

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS



TESIS DOCTORAL

Cosmología cuántica de lazos y campo fermiónicos

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR

PRESENTADA POR

Beatriz Elizaga de Navascués

Directores

Guillermo A. Mena Marugán

Mercedes Martín Benito

Madrid, 2018

Universidad Complutense de Madrid
Facultad de Ciencias Físicas



Tesis Doctoral

**Cosmología Cuántica de Lazos
y campos fermiónicos**

Beatriz Elizaga de Navascués

Consejo Superior de Investigaciones Científicas
Instituto de Estructura de la Materia



Directores de tesis:

Dr. Guillermo A. Mena Marugán

Dra. Mercedes Martín Benito

Madrid, 2017

A mis padres y a mi hermano

A Guillermo y a Merce. Gracias por todo

*Gente despierta, gente avanzá,
gente que piensa en la gravedad*

Las Bistecs

Índice general

Summary	11
Resumen	13
1. Introducción	15
Notación de índices y unidades	23
2. Estructura y objetivos de la tesis	25
3. Conceptos preliminares	29
3.1. Dinámica unitaria en Teoría Cuántica de Campos	29
3.1.1. Campos de Klein-Gordon y Dirac	30
3.1.2. Cuantización de los campos	31
3.1.3. Equivalencia unitaria. Dinámica cuántica	34
3.2. Cosmología Cuántica de Lazos homogénea	36
3.2.1. Variables de Ashtekar-Barbero: holonomías y flujos	37
3.2.2. Cosmología homogénea: cuantización polimérica	40
3.2.3. Cosmología homogénea: ligadura hamiltoniana	43
3.3. Cuantización híbrida de cosmologías inhomogéneas	49
4. Cuantización de Fock del campo de Klein-Gordon en Bianchi I	53
4.1. Campo de Klein-Gordon en las cosmologías de Bianchi I	55
4.1.1. Expansión en modos	55
4.1.2. Transformación canónica clásica	57
4.1.3. Dinámica clásica	58
4.2. Cuantización de Fock	61
4.2.1. Representaciones de Fock invariantes	61
4.2.2. Dinámica unitaria	62
4.2.3. Representación «sin masa»	65
4.3. Unicidad de la representación de Fock	65
4.4. Conclusiones	66
5. Cuantización de Fock de campos de Dirac en espaciotiempos 2+1	69
5.1. Espinor de Dirac en espaciotiempos conformemente ultraestáticos	70
5.1.1. Expansión en modos	72

5.1.2.	Dinámica fermiónica	73
5.2.	Cuantización de Fock	76
5.2.1.	Vacíos invariantes	76
5.2.2.	Evolución unitaria	78
5.3.	Unicidad de la representación de Fock	83
5.4.	Conclusiones	85
6.	Cuantización de Fock de campos de Dirac en cosmologías de FLRW	87
6.1.	Espinor de Dirac en cosmologías de FLRW	88
6.1.1.	Expansión en modos	90
6.1.2.	Dinámica fermiónica	93
6.2.	Cuantización de Fock	97
6.2.1.	Vacíos invariantes	98
6.2.2.	Dinámica unitaria	101
6.3.	Unicidad de la cuantización	108
6.4.	Conclusiones	113
7.	Fermiones en Cosmología Cuántica de Lazos híbrida	115
7.1.	Perturbaciones cosmológicas	118
7.1.1.	Modelo homogéneo sin perturbar	118
7.1.2.	Perturbaciones de la geometría y del campo escalar	119
7.1.3.	Fermiones de Dirac como perturbaciones	122
7.2.	Variables de destrucción y creación para el campo de Dirac	124
7.3.	Variables para la diagonalización instantánea	127
7.4.	Cuantización híbrida	129
7.5.	Aproximación de tipo Born-Oppenheimer	134
7.6.	Evolución de las perturbaciones fermiónicas	137
7.7.	Operador de evolución fermiónica	140
7.8.	Unitariedad y término de «reacción»	144
7.9.	Conclusiones	148
8.	Soluciones aproximadas en una cuantización de lazos híbrida	155
8.1.	Propiedades de la ligadura hamiltoniana	156
8.2.	Aproximaciones a la ligadura hamiltoniana: simulación de fluidos perfectos	157
8.2.1.	Aproximaciones en el término de anisotropía	158
8.2.2.	Aproximaciones en el término de interacción	161
8.2.3.	Aproximaciones en el término libre	162
8.3.	Soluciones de la ligadura hamiltoniana: simulación de fluidos perfectos	162
8.3.1.	Construcción de las soluciones	163
8.3.2.	Comportamientos efectivos de tipo «fluido perfecto»	165
8.4.	Aproximaciones a la ligadura hamiltoniana: cosmologías de FLRW modificadas	166
8.4.1.	Generalización de las aproximaciones en el término de anisotropía	167
8.4.2.	Generalización de las aproximaciones en el término de interacción	168
8.4.3.	Generalización de las aproximaciones en el término libre	169
8.5.	Soluciones de la ligadura hamiltoniana: cosmologías de FLRW modificadas	169

8.5.1. Construcción de las nuevas soluciones	170
8.5.2. Fluidos perfectos y correcciones geométricas	175
8.6. Conclusiones	176
9. Conclusiones de la tesis	179
Publicaciones	183
Bibliografía	185

Summary

Quantum Field Theory (QFT) in curved spacetimes is subject to an inherent ambiguity that allows for an infinite freedom in the choice of vacuum, even for free field Fock descriptions. In non-stationary backgrounds, this ambiguity cannot be eliminated, in general, by symmetry considerations. In turn, it is common that the non-stationarity of the background entails a serious obstruction to the unitary implementability of the field dynamics. This situation poses a fundamental problem if one wants to maintain the usual probabilistic interpretation of Quantum Mechanics, and hence coherence in the quantum evolution. Fortunately, for free scalar fields in conformally ultrastatic spacetimes, such as those describing homogeneous and isotropic cosmologies, it has recently been shown that the requirement of a unitary implementation of the dynamics, together with the invariance of the quantum structures under the symmetries of the system, guarantees the uniqueness of the Fock quantization (modulo unitary transformations). It is of the greatest interest extending these uniqueness results to other fields that can describe more realistic matter content in the Universe, such as fermion fields. In this thesis, we successfully address this problem for the Dirac field, demonstrating the uniqueness of its Fock representation under our criterion of unitarity of the dynamics and invariance under the physical symmetries. We prove this uniqueness in two different scenarios. The first one is a Dirac field in three-dimensional conformally ultrastatic spacetimes, with applications in condensed matter theory. The second one refers to a cosmological background in four dimensions, with two types of spatial hypersurfaces: spherical or flat. In both scenarios, we demonstrate that the requirement of a unitary dynamics splits the variation of the field, in Heisenberg's picture, into two parts in a very specific way: a part that evolves explicitly in time (through its dependence on the background geometry) and another part that evolves quantum mechanically while preserving coherence. In this way, we can characterize the particle and antiparticle excitations that do not lose information in the evolution. In addition, in order to show that our criterion is applicable to QFT in more general spacetimes than the conformally ultrastatic ones, we also prove that its imposition guarantees the uniqueness of the Fock quantization of free scalar fields in Bianchi I cosmologies.

The robustness of these uniqueness results is also very valuable in quantum cosmology. The observations of the current Universe, which is approximately homogeneous and isotropic, support the idea that it experienced an inflationary process, and that its structures and anisotropies have originated from primordial inhomogeneities. To investigate the effects of matter and geometry during those early epochs, a hybrid quantization scheme has recently been proposed. This scheme faces the quantum description of inhomogeneous cosmologies by combining quantum gravity techniques for the homogeneous geometry and more conventio-

nal representations for the remaining degrees of freedom. Typically, a Fock representation is chosen for the inhomogeneous part of the matter and geometric fields. As far as the homogeneous geometry is concerned, a mathematically consistent and physically attractive quantum formalism is Loop Quantum Cosmology (LQC), that employs Loop Quantum Gravity techniques. The hybrid quantization scheme has been recently applied to a homogeneous and isotropic cosmology coupled to a scalar field subject to a potential, in the presence of scalar and tensor perturbations. However, it seems desirable to include other fields that describe fundamental components of matter. With this motivation, this thesis explains how to introduce Dirac fermions, treated as additional perturbations of the primordial state of the Universe. We address this problem in the context of hybrid LQC. In particular, for the fermionic degrees of freedom, we choose a Fock representation in the privileged equivalence class with unitary dynamics. We show that this choice leads to a redefinition of the canonical variables that describe the homogeneous geometry, as well as of the Dirac Hamiltonian. Using a Born-Oppenheimer ansatz for the quantum states, we find a Schrödinger equation for the fermions wavefunction, which varies in an internal time given by the homogeneous scalar field. The corresponding fermionic dynamics depends on the homogeneous geometry only by means of expectation values of quantum operators, all of them well defined in LQC. However, these expectation values form an infinite sequence, unlike what happens for scalar and tensor perturbations. In addition, we succeed in solving this fermionic dynamics and demonstrate that, indeed, it can be implemented by means of unitary evolution operators, even though the background is no longer a classical entity. Moreover, we prove that the evolution of the fermionic vacuum provides a solution to the Schrödinger equation. We also investigate the particle production and quantum «backreaction» effects of the fermion field on the homogeneous geometry.

Finally, to investigate in depth the properties of hybrid LQC in inhomogeneous cosmologies, we look for interesting solutions of the Gowdy model with three-torus topology, linear polarization and a massless scalar field. The Hamiltonian constraint operator of this model can be understood as that of a Bianchi I cosmology, plus a term that accounts for inhomogeneities. We look for Gaussian states (with respect to the anisotropy) on which one can neglect the action of the anisotropy operators and of the term containing the self-interaction of the inhomogeneities. On these states, the Hamiltonian constraint turns out to be approximately equal to that of a homogeneous and isotropic cosmology with a massless scalar field, plus a term that contains certain homogeneous and isotropic operators on which the considered states are peaked. We show that such a term can simulate a number of perfect fluids, or even curvature corrections to the Hilbert-Einstein action. Next, we prove that, in fact, there are quantum solutions of the complete Gowdy model that present the type of Gaussian profiles required for the mentioned approximations. As a consequence, these solutions behave effectively as those corresponding to homogeneous and isotropic cosmologies with perfect fluids and geometric corrections like those encountered in certain modified gravity theories.

Resumen

La Teoría Cuántica de Campos (TCC) en espaciotiempos curvos está sujeta a una ambigüedad inherente que permite una libertad infinita a la hora de elegir el vacío, incluso para descripciones de Fock de campos libres. Sobre fondos no estacionarios, esta ambigüedad no puede eliminarse, en general, mediante consideraciones de simetría. A su vez, es habitual que la no estacionariedad del fondo suponga una seria obstrucción a la implementabilidad unitaria de la dinámica del campo. Esta situación plantea un grave problema si queremos que la teoría cuántica mantenga su interpretación probabilística usual, y por ende la coherencia en la evolución. Afortunadamente, para campos escalares libres en espaciotiempos conformemente ultrastáticos, como son los que describen las cosmologías homogéneas e isótropas, se ha demostrado recientemente que el requisito de una implementabilidad unitaria de la dinámica, junto con la invariancia de las estructuras cuánticas bajo las simetrías del sistema, garantizan la unicidad de la cuantización de Fock (salvo transformaciones unitarias). Es de enorme interés extender estos resultados de unicidad a otro tipo de campos que puedan describir un contenido material más realista del Universo como, por ejemplo, campos fermiónicos. En esta tesis, abordamos con éxito este problema para el campo de Dirac, demostrando la unicidad de su representación de Fock bajo nuestro criterio de unitariedad dinámica e invariancia frente a las simetrías físicas. Probamos esta unicidad en dos escenarios diferentes. El primero es un campo de Dirac en espaciotiempos conformemente ultrastáticos de tres dimensiones, con aplicaciones en materia condensada. El segundo se refiere ya a un fondo cosmológico de cuatro dimensiones, con dos tipos de hipersuperficies espaciales: esféricas o planas. En ambos escenarios, demostramos que el requisito de una dinámica implementable unitariamente separa de una forma específica la variación del campo, en imagen de Heisenberg, entre una parte que evoluciona explícitamente en el tiempo (a través de su dependencia en la geometría de fondo) y otra parte que cambia cuánticamente preservando la coherencia. De esta forma, conseguimos caracterizar las excitaciones de partículas y antipartículas que no pierden información en la evolución. Asimismo, con el objetivo de mostrar que nuestro criterio es aplicable a TCC en espaciotiempos más generales que los conformemente ultrastáticos, probamos también que su imposición garantiza la unicidad de la cuantización de Fock de campos escalares libres en cosmologías de tipo Bianchi I.

La solidez de estos resultados de unicidad también es valiosa en cosmología cuántica. Las observaciones del Universo actual, aproximadamente homogéneo e isótropo, apoyan que surgió de un proceso inflacionario, y que sus estructuras y anisotropías provienen de inhomogeneidades primordiales. Para investigar los efectos de la materia y la geometría durante esas épocas tempranas, recientemente se ha propuesto un esquema de cuantización híbrida. Este esquema se enfrenta a la descripción cuántica de cosmologías inhomogéneas mediante

una combinación de técnicas de gravedad cuántica para la geometría homogénea, y representaciones más convencionales para el resto de grados de libertad. Típicamente, se escoge una representación de Fock para la parte inhomogénea de los campos materiales y geométricos. En lo que respecta a la geometría homogénea, un formalismo cuántico matemáticamente consistente y atrayente físicamente es la Cosmología Cuántica de Lazos (CCL), que emplea técnicas de Gravedad Cuántica de Lazos. El esquema de cuantización híbrida se ha aplicado recientemente a una cosmología homogénea e isótropa acoplada a un campo escalar con un potencial, en presencia de perturbaciones escalares y tensoriales. No obstante, parece conveniente incluir otros campos que describan componentes materiales fundamentales. Con esta motivación, esta tesis explica cómo introducir fermiones de Dirac, tratados como perturbaciones adicionales al estado primigenio del Universo. Afrontamos este problema en el contexto de CCL híbrida. En particular, para los grados de libertad fermiónicos, elegimos una representación de Fock en la clase de equivalencia privilegiada con dinámica unitaria. Mostramos que dicha elección conlleva una redefinición de las variables canónicas que describen la geometría homogénea, así como del hamiltoniano de Dirac. Utilizando un *ansatz* de tipo Born-Oppenheimer para los estados cuánticos, encontramos una ecuación de Schrödinger para la función de onda de los fermiones, que varía en un tiempo interno dado por el campo escalar homogéneo. La dinámica fermiónica correspondiente depende de la geometría homogénea solo mediante valores esperados de operadores cuánticos, bien definidos en CCL. No obstante, estos valores esperados forman una secuencia infinita, a diferencia de lo que ocurre para las perturbaciones escalares y tensoriales. Además, logramos resolver esa dinámica fermiónica y demostramos que, ciertamente, puede implementarse mediante operadores de evolución unitarios, a pesar de que el fondo ya no tiene naturaleza clásica. Es más, probamos que la evolución del vacío fermiónico proporciona una solución a la ecuación de Schrödinger. También investigamos la producción de partículas y efectos de «reacción» cuántica de los fermiones sobre la geometría homogénea.

Finalmente, para investigar en profundidad las propiedades de la CCL híbrida en cosmologías inhomogéneas, buscamos soluciones interesantes para el modelo de Gowdy con topología de tres-toro, polarización lineal y un campo escalar sin masa. El operador de ligadura hamiltoniana de este modelo puede entenderse como el de una cosmología de Bianchi I, más un término que da cuenta de las inhomogeneidades. Buscamos estados gaussianos (con respecto a la anisotropía) sobre los que pueda despreciarse la acción de los operadores de anisotropía y del término que contiene la autointeracción de las inhomogeneidades. Sobre dichos estados, la ligadura hamiltoniana resulta ser, aproximadamente, igual a la de una cosmología homogénea e isótropa con un campo escalar sin masa, más un término que contiene ciertos operadores homogéneos e isótropos, en los que están picados los estados considerados. Mostramos que un término tal puede simular numerosos fluidos perfectos, o incluso correcciones de curvatura a la acción de Hilbert-Einstein. A continuación, demostramos que, en efecto, existen soluciones cuánticas del modelo de Gowdy completo que presentan el tipo de perfiles gaussianos necesarios para las aproximaciones mencionadas. Así pues, esas soluciones se comportan, de forma efectiva, como las correspondientes a cosmologías homogéneas e isótropas con fluidos perfectos y correcciones geométricas como las que se contemplan en algunas teorías de gravedad modificada.

Capítulo 1

Introducción

Gran parte de los conocimientos modernos en Física tienen como bases teóricas más importantes la teoría de la Relatividad General y la Mecánica Cuántica. La primera de ellas describe el movimiento clásico de la materia en presencia de campos gravitatorios, en un contexto puramente geométrico. Al mismo tiempo, esta teoría explica cómo la materia curva la geometría del espaciotiempo, dando lugar a dichos campos de gravedad. La formulación de las ecuaciones que rigen el comportamiento gravitatorio es covariante, es decir, que no depende del sistema de coordenadas que se elija para estudiarlo [1, 2]. Por otra parte, la Mecánica Cuántica es todo un paradigma que trasciende las leyes físicas clásicas. Para ello, introduce una formulación de la Física basada en la existencia de una incertidumbre intrínseca en las cantidades observables, que son tratadas como variables aleatorias cuya distribución de probabilidad está determinada por el estado en que se encuentre el sistema. Sin embargo, la evolución en el tiempo de dicho estado está bien determinada a través de la ecuación de Schrödinger, y es tal que el estado nunca pierde su carácter de distribución probabilística [3, 4].

Tanto la Relatividad General como la Mecánica Cuántica han conseguido explicar, con un grado de precisión muy notable, los resultados experimentales obtenidos hasta la fecha en sus respectivos ámbitos de aplicación. Además la combinación de ambos formalismos, enfocada al estudio de sistemas físicos explicados mediante campos cuánticos relativistas, ha dado lugar a la obtención de numerosas predicciones que también han sido contrastadas experimentalmente. Estos campos describen excitaciones cuánticas materiales, o partículas, que se propagan de forma relativista sobre un fondo espaciotemporal clásico. Dicha combinación se conoce por el nombre de Teoría Cuántica de Campos, y encuentra una de sus áreas de aplicación práctica más desarrolladas en la Física de los aceleradores y detectores de partículas. En este tipo de escenarios, las partículas elementales subatómicas a altas energías, así como sus interacciones no gravitatorias, se describen a través de campos cuánticos que se propagan sobre un espaciotiempo plano, ausente de gravedad, sin modificarlo [5]. Más allá de este contexto, la Teoría Cuántica de Campos en espaciotiempos planos ha servido también para dar explicación a diversos fenómenos observados recientemente en el campo de la materia condensada, en rangos de energía mucho más bajos [6–9].

Aparte del éxito alcanzado por la cuantización de campos relativistas en geometrías planas, existe toda una formulación sistemática de la Teoría Cuántica de Campos en escenarios espaciotemporales curvos [10]. Esta formulación contempla la inclusión de efectos gravitato-

rios en el comportamiento dinámico de la materia en su régimen cuántico, de acuerdo con la Relatividad General. Existen numerosas aportaciones y predicciones teóricas dentro de este marco de Teoría Cuántica de Campos en espaciotiempos curvos, como pueden ser la radiación Hawking [11], el efecto Unruh [12, 13] o la producción de partículas debida a la expansión del Universo [14, 15]. Este tipo de fenómenos se deducen típicamente partiendo de una cuantización de Fock de los campos, basada en la caracterización de los mismos por colecciones infinitas de operadores de creación y destrucción de las excitaciones de partículas o antipartículas correspondientes al campo en cuestión, así como a través de su estado de vacío. Sin embargo, es bien conocido que la generalización de la cuantización de Fock de teorías de campos a fondos curvos no es en absoluto inmediata, y de hecho trae consigo numerosas ambigüedades. La más importante de ellas concierne la elección de representación cuántica del álgebra, bajo corchetes de Poisson, de (la exponenciación compleja de) las variables básicas (canónicas) que describen el campo. En Mecánica Cuántica tradicional, no relativista, esta álgebra se conoce por el nombre de álgebra de Weyl. Afortunadamente, en ese caso en el que el sistema posee un número finito de grados de libertad, la representación cuántica del álgebra sobre un espacio de Hilbert es única, salvo equivalencia unitaria, si se imponen ciertas condiciones bastante razonables, incluida la continuidad (este resultado se conoce con el nombre de teorema de Stone-von Neumann) [16]. Esto quiere decir que dos representaciones distintas de la misma álgebra de Weyl sobre el mismo espacio de Hilbert están necesariamente relacionadas por un operador unitario. Esta propiedad proporciona una gran solidez a las predicciones teóricas de la Mecánica Cuántica, y en particular a aquellas que se derivan de la evolución de los estados cuánticos. En efecto, las variables canónicas del sistema a distintos tiempos forman el mismo álgebra de Weyl a nivel clásico. Por tanto, las representaciones cuánticas de las mismas a distintos tiempos han de ser unitariamente equivalentes, garantizándose así la ya mencionada conservación del carácter probabilístico de los estados. Sin embargo, en Teoría Cuántica de Campos este resultado de la unicidad de la cuantización no es en general válido debido a que los campos describen, desde un punto de vista formal, un número infinito de grados de libertad. El resultado de unicidad ni siquiera se aplica a cuantizaciones de Fock de teorías de campos libres, que típicamente se rigen por ecuaciones dinámicas lineales. Este obstáculo fundamental da lugar a la existencia de una infinitud de descripciones cuánticas de un mismo sistema físico, inequivalentes entre sí. No obstante, existen criterios físicos para reducir, e incluso eliminar por completo, esta ambigüedad de la teoría en ciertos espaciotiempos. Un ejemplo muy notable se da en aquellas teorías de campos que se propagan sobre fondos estacionarios. Tales son las descripciones mencionadas anteriormente de campos materiales en ausencia de gravedad, que tanto éxito experimental han obtenido en el pasado siglo. En este tipo de escenarios, las representaciones posibles del análogo del álgebra de Weyl (típicamente conocido como relaciones de conmutación o anticonmutación canónicas del campo) se reducen a una única si se impone que la teoría cuántica respete las simetrías bajo traslaciones temporales del espaciotiempo clásico y que la evolución sea generada por un hamiltoniano, que hace las veces de energía [17–20]. A nivel cuántico este criterio implica que el estado de vacío del campo en cuestión es un estado estacionario y no hay ninguna obstrucción para que la dinámica cuántica sea unitaria, respetándose así la interpretación probabilística estándar.

La situación se agrava notablemente cuando se consideran campos materiales que se propagan en espaciotiempos más generales, no estacionarios. Estos modelos son capaces de

describir escenarios de gran interés físico, tales como el proceso de colapso de estrellas o la evolución cosmológica del Universo prácticamente desde sus orígenes. En efecto, en estos casos no existe ninguna simetría temporal en las ecuaciones dinámicas de los campos que se pueda imponer para restringir la teoría cuántica. La situación se agrava aún más si se tiene en cuenta que las representaciones cuánticas de las relaciones de conmutación o anticonmutación canónicas a distintos tiempos no tienen por qué ser unitariamente equivalentes entre sí. Por lo tanto, se pierde toda la solidez teórica de aquellas predicciones que intenten basarse en los procesos de evolución cuántica de los estados. Por este motivo es de especial interés físico la obtención de algún criterio que permita resolver al mismo tiempo la ambigüedad en la elección de una cuantización de Fock de campos en espaciotiempos no estacionarios, así como el problema de alcanzar una dinámica cuántica unitaria para dichos campos. En realidad, esta cuestión ya se ha investigado en los últimos años, y los resultados alcanzados indican que la resolución de ambos problemas está en estrecha relación. En efecto, para campos escalares libres en una multitud de espaciotiempos no estacionarios de tipo cosmológico, se ha demostrado que la unitariedad de la dinámica garantiza la unicidad (salvo equivalencia unitaria) de la representación de Fock de las relaciones de conmutación canónicas, si además se imponen las simetrías de las ecuaciones de campo cuánticamente [21, 22]. Dichas simetrías incluyen, en particular, las isometrías de las hipersuperficies espaciales en que se pueden exfoliar las cosmologías consideradas, y en muchos casos el análisis de las simetrías puede restringirse exclusivamente a ellas. Uno de los propósitos de esta tesis es generalizar estos resultados de unicidad a campos materiales de tipo fermiónico que pueden describir, en numerosas ocasiones, situaciones físicas más realistas que los campos escalares. Por otra parte, la obtención de dichos resultados puede proporcionar indicios más generales de la estrecha conexión entre la unitariedad de la dinámica y la unicidad de la representación de Fock en Teoría Cuántica de Campos. Por este motivo, esta tesis también incluye un análisis análogo del caso de un campo escalar en una cosmología con menos restricciones de simetría que las homogéneas e isótropas analizadas hasta la fecha.

Por supuesto, existen tensiones entre la Teoría Cuántica de Campos en espaciotiempos curvos y la propia Relatividad General. En efecto, desde un punto de vista fundamental, puede parecer extraño considerar partículas materiales de naturaleza cuántica sobre un fondo espaciotemporal clásico fijo, pues las ecuaciones de Einstein dictan que la materia ha de afectar a la curvatura clásica del espaciotiempo. Surgen entonces serios problemas si se intenta formular el efecto de campos materiales cuánticos sobre la geometría espaciotemporal, especialmente si dicha materia se encuentra en un estado con fluctuaciones cuánticas importantes. Resulta bastante razonable pensar, por tanto, que si realmente se acepta la existencia de regímenes físicos en los que es válido un tratamiento cuántico de la materia sobre un espaciotiempo clásico, como parecen indicar los experimentos, entonces debe existir otro régimen que lo trascienda en el que tanto la materia como la geometría espaciotemporal tengan un carácter cuántico. Las ecuaciones de Einstein clásicas podrían entenderse como ciertos límites de aquella teoría de gravedad cuántica que explicara dicho régimen, y los escenarios intermedios contemplados por la Teoría Cuántica de Campos en espaciotiempos curvos podrían enmarcarse de forma consistente con menor tensión. Aparte de la motivación de una teoría de gravedad cuántica basada en la consistencia entre los dos pilares básicos de la Física actual, la mayoría de la comunidad científica ve como un indicio de la necesidad de considerar los fenómenos gravitatorios cuánticos el hecho de que la Relatividad

General predice casi inevitablemente la existencia de singularidades espaciotemporales, en las inmediaciones de las cuales se pierde toda posible predictibilidad física. Son ejemplos de dichas singularidades el conocido *Big-Bang* del Universo primordial o regiones interiores de los agujeros negros. Así pues, una esperanza bastante generalizada en la Física Teórica es que un formalismo que incorpore efectos cuánticos no perturbativos de gravedad pueda resolver la aparición de singularidades, permitiendo mantener la capacidad de extraer predicciones físicas.

Se han llevado a cabo numerosos intentos de alcanzar la deseada teoría cuántica de la geometría espaciotemporal. A día de hoy, sigue sin haberse alcanzado un común acuerdo respecto si alguna de las distintas propuestas es completamente satisfactoria desde el punto de vista de su consistencia matemática y su contenido físico. Uno de los esquemas para la descripción cuántica de la gravedad que goza de mayor impacto y rigor formal es conocido por el nombre de Gravedad Cuántica de Lazos [23–28]. Se trata de un formalismo de cuantización de la geometría de espaciotiempos globalmente hiperbólicos, basado en una formulación canónica y no perturbativa. La novedad fundamental con respecto a las propuestas canónicas que la han precedido en el tiempo (conocidas como teorías geometrodinámicas o de tipo Wheeler-DeWitt [29,30]) reside en la utilización de técnicas extraídas de las teorías de gauge de Yang-Mills [31], conocidas por su éxito en la explicación de regímenes no perturbativos de las interacciones fuertes. Además, la propuesta es independiente de cualquier estructura de fondo espaciotemporal, y trata en todo momento de respetar la covariancia general de la teoría de Einstein, aun en el nivel cuántico. Para conseguir esto último, sigue el esquema de cuantización propuesto por Dirac para sistemas con ligaduras [32]. En particular, la Relatividad General es una teoría cuyo hamiltoniano es una combinación lineal de ligaduras que se anulan sobre las soluciones clásicas. Estas ligaduras generan, a través de los corchetes de Poisson, transformaciones generales de coordenadas, que son una simetría fundamental de la teoría. La propuesta de Dirac consiste en imponer dichas ligaduras cuánticamente sobre los estados del sistema. El espacio de Hilbert físico se obtendría a partir de aquellos estados que sean invariantes bajo las transformaciones generadas por esas ligaduras. Más específicamente, en Gravedad Cuántica de Lazos, los grados de libertad geométricos en vacío se describen a través de pares de variables canónicas que vienen dadas por las componentes de la tríada densitizada y por una conexión de gauge. Sus respectivos flujos a través de superficies y holonomías a lo largo de caminos forman una álgebra bajo corchetes de Poisson, que es la que se pasa a representar cuánticamente sobre un espacio de Hilbert. Este espacio se denomina cinemático, y es un espacio de representación preliminar, sobre el que se imponen las versiones cuantizadas de las ligaduras de la Relatividad General y de las simetrías de gauge para así poder determinar el espacio de Hilbert físico propiamente dicho.

Una enorme traba a la que se enfrentan las distintas propuestas de teoría de gravedad cuántica, independientemente de su naturaleza, es la dificultad de encontrar datos experimentales que permitan contrastarlas. La mayoría de los posibles efectos de una geometría cuántica se esperan encontrar en regímenes de muy altas curvaturas o energías. En este sentido, el Universo que observamos resulta ser muy clásico, y la Relatividad General lo explica casi a la perfección. No obstante, existen algunas ventanas observacionales a regímenes del Universo en los que podrían encontrarse rastros de una fenomenología que fuera más allá de la teoría de Einstein. Un ejemplo de gran importancia es el denominado fondo cósmico de microondas [33,34]. Se trata de una radiación, aproximadamente de cuerpo negro,

procedente de regiones tan alejadas de nuestro planeta que provee información acerca de cómo era el Universo en la temprana época en que se hizo transparente, y que puede proporcionar incluso algunos detalles de cómo se comportó en etapas anteriores. El segundo inconveniente que tienen la mayoría de las propuestas de gravedad cuántica es la complejidad para obtener predicciones suficientemente concretas acerca de aquellos regímenes donde los efectos cuánticos podrían ser observables. Por ello, resulta conveniente, desde el punto de vista físico, desarrollar formalismos más restringidos que, aun sin dar cuenta de la riqueza de fenómenos total de la teoría cuántica, sean capaces de describir la Física relevante en dichas regiones del Universo. Con esta motivación, desde finales del siglo pasado, varios autores han aplicado los métodos de cuantización de Gravedad Cuántica de Lazos a sistemas cosmológicos que poseen un número finito de grados de libertad, gracias a la presencia de ciertas simetrías. Así ha surgido la Cosmología Cuántica de Lazos [35–39]. Esta disciplina física comenzó ocupándose del análisis cuántico de un universo homogéneo e isótropo de tipo Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker, que clásicamente proporciona una buena aproximación del comportamiento del Universo a gran escala [40–45]. La cuantización completa de dicho sistema cosmológico se completó de forma consistente, proporcionando unos resultados notablemente satisfactorios tanto desde el punto de vista formal [35, 46] como a la hora de alcanzar una visión más física [47, 48]. Destaca entre ellos la resolución de la singularidad cosmológica del *Big-Bang*, a la que sustituye en este formalismo un rebote cuántico (*Big-Bounce*, en inglés). Dicha resolución puede entenderse tanto en el nivel puramente cuántico, a través de las propiedades espectrales de los operadores resultantes, como en un nivel efectivo, si se analizan las trayectorias de los picos de probabilidad de ciertos estados semiclásicos [47, 48]. Además de estas investigaciones en Cosmología Cuántica de Lazos homogénea e isótropa, conviene destacar en el marco de interés de esta tesis que dicho formalismo se ha utilizado para proporcionar una cuantización de cosmologías con menor grado de simetría que, aun manteniendo la homogeneidad del espacio, son anisótropas. En particular, se han estudiado en detalle cosmologías del tipo Bianchi I, en las que cada dirección espacial tiene un factor de escala propio [49–51].

En lo que a nuestro Universo concierne, aunque la homogeneidad y la isotropía a gran escala son unas hipótesis generalmente aceptadas, es necesario dar una explicación a la generación y evolución de las inhomogeneidades existentes. De hecho, el propio fondo cósmico de microondas presenta una serie de anisotropías en su temperatura que parecen guardar información acerca de esas pequeñas inhomogeneidades en la geometría y la materia del Universo primigenio. Dichas inhomogeneidades serían las que, en última instancia, darían lugar a las estructuras que observamos hoy en día [52]. Con esta motivación de investigar efectos cuánticos de gravedad en espaciotiempos cosmológicos realistas, se propuso hace unos diez años una estrategia híbrida para la descripción cuántica de escenarios espaciotemporales que contemplan la presencia de inhomogeneidades, tanto geométricas como materiales. Por una parte, esta estrategia canónica emplea métodos inspirados en algún formalismo de gravedad cuántica para la representación del sector homogéneo de la geometría. Por otra, recurre a las representaciones de Fock de Teoría Cuántica de Campos para describir el resto de grados de libertad del sistema. La combinación de ambas técnicas ha de dar lugar a una cuantización consistente del sistema completo. Así, este formalismo para la cuantización de espaciotiempos inhomogéneos presupone que existe un régimen en el que los efectos cuánticos de gravedad más importantes son los que afectan a las contribuciones homogéneas del siste-

ma, suposición que parece razonable en las etapas tempranas del Universo en que vivimos. Parece entonces aún más claro que las ventajas de construir un formalismo que sea capaz de recuperar la unitariedad de la evolución en Teoría Cuántica de Campos en espaciotiempos curvos trascienden incluso la necesidad de obtener resultados físicos robustos a partir de dicha teoría. En el marco híbrido, debería ser fundamental que la representación de Fock de los grados de libertad inhomogéneos permita que se alcance una descripción unitaria de la evolución (respecto a algún parámetro del sistema cuántico completo) en un régimen de geometría clásica o efectiva.

El formalismo de cuantización híbrida, con una representación de Cosmología Cuántica de Lazos para los grados de libertad homogéneos de la geometría, se puso en práctica por primera vez en uno de los modelos cosmológicos de Gowdy [53–55]. Estos modelos describen espaciotiempos que, aún sujetos a ciertas condiciones de simetría (la presencia de dos vectores de Killing espaciales), presentan inhomogeneidades de tipo gravitatorio [56, 57]. La cuantización híbrida se completó para el modelo con topología espacial de tres-toro y ondas gravitatorias linealmente polarizadas, tanto en vacío [55, 58] como en presencia de un campo escalar sin masa [59]. Sin embargo, aunque el espacio de Hilbert físico quedó formalmente caracterizado, la complejidad del sistema no permite encontrar de forma analítica la expresión de sus estados a partir del espacio de Hilbert cinemático. Por ello se comenzaron a desarrollar técnicas de aproximación para los operadores de las ligaduras resultantes, válidas para ciertos tipos de estados cuánticos [60]. Sobre dichos estados, el operador de ligadura hamiltoniana (relacionado clásicamente con el generador de las reparametrizaciones en el tiempo) adquiriría una forma aproximada particularmente sencilla: la correspondiente a una cosmología homogénea e isótropa acoplada a un campo escalar sin masa, una vez identificado el volumen promedio del universo de Gowdy con el volumen isótropo. Con este precedente, otro de los objetivos de esta tesis ha sido profundizar en el estudio de las técnicas de aproximación para las ligaduras de sistemas inhomogéneos, con el fin de caracterizar estados en los que la acción aproximada de estas ligaduras se asemeje a la propia de escenarios cosmológicos plausibles, con homogeneidad e isotropía, en los que aparece de forma efectiva una contribución de constante cosmológica, o incluso correcciones superiores de curvatura a la teoría de Einstein de partida.

Quizá más interesante desde un punto de vista físico sea la aplicación del formalismo de cuantización híbrida al Universo primordial con perturbaciones escalares, acoplado a un campo escalar con potencial [61–66]. En el marco de la Relatividad General, este sistema describe con gran precisión las observaciones de las anisotropías en el fondo cósmico de microondas, partiendo de una etapa inflacionaria del Universo [67, 68]. Estas investigaciones del régimen cuántico híbrido del Universo primigenio parten, en su versión más desarrollada, de una formulación clásica del sistema en el que los grados de libertad físicos se describen mediante invariantes de gauge, que no se ven afectados por transformaciones perturbativas de coordenadas [65]. El sistema queda así idóneamente preparado para la aplicación del esquema híbrido mediante el procedimiento de Dirac. A pesar de la atención de que gozan hoy en día las perturbaciones escalares en cosmología cuántica, debido a su papel a la hora de explicar el fondo cósmico de microondas observado, para tratar el sistema de forma más realista conviene introducir otros tipos de contenido material existentes en la naturaleza. Tal es el caso de los campos fermiónicos de Dirac. El interés de contemplar la presencia de dichos campos en las épocas tempranas del Universo va más allá de una completitud formal, pues

para asumir la evolución convencionalmente establecida de las perturbaciones bosónicas es necesario confirmar que dichos campos no se ven afectados de forma notable por la presencia de fermiones. El objetivo último de esta tesis ha sido incorporar perturbaciones fermiónicas al sistema cuántico híbrido del Universo primordial con perturbaciones escalares, y analizar las consecuencias de su propia evolución cuántica así como su posible influencia en la evolución de las perturbaciones escalares.

Notación de índices y unidades

A lo largo de la tesis, salvo que puntualmente se especifique lo contrario, las componentes espaciotemporales de tensores y conexiones vendrán denotadas por índices griegos del medio del alfabeto: $\mu, \nu, \dots = 0, 1, 2, 3$ (o bien $\mu, \nu, \dots = 0, 1, 2$ en espaciotiempos tridimensionales). Por otra parte, las componentes espaciales de tensores y conexiones las denotarán índices griegos del comienzo del alfabeto: $\alpha, \beta, \dots = 1, 2, 3$ (o bien $\alpha, \beta, \dots = 1, 2$ en espaciotiempos tridimensionales). Las componentes «internas» de cantidades tetrádicas (o bien triádicas en tres dimensiones espaciotemporales), sujetas a la libertad de gauge de Lorentz, se etiquetarán a través de índices latinos del comienzo del alfabeto: $a, b, \dots = 0, 1, 2, 3$ (o bien $a, b, \dots = 0, 1, 2$ en espaciotiempos tridimensionales). Por último, las componentes internas de cantidades triádicas (o bien diádicas en tres dimensiones espaciotemporales), sujetas a la libertad de gauge de rotaciones tridimensionales, serán denotadas por índices latinos del medio del alfabeto: $i, j, \dots = 1, 2, 3$ (o bien $i, j, \dots = 1, 2$ en espaciotiempos tridimensionales). Además, en toda la tesis ha de entenderse suma sobre índices repetidos arriba y abajo en un mismo factor, salvo que se indique lo contrario.

Todo el contenido de la tesis está escrito adoptando unidades definidas por la fijación $c = \hbar = 1$, donde c es la velocidad de la luz en vacío y \hbar es la constante de Planck reducida. Sin embargo, sí se muestran de forma explícita las contribuciones de la constante gravitatoria de Newton, G .

Capítulo 2

Estructura y objetivos de la tesis

El objetivo general de esta tesis es profundizar en la aplicación de la Cosmología Cuántica de Lazos híbrida a sistemas cosmológicos con infinitos grados de libertad, tanto mediante el desarrollo de técnicas efectivas y aproximadas, como por la inclusión de campos materiales realistas correspondientes a fermiones. Para ello, en primer lugar esta tesis proporciona un formalismo sin ambigüedades y bien fundamentado para abordar la cuantización de Fock de campos fermiónicos (y escalares) en cosmología. Este formalismo sirve, en segundo lugar, para desarrollar y analizar las consecuencias que conlleva para los fermiones una cuantización de lazos híbrida del sistema que conforma el Universo primordial en presencia de perturbaciones escalares, tensoriales y fermiónicas. En tercer lugar, con el objetivo de profundizar en los conceptos de dinámica efectiva y en el comportamiento de los estados físicos en cosmología cuántica inhomogénea, hemos desarrollado métodos de aproximación para encontrar soluciones físicamente interesantes de modelos cosmológicos inhomogéneos, estudiando un ejemplo que permite un tratamiento exacto: el espaciotiempo de Gowdy con polarización lineal de las ondas gravitatorias y topología toroidal.

Para la consecución de estos objetivos generales, la tesis se estructura por capítulos como sigue:

- En el Capítulo 3 resumiremos los conocimientos previos al desarrollo de esta tesis, conceptos que servirán de punto de partida para la obtención de los resultados contenidos en esta memoria. En primer lugar, presentaremos los fundamentos en los que se basa la Teoría Cuántica de Campos en espaciotiempos curvos estándar, tanto para campos bosónicos de Klein-Gordon como fermiónicos de Dirac. Dentro de este apartado, clarificaremos qué se entiende por dinámica cuántica y su implementabilidad unitaria en los sistemas de campos considerados. En segundo lugar, expondremos los procedimientos que sigue la Cosmología Cuántica de Campos para la descripción cuántica de los dos tipos de cosmologías homogéneas relevantes para esta tesis: espaciotiempos de tipo Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker y de Bianchi I. Detallaremos, además, las propiedades de los operadores que representan las ligaduras de estos sistemas, y daremos un compendio de los resultados más destacables obtenidos hasta la fecha con este formalismo de cosmología cuántica. Por último, con el fin de introducir la estrategia híbrida para la cuantización de sistemas gravitatorios, resumiremos su aplicación a una de las cosmologías inhomogéneas más simples: los espaciotiempos de Gowdy con

topología espacial de tres-toro y con polarización lineal en las ondas gravitatorias.

- En el Capítulo 4 analizaremos la cuantización de Fock de campos escalares de Klein-Gordon en espaciotiempos de tipo Bianchi I. El objetivo de este capítulo es demostrar la unicidad, salvo equivalencia unitaria, de la representación de Fock cuando se impone que el vacío sea invariante bajo las isometrías espaciotemporales, y se exige un concepto asociado de dinámica que pueda implementarse mediante un operador unitario en la teoría cuántica. Para ello, realizaremos un análisis asintótico (en el régimen de grandes autovalores del operador de Laplace-Beltrami en las hipersuperficies espaciales) de la dinámica del campo, tras haber llevado a cabo una transformación canónica dependiente del tiempo. Posteriormente, identificaremos todas aquellas representaciones de Fock que dan lugar a vacíos invariantes bajo las isometrías. Una vez se haya restringido la discusión a tales representaciones, consideraremos familias de estas que se relacionen dinámicamente. Caracterizaremos las familias que admiten una implementabilidad unitaria no trivial de su noción asociada de evolución, y demostraremos que todas estas familias de representaciones son unitariamente equivalentes entre sí.
- En el Capítulo 5 estudiaremos la cuantización de Fock de campos de Dirac en espaciotiempos tridimensionales conformemente ultraestáticos. El objetivo será de nuevo demostrar la unicidad, salvo equivalencia unitaria, de todas aquellas representaciones de Fock que admiten un concepto no trivial de dinámica unitaria, esta vez cuando los vacíos están sujetos a la invariancia bajo las simetrías de la ecuación de Dirac. Llevaremos a cabo un análisis asintótico de las soluciones de dicha ecuación, en el régimen en que los autovalores del operador de Dirac en las superficies espaciales tienden a infinito. Caracterizaremos aquellas representaciones con vacíos invariantes y consideraremos familias generales de ellas cuyos elementos se relacionen a través de transformaciones dinámicas. El conocimiento asintótico de la evolución fermiónica nos permitirá entonces determinar qué familias admiten una implementabilidad unitaria de su dinámica asociada. Las condiciones necesarias y suficientes para esta implementabilidad unitaria resultarán garantizar la unicidad de la representación de Fock, salvo equivalencia unitaria y elección del convenio para la distinción de partículas y antipartículas.
- El Capítulo 6 estará dedicado a la demostración de los resultados de unicidad para la cuantización de Fock de campos de Dirac en cosmologías homogéneas e isotrópicas, no ya en tres, sino en cuatro dimensiones espaciotemporales, y con dos tipos de hipersuperficies espaciales compactas: esféricas y planas. En particular, el criterio que impondremos en este caso, aparte de la implementabilidad unitaria de la dinámica, será la invariancia del vacío de Fock bajo las isometrías de la tres-esfera y del tres-toro, respectivamente, así como bajo las rotaciones de espín generadas por la helicidad en el caso plano. Para ambas cosmologías, es posible realizar un análisis asintótico de las soluciones de la ecuación de Dirac, en el régimen de grandes autovalores del operador de Dirac en las hipersuperficies espaciales. Identificaremos de nuevo aquellos vacíos de Fock que son invariantes bajo las simetrías físicas del sistema cosmológico. Estudiaremos aquellas familias de representaciones invariantes cuyos elementos se relacionen a través de trayectorias dinámicas, y proporcionaremos las condiciones necesarias y suficientes para que dicha relación sea implementable mediante operadores unitarios, en

ambas cosmologías. Resultará una vez más que la unitariedad de la dinámica garantiza la unicidad de las representaciones de Fock permitidas, salvo equivalencia unitaria y elección del convenio para la distinción de partículas y antipartículas. Discutiremos también la elección de un convenio «natural» en el caso del campo fermiónico que se propaga en una cosmología homogénea e isótropa plana.

- El Capítulo 7 analiza la cuantización híbrida del sistema cosmológico que describe un universo homogéneo e isótropo, acoplado a un campo escalar con potencial y en presencia de perturbaciones de tipo escalar, tensorial y fermiónico. Con este objetivo, proporcionaremos primero un estudio del espacio de fases, enfocado a introducir una descripción óptima del mismo para la aplicación de la estrategia híbrida. En particular, al truncar a segundo orden perturbativo la acción del modelo, se obtiene un sistema que admite ciertas variables canónicas privilegiadas. Para el contenido fermiónico inhomogéneo, se trata de las variables de destrucción y creación seleccionadas por el criterio de unitariedad analizado en el capítulo anterior. Con la parametrización del espacio de fases escogida, la única ligadura que debe imponerse cuánticamente de forma no trivial es el modo cero de la ligadura hamiltoniana. Su representación cuántica dentro del esquema híbrido acopla los distintos sectores perturbativos y no perturbativos. Para facilitar la resolución de esta ligadura y analizar estados físicos que sean relevantes en cosmología, adoptaremos un *ansatz* de tipo Born-Oppenheimer. Con este *ansatz*, los estados de interés presentan una dependencia separada en las diferentes perturbaciones y en la geometría homogénea, mientras que el campo escalar homogéneo desempeña el papel de un «tiempo» interno de evolución. Imponiendo el operador de ligadura hamiltoniana sobre estos estados deduciremos, bajo ciertas hipótesis razonables, una ecuación de ligadura «maestra» sobre las perturbaciones, que incluye el efecto de la geometría homogénea cuántica a través de valores esperados. Dicha ecuación maestra da lugar, además, a varias ecuaciones de Schrödinger que describen la evolución de las funciones de onda de las perturbaciones. En particular, una de estas ecuaciones proporciona la variación de la parte fermiónica de los estados. Analizaremos esta dinámica fermiónica en imagen de Heisenberg y demostraremos que es implementable a través de un operador unitario en el espacio de Fock de nuestra teoría cuántica. Construiremos este operador y comprobaremos que, en efecto, el estado obtenido al evolucionar con él el vacío de Fock fermiónico elegido para la cuantización híbrida es una solución de la ecuación de Schrödinger. La implementabilidad unitaria de la dinámica garantizará, asimismo, una producción finita de pares de partículas y antipartículas en el vacío. Por último, proporcionaremos un breve estudio de la «reacción» cuántica que los fermiones pueden producir sobre la geometría homogénea y el resto de perturbaciones a través de la ligadura del sistema.
- En el Capítulo 8 analizaremos posibles estados físicos de la cosmología cuántica híbrida de Gowdy con topología de tres-toro, polarización lineal, simetría rotacional local y mínimamente acoplada a un campo escalar con las mismas simetrías que la métrica. La descripción formal de este sistema, previa a la realización de esta tesis, se proporcionará en los preliminares recogidos en el Capítulo 3. El espacio de fases clásico de este espaciotiempo cosmológico puede entenderse como el de un universo homogéneo

y anisótropo de tipo Bianchi I, con simetría rotacional local e inhomogeneidades que se propagan en la dirección de la anisotropía. Tras una resolución parcial clásica de las ligaduras de Relatividad General, sobreviven dos de ellas: el modo cero de la ligadura hamiltoniana que genera las reparametrizaciones temporales y una ligadura de momentos que genera traslaciones constantes en la dirección de inhomogeneidad. El operador resultante que representa la ligadura hamiltoniana tiene una acción complicada sobre los estados del espacio de Hilbert cinemático, hecho que impide encontrar de forma exacta los estados físicos, aniquilados por tal ligadura. Por ello, desarrollaremos métodos de aproximación, con el objetivo de encontrar familias de estados que solucionen de forma aproximada la ligadura. La estrategia para conseguirlo se basará en considerar estados con unas propiedades tales que permitan ignorar el efecto de las anisotropías y la autointeracción de las inhomogeneidades excepto por ciertas contribuciones efectivas globales. Debido a ello, estas soluciones aproximadas del modelo de Gowdy lo serán también del operador de ligadura hamiltoniana que cabría esperar en un universo homogéneo e isótropo plano con un contenido material efectivo dado por fluidos perfectos (caso que estudiaremos en primer lugar), y posibles correcciones geométricas (que discutiremos generalizando el análisis anterior). En particular, estas correcciones podrán ser del estilo que se consideran en teorías de gravedad modificada. En definitiva, hallaremos estados físicos aproximados de un universo inhomogéneo y anisótropo que obedecen la dinámica correspondiente a una cosmología plana, homogénea e isótropa con las peculiaridades comentadas.

En resumen, en esta tesis profundizaremos en la investigación de un formalismo sólido en Teoría Cuántica de Campos en espaciotiempos curvos que nos permita describir campos materiales escalares y fermiónicos con un concepto de evolución unitaria. Haremos uso de los resultados alcanzados para campos de Dirac en universos homogéneos e isótropos para describir, mediante la Cosmología Cuántica de Lazos híbrida, una cosmología primordial con inflación y pequeñas inhomogeneidades de tipo escalar, tensorial y fermiónico. Por último, desarrollaremos métodos de aproximación para encontrar soluciones físicamente interesantes en Cosmología Cuántica de Lazos híbrida, centrando el análisis a cosmologías exactas de Gowdy, con polarización lineal de las ondas gravitatorias y topología toroidal. Procedemos a desarrollar de forma detallada cada uno de los puntos expuestos que constituyen el contenido fundamental de la tesis.

Capítulo 3

Conceptos preliminares

3.1. Dinámica unitaria en Teoría Cuántica de Campos

En este apartado, expondremos las bases teóricas en que se sustenta la cuantización de Fock en espaciotiempos curvos de campos escalares de tipo Klein-Gordon y campos fermiónicos de Dirac, libres de cualquier interacción no gravitatoria. Dentro de este marco teórico explicaremos, además, qué entendemos por una evolución unitaria en Teoría Cuántica de Campos (TCC), desde un punto de vista convencional basado en los conceptos bien asentados en la Mecánica Cuántica tradicional.

Para ello, consideraremos únicamente espaciotiempos globalmente hiperbólicos (o una región espaciotemporal específica que posea esta propiedad), con métrica $g_{\mu\nu}$ e inversa $g^{\mu\nu}$. Estos espaciotiempos están caracterizados por la existencia de una hipersuperficie ácrona (de Cauchy) Σ , que determina causalmente la totalidad del espaciotiempo [2, 69]. Su topología es pues $\mathbb{R} \times \Sigma$ [70] (o, más genéricamente, $\mathbb{I} \times \Sigma$, con \mathbb{I} un intervalo de la recta real). Además, existe una función global del tiempo t y un vector temporal t^μ orientado hacia el futuro, que no se anula en ningún punto, y es tal que $t^\mu \nabla_\mu t = 1$, donde ∇_μ es la derivada covariante asociada a la conexión afín de Levi-Civita. Cada una de las curvas integrales de t^μ intersecta a cada una de las hipersuperficies de Cauchy en un único punto, así que estas pueden parametrizarse a través de la función t . Es más, pueden elegirse de tal forma que sean hipersuperficies espaciales suaves [71]. Llamaremos $h_{\alpha\beta}$ a la métrica espacial inducida en dichas secciones de Cauchy. El vector temporal t^μ puede descomponerse como:

$$t^\mu = Nn^\mu + N^\mu, \quad (3.1)$$

donde N recibe el nombre de función lapso, $n^\mu = -Ng^{\mu\nu}\nabla_\nu t$ es un vector normal unitario a las hipersuperficies de Cauchy y N^μ es el vector de desplazamiento, que denota la proyección de t^μ sobre estas secciones. Todo espaciotiempo globalmente hiperbólico admite una descomposición de la métrica espaciotemporal de tipo Arnowitt-Desser-Misner (ADM) [72]:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -(N^2 - N_\alpha N^\alpha)dt^2 + 2N_\alpha dx^\alpha dt + h_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta. \quad (3.2)$$

Por otra parte, asumiremos que los espaciotiempos que consideremos admiten siempre la introducción de una estructura de espín [73]. Esta condición permitirá definir campos fermiónicos que se propagan sobre el fondo curvo. En particular, la condición necesaria y

suficiente para la existencia de estructuras de espín en una variedad cuadridimensional es que pueda definirse sobre ella un sistema de tétradas (ortonormales) global [74]. Esto significa que la métrica espaciotemporal puede escribirse globalmente como:

$$g_{\mu\nu} = e_\mu^a e_\nu^b \eta_{ab}, \quad (3.3)$$

donde η_{ab} es la métrica de Minkowski, tomada en esta tesis con signatura $\{-, +, +, +\}$. Las uno-formas e_μ^a reciben el nombre de cotétradas, y sus inversas e_a^μ son las tétradas. En el caso de espaciotiempos tridimensionales, también tratados en esta tesis, será suficiente considerar espaciotiempos globalmente hiperbólicos que sean orientables en el espacio y el tiempo. Dichas variedades son paralelizables [75] y, por tanto, pueden dotarse de estructuras de espín [73].

3.1.1. Campos de Klein-Gordon y Dirac

Sea $\phi(\vec{x}, t)$ un campo escalar real, libre y con masa m que se propaga sobre cualquier espaciotiempo con las propiedades que hemos mencionado. Dicho campo satisface la ecuación lineal de Klein-Gordon:

$$g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu \phi - m^2 \phi = 0. \quad (3.4)$$

Su momento canónicamente conjugado es la densidad escalar:

$$\pi_\phi = \sqrt{h} n^\mu \nabla_\mu \phi, \quad (3.5)$$

donde h es el determinante de la métrica espacial $h_{\alpha\beta}$. Gracias a la hiperbolicidad global, cada solución está totalmente determinada por su correspondiente par de valores iniciales $[\phi(\vec{x}), \pi_\phi(\vec{x})]$ en una sección de Cauchy cualquiera, que llamaremos Σ_0 , asociada a un valor t_0 de la función global del tiempo [69]. Por tanto, el espacio lineal \mathcal{S}_ϕ de soluciones a la ecuación (3.4) es isomorfo al espacio lineal \mathcal{P}_ϕ de condiciones iniciales, o espacio de fases. Sobre dos copias de este espacio, la estructura simpléctica del sistema $\Omega_S : \mathcal{P}_\phi \times \mathcal{P}_\phi \rightarrow \mathbb{R}$ puede escribirse como [10]:

$$\Omega_S([\phi_1, \pi_{\phi_1}], [\phi_2, \pi_{\phi_2}]) = \int_{\Sigma_0} d^3\vec{x} (\pi_{\phi_1} \phi_2 - \pi_{\phi_2} \phi_1). \quad (3.6)$$

Equivalentemente, a través de una definición análoga y haciendo uso del isomorfismo entre \mathcal{P}_ϕ y \mathcal{S}_ϕ , la estructura simpléctica puede considerarse sobre dos copias del espacio de soluciones \mathcal{S}_ϕ . Dicha definición no depende del valor de t escogido para su evaluación [10].

La evolución dinámica del campo escalar puede entenderse a través de trayectorias dinámicas en el espacio de fases, parametrizadas por t . Dado cada elemento de \mathcal{P}_ϕ (entendido como condición inicial) y su solución asociada en \mathcal{S}_ϕ , los puntos de la trayectoria correspondiente en el espacio de fases son los valores que toma la solución evaluada a cada tiempo t . Por supuesto, estas trayectorias dinámicas en \mathcal{P}_ϕ dan lugar a curvas análogas en el espacio de soluciones \mathcal{S}_ϕ , dado el isomorfismo entre ambos espacios.

Por otro lado, sea $\Psi(\vec{x}, t)$ un espinor complejo de Dirac, libre y con masa m que se propaga de nuevo sobre el tipo de espaciotiempos considerado. Las componentes del espinor serán

tratadas como variables de Grassmann anticonmutantes [76]. Esto garantiza que, desde el punto de vista cuántico, se cumpla el principio de exclusión de Pauli. Este campo satisface la ecuación lineal de Dirac:

$$e_a^\mu \gamma^a \nabla_\mu^S \Psi - m \Psi = 0, \quad (3.7)$$

donde ∇_μ^S es la versión espinorial de la derivada covariante de Levi-Civita [73], y γ^a son las matrices constantes de Dirac, que generan el álgebra de Clifford en una variedad lorentziana plana de la dimensión del espaciotiempo:

$$\gamma^a \gamma^b + \gamma^b \gamma^a = 2\eta^{ab} I, \quad (3.8)$$

donde I es la matriz identidad y η^{ab} es la inversa de la métrica de Minkowski. En este caso, al ser la acción de Dirac lineal en las derivadas temporales, el momento canónicamente conjugado del campo está totalmente determinado por él mismo [77]. Esto da lugar, en el formalismo de Dirac, a la aparición de ligaduras de segunda clase [32], que deben eliminarse de forma consistente con el fin de describir los grados de libertad físicos con variables canónicas. Este procedimiento no es sino una forma de traducir el hecho de que las soluciones a la ecuación (3.7) están completa y únicamente determinadas por el valor inicial $\Psi(\vec{x})$ del espinor de Dirac en la sección de Cauchy arbitraria Σ_0 [78]. Por lo tanto, de nuevo es posible identificar, a través de isomorfismo, el espacio lineal de soluciones \mathcal{S}_Ψ con el espacio de condiciones iniciales \mathcal{P}_Ψ . La estructura simpléctica del sistema fermiónico toma la forma [77, 79]:

$$\Omega_D(\Psi_1, \Psi_2) = -i \int_{\Sigma_0} d^d \vec{x} \sqrt{\hbar} (\Psi_1^\dagger \gamma^0 n^\mu e_\mu^a \gamma_a \Psi_2 + \Psi_2^\dagger \gamma^0 n^\mu e_\mu^a \gamma_a \Psi_1), \quad (3.9)$$

donde $\gamma_a = \eta_{ab} \gamma^b$, el espinor Ψ^\dagger es el hermítico conjugado de Ψ y d es la dimensión de las secciones espaciales del espaciotiempo, que en esta tesis puede ser tres o dos. Nótese que esta aplicación bilineal es simétrica en sus argumentos, al contrario que para el campo escalar. Esto se debe al carácter anticonmutante de los campos, que se traduce en la existencia de unos corchetes de Poisson (o de Dirac, una vez eliminadas las ligaduras de segunda clase) simétricos en sus argumentos anticonmutantes [79]. Equivalentemente, puede definirse una estructura simpléctica en el espacio de soluciones \mathcal{S}_Ψ , que de nuevo no dependerá del tiempo elegido para su evaluación [78]. Resulta conveniente apuntar que la aplicación bilineal (3.9) induce un producto interno definido positivo en \mathcal{P}_Ψ [78]:

$$(\Psi_1, \Psi_2)_D = \int_{\Sigma_0} d^d \vec{x} \sqrt{\hbar} \Psi_1^\dagger \gamma^0 n^\mu e_\mu^a \gamma_a \Psi_2. \quad (3.10)$$

Finalmente, y de forma totalmente análoga al caso previo del campo escalar, la evolución del espinor de Dirac puede representarse a través de trayectorias dinámicas en el espacio de condiciones iniciales \mathcal{P}_Ψ , así como sus análogas en el espacio de soluciones \mathcal{S}_Ψ .

3.1.2. Cuantización de los campos

A continuación, procederemos a describir la construcción de una representación de Fock cuántica para cualquiera de los dos campos introducidos anteriormente. Todos los conceptos

implicados se introducirán sobre el espacio de fases \mathcal{P}_ϕ y el de condiciones iniciales \mathcal{P}_Ψ . Sin embargo, la construcción de las representaciones puede llevarse a cabo de forma análoga sobre los espacios de soluciones, dados los isomorfismos existentes entre ambos. Toda representación de Fock puede construirse a partir de un objeto conocido como estructura compleja. Se trata, en ambos casos, de una aplicación lineal real, $J_\phi : \mathcal{P}_\phi \rightarrow \mathcal{P}_\phi$, o bien $J_\Psi : \mathcal{P}_\Psi \rightarrow \mathcal{P}_\Psi$, cuyo cuadrado es menos la identidad. Para la cuantización del campo escalar, se exige además que J_ϕ preserve la estructura simpléctica y que:

$$([\phi_1, \pi_{\phi_1}], [\phi_2, \pi_{\phi_2}])_S = -\Omega_S([\bar{\phi}_1, \bar{\pi}_{\phi_1}], J_\phi[\phi_2, \pi_{\phi_2}]) \quad (3.11)$$

sea un producto interno definido positivo para todo par $[\phi_1, \pi_{\phi_1}], [\phi_2, \pi_{\phi_2}] \in \mathcal{P}_\phi^{\mathbb{C}}$, donde $\mathcal{P}_\phi^{\mathbb{C}}$ es la complejificación del espacio de fases, y tanto J_ϕ como Ω_S están definidos en ella por linealidad compleja [10]. De ahora en adelante, las barras encima de símbolos indicarán la conjugación compleja. Por otra parte, para la cuantización del campo de Dirac, lo que suele requerirse es que J_Ψ preserve el producto interno (3.10). Esta condición garantiza inmediatamente que la estructura compleja sea de nuevo un simplectomorfismo. Igualmente se define J_Ψ en el espacio $\bar{\mathcal{P}}_\Psi$, que preserve el complejo conjugado del producto (3.10).

El espacio de Fock para la representación de las relaciones de conmutación canónicas del campo escalar se construye como sigue. La estructura compleja J_ϕ permite descomponer $\mathcal{P}_\phi^{\mathbb{C}}$ en sus dos autoespacios, ortogonales en el producto interno (3.11). La compleción en dicho producto del autoespacio de autovalor $+i$ se convierte en un espacio de Hilbert \mathcal{H}_S , denominado comúnmente espacio de Hilbert de una partícula. El espacio de Fock para la representación correspondiente de las relaciones de conmutación canónicas viene entonces dado por:

$$\mathcal{F}_S = \bigoplus_{n=0}^{\infty} (\otimes_n^s \mathcal{H}_S), \quad (3.12)$$

donde \otimes_n^s indica el producto tensorial simetrizado de n copias de su argumento y $\otimes_0^s \mathcal{H}_S = \mathbb{C}$ [10]. Las relaciones de conmutación canónicas del campo son representadas sobre \mathcal{F}_S como sigue. Elijamos una base ortonormal cualquiera¹ de \mathcal{H}_S , cuyos elementos llamaremos $\zeta_n(\vec{x})$, con $n \in \mathbb{N}$. La representación de las relaciones de conmutación canónicas del campo en \mathcal{F}_S se obtiene asociando al elemento $[\hat{\phi}(\vec{x}), \hat{\pi}_\phi(\vec{x})]$ del espacio de fases el operador distribucional:

$$[\hat{\phi}(\vec{x}), \hat{\pi}_\phi(\vec{x})] = \sum_{n \in \mathbb{N}} [\hat{c}_n \zeta_n(\vec{x}) + \hat{c}_n^\dagger \bar{\zeta}_n(\vec{x})], \quad (3.13)$$

donde \hat{c}_n es el operador de destrucción asociado a $\bar{\zeta}_n$ y \hat{c}_n^\dagger es su adjunto en \mathcal{F}_S , que corresponde al operador de creación asociado a ζ_n (para encontrar una definición de estos operadores, véase por ejemplo la referencia [10]). Estos operadores satisfacen:

$$[\hat{c}_n, \hat{c}_m^\dagger] = \delta_{nm}, \quad (3.14)$$

donde el corchete denota el conmutador y δ_{nm} es la delta de Kronecker. El adjetivo distribucional se refiere al hecho de que, para obtener un operador de campo bien definido en \mathcal{F}_S ,

¹Alternativamente, puede elegirse una base continua generalizada, en cuyo caso todas las sumas presentes en la discusión han de sustituirse por las correspondientes integrales. Las deltas de Kronecker habrán de sustituirse entonces por deltas de Dirac.

ha de suavizarse la expresión (3.13) con una función de prueba apropiada [10]. Finalmente, denominamos vacío de la representación al único (salvo fase) estado cíclico y normalizado de \mathcal{F}_S que es aniquilado por todos los operadores de destrucción.

El espacio de Fock para la representación de las relaciones de anticonmutación canónicas del campo de Dirac se construye siguiendo un procedimiento similar. En este caso, la estructura compleja J_Ψ permite descomponer \mathcal{P}_Ψ en sus dos autoespacios, ortogonales en el producto interno (3.10). Una descomposición análoga se lleva a cabo en $\bar{\mathcal{P}}_\Psi$, donde el autoespacio correspondiente al autovalor $+i$ es el complejo conjugado de aquel correspondiente a $-i$ en \mathcal{P}_Ψ , y viceversa. Se completan los dos autoespacios de autovalor $+i$ en el producto interno (3.10) y en su complejo conjugado, según corresponda, lo que da lugar a dos espacios de Hilbert. Aquel procedente de \mathcal{P}_Ψ , se denomina espacio de Hilbert de una partícula, y el procedente de $\bar{\mathcal{P}}_\Psi$ es el espacio de Hilbert de una antipartícula. Usaremos la notación \mathcal{H}_D^p y \mathcal{H}_D^{ap} para designar estos espacios, respectivamente. El espacio de Fock para la representación correspondiente de las relaciones de anticonmutación canónicas es, en este caso:

$$\mathcal{F}_D = \bigoplus_{n=0}^{\infty} (\otimes_n^a \mathcal{H}_D), \quad \mathcal{H}_D = \mathcal{H}_D^p \oplus \mathcal{H}_D^{ap} \quad (3.15)$$

donde \otimes_n^a indica el producto tensorial antisimetrizado de n copias de su argumento y, de nuevo, $\otimes_0^a \mathcal{H}_D = \mathbb{C}$ [10, 80]. La representación de las relaciones de anticonmutación canónicas sobre \mathcal{F}_D se establece como sigue. Consideremos una base ortonormal² de \mathcal{H}_D^p , con elementos $\psi_n^p(\vec{x})$, y otra de \mathcal{H}_D^{ap} , con elementos $\psi_n^{ap}(\vec{x})$, donde $n \in \mathbb{N}$. La representación de las relaciones de anticonmutación canónicas del campo de Dirac en \mathcal{F}_D se obtiene asociando a un elemento genérico del espacio de condiciones iniciales el operador distribucional:

$$\hat{\Psi}(\vec{x}) = \sum_{n \in \mathbb{N}} [\hat{a}_n \psi_n^p(\vec{x}) + \hat{b}_n^\dagger \bar{\psi}_n^{ap}(\vec{x})], \quad (3.16)$$

donde \hat{a}_n es el operador de destrucción asociado al espinor $\bar{\psi}_n^p$, mientras que \hat{b}_n^\dagger es el operador de creación asociado al espinor ψ_n^{ap} . Sus adjuntos en \mathcal{F}_D son los respectivos operadores de creación y destrucción (para encontrar una definición de estos operadores, véase por ejemplo la referencia [80]). La interpretación que se les da a estos operadores es la siguiente: \hat{a}_n y \hat{a}_n^\dagger son los operadores de destrucción y creación de excitaciones de partículas, mientras que \hat{b}_n y \hat{b}_n^\dagger son los correspondientes operadores de antipartículas. Estos operadores satisfacen las relaciones de anticonmutación:

$$[\hat{a}_n, \hat{a}_m^\dagger]_+ = \delta_{nm}, \quad [\hat{b}_n, \hat{b}_m^\dagger]_+ = \delta_{nm}, \quad (3.17)$$

donde $[\ , \]_+$ denota el anticonmutador. El resto de anticonmutadores básicos son idénticamente nulos. De nuevo, la expresión (3.16) únicamente está bien definida en el espacio de Fock si se suaviza con espinores de prueba adecuados [80]. Finalmente, denominamos vacío de la representación al único (salvo fase) estado cíclico y normalizado de \mathcal{F}_D que es aniquilado por todos los operadores de destrucción, tanto de partículas como de antipartículas.

²De nuevo, puede elegirse una base continua generalizada, realizándose las sustituciones pertinentes en las fórmulas expuestas.

3.1.3. Equivalencia unitaria. Dinámica cuántica

En las dos construcciones expuestas, es patente que distintas elecciones de estructuras complejas dan lugar a espacios de Fock diferentes con distintas representaciones de las relaciones de conmutación o anticonmutación canónicas. De hecho, en principio existen infinitas elecciones posibles para cada uno de los campos considerados. En general, dichas representaciones de Fock no son equivalentes entre sí [10]. Esto quiere decir que si se escoge uno de estos espacios de Fock para cualquiera de nuestros campos, con su representación correspondiente, resulta que hay número infinito de representaciones diferentes que no pueden relacionarse con la escogida mediante un operador unitario en dicho espacio. Esta obstrucción da lugar a la existencia de una ambigüedad infinita en el proceso de cuantización de campos de Klein-Gordon y de Dirac en espaciotiempos generales.

Ilustraremos esta ambigüedad en el caso del campo escalar, en primer lugar. Consideraremos para ello dos espacios de Fock, \mathcal{F}_S y \mathcal{F}'_S , contruidos a partir de dos estructuras complejas distintas J_ϕ y J'_ϕ . Las dos representaciones de las relaciones de conmutación canónicas asociadas estarán caracterizadas, respectivamente, por pares de operadores de destrucción y creación $(\hat{c}_n, \hat{c}_n^\dagger)$ y $(\hat{c}'_n, \hat{c}'_n{}^\dagger)$, donde $n \in \mathbb{N}$. Para discernir si ambas representaciones son unitariamente equivalentes entre sí, han de compararse *sobre el mismo espacio de Fock*, sea \mathcal{F}_S o \mathcal{F}'_S . Tomaremos, por ejemplo, \mathcal{F}_S como espacio de comparación. Debido a la linealidad existente en la construcción de ambas representaciones, los operadores $(\hat{c}'_n, \hat{c}'_n{}^\dagger)$ están relacionados con los asociados a la base del espacio \mathcal{F}_S mediante una transformación de Bogoliubov:

$$\hat{c}'_n = \sum_{m \in \mathbb{N}} (\alpha_{nm} \hat{c}_m + \beta_{nm} \hat{c}_m^\dagger), \quad \hat{c}'_n{}^\dagger = \sum_{m \in \mathbb{N}} (\bar{\alpha}_{nm} \hat{c}_m^\dagger + \bar{\beta}_{nm} \hat{c}_m), \quad (3.18)$$

cuyos coeficientes α_{nm} y β_{nm} satisfacen las relaciones:

$$\sum_{l \in \mathbb{N}} (\alpha_{nl} \bar{\alpha}_{ml} - \beta_{nl} \bar{\beta}_{ml}) = \delta_{nm}, \quad \sum_{l \in \mathbb{N}} (\alpha_{nl} \beta_{ml} - \beta_{nl} \alpha_{ml}) = 0. \quad (3.19)$$

Por definición, ambas representaciones serán unitariamente equivalentes si y solo si existe un operador unitario $\hat{U} : \mathcal{F}_S \rightarrow \mathcal{F}_S$ tal que $\hat{c}'_n = \hat{U}^{-1} \hat{c}_n \hat{U}$, para todo $n \in \mathbb{N}$ [10]. Para que tal operador exista es imprescindible que el estado de vacío de la representación definida por J'_ϕ , que es el estado normalizado aniquilado por todos los operadores \hat{c}'_n , se encuentre en el espacio \mathcal{F}_S . Un resultado bien conocido en TCC afirma que esto ocurre si y solo si [81]:

$$\sum_{n, m \in \mathbb{N}} |\beta_{nm}|^2 < \infty. \quad (3.20)$$

Diremos que la transformación de Bogoliubov, que relaciona las dos representaciones de Fock de las relaciones de conmutación canónicas del campo escalar, es implementable a través de un operador unitario si la condición (3.20) se cumple. En ese caso, ambas representaciones pueden ser relacionadas unitariamente entre sí, lo que hace posible identificar sus espacios de Fock asociados y trabajar con una u otra sin mayor ambigüedad en lo referente a operadores definidos como combinaciones lineales del campo y su momento.

El estudio de la plausibilidad de la equivalencia unitaria entre dos representaciones de Fock de un campo de Dirac libre sigue un procedimiento totalmente análogo. En este caso,

los operadores de creación y destrucción asociados a las bases de los dos espacios \mathcal{F}_D y \mathcal{F}'_D están relacionados por una transformación de Bogoliubov de la forma:

$$\hat{a}'_n = \sum_{m \in \mathbb{N}} (\alpha_{nm}^f \hat{a}_m + \beta_{nm}^f \hat{b}_m^\dagger), \quad \hat{a}'_n^\dagger = \sum_{m \in \mathbb{N}} (\bar{\alpha}_{nm}^f \hat{a}_m^\dagger + \bar{\beta}_{nm}^f \hat{b}_m), \quad (3.21)$$

$$\hat{b}'_n = \sum_{m \in \mathbb{N}} (\bar{\alpha}_{nm}^g \hat{b}_m + \bar{\beta}_{nm}^g \hat{a}_m^\dagger), \quad \hat{b}'_n^\dagger = \sum_{m \in \mathbb{N}} (\alpha_{nm}^g \hat{b}_m^\dagger + \beta_{nm}^g \hat{a}_m), \quad (3.22)$$

donde los coeficientes $\alpha_{nm}^f, \beta_{nm}^f, \alpha_{nm}^g$ y β_{nm}^g satisfacen las relaciones:

$$\sum_{l \in \mathbb{N}} (\alpha_{nl}^h \bar{\alpha}_{ml}^h + \beta_{nl}^h \bar{\beta}_{ml}^h) = \delta_{nm}, \quad \sum_{l \in \mathbb{N}} (\alpha_{nl}^f \bar{\beta}_{ml}^g + \beta_{nl}^f \bar{\alpha}_{ml}^g) = 0, \quad h = f, g. \quad (3.23)$$

De nuevo, la transformación será implementable a través de un operador unitario en \mathcal{F}_D si y solo si [82]:

$$\sum_{n, m \in \mathbb{N}} (|\beta_{nm}^f|^2 + |\beta_{nm}^g|^2) < \infty, \quad (3.24)$$

en cuyo caso ambas representaciones de Fock de las relaciones de anticonmutación canónicas del campo de Dirac podrán relacionarse mediante un operador unitario.

En este punto de la exposición, quizá sea conveniente notar que las transformaciones de Bogoliubov no son más que symplectomorfismos en la teoría clásica. En efecto, las contrapartidas clásicas de los operadores de creación y destrucción asociados a una representación de Fock dada pueden entenderse como los coeficientes de la expansión, en la base correspondiente, del elemento de \mathcal{P}_ϕ o \mathcal{P}_Ψ elegido para la representación. Es claro que las transformaciones de Bogoliubov, con las propiedades (3.19) y (3.23) con que se han introducido, tienen entonces, como contrapartida clásica directa, las transformaciones canónicas lineales en \mathcal{P}_ϕ y en \mathcal{P}_Ψ . En particular, al ser las ecuaciones de evolución lineales, dichas transformaciones incluyen aquellas que definen las trayectorias dinámicas de los campos. Por lo tanto es legítimo preguntarse, tal y como se hace en Mecánica Cuántica tradicional, si estas transformaciones que describen la evolución del campo a distintos tiempos pueden implementarse cuánticamente a través de operadores unitarios. Más en concreto, dada una representación de Fock de las relaciones de conmutación o anticonmutación canónicas, podemos considerar la familia de transformaciones de Bogoliubov que describen la trayectoria dinámica que parte del dato inicial, en la sección de Cauchy Σ_0 , determinado por la contrapartida clásica del operador de campo. La implementabilidad unitaria de la dinámica será posible en la representación de Fock considerada si y solo si estas transformaciones de Bogoliubov cumplen las condiciones necesarias y suficientes (3.20), en el caso del campo escalar, o (3.24), en el caso del campo de Dirac [22]. Si esto ocurre, llamaremos cuantización de Fock a la familia de representaciones resultantes y a su dinámica correspondiente. Todas las representaciones de esta familia pueden definirse sobre el mismo espacio de Fock, y están relacionadas entre sí mediante operadores unitarios. Dicha cuantización admitirá tanto una descripción cuántica de la evolución temporal de sus estados, a través de una imagen de Schrödinger, como una interpretación de operadores de campo que evolucionan en el tiempo, en una imagen de Heisenberg. Ambos puntos de vista estarán bien definidos y serán físicamente equivalentes entre sí, en tanto en cuanto sus imágenes de representación lo son.

No obstante, como se ha comprobado en el pasado y mostraremos en esta misma tesis, en numerosos espaciotiempos es imposible encontrar una representación de Fock de las relaciones de conmutación o anticonmutación canónicas que admita una implementabilidad unitaria exactamente de la dinámica dictada por las ecuaciones de Klein-Gordon o Dirac. En este tipo de escenarios, resulta inevitable modificar la noción cuántica de evolución dinámica del campo si se quiere mantener la implementabilidad unitaria. Dicha modificación se lleva a cabo en la práctica extrayendo, y tratando como una dependencia temporal explícita del campo, la parte de la dinámica clásica que obstruye la unitariedad cuántica y que no es debida a la evolución intrínseca del sistema. La filosofía subyacente a esta extracción es tal que la evolución restante, sin ser trivial, ya puede definirse a través de la acción de un operador unitario sobre los estados cuánticos. Tal vez sea importante resaltar que este proceso de búsqueda de unitariedad requiere de una caracterización muy precisa de qué parte de la dependencia temporal del campo debe ser considerada como una dependencia explícita. El tipo de excitaciones cuánticas descritas por el campo y que preservan la coherencia en el tiempo queda entonces muy bien determinado. Esta caracterización adicional de la naturaleza del campo cuántico podría llegar a ser muy útil en estudios relacionados con la información cuántica contenida en los estados del sistema al transcurrir el tiempo.

3.2. Cosmología Cuántica de Lazos homogénea

En este apartado introduciremos el formalismo de Cosmología Cuántica de Lazos (CCL) y lo aplicaremos a dos tipos de sistemas espaciotemporales que en la teoría de Einstein se corresponden con cosmologías homogéneas. El primero de ellos es el modelo paradigmático de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) plano, mínimamente acoplado a un campo escalar homogéneo sin masa como contenido material. Este espaciotiempo es uno de los más simples que describe, en la Relatividad General, la evolución de un universo homogéneo e isótropo en expansión, con curvatura espacial plana. El segundo ejemplo es el de las cosmologías compactas de tipo Bianchi I [83]. Son espaciotiempos globalmente hiperbólicos que admiten una exfoliación en hipersuperficies de Cauchy espaciales planas y compactas. La expansión cosmológica es diferente para cada una de las direcciones de estas secciones espaciales. Dentro de esta clase de espaciotiempos, centraremos nuestro análisis en aquellos que poseen, además, simetría rotacional local. Como contenido material, consideraremos de nuevo un campo escalar homogéneo sin masa, mínimamente acoplado. Estos modelos describen clásicamente universos homogéneos y anisótropos, con curvatura espacial plana, cuyos grados de libertad en vacío se corresponden con dos factores de escala que evolucionan en el tiempo [84, 85]. Además, la presencia del campo escalar permite que este sistema admita una solución isótropa no trivial en Relatividad General, que es un universo del tipo FLRW previamente mencionado (en vacío, la solución correspondiente a tomar los dos factores de escala iguales se reduce simplemente al espaciotiempo plano de Minkowski).

La CCL parte de una formulación hamiltoniana del sistema, seleccionando como variables canónicas para la geometría las mismas que emplea la Gravedad Cuántica de Lazos (GCL). En la formulación ADM para la Relatividad General, fijada una hipersuperficie de Cauchy arbitraria Σ , los grados de libertad dinámicos de la métrica (3.2) vienen dados por la métrica espacial $h_{\alpha\beta}$ inducida en Σ y por su variación a lo largo del vector normal a la

hipersuperficie. Esta variación se denomina curvatura extrínseca, y viene dada por el tensor $K_{\alpha\beta} = \mathcal{L}_n h_{\alpha\beta}/2$, siendo \mathcal{L}_n la derivada de Lie a lo largo del vector normal n^μ . Tomando como variable de configuración del sistema la métrica espacial $h_{\alpha\beta}$, la curvatura extrínseca contiene toda la información relevante sobre su momento canónicamente conjugado [2]. Basándose en ese par canónico para la geometría, si se lleva a cabo una transformación de Legendre en el lagrangiano de Hilbert-Einstein, con términos de contorno adecuados [86], se obtiene un hamiltoniano que es una combinación lineal de ligaduras de primera clase [32]. Sus coeficientes son multiplicadores de Lagrange no dinámicos, dados por la función lapso N y las tres componentes N^α del vector de desplazamiento. Cada una de estas ligaduras se anula sobre las soluciones de la Relatividad General, y las cuatro conforman los generadores de sus transformaciones de simetría fundamentales: los difeomorfismos espaciotemporales. Específicamente, la ligadura que acompaña al lapso se denomina hamiltoniana y genera las reparametrizaciones temporales, módulo un difeomorfismo espacial. Las tres ligaduras que multiplican las tres componentes del vector de desplazamiento se denominan ligaduras de momentos y generan los difeomorfismos espaciales [72].

3.2.1. Variables de Ashtekar-Barbero: holonomías y flujos

La descripción hamiltoniana de la Relatividad General puede reformularse en términos de variables canónicas geométricas que, en vacío, involucren una conexión de gauge y simplifiquen la forma funcional de las ligaduras [25]. Bajo el esquema de Dirac, es de suponer que dichas variables sean especialmente convenientes para desarrollar la correspondiente teoría cuántica. Además, la introducción de una conexión de gauge permite el uso controlado de estructuras bien conocidas en teoría de grupos, que pueden facilitar la construcción de un espacio de Hilbert bien definido. Es más, el uso de conexiones permite aplicar técnicas de cuantización no perturbativas, desarrolladas en las teorías de Yang-Mills, como ya habíamos comentado. Las nuevas variables pueden introducirse como sigue.

En primer lugar, de forma análoga a las tétradas, se definen las tríadas como una base local de vectores e_i^α de la hipersuperficie de Cauchy, en función de la cual la métrica espacial puede expresarse localmente como:

$$h_{\alpha\beta} = e_\alpha^i e_\beta^j \delta_{ij}, \quad (3.25)$$

donde las cotríadas e_α^i son las inversas de e_i^α . Al ser la delta de Kronecker la métrica euclídea en tres dimensiones, la relación (3.25) es invariante bajo la aplicación de rotaciones tridimensionales sobre la base triádica, en cada punto de las secciones de Cauchy. Por lo tanto, la utilización de las cotríadas para la descripción de la métrica espacial introduce automáticamente en la teoría una simetría adicional local bajo el grupo $SO(3)$. Se dota así al espaciotiempo de una estructura de fibrado principal de sistemas de referencia tridimensionales, con $SO(3)$ como grupo de gauge [87]. Esto quiere decir que, a cada punto de la variedad espaciotemporal, se le asigna una copia del grupo de rotaciones tridimensionales. En este sentido, los índices latinos del medio del alfabeto pueden denotar también las componentes en una base del álgebra de Lie tridimensional $\mathfrak{so}(3)$. Una sección del fibrado (que no debe confundirse con una sección de Cauchy) es una asignación localmente suave de un elemento del grupo a cada punto de la variedad. Distintas elecciones de tríadas, relacionadas entre sí

punto a punto por transformaciones de gauge, pueden entenderse entonces como distintas secciones del fibrado. Con el fin de definir una noción de horizontalidad entre las distintas fibras, así como el transporte paralelo asociado, se introduce una conexión de gauge caracterizada por una uno-forma cuyas componentes espaciales toman valores en el álgebra de Lie tridimensional $\mathfrak{so}(3)$. Nos referiremos a dicha uno-forma de la conexión con el símbolo Γ_α^i . De todas las conexiones posibles, se elige por conveniencia aquella que está unívocamente determinada por la tríada densitizada a través de la «condición de metricidad»:

$${}^{(3)}\nabla_\beta E_i^\alpha + \epsilon_{ij}{}^k \Gamma_\beta^j E_k^\alpha = 0, \quad (3.26)$$

donde $E_i^\alpha = \sqrt{h} e_i^\alpha$ es la tríada densitizada, ϵ_{ijk} es el símbolo de Levi-Civita totalmente antisimétrico (sus índices se suben o bajan utilizando la delta de Kronecker), y ${}^{(3)}\nabla_\beta$ denota la derivada covariante asociada a la conexión de Levi-Civita compatible con $h_{\alpha\beta}$. Además, teniendo en cuenta que la curvatura extrínseca en forma triádica:

$$K_\alpha^i = K_{\alpha\beta} e_j^\beta \delta^{ij}, \quad (3.27)$$

puede entenderse como un vector de $\mathfrak{so}(3)$ con respecto a las transformaciones de gauge, así como una uno-forma en las secciones espaciales de Cauchy, es legítimo considerar en lugar de Γ_α^i la llamada conexión de Ashtekar-Barbero [88]:

$$A_\alpha^i = \Gamma_\alpha^i + \gamma K_\alpha^i. \quad (3.28)$$

En su definición γ es un parámetro real no nulo, de valor arbitrario, que recibe el nombre de parámetro de Immirzi [89]. El par formado por esta conexión y la tríada densitizada, denominadas variables de Ashtekar-Barbero, resulta ser canónico para la Relatividad General:

$$\{A_\alpha^i(\vec{x}), E_j^\beta(\vec{y})\} = 8\pi G \gamma \delta_\alpha^\beta \delta_j^i \delta^3(\vec{x} - \vec{y}), \quad (3.29)$$

donde $\delta^3(\vec{x} - \vec{y})$ es la delta de Dirac tridimensional. La GCL parte de estas variables para la construcción de una teoría cuántica de gravedad. En realidad, para permitir posibles acoplos al campo gravitatorio de materia con espín semientero, se considera A_α^i como una conexión que toma valores en el álgebra de Lie tridimensional $\mathfrak{su}(2)$. Es decir, se reemplaza en la práctica el grupo de gauge $SO(3)$ del fibrado principal por su doble recubridor $SU(2)$. En términos de las variables de Ashtekar-Barbero, las ligaduras hamiltoniana \mathcal{H} y de momentos \mathcal{H}_α de la Relatividad General en vacío adquieren la forma [28]:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{16\pi G \sqrt{h}} [\epsilon^{ij}{}^k F_{\alpha\beta}^k - (1 + \gamma^2)(K_\alpha^i K_\beta^j - K_\beta^i K_\alpha^j)] E_i^\alpha E_j^\beta, \quad (3.30)$$

$$\mathcal{H}_\alpha = \frac{1}{8\pi G \gamma} F_{\alpha\beta}^i E_i^\beta, \quad (3.31)$$

donde $F_{\alpha\beta}^i$ es la curvatura de la conexión:

$$F_{\alpha\beta}^i = \partial_\alpha A_\beta^i - \partial_\beta A_\alpha^i + \epsilon^i{}_{jk} A_\alpha^j A_\beta^k. \quad (3.32)$$

Por último, la introducción de una simetría de gauge adicional en la teoría se traduce en la aparición de tres ligaduras que generan las rotaciones de espín $SU(2)$:

$$\mathcal{G}_i = \frac{1}{8\pi G\gamma} [\partial_\alpha E_i^\alpha + \epsilon_{ij}{}^k A_\alpha^j E_k^\alpha]. \quad (3.33)$$

Debido a su forma de derivada covariante del campo triádico respecto a la conexión A_α^i [87], contraída en sus índices espaciales, estas tres ligaduras recuerdan a una divergencia y reciben el calificativo «de Gauss».

Desde un punto de vista sistemático, el primer paso en la construcción de una teoría cuántica de gravedad (en vacío) que parta del formalismo hamiltoniano introducido, sería encontrar una representación mediante operadores sobre un espacio de Hilbert de una álgebra que capture la información del par canónico (3.29). Ahora bien, recordemos que la simetría de gauge $SU(2)$ introducida es en cierta forma auxiliar. Por ello, la formulación de la teoría cuántica ha de ser tal que los resultados físicos estén siempre descritos por cantidades que no dependan de la elección del gauge. Con este fin, conviene que el álgebra de variables clásicas que se va a representar cuánticamente varíe lo menos posible bajo las transformaciones $SU(2)$ que cambian las secciones del fibrado. Una construcción bien conocida en las teorías de Yang-Mills, que captura la información de la conexión elegida minimizando la dependencia en la elección del gauge, es la holonomía. Dada una curva $\tilde{\gamma}$ en la hipersuperficie Σ , la holonomía de la conexión A_α^i a lo largo de ella se define como:

$$h_{\tilde{\gamma}} = \mathcal{P} \exp \int_{\tilde{\gamma}} dx^\alpha A_\alpha^i \tau_i, \quad (3.34)$$

donde \mathcal{P} representa la ordenación en el camino de la integral involucrada, y τ_i es una base del álgebra de Lie $\mathfrak{su}(2)$. Las holonomías determinan el transporte paralelo definido por la conexión de Ashtekar-Barbero entre las fibras $SU(2)$ que se asignan a cada punto de la variedad. Dada una sección cualquiera del fibrado principal y su correspondiente asignación de la curva $\tilde{\gamma}$ en las fibras, la holonomía dicta cómo debe variar dicha curva entre ellas para que su vector tangente se transporte paralelamente [87]. Bajo un cambio de sección, la holonomía únicamente se ve afectada por la transformación de gauge evaluada en los extremos de la curva. Por otra parte, es claro que su construcción no depende en absoluto de ninguna estructura geométrica de fondo fija, ni de la elección del sistema de coordenadas. Todas estas propiedades hacen de las holonomías unas variables muy adecuadas para ser representadas cuánticamente. Así pues, las holonomías contienen la información invariante de gauge relevante físicamente acerca del espacio de configuración. En GCL, se consideran estas estructuras a lo largo de aristas e , analíticas a trozos, definidas como embebimientos del intervalo $[0, 1]$ en la hipersuperficie de Cauchy [26]. Las variables que representen el resto del espacio de fases deben contener la tríada densitizada E_i^α . Al ser una densidad vectorial en Σ , puede integrarse su dual de Hodge sobre superficies bidimensionales S . El resultado es un flujo través de ellas, que de nuevo no depende de ninguna estructura geométrica de fondo adicional, ni de la elección de coordenadas:

$$E(S, f) = \int_S dx^\beta dx^\delta f^i E_i^\alpha \epsilon_{\alpha\beta\delta}, \quad (3.35)$$

donde f^i es una función que toma valores en el álgebra $\mathfrak{su}(2)$, a la que se puede dotar de un carácter vectorial con respecto a las transformaciones de gauge. El espacio de holonomías h_e y flujos $E(S, f)$ forma una álgebra bajo corchetes de Poisson que ya no posee las divergencias distribucionales de las relaciones canónicas (3.29). Dicha álgebra es la elegida en GCL para representar cuánticamente las relaciones de conmutación canónicas de la Relatividad General, como primera etapa en la construcción de una teoría de gravedad cuántica.

3.2.2. Cosmología homogénea: cuantización polimérica

A continuación, procederemos a resumir la metodología utilizada en CCL para la cuantización de cosmologías de FLRW planas y de tipo Bianchi I con simetría rotacional local, siguiendo una filosofía inspirada en GCL. En primer lugar, las ligaduras de momentos y las de Gauss son, en la práctica, triviales para este tipo de espaciotiempos. Podemos fijar el sistema de referencia para la descripción de la métrica espacial $h_{\alpha\beta}$, así como la dependencia interna, en sus índices $\mathfrak{su}(2)$, de las tríadas que la determinan a través de (3.25), y así simplificar el estudio. Elegiremos coordenadas espaciales adaptadas a la homogeneidad del espacio y tríadas diagonales, proporcionales a la delta de Kronecker δ_i^α , homogéneas y que anulan la conexión Γ_α^i . Supondremos también que las hipersuperficies espaciales que exfolian las cosmologías correspondientes son compactas, con topología de tres-toro (T^3). Esta consideración garantiza que las integraciones espaciales no conduzcan necesariamente a divergencias, que no obstante son tratables en los casos no compactos si se introducen estructuras fiduciales [35, 51]. Además, la restricción del estudio a hipersuperficies compactas resulta muy conveniente si estas cosmologías constituyen el sector homogéneo de otros escenarios más generales. Esto se debe a que la aplicación de la estrategia híbrida para la cuantización de tales escenarios utiliza técnicas de TCC cuya solidez está rigurosamente probada para secciones de Cauchy compactas.

Teniendo en cuenta todas estas consideraciones, las cosmologías homogéneas e isotrópicas de tipo FLRW planas pueden describirse mediante unas variables de Ashtekar-Barbero que adquieren la forma:

$$A_\alpha^i = l_0^{-1} c \delta_\alpha^i, \quad E_i^\alpha = l_0^{-2} p \delta_i^\alpha, \quad \{c, p\} = \frac{8\pi G \gamma}{3}, \quad (3.36)$$

donde l_0 es el periodo de compactificación del T^3 en cada una de las direcciones ortogonales adaptadas a la homogeneidad. Las variables canónicas $p(t)$ y $c(t)$ pueden relacionarse (sobre soluciones) con el factor de escala $a(t)$ típicamente utilizado en cosmología y con su derivada temporal $\dot{a}(t)$, para cualquier función global del tiempo t , a través de las relaciones:

$$|c| = \gamma l_0 \left| \frac{\dot{a}}{N} \right|, \quad |p| = l_0^2 a^2. \quad (3.37)$$

Se aprecia que el sector geométrico del espacio de fases es de dimensión finita, bidimensional, hecho que facilitará su descripción cuántica. Inspirándose en la metodología propia de GCL, se buscan a continuación holonomías que describan el grado de libertad c que caracteriza la conexión. Gracias a las simetrías de las hipersuperficies espaciales, es suficiente considerar para su definición aristas rectas e_α de longitud $l_0 \mu$, con $\mu \in \mathbb{R}$, que tomamos en las direcciones

ortogonales adaptadas a la homogeneidad [90]. Las holonomías de la conexión A_α^i a lo largo de dichas aristas adoptan la simple expresión:

$$h_{e_\alpha}(\mu) = \cos\left(\frac{c\mu}{2}\right) I + 2 \operatorname{sen}\left(\frac{c\mu}{2}\right) \delta_\alpha^i \tau_i, \quad (3.38)$$

donde I es la matriz identidad 2×2 y hemos tomado por sencillez la representación fundamental de $\mathfrak{su}(2)$, en la que cada uno de los componentes de su base τ_i puede elegirse como cada una de las matrices de Pauli multiplicada por $-i/2$. Asimismo, las simetrías espaciales permiten considerar únicamente flujos de la tríada densitizada a través de cuadrados en dos de las direcciones adaptadas a la homogeneidad. Dichos flujos quedan entonces completamente determinados por la variable p , que pasa a describir el sector geométrico del espacio de «momentos». Las holonomías, o equivalentemente sus elementos de matriz, describen el resto del sector geométrico del espacio de fases. Más concretamente, el álgebra de configuración está formada por las funciones complejas, continuas y acotadas que dependen de la conexión a través de combinaciones lineales finitas de las exponenciales $\mathcal{N}_\mu(c) = \exp(i\mu c/2)$, con $\mu \in \mathbb{R}$. Por otra parte, recordemos que como contenido material de la cosmología de FLRW, consideramos un campo escalar homogéneo ϕ mínimamente acoplado. Su momento canónicamente conjugado se llamará p_ϕ . El álgebra que queremos representar cuánticamente en CCL homogénea e isótropa viene entonces dada por:

$$\{\mathcal{N}_\mu(c), p\} = i \frac{4\pi G\gamma}{3} \mu \mathcal{N}_\mu(c), \quad \{\phi, p_\phi\} = 1. \quad (3.39)$$

Por otra parte, la descripción del espacio de fases de las cosmologías de tipo Bianchi I con simetría rotacional local, en términos de las variables de Ashtekar-Barbero, sigue unas líneas argumentales similares. En primer lugar, las variables adoptan las expresiones (aquí no ha de entenderse la suma sobre índices repetidos):

$$A_\alpha^i = l_0^{-1} c_\alpha \delta_\alpha^i, \quad E_i^\alpha = l_0^{-2} p_\alpha \delta_i^\alpha, \quad \{c_1, p_1\} = 8\pi G\gamma, \quad \{c_\perp, p_\perp\} = 4\pi G\gamma, \quad (3.40)$$

donde usamos la notación $c_2 = c_3 = c_\perp$, $p_2 = p_3 = p_\perp$, puesto que estamos asumiendo simetría rotacional local de manera que dos de las direcciones espaciales tienen el mismo comportamiento geométrico. El resto de corchetes de Poisson son nulos, y de nuevo l_0 es el periodo de compactificación del T^3 en cada una de las direcciones ortogonales adaptadas a la homogeneidad, que tomamos idéntico en los tres casos. Las variables canónicas $c_1(t), p_1(t), c_\perp(t)$ y $p_\perp(t)$ pueden relacionarse con los factores de escala direccionales $a_1(t), a_\perp(t)$ y sus derivadas temporales $\dot{a}_1(t), \dot{a}_\perp(t)$ como sigue:

$$|c_1| = \gamma l_0 \left| \frac{\dot{a}_1}{N} \right|, \quad |p_1| = l_0^2 a_\perp^2, \quad |c_\perp| = \gamma l_0 \left| \frac{\dot{a}_\perp}{N} \right|, \quad |p_\perp| = l_0^2 a_1 a_\perp. \quad (3.41)$$

El sector geométrico del espacio de fases vuelve a ser de dimensión finita, igual a cuatro ahora. De nuevo, la homogeneidad de las hipersuperficies espaciales permite restringir toda la atención a holonomías a lo largo de aristas e_α en las tres direcciones ortogonales adaptadas a las isometrías, esta vez de longitudes $l_0\mu_1$ ó $l_0\mu_\perp$, con $\mu_1, \mu_\perp \in \mathbb{R}$, según la dirección tomada. Su expresión explícita es:

$$h_{e_1}(\mu_1) = \cos\left(\frac{c_1\mu_1}{2}\right) I + 2 \operatorname{sen}\left(\frac{c_1\mu_1}{2}\right) \tau_1, \quad (3.42)$$

$$h_{e_m}(\mu_\perp) = \cos\left(\frac{c_\perp\mu_\perp}{2}\right) I + 2 \operatorname{sen}\left(\frac{c_\perp\mu_\perp}{2}\right) \tau_m, \quad (3.43)$$

donde $m = 2, 3$. La homogeneidad permite también considerar únicamente flujos de tríadas densitizadas a través de rectángulos ortogonales a las direcciones adaptadas a la simetría. De nuevo, estos flujos quedarán totalmente caracterizados por las variables p_1 y p_\perp en las direcciones correspondientes. El espacio de «momentos» geométrico queda entonces determinado por ellas. Por otra parte, el álgebra de configuración la formará el producto directo de las dos álgebras de funciones que dependen respectivamente de la conexión a través de combinaciones lineales finitas de las dos exponenciales complejas $\mathcal{N}_{\mu_1}(c_1) = \exp(i\mu_1 c_1/2)$ y $\mathcal{N}_{\mu_\perp}(c_\perp) = \exp(i\mu_\perp c_\perp/2)$, con $\mu_1, \mu_\perp \in \mathbb{R}$. Teniendo en cuenta el acoplo al campo escalar homogéneo ϕ , el álgebra de variables clásicas que se desea representar cuánticamente en la cosmología de Bianchi I viene dada por:

$$\{\mathcal{N}_{\mu_1}(c_1), p_1\} = i4\pi G\gamma\mu_\alpha \mathcal{N}_{\mu_1}(c_1), \quad \{\mathcal{N}_{\mu_\perp}(c_\perp), p_\perp\} = i2\pi G\gamma\mu_\perp \mathcal{N}_{\mu_\perp}(c_\perp) \quad (3.44)$$

y de nuevo $\{\phi, p_\phi\} = 1$.

En CCL, el proceso de representación cuántica de esta álgebra sigue la filosofía de su análogo en GCL. Allí se describe el espacio de configuración geométrico mediante las llamadas funciones cilíndricas. Se trata de funciones que dependen de la conexión de Ashtekar-Barbero a través de holonomías sobre grafos formados por un número finito de aristas. El álgebra de funciones cilíndricas se completa con respecto a la norma del supremo, obteniéndose una álgebra C^* conmutativa con elemento identidad. La teoría de Gel'fand garantiza que dicha álgebra es isomorfa a otra de funciones continuas sobre un cierto espacio compacto, llamado el espectro de Gel'fand, que contiene las conexiones suaves como un subespacio denso. Además, queda también garantizado que el espacio de Hilbert para la representación del álgebra de holonomías y flujos en GCL no es sino el espacio de funciones de cuadrado integrable sobre el espectro de Gel'fand con respecto a una cierta medida de integración [26, 90].

En los escenarios homogéneos que atañen a esta tesis, si se completa el sector geométrico del espacio de configuración con respecto a la norma del supremo, se obtiene el álgebra C^* de funciones cuasi periódicas sobre \mathbb{R} para el caso de FLRW, o dos copias de ella en el caso de Bianchi I. Basta, por tanto, con restringir el análisis al primero de estos espaciotiempos. Las exponenciales complejas que describen las holonomías, $\mathcal{N}_\mu : \mathbb{R} \rightarrow S^1$, donde S^1 es la circunferencia de radio unidad, forman una base densa en el álgebra considerada [90]. Su espectro de Gel'fand es la compactificación de Bohr de la recta real \mathbb{R}_B , que contiene a \mathbb{R} como subespacio denso [91]. El espacio \mathbb{R}_B puede caracterizarse como el conjunto de todos los homomorfismos entre el grupo aditivo de los números reales y el grupo multiplicativo de los números complejos de módulo unidad. Es decir, todo $x \in \mathbb{R}_B$ es una aplicación $x : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ tal que:

$$x(0) = 1, \quad x(\mu + \mu') = x(\mu)x(\mu'), \quad \forall \mu, \mu' \in \mathbb{R}. \quad (3.45)$$

A este espacio \mathbb{R}_B se le puede dotar de una estructura de grupo topológico compacto [90]. Todas las funciones $F_\mu : \mathbb{R}_B \rightarrow S^1$ tales que $F_\mu(x) = x(\mu)$, para cualquier $\mu \in \mathbb{R}$, son continuas con respecto a su topología. Además, al ser un grupo compacto, admite una única medida de Haar M_H , que es invariante bajo la acción del mismo. El espacio de Hilbert para la representación del álgebra de holonomías y flujos en CCL homogénea e isótropa es entonces $L^2(\mathbb{R}_B, M_H)$. El conjunto de funciones $\{F_\mu, \mu \in \mathbb{R}\}$ forma una base ortonormal del mismo, de modo que el espacio de Hilbert no es separable. Utilizando la notación de Dirac,

designaremos dicha base de la forma $\{|\mu\rangle, \mu \in \mathbb{R}\}$, donde $\langle\mu|\mu'\rangle = \delta_{\mu\mu'}$ con el producto interno en $L^2(\mathbb{R}_B, M_H)$. La representación cuántica del álgebra (3.39) para el sector gravitatorio del espacio de fases es [90]:

$$\hat{\mathcal{N}}_{\mu'}|\mu\rangle = |\mu + \mu'\rangle, \quad \hat{p}|\mu\rangle = \frac{4\pi G\gamma}{3}\mu|\mu\rangle. \quad (3.46)$$

Siguiendo un procedimiento totalmente análogo, para la cosmología de Bianchi I con simetría rotacional local se obtiene un espacio de Hilbert que es el producto tensorial de dos copias de $L^2(\mathbb{R}_B, M_H)$. Empleando otra vez para cada una de ellas una base ortonormal de funciones de evaluación en un punto real determinado, la representación cuántica del álgebra (3.44) que describe el sector gravitatorio del espacio de fases viene dada por las actuaciones:

$$\hat{\mathcal{N}}_{\mu'_1}|\mu_1\rangle = |\mu_1 + \mu'_1\rangle, \quad \hat{p}_1|\mu_1\rangle = 4\pi G\gamma\mu_1|\mu_1\rangle, \quad (3.47)$$

$$\hat{\mathcal{N}}_{\mu'_\perp}|\mu_\perp\rangle = |\mu_\perp + \mu'_\perp\rangle, \quad \hat{p}_\perp|\mu_\perp\rangle = 2\pi G\gamma\mu_\perp|\mu_\perp\rangle. \quad (3.48)$$

Este tipo de representaciones reciben el calificativo de «poliméricas», y sus espacios de Hilbert son isomorfos a los de funciones sobre \mathbb{R} que tienen cuadrado sumable con respecto a la medida discreta, como resultado evidente de nuestra discusión. Haciendo uso de este isomorfismo, es claro que los estados de los espacios de Hilbert poliméricos han de tener soporte únicamente en un número contable de puntos, siendo así los análogos directos de las funciones cilíndricas de GCL. Asimismo, hacemos notar que la representación de los operadores básicos que describen las holonomías no es continua. Como consecuencia, el operador que representaría la conexión de Ashtekar-Barbero no está bien definido, hecho que ocurre de forma paralela a lo que acaece en GCL.

En este punto de la exposición, quizá resulte ilustrativo apuntar que la construcción de $L^2(\mathbb{R}_B, M_H)$ como espacio de Hilbert depende fuertemente de la elección de una medida tal como la de Haar. De hecho, es posible encontrar otra medida en \mathbb{R}_B que dé lugar a una representación de Schrödinger estándar para las conexiones y tríadas [90]. Dicha representación, a diferencia de la polimérica, es continua, y en ella se basan las conocidas cuantizaciones de tipo Wheeler-DeWitt para estos sistemas cosmológicos si se desea conservar la estructura de espacios de Hilbert de la Mecánica Cuántica [29]. Sin embargo, debido al carácter discreto de M_H , ambas medidas y sus correspondientes teorías cuánticas son inequivalentes. Por tanto, no es de extrañar que la CCL pueda aportar predicciones teóricas radicalmente diferentes acerca de los regímenes cuánticos de estos espaciotiempos cosmológicos.

Finalmente, en ambas cosmologías se elige una representación de Schrödinger continua estándar para el álgebra del sector material del espacio de fases, es decir del campo escalar y su momento conjugado. Así, el espacio de Hilbert del sector material suele tomarse como $L^2(\mathbb{R}, d\phi)$, donde la representación del momento actúa por derivación: $\hat{p}_\phi = -i\partial_\phi$.

3.2.3. Cosmología homogénea: ligadura hamiltoniana

Los espacios de Hilbert construidos a partir del producto tensorial de los espacios poliméricos y $L^2(\mathbb{R}, d\phi)$ no contienen necesariamente los estados físicos de la teoría cuántica, de acuerdo con el esquema de Dirac [32]. Por este motivo reciben el calificativo de «cinemáticos». El siguiente paso en la cuantización de estos sistemas cosmológicos es, por consiguiente,

proporcionar una representación de sus ligaduras como operadores sobre dichos espacios de Hilbert cinemáticos. Ahora bien, la única ligadura que se encuentra presente de forma no trivial en los modelos de FLRW y de Bianchi I estudiados es la hamiltoniana. Teniendo en cuenta que la función lapso es homogénea, se puede considerar su versión integrada en las tres direcciones espaciales, que adquiere entonces la expresión:

$$C = l_0^3 \frac{p_\phi^2}{2\sqrt{\hbar}} - \frac{l_0^3}{16\pi G\gamma^2\sqrt{\hbar}} E_i^\alpha E_j^\beta \epsilon^{ij}{}_k F_{\alpha\beta}^k. \quad (3.49)$$

Si se particulariza a la cosmología homogénea e isotrópica considerada, se obtiene la ligadura hamiltoniana C_{FLRW} :

$$|p|^{3/2} C_{\text{FLRW}} = \frac{p_\phi^2}{2} - \frac{3}{8\pi G\gamma^2} c^2 p^2, \quad (3.50)$$

mientras que la correspondiente C_{BI} para el modelo de Bianchi I es:

$$|p_1 p_\perp^2|^{1/2} C_{\text{BI}} = \frac{p_\phi^2}{2} - \frac{1}{8\pi G\gamma^2} [2c_1 p_1 c_\perp p_\perp + (c_\perp p_\perp)^2]. \quad (3.51)$$

La primera obstrucción que se muestra evidente en la cuantización polimérica de estas ligaduras es la inexistencia de un operador que represente la conexión. No obstante, dicha dificultad puede solventarse si se tiene en cuenta la siguiente identidad clásica, válida en ambas cosmologías:

$$F_{\alpha\beta}^i = -2 \lim_{A_\square \rightarrow 0} \text{tr} \left(\frac{h_{\square\alpha\beta}}{A_\square} \tau^i \right), \quad \alpha \neq \beta, \quad (3.52)$$

donde tr denota la traza y $h_{\square\alpha\beta}$ es la holonomía a lo largo de un cierto circuito cerrado rectangular en el plano marcado por las dos direcciones ortogonales α - β , que encierra un área coordenada A_\square . Para la cosmología homogénea e isotrópica de tipo FLRW, dicha holonomía puede escribirse como:

$$h_{\square\alpha\beta}^{\text{FLRW}} = h_{e_\alpha}(\mu) h_{e_\beta}(\mu) h_{e_\alpha}^{-1}(\mu) h_{e_\beta}^{-1}(\mu), \quad (3.53)$$

y el área coordenada que encierra es $A_\square^{\text{FLRW}} = l_0^2 \mu^2$. Por otra parte, para el espaciotiempo anisótropo de Bianchi I se tiene la holonomía:

$$h_{\square\alpha\beta}^{\text{BI}} = h_{e_\alpha}(\mu_\alpha) h_{e_\beta}(\mu_\beta) h_{e_\alpha}^{-1}(\mu_\alpha) h_{e_\beta}^{-1}(\mu_\beta), \quad (3.54)$$

donde $\mu_2 = \mu_3 = \mu_\perp$, siendo el área coordenada encerrada en este caso $A_\square^{\text{BI}} = l_0^2 \mu_\alpha \mu_\beta$. Si se representan poliméricamente dichas holonomías, el límite dado por la expresión (3.52) no está bien definido, al no estarlo el operador de conexión. Por ello, en CCL no se hace tender el área coordenada encerrada a cero, sino que se postula la existencia de un tope inferior. La arbitrariedad inherente a la elección de este tope se fija apelando a la GCL, donde existe un autovalor mínimo no nulo Δ_g del operador de área geométrica. Siguiendo una filosofía paralela, en CCL se prescribe que este valor coincida con el del área geométrica asociada del caso límite considerado. Si se tienen en cuenta las relaciones clásicas (3.37) y (3.41), así como

las expresiones del área coordinada encerrada por los circuitos de holonomías, se concluye que las longitudes de las aristas que los forman están determinadas por el requisito de área geométrica mínima [48, 51]. Llamando $\bar{\mu}$ a esta longitud para las cosmologías de FLRW, y $\bar{\mu}_1$ y $\bar{\mu}_2 = \bar{\mu}_3 = \bar{\mu}_\perp$ a las longitudes correspondientes en el caso de Bianchi I, tenemos que:

$$\bar{\mu} = \sqrt{\frac{\Delta_g}{|p|}}, \quad \bar{\mu}_1 = \frac{\sqrt{\Delta_g |p_1|}}{p_\perp}, \quad \bar{\mu}_\perp = \sqrt{\frac{\Delta_g}{|p_1|}} \text{sign}(p_1) \quad (3.55)$$

Existen otras prescripciones posibles en el caso de Bianchi I [49, 92, 93], aunque apenas son consideradas en la actualidad bajo argumentaciones acerca de la limitada validez física de los resultados que se derivan de ellas (por su dependencia en la elección de celda fiducial cuando la topología no es compacta).

Una vez fijada la longitud de las aristas para las holonomías en la cosmología de FLRW, la expresión clásica que se quiere representar cuánticamente sobre el espacio de Hilbert polimérico es (3.52) tomándose el límite en que $A_\square^{FLRW} \rightarrow l_0^2 \bar{\mu}^2$. En la práctica, esta prescripción se traduce en sustituir la variable c por $\text{sen}(\bar{\mu}c)/\bar{\mu}$ en la expresión clásica de la ligadura hamiltoniana C_{FLRW} , antes de proceder a su representación cuántica. Esto puede comprobarse fácilmente si se hace uso de la representación fundamental escogida para $\mathfrak{su}(2)$. La dependencia de esta ligadura en la conexión queda entonces descrita por las exponenciales complejas $\mathcal{N}_{\pm 2\bar{\mu}}(c)$, que en particular dependen de p a través de $\bar{\mu}$. Se sigue que su representación en el espacio de Hilbert polimérico ha de ser dirimida, en última instancia, mediante una definición, ya que la dependencia clásica de $\mathcal{N}_{\pm 2\bar{\mu}}(c)$ en c y p hace imposible una construcción totalmente libre de ambigüedades en la ordenación de factores a partir de los operadores básicos $\hat{\mathcal{N}}_\mu$ y \hat{p} que describen el espacio de fases. Para esta definición, resulta conveniente introducir del operador (construido a través del teorema espectral [94]):

$$\hat{v} = \frac{\widehat{\text{sign}(p)} |p|^{3/2}}{2\pi G\gamma \sqrt{\Delta_g}}, \quad \hat{v}|\mu\rangle = \frac{\text{sign}[p(\mu)] |p(\mu)|^{3/2}}{2\pi G\gamma \sqrt{\Delta_g}} |\mu\rangle, \quad (3.56)$$

donde $p(\mu)$ es el autovalor de \hat{p} correspondiente a su autoestado $|\mu\rangle$, dado en (3.46) y $\widehat{\text{sign}}$ es el operador signo. La contrapartida clásica directa de este operador es proporcional al volumen físico del universo de FLRW plano y compacto. Además, tiene un corchete de Poisson igual a la unidad con $\bar{\mu}c/2$. Si se reetiqueta la base ortonormal $\{|\mu\rangle, \mu \in \mathbb{R}\}$ a través de los autovalores v de \hat{v} , el operador $\hat{\mathcal{N}}_{\pm\bar{\mu}}$ se define entonces de forma tal que produzca en ellos traslaciones constantes [48]:

$$\hat{\mathcal{N}}_{\pm\bar{\mu}}|v\rangle = |v \pm 1\rangle, \quad (3.57)$$

siendo $\hat{\mathcal{N}}_{\pm 2\bar{\mu}}$ su cuadrado.

Se procede de forma análoga para representar cuánticamente las conexiones en la ligadura hamiltoniana de Bianchi I con simetría rotacional local. En este caso, tomar el límite en el que $A_\square^{BI} \rightarrow l_0^2 \bar{\mu}_\alpha \bar{\mu}_\beta$ en la expresión clásica (3.52) es equivalente a sustituir en C_{BI} cada conexión c_1 y c_\perp por $\text{sen}(\bar{\mu}_1 c_1)/\bar{\mu}_1$ y $\text{sen}(\bar{\mu}_\perp c_\perp)/\bar{\mu}_\perp$, respectivamente. De nuevo, la ligadura pasa a depender de la conexión a través de las exponenciales complejas $\mathcal{N}_{\pm 2\bar{\mu}_1}(c_1)$ y $\mathcal{N}_{\pm 2\bar{\mu}_\perp}(c_\perp)$, que tienen a su vez una dependencia en las variables triádicas p_1 y p_\perp . El operador que represente

a estas exponenciales ha de definirse, ya que dicha dependencia impide una construcción genuinamente libre de ambigüedades a partir de los operadores básicos $\hat{\mathcal{N}}_{\mu_1}$, $\hat{\mathcal{N}}_{\mu_\perp}$, \hat{p}_1 y \hat{p}_\perp . Para ello, conviene introducir los operadores (construidos de nuevo a través del teorema espectral):

$$\hat{v} = \frac{\widehat{\text{sign}(p_1)} \sqrt{|p_1|} \otimes \hat{p}_\perp}{2\pi G\gamma \sqrt{\Delta_g}}, \quad \hat{v}|\mu_1, \mu_\perp\rangle = \text{sign}[p_1(\mu_1)] \frac{\sqrt{|p_1(\mu_1)|} |p_\perp(\mu_\perp)|}{2\pi G\gamma \sqrt{\Delta_g}} |\mu_1, \mu_\perp\rangle, \quad (3.58)$$

$$\hat{\lambda}_1 = \frac{\widehat{\text{sign}(p_1)} \sqrt{|p_1|}}{(4\pi G\gamma \sqrt{\Delta_g})^{1/3}}, \quad \hat{\lambda}_1|\mu_1, \mu_\perp\rangle = \text{sign}[p_1(\mu_1)] \frac{\sqrt{|p_1(\mu_1)|}}{(4\pi G\gamma \sqrt{\Delta_g})^{1/3}} |\mu_1, \mu_\perp\rangle, \quad (3.59)$$

donde $p_1(\mu_1)$ y $p_\perp(\mu_\perp)$ son, respectivamente, los autovalores de \hat{p}_1 y \hat{p}_\perp correspondientes a los estados $|\mu_1\rangle$ y $|\mu_\perp\rangle$, dados en (3.47)-(3.48). Asimismo, llamamos $|\mu_1, \mu_\perp\rangle = |\mu_1\rangle \otimes |\mu_\perp\rangle$. La contrapartida clásica del operador \hat{v} vuelve a ser proporcional al volumen del universo de Bianchi I compacto con simetría rotacional local. Además, se caracteriza por tener corchetes de Poisson igual a la unidad, tanto con $\bar{\mu}_1 c_1/2$ como con $\bar{\mu}_\perp c_\perp/2$. Por otra parte, la contrapartida clásica de λ_1 es capaz de medir (cuando se compara con el volumen) las anisotropías del espaciotiempo. Si se reetiqueta la base ortonormal $\{|\mu_1, \mu_\perp\rangle, \mu_1, \mu_\perp \in \mathbb{R}\}$ mediante los autovalores (v, λ_1) de \hat{v} y $\hat{\lambda}_1$ los operadores $\hat{\mathcal{N}}_{\pm\bar{\mu}_1}$ y $\hat{\mathcal{N}}_{\pm\bar{\mu}_\perp}$ se definen como:

$$\hat{\mathcal{N}}_{\pm\bar{\mu}_1}|v, \lambda_1\rangle = |v \pm 1, \lambda_1 \pm \frac{\lambda_1}{v}\rangle, \quad \hat{\mathcal{N}}_{\pm\bar{\mu}_\perp}|v, \lambda_1\rangle = |v \pm 1, \lambda_1\rangle. \quad (3.60)$$

Los operadores $\hat{\mathcal{N}}_{2\pm\bar{\mu}_1}$ y $\hat{\mathcal{N}}_{2\pm\bar{\mu}_\perp}$ son sus respectivos cuadrados. Hacemos notar que la actuación del operador $\hat{\mathcal{N}}_{\pm 2\bar{\mu}_1}$, que depende del estado considerado, en particular no está bien definida para el estado con $v = 0$. Sin embargo, como se verá a continuación, una simetrización correcta en la representación cuántica de la ligadura hamiltoniana permite desacoplar del espacio de Hilbert cinemático dicho estado problemático [50, 95].

El esquema de prescripciones que en CCL da lugar a toda la construcción expuesta de representación cuántica de la conexión en las ligaduras homogéneas recibe el nombre de «dinámica mejorada». No obstante, estos postulados solos no bastan para completar la representación de C_{FLRW} y C_{BI} . La presencia del autovalor cero en el espectro puntual de los operadores \hat{p} , \hat{p}_1 y \hat{p}_\perp genera problemas añadidos al ya comentado. En efecto, ambas ligaduras dependen del inverso de las funciones triádicas a través del determinante de la métrica espacial. Por tanto, su representación cuántica en los espacios de Hilbert cinemáticos no puede construirse utilizando el teorema espectral. Esta dificultad puede solventarse de nuevo apelando a las siguientes identidades clásicas, que también se utilizan, de forma más general, en GCL [96]. La expresión:

$$\frac{\text{sign}(p)}{|p|^{1/2}} = \frac{|p|^{1/2}}{2\pi G\gamma \sqrt{\Delta_g}} \text{tr} \left(\sum_{i,\alpha} \delta_{i\alpha} \tau_i h_{e_\alpha}(\bar{\mu}) \{h_{e_\alpha}^{-1}(\bar{\mu}), |p|^{1/2}\} \right), \quad (3.61)$$

es válida para el universo de FLRW. En el modelo de Bianchi I con simetría rotacional local

se cumplen, por otra parte, las identidades:

$$\frac{\text{sign}(p_1)}{|p_1|^{1/4}} = \frac{p_\perp}{\pi G \gamma \sqrt{\Delta_g}} \text{tr} \left(\tau_1 h_{e_1}(\bar{\mu}_1) \{h_{e_1}^{-1}(\bar{\mu}_1), |p_1|^{1/4}\} \right), \quad (3.62)$$

$$\frac{\text{sign}(p_\perp)}{|p_\perp|^{1/2}} = \frac{\sqrt{|p_1|} \text{sign}(p_1)}{\pi G \gamma \sqrt{\Delta_g}} \text{tr} \left(\tau_2 h_{e_2}(\bar{\mu}_\perp) \{h_{e_2}^{-1}(\bar{\mu}_\perp), |p_\perp|^{1/2}\} \right). \quad (3.63)$$

De esta forma, los operadores cuánticos que describen estas potencias inversas de las tríadas se definen representando poliméricamente, dentro del esquema de la dinámica mejorada, las variables del lado derecho de las igualdades (3.61)-(3.63). En particular, los corchetes de Poisson se representan como $-i$ veces los conmutadores de los operadores correspondientes.

Si se sigue todo el esquema de cuantización presentado, los operadores que se obtienen en CCL para las ligaduras hamiltonianas homogéneas C_{FLRW} y C_{BI} sobre los correspondientes espacios de Hilbert cinemáticos son [55, 58]:

$$\hat{C}_{\text{FLRW}} = \left[\frac{1}{\sqrt{|p|}} \right]^{3/2} \hat{C}_{\text{FLRW}} \left[\frac{1}{\sqrt{|p|}} \right]^{3/2}, \quad (3.64)$$

$$\hat{C}_{\text{BI}} = \left[\frac{1}{|p_1|^{1/4}} \right] \otimes \left[\frac{1}{\sqrt{|p_\perp|}} \right] \hat{C}_{\text{BI}} \left[\frac{1}{|p_1|^{1/4}} \right] \otimes \left[\frac{1}{\sqrt{|p_\perp|}} \right], \quad (3.65)$$

donde hemos definido los operadores «densitizados»:

$$\hat{C}_{\text{FLRW}} = -\frac{3\pi G}{8} \hat{\Omega}_0^2 + \frac{\hat{p}_\phi^2}{2}, \quad \hat{C}_{\text{BI}} = -\frac{3\pi G}{8} \hat{\Omega}^2 + \frac{\hat{p}_\phi^2}{2} - \frac{\pi G}{8} (\hat{\Omega} \hat{\Theta} + \hat{\Theta} \hat{\Omega}). \quad (3.66)$$

Aquí, $\hat{\Theta} = \hat{\Theta}_1 - \hat{\Omega}$, con:

$$\hat{\Omega}_0 = \frac{i}{2} \sqrt{|\hat{v}|} \left[\widehat{\text{sign}(v)} (\hat{\mathcal{N}}_{-2\bar{\mu}} - \hat{\mathcal{N}}_{2\bar{\mu}}) + (\hat{\mathcal{N}}_{-2\bar{\mu}} - \hat{\mathcal{N}}_{2\bar{\mu}}) \widehat{\text{sign}(v)} \right] \sqrt{|\hat{v}|}, \quad (3.67)$$

$$\hat{\Omega} = \frac{i}{2} \sqrt{|\hat{v}|} \left[\widehat{\text{sign}(v)} (\hat{\mathcal{N}}_{-2\bar{\mu}_\perp} - \hat{\mathcal{N}}_{2\bar{\mu}_\perp}) + (\hat{\mathcal{N}}_{-2\bar{\mu}_\perp} - \hat{\mathcal{N}}_{2\bar{\mu}_\perp}) \widehat{\text{sign}(v)} \right] \sqrt{|\hat{v}|}, \quad (3.68)$$

y $\hat{\Theta}_1$ se define de forma análoga a $\hat{\Omega}$, reemplazando μ_\perp por μ_1 . Resulta conveniente resaltar que $\hat{\Omega}_0$ y $\hat{\Omega}$ tienen exactamente la misma actuación sobre los estados $|v\rangle$ y $|v, \lambda_1\rangle$, respectivamente, de las bases ortonormales de sus espacios poliméricos. Por ello, el operador de ligadura hamiltoniana de la cosmología de Bianchi I con simetría rotacional local puede entenderse como un término de tipo FLRW más una contribución que da cuenta de las anisotropías.

Los operadores \hat{C}_{FLRW} y \hat{C}_{BI} presentan ciertas propiedades interesantes gracias a la ordenación de factores simétrica escogida en ellos [55, 95]. En particular, desacoplan a los estados de las respectivas bases poliméricas con $v = 0$ y/o $\lambda_1 = 0$ de sus complementos ortogonales, y no mezclan estados con valores positivos de v y/o λ_1 con estados para los que estas variables tomen valores negativos. Esto permite restringir el análisis cuántico de las cosmologías de FLRW y de Bianchi I a los subespacios lineales generados respectivamente por estados $|v\rangle$ y $|v, \lambda_1\rangle$ con $v, \lambda_1 \in \mathbb{R}^+$, por ejemplo. Además, la actuación de las ligaduras sobre ellos los

subdividen aún más en sectores de superselección separables. En este punto de la discusión resulta conveniente reetiquetar los estados $|v, \lambda_1 \in \mathbb{R}^+\rangle$ como $|v, \Lambda\rangle$ (con $v \in \mathbb{R}^+$, $\Lambda \in \mathbb{R}$), donde $\Lambda = \ln(\lambda_1)$. Así, por una parte, las acciones de \hat{C}_{FLRW} y \hat{C}_{BI} preservan todos los subespacios lineales generados respectivamente por estados $|v\rangle$ y $|v, \Lambda\rangle$, con v perteneciente a la semirred de paso cuatro $\mathcal{L}_\varepsilon^+ = \{\varepsilon + 4k, k \in \mathbb{N}\}$, determinada por el punto inicial $\varepsilon \in (0, 4]$. Hacemos notar que ε es el mínimo valor (estrictamente positivo) permitido del «volumen» v de cada uno de los universos en el sector considerado. Por otra parte, en la cosmología cuántica de Bianchi I se tienen sectores de superselección también en la variable de anisotropía Λ . En particular, puede probarse que un estado $|v, \Lambda^*\rangle$ se relaciona, a través de la acción iterativa de la ligadura, solo con estados para los que $\Lambda = \Lambda^* + \Lambda_\varepsilon$, donde Λ_ε pertenece a un cierto conjunto \mathcal{W}_ε que es contable y denso en la recta real [55]. Todas estas propiedades las comparten los operadores \hat{C}_{FLRW} y \hat{C}_{BI} .

Los espacios de Hilbert físicos de ambos sistemas cosmológicos son aquellos cuyos estados permanecen *invariantes* bajo la acción de las respectivas ligaduras hamiltonianas, en el sentido que explicamos a continuación. Centremos nuestra atención, por una parte, en el subespacio lineal $\text{lin}\{|v\rangle, v \in \mathbb{R}\} \otimes \mathcal{S}(\mathbb{R})$, denso en el espacio de Hilbert cinemático de la cosmología de FLRW acoplada a un campo escalar homogéneo sin masa. Aquí, $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ es el espacio de Schwarz de funciones de decrecimiento rápido. Por otra parte, sea el subespacio lineal $\text{lin}\{|v, \lambda_1\rangle, v, \lambda_1 \in \mathbb{R}\} \otimes \mathcal{S}(\mathbb{R})$, denso en el espacio de Hilbert cinemático de la cosmología de Bianchi I con simetría rotacional local y acoplada a un campo escalar homogéneo sin masa. Estos subespacios sirven como dominios de definición de los respectivos operadores de ligadura. El marco natural para buscar soluciones a dichas ligaduras lo proporcionan los espacios duales de tales subconjuntos. Si llamamos $(\psi|_{\text{FLRW}}$ y $(\psi|_{\text{BI}}$ los elementos de estos espacios duales, en principio diremos que dichos elementos son soluciones de los modelos cosmológicos cuánticos correspondientes (y potenciales estados de los espacios de Hilbert físicos) si:

$$(\psi|_{\text{FLRW}} \hat{C}_{\text{FLRW}}^\dagger = 0, \quad (\psi|_{\text{BI}} \hat{C}_{\text{BI}}^\dagger = 0, \quad (3.69)$$

donde \dagger es el adjunto. No obstante, gracias a las beneficiosas propiedades enumeradas anteriormente de los operadores de ligadura, basta con restringir el estudio a los espacios duales de los subespacios lineales separables $\text{lin}\{|v, \rangle, v \in \mathcal{L}_\varepsilon^+\} \otimes \mathcal{S}(\mathbb{R})$ por una parte, y $\text{lin}\{|v, \Lambda^* + \Lambda_\varepsilon\rangle, v \in \mathcal{L}_\varepsilon^+, \Lambda_\varepsilon \in \mathcal{W}_\varepsilon\} \otimes \mathcal{S}(\mathbb{R})$ por otra. De hecho, dicha restricción garantiza que todos los operadores que componen las ligaduras estén bien definidos. Además, en ese caso queda asegurado que existe una biyección entre las soluciones [en el sentido de (3.69)] de las ligaduras \hat{C}_{FLRW} , \hat{C}_{BI} y sus respectivas densitizaciones \hat{C}_{FLRW} , \hat{C}_{BI} [58].

En ambas cosmologías ha sido posible caracterizar los espacios de Hilbert físicos resultantes, junto a conjuntos completos de observables de Dirac (operadores que conmutan con la ligadura) [48, 55, 58]. De hecho, en el caso homogéneo e isótropo de FLRW, el espacio de Hilbert físico resulta ser un espacio de funciones de cuadrado integrable en la recta real, gracias a las propiedades espectrales del operador $\hat{\Omega}_0^2$ (que por supuesto comparte $\hat{\Omega}^2$) [50, 95, 97]. El análisis de la evolución numérica, con respecto al campo escalar ϕ , de ciertas condiciones iniciales semiclásicas muestra como resultado unos estados cuánticos muy picados. La trayectoria de sus picos coincide, en las regiones de baja densidad material, con aquella dictada por las ecuaciones de Einstein en la cosmología de FLRW considerada. Sin embargo, cuando dicha densidad alcanza valores comparables con la de Planck, la trayectoria del pico se separa

de la solución clásica y describe progresivamente la transición de un universo en contracción a uno en expansión (o viceversa) [48, 98]. En particular, la densidad material alcanza un valor crítico máximo que resulta ser universal, en tanto en cuanto es independiente de las condiciones iniciales, y que es igual a 0,41 veces la densidad de Planck, si se fija el parámetro de Immirzi como se hace en GCL para recuperar la ley de Bekenstein-Hawking para la entropía de agujeros negros [99, 100]. Este fenómeno de naturaleza cuántica que «soluciona» la singularidad cosmológica del *Big-Bang* se conoce por el nombre de *Big-Bounce*, en inglés. Además existen evidencias de que su aparición en el marco de la CCL va más allá del caso homogéneo e isótropo, dándose en cosmologías anisótropas como las de Bianchi I [101, 102], o inhomogéneas como las de Gowdy introducidas a continuación [103].

3.3. Cuantización híbrida de cosmologías inhomogéneas

En esta última sección de conceptos preliminares a esta tesis, presentaremos una breve introducción a la estrategia de cuantización híbrida de espaciotiempos inhomogéneos. Para ello, haremos un pequeño resumen de cómo se aplicó por primera vez a un sistema cosmológico. El sistema en cuestión era un espaciotiempo de Gowdy [56, 57] con polarización lineal e hipersuperficies espaciales isomorfas al T^3 . Se trata de una de las cosmologías inhomogéneas más simples conocidas, cuyas soluciones exactas en Relatividad General describen universos en expansión con un contenido de ondas gravitatorias linealmente polarizadas [104–106]. Consideraremos además como contribución material un campo escalar inhomogéneo mínimamente acoplado, que se adapte a las simetrías del sistema cosmológico. La estrategia híbrida puede resumirse como sigue. En primer lugar, se realiza una caracterización de los grados de libertad del sistema en cuestión que permite separar el espacio de fases en un sector homogéneo y otro inhomogéneo. Los grados de libertad geométricos del sector homogéneo se representan cuánticamente siguiendo la metodología de alguna propuesta específica de gravedad cuántica. Los grados de libertad materiales de dicho sector se describen típicamente mediante una representación de Schrödinger estándar. Por otra parte, para la cuantización de los grados de libertad del sector inhomogéneo se adoptan típicamente representaciones de Fock, cuyos vacíos pertenecen a unas ciertas clases de equivalencia privilegiadas. El interés de esta tesis, en lo que respecta a la estrategia de cuantización híbrida, está centrado en un enfoque de CCL para la representación del sector gravitatorio homogéneo, así que todos los conceptos que introduciremos a continuación estarán adaptados a dicha representación.

Las cosmologías de Gowdy son espaciotiempos globalmente hiperbólicos con hipersuperficies espaciales compactas y dos vectores de Killing independientes espaciales [57]. Una de las topologías espaciales que admiten es la del T^3 . En lo sucesivo, restringiremos a ella toda la atención. Los dos vectores de Killing conmutan y generan superficies, por lo que la métrica espaciotemporal admite una forma diagonal por bloques 2×2 , una vez se resuelven las ligaduras de momentos en las dos direcciones de simetría [107, 108]. Requeriremos al sistema que, además, ambos vectores admitan hipersuperficies ortogonales en todo punto del espaciotiempo. Esto se traduce en una restricción de la polarización de las ondas gravitatorias, que queda reducida a ser lineal. Asimismo, impondremos que exista simetría rotacional local, de tal forma que las componentes de la métrica coincidan en las dos direcciones marcadas por los vectores de Killing. Al no depender ninguna de las componentes de la métrica de las

dos coordenadas asociadas a estas direcciones, pueden expandirse todas ellas en una serie de Fourier periódica con coeficientes dependientes de la función global del tiempo. El campo escalar sin masa mínimamente acoplado admite una descomposición análoga, al estar adaptado a las simetrías por definición. El sistema permite entonces la resolución de todos los modos de Fourier inhomogéneos en que se descomponen las ligaduras hamiltoniana y de momentos aún existentes [53, 108]. El espacio de fases resultante puede parametrizarse convenientemente [59, 109] y se divide en dos sectores: uno homogéneo, de dimensión seis, formado por los modos cero de los campos gravitatorio y escalar junto con sus momentos canónicamente conjugados; y por otra parte, uno inhomogéneo, de dimensión infinita, formado por todos los modos no cero de ambos campos, así como por sus momentos canónicamente conjugados. Además, clásicamente la cosmología queda sujeta únicamente a los modos cero de la ligadura hamiltoniana C_G y de la ligadura de momentos C_1 en la dirección x_1 de propagación de las ondas gravitatorias y del campo escalar. Curiosamente, este modo cero de la ligadura hamiltoniana resulta ser una suma de dos términos: $C_G = C_{BI} + C_{inh}$, de los cuales C_{BI} coincide con la ligadura hamiltoniana (3.51) del modelo de Bianchi I con simetría rotacional local y acoplado al modo cero ϕ del campo escalar, mientras que C_{inh} dicta la dinámica de las inhomogeneidades y las acopla al sector homogéneo.

El esquema híbrido para la cuantización de este sistema de Gowdy reducido es el siguiente. La cuantización cinemática del sector homogéneo del espacio de fases, que puede identificarse con el del modelo de Bianchi I con simetría rotacional local y un campo escalar homogéneo sin masa, sigue las líneas explicadas en la sección 3.2. Específicamente, se adopta la representación polimérica típica de CCL para los cuatro grados de libertad geométricos, mientras que el modo cero del campo escalar y su momento canónicamente conjugado reciben un tratamiento cuántico de tipo Schrödinger [55, 59]. Todas las funciones que dependen de este sector homogéneo en las ligaduras C_G y C_1 se representan siguiendo el esquema de la dinámica mejorada [51]. Por otra parte, se lleva a cabo una cuantización de Fock para los grados de libertad inhomogéneos del sistema de campos. Como ya se ha comentado anteriormente, existe una ambigüedad infinita en la elección de dicha cuantización. Sin embargo, gracias a la conveniente parametrización con que se puede describir el espacio de fases de este espaciotiempo de Gowdy [109], en la referencia [21] se demostró que existe una única representación de Fock privilegiada, salvo equivalencia unitaria, en el siguiente sentido. Si se resuelve clásicamente el modo cero de la ligadura hamiltoniana, el sistema resultante puede entenderse como uno de dos campos (el gravitatorio y el escalar) con una masa dependiente del tiempo que se propagan en un espaciotiempo ultraestático de dimensiones $1 + 1$. La simetría restante en dicho sistema es la de traslaciones rígidas en el círculo unidad, generada por C_1 . La referencia [21] demostró que existe una única representación de estos campos, salvo equivalencia unitaria, que es invariante bajo estas transformaciones de simetría y que admite una implementabilidad unitaria de la dinámica cuántica. Una diferencia fundamental entre esta cuantización y otras desarrolladas hasta la fecha para el mismo modelo de Gowdy en vacío [110–114] reside precisamente en dicha parametrización privilegiada del espacio de fases, que permite en particular la implementabilidad unitaria de la dinámica. Quizá el representante más simple dentro esta clase de equivalencia de representaciones de Fock sea aquella en la que las contrapartidas clásicas de los operadores de destrucción y creación se definen como se haría de forma estándar si los campos se propagaran en un espaciotiempo plano en ausencia de masa. Así pues, adoptaremos dicha representación «sin masa» para los

modos inhomogéneos de los campos gravitatorio y escalar [59]. Concretamente, el operador de destrucción asociado con el modo $m \in \mathbb{Z} - \{0\}$ se denominará $\hat{c}_m^{(A)}$, donde $A = g$ hace referencia al campo gravitatorio, y $A = s$ al material. El espacio de Fock resultante admite una base de estados de n partículas, $|\mathbf{n}^g, \mathbf{n}^s\rangle$, donde \mathbf{n}^A denota la infinita colección de números de ocupación $n_m^A \in \mathbb{N}$ en cada modo no cero m del campo A .

Con ello, la representación cuántica cinemática de la ligadura hamiltoniana del sistema de Gowdy considerado es, dentro del marco híbrido, $\hat{C}_G = \hat{C}_{\text{BI}} + \hat{C}_{\text{inh}}$, donde \hat{C}_{BI} , dada por (3.65), es la representación de lazos de la ligadura hamiltoniana de los espaciotiempos de Bianchi I con simetría rotacional local y acoplados a un campo escalar homogéneo sin masa. La contribución cuántica de las inhomogeneidades \hat{C}_{inh} respeta los sectores de superselección en los que la actuación de \hat{C}_{BI} está bien definida, dados, por ejemplo, por los subespacios poliméricos generados por la base $|v, \Lambda\rangle$ con $v \in \mathcal{L}_\varepsilon^+$ y $\Lambda = \Lambda^* + \Lambda_\varepsilon$, donde $\Lambda_\varepsilon \in \mathcal{W}_\varepsilon$ [59]. Restringiremos todo el estudio a dichos subespacios cinemáticos. Lo mismo ocurre con el operador densitizado \hat{C}_{inh} definido a través de la ecuación:

$$\hat{C}_{\text{inh}} = \left[\frac{1}{|p_1|^{1/4}} \right] \otimes \left[\frac{1}{\sqrt{|p_\perp|}} \right] \hat{C}_{\text{inh}} \left[\frac{1}{|p_1|^{1/4}} \right] \otimes \left[\frac{1}{\sqrt{|p_\perp|}} \right]. \quad (3.70)$$

Por tanto, podemos centrar toda nuestra atención en la ligadura densitizada $\hat{C}_G = \hat{C}_{\text{BI}} + \hat{C}_{\text{inh}}$, donde \hat{C}_{BI} está dada en (3.66), mientras que [55, 58, 59]:

$$\hat{C}_{\text{inh}} = \frac{2\pi G}{\beta} e^{\widehat{2\Lambda}} \hat{H}_0 + \frac{\pi G \beta}{4} e^{-\widehat{2\Lambda}} \hat{D} \hat{\Omega}^2 \hat{D} \hat{H}_1, \quad (3.71)$$

siendo $\beta = [G/(16\pi^2\gamma^2\Delta_g)]^{1/3}$ una constante, \hat{H}_0 la contribución de campo libre de los modos inhomogéneos a la ligadura:

$$\hat{H}_0 = \sum_{A=g,s} \sum_{m \in \mathbb{Z} - \{0\}} |m| \hat{c}_m^{(A)\dagger} \hat{c}_m^{(A)}, \quad (3.72)$$

\hat{H}_1 un término de autointeracción:

$$\hat{H}_1 = \sum_{A=g,s} \sum_{m \in \mathbb{Z} - \{0\}} \frac{1}{2|m|} \left(2\hat{c}_m^{(A)\dagger} \hat{c}_m^{(A)} + \hat{c}_m^{(A)\dagger} \hat{c}_{-m}^{(A)\dagger} + \hat{c}_m^{(A)} \hat{c}_{-m}^{(A)} \right), \quad (3.73)$$

y \hat{D} el producto del «volumen» \hat{v} [véase la definición (3.58)] por su inverso, que se regulariza siguiendo las prescripciones (3.62)-(3.63). Este operador difiere de la identidad únicamente en la región de volúmenes pequeños:

$$\hat{D}|v\rangle = v \left(\sqrt{v+1} - \sqrt{|v-1|} \right)^2 |v\rangle. \quad (3.74)$$

Recordamos, además, que $\hat{\Lambda}$ es el logaritmo natural de $\hat{\lambda}_1$, definido como operador a través del teorema espectral [véase (3.59)]. El operador de ligadura hamiltoniana \hat{C}_G está densamente definido sobre el espacio de Hilbert cinemático dado por el producto tensorial de $L^2(\mathbb{R}, d\phi)$

con la compleción del espacio lineal generado por $|v, \Lambda, \mathbf{n}^g, \mathbf{n}^s\rangle$ con respecto al producto interno:

$$\langle v', \Lambda', \mathbf{n}'^g, \mathbf{n}'^s | v, \Lambda, \mathbf{n}^g, \mathbf{n}^s \rangle = \delta_{v',v} \delta_{\Lambda',\Lambda} \delta_{\mathbf{n}'^g, \mathbf{n}^g} \delta_{\mathbf{n}'^s, \mathbf{n}^s},$$

donde $v \in \mathcal{L}_\varepsilon^+$ y $\Lambda = \Lambda^* + \Lambda_\varepsilon$, con $\Lambda_\varepsilon \in \mathcal{W}_\varepsilon$. Por otra parte, en este espacio está densamente definida la representación de Fock de la ligadura de momentos (densitizada de forma análoga a $\hat{\mathcal{C}}_{\text{inh}}$), que restringe los números de ocupación de los estados de n partículas de forma que [59]:

$$\sum_{m \in \mathbb{N}^+} m (n_m^g + n_m^s - n_{-m}^g - n_{-m}^s) = 0. \quad (3.75)$$

Por último, como ya comentamos en la Introducción, la estrategia híbrida se ha empleado también con éxito para describir un universo homogéneo e isótropo plano con pequeñas perturbaciones geométricas y materiales de tipo bosónico, desde un punto de vista puramente cuántico [62–66]. Este sistema tiene especial interés en cosmología moderna, ya que se aplica al estudio de las perturbaciones primordiales que dieron lugar a la radiación de fondo cósmico de microondas [33, 34, 115] y constituyeron las semillas de las estructuras que se observan hoy en día a gran escala [52]. En el Capítulo 7 de esta tesis introduciremos además campos materiales de tipo fermiónico en este sistema cosmológico, y procederemos a su cuantización híbrida por primera vez en la literatura. Pospondremos hasta ese capítulo el tratamiento híbrido de las perturbaciones primordiales, para proporcionar así una exposición completa de su cuantización, que incluya simultáneamente tanto las contribuciones gravitatorias, como las materiales de naturaleza bosónica y fermiónica.

Capítulo 4

Cuantización de Fock del campo de Klein-Gordon en Bianchi I

Como ya se ha señalado en el anterior capítulo, el teorema de unicidad de Stone-von Neumann [16] no se aplica en el proceso de cuantización de teorías de campos y, consecuentemente, no hay garantías de que exista una única representación de Fock del análogo del álgebra de Weyl en sistemas de campos. Afortunadamente, en ciertos escenarios es posible encontrar representaciones privilegiadas si se imponen criterios físicos sobre ellas. Por ejemplo, para campos escalares lineales que se propagan en espaciotiempos curvos, la existencia de un vector de Killing temporal, junto con la positividad de su concepto de energía asociada, y/o de un número suficiente de simetrías, permite seleccionar una única representación de Fock compatible [17–19]. Esto sucede en numerosas situaciones de interés, como, por ejemplo, teorías de campo libre en un espaciotiempo de Minkowski [20]. Sin embargo, cuando se consideran espaciotiempos cosmológicos se pierde en general tanto la presencia de vectores de Killing temporales como la existencia de un número suficiente de simetrías. A pesar de ello, este problema se ha resuelto en numerosos sistemas durante la última década, gracias a la imposición de un criterio que, motivado desde un punto de vista físico, selecciona una única familia de representaciones de Fock que son unitariamente equivalentes entre sí. Dicho criterio se basa en requerir una evolución cuántica que sea implementable a través de un operador unitario, a lo que se añade la invariancia del vacío de Fock bajo el grupo de simetrías de las ecuaciones dinámicas, grupo que puede identificarse con (o simplemente restringirse a) las isometrías continuas del espaciotiempo. Quizá resulte conveniente enfatizar de nuevo que la implementabilidad unitaria de la dinámica en el espacio de Fock permite compatibilizar el tratamiento cuántico de la teoría de campos con la interpretación probabilística tradicional de la Mecánica Cuántica, al proporcionar una imagen de Schrödinger bien definida. Como ya se ha comentado anteriormente en el contexto de la cuantización híbrida, este criterio se propuso en primer lugar para cosmologías de Gowdy [21, 108, 109, 116–120] que, tras la resolución de las ligaduras de la Relatividad General, pueden describirse través de un campo escalar en un espaciotiempo efectivo de dimensión $1 + 1$. La aplicabilidad del criterio se extendió posteriormente a escenarios con campos escalares que se propagan en universos homogéneos e isótropos [22, 121–131]. En estos últimos sistemas, la demostración de la existencia de una dinámica unitariamente implementable conlleva la introducción de un par de variables canónicas que están relacionadas con el campo de Klein-Gordon y su mo-

mento a través de una transformación canónica dependiente del tiempo o, equivalentemente, dependiente de las variables métricas del fondo espaciotemporal. Específicamente, el campo se reescala con una función del tiempo, mientras que su momento canónicamente conjugado adquiere el reescalado inverso y se le suma un término lineal en el campo [125]. Este nuevo par canónico (que es auxiliar en la construcción de una representación de Fock del campo de Klein-Gordon [22]) está completamente especificado por el criterio de unitariedad. Los factores dependientes del tiempo que relacionan las variables de campo de Klein-Gordon y estas variables auxiliares extraen una contribución de la dinámica que es imposible incorporar de manera unitaria cuánticamente. El resto de la evolución, que contiene una parte no trivial de la dinámica de Klein-Gordon, sí resulta ser implementable a través de un operador unitario en el espacio de Fock. Esta separación de la dependencia temporal del campo cuántico de Klein-Gordon en una parte explícita (que varía clásicamente) y otra no trivial, que viene dada por un operador unitario, resulta ser un aspecto clave en la construcción de una descripción de Fock del sistema si se quiere una evolución cuántica unitaria [22].

Como extensión y compleción parcial de los resultados de unicidad y unitariedad en cosmologías homogéneas, en este capítulo analizaremos en detalle la cuantización de Fock de campos escalares de Klein-Gordon mínimamente acoplados a espaciotiempos de tipo Bianchi I. Demostraremos que si se impone la invariancia del vacío de Fock bajo las isometrías continuas de las hipersuperficies espaciales, y se exige la implementabilidad unitaria de la dinámica cuántica, se obtiene una única representación de Fock de las relaciones de conmutación canónicas del campo, salvo equivalencia unitaria. Estas condiciones fijarán, además, una separación única de la variación temporal del campo de Klein-Gordon, en una dependencia explícita en el tiempo, por una parte, y en una evolución cuántica no trivial, por otra. Este análisis extiende a escenarios anisótropos los estudios existentes para campos escalares en universos de tipo FLRW con hipersuperficies espaciales planas [127, 130], mostrando así, en particular, que el criterio de unicidad propuesto se aplica sin problemas a espaciotiempos que no poseen simetría conforme. Además, la estrategia que adoptaremos en este capítulo generaliza la seguida hasta la fecha en la literatura, al investigar aquí de forma simultánea la libertad en la elección de representación de Fock y la existente en la posible extracción de una parte no trivial de las trayectorias dinámicas de Klein-Gordon que se pueda implementar mediante un operador unitario. Para ello, consideraremos familias de representaciones de Fock que estén relacionadas a través de trayectorias dinámicas en el espacio de fases más generales que las de Klein-Gordon, propiamente dichas, alcanzadas mediante parametrizaciones del campo en función de variables de destrucción y creación que dependen explícitamente del tiempo. Las transformaciones de Bogoliubov entre todos los conjuntos posibles de operadores de destrucción y creación asociados podrán pues tener una dependencia temporal explícita. Dicha dependencia será capaz de absorber parte de la variación temporal de las variables que describen el campo y así redefinir la evolución dinámica que se desea representar como un operador unitario en el espacio de Fock.

El contenido de este capítulo de la tesis se ha publicado en la referencia [132].

4.1. Campo de Klein-Gordon en las cosmologías de Bianchi I

Consideremos espaciotiempos de tipo Bianchi I con topología $M = \mathbb{I} \times T^3$, donde \mathbb{I} es un intervalo conexo de la recta real. Llamaremos x_α ($\alpha = 1, 2, 3$) a las coordenadas adaptadas a la homogeneidad del tres-toro, pertenecientes al círculo S^1 . La métrica de este tipo de espaciotiempos puede escribirse en términos de estas coordenadas como:

$$ds^2 = -N^2(t)dt^2 + h_{\alpha\beta}(t)dx^\alpha dx^\beta, \quad h_{\alpha\beta}(t) = a_\alpha^2(t)\delta_{\alpha\beta}, \quad (4.1)$$

donde a_α son los factores de escala direccionales y N es la función lapso. Además, en la expresión de la métrica espacial $h_{\alpha\beta}$ no ha de entenderse una suma sobre índices repetidos. Como ya se ha indicado, un caso particular de este tipo de espaciotiempos cosmológicos, obtenido si se impone que los tres factores de escala sean iguales, es el modelo de FLRW con secciones espaciales planas y compactas. Finalmente, conviene apuntar que la variación en el tiempo del volumen de los universos descritos por este tipo de cosmologías está caracterizada por el factor de escala promedio:

$$a(t) = [a_1(t)a_2(t)a_3(t)]^{1/3}. \quad (4.2)$$

Introduzcamos ahora un campo escalar real ϕ , de masa m , mínimamente acoplado a cualquiera de estas cosmologías. Además, ignoraremos su contribución como fuente material en las ecuaciones de Einstein, tratándolo como un campo de prueba. La densidad lagrangiana de este campo de Klein-Gordon viene dada por:

$$\mathcal{L}_\phi = \frac{1}{2}\sqrt{-g}(-g^{\mu\nu}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi - m^2\phi^2), \quad (4.3)$$

donde g es el determinante de la métrica espaciotemporal. Dado el momento canónicamente conjugado π_ϕ de este campo, introducido en el capítulo anterior, la densidad hamiltoniana es $\mathcal{H}_\phi = \pi_\phi\partial_t\phi - \mathcal{L}_\phi$. A la vista de la exfoliación en hipersuperficies de Cauchy elegida en la ecuación (4.1), que está adaptada a la homogeneidad del espacio, se tiene:

$$\pi_\phi = \frac{a^3}{N}\partial_t\phi. \quad (4.4)$$

La densidad hamiltoniana resulta ser entonces:

$$\mathcal{H}_\phi(N) = \frac{1}{2}Na^3\left(\frac{\pi_\phi^2}{a^6} + h^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi\partial_\beta\phi + m^2\phi^2\right). \quad (4.5)$$

4.1.1. Expansión en modos

El análisis de la dependencia espacial del problema se simplifica notablemente si se expanden el campo y su momento en una base de autofunciones del operador de Laplace-Beltrami Δ definido en las hipersuperficies espaciales [133]. Dicho operador captura la información

de las derivadas espaciales que aparecen en la ecuación de Klein-Gordon. En el conjunto de cosmologías con secciones de Cauchy planas, se tiene sobre cada una de ellas:

$$\Delta(t) = h^{\alpha\beta}(t)\partial_\alpha\partial_\beta. \quad (4.6)$$

Este operador es esencialmente autoadjunto en el espacio de funciones de cuadrado integrable con respecto a la medida $\sqrt{h}d^3\vec{x}$. Su espectro es discreto, gracias a la compacidad de las hipersuperficies espaciales. Además, sus autoespacios soportan representaciones irreducibles del grupo de traslaciones en T^3 , que pueden entenderse como composiciones de rotaciones rígidas en las tres direcciones principales del tres-toro. Dichas traslaciones proporcionan las isometrías continuas de los espaciotiempos homogéneos considerados. Las autofunciones correspondientes son los conjuntos de ondas planas $\exp(i\vec{k} \cdot \vec{x})$ en T^3 , con $\vec{k} = (k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{Z}^3$, y sus autovalores dependen de la función global del tiempo t . El autovalor correspondiente a cada autoespacio adquiere la forma:

$$\Delta_k(t) = -k^2 \sum_{\alpha=1}^3 \left[\frac{\tilde{k}_\alpha}{a_\alpha(t)} \right]^2, \quad (4.7)$$

donde $k = \sqrt{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2}$ y $\tilde{k}_\alpha = k_\alpha/k$. El parámetro k es la norma del «vector de onda» \vec{k} , mientras que \tilde{k}_α pueden entenderse como las componentes del vector unitario \vec{k} en la dirección de dicho vector de onda. Por último, hacemos notar que este espectro es degenerado, ya que existen diferentes vectores de onda asociados al mismo autovalor. En particular, las autofunciones $\exp(i\vec{k} \cdot \vec{x})$ y $\exp(-i\vec{k} \cdot \vec{x})$, caracterizadas por vectores de onda con signo opuesto, comparten el mismo autovalor.

Al ser el campo escalar de Klein-Gordon real, resulta conveniente considerar una base de modos de Fourier reales, en lugar de las ondas planas introducidas. Tomaremos pues la descomposición:

$$\phi(t, \vec{x}) = \frac{1}{(4\pi^3)^{1/2}} \sum_{\vec{k} \in \mathcal{L}_+} \left[q_{\vec{k}}^{(1)}(t) \cos(\vec{k} \cdot \vec{x}) + q_{\vec{k}}^{(2)}(t) \sin(\vec{k} \cdot \vec{x}) \right], \quad (4.8)$$

$$\pi_\phi(t, \vec{x}) = \frac{1}{(4\pi^3)^{1/2}} \sum_{\vec{k} \in \mathcal{L}_+} \left[p_{\vec{k}}^{(1)}(t) \cos(\vec{k} \cdot \vec{x}) + p_{\vec{k}}^{(2)}(t) \sin(\vec{k} \cdot \vec{x}) \right], \quad (4.9)$$

donde hemos ignorado el modo cero, que sería el etiquetado por $\vec{k} = (0, 0, 0)$, y hemos definido la red:

$$\mathcal{L}_+ = \{\vec{k}; k_1 > 0\} \cup \{\vec{k}; k_1 = 0, k_2 > 0\} \cup \{\vec{k}; k_1 = 0 = k_2, k_3 > 0\},$$

que evita la consideración de modos reales duplicados en la expansión de Fourier. Por otra parte, la exclusión del único modo cero no afecta en forma alguna la discusión de implementabilidad unitaria de la dinámica, que depende de un número infinito de grados de libertad. En cualquier caso, si se quisiera representar cuánticamente dicho modo, podría considerarse de forma aislada. Finalmente, la normalización tomada es tal que la descomposición introducida proporciona los pares de variables canónicamente conjugadas:

$$\{q_{\vec{k}}^{(l)}, p_{\vec{k}'}^{(\tilde{l})}\} = \delta^{l,\tilde{l}} \delta_{\vec{k},\vec{k}'}, \quad (4.10)$$

donde $l, \tilde{l} = 1, 2$.

La expresión que adopta el hamiltoniano en términos de las variables (4.10) puede dividirse en dos contribuciones iguales, sin interacción entre ellas:

$$H_\phi(N) = \sum_{l=1}^2 H_\phi^{(l)}(N), \quad (4.11)$$

$$H_\phi^{(l)}(N) = \frac{N}{2a^3} \sum_{\vec{k} \in \mathcal{L}_+} \left\{ \left(p_{\vec{k}}^{(l)} \right)^2 + a^6 \left[\sum_{i=1}^3 \left(\frac{k_i}{a_i} \right)^2 + m^2 \right] \left(q_{\vec{k}}^{(l)} \right)^2 \right\}. \quad (4.12)$$

Con el objetivo de simplificar la notación, siempre que sea conveniente nos referiremos a cualquiera de los pares $(q_{\vec{k}}^{(1)}, p_{\vec{k}}^{(1)})$ o $(q_{\vec{k}}^{(2)}, p_{\vec{k}}^{(2)})$ como $(q_{\vec{k}}, p_{\vec{k}})$.

4.1.2. Transformación canónica clásica

Los estudios de la cuantización de Fock de campos escalares en cosmologías homogéneas e isótropas pusieron de manifiesto que el análisis de la implementabilidad unitaria de la dinámica puede simplificarse mediante una elección correcta de variables [22, 125]. Dicha elección involucra una transformación canónica dependiente del tiempo, que extrae de las variables de Klein-Gordon funciones que dependen del fondo espaciotemporal. Típicamente, las nuevas variables resultantes se comportan, desde un punto de vista dinámico, como osciladores armónicos sin disipación. Tomando como inspiración el éxito obtenido en modelos isótropos, consideraremos también una transformación canónica dependiente del tiempo de los pares canónicos del campo en los espaciotiempos de Bianchi I. No obstante, al contrario de lo que ocurre en los escenarios isótropos, la transformación no será simplemente un reescalado «local» de la variable de configuración (suponiendo que las componentes de la métrica puedan considerarse funciones locales del espaciotiempo), sino que además dependerá del modo considerado.

Introduzcamos pues el siguiente cambio canónico, que respeta las isometrías continuas de las hipersuperficies espaciales al no mezclar modos distintos:

$$\begin{pmatrix} \tilde{q}_{\vec{k}} \\ \tilde{p}_{\vec{k}} \end{pmatrix} = \mathcal{P}_{\vec{k}} \begin{pmatrix} q_{\vec{k}} \\ p_{\vec{k}} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{P}_{\vec{k}} = \begin{pmatrix} \sqrt{b_{\vec{k}}} & 0 \\ \frac{1}{2} \frac{\dot{b}_{\vec{k}}}{b_{\vec{k}} \sqrt{b_{\vec{k}}}} & \frac{1}{\sqrt{b_{\vec{k}}}} \end{pmatrix}. \quad (4.13)$$

Aquí, $b_{\vec{k}}$ se define como:

$$b_{\vec{k}} = a^3 \sqrt{\sum_{\alpha=1}^3 \left(\frac{\tilde{k}_\alpha}{a_\alpha} \right)^2}, \quad (4.14)$$

y el punto designa la derivada con respecto al tiempo «armónico» τ , definido a través de la relación $N(t)dt = a^3(\tau)d\tau$. Hacemos notar que la función $b_{\vec{k}}$ depende de los tres factores de escala (a_1, a_2, a_3) y del vector de onda unitario $\vec{\tilde{k}} = \vec{k}/k$, pero no del número de onda k . Además, se tiene que $b_{\vec{k}} = a^2$ en el límite isótropo, recobrándose así el escalado utilizado habitualmente en escenarios isótropos [127].

La anterior transformación canónica induce el siguiente cambio en el lagrangiano del sistema (antes de sumar sobre $l = 1, 2$):

$$\sum_{\vec{k} \in \mathcal{L}_+} \dot{q}_{\vec{k}}^{(l)} p_{\vec{k}}^{(l)} - H_{\phi}^{(l)} = \sum_{\vec{k} \in \mathcal{L}_+} \dot{\tilde{q}}_{\vec{k}}^{(l)} \tilde{p}_{\vec{k}}^{(l)} - \tilde{H}_{\phi}^{(l)}, \quad (4.15)$$

salvo una derivada total, donde el nuevo hamiltoniano toma la expresión:

$$\tilde{H}_{\phi}^{(l)}(N = a^3) = \sum_{\vec{k} \in \mathcal{L}_+} \frac{b_{\vec{k}}}{2} \left\{ \left(\tilde{p}_{\vec{k}}^{(l)} \right)^2 + [k^2 + s_{\vec{k}}(\tau)] \left(\tilde{q}_{\vec{k}}^{(l)} \right)^2 \right\}, \quad (4.16)$$

si se define:

$$s_{\vec{k}}(\tau) = \frac{a^6 m^2}{b_{\vec{k}}^2} + \frac{3}{4} \left(\frac{\dot{b}_{\vec{k}}}{b_{\vec{k}}^2} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{\ddot{b}_{\vec{k}}}{b_{\vec{k}}^3}. \quad (4.17)$$

Claramente, $\tilde{H}_{\phi}^{(l)}(N = a^3)$ es una suma de hamiltonianos de osciladores armónicos, uno para cada modo, con la salvedad del factor $b_{\vec{k}}$ en (4.16). La masa de cada uno de estos osciladores depende del tiempo, así como del vector de onda unitario \vec{k} . Sin embargo, dicha masa $s_{\vec{k}}$ no depende de k , por ser $b_{\vec{k}}$ independiente de este parámetro.

4.1.3. Dinámica clásica

Dado el hamiltoniano (4.16), las ecuaciones dinámicas para los diferentes modos son:

$$\dot{\tilde{q}}_{\vec{k}} = b_{\vec{k}} \tilde{p}_{\vec{k}} \quad \dot{\tilde{p}}_{\vec{k}} = -b_{\vec{k}}(k^2 + s_{\vec{k}}) \tilde{q}_{\vec{k}}. \quad (4.18)$$

Expresaremos sus soluciones reales de la forma genérica:

$$\tilde{q}_{\vec{k}}(\tau) = Q_{\vec{k}} e^{i\Theta_{\vec{k}}^q(\tau)} + \bar{Q}_{\vec{k}} e^{-i\bar{\Theta}_{\vec{k}}^q(\tau)}, \quad (4.19)$$

$$\tilde{p}_{\vec{k}}(\tau) = k \left(P_{\vec{k}} e^{i\Theta_{\vec{k}}^p(\tau)} + \bar{P}_{\vec{k}} e^{-i\bar{\Theta}_{\vec{k}}^p(\tau)} \right), \quad (4.20)$$

donde $\Theta_{\vec{k}}^q(\tau)$ y $\Theta_{\vec{k}}^p(\tau)$ son funciones complejas y el factor k en (4.20) se ha introducido por conveniencia. El estudio de la unitariedad de la dinámica no necesita de una determinación exacta de las soluciones complejas $\exp[i\Theta_{\vec{k}}^q]$ y $k \exp[i\Theta_{\vec{k}}^p]$ a las ecuaciones (4.18). En su lugar, es suficiente conocer su comportamiento asintótico en el límite «ultravioleta» $k \rightarrow \infty$. Resulta obvio que las funciones complejas conjugadas $\exp[-i\bar{\Theta}_{\vec{k}}^q]$ y $k \exp[-i\bar{\Theta}_{\vec{k}}^p]$ serán soluciones a las mismas ecuaciones dinámicas, al tratarse estas de ecuaciones diferenciales con coeficientes reales. Teniendo esto en cuenta elegiremos libremente el signo de la parte real de $\Theta_{\vec{k}}^q$ y $\Theta_{\vec{k}}^p$ en el análisis que sigue.

Consideremos en primer lugar la función $\Theta_{\vec{k}}^q$ que determina la solución para $\tilde{q}_{\vec{k}}$. Seguiremos un análisis paralelo al desarrollado en la referencia [121], que quedaría reproducido de forma exacta si se eligiera el tiempo $d\eta_{\vec{k}} = b_{\vec{k}} d\tau$. No obstante, por completitud de la tesis,

incluiremos los cálculos explícitos para la elección de tiempo τ . Si se combinan las ecuaciones de Hamilton para el par $(\tilde{q}_{\bar{k}}, \tilde{p}_{\bar{k}})$, se obtiene la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden:

$$\frac{1}{b_{\bar{k}}} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{b_{\bar{k}}} \frac{d}{d\tau} \tilde{q}_{\bar{k}} \right) + (k^2 + s_{\bar{k}}) \tilde{q}_{\bar{k}} = 0. \quad (4.21)$$

Buscaremos la solución compleja $\exp[i\Theta_{\bar{k}}^q]$ con la siguiente expresión para $\Theta_{\bar{k}}^q$:

$$\dot{\Theta}_{\bar{k}}^q(\tau) = b_{\bar{k}}(\tau) \left[k + iW_{\bar{k}}^q(\tau) \right], \quad (4.22)$$

tal que si se toma la condición inicial $\Theta_{\bar{k}}^q(\tau_0) = 0$ en el tiempo arbitrario τ_0 , se tiene:

$$\Theta_{\bar{k}}^q(\tau) = \int_{\tau_0}^{\tau} d\tilde{\tau} b_{\bar{k}}(\tilde{\tau}) \left[k + iW_{\bar{k}}^q(\tilde{\tau}) \right]. \quad (4.23)$$

Al sustituir esta expresión en la ecuación (4.21), se comprueba que $W_{\bar{k}}^q(\tau)$ tiene que satisfacer la ecuación diferencial de Riccati:

$$\frac{1}{b_{\bar{k}}} \dot{W}_{\bar{k}}^q = (W_{\bar{k}}^q)^2 - 2ikW_{\bar{k}}^q + s_{\bar{k}}. \quad (4.24)$$

Asumiremos por el momento que $W_{\bar{k}}^q = \mathcal{O}(k^{-1})$, donde el símbolo \mathcal{O} denota orden asintótico (y superiores) en el régimen ultravioleta $k \rightarrow \infty$, de tal forma que $W_{\bar{k}}^q$ se aproxima a la solución $\tilde{W}_{\bar{k}}^q$ de:

$$\frac{1}{b_{\bar{k}}} \dot{\tilde{W}}_{\bar{k}}^q = -2ik\tilde{W}_{\bar{k}}^q + s_{\bar{k}}. \quad (4.25)$$

Esta ecuación, con condición inicial $\tilde{W}_{\bar{k}}^q(\tau_0) = 0$, tiene como solución:

$$\tilde{W}_{\bar{k}}^q(\tau) = e^{-2ik\eta_{\bar{k}}(\tau)} \int_{\tau_0}^{\tau} d\tilde{\tau} b_{\bar{k}}(\tilde{\tau}) s_{\bar{k}}(\tilde{\tau}) e^{2ik\eta_{\bar{k}}(\tilde{\tau})}, \quad (4.26)$$

recordando que:

$$\eta_{\bar{k}}(\tau) = \int_{\tau_0}^{\tau} d\tilde{\tau} b_{\bar{k}}(\tilde{\tau}). \quad (4.27)$$

Integrando esta solución por partes se obtiene:

$$\tilde{W}_{\bar{k}}^q(\tau) = -\frac{i}{2k} \left\{ s_{\bar{k}}(\tau) - s_{\bar{k}}(\tau_0) e^{-2ik\eta_{\bar{k}}(\tau)} - e^{-2ik\eta_{\bar{k}}(\tau)} \int_{\tau_0}^{\tau} d\tilde{\tau} \dot{s}_{\bar{k}}(\tilde{\tau}) e^{2ik\eta_{\bar{k}}(\tilde{\tau})} \right\}.$$

Al no depender $s_{\bar{k}}$ del número de onda k , si $\dot{s}_{\bar{k}}$ existe y es integrable en todo intervalo cerrado $[\tau_0, \tau]$ del dominio de tiempo considerado, entonces existe una función positiva $C(\tau)$ que no depende de k (aunque puede depender del vector de onda unitario) tal que:

$$|\tilde{W}_{\bar{k}}^q(\tau)| \leq \frac{C(\tau)}{k}. \quad (4.28)$$

La función $\tilde{W}_k^q(\tau)$ tiene, en efecto, el comportamiento $\mathcal{O}(k^{-1})$ en el límite ultravioleta $k \rightarrow \infty$. Por ello, de forma consistente con nuestra suposición previa, puede tomarse como solución asintótica de la ecuación (4.24) con condición inicial $W_k^q(\tau_0) = 0$, salvo correcciones de orden asintótico superior. Si se inserta este resultado en la ecuación (4.23), se concluye que en el límite ultravioleta:

$$\Theta_k^q(\tau) = k\eta_{\tilde{k}}(\tau) + \mathcal{O}(k^{-1}). \quad (4.29)$$

Con el objetivo de obtener la solución $k \exp[i\Theta_k^p]$ para $\tilde{p}_{\tilde{k}}$, utilizaremos la primera ecuación de (4.18), que relaciona Θ_k^p con una solución compleja de la ecuación dinámica de $\tilde{q}_{\tilde{k}}$. Si se expresa esta última como una combinación lineal de $\exp[i\Theta_k^q]$ y su complejo conjugado, y se designan sus respectivos coeficientes por $A_{\tilde{k}}$ y $B_{\tilde{k}}$, se obtiene:

$$e^{i\Theta_k^p} = A_{\tilde{k}} \left[i - \frac{W_k^q(\tau)}{k} \right] e^{i\Theta_k^q} - B_{\tilde{k}} \left[i + \frac{\bar{W}_k^q(\tau)}{k} \right] e^{-i\Theta_k^q}, \quad (4.30)$$

donde Θ_k^q está dado en términos de W_k^q a través de la relación (4.23). Elegiremos las condiciones iniciales $\Theta_k^p(\tau_0) = 0$ y $\dot{\Theta}_k^p(\tau_0) = b_{\tilde{k}}(\tau_0)k$. Si se recuerda ahora que la condición $W_k^q(\tau_0) = 0$ implica en la ecuación de Riccati (4.24) que:

$$\dot{W}_k^q(\tau_0) = b_{\tilde{k}}(\tau_0)s_{\tilde{k}}(\tau_0), \quad (4.31)$$

las condiciones iniciales escogidas proporcionan los siguientes valores para los coeficientes $A_{\tilde{k}}$ y $B_{\tilde{k}}$:

$$A_{\tilde{k}} = -\frac{i}{2} \frac{2k^2 + s_{\tilde{k}}(\tau_0)}{k^2 + s_{\tilde{k}}(\tau_0)} = -i + \mathcal{O}(k^{-2}), \quad (4.32)$$

$$B_{\tilde{k}} = \frac{i}{2} \frac{s_{\tilde{k}}(\tau_0)}{k^2 + s_{\tilde{k}}(\tau_0)} = \mathcal{O}(k^{-2}). \quad (4.33)$$

Estos valores, junto con el comportamiento $W_k^q(\tau) = \mathcal{O}(k^{-1})$ y la independencia tanto de $b_{\tilde{k}}$ como de $s_{\tilde{k}}$ en k , permiten concluir inmediatamente que:

$$\Theta_k^p(\tau) = k\eta_{\tilde{k}}(\tau) + \mathcal{O}(k^{-1}). \quad (4.34)$$

En resumen, si se toman las condiciones $\Theta_k^x(\tau_0) = 0$ y $\dot{\Theta}_k^x(\tau)|_{\tau_0} = b_{\tilde{k}}(\tau_0)k$ en un tiempo inicial arbitrario τ_0 , donde x puede denotar bien q o bien p , queda garantizado que:

$$\Theta_k^x(\tau) = k\eta_{\tilde{k}}(\tau) + \mathcal{O}(k^{-1}). \quad (4.35)$$

Este resultado depende exclusivamente de la suposición (relativamente débil) de que la masa dependiente del tiempo es tal que $\dot{s}_{\tilde{k}}$ existe y es integrable en todo intervalo $[\tau_0, \tau]$ de nuestro dominio temporal.

Las constantes $Q_{\tilde{k}}$ y $P_{\tilde{k}}$ que aparecen en las expresiones (4.19) y (4.20), para $\tilde{q}_{\tilde{k}}$ y $\tilde{p}_{\tilde{k}}$ respectivamente, pueden relacionarse con las condiciones iniciales $\tilde{q}_{\tilde{k}}(\tau_0)$ y $\tilde{p}_{\tilde{k}}(\tau_0)$ a través de las ecuaciones de Hamilton evaluadas en τ_0 . Con ello, la evolución en el espacio de fases de

las variables canónicas $\tilde{q}_{\vec{k}}$ y $\tilde{p}_{\vec{k}}$ a cualquier tiempo τ puede expresarse en función de dichas condiciones iniciales como [132]:

$$\begin{pmatrix} \tilde{q}_{\vec{k}} \\ \tilde{p}_{\vec{k}} \end{pmatrix}_{\tau} = \mathcal{V}_{\vec{k}}(\tau, \tau_0) \begin{pmatrix} \tilde{q}_{\vec{k}} \\ \tilde{p}_{\vec{k}} \end{pmatrix}_{\tau_0}, \quad \mathcal{V}_{\vec{k}}(\tau, \tau_0) = \begin{pmatrix} \Re \left[e^{i\Theta_{\vec{k}}^q(\tau)} \right] & \frac{1}{k} \Im \left[e^{i\Theta_{\vec{k}}^q(\tau)} \right] \\ -\frac{k^2 + s_{\vec{k}}(\tau_0)}{k} \Im \left[e^{i\Theta_{\vec{k}}^p(\tau)} \right] & \Re \left[e^{i\Theta_{\vec{k}}^p(\tau)} \right] \end{pmatrix}. \quad (4.36)$$

El subíndice τ en los vectores columna indica evaluación en ese valor del tiempo armónico, y los símbolos \Re y \Im denotan, respectivamente, las partes reales e imaginarias.

4.2. Cuantización de Fock

Tras haber analizado la descripción canónica clásica del campo de Klein-Gordon en cosmologías de tipo Bianchi I, procedemos a estudiar su cuantización de Fock. La ambigüedad infinita existente en su elección (véase la sección 3.1 del capítulo anterior) será resuelta por completo, salvo equivalencia unitaria, al imponer dos requisitos físicamente motivados. El primero de ellos será la invariancia del vacío cuántico bajo las transformaciones de isometría continuas de las hipersuperficies espaciales. El segundo, y más importante, será la implementabilidad unitaria de las trayectorias dinámicas en el espacio de fases.

4.2.1. Representaciones de Fock invariantes

En primer lugar, haremos uso de las simetrías del sistema y centraremos toda la atención en representaciones de Fock cuyos vacíos sean invariantes bajo las isometrías que consisten en rotaciones rígidas en T^3 (obtenidas a través de la combinación de rotaciones individuales en cada una de las direcciones ortogonales adaptadas a la homogeneidad). La estructura compleja de cada una de estas representaciones de Fock *invariantes* habrá de conmutar con la acción de este grupo de simetrías, garantizando así la invariancia del vacío. La forma más general de una estructura compleja compatible con dichas isometrías se dedujo en las referencias [127, 130], teniendo en cuenta que las representaciones irreducibles del grupo, cuando actúa sobre el campo escalar, no son más que aquellas de $U(1) \times U(1) \times U(1)$. Esta compatibilidad con las simetrías que caracteriza una representación de Fock invariante puede entenderse a su vez a través de ciertas propiedades en la elección de las variables de destrucción y creación, que son las contrapartidas clásicas a los operadores correspondientes en el operador distribucional (3.13). Llamaremos estas variables $c_{\vec{k}}^{(l)}$ y $c_{\vec{k}}^{(l)\dagger} = \bar{c}_{\vec{k}}^{(l)}$, respectivamente, y están relacionadas a través de una transformación lineal con los «modos» $\tilde{q}_{\vec{k}}^{(l)}$ y $\tilde{p}_{\vec{k}}^{(l)}$. Resulta entonces que las transformaciones permitidas por la invariancia bajo las isometrías continuas no han de mezclar modos con diferentes vectores de onda $\vec{k} \in \mathcal{L}_+$ o diferente etiqueta $l \in \{1, 2\}$. Este resultado puede entenderse fácilmente a través de la compatibilidad de la representación con (algunas de) las simetrías de las ecuaciones dinámicas en cosmologías de Bianchi I, que desacoplan dichos modos. No obstante, las combinaciones lineales que definen las variables de destrucción y creación pueden depender del vector de onda \vec{k} . Por último, si además se impone que se respete la simetría adicional de las ecuaciones dinámicas que las hace independientes de la consideración de modos sinusoidales o

cosinusoidales (correspondientes a $l = 1$ y 2 , respectivamente), las transformaciones lineales no pueden depender de la etiqueta l [127, 130].

En conclusión, cualquier representación de Fock invariante está totalmente caracterizada por una transformación lineal \mathcal{F} en el espacio de fases formada por bloques 2×2 tales que:

$$\begin{pmatrix} c_{\vec{k}}^{(l)} \\ c_{\vec{k}}^{(l),\dagger} \end{pmatrix} = \mathcal{F}_{\vec{k}} \begin{pmatrix} \tilde{q}_{\vec{k}}^{(l)} \\ \tilde{p}_{\vec{k}}^{(l)} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{F}_{\vec{k}} = \begin{pmatrix} f_{\vec{k}} & g_{\vec{k}} \\ f_{\vec{k}}^* & g_{\vec{k}}^* \end{pmatrix}. \quad (4.37)$$

Los coeficientes $f_{\vec{k}}$ y $g_{\vec{k}}$ satisfacen, además:

$$f_{\vec{k}} g_{\vec{k}}^* - g_{\vec{k}} f_{\vec{k}}^* = -i, \quad (4.38)$$

de tal forma que se garanticen las relaciones de Poisson características de las variables de destrucción y creación:

$$\{c_{\vec{k}}^{(l)}, c_{\vec{k}'}^{(\tilde{l}),\dagger}\} = -i\delta^{l,\tilde{l}}\delta_{\vec{k},\vec{k}'}, \quad (4.39)$$

que se siguen de (4.10).

4.2.2. Dinámica unitaria

Como ya se ha indicado anteriormente, restringiremos toda la atención a vacíos de Fock invariantes de ahora en adelante. Consideraremos entonces familias de representaciones de este tipo conectadas entre sí a través de una dinámica no trivial, inducida por la evolución del campo de Klein-Gordon. Lo que se busca es que esta dinámica se pueda implementar como un operador unitario en el espacio de Fock correspondiente a cualquier elemento de la familia. Dichas familias dinámicas de representaciones se corresponderán, evidentemente, con elecciones de variables de destrucción y creación (4.37) para los modos, permitiendo que los bloques $\mathcal{F}_{\vec{k}}$ que las definen puedan depender de forma suave en el parámetro de evolución τ . Esta dependencia explícita en el tiempo es la que, si fuera necesario, absorberá parte de la variación de los pares canónicos $(\tilde{q}_{\vec{k}}^{(l)}, \tilde{p}_{\vec{k}}^{(l)})$, que evolucionan de acuerdo con (4.36). De esta forma, se introduce un procedimiento bien definido para separar la evolución en el tiempo del campo de Klein-Gordon y su momento en una parte explícitamente dependiente de τ , definida (al menos localmente) por el factor de escala promedio $a(\tau)$, y una evolución dinámica que sea implementable cuánticamente como una transformación unitaria. En esta sección deduciremos las condiciones necesarias y suficientes que cualquiera de estas familias dinámicas de representaciones de Fock deben cumplir para admitir una evolución unitariamente implementable.

Como ya se discutió en la sección 3.1 del capítulo anterior, la evolución clásica (4.36) se traduce en una transformación de Bogoliubov \mathcal{B} que implementa la dinámica de las variables de destrucción y creación desde el instante inicial τ_0 a cualquier otro tiempo τ :

$$\begin{pmatrix} c_{\vec{k}} \\ c_{\vec{k}'}^{\dagger} \end{pmatrix}_{\tau} = \mathcal{B}_{\vec{k}}(\tau, \tau_0) \begin{pmatrix} c_{\vec{k}} \\ c_{\vec{k}'}^{\dagger} \end{pmatrix}_{\tau_0}, \quad \mathcal{B}_{\vec{k}}(\tau, \tau_0) = \begin{pmatrix} \alpha_{\vec{k}}^{-}(\tau, \tau_0) & \beta_{\vec{k}}^{-}(\tau, \tau_0) \\ \beta_{\vec{k}}^{*}(\tau, \tau_0) & \alpha_{\vec{k}}^{*}(\tau, \tau_0) \end{pmatrix}. \quad (4.40)$$

Utilizando las ecuaciones (4.36) y (4.37), se puede deducir fácilmente la forma explícita que adquiere dicha transformación de Bogoliubov:

$$\mathcal{B}_{\vec{k}}(\tau, \tau_0) = \mathcal{F}_{\vec{k}}(\tau) \mathcal{V}_{\vec{k}}(\tau, \tau_0) \mathcal{F}_{\vec{k}}^{-1}(\tau_0). \quad (4.41)$$

Resaltamos que esta transformación no depende de la etiqueta l , al haber restringido el análisis a bloques $\mathcal{F}_{\vec{k}}$ independientes de ella por razones de simetría y al ser la transformación dinámica $\mathcal{V}_{\vec{k}}$ la misma, independientemente del valor de l .

El módulo de los coeficientes beta resultantes viene dado por [132]:

$$|\beta_{\vec{k}}(\tau, \tau_0)| = \left| f_{\vec{k}}(\tau) g_{\vec{k}}(\tau_0) \Re[e^{i\Theta_{\vec{k}}^q(\tau)}] - g_{\vec{k}}(\tau) f_{\vec{k}}(\tau_0) \Re[e^{i\Theta_{\vec{k}}^p(\tau)}] - \frac{1}{k} f_{\vec{k}}(\tau) f_{\vec{k}}(\tau_0) \Im[e^{i\Theta_{\vec{k}}^q(\tau)}] - \frac{k^2 + s_{\vec{k}}(\tau_0)}{k} g_{\vec{k}}(\tau) g_{\vec{k}}(\tau_0) \Im[e^{i\Theta_{\vec{k}}^p(\tau)}] \right|. \quad (4.42)$$

Conviene recordar en este punto que esta transformación de Bogoliubov, para cualquier tiempo $\tau \in \mathbb{I}$, es implementable mediante un operador unitario en el espacio de Fock definido por las variables $c_{\vec{k}}(\tau_0)$ y $c_{\vec{k}}^\dagger(\tau_0)$ si y solo si:

$$\sum_{\vec{k} \in \mathcal{L}_+} |\beta_{\vec{k}}(\tau, \tau_0)|^2 < \infty. \quad (4.43)$$

Esta condición se puede reinterpretar como el requisito de que el vacío de la representación evolucionada a tiempo τ , aniquilado por todos los operadores de destrucción $\hat{c}_{\vec{k}}^{(l)}(\tau)$, tenga un contenido finito de partículas con respecto al vacío definido en el tiempo inicial τ_0 .

Encontrar las condiciones bajo las que se cumple esto requiere de un conocimiento acerca del comportamiento de $|\beta_{\vec{k}}|$ para valores de k asintóticamente grandes. Teniendo en cuenta el comportamiento (4.35) obtenido, se tiene [132]:

$$|\beta_{\vec{k}}(\tau, \tau_0)| = \frac{1}{2k} \left| [f_{\vec{k}}(\tau) + ikg_{\vec{k}}(\tau)] [f_{\vec{k}}(\tau_0) - ikg_{\vec{k}}(\tau_0)] [e^{ik\eta_{\vec{k}}(\tau)} + \mathcal{O}(k^{-1})] - [f_{\vec{k}}(\tau) - ikg_{\vec{k}}(\tau)] [f_{\vec{k}}(\tau_0) + ikg_{\vec{k}}(\tau_0)] [e^{-ik\eta_{\vec{k}}(\tau)} + \mathcal{O}(k^{-1})] + 2ig_{\vec{k}}(\tau)g_{\vec{k}}(\tau_0)s_{\vec{k}}(\tau_0) \{ \text{sen}[k\eta_{\vec{k}}(\tau)] + \mathcal{O}(k^{-1}) \} \right|. \quad (4.44)$$

Es fácil ver que el último término en esta fórmula es subdominante con respecto a los que son proporcionales a $g_{\vec{k}}(\tau)g_{\vec{k}}(\tau_0)$ en las dos primeras líneas. Dada esta expresión asintótica para los coeficientes beta, la condición de unitariedad (4.43) impone un comportamiento muy específico a las funciones $f_{\vec{k}}(\tau)$ y $g_{\vec{k}}(\tau)$ en el límite $k \rightarrow \infty$. Si se recuerda la relación (4.38) que han de cumplir estas funciones, la condición restringe severamente la forma asintótica de, por ejemplo, $f_{\vec{k}}(\tau)$. Para razonar este resultado, descartaremos automáticamente cualquier posibilidad de compensar la contribución procedente de la primera línea de (4.44) con la segunda línea, con el fin de obtener una secuencia de coeficientes beta de cuadrado sumable. Esta compensación, obtenida ajustando de forma específica y contraria la dependencia en el tiempo de las funciones $f_{\vec{k}}$ y $g_{\vec{k}}$, implicaría una trivialización de la dinámica estudiada, pues se estaría absorbiendo la contribución dominante en la evolución de los modos de

Fourier canónicos. Analizaremos por tanto las dos primeras líneas (4.44) de forma separada, aceptando ya su independencia funcional en el tiempo.

Es posible comprobar que, para garantizar la sumabilidad (4.43) de una forma consistente con la relación (4.38), se requiere necesariamente que $f_{\vec{k}} = -ikg_{\vec{k}}$ para todo $\vec{k} \in \mathcal{L}_+$, excepto quizá para un número finito de vectores de onda, y salvo términos subdominantes en el régimen ultravioleta [132]. Esta condición fija, además, el término dominante tanto de $f_{\vec{k}}$ como de $g_{\vec{k}}$ en el régimen ultravioleta (salvo una fase). Explícitamente, para todo $\vec{k} \in \mathcal{L}'_+$ tal que \mathcal{L}'_+ difiera de \mathcal{L}_+ como mucho en un número finito de elementos, la condición de unitariedad requiere necesariamente que:

$$f_{\vec{k}}(\tau) = \sqrt{\frac{k}{2}} e^{iF_{\vec{k}}(\tau)} + k\theta_{\vec{k}}^f(\tau), \quad g_{\vec{k}}(\tau) = \frac{i}{\sqrt{2k}} e^{iF_{\vec{k}}(\tau)} + \theta_{\vec{k}}^g(\tau), \quad (4.45)$$

donde $F_{\vec{k}}$ es una fase cualquiera y tanto $k\theta_{\vec{k}}^f(\tau)$ como $\theta_{\vec{k}}^g(\tau)$ son términos subdominantes en el límite asintótico $k \rightarrow \infty$. Esta condición se torna también en suficiente si, para todo τ , estas contribuciones subdominantes satisfacen:

$$\sum_{\vec{k} \in \mathcal{L}'_+} k |\theta_{\vec{k}}^f(\tau) + i\theta_{\vec{k}}^g(\tau)|^2 < \infty, \quad (4.46)$$

Para llegar a esta conclusión ha de tenerse en cuenta que la secuencia $\{s_{\vec{k}}(\tau_0)/k^2\}_{\vec{k} \in \mathcal{L}_+}$ es de cuadrado sumable, ya que la función $s_{\vec{k}}$ no depende de k y la secuencia $\{1/k^2\}_{\vec{k} \in \mathcal{L}_+}$ es de cuadrado sumable [127].

Recordemos que las funciones $f_{\vec{k}}(\tau)$ y $g_{\vec{k}}(\tau)$ son independientes del valor de la etiqueta l , y por tanto lo mismo se aplica a las funciones que aparecen en sus desarrollos asintóticos. Por otra parte, gracias a la relación (4.38), los términos subdominantes no son independientes, sino que satisfacen:

$$\Re \left[i \left(e^{-iF_{\vec{k}}} + \sqrt{2k}\theta_{\vec{k}}^f \right) \theta_{\vec{k}}^g \right] = \Re \left[\theta_{\vec{k}}^f e^{-iF_{\vec{k}}} \right]. \quad (4.47)$$

Si escribimos $\theta_{\vec{k}}^g = |\theta_{\vec{k}}^g| e^{iG_{\vec{k}}}$, esta ecuación proporciona la expresión de $|\theta_{\vec{k}}^g|$ (al menos para k suficientemente grande) en términos de $F_{\vec{k}}$, $\theta_{\vec{k}}^f$ y la fase $G_{\vec{k}}$, excepto si esta última se hace coincidir con $F_{\vec{k}}$ (modulo 2π) salvo términos despreciables cuando $k \rightarrow \infty$. En el resto de los casos, se puede emplear la expresión así obtenida para $|\theta_{\vec{k}}^g|$ y demostrar que la condición (4.46) se satisface si y solo si $\{\sqrt{k}|\theta_{\vec{k}}^f|\}_{\vec{k} \in \mathcal{L}'_+}$ es de cuadrado sumable.

La situación particular en la que ni $f_{\vec{k}}(\tau)$ ni $g_{\vec{k}}(\tau)$ dependen del tiempo puede analizarse siguiendo las mismas líneas argumentales de la discusión general que hemos expuesto, llegándose a conclusiones análogas. En este caso, la sumabilidad cuadrática de los coeficientes beta, junto con la relación (4.38), implica de nuevo que $f_{\vec{k}} = -ikg_{\vec{k}}$, salvo términos despreciables. Se obtiene entonces el comportamiento expuesto en las ecuaciones (4.45) y (4.46) como condición necesaria y suficiente, particularizado a fases $F_{\vec{k}}$ y contribuciones subdominantes $\theta_{\vec{k}}^f$ y $\theta_{\vec{k}}^g$ que son constantes en el tiempo.

En conclusión, las expresiones (4.45), (4.46) y (4.47) son las condiciones necesarias y suficientes que cualquier familia dinámica de representaciones de Fock invariantes, caracterizada

por $\mathcal{F}(\tau)$, ha de verificar para que sus elementos estén relacionados por una evolución que se pueda implementar como un operador unitario en el espacio de Fock resultante. Puede resultar útil comentar que, gracias a la transformación canónica llevada a cabo en la subsección 4.1.2, los módulos de los términos dominantes $f_{\vec{k}}$ y $g_{\vec{k}}$ no dependen del tiempo (y por tanto tampoco de funciones del fondo espaciotemporal), ni de la masa del campo. La dependencia en estos dos parámetros podrá aparecer únicamente en la fase $F_{\vec{k}}$ de dichos términos dominantes, así como en los posibles subdominantes. Este comportamiento implica en particular que la implementabilidad unitaria de la dinámica es capaz de fijar la evolución de las variables de destrucción y creación a orden dominante, salvo por una fase irrelevante, una vez se ha impuesto invariancia del vacío bajo las isometrías continuas del fondo de Bianchi I.

Finalmente, para concluir esta sección, conviene aclarar que todo el análisis realizado podría haberse llevado a cabo sin introducir la transformación canónica dependiente del tiempo (4.13), obteniéndose los mismos resultados. Esto es, podríamos haber partido de familias de variables de destrucción y creación expresadas en términos de las variables canónicas $q_{\vec{k}}$ y $p_{\vec{k}}$ que describen el campo de Klein-Gordon [132]. Las variables transformadas $\tilde{q}_{\vec{k}}$ y $\tilde{p}_{\vec{k}}$ han sido introducidas por simple conveniencia, para simplificar el análisis asintótico de la dinámica.

4.2.3. Representación «sin masa»

Entre todas las posibles representaciones de Fock que verifican las condiciones de unitariedad (4.45)-(4.47), existe una familia especialmente simple caracterizada por:

$$\check{f}_{\vec{k}} = \sqrt{\frac{k}{2}}, \quad \check{g}_{\vec{k}} = \frac{i}{\sqrt{2k}}. \quad (4.48)$$

De hecho, una simple inspección de la ecuación (4.44) muestra que sus elementos están relacionados por transformaciones de Bogoliubov dinámicas cuyos coeficientes beta tienen el comportamiento $|\beta_{\vec{k}}| = |s_{\vec{k}}(\tau_0)\mathcal{O}(k^{-2})|$. Dicha familia de representaciones es la que se tomaría típicamente en un espaciotiempo estático para un campo escalar con variables de configuración y momento dadas por $\tilde{q}_{\vec{k}}$ y $\tilde{p}_{\vec{k}}$ si todo el término de masa dependiente del tiempo $s_{\vec{k}}$ fuera cero. Utilizaremos esta familia de representaciones como *referencia* en la siguiente sección. Llamaremos $\check{c}_{\vec{k}}$ y $\check{c}_{\vec{k}}^\dagger$ sus respectivas variables de destrucción y creación asociadas.

4.3. Unicidad de la representación de Fock

Hasta ahora hemos caracterizado las cuantizaciones de Fock que poseen vacíos invariantes bajo las isometrías continuas de las cosmologías de tipo Bianchi I, así como qué dinámica cuántica puede implementarse a través de un operador unitario. En esta última sección demostraremos que no solo las representaciones de una misma cuantización, conectadas mediante la mencionada noción de evolución, resultan ser unitariamente equivalentes entre sí, sino que lo son todas las representaciones de cualquiera de estas cuantizaciones. En particular, todas ellas serán unitariamente equivalentes a la representación de referencia [dada

por (4.48)] para cualquier valor del parámetro temporal. Como consecuencia directa de este resultado, los criterios físicos que se han impuesto garantizan la unicidad en la elección de representación de Fock para el campo escalar, salvo equivalencia unitaria, en las cosmologías consideradas.

Consideremos la representación de Fock de referencia y cualquier otra con variables de destrucción y creación $(c_{\vec{k}}, c_{\vec{k}}^\dagger)$ que esté seleccionada por los requisitos de invariancia y dinámica unitaria. Estas variables, a un tiempo genérico τ , están relacionadas con las de referencia, $(\check{c}_{\vec{k}}, \check{c}_{\vec{k}}^\dagger)$, por medio de la transformación de Bogoliubov:

$$\begin{pmatrix} c_{\vec{k}} \\ c_{\vec{k}}^\dagger \end{pmatrix}_\tau = \mathcal{K}_{\vec{k}}(\tau) \begin{pmatrix} \check{c}_{\vec{k}} \\ \check{c}_{\vec{k}}^\dagger \end{pmatrix}_\tau, \quad \mathcal{K}_{\vec{k}} = \begin{pmatrix} \kappa_{\vec{k}} & \lambda_{\vec{k}} \\ \lambda_{\vec{k}}^* & \kappa_{\vec{k}}^* \end{pmatrix}. \quad (4.49)$$

En general, $\mathcal{K}_{\vec{k}}$ puede depender del tiempo.

Es inmediato ver que $\mathcal{K}_{\vec{k}} = \mathcal{F}_{\vec{k}}(\check{\mathcal{F}}_{\vec{k}})^{-1}$ (y por tanto es de nuevo independiente del valor de la etiqueta l). Se obtiene, pues, que:

$$\kappa_{\vec{k}}(\tau) = i \left[f_{\vec{k}}(\tau) \check{g}_{\vec{k}}^*(\tau) - g_{\vec{k}}(\tau) \check{f}_{\vec{k}}^*(\tau) \right], \quad (4.50)$$

$$\lambda_{\vec{k}}(\tau) = -i \left[f_{\vec{k}}(\tau) \check{g}_{\vec{k}}(\tau) - g_{\vec{k}}(\tau) \check{f}_{\vec{k}}(\tau) \right]. \quad (4.51)$$

Las dos representaciones de Fock consideradas, a un valor arbitrario del tiempo τ , son unitariamente equivalentes si y solo si la transformación formada por la secuencia de matrices $\mathcal{K}_{\vec{k}}$ puede implementarse como un operador unitario en la teoría cuántica, es decir, si y solo si:

$$\sum_{\vec{k} \in \mathcal{L}_+} |\lambda_{\vec{k}}(\tau)|^2 < \infty. \quad (4.52)$$

Teniendo en cuenta el comportamiento asintótico de $f_{\vec{k}}$ y $g_{\vec{k}}$ dado por la ecuación (4.45), se tiene simplemente que:

$$\sum_{\vec{k} \in \mathcal{L}'_+} |\lambda_{\vec{k}}(\tau)|^2 = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k} \in \mathcal{L}'_+} k |\theta_{\vec{k}}^f(\tau) + i\theta_{\vec{k}}^g(\tau)|^2. \quad (4.53)$$

Pero la convergencia de esta suma es precisamente la condición necesaria y suficiente (4.46) para la implementabilidad unitaria de la dinámica, implementabilidad que estamos asumiendo para la cuantización determinada por $(c_{\vec{k}}(\tau), c_{\vec{k}}^\dagger(\tau))$. Por tanto, las dos cuantizaciones consideradas son unitariamente equivalentes, como se pretendía demostrar.

Concluimos así que el criterio de invariancia bajo las isometrías continuas y unitariedad de la dinámica selecciona una única clase de equivalencia de representaciones de Fock.

4.4. Conclusiones

En este capítulo hemos investigado la unicidad de la cuantización de Fock de campos escalares con masa m que están mínimamente acoplados a espaciotiempos de tipo Bianchi I con

secciones espaciales compactas. Así se ha alcanzado una extensión al caso anisótropo de los resultados previamente obtenidos para cosmologías homogéneas e isótropas planas [127, 130]. En particular, se ha demostrado que los requisitos de: i) invariancia del vacío bajo las isometrías espaciales continuas y ii) una dinámica cuántica implementable como un operador unitario en el espacio de Fock, seleccionan una única representación de Fock, salvo equivalencia unitaria, eliminándose por tanto la ambigüedad típica de TCC en espaciotiempos curvos. Más allá de este resultado, se ha demostrado, además, que el criterio de exigir estos requisitos determina qué parte de la evolución de Klein-Gordon debe ser tratada como una dependencia explícita en el tiempo y qué parte ha de implementarse como una dinámica cuántica unitaria.

La demostración ha sido posible gracias a un análisis del comportamiento asintótico de la dinámica clásica del sistema, en el régimen en que los autovalores del operador de Laplace-Beltrami en T^3 , caracterizados por su número de onda k , tienden a infinito. En particular, la dinámica procedente de la ecuación de Klein-Gordon, tras haber llevado a cabo una transformación canónica dependiente del tiempo por conveniencia, resulta estar dictada por una suma infinita de hamiltonianos para cada modo de Fourier en T^3 que, salvo por un factor global que depende del modo, recuerdan a los típicos de osciladores armónicos con potenciales dependientes del tiempo. Esta dinámica puede resolverse analíticamente en el orden dominante y primer orden subdominante, en una expansión asintótica en el régimen en que k tiende a infinito. La transformación canónica introducida no es local, por depender del modo el cambio en las variables de configuración y momento, es decir, por depender de propiedades globales del operador de Laplace-Beltrami. En el escenario cosmológico considerado, esta no localidad puede entenderse como un reflejo de que las hipersuperficies espaciales no son isótropas. En contraste, la transformación canónica requerida en situaciones isótropas para absorber la parte no unitaria de la dinámica de Klein-Gordon está definida de forma independiente en cada punto del espaciotiempo. De hecho, en términos de la variable de configuración, esta transformación «local» es simplemente un reescalado con el factor de escala de la cosmología de FLRW [127, 130].

Hemos centrado toda la atención en aquellas representaciones de Fock, o en sus estructuras complejas asociadas, que son invariantes bajo las isometrías de Killing espaciales del fondo cosmológico y que tratan de igual manera los modos de Fourier sinusoidales y cosinusoidales, por obedecer las mismas ecuaciones dinámicas. Las estructuras complejas que son invariantes bajo todas estas simetrías pueden caracterizarse mediante dos coeficientes para cada vector de ondas \vec{k} . Estos coeficientes, $f_{\vec{k}}$ y $g_{\vec{k}}$, definen para cada modo las transformaciones lineales del espacio de fases que determinan las correspondientes variables de destrucción y creación en cualquier representación invariante. Dentro de todo este conjunto de representaciones de Fock, hemos considerado familias dependientes del tiempo descritas por dos secuencias de funciones $f_{\vec{k}}(\tau)$ y $g_{\vec{k}}(\tau)$, cuyos elementos pueden conectarse entre sí a través de una dinámica no trivial que es unitariamente implementable en la teoría cuántica. Así, junto con la dependencia explícita restante del campo de Klein-Gordon y su momento, esta dinámica unitaria tiene que reproducir la evolución del sistema de campo completo. El requisito de implementabilidad unitaria para una dinámica no trivial procedente de la ecuación de Klein-Gordon restringe de hecho dicha evolución, al fijar el comportamiento asintótico de las funciones $f_{\vec{k}}(\tau)$ y $g_{\vec{k}}(\tau)$ cuando $k \rightarrow \infty$. En efecto, hemos demostrado que el término asintótico dominante en cada una de estas funciones es independiente del tiem-

po, gracias a la transformación canónica que habíamos realizado anteriormente. Tampoco depende de la masa del campo y es sensible al modo de Fourier \vec{k} únicamente a través de su número de ondas k [véase la ecuación (4.45)].

La dependencia explícita en el tiempo de la transformación canónica extrae, por tanto, aquella parte de las trayectorias dinámicas de Klein-Gordon que no puede implementarse unitariamente en la teoría cuántica. El resto de la misma puede representarse entonces como una transformación cuántica unitaria, que está fijada salvo contribuciones asintóticamente subdominantes que, en cualquier caso, respetan la equivalencia unitaria entre las representaciones de Fock relacionadas por la evolución.

Por último, hemos demostrado que todas estas familias dinámicas de representaciones de Fock, seleccionadas por el criterio de invariancia bajo isometrías y dinámica unitaria, son unitariamente equivalentes entre sí. Por tanto, nuestro criterio fija una única representación de Fock, salvo equivalencia unitaria, y una dinámica cuántica no trivial que es esencialmente única. Un representante particularmente simple de esta clase de equivalencia de vacíos de Fock es el definido por las relaciones (4.48), y que sería el que se elegiría de forma natural para un campo sin masa en un espaciotiempo estático. Merece la pena recalcar que la prueba de unicidad expuesta no requiere que el parámetro temporal esté definido en toda la recta real, ni siquiera que lo esté en una región no acotada de la misma. Basta con que exista un intervalo conexo en que puedan aplicarse los argumentos dados. En particular, basta con que la función $b_{\vec{k}}$ dada en (4.14) esté bien definida en dicho intervalo y que el potencial dependiente del tiempo $s_{\vec{k}}(\tau)$ tenga una derivada integrable en cualquier subintervalo cerrado del mismo. Por ejemplo, $b_{\vec{k}}$ podría diverger fuera del intervalo permitido si uno de los factores de escala se hiciera nulo allí, situación en la que se alcanzaría la singularidad cosmológica.

El resultado presentado en este capítulo es el primero donde el criterio de unicidad para la cuantización de Fock de campos escalares, basado en la unitariedad de la dinámica, se aplica en un espaciotiempo que no es conformemente ultraestático. Por tanto, este ejemplo proporciona indicios acerca de cómo una cuantización de campos compatible con las simetrías del sistema y con un concepto no trivial de dinámica unitaria puede extenderse a TCC en espaciotiempos homogéneos generales.

Capítulo 5

Cuantización de Fock de campos de Dirac en espaciotiempos $2+1$

En este capítulo investigaremos la aplicabilidad del criterio de unitariedad de la dinámica cuántica en la cuantización de Fock de campos de Dirac, masivos y sin masa, en espaciotiempos conformemente ultraestáticos tridimensionales. Un estudio que comparte los mismos objetivos para espaciotiempos cosmológicos, cuádrimensionales, se presentará en el siguiente capítulo de esta tesis. En realidad, a diferencia de lo que ocurre con el campo escalar y debido a la naturaleza espinorial de los campos fermiónicos, es necesario considerar por separado su propagación en espaciotiempos con diferentes dimensiones. La motivación del presente estudio puede entenderse entonces desde el punto de vista de comparar entre las propiedades de la descripción cuántica de campos de Dirac en distintas dimensiones, incluyendo la plausibilidad de una evolución unitaria. No obstante, nuestra investigación cuenta con un interés adicional, tal vez mayor desde el punto de vista físico, originado por la aparición de campos espinoriales que se propagan en espaciotiempos efectivos de dimensión $2 + 1$ en materia condensada. Un ejemplo muy notable de este tipo de fenómenos se da en sistemas de grafeno, donde las excitaciones electrónicas de baja energía sufren una evolución característica de un campo fermiónico en tres dimensiones. El comportamiento típico de estas excitaciones se simula a través de fermiones de Dirac sin masa [6], pero en ciertos escenarios se han llegado a observar evidencias de que dichas excitaciones pueden poseer una masa no nula de forma efectiva [134, 135]. Los resultados obtenidos en este capítulo pueden contribuir a mejorar los fundamentos en que se basan los estudios teóricos de los fenómenos fermiónicos que se dan en este tipo de materiales. En particular, el requisito de un concepto de dinámica unitaria en situaciones no estacionarias conlleva una caracterización muy precisa de aquellas excitaciones del campo que, en $2 + 1$ dimensiones, preservan la coherencia cuántica de los estados en el tiempo.

Más en concreto, demostraremos que las condiciones de invariancia del vacío bajo las simetrías de la ecuación de Dirac, junto a una implementabilidad unitaria de la dinámica fermiónica, forman de nuevo un criterio válido para seleccionar una única familia de representaciones de Fock unitariamente equivalentes entre sí. Esta unicidad está garantizada una vez se fija un convenio para distinguir las nociones de partículas y antipartículas. Además, nuestro criterio determina, en efecto, la evolución cuántica unitaria que sufren los operadores de destrucción y creación del campo de Dirac, salvo redefiniciones unitarias que son

irrelevantes en el régimen «ultravioleta». La variación en el tiempo restante del campo, en la imagen de Heisenberg, se da entonces a través de una dependencia explícita en el factor de escala de los espaciotiempos en cuestión. En este sentido, todas aquellas excitaciones de partícula y antipartícula que conservan la información en el tiempo quedan caracterizadas.

Los resultados de este capítulo de la tesis están contenidos en la referencia [136].

5.1. Espinor de Dirac en espaciotiempos conformemente ultraestáticos

Consideremos campos fermiónicos mínimamente acoplados a ciertos espaciotiempos fijos, ignorando una posible influencia dinámica de los campos sobre la geometría. Dichos espaciotiempos serán variedades tridimensionales globalmente hiperbólicas con topología $\mathbb{I} \times \Sigma$, donde $\mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo conexo de la recta real, mientras que Σ es una superficie de Cauchy espacial cualquiera, bidimensional, que suponemos conexa y compacta. El conjunto de métricas espaciotemporales que discutiremos describen geometrías conformemente ultraestáticas y pueden escribirse como sigue:

$$ds^2 = a^2(\eta) (-d\eta^2 + {}^0h_{\alpha\beta}(\vec{x})dx^\alpha dx^\beta). \quad (5.1)$$

El factor de escala $a(\eta)$ recoge toda la información no estacionaria de la métrica. Salvo este factor, ${}^0h_{\alpha\beta}$ es la métrica inducida en las superficies espaciales parametrizadas por el tiempo conforme η .

Los campos de Dirac se acoplan a estos espaciotiempos a través de las tríadas e_a^μ , definidas en (3.3), que están determinadas por la métrica salvo transformaciones gauge locales del grupo $SO(2, 1)$ (ortocrono). Además, pueden definirse de forma global en los espaciotiempos considerados, al ser orientables sus variedades tridimensionales subyacentes [75]. Por lo tanto, puede definirse una estructura de espín sobre ellos, así como sus campos espinoriales asociados [73]. Más concretamente, en tres dimensiones, los campos fermiónicos complejos quedan localmente representados por espinores Ψ de dos componentes. Esto se debe a que cualquiera de las dos representaciones irreducibles complejas del álgebra de Clifford (3.8) correspondiente está generada por matrices de Dirac 2×2 [73]. Elegiremos la siguiente representación para ellas:

$$\gamma^0 = i \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = i \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.2)$$

Por último, recordamos que las dos componentes del espinor de Dirac son variables de Grassmann que capturan la naturaleza anticonmutante del campo.

La acción del sistema fermiónico es:

$$I_f = -i \int d\eta d^2\vec{x} \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} (\Psi^\dagger \gamma^0 e_a^\mu \gamma^a \nabla_\mu^S \Psi - \text{h.c.}) - m \Psi^\dagger \gamma^0 \Psi \right], \quad (5.3)$$

donde m es la masa del campo de Dirac y h.c. denota el hermítico conjugado del sumando anterior. La acción de la versión espinorial de la derivada covariante de Levi-Civita sobre los

espinores viene dada localmente por [73]:

$$\nabla_\mu^S \Psi = \partial_\mu \Psi - \frac{1}{4} \omega_\mu^{ab} \gamma_b \gamma_a \Psi, \quad (5.4)$$

donde ω_μ^{ab} define la uno-forma de la conexión de espín, es antisimétrica en los índices ab y adopta la expresión local:

$$\omega_\mu^{ab} = \frac{1}{2} (e^{\nu a} \partial_\mu e_\nu^b + e^{\nu a} e^{\lambda b} \partial_\lambda g_{\mu\nu} - e^{\nu b} \partial_\mu e_\nu^a - e^{\nu b} e^{\lambda a} \partial_\lambda g_{\mu\nu}). \quad (5.5)$$

En este punto de la discusión, y a la vista de la exfoliación ortogonal permitida por las métricas (5.1), resulta conveniente llevar a cabo una fijación parcial del gauge, eligiendo $n^\mu e_\mu^a = \delta_0^a$. Esta restricción se traduce en una reducción del grupo de estructura del fibrado de sistemas de referencia ortonormales y orientados, pasando su grupo de gauge de ser $SO(2,1)$ (ortocrono) a ser el grupo de rotaciones bidimensionales $SO(2)$ [87]. A su vez, esta reducción induce de forma natural una restricción de la estructura de espín al fibrado espinorial que recubre doblemente el de sistemas de referencia reducido. Esta restricción está bien definida y puede entenderse como una asociación de estructuras de espín a cada una de las superficies espaciales bidimensionales [73]. Supondremos que todas estas estructuras de espín coinciden, al poder identificarse todas las secciones de Cauchy con una inicial arbitraria Σ_0 , correspondiente a un valor η_0 de la función global del tiempo. La utilidad de esta fijación parcial del gauge se hace patente al garantizar una separación de la dependencia temporal y espacial de los campos de Dirac en todo el análisis subsiguiente. Una vez llevada a cabo, los campos se comportan geoméricamente, para cada valor del parámetro temporal, como espinores definidos en cada una de las variedades espaciales bidimensionales que exfolian el espaciotiempo. Equivalentemente, pueden entenderse como familias uniparamétricas, de parámetro η , de espinores definidos sobre Σ_0 . En particular, será posible utilizar directamente las propiedades espectrales bien conocidas del operador de Dirac definido en la superficie espacial Σ_0 , en lugar de trabajar con el operador de Dirac en toda la variedad lorentziana [73]. En efecto, con esta elección de gauge, la derivada covariante que actúa sobre espinores simplifica su expresión local:

$$\nabla_0^S \Psi = \partial_0 \Psi, \quad \nabla_\alpha^S \Psi = {}^{(2)}\nabla_\alpha^S \Psi - \frac{1}{4} \tilde{\omega}_\alpha^{ab} \gamma_b \gamma_a \Psi, \quad (5.6)$$

donde ${}^{(2)}\nabla_\alpha^S$ es la versión espinorial de la derivada covariante de Levi-Civita en la superficie espacial con métrica riemanniana ${}^0h_{\alpha\beta}$, mientras que:

$$\tilde{\omega}_\alpha^{ab} = \frac{1}{2} (e^{\beta a} e^{0b} \partial_0 g_{\alpha\beta} - e^{\beta b} e^{0a} \partial_0 g_{\alpha\beta}). \quad (5.7)$$

Puede comprobarse entonces que:

$$e_a^\mu \gamma^a \nabla_\mu^S \Psi = a^{-1} \gamma^0 \left(\partial_0 + \frac{a'}{a} \right) \Psi - i a^{-1} \not{D} \Psi, \quad (5.8)$$

donde \not{D} denota el operador de Dirac en la variedad riemanniana Σ_0 con métrica ${}^0h_{\alpha\beta}$ [73], mientras que una prima como superíndice indica la derivada con respecto al tiempo η .

5.1.1. Expansión en modos

La fijación parcial del gauge simplifica el producto interno (3.10) del espacio de condiciones iniciales \mathcal{P}_Ψ a:

$$(\Psi_1, \Psi_2)_D = a_0^2 \int_{\Sigma_0} d^2\vec{x} \sqrt{{}^0h} \Psi_1^\dagger(\vec{x}) \Psi_2(\vec{x}), \quad (5.9)$$

donde $a_0 = a(\eta_0)$ y 0h es el determinante de ${}^0h_{\alpha\beta}$. Recordemos que este producto no varía sobre las trayectorias dinámicas dictadas por la ecuación de Dirac si se evoluciona correspondientemente la superficie de Cauchy, es decir, evolucionando las variables métricas [78].

Gracias a la completitud geodésica de las superficies espaciales [137], y en particular de Σ_0 , el operador de Dirac \mathcal{D} es esencialmente autoadjunto en el producto interno (3.10). Además, en una variedad compacta, como lo son las consideradas aquí, posee un espectro discreto cuyos autovalores llamaremos $\pm\omega_n$, etiquetándolos por números naturales n tales que $\omega_n \geq 0$ crece para valores crecientes de n [73]. El espacio de condiciones iniciales definido sobre Σ_0 admite entonces una base formada por los autoespinores del operador de Dirac. Llamaremos $\rho^{np}(\vec{x})$ los autoespinores con autovalor positivo ω_n tales que sean ortonormales con respecto a (5.9) cuando se reescalan con el factor a_0^{-1} . La etiqueta p da cuenta de la degeneración del autoespacio correspondiente. Conviene resaltar que \mathcal{D} anticonmuta con $\gamma^1\gamma^2 = \gamma^0$. Esta propiedad es general para cualquier operador de Dirac en una variedad de dimensión par d , si se toma la correspondiente generalización del elemento anticonmutante dada por $\gamma^1\dots\gamma^d$ [73]. Gracias a ello, pueden elegirse los autoespinores con autovalor negativo $-\omega_n$ como $\bar{\sigma}^{np}(\vec{x}) = -\gamma^0\rho^{np}(\vec{x})$. Estos autoespinores forman automáticamente un conjunto ortonormal, en el mismo sentido en que ocurría con $\{\rho^{np}(\vec{x})\}$.

Sea g_n la degeneración de cada autoespacio, tal que, dado un cierto n , la etiqueta p toma valores que van de 1 a g_n . Su valor concreto depende de los detalles espectrales de \mathcal{D} , es decir, de las superficies espaciales consideradas. No obstante, para alcanzar los objetivos de este capítulo, basta con conocer su comportamiento en el régimen ultravioleta, cuando $\omega_n \rightarrow \infty$. Se define la llamada función de contaje $\chi_{\mathcal{D}}(\omega)$ del operador de Dirac, en una variedad riemanniana compacta de dimensión d , como aquella que determina el número de autovalores positivos de \mathcal{D} que son más pequeños o iguales que ω (incluyendo la degeneración). Un resultado bien conocido en el análisis espectral de este tipo de operadores, conocido comúnmente como fórmula asintótica de Weyl [138], afirma que $\chi_{\mathcal{D}}(\omega)$ crece, como mucho, tan rápido como ω^d cuando ω tiende a infinito. En los espaciotiempos considerados, con $d = 2$, puede concluirse, por tanto, que la degeneración se comporta asintóticamente como $g_n = o(\omega_n^2)$ para grandes valores de n , donde el símbolo $o(\omega_n^2)$ denota términos despreciables comparados con ω_n^2 .

Una vez llevada a cabo la fijación parcial del gauge previamente explicada, puede hacerse uso de los autoespinores del operador de Dirac en Σ_0 para expandir cualquier familia dinámica de elementos de \mathcal{P}_Ψ como:

$$\Psi(\eta, \vec{x}) = a^{-1}(\eta) \sum_{np} [s_{np}(\eta)\rho^{np}(\vec{x}) + \bar{r}_{np}(\eta)\bar{\sigma}^{np}(\vec{x})]. \quad (5.10)$$

Como ya habíamos adelantado, queda claro entonces que la dependencia espacial y temporal de los espinores se separa. La dependencia temporal queda capturada por los coeficientes de

los modos s_{np} y \bar{r}_{np} , que además recogen la naturaleza anticonmutante del campo fermiónico, por lo que son variables de Grassmann.

Las relaciones de anticonmutación canónicas del campo pueden expresarse a través del álgebra bajo corchetes de Dirac de los modos s_{np} , \bar{r}_{np} y sus complejos conjugados [32, 77]. Los únicos corchetes no nulos resultan ser:

$$\{s_{np}, \bar{s}_{np}\} = -i, \quad \{r_{np}, \bar{r}_{np}\} = -i, \quad (5.11)$$

y son simétricos debido a la anticonmutatividad de las variables de Grassmann [79]. Por tanto, darán lugar a anticonmutadores en la teoría cuántica. Hacemos notar que, debido a la extracción explícita del factor de escala en la expansión (5.10), estos corchetes son canónicos y no dependen de las variables métricas del fondo espaciotemporal.

5.1.2. Dinámica fermiónica

Si se introduce la descomposición (5.10) del campo fermiónico en la acción (5.3) y se utilizan las propiedades mencionadas de los autoespinores del operador de Dirac se obtiene la expresión [136]:

$$\begin{aligned} I_f = & \int d\eta \sum_{np} \left[\frac{i}{2} (\bar{s}_{np} s'_{np} + s_{np} \bar{s}'_{np} + \bar{r}_{np} r'_{np} + r_{np} \bar{r}'_{np}) \right. \\ & \left. + \omega_n (r_{np} s_{np} + \bar{s}_{np} \bar{r}_{np}) - ima (r_{np} s_{np} - \bar{s}_{np} \bar{r}_{np}) \right]. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Tomando derivadas variacionales de Grassmann (por ejemplo por la izquierda) en la acción y haciéndola estacionaria bajo ellas, se obtienen las ecuaciones de Dirac para los modos fermiónicos:

$$s'_{np} = i(\omega_n + ima)\bar{r}_{np}, \quad r'_{np} = -i(\omega_n + ima)\bar{s}_{np}, \quad (5.13)$$

y sus complejas conjugadas. Las ecuaciones dinámicas son iguales para todos aquellos modos que comparten la etiqueta n , independientemente del valor que tome p . Además, pueden combinarse dando lugar a una ecuación ordinaria de segundo orden que tiene la misma forma para todos los modos degenerados. Si llamamos z_{np} tanto a s_{np} como a r_{np} , dicha ecuación diferencial es (cuando $m \neq 0$):

$$z''_{np} = -(\omega_n^2 + m^2 a^2)z_{np} + i \frac{a'm}{\omega_n + ima} z'_{np}. \quad (5.14)$$

Como hemos apuntado antes, sus soluciones generales no dependen de la etiqueta p , salvo a través de las condiciones iniciales, y pueden escribirse como combinaciones lineales de las dos soluciones independientes complejas:

$$\Omega_n^1(\eta) = e^{i\Theta_n^1(\eta)}, \quad \Omega_n^2(\eta) = e^{-i\Theta_n^2(\eta)}. \quad (5.15)$$

Sean $\Theta_n^l(\eta_0) = \Theta_{n,0}^l$ y $(\Theta_n^l)'(\eta_0) = \Theta_{n,1}^l$, para $l = 1, 2$, las condiciones en el tiempo arbitrario inicial η_0 que determinan estas soluciones independientes, tales que:

$$\Omega_{n,0}^1 = e^{i\Theta_{n,0}^1}, \quad \Omega_{n,0}^2 = e^{-i\Theta_{n,0}^2}. \quad (5.16)$$

Estas condiciones iniciales están relacionadas con las de los modos fermiónicos, que llamaremos s_{np}^0 y r_{np}^0 , y con sus complejas conjugadas a través de las ecuaciones de Dirac (5.13). Teniendo en cuenta dicha relación, es posible deducir la expresión que toman los modos a cualquier valor del tiempo η en el intervalo de interés, en términos de sus condiciones iniciales y de las dos soluciones independientes de la ecuación (5.14). En efecto, la evolución de los modos resulta venir dada por la siguiente transformación lineal de sus datos iniciales:

$$\begin{pmatrix} s_{np} \\ \bar{r}_{np} \end{pmatrix}_\eta = \mathcal{V}_n(\eta, \eta_0) \begin{pmatrix} s_{np} \\ \bar{r}_{np} \end{pmatrix}_{\eta_0}, \quad (5.17)$$

donde [136]:

$$\mathcal{V}_n(\eta, \eta_0) = \begin{pmatrix} \Delta_n^2 e^{i\Theta_n^1(\eta)} + \Delta_n^1 e^{-i\Theta_n^2(\eta)} & \zeta_n^1 e^{i\Theta_n^1(\eta)} - \zeta_n^2 e^{-i\Theta_n^2(\eta)} \\ \bar{\zeta}_n^2 e^{i\bar{\Theta}_n^2(\eta)} - \bar{\zeta}_n^1 e^{-i\bar{\Theta}_n^1(\eta)} & \bar{\Delta}_n^2 e^{-i\bar{\Theta}_n^1(\eta)} + \bar{\Delta}_n^1 e^{i\bar{\Theta}_n^2(\eta)} \end{pmatrix}, \quad (5.18)$$

y el subíndice η en los vectores columna significa evaluación en ese valor del tiempo conforme. Además se han definido las constantes:

$$\Delta_n^1 = \frac{\Theta_{n,1}^1}{\Omega_{n,0}^2(\Theta_{n,1}^1 + \Theta_{n,1}^2)}, \quad \Delta_n^2 = \frac{\Theta_{n,1}^2}{\Omega_{n,0}^1(\Theta_{n,1}^1 + \Theta_{n,1}^2)}, \quad (5.19)$$

$$\zeta_n^l = \frac{\omega_n + ima_0}{\Omega_{n,0}^l(\Theta_{n,1}^1 + \Theta_{n,1}^2)}. \quad (5.20)$$

Al igual que vimos en el capítulo anterior, el estudio de la implementabilidad unitaria de la dinámica fermiónica únicamente requiere de un conocimiento acerca del comportamiento asintótico, en el régimen en que $\omega_n \rightarrow \infty$, de la secuencia de matrices de evolución $\mathcal{V}_n(\eta, \eta_0)$. Con el objetivo de llevar a cabo este análisis asintótico con la mayor facilidad posible, buscaremos, en primer lugar, un cambio de variable $z_{np} = f_n(\eta)\tilde{z}_{np}$ tal que la ecuación diferencial resultante para \tilde{z}_{np} no involucre su primera derivada. Es sencillo comprobar que el cambio deseado se obtiene eligiendo:

$$f_n(\eta) = \sqrt{\tilde{\omega}_n(\eta)}, \quad \tilde{\omega}_n(\eta) = \omega_n + ima(\eta). \quad (5.21)$$

La nueva variable satisface la ecuación:

$$\tilde{z}_{np}'' + \left[|\tilde{\omega}_n|^2 - 2\left(\frac{f_n'}{f_n}\right)^2 + \frac{f_n''}{f_n} \right] \tilde{z}_{np} = 0. \quad (5.22)$$

Sean pues \tilde{z}_{np}^l , con $l = 1, 2$, dos soluciones independientes de esta ecuación que adopten las expresiones genéricas:

$$\tilde{z}_{np}^l = \exp \left[-i(-1)^l \bar{\Theta}_n^l \right], \quad \text{con} \quad (\bar{\Theta}_n^l)' = \omega_n + \Lambda_n^l, \quad (5.23)$$

donde Λ_n^l son ciertas funciones dependientes de ω_n y del tiempo, que recogen la libertad disponible para que cada \tilde{z}_{np}^l provea, en efecto, una solución de la ecuación (5.22). Para que esto ocurra, dichas funciones Λ_n^l han de satisfacer las siguientes ecuaciones de Riccati:

$$(\Lambda_n^l)' = i(-1)^l \left[(\Lambda_n^l)^2 + 2\omega_n \Lambda_n^l - a^2 m^2 + 2\left(\frac{f_n'}{f_n}\right)^2 - \frac{f_n''}{f_n} \right]. \quad (5.24)$$

Asumiremos por el momento que $\Lambda_n^l = \mathcal{O}(\omega_n^{-1})$ en el límite ultravioleta y que, por lo tanto, estas funciones tienden a primer orden asintótico a las soluciones $\tilde{\Lambda}_n^l$ de las ecuaciones:

$$(\tilde{\Lambda}_n^l)' = i(-1)^l [2\omega_n \tilde{\Lambda}_n^l - a^2 m^2] + (-1)^l \frac{ma''}{2\omega_n}. \quad (5.25)$$

Supondremos, además, que la segunda derivada del factor de escala existe y es integrable en cualquier intervalo temporal cerrado $[\eta, \eta_0]$ de interés en la evolución. En ese caso, las soluciones con condiciones iniciales $\tilde{\Lambda}_n^l(\eta_0) = 0$ son, tras una integración por partes:

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda}_n^l &= \frac{m^2}{2\omega_n} \left(a^2 - a_0^2 e^{2i(-1)^l \omega_n \Delta\eta} \right) \\ &\quad - \frac{m^2}{\omega_n} e^{2i(-1)^l \omega_n \eta} \int_{\eta_0}^{\eta} d\tilde{\eta} a'(\tilde{\eta}) a(\tilde{\eta}) e^{-2i(-1)^l \omega_n \tilde{\eta}} + \mathcal{O}(\omega_n^{-2}), \end{aligned} \quad (5.26)$$

donde $\Delta\eta = \eta - \eta_0$. Por lo tanto, podemos concluir que existe una función positiva $C(\eta)$, independiente de ω_n , tal que el módulo de $\tilde{\Lambda}_n^l(\eta)$ está acotado superiormente por $C(\eta)/\omega_n$. Estas funciones $\tilde{\Lambda}_n^l$ tienen entonces el comportamiento ultravioleta $\mathcal{O}(\omega_n^{-1})$ y, confirmando nuestra suposición previa, pueden tomarse como soluciones a las ecuaciones (5.24), con condiciones iniciales $\Lambda_n^l(\eta_0) = 0$, salvo correcciones que son asintóticamente subdominantes.

Ahora bien, el cambio de variable $z_{np} = f_n \tilde{z}_{np}$ da lugar a la siguiente relación entre las funciones $\tilde{\Theta}_n^l$, introducidas en la ecuación (5.23), y $(-1)^l i$ veces el logaritmo de las soluciones independientes originales, dadas en la definición (5.15):

$$(\Theta_n^l)' = \omega_n - \frac{(-1)^l ma'}{2(\omega_n + ima)} + \Lambda_n^l. \quad (5.27)$$

Con las condiciones iniciales $\Theta_n^l(\eta_0) = \Theta_{n,0}^l = 0$ se tiene entonces:

$$\Theta_n^l = \omega_n \Delta\eta + \frac{i}{2} (-1)^l \ln \left(\frac{\omega_n + ima}{\omega_n + ima_0} \right) + \int_{\eta_0}^{\eta} d\tilde{\eta} \Lambda_n^l(\tilde{\eta}). \quad (5.28)$$

Por otra parte, la condición $\Lambda_n^l(\eta_0) = 0$ determina para $(\Theta_n^l)'$ el valor inicial:

$$\Theta_{n,1}^l = \omega_n - \frac{(-1)^l ma'_0}{2(\omega_n + ima_0)}, \quad (5.29)$$

donde $a'_0 = a'(\eta_0)$.

En resumen, si se suponen ciertas condiciones razonables de regularidad en el factor de escala y sus derivadas, las dos soluciones independientes (5.15) de la ecuación (5.14) pueden tomarse como:

$$\Theta_n^l = \omega_n \Delta\eta + \int_{\eta_0}^{\eta} d\tilde{\eta} \Sigma_n^l(\tilde{\eta}), \quad \Sigma_n^l(\tilde{\eta}) = \Lambda_n^l(\tilde{\eta}) - \frac{(-1)^l a'(\tilde{\eta})m}{2[\omega_n + ima(\tilde{\eta})]}, \quad (5.30)$$

donde $\Lambda_n^l(\eta)$ es una función que, en el régimen en que $\omega_n \rightarrow \infty$, crece como mucho tan rápido como ω_n^{-1} . Por último, con esta elección de soluciones independientes, las constantes definidas en la ecuación (5.19) resultan ser:

$$\Delta_n^l = \frac{1}{2} - (-1)^l \frac{a'_0 m}{4\omega_n(\omega_n + ima_0)}, \quad \zeta_n^l = \frac{1}{2} + i \frac{ma_0}{2\omega_n}. \quad (5.31)$$

5.2. Cuantización de Fock

Una vez analizada la dinámica de Dirac del sistema, expondremos un estudio de la cuantización de Fock de las relaciones de anticonmutación canónicas asociadas. En primer lugar, aprovecharemos las simetrías de las ecuaciones de evolución (5.13) y centraremos toda la atención en vacíos de Fock que sean invariantes bajo las transformaciones generadas por ellas. Estos vacíos estarán caracterizados por estructuras complejas que conmuten con la acción del grupo correspondiente. A continuación, realizaremos un análisis de la implementabilidad unitaria de las trayectorias dinámicas en el espacio de condiciones iniciales. Para ello, permitiremos que dicha evolución pueda verse modificada con respecto a la de Dirac a través de la introducción de familias generales de funciones que dependen explícitamente del parámetro temporal. La implementabilidad unitaria de la dinámica fijará entonces unívocamente, a orden asintótico dominante, cómo ha de ser dicha modificación y, por tanto, qué familias de representaciones de Fock están permitidas en última instancia por el criterio de unitariedad.

5.2.1. Vacíos invariantes

En la sección 5.1.2 pudimos comprobar que las ecuaciones del movimiento de los modos fermiónicos únicamente acoplan modos s_{np} y \bar{r}_{np} que comparten los mismos valores de las etiquetas n y p . Algo análogo ocurre con sus complejos conjugados. Además, dichas ecuaciones no dependen de la etiqueta de degeneración p . Como consecuencia directa, se tiene que las ecuaciones de campo son invariantes bajo todas aquellas transformaciones que intercambien los autoespinores del operador de Dirac con mismo autovalor ω_n . En general, estas transformaciones no tienen por qué estar en correspondencia directa con las posibles isometrías continuas de las secciones espaciales, con métrica ${}^0h_{\alpha\beta}$, de los espaciotiempos tridimensionales considerados. No obstante, todas estas isometrías, si las hubiere, son un conjunto particular de las simetrías de las ecuaciones dinámicas, ya que el operador de Dirac en las superficies de Cauchy está construido exclusivamente a partir de la métrica ${}^0h_{\alpha\beta}$. De hecho, existen suficientes evidencias [122–125, 127, 130] para creer que, en variedades máximamente simétricas, hay suficientes isometrías continuas como para restringir adecuadamente la cuantización imponiendo la invariancia frente a ellas.

En los espaciotiempos más generales considerados en este capítulo, y después de haber recalcado cuáles son las simetrías dinámicas, parece obvio que cualquier transformación lineal en \mathcal{P}_Ψ que conmute con el grupo de simetrías de las ecuaciones de Dirac debe presentar una forma diagonal en bloques 2×2 . Estos bloques, como mucho, pueden mezclar los coeficientes s_{np} y \bar{r}_{np} que compartan el mismo valor de n y p . Además, si se hace uso de toda la simetría disponible, se puede razonar que los bloques han de ser iguales para todos los modos asociados con el mismo autovalor (en valor absoluto) del operador de Dirac. Estas restricciones llevan de forma inevitable a la conclusión de que todas las estructuras complejas *invariantes* bajo el grupo de simetrías de las ecuaciones de campo están caracterizadas por secuencias de matrices 2×2 etiquetadas por $n \in \mathbb{N}$. En particular, al poder mezclar únicamente los modos s_{np} y \bar{r}_{np} con las mismas etiquetas, las variables de destrucción y creación asociadas [contrapartidas clásicas de los operadores correspondientes en el operador distribucional de campo (3.16)] estarán dadas por combinaciones lineales de tales modos. Designaremos por

a_{np} y b_{np} las respectivas variables de destrucción de partículas y antipartículas, con sus complejas conjugadas dadas por $a_{np}^\dagger = \bar{a}_{np}$ y $b_{np}^\dagger = \bar{b}_{np}$, que son las correspondientes variables de creación. Estas variables han de satisfacer los siguientes corchetes de Dirac, característicos de conjuntos de destrucción y creación:

$$\{a_{np}, a_{np}^\dagger\} = \{b_{np}, b_{np}^\dagger\} = -i, \quad \{a_{np}, b_{np}\} = 0, \quad (5.32)$$

que darán lugar en la teoría cuántica a los anticonmutadores canónicos (3.17).

Consideraremos familias de variables de destrucción y creación dependientes del tiempo asociadas a este tipo de estructuras complejas invariantes. Como ya se ha razonado, para cada valor del tiempo conforme estas variables son combinaciones lineales de los modos s_{np} y \bar{r}_{np} a dicho tiempo. Además, permitiremos que los coeficientes de la combinación varíen de un instante de tiempo a otro. Más concretamente la relación lineal será de la forma:

$$\begin{pmatrix} a_{np} \\ b_{np}^\dagger \end{pmatrix}_\eta = \mathcal{F}_n(\eta) \begin{pmatrix} s_{np} \\ \bar{r}_{np} \end{pmatrix}_\eta, \quad \mathcal{F}_n(\eta) = \begin{pmatrix} f_1^n(\eta) & f_2^n(\eta) \\ g_1^n(\eta) & g_2^n(\eta) \end{pmatrix}. \quad (5.33)$$

Las funciones dependientes del tiempo f_l^n y g_l^n ($l = 1, 2$), junto con sus complejas conjugadas \bar{f}_l^n y \bar{g}_l^n , se suponen continuas y suficientemente suaves como para proporcionar una evolución razonable de las variables de destrucción y creación. Además han de satisfacer las relaciones:

$$|f_1^n|^2 + |f_2^n|^2 = 1, \quad |g_1^n|^2 + |g_2^n|^2 = 1, \quad f_1^n \bar{g}_1^n + f_2^n \bar{g}_2^n = 0, \quad (5.34)$$

que garantizan los corchetes (5.32). Estas relaciones permiten expresar dichas funciones como:

$$g_1^n = \bar{f}_2^n e^{iG^n}, \quad g_2^n = -\bar{f}_1^n e^{iG^n}, \quad f_1^n g_2^n - g_1^n f_2^n = -e^{iG^n}, \quad (5.35)$$

donde G^n es una fase cualquiera. Por lo tanto, únicamente se requiere de una de las funciones $\{f_l^n, g_l^n\}$, junto con dos fases para cada n , para caracterizar por completo las familias de variables de destrucción y creación aquí consideradas.

Insistimos en que las familias de destrucción y creación (5.33) definen trayectorias dinámicas que difieren, en general, de la evolución de los modos s_{np} y \bar{r}_{np} , al compensarse parte de esa evolución mediante la dependencia explícita en el tiempo de \mathcal{F}_n . En efecto, las condiciones (5.34) garantizan la invertibilidad de la relación lineal (5.33) para todos los tiempos de interés. Si se sustituye dicha inversión en la expansión (5.10) del campo de Dirac, se obtiene una expresión para él dada en términos de las variables de destrucción y creación consideradas. Una simple inspección de esta expresión muestra claramente que la evolución dinámica del campo Ψ no viene dada exclusivamente por la que corresponde a las variables de destrucción y creación, sino que además contribuye una parte explícitamente dependiente del tiempo. Esta última procede, por supuesto, tanto de \mathcal{F}_n como del factor de escala extraído directamente, por conveniencia, en el análisis previo de la dinámica, en (5.10). La única parte de la evolución a la que impondremos una implementabilidad unitaria en la teoría cuántica (que en principio podría ser toda la dinámica de Dirac, dada la libertad al elegir las funciones $\{f_l^n, g_l^n\}$) será aquella asociada a las variables de destrucción y creación.

5.2.2. Evolución unitaria

La evolución de cualquiera de las familias invariantes de destrucción y creación introducidas anteriormente viene dada por una transformación de Bogoliubov lineal. Dicha transformación está formada por una secuencia de matrices $\mathcal{B}_n(\eta, \eta_0)$ que relacionan las variables consideradas a dos tiempos diferentes: el inicial arbitrario η_0 y cualquier otro η de interés. Explícitamente:

$$\begin{pmatrix} a_{np} \\ b_{np}^\dagger \end{pmatrix}_\eta = \mathcal{B}_n(\eta, \eta_0) \begin{pmatrix} a_{np} \\ b_{np}^\dagger \end{pmatrix}_{\eta_0}, \quad \mathcal{B}_n(\eta, \eta_0) = \begin{pmatrix} \alpha_n^f(\eta, \eta_0) & \beta_n^f(\eta, \eta_0) \\ \beta_n^g(\eta, \eta_0) & \alpha_n^g(\eta, \eta_0) \end{pmatrix}. \quad (5.36)$$

Recordamos que esta transformación es implementable como un operador unitario en el espacio de Fock definido, por ejemplo, por las variables de destrucción y creación en el tiempo inicial si y solo si:

$$\sum_n g_n |\beta_n^f(\eta, \eta_0)|^2 < \infty \quad \text{y} \quad \sum_n g_n |\beta_n^g(\eta, \eta_0)|^2 < \infty, \quad (5.37)$$

para todo tiempo η del dominio de interés.

Es conveniente tener en cuenta que, en los espaciotiempos tridimensionales con secciones espaciales compactas estudiados, la fórmula asintótica de Weyl [138] afirma que el número $\chi_{\mathcal{D}}(\omega)$ de autoespinores del operador de Dirac con autovalor positivo menor o igual que ω crece asintóticamente como ω^2 . De ello, se sigue que el número de autoespinores con autovalor entre N y $N - 1$ crece, para grandes enteros N , como $N^2 - (N - 1)^2$, es decir, como $2N$ asintóticamente. Por lo tanto, para N suficientemente grande, existe una constante positiva K tal que dicho número está acotado superiormente por KN . Teniendo en cuenta este comportamiento, así como la monotonía de la función decreciente ω^{-2} para $\omega > 0$, puede observarse que, para N_0 suficientemente grande y $N_1 > N_0$ arbitrario, donde $N_0 \geq \omega_{n_0} > N_0 - 1$ y $N_1 \geq \omega_{n_1} > N_1 - 1$:

$$\sum_{n=n_0}^{n_1} \frac{g_n}{\omega_n^4} \leq \sum_{N=N_0}^{N_1} \frac{\chi_{\mathcal{D}}(N) - \chi_{\mathcal{D}}(N - 1)}{(N - 1)^4} \leq \sum_{N=N_0}^{N_1} \frac{K}{N^3}. \quad (5.38)$$

La convergencia de la última suma cuando $N_1 \rightarrow \infty$ permite afirmar que la secuencia $\{\sqrt{g_n \omega_n^{-2}}\}_{n \in \mathbb{N}}$ es de cuadrado sumable, así como cualquier subsecuencia suya.

Las ecuaciones (5.17), (5.33) y (5.36) permiten obtener la siguiente expresión explícita para la transformación de Bogoliubov dinámica: $\mathcal{B}_n(\eta, \eta_0) = \mathcal{F}_n(\eta) \mathcal{V}_n(\eta, \eta_0) \mathcal{F}_n^{-1}(\eta_0)$. En particular sus coeficientes beta están dados por [136]:

$$\begin{aligned} \beta_n^h = & - \frac{1}{h_1^{n,0} k_2^{n,0} - h_2^{n,0} k_1^{n,0}} \left[(\Delta_n^2 h_2^{n,0} - \zeta_n^1 h_1^{n,0}) h_1^n e^{i\Theta_n^1} + (\Delta_n^1 h_2^{n,0} + \zeta_n^2 h_1^{n,0}) h_1^n e^{-i\Theta_n^2} \right. \\ & \left. - (\bar{\Delta}_n^1 h_1^{n,0} - \bar{\zeta}_n^2 h_2^{n,0}) h_2^n e^{i\bar{\Theta}_n^2} - (\bar{\Delta}_n^2 h_1^{n,0} + \bar{\zeta}_n^1 h_2^{n,0}) h_2^n e^{-i\bar{\Theta}_n^1} \right]. \end{aligned} \quad (5.39)$$

Aquí estamos refiriéndonos a $\{h, k\} = \{f, g\}$ como un conjunto, donde h es igual a f o g , mientras que k es el complementario de h . Además, hemos omitido la dependencia explícita

de las funciones en η para simplificar la notación y hemos indicado la evaluación en η_0 con el superíndice 0 (precedido de una coma).

Ahora bien, si se tiene en cuenta el análisis asintótico llevado a cabo para la ecuación de Dirac, que dio como resultado las identidades (5.30) y (5.31), y se emplean las relaciones (5.34) y (5.35), puede deducirse la siguiente fórmula asintótica para el módulo de los coeficientes beta en el régimen ultravioleta [136]:

$$\begin{aligned} |\beta_n^h| &= \frac{1}{2} \left| (h_2^{n,0} - h_1^{n,0}) \left[h_1^n \left(1 + i \int \Sigma_n^1 \right) + h_2^n \left(1 + i \int \bar{\Sigma}_n^2 \right) \right] e^{i\omega_n \Delta \eta} \right. \\ &\quad \left. + (h_2^{n,0} + h_1^{n,0}) \left[h_1^n \left(1 - i \int \Sigma_n^2 \right) - h_2^n \left(1 - i \int \bar{\Sigma}_n^1 \right) \right] e^{-i\omega_n \Delta \eta} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2ma_0}{\omega_n} (h_1^{n,0} h_1^n + h_2^{n,0} h_2^n) \operatorname{sen}(\omega_n \Delta \eta) \right| + \mathcal{O}(\omega_n^{-2}), \end{aligned} \quad (5.40)$$

donde las integrales están tomadas en tiempo conforme sobre el intervalo $[\eta_0, \eta]$.

Las condiciones (5.37) de implementabilidad unitaria imponen un comportamiento muy específico a las funciones h_l^n , tanto en su dependencia temporal como en ω_n . Analizaremos, en primer lugar, estas restricciones en el caso en que el campo fermiónico es masivo. Si se hace uso de nuevo de las relaciones (5.34) y (5.35), pueden distinguirse los dos tipos de escenarios siguientes (por lo menos en un intervalo suficientemente pequeño alrededor de η_0):

- i) h_l^n tiende a cero en el límite asintótico $\omega_n \rightarrow \infty$ para un subconjunto infinito de los números naturales, $n \in \mathbb{N}_l^\downarrow$.

Si se introduce $\{l, \tilde{l}\} = \{1, 2\}$ como un conjunto, al cumplirse que $|h_l^n|^2 + |h_{\tilde{l}}^n|^2 = 1$ se tiene:

$$h_l^n = e^{iH_l^n} \sqrt{1 - |h_{\tilde{l}}^n|^2}, \quad (5.41)$$

donde H_l^n es una fase, posiblemente dependiente del tiempo. Por tanto, vemos que en este caso h_l^n es del orden asintótico de la unidad. Por otra parte, a orden dominante se obtiene:

$$|\beta_n^h| = \left| h_l^{n,0} h_l^n \operatorname{sen}(\omega_n \Delta \eta) \right| + o(1), \quad \forall n \in \mathbb{N}_l^\downarrow, \quad (5.42)$$

donde recordamos que el símbolo $o(\)$ significa que el término es despreciable en comparación con su argumento. Por tanto, es claro que, en este escenario, el módulo de un número infinito de coeficientes beta es del orden de la unidad, así que no se cumplen las condiciones (5.37): la evolución en el tiempo no es implementable mediante un operador unitario.

- ii) Ni h_1^n ni h_2^n tienden a cero en el límite asintótico $\omega_n \rightarrow \infty$, para todo $n \in \mathbb{N}$ mayor que un cierto $\tilde{n} \geq 0$.

Una condición necesaria para alcanzar la sumabilidad cuadrática de las secuencias $\{\sqrt{g_n} \beta_n^h\}_{n \in \mathbb{N}}$ es que no haya ninguna contribución del orden de la unidad en el módulo

de cualquier subconjunto infinito de los coeficientes beta. Quedan, por tanto, dos posibilidades, que no tienen por qué ser mutuamente excluyentes: bien $h_2^n = \pm h_1^n$ salvo términos despreciables en comparación con la unidad, o bien

$$\frac{h_2^n + h_1^n}{h_2^n - h_1^n} = \frac{h_2^{n,0} + h_1^{n,0}}{h_2^{n,0} - h_1^{n,0}} e^{-2i\omega_n \Delta \eta} + o(1), \quad (5.43)$$

para todo η en el dominio de interés y todo $n > \tilde{n}$. Esta última posibilidad puede entenderse como una trivialización de la dinámica que se pretende representar cuánticamente, a la que se llega tras absorber la variación dominante en el tiempo de las fases de los modos fermiónicos s_{np} y r_{np} en la elección de las familias de variables de destrucción y creación. Tal absorción requiere una fijación muy especial de las fases de h_1^n y h_2^n , que descartaremos exigiendo, por ejemplo, que la dependencia temporal en el término dominante de h_l^n sea independiente de ω_n . Más en general, cualquier dependencia temporal de este estilo que trivialice la dinámica del campo de Dirac será automáticamente descartada en todos los análisis siguientes. Por lo tanto, únicamente consideraremos la primera posibilidad admitida por la unitariedad, es decir, que asintóticamente se tenga:

$$h_l^n = \frac{e^{iH_l^n}}{\sqrt{2}} + \vartheta_{h,l}^n, \quad (5.44)$$

$$h_l^n = \pm e^{iH_l^n} \sqrt{1 - |h_l^n|^2} = \pm e^{iH_l^n} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} - \Re(e^{-iH_l^n} \vartheta_{h,l}^n) \right] + \mathcal{O}(|\vartheta_{h,l}^n|^2), \quad (5.45)$$

para un subconjunto infinito de los números naturales, $n \in \mathbb{N}_l^\pm$, donde $\vartheta_{h,l}^n$ es una cierta secuencia de funciones complejas, dependientes del tiempo y de ω_n , que tiende a cero en el límite $\omega_n \rightarrow \infty$. Aquí estamos dividiendo los números naturales en cuatro subconjuntos, $\mathbb{N} = \mathbb{N}_1^+ \cup \mathbb{N}_1^- \cup \mathbb{N}_2^+ \cup \mathbb{N}_2^-$ (salvo un posible número finito de elementos), pudiendo ser hasta tres de ellos vacíos e imponiendo que h_l^n sea h_1^n para $n \in \mathbb{N}_1^\pm$ y h_2^n para $n \in \mathbb{N}_2^\pm$, donde los superíndices \pm indican el signo relativo de h_l^n en la ecuación (5.45). Además, hemos tenido en cuenta las condiciones (5.34) para fijar el orden dominante de ambos coeficientes, así como los subdominantes de h_l^n . Con ello, la expresión asintótica del módulo de los coeficientes beta para todo $n \in \mathbb{N}_l^\pm$ es:

$$|\beta_n^h| = \frac{1}{\sqrt{2}} \left| \left[\vartheta_{h,l}^{n,0} e^{-iH_l^{n,0}} + \Re(e^{-iH_l^{n,0}} \vartheta_{h,l}^{n,0}) - i(-1)^l \frac{ma_0}{\sqrt{2}\omega_n} \right] e^{\pm i\omega_n \Delta \eta} - \left[\vartheta_{h,l}^n e^{-iH_l^n} + \Re(e^{-iH_l^n} \vartheta_{h,l}^n) - i(-1)^l \frac{ma}{\sqrt{2}\omega_n} \right] e^{\mp i\omega_n \Delta \eta} \right|, \quad (5.46)$$

salvo términos despreciables en comparación con $\vartheta_{h,l}^n$ o con ω_n^{-1} , según cuál sea mayor. En la obtención de esta expresión, hemos utilizado el siguiente resultado:

$$\int (\bar{\Sigma}_n^1 - \Sigma_n^2) = \frac{m}{\omega_n} (a - a_0) + \mathcal{O}(\omega_n^{-2}). \quad (5.47)$$

En efecto, recordamos en primer lugar que

$$\bar{\Sigma}_n^1 - \Sigma_n^2 = \bar{\Lambda}_n^1 - \Lambda_n^2 + \frac{\omega_n m a'}{\omega_n^2 + m^2 a^2}, \quad (5.48)$$

en donde $\Lambda_n^l = \tilde{\Lambda}_n^l + c_n^l$, con $\tilde{\Lambda}_n^l$ dada en (5.26) y $c_n^l = o(\omega_n^{-1})$. Las ecuaciones diferenciales que satisfacen las funciones c_n^l puede deducirse fácilmente a partir de (5.24) y (5.25):

$$(c_n^l)' = i(-1)^l \left\{ (c_n^l)^2 + 2(\omega_n + \tilde{\Lambda}_n^l)c_n^l + (\tilde{\Lambda}_n^l)^2 - \frac{a''am^2}{2\tilde{\omega}_n\omega_n} - \frac{3(a'm)^2}{4\tilde{\omega}_n^2} \right\}, \quad (5.49)$$

con $\tilde{\omega}_n = \omega_n + ima$. Al ser $c_n^l = o(\omega_n^{-1})$, y al tener los términos inhomogéneos de estas ecuaciones el comportamiento asintótico $\mathcal{O}(\omega_n^{-2})$, es fácil comprobar que las soluciones con condiciones iniciales $c_n^l(\eta_0) = 0$ son $\mathcal{O}(\omega_n^{-2})$ en el límite $\omega_n \rightarrow \infty$. Se sigue entonces que:

$$\bar{\Sigma}_n^1 - \Sigma_n^2 = \frac{ma'}{\omega_n} + \mathcal{O}(\omega_n^{-2}), \quad (5.50)$$

cuya integral es, efectivamente, (5.47).

Llegado este punto de la discusión, pueden contemplarse dos situaciones, según cuáles sean las propiedades del operador de Dirac en las superficies espaciales consideradas, así como la naturaleza de los subconjuntos de \mathbb{N} introducidos anteriormente, pues puede ocurrir que la secuencia $\{\sqrt{g_n}\omega_n^{-1}\}_{n \in \mathbb{N}_l^\pm}$ sea de cuadrado sumable o no. En caso afirmativo, no resulta demasiado difícil darse cuenta de que los coeficientes beta serán también de cuadrado sumable, incluyendo la degeneración, en el subconjunto \mathbb{N}_l^\pm y para todo tiempo η de interés si y solo si la secuencia $\{\sqrt{g_n}\vartheta_{h,l}^n\}_{n \in \mathbb{N}_l^\pm}$ lo es.

Sea pues la situación alternativa, que ocurre si $\{\sqrt{g_n}\omega_n^{-1}\}_{n \in \mathbb{N}_l^\pm}$ no es una secuencia de cuadrado sumable. En este caso, las condiciones de sumabilidad (5.37), restringidas a cualquiera de los subconjuntos \mathbb{N}_l^\pm en los que deben satisfacerse, implican que la función $\vartheta_{h,l}^n$ ha de ser tal que:

$$\vartheta_{h,l}^n + e^{iH_l^n} \Re(e^{-iH_l^n} \vartheta_{h,l}^n) - i(-1)^l \frac{ma}{\sqrt{2}\omega_n} e^{iH_l^n} = o(\omega_n^{-1}). \quad (5.51)$$

Designaremos por $\tilde{\vartheta}_{h,l}^n$ la expresión del lado izquierdo de esta igualdad, que debe ser despreciable comparada con ω_n^{-1} . Si se introduce entonces el comportamiento asintótico resultante de las funciones h_l^n y h_l^n en el módulo de los coeficientes beta, se obtiene:

$$|\beta_n^h| = \frac{1}{\sqrt{2}} \left| \tilde{\vartheta}_{h,l}^{n,0} e^{-iH_l^{n,0}} e^{\pm i\omega_n \Delta \eta} - \tilde{\vartheta}_{h,l}^n e^{-iH_l^n} e^{\mp i\omega_n \Delta \eta} \right| + \mathcal{O}(\omega_n^{-2}). \quad (5.52)$$

Por lo tanto, dada la independencia funcional de las exponenciales en el tiempo, así como las implicaciones de la ecuación (5.38), puede concluirse (excluyendo una trivialización de la dinámica fermiónica) que las condiciones (5.37) para una implementabilidad unitaria de la evolución se verifican en cualquiera de los subconjuntos \mathbb{N}_l^\pm si y solo si $\{\sqrt{g_n}\tilde{\vartheta}_{h,l}^n\}_{n \in \mathbb{N}_l^\pm}$ es de cuadrado sumable para todo tiempo η en el dominio de interés.

Finalmente, hacemos notar que las relaciones (5.34) garantizan que, una vez se ha fijado h_l^n como f_l^n o g_l^n , los coeficientes beta complementarios $\beta_n^k(\eta, \eta_0)$ tienen módulo igual al de

$\beta_n^h(\eta, \eta_0)$. De este modo, si la primera condición de (4.43) se cumple, entonces la segunda también, y la dinámica de la familia de variables de destrucción y creación considerada es unitariamente implementable en el espacio de Fock asociado a cualquiera de sus elementos.

En resumen, las condiciones necesarias y suficientes para que una familia dinámica de representaciones de Fock invariantes para las relaciones de anticonmutación canónicas del campo de Dirac masivo admita una implementación unitaria de la evolución cuántica son las siguientes. Las funciones h_l^n y h_l^n han de tener el comportamiento asintótico dado en (5.44) y (5.45), para $n \in \mathbb{N}_l^\pm$. Además, los términos $\vartheta_{h,l}^n$ han de ser tales que: a) formen una secuencia de cuadrado sumable, incluyendo degeneración, en el caso de que la secuencia $\{\sqrt{g_n}\omega_n^{-1}\}_{n \in \mathbb{N}_l^\pm}$ sea también de cuadrado sumable o, por el contrario, b) han de satisfacer la relación (5.51) con términos subdominantes que sean de cuadrado sumable. Recordemos que se han separado los números naturales, salvo una colección finita de ellos, en cuatro subconjuntos infinitos \mathbb{N}_1^\pm y \mathbb{N}_2^\pm , pudiendo ser hasta tres de ellos nulos. Los resultados obtenidos son ciertos siempre que las fases dependientes del tiempo que aparecen en la definición de las variables de destrucción y creación no se fijan de tal forma que trivialicen la contribución dinámica dominante de los modos fermiónicos en el régimen asintótico $\omega_n \rightarrow \infty$.

Cerraremos el contenido de esta sección proporcionando una breve discusión de la implementabilidad unitaria de la dinámica en el caso particular en que la masa del campo fermiónico es nula. Es sencillo comprobar que el módulo de los coeficientes beta se simplifica en este caso a:

$$|\beta_n^h| = \frac{1}{2} \left| (h_2^{n,0} - h_1^{n,0})(h_1^n + h_2^n)e^{i\omega_n\Delta\eta} + (h_2^{n,0} + h_1^{n,0})(h_1^n - h_2^n)e^{-i\omega_n\Delta\eta} \right|. \quad (5.53)$$

Si se sigue la misma línea argumental que en el caso masivo, se ve que las familias de variables de destrucción y creación seleccionadas por los criterios de invariancia bajo las simetrías de la ecuación de Dirac e implementabilidad unitaria de la dinámica pueden caracterizarse por completo mediante funciones (h_l^n, h_l^n) que presentan el comportamiento asintótico (5.44) y (5.45) para todo $n \in \mathbb{N}_l^\pm$, siendo las secuencias $\{\sqrt{g_n}\vartheta_{h,l}^n\}_{n \in \mathbb{N}_l^\pm}$ de cuadrado sumable. La elección más simple dentro de esta familia, es la caracterizada por $f_1^n = f_2^n = g_1^n = -g_2^n = 1/\sqrt{2}$, que define una cuantización de Fock para la que los coeficientes beta dinámicos se anulan idénticamente. Dicha cuantización contiene el vacío comúnmente llamado «conforme», que es, por supuesto, estacionario, y que debe su nombre a la simetría conforme que presenta la ecuación de Dirac sin masa en los espaciotiempos considerados.

De esta forma, tanto si la masa es nula como si no lo es, el criterio de implementabilidad unitaria de la dinámica fija por completo (salvo fases) el orden dominante, que es del orden de la unidad, así como el término de orden ω_n^{-1} , si es necesario, en el desarrollo asintótico de (f_l^n, f_l^n) y (g_l^n, g_l^n) . En efecto, el término dominante de dichos desarrollos puede depender del tiempo y de ω_n únicamente a través de una fase, y tiene módulo constante igual a $1/\sqrt{2}$. Un término de orden ω_n^{-1} no tiene por qué estar presente en el caso sin masa, mientras que cuando la masa no es nula puede ser necesario para la implementabilidad unitaria de la dinámica. Si esto ocurre, entonces su contribución no es nula únicamente en una de las funciones h_1^n o h_2^n . Además, dicho término adicional, si fuera necesaria su presencia, ha de tener módulo igual a la función $am/(\sqrt{2}\omega_n)$. Por tanto, las funciones que determinan las variables de destrucción y creación permitidas del campo fermiónico con masa admiten una

dependencia muy específica en ω_n , en la masa y finalmente en el tiempo, a través de la variable métrica no estacionaria del espaciotiempo donde se propaga el campo.

5.3. Unicidad de la representación de Fock

Hemos caracterizado todas las familias de variables de destrucción y creación fermiónicas que, además de compartir las simetrías de las ecuaciones de Dirac, se relacionan mediante una dinámica implementable como un operador unitario en la teoría cuántica. Recordamos que cada una de estas familias determina tanto una familia de representaciones de Fock del campo de Dirac unitariamente equivalentes como una noción de dinámica cuántica que las relaciona. En otras palabras, cada una determina una representación de Fock (por ejemplo aquella asociada a la elección de variables de destrucción y creación a tiempo η_0) y una evolución cuántica en el espacio de Fock correspondiente. Seguiremos llamando cuantización de Fock del sistema fermiónico a esta combinación de representación de Fock y dinámica cuántica asociada. En esta sección demostraremos que, una vez fijado un convenio de partículas y antipartículas, todas las cuantizaciones de Fock con dinámica unitariamente implementable son equivalentes entre sí.

Con el objetivo de demostrar la unicidad, introduciremos como cuantización de Fock de *referencia* aquella caracterizada por unas variables de destrucción y creación tales que:

$$f_1^n = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 - i \frac{am}{\omega_n} \right), \quad f_2^n = \sqrt{1 - |f_1^n|^2}, \quad g_1^n = f_2^n, \quad g_2^n = -\bar{f}_1^n. \quad (5.54)$$

Esta elección es una de las más simples que satisfacen los criterios físicos impuestos. En el caso del campo sin masa, define el ya mencionado vacío conforme. Sea $\{\tilde{a}_{np}^\dagger, \tilde{b}_{np}^\dagger, \tilde{a}_{np}, \tilde{b}_{np}\}$ cualquier otra elección de variables de destrucción y creación que definen una cuantización de Fock invariante con una dinámica no trivial implementable mediante un operador unitario. Estas variables estarán pues caracterizadas por funciones \tilde{f}_l^n y \tilde{g}_l^n que, aparte de satisfacer las relaciones (5.34) y (5.35), tienen la forma asintótica (5.44). Además, las correspondientes secuencias formadas por $\vartheta_{h,l}^n$ o bien cumplen la condición (5.51) con términos subdominantes de cuadrado sumable, o son ellas mismas de cuadrado sumable, incluyendo degeneración, si $g_n \omega_n^{-2}$ fuera sumable sobre \mathbb{N}_l^\pm .

Dadas la cuantización de Fock de referencia y cualquier otra permitida por el criterio impuesto, sus variables de destrucción y creación estarán relacionadas a través de la transformación de Bogoliubov dependiente del tiempo:

$$\begin{pmatrix} \tilde{a}_{np} \\ \tilde{b}_{np}^\dagger \end{pmatrix}_\eta = \mathcal{K}_n(\eta) \begin{pmatrix} a_{np} \\ b_{np}^\dagger \end{pmatrix}_\eta, \quad \mathcal{K}_n = \begin{pmatrix} \kappa_n^f & \lambda_n^f \\ \lambda_n^g & \kappa_n^g \end{pmatrix}. \quad (5.55)$$

De nuevo, la transformación formada por la secuencia de matrices \mathcal{K}_n será implementable mediante un operador unitario en el espacio de Fock de referencia si y solo si:

$$\sum_n g_n |\lambda_n^f(\eta)|^2 < \infty \quad \text{y} \quad \sum_n g_n |\lambda_n^g(\eta)|^2 < \infty, \quad (5.56)$$

para todo tiempo η del dominio de interés. Si esto se cumple, entonces las dos representaciones de Fock definidas para cada valor del tiempo conforme η están relacionadas por un

operador unitario, en cuyo caso se podrá afirmar que ambas cuantizaciones son físicamente equivalentes.

Es inmediato comprobar que $\mathcal{K}_n(\eta) = \tilde{\mathcal{F}}_n(\eta)\mathcal{F}_n^{-1}(\eta)$ y que el módulo de sus coeficientes no diagonales viene dado por:

$$|\lambda_n^h| = |\tilde{h}_1^n h_2^n - \tilde{h}_2^n h_1^n|. \quad (5.57)$$

En particular, tenemos que $|\lambda_n^f| = |\lambda_n^g|$ gracias a las relaciones (5.35). Por tanto, bastará con analizar el comportamiento asintótico de uno solo de estos coeficientes. Si además se tiene en cuenta la simetría que proporcionan las igualdades (5.35), será suficiente considerar, por ejemplo, que son las funciones \tilde{f}_l^n y $\tilde{f}_{\tilde{l}}^n$ aquellas que tienen el comportamiento asintótico (5.44) y (5.45), respectivamente, donde, según hemos dicho, tratamos $\{l, \tilde{l}\} = \{1, 2\}$ como conjunto. En el límite asintótico $\omega_n \rightarrow \infty$ se obtiene entonces para $n \in \mathbb{N}_l^+$:

$$|\lambda_n^f| = \frac{1}{\sqrt{2}} \left| \vartheta_{\tilde{f},l}^n + e^{i\tilde{F}_l^n} \Re(e^{-i\tilde{F}_l^n} \vartheta_{\tilde{f},l}^n) \right|, \quad (5.58)$$

salvo términos $\mathcal{O}(|\vartheta_{h,l}^n|^2)$ si la masa del campo fuera nula, o términos $\mathcal{O}(\omega_n^{-1})$ si el campo fuera masivo y $\{\sqrt{g_n}\omega_n^{-1}\}_{n \in \mathbb{N}_l^+}$ fuera de cuadrado sumable. En todos los demás escenarios con campo masivo se tiene:

$$|\lambda_n^f| = \frac{1}{\sqrt{2}} |\tilde{\vartheta}_{\tilde{f},l}^n| + \mathcal{O}(\omega_n^{-2}), \quad n \in \mathbb{N}_l^+. \quad (5.59)$$

Al ser las secuencias formadas por $\vartheta_{\tilde{f},1}^n$ y $\vartheta_{\tilde{f},2}^n$, en los primeros casos, y aquellas formadas por $\tilde{\vartheta}_{\tilde{f},1}^n$ y $\tilde{\vartheta}_{\tilde{f},2}^n$, en el segundo caso, de cuadrado sumable (incluyendo degeneración) en sus respectivos subconjuntos, dada la hipótesis de implementabilidad unitaria de la dinámica cuántica, las condiciones (5.56) se satisfacen inmediatamente para todo $n \in \mathbb{N}_l^+$.

No obstante, se tiene que $|\lambda_n^f| = \mathcal{O}(1)$ para todo $n \in \mathbb{N}_1^- \cup \mathbb{N}_2^-$, debido a la diferencia entre el signo relativo de las funciones del par $(\tilde{f}_1^n, \tilde{f}_2^n)$ y del par (f_1^n, f_2^n) . De ello se sigue que las secuencias que forman los coeficientes λ_n^f y λ_n^g no serían de cuadrado sumable si cualquiera de los subconjuntos \mathbb{N}_l^- tuviera cardinal infinito. En esos casos, las dos cuantizaciones de Fock analizadas no serían unitariamente equivalentes. Sin embargo, cabe resaltar que un intercambio en los papeles desempeñados por \tilde{f}_l^n y \tilde{g}_l^n se traduciría en la práctica en un intercambio entre los signos relativos de los pares $(\tilde{f}_1^n, \tilde{f}_2^n)$ y $(\tilde{g}_1^n, \tilde{g}_2^n)$. Una vez llevado a cabo este intercambio, ambos pares poseerían los mismos signos relativos que las funciones de la cuantización de referencia [véase la ecuación (5.35)]. Este intercambio de \tilde{f}_l^n y \tilde{g}_l^n puede entenderse como un cambio en el convenio de qué son partículas y qué son antipartículas, si se tiene en cuenta la definición (5.33). Por lo tanto, es legítimo concluir que la inequivalencia entre ambas cuantizaciones procede «artificialmente» de considerar en general representaciones de Fock con convenios para los conceptos de partículas y antipartículas que son opuestos al de referencia en un número infinito de modos. Parece claro que, una vez reconciliados ambos convenios a través de un intercambio en la cuantización de referencia del papel de f_l^n y g_l^n , para $n \in \mathbb{N}_l^-$, los fenómenos físicos descritos por ambas cuantizaciones serán equivalentes.

En resumen, todas las cuantizaciones de Fock definidas por estructuras complejas invariantes y relacionadas por una dinámica no trivial que es unitariamente implementable son

o bien equivalentes a la cuantización de Fock de referencia, o a una que difiere de ella únicamente en el convenio para las nociones de partículas y antipartículas en un número infinito de modos. En otras palabras, el criterio de invariancia bajo las simetrías de la ecuación de Dirac y una dinámica cuántica no trivial implementable unitariamente selecciona una única clase de equivalencia (módulo el convenio de partículas y antipartículas) de representaciones de Fock para las relaciones de anticonmutación canónicas de campos de Dirac, con masa y sin ella, en espaciotiempos tridimensionales conformemente ultraestáticos. Además, dicho criterio determina una única noción de evolución cuántica, salvo redefiniciones unitarias irrelevantes en el sector ultravioleta.

5.4. Conclusiones

En este capítulo hemos demostrado la unicidad de la cuantización de Fock de campos de Dirac que se propagan en ciertos espaciotiempos no estacionarios de dimensión tres, con secciones compactas y conexas. En efecto, hemos mostrado cómo el criterio de invariancia del vacío de Fock bajo el grupo de simetrías de las ecuaciones de Dirac, junto con una implementabilidad unitaria de trayectorias dinámicas no triviales, selecciona una única clase de representaciones de Fock unitariamente equivalentes, tanto para el campo masivo como sin masa, una vez se fija un convenio que diferencie entre partículas y antipartículas. El criterio fija además una evolución genuinamente cuántica del campo fermiónico, salvo redefiniciones unitarias que son irrelevantes en el régimen $\omega_n \rightarrow \infty$. Esta fijación se produce al separarse la dependencia temporal del campo de Dirac en una que es explícita, a través de las funciones métricas, y en otra que puede describirse a nivel cuántico como una transformación unitaria. En esta última parte que es unitariamente implementable se mantiene, por tanto, la coherencia cuántica de los estados puros. En resumen, la variación temporal del campo fermiónico puede separarse, de forma esencialmente única, en una dependencia explícita en el fondo espaciotemporal, por una parte, y en una dinámica cuántica que puede implementarse con un operador unitario en el espacio de Fock, por otra.

Para llevar a cabo el estudio de la implementabilidad unitaria de la dinámica, hemos llevado a cabo un análisis asintótico de la dinámica de Dirac en el límite en el que los autovalores del operador de Dirac sobre las superficies espaciales tienden a infinito en valor absoluto. Posteriormente, hemos centrado toda la atención en aquellas representaciones de Fock con vacíos que son invariantes bajo las simetrías de las ecuaciones dinámicas de los modos fermiónicos en que puede descomponerse el campo de Dirac. Estos vacíos invariantes están caracterizados por variables de destrucción y creación definidas a través de ciertas transformaciones lineales en el espacio de condiciones iniciales. Están determinadas por matrices 2×2 que únicamente dependen del número $n \in \mathbb{N}$ que etiqueta los autoespacios del operador de Dirac con mismo módulo ω_n del autovalor y que únicamente mezclan los pares de modos (s_{np}, \bar{r}_{np}) (o sus complejos conjugados) que comparten el mismo valor de la etiqueta de degeneración p . Todas ellas pueden caracterizarse por cuatro coeficientes: f_l^n y g_l^n , con $l = 1, 2$, que satisfacen las relaciones (5.35).

La ambigüedad presente en la elección de representación de Fock se ha analizado de forma simultánea a la existente en la consideración de diferentes trayectorias dinámicas, definidas tras la extracción de una parte de la dependencia temporal del campo de Dirac que pasa a

considerarse como una dependencia explícita. Con este fin, hemos considerado directamente familias de variables de destrucción y creación invariantes con coeficientes f_l^n y g_l^n dependientes del tiempo, familias cuyos elementos están relacionados dinámicamente según nuestros comentarios anteriores. Hemos deducido así las condiciones necesarias y suficientes que han de satisfacer para que las trayectorias dinámicas asociadas, sin ser triviales, puedan implementarse mediante un operador unitario en la teoría cuántica. Estas condiciones resultan imponer un comportamiento asintótico muy específico en las funciones f_l^n y g_l^n en el régimen ultravioleta $\omega_n \rightarrow \infty$. En particular, su orden asintótico dominante queda completamente fijado, salvo fase, y tiene módulo constante igual a $1/\sqrt{2}$. Además, dependiendo de las propiedades espectrales del operador de Dirac en las superficies espaciales que se consideren, puede necesitarse la presencia de un término subdominante de orden ω_n^{-1} cuando el campo tiene masa no nula. Si esto ocurre, entonces dicho término aparece únicamente en dos de las cuatro funciones f_l^n y g_l^n , y su módulo ha de ser igual a $ma/(\sqrt{2}\omega_n)$. Como vemos, este orden subdominante depende de una forma específica de la masa del campo y de la dinámica del espaciotiempo de fondo. Finalmente, el resto de las posibles contribuciones que son despreciables comparadas con ω_n^{-1} únicamente están sujetas al requisito de que proporcionen secuencias de cuadrado sumable, incluyendo la degeneración del operador de Dirac. Por otro lado, en el caso del campo de Dirac sin masa, el término de orden ω_n^{-1} no es necesario, por lo que la única restricción en las trayectorias dinámicas que impone la unitariedad es el reescalado conforme en la expansión (5.10), necesario para trabajar con corchetes de Poisson canónicos que sean constantes. De estas consideraciones, resulta evidente que existe una diferencia fundamental entre la posibilidad de alcanzar una dinámica unitaria para espinores de Dirac y para campos escalares. Las ecuaciones dinámicas de los campos de Klein-Gordon, como se ha visto en el capítulo anterior, por ejemplo, tienden asintóticamente a la ecuación típica del correspondiente campo sin masa. Y lo hacen suficientemente rápido como para que la representación de Fock del campo que admite una dinámica unitaria sin masa permita también la implementabilidad unitaria de la evolución dictada por la ecuación con masa. Sin embargo, esto no ocurre así si se estudia la dinámica de Dirac, ya que el término de orden ω_n^{-1} en las funciones que caracterizan la cuantización, si es necesario para una implementabilidad unitaria de la evolución, resulta ser proporcional a la masa del campo y no puede despreciarse en el régimen ultravioleta, como hemos visto.

Hemos finalizado nuestro estudio proporcionando una demostración de que dos cuantizaciones de Fock invariantes cualesquiera para el campo de Dirac, y que posean una dinámica implementable mediante un operador unitario, definen teorías cuánticas que son unitariamente equivalentes, excepto por la fijación de un convenio que distinga las nociones de partículas y antipartículas. Por tanto, podemos concluir que el criterio de invariancia bajo las simetrías de la ecuación de Dirac y unitariedad de la evolución es suficiente para eliminar las ambigüedades más graves que afectan la cuantización de Fock de campos de Dirac en los espaciotiempos no estacionarios considerados, con superficies espaciales bidimensionales.

Capítulo 6

Cuantización de Fock de campos de Dirac en cosmologías de FLRW

El objetivo de este capítulo es demostrar que los teoremas de unicidad discutidos en los dos anteriores capítulos pueden generalizarse a la cuantización de Fock de campos fermiónicos en espaciotiempos cosmológicos relevantes de tipo FLRW. Estos resultados de unicidad tienen interés por sí solos si se tiene en mente que las partículas de espín semientero constituyen, junto con los campos de gauge, el tipo de materia dominante en nuestro Universo hoy en día. Por ello, es deseable disponer de un formalismo que sea capaz de describir su comportamiento cuántico en un universo en expansión, de una forma tal que conserve la noción de evolución cuántica unitaria estándar. Un formalismo así nos permitirá, además, aplicar con control y solidez física la estrategia híbrida para la cuantización de perturbaciones fermiónicas en un universo primordial teniendo en cuenta el posible comportamiento cuántico del fondo espaciotemporal, tarea que se llevará a cabo en el siguiente capítulo de esta memoria de tesis.

En concreto, consideraremos campos de Dirac masivos mínimamente acoplados a cosmologías homogéneas e isotrópicas de tipo FLRW con hipersuperficies espaciales esféricas y toroidales. El primero de estos escenarios fue analizado en profundidad, dentro del marco de la cosmología cuántica de tipo Wheeler-DeWitt, en la referencia [139]. Allí se eligió una familia de representaciones de Fock muy especiales para el campo fermiónico, a través de una diagonalización instantánea del hamiltoniano de Dirac. Dicha familia posee vacíos invariantes bajo las simetrías de la ecuación de Dirac. Además, en [139] se mostró que conllevan una producción finita de partículas en el vacío. Esta característica es exclusiva de aquellas representaciones que admiten una implementabilidad unitaria de la dinámica. En este capítulo, demostraremos que dicha familia de representaciones de Fock pertenece en realidad a la única clase de equivalencia, permitida por el criterio de invariancia bajo las isometrías de las hipersuperficies espaciales esféricas y un concepto de implementabilidad unitaria de la dinámica. Por otra parte, obtendremos un resultado similar para la cuantización de Fock de campos de Dirac en cosmologías de FLRW planas. En este último caso, la invariancia requerida al vacío será bajo el grupo de traslaciones espaciales en el tres-toro, así como bajo las rotaciones de espín generadas por la helicidad, que resulta ser una cantidad conservada.

En los dos tipos de cosmologías homogéneas e isotrópicas consideradas, el requisito de una dinámica no trivial del campo fermiónico tal que sea implementable mediante un operador

unitario en el espacio de Fock, fijará de nuevo la parte de la evolución de Dirac que preserva la coherencia cuántica en el tiempo. En efecto, será necesario extraer del campo ciertas contribuciones específicas que son explícitamente dependientes del tiempo, o equivalentemente de las variables métricas del fondo. Así, la variación del campo en el tiempo, en una imagen de Heisenberg, vendrá dada por dicha contribución explícita junto con una evolución que recoge la parte no trivial de la dinámica de Dirac que es unitariamente implementable. La demostración de la unicidad de las representaciones de Fock que cumplen el criterio expuesto probará, de forma adicional, la unicidad de dicha dinámica genuinamente cuántica, salvo redefiniciones unitarias que son irrelevantes en el régimen ultravioleta. Por último, destacamos que el resultado de unicidad se alcanza de nuevo una vez se ha fijado un convenio para la distinción entre las excitaciones de partícula y antipartícula. En particular, para la cosmología homogénea e isotrópica con hipersuperficies espaciales planas, se motivará la elección de un convenio concreto que apela a las propiedades físicas de la quiralidad y la helicidad del campo de Dirac.

El contenido de este capítulo de la tesis se ha publicado en las referencias [140–142].

6.1. Espinor de Dirac en cosmologías de FLRW

Consideraremos campos de Dirac mínimamente acoplados a cosmologías homogéneas e isotrópicas de tipo FLRW que describen universos esféricos o planos. Más en concreto, las variedades espaciotemporales de interés tendrán una topología $\mathbb{I} \times \Sigma$, donde \mathbb{I} es un intervalo conexo de la recta real y Σ es una hipersuperficie de Cauchy espacial arbitraria. En los casos de universos esféricos, Σ es isomorfa a la tres-esfera S^3 , mientras que en universos con secciones espaciales planas, Σ es isomorfa al tres-toro T^3 . Las métricas que describen la geometría de estos universos pueden escribirse como:

$$ds^2 = a^2(\eta)(-d\eta^2 + {}^0h_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta), \quad (6.1)$$

donde ${}^0h_{\alpha\beta}$ puede ser o bien la métrica esférica tridimensional característica de universos con curvatura espacial positiva, o bien la métrica plana. Además, $a(\eta)$ es el factor de escala que captura la información no estacionaria de la geometría.

Estos espaciotiempos admiten sendos sistemas globales de tétradas ortonormales, definidas en (3.3). Se sigue que sus fibrados de sistemas de referencia ortonormales y orientados, con grupo de gauge $SO(3,1)$ (ortocrono), son triviales [87] y, por tanto, pueden definirse estructuras de espín en estas cosmologías [73, 74]. Los campos de Dirac Ψ de masa m se corresponden con las secciones del fibrado de espinores resultante. De forma explícita, tomaremos la representación de Weyl de las matrices de Dirac constantes:

$$\gamma^a = i \begin{pmatrix} 0 & \Sigma^a \\ \tilde{\Sigma}^a & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.2)$$

donde $\Sigma^0 = \tilde{\Sigma}^0$ es la matriz identidad 2×2 y $\Sigma^i = -\tilde{\Sigma}^i$ (con $i = 1, 2, 3$) son las matrices de Pauli:

$$\Sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \Sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (6.3)$$

Dicha representación de los generadores del álgebra de Clifford permite describir los campos de Dirac a través de dos espinores bicomponente ϕ^A y $\bar{\chi}_{A'}$ que poseen quiralidades bien definidas y opuestas entre sí, donde $A, B = 0, 1$ y $A', B' = 0', 1'$. Tomaremos ϕ^A como la proyección quiral «zurda» de Ψ , mientras que $\bar{\chi}_{A'}$ será la «diestra». Además seguiremos los convenios de la referencia [139] en el tratamiento de índices espinoriales. En particular, las componentes A, B y A', B' se subirán y bajarán, respectivamente, con los símbolos ϵ^{AB} , ϵ_{AB} , $\epsilon^{A'B'}$, $\epsilon_{A'B'}$, todos ellos con entradas dadas por las de la matriz antisimétrica:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por ejemplo, $\phi_A = \phi^B \epsilon_{BA}$ y $\bar{\chi}^{A'} = \epsilon^{A'B'} \bar{\chi}_{B'}$.

La acción de Dirac para el campo fermiónico con masa no nula m en las cosmologías homogéneas e isotrópicas consideradas es:

$$I_f = -i \int d\eta d^3\vec{x} a^4 \sqrt{\hbar} \left[\frac{1}{2} (\Psi^\dagger \gamma^0 e_a^\mu \gamma^a \nabla_\mu^S \Psi - \text{h.c.}) - m \Psi^\dagger \gamma^0 \Psi \right], \quad (6.4)$$

donde la derivada covariante espinorial ∇_μ^S viene dada por las relaciones (5.4) y (5.5), adaptadas a las cosmologías cuatridimensionales en cuestión. Dada la representación quiral de las matrices de Dirac, resulta muy conveniente introducir las versiones espinoriales de las tétradas y, más en general, de los tensores espaciotemporales. Para ello, introducimos los símbolos de Infeld-van der Waerden $\sigma_a^{AA'}$, cuya forma matricial viene dada por [139]:

$$(\sigma_0^{AA'}) = -\frac{1}{\sqrt{2}} I, \quad (\sigma_i^{AA'}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Sigma_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (6.5)$$

siendo I la identidad 2×2 . La versión espinorial de las cotétradas es entonces $e_\mu^{AA'} = e_\mu^a \sigma_a^{AA'}$, y la forma espinorial de cualquier tensor espaciotemporal se obtiene contrayendo cada uno de sus índices con ellas. Además, definimos la versión espinorial de la uno-forma ω_μ^{ab} que determina la conexión de espín de Levi-Civita:

$$\omega_\mu^{AA'BB'} = \omega_\mu^{ab} \sigma_a^{AA'} \sigma_b^{BB'}. \quad (6.6)$$

Esta uno-forma espinorial, al ser antisimétrica bajo el intercambio de los pares de índices AA' y BB' , puede escribirse unívocamente como [2]:

$$\omega_\mu^{AA'BB'} = \omega_\mu^{AB} \epsilon^{A'B'} + \bar{\omega}_\mu^{A'B'} \epsilon^{AB}, \quad (6.7)$$

donde ω_μ^{AB} es simétrica en sus índices espinoriales y $\bar{\omega}_\mu^{A'B'}$ es su compleja conjugada. Una vez introducidas estas definiciones, la acción de Dirac toma la siguiente forma en términos de las proyecciones quirales del campo Ψ :

$$I_f = \int d\eta d^3\vec{x} a^4 \sqrt{\hbar} \left[\frac{i}{\sqrt{2}} (\bar{\phi}^{A'} e_{AA'}^\mu D_\mu \phi^A + \chi^A e_{AA'}^\mu D_\mu \bar{\chi}^{A'} - \text{h.c.}) - m (\chi_A \phi^A + \bar{\phi}^{A'} \bar{\chi}_{A'}) \right], \quad (6.8)$$

donde:

$$D_\mu \phi^A = \partial_\mu \phi^A + \omega_\mu^A{}_B \phi^B, \quad D_\mu \bar{\chi}^{A'} = \partial_\mu \bar{\chi}^{A'} + \bar{\omega}_\mu^{A'}{}_{B'} \bar{\chi}^{B'}. \quad (6.9)$$

A continuación, llevaremos a cabo una fijación parcial del gauge $SO(3, 1)$, con el objetivo de dar un tratamiento riguroso a la dependencia espacial de los espinores, así como de analizar sus propiedades bajo la acción de los grupos de isometrías continuas de las cosmologías de FLRW que vamos a estudiar. Más en concreto, el grupo de gauge del fibrado de sistemas de referencia ortonormales y orientados puede reducirse de $SO(3, 1)$ (ortocrono) a $SO(3)$ [87]. En los espaciotiempos considerados, este procedimiento da lugar a una restricción bien definida de las estructuras de espín a los dobles recubridores de dichos fibrados reducidos, que tienen como grupo de gauge $SU(2)$. Dicha restricción proporciona en la práctica una estructura de espín en cada una de las hipersuperficies espaciales que exfolian las cosmologías consideradas. Supondremos que, para cada espaciotiempo, todas estas estructuras de espín espaciales coinciden con aquella con la que está dotada la hipersuperficie de Cauchy inicial arbitraria Σ_0 . Los espinores bicomponente introducidos anteriormente, de una quiralidad y otra, pueden entenderse, respectivamente, como familias uniparamétricas, y sus complejas conjugadas, de secciones de los fibrados de espinores asociados a dicha estructura de espín espacial, donde el parámetro está dado por el tiempo conforme η . En el caso de hipersuperficies espaciales isomorfas a S^3 , la estructura de espín resulta ser única [143, 144]. Por otra parte, cuando las hipersuperficies espaciales son planas y compactas, existen ocho estructuras de espín posibles asociadas a las distintas condiciones de periodicidad de los espinores en T^3 [145, 146].

En la práctica, esta fijación parcial del gauge se alcanza imponiendo que $n^\mu e_\mu^a = \delta_0^a$, lo que, además, simplifica notablemente el análisis hamiltoniano del sistema [77]. Una vez llevada a cabo esta fijación, las derivadas espinoriales (6.9) que aparecen en la acción (6.8) presentan una actuación local separada en dos términos:

$$e^{\mu AA'} D_\mu \phi_A = \frac{1}{a\sqrt{2}} I^{AA'} \left(\partial_0 + \frac{3a'}{2a} \right) \phi_A + e^{\alpha AA'(3)} D_\alpha \phi_A, \quad (6.10)$$

con una expresión análoga para $e^{\mu AA'} D_\mu \bar{\chi}_{A'}$, donde la prima denota la derivada con respecto al tiempo conforme η , las componentes de $I^{AA'}$ no son más que las entradas de la matriz identidad 2×2 , y ${}^{(3)}D_\alpha$ es la versión covariante de la derivada espinorial de Levi-Civita con respecto a la métrica ${}^0h_{\alpha\beta}$ (que, recuérdese, puede ser esférica o plana). Es posible comprobar entonces que:

$$ia\sqrt{2} e^{\alpha AA'(3)} D_\alpha \quad (6.11)$$

es el operador de Dirac (definido sobre los espinores bicomponente de quiralidad zurda y diestra) en la hipersuperficie espacial Σ_0 con respecto a la métrica ${}^0h_{\alpha\beta}$.

6.1.1. Expansión en modos

Una vez impuesta la fijación de gauge indicada anteriormente en las cosmologías homogéneas e isotropas estudiadas, introducimos el siguiente producto interno sobre el espacio

de espinores zurdos, definido geoméricamente en la hipersuperficie espacial Σ_0 (así como el producto análogo sobre su espacio complejo conjugado diestro):

$$\int d^3\vec{x} \sqrt{0\hbar} \bar{\chi}_{A'} I^{AA'} \phi_A, \quad (6.12)$$

para dos espinores cualesquiera, ϕ_A y χ_A pertenecientes a dicho espacio. Al ser geodésicamente completas tanto las hipersuperficies espaciales esféricas como las toroidales [137], el operador de Dirac (6.11) es esencialmente autoadjunto con respecto al producto interno (6.12), y en ambos casos posee un espectro discreto. Procedemos a continuación a describir las propiedades del mismo y de sus autoespacios, para cada una de las cosmologías consideradas.

El espectro del operador de Dirac en S^3 está formado por la secuencia de autovalores [139, 144]:

$$\pm\omega_n = \pm \left(n + \frac{3}{2} \right), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (6.13)$$

donde cada uno posee una degeneración $g_n = (n+1)(n+2)$. Llamaremos ρ_A^{np} y $\bar{\sigma}_A^{np}$ los autoespinores zurdos con autovalores ω_n y $-\omega_n$, respectivamente, donde la etiqueta $p = 1, \dots, g_n$ da cuenta de la degeneración del autoespacio correspondiente. El conjunto de todos ellos es una base del espacio de espinores zurdos en S^3 , que elegiremos ortonormal respecto a (6.12). Sus complejos conjugados diestros forman entonces una base ortonormal del espacio complejo conjugado, y satisfacen las mismas ecuaciones de autovalores pero con signos opuestos. Todos estos espinores cumplen:

$$\int d^3\vec{x} \sqrt{\hbar} \rho_A^{np} \epsilon^{AB} \bar{\sigma}_B^{n'p'} = 0, \quad \int d^3\vec{x} \sqrt{\hbar} \bar{\rho}_{A'}^{np} \epsilon^{A'B'} \sigma_{B'}^{n'p'} = 0. \quad (6.14)$$

Además, sus fases pueden elegirse de manera que:

$$\int d^3\vec{x} \sqrt{\hbar} \rho_A^{np} \epsilon^{AB} \rho_A^{n'p'} = \delta^{nn'} A_n^{pp'}, \quad \int d^3\vec{x} \sqrt{\hbar} \bar{\sigma}_A^{np} \epsilon^{AB} \bar{\sigma}_A^{n'p'} = \delta^{nn'} A_n^{pp'}, \quad (6.15)$$

junto con sus condiciones complejas conjugadas, donde no ha de entenderse la suma sobre índices repetidos, y donde la matriz A_n (respecto a sus elementos pp') es antisimétrica y diagonal en bloques de la forma siguiente:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

En los espaciotiempos de FLRW con hipersuperficies espaciales esféricas, los espinores ϕ_A y $\bar{\chi}_{A'}$, que describen las proyecciones quirales de Ψ , pueden expandirse entonces como:

$$\phi_A(\eta, \vec{x}) = a^{-3/2}(\eta) \sum_{npp'} \check{\alpha}_n^{pp'} [m_{np}(\eta) \rho_A^{np}(\vec{x}) + \bar{r}_{np}(\eta) \bar{\sigma}_A^{np}(\vec{x})], \quad (6.16)$$

$$\bar{\chi}_{A'}(\eta, \vec{x}) = a^{-3/2}(\eta) \sum_{npp'} \check{\beta}_n^{pp'} [\bar{s}_{np}(\eta) \bar{\rho}_{A'}^{np}(\vec{x}) + t_{np}(\eta) \sigma_{A'}^{np}(\vec{x})], \quad (6.17)$$

con expresiones análogas para sus complejas conjugadas, y donde:

$$\sum_{npp'} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=1}^{g_n} \sum_{p'=1}^{g_n}.$$

Además, la naturaleza anticonmutante del campo fermiónico Ψ queda recogida en las variables de Grassmann m_{np} , r_{np} , t_{np} y s_{np} (y sus complejas conjugadas), que además capturan la dependencia temporal del campo. Por último, los coeficientes constantes $\check{\alpha}_n^{pp'}$ y $\check{\beta}_n^{pp'}$ se incluyen por conveniencia, con el objeto de evitar acoplos entre distintos valores de la etiqueta p en la acción de Dirac. Respecto a sus componentes pp' , forman dos matrices reales $\check{\alpha}_n$ y $\check{\beta}_n$, que son diagonales por bloques, con los respectivos bloques 2×2 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Por otra parte, el espectro del operador de Dirac en T^3 , con periodo de compactificación l_0 , está formado por la secuencia de autovalores [145, 146]:

$$\pm\omega_k = \pm \frac{2\pi}{l_0} \left| \vec{k} + \vec{\tau} \right|, \quad \vec{\tau} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \epsilon^j \vec{v}_j, \quad \vec{k} \in \mathbb{Z}^3, \quad (6.18)$$

donde las tuplas \vec{v}_j denotan la base ortonormal estándar de la red \mathbb{Z}^3 y los tres números $\epsilon^j \in \{0, 1\}$ caracterizan cada una de las posibles elecciones de estructura de espín en T^3 . Dada una cualquiera de estas estructuras, identificaremos la etiqueta k en ω_k (o, equivalentemente, en $-\omega_k$) con la norma de una de las tuplas $\vec{k} \in \mathbb{Z}^3$ correspondientes a dicho autovalor de Dirac. El número de ellas que proporcionan el mismo valor de ω_k (o de $-\omega_k$) es la degeneración g_k , que no posee una expresión cerrada. Sin embargo, un resultado bien conocido en geometría riemanniana afirma que g_k crece asintóticamente como $\mathcal{O}(\omega_k^2)$, en el régimen $\omega_k \rightarrow \infty$ [127, 147]. Sea entonces una estructura cualquiera sobre T^3 y una elección cualquiera de tríadas asociadas a la métrica plana. Los autoespinores zurdos del operador de Dirac forman una base, que elegiremos ortonormal con respecto al producto interno (6.12), del espacio de espinores bicomponente de esa misma quiralidad en T^3 . Sus complejos conjugados formarán una base ortonormal del espacio de espinores diestros, geoméricamente definidos en T^3 . En particular, si se elige una tríada diagonal tal que la uno-forma de la conexión de espín se anule, el operador de Dirac resulta ser el estándar de una variedad euclídea plana. Sus autoespinores zurdos con autovalores $\pm\omega_k$ son:

$$w_{kA}^{(\pm)}(\vec{x}) = u_{kA}^{(\pm)} \exp \left[i \frac{2\pi}{l_0} (\vec{k} + \vec{\tau}) \cdot \vec{x} \right], \quad (6.19)$$

donde $u_{kA}^{(\pm)}$ son dos espinores bicomponente independientes de \vec{x} que vienen dados a continuación, salvo sus fases. Si $\vec{k} = \vec{\tau}$:

$$u_{\vec{0}1}^{(+)} = l_0^{-3/2}, \quad u_{\vec{0}2}^{(+)} = 0, \quad u_{\vec{0}1}^{(-)} = 0, \quad u_{\vec{0}2}^{(-)} = l_0^{-3/2}. \quad (6.20)$$

Si $\vec{k} = \vec{k}^\pm$, donde $\vec{k}^\pm + \vec{\tau} = (k_1^\pm + \tau_1, 0, 0)$, con $k_1^+ + \tau_1 > 0$ y $k_1^- + \tau_1 < 0$:

$$u_{\vec{k}^\pm 1}^{(\pm)} = l_0^{-3/2}, \quad u_{\vec{k}^\pm 2}^{(\pm)} = 0, \quad u_{\vec{k}^\pm 1}^{(\mp)} = 0, \quad u_{\vec{k}^\pm 2}^{(\mp)} = l_0^{-3/2}. \quad (6.21)$$

Para todas las demás tuplas $\vec{k} = (k_1, k_2, k_3)$:

$$\begin{aligned} u_{\vec{k} 1}^{(+)} &= N_{\vec{k}} \frac{i(k_2 + \tau_2) - k_3 - \tau_3}{k_1 + \tau_1 - |\vec{k} + \vec{\tau}|}, & u_{\vec{k} 2}^{(+)} &= N_{\vec{k}}, \\ u_{\vec{k} 1}^{(-)} &= N_{\vec{k}}, & u_{\vec{k} 2}^{(-)} &= N_{\vec{k}} \frac{i(k_2 + \tau_2) + k_3 + \tau_3}{k_1 + \tau_1 - |\vec{k} + \vec{\tau}|}, \end{aligned} \quad (6.22)$$

donde el factor de normalización es:

$$N_{\vec{k}} = \sqrt{\frac{|\vec{k} + \vec{\tau}| - k_1 - \tau_1}{2l_0^3 |\vec{k} + \vec{\tau}|}}. \quad (6.23)$$

Sus fases pueden elegirse de tal forma que:

$$u_{\vec{k}' A}^{(\pm)} \epsilon^{AB} u_{\vec{k} B}^{(\pm)} = \delta_{\vec{k}', -\vec{k} - 2\vec{\tau}}, \quad u_{\vec{k}' A}^{(+)} \epsilon^{AB} u_{\vec{k} B}^{(-)} = 0, \quad (6.24)$$

para todo $\vec{k}, \vec{k}' \neq \vec{\tau}$. Propiedades análogas se cumplen para los autoespinores complejos conjugados diestros, que satisfacen las mismas ecuaciones de autovalores pero con signo contrario. En los espaciotiempos de FLRW con hipersuperficies espaciales planas y compactas, los espinores ϕ_A y $\bar{\chi}_{A'}$ que describen las proyecciones quirales de Ψ pueden expandirse entonces como:

$$\phi_A(\eta, \vec{x}) = a^{-3/2}(\eta) \sum_{\vec{k} \in \mathbb{Z}^3} [m_{\vec{k}}(\eta) w_{\vec{k} A}^{(+)}(\vec{x}) + \bar{r}_{\vec{k}}(\eta) w_{\vec{k} A}^{(-)}(\vec{x})], \quad (6.25)$$

$$\bar{\chi}_{A'}(\eta, \vec{x}) = a^{-3/2}(\eta) \sum_{\vec{k} \in \mathbb{Z}^3} [\bar{s}_{\vec{k}}(\eta) \bar{w}_{\vec{k} A'}^{(+)}(\vec{x}) + t_{\vec{k}}(\eta) \bar{w}_{\vec{k} A'}^{(-)}(\vec{x})], \quad (6.26)$$

con expansiones análogas para sus complejos conjugados, donde las variables de Grassmann $m_{\vec{k}}, r_{\vec{k}}, t_{\vec{k}}$ y $s_{\vec{k}}$ (junto con sus complejas conjugadas) capturan la naturaleza anticonmutante del campo de Dirac Ψ , así como su dependencia en el tiempo. Hacemos notar que la forma de esta expansión es independiente de la elección de tríadas, al formar (6.19) una base ortonormal. En efecto, una transformación de gauge $SU(2)$ se puede entender como una modificación adecuada de los coeficientes $m_{\vec{k}}, \bar{r}_{\vec{k}}, t_{\vec{k}}$ y $\bar{s}_{\vec{k}}$ que multiplican los autoespinores asociados con una elección fija de tríadas.

6.1.2. Dinámica fermiónica

Si se introducen las expansiones (6.16)-(6.17) para el campo fermiónico en la cosmología homogénea e isotrópica con secciones espaciales esféricas, la acción de Dirac adquiere la expresión:

$$I_f = \sum_{np} [I_{np}(m, s) + I_{np}(t, r)] \quad (6.27)$$

donde:

$$I_{np}(x, y) = \int d\eta \left[\frac{i}{2} (\bar{x}_{np} x'_{np} + x_{np} \bar{x}'_{np} + \bar{y}_{np} y'_{np} + y_{np} \bar{y}'_{np}) + \omega_n (\bar{x}_{np} x_{np} - y_{np} \bar{y}_{np}) - ma(y_{np} x_{np} + \bar{x}_{np} \bar{y}_{np}) \right], \quad (6.28)$$

donde el par ordenado (x_{np}, y_{np}) puede denotar tanto a (m_{np}, s_{np}) como a (t_{np}, r_{np}) . Una vez eliminadas las ligaduras de segunda clase del sistema fermiónico [32], estos (coeficientes de los) modos anticonmutantes satisfacen los corchetes de Dirac simétricos [77, 79]:

$$\{x_{np}, \bar{x}_{np}\} = -i, \quad \{y_{np}, \bar{y}_{np}\} = -i. \quad (6.29)$$

Si se toman derivadas variacionales de Grassmann, por ejemplo por la izquierda, y se exige que la acción sea estacionaria bajo ellas, se obtienen las ecuaciones de Dirac:

$$x'_{np} = i\omega_n x_{np} - ima\bar{y}_{np}, \quad y'_{np} = i\omega_n y_{np} + ima\bar{x}_{np}, \quad (6.30)$$

así como sus complejas conjugadas. Estas ecuaciones dinámicas pueden combinarse para dar lugar a una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden, que es la misma para todos los modos $\{x_{np}, y_{np}\}$, que denotaremos de forma genérica mediante las variables $\{z_{np}\}$. Dicha ecuación (cuando la masa no es nula¹) resulta ser:

$$z''_{np} = \frac{a'}{a} z'_{np} - \left(\omega_n^2 + m^2 a^2 + i\omega_n \frac{a'}{a} \right) z_{np}. \quad (6.31)$$

Análogamente, se satisface su compleja conjugada para los modos $\{\bar{z}_{np}\}$. Estas ecuaciones no dependen de la etiqueta p de degeneración. Sus soluciones generales son combinaciones lineales de dos soluciones independientes complejas, que escribiremos en la forma $\exp[i\Theta_n^1(\eta)]$ y $\exp[-i\Theta_n^2(\eta)]$. En general, ni Θ_n^1 ni Θ_n^2 serán reales, al tener la ecuación diferencial coeficientes complejos. Tomemos las siguientes condiciones iniciales genéricas en el tiempo arbitrario η_0 :

$$\Theta_n^l(\eta_0) = \Theta_{n,0}^l, \quad (\Theta_n^l)'(\eta_0) = \Theta_{n,1}^l. \quad (6.32)$$

Llamaremos entonces $\Omega_{n,0}^1 = \exp(i\Theta_{n,0}^1)$ y $\Omega_{n,0}^2 = \exp(-i\Theta_{n,0}^2)$, que son los valores iniciales que adoptan las dos soluciones independientes. Todos estos datos en el instante η_0 están relacionados con los de los modos fermiónicos, que llamaremos x_{np}^0 y y_{np}^0 , y con sus complejos conjugados, a través de las ecuaciones de Dirac (6.30). Teniendo esto en cuenta, la expresión general de los modos fermiónicos a cualquier tiempo η puede obtenerse como una transformación lineal de sus condiciones iniciales, dependiente de las dos soluciones independientes de la ecuación (6.31):

$$\begin{aligned} x_{np}(\eta) &= \left[\Delta_n^2 e^{i\Theta_n^1(\eta)} + \Delta_n^1 e^{-i\Theta_n^2(\eta)} \right] x_{np}^0 - \left[\zeta_n^1 e^{i\Theta_n^1(\eta)} - \zeta_n^2 e^{-i\Theta_n^2(\eta)} \right] \bar{y}_{np}^0, \\ y_{np}(\eta) &= \left[\Delta_n^2 e^{i\Theta_n^1(\eta)} + \Delta_n^1 e^{-i\Theta_n^2(\eta)} \right] y_{np}^0 + \left[\zeta_n^1 e^{i\Theta_n^1(\eta)} - \zeta_n^2 e^{-i\Theta_n^2(\eta)} \right] \bar{x}_{np}^0, \end{aligned} \quad (6.33)$$

¹El análisis de la implementabilidad unitaria de la dinámica y la unicidad de la representación de Fock cuando $m = 0$ es inmediato, una vez se conoce la demostración para el caso masivo. Comentaremos este caso particular en las conclusiones.

donde hemos introducido las constantes:

$$\begin{aligned}\Delta_n^1 &= \frac{\Theta_{n,1}^1 - \omega_n}{\Omega_{n,0}^2(\Theta_{n,1}^1 + \Theta_{n,1}^2)}, & \Delta_n^2 &= \frac{\Theta_{n,1}^2 + \omega_n}{\Omega_{n,0}^1(\Theta_{n,1}^1 + \Theta_{n,1}^2)}, \\ \zeta_n^l &= \frac{ma_0}{\Omega_{n,0}^l(\Theta_{n,1}^1 + \Theta_{n,1}^2)}, & l &= 1, 2,\end{aligned}\quad (6.34)$$

con $a_0 = a(\eta_0)$. Al igual que en los capítulos previos, es posible conocer el comportamiento asintótico de la transformación lineal (6.33) en el régimen «ultravioleta» $\omega_n \rightarrow \infty$, a un orden suficientemente alto como para analizar posteriormente su implementabilidad unitaria cuántica. En efecto, si se introduce el cambio de variable $\tilde{z}_{np} = z_{np}\sqrt{a_0}/\sqrt{a}$, la ecuación de segundo orden adquiere la forma:

$$\tilde{z}_{np}'' + \left[\tilde{\omega}_n^2 + m^2 a^2 + \frac{a''}{2a} - \frac{1}{2} \left(\frac{a'}{a} \right)^2 \right] \tilde{z}_{np} = 0, \quad (6.35)$$

donde $\tilde{\omega}_n = \omega_n + ia'/(2a)$. Buscaremos dos soluciones independientes \tilde{z}_{np}^l , con $l = 1, 2$, que tengan la forma:

$$\tilde{z}_{np}^l = \exp \left[-i(-1)^l \tilde{\Theta}_n^l \right], \quad \text{con} \quad (\tilde{\Theta}_n^l)' = \tilde{\omega}_n + \Lambda_n^l, \quad (6.36)$$

Este *ansatz* proporciona soluciones a la ecuación (6.35) si las funciones Λ_n^l satisfacen la ecuación de Riccati:

$$(\Lambda_n^l)' = i(-1)^l [(\Lambda_n^l)^2 + 2\tilde{\omega}_n \Lambda_n^l] - u^l, \quad (6.37)$$

donde hemos definido las siguientes funciones que dependen del tiempo, pero no de ω_n :

$$u^l(\eta) = i[(-1)^l + 1] \left\{ \frac{a''(\eta)}{2a(\eta)} - \frac{1}{2} \left[\frac{a'(\eta)}{a(\eta)} \right]^2 \right\} + i(-1)^l m^2 a^2(\eta). \quad (6.38)$$

Estas ecuaciones tienen la misma forma, salvo términos subdominantes en el régimen ultravioleta, que las ecuaciones (5.24) analizadas en el capítulo anterior. Se ve fácilmente que sus soluciones son $\mathcal{O}(\omega_n^{-1})$ en el régimen $\omega_n \rightarrow \infty$. En efecto, asumamos que esto es así. Entonces, al poder despreciarse asintóticamente el término cuadrático en Λ_n^l , las soluciones a (6.37) tenderán en dicho límite a las soluciones $\tilde{\Lambda}_n^l$ de la ecuación:

$$(\tilde{\Lambda}_n^l)' = (-1)^l \left(2i\omega_n - \frac{a'}{a} \right) \tilde{\Lambda}_n^l - u^l. \quad (6.39)$$

Con condiciones iniciales $\tilde{\Lambda}_n^l(\eta_0) = 0$, se obtiene:

$$\tilde{\Lambda}_n^l = -a^{(-1)^{l+1}} \exp[(-1)^l 2i\omega_n \eta] \int_{\eta_0}^{\eta} d\tilde{\eta} u^l(\tilde{\eta}) a^{(-1)^l}(\tilde{\eta}) \exp[(-1)^{l+1} 2i\omega_n \tilde{\eta}], \quad (6.40)$$

e integrando por partes esta expresión, resulta:

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda}_n^l &= \frac{i(-1)^l}{2\omega_n} \left\{ u_0^l \exp[(-1)^l 2i\omega_n \Delta\eta] \left(\frac{a_0}{a}\right)^{(-1)^l} - u^l + \exp[(-1)^l 2i\omega_n \eta] a^{(-1)^{l+1}} \right. \\ &\quad \left. \times \int_{\eta_0}^{\eta} d\tilde{\eta} \left[(u^l)'(\tilde{\eta}) + (-1)^l u^l(\tilde{\eta}) \frac{a'(\tilde{\eta})}{a(\tilde{\eta})} \right] \exp[(-1)^{l+1} 2i\omega_n \tilde{\eta}] a^{(-1)^l}(\tilde{\eta}) \right\}, \end{aligned} \quad (6.41)$$

donde $u_0^l = u^l(\eta_0)$ y $\Delta\eta = \eta - \eta_0$. Por lo tanto, al no depender ni a ni u^l de ω_n , concluimos que, si tanto $(u^l)'$ como $u^l a'/a$ existen y son integrables en todo intervalo temporal cerrado $[\eta_0, \eta]$ de interés, existe una función positiva $C^l(\eta)$, independiente de ω_n , tal que el módulo de $\tilde{\Lambda}_n^l(\eta)$ está acotado superiormente por $C^l(\eta)/\omega_n$. Se desprende que $|\tilde{\Lambda}_n^l(\eta)|^2$ está acotada por $C^l(\eta)^2/\omega_n^2$, y es en efecto despreciable, comparada con el término lineal de (6.37), en el régimen ultravioleta. Se tiene pues que las funciones $\tilde{\Lambda}_n^l = \mathcal{O}(\omega_n^{-1})$ pueden tomarse como soluciones asintóticas de la ecuación (6.37) para $l = 1, 2$, con condición inicial $\Lambda_n^l(\eta_0) = 0$, en el límite $\omega_n \rightarrow \infty$, salvo correcciones subdominantes en dicho régimen ultravioleta.

Queda demostrado que la ecuación (6.35) admite dos soluciones independientes de la forma (6.36), con condiciones iniciales para la derivada de $\tilde{\Theta}_n^l$ dadas por $\tilde{\omega}_n$. Por otra parte, recordemos que habíamos llamado $\exp(i\Theta_n^1)$ y $\exp(-i\Theta_n^2)$ las dos soluciones independientes de la ecuación (6.31) para los modos fermiónicos. La relación entre sus derivadas y las soluciones halladas a la ecuación (6.35) es, claramente:

$$(\Theta_n^l)' = (\tilde{\Theta}_n^l)' + \frac{i}{2}(-1)^l \frac{a'}{a} = \omega_n + \frac{i}{2}[1 + (-1)^l] \frac{a'}{a} + \Lambda_n^l. \quad (6.42)$$

Por lo tanto, si se imponen las condiciones iniciales $\Theta_{n,0}^l = \Theta_n^l(\eta_0) = 0$, los exponentes de las soluciones quedan:

$$\Theta_n^l = \omega_n \Delta\eta + \frac{i}{2}[1 + (-1)^l] \ln\left(\frac{a}{a_0}\right) + \int_{\eta_0}^{\eta} d\tilde{\eta} \Lambda_n^l(\tilde{\eta}). \quad (6.43)$$

Sus condiciones iniciales, junto con aquellas para sus derivadas heredadas de las funciones (6.36), dan lugar a los siguientes valores para las constantes introducidas en (6.34):

$$\Delta_n^1 = 0, \quad \Delta_n^2 = 1, \quad \zeta_n^1 = \zeta_n^2 = \zeta_n = \frac{ma_0^2}{2\omega_n a_0 + ia_0'} = \frac{ma_0}{2\omega_n} + \mathcal{O}(\omega_n^{-2}), \quad (6.44)$$

donde la última igualdad es válida en el límite $\omega_n \rightarrow \infty$.

Por otro lado, para las cosmologías homogéneas e isotrópicas con hipersuperficies espaciales planas y compactas, la introducción de las expansiones en modos (6.25) y (6.26) da lugar a la siguiente expresión para la acción:

$$I_f = I_0 + \sum_{\vec{k} \neq \vec{\tau}} [I_{\vec{k}}(m, s) + I_{\vec{k}}(t, r)], \quad (6.45)$$

donde:

$$\begin{aligned} I_{\vec{k}}(x, y) &= \int d\eta \left[\frac{i}{2} (\bar{x}_{\vec{k}} x'_{\vec{k}} + x_{\vec{k}} \bar{x}'_{\vec{k}} + \bar{y}_{\vec{k}} y'_{\vec{k}} + y_{\vec{k}} \bar{y}'_{\vec{k}}) + \omega_k (\bar{x}_{\vec{k}} x_{\vec{k}} - y_{\vec{k}} \bar{y}_{\vec{k}}) \right. \\ &\quad \left. - ma(y_{-\vec{k}-2\vec{\tau}} x_{\vec{k}} + \bar{x}_{\vec{k}} \bar{y}_{-\vec{k}-2\vec{\tau}}) \right], \end{aligned} \quad (6.46)$$

y el par ordenado $(x_{\vec{k}}, y_{\vec{k}})$ puede denotar tanto a $(m_{\vec{k}}, s_{\vec{k}})$ como a $(t_{\vec{k}}, r_{\vec{k}})$. El término I_0 recoge la contribución a la acción de los modos cero en la expansión del campo Ψ (es decir, aquellos correspondientes a $\omega_k = 0$), modos que únicamente existen si se elige la estructura de espín trivial en T^3 caracterizada por $\epsilon^j = 0$ para todo $j = 1, 2, 3$. Esos modos pueden aislarse del resto gracias a la compacidad de las hipersuperficies espaciales. Además, su comportamiento es irrelevante para el estudio de la implementabilidad unitaria de las transformaciones de Bogoliubov del campo. Por lo tanto, en este capítulo se ignorará su contribución por completo.

Una vez eliminadas las ligaduras de segunda clase de este sistema, los corchetes de Dirac simétricos que satisfacen los modos no cero son [77, 79]:

$$\{x_{\vec{k}}, \bar{x}_{\vec{k}}\} = -i, \quad \{y_{\vec{k}}, \bar{y}_{\vec{k}}\} = -i. \quad (6.47)$$

El principio variacional de estacionariedad de la acción da lugar a las siguientes ecuaciones de Dirac para ellos:

$$x'_{\vec{k}} = i\omega_k x_{\vec{k}} - ima\bar{y}_{-\vec{k}-2\vec{\tau}}, \quad \bar{y}'_{\vec{k}} = -i\omega_k \bar{y}_{\vec{k}} - imax_{-\vec{k}-2\vec{\tau}}, \quad (6.48)$$

junto con sus complejas conjugadas. Nótese que estas ecuaciones no dependen del valor particular de la tupla \vec{k} , sino únicamente del valor absoluto de su autovalor de Dirac correspondiente. Por tanto, como ecuaciones diferenciales, tienen la misma forma que aquellas (6.30) previamente analizadas para la cosmología con hipersuperficies espaciales esféricas. Sus soluciones generales (cuando $m \neq 0$) pueden escribirse entonces como:

$$\begin{aligned} x_{\vec{k}}(\eta) &= e^{i\Theta_k^1(\eta)} x_{\vec{k}}^0 - \zeta_k \left[e^{i\Theta_k^1(\eta)} - e^{-i\Theta_k^2(\eta)} \right] \bar{y}_{-\vec{k}-2\vec{\tau}}^0 \\ y_{\vec{k}}(\eta) &= e^{i\Theta_k^1(\eta)} y_{\vec{k}}^0 + \zeta_k \left[e^{i\Theta_k^1(\eta)} - e^{-i\Theta_k^2(\eta)} \right] \bar{x}_{-\vec{k}-2\vec{\tau}}^0 \end{aligned} \quad (6.49)$$

donde el superíndice 0 en los modos fermiónicos denota su valor inicial en el tiempo η_0 y:

$$\Theta_k^l = \omega_k \Delta\eta + \frac{i}{2} [1 + (-1)^l] \ln \left(\frac{a}{a_0} \right) + \int_{\eta_0}^{\eta} d\tilde{\eta} \Lambda_k^l(\tilde{\eta}), \quad l = 1, 2, \quad (6.50)$$

siendo Λ_k^l las soluciones a las ecuaciones de Riccati (6.37) (donde ha de reemplazarse ω_n por ω_k) que tienen el comportamiento $\mathcal{O}(\omega_k^{-1})$ en el régimen ultravioleta $\omega_k \rightarrow \infty$. Por último:

$$\zeta_k = \frac{ma_0^2}{2\omega_k a_0 + ia_0'} = \frac{ma_0}{2\omega_k} + \mathcal{O}(\omega_k^{-2}), \quad (6.51)$$

con la última igualdad satisfecha como una identidad asintótica.

6.2. Cuantización de Fock

En esta segunda sección caracterizaremos todas las representaciones de Fock de las relaciones de anticonmutación canónicas de los campos de Dirac en las cosmologías estudiadas que satisfacen los siguientes requisitos físicos. En primer lugar, deberán dar lugar a vacíos

invariantes bajo la acción de los grupos de isometrías continuas de las hipersuperficies espaciales consideradas. En el caso del universo plano, dichos vacíos deberán también ser invariantes bajo las rotaciones de espín generadas por la helicidad, conservada en el sistema fermiónico. En segundo lugar, las representaciones de Fock a considerar han de admitir una dinámica que sea cuánticamente implementable mediante un operador unitario no trivial en el espacio de Fock resultante. Este requisito de unicidad resulta caracterizar por completo cuál es la dinámica cuántica y su relación respecto a la evolución dictada por la ecuación de Dirac.

6.2.1. Vacíos invariantes

Comenzaremos analizando el comportamiento de los espinores de Dirac en las cosmologías de FLRW con hipersuperficies espaciales esféricas cuando se efectúan transformaciones de isometría en S^3 . El grupo que forman dichas transformaciones es $SO(4)$ o, equivalentemente, su doble recubridor $\text{Spin}(4) = SU(2) \times SU(2)$ cuya acción en los puntos de S^3 está definida a través de una multiplicación de Clifford [144]. Más en concreto, S^3 está completamente caracterizada como espacio homogéneo que queda cubierto por la órbita de cada uno de sus puntos bajo la acción de $SO(4)$. En otras palabras, cada punto de S^3 está relacionado con cualquier otro a través de una multiplicación de Clifford por un elemento de $\text{Spin}(4)$. Así, las transformaciones activas del grupo $SO(4)$ sobre los puntos de S^3 , donde están evaluados los espinores bicomponente, se traducen en transformaciones pasivas en dichos espinores. Y dichas transformaciones tienen lugar a través de una representación del grupo de isometría $\text{Spin}(4)$ en el espacio de secciones del fibrado espinorial en S^3 [144]. En este punto de la exposición, conviene notar que la acción de este grupo de isometría en el espinor de Dirac completo puede entenderse como una acción diagonal en dos bloques: uno de ellos es la mencionada representación de $\text{Spin}(4)$ sobre ϕ^A , mientras que el otro es su compleja conjugada sobre $\bar{\chi}_{A'}$. Ambas representaciones son unitarias con respecto al producto interno (6.12), de donde se sigue que sus dos bloques asociados se descomponen en una suma directa de representaciones irreducibles de $\text{Spin}(4)$.

Caracterizaremos las estructuras complejas que conmutan con la acción de $\text{Spin}(4)$ sobre los espinores de Dirac en las cosmologías de FLRW con hipersuperficies espaciales esféricas. Serán las que den lugar a vacíos fermiónicos invariantes bajo el grupo de isometría de S^3 . En primer lugar, dadas las descomposiciones (6.16) y (6.17), cualquier estructura compleja puede entenderse como una matriz de dimensión infinita en la base formada por los modos $\{m_{np}, \bar{r}_{np}, t_{np}, \bar{s}_{np}\}$. Ahora bien, la referencia [144] presenta un estudio, completo para los objetivos aquí buscados, de las propiedades de los autoespacios del operador de Dirac en S^3 . Dicho estudio analiza, en particular, su relación con la descomposición en representaciones irreducibles del grupo de isometría al actuar sobre los espinores bicomponente. En efecto, consideremos la acción de $\text{Spin}(4)$ en el espacio de espinores bicomponente zurdos, con la quiralidad de ϕ^A . Haciendo uso del teorema de la reciprocidad de Frobenius [148], la referencia [144] ofrece una demostración de que cada uno de los autoespacios del operador de Dirac en S^3 se corresponde exactamente con el espacio de representación de cada una de las representaciones irreducibles en las que se descompone la acción de $\text{Spin}(4)$. Además, cada una de estas componentes irreducibles aparece con multiplicidad igual a uno en la suma

directa. Esto implica que los espacios de representación generados para cada n por:

$$\{\rho_A^{np}\}_{p=1,\dots,g_n} \quad \text{y} \quad \{\bar{\sigma}_A^{np}\}_{p=1,\dots,g_n} \quad (6.52)$$

proporcionan dos representaciones irreducibles inequivalentes. Es claro que estos espacios de representación están generados también por las bases obtenidas a través de las transformaciones lineales $\check{\alpha}_n$ consideradas en la expansión (6.16). Por otra parte, si se siguen argumentos análogos a los expuestos en la referencia [144], es posible caracterizar de forma similar la descomposición irreducible de la acción de Spin(4) en el espacio de espinores diestros, con la quiralidad de $\bar{\chi}_{A'}$. En efecto, el teorema de la reciprocidad de Frobenius garantiza que la acción de Spin(4) se descompone como la suma directa de representaciones irreducibles que son equivalentes, componente a componente, a aquellas en las que hemos visto que se descompone su acción compleja conjugada. Más en concreto, las representaciones irreducibles, con espacios de representación generados por:

$$\{\bar{\rho}_{A'}^{np}\}_{p=1,\dots,g_n} \quad \text{y} \quad \{\sigma_{A'}^{np}\}_{p=1,\dots,g_n} \quad (6.53)$$

para cada n , son respectivamente equivalentes a las correspondientes a (6.52). Estos espacios de representación están generados, de nuevo, por las bases alcanzadas a través de las transformaciones lineales $\check{\beta}_n$ introducidas en la expansión (6.17). Toda esta información nos permite aplicar los lemas de Schur [149] para concluir que cualquier estructura compleja que conmute con la acción del grupo de isometría de S^3 sobre el espacio de espinores de Dirac en las cosmologías de FLRW esféricas no puede mezclar modos $m_{np}, \bar{r}_{np}, t_{np}$ y \bar{s}_{np} que se correspondan con distintos valores de n . Además, dentro del subespacio determinado por una etiqueta n dada, las estructuras complejas de interés no pueden mezclar los modos $\{m_{np}, \bar{s}_{np}\}$ con $\{t_{np}, \bar{r}_{np}\}$ ya que, como se ha indicado, proporcionan representaciones irreducibles e inequivalentes de Spin(4). Consideraremos entonces, para una etiqueta n dada, el subespacio generado por los modos $\{m_{np}, \bar{s}_{np}\}$. La restricción de las estructuras complejas a este subespacio puede caracterizarse a través de cuatro aplicaciones cuadradas entre los dos subespacios generados de forma separada por $\{m_{np}\}$ y $\{\bar{s}_{np}\}$. Al dar lugar estos a dos representaciones irreducibles de Spin(4), el lema de Schur garantiza que cada una de estas aplicaciones ha de ser proporcional a la identidad². Puede aplicarse un argumento totalmente análogo si se considera la restricción de las estructuras complejas al subespacio generado por los modos $\{t_{np}, \bar{r}_{np}\}$. Por tanto, dichas restricciones pueden relacionar únicamente modos que compartan el mismo valor de la etiqueta p , y además no pueden depender de dicho valor.

A continuación, analizaremos el grupo de isometría continuo de T^3 , con el objetivo de caracterizar su acción sobre los campos de Dirac en cosmologías de FLRW con hipersuperficies espaciales planas y compactas. Dicho grupo está formado por la composición de traslaciones rígidas en cada una de las tres direcciones periódicas y ortogonales del toro. Para cada una de estas traslaciones, emplearemos la notación $T_{\theta_\alpha} : x_\alpha \rightarrow x_\alpha + \theta_\alpha$, donde $2\pi\theta_\alpha/l_0 \in S^1$, y la

²Para convencerse de la validez de este resultado, basta con notar que las transformaciones lineales definidas por $\check{\alpha}_n$ y $\check{\beta}_n$ garantizan que las dos representaciones de Spin(4) en los subespacios generados por $\{m_{np}\}$ y $\{\bar{s}_{np}\}$ son, en realidad, la misma. Dicha propiedad puede comprobarse de forma inmediata si se inspeccionan las ecuaciones de Dirac para estos modos, pues únicamente relacionan aquellos m_{np} y \bar{s}_{np} que comparten los mismos valores de las etiquetas n y p .

composición de tres de ellas será $T_{\vec{\theta}} = T_{\theta_1} \circ T_{\theta_2} \circ T_{\theta_3}$. Para cada elección de estructura compleja en T^3 , es fácil comprobar que las transformaciones activas $T_{\vec{\theta}}$ dan lugar simplemente al cambio:

$$w_{\vec{k}A}^{(\pm)}(\vec{x}) \longrightarrow e^{i2\pi\vec{k}\cdot\vec{\theta}/l_0} e^{2i\pi\vec{\tau}\cdot\vec{\theta}/l_0} w_{\vec{k}A}^{(\pm)}(\vec{x}) \quad (6.54)$$

en cada uno de los elementos (6.19) de la base de autoespinores zurdos del operador de Dirac. Resaltamos que la segunda fase que los multiplica es la misma para todos los modos de Dirac y únicamente depende de la elección de estructura de espín en T^3 . Así pues, el grupo de isometría continuo actúa como una suma directa de representaciones irreducibles del grupo abeliano [unitario con respecto a (6.12)] $U(1) \times U(1) \times U(1)$ sobre el espacio de espinores bicomponente zurdos. Para cada tupla $\vec{k} \in \mathbb{Z}^3$, se tienen entonces dos copias de la misma representación irreducible compleja y unidimensional. Está claro, además, que diferentes tuplas \vec{k} dan lugar a representaciones inequivalentes del grupo. Puede llevarse a cabo un análisis totalmente paralelo en el caso de los espinores bicomponente de quiralidad diestra, con base dada por los elementos complejos conjugados de (6.19). En particular, bajo la acción de las traslaciones rígidas en T^3 , cada uno de estos autoespinores sufre el cambio:

$$\bar{w}_{\vec{k}A'}^{(\pm)}(\vec{x}) \longrightarrow e^{-i2\pi(\vec{k}+2\vec{\tau})\cdot\vec{\theta}/l_0} e^{2i\pi\vec{\tau}\cdot\vec{\theta}/l_0} \bar{w}_{\vec{k}A'}^{(\pm)}(\vec{x}). \quad (6.55)$$

Si se recuerdan las expansiones (6.25) y (6.26) del campo de Dirac Ψ en las cosmologías de FLRW planas consideradas, y se hace uso de los lemas de Schur de nuevo, es inmediato concluir el siguiente resultado. Cualquier estructura compleja que conmute con la acción del grupo de isometría continuo de T^3 sobre los espinores de Dirac podrá mezclar como mucho los modos $(m_{\vec{k}}, \bar{s}_{-\vec{k}-2\vec{\tau}}, t_{-\vec{k}-2\vec{\tau}}, \bar{r}_{\vec{k}})$ entre ellos para cada tupla $\vec{k} \in \mathbb{Z}^3$.

Llegado este punto de la discusión, incluiremos una simetría adicional del sistema de Dirac-FLRW plano considerado, que procede de la conservación de la helicidad del campo de Dirac con respecto a su evolución en el tiempo conforme η . Contemplemos el escenario de una partícula fermiónica propagándose en el espaciotiempo cosmológico. Al ser las hipersuperficies espaciales planas, puede considerarse la proyección del momento angular de espín en la dirección del momento lineal de la partícula. Esto define el operador de helicidad, dado por [150]:

$$\mathfrak{h} = [-\vec{\nabla}^2]^{-1/2} \begin{pmatrix} -i\vec{\Sigma} \cdot \vec{\nabla} & 0 \\ 0 & -i\vec{\Sigma} \cdot \vec{\nabla} \end{pmatrix}, \quad (6.56)$$

donde $\vec{\nabla}$ es el gradiente estándar con respecto a las tres coordenadas ortogonales x_α , mientras que $\vec{\Sigma}$ denota una tupla cuyas entradas son las tres matrices de Pauli. Este operador únicamente está bien definido en el subespacio de espinores de Dirac generado por los autoespinores (6.19) y sus complejos conjugados que se corresponden con tuplas $\vec{k} \in \mathbb{Z}^3$ tales que $\omega_k \neq 0$. Diremos que un campo fermiónico tiene helicidad positiva o negativa si es un autoespinor de \mathfrak{h} con autovalor $+1$ o -1 , respectivamente. Con la elección de gauge para la que la conexión de espín se anula, los bloques matriciales del operador de helicidad \mathfrak{h} (salvo el factor $[-\vec{\nabla}^2]^{-1/2}$) se corresponden precisamente con el operador de Dirac en T^3 . Puede comprobarse entonces que la parte de helicidad positiva del campo de Dirac Ψ es la generada por los coeficientes $m_{\vec{k}}$ y $\bar{s}_{\vec{k}}$, para todo $\vec{k} \in \mathbb{Z}^3$ diferente de $\vec{\tau}$. Por otra parte, la contribución

de helicidad negativa es la parte de Ψ generada por los modos $t_{\vec{k}}$ y $\bar{r}_{\vec{k}}$, para todo $\vec{k} \in \mathbb{Z}^3$ diferente de $\vec{\tau}$. Una simple inspección de las ecuaciones del movimiento (6.48) muestra que la helicidad es, en efecto, una cantidad conservada en la evolución. Por tanto, es posible considerar, como simetría adicional del sistema fermiónico, el grupo uniparamétrico de rotaciones de espín generadas por la helicidad a través de la exponenciación compleja de $\mathfrak{h}/2$ veces el ángulo de rotación. Dicho grupo es inmediatamente unitario respecto al producto interno (3.10), dado que \mathfrak{h} , operador construido a partir del de Dirac, es esencialmente autoadjunto. Entonces, la implementación de esta simetría en la teoría cuántica queda garantizada si las estructuras complejas de interés no mezclan los modos del campo de Dirac de helicidad positiva con los de helicidad negativa.

En resumen, la forma genérica que deben adoptar las estructuras complejas que den lugar a vacíos invariantes bajo las simetrías físicas de los sistemas cosmológicos homogéneos e isótropos estudiados es la siguiente. En el caso con hipersuperficies espaciales esféricas, estas estructuras complejas *invariantes* son diagonales en bloques 2×2 , en la base dada por la torre infinita de modos $\{m_{np}, \bar{r}_{np}, t_{np}, \bar{s}_{np}\}$. Sus bloques, pueden como mucho, mezclar los pares de coeficientes (m_{np}, \bar{s}_{np}) o (t_{np}, \bar{r}_{np}) , para los mismos valores de n y p . Además, los bloques que mezclan los pares (m_{np}, \bar{s}_{np}) son todos iguales para cada n , y lo mismo ocurre con aquellos que mezclan (t_{np}, \bar{r}_{np}) . Sin embargo, los bloques correspondientes a (m_{np}, \bar{s}_{np}) en principio no tienen por qué coincidir con los que conciernen a (t_{np}, \bar{r}_{np}) [141]. En el escenario alternativo donde las hipersuperficies espaciales son planas y compactas, las estructuras complejas invariantes han de poseer, de nuevo, una estructura de bloques 2×2 . Estos bloques pueden, como mucho, mezclar los pares de coeficientes $(m_{\vec{k}}, \bar{s}_{-\vec{k}-2\vec{\tau}})$ o $(t_{\vec{k}}, \bar{r}_{-\vec{k}-2\vec{\tau}})$, para cada $\vec{k} \neq \vec{\tau}$ [142].

6.2.2. Dinámica unitaria

Las estructuras complejas caracterizadas definen los conjuntos de operadores de destrucción y creación que proporcionan representaciones de Fock invariantes de las relaciones de anticonmutación canónicas del campo de Dirac. En el escenario homogéneo e isótropo con hipersuperficies espaciales esféricas, designaremos sus contrapartidas clásicas de destrucción de partículas y antipartículas como $a_{np}^{(x,y)}$ y $b_{np}^{(x,y)}$, respectivamente. Las variables de creación correspondientes, $a_{np}^{(x,y)\dagger}$ y $b_{np}^{(x,y)\dagger}$, serán sus complejas conjugadas. Por otra parte, para universos con hipersuperficies espaciales planas y compactas, denotaremos las variables de destrucción de partículas y antipartículas como $a_{\vec{k}}^{(x,y)}$ y $b_{\vec{k}}^{(x,y)}$, respectivamente. Las variables de creación serán, de nuevo, sus complejas conjugadas, $a_{\vec{k}}^{\dagger(x,y)}$ y $b_{\vec{k}}^{\dagger(x,y)}$. Recordamos que los pares ordenados (x, y) , con sus adecuados subíndices, denotan cualquiera de los pares ordenados de modos (m, s) o (t, r) . En los análisis siguientes, consideraremos de forma genérica todas las familias dinámicas posibles de variables de destrucción y creación fermiónicas seleccionadas por estructuras complejas invariantes. Los elementos de cada una de dichas familias están parametrizados por el tiempo conforme η .

En el caso de hipersuperficies espaciales isomorfas a S^3 , las variables de destrucción y

creación que queremos considerar son pues de la forma:

$$\begin{pmatrix} a_{np}^{(x,y)} \\ b_{np}^{(x,y)\dagger} \end{pmatrix}_\eta = \begin{pmatrix} f_1^n(\eta) & f_2^n(\eta) \\ g_1^n(\eta) & g_2^n(\eta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{np} \\ \bar{y}_{np} \end{pmatrix}_\eta, \quad (6.57)$$

donde el subíndice η en las columnas indica evaluación en ese valor del tiempo conforme. Resaltamos que, al estar teniéndose en cuenta trayectorias de evolución generales en el espacio de condiciones iniciales \mathcal{P}_Ψ que relacionan los elementos de las familias dinámicas de estructuras complejas invariantes, los coeficientes f_l^n y g_l^n (con $l = 1, 2$) dependen del tiempo. Además, supondremos que dicha dependencia es suave. Aunque no se indique en la notación, por simplicidad, estas funciones pueden diferir para los pares de modos (m_{np}, \bar{s}_{np}) y (t_{np}, \bar{r}_{np}) , en general. Sin embargo, en ambos casos deben estar sujetas a las relaciones:

$$|f_1^n|^2 + |f_2^n|^2 = 1, \quad |g_1^n|^2 + |g_2^n|^2 = 1, \quad f_1^n \bar{g}_1^n + f_2^n \bar{g}_2^n = 0, \quad (6.58)$$

para que las variables de destrucción y creación satisfagan corchetes de Dirac que den lugar en la teoría cuántica a los anticonmutadores canónicos (3.17). Estas restricciones garantizan que la transformación lineal (6.57) sea invertible, e implican que:

$$g_1^n = \bar{f}_2^n e^{iG^n}, \quad g_2^n = -\bar{f}_1^n e^{iG^n}, \quad (6.59)$$

donde G^n es una cierta fase que puede depender del tiempo.

En las cosmologías de FLRW con hipersuperficies espaciales isomorfas a T^3 , por otro lado, se sigue de los análisis previos acerca de las simetrías del espaciotiempo y del sistema fermiónico que las familias dinámicas de estructuras complejas invariantes definen variables de destrucción y creación de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} a_{\vec{k}}^{(x,y)} \\ b_{\vec{k}}^{\dagger(x,y)} \end{pmatrix}_\eta = \begin{pmatrix} f_1^{\vec{k}}(\eta) & f_2^{\vec{k}}(\eta) \\ g_1^{\vec{k}}(\eta) & g_2^{\vec{k}}(\eta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{\vec{k}} \\ \bar{y}_{-\vec{k}-2\vec{\tau}} \end{pmatrix}_\eta, \quad (6.60)$$

donde el subíndice η en las columnas indica evaluación en ese valor del tiempo conforme. De nuevo asumiremos que la dependencia temporal de las funciones $f_l^{\vec{k}}$ y $g_l^{\vec{k}}$ (con $l = 1, 2$) es suave. Están sujetas, además, a las relaciones:

$$\left| f_1^{\vec{k}} \right|^2 + \left| f_2^{\vec{k}} \right|^2 = 1, \quad \left| g_1^{\vec{k}} \right|^2 + \left| g_2^{\vec{k}} \right|^2 = 1, \quad f_1^{\vec{k}} \bar{g}_1^{\vec{k}} + f_2^{\vec{k}} \bar{g}_2^{\vec{k}} = 0, \quad (6.61)$$

para que las variables que definen sean, en efecto, de destrucción y creación, desde el punto de vista canónico. Estas restricciones garantizan que la transformación lineal (6.60) sea invertible y permiten expresar:

$$g_1^{\vec{k}} = \bar{f}_2^{\vec{k}} e^{iG^{\vec{k}}}, \quad g_2^{\vec{k}} = -\bar{f}_1^{\vec{k}} e^{iG^{\vec{k}}}, \quad (6.62)$$

donde $G^{\vec{k}}$ es una cierta fase, posiblemente dependiente del tiempo.

Los conjuntos de variables de destrucción y creación (6.57) y (6.60) evaluados a distintos tiempos están relacionados entre sí por transformaciones de Bogoliubov dinámicas. La forma general que adquieren dichas transformaciones, que son lineales, puede deducirse fácilmente

teniendo en cuenta las relaciones (6.33) y (6.49) para la evolución de los modos fermiónicos. En el caso de espinores de Dirac en cosmologías de FLRW con secciones espaciales esféricas, la transformación de Bogoliubov que relaciona las variables de destrucción y creación al tiempo inicial arbitrario η_0 con aquellas a tiempo η cualquiera viene dada por una secuencia de bloques \mathcal{B}_n tales que:

$$\begin{pmatrix} a_{np}^{(x,y)} \\ b_{np}^{(x,y)\dagger} \end{pmatrix}_\eta = \mathcal{B}_n(\eta, \eta_0) \begin{pmatrix} a_{np}^{(x,y)} \\ b_{np}^{(x,y)\dagger} \end{pmatrix}_{\eta_0}, \quad \mathcal{B}_n = \begin{pmatrix} \alpha_n^f & \beta_n^f \\ \beta_n^g & \alpha_n^g \end{pmatrix}. \quad (6.63)$$

Los módulos de los coeficientes β_n^f y β_n^g adoptan la siguiente expresión [140, 141]:

$$\begin{aligned} |\beta_n^h(\eta, \eta_0)| = & \left| \left[-h_1^n \left(h_2^{n,0} + \zeta_n h_1^{n,0} \right) e^{i \int \Lambda_n^1} + \bar{\zeta}_n h_2^n h_2^{n,0} \frac{a}{a_0} e^{i \int \bar{\Lambda}_n^2} \right] e^{i \omega_n \Delta \eta} \right. \\ & \left. + \left[h_2^n \left(h_1^{n,0} - \bar{\zeta}_n h_2^{n,0} \right) e^{-i \int \bar{\Lambda}_n^1} + \zeta_n h_1^n h_1^{n,0} \frac{a}{a_0} e^{-i \int \Lambda_n^2} \right] e^{-i \omega_n \Delta \eta} \right|, \end{aligned} \quad (6.64)$$

donde estamos denotando $\{h, k\} = \{f, g\}$ como un conjunto y las integrales, en tiempo conforme, son en el intervalo $[\eta_0, \eta]$. Además, estamos omitiendo la dependencia de todas las funciones en η , y la evaluación en el tiempo inicial η_0 está indicada, como en casos anteriores, con el superíndice 0 precedido por una coma.

Por su lado, la transformación de Bogoliubov dinámica para las variables de destrucción y creación invariantes (6.60) del campo de Dirac en cosmologías de FLRW con secciones espaciales planas viene caracterizada por una secuencia de matrices $\mathcal{B}_{\vec{k}}$ tales que:

$$\begin{pmatrix} a_{\vec{k}}^{(x,y)} \\ b_{\vec{k}}^{(x,y)\dagger} \end{pmatrix}_\eta = \mathcal{B}_{\vec{k}}(\eta, \eta_0) \begin{pmatrix} a_{\vec{k}}^{(x,y)} \\ b_{\vec{k}}^{(x,y)\dagger} \end{pmatrix}_{\eta_0}, \quad \mathcal{B}_{\vec{k}} = \begin{pmatrix} \alpha_{\vec{k}}^f & \beta_{\vec{k}}^f \\ \beta_{\vec{k}}^g & \alpha_{\vec{k}}^g \end{pmatrix}. \quad (6.65)$$

Los módulos de los coeficientes $\beta_{\vec{k}}^f$ y $\beta_{\vec{k}}^g$ tienen en este caso la forma [142]:

$$\begin{aligned} |\beta_{\vec{k}}^h(\eta, \eta_0)| = & \left| \left[-h_1^{\vec{k}} \left(h_2^{\vec{k},0} + \zeta_{\vec{k}} h_1^{\vec{k},0} \right) e^{i \int \Lambda_{\vec{k}}^1} + \bar{\zeta}_{\vec{k}} h_2^{\vec{k}} h_2^{\vec{k},0} \frac{a}{a_0} e^{i \int \bar{\Lambda}_{\vec{k}}^2} \right] e^{i \omega_{\vec{k}} \Delta \eta} \right. \\ & \left. + \left[h_2^{\vec{k}} \left(h_1^{\vec{k},0} - \bar{\zeta}_{\vec{k}} h_2^{\vec{k},0} \right) e^{-i \int \bar{\Lambda}_{\vec{k}}^1} + \zeta_{\vec{k}} h_1^{\vec{k}} h_1^{\vec{k},0} \frac{a}{a_0} e^{-i \int \Lambda_{\vec{k}}^2} \right] e^{-i \omega_{\vec{k}} \Delta \eta} \right|, \end{aligned} \quad (6.66)$$

donde, de nuevo, $\{h, k\} = \{f, g\}$ como conjunto, y estamos utilizando la misma notación que en el caso de S^3 para las integrales y la evaluación en el tiempo.

Para cualquiera de las topologías espaciales consideradas, estas transformaciones de Bogoliubov, que describen la evolución general de las familias de estructuras complejas invariantes, son implementables mediante un operador unitario en el espacio de Fock definido, por ejemplo, por las variables de destrucción y creación al tiempo inicial η_0 si y solo si [81, 82]:

$$\sum_n g_n |\beta_n^f(\eta, \eta_0)|^2 \quad \text{y} \quad \sum_n g_n |\beta_n^g(\eta, \eta_0)|^2 \quad (6.67)$$

en el caso de hipersuperficies espaciales esféricas, o:

$$\sum_{\vec{k}} |\beta_{\vec{k}}^f(\eta, \eta_0)|^2 < \infty \quad \text{y} \quad \sum_{\vec{k}} |\beta_{\vec{k}}^g(\eta, \eta_0)|^2 < \infty, \quad (6.68)$$

para cosmologías de FLRW con secciones espaciales toroidales. A su vez, el comportamiento asintótico de estos coeficientes beta en los límites $\omega_n \rightarrow \infty$ y $\omega_k \rightarrow \infty$ queda completamente determinado por el de las funciones f_l^n, g_l^n y $f_l^{\vec{k}}, g_l^{\vec{k}}$, con $l = 1, 2$, dado el estudio llevado a cabo en la sección 6.1.2 acerca del carácter asintótico de la dinámica fermiónica. Dicho comportamiento ultravioleta es el que garantiza o descarta la convergencia de las series (6.67) y (6.68). A pesar de que la forma que presentan los coeficientes beta (6.64) y (6.66) es similar, la búsqueda de las condiciones necesarias y suficientes para que la dinámica sea unitariamente implementable siguen razonamientos ligeramente diferentes en las cosmologías con hipersuperficies espaciales esféricas y planas. Esto se debe a que, al contrario de lo que ocurre en S^3 , el espectro del operador de Dirac presenta una degeneración accidental en la elección de tuplas \vec{k} que dan lugar a un mismo autovalor ω_k , tuplas cuyos autespacios asociados proporcionan representaciones irreducibles inequivalentes del grupo de isometría continuo de T^3 . Los coeficientes beta dinámicos $\beta_{\vec{k}}^h$ para las familias de representaciones de Fock invariantes dependen de dicha degeneración, a diferencia de lo que ocurre con β_n^h . Por tanto, analizaremos ambos casos de forma separada, aunque aplicando una metodología similar. No obstante, conviene destacar antes que, en ambos casos, una vez se fija h como f o g , los coeficientes beta complementarios a β_n^h y $\beta_{\vec{k}}^h$, que con la notación introducida son respectivamente β_n^k y $\beta_{\vec{k}}^k$, coinciden con ellos en norma compleja [140]. Así pues, si se demuestra que ciertas condiciones son necesarias y suficientes para la sumabilidad cuadrática de $\sqrt{g_n}\beta_n^h$ y $\beta_{\vec{k}}^h$, entonces queda automáticamente demostrada la implementabilidad unitaria de la dinámica en cada uno de los casos estudiados.

Consideremos primero la transformación de Bogoliubov (6.63) que implementa la dinámica de las familias de estructuras complejas invariantes para campos de Dirac en cosmologías de FLRW con secciones espaciales esféricas. Recordemos que la degeneración de los autovalores $\pm\omega_n$ del operador de Dirac en S^3 es $g_n = (n+1)(n+2) = \omega_n^2 - 1/4$. Una consecuencia inmediata de esta propiedad es que el cumplimiento de las condiciones de unitariedad (6.67) implica, en particular, que, en el límite $\omega_n \rightarrow \infty$, los coeficientes β_n^h han de ser asintóticamente despreciables comparados con ω_n^{-1} para todos los tiempos η de interés. Esta condición necesaria para la implementabilidad unitaria de la dinámica en la cuantización de Fock se traduce a su vez en un comportamiento muy específico de las funciones f_l^n y g_l^n . Dicho comportamiento afecta tanto a su dependencia en los autovalores del operador de Dirac como en el tiempo. Con el objetivo de demostrar esta afirmación, llamaremos $\{l, \tilde{l}\} = \{1, 2\}$ como un conjunto. Entonces, si se tienen en cuenta las relaciones (6.58) y (6.59), pueden distinguirse los siguientes escenarios, que no son mutuamente exclusivos, al menos en un intervalo temporal suficientemente corto alrededor de η_0 [141]:

- i) Que ω_n^{-1} sea despreciable con respecto a h_l^n en el límite asintótico $\omega_n \rightarrow \infty$ para un subconjunto infinito de los números naturales, $n \in \mathbb{N}_l^\uparrow$. Al tenerse:

$$h_l^n = e^{iH_l^n} \sqrt{1 - |h_l^n|^2}, \quad (6.69)$$

donde H_l^n es una fase que puede depender del tiempo, puede afirmarse que h_l^n es del mismo orden que h_l^n o del orden de la unidad, según cuál sea el mayor. La única excepción posible a este carácter asintótico ocurriría si h_l^n fuera del orden de la unidad, en cuyo caso h_l^n podría ser menor; comentaremos este caso especial más adelante.

Por otra parte, recordamos que ζ_n es del orden ω_n^{-1} y que $\beta_n^h(\eta, \eta_0)$ ha de ser despreciable en comparación con ω_n^{-1} para todos los tiempos η de interés, dada la hipótesis de dinámica unitaria. Debería entonces cumplirse la relación:

$$\frac{h_l^n}{h_l^{n,0}} = \frac{h_l^n}{h_l^{n,0}} e^{i(-1)^l 2\omega_n \Delta\eta}, \quad (6.70)$$

salvo términos despreciables comparados con ω_n^{-1} , para todo η y todo $n \in \mathbb{N}_l^\uparrow$ mayor que un cierto $n_l \geq 0$. No obstante, esta igualdad no puede darse a no ser que la dependencia temporal de las fases H_l^n y H_l^n , de h_l^n y h_l^n respectivamente, se fije de tal forma que absorba la contribución dinámica dominante en las fases de los modos fermiónicos (6.33). Un comportamiento así trivializaría la contribución a la dinámica cuántica del orden dominante de la ecuación de Dirac. Más en concreto, la condición (6.70) requiere que $H_l^n - H_l^{n,0} = H_l^n - H_l^{n,0} + (-1)^l 2\omega_n \Delta\eta + 2\pi k_n$, con $k_n \in \mathbb{Z}$. Descartaremos esta posibilidad (que trivializa la evolución de Dirac), imponiendo, por ejemplo, que la dependencia temporal de la parte dominante en los coeficientes h_l^n sea independiente de ω_n .

- ii) Que h_l^n sea despreciable en comparación con ω_n^{-1} en el límite asintótico $\omega_n \rightarrow \infty$ para un subconjunto infinito de los números naturales, $n \in \mathbb{N}_l^\downarrow$. En este caso, puede comprobarse a partir de la expresión (6.64) que nunca puede darse una dinámica unitariamente implementable, ya que para ello se tendría que cumplir la relación imposible:

$$\frac{a}{a_0} e^{i(-1)^{l+1} 2\omega_n \Delta\eta} = 1, \quad (6.71)$$

salvo términos asintóticamente despreciables, para todo tiempo η de interés y todo $n \in \mathbb{N}_l^\downarrow$ mayor que un cierto $n_l \geq 0$. En esta deducción, hemos hecho uso del comportamiento asintótico $\mathcal{O}(\omega_n^{-1})$ de las funciones Λ_n^l .

- iii) Que h_l^n sea del orden de ω_n^{-1} en el régimen $\omega_n \rightarrow \infty$ para un subconjunto infinito de los números naturales, $n \in \mathbb{N}_l$. Entonces, se tendría $h_l^n \sim p^n + o(\omega_n^{-1})$, donde $p^n = \mathcal{O}(\omega_n^{-1})$ y, recordemos, $o(\omega_n^{-1})$ denota términos despreciables en comparación con ω_n^{-1} . Si se tiene en cuenta que $\zeta_n = ma_0/(2\omega_n)$ a orden dominante y se siguen argumentos análogos a los de los dos casos anteriores, es posible concluir de la expresión (6.64) que, para todo tiempo η y todo $n \in \mathbb{N}_l$ mayor que un cierto $n_l \geq 0$, la unitariedad de la dinámica requiere que:

$$p^n = (-1)^{l+1} \frac{ma}{2\omega_n} e^{iH_l^n} + \left[p^{n,0} + (-1)^l \frac{ma_0}{2\omega_n} e^{iH_l^{n,0}} \right] e^{i(-1)^l 2\omega_n \Delta\eta + iH_l^n - iH_l^{n,0}}, \quad (6.72)$$

donde H_l^n es de nuevo la fase de h_l^n . Por lo tanto, si se descarta la posibilidad de absorber la variación temporal dominante de los modos fermiónicos (procedente de

la ecuación de Dirac) en el término p^n , imponiendo, por ejemplo, que la dependencia temporal dominante de h_l^n se factorice de su dependencia en ω_n , entonces la función h_l^n debe comportarse necesariamente como:

$$h_l^n = (-1)^{l+1} \frac{ma}{2\omega_n} e^{iH_l^n} + o(\omega_n^{-1}), \quad (6.73)$$

para todo $n \in \mathbb{N}_l$ en el límite asintótico $\omega_n \rightarrow \infty$. Conviene aclarar que en estas consideraciones hemos dividido los números naturales, salvo una posible colección finita de ellos, en dos subconjuntos infinitos \mathbb{N}_1 y \mathbb{N}_2 , pudiendo estar uno de ellos vacío.

- iv) Finalmente, comentaremos el caso excepcional en que h_l^n sea del orden de la unidad, mientras que $h_{\tilde{l}}^n$ sea de orden inferior para un subconjunto de los números naturales $n \in \mathbb{N}_{\tilde{l}}$. En esta situación, resulta conveniente revertir los papeles de h_l^n y $h_{\tilde{l}}^n$ y repetir posteriormente el análisis de los casos i-iii, esta vez aplicado a $h_{\tilde{l}}^n$ (con el primer escenario restringido al caso en que $h_{\tilde{l}}^n$ ya es despreciable en comparación con la unidad). Se concluye así que la única posibilidad aceptable es que $h_{\tilde{l}}^n$ tenga un comportamiento como el expuesto en (6.73), con l reemplazado por \tilde{l} , para $n \in \mathbb{N}_{\tilde{l}}$, si este conjunto de números tiene cardinal infinito.

Con objeto de encontrar no solo las condiciones necesarias, sino también las suficientes que garanticen el cumplimiento de (6.67), discutiremos en más detalle el comportamiento permitido por la relación (6.73). Llamaremos $\vartheta_{h,l}^n$ el término de dicha ecuación que es despreciable comparado con ω_n^{-1} . Una simple inspección de los coeficientes beta dinámicos (6.64) y las condiciones (6.67), así como del carácter asintótico de las funciones y constantes que aparecen en ellos, permite afirmar que una dinámica no trivial y unitariamente implementable se obtiene *si y solo si* la secuencia:

$$\vartheta_{h,l}^{n,0} - \vartheta_{h,l}^n e^{i(-1)^{l+1}2\omega_n\Delta\eta - iH_l^n + iH_{\tilde{l}}^{n,0}}, \quad (6.74)$$

con $n \in \mathbb{N}_l$, es de cuadrado sumable para todos los tiempos de interés, incluyendo en la suma la degeneración g_n . Si la secuencia formada por los términos $\vartheta_{h,l}^{n,0}$ en el tiempo inicial es de cuadrado sumable, esta última condición es equivalente a requerir que la secuencia formada por $\vartheta_{h,l}^n$ (con $n \in \mathbb{N}_l$) lo sea en todos los instantes de tiempo a considerar. Por el contrario, si la secuencia dada por $\vartheta_{h,l}^{n,0}$ tuviera una parte $\tilde{\vartheta}_{h,l}^{n,0}$ que no fuera de cuadrado sumable, entonces se necesitaría compensarla a todo tiempo con el segundo sumando de la expresión (6.74), necesidad que fijaría por completo la variación temporal de la contribución de $\vartheta_{h,l}^n$ que no fuera de cuadrado sumable. En particular, si designamos esta contribución por $\tilde{\vartheta}_{h,l}^{n,0} \exp(i\theta_{h,l}^n)$ debería cumplirse que $\theta_{h,l}^n = H_{\tilde{l}}^n - H_l^{n,0} + (-1)^l 2\omega_n \Delta\eta + 2\pi k_n$, con $k_n \in \mathbb{Z}$. Esto implicaría, de nuevo, que la fase dominante de la dinámica de Dirac quedaría absorbida en la dependencia temporal de las familias de estructuras complejas (a través de $\theta_{h,l}^n$ y $H_{\tilde{l}}^n$), lo que trivializaría la contribución dominante de tal evolución de Dirac en lo concerniente a los términos que no son de cuadrado sumable. Descartaremos esta posibilidad requiriendo, por ejemplo, que la dependencia temporal de estas contribuciones únicamente se dé a través de funciones independientes de ω_n . Puede concluirse entonces que la condición necesaria y suficiente para la implementabilidad unitaria de la dinámica no trivial se alcanza si $\vartheta_{h,l}^n$ es de cuadrado sumable, degeneración incluida, sobre el subconjunto $n \in \mathbb{N}_l$.

A continuación, analizaremos las restricciones que impone la unitariedad de la dinámica en las familias de estructuras complejas invariantes para campos de Dirac en cosmologías de FLRW con hipersuperficies espaciales planas y compactas. En vista del estudio previo en S^3 , descartaremos de antemano cualquier dependencia funcional de los coeficientes $f_l^{\vec{k}}$ y $g_l^{\vec{k}}$ en las ondas planas $\exp(i\omega_k \Delta\eta)$ y $\exp(-i\omega_k \Delta\eta)$ que pueda absorber la variación temporal dominante de las fases de $x_{\vec{k}}$ y $\bar{y}_{\vec{k}}$ en el régimen asintótico $\omega_k \rightarrow \infty$. Evitaremos así la consideración de cualquier tipo de trayectorias dinámicas de las variables de destrucción y creación que trivialicen la contribución dominante (en dicho régimen) de la evolución de Dirac. Empleando un razonamiento análogo al del escenario con hipersuperficies espaciales esféricas, puede comprobarse con facilidad que, si $h_l^{\vec{k}}$ es asintóticamente despreciable en comparación con ω_k^{-1} para todas las tuplas \vec{k} que pertenezcan a cualquier red infinita de \mathbb{Z}^3 , entonces las condiciones de implementabilidad unitaria (6.68) no pueden cumplirse. Así pues, nos quedan por tener en cuenta las dos posibilidades de que $h_l^{\vec{k}}$ sea asintóticamente o bien del orden de ω_k^{-1} o bien de orden superior, para todas las tuplas $\vec{k} \in \mathbb{Z}^3$ (salvo un posible subconjunto finito e irrelevante). Resaltamos que estas posibilidades no son necesariamente excluyentes entre sí y son distinguibles al menos en un entorno temporal suficientemente pequeño de η_0 . Si llamamos de nuevo $\{l, \tilde{l}\} = \{1, 2\}$ como un conjunto, las condiciones necesarias y suficientes para la implementabilidad unitaria de la dinámica que resultan de estas dos posibilidades son las siguientes [142]:

- I) Puede existir un subconjunto infinito $\mathbb{Z}_{l,\uparrow}^3 \subset \mathbb{Z}^3$ de tuplas \vec{k} tales que las funciones $h_l^{\vec{k}}$, que, como recordamos, deben tener el orden asintótico de ω_k^{-1} o superior, formen una secuencia de cuadrado sumable a todos los tiempos de interés. Esta condición implica, en particular, que $h_l^{\vec{k}}$ debe tender a cero cuando ω_k tiende a infinito para esas tuplas pertenecientes a $\mathbb{Z}_{l,\uparrow}^3$. Se sigue entonces de la relación (6.61) que, en dicho subconjunto $\mathbb{Z}_{l,\uparrow}^3$, la otra función $h_{\tilde{l}}^{\vec{k}}$ ha de ser asintóticamente del orden de la unidad, con términos adicionales que decaen como $\mathcal{O}(|h_l^{\vec{k}}|^2)$.
- II) Para todas las tuplas $\vec{k} \in \mathbb{Z}_l^3$, donde $\mathbb{Z}_1^3 \cup \mathbb{Z}_2^3$ es el subconjunto complementario en \mathbb{Z}^3 de $\mathbb{Z}_{1,\uparrow}^3 \cup \mathbb{Z}_{2,\uparrow}^3$ (salvo un posible número finito de elementos), las funciones $h_l^{\vec{k}}$ deben satisfacer:

$$h_l^{\vec{k}} = (-1)^{l+1} \frac{ma}{2\omega_k} e^{iH_l^{\vec{k}}} + \vartheta_{h,l}^{\vec{k}} \quad (6.75)$$

para todo tiempo η de interés. Pudiera ocurrir que uno de los dos subconjuntos \mathbb{Z}_l^3 fuera nulo. Además, $H_l^{\vec{k}}$ es la fase de $h_l^{\vec{k}}$, posiblemente dependiente del tiempo, y $\vartheta_{h,l}^{\vec{k}}$ denota términos subdominantes que son despreciables comparados con ω_k^{-1} y tales que:

$$\sum_{\vec{k} \in \mathbb{Z}_l^3} \left| \vartheta_{h,l}^{\vec{k}} \right|^2 < \infty, \quad \forall \eta. \quad (6.76)$$

Para llegar a este resultado, podemos seguir de nuevo argumentos análogos a los empleados en el caso de secciones espaciales esféricas, pero teniendo en mente las consecuencias ya mencionadas de la degeneración accidental del espectro del operador de Dirac en T^3 . En

particular, podemos utilizar que la secuencia $\{\omega_k^{-2}\}_{\vec{k} \in \mathbb{Z}^3}$ es de cuadrado sumable, incluso a pesar del crecimiento asintótico de la degeneración de los autovalores de Dirac en T^3 [127].

En resumen, cualquier cuantización de Fock alcanzada con las familias de representaciones de las relaciones de anticonmutación canónicas del campo de Dirac correspondientes a las variables de destrucción y creación (6.57) y (6.60) admite una dinámica no trivial e implementable mediante un operador unitario si y solo si: a) en cosmologías con secciones espaciales esféricas, las funciones h_l^n tienen la forma asintótica (6.73) con términos $o(\omega_n^{-1})$ que forman una secuencia $\{\vartheta_{h,l}^n\}_{n \in \mathbb{N}_l}$ de cuadrado sumable, incluyendo la degeneración g_n ; o b) en cosmologías con secciones espaciales planas, las funciones $h_l^{\vec{k}}$ satisfacen las condiciones I y II indicadas en el anterior párrafo. Estas condiciones son necesarias y suficientes, siempre que las distintas fases dependientes del tiempo que aparecen en la definición de las variables de destrucción y creación no se fijen de forma tal que trivialicen la contribución dinámica dominante dictada por la ecuación de Dirac, con respecto a una expansión asintótica en los regímenes correspondientes a $\omega_n \rightarrow \infty$ y $\omega_k \rightarrow \infty$. Es interesante enfatizar que, en la cosmología de FLRW con hipersuperficies espaciales planas, al menos uno de los subconjuntos \mathbb{Z}_l^3 , en los que $h_l^{\vec{k}}$ tiene que adoptar la forma (6.75), debe poseer un número infinito de elementos. Efectivamente: si este no fuera el caso, sería imposible el cumplimiento de la condición I ($\mathbb{Z}_{l,\uparrow}^3$ tendría «demasiados» elementos, hecho que impediría la sumabilidad cuadrática de $h_l^{\vec{k}}$ en dicho subconjunto, al ser $h_l^{\vec{k}}$ ahí del orden de ω_k^{-1} o superior y crecer la degeneración g_k más rápido que ω_k [138]). Como resultado, tanto en el caso esférico como en el plano, el requisito de que exista una dinámica no trivial e implementable unitariamente en la teoría cuántica, fija por completo la dependencia explícita en el tiempo de las partes dominantes del campo de Dirac Ψ , cuando este se expresa mediante una descomposición en modos, para un número infinito de dichos modos en el régimen asintótico correspondiente, $\omega_n \rightarrow \infty$ o $\omega_k \rightarrow \infty$. En otras palabras, las funciones dependientes del tiempo que han de extraerse de la dinámica de Dirac para que el resto de la evolución pueda implementarse como un operador unitario están completamente caracterizadas (en módulo) a orden dominante. Dichas funciones están especificadas por $ma/2\omega_n$ y $ma/2\omega_k$, respectivamente para hipersuperficies espaciales esféricas y planas, así como por el factor $a^{-3/2}$ introducido en las expansiones (6.16) y (6.17), por una parte, o (6.25) y (6.26), por otra.

6.3. Unicidad de la cuantización

En la sección anterior, hemos caracterizado por completo las cuantizaciones de Fock del campo de Dirac que tienen vacíos invariantes bajo las simetrías físicas de las cosmologías en que se propaga y admiten un concepto no trivial de dinámica unitariamente implementable. Lo que demostraremos a continuación es que, en ambos espaciotiempos cosmológicos, dichas cuantizaciones (o familias dinámicas de representaciones de Fock) son todas unitariamente equivalentes entre sí. Existirá, por tanto, un único espacio de Fock que soporte todas las representaciones permitidas por el criterio adoptado. Una consecuencia directa de este resultado es la fijación del concepto de evolución cuántica, salvo redefiniciones que pueden acomodarse a través de un operador unitario y que además no afectan a la parte dominante en el régimen ultravioleta. El resto de la variación temporal del campo de Dirac cuántico

en la imagen de Heisenberg es una dependencia explícita en el tiempo. Estos resultados de unicidad van a quedar garantizados una vez se haya fijado un convenio para la distinción de partículas y antipartículas fermiónicas.

Comenzaremos nuestra discusión investigando la cuestión de la unicidad de la cuantización de Fock en la cosmología de FLRW con hipersuperficies espaciales esféricas. Restringiremos la atención a familias de estructuras complejas invariantes que permiten una dinámica unitaria no trivial. Más en concreto, de acuerdo con los resultados de la sección anterior, consideramos familias de variables de destrucción y creación de la forma (6.57), siendo h_l^n una función con el carácter asintótico (6.73) en el régimen $\omega_n \rightarrow \infty$ y tal que las secuencias subdominantes formadas por $\vartheta_{h,l}^n$ sean de cuadrado sumable en \mathbb{N}_l , incluyendo la degeneración g_n . Dentro de esta clase de estructuras complejas, fijaremos como familia de *referencia* aquella que selecciona las variables de destrucción y creación:

$$f_1^n = \frac{ma}{2\omega_n}, \quad f_2^n = \sqrt{1 - (f_1^n)^2}, \quad g_1^n = f_2^n, \quad g_2^n = -f_1^n, \quad (6.77)$$

tanto para los pares (m_{np}, \bar{s}_{np}) como para (t_{np}, \bar{r}_{np}) . Esta elección es la más simple que satisface las condiciones necesarias y suficientes para admitir una dinámica cuántica unitaria no trivial. Tomemos entonces cualquier otra familia de estructuras complejas que admita una evolución no trivial y unitariamente implementable. Dicha familia estará caracterizada por ciertas variables de destrucción y creación, $\tilde{a}_{np}^{(x,y)}$ y $\tilde{b}_{np}^{(x,y)\dagger}$, cuyos coeficientes \tilde{f}_l^n y \tilde{g}_l^n (con $l = 1, 2$) son tales que bien \tilde{f}_l^n o bien \tilde{g}_l^n tiene el comportamiento asintótico (6.73) para todo n en \mathbb{N}_l , con secuencias subdominantes $\vartheta_{h,l}^n$ que sean de cuadrado sumable, incluida la degeneración. La relación entre una familia cualquiera de este estilo y la de referencia viene dada por una transformación de Bogoliubov, que está caracterizada por una secuencia de matrices \mathcal{K}_n tales que:

$$\begin{pmatrix} \tilde{a}_{np}^{(x,y)} \\ \tilde{b}_{np}^{(x,y)\dagger} \end{pmatrix}_\eta = \mathcal{K}_n(\eta) \begin{pmatrix} a_{np}^{(x,y)} \\ b_{np}^{(x,y)\dagger} \end{pmatrix}_\eta, \quad \mathcal{K}_n = \begin{pmatrix} \kappa_n^f & \lambda_n^f \\ \lambda_n^g & \kappa_n^g \end{pmatrix}. \quad (6.78)$$

Aunque no se especifica en nuestra notación, recordamos que las entradas de la matriz \mathcal{K}_n pueden ser diferentes para las variables de destrucción $(\tilde{a}_{np}^{(m,s)}, \tilde{b}_{np}^{(m,s)})$ y $(\tilde{a}_{np}^{(t,r)}, \tilde{b}_{np}^{(t,r)})$. No distinguiremos entre ambos casos, al poder tratarlos de forma equivalente. Los módulos de los coeficientes no diagonales de la transformación de Bogoliubov considerada son [140, 141]:

$$|\lambda_n^h| = |\tilde{h}_1^n h_2^n - \tilde{h}_2^n h_1^n|, \quad (6.79)$$

donde recordemos que $\{h, k\} = \{f, g\}$ como un conjunto. Ambas cuantizaciones de Fock del campo de Dirac con dinámica unitariamente implementable serán equivalentes si y solo si la transformación de Bogoliubov estudiada puede implementarse mediante un operador unitario en el espacio de Fock de referencia. Esto ocurre de nuevo si y solo si:

$$\sum_n g_n |\lambda_n^f(\eta)|^2 < \infty \quad \text{y} \quad \sum_n g_n |\lambda_n^g(\eta)|^2 < \infty, \quad (6.80)$$

para todos los tiempos η de interés. Por otro lado, las relaciones (6.59) garantizan que $|\lambda_n^g| = |\lambda_n^f|$, por lo que basta restringir el estudio a uno solo de estos coeficientes. Llegado

este punto del análisis, pueden distinguirse dos casos, determinados por las dos posibilidades de que bien sean las funciones \tilde{f}_l^n o bien las funciones \tilde{g}_l^n las que adopten la forma (6.73) en \mathbb{N}_l . Analizaremos únicamente una de estas posibilidades, por poder tratar la otra de forma totalmente análoga gracias a las relaciones (6.59). Consideremos, por tanto, que son los coeficientes \tilde{f}_1^n y \tilde{f}_2^n los que presentan, respectivamente, el comportamiento asintótico (6.73) para $n \in \mathbb{N}_1$ y para $n \in \mathbb{N}_2$. Recordamos que la unión de estos dos subconjuntos es el conjunto de los números naturales, salvo un posible sector finito, y que uno de estos subconjuntos puede ser vacío. Entonces, partiendo de la expresión (6.79), es posible comprobar que, para $n \in \mathbb{N}_1$ y en el régimen asintótico $\omega_n \rightarrow \infty$, se tiene:

$$|\lambda_n^f| = |\vartheta_{\tilde{f},1}^n| + \mathcal{O}(\omega_n^{-2}). \quad (6.81)$$

Al ser la secuencia formada por $\vartheta_{\tilde{f},1}^n$ de cuadrado sumable (incluyendo la degeneración g_n) en \mathbb{N}_1 por hipótesis, entonces, si \mathbb{N}_2 es vacío o finito, vemos que las condiciones (6.80) se satisfacen de forma inmediata, por lo que las dos cuantizaciones de Fock son unitariamente equivalentes. Consideremos ahora el caso en que \mathbb{N}_2 tiene cardinal infinito. Resulta sencillo comprobar que tanto λ_n^f como λ_n^g tienen el comportamiento asintótico $\mathcal{O}(1)$ para $n \in \mathbb{N}_2$. Por lo tanto, las secuencias que proporcionan no serían de cuadrado sumable en dicho subconjunto infinito. En ese caso, las dos cuantizaciones serían inequivalentes. Sin embargo, esta inequivalencia procede, de forma artificial, del hecho de que la cuantización arbitraria con dinámica unitaria aquí estudiada define un convenio para la distinción de partículas y antipartículas que es, para un número infinito de grados de libertad, completamente opuesto al que define la cuantización de referencia con que se compara. Una vez se reconcilian ambos convenios, ambas cuantizaciones son físicamente equivalentes. En efecto, supongamos que hubiéramos tomado como familia de estructuras complejas de referencia aquella obtenida a partir de (6.77) cambiando el convenio que distingue partículas y antipartículas para todos los modos correspondientes a \mathbb{N}_2 , a partir de un cierto $n_2 \geq 0$. Esta redefinición del convenio se consigue en la práctica haciendo el intercambio $f_l^n \leftrightarrow g_l^n$, como puede observarse si se inspecciona la definición (6.57). Los coeficientes lambda que relacionan las nuevas variables de destrucción y creación de referencia con aquellas correspondientes a una familia arbitraria de estructuras complejas con dinámica unitaria vienen dados por la ecuación asintótica (6.81) para $n \in \mathbb{N}_1$, mientras que, para $n \in \mathbb{N}_2$, vienen dadas por:

$$|\tilde{\lambda}_n^f| = |\vartheta_{\tilde{f},2}^n| + \mathcal{O}(\omega_n^{-2}). \quad (6.82)$$

Como, por hipótesis, $\vartheta_{\tilde{f},2}^n$ es de cuadrado sumable en $n \in \mathbb{N}_2$, incluida degeneración, las condiciones (6.80) quedan satisfechas, y se confirma así la equivalencia unitaria entre ambas cuantizaciones, tras haber reconciliado sus convenios de distinción entre partículas y antipartículas.

De esta discusión puede concluirse que, en la cosmología de FLRW con hipersuperficies espaciales esféricas, dada una cuantización de Fock del campo de Dirac determinada por una familia de estructuras complejas invariantes que se relacionan a través de una dinámica no trivial e implementable unitariamente, dicha cuantización es o bien equivalente a aquella de referencia definida por las funciones (6.77), o bien a otra que se obtenga a partir de la de referencia redefiniendo el convenio para distinguir partículas y antipartículas en un número infinito de grados de libertad. Enfatizamos que dicho cambio de convenio no habría sido

necesario si se hubiera restringido toda la atención a aquellas cuantizaciones de Fock que, cumplidos los criterios físicos impuestos, difirieran del convenio partículas-antipartículas de referencia únicamente en un número finito de modos. En este sentido, podemos entender que existe una caracterización adicional de las posibles representaciones de Fock invariantes del campo fermiónico que distingue entre las diferentes asignaciones de lo que es una partícula y lo que es una antipartícula, para un número infinito de grados de libertad. No obstante, debe quedar claro que, sin imponer nuestro requisito de unitariedad dinámica, no todas las representaciones de Fock invariantes con el mismo convenio son unitariamente equivalentes. De hecho, existe un número infinito de familias inequivalentes entre sí. Lo que se ha demostrado en este estudio es que, en esas circunstancias, basta con imponer la existencia de un concepto no trivial de evolución unitariamente implementable para seleccionar una única cuantización, salvo equivalencia unitaria.

Procedemos ahora a analizar la unicidad de la cuantización de Fock del campo de Dirac en las cosmologías de FLRW con hipersuperficies espaciales planas y compactas. De nuevo, consideraremos dos familias de estructuras complejas invariantes: una de referencia, que es en principio fija, y otra arbitraria que admite un concepto de dinámica unitariamente implementable. La cuantización de Fock de referencia, que también permite una implementabilidad unitaria de la dinámica, está caracterizada por variables de destrucción y creación $a_{\vec{k}}^{(x,y)}$ y $b_{\vec{k}}^{\dagger(x,y)}$ de la forma (6.60), con:

$$f_1^{\vec{k}} = \frac{ma}{2\omega_k}, \quad f_2^{\vec{k}} = \sqrt{1 - (f_1^{\vec{k}})^2}, \quad g_1^{\vec{k}} = f_2^{\vec{k}}, \quad g_2^{\vec{k}} = -f_1^{\vec{k}} \quad (6.83)$$

para todo $\vec{k} \in \mathbb{Z}^3$ (salvo la tupla correspondiente al modo cero, en caso de existir). Por otra parte, la otra cuantización de Fock considerada estará determinada por variables de destrucción y creación $\tilde{a}_{\vec{k}}^{(x,y)}$ y $\tilde{b}_{\vec{k}}^{\dagger(x,y)}$, caracterizadas por funciones suaves del tiempo $\tilde{f}_l^{\vec{k}}$ y $\tilde{g}_l^{\vec{k}}$ (con $l = 1, 2$) que únicamente están sujetas a la condición de que o bien $\tilde{f}_l^{\vec{k}}$ o bien $\tilde{g}_l^{\vec{k}}$ han de satisfacer las condiciones I y II, explicadas en la sección anterior, de manera que se garantice la dinámica unitaria no trivial. De nuevo, centraremos toda la atención en los casos en que $\tilde{f}_l^{\vec{k}}$ es la función que cumple dichas condiciones, al poder analizarse la situación alternativa de forma totalmente análoga gracias a las relaciones (6.62). La relación entre los elementos de ambas familias de variables de destrucción y creación a cada tiempo η de interés viene dada por una transformación de Bogoliubov. La secuencia de matrices $\mathcal{K}_{\vec{k}}$ que la caracteriza es tal que:

$$\begin{pmatrix} \tilde{a}_{\vec{k}}^{(x,y)} \\ \tilde{b}_{\vec{k}}^{\dagger(x,y)\dagger} \end{pmatrix}_{\eta} = \mathcal{K}_{\vec{k}}(\eta) \begin{pmatrix} a_{\vec{k}}^{(x,y)} \\ b_{\vec{k}}^{\dagger(x,y)\dagger} \end{pmatrix}_{\eta}, \quad \mathcal{K}_{\vec{k}} = \begin{pmatrix} \kappa_{\vec{k}}^f & \lambda_{\vec{k}}^f \\ \lambda_{\vec{k}}^g & \kappa_{\vec{k}}^g \end{pmatrix}. \quad (6.84)$$

Los módulos de los coeficientes no diagonales de esta transformación vienen dados por:

$$|\lambda_{\vec{k}}^h| = \left| \tilde{h}_1^{\vec{k}} h_2^{\vec{k}} - \tilde{h}_2^{\vec{k}} h_1^{\vec{k}} \right|, \quad (6.85)$$

donde recordamos de nuevo que $h = f, g$. Las dos cuantizaciones de Fock relacionadas por estas transformaciones son unitariamente equivalentes si y solo si las secuencias formadas por $\lambda_{\vec{k}}^h$ son de cuadrado sumable en \mathbb{Z}^3 , para todo tiempo η . Además, las relaciones (6.62)

vuelven a garantizar que $|\lambda_k^f| = |\lambda_k^g|$, de modo que es suficiente analizar una sola de estas secuencias. Puede comprobarse explícitamente que [142]:

$$|\lambda_k^f| = |\tilde{f}_1^{\vec{k}}| + o\left(\tilde{f}_1^{\vec{k}}\right) \quad \forall \vec{k} \in \mathbb{Z}_{1,\uparrow}^3, \quad |\lambda_k^f| = |\vartheta_{\tilde{f},1}^{\vec{k}}| + \mathcal{O}(\omega_k^{-2}) \quad \forall \vec{k} \in \mathbb{Z}_1^3, \quad (6.86)$$

mientras que se tiene el comportamiento $|\lambda_k^f| = \mathcal{O}(1)$ para todo $\vec{k} \in \mathbb{Z}_{2,\uparrow}^3 \cup \mathbb{Z}_2^3$. Está claro entonces que estos coeficientes lambda son de cuadrado sumable en el subconjunto infinito $\mathbb{Z}_{1,\uparrow}^3 \cup \mathbb{Z}_1^3$. Sin embargo, dicha sumabilidad cuadrática se pierde para la subsecuencia complementaria $\mathbb{Z}_{2,\uparrow}^3 \cup \mathbb{Z}_2^3$, a no ser que se elija este subconjunto de manera que sea vacío. No obstante, haciendo uso de las relaciones (6.59), es posible argumentar de nuevo que, si se intercambian los papeles de $\tilde{f}_i^{\vec{k}}$ y $\tilde{g}_i^{\vec{k}}$ para todo $\vec{k} \in \mathbb{Z}_{2,\uparrow}^3 \cup \mathbb{Z}_2^3$, los coeficientes lambda resultantes no son del orden de la unidad, sino que resultan tener expresiones de cuadrado sumable análogas a (6.86). Debido a ello, es correcto afirmar que la familia de estructuras complejas que resultan a partir de (6.83) mediante el intercambio mencionado, define una teoría cuántica unitariamente equivalente a la definida por las variables $\tilde{a}_{\vec{k}}^{(x,y)}$ y $\tilde{b}_{\vec{k}}^{\dagger(x,y)}$ cuando $\mathbb{Z}_{2,\uparrow}^3 \cup \mathbb{Z}_2^3$ no es vacío.

A la vista de la definición (6.60), el intercambio $\tilde{f}_i^{\vec{k}} \leftrightarrow \tilde{g}_i^{\vec{k}}$ que se ha llevado a cabo para alcanzar la equivalencia unitaria se corresponde con un intercambio entre las nociones de partículas y de antipartículas para el (posiblemente) infinito número de grados de libertad correspondientes a $\mathbb{Z}_{2,\uparrow}^3 \cup \mathbb{Z}_2^3$. En este sentido, las diferentes separaciones posibles de la red \mathbb{Z}^3 en los subconjuntos $\mathbb{Z}_{1,\uparrow}^3 \cup \mathbb{Z}_1^3$ y $\mathbb{Z}_{2,\uparrow}^3 \cup \mathbb{Z}_2^3$ (incluidas aquellas en las que alguno de estos subconjuntos es vacío) pueden entenderse como las distintas elecciones de convenios para la distinción entre partículas y antipartículas, dentro de las familias de representaciones de Fock invariantes que admiten una dinámica no trivial e implementable unitariamente. Como ocurría en el caso con secciones espaciales esféricas, una vez se fija uno de esos convenios, la discusión anterior demuestra que la condición de que exista un concepto de evolución no trivial que sea unitariamente implementable es crucial para garantizar que todos los vacíos permitidos sean unitariamente equivalentes.

Quedaría por responder la pregunta de si existe una condición que, siendo físicamente razonable, seleccione un convenio de partículas y antipartículas «natural». Es posible proporcionar una respuesta para las cosmologías de FLRW con hipersuperficies espaciales planas. Para ello, resulta conveniente recordar que las funciones $f_1^{\vec{k}}$ y $f_2^{\vec{k}}$ cuantifican, respectivamente, la quiralidad zurda y diestra de las partículas asociadas a las variables $a_{\vec{k}}^{(m,s)}$. Ocurre precisamente lo contrario con las funciones que caracterizan a las variables $a_{\vec{k}}^{(t,r)}$. Además, el conjunto de modos no cero $\{m_{\vec{k}}, \bar{s}_{\vec{k}}\}$ captura la helicidad positiva del campo de Dirac, mientras que $\{t_{\vec{k}}, \bar{r}_{\vec{k}}\}$ recoge la helicidad negativa. Podría imponerse entonces, como un criterio razonable desde el punto de vista físico, que la cuantización del campo de Dirac garantizara, a cada tiempo dado η , que todas las excitaciones que correspondan a partículas de una helicidad conservada dada presenten la misma quiralidad. Las excitaciones de antipartículas poseerían la quiralidad opuesta, esencialmente, gracias a las relaciones (6.62). Esta restricción adicional sobre los vacíos se traduciría en la práctica en la condición de que la red \mathbb{Z}^3 sea bien igual a $\mathbb{Z}_{1,\uparrow}^3 \cup \mathbb{Z}_1^3$, o a $\mathbb{Z}_{2,\uparrow}^3 \cup \mathbb{Z}_2^3$. Estas dos elecciones posibles de convenio para la distinción de partículas y antipartículas pueden reducirse a una sola si se requiere que exista

una transición suave del convenio en presencia de masa al límite en que la masa tiende a cero. En dicho límite la quiralidad se convierte en una cantidad conservada y puede imponerse a todo tiempo que las excitaciones de partículas sin masa de helicidad positiva tengan, por ejemplo, quiralidad diestra, y que las de helicidad negativa tengan quiralidad zurda. Si se impone suavidad en la transición a este convenio para el caso sin masa, todo el estudio para masa no nula queda restringido al escenario en que $\mathbb{Z}^3 = \mathbb{Z}_{1,\uparrow}^3 \cup \mathbb{Z}_1^3$, tanto para $a_k^{(m,s)}$ como para $a_k^{(t,r)}$. Si establecemos esta restricción, el vacío de Fock caracterizado por (6.83) es la elección más simple en la familia de cuantizaciones, unitariamente equivalentes, que respetan la invariancia del vacío bajo las simetrías físicas del sistema y que admiten un concepto no trivial de dinámica cuántica unitaria.

6.4. Conclusiones

En este capítulo hemos proporcionado una demostración de la unicidad, salvo equivalencia unitaria, de la representación de Fock de campos de Dirac en cosmologías homogéneas e isótropas con hipersuperficies espaciales esféricas y planas. Como resultado adicional, hemos determinado una separación, esencialmente única, de la dependencia temporal del campo en una parte explícita y otra que puede traducirse cuánticamente en una dinámica unitaria. Las condiciones físicas impuestas para hallar esta unicidad en la representación y su dinámica son las siguientes. En primer lugar, hemos requerido la invariancia del vacío cuántico bajo el grupo de isometría continuo de las hipersuperficies espaciales de las cosmologías consideradas, así como bajo el grupo de rotaciones de espín generadas por la helicidad en el caso plano. En segundo lugar, y con implicaciones más importantes, hemos impuesto que las representaciones de Fock de interés admitan un concepto de dinámica, no trivial con respecto a la de Dirac, que pueda implementarse mediante un operador unitario en el espacio de Fock. Finalmente, el resultado de unicidad se ha alcanzado una vez fijado un convenio para la distinción entre partículas y antipartículas. En el caso de espinores de Dirac en cosmologías de FLRW planas, hemos razonado la existencia de un criterio «natural» para dicha distinción, que garantiza una consistencia en la quiralidad de partículas y antipartículas a tiempo arbitrario y permite una transición suave al comportamiento convencional cuando la masa del campo es nula.

Con el fin de facilitar el análisis de los sistemas de campos considerados, hemos expandido cada uno de los espinores bicomponente de quiralidad opuesta, que describen el campo de Dirac, en términos de una base de autoespinores del operador de Dirac en las hipersuperficies espaciales (tanto en las esféricas como en las toroidales), con coeficientes dependientes del tiempo. El punto clave en toda la demostración de unicidad ha sido el conocimiento del comportamiento asintótico de dichos coeficientes, cuando son soluciones de las ecuaciones de Dirac, en el límite en que los autovalores del operador de Dirac tienden a infinito. Con esta información, y tras haber caracterizado los vacíos de Fock invariantes bajo las simetrías físicas de los sistemas cosmológicos considerados, hemos podido identificar la forma general que han de tener las familias dinámicas de variables de destrucción y creación para que su evolución asociada, sin ser trivial, pueda implementarse unitariamente. Utilizando esta identificación y fijando un convenio cualquiera para la distinción de partículas y antipartículas, el resultado de unicidad de la representación de Fock se deduce casi inmediatamente. Más concretamente, hemos demostrado que la dinámica de campo que conlleva la ecuación de

Dirac puede implementarse como un operador unitario no trivial únicamente después de extraer de ella una cierta variación explícita en el tiempo. Esta variación queda capturada en una serie de funciones que dependen del tiempo o, equivalentemente, del factor de escala de las cosmologías consideradas. Dichas funciones determinan, en última instancia, las familias de operadores de destrucción y creación dinámicos que caracterizan la cuantización de Fock.

Esta dependencia explícita en el tiempo del campo de Dirac cuántico, necesaria para la unitariedad, es distinta según que el campo tenga masa o no. Esta diferencia ocurre debido a que una masa no nula acopla las dos quiralidades del campo fermiónico en la evolución, haciendo que la quiralidad no se conserve. En efecto, hemos visto en este capítulo que, debido a dicho acoplo, la contribución masiva a las soluciones de la ecuación de Dirac no puede ignorarse en el régimen asintótico de autovalores de Dirac grandes. Esta contribución no ignorable es del orden ω_n^{-1} o ω_k^{-1} , e involucra al factor de escala de la cosmología de FLRW. Es esencialmente su dependencia explícita en el tiempo la que debe extraerse para que el resto de la dinámica pueda implementarse unitariamente. Por otra parte, es sencillo comprobar que una implementabilidad unitaria de la dinámica para el campo de Dirac sin masa se obtiene si se elimina este término de orden ω_n^{-1} o ω_k^{-1} de las funciones que caracterizan las familias de variables de destrucción y creación.

Los resultados aquí obtenidos caracterizan por completo qué excitaciones de partículas y antipartículas sufren una evolución no trivial que respeta la coherencia cuántica en el tiempo. Además, la dependencia explícita del campo en el fondo espaciotemporal, que completa dicha transformación cuántica unitaria para dar lugar a la dinámica dictada por la ecuación de Dirac, está (casi) completamente determinada. Esta determinación tan precisa de las excitaciones que no sufren pérdida de información en la evolución cuántica puede ser de utilidad en contextos que involucren detectores de partículas. Más aún, y dentro del interés directo de esta tesis, la capacidad de identificar y aislar la dependencia explícita del campo en el espaciotiempo de fondo será crucial para, en el Capítulo 7, sobrepasar el mero contexto de TCC en espaciotiempos curvos y abordar la descripción del sistema cosmológico completo como una entidad enteramente cuántica.

Capítulo 7

Fermiones en Cosmología Cuántica de Lazos híbrida

El fondo cósmico de microondas constituye una de las fuentes de información más importantes acerca de los fenómenos físicos que acontecieron en los primeros estadios del Universo. Las precisas observaciones llevadas a cabo apoyan de forma robusta la idea de que las pequeñas anisotropías registradas en su temperatura tienen como origen fluctuaciones cuánticas, tratables como perturbaciones de un estado homogéneo e isótropo del Universo [151,152], que estuvieron sujetos a un periodo de inflación cósmica [67,68,153]. Típicamente, este mecanismo inflacionario se describe, dentro del marco de la Relatividad General, mediante un contenido material consistente en un campo escalar sujeto a un potencial: el «inflatón». La consideración de perturbaciones de tipo escalar y tensorial, tanto en la geometría como en este contenido material, así como de sus fluctuaciones cuánticas durante el periodo inflacionario, dan lugar a predicciones que coinciden de manera notable con las observaciones realizadas hasta la fecha. No obstante, y como ya se adelantó en el capítulo anterior, somos conscientes de que la mayor parte de las teorías que describen las interacciones materiales en un nivel fundamental requieren de la existencia de grados de libertad fermiónicos con espín un medio. Por tanto, el interés de este capítulo va a estar puesto en la incorporación cuántica de campos de Dirac en una cosmología primordial con pequeñas inhomogeneidades. En particular, los estudios aquí expuestos pueden servir por tanto para discernir si la presencia de campos fermiónicos durante las primeras etapas de nuestro Universo pudieron dejar rastro en la evolución posterior de las perturbaciones, tanto escalares como tensoriales.

Los efectos físicos que puedan tener campos fermiónicos que se propagan sobre una cosmología homogénea e isótropa, en un régimen de TCC sobre espaciotiempos curvos y tanto en un contexto inflacionario como en otras épocas del Universo, han sido analizados en numerosos trabajos hasta la fecha (véanse por ejemplo las referencias [15,154–160]). Sin embargo, los primeros análisis en los que se consideró la presencia de grados de libertad fermiónicos en cosmología cuántica (esto es, tratando como una entidad cuántica también el fondo cosmológico homogéneo) pueden atribuirse a las referencias [161,162]. A diferencia del resto de trabajos, estas investigaciones consideraron los campos fermiónicos como fuente material (en el régimen clásico de Relatividad General) de la geometría homogénea. Debido a ello, se asumió que estos campos fermiónicos eran homogéneos y la descripción del sistema se limitó a un número finito de grados de libertad. Más interesantes, desde nuestro punto de vista, son

las primeras investigaciones dentro del marco de la geometrodinámica cuántica, realizadas por D'Eath y Halliwell y acerca de la inclusión de fermiones de Dirac como perturbaciones sobre una cosmología homogénea e isótropa con inflatón, expuestas en la referencia [139]. En ellas, se tomó un fondo cosmológico con hipersuperficies espaciales de topología esférica. Estos estudios extendieron a partículas de Dirac el tratamiento cuántico de perturbaciones cosmológicas desarrollado anteriormente por Halliwell y Hawking en la referencia [163]. En el mencionado trabajo [139] se adoptó una representación holomorfa [76] para los grados de libertad anticonmutantes que describen el campo fermiónico. A partir de ellos, mediante una transformación lineal dependiente del fondo espaciotemporal, se definieron unos operadores de destrucción y creación que proporcionaban una diagonalización instantánea del hamiltoniano de Dirac. Se demostró entonces que la producción de partículas y antipartículas asociadas a dichos operadores de destrucción y creación era finita. Asimismo, y tras proporcionar una representación de tipo Wheeler-DeWitt para las variables espaciotemporales homogéneas, se discutieron ciertos efectos de «reacción» (*backreaction* en inglés) cuántica, producida por la materia fermiónica sobre la geometría y el inflatón.

El objetivo principal de este capítulo es la generalización del tratamiento dado en la referencia [139] para campos fermiónicos en cosmología cuántica al esquema de cuantización híbrida explicado en el Capítulo 3, de forma que sea posible analizar las consecuencias que pueda tener otro tipo de cuantización de los grados de libertad geométricos, y, en concreto, la correspondiente a CCL. Además, para el sector perturbativo fermiónico del sistema, haremos uso de los resultados obtenidos en el capítulo anterior sobre la representación de Fock de campos de Dirac al exigir una dinámica unitaria. Estas consideraciones nos permitirán mejorar ciertos aspectos en la descripción cuántica de los grados de libertad fermiónicos, en comparación con los resultados de la referencia [139], tales como los referentes a la unitariedad de su evolución o los que atañen a los efectos de «reacción» sobre el sector homogéneo e isótropo del sistema. Restringiremos nuestro estudio a hipersuperficies espaciales planas y compactas para la cosmología homogénea de fondo, debido a la relevancia física del caso plano [33, 34], en lugar de suponerlas esféricas como en la referencia [139]. Asimismo, tendremos en cuenta en el análisis la existencia de pequeñas inhomogeneidades de la geometría espaciotemporal y del campo escalar.

A lo largo de los últimos años se han hecho numerosos avances en lo que respecta a la cuantización híbrida de cosmologías homogéneas e isótropas de este estilo, en presencia de un campo de inflatón y de perturbaciones de tipo escalar y tensorial [62–66, 164–166]. De hecho, otros métodos para la descripción cuántica de estos sistemas cosmológicos, cuya filosofía no está demasiado alejada del esquema híbrido, han sido desarrollados de forma paralela en el contexto de CCL. Un ejemplo notable de dichos formalismos es conocido por el nombre de «métrica vestida» [167–170], y utiliza técnicas híbridas para capturar ciertas correcciones procedentes de la cuantización de la geometría en la métrica espaciotemporal del fondo homogéneo e isótropo. No obstante, a diferencia del esquema híbrido completo, este formalismo de métrica vestida renuncia a proporcionar una descripción del sistema cosmológico completo como una variedad simpléctica constreñida por ligaduras. Más allá de los formalismos inspirados por una filosofía híbrida, también se han propuesto investigaciones que estudian las consecuencias que los efectos típicos de CCL pueden haber tenido en el fondo cósmico de microondas a través de ciertas ecuaciones de índole efectivo. Estas se deducen haciendo uso de argumentos e hipótesis relacionados con el cierre del álgebra de las

ligaduras cuánticas, así como con la forma que supuestamente deberían tener las correcciones cuánticas [171–175].

En lo que respecta a la consideración de campos fermiónicos en el contexto de la CCL, cabe destacar que las únicas investigaciones propuestas hasta la fecha se han limitado al estudio de un modelo espaciotemporal homogéneo y anisótropo acoplado a un campo fermiónico también homogéneo [176], donde además toda la atención está centrada en el papel que desempeña la simetría de paridad. Por ello, los trabajos aquí expuestos pueden entenderse como los primeros que consideran la presencia de un campo fermiónico con grados de libertad locales en CCL híbrida. No obstante, existían ya estudios pioneros sobre la introducción de campos fermiónicos en el formalismo de GCL, como los presentados en las referencias [177–181]. Asimismo, más recientemente se han llevado a cabo algunos análisis acerca de los efectos de la cuantización polimérica sobre la propagación de partículas de espín un medio [182]. El interés de analizar campos espinoriales en CCL híbrida va más allá de las motivaciones arriba expuestas acerca de la consideración de materia realista en el Universo primordial. En efecto, por una parte, la introducción de fermiones puede poner a prueba la consistencia interna del esquema de cuantización de lazos híbrida, esquema que, en todo caso, debería ser compatible con el acoplo a campos fermiónicos. Por lo tanto, en un sistema cosmológico completamente ligado con infinitos grados de libertad, tendremos que enfrentarnos al problema de combinar consistentemente la representación polimérica de la geometría homogénea con una de Fock de las relaciones de anticonmutación canónicas. Por otra parte, en el Capítulo 3 discutimos cómo la CCL proporciona una cuantización rigurosa y bien controlada de universos homogéneos e isótropos. Cabe esperar, por ello, que el esquema híbrido de CCL nos permita incluir grados de libertad fermiónicos en cosmología de forma genuinamente cuántica, sin tener una necesidad especial de recurrir a aproximaciones semiclásicas como las adoptadas en la referencia [139]. Este tipo de tratamientos son importantes en tanto exista un interés en investigar fenómenos que tengan lugar en regímenes verdaderamente cuánticos. Además, el hecho de que la cuantización polimérica sea inequivalente a otros métodos más tradicionales de representación de la geometría (como los geometrodinámicos) pone en duda la posibilidad de que los efectos de la materia fermiónica en la evolución cosmológica puedan ignorarse. En particular, la existencia de un rebote cuántico que elimina la singularidad cosmológica quizá cambie el comportamiento dinámico de los fermiones, incluso si se describen en el contexto de TCC en un espaciotiempo fijo no estacionario y cuánticamente corregido. En relación con esta cuestión, encontramos además la dificultad de definir adecuadamente un estado de vacío, ya que las correcciones que impone la cuantización de lazos a la geometría, en contextos efectivos, cambian su dinámica y sus simetrías. Es de esperar que estos cambios lleven de forma natural a una modificación del estado de vacío fermiónico, al menos si se entiende que dicho estado debe estar adaptado de forma óptima a la dinámica del fondo espaciotemporal. Otro aspecto interesante por estudiar es la «reacción» que los campos fermiónicos cuánticos puedan ejercer sobre la geometría homogénea. Este problema, en su ámbito más general, está recibiendo un creciente interés en CCL y, aunque se han llevado a cabo ciertos estudios preliminares al respecto en contextos distintos al aquí considerado [63, 183, 184], el desarrollo de un formalismo que pueda abordar de forma consistente esta reacción espaciotiempo-materia cuántica es un paso necesario para analizar correctamente sus consecuencias. En este sentido, los trabajos contenidos en este capítulo proporcionan una primera aproximación a la obtención de dicho formalismo.

Los resultados de este capítulo de la tesis están contenidos en la referencia [185].

7.1. Perturbaciones cosmológicas

Por sencillez, dividiremos en tres partes la descripción del sistema cosmológico que vamos a investigar. En primer lugar, expondremos de nuevo brevemente el tratamiento de un espaciotiempo homogéneo e isótropo acoplado a un inflatón con potencial. Asimismo, se recordará la descripción clásica de la acción proporcionada por las variables de CCL en el marco de la dinámica mejorada. Posteriormente, alrededor de este fondo homogéneo, consideraremos todas las perturbaciones de la geometría y del campo escalar que contribuyen de forma no trivial, truncando la acción del sistema a segundo orden perturbativo. Por último, introduciremos un campo de Dirac masivo como elemento novedoso en el análisis cuántico híbrido de esta cosmología.

7.1.1. Modelo homogéneo sin perturbar

Empezaremos considerando un espaciotiempo de FLRW con hipersuperficies espaciales planas con la topología de T^3 . La suposición de compacidad espacial debería ser irrelevante para la obtención de resultados cosmológicos, siempre que la escala de compactificación l_0 sea mucho mayor que el radio de Hubble. Por otra parte, esta compacidad nos permitirá aplicar los resultados obtenidos en el capítulo anterior de forma matemáticamente consistente. Si se emplean coordenadas espaciales adaptadas a la homogeneidad e isotropía, la métrica puede escribirse como:

$$ds^2 = -N_0^2(t)dt^2 + a^2(t) {}^0h_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta. \quad (7.1)$$

En esta expresión N_0 es la función lapso homogénea, mientras que a es el factor de escala. Las coordenadas espaciales elegidas son ortogonales y tienen un periodo igual a l_0 , de tal forma que $2\pi x_\alpha/l_0 \in S^1$. La métrica euclídea inducida en las hipersuperficies espaciales es, salvo el factor de escala, ${}^0h_{\alpha\beta}$, esto es, la métrica euclídea de T^3 .

En CCL homogénea e isótropa, las variables canónicas para la representación polimérica en el esquema de la dinámica mejorada son v y $b = \bar{\mu}c$ [véanse las definiciones (3.36), (3.55) y (3.56)]. Puede comprobarse que v está relacionado con el factor de escala a través de la expresión:

$$a = \left(\frac{2\pi G\gamma\sqrt{\Delta_g}}{l_0^3} |v| \right)^{1/3}. \quad (7.2)$$

Conviene recordar que su valor absoluto, $|v|$, es proporcional al volumen físico V de las hipersuperficies espaciales de la cosmología en cuestión, volumen que, por otra parte, es finito gracias a la compacidad requerida. En concreto, se cumple la relación $V = 2\pi G\gamma\sqrt{\Delta_g}|v|$. Además, dado el corchete de Poisson $\{b, v\} = 2$ y gracias a la planitud de las secciones espaciales, es posible relacionar la cantidad b con el momento canónicamente conjugado π_a del factor de escala:

$$a\pi_a = -\frac{3}{2}vb. \quad (7.3)$$

Las expresiones (7.2) y (7.3) constituyen el diccionario básico que establece la correspondencia entre las variables canónicas utilizadas en geometrodinámica y aquellas prescritas por la dinámica mejorada de CCL. Utilizaremos las primeras a lo largo de todo el planteamiento clásico del sistema, debido a su sencillez y a su uso frecuente en la literatura. Únicamente será necesario sustituir el factor de escala y su momento por las variables de lazos cuando se proporcione una representación cuántica de las ligaduras resultantes.

El contenido material del sector cosmológico homogéneo viene dado por un campo escalar $\phi(t)$ con potencial. En particular, centraremos nuestra atención en el tipo de potencial no nulo más simple: un término de masa cuadrático en el campo. Sin embargo, todo el análisis que sigue puede llevarse a cabo con potenciales más genéricos y, llegado el momento oportuno, indicaremos cómo han de modificarse las expresiones finales para dar cuenta de ellos.

El sistema cosmológico homogéneo sin perturbar aquí descrito está sujeto en Relatividad General a una única ligadura, la hamiltoniana, que genera reparametrizaciones temporales homogéneas. Si se integra en el espacio, adquiere la expresión:

$$H_{|0} = \frac{1}{2l_0^3 a^3} \left(p_\phi^2 - \frac{4\pi G}{3} a^2 \pi_a^2 + l_0^6 a^6 m^2 \phi^2 \right) = \frac{1}{2V} (p_\phi^2 - 3\pi G v^2 b^2 + V^2 m^2 \phi^2), \quad (7.4)$$

donde m es la masa del inflatón, mientras que p_ϕ es su momento canónicamente conjugado.

7.1.2. Perturbaciones de la geometría y del campo escalar

Estudiamos ahora perturbaciones de la métrica y el campo escalar alrededor del modelo homogéneo descrito anteriormente. Estas perturbaciones se incluirán hasta orden cuadrático en la acción del sistema, llevando así a cabo el tipo de truncación que es típica en la literatura sobre perturbaciones cosmológicas [68, 153, 163, 186–188]. En la referencia [65] se proporcionó una descripción hamiltoniana covariante de esta perturbación de la acción de Einstein, hasta orden cuadrático. Ciertas consideraciones hechas en ese estudio tienen implicaciones sobre la generalización propuesta en este capítulo, por lo que resumiremos a continuación todos aquellos resultados que son relevantes para el presente trabajo.

Las perturbaciones de la métrica y del inflatón introducen inhomogeneidades en el espaciotiempo. Por ello, resulta conveniente expandir los campos que las describen en modos de Fourier sobre las hipersuperficies espaciales homogéneas. El procedimiento general para introducir modos bien definidos se basa en la consideración del operador de Laplace-Beltrami ${}^0h^{\alpha\beta} {}^0\nabla_\alpha {}^0\nabla_\beta$ asociado a la conexión afín de Levi-Civita ${}^0\nabla_\alpha$ en las hipersuperficies con métrica auxiliar ${}^0h_{\alpha\beta}$. Las autofunciones de este operador forman una base completa del espacio de funciones de cuadrado integrable con respecto al elemento de volumen definido por la métrica auxiliar. Además estas autofunciones pueden elegirse reales. Las llamaremos $\tilde{Q}_{\vec{n},\epsilon}(\vec{x})$, donde ϵ es un parámetro que indica su comportamiento bajo la sustitución de x_α por $l_0 - x_\alpha$: $\epsilon = -1$ si son impares y $\epsilon = 1$ si son pares. En el caso de hipersuperficies espaciales planas aquí considerado, estas autofunciones corresponden respectivamente a senos y cosenos. Fijaremos su norma igual a uno con respecto al elemento de volumen auxiliar. Por último, la etiqueta $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{Z}^3$ es una tupla cualquiera de enteros cuya primera componente no nula es positiva, de tal forma que no haya repeticiones de modos de Fourier reales. Esta etiqueta determina el autovalor correspondiente dado por $-\omega_n^2 = -4\pi^2 |\vec{n}|^2 / l_0^2$. Queda claro con ello

que el espectro del operador de Laplace-Beltrami en T^3 es discreto, gracias a la compacidad de esta variedad espacial. Partiendo de este conjunto de autofunciones, junto con la conexión ${}^0\nabla_i$ y la métrica ${}^0h_{ij}$, es posible construir bases completas de los llamados armónicos escalares, vectoriales y tensoriales en las hipersuperficies espaciales de la cosmología homogénea e isotropa [163].

Si se lleva a cabo una descomposición de tipo ADM [65, 72, 163] del espaciotiempo perturbado, entonces la métrica espacial, el vector desplazamiento y la función lapso pueden descomponerse en términos de los armónicos introducidos en el párrafo anterior. Puede proporcionarse una expansión análoga para las perturbaciones del campo escalar. Al no considerar como cantidades perturbativas los modos homogéneos de la geometría y del inflatón, los ignoraremos en todas estas descomposiciones. En otras palabras, descomponemos en armónicos solo la parte puramente inhomogénea de la métrica y del campo escalar. Los modos inhomogéneos resultantes se clasifican, según su comportamiento bajo las transformaciones de isometría euclídeas, en vectoriales, tensoriales y escalares [67]. En particular, es posible ver que los modos de tipo vectorial no desempeñan ningún papel físico en nuestro sistema cosmológico, ya que este no posee ninguna fuente material de tipo vectorial. Por otra parte, las perturbaciones genuinamente tensoriales (que no pueden deducirse a partir de los armónicos escalares mediante multiplicación por la métrica auxiliar ni mediante derivación con respecto a su conexión afín asociada) representan grados de libertad físicos de la cosmología. A orden cuadrático, se desacoplan dinámicamente de las perturbaciones escalares y su única contribución a la acción es la adición de un término al modo homogéneo de la ligadura hamiltoniana. Este tipo de perturbaciones con naturaleza tensorial han sido estudiadas en detalle, dentro del esquema híbrido de CCL, en la referencia [66]. Por último, la contribución más complicada de las inhomogeneidades cosmológicas a la acción de Hilbert-Einstein es la procedente de los modos perturbativos escalares. Dichos modos constituyen, además, el contenido inhomogéneo más relevante desde un punto de vista observacional, ya que son responsables de la aparición de las anisotropías que se miden en el fondo cósmico de microondas [67, 68].

Las perturbaciones escalares no solo afectan al campo escalar, sino que también contribuyen en ciertas partes de la métrica espacial, el vector desplazamiento y la función lapso. Además, están sujetas a la linearización perturbativa de las ligaduras de momentos y de la ligadura hamiltoniana en Relatividad General. Estas ligaduras lineales aparecen en la truncación a orden cuadrático de la acción acompañadas de multiplicadores de Lagrange perturbativos, que vienen dados por los modos inhomogéneos del lapso y del vector desplazamiento [65, 163]. Por ello, para la descripción de las perturbaciones escalares resulta muy conveniente considerar cantidades que permanezcan invariantes bajo las transformaciones de coordenadas generadas por estas ligaduras inhomogéneas, de tal forma que puedan dotarse de un significado físico claro. La necesidad de encontrar tales cantidades da lugar a la introducción de los llamados invariantes de gauge [189–192]. En el escenario inflacionario estudiado aquí, resulta especialmente útil considerar el campo invariante de gauge de Mukhanov-Sasaki [67, 193–195], debido a que está directamente relacionado con las perturbaciones de la curvatura y, como consecuencia, con el espectro de potencias observado en las anisotropías del fondo cósmico [67]. En particular, dicho invariante de gauge se obtiene a través de una cierta combinación no local de las perturbaciones escalares del inflatón y de la métrica espacial. Describiremos este campo de Mukhanov-Sasaki mediante los coeficientes

dependientes del tiempo $v_{\vec{n},\epsilon}$ de su expansión en la base de modos $\tilde{Q}_{\vec{n},\epsilon}(\vec{x})$.

En la referencia [65] se demostró que, al orden de la truncación perturbativa aquí considerada, es posible abelianizar el álgebra que forman las ligaduras lineales perturbativas bajo corchetes de Poisson. Estas versiones abelianas de las mismas, junto con la variable invariante de gauge de Mukhanov-Sasaki, forman un conjunto compatible de variables de configuración perturbativas en el sector inhomogéneo escalar del espacio de fases, en tanto en cuanto conmutan bajo corchetes de Poisson. Este conjunto puede completarse y dar lugar a uno canónico para las perturbaciones escalares si se introducen momentos conjugados adecuados, de forma tal que el momento del campo de Mukhanov-Sasaki es también un invariante de gauge. La libertad en la elección de dicho momento se elimina por completo si se requiere que, tras hacer uso de las ecuaciones de Hamilton, sea proporcional a la derivada temporal del campo de Mukhanov-Sasaki. Esta condición es de hecho imprescindible si se quiere que la dinámica asociada al par canónico de Mukhanov-Sasaki pueda implementarse a través de un operador unitario, dada una representación de Fock de dicho par [126]. Sean entonces $\pi_{v_{\vec{n},\epsilon}}$ los coeficientes dependientes del tiempo en la expansión en modos de este momento. Ahora bien, la definición de este conjunto canónico para el sector inhomogéneo escalar del espacio de fases involucra los modos homogéneos de la geometría y del inflatón. Por ello, y con el objetivo de preservar el carácter simpléctico de la cosmología perturbada, en la referencia [65] se demostró que las variables homogéneas pueden corregirse con contribuciones cuadráticas en perturbaciones de tal forma que, sumadas al conjunto de ligaduras perturbativas abelianas, los invariantes de Mukhanov-Sasaki y las perturbaciones tensoriales, lo completan en uno canónico para el sistema cosmológico obtenido al truncar a segundo orden perturbativo la acción.

Dejando a un lado las ya mencionadas ligaduras perturbativas lineales, en el hamiltoniano total resultante del sistema cosmológico considerado queda una única ligadura. Se trata del modo homogéneo de la ligadura hamiltoniana. En lo que concierne al contenido geométrico y del campo escalar, esta ligadura es la suma de la ligadura hamiltoniana $H_{|0}$ del sistema homogéneo (evaluada funcionalmente en las variables homogéneas corregidas) más una contribución cuadrática del invariante de Mukhanov-Sasaki y de su momento conjugado, que llamaremos hamiltoniano de Mukhanov-Sasaki y designaremos por $\check{H}_{|2}$. Además, en presencia de perturbaciones tensoriales, la ligadura incluye también un sumando cuadrático en ellas que llamaremos ${}^T\check{H}_{|2}$ [66]. Explícitamente, si se recicla la notación (a, π_a, ϕ, p_ϕ) [así como su contrapartida (v, b, ϕ, p_ϕ) en CCL] para designar las variables homogéneas corregidas perturbativamente, en lugar de las originales introducidas en la anterior subsección, las contribuciones cuadráticas perturbativas a la ligadura hamiltoniana son [65, 66]:

$$\check{H}_{|2} = \sum_{\vec{n},\epsilon} \check{H}_{|2}^{\vec{n},\epsilon}, \quad {}^T\check{H}_{|2} = \sum_{\vec{n},\epsilon,\tilde{\epsilon}} {}^T\check{H}_{|2}^{\vec{n},\epsilon,\tilde{\epsilon}}, \quad (7.5)$$

$$\begin{aligned} \check{H}_{|2}^{\vec{n},\epsilon} &= \frac{1}{2a} \left[\omega_n^2 + \frac{16\pi^2 G^2}{9l_0^6 a^2} \pi_a^2 + m^2 a^2 \left(1 + 20\pi G \phi^2 - 12\phi \frac{p_\phi}{a\pi_a} - \frac{18l_0^6 \phi^4}{\pi_a^2} a^4 m^2 \right) \right] v_{\vec{n},\epsilon}^2 \\ &+ \frac{1}{2a} \pi_{v_{\vec{n},\epsilon}}^2, \end{aligned} \quad (7.6)$$

$${}^T\check{H}_{|2}^{\vec{n},\epsilon,\tilde{\epsilon}} = \frac{1}{2a} \left[\left(\omega_n^2 + \frac{16\pi^2 G^2}{9l_0^6 a^2} \pi_a^2 - 4\pi G m^2 a^2 \phi^2 \right) \tilde{d}_{\vec{n},\epsilon,\tilde{\epsilon}}^2 + \pi_{\tilde{d}_{\vec{n},\epsilon,\tilde{\epsilon}}}^2 \right], \quad (7.7)$$

donde $\tilde{\epsilon}$ es una etiqueta dicotómica que describe las dos posibles polarizaciones de las perturbaciones tensoriales ($\tilde{\epsilon} = +, \times$). Además, las variables $\tilde{d}_{\vec{n}, \epsilon, \tilde{\epsilon}}$ son los coeficientes dependientes del tiempo de la expansión en modos de las perturbaciones tensoriales multiplicadas por $a(t)$ (salvo una constante), mientras que $\pi_{\tilde{d}_{\vec{n}, \epsilon, \tilde{\epsilon}}}$ son sus momentos canónicamente conjugados [66]. La libertad existente en añadir una contribución lineal en $\tilde{d}_{\vec{n}, \epsilon, \tilde{\epsilon}}$ a estos momentos se fija, de nuevo, eligiéndolos tales que, desde un punto de vista dinámico, sean proporcionales a las derivadas temporales de sus variables de configuración.

7.1.3. Fermiones de Dirac como perturbaciones

A continuación, introduciremos el último elemento de nuestro sistema cosmológico, que aporta una novedad con respecto a trabajos anteriores: un campo de Dirac con masa tratado como una perturbación de la cosmología homogénea estudiada. Antes de proceder a su descripción, resulta esencial destacar que, al ser la acción de Dirac cuadrática en sus contribuciones fermiónicas, que suponemos de la misma magnitud perturbativa que el resto de perturbaciones (y que una posible componente homogénea del campo de Dirac), la truncación a segundo orden se consigue directamente acoplando el campo de Dirac a las tétradas del espaciotiempo homogéneo sin perturbar [139]. Por lo tanto, al orden perturbativo considerado, únicamente es necesario añadir, a la perturbación ya analizada de la acción de Hilbert-Einstein con inflatón, la acción de Dirac para fermiones que se propagan en una cosmología de FLRW. Además, las variables geométricas que describen esta cosmología homogénea pueden tomarse directamente como aquellas que están corregidas con un término cuadrático en las perturbaciones escalares, resultantes de la elección de los invariantes de Mukhanov-Sasaki y las ligaduras lineales como variables canónicas para dichas perturbaciones. En efecto, la diferencia entre ellas y las variables originales para la geometría homogénea es de segundo orden en las perturbaciones, lo que multiplicado por la contribución fermiónica da lugar a términos de orden superior en la acción, que son irrelevantes en nuestra truncación. Por ello, en lo que queda de sección resumiremos el acoplo mínimo de un campo de Dirac a la geometría homogénea e isótropa corregida con perturbaciones cuadráticas. De nuevo, con el fin de no complicar demasiado la notación, mantendremos los símbolos originales de la subsección 7.1.1 para designar estas variables homogéneas corregidas.

El acoplo de un espinor de Dirac Ψ con masa M a un espaciotiempo homogéneo e isótropo con hipersuperficies espaciales planas, de topología compacta, se ha explicado en detalle en el capítulo anterior. Recordamos que, tras llevar a cabo la fijación parcial de la libertad tetradica homogénea que reduce el grupo de gauge fermiónico a $SU(2)$ y la estructura de espín a una cualquiera en T^3 , las proyecciones quirales del espinor de Dirac pueden descomponerse en una base completa de autoespinores del operador de Dirac en T^3 , dados en (6.19), junto con sus complejos conjugados. Dichas bases pueden elegirse ortonormales en el producto interno (6.12), y tal que cumplan (6.24) para toda tupla $\vec{k} \in \mathbb{Z}^3$ distinta de $-\vec{\tau}$, donde $\vec{\tau}$ caracteriza cada una de las ocho estructuras de espín posibles en T^3 y únicamente tiene componentes enteras si es nulo (estructura de espín trivial). Este caso con $\vec{\tau} = \vec{0}$ es el único que presenta modos homogéneos del campo fermiónico. Los autovalores ω_k del operador de Dirac vienen dados por (6.18) y su degeneración g_k es asintóticamente del orden de ω_k^2 cuando $\omega_k \rightarrow \infty$. Explícitamente, si ϕ^A es la proyección zurda de Ψ y $\bar{\chi}_{A'}$ su proyección diestra, las expansiones

en autoespinores de Dirac son:

$$\phi_A(t, \vec{x}) = a^{-3/2}(t) \sum_{\vec{k} \in \mathbb{Z}^3} [m_{\vec{k}}(t) w_{\vec{k}A}^{(+)}(\vec{x}) + \bar{r}_{\vec{k}}(t) w_{\vec{k}A}^{(-)}(\vec{x})], \quad (7.8)$$

$$\bar{\chi}_{A'}(t, \vec{x}) = a^{-3/2}(t) \sum_{\vec{k} \in \mathbb{Z}^3} [\bar{s}_{\vec{k}}(t) \bar{w}_{\vec{k}A'}^{(+)}(\vec{x}) + t_{\vec{k}}(t) \bar{w}_{\vec{k}A'}^{(-)}(\vec{x})], \quad (7.9)$$

donde los pares de coeficientes anticonmutantes $(m_{\vec{k}}, s_{\vec{k}})$ y $(t_{\vec{k}}, r_{\vec{k}})$, designados genéricamente por el par ordenado $(x_{\vec{k}}, y_{\vec{k}})$, satisfacen los corchetes de Dirac simétricos no nulos (6.47), constantes a todo valor de la función global del tiempo t .

La introducción de estas expansiones en modos fermiónicos en la acción de Dirac para un universo homogéneo e isótropo con hipersuperficies espaciales toroidales da lugar a la siguiente contribución en el sistema perturbado completo [véanse los resultados (6.45) y (6.46)]:

$$I_D = \delta_0^{\vec{\tau}} I_{\vec{0}} + \sum_{\vec{k} \neq \vec{\tau}} I_{\vec{k}}, \quad (7.10)$$

donde la contribución de los modos inhomogéneos es:

$$\begin{aligned} I_{\vec{k}} = \int dt & \left[-\frac{i}{2} (\dot{m}_{\vec{k}} \bar{m}_{\vec{k}} + \dot{\bar{m}}_{\vec{k}} m_{\vec{k}} + \dot{r}_{\vec{k}} \bar{r}_{\vec{k}} + \dot{\bar{r}}_{\vec{k}} r_{\vec{k}} + \dot{s}_{\vec{k}} \bar{s}_{\vec{k}} + \dot{\bar{s}}_{\vec{k}} s_{\vec{k}} + \dot{t}_{\vec{k}} \bar{t}_{\vec{k}} + \dot{\bar{t}}_{\vec{k}} t_{\vec{k}}) \right. \\ & - N_0 M (s_{-\vec{k}-2\vec{\tau}} m_{\vec{k}} + \bar{m}_{\vec{k}} \bar{s}_{-\vec{k}-2\vec{\tau}} + r_{-\vec{k}-2\vec{\tau}} t_{\vec{k}} + \bar{t}_{\vec{k}} \bar{r}_{-\vec{k}-2\vec{\tau}}) \\ & \left. + \frac{N_0}{a} \omega_k (\bar{m}_{\vec{k}} m_{\vec{k}} + \bar{t}_{\vec{k}} t_{\vec{k}} - r_{\vec{k}} \bar{r}_{\vec{k}} - s_{\vec{k}} \bar{s}_{\vec{k}}) \right], \quad (7.11) \end{aligned}$$

y un punto superpuesto denota la derivada con respecto a t . En el caso de tenerse una estructura de espín trivial, aparece la siguiente contribución de los modos homogéneos:

$$\begin{aligned} I_{\vec{0}} = \int dt & \left[-\frac{i}{2} (\dot{m}_{\vec{0}} \bar{m}_{\vec{0}} + \dot{\bar{m}}_{\vec{0}} m_{\vec{0}} + \dot{r}_{\vec{0}} \bar{r}_{\vec{0}} + \dot{\bar{r}}_{\vec{0}} r_{\vec{0}} + \dot{s}_{\vec{0}} \bar{s}_{\vec{0}} + \dot{\bar{s}}_{\vec{0}} s_{\vec{0}} + \dot{t}_{\vec{0}} \bar{t}_{\vec{0}} + \dot{\bar{t}}_{\vec{0}} t_{\vec{0}}) \right. \\ & \left. - N_0 M (s_{\vec{0}} \bar{r}_{\vec{0}} + r_{\vec{0}} \bar{s}_{\vec{0}} + m_{\vec{0}} \bar{t}_{\vec{0}} + t_{\vec{0}} \bar{m}_{\vec{0}}) \right]. \quad (7.12) \end{aligned}$$

La parte de I_D que contiene derivadas temporales constituye el término de Legendre de la parte fermiónica de la acción y determina las relaciones de anticonmutación canónicas de los pares de Grassmann $(x_{\vec{k}}, \bar{y}_{\vec{k}})$, junto con sus complejos conjugados. El resto de I_D , que es lineal en la función lapso homogénea, proporciona una contribución cuadrática en perturbaciones fermiónicas al modo homogéneo de la ligadura hamiltoniana del sistema cosmológico completo. Por lo tanto, al orden de truncación adoptado aquí, dicha ligadura hamiltoniana homogénea completa es:

$$H_{|0} + \check{H}_{|2} + {}^T \check{H}_{|2} + H_D, \quad H_D = \delta_0^{\vec{\tau}} H_{\vec{0}} + \sum_{\vec{k} \neq \vec{\tau}} H_{\vec{k}}, \quad (7.13)$$

$$\begin{aligned} H_{\vec{k}} &= M (s_{-\vec{k}-2\vec{\tau}} m_{\vec{k}} + \bar{m}_{\vec{k}} \bar{s}_{-\vec{k}-2\vec{\tau}} + r_{\vec{k}} t_{-\vec{k}-2\vec{\tau}} + \bar{t}_{-\vec{k}-2\vec{\tau}} \bar{r}_{\vec{k}}) \\ &- \frac{\omega_k}{a} (\bar{m}_{\vec{k}} m_{\vec{k}} + \bar{t}_{\vec{k}} t_{\vec{k}} - r_{\vec{k}} \bar{r}_{\vec{k}} - s_{\vec{k}} \bar{s}_{\vec{k}}), \quad (7.14) \end{aligned}$$

$$H_{\vec{0}} = M (s_{\vec{0}} \bar{r}_{\vec{0}} + r_{\vec{0}} \bar{s}_{\vec{0}} + m_{\vec{0}} \bar{t}_{\vec{0}} + t_{\vec{0}} \bar{m}_{\vec{0}}). \quad (7.15)$$

Conviene hacer una última aclaración respecto a la aproximación perturbativa realizada. Una vez se corrigen las variables homogéneas con contribuciones cuadráticas en perturbaciones escalares, el sistema cosmológico analizado es canónico al orden cuadrático de truncación perturbativa. Este sistema tiene el siguiente espacio de fases: un sector homogéneo formado por esas variables corregidas, el invariante de Mukhanov-Sasaki y su momento, los coeficientes correspondientes a las perturbaciones tensoriales (reescalados con el factor de escala) y sus momentos, los coeficientes fermiónicos arriba introducidos y, finalmente, las ligaduras lineales perturbativas, junto con sus momentos conjugados, que tienen corchetes de Poisson nulos con todo el resto de variables del espacio de fases. Además de estas ligaduras, que forman parte del conjunto de variables canónicas escogido, el sistema cosmológico está sujeto únicamente al modo homogéneo de la ligadura hamiltoniana (7.13). En este sentido, recordamos que las ligaduras que generan rotaciones $SU(2)$ internas se satisfacen trivialmente en espaciotiempos homogéneos, tales como el fondo al que se acoplan las perturbaciones fermiónicas estudiadas.

7.2. Variables de destrucción y creación para el campo de Dirac

Antes de aplicar el esquema de cuantización híbrida al sistema cosmológico descrito, debemos introducir variables de destrucción y creación apropiadas que describan el campo de Dirac. Como ya se ha explicado, existe una ambigüedad infinita en su elección, que podemos resumir como sigue para nuestro escenario cosmológico. Por una parte, ha quedado claro ya que es posible extraer parte de la evolución que dicta la ecuación de Dirac para las variables fermiónicas y expresarla en términos del fondo espaciotemporal, cuyo papel lo desempeña en nuestro sistema el sector homogéneo del espacio de fases. Si únicamente se consideran los efectos dinámicos de la geometría homogénea, entonces las redefiniciones disponibles de variables de destrucción y creación, así como de su evolución, son aquellas determinadas por transformaciones lineales que dependen del factor de escala homogéneo y de su momento conjugado. Por otra parte, incluso si se fija así una dinámica fermiónica concreta a partir de la de Dirac, existen infinitas elecciones de variables de destrucción y aniquilación, relacionadas entre sí por transformaciones lineales constantes, que pueden dar lugar a representaciones de Fock inequivalentes entre sí. Si se juntan ambas consideraciones, resulta obvio que la libertad completa en la elección de variables puede reflejarse a través de todas las transformaciones lineales canónicas, dependientes de a y π_a , de los coeficientes fermiónicos. Teniendo en cuenta los resultados obtenidos en el capítulo anterior, restringiremos dichas transformaciones a aquellas que respeten el desacoplo dinámico entre modos fermiónicos, aunque pueden depender de las tuplas \vec{k} que los caracterizan. Por lo tanto, analizaremos variables de destrucción y creación de la forma genérica:

$$\begin{aligned} a_{\vec{k}}^{(x,y)} &= f_1^{\vec{k},(x,y)}(a, \pi_a) x_{\vec{k}} + f_2^{\vec{k},(x,y)}(a, \pi_a) \bar{y}_{-\vec{k}-2\vec{\tau}}, \\ \bar{b}_{\vec{k}}^{(x,y)} &= g_1^{\vec{k},(x,y)}(a, \pi_a) x_{\vec{k}} + g_2^{\vec{k},(x,y)}(a, \pi_a) \bar{y}_{-\vec{k}-2\vec{\tau}}, \end{aligned} \quad (7.16)$$

donde recordamos que $\vec{\tau}$ es fijo para cada estructura de espín posible. Los coeficientes que dependen del fondo espaciotemporal en estas combinaciones lineales pueden variar para

las excitaciones con helicidad positiva y negativa, dadas por los pares $(x_{\vec{k}}, y_{\vec{k}}) = (m_{\vec{k}}, s_{\vec{k}})$ y $(x_{\vec{k}}, y_{\vec{k}}) = (t_{\vec{k}}, r_{\vec{k}})$. En una representación de Fock con interpretación estándar, los operadores correspondientes a $a_{\vec{k}}^{(x,y)}$ y $\bar{b}_{\vec{k}}^{(x,y)}$ destruirían partículas y crearían antipartículas, respectivamente.

Llegado este punto de la exposición, puede explotarse todo el potencial de los resultados alcanzados en el capítulo anterior acerca de la unicidad de la cuantización de Fock con dinámica unitaria de campos fermiónicos en cosmologías de FLRW con hipersuperficies espaciales planas y compactas. Gracias a ellos, podemos minimizar las consecuencias físicas de nuestra elección de variables de destrucción y creación. En efecto, si requerimos que: i) la dinámica de las variables escogidas sea unitariamente implementable en la teoría cuántica y no sea trivial con respecto a la dictada por la ecuación de Dirac; ii) el vacío resultante sea invariante bajo las isometrías continuas de las hipersuperficies toroidales y de las rotaciones de espín generadas por la helicidad; y iii) se respete un convenio para la distinción de partículas y antipartículas que conecte suavemente, en el límite en que la masa tiende a cero, con el estándar en TCC en espaciotiempos planos, entonces el análisis llevado a cabo en el capítulo anterior demuestra que todas las elecciones permitidas de variables de destrucción y creación dan lugar a representaciones de Fock unitariamente equivalentes entre sí. Estas elecciones son precisamente de la forma (7.16), pero con coeficientes dependientes del fondo espaciotemporal que están restringidos como detallamos a continuación, excepto quizá para un número finito de modos:

- a) Para tuplas \vec{k} en un subconjunto infinito \mathbb{Z}_1^3 de \mathbb{Z}^3 , las funciones $f_1^{\vec{k},(x,y)}$ tienen el siguiente comportamiento asintótico cuando $\omega_k \rightarrow \infty$, para todo tiempo:

$$f_1^{\vec{k},(x,y)} = \frac{Ma}{2\omega_k} e^{iF_2^{\vec{k},(x,y)}} + \vartheta^{\vec{k},(x,y)} \quad \text{con} \quad \sum_{\vec{k}} \left| \vartheta^{\vec{k},(x,y)} \right|^2 < \infty. \quad (7.17)$$

- b) Si el complemento de \mathbb{Z}_1^3 en \mathbb{Z}^3 es infinito, para aquellas tuplas \vec{k} que pertenecen a él, las funciones $f_1^{\vec{k},(x,y)}$ han de ser asintóticamente del orden ω_k^{-1} o superior y, además, han de formar una secuencia de cuadrado sumable a todo tiempo.

Por otra parte, el resto de los coeficientes han de satisfacer las relaciones:

$$g_1^{\vec{k},(x,y)} = e^{iG^{\vec{k},(x,y)}} \bar{f}_2^{\vec{k},(x,y)}, \quad g_2^{\vec{k},(x,y)} = -e^{iG^{\vec{k},(x,y)}} \bar{f}_1^{\vec{k},(x,y)}, \quad (7.18)$$

$$f_2^{\vec{k},(x,y)} = e^{iF_2^{\vec{k},(x,y)}} \sqrt{1 - \left| f_1^{\vec{k},(x,y)} \right|^2}. \quad (7.19)$$

Asimismo, recordamos que estos resultados son válidos bajo ciertas condiciones suaves con respecto al factor de escala a , como por ejemplo que sea estrictamente positivo y tenga tercera derivada continua con respecto al tiempo conforme.

En el resto de esta sección analizaremos las consecuencias que tiene elegir en el espacio de fases clásico un conjunto de variables de destrucción y creación con las propiedades mencionadas. Como las transformaciones que llevan de los pares fermiónicos $(x_{\vec{k}}, y_{\vec{k}})$ a $(a_{\vec{k}}^{(x,y)}, b_{\vec{k}}^{(x,y)})$ dependen del factor de escala y, posiblemente, de su momento, las variables escogidas ya no conmutan, bajo corchetes de Poisson, con dicho par de variables para la geometría homogénea. Por lo tanto, si se quiere recuperar la estructura canónica del sistema cosmológico

completo, al orden perturbativo analizado, el factor de escala homogéneo y su momento han de corregirse con contribuciones fermiónicas que contrarresten esta pérdida de conmutatividad. El cálculo correspondiente puede efectuarse de forma similar al expuesto en la referencia [65] cuando se introducen los invariantes de Mukhanov-Sasaki y las ligaduras lineales como variables de configuración, con la salvedad de que los grados de libertad fermiónicos son anticonmutantes. En concreto, puede partirse del término de Legendre en la acción del sistema cosmológico completo, truncada a segundo orden perturbativo, que está simetrizado en las variables fermiónicas originales. Si se sustituyen estas en función de las variables de destrucción y creación elegidas, haciendo uso de la transformación inversa a (7.16), es posible buscar nuevas variables para la geometría homogénea que devuelven la forma canónica al término de Legendre. En particular, después de integrar por partes las derivadas temporales en la contribución fermiónica, despreciar términos de frontera irrelevantes (evaluados a tiempos iniciales y finales) y truncar el resultado a segundo orden perturbativo, puede comprobarse que las variables homogéneas corregidas que mantienen el carácter canónico del sistema cosmológico perturbado son [185]:

$$\check{a} = a + \frac{i}{2} \sum_{\vec{k},(x,y)} [(\partial_{\pi_a} x_{\vec{k}}) \bar{x}_{\vec{k}} + (\partial_{\pi_a} \bar{x}_{\vec{k}}) x_{\vec{k}} + (\partial_{\pi_a} y_{\vec{k}}) \bar{y}_{\vec{k}} + (\partial_{\pi_a} \bar{y}_{\vec{k}}) y_{\vec{k}}], \quad (7.20)$$

$$\check{\pi}_a = \pi_a - \frac{i}{2} \sum_{\vec{k},(x,y)} [(\partial_a x_{\vec{k}}) \bar{x}_{\vec{k}} + (\partial_a \bar{x}_{\vec{k}}) x_{\vec{k}} + (\partial_a y_{\vec{k}}) \bar{y}_{\vec{k}} + (\partial_a \bar{y}_{\vec{k}}) y_{\vec{k}}], \quad (7.21)$$

donde la suma sobre (x, y) es sobre los pares (m, s) y (t, r) .

Una situación especialmente interesante, debido a su simplicidad, se da cuando las fases $G_{\vec{k},(x,y)}^{\vec{k}}$ y $F_2^{\vec{k},(x,y)}$ de los coeficientes (7.18) y (7.19), así como la de $f_1^{\vec{k},(x,y)}$, son constantes. En ese caso, un cálculo directo basado en la relación lineal (7.16), y en las expresiones (7.18) y (7.19), muestra que las correcciones fermiónicas en la definición del par canónico de variables para la geometría homogénea son combinaciones lineales de los productos $a_{\vec{k}}^{(x,y)} b_{\vec{k}}^{(x,y)}$ y $\bar{b}_{\vec{k}}^{(x,y)} \bar{a}_{\vec{k}}^{(x,y)}$, con coeficientes que son complejos conjugados uno del otro.

Regresando al caso general, es conveniente resaltar que, para aquellos términos de la acción total que son cuadráticos en las perturbaciones, la evaluación funcional en las nuevas variables para la geometría homogénea no tiene ninguna consecuencia a nuestro orden de truncación. En efecto, las diferencias por realizar dicha evaluación funcional en las antiguas o en las nuevas variables son de orden perturbativo cuártico, ya que las correcciones introducidas en las variables homogéneas son cuadráticas. Por lo tanto, en todos aquellos términos cuadráticos en perturbaciones que contribuyen al modo homogéneo de la ligadura hamiltoniana, sustituiremos directamente el par (a, π_a) por $(\check{a}, \check{\pi}_a)$. No obstante, aquellas contribuciones al hamiltoniano que dependen exclusivamente del sector homogéneo del espacio de fases requieren un análisis más cuidadoso. Recordamos que, en nuestro sistema cosmológico, el único término de este estilo es la parte homogénea $H_{|0}$ de la ligadura hamiltoniana. En particular, si introducimos la expresión de las variables homogéneas antiguas en función de las nuevas en toda la dependencia geométrica de $H_{|0}$, expandimos el resultado alrededor del nuevo par homogéneo y truncamos a segundo orden perturbativo (que es el orden de aproximación que

estamos tomando en la acción), obtenemos, en lugar de $H_{|0}(a, \pi_a)$, el término:

$$H_{|0}(\check{a}, \check{\pi}_a) - \Delta\check{a} \partial_a H_{|0}(\check{a}, \check{\pi}_a) - \Delta\check{\pi}_a \partial_{\pi_a} H_{|0}(\check{a}, \check{\pi}_a), \quad (7.22)$$

donde $H_{|0}(\check{a}, \check{\pi}_a)$ es el hamiltoniano del sistema homogéneo original evaluado *funcionalmente* en las variables geométricas nuevas. Además, $\Delta\check{a} = \check{a} - a$ y $\Delta\check{\pi}_a = \check{\pi}_a - \pi_a$, y el resultado de ambas restas está expresado en términos de las nuevas variables para la geometría homogénea, así como de las variables fermiónicas de destrucción y creación escogidas. Teniendo en cuenta las expresiones (7.20) y (7.21), estas dos últimas cantidades $\Delta\check{a}$ y $\Delta\check{\pi}_a$ son cuadráticas en perturbaciones fermiónicas. Si utilizamos la expresión funcional explícita (7.4) de $H_{|0}$, la contribución (7.22) puede escribirse como:

$$H_{|0}(\check{a}, \check{\pi}_a) + \left[\frac{3}{\check{a}} H_{|0}(\check{a}, \check{\pi}_a) + \frac{4\pi G}{3l_0^3 \check{a}^2} \check{\pi}_a^2 - 3l_0^3 \check{a}^2 m^2 \phi^2 \right] \Delta\check{a} + \frac{4\pi G}{3l_0^3 \check{a}} \check{\pi}_a \Delta\check{\pi}_a. \quad (7.23)$$

De esta forma, y salvo una contribución que es una suma de las ligaduras lineales perturbativas, con multiplicadores de Lagrange de primer orden perturbativo [65], se obtiene el siguiente hamiltoniano total del sistema cosmológico truncado:

$$N_0 \left(H_{|0} + \frac{3}{\check{a}} H_{|0} \Delta\check{a} + \frac{4\pi G}{3l_0^3 \check{a}^2} \check{\pi}_a^2 \Delta\check{a} - 3l_0^3 \check{a}^2 m^2 \phi^2 \Delta\check{a} + \frac{4\pi G}{3l_0^3 \check{a}} \check{\pi}_a \Delta\check{\pi}_a + \check{H}_{|2} + {}^T \check{H}_{|2} + H_D[a, b] \right), \quad (7.24)$$

donde toda la dependencia en la geometría homogénea ha de evaluarse haciendo las variables originales (a, π_a) iguales a $(\check{a}, \check{\pi}_a)$, y donde hemos llamado $H_D[a, b]$ el hamiltoniano fermiónico H_D expresado en términos de las variables de destrucción y creación seleccionadas.

Como el segundo término de la fórmula anterior para el hamiltoniano total es proporcional a $H_{|0}$, con un factor de proporcionalidad cuadrático en las perturbaciones fermiónicas, es posible absorberlo, al orden la truncación perturbativa considerada mediante una redefinición del lapso: $\check{N}_0 = N_0 + 3\Delta\check{a}/\check{a}$. Por otra parte, la contribución cuadrática de los fermiones en la ligadura hamiltoniana viene dada por:

$$\check{H}_D = \frac{4\pi G}{3l_0^3 \check{a}^2} \check{\pi}_a^2 \Delta\check{a} - 3l_0^3 \check{a}^2 m^2 \phi^2 \Delta\check{a} + \frac{4\pi G}{3l_0^3 \check{a}} \check{\pi}_a \Delta\check{\pi}_a + H_D[a, b]. \quad (7.25)$$

Los tres primeros términos determinan el cambio producido en el hamiltoniano fermiónico, que dicta la evolución de las variables de destrucción y creación del campo de Dirac, debido a que la introducción de dichas variables depende del tiempo a través de la geometría homogénea. En conclusión, a segundo orden perturbativo en la acción y salvo por las ligaduras lineales perturbativas, el hamiltoniano total del sistema cosmológico considerado es:

$$\check{N}_0 (H_{|0} + \check{H}_{|2} + {}^T \check{H}_{|2} + \check{H}_D). \quad (7.26)$$

7.3. Variables para la diagonalización instantánea

De ahora en adelante, particularizaremos todo el estudio a una elección de variables de destrucción y creación similar a la empleada en la referencia [139], que como ya hemos

comentado, fue un trabajo pionero en la introducción de fermiones en cosmología cuántica. Dichas variables tienen la propiedad de proporcionar una diagonalización instantánea del hamiltoniano H_D , si se ignoran los modos homogéneos. En particular, tales variables de destrucción y creación están especificadas por la elección de los siguientes coeficientes, para todo $\vec{k} \in \mathbb{Z}^3$ distinto de $-\vec{\tau}$:

$$f_1^{\vec{k},(x,y)} = \sqrt{\frac{\xi_k - \omega_k}{2\xi_k}}, \quad f_2^{\vec{k},(x,y)} = \sqrt{\frac{\xi_k + \omega_k}{2\xi_k}}, \quad (7.27)$$

$$g_1^{\vec{k},(x,y)} = f_2^{\vec{k},(x,y)}, \quad g_2^{\vec{k},(x,y)} = -f_1^{\vec{k},(x,y)}, \quad (7.28)$$

donde

$$\xi_k = \sqrt{\omega_k^2 + M^2 a^2}. \quad (7.29)$$

Destacamos que $\xi_k \geq \omega_k > 0$, al haber excluido los posibles modos homogéneos, por lo que los coeficientes (7.27) son reales y finitos. Por otra parte, la expresión de las funciones (7.28), que también son reales, coincide con la fórmula (7.18) particularizada a este caso. Asimismo, puede comprobarse que los coeficientes así introducidos poseen el comportamiento asintótico (7.17), de donde se deduce que las correspondientes variables de destrucción y creación dan lugar a una cuantización de Fock que se encuentra dentro de la familia seleccionada por el criterio de unicidad basado en la dinámica unitaria, la invariancia bajo simetrías y el convenio estándar de partículas y antipartículas. Como ya se ha comentado, esta elección de variables diagonaliza la parte de modos no homogéneos en el hamiltoniano H_D . Recordamos, sin embargo, que este no es el hamiltoniano fermiónico completo \check{H}_D . En este sentido, conviene aclarar que, e incluso si el problema de producción de un número finito de partículas fue estudiado en la referencia [139] haciendo uso de las variables definidas por (7.27), el tratamiento hamiltoniano expuesto en ese trabajo se llevó a cabo utilizando los análogos directos de los modos $\{m_{\vec{k}}, r_{\vec{k}}, s_{\vec{k}}, t_{\vec{k}}\}$, sin modificar su hamiltoniano H_D .

Al depender las funciones (7.27) únicamente del factor de escala a y no de π_a , la diferencia $\Delta\check{a}$ que aparece en (7.20) resulta ser nula. Esto no ocurre, sin embargo, con la diferencia $\Delta\check{\pi}_a$. Si se hace uso de (7.21) y se trunca al orden perturbativo considerado, se obtiene la expresión [185]:

$$\Delta\check{\pi}_a = -i \frac{M\omega_k}{2\check{\xi}_k^2} \sum_{\vec{k} \neq \vec{\tau}, (x,y)} \left(a_{\vec{k}}^{(x,y)} b_{\vec{k}}^{(x,y)} + \bar{a}_{\vec{k}}^{(x,y)} \bar{b}_{\vec{k}}^{(x,y)} \right). \quad (7.30)$$

Aquí, $\check{\xi}_k$ es el resultado de reemplazar a directamente por \check{a} en la definición (7.29) de ξ_k . Podemos hacer uso entonces de este resultado, así como de la expresión para H_D en términos de las variables de destrucción y creación, y obtener:

$$\check{H}_D = \delta_0^{\vec{\tau}} H_0 + \sum_{\vec{k} \neq \vec{\tau}} \check{H}_{\vec{k}}, \quad (7.31)$$

$$\begin{aligned} \check{H}_{\vec{k}} &= \frac{1}{2\check{a}} \sum_{(x,y)} \left[\check{\xi}_k \left(\bar{a}_{\vec{k}}^{(x,y)} a_{\vec{k}}^{(x,y)} - a_{\vec{k}}^{(x,y)} \bar{a}_{\vec{k}}^{(x,y)} + \bar{b}_{\vec{k}}^{(x,y)} b_{\vec{k}}^{(x,y)} - b_{\vec{k}}^{(x,y)} \bar{b}_{\vec{k}}^{(x,y)} \right) \right. \\ &\quad \left. - i \frac{M\omega_k}{\check{\xi}_k^2} \check{\pi}_a \left(a_{\vec{k}}^{(x,y)} b_{\vec{k}}^{(x,y)} + \bar{a}_{\vec{k}}^{(x,y)} \bar{b}_{\vec{k}}^{(x,y)} \right) \right]. \end{aligned} \quad (7.32)$$

Este es el hamiltoniano que (cuando se multiplica por la función lapso homogénea) genera la evolución dinámica de las variables de destrucción y creación $\{a_{\vec{k}}^{(x,y)}, b_{\vec{k}}^{(x,y)}, \bar{a}_{\vec{k}}^{(x,y)}, \bar{b}_{\vec{k}}^{(x,y)}\}$, así como la de los modos homogéneos fermiónicos, si existen. De acuerdo con los resultados obtenidos en el capítulo anterior, esta dinámica sería implementable a través de un operador unitario en el espacio de Fock correspondiente del sistema fermiónico si tratáramos la geometría homogénea como una entidad clásica no estacionaria.

7.4. Cuantización híbrida

Si aplicamos todas las consideraciones expuestas en las secciones anteriores, el sistema cosmológico con perturbaciones estudiado queda preparado de forma óptima para proceder a la representación cuántica de sus ligaduras. Seguiremos la estrategia híbrida para la cuantización de este espaciotiempo inhomogéneo. En particular, para el sector geométrico homogéneo del espacio de fases emplearemos la representación polimérica de CCL, dentro del marco de la dinámica mejorada. Sin embargo, el tratamiento aquí presentado será fácilmente generalizable a otros formalismos de cosmología cuántica. Los estados aniquilados por los operadores de ligadura proporcionarán los estados físicos del sistema cosmológico. Como puede comprobarse inmediatamente si se inspecciona su contrapartida clásica, el operador correspondiente al modo cero de la ligadura hamiltoniana acoplará los subsistemas homogéneos e inhomogéneos, por lo que la resolución de la cosmología cuántica será un proceso altamente no trivial. Además, hay presentes cuatro ligaduras lineales perturbativas para cada uno de los modos inhomogéneos de las perturbaciones escalares, lo que reducirá en la práctica el número de grados de libertad escalares físicos.

Empezaremos proporcionando la representación cuántica de la contribución $H_{|0}$ de la cosmología homogénea al modo cero de la ligadura hamiltoniana. Sea $\mathcal{H}_{\text{kin}}^{\text{matt}}$ el espacio de Hilbert cinemático sobre el que representaremos el modo homogéneo del campo escalar, junto con su momento. Por ejemplo, escogemos el espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{R}, d\phi)$ de funciones de cuadrado integrable en la recta real, sobre el que $\hat{\phi}$ actúa por multiplicación, mientras que su momento canónicamente conjugado \hat{p}_ϕ actúa como $-i\partial_\phi$. Por otra parte, sea $\mathcal{H}_{\text{kin}}^{\text{grav}}$ el espacio de representación para la geometría homogénea, que en CCL puede identificarse con el espacio de funciones de cuadrado integrable sobre la recta real, con respecto a la medida discreta. En este espacio han de representarse las relaciones de conmutación canónicas del par homogéneo $(\check{a}, \check{\pi}_a)$. Sin embargo, al centrar todo el interés en una representación de lazos, trabajaremos en su lugar con el par canónico (v, b) , definido a través de las ecuaciones (7.2) y (7.3) una vez (a, π_a) se reemplaza por $(\check{a}, \check{\pi}_a)$ en el lado izquierdo de dichas igualdades. Consideremos entonces en $\mathcal{H}_{\text{kin}}^{\text{grav}}$ el operador \hat{v} dado por (3.56), que representa la variable v en el esquema de la dinámica mejorada. Si definimos el operador de volumen físico como $\hat{V} = 2\pi\gamma G \Delta_g^{1/2} |\hat{v}|$, que es un operador positivo, podemos representar el factor de escala \check{a} como $l_0^{-1/3} \hat{V}^{1/3}$. Por otra parte, recordemos que en el esquema de la dinámica mejorada de CCL, el producto $4v^2 b^2$ se representa a través del operador esencialmente autoadjunto (y por tanto con extensión simétrica [94]) $\hat{\Omega}_0^2$, donde $\hat{\Omega}_0$ está definido en (3.67). Finalmente, el operador $\widehat{[1/V]}$ que representa el inverso del volumen físico se define utilizando la identidad clásica (3.61) y notando que $1/V$ es el valor absoluto del lado izquierdo de dicha igualdad

elevado al cubo. Explícitamente, se tiene [37, 38]:

$$\widehat{\left[\frac{1}{V}\right]}^{1/3} = \frac{3}{4\pi G\gamma\sqrt{\Delta_g}} \widehat{\text{sign}(v)} \hat{V}^{1/3} \left[\hat{\mathcal{N}}_{-\bar{\mu}} \hat{V}^{1/3} \hat{\mathcal{N}}_{\bar{\mu}} - \hat{\mathcal{N}}_{\bar{\mu}} V^{1/3} \hat{\mathcal{N}}_{-\bar{\mu}} \right], \quad (7.33)$$

donde $\hat{\mathcal{N}}_{\pm\bar{\mu}}$ está definido a través de la acción (3.57) sobre los estados $|v\rangle$ de $\mathcal{H}_{\text{kin}}^{\text{grav}}$.

Si se combinan todas estas representaciones cuánticas de las variables clásicas que aparecen en la contribución $H_{|0}$ al modo cero de la ligadura hamiltoniana, dada en (7.4), se puede representar dicha contribución a través del siguiente operador, que está bien definido en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}_{\text{kin}}^{\text{grav}} \otimes \mathcal{H}_{\text{kin}}^{\text{matt}}$ [62, 64]:

$$\hat{H}_{|0} = \frac{1}{2} \widehat{\left[\frac{1}{V}\right]}^{1/2} \left[\hat{p}_\phi^2 - \hat{\mathcal{H}}_0^{(2)} \right] \widehat{\left[\frac{1}{V}\right]}^{1/2}. \quad (7.34)$$

Hemos elegido una simetrización algebraica para el inverso del volumen, en vista de las beneficiosas propiedades de superselección que aporta dicha simetrización en la cosmología de FLRW. Además, el operador $\hat{\mathcal{H}}_0^{(2)}$ está definido como:

$$\hat{\mathcal{H}}_0^{(2)} = \frac{3\pi G}{4} \hat{\Omega}_0^2 - \hat{V}^2 m^2 \hat{\phi}^2. \quad (7.35)$$

Ahora bien, como ya hemos visto, el operador $\hat{\Omega}_0^2$ aniquila al estado $|v=0\rangle$ del espacio de Hilbert polimérico y deja invariante su complemento ortogonal. Lo mismo ocurriría con el operador del inverso del volumen, que además conmuta con \hat{v} . Asimismo, la acción de $\hat{\Omega}_0^2$ divide dicho espacio de Hilbert en sectores de superselección separables, al preservar todos los subespacios $\mathcal{H}_\varepsilon^\pm$ generados por estados $|v\rangle$ con v perteneciente a cualquiera de las semirredes de paso cuatro $\mathcal{L}_\varepsilon^\pm = \{\pm(\varepsilon + 4n), n \in \mathbb{N}\}$, donde $\varepsilon \in (0, 4]$ [95]. En cada uno de estos sectores, el «volumen» homogéneo v posee un valor positivo mínimo ε (o negativo máximo $-\varepsilon$) distinto de cero. Por lo tanto, si el resto de contribuciones cuadráticas en perturbaciones al modo homogéneo de la ligadura hamiltoniana se pueden representar de tal forma que compartan estas propiedades, toda la búsqueda de soluciones cuánticas podrá partir de un sector de geometría homogénea del espacio de Hilbert cinemático dado, por ejemplo, por $\mathcal{H}_\varepsilon^+$. Además, si esto ocurre, podrán estudiarse exclusivamente las soluciones al operador de ligadura densitizada, sin los factores $\widehat{\left[\frac{1}{V}\right]}^{1/2}$ a cada lado, pues puede comprobarse que dichas soluciones estarán en biyección con las de la ligadura original [95].

A continuación, procedemos a representar el sector inhomogéneo del espacio de fases, así como las ligaduras que lo involucran. Con respecto a las ligaduras lineales perturbativas y sus momentos canónicamente conjugados, que describen parte del sector perturbativo escalar del espacio de fases, tomaremos una representación en la que dichas ligaduras actúen como derivadas (quizá en un sentido generalizado) con respecto a sus momentos. Su imposición cuántica implica entonces, simplemente, que los estados físicos no dependen de los grados de libertad perturbativos descritos por los momentos de estas ligaduras [65]. Podemos centrar así toda la atención en el resto de variables inhomogéneas: el invariante de Mukhanov-Sasaki junto con su momento, las perturbaciones tensoriales y las variables fermiónicas introducidas en la sección 7.3. La única ligadura cuántica que queda por imponer, en el sistema que forman junto con el sector homogéneo ya descrito, es el modo cero de la ligadura hamiltoniana.

Esta parte que es la físicamente relevante del sector perturbativo, la representaremos cuánticamente mediante el producto tensorial de tres representaciones de Fock pertenecientes a ciertas familias privilegiadas [62, 64, 126, 142]. Los espacios de Fock para las perturbaciones escalares y tensoriales son simétricos, mientras que el espacio de Fock fermiónico es antisimétrico. Resulta conveniente recalcar que todas estas representaciones de Fock o, estrictamente hablando, las respectivas familias de representaciones unitariamente equivalentes, son únicas en tanto en cuanto quedan completamente especificadas por el criterio de permitir que la dinámica asociada a las variables clásicas sea implementable unitariamente en el espacio de Fock, así como por poseer vacíos invariantes bajo las simetrías del sistema (además de un concepto razonable de partículas y antipartículas en el caso fermiónico). Sean entonces \mathcal{F}_s , \mathcal{F}_T y \mathcal{F}_D los espacios de Fock correspondientes, donde los subíndices s , T y D indican perturbaciones escalares, perturbaciones tensoriales y fermiones de Dirac, respectivamente. Con el objetivo de simplificar la notación, incluiremos en \mathcal{F}_D los posibles modos homogéneos del campo de Dirac, aún cuando tomemos para ellos una representación que no dependa de operadores de destrucción y creación. Los estados de números de ocupación $|\mathbf{n}_s\rangle$, $|\mathbf{n}_T\rangle$ y $|\mathbf{n}_D\rangle$ forman bases ortonormales de estos espacios de Fock, donde \mathbf{n} denota una secuencia de números de ocupación (enteros y positivos), para cada uno de los tipos de excitaciones indicadas por el subíndice correspondiente. Los operadores de destrucción y creación tienen (anti)conmutadores canónicos y actúan sobre estas bases de forma estándar, reduciendo e incrementando los números de ocupación [10, 80].

Si se combinan todos los tipos de representaciones discutidos para los sectores homogéneo e inhomogéneo del espacio de fases cosmológico, concluimos que los estados físicos del sistema pueden determinarse partiendo del siguiente espacio cinemático:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\text{kin}}^{\text{grav}} \otimes \mathcal{H}_{\text{kin}}^{\text{matt}} \otimes \mathcal{F}_s \otimes \mathcal{F}_T \otimes \mathcal{F}_D, \quad (7.36)$$

a través de una imposición de la versión cuántica del modo homogéneo de la ligadura hamiltoniana. Estrictamente hablando, el hábitat natural para buscar soluciones a la ligadura sería el dual de un subconjunto denso adecuado en el espacio de Hilbert \mathcal{H} , suficientemente pequeño y sobre el que la acción del operador de ligadura estuviera bien definida. Para no complicar en exceso nuestra discusión ni nuestra notación, en este capítulo ignoraremos estos detalles sobre la consiguiente acción dual de la ligadura, tratando las potenciales soluciones como si fueran estados (generalizados) en \mathcal{H} .

Procedamos por tanto a completar la representación cuántica de la ligadura estudiada. Para ello, debemos proporcionar una contrapartida cuántica de las funciones del sector homogéneo que aparecen en las contribuciones cuadráticas en perturbaciones a esta ligadura. Estas contribuciones vienen dadas por la función $\check{H}_{|2} + {}^T\check{H}_{|2} + \check{H}_D$. Una simple inspección de su expresión explícita, dada por las fórmulas (7.5)-(7.7), (7.31) y (7.32), muestra que debemos proporcionar una representación mediante operadores de funciones que no son, en general, lineales en las variables del sector homogéneo. Con respecto a las contribuciones escalares y tensoriales, adoptaremos las prescripciones empleadas en las referencias [65, 66], que se inspiran en mantener las propiedades de desacoplo del estado de volumen cero y de los sectores de superselección presentes en el modelo homogéneo e isótropo. Estas prescripciones consisten en lo siguiente: i) tomaremos un orden simétrico de factores para productos de la forma $f(\phi)p_\phi$; ii) simetrizaremos de forma algebraica los factores de la forma $V^r g(2vb)$, para cualquier función g y número real r , de tal manera que les asignaremos los operadores

$\hat{V}^{r/2}\hat{g}(\hat{\Omega}_0)\hat{V}^{r/2}$; iii) usaremos el mismo tipo de simetrización algebraica para todas las potencias del inverso del volumen físico; iv) representaremos las potencias pares de $2vb = -4\check{a}\pi_{\check{a}}/3$ a través de las mismas potencias del operador $\hat{\Omega}_0$; y finalmente v) representaremos las potencias impares $(2vb)^{2k+1}$, con k entero, a través del operador $|\hat{\Omega}_0|^k\hat{\Lambda}_0|\hat{\Omega}_0|^k$, donde $|\hat{\Omega}_0| = (\hat{\Omega}_0^2)^{1/2}$ y $\hat{\Lambda}_0$ está definido exactamente igual que $\hat{\Omega}_0$ pero doblando la longitud en las holonomías que lo determinan, es decir, reemplazando el operador que representa al seno de b en (3.67) por la mitad del seno del ángulo doble. Es posible demostrar que este último operador $\hat{\Lambda}_0$ es esencialmente autoadjunto [60, 95]. Además, la prescripción de doblar la longitud de las holonomías, y con ello los desplazamientos que produciría $\hat{\Omega}_0$ en el volumen, es necesaria para mantener invariantes los sectores de superselección $\mathcal{H}_\varepsilon^\pm$ bajo la acción de la ligadura. Aparte de todas estas definiciones, ya introducidas en trabajos previos [65, 66], debemos añadir las siguientes, que dan cuenta de la representación cuántica de la contribución fermiónica a la acción: vi) para $\check{\xi}_k$ y cualquiera de sus potencias algebraicas (incluyendo las negativas), definimos su representación como operador en términos de \hat{V} utilizando el teorema espectral, de tal forma que conmuta con \hat{V} y además admite (al menos localmente) una expansión en serie de potencias de ω_k ; y vii) en todas aquellas contribuciones que crean o aniquilan excitaciones fermiónicas [procedentes del segundo término en la ecuación (7.32)] llevaremos a cabo una simetrización algebraica de todos los operadores que involucran al volumen similar a la expuesta en los puntos ii) y iii), y posteriormente adoptaremos las prescripciones ya indicadas para su representación. Haciendo uso de todo el procedimiento explicado dentro del esquema de la cuantización híbrida, es posible obtener la representación como operador, en el espacio de Hilbert cinemático \mathcal{H} , de la ligadura hamiltoniana considerada. El resultado es el siguiente operador de ligadura:

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\hat{V}} \right]^{1/2} \left[\hat{p}_\phi^2 - \hat{\mathcal{H}}_0^{(2)} - \hat{\Theta}_e - (\hat{\Theta}_o \hat{p}_\phi)_{\text{sym}} - \hat{\Theta}_T - \delta_0^{\check{\tau}} \hat{\Upsilon}_{\check{0}} - \hat{\Upsilon}_F - \hat{\Upsilon}_I \right] \left[\frac{1}{\hat{V}} \right]^{1/2}, \quad (7.37)$$

donde, para dos operadores \hat{A} y \hat{B} cualesquiera, $(\hat{A}\hat{B})_{\text{sym}} = (\hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A})/2$ y los distintos términos perturbativos están definidos como detallamos a continuación. Con respecto a los invariantes de gauge escalares, si utilizamos la notación:

$$\Theta_e = - \sum_{\vec{n}, \epsilon} [(\vartheta_e \omega_n^2 + \vartheta_e^q) v_{\vec{n}, \epsilon}^2 + \vartheta_e \pi_{v_{\vec{n}, \epsilon}}^2], \quad \Theta_o = - \sum_{\vec{n}, \epsilon} \vartheta_o v_{\vec{n}, \epsilon}^2, \quad (7.38)$$

y las prescripciones de cuantización anteriormente expuestas, obtenemos los siguientes operadores del sector homogéneo:

$$\hat{\vartheta}_e = l_0 \hat{V}^{2/3}, \quad (7.39)$$

$$\hat{\vartheta}_e^q = \frac{4\pi G}{3l_0} \left[\frac{1}{\hat{V}} \right]^{1/3} \hat{\mathcal{H}}_0^{(2)} \left(19 - \frac{24}{\pi G} \hat{\Omega}_0^{-2} \hat{\mathcal{H}}_0^{(2)} \right) \left[\frac{1}{\hat{V}} \right]^{1/3} + \frac{m^2}{l_0} \hat{V}^{4/3} \left(1 - \frac{8\pi G}{3} \hat{\phi}^2 \right), \quad (7.40)$$

$$\hat{\vartheta}_o = \frac{16}{l_0} m^2 \hat{\phi} \hat{V}^{2/3} |\hat{\Omega}_0|^{-1} \hat{\Lambda}_0 |\hat{\Omega}_0|^{-1} \hat{V}^{2/3}. \quad (7.41)$$

Siguiendo una notación análoga para las perturbaciones tensoriales, se tiene:

$$\Theta_T = - \sum_{\vec{n}, \epsilon, \check{\epsilon}} [(\vartheta_e \omega_n^2 + \vartheta_T^q) \check{d}_{\vec{n}, \epsilon, \check{\epsilon}}^2 + \vartheta_e \pi_{\check{d}_{\vec{n}, \epsilon, \check{\epsilon}}}^2], \quad (7.42)$$

y nuestras prescripciones de representación dan lugar al operador:

$$\hat{\vartheta}_T^q = \frac{4\pi G}{3l_0} \left[\frac{1}{\hat{V}} \right]^{1/3} \hat{\mathcal{H}}_0^{(2)} \left[\frac{1}{\hat{V}} \right]^{1/3} - \frac{8\pi G}{3l_0} m^2 \hat{V}^{4/3} \hat{\phi}^2. \quad (7.43)$$

En último lugar, respecto a la contribución fermiónica, si se incluyen los posibles modos homogéneos del campo de Dirac [que aquí representaremos a través de los operadores genéricos $(\hat{m}_{\vec{0}}, \hat{r}_{\vec{0}}, \hat{s}_{\vec{0}}, \hat{t}_{\vec{0}})$], que podrían proceder por ejemplo de una representación holomorfa [76] similar a la elegida en la referencia [139]] y se toma un orden normal para el resto de operadores de destrucción y creación, se obtiene [185]:

$$\hat{\Upsilon}_{\vec{0}} = -2M\hat{V}(\hat{s}_{\vec{0}}\hat{r}_{\vec{0}}^\dagger + \hat{r}_{\vec{0}}\hat{s}_{\vec{0}}^\dagger + \hat{m}_{\vec{0}}\hat{t}_{\vec{0}}^\dagger + \hat{t}_{\vec{0}}\hat{m}_{\vec{0}}^\dagger), \quad (7.44)$$

$$\hat{\Upsilon}_F = - \sum_{\vec{k} \neq \vec{\tau}, (x,y)} 2l_0 \check{\xi}_k(\hat{V}) \hat{V}^{2/3} \left(\hat{a}_{\vec{k}}^{(x,y)\dagger} \hat{a}_{\vec{k}}^{(x,y)} + \hat{b}_{\vec{k}}^{(x,y)\dagger} \hat{b}_{\vec{k}}^{(x,y)} \right), \quad (7.45)$$

$$\begin{aligned} \hat{\Upsilon}_I &= -i \sum_{\vec{k} \neq \vec{\tau}, (x,y)} \frac{\pi G M \omega_k}{l_0} \check{\xi}_k^{-1}(\hat{V}) \hat{V}^{1/6} \hat{\Lambda}_0 \hat{V}^{1/6} \check{\xi}_k^{-1}(\hat{V}) \\ &\times \left(\hat{a}_{\vec{k}}^{(x,y)} \hat{b}_{\vec{k}}^{(x,y)} + \hat{a}_{\vec{k}}^{(x,y)\dagger} \hat{b}_{\vec{k}}^{(x,y)\dagger} \right). \end{aligned} \quad (7.46)$$

Todos los operadores de geometría homogénea aquí definidos aniquilan el estado $|v=0\rangle$ del espacio de Hilbert polimérico, y además dejan invariantes los sectores de superselección $\mathcal{H}_\varepsilon^\pm$. Y lo mismo ocurre con las potencias del inverso del volumen físico que aparecen, simetrizadas de forma algebraica, a ambos lados de (7.37). Por lo tanto, podemos centrar todo nuestro análisis siguiente en un espacio de Hilbert cinemático $\mathcal{H}_{\text{kin}}^{\text{grav}}$ para la geometría homogénea identificado, por ejemplo, con $\mathcal{H}_\varepsilon^+$. Asimismo, estas propiedades del operador de ligadura \hat{H} permiten restringir la búsqueda de soluciones físicas a aquellas que son aniquiladas por su contrapartida densitizada:

$$\hat{H} = \frac{1}{2} [\hat{p}_\phi^2 - \hat{\mathcal{H}}_0^{(2)} - \hat{\Theta}_e - (\hat{\Theta}_o \hat{p}_\phi)_{\text{sym}} - \hat{\Theta}_T - \delta_0^{\vec{\tau}} \hat{\Upsilon}_{\vec{0}} - \hat{\Upsilon}_F - \hat{\Upsilon}_I]. \quad (7.47)$$

Llegados a este punto, queremos comentar que la generalización del presente estudio a potenciales genéricos para el campo escalar es prácticamente inmediata. En efecto, únicamente es necesario reemplazar cualquier término cuadrático en el campo escalar homogéneo de la forma $m^2 \phi^2/2$ por el potencial en cuestión, cualquier término lineal $m^2 \phi$ por la derivada del potencial y cualquier constante aislada m^2 por su segunda derivada. Asimismo, es posible generalizar todo el análisis a cuantizaciones de tipo híbrido en las que no se adopta una representación de CCL para la geometría homogénea. En efecto, todas las fórmulas aquí escritas pueden adaptarse a cualquier otra representación de la geometría, a través de una simple identificación de los operadores correspondientes que desempeñan el papel de \hat{V} , su inverso regularizado (que puede coincidir con el inverso propiamente dicho), $\hat{\Omega}_0$ y su versión modificada $\hat{\Lambda}_0$. Así pues, al menos desde un punto de vista puramente formal, nuestros resultados pueden aplicarse, en principio, a esquemas de cosmología cuántica distintos a CCL.

7.5. Aproximación de tipo Born-Oppenheimer

En esta sección introduciremos un *ansatz* para describir familias de estados físicos de interés en cosmología, en particular si se consideran escenarios en los que no se espera que las perturbaciones afecten de forma considerable a la geometría homogénea. Más en concreto, buscaremos estados cuya dependencia en la geometría homogénea, en las perturbaciones escalares, en las tensoriales y en los grados de libertad fermiónicos pueda separarse. Por otra parte, el campo escalar homogéneo ϕ se considerará como un «tiempo» interno del sistema, de forma que cada parte de la función de onda Ξ para nuestros estados físicos (generalizados) pueda depender de él. Si proseguimos con la notación introducida para los números de ocupación escalares (s), tensoriales (T) y fermiónicos (D), el *ansatz* adoptado puede expresarse de la siguiente manera:

$$\Xi = \Gamma(V, \phi) \psi(\mathbf{n}_s, \mathbf{n}_T, \mathbf{n}_D, \phi) = \Gamma(V, \phi) \psi_s(\mathbf{n}_s, \phi) \psi_T(\mathbf{n}_T, \phi) \psi_D(\mathbf{n}_D, \phi), \quad (7.48)$$

donde la dependencia en la geometría homogénea se denota de forma simbólica a través de V . La parte homogénea de esta función de onda se elegirá de la forma [65, 164]:

$$\Gamma(V, \phi) = \hat{U}_0(V, \phi) \chi(V), \quad (7.49)$$

donde \hat{U}_0 es un operador unitario (con respecto al producto interno en $\mathcal{H}_{\text{kin}}^{\text{grav}}$) en el tiempo interno ϕ , que supondremos que está generado por un operador autoadjunto, definido como $\hat{\mathcal{H}}_0 = [\hat{\pi}_\phi, \hat{U}_0] \hat{U}_0^{-1}$. El estado Γ puede entenderse como una solución de la contribución homogénea $\hat{p}_\phi^2 - \hat{\mathcal{H}}_0^{(2)}$ al operador de ligadura completo \hat{H} , hasta el orden de los términos perturbativos. Para ello, asumiremos que la diferencia $(\hat{\mathcal{H}}_0)^2 - \hat{\mathcal{H}}_0^{(2)}$, actuando sobre Γ , es despreciable a todos los órdenes dominantes frente al cuadrático en perturbaciones. Además, o bien supondremos que el conmutador $[\hat{p}_\phi, \hat{\mathcal{H}}_0]$ es también despreciable hasta segundo orden perturbativo (incluido), o bien lo absorberemos a través de un cambio en el orden de factores de la contribución homogénea a la ligadura (7.47) [164]. Para conseguir esto último, podemos adoptar, por ejemplo, el orden de factores $(\hat{p}_\phi + \hat{\mathcal{H}}_0)(\hat{p}_\phi - \hat{\mathcal{H}}_0) + \{(\hat{\mathcal{H}}_0)^2 - \hat{\mathcal{H}}_0^{(2)}\}$. Su acción sobre el estado (7.49) coincide entonces con la del último operador entre corchetes, que hemos asumido que es de orden perturbativo cuadrático, como mucho. Por último, supondremos también que $\hat{\mathcal{H}}_0$ es positivo. De hecho, podría sugerirse como tal operador la raíz cuadrada de la parte positiva de $\hat{\mathcal{H}}_0^{(2)}$ [164]. Sin embargo, con el fin de mantener la discusión lo más general posible, no restringiremos nuestro estudio a una elección concreta de $\hat{\mathcal{H}}_0$. En lo que se refiere al perfil χ que aparece en la definición (7.49) de Γ , lo tomaremos normalizado a la unidad con respecto al producto interno en $\mathcal{H}_{\text{kin}}^{\text{grav}}$. Podría entenderse dicho perfil χ como el estado «inicial» (con respecto al tiempo interno ϕ) para la geometría homogénea, por lo que sería razonable escogerlo suficientemente picado en un espaciotiempo de FLRW, de tal forma que presentase un comportamiento semiclásico y de interés cosmológico.

Si se hace uso del *ansatz* (7.48) y (7.49), y se tienen en cuenta las hipótesis hechas en el párrafo anterior, la ecuación de ligadura $\hat{H}\Xi = 0$ (o una ecuación análoga obtenida con la

acción dual de \hat{H}) se traduce en:

$$\begin{aligned} \Gamma(\hat{p}_\phi^2\psi) &+ 2\langle\hat{\mathcal{H}}_0\rangle_\Gamma\langle\hat{p}_\phi\rangle\psi + \left(\langle(\hat{\mathcal{H}}_0)^2\rangle_\Gamma - \hat{\mathcal{H}}_0^{(2)}\right)\Gamma\psi + \frac{i}{2}d_\phi\hat{\Theta}_o(\Gamma\psi) - \hat{\Theta}_o\{\Gamma(\hat{p}_\phi\psi)\} \\ &- \{\hat{\Theta}_e + (\hat{\Theta}_o\hat{\mathcal{H}}_0)_{\text{sym}} + \hat{\Theta}_T + \delta_0^{\vec{r}}\hat{\Upsilon}_{\vec{0}} + \hat{\Upsilon}_F + \hat{\Upsilon}_I\}(\Gamma\psi) = 0, \end{aligned} \quad (7.50)$$

donde hemos utilizado la notación $-id_\phi\hat{O} \equiv [\hat{p}_\phi - \hat{\mathcal{H}}_0, \hat{O}]$ para cualquier operador genérico \hat{O} . Asimismo, toda la dependencia de la ecuación en la actuación del operador \hat{p}_ϕ está escrita de forma explícita. En este sentido, resulta conveniente destacar que $d_\phi\hat{\Theta}_o$ es independiente del operador de momento del modo cero del campo escalar.

A continuación, haremos la suposición de que, para los estados de tipo Born-Oppenheimer introducidos, puede ignorarse cualquier tipo de transición cuántica en la parte de la geometría homogénea que esté mediada por el operador de ligadura [65]. Si esto se cumple, la ecuación de ligadura es aproximadamente equivalente a la obtenida si se toma su valor esperado en el estado homogéneo Γ (con respecto al producto interno en $\mathcal{H}_{\text{kin}}^{\text{grav}}$). Es evidente que esta suposición será legítima si es posible despreciar las dispersiones en Γ , en comparación con los valores esperados correspondientes, de los operadores $\hat{\mathcal{H}}_0$ y $(\hat{\mathcal{H}}_0)^2 - \hat{\mathcal{H}}_0^{(2)}$, así como de \hat{v}_e y $\hat{v}_e^q + (\hat{v}_o\hat{\mathcal{H}}_0)_{\text{sym}} - id_\phi\hat{v}_o/2$ en presencia de perturbaciones escalares, de \hat{v}_T^q si además se consideran perturbaciones tensoriales, de \hat{V} si hay modos homogéneos en el campo de Dirac y, por último, de $\hat{V}^{2/3}\hat{\xi}_k(\hat{V})$ y $\hat{\xi}_k^{-1}(\hat{V})\hat{V}^{1/6}\hat{\Lambda}_0\hat{V}^{1/6}\hat{\xi}_k^{-1}(\hat{V})$ en presencia del resto de modos fermiónicos. Tal vez sea interesante remarcar que, en ausencia de modos fermiónicos no homogéneos, el número de operadores de geometría homogénea que deben estar suficientemente picados en Γ es finito (y de hecho bastante pequeño), a pesar de la existencia de un número infinito de grados de libertad en el sistema. Sin embargo, la introducción de un campo de Dirac como perturbación inhomogénea es capaz de someter a una dura prueba el carácter semiclásico del estado cuántico de la geometría homogénea. En efecto, su presencia, junto con el acoplo sin simetría conforme que su masa implica y que se traduce en las condiciones (7.17) necesarias para una evolución unitaria, requiere de un comportamiento picado del estado Γ en un número infinito de operadores. Desde este punto de vista, conviene destacar que la dependencia de todos estos operadores es la misma en $\hat{\Lambda}_0$ y que los cambios se producen únicamente en su dependencia en el operador de volumen, que tiene una interpretación cuántica más inmediata en $\mathcal{H}_{\text{kin}}^{\text{grav}}$.

Si la suposición anterior resulta ser válida, la ligadura es equivalente a la siguiente ecuación «maestra»:

$$\begin{aligned} \hat{p}_\phi^2\psi &+ 2\langle\hat{\mathcal{H}}_0\rangle_\Gamma\hat{p}_\phi\psi + \langle(\hat{\mathcal{H}}_0)^2 - \hat{\mathcal{H}}_0^{(2)}\rangle_\Gamma\psi - \langle\hat{\Theta}_e + (\hat{\Theta}_o\hat{\mathcal{H}}_0)_{\text{sym}}\rangle_\Gamma\psi \\ &+ \frac{i}{2}\langle d_\phi\hat{\Theta}_o\rangle_\Gamma\psi - \langle\hat{\Theta}_T\rangle_\Gamma\psi - \langle\delta_0^{\vec{r}}\hat{\Upsilon}_{\vec{0}} + \hat{\Upsilon}_F + \hat{\Upsilon}_I\rangle_\Gamma\psi = 0, \end{aligned} \quad (7.51)$$

donde $\langle\hat{O}\rangle_\Gamma$ denota el valor esperado de cualquier operador \hat{O} en Γ con respecto al producto interno en $\mathcal{H}_{\text{kin}}^{\text{grav}}$. El resultado de tomar dicho valor esperado es, en general, un operador definido en $\mathcal{H}_{\text{kin}}^{\text{matt}} \otimes \mathcal{F}_s \otimes \mathcal{F}_T \otimes \mathcal{F}_D$. Por otro lado, de acuerdo con el carácter perturbativo del sistema y de nuestras aproximaciones, hemos despreciado el término $\langle\hat{\Theta}_o\rangle_\Gamma\hat{p}_\phi\psi$ en comparación con la contribución $\langle\hat{\mathcal{H}}_0\rangle_\Gamma\hat{p}_\phi\psi$ en la ecuación anterior.

Una vez obtenida la ecuación de ligadura (7.51) a partir de nuestro *ansatz* de tipo Born-Oppenheimer, que separa la dependencia de los estados físicos en los invariantes de gauge escalares, las perturbaciones tensoriales y las fermiónicas, pueden deducirse tres ecuaciones de Schrödinger, una para cada uno de estos sectores perturbativos, si se hacen ciertas hipótesis bastante razonables. La más importante de ellas es que $\hat{p}_\phi^2 \psi$ sea despreciable en comparación con el resto de los términos de la ecuación, y en particular en comparación con el término proporcional a $\hat{p}_\phi \psi$. Esencialmente, dicha condición requiere que la contribución al momento del campo escalar homogéneo de la función de onda correspondiente a los grados de libertad perturbativos sea mucho más pequeña que el valor de dicho momento en Γ . La consistencia de esta hipótesis puede comprobarse si se estima, en primer lugar, el valor de $\hat{p}_\phi \psi$ haciendo uso de ella y de la ecuación de ligadura (7.51), para posteriormente actuar sobre el resultado con \hat{p}_ϕ y comparar la cantidad despreciada con $\langle \hat{\mathcal{H}}_0 \rangle_\Gamma \hat{p}_\phi \psi$ [65]. La otra hipótesis que se requiere para llegar a las ecuaciones de Schrödinger es mucho menos relevante y además no es necesaria para deducirlas en los casos tensorial y fermiónico. En efecto, dicha condición es que $\langle d_\phi \hat{\Theta}_o \rangle_\Gamma$ pueda despreciarse en la ecuación de ligadura, y es crucial solo si se quiere que el perfil cuántico que describe los grados de libertad de Mukhanov-Sasaki presente una evolución unitaria en el tiempo interno ϕ [65].

Supongamos que pueden aceptarse estas dos últimas hipótesis. Entonces, recordando que $\hat{\mathcal{H}}_0$ se ha definido como un operador positivo, de forma que no surgen problemas al dividir por su valor esperado, obtenemos las siguientes ecuaciones cuánticas de evolución en ϕ para los diferentes sectores perturbativos [185]:

$$\hat{\pi}_\phi \psi_s = \left[\frac{\langle \hat{\Theta}_e + (\hat{\Theta}_o \hat{\mathcal{H}}_0)_{\text{sym}} \rangle_\Gamma}{2 \langle \hat{\mathcal{H}}_0 \rangle_\Gamma} + C_s^{(\Gamma)}(\phi) \right] \psi_s, \quad (7.52)$$

$$\hat{\pi}_\phi \psi_T = \left[\frac{\langle \hat{\Theta}_T \rangle_\Gamma}{2 \langle \hat{\mathcal{H}}_0 \rangle_\Gamma} + C_T^{(\Gamma)}(\phi) \right] \psi_T, \quad (7.53)$$

$$\hat{\pi}_\phi \psi_D = \left[\frac{\langle \delta_0^{\bar{r}} \hat{Y}_{\bar{0}} + \hat{Y}_F + \hat{Y}_I \rangle_\Gamma}{2 \langle \hat{\mathcal{H}}_0 \rangle_\Gamma} + C_D^{(\Gamma)}(\phi) \right] \psi_D, \quad (7.54)$$

donde $C_s^{(\Gamma)}(\phi)$, $C_T^{(\Gamma)}(\phi)$ y $C_D^{(\Gamma)}(\phi)$ son ciertas funciones de ϕ , que posiblemente dependan del estado Γ considerado para la geometría homogénea, tales que:

$$C_s^{(\Gamma)}(\phi) + C_T^{(\Gamma)}(\phi) + C_D^{(\Gamma)}(\phi) = \langle (\hat{\mathcal{H}}_0)^2 - \hat{\mathcal{H}}_0^{(2)} \rangle_\Gamma. \quad (7.55)$$

En cierto sentido, esta última cantidad puede entenderse como una «reacción» del contenido perturbativo del sistema sobre la geometría homogénea, en tanto en cuanto el valor esperado $\langle (\hat{\mathcal{H}}_0)^2 - \hat{\mathcal{H}}_0^{(2)} \rangle_\Gamma$ indica cuánto se aleja el estado homogéneo Γ de ser una solución exacta de la ligadura hamiltoniana de la cosmología homogénea e isótropa sin perturbar. Ese caso se alcanzaría si el lado izquierdo de (7.55) fuera cero. No obstante, hacemos notar que dicha anulación podría ocurrir sin que las «reacciones» perturbativas se anularan por separado, por ejemplo si la contribución fermiónica $C_D^{(\Gamma)}$ se compensara con las de $C_s^{(\Gamma)}$ y $C_T^{(\Gamma)}$ procedentes de las perturbaciones escalares y tensoriales, en cuyo caso las evoluciones de los distintos sectores perturbativos se verían afectadas entre sí.

Merece la pena hacer un último comentario antes de cerrar esta sección. De nuestra discusión anterior, es posible obtener ecuaciones efectivas para los grados de libertad perturbativos recurriendo a argumentos similares a los empleados en la referencia [65]. Estas ecuaciones se extraen de la ecuación (7.51), asumiendo que su lado izquierdo puede entenderse como una ligadura efectiva en la que la dependencia cuadrática en \hat{p}_ϕ y en los operadores que describen las perturbaciones posee una dinámica efectiva en el estado físico considerado, dinámica que se obtiene esencialmente reemplazando dichos operadores por su contrapartida clásica directa. De forma alternativa, puede aceptarse la validez de las hipótesis necesarias para obtener las ecuaciones de Schrödinger (7.52)-(7.54) y considerar la dinámica generada por sus hamiltonianos, suponiendo que los operadores perturbativos que aparecen en ellos puedan tratarse de forma efectiva como variables clásicas.

7.6. Evolución de las perturbaciones fermiónicas

Analizaremos ahora la dinámica cuántica, en imagen de Heisenberg, de los operadores de destrucción y creación fermiónicos que dicta la ecuación de Schrödinger (7.54) o, de forma alternativa, directamente la ligadura cuántica (7.51) si se desprecia la contribución de las perturbaciones al momento del campo escalar homogéneo en comparación con $\langle \hat{\mathcal{H}}_0 \rangle_\Gamma$. Puede comprobarse que las ecuaciones de evolución correspondientes son:

$$\begin{aligned} d_{\eta_\Gamma} \hat{a}_{\vec{k}}^{(x,y)}(\eta, \eta_0) &= -iF_k^{(\Gamma)} \hat{a}_{\vec{k}}^{(x,y)}(\eta, \eta_0) + G_k^{(\Gamma)} \hat{b}_{\vec{k}}^{(x,y)\dagger}(\eta, \eta_0), \\ d_{\eta_\Gamma} \hat{b}_{\vec{k}}^{(x,y)\dagger}(\eta, \eta_0) &= iF_k^{(\Gamma)} \hat{b}_{\vec{k}}^{(x,y)\dagger}(\eta, \eta_0) - G_k^{(\Gamma)} \hat{a}_{\vec{k}}^{(x,y)}(\eta, \eta_0), \end{aligned} \quad (7.56)$$

donde, por conveniencia, hemos introducido un tiempo conforme η_Γ , definido en términos del campo escalar homogéneo a través de la relación:

$$d\eta_\Gamma = \frac{l_0 \langle \hat{V}^{2/3} \rangle_\Gamma}{\langle \hat{\mathcal{H}}_0 \rangle_\Gamma} d\phi. \quad (7.57)$$

El símbolo d_{η_Γ} denota la derivada con respecto a él. Lo evaluamos en el instante genérico η , y $F_k^{(\Gamma)}$ y $G_k^{(\Gamma)}$ son las siguientes funciones del tiempo y de ω_k :

$$F_k^{(\Gamma)} = \frac{\langle \check{\xi}_k(\hat{V}) \hat{V}^{2/3} \rangle_\Gamma}{\langle \hat{V}^{2/3} \rangle_\Gamma}, \quad (7.58)$$

$$G_k^{(\Gamma)} = \frac{\pi G M \omega_k \langle \check{\xi}_k^{-1}(\hat{V}) \hat{V}^{1/6} \hat{\Lambda}_0 \hat{V}^{1/6} \check{\xi}_k^{-1}(\hat{V}) \rangle_\Gamma}{2l_0^2 \langle \hat{V}^{2/3} \rangle_\Gamma}. \quad (7.59)$$

La dependencia de estas funciones en los modos fermiónicos es únicamente a través de ω_k y no del resto de detalles de la tupla \vec{k} en cuestión. Por otra parte, todas las definiciones hechas dependen de forma implícita en el estado Γ considerado para la geometría homogénea. Asimismo, la dependencia de todas estas expresiones en el tiempo conforme introducido aparece a través de su dependencia en el campo homogéneo ϕ , incluida la correspondiente dependencia de Γ , una vez se integra la relación (7.57). Por último, para las ecuaciones de

evolución en imagen de Heisenberg (7.56), tomamos como condiciones iniciales los operadores $\hat{a}_{\vec{k}}^{(x,y)}$ y $\hat{b}_{\vec{k}}^{(x,y)\dagger}$ en un tiempo inicial arbitrario $\eta_0 = \eta_\Gamma(\phi_0)$.

Es importante recalcar que, al ser $\hat{\mathcal{H}}_0$ un operador positivo por hipótesis y estar \hat{V} acotado inferiormente por un número positivo en los sectores de superselección $\mathcal{H}_\varepsilon^+$ considerados (característicos de CCL) [95], el cambio efectuado al tiempo conforme (7.57), así como las funciones (7.58) y (7.59), están todos bien definidos. Sin embargo, si se utilizaran otras posibles representaciones de la geometría homogénea, como las de tipo geometrodinámico, el operador de volumen podría alcanzar un valor esperado nulo (por ejemplo en el *Big-Bang* para estados semiclásicos) y presentar por ello serias obstrucciones a las construcciones aquí realizadas.

Dados los resultados obtenidos en el anterior capítulo y nuestra elección de representación de Fock dentro del esquema híbrido, es de esperar que la dinámica cuántica estudiada para los modos inhomogéneos del campo de Dirac pueda implementarse unitariamente en la teoría cuántica. No obstante, debe tenerse en cuenta que las funciones $F_k^{(\Gamma)}$ y $G_k^{(\Gamma)}$ que determinan dicha dinámica no están definidas a través de una geometría espaciotemporal clásica, sino que son cocientes de valores esperados en un estado cuántico. Podrían considerarse, por tanto, situaciones en las que estos valores esperados no se correspondan con trayectorias semiclásicas o efectivas. Con el objetivo de tratar de forma rigurosa estas peculiaridades, analizaremos esta dinámica cuántica en detalle. Así, el resto de la sección estará dedicado al estudio de la transformación lineal que relaciona los operadores de destrucción y creación a cualquier tiempo con sus valores iniciales.

Empecemos introduciendo la siguiente definición de operadores, que está motivada por la relación lineal clásica (7.16), o más bien por su inversa, particularizada al caso en que los coeficientes son reales:

$$\hat{x}_{\vec{k}}(\eta, \eta_0) = f_{1,k}^{(\Gamma)} \hat{a}_{\vec{k}}^{(x,y)}(\eta, \eta_0) + f_{2,k}^{(\Gamma)} \hat{b}_{\vec{k}}^{(x,y)\dagger}(\eta, \eta_0), \quad (7.60)$$

$$\hat{y}_{-\vec{k}-2\vec{\tau}}^\dagger(\eta, \eta_0) = f_{2,k}^{(\Gamma)} \hat{a}_{\vec{k}}^{(x,y)}(\eta, \eta_0) - f_{1,k}^{(\Gamma)} \hat{b}_{\vec{k}}^{(x,y)\dagger}(\eta, \eta_0), \quad (7.61)$$

donde $|f_{1,k}^{(\Gamma)}|^2 + |f_{2,k}^{(\Gamma)}|^2 = 1$. Hemos restringido la dependencia de estas funciones exclusivamente a ω_k , en lugar de la tupla \vec{k} , y además coinciden para los dos posibles valores del par (x, y) : (m, s) y (t, r) . Utilizando como fuente de inspiración la elección hecha en (7.27) y la definición de $F_k^{(\Gamma)}$, tomaremos:

$$f_{1,k}^{(\Gamma)} = \sqrt{\frac{F_k^{(\Gamma)} - \omega_k}{2F_k^{(\Gamma)}}}, \quad f_{2,k}^{(\Gamma)} = \sqrt{\frac{F_k^{(\Gamma)} + \omega_k}{2F_k^{(\Gamma)}}}. \quad (7.62)$$

Al ser $\xi_k(\hat{V}) \geq \omega_k$ como operador y ser \hat{V} estrictamente positivo, queda garantizado que $F_k^{(\Gamma)} \geq \omega_k$. Por lo tanto, las funciones $f_{1,k}^{(\Gamma)}$ y $f_{2,k}^{(\Gamma)}$ están bien definidas para cualquier estado Γ y además son reales. Las ecuaciones dinámicas (7.56) se traducen entonces en:

$$d_{\eta_\Gamma} \hat{x}_{\vec{k}}(\eta, \eta_0) = i\omega_k \hat{x}_{\vec{k}}(\eta, \eta_0) + H_k^{(\Gamma)} \hat{y}_{-\vec{k}-2\vec{\tau}}^\dagger(\eta, \eta_0), \quad (7.63)$$

$$d_{\eta_\Gamma} \hat{y}_{-\vec{k}-2\vec{\tau}}^\dagger(\eta, \eta_0) = -i\omega_k \hat{y}_{-\vec{k}-2\vec{\tau}}^\dagger(\eta, \eta_0) - \bar{H}_k^{(\Gamma)} \hat{x}_{\vec{k}}(\eta, \eta_0), \quad (7.64)$$

donde:

$$H_k^{(\Gamma)} = -G_k^{(\Gamma)} - i\sqrt{(F_k^{(\Gamma)})^2 - \omega_k^2} + \frac{\omega_k (F_k^{(\Gamma)})'}{2F_k^{(\Gamma)} \sqrt{(F_k^{(\Gamma)})^2 - \omega_k^2}}, \quad (7.65)$$

y la prima denota, aquí y en el resto de este capítulo, la derivada con respecto al tiempo conforme η_Γ . Si se tiene en cuenta que $\hat{\Lambda}_0$ y \hat{V} son representaciones de $-4\check{a}\pi_{\check{a}}/3$ y $l_0^3\check{a}^3$, respectivamente, y que sobre las trayectorias clásicas se tiene $\pi_{\check{a}} = -\check{a}'$ (si se ignoran las correcciones perturbativas), es posible comprobar que, sobre aquellos estados cuánticos picados en dichas trayectorias, las ecuaciones dinámicas (7.63) y (7.64) reproducen las ecuaciones de Dirac clásicas (6.48).

Designemos ahora indistintamente como $\hat{z}_{\vec{k}}$ cualquiera de los operadores $\hat{x}_{\vec{k}}$ o $\hat{y}_{\vec{k}}$, y definamos el operador $\hat{\tilde{z}}_{\vec{k}} = (iH_k^{(\Gamma)})^{-1/2}\hat{z}_{\vec{k}}$. Entonces, se cumple la ecuación:

$$\hat{\tilde{z}}_{\vec{k}}'' = -\left[\tilde{\omega}_k^2 + |H_k^{(\Gamma)}|^2 + \frac{1}{2}(\ln H_k^{(\Gamma)})''\right]\hat{\tilde{z}}_{\vec{k}}, \quad (7.66)$$

donde $\tilde{\omega}_k = \omega_k + i(\ln H_k^{(\Gamma)})'/2$. De forma totalmente análoga al estudio llevado a cabo en la subsección 6.1.2 del capítulo anterior, buscamos dos soluciones independientes de la ecuación clásica correspondiente que tengan la forma $\tilde{z}_{\vec{k}}^l = \exp[-i(-1)^l\Theta_k^l]$, con $l = 1, 2$. Se obtiene de nuevo:

$$\Theta_k^l = \omega_k(\eta - \eta_0) + \frac{i}{2}\left[(-1)^l + 1\right] \ln\left(\frac{H_k^{(\Gamma)}}{H_k^{(\Gamma),0}}\right) + \int_{\eta_0}^{\eta} d\eta_\Gamma \Lambda_k^l(\eta_\Gamma), \quad (7.67)$$

donde $H_k^{(\Gamma),0} = H_k^{(\Gamma)}(\eta_0)$ y Λ_k^l son soluciones de las siguientes ecuaciones de Ricatti:

$$\left(\Lambda_k^l\right)' = i(-1)^l\left[\left(\Lambda_k^l\right)^2 + 2\tilde{\omega}_k\Lambda_k^l\right] - u_k^l, \quad (7.68)$$

$$u_k^l = i(-1)^l\left|H_k^{(\Gamma)}\right|^2 + \frac{i}{2}\left[(-1)^l + 1\right]\left(\ln H_k^{(\Gamma)}\right)'' \quad (7.69)$$

con condiciones iniciales $\Lambda_k^l(\eta_0) = 0$. Un análisis asintótico en el régimen $\omega_k \rightarrow \infty$ completamente paralelo al desarrollado en el Capítulo 6 muestra que, tras integrar por partes el correspondiente análogo de la expresión (6.41), se tiene:

$$\int_{\eta_0}^{\eta} d\eta_\Gamma \Lambda_k^l(\eta_\Gamma) = -(-1)^l \frac{i}{2\omega_k} \int_{\eta_0}^{\eta} d\eta_\Gamma u_k^l(\eta_\Gamma) + \mathcal{O}(\omega_k^{-2}). \quad (7.70)$$

Este resultado es válido, una vez más, bajo ciertas condiciones suaves para $H_k^{(\Gamma)}$, por ejemplo que no se anule y tenga una derivada temporal de orden cuarto que sea continua en el intervalo considerado (de tal forma que todas las integrales por partes efectuadas estén bien definidas).

Los operadores $\hat{x}_{\vec{k}}$ o $\hat{y}_{\vec{k}}$ vienen dados entonces por combinaciones lineales de las dos soluciones independientes encontradas para la ecuación (7.66). Los coeficientes en estas combinaciones son operadores que capturan la información acerca de las condiciones iniciales. Si se combinan dichas relaciones lineales con las definiciones (7.60) y (7.61), es posible expresar los operadores fermiónicos de destrucción y creación en imagen de Heisenberg como

combinaciones lineales de sus valores iniciales en el tiempo arbitrario η_0 :

$$\begin{aligned}\hat{a}_k^{(x,y)}(\eta, \eta_0) &= \alpha_k(\eta, \eta_0)\hat{a}_k^{(x,y)} + \beta_k(\eta, \eta_0)\hat{b}_k^{(x,y)\dagger}, \\ \hat{b}_k^{(x,y)\dagger}(\eta, \eta_0) &= -\bar{\beta}_k(\eta, \eta_0)\hat{a}_k^{(x,y)} + \bar{\alpha}_k(\eta, \eta_0)\hat{b}_k^{(x,y)\dagger}.\end{aligned}\quad (7.71)$$

El cálculo detallado de los coeficientes de esta transformación da lugar a las siguientes fórmulas, en las que obviaremos, para simplificar la notación, la dependencia temporal y los límites de integración sobre $[\eta, \eta_0]$ [185]:

$$\begin{aligned}\alpha_k &= \left[f_{1,k}^{(\Gamma)} \left(f_{1,k}^{(\Gamma),0} - f_{2,k}^{(\Gamma),0} \zeta_k \right) e^{i \int \Lambda_k^1} - f_{2,k}^{(\Gamma)} f_{1,k}^{(\Gamma),0} \bar{\zeta}_k \frac{\bar{H}_k^{(\Gamma)}}{\bar{H}_k^{(\Gamma),0}} e^{i \int \bar{\Lambda}_k^2} \right] e^{i\omega_k(\eta-\eta_0)} \\ &+ \left[f_{2,k}^{(\Gamma)} \left(f_{1,k}^{(\Gamma),0} \bar{\zeta}_k + f_{2,k}^{(\Gamma),0} \right) e^{-i \int \bar{\Lambda}_k^1} + f_{1,k}^{(\Gamma)} f_{2,k}^{(\Gamma),0} \zeta_k \frac{H_k^{(\Gamma)}}{H_k^{(\Gamma),0}} e^{-i \int \Lambda_k^2} \right] e^{-i\omega_k(\eta-\eta_0)},\end{aligned}\quad (7.72)$$

$$\begin{aligned}\beta_k &= \left[f_{1,k}^{(\Gamma)} \left(f_{2,k}^{(\Gamma),0} + f_{1,k}^{(\Gamma),0} \zeta_k \right) e^{i \int \Lambda_k^1} - f_{2,k}^{(\Gamma)} f_{2,k}^{(\Gamma),0} \bar{\zeta}_k \frac{\bar{H}_k^{(\Gamma)}}{\bar{H}_k^{(\Gamma),0}} e^{i \int \bar{\Lambda}_k^2} \right] e^{i\omega_k(\eta-\eta_0)} \\ &+ \left[f_{2,k}^{(\Gamma)} \left(f_{2,k}^{(\Gamma),0} \bar{\zeta}_k - f_{1,k}^{(\Gamma),0} \right) e^{-i \int \bar{\Lambda}_k^1} - f_{1,k}^{(\Gamma)} f_{1,k}^{(\Gamma),0} \zeta_k \frac{H_k^{(\Gamma)}}{H_k^{(\Gamma),0}} e^{-i \int \Lambda_k^2} \right] e^{-i\omega_k(\eta-\eta_0)}.\end{aligned}\quad (7.73)$$

Se ha tenido en cuenta que tanto $f_{1,k}^{(\Gamma)}$ como $f_{2,k}^{(\Gamma)}$ son reales y sus valores iniciales en el tiempo η_0 son $f_{1,k}^{(\Gamma),0}$ y $f_{2,k}^{(\Gamma),0}$, respectivamente. Además:

$$\zeta_k = \frac{iH_k^{(\Gamma),0}}{2\omega_k + i \left(\ln H_k^{(\Gamma)} \right)'_0},\quad (7.74)$$

donde el subíndice en la derivada del logaritmo natural indica su evaluación en el tiempo inicial. Por último, es importante notar que las ecuaciones dinámicas (7.56) implican que las relaciones de anticonmutación canónicas se cumplen a todo tiempo, por lo que se tiene que $|\alpha_k(\eta, \eta_0)|^2 + |\beta_k(\eta, \eta_0)|^2 = 1$, de manera que la transformación (7.71) es una transformación de Bogoliubov.

7.7. Operador de evolución fermiónica

A continuación, analizaremos la implementabilidad formal de la transformación de Bogoliubov que captura la dinámica cuántica de los modos fermiónicos inhomogéneos a través de un operador de evolución \hat{U}_D . Además, demostraremos que dicho operador proporciona, en efecto, soluciones a la ecuación de Schrödinger (7.54), que fue deducida a partir de la imposición de las ligaduras cuánticas del modelo cosmológico completo. El carácter riguroso de estas demostraciones quedará definitivamente probado en la siguiente sección, donde mostraremos que el operador \hat{U}_D está bien definido y es unitario en el espacio de Fock \mathcal{F}_D , como por otra parte era de esperar dentro del esquema híbrido empleado para la cuantización.

En primer lugar, dadas las definiciones (7.27) que inspiraron (7.62), es de esperar que la función $f_{2,k}^{(\Gamma)}$ sea del orden de la unidad en el régimen asintótico $\omega_k \rightarrow \infty$, y que $f_{1,k}^{(\Gamma)}$

tienda a cero en dicho régimen. Como consecuencia, la contribución dominante a los coeficientes $\alpha_k(\eta, \eta_0)$ en este límite asintótico debería venir dada por el término que contiene el producto $f_{2,k}^{(\Gamma)} f_{2,k}^{(\Gamma),0}$. Si se recuerda además el comportamiento asintótico (7.70), cabe esperar que $\alpha_k(\eta, \eta_0)$ se comporte asintóticamente como la exponencial oscilante $\exp[-i\omega_k(\eta - \eta_0)]$. Pues bien, resulta muy conveniente absorber dicha fase oscilante a través de un operador de evolución unitaria trivial \hat{U}_L , y tratar de forma separada el resto de la transformación de Bogoliubov dinámica. En concreto, escribiremos el operador de evolución como $\hat{U}_D = \hat{U}_B \hat{U}_L$, donde \hat{U}_L simplemente tiene el efecto de multiplicar los operadores de destrucción por $\exp[-i\omega_k(\eta - \eta_0)]$ (y los operadores de creación por la exponencial inversa), mientras que \hat{U}_B implementa el resto de la transformación de Bogoliubov (7.71), cuyos coeficientes son:

$$\tilde{\alpha}_k(\eta, \eta_0) = e^{i\omega_k(\eta - \eta_0)} \alpha_k(\eta, \eta_0), \quad \tilde{\beta}_k(\eta, \eta_0) = e^{-i\omega_k(\eta - \eta_0)} \beta_k(\eta, \eta_0). \quad (7.75)$$

Es prácticamente inmediato construir el operador de evolución \hat{U}_L . En efecto, si definimos:

$$\hat{T}_L(\eta, \eta_0) = i(\eta - \eta_0) \sum_{\vec{k} \neq \vec{\tau}, (x,y)} \omega_k \left(\hat{a}_{\vec{k}}^{(x,y)\dagger} \hat{a}_{\vec{k}}^{(x,y)} + \hat{b}_{\vec{k}}^{(x,y)\dagger} \hat{b}_{\vec{k}}^{(x,y)} \right), \quad (7.76)$$

entonces basta con tomar $\hat{U}_L = e^{-\hat{T}_L}$. Por cuestiones de notación, aquí, así como en el resto de este capítulo, evitaremos mostrar la dependencia explícita en el tiempo de las expresiones que la lleven, a no ser que se presten a confusión. Entonces, puede comprobarse que se cumple:

$$\begin{aligned} \hat{U}_L^{-1} \hat{a}_{\vec{k}}^{(x,y)} \hat{U}_L &= e^{-i\omega_k(\eta - \eta_0)} \hat{a}_{\vec{k}}^{(x,y)}, \\ \hat{U}_L^{-1} \hat{b}_{\vec{k}}^{(x,y)\dagger} \hat{U}_L &= e^{i\omega_k(\eta - \eta_0)} \hat{b}_{\vec{k}}^{(x,y)\dagger}. \end{aligned} \quad (7.77)$$

Por otra parte, para el resto de la transformación de Bogoliubov dinámica, introduciremos la siguiente parametrización:

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_k &= \cos \sqrt{|\Delta_k|^2 + \rho_k^2} + i\rho_k \frac{\text{sen} \sqrt{|\Delta_k|^2 + \rho_k^2}}{\sqrt{|\Delta_k|^2 + \rho_k^2}}, \\ \tilde{\beta}_k &= -\Delta_k \frac{\text{sen} \sqrt{|\Delta_k|^2 + \rho_k^2}}{\sqrt{|\Delta_k|^2 + \rho_k^2}}, \end{aligned} \quad (7.78)$$

donde ρ_k es un número real, mientras que Δ_k es complejo. La transformación de Bogoliubov asociada a estos coeficientes alfa y beta puede implementarse a través del operador:

$$\begin{aligned} \hat{T}_B &= \sum_{\vec{k} \neq \vec{\tau}, (x,y)} \left[\Delta_k \hat{a}_{\vec{k}}^{(x,y)\dagger} \hat{b}_{\vec{k}}^{(x,y)\dagger} - \bar{\Delta}_k \hat{b}_{\vec{k}}^{(x,y)} \hat{a}_{\vec{k}}^{(x,y)} \right. \\ &\quad \left. - i\rho_k \left(\hat{a}_{\vec{k}}^{(x,y)\dagger} \hat{a}_{\vec{k}}^{(x,y)} + \hat{b}_{\vec{k}}^{(x,y)\dagger} \hat{b}_{\vec{k}}^{(x,y)} \right) + i c_k^{(x,y)} \right], \end{aligned} \quad (7.79)$$

donde $c_k^{(x,y)}$ es un número real dependiente del tiempo que mantendremos arbitrario por el momento. En concreto, se tiene que $\hat{U}_B = e^{-\hat{T}_B}$. En efecto, si se tiene en cuenta la fórmula

de Baker-Campbell-Hausdorff [196]:

$$e^{\hat{T}_B} \hat{O} e^{-\hat{T}_B} = \hat{O} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} [\hat{T}_B, \dots [\hat{T}_B, \hat{O}]]_{(n)}, \quad (7.80)$$

donde $[\cdot, \cdot]_{(n)}$ denota el conmutador enésimo y \hat{O} es un operador genérico, es posible comprobar que, formalmente, se cumple:

$$\begin{aligned} \hat{U}_B^{-1} \hat{a}_{\vec{k}}^{(x,y)} \hat{U}_B &= \tilde{\alpha}_k(\eta, \eta_0) \hat{a}_{\vec{k}}^{(x,y)} + \tilde{\beta}_k(\eta, \eta_0) \hat{b}_{\vec{k}}^{(x,y)\dagger}, \\ \hat{U}_B^{-1} \hat{b}_{\vec{k}}^{(x,y)\dagger} \hat{U}_B &= -\tilde{\bar{\beta}}_k(\eta, \eta_0) \hat{a}_{\vec{k}}^{(x,y)} + \tilde{\bar{\alpha}}_k(\eta, \eta_0) \hat{b}_{\vec{k}}^{(x,y)\dagger}, \end{aligned} \quad (7.81)$$

donde se ha tenido en cuenta la parametrización (7.78). Por tanto, concluimos que el operador $\hat{U}_D = \hat{U}_B \hat{U}_L$ implementa la transformación de Bogoliubov (7.71) que dicta la evolución cuántica de los modos fermiónicos inhomogéneos.

Es obvio que el operador \hat{U}_L no altera el vacío $|0\rangle_D$ de la representación de Fock escogida para las perturbaciones fermiónicas, ya que dicho estado es el único (salvo fase) normalizado en \mathcal{F}_D que es aniquilado bajo la acción de todos los operadores $\hat{a}_{\vec{k}}^{(x,y)}$ y $\hat{b}_{\vec{k}}^{(x,y)}$. Esta afirmación se sigue del simple hecho de que la acción de \hat{U}_L no mezcla operadores de destrucción y creación. Por otra parte, si se hace uso de la expansión en serie de potencias de la exponencial y las relaciones de anticonmutación canónicas de los operadores de destrucción y creación, puede calcularse la acción de \hat{U}_B en el estado de vacío $|0\rangle_D$. El resultado es:

$$\hat{U}_B^{-1} |0\rangle_D = \prod_{\vec{k} \neq \vec{\tau}, (x,y)} e^{-i(\rho_k - c_k^{(x,y)})} \tilde{\alpha}_k \left[1 - \frac{\tilde{\beta}_k}{\tilde{\alpha}_k} \hat{a}_{\vec{k}}^{(x,y)\dagger} \hat{b}_{\vec{k}}^{(x,y)\dagger} \right] |0\rangle_D, \quad (7.82)$$

$$\hat{U}_B |0\rangle_D = \prod_{\vec{k} \neq \vec{\tau}, (x,y)} e^{i(\rho_k - c_k^{(x,y)})} \tilde{\bar{\alpha}}_k \left[1 + \frac{\tilde{\beta}_k}{\tilde{\bar{\alpha}}_k} \hat{a}_{\vec{k}}^{(x,y)\dagger} \hat{b}_{\vec{k}}^{(x,y)\dagger} \right] |0\rangle_D. \quad (7.83)$$

Teniendo en cuenta la invariancia del vacío bajo \hat{U}_L ya discutida, se sigue que esta es asimismo la acción del operador de evolución completa, \hat{U}_D , sobre el vacío. Por lo tanto, en función de los coeficientes de Bogoliubov originales se tiene que [185]:

$$\hat{U}_D |0\rangle_D = \prod_{\vec{k} \neq \vec{\tau}, (x,y)} e^{i[\rho_k - c_k^{(x,y)} - \omega_k(\eta - \eta_0)]} \bar{\alpha}_k \left[1 + \frac{\beta_k}{\bar{\alpha}_k} \hat{a}_{\vec{k}}^{(x,y)\dagger} \hat{b}_{\vec{k}}^{(x,y)\dagger} \right] |0\rangle_D. \quad (7.84)$$

Todas estas fórmulas superan su carácter formal y se vuelven estrictamente rigurosas si el vacío transformado es un estado bien definido en el espacio de Fock \mathcal{F}_D , es decir, si tiene norma finita respecto a su producto interno. Se sabe que esto ocurre si y solo si la secuencia de coeficientes beta de la transformación de Bogoliubov es de cuadrado sumable. Recordemos que dicha sumabilidad es, de hecho, la condición necesaria y suficiente para una implementabilidad unitaria de la evolución [81, 82], implementabilidad que demostraremos en la siguiente sección. Si dejamos a un lado esta advertencia momentáneamente, podemos demostrar que el vacío transformado (7.84) es una solución a la ecuación de Schrödinger (7.54) para los modos inhomogéneos del campo de Dirac.

Si se hace uso de las definiciones de $\hat{\Upsilon}_F$ y $\hat{\Upsilon}_I$ dadas en (7.45) y (7.46), así como de las funciones $F_k^{(\Gamma)}$ y $G_k^{(\Gamma)}$ dadas en (7.58) y (7.59), se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2l_0} \frac{\langle \hat{\Upsilon}_F + \hat{\Upsilon}_I \rangle_\Gamma}{\langle \hat{V}^{2/3} \rangle_\Gamma} \hat{U}_D |0\rangle_D &= \sum_{\vec{k} \neq \vec{\tau}, (x,y)} \left[-F_k^{(\Gamma)} \left(\hat{a}_{\vec{k}}^{(x,y)\dagger} \hat{a}_{\vec{k}}^{(x,y)} + \hat{b}_{\vec{k}}^{(x,y)\dagger} \hat{b}_{\vec{k}}^{(x,y)} \right) \right. \\ &\quad \left. - iG_k^{(\Gamma)} \left(\hat{a}_{\vec{k}}^{(x,y)\dagger} \hat{b}_{\vec{k}}^{(x,y)\dagger} + \hat{a}_{\vec{k}}^{(x,y)} \hat{b}_{\vec{k}}^{(x,y)} \right) \right] \hat{U}_D |0\rangle_D. \end{aligned} \quad (7.85)$$

Mediante un cálculo sencillo, es posible comprobar que la relación (7.84) implica:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2l_0} \frac{\langle \hat{\Upsilon}_F + \hat{\Upsilon}_I \rangle_\Gamma}{\langle \hat{V}^{2/3} \rangle_\Gamma} \hat{U}_D |0\rangle_D &= \sum_{\vec{k} \neq \vec{\tau}, (x,y)} \left[\left(-2F_k^{(\Gamma)} \frac{\beta_k}{\bar{\alpha}_k} - iG_k^{(\Gamma)} \frac{(\beta_k)^2 + (\bar{\alpha}_k)^2}{(\bar{\alpha}_k)^2} \right) \hat{a}_{\vec{k}}^{(x,y)\dagger} \hat{b}_{\vec{k}}^{(x,y)\dagger} \right. \\ &\quad \left. + iG_k^{(\Gamma)} \frac{\beta_k}{\bar{\alpha}_k} \right] \hat{U}_D |0\rangle_D. \end{aligned} \quad (7.86)$$

Por otro lado, la derivada temporal del vacío transformado (7.84) es:

$$\begin{aligned} d_{\eta_\Gamma} \hat{U}_D |0\rangle_D &= \sum_{\vec{k} \neq \vec{\tau}, (x,y)} \left[id_{\eta_\Gamma} \rho_k - id_{\eta_\Gamma} c_k^{(x,y)} - i\omega_k + \frac{d_{\eta_\Gamma} \bar{\alpha}_k}{\bar{\alpha}_k} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\bar{\alpha}_k d_{\eta_\Gamma} \beta_k - \beta_k d_{\eta_\Gamma} \bar{\alpha}_k}{(\bar{\alpha}_k)^2} \hat{a}_{\vec{k}}^{(x,y)\dagger} \hat{b}_{\vec{k}}^{(x,y)\dagger} \right] \hat{U}_D |0\rangle_D. \end{aligned} \quad (7.87)$$

Ahora bien, las ecuaciones de evolución cuánticas (7.56), junto con la relación de Bogoliubov (7.71) y la redefinición de la fase hecha en (7.75), implican que:

$$d_{\eta_\Gamma} \alpha_k = -iF_k^{(\Gamma)} \alpha_k - G_k^{(\Gamma)} \bar{\beta}_k, \quad d_{\eta_\Gamma} \beta_k = -iF_k^{(\Gamma)} \beta_k + G_k^{(\Gamma)} \bar{\alpha}_k, \quad (7.88)$$

$$d_{\eta_\Gamma} \tilde{\alpha}_k = -i \left(F_k^{(\Gamma)} - \omega_k \right) \tilde{\alpha}_k - G_k^{(\Gamma)} \bar{\beta}_k. \quad (7.89)$$

Asimismo, podemos tomar las derivadas temporales de la parametrización (7.78) para $\tilde{\alpha}_k$ y sustituirlas en su correspondiente derivada (7.89), con lo que obtenemos:

$$d_{\eta_\Gamma} \rho_k = \omega_k - F_k^{(\Gamma)} - G_k^{(\Gamma)} \Im(\Delta_k), \quad (7.90)$$

donde $\Im(\Delta_k) = -i(\Delta_k - \bar{\Delta}_k)/2$ es la parte imaginaria de Δ_k . Si introducimos esta identidad, así como la relación (7.88), en la fórmula obtenida para la derivada temporal del vacío evolucionado, llegamos a la conclusión de que [185]:

$$\begin{aligned} -id_{\eta_\Gamma} \hat{U}_D |0\rangle_D &= \sum_{\vec{k} \neq \vec{\tau}, (x,y)} \left[\left(-2F_k^{(\Gamma)} \frac{\beta_k}{\bar{\alpha}_k} - iG_k^{(\Gamma)} \frac{(\beta_k)^2 + (\bar{\alpha}_k)^2}{(\bar{\alpha}_k)^2} \right) \hat{a}_{\vec{k}}^{(x,y)\dagger} \hat{b}_{\vec{k}}^{(x,y)\dagger} \right. \\ &\quad \left. + iG_k^{(\Gamma)} \frac{\beta_k}{\bar{\alpha}_k} - G_k^{(\Gamma)} \Im(\Delta_k) - d_{\eta_\Gamma} c_k^{(x,y)} \right] \hat{U}_D |0\rangle_D. \end{aligned} \quad (7.91)$$

Basta, por tanto, recordar la fórmula (7.86) y deshacer el cambio de tiempo (7.57) para poder afirmar que el vacío evolucionado $\hat{U}_D|0\rangle_D$ es, en efecto, una solución a la ecuación de Schrödinger para los modos fermiónicos inhomogéneos. Asimismo, se confirma con este resultado que el hamiltoniano fermiónico que genera la evolución en el tiempo interno ϕ es $\langle \hat{Y}_F + \hat{Y}_I \rangle_\Gamma / (2\langle \hat{\mathcal{H}}_0 \rangle_\Gamma)$, salvo un término de «reacción» sobre la geometría homogénea, dado por:

$$C_D^{(\Gamma)}(\phi) = -\frac{l_0 \langle \hat{V}^{2/3} \rangle_\Gamma}{\langle \hat{\mathcal{H}}_0 \rangle_\Gamma} \sum_{\vec{k} \neq \vec{\tau}, (x,y)} \left[G_k^{(\Gamma)} \mathfrak{S}(\Delta_k) + d_{\eta_\Gamma} c_k^{(x,y)} \right]. \quad (7.92)$$

7.8. Unitariedad y término de «reacción»

Como ya se ha indicado en numerosas ocasiones a lo largo de esta tesis, la unitariedad en \mathcal{F}_D del operador de evolución introducido en la sección anterior puede garantizarse si se comprueba que la secuencia de coeficientes $\beta_k(\eta, \eta_0)$, para todas las tuplas \vec{k} distintas de $-\vec{\tau}$, es de cuadrado sumable a todo tiempo. Si se asume que cada uno de los coeficientes individuales es finito, la sumabilidad depende únicamente de su comportamiento asintótico en el régimen $\omega_k \rightarrow \infty$, región en la que la contribución de un número infinito de grados de libertad fermiónicos puede dar lugar a divergencias.

Con el objetivo de demostrar dicha unitariedad, empezaremos analizando las funciones $F_k^{(\Gamma)}$ y $G_k^{(\Gamma)}$, que capturan toda la información relevante para la dinámica fermiónica acerca de los valores esperados de la geometría homogénea en el estado Γ . En particular, haremos uso de las expresiones (7.58) y (7.59), y de la representación cuántica de la función clásica $\check{\xi}_k$ que, según las prescripciones explicadas en la sección 7.4, viene dada a través del teorema espectral por:

$$\check{\xi}(\hat{V}) = \sqrt{\omega_k^2 + \frac{M^2 \hat{V}^{2/3}}{l_0^2}}. \quad (7.93)$$

Si se introduce la descomposición espectral de Γ asociada al operador \hat{V} y se designa por \check{V} el autovalor considerado, es posible expresar los operadores que involucran a $\check{\xi}_k(\hat{V})$ en las definiciones de $F_k^{(\Gamma)}$ y $G_k^{(\Gamma)}$ como series de potencias en $\hat{V}^{2/3}$, al menos para $\omega_k > M\check{V}^{1/3}/l_0$, desigualdad que se cumple en el régimen ultravioleta $\omega_k \rightarrow \infty$. De esta forma, se obtienen las siguientes expansiones para las funciones de interés $F_k^{(\Gamma)}$ y $G_k^{(\Gamma)}$, que de hecho se corresponden con sus series asintóticas de Laurent en potencias de ω_k :

$$F_k^{(\Gamma)} = \omega_k - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{M^{2n}}{l_0^{2n} \omega_k^{2n-1}} \frac{(2n-3)!!}{2^n n!} W_n^{(\Gamma)}, \quad W_n^{(\Gamma)} = \frac{\langle \hat{V}^{2(n+1)/3} \rangle_\Gamma}{\langle \hat{V}^{2/3} \rangle_\Gamma}, \quad (7.94)$$

y

$$G_k^{(\Gamma)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{M^{2n+1}}{l_0^{2(n+1)} \omega_k^{2n+1}} \frac{\lambda_n^{(\Gamma)}}{2^{n+1}}, \quad (7.95)$$

$$\lambda_n^{(\Gamma)} = \pi G \sum_{m=0}^n \frac{(2m-1)!! (2n-2m-1)!!}{m!(n-m)!} \frac{\langle \hat{V}^{(4m+1)/6} \hat{\Lambda}_0 \hat{V}^{[4(n-m)+1]/6} \rangle_\Gamma}{\langle \hat{V}^{2/3} \rangle_\Gamma}, \quad (7.96)$$

donde $n!!$ es el doble factorial del entero n , que se identifica con la unidad si $n \leq 0$.

Estas fórmulas asintóticas pueden introducirse en la definición (7.65) de la función $H_k^{(\Gamma)}$ para, tras expandir las raíces cuadradas y los denominadores que allí aparecen, obtener su correspondiente serie asintótica. En particular, para llevar a cabo el estudio de la unitariedad únicamente necesitamos conocer sus órdenes dominantes, que vienen dados por:

$$H_k^{(\Gamma)} = \frac{M}{l_0} \sqrt{W_1^{(\Gamma)}} \left[-i + \frac{1}{4\omega_k} \left(\ln W_1^{(\Gamma)} \right)' \right] - \frac{M}{2l_0^2 \omega_k} \lambda_0^{(\Gamma)} + \mathcal{O}(\omega_k^{-2}), \quad (7.97)$$

donde, de acuerdo con nuestras definiciones:

$$W_1^{(\Gamma)} = \frac{\langle \hat{V}^{4/3} \rangle_\Gamma}{\langle \hat{V}^{2/3} \rangle_\Gamma}, \quad \lambda_0^{(\Gamma)} = \pi G \frac{\langle \hat{V}^{1/6} \hat{\Lambda}_0 \hat{V}^{1/6} \rangle_\Gamma}{\langle \hat{V}^{2/3} \rangle_\Gamma}. \quad (7.98)$$

Dichas expresiones nos permiten conocer, a su vez, el comportamiento asintótico de ζ_k . Para ello, aparte de utilizar la serie asintótica de $H_k^{(\Gamma),0}$, debemos expresar el denominador de (7.74) como una serie de potencias en ω_k^{-1} . Dicha serie converge al menos para $\omega_k > |(\ln H_k^{(\Gamma)})'_0|/2$ o, si puede aproximarse el lado derecho de esta desigualdad por el término dominante en (7.97), para $\omega_k > |(\ln W_1^{(\Gamma)})'_0|/4$, condición que se cumple automáticamente en el régimen asintótico $\omega_k \rightarrow \infty$. Obtenemos entonces los siguientes órdenes asintóticos dominantes:

$$\zeta_k = \frac{M}{2l_0 \omega_k} \sqrt{W_1^{(\Gamma),0}} - i \frac{M}{4l_0^2 \omega_k^2} \lambda_0^{(\Gamma),0} + \mathcal{O}(\omega_k^{-3}), \quad (7.99)$$

donde de nuevo el superíndice 0 indica evaluación en el tiempo inicial. Asimismo, es posible deducir la expansión asintótica de la integral de Λ_k^l si se hace uso de las relaciones (7.69), (7.70) y (7.97). La única contribución en dicha expansión que es relevante para el estudio de la unitariedad es el término dominante de orden ω_k^{-1} , que viene dado por:

$$\begin{aligned} \int_{\eta_0}^{\eta} d\eta_\Gamma [\Lambda_k^1(\eta_\Gamma) - \bar{\Lambda}_k^2(\eta_\Gamma)] &= -\frac{1}{2\omega_k} \left[\left(\ln H_k^{(\Gamma)} \right)' - \left(\ln H_k^{(\Gamma)} \right)'_0 \right] + \mathcal{O}(\omega_k^{-2}) \\ &= -\frac{1}{4\omega_k} \left[\left(\ln W_1^{(\Gamma)} \right)' - \left(\ln W_1^{(\Gamma)} \right)'_0 \right] + \mathcal{O}(\omega_k^{-2}). \end{aligned} \quad (7.100)$$

Aún sin entrar en el régimen asintótico $\omega_k \rightarrow \infty$, cada una de las dos contribuciones que forman este término dominante será más pequeña que la unidad en valor absoluto (y con ello esperamos que sea pequeña la cantidad considerada) si se cumple que:

$$\omega_k > \frac{1}{4} \left| \left(\ln W_1^{(\Gamma)} \right)' \right|, \quad (7.101)$$

tanto para el valor η del tiempo conforme como para el valor inicial η_0 . En particular, en el tiempo inicial esta condición garantiza que se cumple la desigualdad $\omega_k > |(\ln W_1^{(\Gamma)})'_0|/4$ requerida para la convergencia de la serie asintótica (7.99).

En último lugar, podemos conocer el comportamiento asintótico de $f_{1,k}^{(\Gamma)}$ y $f_{2,k}^{(\Gamma)}$ si utilizamos la serie (7.94), junto con sus definiciones (7.62). Obtenemos el siguiente resultado,

válido cuando $\omega_k \rightarrow \infty$:

$$f_{1,k}^{(\Gamma)} = \frac{M}{2l_0\omega_k} \sqrt{W_1^{(\Gamma)}} + \mathcal{O}(\omega_k^{-3}), \quad (7.102)$$

$$f_{2,k}^{(\Gamma)} = 1 - \frac{M^2}{8l_0^2\omega_k^2} W_1^{(\Gamma)} + \mathcal{O}(\omega_k^{-4}). \quad (7.103)$$

Por fin, si se combinan todas las series asintóticas obtenidas para las distintas funciones que contribuyen a los coeficientes $\beta_k(\eta, \eta_0)$ dinámicos, es posible comprobar que el comportamiento de dichos coeficientes de Bogoliubov cuando $\omega_k \rightarrow \infty$ viene dado por [185]:

$$\beta_k = i \frac{M}{4l_0^2\omega_k^2} \left[\lambda_0^{(\Gamma),0} e^{-i\omega_k(\eta-\eta_0)} - \lambda_0^{(\Gamma)} e^{i\omega_k(\eta-\eta_0)} \right] + \mathcal{O}(\omega_k^{-3}). \quad (7.104)$$

Se llega entonces a la importante conclusión de que β_k es del orden asintótico de ω_k^{-2} . Al ser la degeneración (es decir, el número de tuplas \vec{k} que se corresponden con el mismo valor de ω_k) como mucho del orden ω_k^2 en el límite ultravioleta considerado, se deduce enseguida que la secuencia formada por los coeficientes β_k es en efecto de cuadrado sumable [127]. Tal vez resulte conveniente apuntar que, incluso si este resultado era esperable dada nuestra elección privilegiada de representación de Fock en la estrategia de cuantización híbrida, la inclusión de fluctuaciones cuánticas en el fondo espaciotemporal homogéneo podía poner en tela de juicio la implementabilidad unitaria de la evolución. Por ello, en esta sección hemos comprobado de forma explícita y definitiva que la dinámica de los modos fermiónicos inhomogéneos en el esquema híbrido es realmente unitaria. Concluimos que el vacío evolucionado $\hat{U}_D|0\rangle_D$ pertenece al espacio de Fock \mathcal{F}_D y constituye una solución a la ecuación de Schrödinger para la parte inhomogénea del campo de Dirac.

Por otra parte, un resultado bien conocido y fácil de obtener en TCC afirma que el número de partículas producidas durante la evolución, con respecto al estado de vacío inicial, coincide con la suma del módulo al cuadrado de los coeficientes beta dinámicos [10,139]. Esta cantidad coincide también con el número de antipartículas creadas en la evolución, ya que las excitaciones fermiónicas aparecen en pares de carga contraria. De los resultados aquí obtenidos, se deduce que el número total de pares de partículas y antipartículas producidos en la evolución del vacío es finito, con nuestra elección de operadores de destrucción y creación para el campo de Dirac. Este resultado también fue obtenido en la referencia [139] para la cuantización geometrodinámica allí contemplada, en última instancia gracias a su elección análoga de variables de destrucción y creación fermiónicas, que pertenecen a la clase privilegiada encontrada en el capítulo anterior de esta tesis. En nuestro caso, observamos en la relación asintótica (7.104) que la creación de partículas y antipartículas correspondientes a modos con autovalor de Dirac ω_k grande es proporcional al cuadrado de la masa del campo fermiónico, que típicamente es insignificante en unidades de Planck. Por ejemplo, es del orden de 10^{-23} para el electrón en estas unidades.

Conviene recalcar que el módulo al cuadrado de β_k , a orden asintótico dominante, es proporcional a la suma de los cuadrados de las funciones reales $\lambda_0^{(\Gamma)}$ y $\lambda_0^{(\Gamma),0}$, más un término que oscila con frecuencia ω_k . La contribución de este último término a la producción ultravioleta de partículas es claramente despreciable comparado con los otros dos, ya que la suma sobre modos promedia a cero sus rápidas oscilaciones. Notamos además que la definición

de $\lambda_0^{(\Gamma)}$ en (7.98) involucra el operador $\hat{\Lambda}_0$. Este operador es una versión modificada de $\hat{\Omega}_0$ en CCL, que produce desplazamientos de doble paso en el volumen. Si se tiene en cuenta que su contrapartida clásica directa es proporcional a $\check{a}\pi_{\check{a}}$, es de esperar que, para estados Γ que estén picados en trayectorias homogéneas genuinamente clásicas donde la Relatividad General es aplicable, la función $\lambda_0^{(\Gamma)}$ sea aproximadamente igual a la derivada del factor de escala con respecto al tiempo conforme (salvo una constante multiplicativa). Sin embargo, en el contexto de CCL y más allá de estas regiones clásicas, la función $\lambda_0^{(\Gamma)}$ proporciona el valor cuántico del parámetro de Hubble para los estados considerados, y es de esperar que este valor, sobre trayectorias efectivas, se anule en el momento en que se produce el rebote cuántico que reemplaza la singularidad del *Big-Bang* [98]. Como ya se indicó en el Capítulo 3, en la cosmología homogénea e isotrópica acoplada a un campo escalar sin masa, estas trayectorias efectivas difieren de las que dicta la Relatividad General cuando la densidad de energía se aproxima a la de Planck [47], a pesar de que los estados que las proporcionan permanecen picados en ellas. Por lo tanto, si elegimos el tiempo inicial η_0 precisamente en el momento del rebote y elegimos un estado Γ que, al menos alrededor de η_0 , esté picado en una de estas trayectorias efectivas, entonces la contribución del valor inicial de $\lambda_0^{(\Gamma)}$, es decir $\lambda_0^{(\Gamma),0}$, debería anularse (o ser despreciable). En este sentido, puede argumentarse que la CCL es capaz de proporcionar condiciones iniciales para los valores esperados de la geometría homogénea que minimizan la producción de partículas fermiónicas. Una situación de este estilo no sería posible en cuantizaciones de tipo geometrodinámico, puesto que en ellas el parámetro de Hubble no se anularía.

Tras discutir en detalle los aspectos más relevantes de la producción finita de partículas fermiónicas, procederemos, en último lugar, a analizar el comportamiento de ciertas cantidades que guardan relación con la «reacción» que producen los grados de libertad fermiónicos sobre la geometría homogénea cuántica. Un cálculo asintótico similar a aquel realizado para β_k , pero que hace uso de la fórmula (7.72), muestra que los coeficientes alfa dinámicos tienen el siguiente comportamiento:

$$\alpha_k = e^{-i\omega_k(\eta-\eta_0)} + \mathcal{O}(\omega_k^{-1}), \quad (7.105)$$

como en efecto anticipamos al comienzo de la sección anterior. Si utilizamos esta expresión asintótica, así como (7.104), y además tenemos en cuenta la parametrización (7.78) hecha para los coeficientes de Bogoliubov modificados en una fase, podemos comprobar que $\rho_k = \mathcal{O}(\omega_k^{-1})$, mientras que $\tilde{\beta}_k = \exp[-i\omega_k(\eta - \eta_0)]\beta_k$ coincide con $-\Delta_k$ salvo términos subdominantes del orden de ω_k^{-3} o inferior. Por lo tanto, en el límite $\omega_k \rightarrow \infty$:

$$\mathfrak{S}(\Delta_k) = \frac{M}{4l_0^2\omega_k^2} \left\{ \lambda_0^{(\Gamma)} - \lambda_0^{(\Gamma),0} \cos[2\omega_k(\eta - \eta_0)] \right\} + \mathcal{O}(\omega_k^{-3}). \quad (7.106)$$

Tras multiplicar esta identidad por $G_k^{(\Gamma)}$ y hacer uso de su expansión asintótica (7.95), se obtiene:

$$G_k^{(\Gamma)} \mathfrak{S}(\Delta_k) = \frac{M^2}{8l_0^4\omega_k^3} \lambda_0^{(\Gamma)} \left\{ \lambda_0^{(\Gamma)} - \lambda_0^{(\Gamma),0} \cos[2\omega_k(\eta - \eta_0)] \right\} + \mathcal{O}(\omega_k^{-4}). \quad (7.107)$$

La suma sobre todos los modos de los términos subdominantes $\mathcal{O}(\omega_k^{-4})$ en esta expresión converge, ya que la degeneración es, como mucho, una función del orden asintótico de ω_k^2 . Por

lo tanto, las únicas divergencias posibles del término de «reacción» $C_D^{(\Gamma)}$ sobre la geometría homogénea, dado en (7.92), procederán, en todo caso, del término dominante en $G_k^{(\Gamma)}\mathfrak{S}(\Delta_k)$, que es del orden de ω_k^{-3} . Ahora bien, si se siguen argumentos análogos a aquellos presentados en la discusión de la producción de partículas, la parte oscilante de dicho término proporcional a $\lambda_0^{(\Gamma),0}$ puede ignorarse en CCL si se toma el tiempo inicial en el rebote y un estado Γ que esté suficientemente picado en cierta trayectoria efectiva alrededor de η_0 . En ese caso, la única divergencia posible procedería de $M^2(\lambda_0^{(\Gamma)})^2/(8l_0^4\omega_k^3)$. La aparición de dicha divergencia en $C_D^{(\Gamma)}$ requiere entonces de una regularización que puede alcanzarse, en nuestro sistema, a través de una elección conveniente de la derivada temporal de la fase $c_k^{(x,y)}$, presente en el hamiltoniano fermiónico. En efecto, la divergencia quedaría absorbida si se tomara, de forma genérica:

$$c_k^{(x,y)} = -\frac{M^2}{8l_0^4\omega_k^3} \int_{\eta_0}^{\eta} d\eta_\Gamma \left(\lambda_0^{(\Gamma)}\right)^2 + \mathcal{O}(\omega_k^{-4}). \quad (7.108)$$

El término dominante es independiente del par (x, y) considerado, y además se anula en el tiempo inicial, ya que lo mismo ocurre con la parte divergente de (7.107).

Este último resultado contrasta notablemente con el obtenido en la referencia [139], donde la contribución divergente de cada modo fermiónico al término de «reacción» resultaba ser proporcional a ω_k , comportamiento mucho más divergente que el término $\mathcal{O}(\omega_k^{-3})$ aquí encontrado. Esta mejora en la teoría cuántica, en lo que a estas divergencias sin regularizar respecta, debe atribuirse en gran medida a nuestra elección de representación de Fock para los modos inhomogéneos del campo de Dirac, junto con la modificación del hamiltoniano fermiónico $H_D \rightarrow \check{H}_D$ que ella implica. Por el contrario, en la referencia (7.108) se utilizó una representación holomorfa para los modos $\{m_{\vec{k}}, r_{\vec{k}}, s_{\vec{k}}, t_{\vec{k}}\}$, cuyo hamiltoniano clásico es simplemente H_D . Por otra parte, la proporcionalidad del término divergente en (7.108) al cuadrado de la masa fermiónica parece indicar de nuevo que, tras una posible regularización, la «reacción» de las perturbaciones fermiónicas sobre la geometría homogénea tendría efectos despreciables [139]. No obstante, queremos enfatizar la posibilidad de que dicha «reacción» pueda hacerse finita, sin necesidad de regularización¹, si se adapta convenientemente la elección de representación de Fock para el campo de Dirac, aún sin abandonar la clase de equivalencia privilegiada que se ha escogido.

7.9. Conclusiones

En este capítulo hemos investigado la cuantización de un campo de Dirac tratado como una perturbación (incluida su contribución homogénea, si la hubiere) acoplada a un espaciotiempo de FLRW plano con un campo escalar masivo (o con potencial genérico), en el contexto de CCL. Por conveniencia en las demostraciones matemáticas hemos restringido el estudio a hipersuperficies espaciales con topología compacta, aunque esta restricción no debería tener efectos notables en cosmología si la escala de compactificación es suficientemente grande. En particular, hemos proporcionado un tratamiento cuántico tanto para la geometría como para los campos materiales. Con este objetivo, hemos partido de la variedad simpléctica

¹Alternativamente, la posibilidad de que la cuantización polimérica conduzca a una resolución natural de los infinitos de la teoría ha sido investigada en la referencia [197], para el efecto Casimir.

que se obtiene tras truncar a segundo orden en perturbaciones la acción del sistema. A dicho orden, las perturbaciones físicamente relevantes y no espinoriales de la cosmología considerada son únicamente tensoriales y escalares. Además, esta truncación simplemente reduce la parte de Dirac de la acción a la que describe un campo fermiónico mínimamente acoplado a un espaciotiempo homogéneo e isótropo. Los estudios aquí expuestos pueden entenderse, hasta cierto punto, como una extensión al formalismo de CCL de la discusión presentada en la referencia [139], desarrollada en el marco de la geometrodinámica cuántica. No obstante, este capítulo incluye ciertas consideraciones adicionales y muy distintivas que resumiremos a continuación.

Hemos empleado una estrategia de cuantización híbrida para conseguir una representación completa de nuestro sistema cosmológico. Así, hemos adoptado un producto tensorial de representaciones de naturaleza diversa, aunque, no obstante, el sistema cuántico resultante es altamente no trivial debido a la existencia de operadores de ligadura que acoplan los distintos sectores del espacio de fases. En particular, para el sector homogéneo de dicho espacio, así como para las perturbaciones escalares y tensoriales, puede realizarse una transformación canónica que convierte en variables de configuración las ligaduras de naturaleza puramente perturbativa. De esta forma, el sector del espacio de fases que contiene las perturbaciones escalares puede describirse mediante estas ligaduras, sus momentos conjugados y los pares canónicos de invariantes de gauge perturbativo conocidos como variables (de configuración y momento) de Mukhanov-Sasaki. Asimismo, la transformación mencionada proporciona variables homogéneas que garantizan el mantenimiento de una estructura simpléctica canónica para el sistema completo [65]. Esta formulación del sector no espinorial del espacio de fases permite imponer cuánticamente las ligaduras perturbativas de forma casi inmediata. En efecto, resulta que los estados físicos únicamente pueden depender de las variables homogéneas, de los invariantes de Mukhanov-Sasaki, y de las perturbaciones tensoriales y fermiónicas. La única ligadura no trivial que queda en el sistema es el modo cero de la ligadura hamiltoniana, formado por la contribución característica de la cosmología homogénea e isótropa corregida con términos cuadráticos en perturbaciones.

Con el objetivo de optimizar el tratamiento híbrido, y tomando como fuente de inspiración los resultados del capítulo anterior, hemos introducido también una descripción del campo de Dirac que es especialmente conveniente para una representación de Fock con las propiedades deseadas. En concreto, hemos elegido unas variables de destrucción y creación del mismo estilo que las consideradas en la referencia [139]. Esta elección de variables se incluye, de hecho, en la familia privilegiada de representaciones de Fock encontrada en el capítulo anterior para los grados de libertad fermiónicos: cuando el espaciotiempo se comporta de forma clásica, dicha representación es la única (salvo equivalencia unitaria) que permite una implementabilidad unitaria de la dinámica, en la que el vacío es invariante bajo las simetrías físicas del sistema cosmológico homogéneo, y cuyo convenio para la distinción entre partículas y antipartículas conecta de forma suave con aquel estándar en TCC para el campo sin masa. No obstante, y al contrario que en la referencia [139], aquí hemos llevado a sus últimas consecuencias, dentro de la formulación hamiltoniana, la transformación canónica que define estas variables de destrucción y creación. En efecto, como esta transformación depende de la variable de configuración que describe la geometría homogénea del sistema (en nuestro caso el factor de escala), la hemos completado de forma que sea canónica en el sistema cosmológico total, al orden de truncación perturbativa considerado. Este

procedimiento tiene dos efectos. En primer lugar, requiere de una modificación del momento canónico que describe la geometría homogénea y que pasa a estar corregido por contribuciones cuadráticas de las perturbaciones fermiónicas. Esta modificación garantiza que la estructura simpléctica del sistema siga siendo canónica y por tanto permite avanzar en el análisis de la cosmología con una correspondencia clara entre las variables empleadas y las métricas y campos materiales. En segundo lugar, el hamiltoniano fermiónico se modifica al introducir esta transformación debido, en última instancia, a que las variables involucradas, clásicamente, dependen explícitamente del tiempo. Por ello, el modo homogéneo de la ligadura hamiltoniana para la cuantización híbrida aquí considerada difiere del proporcionado en la referencia [139]. En más detalle, nuestro hamiltoniano dicta la evolución del sistema (al orden de truncación de interés) tras haberse separado los grados de libertad de tal forma que una parte muy específica de la dinámica del campo de Dirac se le atribuye a la geometría homogénea, mientras que el resto queda capturada por las variables de destrucción y creación escogidas, en lugar de por los modos fermiónicos cuantizados de forma holomorfa en la referencia [139].

Una vez preparado el sistema clásico de manera óptima, hemos procedido a representar cuánticamente el modo homogéneo de la ligadura hamiltoniana, haciendo uso de ciertas prescripciones bien motivadas por experiencias previas en CCL [95]. Con el objetivo de encontrar soluciones con relevancia física, hemos introducido un *ansatz* de tipo Born-Oppenheimer que restringe los estados de interés a aquellos cuya dependencia factoriza en la geometría homogénea, los invariantes de Mukhanov-Sasaki, las perturbaciones tensoriales y los grados de libertad fermiónicos considerados. El papel del campo escalar homogéneo en este *ansatz* es el de un tiempo interno del sistema. Con respecto a él, hemos prescrito que la función de onda para la geometría homogénea sea un estado que evoluciona unitariamente. Por motivos físicos, asumimos que el generador del operador unitario correspondiente difiere solo perturbativamente de aquel característico de la cosmología homogénea sin perturbar. A partir de esta propuesta de soluciones, hemos identificado las condiciones necesarias para poder ignorar las transiciones cuánticas en la geometría homogénea que produce el modo homogéneo de la ligadura hamiltoniana. Así, hemos obtenido una ecuación de ligadura maestra que es cuadrática en el momento del campo escalar homogéneo, así como en todos los operadores perturbativos elementales (que representan los grados de libertad escalares, tensoriales o fermiónicos), y donde los operadores de geometría homogénea aparecen únicamente a través de sus valores esperados en el estado geométrico considerado. Si, además, se asumen ciertas hipótesis suaves sobre la contribución de la función de onda de las perturbaciones al momento del campo escalar homogéneo, es posible obtener una versión efectiva de las ecuaciones clásicas para los invariantes de Mukhanov-Sasaki [65], así como la dinámica fermiónica. De forma alternativa, pueden caracterizarse unas pocas condiciones (que no difieren de las anteriores en lo que a la función de onda fermiónica respecta) que garantizan que la ecuación de ligadura es equivalente a tres ecuaciones de Schrödinger, en el tiempo dado por el campo escalar homogéneo, para los distintos sectores perturbativos del sistema. Cabe destacar que el procedimiento seguido para llegar a estas ecuaciones difiere en ciertos aspectos fundamentales del análisis presentado en la referencia [139]. En él se recurrió a una aproximación semiclassical que partía de una acción que es una solución de Hamilton-Jacobi del sistema cosmológico homogéneo, para definir una noción de tiempo en términos de una proyección en la dirección de su gradiente. Todo este procedimiento se llevó a cabo, además, en ausencia de un espacio

de Hilbert específico y de un producto interno para la geometría homogénea. Por el contrario, en el escenario aquí analizado, tenemos el espacio de Hilbert cinemático de CCL con su producto interno bien definidos. Gracias a ello, los valores esperados que aparecen en la ecuación de ligadura están rigurosamente controlados y capturan parte del comportamiento genuinamente cuántico de la función de onda para la geometría homogénea, sin necesidad de asumir la existencia de trayectorias semiclásicas concretas. No obstante, es conveniente aclarar que muchos aspectos de nuestro análisis en realidad pueden generalizarse a otros formalismos, diferentes de CCL, para la representación cuántica de la geometría homogénea. Por otra parte, y también en relación a la comparación hecha con la referencia [139], hemos introducido un tiempo conforme (7.57) que depende del estado concreto considerado para la geometría homogénea. Este tiempo está bien definido para la cuantización de lazos tomada, al orden de nuestra truncación perturbativa. Sin embargo, para cuantizaciones continuas de tipo geometrodinámico, cualquier contrapartida semiclásica de este tiempo podría estar mal definida alrededor de la singularidad cosmológica, pues el numerador de la ecuación (7.57) se haría nulo allí debido a que las correspondientes trayectorias semiclásicas típicas no evitan la singularidad.

En lo que a los modos inhomogéneos fermiónicos respecta, hemos proporcionado un análisis detallado de su dinámica cuántica. Sus ecuaciones de evolución capturan los efectos más importantes de la cuantización de la geometría homogénea, a través de la presencia de valores esperados que desempeñan el papel que tendrían las funciones del fondo homogéneo clásico en TCC estándar. Una propiedad ciertamente interesante de estas ecuaciones es que dependen de valores esperados que son diferentes según el modo inhomogéneo considerado, dentro del conjunto infinito fermiónico. Este aspecto difiere, en un contraste absoluto, con la situación encontrada en las ecuaciones dinámicas de los infinitos modos perturbativos escalares y tensoriales, que dependen únicamente de un número finito de valores esperados [65, 66]. Esta novedad, debida a la introducción de fermiones en el sistema, tiene unas implicaciones muy relevantes en la filosofía que subyace el formalismo de la métrica vestida, donde se interpreta de forma estándar que un número limitado de momentos estadísticos de la geometría homogénea (esencialmente aquellos que capturan la misma información que determinan las soluciones efectivas del modelo homogéneo e isótropo) bastan para caracterizar la métrica corregida cuánticamente [167–169]. Es importante enfatizar que los valores esperados que aparecen en las ecuaciones fermiónicas proporcionan información acerca de la dependencia cuántica de la función de onda para la geometría homogénea en un número infinito de potencias del volumen físico homogéneo. Asimismo, todos ellos dependen de la misma manera del momento conjugado del factor de escala homogéneo. No obstante, a pesar de la inclusión de estos efectos cuánticos de la geometría en las ecuaciones de evolución para los grados de libertad fermiónicos, la dinámica que dictan puede entenderse como una transformación de Bogoliubov que es, de hecho, implementable como un operador unitario en nuestra cuantización híbrida. Este resultado permite establecer una conexión clara entre CCL y TCC en espaciotiempos curvos. Además, hemos encontrado explícitamente el operador que implementa dicha dinámica y resulta que está generado precisamente por el hamiltoniano que aparece en la ecuación de Schrödinger para la función de onda fermiónica, deducida a partir de la ecuación de ligadura. En particular, hemos construido una solución a esta ecuación que describe la evolución de la parte inhomogénea del vacío fermiónico. Cabe destacar que la construcción proporcionada es exacta: el vacío transformado por el operador unitario

satisface exactamente la ecuación de Schrödinger, sin necesidad de ninguna aproximación adicional.

Como ya se ha comentado en numerosas ocasiones a lo largo de esta tesis, la identificación de una noción de dinámica cuántica unitaria, con su hamiltoniano correspondiente, para los grados de libertad fermiónicos garantiza la coherencia de su evolución en lo que a sus conceptos de partículas y antipartículas se refiere. En otras palabras, este capítulo muestra, una vez más, que es posible separar la evolución del campo de Dirac en una parte que varía con la geometría homogénea (a través de valores esperados, en este caso) y otra que es implementable mediante un operador unitario no trivial en la teoría cuántica, al menos dentro del rango de validez de la ecuación de Schrödinger. Incluso siendo la geometría una entidad cuántica que, en el caso más general, no tiene por qué picarse en trayectorias estacionarias, la unitariedad de la dinámica fermiónica preserva la información cuántica acerca de las partículas y antipartículas descritas por las variables de destrucción y creación para nuestra representación de Fock. En particular, esta unitariedad garantiza de forma inmediata que la producción de pares de partículas y antipartículas es finita. Además, para cualquier modo con autovalor de Dirac ω_k que se encuentre en el régimen ultravioleta, dicha producción es insignificante y, en general, es proporcional al cuadrado de la masa fermiónica. El número es de hecho suficientemente pequeño como para garantizar una suma convergente cuando se consideran todos los modos. En este sentido, puede entenderse que los grados de libertad fermiónicos del sector ultravioleta, cuya escala no cruza el horizonte cosmológico, no se desvían significativamente del estado de vacío a lo largo de su evolución.

En último lugar hemos investigado la cuestión de la «reacción» cuántica de los fermiones en la ecuación de ligadura, ecuación que incluye tanto el sector homogéneo del sistema como sus perturbaciones escalares y tensoriales. Esta «reacción» puede identificarse con la parte del hamiltoniano cuántico para los grados de libertad fermiónicos que no depende de ellos, una vez se toma orden normal con respecto a nuestra representación de Fock. Hemos demostrado que dicha contribución necesita ser regularizada, al igual que ocurría en la referencia [139]. Sin embargo, la situación encontrada aquí es mucho mejor que la expuesta en ese análisis geometrodinámico. En efecto, la contribución divergente que aporta cada modo individual en el régimen ultravioleta tiene un comportamiento asintótico $\mathcal{O}(\omega_k^{-3})$, en lugar del comportamiento $\mathcal{O}(\omega_k)$ argumentado en la referencia [139]. En realidad, cualquier contribución con comportamiento $\mathcal{O}(\omega_k^{-3+\varepsilon})$, con parámetro $\varepsilon > 0$ arbitrario, sería de cuadrado sumable y daría lugar a un efecto de «reacción» finito. Llegados a este punto de la discusión, es conveniente recordar que aún contamos con una cierta libertad en la elección de representación de Fock para el campo de Dirac de forma que se respeten la unitariedad e invariancia bajo simetrías. Esta libertad de elección viene dada por la familia de representaciones unitariamente equivalentes entre sí encontrada en el capítulo anterior, que no solo permite cambiar a estructuras complejas equivalentes, sino también escoger entre nociones ligeramente distintas de dinámica cuántica unitaria. Todas estas nociones están relacionadas por operadores unitarios, y el cambio de una a otra se traduce, simplemente, en separar de forma distinta la dependencia del campo de Dirac en variables de geometría homogénea y variables fermiónicas. Según lo explicado, es claro que cada una de estas dinámicas fermiónicas se corresponde con un hamiltoniano distinto. Parece entonces obvio que aún podemos mejorar el comportamiento de la «reacción», optimizando nuestra elección de variables de destrucción y creación para los modos inhomogéneos del campo de Dirac. Estas considera-

ciones quedan fuera del alcance de esta tesis, pero apuntan al hecho de que el trabajo aquí expuesto constituye un primer paso en el análisis riguroso de la «reacción» cuántica en CCL entre los distintos sectores del universo primigenio con perturbaciones.

Capítulo 8

Soluciones aproximadas en una cuantización de lazos híbrida

Este capítulo está dedicado a la investigación del comportamiento dinámico de ciertos estados físicos de la cosmología cuántica híbrida de Gowdy con polarización lineal y la topología de T^3 . En particular, partiremos del sistema explicado en la sección 3.3. Recordemos que el espacio de fases clásico de este espaciotiempo puede entenderse como el de una cosmología anisótropa de tipo Bianchi I con inhomogeneidades (gravitatorias y materiales) que se propagan en una dirección espacial. Dos ligaduras constriñen este sistema cosmológico, tras haberse resuelto satisfactoriamente el resto: son los modos homogéneos de Fourier de la ligadura hamiltoniana y de una ligadura de momentos. El operador que representa la ligadura hamiltoniana en el esquema híbrido resulta tener una acción muy complicada sobre los estados del espacio de Hilbert cinemático. Debido a ello, en la referencia [60] comenzaron a desarrollarse métodos para buscar familias de estados que pudieran proporcionar soluciones aproximadas a esta ligadura. Se encontraron estados físicos tales y se mostró además que podían entenderse como soluciones de un modelo de tipo FLRW acoplado a un campo escalar homogéneo, dentro del formalismo de CCL. Los trabajos contenidos en este capítulo generalizan estas familias de estados y refinan la validez de las aproximaciones. Asimismo, demuestran cómo dichos estados, aun siendo soluciones aproximadas a la cosmología de Gowdy híbrida, obedecen una dinámica aproximada (efectiva) que está dictada por ligaduras cuánticas de espaciotiempos de FLRW con fluidos perfectos y con el tipo de correcciones geométricas que podría esperarse, por ejemplo, en teorías modificadas de gravedad [198].

En particular, el operador de ligadura hamiltoniana de la cosmología cuántica de Gowdy híbrida que nos atañe contiene dos contribuciones que obstruyen de forma fundamental su resolución. La primera de ellas es un término de anisotropía que involucra lo que podría entenderse como el momento conjugado a la variable que mide las anisotropías en el sistema de Bianchi I con simetría rotacional local. Viene representada por un operador en diferencias finitas que acopla la parte isótropa del sector homogéneo de estados con la parte anisótropa. La segunda contribución problemática en el operador de ligadura es un término que acopla la autointeracción de los modos de Fourier inhomogéneos (que proceden tanto de las ondas gravitatorias como del campo escalar) con el sector homogéneo. Introduciremos de forma controlada, estados cuánticos sobre los que pueda despreciarse la acción de estos dos operadores complicados, en comparación con el resto que terminan de formar la ligadura hamiltoniana.

Más específicamente, en el sector homogéneo caracterizado por el volumen del universo de Bianchi I y por la mencionada variable de anisotropía, la dependencia en esa anisotropía de los estados considerados estará dada por ciertos tipos de perfiles gaussianos. Gracias a ello, estos perfiles van a estar picados en un valor grande de la anisotropía y razonablemente centrados en un valor nulo de su momento conjugado. Mientras que el análisis que se había llevado a cabo con anterioridad en la referencia [60] restringía dicho pico a valores constantes, en este capítulo consideraremos de forma general que el pico gaussiano para la anisotropía puede depender del volumen, o incluso del espectro de un operador bastante más genérico, definido en el sector homogéneo e isótropo de los estados. Imponiendo ciertas condiciones sobre dicho operador, mostraremos entonces cómo es posible que los estados considerados proporcionen soluciones cuánticas del modelo de Gowdy completo y, al mismo tiempo, satisfagan de manera aproximada una ligadura típica de un universo de FLRW acoplado a un campo escalar homogéneo sin masa, lleno de fluidos perfectos (incluyendo una posible constante cosmológica) y geoméricamente corregido con términos de curvatura homogénea e isótropa. Aunque la amplia familia de estos estados cuánticos no estará particularmente picada en trayectorias homogéneas e isótropas, sin embargo, desde un punto de vista dinámico, los estados en cuestión se comportarán como si fueran soluciones homogéneas e isótropas, en lo que a la ligadura hamiltoniana concierne. Esta propiedad puede entenderse, en última instancia, como un comportamiento colectivo de las anisotropías e inhomogeneidades.

El contenido de este capítulo de la tesis se ha publicado en las referencias [199–201].

8.1. Propiedades de la ligadura hamiltoniana

Recordamos que el operador que representa la ligadura hamiltoniana densitizada \mathcal{C}_G de la cosmología de Gowdy dentro del marco de la cuantización híbrida es:

$$\hat{\mathcal{C}}_G = \hat{\mathcal{C}}_{\text{FLRW}} - \frac{\pi G}{8}(\hat{\Omega}\hat{\Theta} + \hat{\Theta}\hat{\Omega}) + \frac{2\pi G}{\beta}e^{2\Lambda}\hat{H}_0 + \frac{\pi G\beta}{4}e^{-2\Lambda}\hat{D}\hat{\Omega}^2\hat{D}\hat{H}_1, \quad (8.1)$$

donde β es una constante que depende de algunos parámetros de la cuantización de lazos, \hat{H}_0 es la contribución diagonal a la ligadura de los modos inhomogéneos de los campos gravitatorio y escalar, \hat{H}_1 es un término de autointeracción de los mismos y, finalmente, \hat{D} representa el producto regularizado de \hat{v} por su inverso. Estos tres operadores están dados en las definiciones (3.72)-(3.74). Por último, $\hat{\mathcal{C}}_{\text{FLRW}}$ es la representación de lazos de la ligadura hamiltoniana densitizada de una cosmología homogénea e isótropa mínimamente acoplada al campo escalar homogéneo sin masa ϕ , dada en (3.66) tras reemplazar $\hat{\Omega}_0$ por $\hat{\Omega}$. Recordamos, además, que este operador de ligadura está bien definido en el subespacio lineal separable, contenido en el espacio de Hilbert cinemático, generado por los estados ortonormales $|v, \Lambda, \phi, \mathbf{n}^g, \mathbf{n}^s\rangle$ (en sentido generalizado para la etiqueta ϕ) tales que $v \in \mathcal{L}_\varepsilon^+$ y $\Lambda = \Lambda^* + \Lambda_\varepsilon$, con $\Lambda_\varepsilon \in \mathcal{W}_\varepsilon$. Llamaremos dicho subespacio $\mathcal{S}_G^\varepsilon$ y su compleción en el producto interno del espacio de Hilbert cinemático será $\mathcal{H}_G^\varepsilon$. Restringiremos por tanto la búsqueda de estados físicos del sistema al espacio dual de $\mathcal{S}_G^\varepsilon$ generado por la base mencionada, gracias a lo cual podremos estudiar exclusivamente aquellos elementos duales que son aniquilados por (el adjunto de) la ligadura densitizada.

La acción de la ligadura hamiltoniana $\hat{\mathcal{C}}_G$ sobre el espacio de Hilbert $\mathcal{H}_G^\varepsilon$ de interés es bastante complicada, hecho que hace muy difícil (si no imposible) encontrar de forma

analítica los estados físicos de esta cosmología inhomogénea. Esto se debe a la presencia de dos términos: el de anisotropía, que contiene un factor $\hat{\Omega}\hat{\Theta} + \hat{\Theta}\hat{\Omega}$, y el de autointeracción, que contiene el operador $e^{-2\Lambda}\hat{D}\hat{\Omega}^2\hat{D}\hat{H}_1$. Por una parte, en lo que concierne al sector homogéneo de la cosmología cuántica, ni el operador de anisotropía $\hat{\Omega}\hat{\Theta} + \hat{\Theta}\hat{\Omega}$ ni \hat{D} conmutan con el operador $\hat{\Omega}^2$ de FLRW. Por tanto, no pueden ser diagonalizados simultáneamente. Este hecho, junto a las traslaciones dependientes de v que el operador de anisotropía produce en Λ [véase (3.60)], hacen que la resolución de la ligadura en las variables homogéneas v y Λ parezca inabordable. Por otro lado, respecto al sector inhomogéneo, el operador de interacción \hat{H}_1 , que está definido con dominio denso en el espacio lineal generado por los estados de n partículas, no actúa de forma diagonal sobre ellos (al contrario que \hat{H}_0). En particular, crea y destruye un par de partículas en cada modo, complicando notablemente la resolución de la ligadura para los grados de libertad inhomogéneos. Tomando como motivación principal estos obstáculos, a continuación procedemos a desarrollar una serie de aproximaciones que permitan despreciar todos los operadores problemáticos mencionados, cuando se considera su acción sobre ciertas familias de estados. Estas aproximaciones darán lugar a un operador de ligadura mucho más sencillo y algunas de sus soluciones podrán interpretarse como próximos a los estados físicos del modelo de Gowdy completo.

Quizá el aspecto más importante para el éxito de las aproximaciones desarrolladas en las siguientes secciones tenga como fundamento último las propiedades espectrales del operador $\hat{\Omega}^2$. Por tanto, comenzaremos resumiendo dichas propiedades. Se trata de un operador esencialmente autoadjunto, con espectro absolutamente continuo, no degenerado y positivo [95, 97]. En cada sector de superselección generado por los estados $|v\rangle$ con soporte de v en una semirred $\mathcal{L}_\varepsilon^+$, los autoestados generalizados de $\hat{\Omega}^2$ con autovalor $\rho^2 \in \mathbb{R}^+$:

$$|e_\rho^\varepsilon\rangle = \sum_{v \in \mathcal{L}_\varepsilon^+} e_\rho^\varepsilon(v)|v\rangle, \quad (8.2)$$

proporcionan una resolución de la identidad. Las autofunciones pueden elegirse reales y poseen una propiedad que resultará esencial para nuestras aproximaciones: cuando $\rho \gg 10$, $e_\rho^\varepsilon(v)$ está exponencialmente suprimida para $v \lesssim \rho/2$. Por otra parte, para $v \gg \rho/2$, estas autofunciones presentan un carácter oscilatorio [95]. La supresión exponencial en la región $v \lesssim \rho/2$ es una característica genuina de los efectos cuánticos de la geometría en CCL, y subyace la aparición del rebote cuántico característico de la representación de lazos en universos homogéneos e isótropos [48, 95]. Recordamos que, en las proximidades de este rebote, los fenómenos cuánticos alteran significativamente el comportamiento de la gravedad con respecto a las predicciones de la Relatividad General, invalidando los fenómenos esperados en la teoría clásica. En particular, este rebote resuelve las singularidades cosmológicas, y, como se ha comentado en el Capítulo 3 de esta tesis, parece persistir en escenarios con anisotropías [102] e inhomogeneidades [103], como son los considerados aquí.

8.2. Aproximaciones a la ligadura hamiltoniana: simulación de fluidos perfectos

En esta segunda sección centraremos nuestro análisis a estados $(\psi|$ sobre los que la ligadura hamiltoniana \hat{C}_G pueda aproximarse como la característica de un universo homogéneo

e isótropo, $\hat{\mathcal{C}}_{\text{FLRW}}$, pero que pueda además contener varios tipos de fluidos perfectos. Para ello, estudiaremos estados cuya proyección en el sector gravitatorio homogéneo de \mathcal{S}_G^ξ tenga la forma:

$$(\mathcal{G}| = \sum_{v \in \mathcal{L}_\varepsilon^+} \sum_{\Lambda_\varepsilon \in \mathcal{W}_\varepsilon} g(v, \Lambda^* + \Lambda_\varepsilon) \langle v, \Lambda^* + \Lambda_\varepsilon |, \quad (8.3)$$

donde:

$$g(v, \Lambda) = N(v)f(v, \Lambda), \quad f(v, \Lambda) = e^{-\frac{\sigma_s^2}{2q_\varepsilon^2}[\Lambda - \bar{\Lambda}(v)]^2}. \quad (8.4)$$

La dependencia en v del perfil gaussiano $f(v, \Lambda)$ permite que los estados considerados puedan concentrarse en trayectorias isótropas para la variable Λ . Sin embargo, es claro que la familia de estados introducida en (8.4) trasciende ampliamente esta situación particular, que se correspondería a tomar $\bar{\Lambda}(v) = \ln(v/2)/3$ y gaussianas suficientemente picadas. El caso que se obtiene cuando se impone que $\bar{\Lambda}(v)$ sea una constante fue estudiado previamente en la referencia [60] y puede considerarse como una situación particular del presente análisis.

Supondremos, por el momento y con vistas a garantizar la validez de las aproximaciones que luego introduciremos, que la función $N(v)$ está muy suprimida para volúmenes $v \lesssim v_m$, dado un cierto volumen $v_m \gg 10$ perteneciente a la semirred $\mathcal{L}_\varepsilon^+$. Finalmente, fijaremos la escala q_ε en la anchura del perfil gaussiano como una función de este parámetro v_m :

$$q_\varepsilon = \ln \left(1 + \frac{2}{v_m} \right). \quad (8.5)$$

8.2.1. Aproximaciones en el término de anisotropía

Para tratar el operador de anisotropía $\hat{\Omega}\hat{\Theta} + \hat{\Theta}\hat{\Omega}$, resulta esencial notar que, cuando actúa sobre los estados considerados, con proyección gravitatoria homogénea $(\mathcal{G}|$, las únicas traslaciones dependientes de v en la variable de anisotropía Λ que contribuyen no son mayores que la escala q_ε , debido a la supuesta supresión de los estados en la región $v \lesssim v_m$ [60]. Consideremos entonces que los perfiles que caracterizan a $(\mathcal{G}|$ pueden extenderse (desde el sector de superselección de la anisotropía) a una función suave de Λ en la recta real tal que, para las variaciones relevantes $\Lambda_0 \leq q_\varepsilon$:

$$g(v, \Lambda + \Lambda_0) \simeq g(v, \Lambda) + \Lambda_0 \partial_\Lambda g(v, \Lambda), \quad (8.6)$$

para todo v en el soporte de $g(v, \Lambda)$. En particular, en el caso de los perfiles gaussianos (8.4), basta con imponer que $\sigma_s \ll 1$ para garantizar la validez de esta extensión suave con la propiedad (8.6), ya que en ese caso la escala q_ε que acota las traslaciones relevantes en Λ es mucho menor que la anchura de la gaussiana, que recordemos que viene dada por q_ε/σ_s . La acción del operador de anisotropía en la ligadura hamiltoniana sobre $(\mathcal{G}|$ viene dada por [60]:

$$\begin{aligned} (\mathcal{G}|\hat{\Omega}\hat{\Theta} + \hat{\Theta}\hat{\Omega}|v, \Lambda) = & \\ = & -y_{--}(v)[g(v-4, \Lambda + d_v(-4) - d_v(-2)) - 2g(v-4, \Lambda) + g(v-4, \Lambda + d_v(-2))] \\ & -y_{++}(v)[g(v+4, \Lambda + d_v(4) - d_v(2)) - 2g(v+4, \Lambda) + g(v+4, \Lambda + d_v(2))] \\ & +y_{+-}(v)[g(v, \Lambda + d_v(-2)) - 2g(v, \Lambda) + g(v, \Lambda - d_v(-2))] \\ & +y_{-+}(v)[g(v, \Lambda + d_v(2)) - 2g(v, \Lambda) + g(v, \Lambda - d_v(2))]. \end{aligned} \quad (8.7)$$

Aquí, hemos definido $d_v(n) = \ln(1 + n/v)$, así como las funciones:

$$\begin{aligned} y_{\pm}(v) &= \frac{1 + \text{sign}(v \pm 2)}{2} \sqrt{v(v \pm 2)}, \\ y_{\pm\pm}(v) &= y_{\pm}(v)y_{\pm}(v \pm 2), \quad y_{\mp\pm}(v) = y_{\pm}(v)y_{\mp}(v \pm 2), \end{aligned} \quad (8.8)$$

y hemos usado las identidades:

$$y_{+++}(v) = y_{--}(v+4), \quad y_{--}(v) = y_{+++}(v-4); \quad (8.9)$$

$$d_v(\pm 2) = d_{v\pm 4}(\mp 2) - d_{v\pm 4}(\mp 4), \quad d_{v\pm 4}(\mp 2) = d_v(\pm 2) - d_v(\pm 4). \quad (8.10)$$

Ahora bien, para aquellos perfiles suaves que satisfagan la condición (8.6) y si se tiene en cuenta que las traslaciones en Λ que aparecen en (8.7) únicamente tienen una contribución no despreciable cuando son menores que la escala q_ε , debido a la supresión de $g(v, \Lambda)$ para $v \lesssim v_m$, se obtiene que:

$$(\mathcal{G}|\hat{\Omega}\hat{\Theta} + \hat{\Theta}\hat{\Omega}|v, \Lambda) \simeq -[d_v(-4)y_{--}(v)\partial_\Lambda g(v-4, \Lambda) + d_v(4)y_{+++}(v)\partial_\Lambda g(v+4, \Lambda)]. \quad (8.11)$$

Además, usando de nuevo que $g(v, \Lambda)$ únicamente tiene soporte no despreciable para $v \gg 10$, se puede hacer la aproximación:

$$\frac{d_v(\pm 4)}{8}y_{\pm\pm}(v) \simeq \pm \frac{1 + \text{sign}(v \pm 4)}{2} \sqrt{\frac{v}{2} \cdot \frac{v \pm 4}{2}} = \pm \tilde{y}_{\pm}(v). \quad (8.12)$$

Por lo tanto, si se define el operador $\hat{\tilde{\Omega}}$ como el operador geométrico $\hat{\Omega}$ en (3.68), salvo por la sustitución del par de variables $(v, \bar{\mu}_\perp)$ por $(v/2, 2\bar{\mu}_\perp)$, cuya actuación en los estados $|v\rangle$ viene dada por:

$$\hat{\tilde{\Omega}}|v\rangle = i[\tilde{y}_-(v)|v-4\rangle - \tilde{y}_+(v)|v+4\rangle], \quad (8.13)$$

puede concluirse que $(\mathcal{G}|\hat{\Omega}\hat{\Theta} + \hat{\Theta}\hat{\Omega}|v, \Lambda) \simeq 8i(\partial_\Lambda \mathcal{G}|\hat{\tilde{\Omega}}|v, \Lambda)$, donde $(\partial_\Lambda \mathcal{G}|$ denota la proyección geométrica homogénea del estado dual cuyo perfil de ondas viene dado por $\partial_\Lambda g(v, \Lambda)$. Aún más, teniendo en mente la naturaleza discreta del espacio de Hilbert cinemático $\mathcal{H}_G^\varepsilon$ en lo que respecta a la variable de anisotropía Λ , aproximaremos la acción de la derivada continua $-4i\partial_\Lambda$ sobre funciones de esta variable por su contrapartida discreta, dada por el operador:

$$\hat{\Theta}'|\Lambda\rangle = i\frac{2}{q_\varepsilon} (|\Lambda + q_\varepsilon\rangle - |\Lambda - q_\varepsilon\rangle). \quad (8.14)$$

Resaltamos que $q_\varepsilon \in \mathcal{W}_\varepsilon$ [véase (8.5) y téngase en cuenta que v_m pertenece por definición a $\mathcal{L}_\varepsilon^+$], por lo que $\hat{\tilde{\Omega}}\hat{\Theta}'$ conserva los sectores de superselección sobre los que está bien definido $\hat{\tilde{\Omega}}\hat{\Theta} + \hat{\Theta}\hat{\tilde{\Omega}}$. Es más, la acción de $\hat{\Theta}'$ deja invariantes las redes $\mathcal{L}_\Lambda^{q_\varepsilon} = \{\Lambda' + nq_\varepsilon; n \in \mathbb{Z}\}$ de paso constante q_ε contenidas en esos sectores, con $\Lambda' - \Lambda^* \in \mathcal{W}_\varepsilon$. Utilizando este resultado, podemos restringir todo el estudio futuro al subespacio lineal generado por estados $|\Lambda\rangle$ con soporte en cualquiera de estas redes. En resumen, sobre estados $(\mathcal{G}|$ caracterizados por perfiles (8.4) tales que $\sigma_s \ll 1$ y que están muy suprimidos para volúmenes $v \lesssim v_m$, la acción

del operador de anisotropía en la ligadura hamiltoniana de la cosmología de Gowdy puede aproximarse como:

$$(\mathcal{G}|\hat{\Omega}\hat{\Theta} + \hat{\Theta}\hat{\Omega}|v, \Lambda) \simeq -(\mathcal{G}|2\hat{\Omega}\hat{\Theta}'|v, \Lambda). \quad (8.15)$$

A continuación mostraremos cómo, sobre la proyección homogénea $(\mathcal{G}|$ de los estados $(\psi|$ caracterizados por los perfiles gaussianos (8.4), la acción del operador de anisotropía aproximado $-2\hat{\Omega}\hat{\Theta}'$ puede ser despreciada comparada con la de $\hat{\Omega}^2$, presente en la contribución $\hat{\mathcal{C}}_{\text{FLRW}}$ de la ligadura hamiltoniana. En realidad, este resultado es de esperar si se tiene en cuenta que estos perfiles gaussianos están picados en trayectorias con momento de anisotropía nulo, que es precisamente lo que mide (de una forma discretizada) el operador $\hat{\Theta}'$. En primer lugar, es fácil comprobar que:

$$\begin{aligned} (\mathcal{G}|2\hat{\Omega}\hat{\Theta}'|v, \Lambda) &= \frac{4}{q_\varepsilon} \left\{ \tilde{y}_+(v) [g(v+4, \Lambda+q_\varepsilon) - g(v+4, \Lambda-q_\varepsilon)] \right. \\ &\quad \left. - \tilde{y}_-(v) [g(v-4, \Lambda+q_\varepsilon) - g(v-4, \Lambda-q_\varepsilon)] \right\}. \end{aligned} \quad (8.16)$$

Ahora bien, dada la forma gaussiana (8.4) de los perfiles, se tiene que:

$$g(v \pm 4, \Lambda + q_\varepsilon) - g(v \pm 4, \Lambda - q_\varepsilon) = -2g(v \pm 4, \Lambda) \sinh \left(\frac{\sigma_s^2}{q_\varepsilon} [\Lambda - \bar{\Lambda}(v \pm 4)] \right) e^{-\frac{\sigma_s^2}{2}}. \quad (8.17)$$

Al ser una gaussiana, la función $g(v, \Lambda)$ únicamente aporta una contribución destacable cuando $\sigma_s[\Lambda - \bar{\Lambda}(v)]/q_\varepsilon$ es del orden de la unidad o inferior. Por lo tanto, se puede hacer la siguiente aproximación:

$$\frac{4}{q_\varepsilon} [g(v \pm 4, \Lambda + q_\varepsilon) - g(v \pm 4, \Lambda - q_\varepsilon)] \simeq -\frac{8 \sinh \sigma_s}{q_\varepsilon} e^{-\frac{\sigma_s^2}{2}} g(v \pm 4, \Lambda) \times \mathcal{O}(1). \quad (8.18)$$

Introduciendo este resultado en la actuación (8.16) concluimos que la acción del operador de anisotropía en la ligadura $\hat{\mathcal{C}}_G$ sobre los estados bajo consideración puede aproximarse como sigue [199]:

$$(\mathcal{G}|\hat{\Omega}\hat{\Theta} + \hat{\Theta}\hat{\Omega}|v, \Lambda) \simeq 8 \frac{\sinh \sigma_s}{q_\varepsilon} e^{-\frac{\sigma_s^2}{2}} (\mathcal{G}|\hat{\Omega}|v, \Lambda), \quad (8.19)$$

salvo un factor $\mathcal{O}(1)$ en el miembro derecho de la aproximación. Ahora bien, la acción de $\hat{\Omega}^2$ sobre $(\mathcal{G}|$ es del mismo orden que la de $\hat{\Omega}$, ya que estos operadores son completamente análogos excepto por la magnitud de los desplazamientos que producen en v . Además, en el régimen $v \gtrsim v_m \gg 10$, se tiene:

$$\hat{\Omega}^2|v\rangle = -y_{++}(v)|v+4\rangle + 2v^2|v\rangle - y_{--}(v)|v-4\rangle, \quad (8.20)$$

por lo que los coeficientes que aparecen en $(\mathcal{G}|\hat{\Omega}^2|v, \Lambda)$ son $\mathcal{O}(v^2)$. Por lo tanto, se puede garantizar que el lado derecho de (8.19) es despreciable comparado con $(\mathcal{G}|\hat{\Omega}^2|v, \Lambda)$ si se cumple que $8|\sinh \sigma_s| \exp(-\sigma_s^2/2) \ll q_\varepsilon v_m$. Como se tiene que, para $v_m \gg 10$ la definición (8.5) implica que $q_\varepsilon \simeq 2/v_m$, la condición anterior puede reescribirse como:

$$4|\sinh \sigma_s| e^{-\frac{\sigma_s^2}{2}} \ll 1. \quad (8.21)$$

Puesto que ya habíamos requerido que $\sigma_s \ll 1$ para tratar $g(v, \Lambda)$ como una función suave en Λ y aproximarla por su expansión de Taylor truncada a primer orden, resulta que la condición (8.21) se satisface trivialmente.

Así concluye la demostración de que la acción del término de anisotropía $\hat{\Omega}\hat{\Theta} + \hat{\Theta}\hat{\Omega}$ en estados con perfiles de la forma (8.4) puede despreciarse en la ligadura hamiltoniana si se satisface la condición $\sigma_s \ll 1$ y si $g(\rho, \Lambda)$ está muy suprimida para $\rho \lesssim \rho_m$. Como comprobación de consistencia, es posible mostrar además que tanto el valor esperado como la dispersión del operador $\hat{\Omega}\hat{\Theta} + \hat{\Theta}\hat{\Omega}$ en los perfiles de interés son despreciables comparados con los correspondientes del operador $\hat{\Omega}^2$ de FLRW.

8.2.2. Aproximaciones en el término de interacción

Analizaremos a continuación el comportamiento del término de interacción $e^{-2\Lambda}\widehat{D}\hat{\Omega}^2\widehat{D}\hat{H}_1$, una vez se considera su actuación sobre los estados introducidos. Antes de discutir si la acción de este operador sobre $(\mathcal{G}|$, con perfiles de la forma (8.4), puede despreciarse en la ligadura hamiltoniana de la cosmología de Gowdy híbrida, resulta conveniente resaltar que, debido a la supresión de los mismos en el sector $v \lesssim v_m$ con $v_m \gg 10$, sector sobre el cual \hat{D} actúa simplemente como la identidad de acuerdo con (3.74), es legítimo llevar a cabo la aproximación:

$$(\mathcal{G}| \left(e^{-2\Lambda}\widehat{D}\hat{\Omega}^2\widehat{D}\hat{H}_1 \right)^\dagger \simeq (\mathcal{G}| \left(e^{-2\Lambda}\hat{\Omega}^2\hat{H}_1 \right)^\dagger. \quad (8.22)$$

Por tanto, si el contenido de inhomogeneidades de los estados analizados es razonable, será posible ignorar la acción del término de interacción sobre ellos si es despreciable la de $e^{-2\Lambda}\hat{\Omega}^2$ comparada con el resto de contribuciones en la ligadura hamiltoniana $\hat{\mathcal{C}}_G$. Dicha acción viene dada por:

$$\begin{aligned} (\mathcal{G}| e^{-2\Lambda}\hat{\Omega}^2 |v, \Lambda) &= -y_{--}(v')e^{-2\Lambda'}g(v' - 4, \Lambda') + 2(v')^2e^{-2\Lambda'}g(v', \Lambda') \\ &\quad - y_{++}(v')e^{-2\Lambda'}g(v' + 4, \Lambda'). \end{aligned} \quad (8.23)$$

Además, puede comprobarse que, dados los perfiles gaussianos (8.4):

$$e^{-2\Lambda}g(v, \Lambda) = N(v) \exp \left\{ -\frac{\sigma_s^2}{2q_\varepsilon^2} \left[\Lambda - \bar{\Lambda}(v) + \frac{2q_\varepsilon^2}{\sigma_s^2} \right]^2 \right\} \exp \left[-2\bar{\Lambda}(v) + \frac{2q_\varepsilon^2}{\sigma_s^2} \right]. \quad (8.24)$$

La primera exponencial del lado derecho está acotada superiormente por uno. Por ello, si se elige el pico $\bar{\Lambda}(v)$ de los perfiles gaussianos tal que sea mucho mayor que la unidad y que $q_\varepsilon^2/\sigma_s^2$, para todo v en el soporte relevante de $N(v)$, entonces la actuación (8.23) será despreciable frente a la de $\hat{\Omega}^2$ sobre $(\mathcal{G}|$. En conclusión, es posible ignorar la acción del término de interacción en la ligadura hamiltoniana del modelo de Gowdy híbrido sobre los estados con proyecciones homogéneas de perfiles (8.4) si estos satisfacen la condición $\bar{\Lambda}(v) \gg \max(1, q_\varepsilon^2/\sigma_s^2)$, para todos los valores de v en el soporte relevante de los mismos (donde \max indica el máximo). De forma complementaria, puede comprobarse que tanto el valor esperado como la dispersión de $e^{-2\Lambda}\hat{\Omega}^2$ son despreciables en los perfiles que satisfacen las condiciones expuestas [199].

8.2.3. Aproximaciones en el término libre

Queda una última aproximación que puede hacerse cuando se considera la acción de la ligadura hamiltoniana $\hat{\mathcal{C}}_G$ sobre los estados con proyección homogénea ($\mathcal{G}|$ caracterizada por perfiles (8.4). Dicha aproximación involucra el término que contiene la contribución de campo libre de las inhomogeneidades, es decir, $e^{2\bar{\Lambda}}\hat{H}_0$ (salvo constantes). La idea es restringir los perfiles gaussianos de $g(v, \Lambda)$ de forma tal que estén muy picados en $\bar{\Lambda}(v)$, esto es, requerir que su anchura q_ε/σ_s sea mucho menor que la unidad. Si esto es así, entonces:

$$(\mathcal{G}|e^{2\bar{\Lambda}}|v, \Lambda) \simeq (\mathcal{G}|e^{2\bar{\Lambda}(\hat{v})}|v, \Lambda), \quad (8.25)$$

donde $\bar{\Lambda}(\hat{v})$ es el operador, definido a través del teorema espectral, tal que $\bar{\Lambda}(\hat{v})|v\rangle = \bar{\Lambda}(v)|v\rangle$. En efecto, el soporte de una gaussiana es aproximadamente su anchura, y en nuestro caso este soporte se corresponde con valores de Λ tales que $|\Lambda - \bar{\Lambda}(v)| \leq q_\varepsilon/\sigma_s$. Por lo tanto, las contribuciones no despreciables de la acción de $e^{2\bar{\Lambda}}$ sobre estos estados tomarán los valores:

$$e^{2\Lambda} = e^{2\bar{\Lambda}(v) + 2\alpha \frac{q_\varepsilon}{\sigma_s}}, \quad \alpha \in [-1, 1]. \quad (8.26)$$

Así, si $q_\varepsilon/\sigma_s \ll 1$, estos valores serán iguales a los que contribuirían a la acción del operador $\exp[2\bar{\Lambda}(\hat{v})]$ sobre el estado considerado (término a término en su descomposición espectral). Hacemos notar que esta aproximación es consistente con la correspondiente a despreciar la acción del término de anisotropía si y solo si los parámetros que caracterizan la anchura de nuestros perfiles satisfacen $q_\varepsilon \ll \sigma_s \ll 1$. Concluiremos esta sección resaltando que, de acuerdo con los resultados alcanzados, al considerar estados con perfiles para la anisotropía muy picados en una cierta función del volumen, se consigue «imitar» una contribución en la ligadura hamiltoniana que viene dada precisamente por dicha función, en el sentido de (8.25).

8.3. Soluciones de la ligadura hamiltoniana: simulación de fluidos perfectos

En la sección anterior hemos demostrado que la ligadura hamiltoniana $\hat{\mathcal{C}}_G$ dada en (8.1) puede aproximarse por el operador:

$$\hat{\mathcal{C}}'_{\text{app}} = \hat{\mathcal{C}}_{\text{FLRW}} + \frac{2\pi G}{\beta} e^{2\bar{\Lambda}(\hat{v})} \hat{H}_0 = -\frac{3\pi G}{8} \hat{\Omega}^2 + \frac{\hat{p}_\phi^2}{2} + \frac{2\pi G}{\beta} e^{2\bar{\Lambda}(\hat{v})} \hat{H}_0 \quad (8.27)$$

cuando se considera su actuación sobre estados cuánticos pertenecientes al dual del subespacio denso $\mathcal{S}_G^\varepsilon$ cuya proyección gravitatoria homogénea viene dada por:

$$(\mathcal{G}| = \sum_{v \in \mathcal{L}_\varepsilon^+} \sum_{\Lambda \in \mathcal{L}_{\Lambda'}^{q_\varepsilon}} g(v, \Lambda) \langle v, \Lambda |, \quad (8.28)$$

con $g(v, \Lambda)$ definida en (8.4), siempre que se satisfagan las siguientes condiciones [199]:

- i) la función no gaussiana $N(v)$ en los perfiles $g(v, \Lambda)$ ha de estar muy suprimida para $v \lesssim v_m$, donde v_m es un cierto elemento de la semirred $\mathcal{L}_\varepsilon^+$ que es mucho mayor que 10;
- ii) $\bar{\Lambda}(v) \gg 1$ para todo v en el soporte relevante de $N(v)$;
- iii) $q_\varepsilon \ll \sigma_s \ll 1$.

En lo que sigue, buscaremos soluciones de esta ligadura aproximada que sean, al mismo tiempo, estados físicos aproximados de la cosmología de Gowdy completa.

8.3.1. Construcción de las soluciones

Procedemos a resolver la ligadura (8.27) para estados:

$$(\psi| = \int_{-\infty}^{\infty} dp_\phi \sum_{v \in \mathcal{L}_\varepsilon^+} \sum_{\Lambda \in \mathcal{L}_{\Lambda^*}^{q_\varepsilon}} \sum_{\mathbf{n}^g, \mathbf{n}^s} \psi(p_\phi, v, \Lambda, \mathbf{n}^g, \mathbf{n}^s) \langle p_\phi, v, \Lambda, \mathbf{n}^g, \mathbf{n}^s | \quad (8.29)$$

con función de onda:

$$\psi(p_\phi, v, \Lambda, \mathbf{n}^g, \mathbf{n}^s) = f(v, \Lambda) N(v, p_\phi, \mathbf{n}^g, \mathbf{n}^s), \quad (8.30)$$

donde $f(v, \Lambda)$ es un perfil gaussiano de la forma (8.4). Hemos incluido en $N(v)$, de forma genérica, la dependencia de la función de onda en p_ϕ y en los números de ocupación \mathbf{n}^g y \mathbf{n}^s . Dicha dependencia determina la contribución, en los estados físicos buscados, de los autovalores del momento del modo cero del campo escalar ϕ y del operador (diagonal en los estados de Fock de n partículas) \hat{H}_0 . Estos últimos autovalores vienen dados por:

$$H_0(\mathbf{n}^g, \mathbf{n}^s) = \sum_{m \in \mathbb{Z} - \{0\}} |m| (n_m^g + n_m^s). \quad (8.31)$$

Además, la elección de esta función $N(v, p_\phi, \mathbf{n}^g, \mathbf{n}^s)$ ha de ser tal que el contenido de inhomogeneidades se pueda controlar, con el fin de poder garantizar la consistencia de despreciar el término de interacción en la ligadura de Gowdy, y asimismo ha de satisfacer la ligadura de momentos (3.75).

Ahora bien, al tenerse que tanto \hat{p}_ϕ como \hat{H}_0 conmutan con este operador de ligadura aproximada, y que por ello p_ϕ y H_0 son observables de Dirac de la misma, el resolver $(\psi|\hat{C}'_{\text{app}} = 0$ sobre los estados introducidos es equivalente a resolver $(\psi|\hat{C}_{\text{app}}^\dagger = 0$ en cada autoespacio de estos dos observables \hat{p}_ϕ y \hat{H}_0 , donde \hat{C}_{app} es el operador:

$$\hat{C}_{\text{app}} = -\frac{3\pi G}{8} \hat{\Omega}^2 + \frac{p_\phi^2}{2} + \frac{2\pi G}{\beta} e^{2\bar{\Lambda}(\hat{v})} H_0(\mathbf{n}^g, \mathbf{n}^s). \quad (8.32)$$

Este operador de ligadura únicamente actúa sobre el sector homogéneo e isótropo del espacio de Hilbert $\mathcal{H}_G^\varepsilon$, que coincide con el de un modelo de tipo FLRW. Sin embargo, resulta conveniente enfatizar que a cada estado $(\psi|$ le corresponde una colección de operadores \hat{C}_{app} , ya que este operador depende de $\exp[2\bar{\Lambda}(\hat{v})]$ (además de p_ϕ y H_0). Está claro entonces que,

para cada valor del momento del campo escalar y de los números de ocupación de Fock, la ecuación de ligadura ($\psi|\hat{C}_{\text{app}}^\dagger = 0$ se reduce a:

$$(\psi|\hat{\Omega}^2|v, \Lambda) = \left[\frac{4p_\phi^2}{3\pi G} + \frac{16}{3\beta} e^{2\Lambda} H_0(\mathbf{n}^g, \mathbf{n}^s) \right] f(v, \Lambda) N(v, p_\phi, \mathbf{n}^g, \mathbf{n}^s). \quad (8.33)$$

Dentro del conjunto de soluciones a esta ecuación, el interés de este capítulo está puesto en las que verifiquen las condiciones i, ii y iii, expuestas anteriormente. En caso contrario, no proporcionarían estados físicos aproximados del modelo de Gowdy completo. La condición iii se puede fijar *a priori*. En cuanto a los requisitos i y ii, su cumplimiento queda garantizado si se elige el pico de la gaussiana $\bar{\Lambda}(v)$ como sigue:

$$\bar{\Lambda}(v) = \begin{cases} \bar{\Lambda}_0, & \text{si } v \leq v_0, \\ h(v), & \text{si } v > v_0, \end{cases} \quad (8.34)$$

para un cierto $v_0 \geq v_m$, tal que $h(v) \gg 1 \gg q_\varepsilon^2/\sigma_s^2$ para todos los volúmenes $v > v_0$ y con $\bar{\Lambda}_0 = h(v_0) \gg 1 \gg q_\varepsilon^2/\sigma_s^2$. Supondremos además que la función $h(v)$ varía de forma suficientemente suave como para poder aproximar $h(v \pm 4) \simeq h(v)$ en el régimen $v_0 \geq v_m$. Si se eligen así los estados, para $v \leq v_0$ se tiene que $\bar{\Lambda}_0$ es una constante y por tanto $f(v, \Lambda) = f(\Lambda)$. No es difícil ver entonces, como ya se estudió en la referencia [60], que la ecuación de ligadura (8.33) se reduce a una ecuación de autovalores para el operador $\hat{\Omega}^2$ de FLRW, dados por:

$$\rho^2(p_\phi, \bar{\Lambda}_0, H_0) = \frac{4}{3\pi G} p_\phi^2 + \frac{16}{3\beta} e^{2\bar{\Lambda}_0} H_0(\mathbf{n}^g, \mathbf{n}^s). \quad (8.35)$$

Por lo tanto, para todo $v \leq v_0$ las soluciones son:

$$N(v, p_\phi, \mathbf{n}^g, \mathbf{n}^s) = e^{\varepsilon_{\rho(p_\phi, \bar{\Lambda}_0, H_0)}(v)} \chi(p_\phi, \mathbf{n}^g, \mathbf{n}^s), \quad (8.36)$$

donde recuérdese que $e^{\varepsilon_\rho(v)}$ es la función de onda en la representación v del autoestado de $\hat{\Omega}^2$ con autovalor ρ^2 . Así, queda patente que la condición i se satisface para estos estados si, por ejemplo, se restringe la función $\chi(p_\phi, \mathbf{n}^g, \mathbf{n}^s)$ de manera que tenga soporte únicamente en una región con $p_\phi > p_\phi^m$, que puede elegirse tal que $p_\phi^m \gg \sqrt{75\pi G}$. La validez de esta afirmación se sigue de la positividad del último término en (8.35). En efecto, en ese caso, las soluciones solo tendrán contribuciones significativas para:

$$\rho \geq \frac{2}{\sqrt{3\pi G}} p_\phi > \frac{2}{\sqrt{3\pi G}} p_\phi^m = \rho_m \gg 10, \quad (8.37)$$

y por tanto estarán exponencialmente suprimidas para $v \lesssim v_m$, donde $v_m = \rho_m/2$. De esta forma, la escala v_m queda definida de una manera intrínseca, en términos de la cantidad conservada dada por el momento del campo escalar homogéneo. Por otra parte, para $v > v_0$ y teniendo en cuenta que $\bar{\Lambda}(v \pm 4) \simeq \bar{\Lambda}(v)$ en esa región, la ecuación de ligadura se reduce a:

$$N(v+4) = \frac{1}{y_{++}(v)} \left[2v^2 - \frac{4p_\phi^2}{3\pi G^2} - \frac{16}{3\beta} e^{2\bar{\Lambda}(v)} H_0(\mathbf{n}^g, \mathbf{n}^s) \right] N(v) - \frac{y_{--}(v)}{y_{++}(v)} N(v-4), \quad (8.38)$$

donde omitimos la dependencia de N en p_ϕ , \mathbf{n}^g y \mathbf{n}^s . Esta ecuación en diferencias finitas proporciona, de una forma determinista, el resto de la solución, una vez se le proporcionan los datos iniciales $N(v_0 - 4) = e^{\varepsilon}_{\rho(p_\phi, \bar{\Lambda}_0, \mathbf{n}^\varepsilon, \mathbf{n}^\varphi)}(v_0 - 4)$ y $N(v_0) = e^{\varepsilon}_{\rho(p_\phi, \bar{\Lambda}_0, \mathbf{n}^\varepsilon, \mathbf{n}^\varphi)}(v_0)$. Destacamos, sin embargo, que la solución completa únicamente depende del valor inicial cuando $v = \varepsilon$, gracias a las propiedades del operador $\hat{\Omega}^2$ que, en particular, garantizan que $e^{\varepsilon}_\rho(v)$ está determinado, para todo v , por su valor en el volumen indicado, $v = \varepsilon$. [95]. Merece la pena recalcar que, durante el periodo de la evolución donde $v > v_0$, estas soluciones aproximadas de la ligadura \hat{C}_{app} (que son simultáneamente soluciones aproximadas a la ligadura \hat{C}_G del modelo de Gowdy completo) permanecen picadas en $h(v)$. Esto se sigue de que, a orden dominante según las aproximaciones realizadas, la ecuación de ligadura (8.38), $\forall v > v_0$, fija únicamente el valor de $N(v, p_\phi, \mathbf{n}^\varepsilon, \mathbf{n}^\varphi)$, de forma tal que los estados que estamos considerando sean, en efecto, soluciones.

8.3.2. Comportamientos efectivos de tipo «fluido perfecto»

A la vista de las condiciones que la validez de las aproximaciones requieren sobre la función $\bar{\Lambda}(v)$, o equivalentemente sobre $h(v)$, discutiremos cómo se puede elegir este pico gaussiano de manera tal que las soluciones construidas del modelo de Gowdy híbrido se comporten (de forma efectiva y en lo que concierne a la ligadura hamiltoniana) como si fueran soluciones de un modelo de FLRW plano acoplado a fluidos perfectos con ecuaciones de estado del tipo $P = w\epsilon$, donde P y ϵ denotan, respectivamente, la presión y la densidad de energía del fluido. El parámetro adiabático w determina la constante de proporcionalidad entre estas magnitudes termodinámicas. La ligadura hamiltoniana densitizada de una cosmología de este estilo, dentro del formalismo de CCL, adopta la expresión:

$$\hat{C}_{\text{FLRW+FP}} = -\frac{3\pi G}{8}\hat{\Omega}^2 + \frac{\hat{p}_\phi^2}{2} + \sum_w \alpha(1-w)\hat{v}^{1-w}, \quad (8.39)$$

donde α es una constante relacionada con β , mientras que w toma tantos valores como fluidos perfectos haya presentes en el universo descrito. Para convencerse de la validez de esta expresión, basta con tener en cuenta que la contribución material que un campo escalar homogéneo ϕ con potencial $V(\phi)$ aporta a la ligadura de un modelo de FLRW es:

$$\frac{p_\phi^2}{2} + V(\phi)a^6, \quad (8.40)$$

donde el factor de escala a es proporcional a $v^{1/3}$. Entonces, un fluido perfecto puede simularse tomando $V(\phi) = (\epsilon - P)/2$, donde $\epsilon \propto a^{-3(1+w)}$ (véase por ejemplo la referencia [202]).

Por otra parte, recordemos que los estados construidos en esta sección se corresponden con soluciones de la ligadura aproximada:

$$\hat{C}'_{\text{app}} = -\frac{3\pi G}{8}\hat{\Omega}^2 + \frac{\hat{p}_\phi^2}{2} + \frac{2\pi G}{\beta}e^{2\bar{\Lambda}(\hat{v})}\hat{H}_0. \quad (8.41)$$

Si se comparan ambos operadores de ligadura, se concluye fácilmente que los estados físicos aproximados de Gowdy aquí analizados imitan un contenido de varios fluidos perfectos en

un universo homogéneo e isótropo si se elige:

$$\bar{\Lambda}(v) = \begin{cases} \sum_w \ln \left[v_0^{(1-w)/2} \right], & \text{si } v \leq v_0, \\ \sum_w \ln \left[v^{(1-w)/2} \right], & \text{si } v > v_0, \end{cases} \quad (8.42)$$

salvo una posible constante aditiva y con $v_0 \gg \exp\{2/(1-w)\}$. Destacamos que, siempre que se restrinja toda la discusión a parámetros $w < 1$, la función $\bar{\Lambda}(v)$ así definida satisface los requisitos impuestos por la ecuación (8.34), que son necesarios para garantizar la validez de las aproximaciones realizadas. El caso en que $w = 1$ en la ligadura (8.39) se corresponde con el contenido material que aporta un campo escalar sin masa, que fue estudiado en la referencia [60]. Dicha situación se puede alcanzar aquí si se elige la función $\bar{\Lambda}(v)$ igual a una constante (independiente de v) y si se considera que el producto $\alpha(1-w)$ en (8.39) es un parámetro que varía con w de tal forma que tiene un límite bien definido cuando $w \rightarrow 1$, límite que no tiene por qué anularse.

Así concluye nuestra demostración de que soluciones inhomogéneas y anisótropas del modelo de Gowdy pueden comportarse de forma efectiva como estados físicos (en lo que a la ligadura hamiltoniana respecta) de universos de tipo FLRW planos acoplados a fluidos perfectos. Tienen particular interés los comportamientos permitidos de tipo polvo, radiación y constante cosmológica, ya que contenidos «materiales» de este estilo describen, en un buen grado de aproximación, el comportamiento dinámico de nuestro Universo en diferentes etapas de su evolución [67, 202]. Estos tres escenarios se obtienen, simplemente, fijando los valores del parámetro adiabático w en la relación (8.42) como $w = 0$, $w = 1/3$ y/o $w = -1$, respectivamente. Resaltamos que las descripciones efectivas con acoplo a varios fluidos perfectos con $w < 1$ empiezan una vez se alcanza el volumen v_0 , mientras que se tiene de forma efectiva $w = 1$ para valores menores de v . La fase con comportamiento de fluidos perfectos se mantiene entonces de forma indefinida para $v > v_0$, por la propia construcción de los estados considerados.

8.4. Aproximaciones a la ligadura hamiltoniana: cosmologías de FLRW modificadas

En esta sección generalizaremos la consideración de estados $(\psi|$ sobre los que la ligadura hamiltoniana $\hat{\mathcal{C}}_G$ pueda aproximarse por $\hat{\mathcal{C}}_{\text{FLRW}+\text{FP}}$. En efecto, analizaremos las propiedades que deben tener los estados $(\psi|$ para que la ligadura $\hat{\mathcal{C}}_G$ se reduzca a una de tipo FLRW pero, de forma más general, con posibles correcciones de curvatura, además de contenidos materiales de tipo fluido perfecto. Para ello, consideraremos estados duales a $\mathcal{S}_G^\varepsilon$ cuya proyección en el sector gravitatorio homogéneo adopta la expresión:

$$|\mathcal{G}\rangle = \sum_{\Lambda_\varepsilon \in \mathcal{W}_\varepsilon} \int_{\text{Sp}(\omega)} d\omega g(\omega, \Lambda^\star + \Lambda_\varepsilon) \langle \omega, \Lambda^\star + \Lambda_\varepsilon |, \quad (8.43)$$

con perfiles de la forma:

$$g(\omega, \Lambda) = N(\omega) f(\omega, \Lambda), \quad f(\omega, \Lambda) = e^{-\frac{\sigma_s^2}{2\sigma_\varepsilon^2} [\Lambda - \bar{\Lambda}(\omega)]^2}. \quad (8.44)$$

Aquí, el parámetro q_ε de la anchura gaussiana está fijado como en la ecuación (8.5), esto es, $q_\varepsilon = \ln(1 + 2/v_m)$, siendo $v_m \in \mathcal{L}_\varepsilon^+$ cierto valor de la variable de volumen tal que $v_m \gg 10$. Además, σ_s es un parámetro, arbitrario en principio, que completa la caracterización de la anchura de la función gaussiana $f(\omega, \Lambda)$, mientras que $\text{Spc}(\omega)$ denota el espectro de cierto operador $\hat{\omega}$ definido sobre el sector geométrico homogéneo e isótropo del espacio de Hilbert $\mathcal{H}_G^\varepsilon$ (es decir, sobre el subespacio generado por los estados $|v \in \mathcal{L}_\varepsilon^+\rangle$). Consideraremos que $\hat{\omega}$ es (esencialmente) autoadjunto, y permitiremos que su espectro pueda ser continuo, discreto, o incluso una mezcla de ambos. Escribiremos formalmente la resolución espectral de la identidad proporcionada por este operador como $\mathbb{I} = \int_{\text{Spc}(\omega)} d\omega |\omega\rangle\langle\omega|$. Está claro que, como un ejemplo particular, se puede considerar $\hat{\omega} = \hat{v}$, en cuyo caso se recupera el análisis de fluidos perfectos expuesto anteriormente. Por otra parte, con vistas a garantizar la validez de las aproximaciones que introduciremos a continuación, asumiremos por el momento que el perfil del estado en la representación ρ asociada con el espectro del operador $\hat{\Omega}^2$:

$$g(\rho, \Lambda) = \int_{\text{Spc}(\omega)} d\omega g(\omega, \Lambda) e_\omega^\varepsilon(\rho), \quad (8.45)$$

está muy suprimido en la región con $\rho \lesssim \rho_m = 2v_m$. Aquí, $e_\omega^\varepsilon(\rho)$ designa la función de onda del estado $|\omega\rangle$ en la representación ρ , es decir $e_\omega^\varepsilon(\rho) = \langle e_\rho^\varepsilon | \omega \rangle$. Hacemos notar que, debido a la supresión exponencial ya discutida de $e_\rho^\varepsilon(v)$ en la región $v \lesssim \rho/2$, un perfil $g(\rho, \Lambda)$ muy suprimido para $\rho \lesssim \rho_m$ implica que la correspondiente función de onda en la representación v :

$$g(v, \Lambda) = \int_0^\infty d\rho g(\rho, \Lambda) e_\rho^\varepsilon(v) \quad (8.46)$$

está muy suprimida para $v \lesssim v_m$.

En lo que sigue, analizaremos bajo qué condiciones se pueden llevar a cabo una serie de aproximaciones, análogas a las consideradas en la sección 8.2, sobre la acción del operador de ligadura en estados con perfiles homogéneos caracterizados por (8.44).

8.4.1. Generalización de las aproximaciones en el término de anisotropía

Como ya se indicó en la subsección 8.2.1, el tratamiento del operador de anisotropía $\hat{\Omega}\hat{\Theta} + \hat{\Theta}\hat{\Omega}$ se simplifica enormemente si se recuerda que, gracias a la asumida supresión de los perfiles que caracterizan la proyección homogénea (\mathcal{G}) para $v \lesssim v_m$, las únicas traslaciones en Λ relevantes en su actuación sobre ellos no son mayores que q_ε . Al estar considerándose otra vez perfiles gaussianos del tipo (8.44), está claro que, si se cumple $\sigma_s \ll 1$, la función $g(\omega, \Lambda)$ podrá extenderse (desde el sector de superselección de la anisotropía) a una función suave de Λ en la recta real tal que, para variaciones $\Lambda_0 \leq q_\varepsilon$:

$$g(\omega, \Lambda + \Lambda_0) \simeq g(\omega, \Lambda) + \Lambda_0 \partial_\Lambda g(\omega, \Lambda), \quad (8.47)$$

para todo ω en el soporte de $g(\omega, \Lambda)$. Si se considera la representación v de estos perfiles, el cumplimiento de esta condición implica a su vez que $g(v, \Lambda + \Lambda_0) \simeq g(v, \Lambda) + \Lambda_0 \partial_\Lambda g(v, \Lambda)$

para todo v . Se sigue inmediatamente la validez de los cálculos expuestos en la subsección 8.2.1, por lo que el operador $\hat{\Omega}\hat{\Theta} + \hat{\Theta}\hat{\Omega}$ sobre los estados $(\mathcal{G}|$ de interés se factoriza aproximadamente como $-2\hat{\Omega}\hat{\Theta}'$. Recordamos que la acción de $\hat{\Omega}$ sobre $|v\rangle$ venía dada por (8.13), mientras que $\hat{\Theta}'$ era la derivada discretizada (8.14). Restringiremos de nuevo toda la atención a subespacios lineal de $\mathcal{S}_{\mathcal{G}}^{\varepsilon}$ generados, en lo que concierne a la anisotropía, por estados $|\Lambda\rangle$ con soporte en cualquiera de las semirredes $\mathcal{L}_{\Lambda}^{q_{\varepsilon}}$, de paso constante, que son invariantes bajo la acción de $\hat{\Theta}'$.

Los estados duales considerados están de nuevo centrados en un momento nulo de la variable de anisotropía Λ , medido por el operador $\hat{\Theta}'$. Por tanto, es de esperar que, sobre $(\mathcal{G}|$, el operador de anisotropía aproximado $-2\hat{\Omega}\hat{\Theta}'$ se pueda despreciar otra vez frente a $\hat{\Omega}^2$ en la ligadura de Gowdy. En efecto, se tiene de nuevo la acción (8.16) de $2\hat{\Omega}\hat{\Theta}'$, donde en este caso los perfiles gaussianos (8.44) garantizan que [200]:

$$\begin{aligned} & g(v \pm 4, \Lambda + q_{\varepsilon}) - g(v \pm 4, \Lambda - q_{\varepsilon}) \\ &= -2e^{-\frac{\sigma_s^2}{2}} \int_{\text{SpC}(\omega)} d\omega g(\omega, \Lambda) e_{\omega}^{\varepsilon}(v \pm 4) \sinh\left(\frac{\sigma_s^2}{q_{\varepsilon}}[\Lambda - \bar{\Lambda}(\omega)]\right). \end{aligned} \quad (8.48)$$

Aquí, $e_{\omega}^{\varepsilon}(v) = \langle v|\omega\rangle$ denota la función de onda del estado $|\omega\rangle$ en la representación v . Al ser una gaussiana, la función $g(\omega, \Lambda)$ únicamente contribuye cuando $\sigma_s[\Lambda - \bar{\Lambda}(\omega)]/q_{\varepsilon}$ es del orden de la unidad o inferior. Por lo tanto, de nuevo está justificada la aproximación (8.18). A partir de aquí puede seguirse exactamente el mismo argumento empleado en la subsección 8.2.1 para concluir que el operador $\hat{\Omega}\hat{\Theta} + \hat{\Theta}\hat{\Omega}$ de anisotropía de Bianchi I, sobre los estados con proyección homogénea $(\mathcal{G}|$ caracterizada por perfiles (8.44), puede despreciarse en comparación con $\hat{\Omega}^2$ en la ligadura de Gowdy si se satisface la condición $\sigma_s \ll 1$ y si $g(\rho, \Lambda)$ está muy suprimida para $\rho \lesssim \rho_m$.

8.4.2. Generalización de las aproximaciones en el término de interacción

Respecto al término de interacción $e^{-2\Lambda}\hat{D}\hat{\Omega}^2\hat{D}\hat{H}_I$ en la ligadura hamiltoniana híbrida de Gowdy, está claro de nuevo que las únicas contribuciones relevantes de la acción de \hat{D} sobre estados duales con perfiles homogéneos (8.44) son iguales a uno, ya que estas funciones están muy suprimidas en el régimen en el que las regularizaciones del inverso del volumen desempeñan un papel relevante. Por tanto, está justificado aplicar la aproximación (8.22). Por otra parte, la acción de $e^{-2\Lambda}\hat{\Omega}^2$ sobre $(\mathcal{G}|$ viene dada por [200]:

$$\langle \mathcal{G}|e^{-2\Lambda}\hat{\Omega}^2|\omega, \Lambda\rangle = \int_{\text{SpC}(\omega)} d\tilde{\omega} N(\tilde{\omega}) e^{-\frac{\sigma_s^2}{2q_{\varepsilon}^2}\left[\Lambda - \bar{\Lambda}(\tilde{\omega}) + \frac{2q_{\varepsilon}^2}{\sigma_s^2}\right]^2} e^{-2\Lambda(\tilde{\omega}) + \frac{2q_{\varepsilon}^2}{\sigma_s^2}} \langle \tilde{\omega}|\hat{\Omega}^2|\omega\rangle. \quad (8.49)$$

La primera exponencial del lado derecho está acotada superiormente por la unidad. Además, la acción de $\hat{\Omega}^2$ sobre los estados $|v\rangle$ es $\mathcal{O}(v^2)$ [véase (8.20)]. Por ello, siguiendo un argumento análogo al expuesto en la subsección 8.2.2, puede concluirse que es legítimo ignorar la acción del término de interacción en la ligadura hamiltoniana del modelo de Gowdy sobre los estados con perfiles (8.44) si estos satisfacen la condición $\bar{\Lambda}(\omega) \gg \max(1, q_{\varepsilon}^2/\sigma_s^2)$, para todos los

valores de ω en el soporte de los mismos. Por supuesto, para que esta afirmación sea cierta, el contenido de inhomogeneidades en dichos estados ha de ser controlable.

8.4.3. Generalización de las aproximaciones en el término libre

De nuevo puede llevarse a cabo una última aproximación en el término de campo libre $e^{2\Lambda}\hat{H}_0$ de la ligadura \hat{C}_G , cuando se consideran estados duales con perfiles homogéneos (8.44). Un razonamiento idéntico al descrito en la subsección 8.2.3 muestra que si se restringen las funciones gaussianas en $g(\omega, \Lambda)$ de tal forma que estén muy picadas en $\bar{\Lambda}(\omega)$, es decir, si $q_\varepsilon/\sigma_s \ll 1$, entonces la aproximación:

$$(\mathcal{G}|e^{2\Lambda}|\omega, \Lambda) \simeq (\mathcal{G}|e^{2\bar{\Lambda}(\omega)}|\omega, \Lambda) \quad (8.50)$$

es válida, donde $\bar{\Lambda}(\omega)$ está construido a través del teorema espectral. Además vuelve a ser consistente con la aproximación de despreciar la acción del término de anisotropía si los parámetros que caracterizan la anchura de los perfiles gaussianos satisfacen $q_\varepsilon \ll \sigma_s \ll 1$. Esta vez, al restringir la atención a funciones de onda para la variable de anisotropía muy picadas en cierto operador de la geometría homogénea e isotrópica, estamos mimetizando una contribución en la ligadura hamiltoniana que viene dada precisamente por ese operador, como aparece en (8.50) [200].

8.5. Soluciones de la ligadura hamiltoniana: cosmologías de FLRW modificadas

Nuestra discusión anterior muestra que la ligadura hamiltoniana de Gowdy \hat{C}_G puede aproximarse por el operador:

$$\hat{C}'_{\text{app}} = \hat{C}_{\text{FLRW}} + \frac{2\pi G}{\beta} e^{2\bar{\Lambda}(\omega)} \hat{H}_0 = -\frac{3\pi G}{8} \hat{\Omega}^2 + \frac{\hat{p}_\phi^2}{2} + \frac{2\pi G}{\beta} e^{2\bar{\Lambda}(\omega)} \hat{H}_0 \quad (8.51)$$

cuando actúa sobre estados cuánticos duales cuya proyección gravitatoria homogénea está dada por:

$$(\mathcal{G}| = \sum_{\Lambda \in \mathcal{L}_\Lambda^{q_\varepsilon}} \int_{\text{SpC}(\omega)} d\omega g(\omega, \Lambda) \langle \omega, \Lambda |, \quad (8.52)$$

con $g(\omega, \Lambda)$ definida en (8.44), y tal que se satisfacen las siguientes condiciones [200]:

- I) en la representación ρ asociada al operador $\hat{\Omega}^2$, la función $g(\rho, \Lambda)$ resulta estar muy suprimida para $\rho \lesssim \rho_m$, con $\rho_m \gg 10$. En particular, esto implica que $g(v, \Lambda)$ está muy suprimida para $v \lesssim v_m = \rho_m/2$;
- II) $\bar{\Lambda}(\omega) \gg 1$ para todo ω en el soporte de $N(\omega)$;
- III) $q_\varepsilon \ll \sigma_s \ll 1$.

En el resto de esta sección, construiremos soluciones de esta ligadura aproximada que proporcionen, simultáneamente, estados físicos aproximados de la cosmología de Gowdy híbrida completa.

8.5.1. Construcción de las nuevas soluciones

Comenzaremos considerando estados duales a $\mathcal{S}_G^\varepsilon$:

$$(\psi| = \int_{-\infty}^{\infty} dp_\phi \int_{\text{Sp}(\omega)} d\omega \sum_{\Lambda \in \mathcal{L}_\Lambda^{\varepsilon}} \sum_{\mathbf{n}^g, \mathbf{n}^s} \psi(p_\phi, \omega, \Lambda, \mathbf{n}^g, \mathbf{n}^s) \langle p_\phi, \omega, \Lambda, \mathbf{n}^g, \mathbf{n}^s | \quad (8.53)$$

con una función de onda de la forma $\psi(p_\phi, \omega, \Lambda, \mathbf{n}^g, \mathbf{n}^s) = f(\omega, \Lambda)N(\omega, p_\phi, \mathbf{n}^g, \mathbf{n}^s)$, donde $f(\omega, \Lambda)$ está dada en (8.44) y satisface, por construcción, la condición III anterior. Recordemos que los conjuntos de números de ocupación \mathbf{n}^g y \mathbf{n}^s determinan al autovalor de \hat{H}_0 dado en (8.31). Hemos vuelto a incluir en $N(\omega)$ la dependencia de la función de onda en p_ϕ y en estos números de ocupación. Esta función $N(\omega, p_\phi, \mathbf{n}^g, \mathbf{n}^s)$ debe escogerse de manera tal que el contenido de inhomogeneidades sea pequeño, para que la aproximación llevada a cabo en la subsección 8.4.2 pueda ser consistente. Además, debe satisfacer la ligadura de momentos (3.75).

Una vez más, \hat{p}_ϕ y \hat{H}_0 conmutan con el operador de ligadura aproximada (8.51), por lo que resolverla con los estados duales introducidos es equivalente a aniquilarlos con la siguiente ligadura, en cada autoespacio de estos dos observables \hat{p}_ϕ y \hat{H}_0 :

$$\hat{\mathcal{C}}_{\text{app}} = -\frac{3\pi G}{8}\hat{\Omega}^2 + \frac{p_\phi^2}{2} + \frac{2\pi G}{\beta}e^{2\bar{\Lambda}(\hat{\omega})}H_0. \quad (8.54)$$

Este operador de ligadura está bien definido en el subespacio lineal de $\mathcal{S}_G^\varepsilon$ generado por $|v \in \mathcal{L}_\varepsilon^+\rangle$. No obstante, recalamos de nuevo que, a cada estado $(\psi|$, le corresponde una colección de operadores $\hat{\mathcal{C}}_{\text{app}}$, ya que éstos dependen de $\exp[2\bar{\Lambda}(\hat{\omega})]$. Si se desea que las soluciones buscadas para $(\psi|\hat{\mathcal{C}}_{\text{app}}^\dagger = 0$ sean, además, estados físicos del universo de Gowdy híbrido, han de satisfacer las condiciones I y II que garantizan la validez de las aproximaciones llevadas a cabo en la sección anterior. Para conseguirlo, restringiremos todo el estudio a aquellos perfiles con un pico gaussiano $\bar{\Lambda}(\omega)$ tal que el operador resultante $\bar{\Lambda}(\hat{\omega})$ en (8.54) quede definido de la siguiente forma:

$$\bar{\Lambda}(\hat{\omega}) = \begin{cases} \bar{\Lambda}_0, & \text{si } v < v_0, \\ \bar{\Lambda}(\hat{\omega}_0), & \text{si } v \geq v_0, \end{cases} \quad (8.55)$$

para cierto $v_0 \geq v_m$. Aquí, $\bar{\Lambda}_0$ es una constante y $\hat{\omega}_0$ es la restricción (vía proyección) de $\hat{\omega}$ al sector gravitatorio homogéneo e isótropo de $\mathcal{S}_G^\varepsilon$ con $v \geq v_0$. Concretamente, $\hat{\omega}_0 = \hat{P}\hat{\omega}\hat{P}$, donde \hat{P} es el proyector sobre el subespacio $\mathcal{H}_\varepsilon^p$ generado por los estados $|v\rangle$ para los que $v \in \mathcal{L}_\varepsilon^p = \mathcal{L}_\varepsilon^+ \cap \{v \geq v_0\}$. Hacemos notar que v_0 no tiene por qué pertenecer en este caso a la semirred $\mathcal{L}_\varepsilon^+$ considerada. Para futuras discusiones, designaremos por v_1 el extremo inferior de $\mathcal{L}_\varepsilon^p$, que satisface $v_0 \leq v_1 < v_0 + 4$. En particular, centraremos toda nuestra atención en operadores $\hat{\omega}$ tales que:

$$e^{2\bar{\Lambda}(\hat{\omega}_0)} = e^{2h(\hat{v})} + \hat{O}_p, \quad (8.56)$$

donde la función $h(v)$ varía de una forma lo suficientemente suave como para poder hacer la aproximación $h(v \pm 4) \simeq h(v)$ en la región $v \geq v_0$. Además, tomaremos \hat{O}_p como un operador

positivo (y por tanto autoadjunto) definido en el subespacio $\mathcal{H}_\varepsilon^p$, cuya actuación sobre su base de estados $|v\rangle$ tiene la estructura cuasilocal:

$$\hat{O}_p|v\rangle = \sum_{k=0}^K [f_k^+(v)|v+4k\rangle + f_k^-(v)|v-4k\rangle], \quad K < \infty. \quad (8.57)$$

Aquí, $f_0^+ = f_0^- = f_0$ y $f_k^-(v) = 0$ si $v - 4k < v_0$, para que \hat{O}_p esté definido exclusivamente sobre el sector $v \geq v_0$, como habíamos dicho. Supondremos, además, que $f_k^+(v)$ es estrictamente positiva para $v \geq v_0$.

La ecuación de ligadura ($\psi|\hat{\mathcal{C}}_{\text{app}}^\dagger = 0$ para los estados (8.53) considerados se puede escribir como:

$$\int_{\text{Spc}(\omega)} d\tilde{\omega} N(\tilde{\omega}, p_\phi, \mathbf{n}^g, \mathbf{n}^s) \langle \tilde{\omega} | e^{-\frac{\sigma_s^2}{2q_\varepsilon^2} [\Lambda - \bar{\Lambda}(\tilde{\omega})]^2} \hat{\mathcal{C}}_{\text{app}} | \omega \rangle = 0. \quad (8.58)$$

Sea el operador:

$$\left[e^{\frac{\sigma_s^2}{2q_\varepsilon^2} (\Lambda - \bar{\Lambda}(\hat{\omega}))^2}, \hat{\mathcal{C}}_{\text{app}} \right] e^{-\frac{\sigma_s^2}{2q_\varepsilon^2} (\Lambda - \bar{\Lambda}(\hat{\omega}))^2}. \quad (8.59)$$

La ecuación de ligadura podrá aproximarse por:

$$e^{-\frac{\sigma_s^2}{2q_\varepsilon^2} [\Lambda - \bar{\Lambda}(\omega)]^2} \sum_{v, \tilde{v} \in \mathcal{L}_\varepsilon^+} N(v, p_\phi, \mathbf{n}^g, \mathbf{n}^s) e_\omega^\varepsilon(\tilde{v}) \langle v | \hat{\mathcal{C}}_{\text{app}} | \tilde{v} \rangle = 0 \quad (8.60)$$

si la contribución de (8.59) en (8.58) puede despreciarse como una corrección a $\hat{\mathcal{C}}_{\text{app}}$ en (8.60), donde:

$$N(v, p_\phi, \mathbf{n}^g, \mathbf{n}^s) = \int_{\text{Spc}(\omega)} d\omega N(\omega, p_\phi, \mathbf{n}^g, \mathbf{n}^s) \bar{e}_\omega^\varepsilon(v) \quad (8.61)$$

En ese caso, las funciones $N(v, p_\phi, \mathbf{n}^g, \mathbf{n}^s)$ que, en particular, satisfagan:

$$\sum_{\tilde{v} \in \mathcal{L}_\varepsilon^+} N(\tilde{v}, p_\phi, \mathbf{n}^g, \mathbf{n}^s) \langle \tilde{v} | \hat{\mathcal{C}}_{\text{app}} | v \rangle = 0 \quad (8.62)$$

proporcionarán soluciones aproximadas de la ligadura $\hat{\mathcal{C}}_{\text{app}}$. Procedemos pues a analizar la viabilidad de que se pueda despreciar la acción de (8.59) frente a la del operador de ligadura aproximado. En primer lugar, recordamos que, dados dos operadores \hat{A} y \hat{B} cuyo conmutador es ignorable en comparación con cualquiera de ellos, la fórmula Baker-Campbell-Hausdorff implica que [196]:

$$e^{\hat{A}} \hat{B} e^{-\hat{A}} = \hat{B} + [\hat{A}, \hat{B}] + \frac{1}{2!} [\hat{A}[\hat{A}, \hat{B}]] + \dots \simeq \hat{B} + [\hat{A}, \hat{B}], \quad (8.63)$$

donde hemos ignorado contribuciones superiores de órdenes de factores, ya que el conmutador $[\hat{A}, \hat{B}]$ se asume que es comparativamente despreciable. Haciendo uso de esta aproximación, la condición deseada sobre (8.59) puede imponerse equivalentemente sobre:

$$\left[\frac{\sigma_s^2}{2q_\varepsilon^2} (\Lambda - \bar{\Lambda}(\hat{\omega}))^2, \hat{\mathcal{C}}_{\text{app}} \right] \simeq \frac{\sigma_s^2}{q_\varepsilon^2} (\Lambda - \bar{\Lambda}(\hat{\omega})) \left[\hat{\mathcal{C}}_{\text{app}}, \bar{\Lambda}(\hat{\omega}) \right]. \quad (8.64)$$

donde se han vuelto a ignorar contribuciones superiores de órdenes de factores en el miembro derecho. Si se tiene en cuenta ahora que el único operador en $\hat{\mathcal{C}}_{\text{app}}$ que no conmuta con $\bar{\Lambda}(\hat{\omega})$ es $\hat{\Omega}^2$ y que, respecto al comportamiento en Λ , los perfiles gaussianos de los estados de interés únicamente contribuyen cuando $\sigma_s[\Lambda - \bar{\Lambda}(\omega)]/q_\varepsilon$ es $\mathcal{O}(1)$, entonces la condición de poder despreciar el lado derecho de (8.64) se reduce (ignorando de nuevo órdenes de factores superiores y constantes irrelevantes) a que:

$$\frac{\sigma_s}{q_\varepsilon} e^{-2\bar{\Lambda}(\hat{\omega})} \left[\hat{\Omega}^2, e^{2\bar{\Lambda}(\hat{\omega})} \right] \quad (8.65)$$

sea despreciable como corrección a $\hat{\mathcal{C}}_{\text{app}}$ en la ecuación (8.60).

Esta condición de poder despreciar (8.65) frente a $\hat{\mathcal{C}}_{\text{app}}$ para garantizar la validez de la ecuación (8.60), se puede satisfacer si se requiere una serie de propiedades en el operador $\hat{\omega}$ definido anteriormente a través de las relaciones (8.55)-(8.57). En efecto, teniendo en cuenta que, de acuerdo con dicha definición, $\bar{\Lambda}(\hat{\omega})$ es constante en la región $v < v_0$, la contribución correspondiente a ella en el conmutador de (8.65) es nula. Por lo tanto, es suficiente analizar el conmutador que se obtiene reemplazando $\hat{\omega}$ con $\hat{\omega}_0$ en la región $v \geq v_0$. Hay claramente dos términos que analizar en dicho conmutador [véase la definición (8.56) para $\hat{\omega}_0$]: $[\hat{\Omega}^2, e^{2h(\hat{v})}]$ y $[\hat{\Omega}^2, \hat{O}_p]$. Respecto al primero, la función $h(v)$ se ha elegido suficientemente suave como para que cumpla $h(v \pm 4) \simeq h(v)$ para $v \geq v_0$. Por tanto, como la acción de $\hat{\Omega}^2$ sobre $|v\rangle$ esencialmente desplaza el volumen del estado en cuatro unidades arriba y abajo, este primer conmutador de interés puede despreciarse de forma consistente con las aproximaciones hechas. El segundo conmutador requiere, no obstante, de un estudio más cuidadoso. Por una parte, su acción sobre estados $|v\rangle$ con $v > v_1 + 4K$ resulta [200]:

$$\begin{aligned} [\hat{\Omega}^2, \hat{O}_p]|v\rangle = \sum_{k=0}^K \left\{ \right. & [y_{++}(v)f_k^+(v+4) - y_{++}(v+4k)f_k^+(v)] |v+4(k+1)\rangle \\ & + [y_{++}(v)f_k^-(v+4) - y_{++}(v-4k)f_k^-(v)] |v-4(k-1)\rangle \\ & + [y_{--}(v)f_k^+(v-4) - y_{--}(v+4k)f_k^+(v)] |v+4(k-1)\rangle \\ & + [y_{--}(v)f_k^-(v-4) - y_{--}(v-4k)f_k^-(v)] |v-4(k+1)\rangle \\ & \left. + 16(kv + 2k^2)f_k^+(v)|v+4k\rangle - 16(kv - 2k^2)f_k^-(v)|v-4k\rangle \right\}. \quad (8.66) \end{aligned}$$

Estos términos [y por tanto aquellos a los que dan lugar (8.65)] proporcionarán correcciones despreciables a $\hat{\mathcal{C}}_{\text{app}}$ en los estados considerados si \hat{O}_p es tal que:

- a) las funciones $f_k^\pm(v)$ son suficientemente suaves como para satisfacer $f_k^\pm(v \pm 4) \simeq f_k^\pm(v)$ en la región $v \geq v_0$;
- b) el entero K es suficientemente pequeño como para que se cumpla, aproximadamente, que $y_{++}(v \pm 4k) \simeq y_{++}(v)$, $y_{--}(v \pm 4k) \simeq y_{--}(v)$, $16kv \ll v^2$ y $32k^2 \ll v^2$ para todo $k \leq K$ en el sector de volúmenes $v \geq v_0$. Si se tiene en cuenta que, de acuerdo con las definiciones (8.8), las funciones $y_{\pm\pm}(v)$ son del orden $\mathcal{O}(v^2)$ en dicho sector, un entero K sería suficientemente pequeño en el sentido deseado si se satisface que $K \ll v_0/10$.

Por otra parte, si se considera la acción del conmutador $[\hat{\Omega}^2, \hat{O}_p]$ en el sector restante de estados $|v\rangle$, con $v \leq v_1 + 4K$, aparecen otras contribuciones distintas a las contenidas en (8.66). Esta peculiaridad se debe a que $\hat{\Omega}^2$ es un operador que está definido en la semirred completa $\mathcal{L}_\varepsilon^+$, mientras que \hat{O}_p lo está únicamente en la restricción $\mathcal{L}_\varepsilon^p$. Estas contribuciones adicionales son términos de la forma:

$$\sum_{k=0}^K y_{--}(v_1) f_k^-(v_1 + 4k) |v_1 - 4\rangle, \quad \sum_{k=0}^K y_{++}(v_1 - 4) f_k^+(v_1) |v_1 + 4k\rangle. \quad (8.67)$$

El primer término da cuenta de la acción del conmutador en todos los estados $|v_1 + 4k\rangle$ con $0 \leq k \leq K$, mientras que el segundo incluye la contribución de su acción sobre $|v_1 - 4\rangle$ (recordamos que v_1 es el extremo inferior de $\mathcal{L}_\varepsilon^p$). Como consecuencia, si las condiciones a y b se cumplen, y además:

c) las funciones $f_k^-(v_1 + 4k)$ y $f_k^+(v_1)$ son mucho menores que uno para $0 \leq k \leq K$,

entonces todos los términos procedentes de la acción de (8.59) proporcionarán correcciones despreciables a la ecuación de ligadura (8.60) para $\hat{\mathcal{C}}_{\text{app}}$.

En resumen, bajo ciertas condiciones suaves en los operadores $\hat{\omega}$ de interés, existen estados $(\psi|$ como los considerados que resuelven la ecuación de ligadura $(\psi|\hat{\mathcal{C}}_{\text{app}}^\dagger = 0$ al cumplir la ecuación $\sum_{\tilde{v} \in \mathcal{L}_\varepsilon^+} N(\tilde{v}, p_\phi, \mathbf{n}^g, \mathbf{n}^s) \langle \tilde{v} | \hat{\mathcal{C}}_{\text{app}} | v \rangle = 0$, con $N(v, p_\phi, \mathbf{n}^g, \mathbf{n}^s)$ definido en (8.61). Analizaremos ahora cómo es posible construir soluciones de este tipo con las propiedades deseadas. En primer lugar, la condición II para la validez de nuestras aproximaciones se satisface automáticamente para estos estados si $\bar{\Lambda}_0 \gg 1$ y $h(v) \gg 1$ para todo $v \in \mathcal{L}_\varepsilon^p$. Respecto a la condición I, para $v < v_0$ el operador $\bar{\Lambda}(\hat{\omega})$ es simplemente una constante y la ecuación de ligadura se reduce de nuevo a la ecuación de autovalores para el operador $\hat{\Omega}^2$ de FLRW, dados por (8.35). Por lo tanto, para todo $v \leq v_1$, las soluciones vuelven a ser las correspondientes autofunciones de $\hat{\Omega}^2$:

$$N(v, p_\phi, \mathbf{n}^g, \mathbf{n}^s) = e^{\varepsilon_{\rho(p_\phi, \bar{\Lambda}_0, H_0)}}(v) \chi(p_\phi, \mathbf{n}^g, \mathbf{n}^s). \quad (8.68)$$

Así, la condición I se satisface para estos estados si, por ejemplo, se restringe la función $\chi(p_\phi, \mathbf{n}^g, \mathbf{n}^s)$ exigiendo que tenga soporte únicamente en una región con $p_\phi > p_\phi^m$, donde $p_\phi^m \gg \sqrt{75\pi G}$. En efecto, así las soluciones tendrán solo contribuciones significativas para $\rho \geq 2p_\phi^m / \sqrt{3\pi G} = \rho_m \gg 10$, según (8.37). La igualdad en esta relación es simplemente la definición de la escala ρ_m utilizada en la construcción de los estados. Como ocurría cuando $\hat{\omega} = \hat{v}$, esta escala (y, por tanto, el correspondiente valor de v_m) queda definida así de una manera intrínseca, en términos de una cantidad conservada dada por el momento del campo escalar homogéneo.

Por otra parte, en la región $v \in \mathcal{L}_\varepsilon^p$, nuestra ecuación (8.62) se traduce en la siguiente ecuación en diferencias finitas (omitiendo la dependencia de N en p_ϕ y en los números de ocupación de Fock) [200]:

$$\left[\frac{4p_\phi^2}{3\pi G} + \frac{16}{3\beta} e^{2\bar{\Lambda}(v)} H_0 - 2v^2 \right] N(v) + y_{++}(v) N(v+4) + y_{--}(v) N(v-4) + \frac{16}{3\beta} H_0 \sum_{k=1}^K [f_k^-(v+4k) N(v+4k) + f_k^+(v-4k) N(v-4k) \chi_{\mathcal{L}_\varepsilon^p}(v-4k)] = 0, \quad (8.69)$$

donde:

$$\chi_{\mathcal{L}_\varepsilon^p}(v) = \begin{cases} 1, & \text{si } v \in \mathcal{L}_\varepsilon^p, \\ 0, & \text{si } v \notin \mathcal{L}_\varepsilon^p, \end{cases} \quad (8.70)$$

y hemos definido la función:

$$\tilde{\Lambda}(v) = \frac{1}{2} \ln [e^{2h(v)} + 2f_0(v)]. \quad (8.71)$$

La ecuación (8.69) involucra coeficientes $N(v)$ evaluados en K puntos por encima del considerado, v , en la semirred. En particular, esto ocurre en el punto de empalme con la solución para $\Lambda = \bar{\Lambda}_0$, es decir, cuando v es igual al extremo inferior v_1 de $\mathcal{L}_\varepsilon^p$. Debido a esto y a que, en este punto de empalme, únicamente son conocidos datos para valores de v más pequeños o iguales a él, se observa que, si se quiere encontrar una solución a nuestra ecuación sin ambigüedades, deben imponerse ciertas restricciones al operador \hat{O}_p . Por ejemplo, para llegar a soluciones suficientemente suaves, puede requerirse que las funciones $f_k^\pm(v)$ con $k \neq 0$ sean despreciables en cierto entorno por encima de v_0 , en concreto en todos los puntos del intervalo $\mathcal{I} = [v_0, v_0 + 8K - 4]$ al menos. Si esto es así, y después de despreciar la contribución de esas funciones, se tiene que la ecuación (8.69) sí determina por completo los $K - 1$ valores de la función $N(v)$ desde $v = v_1 + 4$ hasta $v = v_1 + 4K - 4$, una vez dadas las condiciones iniciales:

$$e_{\rho(p_\phi, \bar{\Lambda}_0, H_0)}^\varepsilon(v_1) \quad \text{y} \quad e_{\rho(p_\phi, \bar{\Lambda}_0, H_0)}^\varepsilon(v_1 - 4), \quad (8.72)$$

que vienen de imponer la ligadura en la región $v < v_0 \leq v_1$. Para fijar $N(v_1 + 4K - 4)$ de esta manera, es necesario ignorar las funciones $f_k^\pm(v)$ al menos hasta $v_1 + 8K - 8$, para cualquier valor posible de $v_1 \in [v_0, v_0 + 4)$, como en efecto se ha requerido. Los K coeficientes hallados sobre $\mathcal{L}_\varepsilon^p$, desde $N(v_1)$ hasta $N(v_1 + 4K - 4)$, pueden servir entonces como datos iniciales para fijar de forma unívoca el resto de los coeficientes. El procedimiento es considerar de nuevo la ecuación de ligadura completa (8.69), evaluada en puntos $v \geq v_1$ y ya sin ignorar las funciones $f_k^\pm(v)$. Introduciendo el valor de los K coeficientes mencionados, la ligadura en el punto $v = v_1$ determina por completo el siguiente $N(v_1 + 4K)$, y análogamente para $v \geq v_1 + 4$. A través de este método, podemos construir toda la solución, al menos de forma aproximada.

Conviene comentar que, si el entorno \mathcal{I} contiene $n > 2K - 1$ puntos de $\mathcal{L}_\varepsilon^p$, entonces el número de coeficientes que pueden obtenerse ignorando las funciones $f_k^\pm(v)$ en (8.69) es $n - K > K - 1$. En este caso, la solución aproximada obtenida puede mejorarse por iteración en los $n - 2K + 1$ puntos justo por encima de v_1 . Esto puede conseguirse considerando de nuevo la ecuación de ligadura (8.69) evaluada en el punto que está justo por debajo del que se quiere mejorar, e incorporando las correcciones dadas por la contribución de los coeficientes aproximados en los $K - 1$ puntos justo por encima de él, así como en los (hasta) $K + 1$ puntos por debajo, todos ellos multiplicados por las correspondientes funciones $f_k^\pm(v)$.

Para finalizar la construcción de estos estados físicos aproximados, parece natural imponer la continuidad de la ligadura aproximada en $v = v_1$. A la vista de la construcción dada de las soluciones, para obtener dicha continuidad basta con fijar $\bar{\Lambda}_0 = \tilde{\Lambda}(v_1)$, con $\tilde{\Lambda}(v_1) \gg 1$.

Finalmente, haremos un último comentario acerca de la supresión de las soluciones construidas para el modelo de Gowdy cuando $\rho > \rho_m$. Aunque se ha garantizado que esto ocurre para $v < v_0$, donde recordamos que los picos gaussianos de la anisotropía se hacían constantes, cabe preguntarse si dicha propiedad se mantiene en la solución completa construida para $v \geq v_0$, región en la que dichos picos ya no permanecen constantes. Este comportamiento global no puede asegurarse *a priori*, al involucrar la descomposición espectral de toda la solución en cuestión en términos de las autofunciones de $\hat{\Omega}^2$. No obstante, argumentaremos a continuación que la transición de (8.68) a la nueva solución en $v \in \mathcal{L}_\varepsilon^p$ (es decir, para $v \geq v_0$) sí que respeta el requisito de que todas sus contribuciones relevantes tengan $\rho > \rho_m$. Salvo un factor numérico global, el operador de ligadura aproximada $\hat{\mathcal{C}}_{\text{app}}$, dado en (8.54), puede reescribirse como $\hat{\Gamma} - \hat{\Omega}^2$, donde:

$$\hat{\Gamma} = \frac{4p_\phi^2}{3\pi G} + \frac{16}{3\beta} e^{2\Lambda(\hat{\omega})} H_0. \quad (8.73)$$

La peculiaridad que complica el análisis aquí deseado en la región $v \geq v_0$ es que el operador $\hat{\Omega}^2$ de FLRW no conmuta con $\hat{\Gamma}$. Sin embargo, al actuar sobre soluciones a la ligadura, sí se cumple la relación $\hat{\Omega}^2 = \hat{\Gamma}$. Además, para los estados cuánticos de interés, que se caracterizan por perfiles con soporte en valores del momento del campo escalar $p_\phi > p_\phi^m$, la acción del operador $\hat{\Gamma}$ siempre es mayor que (la multiplicación por) ρ_m^2 [véase (8.37)]. Es decir, $(\hat{\Gamma} - \rho_m^2)$ es estrictamente positivo sobre los estados considerados, al serlo el último término de (8.73). Por lo tanto, en el sector que contiene dichos estados, la acción de $\hat{\Omega}^2$ da lugar únicamente a contribuciones con $\rho > \rho_m$, como se quería demostrar [200].

8.5.2. Fluidos perfectos y correcciones geométricas

En la sección anterior se han encontrado soluciones aproximadas al modelo de Gowdy híbrido que, además, obedecen una dinámica efectiva dictada por la ligadura:

$$\hat{\mathcal{C}}_{\text{app}} = \hat{\mathcal{C}}_{\text{FLRW}} + \frac{2\pi G}{\beta} \left[e^{2h(\hat{v})} + \hat{O}_p \right] H_0 \quad (8.74)$$

para volúmenes suficientemente grandes ($v \geq v_0$). A continuación, veremos que esta ligadura puede interpretarse como la correspondiente a un modelo homogéneo e isótropo de tipo FLRW plano, acoplado a una diversidad de fluidos perfectos procedentes del término $e^{2h(\hat{v})}$, y corregido geoméricamente por \hat{O}_p . Este último término puede entenderse como términos de curvatura homogéneos adicionales o contribuciones de derivadas superiores en la acción gravitatoria. En efecto, de la discusión llevada a cabo en la subsección 8.3.2 se sigue que si se toma:

$$h(v) = \ln \left(\left[\sum_w v^{(1-w)} \right]^{1/2} \right), \quad (8.75)$$

la dinámica de los estados construidos imita la típica de un contenido de diferentes fluidos perfectos con ecuaciones de estado dadas por $P = w\epsilon$. De nuevo, w recorre tantos parámetros como se quiera (uno por cada fluido perfecto distinto), siempre que $w < 1$, de forma que las

aproximaciones hechas en la ligadura de Gowdy sean válidas. En particular, pueden simularse otra vez contenidos de tipo polvo, radiación o incluso una constante cosmológica. Las condiciones necesarias sobre el pico de los perfiles gaussianos se satisfacen automáticamente si $v_0 \gg e^{2/(1-w)}$.

Respecto el término efectivo \hat{O}_p , su acción sobre la base cinemática de estados $|v\rangle$ viene dada en (8.57). En ciertos casos, podemos construirla simplemente, por ejemplo, a partir de sumas de potencias de $\hat{\Omega}^2$, posiblemente multiplicadas por funciones suaves de \hat{v} . Así, teniendo en cuenta que el operador $\hat{\Omega}^2$ de FLRW caracteriza por completo el escalar de curvatura R de un universo de tipo FLRW plano [35, 38, 39], la contribución de \hat{O}_p en la ligadura modificada $\hat{\mathcal{C}}_{\text{app}}$ puede interpretarse entonces como la que aportarían términos de curvatura adicionales que corrigen a R en la acción gravitatoria. Alternativamente, en casos más generales, es posible entender esta contribución como términos que provienen de derivadas superiores discretizadas. Todos estos tipos de términos son algunos de los que se esperarían en ciertas teorías $f(R)$ y otras teorías de gravedad modificada [198].

En resumen, hemos mostrado cómo algunas soluciones aproximadas del modelo de Gowdy, que es genuinamente anisótropo e inhomogéneo, pueden comportarse de forma efectiva como soluciones (también aproximadas, en general) de la ligadura hamiltoniana de un modelo de FLRW plano acoplado a diversos tipos de fluidos perfectos y con correcciones geométricas similares a las de gravedad modificada. Merece la pena aclarar que, a pesar del comportamiento dinámico visto para estos estados con respecto a la ligadura del sistema (esto es, una dinámica efectiva homogénea e isotropa), sus perfiles gaussianos no están picados en las trayectorias isotropas del modelo de Gowdy clásico. De hecho, pueden estarlo más bien en muchas trayectorias anisotropas posibles, determinadas por funciones $\bar{\Lambda}(\hat{\omega})$ bastante generales de todo un sinfín de operadores homogéneos e isotropos $\hat{\omega}$. En el fondo, es en el comportamiento colectivo de las anisotropías e inhomogeneidades, así como en los efectos cuánticos de la representación de lazos de la geometría, donde se encuentran las razones que explican la dinámica aproximada que presentan los estados considerados. En este sentido, las modificaciones geométricas a la dinámica de FLRW que hemos obtenido para estos estados pueden entenderse como modificaciones que emergen de la teoría cuántica subyacente (tanto de la cuantización de lazos como de las características de los estados).

8.6. Conclusiones

En este capítulo hemos estudiado la construcción de soluciones aproximadas en el modelo cuántico híbrido de Gowdy con topología de T^3 , polarización lineal, simetría rotacional local y un campo escalar sin masa mínimamente acoplado [59]. En concreto, hemos conseguido encontrar estados físicos aproximados de este modelo inhomogéneo que, a su vez, constituyen soluciones aproximadas de la ligadura hamiltoniana de un modelo homogéneo e isotropo de tipo FLRW con un contenido material de varios fluidos perfectos barotrópicos, así como con correcciones que pueden interpretarse como de curvatura o de derivadas superiores.

Estos resultados muestran cómo algunas soluciones cuánticas específicas de modelos inhomogéneos, en este caso del modelo de Gowdy T^3 , pueden comportarse dinámicamente como las de cosmologías planas, homogéneas e isotropas con un tipo de contenido particular de materia también homogénea e isotropa, e incluso con correcciones geométricas homogéneas

e isotrópicas. Resulta conveniente enfatizar que estos estados no son en absoluto intrínsecamente isotrópicos ni homogéneos. Sus anisotropías e inhomogeneidades no son ignorables, como podría comprobarse, en principio, midiendo en ellos observables cuánticos genéricos. A pesar de ello, resulta interesante que dichos estados se comporten de tal forma que den lugar a términos efectivos en la ligadura hamiltoniana que son característicos de un modelo de FLRW plano con fluidos perfectos y modificaciones geométricas. En particular, la dependencia del pico de los perfiles gaussianos considerados en un operador geométrico homogéneo e isotrópico (de cierto tipo, aunque bastante general) se traduce en la aparición de dicho operador en la ligadura efectiva. Este fenómeno, que depende de la elección específica de la familia de estados investigada, enfatiza el hecho de que las descripciones efectivas dependen, en general, del conjunto particular de estados que se analice. De hecho, la dinámica efectiva obtenida aquí puede entenderse que surge de las correlaciones cuánticas existentes, en los estados estudiados, entre los distintos sectores del espacio de Hilbert homogéneo. En particular, el conjunto de estados considerado presenta perfiles con una dependencia que mezcla de forma muy especial las variables del espacio de fases homogéneo. Además de estas correlaciones, dos propiedades fundamentales de las soluciones construidas están detrás de este interesante comportamiento: presentan un momento de la variable que mide la anisotropía que es despreciable, y sufren un acoplo ignorable entre el sector homogéneo y la autointeracción de las inhomogeneidades. Son estas propiedades las que permiten despreciar la acción de los términos más problemáticos en la ligadura hamiltoniana, dando lugar a la de un operador que se corresponde con un modelo de FLRW plano modificado y acoplado a fluidos perfectos. Es importante recalcar que esta aproximación es consistente gracias a los efectos de geometría cuántica introducidos por la CCL, a los que se debe la supresión exponencial de los autoestados de la geometría de FLRW en volúmenes pequeños. Estos efectos cuánticos, junto al comportamiento colectivo de las anisotropías y las inhomogeneidades, producen discrepancias respecto a las predicciones clásicas de la Relatividad General en el régimen de gran curvatura (alrededor de la singularidad cosmológica). Este es el motivo de que la dinámica efectiva obtenida para estas familias de estados difiera en esas regiones de las soluciones clásicas del modelo.

Un aspecto que quizá sea conveniente aclarar, para facilitar la comprensión de los fundamentos que subyacen las aproximaciones realizadas, es la existencia de límites asintóticos en que éstas son válidas de forma natural. Que dichos límites pueden encontrarse es una consecuencia de los requisitos impuestos en los estados de interés, ya que, si se toman estados picados en valores suficientemente grandes de la variable de anisotropía y se tiene en cuenta que, para gran $\rho_m = 2v_m$ se cumple que $q_\varepsilon \simeq 4/\rho_m$, puede procederse de la forma siguiente. Podemos centrar la atención en relaciones funcionales de la forma $\sigma_s = q_\varepsilon^\zeta$ con $0 < \zeta < 1$. Por ejemplo, puede elegirse $\zeta = 1/2$. Entonces, las condiciones necesarias para que las aproximaciones hechas en este trabajo sean válidas se alcanzan, con una precisión creciente, en el límite asintótico en que ρ_m tiende a infinito dentro del sector de autovalores infinitamente grandes del operador geométrico $\hat{\Omega}^2$.

Podría ser interesante aplicar las técnicas de aproximación desarrolladas en este trabajo a modelos más realistas físicamente, más allá de las cosmologías de Gowdy. Así, quizá pudieran explicarse algunos aspectos de los problemas abiertos en la cosmología estándar (como, por ejemplo, la constante cosmológica o la inflación) a través de comportamientos efectivos de las inhomogeneidades cuánticas del modelo. Además, los resultados obtenidos sugieren que

algunas de las correcciones a la teoría de Einstein que se investigan en la actualidad tal vez puedan surgir de las propiedades cuánticas presentes en ciertos tipos de estados.

Capítulo 9

Conclusiones de la tesis

Esta tesis doctoral ha profundizado en el desarrollo de un formalismo que permita describir cuánticamente sistemas cosmológicos con infinitos grados de libertad, en el contexto de la CCL híbrida. Con este objetivo, hemos investigado, en primer lugar, la cuantización de Fock de campos escalares y de Dirac con dinámica unitaria. Los resultados así obtenidos se han aplicado al estudio de la cuantización híbrida del Universo primordial con perturbaciones escalares, tensoriales y fermiónicas, investigando algunas de sus consecuencias en cuanto al contenido fermiónico respecta. Asimismo, se han buscado soluciones cuánticas aproximadas con interés físico en cosmología inhomogénea, tomando como banco de pruebas las cosmologías de Gowdy con ondas gravitatorias linealmente polarizadas, también dentro del marco de la cuantización de lazos híbrida.

Resultados específicos

- Para la cuantización de Fock de las relaciones de conmutación y anticonmutación canónicas, respectivamente, de campos de Klein-Gordon en cosmologías de Bianchi I con topología compacta y de campos de Dirac en espaciotiempos de FLRW con hipersuperficies espaciales esféricas y toroidales, hemos caracterizado el conjunto de vacíos invariantes bajo las simetrías físicas de estos sistemas. Estas vienen dadas específicamente por las isometrías continuas de las hipersuperficies espaciales, así como por las rotaciones de espín generadas por la helicidad en el caso de la cosmología de FLRW toroidal.
- Respecto a la cuantización de Fock de las relaciones de anticonmutación canónicas de campos de Dirac en espaciotiempos tridimensionales conformemente ultraestáticos, hemos caracterizado también todos los vacíos invariantes bajo el grupo de simetrías de la ecuación de Dirac.
- Para todas las representaciones de Fock consideradas, con vacíos invariantes, hemos demostrado que existe un subconjunto que admite una implementabilidad unitaria de la dinámica en sus espacios de Fock correspondientes. Esta evolución procede de las ecuaciones de Klein-Gordon y de Dirac, tras extraer de los campos ciertas variaciones en el tiempo (o, equivalentemente, cierta dependencia en las variables métricas que

describen el fondo espaciotemporal), que pasan a ser tratadas como explícitas en imagen de Heisenberg. La extracción está restringida, no obstante, de forma que no se trivialice la evolución que dictan tales ecuaciones de Klein-Gordon y de Dirac.

- Tras caracterizar todas las representaciones de Fock permitidas por el criterio de invariancia bajo simetrías y una implementabilidad unitaria no trivial de la dinámica, hemos demostrado que todas ellas son unitariamente equivalentes entre sí, para cada uno de los escenarios espaciotemporales considerados y siempre que se fije un convenio para la distinción entre partículas y antipartículas en el caso de campos de Dirac. En otras palabras, estas condiciones físicamente motivadas de unitariedad e invariancia garantizan la unicidad de la representación de Fock en cuestión, salvo equivalencia unitaria.
- La demostración de unicidad tiene la consecuencia inmediata de garantizar también un único concepto de dinámica cuántica genuina de los campos, salvo redefiniciones unitarias. En efecto, nuestro análisis de la unitariedad permite caracterizar por completo las funciones del fondo espaciotemporal que deben extraerse de la dependencia temporal de los campos, al menos en el límite ultravioleta de grandes autovalores del operador de Laplace-Beltrami o de Dirac sobre las hipersuperficies espaciales. Esta caracterización puede entenderse, alternativamente, como la posesión de un conocimiento preciso acerca de cuáles son las excitaciones de partículas y antipartículas que, descritas por los campos correspondientes, preservan la coherencia en el tiempo.
- Hemos proporcionado una descripción óptima, con vistas a su cuantización, del espacio de fases de una cosmología homogénea e isotrópica acoplada a un campo escalar homogéneo (que hace las veces de inflatón en Relatividad General) y con perturbaciones escalares, tensoriales y fermiónicas, cuando se trunca la acción a segundo orden en dichas perturbaciones. Más en detalle, hemos partido de la formulación dada en las referencias [65,66] para el mismo sistema cosmológico en ausencia de grados de libertad fermiónicos, en términos de ligaduras perturbativas y de invariantes bajo las transformaciones que estas generan. Respecto al sector fermiónico inhomogéneo del espacio de fases, hemos hecho uso de nuestros resultados anteriores acerca de la representación de Fock de campos de Dirac. Así, hemos elegido para su descripción unas variables de destrucción y creación que, relacionadas a través de una transformación canónica dependiente del fondo homogéneo con los modos de Dirac, admiten una implementabilidad unitaria de su dinámica en el contexto de TCC en espaciotiempos curvos clásicos. Esta parametrización privilegiada del espacio de fases da lugar a una modificación del hamiltoniano fermiónico y de las variables canónicas que describen la geometría homogénea, de tal forma que se mantiene la estructura simpléctica canónica del sistema al orden perturbativo de nuestra truncación.
- Hemos aplicado la estrategia de cuantización híbrida a este sistema cosmológico con perturbaciones. Gracias a la descripción escogida del espacio de fases, la única ligadura cuántica por imponer de forma no trivial es el modo cero de la ligadura hamiltoniana. En ella, se mezclan de forma complicada los operadores que representan los distintos sectores físicamente relevantes del espacio de fases. Estos son: el sector geométrico

homogéneo, para el que se adopta una representación de CCL; el inflatón, con una representación de tipo Schrödinger; y las perturbaciones de Mukhanov-Sasaki, las tensoriales y las fermiónicas, para las que se toman (familias de) representaciones de Fock privilegiadas. Dicha elección privilegiada se basa en el criterio previamente analizado de invariancia del vacío bajo las simetrías clásicas y de implementabilidad unitaria de la dinámica. Además, en el caso fermiónico, hemos fijado también un convenio razonable para la distinción entre partículas y antipartículas, que conecte de forma suave con el que es estándar en TCC para el campo sin masa.

- Hemos impuesto el operador que representa el modo cero de la ligadura hamiltoniana del sistema cosmológico perturbado sobre ciertos estados de tipo Born-Oppenheimer, cuya dependencia en los distintos sectores del espacio de fases, salvo en el inflatón, es separable. Así, hemos caracterizado las condiciones que permiten que dicha imposición sea equivalente a una cierta ecuación maestra de ligadura. Esta ecuación es especial en tanto en cuanto su dependencia en la geometría homogénea viene dada únicamente a través de valores esperados en el correspondiente perfil homogéneo de los estados de Born-Oppenheimer. Si se asumen además ciertas hipótesis no demasiado restrictivas, es posible deducir de esta ecuación de ligadura tres ecuaciones de tipo Schrödinger, con el inflatón como tiempo interno del sistema, para las tres funciones de onda que describen las perturbaciones de Mukhanov-Sasaki, las tensoriales y las fermiónicas. Estas ecuaciones de Schrödinger involucran además la «reacción» cuántica que produce cada uno de los sectores del espacio de fases perturbativo sobre los demás, así como la que producen sobre la geometría homogénea.
- Hemos resuelto la dinámica cuántica que dicta la ecuación maestra de ligadura para los modos fermiónicos inhomogéneos y hemos demostrado que dicha dinámica es implementable mediante un operador unitario en su espacio de Fock. Esta evolución depende, en particular, de la geometría homogénea a través de valores esperados, que son distintos para cada modo y que están bien definidos gracias a la representación de lazos adoptada en el esquema híbrido. Esto, junto a las propiedades ultravioletas, garantiza la implementabilidad unitaria de la dinámica cuántica. Hemos proporcionado una construcción explícita del operador unitario de evolución asociado, que resulta estar generado precisamente por el hamiltoniano fermiónico correspondiente a la ecuación de Schrödinger deducida previamente. En particular, el vacío de la representación de Fock evolucionado mediante la acción de este operador es una solución de la ecuación de Schrödinger.
- La unitariedad de la dinámica fermiónica se traduce, por otra parte, en una producción finita de pares de partículas y antipartículas en el vacío evolucionado. Hemos visto que dicha producción es despreciable y proporcional al cuadrado de la masa fermiónica para modos en el régimen ultravioleta. Asimismo, hemos argumentado que la CCL puede minimizar dicha producción si se toma el estado de vacío fermiónico en el momento del rebote cuántico que elimina la singularidad cosmológica.
- El análisis de la dinámica fermiónica permite deducir también que la «reacción» cuántica sobre la geometría homogénea y el resto de perturbaciones es divergente, por lo que

requiere de regularización. No obstante, los términos que individualmente suman dicha contribución divergente están infinitesimalmente cerca de proporcionar una suma convergente. Esto parece indicar que una optimización en la elección de la representación de Fock fermiónica (dentro de la familia de equivalencia privilegiada encontrada en esta tesis) podría hacer innecesario cualquier proceso de regularización y quizá proporcionara una estimación cuantitativa de dicha «reacción», que por otra parte se espera que sea despreciable.

- Hemos desarrollado métodos aproximados para la resolución cuántica de una cosmología inhomogénea no perturbativa: el espaciotiempo de Gowdy con topología toroidal, polarización lineal, simetría rotacional local y mínimamente acoplado a un campo escalar sin masa con las mismas simetrías que la métrica. En el esquema de la cuantización híbrida de lazos, el operador que representa la ligadura hamiltoniana global del sistema (tras una fijación parcial del gauge) presenta dos términos que complican su resolución: uno que acopla las anisotropías con el volumen promedio del sector homogéneo del universo de Gowdy y otro que representa una autointeracción de las inhomogeneidades. Debido a ello, hemos caracterizado estados sobre los que estos operadores tienen una acción despreciable, en comparación al resto de la ligadura. Estos estados, en lo que respecta al sector homogéneo del espacio de fases, vienen dados por perfiles gaussianos en la anisotropía cuyos picos son funciones del espectro de un operador autoadjunto, en principio arbitrario, que actúa sobre el sector isótropo del espacio de Hilbert cinemático. Dichos perfiles gaussianos han de estar muy picados en esas funciones y al mismo tiempo deben estar suficientemente centrados en un valor nulo del momento de la anisotropía. Además, han de estar muy suprimidos en la región de volúmenes promedio pequeños del sector homogéneo del universo de Gowdy. La acción de la ligadura hamiltoniana de la cosmología de Gowdy sobre ellos es entonces aproximadamente equivalente a la que tendría la ligadura hamiltoniana de una cosmología de FLRW acoplada a un campo escalar sin masa, a distintos fluidos perfectos y con posibles correcciones de curvatura con respecto a la acción de Hilbert-Einstein.
- Finalmente, hemos demostrado que, de hecho, existen estados que, con las características arriba descritas y bajo ciertas hipótesis adicionales sobre el pico de los perfiles gaussianos y el operador que los caracteriza, solucionan de forma aproximada la ligadura hamiltoniana de la cosmología de Gowdy. Por tanto, estos estados son también soluciones de la ecuación de ligadura de un universo de FLRW acoplado a un campo escalar sin masa, fluidos perfectos y con posibles correcciones de curvatura. En particular, es posible simular así un contenido material que produce el efecto de una constante cosmológica. La obtención de estas soluciones está basada de forma esencial en las propiedades del operador que representa en CCL la parte geométrica de la ligadura hamiltoniana de la cosmología de FLRW. Dichas propiedades son las que sustentan, en última instancia, la aparición del rebote cuántico que, siendo característico de la representación de lazos, reemplaza a la singularidad cosmológica. En la cosmología de Gowdy estudiada, tales propiedades permiten considerar estados físicos que están muy suprimidos en la región de volúmenes promedio pequeños, como requieren nuestras aproximaciones sobre la acción de la ligadura hamiltoniana.

Publicaciones

El trabajo de investigación realizado a lo largo de esta tesis doctoral ha sido publicado en los siguientes artículos:

- B. Elizaga Navascués, M. Martín-Benito y G.A. Mena Marugán, *Modeling effective FRW cosmologies with perfect fluids from states of the hybrid quantum Gowdy model*, Phys. Rev. D **91**, 024028 (2015).
- B. Elizaga Navascués, M. Martín-Benito y G.A. Mena Marugán, *Modified FRW cosmologies arising from states of the hybrid quantum Gowdy model*, Phys. Rev. D **92**, 024007 (2015).
- J. Cortez, B. Elizaga Navascués, M. Martín-Benito, G.A. Mena Marugán y J.M. Velhinho, *Unitary evolution and uniqueness of the Fock representation of Dirac fields in cosmological spacetimes*, Phys. Rev. D **92** 105013 (2015).
- J. Cortez, B. Elizaga Navascués, M. Martín-Benito, G.A. Mena Marugán y J.M. Velhinho, *Unique Fock quantization of a massive fermion field in a cosmological scenario*, Phys. Rev. D **93**, 084053 (2016).
- B. Elizaga Navascués, M. Martín-Benito y G.A. Mena Marugán, *Hybrid models in Loop Quantum Cosmology*, Int. J. Mod. Phys. D **25**, 1642007 (2016).
- J. Cortez, B. Elizaga Navascués, M. Martín-Benito, G.A. Mena Marugán, J. Olmedo y J.M. Velhinho, *Uniqueness of the Fock quantization of scalar fields in a Bianchi I cosmology with unitary dynamics*, Phys. Rev. D **94**, 105019 (2016).
- J. Cortez, B. Elizaga Navascués, M. Martín-Benito, G.A. Mena Marugán y J.M. Velhinho, *Dirac fields in flat FLRW cosmology: Uniqueness of the Fock quantization*, Ann. Phys. **376**, 76 (2017).
- J. Cortez, B. Elizaga Navascués, M. Martín-Benito, G.A. Mena Marugán y J.M. Velhinho, *Uniqueness of the Fock quantization of Dirac fields in 2+1 dimensions*, arXiv:1608.05941 (enviado a la revista Physical Review D).
- B. Elizaga Navascués, M. Martín-Benito y G.A. Mena Marugán, *Fermions in Loop Quantum Cosmology*, arXiv:1703.10391 (enviado a la revista Journal of Cosmology and Astroparticle Physics).

Bibliografía

- [1] A. Einstein, *Die grundlage der allgemeinen relativitätstheorie*, Annalen der Physik **49**, 769 (1916); *The foundation of the general theory of relativity*, en *The collected papers of Albert Einstein*, editado por A. J. Kox, Martin J. Klein y Robert Schulmann (Princeton University Press, Princeton, 1997).
- [2] R.M. Wald, *General Relativity* (Chicago University Press, Chicago, 1984).
- [3] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu y F. Laloe, *Quantum Mechanics*, Vol. 1 (Wiley, Nueva York, 1977).
- [4] A. Galindo y P. Pascual, *Mecánica Cuántica I* (Eudema Universidad, Madrid, 1989).
- [5] J.D. Bjorken y S.D. Drell, *Relativistic Quantum Fields* (Mcgraw-Hill, Estados Unidos, 1965).
- [6] K.S. Novoselov, A.K. Geim, S.V. Morozov, D. Jiang, M.I. Katsnelson, I.V. Grigorieva, S.V. Dubonos y A.A. Firsov, *Two-dimensional gas of massless Dirac fermions in graphene*, Nature (Londres) **438**, 197 (2005).
- [7] M.I. Katsnelson, *Graphene in two dimensions* (Cambridge University Press, Cambridge, 2012).
- [8] V. Mourik, K. Zuo, S.M. Frolov, S.R. Plissard, E.P.A.M. Bakkers y L.P. Kouwenhoven, *Signatures of Majorana fermions in hybrid superconductor-semiconductor nanowire devices*, Science **336**, 1003 (2012).
- [9] S.-Y. Xu y col., *Discovery of a Weyl fermion semimetal and topological Fermi arcs*, Science **349**, 613 (2015).
- [10] R.M. Wald, *Quantum Field Theory in curved spacetime and black hole thermodynamics* (Chicago University Press, Chicago, 1994).
- [11] S.W. Hawking, *Black hole explosions?*, Nature **248**, 30 (1974).
- [12] P.C.W. Davies, *Scalar production in Schwarzschild and Rindler metrics*, J. Phys. A **8**, 609 (1975).
- [13] W.G. Unruh, *Notes on black-hole evaporation*, Phys. Rev. D **14**, 870 (1976).

- [14] L. Parker, *Quantized fields and particle creation in expanding universes. I*, Phys. Rev. **183**, 1057 (1969).
- [15] L. Parker, *Quantized fields and particle creation in expanding universes. II*, Phys. Rev. D **3**, 346 (1971).
- [16] B. Simon, *Topics in functional analysis*, edited by R.F. Streater (Academic Press, Londres, 1972).
- [17] B. Kay, *Linear spin-zero quantum fields in external gravitational and scalar fields*, Commun. Math. Phys. **62**, 55 (1978).
- [18] A. Ashtekar y A. Magnon, *Quantum fields in curved space-times*, Proc. R. Soc. A **346**, 375 (1975).
- [19] A. Ashtekar y A. Magnon-Ashtekar, *A curiosity concerning the role of coherent states in quantum field theory*, Pramana J. Phys **15**, 107 (1980).
- [20] J.C. Baez, I.V. Segal and Z. Zhou, *Introduction to algebraic and constructive Quantum Field Theory* (Princeton University Press, Princeton, 1992).
- [21] A. Corichi, J. Cortez, G.A. Mena Marugán y J.M. Velhinho, *Quantum Gowdy T^3 model: A uniqueness result*, Class. Quantum Grav. **23**, 6301 (2006).
- [22] J. Cortez, G.A. Mena Marugán y J.M. Velhinho, *Quantum unitary dynamics in cosmological spacetimes*, Ann. Phys. **363**, 36 (2015).
- [23] A. Ashtekar, *New variables for classical and quantum gravity*, Phys. Rev. Lett. **57**, 2244 (1986).
- [24] A. Ashtekar, *A new Hamiltonian formulation of general relativity*, Phys. Rev. D **36**, 1587 (1987).
- [25] A. Ashtekar, *Lectures on non-perturbative canonical gravity* (World Scientific, Singapur, 1991).
- [26] A. Ashtekar y J. Lewandowski, *Background independent quantum gravity: A status report*, Class. Quantum Grav. **21**, R53 (2004).
- [27] C. Rovelli, *Quantum gravity* (Cambridge University Press, Cambridge, 2004).
- [28] T. Thiemann, *Introduction to modern canonical quantum General Relativity* (Cambridge University Press, Cambridge, 2007).
- [29] B. S. DeWitt, *Quantum theory of gravity I. The canonical theory*, Phys. Rev. **160**, 1113 (1967).
- [30] J.J. Halliwell, *Introductory lectures on quantum cosmology*, en *Proceedings of the 1990 Jerusalem winter school on quantum cosmology and baby universes*, editado por S. Coleman, J.B. Hartle, T. Piran y S. Weinberg (World Scientific, Singapur, 1991).

- [31] C.N. Yang y R.L. Mills, *Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance*, Phys. Rev. D **96**, 191 (1954).
- [32] P.A.M. Dirac *Lectures on Quantum Mechanics* (Belfer Graduate School of Science, Yeshiva University, Nueva York, 1964).
- [33] G. Hingshaw y col., *Nine-year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) observations: Cosmological parameter results*, ApJS **208**, 19 (2013).
- [34] P.A.R. Ade y col. (Planck Collaboration), *Planck 2015 results. XIII. Cosmological parameters*, A& A **594**, A13 (2016).
- [35] A. Ashtekar, M. Bojowald y J. Lewandowski, *Mathematical structure of loop quantum cosmology*, Adv. Theor. Math. Phys. **7**, 233 (2003).
- [36] M. Bojowald, *Loop quantum cosmology*, Living Rev. Relativity **11**, 4 (2008).
- [37] G.A. Mena Marugán, *A brief introduction to Loop Quantum Cosmology*, J. Phys. Conf. Ser. **314**, 012012 (2011).
- [38] A. Ashtekar y P. Singh, *Loop Quantum Cosmology: A status report*, Class. Quantum Grav. **28**, 213001 (2011).
- [39] K. Banerjee, G. Calcagni y M. Martín-Benito, *Introduction to Loop Quantum Cosmology*, SIGMA **8**, 016 (2012).
- [40] M. Bojowald, *Loop Quantum Cosmology: I. Kinematics*, Class. Quantum Grav. **17**, 1489 (2000).
- [41] M. Bojowald, *Loop Quantum Cosmology: II. Volume operators*, Class. Quantum Grav. **17**, 1509 (2000).
- [42] M. Bojowald, *Loop Quantum Cosmology: III. Wheeler-DeWitt operators*, Class. Quantum Grav. **18**, 1055 (2001).
- [43] M. Bojowald, *Loop Quantum Cosmology: IV. Discrete time evolution*, Class. Quantum Grav. **18**, 1701 (2001).
- [44] M. Bojowald, *Absence of singularity in Loop Quantum Cosmology*, Phys. Rev. Lett. **86**, 5227 (2001).
- [45] M. Bojowald, *Homogeneous Loop Quantum Cosmology*, Class. Quantum Grav. **20**, 2595 (2003).
- [46] A. Ashtekar, A. Corichi y P. Singh, *Robustness of predictions of Loop Quantum Cosmology*, Phys. Rev. D **77**, 024046 (2008).
- [47] A. Ashtekar, T. Pawłowski y P. Singh, *Quantum nature of the big bang*, Phys. Rev. Lett. **96**, 141301 (2006).

- [48] A. Ashtekar, T. Pawłowski y P. Singh, *Quantum nature of the big bang: Improved dynamics*, Phys. Rev. D **74**, 084003 (2006).
- [49] D.W. Chiou, *Loop quantum cosmology in Bianchi type I models: Analytical investigation*, Phys. Rev. D **75**, 24029 (2007).
- [50] M. Martín-Benito, G.A. Mena Marugán y T. Pawłowski, *Loop quantization of vacuum Bianchi I cosmology*, Phys. Rev. D **78**, 064008 (2008).
- [51] A. Ashtekar y E. Wilson-Ewing, *Loop quantum cosmology of Bianchi type I models*, Phys. Rev. D **79**, 083535 (2009).
- [52] A.R. Liddle y D.H. Lyth, *Cosmological inflation and large-scale structure* (Cambridge University Press, Cambridge, 2000).
- [53] M. Martín-Benito, L.J. Garay y G.A. Mena Marugán, *Hybrid quantum Gowdy cosmology: Combining loop and Fock quantizations*, Phys. Rev. D **78**, 083516 (2008).
- [54] G.A. Mena Marugán y M. Martín-Benito, *Hybrid quantum cosmology: Combining loop and Fock quantizations*, Int. J. Mod. Phys. A **24**, 2820 (2009).
- [55] L.J. Garay, M. Martín-Benito y G.A. Mena Marugán, *Inhomogeneous Loop Quantum Cosmology: Hybrid quantization of the Gowdy model*, Phys. Rev. D **82**, 044048 (2010).
- [56] R.H. Gowdy, *Gravitational waves in closed universes*, Phys. Rev. Lett. **27**, 826 (1971).
- [57] R.H. Gowdy, *Vacuum spacetimes with two-parameter spacelike isometry groups and compact invariant hypersurfaces: Topologies and boundary conditions*, Ann. Phys. **83**, 203 (1974).
- [58] M. Martín-Benito, G.A. Mena Marugán y E. Wilson-Ewing, *Hybrid quantization: From Bianchi I to the Gowdy model*, Phys. Rev. D **82**, 084012 (2010).
- [59] M. Martín-Benito, D. Martín-de Blas y G.A. Mena Marugán, *Matter in inhomogeneous loop quantum cosmology: The Gowdy T^3 model*, Phys. Rev. D **83**, 084050 (2011).
- [60] M. Martín-Benito, D. Martín-de Blas y G.A. Mena Marugán, *Approximation methods in Loop Quantum Cosmology: From Gowdy cosmologies to inhomogeneous models in Friedmann-Robertson-Walker geometries*, Class. Quantum Grav. **31**, 075022 (2014).
- [61] M. Fernández-Méndez, G.A. Mena Marugán y J. Olmedo, *Hybrid quantization of an inflationary universe*, Phys. Rev. D **86**, 024003 (2012).
- [62] M. Fernández-Méndez, G.A. Mena Marugán y J. Olmedo, *Hybrid quantization of an inflationary model: The flat case*, Phys. Rev. D **88**, 044013 (2013).
- [63] M. Fernández-Méndez, G.A. Mena Marugán y J. Olmedo, *Effective dynamics of scalar perturbations in a flat Friedmann-Robertson-Walker spacetime in Loop Quantum Cosmology*, Phys. Rev. D **89**, 044041 (2014).

- [64] L. Castelló Gomar, M. Fernández-Méndez, G.A. Mena Marugán y J. Olmedo, *Cosmological perturbations in hybrid Loop Quantum Cosmology: Mukhanov-Sasaki variables*, Phys. Rev. D **90**, 064015 (2014).
- [65] L. Castelló Gomar, M. Martín-Benito y G.A. Mena Marugán, *Gauge-invariant perturbations in hybrid quantum cosmology*, JCAP **06**, 045 (2015).
- [66] F. Benítez Martínez and J. Olmedo, *Primordial tensor modes of the early Universe*, Phys. Rev. D **93**, 124008 (2016).
- [67] V. Mukhanov, *Physical foundations of cosmology* (Cambridge University Press, Cambridge, 2005).
- [68] D. Langlois, *Inflation and cosmological perturbations*, Lect. Notes Phys. **800**, 1 (2010).
- [69] S.W. Hawking y G.F.R Ellis, *The large scale structure of space-time* (Cambridge University Press, Cambridge, 1973).
- [70] R. Geroch, *Domain of dependence*, J. Math. Phys. **11**, 437 (1970).
- [71] J. Dieckmann, *Cauchy surfaces in a globally hyperbolic space-time*, J. Math. Phys. **29**, 578 (1988).
- [72] C.W. Misner, K.S. Thorne y J.A. Wheeler, *Gravitation* (W.H. Freeman, San Francisco, 1973).
- [73] H.B. Lawson and M.L. Michelson, *Spin geometry* (Princeton University Press, Princeton, 1989).
- [74] R. Geroch, *Spinor structure of space-times in General Relativity. I*, J. Math. Phys. **9**, 1739 (1968).
- [75] E. Stiefel, *Richtungsfelder und fernparallelismus in mannigfaltigkeiten*, Comm. Math. Helv. **8**, 3 (1936).
- [76] F.A. Berezin, *The method of second quantization* (Academic, Nueva York, 1966).
- [77] J.E. Nelson y C. Teitelboim, *Hamiltonian formulation of the theory of interacting gravitational and electron fields*, Ann. Phys. **116**, 86 (1978).
- [78] J. Dimock, *Dirac quantum fields on a manifold*, Trans. Am. Math. Soc. **269**, 133 (1982).
- [79] R. Casalbuoni, *On the quantization of systems with anticommuting variables*, Nuovo Cimento **33A**, 115 (1976).
- [80] R.M. Wald, *Existence of the S-matrix in Quantum Field Theory in curved space-time*, Ann. Phys. **118**, 490 (1979).
- [81] D. Shale, *Linear symmetries of free boson fields*, Trans. Am. Math. Soc. **103**, 149 (1962).

- [82] J. Dereziński, *Introduction to representations of the canonical commutation and anti-commutation relations*, Lect. Notes Phys. **695**, 63 (2006).
- [83] L. Bianchi, *Sugli spazii a tre dimensioni che ammettono un gruppo continuo di movimenti*, Soc. Ital. Sci. Mem. di Mat. **11**, 267 (1897).
- [84] E. Kasner, *Geometrical theorems on Einstein's cosmological equations*, Amer. J. Math. **43**, 217 (1921).
- [85] D. Kramer, H. Stephani, M. MacCallum y E. Herlt, *Exact solutions of Einstein field equations* (Cambridge University Press, Cambridge, 1980).
- [86] S.W. Hawking y C.J. Hunter, *The gravitational Hamiltonian in the presence of non-orthogonal boundaries*, Class. Quantum Grav. **13**, 2735 (1996).
- [87] C.J. Isham, *Modern differential geometry for physicists*, segunda edición (World Scientific, Singapur, 1999).
- [88] J. F. Barbero G., *Real Ashtekar variables for Lorentzian signature space times*, Phys. Rev. D **51**, 5507 (1995).
- [89] G. Immirzi, *Real and complex connections for canonical gravity*, Class. Quantum Grav. **14**, L177 (1997).
- [90] J.M. Velhinho, *The quantum configuration space of Loop Quantum Cosmology*, Classical Quantum Gravity **24**, 3745 (2007).
- [91] W. Rudin, *Fourier analysis on groups* (Interscience Publishers, Nueva York, 1962).
- [92] D.W. Chiou, *Effective dynamics, big bounces and scaling symmetry in Bianchi type I Loop Quantum Cosmology*, Phys. Rev. D **76**, 124037 (2007).
- [93] L. Szulc, *Loop Quantum Cosmology of diagonal Bianchi type I model: Simplifications and scaling problems*, Phys. Rev. D **78**, 064035 (2008).
- [94] M. Reed y B. Simon, *Methods of modern mathematical physics I: Functional analysis* (Academic Press, San Diego, 1980).
- [95] M. Martín-Benito, G.A. Mena Marugán y J. Olmedo, *Further improvements in the understanding of isotropic Loop Quantum Cosmology*, Phys. Rev. D **80**, 104015 (2009).
- [96] T. Thiemann, *Anomaly-free formulation of non-perturbative four-dimensional Lorentzian quantum gravity*, Phys. Lett. **B380**, 257 (1996).
- [97] W. Kamiński y J. Lewandowski, *The flat FRW model in LQC: The self-adjointness*, Class. Quantum Grav. **25**, 035001 (2008).
- [98] V. Taveras, *LQC corrections to the Friedmann equations for a universe with a free scalar field*, Phys. Rev. D **78**, 064072 (2008).

- [99] A. Ashtekar, J.C. Baez y K. Krasnov, *Quantum geometry of isolated horizons and black hole entropy*, Adv. Theor. Math. Phys. **4**, 1 (2001).
- [100] K.A. Meissner, *Black hole entropy in Loop Quantum Gravity*, Class. Quantum Grav. **21**, 5245 (2004).
- [101] D.W. Chiou y K. Vandersloot, *The behavior of non-linear anisotropies in bouncing Bianchi I models of Loop Quantum Cosmology*, Phys. Rev. D **76**, 084015 (2007).
- [102] B. Gupt y P. Singh, *Quantum gravitational Kasner transitions in Bianchi-I spacetime*, Phys. Rev. D **86**, 024034 (2012).
- [103] P. Tarrío, M. Fernández-Méndez y G.A. Mena Marugán, *Singularity avoidance in the hybrid quantization of the Gowdy model*, Phys. Rev. D **88**, 084050 (2013).
- [104] V. Moncrief, *Global properties of Gowdy spacetimes with $T^3 \times R$ topology*, Ann. Phys. **132**, 87 (1981).
- [105] V. Moncrief, *Infinite-dimensional family of vacuum cosmological models with Taub-NUT (Newman-Unti-Tamburino)-type extensions*, Phys. Rev. D **23**, 312 (1981).
- [106] J. Isenberg y V. Moncrief, *Asymptotic behavior of the gravitational field and the nature of singularities in Gowdy spacetimes*, Ann. Phys. **199**, 84 (1990).
- [107] G.A. Mena Marugán y M. Montejo, *Quantization of pure gravitational waves*, Phys. Rev. D **58**, 104017 (1998).
- [108] J. Cortez y G.A. Mena Marugán, *Feasibility of a unitary quantum dynamics in the Gowdy T^3 cosmological model*, Phys. Rev. D **72**, 064020 (2005).
- [109] A. Corichi, J. Cortez y G. A. Mena Marugán, *Quantum Gowdy T^3 model: A unitary description*, Phys. Rev. D **73**, 084020 (2006).
- [110] C.W. Misner, *A minisuperspace example: The Gowdy T^3 cosmology*, Phys. Rev. D **8**, 3271 (1973).
- [111] B.K. Berger, *Quantum graviton creation in a model universe*, Ann. Phys. **83**, 458 (1974).
- [112] B.K. Berger, *Quantum cosmology: Exact solution for the Gowdy T^3 model*, Phys. Rev. D **11**, 2770 (1975).
- [113] B.K. Berger, *Quantum Effects in the Gowdy T^3 Cosmology*, Ann. Phys. **156**, 155 (1984).
- [114] M. Pierri, *Probing quantum General Relativity through exactly soluble Midisuperspaces. II: Polarized Gowdy models*, Int. J. Mod. Phys. D **11**, 135 (2002).
- [115] P.A.R. Ade y col. (Planck Collaboration), *Planck 2015 results. XX. Constraints on inflation*, A&A **594**, A20 (2016).

- [116] A. Corichi, J. Cortez y G.A. Mena Marugán, *Unitary evolution in Gowdy cosmology*, Phys. Rev. D **73**, 041502 (2006).
- [117] J. Cortez, G.A. Mena Marugán y J.M. Velhinho, *Uniqueness of the Fock quantization of the Gowdy T^3 model*, Phys. Rev. D **75**, 084027 (2007).
- [118] A. Corichi, J. Cortez, G.A. Mena Marugán y J.M. Velhinho, *Quantum Gowdy T^3 model: Schrodinger representation with unitary dynamics*, Phys. Rev. D **76**, 124031 (2007).
- [119] J. Cortez, G.A. Mena Marugán y J.M. Velhinho, *Uniqueness of the Fock representation of the Gowdy $S^1 \times S^2$ and S^3 models*, Class. Quantum Grav. **25**, 105005 (2008).
- [120] J. Cortez, G.A. Mena Marugán, R. Serôdio y J.M. Velhinho, *Uniqueness of the Fock quantization of a free scalar field on S^1 with time dependent mass*, Phys. Rev. D **79**, 084040 (2009).
- [121] J. Cortez, G.A. Mena Marugán y J.M. Velhinho, *Fock quantization of a scalar field with time dependent mass on the three-sphere: Unitarity and uniqueness*, Phys. Rev. D **81**, 044037 (2010).
- [122] J. Cortez, G.A. Mena Marugán, J. Olmedo y J.M. Velhinho, *A unique Fock quantization for fields in non-stationary spacetimes*, JCAP **10**, 030 (2010).
- [123] J. Cortez, G.A. Mena Marugán, J. Olmedo y J.M. Velhinho, *Uniqueness of the Fock quantization of fields with unitary dynamics in nonstationary spacetimes*, Phys. Rev. D **83**, 025002 (2011).
- [124] J. Cortez, G.A. Mena Marugán, J. Olmedo y J.M. Velhinho, *A uniqueness criterion for the Fock quantization of scalar fields with time dependent mass*, Class. Quantum Grav. **28**, 172001 (2011).
- [125] J. Cortez, G.A. Mena Marugán, J. Olmedo, and J.M. Velhinho, *Criteria for the determination of time dependent scalings in the Fock quantization of scalar fields with a time dependent mass in ultrastatic spacetimes*, Phys. Rev. D **86**, 104003 (2012).
- [126] M. Fernández-Méndez, G.A. Mena Marugán, J. Olmedo, and J.M. Velhinho, *Unique Fock quantization of scalar cosmological perturbations* Phys. Rev. D **85**, 103525 (2012).
- [127] L. Castelló Gomar, J. Cortez, D. Martín-de Blas, G.A. Mena Marugán y J.M. Velhinho, *Uniqueness of the Fock quantization of scalar fields in spatially flat cosmological spacetimes*, JCAP **11**, 001 (2012).
- [128] J. Cortez, L. Fonseca, D. Martín-de Blas y G.A. Mena Marugán, *Uniqueness of the Fock quantization of scalar fields under mode preserving canonical transformations varying in time*, Phys. Rev. D **87**, 044013 (2013).
- [129] J. Cortez, D. Martín-de Blas, G.A. Mena Marugán y J. M. Velhinho, *Massless scalar field in de Sitter spacetime: Unitary quantum time evolution*, Class. Quantum Grav. **30**, 075015 (2013).

- [130] L. Castelló Gomar, J. Cortez, D. Martín-de Blas, G.A. Mena Marugán y J.M. Velhinho, *Unitary evolution and uniqueness of the Fock quantization in flat cosmologies with compact spatial sections*, EJTP **11**, 43 (2014).
- [131] L. Castelló Gomar y G.A. Mena Marugán, *Uniqueness of the Fock quantization of scalar fields and processes with signature change in cosmology*, Phys. Rev. D **89**, 084052 (2014).
- [132] J. Cortez, B. Elizaga Navascués, M. Martín-Benito, G.A. Mena Marugán, J. Olmedo y J.M. Velhinho, *Uniqueness of the Fock quantization of scalar fields in a Bianchi I cosmology with unitary dynamics*, Phys. Rev. D **94**, 105019 (2016).
- [133] I. Chavez, *Eigenvalues in Riemannian Geometry* (Academic Press, Orlando, 1984).
- [134] S.Y. Zhou, G.-H. Gweon, A.V. Fedorov, P.N. First, W.A. de Heer, D.-H. Lee, F. Guinea, A.H. Castro Neto y A. Lanzara, *Substrate-induced bandgap opening in epitaxial graphene*, Nat. Mater. **6**, 770 (2007).
- [135] A. Bostwick, T. Ohta, T. Seyller, K. Horn y E. Rotenberg, *Quasiparticle dynamics in graphene*, Nat. Phys. **3**, 36 (2007).
- [136] J. Cortez, B. Elizaga Navascués, M. Martín-Benito, G.A. Mena Marugán y J.M. Velhinho, *Uniqueness of the Fock quantization of Dirac fields in 2+1 dimensions*, arXiv:1608.05941 (2016).
- [137] H. Hopf y W. Rinow, *Ueber den begriff der vollständigen differentialgeometrischen fläche*, Comm. Math. Helv. **3**, 209 (1931).
- [138] J. Roe, *Elliptic operators, topology and asymptotic methods*, segunda edición (Chapman & Hall/CRC, Boca Ratón, 1999).
- [139] P.D. D'Eath y J.J. Halliwell, *Fermions in quantum cosmology*, Phys. Rev. D **35**, 1100 (1987).
- [140] J. Cortez, B. Elizaga Navascués, M. Martín-Benito, G.A. Mena Marugán y J.M. Velhinho, *Unitary evolution and uniqueness of the Fock representation of Dirac fields in cosmological spacetimes*, Phys. Rev. D **92** 105013 (2015).
- [141] J. Cortez, B. Elizaga Navascués, M. Martín-Benito, G.A. Mena Marugán y J.M. Velhinho, *Unique Fock quantization of a massive fermion field in a cosmological scenario*, Phys. Rev. D **93**, 084053 (2016).
- [142] J. Cortez, B. Elizaga Navascués, M. Martín-Benito, G.A. Mena Marugán y J.M. Velhinho, *Dirac fields in flat FLRW cosmology: Uniqueness of the Fock quantization*, Ann. Phys. **376**, 76 (2017).
- [143] C. Bär, *The Dirac operator on homogeneous spaces and its spectrum on 3-dimensional lens spaces*, Arch. Math. **59**, 65 (1992).

- [144] Y. Homma, *A representation of Spin(4) on the eigenspinors of the Dirac operator on S^3* , Tokyo J. Math. **23**, 2 (2000).
- [145] Th. Friedrich, *Zur abhängigkeit des Dirac-operators von der spin-struktur*, Colloquium Mathematicae **48**, 57 (1984).
- [146] N. Ginoux, *The Dirac spectrum* (Springer-Verlag, Heidelberg, 2009).
- [147] R. Eisberg y R. Resnick, *Quantum physics of atoms, molecules, solids, nuclei, and particles*, segunda edición (Wiley, Nueva York, 1985).
- [148] N.R. Wallach, *Harmonic analysis on homogeneous spaces* (Marcel Dekker, Nueva York, 1973).
- [149] A.A. Kirillov, *Elements of theory of representations* (Springer-Verlag, Nueva York, 1976).
- [150] F. Halzen y A.D. Martin, *Quarks and Leptons: An Introductory Course in Modern Particle Physics* (John Wiley & Sons, New York, 1984).
- [151] E. Lifshitz, *On the gravitational stability of the expanding universe*, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **16**, 587 (1946).
- [152] E. Lifshitz e I.M. Khalatnikov, *Investigations in relativistic cosmology*, Adv. Phys. **12**, 185 (1963).
- [153] D. Langlois, *Hamiltonian formalism and gauge invariance for linear perturbations in inflation*, Class. Quantum Grav. **11**, 389 (1994).
- [154] A.D. Dolgov y D.P. Kirilova, *Production of particles by a variable scalar field*, Sov. J. Nucl. Phys. **51**, 172 (1990).
- [155] V. Kuzmin e I. Tkachev, *Matter creation via vacuum fluctuations in the early Universe and observed ultrahigh energy cosmic ray events*, Phys. Rev. D **59**, 123006 (1999).
- [156] G.F. Giudice, M. Peloso, A. Riotto e I. Tkachev, *Production of massive fermions at preheating and leptogenesis*, JHEP **9908**, 014 (1999).
- [157] P.B. Greene y L. Kofman, *Preheating of fermions*, Phys. Lett. B **448**, 6 (1999).
- [158] D.J.H. Chung, L.L. Everett, H. Yoo y P. Zhou, *Gravitational fermion production in inflationary cosmology*, Phys. Lett. B **712**, 147 (2012).
- [159] K. Enqvist, D.G. Figueroa y T. Meriniemi, *Stochastic background of gravitational waves from fermions*, Phys. Rev. D **86**, 061301 (2012).
- [160] D.J.H. Chung, H. Yoo y P. Zhou, *Fermionic isocurvature perturbations*, Phys. Rev. D **91**, 043516 (2015).
- [161] C.J. Isham y J.E. Nelson, *Quantization of a coupled Fermi field and Robertson-Walker metric*, Phys. Rev. D **10**, 3226 (1974).

- [162] T. Christodoulakis y J. Zanelli, *Quantization of Robertson-Walker geometry coupled to fermionic matter*, Phys. Rev. D **29**, 2738 (1984).
- [163] J.J. Halliwell y S.W. Hawking, *Origin of structure in the universe*, Phys. Rev. D **31**, 1777 (1985).
- [164] L. Castelló Gomar, M. Martín-Benito y G.A. Mena Marugán, *Quantum corrections to the Mukhanov-Sasaki equations*, Phys. Rev. D **93**, 104025 (2016).
- [165] D. Martín de Blas y J. Olmedo, *Primordial power spectra for scalar perturbations in Loop Quantum Cosmology*, JCAP **1606**, 029 (2016).
- [166] L. Castelló Gomar, D. Martín de Blas, G.A. Mena Marugán y J. Olmedo, *Hybrid Loop Quantum Cosmology and predictions for the cosmic microwave background*, arXiv:1702.06036 (2017).
- [167] I. Agullo, A. Ashtekar y W. Nelson, *A quantum gravity extension of the inflationary scenario*, Phys. Rev. Lett. **109**, 251301 (2012).
- [168] I. Agullo, A. Ashtekar y W. Nelson, *Extension of the quantum theory of cosmological perturbations to the Planck era*, Phys. Rev. D **87**, 043507 (2013).
- [169] I. Agullo, A. Ashtekar y W. Nelson, *The pre-inflationary dynamics of Loop Quantum Cosmology: Confronting quantum gravity with observations*, Class. Quantum Grav. **30**, 085014 (2013).
- [170] I. Agullo, W. Nelson y A. Ashtekar, *Preferred instantaneous vacuum for linear scalar fields in cosmological space-times*, Phys. Rev. D **91**, 064051 (2015).
- [171] M. Bojowald, G.M. Hossain, M. Kagan y S. Shankaranarayanan, *Anomaly freedom in perturbative Loop Quantum Gravity*, Phys. Rev. D **78**, 063547 (2008).
- [172] M. Bojowald, G. Calcagni y S. Tsujikawa, *Observational constraints on Loop Quantum Cosmology*, Phys. Rev. Lett. **107**, 211302 (2011).
- [173] T. Cailleteau, L. Linsefors y A. Barrau, *Anomaly-free perturbations with inverse-volume and holonomy corrections in Loop Quantum Cosmology*, Class. Quantum Grav. **31**, 125011 (2014).
- [174] E. Wilson-Ewing, *Holonomy corrections in the effective equations for scalar mode perturbations in Loop Quantum Cosmology*, Class. Quantum Grav. **29**, 085005 (2012).
- [175] B. Bolliet, J. Grain, C. Stahl, L. Linsefors y A. Barrau, *Comparison of primordial tensor power spectra from the deformed algebra and dressed metric approaches in Loop Quantum Cosmology*, Phys. Rev. D **91**, 084035 (2015).
- [176] M. Bojowald and R. Das, *Fermions in Loop Quantum Cosmology and the role of parity*, Class. Quantum Grav. **25**, 195006 (2008).

- [177] H.A. Morales-Tecotl y C. Rovelli, *Fermions in quantum gravity*, Phys. Rev. Lett. **72**, 3642 (1994).
- [178] H.A. Morales-Tecotl y C. Rovelli, *Loop space representation of quantum fermions and gravity*, Nucl. Phys. **B451**, 325 (1995).
- [179] J.M. Aroca, H. Fort y R. Gambini, *Path integral for lattice staggered fermions in the loop representation*, arXiv:hep-lat/9607050 (1996).
- [180] M. Montesinos-Velasquez, H.A. Morales-Tecotl y T. Matos, *Fermion mass gap in the loop representation of quantum gravity*, Class. Quantum Grav. **14**, L135 (1997).
- [181] J. Alfaro, H.A. Morales-Tecotl y L.F. Urrutia, *Quantum gravity corrections to neutrino propagation*, Phys. Rev. Lett. **84**, 2318 (2000).
- [182] R. Gambini y J. Pullin, *No fermion doubling in quantum geometry*, Phys. Lett. B **749**, 374 (2015).
- [183] D. Brizuela, G.A. Mena Marugán y T. Pawłowski, *Big Bounce and inhomogeneities*, Class. Quantum Grav. **27**, 052001 (2010).
- [184] D. Brizuela, G.A. Mena Marugán y T. Pawłowski, *Effective dynamics of the hybrid quantization of the Gowdy T^3 universe*, Phys. Rev. D **84**, 124017 (2011).
- [185] B. Elizaga Navascués, M. Martín-Benito y G.A. Mena Marugán, *Fermions in Loop Quantum Cosmology*, arXiv:1703.10391 (2017).
- [186] I. Shirai y S. Wada, *Cosmological perturbations and quantum fields in curved space*, Nucl. Phys. B **303**, 728 (1988).
- [187] E.J.C. Pinho y N. Pinto-Neto, *Scalar and vector perturbations in quantum cosmological backgrounds*, Phys. Rev. D **76**, 023506 (2007).
- [188] F.T. Falciano y N. Pinto-Neto, *Scalar perturbations in scalar field quantum cosmology*, Phys. Rev. D **79**, 023507 (2009).
- [189] S.W. Hawking, *Perturbations of an expanding universe*, Astrophys. J. **145**, 544 (1966).
- [190] D.W. Olson, *Density perturbations in cosmological models*, Phys. Rev. D **14**, 327 (1976).
- [191] J.M. Bardeen, *Gauge-invariant cosmological perturbations*, Phys. Rev. D **22**, 1882 (1980).
- [192] G.F.R. Ellis y M. Bruni, *Covariant and gauge-invariant approach to cosmological density fluctuations*, Phys. Rev. D **40**, 1804 (1989).
- [193] M. Sasaki, *Gauge invariant scalar perturbations in the new inflationary universe*, Prog. Theor. Phys. **70**, 394 (1983).
- [194] H. Kodama y M. Sasaki, *Cosmological perturbation theory*, Prog. Theor. Phys. Suppl. **78**, 1 (1984).

- [195] V. Mukhanov, *Quantum theory of gauge-invariant cosmological perturbations*, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **94**, 1 (1988); Sov. Phys. JETP **67**, 1297 (1988).
- [196] J.J. Sakurai y J.J. Napolitano, *Modern Quantum Mechanics*, segunda edición (Addison-Wesley, Boston, 2011).
- [197] R. Gambini, J. Olmedo y J. Pullin, *Casimir effect in a quantum space-time*, Class. Quantum Grav. **32**, 115002 (2015).
- [198] A. De Felice y S. Tsujikawa, *$f(R)$ theories*, Living Rev. Relativity **13**, 3 (2010).
- [199] B. Elizaga Navascués, M. Martín-Benito y G.A. Mena Marugán, *Modeling effective FRW cosmologies with perfect fluids from states of the hybrid quantum Gowdy model*, Phys. Rev. D **91**, 024028 (2015).
- [200] B. Elizaga Navascués, M. Martín-Benito y G.A. Mena Marugán, *Modified FRW cosmologies arising from states of the hybrid quantum Gowdy model*, Phys. Rev. D **92**, 024007 (2015).
- [201] B. Elizaga Navascués, M. Martín-Benito y G.A. Mena Marugán, *Hybrid models in Loop Quantum Cosmology*, Int. J. Mod. Phys. D **25**, 1642007 (2016).
- [202] P. Coles y F. Lucchin, *Cosmology. The origin and evolution of cosmic structure*, segunda edición (Wiley, Chichester, 2002).