

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS
Departamento de Geometría y Topología



**R-ÁRBOLES, ESTRUCTURAS MÉTRICAS EN SUS
ESPACIOS DE FINALES Y ALGUNAS APLICACIONES A
LA TOPOLOGÍA GEOMÉTRICA**

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR
PRESENTADA POR

Álvaro Martínez Pérez

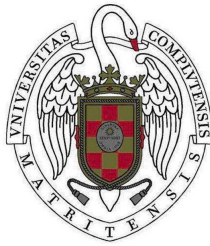
Bajo la dirección del doctor
Manuel Alonso Morón

Madrid, 2008

• ISBN: 978-84-692-1087-1

© Álvaro Martínez Pérez, 2008

Universidad Complutense de Madrid
Facultad de Ciencias Matemáticas
Departamento de Geometría y Topología



\mathbb{R} -árboles, estructuras métricas en sus espacios de finales y algunas aplicaciones a la Topología Geométrica.

Memoria presentada por **Álvaro Martínez Pérez**

Para la obtención del grado de Doctor en Ciencias Matemáticas.

Dirigida por **Manuel Alonso Morón**.

Madrid, Mayo 2008.

Agradecimientos

Quisiera empezar dando las gracias a José María Montesinos Amilibia por transmitirme la belleza de las matemáticas durante sus clases, por contarnos lo que había un poco más allá del horizonte de lo que comprendíamos y hacernos querer más. Por hacerme desear, en definitiva, dedicarme a esto, ya que sin él, probablemente nunca habría empezado un doctorado.

Gracias a mi director, Manuel Alonso Morón, por acogerme y confiar en mí desde el principio. Por su atención, su paciencia y por dedicarme tiempo cuando no lo tenía cada vez que he llamado a su puerta. Por enseñarme a hacer matemáticas y por ser un ejemplo a seguir en esto y en tantas otras cosas.

A mi familia, por apoyarme en todo momento y hacer todos los esfuerzos para que yo tenga la oportunidad de dedicarme a lo que he elegido. Es imposible agradecerse como se merecen y a ellos dedico esta memoria.

También quiero hacer una mención especial a mis compañeros, Jaime y Lorenzo, sin los cuales todo habría sido mucho más difícil. Quisiera darles las gracias por tener la puerta permanentemente abierta, por escucharme siempre, por sus ánimos, y su ejemplo, y sobre todo, porque ha sido un inmenso placer compartir con ellos todo esto.

Estoy en deuda con las asociaciones de Lewis Carroll y Numenor y con los compañeros que han mostrado tanto interés, me han escuchado tanto, han asistido a charlas sobre este trabajo e incluso me han ayudado a colocar el proyector.

Finalmente, debo agradecer al departamento su apoyo más allá de toda obligación, haciéndome sentir parte del mismo y dándome todas las facilidades posibles para el desarrollo de mi labor.

A estos y a tantos otros, en definitiva, muchas gracias.

Índice general

1. Introducción	1
2. Conceptos básicos	9
2.1. Árboles	9
2.2. Espacios ultramétricos	14
2.3. Teoría de la forma	15
2.3.1. Teoría de la forma en el sentido de Borsuk	15
2.3.2. Teoría de la forma en el sentido de Mardešić-Segal	16
2.4. Espacios de longitud	18
2.5. Geometría <i>coarse</i>	20
2.6. Sistemas dinámicos	22
I Árboles y sus finales	25
3. \mathbb{R}-árboles y espacios ultramétricos	27
3.1. Introducción	27
3.2. Aplicaciones métricamente propias	28
3.3. Espacio de finales de un árbol	31
3.4. El árbol de un espacio ultramétrico	32
3.5. Construyendo los funtores	34
3.5.1. Aplicaciones entre árboles inducidas por aplicaciones uniformemente continuas entre los finales	34
3.5.2. Aplicación uniformemente continua entre los finales inducida por una aplicación métricamente propia entre los árboles	41
3.6. Equivalencia de categorías	44
3.7. Aplicaciones Lipschitz y <i>coarse</i> entre árboles	47
3.8. Finales de Freudenthal y resultados clásicos	50

4. Equivalencia <i>coarse</i> entre los árboles	57
4.1. Introducción	57
4.2. \mathbb{R} -árboles geodésicamente completos	58
4.3. Árboles arbustivos	70
4.3.1. Árboles simpliciales localmente finitos con vértices de grado minimal 3	73
5. Árboles y teoría de la forma	81
5.1. Introducción	81
5.2. Sucesiones inversas	82
5.2.1. Sucesión inversa de un árbol	82
5.2.2. Árbol de una sucesión inversa	83
5.3. Morfismos	83
5.3.1. Aplicaciones métricamente propias	83
5.3.2. Morfismos entre sucesiones inversas	84
5.4. Los funtores	85
5.5. Equivalencia de categorías	87
5.6. Propiedad de Mittag-Leffler	88
5.7. Morfismos a nivel y aplicaciones simpliciales	92
5.8. Pro-grupos	93
5.9. Árbol de morfismos <i>shape</i>	97
II Un semiflujo en el hiperespacio	109
6. Un semiflujo en el hiperespacio	111
6.1. Introducción	111
6.2. Definición del semiflujo	111
6.3. Conservación del tipo topológico	113
6.4. Espacios poliédricos	117
6.5. Niveles en el semiflujo	123
6.6. Niveles de Whitney	143
6.7. Trayectorias en el semiflujo	144
6.8. \mathbb{R} -árbol asociado al semiflujo	147

Capítulo 1

Introducción

En 1968 Karol Borsuk, [10],[13], introduce la teoría de la forma. El propósito es clasificar los espacios desde el punto de vista de sus principales propiedades topológicas globales. En el caso de espacios con unas propiedades locales suficientemente regulares, como los poliedros o ANR's, ver [31], la clasificación resultaría análoga a la de los tipos de homotopía, mientras que dicha clasificación no puede mostrar las similitudes globales de espacios con propiedades locales complicadas. El ejemplo clásico para ilustrar esto, original del propio Borsuk, es el círculo polaco, es decir, la unión en \mathbb{R}^2 de la adherencia de la gráfica $y = \operatorname{sen}\frac{1}{x}$ $0 < x \leq \frac{1}{\pi}$ y un arco que une los puntos $(0, 1)$ y $(\frac{1}{\pi}, 0)$ disjunto del conjunto anterior excepto en los puntos señalados.

Este espacio tiene la misma "forma" que una circunferencia, sin embargo no tiene el mismo tipo de homotopía y esto se debe, en definitiva, a que el círculo polaco no es localmente conexo, mientras que las propiedades topológicas globales sí que son similares en ambos espacios: por ejemplo ambos dividen el plano en dos componentes conexas.

Borsuk describe esta categoría *shape* para los subespacios cerrados en el cubo de Hilbert, Q , a través de sucesiones fundamentales, que son sucesiones de funciones de Q en Q .

Borsuk usa también estas sucesiones fundamentales para introducir una métrica en el hiperespacio llamada métrica fundamental [8]. Esta métrica tiene propiedades muy útiles en el ámbito de la teoría de la forma. Por ejemplo, si A_n es una sucesión de compactos métricos movibles, ver [12], que converge a A en esta métrica, entonces A es movable. Más adelante, V. F. Laguna, M. A. Morón, Nguyen To Nhu y J. M. R. Sanjurjo [40] introducen la métrica *shape* en 2^X en la que la propiedad de ser límite de una sucesión de poliedros es un invariante *shape*. Más aún, aquí se prueba que un compacto en el cubo de Hilbert es movable si y sólo si es el límite de una sucesión de poliedros en la métrica *shape*. En [50], Manuel Alonso Morón y Francisco

Romero Ruiz del Portal continúan el estudio de esta métrica obteniendo una ultramétrica completa entre los conjuntos de morfismos *shape* entre compactos métricos en el cubo de Hilbert. Estos resultados están motivados por teoremas clásicos en geometría riemanniana relacionados con la métrica de Hausdorff-Gromov.

Por otra parte se ha observado durante mucho tiempo una estrecha relación entre árboles y espacios ultramétricos, ver [33], [34]. Los árboles modelizan procesos de ramificación representados por la ramificación que se produce al alejarse desde una raíz hacia los finales. Los espacios ultramétricos son aquellos con la propiedad de que para cualquier par de bolas que se intersequen, una de ellas estará contenida en la otra. Así, si comenzamos con una familia de bolas de un determinado diámetro y lo vamos estrechando, la familia de bolas parametrizadas resultante forma un sistema jerárquico análogo a la ramificación de un árbol. Mientras que en el árbol la ramificación se produce al avanzar hacia el infinito en los espacios ultramétricos se produce al aproximarse a los puntos.

En 2004, Bruce Hughes publica [33], en el que aborda el estudio de la estructura a gran escala de los árboles, en el contexto de la geometría asintótica de Gromov, [26], [27], pero en lugar de centrarse como éste en las quasi-isometrías entre los árboles, y que nosotros abordamos en el capítulo 4 de esta memoria, él se centra en morfismos que capturen mejor la geometría del árbol como son las isometrías en el infinito. Toma por ejemplo los árboles de Cantor y de Fibonacci:

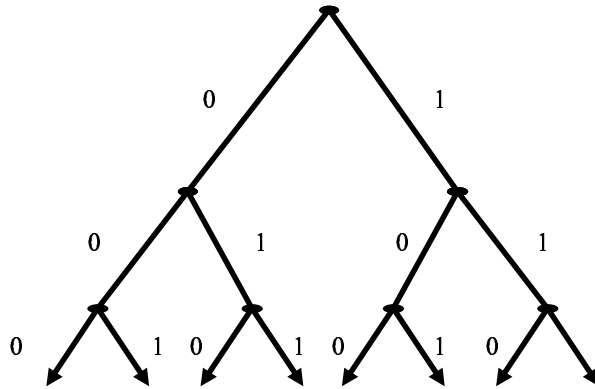


Figura 1.1: El árbol de Cantor.

Estos árboles son quasi-isométricos mientras que no existe una similaridad local entre sus finales.

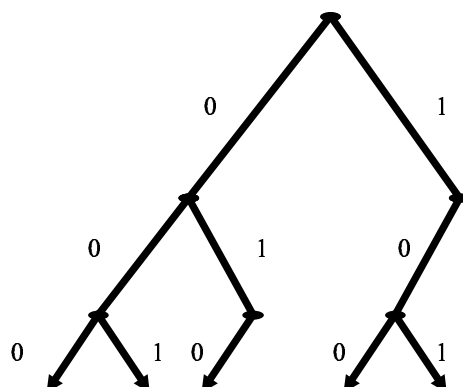


Figura 1.2: El árbol de Fibonacci.

Además Hughes logra en este artículo construir una equivalencia de categorías extendida para todos los \mathbb{R} -árboles (enraizados y geodésicamente completos) mientras que hasta entonces, las equivalencias de categorías que relacionaban los árboles con sus espacios de finales se restringían al caso de árboles en los que cada nodo tiene orden mayor o igual que 3.

En nuestro caso, para representar el proceso de ramificación del espacio ultramétrico construido en [50], centramos nuestro interés en los mismos objetos que Hughes pero con los morfismos que aparecen entre los espacios de morfismos *shape*, y vamos a considerar por tanto al definir la categoría las aplicaciones uniformemente continuas. Así, en el capítulo 3, se demuestra una equivalencia entre las siguientes categorías:

\mathcal{T} : \mathbb{R} -árboles enraizados geodésicamente completos con clases de homotopía métricamente propia de aplicaciones métricamente propias enraizadas y continuas.

\mathcal{U} : Espacios ultramétricos completos de diámetro ≤ 1 y aplicaciones uniformemente continuas.

De hecho se observa que los morfismos entre los árboles también se pueden poner en términos de su geometría *coarse* y expresar la relación de equivalencia entre las aplicaciones mediante cierta noción de homotopía *coarse*, válida para espacios geodésicos. Así, se obtiene a su vez otra equivalencia de categorías entre \mathcal{U} y

\mathcal{T}_C : \mathbb{R} -árboles enraizados geodésicamente completos con clases de homo-

topía *coarse* de aplicaciones *coarse* enraizadas y continuas.

Así pues, se obtiene que el homeomorfismo uniforme entre los finales se corresponde con una equivalencia en esta homotopía *coarse* que es estrictamente más débil que una equivalencia *coarse* o lo que es lo mismo, para espacios de longitud, una quasi-isometría entre los árboles.

Entre las aplicaciones de los \mathbb{R} -árboles cabe destacar la teoría geométrica de grupos. Si un grupo G actúa por isometrías en un \mathbb{R} -árbol uno puede deducir la estructura de G a partir de propiedades de la acción. Un resultado clásico en este sentido es que G es un grupo libre si y sólo si actúa libremente sobre un árbol.

La teoría de Bass-Serre, [59], [60], resuelve esto para árboles simpliciales, sin embargo extenderlo a los \mathbb{R} -árboles parece de especial interés ya que aparecen de forma natural en este ámbito. Por ejemplo, tomando una sucesión de acciones por isometrías de G en espacios de curvatura negativa se produce una acción por isometrías en un \mathbb{R} -árbol en el límite de Gromov-Hausdorff, ver [55].

También las casi-acciones por quasi-isometrías pueden dar información sobre el grupo, véase [51].

Dado un espacio métrico X un problema fundamental en teoría geométrica de grupos es caracterizar grupos quasi-isométricos a X , o lo que es equivalente, caracterizar grupos cuya casi-acción por quasi-isometrías sobre X es co-acotada y propia. [51] resuelve este problema cuando X es un árbol simplicial arbustivo (en el que todo punto está a una distancia uniformemente acotada de un vértice de valencia al menos 3) con valencia acotada.

En el capítulo 4, obtenemos una caracterización de dicha equivalencia *coarse*, o quasi-isometría, entre los árboles en función de las aplicaciones inducidas entre sus finales. Ghys y de la Harpe [28] demuestran que una quasi-isometría entre los árboles induce un homeomorfismo bi-Hölder y quasi-conforme entre los finales. De hecho, obtienen una condición que extrapolada a los finales es algo más fuerte y a la que en ese caso nos referiremos como *coarse* conforme. Demostramos aquí que, en el caso de finales de un \mathbb{R} -árbol enraizado geodésicamente completo, dicha condición implica bi-Hölder y es suficiente para asegurar la equivalencia *coarse* o la quasi-isometría entre dos \mathbb{R} -árboles geodésicamente completos. Obtenemos también un teorema de rigidez que establece que para cualquier aplicación *coarse* $f : T \rightarrow T'$ entre \mathbb{R} -árboles (no necesariamente geodésicamente completos) existe una aplicación *coarse* continua $g : T \rightarrow T'$ tal que f y g son *coarse* equivalentes. Esto nos permite trabajar con los árboles en la categoría *coarse* suponiendo la continuidad de las aplicaciones, cuya ausencia es una dificultad importante en la geometría *coarse*.

Este capítulo, conecta de forma natural con la memoria de M. Mirani [47], en la que trata de caracterizar las quasi-isometrías entre árboles simpliciales localmente finitos de grado minimal 3. Logra aquí construir un functor de los árboles a los espacios de finales de modo que las quasi-isometrías se transforman en homeomorfismos bi-Hölder y quasi-conformes pero no consigue establecer una equivalencia y deja una serie de conjeturas abiertas en este sentido. Evidentemente, si restringimos las categorías \mathcal{T} y \mathcal{U} a los árboles simpliciales localmente finitos de grado minimal 3 y sus espacios de finales, la condición anterior de ser *coarse* conforme mantiene la equivalencia pero demostramos también que para la categoría intermedia de árboles arbustivos (si el grado minimal es 3 el árbol es obviamente arbustivo) podemos establecer la equivalencia con la condición algo más débil (que a su vez es insuficiente si consideramos los \mathbb{R} -árboles geodésicamente completos en general) de ser acotadamente quasi-conforme. Finalmente una serie de contraejemplos y un teorema resuelven todas las conjeturas planteadas en [47].

A continuación, el capítulo 5, parte de una observación de Serre en [60] donde se establece una relación entre árboles simpliciales y sucesiones inversas, siendo éstas de gran importancia en teoría de la forma. Ver [45].

Mardešić y Segal desarrollan desde 1970, ver [43], [44] o [45], una teoría de la forma para compactos Hausdorff basada en sistemas inversos de ANR's y que en el caso de compactos métricos, coincide con la de Borsuk. Usando esta aproximación, podemos describir los morfismos *shape* entre dos compactos métricos como una sucesión inversa de morfismos y teniendo en cuenta la relación descrita por Serre, esto se podría traducir a un árbol simplicial. Por tanto, podemos comparar este árbol simplicial con el árbol que se obtiene del espacio ultramétrico de los morfismos *shape* en [50] obteniendo así una nueva perspectiva sobre los resultados de [50].

A su vez, los morfismos *shape* se describen como clases de morfismos entre sucesiones inversas y por tanto, en el capítulo 5 se estudia qué representan estos morfismos entre sucesiones inversas, en general, en los árboles inducidos (que son simpliciales pero no necesariamente localmente finitos ni geodésicamente completos). Se obtiene aquí que, de hecho, hay una equivalencia de categorías, ahora entre:

Tower-Set, la categoría de sucesiones inversas en **Set** con clases de equivalencia de morfismos de sucesiones inversas y

\mathcal{T}^* , la categoría de árboles simpliciales enraizados con clases de homotopía métricamente propia de aplicaciones enraizadas continuas y métricamente propias.

Esto nos permite traducir una categoría puramente algebraica a una representación geométrica.

A través de la equivalencia entre sucesiones inversas y árboles, podemos caracterizar propiedades algebraicas que estén caracterizadas por su reflejo en pro-Set , en las que no intervengan estructuras propias de la categoría en la que se define la sucesión, como la propiedad de Mittag-Leffler (ver [45]). Esta propiedad, que caracteriza la movilidad en sucesiones inversas en pro-Set , es de gran importancia cuando se estudian propiedades en el límite inverso porque en muchos casos supone la condición necesaria para asegurar que en el paso del sistema inverso a su límite no se pierde información relevante. Éste es el caso, por ejemplo, de los pro-grupos, en los que la propiedad de Mittag-Leffler es un invariante por isomorfismo y en los que se cumple que si un pro-grupo es Mittag-Leffler y su límite inverso es numerable, entonces el pro-grupo y su límite son isomorfos. Véanse también [3], [22].

Mediante la anterior equivalencia de categorías, esta propiedad se traduce a la siguiente condición geométrica en el árbol:

Una sucesión inversa es Mittag-Leffler si y sólo si su árbol asociado es isomorfo (en \mathcal{T}^*) a un árbol geodésicamente completo.

Esta perspectiva geométrica nos permite una nueva aproximación a resultados clásicos en pro-grupos que a su vez tienen aplicación en el estudio del grupo *shape*.

En la segunda parte de esta memoria volvemos a centrarnos en el cubo de Hilbert para estudiar los compactos métricos a través de su complemento. Los teoremas del complemento son un capítulo importante en teoría de la forma. El primero de ellos es debido a T. A. Chapman, [19], que establece que dados dos Z -conjuntos $X, Y \subset Q$, $sh(X) = sh(Y)$ si y sólo si los complementos $Q \setminus X$ y $Q \setminus Y$ son homeomorfos. De hecho, en [20], demuestra que, si \mathcal{Z} es la categoría de los Z -conjuntos en Q con los morfismos *shape* y \mathcal{P} es la categoría cuyos objetos son complementos de Z -conjuntos en Q con clases de homotopía propia débil de aplicaciones propias, entonces existe una equivalencia de categorías entre \mathcal{Z} y \mathcal{P} .

También E. Cuchillo-Ibáñez, J. Dydak, A. Koyama y M.A. Morón, describen en [18] una equivalencia entre la categoría topológica de los Z -conjuntos en el cubo de Hilbert y la de la geometría C_0 -*coarse* de los complementos.

Siguiendo esta línea del estudio de Z -conjuntos desde el complemento, en el capítulo 6, se construye el hiperespacio de un continuo de Peano X a partir de una métrica convexa fijada, obteniendo así una copia homeomorfa del cubo de Hilbert en la que la métrica es conocida y se induce a partir de la de X y con una inmersión isométrica de X como Z -conjunto. La idea es utilizar esta información extra que nos puede dar el fijar la métrica, para el estudio de propiedades topológicas de los continuos de Peano. Usando herramientas

tomadas de sistemas dinámicos tratamos de encontrar características propias de este hiperespacio, como pueda ser la existencia de copias homeomorfas a X en el complemento, tan cerca de X como queramos (en la métrica de Hausdorff).

Obtenemos una descomposición del espacio en niveles, que se relacionan a su vez con los niveles de las funciones de Whitney, ver [61], y también [24] y [53], pero que dan más información al provenir directamente de la métrica. Así, por ejemplo, se prueba que si el espacio X es un grafo finito, entonces los niveles restringidos a bolas de cierto radio fijado centradas en puntos son a su vez homeomorfos a grafos finitos.

De hecho, una de las principales cuestiones que estudiamos en este capítulo es cómo se van produciendo las identificaciones de las bolas centradas en los puntos del espacio a medida que el radio aumenta, lo que es, en definitiva, el proceso inverso al de ramificación. Por tanto, usando las funciones de Liapunov de sistemas dinámicos para parametrizar, podemos describir geoméricamente este proceso a través de \mathbb{R} -árboles y establecer condiciones (geométricas) sobre ellos que caracterizan propiedades en el hiperespacio.

Capítulo 2

Conceptos básicos

2.1. Árboles

Vamos a seguir la aproximación a los árboles de [33] a lo que añadiremos el lema 2.1.6, una caracterización de \mathbb{R} -árbol que se puede encontrar en [21]. Las definiciones 2.1.2, 2.1.3 y 2.1.4 así como el lema 2.1.5 se pueden encontrar en [25].

Definición 2.1.1. *Un \mathbb{R} -árbol es un espacio métrico (T, d) conexo por arcos de forma única y $\forall x, y \in T$, el único arco de x a y , denotado por $[x, y]$, es isométrico al subintervalo $[0, d(x, y)]$ de \mathbb{R} .*

Definición 2.1.2. *Dado un punto base x en un espacio métrico (X, d) , el producto de Gromov de dos puntos $y, z \in X$ es*

$$(y \cdot z)_x = \frac{1}{2}\{d(x, y) + d(x, z) - d(y, z)\}.$$

Definición 2.1.3. *Dado $0 \leq \delta$ un número real decimos que un espacio métrico es δ -hiperbólico respecto a w si*

$$(x \cdot z)_w \geq \min\{(x \cdot y)_w, (y \cdot z)_w\} - \delta$$

para todo $x, y, z \in X$.

Definición 2.1.4. *Dado $0 \leq \delta$ un número real decimos que un espacio métrico es δ -hiperbólico si*

$$(x \cdot z)_w \geq \min\{(x \cdot y)_w, (y \cdot z)_w\} - \delta$$

para todo $x, y, z, w \in X$.

Lema 2.1.5. *Si un espacio métrico es δ -hiperbólico respecto a un punto w , entonces es 2δ -hiperbólico.*

Lema 2.1.6. *Un espacio métrico (X, d) es un \mathbb{R} -árbol si y sólo si es conexo y 0-hiperbólico.*

Lema 2.1.7. *Si T es un \mathbb{R} -árbol y $v, w, z \in T$, entonces existe $x \in T$ tal que $[v, w] \cap [v, z] = [v, x]$.*

Definición 2.1.8. *Un \mathbb{R} -árbol enraizado, (T, v) es un \mathbb{R} -árbol (T, d) en el que se fija un punto $v \in T$ que se llama raíz.*

Definición 2.1.9. *Un \mathbb{R} -árbol enraizado es geodésicamente completo si toda inmersión isométrica $f : [0, t] \rightarrow T$, $t > 0$, con $f(0) = v$, se extiende a una inmersión isométrica $\tilde{f} : [0, \infty) \rightarrow T$.*

Una inmersión isométrica de $[0, \infty)$ en un espacio métrico se denomina *rayo geodésico*. En nuestro caso, cuando el espacio de llegada sea un árbol enraizado, llamaremos *rama* a una inmersión isométrica no extensible con origen en la raíz y cuando el árbol no sea geodésicamente completo podemos hablar de ramas finitas o infinitas.

Nota 2.1.10. *Un punto v es un \mathbb{R} -árbol geodésicamente completo trivial.*

Notación: Si (T, v) es un \mathbb{R} -árbol enraizado y $x \in T$, sea $\|x\| = d(v, x)$,

$$B(v, r) = \{x \in T \mid \|x\| < r\}$$

$$\bar{B}(v, r) = \{x \in T \mid \|x\| \leq r\}$$

$$\partial B(v, r) = \{x \in T \mid \|x\| = r\}$$

Ejemplo 2.1.11. *Árbol de Cantor. Cada arista se considera de longitud 1.*

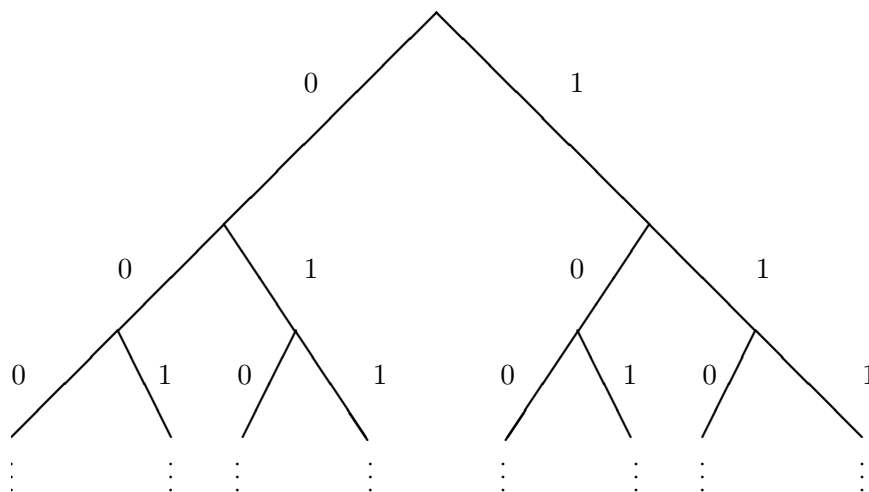


Figura 2.1: El árbol de Cantor.

Ejemplo 2.1.12. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0 \text{ e } y = 0, y = x \text{ o } y = \frac{x}{2^n} \text{ con } n \in \mathbb{N}\}$

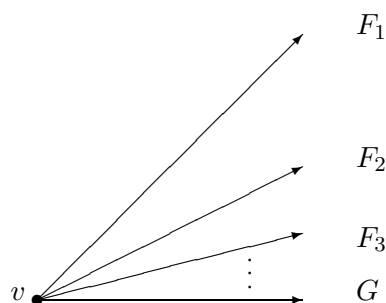


Figura 2.2: Árbol no localmente finito.

Para cada par de puntos x, y en ramas diferentes se define $d(x, y) = d_u(x, v) + d_u(v, y)$.

Ejemplo 2.1.13. Consideremos (\mathbb{R}^2, O) y para cada par de puntos no alineados con el origen se define la distancia: $d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} + \sqrt{y_1^2 + y_2^2}$.

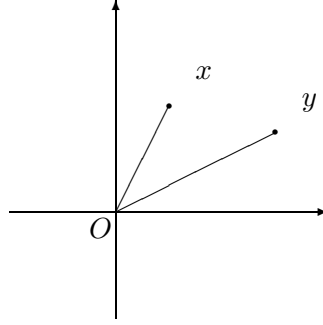


Figura 2.3: \mathbb{R} -árbol con un punto de ramificación no numerable.

Definición 2.1.14. Si c es un punto cualquiera del \mathbb{R} -árbol enraizado (T, v) , el subárbol de (T, v) determinado por c es:

$$T_c = \{x \in T \mid c \in [v, x]\}.$$

Del mismo modo sea

$$T_c^i = T_c \setminus \{c\} = \{x \in T \mid c \in [v, x] \wedge x \neq c\}.$$

Lema 2.1.15. Si (T, v) es un \mathbb{R} -árbol enraizado geodésicamente completo, T_c el subárbol inducido por un punto c y $x \in (T, v)$ tal que $x \notin T_c$ entonces $\forall y \in T_c \quad d(x, y) = d(x, c) + d(c, y)$.

Demostración. Basta ver que $c \in [x, y]$. El lema 2.1.7 implica que existe $z \in (T, v)$ tal que $[v, x] \cap [v, y] = [v, z]$ y partimos de que $x \notin T_c$, esto es, $c \notin [v, x]$, y en particular $c \notin [v, z]$ y $c \in [z, y]$. Es claro que $[x, y] = [x, z] \cup [z, y]$ y por tanto $c \in [x, y]$. \square

Lema 2.1.16. Sea (T, v) un \mathbb{R} -árbol enraizado geodésicamente completo, T_c el subárbol inducido por c y $x \in (T, v)$ tal que $x \notin T_c$ entonces $d(x, T_c) = d(x, c)$.

Demostración. Es consecuencia inmediata de 2.1.15. \square

Observación 2.1.17. Sea c un punto cualquiera del \mathbb{R} -árbol enraizado geodésicamente completo (T, v) , entonces T_c es cerrado.

Demostración. Sea $x \notin T_c$ y $\varepsilon = d(x, T_c) = d(x, c) > 0$. Por 2.1.15, $B(x, \varepsilon) \cap T_c = \emptyset$. Por lo tanto $T \setminus T_c$ es abierto. \square

Observación 2.1.18. Sea c un punto cualquiera en un \mathbb{R} -árbol enraizado geodésicamente completo (T, v) , entonces T_c^i es abierto.

Demostración. Sea $x \in T_c^i$ ($c \in [v, x]$ y $x \neq c$) y $\varepsilon = d(x, c) > 0$. Entonces $B(x, \varepsilon) \subset T_c^i$ y por tanto T_c^i es abierto. \square

Lema 2.1.19. *Si $f : [0, \infty) \rightarrow (T, v)$ es una inmersión isométrica tal que $f(0) = v$, entonces $\forall t_0 \in [0, \infty) \quad f[t_0, \infty) \subset T_{f(t_0)}$.*

Demostración. Claramente $\forall t > t_0$, $f(t_0)$ debe estar en $[v, f(t)]$. Por tanto $f(t) \in T_{f(t_0)}$. \square

Observación 2.1.20. *Sea $c \in (T, v)$ un \mathbb{R} -árbol enraizado geodésicamente completo, entonces T_c es a su vez un \mathbb{R} -árbol enraizado geodésicamente completo.*

Demostración. T_c es un espacio métrico con la métrica de T restringida. Es claro que todo punto de T_c está conectado con c por un arco, luego cualquier par de puntos de T_c estarán conectados por un arco, que es obviamente único ya que T_c es un subespacio de (T, v) que es conexo por arcos de forma única.

Tomamos c como raíz de T_c .

Sea $f : [0, t_0] \rightarrow T_c$ cualquier inmersión isométrica tal que $f(0) = c$. Consideramos la única inmersión isométrica $f' : [0, t_0 + \|c\|] \rightarrow T$ tal que $f'(0) = v$, $f'(\|c\|) = c$ y $f'(t + \|c\|) = f(t)$. f' extiende a f y, como T es geodésicamente completo, existe una inmersión isométrica $\tilde{f}' : [0, \infty) \rightarrow T$ tal que \tilde{f}' extiende a f' . $\tilde{f}'(\|c\|) = c$ y por lema 2.1.19 $\tilde{f}'[\|c\|, \infty) \subset T_c$. Si definimos $\tilde{f}(t) = \tilde{f}'(t + \|c\|)$ se observa que $\tilde{f} : [0, \infty) \rightarrow T_c$ es una inmersión isométrica que extiende f en T_c . \square

Definición 2.1.21. *Un conjunto de corte en un \mathbb{R} -árbol enraizado geodésicamente completo (T, v) es un subespacio C de (T, v) tal que $v \notin C$ y para toda inmersión isométrica $\alpha : [0, \infty) \rightarrow T$ con $\alpha(0) = v$ existe un único $t_0 > 0$ tal que $\alpha(t_0) \in C$.*

Ejemplo 2.1.22. $\partial B(v, r)$ con $r > 0$, es un conjunto de corte en (T, v) .

Proposición 2.1.23. *Dado un conjunto de corte C en (T, v) , las componentes conexas de $T(C) := \{x \in T \mid [v, x] \cap C \neq \emptyset\}$ (esto es, la parte de (T, v) que no está entre la raíz y el conjunto de corte) son exactamente los subárboles $\{T_c\}_{c \in C}$.*

Demostración. $T(C) = \bigcup_{c \in C} T_c$ y sabemos que T_c es siempre conexo (ya que es, de hecho, conexo por arcos). Veamos que para todo $c_0 \in C$, la componente conexa de c_0 en $T(C)$ es T_{c_0} .

Si quitamos del árbol cualquier punto $x \in (T, v)$ obtenemos dos subespacios T_x^i y $T \setminus T_x$ que son abiertos en (T, v) , como vimos en los lemas 2.1.17 y

2.1.18, y es fácil ver que T_x^i es abierto y cerrado en $T \setminus \{x\}$. (Nótese que T_x^i no tiene porqué ser conexo pero podemos señalar que T_x^i es unión de componentes conexas de un abierto y éstas son abiertas ya que (T, v) es localmente conexo).

Sea $c' \in C$ tal que $c' \neq c_0$ y $w \in (T, v)$ tal que $[v, c_0] \cap [v, c'] = [v, w]$. Consideremos $x \in [w, c_0]$ tal que $x \neq c_0$ y de la definición de conjunto de corte se sigue que $x \notin T(C)$ y $T_x^i \cap T(C)$ es un abierto-cerrado en $T(C)$ que contiene a T_{c_0} y $T_x^i \cap T_{c'} = \emptyset$. La intersección de todos los abierto-cerrados que contienen a T_{c_0} (ya sabemos que T_{c_0} es conexo), es la quasi-componente conexa de T_{c_0} que contiene a la componente conexa y no interseca a ningún otro subárbol $T_{c'}$ inducido por otro punto del conjunto de corte. Por tanto, la componente conexa de c_0 es exactamente T_{c_0} . \square

Nota 2.1.24. Si consideramos el conjunto de corte en (T, v) dado por $C := \partial B(v, r)$ con $r > 0$, entonces $T(C)$ es exactamente $T \setminus B(v, r)$.

2.2. Espacios ultramétricos

Incluimos en esta sección la definición y algunas propiedades elementales de los espacios ultramétricos. La mayoría de estas propiedades no van a ser necesarias a lo largo de este trabajo, sin embargo, pueden resultar de gran utilidad para imaginar la estructura de un espacio ultramétrico y comprender mejor su relación con la de las ramas de un árbol.

Definición 2.2.1. Si (X, d) es un espacio métrico tal que para todo $x, y, z \in X$ $d(x, y) \leq \max\{d(x, z), d(z, y)\}$, entonces d es una ultramétrica y (X, d) es un espacio ultramétrico.

Lema 2.2.2. (a) Cualquier punto de una bola es el centro de la misma.

(b) Si dos bolas se intersecan en algún punto, una de ellas está contenida en la otra.

(c) El diámetro de una bola es menor o igual que su radio.

(d) En un espacio ultramétrico, todos los triángulos son isósceles con un lado corto a lo sumo.

(e) $S_r(a) = \bigcup_{x \in S_r(a)} B_{<r}(x)$.

(f) Las esferas $S_r(a)$ ($r > 0$) son abiertas y cerradas.

Todas estas propiedades se encuentran demostradas en [56].

2.3. Teoría de la forma

2.3.1. Teoría de la forma en el sentido de Borsuk

Véase [13], [14] y [45].

Definición 2.3.1. Sean X, Y dos subespacios cerrados en el cubo de Hilbert Q . Una sucesión fundamental $(\Phi_n) : X \rightarrow Y$ es una sucesión de aplicaciones $\Phi_n : Q \rightarrow Q$, $n \in \mathbb{N}$, con la siguiente propiedad:

Todo entorno V de Y admite un entorno U de X y algún $n_V \in \mathbb{N}$ tal que

$$\Phi_n|U \simeq \Phi_m|U \text{ en } V, \quad n, m \geq n_V$$

Se define entonces una relación de equivalencia \simeq entre sucesiones fundamentales $(\Phi_n), (\Phi'_n) : X \rightarrow Y$ haciendo $(\Phi_n) \simeq (\Phi'_n)$ si y sólo si todo entorno V de Y admite un entorno U de X y un entero n_V de modo que

$$\Phi_n|U \simeq \Phi'_n|U \text{ en } V, \quad n \geq n_V$$

Esta categoría de cerrados en el cubo de Hilbert con clases de equivalencia bajo \simeq de sucesiones fundamentales es la categoría *shape* de Borsuk.

Aplicaciones aproximativas

Definición 2.3.2. Una aplicación aproximativa de un compacto métrico X a un espacio Y subespacio de un $N \in AR(\mathcal{M})$ es una sucesión de aplicaciones $f_k : X \rightarrow N$ con la siguiente condición:

Existe un compacto métrico $B \subset Y$ tal que para todo entorno V de B en N la homotopía

$$f_k \simeq f_{k+1} \text{ en } V$$

es cierta para casi todo k .

Denotaremos esta aplicación aproximativa por \underline{f} .

Sea f'_1, f'_2, \dots una sucesión de aplicaciones de \bar{X} en N tal que existe un compacto $B' \subset Y$ tal que para todo entorno V' de B' (en N) la relación

$$f_k \simeq f'_k \text{ en } V'$$

se da para casi todo k . Haciendo $B'' = B \cup B'$ (donde B es el compacto de la definición de \underline{f}) se deduce que para todo entorno V'' de B'' (en N) la homotopía

$$f'_k \simeq f_k \text{ en } V''$$

se da para casi todo k . Por tanto, $\underline{f'}$ es una aplicación aproximativa.

Se dice entonces que $\underline{f'}$ es homotópica a \underline{f} . Es claro que esta relación de homotopía entre aplicaciones aproximativas es de equivalencia y por tanto las aplicaciones aproximativas de X a Y se descomponen en clases de equivalencia denotadas por $[f]$.

Cuando tratamos con compactos en el cubo de Hilbert, X, Y , es bien sabido (véase [45]) que las clases de equivalencia de aplicaciones aproximativas se corresponden con las clases de equivalencia de sucesiones fundamentales y por tanto las aplicaciones aproximativas de X a Y representan los morfismos *shape*.

2.3.2. Teoría de la forma en el sentido de Mardešić-Segal

La noción de sistema inverso que vamos a tratar a continuación, proviene de P. S. Aleksandrov y lo que él denomina *projection spectrum*, en [1],[2]. Exponemos a continuación unas nociones básicas para entender cómo se define el *shape* en estos términos siguiendo estrictamente [45].

Sea \mathcal{C} una categoría cualquiera.

Definición 2.3.3. *Un sistema inverso en \mathcal{C} consiste en un conjunto dirigido Λ , llamado conjunto de índices, un objeto $X_\lambda \in \mathcal{C}$ para cada $\lambda \in \Lambda$ y un morfismo $p_{\lambda\lambda'} : X_{\lambda'} \rightarrow X_\lambda$ para cada par $\lambda \leq \lambda'$. Además, se requiere que $p_{\lambda\lambda} = 1_{X_\lambda} : X_\lambda \rightarrow X_\lambda$ y que $\lambda \leq \lambda'$ y $\lambda' \leq \lambda''$ implique que $p_{\lambda\lambda'}p_{\lambda'\lambda''} = p_{\lambda\lambda''}$.*

Los X_λ se llamarán términos y los $p_{\lambda\lambda'}$ aplicaciones encadenadas. Un sistema inverso se denota como $\underline{X} = (X_\lambda, p_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$

Definición 2.3.4. *Un morfismo de sistemas inversos $\underline{X} = (X_\lambda, p_{\lambda\lambda'}, \Lambda) \rightarrow \underline{Y} = (Y_\mu, q_{\mu\mu'}, M)$ consiste en una función $\Phi : M \rightarrow \Lambda$ y morfismos $f_\mu : X_{\Phi(\mu)} \rightarrow Y_\mu$ en \mathcal{C} para cada $\mu \in M$, tales que cuando $\mu \leq \mu'$ entonces existe $\lambda \in \Lambda$, $\lambda \geq \Phi(\mu), \Phi(\mu')$ cumpliendo que*

$$f_\mu p_{\Phi(\mu)\lambda} = q_{\mu\mu'} f_{\mu'} p_{\Phi(\mu')\lambda},$$

es decir, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} X_{\Phi(\mu)} & \longleftarrow X_\lambda & \longrightarrow X_{\Phi(\mu')} \\ f_\mu \downarrow & & \downarrow f_{\mu'} \\ Y_\mu & \longleftarrow & Y_{\mu'} \end{array}$$

Denotaremos el morfismo como $(f_\mu, \Phi) : \underline{X} \rightarrow \underline{Y}$.

Se define una relación de equivalencia \sim entre estos morfismos del siguiente modo. Decimos que $(f_\mu, \Phi) \sim (f'_\mu, \Phi')$ si cada $\mu \in M$ admite algún $\lambda \in \Lambda$ con $\lambda \geq \Phi(\mu), \Phi'(\mu)$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} X_{\Phi(\mu)} & \longleftarrow X_\lambda & \longrightarrow X_{\Phi'(\mu)} \\ & \searrow f_\mu & \swarrow f'_\mu \\ & & Y_\mu \end{array}$$

Definición 2.3.5. Se define por tanto la categoría **pro-C** para la categoría \mathcal{C} . Los objetos de **pro-C** son los sistemas inversos $\underline{X} \in \mathcal{C}$ (sobre todos los conjuntos dirigidos Λ). Un morfismo $\underline{f} : \underline{X} \rightarrow \underline{Y}$ es una clase de equivalencia de morfismos de sistemas $(f_\mu, \Phi) : \underline{X} \rightarrow \underline{Y}$ respecto a la relación de equivalencia \sim .

Sean $\underline{X} = (X_\lambda, p_{\lambda\lambda', \Lambda})$ e $\underline{Y} = (Y_\lambda, q_{\lambda\lambda', \Lambda})$ dos sistemas inversos sobre el mismo conjunto dirigido Λ . Un morfismo de sistemas (f_λ, ϕ) es un morfismo a nivel si $\phi = id_\Lambda$ y para $\lambda \leq \lambda'$ el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} X_\lambda & \longleftarrow & X_{\lambda'} \\ f_\lambda \downarrow & & \downarrow f_{\lambda'} \\ Y_\lambda & \longleftarrow & Y_{\lambda'} \end{array}$$

Sea \mathcal{T} una categoría y \mathcal{P} una subcategoría de \mathcal{T} . (En nuestro caso, consideraremos \mathcal{T} la categoría de homotopía en espacios topológicos y \mathcal{P} la subcategoría de los espacios con el tipo de homotopía de poliedros).

Definición 2.3.6. Para un objeto X de \mathcal{T} , una \mathcal{T} -expansión de X (respecto a \mathcal{P}) es un morfismo en **pro-T** de X a un sistema inverso $\underline{X} = (X_\lambda, p_{\lambda\lambda', \Lambda})$ en \mathcal{T} , $\underline{p} : X \rightarrow \underline{X}$ (vemos X como un sistema inverso rudimentario (X)), con la propiedad universal siguiente:

Para cualquier sistema inverso $\underline{Y} = (Y_\mu, q_{\mu\mu', M})$ en la subcategoría \mathcal{P} y cualquier morfismo $\underline{h} : X \rightarrow \underline{Y}$ en **pro-T**, existe un único morfismo $\underline{f} : \underline{X} \rightarrow \underline{Y}$ en **pro-T** tal que $\underline{h} = \underline{f}\underline{p}$, esto es, el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{array}{ccc} \underline{X} & \xleftarrow{\underline{p}} & X \\ & \searrow \underline{f} & \downarrow \underline{h} \\ & & \underline{Y} \end{array}$$

Definición 2.3.7. Diremos que \underline{p} es una \mathcal{P} -expansión si, en particular, \underline{X} y \underline{f} están en **pro-P**, que es el caso que se aplica en teoría de la forma.

Nota 2.3.8. *Es inmediato ver que dos \mathcal{T} -expansiones (o \mathcal{P} -expansiones) diferentes del mismo objeto son isomorfas como sistemas inversos.*

Definición 2.3.9. *Se dice que una subcategoría \mathcal{P} es densa en la categoría \mathcal{T} si todo objeto $X \in \mathcal{T}$ admite una \mathcal{P} -expansión $\underline{p} : X \rightarrow \underline{X}$.*

Por ejemplo, la subcategoría ANR's compactos es densa en la categoría de los compactos métricos con clases de homotopía de aplicaciones continuas.

Sea \mathcal{T} una categoría y $\mathcal{P} \subset \mathcal{T}$ una subcategoría densa. Sean $\underline{p} : X \rightarrow \underline{X}$ y $\underline{p}' : X \rightarrow \underline{X}'$ \mathcal{P} -expansiones de $X \in \mathcal{T}$ y $\underline{q} : Y \rightarrow \underline{Y}$ y $\underline{q}' : Y \rightarrow \underline{Y}'$ \mathcal{P} -expansiones de $Y \in \mathcal{T}$.

Decimos que los morfismos $\underline{f} : \underline{X} \rightarrow \underline{Y}$ y $\underline{f}' : \underline{X}' \rightarrow \underline{Y}'$ son equivalentes, $\underline{f} \sim \underline{f}'$, si el siguiente diagrama en $\text{pro-}\mathcal{P}$ conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \underline{X} & \xrightarrow{\underline{i}} & \underline{X}' \\ \underline{f} \downarrow & & \downarrow \underline{f}' \\ \underline{Y} & \xrightarrow{\underline{j}} & \underline{Y}' \end{array}$$

Definición 2.3.10. *Se define entonces la categoría shape para $(\mathcal{T}, \mathcal{P})$ cuyos objetos son los de \mathcal{T} y los morfismos son clases de equivalencia respecto a \sim de morfismos en $\text{pro-}\mathcal{P}$. Por tanto, un morfismo shape $F : X \rightarrow Y$ vendrá dado por un diagrama:*

$$\begin{array}{ccc} \underline{X} & \xleftarrow{\underline{p}} & X \\ \underline{f} \downarrow & & \\ \underline{Y} & \xleftarrow{\underline{q}} & Y \end{array}$$

Mardešić y Segal, [45], demuestran que esta categoría *shape* coincide con la de Borsuk en el caso de cerrados en el cubo de Hilbert que es el que se va a considerar en esta memoria.

2.4. Espacios de longitud

Para evitar introducir una terminología que no va a ser utilizada a lo largo de esta memoria, vamos a exponer esta pequeña introducción a los espacios de longitud de forma muy restringida. Así, en lugar de hablar de estructuras de longitud, en las que deberíamos fijar un conjunto de caminos admisibles en el espacio y una medida para ellos, véase por ejemplo [16], vamos a partir de un espacio métrico y veremos cómo es la estructura de longitud inducida

por la métrica cuando tomamos por admisibles todos los caminos en él. Dicho esto, podemos limitarnos a lo siguiente, siguiendo también [15].

Definición 2.4.1. *Sea (X, d) un espacio métrico. La longitud $l(c)$ de un camino $c : [a, b] \rightarrow X$ es*

$$l(c) = \sup_{a=t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n=b} \sum_{i=0}^{n-1} d(c(t_i), c(t_{i+1})),$$

donde el supremo se toma entre todas las posibles particiones del intervalo $a = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n = b$.

Definición 2.4.2. *Sea (X, d) un espacio métrico. d es una métrica de longitud si la distancia entre cada par de puntos $x, y \in X$ es igual al ínfimo de las longitudes de los caminos que los unen. (Si no existe dicho camino entonces $d(x, y) = \infty$). Si d es una métrica de longitud, entonces (X, d) se llama espacio de longitud.*

Definición 2.4.3. *Sean $x, y \in (X, d)$ un espacio métrico. Un camino geodésico de x a y es una aplicación c de un intervalo real $[0, l] \subset \mathbb{R}$ en X tal que $c(0) = x$, $c(l) = y$ y $d(c(t), c(t')) = |t - t'| \forall t, t' \in [0, l]$. En particular, $l = d(x, y)$. La imagen de c se llama segmento geodésico de extremos x e y .*

Definición 2.4.4. *Si X es un espacio métrico tal que para todo par de puntos hay un camino geodésico que los une entonces se dice que X es convexo o geodésico.*

En general no todo espacio de longitud es geodésico. Tomemos, por ejemplo, el plano euclídeo menos el origen. En este caso no hay ningún camino que realice la distancia entre un punto x y $-x$, su simétrico respecto al origen, pero está claro que puedo considerar caminos entre ambos puntos cuya longitud se aproxime a esta distancia tanto como quiera.

El siguiente teorema fue probado, de forma independiente, por R. H. Bing y E. Moise, en [7] y [48] respectivamente.

Teorema 2.4.5. *(Bing y Moise 1949) Todo continuo de Peano (X, τ) admite una métrica d tal que $(X, \tau) \cong (X, d)$ y (X, d) es un espacio de longitud.*

Damos a continuación una versión levemente debilitada y para espacios de longitud del teorema de Hopf-Rinow [30] o [16].

Proposición 2.4.6. *(Teorema de Hopf-Rinow) Sea X un espacio de longitud. Si X es completo y localmente compacto, entonces:*

(1) todo cerrado y acotado en X es compacto;

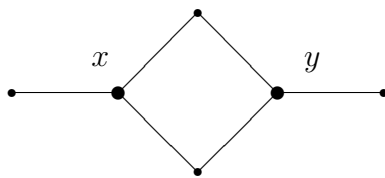
(2) X es un espacio geodésico.

Observación 2.4.7. En el capítulo 6 trabajaremos con espacios geodésicos compactos, así pues, es interesante notar que mediante los dos resultados anteriores podemos considerar en cualquier continuo de Peano (espacio métrico compacto, conexo y localmente conexo) una métrica para la cual es un espacio convexo o geodésico (y con la misma topología, por supuesto).

Ejemplo 2.4.8. Un \mathbb{R} -árbol con la métrica definida en la sección 1 es un espacio geodésico.

Nótese que la existencia de un camino geodésico no significa que éste deba ser único:

Ejemplo 2.4.9. Consideremos el siguiente grafo con la métrica natural.



Evidentemente, hay dos caminos geodésicos distintos (de longitud 2 suponiendo cada arista de longitud 1) entre x e y .

2.5. Geometría *coarse*

Los conceptos básicos de geometría *coarse* están tomados de [57].

Definición 2.5.1. Una estructura *coarse* en un conjunto X es una colección \mathcal{E} de subconjuntos de $X \times X$ llamados conjuntos controlados para la estructura *coarse*, que contiene a la diagonal y es cerrado bajo la formación de subconjuntos, inversas, productos y uniones finitas. Un conjunto dotado de una estructura *coarse* se llama espacio *coarse*.

Ejemplo 2.5.2. Sea (X, d) un espacio métrico y sea \mathcal{E} la colección de todos los subconjuntos $E \subset X \times X$ tales que el supremo

$$\sup\{d(x, x') \mid (x, x') \in E\}$$

es finito. Esta estructura *coarse* se llama estructura *coarse* acotada asociada a la métrica.

Definición 2.5.3. *Sea X un espacio coarse y S un conjunto cualquiera. Dos aplicaciones $f, f' : S \rightarrow X$ son cercanas si y sólo si el conjunto $\{(f(s), f'(s)) : s \in S\} \subset X \times X$ es controlado.*

En el caso de que X posea una estructura coarse métrica dos aplicaciones son cercanas cuando existe una constante K tal que $d(f(s), f'(s)) < K \forall s \in S$.

Definición 2.5.4. *Un subespacio B de un espacio coarse X se dice acotado si $B \times B$ es un conjunto controlado.*

Si X tiene la estructura coarse métrica entonces un conjunto es acotado si es acotado en el sentido métrico.

Definición 2.5.5. *Sean X, Y dos espacios coarse, y sea $f : X \rightarrow Y$ una aplicación:*

- (a) *La aplicación f es propia si la imagen inversa de cada subespacio acotado de Y es un acotado en X .*
- (b) *La aplicación f es bornóloga si para cada conjunto controlado $E \subset X \times X$, el conjunto $(f \times f)(E)$ es un conjunto controlado de $Y \times Y$.*
- (c) *La aplicación f es coarse si es propia y bornóloga.*
- (d) *Los espacios X e Y son coarse equivalentes si existen aplicaciones coarse $f : X \rightarrow Y$ y $g : Y \rightarrow X$ tales que $f \circ g$ y $g \circ f$ son cercanas a la identidad en Y y en X respectivamente.*

Así, si X, Y poseen una estructura coarse métrica entonces una aplicación $f : X \rightarrow Y$ es bornóloga si y sólo si para toda constante $R > 0$ existe una constante $S > 0$ tal que si $d(x, x') < R$ entonces $d(f(x), f(x')) < S$. Asimismo, X, Y son coarse equivalentes si existen aplicaciones coarse $f : X \rightarrow Y$ y $g : Y \rightarrow X$ y una constante $K > 0$ de modo que para todo $x \in X$ y para todo $y \in Y$, $d(f \circ g(y), y) < K$ y $d(g \circ f(x), x) < K$. En particular, cuando la estructura coarse sea la métrica, llamaremos métricamente propia a la aplicación tal que la preimagen de cualquier acotado es acotada para evitar confusiones con otras nociones habituales de aplicaciones *propias* como podría ser que toda preimagen de un compacto es compacta o precompacta.

Observación 2.5.6. *Nótese que la aplicación f no tiene por qué ser continua.*

Ejemplo 2.5.7. *Si $X = Y = \mathbb{N}$, la aplicación $n \mapsto 12n + 7$ es coarse, mientras que la aplicación $n \mapsto 1$ no lo es por no ser métricamente propia y la aplicación $n \mapsto n^2$ no lo es por no ser bornóloga.*

Definición 2.5.8. *Dados X, Y espacios métricos, la aplicación $f : X \rightarrow Y$ es una quasi-isometría si existen constantes $K \geq 1$ y $C \geq 0$ tales que $\forall x, y \in X$, $\frac{1}{K}d(x, y) - C \leq d(f(x), f(y)) \leq Kd(x, y) + C$ y todo punto de Y está a una distancia menor o igual que C de algún punto de $f(X)$. Si existe una quasi-isometría de X en Y también existe una de Y en X y se dice que X e Y son quasi-isométricos.*

Una quasi-isometría tampoco tiene que ser continua. Por ejemplo cualquier aplicación entre compactos métricos es una quasi-isometría.

En particular, cuando trabajamos con espacios de longitud las nociones de equivalencia *coarse* y quasi-isometría coinciden, ver [57]. Así pues, se cumple que:

Proposición 2.5.9. *Dos espacios de longitud X, Y son coarse equivalentes (con la estructura coarse acotada) si y sólo si son quasi-isométricos.*

2.6. Sistemas dinámicos

Para las siguientes cuestiones básicas seguimos el libro de Bhatia Szegö, [6].

Definición 2.6.1. *Un sistema dinámico en un espacio X es una terna (X, \mathbb{R}, π) donde π es una aplicación del producto $X \times \mathbb{R}$ en X que cumple los siguientes axiomas:*

$$(i) \quad \pi(x, 0) = x \quad \forall x \in X$$

$$(ii) \quad \pi(\pi(x, t), s) = \pi(x, t + s) \text{ para todo } x \in X \text{ y } t, s \in \mathbb{R}.$$

$$(iii) \quad \pi \text{ es continua.}$$

Si sobre cualquier punto hacemos actuar t y luego $-t$ es inmediato comprobar que el punto obtenido es el inicial. De esto se sigue con facilidad el siguiente resultado.

Proposición 2.6.2. *Para cada $t \in \mathbb{R}$, la aplicación $\pi_t : X \rightarrow X$ definida por $\pi_t(x) = \pi(x, t)$ es un homeomorfismo de X en sí mismo.*

Definición 2.6.3. $\Lambda^+(x) := \{y \in X \mid \text{existe una sucesión } \{t_n\} \text{ en } \mathbb{R} \text{ con } t_n \rightarrow +\infty \text{ y } xt_n \rightarrow y\}$.

Definición 2.6.4. $A(M) := \{x \in X \mid \Lambda^+(x) \neq \emptyset \text{ y } \Lambda^+(x) \cap M \neq \emptyset\}$.

Definición 2.6.5. *Un conjunto M es positivamente invariante si para todo $x \in M$ y para todo $t > 0$, $\pi(x, t) \in M$.*

Definición 2.6.6. Un conjunto M se dice que es estable si todo entorno U de M contiene un entorno positivamente invariante V de M .

Definición 2.6.7. Un conjunto M es un atractor si $A(M)$ es un entorno de M .

Definición 2.6.8. Un conjunto M se dice que es asintóticamente estable si es estable y es un atractor.

Funciones de Liapunov

Teorema 2.6.9. Un compacto $M \subset X$ es asintóticamente estable si y sólo si existe una función continua evaluada en \mathbb{R} , Φ , definida en un entorno N de M tal que:

(i) $\Phi(x) = 0$ si $x \in M$;

(ii) $\Phi(x, t) < \Phi(x)$ para $x \notin M$, $t > 0$ y $x[0, t] \subset N$.

Definición 2.6.10. Esta función Φ es una función de Liapunov en N para π .

Sistemas semidinámicos

Denotaremos como \mathbb{R}^+ la semirrecta real positiva junto con el 0.

Definición 2.6.11. Un sistema semidinámico en un espacio X es una terna (X, \mathbb{R}^+, π) donde π es una aplicación del producto $X \times \mathbb{R}^+$ en X que cumple los siguientes axiomas:

(i) $\pi(x, 0) = x \quad \forall x \in X$

(ii) $\pi(\pi(x, t), s) = \pi(x, t + s)$ para todo $x \in X$ y $t, s \in \mathbb{R}^+$.

(iii) π es continua.

Nota 2.6.12. Dado que la acción de \mathbb{R}^+ no es reversible como en el caso del sistema dinámico el comportamiento de las trayectorias en el semiflujo es sustancialmente diferente; sin embargo, las definiciones vistas aquí para el flujo, que se refieren a propiedades cuando $t \rightarrow +\infty$, funcionan también para sistemas semidinámicos. Así, al contrario de lo visto en 2.6.2 ocurre que para cada $t \in \mathbb{R}^+$, la aplicación $\pi_t : X \rightarrow X$ definida por $\pi_t(x) = \pi(x, t)$ no tiene porqué ser un homeomorfismo.

Ejemplo 2.6.13. Basta tomar $X = [0, 1]$ y $\pi(x, t) = \min\{x + t, 1\}$. Claramente es un sistema semidinámico pero para $t \geq 1$, $\pi(x, t) = 1 \quad \forall x \in X$. De hecho, 1 va a ser un conjunto asintóticamente estable para este semiflujo.

Parte I

Árboles y sus finales

Capítulo 3

\mathbb{R} -árboles y espacios ultramétricos

3.1. Introducción

En este capítulo se demuestran varias equivalencias de categorías entre \mathbb{R} -árboles y espacios ultramétricos.

Es bien conocida la relación entre \mathbb{R} -árboles y espacios ultramétricos que aparecen como sus espacios de finales. Siguiendo los trabajos de Hughes, donde esto se lleva a una equivalencia de categorías, tratamos de hacer lo propio a partir de otra categoría de espacios ultramétricos. Nuestro interés se centra en relacionar la categoría de los espacios ultramétricos con diámetro menor o igual que 1 y aplicaciones uniformemente continuas entre ellos, con alguna categoría de \mathbb{R} -árboles.

Aquí, en primer lugar probamos que las aplicaciones métricamente propias continuas y enraizadas inducen aplicaciones uniformemente continuas entre los finales. Definimos una relación de equivalencia entre dichas aplicaciones donde dos de ellas están relacionadas, precisamente, cuando inducen la misma aplicación entre los finales y expresamos esta relación en términos de su homotopía métricamente propia. Se define así, por tanto, la categoría \mathcal{T} , de \mathbb{R} -árboles enraizados geodésicamente completos con clases de homotopía métricamente propia de aplicaciones métricamente propias enraizadas y continuas.

A continuación se construyen los funtores y se demuestra la equivalencia de categorías entre \mathcal{T} y \mathcal{U} : espacios ultramétricos completos de diámetro ≤ 1 con aplicaciones uniformemente continuas.

3.2. Aplicaciones métricamente propias entre los árboles

Los siguientes conceptos están extraídos de [57] y [58].

Definición 3.2.1. *Una aplicación f entre dos espacios métricos X , X' es métricamente propia si para todo subespacio acotado A de X' , $f^{-1}(A)$ es acotado en X .*

Definición 3.2.2. *Un aplicación f entre dos \mathbb{R} -árboles enraizados $f : (T, v) \rightarrow (T', w)$, es enraizada si $f(v) = w$.*

Para evitar la repetición constante de la expresión: "aplicación enraizada, métricamente propia y continua", definimos lo siguiente.

Definición 3.2.3. *Una aplicación entre dos \mathbb{R} -árboles enraizados es métricamente propia entre árboles si es enraizada, métricamente propia y continua.*

Nota 3.2.4. *Si $f : (T, v) \rightarrow (T', w)$ es una aplicación métricamente propia entre árboles, entonces:*

$$\forall M > 0 \quad \exists N > 0 \text{ tal que } f^{-1}(B(w, M)) \subset B(v, N).$$

Esto es equivalente a decir que $f(T \setminus B(v, N)) \subset T' \setminus B(w, M)$.

Proposición 3.2.5. *Sea $f : (T, v) \rightarrow (T', w)$ una aplicación métricamente propia entre árboles y sean $M > 0$ y $N > 0$ tal que $f^{-1}(B(w, M)) \subset B(v, N)$, entonces*

$$\forall c \in \partial B(v, N) \quad \exists! c' \in \partial B(w, M) \text{ tal que } f(T_c) \subset T'_{c'}.$$

Demostración. Sea $f : T \rightarrow T'$ una aplicación métricamente propia entre árboles, entonces $\forall M > 0 \quad \exists N > 0$ tal que $f^{-1}(B(w, M)) \subset B(v, N) \implies f(T \setminus B(v, N)) \subset T' \setminus B(w, M)$. f envía componentes conexas de $T \setminus B(v, N)$ en componentes conexas de $T' \setminus B(w, M)$.

En particular, $\forall c \in \partial B(v, N) \quad f(T_c) \subset T' \setminus B(w, M)$. Al ser la imagen continua de un conexo, estará contenido en una de las componentes conexas de $T' \setminus B(w, M)$, y éstas son, como vimos en 2.1.22 y 2.1.23, los subárboles determinados por los puntos del conjunto de corte $\partial B(w, M)$. \square

Relación de equivalencia entre aplicaciones métricamente propias entre árboles. A continuación introducimos una relación de equivalencia entre estas aplicaciones para definir los morfismos entre \mathbb{R} -árboles de la categoría \mathcal{T} . Vamos a definir esta relación de equivalencia en dos pasos, primero la describiremos en términos de aplicaciones restringidas a los complementos de bolas centradas en la raíz y posteriormente demostraremos que la relación es de hecho una equivalencia de homotopía métricamente propia. El interés de esta clase de equivalencia es que dos aplicaciones estarán en la misma clase si y sólo si inducen (como veremos) la misma aplicación entre los finales (que será uniformemente continua).

Sean $M > 0$, $N > 0$ tal que $f(T \setminus B(v, N)) \subset T' \setminus B(w, M)$ y $\forall c \in \partial B(v, N)$ sea T_c el subárbol determinado por c . Por la proposición 3.2.5, $\exists! c' \in \partial B(w, M)$ tal que $f(T_c) \subset T_{c'}$.

Esto permite definir una aplicación que envía los subárboles de $T \setminus B(v, N)$ a subárboles de $T' \setminus B(w, M)$.

Definición 3.2.6. Dado $\mathcal{T}_N := \{T_c \mid c \in \partial B(v, N)\}$, sea $f_{\mathcal{T}_N} : \mathcal{T}_N \longrightarrow \mathcal{T}'_M$ tal que $f_{\mathcal{T}_N}(T_c) = T_{c'} \Leftrightarrow f(T_c) \subset T_{c'}$.

Esta aplicación puede definirse a partir de cierto N_0 que depende de M y para todo $N > N_0$. Si $N > N_0$ entonces $\forall d \in \partial B(v, N)$ existe un único $c \in \partial B(v, N_0)$ tal que $T_d \subset T_c$ y claramente

$$f(T_d) \subset f(T_c) \subset T_{c'} \Rightarrow f_{\mathcal{T}'_M}(T_d) = T_{c'}.$$

Definición 3.2.7. Dadas $f, f' : (T, v) \rightarrow (T', w)$ dos aplicaciones métricamente propias entre árboles,

$$f \sim f' \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists N_0 > 0 \text{ tal que } \forall N > N_0 \quad f_{\mathcal{T}_N} = f'_{\mathcal{T}_N}.$$

Proposición 3.2.8. \sim define una relación de equivalencia.

Demostración. Es reflexiva y simétrica.

Transitiva: Si $f \sim f'$ y $f' \sim f''$ entonces existe N_0 tal que $\forall N > N_0 \quad f_{\mathcal{T}_N} = f'_{\mathcal{T}_N}$ y existe N_1 tal que $\forall N > N_1 \quad f'_{\mathcal{T}_N} = f''_{\mathcal{T}_N}$. Por tanto, para todo $N > \max\{N_0, N_1\}$ podemos ver que $f \sim f''$. \square

Definición 3.2.9. Si $f, g : X \rightarrow T$ son dos aplicaciones continuas de un espacio topológico X en un árbol T entonces la homotopía geodésica es una homotopía $H : X \times I \rightarrow T$ de f a g tal que si $j_x : [0, d(f(x), g(x))] \rightarrow [f(x), g(x)]$ es el camino geodésico de $f(x)$ a $g(x)$ (es decir, la inmersión

isométrica del subintervalo $[0, d(f(x), g(x))] \subset \mathbb{R}$ en T cuya imagen es el camino más corto de $f(x)$ a $g(x)$, entonces $H(x, t) = j_x(t \cdot d(f(x), g(x))) \forall t \in I \forall x \in X$.

Lema 3.2.10. Si $f, g : X \rightarrow T$ son dos aplicaciones continuas desde cualquier espacio topológico (X, \mathcal{T}) en un árbol T entonces hay una homotopía geodésica, $H : X \times I \rightarrow T$ de f a g .

Demostración. Basta probar que H tal como está definida es continua. Consideramos $(x_0, t_0) \in X \times I$. La continuidad de f y g implica que $\forall \varepsilon > 0$ existe $x_0 \in U \in \mathcal{T}$ tal que $f(U) \subset B_T(f(x_0), \frac{\varepsilon}{2})$ y $g(U) \subset B_T(g(x_0), \frac{\varepsilon}{2})$. Es inmediato ver que esto implica que $H(U, t_0) \subset B_T(H(x_0, t_0), \frac{\varepsilon}{2})$. Sea K tal que $d(f(x), g(x)) < K \quad \forall x \in U$. Entonces, $H(U, B(t_0, \frac{\varepsilon}{2K})) \subset B_T(H(x_0, t_0), \varepsilon)$ y H es continua. Claramente, $H_0 \equiv f$ y $H_1 \equiv g$. \square

Definición 3.2.11. Dadas $f, f' : (T, v) \rightarrow (T', w)$ dos aplicaciones métricamente propias entre árboles y una aplicación continua $H : T \times I \rightarrow T'$ con $H(v, t) = w \quad \forall t \in I$ y tal que $\forall M > 0, \exists N > 0$ tal que $H^{-1}(B(v, M)) \subset B(v, N) \times I$. H es una homotopía enraizada métricamente propia de f en f' si $H|_{T \times \{0\}} = f$ y $H|_{T \times \{1\}} = f'$.

Notación: $f \simeq_{Mp} f'$ si y sólo si existe una homotopía enraizada métricamente propia de f a f' .

Definición 3.2.12. Dos árboles $(T, v), (T', w)$ son métricamente propiamente homotópicos, $T \simeq_{Mp} T'$, si y sólo si existen dos aplicaciones métricamente propias entre árboles $f : T \rightarrow T'$ y $f' : T' \rightarrow T$, tales que $f \circ f' \simeq_{Mp} id_{T'}$ y $f' \circ f \simeq_{Mp} id_T$.

Proposición 3.2.13. $f \sim f' \Leftrightarrow f \simeq_{Mp} f'$.

Demostración. Supongamos $f \sim f'$. Para todo $n \in \mathbb{N}$ sea $t_n > 0$ tal que $f(T \setminus B(v, t_n)) \subset T' \setminus B(w, n)$ y $f'(T' \setminus B(w, n)) \subset T \setminus B(v, t_n)$. Sin pérdida de generalidad podemos asumir $t_{n+1} > t_n + 1$. Si $f \sim f'$ por la proposición 3.2.5 $\forall c$ en el conjunto de corte $\partial B(v, t_n)$ en T , existe un único punto c' en el conjunto de corte $\partial B(w, n)$ en T' , tal que la imagen de T_c a través de f o de f' está contenida en $T'_{c'}$.

Por 3.2.10 si consideramos la homotopía geodésica de f a f' bastaría comprobar que esta homotopía es métricamente propia. Basta ver que $\forall t_n$ y $\forall t \in [0, 1] \quad H_t(T \setminus B(v, t_n)) \subset T' \setminus B(w, n)$. Dado $x \in T \setminus B(v, t_n)$ sabemos que $f(x) \in T' \setminus B(w, n)$ y $f'(x) \in T' \setminus B(w, n)$ y también, por definición 3.2.7, $\exists! c' \in \partial B(w, n)$ tal que $f(x) \in T'_{c'}$ y $f'(x) \in T'_{c'}$. Como vimos en 2.1.20, $T'_{c'}$ es un \mathbb{R} -árbol, así pues existe un arco en este árbol de $f(x)$ a $f'(x)$ y, como

T es únicamente arco-conexo, el único arco que une estos dos puntos en T debe ser el mismo y está contenido en T'_c . Por tanto la homotopía restringida a $T \setminus B(v, t_n)$ está contenida en $T' \setminus B(w, n)$ y es métricamente propia.

Consideremos ahora $f, f' : (T, v) \rightarrow (T', w)$ y $H : T \times I \rightarrow T'$ una homotopía (enraizada) métricamente propia de f en f' . Para cualquier $M > 0$, sea $N > 0$ tal que $H_t(T \setminus B(v, N)) \subset T' \setminus B(w, M) \forall t \in I$. Para cualquier $c \in \partial B(v, N)$ y $c' \in \partial B(w, M)$ tal que $f(T_c) \subset T'_c$ es claro que $H_t(T_c) \subset T'_c \forall t \in I$ (dado que $H(T_c \times I)$ es la imagen continua de un conexo en $T' \setminus B(w, M)$), y en particular (si $t = 1$), $f'(T_c) \subset T'_c$, y por tanto $f \sim f'$. \square

3.3. Espacio de finales de un árbol

En esta sección vemos, siguiendo [33], cómo asignar a cada árbol un espacio ultramétrico.

Definición 3.3.1. *El espacio de finales de un \mathbb{R} -árbol enraizado (T, v) viene dado por:*

$$\text{end}(T, v) = \{f : [0, \infty) \rightarrow T \mid f(0) = v \text{ y } f \text{ inmersión isométrica}\}.$$

Para $f, g \in \text{end}(T, v)$, se define una distancia:

$$d_e(f, g) = \begin{cases} 0 & \text{si } f = g, \\ e^{-t_0} & \text{si } f \neq g \text{ y } t_0 = \sup\{t \geq 0 \mid f(t) = g(t)\} \end{cases}$$

Nótese que al ser T únicamente arco-conexo:

$$\{t \geq 0 \mid f(t) = g(t)\} = \begin{cases} [0, \infty) & \text{si } f = g, \\ [0, t_0] & \text{si } f \neq g. \end{cases}$$

Proposición 3.3.2. *Si (T, v) es un \mathbb{R} -árbol enraizado entonces $(\text{end}(T, v), d_e)$ es un espacio ultramétrico completo de diámetro ≤ 1 .*

Proposición 3.3.3. *Para cualquier punto $x \in (T, v)$, un \mathbb{R} -árbol enraizado geodésicamente completo, existe $F \in \text{end}(T, v)$ y $t \in [0, \infty)$ tal que $F(t) = x$ (de hecho, $t = \|x\|$).*

Demostración. $[0, d(v, x)] = [0, \|x\|] \approx {}^1[v, x]$ y por 2.1.9, se extiende a un rayo geodésico $F = \{f : [0, \infty) \rightarrow T \mid f \text{ isometría}\}$. El resultado es un rayo geodésico (un elemento del espacio de finales del árbol), F , tal que $F(\|x\|) = x$. \square

¹isometría

3.4. El árbol de un espacio ultramétrico

Definición 3.4.1. Dado U un espacio ultramétrico completo con diámetro ≤ 1 , se define:

$$T_U := \frac{U \times [0, \infty)}{\sim}$$

con $(\alpha, t) \sim (\beta, t') \Leftrightarrow t = t' \quad \text{y} \quad \alpha, \beta \in U \quad \text{tal que} \quad d(\alpha, \beta) \leq e^{-t}$.

Dados dos puntos en T_U representados por clases de equivalencia $[x, t], [y, s]$, con $(x, t), (y, s) \in U \times [0, \infty)$ se define una métrica en T_U :

$$D([x, t], [y, s]) = \begin{cases} |t - s| & \text{si } x = y, \\ t + s - 2 \min\{-\ln(d(x, y)), t, s\} & \text{si } x \neq y. \end{cases}$$

Nota 3.4.2. En lugar de definir el árbol, como se hace en [33], para cualquier espacio ultramétrico de diámetro finito, nosotros nos restringimos a espacios ultramétricos de diámetro ≤ 1 . Situando la raíz en $[(x, 0)]$ hacemos que el espacio original sea isométrico al espacio de finales del árbol inducido.

Proposición 3.4.3. D es una métrica en T_U .

Demostración. Reescribimos la demostración de [33] haciéndola ligeramente más simple.

D está bien definida. Supongamos $[x, s] = [x', s]$ i.e. $d(x, x') \leq e^{-s}$, entonces, basta demostrar que $d([x, s], [y, t]) = d([x', s], [y, t])$ para cualquier $[y, t] \in T_U$. Por 2.2.2 (e), podemos distinguir los siguientes casos.

- Caso 1. $d(x, x') < d(x, y) = d(y, x')$. Es inmediato ver aquí que la distancia es la misma.
- Caso 2. $d(x, y) \leq d(x, x') = d(x', y)$ (Si $d(x', y) \leq d(x, x') = d(x, y)$ es análogo). En este caso, $d(x, y) \leq d(x, x') = d(x', y) \leq e^{-s}$ y por tanto, $s \leq -\ln(d(x, y))$ y $s \leq -\ln(d(x', y)) \Rightarrow D([x, s], [y, t]) = |t - s| = D([x', s], [y, t])$.

D es una métrica.

- 1 . $D \geq 0$. Es claro que $s + t - \min\{s, t, -\ln(d(x, y))\} \geq |t - s| \geq 0$.
- 2 $D([x, s], [y, t]) = 0 \Leftrightarrow [x, s] = [y, t]$. Si $D([x, s], [y, t]) = 0$ entonces $t + s - 2 \min\{t, s, -\ln(d(x, y))\} = 0 \Rightarrow \min\{t, s, -\ln(d(x, y))\} = s = t$ y como $-\ln(d(x, y)) \geq s = t$ entonces $[x, s] = [y, t]$.
- 3 . Simétrica. Es obvio ya que la definición lo es.

4 . Desigualdad triangular, $D([x, s], [y, t]) \leq D([x, s], [z, u]) + D([z, u], [y, t])$.

Claramente:

$$t + s - 2 \min\{s, t, -\ln(d(x, y))\} \leq s + u - 2 \min\{s, u, -\ln(d(x, z))\} + u + t - 2 \min\{u, t, -\ln(d(z, y))\} \Leftrightarrow -\min\{s, t, -\ln(d(x, y))\} \leq u - \min\{s, u, -\ln(d(x, z))\} - \min\{u, t, -\ln(d(z, y))\}.$$

Sea $a = -\ln(d(x, z))$, $b = -\ln(d(y, z))$, $c = -\ln(d(x, y))$ y la desigualdad ultramétrica $d(x, y) \leq \max\{d(x, z), d(z, y)\}$ se convierte en $e^{-c} \leq \max\{e^{-a}, e^{-b}\}$ que es equivalente a $\min\{a, b\} \leq c$. Sin pérdida de generalidad, asumimos que $a \leq b$, luego $a = \min\{a, b, c\}$.

Por tanto, tenemos que demostrar que $\min\{s, u, a\} + \min\{t, u, b\} \leq \min\{s, t, c\} + u$. Hay tres casos que considerar:

- (a). $u = \min\{s, u, a\}$. Entonces $u + \min\{t, u, b\} \leq \min\{s, t, c\} + u$ porque $u \leq a \leq c$.
- (b). $s = \min\{s, u, a\}$. Entonces $s + \min\{t, u, b\} \leq \min\{s, t\} + u$ considerando los casos $t \leq s$ y $s \leq t$.
- (c). $a = \min\{s, u, a\}$. Es claro que $a + \min\{t, u, b\} \leq \min\{s, t, c\} + u$ considerando los casos $t \leq a$ y $a \leq t$.

□

Proposición 3.4.4. (T_U, D) es un \mathbb{R} -árbol enraizado geodésicamente completo.

Demostración. Siguiendo [33] y por 2.1.6, para ver que es un \mathbb{R} -árbol se demuestra que es conexo y 0-hiperbólico en el sentido de Gromov. Resulta inmediato ver que es geodésicamente completo.

El producto de Gromov, 2.1.2, de $[x, t]$ e $[y, s]$ respecto a la raíz (representada por la clase $w = [z, 0]$ para cualquier $z \in X$) viene dada por

$$([x, t] \cdot [y, s])_w = \frac{1}{2} \{D([x, t], w) + D([y, s], w) - D([x, t], [y, s])\}$$

Como $D([x, t], w) = t$ y $D([y, s], w) = s$, esto significa que $([x, t] \cdot [y, s])_w = \min\{t, s, -\ln(d(x, y))\}$. Dado $[z, u] \in T$, por 2.1.5 basta comparar esto con $\min\{([x, t] \cdot [z, u])_w, ([z, u] \cdot [y, s])_w\} = \min\{\min\{t, u, -\ln(d(x, z))\}, \min\{u, s, -\ln(d(z, y))\}\} = \min\{t, u, s, -\ln(d(x, z)), -\ln(d(z, y))\}$.

Por tanto, basta comprobar que

$$-\ln(d(x, y)) \geq \min\{-\ln(d(x, z)), -\ln(d(z, y))\}$$

que resulta ser la desigualdad triangular de la ultramétrica. □

Proposición 3.4.5. $U \approx \text{end}(T_U)$.

Demostración. Consideremos una aplicación $\gamma : U \rightarrow \text{end}(T_U)$ que envía cada $\alpha \in U$ a la inmersión isométrica $f_\alpha : [0, \infty) \rightarrow T_U$ tal que $f_\alpha(t) = (\alpha, t)$ ($f_\alpha \in \text{end}(T_U)$).

Dadas $\alpha, \beta \in U$ sea $d_0 = d(\alpha, \beta)$ entonces $(\alpha, t) = (\beta, t)$ en $[0, -\ln(d_0)]$ y en el espacio de finales $d(f_\alpha, f_\beta) = e^{\ln(d_0)} = d_0$. Por tanto γ es una isometría. Es inmediato ver que es sobreyectiva por la completitud de U . \square

3.5. Construyendo los funtores

3.5.1. Aplicaciones entre árboles inducidas por aplicaciones uniformemente continuas entre los finales

El propósito en esta sección es inducir a partir de una aplicación uniformemente continua entre dos espacios ultramétricos (de diámetro ≤ 1) una aplicación apropiada entre los árboles de dichos espacios. Como hemos visto, los espacios son isométricos a los espacios de finales de los árboles respectivos, así que, para una mayor claridad, podemos tomar la aplicación uniformemente continua definida directamente sobre los finales.

Definición 3.5.1.1. Una función $\varrho : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ se llama módulo de continuidad si ϱ es no decreciente, continua en 0 y $\varrho(0) = 0$.

Lema 3.5.1.2. Sean (X_1, d_1) , (X_2, d_2) dos espacios métricos, X_2 acotado y sea $f : X_1 \rightarrow X_2$ una aplicación uniformemente continua. Entonces $\exists \varrho : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ módulo de continuidad tal que $\forall x, y \in X_1 \quad d_2(f(x), f(y)) \leq \varrho(d_1(x, y))$.

Demostración. Se define:

$$\varrho(\delta) := \sup_{x, y \in X_1, d(x, y) \leq \delta} \{d(f(x), f(y))\}. \quad (3.1)$$

Veamos que ϱ es un módulo de continuidad. ϱ está bien definida ya que X_2 es acotado, y es inmediato comprobar que es no decreciente y que $\varrho(0) = 0$. Falta asegurar la continuidad en 0. Como f es uniformemente continua, $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tal que $d(x, y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon$, por tanto $\varrho(\delta') \leq \varepsilon \forall \delta' < \delta$ y

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \varrho(\delta) = 0.$$

\square

Para definir la aplicación entre los árboles necesitaremos que este módulo de continuidad sea a su vez una función continua así que para definir el functor habrá que probar que, dada la aplicación entre los finales, existe un módulo de continuidad continuo en las mismas condiciones del lema 3.5.1.2.

Aunque el functor y la demostración de la equivalencia de categorías sólo necesitan de la existencia de esta aplicación, podemos construir explícitamente (3.1) en algunos ejemplos sencillos y siguiendo el proceso desde 3.5.1.3 a 3.5.1.5 podremos observar lo que hace λ exactamente y obtener una expresión analítica de la aplicación entre los árboles como veremos más adelante en 3.5.1.13.

Aquí seguimos la construcción de Borsuk en [8], tomando algo similar a la envolvente convexa de la imagen para obtener un módulo de continuidad continuo (y convexo).

Definición 3.5.1.3. $\forall x \in [0, \infty)$ Sea $\Gamma(x)$ el conjunto de pares ordenados (x_1, x_2) tales que $x_1, x_2 \in [0, \infty)$, $x_1 < x_2$ y $x \in [x_1, x_2]$.

Definición 3.5.1.4. Si $x \in [x_1, x_2]$ $\exists ! t \in [0, 1]$ tal que $x = tx_1 + (1-t)x_2$. Sea $\varrho_{x_1, x_2}(x) = t\varrho(x_1) + (1-t)\varrho(x_2)$

Definición 3.5.1.5.

$$\omega(x) := \sup_{x_1, x_2 \in \Gamma(x)} \varrho_{x_1, x_2}(x)$$

Proposición 3.5.1.6. $\omega(0) = 0$ y $\omega(x)$ es creciente, convexo, uniformemente continua y

$$\lim_{x \rightarrow 0} \omega(x) = 0$$

Demostración. Es claro que $\omega(0) = \varrho(0) = 0$. Es inmediato ver que es creciente dado que ϱ lo es, y convexo obviamente por construcción. La prueba de que es continuo en el 0 aparece en [8]. \square

Observación 3.5.1.7. $\omega(x) \geq \varrho(x) \quad \forall x \in [0, \infty)$.

Los espacios ultramétricos que estamos considerando tienen diámetro ≤ 1 así que podemos asumir $im(\omega) \subset [0, 1]$. Definimos $\lambda := \omega|_{[0, 1]}$ y suponemos $\lambda(1) = 1$.

No hay pérdida de generalidad ya que si $\lambda(1) < 1$ podemos encontrar otra aplicación convexa mayor o igual que ésta, con las mismas propiedades y tal que la imagen de 1 es 1. Bastaría definir $\varrho'(1) = 1$ y $\varrho'(t) = \lambda(t) \quad \forall t \in [0, 1]$. Desde esta aplicación repetimos el proceso para construir una aplicación convexa ω' como en 3.5.1.3, 3.5.1.4 y 3.5.1.5, que será mayor o igual que ϱ' con $\omega'(1) = 1$. Tomando la restricción en $[0, 1]$ obtendremos la aplicación λ' que estamos buscando.

Por tanto, a partir de una aplicación uniformemente continua f entre dos espacios ultramétricos U_1, U_2 de diámetro ≤ 1 , obtenemos una aplicación $\lambda : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ uniformemente continua, convexa y no decreciente tal que:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \lambda(\delta) = 0$$

con $\lambda(0) = 0$, $\lambda(1) = 1$ y por nota 3.5.1.7:

$$\forall x, y \in U_1 \quad d(f(x), f(y)) \leq \lambda(d(x, y)).$$

Usando esta aplicación estamos ahora en posición de inducir, a partir de una aplicación uniformemente continua f entre dos espacios ultramétricos completos de diámetro ≤ 1 , una aplicación entre los árboles inducidos. Como vimos en 3.4.5, podemos identificar estos espacios ultramétricos con los espacios de finales de los árboles y dada $f : U_1 \rightarrow U_2$ uniformemente continua, abusando de la notación, consideramos $f : \text{end}(T_{U_1}, v) \rightarrow \text{end}(T_{U_2}, w)$ tal que para cualquier $x \in U_1$, la inmersión isométrica cuya imagen es $x \times [0, \infty) (\in \text{end}(T_{U_1}, v))$ es enviada a la inmersión isométrica cuya imagen es $f(x) \times [0, \infty) (\in \text{end}(T_{U_2}, w))$, transformando f en una aplicación entre finales.

Definición 3.5.1.8. Sean $(T, v), (T', w)$ dos \mathbb{R} -árboles enraizados geodésicamente completos, y sea $f : \text{end}(T, v) \rightarrow \text{end}(T', w)$ una aplicación uniformemente continua. Definimos $\hat{f} : T \rightarrow T'$ de modo que si $x \in T$ y $F \in \text{end}(T, v)$ y $t \in [0, \infty)$ son tales que $x = F(t)$ entonces:

$$\hat{f}(x) = f(F)\left(-\ln(\lambda(e^{-t}))\right).$$

Nota 3.5.1.9. $-\ln(\lambda(e^{-t}))$ es no decreciente, pues

$$t_1 > t_0 \Rightarrow e^{-t_1} < e^{-t_0} \Rightarrow \lambda(e^{-t_1}) \leq \lambda(e^{-t_0}) \Rightarrow -\ln(\lambda(e^{-t_1})) \geq -\ln(\lambda(e^{-t_0})).$$

Más aún, si $d_0 = \min\{d > 0 \mid \lambda(d) = 1\}$, entonces λ es estrictamente creciente en $[0, d_0]$ dado que es convexa, y por tanto, es inmediato comprobar que $-\ln(\lambda(e^{-t}))$ es estrictamente creciente (en t) en $[-\ln(d_0), \infty)$. Esto implica que la aplicación restringida $\hat{f}|_{F[-\ln(d_0), \infty)}$ será inyectiva para todo $F \in \text{end}(T, v)$.

Nota 3.5.1.10. Nótese que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \lambda(\delta) = 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \left(-\ln(\lambda(e^{-t}))\right) = \infty.$$

Ahora vamos a verificar que esta aplicación está bien definida y estudiaremos sus propiedades.

Bien definida Todo punto de (T, v) tiene una única imagen.

Sea $x \in (T, v)$, y sean $F, G \in \text{end}(T, v)$ y $t_0, t_1 \in [0, \infty)$ tales que $F(t_0) = x = G(t_1)$. Ya sabemos que $t_0 = t_1$ y $F(t) = G(t) \quad \forall t \in [0, t_0] \Rightarrow d(F, G) \leq e^{-t_0}$ y por (3.1) $\Rightarrow d(f(F), f(G)) \leq \lambda(e^{-t_0})$.

Esto significa que las ramas del árbol (imagen de inmersiones isométricas del intervalo $[0, \infty)$) $f(F)$ y $f(G)$ coinciden al menos hasta la imagen de x y por tanto, la imagen de x es única.

Ahora, $d(f(F), f(G)) = e^{-\sup\{s \geq 0 / f(F)(s) = f(G)(s)\}} \leq \lambda(e^{-t_0}) \Leftrightarrow \sup\{s \geq 0 / f(F)(s) = f(G)(s)\} \geq -\ln(\lambda(e^{-t_0}))$ y entonces, en particular, $f(F)\left(-\ln(\lambda(e^{-t_0}))\right) = f(G)\left(-\ln(\lambda(e^{-t_0}))\right)$, luego la imagen por \hat{f} no depende del representante de la clase y \hat{f} está bien definida.

Proposición 3.5.1.11. *Si f es una aplicación uniformemente continua entre espacios de finales entonces \hat{f} , es **Lipschitz de constante 1** o **no expansiva**.*

Demostración. Dados $x, x' \in (T, v)$, veamos que $d(\hat{f}(x), \hat{f}(x')) \leq d(x, x')$:

Caso I. Si los puntos están en la misma rama del árbol.

Entonces, existe $F \in \text{end}(T, v)$ tal que $x = F(t_0)$ y $x' = F(t_1)$ con $t_1 > t_0$ y por tanto $d(x, x') = t_1 - t_0$.

Las imágenes son $f(F)\left(-\ln(\lambda(e^{-t_0}))\right)$ y $f(F)\left(-\ln(\lambda(e^{-t_1}))\right)$ y está claro que

$$d(\hat{f}(x), \hat{f}(x')) = \left| -\ln(\lambda(e^{-t_0})) - \left(-\ln(\lambda(e^{-t_1}))\right) \right|.$$

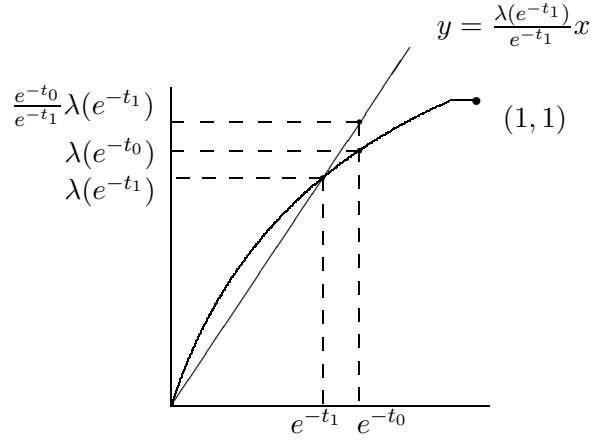
Podemos eliminar el valor absoluto, ya que $\lambda : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ es no decreciente: $t_1 > t_0 \Rightarrow e^{-t_1} < e^{-t_0} \Rightarrow \lambda(e^{-t_1}) \leq \lambda(e^{-t_0}) \Rightarrow \ln(\lambda(e^{-t_1})) \leq \ln(\lambda(e^{-t_0}))$. Por tanto,

$$d(\hat{f}(x), \hat{f}(x')) = \ln(\lambda(e^{-t_0})) - \ln(\lambda(e^{-t_1})). \quad (3.2)$$

La convexidad de λ nos permite relacionar esta distancia con $t_1 - t_0$. La idea es que si tenemos dos puntos en la recta $y = Kx$ ($y_1 = Kx_1$, $y_2 = Kx_2$), la diferencia entre los logaritmos depende únicamente de la proporción entre x_1 y x_2 ya que $\ln(Kx_1) - \ln(Kx_2) = \ln\left(\frac{Kx_1}{Kx_2}\right) = \ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right)$ y en nuestro caso, esta proporción entre dos puntos en la imagen de λ se puede acotar usando la recta que une el $(0, 0)$ con el primero de los puntos al ser λ convexa.

Como $\lambda : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ es convexa y $e^{-t_1} < e^{-t_0}$, tenemos que $\lambda(e^{-t_0}) \leq \frac{e^{-t_0}}{e^{-t_1}} \lambda(e^{-t_1}) \Rightarrow$ al ser el logaritmo una función creciente, sustituyendo en (3.2),

$$d(\hat{f}(x), \hat{f}(x')) \leq \ln\left(\frac{e^{-t_0}}{e^{-t_1}} \lambda(e^{-t_1})\right) - \ln(\lambda(e^{-t_1})) = \ln(e^{t_1-t_0}) = t_1 - t_0 = d(x, x').$$

Figura 3.1: La función λ es convexa.

Caso II. Supongamos que x, x' no están en la misma rama. Entonces existen $F, G \in \text{end}(T, v)$ y $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$ tales que $x = F(t_0)$, $x' = G(t_1)$ y sea $t_2 = \sup\{s \mid F(s) = G(s)\}$. En este caso $t_2 \leq t_0, t_1$ (si no fuera así x y x' estarían en una misma rama) y $d(x, x') = t_0 - t_2 + t_1 - t_2 = d(x, y) + d(y, x')$ con $y = F(t_2) = G(t_2)$.

Sin embargo, $\hat{f}(F(t_2)) = \hat{f}(y) = \hat{f}(G(t_2))$ y por caso I, $d(\hat{f}(x), \hat{f}(x')) \leq d(\hat{f}(x), \hat{f}(y)) + d(\hat{f}(y), \hat{f}(x')) \leq d(x, y) + d(y, x') = d(x, x')$. \square

Nota 3.5.1. Siendo Lipschitz, la aplicación inducida \hat{f} es (uniformemente) continua.

Métricamente propia entre árboles

Proposición 3.5.1.12. Si f es una aplicación uniformemente continua entre los finales entonces \hat{f} es métricamente propia entre árboles.

Demostración. Ya hemos probado la continuidad.

Enraizada. Hemos asumido $\lambda(1) = 1$ y la imagen de la raíz será la imagen de $F(0)$ para cualquier $F \in \text{end}(T, v)$, por tanto

$$\hat{f}(v) = \hat{f}(F(0)) = f(F)\left(-\ln(\lambda(e^0))\right) = f(F)(0) = w.$$

Métricamente propia. Tenemos que demostrar que $\forall M > 0 \exists N > 0$ tal que $\hat{f}^{-1}(B(w, M)) \subset B(v, N)$.

(Esto es equivalente a decir que la imagen inversa de un conjunto acotado es acotada).

$\hat{f}^{-1}(B(w, M)) = \{x \in T \mid -\ln(\lambda(e^{-\|x\|})) < M\}$. Por nota 3.5.1.9, sabemos que $-\ln(\lambda(e^{-t}))$ es no decreciente y por nota 3.5.1.10 está claro que $\exists N > 0$ tal que $\forall t \geq N \quad -\ln(\lambda(e^{-t})) > M$, y por tanto, $\hat{f}^{-1}(B(w, M)) \subset B(v, N)$. \square

Ejemplo 3.5.1.13.

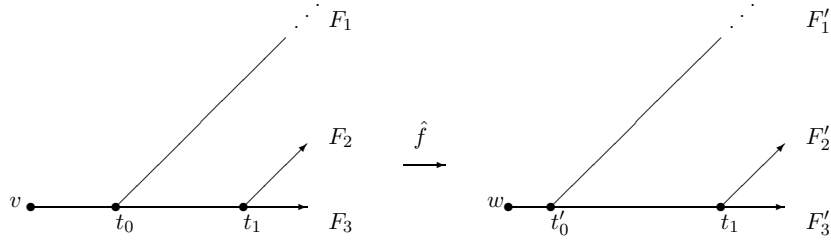


Figura 3.2: $\hat{f} : (T, v) \rightarrow (T', w)$ inducido por una aplicación f entre los finales.

Sea $f : \text{end}(T, v) \rightarrow \text{end}(T', w)$ tal que $f(F_i) = F'_i$ para $i = 1, 2$ o 3 como muestra la figura, con $t'_0 < t_0$. Un módulo de continuidad puede definirse como en el lema 3.5.1.2

$$\varrho(\delta) := \begin{cases} 0 & \text{si } \delta < e^{-t_1}, \\ e^{-t_1} & \text{si } e^{-t_1} \leq \delta < e^{-t_0}, \\ e^{-t'_0} & \text{si } e^{-t_0} \leq \delta < 1, \\ 1 & \text{si } 1 \leq \delta. \end{cases}$$

Ahora, si construimos ω como en 3.5.1.5, obtenemos

$$\omega(\delta) := \begin{cases} \frac{e^{-t'_0}}{e^{-t_0}} \cdot \delta & \text{si } \delta < e^{-t_0}, \\ \varrho_{e^{-t_0}, 1}(\delta) & \text{si } e^{-t_0} \leq \delta < 1, \\ 1 & \text{si } 1 \leq \delta. \end{cases}$$

Haciendo $\lambda := \omega|_{[0,1]}$

Podemos comprobar que \hat{f} es Lipschitz de constante ≤ 1 desde $F_i[0, t_0]$ a $F'_i[0, t'_0]$ y una isometría entre $F_i[t_0, \infty)$ y $F'_i[t'_0, \infty)$ para $i = 1, 2$ o 3 con $\hat{f}(F_i(t_0)) = F'_i(t'_0)$ y $\hat{f}(F_j(t_1)) = F'_j(t_1 - t_0 + t'_0) \in F'_j(t'_0, t_1)$ para $j = 2, 3$. Así, f es no expansiva.

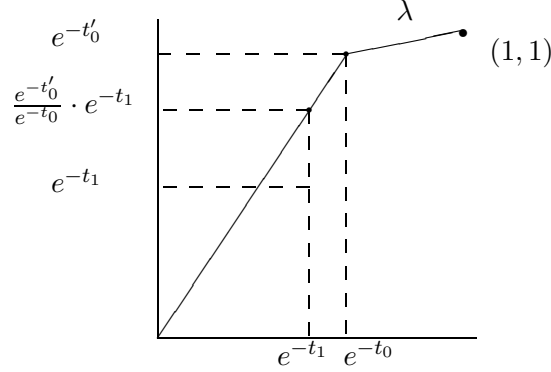


Figura 3.3: λ puede definirse de este modo.

Algunas observaciones Recordemos estas definiciones vistas en el capítulo 2 y extraídas de [57].

Definición 3.5.1.14. *Dados X_1, X_2 dos espacios métricos, una aplicación $f : X_1 \rightarrow X_2$ es bornóloga si para todo $R > 0$ existe $S > 0$ tal que para todo par de puntos $x, x' \in X_1$ con $d(x, x') < R$, $d(f(x), f(x')) < S$.*

Definición 3.5.1.15. *La aplicación es coarse si es métricamente propia y bornóloga.*

Nota 3.5.1.16. *La aplicación \hat{f} inducida entre los árboles, a partir de la aplicación uniformemente continua entre los finales, es coarse.*

Demostración. Ya hemos visto que es métricamente propia. Además, al ser Lipschitz de constante 1, $\forall S > 0 \exists R > 0$ tal que $d(x, x') < S \Rightarrow d(\hat{f}(x), \hat{f}(x')) < R$, haciendo simplemente $R = S$. \square

Definición 3.5.1.17. *Una aplicación es propia si la imagen inversa de cualquier compacto es compacta.*

Estudiamos si \hat{f} es también propia pero no lo es.

Ejemplo 3.5.1.18. *Sea U un espacio ultramétrico consistente en una familia numerable, no finita, de puntos $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ con $d(x_i, x_j) = d_1 \forall i \neq j$ y un punto más, $\{y\}$, con $d(y, x_i) = d_0 \forall i$ y supongamos $d_0 > d_1$. Sea U' la misma familia de puntos $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ con distancia d_1 entre ellos y un punto más, $\{y'\}$, con $d(y', x_i) = d'_0$ y $d'_0 > d_0$. Ambos espacios son uniformemente discretos y la aplicación f que envía y a y' , y x_i a x'_i es uniformemente continua. Ahora podemos encontrar un compacto K en T_U tal que su imagen inversa por $\hat{f} : T_U \rightarrow T_{U'}$ es no compacta.*

Consideramos $t_0 = -\ln(d_0)$, $t'_0 = -\ln(d'_0)$ y $t_1 = -\ln(d_1)$. Los árboles inducidos son,

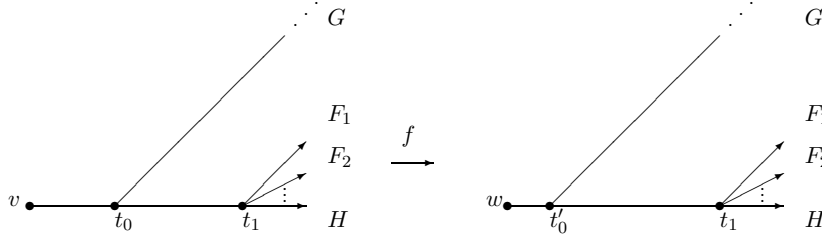


Figura 3.4: Una aplicación métricamente propia entre árboles que no es propia.

Para $K = \bar{B}(w, t_1)$, que es obviamente compacto, podemos ver que $\hat{f}^{-1}(K)$ no es compacto.

La imagen por \hat{f} del arco $[v, x_i(t_0)] \approx [0, t_0]$ será $[w, x'_i(t'_0)] \approx [0, t'_0]$ (con $t'_0 < t_0$). Por convexidad de λ , $\forall t > t_0$ $e^{-t} < e^{-t_0} \Rightarrow \lambda(e^{-t}) \geq \frac{e^{-t}}{e^{-t_0}} \lambda(e^{-t_0}) \Rightarrow -\ln(\lambda(e^{-t})) \leq -\ln(e^{t_0-t} \cdot \lambda(e^{-t_0})) = t - t_0 + t'_0$. Sea $\varepsilon = t_0 - t'_0 > 0$ entonces $\hat{f}(B(v, t)) \subset B(w, t - \varepsilon) \Rightarrow$ en particular $B(v, t_1 + \varepsilon) \subset \hat{f}^{-1}(B(w, t_1))$, y así, la imagen inversa por \hat{f} de K es una bola cerrada de radio mayor que t_1 , y como T_U no es localmente compacto en t_1 , esta bola no es compacta.

3.5.2. Aplicación uniformemente continua entre los finales inducida por una aplicación métricamente propia entre los árboles

Proposición 3.5.2.1. *Dados (T, v) y (T', w) dos \mathbb{R} -árboles enraizados geodésicamente completos, y f una aplicación métricamente propia entre árboles se cumple que: $\forall F \in \text{end}(T, v) \exists! G \in \text{end}(T', w)$ tal que $G[0, \infty) \subset \text{im}(f(F[0, \infty)))$. De este modo, f induce una aplicación entre los espacios de finales.*

Demostración. Existencia. Sea $F \in \text{end}(T, v)$. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists t_n > 0$ tal que $f^{-1}(B(w, n)) \subset B(v, t_n)$. Por proposición 3.2.5 $\exists! c'_n \in \partial B(w, n)$ tal que $f(T_{F(t_n)}) \subset T'_{c'_n}$.

Definimos $G : [0, \infty) \rightarrow T'$ tal que $G|_{[0, n]} \equiv [w, c'_n] \forall n \in \mathbb{N}$. Es claro que esta G está bien definida, $G \in \text{end}(T', w)$ y $G[0, \infty) \subset \text{im}(f(F[0, \infty)))$.

Unicidad: Sea $H \in \text{end}(T', w)$ $H \neq G$ con $d(H, G) = d_0 > 0$ y veamos que $H[0, \infty)$ no puede estar contenida en la imagen de $F[0, \infty)$ por f .

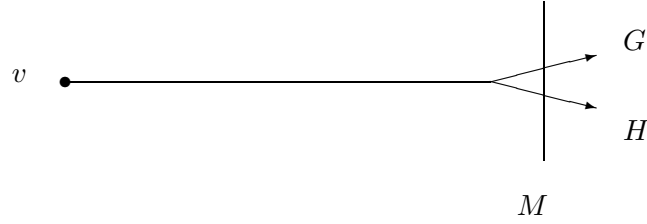


Figura 3.5: Unicidad.

Sea $M > -\ln(d_0)$. Como sabemos, $\exists N > 0$ tal que $f^{-1}(B(w, M)) \subset B(v, N)$. Por proposición 3.2.5 $\exists! c'_M \in \partial B(w, M)$ tal que $f(T_{F(N)}) \subset T'_{c'_M}$ y es claro que $c'_M = G(M)$ pero como $M > -\ln(d_0) = \sup\{s/G(s) = H(s)\} \Rightarrow H(M) \neq c'_M \Rightarrow f(F[N, \infty)) \cap H[0, \infty) = \emptyset$.

Además, (T, v) , (T', w) son espacios métricos y f es continua, luego $f(F[0, N])$ es la imagen continua de un compacto y por lo tanto es compacto y necesariamente acotado en $T' \Rightarrow H[0, \infty) \not\subset f(F[0, N])$.

Esto implica que $H[0, \infty) \not\subset f(F[0, \infty))$ y G es única. \square

Definición 3.5.2.2. Dada $f : (T, v) \rightarrow (T', w)$ una aplicación métricamente propia entre árboles, se define $\tilde{f} : \text{end}(T, v) \rightarrow \text{end}(T', w)$ con $\tilde{f}(F) = G \in \text{end}(T', w)$ tal que $G[0, \infty) \subset f(F[0, \infty))$.

Proposición 3.5.2.3. \tilde{f} es uniformemente continua.

Demostración. Sea $\varepsilon' > 0$. Consideremos $\varepsilon < \varepsilon'$. Existe $\delta > 0$ tal que $f^{-1}(B(w, -\ln\varepsilon)) \subset B(v, -\ln\delta) \Rightarrow f(T \setminus B(v, -\ln\delta)) \subset T' \setminus B(w, -\ln\varepsilon)$. Una vez más la idea de 3.2.5.

Consideramos dos ramas F y G en (T, v) (dos elementos del espacio de finales del árbol) con $d(F, G) \leq \delta$ o, lo que es lo mismo, $F(t) = G(t)$ en $[0, -\ln\delta]$. Si $c = F(-\ln\delta) = G(-\ln\delta)$, hemos visto que $f(c) \in T' \setminus B(w, -\ln\varepsilon)$, y entonces $\tilde{f}(F) \equiv \tilde{f}(G)$ al menos en $[0, -\ln\varepsilon]$ y $d(\tilde{f}(F), \tilde{f}(G)) \leq \varepsilon < \varepsilon'$ y por tanto \tilde{f} es uniformemente continua. \square

Proposición 3.5.2.4. Si $f, f' : (T, v) \rightarrow (T', w')$ son dos aplicaciones métricamente propias entre árboles, $f \sim f' \Leftrightarrow \tilde{f} = \tilde{f}'$ (esto es, si inducen la misma aplicación entre los finales).

Demostración. Supongamos $f \sim f'$ y que no inducen la misma aplicación. $\exists F \in \text{end}(T, v)$ tal que $\tilde{f}(F) = G \neq H = \tilde{f}'(F)$. Sean $M > -\ln(d(G, H)) > 0$ y $N_0 > 0$ tales que $f^{-1}(B(w, M)) \subset B(v, N_0)$ y $f'^{-1}(B(w, M)) \subset$

$B(v, N_0)$, entonces $\forall N > N_0$, para $c = F(N) \in \partial B(v, N)$ y por 3.5.2.1 $f_{\mathcal{T}_N}(T_c) = T'_{G(M)} \neq T'_{H(M)} = f'_{\mathcal{T}_N}(T_c)$, que son diferentes porque $M > -\ln(d(G, H))$, lo que contradice $(f \sim f')$.

Supongamos ahora que f y f' inducen la misma aplicación entre los finales. Como son métricamente propias $\forall M > 0 \exists N_1 > 0$ tal que $f(T \setminus B(v, N_1)) \subset T' \setminus B(w, M)$ y $\exists N_2 > 0$ tal que $f'(T \setminus B(v, N_2)) \subset T' \setminus B(w, M)$. Sea $N_0 = \max\{N_1, N_2\} \Rightarrow f(T \setminus B(v, N_0)) \subset T' \setminus B(w, M)$ $\forall N > N_0$, tenemos dos aplicaciones como vimos en 3.2.6.

$$f_{\mathcal{T}_N}, f'_{\mathcal{T}_N} : \mathcal{T}_N \longrightarrow \mathcal{T}'_M.$$

La aplicación inducida entre los finales es la misma, por tanto $\forall F \in \text{end}(T, v) \exists! G \in \text{end}(T', w)$ tal que $\tilde{f}(F) = G = \tilde{f}'(F)$. Consideremos $T_{F(N)}$ cualquiera de los subárboles en que se divide $T \setminus B(v, N)$, y es claro que la imagen de $F[N, \infty)$ ya sea a través de f o de f' debe estar contenida en $T'_{G(M)}$ ya que $G[0, \infty)$ está contenido en la imagen de $F[0, \infty)$. Así $f_{\mathcal{T}_N}(T_{F(N)}) = T'_{G(M)} = f'_{\mathcal{T}_N}(T_{F(N)}) \implies f \sim f'$. \square

En consecuencia, por 3.2.13:

Corolario 3.5.2.5. *Si $f, f' : (T, v) \rightarrow (T', w')$ son dos aplicaciones métricamente propias entre árboles, entonces $f \simeq_{Mp} f' \Leftrightarrow \tilde{f} = \tilde{f}'$*

Además, por 3.5.1.11:

Corolario 3.5.2.6. *En cualquier clase de equivalencia de aplicaciones métricamente propias entre árboles hay un representante que es Lipschitz de constante 1 y tal que restringido al complemento de cierta bola abierta centrada en la raíz su restricción a las ramas es inyectiva.*

Nota 3.5.2.7. *Dada $f : (T, v) \rightarrow (T', w')$ una aplicación métricamente propia entre árboles sobreyectiva, aparece la cuestión de si la aplicación inducida entre los finales será también sobreyectiva. No lo es.*

Ejemplo 3.5.2.8.

Sea

$$f(F_n(t)) = \begin{cases} F'_0(t) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{4}], \\ F'_0(\frac{1}{4} + (4n-1)(t - \frac{1}{4})) & \text{si } t \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}], \\ F'_0(2n(1-t)) & \text{si } t \in (\frac{1}{2}, 1], \\ F'_n(t-1) & \text{si } t \in (1, \infty). \end{cases}$$

y

$$f(G(t)) = G'(t).$$

f es claramente enraizada, continua, sobreyectiva y métricamente propia pero si consideramos la aplicación inducida entre los finales encontramos que F'_0 no está contenido en la imagen de rama alguna de T .

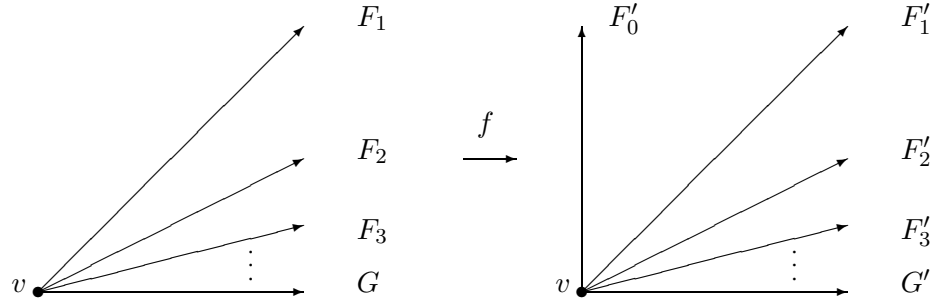


Figura 3.6: Una aplicación métrica propia entre árboles sobreyectiva que induce un aplicación entre los finales no sobreyectiva.

3.6. Equivalencia de categorías

Consideramos las categorías,

\mathcal{T} : \mathbb{R} -árboles enraizados geodésicamente completos con clases de homotopía métrica propia de aplicaciones métrica propia entre árboles.

\mathcal{U} : Espacios ultramétricos completos de diámetros ≤ 1 y aplicaciones uniformemente continuas.

Se definen los funtores,

$\xi : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{U}$ tal que $\xi(T, v) = \text{end}(T, v)$ para cualquier \mathbb{R} -árbol enraizado geodésicamente completo y $\xi([f]_{Hp}) = \tilde{f}$ para cualquier clase de homotopía métrica propia de aplicación métrica propia entre árboles.

$\eta : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{T}$ tal que $\eta(U) = T_U$ para cualquier espacio ultramétrico completo de diámetro ≤ 1 y $\eta(f) = [\hat{f}]$ para cualquier aplicación uniformemente continua.

Proposición 3.6.1. $\xi : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{U}$ es un functor.

Demostración. $\xi(\text{id}_{(T,v)}) = \text{id}_{\text{end}(T,v)}$ es obvio.

Si $[f] : (T, v) \rightarrow (S, w)$, $[g] : (S, w) \rightarrow (R, z)$ son dos clases de equivalencia de aplicaciones métrica propia entre árboles entonces

$$\xi([g] \circ [f]) = \xi([g]) \circ \xi([f]).$$

Por 3.5.2.1, las aplicaciones inducidas entre los espacios de finales son claramente las mismas. \square

Proposición 3.6.2. $\eta : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{T}$ es un functor.

Demostración. $\eta(id_U) = \eta(id_{\text{end}(T_U)}) = id_{T_U}$ es obvio.

Si $f : U_1 \rightarrow U_2$ y $g : U_2 \rightarrow U_3$ son dos aplicaciones uniformemente continuas

$$\eta(g \circ f) = \eta(g) \circ \eta(f).$$

Esto se sigue inmediatamente de 3.5.2.4 ya que las aplicaciones entre los espacios de finales son las mismas. \square

Para demostrar la equivalencia de categorías usaremos el siguiente lema que se puede encontrar junto con las definiciones en [42].

Definición 3.6.3. Un functor $S : A \rightarrow C$ entre dos categorías es completo si para cada par de objetos a, a' en A y cada morfismo $g : S(a) \rightarrow S(a')$ de C , existe un morfismo $f : a \rightarrow a'$ con $g = S(f)$.

Definición 3.6.4. Un functor $S : A \rightarrow C$ entre dos categorías es fiel si para cada par de objetos a, a' en A y cada par de morfismos $f_1, f_2 : a \rightarrow a'$ en A , la igualdad $S(f_1) = S(f_2) : S(a) \rightarrow S(a')$ implica que $f_1 = f_2$.

Lema 3.6.5. Sea $S : A \rightarrow C$ un functor entre dos categorías. S es una equivalencia de categorías si y sólo si es completo, fiel, y cada objeto $c \in C$ es isomorfo a $S(a)$ para algún objeto $a \in A$.

Teorema 3.6.6. (Teorema principal) $\xi : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{U}$ es una equivalencia de categorías.

Demostración. ξ es completo (inmediato $f = [\hat{f}] = \xi(\hat{f})$).

ξ es fiel (esto se sigue inmediatamente de la proposición 3.5.2.4).

$\forall U \in \mathcal{U} \exists T \in \mathcal{T}$ tal que $\xi(T) \approx U$. (Por 3.4.3 $\xi(T_U) \approx U$ con \approx isometría). \square

Ejemplo 3.6.7. Consideremos la siguiente aplicación $f : (T, v) \rightarrow (T', w)$ entre \mathbb{R} -árboles enraizados geodésicamente completos.

Podemos definir un homeomorfismo entre estos árboles como sigue. Sea f tal que $f[n-1, n] = [1 - \frac{1}{2^{n-1}}, 1 - \frac{1}{2^n}] \forall n \in \mathbb{N}$ con $f|_{[n-1, n]}$ una similaridad de constante $\frac{1}{2^n}$ en este arco (ver 4.3.18), y una isometría en el resto (las líneas

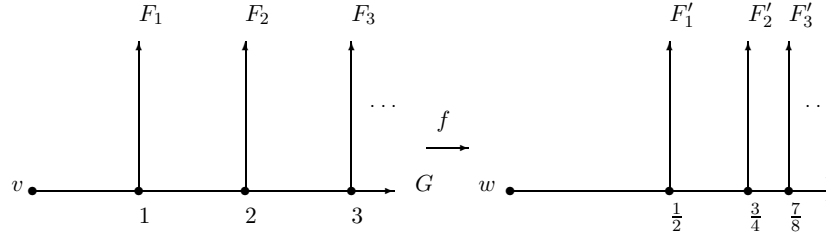


Figura 3.7: Un homeomorfismo entre árboles que no induce una aplicación entre los finales.

verticales) con $f(F_n) = F'_n \forall n \in \mathbb{N}$. Esto es obviamente un homeomorfismo pero es claramente no uniforme ya que f^{-1} no es uniformemente continua.

Como f es una aplicación no expansiva, f^{-1} es métricamente propia y por tanto induce una aplicación f^{-1} de $\widetilde{end}(T', w)$ en $end(T, v)$ que es uniformemente continua pero f no es métricamente propia (por ejemplo $f^{-1}(B(w, 1))$ no es acotado) y no induce aplicación alguna de $end(T, v)$ en $end(T', w)$ ya que $f(G)$ no es geodésicamente completo.

f es bornóloga pero no es *coarse* (al no ser métricamente propia) y f^{-1} no es bornóloga.

Ejemplo 3.6.8. Podemos definir un homeomorfismo f entre dos \mathbb{R} -árboles enraizados geodésicamente completos tal que \tilde{f} es un homeomorfismo no uniforme entre los finales.

Consideremos los árboles (T, v) y (T', w) definidos como sigue. (T, v) con $\{F_i\}_{i=1}^{\infty}$ ramas tales que $F_i \cap F_j = \{v\}$ para todo $i \neq j$, y $\forall i$ una colección de ramas $\{F_{i,k}\}_{k=1}^{\infty}$ tales que $F_{i,k} = F_i$ en $[0, k]$. (T', w) es bastante similar pero $\forall i$ las ramas $\{F'_{i,k}\}_{k=1}^{\infty}$ son tales que $F'_{i,k} = F'_i$ en $[0, \frac{k}{i}] \quad \forall k \leq i$ y $F'_{i,k} = F'_i$ en $[0, k - i] \quad \forall k > i$.

Definimos $f : (T, v) \rightarrow (T', w)$ tal que $f(F_i(t)) = F'_i(\frac{t}{i}) \quad \forall t \in [0, i]$ y $f(F_i(t)) = F'_i(t - i + 1) \quad \forall t \in [i, \infty) \quad \forall i \in \mathbb{N}$, y $f(F_{i,k}(t)) = F'_{i,k}(t - i + \frac{k}{i}) \quad \forall t \in [i, \infty), \quad \forall k \leq i$ y $f(F_{i,k}(t)) = F'_{i,k}(t - i) \quad \forall t \in [i, \infty), \quad \forall k > i$. Así, la aplicación inducida entre los finales $\tilde{f} : end(T, v) \rightarrow end(T', w)$ será $\tilde{f}(F_i) = F'_i$ y $\tilde{f}(F_{i,k}) = F'_{i,k} \quad \forall i, k \in \mathbb{N}$. Es fácil ver que \tilde{f} es un homeomorfismo pero este homeomorfismo no es uniforme. Sea $\varepsilon < e^{-1}$. Para todo $\delta > 0$ existe $N > 0$ tal que $e^{-i} < \delta \quad \forall i \geq N$. Entonces, $\forall i > N \quad d(F_i, F_{i,i}) = e^{-i} < \delta$ y $d(\tilde{f}(F_i), \tilde{f}(F_{i,i})) = d(F'_i, F'_{i,i}) = e^{-1} > \varepsilon$.

Sea $g := f^{-1}$. Es fácil ver que g es uniformemente continua y la aplicación inducida \hat{g} es tal que $\hat{g}|_{F'[0, \infty)} \rightarrow F[0, \infty)$ es una inmersión isométrica $\forall F' \in end(T', w)$.

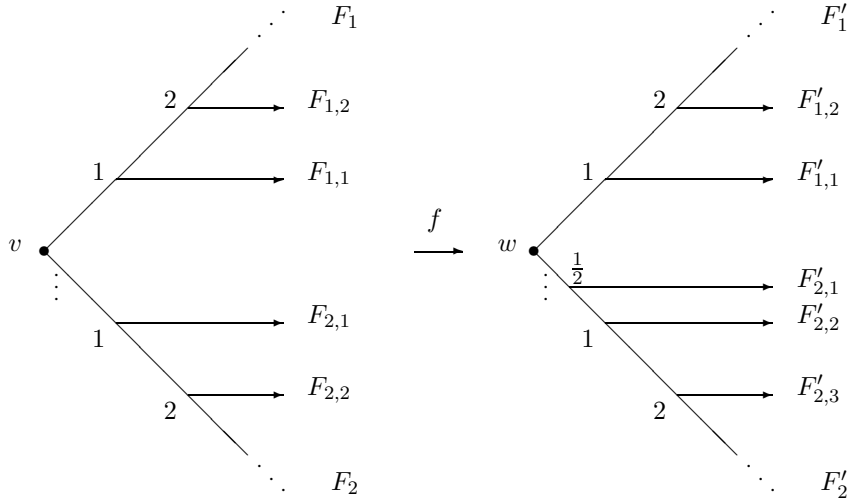


Figura 3.8: Un homeomorfismo entre los árboles que induce un homeomorfismo no uniforme entre los finales.

Sin embargo, los espacios de finales de estos árboles sí que son de hecho uniformemente homeomorfos, y en consecuencia, existen (como probamos) $f : (T, v) \rightarrow (T', w)$ y $f' : (T', w) \rightarrow (T, v)$ aplicaciones métricamente propias entre árboles tales que $f \circ f' \simeq_P id_{T'}$ y $f' \circ f \simeq_P id_T$. Éstas pueden ser $f' = \hat{g}$ y $f : (T, v) \rightarrow (T', w)$ tal que $f(F[0, 1]) = w \ \forall F \in \text{end}(T, v)$, $f(F_i(t)) = F'_i(t - 1) \ \forall t \in [1, \infty)$, $\forall i \in \mathbb{N}$, $f(F_{i,k}(t)) = F_{i,k+i-1}(t - 1) \ \forall t \in [1, \infty)$, $\forall k \geq 2$ y finalmente $f(F_{\frac{i-(i-1)}{2}+k,1}) = F'_{i,k} \ \forall k \leq i, \forall i \in \mathbb{N}$. El homeomorfismo uniforme se induce naturalmente a partir de estas aplicaciones.

3.7. Aplicaciones Lipschitz y *coarse* entre árboles

Hemos visto que para inducir aplicaciones uniformemente continuas entre los finales basta con que la aplicación entre los árboles sea continua (enraizada) y métricamente propia. Sin embargo, el functor que hemos definido transforma las aplicaciones uniformemente continuas entre espacios ultramétricos (o entre los finales de los árboles) en aplicaciones que además de ser métricamente propias entre los árboles, son Lipschitz y también, por tanto, *coarse*. Veremos a continuación, que con una relación de equivalencia similar a la anterior, podemos también definir equivalencias de categorías donde los

morfismos entre los árboles son clases de aplicaciones Lipschitz o *coarse*.

En esta sección Lipschitz se puede pensar como Lipschitz de constante 1 o no expansiva, sin embargo todo lo que se dice se mantiene cierto con la definición usual de Lipschitz.

Primero vamos a ver cómo se comporta la homotopía geodésica entre aplicaciones *coarse* o Lipschitz.

Lema 3.7.1. *Dados x_1, x_2, y_1, y_2 puntos de \mathbb{R} entonces para todo $t \in [0, 1]$,*

$$d(tx_1 + (1-t)x_2, ty_1 + (1-t)y_2) \leq \max\{d(x_1, y_1), d(x_2, y_2)\}$$

Demostración. $d(tx_1 + (1-t)x_2, ty_1 + (1-t)y_2) = |tx_1 + (1-t)x_2 - [ty_1 + (1-t)y_2]| = |t(x_1 - y_1) + (1-t)(x_2 - y_2)| \leq t \cdot |x_1 - y_1| + (1-t) \cdot |x_2 - y_2| \leq \max\{d(x_1, y_1), d(x_2, y_2)\}$. \square

Lema 3.7.2. *Sean $f, g : T \rightarrow T'$ dos aplicaciones métricamente propias entre árboles. Si consideramos $H : T \times I \rightarrow T'$ la homotopía geodésica, tal como fue definida en el lema 3.2.10, entonces para todo par de puntos $x, y \in T$,*

$$d(H_t(x), H_t(y)) \leq \max\{d(f(x), f(y)), d(g(x), g(y))\}.$$

Demostración. Supongamos $d(f(x), f(y)) < d(g(x), g(y))$. Si para algún $t \in I$ $d(H_t(x), H_t(y)) > d(g(x), g(y))$ entonces debe haber algún $t_0 > t \in I$ tal que $d(H_{t_0}(x), H_{t_0}(y)) = d(g(x), g(y))$. Podemos asumir pues $d(f(x), f(y)) = d(g(x), g(y)) = d_0$, y basta ver entonces que en este caso la condición se satisface.

Ahora, si vemos que en estas condiciones existe siempre algún $\varepsilon > 0$ tal que para cualquier $0 < t < \varepsilon$ $d(H_t(x), H_t(y)) \leq d_0$ entonces tenemos que esto ocurre para cualquier t en un abierto de I y por continuidad de la métrica, éste será también un cerrado en I y así, $d(H_t(x), H_t(y)) \leq d_0 \forall t \in I$.

Para probar el lema basta distinguir los siguientes casos.

Caso 1. Si $f(x) = g(x)$ (o $f(y) = g(y)$). Entonces existe un único arco, isométrico a cierto intervalo de \mathbb{R} que contiene los puntos y estaríamos en el caso del lema 3.7.1.

Podemos asumir pues $f(x) \neq g(x)$ y $f(y) \neq g(y)$.

Caso 2. Si $f(x) \notin [w, g(x)]$ y $f(y) \notin [w, g(y)]$. Entonces existe $\delta > 0$ tal que $\delta < d(f(x), [w, g(x)])$ y $\delta < d(f(y), [w, g(y)])$. Sea ε tal que $\varepsilon < \frac{\delta}{d(f(x), g(x))}$ y $\varepsilon < \frac{\delta}{d(f(y), g(y))}$. Entonces, para todo $0 < t < \varepsilon$ $H_t(x) \notin [w, g(x)] \Rightarrow H_t(x) \in [w, f(x)]$ y $H_t(y) \notin [w, g(y)] \Rightarrow H_t(y) \in [w, f(y)]$ y es fácil ver que para todo $0 < t < \varepsilon$, $d(H_t(x), H_t(y)) < d(f(x), f(y)) = d_0$.

Caso 3. Si $f(x) \in [w, g(x)]$ y $g(x) \in [w, f(y)]$. Sea $z \in T$ tal que $[w, g(x)] \cap [w, f(y)] = [w, z]$. Si $z = g(x)$ o $z = f(y)$ entonces existe un arco isométrico a un intervalo de \mathbb{R} que contiene los puntos y éste es de nuevo el caso del lema 3.7.1. Encontramos ahora dos situaciones diferentes.

a) $z \in [w, f(x)]$ y $z \in [w, g(y)]$ entonces hay una vez más un arco isométrico a un intervalo.

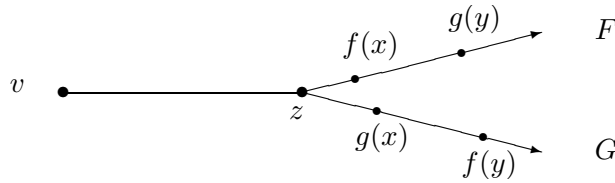


Figura 3.9: Éste es otra vez el caso del lema anterior.

b) $z \notin [w, f(x)]$ (si $z \notin [w, g(y)]$ es análogo). Nótese que ambos $z, f(x) \in [w, g(y)]$ y así, en este caso $f(x) \in [w, z]$. Sea $\delta > 0$ tal que $\delta < d(f(x), z)$ y $\delta < d(z, f(y))$. Si $\varepsilon > 0$ es tal que $\varepsilon < \frac{\delta}{d(f(x), g(x))}$ y $\varepsilon < \frac{\delta}{d(f(y), g(y))}$ entonces para todo $0 < t < \varepsilon$ $H_t(x) \in [f(x), z]$ y $H_t(y) \in [z, f(y)]$ y por tanto, $d(H_t(x), H_t(y)) < d(f(x), f(y)) = d_0$.

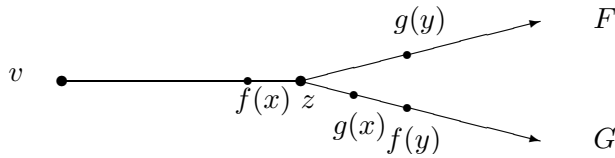


Figura 3.10: Caso 3 b)

□

Definimos $f \simeq_L f'$ si existe $H : T \times I \rightarrow T'$ una homotopía enraizada métricamente propia de f a f' tal que H_t es Lipschitz para todo $t \in I$.

Análogamente, $f \simeq_C f'$ si existe $H : T \times I \rightarrow T'$ una homotopía enraizada (métricamente propia) de f a f' tal que H_t es *coarse* para todo $t \in I$. Ser métricamente propia está implícito en la definición de *coarse*.

Las proposiciones siguientes se siguen inmediatamente del lema y la proposición 3.5.2.4.

Proposición 3.7.3. Dadas $f, f' : T \rightarrow T'$ dos aplicaciones Lipschitz y métricamente propias entre árboles, $\tilde{f} = \tilde{f}' \Leftrightarrow f \simeq_L f'$.

Corolario 3.7.4. *Hay una equivalencia de categorías entre \mathcal{U} y la categoría de \mathbb{R} -árboles enraizados geodésicamente completos con clases de homotopía Lipschitz métricamente propia de aplicaciones métricamente propias entre árboles.*

Proposición 3.7.5. *Dadas $f, f' : T \rightarrow T'$ dos aplicaciones coarse y métricamente propias entre árboles, $\tilde{f} = \tilde{f}' \Leftrightarrow f \simeq_C f'$.*

Corolario 3.7.6. *Hay una equivalencia de categorías entre \mathcal{U} y la categoría de \mathbb{R} -árboles enraizados geodésicamente completos con clases de homotopía coarse (métricamente propia) de aplicaciones coarse métricamente propias entre árboles.*

Corolario 3.7.7. *Dada $f : T \rightarrow T'$ una aplicación métricamente propia entre árboles existe una aplicación enraizada, continua, métricamente propia y no expansiva $f' : T \rightarrow T'$ tal que $f \simeq_{M_p} f'$.*

Corolario 3.7.8. *Dada $f : T \rightarrow T'$ una aplicación enraizada, continua y coarse entre dos árboles existe una aplicación enraizada, continua, métricamente propia y no expansiva $f' : T \rightarrow T'$ tal que $f \simeq_C f'$.*

3.8. Finales de Freudenthal y resultados clásicos

Este trabajo nos permite dar nuevas demostraciones de algunos resultados conocidos y verlos desde una nueva perspectiva relacionando estos espacios de finales con los clásicos finales de Freudenthal, ver [4] y [23].

Sea X un espacio localmente compacto, localmente conexo, conexo y σ -compacto (unión numerable de subespacios compactos).

Por ser σ -compacto podemos definir una sucesión creciente de subespacios compactos $\{K_n\}$ tal que $X = \cup_{n=1}^{\infty} K_n$, y por la compacidad local, podemos suponer que $K_n \subset \text{Int}(K_{n+1})$ para todo $n \geq 1$.

Para cada n se denota por $\pi(X \setminus K_n)$ el conjunto de componentes conexas de $X \setminus K_n$. Claramente, las inclusiones $K_n \subset K_{n+1}$ inducen una sucesión inversa en **Set**:

$$\pi(X) = \{*\} \leftarrow \pi(X \setminus K_1) \leftarrow \cdots \leftarrow \pi(X \setminus K_n) \leftarrow \cdots$$

Definición 3.8.1. *El conjunto de finales de Freudenthal de un espacio localmente compacto, localmente conexo, conexo y σ -compacto X , es el límite inverso*

$$\mathcal{F}(X) = \varprojlim \{\pi(X \setminus K_n) :: n \geq 1\}.$$

Nota 3.8.2. *Por supuesto, los \mathbb{R} -árboles no tienen porqué ser localmente compactos en general como vimos en los ejemplos 2.1.12 o 2.1.13.*

También extendemos en esta sección nuestro campo de estudio para incluir algunos resultados sobre árboles no enraizados o no geodésicamente completos y mostramos cómo se pueden usar o adaptar nuestras herramientas a estos objetos.

Podando el árbol Cuando tenemos un \mathbb{R} -árbol (enraizado) no geodésicamente completo y sólo estamos interesados en las ramas geodésicamente completas o en cómo se relacionan éstas con el total, podemos podar el resto como sigue. Más adelante veremos cómo la relación existente entre el árbol inicial y el podado puede expresar importantes propiedades como la de Mittag-Leffler en sucesiones inversas de conjuntos.

Teorema 3.8.3. *Si (T, v) es un \mathbb{R} -árbol enraizado entonces existe $(T_\infty, v) \subset (T, v)$ un único subárbol geodésicamente completo maximal.*

Demostración. Usamos el lema de Zorn. Consideramos (\mathcal{T}_{gc}, \leq) con \mathcal{T}_{gc} los subárboles geodésicamente completos de (T, v) que contienen a la raíz y $T_1 \leq T_2 \Leftrightarrow T_1 \subset T_2$. Ésta es una estructura ordenada.

Esta familia es no vacía ya que la raíz es un subárbol geodésicamente completo trivial.

Para probar que toda cadena de (\mathcal{T}_{gc}, \leq) admite una cota superior T_M basta ver que la unión de elementos de la cadena es también un subárbol geodésicamente completo de (T, v) . Es un subespacio del árbol donde todo punto está conectado por un arco a la raíz, por lo tanto es inmediato comprobar que es un subárbol. Dada $f : [0, t] \rightarrow T_M, t > 0$ cualquier inmersión isométrica tal que $f(0) = v$ existe un elemento T_0 en la cadena tal que $f(t) \in T_0 \Rightarrow f[0, t] \in T_0$ y f se extiende a una inmersión isométrica $\tilde{f} : [0, \infty) \rightarrow T_0 \subset T_M$, y por tanto, T_M es geodésicamente completo.

Así pues, por el lema de Zorn, (\mathcal{T}_{gc}, \leq) posee un elemento maximal.

La unión de dos elementos de (\mathcal{T}_{gc}, \leq) es también un subárbol geodésicamente completo y por tanto, el elemento maximal (T_∞, v) es único. \square

Lema 3.8.4. *Si la métrica de (T_∞, v) es propia entonces este subárbol es un retracto por deformación de (T, v) .*

Demostración. Si la métrica es propia, para cualquier punto $x \in T \setminus T_\infty$ existe un punto $y \in T_\infty$ tal que $d(x, T_\infty) = d(x, y)$ y este punto es único ya que el subárbol es únicamente arcoconexo. Sea $r : T \rightarrow T_\infty$ tal que $r(x) = y \forall x \in T \setminus T_\infty$ y la identidad en T_∞ . Entonces r es una retracción y la homotopía geodésica realiza la deformación. \square

Homotopías propias y finales de Freudenthal

Definición 3.8.5. *Dos aplicaciones propias $f, g : X \rightarrow Y$ son propiamente homotópicas $f \simeq_p g$ en el sentido usual si existe una homotopía $H : X \times I \rightarrow Y$ de f a g tal que H es propia.*

Definición 3.8.6. *X, Y son del mismo tipo de homotopía propia en el sentido usual si existen dos aplicaciones propias $f : X \rightarrow Y$ y $g : Y \rightarrow X$ tales que $g \circ f \simeq_p Id_X$ y $f \circ g \simeq_p Id_Y$.*

Notación: \simeq_P denotará propiamente homotópicos con la particularidad de que las aplicaciones propias y la homotopía serán enraizadas, y \simeq_p denotará el sentido usual de equivalencia de homotopía propia sin restricciones.

Lema 3.8.7. *Sean S_1, S_2 dos árboles simpliciales localmente finitos y dos puntos cualesquiera fijados en ellos $x_1 \in S_1, x_2 \in S_2$. Entonces $(S_1, x_1) \simeq_P (S_2, x_2)$ si y sólo si $S_1 \simeq_p S_2$.*

Demostración. La implicación hacia la derecha es clara al tratarse de un caso particular.

La otra parte es puramente técnica. Consideramos $f : S_1 \rightarrow S_2$ y $g : S_2 \rightarrow S_1$ dos aplicaciones propias y las homotopías propias H^1 de $g \circ f$ a Id_{S_1} y H_2 de $f \circ g$ a Id_{S_2} . Primero vamos a construir dos aplicaciones propias enraizadas modificando f y g . Tomamos el único arco $[x_2, f(x_1)]$ en S_2 . Para definir la aplicación propia enraizada de S_1 en S_2 enviaremos este arco mediante una homotopía propia a la raíz x_2 y después arrastraremos en cierta manera el resto del árbol.

Como $[x_2, f(x_1)]$ es compacto y el árbol es localmente finito, hay una cantidad finita de vértices o puntos de bifurcación v_1, \dots, v_n en este arco. Denotemos además, $f(x_1) = v_0$. El árbol es localmente compacto, así que consideramos $\overline{B}(v_i, \varepsilon_i)$ entornos compactos de v_i con $i = 0, \dots, n$ (podemos asumir que son disjuntos). Definimos una homotopía que envía $[x_2, f(x_1)]$ a x_2 , que para cada punto $y \in T_{v_i} \cap \partial \overline{B}(v_i, \varepsilon_i)$ con $y \notin [x_2, f(x_1)]$, transforma linealmente los arcos $[v_i, y]$ en $[x_2, y]$ y que es la identidad en el resto. Para $x \in [x_2, f(x_1)]$ sea $j_x : [0, d(x_2, x)] \rightarrow [x_2, x]$ una isometría con $j_x(0) = x$ y entonces $H(x, t) = j_x(t \cdot d(x_2, x))$. Si $x \in T_{v_i} \cap \overline{B}(v_i, \varepsilon_i)$ tal que $x \notin [x_2, f(x_1)]$, entonces para $j_x : [0, d(x_2, x)] \rightarrow [x_2, x]$ una isometría con $j_x(0) = x$ definimos $H(x, t) = j_x(t \cdot [\frac{d(v_i, x_2) + \varepsilon_i}{\varepsilon_i} (\varepsilon_i - d(x, v_i)) - (\varepsilon_i - d(x, v_i))]) = j_x(t \cdot \frac{d(v_i, x_2)}{\varepsilon_i} (\varepsilon_i - d(x, v_i)))$.

Es fácil ver que $H(v_i \times I) = [x_2, v_i]$ con $H(v_i, 0) = v_i$ y $H(v_i, 1) = x_2$, y $\forall y \in \partial \overline{B}(v_i, \varepsilon_i) \cap T_{v_i}$ $H(y, t) = y \quad \forall t$. $H(x, t) = x$ en el resto del árbol. Esta aplicación es continua. Para ver que es propia primero tomamos

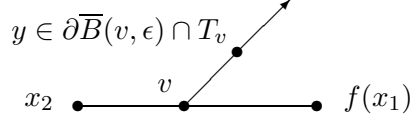


Figura 3.11: La homotopía transforma $[x_2, f(x_1)]$ en x_2 y $[v, y]$ en $[x_2, y]$.

$K_0 := [x_2, f(x_1)] \cup (\bigcup_{i=1}^n \overline{B}(v_i, \varepsilon_i))$ que es un subespacio compacto del árbol S_2 , y por tanto $K_0 \times I$ es un subespacio compacto de $S_2 \times I$. Para cualquier compacto $K \in S_2$ $H^{-1}(K)$ es un subespacio cerrado (ya que H es continua) del compacto $K_0 \cup K$. Así pues, H es propia.

Claramente $f(x) = H(x, 0)$ y sea $\tilde{f}(x) := H(x, 1)$. \tilde{f} es propia, $\tilde{f}(x_1) = x_2$ (es enraizada) y $f \simeq_P \tilde{f}$.

Hacemos lo mismo con $g : S_2 \rightarrow S_1$ y obtenemos una aplicación enraizada y propia $\tilde{g} : (S_2, x_2) \rightarrow (S_1, x_1)$ tal que $g \simeq_P \tilde{g}$.

En este punto tenemos homotopías propias H^1 de $\tilde{g} \circ \tilde{f}$ a Id_{S_1} y H^2 de $\tilde{f} \circ \tilde{g}$ a Id_{S_2} .

H^1 es tal que $H^1(x_1, 0) = x_1 = H^1(x_1, 1)$. S_1 es localmente compacto al ser localmente finito. Por tanto, consideramos $\overline{B}(x_1, \varepsilon)$ un entorno compacto de la raíz y de este modo $\overline{B}(x_1, \varepsilon) \times I$ es compacto. Ahora definimos la homotopía enraizada, que es la misma en los niveles 0 y 1 ($\tilde{H}^1(x, 0) = H^1(x, 0)$ y $\tilde{H}^1(x, 1) = H^1(x, 1) \forall x \in S_1$) y en el complemento de la bola cerrada (y compacta), (para todo $t \in (0, 1)$, $\tilde{H}^1(S_1 \setminus \overline{B}(x_1, \varepsilon), t) = H^1(S_1 \setminus \overline{B}(x_1, \varepsilon), t)$). En la bola cerrada sólo necesitamos que $\tilde{H}^1(x_1, t) = x_1 \forall t$ y $\tilde{H}^1(x, t) = H(x, t) \forall x \in \partial \overline{B}(x_1, \varepsilon)$ y $\forall t$. Podemos definir esa homotopía de modo que $\tilde{H}^1(x, t) \subset H^1(\overline{B}(x_1, \varepsilon) \times I) \forall x \in \overline{B}(x_1, \varepsilon)$ y dado que $H^1(\overline{B}(x_1, \varepsilon) \times I)$ es compacto, \tilde{H}^1 es también propia y enraizada. Hacemos lo mismo con H^2 y finalmente obtenemos que $(S_1, x_1) \simeq_P (S_2, x_2)$. \square

Ofrecemos ahora una prueba alternativa del siguiente corolario en [4].

Proposición 3.8.8. *Dos árboles simpliciales localmente finitos son propiamente homotópicos (en el sentido usual) si y sólo si sus finales de Freudenthal son homeomorfos.*

Demostración. Sean S_1, S_2 dos árboles simpliciales localmente finitos. Si fijamos $v \in S_1$ y $w \in S_2$ dos puntos cualesquiera, (S_1, v) y (S_2, w) son dos árboles enraizados y aplicando el lema 3.8.7 tenemos que $(S_1, v) \simeq_P (S_2, w)$ si y sólo si $S_1 \simeq_P S_2$.

Podemos cambiar la métrica y suponer longitud 1 para cada símplice. Obtenemos así dos copias homeomorfas de los árboles enraizados simpliciales $(S'_1, v) \cong (S_1, v)$ y $(S'_2, w) \cong (S_2, w)$ (en particular $(S'_1, v) \simeq_P (S_1, v)$ y $(S'_2, w) \simeq_P (S_2, w)$), tales que las ramas no compactas son geodésicamente completas.

Las métricas en (S'_1, v) y (S'_2, w) son propias. Basta ver que toda bola cerrada centrada en la raíz es compacta y esto se puede hacer con facilidad por inducción sobre el radio. Como los árboles son localmente finitos y la distancia entre dos vértices es al menos 1, la bola cerrada $\overline{B}(v, 1)$ (análogamente $\overline{B}(w, 1)$) es una unión finita de compactos (isométricos al subintervalo $[0, 1]$ de \mathbb{R}). Sea $\overline{B}(v, n)$ una unión finita de compactos. $\partial\overline{B}(v, n)$ está compuesto por un número finito de vértices y, como los árboles son localmente finitos y la distancia entre vértices es al menos 1, $\overline{B}(v, n+1)$ es también una unión finita de compactos. Por lo tanto, toda bola cerrada centrada en la raíz es compacta.

(S'_1, v) y (S'_2, w) son espacios de longitud propios y por el teorema de Hopf-Rinow, ver [57], (S'_1, v) y (S'_2, w) son completos y localmente compactos.

Consideremos ahora los subárboles geodésicamente completos maximales (T_1, v) y (T_2, w) de (S'_1, v) y (S'_2, w) . (Nótese que estos serán triviales, esto es, simplemente la raíz, si y sólo si (S_1, v) y (S_2, w) son compactos. Esto significará que tanto los finales de Freudenthal de S_i como los finales de los árboles T_i son el conjunto vacío). Estos árboles son localmente finitos, completos, geodésicamente completos y sus métricas son propias. Ahora podemos encontrar una equivalencia de homotopía propia entre los árboles podados T_i y S'_i . Las retracciones $r_i : (S'_i, v) \rightarrow (T_i, v)$, $i = 1, 2$, tales que $r_i(x) = y$ con $d(x, T_i) = d(x, y)$ definidas en el lema 3.8.4 son aplicaciones propias ya que después del cambio de métrica, las ramas acotadas son compactas y el árbol es localmente finito. Claramente, esta retracción junto con la inclusión nos da una equivalencia de homotopía propia y enraizada entre los árboles $(S'_1, v) \simeq_P (T_1, v)$ y $(S'_2, w) \simeq_P (T_2, w)$. Por tanto

$$(S_1, v) \simeq_P (T_1, v) \text{ y } (S_2, w) \simeq_P (T_2, w)$$

Es bien sabido (véase por ejemplo 9.20 en [4]) que en este caso, al ser S'_i árboles simpliciales localmente finitos (y por tanto continuos de Peano generalizados) $end(T_1, v) = Fr(S'_1, v) = Fr(S_1)$ y $end(T_2, w) = Fr(S'_2, w) = Fr(S_2)$ y como probamos, $end(T_1, v) \cong end(T_2, w)$ si y sólo si $(T_1, v) \simeq_{Mp} (T_2, w)$ (la uniformidad del homeomorfismos entre los finales está aquí implícita ya que al ser los árboles simpliciales y localmente finitos los espacios de finales son compactos). Si la métrica es propia $(T_1, v) \simeq_{Mp} (T_2, w) \Leftrightarrow (T_1, v) \simeq_P (T_2, w)$ y en consecuencia $Fr(S_1) \cong Fr(S_2) \Leftrightarrow (T_1, v) \simeq_P (T_2, w)$.

Así, $Fr(S_1) \cong Fr(S_2) \Leftrightarrow (S_1, v) \simeq_P (S_2, w) \Leftrightarrow S_1 \simeq_p S_2$. \square

También hay una prueba inmediata del siguiente corolario de [33].

Proposición 3.8.9. *Dos \mathbb{R} -árboles enraizados geodésicamente completos, (T, v) y (S, w) , son enraizadamente isométricos si y sólo si $end(T, v)$ y $end(S, w)$ son isométricos.*

Demostración. Si hay una isometría entre los árboles entonces la aplicación inducida entre sus espacios de finales es claramente una isometría.

Si tenemos $f : end(T, v) \rightarrow end(S, w)$ una isometría entre los espacios de finales, para inducir una aplicación entre los árboles podemos tomar como función módulo de continuidad a la identidad. Así, si $\lambda \equiv Id_{[0,1]}$ entonces $f(F)(-\ln(\lambda(e^{-t}))) = f(F)(t) \forall F \in end(T, v) \forall t \in [0, \infty)$ y la aplicación, restringida a las ramas, es una isometría. Tomemos ahora cualquier par de puntos en diferentes ramas $x = F(t), y = G(t')$ con $-\ln(d(F, G)) < t, t'$. Como los espacios de finales son isométricos, la distancia entre dos ramas es la misma que entre sus imágenes y entonces $d(\hat{f}(x), \hat{f}(y)) = t + t' - 2(-\ln(d(f(F), f(G)))) = t + t' - 2(-\ln(d(F, G))) = d(x, y)$ y \hat{f} es una isometría entre los árboles. \square

Aplicaciones no enraizadas entre los árboles Hemos visto hasta ahora resultados en los que las aplicaciones entre los árboles mantienen la restricción de que la imagen de la raíz del primer árbol es la raíz del segundo. A continuación vemos cómo podemos extender la idea del caso enraizado para definir, a partir de una aplicación continua métricamente propia y no enraizada, una aplicación entre los finales, y se analiza someramente la influencia que esta restricción puede tener sobre los resultados.

Sea $f : (T, v) \rightarrow (T', w)$ una aplicación continua métricamente propia (no enraizada) entre dos \mathbb{R} -árboles enraizados y geodésicamente completos. Entonces $\forall M > 0 \exists N > 0$ tal que $f^{-1}(B(f(v), M + d_0)) \subset B(v, N)$ con $d_0 := d(w, f(v))$ y esto es equivalente a que $f(T \setminus B(v, N)) \subset T' \setminus B(f(v), M + d_0) \subset T' \setminus B(w, M)$. Podemos ahora inducir una aplicación uniformemente continua entre los espacios de finales casi como en 3.5.2.1, ya que para cada rama $F \in (T, v)$ existe una única rama $F' \in (T', w)$ tal que $F'[d_0, \infty) \subset f(F)$ así que definimos $\tilde{f} : end(T, v) \rightarrow (T', w)$ de modo que $\tilde{f}(F) = F'$.

Los resultados ahora se debilitan enormemente. Como ejemplo de esto podemos dar la siguiente proposición en comparación con la proposición 3.8.9 del caso enraizado. Observamos aquí que un cambio de raíz en el árbol mantiene el tipo de homeomorfismo bi-Lipschitz de los finales.

Proposición 3.8.10. *Una isometría (no enraizada) $f : (T, v) \rightarrow (S, w)$ entre dos \mathbb{R} -árboles enraizados y geodésicamente completos, induce un homeomorfismo bi-Lipschitz entre $\text{end}(T, v)$ y $\text{end}(S, w)$.*

Demostración. Sea $f : (T, v) \rightarrow (S, w)$ una isometría no enraizada. Consideremos F, G dos ramas en $\text{end}(T, v)$ y sea $x \in T$ tal que $F[0, \infty) \cap G[0, \infty) = [v, x] \approx [0, -\ln(d(F, G))] \subset \mathbb{R}$. Entonces $f(F[0, \infty)) \cap f(G[0, \infty)) = [f(v), f(x)] \approx [0, -\ln(d(F, G))] \subset \mathbb{R}$ al ser f isometría. Sea $d_0 = d(w, f(v))$, luego $\tilde{f}(F) =: F'$ y $\tilde{f}(G) =: G'$ coinciden al menos en $[0, -\ln(d(F, G)) - d_0]$ y como máximo en $[0, -\ln(d(F, G)) + d_0]$ y por tanto, $e^{\ln(d(F, G)) - d_0} \leq d(F', G') \leq e^{\ln(d(F, G)) + d_0}$ esto es $e^{-d_0} \cdot d(F, G) \leq d(F', G') \leq e^{d_0} \cdot d(F, G) \Rightarrow \tilde{f}$ es bi-Lipschitz. \square

Sin embargo es claro a raíz de la demostración, que la relación entre los finales es significativamente más débil que la isometría.

Capítulo 4

Equivalencia *coarse* entre los árboles

4.1. Introducción

En el capítulo anterior hemos visto que el homeomorfismo uniforme entre los finales caracteriza la equivalencia por cierta homotopía *coarse* entre \mathbb{R} -árboles enraizados geodésicamente completos. Sin embargo observamos, ver ejemplo 4.2.3, que esta relación es estrictamente más débil que ser equivalente *coarse*, esto es, los homeomorfismos uniformes entre los finales no alcanzan a caracterizar la geometría a gran escala de los \mathbb{R} -árboles.

En este capítulo vamos a dar una condición sobre el homeomorfismo entre los finales, ser *coarse* conforme, que caracteriza cuándo existe una equivalencia *coarse* entre los árboles, o lo que es lo mismo, cuándo los árboles son quasi-isométricos. Esta propiedad se relaciona con la condición (ii) de la siguiente proposición (véase [28], 5.15) que usaremos en nuestra demostración.

Proposición 4.1.1. *Dados tres números reales $\delta \geq 0$, $\lambda \geq 1$ y $C \geq 0$, existe una constante $A = A(\delta, \lambda, C)$ con la siguiente propiedad.*

Sean X, Y dos espacios geodésicos δ -hiperbólicos y $F : X \rightarrow Y$ una (λ, C) -quasi-isometría. Sean w, x, y, z puntos de X . Entonces

$$(i) \quad \frac{1}{\lambda}(x \cdot y)_w - A \leq (F(x) \cdot F(y))_{F(w)} \leq \lambda(x \cdot y)_w + A,$$

$$(ii) \quad \frac{1}{\lambda} |(x \cdot y)_w - (x \cdot z)_w| - A \leq |(F(x) \cdot F(y))_{F(w)} - (F(x) \cdot F(z))_{F(w)}| \leq \lambda |(x \cdot y)_w - (x \cdot z)_w| + A.$$

4.2. Caracterización de la equivalencia *coarse* de \mathbb{R} -árboles geodésicamente completos

Veamos primero este ejemplo inspirado en un ejemplo natural que aparece en [57] de una aplicación continua que no es bornóloga: $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ de modo que $f(n) = n^2$. Usamos esta idea para construir un ejemplo de una aplicación métricamente propia entre árboles que induce un homeomorfismo uniforme entre los finales sin que los árboles sean *coarse* equivalentes.

Primero necesitamos un par de resultados técnicos muy útiles para este trabajo ya que una dificultad recurrente es que las aplicaciones *coarse* no tienen porqué ser continuas y mediante los dos resultados siguientes vamos a poder soslayar este problema.

Proposición 4.2.1. *Todo \mathbb{R} -árbol T es coarse equivalente a un \mathbb{R} -árbol simplicial S . En particular, existen dos aplicaciones coarse continuas $h : (T, v) \rightarrow (S, w)$ y $j : (S, w) \rightarrow (T, v)$ tales que $h \circ j$ y $j \circ h$ son coarse equivalentes a las respectivas identidades.*

Demostración. Sea T cualquier \mathbb{R} -árbol. Fijamos un punto cualquiera $v \in T$ y consideramos (T, v) el \mathbb{R} -árbol enraizado. Sea S_n el conjunto de corte de (T, v) dado por los puntos en $\partial B(v, n)$ y definimos (S, w) inductivamente. Unimos con aristas de longitud 1 primero los puntos de S_1 con un punto w y después cada $s_k \in S_k$ al único punto $s_{k-1} \in S_{k-1}$ tal que $s_{k-1} \in [v, s_k]$.

Hay una proyección obvia p de las ramas (finitas o infinitas) de (T, v) sobre las de (S, w) . Definimos $h : (T, v) \rightarrow (S, w)$ como $h(x) = w \forall x \in B(v, 1)$ y $h(F(t)) = p(F)(t - 1)$ para $t \geq 1$. Finalmente sea $j : (S, w) \rightarrow (T, v)$ tal que $j(G(t)) = p^{-1}(G)(t)$ (nótese que $j(G(t))$ no depende de la elección de $p^{-1}(G)$. $p(F) = p(G)$ si y sólo si $F(k) = G(k) \forall k \in \mathbb{N}$).

Claramente, h y j son continuas y definen una equivalencia *coarse* entre T y S . □

Podemos ofrecer a continuación el siguiente teorema de rigidez.

Teorema 4.2.2. *Para cualquier aplicación coarse $f : T \rightarrow T'$ entre \mathbb{R} -árboles existe una aplicación coarse continua $g : T \rightarrow T'$ tal que $f \sim_C g$, i.e., las aplicaciones son coarse equivalentes.*

Demostración. Fijamos una raíz v en T y sea $w = f(v)$ en T' . Empecemos considerando el subconjunto $[T] \subset T$ de puntos cuya distancia a la raíz es un número natural y la restricción $[f] = f|_{[T]} : [T] \rightarrow T'$.

Sea S un árbol simplicial *coarse* equivalente a T y $h : T \rightarrow S$ la aplicación canónica definida en 4.2.1 que es *coarse* y continua.

Se define una aplicación $\tilde{g} : S \rightarrow T'$ tal que $\forall x \in [S] \quad \tilde{g}(x) = f(j(x))$ con $j : S \rightarrow T$ como en 4.2.1. Ahora, para hacerla continua, para cada par de vértices adyacentes v_1, v_2 en $[S]$, sea $\tilde{g}([v_1, v_2])$ (la aplicación de la arista $[v_1, v_2] \in S$) el camino más corto en T' de $\tilde{g}(v_1)$ a $\tilde{g}(v_2)$. Veamos que \tilde{g} es *coarse* y continua. Podemos asumir $[S] = [T]$ y como $g|[S] = f \circ j$ y f y j son *coarse*, g es *coarse*. Claramente, tal como hemos definido la extensión, ésta sigue siendo *coarse*. Como f es bornóloga, existe $S_1 > 0$ tal que $d(x, y) \leq 1$ implica $d(f(x), f(y)) \leq S_1$ y $\forall n \in \mathbb{N} \exists M_n$ tal que $f^{-1}(B(w, n)) \subset B(v, M_n)$. Entonces, $g^{-1}(B(w, n)) \subset B(v, M_n + S_1)$ (por lo tanto métricamente propia) y $d(x, y) \leq 1$ implica $d(g(x), g(y)) \leq 2S_1$ (por lo tanto bornóloga).

Así, $g = \tilde{g} \circ i : T \rightarrow T'$ es *coarse* y continua. Falta ver que $g \sim_C f$. Para esto basta encontrar una constante $C > 0$ tal que $\forall x \in T \quad d(f(x), g(x)) \leq C$. Sea $v \in [T]$ tal que $d(x, v) < 1$. Entonces, de la definición de S_1 y g , obtenemos que $d(f(v), g(v)) \leq S_1$, y también por definición de S_1 , $d(f(x), f(v)) \leq S_1$ y $d(g(x), g(v)) \leq S_1$. Por tanto, $d(f(x), g(x)) \leq 3S_1$ y $f \sim_C g$. \square

Ejemplo 4.2.3. *Dos \mathbb{R} -árboles T, T' geodésicamente completos que no son coarse equivalentes cuyos espacios de finales son uniformemente homeomorfos.*

Sean $(T, v), (T', w)$ los siguientes \mathbb{R} -árboles enraizados geodésicamente completos:

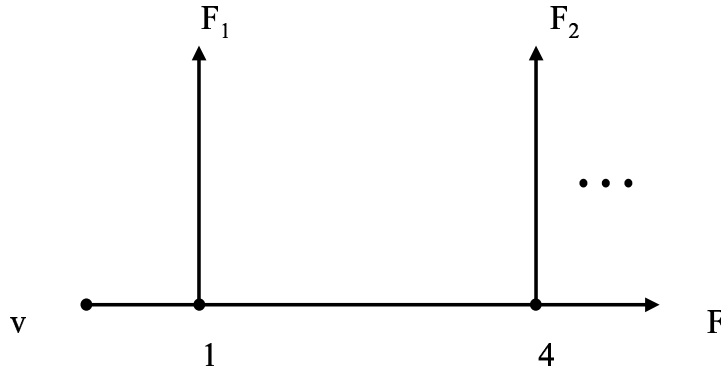


Figura 4.1: (T, v) , donde $F_0 \equiv F_n$ en $[0, n^2]$.

Como vimos en 4.2.10, si existen dos funciones que definen una equivalencia *coarse* podemos suponer sin pérdida de generalidad que dichas funciones son continuas. Sean pues $f : (T', w) \rightarrow (T, v)$ y $g : (T, v) \rightarrow (T', w)$ cualquier

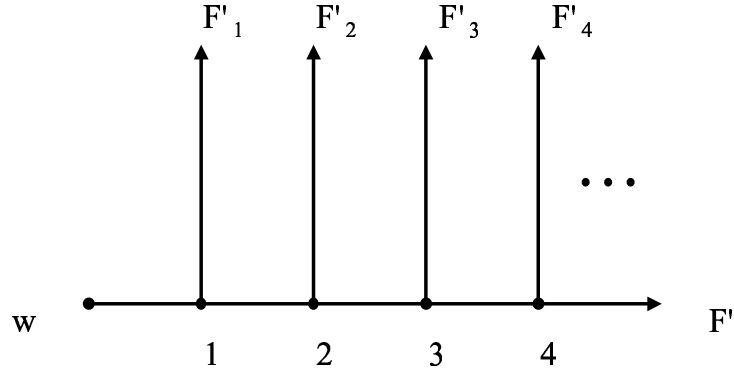


Figura 4.2: (T', w) donde $F'_0 \equiv F'_n$ en $[0, n]$.

par de funciones *coarse* enraizadas continuas que definen una equivalencia *coarse* entre T y T' .

Afirmación: Para todo entero $k > 0$, existe un punto x_k en (T, v) tal que $d(x_k, v) \geq k^2$ y $d(f(x_k), w) \leq k$.

Supongamos que $f^{-1}(B^c(w, k)) \subset B(v, k^2)$. Entonces $f(T \setminus B(v, k^2)) \subset T' \setminus (B^c(w, k))$. $T' \setminus (B^c(w, k))$ tiene $k + 1$ componentes conexas mientras que $T \setminus B(v, k^2)$ tiene exactamente k componentes. Esto significa que una de las componentes de $T' \setminus (B^c(w, k))$ no corta a la imagen de f y la equivalencia *coarse* no sería posible. Esto contradice el hecho de que $f^{-1}(B^c(w, k)) \subset B(v, k^2)$ y por tanto, existe algún $x_k \in T \setminus B(v, k^2)$ tal que $f(x_k) \subset B^c(w, k)$ como afirmamos.

Ahora, como g es bornóloga, existe una constante s_1 tal que para cada par de puntos $y_1, y_2 \in T'$ con $d(y_1, y_2) < 1$, $d(g(y_1), g(y_2)) < s_1$. Esto implica que para cualquier punto $z \in B^c(w, k)$, $g(z) \subset B(v, s_1 \cdot k)$, en particular, $g(f(x_k)) \subset B(v, s_1 \cdot k)$. Así, $d(x_k, g(f(x_k))) \geq k^2 - s_1 \cdot k$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y la distancia entre $g \circ f$ y la identidad no puede estar acotada, contradiciendo el hecho de que $g \circ f \sim_C id_T$.

Comprobar que estos árboles no son *coarse* equivalentes es trivial usando un concepto típico de teoría geométrica de grupos como es el tipo de crecimiento del árbol, que es un invariante por quasi-isometría. Hemos preferido dar aquí una demostración con herramientas básicas para evitar introducir otras que no vamos a usar en el resto del trabajo.

Es fácil ver que una equivalencia *coarse* entre los árboles induce un homeomorfismo con unas restricciones más fuertes entre los finales.

Proposición 4.2.4. *Si dos \mathbb{R} -árboles enraizados geodésicamente completos son coarse equivalentes entonces hay un homeomorfismo bi-Hölder entre sus espacios de finales.*

Demostración. Supongamos $T \sim_C T'$. Por el lema 4.2.2 existen dos aplicaciones *coarse* continuas y enraizadas $f : (T, v) \rightarrow (T', w)$ y $g : (T', w) \rightarrow (T, v)$ tales que $g \circ f \sim_C id_T$ y $f \circ g \sim_C id_{T'}$. Como vimos en reftilde, f y g inducen aplicaciones \tilde{f}, \tilde{g} entre los espacios de finales y éstas son biyecciones con $\tilde{f} = \tilde{g}^{-1}$. Veamos que son bi-Hölder.

Sea S_1 una constante tal que para todo par de puntos $x, y \in T$ con $d(x, y) \leq 1$ entonces $d(f(x), f(y)) \leq S_1$ y $\forall x', y' \in T'$ con $d(x', y') \leq 1$ entonces $d(g(x'), g(y')) \leq S_1$.

Por tanto, es claro que $f(B(v, n)) \subset B(w, nS_1)$. También, dada N_0 tal que $\forall x \in T$ $d(x, g(f(x))) \leq N_0$ y $\forall x' \in T'$ $d(x', f(g(x'))) \leq N_0$. Así, $f^{-1}(B(w, [n/S_1 - N_0/S_1])) \subset B(v, n)$ y $g^{-1}(B(v, n)) \subset B(w, nS_1 + N_0)$. Esto implica que para cualquier par de ramas $F, G \in \text{end}(T, v)$, si $d(F, G) \leq e^{-n}$ entonces $d(\tilde{f}(F), \tilde{f}(G)) \leq e^{-[n/S_1 - N_0/S_1]} \leq e^{-(n/S_1 - N_0/S_1 - 1)}$ y si tenemos que $F' = \tilde{f}(F)$, $G' = \tilde{f}(G) \in \text{end}(T', w)$ con $d(F', G') \leq e^{-(nS_1 + N_0)}$ entonces $d(\tilde{g}(F'), \tilde{g}(G')) \equiv d(F, G) \leq n$ o lo que es lo mismo, si $d(F, G) > n$ resulta que $d(\tilde{f}(F) = F', \tilde{f}(G) = G') > e^{-(nS_1 + N_0)}$. Por lo tanto, $\forall F, G \in \text{end}(T, v)$ existe algún $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$e^{-n-1} \leq d(F, G) \leq e^{-n}$$

y así,

$$e^{(-n-1)S_1 - N_0} < d(\tilde{f}(F), \tilde{f}(G)) \leq e^{-(n/S_1 - N_0/S_1 - 1)}.$$

Con esto, obtenemos que $(\frac{d(F, G)}{e})^{S_1} \cdot e^{-N_0} \leq e^{(-n-1)S_1 - N_0} < d(\tilde{f}(F), \tilde{f}(G)) \leq e^{-(n/S_1 - N_0/S_1 - 1)} \leq (e \cdot d(F, G))^{1/S_1} \cdot e^{N_0/S_1 + 1}$.

$$e^{-N_0 - S_1} \cdot d(F, G)^{S_1} < d(\tilde{f}(F), \tilde{f}(G)) \leq e^{N_0/S_1 + 1/S_1 + 1} \cdot d(F, G)^{1/S_1}$$

y \tilde{f} es bi-Hölder. □

Sin embargo esta condición tampoco es suficiente. Podemos dar ahora un ejemplo más ajustado de dos árboles que no son *coarse* equivalentes con un homeomorfismo bi-Hölder entre los espacios de finales

Ejemplo 4.2.5. *Existen $(T, v), (T', w)$ dos \mathbb{R} -árboles enraizados geodésicamente completos tales que existe $h : \text{end}(T, v) \rightarrow \text{end}(T', w)$ un homeomorfismo bi-Hölder entre los espacios de finales mientras que los árboles no son coarse equivalentes.*

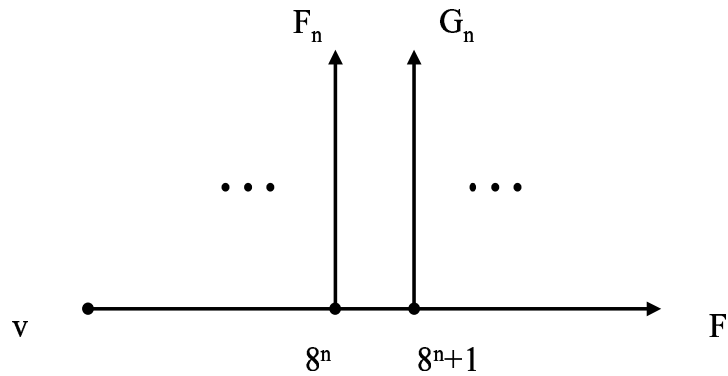


Figura 4.3: (T, v)

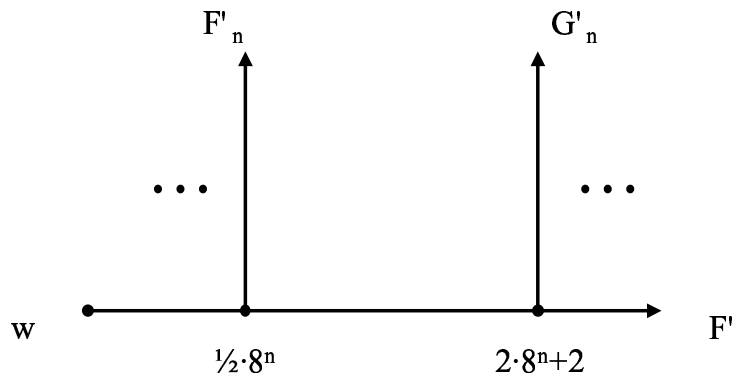


Figura 4.4: (T', w)

Si consideramos la aplicación entre los finales que envía F_i a F'_i y G_i a G'_i es inmediato comprobar que es bi-Hölder.

Se puede comprobar que no son *coarse* equivalentes mediante las técnicas conocidas (y es claro que la geometría a gran escala es diferente ya que mientras que F_i y G_i se bifurcan a la misma distancia respecto a $F_0 \forall i$, la distancia entre los puntos de bifurcación de F'_0 con las ramas F'_i y G'_i no está acotada en función de i), sin embargo, usando la propiedad que definiremos más adelante de ser *coarse* conforme resultará inmediato, así pues, evitaremos ahora esta demostración.

Condiciones sobre el homeomorfismo.

Definición 4.2.6. Sean $(X, d_X), (Y, d_Y)$ dos espacios métricos y $x_0 \in X$ un punto de acumulación de X . Sea $\{\varepsilon_j\}_{j=1}^\infty$ una sucesión de números reales positivos tendiendo a cero tal que $\{x \in X \mid d(x_0, x) = \varepsilon_j\}$ es no vacío para todo j . Sea $\Phi : X \rightarrow Y$ un homeomorfismo.

Si $A_j = \{d_Y(\Phi(x_0), \Phi(x)) \mid d(x_0, x) = \varepsilon_j\}$ para $j = 1, 2, \dots$, decimos que Φ tiene dilatación finita en el punto x_0 si $H_\phi^{d_X}(x_0) = \limsup_{j \rightarrow \infty} \frac{\sup A_j}{\inf A_j}$ es finito para toda sucesión $\{\varepsilon_j\}_{j=1}^\infty$ con las condiciones mencionadas.

Definición 4.2.7. Sea (X, d_X) un espacio métrico perfecto (sin puntos aislados). Sea (Y, d_Y) un espacio métrico y $\Phi : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ un homeomorfismo entre estos dos espacios métricos. Sea $H_\phi^{d_X}(x)$ definido como acabamos de ver.

- (1) Si $H_\phi^{d_X}(x) = 1$ para todo $x \in X$, ϕ se dice que es conforme.
- (2) Si $\sup_{x \in X} H_\phi^{d_X}(x) < \infty$, ϕ se dice que es quasi-conforme.
- (3) Si existe una constante K de modo que $\sup_{x \in X} H_\phi^{d_X}(x) \leq K$, ϕ se dice que es K -quasi-conforme.

Definimos además la propiedad siguiente que, de algún modo, es una grosera generalización de ser quasi-conforme y que será aplicable a cualquier par de espacios métricos. El interés de esta propiedad, que es estrictamente más fuerte que la anterior, radica en que es una condición que afecta a todos los puntos de ramificación, no sólo a un límite cuando las ramificaciones se aproximan al infinito.

Definición 4.2.8. Sean $(X, d_X), (Y, d_Y)$ cualquier par de espacios métricos y $\Phi : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ un homeomorfismo entre ellos. Si existe una constante K tal que $\sup_{x \in X} \sup_{\varepsilon > 0} \frac{\sup A_\varepsilon}{\inf A_\varepsilon} \leq K$, entonces ϕ es acotadamente quasi-conforme.

Necesitaremos también una condición que afecta a ramas que se bifurcan en puntos diferentes. Esta idea será esencial para describir las equivalencias *coarse* desde los finales en el caso general.

Notación: Sea $(A//B) := \max\{\frac{A}{B}, \frac{B}{A}\}$.

Definición 4.2.9. Un homeomorfismo entre espacios métricos $h : (X, d) \rightarrow (X, d')$ decimos que es *coarse conforme* si existen constantes $\lambda \geq 1$ y $K > 0$ tales que para todo $x, y, z \in X$,

$$\frac{1}{K}(d(x, y)//d(x, z))^{\frac{1}{\lambda}} \leq (d'(h(x), h(y))//d'(h(x), h(z))) \leq K(d(x, y)//d(x, z))^\lambda$$

Notación: Sea (T, v) un \mathbb{R} -árbol enraizado geodésicamente completo y $F, G \in \text{end}(T, v)$. Entonces $(F|G)_v = \max\{t \mid F(t) = G(t)\}$.

Usando esta notación, podemos expresar esta condición en unos términos similares a los que usan Ghys y de la Harpe en [28] si bien esta expresión se refiere a los puntos del espacio de finales y no del propio árbol.

Observación 4.2.10. Si (T, v) y (T', w) son dos \mathbb{R} -árboles enraizados geodésicamente completos, entonces un homeomorfismo $h : \text{end}(T, v) \rightarrow \text{end}(T', w)$ es coarse conforme si y sólo si existen constantes $\lambda \geq 1$ y $A > 0$ tales que para todo $F \in \text{end}(T, v)$

$$\frac{1}{\lambda} |(F|G)_v - (F|H)_v| - A \leq |(h(F)|h(G))_w - (h(F)|h(H))_w| \leq \lambda |(F|G)_v - (F|H)_v| + A.$$

Como $\ln(d(F, G)/d(F, H)) = |(F|G)_v - (F|H)_v|$, basta tomar $K = e^A$.

Proposición 4.2.11. Si (T, v) y (T', w) son dos \mathbb{R} -árboles enraizados geodésicamente completos, entonces un homeomorfismo $h : \text{end}(T, v) \rightarrow \text{end}(T', w)$ es acotadamente quasi-conforme si y sólo si existe alguna constante $A > 0$ tal que dadas tres ramas cualesquiera $F, G, H \in \text{end}(T, v)$ con $(F|G)_v = (F|H)_v$ entonces $|(h(F)|h(G))_w - (h(F)|h(H))_w| \leq A$.

Demostración. Basta considerar $A = \ln K$. Entonces, para F y $\varepsilon_j = e^{-(F|G)_v}$, $\frac{\sup A_j}{\inf A_j} \leq K$ si y sólo si para todo G, H con $(F|G)_v = (F|H)_v$, $|(h(F)|h(G))_w - (h(F)|h(H))_w| \leq \ln K$. \square

Proposición 4.2.12. Si un homeomorfismo $h : \text{end}(T, v) \rightarrow \text{end}(T', w)$ es coarse conforme entonces h es acotadamente quasi-conforme.

Demostración. Si aplicamos la condición para tres ramas cualesquiera $F, G, H \in \text{end}(T, v)$ con $(F|G)_v = (F|H)_v$ obtenemos que $-A \leq |(h(F)|h(G))_w - (h(F)|h(H))_w| \leq A$. \square

Corolario 4.2.13. Si un homeomorfismo $h : \text{end}(T, v) \rightarrow \text{end}(T', w)$ es coarse conforme entonces h es K -quasi-conforme y quasi-conforme.

Demostración. Obviamente, acotadamente quasi-conforme implica K -quasi-conforme y quasi-conforme. \square

Lema 4.2.14. Si un homeomorfismo $h : \text{end}(T, v) \rightarrow \text{end}(T, w)$ es (λ, A) coarse conforme entonces existe una constante A' tal que h es (λ, A') bi-Hölder.

Demostración. Sea $h : \text{end}(T, v) \rightarrow \text{end}(T, w)$ (λ, A) coarse conforme. Si $D_0 := \inf_{F, G \in \text{end}(T, v)} \{(F|G)_v\}$ existen $A, B \in \text{end}(T, v)$ tales que $(A|B)_v < D_0 + 1$. Sea $D_1 = (h(A)|h(B))_w$. Primero probaremos que existe una constante $D_2 > 0$ tal que para cualquier par de ramas C, D con $(C|D)_v < (A|B)_v$, $(h(C)|h(D))_w \leq D_2$.

Como $(C|D)_v < (A|B)_v$, o bien $D_0 \leq (C|A)_v$, $(C|B)_v < (A|B)_v$ o bien $D_0 \leq (D|A)_v$, $(D|B)_v < (A|B)_v$ así que vamos a suponer el primer caso.

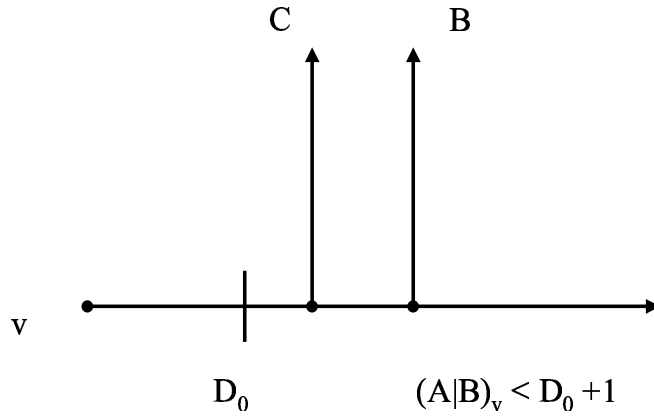


Figura 4.5: Caso $D_0 \leq (C|A)_v$, $(C|B)_v < (A|B)_v$.

También, como $(C|D)_v < (A|B)_v$, obviamente $D_0 \leq (C|A)_v$, $(D|A)_v < (A|B)_v < D_0 + 1$ (o lo que es equivalente, $D_0 \leq (C|B)_v$, $(D|B)_v < (A|B)_v < D_0 + 1$). Véase la figura 4.6.

Aplicando ahora la condición de ser coarse conforme sobre A, C, B se obtiene que $|(h(A)|h(C))_w - (h(A)|h(B))_w| \leq \lambda + A \Rightarrow D_1 - \lambda - A \leq (h(A)|h(C))_w \leq \lambda + A + D_1$. Aplicado también sobre C, D, A vemos que $|(h(C)|h(D))_w - (h(C)|h(A))_w| \leq \lambda + A \Rightarrow D_1 - 2(\lambda + A) \leq (h(C)|h(D))_w \leq 2(\lambda + A) + D_1$. Así pues, basta definir $D_2 := 2(\lambda + A) + D_1$.

El segundo paso es definir una constante A' y comprobar que para todo par de ramas $F_1, F_2 \in \text{end}(T, v)$, $\frac{1}{\lambda}(F_1|F_2)_v - A' \leq (h(F_1)|h(F_2))_w \leq \lambda(F_1|F_2)_v + A'$.

Dadas dos ramas F_1, F_2 , o $(A|B)_v > (F_1|F_2)_v$ y, como hemos visto, $(h(F_1)|h(F_2))_w \leq D_2$, o bien $(A|B)_v = D_0 = (F_1|F_2)_v$ y puede comprobarse con facilidad que $(h(F_1)|h(F_2))_w \leq D_1 + A < D_2$, o existen dos ramas C, D tales que $(C|D)_v \leq (A|B)_v$ y $(C|D)_v < (F_1|F_2)_v$. En este último caso consideramos una rama C (o D) tal que $(C|F_1)_v = (C|F_2)_v < (A|B)_v$, $(F_1|F_2)_v$ y $(h(C)|h(F_i))_w \leq D_2$ para $i = 1, 2$. Denotamos $l_0 := (F_1|F_2)_v - (C|F_i)_v$ y

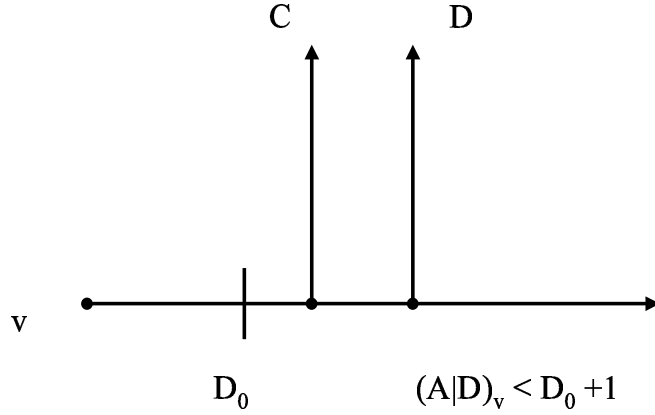


Figura 4.6: En este caso, también $D_0 \leq (D|A)_v, (D|B)_v < (A|B)_v$.

por ser *coarse* conforme aplicado a F_1 respecto a C, F_2 es claro que

$$(h(F_1)|h(F_2))_w \leq \lambda l_0 + D_2 + A \leq \lambda(F_1|F_2)_v + D_2 + A.$$

Si $l_0 \leq \lambda(D_2 + A)$ entonces $(F_1|F_2)_v \leq D_0 + 1 + \lambda(D_2 + A)$ y $\frac{1}{\lambda}(F_1|F_2)_v \leq \frac{1}{\lambda}(D_0 + 1) + D_2 + A$. Definiendo

$$A' = \frac{1}{\lambda}(D_0 + 1) + D_2 + A,$$

resulta que

$$\frac{1}{\lambda}(F_1|F_2)_v - A' \leq 0 \leq (h(F_1)|h(F_2))_w.$$

Si $l_0 > \lambda(D_2 + A)$ entonces $\frac{1}{\lambda}l_0 - A > D_2$ y como

$$|(h(F_1)|h(F_2))_w - (h(F)|h(F_1))_w| \geq \frac{1}{\lambda} |(F_1|F_2)_v - (F|F_1)_v| - A = \frac{1}{\lambda} l_0 - A > D_2$$

con $(h(F)|h(F_1))_w \leq D_2$, es claro que $(h(F_1)|h(F_2))_w \geq (h(F)|h(F_1))_w + \frac{1}{\lambda}l_0 - A \geq \frac{1}{\lambda}(F_1|F_2)_v - \frac{1}{\lambda}(D_0 + 1) - A \geq \frac{1}{\lambda}(F_1|F_2)_v - A'$.

Por lo tanto, en cualquier caso

$$\frac{1}{\lambda}(F_1|F_2)_v - A' \leq (h(F_1)|h(F_2))_w \leq \lambda(F_1|F_2)_v + A'$$

y h es (λ, A') bi-Hölder. □

Nota 4.2.15. Si h es (λ, A) coarse conforme podemos tomar una constante $A' \geq A$ de modo que h es (λ, A') coarse conforme y (λ, A') bi-Hölder, luego no hay problema al considerar iguales las constantes cuando tenemos un aplicación coarse conforme sin parámetros fijos.

Teorema 4.2.16. *Dos \mathbb{R} -árboles enraizados geodésicamente completos son coarse equivalentes si y sólo si existe un homeomorfismo coarse conforme entre sus espacios de finales.*

Demostración. Para demostrar la implicación hacia la derecha usaremos la proposición 4.1.1. Consideramos dos aplicaciones $f : T \rightarrow T'$ y $g : T' \rightarrow T$ que definen una equivalencia *coarse*, y por 4.2.2 podemos suponer que es continua. Fijamos como raíz v en T y tomamos $f(v) = w$ como raíz de T' . Como vimos en 3.8.10, si cambiamos la raíz los espacios de finales son bi-Lipschitz equivalentes, y en particular existe un homeomorfismo *coarse* conforme entre ellos, luego la elección de la raíz no es determinante. Es bien sabido, como anotamos en 2.5.9, que en espacios de longitud las equivalencias *coarse* y las quasi-isometrías son equivalentes y por tanto, como f es una quasi-isometría entre espacios geodésicos 0-hiperbólicos, estamos en las condiciones de 4.1.1.

Ahora, usaremos la condición (ii) sobre los puntos de T para probar que el homeomorfismo inducido entre los finales es *coarse* conforme.

Sean F_0, F_1, F_2 tres ramas cualesquiera de $\text{end}(T, v)$. Como f es una aplicación *coarse* continua y enraizada, induce un homeomorfismo uniforme h entre los finales. Sea $N > -\ln(d(h(F_i), h(F_j)))$ con $i, j \in \{0, 1, 2\}$, $i \neq j$ y d la ultramétrica en los finales (es decir una constante M tal que las ramas $h(F_i), h(F_j)$ se bifurcan a distancia menor que M de la raíz). Como f es métricamente propia, existe N tal que $f(T \setminus B(v, N)) \subset T' \setminus B(w, M)$ y dado que h es la aplicación inducida entre los finales (véase en particular 3.2.5), el subárbol definido por $F_i(N), T_{F_i(N)}$, se envía al subárbol definido por $h(F_i)(M), T'_{h(F_i)(M)}$ (y como hemos supuesto que las ramas $h(F_i), h(F_j)$ se bifurcan antes, estos subárboles son disjuntos). Si ahora tomamos puntos $x_i \in T_{F_i(N)}$ resulta que $(x_i \cdot x_j)_v = -\ln(d(F_i, F_j)) = (F_i|F_j)_v$, y las imágenes de estos puntos cumplen que $f(x_i) \in h(F_i)(M)$ y $(f(x_i) \cdot f(x_j))_w = -\ln(d(h(F_i), h(F_j))) = (h(F_i)|h(F_j))_w$. Por tanto, aplicando la condición (ii) de 4.1.1 sobre estos puntos x_i obtenemos que el homeomorfismo es *coarse* conforme.

Supongamos ahora que existe un homeomorfismo *coarse* conforme entre los espacios de finales. Si consideramos los árboles simpliciales (S, v) y (S', w) equivalentes *coarse* a (T, v) y (T', w) respectivamente como en 4.2.1, existe una identificación canónica de los finales $i : \text{end}(T, v) \rightarrow \text{end}(S, v)$ tal que para cada par de ramas F, G , $(F|G)_v - 1 \leq (i(F), i(G))_v \leq (F|G)_v$ y lo mismo pasa con T' y S' . Es inmediato ver entonces que existe también un homeomorfismo *coarse* conforme entre $\text{end}(S, v)$ y $\text{end}(S', w)$ y por tanto basta probar el teorema en el caso particular de árboles simpliciales (no necesariamente localmente finitos). Fijamos dos constantes $\lambda \geq 1$ y $A > 0$ (ver 4.2.14 y 4.2.15) tales que $h : \text{end}(S, v) \rightarrow \text{end}(S', w)$ es (λ, A) *coarse* conforme y

(λ, A) bi-Hölder.

Tomamos primero la raíz y los puntos de bifurcación de los árboles simpliciales: $|S| := \{v\} \cup \{x \in S \mid \exists F, G \in \text{end}(S, v) \text{ tal que } \text{im}(F) \equiv \text{im}(G) \text{ exactamente en } [v, x]\}$. Nótese que por la construcción de S para cualquier $x \in |S|$ ocurre que $d(v, x) = \|x\| \in \mathbb{N}$.

Del mismo modo definimos $|S'| \subset S'$.

Denotaremos $S_x = \{F \in \text{end}(S, v) \mid x \in \text{im}(F)\}$ y definimos como sigue $|f| : |S| \rightarrow |S'|$. Fijamos $|f|(v) = w$, y para cualquier otro punto $x \in |S|$ consideramos una rama $F \in \text{end}(S, v)$ tal que $F \in S_x$ y hacemos $|f|(x) = h(F)(\min_{G, H \in S_x} \{(h(G)|h(H))_w\})$ (este mínimo puede definirse también como $-\ln(\max_{G, H \in S_x} \{d(h(F), h(G))\})$).

Bien definido. La imagen no depende de la elección de F ya que para cualquier otra $F' \in S_x$, $(F|F')_w \geq \min_{G, H \in S_x} \{(h(G)|h(H))_w\}$ y se cumple que $F(\min_{G, H \in S_x} \{(h(G)|h(H))_w\}) = F'(\min_{G, H \in S_x} \{(h(G)|h(H))_w\})$.

Ahora, para definir la aplicación $f : S \rightarrow S'$ tomamos $f|_{|S|} = |f|$ y la extendemos linealmente como sigue.

Para cualquier $x \in S$:

Si x está entre dos puntos adyacentes de $|S|$, esto es, si hay dos puntos $x_1, x_2 \in |S|$ tales que $x \in [x_1, x_2]$ y $(x_1, x_2) \cap |S| = \emptyset$, entonces existe algún $0 < t < 1$ tal que (abusando de la notación identificamos el camino geodésico de x_1 a x_2 con su imagen) $tx_1 + (1-t)x_2$ es enviado a $tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$.

Si x está en la parte aislada de una rama, $x = F(t)$ con $F[t, \infty) \cap |S| = \emptyset$, extendemos isométricamente. Para un punto $x_1 \in |S|$ tal que $x \in F(\|x_1\|, \infty)$ y $F(\|x_1\|, \infty) \cap |S| = \emptyset$ hacemos que $f(x) = h(F)(\|f(x_1)\| + t - \|x_1\|)$.

f es una quasi-isometría sobre su imagen.

Como h es (λ, A) coarse conforme entre los finales, véase 4.2.10, para todo $F, G, H \in \text{end}(T, v)$

$$\frac{1}{\lambda} |(F|G)_v - (F|H)_v| - A \leq |(h(F)|h(G))_w - (h(F)|h(H))_w| \leq \lambda |(F|G)_v - (F|H)_v| + A.$$

Así, para cualquier par de puntos adyacentes $x_1, x_2 \in |S|$ $\frac{1}{\lambda} \cdot d(x_1, x_2) - 3A \leq d(f(x_1), f(x_2)) \leq \lambda \cdot d(x_1, x_2) + 3A$. Si $x_1 = v$ esto es inmediato por ser bi-Hölder en S_{x_2} . En otro caso, existirían ramas F_i, G_i bifurcándose en x_i , $i = 1, 2$. Veamos primero que entonces la distancia de $h(x_i)$ al punto de bifurcación de $h(F_i)$ y $h(G_i)$, z_i , es menor o igual que A . Si $x_i \neq z_i$ significa que hay otra rama H_i en S_{x_i} que se separa de $h(F)$ y $h(G)$ en $f(x_i)$, antes de z_i . Vamos a denotar $[F|G] = [v, x]$ si $\text{im}(G) \equiv \text{im}(H)$ exactamente en $[v, x]$. Como $[F_i|G_i] = [v, x_i]$ y $H_i \in S_{x_i}$, o bien $[H_i|F_i] = [v, x_i]$ o $[H_i|G_i] = [v, x_i]$: supondremos el primer caso sin pérdida de generalidad. Entonces, $(F_i|G_i)_v = (F_i|H_i)_v$ y si aplicamos la condición de ser coarse conforme (en este caso, restringiéndonos a las ramas que se bifurcan de F en un punto concreto

obtenemos la condición de ser acotadamente quasi-conforme con constante A), $-A \leq |(h(F_i)|h(G_i))_w - (h(F_i)|h(H_i))_w| \leq A$ y obtenemos que $d(x_i, z_i) \leq A$. También es inmediato por ser *coarse* conforme (sea $F_1 = F_2 = F$, $G_1 = G$ y $G_2 = H$) que $\frac{1}{\lambda} \cdot d(x_1, x_2) - A \leq d(z_1, z_2) \leq \lambda \cdot d(x_1, x_2) + A$ y finalmente, por desigualdad triangular obtenemos que $\frac{1}{\lambda} \cdot d(x_1, x_2) - 3A \leq d(f(x_1), f(x_2)) \leq \lambda \cdot d(x_1, x_2) + 3A$.

Como hemos extendido linealmente la aplicación f en el resto de S está claro que cualquier par de puntos $x, y \in S$ cumple que $\frac{1}{\lambda} \cdot d(x, y) - 3A \leq d(f(x), f(y)) \leq \lambda \cdot d(x, y) + 3A$ y $f : S \rightarrow S'$ es una $(\lambda, 3A)$ quasi-isometría sobre su imagen.

Lo mismo ocurre con $g : S' \rightarrow S$.

Para demostrar la equivalencia *coarse* entre S y S' sólo falta comprobar que $g \circ f_C \sim_C id_S$ y $f \circ g \sim_C id_{S'}$. Veamos que existe una constante $K > 0$ tal que para todo $x \in S$, $d(x, g \circ f(x)) \leq K$ y lo mismo para $f \circ g$.

Primero veámoslo para los puntos de $|S|$. Sean $x \in |S|$ y F_1, F_2 dos ramas en S_x tales que $h(F_1) = G_1$ y $h(F_2) = G_2$ se bifurcan en $f(x)$.

Ahora sean $H_1, H_2 \in S'_{f(x)}$ tales que $[h^{-1}(H_1)|h^{-1}(H_2)] = [0, g(f(x))]$. Claramente, o bien $[H_1, G_1] = [w, f(x)]$ o $[H_1, G_2] = [w, f(x)]$. Supongamos lo primero. Entonces, aplicando la condición de ser *coarse* conforme sobre G_1, G_2, H_1 , como $(G_1, H_1)_w = (G_1, G_2)_w$, $|(F_1, h^{-1}(H_1))_v - (F_1, F_2)_v| \leq A$ y $(F_1, F_2)_v \geq \|x\|$. Nótese que $g(f(x)) \subset [v, x]$, y así $(F_1, h^{-1}(H_1))_v = (F_2, h^{-1}(H_1))_v \geq \|x\| - A$. El mismo argumento funciona para H_2 y por tanto $(h^{-1}(H_1), h^{-1}(H_2))_v \geq \|x\| - A$ y $d(g \circ f(x), x) \leq A$.

Sean ahora $x \in [x_1, x_2]$ dos puntos adyacentes de $|S|$ (esto es, $(x_1, x_2) \cap |S| = \emptyset$). Si $[f(x_1), f(x_2)]$ son puntos adyacentes de $|S'|$ ya hemos acabado dado que $d(g \circ f(x_1), x_1) \leq A$, $d(g \circ f(x_2), x_2) \leq A$ y $g \circ f[x_1, x_2]$ es lineal y por tanto $d(g \circ f(x), x) \leq A$. En otro caso, sea $y \in (f(x_1), f(x_2)) \cap |S'|$. Entonces, $g(y)$ es tal que $g \circ f(x_1) \in [v, g(y)] \subset [v, x_1]$ y como se vio antes $d(g \circ f(x_1), x_1) \leq A$ lo que significa que $d(g \circ f(x_1), g(y)) \leq A$. Esto implica, al ser g una $(\lambda, 3A)$ quasi-isometría, que $d(f(x_1), y) \leq 4\lambda A$ y como f es también una $(\lambda, 3A)$ quasi-isometría, que $d(x_1, f^{-1}(y)) \leq 4\lambda^2 A + 3\lambda A$ y $d(f^{-1}(y), g(y)) \leq 4\lambda^2 A + 3\lambda A + A$. Por tanto, de las extensiones lineales obtenemos que $\forall x \in [x_1, x_2]$, también $d(g \circ f(x), x) \leq 4\lambda^2 A + 3\lambda A + A$.

Para $x = F(t)$ en la parte aislada de una rama ($x \in F(\|x_1\|, \infty)$ con $x_1 \in |S|$ y $F(\|x_1\|, \infty) \cap |S| = \emptyset$), podemos concluir con el mismo argumento que para cualquier $y \in |S'|$ con $f(x) \in [w, y]$, $d(x_1, f^{-1}(y)) \leq 4\lambda^2 A + 3\lambda A$ luego $d(f^{-1}(y), g(y)) \leq 4\lambda^2 A + 3\lambda A + A$. Entonces, de las extensiones obtenemos que $\forall x \in F(\|x_1\|, \infty)$, $d(g \circ f(x), x) \leq 4\lambda^2 A + 3\lambda A + A$.

Lo mismo es cierto para $f \circ g$. Por tanto $T \sim_C S \sim_C S' \sim_C T'$. \square

4.3. Árboles arbustivos y árboles simpliciales localmente finitos con vértices de grado minimal 3.

Ahora, siguiendo el trabajo de M. Mirani en [47], tratamos de encontrar condiciones más débiles en el homeomorfismo entre los finales que caractericen la quasi-isometría, o equivalencia *coarse* para algunas familias particulares de árboles, como los árboles arbustivos, ver [51].

Definición 4.3.1. *Un árbol T se dice que es arbustivo si existe una constante $K > 0$ tal que para cualquier punto $x \in T$ hay un punto $v \in T$ de orden mayor que 2 y tal que $d(x, v) < K$.*

Nota 4.3.2. *Es un resultado clásico, ver por ejemplo [51], que dos árboles simpliciales localmente finitos y arbustivos cualesquiera son quasi-isométricos (o coarse equivalentes). Visto de otra manera, cualquier árbol simplicial localmente finito arbustivo es quasi-isométrico al árbol de Cantor.*

Teorema 4.3.3. *Si T y T' son árboles simpliciales, T' es arbustivo y $h : \text{end}(T, v) \rightarrow \text{end}(T', w)$ es un homeomorfismo acotadamente quasi-conforme entonces h es coarse conforme.*

Demostración. Sea $K > 0$ tal que para cualquier punto $x \in T'$ existe un vértice v de valencia ≥ 3 , esto es, un punto de ramificación, de modo que $d(x, v) < K$, y sea $A > 0$ tal que dadas tres ramas cualesquiera $F, G, H \in \text{end}(T, v)$ con $(F|G)_v = (F|H)_v$ entonces $|(h(F)|h(G))_w - (h(F)|h(H))_w| \leq A$.

Tomemos tres ramas cualesquiera $G_0, G_1, G_2 \in \text{end}(T, v)$ y supongamos $(G_0|G_1)_v \leq (G_0|G_2)_v$. Como T es un árbol simplicial, $[G_0|G_1] = [v, x_0]$ y $[G_0|G_2] = [v, x_{k+1}]$ con $d(x_0, x_{k+1}) = k + 1$, $k \in \mathbb{N}$, y ambos puntos a una distancia entera de la raíz. Sean pues x_1, \dots, x_k los vértices intermedios entre ellos, y $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_k$ tales que $\mathcal{F}_i = \{F \in \text{end}(T, v) \mid [F|G_0] = [v, x_i]\}$. (Nótese que \mathcal{F}_i puede ser el vacío sin haber contradicción).

Ahora, para ver que h es $(A + 2K, 4K + 3A)$ -coarse conforme, supongamos que $|(h(G_0)|h(G_1))_w - (h(G_0)|h(G_2))_w| > (k + 1)(A + 2K) + 2K + 3A$. Para cualquier par de ramas $F_1, F_2 \in \mathcal{F}_i$, $0 \leq i \leq k + 1$, si aplicamos la condición de ser acotadamente quasi-conforme respecto a G_0 , podemos ver que $|(h(G_0)|h(F_1))_w - (h(G_0)|h(F_2))_w| \leq A$ y por tanto, los puntos de bifurcación entre las ramas de $h(\mathcal{F}_i)$ y $h(G_0)$ están contenidos en algún intervalo de $h(G_0)$ de longitud A . Así, como T' es arbustivo con constante K , debe haber alguna rama $G \in \text{end}(T', w)$ que no está en $h(\mathcal{F}_i)$ para

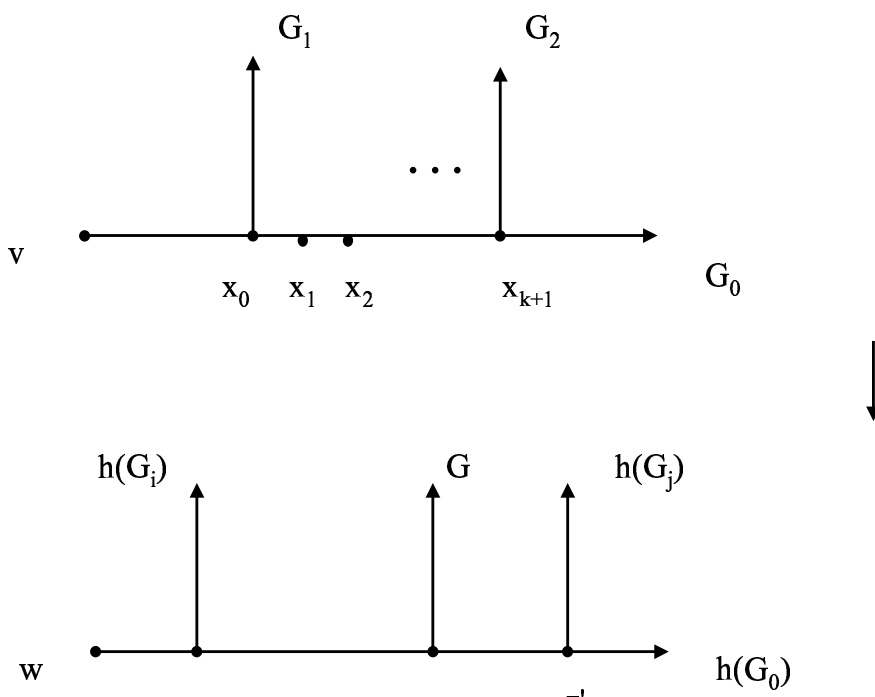


Figura 4.7: $h : \text{end}(T, v) \rightarrow \text{end}(T', w)$.

ningún i y tal que $\min\{(h(G_0)|h(G_1))_w, (h(G_0)|h(G_2))_w\} + A < (G|h(G_0))_w < \max\{(h(G_0)|h(G_1))_w, (h(G_0)|h(G_2))_w\} - A$.

Supongamos z, z' los puntos de ramificación de $h(G_0)$ con $h(G_1), h(G_2)$, no necesariamente en ese orden, tales que $\|z\| < \|z'\|$. El intervalo $[G_0(\|z\| + A), G_0(\|z'\| - A)]$ tiene longitud al menos $(k + 1)(A + 2K) + 4K + A$, y si consideramos $k + 2$ intervalos de longitud A en él, como los dados por los puntos de ramificación respecto a $h(G_0)$ de la imagen ramas en $\mathcal{F}_i, i = 0, k + 1$, podemos encontrar un intervalo abierto de longitud $2K$ que es disjunto de aquellos, y como K es la constante que define la condición de arbustivo, este intervalo debe contener un punto de ramificación en el que se separa una rama H de $h(G_0)$.

Por tanto, como h es sobreyectiva, existe un rama $G \in \text{end}(T, v)$ tal que $h(G) = H$ y $G \notin \mathcal{F}_i$ para todo i . Distinguiamos dos casos:

- (a) $(G|G_0) < \|x_0\|$.

Si $(h(G_0)|h(G_1))_w \leq (h(G_0)|h(G_2))_w$, este caso lleva a contradicción aplicando la condición de ser acotadamente quasi-conforme sobre G respecto a G_0, G_1 ya que $|(h(G)|h(G_0))_w - (h(G)|h(G_1))_w| > A$.

Si $(h(G_0)|h(G_1))_w > (h(G_0)|h(G_2))_w$ la contradicción viene de ser acotadamente quasi-conforme aplicado a G respecto a G_0, G_2 , dado que $|(h(G)|h(G_0))_w - (h(G)|h(G_2))_w| > A$.

(b) $(G|G_0) > \|x_{k+1}\|$.

La contradicción ahora se obtiene del mismo modo, usando la condición en G_2 respecto a G, G_0 si $(h(G_0)|h(G_1))_w \leq (h(G_0)|h(G_2))_w$ y en G_1 respecto a G, G_0 si $(h(G_0)|h(G_1))_w > (h(G_0)|h(G_2))_w$ ya que $(H|h(G_0))_w < \max\{(h(G_0)|h(G_1))_w, (h(G_0)|h(G_2))_w\} - A$.

□

Corolario 4.3.4. *Si T es un árbol simplicial, T' es un árbol simplicial arbustivo y $h : \text{end}(T, v) \rightarrow \text{end}(T', w)$ es un homeomorfismo acotadamente quasi-conforme entonces T y T' son coarse equivalentes (quasi-isométricos). En particular, T es también arbustivo.*

El siguiente ejemplo muestra que este teorema es cierto para dichos árboles arbustivos pero no en general, y que la nueva condición es estrictamente más débil que la de ser *coarse* conforme para homeomorfismos entre espacios ultramétricos completos y acotados.

Ejemplo 4.3.5. *Un homeomorfismo acotadamente quasi-conforme entre finales de árboles que no es coarse conforme.*

Tomemos la unión de una cantidad infinita numerable de árboles de Cantor $T := \bigvee_{i \in \mathbb{N}} T_C^i$ identificando las raíces. Sea ahora T_{C_j} un árbol similar al de Cantor pero tal que la distancia entre dos puntos de ramificación es j , y sea T' la suma $\bigvee_{j \in \mathbb{N}} T_{C_j}$ identificando las raíces.

Sea $h : \text{end}(T, v) \rightarrow \text{end}(T', w)$ una aplicación que envía, para cada i , las ramas de T_C^i a ramas de T_{C_i} de forma canónica (se trata del mismo árbol a mayor escala).

Primero, nótese que T' no es arbustivo, ya que dada cualquier constante $K > 0$, para $j > 2K$ encontramos puntos en T_{C_j} tales que no hay puntos de ramificación en una bola de radio K alrededor de ellos.

Veamos pues que h es acotadamente quasi-conforme mientras que no es *coarse* conforme. De hecho, para cualquier $F \in \text{end}(T, v)$ y cualquier par de ramas $G_1, G_2 \in \text{end}(T, v)$ con $(F|G_1)_v = (F|G_2)_v$ es inmediato ver que $(h(F)|h(G_1))_w = (h(F)|h(G_2))_w$ y por tanto, h es acotadamente quasi-conforme con constante 1.

Sin embargo, si $F \in \text{end}(T_C^1)$ y $G_i, H_i \in \text{end}(T_C^i)$ con $i > 1$ de modo que $(G_i|H_i)_v = 1$, resulta que $|(G_i|H_i)_v - (G_i|F)_v| = 1$ mientras $|(h(G_i)|h(H_i))_w - (h(G_i)|h(F))_w| = i$, para cada $i > 1$, luego esta distancia no está acotada. Por tanto, h no es *coarse* conforme.

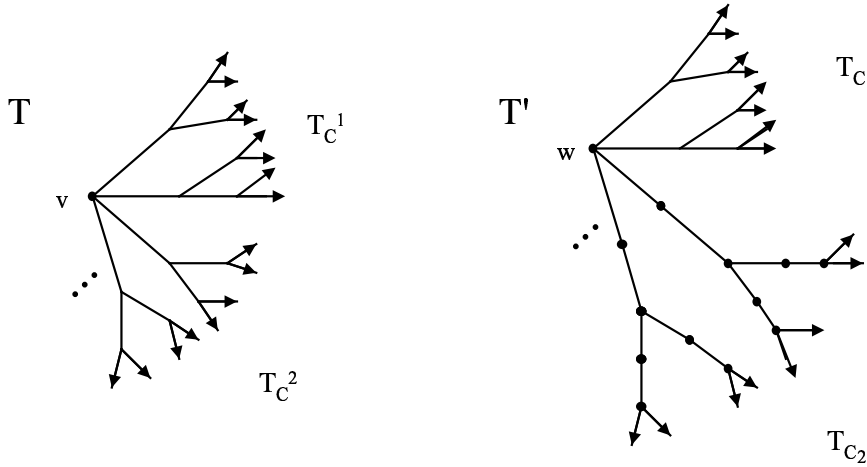


Figura 4.8: Unión de árboles de Cantor.

4.3.1. Árboles simpliciales localmente finitos con vértices de grado minimal 3.

M. Mirani, en [47], define un functor ξ_M desde la categoría $\mathcal{T}_{\geq 3}$ cuyos objetos son árboles simpliciales localmente finitos (enraizados) con vértices de grado minimal 3 y cuyos morfismos son clases de equivalencia de quasi-isometrías entre ellos, a la categoría \mathcal{U}_P de espacios ultramétricos compactos perfectos con homeomorfismos bi-Hölder entre ellos. Ella prueba que una quasi-isometría entre estos árboles induce un homeomorfismo bi-Hölder quasi-conforme entre los finales y presenta una serie de conjeturas, la mayoría de ellas encaminadas a obtener un functor inverso, que se resolverán a continuación.

La conjetura principal es la 9.1 en [47].

Conjetura 4.3.6. *El functor ξ_M es completo. Esto es, si (T, v) y (S, w) son objetos en la categoría $\mathcal{T}_{\geq 3}$, y $h : \text{end}(T, v) \rightarrow \text{end}(S, w)$ es un homeomorfismo bi-Hölder entre ellos, entonces existe una quasi-isometría $\gamma : (T, v) \rightarrow (S, w)$ tal que $\xi_M([\gamma]) = h$.*

El siguiente ejemplo muestra que esto no es así.

Ejemplo 4.3.7. *Un homeomorfismo bi-Hölder conforme entre árboles simpliciales localmente finitos con vértices de grado minimal 3, que no es acotadamente quasi-conforme ni coarse conforme.*

Sea $T = T_C \vee T_C$, la unión de dos árboles de Cantor identificando sus raíces. Consideramos una de las copias de T_C (la otra se añade únicamente para tener valencia al menos 3 en la raíz pero en la práctica no juega ningún papel en el ejemplo) y se etiquetan las aristas con 0,1 de la manera usual. Consideramos para cada $i > 0$, la rama F_i definida por la sucesión de aristas: $(1, \dots, 0, \dots)$ donde el primer 0 está en la posición i y todo son 0 después de éste.

Tomemos ahora las familias \mathcal{G}_i y \mathcal{H}_i con:

$$\mathcal{G}_i := \{G \in \text{end}(T, v) \mid G \text{ empieza por } (1, \dots, 1, 0, 1, 1),$$

con el 0 en la posición $i\}$.

$$\mathcal{H}_i := \{G \in \text{end}(T, v) \mid G \text{ empieza por } (1, \dots, 1, 0, 0, \dots, 0, 1, 1),$$

con el primer 0 en la posición i y el siguiente 1 en la posición $2i+1\}$.

Definimos una aplicación $h : \text{end}(T, v) \rightarrow \text{end}(T, v)$ que es la identidad en $\text{end}(T, v) \setminus \bigcup_i (\mathcal{G}_i \cup \mathcal{H}_i)$ e intercambia las ramas de \mathcal{G}_i y \mathcal{H}_i definidas por la misma sucesión a partir de la parte fijada.

h es conforme. Sea $F_0 \in \text{end}(T_C)$ la rama dada por la sucesión de aristas etiquetadas por 1. Si $F \neq F_0$ entonces debe contener una primera arista, supongamos en el nivel n_F , etiquetada con 0. Entonces, $\forall j > 2n_F$ veamos que para $\varepsilon_j = e^{-j}$, A_j es constante y $H_h(F) = 1$.

De otro modo, si $F = F_0$ es fácil ver que para cualquier ε_j , A_j es constante y $H_h(F_0) = 1$. Por tanto, h es conforme.

h es bi-Hölder. Basta comprobar que para cualquier par de ramas $F, G \in \text{end}(T, v)$, $\frac{1}{2}(F|G)_v - 1 \leq (h(F)|h(G))_v \leq 2(F|G)_v + 1$. Los únicos casos en los que $(h(F)|h(G))_v \neq (F|G)_v$ son cuando una de las ramas está en \mathcal{G}_i o \mathcal{H}_i y la otra está en $\text{end}(T, v) \setminus \bigcup_i (\mathcal{G}_i \cup \mathcal{H}_i)$, o bien cuando ambas están en \mathcal{G}_i o en \mathcal{H}_i para algún i . En cualquier caso, es inmediato comprobar que es bi-Hölder.

h no es acotadamente quasi-conforme. Para cada i , sea $G_i \in \mathcal{G}_i$ y H_i una rama cuyas primeras $i+2$ aristas son $(1, \dots, 1, 0, 1, 0)$. Claramente, $(F_i|G_i)_v = (F_i|H_i) = i$ pero mientras que $h(F_i) = F_i$, $h(H_i) = H_i$ y $(h(F_i)|h(H_i))_v = i$, resulta que $h(G_i) \in \mathcal{H}_i$ y $(h(F_i)|h(G_i))_v = 2i$.

Tampoco es *coarse* conforme, por tanto.

Nota 4.3.8. *Esto implica que ninguna aplicación que induzca ésta en los finales puede ser una quasi-isometría.*

Esto contradice también la conjetura 9.7:

Conjetura 4.3.9. *El functor ξ de la categoría $\mathcal{T}_{\geq 3}$ a la categoría $\mathcal{U}'_{\mathbb{P}}$ (de espacios ultramétricos compactos perfectos cuyos morfismos son homeomorfismos bi-Hölder quasi-conformes) es completo. Es decir que si (T, v) y (S, w) son objetos en la categoría $\mathcal{T}_{\geq 3}$, y $h : \text{end}(T, v) \rightarrow \text{end}(S, w)$ es un homeomorfismo bi-Hölder quasi-conforme, entonces existe una quasi-isometría $\gamma : (T, v) \rightarrow (S, w)$ tal que $\xi_M([\gamma]) = h$.*

El siguiente ejemplo ilustra que no podemos mejorar 4.3.3 cambiando, para esta clase particular de árboles arbustivos donde la constante sería 1, acotadamente quasi-conforme por quasi-conforme.

Ejemplo 4.3.10. *Un homeomorfismo quasi-conforme entre finales de árboles simpliciales localmente finitos con vértices de grado minimal 3, que no es bi-Hölder.*

Tomemos (T, v) y $(F_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \text{end}(T, v)$ como se definieron en 4.3.7. Sea ahora

$$\mathcal{G}_i := \{F \in \text{end}(T, v) \mid F \text{ empieza por } (1, \dots, 1, 0, 1),$$

con ese 0 en la posición $i\}$.

$$\mathcal{H}_i := \{F \in \text{end}(T, v) \mid F \text{ empieza por } (1, \dots, 1, 0, 0, \dots, 0, 1),$$

con el primer 0 en la posición i y el siguiente 1 en la posición $i^2\}$.

Sea $h : \text{end}(T, v) \rightarrow \text{end}(T, v)$ una aplicación que es la identidad en $\text{end}(T_C) \setminus \bigcup_i (\mathcal{G}_i \cup \mathcal{H}_i)$ e intercambia las ramas de \mathcal{G}_i y \mathcal{H}_i definidas por la misma sucesión a partir de las aristas fijadas.

El argumento para probar que esta aplicación es quasi-conforme es similar al visto en 4.3.7.

Para ver que esta aplicación no es bi-Hölder, consideramos una rama $G_i \in \mathcal{G}_i$ junto con F_i . $h(F_i) = F_i$ y $h(G_i) \in \mathcal{H}_i$. Por tanto, $d(h(F_i), h(G_i)) = e^{-i^2}$ mientras que $d(F_i, G_i) = e^{-i}$ para cada $i > 0$ y por tanto, esta aplicación no puede ser bi-Hölder.

La conjetura 9.2 en [47] dice:

Conjetura 4.3.11. *Sean (T, v) y (S, w) objetos en la categoría $\mathcal{T}_{\geq 3}$, y sea $h : \text{end}(T, v) \rightarrow \text{end}(S, w)$ un homeomorfismo bi-Hölder. Entonces h es quasi-conforme.*

Damos un contraejemplo.

Ejemplo 4.3.12. *Un homeomorfismo bi-Hölder entre finales de árboles simpliciales localmente finitos con vértices de grado minimal 3, que no es quasi-conforme.*

Sea $T = T_C \vee T_C$ como en 4.3.7 y F_0 una rama en una de las copias de T_C etiquetada por una sucesión constante en 0. Sea \mathcal{G}_i la familia de ramas cuyas primeras 4^i aristas son las etiquetadas con 0 y las dos siguientes con 1, y \mathcal{H}_i la familia de ramas cuyas primeras $2 \cdot 4^i$ aristas son las etiquetadas con 0 y las dos siguientes con 1.

Sea $h : \text{end}(T, v) \rightarrow \text{end}(T, v)$ una aplicación que es la identidad en $\text{end}(T_C) \setminus \bigcup_i (\mathcal{G}_i \cup \mathcal{H}_i)$ e intercambia las ramas de \mathcal{G}_i y \mathcal{H}_i definidas por la misma sucesión a partir de las aristas fijadas.

Como en 4.3.7, es inmediato ver que para todo $F, G \in \text{end}(T, v)$, $\frac{1}{2}(F|G)_v - 1 \leq (h(F)|h(G))_v \leq 2(F|G)_v + 1$ y la aplicación es bi-Hölder.

Para ver que no es quasi-conforme, veamos que $H_h(F_0)$ no está acotado. Para cualquier constante $K > 0$ y cualquier $N_0 \in \mathbb{N}$ existe algún $i_0 > N_0$ con $4^{i_0} > K$. Sea entonces $G_1 \in \mathcal{G}_{i_0}$ y G_2 cualquier rama cuyas primeras 4^{i_0} aristas están etiquetadas con 0, la siguiente con 1 y la siguiente con 0. Así $h(F_0) = F_0$, $h(G_2) = G_2$ y $h(G_1) \in \mathcal{H}_{i_0}$, lo que significa que $(h(F_0)|h(G_2))_v = 4^{i_0}$ y $(h(F_0)|h(G_1))_v = 2 \cdot 4^{i_0}$, i.e. $\sup A_{i_0} \geq d(h(F_0), h(G_2)) = e^{-4^{i_0}}$ e $\inf A_{i_0} \leq d(h(F_0), h(G_1)) = e^{-2 \cdot 4^{i_0}}$, resultando que $\frac{\sup A_{i_0}}{\inf A_{i_0}} \geq e^{4^{i_0}}$. Por tanto, $H_h(F_0)$ no está acotado y h no es quasi-conforme.

Este ejemplo contradice también la conjetura 9.4:

Conjetura 4.3.13. *Todo homeomorfismo bi-Hölder en espacios ultramétricos compactos perfectos es quasi-conforme.*

La conjetura 9.3,

Conjetura 4.3.14. *Sean (T, v) , (S, w) y (R, z) objetos en la categoría $\mathcal{T}_{\geq 3}$. Sean $h_1 : \text{end}(T, v) \rightarrow \text{end}(S, w)$ y $h_2 : \text{end}(S, w) \rightarrow \text{end}(R, z)$ homeomorfismos bi-Hölder. Entonces, $h_2 \circ h_1 : \text{end}(T, v) \rightarrow \text{end}(R, z)$ es un homeomorfismo bi-Hölder quasi-conforme.*

y las conjeturas relacionadas 9.5 y 9.6:

Conjetura 4.3.15. *La composición de dos homeomorfismos bi-Hölder en espacios ultramétricos compactos perfectos es un homeomorfismo bi-Hölder quasi-conforme.*

Conjetura 4.3.16. *La composición de dos homeomorfismos bi-Hölder quasi-conformes en espacios ultramétricos compactos perfectos es un homeomorfismo bi-Hölder quasi-conforme.*

fallan también, incluso para finales de árboles en $\mathcal{T}_{\geq 3}$, como se observa en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.3.17. *Dos homeomorfismos bi-Hölder quasi-conformes entre finales de árboles simpliciales localmente finitos con vértices de grado minimal 3, tales que la composición no es quasi-conforme.*

Sea $T = T_C \vee T_C$ como en 4.3.7 con las aristas de una de las copias etiquetadas con 0,1 de la manera usual y F_0 la rama en esa copia de T_C correspondiente a una sucesión constante en 0. Sea \mathcal{G}_i^a la familia de ramas cuyas primeras $2i$ aristas son las etiquetadas con 0 y las dos siguientes, con 1, y \mathcal{H}_i^a la familia de ramas cuyas primeras $2i + 1$ aristas son las etiquetadas con 0 y las dos siguientes, con 1.

Sea $h_1 : \text{end}(T, v) \rightarrow \text{end}(T, v)$ la aplicación que es la identidad en $\text{end}(T, v) \setminus \bigcup_i (\mathcal{G}_i^a \cup \mathcal{H}_i^a)$ e intercambia las ramas de \mathcal{G}_i^a y \mathcal{H}_i^a determinadas por la misma sucesión a partir de las aristas fijadas.

Sea ahora \mathcal{G}_i^b la familia de ramas cuyas primeras $4i$ aristas son las etiquetadas con 0 y la siguiente con 1, y \mathcal{H}_i^b la familia de ramas cuyas primeras $8i$ aristas son las etiquetadas con 0 y la siguiente con 1.

Sea $h_2 : \text{end}(T, v) \rightarrow \text{end}(T, v)$ la aplicación que es la identidad en $\text{end}(T, v) \setminus \bigcup_i (\mathcal{G}_i^b \cup \mathcal{H}_i^b)$ e intercambia las ramas de \mathcal{G}_i^b y \mathcal{H}_i^b determinadas por la misma sucesión a partir de las aristas fijadas.

Es inmediato comprobar que h_1 es e -quasi-conforme (de hecho, para cualquier F y cualquier $\varepsilon_j > 0$, $\frac{\sup A_j}{\inf A_j} \leq e$) y h_2 es conforme (de hecho, para cualquier F y cualquier $\varepsilon_j > 0$, $\frac{\sup A_j}{\inf A_j} = 1$).

Sin embargo, la composición no es quasi-conforme. Para todo i par, sea $G_1 \in \mathcal{G}_i^a$ y G_2 cuyas primeras $2i$ aristas son las etiquetadas con 0, la siguiente con 1 y la siguiente con 0. Si $\varepsilon_j = e^{-2i}$, entonces para F_0 , $d(h_2 \circ h_1(G_1), h_2 \circ h_1(F_0)) = e^{-2i-1}$ mientras que $d(h_2 \circ h_1(G_2), h_2 \circ h_1(F_0)) = e^{-2 \cdot 2i}$. Así, $\frac{\sup A_j}{\inf A_j} \geq e^{2i-1}$ que claramente no está acotado cuando i tiende a infinito. Por tanto $H_{h_2 \circ h_1}(F_0)$ no está acotado y la composición no es quasi-conforme.

La última conjetura, 9.8, se refiere a la equivalencia por similaridad local, aplicación que B. Hughes estudia entre finales de \mathbb{R} -árboles en [33]:

Definición 4.3.18. Una función $f : X \rightarrow Y$ entre espacios métricos (X, d_X) , (Y, d_Y) es una similaridad si existe $\lambda > 0$ tal que $d_Y(f(x), f(y)) = \lambda d_X(x, y)$ para todo $x, y \in X$. En este caso, λ es la constante de similaridad de f y f es una λ -similaridad. Una equivalencia por similaridad es una similaridad que además es un homeomorfismo.

Definición 4.3.19. Un homeomorfismo $h : X \rightarrow Y$ entre espacios métricos es una equivalencia por similaridad local si para todo $x \in X$ existen $\varepsilon > 0$ y $\lambda > 0$ tales que la restricción $h|_{B(x, \varepsilon)} : B(x, \varepsilon) \rightarrow B(h(x), \lambda\varepsilon)$ es una λ -similaridad sobreyectiva.

Conjetura 4.3.20. Si $f : U \rightarrow V$ es una equivalencia por similaridad local entre espacios ultramétricos compactos, entonces f es un homeomorfismo bi-Hölder quasi-conforme.

Probamos a continuación un resultado algo más general:

Teorema 4.3.21. Si $f : U \rightarrow V$ es una equivalencia por similaridad local entre espacios ultramétricos compactos, entonces f es un homeomorfismo coarse conforme.

Demostración. Podemos suponer $(T, v), (T', w)$ dos \mathbb{R} -árboles enraizados geodésicamente completos con $end(T, v) \approx U$ y $end(T', w) \approx V$ equivalencias por similaridad (bastaría considerar en ambos casos el árbol asociado al espacio ultramétrico que resulta al dividir las distancias por el diámetro). Entonces podemos inducir, por composición, un homeomorfismo $h : end(T, v) \rightarrow end(T', w)$ que es también una equivalencia por similaridad local y si probamos que h es coarse conforme, entonces f también lo es inmediatamente. Veamos que basta comprobar lo siguiente.

Afirmación: Existe alguna constante $K > 0$ tal que $\forall F, G \in end(T, v)$
 $|(F|G)_v - (h(F)|h(G))_w| \leq K$.

Si existe dicha constante, entonces es claro que $\forall F, G, H \in end(T, v)$,
 $|(F|G)_v - (F|H)_v| - 2K \leq |(h(F)|h(G))_w - (h(F)|h(H))_w| \leq |(F|G)_v - (F|H)_v| + 2K$ y h es coarse conforme, lo que implica, dado que $end(T, v) \approx U$ y $end(T', w) \approx V$ son equivalencias por similaridad, que f es coarse conforme.

Para todo $F \in end(T, v)$ existen $\varepsilon > 0$ y $\lambda > 0$ tales que la restricción $h|_{B(x, \varepsilon)} : B(x, \varepsilon) \rightarrow B(h(x), \lambda\varepsilon)$ es una λ -similaridad sobreyectiva. Como $end(T, v)$ es compacto, existe un subrecubrimiento finito $B(x_i, \varepsilon_i)$, $i = 1, n$ con constantes de similaridad λ_i . Como h es sobreyectiva y abierta, y

$end(T', w)$ es compacto, $B(h(x_i), \lambda_i \varepsilon_i)$ es también un recubrimiento abierto de $end(T', w)$.

Sea δ_1 un número de Lebesgue para el recubrimiento $B(x_i, \varepsilon_i)$ y δ_2 un número de Lebesgue para el recubrimiento $B(h(x_i), \lambda_i \varepsilon_i)$. Definimos $K := \max\{\max_{i=1, n}\{|\ln(\lambda_i)|\}, -2\ln(\delta_1), -2\ln(\delta_2)\}$.

Si hay algún i_0 de modo que $F, G \in B(x_{i_0}, \varepsilon_{i_0})$ entonces $d(h(F), h(G)) = \lambda_{i_0} \cdot d(F, G)$ y $|(F|G)_v - (h(F)|h(G))_w| = |\ln(\lambda_{i_0})| \leq K$.

En otro caso, $h(F)$ y $h(G)$ no están en la misma bola $B(h(x_i), \lambda_i \varepsilon_i)$ para ningún i y en particular $d(h(F), h(G)) \geq \delta_2$. Por tanto, $|(F|G)_v - (h(F)|h(G))_w| \leq (F|G)_v + (h(F)|h(G))_w \leq -\ln(\delta_1) - \ln(\delta_2) \leq K$ demostrando la afirmación y el teorema. \square

Usando 4.2.13 y 4.2.14 es inmediato ver que 4.3.20 es consecuencia de este teorema para el caso particular de espacios ultramétricos compactos perfectos.

Nota 4.3.22. *Si la aplicación entre los finales es bi-Lipschitz entonces podemos obtener la equivalencia coarse entre los árboles de manera más sencilla.*

Sean (T, v) y (T', w) dos \mathbb{R} -árboles enraizados geodésicamente completos y $h : end(T, v) \rightarrow end(T', w)$ una equivalencia bi-Lipschitz con constante $A \geq 1$. Entonces, existen aplicaciones enraizadas continuas (bien definidas) $f : (T, v) \rightarrow (T', w)$ $g : (T', w) \rightarrow (T, v)$ de forma que para cualquier rama $F \in end(T, v)$ (y recíprocamente $G \in end(T', w)$) $f(F(t)) = w \forall t \leq \ln(A)$ y $f(F(t)) = h(F)(t - \ln(A)) \forall t > \ln(A)$ ($g(G(t)) = v \forall t \leq \ln(A)$ y $g(G(t)) = h^{-1}(G)(t - \ln(A))$). Naturalmente, para cualquier $x \in T$, $d(g \circ f(x), x) \leq 2A$ y para cualquier $y \in T'$ $d(f \circ g(y), y) \leq 2A$.

Para terminar, resumimos en un cuadro las equivalencias obtenidas entre aplicaciones en \mathbb{R} -árboles y aplicaciones entre sus espacios de finales, ordenando las propiedades sobre estos últimos de más restrictivas a menos implicando cada una la siguiente.

Cuadro resumen

\mathbb{R} -Árboles enraizados geod. completos	Espacios de finales
Isometría	\Leftrightarrow Isometría
Ver nota 4.3.22	\Leftrightarrow Bi-Lipschitz
Quasi-isometría \sim Equivalencia <i>coarse</i>	\Leftrightarrow <i>coarse</i> conforme
Equiv. <i>coarse</i> para árboles arbustivos	\Leftrightarrow Acot. quasi-conforme
Conjetura de M. Mirani. Ver sección 4.3.1	\Leftrightarrow Bi-Hölder (+ Conforme)
Clases de homot. de apl. metric. propias	\Leftrightarrow Homeomorfismo uniforme

Capítulo 5

Árboles y teoría de la forma

5.1. Introducción

En [60], Serre da una descripción de cierta correspondencia entre sucesiones inversas y árboles simpliciales. Sólo se trata aquí una correspondencia entre objetos, viendo cómo un árbol simplicial induce una sucesión inversa en la categoría **Set** (la categoría de conjuntos *pequeños*, esto es, conjuntos en un *universo* fijado de conjuntos; véase [42]) y cómo construir un árbol a partir de dicha sucesión.

Como hemos dicho, una de las motivaciones iniciales de este trabajo son las aplicaciones a la teoría de la forma, y en este contexto, las sucesiones inversas aparecen en la generalización de la teoría de la forma para compactos Hausdorff de Mardešić y Segal. Ver [45]. Esta nueva definición está basada en sistemas inversos de ANR's y puede restringirse de forma natural a sucesiones inversas de ANR's manteniendo la misma definición para los morfismos entre ellas.

Por otra parte, en [50] se define una ultramétrica en los espacios de morfismos *shape* y como vimos en el capítulo 3 esto se puede transformar en un árbol.

Lo que se hace en este capítulo es completar estas relaciones, construyendo primero una equivalencia de categorías entre las sucesiones inversas en **Set** donde los morfismos entre ellas son los que usan Mardešić y Segal, y una categoría de \mathbb{R} -árboles y ver cómo esta relación nos permite describir los morfismos *shape* como ramas infinitas de un árbol y la ultramétrica que se obtiene entre ellas de este modo a través del functor definido en el capítulo 3 es equivalente, mediante homeomorfismo uniforme, a la descrita en [50].

Además, la construcción de la equivalencia de categorías permite traducir el lenguaje de sucesiones inversas a un lenguaje geométrico sobre árboles.

Así, algunas propiedades algebraicas, como la de ser Mittag-Leffler que es de gran importancia en el estudio de los límites inversos, se convierten en propiedades geométricas en términos de la homotopía métricamente propia del árbol. Veremos cómo esto se puede aplicar para dar una nueva perspectiva sobre algunos resultados clásicos en sucesiones inversas de grupos.

5.2. Sucesiones inversas

Las siguientes definiciones se toman directamente de [45].

Definición 5.2.1. Una sucesión inversa $\underline{X} = (X_n, p_n)$ en la categoría \mathcal{C} es un sistema inverso en \mathcal{C} cuyo conjunto dirigido son los números naturales.

Denotaremos por $p_{nm} : X_m \rightarrow X_n$ la composición $p_n \circ \cdots \circ p_{m-1}$.

Definición 5.2.2. Un morfismo de sucesiones inversas $(f_n, \Phi) : (X_n, p_n) \rightarrow (Y_n, q_n)$ consta de una función $\Phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ y morfismos $f_n : X_{\Phi(n)} \rightarrow Y_n$ en \mathcal{C} tales que $\forall n' > n$ existe $m \geq n, n'$ con $f_n \circ p_{\Phi(n)m} = q_{nn'} \circ f_{n'} \circ p_{\Phi(n')m}$.

Hay una relación de equivalencia \sim entre morfismos de sucesiones inversas. Decimos que $(f_n, \Phi) \sim (g_n, \Psi)$ si todo n admite algún $m \geq \Phi(n), \Psi(n)$ tal que $f_n \circ p_{\Phi(n)m} = g_n \circ p_{\Psi(n)m}$.

Se define la categoría **Tower- \mathcal{C}** cuyos objetos son sucesiones inversas en la categoría \mathcal{C} y cuyos morfismos son clases de equivalencia de morfismos entre sucesiones inversas. En el caso particular que más vamos a utilizar en este capítulo, **Tower-Set**, los objetos serán sucesiones inversas en **Set**, la categoría de conjuntos *pequeños*.

5.2.1. Sucesión inversa de un árbol

Sea (T, v) un árbol simplicial enraizado (supondremos la métrica usual en la que cada arista tiene longitud 1). Para cada entero $n \geq 0$ sea C_n el conjunto de vértices de T tales que la distancia a la raíz es n . Para cada vértice P de C_n existe un único vértice adyacente P' a distancia $n - 1$ de la raíz. Esto define una aplicación de C_n en C_{n-1} ($f_n(P) = P'$) y por tanto una sucesión inversa

$$C_1 \leftarrow C_2 \leftarrow \cdots \leftarrow C_n \leftarrow \cdots$$

De hecho toda sucesión inversa se puede obtener de este modo. Ver [60].

5.2.2. Árbol de una sucesión inversa

Sea $\underline{X} = (X_n, p_n, \mathbb{N})$ un sucesión inversa. Consideramos la unión de los X_n y un punto extra v como conjunto de vértices de $\Gamma_{\underline{X}}$ y las aristas serán $\{x_{n+1}, p_n(x_{n+1})\}$ para cada $x_n \in X_n$ y $\{x_1, v\}$ para cada $x_1 \in X_1$. El árbol que buscamos será la realización geométrica de este grafo, $T_{\underline{X}} = \text{real}(\Gamma_{\underline{X}})$ (tomaremos siempre la métrica usual en la que cada arista tiene longitud 1) y $(T_{\underline{X}}, v)$ es un árbol simplicial enraizado. Tenemos por tanto una equivalencia de objetos entre árboles simpliciales enraizados y sucesiones inversas en la categoría **Set**. Ver [60].

5.3. Aplicaciones métricamente propias y morfismos de sucesiones inversas

A continuación veremos cómo las aplicaciones métricamente propias enraizadas y continuas entre \mathbb{R} -árboles simpliciales enraizados inducen morfismos entre sucesiones inversas y al contrario.

5.3.1. Aplicaciones métricamente propias

Sea $f : (T, v) \rightarrow (T', w)$ una aplicación enraizada continua y métricamente propia entre \mathbb{R} -árboles simpliciales enraizados. Podemos inducir a partir de esta aplicación un morfismo entre sucesiones inversas $(f_n, \Phi_f) : (C_n, p_n, \mathbb{N}) \rightarrow (C'_n, p'_n, \mathbb{N})$.

Como f es métricamente propia, $\forall n \exists t_n \in \mathbb{N}$ tal que $f^{-1}(B(w, n)) \subset B(v, t_n)$ y no hay problema para asumir $t_n > t_{n-1}$. Por 3.2.5, $\forall c \in C_{t_n}$ existe un único $c' \in C'_n$ tal que $f(T_c) \subset T'_{c'}$. Sea entonces $\Phi_f(n) = t_n \forall n \in \mathbb{N}$ y $f_n(c) = c'$ define una aplicación $f_n : C_{t_n} \rightarrow C'_n$. Obviamente $p'_n \circ f_{n+1} = f_n \circ p_{\Phi_f(n)\Phi_f(n+1)}$ y (f_n, Φ_f) es un morfismo de sucesiones inversas.

Una elección diferente de los t_n induciría otro morfismo (f'_n, Ψ_f) . Es inmediato comprobar que en ese caso $(f'_n, \Psi_f) \sim (f_n, \Phi_f)$. Supongamos $t'_n = \Psi_f(n) \geq t_n = \Phi_f(n)$, y sean $d \in C_{t'_n}$ y $c \in C_{t_n}$ con $c \in [v, d]$ (por tanto $p_{t_n t'_n}(d) = c$), entonces existe un único $c' \in C'_n$ tal que $f(T_d) \subset f(T_c) \subset T'_{c'}$ y claramente $f_n \circ p_{t_n t'_n} = f'_n$. Por tanto, si tenemos una aplicación enraizada continua y métricamente propia f , se induce una única clase de morfismos de sucesiones inversas $[f]$, esto es, un único morfismo en **Tower-Set**.

5.3.2. Morfismos entre sucesiones inversas

Todo morfismo $(f_n, \Phi) : \underline{X} \rightarrow \underline{Y}$ entre dos sucesiones inversas induce una aplicación enraizada continua y métricamente propia entre los árboles enraizados $(T_{\underline{X}}, v)$ y $(T_{\underline{Y}}, w)$ de \underline{X} y \underline{Y} . Para ver esto necesitaremos considerar las ramas finitas e infinitas como sucesiones de vértices: una rama infinita de $(T_{\underline{X}}, v)$ viene dada por una sucesión de vértices $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ con $x_n \in X_n$ y tal que $p_n(x_{n+1}) = x_n \forall n$. Una rama finita viene dada por una sucesión finita de vértices (x_1, \dots, x_m) tal que $p_n(x_{n+1}) = x_n \forall n < m$ y $x_m \notin p_n(X_{m+1})$. Las ramas son la realización del grafo formado por estos vértices, la raíz v y las aristas entre ellos.

Con esta idea, podemos obtener a partir de un morfismo (f_n, Φ) una función que envía ramas de $(T_{\underline{X}}, v)$ a ramas de $(T_{\underline{Y}}, w)$.

Dada $(f_n, \Phi) : \underline{X} \rightarrow \underline{Y}$ es inmediato comprobar que

$$\exists t_1 > \Phi(1), \Phi(2) \text{ tal que } f_1 \circ p_{\Phi(1)t_1} = q_1 \circ f_2 \circ p_{\Phi(2)t_1}.$$

$$\exists t_2 > t_1, \Phi(3) \text{ tal que } f_2 \circ p_{\Phi(2)t_2} = q_2 \circ f_3 \circ p_{\Phi(3)t_2}.$$

En general,

$$\exists t_k > t_{k-1}, \Phi(k+1) \text{ tal que } f_i \circ p_{\Phi(i)t_k} = q_{ik+1} \circ f_{k+1} \circ p_{\Phi(i+1)t_k} \quad \forall i \leq k \quad (5.1)$$

Una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ con $p_n(x_{n+1}) = x_n$ (que representa una rama geodésicamente completa en $(T_{\underline{X}}, v)$) se envía a $(f_n(x_{\Phi(n)}))_{n \in \mathbb{N}}$. Para ver que esto representa una rama geodésicamente completa de $(T_{\underline{Y}}, w)$ basta comprobar que $f_n(x_{\Phi(n)}) = q_n(f_{n+1}(x_{\Phi(n+1)})) \forall n \in \mathbb{N}$ y por cómo están definidas $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y t_n , (5.1), sabemos que $f_n(x_{\Phi(n)}) = f_n \circ p_{\Phi(n)t_n}(x_{t_n}) = q_n \circ f_{n+1} \circ p_{\Phi(n+1)t_n}(x_{t_n}) = q_n(f_{n+1}(x_{\Phi(n+1)}))$.

Con las ramas finitas tendremos que ser un poco más cuidadosos. Sea (x_1, \dots, x_m) la sucesión de vértices asociados a una rama finita ($x_i = p_{im}(x_m)$). Sea $k_0 := \max_{t_k < m} \{k\}$. Entonces, podemos dar otra sucesión en el árbol de llegada $(f_1(x_{\Phi(1)}), \dots, f_{k_0+1}(x_{\Phi(k_0+1)}))$ que es parte de una rama de $(T_{\underline{Y}}, w)$ ya que t_{k_0} es tal que $f_i(x_{\Phi(i)}) = f_i \circ p_{\Phi(i)t_n}(x_n) = q_{ik_0+1} \circ f_{k_0+1} \circ p_{\Phi(i+1)t_n}(x_n) = q_{ik_0+1} \circ f_{k_0+1}(x_{\Phi(k_0+1)}) \forall i \leq k_0$.

Por tanto, para toda rama F de $(T_{\underline{X}}, v)$ dada por una sucesión finita (o infinita) de vértices $(x_i)_{i=1}^m$ (o $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$), existe otra rama G de $(T_{\underline{Y}}, w)$ que contiene los vértices $(f_i(x_{\Phi(i)}))_{i=1}^{k_0+1}$ ($(f_n(x_{\Phi(n)}))_{n \in \mathbb{N}}$). En particular, si F es geodésicamente completa también lo es G . De este modo, (f_n, Φ) induce una aplicación \hat{f} que envía ramas de $(T_{\underline{X}}, v)$ a ramas de $(T_{\underline{Y}}, w)$. Finalmente, sea $\hat{f} : (T_{\underline{X}}, v) \rightarrow (T_{\underline{Y}}, w)$ tal que si $t \leq t_1$ entonces $\hat{f}(F(t)) = w$ y si $t \in [t_k, t_{k+1}]$ entonces $\hat{f}(F(t)) = \tilde{f}(F)(k - 1 + \frac{t-t_k}{t_{k+1}-t_k})$ para cualquier rama F de $(T_{\underline{X}}, v)$. Veamos que esta aplicación está bien definida y es enraizada continua y métricamente propia.

Bien definida. Tomemos un punto común a dos ramas representado por $F(t) = G(t)$ y supongamos $t \in [t_k, t_{k+1}]$. La imagen vendrá dada por $\tilde{f}(F)(k - 1 + \frac{t-t_k}{t_{k+1}-t_k})$ o $\tilde{f}(G)(k - 1 + \frac{t-t_k}{t_{k+1}-t_k})$ pero como $F \equiv G$ en $[0, t_k]$, $F(i) = G(i) \forall i \leq t_k$. Por tanto $\tilde{f}(F)(i) = \tilde{f}(G)(i) \forall i \leq k + 1$, $\tilde{f}(F) \equiv \tilde{f}(G)$ en $[0, k + 1]$ y la imagen es única.

Es obviamente enraizada y continua y $\hat{f}^{-1}(B(w, k)) \subset B(v, t_{k+1})$, luego es métricamente propia.

Es claro que la elección de los t_k puede afectar a la aplicación inducida. A partir de otra sucesión $(t'_k)_{k \in \mathbb{N}}$ con las mismas condiciones, podemos inducir otra aplicación \hat{f}' entre los árboles pero considerando H la homotopía geodésica (3.2.10) de \hat{f} a \hat{f}' , como $\hat{f}(F(t_k)) = \hat{f}'(F(t'_k)) = G(k - 1)$, $H(T \setminus B(v, \max\{t_k, t'_k\})) \subset T' \setminus B(w, k - 1)$ o lo que es lo mismo $H^{-1}(B(w, k - 1)) \subset B(v, \max\{t_k, t'_k\}) \times I$. Por tanto, hay una homotopía métricamente propia entre las aplicaciones inducidas \hat{f} , \hat{f}' y a partir de un morfismo en **Tower-Set** podemos inducir una única clase de homotopía métricamente propia $[\hat{f}]_{mp}$ de aplicaciones enraizadas continuas y métricamente propias entre los árboles.

Proposición 5.3.2.1. \hat{f} es Lipschitz de constante 1.

Demostración. Si dos puntos x, x' están en la misma rama $x = F(t), x' = F(t')$ es claro que $d(x, x') \geq d(\hat{f}(x), \hat{f}(x'))$ ya que intervalos de longitud $t_{n+1} - t_n \geq 1$ se envían linealmente a intervalos de longitud 1.

Si x, x' no están en la misma rama $x = F(t), y = G(t')$ sea entonces $t_0 = \sup\{t | F(t) = G(t)\}$ y sea $y = F(t_0) = G(t_0)$. $d(x, x') = d(x, y) + d(y, x') \geq d(\hat{f}(x), \hat{f}(y)) + d(\hat{f}(y), \hat{f}(x')) \geq d(\hat{f}(x), \hat{f}(x'))$. \square

Como \hat{f} es métricamente propia y Lipschitz el corolario es obvio.

Corolario 5.3.2.2. \hat{f} es coarse.

5.4. Los funtores

Los morfismos en **Tower-Set** son clases de equivalencia de morfismos de sucesiones inversas y vamos a comprobar que estos se corresponden functorialmente con clases de homotopía métricamente propia de aplicaciones enraizadas continuas y métricamente propias entre los árboles.

Recordemos que \mathcal{T}^* es la categoría de árboles simpliciales enraizados con clases de homotopía métricamente propia de aplicaciones enraizadas continuas y métricamente propias.

Definición 5.4.1. Sea $\xi : \mathbf{Tower-Set} \rightarrow \mathcal{T}^*$ tal que $\xi(\underline{X}) = T_{\underline{X}}$ para cualquier sucesión inversa y $\xi(\underline{f}) = [\hat{f}]_{mp}$ para cualquier morfismo de sucesiones inversas.

Proposición 5.4.2. ξ es un functor.

Demostración. ξ está bien definido. Si $\underline{f} \sim \underline{g}$, entonces $\xi(\underline{f}) \simeq_{mp} \xi(\underline{g})$. Supongamos $(\underline{f}, \Phi) \sim (\underline{g}, \Psi)$. Entonces $\forall n \exists m_n > \Phi(n), \Psi(n)$ tal que $f_n \circ p_{\Phi(n)m_n} = g_n \circ p_{\Psi(n)m_n}$. Podemos asumir $m_n > t_n(\Phi), t'_n(\Psi), m_{n-1}$.

Para cualquier sucesión $\underline{x} = (x_1, \dots, x_{m_n})$ con $p_{im_n}(x_{m_n}) = x_i \forall i < m_n$, las sucesiones $(f_1(x_{\Phi(1)}), \dots, f_n(x_{\Phi(n)})) \subset \underline{f}(\underline{x})$ y $(g_1(x_{\Psi(1)}), \dots, g_n(x_{\Psi(n)})) \subset \underline{g}(\underline{x})$ son tales que $f_n(x_{\Phi(n)}) = f_n(p_{\Phi(n)m_n}(x_{m_n})) = g_n(p_{\Psi(n)m_n}(x_{m_n})) = g_n(x_{\Psi(n)})$. Por tanto, para cualquier rama F tal que $F(i) = x_i \forall i \leq m_n$, ocurre que $\tilde{f}(F)(i) = f_i(x_{\Phi(i)}) = g_i(x_{\Phi(i)}) = \tilde{g}(F)(i) \forall i \leq n$ y $\tilde{f}(F) \equiv \tilde{g}(F)$ en $[0, n]$.

Así, como $\forall t > m_n \hat{f}(F(t)), \hat{g}(F(t)) \subset T_{\underline{Y}} \setminus B(w, n)$, si consideramos la homotopía geodésica $H : T_{\underline{X}} \times I \rightarrow T_{\underline{Y}}$ de \hat{f} a \hat{g} es inmediato ver que $\forall n \in \mathbb{N} H_t(T \setminus B(v, m_n)) \subset T' \setminus B(w, n) \forall t$ o, lo que es equivalente, $H_t^{-1}(B(w, n)) \subset B(v, m_n) \forall t$ y por tanto H es una homotopía métricamente propia.

$\xi(id_{\mathbf{Tower-Set}}) = id_{\mathcal{T}^*}$. Si consideramos el representante de la identidad que es un morfismo a nivel y la identidad en cada uno, el morfismo inducido entre los árboles, suponiendo $t_k = \Phi(k+1) = k+1$, envía cada punto $F(t)$ con $t \leq 2$ a w y $F(t)$ con $t > 2$ a $F(t-2)$. Claramente, hay una homotopía métricamente propia de la identidad entre los árboles a esta contracción.

$\xi(g \circ f) = \xi(g) \circ \xi(f)$. Sean $(\underline{f}, \Phi) : \underline{X} \rightarrow \underline{Y}$ y $(\underline{g}, \Psi) : \underline{Y} \rightarrow \underline{Z}$ dos morfismos entre sucesiones inversas. Consideramos primero $\aleph = \Phi \circ \Psi$ y $h = g \circ f$. Para construir $\xi(f)$ y $\xi(g)$ definimos sucesiones $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ respectivamente, satisfaciendo la condición (5.1). Para $\xi(g \circ f)$, definimos $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ como $t_n = r_{s_{n+1}+1}$ (nótese que (5.1) se satisface en $(g \circ f, \aleph)$ para cualquier $t_n \geq r_{s_n}$). Entonces, cualquier rama F dada por una sucesión de vértices (x_1, \dots, x_n) con $t_k \leq n \leq t_{k+1}$ se envía a una rama G cuyos $k+1$ primeros vértices son $(w, h_1(x_{\aleph(1)}), \dots, h_k(x_{\aleph(k)}))$ y si $t \in [t_k, t_{k+1}]$ entonces $\hat{h}(F(t)) \in G[k-1, k]$. Si consideramos $\xi(g) \circ \xi(f)$ entonces podemos asumir que la rama F se envía a la misma rama G cuyos primeros $k+1$ vértices de G son $(w, g_1(f_{\Psi(1)}(x_{\Phi(\Psi(1))}), \dots, g_k(f_{\Psi(k)}(x_{\Phi(\Psi(k))})))$, y además $\forall t \in [r_{s_{k+1}+1}, r_{s_{k+2}+1}] = [t_k, t_{k+1}]$ entonces $\hat{g}(\hat{f}(F(t))) \subset G[k-1, k]$. Por tanto, la aplicación inducida \hat{h} no tiene por qué coincidir exactamente con $\hat{g} \circ \hat{f}$, pero ambas envían intervalos $[t_k, t_{k+1}]$ de las ramas a intervalos $[k-1, k]$, y coinciden en los vértices para los niveles t_k , todo ello por la elección de los $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Esto hace obvia la existencia de una homotopía métricamente propia entre ellas y por lo tanto $\xi(g \circ f) = \xi(g) \circ \xi(f)$. \square

Definición 5.4.3. Sea $\eta : \mathcal{T}^* \rightarrow \mathbf{Tower-Set}$ tal que para cualquier árbol enraizado (T, v) , $\eta(T, v) = (C_n, p_n, \mathbb{N})$ y para cualquier aplicación enraizada continua y métricamente propia f , $\eta(f) = \underline{f}$ la clase de equivalencia de (f_n, Φ_f) .

Proposición 5.4.4. η es un functor.

Demostración. η está bien definido. Si $f \simeq_{mp} f'$ entonces $(f_n, \Phi_f) \sim (f'_n, \Phi_{f'})$. Sea $H : T \times I \rightarrow T'$ una homotopía enraizada y métricamente propia de f a f' . Entonces $\forall n \exists m$ tal que $H^{-1}(B(w, n)) \subset B(v, m) \times I$ y claramente, $\forall k > m$, $\Phi_f(n), \Phi_{f'}(n)$ $f_n \circ p_{\Phi_f(n)k} = f'_n \circ p_{\Phi_{f'}(n)k}$ y por tanto $(f_n, \Phi_f) \sim (f'_n, \Phi_{f'})$.

Es inmediato ver que $\eta(id_{\mathcal{T}^*}) = id_{\mathbf{Tower-Set}}$.

$\underline{\eta(g \circ f)} = \underline{\eta(g)} \circ \underline{\eta(f)}$. Consideramos $f : (T, u) \rightarrow (T', v)$ y $g : (T', v) \rightarrow (T'', w)$. Sean $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión creciente de enteros tal que $g^{-1}(B(w, n)) \subset B(v, s_n)$ y $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión creciente de enteros tal que $f^{-1}(B(v, n)) \subset B(u, r_n)$. Podemos definir una sucesión $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de modo que $(g \circ f)^{-1}B(w, n) \subset B(u, t_n)$ haciendo $t_n = r_{s_n}$. Así $\Phi_{g \circ f} = \Phi_g \circ \Phi_f$ y $(g \circ f)_n = g_{t_n} \circ f_n$ y $\eta(g \circ f) = \eta(g) \circ \eta(f)$. \square

5.5. Equivalencia de categorías

Volvemos a usar el lema 3.6.5:

Teorema 5.5.1. η es una equivalencia de categorías.

Demostración. η es completo. Sea \underline{f} una clase de morfismos en $\mathbf{Tower-Set}$. Consideramos un representante (f_n, Φ) tal que $q_n \circ f_{n+1} = f_n \circ p_{\Phi(n)\Phi(n+1)}$. Esto nos permite asumir en la construcción de $\xi((f_n, \Phi))$ que $t_n = \Phi(n+1)$. Así, la aplicación entre los árboles $\hat{f} = \xi((f_n, \Phi))$ será $f(F(t)) = w$ si $t \leq \Phi(2)$ y $\hat{f}(F(t)) = \tilde{f}(F)(n-1 + \frac{t-\Phi(n+1)}{\Phi(n+2)-\Phi(n+1)})$ si $t \in [\Phi(n+1), \Phi(n+2)]$, donde \tilde{f} es la aplicación inducida entre las ramas. Basta ver que $\eta(\hat{f}) = (f'_n, \Psi) \sim (f_n, \Phi)$. Claramente, $\Psi(n) = \Phi(n+2)$ y si suponemos en la construcción de $\eta(\hat{f})$ que $t'_n = \Psi(n)$, entonces $f'_n = q_{n+2} \circ f_{n+2} = f_n \circ p_{\Phi(n)\Phi(n+2)}$ y obviamente, $(f'_n, \Psi) \sim (f_n, \Phi)$.

$\underline{\eta}$ es fiel. Si $\eta(f) \sim \eta(g)$ entonces $f \simeq_{mp} g$. Como ξ está bien definido esto es inmediato si vemos que para cualquier aplicación enraizada continua y métricamente propia $f : (T, v) \rightarrow (T', w)$, $\xi \circ \eta(f) \simeq_{mp} f$. $\xi \circ \eta(f) := \hat{f}$ es una aplicación enraizada continua y métricamente propia y sea H la homotopía geodésica de f a \hat{f} . Sea $\eta(f) := (f_n, \Phi)$ donde $\Phi(n) = t_n$ y $f_n : C_{t_n} \rightarrow C'_n$ se definen como vimos anteriormente. Si \tilde{f} es la aplicación inducida entre las ramas (que podemos asumir que es la misma para f que para \hat{f} ya que para

cada rama F de (T, v) , $\hat{f}(F) \subset f(F)$, la aplicación $\xi(\eta(f)) = \xi((f_n, \Phi)) = \hat{f}$ envía $F(t)$ a w si $t \leq \Phi(2)$ y si $t \in [\Phi(n), \Phi(n+1)]$ con $n \geq 2$, $\hat{f}(F(t)) = \tilde{f}(F)(n-2 + \frac{t-\Phi(n)}{\Phi(n+1)-\Phi(n)})$. Es claro, por la elección de $t_n = \Phi(n)$ que además $f(F(\Phi(n))) \subset T'_{\tilde{f}(F)(n-2)}$ para $t \in [\Phi(n), \Phi(n+1)]$ y por tanto, el camino más corto entre $f(F(t))$ y $\hat{f}(F(t))$ está contenido en $T'_{\tilde{f}(F)(n-2)}$. Por tanto $H^{-1}(B(w, n-2)) \subset B(v, \Phi(n)) \forall n \in \mathbb{N}$ y H es métricamente propia.

Finalmente, para toda sucesión inversa $\underline{X} = (X_n, p_n, \mathbb{N})$, $T_{\underline{X}}$ es tal que $C_n = \partial B(v, n) = X_n$ y $\eta(T_{\underline{X}}) = \underline{X}$. \square

Por 3.7.4 y 3.7.6 (ver también 5.3.2.1) también tenemos los siguientes corolarios.

Corolario 5.5.2. *Hay una equivalencia de categorías entre **Tower-Set** y la categoría de los árboles simpliciales enraizados con clases de homotopía Lipschitz (no expansivas) y métricamente propias de aplicaciones Lipschitz (no expansivas) métricamente propias entre árboles.*

Corolario 5.5.3. *Hay una equivalencia de categorías entre **Tower-Set** y la categoría de los árboles simpliciales enraizados con clases de homotopía coarse (métricamente propia) de aplicaciones coarse (métricamente propias) enraizadas y continuas.*

5.6. Propiedad de Mittag-Leffler desde el punto de vista de la equivalencia de Serre

Damos una definición de la propiedad de Mittag-Leffler restringida al caso particular en el que el conjunto dirigido es \mathbb{N} y la ponemos en términos de \mathbb{R} -árboles. Ver [45].

Definición 5.6.1. *Sea $\mathbf{X} = (X_n, p_n, \mathbb{N})$ una sucesión inversa en **Tower-C**. Decimos que \mathbf{X} es Mittag-Leffler (ML) si $\forall n_0 \in \mathbb{N} \exists n_1 > n_0$ tal que $\forall n > n_1$, $p_{n_0} \circ \cdots \circ p_{n-2} \circ p_{n-1}(X_n) = p_{n_0} \circ \cdots \circ p_{n_1-2} \circ p_{n_1-1}(X_{n_1})$.*

Nota 5.6.2. *Nótese que esta definición no depende de la categoría \mathcal{C} . De hecho \mathbf{X} es (ML) si y sólo si es (ML) como sucesión inversa en **Tower-Set**.*

Definición 5.6.3. *Decimos que $\alpha \in X_{n_0}$ es extensible hasta n_1 si existe algún $\beta \in X_{n_1}$ tal que $p_{n_0} \circ \cdots \circ p_{n_1-2} \circ p_{n_1-1}(\beta) = \alpha$.*

Nota 5.6.4. *En $T_{\underline{X}}$ esto significa que el camino que conecta α con la raíz se extiende a una rama de longitud al menos n_1 en el árbol. A su vez esta rama extendida conecta la raíz con un elemento $\beta \in X_{n_1}$.*

La propiedad de Mittag-Leffler se puede reformular como sigue:

Definición 5.6.5. *La sucesión inversa (X_n, p_n, \mathbb{N}) es (ML) si $\forall n_0 \exists n_1 > n_0$ tal que todo $\alpha \in X_{n_0}$ extensible hasta n_1 es extensible hasta $n \forall n > n_1$.*

Nota 5.6.6. *En $T_{\underline{X}}$ esto significa que para cada nivel n_0 existe algún nivel n_1 tal que para cada $\alpha \in X_{n_0}$ tal que el camino que lo conecta con la raíz se extiende a una rama de longitud al menos n_1 , entonces $\forall n > n_1$ ese camino se puede extender a alguna rama de longitud al menos n .*

Proposición 5.6.7. *Sea $\underline{X} = (X_n, p_n, \mathbb{N})$ una sucesión inversa y $T_{\underline{X}}$ el árbol correspondiente. Si \underline{X} es (ML), entonces para cada nivel n_0 existe un nivel $n_1 > n_0$ tal que para cada punto $\alpha \in X_{n_0}$ extensible hasta n_1 , el camino en $T_{\underline{X}}$ que conecta la raíz con el vértice α es extensible a una rama infinita.*

Demostración. (ML) significa, ver nota 5.6.6, que para cada nivel n_0 existe un nivel $n_1 > n_0$ tal que para cualquier vértice $\alpha \in X_{n_0}$ extensible hasta n_1 , entonces $\forall n > n_1$ el camino en el árbol que conecta la raíz con α se extiende a un camino de longitud al menos n . Para ver que este camino se extiende hasta una rama infinita del árbol procedemos por inducción. Primero lo extendemos hasta el nivel $n_0 + 1$.

Como la sucesión inversa es (ML), aplicamos esta propiedad al nivel $n_0 + 1$. Existe por tanto algún $N_1 > n_0 + 1$ tal que cualquier $\beta \in X_{n_0 + 1}$ extensible hasta N_1 es extensible hasta N , $\forall N > N_1$ (ver definición 5.6.5). No hay problema al asumir $N_1 > n_1$. Si aplicamos (ML) al nivel n_0 , es claro también que α es extensible hasta $N \forall N > N_1$. Esto implica que existe algún $\gamma \in X_N$ tal que $p_{n_0} \circ \dots \circ p_{N-2} \circ p_{N-1}(\gamma) = \alpha$, y que $\alpha' := p_{n_0 + 1} \circ \dots \circ p_{N-2} \circ p_{N-1}(\gamma) \in X_{n_0 + 1}$ es extensible hasta N_1 . Esto nos permite repetir el argumento de inducción, y por tanto, extender el camino hasta una rama infinita. \square

Es inmediato ver que:

Observación 5.6.8. *Un árbol es geodésicamente completo si y sólo si todas las aplicaciones encadenadas de la sucesión inversa inducida son sobreyectivas.*

Por tanto el subárbol maximal geodésicamente completo es el subárbol maximal para el que todas las aplicaciones encadenadas de su sucesión inversa son sobreyectivas.

En [45], [II. §6, 2], podemos encontrar el siguiente teorema referido a sistemas inversos.

Proposición 5.6.9. *\underline{X} es (ML) si y sólo si es isomorfo a un sistema inverso con aplicaciones encadenadas sobreyectivas.*

Con esto y el teorema 5.5.1 podemos obtener lo siguiente:

Proposición 5.6.10. *\underline{X} es (ML) si y sólo si existe una equivalencia de homotopía enraizada métricamente propia entre $T_{\underline{X}}$ y su subárbol geodésicamente completo maximal T_{∞} . Más aún, la homotopía se puede escoger para que sea un retracto de deformación.*

Demostración. Supongamos que \underline{X} es (ML). Por 5.6.7, para cada nivel n existe $t_n > n$ tal que para todo punto $\alpha \in X_n$ extensible hasta t_n el camino que conecta la raíz con el vértice α en $T_{\underline{X}}$ se extiende a una rama infinita.

Sea T_{∞} el subárbol geodésicamente completo maximal. Para cada punto $x \in T_{\underline{X}}$ sea $y_x \in T_{\infty}$ tal que $d(x, T_{\infty}) = d(x, y_x)$ y $j_x : [0, d(x, T_{\infty})] \rightarrow [x, y_x]$ la isometría del subintervalo de \mathbb{R} al único arco entre x e y_x . Sea $H : T_{\underline{X}} \times I \rightarrow T_{\underline{X}}$ tal que $H(x, t) = j_x(t \cdot d(x, T_{\infty}))$. Claramente H es una homotopía tal que $H_0 = id$ y $H_1 = r : T_{\underline{X}} \rightarrow T_{\infty}$ con $H(x, t) = x \ \forall t \in I \ \forall x \in T_{\infty}$ (T_{∞} es un retracto de deformación de $T_{\underline{X}}$ por 3.8.4 ya que la métrica de un árbol simplicial es propia cuando consideramos las aristas de longitud 1).

Esta homotopía H es métricamente propia. Para toda rama finita F de longitud $m \geq t_n$ existe una rama infinita que extiende la subrama de longitud n y por tanto la homotopía H manda los puntos de $T_{F(t_n)}$ a $T_{F(n)}$ y por tanto $H^{-1}(B(w, n)) \subset B(v, t_n)$.

Al contrario, esta equivalencia implica que la sucesión inversa es isomorfa a la sucesión inversa inducida por el subárbol geodésicamente completo maximal, cuyas aplicaciones encadenadas son obviamente sobreyectivas. \square

Si consideramos dos sucesiones inversas equivalentes si y sólo si son isomorfias y la correspondiente equivalencia de aplicaciones como hacen Mardešić y Segal para definir la categoría *shape* en [45] I §2,3 obtenemos el siguiente resultado:

Proposición 5.6.11. *Hay una equivalencia de categorías entre clases de sucesiones inversas (ML) con clases de morfismos entre ellas y clases de árboles simpliciales enraizados geodésicamente completos (bajo isomorfismo) con clases de homotopía métricamente propia de aplicaciones enraizadas continuas métricamente propias.*

La condición sobre los árboles de ser simpliciales puede omitirse incluso por 4.2.1. Si consideramos lo que ocurre en los finales en esta proposición podemos obtener también el siguiente resultado.

Proposición 5.6.12. *Para todo \mathbb{R} -árbol (T, v) existe un \mathbb{R} -árbol simplicial (T', w) tal que existe un homeomorfismo bi-Lipschitz entre $end(T, v)$ y $end(T', w)$.*

Demostración. Si consideramos la aplicación inducida $\tilde{f} : \text{end}(T', w) \rightarrow \text{end}(T, v)$ es claramente una biyección y $\frac{1}{e}d(F, G) < d(\tilde{f}(F), \tilde{f}(G)) \leq d(F, G)$. \square

Este resultado, junto con 3.6.6 implica:

Corolario 5.6.13. *Para todo espacio ultramétrico de diámetro ≤ 1 (X, d) , existe un \mathbb{R} -árbol simplicial enraizado (T', w) tal que $\text{end}(T, v)$ es bi-Lipschitz equivalente a (X, d) .*

Ahora, usando la equivalencia de categorías del capítulo tres, podemos incluso establecer equivalencias de categorías entre sucesiones inversas (ML) con estas clases de morfismos y espacios ultramétricos. Consideremos la categoría \mathcal{U}^* cuyos objetos son clases de homeomorfismo uniforme de espacios ultramétricos completos de diámetro ≤ 1 y cuyos morfismos son clases de aplicaciones uniformemente continuas donde dos aplicaciones f, f' están relacionadas si el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i} & X' \\ f \downarrow & & \downarrow f' \\ Y & \xrightarrow{j} & Y' \end{array}$$

con i, j homeomorfismos uniformes.

Del mismo modo, sea \mathcal{S}^* la categoría cuyos objetos son clases de homotopía métricamente propia de árboles simpliciales enraizados (ML) y cuyos morfismos son clases de morfismos en \mathcal{T}^* donde dos están relacionados, $f \sim f'$, si el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{i} & S' \\ f \downarrow & & \downarrow f' \\ T & \xrightarrow{j} & T' \end{array}$$

con i, j equivalencias de homotopía métricamente propia enraizada. Entonces:

Corolario 5.6.14. *Hay una equivalencia de categorías entre \mathcal{U}^* y \mathcal{S}^* .*

Sea $\mathbf{Tower-Set}_{ML}^*$ la categoría cuyos objetos son clases, bajo isomorfismo, de sucesiones inversas (ML) y cuyos morfismos son clases de morfismos en $\mathbf{Tower-Set}$ donde identificamos $f \sim f'$ si el diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \underline{X} & \xrightarrow{i} & \underline{X}' \\ \underline{f} \downarrow & & \downarrow \underline{f}' \\ \underline{Y} & \xrightarrow{j} & \underline{Y}' \end{array}$$

con i, j isomorfismos en **Tower-Set**.

Corolario 5.6.15. *Hay una equivalencia de categorías entre $\mathbf{Tower-Set}_{ML}^*$ y \mathcal{U}^**

Corolario 5.6.16. *Los morfismos shape en el sentido de Mardesić-Segal entre sucesiones inversas (ML), están representados por clases de aplicaciones uniformemente continuas entre tipos de homeomorfismo uniforme de espacios ultramétricos acotados.*

5.7. Morfismos a nivel y aplicaciones simpliciales

En el ámbito de los sistemas inversos son de gran interés los morfismos a nivel, que aparecen cuando dos sistemas inversos están definidos sobre un mismo conjunto dirigido y la aplicación que relaciona los índices es la identidad. En este caso veremos que si tenemos un morfismo a nivel entre sucesiones inversas, éste induce una aplicación simplicial entre los árboles que además preserva la distancia a la raíz y está en la misma clase de homotopía métricamente propia que la aplicación obtenida mediante el functor ξ definido en 5.4.1.

Tomamos la siguiente definición también de [45].

Definición 5.7.1. $(f_n, \Phi) : (X_n, p_n, \mathbb{N}) \rightarrow (Y_n, q_n, \mathbb{N})$ es un morfismo a nivel de sucesiones inversas si $\Phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ es la identidad y $\forall n \in \mathbb{N} \quad f_n \circ p_n = q_n \circ f_{n+1}$.

Proposición 5.7.2. *Un morfismo a nivel $(f_n, \Phi) : \underline{X} \rightarrow \underline{Y}$ induce una aplicación simplicial enraizada $f : T_{\underline{X}} \rightarrow T_{\underline{Y}}$ que preserva la distancia a la raíz. Más aún, esta aplicación simplicial está en la misma clase de homotopía métricamente propia que la aplicación métricamente propia inducida por el functor entre los árboles.*

Demostración. Sea $f(v) = w$. Como $f_n : X_n \rightarrow Y_n$ envía vértices a vértices $\forall n \in \mathbb{N}$ y $\forall x_n \in X_n$ sea $f(x_n) := f_n(x_n)$. Una arista en $T_{\underline{X}}$ es

un par $[x_n, x_{n+1}]$ con $x_n \in X_n, x_{n+1} \in X_{n+1}$ y $p_n(x_{n+1}) = x_n$ y su imagen $f([x_n, x_{n+1}])$ será $[f_n(x_n), f_{n+1}(x_{n+1})]$ que es una arista en $T_{\underline{Y}}$ ya que $q_n(f_{n+1}(x_{n+1})) = f_n(p_n(x_{n+1})) = f_n(x_n)$.

Para construir la aplicación métricamente propia $\xi(f)$ podemos suponer $t_n := n + 1$ y de este modo $\forall t \geq 2$, \hat{f} es tal que $\hat{f}(F(t)) = \tilde{f}(F)(t - 2)$, y $\forall n \geq 2$ $\hat{f}(x_n) = q_{n-1}(q_n(f_n(x_n)))$. En vista de esto la equivalencia entre las dos aplicaciones es inmediata. \square

Por [45] I §1,3:

Proposición 5.7.3. *Sea $(f_n, \Phi) : \underline{X} \rightarrow \underline{Y}$ un representante de un morfismo de **Tower-C**. Entonces existen dos sucesiones inversas $\underline{X}', \underline{Y}'$, isomorfismos $i : \underline{X} \rightarrow \underline{X}', j : \underline{Y} \rightarrow \underline{Y}'$ en **Tower-C** y (f'_n, id) un morfismo de nivel de modo que $j \circ (f_n, \Phi) = (f'_n, id) \circ i : \underline{X} \rightarrow \underline{Y}'$.*

Por tanto, si consideramos la categoría **Tower-Set*** de clases de equivalencia, bajo isomorfismo, de sucesiones inversas con las correspondientes clases de equivalencia de morfismos (ver [45]) entonces en todas las clases (en particular para todo morfismo *shape*) hay un representante que es un morfismo a nivel. Por tanto, en la categoría equivalente de clases de árboles simpliciales enraizados, en cada clase de morfismos hay una aplicación simplicial que preserva la distancia a la raíz. Así pues, podemos reducir esta categoría a clases, bajo isomorfismo, de árboles simpliciales enraizados con clases de aplicaciones simpliciales que preservan la distancia a la raíz.

Teorema 5.7.4. *Hay una equivalencia de categorías entre **Tower-Set*** y la categoría de clases, por isomorfismo, de árboles simpliciales enraizados cuyos morfismos son clases de homotopía métricamente propia de aplicaciones simpliciales que preservan la distancia a la raíz.*

Nota 5.7.5. *Todo morfismo *shape* en **Tower-Set** se puede representar mediante una aplicación simplicial entre árboles simpliciales enraizados que preserva la distancia a la raíz.*

5.8. Pro-grupos

En esta sección estudiaremos algunos resultados clásicos en pro-grupos que aparecen en [45], en términos de \mathbb{R} -árboles. Con estas herramientas obtendremos demostraciones alternativas, en términos geométricos y algún caso, significativamente diferentes, de algunos de los teoremas.

Lema 5.8.1. *Si (G_n, p_n) es una sucesión inversa en **Tower-Grp**, con **Grp** la categoría de grupos y homomorfismos, y consideramos la topología discreta en cada G_n , entonces $G = \varprojlim(G_n)$ con la topología del límite inverso es un grupo topológico completo ultramétrico. Más aún, las traslaciones y la inversa son isometrías.*

Demostración. La topología del límite inverso, esto es, la topología inducida como subespacio de $\prod_{n \in \mathbb{N}} G_n$, si consideramos la topología discreta en cada G_n coincide con la topología de la ultramétrica del espacio de finales del árbol correspondiente a la sucesión inversa en **Tower-Grp**.

En este límite inverso, las traslaciones y la inversa son isometrías. Sea $\underline{g} := (g_n)_{n \in \mathbb{N}}, \underline{h} := (h_n)_{n \in \mathbb{N}} \in G$ tal que $d(\underline{g}, \underline{h}) = e^{-n_0}$, esto es $g_n = h_n \forall n \leq n_0$ y $g_{n_0+1} \neq h_{n_0+1}$. Sea $\underline{k} := (k_n)_{n \in \mathbb{N}} \in G$ y la traslación $G \rightarrow G$ dada por $\underline{x} := (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow \underline{k} \cdot \underline{x} = (k_n \cdot x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Claramente, $k_n \cdot g_n = k_n \cdot h_n \forall n \leq n_0$ y $k_{n_0+1} \cdot g_{n_0+1} \neq k_{n_0+1} \cdot h_{n_0+1}$ y por tanto $d(\underline{k} \cdot \underline{g}, \underline{k} \cdot \underline{h}) = e^{-n_0}$.

Del mismo modo $g_n^{-1} = h_n^{-1} \forall n \leq n_0$ y $g_{n_0+1}^{-1} \neq h_{n_0+1}^{-1}$ y por tanto $d(\underline{g}^{-1}, \underline{h}^{-1}) = d(\underline{g}, \underline{h})$. \square

Lema 5.8.2. *Si (G_n, p_n) y (H_n, q_n) son sucesiones inversas en **Tower-Grp** con la topología discreta en cada nivel, $G = \varprojlim(G_n)$ y $H = \varprojlim(H_n)$ con la topología del límite inverso y $f : G \rightarrow H$ continua entonces f es uniformemente continua.*

Demostración. Como es continua en 0_G , $\forall \varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\forall g \in G$ con $d(g, 0_G) < \delta$ entonces $d(f(g), 0_H) < \varepsilon$.

Sean $h, h' \in G$ tales que $d(h, h') < \delta$. Entonces, como las traslaciones son isometrías, $d(h'^{-1} \cdot h, 0_G) < \delta$ y por tanto $d(f(h'^{-1} \cdot h), 0_H) < \varepsilon$ y $d(f(h'^{-1} \cdot h), 0_H) = d(f(h')^{-1} \cdot f(h), 0_H) = d(f(h), f(h')) < \varepsilon$. \square

Por 5.6.7

Lema 5.8.3. *Si (G_n, p_n) es una sucesión inversa (ML) en **Tower-Grp**, $G = \varprojlim(G_n)$ y $\pi_n : G \rightarrow G_n$ la proyección natural entonces para cada n existe $m > n$ tal que $p_{nm}(G_m) = \pi_n(G)$.*

Con esto podemos comprobar cómo toda la información de una sucesión inversa de grupos (ML) está contenida en el límite inverso.

Proposición 5.8.4. *Si (G_n, p_n) es una sucesión inversa (ML) en **Tower-Grp**, $G = \varprojlim(G_n)$ y $\pi_n : G \rightarrow G_n$ la proyección natural entonces $(G_n, p_n) \approx (\pi_n(G), p_n|)$ son isomorfos en **Tower-Grp**.*

Demostración. Sea $i_n : \pi_n(G) \rightarrow G_n$ la inclusión, que es obviamente un homomorfismo. (i_n) es un morfismo a nivel en **Tower-Grp**. Para definir $(f_n, \Phi) : (G_n, p_n) \rightarrow (\pi_n(G), p_n)$ consideramos para cada n un $m > n$ que cumpla la condición de (ML) y definimos $\Phi(n) = m$, entonces por 5.8.3 $p_{nm}(G_m) = \pi_n(G)$ y por tanto podemos definir $f_n := p_{nm} : G_m \rightarrow \pi_n(G)$. Es claro que $(f_n) \circ (i_n) \sim id_{(\pi_n(G))}$ y $(i_n) \circ (f_n) \sim id_{(G_n)}$. \square

Un morfismo $f : X \rightarrow Y$ en una categoría arbitraria \mathcal{C} es un monomorfismo si $f \circ g = f \circ g'$ implica que $g = g'$ para cualquier par de morfismos $g, g' : X' \rightarrow X$. De igual modo, $f : X \rightarrow Y$ es un epimorfismo si $g \circ f = g' \circ f$ implica que $g = g'$ para cualquier par de morfismos $g, g' : Y \rightarrow Y'$. Las siguientes caracterizaciones de monomorfismo y epimorfismo en pro-grupos están extraídas de [45] y adaptadas al caso particular de sucesiones inversas de grupos.

Lema 5.8.5. Sean $\underline{G} = (G_n, p_n)$ y $\underline{H} = (H_n, q_n)$ sucesiones inversas de grupos y sea $\underline{f} : \underline{G} \rightarrow \underline{H}$ un morfismo en **Tower-Grp** dado por un morfismo a nivel (f_n) . \underline{f} es un monomorfismo si y sólo si se da la siguiente condición:

(M) Para todo n existe algún $m \geq n$ tal que

$$\text{Ker}(f_m) \subset \text{Ker}(p_{nm})$$

Lema 5.8.6. Sean $\underline{G} = (G_n, p_n)$ y $\underline{H} = (H_n, q_n)$ sucesiones inversas de grupos y sea $\underline{f} : \underline{G} \rightarrow \underline{H}$ un morfismo en **Tower-Grp** dado por un morfismo a nivel (f_n) . \underline{f} es un epimorfismo si y sólo si se da la siguiente condición:

(E) Para todo n existe algún $m \geq n$ tal que

$$\text{Im}(q_{nm}) \subset \text{Im}(f_n)$$

También se prueba en [45] lo siguiente:

Proposición 5.8.7. Sea $\underline{f} : \underline{G} \rightarrow \underline{H}$ un morfismo en **Tower-Grp**. \underline{f} es un isomorfismo en **Tower-Grp** si y sólo si es un monomorfismo y un epimorfismo.

Usando estas caracterizaciones se demuestran los siguientes resultados sobre morfismos a nivel entre sucesiones inversas de grupos.

Proposición 5.8.8. Sea $(f_n) : \underline{G} \rightarrow \underline{H}$ un morfismo a nivel de sucesiones inversas de grupos que induce un isomorfismo de grupos $\tilde{f} : \varprojlim(\underline{G}) \rightarrow \varprojlim(\underline{H})$. Si \tilde{f} es abierta y \underline{G} tiene la propiedad de (ML), entonces el morfismo inducido $\underline{f} : \underline{G} \rightarrow \underline{H}$ es un monomorfismo en **Tower-Grp**.

Demostración. Como \tilde{f} es biyectiva y abierta, $\forall \varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $d(\tilde{f}(\underline{g}), 0_H) < \delta$ entonces $d(\underline{g}, 0_G) < \varepsilon$. La métrica en el límite inverso es la ultramétrica como espacio de finales de un árbol, luego para $\underline{g} = (g_n)_{n \in \mathbb{N}} \in G$, $d(\underline{g}, 0_G) = e^{-\sup\{n | g_n = 0\}}$.

Queremos comprobar (M) para (f_n) . Para todo n_0 sea $\varepsilon = e^{-n_0}$. Sea $\delta > 0$ con la condición indicada anteriormente y consideremos $m_0 > -\ln(\delta)$. Como (G_n, p_n) es (ML) sea $m_1 > m_0$ tal que $p_{m_0 m_1}(G_{m_1}) = \pi_{m_0}(G)$ (ver 5.8.3).

Si $x_{m_1} \in \text{Ker}(f_{m_1})$, $p_{m_0 m_1}(x_{m_1}) \in \text{Ker}(f_{m_0})$ como (f_n) es un morfismo a nivel y el diagrama conmuta.

Sea $\underline{g} = (g_n)_{n \in \mathbb{N}} \in G$ tal que $\pi_{m_0}(\underline{g}) = g_{m_0} = p_{m_0 m_1}(x_{m_1})$. Como (f_n) es un morfismo a nivel $g_n \in \text{Ker}(f_n) \forall n \leq m_0$. Entonces $f_n(g_n) = 0 \forall n \leq m_0$ y $d(\tilde{f}(\underline{g}), 0_H) \leq e^{-m_0} < \delta$. Por tanto $d(\underline{g}, 0_G) \leq \varepsilon = e^{-n_0}$ lo que implica que $g_n = 0 \forall n \leq n_0$ donde $0 = g_{n_0} = p_{m_0 m_1}(x_{m_1})$ y finalmente $x_{m_1} \in \text{Ker}(p_{m_0 m_1})$. \square

Proposición 5.8.9. *Sea $(f_n) : \underline{G} \rightarrow \underline{H}$ un morfismo a nivel de sucesiones inversas de grupos tal que la aplicación inducida $\tilde{f} : \varprojlim(\underline{G}) \rightarrow \varprojlim(\underline{H})$ es sobreyectiva. Si \underline{H} es (ML), entonces el morfismo inducido $\underline{f} : \underline{G} \rightarrow \underline{H}$ es un epimorfismo en **Tower-Grp**.*

Demostración. Tenemos que comprobar (E) para (f_n) . Sea $n_0 \in \mathbb{N}$. Como \underline{H} es (ML) existe algún $m_0 > n_0$ tal que $q_{n_0 m_0}(H_{m_0}) = \pi_{m_0}(H)$. Si $y_{m_0} \in H_{m_0}$ entonces $q_{n_0 m_0}(y_{m_0}) \in q_{n_0 m_0}(H_{m_0}) = \text{Im}(q_{n_0 m_0})$. Sea $\underline{h} = (h_n)_{n \in \mathbb{N}} \in H$ tal que $\pi_{n_0}(\underline{h}) = h_{n_0} = p_{n_0 m_0}(y_{m_0})$. Como \tilde{f} es sobreyectiva existe algún $\underline{g} = (g_n)_{n \in \mathbb{N}} \in G$ tal que $\tilde{f}(\underline{g}) = \underline{h}$ y esto implica que $f_n(g_n) = h_n = \pi_n(\underline{h}) \forall n$, y por tanto $h_{n_0} = q_{n_0 m_0}(y_{m_0}) \subset f_{n_0}(G_{n_0}) = \text{Im}(f_{n_0})$. \square

Para el teorema 5.8.12 necesitaremos el siguiente resultado, que proviene del teorema de la aplicación abierta para grupos topológicos. Véase, por ejemplo, [29] o [35].

Proposición 5.8.10. *Si G y H son grupos topológicos completamente metrizables y separables y $h : G \rightarrow H$ es un homomorfismo sobreyectivo y continuo entonces h es abierto.*

Lema 5.8.11. *Sea (G_n, p_n) una sucesión inversa en **Tower-Grp**. Entonces $G = \varprojlim(\underline{G})$ es separable si y sólo si $\forall n \in \mathbb{N}$ $\pi_n(G)$ es numerable.*

Demostración. Si $\pi_n(G)$ es numerable y consideramos para cada n y para cada elemento $g_n \in \pi_n(G)$ un elemento $g \in G$ tal que $\pi_n(g) = g_n$ tenemos un conjunto numerable denso. Si existe algún n con $\pi_n(G)$ no numerable entonces $\{\pi_n^{-1}(g_n) | g_n \in \pi_n(G)\}$ define una partición no numerable de G , por tanto, G no es separable. \square

Podemos obtener ahora como corolario el siguiente teorema que aparece prácticamente igual en [45] (II, §6,2 Teorema 12) donde se prueba usando una sucesión exacta y el primer límite derivado. Nosotros damos aquí una versión ligeramente más fina con una prueba directa y geoméricamente intuitiva.

Teorema 5.8.12. *Sea $(f_n) : \underline{G} \rightarrow \underline{H}$ un morfismo a nivel de sucesiones inversas de grupos que induce un isomorfismo $\tilde{f} : \varprojlim(G_n) \rightarrow \varprojlim(H_n)$. Si \underline{G} y \underline{H} tienen la propiedad de (ML) y todo $\pi_n(G)$ es numerable, entonces el morfismo inducido $\underline{f} : \underline{G} \rightarrow \underline{H}$ es un isomorfismo en **Tower-Grp**.*

Demostración. Como \tilde{f} es sobreyectiva $\pi_n(H)$ es también numerable y por el lema 5.8.11 G y H son separables. Como \tilde{f} es la aplicación inducida entre los límites inversos por un morfismo a nivel, puede considerarse como la aplicación inducida entre los finales por una aplicación métricamente propia enraizada y continua entre los árboles y por tanto es uniformemente continua con la ultramétrica. Por tanto, por 5.8.10 es abierta y usando 5.8.8 y 5.8.9 tenemos que el morfismo inducido en **Tower-Grp** \underline{f} es un monomorfismo y un epimorfismo y por lo tanto un isomorfismo en **Tower-Grp** (ver 5.8.7). \square

5.9. Árbol de morfismos *shape*

En este capítulo, hasta ahora hemos relacionado categorías de sucesiones inversas con categorías de árboles simpliciales y hemos mencionado cómo se puede usar esto para describir un morfismo *shape* como una aplicación entre árboles. En esta última sección vamos a describir los espacios de morfismos *shape* entre compactos métricos conexos de un modo similar. Para hacer esto, nos vamos a apoyar en que los morfismos *shape* se pueden representar por aplicaciones aproximativas, y las aplicaciones aproximativas entre dos espacios son el límite inverso de una sucesión inversa de aplicaciones. Por tanto, esta sucesión inversa se corresponderá con un árbol, las ramas infinitas de dicho árbol serán las aplicaciones aproximativas, es decir, los morfismos *shape*, y la ultramétrica entre estos como espacio de finales del árbol va a ser equivalente, por homeomorfismo uniforme, a la descrita por M. Morón y F. R. Ruiz del Portal en [50].

Límites inversos y aplicaciones aproximativas Dado Y un compacto inmerso en el cubo de Hilbert I^∞ , Borsuk prueba en [9] que existe una sucesión inversa

$$Y_1 \xleftarrow{p_1} Y_2 \xleftarrow{p_2} \dots$$

tal que $\lim_{\leftarrow} Y_k = Y$ con $Y_k \subset I^\infty$ prismas en el sentido de Borsuk [9] (Y_k es homeomorfo a un producto cartesiano $P \times I^\infty$ con P un poliedro compacto) tal que Y_k es un entorno de Y , $Y_{k+1} \subset Y_k$ y p_i la inclusión. Sea X otro compacto métrico y $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ una aplicación aproximativa de X hacia Y en el sentido de Borsuk [14] con $f_k : X \rightarrow Y_k$.

$$\begin{array}{ccccccc} Y_1 & \longleftarrow & Y_2 & \longleftarrow & Y_3 & \longleftarrow & \cdots \\ & & \nearrow f_1 & & \nearrow f_2 & & \\ & & X & & & & \end{array}$$

Proposición 5.9.1. *Dado $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ con $f_k : X \rightarrow Y_k$ una aplicación aproximativa existe $\{f'_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ con $f'_k : X \rightarrow Y_k$ una aplicación aproximativa tal que $p_k \circ f'_{k+1} \simeq f'_k$ en $Y_k \quad \forall k \in \mathbb{N}$ y $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}} \simeq \{f'_k\}_{k \in \mathbb{N}}$.*

Demostración. Por la definición de aplicación aproximativa sabemos que $\forall N \exists m(N)$ tal que $p_t \circ f_{t+1} \simeq f_t$ en $Y_N \quad \forall t \geq m(N)$.

Para $N_1 = 1$ existe m_1 tal que $p_t \circ f_{t+1} \simeq f_t$ en $Y_1 \quad \forall t \geq m_1$. Definimos $g_{N_1} := p_1 \circ p_2 \circ \dots \circ p_{m_1-1} \circ f_{m_1} : X \rightarrow Y_1$. Sea ahora $N_2 = m_1$, entonces existe m_2 tal que $p_t \circ f_{t+1} \simeq f_t$ en $Y_{N_2} \quad \forall t \geq m_2$. Definimos pues $g_{N_2} := p_{m_1} \circ p_{m_1+1} \circ \dots \circ p_{m_2-1} \circ f_{m_2} : X \rightarrow Y_{N_2}$. De este modo podemos construir una sucesión inversa $\{Y_{N_j}\}$

$$Y_{N_1} \xleftarrow{p_{N_2 N_1}} Y_{N_2} \xleftarrow{p_{N_3 N_2}} \dots$$

con $p_{N_{i+1} N_i}$ la inclusión natural ($p_{N_{i+1} N_i} = p_{N_i} \circ p_{N_i+1} \circ \dots \circ p_{N_{i+1}}$) que es equivalente a $\{Y_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ al ser $\{N_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ cofinal en \mathbb{N} .

Por tanto, tenemos otra aplicación aproximativa de X hacia Y $\{g_{N_i}\}_{i \in \mathbb{N}}$ con $g_{N_i} := p_{m_{i-1}} \circ p_{m_{i-1}+1} \circ \dots \circ p_{m_i-1} \circ f_{m_i} : X \rightarrow Y_{N_i}$. Claramente $g_{N_i} \simeq p_{N_{i+1}}^{N_i} \circ g_{N_{i+1}}$ en $Y_{N_i} \quad \forall i$.

$$\begin{array}{ccccccc} Y_1 & \longleftarrow & Y_{N_2} & \longleftarrow & Y_{N_3} & \longleftarrow & \cdots \\ & & \nearrow g_1 & & \nearrow g_{N_2} & & \\ & & X & & & & \end{array}$$

Podemos definir ahora la aplicación aproximativa $\{g_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de modo que $g_i := p_{N_i}^i \circ g_{N_i} : X \rightarrow Y_i \quad \forall N_{i-1} < i < N_i$.

Es fácil ver que representa el mismo morfismo *shape*. Siguiendo la teoría de Borsuk, para cualquier entorno V de Y existe i_0 tal que $Y_{N_i} \subset V \quad \forall i \geq i_0$, y resulta inmediato que $\{g_i\}_{i \in \mathbb{N}} \simeq \{g_{N_i}\}_{i \in \mathbb{N}} \simeq \{f_i\}_{i \in \mathbb{N}}$.

Por tanto, para cualquier morfismo *shape* existe un representante que toma la forma de una aplicación aproximativa con dicha condición. \square

Sea $[X, Y_k]$ el conjunto de clases de homotopía de aplicaciones continuas de X en Y_k . Como Y_k es un prisma, podemos probar que $\text{card}([X, Y_k]) \leq \aleph_0$. $p_k : Y_{k+1} \rightarrow Y_k$ induce una aplicación $p_k^* : [X, Y_{k+1}] \rightarrow [X, Y_k]$ y por tanto $([X, Y_k], p_k^*)$ es una sucesión inversa en **Tower-Set**. Un elemento del límite inverso es en este caso una aplicación aproximativa. Entonces, en el árbol correspondiente a este sistema inverso, $(T_{X,Y}, v)$, las ramas infinitas se corresponden con las aplicaciones aproximativas.

Proposición 5.9.2. *Hay una biyección entre las clases de homotopía de aplicaciones aproximativas de X hacia Y y las ramas infinitas de $T_{X,Y}$.*

Demostración. Claramente, una rama infinita del árbol representa una aplicación aproximativa, y por la proposición 5.9.1 cada clase de aplicaciones aproximativas tiene un representante que conforma una rama infinita de $T_{X,Y}$. \square

Notación: $T_{X,Y}^\infty$ denotará el árbol podado (subárbol geodésicamente completo maximal) de $T_{X,Y}$.

Teorema 5.9.3. *Consideremos $(\text{Sh}(X, Y), d)$ el espacio de morfismos shape definido en [50]. Entonces, $\text{end}(T_{X,Y}^\infty)$ y $(\text{Sh}(X, Y), d)$ son uniformemente homeomorfos.*

Demostración. Es bien conocida la biyección entre morfismos *shape* y clases de homotopía de aplicaciones aproximativas, ver [45]. Por tanto, por 5.9.2 tendremos también la biyección entre morfismos *shape* y ramas de $T_{X,Y}^\infty$.

$\forall \varepsilon > 0$ existe n_0 tal que $Y_k \subset B(Y, \frac{\varepsilon}{2}) \quad \forall k \geq n_0$. Sean entonces F y G dos ramas cualesquiera de $T_{X,Y}^\infty$ tales que $\tilde{d}(F, G) < \delta = e^{-n_0}$ con la métrica \tilde{d} de $\text{end}(T_{X,Y}^\infty)$. F y G representan dos aplicaciones aproximativas $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ y $\{g_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ tales que $f_k \simeq g_k$ en $Y_k \quad \forall k \leq n_0$ y como $p_k \circ f_{k+1} \simeq f_k$ en $Y_k \quad \forall k \in \mathbb{N}$ tenemos que $f_k \simeq g_k$ en Y_{n_0} y en particular en $B(Y, \frac{\varepsilon}{2}) \quad \forall k \geq n_0$, y por tanto para los respectivos morfismos *shape* $\underline{f}, \underline{g}$, $d(\underline{f}, \underline{g}) < \varepsilon$.

En el otro sentido, $\forall \varepsilon > 0$ existe n_0 tal que $e^{-n} < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$ y como Y_{n_0} es un entorno de Y , existe $\delta > 0$ tal que $B(Y, 2 \cdot \delta) \subset Y_{n_0}$. Tomemos dos morfismos *shape* cualesquiera representados por dos aplicaciones aproximativas $\underline{f}, \underline{g}$ y tales que $d(\underline{f}, \underline{g}) < \delta$. Esto implica la existencia de algún n_1 tal que $\underline{f}_k \simeq \underline{g}_k$ en $B(Y, 2 \cdot \delta)$ y en particular en $Y_{n_0} \quad \forall k \geq n_1$, y como $p_k^{n_0} \circ \underline{f}_k \simeq p_k^{n_0} \circ \underline{g}_k$ en Y_{n_0} las correspondientes ramas F, G coinciden al menos en $[0, e^{-n_0}]$ y $\tilde{d}(F, G) < \varepsilon$. \square

Nota 5.9.4. *Nótese que este resultado es independiente de la elección de los prismas Y_k .*

Cabe preguntarse en este momento si este homeomorfismo podría cumplir alguna condición más fuerte como ser bi-Lipschitz o bi-Hölder pero no es así como podemos ver a continuación.

Ejemplo 5.9.5. Sea $X = \{*\}$ un único punto y $Y = \{1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots, 0\}$.

Los morfismos *shape* están representados por las aplicaciones

$$Sh(X, Y) := \begin{cases} \alpha_n & \text{tal que } \alpha_n(*) = \{\frac{1}{2^n}\}, \\ \alpha_0 & \text{tal que } \alpha_0(*) = \{0\} \end{cases}$$

Claramente $d(\alpha_0, \alpha_n) = \frac{1}{2^{n+1}}$ y $d(\alpha_n, \alpha_{n+1}) = \frac{1}{2^{n+2}}$ en $(Sh(X, Y), d)$.

Podemos elegir ahora una sucesión inversa de entornos compactos $\{Y_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ con $Y_k \subset Y_{k+1}$ y $p_k : Y_{k+1} \rightarrow Y_k$ la inclusión natural, de modo que

$\alpha_i \simeq \alpha_j$ (esto es $\alpha_i(*)$ y $\alpha_j(*)$ están en la misma componente conexa por caminos) en $Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_1} \quad \forall i, j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, con $n_1 > -\ln\left(\frac{1}{4}\right)$ y

$\alpha_i \simeq \alpha_j$ en $Y_{n_{k-1}+1}, \dots, Y_{n_k} \quad \forall i, j \geq k-1$, con $n_k > -k \cdot \ln\left(\frac{(\frac{1}{2^{k+1}})}{k}\right)$
 $\forall k \geq 2$.

En este caso está claro que $\tilde{d}(\alpha_{k-1}, \alpha_k) = e^{-n_k} < \left(\frac{(\frac{1}{2^{k+1}})}{k}\right)^k = \left(\frac{d(\alpha_{k-1}, \alpha_k)}{k}\right)^k$. Por tanto, para cualquier constante $C > 0$ y $0 < l < 1$ existe k_0 tal que $\forall k > k_0$
 $C \cdot (\tilde{d}(\alpha_{k-1}, \alpha_k))^l < C \cdot (\tilde{d}(\alpha_{k-1}, \alpha_k))^{\frac{1}{k}} < k \cdot (\tilde{d}(\alpha_{k-1}, \alpha_k))^{\frac{1}{k}} < d(\alpha_{k-1}, \alpha_k)$
y por tanto, el homeomorfismo uniforme no es bi-Hölder.

Mediante estos árboles de morfismos *shape* podemos volver a obtener el siguiente resultado de [50] referente a cómo la composición induce aplicaciones uniformemente continuas entre los espacios de morfismos *shape*.

Teorema 5.9.6. Sean X, Y, Z compactos métricos y $F : X \rightarrow Y$ un morfismo *shape*. Si construimos, a partir de sucesiones inversas de entornos encajados que tengan por límite X e Y , $T_{Z,X}$ y $T_{Z,Y}$, y se define $F_* : \text{end}(T_{Z,X}^\infty) \rightarrow \text{end}(T_{Z,Y}^\infty)$ como $F_*(\alpha) = F \circ \alpha$, entonces F_* es uniformemente continua.

Demostración. Sean $\underline{X} = X_1 \leftarrow X_2 \leftarrow \dots$, $\underline{Y} = Y_1 \leftarrow Y_2 \leftarrow \dots$ y $\underline{Z} = Z_1 \leftarrow Z_2 \leftarrow \dots$ sucesiones inversas de entornos encajados y conectados por inclusiones de modo que $X = \varprojlim X_i$, $Y = \varprojlim Y_i$ y $Z = \varprojlim Z_i$. Sea $F \in Sh(X, Y)$. Entonces F estará representada por una aplicación aproximativa $\underline{f} : \underline{X} \rightarrow \underline{Y}$. Veamos que F_* induce un morfismo de sucesiones inversas entre la sucesión inversa $([Z, X_k], i_k^*)$ y $([Z, Y_k], i_k^*)$. Dado $\underline{f} : \underline{X} \rightarrow \underline{Y}$, ver [45], existe una sucesión fundamental $(\Phi_n) : X \rightarrow Y$ de modo que para cada $k \in \mathbb{N}$, $\Phi_k|_X = f_k$ y que $\Phi_{k'}|_{U_k} \simeq \Phi_k|_{U_k}$ en Y_k , $k' \geq k$ para cierto entorno

U_k de X . En particular, $\Phi_k(U_k) \subset Y_k$ y existe un nivel m_k de modo que $X_{m_k} \subset U_k$. Por tanto, la aplicación $\Phi_{k*} : [Z, X_{m_k}] \rightarrow [Z, Y_k]$ dada por la composición $\Phi_{k*}(f_k) = \Phi_k \circ f_k$ está bien definida. Podemos asumir que (m_k) es creciente y para comprobar que esto induce un morfismo entre sucesiones inversas basta ver que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} [Z, X_{m_k}] & \xleftarrow{i_*} & [Z, X_{m_{k+1}}] \\ \Phi_{k*} \downarrow & & \downarrow \Phi_{k+1*} \\ [Z, Y_k] & \xleftarrow{i_*} & [Z, Y_{k+1}] \end{array}$$

Sea $[f_{m_{k+1}}] \in [Z, X_{m_{k+1}}]$. Tomemos $i_* \circ \Phi_{k+1} \circ f_{m_{k+1}} : Z \rightarrow Y_k$. Por cómo hemos definido Φ_k sabemos que $\Phi_k|_{X_{m_k}} \simeq \Phi_{k+1}|_{X_{m_k}}$ en Y_k luego $i_* \circ \Phi_{k+1} \circ f_{m_{k+1}} \simeq \Phi_k \circ i_* \circ f_{m_{k+1}} : Z \rightarrow Y_k$ y por tanto, el diagrama conmuta.

Un morfismo entre sistemas inversos induce, 5.5.1, una aplicación enraizada continua y métricamente propia entre los árboles tal que puede restringirse a una aplicación con las mismas propiedades entre los árboles geodésicamente completos maximales.

Esta aplicación entre los árboles puede traducirse mediante 3.6.6 a una aplicación uniformemente continua entre los finales, y estos son los espacios de morfismos *shape* con sus ultramétricas (donde éstas dependen de las sucesiones inversas elegidas inicialmente). \square

Límites inversos y morfismos *shape* en el sentido de Mardesić-Segal

Dados X, Y compacta, Mardesić y Segal prueban en [45] §5,2, ver también [44], que existen sucesiones inversas en la categoría \mathcal{P} de espacios topológicos con el tipo de homotopía de poliedros $\mathbf{X} := X_1 \xleftarrow{p_1} X_2 \xleftarrow{p_2} \dots$ y $\mathbf{Y} := Y_1 \xleftarrow{q_1} Y_2 \xleftarrow{q_2} \dots$ tales que $X = \varprojlim X_i$, $Y = \varprojlim Y_i$ y $\mathbf{p} : X \rightarrow \mathbf{X}$, $\mathbf{q} : Y \rightarrow \mathbf{Y}$ \mathcal{P} -expansiones. Definen los morfismos *shape* entre X e Y como clases de homotopía en $\text{pro-}\mathcal{P}$ entre \mathbf{X} y \mathbf{Y} y demuestran que esos morfismos pueden representarse por clases de homotopía de morfismos en $\mathbf{pro-Top}$, donde \mathbf{Top} es la categoría de espacios topológicos, entre X e \mathbf{Y} . Prueban también que si nos restringimos al cubo de Hilbert hay un isomorfismo de categorías entre esta categoría y la categoría *shape* de Borsuk.

Las clases de homotopía de morfismos en $\mathbf{pro-Top}$ entre X e \mathbf{Y} pueden verse como elementos del límite inverso de la sucesión inversa $([X, Y_k], q_{k*})$. Por tanto, si consideramos $T_{X,Y}$ el árbol de esta sucesión inversa, obtenemos la siguiente proposición. (Obviamente, también se puede dar como corolario de 5.9.2 pero ya que abordamos el estudio de las sucesiones inversas desde un punto de vista geométrico y en aras de la completitud, parece interesante

dar aquí una demostración.)

Proposición 5.9.7. *Hay una biyección entre los morfismos shape de X a Y y el conjunto de ramas infinitas de $T_{X,Y}$.*

Demostración. Primero definimos una función ξ desde las ramas infinitas del árbol a los morfismos shape. Una rama infinita F representa un morfismo $\mathbf{f} : X \rightarrow \mathbf{Y}$ en **pro-HTop** (donde **HTop** es la categoría de clases de homotopía de espacios topológicos), representado por el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{array}{ccccccc} & & Y_1 & \longleftarrow & Y_2 & \longleftarrow & Y_3 & \longleftarrow & \cdots \\ & & \uparrow & & \nearrow & & \nearrow & & \\ & & f_1 & & f_2 & & f_3 & & \\ & & X & & & & & & \end{array}$$

Como Y_k está en \mathcal{P} , sea $p : X \rightarrow \mathbf{X}$ cualquier \mathcal{P} -expansión de X , ver [45]. Por tanto, para cualquier morfismo $\mathbf{f} : X \rightarrow \mathbf{Y}$ en **pro-T** existe un único morfismo $\mathbf{h} : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$ en **pro-P** que haga el diagrama conmutativo.

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{X} & \xleftarrow{p} & X \\ & \searrow \mathbf{h} & \downarrow \mathbf{f} \\ & & \mathbf{Y} \end{array}$$

Esto significa que para cualquier morfismo $\mathbf{f} : X \rightarrow \mathbf{Y}$ en **pro-HTop**, esto es, cualquier rama infinita F del árbol, hay una única clase de homotopía $[\mathbf{h}]$ de morfismos en **pro-P** que haga el diagrama conmutativo, es decir, un único morfismo shape $H : X \rightarrow Y$. Así pues definimos $\xi(F) = H$.

ξ es inyectiva. Sean F, F' dos ramas infinitas y $\mathbf{f}, \mathbf{f}' : X \rightarrow \mathbf{Y}$ los dos morfismos correspondientes en **pro-T** y supongamos $\xi(F) = H = [\mathbf{h}]$ y $\xi(F') = H' = [\mathbf{h}']$ son tales que $\mathbf{h} \sim \mathbf{h}'$. Esto significa que $\forall n \in \mathbb{N}$ existe algún $m \in \mathbb{N}$, $m \geq \Phi(n), \Phi'(n)$ tal que el diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccc} X_{\Phi_m} & \longleftarrow & X_m & \longrightarrow & X_{\Phi'_m} \\ & \searrow h_n & & \swarrow h'_n & \\ & & Y_n & & \end{array}$$

Claramente $h_n \circ p_{\Phi(n)m} \simeq h'_n \circ p_{\Phi'(n)m}$ implica que si componemos con $p_m : X \rightarrow X_m$ de la \mathcal{P} -expansión \mathbf{p} tenemos que

$$h_n \circ p_{\Phi(n)m} \circ p_m \simeq h'_n \circ p_{\Phi'(n)m} \circ p_m. \quad (5.2)$$

Como \mathbf{p} es un morfismo en **pro-T** $p_{\Phi(n)m} \circ p_m \simeq p_{\Phi_n}$ y $p_{\Phi'(n)m} \circ p_m \simeq p_{\Phi'_n}$ y por definición, $\mathbf{h} \circ \mathbf{p} \simeq \mathbf{f}$, esto es, $\forall n \in \mathbb{N}$, $h_n \circ p_{\Phi(n)} \simeq f_n$ y $h'_n \circ p_{\Phi(n)} \simeq f'_n$.

Tenemos entonces que $\forall n \in \mathbb{N}$

$$f_n \simeq h_n \circ p_{\Phi(n)m} \circ p_m \simeq h'_n \circ p_{\Phi'(n)m} \circ p_m \simeq f'_n. \quad (5.3)$$

Y por tanto $\mathbf{f} \sim \mathbf{f}'$ y $F = F'$.

ξ es sobreyectiva. Tomemos cualquier morfismo *shape* de X a Y dado por un morfismo en $\text{pro-}\mathcal{P}$ entre las sucesiones inversas $h : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$. Entonces si consideramos $\mathbf{f} : X \rightarrow \mathbf{Y}$ definido por $f_k := p_{\Phi(k)} \circ h_{\Phi(k)} : X \rightarrow Y_k$ y F la correspondiente rama en el árbol obviamente $\mathbf{f} \sim \mathbf{h} \circ \mathbf{p}$, y la unicidad de $[\mathbf{h}]$ en la \mathcal{P} -expansión implica que $[\mathbf{h}] = \xi(F)$. \square

Shape punteado. Resulta interesante considerar también qué ocurre con el *shape* punteado. Dados $(X, *)$, $(Y, *)$ dos compactos métricos punteados, si \mathcal{P}_* es la categoría de los espacios con el tipo de homotopía (punteado) de un poliedro punteado, se definen también en [45] los morfismos *shape* punteados como clases de homotopía (punteada) de morfismos en $\text{pro-}\mathcal{P}_*$.

Podemos definir de un modo similar un árbol T_{X^*, Y^*} cuyos vértices son clases de homotopía punteada de aplicaciones de $(X, *)$ en $(Y_n, *)$ (denotaremos este conjunto como $[(X, *), (Y_n, *)]$) $\forall n \in \mathbb{N}$ y uniéndolos como hicimos antes. Definimos una arista uniendo $[\alpha] \in [(X, *), (Y_{k+1}, *)]$ y $[\beta] \in [(X, *), (Y_k, *)]$ si y sólo si $[p_k \circ \alpha] \simeq_* [\beta]$ en $(Y_k, *)$. Una prueba análoga a la dada para el caso no punteado establece:

Proposición 5.9.8. *Hay una biyección entre los morfismos shape punteados de $(X, *)$ en $(Y, *)$ y las ramas infinitas de T_{X^*, Y^*} .*

Si consideramos el primer grupo *shape*, los morfismos *shape* de $(S^1, *)$ en $(Y, *)$ pueden considerarse ramas infinitas del árbol definido sobre la sucesión inversa $\mathbf{Y}_* := (Y_1, *) \xleftarrow{q_1^*} (Y_2, *) \xleftarrow{q_2^*} \dots$.

Esto nos permite demostrar inmediatamente que el primer grupo *shape* punteado de un solenoide es trivial.

Ejemplo 5.9.9. *Sea (Y, z_0) el solenoide que es el límite inverso de la siguiente sucesión inversa en $\text{Tower-}\mathcal{P}_*$. $(Y_n, z_0) = (S^1, z_0) \forall n \in \mathbb{N}$ (con $S^1 := \{z \in \mathbb{C} \text{ tal que } \|z\| = 1\}$ y $z_0 = 1$) y las aplicaciones encadenadas (punteadas) $p_n : (Y_{n+1}, z_0) \rightarrow (Y_n, z_0)$ definidas por $p(z) = z^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.*

Cada nivel de vértices del árbol $[(S^1, z_0), (Y_n, z_0)]$ tiene estructura de grupo. De hecho, es el grupo fundamental de (Y_n, z_0) que es isomorfo a $(\mathbb{Z}, +)$ (sea $h_n : [(S^1, z_0), (Y_n, z_0)] \rightarrow (\mathbb{Z}, +)$ dicho isomorfismo), y las aplicaciones encadenadas p_n claramente inducen endomorfismos f_n en $(\mathbb{Z}, +)$ tales que $f_n(1) = 2$ luego $f_n(z) = 2 \cdot z$.

Veamos que el único elemento del primer grupo *shape* punteado del solenoide es el trivial, esto es, el morfismo *shape* punteado trivial de (S^1, z_0) en (Y, z_0) que viene representado por la rama infinita cuyo vértice en cada $[(S^1, z_0), (Y_n, z_0)]$ es la aplicación fija $f(z) = z_0$ ($h_n(f) = 0$ en $(\mathbb{Z}, +)$).

Sea F cualquier rama infinita del árbol que represente un morfismo punteado no trivial de (S^1, z_0) en (Y, z_0) . F está determinada por una sucesión de vértices $\alpha_n \in [(S^1, *), (Y_n, *)]$ que puede identificarse con una sucesión de enteros (z_1, z_2, z_3, \dots) con $0 \neq z_n = h_n(\alpha_n)$. Las aplicaciones encadenadas imponen la condición de que $z_n = f_n(z_{n+1}) = 2 \cdot z_{n+1}$ pero esto lleva a contradicción ya que debe haber algún $k \in \mathbb{N}$ tal que 2^k no divida a z_1 y esto contradice el hecho de que $z_1 = f_1 \circ f_2 \circ \dots \circ f_k(z_{k+1}) = 2^k \cdot z_{k+1}$.

Observación 5.9.10. *Un argumento similar es válido para cualquier solenoide definido por aplicaciones encadenadas (punteadas) $p_n : (Y_{n+1}, z_0) \rightarrow (Y_n, z_0)$ tales que $p(z) = z^{p_n}$ con p_n primo $\forall n \in \mathbb{N}$.*

En este caso, los endomorfismos inducidos son tales que $f_k(1) = p_k$ y por tanto $f_k(z) = p_k \cdot z$. Cualquier rama infinita F está representada por una sucesión de enteros (z_1, z_2, z_3, \dots) con $0 \neq z_n = h_n(\alpha_n)$ y las aplicaciones encadenadas imponen la condición de que $z_n = f_n(z_{n+1}) = p_n \cdot z_{n+1}$. Como $z_1 = p_1 \cdot z_2 = p_2 \cdot p_1 \cdot z_3 = \dots$ y z_1 es producto de un número finito de primos, debe haber algún $k \in \mathbb{N}$ tal que $z_k = 1$ y esto contradice el hecho de que $z_k = p_k \cdot z_{k+1}$.

Apéndice: Una conjetura de Borsuk en términos de árboles

A continuación, usamos las herramientas desarrolladas en el capítulo 5 para estudiar uno de los problemas abiertos planteados por K. Borsuk en [11]. Este problema ha sido abordado de diversas maneras y se han obtenido varias respuestas parciales, véase por ejemplo [36], [39]. En [17], se relaciona este problema con una conjetura clásica sobre la dominación homotópica de poliedros finitos.

Usando la equivalencia entre árboles y sucesiones inversas damos un nuevo planteamiento de la conjetura y obtenemos ciertas consecuencias topológicas en el espacio de morfismos *shape* de un hipotético contraejemplo así como una demostración alternativa de uno de los teoremas en [11].

Definición 5.9.11. *Sea Y un cerrado en un compacto X en el cubo de Hilbert, Q . Una sucesión fundamental (r_k, X, Y) es una retracción fundamental de X en Y si $r_k(x) = x$ para todo $x \in Y$. Si existe dicha retracción diremos que Y es un retracto fundamental de X .*

Definición 5.9.12. *Sea Y un cerrado en un compacto X en el cubo de Hilbert, Q . Se dice que Y es un FNR (retracto de entorno fundamental) de X si existe un entorno cerrado W de Y de modo que Y es un retracto fundamental de $W \cap X$.*

Definición 5.9.13. *Un compacto Y en Q es un FANR (retracto de entorno fundamental absoluto) si para todo compacto X tal que $Y \subset X \subset Q$, Y es un FNR de X .*

Evidentemente, todo ANR es un FANR.

Teorema 5.9.14. *Todo retracto fundamental de un FANR es un FANR.*

Corolario 5.9.15. *Todo retracto fundamental de un ANR es un FANR.*

Nota 5.9.16. *En realidad Borsuk prueba aquí que los FANR's son lo mismo que los retractsos fundamentales de ANR's en Q .*

El teorema 11.1 de [11] establece:

Teorema 5.9.17. *Si X_1, X_2, \dots son ANR's en Q y X_{k+1} es un retracto por deformación de X_k para cada $k = 1, 2, \dots$, entonces el conjunto $X = \bigcap_{k=1}^{\infty} X_k$ es un FANR.*

El problema 11.4 que se enuncia a continuación sigue abierto y ha dado lugar a varios artículos en los que se ofrecen soluciones parciales. Dice lo siguiente:

Conjetura 5.9.18. *El teorema anterior sigue siendo cierto si sustituimos la hipótesis de que X_{k+1} es retracto por deformación de X_k por la hipótesis más débil de que es simplemente retracto.*

Lo que hacemos aquí es reformular este problema planteando la pregunta en términos de \mathbb{R} -árboles y damos a su vez una demostración alternativa, con las herramientas desarrolladas, del resultado 5.9.17.

Sea $\{X_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión de ANR's compactos en el cubo de Hilbert tales que para cada $k \in \mathbb{N}$ existe una retracción $r_k : X_k \rightarrow X_{k+1}$. Entonces $\underline{X} := (X_k, i_k)$ con i_k la inclusión natural es una sucesión inversa, $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} X_k$ es el límite inverso y \underline{X} es una *H*Pol-expansión. Por tanto, si consideramos la sucesión inversa de *H*-maps (clases de homotopía de aplicaciones continuas) $([X_1, X_k], i_k^*)$, su límite inverso es el espacio de morfismos *shape* $Sh(X_1, \bigcap_{k \in \mathbb{N}} X_k)$.

Sea T el árbol inducido cuyos vértices son las clases de homotopía de aplicaciones de X_1 en X_k junto con una raíz v y aristas uniéndola con los vértices $[X_1, X_1]$.

Proposición 5.9.19. *Para cada k , la aplicación $i_k^* : [X_1, X_{k+1}] \rightarrow [X_1, X_k]$ inducida por la inclusión es inyectiva.*

Demostración. Supongamos dos *H*-maps $f_1, f_2 : X_1 \rightarrow X_{k+1}$ tales que $i_k^*(f_1) = i_k \circ f_1 \simeq i_k \circ f_2 = i_k^*(f_2)$. Sea H_k la homotopía de $i_k^*(f_1)$ a $i_k^*(f_2)$. Entonces, $r_k \circ H_k$ es una homotopía de f_1 a f_2 . \square

Corolario 5.9.20. *No hay bifurcaciones en ningún vértice de T distinto de la raíz.*

Corolario 5.9.21. *$([X_1, X_k], i_k^*)$ es Mittag-Leffler si y sólo si es estable.*

Sea T' el subárbol de T cuyos vértices son aquellos que cumplen la condición siguiente: la clase de homotopía de la aplicación $f : X_1 \rightarrow X_k$ representa un vértice de T' si y sólo si existe una aplicación $g \simeq f$ en X_k tal que $g|_{\cap X_k} = id_{\cap X_k}$.

Proposición 5.9.22. *T' es un árbol enraizado no acotado.*

Demostración. Es un árbol ya que para cualquier aplicación $g : X_1 \rightarrow X_k$ tal que $g|_{\cap X_k} = id_{\cap X_k}$ es obvio que $i_{k-1} \circ g : X_1 \rightarrow X_{k-1}$ extiende la identidad en $\cap X_k$.

T' es no acotado ya que $r_k \circ r_{k-1} \circ \cdots \circ r_1 : X_1 \rightarrow X_{k+1}$ extiende la identidad en X_{k+1} y, en particular, en $\cap X_k$. \square

Teorema 5.9.23. *$X = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} X_k$ es un retracto fundamental de X_1 si y sólo si T' contiene una rama geodésicamente completa (i.e. una rama no acotada).*

Demostración. Un retracto fundamental es un morfismo *shape* tal que en cada nivel extiende la identidad y esto es una rama geodésicamente completa (infinita) de T' . \square

Corolario 5.9.24. *Si T' tiene una rama geodésicamente completa, $X = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} X_k$ es un FANR.*

Corolario 5.9.25. *Si X_{k+1} es un retracto de deformación de X_k para todo k entonces T' tiene una rama geodésicamente completa.*

Demostración. Para cada k sea $r_k : X_k \rightarrow X_{k+1}$ una retracción tal que $i_k \circ r_k \simeq id_{X_k}$. Entonces $i_k \circ r_k \circ \cdots \circ r_1 \simeq r_{k-1} \circ \cdots \circ r_1$ y existe una arista en T' uniendo los vértices representados por $r_k \circ \cdots \circ r_1 : X_1 \rightarrow X_{k+1}$ y $r_{k-1} \circ \cdots \circ r_1 : X_1 \rightarrow X_k$. Por tanto, todas estas retracciones de X_1 a X_k están en la misma rama. \square

De estos resultados se obtiene por tanto el teorema 5.9.17 como corolario.

Veamos a continuación en qué se traduce sobre el árbol la existencia de un contraejemplo a la conjetura.

Proposición 5.9.26. *Si T' no tiene ninguna rama geodésicamente completa entonces existe algún $\varepsilon > 0$ y una subsucesión $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ de \mathbb{N} tal que $r_{n_i} \not\simeq r_{n_j}$ en $B(X_1, \varepsilon) \forall i \neq j$.*

Demostración. Como X_1 es un ANR, existe algún $\varepsilon > 0$ tal que para todo par de aplicaciones continuas $f_1, f_2 : X_1 \rightarrow X_1$, si $f_1 \simeq f_2$ en $B(X_1, \varepsilon)$ entonces $f_1 \simeq f_2$ en X_1 .

Si existe una cantidad infinita de retracciones r_{m_k} tales que $r_{m_i} \simeq r_{m_j} \forall i \neq j$ en $B(X_1, \varepsilon)$ o, lo que es equivalente, en X_1 , entonces esas r_{m_k} están en la misma rama de T' y definen una rama geodésicamente completa. Como hay una cantidad infinita de retracciones, si hay una cantidad finita de ellas en cada rama es claro que existe una subsucesión n_k tal que cada retracción r_{n_k} está en una rama diferente. Por la estructura de T' , donde no hay bifurcaciones más allá de la raíz, $i \circ r_{n_i} \not\approx i \circ r_{n_j}$ en X_1 (con i la inclusión natural en X_1) y por tanto, tampoco en $B(X_1, \varepsilon)$. \square

Finalmente, si consideramos una ultramétrica d en el espacio de morfismos $Sh(X_1, X_1)$, ya sea como espacio de finales de T o bien la definida en [50], podemos dar la condición en términos de la métrica.

Corolario 5.9.27. *Si existe una subsucesión de Cauchy de $\{i \circ r_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ en $(Sh(X_1, X_1), d)$ entonces $X = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} X_k$ es un FANR.*

Parte II

Un semiflujo en el hiperespacio

Capítulo 6

Un semiflujo en el hiperespacio, inducido por la métrica de longitud

6.1. Introducción

Al considerar el hiperespacio de los cerrados no vacíos de un continuo de Peano con la métrica de Hausdorff obtenemos una copia homeomorfa del cubo de Hilbert. Dentro de ésta, aparece una copia isométrica del espacio inicial embebida como Z -conjunto.

En este hiperespacio y considerando una métrica de longitud en el continuo de Peano, se define un semiflujo tal que para cada compacto A y cada tiempo real positivo t la imagen correspondiente es la bola cerrada generalizada centrada en A y de radio t . Este semiflujo está por tanto fuertemente determinado por la métrica del continuo de Peano.

Esperamos que este semiflujo pueda ser de utilidad en el estudio de los compactos sumergidos (como Z -conjuntos) en el cubo de Hilbert. El propósito es usarlo para incorporar información proveniente de la métrica a los teoremas que estudian estos compactos desde el complemento (véase [18], [19] y [20]).

6.2. Definición del semiflujo

Los conceptos básicos que se usan a continuación pueden encontrarse en [53]. Sea (X, d) un espacio de longitud compacto. $2^X := \{A \subset X \mid A \text{ compacto y no vacío}\}$. La métrica de Hausdorff, inducida por d en el hiperespacio, d_H , se define como, dados $A_1, A_2 \in 2^X$, $d_H(A_1, A_2) := \max\{\sup_{x \in A_1} \{d(x, A_2)\}, \sup_{y \in A_2} \{d(y, A_1)\}\}$, o de forma equivalente, $d_H(A_1, A_2) := \inf\{\varepsilon > 0 \mid A_1 \subset$

$B(A_2, \varepsilon)$ y $A_2 \subset B(A_1, \varepsilon)$. 2_H^X representa 2^X con la métrica de Hausdorff .

Nótese que cuando X es un espacio de longitud toda bola cerrada generalizada es la clausura de la bola abierta generalizada, $B^c(A, \varepsilon) = \bar{B}(A, \varepsilon)$, y el borde es $\partial \bar{B}(A, \varepsilon) = \partial B(A, \varepsilon) = S(A, \varepsilon) = \{z \in X \mid d(z, A) = \varepsilon\}$. De ahora en adelante, denotaremos esta bola cerrada como $\bar{B}(A, \varepsilon)$.

Consideremos una aplicación $H : 2_H^X \times [0, \infty) \rightarrow 2_H^X$ tal que para cada compacto A y cada $t > 0$, $H(A, t) := B^c(A, t) = \{x \in X : d(x, A) \leq t\}$, esto es, la bola cerrada generalizada en X sobre A de radio t . En [52] se demuestra de hecho, si bien sin usar este lenguaje, que $(2_H^X, \mathbb{R}_+, H)$ define un sistema semidinámico.

Observación 6.2.1. *Como X es un compacto métrico, para cualquier $A \subset X$ existe algún t_A de forma que para todo $t \geq t_A$, $\bar{B}(A, t) = X$ y por tanto, $H(A, t) = \{X\} \in 2^X$.*

En torno a esta aplicación podemos añadir un par de propiedades sobre el hiperespacio.

Lema 6.2.2. *Sea X un espacio de longitud compacto y conexo, $A \subset X$ y $0 < \varepsilon_0 < \varepsilon_1$ tal que $\bar{B}(A, \varepsilon_0) \neq X$. Entonces $\bar{B}(A, \varepsilon_0) \subsetneq \bar{B}(A, \varepsilon_1)$.*

Demostración. En otro caso, supongamos $\bar{B}(A, \varepsilon_0) = \bar{B}(A, \varepsilon_1)$. Para $\delta = \frac{1}{2}(\varepsilon_0 + \varepsilon_1)$, $\bar{B}(A, \varepsilon_0) \subset B(A, \delta) \subset \bar{B}(A, \delta) \subset \bar{B}(A, \varepsilon_1)$ y todas estas bolas coinciden y encontramos por tanto un subespacio distinto del total, no vacío, abierto y cerrado. Esto contradice el hecho de que X es conexo. \square

Proposición 6.2.3. *Para todo $\varepsilon < \text{diam}(X)$, $P(\varepsilon, X) := \{A \subset X \mid A \text{ cerrado y } \text{diam}(A) \geq \varepsilon\}$ es un entorno de $\{X\}$ en 2_H^X .*

Demostración. Sea $\delta < \frac{\text{diam}(X) - \varepsilon}{2}$. Supongamos cualquier cerrado $A \subset X$ tal que $d_H(A, X) < \delta$. En particular $X \subset \bar{B}(A, \delta)$ y tomemos $x, y \in X$ tales que $d(x, y) = \text{diam}(X)$ (la existencia de dichos puntos es obvia ya que X es compacto). Claramente $d(x, A), d(y, A) \leq \delta$ y por tanto el diámetro de A es necesariamente $\geq \text{diam}(X) - 2\delta > \varepsilon$. \square

Proposición 6.2.4. $\forall \varepsilon < \text{diam}(X)$ existe un retracto de deformación de 2_H^X en $P(\varepsilon, X)$.

Demostración. Para todo subespacio cerrado $A \subset X$ existe algún $t_A \geq 0$ tal que $t_A := \inf\{t \mid \text{diam}(\bar{B}(A, t)) \geq \varepsilon\}$. Obviamente si $\text{diam}(A) \geq \varepsilon$ $t_A = 0$. Definimos la homotopía $G : 2_H^X \times I \rightarrow 2_H^X$ del siguiente modo: $G(A, t) = \bar{B}(A, \min\{t \cdot \text{diam}(X), t_A\})$. G es continua, G_0 es la identidad, $G_1(2_H^X) \subset P(\varepsilon, X)$ y $G_t|_{P(\varepsilon, X)}$ es la identidad. \square

6.3. Conservación del tipo topológico

Por las propiedades básicas de las métricas de longitud, es inmediato comprobar que las trayectorias que van desde los cerrados unipuntuales $\{x\} \in 2^X$ al total $\{X\} \in 2^X$ son en todo momento bolas cerradas centradas en los puntos. Así pues, si restringimos la aplicación H al subespacio \mathcal{B} de 2^X formado por las bolas cerradas centradas en puntos de X seguimos teniendo un semiflujo.

Observación 6.3.1. *El subespacio de 2^X (o $C(X)$) dado por el semiflujo, \mathcal{B} , es cerrado en 2^X_H (o $C(X)$ con la métrica de Hausdorff).*

Demostración. Sea $\bar{B}(x_n, \varepsilon_n)$ una sucesión de bolas cerradas donde podemos suponer que $\varepsilon_n \leq \text{diam}(X)$. Como X es compacto, tomamos x_{k_n} una subsucesión convergente a algún x y como ε_n es acotado, podemos suponer (tomando una subsucesión si es necesario) que $\bar{B}(x_n, \varepsilon_{k_n})$ converge a la bola $\bar{B}(x, \varepsilon)$ por la métrica de longitud. Por tanto \mathcal{B} es cerrado con la métrica de Hausdorff. \square

Así, el semiflujo en \mathcal{B} transforma la copia isométrica del espacio inicial (formada por los cerrados unipuntuales con la métrica de Hausdorff en el hiperespacio) en el punto $\{X\}$, como observamos en 6.2.1:

Si definimos la aplicación $p_\varepsilon : X \rightarrow 2^X_H$ de modo que $p_\varepsilon(x) := \bar{B}(x, \varepsilon) \forall x \in X$, la pregunta inicial sobre el comportamiento del semiflujo es cómo son estas proyecciones en función del espacio métrico original sabiendo que comienza en el nivel 0 en una copia isométrica del espacio, y alcanza un nivel a partir del cual es un punto. La dificultad para dar resultados generales para todas ellas proviene de que, incluso para casos muy simples, al pasar a la proyección el espacio puede ser más complejo (topológicamente o incluso homotópicamente) que el inicial.

Ejemplo 6.3.2. *Consideremos el siguiente grafo con la distancia geodésica y longitud 1 en cada arista.*

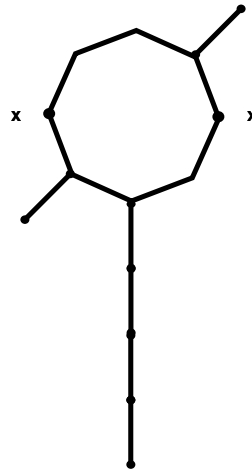


Figura 6.1: La proyección no tiene porqué estar dominada homotópicamente por el espacio de partida.

Al considerar $\varepsilon = 4$, las bolas centradas en x y x' coinciden y la proyección se convierte en algo homeomorfo a lo siguiente:

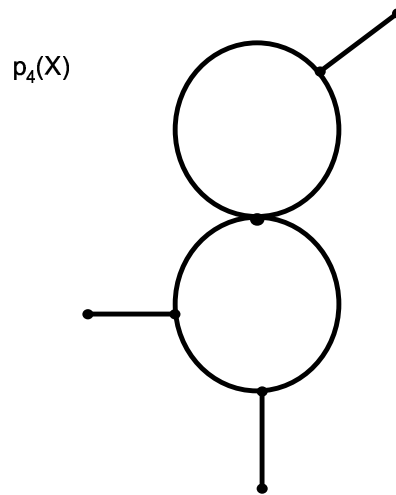


Figura 6.2: Proyección para $\varepsilon = 4$.

Nuestro problema inicial pues, será encontrar condiciones sobre (X, d) para asegurar que el semiflujo H mantiene el tipo topológico de X por algún tiempo inicial ε_0 , es decir, cuándo existe algún tiempo inicial ε_0 tal que $\forall \varepsilon \leq \varepsilon_0$, p_ε es una inmersión topológica.

Esto significará que existe una inmersión de X como Z -conjunto en el cubo de Hilbert de forma que hay copias homeomorfas a X en su complemento y tan cerca como queramos de X si consideramos el hiperespacio 2^{2^X} con la métrica de Hausdorff d_{H^2} .

Observación 6.3.3. $d_{H^2}(X, p_\varepsilon(X)) = \varepsilon$.

Primero veamos que esto no ocurre en general para espacios de longitud compactos y conexos.

Ejemplo 6.3.4. Consideremos en el plano euclídeo el espacio $\{(x, 0) | 0 \leq x \leq 1\} \cup \left\{ \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \left(\frac{1}{2^n}, y\right) | 0 \leq y \leq \frac{1}{2^n} \right\} \right\}$ con la métrica de longitud natural.

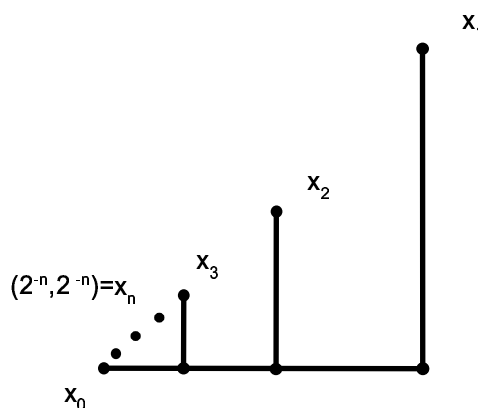


Figura 6.3: Espacio de longitud compacto donde la proyección nunca es inyectiva.

Este espacio es compacto conexo y de longitud. Entonces, para todo $\varepsilon > 0$ sea n_0 tal que $\frac{1}{2^{n_0}} < \frac{\varepsilon}{2}$ y consideremos los puntos $x := (0, 0)$ e $y := (\frac{1}{2^{n_0}}, \frac{1}{2^{n_0}})$. Claramente $\bar{B}(x, \varepsilon) = \bar{B}(y, \varepsilon)$ y p_ε no es inyectiva.

De hecho los niveles $p_\varepsilon(X)$ no son homeomorfos a X . Para todo $0 < \varepsilon < \text{diam}(X)$ y $\forall n$ tal que $\frac{2}{2^n} \leq \varepsilon$ el segmento $[(2^{-n}, 2^{-n}), (2^{-n}, 0)]$ se identifica con el segmento $[(0, 0), (2^{-n}, 0)]$, y se comprueba que $p_\varepsilon(X)$ es un árbol finito.

Tomamos la siguiente definición de [15].

Definición 6.3.5. Dado $r > 0$ un espacio métrico (X, d) se dice r -únicamente geodésico si para todo par de puntos x, y con $d(x, y) < r$ existe un único segmento geodésico que une x e y .

Añadiendo una condición más obtenemos una condición suficiente para asegurar que el tipo topológico se mantiene durante un tiempo inicial.

Definición 6.3.6. Decimos que X es r -perfectamente geodésico si es r -únicamente geodésico y dados tres puntos cualesquiera x_1, x_2, x_3 con $d(x_i, x_j) < r$ si las geodésicas $[x_1, x_2]$ y $[x_1, x_3]$ tienen un subintervalo común no trivial entonces una de las geodésicas está contenida en la otra.

Nota 6.3.7. Si se da esta propiedad, $[x_1, x_2] \cap [x_1, x_3]$ puede ser $\{x_1\}$, $[x_1, x_2]$ o $[x_1, x_3]$.

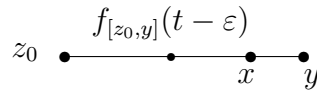
Nota 6.3.8. Si X es un espacio de longitud $p_\varepsilon : X \rightarrow p_\varepsilon(X)$ es continua. Como X es compacto y 2_H^X es Hausdorff (luego $p_\varepsilon(X)$ lo es para cualquier ε), $p_\varepsilon : X \rightarrow p_\varepsilon(X)$ es una aplicación cociente y $p_\varepsilon(X)$ es homeomorfo al espacio cociente X/\sim donde dos puntos están relacionados $x \sim y$ si y sólo si $p_\varepsilon(x) = p_\varepsilon(y)$. Por tanto, cuando p_ε es inyectiva X es homeomorfo a $p_\varepsilon(X)$.

Teorema 6.3.9. Sea X un espacio de longitud compacto y r -perfectamente geodésico. Entonces existe algún $\varepsilon_0 > 0$ tal que $p_\varepsilon : X \rightarrow 2_H^X$ es una inmersión topológica $\forall \varepsilon \leq \varepsilon_0$.

Demostración. Como vimos en 6.3.8 basta comprobar la inyectividad, en este caso, que existe algún $\varepsilon_0 > 0$ tal que para todo par de puntos x, y de X con $x \neq y$, $\bar{B}(x, \varepsilon) \neq \bar{B}(y, \varepsilon) \forall \varepsilon \leq \varepsilon_0$.

Sea $\varepsilon := \frac{r}{4}$ y podemos suponer que $r \ll \text{diam}(X)$. Sean x, y tales que $d(x, y) \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ ya que si $d(x, y) > \varepsilon$ es trivial. Consideramos un punto cualquiera $z \in X$ tal que $d(z, x), d(z, y) > r$ (ya que $r \ll \text{diam}(X)$) y como X es un espacio de longitud, sea z_0 el punto de la geodésica $[z, x]$ tal que $d(z_0, x) = \frac{r}{2}$. Claramente $\varepsilon \leq d(z_0, x), d(z_0, y) < r$. Ahora las geodésicas $[z_0, x]$ y $[z_0, y]$ son únicas y $[z_0, x] \cap [z_0, y]$ puede ser $[z_0, x]$, $[z_0, y]$ o $\{z_0\}$.

Caso 1: si $[z_0, x] \cap [z_0, y]$ es $[z_0, x]$. (Si fuera $[z_0, y]$ sería análogo). El camino geodésico $[z_0, y]$ es isométrico al subintervalo de la recta real $[0, d(z_0, y)]$; vamos a denotar esta isometría como $f_{[z_0, y]}$. En este caso, existe algún $t \in [0, d(z_0, y)]$ tal que $f_{[z_0, y]}(t) = x$ y como $d(z_0, x) \geq \varepsilon$ entonces $t \geq \varepsilon$.



Claramente, el punto $f_{[z_0, y]}(t - \varepsilon)$ está en $\bar{B}(x, \varepsilon)$ pero no en $\bar{B}(y, \varepsilon)$ ya que la distancia a y a través de esta geodésica es $\varepsilon + d(x, y)$ y esta distancia es

menor que r , lo que significa que ésta es la única geodésica entre este punto e y .

Caso 2: si $[z_0, x] \cap [z_0, y]$ es $\{z_0\}$. Asumamos que $d(z_0, x) \leq d(z_0, y)$ y sea z_1 el punto de la geodésica $[z_0, x]$ tal que $d(z_1, x) = \varepsilon$. Claramente, $d(z_1, y) \geq d(z_0, y) - d(z_0, z_1) \geq d(z_0, x) - d(z_0, z_1) = \varepsilon$. Si $d(z_1, y) \neq \varepsilon$ entonces $z_1 \in \bar{B}(x, \varepsilon) \setminus \bar{B}(y, \varepsilon)$ y ya tenemos que $\bar{B}(x, \varepsilon) \neq \bar{B}(y, \varepsilon)$.

Supongamos pues que $d(z_1, y) = \varepsilon$. Entonces $[z_0, z_1] \cup [z_1, y]$ tiene la misma longitud que $[z_0, x]$ y como $d(z_0, y) \geq d(z_0, x)$ define una geodésica de z_0 a y cuya intersección con $[z_0, x]$ es $[z_0, z_1]$ contradiciendo el hecho de que hay una única geodésica de z_0 a y y que debe intersectar a $[z_0, x]$ únicamente en $\{z_0\}$. \square

Corolario 6.3.10. *Para toda variedad riemanniana compacta, H mantiene el tipo topológico para cierto $\varepsilon > 0$.*

Demostración. Es un resultado básico de geometría riemanniana que todo punto en una variedad riemanniana es centro de una bola convexa tal que dos puntos cualesquiera de la bola están unidos por un único segmento geodésico contenido en la bola. Como es compacta, usando el número de Lebesgue podemos encontrar un radio único r que valga para todos los puntos. \square

Corolario 6.3.11. *Para todo espacio de longitud compacto y únicamente geodésico de curvatura acotada inferiormente, H mantiene el tipo topológico para cierto $\varepsilon > 0$.*

Demostración. Basta usar que las geodésicas en un espacio de curvatura $\geq k$ (con k un número real arbitrario) no se bifurcan. Ver [16] 10.1.2. \square

Esta condición local en las geodésicas es suficiente pero no es necesaria. Hay importantes grupos de espacios de longitud para los cuales esta aplicación mantiene el tipo topológico en un intervalo inicial y que no son necesariamente r -perfectamente geodésicos, por ejemplo los \mathbb{R} -árboles geodésicamente completos o los poliedros finitos con cierta métrica de longitud a los que nos referiremos como espacios poliédricos.

6.4. Espacios poliédricos

Empecemos por dotar a un n -símplice Δ^n con vértices x_0, \dots, x_n de una métrica de longitud considerándolo como subespacio de \mathbb{R}^{n+1} con $x_{i-1} = \varepsilon_0 e_i$ donde e_1, \dots, e_{n+1} es la base ortonormal de \mathbb{R}^{n+1} . Diremos entonces que el n -símplice tiene la métrica euclídea. Nótese que si tomamos los vértices en $\varepsilon_0 e_i$ las aristas tienen longitud $\sqrt{2} \cdot \varepsilon_0$

Lema 6.4.1. *Sea Δ^n un n -símplice con la métrica euclídea, vértices x_0, \dots, x_n y supongamos todas las aristas de longitud ε . Para todo par de puntos (dados en coordenadas baricéntricas) $x := \lambda_0 x_0 + \dots + \lambda_n x_n$ y $x' := \lambda'_0 x_0 + \dots + \lambda'_n x_n$ la distancia entre ellos viene dada por la fórmula*

$$d(x, x') := \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \sqrt{\sum_{i=0}^n (\lambda_i - \lambda'_i)^2}$$

Demostración. Para tener longitud ε en las aristas, ya que la distancia euclídea entre dos vértices es $\sqrt{2} \cdot \varepsilon_0$, basta tomar $\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ y calcular la distancia euclídea en el n -símplice como subespacio de \mathbb{R}^{n+1} . \square

Lema 6.4.2. *Sea Δ^n un n -símplice con vértices x_0, \dots, x_n . Fijamos una cara d -dimensional Δ^d dada por los vértices x_0, \dots, x_d . Para cualquier punto $x := \lambda_0 x_0 + \dots + \lambda_n x_n$ la proyección sobre Δ^d que envía x al punto más cercano en Δ^d , \tilde{x} , viene dada, en coordenadas baricéntricas, por la siguiente expresión:*

$$\tilde{x} := \left(\lambda_0 + \sum_{i=d+1}^n \frac{\lambda_i}{d+1} \right) x_0 + \dots + \left(\lambda_d + \sum_{i=d+1}^n \frac{\lambda_i}{d+1} \right) x_d$$

Demostración. La proyección sobre la cara d -dimensional, tal como definimos el símplice sumergido en \mathbb{R}^{n+1} , la podemos ver como una restricción de la proyección ortogonal sobre el d -plano $P = y_1 + \dots + y_{n+1} = 1$ del que los puntos sin coordenadas negativas forman el d -plano.

Por tanto, trabajando en el espacio euclídeo, obtenemos una base del d -plano:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 & -1\alpha_2 & & -1\alpha_3 & & \dots & & -1\alpha_{d+1} \\ x_2 &= & 1\alpha_2 & & & & & & \\ x_3 &= & & & 1\alpha_3 & & & & \\ & \dots & & & & & & & \\ x_{d+1} &= & & & & & & & 1\alpha_{d+1} \end{aligned}$$

$$\mathcal{B} = \{(-1, 1, 0, \dots, 0, 0, \dots, 0), (-1, 0, 1, 0, \dots, 0, 0, \dots, 0), \dots, (-1, 0, \dots, 1, 0, \dots, 0)\}.$$

Con esta base, basta comprobar que para todo punto

$$x = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_{i-1} e_i,$$

su proyección

$$\tilde{x} = \sum_{i=1}^{d+1} (\lambda_{i-1} + \sum_{j=d+1}^n \frac{\lambda_j}{d+1}) e_i$$

cumple que el vector $\vec{\tilde{x}}$ es ortogonal a $v_i \quad \forall v_i \in \mathcal{B}$ y esto resulta inmediato. \square

Sea K un complejo simplicial finito. Si consideramos la realización geométrica $|K|$, hay una forma natural de darle una métrica de longitud d . Consideremos cada símplice isométrico al euclídeo y supongamos, para simplificar los cálculos, las aristas de longitud $\sqrt{2}$. Ahora, para cualquier par de puntos x, y en $|K|$, $d(x, y)$ se definirá como el ínfimo de la longitud de los caminos PL que los unen. (Es inmediato ver que si K es un complejo simplicial finito d es una métrica y la topología que induce es la original de $|K|$).

Nos referiremos a esta d como métrica poliédrica y $|K|_d$ como espacio poliédrico finito.

Nota 6.4.3. Si tenemos un poliedro finito K con vértices x_0, \dots, x_n , cualquier punto $x \in K$ lo podemos representar en coordenadas baricéntricas como $\sum_{i=0}^n \lambda_i x_i$ donde si x pertenece a un símplice con vértices x_0, \dots, x_k entonces $\lambda_i = 0 \quad \forall i \neq 0, \dots, k$. La distancia entre dos puntos $\sum_{i=0}^n \lambda_i x_i$ y $\sum_{i=0}^n \lambda'_i x_i$ en el mismo símplice medida con la métrica euclídea de ese símplice es $\sqrt{\sum_{i=0}^n (\lambda_i - \lambda'_i)^2}$.

Lema 6.4.4. Para todo par de puntos $x, x' \in \Delta$ con Δ un símplice de K , la distancia $d(x, x')$ en $|K|_d$ es la distancia en Δ como símplice euclídeo de diámetro $\sqrt{2}$.

Demostración. Tomemos dos puntos en coordenadas baricéntricas $x := \lambda_0 x_0 + \dots + \lambda_n x_n$ y $x' := \lambda'_0 x_0 + \dots + \lambda'_n x_n$ con x_0, \dots, x_n todos los vértices de K como vimos en 6.4.3. La distancia euclídea en el símplice es $d_0 = \sqrt{\sum_{i=0}^n (\lambda_i - \lambda'_i)^2}$. Consideremos ahora un camino PL uniendo x y x' que es unión finita de caminos lineales uniendo $x := y_0$ a y_1 , y_1 a y_2 , \dots y_{k-1} a $y_k := x'$ donde

y_{j-1}, y_j pertenecen al mismo símplice $\forall j = 1, k$. Sean $\beta_1^j, \dots, \beta_n^j$ las coordenadas baricéntricas de y_j (Nótese que $\beta_i^0 = \lambda_i$ y $\beta_i^k = \lambda'_i$). Entonces, la longitud de este camino se puede calcular como

$$l_0 := \sqrt{\sum_{i=0}^n (\beta_i^0 - \beta_i^1)^2} + \sqrt{\sum_{i=0}^n (\beta_i^1 - \beta_i^2)^2} + \dots + \sqrt{\sum_{i=0}^n (\beta_i^{k-1} - \beta_i^k)^2}$$

y por la desigualdad de Minkowski,

$$l_0 \geq \sqrt{\sum_{i=0}^n (\beta_i^0 - \beta_i^k)^2} = d_0.$$

Así, d_0 es una cota inferior para la longitud de este camino lo que concluye la prueba. \square

Teorema 6.4.5. *Sea $X = |K|_d$ un espacio poliedral finito. Existe entonces algún $\varepsilon > 0$ tal que $p_\varepsilon : X \rightarrow 2_H^X$ es una inmersión topológica.*

Demostración. Sea $n := \max\{\dim(\Delta_i) \mid \Delta_i \in K\}$ y $\varepsilon < \frac{1}{n}$.

Igual que anteriormente, basta probar que es inyectiva. Sean x, x' dos puntos cualesquiera de $|K|_d$. Si $d(x, x') > \varepsilon$ entonces $\bar{B}(x, \varepsilon) \neq \bar{B}(x', \varepsilon)$. Si $d(x, x') \leq \varepsilon$ y hay algún símplice Δ_i tal que $x, x' \in \Delta_i$ entonces, restringiendo las bolas a este símplice en el que la métrica es la euclídea, es claro que las bolas cerradas no coinciden.

Por tanto, el caso que falta es cuando los puntos x, x' están en símplices diferentes Δ, Δ' y $d(x, x') < \varepsilon$.

Supongamos estos puntos en coordenadas baricéntricas $x = \lambda_0 x_0 + \dots + \lambda_n x_n$ y $x' = \lambda'_0 x_0 + \dots + \lambda'_n x_n$ en la representación vista en 6.4.3 y asumamos que $\sum_{i=0}^n (\lambda_i)^2 \leq \sum_{i=0}^n (\lambda'_i)^2$. Podemos escoger un vértice en $\Delta \setminus \Delta'$ (no hay pérdida de generalidad si consideramos que es x_0) con $\lambda_0 > 0$. (Esto puede hacerse ya que de otro modo x estaría en Δ').

Afirmamos ahora que $d(x_0, x) < d(x_0, x')$. Claramente

$$d(x_0, x) = \sqrt{(1 - \lambda_0)^2 + \sum_{i=1}^n \lambda_i^2}.$$

Para calcular $d(x_0, x')$ consideramos como en el lema 6.4.4 cualquier sucesión de puntos $x_0 = y_0, y_1, \dots, y_k = x'$ con y_{j-1}, y_j en el mismo símplice y $\beta_1^j, \dots, \beta_n^j$ las coordenadas baricéntricas de y_j ($\beta_0^0 = 1, \beta_i^0 = 0 \forall i \neq 0$ y $\beta_i^k = \lambda'_i$).

La longitud de este camino PL es

$$l_0 = \sqrt{\sum_{i=0}^n (\beta_i^0 - \beta_i^1)^2} + \sqrt{\sum_{i=0}^n (\beta_i^1 - \beta_i^2)^2} + \cdots + \sqrt{\sum_{i=0}^n (\beta_i^{k-1} - \beta_i^k)^2}$$

y por la desigualdad de Minkowski,

$$l_0 \geq \sqrt{\sum_{i=0}^n (\beta_i^0 - \beta_i^k)^2} = \sqrt{(1 - \lambda'_0)^2 + \sum_{i=1}^n (\lambda'_i)^2}$$

pero $x_0 \notin \Delta'$ y por tanto $\lambda'_0 = 0$.

Finalmente, dado que $\sum_{i=0}^n (\lambda_i)^2 \leq \sum_{i=0}^n (\lambda'_i)^2$ (y $\lambda_0 > 0$), $d(x_0, x)^2 = (1 - \lambda_0)^2 + \sum_{i=1}^n (\lambda_i)^2 < 1 + \sum_{i=0}^n (\lambda_i)^2 - \lambda_0 \leq 1 + \sum_{i=0}^n (\lambda'_i)^2 - \lambda_0 \leq (l_0)^2 - \lambda_0$. Por tanto

$$\sqrt{d(x_0, x)^2 + \lambda_0} < l_0 \text{ y } d(x_0, x) < \sqrt{d(x_0, x)^2 + \lambda_0} \leq d(x_0, x').$$

Consideremos entonces en el camino geodésico $[x_0, x]$ el punto z_0 tal que $d(z_0, x) = \varepsilon$. Como $d(x_0, x) < d(x_0, x')$, $d(z_0, x) < d(z_0, x')$ y por tanto $z_0 \notin \bar{B}(x', \varepsilon)$ y las bolas cerradas no coinciden. \square

Pregunta. ¿Es cierto que para cualquier 2-variedad riemanniana con la métrica de longitud usual dos bolas del mismo radio y distinto centro sólo coinciden cuando son el total?

Debemos resaltar que la existencia de un ε en estas condiciones es una condición fuertemente geométrica y podemos dar un ejemplo de espacio de longitud compacto (X, d) tal que con una métrica de longitud bi-Lipschitz equivalente (X, d') (incluso equivalente por similaridad local) la condición se cumple para (X, d) y no para (X, d') .

Ejemplo 6.4.6. Sea $X = \{(0, y) | 0 \leq y \leq 1\} \cup \{(x, 0) | 0 \leq x \leq 1\} \cup \{(x, y) | 0 \leq x \leq y = 2^{-i}, i > 0\} \cup \{(x, y) | 0 \leq y \leq x = 2^{-i}, i > 0\}$.

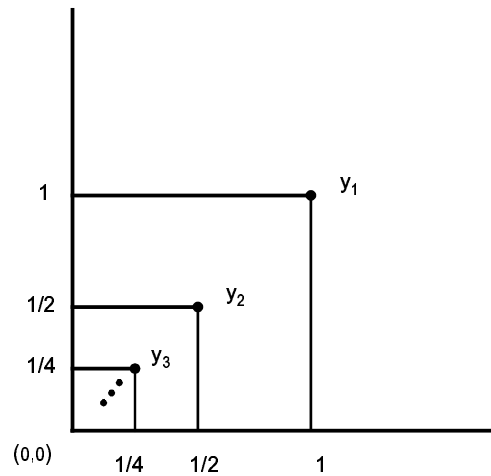


Figura 6.4: No se conserva el tipo topológico.

En X con la métrica de longitud natural las bolas centradas en $x = (0, 0)$ e $y_i = (2^{-i}, 2^{-i})$ y radio $\varepsilon_i = 2 \cdot 2^{-i}$ coinciden. Consideremos el espacio $X' = \{(0, y) | 0 \leq y \leq 1\} \cup \{(x, 0) | 0 \leq x \leq 1\} \cup (\cup_{i>0} \{(x, y) | 0 \leq x, y \text{ y } x+y = 2^{-i}\})$ con la métrica de longitud natural.

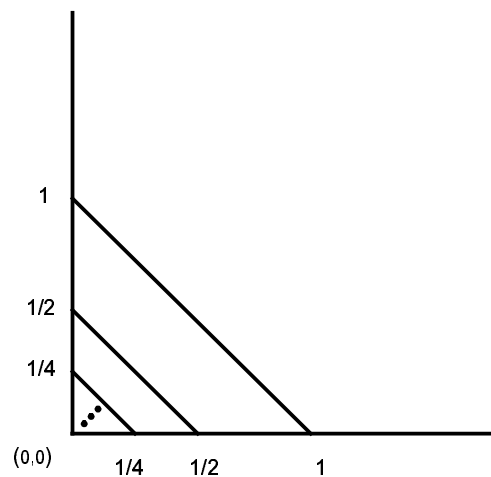


Figura 6.5: Se conserva el tipo topológico.

Nótese que X' puede obtenerse a partir de X cambiando la métrica de la siguiente manera: para cualquier par de puntos z, z' en $\{(x, y) | 0 \leq x \leq y = 2^{-i}\} \cup \{(x, y) | 0 \leq y \leq x = 2^{-i}\}$ para algún $i > 0$, $d'(z, z') = \frac{d(z, z')}{\sqrt{2}}$. Ahora en

(X, d') , para cualquier $\varepsilon \leq \frac{1}{2}$ puede comprobarse fácilmente que dos bolas de radio ε y centros diferentes no pueden coincidir.

6.5. Niveles en el semiflujo

En el caso de los grafos finitos, si consideramos la métrica convexa usual donde cada arista tiene longitud 1 podemos estudiar propiedades que se mantienen en todos los niveles del semiflujo. Así, si X es un grafo finito, se demuestra que $p_\varepsilon(X)$ es un grafo finito para todo $\varepsilon > 0$, y el grafo pasa por una cantidad finita de tipos topológicos antes de colapsar en un punto.

Esto da una idea de que para estudiar propiedades geométricas del espacio inicial, esta herramienta conserva más información que otras posibilidades conocidas como los niveles de Whitney, que en este caso ni siquiera nos permitirían asegurar que los niveles fueran 1-dimensionales. Ver [37] y [53].

Árboles finitos Veamos primero que en el caso particular de los árboles finitos, cada nivel del semiflujo es también homeomorfo a un árbol finito.

Lema 6.5.1. *Si X es un árbol finito entonces para todo par de puntos x, y tales que $p_\varepsilon(x) = p_\varepsilon(y)$ entonces en el camino geodésico $[x, y]$ para los puntos intermedios $z = tx + (1-t)y$ y $z' = (1-t)x + ty$ fijado un t cualquiera, $p_\varepsilon(z) = p_\varepsilon(z')$.*

Demostración. Sea $v \in [x, y]$ el punto medio del camino geodésico, $d(x, v) = d(v, y) = \frac{1}{2}d(x, y)$. Sea (T, v) el árbol enraizado y T_x, T_y los correspondientes subárboles con la notación del capítulo 2. Como $\bar{B}(x, \varepsilon) = \bar{B}(y, \varepsilon)$ es fácil ver que $T_x \subset \bar{B}(y, \varepsilon)$ y $T_y \subset \bar{B}(x, \varepsilon)$. De hecho, $\forall z \in [x, v], z \neq v$ $T_z \subset \bar{B}(y, \varepsilon)$ y al contrario $\forall z \in [v, y], z \neq v$ $T_z \subset \bar{B}(x, \varepsilon)$. De otro modo, supongamos $z \in [x, v], z \neq v$ con $T_z \not\subset \bar{B}(y, \varepsilon)$. Entonces existe un punto $p \in T_z$ tal que $d(p, y) = \varepsilon + \delta$ y por las propiedades de la métrica de longitud podemos suponer $\delta > 0$ menor que $d(z, v)$. Si se da esto, entonces $d(p, x) \leq d(p, z) + d(z, x) < d(p, z) + d(z, y) - 2\delta = \varepsilon - \delta$ y por tanto $p \in \bar{B}(x, \varepsilon)$ lo que contradice el hecho de que las bolas centradas en x y en y coinciden.

No sólo eso. $\forall z \in [x, v], z \neq v$ y $\forall z' \in [v, y], z' \neq v$ $T_z \subset \bar{B}(z', \varepsilon)$ y $T_{z'} \subset \bar{B}(z, \varepsilon)$ con el mismo argumento ya que $d(z, z') < d(z, y), d(x, z')$. Por tanto, si ambos puntos z, z' están a la misma distancia de la raíz v sus bolas necesariamente coinciden. \square

También es claro a partir de esta demostración lo siguiente.

Nota 6.5.2. Si dos puntos x, y son tales que $p_\varepsilon(x) = p_\varepsilon(y)$ y el punto medio v del camino geodésico tiene orden dos en el árbol entonces la bola es el total, $p_\varepsilon(x) = p_\varepsilon(y) = T$.

Proposición 6.5.3. Si X es un árbol finito entonces $p_t(X)$ es un árbol finito para todo t .

Demostración. Para todo $t > 0$ hay un subárbol T' (T' puede ser el vacío) tal que $\forall x \in T' \quad \bar{B}(x, t) = T$. Podemos construir T/\sim en dos pasos. Primero T/T' identificando todos los puntos de T' . Esto es obviamente homeomorfo a un árbol. A continuación vamos identificando segmentos convergentes en puntos de orden > 2 y como existe un número finito de puntos de este tipo y el árbol es localmente finito, estamos identificando un número finito de segmentos sin generar ningún ciclo y obteniendo nuevamente un árbol. \square

Grafos finitos

En este apartado, el espacio X será siempre un grafo finito (no degenerado y conexo) con la métrica de longitud y longitud 1 para cada arista.

A continuación se demuestra una serie de lemas técnicos encaminados a la demostración del teorema 6.5.29, donde se prueba finalmente que en cada nivel la proyección es homeomorfa a un grafo.

Nota 6.5.4. Recordemos que $B^c(x, \varepsilon) = \bar{B}(x, \varepsilon)$ y se cumple que el borde $\partial\bar{B}(x, \varepsilon) = \partial B(x, \varepsilon) = S(x, \varepsilon) = \{z \in X \mid d(z, x) = \varepsilon\}$.

Lema 6.5.5. Para cualquier punto $x \in X$ y cualquier $\varepsilon > 0$, $\partial B(x, \varepsilon)$ consiste a lo sumo en un número finito de puntos.

Demostración. Sea $x \in e$ para alguna arista e con vértices v_0, v_1 (si x es un vértice, supongamos que es v_0), y sea $d_0 = d(x, v_0)$ y $d_1 = d(x, v_1) = 1 - d_0$ (podemos asumir, sin pérdida de generalidad que $d_0 \leq d_1$, y $d_0 = 0$ si x es un vértice). Para todo vértice $v_i \in X$ la distancia a v_0 es un entero positivo n_i y la distancia a v_1 m_i (obviamente $|n_i - m_i| \leq 1$). Por tanto la distancia de v_i a x sería $d_0 + n_i$ si $n_i \leq m_i$ o $d_1 + m_i$ si $m_i < n_i$. Para cualquier punto en cualquier arista $y \in [v, v']$ la distancia $d(x, y)$ es $\min\{d(y, v) + d(v, x), d(y, v') + d(v', x)\}$.

Si $\varepsilon \leq d_0$ la bola está contenida en la arista y el borde consiste en dos puntos, y si $d_0 < \varepsilon \leq d_1 \leq 1$ la parte de la arista entre x y v_1 contiene un punto del borde mientras que el resto de ellos están uno en cada arista adyacente a v_0 . Si $\varepsilon > d_1 \geq d_0$, sea $d'_0 = \varepsilon - d_0 - [\varepsilon - d_0]$ (quitando la parte entera) y $d'_1 = \varepsilon - d_1 - [\varepsilon - d_1]$. $\forall z \in X$ tal que $d(z, x) = \varepsilon$, como existe un camino geodésico, que realiza la distancia en el grafo, debe existir

un vértice $w \in X$ tal que $d(z, w) = d'_0$ si el camino geodésico es a través de v_0 o $d(z, w) = d'_1$ si pasa por v_1 .

Como el número de vértices y aristas es finito, el número de puntos a distancia d'_0 o d'_1 desde cualquier vértice es finito y por consiguiente, lo es el número de puntos en $S(x, \varepsilon) = \partial B(x, \varepsilon)$. \square

Obviamente, $\partial B(x, \varepsilon) \neq \emptyset$ si y sólo si $\forall \varepsilon' < \varepsilon \quad \bar{B}(x, \varepsilon') \neq X$, y en particular, es suficiente que $\bar{B}(x, \varepsilon) \neq X$.

Lema 6.5.6. $\forall \varepsilon > 0$ hay un número finito de puntos z_1, \dots, z_n para los cuales $\partial \bar{B}(z_i, \varepsilon)$ contiene un vértice o un punto medio de una arista.

Demostración. Sea $x \in X$ y denotemos de nuevo, si $x \in [v_0, v_1]$, $d_0 = d(x, v_0) \leq d_1 = d(x, v_1) = 1 - d_0$.

Supongamos $\varepsilon > 1$. Para cualquier punto $x \in X$, sea z un vértice o un punto medio de una arista en el borde de la bola de radio ε . Como la distancia de este punto a cualquier vértice o punto medio es múltiplo de $\frac{1}{2}$, si consideramos el camino geodésico de x a z (que contiene a v_0 o v_1), resulta que $\varepsilon - d_0$ o $\varepsilon - d_1$ es múltiplo de $\frac{1}{2}$. Hay a lo sumo dos puntos en cada arista para los que d_0 y d_1 cumplan esta condición y como el grafo es finito, hay una catidad finita de puntos en el grafo para los cuales $\partial \bar{B}(z_i, \varepsilon)$ contiene un vértice o un punto medio de una arista.

Si $\varepsilon \leq 1$ basta considerar los puntos a distancia ε o $|\varepsilon - \frac{1}{2}|$ de los vértices y también son una cantidad finita. \square

Lema 6.5.7. Para todo par de puntos $x, y \in X$ existe algún $\delta > 0$ tal que $\forall z \in B(x, \delta) \quad d(z, y) \neq d(x, y)$. Más aún, podemos escoger $\delta > 0$ de modo que cada componente conexa C_i de $B(x, \delta) \setminus \{x\}$ está contenida en una arista y $\forall z \in C_i \quad d(z, y) = d(x, y) + d(x, z)$ o $d(z, y) = d(x, y) - d(x, z)$.

Demostración. Vamos a dividir la prueba en dos casos.

Primero cuando x no es un vértice. Sea $x \in e$ para alguna arista e con vértices v_0, v_1 y $d_0 = d(x, v_0)$, $d_1 = d(x, v_1) = 1 - d_0$ con $d_0 \leq d_1$. Si $y \in [v_0, v_1]$ sea $\delta < \min\{d_0, d_1\}$ y el resultado es obvio. En otro caso, si el camino minimal de x a y es a través de v_i , $i = 0, 1$ y $z \in (x, v_i)$ (los puntos de e entre x y v_i) entonces $d(z, y) = d(x, y) - d(x, z)$. Si el camino minimal de x a y no pasa por v_i , $i = 0, 1$ significa que $d_i + d(v_i, y) > \varepsilon$. Entonces, si definimos $0 < 2\delta < d_i + d(v_i, y) - \varepsilon$, es inmediato ver que $\forall z \in (x, v_i)$ tal que $d(x, z) < \delta$, el camino más corto a y es aún cruzando el vértice opuesto y $d(z, y) = d(x, z) + d(x, y)$.

Si x es un vértice del grafo sean w_1, \dots, w_n los vértices adyacentes. Si $y \in [x, w_i]$ para algún i basta tomar $\delta < d(x, y)$. Si $y \notin [x, w_i]$ para cada i , sean w_1, \dots, w_k aquellos para los que $d(w_i, y) = d(x, y) - 1$ y sea $\delta <$

$\frac{1}{2}(1 + d(w_i, y) - d(x, y))$ para $i > k$. Si $z \in (x, w_i)$ con $i \leq k$ entonces $d(z, y) = d(x, y) - d(x, z)$. Si $z \in (x, w_i)$ con $i > k$ y $d(z, x) \leq \delta$ entonces cualquier camino minimal de z a y es a través de x y cualquiera de los w_i con $i \leq k$ y $d(z, y) = d(x, y) + d(x, z)$. \square

Sea \mathcal{V} el conjunto de vértices de X y \mathcal{M} el conjunto de puntos medios de aristas.

Definición 6.5.8. Para todo $\varepsilon > 0$ sea $A_\varepsilon := \{x \in X \mid x \notin \mathcal{V}, x \notin \mathcal{M}, \partial B(x, \varepsilon) \cap \mathcal{V} = \emptyset, \partial B(x, \varepsilon) \cap \mathcal{M} = \emptyset \text{ y } \bar{B}(x, \varepsilon) \neq X\}$.

Proposición 6.5.9. $\forall \varepsilon > 0$ $p_\varepsilon(X) \setminus p_\varepsilon(A_\varepsilon)$ contiene un número finito de puntos.

Demostración. $X \setminus A_\varepsilon$ consiste en todos los puntos en X para los cuales la bola de radio ε es el total junto con un número finito de puntos por 6.5.6 y por ser el grafo finito. $p_\varepsilon(X) \setminus p_\varepsilon(A_\varepsilon)$ consiste en la proyección de ese número finito de puntos junto con el punto $\{X\}$ del total, si se alcanza. \square

Nota 6.5.10. Para todo $x \in A_\varepsilon$, si $\varepsilon > d_1$, $\varepsilon = d_0 + k + d'_0 = d_1 + k' + d'_1$ y $0 < d'_0 \neq \frac{1}{2}$. Entonces $d'_1 = d_0 - d_1 + k - k' + d'_0 = d_0 - 1 + d_0 + k - k' + d'_0 = 2d_0 + d'_0 + k''$ con k'' algún entero, y como $2d_0$ no es entero $d'_1 \neq d'_0$.

Lema 6.5.11. Sea $x \in A_\varepsilon$ con $d_1 < \varepsilon = d_0 + k + d'_0 = d_1 + k' + d'_1$ e $y \in \partial \bar{B}(x, \varepsilon) \cap cl(X \setminus \bar{B}(x, \varepsilon))$. Entonces existe una arista $e' = [w, w']$ tal que $y \in e'$, $d(y, w) = d(x, y) - d(y, w)$ y $d(y, w') > d(x, y) - d(y, w')$. Más aún, o $d(w, y) = d'_0$ y cualquier camino minimal de x a y es $[x, v_0] \cup [v_0, w] \cup [w, y]$ (donde $[v_0, w]$ representa un camino minimal de v_0 a w) con longitudes d_0, k, d'_0 respectivamente o $d(w, y) = d'_1$ y es $[x, v_1] \cup [v_1, w] \cup [w, y]$ con longitudes d_1, k', d'_1 .

Demostración. Como $y \in \partial \bar{B}(x, \varepsilon)$ existe un camino minimal de x a y de longitud ε que obviamente cruza uno (y sólo uno) de los vértices, supongamos que es w , de e' (y no es un vértice ya que $x \in A_\varepsilon$). $y \in cl(X \setminus \bar{B}(x, \varepsilon))$ lo que implica que $d(y, w') > d(x, y) - d(x, w')$. De otro modo $[y, w'] \cup [w', x]$ (la unión de caminos que realizan la distancia) sería también un camino de longitud ε y e' estaría contenido en $\bar{B}(x, \varepsilon)$. Esto es una contradicción ya que haría que $d(y, X \setminus \bar{B}(x, \varepsilon)) \geq \min\{d'_0, d'_1\} > 0$ y entonces $y \notin cl(X \setminus \bar{B}(x, \varepsilon))$.

La distancia entre dos vértices cualesquiera es un entero y $d_0 < d_1$. Entonces $d(x, w)$ puede ser del tipo $d_0 + k$ o $d_1 + k'$. El primer caso ocurre si y sólo si $d(w, y) = d'_0$ y cualquier camino minimal de x a y sería $[x, v_0] \cup [v_0, w] \cup [w, y]$ (donde $[v_0, w]$ representa cualquier camino minimal de v_0 a w) con $d(v_0, w) = k$ y el segundo ocurre si y sólo si $d(w, y) = d'_1$ y el camino minimal sería $[x, v_1] \cup [v_1, w] \cup [w, y]$ con $d(v_1, w) = k'$. \square

Nota 6.5.12. Si aplicamos el lema 6.5.7 obtenemos una bola alrededor de dicho punto $y \in e'$, y dos componentes conexas $C_0 \subset (w_i, y)$ donde $\forall z \in C_0 \quad d(z, x) = d(x, y) - d(z, y)$ y $C_1 \subset (y, w'_i)$ donde $\forall z \in C_1 \quad d(z, x) = d(x, y) + d(z, y)$.

Lema 6.5.13. Dado $x \in A_\varepsilon$ y $\{y_1, \dots, y_n\} = \partial\bar{B}(x, \varepsilon) \cap cl(X \setminus \bar{B}(x, \varepsilon))$ podemos separar estos puntos del borde en dos subconjuntos disjuntos, $\{y_1, \dots, y_k\}$ y $\{y_{k+1}, \dots, y_n\}$, de forma que para cualquier camino minimal γ_i de x a y_i , $[v_0, x] \cap \gamma_i \neq \{x\}$ para $i \leq k$ y $[v_1, x] \cap \gamma_i \neq \{x\}$ para $i > k$. En particular, si $d_1 < \varepsilon = d_0 + k + d'_0 = d_1 + k' + d'_1$ hay un vértice w_i tal que $d(w_i, y_i) = d'_0$ y $d(x, w_i) = d_0 + k$ para $i \leq k$ y $d(w_i, y_i) = d'_1$ y $d(x, w_i) = d_1 + k'$ para $i > k$.

Demostración. Si $\varepsilon \leq d_1$ es trivial y si $\varepsilon > d_1$ se sigue fácilmente del lema 6.5.11. \square

El caso interesante viene cuando consideramos el lema 6.5.7 aplicado a un punto en A_ε con los puntos de $\partial\bar{B}(x, \varepsilon) \cap cl(X \setminus \bar{B}(x, \varepsilon))$ usando esta partición.

Lema 6.5.14. Sea $x \in A_\varepsilon$ y $\{y_1, \dots, y_n\} = \partial\bar{B}(x, \varepsilon) \cap cl(X \setminus \bar{B}(x, \varepsilon))$ con la partición definida en el lema 6.5.13. Existe entonces algún $\delta > 0$ tal que $B(x, \delta) \setminus \{x\}$ está contenido en una arista y tiene dos componentes conexas $C_{0,\delta} \subset (v_0, x)$, $C_{1,\delta} \subset (v_1, x)$ de modo que $\forall z \in C_{0,\delta}$, $d(z, y_i) = d(x, y_i) - d(x, z) \quad \forall i \leq k$, $d(z, y_i) = d(x, y_i) + d(x, z) \quad \forall i > k$ y $\forall z \in C_{1,\delta}$, $d(z, y_i) = d(x, y_i) - d(x, z) \quad \forall i > k$ y $d(z, y_i) = d(x, y_i) + d(x, z) \quad \forall i \leq k$.

Demostración. Los casos cuando $\varepsilon \leq d_1 < 1$ son triviales y basta tomar $\delta < d_0, \varepsilon$; así que vamos a ver lo que pasa cuando $\varepsilon > d_1$. Sea $x \in e = [v_0, v_1]$, $d_0 = d(x, v_0) < d(x, v_1) = d_1$ y $\varepsilon = d_0 + k + d'_0 = d_1 + k' + d'_1$ (como $x \in A_\varepsilon$ $d'_0, d'_1 \neq 0, \frac{1}{2}$).

Por el lema 6.5.11, cada y_i está contenido en una arista $[w_i, w'_i]$ con $d(w_i, y_i) = d'_0 \quad \forall i = 1, k$ y $d(w_i, y_i) = d'_1 \quad \forall i = k+1, n$.

Sea $0 < 2\delta_i < d(w'_i, x) + d(w'_i, y_i) - \varepsilon$. Entonces, si $\delta_0 = \min\{\delta_i\}$, $\forall z \in B(x, \delta_0)$ cualquier camino minimal de z a y_i sigue siendo a través de w_i y no w'_i .

Si $\delta_1 < d_0$ hay dos componentes conexas en $B(x, \delta_1) \setminus \{x\}$: $C_{0,\delta} \subset (v_0, x)$ contenidas en la parte de la arista e entre v_0 y x , y $C_{1,\delta} \subset (v_1, x)$.

Finalmente, sea $0 < 2\delta'_i < d(y_i, v_1) + d_1 - \varepsilon$ para $i \leq k$ y $0 < 2\delta'_i < d(y_i, v_0) + d_0 - \varepsilon$ para $i > k$, y $\delta_2 = \min\{\delta'_i, \delta_1\}$. Entonces $\forall z \in B(x, \delta_2)$ cualquier camino minimal de z a y_i es cruzando v_0 si $i \leq k$ y v_1 si $i > k$.

Se define entonces $\delta = \min\{\delta_0, \delta_2\}$. Si $z \in C_{0,\delta}$, $d(z, y_i) = d(z, v_0) + d(v_0, w_i) + d(w_i, y) = d(x, y_i) - d(x, z) \quad \forall i \leq k$ y $d(z, y_i) = d(z, v_1) + d(v_1, w_i) + d(w_i, y) = d(x, y_i) + d(x, z) \quad \forall i > k$ y si $z \in C_{1,\delta}$, $d(z, y_i) = d(z, v_1) + d(v_1, w'_i) + d(w'_i, y) = d(x, y_i) - d(x, z) \quad \forall i > k$ y $d(z, y_i) = d(z, v_0) + d(v_0, w'_i) + d(w'_i, y) = d(x, y_i) + d(x, z) \quad \forall i \leq k$. \square

Lema 6.5.15. *Sea $x \in A_\varepsilon$ y $\{y_1, \dots, y_n\} = \partial\bar{B}(x, \varepsilon) \cap \text{cl}(X \setminus \bar{B}(x, \varepsilon))$. Existe entonces $\delta > 0$ tal que, $\forall z \in C_{0, \delta}$*

$$\bar{B}(z, \varepsilon) = \bar{B}(x, \varepsilon) \cup \{\cup_1^k \bar{B}(y_i, d(z, x))\} \setminus \cup_{i=k+1}^n B(y_i, d(z, x))$$

y $\forall z \in C_{1, \delta}$

$$\bar{B}(z, \varepsilon) = \bar{B}(x, \varepsilon) \cup \{\cup_{k+1}^n \bar{B}(y_i, d(z, x))\} \setminus \cup_{i=1}^k B(y_i, d(z, x)).$$

En particular, podemos tomar δ lo bastante pequeña como para que cada bola $\bar{B}(y_i, d(z, x))$ esté contenida en una arista y sea disjunta de las otras.

Demostración. De nuevo si $\varepsilon \leq d_1$ es inmediato tomando $\delta < \min\{d_0, \varepsilon\}$ por tanto supongamos $\varepsilon > d_1$.

Sea $\delta_0 < d'_0, d'_1, 1 - d'_0, 1 - d'_1$. Las primeras dos cotas son en realidad redundantes con la que vendrá más adelante, δ_1 , y podrían suprimirse en esta prueba pero justificar cómo provienen de esta otra es menos claro que imponerlo explícitamente. Las dos últimas no son necesarias para la primera parte del resultado pero después serán útiles para asegurar que cada bola $B(y_i, d(z, x))$ está en una arista.

Consideremos $\delta_1 > 0$ tal que satisface el lema 6.5.14.

Sea $K_{x, \varepsilon}$ el conjunto de todos los puntos de X que pertenecen a alguna arista enteramente contenida en la bola abierta $B(x, \varepsilon)$. Si definimos $\varepsilon' = \max_{a \in K_{x, \varepsilon}} \{d(a, x)\}$ entonces $0 \leq \varepsilon' < \varepsilon$ ya que $K_{x, \varepsilon}$ es compacto y está contenido en la bola abierta. Sea $0 < \delta_2 < \varepsilon - \varepsilon'$ entonces $\forall z \in B(x, \delta_1)$, $K_{x, \varepsilon} \subset B(z, \varepsilon)$.

Así, sólo debemos preocuparnos por las aristas $e_i = [w_i, w'_i]$ que contienen a los $\{y_i\}$ para $i = 1, n$ y aquellos e'_1, \dots, e'_r tales que $e'_i \subset \bar{B}(x, \varepsilon)$ pero que contienen un punto y'_i del borde de la bola. Comenzamos con uno de estos $y' \in \{y_i\}_{i=1, r}$.

Como $x \in A_\varepsilon$ este punto y' es un punto interior de $e' = [u_0, u_1]$ distinto del punto medio y si $\varepsilon = d_0 + k + d'_0 = d_1 + k' + d'_1$ entonces $d(y', u_0) = d'_0$, $d(y', u_1) = d'_1 = 1 - d'_0$, $d(x, u_0) = d_0 + k$ y $d(x, u_1) = d_1 + k'$. Más aún, podemos considerar γ_0, γ_1 dos caminos minimales (de longitud ε) de x a y' , γ_0 pasando por v_0 y u_0 , y γ_1 pasando por v_1 y u_1 .

En este caso, las aristas $[v_0, v_1]$ y $[u_0, u_1]$ son parte de un ciclo de longitud $2\varepsilon \in \mathbb{N}$ en el grafo formado por dos caminos minimales de x a y' . (De hecho, si 2ε es par, entonces $d_0 = d'_1$ y $d_1 = d'_0$ y si 2ε es impar, entonces $d'_1 = d_0 + \frac{1}{2}$ y $d'_0 = d_1 - \frac{1}{2}$). Consideramos la restricción γ'_0 de γ_0 uniendo v_0 y u_0 y la restricción γ'_1 de γ_1 uniendo v_1 y u_1 . Si son disjuntas hemos acabado. En otro caso, tendrían al menos un vértice común $z \subset \gamma'_0 \cap \gamma'_1$ y $d_0 + n_1 = d(v_0, z) \neq d(v_1, z) = d_1 + n_2$ (véase la figura 6.6).

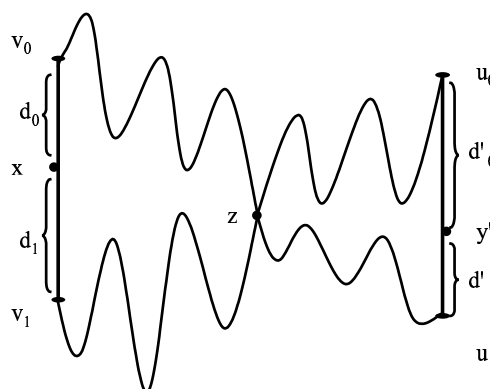


Figura 6.6: Los caminos minimales se intersecan.

Si $d(v_0, z) \leq d(v_1, z)$ los vértices u_0, u_1 cumplirían que $d(u_0, v_0) \leq d(u_0, v_1)$ y $d(u_1, v_0) \leq d(u_1, v_1)$ pero esta última desigualdad no es posible porque hay un camino minimal de x a u_1 pasando por v_1 (restricción de γ_1) y como $d_1 > d_0$ obtendríamos $d(x, u_1) = d_1 + d(u_1, v_1) > d_0 + d(u_1, v_0) \geq d(x, u_1)$.

En otro caso $d(v_1, z) \leq d(v_0, z) - 1$ y entonces $d(v_1, u_0) \leq d(v_0, u_0) - 1$ y $d(v_1, u_1) \leq d(v_0, u_1) - 1$. Entonces $[x, v_1] \cup [v_1, u_0] \cup [u_0, y']$ definiría un camino de longitud $d_1 + d(v_1, u_0) + d'_0 \leq d_1 + d(v_0, u_0) - 1 + d'_0$ y como $d_1 < d_0 + 1$ esto nos daría un camino de x a y' más corto que γ_0 , y por tanto $d(x, y') < \varepsilon$ lo que contradice la hipótesis inicial.

Con esto concluimos que cualquier punto del borde y' , en una arista enteramente contenida en la bola cerrada pero no en la abierta, está en un ciclo de longitud $2\varepsilon \in \mathbb{N}$ dado por dos caminos minimales (disjuntos quitando los extremos) de x a y' . Más aún, si 2ε es par, entonces $k = k'$ y $d_0 = d'_1, d_1 = d'_0$. Si 2ε es impar, entonces $k' = k + 1$ y $d_0 + d'_0 + 1 = d_1 + d'_1$ (no es posible otra cosa porque $d_0 < d_1$), y como $d_1 = 1 - d_0$ y en esta situación $d'_0 = 1 - d'_1$ se sigue inmediatamente que $d'_1 = d_0 + \frac{1}{2}$ y $d'_0 = d_1 - \frac{1}{2}$.

Lo importante aquí de estos puntos y'_i es que si consideramos $\delta_3 < d_0 < d_1$, para cualquier punto $z \in B(x, \delta_3)$ la bola cerrada $\bar{B}(z, \varepsilon)$ contiene también cualquier ciclo de longitud 2ε que contenga la arista $[v_0, v_1]$ y las bolas centradas en x y en z no se diferencian en estas aristas e'_i .

Por tanto, si $0 < \delta < \delta_1, \delta_2, \delta_3$ la única diferencia entre estas bolas estaría en aquellas aristas $[w_i, w'_i]$ que contienen los puntos $\{y_1, \dots, y_n\}$ (tampoco fuera de $\bar{B}(x, \varepsilon)$ porque $\delta < 1 - d'_0, 1 - d'_1$). (Nótese que dos de estos puntos podrían estar en la misma arista si $2d'_0 < 1, 2d'_1 < 1$ o $d'_0 + d'_1 < 1$. Esto significaría, en la notación dada, que $w_i = w'_j$ y $w'_i = w_j$ y no hay contradicción

alguna).

Sea $0 < \delta_4 = \frac{1}{2} \min_{i \neq j} \{d(y_i, y_j)\}$. Si $0 < \delta < \delta_4$, para todo par de puntos del borde y_i, y_j $\bar{B}(y_i, \delta) \cap \bar{B}(y_j, \delta) = \emptyset$.

Así, finalmente, sea $0 < \delta < \min\{\delta_0, \delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4\}$.

Probaremos la igualdad para el caso de $z \in C_{0,\delta}$. Si $z \in C_{1,\delta}$ es análogo.

$\bar{B}(z, \varepsilon) = \bar{B}(x, \varepsilon) \cup_1^r \{\bar{B}(y_i, d(x, z))\} \setminus \cup_{i=r+1}^k \{B(y_i, d(x, z))\}$.

Como hemos dicho, $K_{x,\varepsilon}$ y e'_1, \dots, e'_r están contenidos en $\bar{B}(z, \varepsilon)$ y en $\bar{B}(x, \varepsilon) \cup_1^k \{\bar{B}(y_i, d(z, x))\} \setminus \cup_{i=k+1}^n \{B(y_i, d(z, x))\}$ ya que $\delta < \delta_1 < d'_0, d'_1$ y no estamos quitando ninguno de esos puntos con las bolas $B(y_i, d(z, x))$ para $i > k$ porque $\delta < d'_1$. Para probar la igualdad falta ver qué pasa en e_i .

Las bolas $B(y_i, \delta)$ son disjuntas y están contenidas en una arista así que podemos estudiar qué pasa alrededor de cada punto del borde independientemente.

Si $i \leq k$ entonces $d(z, y_i) = \varepsilon - d(z, x)$ y por tanto la bola $\bar{B}(z, \varepsilon)$ contiene a $[w_i, y_i]$ y además alrededor de y_i exactamente una bola $\bar{B}(y_i, d(x, z))$. Si $i > k$ $d(z, y_i) = \varepsilon + d(z, x)$ y $d(z, x) < \delta < d'_1$ implica que $\bar{B}(z, \varepsilon) \cap [w_i, y_i] = [w_i, y_i] \setminus B(y_i, d(x, z))$. \square

Lema 6.5.16. *Sea $\bar{B}(x, \varepsilon) = X$ y supongamos $\{y_1, \dots, y_n\} = \partial \bar{B}(x, \varepsilon)$. Sea $\delta_1 > 0$ tal que $B(x, \delta_1)$ cumple el lema 6.5.7 para cada punto del borde y_i . Para cualquier componente $C_i \in B(x, \delta_1) \setminus \{x\}$ consideramos $\{y_1, \dots, y_k\}$ aquellos puntos del borde tales que $\forall z \in C_i$ $d(z, y_i) = d(x, y_i) + d(x, z)$. Entonces, existe algún $\delta < \delta_1$ tal que $\forall z \in C_i \cap B(x, \delta)$, $\bar{B}(z, \varepsilon) = X \setminus \cup_{i=1}^k \{B(y_i, d(x, z))\}$.*

Demostración. Si $\varepsilon \leq 1$ entonces X consiste en dos vértices y una única arista o varias aristas con x como vértice común. En ambos casos la demostración es inmediata. Supongamos que hay al menos dos aristas y que $\varepsilon > 1$.

Sea $x \in [v_0, v_1]$ con $0 \leq d_0 = d(x, v_0) < 1$ y $d_1 = d(x, v_1) = 1 - d_0$. Sea $k = [\varepsilon - d_0]$, $k' = [\varepsilon - d_1]$, $d'_0 = \varepsilon - k - d_0$ y $d'_1 = \varepsilon - k' - d'_0$.

Sea $\varepsilon' = \max_{a \in K_{x,\varepsilon}} \{d(a, x)\}$. Entonces $0 \leq \varepsilon' < \varepsilon$ ya que $K_{x,\varepsilon}$ es compacto y está contenido en la bola abierta. Tomando $0 < \delta_2 < \varepsilon - \varepsilon'$ tenemos que $\forall z \in B(x, \delta_1)$, $K_{x,\varepsilon} \subset B(z, \varepsilon)$.

Si $\{y_1, \dots, y_k\} \neq \emptyset$ y $\delta < \min\{\delta_1, \delta_2\}$ sólo hay que comprobar aquellas aristas que contienen un punto del borde y_i con $i \leq k$. Cualquier camino minimal de x a y_i tiene longitud ε y $\forall z \in C_i$, cualquier camino minimal de z a y_i tiene longitud $\varepsilon + d(z, x)$.

$d(z, x) = \varepsilon + d(z, x)$ implica que $\forall z' \in B(y_i, d(z, x))$, $d(z', x) > \varepsilon$. Por tanto $B(y_i, d(x, z)) \cap \bar{B}(z, \varepsilon) = \emptyset$ y resulta que $\bar{B}(z, \varepsilon) \subset X \setminus \cup_{i=1}^k \{B(y_i, d(x, z))\}$.

Por otra parte, para todo punto $z' \in X \setminus \cup_{i=1}^k \{B(y_i, d(x, z))\}$, si z' no está en $K_{x,\varepsilon}$ (esto implicaría inmediatamente que $z' \in \bar{B}(z, \varepsilon)$), $z' \in [w_i, y]$ con

$[w_i, w'_i]$ una arista tal que $y_i \in [w_i, w'_i]$. Entonces $d(z, z') \leq d(x, y) + d(x, z) - d(z', y) = \varepsilon + d(x, z) - d(z', y)$. Pero como $z' \notin B(y_i, d(x, z))$, $d(z', y_i) \geq d(x, z)$ y entonces, $d(z, z') \leq \varepsilon$ y $z' \in \bar{B}(z, \varepsilon)$.

Así, $\bar{B}(z, \varepsilon) = X \setminus \cup_{i=1}^k \{B(y_i, d(x, z))\}$. \square

Corolario 6.5.17. *Sea $\bar{B}(x, \varepsilon) = X$ y $\emptyset \neq \{y_1, \dots, y_n\} = \partial\bar{B}(x, \varepsilon)$. Entonces existe algún $\delta > 0$ tal que la restricción $p_\varepsilon|_{C_{i,\delta} \cup \{x\}} : C_{i,\delta} \cup \{x\} \rightarrow p_\varepsilon(C_{i,\delta} \cup \{x\})$ es una isometría cuando $p_\varepsilon(C_{i,\delta}) \neq \{X\}$.*

Demostración. Por la propiedades de la métrica de longitud, $\forall z, z' \in X$ $d_H(\bar{B}(z, \varepsilon), \bar{B}(z', \varepsilon)) \leq d(z, z')$. Supongamos $\delta > 0$ en las condiciones del lema 6.5.16. Si $p_\varepsilon(C_{i,\delta}) \neq \{X\}$ entonces, por el lema 6.5.7, existe algún y_j tal que $\forall z \in C_{i,\delta}$ $d(z, y_j) = d(z, x) + d(x, y_j)$.

Como acabamos de ver $\bar{B}(z, \varepsilon) \cap B(y_j, d(z, x)) = \emptyset$. Sea $z' \in (z, x]$. $\bar{B}(z', \varepsilon) \cap S(y_j, d(z', x)) \neq \emptyset$ ya que $d(z', y_j) = \varepsilon + d(z', x)$.

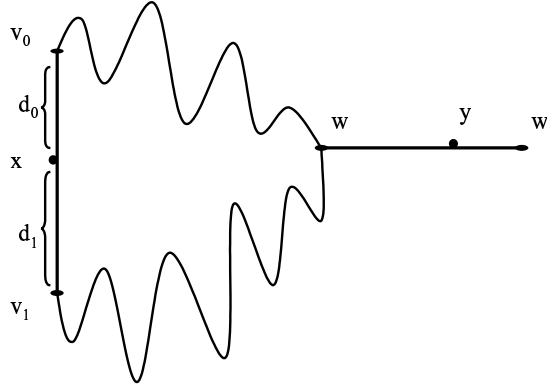
Por tanto, cualquier $p \in \bar{B}(z', \varepsilon) \cap S(y_j, d(z', x))$ cumple que $d(p, \bar{B}(z, \varepsilon)) \geq d(z, x) - d(z', x) = d(z, z')$ y por tanto $d_H(\bar{B}(z, \varepsilon), \bar{B}(z', \varepsilon)) \geq d(z, z')$ lo que prueba la igualdad. \square

Proposición 6.5.18. *Para todo $x \in X$ tal que $\bar{B}(x, \varepsilon) \neq X$, si x no es un vértice ni el punto medio de una arista entonces existe $\delta > 0$ tal que la restricción $p_\varepsilon|_{B(x, \delta)} : B(x, \delta) \rightarrow p_\varepsilon(B(x, \delta))$ es una isometría.*

Demostración. Si $\varepsilon \leq d_1$ es inmediato.

En otro caso, sea $y \in \partial\bar{B}(x, \varepsilon) \cap cl(X \setminus \bar{B}(x, \varepsilon))$ y $\delta_1 > 0$ tal que cumple las condiciones del lema 6.5.7 para x, y . Como x no es un vértice, $B(x, \delta_1) \setminus \{x\}$ se descompone en dos componentes conexas $C_{0,\delta_1}, C_{1,\delta_1}$ y como x no es el punto medio $d_0 = d(x, v_0) \neq d(x, v_1) = d_1$. y está contenido en una arista $[w, w']$ con $d(w, x) = d(x, y) - d(w, y)$ (existe un camino minimal γ de x a y pasando por w) y $d(w', x) > d(x, y) - d(w', y)$ (todo camino minimal de x a y debe ser pasando por w porque $y \in cl(X \setminus \bar{B}(x, \varepsilon))$).

$d_0 \neq d_1$ y por tanto $0 < |d_0 - d_1| < 1$. Como vimos en 6.5.5 la distancia entre vértices del grafo es un entero lo que implica, en este caso, que $d(x, v_0) + d(v_0, w) \neq d(x, v_1) + d(v_1, w)$. Supongamos entonces $\varepsilon = d(x, v_0) + d(v_0, w) + d(w, y) < d(x, v_1) + d(v_1, w) + d(w, y) = \varepsilon'$ y cualquier camino minimal γ pasa por v_0 .

Figura 6.7: Los caminos minimales pasan por v_0 .

Si aplicamos el lema 6.5.7 en y, v_0 para obtener una bola alrededor de y , una de las componentes D_{1,δ_2} estará contenida en (y, w') y ésta será tal que $d(z', v_0) = d(z', y) + d(y, v_0) \forall z' \in D_{1,\delta_2}$. Si fuera tal que $d(z', v_0) = d(y, v_0) - d(z', y)$ existiría un camino de longitud $\varepsilon - d_0$ dado por $[v_0, z'] \cup [z', y]$ con $z' \in (y, w')$. Este camino cruza necesariamente el vértice w' y esto nos lleva a contradicción porque $d(y, w') + d(w', v_0) + d(v_0, x) \geq d(y, w') + d(w', x) > d(y, w) + d(w, v_0) + d(v_0, x) = \varepsilon$ y por tanto $d(y, w') + d(w', v_0) > d(y, w) + d(w, v_0) = \varepsilon - d_0$ y no hay camino minimal de v_0 a y a través de w' .

Sea $\delta < \min\{\delta_1, \delta_2, \frac{1}{4}(\varepsilon - \varepsilon')\}$. Entonces $\forall z \in B(x, \delta)$ y $\forall z' \in B(x', \delta)$ $z \in [v_0, v_1]$ y cualquier camino minimal γ de z a z' es pasando por v_0 ya que de otro modo tendríamos un camino de x a y a través de v_1 con longitud $\leq \varepsilon + 2\delta < \varepsilon'$.

Por tanto, si $z \in C_{0,\delta}$, $D_{0,\delta} \subset \bar{B}(z, \varepsilon)$ y $\bar{B}(z, \varepsilon) \cap D_{1,\delta} = \bar{B}(y, d(z, x)) \cap D_{1,\delta}$. Si $z \in C_{1,\delta}$ $D_{1,\delta} \cap \bar{B}(z, \varepsilon) = \emptyset$ y $\bar{B}(z, \varepsilon) \cap D_{0,\delta} = D_{0,\delta} \setminus B(y, d(z, x))$. Así, es inmediato comprobar que $\forall z_1, z_2 \in B(x, \delta)$ $d_H(\bar{B}(z_1, \varepsilon), \bar{B}(z_2, \varepsilon)) \geq d(z, z')$. \square

Esto se cumple, en particular, para cualquier $x \in A_\varepsilon$. Sin embargo la proyección p_ε no tiene porqué ser abierta.

Ejemplo 6.5.19. Consideramos el siguiente grafo y la proyección con $\varepsilon = 2 + \frac{3}{4}$.

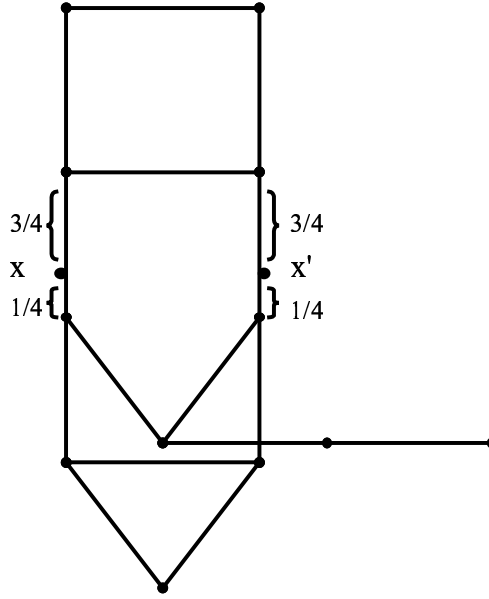


Figura 6.8: La proyección no tiene porqué ser abierta.

En este caso, p_ε no es abierta ni siquiera restringida a $X \setminus p_\varepsilon^{-1}(X)$. Si tomamos un δ lo suficientemente pequeño alrededor de x , por ejemplo $\delta \leq \frac{1}{8}$ es inmediato ver que $p_\varepsilon^{-1}(p_\varepsilon(B(x, \delta))) = B(x, \delta) \cup \{x'\}$, que no es abierto. Esto significa que $p_\varepsilon(B(x, \delta))$ no es abierta porque ya hemos visto que p_ε es continua.

Lema 6.5.20. *Sea $\bar{B}(x, \varepsilon) \neq X$. Existe entonces algún $\delta > 0$ tal que para cualquier componente conexa $C_{i, \delta} \subset B(x, \delta) \setminus \{x\}$ la restricción $p_\varepsilon|_{C_{i, \delta} \cup \{x\}} : C_{i, \delta} \cup \{x\} \rightarrow p_\varepsilon(C_{i, \delta} \cup \{x\})$ es una isometría.*

Demostración. Si $\varepsilon \leq d_1$ es inmediato.

En otro caso, sea $y \in \partial \bar{B}(x, \varepsilon) \cap \text{cl}(X \setminus \bar{B}(x, \varepsilon))$ y $\delta_1 > 0$ tal que cumple el lema 6.5.7 para x, y . Cualquier componente conexa C_{i, δ_1} de $B(x, \delta_1)$ cumple que $\forall z \in C_{i, \delta_1}$ $d(z, y) = d(z, x) + d(x, y)$ o $d(z, y) = d(x, y) - d(x, z)$. En el primer caso, $\bar{B}(z, \varepsilon) \subset X \setminus B(y, d(x, z))$ y para todo $z' \in (z, x)$, como existe un camino de longitud $\varepsilon + d(z', y)$ de z' a y , $\bar{B}(z', \varepsilon)$ contiene un punto p tal que $d(p, y) = d(z', x)$ y por tanto $d_H(\bar{B}(z, \varepsilon), \bar{B}(z', \varepsilon)) \geq d(z, z')$.

Si $\forall z \in C_i$ $d(z, y) = d(x, y) - d(x, z)$ es un poco más complejo. Por el lema 6.5.7 sobre y, x obtenemos una bola centrada en y , $B(y, \delta_2)$, y como $y \in \text{cl}(X \setminus \bar{B}(x, \varepsilon))$ al menos una de las componentes D_{1, δ_2} será tal que $d(z', x) = d(z', y) + d(y, x) \forall z' \in D_{1, \delta_2}$. Sea $\delta < \min\{\delta_1, \delta_2\}$. $\forall z \in C_{i, \delta}$ $d(z, y) = d(x, y) - d(x, z)$ y por tanto $\bar{B}(z, \varepsilon) \cap D_{1, \delta} = \bar{B}(y, d(x, z)) \cap D_{1, \delta}$. Así $\forall z, z' \in C_{i, \delta}$ $d_H(\bar{B}(z, \varepsilon), \bar{B}(z', \varepsilon)) \geq d(z, z')$.

Por las propiedades de la métrica de longitud, para todo par de puntos $z, z' \in X$, $d_H(\bar{B}(z, \varepsilon), \bar{B}(z', \varepsilon)) \leq d(z, z')$ concluyendo la demostración. \square

Proposición 6.5.21. *Si X es un grafo finito entonces para todo $x \in X$ y todo $\varepsilon > 0$ tal que $\bar{B}(x, \varepsilon) \neq X$ resulta que $p_\varepsilon^{-1}(\bar{B}(x, \varepsilon))$ contiene un número finito de puntos.*

Demostración. Si $\bar{B}(x, \varepsilon) \neq X$ existe un punto $y \in \partial\bar{B}(x, \varepsilon) \cap cl(X \setminus \bar{B}(x, \varepsilon))$. Para todo punto x' tal que $\bar{B}(x', \varepsilon) = \bar{B}(x, \varepsilon)$ también $y \in \partial\bar{B}(x', \varepsilon) \cap cl(X \setminus \bar{B}(x', \varepsilon))$ y $d(x', y) = \varepsilon$. Esto significa que $p_\varepsilon^{-1}(\bar{B}(x, \varepsilon))$ está contenido en $S(y, \varepsilon)$ que consiste en un número finito de puntos por 6.5.5. \square

Lema 6.5.22. *Fijado un $\varepsilon > 0$ cualquiera, $\forall x \in X$ y $\forall \delta_0 > 0$ existe algún $\delta_1 > 0$ tal que $\forall z \notin B(p_\varepsilon^{-1}(\bar{B}(x, \varepsilon)), \delta_0)$ $d_H(\bar{B}(z, \varepsilon), \bar{B}(x, \varepsilon)) > \delta_1$.*

Demostración. En otro caso existiría algún $\delta_0 > 0$ tal que para cada $\delta_n = \frac{1}{n}$ existe un punto $z_n \notin B(p_\varepsilon^{-1}(\bar{B}(x, \varepsilon)), \delta_0)$ para el cual $d_H(\bar{B}(z_n, \varepsilon), \bar{B}(x, \varepsilon)) \leq \frac{1}{n}$.

Como X es compacto, existe un punto de acumulación z de (z_n) y obviamente $\bar{B}(z, \varepsilon) = \bar{B}(x, \varepsilon)$. Por lo tanto, $z \in p_\varepsilon^{-1}(\bar{B}(x, \varepsilon))$ y es un punto de acumulación de z_n lo que contradice el hecho de que $z_n \notin B(p_\varepsilon^{-1}(\bar{B}(x, \varepsilon)), \delta_0)$. \square

Proposición 6.5.23. *Si X es un grafo finito y $\varepsilon > 0$ es tal que $X \in p_\varepsilon(X)$, entonces $p_\varepsilon^{-1}(X)$ es localmente conexo.*

Demostración. Sea $x \in p_\varepsilon^{-1}(X)$. Si $\partial\bar{B}(x, \varepsilon) = \emptyset$ entonces, como X es compacto, $\varepsilon' := \max_{y \in X} \{d(x, y)\} < \varepsilon$ y por tanto, si $0 < \delta < \varepsilon - \varepsilon'$, $\forall z \in B(x, \delta)$ $\bar{B}(z, \varepsilon) = X$.

Si $\partial\bar{B}(x, \varepsilon) = \{y_1, \dots, y_k\}$ usamos 6.5.7 para cada y_i y consideramos el mínimo $\delta > 0$ para los k puntos de modo que cada componente conexas C_i de $B(x, \delta) \setminus \{x\}$ está contenida en una arista y $\forall z \in C_i$ y $\forall i$, $d(z, y_i) = d(x, y_i) + d(x, z)$ o $d(z, y_i) = d(x, y_i) - d(x, z)$. Consideramos C_1, \dots, C_k aquellas componentes para las que $d(z, y_i) = d(x, y_i) - d(x, z)$ para todo i . Si imponemos además que $0 < \delta < \varepsilon - \max\{d(p, x)\}$ donde p es un punto cualquiera de una arista totalmente contenida en la bola abierta $B(x, \varepsilon)$ ($\forall p \in K_{x, \varepsilon}$), como en la demostración del lema 6.5.16, entonces $\bar{B}(z, \varepsilon) = X \quad \forall z \in C_i$ con $i \leq k$.

Si $z \in C_i$ con $i > k$ entonces para al menos uno de los puntos del borde y_j , $d(z, y_j) > \varepsilon$ y por tanto $\bar{B}(z, \varepsilon) \neq X$.

Así, $B(x, \delta) \cap p_\varepsilon^{-1}(X) = \{x\} \cup C_1 \cup \dots \cup C_k$ que es conexo. \square

Proposición 6.5.24. *Si X es un grafo finito entonces para todo $x \in X$ y todo $\varepsilon > 0$, $p_\varepsilon^{-1}(\bar{B}(x, \varepsilon))$ tiene un número finito de componentes conexas.*

Demostración. Si $\bar{B}(x, \varepsilon) \neq X$ entonces por la proposición 6.5.21 $p_\varepsilon^{-1}(\bar{B}(x, \varepsilon))$ contiene un número finito de puntos y hemos terminado.

Si $\bar{B}(x, \varepsilon) = X$, por la proposición 6.5.23 $p_\varepsilon^{-1}(X)$ es localmente conexo, lo que implica que las componentes conexas son abiertas, y por continuidad es compacto, luego debe haber una cantidad finita de componentes conexas puesto que definen un cubrimiento por abiertos. \square

Tomamos las siguientes definiciones y la caracterización de un grafo del capítulo IX de [54].

Definición 6.5.25. Sea (X, T) un espacio topológico y sea $A \subset X$. Sea β un cardinal. Decimos que A es de orden menor o igual que β en X , denotado por

$$\text{ord}(A, X) \leq \beta,$$

si para cada $U \in T$ tal que $A \subset U$, existe $V \in T$ tal que

$$A \subset V \subset U \text{ y } |Bd(V)| \leq \beta.$$

Decimos que A es de orden β en X , denotado por

$$\text{ord}(A, X) = \beta,$$

si $\text{ord}(A, X) \leq \beta$ y $\text{ord}(A, X) \not\leq \alpha$ para cualquier $\alpha < \beta$. Si $A = \{p\}$ se denota como $\text{ord}(p, X)$ en lugar de $\text{ord}(\{p\}, X)$.

Teorema 6.5.26. Un continuum X (i.e. compacto conexo y metrizable) es un grafo si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones (1) y (2):

- (1) $\text{ord}(x, X) < \aleph_0$ para todo $x \in X$;
- (2) $\text{ord}(x, X) \leq 2$ para todo $x \in X$ excepto, a lo sumo, para un número finito.

Proposición 6.5.27. Si X es un grafo con la métrica de longitud suponiendo longitud 1 en cada arista, entonces $\forall p \in p_\varepsilon(X) \quad \text{ord}(p, p_\varepsilon(X)) < \aleph_0$.

Demostración. Sea $p \in p_\varepsilon(X)$. Si $p \neq \{X\}$, por 6.5.21 la imagen inversa es una cantidad finita de puntos $\{x_1, \dots, x_n\} = p_\varepsilon^{-1}(p)$. Sea $\delta > 0$ tal que $\{x_1, \dots, x_n\}$ cumplen el lema 6.5.20 para dicho δ y por 6.5.22 existe algún $\delta_1 > 0$ tal que $\forall z \notin B(p_\varepsilon^{-1}(p), \delta)$ entonces $d_H(\bar{B}(z, \varepsilon), p) > \delta_1$. (Suponemos también $\delta < \frac{1}{2}d(x_i, x_j) \forall i \neq j$). Por tanto, sea $\delta_0 < \delta_1, \delta$ y vamos a estudiar $Bd(P(p, \delta_0))$ (la frontera de $P(p, \delta_0)$ que representa la bola centrada en p y de radio δ_0 en $p_\varepsilon(X)$ con la métrica de Hausdorff de 2^X restringida).

Primero nótese que el lema 6.5.22 significa que $P(p, \delta_0) \subset p_\varepsilon(B(p_\varepsilon^{-1}(p), \delta))$. Pero existe un único punto a distancia $\delta_0 < \delta$ de x_i en cada componente

conexa de $B(x_i, \delta)$ y por tanto, por el lema 6.5.20, como hay una cantidad finita de puntos x_i y el grafo es localmente finito, habrá una cantidad finita de bolas $p_j \in p_\varepsilon(X)$ tales que $d_H(p_j, p) = \delta_0$. Por lo tanto, $|Bd(P(p, \delta_0))| < \aleph_0 \forall \delta_0 < \delta_1$ y $ord(p, p_\varepsilon(X)) < \aleph_0$.

En otro caso, supongamos $p = \{X\}$. Por el lema 6.5.24 $p_\varepsilon^{-1}(X)$ tiene una cantidad finita de componentes conexas. Entonces $Bd(p_\varepsilon^{-1}(X))$ contiene un número finito de puntos $\{x_1, \dots, x_n\}$ tales que $\partial \bar{B}(x_i, \varepsilon) \neq \emptyset \forall i = 1, n$.

Sea $\delta > 0$ tal que el lema 6.5.17 se cumple para x_1, \dots, x_n y aplicamos el lema 6.5.22 para obtener algún $\delta_1 > 0$ tal que $\forall z \notin B(p_\varepsilon^{-1}(X), \delta)$, entonces $d_H(\bar{B}(z, \varepsilon), p) > \delta_1$. Sea ahora $\delta_0 < \delta_1, \delta$ y vamos a estudiar $Bd(P(p, \delta_0))$. Por 6.5.17 hay a lo sumo un número finito de puntos z_j en cada bola $B(x_i, \delta)$ (suponemos también $\delta < \frac{1}{2}d(x_i, x_j) \forall i \neq j$) tales que $d_H(\bar{B}(x_i, \varepsilon), \bar{B}(z_j, \varepsilon)) = \delta_0$ y por el lema 6.5.22 cualquier punto cuya bola esté en $P(X, \delta)$ debe estar en una de estas $B(x_i, \delta)$. Por tanto $|Bd(P(X, \delta_0))| < \aleph_0 \forall \delta_0 < \delta_1$ y $ord(X, p_\varepsilon(X)) < \aleph_0$. \square

Usando la definición inductiva de dimensión es ahora inmediato lo siguiente.

Corolario 6.5.28. *Si X es un grafo finito entonces $p_\varepsilon(X)$ es 1-dimensional para todo ε .*

Demostración. $\forall p \in p_\varepsilon(X) \quad ord(p, p_\varepsilon(X)) < \aleph_0$ lo que significa que para cualquier punto p hay entornos arbitrariamente pequeños cuya frontera consiste en una cantidad finita de puntos, y dichos puntos están obviamente aislados. \square

Vamos a usar la caracterización de grafo en términos del orden enunciada en 6.5.26 de [54] (9.10). Por 6.5.28 sólo necesitamos probar que para cualquier punto de X excepto una cantidad finita el orden es ≤ 2 , lo que significa que hay entornos en $p_\varepsilon(X)$ arbitrariamente cerca de la proyección de ese punto cuyo borde consiste a lo sumo en dos puntos.

Teorema 6.5.29. *Si X es un grafo finito con la métrica de longitud y longitud 1 en cada arista, entonces para todo $\varepsilon > 0$ $p_\varepsilon(X)$ es un grafo.*

Demostración. Usamos 6.5.26. Primero nótese que $p_\varepsilon(X)$ es compacto conexo y metrizable (es decir, un *continuum*) al ser p_ε continua.

Por 6.5.27 sabemos que $\forall p \in p_\varepsilon(X) \quad ord(p, p_\varepsilon(X)) < \aleph_0$.

Por 6.5.9 $p_\varepsilon(X) \setminus p_\varepsilon(A_\varepsilon)$ contiene un número finito de puntos, así que basta ver que $ord(\bar{B}(x, \varepsilon), p_\varepsilon(X)) = 2 \quad \forall x \in A_\varepsilon$.

Sea $x \in A_\varepsilon$. Si no existe $x' \neq x$ tal que $\bar{B}(x, \varepsilon) = \bar{B}(x', \varepsilon)$, o lo que es lo mismo, $p_\varepsilon^{-1}(p_\varepsilon(x)) = \{x\}$, existe $\delta > 0$ tal que $\forall z \in B(x, \delta)$ se cumple

que $p_\varepsilon^{-1}(p_\varepsilon(z)) = \{z\}$. Por el lema 6.5.22 sabemos que existe δ_0 de modo que $P(p, \delta_0) \subset p_\varepsilon(B(p_\varepsilon^{-1}(p), \delta))$ (donde $p = p_\varepsilon(x)$) y por tanto, es inmediato ver que el orden es 2.

Sea $x \in A_\varepsilon$ y $x' \neq x$ tal que $\bar{B}(x, \varepsilon) = \bar{B}(x', \varepsilon)$. Sea $x \in [v_0, v_1]$, $d_0 = d(x, v_0)$, $d_1 = d(x, v_1)$ y $\{y_1, \dots, y_n\} = \partial\bar{B}(x, \varepsilon) \cap \text{cl}(X \setminus \bar{B}(x, \varepsilon))$. Es necesario, obviamente, tomar $\varepsilon > d_1$ para asegurar la existencia de dicho x' (el caso $\varepsilon \leq d_1$ es trivial). Como $\bar{B}(x, \varepsilon) \neq X$ $n \geq 1$ luego podemos tomar algún $y \in [w, w']$ tal que $d(x, y) = d_0 + k + d'_0 = d_1 + k' + d'_1$ y por tanto el camino más corto de x a y cruza el vértice w con $d(w, y) = d'_0$ o $d(w, d'_1)$. Como y es también un punto de $\bar{B}(x', \varepsilon) \cap \text{cl}(X \setminus \bar{B}(x', \varepsilon))$, el camino más corto de y a x' tiene longitud ε y contiene a $[w, y]$. Entonces, $x' \in e' = [v'_0, v'_1]$ alguna arista con $d(x', v'_0) = d_0$ y $d(x', v'_1)$.

Sea γ_i un camino minimal (de longitud ε) de x a y_i y γ'_i un camino minimal (también de longitud ε) de x' a y_i . Como vimos en el lema 6.5.14, $y_i \in [w_i, w'_i]$ con $d(w_i, x) = \varepsilon - d(w_i, y_i)$ y $d(w_i, y_i) = d'_0$ si $i \leq k$ y $d(w_i, y_i) = d'_1$ si $i > k$. Como $d'_0 \neq d'_1$ por el lema 6.5.10 γ'_i pasa por v'_0 para $i \leq k$ y γ'_i pasa por v'_1 para $i > k$.

Si aplicamos ahora el lema 6.5.13 a x' veremos inmediatamente que la elección de los subconjuntos $\{y_1, \dots, y_k\}$ e $\{y_{k+1}, \dots, y_n\}$ es independiente del centro que estemos considerando para la bola, y por el lema 6.5.15, con δ suficientemente pequeño para aplicarlo al mismo tiempo sobre x y x' , $\forall z \in B(x, \delta)$, $z' \in B(x', \delta)$ tales que $d(z, v_0) = d(z', v'_0)$, $B(z, \varepsilon) = B(z', \varepsilon)$. Nótese que la descripción de la bola en este lema depende únicamente de la bola inicial, que en este caso es la misma, de δ , y de la partición de los puntos del borde, que también coincide, pero en ningún caso del centro.

Por 6.5.21, $p_\varepsilon^{-1}(p_\varepsilon(x))$ contiene un número finito de puntos $\{x_1, \dots, x_n\}$ y como acabamos de ver, $x_i \in [v_0^i, v_1^i]$ alguna arista con $d(v_0^i, x_i) = d_0$ y $d(x_i, v_1^i) = d_1$. Sea ahora $\delta_0 > 0$ lo suficientemente pequeño como para cumplir el lema 6.5.15 $\forall x_i$, y aplicando el lema 6.5.22, sea δ_1 tal que $\forall z \notin B(p_\varepsilon^{-1}(\bar{B}(x, \varepsilon)), \delta_0)$ $d_H(\bar{B}(z, \varepsilon), \bar{B}(x, \varepsilon)) > \delta_1$.

Tomemos cualquier $\delta < \delta_0, \delta_1$ suficientemente pequeño como para cumplir el lema 6.5.18 y supongamos también $\delta < \frac{1}{2}d(x_i, x_j) \forall i \neq j$. Entonces cualquier punto z tal que $d_H(\bar{B}(z, \varepsilon), \bar{B}(x, \varepsilon)) = \delta$ debe estar contenido en $B(p_\varepsilon^{-1}(\bar{B}(x, \varepsilon)), \delta_0)$ y por 6.5.18 $P(p_\varepsilon(x), \delta_0)$ es isométrico a $B(x_i, \delta_0)$ para cualquier $x_i \in p_\varepsilon^{-1}(\bar{B}(x, \varepsilon))$. Por tanto $d(z, x_i) = \delta$ para algún $x_i \in p_\varepsilon^{-1}(\bar{B}(x, \varepsilon))$. Esto nos da dos bolas posibles: $\bar{B}(z_0, \varepsilon)$ con $z_0 \in [v_0, x]$ y $d(z_0, x) = \delta$, y $\bar{B}(z_1, \varepsilon)$ con $z_1 \in [v_1, x]$ y $d(z_1, x) = \delta$. Cualquier otra bola coincide con una de éstas ya que, como vimos anteriormente, para cualquier otro punto $z_0^j \in [v_0^j, x_j]$ con $d(z_0^j, x_j) = \delta$ o $z_1^j \in [v_1^j, x_j]$ con $d(z_1^j, x_j) = \delta$ resulta que $\bar{B}(z_0^j, \varepsilon) = \bar{B}(z_0, \varepsilon)$ y $\bar{B}(z_1^j, \varepsilon) = \bar{B}(z_1, \varepsilon)$.

Así, $\forall x \in A_\varepsilon$ $\text{ord}(\bar{B}(x, \varepsilon), p_\varepsilon(X)) = 2$ y $p_\varepsilon(X)$ es un grafo. \square

A continuación y para finalizar este análisis del semiflujo para grafos finitos vamos a probar que a lo largo de los diferentes niveles la proyección pasa por una cantidad finita de tipos topológicos y damos una cota inferior para la característica de Euler de la proyección (que como vimos en el ejemplo 6.3.2, puede ser menor que la inicial) en función del número de vértices y aristas del grafo inicial.

Definición 6.5.30. Para cualquier grafo finito X y todo $0 < \varepsilon \leq \text{diam}(X)$ se define un nuevo grafo X_ε subdividiendo X como sigue. Sea $\varepsilon = k \cdot \frac{1}{2} + \varepsilon'$ con $0 \leq \varepsilon' < \frac{1}{2}$ y $k \in \mathbb{N}$. Si $\varepsilon' = 0$ se divide cada arista en dos y los puntos medios se convierten en vértices de X_ε . Si $\varepsilon' = \frac{1}{4}$ se divide cada arista en cuatro, cada una de longitud $\frac{1}{4}$ añadiendo tres nuevos vértices. Si $0 < \varepsilon' < \frac{1}{4}$ se definen cinco nuevos vértices w_1, \dots, w_5 en cada arista $[v, v']$ de forma que w_3 es el punto medio, $[v, w_1], [w_2, w_3], [w_3, w_4]$ y $[w_5, v']$ tienen longitud ε' y $[w_1, w_2], [w_4, w_5]$ tienen longitud $\frac{1}{2} - 2\varepsilon'$. Finalmente, si $\frac{1}{4} < \varepsilon'$ se definen cinco nuevos vértices w_1, \dots, w_5 en cada arista $[v, v']$ de forma que w_3 es el punto medio, $[v, w_1], [w_2, w_3], [w_3, w_4]$ y $[w_5, v']$ tienen longitud $\frac{1}{2} - \varepsilon'$ y $[w_1, w_2], [w_4, w_5]$ tienen longitud $2\varepsilon' - \frac{1}{2}$. En los últimos dos casos dividimos cada arista en seis partes. Obtenemos así un nuevo grafo y una isometría $i : X_\varepsilon \rightarrow X$.

Definición 6.5.31. Sea $X_\varepsilon / \sim_\varepsilon$ el espacio cociente bajo la relación $x \sim_\varepsilon x'$ si y sólo si $\bar{B}(x, \varepsilon) = \bar{B}(x', \varepsilon)$.

Nota 6.5.32. Obviamente $X_\varepsilon / \sim_\varepsilon \cong p_\varepsilon(X)$.

Teorema 6.5.33. $X_\varepsilon / \sim_\varepsilon$ es un grafo donde la relación \sim_ε cumple que:

- (a) Un punto interior de una arista cuya bola de radio ε no sea el total está relacionado con otro si y sólo si ambos están en diferentes aristas y a su vez éstas están identificadas en el cociente.
- (b) Un vértice de X_ε cuya bola de radio ε no sea el total sólo puede estar relacionado con otro vértice.
- (c) Si para un punto interior de una arista la bola de radio ε es el total, entonces lo es para todos los puntos de la arista. En este caso, esta arista se convierte en un vértice del grafo $X_\varepsilon / \sim_\varepsilon \cong p_\varepsilon(X)$.

Demostración. Sea $\varepsilon \leq 1$. Se comprueba que para todo par de puntos sus bolas sólo coinciden cuando son el total y por tanto la proposición se cumple.

Supongamos $\varepsilon > 1$ y sea $\varepsilon = k\frac{1}{2} + \varepsilon_0$ con $0 \leq \varepsilon_0 < \frac{1}{2}$. Sea m el punto medio de una arista y v uno de sus vértices. Cualquier punto contenido en el interior de esta media arista $z \in (v, m)$ inmediatamente pertenece a A_ε si $d(z, v) \neq \varepsilon_0$ y $d(z, m) \neq \varepsilon_0$. Consideramos el grafo X_ε homeomorfo a X como se describe en 6.5.30, cuyos vértices son los vértices de X junto con puntos intermedios x_i en cada arista, y cuyas aristas son el resultado de dividir las originales.

Si $\varepsilon_0 = 0$ entonces $(v, m) \subset A_\varepsilon$, si $\varepsilon_0 = \frac{1}{4}$ y x_1 representa el punto medio de (v, m) entonces $A_1 = (v, x_1) \subset A_\varepsilon$ y $A_2 = (x_1, m) \subset A_\varepsilon$ y si $\varepsilon_0 \neq 0, \frac{1}{4}$ encontramos dos puntos $x_1, x_2 \in (v, m)$ de forma que, al menos, $A_1 = (v, x_1) \subset A_\varepsilon$, $A_2 = (x_1, x_2) \subset A_\varepsilon$ y $A_3 = (x_2, m) \subset A_\varepsilon$.

Comprobamos el apartado (a). Sea $A_i \subset A_\varepsilon$ con $i \leq 3$ en cualquiera de los casos con $z \in A_i$ tal que $\bar{B}(z, \varepsilon) = X$. Como vimos en la demostración del teorema 6.5.26, si z pertenece a algún ciclo de longitud $\leq 2\varepsilon$ ($A_i \subset e$ es parte de él) todo este ciclo está contenido en la bola centrada en cualquier punto de e , y en particular, cualquier punto de A_i . Cualquier otro posible punto del borde de $\bar{B}(z, \varepsilon) = X$ debe ser un punto medio o un vértice pero esto no es posible para ningún punto de A_i y debemos concluir que $\forall z' \in A_i \quad \bar{B}(z', \varepsilon) = X$.

Sea $A_i \subset A_\varepsilon$ con $i \leq 3$ en cualquiera de los casos con $z \in A_i$ y $z' \in X$ tal que $\bar{B}(z, \varepsilon) = \bar{B}(z', \varepsilon)$. Como vimos en la demostración del teorema 6.5.29, z' pertenece necesariamente a alguna arista $[v_1, v_2]$ con $d(z', v_1) = d(z, v)$, y si consideramos la subdivisión de $[v_1, m']$ donde m' representa el punto medio, también $z' \in A'_i \subset A_\varepsilon$. También, como vimos en aquella prueba, existe algún $\delta > 0$ tal que para todo par de puntos $y \in B(z, \delta)$, $y' \in B(z', \delta)$, si $d(y, v) = d(y', v_1)$ las bolas cerradas coinciden $\bar{B}(y, \varepsilon) = \bar{B}(y', \varepsilon)$. Así, los puntos de A_i para los cuales existe un punto en A'_i cuya imagen por p_ε es la misma, forman un abierto en A_i . Por otra parte, si $y_n \in A_i$ es una sucesión convergente a y , $y'_n \in A'_i$ es una sucesión convergente a y' y $\bar{B}(y_n, \varepsilon) = \bar{B}(y'_n, \varepsilon)$ para todo n , obviamente $\bar{B}(y, \varepsilon) = \bar{B}(y', \varepsilon)$ y por tanto, los puntos de A_i para los cuales existe un punto en A'_i cuya imagen por p_ε coincide es un abierto y cerrado en A_i con A_i conexo. Esto significa que si existe dicho par de puntos z, z' entonces $\forall y \in A_i$ y $\forall y' \in A'_i$ con $d(y, v) = d(y', v_1)$, $p_\varepsilon(y) = p_\varepsilon(y')$.

El apartado (b) es consecuencia inmediata del primero.

Para probar (c), si tomamos $z \in A_i \subset A_\varepsilon$ tal que $\bar{B}(z, \varepsilon) = X$, tenemos que $\partial\bar{B}(z, \varepsilon) \cap cl(X \setminus \bar{B}(z, \varepsilon)) = \emptyset$ y por el lema 6.5.15, vemos que existe un $\delta > 0$ de modo que $\forall z' \in B(z, \delta)$, $\bar{B}(z', \varepsilon) = X$. Como en la demostración de (a), se comprueba que el conjunto de puntos de A_i sobre los que la bola es el total, es abierto y cerrado y, por tanto, es todo A_i . \square

Proposición 6.5.34. $\forall \varepsilon > 0$ la característica de Euler de $p_\varepsilon(X)$ cumple que $\aleph(p_\varepsilon(X)) \geq 1 - 6|\mathcal{E}|$ donde $|\mathcal{E}|$ representa el número de aristas de X .

Demostración. Sea $\varepsilon \leq 1$. Si X tiene al menos dos aristas, para todo par de puntos sus bolas sólo coinciden cuando son el total y la proposición se cumple. Si X consiste únicamente en una arista $p_\varepsilon(X)$ es contractible y el resultado es obvio.

Supongamos $\varepsilon > 1$. Claramente la subdivisión X_ε no afecta a la característica de Euler. Veamos qué pasa con las posibles identificaciones de $[v, m]$ al considerar X/\sim como en el lema 6.3.8. Como tendremos a lo sumo $6|\mathcal{E}|$ aristas y al menos 1 vértice, $\aleph(X/\sim) \geq 1 - 6|\mathcal{E}|$. De hecho, si N_0 es el número de conjuntos A_i tales que $\forall z' \in A_i \quad \bar{B}(z', \varepsilon) = X$. Entonces $\aleph(X/\sim) \geq 1 + 2N_0 - 6|\mathcal{E}|$. \square

Corolario 6.5.35. Para todo grafo finito X , $H_1(p_\varepsilon(X)) = \mathbb{Z}^m$ con $m \leq 6|\mathcal{E}| - N_0$.

Definición 6.5.36. Definimos como tiempo crítico todo ε para el que existe una sucesión $0 < t_1 < t_2 < \dots < \varepsilon$ convergente a ε y tal que para todo $i > 0$ $p_{t_i}(X)$ no es homeomorfo a $p_\varepsilon(X)$.

Lema 6.5.37. Sean C_1, C_2, \dots, C_k los ciclos minimales de X , con longitudes $l(C_1) = l_1, \dots, l(C_k) = l_k$. Sea $\varepsilon' > 0$ tal que $2\varepsilon' \neq l_i \forall i$ y $x \in A_{\varepsilon'}$. Si $\{y_1, \dots, y_n\} = \partial \bar{B}(x, \varepsilon')$, entonces existe algún $\delta_0 > 0$ tal que si $\varepsilon' - \varepsilon = \delta < \delta_0$ entonces $\bar{B}(x, \varepsilon) = \bar{B}(x, \varepsilon') \setminus \{\cup_{i=1}^n B(y_i, \delta)\}$.

Demostración. Si $x \in A_\varepsilon$ y $2\varepsilon' \neq l_i \forall i$, entonces $\{z_1, \dots, z_n\} = \partial \bar{B}(x, \varepsilon) \subset cl(X \setminus \bar{B}(x, \varepsilon))$. Como se vio en 6.5.15, supongamos δ lo bastante pequeña como para que cada bola $\bar{B}(z_i, \delta)$ esté contenida en una arista y sea disjunta de las otras. Entonces es claro ver que la bola de radio ε_0 , (que no es otra cosa que la bola generalizada de radio δ sobre la bola de radio ε) es igual a $\bar{B}(x, \varepsilon') = \bar{B}(x, \varepsilon) \cup \{\cup_{i=1}^n B(z_i, \delta)\}$, donde cada una de estas bolas, $B(z_i, \delta)$, está contenida dentro de una arista y es disjunta del resto. Si además, suponiendo $\varepsilon = k\frac{1}{2} + \varepsilon_0$, δ es menor que $\frac{1}{2} - \varepsilon_0$ y asumimos que para ningún ciclo C_i , $\varepsilon < 2l_i < \varepsilon'$, los nuevos puntos del borde $\{y_1, \dots, y_n\} = \partial \bar{B}(z, \varepsilon) \subset cl(X \setminus \bar{B}(x, \varepsilon))$ están en las mismas aristas que los $\{z_1, \dots, z_n\}$ y a distancia δ , y podemos invertir con facilidad la expresión anterior obteniendo que $\bar{B}(x, \varepsilon) = \bar{B}(x, \varepsilon') \setminus \{\cup_{i=1}^n B(y_i, \delta)\}$. \square

Teorema 6.5.38. Para todo grafo finito X con la métrica de longitud y longitud 1 en cada arista hay un número finito de tiempos críticos.

Demostración. Sean C_1, C_2, \dots, C_k los ciclos minimales en X , con longitudes $l(C_1) = l_1, \dots, l(C_k) = l_k$. Supongamos ε' un tiempo tal que $2\varepsilon' \neq l_i \forall i$, y dada la descomposición $\varepsilon' = k \cdot \frac{1}{2} + \varepsilon'_0$ con $0 \leq \varepsilon'_0 < \frac{1}{2}$, supongamos también $\varepsilon'_0 \neq 0, \frac{1}{4}$. Nótese que esto cubre todos los posibles valores para $\varepsilon' \leq \text{diam}(X)$ salvo un número finito.

Sea ahora $0 < \delta_0$ tal que $\delta_0 < |2\varepsilon' - l_i| \forall i$ y $\delta_0 < \varepsilon'_0, |\varepsilon'_0 - \frac{1}{4}|$. Afirmamos entonces que existe algún $\delta \leq \delta_0$ tal que $\forall \varepsilon < \varepsilon'$ con $\varepsilon' - \varepsilon < \delta$ $p_\varepsilon(X) \cong p_{\varepsilon'}(X)$ y ε' no es un tiempo crítico. Lo que haremos será demostrar la existencia de dicho δ para cada arista y cada vértice de $X_{\varepsilon'}$, y como estos son una cantidad finita, bastaría con tomar el mínimo.

Caso 1 Supongamos $\varepsilon'_0 < \frac{1}{4}$. Sea (v, m) media arista con v cualquier vértice y m el punto medio. Sean $w_1, w_2 \in (v, m)$ dos puntos que dividen esta media arista en tres partes: $A_1^{\varepsilon'} = (v, w_1)$ de longitud ε'_0 , $A_2^{\varepsilon'} = (w_1, w_2)$ de longitud $\frac{1}{2} - 2\varepsilon'_0$ y $A_3^{\varepsilon'} = (w_2, m)$ de longitud ε'_0 .

Consideramos el nuevo grafo X_ε como en 6.5.30 que resulta de dividir cada arista en seis partes representadas por A_i^ε . Obviamente si $\varepsilon' - \varepsilon < \delta_0$ existe un isomorfismo entre X_ε y $X_{\varepsilon'}$ que es una aplicación simplicial que envía para cada media arista (v, m) , la nueva arista A_i^ε to $A_i^{\varepsilon'}$ para $i = 1, 2, 3$.

Podemos considerar entonces algún $x_i \in A_i^{\varepsilon'}$ $i = 1, 2, 3$ tal que, si $\varepsilon' - \varepsilon < \delta_0$ entonces $x_i \in A_i^{\varepsilon'} \cap A_i^\varepsilon$ que es claramente no vacío. Entonces por el lema 6.5.37, para cualquier $x_i, x_i \sim_{\varepsilon'} x'_i$ si y sólo si $x_i \sim_\varepsilon x'_i$ para cualquier punto x'_i y por tanto, por 6.5.33, la identificación de las aristas en X_ε será la misma que en $X_{\varepsilon'}$.

Caso 2 Si $\frac{1}{4} < \varepsilon'_0 < \frac{1}{2}$ el argumento es análogo.

Consideramos cualquier vértice: $v = w_0, w_1, w_2, m = w_3$. Si el vértice w_i no está identificado con otro w'_i para ε' no lo estará para $\varepsilon < \varepsilon'$ ya que en un espacio de longitud, una vez que la bola centrada en dos puntos coincide para cierto radio coincide para todo radio mayor. Basta ver que si $w_i \sim_{\varepsilon'} w'_i$ existe algún $\delta > 0$ tal que $\forall \varepsilon < \varepsilon'$ con $\varepsilon' - \varepsilon < \delta$ los vértices correspondientes en X_ε, v_i, v'_i , cumplen que $v_i \sim_\varepsilon v'_i$.

Primero, nótese que para que la condición falle, las aristas que inciden en w_i y w'_i no pueden identificarse en el nivel ε' ya que esto implicaría, como acabamos de ver, que existiría algún δ de modo que en tiempos anteriores a distancia menor que dicho δ las aristas estarían identificadas, y con ellas, los vértices que están en la clausura.

Además, si todos los puntos del borde de las bolas estuviesen contenidos en el interior de aristas de X sin ser el punto medio, podríamos aplicar el mismo argumento que en 6.5.37, y haciendo δ_0 lo suficientemente pequeño, obtenemos que w_i, w'_i son dos puntos identificados en aristas adyacentes a v_i y v'_i que se identifican en el nivel ε siempre que $\varepsilon' - \varepsilon < \delta_0$, y como acabamos de ver, entonces estas aristas estarían identificadas y con ellas los vértices.

Por tanto, el problema sólo puede venir cuando el borde contiene vértices o puntos medios de aristas de X , y como hemos supuesto que $0 < \varepsilon_0 < \frac{1}{2}$, basta considerar los vértices de $X_{\varepsilon'}$ que no proceden de vértices ni puntos medios de aristas de X .

Suponemos pues que no existe dicho δ_0 para estos vértices w_i, w'_i , que estos no son vértices ni puntos medios de aristas de X y que ninguna arista alrededor de w_i se identifica con otra arista adyacente a w'_i , para llegar a contradicción.

Fijamos $[v, m]$ la media arista de X que contiene a w_i y $[v', m']$ la media arista de X que contiene a w'_i . Estamos suponiendo que existe δ arbitrariamente pequeño tal que para los puntos z_1 a distancia δ de w_i en (v, w_i) y x'_1 a distancia δ de w'_i en (v', w'_i) , $\bar{B}(z_1, \varepsilon - \delta) \neq \bar{B}(x'_1, \varepsilon - \delta)$, y para los puntos z_2 a distancia δ de w_i en (w_i, m) y z'_2 a distancia δ de w'_i en (w'_i, m') , $\bar{B}(z_2, \varepsilon - \delta) \neq \bar{B}(z'_2, \varepsilon - \delta)$.

Entonces, debe haber algún punto y_1 con $d(y_1, w_i) = \varepsilon'$ con los caminos minimales pasando por v o bien $d(y_1, w'_i) = \varepsilon'$ con los caminos minimales pasando por v' , y tal que $y_1 \notin cl(X \setminus \bar{B}(w_i, \varepsilon')) = cl(X \setminus \bar{B}(w'_i, \varepsilon'))$. Si todos los puntos del borde de la bola de radio ε' que se alcanzan por caminos minimales a través de v , desde w_i , o de v' , desde w'_i , estuvieran en la clausura del complemento, entonces dichos puntos estarían a distancia ε' tanto de w_i como de w'_i , y resultaría que $\bar{B}(z_2, \varepsilon - \delta) = \bar{B}(z'_2, \varepsilon - \delta)$, mediante un razonamiento análogo al del lema anterior, en contra de lo supuesto.

El mismo argumento asegura la existencia de un punto y_2 con $d(y_2, w_i) = \varepsilon'$ pasando por m o bien $d(y_2, w'_i) = \varepsilon'$ pasando por m' y tal que $y_2 \notin cl(X \setminus \bar{B}(w_i, \varepsilon')) = cl(X \setminus \bar{B}(w'_i, \varepsilon'))$.

Ahora bien, un punto y_i a distancia ε' de un vértice de $X_{\varepsilon'}$, w_i o w'_i , que no es un vértice ni punto medio o cuarto de arista de X , (con $0 < \varepsilon'_0 < \frac{1}{2}$ y $\varepsilon'_0 \neq \frac{1}{4}$ como es el caso), tal que un entorno de y_i está a distancia menor o igual que ε' , necesariamente se trata de un vértice o un punto medio de una arista de X o es parte de un ciclo minimal de longitud $2\varepsilon'$ como hemos visto ya en la demostración del lema 6.5.15.

En este caso, la posibilidad del ciclo está descartada por hipótesis luego y_1, y_2 pueden ser o vértices o puntos medios de aristas de X .

Esto significa que considerando el camino de longitud ε' que une v_i o v'_i con y_1 obtenemos que $\varepsilon' - d(v_i, v)$ es múltiplo de $\frac{1}{2}$ y tomando el camino de longitud ε' que une v_i o v'_i con y_2 obtenemos que $\varepsilon' - d(v_i, m)$ es también múltiplo de $\frac{1}{2}$. Sumando ambas longitudes y como $d(v_i, v) + d(v_i, m) = \frac{1}{2}$, obtenemos que ε' es múltiplo de $\frac{1}{2}$ contradiciendo la hipótesis de que $0 < \varepsilon'_0 < \frac{1}{2}$.

Por tanto, podemos concluir que si $w_i \sim_{\varepsilon'} w'_i$, existe algún $\delta > 0$ tal que $\forall \varepsilon < \varepsilon'$ con $\varepsilon' - \varepsilon < \delta$, los vértices correspondientes en X_ε v_i, v'_i cumplen que

$v_i \sim_\varepsilon v'_i$.

Por tanto, existe algún δ_0 tal que $\forall \varepsilon < \varepsilon'$ con $\varepsilon' - \varepsilon < \delta_0$,

$$p_\varepsilon(X) \cong \frac{X_\varepsilon}{\sim_\varepsilon} \cong \frac{X_{\varepsilon'}}{\sim_{\varepsilon'}} \cong p_{\varepsilon'}(X)$$

y ε' no es un tiempo crítico. \square

Corolario 6.5.39. *Para todo grafo finito X con la métrica de longitud y longitud 1 en cada arista, existe un número finito de tipos topológicos posibles en el conjunto de las proyecciones $p_\varepsilon(X)$ con $\varepsilon > 0$.*

6.6. Niveles de Whitney

Primero, vamos a ver que si intentamos hacer algo similar usando los niveles que define la función de Whitney perdemos mucha información, sobre todo en lo que respecta a la aplicación que relaciona el espacio inicial con el nivel correspondiente. Tomamos la definición de Nadler en [53].

Definición 6.6.1. *Sea $\mathcal{H} = 2^X$ o $C(X)$. Una función de Whitney en \mathcal{H} es una aplicación continua $w : \mathcal{H} \rightarrow [0, +\infty)$ que satisface las siguientes condiciones:*

- (a) *Si $A, B \in \mathcal{H}$ son tales que $A \subset B$ y $A \neq B$ entonces $w(A) < w(B)$.*
- (b) *$w(\{x\}) = 0$ para cada $x \in X$.*

Es bien conocida la existencia de una aplicación de Whitney $w : 2^X_H \rightarrow [0, \infty)$ para todo compacto métrico no vacío, ver [53]. Una forma natural de definir los niveles en el semiflujo, en lugar de considerar las proyecciones p_ε , podría ser tomar los niveles de Whitney restringidos a $\mathcal{B} := \{\bar{B}(x, \varepsilon) \mid x \in X \text{ y } \varepsilon > 0\}$: $w^{-1}(t) \cap \mathcal{B}$.

Sin embargo, el comportamiento de estos niveles no nos permitiría extraer algunos de los resultados como por ejemplo el teorema 6.3.9 o 6.4.5, incluso sobre ejemplos sencillos de continuos de Peano.

Definamos la proyección $\pi_t : X \rightarrow w^{-1}(t) \cap \mathcal{B}$ que envía cada punto $x \in X$ a la única bola cerrada $\bar{B}(x, \varepsilon) \in \mathcal{B}$ tal que $w(\bar{B}(x, \varepsilon)) = t$. Esto está bien definido ya que w es continua y estrictamente creciente.

Proposición 6.6.2. *Sea X el subintervalo $[0, 1]$ de la recta real con la métrica euclídea. Para cualquier aplicación de Whitney $w : 2^X_H \rightarrow [0, \infty)$ y para todo $\varepsilon_0 > 0$ existe $t < \varepsilon_0$ tal que $\pi_t : X \rightarrow w^{-1}(t) \cap \mathcal{B}$ no es un homeomorfismo.*

Demostración. Sea $0 < \varepsilon < 1$ tal que $w(\bar{B}(0, \varepsilon)) = t$. Consideremos la bola cerrada $\bar{B}(\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2})$. Esta bola coincide con la anterior y por tanto $\pi_t(0) = \pi_t(\frac{\varepsilon}{2})$ y π_t no es inyectiva, luego la proyección así definida no es un homeomorfismo. \square

En cualquier caso, sí que podemos establecer cierta relación entre estos niveles de Whitney y los niveles definidos anteriormente en el semiflujo.

Lema 6.6.3. *Para todo $0 < \varepsilon_0$ existe algún $t_0 > 0$ tal que $\forall t < t_0$ $w^{-1}(t) \cap \mathcal{B} \subset \cup_{\varepsilon \leq \varepsilon_0} p_\varepsilon(X)$.*

Demostración. Como X es compacto, existe $t_0 = \min_{x \in X} \{w(\bar{B}(x, \varepsilon_0))\}$. $\forall t < t_0$ y $\forall y \in X$ existe algún $\delta > 0$ tal que $\pi_t(y) = \bar{B}(y, \delta)$ y entonces (como la aplicación de Whitney es creciente sobre las trayectorias), $\delta < \varepsilon_0$. \square

Lema 6.6.4. *Para todo $0 < t_0$ existe algún $\varepsilon_0 > 0$ tal que $\forall \varepsilon < \varepsilon_0$ y $\forall x \in X$ $w(\bar{B}(x, \varepsilon)) < t_0$.*

Demostración. Como X es compacto, tomamos $\varepsilon_0 = \min_{x \in X} \{\varepsilon \mid w(\bar{B}(x, \varepsilon)) = t_0\}$. \square

6.7. Trayectorias en el semiflujo y funciones de Lyapunov.

Trayectorias en el semiflujo Trataremos ahora algunas particularidades de las trayectorias de este semiflujo.

Vamos a comprobar que desde cualquier punto en el hiperespacio, la trayectoria que se sigue es lo que se llama un arco ordenado, desde el punto de partida al punto $\{X\}$.

Además, las trayectorias son caminos geodésicos con la métrica de Hausdorff. Esto significa que podemos imaginar este semiflujo en el hiperespacio como una especie de flujo de mínima energía en el que cada punto es enviado al atractor por el camino más corto.

Las siguientes definiciones están extraídas de [37]

Definición 6.7.1. *Una colección de conjuntos \mathcal{N} es un anidamiento si dados $N_1, N_2 \in \mathcal{N}$ cualesquiera, $N_1 \subset N_2$ o $N_2 \subset N_1$.*

Definición 6.7.2. *Un anidamiento de A_0 a A_1 es un anidamiento \mathcal{N} tal que $A_0, A_1 \in \mathcal{N}$ y $A_0 \subset N \subset A_1$ para todo $N \in \mathcal{N}$.*

Es claro que para cualquier $A \subset X$, con X un espacio de longitud compacto y conexo, $N_A = \{\bar{B}(A, \varepsilon) \mid \varepsilon \geq 0\}$ (la bola generalizada de centro A y radio ε) es un arco ordenado y, en particular, un anidamiento de $\{A\}$ a $\{X\}$.

Definición 6.7.3. Sea X un compacto métrico y sea $\mathcal{H} \subset 2^X$. Un arco ordenado en \mathcal{H} es un arco α en \mathcal{H} tal que α es a su vez un anidamiento.

Proposición 6.7.4. Las trayectorias del semiflujo son caminos geodésicos en el hiperespacio con la métrica de Hausdorff.

Demostración. En general, $\forall A \in \mathcal{H}$, $N_A = \{\bar{B}(A, \varepsilon) | \varepsilon \geq 0\}$, las bolas cerradas generalizadas definen un arco ordenado. Sea $t_A := \inf_{t \geq 0} \{\bar{B}(A, t) = X\}$. Entonces el camino $\alpha_A : [0, t_A] \rightarrow \mathcal{H}$ con $\alpha_A(t) = \bar{B}(A, t)$ es un camino geodésico de A a X donde $d_H(\alpha_A(t), X) = t_A - t \forall A \in \mathcal{H}$ y $\forall 0 \leq t \leq t_A$ y por tanto, las trayectorias son geodésicas en el hiperespacio. \square

Funciones de Lyapunov Dado que tenemos un semiflujo con un atractor global, resulta natural definir una función de Lyapunov sobre él. Lo hacemos a continuación siguiendo [6].

Es claro que el punto $\{X\} \in \mathcal{H}$ es un conjunto asintóticamente estable para el semiflujo.

El primer paso para definir la función sería definir una aplicación $\Phi(A) = d_H(A, X)$ y después transformarla para que cumpla las condiciones requeridas pero resulta que en este caso, esta función ya es de Lyapunov así que podemos prescindir del resto de la construcción que no aporta ningún beneficio.

Paralelamente, también podemos dar una función de Lyapunov a partir de la función de Whitney, asegurando además que toma el valor 1 sobre los puntos:

Proposición 6.7.5. Para cualquier espacio de longitud compacto (X, d) existe una función de Lyapunov $\Phi : C(X) \rightarrow [0, 1]$ con $\Phi(x) = 1 \forall x$ y $\Phi(X) = 0$.

Demostración. Para cualquier espacio de longitud compacto existe una aplicación de Whitney $w : C(X) \rightarrow [0, 1]$ tal que $w(x) = 0 \forall x \in X$ y $\Phi(X) = 1$. Basta definir $\Phi(A) = 1 - w(A)$ para obtener dicha función de Lyapunov ya que sólo necesitamos que sea decreciente en las trayectorias y esto viene de 6.2.2. \square

Nota 6.7.6. Si la función de Lyapunov construida como en [6] cumple las condiciones de 6.7.5, entonces para todo punto $x \in X$ $d_H(x, X) = \text{diam}(X)$ y esto significa que existe algún $x' \in X$ tal que $d(x, x') = \text{diam}(X)$. Diremos que ésta es una función de Lyapunov perfecta.

Tomamos la siguiente definición de [46].

Definición 6.7.7. Sea $\Theta : X \rightarrow 2^X$ un transportador (una función multivaluada de X en sí mismo tal que $\Theta(x)$ es cerrado para todo $x \in X$). Una selección para Θ es una aplicación continua $g : X \rightarrow X$ tal que $g(x) \in \Theta(x)$.

Damos a continuación un ejemplo inmediato de una condición expresada en lenguaje sobre el semiflujo que tiene consecuencias topológicas sobre el continuo de Peano.

Proposición 6.7.8. *Sea (X, d) un espacio de longitud compacto y supongamos que Φ con la definición dada anteriormente es una función de Lyapunov perfecta. Entonces $\Theta(x) := \{x' \mid d(x, x') = \text{diam}(X)\}$ es un transportador, y si existe una selección continua para Θ , entonces X no tiene la propiedad del punto fijo.*

Corolario 6.7.9. *Si $\Theta(x)$ es un único punto $\forall x \in X$ entonces X no tiene la propiedad del punto fijo.*

Consideremos una vez más la función de Lyapunov construida según [6] tal que $\Phi(A) = d_H(A, X)$. Esta aplicación, restringida a la copia isométrica de X nos permite definir una función que ejerce, en cierto sentido, como una especie de función potencial en el hiperespacio:

$$\Phi|_X : X \rightarrow [m, M] \text{ donde } \Phi(x) = d_H(x, X) = \max\{d(x, y) \mid y \in X\}.$$

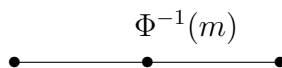
Nótese que $M = \text{diam}(X)$ y $m \geq M/2$.

Esta función nos permite descomponer el espacio en puntos equipotenciales $\{\Phi^{-1}(t) \mid t \in [m, M]\}$.

Observación 6.7.10. *Las isometrías de un espacio en sí mismo preservan el potencial. Para cualquier isometría $f : X \rightarrow X$ y para todo $x \in X$, $\Phi(x) = \Phi(f(x))$*

Podemos denominar los puntos donde esta función alcanza el mínimo como *centros potenciales*, $\Phi^{-1}(m)$, y los puntos donde alcanza el máximo, *extremos potenciales*, $\Phi^{-1}(M)$.

Ejemplo 6.7.11.



Aquí el centro potencial sería el centro del segmento mientras que los extremos potenciales son los extremos del intervalo.

Ejemplo 6.7.12. *Consideremos la circunferencia: $X = \{e^{2\pi i x} \mid 0 \leq x < 1\} \subset \mathbb{C}$ con la métrica de longitud.*

Claramente, $\Phi(x) = \pi \forall x \in X$.

Ejemplo 6.7.13. Sea $Q = [0, \frac{1}{n}]^{\mathbb{N}}$ el cubo de Hilbert con la métrica de l_2 .

Entonces,

$$M = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^2} \quad \text{y} \quad \Phi^{-1}(M) = \{(x_n) \mid x_n = \{0, \frac{1}{n}\} \forall n\}.$$

mientras que

$$m = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{4n^2} \quad \text{y} \quad \Phi^{-1}(m) = \left(\frac{1}{2n}\right).$$

6.8. \mathbb{R} -árbol asociado al semiflujo

En esta última sección veremos cómo se puede usar un \mathbb{R} -árbol para describir el proceso de identificación de las bolas (invirtiendo el tiempo sería un proceso de ramificación) en los niveles del semiflujo. En especial, caracterizamos la principal propiedad descrita en este capítulo, mantener el tipo topológico para cierto ε_0 positivo, en términos de \mathbb{R} -árboles.

Tomamos el subespacio $A \subset X \times [0, \text{diam}(X))$ donde el par $(x, t) \in A$ si $0 \leq t < t_x := \inf\{t : \bar{B}(x, t) = X\}$. Definimos una relación de equivalencia en A identificando $(x, t) \sim (y, t')$ si $\bar{B}(x, t_x - t) = \bar{B}(y, t_y - t')$. Nótese que $(x, t) \sim (y, t')$, $\bar{B}(x, t_x - t) = \bar{B}(y, t_y - t')$ implica que $d_H(X, \bar{B}(x, t_x - t)) = t_x - (t_x - t) = t_y - (t_y - t') = d_H(X, \bar{B}(y, t_y - t'))$, y por tanto, $t = t'$.

Sea $S = A / \sim$ y dotamos a S de la siguiente métrica: $D([x, t], [y, t']) = t_x - t + t_y - t' - 2 \min\{t_x - t, t_y - t', l(x, y)\}$ donde $l(x, y) = t_x - \inf\{s : \bar{B}(x, s) \cap \alpha_y \neq \emptyset\} = t_y - \inf\{s : \bar{B}(y, s) \cap \alpha_x \neq \emptyset\}$.

De forma análoga a la usada en el capítulo 3, se comprueba que la métrica está bien definida y que este espacio es un \mathbb{R} -árbol. Claramente, existe una biyección entre las ramas de (S, D) y X . De hecho, cualquier rama $[x \times [0, t_x]]$ de (S, D) es isométrica a la restricción del hiperespacio al segmento $(\alpha_x, d_H|_{\alpha_x})$ que Kelley llama *segmento de $\{x\}$ a $\{X\}$* , [38], o *arco ordenado* según [37] o [41]. Sin embargo, este árbol sería acotado y, desde luego, no es geodésicamente completo lo que dificulta el poder usarlo para expresar las características del proceso de ramificación de forma geométrica. Veamos cómo podemos redefinirlo para que las trayectorias se transformen en ramas infinitas.

Para definir un \mathbb{R} -árbol geodésicamente completo consideramos, por 6.7.5, una función de Lyapunov $\Phi : C(X) \rightarrow [0, 1]$ con $\Phi(x) = 1 \forall x$ y $\Phi(X) = 0$.

Parametrizamos α_x del siguiente modo: $\Phi_x^{-1} : [0, 1] \rightarrow X$ donde $\Phi_x^{-1}(t) = \bar{B}(x, \varepsilon(x, t))$ es tal que $\Phi(\bar{B}(x, \varepsilon(x, t))) = 1 - t$. Nótese que este $\varepsilon(x, t)$ está únicamente determinado por x y t .

Se define una relación de equivalencia en $X \times [0, \infty)$ donde (x, t) representa la bola $\bar{B}(x, \varepsilon(x, e^{-t}))$ y $(x, t) \sim (y, t')$ si $\varepsilon(x, e^{-t}) = \varepsilon(y, e^{-t'})$ y $\bar{B}(x, \varepsilon(x, e^{-t})) = \bar{B}(y, \varepsilon(y, e^{-t'}))$. Nótese que cuando dos bolas coinciden, la función de Lyapunov sobre ellas será $1 - e^{-t} = \Phi(\bar{B}(x, \varepsilon(x, e^{-t}))) = \Phi(\bar{B}(y, \varepsilon(y, e^{-t'}))) = 1 - e^{-t'}$ y por tanto $t = t'$. Sin embargo, cuando dos bolas con diferente radio coinciden, no se identifican en el árbol, y las ramas correspondientes a sus centros son disjuntas de la raíz en adelante.

Lema 6.8.1. *Si $(x, t) \sim (y, t)$ entonces $(x, t') \sim (y, t') \forall t' < t$.*

Demostración. Para cualquier $t' < t$, $e^{-t'} > e^{-t}$ y sea $\bar{B}(x, \varepsilon'_1) = \Phi_x^{-1}(e^{-t'})$ y $\bar{B}(y, \varepsilon'_2) = \Phi_y^{-1}(e^{-t'})$. Por las propiedades de la métrica de longitud, como $\bar{B}(x, \varepsilon(x, e^{-t})) = \bar{B}(y, \varepsilon(y, e^{-t}))$, y $\varepsilon(x, e^{-t}) = \varepsilon(y, e^{-t}) = \varepsilon_0$, entonces $\forall \varepsilon' > \varepsilon_0$, $\bar{B}(x, \varepsilon') = \bar{B}(y, \varepsilon')$. Por tanto, una de las bolas $\bar{B}(x, \varepsilon'_1), \bar{B}(y, \varepsilon'_2)$ debe estar contenida en la otra y ambas están en la parte común de las trayectorias α_x, α_y ; pero como la función de Lyapunov toma sobre ellas el mismo valor, $e^{-t'}$, esas bolas deben coincidir y con $\varepsilon'_i > \varepsilon_0$ por el lema 6.2.2, esto sólo puede ocurrir si $\varepsilon'_1 = \varepsilon'_2$. Así pues, finalmente obtenemos que $(x, t') \sim (y, t')$. \square

Procedemos a continuación del mismo modo en que se construyó en el capítulo 3 el árbol de un espacio ultramétrico.

Sea $T = X \times [0, \infty) / \sim$ y definimos una métrica en T . Sea

$$D([x, t], [y, t']) = t + t' - 2 \min\{t, t', m(x, y)\}$$

donde $m(x, y) = \sup\{s : (x, s) \sim (y, s)\}$.

Proposición 6.8.2. *D es una métrica.*

Demostración. D está bien definida. Supongamos $[x, t] = [x', t]$, entonces sólo tenemos que probar que $d([x, t], [y, t']) = d([x', t], [y, t'])$ para cualquier $[y, t'] \in T$. Podemos distinguir dos casos.

Caso 1. $\sup\{s | (x, s) \sim (x', s)\} \geq \sup\{s | (x, s) \sim (y, s)\}$. Entonces es inmediato ver que $m(x, y) = m(x', y)$ y la distancia definida es la misma.

Caso 2. $t \leq \sup\{s | (x, s) \sim (x', s)\} < \sup\{s | (x, s) \sim (y, s)\}$. En este caso, $t < m(x, y)$ y $t < m(x', y)$ y por tanto, $\min\{t, t', m(x, y)\} = \min\{t, t'\} = \min\{t, t', m(x', y)\}$ y la distancia es la misma.

D es una métrica.

1. $D \geq 0$. Es claro que $t + t' - 2 \min\{t, t', m(x, y)\} \geq |t - t'| \geq 0$.

2. $D([x, t], [y, t']) = 0 \Leftrightarrow [x, t] = [y, t']$. Si $D([x, t], [y, t']) = 0$ entonces $t + t' - 2 \min\{t, t', m(x, y)\} = 0 \Rightarrow \min\{t, t', m(x, y)\} = t = t'$ y como $m(x, y) \geq t = t'$ resulta que $[x, t] = [y, t']$.
3. Simétrica. Esto es obvio ya que la definición lo es.
4. Desigualdad triangular, $D([x, s], [y, t]) \leq D([x, s], [z, u]) + D([z, u], [y, t])$. Claramente $t + s - 2 \min\{s, t, m(x, y)\} \leq s + u - 2 \min\{s, u, m(x, z)\} + u + t - 2 \min\{u, t, m(z, y)\} \Leftrightarrow -\min\{s, t, m(x, y)\} \leq u - \min\{s, u, m(x, z)\} - \min\{u, t, m(z, y)\}$.

Sea $a = m(x, z)$, $b = m(y, z)$, $c = m(x, y)$. Entonces $\min\{a, b\} \leq c$. Sin pérdida de generalidad asumimos que $a \leq b$ y por tanto $a = \min\{a, b, c\}$.

Necesitamos demostrar, por tanto, que $\min\{s, u, a\} + \min\{t, u, b\} \leq \min\{s, t, c\} + u$. Hay que considerar tres casos:

- (a). $u = \min\{s, u, a\}$. Entonces $u + \min\{t, u, b\} \leq \min\{s, t, c\} + u$ porque $u \leq a \leq c$.
- (b). $s = \min\{s, u, a\}$. Basta ver que $s + \min\{t, u, b\} \leq \min\{s, t\} + u$ considerando los casos $t \leq s$ o $s \leq t$.
- (c). $a = \min\{s, u, a\}$. Entonces es claro que $a + \min\{t, u, b\} \leq \min\{s, t, c\} + u$ considerando los casos $t \leq a$ y $a \leq t$.

□

Proposición 6.8.3. (T, D) es un \mathbb{R} -árbol geodésicamente completo.

Demostración. Por 2.1.6, basta ver que T es conexo y 0-hiperbólico en el sentido de Gromov. Como para todo punto existe un camino que lo conecta con la raíz la primera parte es obvia.

El producto de Gromov, 2.1.2, de $[x, t]$ y $[y, s]$ respecto a la raíz, $w = [x, 0]$ para cualquier x , viene dado por

$$([x, t] \cdot [y, s])_w = \frac{1}{2} \{D([x, t], w) + D([y, s], w) - D([x, t], [y, s])\}$$

Como $D([x, t], w) = t$, esto significa que $([x, t] \cdot [y, s])_w = \min\{t, s, m(x, y)\}$. Dado $[z, u] \in T$, por 2.1.5 basta comparar esto con $\min\{([x, t] \cdot [z, u])_w, ([z, u] \cdot [y, s])_w\} = \min\{\min\{t, u, m(x, z)\}, \min\{u, s, m(z, y)\}\} = \min\{t, u, s, m(x, z), m(z, y)\}$.

Por tanto, basta comprobar que $m(x, y) \geq \min\{m(x, z), m(z, y)\}$ lo que es obvio.

Finalmente, para ver que (T, w) es geodésicamente completo sea $\alpha : [0, t_0] \rightarrow (T, w)$ una inmersión isométrica tal que $\alpha(0) = w$. Entonces, $\alpha(t_0) = [x, t_0]$ para algún $x \in X$ y por la unicidad de los arcos, $\alpha(t) = [x, t]$ para $0 \leq t \leq t_0$ y $\alpha(t) = [x, t] \forall t \geq 0$ da la extensión buscada de α a un rayo geodésico. \square

Ultramétrica asociada. El espacio de finales de este árbol nos permite dotar a X de una ultramétrica, d_u , en la que dos puntos están cerca si para un radio pequeño ε las bolas centradas en dichos puntos coinciden. Esta ultramétrica dota al espacio X de una topología estrictamente más fina que la inicial, resultando un espacio que no es compacto ni separable.

Proposición 6.8.4. *La aplicación identidad $id : (X, d_u) \rightarrow (X, d)$ es continua.*

Demostración. Tomemos una sucesión convergente cualquiera en (X, d_u) , $(x_n) \rightarrow x$. Debe existir alguna sucesión de números reales positivos $(\varepsilon_n) \rightarrow 0$ tal que $\bar{B}(x_n, \varepsilon_n) = \bar{B}(x, \varepsilon_n)$ y, en particular, $d(x_n, x) \leq \varepsilon_n$ converge a 0 y $(x_n) \rightarrow x$ en (X, d) . \square

Proposición 6.8.5. *Para todo (X, d) espacio de longitud compacto, (X, d_u) es no separable.*

Demostración. Sean $x, y \in X$ dos puntos cualesquiera y $[x, y]$ un camino geodésico que los une. Veamos que $C = [x, y] \subset (X, d_u)$ es un cerrado y $(C, d_u|_C)$ es un subespacio discreto de cardinal $> \aleph_0$. Obviamente es cerrado al ser C compacto en (X, d) y $id : (X, d_u) \rightarrow (X, d)$ continua. Además, para todo $\delta < \frac{d(x, y)}{2}$ y para todo par de puntos $z, z' \in [x, y]$, $\bar{B}(z, \delta) \neq \bar{B}(z', \delta)$ y por tanto el subespacio es uniformemente discreto. \square

La condición de la sección 6.3, de mantener el tipo topológico para algún ε_0 positivo, se caracteriza como sigue:

Proposición 6.8.6. *(X, d_u) es uniformemente discreto si y sólo si existe algún ε_0 tal que $p_\varepsilon : X \rightarrow p_\varepsilon(X)$ es un homeomorfismo $\forall \varepsilon < \varepsilon_0$.*

Demostración. Supongamos $\delta > 0$ tal que $\forall x \in X B_{d_u}(x, \delta) = \{x\}$. Sea entonces $\varepsilon_0 = \min_{x \in X} \{\varepsilon_x \mid \Phi(\bar{B}(x, \varepsilon_x)) = 1 - \ln(\delta)\}$ que existe dado que X es compacto y obviamente es mayor que 0 ya que la función de Lyapunov en la bola es $1 - \delta < 1$.

Al contrario, si la proyección es inyectiva, para todo $\varepsilon < \varepsilon_0$, sea $\delta = \max_{x \in X} \{\Phi(\bar{B}(x, \varepsilon_0))\}$ ($\delta < 1$ y está bien definido ya que X es compacto). Para cualquier punto $x \in X$, la clase $[x, t]$ en el árbol no está identificada con ninguna otra clase $[y, t]$ para $t > -\ln(1 - \delta)$ y por tanto, $B_{d_u}(x, 1 - \delta) = \{x\} \forall x \in X$. \square

Y esto, junto con 6.3.9, 6.3.10, 6.3.11 respectivamente, implica los siguientes corolarios.

Corolario 6.8.7. *Si (X, d) es un espacio de longitud compacto r -perfectamente geodésico entonces (X, d_u) es uniformemente discreto.*

Corolario 6.8.8. *Si (X, d) es una variedad riemanniana compacta entonces (X, d_u) es uniformemente discreto.*

Corolario 6.8.9. *Si (X, d) es un espacio de longitud compacto y únicamente geodésico de curvatura acotada inferiormente entonces (X, d_u) es uniformemente discreto.*

Bibliografía

- [1] Aleksandrov, P. S. *Une définition des nombres de Betti pour un ensemble fermé quelconque*. C. R. Acad. Sci. Paris **184** (1927) 317–319.
- [2] Aleksandrov, P. S. *Untersuchungen über Gestalt und Lage abgeschlossener Mengen beliebiger Dimension*. Ann. of Math. **30** (1929) 101–187.
- [3] Atiyah, M. F., Segal, G. B. *Equivariant K-theory and completion*. J. Differential Geometry. **3**, (1969) 1–18.
- [4] Baues, H. J., Quintero, A. *Infinite homotopy theory*. Kluwer Academic Publishers, Boston (2001).
- [5] Bestvina, M. *\mathbb{R} -trees in topology, geometry and group theory*. Handbook of geometric topology, 55–91. North-Holland, Amsterdam, (2002).
- [6] Bhatia, N.P., Szegö, G.P. *Stability theory of dynamical systems*. Springer-Verlag, New York (1970).
- [7] Bing, R. H. *Partitioning a set*. Bull. Amer. Math. Soc. **55**, (1949), 1101–1110.
- [8] Borsuk, K. *On some metrization of the hyperspace of compact sets*. Fund. Math. **41**, (1954) 168–202.
- [9] Borsuk, K. *Theory of retracts*. Polish Scientific Publishers, Warszawa (1967).
- [10] Borsuk, K. *Concerning homotopy properties of compacta*. Fund. Math. **62**, (1968) 223–254.
- [11] Borsuk, K. *Fundamental retracts and extensions of fundamental sequences*. Fund. Math. **64**, (1969) 55–85.
- [12] Borsuk, K. *On movable compacta*. Fund. Math. **66**, (1969) 137–146.

- [13] Borsuk, K. *Theory of shape*. Lecture Notes Series 28, Matematisk Institut, Aarhus. Univ., Aarhus (1971).
- [14] Borsuk, K. *Theory of shape*. Monografie Matematyczne. 59, Polish Scientific Publishers, Warszawa (1975).
- [15] Bridson, M., Haefliger, A. *Metric spaces of non-positive curvature*. Springer-Verlag, Berlin (1999)
- [16] Burago, D., Burago, Y., Ivanov, S. *A course in metric geometry*. Graduate Studies in Mathematics. **33**, AMS, Providence, RI, (2001).
- [17] Cuchillo-Ibáñez, E., Morón, M. A. *El problema de la intersección de ANR's de Borsuk y métricas en el hiperespacio del cubo de Hilbert*. Contribuciones matemáticas: homenaje al profesor Enrique Outerelo Domínguez. Homen. Univ. Complut. Editorial Complutense, Madrid, (2004).
- [18] Cuchillo-Ibáñez, E., Dydak, J., Koyama, A., Morón, M.A. *C_0 -coarse geometry of complements of Z -sets in the Hilbert cube*. Trans. AMS. To appear.
- [19] Chapman, T.A. *On some applications of infinite-dimensional manifolds to the theory of shape*. Fund. Math. **76** (1972), 181–193.
- [20] Chapman, T.A., Siebemann, L. *Finding a boundary for a Hilbert cube manifold*. Acta Math. **137** (1976), 171–208.
- [21] Chiswell, *Introduction to Λ -trees*. World Scientific, Singapore, (2001).
- [22] Edwards, D.A., Geoghegan, R. *Compacta weak shape equivalent to ANR's*. Fund. Math. **90** (1976), 115–124.
- [23] Freudenthal, H. *Über die enden topologischer Räume und Gruppen*. Math. Z. **33** (1931) 692–713.
- [24] Goodykoontz, J. T., Nadler, S. B. *Whitney levels in Hyperspaces of certain Peano continua*. Trans. AMS. **Vol. 274** N0 2 (1982) 671–694.
- [25] Gromov, M. *Hyperbolic groups*, in Essays in Group Theory, Mathematical Science Research Institute Publications, S.M. Gersten (Ed.), **Vol 8**. Springer, New York, 1987, pp 75–263.

- [26] Gromov, M. *Asimptotic invariants of finite groups*, in: A. Niblo, M. Roller (Eds.), *Geometric Group Theory*, **Vol.2**, London Mathematical Society Lecture Notes in Mathematics, **Vol.182**, Cambridge University Press, Cambridge, (1993).
- [27] Gromov, M. *Metric structures for Riemannian and Non-Riemannian spaces*. Modern Birkhäuser Classics. Boston, (2007).
- [28] Ghys, E. and de la Harpe, P. *Sur le groupes hyperboliques d'après Mikhael Gromov* Progr.Math. 83, Birkhäuser, Boston, MA, (1990).
- [29] Hofmann, K. H., Morris, S. A. *Open mapping theorem for topological groups*. *Topology proceedings*. **31** (2007) 533–551.
- [30] Hopf, H., Rinow, W. *Über den Begriff der vollständigen differentialgeometrischen Flächen*. *Comm. Math. Helv.* **Vol 3** 209–225.
- [31] Hu, S. T. *Theory of retracts*. Wayne State University Press. Detroit (1965).
- [32] Hughes, B., Ranicki *Ends of complexes*. Cambridge Tracts in Mathematics 123, Cambridge University Press. (1996).
- [33] Hughes, B. *\mathbb{R} -trees and ultrametric spaces: a categorial equivalence*. *Advances in Mathematics*. **189**,(2004) 148–191.
- [34] Hughes, B. *Trees, ultrametrics, and noncommutative geometry*. arXiv:math/0605131v2 [math.OA].
- [35] Husain, T. *Introduction to topological groups*. W. B. Saunders. Philadelphia-London (1996).
- [36] Husch, L.S. *Intersections of ANR's*. *Fund. Math.* **104** (1979) 21–26.
- [37] Illanes, A., Nadler S. B. *Hyperspaces. Fundamentals and Recent Advances*. Marcel Dekker, New York (1999).
- [38] Kelley, J.L. *Hyperspaces of a Continuum*. *Trans. AMS.* **Vol. 52** no.1 (1942) 22–36.
- [39] Kołodziejczyk, D. *Homotopy dominations by polyhedra with polycyclic-by-finite fundamental groups*. *Topology Appl.* **153** (2005) 294–302.
- [40] Laguna, V.F., Morón, M.A., Nguyen To Nhu, Sanjurjo, J.M.R. *Movability and limits of polyhedra*. *Fund. Math.* **143**, (1993), 191–201.

- [41] Lynch, M. *Whitney levels and certain order arc spaces*. Top. and its Appl. **28** No.2, (1991), pp 189–200.
- [42] Mac Lane, S. *Categories for the Working Mathematician*. Springer-Verlag, New York (1971).
- [43] Mardešić, S., Segal, J. *Movable compacta and ANR-systems*. Bull. Acad. Polon. Ser. Sci. Math. Astronom. Phis. **18** (1970) 649–654.
- [44] Mardešić, S., Segal, J. *Shapes of compacta and ANR systems*. Fund. Math. **72**, (1971) 41–59.
- [45] Mardešić, S., Segal, J. *Shape theory*. North-Holland (1982).
- [46] Michael, E. *Continuous selections. I* The Annals of Mathematics. **Vol 63**. No.2, (Mar., 1956), 361–382.
- [47] Mirani, M. *Classical trees and compact ultrametric spaces*. PhD. Depart. Mathematics. Vanderbilt University. 2006.
- [48] Moise, E. E. *Grille decomposition and convexification theorems for compact metric locally connected continua*. Bull. Amer. Math. Soc. **55**, (1949), 1111–1121.
- [49] Morgan, J. W. *Λ -trees and their applications*. Bull. Amer. Math. Soc. **26**, (1992), n_0 . 1, 87–112.
- [50] Morón, M.A., Ruiz del Portal, F.R. *Shape as a Cantor completion process*. Mathematische Zeitschrift. **225**, (1997) 67–86.
- [51] Mosher, L., Sageev, M., Whyte, K. *Quasi-actions on trees I. Bounded valence*. Ann. of Math. **158**, (2003), pp 115–164.
- [52] Nadler, S. B. *A characterization of Locally Connected Continua by Hyperspace Retractions*. Proc. of the AMS **Vol. 67** No.1 (1977) 167–176.
- [53] Nadler, S. B. *Hyperspaces of sets*. Pure and Applied Mathematics Series, **Vol.49**, Marcel Dekker, Inc. New York, (1978).
- [54] Nadler, S. B. *Continuum Theory: An Introduction*. Pure and Applied Mathematics Series, **Vol.158**, Marcel Dekker, Inc. New York, (1992).
- [55] Paulin, F. *Topologie de Gromov équivariante, structures hyperboliques et arbres réels*. Invent. Math. **94**, (1988), No.1, pp 53–80.
- [56] Robert, A.M. *A course in p -adic Analysis*. G.T.M. **198**. Springer (2000).

- [57] Roe, J. *Lectures on coarse geometry*. University Lecture Series, **vol.31** American Mathematical Society (2003).
- [58] Roe, J. *Coarse Cohomology and Index Theory on Complete Riemannian Manifolds*. Memoirs of the American Mathematical Society, **497** (1993).
- [59] Scott, G. P., Wall, C. T. C. *Topological methods in group theory, Homological Group Theory*. Lecture Notes **Vol.36** London Mathematical Society. (1969) 137–203.
- [60] Serre, J.P. *Trees*. Springer-Verlag, New York (1980).
- [61] Whitney, H. *Regular families of curves I*. Proc. Nat. Acad. Sci. USA. **18** (1932) 275–278.