

**UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID**  
**FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS**

DEPARTAMENTO DE ESTRUCTURA DE LA MATERIA, FÍSICA TÉRMICA Y  
ELECTRÓNICA



**TRABAJO DE FIN DE GRADO**

Código TFG: ETE33

Información y entropía

Information and entropy

Supervisor: Juan Manuel Rodríguez Parrondo

**Marina Pérez Calzado**

Grado en Física

Curso académico 2024-2025

Convocatoria Extraordinaria

Calificación: 9.0

## Resumen:

La segunda ley de la termodinámica establece que, en un sistema cerrado, la entropía no puede disminuir, lo que impone una dirección en la evolución temporal de los procesos físicos. Sin embargo, ciertos experimentos mentales como el demonio de Maxwell o el motor de Szilárd, han cuestionado esta ley al introducir la posibilidad de emplear la información para reducir la entropía de los sistemas. Este hecho motivó el desarrollo de una nueva rama de la física: la termodinámica de la información.

En este trabajo se exploran los fundamentos teóricos que conectan la termodinámica con la teoría de la información, destacando el papel de la entropía de Shannon y la información mutua en la formulación moderna del segundo principio. Se presentan dos marcos formales complementarios para describir sistemas fuera del equilibrio, que permiten generalizar la segunda ley incorporando de manera explícita los efectos de la información en la dinámica de dichos sistemas.

Además, se introducen los sistemas bipartitos con flujos de información, donde las correlaciones entre subsistemas pueden utilizarse como recurso termodinámico. Esta formulación se ejemplifica con una simulación numérica de una cadena de Markov bipartita acoplada a dos baños térmicos, en la que se analiza la producción de entropía, la eficiencia informacional y el flujo de trabajo en diferentes regímenes térmicos. Los resultados confirman que la información no viola la segunda ley, sino que redistribuye la disipación dentro del sistema. Este enfoque ofrece nuevas perspectivas para el diseño de motores, sensores y otros dispositivos que aprovechen la información como fuente efectiva de trabajo.

## Abstract:

The second law of thermodynamics states that, in a closed system, entropy cannot decrease. This imposes a direction on the temporal evolution of physical processes. However, certain gedanken experiments, such as Maxwell's demon or the Szilárd engine, challenge this law by introducing the possibility of using information to reduce a system's entropy. This idea motivated the development of a new branch of physics: the thermodynamics of information.

This work explores the theoretical foundations connecting thermodynamics with information theory. It highlights the role of Shannon entropy and mutual information in modern formulations of the second law. Two complementary theoretical frameworks are presented to describe out-of-equilibrium systems. These allow generalizations of the second law by explicitly incorporating information into the system's dynamics.

Furthermore, bipartite systems with information flows are introduced. In these systems, correlations between subsystems can be used as a thermodynamic resource. This formulation is illustrated through a numerical simulation of a bipartite Markov chain coupled to two thermal baths. The simulation analyzes entropy production, informational efficiency, and work flow under different thermal regimes. The results confirm that information does not violate the second law. Instead, it redistributes dissipation within the system. This approach opens new perspectives for the design of engines, sensors, and devices that harness information as a source of work.

## Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>2</b>
<b>2. Fundamentos</b>	<b>2</b>
2.1. Las leyes de la termodinámica . . . . .	2
2.2. Entropía . . . . .	2
2.3. El demonio de Maxwell . . . . .	3
2.4. El motor de Szilárd . . . . .	4
<b>3. Termodinámica de la información</b>	<b>5</b>
3.1. Entropía de Shannon . . . . .	5
3.2. Entropía efectiva y observador limitado . . . . .	6
3.3. Entropía y energía libre fuera del equilibrio en sistemas discretos . . . . .	8
3.4. Información mutua . . . . .	9
3.5. Segunda ley de la termodinámica en procesos con retroalimentación . . . . .	10
<b>4. Sistemas bipartitos y flujos de información</b>	<b>11</b>
4.1. Dinámica de modelos bipartitos . . . . .	11
4.2. Sistema bipartito no autónomo . . . . .	13
4.3. Sistema bipartito autónomo . . . . .	14
<b>5. Ejemplo: cadena de Markov bipartita con temperaturas finitas</b>	<b>15</b>
5.1. Resultados . . . . .	16
5.2. Análisis de los resultados . . . . .	18
5.3. Conclusiones . . . . .	19

## 1. Introducción

La entropía es una magnitud fundamental en termodinámica, ya que determina la dirección temporal de los procesos naturales. Desde su formulación clásica en el siglo XIX hasta su interpretación estadística, su evolución ha acompañado al desarrollo de la física.

La segunda ley de la termodinámica impone restricciones fundamentales al comportamiento de los sistemas físicos. Sin embargo, experimentos mentales como el demonio de Maxwell desafiaron esta ley al introducir agentes capaces de utilizar la información para influir en la evolución de los sistemas. A partir de este enfoque surge la termodinámica de la información, una extensión del marco clásico que incorpora formalmente la información como un recurso físico con capacidad operativa.

## 2. Fundamentos

### 2.1. Las leyes de la termodinámica

La termodinámica es una rama fundamental de la física que estudia el comportamiento de los sistemas a partir de sus propiedades energéticas. Su formulación moderna se sustenta en tres principios fundamentales, conocidos como las tres leyes de la termodinámica, que fueron desarrollados a lo largo del siglo XIX a partir de observaciones experimentales sobre procesos térmicos y mecánicos.

La segunda ley de la termodinámica, especialmente relevante en este estudio, establece que la entropía total de un sistema aislado tiende a aumentar con el tiempo hasta alcanzar un valor máximo en el equilibrio [2].

$$dS \geq 0 \quad (1)$$

Esto implica que los procesos espontáneos en la naturaleza pueden ser aquellos que incrementan la entropía del sistema, conocidos como procesos irreversibles, o bien, en el límite ideal, aquellos que mantienen la entropía constante, denominados procesos reversibles.

La entropía es un concepto fundamental en la termodinámica, cuya interpretación y comprensión han representado un desafío para la física a lo largo de la historia.

### 2.2. Entropía

El concepto de entropía fue introducido por Rudolf Clausius en 1865 para describir la direccionalidad de los procesos naturales [3]. El cambio infinitesimal en la entropía de un sistema en equilibrio se expresa mediante la siguiente relación:

$$dS = \frac{\delta Q_{\text{rev}}}{T} \quad (2)$$

donde  $\delta Q_{\text{rev}}$  representa el calor absorbido por el sistema y  $T$  es su temperatura.

Esta formulación es válida únicamente para procesos reversibles, por lo que resulta necesaria una generalización para tratar procesos irreversibles o sistemas fuera del equilibrio.

Con el desarrollo de la física estadística, Ludwig Boltzmann estableció un puente entre la descripción macroscópica y microscópica de la entropía al proponer la expresión:

$$S = k \ln \Omega \quad (3)$$

Aquí  $\Omega$  representa el número de microestados compatibles con un macroestado dado y  $k$  es la constante de Boltzmann.

Esta relación conecta directamente la entropía con el grado de desorden o la incertidumbre sobre el estado microscópico del sistema [1]. Además, permite reinterpretar la segunda ley como una tendencia hacia los estados más probables, es decir, hacia aquellos con mayor número de configuraciones microscópicas.

Los sistemas no aislados son aquellos que pueden intercambiar entropía con su entorno. Sin embargo, la producción interna de entropía en estos casos también debe ser siempre positiva o nula. De acuerdo con la formulación de Prigogine [10]:

$$\frac{dS}{dt} = \left(\frac{dS}{dt}\right)_e + \left(\frac{dS}{dt}\right)_i, \quad \left(\frac{dS}{dt}\right)_i \geq 0 \quad (4)$$

donde  $\left(\frac{dS}{dt}\right)_e$  representa el flujo de entropía intercambiado con el entorno y  $\left(\frac{dS}{dt}\right)_i$  es la producción interna de entropía.

De este modo, la segunda ley no solo limita la cantidad de trabajo que puede extraerse de un sistema térmico, sino que también establece restricciones fundamentales al funcionamiento de motores térmicos, refrigeradores y otros procesos de transformación de energía. En términos de entropía, cualquier proceso espontáneo en un sistema cerrado implica una producción neta positiva de entropía.

### 2.3. El demonio de Maxwell

La forma más ilustrativa de representar la naturaleza probabilística de la segunda ley es mediante el experimento mental propuesto por James Clerk Maxwell en 1867 [5].

Este experimento consiste en un recipiente dividido en dos compartimentos que contienen moléculas de gas. La temperatura de cada compartimento es proporcional a la energía cinética media de las moléculas que contiene, aunque las velocidades individuales pueden variar significativamente.

Maxwell introduce la idea de un agente externo, conocido como “demonio”, que, conociendo la posición y la velocidad de cada molécula, puede abrir selectivamente una compuerta entre los compartimentos sin realizar trabajo, permitiendo el paso de las moléculas rápidas en una dirección y de las lentas en la otra, como se muestra en la Figura 1.

El resultado es un flujo de calor desde un reservorio frío hacia uno con mayor temperatura sin consumo de trabajo, en aparente contradicción con la segunda ley de la termodinámica.

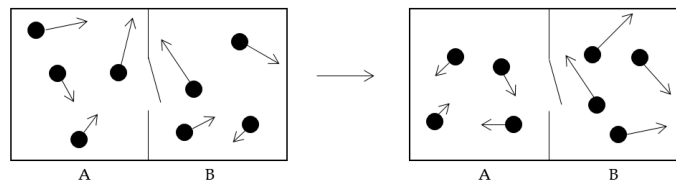


Figura 1: Representación esquemática del demonio de Maxwell. Fuente: adaptado de Rex, *Entropy* **19**, 240 (2017), bajo licencia CC BY 4.0 [12].

La paradoja del demonio de Maxwell puso de manifiesto una relación fundamental entre entropía e información, ausente en las formulaciones clásicas anteriores.

Esta observación motivó, en décadas posteriores, numerosos estudios orientados a unificar ambas ramas bajo un marco teórico común, surgiendo así la termodinámica de la información, cuyo objetivo principal es establecer una relación cuantitativa entre estas dos variables, y analizar cómo dicha relación modifica o extiende la interpretación de la segunda ley.

Con este fin, se recurrió al experimento propuesto por Leo Szilárd en 1929, una versión simplificada del demonio de Maxwell que permitía un análisis detallado de las variables implicadas [14].

## 2.4. El motor de Szilárd

El motor consiste en una única molécula de gas a temperatura  $T$  en un recipiente de volumen  $V_0$ . El sistema se somete a un proceso cíclico que comienza con la introducción de un pistón en el centro del recipiente, dividiéndolo en dos compartimentos iguales. A continuación, el "demonio" mide en qué lado se encuentra la molécula, adquiriendo 1 bit de información. Después, se realiza una expansión reversible isoterma en la que se extrae un trabajo:

$$W_{\text{ext}} = \int_{V_0/2}^{V_0} P dV' = \int_{V_0/2}^{V_0} \frac{kT}{V'} dV' = kT \ln 2 \quad (5)$$

donde  $k$  es la constante de Boltzmann y se ha utilizado la ecuación de los gases ideales para definir la presión  $P = kT/V$ .

Tras finalizar la expansión, se retira el pistón devolviendo al sistema a su estado inicial. El ciclo completo se representa de forma esquemática en la Figura 2.

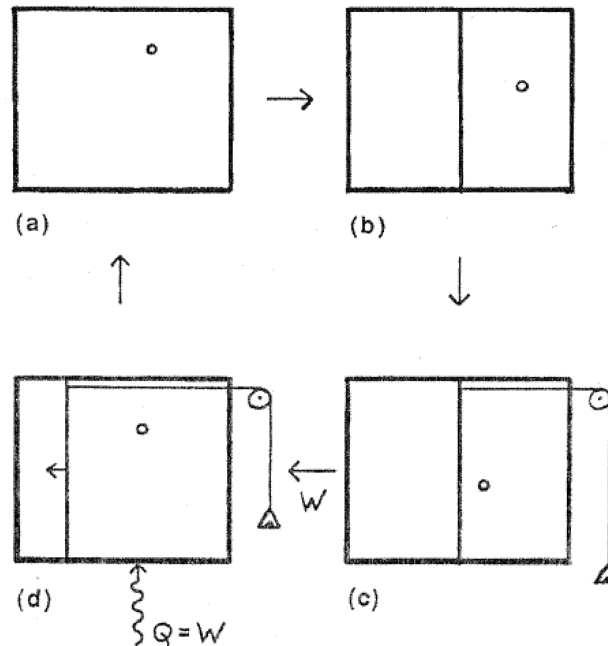


Figura 2: Representación esquemática del motor de Szilárd. Fuente: adaptado de Rex, *Entropy* **19**, 240 (2017), bajo licencia CC BY 4.0 [12].

Este experimento es el ejemplo más representativo de cómo la información puede emplearse para reducir la entropía de un sistema. En concreto, establece que por cada bit de información adquirida el motor de Szilárd es capaz de extraer una cantidad de trabajo  $kT \ln 2$  de un único reservorio térmico mediante un proceso cíclico, en aparente contradicción con la segunda ley de la termodinámica.

Una variación sutil de este mismo experimento permite estudiar cómo afecta la precisión de la información a la cantidad de trabajo extraíble. Para ello, se considera una situación más realista en la que la medición es errónea con una probabilidad de error  $\epsilon$ .

En este caso, no puede realizarse una expansión completa hasta el volumen original  $V_0$ , ya que si la medida es errónea, esto implicaría comprimir la molécula a un volumen nulo, provocando un coste

energético divergente. En su lugar, se considera una expansión parcial desde  $V_0/2$  hasta  $(1 - \alpha)V_0$ , donde  $\alpha \in [0, 0.5]$  representa un margen de seguridad.

Utilizando la ecuación (5), el trabajo extraído  $W_{\text{ext}}$  se calcula según:

$$W_{\text{ext}} = kT \ln \left( \frac{V_{\text{final}}}{V_{\text{inicial}}} \right) \quad (6)$$

Si la medida es correcta, la molécula se encuentra en el lado esperado y la expansión se realiza desde  $V_0/2$  hasta  $(1 - \alpha)V_0$ :

$$W_{\text{correcto}} = kT \ln \left( \frac{(1 - \alpha)V_0}{V_0/2} \right) = kT \ln[2(1 - \alpha)] \quad (7)$$

Cuando la medida es incorrecta, la molécula se encuentra en el lado opuesto, por lo que el volumen que tiene disponible pasa de  $V_0/2$  a  $\alpha V_0$  :

$$W_{\text{incorrecto}} = kT \ln \left( \frac{\alpha V_0}{V_0/2} \right) = kT \ln(2\alpha) \quad (8)$$

El trabajo medio extraído  $\langle W_{\text{ext}} \rangle$  se obtiene como el valor esperado de ambos casos:

$$\langle W_{\text{ext}} \rangle = (1 - \epsilon)W_{\text{correcto}} + \epsilon W_{\text{incorrecto}} = kT [(1 - \epsilon) \ln[2(1 - \alpha)] + \epsilon \ln(2\alpha)] \quad (9)$$

Este resultado muestra cómo influye el error en la medida sobre la cantidad de trabajo extraíble del sistema. Derivando respecto a  $\alpha$ , se obtiene que este trabajo es máximo cuando  $\alpha = \epsilon$ , es decir, cuando el margen de seguridad coincide con la probabilidad de error.

En el caso ideal, donde  $\epsilon = 0$  y  $\alpha = 0$ , se recupera el resultado original obtenido para el motor de Szilárd en la ecuación (5).

### 3. Termodinámica de la información

La termodinámica de la información utiliza el análisis del motor de Szilárd como base para generalizar sus resultados a sistemas más complejos. Su objetivo principal es caracterizar la información como una variable física que influye en la evolución de los sistemas e incorporar esta variable en el formalismo termodinámico para observar su influencia en la restauración de la segunda ley.

Cuando se obtiene información sobre el estado estadístico de un sistema, este se transforma a un estado condicionado por el resultado de la medida. Dicho estado suele encontrarse fuera del equilibrio, lo que justifica que esta disciplina se enmarque dentro de la termodinámica de no equilibrio.

Para formalizar esta relación, es necesario introducir algunos conceptos fundamentales de la teoría de la información, que se presentan a continuación.

#### 3.1. Entropía de Shannon

En teoría de la información, la entropía de Shannon fue introducida por Claude E. Shannon en 1948 como una medida fundamental de la cantidad de información contenida en un mensaje o sistema [13]. Para una variable aleatoria  $X$  con una distribución de probabilidad  $\rho(x)$ , la entropía de Shannon asociada se define como:

$$H(X) = - \sum_x \rho(x) \log \rho(x) \quad (10)$$

donde el sumatorio recorre todos los posibles valores de  $X$ . Las unidades de  $H(X)$  dependen de la base del logaritmo: se mide en bits si se emplea el logaritmo en base 2 y en nats si se trata del logaritmo natural.

La entropía de Shannon cuantifica la incertidumbre sobre el resultado de una medición, es decir, si el resultado de medir  $X$  es conocido, su entropía asociada será nula. Si por el contrario todos los posibles valores de  $X$  son equiprobables, la entropía alcanza su valor máximo.

Cuando  $X$  representa el microestado de un sistema físico, se puede multiplicar la entropía de Shannon por la constante de Boltzmann  $k$  para obtener una magnitud con unidades de entropía termodinámica ( $J/K$ ):

$$S(\rho) = kH(X) = -k \sum_x \rho(x) \ln \rho(x) \quad (11)$$

Se puede demostrar que esta expresión coincide con la entropía termodinámica en situaciones de equilibrio, en las que la distribución de probabilidad viene dada por la distribución de Boltzmann:

$$\rho_0(x) = \frac{e^{-\beta \mathcal{H}_0(x)}}{Z_0} \quad (12)$$

donde  $\mathcal{H}_0(x)$  representa el Hamiltoniano del sistema,  $\beta = \frac{1}{kT}$  y  $Z_0$  es la función de partición [8].

Considerando las definiciones de energía interna  $E = \langle \mathcal{H}_0 \rangle$  y energía libre de Helmholtz  $F(\rho_0) = -kT \ln Z_0$ , se recupera la relación fundamental:

$$F = E - TS \quad (13)$$

Sin embargo, la identificación de la entropía de Shannon como entropía termodinámica no se puede extender de forma general a situaciones fuera del equilibrio. Esto se debe a que la cantidad  $S(\rho)$  permanece invariante bajo evolución Hamiltoniana, es decir, si un sistema aislado evoluciona según las leyes de la mecánica clásica sin disipación, la entropía de Shannon permanece constante en el tiempo. Por tanto, contradice las observaciones empíricas de que la entropía aumenta en procesos irreversibles, como establece la segunda ley.

No obstante, esta identificación sí es válida cuando se consideran sistemas fuera del equilibrio en contacto con reservorios termodinámicos en equilibrio [9]. Para demostrar esta afirmación se pueden considerar dos enfoques: la evolución Hamiltoniana desde la perspectiva de un observador limitado, o una evolución estocástica descrita mediante una ecuación maestra.

### 3.2. Entropía efectiva y observador limitado

En esta sección, se considera el modelo de observador limitado, que parte de dos hipótesis fundamentales:

- El observador no tiene acceso a las correlaciones entre el sistema y su entorno.
- El entorno se describe a través de su energía promedio, es decir, se asume que su distribución de probabilidad sigue una distribución de Boltzmann (ecuación (12)).

Bajo estas condiciones, se considera un sistema en contacto con un único baño térmico. El estado conjunto del sistema y el reservorio está descrito por una distribución  $\rho(x, z; t)$ , donde  $x$  denota el microestado del sistema,  $z$  el del reservorio y  $t$  el tiempo. Como ya se ha señalado, la entropía de Shannon asociada a esta distribución es invariante con respecto al tiempo debido a la reversibilidad del conjunto, por lo que no puede reflejar la irreversibilidad observada.

Para describir el estado al que tiene acceso el observador, se introduce un estado efectivo [7]:

$$\rho_{\text{obs}}(x, z; t) = \rho(x; t) \cdot \rho_B^{\text{eq}}(z; T(t)) \quad (14)$$

donde  $\rho(x; t) = \int \rho(x, z; t) dz$  es la distribución marginal del sistema y  $\rho_B^{\text{eq}}(z; T(t))$  representa la distribución canónica para el entorno (ecuación (12)).

La entropía asociada a este nuevo estado es necesariamente mayor, ya que por construcción el observador descarta las correlaciones entre el sistema y su entorno. Esta pérdida de información se traduce en un aumento de incertidumbre, que conduce a la desigualdad [7]:

$$S[\rho_{\text{obs}}(x, z; t)] - S[\rho(x, z; t)] = I(X; Z) + \Delta S_B \geq 0 \quad (15)$$

donde  $I(X; Z)$ , cuya definición formal se presenta en la Sección 3.4, mide las correlaciones entre el sistema y el reservorio; mientras que  $\Delta S_B = S[\rho_B^{\text{eq}}(z; T(t))] - S[\rho(z; t)]$  representa el incremento de entropía derivado de asumir una distribución canónica para el entorno.

Esta nueva entropía efectiva  $S(\rho_{\text{obs}})$  no es invariante bajo evolución temporal, ya que la distribución marginal  $\rho(x; t)$  cambia con el tiempo. Además, si el sistema recibe un calor  $Q$  desde el reservorio, se verifica que el cambio en su entropía efectiva cumple:

$$\Delta S \geq \frac{Q}{T} \quad (16)$$

lo que permite recuperar la desigualdad de Clausius (ecuación (2)) y, por tanto, la segunda ley de la termodinámica.

Este razonamiento justifica el uso de la entropía de Shannon efectiva como una entropía física para sistemas en contacto con un reservorio térmico. Además, permite definir una energía libre fuera del equilibrio [8]:

$$\mathcal{F}(\rho; \mathcal{H}) = \langle \mathcal{H} \rangle_\rho - TS(\rho) \quad (17)$$

donde  $\mathcal{H}$  es el Hamiltoniano del sistema y  $T$  la temperatura del baño térmico.

Esta energía libre generalizada indica la cantidad máxima de trabajo que se puede extraer del sistema al relajarlo hasta el equilibrio, extendiendo el concepto de energía libre de Helmholtz [7]:

$$W \geq \Delta \mathcal{F} \quad (18)$$

De forma equivalente, la diferencia de energía libre fuera del equilibrio  $\Delta \mathcal{F}$  entre dos estados arbitrarios  $\rho_1$  y  $\rho_2$  determina el trabajo mínimo necesario para llevar al sistema desde un estado al otro mediante un proceso isoterma [8].

El caso límite  $W = \Delta \mathcal{F}$  se alcanza únicamente en procesos operacionalmente reversibles, en los que el sistema recorre los mismos estados si el protocolo se invierte con respecto al tiempo. En la práctica, los procesos irreversibles nunca saturan esta desigualdad.

Como conclusión, al identificar la producción de entropía como el incremento en la entropía de Shannon del sistema más el incremento de entropía en el reservorio, se obtiene una extensión de la segunda ley de la termodinámica para procesos isotermos que conectan estados fuera del equilibrio [8]:

$$T\Delta S_{\text{tot}} = W - \Delta \mathcal{F} \geq 0 \quad (19)$$

Esta ecuación es considerada una pieza clave a la hora de establecer las bases para el desarrollo de la termodinámica de la información.

### 3.3. Entropía y energía libre fuera del equilibrio en sistemas discretos

Tras haber analizado el enfoque basado en el modelo de observador limitado para recuperar la termodinámica en situaciones alejadas del equilibrio, se estudia a continuación el segundo marco mencionado: la evolución estocástica descrita por una ecuación maestra.

Este enfoque resulta especialmente útil para estudiar dispositivos que procesan información como memorias, sensores o motores moleculares. Asimismo, permite establecer una conexión entre flujos de probabilidad, entropía y energía libre fuera del equilibrio sin necesidad de asumir un conocimiento parcial por parte del observador.

Para sistemas con estados discretos  $i$ , la dinámica estocástica se modela mediante ecuaciones maestras [9]:

$$\dot{\rho}(i, t) = \sum_j [\rho(j, t) \gamma_{j \rightarrow i} - \rho(i, t) \gamma_{i \rightarrow j}] \quad (20)$$

donde  $\gamma_{i \rightarrow j}$  es la tasa de transición entre los estados  $i$  y  $j$  y  $\rho(i, t)$  la probabilidad de ocupación del estado  $i$  en el instante  $t$ .

En este contexto, la entropía de Shannon del sistema (ecuación (11)) se define mediante la siguiente expresión:

$$S(t) = -k \sum_i \rho(i, t) \ln \rho(i, t) \quad (21)$$

Al derivar esta ecuación con respecto al tiempo, se obtiene la tasa de variación de la entropía del sistema [9]:

$$\dot{S}(t) = k \sum_{i>j} J_{i \rightarrow j}(t) \ln \frac{\rho(i, t)}{\rho(j, t)} \quad (22)$$

donde  $J_{j \rightarrow i}(t) = \rho(i, t) \gamma_{i \rightarrow j} - \rho(j, t) \gamma_{j \rightarrow i}$  representa el flujo neto de probabilidad entre los estados  $i$  y  $j$ .

Por otra parte, cuando las transiciones ocurren mediante interacciones con diferentes reservorios termodinámicos en equilibrio, las tasas de transición satisfacen la siguiente condición de balance detallado local [9]:

$$\ln \left( \frac{\gamma_{i \rightarrow j}}{\gamma_{j \rightarrow i}} \right) = \frac{-(E_j - E_i + \Delta F_{i \rightarrow j}^{env})}{kT_{ij}} = \frac{\Delta S_{i \rightarrow j}^{env}}{k} \quad (23)$$

donde  $T_{ij}$  y  $\Delta F_{i \rightarrow j}^{env}$  son la temperatura y el incremento en la energía libre del reservorio asociados a la transición  $i \rightarrow j$ , respectivamente.

La segunda igualdad en la ecuación (23) se debe a que los reservorios en equilibrio están descritos por una distribución de Boltzmann, por lo que satisfacen la relación fundamental mencionada en la ecuación (13).

En consecuencia, la producción de entropía en el entorno se expresa según [9]:

$$\dot{S}_{env}(t) = k \sum_{i>j} J_{i \rightarrow j}(t) \ln \left( \frac{\gamma_{i \rightarrow j}}{\gamma_{j \rightarrow i}} \right) \quad (24)$$

Al combinar ambas tasas de variación (ecuaciones (22) y (24)), se obtiene una formulación completa de la producción de entropía en sistemas discretos:

$$\dot{S}_{prod}(t) \equiv \dot{S}_{env}(t) + \dot{S}(t) = k \sum_{i>j} J_{i \rightarrow j}(t) \ln \frac{\rho(i, t) \gamma_{i \rightarrow j}}{\rho(j, t) \gamma_{j \rightarrow i}} \geq 0 \quad (25)$$

De esta forma se llega a la misma conclusión obtenida la Sección 3.2, obteniendo de nuevo la generalización del segundo principio para sistemas alejados del equilibrio en contacto con reservorios termodinámicos.

Además de analizar la producción de entropía, resulta conveniente examinar la evolución temporal de la energía promedio del sistema, definida como:

$$E(t) = \sum_i \rho(i, t) E_i \quad (26)$$

La derivada temporal de esta magnitud se interpreta directamente con la primera ley de la termodinámica [9]:

$$\dot{E}(t) = \dot{Q}(t) + \dot{W}(t) + \dot{W}_{\text{chem}}(t) \quad (27)$$

donde el flujo de calor  $\dot{Q}(t)$  se corresponde con el cambio de energía asociado a la variación de entropía del entorno, el trabajo químico  $\dot{W}_{\text{chem}}(t)$  representa la transferencia de partículas entre el sistema y los reservorios químicos y el trabajo externo  $\dot{W}(t)$  se refiere al trabajo realizado debido a cambios en los parámetros del sistema.

De manera análoga a la Sección 3.2, se introduce una función de energía libre fuera del equilibrio:

$$\mathcal{F}(t) = E(t) - TS(t) \quad (28)$$

Para procesos isotermos, en los que el intercambio de calor satisface  $\dot{Q}(t) = -T \dot{S}_{\text{env}}(t)$ , la combinación de las ecuaciones (25), (27) y (28) permite derivar la siguiente expresión para la producción total de entropía:

$$T \dot{S}_{\text{prod}}(t) = \dot{W}(t) + \dot{W}_{\text{chem}}(t) - \dot{\mathcal{F}}(t) \geq 0 \quad (29)$$

análoga de la ecuación (19).

Esta formulación generalizada del segundo principio establece que, bajo condiciones isotermas, la variación temporal de la energía libre está acotada superiormente por la suma del trabajo externo y del trabajo químico. A diferencia de los enfoques macroscópicos tradicionales basados en postulados termodinámicos, esta relación emerge directamente de la dinámica estocástica del sistema.

En particular, para procesos cíclicos o de relajación al equilibrio, se recupera la desigualdad:

$$W_{\text{tot}} \geq \Delta \mathcal{F} \quad (30)$$

la cual establece una cota inferior (o superior) para el trabajo total requerido (o extraíble). En este contexto, cualquier exceso de trabajo con respecto al mínimo indicado por la ecuación (30) es trabajo disipado o irreversible asociado directamente con la producción total de entropía.

Esta formulación proporciona un marco riguroso para cuantificar la disipación, el trabajo y la eficiencia en sistemas discretos fuera del equilibrio sometidos a dinámicas estocásticas, manteniéndose en consonancia con los resultados presentados en la Sección 3.2.

### 3.4. Información mutua

En las secciones anteriores, la entropía y la energía libre se han vinculado de forma directa con las distribuciones de probabilidad y las tasas de transición del sistema. Para avanzar hacia una comprensión más profunda del papel de la información en estos modelos, es necesario introducir formalmente otro concepto fundamental de la teoría de la información, la información mutua.

Esta magnitud cuantifica el grado de correlación entre dos variables aleatorias  $X$  e  $Y$ . De forma intuitiva, mide cuánto disminuye la incertidumbre sobre una variable al conocer el valor de la otra. La información mutua se define como [8]:

$$I(X; Y) = H(X) - H(X | Y) \quad (31)$$

donde  $H(X | Y)$  representa la entropía condicional, es decir, la incertidumbre promedio en  $X$  dado un valor particular de  $Y$ :

$$H(X | Y) = \sum_y p_Y(y) \left[ - \sum_x p_{X|Y}(x | y) \ln p_{X|Y}(x | y) \right] \quad (32)$$

Alternativamente, la información mutua se puede expresar mediante las distribuciones conjuntas y marginales [8]:

$$I(X; Y) = \sum_{x,y} p_{XY}(x, y) \ln \left( \frac{p_{XY}(x, y)}{p_X(x) p_Y(y)} \right) \quad (33)$$

Esta magnitud es simétrica  $I(X; Y) = I(Y; X)$ , siempre no negativa y únicamente se anula si  $X$  e  $Y$  son estadísticamente independientes.

Además, se relaciona con la entropía conjunta de dos variables mediante:

$$H(X, Y) = H(X) + H(Y) - I(X; Y) \quad (34)$$

lo cual refleja que la existencia de correlación entre las variables reduce la incertidumbre total del sistema.

En un contexto físico, cuando  $X$  representa el microestado de un sistema,  $Y$  se puede interpretar como el resultado de una medición. Al tomar una medida, la distribución de probabilidad del sistema  $\rho(x)$  evoluciona a una distribución condicional  $\rho(x | y)$ , y por tanto, se genera un incremento de la entropía de Shannon asociado a la medición [8]:

$$\Delta S_{meas} = k(H(X | Y) - H(X)) = -kI(X; Y) \quad (35)$$

Considerando un proceso que no modifique la energía interna promedio del sistema, según la ecuación (28), este incremento de entropía asociado a la medida implica un cambio en la energía libre [8]:

$$\Delta \mathcal{F}_{meas} = -T \Delta S_{meas} = kTI(X; Y) \quad (36)$$

Este resultado revela que obtener información sobre un sistema físico incrementa su energía libre fuera del equilibrio. Si se interpreta la energía libre generalizada como el máximo trabajo extraíble (véase la Sección 3.2), se deduce que el conocimiento adquirido puede aprovecharse para extraer trabajo del propio sistema.

Para formalizar esta relación, se introducen los denominados procesos con retroalimentación.

### 3.5. Segunda ley de la termodinámica en procesos con retroalimentación

Los procesos con retroalimentación son aquellos en los que el sistema es controlado mediante un protocolo cuya forma depende del resultado obtenido en una medición previa. Un ejemplo paradigmático es el motor de Szilárd, en el cual la expansión se realiza en una dirección u otra según la posición de la partícula, determinada por la medida.

Antes de la medición, se considera que el estado del sistema se caracteriza por una energía libre  $F_{pre}$ , asociada a una distribución canónica a temperatura  $T$ . La toma de una medida sobre el sistema induce un aumento efectivo en su energía libre generalizada, tal como expresa la ecuación (36).

Si, tras la medición, se aplica un protocolo de control condicionado por el resultado, la combinación de las ecuaciones (19) y (36) resulta en una expresión de la segunda ley para procesos con retroalimentación que incluye la información de manera explícita:

$$W_{\text{fb}} - \Delta\mathcal{F} \geq -kTI(X;Y) \quad (37)$$

donde  $W_{\text{fb}}$  es el trabajo promedio realizado sobre el sistema.

En el caso particular de un proceso cíclico, en el que  $\Delta\mathcal{F} = 0$ , el trabajo neto asociado es:

$$W_{\text{fb}} \geq -kTI(X;Y) \quad (38)$$

lo cual implica que por cada bit de información obtenido en la medida ( $I = \ln 2$ ), es posible extraer hasta un máximo  $kT \ln 2$  de energía térmica del entorno, recuperando de esta forma el límite ideal calculado para el motor de Szilárd en la Sección 2.4 y, por tanto, restaurando la validez del segundo principio.

Estos resultados ponen de manifiesto que la información no es simplemente un concepto abstracto, sino una magnitud física que influye de manera directa en la energética de los sistemas. La cantidad de trabajo promedio que se puede extraer de un sistema mediante un proceso con retroalimentación es proporcional a la cantidad de información adquirida en la medida [8].

La formulación extendida de la segunda ley (ecuación (37)) es válida siempre que los procesos de control y medición sean reversibles. En situaciones irreversibles, deberán tenerse en cuenta costes energéticos adicionales.

## 4. Sistemas bipartitos y flujos de información

La inclusión explícita de la información en el marco termodinámico, ha permitido generalizar la segunda ley a una variedad de procesos fuera del equilibrio. De esta manera, se han abierto nuevas vías para el estudio de sistemas donde la interacción no se limita al intercambio de energía, sino que también involucra la transmisión de información.

Para describir este tipo de procesos de manera sencilla, se utilizan los modelos bipartitos, cuya estructura permite realizar un análisis preciso sobre los flujos de información y su papel en la producción de entropía y trabajo.

En esta sección se toma la constante de Boltzmann  $k = 1$ , por simplicidad.

### 4.1. Dinámica de modelos bipartitos

Los sistemas bipartitos están compuestos por dos subsistemas llamados  $X$  e  $Y$ , cada uno con estados discretos, acoplados a través de una dinámica conjunta que respeta la estructura de bipartición.

La evolución del sistema conjunto se describe por una cadena de Markov, cuyas transiciones están restringidas de manera que no está permitido que ambos subsistemas cambien su estado simultáneamente. Esto se traduce en una matriz de transiciones [4]:

$$\Gamma_{x,x'}^{y,y'} = \begin{cases} \gamma_{x,x'}^y & \text{si } x \neq x', y = y' \\ \gamma_x^{y,y'} & \text{si } x = x', y \neq y' \\ 0 & \text{si } x \neq x', y \neq y' \end{cases} \quad (39)$$

donde  $\Gamma_{x,x'}^{y,y'}$  es la tasa de transición desde el estado  $(x', y')$  hacia el estado  $(x, y)$ .

Suponemos que cada subsistema está acoplado a sus propios reservorios termodinámicos en equilibrio, por lo que las tasas cumplen la condición de balance detallado local (ecuación (23)) de forma independiente, es decir, tanto para las transiciones en  $X$  ( $\gamma_{x,x'}^y$ ) como para las transiciones en  $Y$  ( $\gamma_x^{y,y'}$ ).

La evolución de la probabilidad conjunta  $p(x, y)$  del sistema bipartito completo se rige por una ecuación maestra (ecuación (20)) que, dadas las restricciones del sistema, se puede descomponer en flujos individuales [4]:

$$\frac{d}{dt}p(x, y) = \sum_{x'} J_{x,x'}^y + \sum_{y'} J_x^{y,y'} \quad (40)$$

donde los flujos de probabilidad están definidos como:

$$J_{x,x'}^y = \gamma_{x,x'}^y p(x', y) - \gamma_{x',x}^y p(x, y), \quad J_x^{y,y'} = \gamma_x^{y,y'} p(x, y') - \gamma_x^{y',y} p(x, y) \quad (41)$$

Esta descomposición estructural permite analizar las contribuciones termodinámicas e informacionales de cada subsistema por separado.

La producción total de entropía para sistemas bipartitos se define según la ecuación (25) [4]:

$$\dot{S}^i = \frac{d}{dt}S_{XY} + \dot{S}^r \geq 0 \quad (42)$$

donde  $S_{XY} = -\sum_{x,y} p(x, y) \ln p(x, y)$  es la entropía de Shannon del sistema conjunto, mientras que  $\dot{S}^r$  representa el flujo de entropía intercambiada con los reservorios. Esta formulación se puede descomponer en dos contribuciones positivas correspondientes a cada subsistema  $\dot{S}^i = \dot{S}_X^i + \dot{S}_Y^i$ , incorporando de manera explícita los flujos de información mutua entre ellos [4]:

$$\dot{S}_X^i = \frac{d}{dt}S_X + \dot{S}_X^r - \dot{I}_X \geq 0 \quad (43)$$

$$\dot{S}_Y^i = \frac{d}{dt}S_Y + \dot{S}_Y^r - \dot{I}_Y \geq 0 \quad (44)$$

Aquí,  $S_X$  y  $S_Y$  son las entropías marginales, mientras que  $\dot{I}_X$  e  $\dot{I}_Y$  representan los flujos de información mutua generados o consumidos por cada subsistema [4]:

$$\dot{I}_X = \sum_{x \geq x', y} J_{x,x'}^y \ln \left( \frac{p(y | x)}{p(y | x')} \right) \quad (45)$$

$$\dot{I}_Y = \sum_{x, y \geq y'} J_x^{y,y'} \ln \left( \frac{p(x | y)}{p(x | y')} \right) \quad (46)$$

Un valor positivo de  $\dot{I}_X$  indica que las transiciones en el subsistema  $X$  están asociadas a un incremento de su correlación con  $Y$ , es decir, en este caso  $X$  actúa como mecanismo de adquisición de información. Por el contrario, si  $\dot{I}_X < 0$ , las transiciones en  $X$  consumen información previamente adquirida, lo que puede estar asociado a la obtención de un trabajo útil. Un razonamiento completamente análogo se aplica para  $\dot{I}_Y$ .

En conjunto, las ecuaciones (43) y (44) constituyen una formulación local de la segunda ley generalizada, en la que el flujo de información entre subsistemas modifica el balance entrópico individual. Esta formulación resulta aplicable tanto a sistemas autónomos como a sistemas sometidos a un control externo, permitiendo analizar de manera precisa el papel de la información en su dinámica.

## 4.2. Sistema bipartito no autónomo

Se considera en esta Sección un sistema bipartito no autónomo compuesto por un motor  $Y$  y una memoria o "demonio"  $X$  que controla la dinámica del motor en función de los resultados.

Este sistema se manipula de forma externa en etapas secuenciales que separan el proceso de medición del proceso de retroalimentación, operando por tanto bajo una dinámica no autónoma.

El acoplamiento entre los subsistemas se modela mediante un Hamiltoniano:

$$H(x, y; t) = H_Y(y) + H_X(x) + H_{\text{int}}(x, y; t) \quad (47)$$

donde  $H_{\text{int}}$  representa la interacción durante la medición.

El ciclo de operación se divide en tres etapas:

- **Medición:** se establece una correlación, cuantificada por  $I(X; Y)$ , entre los subsistemas manteniendo el estado de  $Y$  constante. La producción de entropía se concentra en  $X$ , por lo que la forma local de la segunda ley generalizada para la etapa de medición es:

$$\Delta_i S_X^{\text{meas}} = \Delta S_X + \Delta S_X^r - I \geq 0 \quad (48)$$

$$\Delta_i S_Y^{\text{meas}} = 0 \quad (49)$$

El coste energético de esta operación está acotado según la ecuación (37):

$$W_{\text{meas}} \geq \Delta \mathcal{F}_X + TI(X; Y) \quad (50)$$

- **Retroalimentación:**  $X$  permanece invariante mientras  $Y$  evoluciona condicionado por el resultado de la medida. Se asume que el sistema utiliza toda la información adquirida previamente para realizar trabajo. La producción de entropía en este caso es:

$$\Delta_i S_X^{\text{fb}} = 0 \quad (51)$$

$$\Delta_i S_Y^{\text{fb}} = \Delta S_Y + \Delta S_Y^r + I \geq 0 \quad (52)$$

En ausencia de información, el segundo principio exige  $\Delta S_Y + \Delta S_Y^r \geq 0$ . Sin embargo, una información  $I \geq 0$  permite que la entropía total en  $Y$  disminuya sin violar la segunda ley. Si además el proceso es isoterma, es posible extraer trabajo. La información actúa como recurso termodinámico para  $Y$ , motivo por el cual este se puede denominar motor informacional [4]. En este caso el trabajo extraído está limitado por:

$$W_{\text{fb}} \geq \Delta \mathcal{F}_Y - TI(X; Y) \quad (53)$$

Si no hubiese información, la entropía de  $Y$  y su entorno sólo podrían aumentar  $\Delta S_Y + \Delta S_Y^r \geq 0$  para respetar el segundo principio. Sin embargo, la existencia de la información

- **Balance global del ciclo:** al sumar las contribuciones de las dos etapas anteriores se obtiene:

$$\Delta_i S = \Delta S_X + \Delta S_Y + \Delta S_X^r + \Delta S_Y^r \geq 0 \quad (54)$$

De esta forma se concluye que, al considerar el sistema completo, se cumple la segunda ley de la termodinámica. La información no aparece de forma explícita en el balance total, lo que indica que ha sido utilizada, pero su generación y consumo quedan reflejados en variaciones de energía libre.

### 4.3. Sistema bipartito autónomo

Finalmente, se considera un sistema bipartito autónomo que evoluciona sin intervención externa, alcanzando un estado estacionario no equilibrado (NESS). Aquí la información fluye de manera continua en vez de por etapas secuenciales.

En estado estacionario, las derivadas temporales de las entropías marginales y de la información mutua se anulan, de forma que:

$$\frac{dI}{dt} = \dot{I}_X + \dot{I}_Y = 0 \quad (55)$$

y, por tanto:

$$\dot{I}_X = -\dot{I}_Y = \dot{I} \quad (56)$$

La segunda ley local generalizada (ecuaciones (43) y (44)) toma la forma :

$$\dot{S}_X^i = \dot{S}_X^r - \dot{I} \geq 0 \quad (57)$$

$$\dot{S}_Y^i = \dot{S}_Y^r + \dot{I} \geq 0 \quad (58)$$

De forma que uno de los subsistemas necesita consumir energía para generar información, actuando como un sensor; mientras que el otro puede aprovechar ese flujo de información para reducir su propia entropía, actuando como un motor o controlador.

Este razonamiento lleva a introducir el concepto de eficiencia informacional, suponiendo que  $X$  actúa como sensor e  $Y$  como motor ( $\dot{I} > 0$ ) se definen [4]:

$$\eta_X = \frac{\dot{I}}{\dot{S}_X^r}, \quad \eta_Y = \frac{|\dot{S}_Y^r|}{\dot{I}} \quad (59)$$

Estas eficiencias cuantifican la eficacia con la que el subsistema  $X$  genera información y cómo  $Y$  la utiliza para realizar trabajo o reducir su entropía, respectivamente.

El flujo de información en este tipo de sistemas actúa como una afinidad termodinámica, análoga a un potencial químico o a un gradiente térmico [4]:

$$\dot{I} = \sum J \cdot f \quad (60)$$

donde  $J$  es una corriente de probabilidad y  $f$  es la afinidad informacional definida como:

$$f_{x,x'}^y = \ln \left( \frac{p(y|x)}{p(y|x')} \right) \quad (61)$$

Esta nueva variable permite identificar dos regímenes según la afinidad dominante:

- Régimen energético: cuando la afinidad energética es mucho mayor que la informacional, la dinámica está impulsada principalmente por fuerzas físicas (temperatura, potencial, etc.). En este caso las correlaciones son una consecuencia, no una causa.
- Régimen informacional: si la afinidad informacional predomina sobre la energética, entonces el flujo que se genera tendrá su origen en las correlaciones internas. En este caso la información será el motor funcional y se puede observar trabajo incluso sin gradientes energéticos netos.

En este último caso, un subsistema actúa como una máquina de información dirigiendo la evolución del otro a través del uso de información.

En conjunto, esta formalización establece un puente entre termodinámica, teoría de la información y dinámica estocástica, sentando las bases para el análisis funcional de dispositivos que operan a escala mesoscópica, como motores moleculares, sensores o demonios de Maxwell.

## 5. Ejemplo: cadena de Markov bipartita con temperaturas finitas

Para ilustrar los conceptos desarrollados en las secciones anteriores, se estudia un modelo simple: una cadena de Markov bipartita con temperaturas finitas implementada mediante una simulación de Monte Carlo tipo Gillespie. El código utilizado para la obtención de los resultados de esta Sección se encuentra disponible en el repositorio asociado a este trabajo [11].

El sistema de estudio está compuesto por dos variables binarias  $X$  e  $Y$ , por lo que el espacio de estados a considerar es:  $\{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$ . La energía del sistema está definida como:

$$E_{xy} = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ \epsilon & \text{si } x \neq y \end{cases} \quad (62)$$

La Figura 3 muestra la estructura de transiciones del sistema, donde cada nodo representa uno de los cuatro posibles estados  $(x,y)$ . Los nodos coloreados en rojo tienen una energía  $\epsilon$  y los grises están en el nivel de energía cero. Las flechas indican las transiciones permitidas por la dinámica bipartita, conforme a lo establecido en la ecuación (39). Las transiciones horizontales se corresponden con cambios en el estado de  $X$ , inducidos por el acoplamiento a un baño térmico a temperatura  $T_X$ , mientras que las transiciones verticales reflejan cambios en el estado de  $Y$ , mediados por un reservorio térmico a temperatura  $T_Y$ .

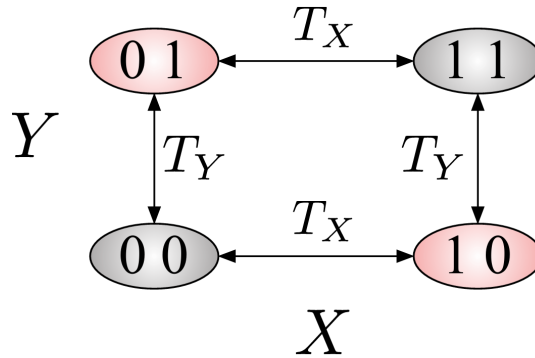


Figura 3: Diagrama de estados y transiciones permitidas en la cadena de Markov bipartita.

Imponiendo la condición de balance detallado local para cada transición (ecuación (23)) se obtiene:

$$\frac{\gamma_{i \rightarrow j}}{\gamma_{j \rightarrow i}} = \exp\left(-\frac{\Delta E_{ji}}{kT}\right) \quad (63)$$

donde  $T$  es la temperatura del reservorio correspondiente a la transición y  $\Delta E_{ji} = E_j - E_i$  es la diferencia de energía entre los estados  $i$  y  $j$ .

Por simplicidad, se toma regla de Metropolis para definir las tasas de transición [6]:

$$\gamma_{i \rightarrow j} = \begin{cases} \alpha, & \text{si } \Delta E_{ij} \leq 0 \\ \alpha \cdot \exp\left(-\frac{\Delta E_{ij}}{kT}\right), & \text{si } \Delta E_{ij} > 0 \end{cases} \quad (64)$$

Esta elección garantiza que las transiciones que reducen la energía del sistema ocurran con probabilidad máxima ( $\alpha$ ), mientras que aquellas que aumentan la energía son penalizadas exponencialmente, respetando de esta forma el equilibrio local.

Para esta simulación se asigna  $\alpha = 1$  sin pérdida de generalidad, ya que simplemente fija una escala temporal.

A partir de las trayectorias generadas mediante el algoritmo de Gillespie, se calculan las siguientes magnitudes:

- El flujo de información  $\dot{I}$ , asociado a las transiciones en  $X$ , conforme a la ecuación (45).
- La producción de entropía en el entorno  $\dot{S}_{\text{env}}$ , según la ecuación (24), junto con sus contribuciones correspondientes a cada subsistema  $\dot{S}_X^r$  y  $\dot{S}_Y^r$ .
- La producción total de entropía en cada subsistema  $\dot{S}_X^i$  y  $\dot{S}_Y^i$ , definida según la segunda ley local generalizada aplicada a sistemas bipartitos autónomos (ecuaciones (57) y (58)).
- La eficiencia informacional  $\eta_X$ , tal como se expresa en la ecuación (59).
- La corriente cíclica neta, entendida como la tasa promedio con la que el sistema recorre ciclos cerrados en el espacio de estados.

## 5.1. Resultados

Para este análisis, se consideran los siguientes valores fijos para los parámetros:  $\alpha = 1.0$ ,  $\epsilon = 1.5$ ,  $k = 1$  y  $T_Y = 0.8$ . Se realiza un estudio cuantitativo de la variación de las magnitudes mencionadas con respecto a  $T_X \in [0.1, 4.0]$ .

A continuación, se presentan los resultados obtenidos:

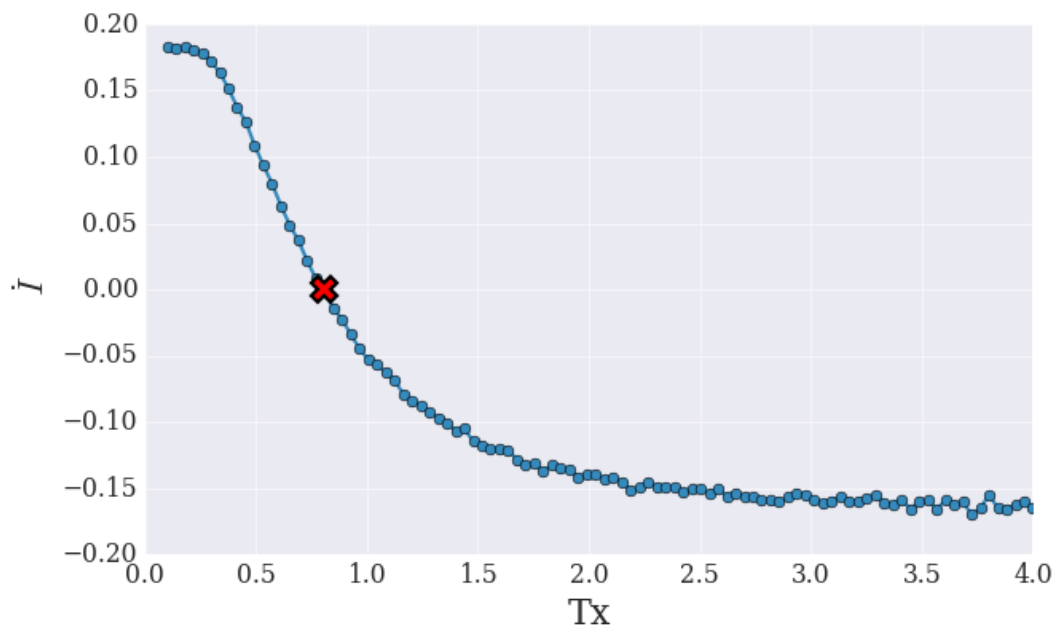


Figura 4: Flujo de información.

La Figura 4 muestra que el flujo de información  $\dot{I}$ , asociado a las transiciones en  $X$ , es positivo para  $T_X < T_Y$ , se anula en  $T_X = T_Y$  (punto marcado con una cruz roja) y se vuelve negativo cuando  $T_X > T_Y$ . Este cambio de signo refleja una inversión del papel funcional de las variables. La variable que está conectada a un baño térmico a menor temperatura actúa como "demonio", mientras que la que está a mayor temperatura desempeña el papel de sustancia trabajadora. Este comportamiento coincide con las predicciones esperadas para el comportamiento termodinámico de sistemas bipartitos desarrolladas en el Artículo [4].

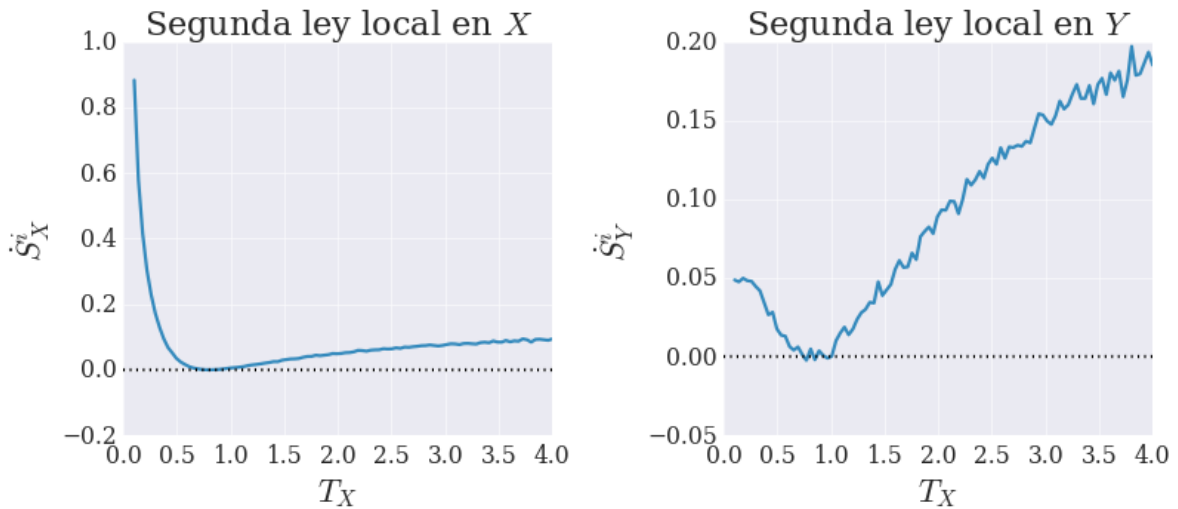


Figura 5: Verificación de la segunda ley local generalizada para los subsistemas  $X$  e  $Y$ .

En la Figura 5, se comprueba que la producción total de entropía en cada subsistema es estrictamente positiva para todos los valores de  $T_X$ , excepto cuando se da la condición de equilibrio  $T_X = T_Y$ , donde dichas entropías se anulan. Se verifica así de manera cuantitativa que cada subsistema cumple por separado con la segunda ley extendida, como se había predicho anteriormente.

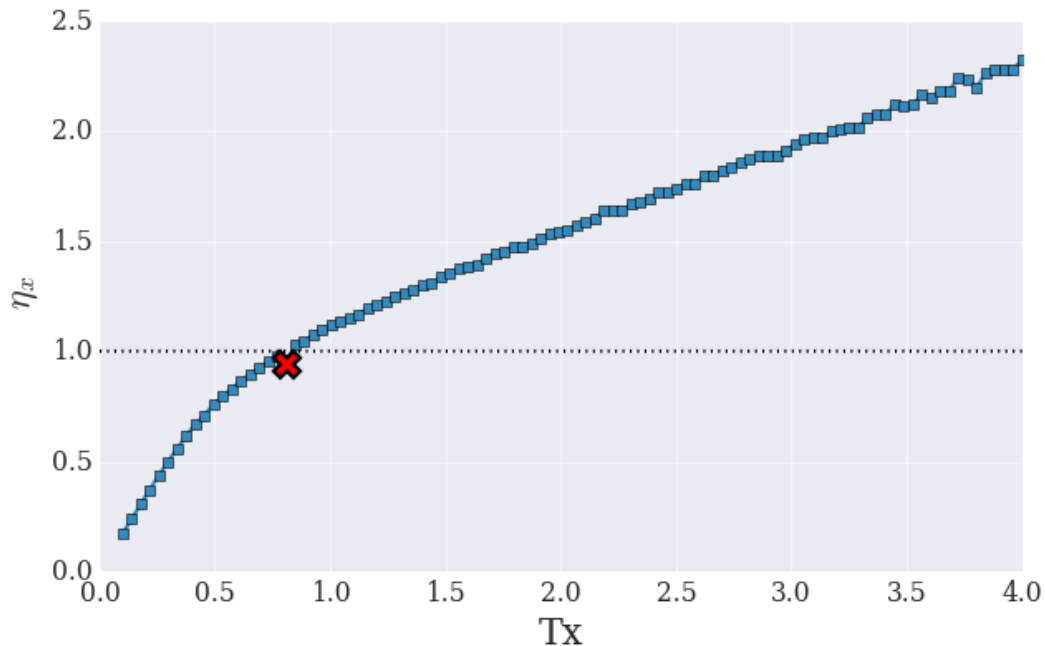


Figura 6: Eficiencia informacional.

En la Figura 6, se observa que la eficiencia informacional es muy pequeña para bajas temperaturas, debido a la congelación de la dinámica. A medida que aumenta  $T_X$ , esta eficiencia crece hasta

alcanzar un valor  $\eta_X = 1$ . A partir de ese punto, esta magnitud deja de tener sentido operacional. Esto se debe a que su definición parte del supuesto de un flujo de información  $\dot{I} > 0$ . Según la Figura 4, esta condición se cumple únicamente para  $T_X < T_Y$ . Para el caso en el que  $\dot{I} < 0$ , el flujo de información se invierte y es  $Y$  quien actúa como observador. En este régimen  $\eta_X$  no refleja un rendimiento informacional, por lo que su interpretación debe evitarse.

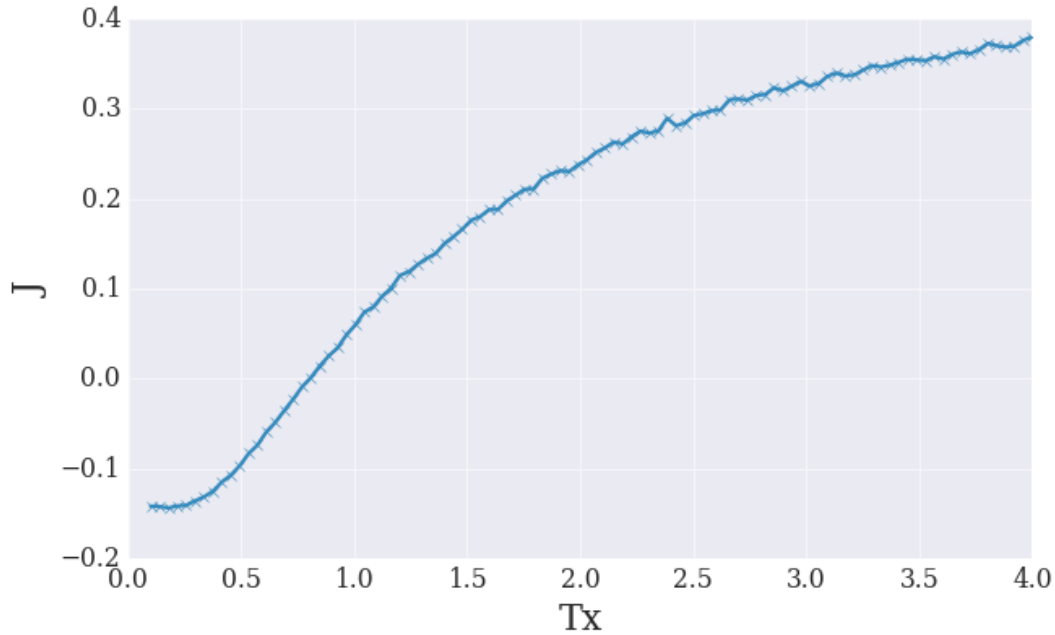


Figura 7: Corriente cíclica neta.

La Figura 7, presenta un máximo para la corriente cíclica neta en un rango de temperaturas intermedias-altas, indicando una zona de máxima irreversibilidad, es decir, alejada del equilibrio. Este régimen de operación no coincide con el de máxima eficiencia ni con el de máximo flujo de información, lo que sugiere que distintas funciones operativas pueden optimizarse en condiciones distintas [4].

## 5.2. Análisis de los resultados

Los resultados obtenidos confirman la existencia de una relación entre el flujo de información, la producción de entropía y el acoplamiento térmico en el sistema. Cuando  $T_X < T_Y$ , el subsistema  $X$  aprende sobre  $Y$ , por lo que genera información ( $\dot{I} > 0$ ), que puede ser utilizada para controlar las transiciones. De manera inversa, cuando  $T_X > T_Y$ , es el subsistema  $Y$  el que actúa como "demonio", incrementando las correlaciones y dirigiendo la dinámica de  $X$ .

El máximo en la eficiencia informacional representa un punto de operación óptima, donde las transiciones en  $X$  son lo suficientemente frecuentes pero siguen siendo sensibles al estado de  $Y$ . Este punto se corresponde con un régimen en el que el sistema es capaz de generar información útil con una producción de entropía del entorno relativamente baja en comparación. Este resultado coincide con análisis previos de motores informacionales en régimen autónomo [4].

Por otro lado, la disociación entre el comportamiento del flujo de información y la corriente neta demuestra que existe un régimen en el que el sistema opera como un motor térmico clásico, es decir, existe una corriente neta significativa sin que se generen correlaciones útiles.

### 5.3. Conclusiones

Este análisis cuantitativo confirma varias predicciones fundamentales de la termodinámica de la información para sistemas autónomos:

- El flujo de información puede cambiar de signo en función del gradiente térmico entre subsistemas, reflejando un intercambio de roles entre el agente que actúa como demonio y el que desempeña el papel de sustancia trabajadora.
- Existe un régimen óptimo para la eficiencia informacional, desplazado respecto al equilibrio térmico, en el cual se maximiza la utilización de la entropía producida.
- Los rangos óptimos para el flujo de información, la eficiencia informacional y la corriente cíclica no coinciden necesariamente, lo que pone de manifiesto la existencia de múltiples modos operativos posibles para el sistema.
- La segunda ley local extendida se cumple numéricamente en cada subsistema, lo cual refuerza la validez del formalismo mostrando que la información no viola la segunda ley de la termodinámica, sino que redistribuye la disipación entre las partes del sistema.
- El modelo respeta en todo momento el segundo principio para el sistema conjunto, reafirmando que los motores informacionales autónomos son consistentes con la termodinámica, aunque su funcionamiento suponga una reinterpretación de los balances clásicos de entropía y energía.

Estos resultados no solo respaldan el marco teórico para este sistema simplificado, sino que también proporcionan herramientas cuantitativas para analizar dispositivos reales que explotan información y fluctuaciones para realizar tareas útiles.

## Referencias

- [1] Ludwig Boltzmann. On the relationship between the second law of the mechanical theory of heat and the theory of probability with respect to the laws of thermal equilibrium. *Proceedings of the Imperial Academy of Sciences in Vienna, Mathematical and Natural Sciences Section*, 76:373–435, 1877.
- [2] Herbert B. Callen. *Thermodynamics and an Introduction to Thermostatistics*. Wiley, 2nd edition, 1985.
- [3] Rudolf Clausius. On several convenient forms of the fundamental equations of the mechanical theory of heat. *Annalen der Physik*, 201(7):353–400, 1865. Original title in German: *Über verschiedene für die Anwendung bequeme Formen der Hauptgleichungen der mechanischen Wärmetheorie*.
- [4] J. M. Horowitz and M. Esposito. Thermodynamics with continuous information flow. *Physical Review X*, 4(3):031015, 2014.
- [5] James Clerk Maxwell. *Theory of Heat*. Longmans, Green and Co., London, 1871. Capítulo XXII: Sobre la imposibilidad de una máquina de segunda especie.
- [6] N. Metropolis, A. W. Rosenbluth, M. N. Rosenbluth, A. H. Teller, and E. Teller. Equation of state calculations by fast computing machines. *The Journal of Chemical Physics*, 21(6):1087–1092, 1953.
- [7] J. M. R. Parrondo. Thermodynamics of information, 2023.
- [8] J. M. R. Parrondo, J. M. Horowitz, and T. Sagawa. Thermodynamics of information. *Nature Physics*, 11(2):131–139, 2015.
- [9] J. M. R. Parrondo, J. Tabanera-Bravo, F. Fedele, and N. Ares. Information flows in nanomachines. In X. Bouju and C. Joachim, editors, *Crossroad of Maxwell Demon*, pages 1–31. Springer Nature Switzerland, 2024.
- [10] Ilya Prigogine. *Introduction to Thermodynamics of Irreversible Processes*. Interscience Publishers, New York, 3rd edition, 1967.
- [11] Marina Pérez. Repositorio github del tfg: Información y entropía. <https://github.com/aniram-m/Cadena-de-Markov-bipartita>, 2025. Material complementario del Trabajo de Fin de Grado, Universidad Complutense de Madrid.
- [12] Andrew Rex. Maxwell’s demon—a historical review. *Entropy*, 19(6), 2017.
- [13] Claude E. Shannon. A mathematical theory of communication. *Bell System Technical Journal*, 27(3):379–423, 1948.
- [14] Leo Szilárd. Sobre la disminución de la entropía en un sistema termodinámico mediante la intervención de seres inteligentes. *Zeitschrift für Physik*, 53:840–856, 1929. Título traducido del alemán: *Über die Entropieverminderung in einem thermodynamischen System bei Eingriffen intelligenter Wesen*.