Documento de Trabajo
9 1 0 2

CONTROL DE SISTEMAS LINEALES CON EXPECTATIVAS RACIONALES
EL CASO DE INFORMACION INCOMPLETA

Emilio Cerdá Tena

FACULTAD DE CIENCIAS ECONOMICAS Y EMPRESARIALES.- UNIVERSIDAD COMPLUTENSE
Campus de Somosaguas. 28023 - MADRID

Esta publicación de Documentos de Trabajo pretende ser cauce de expresión y comunicación de los resultados de los proyectos de investigación que se llevan a cabo en la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales de la Universidad Complutense de Madrid. No obstante, la publicación está abierta a investigadores de otras instituciones que deseen difundir sus trabajos en ella.

Los Documentos de Trabajo se distribuyen gratuitamente a las Universidades e Instituciones de Investigación que lo solicitan. Asímismo, las peticiones personales pueden ser atendidas en la medida en que se disponga de ejemplares en existencia.

Se ruega a las personas e instituciones interesadas en solicitar ejemplares que utilicen el boletín de pedido que figura seguidamente.

DOCUMENTOS DE TRABAJO

Boletín de Pedido.

Nombre de la persona o institución: ....

....

Calle: .... nº ....

Ciudad: ....Distrito Postal:.........País: ....

Solicita una suscripción permanente .... [ ]
(sólo Universidades e Instituciones de Investigación)

Solicita los Documentos de Trabajo cuyos números se relacionan a continuación: ______________________________

____

Enviar a:
Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales
Universidad Complutense de Madrid
Vicedecano
Campus de Somosaguas. 28023 MADRID. ESPAÑA.

CONTROL DE SISTEMAS LINEALES CON EXPECTATIVAS RACIONALES. EL CASO DE INFORMACION INCOMPLETA

EMILIO CERDA TENA
Departamento de Análisis Económico
Universidad Complutense de Madrid

RESUMEN

En este trabajo se resuelve la versión para el caso de información incompleta del problema de control de sistemas económicos lineales con expectativas racionales y función objetivo cuadrática, ya estudiado anteriormente en el caso de información completa. En ambos casos no se cumple la hipótesis de causalidad por lo que no son aplicables las técnicas habituales de Teoría de Control, aunque el método que se utiliza se apoya en ellas.

Palabras clave: Control estocástico, Expectativas racionales, Información incompleta.

Clasificación A.M.S.: 93A99

SUMMARY

The problem of optimal control of linear economic systems with rational expectations and quadratic objective function is solved for the case of incomplete information. The case of complete information has been previously studied. In both problems the hypothesis of causality is not satisfied and, therefore, the standard techniques of control theory cannot be directly applied, though the method used is based on these techniques.

Key works: Incomplete information, Rational expectations, Stochastic control,

AMS Classification: 93A99.

Title: Control of linear systems with rational expectations. The case of incomplete information.

1.- INTRODUCCION

En la mayoría de las decisiones económicas no triviales interviene la variable tiempo. Muchas de las decisiones de los agentes económicos en un momento del tiempo dependen de su visión del futuro, es decir, de sus expectativas. Lo mismo ocurre con el comportamiento de los agregados económicos que forman los modelos macroeconómicos. En la literatura económica existen distintas formas de modelizar las expectativas, siendo las más importantes: las expectativas estáticas, expectativas adaptativas y expectativas racionales, habiendo adquirido estas últimas gran importancia en los últimos años y siendo hoy día referencia obligada en cualquier tratado de Economía Dinámica (Pesaran (1987), Aoki (1989), Holly and Hughes Hallett (1989)).

La hipótesis de expectativas racionales en su versión fuerte de Muth, supone que la expectativa que tienen los agentes económicos en un instante t, sobre el valor que tomará una variable en el futuro (que es subjetiva e inobservable), es la esperanza matemática de la variable condicionada a la información que se posee en t, implicada por el modelo. La hipótesis supone, por tanto, que los individuos actúan como si conocieran el modelo y formaran sus expectativas de acuerdo con él.

Las técnicas de Teoría de Control no son aplicables, en general, a sistemas con expectativas racionales de las variables de estado, por no cumplirse la hipótesis de causalidad. (Aoki-Canzoneri (1979), Chow (1980), Briffill (1981), Buiter (1983)).

En Cerdá (1990) se presenta un método, que se apoya en la Programación Dinámica, que resuelve el problema de control de un sistema lineal con expectativas racionales y función objetivo cuadrática. En este artículo se va a abordar el problema para el caso de información incompleta: se supone que las variables de estado (variables endógenas) no son observables, teniendo unas variables de observación relacionadas con las variables de estado por la ecuación de observación.

En el apartado 2 se enuncia el problema. En el apartado 3 se obtienen unos resultados previos. En el apartado 4 se presenta el teorema que resuelve el problema. En el apartado 5 se presentan las conclusiones del artículo.

2. ENUNCIADO DEL PROBLEMA

Consideramos el problema con función objetivo, ecuación de estado y ecuación de observación siguientes:

$$\begin{cases} \text{MIN } E_0W=E_0\sum_{t=1}^{T}(y_t-a_t)'K_t(y_t-a_t), & \text{siendo } K_t \text{ matriz simétrica, semidefinida positiva} \\ y_t=B_ty^*_{t/t-1}+B_{1t}y^*_{t+1/\ t-1}+A_ty_{t-1}+C_tx_t+b_t+u_t & (\text{para } t=1,\dots T) \\ z_t=M_ty_t+w_t & (\text{para } t=0,\dots,T) \end{cases} \quad (1)$$

, en donde:

y_t: es un vector de variables endógenas, no observable.

x_t: es un vector de instrumentos políticos (variables de control)

b_t: es un vector que recoge los efectos combinados de las variables exógenas no sujetas a control.

z_t: es un vector de variables observables.

Suponemos que $y_0, u_1, \ldots, u_T, w_0, \ldots, w_T$ son vectores aleatorios, mutuamente incorrelados, tales que:

$$Eu_t = 0 \ ; \ Eu_t u_t' = U_t$$

$$Ew_t = 0 \ ; \ Ew_t w_t' = W_t$$

$$Ey_0 = m \ ; \ E(y_0 - m)(y_0 - m)' = S$$

Además, suponemos que W_t es definida positiva, para cada t.

$y^*_{t/k} = E(y_t | I_k)$: es la expectativa (racional) que al final del periodo k, se tiene sobre el valor que el vector y tomará en el periodo t. En este caso: $I_k = \{z_k, \ldots, z_0; x_k, \ldots, x_1; b_k, \ldots, b_1\}$, pero no contiene a $y_k, \ldots, y_0$, ya que son desconocidos (no observables).

$$E_0 W = E(W | I_0)$$

Suponemos que las variables exógenas $\{b_t\}$ son estocásticas, de la forma:

$$b_t = \sum_{i=1}^{p} R_i b_{t-i} + \xi_t$$

en donde $\{\xi_t\}$ es un proceso estocástico, de media cero, serialmente incorrelado, independiente de las perturbaciones que entran en el sistema que explica y_t, de los ruidos de observación y de la variable aleatoria y_0. (Se puede considerar p finito o infinito).

Nota: El problema en el que aparezcan en el sistema (1) sumandos del tipo $B_{2t}y^*_{t+2/t-1},\dots,B_{pt}y^*_{t+p/t-1}$ se trata de manera análoga al problema que se enuncia en este apartado.

3. RESULTADOS PREVIOS

3.1. Expresión del sistema en otra forma equivalente

Proposición 1

El sistema (1) se puede expresar de la siguiente forma:

$$y_t=\tilde{B}_{1t}y^*_{t+1/t-1}+A_ty_{t-1}+(\tilde{A}_t-A_t)E(y_{t-1}|I_{t-1})+\tilde{C}_tx^*_{t/t-1}+\tilde{b}^*_{t/t-1}+v_t$$

en donde:

$$\tilde{B}_{1t}=(I-B_t)^{-1}B_{1t}$$
$$\tilde{A}_t=(I-B_t)^{-1}A_t$$
$$\tilde{C}_t=(I-B_t)^{-1}C_t$$
$$\tilde{b}^*_{t/t-1}=(I-B_t)^{-1}b^*_{t/t-1}$$
$$v_t=C_t(x_t-x^*_{t/t-1})+(b_t-b^*_{t/t-1})+u_t$$

Demostración:

Consideramos el sistema (1)

$$y_t=B_ty^*_{t/t-1}+B_{1t}y^*_{t+1/t-1}+A_ty_{t-1}+C_tx_t+b_t+u_t \quad \text{(para } t=1,2,\dots,T),$$

en donde, como hemos señalado en el apartado 2 las expectativas son racionales, por lo que $y^*_{t/t-1}=E[y_y|I_{t-1}]$; $y^*_{t+1/t-1}=E[y_{t+1}|I_{t-1}]$.

Tomando en los dos miembros del sistema (1) las esperanzas condicionadas a I_{t-1} y teniendo en cuenta que las expectativas son racionales, queda:

$$y^*_{t/t-1}=B_ty^*_{t/t-1}+B_{1t}y^*_{t+1/t-1}+A_tE(y_{t-1}|I_{t-1})+C_tx^*_{t/t-1}+b^*_{t/t-1}$$
$$\Rightarrow y^*_{t/t-1}=(I-B_t)^{-1}\left[B_{1t}y^*_{t+1/t-1}+A_tE(y_{t-1}|I_{t-1})+C_tx^*_{t/t-1}+b^*_{t/t-1}\right]$$

Por tanto:

$$y_t=y^*_{t/t-1}+A_ty_{t-1}-A_tE(y_{t-1}|I_{t-1})+v_t=$$
$$=\tilde{B}_{1t}y^*_{t+1/t-1}+A_ty_{t-1}+(\tilde{A}_t-A_t)E(y_{t-1}|I_{t-1})+\tilde{C}_tx^*_{t/t-1}+\tilde{b}^*_{t/t-1}+v_t$$

Corolario

En el caso de información completa, tenemos $I_k=\{y_k,...,y_0;x_k,...x_1;b_k,...,b_1\}$, con lo cual nos queda $y_t=\tilde{B}_{1t}y^*_{t+1/t-1}+\tilde{A}_ty_{t-1}+\tilde{C}_tx^*_{t/t-1}+\tilde{b}^*_{t/t-1}+v_t$, resultado que coincide con el que teníamos en ese caso (Cerdá, 1990).

Nota. Suponemos, como en el caso de información completa,que los vectores v_t son incorrelados en el tiempo y tienen media cero. Además, $y_0,v_1,...,v_T,w_0,...,w_T$ son mutuamente incorrelados. Sea $Ev_t=0$: $Ev_tv_t'=V_t$.

Suponemos, también, que para cada t, la matriz $(I-B_t)$ es no singular.

3.2. Problema previo

Antes de enunciar y demostrar el teorema que resuelve el problema que nos ocupa, vamos a plantearnos un problema previo, de control con información incompleta, para una formulación particular del sistema, sin expectativas, cuya solución utilizaremos de manera auxiliar en la demostración del teorema que más nos interesa.

El problema previo es el siguiente:

$$\begin{cases} \text{MIN } E_0 W = E_0 \sum_{t=1}^{T} (y_t - a_t)' K_t (y_t - a_t), & \text{siendo } K_t \text{ matriz simétrica, semidefinida positiva} \\ y_t = D_t y_{t-1} + (A_t - D_t) E(y_{t-1} | I_{t-1}) + C_t x_t + b_t + u_t, & \text{para } t=1,\dots T \\ z_t = M_t y_t + w_t & \text{para } t=0,\dots,T \end{cases}$$

Suponemos que $y_0, u_1, \dots, u_T, w_0, \dots, w_T$ son incorrelados. Además, $Eu_t=0$; $Ev_t=0 \ \forall t$

$$I_k = \{z_k, \dots, z_0; x_k, \dots, x_1; b_k, \dots b_1\}$$

$\forall t$, b_t es de la forma expresada en el apartado 2.

3.3. Solución al problema previo

Teorema 1

La solución al problema previo es la siguiente:

$$\hat{x}_t = G_t E(y_{t-1} | I_{t-1}) + g_t,$$

en donde $\begin{cases} G_t = -(C_t' H_t C_t)^{-1} C_t' H_t A_t \\ g_t = -(C_t' H_t C_t)^{-1} C_t' (H_t b^*_{t/t-1} - h^*_{t/t-1}) \end{cases}$

siendo: $\begin{cases} H_{t-1} = K_{t-1} + (A_t + C_t G_t)' H_t (A_t + C_t G_t), & \text{con } H_T = K_T \\ h_{t-1} = K_{t-1} a_{t-1} + (A_t + C_t G_t)' (h^*_{t/t-1} - H_t b^*_{t/t-1}), & \text{con } h_T = K_T a_T \end{cases}$

Además, para $\hat{V}_t(I_{t-1}) = \text{MIN } E_{t-1}\{(y_t - a_t)' K_t (y_t - a_t) + \hat{V}_{t+1}(I_t)\}$, con $\hat{V}_{T+1}(I_T) = 0$, se tiene:

$$\begin{aligned} \hat{V}_t(I_{t-1}) = {} & E_{t-1}\{y'_{t-1}(A_t + C_t G_t)' H_t (A_t + C_t G_t) y_{t-1} - \\ & -2\bar{y}'_{t-1}(A_t + C_t G_t)'(h^*_{t/t-1} - H_t b^*_{t/t-1}) + E_{t-1}\{(C_t g_t + b_t)' H_t (C_t g_t + b_t)\} - \\ & -2E_{t-1}\{(b_t + C_t g_t)' h_t\} + E_{t-1}\{u_t' H_t u_t\} + E_{t-1}(c_t) + E_{t-1}\{(\bar{y}_{t-1} - y_{t-1})'[(A_t - \\ & -D_t + C_t G_t)' H_t (A_t - D_t + C_t G_t) - 2(A_t + C_t G_t)' H_t (A_t - D_t)](\bar{y}_{t-1} - y_{t-1})\} \end{aligned}$$

siendo: $c_{t-1}=a'_{t-1}K_{t-1}a_{t-1}+E_{t-1}\{(b_t+C_tg_t)'H_t(b_t+C_tg_t)\}-$
$$-2E_{t-1}\{(b_t+C_tg_t)'h_t\}+E_{t-1}(c_t)+E_{t-1}(u_t'H_tu_t)+$$
$$+E_{t-1}\{(\bar{y}_{t-1}-y_{t-1})'[(A_t-D_t+C_tG_t)'H_t(A_t-D_t+C_tG_t)-$$
$$-2(A_t+C_tG_t)'H_t(A_t-D_t)](\bar{y}_{t-1}-y_{t-1})\},\ \text{con } c_T=a_T'K_Ta_T$$
(Hemos utilizado la siguiente notación: $\bar{y}_{t-1}=E(y_{t-1}|I_{t-1})=E_{t-1}(y_{t-1})$).

3.4. Comentarios sobre la solución obtenida.

Consideremos el problema de control lineal-cuadrático standard, con información completa (problema SIC):

$$\begin{cases} \text{MIN } E_0W=E_0\sum_{t=1}^{T}(y_t-a_t)'K_t(y_t-a_t), & \text{siendo } K_t \text{ matriz simétrica, semidefinida positiva} \\ y_t=A_ty_{t-1}+C_tx_t+b_t+u_t, & \text{para } t=1,\dots,T \end{cases}$$

, en donde las variables b_t son estocásticas, de la forma en que se han expresado anteriormente.

La solución óptima de este problema es: $\hat{x}_t=G_ty_{t-1}+g_t$, en donde G_t y g_t vienen dadas por las mismas expresiones del teorema 1, obteniendo H_t, h_t igualmente como en el teorema 1.

La versión de información incompleta del mismo problema (problema SII):

$$\begin{cases} \text{MIN } E_0W=E_0\sum_{t=1}^{T}(y_t-a_t)'K_t(y_t-a_t), & \text{siendo } K_t \text{ matriz simétrica, semidefinida positiva} \\ y_t=A_ty_{t-1}+C_tx_t+b_t+u_t, & \text{para } t=1,\dots,T \\ z_t=M_ty_t+w_t, & \text{para } t=0,\dots,T \end{cases}$$

tiene como solución $\hat{x}_t=G_tE(y_{t-1}|I_{t-1})+g_t$, siendo G_t,g_t análogas a las obtenidas en el teorema 1, al igual que H_t,h_t y, por tanto, también análogas a las del problema SIC. Por tanto este problema y el llamado problema previo tienen exactamente la misma solución. Además, en la expresión del control óptimo del problema previo, y por tanto el problema SII encontramos exactamente la expresión del control óptimo del problema SIC, con el único cambio de $E(y_{t-1}|I_{t-1})$ en lugar de y_{t-1}.

Los desarrollos completos de las soluciones óptimas de los problemas SIC y SII, con las notaciones y supuestos que utilizamos en este artículo aparecen en Cerdá (1987).

4. SOLUCION AL PROBLEMA

El siguiente teorema nos da la solución al problema que nos ocupa.

Teorema 2

Consideremos el problema enunciado en el apartado 2. Suponemos que, para t=T (periodo final), se verifica que $y^*_{T+1/T-1}=\Gamma y^*_{T/T-1}$.

La solución óptima es $\hat{x}_t=F_tE[y_{t-1}|I_{t-1}]+f_t$, en donde F_t, f_t coinciden con las expresiones calculadas en el caso de información completa.

Demostración

Partimos de la versión en información completa del problema que nos ocupa y su solución óptima (Cerdá, 1990). Para ese caso, el sistema se puede expresar:

$$y_t=\tilde{B}_{1t}y^*_{t+1/t-1}+\tilde{A}_t y_{t-1}+\tilde{C}_t x^*_{t/t-1}+\tilde{b}^*_{t/t-1}+v_t$$

en donde $\tilde{B}_{1t}$, $\tilde{A}_t$, $\tilde{C}_t$, $\tilde{b}^*_{t/t-1}$, v_t coinciden con las expresiones que aparecen en la proposición 1.

En el punto 2 del método que se utiliza para resolver el problema en el caso de información completa, se trata $y^*_{t+1/t-1}$ como dado y se utiliza la programación dinámica, obteniendo:

$$\hat{x}^*_{t/t-1}=G_t y_{t-1}+G_{1t}y^*_{t+1/t-1}+g_t$$

En el caso que nos ocupa ahora (información incompleta), hemos visto en la proposición 1 que el sistema se puede expresar:

$$y_t=\tilde{B}_{1t}y^*_{t+1/t-1}+A_t y_{t-1}+(\tilde{A}_t-A_t)E(y_{t-1}|I_{t-1})+\tilde{C}_t x^*_{t/t-1}+\tilde{b}^*_{t/t-1}+v_t \qquad (2)$$

Tratamos ahora a $y^*_{t+1/t-1}$ como dado y utilizamos el teorema 1 junto con los resultados que se comentan en 3.4, obteniendo:

$$\hat{x}^*_{t/t-1}=G_t E(y_{t-1}|I_{t-1})+G_{1t}y^*_{t+1/t-1}+g_t \qquad (3)$$

, en donde G_t, G_{1t}, g_t coinciden con las expresiones obtenidas en el caso de información completa.

Llevando este resultado a (2), obtenemos:

$$y_t=R_{1t}y^*_{t+1/t-1}+A_t y_{t-1}+(R_t-A_t)E(y_{t-1}|I_{t-1})+r_t+v_t \qquad (4)$$

, en donde: $R_{1t}=\tilde{B}_{1t}+\tilde{C}_tG_{1t}$; $R_t=\tilde{A}_t+\tilde{C}_tG_t$; $r_t=\tilde{b}^*_{t/t-1}+\tilde{C}_tg_t$

(obsérvese que $r_t=r^*_{t/t-1}$, pero en general, $r_t\neq r^*_{t/t-j}$, para $j>1$).

Vamos a resolver este sistema. Demostraremos por inducción que el sistema (4) se puede expresar $y_t=A_ty_{t-1}+(P_t-A_t)E(y_{t-1}|I_{t-1})+s_t+v_t$ (5)

en donde: $P_t=(I-R_{1t}P_{t+1})^{-1}R_t$ para $t=1,\dots,T$ con $P_{T+1}=\Gamma$

$s_t=(I-R_{1t}P_{t+1})^{-1}(r_t+R_{1t}s^*_{t+1/t-1})$,
para $t=1,\dots,T$, con $s_{T+1}=0$.

$\boxed{\text{PARA T}}$

Particularizando (4) en T, y teniendo en cuenta que $y^*_{T+1/T-1}=\Gamma y^*_{T/T-1}$, queda:

$$y_T=R_{1T}\Gamma y^*_{T/T-1}+A_Ty_{T-1}+(R_T-A_T)E(y_{T-1}|I_{T-1})+r_T+v_T$$

Tomando en los dos miembros esperanzas condicionadas a I_{T-1} y teniendo en cuenta que las expectativas son racionales, obtenemos:

$$y^*_{T/T-1}=R_{1T}\Gamma y^*_{T/T-1}+R_TE(y_{T-1}|I_{T-1})+r_T$$

Luego

$$y_T=y^*_{T/T-1}+A_Ty_{T-1}-A_TE(y_{T-1}|I_{T-1})+v_T=$$
$$=A_Ty_{T-1}+(P_T-A_T)E(y_{T-1}|I_{T-1})+s_T+v_T,$$

en donde: $P_T=(I-R_{1T}\Gamma)^{-1}R_T$

$s_T=(I-R_{1T}\Gamma)^{-1}r_T$

$\boxed{\text{SUPONGAMOS QUE ES CIERTO EL ENUNCIADO (5) PARA t+1}}$

$$\Rightarrow y_{t+1}=A_{t+1}y_t+(P_{t+1}-A_{t+1})E(y_t|I_t)+s_{t+1}+v_{t+1}$$

Vamos a demostrarlo $\boxed{\text{PARA t}}$

Partimos del sistema (4).

A partir de la hipótesis de inducción para t+1, tomando esperanzas condicionadas a I_{t-1} y teniendo en cuenta que las expectativas son racionales llegamos a:

$$y^*_{t+1/t-1}=P_{t+1}y^*_{t/t-1}+s^*_{t+1/t-1}$$

Llevando este resultado a (4) y, tomando esperanzas condicionadas a I_{t-1} y teniendo en cuenta que las expectativas son racionales, obtenemos:

$$y^*_{t/t-1}=R_{1t}P_{t+1}y^*_{t/t-1}+R_{1t}s^*_{t+1/t-1}+A_tE(y_{t-1}|I_{t-1})+(R_t-A_t)E(y_{t-1}|I_{t-1})+r_t$$

Luego:

$$y_t=y^*_{t/t-1}+A_ty_{t-1}-A_tE(y_{t-1}|I_{t-1})+v_t=A_ty_{t-1}+(P_t-A_t)E(y_{t-1}|I_{t-1})+s_t+v_t$$

, en donde $P_t=(I-R_{1t}P_{t+1})^{-1}R_t$

$$s_t=(I-R_{1t}P_{t+1})^{-1}(r_t+R_{1t}s^*_{t+1/t-1})$$

Queda así demostrada la expresión de la solución para el sistema.

Los valores de P_t,s_t que hemos obtenido coinciden con los calculados en el caso de información completa.

Tenemos, por tanto:

$$y_t=A_ty_{t-1}+(P_t-A_t)E(y_{t-1}|I_{t-1})+s_t+v_t \qquad (6)$$

$$\Rightarrow y_{t+1}=A_{t+1}y_t+(P_{t+1}-A_{t+1})E(y_t|I_t)+s_{t+1}+v_{t+1}$$

$$\Rightarrow y^*_{t+1/t-1}=P_{t+1}y^*_{t/t-1}+s^*_{t+1/t-1}$$

De (6) obtenemos:

$$\Rightarrow y^*_{t/t-1}=P_tE(y_{t-1}|I_{t-1})+s_t$$

Por tanto:

$$y^*_{t+1/t-1}=P_{t+1}P_tE(y_{t-1}|I_{t-1})+P_{t+1}s_t+s^*_{t+1/t-1}$$

Llevando este resultado a (3) queda:

$$\hat{x}^*_{t/t-1}=(G_t+G_{1t}P_{t+1}P_t)E(y_{t-1}|I_{t-1})+g_t+G_{1t}P_{t+1}s_t+G_{1t}s^*_{t+1/t-1}$$

Por tanto:

$$\hat{x}^*_{t/t-1}=\hat{x}_t=F_tE(y_{t-1}|I_{t-1})+f_t,$$

en donde $\quad F_t=G_t+G_{1t}P_{t+1}P_t$

$$f_t=g_t+G_{1t}(P_{t+1}s_t+s^*_{t+1/t-1})$$

Vemos, por tanto, que F_t, f_t coinciden con las expresiones obtenidas en el caso de información completa y el teorema queda demostrado.

Nota: En la demostración del teorema hemos supuesto que las variables exógenas $\{b_t\}$ son estocásticas, del tipo $b_t=\sum_{i=1}^{p} R_i b_{t-i}+\xi_t$. El teorema es igualmente cierto para el caso de variables $\{b_t\}$ determinísticas y la demostración es análoga.

5. CONCLUSIONES

En las páginas anteriores se ha enunciado y resuelto el problema de control de sistemas lineales con función objetivo cuadrático y horizonte temporal finito, para el caso de información incompleta, versión para este supuesto del problema tratado en Cerdá (1990).

Aunque las técnicas habituales de Teoría de Control no son aplicables a este caso por no cumplirse la hipótesis de causalidad, el resultado final que se obtiene sí conserva la propiedad conocida en los problemas lineal-cuadráticos standard: la expresión del control óptimo para el caso de información incompleta coincide exactamente con la obtenida en información completa, cambiando únicamente y_{t-1} por $E(y_{t-1}|I_{t-1})$.

En el caso Gaussiano esta esperanza condicionada $E(y_{t-1}|I_{t-1})$. se podrá calcular utilizando la generalización del filtro de Kalman para la ecuación de estado y sistema de observación de datos.

APENDICE

Demostración del teorema 1

Por inducción sobre t. Para T:

$$V_T=(I_{T-1})=E_{T-1}\{(y_T-a_T)'K_T(y_T-a_T)\}=$$
$$=E_{T-1}(y_T'K_Ty_T-2y_T'K_Ta_T+a_T'K_Ta_T)=$$
$$=E_{T-1}(y_T'H_Ty_T-2y_T'h_T+c_T) \text{ en donde } H_T=K_T;\ h_T=K_Ta_T;\ c_T=a_T'K_Ta_T$$

sustituyendo y_T por su valor queda:

$$V_T(I_{T-1})=E_{T-1}\{[D_Ty_{T-1}+(A_T-D_T)\bar{y}_{T-1}+C_Tx_T+b_T+u_T]'$$
$$H_T[D_Ty_{T-1}+(A_T-D_T)\bar{y}_{T-1}+C_Tx_T+b_T+u_T]\}-$$
$$-2E_{T-1}\{[D_Ty_{T-1}+(A_T-D_T)\bar{y}_{T-1}+C_Tx_T+b_T+u_T]'h_T\}+c_T=$$
$$=E_{T-1}\{[D_Ty_{T-1}+(A_T-D_T)\bar{y}_{T-1}]'H_T[D_Ty_{T-1}+(A_T-D_T)\bar{y}_{T-1}]\}+$$
$$+x_T'C_T'H_TC_Tx_T+E_{T-1}(b_T'H_Tb_T)+E_{T-1}(u_T'H_Tu_T)+2x_T'C_T'H_TA_T\bar{y}_{T-1}+$$
$$+2E_{T-1}\{[D_Ty_{T-1}+(A_T-D_T)\bar{y}_{T-1}]'H_Tb_T\}+$$
$$+2x_T'C_T'H_Tb^*_{T/T-1}-2\bar{y}_{T-1}'A_T'h_T-2x_T'C_T'h_T-2b^{*\prime}_{T/T-1}h_T+c_T$$

Condición de mínimo:

$$\frac{\partial V_T}{\partial x_T}=0=2C_T'H_TC_Tx_T+2C_T'H_TA_T\bar{y}_{T-1}+2C_T'H_Tb^*_{T/T-1}-2C_T'h_T$$

$$\Rightarrow \hat{x}_T=G_T\bar{y}_{T-1}+g_T$$

$$G_T=-(C'_TH_TC_T)^{-1}C'_TH_TA_T$$

$$g_T=-(C'_TH_TC_T)^{-1}C'_T(H_Tb^*_{T/T-1}-h_T)$$

$$\Rightarrow \hat{V}_T(I_{T-1})=E_{T-1}\{[D_Ty_{T-1}+(A_T-D_T)\bar{y}_{T-1}+C_TG_T\bar{y}_{T-1}+b_T+C_Tg_T+u_T]'H_T$$
$$[D_Ty_{T-1}+(A_T-D_T)\bar{y}_{T-1}+C_TG_T\bar{y}_{T-1}+b_T+C_Tg_T+u_T]\}-$$
$$-2E_{T-1}\{[D_Ty_{T-1}+(A_T-D_T)\bar{y}_{T-1}+C_TG_T\bar{y}_{T-1}+b_T+C_Tg_T+u_T]'h_T\}+c_T= *$$

Ponemos $\bar{y}_{T-1}=y_{T-1}+(\bar{y}_{T-1}-y_{T-1})$, y utilizamos $(A_T+C_TG_T)'H_TC_T=0$

$$* =E_{T-1}\{[D_Ty_{T-1}+(A_T-D_T)y_{T-1}+(A_T-D_T)(\bar{y}_{T-1}-y_{T-1})+C_TG_Ty_{T-1}+$$
$$+C_TG_T(\bar{y}_{T-1}-y_{T-1})+b_T+C_Tg_T+u_T]'H_T[D_Ty_{T-1}+(A_T-D_T)y_{T-1}+$$
$$+(A_T-D_T)(\bar{y}_{T-1}-y_{T-1})+C_TG_T(y_{T-1}+C_TG_T\bar{y}_{T-1}-y_{T-1})+b_T+C_Tg_T+u_T]\}-$$
$$-2E_{T-1}\{[D_Ty_{T-1}+(A_T-D_T)y_{T-1}+(A_T-D_T)(\bar{y}_{T-1}-y_{T-1})+C_TG_Ty_{T-1}+$$
$$+C_TG_T(\bar{y}_{T-1}-y_{T-1})+b_T+C_Tg_T+u_T]'h_T\}+c_T=$$
$$=E_{T-1}\{y'_{T-1}(A_T+C_TG_T)'H_T(A_T+C_TG_T)y_{T-1}\}E_{T-1}\{(\bar{y}_{T-1}-y_{T-1})'$$
$$(A_T-D_T+C_TG_T)'H_T(A_T-D_T+C_TG_T)(\bar{y}_{T-1}-y_{T-1})\}+$$
$$+E_{T-1}\{(b_T+C_Tg_T)'H_T(b_T+C_Tg_T)\}+E_{T-1}(u'_TH_Tu_T)-2\bar{y}'_{T-1}(A_T+C_TG_T)'h_T$$
$$-2E_{T-1}\{(b_T+C_Tg_T)'h_T\}+c_T+2\bar{y}'_{T-1}(A_T+C_TG_T)'H_Tb^*_{T/T-1}+$$
$$+2E_{T-1}\{y'_{T-1}(A_T+C_TG_T)'H_T(A_T-D_T)(\bar{y}_{T-1}-y_{T-1})\}$$

En el último sumando ponemos $y_{T-1}=\bar{y}_{T-1}-(\bar{y}_{T-1}-y_{T-1})$ y queda de la siguiente forma:

$$E_{T-1}\{[(A_T+C_TG_T)(\bar{y}_{T-1}-(\bar{y}_{T-1}-y_{T-1}))]'H_T(A_T-D_T)(\bar{y}_{T-1}-y_{T-1})\}=$$
$$=-E_{T-1}\{(\bar{y}_{T-1}-y_{T-1})'(A_T+C_TG_T)'H_T(A_T-D_T)(\bar{y}_{T-1}-y_{T-1})\}$$

Por tanto:

$$\hat{V}_T(I_{T-1})=E_{T-1}\{y'_{T-1}(A_T+C_TG_T)'H_T(A_T+C_TG_T)y_{T-1}\}$$
$$-2\bar{y}'_{T-1}(A_T+C_TG_T)'(h_T-H_Tb^*_{T/T-1})+E_{T-1}\{(b_T+C_Tg_T)'H_T(b_T+C_Tg_T)\}$$

$$-2E_{T-1}\{(b_T+C_Tg_T)'h_T\}+c_T+E_{T-1}(u'_TH_Tu_T)+E_{T-1}\{(\bar{y}_{T-1}-y_{T-1})'$$

$$[(A_T-D_T+C_TG_T)'H_T(A_T-D_T+C_TG_T)-2(A_T+C_TG_T)'H_T(A_T-D_T)](\bar{y}_{T-1}-y_{T-1})\}$$

Téngase en cuenta que $c_T=E_{T-1}(c_T)$ y $h_T=h^*_{T/T-1}$. Queda demostrado el teorema para T.

SUPONGAMOS EL TEOREMA CIERTO PARA t

Vamos a demostrarlo PARA t-1.

La ecuación de Bellman es:

$$\hat{V}_{t-1}(I_{t-2})=\underset{x_{t-1}}{\text{MIN}}\ E_{t-2}\{(y_{t-1}-a_{t-1})'K_{t-1}(y_{t-1}-a_{t-1})+\hat{V}_t(I_{t-1})\}$$

siendo $\hat{V}_t(I_{t-1})$ igual al valor que aparece en el enunciado del teorema, por la hipótesis de inducción en t.

Por tanto: $V_{t-1}(I_{t-2})=E_{t-2}\{y'_{t-1}K_{t-1}y_{t-1}-2y'_{t-1}K_{t-1}a_{t-1}+$

$$+a'_{t-1}K_{t-1}a_{t-1}+\hat{V}_t(I_{t-1})\}=$$

$$=E_{t-2}(y'_{t-1}H_{t-1}y_{t-1}-2y'_{t-1}h_{t-1}+c_{t-1}),\ \text{en donde:}$$

$$H_{t-1}=K_{t-1}+(A_t+C_tG_t)'H_t(A_t+C_tG_t)$$

$$h_{t-1}=K_{t-1}a_{t-1}+(A_t+C_tG_t)'(h^*_{t/t-1}-H_tb^*_{t/t-1})$$

c_{t-1}=expresión que aparece en el enunciado del teorema

Sustituyendo y_{t-1} por su valor, queda:

$$V_{t-1}(I_{t-2})=E_{t-2}\{[D_{t-1}y_{t-2}+(A_{t-1}-D_{t-1})\bar{y}_{t-2}+C_{t-1}x_{t-1}+b_{t-1}+u_{t-1}]'$$

$$H_{t-1}[D_{t-1}y_{t-2}+(A_{t-1}-D_{t-1})\bar{y}_{t-2}+C_{t-1}x_{t-1}+b_{t-1}+u_{t-1}]\}-$$

$$-2E_{t-2}\{[D_{t-1}y_{t-2}+(A_{t-1}-D_{t-1})\bar{y}_{t-2}+C_{t-1}x_{t-1}+b_{t-1}+u_{t-1}]'h_{t-1}\}+$$

$$+E_{t-2}(c_{t-1})=E_{t-2}\{[D_{t-1}y_{t-2}+(A_{t-1}-D_{t-1})\bar{y}_{t-2}]'H_{t-1}[D_{t-1}y_{t-2}+$$
$$+(A_{t-1}-D_{t-1})\bar{y}_{t-2}]\}+x'_{t-1}C'_{t-1}H_{t-1}C_{t-1}x_{t-1}+E_{t-2}(b'_{t-1}H_{t-1}b_{t-1})+$$
$$+E_{t-2}(u'_{t-1}H_{t-1}u_{t-1})+2x'_{t-1}C'_{t-1}H_{t-1}A_{t-1}\bar{y}_{t-2}+2E_{t-2}\{[D_{t-1}y_{t-2}+$$
$$+(A_{t-1}-D_{t-1})\bar{y}_{t-2}]'H_{t-1}b_{t-1}\}+2x'_{t-1}C'_{t-1}H_{t-1}b^{*}_{t-1/t-2}-$$
$$-2E_{t-2}\{[D_{t-1}y_{t-2}+(A_{t-1}-D_{t-1})\bar{y}_{t-2}]'h_{t-1}\}-2x'_{t-1}C'_{t-1}h^{*}_{t-1/t-2}-$$
$$-2E_{t-2}(b'_{t-1}h_{t-1})+E_{t-2}(c_{t-1}).$$

Condición de mínimo

$$\frac{\partial V_{t-1}}{\partial x_{t-1}}=0=2C'_{t-1}H_{t-1}C_{t-1}x_{t-1}+2C'_{t-1}H_{t-1}A_{t-1}\bar{y}_{t-2}+$$
$$+2C'_{t-1}H_{t-1}b^{*}_{t-1/t-2}-2C'_{t-1}h^{*}_{t-1/t-2}$$
$$\Rightarrow \hat{x}_{t-1}=G_{t-1}\bar{y}_{t-2}+g_{t-1}$$

$$\text{en donde: }\begin{cases} G_{t-1}=-(C'_{t-1}H_{t-1}C_{t-1})^{-1}C'_{t-1}H_{t-1}A_{t-1} \\ g_{t-1}=-(C'_{t-1}H_{t-1}C_{t-1})^{-1}C'_{t-1}(H_{t-1}b^{*}_{t-1/t-2}-h^{*}_{t-1/t-2}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \hat{V}_{t-1}(I_{t-2})=E_{t-2}\{[D_{t-1}y_{t-2}+(A_{t-1}-D_{t-1})\bar{y}_{t-2}+C_{t-1}G_{t-1}\bar{y}_{t-2}+b_{t-1}+$$
$$+C_{t-1}g_{t-1}+u_{t-1}]'H_{t-1}$$
$$[D_{t-1}y_{t-2}+(A_{t-1}-D_{t-1})\bar{y}_{t-2}+C_{t-1}G_{t-1}\bar{y}_{t-2}+b_{t-1}+C_{t-1}g_{t-1}+u_{t-1}]\}$$
$$-2E_{t-2}\{[D_{t-1}y_{t-2}+(A_{t-1}-D_{t-1})\bar{y}_{t-2}+C_{t-1}G_{t-1}\bar{y}_{t-2}+b_{t-1}+C_{t-1}g_{t-1}+$$
$$+u_{t-1}]'h_{t-1}\}+E_{t-2}(c_{t-1})=*$$

Ponemos $\bar{y}_{t-2}=y_{t-2}+(\bar{y}_{t-2}-y_{t-2})$, y utilizamos $(A_{t-1}+C_{t-1}G_{t-1})'$

$$H_{t-1}C_{t-1}=0$$

$$*=E_{t-2}\{[D_{t-1}y_{t-2}+(A_{t-1}-D_{t-1})y_{t-2}+(A_{t-1}-D_{t-1})(\bar{y}_{t-2}-y_{t-2})+$$
$$+C_{t-1}G_{t-1}y_{t-2}+C_{t-1}G_{t-1}(\bar{y}_{t-2}-y_{t-2})+b_{t-1}+C_{t-1}g_{t-1}+u_{t-1}]'H_{t-1}$$
$$[D_{t-1}y_{t-2}+(A_{t-1}-D_{t-1})y_{t-2}+(A_{t-1}-D_{t-1})(\bar{y}_{t-2}-y_{t-2})+C_{t-1}G_{t-1}y_{t-2}+$$
$$+C_{t-1}G_{t-1}(\bar{y}_{t-2}-y_{t-2})+b_{t-1}+C_{t-1}g_{t-1}+u_{t-1}]\}-2E_{t-2}\{[D_{t-1}y_{t-2}+$$
$$+(A_{t-1}-D_{t-1})y_{t-2}+(A_{t-1}-D_{t-1})(\bar{y}_{t-2}-y_{t-2})+C_{t-1}G_{t-1}y_{t-2}+$$

$$+C_{t-1}G_{t-1}(\bar{y}_{t-2}-y_{t-2})+b_{t-1}+C_{t-1}g_{t-1}+u_{t-1}]'h_{t-1}\}+E_{t-2}(c_{t-1})=$$

$$=E_{t-2}\{y'_{t-2}(A_{t-1}+C_{t-1}G_{t-1})'H_{t-1}(A_{t-1}+C_{t-1}G_{t-1})y_{t-2}\}+$$

$$+E_{t-2}\{(\bar{y}_{t-2}-y_{t-2})'(A_{t-1}-D_{t-1}+C_{t-1}G_{t-1})'H_{t-1}(A_{t-1}-D_{t-1}+C_{t-1}G_{t-1})$$

$$(\bar{y}_{t-2}-y_{t-2})\}+E_{t-2}\{(b_{t-1}+C_{t-1}g_{t-1})'H_{t-1}(b_{t-1}+C_{t-1}g_{t-1})\}+$$

$$+E_{t-2}(u'_{t-1}H_{t-1}u_{t-1})+2\bar{y}'_{t-2}(A_{t-1}+C_{t-1}G_{t-1})'H_{t-1}b^{*}_{t-1/t-2}-$$

$$-2\bar{y}'_{t-2}(A_{t-1}+C_{t-1}G_{t-1})'h^{*}_{t-1/t-2}-2E_{t-2}\{(b_{t-1}+C_{t-1}g_{t-1})'h_{t-1}\}+$$

$$+E_{t-2}(c_{t-1})+2E_{t-2}\{y'_{t-2}(A_{t-1}+C_{t-1}G_{t-1})'H_{t-1}(A_{t-1}-D_{t-1})(\bar{y}_{t-2}-y_{t-2})\}$$

En el último sumando, ponemos $y_{t-2}=\bar{y}_{t-2}-(\bar{y}_{t-2}-y_{t-2})$, y queda de la siguiente forma:

$$E_{t-2}\{[\bar{y}_{t-2}-(\bar{y}_{t-2}-y_{t-2})]'(A_{t-1}+C_{t-1}G_{t-1})'H_{t-1}(A_{t-1}-D_{t-1})(\bar{y}_{t-2}-y_{t-2})\}=$$

$$=-E_{t-2}\{(\bar{y}_{t-2}-y_{t-2})'(A_{t-1}+C_{t-1}G_{t-1})'H_{t-1}(A_{t-1}-D_{t-1})(\bar{y}_{t-2}-y_{t-2})\}$$

Por tanto:

$$\hat{V}_{t-1}(I_{t-2})=E_{t-2}\{y'_{t-2}(A_{t-1}+C_{t-1}G_{t-1})'H_{t-1}(A_{t-1}+C_{t-1}G_{t-1})y_{t-2}\}-$$

$$-2\bar{y}'_{t-2}(A_{t-1}+C_{t-1}G_{t-1})'[h^{*}_{t-1/t-2}-H_{t-1}b^{*}_{t-1/t-2}]+$$

$$+E_{t-2}\{(b_{t-1}+C_{t-1}g_{t-1})'H_{t-1}(b_{t-1}+C_{t-1}g_{t-1})\}-2E_{t-2}\{(b_{t-1}+C_{t-1}g_{t-1})'h_{t-1}\}+$$

$$+E_{t-2}(u'_{t-1}H_{t-1}u_{t-1})+E_{t-2}(c_{t-1})+$$

$$+E_{t-2}\{(\bar{y}_{t-2}-y_{t-2})'[(A_{t-1}-D_{t-1}+C_{t-1}G_{t-1})'H_{t-1}(A_{t-1}-D_{t-1}+$$

$$+C_{t-1}G_{t-1})-2(A_{t-1}+C_{t-1}G_{t-1})'H_{t-1}(A_{t-1}-D_{t-1})](\bar{y}_{t-2}-y_{t-2})\}$$

con lo que hemos demostrado el teorema.

Referencias

AOKI, M. (1989): *Optimization of Stochastic Systems. Topics in Discrete-Time Dynamics.* Second Edition. Academic Press.

AOKI, M. y CANZONERI, M. (1979): "Reduced forms of rational expectations models". *The Quarterly Journal of Economics,* February, pp. 59-71.

BUITER, W. (1983): "Expectations and control theory". *Economie* *appliquée*. N. 1, pp. 129-156.

CERDA, E. (1987): *Control estocástico de modelos con expectativas racionales*. Tesis Doctoral. Universidad Complutense.

CERDA, E. (1990): "Control óptimo de sistemas lineales con expectativas racionales". *Investigaciones económicas* (Segunda época). Vol. XIV, n. 1, págs. 63-83.

CHOW, G. (1980): "Econometric policy evaluation and optimization under rational expectations". *Journal of Economic Dynamic and Control*. Vol. 2, n. 1, pp. 47-59.

DRIFFILL, E.J. (1981): "Time inconsistency and "rules vs. discretion" in macroeconomic models with rational expectations". *Discussion Papers in Economics and Econometrics*. University of Southampton.

HOLLY, S. and HUGHES HALLETT, A. (1989): *Optimal control, expectations and uncertainty*. Cambridge University Press.

PESARAN, M.H. (1987): *The limits to rational expectations*. Basil Blackwell.