esta sección utilizaremos el operador Q y la función w definidos en la Sección 2.2 y con $y_0 = 0$ (por simplicidad).

Recordemos el problema:

$$(\mathcal{P}_0) \begin{cases} -\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} = f & \text{en } (0, a) \times (0, b) \\ y|_{\Gamma_l} = 0 \\ -\frac{\partial y}{\partial x_1}|_{\Gamma_0} = 0, \quad y|_{\Gamma_a} = y_a. \end{cases}$$

Para todo $v \in \mathcal{U} = L^2((0, a) \times (0, b))$ (espacio de controles) denotamos por $y(v) \in H^1(0, a; L^2(0, b))$ a la solución de

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial x_1} = v & \text{en } (0, a) \times (0, b) \\ y(a) = y_a. \end{cases}$$

También denotamos

$$\mathcal{U}_{ad} = \{v \in \mathcal{U} : y(v) \in X_{y_a}\}$$

al espacio de controles admisibles, donde

$$X_{y_a} = \{h \in L^2(0, a; H_0^1(0, b)) \cap H^1(0, a; L^2(0, b)) : h|_{\Gamma_a} = y_a\}.$$

El estado deseado z_d está dado por

$$z_d = \left(-\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)^{-1} f \in L^2(0, a; H^2(0, b) \cap H_0^1(0, b)) \subset L^2(0, a; H_0^1(0, b)).$$

Buscamos $u \in \mathcal{U}_{ad}$ tal que

$$J(u) = \inf_{v \in \mathcal{U}_{ad}} J(v),$$

donde, para todo $v \in \mathcal{U}_{ad}$,

$$\begin{aligned} J(v) &= \|y(v) - z_d\|_{L^2(0, a; H_0^1(0, b))}^2 + \|v\|_{L^2((0, a) \times (0, b))}^2 \\ &= \int_0^a \left\| \frac{\partial y(v)}{\partial x_2} - \frac{\partial z_d}{\partial x_2} \right\|_{L^2(0, b)}^2 dx_1 + \int_0^a \int_0^b v^2 dx_1 dx_2. \end{aligned}$$

En este punto nos encontramos con el problema de que \mathcal{U}_{ad} no es un subconjunto cerrado de $L^2((0, a) \times (0, b))$ y por tanto no podemos usar directamente las técnicas clásicas de

los problemas de control optimal (vease, por ejemplo, el Capítulo I de Lions [40]) para resolver este problema. Sin embargo, como $\mathcal{U}_{ad} = \left\{ \frac{\partial h}{\partial x_1} : y \in X_{y_a} \right\}$,

$$J(u) = \inf_{v \in \mathcal{U}_{ad}} J(v) = \inf_{h \in X_{y_a}} \bar{J}(h) = \bar{J}(y),$$

donde $\frac{\partial y}{\partial x_1} = u$ y

$$\begin{aligned} \bar{J}(h) &= \|h - z_d\|_{L^2(0,a;H_0^1(0,b))}^2 + \left\| \frac{\partial h}{\partial x_1} \right\|_{L^2((0,a) \times (0,b))}^2 \\ &= \int_0^a \left\| \frac{\partial h}{\partial x_2} - \frac{\partial z_d}{\partial x_2} \right\|_{L^2(0,b)}^2 dx_1 + \int_0^a \int_0^b \left| \frac{\partial h}{\partial x_1} \right|^2 dx_1 dx_2. \end{aligned}$$

Ahora, X_{y_a} es un conjunto convexo y cerrado en el espacio de Hilbert $L^2(0, a; H_0^1(0, b)) \cap H^1(0, a; L^2(0, b))$ y $\bar{J}(h)^{1/2}$ es una norma equivalente a la usual de $L^2(0, a; H_0^1(0, b)) \cap H^1(0, a; L^2(0, b))$. Entonces (vease, por ejemplo, el Teorema 1.3 del Capítulo I de Lions [40]) existe un único $y \in X_{y_a}$ satisfaciendo

$$\bar{J}(y) = \inf_{h \in X_{y_a}} \bar{J}(h),$$

que está unívocamente determinado por

$$\bar{J}'(y)(h - y) = 0 \quad \forall h \in X_{y_a},$$

lo cual es equivalente a

$$(11.25) \quad \bar{J}'(y)(h) = 0 \quad \forall h \in X_0(2).$$

De este modo,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^a \int_0^b \left(\frac{\partial y}{\partial x_2} - \frac{\partial z_d}{\partial x_2} \right) \frac{\partial h}{\partial x_2} dx_1 dx_2 + \int_0^a \int_0^b \frac{\partial y}{\partial x_1} \frac{\partial h}{\partial x_1} dx_1 dx_2 \\ &= \int_0^a \left\langle -\frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} - f, h \right\rangle_{H^{-1}(0,b) \times H_0^1(0,b)} dx_1 + \int_0^a \int_0^b \frac{\partial y}{\partial x_1} \frac{\partial h}{\partial x_1} dx_1 dx_2 \quad \forall h \in X_0. \end{aligned}$$

Por tanto, si tomamos $h \in \mathcal{D}((0, a) \times (0, b))$, deducimos que

$$\left\langle -\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} - f, h \right\rangle_{\mathcal{D}'((0,a) \times (0,b)) \times \mathcal{D}((0,a) \times (0,b))} = 0 \quad \forall h \in \mathcal{D}((0, a) \times (0, b))$$

y por tanto,

$$-\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} = f \quad \text{en sentido de distribuciones,}$$

²Recordamos (vease la Definición 63) que $X_0 = \{h \in L^2(0, a; H_0^1(0, b)) \cap H^1(0, a; L^2(0, b)) : h|_{\Gamma_a} = 0\}$.

pero, como $f \in L^2((0, a) \times (0, b))$, deducimos que $y \in Y^{(3)}$

Ahora introducimos el estado adjunto p dado por

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x_1} = -\frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} - f & \text{en } (0, a) \times (0, b) \\ p(0) = 0. \end{cases}$$

Entonces, como $-\frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} - f \in L^2(0, a; H^{-1}(0, b))$, sabemos (vease el Teorema 1.2 del Capítulo III de Lions [40]) que $p \in H^1(0, a; H^{-1}(0, b))$. Además, como $y \in Y$, también deducimos que $\frac{\partial p}{\partial x_1} \in L^2(0, b; H^{-1}(0, a))$ y por tanto, $p \in L^2((0, a) \times (0, b))$.

Ahora, para cada $h \in X_0$ se tiene que

$$\begin{aligned} \int_0^a \left\langle -\frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} - f, h \right\rangle_{H^{-1}(0, b) \times H_0^1(0, b)} dx_1 &= \int_0^a \left\langle \frac{\partial p}{\partial x_1}, h \right\rangle_{H^{-1}(0, b) \times H_0^1(0, b)} dx_1 \\ &= - \int_0^a \int_0^b p \frac{\partial h}{\partial x_1} dx_1 dx_2 \end{aligned}$$

(aquí hemos usado la Proposición 62).

De este modo, por la condición de optimalidad (II.25) deducimos que

$$(II.26) \quad \int_0^a \int_0^b \left(-p + \frac{\partial y}{\partial x_1} \right) \frac{\partial h}{\partial x_1} dx_1 dx_2 = 0 \quad \forall h \in X_0.$$

Entonces (vease, por ejemplo, el Capítulo IX de Brezis [13])

$$-p + \frac{\partial y}{\partial x_1} \in H^1(0, a; L^2(0, b)) \subset \mathcal{C}([0, a]; L^2(0, b))$$

y

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(-p + \frac{\partial y}{\partial x_1} \right) = 0.$$

De este modo, existe $c(x_2) \in L^2(0, b)$ tal que $(-p + \frac{\partial y}{\partial x_1})|_{\Gamma_s} = c(x_2)$ para toda $s \in [0, a]$.

Además, por (II.26), deducimos que

$$\int_0^b c(x_2) h|_{\Gamma_0}(x_2) dx_2 = 0 \quad \forall h \in X_0$$

y por tanto $c(x_2) = 0$. Por tanto hemos obtenido el sistema de optimalidad

$$\begin{cases} -\frac{\partial y}{\partial x_1} = -p & y(a) = y_a \\ \frac{\partial p}{\partial x_1} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - f & p(0) = 0, \end{cases}$$

que tiene el sistema desacoplado (con ecuación de Riccati) asociado (vease la Sección 4 del Capítulo III de Lions [40]) igual al sistema de ecuaciones de Q y w de la Sección 2.2.

³Recordamos (vease la Observación 65) que $Y = \{v \in X_0 : \Delta v \in L^2((0, a) \times (0, b))\}$.

5 Relación entre factorización en el caso continuo y factorización en el caso discreto.

En esta sección consideraremos la discretización con diferencias finitas del Problema (\mathcal{P}_0). Mostraremos que el método de factorización (con la ecuación tipo Riccati de Q y la ecuación de w) aplicado al sistema lineal resultante conduce a una factorización LU por bloques (la definición y más detalles sobre factorizaciones LU de matrices, se pueden ver, por ejemplo, en Ciarlet [14]) de la matriz tridiagonal por bloques que representa el operador de Laplace sobre un dominio rectangular (construiremos esta matriz en la Sección 5.1 pero otros detalles se pueden encontrar en las Secciones 3.1 y 3.2 de Ciarlet [14]).

5.1 Discretización en diferencias finitas del Problema (\mathcal{P}_0).

Suponemos f , y_0 e y_a suficientemente regulares para que $y \in \mathcal{C}^3((0, a) \times (0, b))$ y podamos obtener convergencia de la discretización hacia la solución.

Dado un entero $N > 0$ consideramos el siguiente mallado: Tomamos un mismo paso

$$h = \frac{a}{N + \frac{1}{2}}$$

para las dos coordenadas x_1 , x_2 y definimos los nodos por

$$a_{i,j} = \begin{cases} ((-1/2 + i)h, jh) & \text{si } i \in \{0, \dots, N\} \text{ y } j \in \{0, \dots, p-1\} \\ ((-1/2 + i)h, b) & \text{si } i \in \{0, \dots, N\} \text{ y } j = p \end{cases}$$

(donde p está definido como el máximo entero $p \geq 0$ tal que $(p-1)h < b$). Además, como para todo $j \in \{0, \dots, p\}$ los puntos $a_{0,j}$ están fuera del dominio $(0, a) \times (0, b)$, añadimos los nodos

$$a_{1/2,j} = \begin{cases} (0, jh) & \text{si } j \in \{0, \dots, p-1\} \\ (0, b) & \text{si } j = p \end{cases}$$

(vease la Figura 2).

Ahora, si $i \in \{1, \dots, N-1\}$ y $j \in \{1, \dots, p-1\}$, por la fórmula de Taylor,

$$y(a_{i,j+1}) = y(a_{i,j}) + h \frac{\partial y}{\partial x_2}(a_{i,j}) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2}(a_{i,j}) + \frac{h^3}{6} \frac{\partial^3 y}{\partial x_2^3}(b_{i,j}) \quad b_{i,j} \in [a_{i,j}, a_{i,j+1}],$$

$$y(a_{i,j-1}) = y(a_{i,j}) - h \frac{\partial y}{\partial x_2}(a_{i,j}) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2}(a_{i,j}) - \frac{h^3}{6} \frac{\partial^3 y}{\partial x_2^3}(c_{i,j}) \quad c_{i,j} \in [a_{i,j-1}, a_{i,j}].$$

Además, si $i \in \{2, \dots, N-1\}$ y $j \in \{1, \dots, p-1\}$

$$y(a_{i+1,j}) = y(a_{i,j}) + h \frac{\partial y}{\partial x_1}(a_{i,j}) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2}(a_{i,j}) + \frac{h^3}{6} \frac{\partial^3 y}{\partial x_1^3}(d_{i,j}) \quad d_{i,j} \in [a_{i,j}, a_{i+1,j}],$$

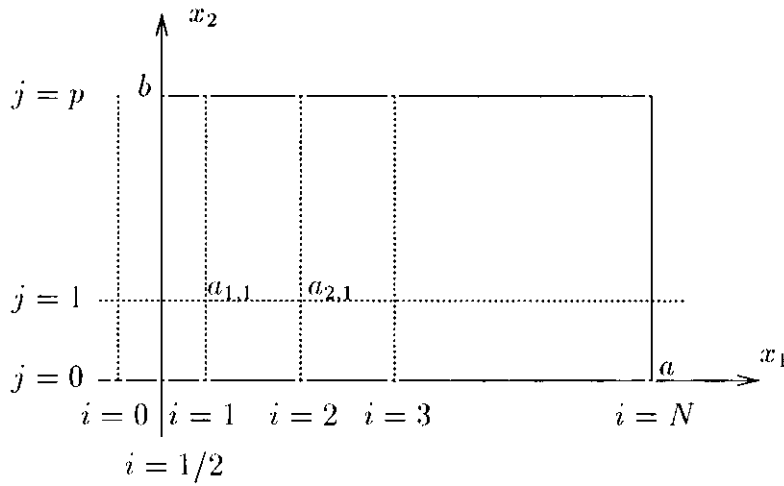


Figura 2: Mallado del dominio.

$$y(a_{i-1,j}) = y(a_{i,j}) - h \frac{\partial y}{\partial x_1}(a_{i,j}) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2}(a_{i,j}) - \frac{h^3}{6} \frac{\partial^3 y}{\partial x_1^3}(a_{i,j}) \quad e_{i,j} \in [a_{i-1,j}, a_{i,j}]$$

y si $i = 1$ y $j \in \{1, \dots, p-1\}$

$$y(a_{2,j}) = y(a_{1,j}) + h \frac{\partial y}{\partial x_1}(a_{1,j}) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2}(a_{1,j}) + \frac{h^3}{6} \frac{\partial^3 y}{\partial x_1^3}(a_{1,j}) \quad d_{1,j} \in [a_{1,j}, a_{2,j}],$$

$$hy_0(a_{1/2,j}) = -h \frac{\partial y}{\partial x_1}(a_{1/2,j}) = -h \frac{\partial y}{\partial x_1}(a_{1,j}) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2}(a_{1,j}) - \frac{h^3}{8} \frac{\partial^3 y}{\partial x_1^3}(a_{1,j}) \quad e_{1,j} \in [a_{1/2,j}, a_{1,j}].$$

De este modo, si $i \in \{2, \dots, N-1\}$ y $j \in \{1, \dots, p-1\}$,

$$-\Delta y(a_{i,j}) = \frac{1}{h^2} (4y(a_{i,j}) - y(a_{i-1,j}) - y(a_{i+1,j}) - y(a_{i,j-1}) - y(a_{i,j+1})) + o(h) = f(a_{i,j})$$

y si $i = 1$ y $j \in \{1, \dots, p-1\}$,

$$-\Delta y(a_{1,j}) = \frac{1}{h^2} (3y(a_{1,j}) - y(a_{2,j}) - y(a_{1,j-1}) - y(a_{1,j+1})) - \frac{1}{h} y_0(a_{1/2,j}) + o(h) = f(a_{1,j}).$$

Señalamos que para el caso $i = N$ y $j \in \{1, \dots, p-1\}$ tenemos que $y(a_{N,j}) = y_a(a_{N,j})$ y que, para el caso $i \in \{1, \dots, p-1\}$ y $j \in \{0, p\}$, $y(a_{i,j}) = 0$.

Usaremos la siguiente notación:

$$y(a_i) = \begin{pmatrix} y(a_{i,1}) \\ \vdots \\ y(a_{i,p-1}) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{p-1}, \quad y(a) = \begin{pmatrix} y(a_1) \\ \vdots \\ y(a_{N-1}) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(N-1)(p-1)},$$

$$\nabla_{h,2}^2 = -\frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & 0 \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & \cdot & \cdot & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{(p-1) \times (p-1)}(\mathbb{R})$$

y

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & 0 \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & & \cdot & \cdot & 0 \\ & & & & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{(p-1) \times (p-1)}(\mathbb{R}).$$

Entonces, si llamamos $B_1 = I - h^2 \nabla_{h,2}^2$ y $B_i = 2I - h^2 \nabla_{h,2}^2$ para $i = 2, \dots, N-1$, tenemos que

$$A_h y(a) = F_h + o(h),$$

donde A_h es la matriz tridiagonal por bloques

$$A_h = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} B_1 & -I & & & \\ -I & B_2 & -I & & 0 \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & & -I & \cdot & -I \\ & & & -I & B_{N-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{(N-1)(p-1) \times (N-1)(p-1)}(\mathbb{R}),$$

F_h es el vector

$$F_h = \begin{pmatrix} F_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ F_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 + \frac{y_0(a_{1/2})}{h} \\ f_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ f_{N-1} + \frac{y_a(a_N)}{h^2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(N-1)(p-1)}$$

con

$$f_i = \begin{pmatrix} f(a_{i,1}) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f(a_{i,p-1}) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{p-1} \quad \forall i \in \{1, \dots, N-1\},$$

$$y_0(a_{1/2}) = \begin{pmatrix} y_0(a_{1/2,1}) \\ \vdots \\ y_0(a_{1/2,p-1}) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{p-1} \quad \text{e} \quad y_a(a_N) = \begin{pmatrix} y_a(a_{N,1}) \\ \vdots \\ y_a(a_{N,p-1}) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{p-1}.$$

Observese que, si $y \in \mathcal{C}^4((0, a) \times (0, b))$ y usamos este hecho al aplicar la fórmula de Taylor, obtenemos que

$$A_h y(a) = F_h + o(h^2)$$

(esto se puede ver, por ejemplo, en la Sección 3.2 de Ciarlet [14]).

Ahora la discretización por diferencias finitas (\mathcal{P}_h) del Problema (\mathcal{P}_0) consiste en encontrar

$$y_h = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(N-1)(p-1)}$$

tal que

$$(\mathcal{P}_h) \quad A_h y_h = F_h.$$

La convergencia de y_h hacia y (por ejemplo, si $y \in \mathcal{C}^4((0, a) \times (0, b))$, para todo $i \in \{1, \dots, N-1\}$ y $j \in \{1, \dots, p-1\}$ se tiene que $\|y_h(a_{i,j}) - y(a_{i,j})\|_\infty = o(h^2)$) se puede ver, por ejemplo, en Collatz [15], Forsythe-Wasow [30], Mikhlin-Smolitsky [48], Ciarlet [14], etc...

5.2 El método de factorización aplicado al sistema lineal (\mathcal{P}_h).

Definimos el vector

$$\xi_{i+1/2} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} \in \mathbb{R}^{p-1} \quad i = 1, \dots, N-1$$

y el vector $\xi_{1/2} = -y_0(a_{1/2})$. De una manera similar a la seguida en la Sección 2.2, para todo $i_0 \in \{1, \dots, N-1\}$ definimos el operador $Q_{i_0} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{p-1}, \mathbb{R}^{p-1})$ por

$$Q_{i_0} \gamma_{i_0} = \frac{\gamma_{i_0+1} - \gamma_{i_0}}{h} \quad \forall \gamma_{i_0} \in \mathbb{R}^{p-1},$$

El vector β lo definimos como la solución de

$$\frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} B_1 & -I & & & \\ -I & B_2 & -I & & 0 \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & \cdot & \cdot & \\ 0 & & & -I & \cdot & -I \\ & & & & -I & B_{i_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta_{i_0-1} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 + \frac{y_0(a_1/2)}{h} \\ f_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ f_{i_0-1} \\ f_{i_0} + \frac{\beta_{i_0+1}}{h^2} \end{pmatrix}$$

para el caso $i_0 \in \{2, \dots, N-1\}$, que es equivalente a

$$\frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} B_1 & -I & & & \\ -I & B_2 & -I & & 0 \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & \cdot & \cdot & -I \\ 0 & & & -I & B_{i_0-1} & 0 \\ & & & & -I & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta_{i_0-1} \\ \gamma_{i_0+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 + \frac{y_0(a_1/2)}{h} \\ f_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ f_{i_0-1} \\ f_{i_0} \end{pmatrix}$$

y como la solución de

$$\frac{1}{h^2} B_1 0 = f_1 + \frac{y_0(a_1/2)}{h} + \frac{\beta_2}{h^2}$$

para el caso $i_0 = 1$, lo cual implica

$$\beta_2 = -h^2 F_1.$$

Señalamos que el vector

$$\gamma + \beta = \begin{pmatrix} \gamma_1 + \beta_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \gamma_{i_0-1} + \beta_{i_0-1} \\ \gamma_{i_0} \\ \gamma_{i_0+1} + \beta_{i_0+1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(i_0+1)(p-1)}$$

es solución de

$$\frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} B_1 & -I & & & \\ -I & B_2 & -I & & 0 \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & \cdot & \cdot & \\ 0 & & & -I & \cdot & -I \\ & & & & -I & B_{i_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 + \beta_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \gamma_{i_0-1} + \beta_{i_0-1} \\ \gamma_{i_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 + \frac{y_0(a_1/2)}{h} \\ f_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ f_{i_0-1} \\ f_{i_0} + \frac{\gamma_{i_0+1} + \beta_{i_0+1}}{h^2} \end{pmatrix}$$

De este modo, tenemos que

$$(II.27) \quad \xi_{i+1/2} = Q_i y_i + w_{i+1/2} \quad \forall i \in \{1, \dots, N-1\}.$$

Ahora, como y_h es solución de (\mathcal{P}_h) , tenemos que

$$-y_{i-1} + 2y_i - h^2 \nabla_{h,2}^2 y_i - y_{i+1} = h^2 f_i \quad \forall i \in \{2, \dots, N-1\},$$

lo que implica que

$$\begin{aligned} -\nabla_{h,2}^2 y_i - f_i &= \frac{\xi_{i+1/2} - \xi_{i-1/2}}{h} \\ &= \frac{1}{h}(Q_i - Q_{i-1})y_i + \frac{1}{h}Q_{i-1}(y_i - y_{i-1}) + \frac{1}{h}(w_{i+1/2} - w_{i-1/2}). \end{aligned}$$

Además,

$$y_i - y_{i-1} = hQ_{i-1}y_{i-1} + hw_{i-1/2}$$

y

$$(I + hQ_{i-1})(y_i - y_{i-1}) = hQ_{i-1}y_i + hw_{i-1/2}.$$

Por tanto

$$(II.28) \quad \begin{aligned} -\nabla_{h,2}^2 y_i - f_i &= \frac{1}{h}(Q_i - Q_{i-1})y_i + Q_{i-1}(I + hQ_{i-1})^{-1}(Q_{i-1}y_i + w_{i-1/2}) \\ &\quad + \frac{1}{h}(w_{i+1/2} - w_{i-1/2}) \end{aligned}$$

para $i \in \{2, \dots, N-1\}$ con y_i "arbitrario". Entonces, por los términos independientes, obtenemos que

$$\begin{cases} \frac{w_{i+1/2} - w_{i-1/2}}{h} = -Q_{i-1}(I + hQ_{i-1})^{-1}w_{i-1/2} - f_i \quad \forall i \in \{2, \dots, N-1\} \\ w_{3/2} = -hF_1 = -h(f_1 + \frac{y_0(a_{1/2})}{h}), \end{cases}$$

que se puede reescribir como

$$L_{i-1}w_{i-1/2} - w_{i+1/2} = hf_i \quad \forall i \in \{2, \dots, N-1\}$$

si definimos $L_i = (I - hQ_i(I + hQ_i)^{-1})$. Además, por los términos de y_i en (II.28) obtenemos que

$$(II.29) \quad \begin{cases} -\frac{Q_i - Q_{i-1}}{h} = Q_{i-1}(I + hQ_{i-1})^{-1}Q_{i-1} + \nabla_{h,2}^2 \quad \forall i \in \{2, \dots, N-1\} \\ Q_1 \equiv h^{-1}(B_1 - I). \end{cases}$$

lo cual es equivalente a

$$\begin{aligned} U_i + L_{i-1} &= 2I - h^2 \nabla_{h,2}^2 + hQ_{i-1} \\ &\quad - hQ_{i-1}(I + hQ_{i-1})^{-1}(I + hQ_{i-1}) \\ &= 2I - h^2 \nabla_{h,2}^2 = B_i. \end{aligned}$$

Finalmente, por (II.29), para el caso $i = 1$ tenemos que

$$U_1 = I + hQ_1 = I + (B_1 - I) = B_1. \quad \blacksquare$$

6 Generalización del dominio (I). Coordenadas conformes.

Queremos generalizar los resultados obtenidos en el rectángulo $((0, a) \times (0, b))$ a otros dominios diferentes.

6.1 Definiciones y resultados previos.

Definición 102 Sea Ω un subconjunto abierto del plano complejo \mathbb{C} . Se dice que una función $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa si existe

$$f'(z) = \lim_{a \rightarrow z} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$$

para todo $z \in \Omega$.

Definición 103 (Aplicación conforme) Sea Ω_1 un subconjunto abierto de \mathbb{R}^2 (podemos identificar \mathbb{R}^2 con el plano complejo) y sea f una función de Ω_1 en el plano complejo. Se dice que f es una aplicación conforme si f es una función holomorfa y $f'(z) \neq 0$ para todo $z \in \Omega_1$ (aquí $z = x_1 + ix_2$ representa un punto del plano complejo y f' representa la derivada compleja de f).

Definición 104 Ω_1 y Ω_2 son conformemente equivalentes si existe una aplicación conforme biyectiva de Ω_1 sobre Ω_2 .

Observación 105 Si f es la aplicación conforme biyectiva mencionada en la Definición 104, entonces (vease, por ejemplo, el Teorema 10.33 de Rudin [52]) f^{-1} es holomorfa en Ω_2 y por tanto es una aplicación conforme de Ω_2 sobre Ω_1 .

Definición 106 Se dice que dos regiones Ω_1 y Ω_2 son fuertemente conformemente equivalentes si existe una aplicación conforme biyectiva f de $\tilde{\Omega}_1$ sobre $\tilde{\Omega}_2$ tal que $f(\Omega_1) = \Omega_2$, donde $\tilde{\Omega}_1$ y $\tilde{\Omega}_2$ son subconjuntos abiertos de \mathbb{R}^2 tales que $\bar{\Omega}_1 \subset \tilde{\Omega}_1$ y $\bar{\Omega}_2 \subset \tilde{\Omega}_2$.

Lema 107 Supongamos que $f(x_1 + ix_2) = \varphi(x_1, x_2) + i\psi(x_1, x_2)$ es una función compleja en Ω con φ y ψ funciones reales diferenciables en Ω . Entonces f es holomorfa en Ω si y solo si se satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$\begin{cases} \varphi_{x_1} = \psi_{x_2} \\ \varphi_{x_2} = -\psi_{x_1} \end{cases}$$

para cada $z = x_1 + ix_2 \in \Omega$ (los subíndices x_1 y x_2 denotan la derivada parcial con respecto x_1 y x_2). Además, si f es holomorfa, entonces φ y ψ son armónicas (es decir, $\Delta\varphi = \Delta\psi = 0$). \square

Demostración: Veanse los Teoremas 11.2 y 11.4 de Rudin [52]. \blacksquare

Observación 108 Obsérvese que las ecuaciones de Cauchy-Riemann implican que φ y ψ son ortogonales en cada punto de Ω .

De este modo, en el resto de esta sección tomaremos Ω fuertemente conformemente equivalente al rectángulo $((0, a) \times (0, b))$. Sea $\varphi(x_1, x_2) + i\psi(x_1, x_2)$ la correspondiente aplicación bilineal conforme entre un conjunto abierto $\tilde{\Omega}_1 \supset \Omega$ y otro conjunto abierto $\tilde{\Omega}_2 \supset ((0, a) \times (0, b))$ y sean A, B, C, D los puntos de $\bar{\Omega}$ dados por

$$\begin{cases} (\varphi(A), \psi(A)) = (0, 0) \\ (\varphi(B), \psi(B)) = (0, b) \\ (\varphi(C), \psi(C)) = (a, b) \\ (\varphi(D), \psi(D)) = (a, 0). \end{cases}$$

Entonces, la aplicación es como en la Figura 3 e identificamos cualquier punto P de Ω por sus nuevas coordenadas $(\varphi(P), \psi(P))$. Veamos un ejemplo de dominio de este tipo.

Ejemplo 109 La función compleja $f(z) = z^2$ es holomorfa en el plano complejo y $f'(z) = 0$ si y solo si $z = 0$. Entonces, como $f(x_1 + ix_2) = (x_1^2 - x_2^2) + i(2x_1x_2)$, podemos tomar como abierto Ω cualquier parte del plano con $(0, 0) \notin \Omega$ definida por

$$\begin{aligned} x_1^2 - x_2^2 &\in (k_1, k_2) \\ 2x_1x_2 &\in (l_1, l_2). \end{aligned}$$

Entonces, si

$$\begin{cases} \varphi(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2 - k_1 \\ \psi(x_1, x_2) = 2x_1x_2 - l_1 \end{cases}$$

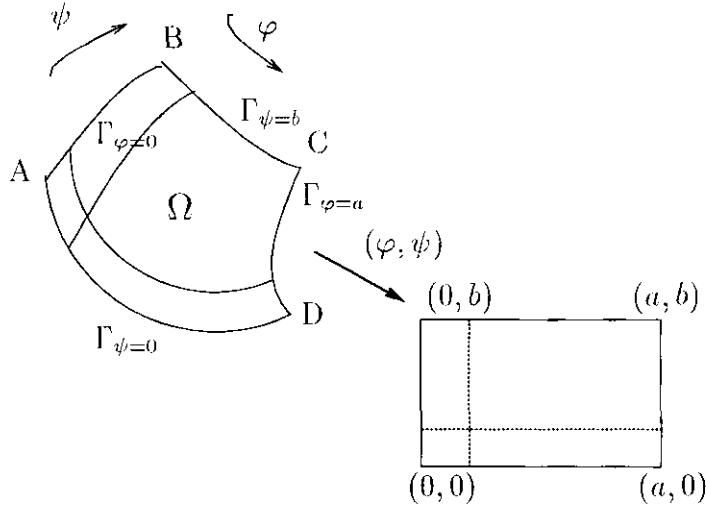


Figura 3: Ω fuertemente conformemente equivalente a $(0, a) \times (0, b)$.

obtenemos que

$$\{(\varphi(x_1, x_2), \psi(x_1, x_2)) : (x_1, x_2) \in \Omega\} = (0, k_2 - k_1) \times (0, l_2 - l_1)$$

(véase la Figura 4).

6.2 Formulación del problema.

De una manera similar a lo hecho con el rectángulo, pero ahora en un dominio del tipo descrito en esta sección queremos factorizar el siguiente problema:

$$(\mathcal{P}_0) \begin{cases} -\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} = f & \text{en } \Omega \\ y|_{\Gamma_{\psi=b} \cup \Gamma_{\psi=0}} = 0 \\ -\frac{\partial y}{\partial \nu}|_{\Gamma_{\varphi=0}} = y_0, \quad y|_{\Gamma_{\varphi=a}} = y_a \end{cases}$$

donde ahora ν representa el vector normal exterior en la frontera, y_a es suficientemente regular (y por tanto lo podremos considerar como cero) e $y_0 \in \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_{\varphi=0})^*$.

Por otra parte, para $i \in \{1, 2\}$ tenemos que

$$\frac{\partial y}{\partial x_i} = \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \frac{\partial y}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial x_i}$$

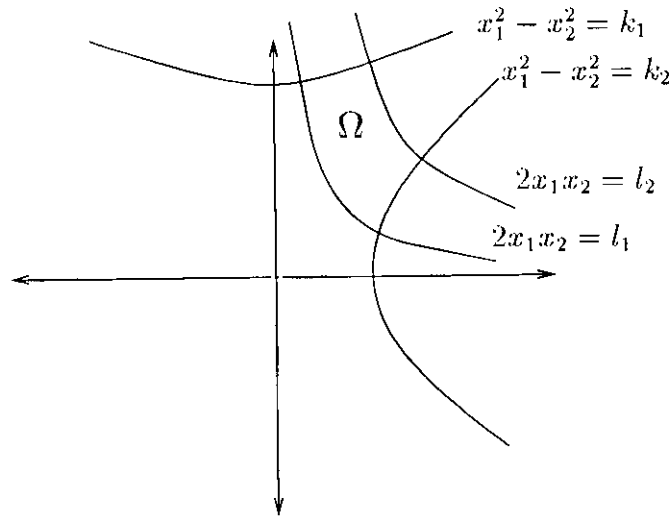


Figura 4: Ω generado por la función holomorfa $f(z) = z^2$ en el plano complejo.

y

$$(II.32) \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial \varphi^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 y}{\partial \varphi \partial \psi} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial \psi^2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right)^2 + \frac{\partial y}{\partial \psi} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i^2}.$$

Además, si

$$\lambda = \pm \sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right)^2}$$

(elegimos el signo $+$ o $-$ para obtener el sentido exterior del vector $\lambda \nabla \varphi$), entonces

$$\frac{\partial y}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma_{\varphi=0}}(x_1, x_2) = \lambda^{-1}(x_1, x_2) \nabla y(x_1, x_2) \cdot \nabla \varphi(x_1, x_2) = \lambda(x_1, x_2) \frac{\partial y}{\partial \varphi}(0, \psi(x_1, x_2)).$$

De este modo si escribimos

$$\frac{\partial y}{\partial \varphi} \Big|_{\Gamma_{\varphi=s}}(x_1, x_2) = \frac{\partial y}{\partial \varphi}(s, \psi(x_1, x_2)) \quad \forall s \in [0, a],$$

(\mathcal{P}_0) es equivalente a

$$\begin{cases} -\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} = f & \text{en } \Omega \\ y|_{\Gamma_{\psi=0} \cup \Gamma_{\psi=a}} = 0, & y|_{\Gamma_{\varphi=a}} = y_a \\ -\frac{\partial y}{\partial \varphi} \Big|_{\Gamma_{\varphi=0}} = \lambda^{-1} y_0. \end{cases}$$

Además, como existe $\delta_1 > \delta_2 > 0$ tal que $\delta_1 > |\lambda(x_1, x_2)| > \delta_2$ para todo $(x_1, x_2) \in \Gamma_{\varphi=s}$, deducimos (vease Grisvard [34], página 21) que las aplicaciones $v \rightarrow \lambda v$ y $v \rightarrow \lambda^{-1}v$ son isomorfismos continuos de $\widetilde{H}^{1/2}(0, b)^*$.

Definición 110 Para cada $s \in [0, a)$ y $h \in \widetilde{H}^{1/2}(0, b)^*$ definimos $P(s)h = \gamma|_{\Gamma_{\varphi=s}}$, donde γ es la solución de

$$\begin{cases} -\frac{\partial^2 \gamma}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x_2^2} = 0 & \text{en } \Omega_s \\ \gamma|_{\Gamma_{\psi=b} \cup \Gamma_{\psi=0}} = 0, \quad \gamma|_{\Gamma_{\varphi=a}} = 0 \\ \frac{\partial \gamma}{\partial \varphi}|_{\Gamma_{\varphi=s}} = h, \end{cases}$$

y Ω_s es el subconjunto de Ω dado por $\varphi \in (s, a)$ y $\psi \in (0, b)$. También definimos $r(s) = \beta|_{\Gamma_{\varphi=s}}$, donde β es la solución de

$$\begin{cases} -\frac{\partial^2 \beta}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \beta}{\partial x_2^2} = f & \text{en } \Omega_s \\ \beta|_{\Gamma_{\psi=b} \cup \Gamma_{\psi=0}} = 0, \quad \beta|_{\Gamma_{\varphi=a}} = 0 \\ \frac{\partial \beta}{\partial \varphi}|_{\Gamma_{\varphi=s}} = 0. \end{cases}$$

Finalmente definimos $P(a) \equiv 0$ y $r(a) = 0$.

Observación 111 Para cada $s \in [0, a]$, el operador $P(s) : \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_{\varphi=s})^* \rightarrow \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_{\varphi=s})$ es lineal y $r(s) \in \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_{\varphi=s})$. Además, la solución y de (\mathcal{P}_0) está caracterizada por

$$(11.33) \quad y|_{\Gamma_{\varphi=s}} = P(s) \frac{\partial y}{\partial \varphi}|_{\Gamma_{\varphi=s}} + r(s).$$

En realidad, $P(s) : \widetilde{H}^{1/2}(0, b)^* \rightarrow \widetilde{H}^{1/2}(0, b)$ y $r(s) \in \widetilde{H}^{1/2}(0, b)$ si utilizamos la coordenada ψ .

6.3 Cálculo formal.

Para buscar las ecuaciones que satisfacen P y r hacemos los siguientes cálculos previos. Usando (11.33) deducimos que

$$\frac{\partial y}{\partial \varphi}|_{\Gamma_{\varphi=s}} = \frac{dP}{d\varphi}(s) \frac{\partial y}{\partial \varphi}|_{\Gamma_{\varphi=s}} + P(s) \frac{\partial^2 y}{\partial \varphi^2}|_{\Gamma_{\varphi=s}} + \frac{\partial r}{\partial \varphi}|_{\Gamma_{\varphi=s}}.$$

Ahora, si

$$\mu = \sqrt{\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\right)^2},$$

pasando a las nuevas coordenadas en la ecuación del problema obtenemos (vease (II.32))

$$\begin{aligned} -f &= \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} = \lambda^2 \frac{\partial^2 y}{\partial \varphi^2} + \mu^2 \frac{\partial^2 y}{\partial \psi^2} \\ &+ 2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \right) \frac{\partial^2 y}{\partial \varphi \partial \psi} + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} \right) \frac{\partial y}{\partial \varphi} + \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} \right) \frac{\partial y}{\partial \psi}. \end{aligned}$$

De este modo, usando el Lema 107, se tiene que

$$\begin{cases} -\lambda^2 \frac{\partial^2 y}{\partial \varphi^2} - \mu^2 \frac{\partial^2 y}{\partial \psi^2} = f & \text{en } (0, a) \times (0, b) \\ y|_{\Gamma_{\psi=b} \cup \Gamma_{\psi=0}} = 0, \quad y|_{\Gamma_{\varphi=a}} = 0 \\ -\frac{\partial y}{\partial \varphi} |_{\Gamma_{\varphi=s}} = \lambda^{-1} y_0. \end{cases}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial \varphi} |_{\Gamma_{\varphi=s}} &= \frac{dP}{d\varphi}(s) \frac{\partial y}{\partial \varphi} |_{\Gamma_{\varphi=s}} - P(s) \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} P(s) \frac{\partial y}{\partial \varphi} |_{\Gamma_{\varphi=s}} - P(s) \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} r(s) \\ &\quad - P(s) \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 f |_{\Gamma_{\varphi=s}} + \frac{\partial r}{\partial \varphi} |_{\Gamma_{\varphi=s}} \end{aligned}$$

y, como y es arbitrario, obtenemos la ecuación de tipo Riccati para P

$$\begin{cases} \frac{dP}{d\varphi} - P \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} P - I = 0 \\ P(a) = 0 \end{cases}$$

y la ecuación para r

$$\begin{cases} \frac{\partial r}{\partial \varphi} - P \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^2 \frac{\partial^2 r}{\partial \psi^2} - P \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 f = 0 \\ r(a) = 0. \end{cases}$$

Además, si y es la solución de (\mathcal{P}_0) (con $y_a = 0$), entonces $\xi = \frac{\partial y}{\partial \varphi}$ es solución de

$$\begin{cases} \frac{\partial \xi}{\partial \varphi} + \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} P \xi = -\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 f - \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^2 \frac{\partial^2 r}{\partial \psi^2} & \text{en } (0, a) \times (0, b) \\ \xi(0) = -\lambda^{-1} y_0. \end{cases}$$

Como conclusión podemos exponer el siguiente resultado:

Teorema 112 *La solución del problema (\mathcal{P}_0) está determinada por el sistema desacoplado*

$$\begin{cases} \frac{dP}{d\varphi} - P\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} P - I = 0 & P(a) = 0 \\ \frac{\partial r}{\partial \varphi} - P\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^2 \frac{\partial^2 r}{\partial \psi^2} = P\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 f & r(a) = 0 \\ \frac{\partial \xi}{\partial \varphi} + \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} P\xi = -\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 f - \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^2 \frac{\partial^2 r}{\partial \psi^2} & \xi(0) = -\lambda^{-1} y_0 \end{cases}$$

mediante

$$y|_{\Gamma_{\varphi=s}} = P(s)\xi|_{\Gamma_{\varphi=s}} + r(s). \quad \square$$

7 Generalización del dominio (II). Coordenadas ortogonales.

En la Sección 6 hemos generalizado el tipo de dominio a través de unas coordenadas muy restrictivas (vease las condiciones que estas coordenadas deben cumplir en el Lema 107). En esta sección introduciremos unas coordenadas menos restrictivas, lo cual es mejor desde el punto de vista del dominio pero generará unas ecuaciones para P y r un poco más complicadas.

7.1 Hipótesis sobre el dominio.

Usaremos coordenadas $\varphi(x_1, x_2)$ y $\psi(x_1, x_2)$ de clase \mathcal{C}^2 definidas sobre un conjunto abierto $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^2$ y con conjuntos de nivel ortogonales, es decir,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \frac{\partial \psi}{\partial x_2} = 0,$$

y con gradientes distintos de cero.

En el resto de la sección consideraremos dominios Ω definidos a través de los conjuntos de nivel de φ y de ψ tales que $\bar{\Omega} \subset \tilde{\Omega}$. Es decir, consideraremos el conjunto Ω del plano definido por $\varphi(x_1, x_2) \in (0, a)$ y $\psi(x_1, x_2) \in (0, b)$ (si se cumple que $\bar{\Omega} \subset \tilde{\Omega}$). Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 113 1) **Coordenadas Esféricas.** *Tomamos las coordenadas cilíndricas dadas por*

$$\begin{aligned} x_1 &= r \cos \theta \\ x_2 &= r \sin \theta \end{aligned}$$

y Ω la parte del plano con coordenadas esféricas $r \in (k_1, k_2)$ ($k_1 > 0$) y $\theta \in (l_1, l_2)$ ($l_2 - l_1 < 2\pi$). Entonces,

$$\begin{cases} \varphi(x_1, x_2) = r(x_1, x_2) - k_1 \\ \psi(x_1, x_2) = \theta(x_1, x_2) - l_1 \end{cases}$$

(vease la Figura 5).

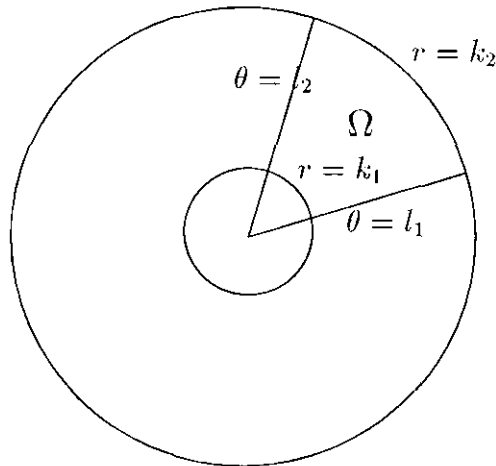


Figura 5: Coordenadas Esféricas.

2) **Coordenadas Elípticas.** Dada una constante $c > 0$ arbitraria, tomamos las coordenadas elípticas dadas por

$$\begin{aligned} x_1 &= c \cosh \alpha \cos \beta \\ x_2 &= c \sinh \alpha \sin \beta. \end{aligned}$$

Con estas coordenadas se cumple que

$$\frac{x_1^2}{c^2 \cosh^2 \alpha} + \frac{x_2^2}{c^2 \sinh^2 \alpha} = 1$$

por lo que $\alpha = \alpha_0$ se corresponde con una elipse con semiejes $c \cosh \alpha_0$ y $c \sinh \alpha_0$. La distancia entre los focos es $2c$. Por otro lado, se cumple que

$$\frac{x_1^2}{c^2 \cos^2 \beta} - \frac{x_2^2}{c^2 \sin^2 \beta} = 1$$

por lo que $\beta = \beta_0$ se corresponde con dos hipérbolas con focos en $x = \pm c$. De este modo, las curvas $\alpha = \text{constante}$ y $\beta = \text{constante}$ son elipses e hipérbolas confocales.

Ahora, tomamos el conjunto Ω con coordenadas elípticas $\alpha \in (k_1, k_2)$ y $\beta \in (l_1, l_2)$ ($l_2 - l_1 < 2\pi$). Entonces,

$$\begin{cases} \varphi(x_1, x_2) = \alpha(x_1, x_2) - k_1 \\ \psi(x_1, x_2) = \beta(x_1, x_2) - l_1 \end{cases}$$

(vease la Figura 6).

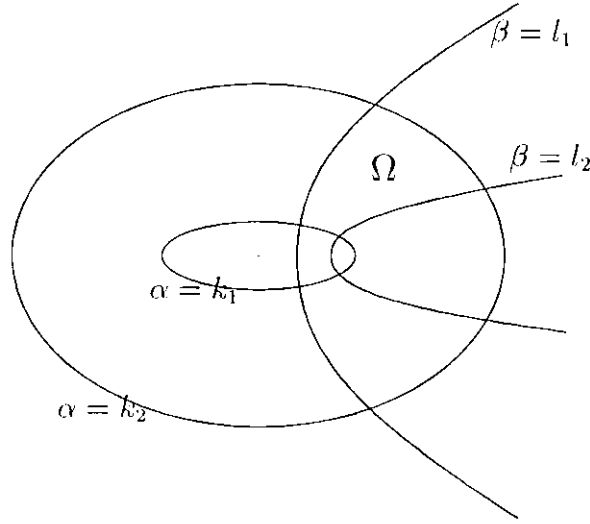


Figura 6: Coordenadas elípticas.

7.2 Cálculo Formal.

Ahora, bajo estas hipótesis, el contenido de la Sección 6.2 sigue siendo válido y obtenemos de nuevo (II.33). Además, si $\delta = \Delta\varphi$ y $\eta = \Delta\psi$, el problema en las nuevas coordenadas es

$$(\mathcal{P}_0^*) \begin{cases} -\lambda^2 \frac{\partial^2 y}{\partial \varphi^2} - \mu^2 \frac{\partial^2 y}{\partial \psi^2} - \delta \frac{\partial y}{\partial \varphi} - \eta \frac{\partial y}{\partial \psi} = f & \text{en } (0, a) \times (0, b) \\ y|_{\Gamma_{\psi=b} \cup \Gamma_{\psi=0}} = 0, \quad y|_{\Gamma_{\varphi=a}} = 0 \\ -\frac{\partial y}{\partial \varphi}|_{\Gamma_{\varphi=s}} = \lambda^{-1} y_0. \end{cases}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial \varphi}|_{\Gamma_{\varphi=s}} &= \frac{dP}{d\varphi}(s) \frac{\partial y}{\partial \varphi}|_{\Gamma_{\varphi=s}} - P(s) \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} P(s) \frac{\partial y}{\partial \varphi}|_{\Gamma_{\varphi=s}} - P(s) \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} r(s) \\ &\quad - P(s) \left(\frac{\delta}{\lambda^2}\right) \frac{\partial y}{\partial \varphi}|_{\Gamma_{\varphi=s}} - P(s) \left(\frac{\eta}{\lambda^2}\right) \frac{\partial}{\partial \psi} P(s) \frac{\partial y}{\partial \varphi}|_{\Gamma_{\varphi=s}} - P(s) \left(\frac{\eta}{\lambda^2}\right) \frac{\partial r}{\partial \psi} \\ &\quad - P(s) \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 f|_{\Gamma_{\varphi=s}} + \frac{\partial r}{\partial \varphi}|_{\Gamma_{\varphi=s}} \end{aligned}$$

y, como y es arbitrario, obtenemos la ecuación tipo Riccati para P

$$\begin{cases} \frac{dP}{d\varphi} - P\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} P - P\left(\frac{\delta}{\lambda^2}\right)I - P\left(\frac{\eta}{\lambda^2}\right) \frac{\partial}{\partial \psi} P - I = 0 \\ P(a) = 0 \end{cases}$$

y la ecuación para r

$$\begin{cases} \frac{\partial r}{\partial \varphi} - P\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^2 \frac{\partial^2 r}{\partial \psi^2} - P\left(\frac{\eta}{\lambda^2}\right) \frac{\partial r}{\partial \psi} - P\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 f = 0 \\ r(a) = 0. \end{cases}$$

Además, si y es solución de (\mathcal{P}_0) (con $y_a = 0$), entonces $\xi = \frac{\partial y}{\partial \varphi}$ es solución de

$$\begin{cases} \frac{\partial \xi}{\partial \varphi} + \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} P\xi + \left(\frac{\eta}{\lambda^2}\right) \frac{\partial}{\partial \psi} P\xi + \left(\frac{\delta}{\lambda^2}\right)\xi = -\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 f - \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^2 \frac{\partial^2 r}{\partial \psi^2} - \left(\frac{\eta}{\lambda^2}\right) \frac{\partial r}{\partial \psi} \\ \xi(0) = -\lambda^{-1} y_0. \end{cases}$$

Como conclusion exponemos el siguiente resultado:

Teorema 114 *La solución del Problema (\mathcal{P}_0) está determinada por el sistema desacoplado*

$$\begin{cases} \frac{dP}{d\varphi} - P\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} P - P\left(\frac{\delta}{\lambda^2}\right)I - P\left(\frac{\eta}{\lambda^2}\right) \frac{\partial}{\partial \psi} P - I = 0 \\ P(a) = 0 \\ \frac{\partial r}{\partial \varphi} - P\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^2 \frac{\partial^2 r}{\partial \psi^2} - P\left(\frac{\eta}{\lambda^2}\right) \frac{\partial r}{\partial \psi} = P\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 f \\ r(a) = 0 \\ \frac{\partial \xi}{\partial \varphi} + \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} P\xi + \left(\frac{\eta}{\lambda^2}\right) \frac{\partial}{\partial \psi} P\xi + \left(\frac{\delta}{\lambda^2}\right)\xi = -\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 f - \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^2 \frac{\partial^2 r}{\partial \psi^2} - \left(\frac{\eta}{\lambda^2}\right) \frac{\partial r}{\partial \psi} \\ \xi(0) = -\lambda^{-1} y_0 \end{cases}$$

mediante

$$y|_{\Gamma_{\varphi=s}} = P(s)\xi|_{\Gamma_{\varphi=s}} + r(s). \quad \square$$

7.3 Una formulación alternativa.

Reescribimos el Problema (\mathcal{P}_0^*) como

$$\left\{ \begin{array}{l} -\lambda\mu \left(\frac{\partial}{\partial\varphi} \left(\left(\frac{\lambda}{\mu} \right) \frac{\partial y}{\partial\varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial\psi} \left(\left(\frac{\mu}{\lambda} \right) \frac{\partial y}{\partial\psi} \right) \right) = f \quad \text{en } (0, a) \times (0, b) \\ y|_{\Gamma_{\psi=b} \cup \Gamma_{\psi=0}} = 0, \quad y|_{\Gamma_{\varphi=a}} = 0 \\ -\frac{\partial y}{\partial\varphi} |_{\Gamma_{\varphi=s}} = \lambda^{-1} y_0 \end{array} \right.$$

(vease, por ejemplo, Malvern [47], página 654) y el Problema (\mathcal{P}_0) como

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} = f \quad \text{en } \Omega \\ y|_{\Gamma_{\psi=b} \cup \Gamma_{\psi=0}} = 0 \\ -\left(\frac{\lambda}{\mu} \right) \frac{\partial y}{\partial\varphi} |_{\Gamma_{\varphi=0}} = \mu^{-1} y_0, \quad y|_{\Gamma_{\varphi=a}} = y_a. \end{array} \right.$$

Como existen $\delta_1 > \delta_2 > 0$ tales que $\delta_1 > \mu(x_1, x_2) > \delta_2$ para todo $(x_1, x_2) \in \Gamma_{\varphi=s}$, deducimos (vease Grisvard [34], página 21) que las aplicaciones $v \rightarrow \mu v$ y $v \rightarrow \mu^{-1} v$ son isomorfismos continuos de $\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_{\varphi=s})^*$.

Definición 115 Para cada $s \in [0, a)$ y $h \in \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_{\varphi=s})^*$ definimos $P(s)h = \gamma|_{\Gamma_{\varphi=s}}$, donde γ es la solución de

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial^2 \gamma}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x_2^2} = 0 \quad \text{en } \Omega_s \\ \gamma|_{\Gamma_{\psi=b} \cup \Gamma_{\psi=0}} = 0, \quad \gamma|_{\Gamma_{\varphi=a}} = 0 \\ \left(\frac{\lambda}{\mu} \right) \frac{\partial \gamma}{\partial\varphi} |_{\Gamma_{\varphi=s}} = h, \end{array} \right.$$

y Ω_s es el subconjunto abierto de Ω dado por $\varphi \in (s, a)$ y $\psi \in (0, b)$. También definimos $r(s) = \beta|_{\Gamma_{\varphi=s}}$, donde β es la solución de

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial^2 \beta}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \beta}{\partial x_2^2} = f \quad \text{en } \Omega_s \\ \beta|_{\Gamma_{\psi=b} \cup \Gamma_{\psi=0}} = 0, \quad \beta|_{\Gamma_{\varphi=a}} = 0 \\ \left(\frac{\lambda}{\mu} \right) \frac{\partial \beta}{\partial\varphi} |_{\Gamma_{\varphi=s}} = 0. \end{array} \right.$$

Finalmente definimos $P(a) \equiv 0$ y $r(a) = 0$.

Observación 116 Para cada $s \in [0, a]$, $P(s) : \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_{\varphi=s})^* \rightarrow \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_{\varphi=s})$ es un operador lineal y $r(s) \in \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_{\varphi=s})$. Además, la solución y de (\mathcal{P}_0) está caracterizada por

$$(II.34) \quad y|_{\Gamma_{\varphi=s}} = P(s) \left(\frac{\lambda}{\mu} \right) \frac{\partial y}{\partial \varphi} |_{\Gamma_{\varphi=s}} + r(s).$$

En realidad, $P(s) : \widetilde{H}^{1/2}(0, b)^* \rightarrow \widetilde{H}^{1/2}(0, b)$ y $r(s) \in \widetilde{H}^{1/2}(0, b)$ si utilizamos la coordenada ψ .

De este modo, mediante cálculo formal, obtenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial \varphi} |_{\Gamma_{\varphi=s}} &= \frac{dP}{d\varphi}(s) \left(\frac{\lambda}{\mu} \right) \frac{\partial y}{\partial \varphi} |_{\Gamma_{\varphi=s}} + P(s) \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\left(\frac{\lambda}{\mu} \right) \frac{\partial y}{\partial \varphi} |_{\Gamma_{\varphi=s}} \right) + \frac{\partial r}{\partial \varphi} |_{\Gamma_{\varphi=s}} \\ &= \frac{dP}{d\varphi}(s) \left(\frac{\lambda}{\mu} \right) \frac{\partial y}{\partial \varphi} |_{\Gamma_{\varphi=s}} - P(s) \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\left(\frac{\mu}{\lambda} \right) \frac{\partial y}{\partial \psi} |_{\Gamma_{\varphi=s}} \right) - P \left(\frac{1}{\lambda \mu} f \right) |_{\Gamma_{\varphi=s}} + \frac{\partial r}{\partial \varphi} |_{\Gamma_{\varphi=s}}. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial \varphi} |_{\Gamma_{\varphi=s}} &= \frac{dP}{d\varphi}(s) \left(\frac{\lambda}{\mu} \right) \frac{\partial y}{\partial \varphi} |_{\Gamma_{\varphi=s}} - P(s) \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{\mu}{\lambda} \right) \frac{\partial}{\partial \psi} P(s) \left(\frac{\lambda}{\mu} \right) \frac{\partial y}{\partial \varphi} |_{\Gamma_{\varphi=s}} \\ &\quad - P(s) \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{\mu}{\lambda} \right) \frac{\partial r}{\partial \psi} - P \left(\frac{1}{\lambda \mu} f \right) |_{\Gamma_{\varphi=s}} + \frac{\partial r}{\partial \varphi} |_{\Gamma_{\varphi=s}} \end{aligned}$$

y, como y es arbitrario, obtenemos la ecuación tipo Riccati para P

$$\begin{cases} \frac{dP}{d\varphi} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right) I - P \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{\mu}{\lambda} \right) \frac{\partial}{\partial \psi} P \left(\frac{\lambda}{\mu} \right) I - I = 0 \\ P(a) = 0 \end{cases}$$

y la ecuación para r

$$\begin{cases} \frac{\partial r}{\partial \varphi} - P \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{\mu}{\lambda} \right) \frac{\partial r}{\partial \psi} - P \left(\frac{1}{\lambda \mu} f \right) = 0 \\ r(a) = 0. \end{cases}$$

Además, si y es solución de (\mathcal{P}_0) (con $y_a = 0$), entonces $\xi = \frac{\partial y}{\partial \varphi}$ es solución de

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\left(\frac{\lambda}{\mu} \right) \xi \right) + \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\left(\frac{\mu}{\lambda} \right) \frac{\partial}{\partial \psi} P \left(\frac{\lambda}{\mu} \right) \xi \right) = - \left(\frac{1}{\lambda \mu} \right) f - \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\left(\frac{\mu}{\lambda} \right) \frac{\partial r}{\partial \psi} \right) \quad \text{en } (0, a) \times (0, b) \\ \xi(0) = -\lambda^{-1} y_0. \end{cases}$$

Como conclusión podemos exponer el siguiente resultado:

Teorema 117 La solución del Problema (\mathcal{P}_0) está determinada por el sistema desacoplado

$$\begin{cases} \frac{dP}{d\varphi} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) I - P \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{\mu}{\lambda}\right) \frac{\partial}{\partial \psi} P \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) I - I = 0 & P(a) = 0 \\ \frac{\partial r}{\partial \varphi} - P \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{\mu}{\lambda}\right) \frac{\partial r}{\partial \psi} = P \left(\frac{1}{\lambda \mu}\right) f & r(a) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) \xi\right) + \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\left(\frac{\mu}{\lambda}\right) \frac{\partial}{\partial \psi} P \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) \xi\right) = -\left(\frac{1}{\lambda \mu}\right) f - \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\left(\frac{\mu}{\lambda}\right) \frac{\partial r}{\partial \psi}\right) & \xi(0) = -\lambda^{-1} y_0 \end{cases}$$

mediante

$$y|_{\Gamma_{\varphi=s}} = P(s) \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) \xi|_{\Gamma_{\varphi=s}} + r(s). \quad \square$$

8 Generalización del dominio (III). Coordenadas no ortogonales.

En las secciones anteriores habíamos tratado solo los casos de dominios con “esquinas” ortogonales. En esta sección extendaremos este tipo de dominios a dominios con “esquinas” no ortogonales.

8.1 Hipótesis sobre el dominio.

Usaremos coordenadas φ y ψ de clase \mathcal{C}^2 definidas sobre un conjunto abierto $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^2$ tal que:

- $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x_1, x_2), \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(x_1, x_2)\right)$ y $\left(\frac{\partial \psi}{\partial x_1}(x_1, x_2), \frac{\partial \psi}{\partial x_2}(x_1, x_2)\right)$ son distintos de $(0, 0)$ para todo $(x_1, x_2) \in \tilde{\Omega}$.
- No existe ningún punto $(x_1, x_2) \in \tilde{\Omega}$ tal que el vector $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x_1, x_2), \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(x_1, x_2)\right)$ es paralelo al vector $\left(\frac{\partial \psi}{\partial x_1}(x_1, x_2), \frac{\partial \psi}{\partial x_2}(x_1, x_2)\right)$.

En el resto de esta sección consideraremos dominios Ω generados por los conjuntos de nivel de φ y de ψ . Por ejemplo, podemos considerar el conjunto Ω del plano, definido por $\varphi \in (0, a)$ y $\psi \in (0, b)$ (si $\bar{\Omega} \subset \tilde{\Omega}$).

Ejemplo 118 Tomamos las funciones (de tipo \mathcal{C}^2) $\alpha(x_1, x_2) = x_1 x_2$ y $\beta(x_1, x_2) = x - y$. Tomamos también el conjunto Ω del plano tal que $\alpha \in (k_1, k_2)$ y $\beta \in (l_1, l_2)$. Entonces

podemos tomar como coordenadas

$$\begin{cases} \varphi(x_1, x_2) = \alpha(x_1, x_2) - k_1 \\ \psi(x_1, x_2) = \beta(x_1, x_2) - l_1 \end{cases}$$

(vease la Figura 7).

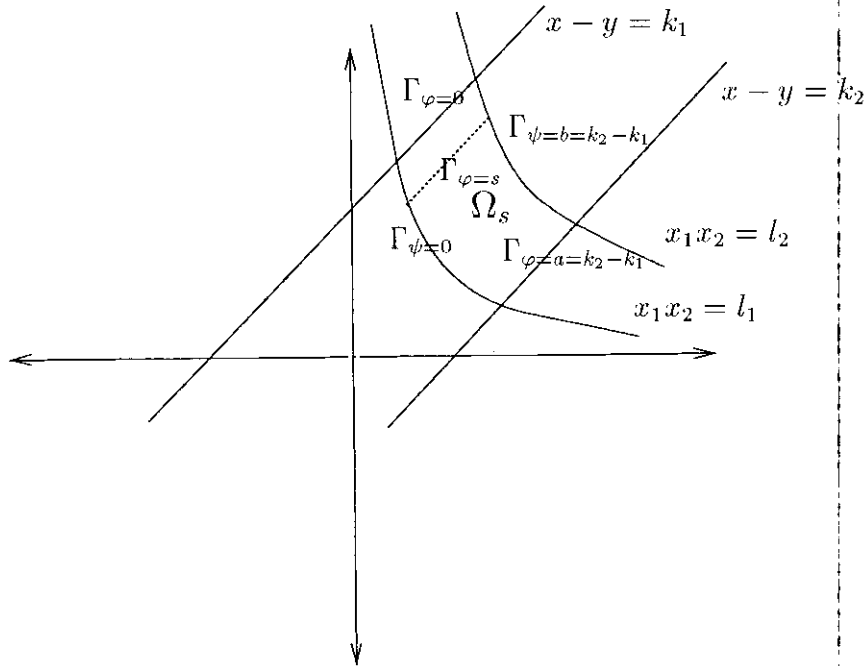


Figura 7: Dominio generado por coordenadas no ortogonales.

8.2 Cálculo formal.

Ahora, bajo estas hipótesis, el contenido de la sección 6.2 sigue siendo válido y obtenemos de nuevo (II.33). Además, si $\delta = \Delta\varphi$, $\eta = \Delta\psi$ y $\rho = 2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\frac{\partial\psi}{\partial x_1} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\right)$, el problema en las nuevas coordenadas es

$$(\mathcal{P}_0^*) \begin{cases} -\lambda^2 \frac{\partial^2 y}{\partial \varphi^2} - \mu^2 \frac{\partial^2 y}{\partial \psi^2} - \rho \frac{\partial^2 y}{\partial \varphi \partial \psi} - \delta \frac{\partial y}{\partial \varphi} - \eta \frac{\partial y}{\partial \psi} = f \text{ en } (0, a) \times (0, b) \\ y|_{\Gamma_{\psi=b} \cup \Gamma_{\psi=0}} = 0, \quad y|_{\Gamma_{\varphi=a}} = 0 \\ -\frac{\partial y}{\partial \varphi} |_{\Gamma_{\varphi=s}} = \lambda^{-1} y_0. \end{cases}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial \varphi} |_{\Gamma_{\varphi=s}} &= \frac{dP}{d\varphi}(s) \frac{\partial y}{\partial \varphi} |_{\Gamma_{\varphi=s}} - P(s) \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} P(s) \frac{\partial y}{\partial \varphi} |_{\Gamma_{\varphi=s}} - P(s) \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} r(s) \\ &\quad - P(s) \left(\frac{\rho}{\lambda^2}\right) \frac{\partial}{\partial \psi} \frac{\partial y}{\partial \varphi} |_{\Gamma_{\varphi=s}} - P(s) \left(\frac{\delta}{\lambda^2}\right) \frac{\partial y}{\partial \varphi} |_{\Gamma_{\varphi=s}} - P(s) \left(\frac{\eta}{\lambda^2}\right) \frac{\partial}{\partial \psi} P(s) \frac{\partial y}{\partial \varphi} |_{\Gamma_{\varphi=s}} - P(s) \left(\frac{\eta}{\lambda^2}\right) \frac{\partial r}{\partial \psi} \\ &\quad - P(s) \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 f |_{\Gamma_{\varphi=s}} + \frac{\partial r}{\partial \varphi} |_{\Gamma_{\varphi=s}} \end{aligned}$$

y, como y es arbitrario, obtenemos la ecuación de tipo Riccati para P

$$\begin{cases} \frac{dP}{d\varphi} - P \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} P - P \left(\frac{\rho}{\lambda^2}\right) \frac{\partial}{\partial \psi} - P \left(\frac{\delta}{\lambda^2}\right) I - P \left(\frac{\eta}{\lambda^2}\right) \frac{\partial}{\partial \psi} P - I = 0 \\ P(a) = 0 \end{cases}$$

y la ecuación para r

$$\begin{cases} \frac{\partial r}{\partial \varphi} - P \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^2 \frac{\partial^2 r}{\partial \psi^2} - P \left(\frac{\eta}{\lambda^2}\right) \frac{\partial r}{\partial \varphi} - P \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 f = 0 \\ r(a) = 0. \end{cases}$$

Además, si y es la solución de (\mathcal{P}_0) (con $y_a = 0$), entonces $\xi = \frac{\partial y}{\partial \varphi}$ es solución de

$$\begin{cases} \frac{\partial \xi}{\partial \varphi} + \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} P \xi + \left(\frac{\rho}{\lambda^2}\right) \frac{\partial \xi}{\partial \psi} + \left(\frac{\eta}{\lambda^2}\right) \frac{\partial}{\partial \psi} P \xi + \left(\frac{\delta}{\lambda^2}\right) \xi = -\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 f - \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^2 \frac{\partial^2 r}{\partial \psi^2} - \left(\frac{\eta}{\lambda^2}\right) \frac{\partial r}{\partial \psi} \\ \xi(0) = -\lambda^{-1} y_0. \end{cases}$$

Como conclusión podemos exponer el siguiente resultado:

Teorema 119 La solución del Problema (\mathcal{P}_0) está determinada por el sistema desacoplado

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dP}{d\varphi} - P\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} P - P\left(\frac{\rho}{\lambda^2}\right) \frac{\partial}{\partial \psi} - P\left(\frac{\delta}{\lambda^2}\right) I - P\left(\frac{\eta}{\lambda^2}\right) \frac{\partial}{\partial \psi} P - I = 0 \\ \\ P(a) = 0 \\ \\ \frac{\partial r}{\partial \varphi} - P\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^2 \frac{\partial^2 r}{\partial \psi^2} - P\left(\frac{\eta}{\lambda^2}\right) \frac{\partial r}{\partial \psi} = P\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 f \\ \\ r(a) = 0 \\ \\ \frac{\partial \xi}{\partial \varphi} + \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} P\xi + \left(\frac{\rho}{\lambda^2}\right) \frac{\partial \xi}{\partial \psi} + \left(\frac{\eta}{\lambda^2}\right) \frac{\partial}{\partial \psi} P\xi + \left(\frac{\delta}{\lambda^2}\right) \xi = -\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 f - \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^2 \frac{\partial^2 r}{\partial \psi^2} - \left(\frac{\eta}{\lambda^2}\right) \frac{\partial r}{\partial \psi} \\ \\ \xi(0) = -\lambda^{-1} y_0 \end{array} \right.$$

mediante

$$y|_{\Gamma_{\varphi=s}} = P(s)\xi|_{\Gamma_{\varphi=s}} + r(s). \quad \square$$

Bibliografía

- [1] **Aris,R.:** *The Mathematical Theory of Diffusion and Reaction in Permeable Catalysts*. Clarendon Press, Oxford, 1975.
- [2] **Aubin,J.P.:** *L'analyse non linéaire et ses motivations économiques*. Masson, 1984.
- [3] **Aubin,J.P.-Ekeland,I.:** *Applied nonlinear Analysis*. Wiley-Interscience publication, 1984.
- [4] **Balakrishnan,A.V.-Lions,J.L.:** State Estimation for Infinite Dimensional Systems. *Journal of Computer and System Sciences*. Vol. 1, pp. 391-403. 1967.
- [5] **Barbu,V.:** *Nonlinear semigroups and differential equations in Banach spaces*. Noordhoff, 1976.
- [6] **Bellman,R.:** *Dynamic Programming*. Princeton University Press, 1957.
- [7] **Bellman,R.-Dreyfus,S.:** *Applied Dynamic programming*. Princeton University Press, 1962.
- [8] **Bellman,R.-Kalaba,R.-Wing,G.M.:** Invariant Imbedding and Mathematical Physics. I: Particle Processes. *J. Math. Phys.* Vol. 1, pp. 280-308. 1960.
- [9] **Benilan,Ph.:** Operateurs accretifs et semi-groupes dans les espaces L^p ($1 \leq p \leq \infty$). *Functional Analysis and Numerical Analysis*. H. Fujita, ed. Japan Society for the Promotion of Science, pp. 15-53. 1978.
- [10] **Bensoussan,A.:** Sur l'identification et le filtrage de systèmes gouvernés par des équations différentielles opérationnelles. *Cahiers IRIA*. Vol. 1, 1969.
- [11] **Bernis,F.:** Elliptic and Parabolic Semilinear Problems without Conditions at Infinity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, Volume 106, Number 3, pp. 217-241. 1989.

- [12] **Brézis, H.:** *Operateurs Maximaux Monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert.* North-Holland, 1973.
- [13] **Brézis, H.:** *Analyse Fonctionnelle: Théorie et applications.* Masson 1987.
- [14] **Ciarlet, P.G.:** *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation.* Masson, 1988.
- [15] **Collatz, L.:** *The Numerical Treatment of Differential Equations.* Springer-Verlag, Berlin, 1960.
- [16] **Díaz, J.I.:** Anulación de soluciones para operadores acretivos en espacios de Banach. *Rev. Real Acad. Ciencias, Madrid, LXXIV*, pp. 865-880. 1980.
- [17] **Díaz, J.I.:** Propiedades cualitativas de ciertos problemas parabólicos no lineales: Una clasificación para los modelos de difusión del calor. *Memoria de la Real Academia de Ciencias, Madrid, Tomo XIV.* 1980.
- [18] **Díaz, J.I.:** Sobre la controlabilidad aproximada de problemas no lineales disipativos. Actas de las "Jornadas Hispano-Francesas sobre Control de Sistemas Distribuidos". Universidad de Malaga, pp. 41-48. 1990.
- [19] **Díaz, J.I.:** Simetrización de problemas parabólicos no lineales: Aplicación a ecuaciones de reacción-difusión. *Memoria de la Real Academia de Ciencias de Madrid, Tomo XXVIII.* 1991.
- [20] **Díaz, J.I.:** Sur la contrôlabilité approchée des inéquations variationnelles et d'autres problèmes paraboliques non linéaires. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 312, serie I, pp. 519-522. 1991
- [21] **Díaz, J.I.:** Approximate controllability for some nonlinear parabolic problems. *Proceedings of the 16th IFIP-TC7 conference on "System Modelling and Optimization"*, Compiègne (France). Lecture Notes in Control and Information Sciences. Springer-Verlag, 1993.
- [22] **Díaz, J.I.:** Mathematical analysis of some diffusive energy balance models in Climatology. En *Mathematics, Climate and Environment.* Eds: J.I. Díaz y J.L. Lions. pp. 28-56, Masson, 1993.
- [23] **Díaz, J.I.:** Controllability and Obstruction for some nonlinear parabolic problems in Climatology. En *Modelado de Sistemas en Oceanografía, Climatología y Ciencias*

- Mediambientales: aspectos matemáticos y numéricos*". Eds. A.Valle y C. Pares, pp. 43-57. Málaga, 1994.
- [24] **Díaz,J.I.:** On the controllability of some simple climate models. En *Environment, Economics and their Mathematical Models*. Eds: J.I. Díaz and J.L. Lions. Masson, pp. 29-44. 1994.
- [25] **Díaz,J.I.-Fursikov,A.V.:** A simple proof of the controllability from the interior for nonlinear parabolic problems. *Applied Math. Letters*. 7, No 5, pp. 85-87, 1994.
- [26] **Duvaut,G.-Lions,J.L.:** *Les inequations en Mécanique et en Physique*. Dunod, 1972.
- [27] **Erzberger,H.-Kim,M.:** Optimal Boundary Control of Distributed Parameter Systems. *Information and Control*, Vol. 9, pp. 265-278. 1966.
- [28] **Fabre,C.-Puel,J.P.-Zuazua,E.:** Contrôlabilité approchée de l'équation de la chaleur semi-linéaire. *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 315, Série I, p. 807-812, 1992.
- [29] **Fabre,C.-Puel,J.P.-Zuazua,E.:** Approximate controllability of the semilinear heat equation. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, 125A, pp. 31-61, 1995.
- [30] **Forsythe,G.E.-Wasow,W.R.:** *Finite-Difference Methods for Partial Differential Equations*. Wiley, New-York, 1960.
- [31] **Friedman,A.:** *Partial differential equations of parabolic type*. Prentice-Hall, Inc, 1964.
- [32] **Gianni,R.-Hulshof,J.:** The semilinear heat equation with a Heaviside source term, *European Journal of Applied Mathematics*, 3, pp. 367-379. 1992.
- [33] **Glowinski,R.-Lions,J.L.:** Exact and approximate controllability for distributed parameter systems. *Acta Num.* pp. 269-378. 1995.
- [34] **Grisvard,P.:** *Elliptic Problems in nonsmooth domains*. Pitman, 1985.
- [35] **Henry,J.:** *Etude de la contrôlabilité de certaines équations paraboliques*. Thèse d'Etat, Université Paris VI. 1978.
- [36] **Henry,J.-Yvon,J.P.:** On the use of space invariant imbedding to solve optimal control problems for second order elliptic equations. En *System modelling and Optimization*. Actas del 17 IFIP TC7 conference on System modelling and Optimization. Praga, 1995. Ed: Chapman and Hall, pp. 195-202, 1996.

- [37] **Kamin,S.-Peletier,L.A.-Vázquez,J.L.:** Classification of singular solutions of a nonlinear heat equation. *Duke Mathematical Journal*, Vol. 58, nº 3, pp. 601-615. 1989.
- [38] **Kato,T.:** Quasi-linear equations of evolution, with applications to partial differential equations. *Spectral theory and Differential Equations*. Eds: A. Dold and B. Eckmann. Springer-Verlag, Lecture Notes 448, pp. 25-70. 1975.
- [39] **Ladyzenskaja,O.A.-Solonnikov,V.A.-Ural'ceva,N.N.:** *Linear and quasilinear equations of parabolic type*. A.M.S. Rhode Island. 1968.
- [40] **Lions,J.L.:** *Contrôle optimal de systemes gouvernés par des equations aux dérivées partielles*. Dunod, 1968
- [41] **Lions,J.L.:** *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*. Dunod, 1969.
- [42] **Lions,J.L.:** Remarques sur la contrôlabilité approchée. Actas de las "Jornadas Hispano-Francesas sobre Control de Sistemas Distribuidos". Universidad de Malaga, pp. 77-88. 1990.
- [43] **Lions,J.L.:** Exact Controllability for distributed systems. Some trends and some problems. *Applied and Industrial Mathematics*, pp. 59-84. 1991.
- [44] **Lions,J.L.:** *Hierarchical pointwise controllability*. Manuscrito. Aparecerá en un volumen en honor a L. Nachbin.
- [45] **Lions,J.L.-Magenes,E.:** *Problemes aux limites non homogenes et applications*, Vol. 1. Paris, Dunod, 1968.
- [46] **Lions,J.L.-Magenes,E.:** *Problemes aux limites non homogenes et applications*, Vol. 2. Paris, Dunod, 1968.
- [47] **Malvern,L.E.:** *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*. Prentice-Hall, 1969.
- [48] **Mikhlin,S.G.-Smolitsky,K.L.:** *Approximate Methods for Solution of Differential and Integral Equations*. American Elsevier, New-York, 1967.
- [49] **Mizohata,S.:** Unicité du prolongement des solutions pour quelques opérateurs différentiels paraboliques. *Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto*, Ser. A31 (3), pp. 219-239. 1958.

-
- [50] **Pazy, A.:** *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*. Springer-Verlag, 1983.
- [51] **Perko, L.:** *Differential Equations and Dynamical Systems*. Springer-Verlag, 1991.
- [52] **Rudin, W.:** *Real and Complex Analysis*. McGraw-Hill International Editions, 1986.
- [53] **Saut, J.C.-Scheurer, B.:** Unique continuation for some evolution equations. *Journal of Differential Equations*, 66, pp. 118-139. 1987.
- [54] **Seidman, T.I.:** A well-posed problem for the heat equation. *Bull. Amer. Math. Soc.* 80, pp. 901-902. 1974.
- [55] **Simon, J.:** Compact Sets in the Space $L^p(0, T; B)$. *Annali di Matematica pura ed applicata*. Serie 4, 146, pp. 65-96. 1987.
- [56] **Streeter, V.L.:** *Hand Book of Fluid Dynamics*. McGraw-Hill Book Company, 1961.
- [57] **Tzafestas, S.G.-Nightingale, J.M.:** Optimal Filtering, Smoothing and Prediction in Linear Distributed Systems. *Proc. I.E.E.E.* Vol. 115, pp. 1207-1212. 1968.
- [58] **Wang, P.K.C.:** Control of Distributed Parameter Systems. *Advances in Control Systems*. Ed.: C.T. Leondes, Academic Press, Vol. 1. pp. 75-172. 1964.