UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

TESIS DOCTORAL

Decisiones multicriterio con ordenaciones parciales

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR
PRESENTADA POR

Sixto Rios Insua

DIRECTORES:

Francisco Javier Girón
Sixto Ríos García

Madrid, 2015

Sixto Ríos Insúa

DECISIONES MULTICRITERIO CON ORDENACIONES PARCIALES

Departamento de Estadística e Investigación Operativa
Facultad de Ciencias Matemáticas
Universidad Complutense de Madrid
1980

Edita e imprime la Editorial de la Universidad
Complutense de Madrid. Servicio de Reprografía
Noviciado, 3 Madrid-8
Madrid, 1980
Xerox 9200 XB 480
Depósito Legal: M-39405-1980

DECISIONES MULTICRITERIO CON ORDENACIONES PARCIALES

SIXTO RIOS INSUA

Memoria para optar al grado de Doctor en Ciencias Matemáticas, realizada bajo la dirección de los Drs. D. Francisco Javier Girón y D. Sixto Ríos García.

Universidad Complutense de Madrid
Facultad de Matemáticas
Sección de Estadística e Investigación Operativa.

Madrid, Marzo de 1980

I N D I C E

I N T R O D U C C I O N

Los múltiples y variados intentos de formalizar más o menos ampliamente los procesos de decisión humanos constituyen la teoría de la decisión que, en sus aspectos mas prácticos, se suele denominar análisis de decisiones, análisis de sistemas aplicados, etc.

Los problemas de decisión reales son frecuentemente muy complejos: afectan a muchos individuos, cada uno de los decisores considera varias características y tiene criterios distintos, las consecuencias influyen sobre el sistema un largo período de tiempo, engendran la necesidad de decisiones sucesivas en el tiempo, etc.

Importantes problemas multicriterio en ambiente de incertidumbre, polietápicos, en concurrencia, etc., se presentan en la realidad, y es inevitable estudiarlos y resolverlos con algo más que la intuición de los expertos.

II.

Un problema típico (*) es la comparación de diferentes mezclas de energías (carbón, petróleo, gas, nuclear) sobre sectores de población de unos 300 millones de individuos. Diferentes mezclas tienen distintos impactos sobre la cualidad ambiental, sobre la sanidad y seguridad, sobre la situación socioeconómica de los seres que habiten la región y sobre el sistema de costes. Se trata de comparar distintas mezclas posibles para determinar la óptima o al menos una satisfactoria. La complicación del problema aumenta al observar que el impacto de las decisiones se hará sentir muchos años y que afectará a grandes poblaciones, posiblemente con criterios muy diferentes.

Se puede hoy hablar, y algo se ha estudiado, sobre los procesos de decisión que reúnen las múltiples características de colectivos, polietápicos, multicriterios, en incertidumbre, con varios decisores, y en concurrencia. Distintos conceptos apropiados de utilidad como puente entre la realidad y la modelización han sido introducidos en los últimos años. En esta memoria nos ocupamos de los problemas concretos de decisión individual con multicriterio en ambiente de incertidumbre o en concurrencia. De un modo descriptivo el problema de decisión, consiste en que el decisor debe elegir entre varios cursos de acción, cada uno de los cuales conduce a una consecuencia, que es suceptible de varios criterios de evaluación. Dos son fundamentalmente los caminos que se han seguido para tratar

---

(*) Actualmente en estudio en el I.I.A.S.A. (Instituto Internacional de Análisis de Sistemas Aplicados de Viena).

estos problemas: a) la teoría de la utilidad apropiada y b) las relaciones de orden. Responde la segunda metodología principalmente al caso finito en ambiente de certidumbre y ha sido ampliamente desarrollada por la escuela francesa a partir de B. Roy (1971). Constituye toda una amplia metodología, a veces con los nombres de "ayuda a la decisión", "métodos interactivos", etc., que pretenden conducir al decisor por caminos en que vaya suministrando información, que a su vez, se utiliza para ir reduciendo las dudas al mínimo y tomar una decisión acertada. El énfasis de estos métodos es más sobre aspectos prácticos que tratan de concebir mejor los pasos reales del proceso de decisión.

En esta memoria nos hemos propuesto resolver una serie de problemas pendientes, dentro del marco mas formalizado de los modelos que introducen funciones de valor o funciones de utilidad, iniciado por Von Neumann (1944), y continuando por la escuela americana de Raiffa (1968), Fishburn (1970), Aumann (1964), etc. Nos hemos preocupado de los aspectos conceptuales y de la formulación de modelos mediante la función de utilidad apropiada y no de los aspectos complementarios de la programación, como métodos y algoritmos de cálculo, (Zeleny (1974), Geoffrion (1965), Ching-Lai Hwang (1979), etc.), de soluciones en los modelos planteados. De este aspecto y de los métodos experimentales para la construcción efectiva de la función de utilidad sólo hacemos algunas referencias. Estos últimos son realmente problemas extramatemáticos, aunque no despreciables si se quieren tener datos fiables y adecuados a un problema concreto (MacGrimmon (1973)).

Una tercera metodología con la que se ha intentado aproximar los trabajos de la escuela francesa a la idea de que decidir - es seleccionar conjuntos parciales, introduciendo conceptos de núcleo, casi-núcleo, etc., es debido a una escuela alemana (Wilhelm (1975), Fandel y Wilhelm (1976)), que tiene como antecedentes trabajos anteriores de Arrow (1951), Chernoff (1954), etc.

En resumen, esta memoria consta de tres capítulos dedicados todos ellos a problemas de decisión con multiatributos: el primero en ambiente de certidumbre, el segundo en ambiente de riesgo y de incertidumbre, y el tercero en situación de concurrencia.

En general las motivaciones inmediatas han sido problemas concretos planteados en libros o memorias y que hemos tratado de - resolver y desarrollar. Como idea general directriz del trabajo podemos decir que se ha tratado de construir en una línea coherente, una teoría de la decisión con multiatributos, que aborda 1º los -- procesos en certidumbre con su función de valor vectorial reducible en dimensión en pasos sucesivos, 2º el paso a los procesos de decisión en incertidumbre, construyendo la función de utilidad generalización de la de Von Neumann apoyada en la anterior función - de valor y 3º la iniciación del tratamiento de los problemas en -- concurrencia o juegos no cooperativos con multicriterios.

Una gran parte de los trabajos de diversos autores en este campo se encuentran expuestos sin el rigor matemático necesario y también ha constituído un trabajo no pequeño para el autor de esta memoria formularlos en forma rigurosamente adecuada el contexto gene ral de la misma, pero siempre señalando el origen de las ideas y desarrollos de que partimos.

Agradecemos a los Profs. Sixto Ríos y F. J. Girón la dirección de este trabajo.

CAPITULO I

Método Secuencial de Funciones de Valor Vectoriales

I.0.- Motivación.-

Dos son las motivaciones principales de este capítulo. En primer lugar, resolver un problema propuesto por Aumann (1964), - en relación con la existencia de puntos maximales en un recinto - que pueden no corresponder a máximos de una función de utilidad - definida en él.

La segunda es estudiar la posibilidad de simplificar la - construcción efectiva de la función de utilidad (contexto aleatorio) mediante la simplificación de la construcción previa de la - función de valor (contexto determinista).

Dice Aumann[1]. "When the order is complete, every utility constitutes a faithful representation, so that every maximun element of A, can be obtained by maximizing any utility over A. When the order is not complete it may be happen that some maximal elements of A are achieved as the maxima of utilities whereas others are not".

"We would like to find conditions on A and/or the preference order which exclude this possibility, that is, under which an element x of A is maximal in A iff there is a utility u on X that is maximized over A at x".

"The topological case remains unexplored. It would be interesting to see results in this direction".

Alude con este último párrafo, al planteamiento de posibles generalizaciones del teorema de Debreu a ordenaciones parciales.

Pues bién, en respuesta a esto damos una generalización de la función de valor de Debreu, sustituyéndola por una función de valor vectorial, que corresponde a un orden parcial en R^N, o más general, en un espacio topológico.

El ejemplo aludido de Aumann es el siguiente: Sea X el plano euclídeo considerado como espacio vectorial.

Supongamos que

$$x \succsim y \Longleftrightarrow x_1 \geqslant y_1,\ x_2 \geqslant y_2$$

$$x \succ y \Longleftrightarrow x_1 \geqslant y_1,\ x_2 \geqslant y_2,\ x \neq y$$

Sea A el disco unidad $x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1$. Consideremos funciones de valor de la forma

$$v = c_1 x_1 + c_2 x_2\ ;\ c_1,\ c_2 > 0 \qquad (1)$$

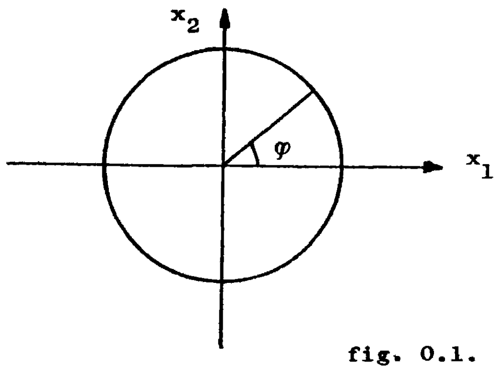


fig. 0.1.

El punto (1,0) es maximal en A y se puede ver facilmente que no corresponde a máximo de la función de valor. En efecto, para que hubiera máximo de la función (1) en (1,0) debería haberlo de la función

$$v = c_1 \cos \varphi + c_2 \operatorname{sen} \varphi \ ; \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$$

en $\varphi = 0$, lo que es imposible por que la derivada

$$v' (\varphi) = - c_1 \operatorname{sen} \varphi + c_2 \cos \varphi$$

es

$$v' (0) = c_2 > 0.$$

Como ya dijimos, la segunda y más importante motivación de este capítulo, es estudiar la posibilidad de simplificar la construcción efectiva de la función de utilidad, en un contexto aleatorio, ya que el problema en consideración se podría suponer en ambiente de certidumbre, construir la función de valor correspondiente como se verá en el presente capítulo, y a partir de ésta pasar mediante alguna trnsformación apropiada, aspecto que trataremos en el capítulo siguiente, a la determinación de una función de utilidad (en ambiente de incertidumbre) que refleje las preferencias del decisor.

I.1.- Nomenclatura y notación.-

Hay cierto confusionismo de nomenclatura en los libros y memorias, y nosotros vamos a fijar la siguiente para el resto del trabajo:

Tenemos un conjunto $\mathcal{A}$ de alternativas, actos o decisiones, $a \in \mathcal{A}$, como consecuencia de una de las cuales se obtiene un resultado. Un resultado es, pues, un ente u objeto seguro que se recibe como consecuencia de la decisión y que es suceptible de identificación mediante N atributos o cualidades características, que suponemos suceptibles de medidas o evaluadores:

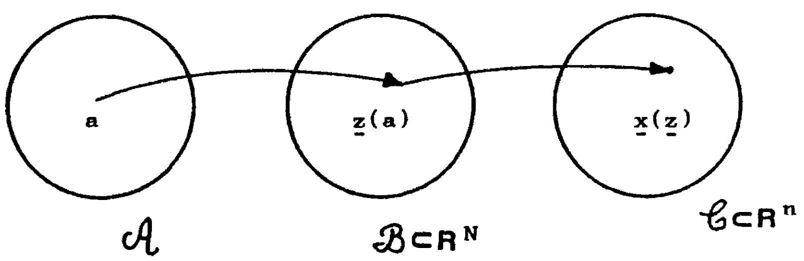
$$(z_1 (a), z_2 (a), \ldots., z_n (a)) = \underline{z} (a)$$

Consideramos objetivos o criterios como ciertas características (algunas coincidirán con los atributos, otras dependerán de todos o algunos de ellos) que el decisor está interesado en optimizar.

Supondremos que estos criterios son n y que se designan por

$$(x_1 (\underline{z}(a)), x_2(\underline{z}(a)), \ldots. , x_n (\underline{z}(a))) = \underline{x} (\underline{z}(a))$$

Así $\underline{x}(\underline{z})$ es una aplicación $R^N \longrightarrow R^n$, mientras $\underline{z}(a)$ es una aplicación $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B} \subset R^N$. Es frecuente que haya una jerarquía de atributos en dependencia unos de otros.



En esta nomenclatura los objetivos son carácterísticas, cuyas medidas se pueden obtener directamente, mientras los criterios son introducidos a partir de aquellos como escalas que representan unas ciertas preferencias fijadas por el decisor, y se adaptan a las operaciones que se definen de modo natural en el espacio de atributos. Se consideran de un modo especial en este trabajo objetivos de 1ª etapa, de 2ª etapa, etc.

I.2.- Un ejemplo introductorio.-

Comencemos exponiendo un sencillo ejemplo, que será útil para fijar las ideas dadas anteriormente y pasar luego a su formalización.

Sea $\mathcal{A}$ un conjunto de coches que un decisor puede comprar. En cada elemento $a \in \mathcal{A}$, considera atributos con $z_1(a)$= velocidad máxima, $z_2(a)$= recorrido de frenado, $z_3(a)$= cilindrada, etc. Inmediatamente después el decisor puede fijar algunos criterios de preferencia, cada uno de ellos dependiente de uno o mas atributos:

$$x_1\ (z_1,z_2);\ x_2(z_2,z_3),\ldots$$

Supongamos otro ejemplo en que un inversor que posee un cierto capital C, y desea depositar una parte de éste en una cuenta corriente (atributo z_1), otra parte del capital invertirlo en acciones de la Telefónica (atributo z_2), y otra en Explosivos (atributo z_3). Supongamos que a la hora de hacer la distribución de su capital, desea tener en cuenta dos aspectos, que serán por una parte la <u>renta</u>, a la que llamará <u>objetivo</u> x_1, y por otro lado la liquidez (medida por algún índice apropiado) u objetivo x_2, que le pueden producir las posibles reparticiones que pueda hacer de su capital en los tres valores citados.

Esquematicamente el problema del inversor se podría representar en la forma de la figura 2.1., ya que en este caso se confunde el espacio $\mathcal{A}$ con el $\mathcal{B}$.

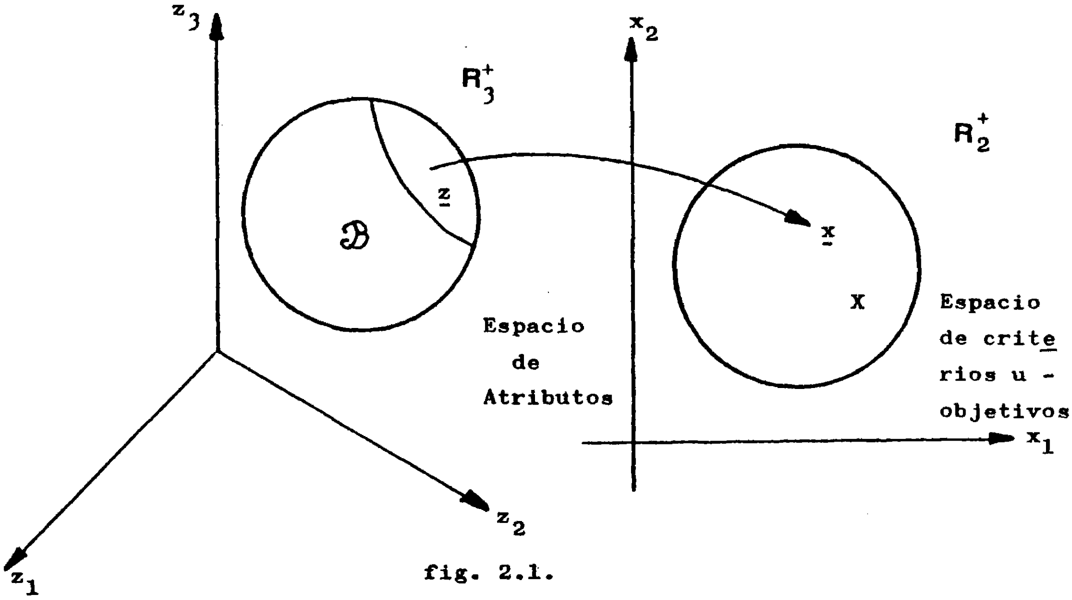


fig. 2.1.

Espacio de atributos	Espacio de objetivos
z_1 pts en cuenta corriente	$x_1 = x_1(z_1,z_2,z_3)$=renta
z_2 pts. en accs. Telefónica	$x_2 = x_2(z_1,z_2,z_3)$=liquidez
z_3 pts. en accs. Explosivos	

$$z_1 + z_2 + z_3 = C \text{ (capital)}$$

Para abordar el problema, el primer paso será construir -- una función de valor vectorial en el espacio de atributos (o decisiones), y que toma valores en el espacio de objetivos, y refleja la importancia que el inversor asigna a los atributos (z_1, z_2, z_3) en relación con la renta x_1, y en relación con la liquidez x_2. -- A continuación podría interesar construir una función de valor escalar sobre el espacio de objetivos que refleje las preferencias del decisor respecto de las distintas posibilidades (x_1, x_2) de -- renta y liquidez. Como se vé, este sencillo ejemplo, se podría - extender tanto en la dimensión de los espacios considerados al suponer mayor número de atributos y objetivos, como en la consideración de otros nuevos espacios de objetivos de 2ª etapa, 3ª etapa, etc.

Intuitivamente la idea que se va a desarrollar y que está contenida en los teoremas que se verán más adelante es ir haciendo una reducción en la dimensión de los sucesivos espacios de objetivos en consideración, usando como puente entre ellos una función de valor vectorial para pasar después, al problema de optimación. En cada una de las etapas el conjunto de puntos que son maximales se va reduciendo y el proceso es convergente. En la práctica esta reducción sucesiva se hará de acuerdo con el decisor de - modo que éste pida la continuación del proceso, si no está satisfecho con la reducción del conjunto maximal a que se ha llegado.

Esta es la idea directriz del proceso que vamos a exponer, que podría llamarse "método secuencial de funciones de valor vectoriales". Este método participa del rigor axiomático de los métodos de las funciones de valor y utilidad, de la escuela americana (Raiffa, Fishburn, Debreu, etc.), y en cierto modo, también de la flexibilidad y adaptabilidad de los métodos interactivos de ayuda a la decisión mediante superclasificación, seguidos por Roy y la escuela francesa.

I.3.- Formalización del método. Teoremas principales.-

Para formalizar esta metodología, se dará en primer lugar un teorema que introduce una función de valor vectorial, cuyas componentes serán los objetivos de 1ª etapa, que son los primeros considerados después de los atributos, es decir, una función de valor vectorial que nos hace pasar del espacio N-dimensional de los atributos al espacio n-dimensional de los objetivos de primera etapa [(2)]. (En nuestro ejemplo del inversor de bolsa, se pasaría de un espacio de $N = 3$ dimensiones puesto que es tres el número de atributos, a uno de $n = 2$ ya que son dos los objetivos de primera etapa bajo consideración).

Veamos ahora un teorema que formaliza las ideas indicadas, introduciendo una función vectorial de valor, que viene a representar una generalización de la función escalar de valor de Wold-Debreu (Ríos Insua, 1976 y Koopmans, 1972).

TEOREMA 3.1.

Sea $\mathcal{B} \equiv R_N^+$ un conjunto de elementos $\underline{z} = (z_1, \ldots, z_N)$ (que corresponden a los N atributos) y supongamos que el individuo tiene un comportamiento preferencial regulado por el conjunto de axiomas siguientes:

1.- Las preferencias están reguladas por n preórdenes completos[3] $\succsim_i$:

$$(z_1,\ldots,z_N) \succsim_i (z'_1,\ldots,z'_N) \quad (i=1,\ldots,n)$$

(cada uno de ellos asociado a un objetivo).

2.- El orden parcial natural definido por

$$(z_1,\ldots,z_N) \geqq (z'_1,\ldots,z'_N) \text{ cuando } z_j \geqslant z'_j, \ \forall_j$$

$$(z_1,\ldots,z_N) \dot{>} (z'_1,\ldots,z'_N) \text{ cuando } z_j \geqslant z'_j, \ \forall_j$$

y $z_t > z'_t$ para algún t , es compatible con los preórdenes -- $\succsim_i$ $(i = 1,\ldots,n)$, es decir

$$\left.\begin{array}{l} \underline{z} \geqq \underline{z}' \Rightarrow \underline{z} \succsim_i \underline{z}' \\ \underline{z} \dot{>} \underline{z}' \Rightarrow \underline{z} \succ_i \underline{z}' \end{array}\right\} \quad i = 1,\ldots,n$$

3.- Si $\underline{z} \succsim_i \underline{z}' \succsim_i \underline{z}''$ $(i=1,\ldots,n)$, existe $\lambda_i \in [0,1]$ y tal que

$$\underline{z}' \sim_i \lambda_i \underline{z} + (1-\lambda_i)\underline{z}''$$

En estas condiciones existe una función de valor vectorial, continua, isótona y fiel

$$\underline{x}(\underline{z}) : R_N^+ \longrightarrow R_n^+$$

donde $\qquad \underline{x}(\underline{z}) = (x_1(\underline{z}),\ldots, x_n(\underline{z}))$

es decir, tal que

$$\left.\begin{array}{l} \underline{z} \succ_i \underline{z}' \Longleftrightarrow x_i(\underline{z}) > x_i(\underline{z}') \\ \underline{z} \sim_i \underline{z}' \Longleftrightarrow x_i(\underline{z}) = x_i(\underline{z}') \end{array}\right\} \quad i = 1,2,\ldots,n$$

Además, tal función es única salvo una transformación monótona. Es decir, si existe otra función vectorial $\underline{y}\ (\underline{z})$ que tiene las mismas propiedades citadas que $\underline{x}\ (\underline{z})$, se verifica que

$$y_i\ (\underline{z}) = g_i\ (x_i\ (\underline{z})) \quad (i = 1,\ldots,n)$$

siendo g_i $(i = 1,\ldots.,n)$ funciones estrictamente monótonas, y continuas.

<u>DEMOSTRACION</u>.-

Se tiene en R_N^+ definidos n preórdenes completos $\succsim_i$, cada uno de ellos respecto de uno de los n objetivos de primera etapa.

Vamos a probar que para cada i=1,....,n existe una función

$$x_i\ (\underline{z})\ :\ R_N^+ \longrightarrow R^+$$

continua, isótona y fiel, siendo además única salvo una transformación estrictamente monótona, y continua. Una vez demostrado esto, tendremos probada la existencia de la función vectorial $\underline{x}\ (\underline{z})$ con las propiedades indicadas.

En efecto, sea un elemento $\underline{z}^o \succ 0$, y sea el subconjunto

$$Z = \left\{ \underline{z} \in R_N^+ \ /\ \exists\ \lambda \geq 0,\ \underline{z} = \lambda\, \underline{z}^o \right\} \subset R_N^+$$

Este subconjunto Z, está completamente ordenado como consecuencia del axioma 2, pues dados $\underline{z}^1,\ \underline{z}^2 \in Z$, existen $\lambda_1,\ \lambda_2 \geq 0$ tales que

$$\underline{z}^1 = \lambda_1\, \underline{z}^o$$
$$\underline{z}^2 = \lambda_2\, \underline{z}^o \qquad \text{y}$$

o bien $\lambda_1 > \lambda_2$ luego $\lambda_1 \underline{z}^o \dot{>} \lambda_2 \underline{z}^o \Rightarrow \underline{z}^1 \succ_i \underline{z}^2$,

o bien $\lambda_1 < \lambda_2$ luego $\lambda_1 \underline{z}^o \dot{<} \lambda_2 \underline{z}^o \Rightarrow \underline{z}^1 \nsucc_i \underline{z}^2$, y

o bien $\lambda_1 = \lambda_2$ luego $\lambda_1 \underline{z}^o = \lambda_2 \underline{z}^o \Rightarrow \underline{z}^1 \sim_i \underline{z}^2$.

Definamos ahora la función

$$\nu_i : Z \longrightarrow R^+$$

en la forma siguiente:

$$\nu_i (\underline{z}) = \lambda \quad , \quad \text{si es } \underline{z} = \lambda \underline{z}^o$$

Esta función $\nu_i (\underline{z})$, así definida es isótona y fiel, siendo además $\nu_i (0) = 0$ y $\nu_i (\underline{z}^o) = 1$.

Veamos que es isótona. Para ello, sean $\underline{z}^1$, $\underline{z}^2 \in Z$, tales - que $\underline{z}^1 \succ_i \underline{z}^2$, será entonces

$$\underline{z}^1 = \lambda_1 \underline{z}^o \succ_i \lambda_2 \underline{z}^o = \underline{z}^2$$

luego $\lambda_1 > \lambda_2$ y puesto que $\nu_i (\underline{z}^1) = \lambda_1$ y $\nu_i (\underline{z}^2) = \lambda_2$, será -- $\nu_i (\underline{z}^1) > \nu_i (\underline{z}^2)$.

Supongamos ahora $\underline{z}^1 \sim_i \underline{z}^2$, tendremos que

$$\underline{z}^1 = \lambda_1 \underline{z}^o \sim_i \lambda_2 \underline{z}^o = \underline{z}^2$$

luego $\lambda_1 = \lambda_2$, que implica que $\nu_i (\underline{z}^1) = \nu_i (\underline{z}^2)$.

Por tanto, $\nu_i (\underline{z})$ es isótona y además fiel por ser el preorden $\succsim_i$ completo.

Vamos a extender ahora la función $\nu_i(\underline{z})$ a todo R_N^+.

Dado $\underline{z} \in R_N^+$, se pueden encontrar dos números λ_1, λ_2 tales que

$$\lambda_2 \underline{z}^o \geqq \underline{z} \geqq \lambda_1 \underline{z}^o \geqq 0.$$

Por el axioma 2, será

$$\lambda_2 \underline{z}^o \succsim_i \underline{z} \succsim_i \lambda_1 \underline{z}^o,$$

y en virtud del axioma 3, existirá un $\mu \in [0,1]$ tal que

$$\underline{z} \sim_i \mu \lambda_1 \underline{z}^o + (1-\mu) \lambda_2 \underline{z}^o = (\mu \lambda_1 + (1-\mu)\lambda_2) \underline{z}^o = \underline{z}' \in Z$$

ya que $1 \geqq \mu \lambda_1 + (1-\mu)\lambda_2 \geqq 0$.

Por tanto, dado $\underline{z} \in R_N^+$, existe un $\underline{z}' \in Z$ tal que $\underline{z} \sim \underline{z}'$.

Definimos entonces la función

$$x_i(\underline{z}) : R_N^+ \longrightarrow R^+$$

por el convenio

$$x_i(\underline{z}) = \lambda \quad \text{si} \quad \underline{z} \sim_i \lambda \underline{z}^o$$

Esta función $x_i(\underline{z})$ así definida, es isótona por serlo la función $\nu_i(\underline{z})$ y fiel ya que el preorden $\succsim_i$ es completo. Además $x_i(\underline{z})$ es continua en cada punto $\underline{z} \in R_N^+$, es decir, dado un $\varepsilon > 0$ se puede determinar un $\delta > 0$ tal que si $d(\underline{z}, \underline{z}') < \delta$, entonces $|x_i(\underline{z}) - x_i(\underline{z}')| < \varepsilon$. En efecto, sea $x_i(\underline{z}') = \lambda$, es decir $\underline{z}' \sim_i \lambda_1 \underline{z}^o$ y sean $\lambda_1 = \lambda + \varepsilon$, $\lambda_2 = \lambda - \varepsilon$ tales que

$$\lambda + \varepsilon = x_i(\lambda_1 \underline{z}^o) > x_i(\lambda \underline{z}^o) = \lambda > x_i(\lambda_2 \underline{z}^o) = \lambda - \varepsilon$$

Como consecuencia del axioma 3, resulta fácilmente que los conjuntos

$$C_1 = \left\{ \underline{z} : \lambda_1 \underline{z}^o \succ_i \underline{z} \right\}$$

$$C_2 = \left\{ \underline{z} : \underline{z} \succ_i \lambda_2 \underline{z}^o \right\}$$

son abiertos.

En efecto; sea $\zeta \in C_1$, luego $\zeta \prec_i \lambda_1 \underline{z}^o$. Sea $\zeta' > \lambda_1 \underline{z}^o + \zeta$,

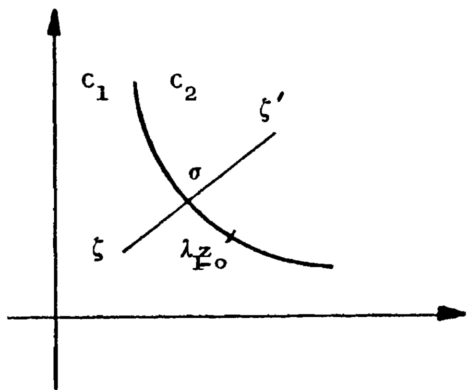


fig. 3.1.

luego $\zeta' > \lambda_1 \underline{z}^o$, $\zeta' > \zeta$ y $\zeta' \succ_i \lambda_1 \underline{z}^o$, luego por el axioma 3, existe β tal que

$$\lambda_1 \underline{z}^o \sim_i \beta \zeta + (1 - \beta) \zeta' = \sigma \ , \quad \sigma > \zeta \ .$$

Si tomamos $\varepsilon < \frac{1}{2} \min_i \left| \zeta_i' - \sigma_i' \right|$, se verifica que el entorno $E_\varepsilon(\zeta)$ está contenido en C_1, luego C_1 es abierto. También es abierto $I = C_1 \cap C_2$. Como $\underline{z}' \in I$, existirá un entorno $E_\delta(\underline{z}')$ -- contenido en I, y para todo $\underline{z} \in E_\delta(\underline{z}')$ será

$$\lambda_2 \underline{z}^o = (\lambda - \varepsilon) \underline{z}^o \prec_i \underline{z} \prec_i (\lambda + \varepsilon) \underline{z}^o = \lambda_1 \underline{z}^o ,$$

y como $\qquad x_i\ (\underline{z})$ es isótona

$$\lambda - \varepsilon < x_i\ (\underline{z}) < \lambda + \varepsilon$$

o bien

$$- \varepsilon < x_i\ (\underline{z}) - \lambda < \varepsilon\ .$$

como $\qquad \lambda = x_i\ (\underline{z}'),$

$$\left| x_i\ (\underline{z}) - x_i\ (\underline{z}') \right| < \varepsilon$$

Probemos ahora que la función de valor $x_i\ (\underline{z})$, es única salvo una transformación estrictamente monótona, y continua, es decir, que para toda otra $y_i\ (\underline{z})$ continua(4) y monótona de $\underline{z}$, es $y_i\ (x_i)$ continua y monótona de x_i.

En efecto, supongamos que existe otra función vectorial $\underline{y}\ (\underline{z})$ con las mismas propiedades que $\underline{x}\ (\underline{z})$, y vamos a ver la relación entre $y_i\ (\underline{z})$ y $x_i\ (\underline{z})$. Si llamamos $[\underline{z}]$ a la clase de todos los elementos equivalentes a $\underline{z}$, tenemos que a cada $[\underline{z}]$ corresponden dos números $x_i\ (\underline{z})$, $y_i\ (\underline{z})$. Podemos establecer una correspondencia 1-1 entre x_i e y_i, y vamos a ver que es estrictamente monótona en ambos sentidos. En efecto,

$$x_i\ (\underline{z}^1) > x_i\ (\underline{z}^2) \Longleftrightarrow \underline{z}^1 \succ_i \underline{z}^2 \Longleftrightarrow y_i\ (\underline{z}^1) > y_i\ (\underline{z}^2)$$

Al ser $y_i(x_i)$ función estrictamente monótona y análogamente $x_i\ (y_i)$, resulta que al intervalo comprendido entre dos valores fijados de una de las variables corresponde el intervalo entre los valores homólogos de la otra; luego los valores de y_i quedan dentro del entorno $(y_i(x_i^o) - \varepsilon, y_i(x_i^o) + \varepsilon)$ sin más que tomar x_i en el intervalo $(x_i^o - \delta, x_i^o + \delta)$, y recíprocamente, luego $y_i(x_i)$ y $x_i(y_i)$ son ambas continuas.

Puesto que se ha probado que cada función $x_i(\underline{z})$ $(i=1,....,n)$ es isótona, fiel y continua, y única salvo una transformación estrictamente monótona y continua, se tendrá que la función vectorial $\underline{x}(\underline{z})$ cumplirá las propiedades exigidas y el teorema queda probado.

El caso más sencillo, relativo a este teorema, es aquel en que n = 1, es decir, el caso en que el espacio $\mathcal{O}$ de objetivos de primera etapa está formado por un único objetivo, con lo cual se tendrá en $\mathcal{B}$ una única relación de preorden completo, y el proceso de reducción constaria de una sola etapa puesto que se pasaría de un espacio de N dimensiones a uno de una dimensión. En tal caso se obtendria una función de valor escalar

$$V(\underline{z}) = v(z_1, ..., z_N)$$

A este caso, se refiere el teorema de Wold-Debreu, sobre el modelo de "utilidad para complejos de bienes en certidumbre", iniciado en los problemas clásicos de la economía del consumidor y del que el teorema dado es una generalización.

El otro caso extremo se presenta cuando n = N, y cada atributo debe ser asociado a un criterio de optimización.

Es importante recordar, que la principal idea que se persi gue es hacer lo más fácil posible al decisor la determinación de la decisión óptima. Entonces resulta interesante la situación en que hay la posibilidad de establecer relaciones entre los n objetivos de primera etapa, lo que permite llegar mediante una nueva función de valor vectorial a un espacio de objetivos de segunda - etapa, siendo este último espacio de menor dimensión que el anterior. De esto se ocupa precisamente, el siguiente

TEOREMA 3.2.

Sea $\mathcal{C} \equiv R_n^+$ un conjunto de elementos

$$\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$$

que representan n objetivos de primera etapa de evaluación de un decisor, y supongamos que existan k objetivos de segunda etapa, - siendo $k < n$, tal que

1.- Las preferencias están reguladas por k preórdenes completas $\succsim'_i$

$$(x_1, \ldots, x_n) \succsim'_i (x'_1, \ldots, x'_n)$$

(cada uno de ellos asociado a un objetivo de segunda etapa).

2.- El orden parcial natural definido por

$$(x_1, \ldots, x_n) \overset{\bullet}{\gtrsim} (x'_1, \ldots, x'_n) \text{ cuando } x_j \geqslant x'_j \quad \forall_j$$

$$(x_1, \ldots, x_n) \overset{\bullet}{>} (x'_1, \ldots, x'_n) \text{ cuando } x_j \geqslant x'_j \quad \forall_j$$

y $\exists$ t tal que $x_t > x'_t$, es compatible con los preórdenes $\succsim'_i$ (i = 1, 2,...., k), es decir

$$\left.\begin{array}{l} \underline{x} \gtrsim \underline{x}' \Rightarrow \underline{x} \succsim'_i \underline{x}' \\ \underline{x} \dot{>} \underline{x}' \Rightarrow \underline{x} \succ'_i \underline{x}' \end{array}\right\} \quad i = 1,....,k$$

3.- Si $\underline{x} \succsim'_i \underline{x}' \succsim'_i \underline{x}''$, (i = 1,...., k), existe $\lambda_i \in [0,1]$, tal que

$$\underline{x}' \sim'_i \lambda_i \underline{x} + (1-\lambda_i)\underline{x}'' \quad (i = 1,....,k)$$

Con estas condiciones existe una función de valor vectorial, contínua, isótona y fiel

$$v^{\bullet}(\underline{x}) : R^+_n \longrightarrow R^+_k$$

donde

$$v^{\bullet}(\underline{x}) = (v_1(\underline{x}),....,v_k(\underline{x}))$$

Además tal función vectorial es única salvo una transformación estrictamente monótona, y continua.

<u>DEMOSTRACION</u>.-

Análoga a la del teorema 3.1.

Si ahora se aplican de forma reiterada los teoremas 3.1. y 3.2., se llegaría a una representación de la forma

$$V(\underline{z}) = v^{\bullet}(\underline{x}(\underline{z})) = (v_1(\underline{x}(\underline{z})),....,v_k(\underline{x}(\underline{z})))$$

siendo tal descomposición o proceso bietápico aplicable a la resolución del problema de óptimo.

Sin embargo, puede ser interesante considerar sobre el espacio de dimensión k de objetivos de 2ª etapa, una nueva función de valor vectorial para pasar a otro espacio de dimensión l (l objetivos de 3ª etapa) menor que k, a continuación hacer una nueva reducción, etc. Parece entonces natural considerar un proceso polietápico de amalgamación iterada del número de objetivos. P.e. tal situación sería la de un proceso de reducción de 20 atributos a 12 objetivos de primera etapa, después a 3 de segunda etapa y por último a 1 de tercera etapa. Esquematicamente sería

$$\begin{array}{ccccccc}
R^{+}_{20} & \xrightarrow[]{\text{f. de valor vectorial}} & R^{+}_{12} & \xrightarrow[]{\text{f. de valor vectorial}} & R^{+}_{3} & \xrightarrow[\text{de Debreu}]{\text{f. de valor}} & R^{+}_{1} \\
\text{20 atributos} & & \text{12 objetivos de 1ª etapa} & & \text{3 objetivos de 2ª etapa} & & \text{1 objetivo de 3ª etapa}
\end{array}$$

Si este proceso finaliza p.e. en R^{+}_{3}, es decir la dimensión del último espacio a que se ha llegado, tiene dimensión mayor que uno, entonces es interesante hacer una descomposición del tipo aditivo, multiplicativo, etc. (Keeney y Raiffa, 1976), teniendo en cuenta, sin embargo, que el problema de óptimo que tratan de permitir resolver estos teoremas estará mejor definido cuanto más próximo esté a la unidad la dimensión del último espacio de objetivos considerado.

I.4.- Comparación con los teoremas de separabilidad de Debreu.-

Los teoremas de separabilidad de Debreu tienen como objetivo descomponer una función escalar de valor en suma o producto de funciones que dependan de conjuntos parciales de atributos, facilitando así la construcción final de tales funciones.

El proceso que aquí hemos seguido, de construcción de funciones de valor vectoriales, está intimamente relacionado con éste y vamos a precisarlo en lo que sigue.

En tal dirección se van a dar dos nuevos teoremas. En el primero de ellos se considera una situación más general que la del teorema 3.1. y en el segundo una situación particular del primero, y que se refiere a la separación total de la función de valor para subconjuntos de atributos, siendo ésta utilizable para la comparación con los teoremas de separabilidad de Debreu (Ríos Insua, 1977). Es decir, intuitivamente el primer teorema se refiere a la situación intermedia con respecto a las indicadas (teoremas 3.1. y 4.2.), en que sobre cada objetivo influyen conjuntos parciales del conjunto total de atributos, y estos conjuntos parciales serán en general no disjuntos. La situación en que estos conjuntos parciales son disjuntos es la referida antes al caso de separabilidad total y relativa al segundo de los teoremas indicados.

Teniendo en cuenta ésto, se tendrá el siguiente:

TEOREMA 4.1.

Sea $\mathcal{B} \equiv R_N^+$ un conjunto de elementos

$$\underline{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_N)$$

Sea $\underline{z}_1 = (z_{1_1}, \ldots, z_{1_{i_1}}) \in \mathcal{B}_1 \equiv R^+_{i_1}, \ldots,$

$\ldots, \underline{z}_N = (z_{n_1}, \ldots, z_{n_{i_n}}) \in \mathcal{B}_n \equiv R^+_{i_n},$

siendo $\{1_1, \ldots 1_{i_1}\} = I_1, \ldots, \{n_1, \ldots, n_{i_n}\} = I_n$ subconjuntos no vacíos de $I = \{1, 2, \ldots, N\}$ y tales que $\bigcup_{j=1}^{n} I_j = I$, pudiendo ser $I_j \cap I_t \neq \emptyset$ para $j \neq t$.

Supongamos que el individuo tiene un comportamiento preferencial regulado por los siguientes axiomas:

1.- Las preferencias están reguladas en cada $\mathcal{B}_i$ $(i=1, \ldots, n)$ por un preórden completo $\succsim_i$, es decir,

$$\underline{z}_1 = (z_{1_1}, \ldots, z_{1_{i_1}}) \succsim_1 (z'_{1_1}, \ldots, z'_{1_{i_1}}) = \underline{z}'_1;\ \underline{z}_1, \underline{z}'_1 \in \mathcal{B}_1$$

$$\vdots$$

$$\underline{z}_n = (z_{n_1}, \ldots, z_{n_{i_n}}) \succsim_n (z'_{n_1}, \ldots, z'_{n_{i_n}}) = \underline{z}'_n;\ \underline{z}_n, \underline{z}'_n \in \mathcal{B}_n$$

(cada uno de ellos asociado a uno de los n objetivos)

2.- El orden parcial natural definido por

$$\underline{z}_i \geqslant^{\bullet} \underline{z}'_i$$

$$\underline{z}_i >^{\bullet} \underline{z}'_i$$

es compatible con los preórdenes $\succsim_i$ (i = 1,....,n) es decir

$$\left.\begin{array}{l} \underline{z}_i \overset{\bullet}{\gtrsim} \underline{z}_i' \Rightarrow \underline{z}_i \succsim_i \underline{z}_i' \\ \\ \underline{z}_i \overset{\bullet}{>} \underline{z}_i' \Rightarrow \underline{z}_i \succ_i \underline{z}_i' \end{array}\right\} \quad i = 1, \ldots, n$$

3.- Si $\underline{z}_i \succsim_i \underline{z}_i' \succsim_i \underline{z}_i''$ (i = 1,....,n) existe un $\lambda_i \in [0,1]$ tal que

$$\underline{z}_i' \sim_i \lambda_i \underline{z}_i + (1-\lambda_i)\, \underline{z}_i''$$

En estas condiciones existe una función de valor vectorial, continua isótona y fiel

$$\underline{x}(\underline{z}) = (x_1(\underline{z}_1), \ldots, x_n(\underline{z}_n))$$

donde
$$\begin{array}{l} x_1(\underline{z}_1):\ R^+_{i_1} \longrightarrow R^+ \\ \quad\vdots \\ x_n(\underline{z}_n):\ R^+_{i_n} \longrightarrow R^+ \end{array}$$

Además tal función es única salvo una transformación estrictamente monótona y continua. Es decir, si existe otra función vectorial $\underline{y}(\underline{z})$ que tiene las mismas propiedades que $\underline{x}(\underline{z})$, se verifica que

$$y_i(\underline{z}_i) = g_i(x_i(\underline{z}_i)) \quad (i=1,\ldots,n)$$

siendo g_i (i=1,....,n) funciones estrictamente monótonas y continuas.

La demostración es análoga a la del teorema 3.1.

A los $\underline{x}$ ($\underline{z}$) se les podría aplicar el teorema 3.2. o bién un teorema análogo, pero en el sentido del teorema dado, es decir, definiendo adecuadamente los preórdenes en subconjuntos parciales -- del conjunto total de objetivos de primera etapa, obteniendo una - nueva función de valor vectorial. Reiterando este procedimiento en la forma indicada en la sección3, es decir, de forma análoga al -- procedimiento polietápico de amalgamación iterada del número de objetivos, se podría considerar un "<u>proceso polietápico de amalgamación parcial iterada</u>", en el sentido del teorema 4.1.; es decir, - en lugar de considerar relaciones de preorden en el conjunto total de atributos (o de objetivos), considerar tales relaciones en subconjuntos parciales de estos. Esto es precisamente lo que se hace en el ejemplo numérico que se dá al comienzo de la sección 4., en la primera etapa de reducción de las dos que se consideran.

Si en el teorema 4.1. se supone que $I_j \cap I_t = \emptyset$, si $j \neq t$, que intuitivamente representará el caso particular en que se ha hecho una partición del conjunto de atributos y cada subconjunto de esta partición influye sobre un objetivo, tendríamos la situación relativa a la utilidad ramificada o arborescente (Gorman, 1959, y Strotz, 1959) o de separabilidad total, que responde al hecho intuitivo de la independencia preferencial en grupos de bienes de -- consumo, como podrían ser p.e. transporte, vestidos, alimentos, -- etc. Es decir, considerar la agrupación de conjuntos de atributos facilmente comparables entre sí, y considerarlos separados de otros grupos cuya comparación es posterior y menos natural.

Vamos a ver ahora el teorema que refleja las ideas intuitivas que se acaban de exponer y que es, como se había indicado, un caso particular del teorema 4.1. Este teorema va a ser de utilidad para su comparación con los teoremas de separabilidad de Debreu.

Introduzcamos previamente el concepto de preorden producto.

DEFINICION 4.1.

Sea el conjunto $Z = Z_1 \times \dots \times Z_n$, y $\underline{z} = (\underline{z}_1, \dots, \underline{z}_N) \in Z$, donde $\underline{z}_1 = (z_1, \dots, z_i) \in Z_1$, $\underline{z}_2 = (z_{i+1}, \dots, z_j) \in Z_2, \dots, \underline{z}_n = (z_t, \dots, z_N) \in Z_n$. Definimos los preordenes $\underline{z}_1 \succsim_1 \underline{z}_1'$ (1) en Z_1, $\underline{z}_2 \succsim_2 \underline{z}_2'$ (2) en $Z_2, \dots,$ $\underline{z}_n \succsim_n \underline{z}_n'$ (n) en Z_n.

Entonces se dice que el preorden $(\underline{z}_1, \dots, \underline{z}_n) \succsim (\underline{z}_1', \dots, \underline{z}_n')$(n+1) es el producto de los preórdenes (1),....,(n), si verificarse las relaciones (1),....,(n), equivale a que se verifique la relación (n+1).

TEOREMA 4.2.

Sea $\mathcal{B} \equiv R_N^+$ un conjunto de elementos

$$\underline{z} = (\underline{z}_1, \underline{z}_2, \dots, \underline{z}_n)$$

donde $\underline{z}_1 = (z_1, \dots, z_i)$, $\underline{z}_2 = (z_{i+1}, \dots, z_j), \dots, \underline{z}_n = (z_t, \dots, z_N)$ y supongamos que se verifican los siguientes axiomas:

1.- Las preferencias están reguladas por n preórdenes completos $\succsim_i$ $(i = 1, \dots, n)$

$$\underline{z}_1 \succsim_1 \underline{z}_1', \dots, \underline{z}_n \succsim_n \underline{z}_n'$$

que subordinan un preorden $\succsim$ en $\mathcal{B}$ definido por

$$(\underline{z}_1,\ldots,\underline{z}_n) \succsim (\underline{z}'_1,\ldots,\underline{z}'_n) \Longleftrightarrow \begin{cases} \underline{z}_1 \succsim_1 \underline{z}'_1 \\ \vdots \\ \underline{z}_n \succsim_n \underline{z}'_n \end{cases}$$

2.- El orden parcial natural definido por

$$\underline{z}_i \overset{\bullet}{\geqslant} \underline{z}'_i$$

$$\underline{z}_i \overset{\bullet}{>} \underline{z}'_i$$

es compatible con el preorden $\succsim_i$ $(i=1,\ldots,n)$, es decir,

$$\left.\begin{array}{l} \underline{z}_i \overset{\bullet}{\geqslant} \underline{z}'_i \Rightarrow \underline{z}_i \succsim_i \underline{z}'_i \\ \underline{z}_i \overset{\bullet}{>} \underline{z}'_i \Rightarrow \underline{z}_i \succ_i \underline{z}'_i \end{array}\right\} \quad (i=1,\ldots,n)$$

3.- Si $\underline{z}_i \succsim_i \underline{z}'_i \succsim_i \underline{z}''_i$ $(i=1,\ldots,n)$, entonces existe un -- $\lambda_i \in [0,1]$, tal que

$$\underline{z}'_i \sim_i \lambda_i \underline{z}_i + (1-\lambda_i)\, \underline{z}''_i$$

En estas condiciones existe una función de valor vectorial, continua isótona y fiel

$$\underline{x}(\underline{z}) = (x_1(\underline{z}_1),\ldots,x_n(\underline{z}_n))$$

donde

$$\begin{array}{l} x_1(\underline{z}_1):\ R_1^+ \longrightarrow R^+ \\ \quad\vdots \\ x_n(\underline{z}_n):\ R_{n-t+1}^+ \longrightarrow R^+ \end{array}$$

es decir tal que

$$\left.\begin{array}{l} \underline{z}_i \succ_i \underline{z}_i' \Longleftrightarrow x_i\ (\underline{z}_i) > x_i\ (\underline{z}_i') \\ \\ \underline{z}_i \sim_i \underline{z}_i' \Longleftrightarrow x_i\ (\underline{z}_i) = x_i\ (\underline{z}_i') \end{array}\right\} \quad (i=1,\ldots.,n)$$

Tales funciones $x_i\ (\underline{z}_i)$ son únicas salvo funciones estrictamente monótonas, y continuas.

<u>DEMOSTRACION</u>.-

Mediante un razonamiento análogo al del teorema 3.1., se demuestra la existencia de la función x_i $(i=1,\ldots.,n)$ isótona, fiel y continua, y única salvo transformaciones estrictamente monótonas y continuas.

Ahora bien, por definición de preorden producto en la hipótesis 1, se tiene

$$\underline{z} \succsim \underline{z}' \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \underline{z}_1 \succsim_1 \underline{z}_1' \\ \vdots \\ \underline{z}_n \succsim_n \underline{z}_n' \end{array}\right\}$$ y por ser

x_i $(i=1,\ldots.,n)$ fiel, lo anterior equivale a

$$\left\{\begin{array}{c} x_1\ (\underline{z}_1) \geqslant x_1\ (\underline{z}_1') \\ \\ x_n\ (\underline{z}_n) \geqslant \underline{x}_n\ (\underline{z}_n') \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \underline{x}\ (\underline{z}) \dot{\geqslant} \underline{x}\ (\underline{z}')$$

y el teorema queda aprobado.

Si se aplica ahora a los $\underline{x}$ $(\underline{z})$ el teorema 3.2., para el caso en que k = 1, se tendría probada la existencia de una función de valor

$$\emptyset\ (\underline{x}):\ \mathsf{R}_n^+ \longrightarrow \mathsf{R}^+$$

es decir $\emptyset\ (\underline{x}) = \emptyset\ (x_1(\underline{z}_1),\ldots.,\ x_n(\underline{z}_n))$

siendo $\underline{x} \succ \underline{x}' \iff \emptyset\ (\underline{x}) > \emptyset\ (\underline{x}')$

$\underline{x} \sim \underline{x}' \iff \emptyset\ (\underline{x}) = \emptyset\ (\underline{x}')$

y además continua y única salvo una transformación estrictamente monótona y contínua.

Se observa que se ha llegado a un modelo de separabilidad o descomposición total de la forma

$$F\ (\underline{z}_1,\ldots.,\underline{z}_n) = \emptyset\ (x_1\ (\underline{z}_1),\ldots.,x_n\ (\underline{z}_n))$$

es decir, tal que

$$(\underline{z}_1,\ldots.,z_n) \succsim (\underline{z}_1',\ldots.,\underline{z}_n') \quad \text{si y solo si} \tag{4.1.}$$

$$\emptyset\ (x_1\ (\underline{z}_1),\ldots.,x_n\ (\underline{z}_n)) \geqslant \emptyset\ (x_1\ (\underline{z}_1',\ldots.,x_n(\underline{z}_n'))$$

siendo este modelo al que hemos llegado de sustancial ayuda en el análisis de decisiones, pues permite construir la función de valor en una forma más sencilla, a partir de las funciones de valor de las componentes, y por tanto hacer más sencillo el problema de óptimo como se verá en la siguiente sección.

Vamos a comparar ahora estos teoremas con los teoremas de separabilidad de Debreu (Koopmans, 1972 y Ríos Insua, 1976), ya --

que la representación a la que se llega, es análoga a esta última considerada para un caso particular.

Para concretar, supongamos que únicamente se tienen dos objetivos x_1 y x_2, y que hay definidos dos preórdenes completos -- $\succsim_1$ y $\succsim_2$, en la forma

$$\underline{z}_1 \succsim_1 \underline{z}'_1 \qquad \text{donde} \quad (\underline{z}_1, \underline{z}_2) \in Z = Z_1 \times Z_2$$
$$\underline{z}_2 \succsim_2 \underline{z}'_2$$

siendo $\underline{z}_1 = (z_1, \ldots, z_i) \in Z_1$ y $\underline{z}_2 = (z_{i+1}, \ldots, z_N) \in Z_2$.

Aplicando a esta situación el modelo anterior (4.1.), se obtiene una representación de la función de valor de la forma

$$F(\underline{z}) = \emptyset\, (x_1(\underline{z}_1),\, x_2(\underline{z}_2))$$

con las correspondientes propiedades.

Antes de pasar a la comparación de nuestro modelo con los - de separabilidad de Debreu, veamos el concepto de independencia -- preferencial en que se basan tales teoremas, y su equivalencia con el concepto de preorden producto dado en la definición 4.1.

DEFINICION 4.2.

Sea $\succsim$ una relación de preorden definida en $Z = Z_1 \times Z_2$. Se dice que Z_1 es preferencialmente independiente de Z_2, si y solo si al verificarse para algún $\underline{z}'_2$ y todo par $\underline{z}'_1$, $\underline{z}_1 \in Z_1$ la relación -

$$(\underline{z}'_1, \underline{z}'_2) \succsim (\underline{z}_1, \underline{z}'_2)$$

se verifica necesariamente la relación

$$(\underline{z}_1', \underline{z}_2) \succsim (\underline{z}_1, \underline{z}_2)$$

para todo $\underline{z}_1$, $\underline{z}_1' \in Z_1$ y todo $\underline{z}_2 \in Z_2$.

Analogamente se define la independencia preferencial de Z_2 respecto de Z_1.

Si ahora se parte del teorema de Wold-Debreu que es el caso particular del teorema 3.1. para n = 1, y si a continuación se aplica el

TEOREMA (DE SEPARABILIDAD DE DEBREU)

Sea $\succsim$ un preorden completo definido en el espacio $Z = Z_1 \times Z_2$, representable por una función de utilidad $G(\underline{z}_1, \underline{z}_2)$, y supongamos que los preórdenes inducidos por $\succsim$ sean independientes del vector de referencia $\underline{z}^o = (\underline{z}_1^o, \underline{z}_2^o)$. Entonces se verifica que $G(\underline{z}_1, \underline{z}_2) = F(u(\underline{z}_1), v(\underline{z}_2))$, en que F es una función creciente de u y v. Más aún, si $G(\underline{z}_1, \underline{z}_2)$ está definida en un espacio conexo, y G es continua, entonces $u(\underline{z}_1)$, $v(\underline{z}_2)$ y $F(u,v)$ son continuas y las imágenes de $u(\underline{z}_1)$ y $v(\underline{z}_2)$ son intervalos.

DEMOSTRACION. Koopmans (1972).

Se llega por este camino a una representación separable de la función de valor escalar.

Es de notar que el proceso seguido para llegar a dicha representación es inverso al que se puede obtener a través de nuestros teoremas vectoriales.

En efecto, en los teoremas de Debreu, primero se construye la función de valor total, y despues se hace separable, mientras que en los nuevos teoremas el proceso es inverso, primero se construyen las funciones de valor de las componentes y luego la función que engloba estas.

Un aspecto importante a destacar al comparar ambos teoremas y razón por la cual se llega a una representación análoga de la función de valor, es precisamente la equivalencia que se da entre los conceptos de independencia preferencial del teorema de Debreu y el concepto de preorden producto de nuestro teorema y que viene dado por el siguiente

TEOREMA 4.3.

El preorden $(\underline{z}_1, \underline{z}_2) \succsim (\underline{z}_1', \underline{z}_2')$ (1) en $Z = Z_1 \times Z_2$ es equivalente al conjunto de los preórdenes $\underline{z}_1 \succsim_1 \underline{z}_1'$ (2) en Z_1 y $\underline{z}_2 \succsim_2 \underline{z}_2'$ (3) en Z_2 si y solo si Z_1 es preferencialmente independiente de Z_2, y Z_2 es preferencialmente independiente de Z_1.

DEMOSTRACION.-

Veamos que si el preorden (1) es equivalente al conjunto de los (2) y (3), entonces Z_1 es preferencialmente independiente de Z_2 y Z_2 lo es de Z_1.

En efecto, se tiene que

$$(\underline{z}_1', \underline{z}_2') \succsim (\underline{z}_1, \underline{z}_2') \Longleftrightarrow \underline{z}_1' \succsim_1 \underline{z}_1 \text{ y } \underline{z}_2' \succsim_2 \underline{z}_2'$$

como evidentemente es $\underline{z}_2 \succsim_2 \underline{z}_2$ para todo $\underline{z}_2 \in Z_2$ resulta que --

$(\underline{z}_1', \underline{z}_2) \succsim (\underline{z}_1, \underline{z}_2)$ y Z_1 es preferencialmente independiente de Z_2. De forma análoga se prueba que Z_2 lo es de Z_1.

Recíprocamente, supongamos ahora

Z_1 preferencialmente independiente de Z_2 y

Z_2 preferencialmente independiente de Z_1.

Podemos definir

$$\underline{z}_1' \succsim_1 \underline{z}_1 \Longleftrightarrow (\underline{z}_1', \underline{z}_2) \succsim (\underline{z}_1, \underline{z}_2) \text{ para todo } \underline{z}_2 \in Z_2$$

$$\underline{z}_2' \succsim_2 \underline{z}_2 \Longleftrightarrow (\underline{z}_1, \underline{z}_2') \succsim (\underline{z}_1, \underline{z}_2) \text{ para todo } \underline{z}_1 \in Z_1.$$

Comprobemos que

$$\underline{z}_1' \succsim_1 \underline{z}_1;\ \underline{z}_2' \succsim_2 \underline{z}_2 \Longleftrightarrow (\underline{z}_1', \underline{z}_2') \succsim (\underline{z}_1, \underline{z}_2).$$

En efecto,

si $\underline{z}_1' \succsim_1 \underline{z}_1 \Rightarrow$ para $\underline{z}_2' \in Z_2$, $(\underline{z}_1', \underline{z}_2') \succsim (\underline{z}_1, \underline{z}_2')$

y como Z_1 es preferencialmente independiente de Z_2,

$$(\underline{z}_1', \underline{z}_2) \succsim (\underline{z}_1, \underline{z}_2) \text{ para todo } \underline{z}_2 \in Z_2 \quad \text{(a)}$$

Por otra parte,

si $\underline{z}_2' \succsim_2 \underline{z}_2 \Rightarrow$ para $\underline{z}_1' \in Z_1$, es

$$(\underline{z}_1', \underline{z}_2') \succsim (\underline{z}_1', \underline{z}_2) \quad \text{(b)}$$

Y por la transitividad de $\succsim$, de (a) y (b) se deduce que

$$(\underline{z}_1', \underline{z}_2') \succsim (\underline{z}_1, \underline{z}_2).$$

Reciprocamente,

si $(\underline{z}_1', \underline{z}_2') \succsim (\underline{z}_1, \underline{z}_2) \Rightarrow$ para $\underline{z}_1'$, $(\underline{z}_1', \underline{z}_2') \succsim (\underline{z}_1', \underline{z}_2)$

y por ser Z_2 preferencialmente independiente de Z_1, $(\underline{z}_1, \underline{z}_2') \succsim (\underline{z}_1, \underline{z}_2)$ para tod $\underline{z}_1 \in Z_1$, que equivale a $\underline{z}_2' \succsim_2 \underline{z}_2$.

Por otra parte, si $(\underline{z}_1', \underline{z}_2') \succsim (\underline{z}_1, \underline{z}_2) \Rightarrow$ para

$\underline{z}_2'$, $(\underline{z}_1', \underline{z}_2') \succsim (\underline{z}_1, \underline{z}_2')$, y por ser Z_1 preferencialmente independiente de Z_2, es

$$(\underline{z}_1', \underline{z}_2) \succsim (\underline{z}_1, \underline{z}_2) \text{ para todo } \underline{z}_2 \in Z_2$$

que equivale a $\underline{z}_1' \succsim_1 \underline{z}_1$, y el teorema queda probado.

Por otra parte si ahora consideramos $n \geqslant 3$ objetivos, el teorema de Debreu da una representación de la función de valor de tipo aditivo

$$G(z) = f_1(\underline{z}_1) + \dots + f_n(\underline{z}_n)$$

que es mucho mas estricta que la representación

$$F(\underline{z}) = \emptyset(x_1(\underline{z}_1), \dots, x_n(\underline{z}_n))$$

de nuestros teoremas, pero que como es natural requiere condiciones de independencia preferencial mas fuertes (5).

De aquí el interés de nuestros teoremas de separación.

Vamos a dar a continuación una generalización del teorema de Debreu (1954), siendo ésta un teorema más general que el 3.1. y en el que se suprime el segundo axioma (orden parcial natural -

implica el preorden fijado) y considera el espacio $\mathcal{B}$ de atributos un espacio topológico separable y conexo.

TEOREMA 4.4.

Sea el espacio de atributos $\mathcal{B}$ un espacio topológico separable y conexo, siendo sus elementos $\underline{z}$. Supongamos que hay definidos en $\mathcal{B}$ n preórdenes completos $\succsim_i$ $(i=1,\dots,n)$ - (cada uno de ellos asociado a un objetivo). Si para cada $\underline{z}' \in \mathcal{B}$ y cada $i = 1,\dots,n$ los conjuntos $\left\{\underline{z}/\underline{z} \precsim_i \underline{z}'\right\}$ y $\left\{\underline{z}/\underline{z}' \precsim_i \underline{z}\right\}$ - son cerrados, entonces existe una función de valor vectorial

$$\underline{x}\ (\underline{z}) : \mathcal{B} \longrightarrow R^n$$

continua y fiel, siendo

$$\underline{x}\ (\underline{z}) = (x_1\ (\underline{z}),\dots,\ x_n\ (\underline{z}))$$

es decir, tal que

$$\underline{z} \succsim_i \underline{z}' \Longleftrightarrow x_i\ (\underline{z}) \geqslant x_i\ (\underline{z}')\ (i=1,\dots,n).$$

La demostración se basa en el siguiente

LEMA.-

Sea X un conjunto en el cual está definido una relación de preorden completo $\succsim$, y sea $Z = \left\{\underline{z}_o, \underline{z}_1, \dots\right\}$ un subconjunto numerable de X, si para cada par $\underline{x}$, $\underline{y} \in X$, tal que $\underline{x} \prec \underline{y}$ hay un elemento $\underline{z}_i \in Z$ tal que $\underline{x} \precsim \underline{z}_i \precsim \underline{y}$ (6), entonces existe en X una función real que conserva el orden y continua en cualquier topología natural (7).

<u>DEMOSTRACION.-</u> Debreu (1954).-

Veamos ahora la demostración del teorema 4.4. Sea Z un conjunto numerable y denso en $\mathcal{B}$. Fijado un $i \in \{1,\dots,n\}$ consideremos un par de elementos $\underline{z}', \underline{z}'' \in \mathcal{B}$, tal que $\underline{z}' \prec_i \underline{z}''$. Los conjuntos $A_1 = \{\underline{z} \in \mathcal{B} / \underline{z} \not\succ_i \underline{z}'\}$ y $A_2 = \{\underline{z} \in \mathcal{B} / \underline{z}'' \not\prec_i \underline{z}\}$ son disjuntos, cerrados y no vacios, y no puede ser $A_1 \cup A_2 = \mathcal{B}$ pues $\mathcal{B}$ es por hipótesis conexo. Por tanto el conjunto abierto $\{\underline{z} \in \mathcal{B} / \underline{z}' \prec_i \underline{z} \prec_i \underline{z}''\}$ es no vacio, luego tiene que contener un elemento $\underline{z}^* \in Z$. Por tanto, puesto que la topología en X es una topología natural aplicando el lema anterior queda probada la existencia de la función $x_i(\underline{z})$ con las propiedades requeridas. Reiterando este procedimiento para todo $i=1,\dots,n$ el teorema quedaría probado.

Es importante destacar, que se puede obtener una demostración a partir de éste, del teorema 3.1., mediante agregación de la condición 2 de este, cuyo enunciado implica considerar el espacio euclídeo R^N.

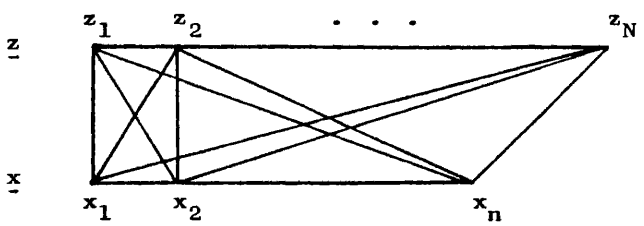
También se podría haber dado un teorema análogo al 3.2., en la misma línea del que acabamos de demostrar. Sin embargo, se ha usado el teorema 3.1. y 3.2. (en lugar de las generalizaciones del de Debreu), por ser más adecuado y suficiente para el correcto desarrollo del proceso polietápico que hemos considerado.

Resulta así que hasta donde el decisor o experimentador pueda llegar en la tarea de evaluación de una situación real de decisión, dependerá de que las suposiciones del correspondiente modelo se verifiquen en la situación real para su correcta aplicación. Estas suposiciones que se hacen, constituyen la base teórica de - los distintos modelos que se consideran y deben ser justificadas sus aplicaciones en las posibles situaciones de elección particular.

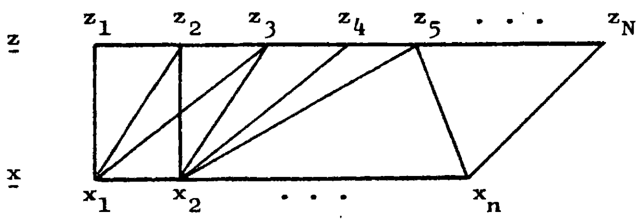
La idea que se ha perseguido en el proceso de construcción de los teoremas es facilitar al máximo posible, la construcción - de la función de valor dentro de unos requerimientos estructura-- les y de información adecuados. Entonces, teniendo en cuenta los teoremas dados, se observan básicamente dos aspectos que dan una ventaja a la metodología desarrollada, respecto de otras. Primero, la amplia gama de modelos que se tienen entre los dos posibles modelos extremos (teoremas 3.1. y 4.2.), y segundo, la posibilidad de elegir, en el proceso polietápico considerado en el cual se -- aplican los distintos modelos indicados, un número de objetivos lo más apropiado en la etapa siguiente a la que se encuentra el - proceso.

En resumen, esta metodología desarrollada goza tanto de un formalismo matemático como de una flexibilidad de adaptación a la situación real que la hace de gran utilidad en los problemas reales de decisión, con los que un individuo pueda enfrentarse.

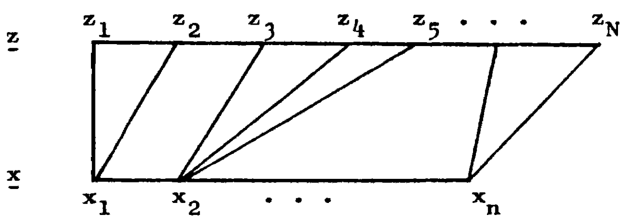
El esquema adjunto indica la relación de variables en los diferentes teoremas indicados.



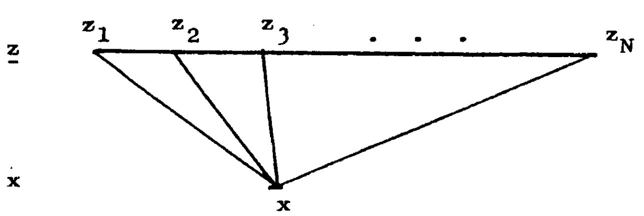
Teorema 3.1.



Teorema 4.1.



Teorema 4.2.
(variables separables)



Teorema Wold-Debreu

I.5.- El problema de optimación, Un ejemplo.-

No vamos a dar aquí teoremas de existencia en relación con el problema del vector máximo, ni tampoco entramos en los métodos matemáticos y algoritmos de la programación. Nos centramos sobre el problema de construcción de la función de valor, cuya evaluación correcta es requisito previo en la metodología mas o menos sofisticada. Si la función de valor vectorial o escalar que se trata de maximizar no responde correctamente a las preferencias del decisor, ningún método de programación conducirá a resultados correctos.

Dentro del citado aspecto del problema de optimación, a saber la construcción de la función de valor, se considerarán tres puntos de vista que, aunque diferentes, están intimamente relacionados entre sí.

Antes de empezar con ellos vamos a dar una ilustración numérica mediante un ejemplo, en que el proceso de reducción consta de dos etapas, y se pasa en la primera etapa mediante una función de valor vectorial de un espacio de tres dimensiones a uno de dos, reduciendo así el conjunto de puntos maximales de interés para el decisor, y en la segunda etapa de un espacio de dos dimensiones a uno de una, obteniendo así una nueva reducción del conjunto de puntos maximales. Este ejemplo es un caso particular del primer punto de vista de los tres que se consideran. A continuación del ejemplo, se dará la formalización en sus aspectos teóricos de este punto de vista, así como de los otros dos que se consideran.

Comencemos con el ejemplo. Supongamos que se producen tres tipos de herramientas en cantidades z_1 de tipo A, z_2 de tipo B, y z_3 de tipo C. Cada herramienta de tipo B ocupa en su fabricación doble tiempo que cada herramienta de tipo C, y cada herramienta de tipo A, doble que la de tipo B. Se supone que, si toda la producción fuera del tipo C, se podrían hacer a lo sumo 1.000 unidades diarias. Además el material de que se dispone diariamente limita a 600 el número total de unidades que se pueden producir. Tendremos entonces las limitaciones

$$\left.\begin{array}{l} 4z_1 + 2z_2 + z_3 \leqslant 1.000 \\ z_1 + z_2 + z_3 \leqslant 600 \\ z_i \geqslant 0 \ (i = 1,\ 2,\ 3) \end{array}\right\} Z$$

donde $Z \subset R_3^+$ es el espacio de atributos o decisiones, que coincide con el poliedro convexo OABMCNA (fig. 5.1.).

El primer propósito del decisor podría ser fabricar lo máximo de cada tipo; pero este punto de vista pronto le conduce a que no tiene sentido hacer máxima cada una de las z_i $(i = 1, 2, 3)$, y que lo que puede alcanzar son los puntos maximales del conjunto Z que forman un conjunto muy extenso. Este conjunto de puntos maximales sería el conjunto de dos polígonos (rayados) ABMCNA (fig. 5.1.)

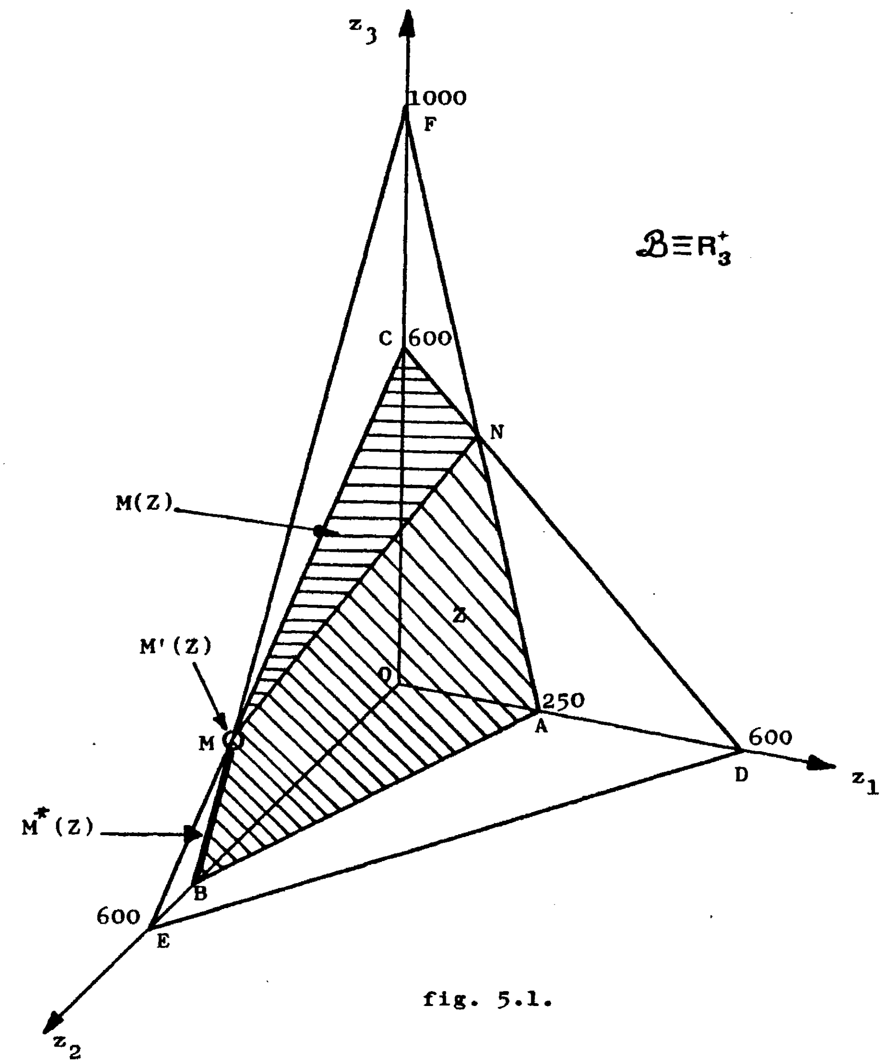


fig. 5.1.

Supongamos ahora que el decisor introdujera dos objetivos: 1º hacer máxima la ganancia total sabiendo que gana 0,5 por unidad A, 0,4 por unidad de B y 0,1 por unidad de C; 2º hacer máximo el número de unidades producidas de tipos B y C. Tendríamos así que hacer maximas

$$x_1 = 0{,}5\ z_1 + 0{,}4\ z_2 + 0{,}1\ z_3$$
$$x_2 = 0{,}5\ z_2 + 0{,}5\ z_3 \qquad (1)$$

Si ahora quiere hacer máximos x_1 y x_2, se encontrará que - tampoco tiene sentido más que obtener los maximales del conjunto $X \subset \mathbb{R}_2^+$, obtenido de Z mediante la transformación (1), y que se corresponderán con un subconjunto del conjunto de los puntos maximales de Z, que es el de los puntos eficientes respecto del par - de objetivos fijados.

En efecto, sea X el polígono convexo O'C'M'B'A'O' (fig. - 5.2.), donde A',B',C',M',N',O' son respectivamente los transformados - mediante (1) de los putnos A,B,C,M,N,O.

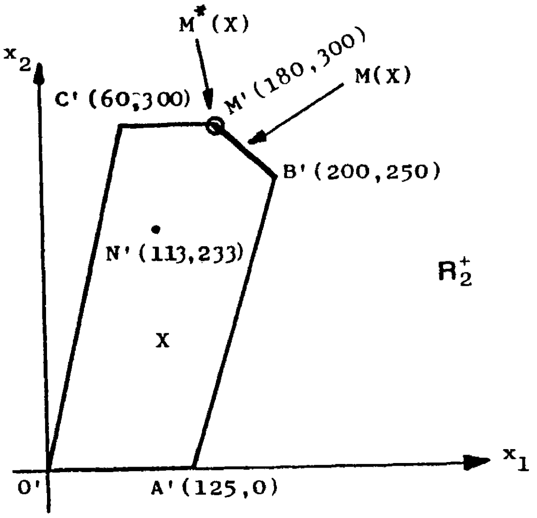


fig. 5.2.

Vamos a comprobar que el conjunto de puntos eficientes de Z respecto del par de objetivos fijados, es decir, el conjunto de puntos que pertenecen a Z obtenido mediante la transformación inversa de (1) al aplicarla al conjunto M (X) de puntos maximales - de X, respecto del orden parcial natural de $\mathbb{R}^2$, es un subconjunto del conjunto M (Z) de puntos maximales de Z respecto del orden parcial natural de $\mathbb{R}^3$, con lo cual el decisor en su problema de óptimo, bastaría que tuviese en cuenta en vez de todo el conjunto M (Z), el subconjunto de este indicado y al que representaremos - por M^* (Z).

En efecto, el conjunto M (Z), es ABMCNA (fig. 5.1.) y el - M (X), B'M' (fig. 5.2.). Entonces se comprueba facilmente que al ser

$$\underline{x}\ (\underline{z}) = (x_1 = 0{,}5\ z_1 + 0{,}4\ z_2 + 0{,}1\ z_3\ ,\ x_2 = 0{,}5 z_2 + 0{,}5\ z_3)$$

$$M\ (Z) = \underline{x}^{-1}\ (M\ (X)) \cap Z = BM \qquad \text{(fig. 5.1.)}$$

que es una parte de M (Z).

Por tanto, se observa que el decisor ha reducido sus posibles decisiones maximales del conjunto ABMCNA, al conjunto BM, que es sensiblemente más reducido, y por tanto de mayor utilidad en la determinación de la decisión óptima en relación con su sistema -- preferencial.

Un paso más puede ser que el decisor considere plausible - establecer una nueva ponderación de los dos objetivos de primera etapa (x_1, x_2) y fijar un objetivo $\underline{y}$ de segunda etapa, p.e.

$$\underline{y} = 0{,}5\ x_1 + 0{,}5\ x_2 \qquad (2)$$

Entonces se tendrá en la recta $\mathbb{R}^+$ un conjunto Y transformado del conjunto X, mediante la transformación (2), siendo entonces Y, el segmento de recta O"M" (fig. 5.3.). Analogamente a como en la etapa anterior, el conjunto de puntos eficientes de X res--

pecto del objetivo fijado, es decir el conjunto de puntos que pertenecen a X obtenido mediante la transformación inversa de (2), al aplicarla al conjunto M (Y) de puntos maximales de Y, que en este caso posee un único punto que es máximo, es un subconjunto de M (X), al que representaremos por M^* (X).

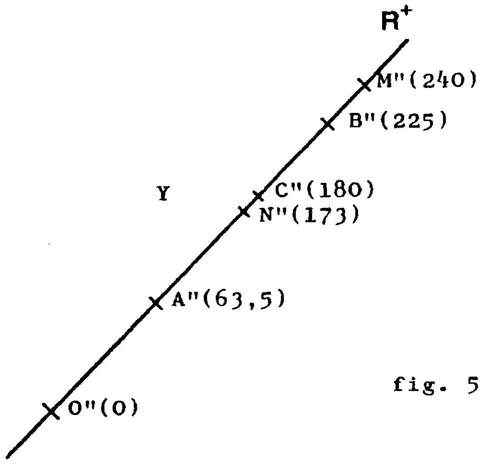


fig. 5.3.

Se tiene así que M (Y) = M", (fig. 5.3.), y teniendo en cuenta lo dicho en el párrafo anterior, será

$$M^* (X) = \underline{y}^{-1} (M (Y)) \cap X = M', \text{ (fig. 5.2.)}$$

donde $\underline{y} = \underline{y} (\underline{x}) = 0,5 \, x_1 + 0,5 \, x_2$

siendo $M^* (X) \subset M (X)$

Por tanto se ha hecho una reducción del conjunto M (X) de puntos maximales de X, al conjunto M^* (X), por lo que al conectar esta 2ª etapa con la etapa anterior parece natural en el proceso de optimación, que en lugar de considerar el conjunto de puntos eficientes de Z, $M^*(Z)=\underline{x}^{-1}(M(X)) \cap Z$, como se había indicado, debería sustituirse tal conjunto, por

$$M^{*}(Z) = \underline{x}^{-1}(M^{*}(X)) \cap Z$$

siendo

$$M'(Z) \subset M^{*}(Z) \subset M(Z)$$

y el conjunto M' (Z) y no el M^* (Z) será el de interés para el decisor, y en el cual deberá determinar su decisión óptima. Se observa entonces que la consideración de una segunda etapa, ha producido una nueva reducción del conjunto de puntos eficientes de Z, pasando de M^* (Z) a M' (Z).

En nuestro problema concreto, se ha pasado mediante la consideración de esta nueva etapa y a la vista de las preferencias del decisor, a reducir el conjunto $M^*(Z) = \overline{BM}$ a M' (Z) = M, siendo el punto M = (0, 400, 200) y que correspondería a la decisión óptima para el decisor, consistente en fabricar cero herramientas de tipo A, 400 de tipo B, y 200 de tipo C.

I.6.- Formalización del problema.-

Vamos a continuación a formalizar las ideas contenidas en el ejemplo anterior dando los aspectos teóricos para una etapa, para después hacer la extensión a un número finito de ellas con el correspondiente proceso secuencial de optimación del cual el ejemplo dado es un caso particular.

Consideremos la función de valor vectorial

$$\underline{x}\ (\underline{z}) \ :\ R_N^+ \longrightarrow R_n^+ \qquad (6.1.)$$

donde como se sabe, es

$$\underline{x}\ (\underline{z}) = (x_1\ (\underline{z}), \ldots, \ x_n\ (\underline{z}))$$

y donde x_i (z) indica el valor del i-ésimo objetivo en el punto $\underline{z} \in Z$.

Sea $X = \left\{ \underline{x} \in R_n^+ \ /\ \underline{x} = \underline{x}\ (\underline{z}) \text{ para algún } \underline{z} \in Z \right\}$

es decir, se tendría que $X = \underline{x}\ (Z)$.

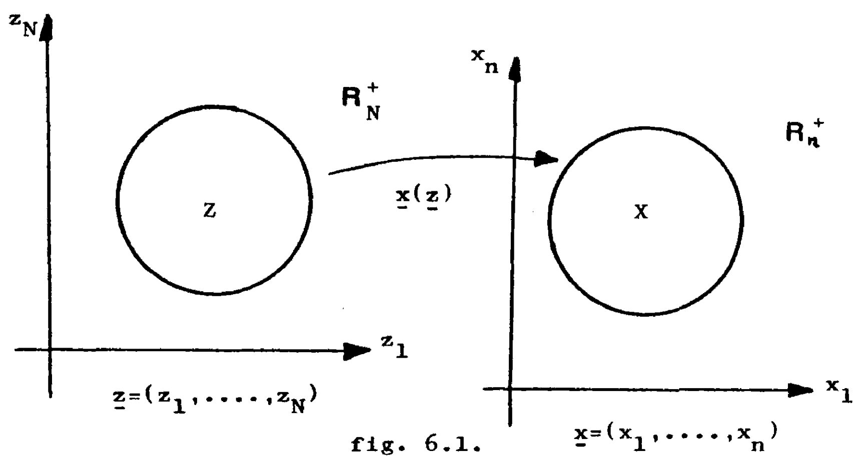


fig. 6.1.

Supondremos en lo que sigue, que para todos los atributos y objetivos el decisor prefiere valores mayores de x_i y z_i a menores.

Veamos ahora unas definiciones que nos van a ser útiles para dar a continuación unos teoremas.

DEFINICION 6.1.

Se dice que $\underline{x}^* \in X$, es un punto maximal en X para el orden parcial $\succsim$ en $\mathbb{R}^n$, si no existe un $\underline{x} \in X$ tal que $\underline{x} \succsim \underline{x}^*$, y $\underline{x} \neq \underline{x}$.

Si el orden parcial $\succsim$ en $\mathbb{R}$ es el orden parcial natural, la definición anterior se vé inmediatamente que es equivalente a que

$$X \cap X\,(\underline{x}^*) = \{\underline{x}^*\}$$

donde $X\,(\underline{x}^*)$ es el cono positivo de $\mathbb{R}^n$ trasladado al punto $\underline{x}^*$. Al conjunto de puntos maximales respecto del orden natural $\succsim$ en $\mathbb{R}^n$, lo indicaremos por M (X).

Analogamente se definiría punto maximal en Z respecto de un orden parcial en $\mathbb{R}^N$. Si tal orden parcial es el natural $\mathbb{R}^N$, que representaremos por $\succsim'$, el conjunto de puntos maxinales en Z respecto de este lo indicaremos por M (Z).

Vamos a dar a continuación la definición de punto eficiente[8]. Para ello supongamos la función vectorial

$$\underline{x}\,(\underline{z}) : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

donde $\underline{x}\,(z) = (x_1\,(\underline{z}), \ldots, x_n\,(\underline{z}))$ y siendo $x_i\,(\underline{z})$ para todo $i=1,\ldots,n$, funciones unívocas continuas y monótonas. Sea $Z \subset \mathbb{R}^N$ y $X = \underline{x}\,(Z)$ con $X \subset \mathbb{R}^n$. Las familias $x_i\,(\underline{z}) = k$ $(i=1,\ldots,n)$ definen en Z un preorden parcial $\succsim^*$ en la forma siguiente

DEFINICION 6.2.-

Dados $\underline{z}$, $\underline{z}' \in Z$, diremos que $\underline{z} \succsim^{*} \underline{z}'$ si y solo si $x_i(\underline{z}) \geqslant x_i(\underline{z}')$ para todo $i = 1,\ldots,n$.

Entonces se tiene,

DEFINICION 6.3.-

Se dice que $\underline{z}^{*} \in Z$ es un punto eficiente en Z, o maximal en Z respecto del preorden parcial $\succsim^{*}$, si no existe un $\underline{z}' \in Z$ tal que $\underline{z}' \succ^{*} \underline{z}$, ó de forma equivalente si no existe un $\underline{z}' \in Z$, tal que $x_i(\underline{z}') \geqslant x_i(\underline{z}^{*})$ para todo $i=1,\ldots,n$, siendo $x_j(\underline{z}') > x_j(\underline{z}^{*})$ para algún j.

Tal conjunto de puntos eficientes, lo indicaremos por $M^{*}(Z)$ (notación ya introducida en el ejemplo de la sección anterior).

Parece intuitivo que si es $X = \underline{x}(Z)$, interesará considerar en $X \subset \mathbb{R}^n$, el conjunto de puntos maximales M (X), y obtener los puntos de Z que se transforman en los de M (X). Vamos a ver primero que tales puntos forman un subconjunto de M (Z), y después que precisamente tal subconjunto será $M^{*}(Z)$.

Para ello, damos en primer lugar un teorema que prueba que si $\underline{x}(\underline{z})$ es una transformación con unas ciertas propiedades, se verificará que

$$\underline{x}^{-1}(M(X)) \cap Z \subset M(Z)$$

es decir, que los puntos maximales de X respecto del orden parcial natural en $\mathbb{R}^n$, son transformados de puntos maximales de Z, respecto del orden parcial natural de $\mathbb{R}^N$.

TEOREMA 6.1.-

Sea $\underline{x}\ (\underline{z}): R^N \longrightarrow R^n$ una transformación unívoca, continua y estrictamente monótona, es decir

$$x_i\ (\underline{z} + \Delta\ \underline{z}) \geq x_i\ (\underline{z}),\ \text{para todo } i=1,\ldots,n \text{ y } \exists\ j$$

tal que $$x_j\ (\underline{z} + \Delta\ \underline{z}) > x_j\ (\underline{z})$$

siendo $$\Delta z_h \geq 0 \quad \text{para todo } h=1,\ldots,N \text{ y } \exists\ t$$

tal que $$\Delta z_t > 0.$$

Sea $\underline{z}^* \in Z \subset R^N$ un punto tal que $\underline{x}\ (\underline{z}^*) = \underline{x}^*$ es maximal en $X = \underline{x}\ (Z) \subset R^n$ para el orden parcial natural $\succsim$ en R^n. Entonces se verifica que $\underline{z}^* \in Z$ es maximal en Z para el orden parcial natural $\succsim'$ en R^N.

DEMOSTRACION.-

Puesto que $\underline{x}^* = \underline{x}\ (\underline{z}^*)$ es maximal en X para el orden parcial natural en R^n, se verificará que

$$X \cap X\ (\underline{x}^*) = \{\underline{x}^*\}$$

Vamos a probar que también $Z \cap Z\ (\underline{z}^*) = \{\underline{z}^*\}$. Para ello supongamos que $$Z \cap Z\ (\underline{z}^*) \neq \{\underline{z}^*\}$$

En consecuencia existe $\underline{z}^1 \neq \underline{z}^*$, tal que $\underline{z}^1 \in Z \cap Z\ (\underline{z}^*)$. Entonces será $\underline{z}^1 \succsim' \underline{z}$, y como $\underline{x}\ (\underline{z})$ es estrictamente monótona, $\underline{x}\ (\underline{z}^1) \succsim \underline{x}\ (\underline{z}^*)$, y $\underline{x}\ (\underline{z}^1) \neq \underline{x}\ (\underline{z}^*)$. Por tanto $\underline{x}^* = \underline{x}\ (\underline{z}^*)$ no sería maximal, luego

$$Z \cap Z\ (\underline{z}^*) = \{\underline{z}^*\}\ .$$

Veamos ahora que el conjunto de puntos de Z que se transforman en el conjunto M (X) coincide con M^* (Z). Es decir, parece intuitivo que si se consideran las funciones reales $x_i\ (\underline{z}): \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$, $(i=1,\ldots,n)$ y se suponen estrictamente monótonas, unívocas y continuas, las funciones $x_i = x_i\ (\underline{z})$ forman unas familias de superficies isoútiles $x_i\ (\underline{z}) = k$, definiendo cada una de ellas un preorden completo, y conjuntamente un preorden parcial $\succsim^*$ en Z, obtenido como producto de los preórdenes completos definidos por estas familias.

Estas familias de superficies isoútiles, se transforman en el espacio $\mathbb{R}^n$, mediante la transformación $\underline{x}\ (\underline{z}): \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^n$, en las familias de hiperplanos $x_i = k\ \ (i=1,\ldots,n)$, y analogamente definen un orden parcial en X obtenido como producto de los órdenes completos definidos por estas familias, que coincide con el orden parcial natural en $\mathbb{R}^n$.

Como habíamos visto, los puntos maximales de X son importantes en el problema de las decisiones óptimas, por tanto será importante ver como habíamos indicado, que estos puntos son los transformados de los puntos efecientes de Z, es decir, de los puntos maximales de Z respecto del preorden parcial $\succsim^*$ definido anteriormente.

Entonces se tiene el siguiente

TEOREMA 6.2.-

Sea $\underline{x}\ (\underline{z}): \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una transformación unívoca, continua y estrictamente monótona. Entonces $\underline{z}^* \in M^*\ (Z) \cap Z \subset \mathbb{R}^N$ es un pun to eficiente de Z, o bien maximal en Z, respecto del preorden parcial $\underset{\sim}{\succ}^{*}$, si y solo si $\underline{x}(\underline{z}^*) = \underline{x}^*$, es un punto maximal en $X = \underline{x}(Z) \subset \mathbb{R}^n$, para el orden parcial natural $\underset{\sim}{\succ}$ en $\mathbb{R}^n$.

DEMOSTRACION.-

Si $\underline{z}^*$ es eficiente en Z, resulta que no existe $\underline{z}' \in Z$, tal que $\underline{z}' \succ^* \underline{z}^*$. Esto equivale a que no existe $\underline{z}' \in Z$ tal que $x_i(\underline{z}') \geq x_i(\underline{z}^*)$ para todo $i=1,\ldots,n$ y $\exists j$ tal que $x_j(\underline{z}') > x_j(\underline{z}^*)$.

Esto equivale a que no existe $\underline{x}' \in X$, tal que $\underline{x}' = \underline{x}(\underline{z}')$, que verifique $x_i' \geq x_i^*$ para todo $i=1,\ldots,n$ y $\exists j$ tal que $x_j > x_j^*$, siendo $\underline{x}' = (x_1', \ldots, x_n')$ y $\underline{x}^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*) = \underline{x}(\underline{z}^*)$.

Es decir no existe $\underline{x}' \in X$ tal que $\underline{x}' \underset{\sim}{\succ} \underline{x}^*$ y $\underline{x}' \neq \underline{x}^*$, luego $\underline{x}^*$ es maximal en X, respecto del orden parcial natural en $\mathbb{R}^n$.

Se tiene entonces por el teorema 6.1., que

$$M(Z) \supset \underline{x}^{-1}(M(X)) \cap Z$$

y del teorema 6.2., que

$$M^*(Z) = \underline{x}^{-1}(M(X)) \cap Z.$$

De ambas relaciones se deduce que deberá ser

$$M^*(Z) \subset M(Z).$$

Resulta así que, una vez determinado el conjunto M (X), que se determina por métodos conocidos[9], (Kuhn y Tucker, 1951; Karlin, 1959; Zeleny, 1974; Cohon, 1978 y Ching-Lai Hwang, 1979), se pasaría al conjunto

$$M^*(Z) = \underline{x}^{-1}(M(X)) \cap Z$$

de decisiones o alternativas eficientes y bastaría investigar $M^*(Z)$ en lugar de $M(Z)$, para llegar a una decisión óptima.

Conviene resaltar, que en las situaciones de decisión real, la necesidad de llegar a la elección de una alternativa final de decisión, llevaría a una reducción adicional del conjunto $M^*(Z)$, de alternativas eficientes, que sean igualmente preferidas respecto a las actitudes del decisor y más preferidas que el resto. Esto es precisamente lo que se consigue mediante el proceso polietápico que consideramos, es decir, ir reduciendo el conjunto $M^*(Z)$ mediante la consideración de nuevas etapas.

Vamos ahora a hacer la extensión del proceso de óptimación para dos o mas etapas, para lo cual se introduce una notación, -- que además va a ser útil para comprender algunas relaciones entre los distintos espacios del proceso polietápico indicado.

Sean $j_1 > j_2 > \cdots > j_i > \cdots > j_h$ las dimensiones de los distintos espacios que se consideran en el proceso.

Representemos por $\succsim_{j_i}$, la relación de preorden parcial en $\mathcal{B}_i$, donde $\mathcal{B}_i$ representa el espacio de objetivos que corresponde a la reducción a la dimensión j_i (10), para los objetivos de la etapa i-1, siendo $\mathcal{B}_i \equiv R^+_{j_i}$, para todo i=1,....,h.

Esquematicamente se tendría una serie de transformaciones en la forma

$$R^+_{j_1} \xrightarrow{\underline{x}_1} R^+_{j_2} \xrightarrow{\underline{x}_2} \cdots\cdots \xrightarrow{\underline{x}_{h-2}} R^+_{j_{h-1}} \xrightarrow{\underline{x}_{h-1}} R^+_{j_h}$$

donde $\underline{x}_i$ (i=1,....,h-1) son las funciones de valor vectoriales, dadas por los correspondientes teoremas, siendo $\mathcal{B}_1$ el espacio de atributos, $\mathcal{B}_2$ espacio de objetivos de primera etapa, $\mathcal{B}_3$ espacio de objetivos de segunda etapa, etc.

Es natural considerar que si el decisor ha llegado a la relación $\succsim_{j_i}$, y tiene elementos de información suficientes para obtener la función de valor vectorial que da la etapa siguiente, deberá ser

$$(\succsim_{j_i}) \subset (\succsim_{j_{i+1}}),$$

que se ha de entender en el sentido de que la primera relación está definida en el espacio $\mathcal{B}_i$, y la segunda en el $\mathcal{B}_{i+1}$, y será posible comparar nuevos vectores mediante la relación $\succsim_{j_{i+1}}$, aunque para todo par comparable por $\succsim_{j_i}$, debe verificarse que sus transformados mediante $\underline{x}_i$ deben ser comparables por $\succsim_{j_{i+1}}$.

Veamos ahora la definición de punto eficiente de $\mathcal{B}_i$.

DEFINICION 6.4.-

Se dice que el punto $\underline{z}^* \in \mathcal{B}_i$ es <u>eficiente</u> en $\mathcal{B}_i$, o bien maximal en $\mathcal{B}_i$ respecto de la relación $\succsim_{j_i}$, si no existe otro $\underline{z}' \in \mathcal{B}_i$, tal que $\underline{z}' \succ_{j_i} \underline{z}^*$.

Tal conjunto de puntos eficientes lo designaremos por $M^*_{j_i}$.

En el caso particular en que $\succsim_{j_i}$ fuera el orden parcial natural en R^{j_i}, el conjunto de puntos maximales respecto de este, lo indicaremos M_{j_i}, y se verificará que

$$M_{j_i} \supset M^*_{j_i}$$

y $$M^{*}_{j_i} = \underline{x}_i^{-1}\,(M_{j_{i+1}}) \cap \mathcal{B}_i$$

sin más que tener en cuenta los teoremas 6.1. y 6.2.

La extensión del proceso de óptimación a dos o más etapas es sencilla. En efecto, continuando con la notación anterior, supongamos que el proceso tiene h etapas, por tanto habrá h-1 funciones de valor vectorial $\underline{x}_i$ $(i=1,\ldots,h-1)$, siendo $j_1 > j_2 > \cdots > j_h$ las dimensiones de los espacios en consideración. Aplicando en forma reiterada los resultados anteriores, se tendrá que en la etapa h-1,

$$M^{*}_{j_{h-1}} = \underline{x}_{h-1}^{-1}\,(M_{j_h}) \cap \mathcal{B}_{h-1} \subset M_{j_{h-1}},$$

es decir, la transformación inversa mediante $\underline{x}_{h-1}^{-1}$ del conjunto de puntos maximales de $\mathcal{B}_h$ respecto del orden parcial natural en R^{j_h}, y que pertenecen a $\mathcal{B}_{h-1}$, es un subconjunto del conjunto de puntos maximales de $\mathcal{B}_{h-1}$ respecto del orden parcial natural en $R^{j_{h-1}}$, que además coincide precisamente, como ya se había visto, con el conjunto de puntos eficientes de $\mathcal{B}_{h-1}$, o bien puntos maximales respecto de la relación $\succsim_{j_{h-1}}$ definida ésta por la transformación

$$\underline{x}_{h-1} : R^{+}_{j_{h-1}} \longrightarrow R^{+}_{j_n}$$

es decir, por el sistema de curvas isoútiles $x^{t}_{h-1}(\underline{z}) = k$ (11), $t=1,\ldots,j_h$, y siendo $\underline{z} \in \mathcal{B}_{h-1}$.

Analogamente en la etapa h-2, el conjunto $M^{*}_{j_{h-2}}$ de puntos eficientes de $\mathcal{B}_{h-2}$, es tal que

$$M^{*}_{j_{h-2}} = \underline{x}_{h-2}^{-1}\,(M_{j_{h-1}}) \cap \mathcal{B}_{h-2} \subset M_{j_{h-2}}$$

sin embargo este conjunto podría ser reducido, mediante la consideración natural de tomar, no la transformación inversa mediante $\underline{x}_{h-2}^{-1}$ de $M_{j_{h-1}}$, sino la de $M^*_{j_{h-1}}$, habiendo obtenido éste último -- conjunto en la anterior etapa. Esto nos llevaría a considerar un nuevo conjunto reducido aún más del $M^*_{j_{h-2}}$, que sería

$$M'_{j_{h-2}} = \underline{x}_{h-2}^{-1} (M^*_{j_{h-1}}) \cap \mathcal{B}_{h-2}$$

verificándose que

$$M'_{j_{h-2}} \subset M^*_{j_{h-2}} \subset M_{j_{h-2}}$$

y teniendo en cuenta que mediante la consideración de esta segunda etapa, ha obtenido el decisor una nueva reducción del conjunto de puntos maximales de su interés.

Continuando con este proceso de optimación, se obtendría - en la etapa h-3,

$$M'_{j_{h-3}} = \underline{x}_{h-3}^{-1} (M'_{j_{h-2}}) \cap \mathcal{B}_{h-3}$$

verificándose que

$$M'_{j_{h-3}} \subset \underline{x}_{h-3}^{-1} (M^*_{j_{h-2}}) \cap \mathcal{B}_{h-3} \subset M^*_{j_{h-3}} \subset M_{j_{h-3}}$$

Reiterando el proceso, se llegaría al subconjunto de pun-- tos de $\mathcal{B}_1$

$$M'_{j_1} = \underline{x}_1^{-1} (M'_{j_2}) \cap \mathcal{B}_1 = \underline{x}_1^{-1} (\underline{x}_2^{-1} (M'_{j_3}) \cap \mathcal{B}_2) \cap \mathcal{B}_1 = \ldots\ldots\ldots =$$

$$= \underline{x}_1^{-1} (\underline{x}_2^{-1} (\ldots(\underline{x}_{h-2}^{-1} (M_{j_{h-1}}) \cap \mathcal{B}_{h-2})\ldots) \cap \mathcal{B}_2) \cap \mathcal{B}_1 =$$

$$= \underline{x}_1^{-1} (\underline{x}_2^{-1} (\ldots(\underline{x}_{h-2}^{-1} (\underline{x}_{h-1}^{-1} (M_{j_h}) \cap \mathcal{B}_{h-1}) \cap \mathcal{B}_{h-2})\ldots) \cap \mathcal{B}_2) \cap \mathcal{B}_1.$$

Se observa que en el proceso de optimación de este proceso polietápico, se parte del conjunto M_{j_h} de puntos maximales de $\mathcal{B}_h$, respecto del orden parcial natural en R^{j_h}, y se va produciendo una reducción, llegando finalmente al conjunto M'_{j_1}, donde

$$M'_{j_1} \subset \cdots \subset \underline{x}_1^{-1} (M^*_{j_2}) \cap \mathcal{B}_1 \subset M^*_{j_1} \subset M_{j_1}$$

y este conjunto M'_{j_1}, sensiblemente reducido del M_{j_1} es en el que el decisor debería investigar para determinar su curso de acción óptimo.

I.7.- Generalización del proceso de optimación.-

A fin de no alargar la exposición de esta parte, se exponen, sin llegar a un formalismo completo, dos métodos que complementan y perfeccionan lo anterior y que pueden ser de gran interés práctico.

De estos dos métodos vamos a ver el primero.

Consideramos por sencillez una etapa y únicamente dos objetivos de primera etapa. Este es una situación generalizada de la anterior, y consiste en dada una función de valor vectorial

$$\underline{x}\ (\underline{z})\ :\ R^+_N \longrightarrow R^+_2$$

considerar en $X \subset R^+_2$, donde X es el espacio de objetivos de primera etapa, órdenes parciales más fuertes que en el primer punto de vista considerado, y los correspondientes en $Z \subset R^+_N$. Es decir, supongamos que en X, se tiene definido un orden parcial a partir del producto de los órdenes completos definidos por

$$\left.\begin{array}{l} k_1x_1 + k_2x_2 = k \\ k'_1x_1 + k'_2x_2 = k' \end{array}\right. \quad (7.1.) \qquad \text{donde} \qquad \begin{array}{l} k_2 = 1 - k_1 \\ k'_2 = 1 - k'_1 \end{array}$$

en que los vectores (k_1, k_2) y (k'_1, k'_2) deben ser linealmente independientes.

Se observa que (7.1.) son dos combinaciones lineales convexas de ambos objetivos x_1 y x_2, y que los vectores (k'_1, k'_1) y (k_2, k'_2) son las acotaciones a los pesos que se asignan a los objetivos x_1 y x_2 respectivamente, y que reflejan la indeterminación relativa al desconocimiento del verdadero valor de éstos. Estos vectores determinan el cono K convexo, cerrado y puntiagudo (fig. 7.1.) denominado <u>cono de comparabilidad</u>. A partir de él, se considera el correspondiente cono polar

$$K^o = \left\{ \underline{x} \in R^2 \ / \ p^T \cdot \underline{x} \leq 0, \ \forall \, p \in K \right\}$$

que también será puntiagudo. Sea además $-K^o(\underline{x})$ la traslación de $-K^o$ al punto $\underline{x}$ como vértice.

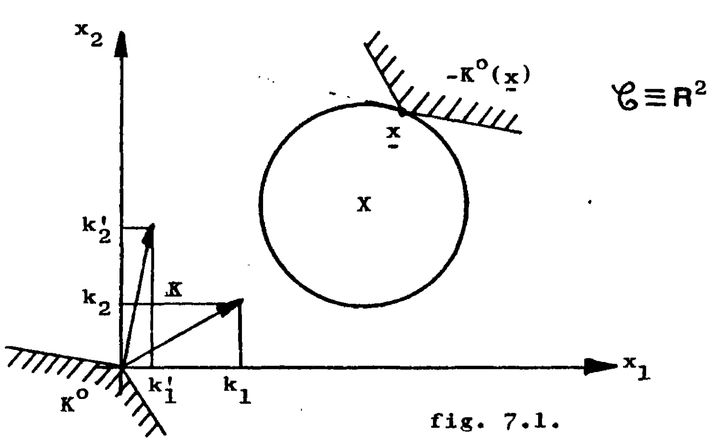


fig. 7.1.

Esto lleva a introducir el concepto de <u>K - dominancia</u> (Yu, 1974; Giron y Ríos, 1979), de tal forma que dados $\underline{x}$, $\underline{x}' \in X$, se dirá que $\underline{x}'$ K - domina a $\underline{x}$, y se escribe $\underline{x}' \succ_K \underline{x}$, si $\underline{x}' \in -K^o(\underline{x})$.

Se comprueba facilmente que la relación de K-dominancia es un orden parcial.

Veamos ahora la siguiente

DEFINICION 7.1.-

Dado $\underline{x}' \in X$, se dice que es un punto maximal en $X \subset R^n$ para el orden parcial de K-dominancia definido en X por (7.1.), si

$$X \cap - K^o (\underline{x}^*) = \{\underline{x}^*\} .$$

Al conjunto de puntos maximales de X respecto del orden parcial definido por (7.1.), se representará por M_k (X).

Es de notar, que el primer punto de vista considerado es, como ya habíamos indicado, un caso particular de éste, en el que el desconocimiento de pesos asignados a los objetivos es total, es decir, sería una situación de incomparabilidad total, en la cual las acotaciones de los posibles pesos asignados a ambos objetivos serían (1,0) y (0,1) respectivamente, siendo estos vectores los correspondientes al cono positivo u ortante fundamental K_o de R^2, y donde el conjunto de puntos maximales respecto de la K_o-dominancia sería el conjunto M (X) considerado anteriormente, pues la relación de K_o-dominancia coincidiría evidentemente con el orden parcial natural de R^2.

Se demuestra que si K_1 y K_2 son dos conos tales que $K_1 \supset K_2$, el orden $\succsim_{K_1}$ está contenido en el orden $\succsim_{K_2}$ (Ríos, 1976,b). Por tanto se tiene que puesto que $K \subset K_o$, se tendrá la relación[12]

$$M_K (X) \subset M (X)$$

Vamos a ver ahora unos teoremas análogos a los 6.1. y 6.2., que serán útiles para la construcción del proceso de optimación - análogo al del primer enfoque, para la determinación de la deci-- sión óptima.

Consideremos ahora, el correspondiente preorden parcial de (7.1.) en Z, que será el preorden parcial que viene definido por el producto de los preórdenes completos definidos en Z a partir de

$$\begin{aligned} k_1 x_1 (\underline{z}) + k_2 x_2 (\underline{z}) &= k \\ k_1' x_1 (\underline{z}) + k_2' x_2 (\underline{z}) &= k' \end{aligned} \qquad (7.2.)$$

es decir, dos sistemas de curvas isoútiles que determinan el conjunto de puntos K-eficientes de X, o puntos maximales respecto del preorden parcial definido, por (7.2.).

Veamos la siguiente

DEFINICION 7.2.-

Un punto $\underline{z}^* \in Z \subset R^N$, se dice que es K-eficiente en Z, o - maximal en Z respecto del preorden parcial $\succsim^*$ definido a partir de

$$k_1 x_1 (\underline{z}) + k_2 x_2 (\underline{z}) = k$$

$$k_1' x_1 (\underline{z}) + k_2' x_2 (\underline{z}) = k'$$

siendo $(k_1, k_2) \neq (k_1', k_2')$, si no existe otro punto $\underline{z}' \in Z$, tal que $\underline{z}' \succ^* \underline{z}^*$, lo que es equivalente, si no existe $\underline{z}' \in Z$ tal que

$$k_1\ x_1\ (\underline{z}') + k_2\ x_2\ (\underline{z}') \geqslant k_1\ x_1\ (\underline{z}^*) + k_2\ x_2\ (\underline{z}^*)$$

$$k_1'\ x_1\ (\underline{z}') + k_2'\ x_2\ (\underline{z}') \geqslant k_1'\ x_1\ (\underline{z}^*) + k_2'\ x_2\ (\underline{z}^*)$$

siendo al menos una de las dos desigualdades estricta.

Al conjunto de puntos K-eficientes de Z lo representaremos por M_k (Z).

Veamos ahora los teoremas indicados.

TEOREMA 7.1.-

Sea $\underline{x}\ (\underline{z}) : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una transformación unívoca, contínua y estrictamente monótona. Sea $\underline{z}^* \in Z \subset \mathbb{R}^N$ un punto tal que - - $\underline{x}\ (\underline{z}^*) = \underline{x}^*$ es maximal en $X = \underline{x}\ (Z) \subset \mathbb{R}^n$ para el orden parcial $\succsim_K$ de K-dominancia en $\mathbb{R}^n$. Entonces se verifica que $\underline{z}^* \in Z$ es maxi-- mal en Z para el orden parcial $\succsim_K$ de K-dominancia en $\mathbb{R}^N$.

DEMOSTRACION.-

Análoga a la del teorema 6.1.

TEOREMA 7.2.-

Sea Sea $\underline{x}\ (\underline{z}) : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una transformación unívoca, contínua y estrictamente monótona. Entonces $\underline{z}^* \in M_K^*$ (Z), es decir - $\underline{z}^* \in Z \subset \mathbb{R}^N$ es un punto K-eficiente de Z, si y solo si - - $\underline{x}^* = \underline{x}\ (\underline{z}^*) \in X = x\ (Z) \subset \mathbb{R}^2$ es un punto maximal en X para el orden parcial de K-dominancia en $\mathbb{R}^2$.

DEMOSTRACION.-

Sea $\underline{z}^* \in M_K(Z)$, esto quiere decir que no existe $\underline{z}' \in Z$ -- tal que

$$k_1\ x_1\ (\underline{z}') + k_2\ x_2\ (\underline{z}') \geqslant k_1\ x_1\ (\underline{z}^*) + k_2\ x_2\ (\underline{z}^*)$$
$$k_1'\ x_1\ (\underline{z}') + k_2'\ x_2\ (\underline{z}') \geqslant k_1'\ x_1\ (\underline{z}^*) + k_2'\ x_2\ (\underline{z}^*)$$

y al menos una de las dos desigualdades es estricta. Esto equivale a que no existe $\underline{x}' = \underline{x}\ (\underline{z}') \in X$ tal que

$$k_1\ x_1' + k_2\ x_2' \geqslant k_1\ x_1 + k_2\ x_2$$
$$k_1'\ x_1' + k_2'\ x_2' \geqslant k_1'\ x_1 + k_2'\ x_2$$

y al menos una de las dos desigualdades es estricta, siendo $\underline{x}' = (x_1', x_2')$ y $\underline{x}^* = (x_1^*, x_2^*) = (x_1\ (\underline{z}^*), x_2\ (\underline{z}^*))$. Es decir, -- $\underline{x}^* \in X$, es un punto maximal en X, respecto del orden parcial de -- K-dominancia en R^2, es decir $\underline{x}^* \in M_K\ (X)$.

La demostración para el caso en que $X \subset R^n$, sería análoga.

Se tiene entonces que por el teorema 7.1., será

$$M_K\ (Z) \supset \underline{x}^{-1}\ (M_K\ (X)) \cap Z$$

y del teorema 7.2., que $\quad M_K^*\ (Z) = \underline{x}^{-1}\ (M_K\ (X)) \cap Z$

De ambas relaciones se deduce que deberá ser

$$M_K^*\ (Z) \subset M_K\ (Z).$$

El problema de óptimo se resolvería de forma análoga a como se hizo en el primer enfoque, es decir, se determinaría el conjunto $M_K\ (X)$, y de este se pasaría mediante la transformación inversa de $\underline{x}\ (\underline{z})$, al conjunto

$$M_K^*\ (Z) = \underline{x}^{-1}\ (M_K\ (X)) \cap Z$$

y puesto que

$$M_K^*\ (Z) \subset M_K\ (Z)$$

el problema de óptimo quedaría por tanto reducido a investigar el conjunto $M_K^*\ (Z)$ sensiblemente reducido del $M_K\ (Z)$.

Puesto que, como se ha visto resulta que se verifica que

$$M_K^* (Z) \subset M_K (Z) \subset M (Z)$$

esto resulta bastante natural, pues en este enfoque la incertidumbre es parcial a diferencia del primero en que era total y por tanto resulta lógico que el decisor determine su decisión en este segundo punto de vista, ya que la información que tiene es mayor.

La extensión del proceso de optimación a dos o más etapas sería análoga al primer enfoque, haciendo hincapié en que el conjunto final de puntos maximales a que llega el decisor después de las h-1 transformaciones inversas sería más reducido que en el primer enfoque, lo cual es completamente natural como ya se había indicado.

Un tercer punto de vista, que es en realidad el caso que se obtiene como paso al límite del anterior, se tendría al ir considerando en el anterior punto de vista órdenes parciales cada vez más fuertes en X, y los correspondientes preórdenes parciales en Z. Intuitivamente, esto significaría ir conociendo con mayor precisión los pesos que se asignan a los distintos objetivos, es decir, ir disminuyendo la incertidumbre sobre el verdadero valor de los pesos, y por tanto su cono de incertidumbre K.

Como consecuencia de esto, se irían reduciendo los conjuntos de puntos maximales de X y Z respecto de el orden parcial de K-dominancia, y se obtendría como posición límite en X, el ángulo llano de Bayes, correspondiente al vector (k_1, k_2), que nos determinaría la recta Bayes $k_1 x_1 + k_2 x_2 = k$. Esta situación límite, sería la correspondiente a un conocimiento preciso de los pesos - que se asignan a los diferentes objetivos.

En esta situación se obtendría, en X, un o varios puntos - de máximo, correspondiente al punto de apoyo de la recta - - $k_1 x_1 + k_2 x_2 = k$ con X, y en Z, a partir del sistema de curvas - isoútiles, se tendría uno o varios puntos $\underline{z}^*$ de máximo originales de $\underline{x}^*$, es decir, tal que $\underline{x}(\underline{z}^*) = \underline{x}^*$.

Una vez determinado el punto $\underline{x}^*$, se pasaría a $\{\underline{x}^{-1}(\underline{x}^*)\} \cap Z$ y se tendría la alternativa $\underline{z}^*$ correspondiente a la decisión ópti ma. La extensión a más etapas sería inmediata.

Es interesante observar que las ideas sobre ponderación de objetivos introducidas en estos dos últimos métodos han sido sugeridas por la lectura de los trabajos de Ríos (1976,b), y Girón y Ríos (1979), en que tales ideas se dirigían a la valoración apropiada de las situaciones en incertidumbre parcial. Cabría pues, combinar ambas consideraciones en un estudio global, lo cual hemos iniciado pero no incluímos aquí.

En todo caso esto confirma la simetría de tratamiento a la utilidad y la probabilidad establecida en Girón (1979).

NOTAS A PIE DE PAGINA

(1) Aumann, R. J. (1964). pág.150

(2) Respecto a la relación entre N y n, consideramos natural, el que sea n mas pequeño que N, puesto que los criterios tratan de resumir los objetivos y lograr una reducción de dimensión, para hacer más sencilla la resolución del problema en cuestión.

(3) Hay diversos nombres para el concepto que aquí llamamos (si-- guiendo a la mayoría de los autores) preorden. Así, Arrow lo denomina cuasiorden y al preorden completo lo llama orden débil. A este lo denominan Raiffa-Keeney estructura de preferencia, y orden de preferencia completo en Koopmans, etc.

(4) Esto no contradice que puede haber funciones discontinuas -- y_i (x).

(5) Ver p.e. Keeney y Raiffa (1976).

(6) Esta propiedad se denomina orden-denso. Ver Fine (1973)

(7) Una topología natural en X, es aquella para la cual los conjuntos $\{x \in X: x \lesssim x'\}$ y $\{x \in X: x' \lesssim x\}$ son cerrados para todo $x' \in X$.

(8) También llamado punto optimal de Pareto, punto admisible, punto no dominado, etc.

(9) Aquí no entramos en los aspectos algorítmicos, ciertamente importantes, pero que desbordan el contexto de esta Tesis.

(10) Para i = 1, se tendría el espacio de atributos, para i = 2 el espacio de objetivos de primera etapa, para i = 3 el de segunda etapa, etc.

(11) Estas funciones verifican las propiedades dadas por los teoremas 6.1. y 6.2.

(12) Con la suposición que habíamos hecho de que K^o es un cono puntiagudo, es decir K no se reduce a un vector.

(13) Idem nota (12).

CAPITULO II

Decisiones con Multiatributos en Incertidumbre

II.0.- Motivación.-

Hay múltiples métodos iniciados y seguidos en la literatura científica para tratar el problema de la decisión en incertidumbre com multiatributos. Presentaremos primeramente, mediante algunos ejemplos, el problema, para después pasar revista a tales métodos. Más tarde trataremos de dar fundamento y rigor a la metodología relativa a los métodos análogos para el caso de incertidumbre al del vector maximal y al de la función de valor considerados como básicos en el caso de certidumbre.

Todos estos métodos presentan nuevas dificultades respecto del caso de certidumbre, pues es intuitivo que el proceso de reducción de un problema de multiatributos en incertidumbre puede comenzar de dos modos distintos: a) reduciendo los multiatributos, o b) reduciendo la incertidumbre. Es decir, comenzando por sustituir cada complejo de multiatributos por un vector de menor dimensión o por un "escalar equivalente", o empezando por reducir cada consecuencia en incertidumbre a un "equivalente en certidumbre". Sin embargo, pronto veremos que estas ideas tan simplistas puede conducir a comportamientos erróneos.

También daremos una formalización de la relación existente entre la función de valor y la función de utilidad, aspecto --

que hasta ahora sólo se había tratado de forma muy poco estricta en la literatura, y obtendremos un resultado que nos refleja un paralelismo con el capítulo anterior al relacionar la función vectorial obtenida a partir de una generalización del teorema de Von Neumann en la misma línea que el teorema vectorial de Wold-Debreu del capítulo I.

II.1.- Ejemplos introductorios.-

Vamos a dar algunos ejemplos de problemas con multiatributos en incertidumbre, que van a ser útiles para un mejor encuadramiento y comprensión de los desarrollos teóricos posteriores.

Ejemplos:

1.- Supongamos un cierto individuo al que se le presentan dos opciones, caracterizada cada una de ellas por dos atributos. Sean estas $\underline{x}$ e $\underline{y}$, donde

$\underline{x}$ = (con certidumbre) un puesto de trabajo con un salario mensual S_1 (= 100.000 pts.) y una casa C_1 (= 20.000 pts. mensuales),

$\underline{y}$ = con probabilidad 0,8 (suceso E_1), da un sueldo mensual S_2 (= = 130.000 pts.) y una casa C_2 (= 30.000 pts. mensuales), y nada con probabilidad 0,2 (suceso E_2)

Las dos situaciones aleatorias a elegir son,

$$\begin{tikzcd} & \cdot \arrow[dl, "a_1"'] \arrow[dr, "a_2"] & \\ \underline{x} & & \underline{y} \end{tikzcd}$$

		E_1	E_2		E_1	E_2
	$p =$	0,8	0,2	$p =$	0,8	0,2
Atributos		S_1	S_1		S_2	0
		C_1	C_1		C_2	0

que también podemos representarlo en la forma

	E_1	E_2
	p= 0,8	0,2
a_1	(S_1, C_1)	(S_1, C_1)
a_2	(S_2, C_2)	(0, 0)

Se tiene así, un problema de decisión con dos atributos en ambiente aleatorio, en el cual el decisor debe determinar cual de las dos opciones a_1 o a_2 es más preferida.

2.- Una modificación del ejemplo anterior, sería considerar las opciones a (x), donde

a (x)

		E_1	E_2
	$p =$	x	1-x
Atributos		S_x	0
		C_x	0

siendo $x = 1;\ 0{,}9;\ 0{,}8;\ \ldots;\ 0{,}1$, las posibles probabilidades del suceso E_1, y

$$S_1 = 100.000,\ S_{0,9} = 110.000, \ldots,\ S_{0,1} = 200.000$$

$$C_1 = 20.000,\ C_{0,9} = 21.000,\ \ldots,\ C_{0,1} = 30.000$$

como anteriormente.

Se vé que en este ejemplo hay diez posibles opciones, y el decisor debe determinar aquella más preferida por él, teniendo en cuenta que cuanto mejor es la opción, menor es la probabilidad de obtenerla.

3.- Una nueva modificación en el ejemplo anterior, nos va a llevar al caso contínuo. Sea como antes a (x), la opción

		E_1	E_2
	$p =$	x	$1-x$
Atributos		$S(x)$	0
		$C(x)$	0

donde ahora $x \in (0,\ 1)$ y

$$S(x) = 100.000 + (1 - x)\ 100.000$$

$$C(x) = 20.000 + (1 - x)\ 30.000$$

El problema sigue siendo determinar la opción más preferida.

4.- Por último, supongamos un fabricante de zapatos, que desea determinar las cantidades de dos tipos de zapatos que debe fabricar para su venta en la temporada que se avecina. Para ello, sean x_1 y x_2, las cantidades de zapatos de tipo 1 y 2 respectivamente que debe fabricar. El conjunto de posibles soluciones, son los puntos del poliedro convexo $X \subset R_2^+$ determinado por las restricciones

$$x_2 \leqslant 300$$
$$x_1 + x_2 \leqslant 400$$
$$2x_1 - x_2 \leqslant 200$$

El fabricante sabe que su competidor puede adoptar dos políticas de fabricación E_1 y E_2, y teniendo en cuenta éstas, quiere maximizar: 1) por una parte el volumen de ventas de acuerdo -- con unos ciertos precios que fijará el fabricante en función de - la política de producción que adopte el competidor y que vendrá - dado por la función objetivo 1,

$$\underline{z}^1 (x_1, x_2) = (z_1^1 (x_1, x_2), z_2^1 (x_1, x_2))$$

donde $z_1^1 (x_1, x_2) = x_1 + 2x_2$, si el competidor adopta E_1, y

$z_2^1 (x_1, x_2) = 3x_1 + x_2$, si el competidor adopta E_2.

2) por otra parte desea maximizar las ventas de aquel tipo de calzado que le dé más prestigio, que es del tipo 1, si el - competidor adopta E_1 y del tipo 2, si el competidor adopta E_2. En tal caso la función objetivo 2 será

$$\underline{z}^2 (x_1, x_2) = (z_1^2 (x_1, x_2), z_2^2 (x_1, x_2))$$

donde

$$z_1^2 \ (x_1, \ x_2) = x_1, \text{ si el competidor adopta } E_1, \text{ y}$$

$$z_2^2 \ (x_1, \ x_2) = x_2, \text{ si el competidor adopta } E_2$$

El problema del fabricante, es determinar el punto $(x_1,x_2) \in X$, que sea lo mas satisfactorio posible, teniendo en cuenta dos objetivos, y que la naturaleza (competidor) puede adoptar dos estados. Se observa, que este es un problema de decisión en incertidumbre con dos objetivos, pues el fabricante desconoce la política de producción de su competidor.

II.2.- Trabajos Iniciales.-

Los dos trabajos pioneros sobre multiatributos en incertidumbre son los de Montgolfier y Tergny (1971), y de Dinkelbach e Iserman (1973).

Montgolfier y Tergny empiezan por considerar el caso de certidumbre con multicriterios. El desarrollo se limita al caso discreto en que el conjunto $\mathbf{A}$ de acciones A_i ($i \in \{1,....,I\}$) es finito. Consideran que hay situaciones en las que no resulta posible definir una única función económica, como p.e. en las dos situaciones: a) un único decisor que puede adoptar distintos <u>puntos de vista</u> (beneficio, satisfacción de las personas afectadas por la decisión, etc.) sin pretender a priori establecer una relación entre, estos diferentes puntos de vista; y b) varios decisores, en una decisión colegial, que pueden tener distintos <u>puntos de vista</u>, sin que sea posible una asignación precisa de pesos.

Definen punto de vista como toda relación de preorden en el espacio de acciones, pudiendo ser éste completo o parcial. Tienen así, que a un conjunto de puntos de vista (parciales o completos) - corresponden otros tantos preórdenes, cuyo producto es un preor-- den parcial, que representa un nuevo punto de vista llamado sintético (es de destacar que el proceso inverso no siempre es posible, es decir, la descomposición de un punto de vista parcial en pro-- ducto de puntos de vista).

Limitándose al caso en que las A_i se pueden juzgar, según los puntos de vista completo, definen un criterio C_k, como una aplicación f_k de un punto de vista total en $\mathbb{R}$,

$$f_k \div A \longrightarrow \mathbb{R}$$

donde

$$f_k\ (A_i) = V_{ik}$$

Por tanto es posible construir en esta situación un cuadro de dimensión I x K de valores V_{ik}. Además se verifica la propiedad de que toda función estrictamente monótona φ , transforma el criterio C_k en un criterio equivalente C'_k, de tal forma que

$$V'_{ik} = \varphi\,(V_{ik}) = f_{k'}\ (A_i)$$

A continuación consideran el caso de incertidumbre con monocriterio como caso particular del de multicriterio en certidumbre. Cada estado se considera como un criterio, y el tratamiento que sugieren es análogo. Es decir, si S es el conjunto de sucesos E_j $(j = 1,\ldots,J)$, el significado de un único criterio en incertidumbre es que existe una función tal que a cada A_i y cada E_j le corresponde

$$V_{ij} = f_j\,(A_i)$$

Este problema lo consideran como un caso particular del problema de elección multicriterio en certidumbre, pues suponen cada suceso E_j como un punto de vista, y ambos problemas se traducen en forma análoga por un cuadro de valores, pudiendo recibir el mismo tratamiento.

Una observación a señalar es que el método mas importante en el caso de incertidumbre es el bayesiano, que conduce a considerar como <u>regla u operador de síntesis</u> (nomenclatura de Montgolfier y Tergny) una función lineal, la cual es invariante por transformaciones lineales, mientras que en general los operadores de síntesis que se consideran en multiatributos en certidumbre suelen ser no lineales y no invariantes por transformaciones lineales.

En cuanto al caso de incertidumbre con multicriterios, lo consideran como una superposición de los dos precedentes, lo que les conduce a considerar una valoración de cada acción A_i, según el criterio C_k y el estado E_j, por un número $\left\{V_{ijk}\right\}$.

Se tiene así, una matriz tridimensional de la que no aclaran Montgolfier y Tergny, si los criterios a seguir son la reiteración de los anteriores. No habla de su "aplicación consistente"

(¿Cabe aplicar un criterio minimax a la incertidumbre y un criterio lineal a los atributos?, y ¿ el orden de aplicación puede influir?). Lo que si indican (y esto es importante), es que se debe tener en cuenta la independencia de los puntos de vista, pues puede ocurrir que los valores atribuidos a una serie de acciones por dos puntos de vista diferentes sean estadísticamente correlados. Entonces la ponderación de puntos de vista debe tenerse en cuenta.

En este orden de ideas, a nuestro juicio, cabría presentar el problema de dar una axiomática en que el punto de partida no sea una matriz bidimensional de utilidades, sino tridimensional. Pero de hecho, Montgolfier y Tergny, lo único que hacen es dar reglas empíricas de construcción de operadores de síntesis.

La idea de Dinkelbach e Iserman es distinta. Veamos un -- ejemplo que ilustre su metodología. Para ello, sea $X \subset \mathbb{R}^2$, el conjunto de soluciones factibles (decisiones), que viene representado por el poliedro convexo, dado por las restricciones

$$\begin{cases} x_i \geq 0, \ i = 1, 2 \\ x_2 \leq 3 \\ x_1 + x_2 \leq 4 \\ 2x_1 - x_2 \leq 2 \end{cases}$$

Supongamos por simplicidad que el decisor tiene dos objetivos, y dos estados de la naturaleza ω_1 y ω_2 siendo las funciones objetivo

$$\underline{z}^1(\underline{x}) = (z_1^1(\underline{x}),\ z_2^1(\underline{x}))^T$$

$$\underline{z}^2(\underline{x}) = (z_1^2(\underline{x}),\ z_2^2(\underline{x}))^T\ ,$$

en donde

$$z_1^1(\underline{x}) = z_1^1(x_1,\ x_2) = x_1 + 2x_2$$

$$z_2^1(\underline{x}) = z_2^1(x_1,\ x_2) = 3x_1 + x_2$$

$$z_1^2(\underline{x}) = z_1^2(x_1,\ x_2) = x_1$$

$$z_2^2(\underline{x}) = z_2^2(x_1,\ x_2) = x_2$$

siendo $z_j^i(\underline{x})$ es el valor de la i-ésima función objetivo ($i = 1, 2$) para el j-ésimo estado de la naturaleza ($j = 1, 2$).

Dinkelbach e Iserman, lo que hacen para poder llegar a -- una decisión, es formular lo que denominan un <u>programa sustitutivo</u> (nomenclatura de Dinkelbach e Iserman), para llegar a funciones - objetivo con valores escalares, y aplicar un criterio de decisión en certidumbre.

Tal programa sustitutivo viene dado (para el caso de dos objetivos) por

$$\min \left\{ \begin{pmatrix} \| P(\underline{z}_p^1 - \underline{z}^1(\underline{x}) \|_{\pi} \\ \| P(\underline{z}_p^2 - \underline{z}^2(\underline{x}) \|_{\pi} \end{pmatrix} : \underline{x} \in X \right\}$$

($\pi \geqslant 1$), donde $\underline{z}_p^i$ (i = 1, 2) es la solución perfecta (Geoffrion, 1965), y P una matriz diagonal cuyos elementos p_j (j = 1,....,l) (l estados de la naturaleza) son no negativos. De acuerdo con las asignaciones que se hagan a los p_i y π, obtienen los enfoques -- Bayesiano, de Laplace y de Savage-Niehans.

En el ejemplo concreto que se ha propuesto, si se supone $p_1 = p_2$ y $\pi = 1$ (enfoque de Laplace) se llegaría mediante -- el programa sustitutivo a una solución igual a la que se llegaría considerando el equivalente cierto, que serían las funciones objetivo

$$\underline{z}_{\bullet}^1 (\underline{x}) = p_1 z_1^1 (\underline{x}) + p_2 z_2^1 (\underline{x}) = \frac{5}{2} x_1 + \frac{3}{2} x_2$$

$$\underline{z}_{\bullet}^2 (\underline{x}) = p_1 z_1^2 (\underline{x}) + p_2 z_2^2 (\underline{x}) = \frac{x_1}{2} + \frac{3}{2} x_2$$

de un problema multiatributo en certidumbre, al que se le aplicaría el criterio del máximo vectorial para llegar a la solución indicada, es decir

$$\max \left\{ \begin{pmatrix} \underline{z}_{\bullet}^1 (\underline{x}) \\ \underline{z}_{\bullet}^2 (\underline{x}) \end{pmatrix} : \underline{x} \in X \right\} .$$

Por tanto, en el método de D. e I., cada componente del - complejo de criterios (u objetivos) tiene una distribución de probabilidad o presenta una situación de incertidumbre y proponen -- que se sustituya por su "equivalente en certidumbre". De este modo, a cada decisión le corresponde un complejo de consecuencias -

en certidumbre y los métodos de tratamiento del problema de multicriterios en certidumbre completarían el tratamiento. Se obtienen así diversos métodos combinando las diversas interpretaciones posibles de "equivalente cierto" con los diferentes métodos posibles de multicriterios en certidumbre.

Hay una doble crítica a esta metodología, ya que por un lado se debe exigir una cierta consistencia entre unos y otros métodos, y por otro no tiene en cuenta la interdependencia estocástica de los objetivos o criterios y valdrían solamente para el caso de indiferencia respecto al riesgo en los objetivos.

Estas dificultades se salvan tratando en una manera conjunta los multiobjetivos en incertidumbre, mediante una axiomática apropiada, como veremos más adelante.

II.3.- Decisiones en incertidumbre para multiatributos.- Introducción.-

El problema de decisión en incertidumbre con multiatributos tiene su tratamiento mas apropiado con la teoría de la utilidad de Von-Neumann y sus generalizaciones.

Dado el carácter abstracto de los entes que entran en el teorema de Von-Neumann, es posible adaptarlo al caso de multiatributos, y teóricamente se tiene así la solución del problema maximizando la utilidad esperada. También se puede establecer, como veremos más adelante, un mayor paralelismo con nuestro capítulo relativo a decisiones en certidumbre si empleamos un resultado relativo a la utilidad vectorial que está en correspondencia con nuestro teorema sobre la función vectorial de valor en certidumbre.

No tiene una dificultad especial el problema de incorporar nueva información mediante el teorema de Bayes, y se obtiene como veremos mas adelante, la regla análoga de maximizar la utilidad - a posteriori, para cada resultado posible del experimento.

Sin embargo, la gran dificultad de construir practicamente la utilidad de Von-Neumann, que es la crítica que suele hacerse a tal método, nos hace interesarnos por una metodología de -- Raiffa, que permite relacionar tal función de utilidad con la función de valor de Debreu, mediante una transformación monótona.

Tal metodología se encuentra en la literatura (Raiffa, -- 1969 y Fischer, 1975), indicándola sin llegar a formalizarla en - adecuados teoremas, preocupándose únicamente de su aplicabilidad. Como dice G. W. Fischer (1975, pág. 36).

> "Recall that if V is an appropriate measure of riskless value, then there exists some monotone transform R such that $U(X)=R\left[V(X)\right]$ ".

II.4.- Esperanza de utilidad y función de valor.-

Trataremos ahora de establecer la relación entre la fun-- ción de utilidad de Von Neumann que permite construir la esperanza de utilidad y resolver los problemas de optimación en incertidumbre o en riesgo y la función de valor, ya estudiada en el capítulo anterior, así como el paso a las correspondientes funciones vectoriales.

Si admitimos los axiomas de Von Neumann-DeGroot (DeGroot, 1970) y los de Wold-Debreu, el primer sistema nos conduce a una familia infinita de operadores de utilidad, y el segundo a una familia infinita de funciones de valor, y el objetivo de los teoremas es relacionar unas con otras por su interés teórico y por la finalidad práctica (como ya se indicó en el capítulo I), de facilitar el cálculo de la función de utilidad en el caso de multiatributos.

Tenemos entonces el siguiente

TEOREMA 4.1.-

Sea un conjunto S de elementos $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}_n^+$, y $\mathcal{A}$ una σ-álgra de subconjuntos de S. Supongamos que en S tenemos definido:

1a) Un preorden completo $(\mathbf{R}_n^+, \succsim)$, que refleja las preferencias del individuo.

Este preorden es tal que:

1b) El orden parcial natural $\dot{\geqslant}$ en $\mathbf{R}^n$ implica el preorden $\succsim$, es decir,

$$\underline{x} \dot{\geqslant} \underline{y} \Rightarrow \underline{x} \succsim \underline{y}$$

$$\underline{x} \dot{>} \underline{y} \Rightarrow \underline{x} \succ \underline{y}$$

1c) Si $\underline{x} \succsim \underline{y} \succsim \underline{z}$, existe un $\lambda \in [0,1]$, tal que

$$\underline{y} \sim \lambda\, \underline{x} + (1-\lambda)\, \underline{z}.$$

Sea $\mathcal{P}_B$ la clase de las distribuciones de probabilidad acotadas definidas en S, es decir, tales que para cada $P \in \mathcal{P}_B$ existen $\underline{x}^1$, $\underline{x}^2 \in S$ de modo que $P\left[\underline{x}^1 \precsim \underline{x} \precsim \underline{x}^2\right] = 1$.

1d) Se tiene definida una relación de preorden completo - $(\mathcal{P}_B, \succsim^*)$, siendo éste consistente con el preorden $(R_n^+, \succsim)$ cuando las distribuciones de probabilidad $P \in \mathcal{P}_B$, degeneran en elementos seguros $\underline{x} \in S$.

1e) Sean P^1, P^2, $P \in \mathcal{P}_B$, y $\alpha \in (0,1)$. Entonces

$$P^1 \succ^* P^2 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ P^1 & P \end{pmatrix} \succ^* \begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ P^2 & P \end{pmatrix}$$

1f) Sean P^1, P^2, $P \in \mathcal{P}_B$ tales que $P^1 \succ^* P \succ^* P^2$. Entonces existen $\alpha \in (0,1)$ y $\beta \in (0,1)$ tales que

$$P \succ^* \begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ P^2 & P^1 \end{pmatrix}, \text{ y}$$

$$P \prec^* \begin{pmatrix} \beta & 1-\beta \\ P^2 & P^1 \end{pmatrix}.$$

Con estas hipótesis:

1A) Existe una función de valor

$$v:\ R_n^+ \longrightarrow R$$

que es continua isótona y fiel, es decir

$$\underline{x} \succ \underline{y} \Leftrightarrow v(\underline{x}) \succ v(\underline{y})$$

$$\underline{x} \sim \underline{y} \Leftrightarrow v(\underline{x}) = v(\underline{y})$$

1B) Tal función es única salvo una transformación estrictamente monótona y continua $\varphi(\ .\ )$, es decir, si $v^*(\underline{x})$ tiene las mismas propiedades que $v(\underline{x})$, es

$$v^*(\underline{x}) = \varphi(v(\underline{x})) \quad .$$

1C) Existe una función de utilidad

$$u : S \longrightarrow \mathbb{R}$$

tal que para todo $\underline{x} \in S$, es

$$\underline{x} \sim \begin{pmatrix} u(\underline{x}) & 1-u(\underline{x}) \\ \underline{x}^2 & \underline{x}^1 \end{pmatrix} \quad .$$

Para poder establecer la relación llamada "hipótesis de la esperanza de utilidad", hay que demostrar la existencia del operador de utilidad

$$U(P) = \int_S u(\underline{x})\, dP(\underline{x}) \qquad (P(\underline{x}) \in \mathcal{P}_B)$$

Para esto, siguiendo a DeGroot, se introduce un nuevo axioma.

Supongamos:

1g) Cualesquiera que sean $\underline{x}'$, $\underline{x}''$, $\underline{x}''' \in S$, y $\alpha, \beta \in [0,1]$, se verifica

$$\left\{ \underline{x} : \begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ \underline{x} & \underline{x}' \end{pmatrix} \succsim \begin{pmatrix} \beta & 1-\beta \\ \underline{x}'' & \underline{x}''' \end{pmatrix} \right\} \in \mathcal{A} \, .$$

Se demuestra entonces que si para cada $P \in \mathcal{P}_B$, se define

$$\beta = \int_{[\underline{x}^1, \underline{x}^2]} u\,(\underline{x}) \quad dP\,(x),$$

esta integral existe y se verifica

$$P \sim^{*} \beta\, \underline{x}^2 + (1 - \beta)\, \underline{x}^1,$$

y más aún,

$$(1D) \text{ existe } U\,(P) = \int_S u\,(\underline{x})\, dP\,(\underline{x})$$

y se verifica que para cualesquiera que sean P^1, $P^2 \in \mathcal{P}_B$,

$$P^1 \succsim^{*} P^2 \text{ si y solo si } U\,(P^1) \geq U\,(P^2) \quad .$$

Además, si $u^{*}\,(\underline{x})$es otra función de utilidad, se verifica que

$$u^{*}\,(\underline{x}) = a\,u\,(\underline{x}) + b$$

siendo $a > 0$, y b números reales.

Finalmente:

1E) Para cualquier función de valor v, y cualquier función de utilidad u continua, se verifica que

$$u\,(\underline{x}) = \varphi(\,v(\underline{x})),$$

siendo φ una función estrictamente monótona y continua.

El enunciado de este teorema coordina en uno solo los de DeGroot y Wold-Debreu, con el resultado nuevo 1E, que permite la construcción de la función de utilidad a partir de la función de valor.

Que estos dos conjuntos de axiomas no son incompatibles - resulta de ejemplos inmediatos.

Si a partir del operador de utilidad

$$U(P) = \int_S u(\underline{x})\, dP(\underline{x})$$

se define para $P_{\underline{x}} = \begin{pmatrix} 1 \\ \underline{x} \end{pmatrix}$, la función

$$u(\underline{x}) = U(P_{\underline{x}})$$

para todo $\underline{x} \in \mathbb{R}_n^+$, esta función de utilidad tiene las propiedades de una función de valor, pues por la hipótesis 1d,

$$P_{\underline{x}} \succ^* P_{\underline{y}} \quad \text{equivale a } \underline{x} \succ \underline{y}$$

y como aquella equivale a

$$U(P_{\underline{x}}) > U(P_{\underline{y}})$$

tendremos que

$$\underline{x} \succ \underline{y} \Longleftrightarrow u(\underline{x}) > u(\underline{y}),$$

y analogamente

$$\underline{x} \sim \underline{y} \Longleftrightarrow u(\underline{x}) = u(\underline{y}).$$

Con esto está demostrada la isotonía y fidelidad respecto del preorden $\succsim$ de la función de utilidad $u(\underline{x})$.

La continuidad de la función u ($\underline{x}$) resulta de que en S, - se verifican para el preorden $\succsim'$, las condiciones 1-b y 1-c.

Al haber demostrado que u ($\underline{x}$) tiene las propiedades de una función de valor en R_n^+, de la propiedad 1B, resulta que

$$u(\underline{x}) = \varphi(v(\underline{x})).$$

<u>OBSERVACIONES</u>:

1) La función u ($\underline{x}$) construida a partir de los axiomas de Von Neumann-DeGroot no tiene porqué ser una función de valor (si no se admite explicitamente el axioma de continuidad de Debreu), y por tanto no tendría que ser u = φ (v).

2) En particular, u ($\underline{x}$) puede no ser continua, aunque se ha demostrado que, bajo condiciones muy amplias, es medible. En - cambio, de las condiciones del teorema de Wold-Debreu resulta que la función v ($\underline{x}$) es continua.

Por otra parte, si $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n$ $(n \geq 3)$, una - condición sencilla para que v ($\underline{x}$) sea aditiva, es decir, para que se pueda descomponer en la forma

$$v(\underline{x}) = v_1(x_1) + v_2(x_2) + \ldots + v_n(x_n)$$

es la monotonía o independencia débil en el sentido de Debreu, a saber, si $\underline{y}$ es un subconjunto de atributos de $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, y $\underline{z}$ el complementario de modo que $\underline{x} = (\underline{y}, \underline{z})$; si $(\underline{y}^i, \underline{z}^i)$ e $(\underline{y}^j, \underline{z}^j)$ son dos estados, la condición de monotonía es

$$(\underline{y}^i, \underline{z}^i) \succsim (\underline{y}^j, \underline{z}^i) \Longleftrightarrow (\underline{y}^i, \underline{z}^j) \succsim (\underline{y}^j, \underline{z}^j)$$

Si suponemos que se verifica tal condición para todas las posibles particiones de $\underline{x}$ y que por tanto vale que

$$v(\underline{x}) = v_1 (x_1) + \ldots + v_n (x_n),$$

y que además existe la función de utilidad u ($\underline{x}$), puede ocurrir que ésta no sea una función de valor. En efecto como consecuencia del teorema de Wold-Debreu cualquier otra función de valor que represente el mismo orden, es de la forma $\varphi(v(\underline{x}))$, siendo φ una función estrictamente monótona y continua. Pero, si consideramos una función de utilidad

$$\varphi \left(\sum_1^n v_i (x_i) \right)$$

al tener una estructura aditiva debe verificarse la condición de marginalidad de Fishburn (Ver Ríos (1976,a)), pero ésta condición no se verificará en general, pues se demuestra facilmente que no es consecuencia de la condición de monotonía de Debreu, sino que es una condición más fuerte.

Estas consideraciones indican el interés de la propiedad, que se demostró, relativa a la relación entre las funciones de valor y utilidad.

3) Veamos con un ejemplo, que la función de utilidad de Von Neumann definida en un rectángulo A,

$$u(\underline{x}) : A \longrightarrow [0,1]$$

puede ser discontinua.

Definamos

$$u\ (x_1,\ x_2) = \begin{cases} 0{,}3\ (x_1-2)\ (x_2-2) & ;\ (x_1,x_2) \in ([2;2{,}5] \times [2;3])\ \cup \\ & \quad \cup([2,3] \times [2;2{,}5]) \\ 0{,}6 + 0{,}4\ (x_1-2)\ (x_2-2); & (x_1,x_2) \in (2{,}5;3] \times (2{,}5;3] \end{cases}$$

Esta función tiene la forma que se indica en el gráfico (fig. 4.1.).

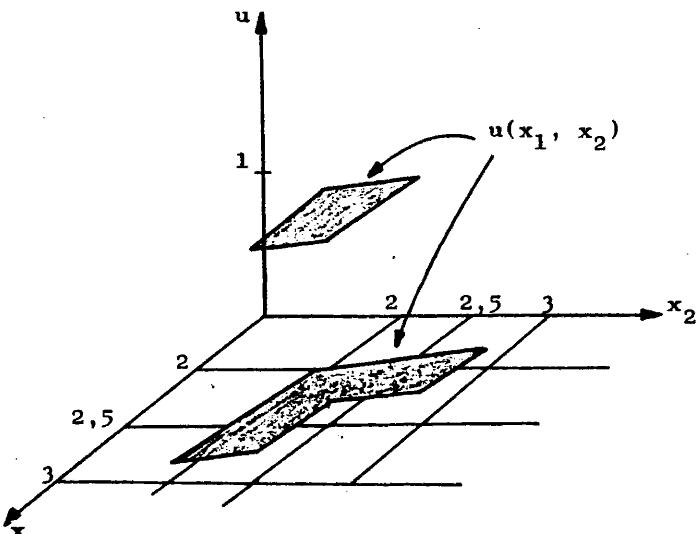


fig. 4.1.

Esta definición, de acuerdo con los axiomas de Von Neumann, implica que si

$$\begin{pmatrix} p & 1-p \\ (3,3) & (2,2) \end{pmatrix} \sim (x_1,\ x_2)$$

entonces

$$p\ u\ (3,3) + (1-p)\ u\ (2,2) = u\ (x_1,\ x_2)$$

y si ponemos

$$u\ (3,3) = 1, \quad u\ (2,2) = 0$$

queda

$$p = u\ (x_1, x_2)\ .$$

En particular

$$u\ (2,5;\ 2,5) = 0,075$$

$$u\ (2,51;\ 2,51) = 0,70404$$

A primera vista resulta extraño que, p.e.:

$$\begin{pmatrix} 0,075 & 0,925 \\ \\ (3,3) & (2,2) \end{pmatrix} \sim (2,5;2,5),$$

y

$$\begin{pmatrix} 0,70404 & 0,29596 \\ \\ (3,3) & (2,2) \end{pmatrix} \sim (2,51;2,51),$$

sin embargo, no hay contradicción formal entre este comportamiento y la axiomática de Von Neumann.

4) Para los problemas prácticos es suficiente la consideración de la clase $\mathcal{P}_B$. Una clase más amplia, es la $\mathcal{P}_E$ (distribuciones de probabilidad para las que U (P) es finita), que contiene $\mathcal{P}_B$. Es inmediato ver que se podría dar un teorema análogo al dado, considerando la clase $\mathcal{P}_E$, mediante algunos complementos análogamente a como se hace en (DeGroot (1970), pág. 110), e incluso considerar la clase mas general $\mathcal{P}$ de todas las distribuciones de probabilidad [1].

5) La ventaja de establecer una relación sencilla entre - la función de utilidad u y la de valor v, está en que si se ha determinado v, el paso a u, se reducirá a la determinación de algunos parámetros de la relación que las liga, que den una idea de - la actitud frente al riesgo por parte del decisor, y que sean suficientes para construirla. Es decir, de esta metodología, que hemos formalizado, resulta un camino práctico que hace más fácil la construcción de la función de utilidad correspondiente. Esta construcción consta básicamente de dos etapas: la primera consiste en determinar la correspondiente función (es) de valor v (que no necesita de comparación de perspectivas), mediante algún procedimiento adecuado (intercambio secuencial, medida conjunta, etc. (Fischer (1975). Von Winterfeldt y Fischer (1975), Keeney y Raiffa (1976))).

La segunda etapa consiste en construir algunos puntos de la relación $u = \varphi(v)$, es decir, seleccionar varios resultados o consecuencias, de tal forma que estén situados a lo largo de todo el recorrido de la escala de valores, es decir que cubran el recorrido de la función de valor v. A continuación el decisor asigna de forma directa, utilidades a estas consecuencias mediante el -- procedimiento de las probabilidades de indiferencia de Raiffa -- (1969). Para obtener la transformación φ , primeramente se toman los "valores" sobre un eje horizontal y las correspondientes "utilidades" sobre un eje vertical.

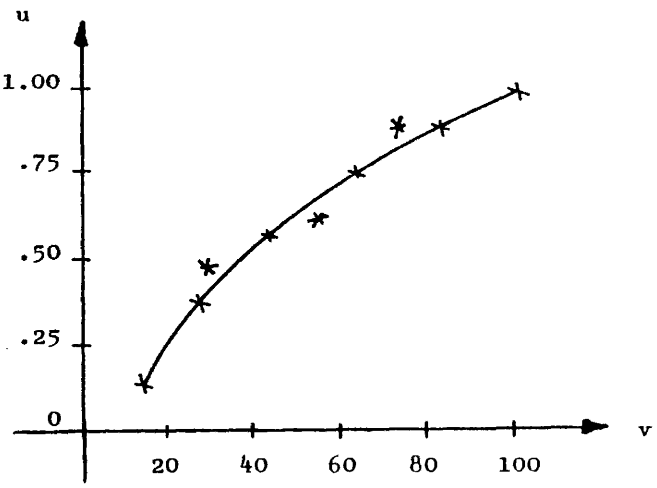


fig. 4.2.

Tomando un origen de forma arbitraria, p.e., u (v=0) = 0 y u (v = 100) = 1, se puede obtener una buena aproximación de la transformación φ , mediante una curva que se ajuste a los puntos considerados en el plano (v, u).

Existen otros métodos como se puede ver en la extensa bibliografía existente, que son modificaciones del anterior y tienen sus ventajas e inconvenientes sobre el método básico considerado. Teniendo en cuenta éstas, el decisor deberá determinar a la vista de su problema qué método práctico le resulta más adecuado.

II.5.- Generalizaciones.-

Vamos a ver a continuación varias generalizaciones de las cuales es suceptible el teorema que hemos dado, y que vamos a indicar a continuación.

La primera que consideramos se obtiene acoplando el teorema dado en forma vectorial de Wold-Debreu con el teorema apropiado, relativo a utilidad vectorial, obtenido éste como generalización del teorema de Von Neumann en la misma línea que el teorema vectorial de Wold-Debreu. Tenemos así

TEOREMA 5.1.-

Sea un conjunto S de elementos $\underline{x} = (x_1,\dots,x_n) \in R^+_n$, y $\mathcal{A}$ una σ-álgebra de subconjuntos de S. Supongamos que en S tenemos definido,

1a) k preórdenes completos (R^+_n, $\succsim_i$) (i=1,....,k) que reflejan las preferencias del individuo respecto de k criterios, y verifican condiciones análogas a la del teorema 4.1. Supongamos también que :

1b) Se tienen definidas k relaciones de preorden completo ($\mathcal{P}_B$, $\succsim^*_i$) siendo estas consistentes con los respectivos preórdenes (R^+_n, $\succsim_i$) (i=1,....,k), cuando las distribuciones de probabilidad $P \in \mathcal{P}_B$ degeneran en elementos seguros $\underline{x} \in S$, y supongamos que se verifican para estos preórdenes condiciones análogas a las del teorema 4.1.

Con estas hiótesis

A) Existe una función vectorial de valor

$$v : R^+_n \longrightarrow R^k$$

donde $$v(\underline{x}) = (v_1(\underline{x}),\dots, v_k(\underline{x}))$$

siendo continua isótona y fiel, es decir

$$\left.\begin{aligned} \underline{x} \succ_i \underline{y} &\Longleftrightarrow v_i(\underline{x}) > v_i(\underline{y}) \\ \underline{x} \sim_i \underline{y} &\Longleftrightarrow v_i(\underline{x}) = v_i(\underline{y}) \end{aligned}\right\} \quad i=1,\dots,k$$

B) Tales funciones v_i son únicas, salvo transformaciones continuas y estrictamente monótonas, es decir si $v^*(x)$ es otra - función que tiene las mismas propiedades que $v(\underline{x})$, es

$$v_i(\underline{x}) = \varphi_i(v_i(\underline{x})) \quad (i=1,\ldots,k)$$

donde φ_i es una transformación continua y estrictamente monótona.

1c) Existe una función vectorial de utilidad

$$u : S \longrightarrow \mathbb{R}^k$$

donde

$$u(\underline{x}) = (u_1(\underline{x}),\ldots, u_k(\underline{x})),$$

y para todo $i=1,\ldots,k$, se verifica que cualesquiera que sean -- P^1, $P^2 \in \mathcal{L}_B$, es

$$P^1 \succsim_i^* P^2 \text{ si y solo si } U(P^1) \geqslant U(P^2),$$

y si $u^*(\underline{x}) = (u_1^*(\underline{x}),\ldots, u_k^*(\underline{x}))$ es otra función vectorial de - utilidad, se verifica que $u_i^*(\underline{x}) = a_i u_i(\underline{x}) + b_i$ siendo $a_i > 0$, y b_i números reales $(i=1,\ldots,k)$.

1D) Para cualquier función vectorial de valor v y cualquier función vectorial de utilidad u, se verifica que:

$$(u_1,\ldots, u_k) = (\varphi_1(v_1),\ldots, \varphi_k(v_k))$$

siendo φ_i $(i=1,\ldots,k)$ transformaciones contínuas y estrictamente monótonas.

Como se ve, el teorema 4.1. es un caso particular de éste en que se considera $k = 1$.

Al estudiar el problema de decisión en certidumbre (cap. I), suponíamos que en algunos casos sería posible llegar en el proceso polietápico de reducción a la consideración final de un único criterio y en tal caso se pasaría al caso de incertidumbre mediante el teorema 4.1. indicado.

Sin embargo puede ocurrir que en un problema no sea posible o no interese, como habíamos indicado, una reducción al caso de criterio escalar. Entonces la generalización dada (teorema 5.1.), nos permite una vez obtenida la función vectorial de valor, pasar a la función vectorial de utilidad correspondiente, si se considera necesario, por ser el problema en incertidumbre.

Como se vé, esta generalización que hemos dado mediante - el teorema 5.1. nos lleva a obtener un paralelismo con el capítulo relativo a decisiones en certidumbre aprovechando los resultados obtenidos en aquél para darle una mayor coherencia y conexión a ambos.

Otro tipo de generalización que se obtiene, es utilizando en el teorema 4.1. en lugar de el teorema de Wold-Debreu, el de - Suppes-Zinnes[(2)], sobre representación del orden de preferencias y acoplarlo, análogamente a como hemos hecho anteriormente, con el teorema de Von Neumann.

Antes de enunciar tal teorema veamos la siguiente

DEFINIDION 5.1.-

Sea S un conjunto no vacío y $\succsim$ una relación binaria sobre S x S. El par (S x S, $\succsim$) es una estructura algebráica de diferencias si y solo si para todo a, b, c, d, a', b' y c' $\in$ S, y toda sucesión $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_i, \ldots\ldots, \in$ S, se satisfacen los cinco axiomas siguientes:

1.- (S x S, $\succsim$) es un preorden completo

2.- Si (a, b) $\succsim$ (c, d) entonces (d, c) $\succsim$ (b, a)

3.- Si (a, b) $\succsim$ (a', b') y (b, c) $\succsim$ (b', c'), entonces (a, c) $\succsim$ (a', c').

4.- Si (a, b) $\succsim$ (c, d) $\succsim$ (a, a), entonces existen d', d" $\in$ S, tal que (a, d') $\sim$ (c, d) $\sim$ (d", b)

5.- Si $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_i, \ldots\ldots$ es una sucesión estandar estrictamentes acotada $((a_{i+1}, a_i) \sim (a_2, a_1)$, para cada a_i, a_{i+1} de la sucesión; y existe d', d" $\in$ S, tales que (d', d") $\succ (a_i, a_1) \succ$ $\succ$ (d", d') para toda a_i de la sucesión), entonces es finita.

TEOREMA 5.2.-

Si (S xS, $\succsim$) es una estructura algebráica de diferencia, entonces existe una función real v sobre S, tal que para todo a, b, c, d $\in$ S

$$(a, b) \succsim (c, d) \Longleftrightarrow v(a) - v(b) \geq v(c) - v(d).$$

Más aún, v es única salvo una transformación lineal positiva, es decir, si v' es otra función con las mismas propiedades que v, entonces existen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, tales que

$$v' = \alpha v + \beta$$

<u>DEMOSTRACION.-</u> Krantz y otros (1971).

Al hacer el acoplamiento mediante el teorema que acabamos de dar en la misma forma que se había realizado con el teorema -- 4.1., llegamos a que la relación que debe haber entre ambas funciones es de la forma

$$u = a\,v + b \;, \quad a > 0;$$

siendo ésta más estricta que la relación obtenida en el teorema - 4.1.

II.6.- Problema de decisión con información complementaria.-

Podemos presentar en una forma bastante general el problema de decisión en incertidumbre con incorporación de información complementaria suministrada por experimentos u observaciones posteriores, es decir, un modelo análogo al clásico bayesiano para - incorporar nueva información y sustituir las probabilidades a -- priori por otras a posteriori.

Para ello sea:

1º) D el conjunto de decisiones $d_1, d_2, \ldots$; Ω el conjunto de sucesos $\omega_1, \omega_2, \ldots$, que representan una partición de Ω.

2º) S un conjunto de consecuencias, que son vectores n-dimensionales $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in S \subset R^n$.

3º) Un conjunto de experimentos $Z = (z_1, z_2, \ldots)$ (o fuentes de información) que dan lugar a resultados posibles $\zeta_1, \zeta_2, \ldots,$

4º) Una distribución de probabilidad a priori que asigna a cada suceso $\omega \in \Omega$ una probabilidad p (ω /d, z), que depende de la decisión d y del experimento z.

5º) Una función de densidad f que asigna a cada punto -- $\underline{x} \in S$, una densidad de probabilidad f ($\underline{x}$/d, ω , z), que depende de la decisión d, el suceso ω , y el experimento z.

Se podrá obtener la densidad de probabilidad sobre las consecuencias dada una decisión d y un experimento z, y que representa la incertidumbre que modifica la p (ω/d, z), después de conocido el resultado del experimento, que viene dada por

$$g\ (\underline{x}/d,\ z) = \sum_{\omega \in \Omega} p\ (\omega/d,\ z)\ f\ (\underline{x}/d,\ \omega\ ,\ z).$$

Con esta función de densidad de probabilidad, se puede formar la esperanza de utilidad

$$U\ (d,\ z) = \int_S g\ (\underline{x}/d,\ z)\ u\ (\underline{x})\ d\underline{x};$$

Ahora bien, teniendo en cuenta el resultado del teorema - 4.1., se puede poner

$$U\ (d,\ z) = \int_S g\ (\underline{x}/d,\ z)\ \ \varphi(v\ (\underline{x}))\ d\underline{x},$$

donde v es la función de valor y φ una transformación estrictamente monótona adecuada. La maximización de acuerdo con la teoría expuesta, es decir, la determinación de la decisión $d^{*} \in D$ tal que

$$U\ (d^{*},\ z) = \max_{d \in D} U\ (d,\ z)$$

nos conducirá a la decisión óptima, dentro de la línea general de decisiones bayesianas.

Por último, indicaremos que también sería posible maximizar sobre Z, es decir, sobre el conjunto de posibles experimentos. Esto nos llevaría a un análisis del valor de la información (Raiffa y Schlaifer (1961)), pero en el que no vamos a entrar aquí.

II.7.- Problema de la cartera con multiatributos.-

Consideremos n tipos de acciones, obligaciones, etc.: -- A_1, A_2,...., A_n, y supongamos que se invierte una unidad de capital en las proporciones t_1, t_2,....,t_n en las mismas, es decir:

$$\sum_{i=1}^{n} t_i = 1, \quad t_i \geqslant 0. \qquad (1)$$

El problema clásico de la cartera trata de, fijado un intervalo de tiempo, hacer máxima la renta que se puede obtener del capital determinando los t_i. Corrientemente se considera la rentabilidad de cada papel A_i, como una vairable aleatoria ξ_i, y se trata de determinar $(t_1,....,t_n)$ tal que

$$\xi = \sum t_i \ \xi_i \qquad (2)$$

sea máxima con las condiciones (1) .

El problema ha dado lugar a una amplísima literatura (no menos de 10 libros, y centenares de memorias) desde que fue tratado de una manera concreta por Markowitz (1959). Los trabajos se -

refieren especialmente a diversos criterios para interpretar lo que es obtener una rentabilidad máxima teniendo en cuenta el riesgo. Así se han considerado criterios de la media y varianza, cuantiles, utilidad Von Neumann, dominancia estocástica, etc.

Parece ser, sin embargo, que los métodos de decisión con multicriterios no han pasado al problema de la cartera a pesar de que se reconoce por varios autores que todas las características de un papel no se reflejan más que parcialmente en la rentabilidad y que sería conveniente tener explícitamente en cuenta otros criterios distintos de la maximización de la rentabilidad. P.e. la liquidez es un criterio muy importante, ya que indica la probabilidad de poder recuperar todo o parte del capital invertido en un cierto momento. No vamos a entrar ahora aquí en la discusión relativa a diversos índices prácticos propuestos para la consideración de la liquidez. Una manera utilizada es considerar la variable aleatoria cantidad de un valor en pesetas contratadas en un día[3]. También podrían considerarse las cantidades demandadas, etc.

Si consideramos dos atributos (ξ_i, η_i) para cada papel A_i (analogamente se podrían considerar k atributos), el problema de la cartera puede plantearse así: determinar el vector $t=(t_1,\ldots,t_n)$ tal que la variable

$$(\xi , \eta) = (\sum_1^n t_i \xi_i , \sum_1^n t_i \eta_i) \qquad (3)$$

nos de esperanza de utilidad máxima:

$$\max_t E \left[u (\xi , \eta) \right] = \max \iint u (x, y) \, dF (x, y) \qquad (4)$$

con las condiciones

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{i=1}^{n} t_i = 1 \\ t_i \geqslant 0 \end{array}\right\} \qquad (5)$$

Supuesta conocida la distribución conjunta de

$$(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2, \ldots, \xi_n, \eta_n) \qquad (6)$$

y la función de utilidad u (x, y).

Es claro que el conocimiento de la función de distribución de la variable (6) , permitirá conocer la de la variable (3) , y de aquí se pasará a la maximización de la integral (4) , con las condiciones (5) .

El caso especialmente importante de utilidad cuadrática, considerado por Markowitz, conducirá en el caso de dos variables a la siguiente situación: sea en efecto

$$u (x, y) = a x^2 + bxy + cy^2 + dx + ey$$

y en virtud de (3) .

$$E\left[u (x,y)\right] = E\left[a \left(\sum_1^n t_i x_i\right)^2 + b\left(\sum_1^n t_i x_i\right) \left(\sum_1^n t_j y_j\right) + \right.$$

$$\left. + c \left(\sum_1^n t_j y_j\right)^2 \right] + E\left[d \left(\sum_1^n t_i x_i\right) + c \left(\sum_1^n t_j y_j\right) \right] =$$

$$= a \left(\sum_1^n t_i E\left[x_i^2\right] + \sum_{i<j}^{n} t_i t_j E\left[x_i x_j\right] \right) +$$

$$+ b \left(\sum_{i,j}^{n} t_i t_j E\left[x_i y_j\right] \right) +$$

$$+ c \left(\sum_{1}^{n} t_j \, E\left[y_j^2\right] + \sum_{i < j} t_i \, t_j \, E\left[y_i \, y_j\right] \right) +$$

$$+ d \left(\sum_{1}^{n} t_i \, E\left[x_i\right] \right) + c \left(\sum_{1}^{n} t_i \, E\left[y_i\right] \right)$$

y el problema es hacer máxima esta forma cuadrática en las t_i, con las condiciones (5) . Como se ve los coeficientes de la forma cuadrática se expresan mediante los dos primeros momentos de algunas distribuciones marginales de (6) .

Este planteamiento se generaliza al caso de k criterios - sin mas que considerar en vez de la variable (3) , la $(\xi , \eta , \ldots , \zeta) =$ $= \left(\sum_{1}^{n} t_i \, \xi_i , \sum_{1}^{n} t_i \, \eta_i , \ldots , \sum_{1}^{n} t_i \, \zeta_i \right)$ (3^*) y la esperanza de utilidad análoga a (4) y restricciones análogas a (5) .

Otros planteamientos posibles del problema serían, considerar una utilidad vectorial:

$$\underline{\underline{u}} \, (x, y) = \left[a \, (x, y) \, , \, b \, (x, y) \right]$$

y en particular separable:

$$\underline{\underline{u}} \, (x, y) = \left[a \, (x), \, b \, (y) \right]$$

y como caso mas particular cuadrática en cada variable, es decir,

$$\underline{\underline{u}} \, (x, y) = \left[x - \lambda_1 \, x^2, \; y - \lambda_2 \, y^2 \right] ,$$

que conduciría a determinar el máximo vectorial

$$\max_{t_1, \ldots, t_n} \left[E\left[\xi\right] - \lambda_1 \left[V\left[\xi\right] + E\left[\xi\right]^2 \right] ; \; E\left[\eta\right] - \lambda_2 \left[V\left[\eta\right] + E\left[\eta\right]^2 \right] \right] \quad (\alpha)$$

Estos planteamientos se trasladan sin dificultad al caso de k criterios.

Por otra parte, el caso de utilidad vectorial cuadrática separable se relaciona de modo natural con un planteamiento analogo al que hace Markowitz para monocriterio.

Se define una cartera carácterizada por la media

$$E = \left\{ E\left[\xi\right] \quad , E\left[\eta\right] \right\}$$

y varianza

$$V = \left\{ V\left[\xi\right] \quad , V\left[\eta\right] \right\}$$

como <u>eficiente</u>, si no existe otra mejor respecto del orden $\succsim$ definido así:

$$(E_1, V_1) \succ (E_2, V_2) \Longleftrightarrow E_1 \geqslant^* E_2, \; V_1 \leqslant^* V_2$$

(siendo uno de los signos estricto), y siendo

$$E_1 \geqslant^* E_2 \Longleftrightarrow E_1\left[\xi\right] \geqslant E_1\left[\eta\right] \quad , E_2\left[\xi\right] \geqslant E_2\left[\eta\right]$$

$$V_1 \leqslant^* V_2 \Longleftrightarrow V_1\left[\xi\right] \leqslant V_1\left[\eta\right] \quad , V_2\left[\xi\right] \leqslant V_2\left[\eta\right]$$

Se trataría entonces de probar (lo que aquí solo conjeturamos) que obtener los puntos eficientes equivale a resolver el problema de máximo vectorial para pares (λ_1, λ_2) fijados

$$\max_{t_1, \ldots, t_n} \left\{ E\left[\xi\right] - \lambda_1 V\left[\xi\right] \quad , E\left[\eta\right] - \lambda_2 V\left[\eta\right] \right\} \qquad (\beta)$$

y está claro el paralelismo de esta expresión con la (α) a que nos conducía la maximización de la utilidad cuadrática separable.

Hacer algún ejemplo de cálculo efectivo, no parece ofrecer especial dificultad respecto de los problemas con un solo criterio.

II.8.- Paralelismo entre metodologías de decisiones en certidumbre e incertidumbre.-

Es interesante señalar un cierto paralelismo entre decisiones en certidumbre y en riesgo o incertidumbre.

Supongamos una situación de decisión en incertidumbre con k estados $(\omega_1, \dots, \omega_k)$, N criterios y m decisiones a_i

$$\begin{array}{c|c} & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \omega_j \cdots\cdots \\ \hline \vdots & \\ a_i & \underline{z}(a_i, \omega_j) = \begin{pmatrix} z_1 (a_i, \omega_j) \\ \vdots \\ z_N (a_i, \omega_j) \end{pmatrix} \\ \vdots & \end{array}$$

Hemos visto como en el caso de certidumbre, en que la consecuencia de a_i, es un complejo $\begin{pmatrix} z_1 (a_i) \\ \vdots \\ z_N (a_i) \end{pmatrix}$, se define un preorden de preferencia $\succsim$, y en consecuencia se llega al concepto de maximal y de decisión eficiente, y posteriormente por un proceso secuencial a la reducción del conjunto eficiente.

Aquí, en nuestro problema actual, la consecuencia de una decisión a_i, es una variable aleatoria vectorial

$$\underline{z}(a_i, \omega_j) = \begin{pmatrix} z_1 (a_i, \omega_j) \\ \vdots \\ z_N (a_i, \omega_j) \end{pmatrix} \quad \text{con } P(\omega_j) = p_j \quad (j=1, \dots, k)$$

Diremos que $\underline{z}(a_i, \omega) \succsim^{*} \underline{z}(a_h, \omega)$ si para todo $\underline{\omega}$ es $\underline{z}(a_i, \omega) \succsim \underline{z}(a_h, \omega)$ (1) y para algún $\underline{\omega}$ es $\underline{z}(a_i, \omega) \succ \succ \underline{z}(a_h, \omega)$ (2). Con la definición dada (cap. I para $\succsim$) resulta que (1) y (2) equivalen a que para todo ω y todo k

$$z_k(a_i, \omega) \geqslant z_k(a_h, \omega)$$

y para algún ω y algún k, sea

$$z_k(a_i, \omega) > z_k(a_h, \omega)$$

Tras esta definición vienen otras dos:

1) a_i es <u>óptima</u>, si para todo $k \neq i$ es

$$\underline{z}(a_i, \omega) \succsim^{*} \underline{z}(a_k, \omega)$$

2) a_i es <u>eficiente</u> si no existe $k \neq i$ tal tal que

$$\underline{z}(a_k, \omega) \succ^{*} \underline{z}(a_i, \omega)$$

Esta noción de eficiencia es mucho más débil que la que se obtiene en el caso de certidumbre y por tanto la determinación del conjunto eficiente deja una enorme indeterminación en el problema, incluso en el caso de solo dos estados.

Cabría proseguir este método en paralelo con el método secuancial de decisión en certidumbre, y el teorema dado sobre utilidad vectorial provee un método análogo de reducción de la dimensión del conjunto eficiente. El paso final es llegar a la optimación de la función de valor en el caso determinista y a la de la esperanza de utilidad en el de incertidumbre. Todo esto lo podemos resumir en el siguiente cuadro:

Decisión en certidumbre con N atributos.

$$a_i \rightarrow \begin{pmatrix} z_1 \; (a_i) \\ \vdots \\ z_N \; (a_i) \end{pmatrix} \rightarrow$$ conjunto eficiente

$$\downarrow$$ reducción a n criterios

$$a_i \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \; (a_i) \\ \vdots \\ x_n \; (a_i) \end{pmatrix} \rightarrow$$ conjunto eficiente

$$\downarrow$$ reducción a una función de valor escalar

$$a_i \rightarrow v \; (\underline{z}_i) \longrightarrow$$ decisión de valor máximo

Decisión en incertidumbre con N atributos y k estados.

$$\begin{array}{c} \cdots\cdots\cdots\omega_j\cdots\cdots\cdots \\ a_i \rightarrow \begin{pmatrix} z_1 \; (a_i , \omega_j) \\ \vdots \\ z_N \; (a_i , \omega_j) \end{pmatrix} \end{array}$$ dominancia estocástica

$$\downarrow$$ reducción a n criterios

$$\begin{array}{c} \cdots\cdots\cdots\omega_j\cdots\cdots\cdots \\ a_i \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \; (a_i , \omega_j) \\ \vdots \\ x_n \; (a_i , \omega_j) \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\downarrow$$ reducción a una función de utilidad

$$a_i \rightarrow U \left[\underline{z}(a_i , \omega) \right] \rightarrow$$ decisión de utilidad máxima.

Como es sabido, en el caso de monocriterio la noción de dominancia da lugar a varias definiciones, asociadas cada una a una familia de funciones de utilidad. Entonces, se encuentra aquí un campo amplio de problemas no tratados si se quiere extender dichos conceptos de dominancia de primero, segundo y tercer tipo a la variables aleatorias multidimensionales y mas aún al tratar de buscar teoremas de equivalencia con respecto a las familias de funciones de utilidad de variables multidimensionales.

NOTAS A PIE DE PAGINA

(1) Para un desarrollo mas general, ver p.e. Fishburn (1970). Giron (1979) obtiene una caracterización de la función de utilidad para densidades.

(2) Ver Krantz y otros (1971), pág. 150.

(3) Parece que un tal índice se utiliza para considerar que un valor es "calificado" en Bolsa.

CAPITULO III

Juegos con Multicriterio

III.0.- Motivación.-

Las consecuencias de una situación conflictiva entre dos o más individuos o decisores, pueden ser juzgadas por cada decisor desde varios puntos de vista: así, en una campaña publicitaria para conquistar un mercado deberá tenerse en cuenta la diversidad de tal mercado p.e., clientes de varios niveles económicos, unos más asequibles por unos medios de propaganda que por otros, etc. Análogamente al tratar de obtener un contrato mediante una puja en una subasta, será interesante considerar los aspectos de empleo, consumidores, etc., logrado con las distintas consecuencias posibles. En un problema militar los aspectos de vidas civiles o militares perdidas, armamento, posiciones estratégicas, etc. son dificilmente comparables.

En todos estos casos la introducción de una utilidad unidimensional es un método suceptible de ser mejorado mediante la utilidad multicriterio. Y en consecuencia, de un modo general vamos a considerar algunos puntos de una teoría de juegos con criterios múltiples dando un nuevo paso para llegar de la decisión individual con criterios múltiples a los juegos multicriterio, comenzando por generalizar los juegos no cooperativos de n personas.

El concepto de juego con pagos múltiples fue introducido por Blackwell (1956), y Contini (1966), y otros trabajos posteriores son de Zeleny (1976), Draguçin (1975), Cook (1978), y Aubin - (1971). Todos estos trabajos se dedican a generalizaciones de los juegos bipersonales de suma nula en la consideración de pagos vectoriales, adoptando distintas ópticas para ampliar la idea del minimáx. El punto de vista de esta parte de nuetro trabajo, es considerar un campo mas amplio, que es el de los juegos vectoriales no cooperativos n-personales.

III.1.- Definiciones.-

Sea I el conjunto de todos los jugadores que vamos a suponer finito. A cada jugador se le asignará un número del conjunto $I = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Cada jugador $i \in I$ tendrá a su disposición un cierto conjunto S_i de posibles acciones o estrategias $s_i \in S_i$.

El proceso del juego consistirá en que cada uno de los jugadores elige una cierta estrategia $s_i \in S_i$, y como resultado se tendrá un sistema de estrategias $(s_1, \ldots, s_n) = s$. A este sistema de estrategias se denomina una <u>situación</u> o <u>punto</u>. El conjunto de todas las posibles situaciones o puntos se indicará por

$$S = S_1 \times \ldots \times S_n = \prod_{i=1}^{n} S_i$$

Para cada situación s, el jugador i obtendrá un pago que vendrá dado en la forma

$$H_i (s) = (H_i^1 (s), \ldots, H_i^k (s))$$

donde H_i^j (s) será el pago que obtiene el jugador i, con respecto al criterio j (j = 1, 2, ..., k), cuando la situación que se dá es s. La función vectorial H_i definida en el conjunto S, se llama función de pago vectorial y consta, como se ha indicado, de k componentes, siendo k el número de criterios considerados por el decisor. Tal situación nueva es la que nos interesa a diferencia de la clásica en que es k = 1.

Supondremos en todo lo que sigue, que estas funciones de pago son utilidades vectoriales en el sentido considerado en el capítulo II, y que, por tanto, tiene sentido la consideración de esperanzas vectoriales respecto de distribuciones de probabilidad fijadas, como ya vimos en el capítulo precedente.

Veamos a continuación la definición de juego vectorial no cooperativo.

DEFINICION 1.1.

Un sistema

$$G = \left(I, \left\{S_i\right\}_{i\in I}, \left\{H_i\right\}_{i\in I}\right) \quad (1)$$

donde I y S_i ($i\in I$) son conjuntos y $H_i = (H_i^1, \ldots, H_i^k)$ es una función vectorial definida en el conjunto S, es un <u>juego vectorial no cooperativo</u>.

DEFINICION 1.2.

Un juego vectorial no cooperativo se dice de suma constante, si existe un vector constante $C = (C_1, \ldots., C_k)$ tal que

$$\sum_{i \in I} H_i (s) = C$$

o bien

$$\sum_{i \in I} H_i^j (s) = C_j \qquad (j = 1, 2, \ldots., k)$$

para toda situación $s \in S$.

En el caso en que $C_j = 0$ para todo $j = 1, \ldots., k$, el juego se dice de suma nula.

Desde un punto de vista intuitivo resulta natural considerar que cada jugador se proponga obtener al terminar el juego el mayor pago posible. Esto será consecuencia del concepto de orden de preferencia que se dé, y precisamente en la diversidad posible de ordenaciones vectoriales está la clave y la dificultad para el desarrollo de una teoría de juegos vectoriales como veremos en lo que sigue.

III.2.- Puntos de equilibrio.-

Desde un punto de vista intuitivo, una situación en el juego (1), se dice que es admisible para el jugador i, si al reemplazar su estrategia actual en esta situación por alguna otra estrategia, el jugador i es incapaz de incrementar su pago.

Es decir, sea $s = (s_1, \ldots, s_{i-1}, s_i, s_{i+1}, \ldots, s_n)$ -- una situación arbitraria en un juego G, y sea s_i una estrategia - para el jugador i. Formamos una nueva situación que difiere de la situación s, solo en la estrategia s_i para i, que se sustituye por la estrategia s_i'. A la nueva situación obtenida -- $(s_1, \ldots, s_{i-1}, s_i', s_{i+1}, \ldots, s_n)$ la indicaremos por $s//s_i'$. Es evidente que si s_i y s_i' coinciden será $s//s_i' = s$. Entonces teniendo en cuenta esto se tendrá

DEFINICION 2.1.

Una situación s en el juego (1) se llama admisible para - el jugador i, si para cualquier otra estrategia $s_i' \in S_i$ para este jugador se tiene que

$$H_i\ (s//s_i')\ \underline{\text{es menos preferido que}}\ H_i\ (s).$$

El precisar esta noción de menos preferido, que es única en el caso escalar o monocriterio, puede tener varias interpretaciones en el caso vectorial. Esto lleva consigo la aparición de - dificultades como ya se había apuntado, y de aquí el interés de - esta clase de juegos.

DEFINICION 2.2.

Una situación que es admisible para los jugadores 1,....,n, se llama una situación o punto de equilibrio.

Parece natural, teniendo en cuenta la definición de situación o punto de equilibrio, que en puntos de equilibrio y solo en tales puntos, ningún jugador esté interesado en desviarse de su estrategia inicial, es decir, si todos los jugadores fijan sus estrategias excepto uno, este empeora su pago, si cambia la suya.

DEFINICION 2.3.

Una estrategia de equilibrio de un jugador en el juego (1), es una estrategia que aparece en al menos una situación o punto de equilibrio en el juego.

Como es bien conocido, una gran parte de la teoría de juegos no cooperativos está principalmente encaminada al estudio de propiedades y métodos para determinar los puntos y estrategias de equilibrio en tales juegos, y esto es lo que trataremos de generalizar a este tipo de juegos vectoriales.

Vamos a dar una clasificación de los juegos vectoriales no cooperativos de tal forma que todos los juegos que pertenezcan a una misma clase tendrán los mismos puntos de equilibrio.

DEFINICION 2.4.

Sean dos juegos vectoriales no cooperativos con los mismos conjuntos de jugadores y estrategias (solo difieren en sus funciones de pago)

$$G' = \left(I, \{S_i\}_{i\in I}, \{H_i'\}_{i\in I}\right) \quad (2)$$

$$G'' = \left(I, \{S_i\}_{i\in I}, \{H_i''\}_{i\in I}\right) \quad (3)$$

Los juegos G' y G'' se dicen estrategicamente equivalentes y se indicará en la forma $G' \sim G''$ si existen k números reales positivos k_j, y n.k números reales C_i^j $(i=1, \ldots, n,\ j=1, \ldots, k)$, tales que

$$H_i'^{j}(s) = k_j\, H_i''^{j}(s) + C_i^j \qquad (4)$$

La relación de equivalencia estratégica es una relación de equivalencia. Veamos que se cumplen las correspondientes propiedades:

1.- Reflexiva

Cada juego es estrategicamente equivalente a sí mismo, es decir $G' \sim G'$. Para probar esto, basta hacer en (4),

$$k_j = 1 \quad y \quad C_i^j = 0 \ (j = 1, \ldots, k,\ i = 1, \ldots, n).$$

2.- Simétrica

Si $G' \sim G''$, entonces $G'' \sim G'$. En efecto, a partir de (4), basta tomar

$$H_i''^{j}(s) = \frac{1}{k_j} H_i'^{j}(s) - \frac{C_i^j}{k_j}$$

siendo $\frac{1}{k_j} > 0$, $j = 1, \ldots, k$.

3.- Transitiva

Si $G \sim G'$ y $G' \sim G''$, entonces $G \sim G''$. Para probarlo, se tiene que de la condición de equivalencia estratégica de los pares -

de juegos (G, G') y (G', G'') será $H_i'^j(s)=k_j H_i^j(s) + C_i^j$, $H_i''^j(s) = k_j' H_i'^j(s) + C_i'^j$ y de acuerdo con la definición es $k_j > 0$ y $k_j' > 0$, para todo $j = 1, ..., k$.

Entonces

$$H_i''^j(s) = k_j k_j' H_i^j(s) + (k_j' C_i^j + C_i'^j)$$

Siendo $k_j k_j' > 0$, $j = 1, ... k$, luego $G \sim G''$.

Se tiene así que la relación de equivalencia estratégica es una relación de equivalencia que subdivide la totalidad de los juegos no cooperativos en clases disjuntas de juegos equivalentes.

El significado de la equivalencia estratégica de juegos está básicamente en la diferencia que hay entre las cantidades iniciales C_i^j que con respecto a cada criterio poseen los jugadores y en las unidades relativas que con respecto a cada criterio se miden tales cantidades o pagos (esto viene indicado por el coeficiente k_j).

Resulta entonces completamente natural el pensar que para juegos estratégicamente equivalentes, el comportamiento racional de los jugadores debe ser el mismo. Esto viene confirmado por un teorema (4.1.) que daremos más adelante.

TEOREMA 2.1.

Cada juego vectorial de suma constante es estratégicamente equivalente a un juego vectorial de suma nula.

DEMOSTRACION.-

Consideremos el juego vectorial de suma constante

$$G' = \left(I, \left\{ S_i \right\}_{i\in I}, \left\{ H'_i \right\}_{i\in I}\right)$$

en el cual la suma de los pagos para todos los jugadores es igual a C^j para cada j - K y cada situación del juego, es decir

$$\sum_{i\in I} H_i'^{\,j}(s) = C^j, \text{ para todo } s \in S, \text{ y para todo } j \in K$$

Tomemos ahora de forma arbitraria números C_i^j $(i \in I)$ tales que $\sum_{i\in I} C_i^j = C^j$ para cada $j = 1, \ldots\ldots k$

Haciendo

$$H_i^j(s) = H_i'^{\,j}(s) - C_i^j.$$

es

$$\sum_{i\in I} H_i^j(s) = 0 \text{ para todo } j = 1, 2, \ldots\ldots, k$$

y se tiene entonces que

$$G = \left(I, \left\{ S_i \right\}_{i\in I}, \left\{ H_i \right\}_{i\in I}\right)$$

es de suma nula, siendo $G' \sim G$.

Vamos a ver a continuación un caso particular de juegos vectoriales llamados antagónicos.

DEFINICION 2.5.

El juego.-

$$G = \left(I, \left\{ S_i \right\}_{i\in I}, \left\{ H_i \right\}_{i\in I}\right)$$

se llama antagónico , si solo hay dos jugadores y los valores de las componentes de las funciones de pago para estos jugadores son iguales en valor absoluto pero de signo contrario.

Así, se tiene que para un juego antagonístico es $I=\{1,2\}$, y

$$H_1 (s) = - H_2 (s) \qquad (5)$$

para todo $s \in S$. De aquí se tiene que

$$H_1 (s) + H_2 (s) = 0$$

es decir

$$H_1^j (s) + H_2^j (s) = 0$$

para todo $j = 1, \ldots, k$ y todo $s \in S$, luego un juego vectorial antagónico es un juego vectorial bipersonal de suma nula. Resulta entonces evidente que para definir un juego vectorial antagónico , es suficiente con estipular la función de pago de uno solo de los dos jugadores, ya que la función de pago del oponente estará dada por (5).

Teniendo en cuenta esto, un juego vectorial antagonístico quedará indicado mediante $G = (S_1, S_2, H)$ donde S_1 y S_2 son los conjuntos de estrategias para los jugadores 1 y 2 respectivamente, y H la función de pago para 1, que es una función que toma valores vectoriales.

Es lo que sigue, vamos a ver como precisar el orden con que se comparan los complejos o vectores de pagos, que son los resultados posibles del juego, ya que el concepto fundamental de situación admisible, se ha basado en la idea de "menos preferido que".

III.3.- Puntos maximal y maximal débil.-

Vamos a ver en primer lugar una revisión de una serie de conceptos que van a ser útiles para hacer más precisa la afirmación dada anteriormente.

Para ello, sea T un subconjunto del espacio euclideo finito n-dimensional $\mathbb{R}^n$, cuyos elementos son de la forma $x=(x_1,\ldots,x_n)$, es decir, vectores de n componentes.

DEFINICION 3.1.

Una relación P definida en el conjunto T, es un orden parcial, si P tiene las propiedades reflexiva, antisimétrica y transitiva.

DEFINICION 3.2.

Una relación R definida en el conjunto T es un orden parcial estricto, si tiene las propiedades transitiva y antirreflexiva [1]. En virtud de un teorema de Lin (1976), esto equivale a suponer que es transitiva y asimétrica [2].

Ambas relaciones de orden parcial y orden parcial estricto, se pueden definir una a partir de la otra. Así es:

- Si la relación R definida en T es un orden parcial estricto y se define la relación P en la forma:

$$xPy \text{ equivale a que } xRy \text{ o } x = y$$

entonces P es un orden parcial, y

- Si la relación P definida en T es un orden parcial y se define la relación R en la forma:

$$xRy \text{ equivale a que } xPy \text{ y } x \neq y$$

entonces R es un orden parcial estricto.

Con este convenio resulta como consecuencia que, dado un orden parcial estricto en un conjunto, este define un orden par-cial asociado y recíprocamente, y ambas relaciones se pueden defi-nir una por la otra de modo inmediato.

Consideremos ahora dos órdenes parciales estrictos en T, definidos por:

1.- $x \prec y \Leftrightarrow x_i \leq y_i \ \forall \ i = 1, \ldots, n$ y $\exists$ j tal que $x_j < y_j$

2.- $x \underset{F}{\prec} y \Leftrightarrow x_i < y_i \ \forall \ i = 1, \ldots, n$

Los correspondientes órdenes parciales asociados serán res-pectivamente los definidos por:

1'.- $x \precsim y \Leftrightarrow x_i \leq y_i \ \forall \ i = 1, \ldots, n$

2'.- $x \underset{F}{\precsim} y \Leftrightarrow x \underset{F}{\prec} y$ o $x = y$

Verificado ambos la propiedad antisimétrica, es decir

$$x \precsim y \ \wedge \ y \precsim x \Rightarrow x = y$$

$$x \underset{F}{\precsim} y \ \wedge \ y \underset{F}{\precsim} x \Rightarrow x = y$$

Vamos a suponer ahora el conjunto T ordenado mediante la relación $\prec$ de orden parcial estricto (o bien mediante la correspon-diente relación $\precsim$ de orden parcial). Se tienen las siguientes de-finiciones.

DEFINICION 3.3.

Un elemento $a \in R^n$ es una cota superior para el conjunto T, si $x \prec a$ para todo elemento $x \in T$.

DEFINICION 3.4.

Un elemento $a \in \mathbb{R}^n$ es el supremo del conjunto T, si a es la menor de las cotas superiores de T.

Si el elemento supremo pertenece al conjunto T, se llama - máximo, y se tiene entonces la siguiente

DEFINICION 3.5.

Un elemento $a \in T$ es el máximo del conjunto T, si $x \prec a$ o $a = x$ para todo elemento $x \in T$, o equivalentemente en términos del orden parcial $\precsim$, si $x \precsim a$ para todo elemento $x \in T$.

DEFINICION 3.6.

Un elemento $a \in T$ es maximal en el conjunto T, si no existe un elemento $x \in T$ tal que $a \prec x$.

Si en las definiciones dadas se emplea en lugar de la relación de orden parcial estricto $\prec$, la $\underset{F}{\prec}$, es decir, se supone - el conjunto T ordenado mediante $\underset{F}{\prec}$, entonces los conceptos análogos se llaman: cota superior débil, supremo débil, máximo débil, y máximal débil.

Se observa que en el caso escalar las relaciones $\prec$ y $\underset{F}{\prec}$ son idénticas. Sin embargo para $n \geq 2$, es decir el caso vectorial, la relación $\prec$ de orden parcial estricto (o bien su correspondiente relación $\precsim$ de orden parcial) es más débil que la relación $\underset{F}{\prec}$ - (o bien que la relación $\underset{F}{\precsim}$), pues ésta implica aquella pero no a la recíproca.

Se prueba que:

1.- Todo elemento maximal es maximal débil pero no reciprocamente.

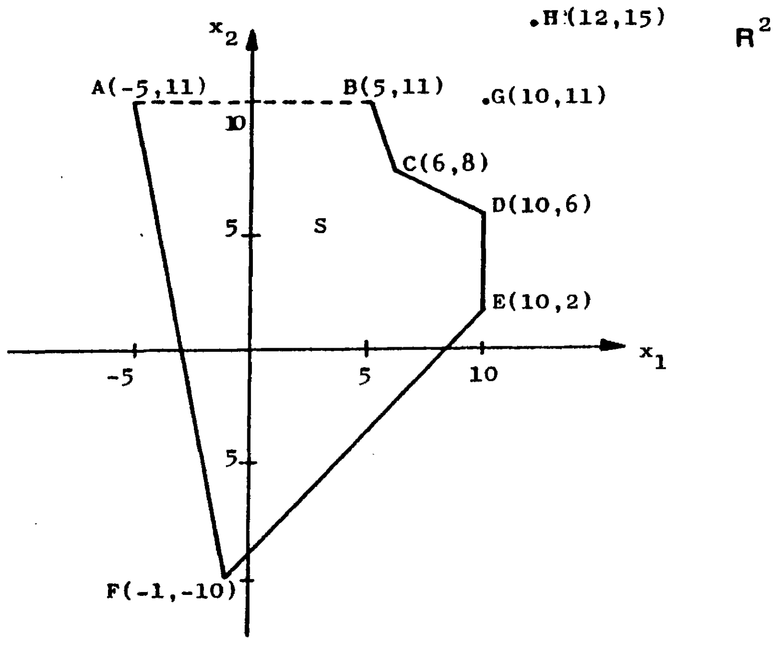
2.- Todo elemento máximo débil es máximo, pero no reciprocamente.

Vamos a continuación a dar un ejemplo que ilustre las definiciones dadas.

Ejemplo. Sea el conjunto T (fig.3.1) en $\mathbb{R}^2$, determinado por

$$x_2 < 11$$
$$3x_1 + x_2 \leqslant 26$$
$$x_1 + 2x_2 \leqslant 22$$
$$x_1 \leqslant 10$$
$$12x_1 - 11x_2 \leqslant 98$$
$$21x_1 + 4x_2 \geqslant -61 .$$

Todos los vectores de BC y CD excepto el B ya que B $\notin$ T, son maximales. Todos los vectores de BC, CD y DE excepto el B, ya que B $\notin$ T, son maximales débiles. Se tiene entonces como se indicó.



que todo maximal es maximal débil pero no reciprocamente. En efecto, p.e. el vector E es maximal débil pues no existe $x \in T$ tal que $E \underset{F}{\prec} x$, sin embargo, no es maximal pues existen vectores $x \in T$ tal que $E \prec x$, en particular $E \prec D$.

El vector H es una cota superior y superior débil de T.

El vector G es supremo de T, pero no supremo débil de T. - Como $G \not\in T$ no existe el máximo de T y tampoco el máximo débil.

Los vectores máximo y máximo débil no tienen por qué coincidir como se comprueba en el sencillo ejemplo en que ahora T es - el conjunto de $\mathbb{R}^2$ limitado por $0 \leqslant x_1 \leqslant 2$ y $0 \leqslant x_2 \leqslant 1$. El vector - (2,1) es supremo y máximo pues pertenece a T, sin embargo no es -- máximo débil.

III.4.- Extensión mixta de un juego vectorial no cooperativo.-

Hemos visto la definición de juego vectorial no cooperativo en forma normal en la sección 1, vamos a continuación a particularizar al caso de dos jugadores para dar, mediante algunos ejem-- plos, ciertas propiedades y dificultades características de estos juegos.

Para n = 2, se reduce el juego vectorial en forma normal a una matriz cuyos elementos seran complejos de dos vectores de k -- componentes, es decir, si el jugador 1 tiene n_1 estrategias puras y el 2 tiene n_2 estrategias puras, entonces H_1 (s_i^1, s_j^2) y H_2 (s_i^1, s_j^2), se podrán identificar con los vectores $(a_{ij}^1, \ldots, a_{ij}^k)$ y --

$(b^1_{ij}, \ldots, b^k_{ij})$ respectivamente, siendo s^1_i la i-ésima estrategia pura del jugador 1, y s^2_j la j-ésima estrategia pura del 2. A este tipo de juegos vectoriales finitos bipersonales de suma general, se les llamará <u>juegos vectoriales bimatriciales</u>, y su matriz de pagos la representaremos en la forma

$$(A,B)=\begin{pmatrix} ((a^1_{11}\ldots a^k_{11})(b^1_{11}\ldots b^k_{11}))\ldots((a^1_{1n_2}\ldots a^k_{1n_2})(b^1_{1n_2}\ldots b^k_{1n_2})) \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ ((a^1_{n_11}\ldots a^k_{n_11})(b^1_{n_11}\ldots b^k_{n_11}))\ldots((a^1_{n_1n_2}\ldots a^k_{n_1n_2})(b^1_{n_1n_2}\ldots b^k_{n_1n_2})) \end{pmatrix}$$

donde

$$A=\begin{pmatrix} (a^1_{11}\ldots a^k_{11})\ldots & (a^1_{1n_2}\ldots a^k_{1n_2}) \\ \vdots & \vdots \\ (a^1_{n_11}\ldots a^k_{n_11})\ldots & (a^1_{n_1n_2}\ldots a^k_{n_1n_2}) \end{pmatrix}$$

y

$$B=\begin{pmatrix} (b^1_{11}\ldots b^k_{11})\ldots & (b^1_{1n_2}\ldots b^k_{1n_2}) \\ \vdots & \vdots \\ (b^1_{n_11}\ldots b^k_{n_11})\ldots & (b^1_{n_1n_2}\ldots b^k_{n_1n_2}) \end{pmatrix}$$

son las matrices de pagos para el jugador 1 y 2 respectivamente, siendo los elementos de (A,B) complejos formados por 2 vectores en un cierto orden.

A partir de aquí vamos a considerar por sencillez y para una mayor comprensión intuituva unos ejemplos con juegos vectoriales bimatriciales. Sin embargo, las propiedades, las daremos después para juegos n-personales.

Para dar las diferentes interpretaciones posibles a la relación. "Si el jugador i cambia de la estrategia s_i^1 de equilibrio a otra $s_i^{1'}$, (y los demás permanecen en las suyas) el nuevo pago que resulta es "menos preferido", teniendo en cuenta que dichos pagos son vectores de $\mathbb{R}^k$, y las definiciones dadas en la sección 3, se tienen los siguientes:

$H_i\ (s//s_i^{1'})$ es menos preferido que $H_i(s)$, se interpreta

1ª	$\precsim$	5º no	$\succsim$
2ª	$\precsim_F$	6ª no	$\succsim_F$
3ª	$\prec$	7ª no	$\succ$
4ª	$\prec_F$	8ª no	$\succ_F$.

Teniendo en cuenta la equivalencia indicada del orden parcial con el correspondiente orden parcial estricto, nos podemos quedar con la 3ª, 4ª, 7ª y 8ª.

Veamos a continuación un ejemplo de un juego vectorial bimatricial con punto de equilibrio.

Ejemplo 1.-

Sea el juego vectorial bimatricial con matriz de pagos

$$
\begin{array}{ccc}
 & & \begin{array}{ccc} s_2^1 & J_2 & s_2^2 \end{array} \\
J_1 & \begin{array}{c} s_1^1 \\ \\ s_1^2 \end{array} & \left(\begin{array}{cc} ((2,2,2)(1,1,1)) & ((0,0,0)(0,0,0)) \\ \\ ((0,0,0)(0,0,0)) & ((1,1,1)(2,2,2)) \end{array} \right)
\end{array}
$$

siendo para cada complejo el primer vector, el pago que recibe el primer jugador, y el segundo vector el pago del segundo.

Se comprueba fácilmente que los pares (s_1^1, s_2^1) y (s_1^2, s_2^2) son puntos de equilibrio tanto con respecto a la relación de orden parcial estricto $\prec$ (que hemos llamado 3ª), como a la $\prec_F$ (que hemos llamado 4ª).

Pues $(0,0,0) \not\prec_F (2,2,2)$ para el jugador 1

y $(0,0,0) \not\prec_F (1,1,1)$ para el jugador 2

y como consecuencia de la relación existente entre $\prec_F$ y $\prec$ vista en la sección 4, también serán puntos de equilibrio los pares indicados, con respecto a la relación $\prec$.

Veamos a continuación otro ejemplo en el que existe punto de equilibrio respecto a la relación $\prec$, pero no respecto a $\prec_F$.

Ejemplo 2.-

Sea el juego con matriz de pagos

$$\begin{array}{ccc} & & \begin{array}{ccc} s_2^1 & J_2 & s_2^2 \end{array} \\ J_1 & \begin{array}{c} s_1^1 \\ \\ s_1^2 \end{array} & \begin{pmatrix} ((2,3,2)(1,2,1)) & ((0,0,0)(1,2,0)) \\ \\ ((0,3,2)(0,0,0)) & ((1,2,1)(2,3,2)) \end{pmatrix} \end{array}$$

La situación (s_1^1, s_2^1) es un punto de equilibrio respecto a la relación $\prec$, ya que

$(0,3,2) \prec (2,3,2)$ para el jugador 1

$(1,2,0) \prec (1,2,1)$ para el jugador 2

Sin embargo no es punto de equilibrio para la relación $\prec_F$, pues no es $(0,3,2) \prec_F (2,3,2)$ para el jugador 1,

y no es $(1,2,0) \prec_F (1,2,1)$ para el jugador 2.

Es interesante observar que con la relación 7ª sí es -- (s_1^1 , s_2^1) punto de equilibrio, pues

$(0,3,2)$ no es $\succ$ $(2,3,2)$ para el jugador 1

y

$(1,2,0)$ no es $\succ$ $(1,2,1)$ para el jugador 2

y también con la relación 8ª es (s_1^1 , s_2^1) punto de equilibrio pues

$(0,3,2)$ no es $\succ_F$ $(2,3,2)$ para el jugador 1

y

$(1,2,0)$ no es $\succ_F$ $(1,2,1)$ para el jugador 2.

La explicación es bien sencilla ya que la relación "no es $\succ$" es menos estricta que la $\prec$, y análogamente la "no es $\succ_F$ " y la $\prec_F$.

Entonces, una vez que ya hemos dado la forma con que precisar la relación "menos preferido que", vamos a dar un teorema pendiente de la sección 3, y en el que se decía de forma intuitiva que en los juegos estrategicamente equivalentes, el comportamiento racional de los jugadores debe ser el mismo.

TEOREMA 4.1.

Los juegos vectoriales estrategicamente equivalentes poseen los mismos puntos de equilibrio.

DEMOSTRACION.

Sea $G' \sim G''$, y sea s^* un punto de equilibrio respecto de -- la relación $\prec^*$, en el juego G'. Esto equivale a que para todo $i \in I$ y toda estrategia $s_i \in S_i$ es

$$H_i' (s^* // s_i) \prec H_i (s^*).$$

Ahora bien, como $$H_i'^{j}(s) = k_j H_i''^{j}(s) + c_i^j$$

y $k_j > 0$ para todo $j = 1, \ldots, k$, se tendrá que

$$H_i''(s^*// s_i) \prec H_i''(s^*)$$

para todo $i \in I$ y todo $s_i \in S_i$, y el teorema queda probado.

También vale esta propiedad si se utiliza la relación $\underset{F}{\prec}$.

Para finalizar con estas ilustraciones numéricas, consideremos una situación ciertamente interesante y que sería la que viene dada por la siguiente pregunta: ¿se podría dar un ejemplo en que se tuviera un punto de equilibrio para un criterio, otro para el otro criterio y sin embargo no lo hubiere para ambos?. La contestación es afirmativa.

En efecto, basta considerar la matriz de pagos respecto del primer criterio

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} s_2^1 & s_2^2 \end{array} \\ \begin{array}{c} s_1^1 \\ s_1^2 \end{array} & \begin{pmatrix} (2,2) & (2,1) \\ (1,0) & (0,3) \end{pmatrix} \end{array}.$$

El par (s_1^1, s_2^1) es un punto de equilibrio. Para el segundo criterio sea la matriz de pagos

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} s_2^1 & s_2^2 \end{array} \\ \begin{array}{c} s_1^1 \\ s_1^2 \end{array} & \begin{pmatrix} (1,1) & (1,0) \\ (2,2) & (3,3) \end{pmatrix} \end{array}$$

el par (s_1^2, s_2^2) es un punto de equilibrio.

La matriz de pagos para ambos criterios con la notación co rriente sería

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} s_2^1 & s_2^2 \end{array} \\ \begin{array}{c} s_1^1 \\ s_1^2 \end{array} & \begin{pmatrix} ((2,1)\ (2,1)) & ((2,1)\ (1,0)) \\ ((1,2)\ (0,2)) & ((0,3)\ (3,3)) \end{pmatrix} \end{array}$$

que no tiene punto de equilibrio ni en (s_1^1 , s_2^1), ni en (s_1^2 , s_2^2), respecto de las relaciones $\prec$ y $\underset{F}{\prec}$.

Estos ejemplos ponen de manifiesto algunas de las dificultades con estos juegos, así como la necesidad de pasar a la extensión mixta de un juego vectorial para determinar la posible existencia de un punto de equilibrio en estrategias mixtas, pues como se acaba de ver, no siempre existe en estrategias puras.

En la segunda sección, se dio la definición de juego vectorial no cooperativo, y de situación o punto de equilibrio, así como la conveniencia de los jugadores de alcanzar tal punto de equilibrio. Tal tendencia hacia el equilibrio se puede ver como una clase de comportamiento óptimo.

Parece natural preguntarse si, como en los juegos escalares, en los juegos vectoriales habrá gran cantidad de juegos que posean una situación de equilibrio en estrategias mixtas sin haberla en estrategias puras.

Para este propósito se introduce la extensión mixta de un juego vectorial no cooperativo.

Sea

$$G = \left(I, \{S_i\}_{i\in I}, \{H_i\}_{i\in I}\right)$$

un juego vectorial no cooperativo arbitrario. Vamos a suponer que el juego es finito, es decir, el conjunto S_i de estrategias puras de cada uno de los jugadores es un conjunto finito.

DEFINICION 4.1.

Una estrategia mixta para el jugador i, es una distribución de probabilidad sobre el conjunto S_i de sus estrategias puras.

Puesto que se ha supuesto que el juego es finito, las estrategias mixtas se reducirán a vectores con un número de componentes igual al de estrategias puras que tenga el correspondiente jugador y cuya suma sea la unidad.

La probabilidad asignada mediante x_i a la estrategia pura s_i se indicará por $x_i(s_i)$, y al conjunto de todas las estrategias mixtas del jugador i, se indicará por X_i.

Cada uno de los jugadores i $(i \in I)$, usará su estrategia mixta x_i, es decir elegirá sus estrategias puras s_i con probabilidades $x_i(s_i)$. Suponemos que las estrategias mixtas de los jugadores 1, 2, ..., n, son distribuciones de probabilidad conjuntamente independientes de modo que la probabilidad de llegar a la situación $s = (s_1, \ldots, s_n)$ se supone que es el producto de las probabilidades de elegir sus componentes $x_1(s_1).x_2(s_2)\ldots.x_n(s_n)$. Con lo cual la distribución de probabilidad x sobre el conjunto de todas las situaciones está definida por

$$x(s) = x(s_1, \ldots, s_n) = x_1(s_1) \ldots x_n(s_n)$$

para todas las situaciones en el juego G. Estos tipos de distribuciones de probabilidad x, se llaman situaciones o puntos del juego G en estrategias mixtas.

Se tiene entonces que una situación del juego G en estrategias mixtas es la realización de varias situaciones actuales en estrategias puras, cada una ocurriendo con una cierta probabilidad. Por tanto, el valor de la función de pago para cada jugador en una situación o punto en estrategias mixtas es una variable aleatoria y el valor de esta función de pago se obtiene, calculando su esperanza matemática ya que como dijimos son utilidades vectoriales. - Así

$$H_i(x) = (H_i^1(x), \ldots, H_i^k(x))$$

siendo

$$H_i^t(x) = \sum_{s \in S} H_i^t(s)\, x(s) =$$

$$= \sum_{s_1 \in S_1} \ldots \sum_{s_n \in S_n} H_i^t(s_1, \ldots, s_n) \prod_{i=1}^{n} x_i(s_i) \quad (1)$$

para $t = 1, \ldots, k$.

Tenemos ahora la siguiente:

DEFINICION 4.2.

El juego.

$$G^* = \left(I, \{X_i\}_{i \in I}, \{H_i\}_{i \in I}\right)$$

en el cual I es el conjunto de jugadores, X_i es el conjunto de estrategias para el jugador i (para cada $i \in I$), y la función de pago viene dada por (1), se llama la extensión mixta del juego G.

DEFINICION 4.3.

Una situación o punto de equilibrio en una extensión mixta G^* del juego G, se llama la situación o punto de equilibrio del juego G en estrategias mixtas.

Así se tiene que el punto x^* es de equilibrio en el juego G^*, si para cualquier jugador i ($i = 1, \dots, n$), y para cualquier estrategia mixta x_i para este jugador, se verifica que:

$H_i\ (x^*//\ x_i)$ es menos preferido que $H_i\ (x^*)$, donde la relación "es menos preferido que", quedaría precisada con las ya dadas en la sección anterior.

Como ya se había indicado anteriormente un aspecto muy importante dentro de la teoría de juegos no cooperativos y en particular en los juegos vectoriales es la existencia de puntos de equilibrio (en estrategias mixtas). La contestación a esta cuestión dependerá evidentemente de la relación de orden que se haya usado para la definición de punto de equilibrio. Así, se tiene que con respecto a la relación 3ª ($\prec$), no es posible dar un teorema de existencia como vemos a continuación con un ejemplo, en el cual no existe punto de equilibrio.

Para ello, consideremos un juego vectorial (bicriterio) bimatricial, que lo vamos a construir a partir de dos juegos bimatriciales.

Sea la matriz de pagos respecto del primer criterio [3]

$$\begin{pmatrix} (1, -1) & (0, 0) \\ (-1, 1) & (2,-2) \end{pmatrix}$$

Para este juego bimatricial, se tiene que el par (x_1^*, x_2^*) donde $x_1^* = (\frac{3}{4}, \frac{1}{4})$ y $x_2^* = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ es un punto de equilibrio ya que

$$H_1^1 (x_1^1, \tfrac{1}{2}) \leqslant H_1^1 (\tfrac{3}{4}, \tfrac{1}{2}) \text{ para todo } x_1^1 \in [0,1]$$

$$H_2^1 (\tfrac{3}{4}, x_2^1) \leqslant H_2^1 (\tfrac{3}{4}, \tfrac{1}{2}) \text{ para todo } x_2^1 \in [0,1]$$

Por otra parte, sea la matriz de pagos respecto del segundo criterio

$$\begin{pmatrix} (1, -1) & (0,0) \\ (0,0) & (1, -1) \end{pmatrix}$$

Para este juego bimatricial, se tiene que el par (x_1', x_2') donde $x_1' = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ y $x_2' = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ es un punto de equilibrio ya que

$$H_1^2 (x_1^1, \tfrac{1}{2}) \leqslant H_1^2 (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) \text{ para todo } x_1^1 \in [0,1]$$

$$H_2^2 (\tfrac{1}{2}, x_2^1) \leqslant H_2^2 (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) \text{ para todo } x_2^1 \in [0,1].$$

Consideremos ahora el juego vectorial bimatricial obtenido de los dos anteriores, cuya matriz de pagos será

$$\begin{pmatrix} ((1, 1)\ (-1, -1)) & ((0, 0)\ (0, 0)) \\ ((-1, 0)\ (1, 0)) & ((2, 1)\ (-2, -1)) \end{pmatrix}$$

Si existe punto de equilibrio para este juego, desde luego debe serlo o bien (x_1^*, x_2^*) o bien (x_1', x_2'). Pero se comprueba fácilmente que no se verifica que:

$$(H_1^1(x_1^1, \tfrac{1}{2}), H_1^2(x_1^1, \tfrac{1}{2})) \prec (H_1^1(\tfrac{3}{4}, \tfrac{1}{2}), H_1^2(\tfrac{3}{4}, \tfrac{1}{2}))$$

$$(H_2^1(\tfrac{3}{4}, x_2^1), H_2^2(\tfrac{3}{4}, x_2^1)) \prec (H_2^1(\tfrac{3}{4}, \tfrac{1}{2}), H_2^1(\tfrac{3}{4}, \tfrac{1}{2}))$$

para todo $x_1^1, x_2^1 \in [0,1]$, ni tampoco se verifica que:

$$(H_1^1(x_1^1, \tfrac{1}{2}), H_1^2(x_1^1, \tfrac{1}{2})) \prec (H_1^1(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}), H_1^2(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}))$$

$$(H_2^1(\tfrac{1}{2}, x_2^1), H_2^2(\tfrac{1}{2}, x_2^1)) \prec (H_2^1(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}), H_2^2(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}))$$

para todo $x_1^1, x_2^1 \in [0,1]$.

Por tanto no existe punto de equilibrio para el juego considerado, respecto de la relación $\prec$. Lo mismo se puede decir respecto de la relación $\underset{F}{\prec}$.

Como consecuencia se deduce que no es posible un teorema de existencia de punto de equilibrio (en estrategias mixtas), si se basa la definición de este en las relaciones $\prec$ o $\underset{F}{\prec}$.

Teniendo en cuenta estos aspectos y como se vio en los ejemplos, parece natural utilizar una definición de punto de equilibrio menos exigente como sería la obtenida mediante la relación 7ª (no $\succ$) u 8ª (no $\underset{F}{\succ}$).

Veamos estas nuevas definiciones, que por sencillez las hemos dado para el caso de dos jugadores.

DEFINICION 4.4.

Diremos que el par de estrategias (x_1' , x_2') es un punto - de equilibrio en el juego.

$$G = \left(S_1, S_2, \left\{H_i\right\}_{i=1, 2}\right)$$

si no existe otro par de estrategias (x_1 , x_2) tal que:

$$\vec{H}_1 (x_1 , x_2') \succ \vec{H}_1 (x_1' , x_2')$$

$$\vec{H}_2 (x_1' , x_2) \succ \vec{H}_2 (x_1' , x_2')$$

Analogamente se definiría punto de equilibrio débil, pero utilizando la relación 8ª (no $\underset{F}{\succ}$) en vez de la 7ª.

Vamos a ver ahora un teorema que garantiza la existencia de punto de equilibrio en estrategias mixtas, si usa la definición 4.4. Para ello, demos previamente la siguiente:

DEFINICION 4.5.

Una función $F: \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice que es estrictamente - isótona, si dados $Z^1, Z^2 \in \mathbb{R}^k$, y si $Z^1 \succ Z^2 \Rightarrow F(Z^1) \succ F(Z^2)$.

TEOREMA 4.2.

Sea
$$G = \left(S_1, S_2, \left\{H_i\right\}_{i=1,2}\right)$$

un juego vectorial no cooperativo y $F: \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$ (k criterios) - una función estrictamente isótona. Si el par (x_1', x_2') es punto de equilibrio para el juego escalar $G' = \left(S_1, S_2, \left\{F \circ H_i\right\}_{i=1,2}\right)$

entonces (x_1', x_2') es un punto de equilibrio para G.

DEMOSTRACION.-

En efecto, supongamos que (x_1', x_2') no fuera punto de equilibrio para G, esto implica que existe al menos un par de estrategias (x_1, x_2) tales que

$$\bar{H}_1 (x_1, x_2') \succ \bar{H}_1 (x_1', x_2')$$

$$\bar{H}_2 (x_1', x_2) \succ \bar{H}_2 (x_1', x_2')$$

Ahora bien, como F es estrictamente isótona, sería

$$(F \circ \bar{H}_1)(x_1, x_2') \succ (F \circ \bar{H}_1)(x_1', x_2')$$

$$(F \circ \bar{H}_2)(x_1', x_2) \succ (F \circ \bar{H}_2)(x_1', x_2')$$

y no sería (x_1', x_2') punto de equilibrio para G' contra la hipótesis. Luego el teorema queda aprobado.

Vamos a ver ahora como en el ejemplo último que habíamos dado y en el cual no había punto de equilibrio respecto de la relación $\prec$, se tiene que usando el teorema 4.2. se garantiza la -- existencia de punto de equilibrio respecto de la relación "no $\succ$ " (dada una función estrictamente isótona).

Se tenía el juego vectorial bimatricial, con matriz de pagos

$$\begin{pmatrix} ((1, 1) & (-1, -1)) & ((0,0) & (0,0)) \\ ((-1, 0) & (1, 0)) & ((2, 1) & (-2, -2)) \end{pmatrix}$$

y consideremos la función $F: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida en la forma -- $F(x, y) = x + y$, que es estrictamente isótona.

Mediante F, la matriz anterior se transformará en la matriz

$$\begin{pmatrix} (2, -2) & (0,0) \\ (-1, 1) & (3, -3) \end{pmatrix}$$

correspondiente a un juego bimatricial. Por el teorema de Nash, - tal juego tiene punto de equilibrio, siendo este el par (x_1', x_2'), donde $x_1' = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ y $x_2' = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Por el teorema dado, el par (x_1', x_2') es punto de equilibrio del juego vectorial bimatricial - primitivo, pues como se comprueba facilmente, no existe ningún - $x_1^1, x_2^1 \in [0, 1]$, tales que

$$(H_1^1 (x_1^1, \frac{1}{2}), \quad H_1^2 (x_1^1, \frac{1}{2})) \succ (H_1^1 (\frac{2}{3}, \frac{1}{2}), \quad H_1^2 (\frac{2}{3}, \frac{1}{2}))$$

y

$$(H_2^1 (\frac{2}{3}, x_2^1), \quad H_2^2 (\frac{2}{3}, x_2^1)) \succ (H_2^1 (\frac{2}{3}, \frac{1}{2}), \quad H_2^2 (\frac{2}{3}, \frac{1}{2})).$$

Es de destacar que la extensión de este teorema a más de dos jugadores con las correspondientes modificaciones sería sencilla. De todas formas hay que indicar el interés de este teorema - porque permite la determinación de puntos de equilibrio en problemas multicriterio, sin mas que pasar a una matriz única (que en - el caso de n jugadores sería una matriz en n dimensiones) mediante una transformación isótona.

Una última observación interesante, es que el concepto de punto de equilibrio (equilibrio débil) que hemos dado, utilizando la noción de maximal (maximal débil) es el que parece natural emplear como generalización natural, en vez de los otros conceptos posibles que resultan excesivamente exigentes.

Pasemos a continuación a considerar juegos vectoriales bipersonales de suma nula. Su forma normal se reducirá a una matriz A, con tantas filas como estrategias puras tenga el primer jugador y tantas columnas como estrategias puras tenga el segundo, siendo esta

$$A = \begin{pmatrix} (a^1_{11} \dots a^k_{11}) \dots (a^1_{1i} \dots a^k_{1i}) \dots (a^1_{1n} \dots a^k_{1n}) \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ (a^1_{j1} \dots a^k_{j1}) \dots (a^1_{ji} \dots a^k_{ji}) \dots (a^1_{jn} \dots a^k_{jn}) \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ (a^1_{m1} \dots a^k_{m1}) \dots (a^1_{mi} \dots a^k_{mi}) \dots (a^1_{mn} \dots a^k_{mn}) \end{pmatrix}.$$

El pago esperado respecto de los k criterios, suponiendo que el jugador 1 elige la j-ésima estrategia pura y el 2 elige la i-ésima, es el vector situado en la fila j, y en la columna i.

El paso a estos juegos conduce de forma natural al concepto de punto minimaximal como análogo al concepto de punto de silla en los juegos escalares.

DEFINICION 4.6.

Dado el juego vectorial bipersonal de suma nula

$$G = (S_1, S_2, H)$$

diremos que (s^*_1, S^*_2) es un punto minimaximal para la función H, si no existe otro punto $(s_1, s_2) \in S_1 \times S_2$ que satisfaga las condiciones

$$H(s_1, s^*_2) \succ H(s^*_1, s^*_2) \succ H(s^*_1, s_2).$$

Análogamente se daría el concepto de punto minimaximal débil, pero usando la relación no $\underset{F}{\succ}$, en vez de la anterior.

Este punto minimaximal que es, como se ha indicado una generalización del concepto de punto de silla en los juegos monocriterio, no será evidentemente en general único. Trasladado este -- concepto a la matriz A de pagos, se ve que el punto minimaximal, sería un punto maximal de columna y minimal de fila. Analogamente, el punto minimaximal débil sería un punto maximal débil de columna y minimal débil de fila.

Vamos ahora a relacionar los conceptos de punto minimaximal y situación de equilibrio (para dos jugadores), y veremos como en el caso de los juegos vectoriales bipersonales de suma nula, coinciden ambos conceptos.

En efecto, sea $G = \left(S_1,\ S_2,\ \left\{H_i\right\}_{i=1,2}\right)$

un juego vectorial bipersonal de suma nula, es decir

$$H_1\ (s_1,\ s_2) = -\ H_2\ (s_1,\ s_2)$$

para todo $(s_1,\ s_2) \in S_1 \times S_2$. Supongamos que el par $(s_1^*,\ s_2^*)$ es - un punto de equilibrio, lo que quiere decir que no existe - -- $(s_1,\ s_2) \in S_1 \times S_2$ tal que

$$H_1\ (s_1,\ s_2^*) \succ H_1\ (s_1^*,\ s_2^*)$$
$$H_2\ (s_1^*,\ s_2) \succ H_2\ (s_1^*,\ s_2^*)$$

Multiplicando la segunda desigualdad por -1, se tiene que no existe $s_2 \in S_2$ tal que

$$-\ H_2\ (s_1^*,\ s_2) \prec -\ H_2\ (s_1^*,\ s_2^*)$$

y como el juego es de suma nula, lo anterior es equivalente, a -- que no existe $s_2 \in S_2$, tal que

$$H_1\ (s_1^*,\ s_2) < H_t\ (s_1^*,\ s_2^*)$$

y junto con la primera desigualdad se tiene que no existe - -- $(s_1,\ s_2) \in S_1 \times S_2$ tal que

$$H_1\ (s_1,\ s_2^*) \succ H_1\ (s_1^*,\ s_2^*) \succ H_1\ (s_1^*,\ s_2)$$

que afirma que el par $(s_1,\ s_2)$ es un punto minimaximal de la función de pago del primer jugador. Como en el razonamiento dado, todos los pasos son equivalencias, queda probada la igualdad de ambos conceptos en la situación particular antes indicada.

Un razonamiento completamente análogo se daría para los - conceptos de punto de equilibrio débil y minimaximal débil.

NOTAS A PIE DE PAGINA.-

(1) La relación R es antirreflexiva en T, si para ningún elemento $x \in T$, se verifica $x\ R\ x$.

(2) La relación R es asimétrica en T, si para ningún par de elementos $x,\ y \in T$, se verifica simultaneamente que $x\ R\ y$ e -- $y\ R\ x$.

(3) Por sencillez se ha tomado de suma nula.

B I B L I O G R A F I A

ARROW, K. J. (1951). Alternative Approaches to the Theory of -- choice. Economêtrica, Vol. 19.

AUBIN, J. P. (1971). Selection d'un Probleme D'optimation a Criteres Multiples. Cahiers Math. de la Decision, nº 714.

AUMANN, R. J. (1964). Subjective Programming. En Human Judgments - and Optimality. M. W. Shelly y G. L. Bryan eds. Wiley, New York.

BLACKWELL, D. y M. A. GIRSHICK, (1954). Theory of games and Statistical Decisions. Wiley, New York.

BLACKWELL, D. (1956). An Analog of the Minimax Theorem for Vector Pay-offs. Pacific Journal of Math, Vol. 6.

COHON , J. L. (1978). Multiobjective Programming and Planning. Academic Press, New York.

CONTINI, B. (1966). A Decision Model under Uncertainty. En Theory of Games. A. Mensch ed.

COOK, R. (1978). Zero-sum Games with Multiple Goals. Naval Research Logistic Quarterly.

CHERNOFF, H. (1954). Rational Selection of Decisions Functions. Econometrica, Vol. 22.

CHING LAI HWANG, y otros (1979). Multiple Objective Decisión Making. Springer Verlag, Berlin.

DEGROOT, M. H. (1970). Optimal Statistical Decisions. McGraw-Hill, N. York

DEBREU, G. (1954). Representation of a Preference Ordering by a -- Numerical Function. En Decision Processes. R. M. Thrall, - C. H. Coombs, y R. L. Davis eds. Wiley, New York.

DINKELBACH, W. y H. ISERMAN (1973). On Decision Making under Multiple Criteria and under Incomplete Information. En Multiple Criteria Decisión Making. J. L. Cochrane y M. Zeleny eds. University of South Carolina Press, Columbia, (1[illegible]).

DRAGUÇIN, C. (1975). Min-Max Pareto. Institut Politechnic Bucarest.

FANDEL, G. y J. WILHELM (1976). Rational Solution Principles and - Information Requirements as Elements of a Theory of Multiple Criteria Decision Making. En Multiple Criteria Decision Making. H. Thiriez y S. Zionts eds. Springer Verlag, Berlin.

FINE, T. (1973). Theories of Probability. Academic Press, New York.

FISCHER, G. W. (1975). Experimental Applications of Multiattribute Utility Models. En Utility, Probability and Human Decision Making. Wend y Vleck eds. Reidel Publishing Co. Dorchecht--Holland.

FISHBURN, P. C. (1970). Utility Theory for Decision Making. Wiley, New York.

GIRON, F. J. (1979). Probabilidad y Utilidad: Conceptos Duales de la Teoría de la Decisión. Revista de la Real Academia de - Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Tomo LXXIII, C.2º. Madrid.

_______ y S. Ríos (1979). Quasi Bayesian Bahavior. A More Realistic Approach to Decision Making. International Meeting on Bayesian Statistics. Valencia.

GEOFFRION, A. M. (1965). A Parametric Programming Solution to the Vector Maximum Problem, with Applications to Decisions under Uncertainty. Stanford, California.

GORMAN, W. N. (1959). Separable Utility and Aggregation. Econometrica, Vol. 27.

KARLIN, S. (1959). Mathematical Methods and Theory in Games, Programming and Economics. Vol. I Pergamon Press, London.

KEENEY, R. L. y H. RAIFFA (1976). Decisions with Multiple Objectives: Preferences and Value Trade offs. Wiley, New York.

KOOPMANS, T. Representation of Preference Ordering over Time. En - Decision and Organization. C. B. McGUIRE y R. RADNER eds. North-Holland.(1972)

KRANTZ, D. H., LUCE, R. D., SUPPES, P. y TVERSKY, A. (1971). Foundations of Measurement. Vol. I, Academic Press, New York.

KUHN, H. W. y A. W. TUCKER (1951). Nonlinear Programming. En Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability. J. Neyman ed. Berkeley, California.

LIN, J. G. (1976). Maximal Vectors and Multiobjective Optimization. JOTA, Vol. 18, nº 1.

MAcCRIMMON, K. R. (1973). An Overview of Multiple Objective Decision Making. En Multiple Criteria Decision Making. J. L. - COCHRANE y M. ZELENY eds. University of South Carolina Press, Columbia.

MARKOWITZ, H. (1959). Protfolio Selection. Wiley, New York.

MILNOR, J. (1954). Games against Nature. En Decisions Processes. - R. M. THRALL, C. H. COOMBS y R. L. DAVIS eds. Wiley, New - York.

MONTGOLFIER, J. y J. TERGNY (1971). Les Decisions Partiallement -- Rationalisables. METRA, Vol. X, nº 2.

OWEN, G. (1968). Game Theory. Saunder Co., London.

RAIFFA, H. y R. SCHLAIFER (1961). Applied Statistical Decision -- Theory. Harvard Business School, Boston.

RAIFFA, H. (1968). Decision Analisys. Addison-Wesley Publishing -- Co., Mass.

_______ , (1969) Preferences for Multiatributed Alternatives. Memorandum -5868- DOT/RC. The Rand Corporation. Santa Mónica, California.

RIOS, S. (1976, a). Análisis de Decisiones. ICE, Madrid.

_______ , (1976, b). Nuevos Criterios de Ordenación de Reglas de - Decisión. Rev. de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Tomo LXX, Cuaderno 2º, Madrid.

RIOS INSUA, S. (1976). Decisiones con Multicriterio y Decisiones - Colectivas. Tesina de Licenciatura, Madrid.

_______ , (1977). Decisiones con Multiatributos. Memoria de la Escuela de Estadística. Madrid.

ROY, B. (1971). Problems and Methods with Multiple Objective Functions. Mathematical Programming, Vol. 1, nº 2.

STROTZ (1959). The Utility Tree, Econometrica, Vol. 27.

VON NEUMANN, J. y O. MORGENSTERN, (1947). Theory of Games and Economic Behavior, 2ª ed. Princeton University Press, Princeton, New Jersey. Wiley, New York.

VON WINTERFELDT, D. y G. W. FISCHER (1975). Multi-Attribute Utility Theory: Models and Assessment Procedures. En Utility, Probability and Human Decision Making. Wendt y Vlek eds. Reidel Publishing Co., Dordrecht-Holland.

WILHELM, J. (1975), Objectives and Multi-Objective Decision Making Under Uncertainty. Springer Verlag, Berlín.

YU, P. L. (1974). Cone Convexity, Cone Extreme Points. JOTA, vol. 14

ZELENY, M. (1974). Linear Multiobjective Programming. Springer -- Verlag, Berlín.

________, (1976). Games with Multiple Payoffs. Int. Journal of game Theory, Vol. 14.